



# Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés

Wael Youssef

## ► To cite this version:

Wael Youssef. Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2009. Français. NNT : 2009METZ017S . tel-01752635

**HAL Id: tel-01752635**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752635>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR M.I.M.  
École Doctorale IAE + M  
Université Paul Verlaine de Metz  
D.F.D. Mathématiques

---

Thèse  
présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz  
en Mathématiques Appliquées

par  
**Waël YOUSSEF**

---

**Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés**

---

Soutenue le 7 juillet 2009 devant le jury composé de

**ALABAU-BOUSSOUIRA**

**Fatiha**

Directrice de thèse, Metz

**AMMAR-KHODJA Farid**

Examineur, Besançon

**BENABDALLAH Assia**

rapportrice, Marseille

**MNEIMNEH Ali**

Co-directeur de thèse, Liban

**NICAISE Serge**

Examineur, Valenciennes

**RAO Bopeng**

rapporteur, Strasbourg

**VIVALDA Jean-Claude**

Examineur, INRIA Metz

**WEHBE Ali**

Co-directeur de thèse, Liban

---

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz

UMR 7122

Université de Metz et CNRS,

Ile du Saulcy

F-57045 METZ Cedex 1



## Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu les Professeurs Fatiha ALABAU-BOUSSOUIRA et Ali WEHBE qu'ils suivent mes travaux et pour toute l'attention qu'ils ont porté pendant ces quatres années.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Mme Françoise GIROUX de m'avoir supporté pour dépasser toutes les difficultés pendant toute ma séjour en France.

Je remercie aussi les professeurs Raafat TALHOUK et Ibrahim ZALZALI qui m'ont supporté et me couragé pour continuer mes études doctorales.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude aux Professeurs Aïssa Gussmia, Ralph CHILL et Marius TUCSNAK pour des discussions fructueuses.

Tous mes remerciement également à tout le personnel administratif et technique de notre laboratoire de leurs disponibilité et dévouement qui nous permettent de travailler dans un excellent environnement scientifique et humain, tout particulièrement Jean Marc SAC-EPÉE de m'avoir gentiment aidé.

Un grand merci à tous mes collègues, à tous mes amis et à tous ceux qui m'ont aidé un jour : Georges HABIB, Toufik EL ARWADI, Chadi NAR, Mounir ELLOUMI, Hussein JABER, Mokhtar TORMOS, Ali ABBAS, Zaynab SALLOUM, Waad EL-SAYYED, Ali TARHINI, Youssef ZAKI et Amer ELBATHISH.

Je n'oublie pas non plus le personnel de laboratoire de Mathématiques Appliquées de Compiègne tout particulièrement Sergio ALVAREZ.

Enfin, et à ce stade, ils doivent déjà se sentir oubliés, je pense à ma mère, mon père, ma soeur, mes frères. Leurs amour, affection et soutient sont au-dessus de tous les remerciements. J'espère être toujours digne de leur confiance et à la hauteur de leurs attentes.

*Un grand merci.*



*À ma mère Layla et mon père Sleiman,  
À mes frères Gazi, Talal et Hassan, et à ma soeur Dalal  
À toute ma famille et tous mes amis....*

*Je dédie cette thèse....*

## Résumé de la thèse

Cette thèse est constituée de deux parties principales.

Dans la première partie on traite *l'observabilité* et *la contrôlabilité exacte internes indirectes* des systèmes hyperboliques faiblement couplés et du système de *Timoshenko*.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de problèmes concernant la *stabilisation directe* du système de *Bresse* par des feedbacks non linéaires en utilisant la méthode des multiplicateurs et des techniques d'inégalités intégrales, et sa *stabilisation indirecte* seulement par deux feedbacks *localement distribués* au voisinage du bord en utilisant l'approche de fréquence de domaine. On traite dans cette partie aussi la *stabilisation indirecte* du système de *Timoshenko* dans le cas d'un *seul feedback localement distribué* au voisinage du bord.

## Summary of the thesis

This thesis consists of two main parts.

In the first part, it treats the *indirect internal observability* and *exact controllability* of a weakly coupled hyperbolic system and of the *Timoshenko* system .

The second part is devoted to the study of problems concerning the direct stabilization of the Bresse system by non-linear feedbacks using multiplier method and integral inequality techniques, and its indirect stabilization only by two *locally distributed* feedbacks at the neighborhood of the boundary using the frequency domain method. Is treated in this part also the indirect stabilization of the Timoshenko system subject to a *single feedback locally distributed* at the neighborhood of the boundary.



# Table des matières

|                                                                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Introduction générale</b>                                                                                                | <b>6</b>   |
| <b>Partie 1. Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes</b>                                                 | <b>19</b>  |
| <b>1 Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes d'un système hyperbolique faiblement couplé</b>             | <b>23</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                                                                  | 23         |
| 1.2 Formulation du problème . . . . .                                                                                       | 30         |
| 1.3 Résultats d'observabilité . . . . .                                                                                     | 33         |
| 1.4 Contrôlabilité exacte interne indirecte . . . . .                                                                       | 52         |
| <b>2 Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes des systèmes hyperboliques abstraits faiblement couplés</b> | <b>61</b>  |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                                                                  | 61         |
| 2.2 Résultats principaux . . . . .                                                                                          | 63         |
| 2.3 Formulation du problème . . . . .                                                                                       | 67         |
| 2.3.1 Existence et unicité de la solution du problème direct .                                                              | 67         |
| 2.3.2 Existence et unicité de la solution du problème dual . .                                                              | 69         |
| 2.4 Preuve des résultats d'observabilité . . . . .                                                                          | 72         |
| 2.5 Preuve du résultat de la contrôlabilité exacte indirecte . . . .                                                        | 80         |
| 2.6 Applications . . . . .                                                                                                  | 83         |
| 2.6.1 Le cas de deux équations faiblement couplées : Petrowsky-Petrowsky . . . . .                                          | 83         |
| 2.6.2 Le cas de deux équations faiblement couplées : Onde-Petrowsky . . . . .                                               | 97         |
| <b>3 Observabilité interne indirecte et contrôlabilité exacte du système de Timoshenko</b>                                  | <b>103</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                                                                  | 103        |

|       |                                                                                                                                  |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2   | Formulation du problème . . . . .                                                                                                | 107 |
| 3.3   | Résultats d'observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes dans le cas des conditions au bord de Dirichlet . . . . . | 109 |
| 3.3.1 | Inégalité inverse . . . . .                                                                                                      | 109 |
| 3.3.2 | Contrôlabilité exacte interne indirecte . . . . .                                                                                | 115 |
| 3.4   | Résultats d'observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes dans le cas des conditions au bord de Neumann . . . . .   | 120 |
| 3.4.1 | Inégalité inverse . . . . .                                                                                                      | 120 |
| 3.4.2 | Contrôlabilité exacte interne indirecte . . . . .                                                                                | 124 |

## Partie 2. Stabilisation directe et indirecte du système de Bresse 125

|       |                                                                                                                |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4     | Stabilisation directe du système de Bresse . . . . .                                                           | 129 |
| 4.1   | Introduction . . . . .                                                                                         | 129 |
| 4.2   | Stabilisation exponentielle . . . . .                                                                          | 133 |
| 4.2.1 | Formulation du problème . . . . .                                                                              | 133 |
| 4.2.2 | Résultat de stabilité exponentielle . . . . .                                                                  | 141 |
| 4.3   | Stabilisation polynômiale . . . . .                                                                            | 143 |
| 4.3.1 | Formulation du problème . . . . .                                                                              | 144 |
| 4.3.2 | Résultat de stabilité polynômiale . . . . .                                                                    | 145 |
| 5     | Stabilisation indirecte du système de Bresse soumis seulement à deux feedbacks localement distribués . . . . . | 151 |
| 5.1   | Introduction . . . . .                                                                                         | 151 |
| 5.2   | Formulation du problème . . . . .                                                                              | 153 |
| 5.3   | Stabilisation forte et stabilisation exponentielle . . . . .                                                   | 155 |
| 5.4   | Stabilisation polynômiale . . . . .                                                                            | 175 |
| 5.5   | Stabilisation indirecte du système de Timoshenko soumis à un seul feedback localement distribué . . . . .      | 182 |

## Perspectives 183

## Références Bibliographiques 185

# Introduction générale

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou mécaniques est modélisé par des équations aux dérivées partielles (EDP).

Dans le cas du contrôle des EDP, qui constitue le cadre de cette thèse, les modèles étudiés prennent en compte les variations et spatiales des variables qui traduisent l'état du système et ces problèmes se posent alors dans le cadre des systèmes dynamiques en dimension infinie.

En pratique, du laboratoire de recherche jusqu'à la chaîne de production, pour étudier par exemple les moyens de limiter par auto-régulation les déformations de matériaux élastiques, ou d'agir extérieurement sur ces matériaux pour les ramener vers des états cibles souhaités, la question de la réponse d'un système dynamique à une action extérieure, ou une action auto-régulation (appelée communément **feedback**) est essentielle.

Par exemple, la conduite d'une voiture est un système dynamique contrôlé : le contrôle est l'angle du volant, les pressions exercées sur le frein et sur l'accélérateur, et l'état est la position de la voiture sur la route.

Le jeu de tennis est un système dynamique contrôlé : le contrôle est ma position sur le cours ainsi que la position et le mouvement de ma raquette, et l'état est la position de la balle.

Le pilotage d'une torpille est aussi un système dynamique contrôlé : le contrôle est la position de ses ailettes, et l'état la position de la torpille.

Ces exemples montrent que l'objectif du contrôle est qualitativement assez naturel. Par exemple pour une voiture, il s'agit de rester sur la route ou de gagner une course, pour le tennis de renvoyer la balle sur le cours, et pour la torpille de couler un navire qui se déplace.

L'objectif de la thèse est d'étudier les questions de la *contrôlabilité exacte*, de la *notion duale d'observabilité* et de la *stabilisation indirecte* de différents modèles de déformations de matériaux élastiques. La plupart de ces modèles couplent des équations hyperboliques du second ordre.

On s'intéresse particulièrement à la question du contrôle et de la stabilisation indirecte de tels systèmes. Dans ce cas, l'action extérieure ou l'action d'auto-régulation ne sont actives que sur certaines composantes du vecteur d'état. On souhaite alors savoir si cette action partielle directe est suffisante pour contrôler ou stabiliser l'ensemble des variables d'état.

Cette thèse est divisée en deux parties principales. Dans la première partie on traite *l'observabilité* et la *contrôlabilité exacte internes indirectes* des systèmes hyperboliques faiblement couplés et du système de *Timoshenko*. La deuxième partie est consacrée à l'étude de problèmes concernant la *stabilisation directe* du système de *Bresse* par des feedbacks non linéaires, et sa *stabilisation indirecte* seulement par deux feedbacks *localement distribués* au voisinage du bord. On traite dans cette partie aussi la *stabilisation indirecte* du système de *Timoshenko* dans le cas d'un *seul feedback localement distribué* au voisinage du bord.

## Partie 1. Observabilité et Contrôlabilité exacte internes indirectes

**Chapitre 1.** Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes de l'observabilité et de la contrôlabilité exacte internes indirectes d'un système hyperbolique faiblement couplé.

Soit  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert borné non vide dans  $\mathbb{R}^N$  ayant une frontière  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de  $\Gamma$  telle que  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ . On suppose qu'il existe  $x_0$  tel que  $m \cdot \nu \leq 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $m \cdot \nu \geq \lambda > 0$  sur  $\Gamma_1$ , où  $m(x) := x - x^0$  et  $\nu(x)$  désigne le vecteur unitaire normal sortant en  $x \in \partial\Omega$  (cf. [18], [69], [70]). On pose  $R(x^0) := \sup\{|m(x)|; x \in \bar{\Omega}\}$ . On prend  $\omega$  comme un voisinage de  $\Gamma(x^0)$  dans  $\Omega$ .

Alors, on considère le système faiblement couplé de deux équations des ondes suivant

$$\begin{cases} u_{1,tt} - \Delta u_1 + \alpha u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_{2,tt} - \Delta u_2 + \alpha u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u_i(0) = u_i^0, \quad u_{i,t}(0) = u_i^1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où  $\alpha$  est un paramètre de couplage et l'indice  $t$  désigne la dérivée par rapport à la variable  $t$ . Liée à la stabilisation indirecte (cf. Russell [99], Alabau [2])

une quatrième notion d'observabilité a été introduite, celle d'*observabilité indirecte*. Elle consiste à n'observer que certaines composantes du vecteur d'état et à déduire une estimation de toutes les composantes du vecteur d'état au temps initial. Dans [1] F. Alabau a considéré comme exemple celui de deux équations des ondes couplées (0.0.1) et on observe la norme dans  $L^2$  de la trace de la dérivée normale de  $u_1$  sur  $\Gamma_1 \times ]0, T[$ . Elle a démontré le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1.** *Il existe  $\bar{\alpha} > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \bar{\alpha}$ , il existe  $T_1 = T_1(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_1$  et tout  $U^0 = (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in \mathcal{H} = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$ , la solution  $(u_1, u_2)$  de (0.0.1) vérifie*

$$2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right|^2 d\gamma dt \geq \frac{c_1}{2} (|u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2) + \frac{c_2}{2} (\|u_2^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |u_2^0|^2), \quad (0.0.2)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives dépendant de  $T$  et  $\alpha$ . De plus, si la solution de (0.0.1) vérifie

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times ]0, T[$$

alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  sur  $\Omega$ .

Dans ce chapitre on s'intéresse au cas d'un contrôle localement distribué. On cherche des informations sur l'ensemble des données initiales en n'observant sur  $\omega$  qu'une seule composante du vecteur inconnu. En utilisant la méthode des multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [72] et P. Martinez [82] et en montrant que les techniques introduites dans [1] s'adaptent dans le cas de la contrôlabilité interne. On obtient alors le résultat d'observabilité interne indirecte suivant :

**Théorème 0.0.2.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $U^0 = (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in \mathcal{H} = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$ , la solution  $(u_1, u_2)$  de (0.0.1) vérifie*

$$\int_0^T \int_{\omega} |u_1'|^2 dx dt \geq c (|u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2 + \|u_2^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |u_2^0|^2), \quad (0.0.3)$$

où  $c$  est une constante positive dépendant de  $T$  et  $\alpha$ . De plus, si la solution de (0.0.1) vérifie

$$u_1' = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \times ]0, T[$$

alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  sur  $\Omega$ .

A partir de l'estimation (0.0.3) et à l'aide de la méthode **HUM** de J.-L. Lions ([69], [70]) on obtient par dualité des résultats de contrôlabilité exacte partielle avec un contrôle localement distribué, n'agissant que sur l'une des composantes de la solution.

**Chapitre 2.** Dans ce chapitre, on s'intéresse à généraliser les résultats du chapitre précédent aux cas des systèmes hyperboliques de deux équations d'évolution abstraites du second ordre faiblement couplées de la forme

$$\begin{cases} u_{1,tt} + A_1 u_1 + \alpha C u_2 = 0 & \text{dans } V'_1, \\ u_{2,tt} + A_2 u_2 + \alpha C^* u_1 = 0 & \text{dans } V'_2, \\ (u_1, u'_1)(0) = (u_1^0, u_1^1) \in V_1 \times H, \\ (u_2, u'_2)(0) = (u_2^0, u_2^1) \in V_2 \times H, \end{cases} \quad (0.0.4)$$

où  $H, V_1 \subset H$ , et  $V_2 \subset H$  sont des espaces de Hilbert séparables.  $A_1, A_2$  sont des opérateurs non bornés coercifs auto-adjoint dans  $H$ , alors que l'opérateur de couplage  $C$  est supposé borné dans  $H$ ;  $C^*$  est l'opérateur adjoint de  $C$ ; et  $\alpha$  est le paramètre de couplage.

Récemment, plusieurs auteurs ont étudié la stabilisation et la contrôlabilité des équations d'évolution abstraites et des systèmes des équations d'évolution abstraites. L'étude de l'observabilité frontière indirecte d'un système abstrait de deux équations d'évolution du second ordre faiblement couplées de la forme (0.0.4) a été abordée par F. Alabau dans [1]. Elle a prouvé que seulement par l'observation d'une seule composante du vecteur d'état on peut déduire une estimation de toutes les composantes du vecteur d'état au temps initial. Plus précisément, elle a obtenu une estimation de la forme

$$\int_0^T \|B^* u_1\|_G^2 dt \geq c(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)), \quad (0.0.5)$$

où  $B^*$  est un certain opérateur linéaire agissant de  $D(A_1)$  sur un espace de Hilbert  $G$ ,  $e_1(0)$  est l'énergie partielle naturelle de la première composante de l'inconnu et  $\tilde{e}_2(0)$  est l'énergie partielle affaiblie de la deuxième composante de l'inconnu au temps initial. A l'aide du résultat précédent et par l'application de la méthode d'unicité hilbertienne, elle a montré un résultat de contrôlabilité exacte indirecte. Des applications de son résultat abstrait ont été données à plusieurs systèmes couplés des équations aux dérivées partielles (Onde-Onde, systèmes d'élasticité linéaires couplés, Petrowsky-Petrowsky, et Onde-Petrowsky).

Dans ce chapitre, en montrant que les techniques introduites dans [1]

s'adaptent dans le cas de l'observabilité interne indirecte, on obtient l'estimation suivante

$$\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq c(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)), \quad (0.0.6)$$

où  $r$  est un certain opérateur d'observation linéaire agissant de  $H$  sur un espace de Hilbert  $\Theta$ .

A partir de l'estimation (0.0.6) et à l'aide de la méthode **HUM** de J.-L. Lions ([69], [70]), on déduit par dualité que le système

$$\begin{cases} y_{1,tt} + A_1 y_1 + \alpha C y_2 = v, \\ y_{2,tt} + A_2 y_2 + \alpha C^* y_1 = 0, \\ (y_1, y'_1)(0) = (y_1^0, y_1^1), \\ (y_2, y'_2)(0) = (y_2^0, y_2^1) \end{cases} \quad (0.0.7)$$

est exactement contrôlable, où  $v \in [H^1(0, T; H)]'$ .

Des applications aux cas de systèmes couplés *Petrowsky-Petrowsky* et *Onde-Petrowsky* seront données.

**Chapitre 3.** L'objectif de ce chapitre est l'étude de la contrôlabilité exacte indirecte du système de Timoshenko sous l'effet d'une seule force de contrôle agissant sur l'équation de l'angle de cisaillement dans le cas où les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système sont égales. Cette étude a été motivé par le résultat de F. Alabau dans [1]. Elle a démontré la stabilisation exponentielle du système de Timoshenko sous l'effet d'une seule force de contrôle agissant sur l'équation de l'angle de cisaillement, où les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système sont égales.

On considère donc le système homogène de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 & t > 0, 0 < x < L, \end{cases} \quad (0.0.8)$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  désignent respectivement le déplacement transversal de la poutre et l'angle de rotation d'un filament de la poutre. De plus  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $k$  et  $b$  sont des constantes positives caractérisent les propriétés physiques de la poutre et des filaments. Les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation sont respectivement données par  $w_1 = \frac{k}{\rho_1}$  et  $w_2 = \frac{b}{\rho_2}$ .

Ensuite, on considère les conditions au bord suivantes de ce système

$$\varphi = \psi = 0, \quad t > 0, x = 0, x = L \quad (\text{Dirichlet}), \quad (0.0.9)$$

ou

$$\varphi = \psi_x = 0, \quad t > 0, x = 0, x = L \quad (\text{Neumann}). \quad (0.0.10)$$

Les conditions initiales des états variables sont :

$$(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t)(x, 0) = (\varphi_0(x), \psi_0(x), \varphi_1(x), \psi_1(x)) \quad x \in (0, L). \quad (0.0.11)$$

L'énergie naturelle des solutions du système (0.0.8) soumis à l'état initiale (0.0.11) et à chacune des conditions aux bords (0.0.9) ou (0.0.10) est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2) dx.$$

D'un autre côté, on définit l'énergie affaiblie des solutions du système (0.0.8) soumis à l'état initiale (0.0.11) et à chacune des conditions au bord (0.0.9) ou (0.0.10), par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 \int_0^L |(-\partial_{xx})^{-1/2} \varphi_t|^2 + \rho_2 \int_0^L |(-\partial_{xx})^{-1/2} \psi_t|^2 \right. \\ \left. + b \int_0^L |\psi|^2 + k \int_0^L |\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi)|^2 \right), \end{array} \right.$$

Dans le cas des conditions au bord (0.0.9) et si les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système (0.0.8) sont égales, on montre l'inégalité d'observabilité suivante pour un temps  $T > 0$  suffisamment grand

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \\ \geq c_1 (|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2), \end{array} \right. \quad (0.0.12)$$

pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L))^2$ , où  $c_1$  est une constante dépend de  $T$ .

De même, dans le cas des conditions au bord (0.0.10) et si les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système (0.0.8) sont égales, on montre l'inégalité d'observabilité suivante pour un temps  $T > 0$  suffisamment grand

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \\ \geq \bar{c}_1 (|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2), \end{array} \right. \quad (0.0.13)$$



pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]'$ , où  $\bar{c}_1$  est une constante dépend de  $T$ , et l'espace

$$H_*^1(0, L) := \left\{ f \in H^1(0, L); \int_0^L f dx = 0 \right\}.$$

De plus, dans le deux cas des conditions au bord, si la solution de (0.0.8) satisfait  $\psi = 0$  sur  $(0, L) \times (0, T)$ , alors

$$\varphi = \psi = 0 \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, T).$$

Par dualité, grâce aux inégalités (0.0.12) et (0.0.13), on obtient des résultats de contrôlabilité exacte interne indirecte.

## Partie 2. Stabilisation directe et indirecte du système de Bresse

**Chapitre 4.** Dans leur étude sur les réseaux de poutres flexibles, Lagnese, Leugering et Schmidt [60] découlent un modèle général de poutres élastiques non linéaires de trois dimensions. Un cas particulier de ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes. Il décrit les mouvement d'une poutre élastique planaire sous l'effet de petites déformations. C'est le système de Bresse qui est, sans feedbacks, donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \end{cases} \quad (0.0.14)$$

où  $t > 0$  et  $0 < x < L$ . L'indice  $t$  désigne la dérivée par rapport à la variable  $t$  et l'indice  $x$  désigne la dérivée par rapport à la variable spatiale. Les fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\omega$  désignent, respectivement, le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation d'un filament de la poutre et le déplacement longitudinal de la poutre. En plus,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $l$ ,  $G$ ,  $E$ , et  $h$  désignent des constantes positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament. Les vitesses de propagation dans la première équation et seconde équation sont, respectivement, données par

$$v_1 = \frac{Gh}{\rho_1} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{EI}{\rho_2}.$$

On s'intéresse aux problèmes de la stabilité directe du système (0.0.14) avec les conditions initiales des variables suivantes

$$\begin{cases} \omega(0, \cdot) = \omega_0, \omega_t(0, \cdot) = \omega_1, \varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \psi(0, \cdot) = \psi_0, \\ \psi_t(0, \cdot) = \psi_1 \text{ dans } (0, L), \end{cases} \quad (0.0.15)$$

et les conditions aux bords suivantes :

$$\omega(t, 0) = \omega(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0 \quad (0.0.16)$$

ou

$$\omega_x(t, 0) = \omega_x(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = 0. \quad (0.0.17)$$

On obtient un résultat de décroissance exponentielle basée sur le lemme suivant utilisé par A. Haraux [42], avec les conditions au bord (0.0.16) ou (0.0.17) :

**Lemme 0.0.1.** *Soit  $\mathcal{E} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ) une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe  $T > 0$  tel que*

$$\int_t^{+\infty} \mathcal{E}(s) ds \leq T\mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (0.0.18)$$

Alors

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{1-\frac{t}{T}} \quad \forall t \geq 0. \quad (0.0.19)$$

Ce lemme est une base des résultats de nombreux auteurs concernant l'estimaion de l'énergie de certains problèmes dissipatifs linéaires. On note que l'estimation (4.1.10) est optimale (voir [50]).

D'un autre côté, on obtient un résultat de décroissance polynômiale basée sur le lemme suivant, dû à Komornik [50], qui donne une généralisation non linéaire du lemme 0.0.1, avec les conditions au bord (0.0.16) ou (0.0.17) :

**Lemme 0.0.2.** *Soit  $\mathcal{E} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ) une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $T > 0$  telles que*

$$\int_t^{+\infty} \mathcal{E}^{\alpha+1}(s) ds \leq T\mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (0.0.20)$$

Alors

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \left( \frac{T + \alpha t}{T + \alpha T} \right)^{-1/\alpha} \quad \forall t \geq 0. \quad (0.0.21)$$

Aussi ce lemme est une base des résultats de nombreux auteurs concernant l'estimaion de l'énergie de certains problèmes dissipatifs non linéaires. On note que l'estimation (0.0.21) est optimale (voir [50]).

**Chapitre 5.** Au cours des dernières années, avec une large application de "matériaux intelligents" dans les systèmes élastiques, allant de la mesure et de l'amortissement des vibrations dans les grandes structures souples pour

le contrôle du bruit dans l'acoustique des paramètres structuraux (pour plus des informations voir Banks [23]), il est devenu de plus en plus important d'étudier la stabilité d'un système élastique avec un amortissement ou un contrôle localement distribué. Toutefois, les travaux réalisés dans ce domaine étaient relativement faible depuis les travaux connexes de Lagnese [62].

Dans ce chapitre, on considère le même système élastique de Bresse du chapitre 4, mais il est soumis seulement à deux termes d'amortissement. Ces deux termes sont deux forces de contrôle exercées sur le voisinage du bord, agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation d'un filament de la poutre et l'équation du déplacement longitudinal de la poutre. Force de contrôle indirecte est appliquée sur l'équation du déplacement transversal de la poutre. Alors ce système est donné par

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_1(x)\psi_t = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_2(x)\omega_t = 0, \end{cases} \quad (0.0.22)$$

où  $t > 0$  et  $0 < x < L$ . Les vitesses de propagation dans la première équation et la seconde équation sont, respectivement, données par

$$v_1 = \frac{Gh}{\rho_1} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{EI}{\rho_2}.$$

Ici, les fonctions  $a_j \geq 0$  sont positives sur  $[0, L]$   $j = 1, 2$  et satisfont

$$a_j(x) \geq a_- > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Theta := ]0, c[ \cup ]d, L[, \quad 0 < c < d < L. \quad (0.0.23)$$

Les conditions initiales de variables sont :

$$\begin{cases} \omega(0, \cdot) = \omega_0, \quad \omega_t(0, \cdot) = \omega_1, \quad \varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0, \cdot) = \psi_0, \\ \psi_t(0, \cdot) = \psi_1 \quad \text{dans} \quad (0, L). \end{cases} \quad (0.0.24)$$

On considère les conditions aux bords suivantes de ce système :

$$\omega(t, 0) = \omega(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0, \quad (0.0.25)$$

ou

$$\omega_x(t, 0) = \omega_x(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = 0. \quad (0.0.26)$$

On obtient un résultat de stabilité exponentielle du système (0.0.22) dans le cas où les vitesses de propagation sont égales dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système. Ce résultat est basé sur le théorème suivant, dû à J. Prüss [93] et F. L. Huang [42].

**Théorème 0.0.3.** *Un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe  $e^{t\mathcal{A}}$  des contractions sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est **exponentiellement stable** si et seulement si*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty. \quad (0.0.27)$$

D'autre part, on obtient un résultat de stabilité polynomiale dans le cas des vitesses de propagation différentes. Ce résultat est basé sur le théorème suivant, dû à Z. Liu et B. Rao [75].

**Théorème 0.0.4.** *Si un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe  $e^{t\mathcal{A}}$  borné dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  satisfait*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \sup_{|\lambda| \geq 1} \frac{1}{\lambda^\gamma} \|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty \quad (0.0.28)$$

*pour un certain  $\gamma > 0$ , alors pour tout entier positif  $k$ , il existe une constante  $C_k > 0$  telle que*

$$\|e^{t\mathcal{A}} z_0\|_{\mathcal{H}} \leq C_k \left( \frac{\ln t}{t} \right)^{\frac{k}{\gamma}} (\ln t) \|z_0\|_{D(\mathcal{A}^k)} \quad (0.0.29)$$

*pour tout  $z_0 \in D(\mathcal{A}^k)$ .*

La méthode domaine fréquence et les techniques de multiplicateurs sont appliquées.

*"Ne dites pas : 'J'ai trouvé la vérité',  
mais plutôt : 'J'ai trouvé une vérité'"*

*Gibran Khalil GIBRAN*



# Partie 1. Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes





# Chapitre 1

## Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes d'un système hyperbolique faiblement couplé

### 1.1 Introduction

Soit  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert borné non vide dans  $\mathbb{R}^N$  ayant une frontière  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de  $\Gamma$  telle que  $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tel que  $m \cdot \nu \leq 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $m \cdot \nu \geq \lambda > 0$  sur  $\Gamma_1$  (le cas  $\Gamma_0 = \emptyset$  n'est pas exclu), où  $m(x) := x - x^0$  et  $\nu(x)$  désigne le vecteur unitaire normal sortant en  $x \in \partial\Omega$  (cf. [18], [69], [70]). On pose  $R(x^0) := \sup\{|m(x)|; x \in \overline{\Omega}\}$ .  $|\cdot|$  désigne la norme  $L^2$  dans la suite. On prend  $\omega$  comme un voisinage de  $\Gamma(x^0)$  dans  $\Omega$  (cf. la figure 1.1). ( $\omega$  est représenté par la partie hachurée ).

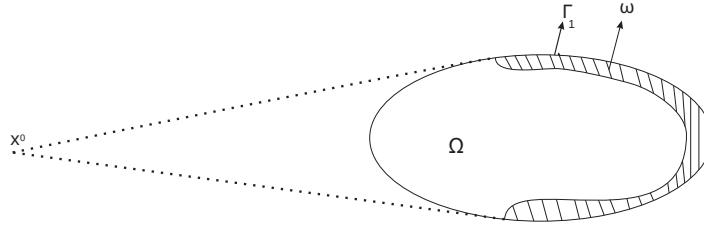


FIG. 1.1 – 1

On considère l'équation des ondes avec les conditions au bord homogènes de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(., 0) = u^0(.), \quad u_t(., 0) = u^1(.) & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Ici  $\Delta$  désigne le Laplacien par rapport aux variables spatiales et l'indice  $t$  désigne la dérivée par rapport à la variable  $t$ . Il est bien connu que si  $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$  alors l'équation (1.1.1) admet une solution forte

$$u \in \mathcal{C}(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

et si  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  alors (1.1.1) admet une solution faible

$$u \in \mathcal{C}(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

(cf. [69], paragraphe 3.2).

L'énergie de la solution  $u$  de l'équation des ondes est définie par

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

En multipliant (1.1.1) par  $u_t$  il est facile de voir que l'énergie de solutions faibles de (1.1.1) est conservée i.e.

$$E(u(t)) = E(u(0)), \quad \forall t \geq 0.$$

La contrôlabilité exacte interne a été abordée par J.L. Lions [69]. Pour  $T > T_0$  où  $T_0$  est suffisamment grand, et pour certaines constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  il a montré dans [69] que les solutions de (1.1.1) vérifient les estimations suivantes :

$$\int_0^T \int_{\omega} (|u_t|^2 + |u|^2) \leq c_1 E(u(0)), \quad (1.1.2)$$

$$\int_0^T \int_{\omega} (|u_t|^2 + |u|^2) \geq c_2 E(u(0)). \quad (1.1.3)$$

Sa preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs. L'inégalité (1.1.3) est appelée "inégalité d'observabilité".

De plus, en utilisant la méthode HUM, J. L. Lions a montré que l'inégalité directe (1.1.2) et l'inégalité inverse (1.1.3) donnent le résultat de contrôlabilité exacte suivant : pour tout  $T \geq T_0$  et pour toute donnée initiale

$(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , il existe un contrôle  $v \in [H^1(0, T; L^2(\omega))]'$  tel que la solution de

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = v & \text{dans } \Omega \times (0, T); \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T); \\ y(\cdot, 0) = y^0(\cdot), \quad y_t(\cdot, 0) = y^1(\cdot) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

satisfait  $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$  dans  $\Omega$ , c'est-à-dire le contrôle  $v$  ramène le système à l'état d'équilibre  $(0, 0)$  au temps  $T > 0$ , où  $[H^1(0, T; L^2(\omega))]'$  est l'espace dual de  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ .

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes de l'observabilité et de la contrôlabilité exactes internes indirectes d'un système hyperbolique faiblement couplé. Alors, on considère le système faiblement couplé de deux équations des ondes suivant

$$\begin{cases} u_{1,tt} - \Delta u_1 + \alpha u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_{2,tt} - \Delta u_2 + \alpha u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u_i(0) = u_i^0, \quad u_{i,t}(0) = u_i^1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

où  $\alpha$  est un paramètre de couplage. Nous nous demandons ensuite s'il est possible d'obtenir une inégalité d'observabilité de la forme suivante

$$\int_0^T \int_{\omega} |u_{1,t}|^2 dx dt \geq c(e_1(u_1(0)) + e_2(u_2(0))), \quad (1.1.5)$$

où  $e_i(u_i(t))$  est une certaine énergie de la composante correspondante de l'inconnu.

Dans le cas de systèmes d'équations aux dérivées partielles, plusieurs notions d'observabilité (et par des arguments de dualité de contrôlabilité) ont déjà été considérés. Dans [69], [70], J. L. Lions introduit trois notions d'observabilité : l'observabilité *complète*, *partielle*, et *simultanée*.

L'*observabilité complète* consiste à observer chaque composante de l'inconnue du vecteur d'état au temps initial. Plus précisément, pour le système (1.1.4), l'observabilité complète signifie :

$$\int_0^T \int_{\omega} |u_1'|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |u_2'|^2 dx dt \geq c(|u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2 + |u_2^1|^2 + |\nabla u_2^0|^2).$$

Cette inégalité est obtenue lorsque  $\alpha$  est suffisamment petit.

L'*observabilité partielle* consiste à observer seulement une seule composante

de l'inconnue du vecteur d'état au temps initial aux bords, tandis que la seconde composante au temps initial est égale à zéro. Plus précisément, pour le système (1.1.4), cela signifie qu'on veut montrer une inégalité de la forme

$$\int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 dx dt \geq c \left( |u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2 \right).$$

L'*observabilité simultanée* consiste à observer simultanément les deux composantes composante de l'inconnue du vecteur d'état au temps initial. Plus précisément, pour le système (1.1.4), cela signifie qu'on veut montrer une inégalité de la forme

$$\int_0^T \int_{\omega} |u'_1 + u'_2|^2 dx dt \geq c \left( |u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2 + |u_2^1|^2 + |\nabla u_2^0|^2 \right).$$

Dans [70] J.L. Lions a prouvé que des inégalités d'observabilité complète et simultanée peuvent être obtenir lorsqu'on couple une équation des ondes avec une équation de Petrowsky dans le cas d'un paramètre de couplage suffisamment petit. Il a utilisé la méthode des multiplicateurs pour aboutir à ses résultats. Puis il a proposé la question suivante : *a-t-on contrôlabilité exacte pour un paramètre de couplage quelconque ?* V. Komornik, P. Loreti [55] ont répondu positivement à cette question. Ils ont traité l'observabilité partielle d'un système linéaire couplé d'une équation des ondes et d'une équation de Petrowsky. La preuve de leur résultat est basée sur un théorème classique d'Ingham sur les séries de Fourier non harmoniques.

Liée à la stabilisation indirecte (cf. Russell [99], Alabau [2]) une quatrième notion d'observabilité a été introduite, celle d'*observabilité indirecte*. Elle consiste à n'observer que certaines composantes du vecteur d'état et à déduire une estimation de toutes les composantes du vecteur d'état au temps initial. Dans [1] F. Alabau a considéré comme exemple celui de deux équations des ondes couplées (1.1.4) et elle a observé la norme dans  $L^2$  de la trace de la dérivée normale de  $u_1$  sur  $\Gamma_1 \times ]0, T[$ . Plus précisément, elle a démontré le résultat suivant :

**Théorème 1.1.1.** *Il existe  $\bar{\alpha} > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \bar{\alpha}$ , il existe  $T_1 = T_1(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_1$  et tout  $U^0 = (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in \mathcal{H} = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$ , la solution  $(u_1, u_2)$  de (1.1.4) vérifie*

$$2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right|^2 d\gamma dt \geq \frac{c_1}{2} \left( |u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2 \right) + \frac{c_2}{2} \left( \|u_2^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |u_2^0|^2 \right), \quad (1.1.6)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives dépendant de  $T$  et  $\alpha$ . De plus, si la solution de (1.1.4) vérifie

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times ]0, T[$$

alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  sur  $\Omega$ .

Dans ce chapitre on s'intéresse au cas d'un contrôle localement distribué. On cherche des informations sur l'ensemble des données initiales en n'observant sur  $\omega$  qu'une seule composante du vecteur inconnu. En utilisant la méthode des multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [72] et P. Martinez [82] et en montrant que les techniques introduites dans [1] s'adaptent dans le cas de la contrôlabilité interne. On obtient alors le résultat d'observabilité interne indirecte suivant :

**Théorème 1.1.2.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $U^0 = (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in \mathcal{H} = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$ , la solution  $(u_1, u_2)$  de (1.1.4) vérifie*

$$\int_0^T \int_{\omega} |u_{1,t}|^2 dx dt \geq c(|u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2 + \|u_2^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |u_2^0|^2), \quad (1.1.7)$$

où  $c$  est une constante positive dépendant de  $T$  et  $\alpha$ . De plus, si la solution de (1.1.4) vérifie

$$u_{1,t} = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \times ]0, T[$$

alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  sur  $\Omega$ .

A partir de l'estimation (1.1.7) et à l'aide de la méthode **HUM** de J.-L. Lions ([69], [70]) on obtient par dualité des résultats de contrôlabilité exacte partielle avec un contrôle localement distribué, n'agissant que sur l'une des composantes de la solution. Alors on considère le système

$$\begin{cases} y_{1,tt} - \Delta y_1 + \alpha y_2 = v 1_{\omega} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y_{2,tt} - \Delta y_2 + \alpha y_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y_1 = y_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y_i(0) = y_i^0, \quad y_{i,t}(0) = y_i^1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (1.1.8)$$

où  $v = \frac{\partial}{\partial t}(u_1')$  et  $1_{\omega}$  est la fonction caractéristique de  $\omega$ , et on prouve le théorème suivant

**Théorème 1.1.3.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout pour tout*

$$Y^0 = (y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

*il existe un contrôle interne*

$$v \in [H^1(0, T; L^2(\Omega))]'$$

*tel que la solution de système (1.4.80) vérifie*

$$y_1(T) = y_{1,t}(T) = y_2(T) = y_{2,t}(T) = 0.$$

**Commentaire.** On remarque que si  $\alpha = 0$ , on ne peut pas obtenir l'inégalité (1.1.7). Dans ce cas, l'énergie partielle de la première composante de la solution est conservée, et on obtient une estimation de la forme

$$\int_0^T \int_{\omega} |u_{1,t}|^2 dx dt \geq c(|u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2), \quad (1.1.9)$$

pour  $T$  suffisamment grand. Par suite, on n'a pas des informations sur la deuxième composante de la solution. Donc on peut pas avoir un théorème d'unicité pour appliquer la méthode de HUM.

D'un autre côté, la stabilisation indirecte des systèmes couplés a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Les résultats les plus récents dans cette direction sont ceux obtenus par F. Alabau [2] et F. Alabau, P. Cannarsa et V. Komornik [6] où des estimations polynomiales ont été démontrées pour quelques systèmes hyperboliques linéaires faiblement couplés. Ces résultats sont basés sur le théorème suivant obtenu par F. Alabau [2] (sous une forme moins générale) et F. Alabau, P. Cannarsa et V. Komornik [6] :

**Théorème 1.1.4.** *Soient  $\mathcal{A}$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu  $e^t \mathcal{A}$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  son domaine et  $E \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathbb{R}^+)$  une fonction donnée. Supposons que  $\mathcal{A}$  est linéaire et qu'il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  et une constante positive  $c$  tels que*

$$\int_0^T E(t) dt \leq c \sum_{k=0}^m E_k(0), \quad \forall T \geq 0, \quad \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m).$$

*Alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn})$*

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} E(t) dt \leq c^n (1+m)^{n-1} \sum_{k=0}^{nm} E_k(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

A. Beyrath [22] a étendu ce théorème aux plusieurs cas de systèmes d'équations faiblement couplées (couplage ondes-ondes, couplage Petrowsky-Petrowsky). Elle a étudié la stabilisation indirecte interne par un seul feedback localement distribué. A. Guesmia [40] a étendu le théorème 1.1.4 aussi au cas de systèmes non linéaires ou non dissipatifs et a donné deux applications à la stabilisation indirecte par un seul feedback non linéaire localement distribué et dégénéré ainsi qu'à la stabilisation d'un système couplé de deux équations des ondes générales.

Z. Lui, B. Rao [74] ont prouvé la stabilisation frontière indirecte de systèmes d'équations faiblement couplées. Ils ont obtenu des estimations polynomiales par des méthodes spectrales en appliquant un théorème caractérise la décroissance polynomiale obtenu par Z. Lui, B. Rao dans [75].

P. Loreti, B. Rao [79] ont étudié la stabilisation d'un système de deux équations linéaires, dont une seule équation est amortie par un contrôle feedback. Ils ont montré qu'un contrôle convenablement choisi peut compenser les parties réelles des valeurs propres du système, et donc fournir le meilleur taux de décroissance polynomiale de l'énergie du système pour des données initiales régulières.

V. Komornik, B. Rao [57] ont montré la stabilisation exponentielle d'un système de deux équations des ondes couplées par un opérateur compact en utilisant un résultat obtenu par J. S. Gibson [35].

J. Rauch, X. Zhang, E. Zuazua [97] ont étudié la décroissance polynomiale d'un système couplé de type hyperbolique-parabolique. Ils ont étudié le comportement asymptotique en temps d'un modèle linéarisé d'interaction fluide-structure. En composant le domaine (en espace) de deux parties dans lesquelles l'évolution est gouvernée par l'équation de la chaleur et l'équation des ondes respectivement, avec des conditions de transmission à l'interface. Ils ont montré un résultat de décroissance polynomiale pour des solutions régulières en supposant une condition de contrôle géométrique.

F. Ammar Khodja et A. Bader [13] ont étudié les problèmes de stabilité d'un système couplé de deux équations des ondes unidimensionnelles sous l'effet d'un seul contrôle interne ou au bord. Ils ont démontré que le contrôle interne qui agit seulement sur une des équations ne donne pas une stabilité exponentielle si les vitesses des propagation sont différentes. En plus ils ont étudié la stabilité simultanée au bord du même système.

Des autres auteurs ont étudié la stabilisation des systèmes couplés hyperbolique-parabolique tels que thermoelasticité, thermoplates (voir [75], [29], [77], [68], [63], [89], [24]). Pour ces systèmes, l'objectif principal est de déterminer si la dissipation induite par l'équation de la chaleur est suffisante pour stabiliser de système obtenu par couplage à une équation de type hyperbolique. Dans

[88] J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso ont considéré un système thermoélastique avec termes mémoire et ils ont établi la contrôlabilité exacte sous l'effet des contrôles aux bords sur le déplacement et sur la température.

Des résultats d'observabilité frontière de systèmes couplés hyperbolique-parabolique ont été obtenus dans [10] par P. Albano et D. Tataru. Ils ont obtenu certaines estimations de Carleman avec poids sigulier pour l'équation de la chaleur et l'équation des ondes, puis ils combinent les résultats pour obtenir une estimation d'observabilité frontière.

Concernant les systèmes couplés de type hyperbolique-hyperbolique, plusieurs résultats concernant la stabilisation et l'observabilité par deux forces de contrôle ont été obtenus. Des résultats d'observabilité (respectivement contrôlabilité) complète et partielle pour des systèmes de type hyperbolique-hyperbolique ou hyperbolique-parabolique ont été traités dans [69], [70]. Ces résultats supposent que le paramètre de couplage est suffisamment petit. Ils ont été étendus dans [54] aux cas de paramètres de couplage arbitraires (opérateurs de couplage bornés). Pour chaque référence, la méthode des multiplicateurs a été l'ingrédient principal pour l'obtention des estimations souhaitées.

Des résultats de Stabilité et d'observabilité pour des systèmes hyperbolique-hyperbolique par une seule force de contrôle ont été considérés récemment. B. V. Kapitonov [48] et B. V. Kapitonov et J. S. Souza [49] ont considéré des systèmes de deux équations des ondes couplées par termes de vitesse et de couplage non compact. Ils ont prouvé des résultats d'observabilité et de stabilisation uniforme. Dans [67] des résultats d'observabilité (respectivement contrôlabilité) complètes ont été obtenues par I. Lasiecka et R. Triggiani pour des systèmes des équations hyperboliques couplées du second ordre contenant des termes du premier ordre des inconnues originales et couplées. Ces résultats sont basés sur les estimations de Carleman.

## 1.2 Formulation du problème

On définit l'espace énergie  $\mathcal{H}$  par

$$\mathcal{H} = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$$

muni du produit scalaire usuel noté par  $((\cdot, \cdot))$ , *i.e.*

$$((U, \tilde{U})) = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla \tilde{u}_i + \int_{\Omega} v_i \tilde{v}_i \right)$$



pour  $U = (u_1, v_1, u_2, v_2)$  et  $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$  dans  $\mathcal{H}$ . La norme associée est notée par  $\|\cdot\|$ .

On définit un opérateur linéaire non borné  $\mathcal{A}_\alpha : D(\mathcal{A}_\alpha) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  par

$$\mathcal{A}_\alpha U = (-v_1, -\Delta u_1 + \alpha u_2, -v_2, -\Delta u_2 + \alpha u_1),$$

$$D(\mathcal{A}_\alpha) = \left( (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \right)^2.$$

Alors, on peut reformuler le problème (1.1.4) sous forme d'une équation abstraite du premier ordre

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}_\alpha U = 0, \\ U(0) = U^0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Maintenant, pour tout  $U = (u_1, v_1, u_2, v_2)$ ,  $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$  dans  $\mathcal{H}$ , on définit sur  $\mathcal{H}$  la forme bilinéaire suivante :

$$(U, \tilde{U})_\alpha = ((U, \tilde{U})) + \alpha \int_{\Omega} u_2 \tilde{u}_1 + \alpha \int_{\Omega} u_1 \tilde{u}_2.$$

On définit les énergies partielles associées à une solution  $U = (u_1, u_1', u_2, u_2')$  de (1.1.4) par

$$e_i(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_{i,t}|^2 + |\nabla u_i|^2) dx \quad i = 1, 2$$

et l'énergie totale :

$$E(U(t)) = e_1(t) + e_2(t) + \alpha \int_{\Omega} u_1 u_2 dx.$$

On définit aussi les énergies partielles affaiblies :

$$\tilde{e}_i(t) = \frac{1}{2} \left( \|u_{i,t}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |u_i|^2 \right) \quad i = 1, 2,$$

et l'énergie totale affaiblie :

$$\tilde{E}(U(t)) = \tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t) + \alpha \int_{\Omega} \nabla(\Delta^{-1} u_1) \cdot \nabla(\Delta^{-1} u_2) dx.$$

On remarque que

$$2E(U(t)) = \|U(t)\|_\alpha^2. \quad (1.2.11)$$

Les résultats suivants sont donnés dans [1].

**Proposition 1.2.1.** *Il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$ , il existe deux constantes  $c_1(\alpha) > 0$  et  $c_2(\alpha) > 0$  tel que*

$$c_1(\alpha)\|U\|^2 \leq (U, U)_\alpha \leq c_2(\alpha)\|U\|^2 \quad \forall U \in \mathcal{H}. \quad (1.2.12)$$

*Alors, pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  l'application*

$$U \in \mathcal{H} \longrightarrow \|U\|_\alpha = (U, \tilde{U})_\alpha^{\frac{1}{2}},$$

*définit une norme sur  $\mathcal{H}$  qui est équivalente à la norme  $\|\cdot\|$ .*

*Démonstration.* Soit  $U \in \mathcal{H}$  donné. On a alors

$$|(U, U)_\alpha - \|U\|^2| \leq 2|\alpha \operatorname{Re}\left(\int_\Omega u_1 u_2\right)| \leq |\alpha| c_0 \|U\|^2,$$

où  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $c_0$  est la constante de Poincaré. D'où l'estimation (1.2.12) désirée où

$$\alpha_0 = \frac{1}{c_0}, \quad c_1(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) \text{ et } c_2(\alpha) = \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_0}\right).$$

□

**Proposition 1.2.2.** *Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$ ,  $-\mathcal{A}_\alpha$  est un opérateur anti-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . Par conséquent, pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  l'opérateur  $-\mathcal{A}_\alpha$  engendre un  $\mathcal{C}^0$  groupe unitaire  $T_0(t) = e^{-t\mathcal{A}_\alpha}$   $t \in \mathbb{R}$  sur  $\mathcal{H}$ . Alors pour  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  et pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , le problème (1.2.10) possède une unique solution  $U \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H})$ . Si de plus,  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors la solution est dans  $\mathcal{C}^{k-j}([0, +\infty); D(\mathcal{A}_\alpha^j))$  pour  $j = 0, \dots, k$ . De plus, l'énergie naturelle totale est conservée i.e. pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , on a*

$$E(U(t)) = E(U(0)) \quad t \geq 0,$$

*et l'énergie affaiblie totale de la solution est conservée i.e. pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , on a*

$$\tilde{E}(U(t)) = \tilde{E}(U(0)) \quad t \geq 0.$$

*Démonstration.* Il est facile à vérifier que

$$(\mathcal{A}_\alpha U, \tilde{U})_\alpha = -(U, \mathcal{A}_\alpha \tilde{U})_\alpha, \quad \forall U, \tilde{U} \in D(\mathcal{A}_\alpha).$$

Alors  $D(\mathcal{A}_\alpha^*) = D(\mathcal{A}_\alpha)$  et  $\mathcal{A}_\alpha^* = -\mathcal{A}_\alpha$ . D'où  $\mathcal{A}_\alpha$  est anti-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . En appliquant le théorème de Stone (voir [32]), on déduit que  $\mathcal{A}_\alpha$  est le générateur d'un  $\mathcal{C}^0$  groupe unitaire  $T_0(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sur  $\mathcal{H}$ .

Alors, de la théorie classique de semi-groupe on conclut que (1.2.10) admet une unique solution  $U \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H})$ .

Le fait que le groupe  $T_0(t)$   $t \in \mathbb{R}$  est unitaire assure que l'énergie naturelle de toutes les solutions avec une donnée initiale sur  $\mathcal{H}$  est conservée.

En multipliant (1.1.4)<sub>1</sub> par  $(-\Delta)^{-1}u_{1,t}$  et (1.1.4)<sub>2</sub> par  $(-\Delta)^{-1}u_{2,t}$  il est facile à vérifier que l'énergie totale affaiblie de toutes les solutions avec une donnée initiale sur  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  est conservée. Par densité de  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  dans  $\mathcal{H}$ , on conclut que le même résultat est vraie pour toute donnée initiale dans  $\mathcal{H}$ .  $\square$

## 1.3 Résultats d'observabilité

Dans ce paragraphe, on résume le résultat de l'observabilité indirecte interne dans l'énoncé suivant.

**Théorème 1.3.1.** *Il existe  $\alpha^* \in ]0, \alpha_0]$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe un temps  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et pour tout  $U^0 = (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in \mathcal{H}$ , la solution  $(u_1, u_2)$  de (1.1.4) satisfait*

$$\int_0^T \int_\omega |u_1'|^2 \leq \frac{4T}{c_1(\alpha)} E(U(0)) \quad (1.3.13)$$

et

$$\int_0^T \int_\omega |u_1'|^2 \geq c(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)). \quad (1.3.14)$$

De plus, si la solution de (1.1.4) satisfait  $u_1' = 0$  sur  $\omega \times (0, T)$ , alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  dans  $\Omega \times [0, T]$ .

Avant de commencer la démonstration du théorème 1.3.1, précisons quelques notations à l'aide des conditions géométriques introduites par E. Zuazua [122], K. Liu [72] et P. Martinez [83] concernant le cas d'un feedback localement distribué, qui seront largement utilisées dans la suite. On définit alors les espaces  $\omega_{\varepsilon_i}$  par

$$\omega_{\varepsilon_i} := \{x \in \Omega; d(x, \Gamma_1) < \varepsilon_i\} \quad i = 0, 1$$

où

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad d(x, \Gamma_1) := \inf_{y \in \Gamma_1} \|x - y\|_{\mathbb{R}^N},$$

et on considère  $\tilde{\omega}$  tel que

$$\tilde{\omega} \subset \omega_{\varepsilon_0} \subset \omega_{\varepsilon_1} \subset \omega.$$

La démonstration de l'inégalité directe (1.3.13) sera fait directement. En revanche, pour la démonstration de l'inégalité inverse (1.3.14) plusieurs lemmes seront nécessaires.

**Lemme 1.3.1.** *Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0 = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$  de (1.1.4) satisfait*

$$\begin{cases} \alpha \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 dt \leq \alpha \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 dt + \frac{1}{\gamma_1} (e_1(0) + e_1(T)) \\ \quad + \gamma_1 (\tilde{e}_2(0) + \tilde{e}_2(T)) \quad \forall \gamma_1 > 0. \end{cases} \quad (1.3.15)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. Comme  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et  $\|U(t)\|_\alpha = \|U^0\|_\alpha$  pour tout  $t \geq 0$ , il nous suffit de démontrer l'inégalité (1.3.14) pour  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ . Alors, soit  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$  donné. Multiplions (1.1.4)<sub>1</sub> par  $u_2$  et (1.1.4)<sub>2</sub> par  $u_1$ , puis intégrons sur  $[0, T] \times \Omega$  et faisant la différence de deux équations obtenues, on obtient alors

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{1,tt} - \Delta u_1 + \alpha u_2)u_2 - (u_{2,tt} - \Delta u_2 + \alpha u_1)u_1 = 0.$$

Alors

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{1,tt}u_2 - u_{2,tt}u_1 - \Delta u_1u_2 - \Delta u_2u_1 + \alpha|u_2|^2 + \alpha|u_1|^2) = 0.$$

En intégrant les deux premiers termes par parties on obtient

$$\alpha \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 = \alpha \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 + \left[ \int_\Omega u_1 u'_2 dx - \int_\Omega u'_1 u_2 dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (\Delta u_1 u_2 + \Delta u_2 u_1).$$

De même, en intégrant par parties les deux derniers termes du second membre on obtient

$$\alpha \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 = \alpha \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 + \left[ \int_\Omega u_1 u'_2 dx - \int_\Omega u'_1 u_2 dx \right]_0^T. \quad (1.3.16)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_1 u'_2 dx &= \int_\Omega u_1 \cdot (-\Delta)^{1/2} (-\Delta)^{-1/2} u'_2 dx \\ &= \int_\Omega (-\Delta)^{1/2} u_1 (-\Delta)^{-1/2} u'_2 dx \\ &\leq \left( \int_\Omega |(-\Delta)^{1/2} u_1|^2 \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2} u'_2|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_\Omega |\nabla u_1|^2 \right)^{1/2} \|u'_2\|_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité d'Young maintenant, on obtient

$$\int_{\Omega} u_1 u_2' dx \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2}{2\gamma_1} + \frac{\gamma_1 \|u_2'\|_{H^{-1}}^2}{2} \quad \forall \gamma_1 > 0.$$

D'un autre côté, on a

$$\int_{\Omega} u_1' u_2 dx \leq \frac{\int_{\Omega} |u_1'|^2}{2\gamma_1} + \frac{\gamma_1 \int_{\Omega} |u_2|^2}{2} \quad \forall \gamma_1 > 0.$$

Par suite

$$\left| \left( \int_{\Omega} u_1 u_2' dx - \int_{\Omega} u_1' u_2 dx \right) (t) \right| \leq \frac{1}{\gamma_1} e_1(t) + \gamma_1 \tilde{e}_2(t) \quad \forall \gamma_1 > 0. \quad (1.3.17)$$

En utilisant (1.3.17) dans (1.3.16), on obtient l'estimation désirée (1.3.15).  $\square$

**Lemme 1.3.2.** *Soit*

$$\alpha_1 = \min(\alpha_0, \sqrt{c_0}). \quad (1.3.18)$$

*Alors pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_1$ , et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_{\alpha})U^0$  de (1.1.4) vérifie les estimations suivantes :*

$$e_1(T) + e_1(0) \leq K_1(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + \frac{K_2\alpha}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt, \quad (1.3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0) \leq \frac{K_3}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) \\ + \frac{K_4\alpha}{(1 - \alpha\sqrt{c_0})^2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt, \end{array} \right. \quad (1.3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1/2} u_2'|^2 dt \leq \frac{K_5}{\alpha(1 - \alpha\sqrt{c_0})} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) \\ + \frac{K_6}{(1 - \alpha\sqrt{c_0})^2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt, \end{array} \right. \quad (1.3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 dt \leq \frac{K_7}{\alpha(1 - \alpha\sqrt{c_0})} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) \\ + \frac{K_8}{(1 - \alpha\sqrt{c_0})^2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt. \end{array} \right. \quad (1.3.22)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. Il suffit de démontrer toutes les inégalités ci-dessus pour  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$  car  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . On commence par la démonstration de l'inégalité (1.3.21). On multiplie (1.1.4)<sub>2</sub> par  $(-\Delta)^{-1}u_2$  et on intègre sur  $[0, T] \times \Omega$ , on obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{-1}u_2'|^2 dt = \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 + \alpha \int_0^T \int_\Omega u_1(-\Delta)^{-1}u_2 dx dt \\ + \left[ \int_\Omega (-\Delta)^{-1/2}u_2'(-\Delta)^{-1/2}u_2 dx \right]_0^T. \end{array} \right. \quad (1.3.23)$$

En utilisant l'inégalité de Young dans les deux derniers termes de l'égalité (1.3.23), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2'|^2 dt \leq \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{-1}u_2|^2 \\ + \frac{1}{2\gamma} \left( \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2'|^2(T) + \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2'|^2(0) \right) \\ + \frac{\gamma}{2} \left( \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2|^2(T) + \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2|^2(0) \right). \end{array} \right. \quad (1.3.24)$$

D'après l'inégalité de Poincaré, (1.3.24) nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2'|^2 dt \leq \left(1 + \frac{\alpha c_0^2}{2}\right) \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2'|^2(T)}{\gamma} + \gamma c_0 \int_\Omega |u_2|^2(T) \right) \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\int_\Omega |(-\Delta)^{-1/2}u_2'|^2(0)}{\gamma} \right) + \gamma c_0 \int_\Omega |u_2|^2(0). \end{array} \right. \quad (1.3.25)$$

Ainsi en choisissant  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$  on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T |(-\Delta)^{-1}u_2'|^2 dt \leq \left(1 + \frac{\alpha c_0^2}{2}\right) \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 \\ + \sqrt{c_0} (\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)). \end{array} \right. \quad (1.3.26)$$

Alors en utilisant (1.3.15) dans (1.3.26), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1} u_2'|^2 dt \leq K_9 \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 dt + \frac{K_{10}}{\alpha \gamma_1} (e_1(T) + e_1(0)) \\ + \left( \frac{K_{11} \gamma_1}{\alpha} + \sqrt{c_0} \right) (\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)) \quad \forall \gamma_1 > 0. \end{array} \right. \quad (1.3.27)$$

Maintenant, on va estimer le terme  $\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)$ .

On sait que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2(t) &= \frac{1}{2} \left( \|u_2'\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |u_2|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1/2} u_2'| + \int_{\Omega} |u_2|^2 \right). \end{aligned}$$

Alors on a

$$\tilde{e}_2'(t) = \int_{\Omega} u_2 u_2' dx + \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1/2} u_2'' (-\Delta)^{-1/2} u_2' dx,$$

et d'après la deuxième équation de (1.1.4) on obtient

$$\tilde{e}_2'(t) = -\alpha \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1/2} u_1 (-\Delta)^{-1/2} u_2' dx.$$

Intégrons la dernière égalité sur  $[0, T]$ , on obtient en utilisant l'inégalité de Young

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0) = 2\tilde{e}_2(0) - \alpha \int_0^T \int_{\Omega} (-\Delta)^{-1/2} u_1 (-\Delta)^{-1/2} u_2' dx \\ \leq 2\tilde{e}_2(0) + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1/2} u_1|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1/2} u_2'|^2 dt. \end{array} \right. \quad (1.3.28)$$

En combinant (1.3.28) avec (1.3.27), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 1 - \frac{\alpha \sqrt{c_0}}{2} - \frac{K_{11} \gamma_1}{2} \right) (\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)) \\ \leq 2\tilde{e}_2(0) + \frac{\alpha}{2} (K_9 + c_0) \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 dt + \frac{K_{10}}{2\gamma_1} (e_1(T) + e_1(0)). \end{array} \right. \quad (1.3.29)$$

En prenant  $\gamma_1 = (K_{11})^{-1}$  dans la dernière inégalité on conclut

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0) \leq \frac{4\tilde{e}_2(0)}{1 - \alpha \sqrt{c_0}} + \frac{K_{12} \alpha}{1 - \alpha \sqrt{c_0}} \int_0^T |u_1|^2 dt \\ + \frac{K_{13}}{1 - \alpha \sqrt{c_0}} (e_1(T) + e_1(0)). \end{array} \right. \quad (1.3.30)$$

L'insertion de (1.3.30) dans (1.3.26) et (1.3.15) pour  $\gamma_1 = 1$  nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} |(-\Delta)^{-1} u_2'|^2 dt \leq \frac{K_{14}}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 dt \\ + \frac{K_{15}}{\alpha(1 - \alpha\sqrt{c_0})} (e_1(T) + e_1(0)) + \frac{K_{16}}{\alpha(1 - \alpha\sqrt{c_0})} \tilde{e}_2(0), \end{array} \right. \quad (1.3.31)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 dt \leq \frac{\alpha K_{17}}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 \\ + \frac{K_{18}}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} (e_1(T) + e_1(0)) + \frac{K_{19}}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} \tilde{e}_2(0). \end{array} \right. \quad (1.3.32)$$

Maintenant, on va estimer  $e_1(T) + e_1(0)$ .

On a

$$e_1'(t) = \int_{\Omega} u_1'' u_1' dx + \int_{\Omega} (-\Delta)^{1/2} u_1 (-\Delta)^{1/2} u_1' dx,$$

alors d'après la première équation de (1.1.4) on obtient

$$e_1'(t) = -\alpha \int_{\Omega} u_2 u_1' dx.$$

En intégrant sur  $[0, T]$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(T) + e_1(0) = 2e_1(0) - \alpha \int_0^T \int_{\Omega} u_2 u_1' dx dt \\ \leq 2e_1(0) + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1'|^2 dt + \frac{\alpha\varepsilon_1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 dt. \end{array} \right. \quad (1.3.33)$$

L'insertion de (1.3.32) dans (1.3.33) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\varepsilon_1 K_{18}}{2(1 - \alpha\sqrt{c_0})}\right) (e_1(T) + e_1(0)) \leq 2e_1(0) + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1'|^2 dt \\ + \frac{\alpha K_{17}\varepsilon_1}{2(1 - \alpha\sqrt{c_0})} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 + \frac{K_{19}\varepsilon_1}{2(1 - \alpha\sqrt{c_0})} \tilde{e}_2(0). \end{array} \right. \quad (1.3.34)$$

Choisissons  $\varepsilon_1 = \frac{1 - \alpha\sqrt{c_0}}{K_{18}}$  dans (1.3.34), on obtient alors

$$e_1(T) + e_1(0) \leq 4e_1(0) + \frac{K_{20}\alpha}{1 - \alpha\sqrt{c_0}} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_1'|^2) + K_{21} \tilde{e}_2(0).$$

D'où la démonstration de l'estimation (1.3.19). En insérant (1.3.19) dans (1.3.30), (1.3.31) et (1.3.32) respectivement, on conclut (1.3.20), (1.3.21) et (1.3.22).  $\square$



**Lemme 1.3.3.** *Soit*

$$\alpha_2 = \min(\alpha_1, (2\sqrt{c_0})^{-1}), \quad (1.3.35)$$

où  $\alpha_1$  est donnée dans (1.3.18). Alors pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_2$  et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (1.1.4) vérifie

$$\int_0^T e_1(t)dt \geq \frac{K_{22}T}{2(1+\alpha T)}(e_1(0) - \tilde{e}_2(0)). \quad (1.3.36)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. On a

$$e'_1(t) = -\alpha \int_{\Omega} u_2 u'_1 dx,$$

alors, en intégrant sur  $[0, T]$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt = Te_1(0) - \alpha \int_0^T (T-t) \int_{\Omega} u_2 u'_1 dx dt \\ \geq Te_1(0) - \frac{\alpha T}{2\gamma_2} \int_0^T |u'_1|^2 dt - \frac{\alpha \gamma_2 T}{2} \int_0^T |u_2|^2 dt \quad \forall \gamma_2 > 0. \end{array} \right. \quad (1.3.37)$$

En utilisant (1.3.22) dans (1.3.37), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt = T \left( 1 - \frac{\gamma_2 K_7}{2(1-\alpha\sqrt{c_0})} \right) e_1(0) - T \frac{\gamma_2 K_7}{2(1-\alpha\sqrt{c_0})} \tilde{e}_2(0) \\ - \frac{\alpha T}{2} \left( \frac{1}{\gamma_2} \int_{\Omega} |u'_1|^2 + \frac{\gamma_2 K_2}{2(1-\alpha\sqrt{c_0})^2} \left( \int_{\Omega} |u'_1|^2 + \int_{\Omega} |u_1|^2 \right) \right). \end{array} \right. \quad (1.3.38)$$

Alors la choix  $\gamma_2 = \frac{1-\alpha\sqrt{c_0}}{K_7}$  dans (1.3.38) nous donne

$$\int_0^T e_1(t)dt \geq \frac{T}{2}(e_1(0) - \tilde{e}_2(0)) - \frac{\alpha T K_{23}}{1-\alpha\sqrt{c_0}} \int_0^T e_1(t)dt.$$

Comme  $0 < |\alpha| < \alpha_2$  et grâce à notre choix de  $\alpha_2$ , on a  $1 \leq \frac{1}{(1-\alpha\sqrt{c_0})} \leq 2$ , donc on déduit

$$2 \max(1, K_{23})(1+\alpha T) \int_0^T e_1(t)dt \geq \frac{T}{2}(e_1(0) - \tilde{e}_2(0)).$$

D'où l'estimation (1.3.36) désirée avec une nouvelle constante  $K_{27}$ .  $\square$

**Corollaire 1.3.1.** *Il existe  $\alpha_3 \in (0, \alpha_2)$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_3$  et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (1.1.4) satisfait*

$$\int_0^T (e_1(t) + \tilde{e}_2(t)) \geq \frac{\delta_2}{2} (\tilde{e}_1(0) + \tilde{e}_2(0)), \quad (1.3.39)$$

où  $\delta_2 = \min(1, \frac{1}{c_0})$ . De plus, on a

$$e_1(T) + e_1(0) \leq K_1(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + K_{24}\alpha \int_0^T e_1(t), \quad (1.3.40)$$

$$\int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 \leq 2\frac{K_7}{\alpha}(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + K_{25}\alpha \int_0^T e_1(t), \quad (1.3.41)$$

$$\int_0^T \tilde{e}_2(t) \leq 2\frac{K_{26}}{\alpha}(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + K_{27}\alpha \int_0^T e_1(t). \quad (1.3.42)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. A l'aide de l'inégalité de Poincaré, on peut facilement voir que

$$\int_0^T (e_1(t) + \tilde{e}_2(t)) \geq \delta_2 \int_0^T (\tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t)). \quad (1.3.43)$$

D'autre part, on a

$$\tilde{E}(U(t)) = \tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t) + \alpha \int_\Omega \nabla(\Delta^{-1}u_1) \cdot \nabla(\Delta^{-1}u_2) dx.$$

En utilisant l'inégalité du Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |\tilde{E} - (\tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t))| &= \alpha \int_\Omega \nabla(\Delta^{-1}u_1) \cdot \nabla(\Delta^{-1}u_2) dx \\ &\leq \alpha \|\nabla(\Delta^{-1}u_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\Delta^{-1}u_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha \|(-\Delta)^{1/2}((-\Delta)^{-1}u_1)\|_{L^2(\Omega)} \|(-\Delta)^{1/2}((-\Delta)^{-1}u_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha \|(-\Delta)^{-1/2}u_1\|_{L^2(\Omega)} \|(-\Delta)^{-1/2}u_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \left( \|(-\Delta)^{-1/2}u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(-\Delta)^{-1/2}u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \alpha \frac{c_0}{2} \left( \int_\Omega |u_1|^2 + \int_\Omega |u_2|^2 \right) \\ &\leq \alpha c_0 (\tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t)). \end{aligned}$$

En intégrant sur  $[0, T]$  et comme  $\tilde{E}$  est conservée, on déduit

$$\int_0^T (\tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t)) \geq \frac{1}{1 + \alpha c_0} \int_0^T \tilde{E}(t) = \frac{T}{1 + \alpha c_0} \tilde{E}(0) \geq T \frac{1 - \alpha c_0}{1 + \alpha c_0} (\tilde{e}_1(0) + \tilde{e}_2(0)).$$

En utilisant cette inégalité dans (1.3.43) et en choisissant  $\alpha_3 \in (0, \alpha_2)$  tel que pour tout  $\alpha \in (0, \alpha_3)$

$$\frac{1 - \alpha c_0}{1 + \alpha c_0} \geq \frac{1}{2},$$

on obtient (1.3.39). De plus, d'après la définition de  $\tilde{e}_2$ , i.e.

$$\tilde{e}_2(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_2|^2 + |\nabla^{-1} u_2|^2),$$

De (1.3.21) et (1.3.22) on déduit

$$\int_0^T \tilde{e}_2(t) \leq \frac{K_{28}}{\alpha(1 - \alpha c_1)} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + \frac{K_{29}}{(1 - \alpha c_1)^2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2). \quad (1.3.44)$$

On obtient les estimations (1.3.41), (1.3.42) et (1.3.43) facilement à partir les estimations correspondants (1.3.19), (1.3.22) et (1.3.44).  $\square$

Maintenant, on va énoncer deux lemmes clés qui seront les outils principaux pour la démonstration de notre inégalité d'observabilité inverse (1.3.14) du théorème 1.3.1.

Dans la suite, "Supp  $f$ " désigne le support de la fonction  $f$  et  $\partial_{\nu}$  désigne  $\frac{\partial}{\partial \nu}$ .

**Lemme 1.3.4.** *Prenons le même  $\alpha_0$  du lemme 1.3.1. Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_{\alpha})U^0$  de (1.1.4) satisfait les deux inégalités suivantes*

1.

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} |\nabla u_1|^2 \leq \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1'|^2 + C_1 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1|^2 \\ + \alpha^2 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_2|^2 + c_0(e_1(0) + e_1(T)), \end{cases} \quad (1.3.45)$$

2.

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1|^2 \leq \frac{\delta}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1'|^2 + \frac{C_2}{2\delta} \int_0^T \int_{\omega} |u_1'|^2 \\ + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 + \frac{\alpha C_3}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 + C_4(e_1(0) + e_1(T)) \quad \forall \delta > 0, \end{cases} \quad (1.3.46)$$

où  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  sont des constantes positives indépendantes de  $T, \alpha$  et  $U^0$ .

*Démonstration.* On commence d'abord la preuve de l'inégalité (1.3.45). Comme  $\overline{\Omega \setminus \omega_{\varepsilon_1}} \cap \overline{\omega_{\varepsilon_0}} = \emptyset$ , on peut construire une fonction  $\xi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui ait les propriétés suivantes

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{sur } \omega_{\varepsilon_0}, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega_{\varepsilon_1}, \\ 0 \leq \xi \leq 1 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.3.47)$$

En multipliant la première équation de (1.1.4) par  $\xi u_1$ , en intégrant sur  $[0, T] \times \Omega$  et en utilisant l'égalité

$$\nabla u_1 \cdot \nabla (\xi u_1) = \xi |\nabla u_1|^2 + \nabla \xi \cdot \nabla \left( \frac{|u_1|^2}{2} \right),$$

nous obtenons

$$\int_0^T \int_\Omega \left( -\xi |u_1'|^2 + \xi |\nabla u_1|^2 - \frac{\Delta \xi}{2} |u_1|^2 + \alpha \xi u_1 u_2 \right) dx dt + \left[ \int_\Omega u_1' \xi u_1 \right]_0^T = 0.$$

Comme  $\text{Supp } \xi \subset \omega_{\varepsilon_1}$ , on conclut

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} |\nabla u_1|^2 \leq \int_0^T \int_\Omega \xi |\nabla u_1|^2 \\ = \int_0^T \int_\Omega \left( \xi |u_1'|^2 + \frac{\Delta \xi}{2} |u_1|^2 - \alpha \xi u_1 u_2 \right) dx dt - \left[ \int_\Omega u_1' \xi u_1 \right]_0^T \\ \leq C_5 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} (|u_1'|^2 + |u_1|^2) + \alpha^2 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_2|^2 + c_0(e_1(0) + e_1(T)). \end{cases}$$

Maintenant on va démontrer la deuxième inégalité (1.3.46). Pour cela, on adapte une méthode des multiplicateurs introduite par F. Conrad et B. Rao [28]. Comme  $\overline{\Omega \setminus \omega} \cap \overline{\omega_{\varepsilon_1}} = \emptyset$ , on peut donc construire une fonction  $\zeta$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui ait les propriétés suivantes

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{sur } \omega_{\varepsilon_1}, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega, \\ 0 \leq \zeta \leq 1 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.3.48)$$

Soit  $t$  fixé. On considère  $Z$  une solution du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta Z = \zeta(x) u_1 & \text{dans } \Omega, \\ Z = 0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.49)$$

On multiplie la première équation de (1.3.49) par  $Z$  pour en déduire qu'il existe  $C_6 > 0$  tel que

$$\int_{\Omega} |\nabla Z|^2 \leq C_6 \int_{\Omega} \zeta |u_1|^2 \leq C_6 \int_{\omega} |u_1|^2. \quad (1.3.50)$$

Donc l'inégalité de Poincaré nous donne

$$\int_{\Omega} |Z|^2 \leq C_7 \int_{\Omega} \zeta |u_1|^2 \leq C_7 \int_{\omega} |u_1|^2, \quad (1.3.51)$$

avec  $C_7 = c_0 C_6$ . D'autre part, en dérivant par rapport à  $t$ , on voit que  $Z'$  est une solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta Z' = \zeta(x) u'_1 & \text{dans } \Omega, \\ Z' = 0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.52)$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} |Z'|^2 \leq C_7 \int_{\omega} |u'_1|^2. \quad (1.3.53)$$

Ensuite on multiplie la première équation de (1.1.4) par  $Z$  et on intègre sur  $[0, T] \times \Omega$ , on obtient donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-u'_1 Z' - u_1 \Delta Z + \alpha u_2 Z) + \left[ \int_{\Omega} u'_1 Z \right]_0^T = 0. \quad (1.3.54)$$

Alors en insérant (1.3.49)<sub>1</sub> dans (1.3.54),

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-u'_1 Z' + \zeta |u_1|^2 + \alpha u_2 Z) + \left[ \int_{\Omega} u'_1 Z \right]_0^T = 0. \quad (1.3.55)$$

Donc l'inégalité de Young implique

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} \zeta |u_1|^2 \leq \delta \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 + \frac{C_8}{\delta} \int_0^T \int_{\Omega} |Z'|^2 + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} \zeta |u_2|^2 \\ \quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |Z|^2 + C_9(e_1(0) + e_1(T)) \quad \forall \delta > 0. \end{cases}$$

Ensuite (1.3.51) et (1.3.53) impliquent

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1|^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \zeta |u_1|^2 \\ \leq \frac{\delta}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 + \frac{C_7}{2\delta} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 \\ \quad + \frac{\alpha C_7}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 + C_8(e_1(0) + e_1(T)) \quad \forall \delta > 0. \end{cases} \quad (1.3.56)$$

□

Maintenant on retourne à la preuve du théorème 1.3.1. D'abord, on va démontrer l'inégalité directe (1.3.13). En utilisant (1.2.12), on obtient

$$e_1(t) + e_2(t) = \frac{\|U(t)\|^2}{2} \leq \frac{1}{c_1(\alpha)} \|U(t)\|_\alpha^2 = \frac{2}{c_1(\alpha)} E(U(t)) = \frac{2}{c_1(\alpha)} E(U(0)),$$

donc

$$\int_0^T \int_\omega |u_1'^2| \leq \int_0^T \int_\Omega |u_1'^2| \leq 2 \int_0^T e_1(t) \leq \frac{4T}{c_1(\alpha)} E(U(0)).$$

La démonstration de l'inégalité inverse (1.3.14) requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* On multiplie la première équation de (1.1.4) par

$$m \cdot \nabla u_1 = \sum_{j=1}^m (x_j - x_0) \partial_j u_1,$$

et on intègre par parties sur  $[0, T] \times \Omega$ . On obtient alors (cf. [50] p.20)

$$\int_0^T \int_\Omega (u_1'' - \Delta u_1 + \alpha u_2) m \cdot \nabla u_1 = 0. \quad (1.3.57)$$

Donc

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \alpha u_2 m \cdot \nabla u_1 = \left[ u_1' m \cdot \nabla \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (-u_1' m \cdot \nabla u_1' - \Delta u_1 m \cdot \nabla u_1) \\ & = \left[ \int_\Omega u_1' m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega m \cdot \nabla (u_1')^2 + \nabla u_1 \nabla (m \cdot \nabla u_1) \\ & \quad - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u_1 m \cdot \nabla u_1 \\ & = \left[ \int_\Omega u_1' m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu) (u_1')^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} m) (u_1')^2 \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^N \partial_i u_1 \partial_i (m_j \partial_j u_1) - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u_1 m \cdot \nabla u_1 \\ & = \left[ \int_\Omega u_1' m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu) (u_1')^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} m) (u_1')^2 \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (\partial_i m_j) (\partial_i u_1) (\partial_j u_1) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N m_j \partial_j ((\partial_i u_1)^2) - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u_1 m \cdot \nabla u_1 \\ & = \left[ \int_\Omega u_1' m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma ((m \cdot \nu) (u_1')^2 - |\nabla u_1|^2) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} m) ((u_1')^2 - |\nabla u_1|^2) \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^N (\partial_i m_j) (\partial_i u_1) (\partial_j u_1) - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u_1 m \cdot \nabla u_1. \end{aligned} \right. \quad (1.3.58)$$

Ensuite on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} u_1 m \cdot \nabla u_1 + \frac{1}{2} (m \cdot \nu) (u_1')^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_1|^2) \\ = \left[ \int_{\Omega} u_1' m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} m) ((u_1')^2 - |\nabla u_1|^2) \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha u_2 m \cdot \nabla u_1 + \sum_{i,j=1}^N (\partial_i m_j) (\partial_i u_1) (\partial u_1). \end{array} \right. \quad (1.3.59)$$

La troisième équation de (1.1.4) implique  $u_1' = 0$  et  $\nabla u_1 = (\partial_{\nu} u_1) \nu$  sur  $\Gamma$ . Et  $\partial_i m_j = \delta_{ij}$  et  $\operatorname{div} m = n$ . On conclut de (1.3.59) alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu |\partial_{\nu} u_1|^2 = \left[ \int_{\Omega} u_1' m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \frac{N}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u_1'^2 + (1 - N) |\nabla u_1|^2 \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha u_2 m \cdot \nabla u_1. \end{array} \right. \quad (1.3.60)$$

D'un autre côté, multiplions la première équation de (1.1.4) par  $u_1$  et intégrons par parties sur  $[0, T] \times \Omega$ . On obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_1'' - \Delta u_1 + \alpha u_2) u_1 = 0. \quad (1.3.61)$$

Donc

$$\left[ \int_{\Omega} u_1' u_1 \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} |u_1'|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^2 + \alpha u_2 u_1) = 0. \quad (1.3.62)$$

Posons

$$Mu_1 := m \cdot \nabla u_1 + \frac{N-1}{2} u_1.$$

Alors on déduit de (1.3.60) et (1.3.62) que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\partial_{\nu} u_1|^2 = \int_0^T e_1(t) dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} u_2 M u_1 + \left[ \int_{\Omega} u_1' M u_1 \right]_0^T. \quad (1.3.63)$$

Maintenant, la formule de Green (cf. [50], p.38) nous donne

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |Mu_1|^2 - \int_{\Omega} |m \cdot \nabla u_1|^2 &= \int_{\Omega} \left( \frac{(N-1)^2}{4} |u_1|^2 + (N-1) u_1 m \cdot \nabla u_1 \right) \\
 &= \int_{\Omega} \left( \frac{(N-1)^2}{4} |u_1|^2 + \frac{(N-1)}{2} m \cdot \nabla (|u_1|^2) \right) \\
 &= \frac{(N-1)}{2} \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |u_1|^2 + \int_{\Omega} \frac{(N-1)^2}{4} |u_1|^2 \\
 &\quad - \int_{\Omega} \frac{(N-1)}{2} (\operatorname{div} m) |u_1|^2 \\
 &= \frac{1}{2} (1 - N^2) \int_{\Omega} |u_1|^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

On conclut donc que pour tout  $t \geq 0$  on a

$$\int_{\Omega} |Mu_1|^2 \leq R \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2. \quad (1.3.64)$$

(On rappelle que  $R = \sup_{x \in \Omega} |m(x)|$ ).

De (1.3.63) on déduit (cf. [50], p.38)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |u'_1 Mu_1| &\leq \left( \int_{\Omega} |u'_1|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |Mu_1|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} |u'_1|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |m \cdot \nabla u_1|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} |u'_1|^2 + \frac{1}{2R} \int_{\Omega} |m \cdot \nabla u_1|^2 \\
 &\leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} (|u'_1|^2 + |\nabla u_1|^2).
 \end{aligned}$$

Alors d'après la définition de l'énergie partielle  $e_1$  on obtient l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} |u'_1 Mu_1| \leq R e_1(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (1.3.65)$$

De la définition de  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  on voit que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu |\partial_{\nu} u_1|^2 &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} \underbrace{m \cdot \nu}_{\leq 0} |\partial_{\nu} u_1|^2 + \int_0^T \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\partial_{\nu} u_1|^2 \\
 &\leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\partial_{\nu} u_1|^2.
 \end{aligned}$$



Alors, en utilisant l'inégalité de Poincaré dans (1.3.63), puis en insérant (1.3.64) et (1.3.65) dans l'inégalité résultante on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\partial_\nu u_1|^2 \geq \int_0^T e_1(t) dt - \frac{R\alpha\gamma}{2} \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 - \frac{R\alpha}{2\gamma} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_1|^2 \\ - R(e_1(0) + e_1(T)) \quad \forall \gamma > 0. \end{array} \right. \quad (1.3.66)$$

*Etape 2.* Dans cette étape, on prend la fonction  $h \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$  telle que

$$h \cdot \nu = 1 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad h \cdot \nu \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \text{supp } h \subset \tilde{\omega}.$$

L'existence de  $h$  a été démontré par J.L. Lions [69]. Alors, multiplions la première équation de (1.1.4) par  $h \cdot \nabla u_1$ , puis intégrons sur  $[0, T] \times \Omega$ . On obtient l'équation suivante en répétant les mêmes arguments pour obtenir (1.3.59), mais en remplaçant  $m$  par  $h$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u_1 h \cdot \nabla u_1 + \frac{1}{2} (h \cdot \nu) |u_1'|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_1|^2) \\ = \left[ \int_\Omega u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\text{div } h) ((u_1')^2 - |\nabla u_1|^2) \\ + \int_0^T \int_\Omega \alpha u_2 h \cdot \nabla u_1 + \sum_{i,j=1}^N (\partial_i h_j) (\partial_i u_1) (\partial_j u_1). \end{array} \right. \quad (1.3.67)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_\Omega \frac{\text{div } h}{2} (|u_1'|^2 - |\nabla u_1|^2) + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (\partial_i h_j) (\partial_i u_1) (\partial_j u_1) \\ + \alpha \int_0^T \int_\Omega u_2 h \cdot \nabla u_1 + \left[ \int_\Omega u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T \\ = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma h \cdot \nu |\partial_\nu u_1|^2 \geq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} h \cdot \nu |\partial_\nu u_1|^2. \end{array} \right. \quad (1.3.68)$$

Comme  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors il existe une constante positive  $c_h$  tel que

$$|h(x)| \leq c_h \quad \text{et} \quad \sum_{i,j=1}^N |\partial_i h_j(x)| \leq c_h, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Ensuite, d'après l'inégalité de Young et le fait que  $\text{supp } h \subset \tilde{\omega} \subset \omega_{\varepsilon_0}$  on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\partial_\nu u_1|^2 \leq C_9 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} (|u_1'|^2 + |\nabla u_1|^2) \\ + \alpha^2 \int_0^T \int_\Omega |u_2|^2 + c_h (e_1(0) + e_1(T)), \end{array} \right. \quad (1.3.69)$$

où  $C_9$  est une constante indépendante de  $T$ ,  $\alpha$  et  $U^0$ .

Par conséquent, en combinant (1.3.66) et (1.3.69), on conclut

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt - \frac{R}{2}(\alpha\gamma + \alpha^2) \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 - \frac{R\alpha}{2\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 - C_{10}(e_1(0) + e_1(T)) \\ \leq C_9 R \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} (|u'_1|^2 + |\nabla u_1|^2) \quad \forall \gamma > 0, \end{array} \right. \quad (1.3.70)$$

où  $C_{10} = R + c_h R$ .

Ensuite, en insérant (1.3.45) dans (1.3.70) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt - \frac{R\alpha}{2\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 - \left( \frac{R\alpha\gamma}{2} + \frac{R}{2}\alpha^2 + C_9 R\alpha^2 \right) \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 \\ - C_{11}(e_1(0) + e_1(T)) \leq C_{12} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u'_1|^2 + C_{13} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1|^2 \quad \forall \gamma > 0, \end{array} \right. \quad (1.3.71)$$

où  $C_{11} = C_{11} + c_0$ ,  $C_{12} = 2C_9 R$  et  $C_{13} = C_1 C_9 R$ .

Notre problème maintenant est la constante  $C_{13}$ . Il n'est pas suffisamment petite et indépendante de  $\alpha$ . Mais on peut dépasser cette difficulté en reportant (1.3.46) dans (1.3.71), d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt - \frac{C_{13}\delta}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 - \frac{R\alpha}{2\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \\ - C_{\alpha}\alpha \int_0^T \int_{\Omega} |u_2|^2 - C_{14}(e_1(0) + e_1(T)) \\ - \alpha C_{15} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 \leq C_{16} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 \quad \forall \gamma, \delta > 0, \end{array} \right. \quad (1.3.72)$$

où  $C_{\alpha,\gamma} = R\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} + C_9\alpha + \frac{C_{13}}{2}\right)$ ,  $C_{14} = C_{11}(1 + C_4)$ ,  $C_{15} = \frac{C_{13}C_3}{2}$  et  $C_{16} = \max\left(C_{12} + \frac{C_{13}C_2}{2}\right)$ .

En insérant (1.3.15) dans (1.3.72), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt - \frac{C_{13}\delta}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 - \frac{R\alpha}{2\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \\ - \alpha C_{1\alpha,\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 - \left(\frac{C_{\alpha,\gamma}}{\gamma_1} + C_{14}\right) (e_1(0) + e_1(T)) \\ - C_{\alpha,\gamma}\gamma_1 (\tilde{e}_2(0) + \tilde{e}_2(T)) \leq C_{16}(1 + \frac{1}{\delta}) \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 \\ \forall \gamma, \gamma_1 \text{ et } \delta > 0, \end{array} \right. \quad (1.3.73)$$

où  $C_{1\alpha,\gamma} = C_{15} + C_{\alpha,\gamma}$ .

En utilisant les estimations (1.3.19) et (1.3.20) dans (1.3.73), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e_1(t)dt - \frac{C_{13}\delta}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 - C_{2\alpha,\gamma_1}\alpha \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 - \frac{R\alpha}{2\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \\ - C_{3\alpha,\gamma_1}\alpha \int_0^T \int_{\Omega} |u_1|^2 - C_{4\alpha,\gamma_1} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) \leq C_{16}(1 + \frac{1}{\delta}) \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 \\ \forall \gamma, \gamma_1 \text{ et } \delta > 0, \end{array} \right. \quad (1.3.74)$$

où

$$C_{1\alpha,\gamma,\gamma_1} = \left(\frac{C_{\alpha,\gamma}}{\gamma_1} + C_{14}\right) \frac{K_2}{1 - \alpha_0\sqrt{c_0}} + \frac{C_{\alpha,\gamma}\gamma_1 K_4}{(1 - \alpha_0\sqrt{c_0})^2},$$

$$C_{2\alpha,\gamma,\gamma_1} = C_{1\alpha,\gamma} + C_{1\alpha,\gamma,\gamma_1}$$

et

$$C_{3\alpha,\gamma,\gamma_1} = \left(\frac{C_{\alpha,\gamma}}{\gamma_1} + C_{14}\right) K_1 + \frac{C_{\alpha,\gamma}\gamma_1 K_3}{1 - \alpha_0\sqrt{c_0}}.$$

Pour  $\alpha, \frac{\alpha}{\gamma}$  et  $\delta$  suffisamment petits, l'inégalité de Poincaré et la définition de  $e_1(t)$  conduisent (1.3.74) à

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - C_{17}\left(\alpha + \frac{\alpha}{\gamma} + \delta\right)\right) \int_0^T e_1(t)dt - C_{18}e_1(0) - C_{19}\tilde{e}_2(0) \\ \leq C_{16}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2, \end{array} \right. \quad (1.3.75)$$

Maintenant, soit  $\varepsilon > 0$  un arbitrair positif fixe dans  $(0, \varepsilon^*)$ , où  $\varepsilon^*$  est choisi suffisamment petit. Alors (1.3.75) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \varepsilon) \int_0^T e_1(t) dt + \varepsilon \int_0^T (e_1(t) + \tilde{e}_2(t)) dt - \varepsilon \int_0^T \tilde{e}_2(t) dt \\ -C_{18}e_1(0) - C_{19}\tilde{e}_2(0) \leq C_{20} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2, \end{array} \right. \quad (1.3.76)$$

En utilisant (1.3.39) et (1.3.42) dans (1.3.76), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{20} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 \geq (1 - \varepsilon C_{21}) \int_0^T e_1(t) dt + \varepsilon \frac{\delta_2 T}{2} \tilde{e}_1(0) \\ -C_{22} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} e_1(0) + [\varepsilon \frac{\delta_2 T}{2} - C_{22} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha}] \tilde{e}_2(0). \end{array} \right. \quad (1.3.77)$$

On pose  $\varepsilon_0 = \frac{1}{C_{21}}$  et on suppose que  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon_0$ , et on insère (1.3.36) dans

(1.3.77) pour éliminer le terme  $\int_0^T e_1(t) dt$ , on obtient de (1.3.77) alors

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{20} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 \geq \left( \frac{a_1 T}{1 + \alpha T} - C_{22} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} \right) e_1(0) + \varepsilon \frac{\delta_2 T}{2} \tilde{e}_1(0) \\ + \left[ \left( a_2 - \frac{a_1}{1 + \alpha T} \right) T - C_{22} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} \right] \tilde{e}_2(0), \end{array} \right. \quad (1.3.78)$$

où  $a_1 = \frac{(1 - \varepsilon C_{21})}{2} K_{22} > 0$  et  $a_2 = \frac{\varepsilon \delta_2}{2} > 0$ .

On remarque que le coefficient de  $\tilde{e}_1(0)$  dans (1.3.78) est strictement positif. Pour compléter la preuve du théorème, il nous reste à démontrer que les coefficients de  $e_1(0)$  et  $\tilde{e}_2(0)$  qui dépendent seulement de  $T$ ,  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont positifs pour  $T$  suffisamment grand,  $\alpha$  et  $\varepsilon^*$  suffisamment petits.

On pose

$$T_1 = T_1(\alpha) = \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) \alpha^{-1},$$

alors

$$T_1(\alpha) \longrightarrow +\infty, \quad \text{lorsque } \varepsilon \text{ ou } \alpha \longrightarrow 0.$$

Donc, pour  $T \geq T_1(\alpha)$  on a  $a_2 - \frac{a_1}{1 + \alpha T} > 0$ .

Maintenant on désigne par  $Q_\alpha$  le polynôme du second ordre en  $T$  défini par

$$Q_\alpha(T) = \alpha a_2 T^2 + [a_2 - a_1 - C_{22}(\varepsilon + \alpha)]T - C_{22} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha}.$$

Ce polynôme a deux racines. De plus, on remarque que le coefficient de  $T$  dans ce polynôme est négatif pour  $\varepsilon$  suffisamment petit indépendamment de  $\alpha$ . Alors ce polynôme a deux racines de signes contraires. On désigne par  $T_2^-(\alpha)$  la racine négative et  $T_2^+(\alpha)$  la racine positive. On remarque que pour  $T_2^+(\alpha) > T_1(\alpha)$  car  $Q_\alpha$  peut s'écrire sous la forme

$$Q_\alpha = \frac{a_1\alpha(T - T_1(\alpha))T}{1 + \alpha T_1(\alpha)} - \frac{C_{22}(\varepsilon + \alpha)(1 + \alpha T)}{\alpha}.$$

Donc pour  $T \geq T_2^+(\alpha)$  le coefficient de  $\tilde{e}_2(0)$  est positif. Il est donné par

$$\alpha a_2 \frac{\alpha(T - T_2^+(\alpha))(T - T_2^-(\alpha))}{1 + \alpha T}.$$

Il nous reste à voir si le coefficient de  $e_1(0)$  dans (1.3.78) sera positif. Ce coefficient sera positif pour suffisamment grand  $T$  si  $a_1 - C_{22}(\varepsilon + \alpha)$  peut être positif pour suffisamment petits  $\varepsilon$  et  $\alpha$ . C'est facile à réaliser en prenant  $\alpha^* < K_{22}(2C_{22})^{-1}$  et en choisissant  $\varepsilon^* = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$  où

$$\varepsilon_1 = \frac{K_{22} - 2C_{22}\alpha^*}{2C_{22} + K_{22}C_{21}}.$$

Maintenant, pour  $\alpha \in (0, \alpha^*)$  et  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  on pose

$$T_3 = T_3(\alpha) = \frac{C_{22}(\varepsilon + \alpha)}{a_1 - C_{22}(\varepsilon + \alpha)} > 0.$$

On remarque que  $T_3 = T_3(\alpha)$  est tel que

$$\frac{C_{22}(\varepsilon + \alpha)}{\alpha} = \frac{a_1 T_3}{1 + \alpha T_3},$$

le coefficient de  $e_1(0)$  dans (1.3.78) est donné par

$$\left[ \frac{a_1(T - T_3(\alpha))}{(1 + \alpha T)(1 + \alpha T_3(\alpha))} \right]$$

et il est positif pour  $T \geq T_3(\alpha)$ . Utilisons les expressions ci-dessus des coefficients de  $\tilde{e}_2(0)$  et  $e_1(0)$  dans (1.3.78), on obtient l'inégalité d'observabilité suivante avec des coefficients positifs pour  $T \geq \max(T_2^+(\alpha), T_3(\alpha))$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{20} \int_0^T \int_\omega |u'_1|^2 \geq \left[ \frac{a_1(T - T_3(\alpha))}{(1 + \alpha T)(1 + \alpha T_3(\alpha))} \right] e_1(0) \\ \quad + \left[ \alpha a_2 \frac{\alpha(T - T_2^+(\alpha))(T - T_2^-(\alpha))}{1 + \alpha T} \right] \tilde{e}_2(0). \end{array} \right. \quad (1.3.79)$$

D'où la démonstration complète du théorème 1.3.1.

## 1.4 Contrôlabilité exacte interne indirecte

Cette étude est guidée par la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M, introduite par J.L. Lions dans [69].

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y_{1,tt} - \Delta y_1 + \alpha y_2 = v 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y_{2,tt} - \Delta y_2 + \alpha y_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y_1 = y_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y_i(0) = y_i^0, \quad y_{i,t}(0) = y_i^1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (1.4.80)$$

où  $v = \frac{\partial}{\partial t}(u_1')$  et  $1_\omega$  est la fonction caractéristique de  $\omega$ .

La solution de (1.4.80) peut se définir par la méthode de transposition (cf. J.L. Lions et E. Magenes [71]) qu'on va la détailler dans la preuve du théorème 1.4.1.

On se pose alors le problème de contrôlabilité exacte indirecte suivant : étant donné  $T > 0$  (suffisamment grand) et des données initiales  $Y^0 = (y_0, y_1, z_0, z_1)$ , **existe-t-il un contrôle**  $v$  qui ramène la solution de (1.4.80) à l'équilibre au temps  $T$ , i.e.  $y_1(T) = y_{1,t}(T) = y_2(T) = y_{2,t}(T) = 0$ ? En appliquant la méthode **HUM** de Lions, on montre le résultat suivant :

**Théorème 1.4.1.** *Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , pour  $T > T_0$  où  $\alpha^*$  et  $T_0$  sont donnés dans le théorème 1.3.1 et pour tout*

$$Y^0 = (y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

*il existe un contrôle interne*

$$v \in [H^1(0, T; L^2(\Omega))]'$$

*tel que la solution du système (1.4.80) vérifie*

$$y_1(T) = y_{1,t}(T) = y_2(T) = y_{2,t}(T) = 0.$$

Avant commencer la preuve du théorème, on a besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 1.4.1.** (Inégalité de Gronwall). *Soit  $\phi$  une fonction scalaire continue telle que*

$$\phi(t) \leq \gamma_1 + \gamma_2 \int_{t_0}^t \phi(s) ds$$

*pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , où  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des constantes positives. Alors on a*

$$\phi(t) \leq \gamma_1 e^{\gamma_2(t-t_0)}$$

*pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ .*

**Lemme 1.4.2.** Soient  $(f_1, f_2) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))^2$  et  $(\theta_i^0, \theta_i^1) \in (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2$   $i = 1, 2$ . Alors le système

$$\begin{cases} \theta_{1,tt} - \Delta\theta_1 + \alpha\theta_2 = f_1 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \theta_{2,tt} - \Delta\theta_2 + \alpha\theta_1 = f_2 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \theta_1 = \theta_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ \theta_i(0) = \theta_i^0, \quad \theta_{i,t}(0) = \theta_i^1 & \text{sur } \Omega, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (1.4.81)$$

admet une unique solution  $(\theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2')$  dans  $\mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$ . De plus, on a

$$\begin{cases} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) \leq k \left( e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) + \|f_1\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right. \\ \left. + \|f_2\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \end{cases} \quad (1.4.82)$$

où  $k$  est une contante dépendant de  $\alpha$  et de la constante de Poincaré  $c_0$ .

*Démonstration.* On pose  $X(t) = (\theta_1(t), \theta_1'(t), \theta_2(t), \theta_2'(t))$ . Le problème (1.4.81) peut se reformuler sous la forme de

$$\begin{cases} X'(t) + \mathcal{A}_\alpha X(t) = f(t), \\ X(0) = X^0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (1.4.83)$$

où  $f(t) = (0, f_1(t), 0, f_2(t))$ .

D'après la proposition 1.2.2,  $-\mathcal{A}_\alpha$  est anti-adjoint, alors d'après le théorème de Stone  $-\mathcal{A}_\alpha$  est le générateur d'un  $\mathcal{C}^0$ -groupe unitaire sur  $\mathcal{H}$ . Par conséquent, un théorème classique de semigroupe pour un problème non homogène montre que le problème (1.4.83) admet une unique solution  $X \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{H})$ . Maintenant, on va démontrer (1.4.82). On multiplie la première équation de (1.4.81) par  $\theta_1'$  et la deuxième équation par  $\theta_2'$ , on obtient

$$\begin{cases} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) + \alpha \int_0^t \int_\Omega \theta_2(s) \theta_1'(s) ds + \alpha \int_0^t \int_\Omega \theta_1(s) \theta_2'(s) ds \\ - \int_0^t \int_\Omega f_1(s) \theta_1'(s) - \int_0^t \int_\Omega f_2(s) \theta_2'(s) = e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) \end{cases} \quad (1.4.84)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

Donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, on

obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) \leq e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) \\ + \alpha \int_0^t \left[ \left( \int_{\Omega} \theta_2^2(s) dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \theta_1'^2(s) dx \right)^{1/2} \right] ds \\ + \alpha \int_0^t \left[ \left( \int_{\Omega} \theta_1^2(s) dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \theta_2'^2(s) dx \right)^{1/2} \right] ds \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f_1^2(s) dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \theta_1'^2(s) dx ds \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f_2^2(s) dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \theta_2'^2(s) dx ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.4.85)$$

En appliquant l'inégalité de Young de nouveau, (1.4.85) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) \leq e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} \theta_2^2(s) + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \theta_1'^2(s) \\ + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} \theta_1^2(s) + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \theta_2'^2(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \theta_1'^2(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \theta_2'^2(s) \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f_1^2(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f_2^2(s) \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.4.86)$$

Ensuite, de l'inégalité de Poincaré et de la définition de  $e_1$  et  $e_2$ , (1.4.86) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) \leq e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) + \bar{c}_1(\alpha) \int_0^t e(\theta_1(s)) + \bar{c}_2(\alpha) \int_0^t e(\theta_2(s)) \\ + \frac{1}{2} \|f_1\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|f_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.4.87)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) \leq e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) + \frac{1}{2} \|f_1\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|f_2\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \\ + \max\{c_1(\alpha), c_2(\alpha)\} \int_0^t (e(\theta_1(s)) + e(\theta_2(s))) ds \end{array} \right. \quad (1.4.88)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .



Alors en appliquant l'inégalité de Gronwall, (1.4.88) nous donne

$$\begin{cases} e(\theta_1(t)) + e(\theta_2(t)) \\ \leq \left[ e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) + \frac{1}{2} \|f_1\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|f_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right] e^{(\max\{c_1(\alpha), c_2(\alpha)\}T)} \end{cases} \quad (1.4.89)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . D'où la preuve de (1.4.82).  $\square$

Maintenant, on retourne à la preuve du théorème 1.4.1. On va appliquer la méthode de **HUM**. On résoud d'abord, le problème homogène

$$\begin{cases} u_{1,tt} - \Delta u_1 + \alpha u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_{2,tt} - \Delta u_2 + \alpha u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u_i(0) = u_i^0, \quad u_{i,t}(0) = u_i^1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (1.4.90)$$

où  $(u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in (\mathcal{D}(\Omega))^4$ . La proposition 1.2.2 affirme que ce problème est bien posé.

Puis on résoud le problème rétrograde suivant

$$\begin{cases} \psi_{1,tt} - \Delta \psi_1 + \alpha \psi_2 = \frac{\partial}{\partial t}(u_1')1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \psi_{2,tt} - \Delta \psi_2 + \alpha \psi_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \psi_1 = \psi_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ \psi_i(T) = \psi_{i,t}(T) = 0 \quad i = 1, 2 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.4.91)$$

On note que la dérivée  $\frac{\partial}{\partial t}(u_1')1_\omega$  n'est pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  et son dual  $[H^1(0, T; L^2(\Omega))]'$ , i.e. de sorte que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(u_1')1_\omega, z \right\rangle = - \int_0^T \int_\omega u_1' z' dx dt \quad \forall z \in H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

La solution  $\Psi = (\psi_1, \psi_1', \psi_2, \psi_2')$  du système (1.4.91) est définie par la méthode de transposition. En effet, on doit vérifier que  $(\psi_1, \psi_2)$  est une solution de

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega (\psi_1 f_1 + \psi_2 f_2) dx dt + \int_\Omega (\psi_1(0)\theta_1^1 + \psi_2(0)\theta_2^1 - \psi_1'(0)\theta_1^0 - \psi_2'(0)\theta_2^0) dx dt \\ = - \int_0^T \int_\omega u_1' \theta_1' dx dt \end{cases} \quad (1.4.92)$$

pour tout

$$(\theta_1^0, \theta_1^1, f_1, \theta_2^0, \theta_2^1, f_2) \in \left[ H_1^0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) \right]^2,$$

où  $(\theta_1, \theta_2)$  est la solution du problème (1.4.81).

(Noter que l'intégrale  $\int_0^T \int_{\Omega} (\psi_1 f_1 + \psi_2 f_2) dx dt$  doit être interprétée au sens de la dualité entre  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ ).  
Maintenant, on pose

$$X_0 = (\theta_1^0, \theta_1^1, f_1, \theta_2^0, \theta_2^1, f_2), \quad \tilde{\mathcal{H}} = \left[ H_1^0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) \right]^2,$$

et on considère l'application  $L$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$L(X_0) = - \int_0^T \int_{\omega} u_1' \theta_1' dx dt. \quad (1.4.93)$$

Il est clair que  $L$  est linéaire et bien définie. Il nous reste à vérifier que  $L$  est continue *i.e.* il existe une constante positive  $C^*$  telle que

$$|L(X_0)| \leq C^* \|X_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \quad \forall X_0 \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (1.4.94)$$

où  $C^*$  est une constante dépendant de  $E(0)$  et  $T$ .

La vérification est facile. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.4.93) nous donne

$$|L(X_0)| \leq \left( \int_0^T \int_{\omega} |u_1'|^2 dx dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\theta_1'|^2 dx dt \right)^{1/2}. \quad (1.4.95)$$

Alors, en utilisant (1.3.13) et la définition de  $e_1$  dans (1.4.95) on obtient

$$|L(X_0)| \leq \left( \frac{4T}{c_1(\alpha)} E(0) \right)^{1/2} \left( 2 \int_0^T e_1(\theta_1(t)) dt \right)^{1/2}. \quad (1.4.96)$$

Donc, d'après (1.4.82), (1.4.96) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} |L(X_0)| \leq \left( \frac{4T}{c_1(\alpha)} E(0) \right)^{1/2} \times \\ \left( 2Tk \left( e(\theta_1^0) + e(\theta_2^0) + \|f_1\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|f_2\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \right)^{1/2}. \end{array} \right. \quad (1.4.97)$$

D'où (1.4.94) et  $L \in \tilde{\mathcal{H}}'$ . Par suite, il existe  $X_1 \in \tilde{\mathcal{H}}'$  unique tel que

$$\langle X_1, X_0 \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}', \tilde{\mathcal{H}}} = L(X_0),$$

où  $X_1$  est noté par  $(\psi'_1(0), -\psi_1(0), \psi_1, \psi'_2(0), -\psi_2(0), \psi_2)$  et  $\tilde{\mathcal{H}}'$  est noté par  $\left[ H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \right]^2$ .

On définit ensuite un opérateur linéaire  $\Lambda$  par

$$\Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)) := (\psi'_1(0), -\psi_1(0), \psi'_2(0), -\psi_2(0)).$$

On considère des données initiales  $(\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \in (\mathcal{D}(\Omega))^4$  et  $(\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2)$  solution du problème (1.1.4) associé.

En multipliant la première équation du système (1.4.90) par  $\varphi_1$ , la deuxième équation par  $\varphi_2$  et en intégrant sur  $[0, T] \times \Omega$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \rangle \\ = \int_{\Omega} [\psi'_1(0)\varphi_1^0 + \psi'_2(0)\varphi_2^0 - \psi_1(0)\varphi_1^1 - \psi_2(0)\varphi_2^1] dx \\ = \int_0^T \int_{\omega} u'_1 \varphi'_1 dx dt, \end{array} \right. \quad (1.4.98)$$

et en particulier

$$\langle \Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)), (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \rangle = \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 dx dt. \quad (1.4.99)$$

On considère sur  $(\mathcal{D}(\Omega))^4$  la semi-norme définie par

$$\|U^0\|_{\mathcal{F}} = \left( \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 dx dt \right)^{1/2}, \quad (1.4.100)$$

où  $U = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$  désigne la solution de (1.4.90) associée aux conditions initiales  $U^0$ . Grâce à l'inégalité inverse dans le théorème 1.3.1,  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  est une norme sur  $(\mathcal{D}(\Omega))^4$ . On note par  $\mathcal{F}$  le complété de cet espace par rapport à cette norme. On obtient ainsi un espace de Hilbert.

Les inégalités directe et inverse impliquent que les injections

$$(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))^2 \subset \mathcal{F} \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

sont continues. Par suite on a l'injection continue

$$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset \mathcal{F}'.$$

D'après (1.4.98) et (1.4.100) on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \rangle \\ = ((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1))_{\mathcal{F}} \\ \forall (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \in (\mathcal{D}(\Omega))^4. \end{array} \right. \quad (1.4.101)$$

où  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}}$  désigne le produit scalaire associé à la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ , et par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} |\langle \Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \rangle| \\ \leq \| (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \|_{\mathcal{F}} \| (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \|_{\mathcal{F}} \\ \forall (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \in (\mathcal{D}(\Omega))^4. \end{array} \right. \quad (1.4.102)$$

Comme  $(\mathcal{D}(\Omega))^4$  est dense dans  $\mathcal{F}$  d'après la définition de  $\mathcal{F}$ , l'application  $\Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1))$  peut se prolonger d'un façon unique en une application continue sur  $\mathcal{F}$ , et  $\Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)) \in \mathcal{F}'$ .

D'autre part, l'inégalité (1.4.102) implique que l'application  $\Lambda$  qui à chaque  $(u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in (\mathcal{D}(\Omega))^4$  fait correspondre  $\Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)) \in \mathcal{F}'$  est continue lorsque  $(\mathcal{D}(\Omega))^4$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ .

Alors par densité,  $\Lambda$  peut se prolonger (de manière unique) en un opérateur continu de  $\mathcal{F}$  dans l'espace dual  $\mathcal{F}'$  ( $\mathcal{F}'$  est aussi un espace hilbertien qu'on n'identifie pas à l'espace  $\mathcal{F}$ )

$$\Lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'.$$

De (1.4.101), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} |\langle \Lambda((u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1)), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \rangle| \\ \leq \| (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \|_{\mathcal{F}} \| (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \|_{\mathcal{F}} \\ \forall (u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1), (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1) \in \mathcal{F}. \end{array} \right. \quad (1.4.103)$$

Donc l'inégalité inverse dans le théorème 1.3.1 et (1.4.103) impliquent que l'opérateur  $\Lambda$  est coercif et continu sur  $\mathcal{F}$ . Alors d'après le lemme de Lax-Milgram,  $\Lambda$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ . Par suite, pour tout  $(y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1)$ , l'équation

$$\Lambda(u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) := (y_1'(0), -y_1(0), y_2'(0), -y_2(0))$$

a une solution unique  $(u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1) \in \mathcal{F}$  de façon que

$$(y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Mais, l'unicité de la solution du problème (1.4.80) donne

$$y_1 = \psi_1 \quad \text{et} \quad y_2 = \psi_2.$$

Par conséquent,

$$y_1(T) = y_{1,t}(T) = y_2(T) = y_{2,t}(T) = 0.$$

□



# Chapitre 2

## Observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes des systèmes hyperboliques abstraits faiblement couplés

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à généraliser les résultats du chapitre précédent aux cas des systèmes hyperboliques de deux équations d'évolution abstraites du second ordre faiblement couplées de la forme

$$\begin{cases} u_{1,tt} + A_1 u_1 + \alpha C u_2 = 0 & \text{dans } V'_1, \\ u_{2,tt} + A_2 u_2 + \alpha C^* u_1 = 0 & \text{dans } V'_2, \\ (u_1, u'_1)(0) = (u_1^0, u_1^1) \in V_1 \times H, \\ (u_2, u'_2)(0) = (u_2^0, u_2^1) \in V_2 \times H, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où  $H, V_1 \subset H$ , et  $V_2 \subset H$  sont des espaces de Hilbert séparables.  $A_1, A_2$  sont des opérateurs non bornés coercifs auto-adjoint dans  $H$ , alors que l'opérateur de couplage  $C$  est supposé borné dans  $H$ ;  $C^*$  est l'opérateur adjoint de  $C$ ; et  $\alpha$  est le paramètre de couplage.

Récemment, plusieurs auteurs ont étudié la stabilisation et la contrôlabilité des équations d'évolution abstraites et des systèmes des équations d'évolution abstraites. F. Alabau [2] a traité la stabilisation frontière indirecte d'un système abstrait de deux équations d'évolution du second ordre faiblement couplées. Elle a démontré la décroissance polynomiale à l'infini de l'énergie des solutions de ce système. M. Afilal; F. Ammar Khodja [11]

ont donné des conditions suffisantes pour la stabilité uniforme et la stabilisation exponentielle des équations abstraites couplées du second ordre, et ils ont donné des exemples pour illustrer l'utilité de ses résultats. F. Ammar Khodja ; A. Benabdallah ; D. Teniou [12] ont étudié la stabilité exponentielle et asymptotique du système

$$\begin{cases} u' = Au + Bv, \\ v' = -B^*u + Cv, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

où  $A$  engendre un semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert  $X$ .  $C = C^*$  engendre un semi-groupe exponentiellement stable sur un espace de Hilbert  $Y$ ,  $B$  est borné de  $Y$  dans  $X$  et  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B^*)$  est  $(-C)^{1/2}$ -borné. Ils ont donné deux exemples intéressants dont le second concernant la stabilisation frontière d'un système thermoélastique. A. Soufyane a démontré dans [101] que la stabilité uniforme d'un semi-groupe associé à un système couplé sous l'effet des termes d'amortissement en déplacement est équivalente à la stabilité uniforme d'un semi-groupe associé à un système couplé sous l'effet des termes d'amortissement en vitesse. Dans [92] S. Nicaise a considéré la stabilité d'une équation d'évolution abstraite en utilisant un principe de Liu basé sur la stabilité exponentielle du problème inverse avec un feedback linéaire et une inégalité intégrale, et en utilisant le principe de Russell, il a obtenu quelques résultats de contrôlabilité exacte.

D'un autre côté, l'étude de l'observabilité frontière indirecte d'un système abstrait de deux équations d'évolution du second ordre faiblement couplées de la forme (2.1.1) a été abordée par F. Alabau dans [1]. Elle a prouvé que seulement par l'observation d'une seule composante du vecteur d'état, on peut déduire une estimation de toutes les composantes du vecteur d'état au temps initial. Plus précisément, elle a obtenu une estimation de la forme

$$\int_0^T \|B^*u_1\|_G^2 dt \geq c(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)), \quad (2.1.2)$$

où  $B^*$  est un certain opérateur linéaire agissant de  $D(A_1)$  sur un espace de Hilbert  $G$ ,  $e_1(0)$  est l'énergie partielle naturelle de la première composante de l'inconnu et  $\tilde{e}_2(0)$  est l'énergie partielle affaiblie de la deuxième composante de l'inconnu au temps initial. A l'aide du résultat précédent et par l'application de la méthode d'unicité hilbertienne, elle a montré un résultat de contrôlabilité exacte indirecte. Des applications de son résultat abstrait ont été données à plusieurs systèmes couplés des équations aux dérivées partielles (Onde-Onde, systèmes d'élasticité linéaires couplés, Petrowsky-Petrowsky, et



Onde-Petrowsky).

Dans ce chapitre, en montrant que les techniques introduites dans [1] s'adaptent dans le cas de l'observabilité interne indirecte, on obtient l'estimation suivante

$$\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq c(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)), \quad (2.1.3)$$

où  $r$  est un certain opérateur d'observation linéaire agissant de  $H$  sur un espace de Hilbert  $\Theta$ .

A partir de l'estimation (2.1.3) et à l'aide de la méthode **HUM** de J.-L. Lions ([69], [70]), on déduit par dualité que le système

$$\begin{cases} y_{1,tt} + A_1 y_1 + \alpha C y_2 = v, \\ y_{2,tt} + A_2 y_2 + \alpha C^* y_1 = 0, \\ (y_1, y'_1)(0) = (y_1^0, y_1^1), \\ (y_2, y'_2)(0) = (y_2^0, y_2^1) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

(2.1.1) est exactement contrôlable, où  $v \in \left[ H^1(0, T; H) \right]'$ .

Des applications aux cas de systèmes couplés de type *Petrowsky-Petrowsky* et *Onde-Petrowsky* seront données.

## 2.2 Résultats principaux

Soient  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $H$  et  $\Theta$  des espaces de Hilbert réels séparables tels que les injections  $V_i \subset H$   $i = 1, 2$  et  $H \subset \Theta$  sont denses, compactes et continues. Dans la suite, on identifie  $H$  avec son dual, ce qui donne que les injections  $V_i \subset H \subset V'_i$  sont continues, denses et compactes.

Les produits scalaires sur  $V_i$   $i = 1, 2$ ,  $H$  et  $\Theta$  sont respectivement notés par  $(\cdot, \cdot)_i$   $i = 1, 2$ ,  $(\cdot, \cdot)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Theta}$ , et les normes correspondantes sont respectivement  $|\cdot|_i$   $i = 1, 2$ ,  $|\cdot|$  et  $\|\cdot\|_{\Theta}$ . De plus, on note par  $|\cdot|_{V'_i}$  la norme sur  $V'_i$ , par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V'_i, V_i}$  le produit de dualité, et par  $A_i$   $i = 1, 2$  l'application de dualité de  $V_i$  dans  $V'_i$  qui est définie par

$$\langle A_i w, z \rangle_{V'_i, V_i} = (w, z)_i \quad \forall w, z \in V_i \quad i = 1, 2.$$

Dans la suite, on notera aussi par  $A_i$  l'opérateur non borné dans  $H$  de domaine

$$D(A_i) = \{u \in V_i; A_i u \in H\} \quad i = 1, 2.$$

Les opérateurs  $A_i$   $i = 1, 2$  sont auto-adjoints et coercifs.  $A_i^{1/2}$   $i = 1, 2$  désigne la puissance fractionnaire usuelle de  $A_i$  (voir [93]).

Soit  $p \in \mathcal{L}(\Theta; H)$  telle que

$$(p(\varphi), p(\tilde{\varphi})) = \langle \varphi, \tilde{\varphi} \rangle_{\Theta} \quad \forall \varphi \in \Theta \forall \tilde{\varphi} \in \Theta, \quad (2.2.5)$$

et soit  $r \in \mathcal{L}(H; \Theta)$  l'opérateur d'observabilité. On note par  $\mu$  la plus petite constante positive telle que

$$\|r(u)\|_{\Theta} \leq \mu|u| \quad \forall u \in H. \quad (2.2.6)$$

Pour  $i = 1, 2$ , on note par  $\nu_i$  la plus petite constante positive telle que

$$|u|^2 \leq \nu_i^2 |u|_i^2 \quad \forall u \in V_i. \quad (2.2.7)$$

Alors, on a pour  $i = 1, 2$

$$|u|^2 \leq \nu_i^2 |A_i^{1/2} u|^2 \quad \forall u \in V_i. \quad (2.2.8)$$

D'où

$$|A_i^{-1/2} u|^2 \leq \nu_i^2 |u|^2 \quad \forall u \in H. \quad (2.2.9)$$

De plus, soit  $C$  un opérateur linéaire continue sur  $H$ . On note par  $\beta_2$  la plus petite constante positive telle que

$$|Cu| \leq \beta_2 |u| \quad \forall u \in H. \quad (2.2.10)$$

Alors on a

$$|C^* u| \leq \beta_2 |u| \quad \forall u \in H. \quad (2.2.11)$$

Posons

$$\alpha_0 = (\beta_2 \nu_1 \nu_2)^{-1}. \quad (2.2.12)$$

Maintenant, on va considérer quelques hypothèses qui seront largement utilisées dans la suite.

• Hypothèse (H1) :

$$\exists \beta_1 > 0 \text{ tel que } \beta_1 |u| \leq |Cu| \quad \forall u \in H. \quad (2.2.13)$$

De plus, on considère les hypothèses de compatibilité suivantes sur les opérateurs  $A_1$ ,  $A_2$ , et  $C$ .

• Hypothèse (H2) :

$$CV_2 \subset V_1, CD(A_2) \subset D(A_1) \text{ et } A_1 Cu = CA_2 u \quad \forall u \in D(A_2), \quad (2.2.14)$$

$$\exists \beta_3 \text{ tel que } |A_1^{1/2} CA_2^{-1/2} u| \leq \beta_3 |u| \quad \forall u \in H. \quad (2.2.15)$$

De plus, soit  $G$  un espace de Hilbert donné avec la norme  $\|\cdot\|_G$  et le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ . Dans la suite on va identifier l'espace  $G$  avec son dual.

Soit  $B^* \in \mathcal{L}(D(A_1), G)$  aussi. On suppose qu'il existe des constantes positives  $\delta_i$   $i = 1, 2, 3$ ,  $\eta_i$   $i = 1, 2, 3, 4$ , telles que pour tout  $T > 0$ , tout  $f \in \mathcal{C}^1([0, T]; H)$  et tout  $U_1^0 = (u_1^0, u_1^1) \in D(A_1) \times V_1$ , la solution  $u_1$  de

$$\begin{cases} u_1'' + A_1 u_1 = f, \\ (u_1, u_1')(0) = U_1^0 \end{cases} \quad (2.2.16)$$

satisfait les deux inégalités (respectivement, directe et inverse), notées respectivement, par l'hypothèse (H3)

$$\begin{cases} \int_0^T \|B^* u_1\|_G^2 dt \leq \delta_1 \int_0^T \|r(u_1')\|_\Theta^2 dt \\ + \gamma \int_0^T e_1(t) dt + \delta_2(e_1(0) + e_1(T)) + \delta_3 \int_0^T |f|^2 dt \quad \forall \gamma > 0 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

et par l'hypothèse (H4)

$$\begin{cases} \eta_4 \int_0^T \|B^* u_1\|_G^2 dt \geq (1 - \eta_1 \beta) \int_0^T e_1(t) dt - \eta_2(e_1(0) + e_1(T)) \\ - \eta_3 \beta^{-1} \int_0^T |f|^2 dt \quad \forall \beta \in (0, \eta_1^{-1}). \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Avant donner le résultat principale de ce chapitre, on va énoncer la remarque suivante

**Remarque 2.2.1.** Pour  $u \in H$ ,  $A_2^{-1/2}u \in V_2$ , on a d'après (2.2.14) que  $CA_2^{-1/2}u \in V_1$ . Donc la partie gauche de l'inégalité (2.2.15) a un sens. De plus, pour  $v \in V_2$  on a  $u = A_2^{-1/2}v \in D(A_2)$ . Alors on déduit de (2.2.14) que

$$A_1^{1/2}CA_2^{-1/2}v = CA_2^{1/2}v \quad \forall v \in V_2.$$

Par suite

$$A_1^{1/2}CA_2^{-1/2}v = A_1^{-1/2}CA_2^{1/2}v \quad \forall v \in V_2.$$

Donc en utilisant (2.2.15), on obtient

$$|A_2^{-1/2}CA_1^{1/2}u| \leq \beta_3 |u| \quad \forall u \in V_2. \quad (2.2.19)$$

Maintenant, on résume notre résultat principal de l'observabilité indirecte interne dans l'énoncé suivant

**Théorème 2.2.1.** On suppose que  $A_1, A_2$ , et  $B$  satisfont les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4). Alors il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ ,

il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $U^0 \in \mathcal{H}$  la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.1.1) satisfait

$$2\eta_4\delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_\Theta^2 dt \geq c_1(\alpha, T)\mathbf{e}_1(\mathbf{0}) + c_3(\alpha, T)\tilde{\mathbf{e}}_2(\mathbf{0}), \quad (2.2.20)$$

où

$$c_1(\alpha, T) = \frac{a_1(T - T_3)}{(1 + \alpha T)(1 + \alpha T_3)}, \quad c_3(\alpha, T) = \frac{\alpha a_2(T - T_2)(T - T_2^-)}{1 + \alpha T},$$

et  $T_2, T_2^-, T_3$  sont des constantes explicites dépendant seulement de  $\alpha$ , et des nombres  $\nu_i$   $i = 1, 2$ ,  $\beta_i$   $i = 1, 2, 3$ , et  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes positives fixes. Si on note par  $C$  la constante générique positive indépendante de  $\alpha$ , alors  $|T_2|, |T_2^-|$  comportent comme  $C\alpha^{-1}$  et  $T_3$  comporte comme  $C$  quand  $\alpha$  tend vers zéro.

De plus, si

$$r(u'_1(t)) = 0 \text{ p.p. } t \in [0, T]$$

alors  $U(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

A partir de l'estimation (2.2.20) et à l'aide de la méthode **HUM** de J.-L. Lions ([69], [70]), on obtient par dualité des résultats de contrôlabilité exacte. Plus précisément, on considère le système suivant

$$\begin{cases} y_{1,tt} + A_1 y_1 + \alpha C y_2 = v, \\ y_{2,tt} + A_2 y_2 + \alpha C^* y_1 = 0, \\ (y_1, y'_1)(0) = (y_1^0, y_1^1), \\ (y_2, y'_2)(0) = (y_2^0, y_2^1), \end{cases} \quad (2.2.21)$$

où  $v \in \left[ H^1(0, T; H) \right]'$ , et on obtient le résultat suivant

**Théorème 2.2.2.** *On considère les hypothèses du théorème 2.2.1. Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , pour tout  $T > T_0$  où  $T_0$  est défini dans le théorème 2.2.1, et pour tout*

$$Y^0 = (y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0) \in V_1' \times H \times H \times V_2,$$

*il existe un contrôle  $v \in \left[ H^1([0, T]; H) \right]'$  tel que la solution  $Y = (y'_1, -y_1, y'_2, -y_2)$  de (2.3.4) satisfait*

$$y_i(T) = y'_i(T) = 0 \quad i = 1, 2.$$

## 2.3 Formulation du problème

### 2.3.1 Existence et unicité de la solution du problème direct

Dans ce sous-paragraphe, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du système (2.1.1) par une méthode classique de semi-groupe dans l'espace énergie  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ , où  $\mathcal{H}_i = V_i \times H$  pour  $i = 1, 2$ . On procède comme dans [1]. On définit alors un opérateur linéaire non borné  $\mathcal{A}_\alpha$  sur  $\mathcal{H}$  par

$$\mathcal{A}_\alpha U = (-v_1, A_1 u_1 + \alpha C u_2, -v_2, A_2 u_2 + \alpha C^* u_1),$$

$$D(\mathcal{A}_\alpha) = D(A_1) \times V_1 \times D(A_2) \times V_2.$$

On peut se reformuler le système (2.1.1) comme un système abstrait du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}_\alpha U = 0, \\ U(0) = U^0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

On note par  $((\cdot, \cdot))$  le produit scalaire standard de l'espace produit  $\mathcal{H}$  et par  $\|\cdot\|$  la norme correspondante. On considère encore sur  $\mathcal{H}$  la forme bilinéaire définie par

$$(U, \tilde{U})_\alpha = ((U, \tilde{U})) + \alpha(Cu_2, \tilde{u}_1) + \alpha(u_1, C\tilde{u}_2)$$

pour  $U = (u_1, v_2, u_2, v_2)$  et  $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_2, \tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$  dans  $\mathcal{H}$ .  
Les résultats suivants sont donnés dans [1].

**Proposition 2.3.1.** *Considérons les hypothèses ci-dessus sur les espaces  $V_1, V_2, H$  et les opérateurs  $A_1, A_2$ . De plus, définissons  $\beta_1, \beta_2, \nu_1, \nu_2$  comme dans (2.2.13), (2.2.10), et (2.2.9) et  $\alpha_0$  par (2.2.12). Alors pour tout  $0 \leq |\alpha| < \alpha_0$ , il existe deux constantes  $c_1(\alpha) > 0$  et  $c_2(\alpha) > 0$  telles que*

$$c_1(\alpha)\|U\|^2 \leq (U, U)_\alpha \leq c_2(\alpha)\|U\|^2 \quad \forall U \in \mathcal{H}. \quad (2.3.2)$$

Alors, pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$ , l'application

$$U \in \mathcal{H} \longrightarrow \|U\|_\alpha = (U, \tilde{U})_\alpha^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme sur  $\mathcal{H}$  qui est équivalente à la norme  $\|\cdot\|$ .

*Démonstration.* Soit  $U \in \mathcal{H}$  donné. De (2.2.9) et (2.2.10) on obtient

$$|(U, U)_\alpha - \|U\|^2| \leq 2|\alpha \operatorname{Re}((u_1, Cu_2))| \leq 2|\alpha| \beta_2 \nu_1 \nu_2 |u_1|_1 |u_2|_2.$$

D'où l'estimation (2.3.2) désirée où

$$c_1(\alpha) = (1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}) \text{ et } c_2(\alpha) = (1 + \frac{\alpha}{\alpha_0}).$$

□

**Proposition 2.3.2.** *Considérons les hypothèses de la proposition 2.3.1, et soit  $\alpha_0$  donné dans la proposition 2.3.1. Alors  $-\mathcal{A}_\alpha$  est un opérateur anti-adjoint sur  $\mathcal{H}$  qui engendre un  $\mathcal{C}^0$  groupe unitaire  $\mathcal{T}_0(t) = e^{-t\mathcal{A}_\alpha}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sur  $\mathcal{H}$ . Par conséquent, pour  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  et pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , le problème (1.2.10) possède une unique solution  $U \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H})$ . Si de plus,  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors la solution est dans  $\mathcal{C}^{k-j}([0, +\infty); D(\mathcal{A}_\alpha^j))$  pour  $j = 0, \dots, k$ .*

*Démonstration.* D'abord, il est facile de vérifier que

$$(\mathcal{A}_\alpha U, \tilde{U})_\alpha = -(U, \mathcal{A}_\alpha \tilde{U})_\alpha, \quad \forall U, \tilde{U} \in D(\mathcal{A}_\alpha).$$

Alors  $D(\mathcal{A}_\alpha^*) = D(\mathcal{A}_\alpha)$  et  $\mathcal{A}_\alpha^* = -\mathcal{A}_\alpha$ . Donc  $\mathcal{A}_\alpha$  est anti-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . En appliquant le théorème de Stone (voir, e.g., [32]), on déduit que  $\mathcal{A}_\alpha$  est le générateur d'un  $\mathcal{C}^0$  groupe unitaire  $\mathcal{T}_0(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  sur  $\mathcal{H}$ .

Alors, de la théorie classique de semi-groupe, on conclut que (1.2.10) admet une unique solution  $U \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H})$ . □

Soit  $U = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$  une solution de (2.1.1). On définit les énergies partielles naturelles de la solution  $U$  par

$$e_i(u(t)) = \frac{1}{2}(|u'|^2 + |u|_i^2) \quad i = 1, 2.$$

Alors

$$E(U(t)) = e_1(u_1(t)) + e_2(u_2(t)) + \alpha(u_1, Cu_2).$$

On définit aussi les énergies partielles affaiblies par

$$\tilde{e}_i(u(t)) = \frac{1}{2}(|u'|_{V'_i}^2 + |u|^2) \quad i = 1, 2.$$

Alors

$$\tilde{E}(U(t)) = \tilde{e}_1(u_1(t)) + \tilde{e}_2(u_2(t)) + \alpha(u_1, A_1^{-1}Cu_2).$$

On remarque que

$$2E(U(t)) = \|U(t)\|_\alpha^2. \tag{2.3.3}$$

**Proposition 2.3.3.** Soit  $U = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$  une solution de (2.1.1). L'énergie naturelle totale de la solution  $U$  est conservée, i.e., pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , on a

$$E(U(t)) = E(U(0)) \quad t \geq 0,$$

et l'énergie affaiblie totale de la solution  $U$  est conservée, i.e., pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , on a

$$\tilde{E}(U(t)) = \tilde{E}(U(0)) \quad t \geq 0.$$

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{T}_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est unitaire sur  $\mathcal{H}$ , on conclut de (2.3.3) que l'énergie naturelles de toutes les solutions avec une donnée initiale sur  $\mathcal{H}$  est conservée.

Maintenant, on va démontrer la conservation de l'énergie affaiblie totale. Pour  $U^0 \in D(\mathcal{A})$ , la solution  $U = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$  est telle que  $u_i(t) \in D(A_i) \quad \forall t \geq 0$ . De plus, chaque équations de (2.1.1) est vérifiée. Donc on a

$$\tilde{e}'_i = (u''_i + A_i u_i, A_i^{-1} u'_i)$$

pour  $i = 1, 2$ . En utilisant les deux équations de (2.1.1), on obtient

$$\tilde{e}'_1 = -\alpha(u'_1, A_1^{-1} C u_2),$$

$$\tilde{e}'_2 = -\alpha(u_1, C A_2^{-1} u'_2).$$

Maintenant, en utilisant (2.2.14), on déduit que  $Cu = A_1^{-1} C A_2 u$  pour tout  $u \in D(A_2)$ . On remarque que pour tout  $v \in H$ ,  $u = A_2^{-1} v \in D(A_2)$ . On a donc  $C A_2^{-1} v = A_1^{-1} C v$  pour tout  $v \in H$ . En utilisant les deux relations précédentes, on obtient  $\tilde{E}'(t) = 0$ . Par suite, l'énergie affaiblie totale de toutes les solutions avec une donnée initiale dans  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  est conservée. Par densité de  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  dans  $\mathcal{H}$ , on conclut que le même résultat reste vrai pour toutes les solutions avec une donnée initiale dans  $\mathcal{H}$ .  $\square$

### 2.3.2 Existence et unicité de la solution du problème dual

Dans ce sous-paragraphe, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème dual de (2.1.1). On note par

$$H_{loc}^1([0, +\infty); H) := \left\{ f \in H^1([a, b], H); \quad a, b \in [0, +\infty) \right\},$$

et  $\mathcal{H}' = V'_1 \times H \times V'_2 \times H$  l'espace dual de  $\mathcal{H}$ . Pour  $Y^0 = (y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0) \in \mathcal{H}'$  et  $v \in \left[ H_{loc}^1(0, T; H) \right]'$ , on va considérer le problème suivant

$$\begin{cases} y_{1,tt} + A_1 y_1 + \alpha C y_2 = v, \\ y_{2,tt} + A_2 y_2 + \alpha C^* y_1 = 0, \\ (y_1, y'_1)(0) = (y_1^0, y_1^1), \\ (y_2, y'_2)(0) = (y_2^0, y_2^1). \end{cases} \quad (2.3.4)$$

L'adjoint de  $\mathcal{A}_\alpha$  est l'opérateur non borné  $\mathcal{A}_\alpha^*$  défini par

$$D(\mathcal{A}_\alpha^*) = V_1 \times D(A_1) \times V_2 \times D(A_2),$$

et

$$\mathcal{A}_\alpha^* Z = (A_1 \omega_1 + \alpha C \omega_2, -z_1, A_2 \omega_2 + \alpha C^* \omega_1, -z_2),$$

pour  $Z = (z_1, \omega_1, z_2, \omega_2) \in D(\mathcal{A}_\alpha^*)$ . On pose  $Y = (y'_1, -y_1, y'_2, -y_2)$  et on définit un opérateur  $\mathcal{I} \in \mathcal{L}\left(\left[H^1(0, T; H)\right]'; D(\mathcal{A}_\alpha)'\right)$  par  $\mathcal{I}v = (v, 0, 0, 0)$ . Alors le système (2.3.4) peut se reformuler sous la forme abstrait

$$\begin{cases} Y' - \mathcal{A}_\alpha^* Y = \mathcal{I}v, \\ Y(0) = Y^0 \in \mathcal{H}'. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Précisément, c'est le problème dual de (2.3.1). La solution de (2.3.5) est définie par la méthode de transposition (voir, *e.g.*, [69], [70], [52]), c'est-à-dire, en fixant  $Y^0 \in \mathcal{H}'$  et  $v \in \left[H_{loc}^1([0, +\infty); H)\right]'$  arbitrairement, on définit une solution de (2.3.5) comme une fonction continue  $Y$  définie sur  $[0, +\infty)$  à valeurs dans  $\mathcal{H}'$ , telle que l'égalité

$$\langle Y(T), U(T) \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}} = \langle Y^0, U^0 \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}} + \langle v, u_1 \rangle_{\left[H^1([0, T]; H)\right]', H^1([0, T]; H)} \quad (2.3.6)$$

est vérifiée pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , où  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0 = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)(t)$ . Avant d'énoncer la proposition de l'existence et de l'unicité du problème (2.3.5), on va énoncer l'inégalité directe suivante.

**Proposition 2.3.4.** *Pour pour  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0 = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)(t)$  du système (2.3.5) vérifie*

$$\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \leq \frac{2\mu^2 T}{c_1(\alpha)} E(U(0)). \quad (2.3.7)$$

*Démonstration.* D'après (2.2.6), On a

$$\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \leq \mu^2 \int_0^T |u'_1|^2 dt. \quad (2.3.8)$$

Alors de la définition de  $e_1$ , on conclut

$$\begin{cases} \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \leq 2\mu^2 \int_0^T e_1(t) dt \\ \leq 2\mu^2 \int_0^T (e_1(t) + e_2(t)) dt = \mu^2 \int_0^T \|U(t)\|^2 dt. \end{cases}$$



Donc de (2.3.2) on déduit

$$\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \leq \mu^2 \int_0^T \frac{\|U(t)\|_{\alpha}^2}{c_1(\alpha)} dt. \quad (2.3.9)$$

Par suite

$$\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \leq 2\mu^2 \int_0^T \frac{E(U(t))}{c_1(\alpha)} dt = \frac{2\mu^2 T}{c_1(\alpha)} E(U^0). \quad (2.3.10)$$

□

**Proposition 2.3.5.** *Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$ , pour tout  $Y^0 = (y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0) \in \mathcal{H}'$  et pour tout  $v \in [H_{loc}^1([0, +\infty); H)]'$ , le problème (2.3.5) admet une solution unique sur  $\mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H}')$ . De plus, pour tout  $T > 0$  l'application  $\Psi$  définie de  $\mathcal{H}' \times [H^1([0, T]; H)]'$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H}')$ , qui à  $(Y^0, v)$  associe  $Y$ , est continue.*

*Démonstration.* Soient  $Y^0 \in \mathcal{H}'$  et  $v \in H_{loc}^1([0, +\infty); H)$  fixes arbitrairement. Pour  $T > 0$ , on note par  $L_T$  la forme linéaire définie sur  $\mathcal{H}$  par

$$L_T(U^0) = \langle Y^0, U^0 \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}} + \langle v, u_1 \rangle_{[H^1([0, T]; H)]', H^1([0, T]; H)}, \quad (2.3.11)$$

où  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_{\alpha})U^0 = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$ .

Or

$$\|u_1\|_{H^1([0, T]; H)}^2 = \int_0^T |u_1(t)|^2 dt + \int_0^T |u'_1(t)|^2 dt.$$

Alors on déduit de (2.2.8)

$$\|u_1\|_{H^1([0, T]; H)}^2 \leq \nu_1^2 \int_0^T |u_1(t)|_1^2 dt + \int_0^T |u'_1(t)|^2 dt. \quad (2.3.12)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{H^1([0, T]; H)}^2 &\leq \max(\nu_1^2, 1) \left( \int_0^T (|u_1(t)|_1^2 + |u'_1(t)|^2) dt \right) \\ &= \max(\nu_1^2, 1) \int_0^T e_1(t) dt \\ &\leq \max(\nu_1^2, 1) \int_0^T (e_1(t) + e_2(t)) dt \\ &\leq \max(\nu_1^2, 1) \int_0^T \frac{\|U(t)\|_{\alpha}^2}{2} dt \\ &= \max(\nu_1^2, 1) T \frac{\|U^0\|_{\alpha}^2}{2} \\ &\leq \frac{\max(\nu_1^2, 1) T}{2c_1(\alpha)} \|U^0\|_{\alpha}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, (2.3.11) implique

$$|L_T(U^0)| \leq \left( \|Y^0\|_{\mathcal{H}'} + \sqrt{\frac{\max(\nu_1^2, 1)T}{2c_1(\alpha)}} \|v\|_{[H^1([0,T];H)]'} \right) \|U^0\|_{\alpha} \quad (2.3.13)$$

pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ . Alors  $L_T \in \mathcal{H}'$ .

D'autre part, on a démontré dans la proposition (2.3.2) que  $-\mathcal{A}_\alpha$  engendre un groupe unitaire sur  $\mathcal{H}$ . Alors, on a  $U^0 = \exp(T\mathcal{A}_\alpha)U(T)$  de sorte que la forme linéaire sur  $\mathcal{H}$  qui à  $U(T)$  fait correspondre  $L_T(U^0)$  est bien définie et continue sur  $\mathcal{H}$ . Par suite, il existe  $Y(T) \in \mathcal{H}'$  unique tel que

$$L_T(U^0) = \langle Y(T), U(T) \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}}$$

pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ .

De plus, il est clair que l'application de  $[0, +\infty)$  dans  $\mathcal{H}$  qui à chaque  $T$  associe  $L_T$  est continue. Alors, comme  $\|U(T)\|_{\alpha} = \|U^0\|_{\alpha}$  on déduit que  $Y \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H}')$ . Finalement, d'après (2.3.13) on a pour tout intervalle borné  $I$  dans  $\mathbb{R}_+$  et tout  $T \in I$

$$\|Y(T)\|_{\mathcal{H}'} \leq C \left( \|Y^0\|_{\mathcal{H}'} + \|v\|_{L^2(I;H)} \right),$$

avec  $C$  est une constante dépend seulement de  $I$ . Par conséquent, l'application

$$\Psi : \mathcal{H}' \times [H_{loc}^1([0, +\infty); H)]' \longrightarrow \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{H}')$$

qui à chaque  $(Y^0, v)$  fait correspondre  $Y$ , est continue. □

## 2.4 Preuve des résultats d'observabilité

Pour démontrer l'inégalité inverse (2.2.20), plusieurs résultats déjà donnés dans [1] seront nécessaires. Dans la suite,  $U = (u_1, u_1', u_2, u_2')$  désigne la solution de (2.1.1) correspond à la donnée initiale  $U^0 \in \mathcal{H}$ . De plus, on va noter par  $C_i$   $i = 1, \dots$  des constantes positives dépendant seulement de  $\beta_i$   $i = 1, 2, 3$ ,  $\nu_1, \nu_2$ , mais pas de  $\alpha$ .

**Lemme 2.4.1.** *Supposons que  $A_1, A_2$  et  $B$  satisfont les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4). Pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_0$  et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.1.1) vérifie*

$$\begin{cases} \alpha \int_0^T |u_2|^2 dt \leq \alpha C_9 \int_0^T |u_1|^2 dt + \frac{C_{10}}{\gamma_1} (e_1(0) + e_1(T)) \\ + C_{10}\gamma_1 (\tilde{e}_2(0) + \tilde{e}_2(T)) \quad \forall \gamma_1 > 0. \end{cases} \quad (2.4.14)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. Par densité de  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  dans  $\mathcal{H}$  et comme  $\|U(t)\|_\alpha = \|U^0\|_\alpha$ , pour tout  $t \geq 0$ , il est suffisant de démontrer l'inégalité désirée pour  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ . Alors, supposons que  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$  donnée. On a

$$\int_0^T ((u_1'' + A_1 u_1 + \alpha C u_2, C u_2) - (u_2'' + A_2 u_2 + \alpha C^* u_1, C^* u_1)) dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^T ((u_1'', C u_2) - (u_1, C u_2'') + (A_1 u_1, C u_2) - (u_1, C A_2 u_2) + \alpha |C u_2|^2 - \alpha |C^* u_1|^2) dt = 0.$$

Alors, en intégrant par partie et d'après (2.2.14) qui est

$$A_1 C u = C A_2 u \quad \forall u \in D(A_2),$$

on a

$$\alpha \int_0^T |C u_2|^2 dt = \alpha \int_0^T |C^* u_1|^2 dt + \left[ (u_1, C u_2') - (u_1', C u_2) \right]_0^T. \quad (2.4.15)$$

D'après (2.2.14) et (2.2.15), on a

$$|(u_1, C u_2')| = \left| (A_1^{1/2} u_1, (A_1^{-1/2} C A_2^{1/2})(A_1^{-1/2} u_2')) \right| \leq \beta_3 |A_1^{1/2} u_1| \|u_2'\|_{V_2'}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$|(u_1, C u_2')| \leq \beta_3 \left( \frac{|u_1|_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\gamma_1 |u_2'|_{V_2'}^2}{2} \right) \quad \forall \gamma_1 > 0.$$

Par suite, en utilisant (2.2.11) et (2.2.13) dans (2.4.15), on obtient l'inégalité (2.5.1) désirée.  $\square$

**Lemme 2.4.2.** *Soit*

$$\alpha_1 = \min(\alpha_0, \nu_2^{-1}). \quad (2.4.16)$$

*Alors pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_1$  et pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.1.1) satisfait les estimations suivantes :*

$$\begin{cases} \int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt \leq \frac{C_1}{\alpha(1-\alpha\nu_2)} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) \\ + \frac{C_2}{(1-\alpha C_1)^2} \int_0^T (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt, \end{cases} \quad (2.4.17)$$

$$\int_0^T |u_2|^2 dt \leq \frac{C_3}{\alpha(1-\alpha\nu_2)}(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + \frac{C_4}{(1-\alpha C_1)^2} \int_0^T (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt, \quad (2.4.18)$$

$$e_1(T) + e_1(0) \leq C_5(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + \frac{C_6\alpha}{1-\alpha\nu_2} \int_0^T (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt, \quad (2.4.19)$$

$$\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0) \leq \frac{C_7}{1-\alpha\nu_2}(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + \frac{C_8\alpha}{(1-\alpha\nu_2)^2} \int_0^T (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt. \quad (2.4.20)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. Comme le résultat précédent, il est suffisant de démontrer ce résultat pour  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ . Donc soit  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$  donnée. La preuve requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* On va estimer  $\int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt$ . Or, on a

$$\int_0^T (u_2'' + A_2 u_2 + \alpha C^* u_1, A_2^{-1} u_2) dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt &\leq \int_0^T |u_2|^2 dt + \alpha \int_0^T |C^* u_1| |A_2^{-1} u_2| \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma} \left( |A_2^{-1/2} u_2'|^2(T) + |A_2^{-1/2} u_2'|^2(0) \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \left( |A_2^{-1/2} u_2|^2(T) + |A_2^{-1/2} u_2|^2(0) \right) \quad \forall \gamma > 0. \end{aligned}$$

En utilisant (2.2.9) pour  $i = 2$  et (2.2.11), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt &\leq \left(1 + \frac{\alpha\beta_2\nu_2^4}{2}\right) \int_0^T |u_2|^2 + \frac{\alpha\beta_2}{2} \int_0^T |u_1|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{|A_2^{-1/2} u_2'|^2(T)}{\gamma} + \gamma \nu_2^2 |u_2|^2(T) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{|A_2^{-1/2} u_2'|^2(0)}{\gamma} + \gamma \nu_2^2 |u_2|^2(0) \right) \quad \forall \gamma > 0. \end{aligned}$$

On choisit  $\gamma = \nu_2^{-1}$ . Alors

$$\int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt \leq \left(1 + \frac{\alpha\beta_2\nu_2^4}{2}\right) \int_0^T |u_2|^2 + \frac{\alpha\beta_2}{2} \int_0^T |u_1|^2 + \nu_2(\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)). \quad (2.4.21)$$

En utilisant (2.5.1) dans (2.4.21), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt \leq C_{11} \int_0^T |u_1|^2 + \frac{C_{12}}{\alpha\gamma} (e_1(T) + e_1(0)) \\ + (\frac{C_{13}\gamma}{\alpha} + \nu_2) (\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)) \quad \forall \gamma > 0. \end{array} \right. \quad (2.4.22)$$

*Etape 2.* On va estimer maintenant  $\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)$ . On procède comme dans [1]. comme  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$  on a  $u_2 \in D(A_2)$ . De plus, on sait que  $\tilde{e}_2$  est définie par

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{2} (|A^{-1/2} u_2'|^2 + |u_2|^2).$$

Alors on a

$$\tilde{e}_2'(t) = (u_2, u_2') + (A^{-1/2} u_2'', A^{-1/2} u_2').$$

Donc la deuxième équation de (2.1.1) implique

$$\tilde{e}_2'(t) = -\alpha (A_2^{-1/2} C^* u_1, A_2^{-1/2} u_2'). \quad (2.4.23)$$

Intégrons cette égalité entre 0 et  $T$ , on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0) &= 2\tilde{e}_2(0) - \alpha \int_0^T (A_2^{-1/2} C^* u_1, A_2^{-1/2} u_2') dt \\ &\leq 2\tilde{e}_2(0) + \frac{\alpha}{2} \int_0^T |A_2^{-1/2} C^* u_1|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt. \end{aligned}$$

D'où en utilisant (2.4.22), (2.2.11) et (2.2.9) dans la dernière inégalité, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\alpha\nu_2}{2} - \frac{C_{13}\gamma_1}{2}\right) (\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0)) \leq 2\tilde{e}_2(0) \\ + \frac{\alpha}{2} \left(C_{11} + \nu_2^2\beta_2\right) \int_0^T |u_1|^2 dt + \frac{C_{12}}{2\gamma_3} (e_1(T) + e_1(0)). \end{array} \right. \quad (2.4.24)$$

Choisissons  $\gamma_1 = C_{13}^{-1}$  dans (2.4.24), on obtient alors

$$\tilde{e}_2(T) + \tilde{e}_2(0) \leq \frac{4\tilde{e}_2(0)}{1 - \alpha\nu_2} + \frac{C_{14}}{1 - \alpha\nu_2} \int_0^T |u_1|^2 dt + \frac{C_{15}}{1 - \alpha\nu_2} (e_1(T) + e_1(0)). \quad (2.4.25)$$

En utilisant (2.4.25) dans (2.4.22) et dans (2.5.1) (avec  $\gamma_1 = 1$ ), on aura les estimations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T |A_2^{-1/2} u_2'|^2 dt \leq \frac{C_{16}}{1 - \alpha\nu_2} \int_0^T |u_1|^2 dt \\ + \frac{C_{17}}{\alpha(1 - \alpha\nu_2)} (e_1(T) + e_1(0)) + \frac{C_{18}}{\alpha(1 - \alpha\nu_2)} \tilde{e}_2(0), \end{array} \right. \quad (2.4.26)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \int_0^T |u_2|^2 dt \leq \frac{\alpha C_{19}}{1 - \alpha \nu_2} \int_0^T |u_1|^2 dt \\ \quad + \frac{C_{20}}{1 - \alpha \nu_2} (e_1(T) + e_1(0)) + \frac{C_{21}}{1 - \alpha \nu_2} \tilde{e}_2(0). \end{array} \right. \quad (2.4.27)$$

*Etape 3.* On va estimer  $e_1(T) + e_1(0)$ . Comme  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ , on a  $u_1 \in D(A_1)$ . D'après la définition de  $e_1$  et la première équation de (2.1.1), on a

$$e_1'(t) = -\alpha(Cu_2, u_1'). \quad (2.4.28)$$

En intégrant (2.4.28) entre 0 et  $T$  et en utilisant (2.2.10), on obtient

$$\begin{aligned} e_1(T) + e_1(0) &= 2e_1(0) - \alpha \int_0^T (Cu_2, u_1') \\ &\leq 2e_1(0) + \frac{\alpha}{2\varepsilon_2} \int_0^T |u_1'|^2 dt + \frac{\alpha \varepsilon_2 \beta_2^2}{2} \int_0^T |u_2|^2 dt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.4.27) dans la dernière inégalité, on obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 1 - \frac{C_{20}\beta_2^2\varepsilon_2\alpha}{2(1 - \alpha\nu_2)} (e_1(T) + e_1(0)) \right) \leq 2e_1(0) + \frac{\alpha}{2\varepsilon_2} \int_0^T |u_1'|^2 dt \\ \quad + \frac{C_{19}\beta_2^2\varepsilon_2\alpha}{2(1 - \alpha\nu_2)} \int_0^T |u_1|^2 dt + \frac{C_{21}\beta_2^2\varepsilon_2\alpha}{2(1 - \alpha\nu_2)} \tilde{e}_2(0). \end{array} \right.$$

Choisissons

$$\varepsilon_2 = \frac{1 - \alpha\nu_2}{C_{20}\beta_2^2}$$

dans l'inégalité précédente, on aura alors

$$e_1(T) + e_1(0) \leq 4e_1(0) + \frac{C_{22}\alpha}{1 - \alpha\nu_2} \int_0^T (|u_1'|^2 + |u_1|^2) dt + C_{23}\tilde{e}_2(0).$$

D'où (2.4.19) est vérifiée. Maintenant, on utilise (2.4.19) successivement dans (2.4.25), (2.4.26) et (2.4.27), on aura (2.4.17), (2.4.18) et (2.4.20).  $\square$

**Lemme 2.4.3.** *Considérons les hypothèses du théorème 2.2.1, et soit  $\alpha_1$  défini comme dans (2.4.15). Posons*

$$\alpha_2 = \min(\alpha_1, (2\nu_2)^{-1}). \quad (2.4.29)$$

*Alors pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_2$  et tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.1.1) satisfait*

$$\int_0^T e_1(t) dt \geq \frac{C_{27}T}{2(1 + \alpha T)} (e_1(0) - \tilde{e}_2(0)). \quad (2.4.30)$$

*Démonstration.* On procède comme dans [1]. En utilisant (2.4.28), on déduit

$$\int_0^T e_1(t)dt = Te_1(0) - \alpha \int_0^T (T-t)(Cu_2, u'_1)dt.$$

Donc en reportant (2.2.10) dans cette égalité, on obtient

$$\int_0^T e_1(t)dt \geq Te_1(0) - \frac{\alpha T}{2\gamma_2} \int_0^T |u'_1|^2 dt - \frac{\gamma_2 \beta_2^2 \alpha T}{2} \int_0^T |u_2|^2 dt \quad \forall \gamma_2 > 0.$$

Alors (2.4.18) et (2.2.8) impliquent

$$\begin{aligned} \int_0^T e_1(t)dt &\geq T \left(1 - \frac{\gamma_2 \beta_2^2 C_7}{2(1-\alpha\nu_2)}\right) e_1(0) - T \frac{\gamma_2 \beta_2^2 C_7}{2(1-\alpha\nu_2)} \tilde{e}_2(0) \\ &\quad - \frac{\alpha T}{2} \left( \frac{1}{\gamma_2} \int_0^T |u'_1|^2 dt + \frac{\gamma_2 \beta_2^2 C_8}{1-\alpha\nu_2} \int_0^T (|u'_1|^2 + \nu_2 |u_1|^2) dt \right). \end{aligned}$$

En choisissant  $\gamma_2 = \frac{1-\alpha\nu_2}{\beta_2^2 C_7}$  dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\int_0^T e_1(t)dt \geq \frac{T}{2} (e_1(T) - \tilde{e}_2(0)) - \frac{\alpha T C_{28}}{1-\alpha\nu_2} \int_0^T e_1(t)dt.$$

Comme  $\alpha \in (0, \alpha_2)$  et  $\alpha_2 = \min(\alpha_1, (2\nu_2)^{-1})$ , on a  $1 \leq (1-\alpha\nu_2)^{-1} \leq 2$ . D'où (2.4.30) est vérifiée avec une nouvelle constante  $C_{27}$ .  $\square$

**Corollaire 2.4.1.** *Considérons les hypothèses du théorème 2.2.1, et soit  $\alpha_2$  défini comme dans (2.4.29). Alors il existe  $\alpha_3 \in (0, \alpha_2)$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha_3$  et tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.1.1) satisfait*

$$\int_0^T (e_1(t) + \tilde{e}_2(0))dt \geq \frac{\delta_2 T}{2} (\tilde{e}_1(0) + \tilde{e}_2(0)), \quad (2.4.31)$$

où  $\delta_2 = \min(1, \nu_1^{-2})$ .

De plus, on a

$$e_1(T) + e_1(0) \leq C_1 (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + C_{29} \alpha \int_0^T e_1(t)dt, \quad (2.4.32)$$

$$\int_0^T |u_2|^2 dt \leq 2 \frac{C_7}{\alpha} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + C_{30} \int_0^T e_1(t)dt, \quad (2.4.33)$$

et

$$\int_0^T \tilde{e}_2(t)dt \leq 2 \frac{C_{24}}{\alpha} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + C_{36} \int_0^T e_1(t)dt. \quad (2.4.34)$$

*Démonstration.* On remarque d'après (2.2.8) et (2.2.9) qu'on a

$$\int_0^T (e_1(t) + \tilde{e}_2(0)) dt \geq \delta_2 \int_0^T (\tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t)) dt. \quad (2.4.35)$$

D'autre part

$$\tilde{E}(t) = \tilde{e}_1(u_1(t)) + \tilde{e}_2(u_2(t)) + \alpha(A_1^{-1/2}u_1, (A_1^{-1/2}CA_2^{-1/2})A_2^{-1/2}u_2).$$

Alors, d'après (2.2.9), (2.2.14) et (2.2.15) on a

$$|\tilde{E}(t) - (\tilde{e}_1(u_1(t)) + \tilde{e}_2(u_2(t)))| \leq \alpha\beta_3\nu_1\nu_2 \left( \frac{|u_1|^2 + |u_2|^2}{2} \right) \leq \alpha\delta_1(\tilde{e}_1(u_1(t)) + \tilde{e}_2(u_2(t))),$$

avec  $\delta_1 = \beta_3\nu_1\nu_2$ .

En intégrant sur  $[0, T]$  et d'après le fait que  $\tilde{E}$  est conservée, on obtient

$$\int_0^T (\tilde{e}_1(t) + \tilde{e}_2(t)) dt \geq \frac{1}{1 + \alpha\delta_1} \int_0^T \tilde{E}(t) dt = \frac{T}{1 + \alpha\delta_1} \tilde{E}(0) \geq T \frac{1 - \alpha\delta_1}{1 + \alpha\delta_1} (\tilde{e}_1(0) + \tilde{e}_2(0)).$$

Alors en utilisant (2.4.35) dans la dernière inégalité et en choisissant  $\alpha_3 \in (0, \alpha_2)$  tel que  $\alpha \in (0, \alpha_3)$

$$\frac{1 - \alpha\delta_1}{1 + \alpha\delta_1} \geq \frac{1}{2},$$

on obtient (2.4.31).

D'après la définition de  $\tilde{e}_2$ , et à partir (2.4.17) et (2.4.17) on obtient facilement l'inégalité suivante

$$\int_0^T \tilde{e}_2(t) dt \leq \frac{C_{24}}{\alpha(1 - \alpha\nu_2)} (e_1(0) + \tilde{e}_2(0)) + \frac{C_{25}}{(1 - \alpha\nu_2)^2} \int_0^T (|u_1'|^2 + |u_1|^2). \quad (2.4.36)$$

De même les inégalités (2.4.32), (2.4.33) et (2.4.34) s'obtiennent facilement des estimations correspondantes (2.4.19), (2.4.18) et (2.4.36), en utilisant (2.2.8).  $\square$

Maintenant on revient à la démonstration de l'estimation principale de ce chapitre.

*Démonstration du théorème 2.2.1.* Choisissons  $\alpha \in (0, \alpha^*)$ , où  $0 < \alpha^* < \alpha_3$  sera choisis suffisamment petit dans le courant de la preuve. On remarque que  $u_1$  est la solution de

$$\begin{cases} u_1'' + A_1 u_1 = f, \\ (u_1, u_1')(0) = (u_1^0, u_1^1) \in D(A_1) \times V_1 \end{cases}$$



où  $f = -\alpha C u_2$ .

Donc d'après (H1),  $u_1$  satisfait (2.2.18) avec la correspondante  $f$ . Alors, en combinant les hypothèses (H3) et (H4) et en utilisant (2.2.10), on obtient

$$\begin{cases} \eta_4 \delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq (1 - \eta_1 \beta - \eta_4 \gamma) \int_0^T e_1(t) dt \\ -(\eta_2 + \eta_4 \delta_2)(e_1(0) + e_1(T)) - (\eta_3 \beta^{-1} + \eta_4 \delta_3) \beta_2^2 \alpha^2 \int_0^T |u_2|^2 dt. \end{cases} \quad (2.4.37)$$

pour tout  $\beta \in (0, \eta_1^{-1})$  et pour tout  $\gamma \in (0, \eta_4^{-1}(1 - \eta_1 \beta))$ .

Alors, en reportant (2.4.18) et (2.4.19) dans (2.4.37) on aura

$$\begin{cases} \eta_4 \delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq \\ \left(1 - \max(\eta_1, \eta_4)(\beta + \gamma) - \frac{C_{31}\alpha}{1 - \alpha\nu_2} - \frac{C_{32}\alpha^2}{(1 - \alpha\nu_2)^2}\right) \int_0^T e_1(t) dt \\ -C_{33}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta(1 - \alpha\nu_2)}\right)(e_1(0) + \tilde{e}_2(0)). \end{cases} \quad (2.4.38)$$

pour tout  $\beta \in (0, \eta_1^{-1})$  et pour tout  $\gamma \in (0, \eta_4^{-1}(1 - \eta_1 \beta))$ .

Maintenant, on choisit  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}\alpha$  dans la dernière inégalité. On remarque alors que

$$\left(1 - \max(\eta_1, \eta_4)(\beta + \gamma) - \frac{C_{31}\alpha}{1 - \alpha\nu_2} - \frac{C_{32}\alpha^2}{(1 - \alpha\nu_2)^2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

et

$$-C_{33}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta(1 - \alpha\nu_2)}\right) \geq -\frac{C_{34}}{2}$$

pour  $\alpha$  suffisamment petit. Donc l'inégalité (2.4.38) nous donne

$$2\eta_4 \delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq \int_0^T e_1(t) dt - C_{34}[e_1(0) + \tilde{e}_2(0)]. \quad (2.4.39)$$

Maintenant, prenons un nombre fixe arbitraire  $\varepsilon$  dans  $(0, \varepsilon^*)$ , avec  $\varepsilon^*$  est choisi suffisamment petit. Alors, on peut écrire l'inégalité (2.4.39) sous la forme suivante

$$\begin{cases} 2\eta_4 \delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq (1 - \varepsilon) \int_0^T e_1(t) dt + \varepsilon \int_0^T (e_1(t) + \tilde{e}_2(t)) dt \\ -\varepsilon \int_0^T \tilde{e}_2(t) dt - C_{34}[e_1(0) + \tilde{e}_2(0)]. \end{cases} \quad (2.4.40)$$

En reportant (2.4.31) et (2.4.34) dans (2.4.40), on obtient

$$\begin{cases} 2\eta_4\delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq (1 - \varepsilon C_{37}) \int_0^T e_1(t) dt + \varepsilon \frac{\delta_2}{2} T \tilde{e}_1(0) \\ -C_{38} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} e_1(0) + \left[ \varepsilon \frac{\delta_2}{2} T - C_{38} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} \right] \tilde{e}_2(0). \end{cases} \quad (2.4.41)$$

Posons  $\varepsilon_0 = C_{37}^{-1}$  et supposons que  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon_0$ , et utilisons (2.4.30) dans (2.4.41) pour éliminer  $\int_0^T e_1(t)$ , on déduit donc

$$\begin{cases} 2\eta_4\delta_1 \int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt \geq \left[ \frac{a_1 T}{1 + \alpha T} - C_{38} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} \right] e_1(0) + \varepsilon \frac{\delta_2}{2} T \tilde{e}_1(0) \\ + \left[ \left( a_1 - \frac{a_1}{1 + \alpha T} \right) T - C_{38} \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha} \right] \tilde{e}_2(0), \end{cases} \quad (2.4.42)$$

où

$$a_1 = \frac{(1 - \varepsilon C_{37}) C_{27}}{2} > 0 \quad (2.4.43)$$

et

$$a_2 = \frac{\varepsilon \delta_2}{2} > 0. \quad (2.4.44)$$

On remarque que le coefficient de  $\tilde{e}_1(0)$  dans (2.4.42) est strictement positif. En répétant les mêmes arguments du paragraphe 1.3 dans le chapitre précédent, on montre que les coefficients de  $e_1(0)$  et  $\tilde{e}_2(0)$  sont positifs. D'où la preuve complète du théorème 2.2.1.

## 2.5 Preuve du résultat de la contrôlabilité exacte indirecte

Ce paragraphe est consacré pour la preuve de notre résultat de la contrôlabilité exacte du problème dual (2.3.4).

*Preuve du théorème 2.2.2.* Soit  $U^0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$  donnée. On note par  $U = (u_1, u'_1, u_2, u'_2)$  la solution correspondante de (2.1.1). D'après l'inégalité d'observabilité inverse (2.1.2), la semi-norme définie par

$$\|U^0\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\int_0^T \|r(u'_1)\|_{\Theta}^2 dt} \quad (2.5.1)$$

est une norme sur  $D(\mathcal{A}_\alpha)$ . On note par  $\mathcal{F}$  le complété de  $D(\mathcal{A}_\alpha)$  par rapport à cette norme. On a donc un espace de Hilbert. D'après les inégalités directe et

inverse prouvées, respectivement, dans le théorème 2.2.2, on a les injections continues et denses suivantes

$$D(\mathcal{A}_\alpha) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{H}} \subset \hat{\mathcal{H}}, \quad (2.5.2)$$

où  $\tilde{\mathcal{H}} = V_1 \times H \times H \times V_2'$  et  $\hat{\mathcal{H}} = H \times V_1' \times H \times V_2'$ . Alors, par dualité, on a les injections continues suivantes

$$\tilde{\mathcal{H}}' \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{H}'. \quad (2.5.3)$$

Pour tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , on associe la forme linéaire sur  $\mathcal{H}$  définie par

$$\langle \Lambda(U^0), \tilde{U}^0 \rangle = \int_0^T \left( p \circ r(u_1'(t)), p \circ r(\tilde{u}_1'(t)) \right) dt. \quad (2.5.4)$$

D'après (2.2.5) et la définition de la norme de  $\mathcal{F}$  on a l'estimation

$$|\langle \Lambda(U^0), \tilde{U}^0 \rangle| \leq \|U^0\|_{\mathcal{F}} \|\tilde{U}^0\|_{\mathcal{F}} \quad \forall U^0 \in \mathcal{H}, \quad \forall \tilde{U}^0 \in \mathcal{H}.$$

Alors, comme  $\mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{F}$ , l'application  $\Lambda(U^0)$  peut se prolonger d'une manière unique en une application continue sur  $\mathcal{F}$  et  $\Lambda(U^0) \in \mathcal{F}'$ .

L'inégalité précédente nous donne que l'application linéaire qui applique  $U^0$  à  $\Lambda U^0 \in \mathcal{H}'$  est continue lorsque  $\mathcal{H}$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ . Donc par densité,  $\Lambda$  est prolongeable d'une manière unique en une application linéaire continue, on la note aussi  $\Lambda$ , de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}'$ . De plus on a

$$\langle \Lambda(U^0), \tilde{U}^0 \rangle_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} = \langle U^0, \tilde{U}^0 \rangle_{\mathcal{F}} \quad \forall U^0 \in \mathcal{H} \quad \forall \tilde{U}^0 \in \mathcal{H}, \quad (2.5.5)$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$  est le produit scalaire associé à la norme de  $\mathcal{F}$ . Alors,  $\Lambda$  est coercive et continue sur  $\mathcal{F}$ . On déduit du lemme de Lax-Milgram alors que  $\Lambda$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ .

Maintenant, on va appliquer la méthode de **HUM**. Nous avons besoin résoudre le problème homogène dans un espace plus large que l'espace énergie. Pour éviter cette étape, on réfère à l'idée de Alabau et on procède comme dans [1] dont elle a approximé la donnée initiale dans  $\mathcal{F}$  par une suite des données initiales dans l'espace énergie  $\mathcal{H}$ .

Alors, soit  $Y^0 \in \mathcal{F}'$  fixe arbitraire. On pose  $U^0 = \Lambda^{-1}Y^0$ . Donc  $U^0 \in \mathcal{F}$ . Comme  $\mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{F}$ , il existe une suite  $(U_n^0)_n \subset \mathcal{H}$  qui converge vers  $U^0$  dans  $\mathcal{F}$ . On pose  $Y_n^0 = \Lambda U_n^0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, comme  $\Lambda$  est continue,  $Y_n^0$  converge vers  $Y^0$  dans  $\mathcal{F}'$ . Donc, d'après (2.5.2) on a  $Y_n^0 \in \mathcal{H}'$  et converge vers  $Y^0$  dans  $\mathcal{H}'$ .

On pose  $U_n = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U_n^0$ ,  $z_n = (p \circ r)(u_{1_n}')$  et  $v_n = \frac{\partial}{\partial t}(p \circ r)(u_{1_n}')$  pour

tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $u_{1_n}$  désigne la première composante de  $U_n$ .

D'un autre côté, les injections suivantes

$$H^1([0, T]; H) \subset L^2([0, T]; H) \subset [H^1([0, T]; H)]'$$

sont continues. Alors pour tout  $w \in H^1([0, T]; H)$  on a

$$\begin{aligned} \langle v_n, w \rangle_{[H^1([0, T]; H)]', H^1([0, T]; H)} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(p \circ r)(u'_{1_n}), w \right\rangle_{[H^1([0, T]; H)]', H^1([0, T]; H)} \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(p \circ r)(u'_{1_n}), w \right\rangle_{L^2([0, T]; H)} \\ &= - \left\langle (p \circ r)(u'_{1_n}), w' \right\rangle_{L^2([0, T]; H)}. \end{aligned}$$

D'après la définition de la norme de  $\mathcal{F}$  et comme  $(U_n^0)_n$  converge dans  $\mathcal{F}$ , la suite  $(z_n)_n$  est alors convergente dans  $L^2([0, T]; H)$ . Or

$$\|v_n\|_{[H^1([0, T]; H)]'} = \sup_{\|w\|_{H^1([0, T]; H)} \leq 1} \left| \langle v_n, w \rangle_{[H^1([0, T]; H)]', H^1([0, T]; H)} \right|.$$

Donc la suite  $(v_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $[H^1([0, T]; H)]'$ . Par conséquent, elle converge vers une fonction  $v$  dans  $[H^1([0, T]; H)]'$ . On associe avec  $U_n$  les solutions  $Y_n$  du problème dual dans  $\mathcal{H}'$  :

$$\begin{cases} Y'_n - \mathcal{A}_\alpha^* Y_n = \mathcal{I}v_n, \\ Y_n(T) = 0. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

On remarque que ce problème rétrograde possède une solution unique en faisant le changement de variable en temps  $t \longrightarrow T - t$  et comme ce problème abstrait du premier ordre est équivalent à un problème de second ordre en temps. Alors, par définition de la solution de ce problème dual par transposition, et d'après la définition de  $\Lambda$  et la choix de  $v_n$ , on a

$$\langle Y_n(0), \tilde{U}^0 \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}} = \langle \Lambda(U_n^0), \tilde{U}^0 \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}} \quad \forall \tilde{U}^0 \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent, on a  $Y_n(0) = \Lambda(U_n^0) = Y_0^n$ . Alors, on résoud le problème de la contrôlabilité pour la donnée initiale  $Y_n^0$ , donc  $Y_n$  satisfait

$$\begin{cases} Y'_n - \mathcal{A}_\alpha^* Y_n = \mathcal{I}v_n, \\ Y_n(0) = Y_n^0, \quad Y_n(T) = 0. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Maintenant, pour tout  $T > T_0$  l'application  $\Psi$  définie dans la proposition 2.3.5 est continue ; alors,  $(Y_n)_n$  converge vers  $Y$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H}')$ , où  $Y = \Psi(Y^0, v)$  est la solution de

$$\begin{cases} Y' - \mathcal{A}_\alpha^* Y = \mathcal{I}v, \\ Y(0) = Y^0. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Par suite, on a en particulier,  $(Y_n(T))_n$  converge vers  $Y(T)$  dans  $\mathcal{H}'$ , mais  $Y_n(T) = 0$  pour tout  $n$ , donc  $Y(T) = 0$ . Alors, on a résolu le problème de la contrôlabilité exacte pour toute donnée initiale dans  $\mathcal{F}'$ . La première injection de (2.5.3) implique que ce résultat reste valable pour toute donnée initiale dans  $\tilde{\mathcal{H}}'$ . D'où la preuve complète du théorème 2.2.2.  $\square$

## 2.6 Applications

Dans ce paragraphe, on va appliquer notre résultat abstrait à deux systèmes faiblement couplés des équations aux dérivées partielles : *Petrowsky-Petrowsky* et *Onde-Petrowsky*.

### 2.6.1 Le cas de deux équations faiblement couplées : Petrowsky-Petrowsky

Soient  $N \geq 2$  et  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^4$ ,  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  est une partition de  $\Gamma$  tel que  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ , et  $x_0$  est un point de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $m \cdot \nu \leq 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $m \cdot \nu \geq \beta > 0$  sur  $\Gamma_1$ , où  $m(x) = x - x_0$ . On pose  $\sup_{\Omega} \|m\| = R$ . Soit  $\omega \subset \Omega$  un voisinage de  $\Gamma_1$  dans  $\Omega$  (Voir figure 1.1 dans le chapitre 1).

Avant de commencer notre problème, on note que l'étude de la contrôlabilité exacte interne de l'équation de Petrowsky a été abordé par P. Grisvard [36] et par V. Komornik [51]. P. Grisvard a démontré que le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'' + \Delta^2 y = h & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y = \partial_\nu y = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \quad i = 1, 2 & \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (2.6.1)$$

est exactement contrôlable *en un temps arbitrairement petit*. V. Komornik a étudié la contrôlabilité exacte interne du même système (2.6.2), mais avec la condition au bord  $y = \Delta y = 0$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ , où  $\Omega$  est un rectangle  $N$ -dimensionnel ou une sphère  $N$ -dimensionnelle. Il a considéré un domaine de contrôle  $\omega$ , et il a démontré qu'il existe un contrôle  $h \in L^2(\Omega \times (0, T))$  tel que  $\text{supp } h \subset \omega \times (0, T)$  et  $y(T) = y'(T) = 0$ .

Dans ce sous-paragraphe, on considère le système, de deux équations de

*Petrowsky* faiblement couplées, suivant

$$\begin{cases} u_1'' + \Delta^2 u_1 + \alpha u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_2'' + \Delta^2 u_2 + \alpha u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = u_2 = \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u_i(0) = u_i^0, \quad u_i'(0) = u_i^1 \quad i = 1, 2 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Ici on pose  $H = L^2(\Omega)$ ,  $\Theta = L^2(\omega)$ ,  $V_1 = V_2 = H_0^2(\Omega)$ , muni respectivement, du produit scalaire  $L^2$ , du produit scalaire  $\int_\omega uz dx$  et du produit scalaire

$$(u, z)_1 = (u, z)_2 = \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta z dx.$$

On définit les applications de dualité  $A_1$  et  $A_2$  de la même manière que la section 2.2. On notera par  $A_1 = A_2 = \Delta^2$  qui est un opérateur non borné dans  $H$  de domaine  $D(A_1) = D(A_2) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ .

De plus, on pose que l'application  $r$  est la fonction de restriction de  $\Omega$  sur  $\omega$  et l'application  $p$  est la fonction de prolongement par 0 de  $\omega$  sur  $\Omega$ .

On définit les énergies partielles naturelles et affaiblies, respectivement, par

$$e_i(t) = \frac{1}{2} (|u_i'(t)|^2 + |\Delta u_i(t)|^2) \quad i = 1, 2,$$

et

$$\tilde{e}_i(t) = \frac{1}{2} (\|u_i'(t)\|_{V_i'}^2 + |u_i(t)|^2) \quad i = 1, 2.$$

Les inégalités (2.2.8), (2.2.10), (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.15) sont satisfaites et  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ . On pose  $G = L^2(\Gamma_1)$ . De plus, on définit l'opérateur linéaire continue  $B^*$  de  $D(A_1)$  dans  $G$  par

$$B^*u = \Delta u|_{\Gamma_1}.$$

Maintenant, on précise quelques notations à l'aide des conditions géométriques introduites par E. Zuazua [122], K. Liu [72] et P. Martinez [83] concernant le cas d'un feedback localement distribué, qui seront largement utilisées dans la suite. Alors, on considère les espaces  $\omega_{\varepsilon_i}$  suivants

$$\omega_{\varepsilon_i} := \{x \in \Omega; \quad d(x, \Gamma_1) < \varepsilon_i\} \quad i = 0, 1, 2,$$

où

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad d(x, \Gamma_1) := \inf_{y \in \Gamma_1} \|x - y\|_{\mathbb{R}^N},$$

et on considère  $\tilde{\omega}$  tel que

$$\tilde{\omega} \subset \omega_{\varepsilon_0} \subset \omega_{\varepsilon_1} \subset \omega_{\varepsilon_2} \subset \omega.$$

Pour appliquer le théorème 2.2.1, nous avons juste besoin de vérifier les hypothèses (H3) et (H4).

On considère donc le problème non homogène suivant

$$\begin{cases} u_1'' + \Delta^2 u_1 = f & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = \partial_\nu u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ (u_1, u_1')(0) = (u_1^0, u_1^1) \in D(A_1) \times V_1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

où  $f \in \mathcal{C}^1([0, T]; H)$ .

*Vérification de l'hypothèse (H3).* La vérification requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* On choisit un vecteur  $h \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$  telle que

$$h \cdot \nu = 1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad h \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \text{supp } h \subset \tilde{\omega}. \quad (2.6.4)$$

L'existence de  $h$  a été démontré par J.L. Lions [69].

On procède comme dans [69] et [70]. En multipliant (2.6.3) par  $h \cdot \nabla u_1$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega f h \cdot \nabla u_1 dx dt = \int_0^T \int_\Omega (u_1'' + \Delta^2 u_1) h \cdot \nabla u_1 dx dt \\ = \left[ \int_\Omega u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (-u_1' h \cdot \nabla u_1' + (\Delta^2 u_1) h \cdot \nabla u_1) dx dt \\ = \left[ \int_\Omega u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \left( -h \cdot \frac{\nabla(u_1')^2}{2} + \Delta u_1 \Delta(h \cdot \nabla u_1) \right) dx dt \\ \quad + \int_0^T \int_\Gamma ((\partial_\nu \Delta u_1) h \cdot \nabla u_1 - \Delta u_1 \partial_\nu(h \cdot \nabla u_1)) d\gamma dt. \end{cases} \quad (2.6.5)$$

D'après la formule de Leibniz on remarque que

$$\Delta(h \cdot \nabla u_1) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i^2 (h_j \partial_j u) = 2 \sum_{i,j=1}^n (\partial_i h_j) (\partial_i \partial_j u) + \sum_{j=1}^n ((\Delta h_j) (\partial_j u_1) + h_j \partial_j (\Delta u_1)),$$

d'où

$$\Delta u_1 \Delta(h \cdot \nabla u_1) = 2 \sum_{i,j=1}^n (\partial_i h_j) (\partial_i \partial_j u) (\Delta u_1) + \sum_{j=1}^n (\Delta h_j) (\partial_j u_1) (\Delta u_1) + h \cdot \frac{\nabla(\Delta u_1)^2}{2}.$$

Par suite, (2.6.4) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} f h \cdot \nabla u_1 dx dt = \left[ \int_{\Omega} u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T \\ + \int_0^T \int_{\Gamma} ((\partial_{\nu} \Delta u_1) h \cdot \nabla u_1 - \Delta u_1 \partial_{\nu} (h \cdot \nabla u_1)) d\gamma dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} h \cdot \nabla (|u_1'|^2 - |\Delta u_1|^2) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\Delta h_i) (\partial_i u_1) (\Delta u_1) dx dt \\ + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N (\partial_i h_j) (\partial_i \partial_j u_1) (\Delta u_1) dx dt \end{array} \right. \quad (2.6.6)$$

Donc la formule de Green nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} f h \cdot \nabla u_1 dx dt = \left[ \int_{\Omega} u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T \\ + \int_0^T \int_{\Gamma} ((\partial_{\nu} \Delta u_1) h \cdot \nabla u_1 - \Delta u_1 \partial_{\nu} (h \cdot \nabla u_1) + \frac{1}{2} (h \cdot \nu) (|u_1'|^2 - |\Delta u_1|^2)) d\gamma dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} h (|u_1'|^2 - |\Delta u_1|^2) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\Delta h_i) (\partial_i u_1) (\Delta u_1) dx dt \\ + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N (\partial_i h_j) (\partial_i \partial_j u_1) (\Delta u_1) dx dt. \end{array} \right. \quad (2.6.7)$$

Mais la condition au bord (2.6.3)<sub>2</sub> implique que

$$u_1' = |\nabla u_1| = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \quad (2.6.8)$$

Maintenant, on procède comme dans [50] p.26 pour montrer que  $\partial_{\nu} (h \cdot \nabla u_1) = (h \cdot \nu) \Delta u_1$  sur  $\Gamma$ . En effet, soit  $x \in \Gamma$  un point fixe. Choisissons les coordonnées telles que  $\nu(x) = (0, \dots, 0, 1)$ . Comme  $\partial_1 u_1 = \dots = \partial_N u_1 = 0$  sur  $\Gamma$ , on a

$$\nabla(\partial_j u_1) = (\partial_{\nu} \partial_j u_1) \nu \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad j = 1, \dots, N.$$

En particulier, on a

$$\partial_i \partial_j u_1 = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N.$$

Comme  $\partial_i \partial_j u_1 = \partial_j \partial_i u_1$ , on déduit alors que

$$\partial_i \partial_j u_1(x) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N-1. \quad (2.6.9)$$



En utilisant (2.6.9), on obtient que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\nu(h \cdot \nabla u_1)(x) = \left( \sum_{i=1}^N (\partial_\nu h_i)(\partial_i u_1) + h_i(\partial_N \partial_i u_1) \right)(x) \\ = \sum_{i=1}^N h_i \partial_N \partial_i u_1 = h_N \partial_N^2 u_1(x) = h_N \Delta u_1(x) = (h \cdot \nu) \Delta u_1(x). \end{array} \right.$$

Comme  $x \in \Gamma$  est choisi arbitraire, on conclut que

$$\partial_\nu(h \cdot \nabla u_1) = (h \cdot \nu) \Delta u_1 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.6.10)$$

Par conséquent, on déduit de (2.6.8) et (2.6.10) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_\Gamma \left( (\partial_\nu \Delta u_1) h \cdot \nabla u_1 - \Delta u_1 \partial_\nu(h \cdot \nabla u_1) + \frac{1}{2} (h \cdot \nu) (|u_1'|^2 - |\Delta u_1|^2) \right) d\gamma dt \\ = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (h \cdot \nu) |\Delta u_1|^2. \end{array} \right. \quad (2.6.11)$$

Donc l'égalité (2.6.7) nous conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} h (|u_1'|^2 - |\Delta u_1|^2) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^N (\Delta h_i) (\partial_i u_1) (\Delta u_1) dx dt \\ + 2 \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (\partial_i h_j) (\partial_i \partial_j u_1) (\Delta u_1) dx dt + \left[ \int_\Omega u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T \\ - \int_0^T \int_\Omega f h \cdot \nabla u_1 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (h \cdot \nu) |\Delta u_1|^2 d\gamma dt. \end{array} \right. \quad (2.6.12)$$

Alors on remarque de la deuxième condition de (2.6.4) que (2.6.12) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} h (|u_1'|^2 - |\Delta u_1|^2) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^N (\Delta h_i) (\partial_i u_1) (\Delta u_1) dx dt \\ + 2 \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (\partial_i h_j) (\partial_i \partial_j u_1) (\Delta u_1) dx dt + \left[ \int_\Omega u_1' h \cdot \nabla u_1 \right]_0^T \\ - \int_0^T \int_\Omega f h \cdot \nabla u_1 dx dt \geq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta u_1|^2 d\gamma dt. \end{array} \right. \quad (2.6.13)$$

Comme  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors il existe une constante positive  $c_h$  telle que

$$|h(x)| \leq c_h, \quad \sum_{i,j=1}^N |\partial_i h_j(x)| \leq c_h \quad \text{et} \quad \sum_{i,j,k=1}^N |\partial_i \partial_j h_k(x)| \leq c_h \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Alors on déduit de l'inégalité de Young et (2.6.4) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta u_1|^2 dx dt \leq \frac{c_h}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} |u_1'|^2 + \frac{3c_h}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} |\Delta u_1|^2 dx dt \\ + c_h (e_1(0) + e_1(T)) + \frac{3c_h}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} |\nabla u_1|^2 dx dt \\ + 2c_h \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} \sum_{i,j=1}^N |\partial_i \partial_j u_1|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 dx dt. \end{array} \right. \quad (2.6.14)$$

*Etape 2.* Dans cette étape, on va estimer, plus précisément majorer

$$\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} \sum_{i,j=1}^N |\partial_i \partial_j u_1|^2 dx dt.$$

Comme  $\overline{\omega_{\varepsilon_0}} \cap \overline{\Omega \setminus \omega_{\varepsilon_1}} = \emptyset$ , il existe une fonction  $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \xi \leq 1, \\ \xi = 1 & \text{sur } \omega_{\varepsilon_0}, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega_{\varepsilon_1}. \end{array} \right.$$

On a besoin le résultat suivant donné dans [8].

**Proposition 2.6.1.** *Soit la fonction  $\xi$  définie comme ci-dessus. Alors pour tout  $v \in H_0^2(\Omega)$ , on a*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi \sum_{i,j=1}^N |\partial_i \partial_j v|^2 = \int_{\Omega} \left[ - \sum_{i,j=1}^N (\partial_i \partial_j \xi) (\partial_i v) (\partial_j v) + \Delta \xi |\nabla v|^2 + \xi |\Delta v|^2 \right]. \quad (2.6.15)$$

*Démonstration.* Soit  $v \in H_0^2(\Omega)$ . Après plusieurs intégration par parties, on peut vérifier facilement que

$$\int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla v \Delta v = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N (\partial_i \partial_j \xi) (\partial_i v) (\partial_j v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \xi |\nabla v|^2. \quad (2.6.16)$$

Maintenant, soit  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  donnée. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} \xi \sum_{i,j=1}^N |\partial_i \partial_j v|^2 &= \int_{\Omega} \xi \sum_{i,j=1}^N (\partial_i \partial_j v)(\partial_i \partial_j v) \\
&= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \partial_j \left( \xi (\partial_i \partial_j v) \right) \partial_i v \\
&= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \partial_i \partial_j \left( \xi \partial_j v \right) \partial_i v + \partial_j \left( \partial_i \xi \partial_j v \right) \partial_i v \\
&= \int_{\Omega} \left( 2 \nabla \xi \cdot \nabla v \Delta v + \xi |\Delta v|^2 + \sum_{i,j=1}^N (\partial_j \partial_i \xi) \partial_i v \partial_j v \right).
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6.16) dans la dernière égalité, on obtient (2.6.15) pour tout  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Par les arguments de densité et continuité on conclut (2.6.15) pour tout  $v \in H_0^2(\Omega)$ .  $\square$

Par conséquent, de la proposition 2.6.1, on déduit que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi \sum_{i,j=1}^N |\partial_i \partial_j v|^2 \leq \int_{\Omega} \xi |\Delta u_1|^2 + \widehat{C}_1 \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2. \quad (2.6.17)$$

*Etape 3.* Maintenant, on va majorer (cf. [8])

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi |\Delta u_1|^2.$$

Multiplions l'équation (2.6.3) par  $\xi u_1$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\Delta u_1|^2 = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \xi |u_1'|^2 - 2 \nabla \xi \cdot \nabla u_1 \Delta u_1 - u_1 \Delta u_1 \Delta \xi \right] \\ - \left[ \int_{\Omega} \xi u_1 u_1' \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} f \xi u_1, \end{array} \right. \quad (2.6.18)$$

Donc (2.6.16) implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\Delta u_1|^2 = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \xi |u_1'|^2 + 2 \partial_i \partial_k \xi \partial_i u_1 \partial_k u_1 + \Delta \xi |\nabla u_1|^2 + u_1 \Delta u_1 \Delta \xi \right] \\ - \left[ \int_{\Omega} \xi u_1 u_1' \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} f \xi u_1. \end{array} \right. \quad (2.6.19)$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} u_1 \Delta u_1 \Delta \xi = \int_{\Omega} \left( \frac{|u_1|^2}{2} \Delta^2 \xi - |\nabla u_1|^2 \Delta \xi \right).$$

Alors en insérant cette égalité dans (2.6.19), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\Delta u_1|^2 = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \xi |u_1'|^2 + 2 \sum_{i,k=1}^N \partial_i \partial_k \xi \partial_i u_1 \partial_k u_1 - \frac{u_1}{2} \Delta^2 \xi \right] \\ - \left[ \int_{\Omega} \xi u_1 u_1' \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} f \xi u_1. \end{array} \right. \quad (2.6.20)$$

donc l'inégalité de Young nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\Delta u_1|^2 \leq \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1'|^2 + \widehat{C}_2 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} \left[ |\nabla u_1|^2 + |u_1|^2 \right] \\ + \widehat{C}_3 (e_1(0) + e_1(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2, \end{array} \right. \quad (2.6.21)$$

où  $\widehat{C}_3 = \frac{\max(c_0, 1)}{2}$ .

Ensuite en insérant (2.6.21) dans (2.6.17), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} \sum_{i,j=1}^N |\partial_i \partial_j v|^2 \leq \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1'|^2 + \widehat{C}_4 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2 \\ + \widehat{C}_2 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1|^2 + \widehat{C}_3 (e_1(0) + e_1(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2, \end{array} \right. \quad (2.6.22)$$

où  $\widehat{C}_4 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2$ , et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_0}} |\Delta u_1|^2 \leq \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1'|^2 + \widehat{C}_2 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} \left[ |\nabla u_1|^2 + |u_1|^2 \right] \\ + \widehat{C}_3 (e_1(0) + e_1(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2, \end{array} \right. \quad (2.6.23)$$

Utilisant (2.6.22) et (2.6.23) dans (2.6.14), on déduit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta u_1|^2 \leq 4c_h \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1'|^2 + \widehat{C}_5 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2 \\ \widehat{C}_6 \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |u_1|^2 + \widehat{C}_7 (e_1(0) + e_1(T)) + \widehat{C}_8 \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2, \end{array} \right. \quad (2.6.24)$$

où  $\widehat{C}_5 = c_h(\frac{3\widehat{C}_2}{2} + \frac{3}{2} + 2\widehat{C}_4)$ ,  $\widehat{C}_6 = \frac{7c_h\widehat{C}_3}{2}$ ,  $\widehat{C}_7 = c_h(\frac{7\widehat{C}_3}{2} + 1)$ ,  $\widehat{C}_8 = \frac{7c_h}{2} + 1$ .

*Etape 4.* Dans cette étape on va majorer  $\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2$ . On adapte une méthode des multiplicateurs introduite par F. Alabau [8].

Comme  $\overline{\omega_{\varepsilon_1}} \cap \overline{\Omega \setminus \omega_{\varepsilon_2}} = \emptyset$ , on peut construire une fonction  $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \beta \leq 1, \\ \beta = 1 & \text{sur } \omega_{\varepsilon_1}, \\ \beta = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega_{\varepsilon_2}. \end{cases}$$

On fixe  $t$ . Et soit  $\theta$  la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} \Delta^2 \theta = \beta \Delta u_1 & \text{dans } \Omega, \\ \theta = \partial_\nu \theta = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.6.25)$$

Alors

$$\int_{\Omega} |\Delta \theta|^2 = \int_{\Omega} \Delta \theta \Delta \theta = \int_{\Omega} \theta \Delta^2 \theta = \int_{\omega_{\varepsilon_2}} u_1 (\beta \Delta \theta + 2 \nabla \beta \cdot \nabla \theta + \theta \Delta \beta).$$

Donc d'après les inégalités de Young et de Poincaré, on a

$$\int_{\Omega} |\Delta \theta|^2 \leq \widehat{C}_9 \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1|^2 + \varepsilon \widehat{C}_9 \int_{\Omega} |\Delta \theta|^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.6.26)$$

Donc

$$\int_{\Omega} |\Delta \theta|^2 \leq \widehat{C}_{10} \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1|^2. \quad (2.6.27)$$

D'autre part, en dérivant par rapport à  $t$ , on voit que  $Z'$  est une solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta^2 \theta' = \beta \Delta u_1' & \text{dans } \Omega, \\ \theta' = \partial_\nu \theta' = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.6.28)$$

Donc, on a aussi

$$\int_{\Omega} |\Delta \theta'|^2 \leq \widehat{C}_{11} \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1'|^2. \quad (2.6.29)$$

Maintenant, multiplions l'équation (2.6.3) par  $\theta$ , on obtient en intégrant par parties et en utilisant (2.6.25)

$$\int_0^T \int_{\Omega} \beta u_1 \Delta u_1 - \int_0^T \int_{\Omega} \theta' u_1' + \left[ \int_{\Omega} \theta u_1' \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} f \theta = 0.$$

Ensuite en intégrant par parties aussi, on déduit

$$\int_0^T \int_{\Omega} \beta |\nabla u_1|^2 = - \int_0^T \int_{\Omega} \theta' u_1' + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\Delta \beta}{2} |u_1|^2 + \left[ \int_{\Omega} \theta u_1' \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} f \theta.$$

Par suite, de l'inégalité de Young, on conclut

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \beta |\nabla u_1|^2 \leq \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_1'|^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^T \int_{\Omega} |\theta_1'|^2 \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\Delta \beta}{2} |u_1|^2 + \left[ \int_{\Omega} \theta u_1' \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \gamma_2 > 0. \end{array} \right. \quad (2.6.30)$$

Alors en utilisant l'inégalité de Poincaré dans (2.6.30), puis en utilisant (2.6.27) et (2.6.29) dans l'équation résultante, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2 \leq \gamma_2 \int_0^T e_1(t) dt + \widehat{C}_{12} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1'|^2 + \widehat{C}_{13} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1|^2 \\ + \widehat{C}_{14} (e_1(0) + e_1(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \gamma_2 > 0. \end{array} \right. \quad (2.6.31)$$

*Etape 5.* Dans cette étape, on va majorer  $\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1|^2$ . Comme dans l'étape précédente, on adapte une méthode des multiplicateurs introduite par F. Alabau [8].

Le fait que  $\overline{\omega_{\varepsilon_2}} \cap \Omega \setminus \omega = \emptyset$  nous permet de construire une fonction  $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho = 1 & \text{sur } \omega_{\varepsilon_2}, \\ \rho = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega. \end{array} \right.$$

On fixe  $t$ , et soit  $z$  la solution du problème elliptique

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 z = \rho u_1 & \text{dans } \Omega, \\ z = \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.6.32)$$

Multiplions la première équation de (2.6.32) par  $z$  et intégrons par parties. On déduit alors

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^2 = \int_{\Omega} \rho u_1 z. \quad (2.6.33)$$

L'inégalité de Poincaré conduit (2.6.33) à

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^2 \leq \widehat{C}_{15} \int_{\omega} |u_1|^2. \quad (2.6.34)$$

D'autre part, en dérivant (2.6.32) par rapport au temps  $t$ , on trouve que  $z'$  est une solution de

$$\begin{cases} \Delta^2 z' = \rho u'_1 & \text{dans } \Omega, \\ z' = \partial_\nu z' = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.6.35)$$

Alors, on a

$$\int_{\Omega} |\Delta z'|^2 \leq \widehat{C}_{16} \int_{\omega} |u'_1|^2. \quad (2.6.36)$$

Maintenant, multiplions l'équation (2.6.3) par  $z$ , on obtient donc en intégrant par parties et en utilisant la première équation de (2.6.32)

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho |u_1|^2 - \int_0^T \int_{\Omega} z' u'_1 + \left[ \int_{\Omega} z u'_1 \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} f z = 0.$$

Alors d'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} \rho |u_1|^2 \leq \frac{\gamma_3}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u'_1|^2 + \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^T \int_{\Omega} |z'|^2 + \widehat{C}_{17}(e_1(0) + e_1(T)) \\ \quad + \gamma_4 \int_0^T \int_{\Omega} |z|^2 + \frac{1}{4\gamma_4} \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \gamma_3, \gamma_4 > 0. \end{cases} \quad (2.6.37)$$

De l'inégalité de Poincaré et (2.6.34), on conclut que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |z|^2 \leq \widehat{C}_{18} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2. \quad (2.6.38)$$

De même, l'inégalité de Poincaré et (2.6.36) impliquent

$$\int_0^T \int_{\Omega} |z'|^2 \leq \widehat{C}_{19} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2. \quad (2.6.39)$$

Ensuite, en utilisant (2.6.38) et (2.6.39) dans (2.6.37), on déduit

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_2}} |u_1|^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \rho |u_1|^2 \\ \leq (\gamma_3 + 2\gamma_4 \widehat{C}_{18}) \int_0^T e_1(t) dt + \widehat{C}_{20} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 + \widehat{C}_{17}(e_1(0) + e_1(T)) \\ \quad + \frac{1}{4\gamma_4} \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \gamma_3, \gamma_4 > 0, \end{cases} \quad (2.6.40)$$

où  $\widehat{C}_{20} = \frac{\widehat{C}_{19}}{2\gamma_3}$ .

Par conséquent, l'insertion de (2.6.40) dans (2.6.31) nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon_1}} |\nabla u_1|^2 \leq \widehat{C}_{21}(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \int_0^T e_1(t)dt + \widehat{C}_{22} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 \\ \quad + \widehat{C}_{23}(e_1(0) + e_1(T)) + \widehat{C}_{24} \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0, \end{array} \right. \quad (2.6.41)$$

où  $\widehat{C}_{21} = \max(1, \widehat{C}_{13}, 2\widehat{C}_{13}\widehat{C}_{18})$ ,  $\widehat{C}_{22} = \widehat{C}_{12} + \widehat{C}_{13}\widehat{C}_{20}$ ,  $\widehat{C}_{23} = \widehat{C}_{13}\widehat{C}_{17} + \widehat{C}_{14}$  et  $\widehat{C}_{24} = \frac{\widehat{C}_{13}}{4\gamma_4} + 1$ .

*Etape 6.* Dans cette étape, on utilise (2.6.40) et (2.6.41) dans (2.6.24), on obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta u_1|^2 \leq \widehat{C}_{25} \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 + \widehat{C}_{26}(\gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4) \int_0^T e_1(t)dt \\ \quad \widehat{C}_{27}(e_1(0) + e_1(T)) + \widehat{C}_{28} \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0, \end{array} \right. \quad (2.6.42)$$

où  $\widehat{C}_{25} = (4c_h + \widehat{C}_5\widehat{C}_{22} + \widehat{C}_6\widehat{C}_{20})$ ,  $\widehat{C}_{26} = \max(\widehat{C}_5\widehat{C}_{11}, \widehat{C}_6, 2\widehat{C}_6\widehat{C}_{18})$ ,  $\widehat{C}_{27} = \widehat{C}_5\widehat{C}_{23} + \widehat{C}_6\widehat{C}_{17} + \widehat{C}_7$  et  $\widehat{C}_{28} = \widehat{C}_5\widehat{C}_{24} + \frac{\widehat{C}_6}{4\gamma_4} + \widehat{C}_8$ .

Par conséquent, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta u_1|^2 dxdt \leq \widehat{\delta}_1 \int_0^T \int_{\omega} |u'_1|^2 + \widehat{\gamma} \int_0^T e_1(t)dt \\ \quad + \widehat{\delta}_2(e_1(0) + e_1(T)) + \widehat{\delta}_3 \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2, \end{array} \right. \quad (2.6.43)$$

où  $\widehat{\delta}_1 = 2\widehat{C}_{25}$ ,  $\widehat{\gamma} = \widehat{C}_{26}(\gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4)$  où  $\gamma_2, \gamma_3$  et  $\gamma_4$  sont positives arbitraires,  $\widehat{\delta}_2 = 2\widehat{C}_{27}$  et  $\widehat{\delta}_3 = 2\widehat{C}_{28}$ .

D'où (2.2.17) est satisfaite.

*Vérification de l'hypothèse (H4).* On procède comme dans [69], [70]. On définit d'abord  $\sigma^2$  comme la plus petite constante positive telle que

$$|\nabla u|^2 \leq \sigma^2 |\Delta u|^2 \quad \forall u \in V_1. \quad (2.6.44)$$

On utilise le multiplicateur  $Mu_1 = m \cdot \nabla u_1$  et on multiplie (2.6.3) par  $Mu_1$ . On obtient alors de (2.6.12) en remplaçant  $h$  par  $m$  et en utilisant le fait que



$\partial_i m_i = \delta_{ij}$  et  $\operatorname{div} m = N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u'_1|^2 - |\Delta u_1|^2) + 2 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta u_1|^2 + \left[ \int_{\Omega} u'_1 m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T \\ - \int_0^T \int_{\Omega} f m \cdot \nabla u_1 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\Delta u_1|^2 d\gamma dt. \end{array} \right. \quad (2.6.45)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N-2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u'_1|^2 - |\Delta u_1|^2) + \int_0^T \int_{\Omega} (|u'_1|^2 + |\Delta u_1|^2) \\ + \left[ \int_{\Omega} u'_1 m \cdot \nabla u_1 \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} f m \cdot \nabla u_1 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\Delta u_1|^2 d\gamma dt. \end{array} \right. \quad (2.6.46)$$

En multipliant la première équation de (2.6.3) par  $u_1$  (cf. [69], [70]), on obtient facilement

$$\frac{N-2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u'_1|^2 - |\Delta u_1|^2) = \frac{N-2}{2} \left[ \int_{\Omega} u'_1 u_1 \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} f u_1. \quad (2.6.47)$$

On obtient donc de (2.6.46)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\Delta u_1|^2 d\gamma dt = \left[ \int_{\Omega} u'_1 \left( m \cdot \nabla u_1 + \frac{N-2}{2} u_1 \right) \right]_0^T \\ + 2 \int_0^T \int_{\Omega} e_1(t) dt + \int_0^T \int_{\Omega} f m \cdot \nabla u_1 - \int_0^T \int_{\Omega} f u_1. \end{array} \right. \quad (2.6.48)$$

Maintenant, on va majorer  $\left[ \int_{\Omega} u'_1 \left( m \cdot \nabla u_1 + \frac{N-2}{2} u_1 \right) \right]_0^T$ . On procède comme dans [69]. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Omega} u'_1(t) \left( m \cdot \nabla u_1(t) + \frac{N-2}{2} u_1(t) \right) \right| \leq \frac{R\sigma}{2} \int_{\Omega} |u'_1(t)|^2 \\ + \frac{1}{2R\sigma} \int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla u_1(t) + \frac{N-2}{2} u_1(t) \right|^2 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (2.6.49)$$

et d'autre part

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla u_1(t) + \frac{N-2}{2} u_1(t) \right|^2 \leq \int_{\Omega} |m \cdot \nabla u_1(t)|^2 + \frac{N-2}{4} \int_{\Omega} |u_1(t)|^2 \\ + (N-2) \int_{\Omega} m \cdot \nabla u_1(t) u_1(t) \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.6.50)$$

En outre, la formule de Green nous donne

$$\int_{\Omega} m \cdot \nabla u_1(t) u_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m \cdot \nabla (|u_1(t)|^2) = -\frac{N}{2} \int_{\Omega} |u_1(t)|^2. \quad (2.6.51)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

Par suite, en combinant (2.6.50) et (2.6.51), on déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla u_1(t) + \frac{N-2}{2} u_1(t) \right|^2 \leq \int_{\Omega} |m \cdot \nabla u_1(t)|^2 \\ \quad + \left[ \frac{(N-2)^2}{4} - \frac{N(N-2)}{2} \right] \int_{\Omega} |u_1(t)|^2 \\ \leq \int_{\Omega} |m \cdot \nabla u_1(t)|^2 \leq R^2 \int_{\Omega} |\nabla u_1(t)|^2 \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.6.52)$$

Alors (2.6.44) conduit (2.6.49) à

$$\int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla u_1(t) + \frac{N-2}{2} u_1(t) \right|^2 \leq R^2 \sigma^2 \int_{\Omega} |\Delta u_1(t)|^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.6.53)$$

Finalement, en utilisant (2.6.53) dans (2.6.49)

$$\left| \int_{\Omega} u_1'(t) \left( m \cdot \nabla u_1(t) + \frac{N-2}{2} u_1(t) \right) \right| \leq R \sigma e_1(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.6.54)$$

D'un autre côté, en utilisant l'inégalité de Young on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} f m \cdot \nabla u_1 \leq \frac{R \dot{\beta} \sigma^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta u_1|^2 + \frac{1}{\dot{\beta}} |f|^2 \quad \forall \dot{\beta} > 0 \quad (2.6.55)$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} f u_1 \leq \frac{R \ddot{\beta} c_0 \sigma^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta u_1|^2 + \frac{1}{\ddot{\beta}} |f|^2 \quad \forall \ddot{\beta} > 0. \quad (2.6.56)$$

Finalement, en utilisant (2.6.54), (2.6.55) et (2.6.56), on obtient de (2.6.48)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta u_1|^2 d\gamma dt \geq (2 - \max(R\sigma^2, R\sigma^2 c_0)(\dot{\beta} + \ddot{\beta})) \int_0^T e_1(t) dt \\ -R\sigma(e_1(0) + e_1(T)) - \eta_{\dot{\beta}, \ddot{\beta}} \frac{1}{\dot{\beta} + \ddot{\beta}} \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 \quad \forall \dot{\beta}, \ddot{\beta} > 0, \end{array} \right. \quad (2.6.57)$$

où  $\eta_{\dot{\beta}, \ddot{\beta}} = \frac{(\dot{\beta} + \ddot{\beta})^2}{\dot{\beta} \ddot{\beta}}$  D'où (2.2.18) est vérifiée.

Comme les hypothèses (H3)-(H4) sont vérifiées, on peut appliquer le théorème 2.2.1. Donc on conclut le résultat suivant.

**Théorème 2.6.1.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.6.2) satisfait*

$$\left\{ \begin{array}{l} R\widehat{\delta}_1 \int_0^T \int_\omega |u'_1| dx dt \geq c_1(\alpha, T) \int_\Omega (|u_1^1|^2 + |\Delta u_1^0|^2) dx \\ \quad + c_3(\alpha, T) \left( \int_\Omega |u_2^0|^2 dx + \|u_2^1\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \right), \end{array} \right. \quad (2.6.58)$$

où les constantes  $c_i$  pour  $i = 1, 3$  sont données dans le théorème 2.2.1. De plus, si la solution de (2.6.2) satisfait

$$u'_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \times (0, T),$$

alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  sur  $\Omega \times [0, T]$ .

Par dualité, la contrôlabilité exacte interne indirecte est une conséquence du résultat précédent. Donc on considère le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1'' + \Delta^2 y_1 + \alpha y_2 = v 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y_2'' + \Delta^2 y_2 + \alpha y_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y_1 = y_2 = \partial_\nu y_1 = \partial_\nu y_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y_i(0) = y_i^0, \quad y_i'(0) = y_i^1 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.6.59)$$

Comme les hypothèses du théorème 2.2.1 sont vérifiées, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 2.6.2.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $Y^0 = (y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , il existe  $v \in [H^1(0, T; L^2(\Omega))]'$  tel que la solution de système (2.6.59) satisfait*

$$y_1(T) = y_{1,t}(T) = y_2(T) = y_{2,t}(T) = 0.$$

## 2.6.2 Le cas de deux équations faiblement couplées : Onde-Petrowsky

On considère le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1'' - \Delta u_1 + \alpha C u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_2'' + \Delta^2 u_2 + \alpha C^* u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = u_2 = \Delta u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u_i(0) = u_i^0, \quad u_i'(0) = u_i^1 \quad i = 1, 2 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.6.60)$$

où l'opérateur de couplage  $C$  est choisi dans le lemme ci-dessous. On pose  $H = L^2(\Omega)$ ,  $\Theta = L^2(\omega)$ ,  $V_1 = H_0^1(\Omega)$  et  $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , muni respectivement, du produit scalaire  $L^2$ , du produit scalaire  $\int_{\omega} uz dx$ , du produit scalaire  $(u, z)_1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z dx$  et du produit scalaire  $(u, z)_2 = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta z dx$ . On définit les applications de dualité  $A_1$  et  $A_2$  de la même manière que la section 2.2. On notera, respectivement, par  $-\Delta$  l'opérateur  $A_1$  qui est un opérateur non borné dans  $H$  de domaine  $D(A_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et par  $\Delta^2$  l'opérateur  $A_2$  qui est un opérateur non borné dans  $H$ . F. Alabau a démontré dans [2] à l'aide des résultats de régularité de Grisvard que

$$D(A_2) = \{u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

De plus, on pose que l'application  $r$  est la fonction de restriction de  $\Omega$  sur  $\omega$  et l'application  $p$  est la fonction de prolongement par 0 de  $\omega$  sur  $\Omega$ .

On définit les énergies partielles naturelles et affaiblies, respectivement, par

$$e_1(t) = \frac{1}{2}(|u_1'(t)|^2 + |\nabla u_1(t)|^2),$$

$$e_2(t) = \frac{1}{2}(|u_2'(t)|^2 + |\Delta u_2(t)|^2),$$

$$\tilde{e}_1(t) = \frac{1}{2}(\|u_1'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |u_1(t)|^2)$$

et

$$\tilde{e}_2(t) = \frac{1}{2}(\|u_2'(t)\|_{V_2'}^2 + |u_1(t)|^2).$$

Les inégalités (2.2.8), (2.2.10), (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.15) sont satisfaites et  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . L'hypothèse (H2) est vérifiée à l'aide du lemme suivant donné par Alabau dans [2], et  $\beta_3 = 1$ .

**Lemme 2.6.1.** *On définit les espaces  $H$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  et les opérateurs non bornés  $A_1 : D(A_1) \subset H \longrightarrow H$ ,  $A_2 : D(A_2) \subset H \longrightarrow H$  comme dans la section 2.2, où  $D(A_i) = \{u \in V_i; A_i u \in H\}$ , pour  $i = 1, 2$ . De plus, on pose  $A_1 \neq A_2$ . On suppose qu'il existe une base orthonormée commune  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  des fonctions propres des opérateurs  $A_i$  dans  $H$ , pour  $i = 1, 2$ , où*

$$A_i e_k = \lambda_{i,k} e_k, \quad k = 1, \dots, i = 1, 2.$$

*De plus, on considère l'hypothèse suivante :*

(H5) :  $\exists r : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ , injective, telle que  $\lambda_{2,k} = \lambda_{1,r(k)} \quad \forall r \in \mathbb{N}^*$ .

*Alors il existe un opérateur linéaire  $C$  borné dans  $H$  de la forme*

$$Cu = \sum_{k=1}^{\infty} u_k w_k e_{r(k)},$$

où la suite des nombres réels  $(w_k)_k$  vérifie

$$\exists w_- > 0, w_+ > 0 \quad \text{telle que} \quad w_- \leq w_k \leq w_+, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\},$$

et  $C$  vérifie

$$CV_2 \subset V_1, CD(A_2) \subset D(A_1) \text{ et } A_1Cu = CA_2u \quad \forall u \in D(A_2), \quad (2.6.61)$$

et  $\|Cu\|_H = \|u\|_H$  pour tout  $u \in H$ .

On pose maintenant  $G = L^2(\Gamma_1)$ . De plus, on définit l'opérateur linéaire continue  $B^*$  de  $D(A_1)$  dans  $G$  par

$$B^*u = \partial_\nu u|_{\Gamma_1}.$$

Pour appliquer le théorème 2.2.1, il nous reste à démontrer que les hypothèses (H3) et (H4) sont vérifiées.

On considère alors le problème non homogène suivant

$$\begin{cases} u_1' - \Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u_1(\cdot, 0) = u_1^0(\cdot) \in D(A_1), \quad u_1'(\cdot, 0) = u_1^1(\cdot) \in V_1 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (2.6.62)$$

où  $f \in \mathcal{C}^1([0, T]; H)$ .

On reprend alors les espaces  $\omega_{\varepsilon_i}$  déjà définis dans la section 1.3 du chapitre précédent :

$$\omega_{\varepsilon_i} := \{x \in \Omega; d(x, \Gamma_1) < \varepsilon_i\} \quad i = 0, 1$$

où

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad d(x, \Gamma_1) := \inf_{y \in \Gamma_1} \|x - y\|_{\mathbb{R}^N},$$

et  $\tilde{\omega}$  tel que

$$\tilde{\omega} \subset \omega_{\varepsilon_0} \subset \omega_{\varepsilon_1} \subset \omega.$$

En procédant comme dans la section 1.3 du premier chapitre et en répétant exactement les mêmes arguments de l'étape 2 pour obtenir l'inégalité (1.3.69) (on remplace  $-\alpha u_2$  par  $f$ ), et grâce à (1.3.46) et (1.3.45), on déduit une inégalité de la forme suivante

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Gamma_1} h \cdot \nu |\partial_\nu u_1|^2 \leq \bar{\delta}_1 \int_0^T \int_\omega |u_1'|^2 + \bar{\gamma} \int_0^T e_1(t) + \bar{\delta}_2 (e_1(0) + e_1(T)) \\ \quad + \bar{\delta}_3 \int_0^T \int_\Omega |f|^2, \end{cases} \quad (2.6.63)$$

où  $\bar{\gamma}$  est arbitraire positive, et  $\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \bar{\delta}_3$  sont des constantes positives. D'où (2.2.17) est vérifiée.

De même, en procédant comme dans la section 1.3 du premier chapitre et en répétant exactement les mêmes arguments de l'étape 1 pour obtenir l'inégalité (1.3.66) (on remplace  $-\alpha u_2$  par  $f$ ), on déduit une inégalité de la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{R}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\partial_\nu u_1|^2 \geq (1 - R\beta) \int_0^T e_1(t) dt - \frac{R}{2\beta} \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 dx dt \\ -R(e_1(0) + e_1(T)) \quad \forall 0 < \beta < \frac{1}{R}. \end{cases} \quad (2.6.64)$$

D'où (2.2.18) est vérifiée.

Comme les hypothèses (H3)-(H4) sont vérifiées, on peut appliquer le théorème 2.2.1. Donc on conclut le résultat suivant.

**Théorème 2.6.3.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $U^0 \in \mathcal{H}$ , la solution  $U(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\alpha)U^0$  de (2.6.2) vérifie*

$$\begin{cases} R\bar{\delta}_1 \int_0^T \int_{\omega} |u'_1| dx dt \geq c_1(\alpha, T) \int_{\Omega} (|u_1^1|^2 + |\nabla u_1^0|^2) dx \\ + c_3(\alpha, T) \left( \int_{\Omega} |u_2^0|^2 dx + \|u_2^1\|_{V_2'}^2 \right), \end{cases} \quad (2.6.65)$$

où les constantes  $c_i$  pour  $i = 1, 3$  sont données dans le théorème 2.2.1.

De plus, si la solution de (2.6.60) satisfait

$$u'_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \times (0, T),$$

alors on a  $u_1 = u_2 = 0$  sur  $\Omega \times [0, T]$ .

Par dualité, la contrôlabilité exacte interne indirecte est une conséquence du résultat précédent. Donc on considère le système

$$\begin{cases} y_{1,tt} - \Delta y_1 + \alpha C y_2 = v 1_\omega & \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \\ y_{2,tt} + \Delta^2 y_2 + \alpha C^* y_1 = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \\ y_1 = y_2 = \Delta y_2 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y_i(0) = y_i^0, \quad y_{i,t}(0) = y_i^1 & \text{sur} \quad \Omega, \end{cases} \quad (2.6.66)$$

Comme les hypothèses du théorème 2.2.1 sont vérifiées, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 2.6.4.** *Il existe  $\alpha^* > 0$  tel que pour tout  $0 < |\alpha| < \alpha^*$ , il existe  $T_0 = T_0(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$  et tout  $Y^0 = (y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ , il existe  $v \in [H^1(0, T; L^2(\Omega))]'$  tel que la solution de système (2.6.66) satisfait*

$$y_1(T) = y_{1,t}(T) = y_2(T) = y_{2,t}(T) = 0.$$





## Chapitre 3

# Observabilité interne indirecte et contrôlabilité exacte du système de Timoshenko

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de la contrôlabilité exacte indirecte du système de Timoshenko sous l'effet d'une seule force de contrôle agissant sur l'équation de l'angle de cisaillement dans le cas où les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système sont égales. Cette étude a été motivée par le résultat de F. Alabau dans [1]. Elle a démontré la stabilisation exponentielle du système de Timoshenko sous l'effet d'une seule force de contrôle agissant sur l'équation de l'angle de cisaillement, où les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système sont égales.

On considère donc le système homogène de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 & t > 0, 0 < x < L \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  désignent respectivement le déplacement transversal de la poutre et l'angle de rotation d'un filament de la poutre. De plus  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $k$  et  $b$  sont des constantes positives caractérisent les propriétés physiques de la poutre et des filaments. Les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation sont respectivement données par  $w_1 = \frac{k}{\rho_1}$  et  $w_2 = \frac{b}{\rho_2}$ .

Ensuite, on considère les conditions au bord suivantes de ce système

$$\varphi = \psi = 0, \quad t > 0, x = 0, x = L \quad (\text{Dirichlet}), \quad (3.1.2)$$

ou

$$\varphi = \psi_x = 0, \quad t > 0, x = 0, x = L \quad (\text{Neumann}). \quad (3.1.3)$$

Les conditions initiales des états variables sont :

$$(\varphi, \psi)(x, 0) = (\varphi_0(x), \psi_0(x)) \text{ et } (\varphi_t, \psi_t)(x, 0) = (\varphi_1(x), \psi_1(x)) \quad x \in (0, L). \quad (3.1.4)$$

L'énergie naturelle des solutions du système (3.1.1) soumis à l'état initiale (3.1.4) et à chacune des conditions aux bords (3.1.2) ou (3.1.3) est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2) dx.$$

Il est facile de vérifier que l'énergie naturelle  $E$  est conservée *i.e.*

$$E(t) = E(0) \quad \forall t > 0.$$

D'un autre côté, on définit l'énergie affaiblie des solutions du système (3.1.1) soumis à l'état initiale (3.1.4) et à chacune des conditions au bord (3.1.2) ou (3.1.3), par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 \int_0^L |(-\partial_{xx})^{-1/2} \varphi_t|^2 + \rho_2 \int_0^L |(-\partial_{xx})^{-1/2} \psi_t|^2 \right. \\ \left. + b \int_0^L |\psi|^2 + k \int_0^L |\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi)|^2 \right), \end{array} \right.$$

et cette énergie est conservée, *i.e.*,

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) \quad \forall t > 0.$$

La démonstration de la conservation de l'énergie affaiblie  $\tilde{E}$  est détaillée dans le paragraphe suivant.

L'étude de la stabilisation du système de Timoshenko a attiré l'attention de beaucoup des auteurs (voir [7], [14], [16], [57], [90], [96], [100], [102], [104], [105], [106], [107], [112], [116], [117], [119]).

D'un autre côté, les travaux réalisés de la contrôlabilité exacte du système de Timoshenko étaient relativement rares. Dans [109] M. Shubov a étudié la contrôlabilité exacte du système de Timoshenko sous l'effet de deux termes d'amortissement, dont seulement la force de contrôle agissant sur l'équation

de l'angle de cisaillement est active, tandis que l'autre terme agissant sur l'équation du déplacement vertical est traité comme une force donnée. Elle a obtenu un résultat de contrôlabilité exacte dans un temps  $T > 0$  en étudiant les comportements asymptotiques des fonctions et valeurs propres. En utilisant la méthode de **HUM**, L. A. Medeiros [87] a traité la contrôlabilité exacte du système de Timoshenko sous l'effet d'un couple de forces de contrôle aux bords. La contrôlabilité exacte des équations aux dérivées partielles avec des contrôles de type Neumann sur la frontière ou sur une partie de la frontière était intéressante aussi pour beaucoup des auteurs. J. L. Lions [69] a démontré la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes sous l'effet d'un contrôle de type Neumann. Dans [65] I. Lasiecka et R. Triggiani ont traité la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes sous l'effet d'un contrôle de type Neumann sur une partie du bord, et celle de l'équation de Euler-Bernoulli [66] sous l'effet de deux contrôles au bord, l'un de type Dirichlet et l'autre de type Neumann.

Dans le cas des conditions au bord (3.1.2) et si les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système (3.1.1) sont égales, on montre l'inégalité d'observabilité suivante pour un temps  $T > 0$  suffisamment grand

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \\ \geq c_1 (|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2), \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L))^2$ , où  $c_1$  est une constante dépend de  $T$ .

De même, dans le cas des conditions au bord (3.1.3) et si les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système (3.1.1) sont égales, on montre l'inégalité d'observabilité suivante pour un temps  $T > 0$  suffisamment grand

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \\ \geq \bar{c}_1 (|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2), \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]'$ , où  $\bar{c}_1$  est une constante dépend de  $T$ , et l'espace

$$H_*^1(0, L) := \{f \in H^1(0, L); \int_0^L f dx = 0\}.$$

De plus, dans le deux cas des conditions au bord, si la solution de (3.1.1) satisfait  $\psi = 0$  p.p. sur  $(0, L) \times (0, T)$ , alors

$$\varphi = \psi = 0 \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, T).$$

Par dualité, grâce aux inégalités (3.1.5) et (3.1.6), on obtient des résultats de contrôlabilité exacte interne indirecte. Plus précisément, on considère les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \rho_1 y_{tt} - k(y_x + z)_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 z_{tt} - bz_{xx} + k(y_x + z) = v & t > 0, 0 < x < L, \\ y(0) = y(L) = z(0) = z(L) = 0 & \text{(Dirichlet)}, \\ (y, z, y_t, z_t)(x, 0) = (y_0(x), z_0(x), y_1(x), z_1(x)), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.1.7)$$

et

$$\begin{cases} \rho_1 y_{tt} - k(y_x + z)_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 z_{tt} - bz_{xx} + k(y_x + z) = v & t > 0, 0 < x < L, \\ y(0) = y(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0 & \text{(Neumann)}, \\ (y, z, y_t, z_t)(x, 0) = (y_0(x), z_0(x), y_1(x), z_1(x)), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

On montre les résultats suivant si l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système (3.1.1) ont la même vitesse de propagation :

#### 1. Cas des conditions aux bords de Dirichlet

Pour un temps  $T > 0$  suffisamment grand et pour tout

$$Y^0 = (y^0, y^1, z^0, z^1) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2,$$

il existe un **contrôle**  $v_1 \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  tel que la solution du système (3.1.7) vérifie

$$y(T) = y_t(T) = z(T) = z_t(T) = 0,$$

*i.e.* il existe un **contrôle**  $v_1$  qui ramène la solution de (3.1.7) à l'équilibre au temps  $T$ .

#### 2. Cas des conditions aux bords de Neumann

Pour un temps  $T > 0$  suffisamment grand et pour tout

$$Y^0 = (y^0, y^1, z^0, z^1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

il existe un **contrôle**  $v_2 \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  tel que la solution du système (3.1.8) vérifie

$$y(T) = y_t(T) = z(T) = z_t(T) = 0,$$

*i.e.* il existe un **contrôle**  $v_2$  qui ramène la solution de (3.1.8) à l'équilibre au temps  $T$ .

## 3.2 Formulation du problème

On définit l'espace énergie associé au problème (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4) par

$$\mathcal{H}_1 = (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2.$$

et celui associé au problème (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) par

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H^1(0, L) \times L^2(0, L).$$

On définit le produit scalaire sur  $\mathcal{H}_j$   $j = 1, 2$  par

$$\langle (\varphi, \psi, u, v), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{u}, \tilde{v}) \rangle_{\mathcal{H}_j} := \int_0^L \left( \rho_1 u \tilde{u} + \rho_2 v \tilde{v} + b \psi \tilde{\psi} + k(\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) \right) dx.$$

En appliquant un théorème classique de la théorie de semi-groupe, on montre que le problème (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4) (respectivement (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4)) est bien posé et admet une solution unique dans l'espace énergie  $\mathcal{H}_1$  (respectivement  $\mathcal{H}_2$ ) (voir [1]). De plus, si les conditions initiales sont plus régulières, les solutions sont fortes.

Maintenant on va démontrer la *conservation de l'énergie affaiblie*  $\tilde{E}$ .

*Démonstration.* Prenons les fonctions suivantes :  $\pi$  solution de

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\pi = \varphi_x + \psi & \text{sur } (0, L), \\ \pi(0) = \pi(L) = 0, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$\phi$  solution de

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\phi = \varphi_t & \text{sur } (0, L), \\ \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

et  $\nu$  solution de

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\nu = \psi_t & \text{sur } (0, L), \\ \nu(0) = \nu(L) = 0. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

En multipliant la première équation (respectivement la deuxième équation) de (3.1.1) par  $(-\partial_{xx})^{-1}\varphi_t$  (respectivement  $(-\partial_{xx})^{-1}\psi_t$ ), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \rho_1 \|\varphi_t\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \rho_2 \|\psi_t\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + b \int_0^L |\psi|^2 \right] \right\} \\ - \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + \int_0^L (\varphi_x + \psi) (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t = 0. \end{array} \right. \quad (3.2.12)$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + \int_0^L (\varphi_x + \psi) (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t \\ = \int_0^L (\varphi_x + \psi) \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + \int_0^L (\varphi_x + \psi) (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t \\ = \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t) \\ = \int_0^L [(-\partial_{xx})(-\partial_{xx})^{-1}(\varphi_x + \psi)] (\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t) \\ = \int_0^L \left[ \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi) \right] \left[ \partial_x (\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t) \right] \\ - \left[ \left( \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi) \right) \underbrace{\left( \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t \right)}_{=\phi_x(L)+\nu(L)-\phi_x(0)-\nu(0)} \right]_0^L \\ = \int_0^L \left[ \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi) \right] \left( -\varphi_t + \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t \right). \end{array} \right. \quad (3.2.13)$$

Ensuite, utilisons l'égalité

$$-\varphi_t = \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \partial_x \varphi_t - \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_t dx \quad (3.2.14)$$

dans le dernier membre de (3.2.13). On déduit alors

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^L \left[ \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi) \right] \left[ -\varphi_t + \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t \right] \\ &= \int_0^L \left[ \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi) \right] \left[ \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_{xt} + \psi_t) \right] \\ & \quad - \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_t(y) dy \cdot \underbrace{\int_0^L \left[ \partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi) \right]}_{=\pi(L) - \pi(0) = 0} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left( \int_0^L |\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi)|^2 \right) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.2.15)$$

Donc, en insérant (3.2.15) dans (3.2.13), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x (-\partial_{xx})^{-1} \varphi_t + \int_0^L (\varphi_x + \psi) (-\partial_{xx})^{-1} \psi_t \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left( \int_0^L |\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi)|^2 \right) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (3.2.16)$$

Par suite, l'insertion de (3.2.16) dans (3.2.12) implique

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \rho_1 \int_0^L |(-\partial_{xx})^{-1/2} \varphi_t|^2 + \rho_2 \int_0^L |(-\partial_{xx})^{-1/2} \psi_t|^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + b \int_0^L |\psi|^2 + k \int_0^L |\partial_x (-\partial_{xx})^{-1} (\varphi_x + \psi)|^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

D'où la conservation de l'énergie affaiblie  $\tilde{E}$ . □

### 3.3 Résultats d'observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes dans le cas des conditions au bord de Dirichlet

#### 3.3.1 Inégalité inverse

Notre résultat principale dans ce sous-paragraphe est résumé dans l'énoncé suivant

**Théorème 3.3.1.** *Il existe un temps  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ , pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L))^2$ , et si  $w_1 = w_2$ , il existe une constante positive  $K$  telle que, la solution  $(\varphi, \psi)$  de (3.1.1)-(3.1.2) vérifie*

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 \geq K(|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2), \quad (3.3.1)$$

où  $K$  dépendant de  $T, L, \rho_1, \rho_2, k$  et  $b$ .

Pour la preuve de ce théorème, plusieurs lemmes seront nécessaires.

**Lemme 3.3.1.** *Il existe un temps  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ , pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}_1$ , et si  $w_1 = w_2$ , il existe deux constantes positives  $C_1 = C_1$  et  $C_2$  telle que la solution  $(\varphi, \psi)$  de (3.1.1)-(3.1.2) vérifie*

$$C_1 E(0) \leq \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt \leq C_2 E(0), \quad (3.3.2)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  dépendant de  $T, L, \rho_1, \rho_2, k$  et  $b$ .

*Démonstration.* La preuve de l'inégalité directe est triviale. D'un autre côté, les techniques introduites dans [1] s'adaptent pour la démonstration de l'inégalité inverse. Alors plusieurs étapes sont requis.

Dans la suite on désigne par  $c$  une constante générique dépend seulement de  $L, \rho_1, \rho_2, k$  et  $b$ .

*Etape 1.* En multipliant la deuxième équation de (3.1.1) par  $b^{-1}(\varphi_x + \psi)$  et la première équation par  $k^{-1}\psi_x$ , en intégrant sur  $[0, T] \times [0, L]$ , et en additionnant les deux relations résultantes, on obtient

$$\begin{cases} \frac{k}{b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 = (\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}) \int_0^T \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) \\ + \frac{\rho_1}{k} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 - \frac{\rho_1}{k} \left[ \int_0^L (\psi_t(\varphi_x + \psi) + \psi_x \varphi_t) \right]_0^T + \int_0^T [\varphi_x \psi_x]_0^L. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Alors d'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{cases} \frac{k}{2b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \leq \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \frac{b}{k} \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 + \frac{\rho_1}{k} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + cE(0) \\ + \varepsilon \int_0^T \left[ \varphi_x^2(L, t) + \varphi_x^2(0, t) \right] + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^T \left[ |\psi_x|^2(L, t) + |\psi_x|^2(0, t) \right] \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (3.3.4)$$



*Etape 2.* Maintenant, on procède comme dans [90]. Considérons la fonction  $q \in \mathcal{C}^1([0, L])$  qui vérifie  $q(0) = -q(L) = -2\gamma$ , où  $\gamma > 0$ . Donc, en multipliant la deuxième équation de (3.1.1) par  $b^{-1}q\psi_x$  et en intégrant sur  $[0, T] \times [0, L]$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \int_0^T \left[ |\psi_x|^2(L, t) + |\psi_x|^2(0, t) \right] = -\frac{\rho_2}{2b} \int_0^T \int_0^L q_x |\psi_t|^2 \\ -\frac{\rho_2}{b} \left[ \int_0^L q \psi_t \psi_x \right]_0^T - \int_0^T \int_0^L \frac{q_x}{2} |\psi_x|^2 - \frac{k}{b} \int_0^T \int_0^L q(\varphi_x + \psi) \psi_x. \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

Alors l'inégalité de Young implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \int_0^T \left[ |\psi_x|^2(L, t) + |\psi_x|^2(0, t) \right] \leq c_1 \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 \\ + \eta \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 + c_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c_3 E(0) \quad \forall \eta > 0, \end{array} \right. \quad (3.3.6)$$

où  $c_i \quad i = 1, 2$  sont indépendantes de  $\eta$ .

*Etape 3.* Dans cette étape, on multiplie la première équation de (3.1.1) par  $k^{-1}q\varphi_x$  et on intègre sur  $[0, T] \times [0, L]$ . Alors on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \int_0^T \left[ \varphi_x^2(L, t) + \varphi_x^2(0, t) \right] = -\frac{\rho_1}{2k} \int_0^T \int_0^L q_x |\varphi_t|^2 + \frac{\rho_1}{k} \left[ \int_0^L q \varphi_t \varphi_x \right]_0^T \\ + \int_0^T \int_0^L q \varphi_x \psi_x. \end{array} \right. \quad (3.3.7)$$

Ensuite, l'inégalité de Poincaré nous donne

$$\gamma \int_0^T \left[ \varphi_x^2(L, t) + \varphi_x^2(0, t) \right] \leq c \int_0^T \int_0^L \left[ |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 + |\varphi_t|^2 \right] + cE(0). \quad (3.3.8)$$

*Etape 4.* On multiplie la première équation de (3.1.1) par  $k^{-1}\varphi$  et on intègre sur  $[0, T] \times [0, L]$ . On déduit donc

$$\gamma \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 \leq c \int_0^T \int_0^L \left[ |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 \right]. \quad (3.3.9)$$

Alors, en combinant (3.3.9) et (3.3.8), on conclut

$$\gamma \int_0^T \left[ \varphi_x^2(L, t) + \varphi_x^2(0, t) \right] \leq c \int_0^T \int_0^L \left[ |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 + |\varphi_t|^2 \right] + cE(0). \quad (3.3.10)$$

Par suite, en utilisant (3.3.6) et (3.3.10) dans (3.3.4) et en choisissant  $\varepsilon$  et  $\eta$  suffisamment petits et en les fixant après, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \\ + c \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 + cE(0). \end{array} \right. \quad (3.3.11)$$

Maintenant, l'insertion de (3.3.11) dans (3.3.9) nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \\ + c \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 + cE(0). \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

Il nous reste à estimer, plus précisément majorer  $\int_0^T \int_0^L |\psi|_x^2$ . On considère donc le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\chi_{xx} = \psi_x \quad \text{sur } (0, L), \\ \chi(0) = \chi(L) = 0. \end{array} \right. \quad (3.3.13)$$

Multipliant maintenant la première équation de (3.1.1) par  $b^{-1}\chi$ , la deuxième équation de (3.1.1) par  $b^{-1}\psi$ , et intégrons sur  $[0, T] \times [0, L]$ . Puis additionnons les équations résultantes en remarquant que

$$-\int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \chi = \int_0^L (\varphi \psi_x - |\chi_x|^2).$$

On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 + \frac{k}{bL} \int_0^T \left( \int_0^L \psi \right)^2 = \frac{\rho_1}{b} \left[ \int_0^L \varphi_t \chi \right]_0^T \\ - \frac{\rho_2}{b} \left[ \int_0^L \psi_t \psi \right]_0^T + \frac{\rho_1}{b} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \chi_t + \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2. \end{array} \right. \quad (3.3.14)$$

Ensuite, en appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on obtient pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 + \frac{k}{bL} \int_0^T \left( \int_0^L \psi \right)^2 \leq \delta \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 + \frac{c}{\delta} \int_0^T \int_0^L |\chi_t|^2 \\ + \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + cE(0). \end{array} \right. \quad (3.3.15)$$

D'autre part, d'après (3.3.13), on a

$$\int_0^L |\chi|^2 \leq c \int_0^L |\psi|^2,$$

et comme l'équation (3.3.13) est différentiable par rapport au temps  $t$ , on a

$$\int_0^L |\chi_t|^2 \leq c \int_0^L |\psi_t|^2. \quad (3.3.16)$$

Donc en utilisant l'estimation (3.3.16) dans (3.3.15), on obtient pour tout  $\delta > 0$

$$\int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 + \frac{k}{bL} \int_0^T \left( \int_0^L \psi \right)^2 \leq \delta \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 + c_\delta \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2. \quad (3.3.17)$$

Maintenant, utilisons (3.3.12) dans (3.3.17), choisissons  $\delta$  suffisamment petit, et fixons le après, on obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 + \frac{k}{bL} \int_0^T \left( \int_0^L \psi \right)^2 \\ \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 + cE(0). \end{array} \right. \quad (3.3.18)$$

Donc, en utilisant successivement (3.3.18) dans (3.3.11) et dans (3.3.12), on obtient

$$TE(0) \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 + cE(0). \quad (3.3.19)$$

Par conséquent,

$$(T - c)E(0) \leq C_1 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2.$$

Finalement, le fait que  $w_1 = w_2$  implique

$$(T - c)E(0) \leq C_1 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2,$$

où  $T_0 = c$  □

**Lemme 3.3.2.** *Pour tout  $(\varphi^1, \psi^1) \in (H^{-1}(0, L))^2$ , le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} -k(u_{xx} + v_x) = -\rho_1 \varphi^1, \\ -bv_{xx} + k(u_x + v) = -\rho_2 \psi^1, \\ u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = 0. \end{array} \right. \quad (3.3.20)$$

*admet une solution unique  $(u, v)$  dans  $E := (H_0^1(0, L))^2$ .*

*Démonstration.* Le système (3.3.20) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} k \int_0^L (u_x + v)(\bar{u}_x + \bar{v}) + b \int_0^L v_x \bar{v}_x \\ = \langle -\rho_1 \varphi^1, \bar{u} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)} + \langle -\rho_2 \psi^1, \bar{v} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)}. \end{array} \right. \quad (3.3.21)$$

On définit le produit scalaire sur  $E$  par

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_E := \int_0^L \left( b v_1 v_2 + k(u_{1x} + v_1)(u_{2x} + v_2) \right) dx,$$

pour tout  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in E$ . De plus, de l'inégalité de Poincaré, on peut vérifier facielement que la norme  $\|\cdot\|_E$  associée est équivalente à la norme usuelle de  $E$ .

On pose maintenant

$$l((u, v), (\bar{u}, \bar{v})) := k \int_0^L (u_x + v)(\bar{u}_x + \bar{v}) + b \int_0^L v_x \bar{v}_x.$$

$l$  est une forme bilinéaire sur  $E$  et coercive pour la norme  $\|\cdot\|_E$  associée, et elle est continue d'après l'inégalité

$$(\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} + \sqrt{c}\sqrt{\bar{c}}) \leq \sqrt{a+c}\sqrt{\bar{a}+\bar{c}} \quad \forall a, \bar{a}, c, \bar{c} \geq 0. \quad (3.3.22)$$

Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique  $(u, v) \in E$  solution de (3.3.21) pour tout  $(\bar{u}, \bar{v}) \in E$ . Donc en choisissant  $\bar{u} = 0$ , respectivement  $\bar{v} = 0$ , on obtient (3.3.20)<sub>2</sub>, respectivement (3.3.20)<sub>1</sub> au sens distributionnel.  $\square$

Maintenant, on retourne à la preuve du théorème 3.3.1.

*Démonstration.* Soient  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L))^2$  et  $(u, v)$  la solution du système (3.3.20).

On va adapter une méthode des multiplicateurs introduite par J. L. Lions [69]. Si  $(\varphi, \psi)$  est la solution de (3.1.1)-(3.1.2) qui correspond aux données  $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1)$ , alors les fonctions

$$\left( \omega(x, t) := \int_0^t \varphi(x, s) ds + u(x), \quad \zeta(x, t) := \int_0^t \psi(x, s) ds + v(x) \right)$$

est une solution de (3.1.1)-(3.1.2) avec les données initiales  $(u, \varphi^0, v, \psi^0)$ .

Donc, d'après le lemme 3.3.1 on a

$$(T - c) \int_0^T \int_0^L |\zeta_t|^2 \geq C_1 (\|u\|_{H_0^1(0,L)}^2 + |\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|v\|_{H_0^1(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2). \quad (3.3.23)$$

D'autre part, on sait que  $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est un isomorphisme de  $H_0^1(0, L)$  sur  $H^{-1}(0, L)$ . Alors  $\|u\|_{H_0^1(0, L)}$  (respectivement  $\|v\|_{H_0^1(0, L)}$ ) est équivalente à  $\| -u_{xx} \|_{H^{-1}(0, L)}$  (respectivement  $\| -v_{xx} \|_{H^{-1}(0, L)}$ ).

Alors, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + \|v\|_{H_0^1(0, L)}^2 \\ \geq c\| -u_{xx} \|_{H^{-1}(0, L)}^2 + c\| -v_{xx} \|_{H^{-1}(0, L)}^2 \\ = c\left\| \frac{\rho_1}{k}\varphi^1 - v_x \right\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + c\left\| \frac{\rho_2}{b}\psi^1 + \frac{k}{b}(u_x + v) \right\|_{H^{-1}(0, L)}^2 \\ \geq c(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2) - c(\|v_x\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|u_x + v\|_{H^{-1}(0, L)}^2) \\ \geq c(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2) - c(|v_x|_{L^2(0, L)}^2 + |u_x + v|_{L^2(0, L)}^2) \\ \geq c(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2) - c(\|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + \|v\|_{H_0^1(0, L)}^2). \end{array} \right.$$

Donc

$$\|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + \|v\|_{H_0^1(0, L)}^2 \geq \frac{c}{1+c} (\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2). \quad (3.3.24)$$

D'un autre côté, on a

$$\int_0^T \int_0^L |\zeta_t|^2 = \int_0^T \int_0^L |\psi|^2. \quad (3.3.25)$$

Par conséquent, en utilisant (3.3.25) et (3.3.24) dans (3.3.23), on obtient

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 \geq c(|\varphi^0|_{L^2(0, L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2). \quad \square$$

### 3.3.2 Contrôlabilité exacte interne indirecte

L'estimation a priori démontrée dans le paragraphe précédent nous permettent d'aboutir à la contrôlabilité exacte interne indirecte du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 y_{tt} - k(y_x + z)_x = 0 \quad \text{dans } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 z_{tt} - bz_{xx} + k(y_x + z) = v_1 \quad \text{dans } (0, L) \times (0, T), \\ y(0) = y(L) = z(0) = z(L) = 0, \\ (y, z, y_t, z_t)(x, 0) = (y_0(x), z_0(x), y_1(x), z_1(x)) \quad \text{dans } (0, L). \end{array} \right. \quad (3.3.26)$$

La solution du problème (3.3.26) peut se définir par la méthode de transposition qu'on va détailler dans la preuve du théorème suivant qui résume notre résultat principal dans ce paragraphe.

**Théorème 3.3.2.** *Pour un temps  $T > T_0$  où  $T_0$  est donné dans le théorème 3.3.1, pour tout*

$$Y^0 = (y^0, y^1, z^0, z^1) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2,$$

*et si  $w_1 = w_2$ , il existe un contrôle  $v_1 \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  telle que la solution du système (3.3.26) vérifie*

$$y(T) = y_t(T) = z(T) = z_t(T) = 0.$$

*Démonstration.* On va appliquer la méthode de **HUM**.  
On résoud d'abord, le problème homogène

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0, \\ (\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t)(x, 0) = (\varphi_0(x), \psi_0(x), \varphi_1(x), \psi_1(x)) & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.3.27)$$

où  $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1) \in (\mathcal{D}(0, L))^4$ . Il est clair d'après la section 3.2 que ce problème admet une solution unique  $(\varphi, \psi)$ .

Puis on résoud le problème rétrograde

$$\begin{cases} \rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 \tilde{\psi}_{tt} - b\tilde{\psi}_{xx} + k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) = -\psi & t > 0, 0 < x < L, \\ \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(L) = \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(L) = 0, \\ \tilde{\varphi}(x, T) = \tilde{\varphi}_t(x, T) = \tilde{\psi}(x, T) = \tilde{\psi}_t(x, T) = 0 & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.3.28)$$

La solution du problème (3.3.28) est définie par la méthode de transposition. En effet, on multiplie la première équation de (3.3.28) par  $\theta$  et la deuxième équation de (3.3.28) par  $\xi$  où  $(\theta, \xi)$  est la solution du problème

$$\begin{cases} \rho_1 \theta_{tt} - k(\theta_x + \xi)_x = f & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 \xi_{tt} - b\xi_{xx} + k(\theta_x + \xi) = g & t > 0, 0 < x < L, \\ \theta(0) = \theta(L) = \xi(0) = \xi(L) = 0, \\ (\theta, \xi, \theta_t, \xi_t)(x, 0) = (\theta_0(x), \xi_0(x), \theta_1(x), \xi_1(x)) & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.3.29)$$

où  $f, g \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ .

En reformulant le problème (3.3.29) en un problème non homogène abstrait

du premier ordre et en appliquant un théorème classique de la théorie de semi-groupe, on montre qu'il possède une solution unique

$$(\theta, \xi) \in \left( \mathcal{C}(0, T; H_0^1(0, L)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; L^2(0, L)) \right)^2.$$

De plus, on a

$$\begin{cases} e_\theta(t) + e_\xi(t) \\ \leq \kappa(e_\theta(0) + e_\xi(0) + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2), \end{cases} \quad (3.3.30)$$

où

$$e_\theta(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\theta_t|^2 + k |\theta_x|^2)$$

et

$$e_\xi(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_2 |\xi_t|^2 + b |\xi_x|^2 + k |\xi|^2)$$

sont les énergies partielles naturelles associées à la solution  $(\theta, \theta_t, \xi, \xi_t)$  de (3.3.29). On obtient l'estimation (3.3.30) en procédant comme dans le paragraphe 1.4 du chapitre 1 pour obtenir l'estimation (1.4.89), plus précisément, on multiplie la première équation de (3.3.29) par  $\theta_t$ , la deuxième équation par  $\xi_t$  et on utilise le lemme de Gronwall.

Ensuite, on doit vérifier que l'équation

$$\begin{cases} \int_0^T \int_0^L (f \tilde{\varphi} + g \tilde{\psi}) + \int_0^L (\rho_1 \tilde{\varphi}(0) \theta_1 - \rho_1 \tilde{\varphi}_t(0) \theta_0 + \rho_2 \tilde{\psi}(0) \xi_1 - \rho_2 \tilde{\psi}_t(0) \xi_0) \\ = - \int_0^T \int_0^L \psi \xi. \end{cases} \quad (3.3.31)$$

admet une solution unique dans  $\tilde{\mathcal{H}}'_1$  pour tout

$$(\theta_0, \theta_1, f, \xi_0, \xi_1, g) \in \left[ H_1^0(0, L) \times L^2(0, L) \times L^1(0, T; L^2(0, L)) \right]^2.$$

Maintenant, on pose  $X_0 = (\rho_1 \theta_0, \rho_1 \theta_1, f, \rho_2 \xi_0, \rho_2 \xi_1, g)$ ,

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \left[ H_1^0(0, L) \times L^2(0, L) \times L^1(0, T; L^2(0, L)) \right]^2,$$

et on considère la forme linéaire  $L$  sur  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  qui est définie par

$$L(X_0) = - \int_0^T \int_0^L \psi \xi dx dt.$$

Il est clair que  $L$  est bien définie. Il nous reste à vérifier que  $L$  est continue *i.e.* il existe une constante positive  $C$  telle que

$$|L(X_0)| \leq C \|X_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}.$$

En effet,

$$|L(X_0)| \leq \int_0^T \left( \int_0^L |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L |\xi|^2 dx \right)^{1/2} dt.$$

Alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz par rapport à la variable  $t$  on obtient

$$|L(X_0)| \leq c \left( \int_0^T \int_0^L |\xi|^2 \right)^{1/2} \leq c \left( \int_0^T e_\xi(t) \right)^{1/2}. \quad (3.3.32)$$

Par suite, en utilisant (3.3.30) dans (3.3.32) on obtient

$$|L(X_0)| \leq c \|X_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}. \quad (3.3.33)$$

où  $c$  dépend de  $T$ . Par conséquent  $L \in \tilde{\mathcal{H}}'_1$ . Donc il existe  $X_1 \in \tilde{\mathcal{H}}'_1$  tel que

$$\langle X_1, X_0 \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}'_1, \tilde{\mathcal{H}}_1} = L(X_0),$$

avec

$$X_1 \text{ est noté par } \left( -\underbrace{\tilde{\varphi}'(0)}_{:=\tilde{\varphi}_1}, \underbrace{\tilde{\varphi}(0)}_{:=\tilde{\varphi}_0}, \tilde{\varphi}, -\underbrace{\tilde{\psi}'(0)}_{:=\tilde{\psi}_1}, \underbrace{\tilde{\psi}(0)}_{:=\tilde{\psi}_0}, \tilde{\psi} \right)$$

et

$$\tilde{\mathcal{H}}'_1 \text{ est noté par } \left[ H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L) \times L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \right]^2.$$

D'un autre côté, on définit l'opérateur

$$\Lambda(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) := (\rho_1 \tilde{\varphi}'(0), -\rho_1 \tilde{\varphi}(0), \rho_2 \tilde{\psi}'(0), -\rho_2 \tilde{\psi}(0)),$$

et on considère des données initiales  $(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1) \in (\mathcal{D}(0, L))^4$  et  $(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}', \hat{\psi}, \hat{\psi}')$  solution du problème (3.3.27) associé.

En multipliant la première équation du système (3.3.28) par  $\hat{\varphi}$ , la deuxième équation par  $\hat{\psi}$  et en intégrant sur  $[0, T] \times [0, L]$ , on obtient

$$\begin{cases} \langle \Lambda(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1), (\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1) \rangle \\ = \int_\Omega [\rho_1 \tilde{\varphi}_1 \hat{\varphi}_0 + \rho_2 \tilde{\psi}_1 \hat{\psi}_0 - \rho_1 \tilde{\varphi}_0 \hat{\varphi}_1 - \rho_2 \tilde{\psi}_0 \hat{\psi}_1] dx = \int_0^T \int_0^L \psi \hat{\psi} dx dt. \end{cases}$$



En particulier

$$\langle \Lambda(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1), (\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1) \rangle = \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt.$$

Maintenant, on considère sur  $(\mathcal{D}(0, L))^4$  la semi-norme définie par

$$\|U^0\|_{\mathcal{F}} = \left( \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \right)^{1/2},$$

où  $U = (\varphi, \varphi', \psi, \psi')$  désigne la solution de (3.3.27) associée aux conditions initiales  $U^0$ .

Grâce à l'inégalité inverse (3.3.1),  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  est une norme sur  $(\mathcal{D}(0, L))^4$ . On note par  $\mathcal{F}$  le complété de cet espace par rapport à cette norme. On obtient ainsi un espace de Hilbert.

L'inégalité inverse implique

$$\mathcal{F} \subset (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L))^2,$$

donc

$$(H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2 \subset \mathcal{F}'.$$

D'après la définition de la norme sur  $\mathcal{F}$ , on a

$$|\langle \Lambda(U^0), \tilde{U}^0 \rangle| \leq \|U^0\|_{\mathcal{F}} \|\tilde{U}^0\|_{\mathcal{F}} \quad \forall U^0, \tilde{U}^0 \in (\mathcal{D}(0, L))^4. \quad (3.3.34)$$

D'un autre côté, la densité de  $(\mathcal{D}(0, L))^4$  dans  $\mathcal{F}$  implique que l'application  $\Lambda(U^0)$  peut se prolonger d'une manière unique en une application continue sur  $\mathcal{F}$  et  $\Lambda(U^0) \in \mathcal{F}'$ .

De (3.3.34) on déduit que l'application linéaire qui applique  $U^0 \in (\mathcal{D}(0, L))^4$  à  $\Lambda U^0 \in \mathcal{F}'$  est continue. Donc par densité,  $\Lambda$  est prolongeable d'une manière unique en une application linéaire continue sur  $\mathcal{F}$ , on la note encore  $\Lambda$ , de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}'$ . De plus on a

$$\langle \Lambda(U^0), \tilde{U}^0 \rangle_{\mathcal{F}', \mathcal{F}} = \langle U^0, \tilde{U}^0 \rangle_{\mathcal{F}} \quad \forall U^0, \tilde{U}^0 \in (\mathcal{D}(0, L))^4,$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$  est le produit scalaire associé au norme de  $\mathcal{F}$ . Donc, d'après l'inégalité inverse (3.3.1), l'opérateur  $\Lambda$  est coercif sur  $\mathcal{F}$ , et (3.3.34) implique que  $\Lambda$  est continue sur  $\mathcal{F}$ . Par conséquent, on déduit du théorème de Lax-Milgram que  $\Lambda$  un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ . Alors pour tout  $(y_0, y_1, z_0, z_1)$ , l'équation

$$\Lambda(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1) := (\rho_1 y'(0), -\rho_1 y(0), \rho_2 z'(0), -\rho_2 z(0))$$

a une solution unique  $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1) \in \mathcal{F}$  de façon que

$$(y_0, y_1, z_0, z_1) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2,$$

et le **contrôle** est  $\mathbf{v}_1 = -\psi \in L^2(0, T, L^2(0, L))$ . Mais d'après l'unicité de la solution du problème (3.3.26) on a

$$y = \tilde{\varphi} \quad \text{et} \quad z = \tilde{\psi}.$$

Par conséquent

$$y(T) = y_t(T) = z(T) = z_t(T) = 0.$$

□

### 3.4 Résultats d'observabilité et contrôlabilité exacte internes indirectes dans le cas des conditions au bord de Neumann

#### 3.4.1 Inégalité inverse

Notre résultat principale dans ce sous-paragraphe est résumé dans l'énoncé suivant

**Théorème 3.4.1.** *Il existe un temps  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ , pour tout*

$$U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]',$$

*et si  $w_1 = w_2$ , il existe une constante positive  $K_1$  telle que, la solution  $(\varphi, \psi)$  de (3.1.1)-(3.1.3) vérifie*

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 \geq K_1 (|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2). \quad (3.4.35)$$

où  $K_1$  dépendant de  $T, L, \rho_1, \rho_2, k$  et  $b$ .

Pour la preuve de ce théorème, plusieurs lemmes seront nécessaires.

**Lemme 3.4.1.** *Il existe un temps  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ , pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}_2$ , et si  $w_1 = w_2$ , il existe deux constantes positives  $C_3$  et  $C_4$  telles pour tout  $U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}_2$ , la solution  $(\varphi, \psi)$  de (3.1.1)-(3.1.3) vérifie*

$$C_3 E(0) \leq \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt \leq C_4 E(0), \quad (3.4.36)$$

où  $C_3$  et  $C_4$  dépendant de  $T, L, \rho_1, \rho_2, k$  et  $b$ .

*Démonstration.* La preuve de l'inégalité directe est triviale. D'un autre côté, les techniques introduites dans [1] s'adaptent pour la démonstration de l'inégalité inverse. Alors plusieurs étapes sont requis.

Dans la suite on désigne par  $c$  une constante générique dépend seulement de  $L, \rho_1, \rho_2, k$  et  $b$ .

*Etape 1.* En multipliant la deuxième équation de (3.1.1) par  $b^{-1}(\varphi_x + \psi)$  et la première équation par  $k^{-1}\psi_x$ , en intégrant sur  $[0, T] \times [0, L]$ , et en additionnant les deux relations résultantes, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 = \left( \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^T \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) \\ \quad + \frac{\rho_1}{k} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 - \frac{\rho_1}{k} \left[ \int_0^L (\psi_t(\varphi_x + \psi) + \psi_x \varphi_t) \right]_0^T, \end{array} \right. \quad (3.4.37)$$

D'après l'inégalité de Young, (3.4.37) implique

$$\frac{k}{2b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \leq \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \frac{b}{2k} \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 + \frac{\rho_1}{k} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + cE(0). \quad (3.4.38)$$

*Etape 2.* On multiplie la première équation de (3.1.1) par  $k^{-1}(\varphi - \chi)$ , où  $\chi$  est la solution de (3.3.13), et on intègre sur  $[0, T] \times [0, L]$ . On obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{k} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 + \frac{1}{L} \int_0^T \left( \int_0^L \psi \right)^2 = \\ \frac{\rho_1}{k} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \chi_t + \frac{\rho_1}{k} \left[ \int_0^L \varphi_t(\varphi - \chi) \right]_0^T + \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2. \end{array} \right. \quad (3.4.39)$$

Comme  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ , on peut écrire

$$(\varphi - \chi)_x = (\varphi_x + \psi) - \frac{1}{L} \int_0^L (\varphi_x + \psi).$$

On déduit alors pour  $t$  fixé

$$\int_0^L |(\varphi - \chi)_x|^2 \leq c \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \leq cE(t). \quad (3.4.40)$$

D'où en utilisant l'inégalité de Pioncaré, on obtient

$$\int_0^L |\varphi - \chi|^2 \leq cE(t). \quad (3.4.41)$$

Par suite, d'après l'inégalité de Poincaré et en insérant (3.4.40), (3.3.16) et (3.4.40) dans l'équation résultante, (3.4.39) nous donne

$$\frac{\rho_1}{2k} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 + cE(0). \quad (3.4.42)$$

*Etape 3.* On multiplie la deuxième équation de (3.1.1) par  $b^{-1}\psi$  et on intègre sur  $[0, T] \times [0, L]$ , on obtient

$$\begin{cases} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 = \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + \frac{\rho_2}{b} \left[ \int_0^L \psi_t \psi \right]_0^T \\ - \frac{k}{b} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi. \end{cases} \quad (3.4.43)$$

D'autre part, d'après (3.3.13) on a

$$\chi_x = -\psi + \frac{1}{L} \left( \int_0^L \psi \right),$$

alors

$$\int_0^L |\psi|^2 = \int_0^L |\chi_x|^2 + \frac{1}{L} \left( \int_0^L \psi \right)^2.$$

En multipliant (3.3.13) par  $\chi$ , on a aussi

$$\int_0^L |\chi_x|^2 \leq c \int_0^L |\psi_x|^2.$$

D'où en utilisant l'inégalité de Poincaré généralisé et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les deux fonctions 1 et  $\varphi_x + \psi$ , on obtient

$$\int_0^L |\psi|^2 \leq c \int_0^L |\psi_x|^2 + c \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \leq cE(t) \quad \forall t > 0. \quad (3.4.44)$$

Ensuite, d'après l'inégalité de Young, (3.4.43) implique

$$\begin{cases} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 \leq \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + \frac{\rho_2}{b} \left[ \int_0^T \int_0^L \psi_t \psi \right]_0^T \\ + c \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 + c \int_0^T \int_0^L |\psi|^2. \end{cases} \quad (3.4.45)$$

Par conséquent, en insérant (3.4.38) et (3.4.44) dans (3.4.45), on obtient

$$\int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 + cE(0). \quad (3.4.46)$$

Finalement, en additionnant (3.4.38), (3.4.42) et (3.4.46), on obtient d'après la définition de l'énergie

$$(T - c)E(0) \leq c \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + c \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \frac{b}{k} \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2. \quad (3.4.47)$$

Finalement, le fait que  $w_1 = w_2$  implique

$$(T - c)E(0) \leq C_3 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2,$$

où  $T_0 = c$ . □

**Lemme 3.4.2.** *Pour tout  $(\varphi^1, \psi^1) \in H^{-1}(0, L) \times [H_*^1(0, L)]'$ , le système*

$$\begin{cases} -k(u_{xx} + v_x) = -\rho_1 \varphi^1, \\ -bv_{xx} + k(u_x + v) = -\rho_2 \psi^1, \\ u(0) = u(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0. \end{cases} \quad (3.4.48)$$

*admet une solution unique  $(u, v)$  dans  $F := H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ .*

On démontre l'existence et l'unicité de (3.4.48) de la même manière que (3.3.20) en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert  $F$ .

Maintenant, on retourne à la preuve du théorème 3.4.1.

*Démonstration.* Soient

$$U^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]',$$

et  $(u, v) \in F$  la solution du système (3.4.48).

On va adapter une méthode des multiplicateurs introduite par J. L. Lions [69]. Si  $(\varphi, \psi)$  est la solution de (3.1.1)-(3.1.3) qui correspond aux données  $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1)$ , alors les fonctions

$$\left( \omega(x, t) := \int_0^t \varphi(x, s) ds + u(x), \quad \zeta(x, t) := \int_0^t \psi(x, s) ds + v(x) \right)$$

sont des solution de (3.1.1)-(3.1.3) avec les données initiales  $(u, \varphi^0, v, \psi^0)$ .

Donc, d'après le lemme 3.4.1 on a

$$(T - c) \int_0^T \int_0^L |\zeta_t|^2 \geq C_3 (\|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + |\varphi^0|_{L^2(0, L)}^2 + \|v\|_{H_*^1(0, L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0, L)}^2). \quad (3.4.49)$$

D'autre part, on sait que  $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est un isomorphisme de  $H_0^1(0, L)$  sur  $H^{-1}(0, L)$  et elle est une application linéaire continue de  $H_*^1(0, L)$  dans  $[H_*^1(0, L)]'$  i.e. il existe une constante positive  $M$  telle que

$$\|(-\Delta)u\|_{[H_*^1(0, L)]'} \leq M\|u\|_{H_*^1(0, L)} \quad \forall u \in H_*^1(0, L).$$

Alors  $\|u\|_{H_0^1(0, L)} \geq c\| -u_{xx}\|_{H^{-1}(0, L)}$  et  $\|v\|_{H_*^1(0, L)} \geq c\| -v_{xx}\|_{[H_*^1(0, L)]'}$ . Donc on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + \|v\|_{H_*^1(0, L)}^2 &\geq c\| -u_{xx}\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + c\| -v_{xx}\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2 \\ &= c\left\|\frac{\rho_1}{k}\varphi^1 - v_x\right\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + c\left\|\frac{\rho_2}{b}\psi^1 + \frac{k}{b}(u_x + v)\right\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2 \\ &\geq c(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2) - c(\|v_x\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|u_x + v\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2) \\ &\geq c(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2) - c(|v_x|_{L^2(0, L)}^2 + |u_x + v|_{L^2(0, L)}^2) \\ &\geq c(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2) - c(\|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + \|v\|_{H_*^1(0, L)}^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{H_0^1(0, L)}^2 + \|v\|_{H_*^1(0, L)}^2 \geq \frac{c}{1+c} \left( \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2 \right). \quad (3.4.50)$$

D'autre part, on a

$$\int_0^T \int_0^L |\zeta_t|^2 = \int_0^T \int_0^L |\psi|^2. \quad (3.4.51)$$

Finalement, en utilisant (3.4.51) et (3.4.50) dans (3.4.49), on obtient

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 \geq c(|\varphi^0|_{L^2(0, L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0, L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0, L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0, L)]'}^2). \quad \square$$

### 3.4.2 Contrôlabilité exacte interne indirecte

L'estimation a priori démontrée dans le paragraphe précédent nous permettent d'aboutir à la contrôlabilité exacte interne indirecte du système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 y_{tt} - k(y_x + z)_x = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 z_{tt} - bz_{xx} + k(y_x + z) = v_2 & t > 0, 0 < x < L, \\ y(0) = y(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0, \\ (y, z, y_t, z_t)(x, 0) = (y_0(x), z_0(x), y_1(x), z_1(x)) & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.4.52)$$

La solution de ce problème peut se définir par la méthode de transposition. Notre résultat principal dans ce sous-paragraphe est énoncé dans le théorème suivant :

**Théorème 3.4.2.** *Pour un temps  $T > T_0$  où  $T_0$  est donné dans le théorème 3.4.1, pour tout*

$$Y^0 = (y^0, y^1, z^0, z^1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

*et si  $w_1 = w_2$ , il existe un contrôle  $v_2 \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  telle que la solution de système (3.4.52) vérifie*

$$y(T) = y_t(T) = z(T) = z_t(T) = 0.$$

Pour la preuve de ce théorème, on répète les mêmes techniques de la preuve du théorème 3.3.2 dans le sous-paragraphe 3.3.2, en appliquant la méthode de **HUM**, mais en choisissant l'espace  $\mathcal{F}$  le complété de  $(\mathcal{D}(0, L))^2 \times \mathcal{D}_*(0, L) \times \mathcal{D}(0, L)$  par rapport à la norme

$$\|U^0\|_{\mathcal{F}} = \left( \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \right)^{1/2},$$

avec

$$\mathcal{D}_*(0, L) := \left\{ u \in \mathcal{D}(0, L); \int_0^L u = 0 \right\}.$$





## Partie 2. Stabilisation directe et indirecte du système de Bresse



# Chapitre 4

## Stabilisation directe du système de Bresse

### 4.1 Introduction

Au cours des dernières années, la stabilité des poutres élastiques, thermoélastiques et viscoélastiques de type *Timoshenko*, *Bresse*, *Rayleigh* et *Euler-Bernoulli*, et la stabilité des plaques vibrantes de type *Kirchhoff*, *Von Kármán* ont attiré beaucoup d'attention de beaucoup d'auteurs.

Dans leur étude sur les réseaux de poutres flexibles, Lagnese, Leugering et Schmidt [60] découlent un modèle général de poutres élastiques non linéaires de trois dimensions. Un cas particulier de ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes. Il décrit les mouvement d'une poutre élastique planaire sous l'effet de petites déformations. C'est le système de Bresse qui est, sans feedbacks, donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où  $t > 0$  et  $0 < x < L$ . L'indice  $t$  désigne la dérivée par rapport à la variable  $t$  et l'indice  $x$  désigne la dérivée par rapport à la variable spatiale. Les fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\omega$  désignent, respectivement, le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation d'un filament de la poutre et le déplacement longitudinal de la poutre. En plus,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $l$ ,  $I$ ,  $G$ ,  $E$ , et  $h$  désignent des constantes positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament. Les vitesses de propagation dans la première équation et seconde

équation sont, respectivement, données par

$$v_1 = \frac{Gh}{\rho_1} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{EI}{\rho_2}.$$

La stabilisation directe des systèmes couplés unidimensionnels a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro [96], et M. Aassila [16] ont étudiée la stabilisation directe du système de Timoshenko.

D'un autre côté, des résultats de stabilisation indirecte pour le systèmes de Timoshenko par une seule force de contrôle agissant sur l'équation de l'angle de cisaillement ont été considérés. Récemment F. Alabau [7] a démontré une formule semi-explicite pour le taux de la décroissance de l'énergie des solutions du système de Timoshenko à l'infini dans le cas de la même vitesse de propagation dans les deux équations du système, et elle a obtenu une estimation de la décroissance polynômiale de l'énergie dans le cas des vitesses de propagation différentes pour des feedbacks linéaires et non linéaires globalement lipschitziens. F. Ammar-Khodja ; A. Benabdallah ; J. E. Muñoz Rivera ; R. Racke [14] ont traité la stabilisation exponentielle et polynômiale du système linéaire de Timoshenko sous l'effet d'un terme mémoire. Des résultats d'optimalité ont été obtenus par eux.

Des autres auteurs ont étudié la stabilisation des systèmes couplés hyperbolique-parabolique tels que thermoélasticité, thermoplates (voir [75], [29], [77], [68], [63], [89], [24]). Pour ces systèmes, l'objectif principal est de déterminer si la dissipation induite par l'équation de la chaleur est suffisante pour stabiliser de système obtenu par couplage à une équation de type hyperbolique. Dans [75] Z. Liu et B. Rao ont considéré le système thermoélastique de Bresse suivant

$$\begin{cases} \rho h \ddot{w}_1 = (Eh(w'_1 - kw_3) - \alpha\theta_1)' - kGh(\phi_2 + w'_3 + kw_1), \\ \rho h \ddot{w}_3 = Gh(\phi_2 + w'_3 + kw_1)' + kEh(w'_1 - kw_3) - k\alpha\theta_1, \\ \rho I \ddot{\phi}_2 = EI\phi_2'' - Gh(\phi_2 + w'_3 + kw_1) - \alpha\theta_3', \\ \rho c \dot{\theta}_1 = \theta_1'' - \alpha T_0(\dot{w}_1' - k\dot{w}_3), \\ \rho c \dot{\theta}_3 = \theta_3'' - \alpha T_0\dot{\phi}_2'. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

où  $w_1$ ,  $w_3$  et  $\phi_2$  sont respectivement le déplacement longitudinal, vertical et l'angle de cisaillement ;  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  sont les déviations de la température à partir de la température de référence  $T_0$  le long de la direction longitudinale et verticale ;  $E$ ,  $G$ ,  $\rho$ ,  $m$ ,  $h$ ,  $k$  et  $c$  sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastique et thermique des matériaux. Le point  $(\cdot)$  et la prime

( $'$ ) désignent respectivement la dérivée partielle par rapport au temps  $t \geq 0$  et la dérivée partielle par rapport à la variable spatiale  $x \in [0, L]$ . Ils ont démontré que le taux de la décroissance exponentielle est préservée lorsque la vitesse de propagation du déplacement verticale coïncide avec la vitesse de propagation du déplacement longitudinal ou l'angle de rotation. Sinon, ils ont obtenu un taux de décroissance de type polynomial. Ses résultats ont été démontré par la méthode domaine fréquence. En particulier, le système isotherme de Bresse est exactement le système obtenu par Bresse [20] en 1856. En négligeant  $\theta_1$  et  $w_1$ , le système thermoélastique de Bresse se transforme en un système thermoélastique de Timoshenko de la forme

$$\begin{cases} \rho h \ddot{w}_3 = Gh(\phi_2 + w_3')', \\ \rho I \ddot{\phi}_2 = EI\phi_2'' - Gh(\phi_2 + w_3') - \alpha\theta_3', \\ \rho c \dot{\theta}_1 = \theta_1'' - \alpha T_0(\dot{w}_1' - k\dot{w}_3), \\ \rho c \dot{\theta}_3 = \theta_3'' - \alpha T_0 \dot{\phi}_2', \end{cases} \quad (4.1.3)$$

qui a été étudié par Racke et Rivera [90], avec les conditions au bord

$$w_3(t, x) = \phi_2'(t, x) = \theta_3(t, x) = 0 \quad \text{en } x = 0, L \quad (4.1.4)$$

ou

$$w_3(t, x) = \phi_2(t, x) = \theta_3'(t, x) = 0 \quad \text{en } x = 0, L. \quad (4.1.5)$$

Ils ont obtenu une stabilité exponentielle lorsque  $E = G$ , et ils ont démontré la stabilité non-exponentielle dans le cas des conditions au bord (4.1.4) lorsque  $E \neq G$ .

D'un autre côté, la stabilisation des plaques élastiques a attiré l'attention de plusieurs auteurs. J. E. Lagnese [61] a étudié la stabilisation d'une plaque élastique bidimensionnelle sous l'effet d'un contrôle au bord non linéaire, en utilisant la méthode de la construction d'une fonction de Lyapunov. Dans [95] B. Rao a considéré un système hybride composé d'une équation de plate et deux équations aux dérivées partielles. Il a démontré que le système est fortement mais non uniformément stable. Par une nouvelle approche, il a démontré que la solution régulière a un taux de décroissance rationnel, et il a établi la décroissance uniforme de l'énergie pour un système hybride simplifié.

Ici on s'intéresse aux problèmes de la stabilité directe du système (4.1.1) avec les conditions initiales des variables suivantes

$$\begin{cases} \omega(0, \cdot) = \omega_0, \omega_t(0, \cdot) = \omega_1, \varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \psi(0, \cdot) = \psi_0, \\ \psi_t(0, \cdot) = \psi_1 \text{ dans } (0, L), \end{cases} \quad (4.1.6)$$

et les conditions aux bords suivantes :

$$\omega(t, 0) = \omega(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0, \quad (4.1.7)$$

ou

$$\omega_x(t, 0) = \omega_x(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = 0. \quad (4.1.8)$$

On obtient un résultat de décroissance exponentielle basée sur le lemme suivant utilisé par A. Haraux [42], avec les conditions au bord (4.1.7) ou (4.1.8) :

**Lemme 4.1.1.** *Soit  $\mathcal{E} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ) une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe  $T > 0$  tel que*

$$\int_t^{+\infty} \mathcal{E}(s) ds \leq T\mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1.9)$$

Alors

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{1-\frac{t}{T}} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1.10)$$

Ce lemme est une base des résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs linéaires. On note que l'estimation (4.1.10) est optimale (voir [50]).

D'un autre côté, on obtient un résultat de décroissance polynômiale basée sur le lemme suivant, dû à Komornik [50], qui donne une généralisation au cas non linéaire du lemme 4.1.1, avec les conditions au bord (4.1.7) ou (4.1.8) :

**Lemme 4.1.2.** *Soit  $\mathcal{E} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ) une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $T > 0$  telles que*

$$\int_t^{+\infty} \mathcal{E}^{\alpha+1}(s) ds \leq T\mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1.11)$$

Alors

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \left( \frac{T + \alpha t}{T + \alpha T} \right)^{-1/\alpha} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1.12)$$

Aussi ce lemme est une base des résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs non linéaires. On note que l'estimation (4.1.12) est optimale (voir [50]).

## 4.2 Stabilisation exponentielle

Dans ce paragraphe, le système (4.1.1) est contrôlé par trois feedbacks linéaires. Plus précisément, il est donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) + \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) + \psi_t = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) + \omega_t = 0, \end{cases} \quad (4.2.13)$$

où  $t > 0$  et  $0 < x < L$ . L'énergie de la solution de ce système (4.2.13), soumis à l'état initiale (4.1.6) et aux conditions au bord (4.1.7) ou (4.1.8), est définie par

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + EI |\psi_x|^2 \right. \\ \left. + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh |\omega_x - l\varphi|^2 \right) dx. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Pour le moment, on remarque que, si on multiplie formellement la première équation de (4.1.1) par  $\varphi_t$ , la deuxième par  $\psi_t$ , la troisième par  $\omega_t$ , et si on additionne les trois équations résultantes, on obtient la relation suivante

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = - \int_0^L (|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2 + |\omega_t|^2). \quad (4.2.15)$$

Cette relation est appelée *la relation de dissipation*.

On pose  $U^0 = (\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1)$  et on désigne par  $U = U(t) = (\varphi, \psi, \omega, \varphi_t, \psi_t, \omega_t)$  la solution du système (4.2.13), (4.1.6), (4.1.7) ou (4.2.13), (4.1.6), (4.1.8).

### 4.2.1 Formulation du problème

Soit  $\Omega = (0, L)$ . Afin de choisir l'espace propre d'état pour le système (4.2.13), on doit trouver la solution statique d'abord. Donc on considère le système statique associé à (4.2.13)

$$\begin{cases} Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + lEh(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ EI\psi_{xx} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ Eh(\omega_x - l\varphi)_x - lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Le vecteur variable d'état est  $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z)$ . On procède comme dans [75] et on multiplie (4.2.16)<sub>1</sub>, (4.2.16)<sub>2</sub>, (4.2.16)<sub>3</sub> par  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\omega$  respectivement, et on intègre de 0 à  $L$ . On obtient alors

$$\int_0^L \left( EI |\psi_x|^2 + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh |\omega_x - l\varphi|^2 \right) dx = 0. \quad (4.2.17)$$

Dans le cas des conditions au bord (4.1.7), il est clair que (4.2.17) implique que  $\varphi = \psi = \omega \equiv 0$ . Mais dans le cas des conditions au bord (4.1.8), on a

$$\omega = -c_1 \cos(lx) - \frac{c_2}{l}, \quad \varphi = c_1 \sin(lx), \quad \psi = c_2,$$

qu'ils sont différentes des solutions zéro pour toutes constantes  $c_1, c_2$  si  $c_1 \sin(lL) =$

0. Par conséquent, on va poser que  $\int_0^L \psi = 0$  pour forcer  $\psi \equiv 0$ . En outre,  $\varphi = \omega \equiv 0$ . Bien qu'une translation des variables d'état peut évoluer l'équilibre à l'état zéro, on va faire face avec ça, en choisissant les espaces d'état suivants

$$\mathcal{H}_1 = (H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3,$$

$$\mathcal{H}_2 = (H_0^1(\Omega)) \times (H_*^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \times (L_*^2(\Omega))^2,$$

où

$$H_*^1(\Omega) := \left\{ f \in H^1(\Omega); \int_0^L f(x) = 0 \right\}$$

et

$$L_*^2(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega); \int_0^L f(x) = 0 \right\}.$$

Chaque espace d'état est muni du produit scalaire suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}_i} &:= \int_0^L \left( \rho_1 u_1 u_2 + \rho_2 v_1 v_2 + \rho_1 z_1 z_2 + EI \psi_{1x} \psi_{2x} + Gh(\varphi_{1x} + \psi_1 + l\omega_1) \times \right. \\ &\quad \left. (\varphi_{2x} + \psi_2 + l\omega_2) + Eh(\omega_{1x} - l\varphi_1)(\omega_{2x} - l\varphi_2) \right) dx \end{aligned} \right. \quad (4.2.18)$$

pour tout  $U_k = (\varphi_k, \psi_k, \omega_k, u_k, v_k, z_k)$  dans  $\mathcal{H}_i$   $i, k = 1, 2$ , qui induit la norme énergie

$$\left\{ \begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_i}^2 &= \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_1 \|z\|^2 + EI \|\psi_x\|^2 + Gh \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 \\ &\quad + Eh \|\omega_x - l\varphi\|^2. \end{aligned} \right. \quad (4.2.19)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $L^2(0, L)$  ici et dans la suite.

Maintenant, on définit l'opérateur linéaire non borné  $\mathcal{A}_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}_i$  ( $i = 1, 2$ ) par

$$D(\mathcal{A}_1) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3,$$

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{ \begin{aligned} (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) &\in \mathcal{H}_2; \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi, \omega \in H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \psi_x, \omega_x &\in H_0^1(\Omega), u \in H_0^1(\Omega), v, z \in H_*^1(\Omega) \end{aligned} \right\},$$



et

$$\mathcal{A}_i U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) - \frac{1}{\rho_1}u \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_2}v \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_1}z \end{pmatrix}.$$

Alors, le système élastique de Bresse peut se reformuler abstraitement en un problème d'évolution du premier ordre sur l'espace  $\mathcal{H}_i$ , sous la forme

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}_i U(t), & t > 0 \\ U(0) = U^0 = (\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1) \in \mathcal{H}_i, \end{cases} \quad (4.2.20)$$

où  $i = 1, 2$  correspond aux conditions au bord (4.1.7) et (4.1.8) respectivement. Ici et dans la suite, on suppose que  $l \neq \frac{n\pi}{L}$  pour tout entier naturel  $n$  lorsque  $i = 2$ .

**Remarque 4.2.1.** Pour tout  $v \in H_*^1(\Omega)$ , on a  $\|\nabla v\|$  est une norme dans  $H_*^1(\Omega)$ . Celle-ci s'obtient grâce à une généralisation de l'inégalité de Poincaré : Si  $\Omega$  est un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Il existe une constante positive dépend seulement de  $\Omega$  et  $N$  telle que pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|u\|^2 \leq C \left( \|\nabla u\|^2 + \left| \int_{\Omega} u dx \right| \right). \quad (4.2.21)$$

De plus, on déduit de l'inégalité (4.2.21) que l'injection  $H_*^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est continue.

**Théorème 4.2.1.**  $\mathcal{A}_i$  est le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi groupe de contraction dans  $\mathcal{H}_i$ . En plus, Si  $U^0 \in \mathcal{H}_i$  alors  $t \rightarrow e^{-t\mathcal{A}_i} U^0 \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{H}_i)$  est une solution faible, et si  $U^0 \in D(\mathcal{A}_i)$  alors  $t \rightarrow e^{-t\mathcal{A}_i} U^0 \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(\mathcal{A}_i)) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathcal{H}_i)$  est une solution forte ( $i = 1, 2$ ).

Avant de commencer la preuve du théorème 4.2.1, on va énoncer le lemme suivant.

**Lemme 4.2.1.** Il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $(\varphi, \psi, \omega)$  dans  $H_1 := (H_0^1(\Omega))^3$  ou pour tout  $(\varphi, \psi, \omega)$  dans  $H_2 := H_0^1(\Omega) \times (H_*^1(\Omega))^2$ ,

on a

$$\begin{cases} \int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |\omega_x|^2) dx \\ \leq C \int_0^L (EI|\psi_x|^2 + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh |\omega_x - l\varphi|^2) dx. \end{cases} \quad (4.2.22)$$

*Démonstration.* On commence avec le cas où  $(\varphi, \psi, \omega) \in H_1$ . On va démontrer ce résultat par l'absurde. Supposons alors que pour toute constante positive  $C > 0$ , il existe  $(\varphi, \psi, \omega)$  dans  $H_1$  on a

$$\begin{cases} \int_0^L (EI|\psi_x|^2 + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh |\omega_x - l\varphi|^2) dx \\ \leq \frac{1}{C} \int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |\omega_x|^2) dx. \end{cases} \quad (4.2.23)$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on peut trouver une suite  $\{(\varphi^n, \psi^n, \omega^n)\}_n$  dans  $H_1$  telle que

$$\int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh |\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh |\omega_x^n - l\varphi^n|^2) dx \leq \frac{1}{n} \quad (4.2.24)$$

et

$$\int_0^L (|\varphi_x^n|^2 + |\psi_x^n|^2 + |\omega_x^n|^2) dx = 1. \quad (4.2.25)$$

D'après (4.2.25), la suite  $\{(\varphi^n, \psi^n, \omega^n)\}_n$  est bornée dans  $H_1$ , et comme l'injection  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte alors la suite  $\{(\varphi^n, \psi^n, \omega^n)\}_n$  converge fortement dans  $(L^2(\Omega))^3$ .

D'un autre côté, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , (4.2.24) implique

$$\psi_x^n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (4.2.26)$$

Alors on déduit de l'inégalité de Poincaré que

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (4.2.27)$$

Maintenant, on pose que  $\varphi^n \rightarrow \varphi$  et  $\omega^n \rightarrow \omega$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

D'après (4.2.24), on a

$$\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (4.2.28)$$

Alors

$$\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n = \varphi_x^n + \psi^n + l(\omega^n - \omega) + l\omega \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (4.2.29)$$

Donc

$$\varphi_x^n \longrightarrow -l\omega \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \quad (4.2.30)$$

Alors  $(\varphi^n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$ . Donc elle converge vers une fonction  $\varphi_1$  dans  $H^1(\Omega)$ . Par conséquent, elle converge vers la fonction  $\varphi_1$  dans  $L^2(\Omega)$ . D'où  $\varphi_1 = \varphi$  d'après l'unicité des limites. En plus,  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  car il est fermé dans  $H^1(\Omega)$ .

Par suite, (4.2.30) implique

$$\varphi_x + l\omega = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \quad (4.2.31)$$

De la même manière, on trouve que

$$\omega_x - l\varphi = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad (4.2.32)$$

et  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ .

Donc, on déduit de (4.2.31) et (4.2.32), et la continuité de  $\varphi$  et  $\omega$  que

$$\varphi = -c_1 \cos(lx) \quad \text{et} \quad \omega = c_1 \sin(lx).$$

D'où  $\varphi|_{0,L} = 0$  implique  $\varphi = \omega \equiv 0$ . Par suite

$$\int_0^L (|\varphi_x^n|^2 + |\psi_x^n|^2 + |\omega_x^n|^2) dx \longrightarrow 0,$$

et cela contredit (4.2.25).

On répète les mêmes arguments dans le cas où  $(\varphi, \psi, \omega) \in H_2$  et on trouve une contradiction de (4.2.25).  $\square$

Maintenant, on retourne à la preuve du théorème 4.2.1 qui sera basé sur le corollaire suivant du théorème de Lummer-Phillips (voir Pazy [93]).

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire de domaine  $D(\mathcal{A})$  dense dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{A}$  est dissipatif et  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , l'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi groupe de contraction dans  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* D'abord, il est clair que  $D(\mathcal{A}_i)$  est dense dans  $\mathcal{H}_i$   $i = 1, 2$ . D'autre part, pour tout  $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in \mathcal{H}_i$ , on a

$$\langle \mathcal{A}_i U, U \rangle_{\mathcal{H}_i} = - \int_{\Omega} (|u|^2 + |v|^2 + |z|^2) \leq 0.$$

Donc  $\mathcal{A}_i$  est dissipatif. Alors d'après le théorème 4.2.2, il nous reste à démontrer que  $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$  i.e.  $\mathcal{A}_i$  est inversible et  $\mathcal{A}_i^{-1}$  est borné.

Pour démontrer que  $\mathcal{A}_i$  est inversible, il faut démontrer que pour tout  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z})$  dans  $\mathcal{H}_i$ , il existe une unique  $(\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in D(\mathcal{A}_i)$  telle que

$$\mathcal{A}_i((\varphi, \psi, \omega, u, v, z)) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}), \quad (4.2.33)$$

i.e. le système

$$\begin{cases} u = \tilde{\varphi}, & v = \tilde{\psi}, & z = \tilde{\omega}, \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) - \frac{1}{\rho_1}u = \tilde{u}, \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_2}v = \tilde{v}, \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_1}z = \tilde{z} \end{cases} \quad (4.2.34)$$

admet une solution unique. Alors il faut démontrer que le système suivant

$$\begin{cases} Gh(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + lEh\rho_1(\omega_x - l\varphi) = \tilde{\varphi} + \rho_1\tilde{u}, \\ EI\psi_{xx} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) = \tilde{\psi} + \rho_2\tilde{v}, \\ Eh(\omega_x - l\varphi)_x - lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) = \tilde{\omega} + \rho_1\tilde{z} \end{cases} \quad (4.2.35)$$

admet une solution unique  $(\varphi, \psi, \omega)$  dans  $H_i$   $i = 1, 2$  où  $H_i$  sont les espaces dans le lemme 4.2.1. On définit donc la forme bilinéaire  $b$  sur  $H_i$  par

$$\begin{cases} b((\varphi, \psi, \omega), (\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \overline{\omega})) = Gh\langle \varphi_x + \psi + l\omega, \overline{\varphi}_x + \overline{\psi} + l\overline{\omega} \rangle \\ + Eh\langle \omega_x - l\varphi, \overline{\omega}_x - l\overline{\varphi} \rangle + EI\langle \psi_x, \overline{\psi}_x \rangle, \end{cases}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

Il est facile de vérifier que la forme bilinéaire  $b$  est coercive et bornée sur  $H_i^2$  où  $H_i$  est muni de la norme suivante

$$\|(\varphi, \psi, \omega)\|_{H_i}^2 = \left( Gh\|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + Eh\|\omega_x - l\varphi\|^2 + EI\|\psi_x\|^2 \right).$$

D'autre part, pour tout  $(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \overline{\omega})$  dans  $H_i$   $i = 1, 2$ ,

$$\langle (4.2.35)_1, \overline{\varphi} \rangle + \langle (4.2.35)_2, \overline{\psi} \rangle + \langle (4.2.35)_3, \overline{\omega} \rangle$$

implique

$$b((\varphi, \psi, \omega), (\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \overline{\omega})) = -\langle \tilde{\varphi} + \rho_1\tilde{u}, \overline{\varphi} \rangle - \langle \tilde{\psi} + \rho_2\tilde{v}, \overline{\psi} \rangle - \langle \tilde{\omega} + \rho_1\tilde{z}, \overline{\omega} \rangle. \quad (4.2.36)$$

Définissons maintenant l'application  $L$  sur  $H_i$  par

$$L((\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})) := -\langle \tilde{\varphi} + \rho_1 \tilde{u}, \bar{\varphi} \rangle - \langle \tilde{\psi} + \rho_2 \tilde{v}, \bar{\psi} \rangle - \langle \tilde{\omega} + \rho_1 \tilde{z}, \bar{\omega} \rangle.$$

Il est clair que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $H_i$ .

Or  $H_i$  est un espace de Hilbert, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique  $(\varphi, \psi, \omega) \in H_i$  telle que

$$b((\varphi, \psi, \omega), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})) = L((\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})) \quad \forall ((\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})) \in H_i. \quad (4.2.37)$$

Maintenant, on prend  $\bar{\psi} = \bar{\omega} = 0$  et  $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (4.2.37), on obtient

$$\langle -Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh\rho_1(\omega_x - l\varphi), \bar{\varphi} \rangle = -\langle \tilde{\varphi} + \rho_1 \tilde{u}, \bar{\varphi} \rangle.$$

D'où

$$Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + lEh\rho_1(\omega_x - l\varphi) = \tilde{\varphi} + \rho_1 \tilde{u}$$

au sens distributionnel.

De même, on prend  $\bar{\varphi} = \bar{\omega} = 0$  et  $\bar{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)$  pour  $i = 1$ , et  $\bar{\psi} \in H_*^1(\Omega)$  pour  $i = 2$  dans (4.2.37), on obtient la deuxième équation de (4.2.35) au sens distributionnel pour  $i = 1$  et dans  $[H_*^1(\Omega)]'$  pour  $i = 2$ .

Enfin, la choix  $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$  et  $\bar{\omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$  pour  $i = 1$ , et  $\bar{\omega} \in H_*^1(\Omega)$  pour  $i = 2$  nous donne la troisième équation de (4.2.35) au sens distributionnel pour  $i = 1$  et dans  $[H_*^1(\Omega)]'$  pour  $i = 2$ .

D'autre part, pour  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}_i$  et  $(\varphi, \psi, \omega) \in H_1$  ou  $H_2$ , on a  $(\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in D(\mathcal{A}_i)$   $i = 1, 2$ . En effet, dans le cas où  $i = 1$ , on a  $u = \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v = \tilde{\psi} \in H_0^1(\Omega)$  et  $z = \tilde{\omega} \in H_0^1(\Omega)$ . Alors, d'après (4.2.35)<sub>2</sub> (respectivement (4.2.35)<sub>1</sub>, (4.2.35)<sub>3</sub>), on a  $\psi \in H^2(\Omega)$  (respectivement  $\varphi \in H^2(\Omega)$ ,  $\omega \in H^2(\Omega)$ ). D'où  $(\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in D(\mathcal{A}_1)$ . De la même façon, on montre  $(\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in D(\mathcal{A}_2)$ .

Il nous reste à démontrer que  $\mathcal{A}_i^{-1}$   $i = 1, 2$  est borné. On a

$$\begin{cases} \|(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)\|_{\mathcal{H}_i} = \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_1 \|z\|^2 + EI \|\psi_x\|^2 \\ \quad + Gh \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + Eh \|\omega_x - l\varphi\|^2. \end{cases} \quad (4.2.38)$$

Donc de la première équation de (4.2.34), on obtient

$$\|(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)\|_{\mathcal{H}_i} = \rho_1 \|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2 \|\tilde{\psi}\|^2 + \rho_1 \|\tilde{\omega}\|^2 + |b((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega))|.$$

Ensuite

$$\|(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)\|_{\mathcal{H}_i} = \rho_1 \|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2 \|\tilde{\psi}\|^2 + \rho_1 \|\tilde{\omega}\|^2 + |L(\varphi, \psi, \omega)|. \quad (4.2.39)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et le lemme 4.2.1, on obtient

$$\begin{cases} \rho_1 \|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2 \|\tilde{\psi}\|^2 + \rho_1 \|\tilde{\omega}\|^2 \\ \leq K_1 \left( EI \|\tilde{\psi}_x\|^2 + Gh \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}\|^2 + Eh \|\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}\|^2 \right), \end{cases} \quad (4.2.40)$$

où  $K_1$  est une constante positive dépendant de la constante de Poincaré  $c_0$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et la constante  $C$  déjà trouvé dans le lemme 4.2.1. D'un autre côté, en utilisant l'inégalités de Poincaré et de Young et le lemme 4.2.1, on déduit

$$\begin{cases} |L(\varphi, \psi, \omega)| = | - \langle \tilde{\varphi} + \rho_1 \tilde{u}, \varphi \rangle - \langle \tilde{\psi} + \rho_2 \tilde{v}, \psi \rangle - \langle \tilde{\omega} + \rho_1 \tilde{z}, \omega \rangle | \\ \leq K_2 (\rho_1 \|\tilde{u}\|^2 + \rho_2 \|\tilde{v}\|^2 + \rho_1 \|\tilde{z}\|^2) \\ + K_3 \left( EI \|\tilde{\psi}_x\|^2 + Gh \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}\|^2 + Eh \|\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}\|^2 \right) \\ + \varepsilon K_4 \left( EI \|\psi_x\|^2 + Gh \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + Eh \|\omega_x - l\varphi\|^2 \right), \end{cases} \quad (4.2.41)$$

où  $\varepsilon$  est positive arbitraire, et  $K_2, K_3, K_4$  sont des constantes positives dépendant de la constante de Poincaré  $c_0$  et  $\varepsilon$ . Par conséquent, en choisissant  $0 < \varepsilon < \frac{1}{K_4}$  et en insérant (4.2.40) et (4.2.42) dans (4.2.38), on obtient

$$\begin{cases} \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_1 \|z\|^2 + EI \|\psi_x\|^2 \\ + (1 - \varepsilon K_4) \left( EI \|\psi_x\|^2 + Gh \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + Eh \|\omega_x - l\varphi\|^2 \right) \\ \leq K_2 (\rho_1 \|\tilde{u}\|^2 + \rho_2 \|\tilde{v}\|^2 + \rho_1 \|\tilde{z}\|^2) \\ + K_3 \left( EI \|\tilde{\psi}_x\|^2 + Gh \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}\|^2 + Eh \|\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}\|^2 \right). \end{cases} \quad (4.2.42)$$

Alors

$$\|(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)\|_{\mathcal{H}_i} \leq K \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H}_i} \quad \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}_i,$$

i.e.

$$\|\mathcal{A}_i^{-1}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H}_i} \leq K \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H}_i} \quad \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}_i.$$

Donc  $\mathcal{A}_i^{-1}$  est borné. Par conséquent  $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$   $i = 1, 2$ . D'où la preuve complète du théorème 4.2.1..  $\square$

### 4.2.2 Résultat de stabilité exponentielle

Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance exponentielle résumée dans l'énoncé suivant.

**Théorème 4.2.3.** *Il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $\eta$  telles que l'énergie de la solution de (4.2.13), (4.1.6), (4.1.7) ou (4.2.13), (4.1.6), (4.1.8) satisfait*

$$\mathcal{E}(t) \leq C_1 \mathcal{E}(0) e^{-\eta t} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2.43)$$

*Démonstration.* La démonstration du théorème 4.2.2 requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* Multiplions la première équation du système (4.2.13) par  $\varphi$ , la deuxième équation par  $\psi$  et la troisième équation par  $\omega$ , et intégrons sur  $[S, T] \times [0, L]$ , on obtient respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_S^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \left[ \rho_1 \int_S^T \varphi_t \varphi \right]_S^T + Gh \int_S^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_x \\ - lEh \int_S^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \varphi + \int_S^T \int_0^L \varphi_t \varphi = 0, \end{array} \right. \quad (4.2.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_S^T \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 + \left[ \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi \right]_S^T + EI \int_S^T \int_0^L |\psi_x|^2 \\ + Gh \int_S^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi + \int_S^T \int_0^L \psi_t \psi = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.45)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_S^T \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 + \left[ \rho_1 \int_0^L \omega_t \omega \right]_S^T + Eh \int_S^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \omega_x \\ + lGh \int_S^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega + \int_S^T \int_0^L \omega_t \omega = 0. \end{array} \right. \quad (4.2.46)$$

*Etape 2.* Additionnons (4.2.44), (4.2.45) et (4.2.46), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_S^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 - \int_S^T \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 - \int_S^T \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 + Gh \int_S^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 \\ + Eh \int_S^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 + EI \int_S^T \int_0^L |\psi_x|^2 + \left[ \rho_1 \int_S^T \varphi_t \varphi \right]_S^T + \left[ \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi \right]_S^T \\ + \left[ \rho_1 \int_0^L \omega_t \omega \right]_S^T + \int_S^T \int_0^L \varphi_t \varphi + \int_S^T \int_0^L \psi_t \psi + \int_S^T \int_0^L \omega_t \omega = 0. \end{array} \right. \quad (4.2.47)$$

Donc de la définition de l'énergie  $E$ , on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} Gh \int_S^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh \int_S^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 + EI \int_S^T \int_S^T |\psi_x|^2 \\ = 2\mathcal{E}(t) - \int_S^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 - \int_S^T \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 - \int_S^T \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2. \end{array} \right. \quad (4.2.48)$$

En combinant (4.2.48) et (4.2.47), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T \mathcal{E}(t) dt = - \left[ \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi \right]_S^T - \left[ \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi \right]_S^T - \left[ \rho_1 \int_0^L \omega_t \omega \right]_S^T \\ + \int_S^T \left( - \int_0^L \varphi_t \varphi - \int_0^L \psi_t \psi - \int_0^L \omega_t \omega \right) \\ + 2 \left( \int_S^T \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2) dx dt \right). \end{array} \right. \quad (4.2.49)$$

*Etape 3.* Dans cette étape, on va estimer les termes du membre droit de (4.2.49). En utilisant l'inégalité de Young et de Poincaré, on déduit facilement que

$$- \left[ \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi \right]_S^T \leq c\mathcal{E}(S) \quad \forall S \geq 0, \quad (4.2.50)$$

$$- \left[ \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi \right]_S^T \leq c\mathcal{E}(S) \quad \forall S \geq 0 \quad (4.2.51)$$

et

$$- \left[ \rho_1 \int_0^L \omega_t \omega \right]_S^T \leq c\mathcal{E}(S) \quad \forall S \geq 0 \quad (4.2.52)$$

avec  $c$  est une constante générique dépend de  $\rho_1, \rho_2, E, I, G$  et  $c_0$ .

D'un autre côté, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Poincaré nous donne

$$\int_S^T \left( - \int_0^L \varphi_t \varphi \right) \leq \sqrt{c_0} \int_S^T \left( \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (4.2.53)$$

Ensuite, de (4.2.22) et de la définition de  $E$ , on a

$$\int_0^L |\varphi_x|^2 \leq 2C\mathcal{E}(t) \quad \forall t > 0.$$

Donc (4.2.53) implique

$$\int_S^T \left( - \int_0^L \varphi_t \varphi \right) \leq \sqrt{2Cc_0} \int_S^T (-\mathcal{E}')^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}.$$



Maintenant, on utilise de nouveau l'inégalité de Young. On obtient alors

$$\int_S^T \left( - \int_0^L \varphi_t \varphi \right) \leq Cc_0 \int_S^T (-\mathcal{E}') dt + \frac{1}{2} \int_S^T \mathcal{E} dt.$$

D'où,

$$\int_S^T \left( - \int_0^L \varphi_t \varphi \right) \leq Cc_0 \mathcal{E}(S) + \frac{1}{2} \int_S^T \mathcal{E} dt \quad \forall S \geq 0. \quad (4.2.54)$$

En répétant les mêmes arguments pour majorer  $\int_S^T \left( - \int_0^L \varphi_t \varphi \right)$ , on conclut que

$$\int_S^T \left( - \int_0^L \psi_t \psi \right) \leq c_0 \mathcal{E}(S) + \frac{1}{2} \int_S^T \mathcal{E}(t) dt \quad \forall S \geq 0 \quad (4.2.55)$$

et

$$\int_S^T \left( - \int_0^L \omega_t \omega \right) \leq c \mathcal{E}(S) + \frac{1}{2} \int_S^T \mathcal{E}(t) dt \quad \forall S \geq 0. \quad (4.2.56)$$

Finalement,

$$\begin{cases} 2 \left( \int_S^T \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2) dx dt \right) \\ \leq c \int_S^T (-\mathcal{E}') dt \leq c \mathcal{E}(S) \quad \forall S \geq 0. \end{cases} \quad (4.2.57)$$

*Etape 4.* On utilise (4.2.50), (4.2.51), (4.2.52), (4.2.54), (4.2.55), (4.2.56) et (4.2.57) dans (4.2.49), on obtient alors

$$2 \int_S^T \mathcal{E}(t) dt \leq c \mathcal{E}(S) + \frac{3}{2} \int_S^T \mathcal{E}(t) dt \quad \forall S \geq 0. \quad (4.2.58)$$

Alors l'hypothèse (4.1.9) est vérifiée en fixant  $S$  et en faisant  $T \longrightarrow +\infty$ . D'où la preuve complète du théorème 4.2.3 en appliquant le lemme 4.1.1.  $\square$

### 4.3 Stabilisation polynômiale

Dans ce paragraphe, le système (4.1.1) est contrôlé par trois feedbacks non linéaires. Plus précisément, il est donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) + \alpha_1(\varphi_t) = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) + \alpha_2(\psi_t) = 0 & t > 0, 0 < x < L, \\ \rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) + \alpha_3(\omega_t) = 0 & t > 0, 0 < x < L. \end{cases} \quad (4.3.59)$$

où  $\alpha_i$   $i = 1, 2, 3$  vérifiant :

i)  $\alpha_i$  sont des fonctions croissantes de classe  $C^1$ , avec  $\alpha_i(0) = 0$ .

ii) Il existe  $p > 1$  et des constantes positives  $c_j > 0$ ,  $1 \leq j \leq 12$  tels que

$$\begin{cases} c_1 |x|^p \leq |\alpha_1(x)| \leq c_2 |x|^{\frac{1}{p}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ c_3 |x| \leq |\alpha_1(x)| \leq c_4 |x| & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (4.3.60)$$

$$\begin{cases} c_5 |x|^p \leq |\alpha_2(x)| \leq c_6 |x|^{\frac{1}{p}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ c_7 |x| \leq |\alpha_2(x)| \leq c_8 |x| & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (4.3.61)$$

et

$$\begin{cases} c_9 |x|^p \leq |\alpha_3(x)| \leq c_{10} |x|^{\frac{1}{p}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ c_{11} |x| \leq |\alpha_3(x)| \leq c_{12} |x| & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (4.3.62)$$

Le système (4.3.59) est soumis à l'état initiale (4.1.6) et aux conditions au bord (4.1.7) ou (4.1.8).

D'autre part, en multipliant la première équation de (4.3.59) par  $\varphi_t$ , la deuxième par  $\psi_t$ , la troisième par  $\omega_t$ , et en intégrant sur  $[0, L]$ , on obtient

$$\mathcal{E}'(t) = - \int_0^L (\varphi_t \alpha_1(\varphi_t) + \psi_t \alpha_2(\psi_t) + \omega_t \alpha_3(\omega_t)) dx \leq 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.63)$$

Alors on a une dissipation de l'énergie.

### 4.3.1 Formulation du problème

Comme dans le sous-paragraphe 4.2.1, on définit l'opérateur linéaire non borné  $\mathcal{B}_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}_i$  ( $i = 1, 2$ ) par

$$D(\mathcal{B}_1) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3,$$

$$D(\mathcal{B}_2) = \left\{ (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in \mathcal{H}_2; \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi, \omega \in H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \right. \\ \left. \psi_x, \omega_x \in H_0^1(\Omega), u \in H_0^1(\Omega), v, z \in H_*^1(\Omega) \right\},$$

et

$$\mathcal{B}_i U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \end{pmatrix},$$

et on définit l'opérateur non linéaire  $\mathcal{N}$  par

$$\mathcal{N}U = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\rho_1}\alpha_1(u), \frac{1}{\rho_2}\alpha_2(v), \frac{1}{\rho_1}\alpha_3(z)\right).$$

Alors, le problème le système (4.3.59) peut se reformuler abstraitement en un problème d'évolution du premier ordre sur l'espace  $\mathcal{H}_i$ , sous la forme

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{B}_i U(t) + \mathcal{N}U(t), & t > 0 \\ U(0) = U^0 = (\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1) \in \mathcal{H}_i, \end{cases} \quad (4.3.64)$$

où  $i = 1, 2$  correspond aux conditions au bord (4.1.7) et (4.1.8) respectivement.

On montre l'existence classique et le résultat de régularité en utilisant la théorie d'opérateur non-linéaire maximal monotone (voir [42] pour la preuve). D'où la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $i = 1$  ou  $2$ . Pour tout  $(\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1) \in \mathcal{H}_i$ , le problème (4.3.59), (4.1.7) pour  $i = 1$  ou (4.1.8) pour  $i = 2$ , et (4.1.6) possède une solution unique  $U \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{H}_i)$ . En plus, pour tout  $(\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1) \in D(\mathcal{B}_i)$ , la solution  $U \in L^\infty(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{B}_i)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}_i)$ .*

### 4.3.2 Résultat de stabilité polynômiale

Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance polynômiale résumée dans l'énoncé suivant.

**Théorème 4.3.1.** *Supposons qu'il existe une constante  $p > 1$ . Alors, la solution de (4.3.59), (4.1.6), (4.1.7) ou (4.3.59), (4.1.6), (4.1.8) vérifie l'estimation suivante*

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{c\mathcal{E}(0)}{(1+t)^{2/(p-1)}} \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3.65)$$

avec  $c$  est une constante générique dépend de  $\rho_1, \rho_2, G, h, E, I$  et  $c_0$ .

*Démonstration.* La démonstration du théorème 5.1.2 requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* Multiplions la première équation du système (4.3.59) par  $\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}}\varphi$ , la deuxième équation par  $\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}}\psi$  et la troisième par  $\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}}\omega$ , et intégrons sur  $[S, T] \times [0, L]$ , on obtient respectivement

$$\begin{cases} -\left[\rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \varphi_t \varphi\right]_S^T + \rho_1 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \varphi_t \varphi + Gh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi \\ -lEh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \varphi + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \varphi \alpha_1(\varphi_t) = 0, \end{cases} \quad (4.3.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left[\rho_2 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \psi_t \psi\right]_S^T + \rho_2 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} E' \int_0^L \psi_t \psi + EI \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L |\psi_x|^2 \\ + Gh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \psi \int_0^L \alpha_2(\psi_t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.3.67)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left[\rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \omega_t \omega\right]_S^T + \rho_1 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \omega_t \omega + Eh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \omega_x \\ + lGh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \alpha_3(\omega_t) = 0. \end{array} \right. \quad (4.3.68)$$

*Etape 2.* Additionnons (4.3.66), (4.3.67) et (4.3.68), on obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left[\rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \varphi_t \varphi\right]_S^T - \left[\rho_2 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \psi_t \psi\right]_S^T - \left[\rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \omega_t \omega\right]_S^T \\ + \rho_1 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \varphi_t \varphi + \rho_2 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \psi_t \psi \\ + \rho_1 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \omega_t \omega + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \left( -\rho_1 |\varphi_t|^2 - \rho_2 |\psi_t|^2 - \rho_1 \omega_t^2 \right) \\ + Gh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 \\ + EI \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L |\psi_x|^2 + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (\varphi \alpha_1(\varphi_t) + \psi \alpha_2(\psi_t) + \omega \alpha_3(\omega_t)) dx dt = 0. \end{array} \right. \quad (4.3.69)$$

Alors, en utilisant (4.2.14) dans (4.3.69), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} = -\left[\rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \varphi_t \varphi\right]_S^T - \left[\rho_2 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \psi_t \psi\right]_S^T \\ -\left[\rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \omega_t \omega\right]_S^T + \rho_1 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \varphi_t \varphi \\ + \rho_2 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \psi_t \psi + \rho_1 \frac{p-1}{2} \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L \omega_t \omega \\ + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \left( 2\rho_1 |\varphi_t|^2 + 2\rho_2 |\psi_t|^2 + 2\rho_1 |\omega_t|^2 - \varphi \alpha_1(\varphi_t) - \psi \alpha_2(\psi_t) - \omega \alpha_3(\omega_t) \right). \end{array} \right. \quad (4.3.70)$$

*Etape 3.* Dans cette étape, on va estimer chaque terme du membre droite de l'équation (4.3.70).

D'après les inégalités de Young et de Poincaré on a

$$\left| \rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \varphi_t \varphi \right| \leq \rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \left( \int_0^L \frac{|\varphi_t|^2}{2} + c_0 \int_0^L \frac{|\varphi_x|^2}{2} \right),$$

et comme  $\mathcal{E}$  est décroissante, on a

$$\left| \rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \varphi_t \varphi \right| \leq c \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} \leq c \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}}(0) \mathcal{E} \leq c \mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3.71)$$

avec  $c$  dépend de  $\mathcal{E}(0)$ ,  $\rho_1$ ,  $p$  et  $c_0$ .

De même

$$\left| \rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \psi_t \psi \right| \leq c \mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.3.72)$$

et

$$\left| \rho_1 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \omega_t \omega \right| \leq c \mathcal{E}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.73)$$

D'un autre côté, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-3}{2}} \mathcal{E}' \int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \omega_t \omega) \right| \\ \leq -c \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{E}' dt \leq -c \int_S^T \mathcal{E}' \leq c \mathcal{E}(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{array} \right. \quad (4.3.74)$$

Par conséquent, en utilisant (4.3.71), (4.3.72), (4.3.73) et (4.3.74) dans (4.3.70) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} \leq c \mathcal{E}(S) + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (2\rho_1 |\varphi_t|^2 + 2\rho_2 |\psi_t|^2 + 2\rho_1 |\omega_t|^2) dx dt \\ + \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L (-\varphi \alpha_1(\varphi_t) - \psi \alpha_2(\psi_t) - \omega \alpha_3(\omega_t)) dx dt \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{array} \right. \quad (4.3.75)$$

Il nous reste à estimer le deuxième et le troisième terme du membre droite de (4.3.75).

Maintenant, on considère les espaces suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\varphi}^- = \{x \in (0, L); |\varphi_t(x)| \leq 1\} \\ \Gamma_{\varphi}^+ = \{x \in (0, L); |\varphi_t(x)| > 1\} \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\psi}^- = \{x \in (0, L); |\psi_t(x)| \leq 1\} \\ \Gamma_{\psi}^+ = \{x \in (0, L); |\psi_t(x)| > 1\} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\omega}^- = \{x \in (0, L); |\omega_t(x)| \leq 1\} \\ \Gamma_{\omega}^+ = \{x \in (0, L); |\omega_t(x)| > 1\} \end{array} \right. .$$

D'après la première inégalité de (4.3.60) on a

$$|\varphi_t|^p \leq \frac{1}{c_1} |\alpha_1(\varphi_t)|.$$

Donc

$$|\varphi_t|^{\frac{2p}{p+1}} \leq c |\alpha_1(\varphi_t)|^{\frac{2}{p+1}}.$$

Or  $|\varphi_t|^2 = |\varphi_t|^{\frac{2}{p+1}} |\varphi_t|^{\frac{2p}{p+1}}$ . Alors on a

$$|\varphi_t|^2 \leq c |\varphi_t \alpha_1(\varphi_t)|^{\frac{2}{p+1}} \quad \text{sur } \Gamma_\varphi^-.$$

D'où

$$\int_{\Gamma_\varphi^-} |\varphi_t|^2 \leq c \int_{\Gamma_\varphi^-} |\varphi_t \alpha_1(\varphi_t)|^{\frac{2}{p+1}} \leq c (-\mathcal{E}')^{\frac{2}{p+1}}. \quad (4.3.76)$$

De même, de la première inégalité de (4.3.60) on a

$$|\alpha_1(\varphi_t)|^p \leq c_2 |\varphi_t| \quad \text{sur } \Gamma_\varphi^-.$$

Ensuite

$$|\alpha_1(\varphi_t)|^2 \leq c |\varphi_t \alpha_1(\varphi_t)|^{\frac{2}{p+1}}.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_\varphi^-} |\alpha_1(\varphi_t)|^2 \leq c \int_{\Gamma_\varphi^-} |\varphi_t \alpha_1(\varphi_t)|^{\frac{2}{p+1}} \leq c (-\mathcal{E}')^{\frac{2}{p+1}}. \quad (4.3.77)$$

Par conséquent, en utilisant les inégalités de Poincaré et de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\alpha_1}^-} (2\rho_1 |\varphi_t|^2 - \varphi \alpha_1(\varphi_t)) dx \leq c \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} (-\mathcal{E}')^{\frac{2}{p+1}} + c \mathcal{E}^{\frac{p}{2}} (-\mathcal{E}')^{\frac{1}{p+1}}. \quad (4.3.78)$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Young générale (voir Brézis [19], p.56)

pour  $r = \frac{p+1}{p-1}$  et  $r' = \frac{p+1}{2}$  on obtient

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} (-\mathcal{E}')^{\frac{2}{p+1}} \leq \varepsilon \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - C_\varepsilon \mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.3.79)$$

et pour  $r = \frac{p+1}{p}$  et  $r' = p+1$  on obtient

$$\mathcal{E}^{\frac{p}{2}} (-\mathcal{E}')^{\frac{1}{p+1}} \leq \varepsilon \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - C_\varepsilon \mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.3.80)$$

Alors en reportant (4.3.79) et (4.3.80) dans (4.3.78), on aura

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_\varphi^-} (2\rho_1 |\varphi_t|^2 - \varphi \alpha_1(\varphi_t)) dx \leq \varepsilon \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - C_\varepsilon \mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.3.81)$$

D'un autre côté, de la deuxième inégalité de (4.3.60) et le fait que  $\mathcal{E}$  est décroissante, on a

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\varphi_t|^2 \leq \frac{1}{c_3} \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}}(0) \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\varphi_t \alpha_1(\varphi_t)| dx \leq -c\mathcal{E}'. \quad (4.3.82)$$

Aussi d'après la deuxième inégalité de (4.3.60) on a

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\alpha_1(\varphi_t)|^2 \leq c_4 \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}}(0) \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\varphi_t \alpha_1(\varphi_t)|.$$

Donc

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\alpha_1(\varphi_t)|^2 \leq c\mathcal{E}', \quad (4.3.83)$$

où  $c$  ici et dans (4.3.82) dépendant de  $\mathcal{E}(0)$ .

Ensuite, d'après les inégalité de Cauchy-Shwarz et de Poincaré on a

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\varphi \alpha(\varphi_t)| dx \leq \mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \left( c_0 \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\varphi_x|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\alpha(\varphi_t)|^2 \right)^{1/2}.$$

Donc le lemme 4.2.1, l'inégalité de Young, la définition de  $\mathcal{E}$  et (4.3.83) impliquent

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\varphi}^+} |\varphi \alpha(\varphi_t)| dx \leq \varepsilon_1 \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - C_{\varepsilon_1} \mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon_1 > 0. \quad (4.3.84)$$

Par conséquent, (4.3.82) et (4.3.84) impliquent

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Gamma_{\varphi}^+} \left( 2\rho_1 |\varphi_t|^2 - \varphi \alpha_1(\varphi_t) \right) dx \leq \varepsilon_1 \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - c\mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon_1 > 0. \quad (4.3.85)$$

Finalement, (4.3.81) et (4.3.85) nous donnent

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \left( 2\rho_1 |\varphi_t|^2 - \varphi \alpha_1(\varphi_t) \right) dx \leq (\varepsilon + \varepsilon_1) \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - c\mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon, \varepsilon_1 > 0. \quad (4.3.86)$$

En répétant les arguments précédents, on obtient

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \left( 2\rho_2 |\psi_t|^2 - \psi \alpha_2(\psi_t) \right) dx \leq (\varepsilon' + \varepsilon_2) \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - c\mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon', \varepsilon_2 > 0, \quad (4.3.87)$$

et

$$\mathcal{E}^{\frac{(p-1)}{2}} \int_0^L \left( 2\rho_1 |\omega_t|^2 - \varphi \alpha_3(\omega_t) \right) dx \leq (\varepsilon'' + \varepsilon_3) \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} - c\mathcal{E}' \quad \forall \varepsilon'', \varepsilon_3 > 0. \quad (4.3.88)$$

Maintenant, en utilisant (4.3.86), (4.3.87) et (4.3.88) dans (4.3.75), on obtient

$$(2 - (\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)) \int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} dt \leq c\mathcal{E}(S), \quad (4.3.89)$$

pour tout  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ .

En choisissant  $0 < \varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < \frac{1}{3}$ , on obtient

$$\int_S^T \mathcal{E}^{\frac{(p+1)}{2}} dt \leq c\mathcal{E}(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4.3.90)$$

où  $c$  est une constante positive dépendant de  $\mathcal{E}(0)$ ,  $c_0$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $c_i$   $i = 1, 2, \dots, 12$ . Alors l'hypothèse (4.1.11) est vérifiée en fixant  $S$  et en faisant  $T \rightarrow +\infty$ . D'où la preuve complète du théorème 5.1.2 en appliquant le lemme 4.1.2.  $\square$



# Chapitre 5

## Stabilisation indirecte du système de Bresse soumis seulement à deux feedbacks localement distribués

### 5.1 Introduction

Au cours des dernières années, avec une large application de "matériaux intelligents" dans les systèmes élastiques, allant de la mesure et de l'amortissement des vibrations dans les grandes structures souples pour le contrôle du bruit dans l'acoustique des paramètres structurels (pour plus des informations voir Banks [23]), il est devenu de plus en plus important d'étudier la stabilité d'un système élastique avec un amortissement ou un contrôle localement distribué. Toutefois, les travaux réalisés dans ce domaine étaient relativement faible depuis les travaux connexes de Lagnese [62].

Dans ce chapitre, on considère le même système élastique de Bresse du chapitre précédent, mais il est soumis seulement à deux termes d'amortissement. Ces deux termes sont deux forces de contrôle exercées sur le voisinage du bord, agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation d'un filament de la poutre et l'équation du déplacement longitudinal de la poutre. Force de contrôle indirecte est appliquée sur l'équation du déplacement transversal de la poutre. Alors ce système est donné par

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_1(x)\psi_t = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_2(x)\omega_t = 0, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où  $t > 0$  et  $0 < x < L$ . Les vitesses de propagation dans la première équation et la seconde équation sont, respectivement, données par

$$v_1 = \frac{Gh}{\rho_1} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{EI}{\rho_2}.$$

Ici, les fonctions  $a_j \geq 0$  sont positives sur  $[0, L]$   $j = 1, 2$  et satisfont

$$a_j(x) \geq a_- > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Theta := ]0, c[ \cup ]d, L[, \quad 0 < c < d < L. \quad (5.1.2)$$

Les conditions initiales de variables sont :

$$\begin{cases} \omega(0, \cdot) = \omega_0, \omega_t(0, \cdot) = \omega_1, \varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \psi(0, \cdot) = \psi_0, \\ \psi_t(0, \cdot) = \psi_1 \quad \text{dans} \quad (0, L). \end{cases} \quad (5.1.3)$$

On considère les conditions aux bords suivantes de ce système :

$$\omega(t, 0) = \omega(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0, \quad (5.1.4)$$

ou

$$\omega_x(t, 0) = \omega_x(t, L) = \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = 0. \quad (5.1.5)$$

L'énergie de la solution du système (5.1.1) soumis à l'état initial (5.1.3) et à chacune des conditions aux bords (5.1.4) ou (5.1.5) est définie par

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + EI |\psi_x|^2 + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 \\ \quad + Eh |\omega_x - l\varphi|^2) dx. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Pour le moment, on remarque que, si on multiplie formellement la première équation de (5.1.1) par  $\varphi_t$ , la deuxième par  $\psi_t$ , la troisième par  $\omega_t$  et si on additionne les trois équations résultantes, on obtient la relation suivante

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = - \int_0^L (a_1(x) |\psi_t|^2 + a_2(x) |\omega_t|^2) dx. \quad (5.1.7)$$

Cette relation est appelé la relation de dissipation.

On pose  $U^0 = (\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1)$  et on désigne par  $U = U(t) = (\varphi, \psi, \omega, \varphi_t, \psi_t, \omega_t)$  la solution du système (5.1.1), (5.1.3), (5.1.4) ou (5.1.1), (5.1.3), (5.1.5).

Des résultats de stabilisation des poutres élastiques sous l'effet des forces de contrôle localement distribués ont été considérés. Récemment, Q.X. Yan ; S. H. Hou ; G. Huang ; L. Wan [117], D. H. Shi et D. X. Fing [104], [105], [106],

et S. Shoukui [107] ont démontré la décroissance exponentielle de l'énergie du système de Timoshenko non uniforme soumis à deux feedbacks localement distribués. Dans [119] C. G. Zhang, H. L. Zhao et K. Liu ont étudié la stabilisation exponentielle du système de Timoshenko non homogène avec un couple de contrôles : d'un feedback localement distribué et d'un feedback aux bords. D'un autre côté, K. Liu et Z. Liu [78] ont obtenu la stabilité exponentielle de la poutre de Euler-Bernoulli sous l'effet du feedback de Kelvin-Voigt localement distribué.

Dans ce chapitre, on obtient un résultat de stabilité exponentielle du système (5.1.1) dans le cas où les vitesses de propagation sont égales dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation du système. Ce résultat est basé sur le théorème suivant, dû à J. Prüss [93] et F. L. Huang [42] :

**Théorème 5.1.1.** *Un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe  $e^{t\mathcal{A}}$  des contractions sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est **exponentiellement stable** si et seulement si*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty. \quad (5.1.8)$$

D'autre part, on obtient un résultat de stabilité polynomiale dans le cas des vitesses de propagation différentes. Ce résultat est basé sur le théorème suivant, dû à Z. Liu et B. Rao [75] :

**Théorème 5.1.2.** *Si un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe  $e^{t\mathcal{A}}$  borné dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  satisfait*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \sup_{|\lambda| \geq 1} \frac{1}{\lambda^\gamma} \|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty \quad (5.1.9)$$

*pour un certain  $\gamma > 0$ , alors pour tout entier positif  $k$ , il existe une constante  $C_k > 0$  telle que*

$$\|e^{t\mathcal{A}} z_0\|_{\mathcal{H}} \leq C_k \left( \frac{\ln t}{t} \right)^{\frac{k}{\gamma}} (\ln t) \|z_0\|_{D(\mathcal{A}^k)} \quad (5.1.10)$$

*pour tout  $z_0 \in D(\mathcal{A}^k)$ .*

Une approche de fréquence de domaine et les techniques de multiplicateurs sont appliquées.

## 5.2 Formulation du problème

Soit  $\Omega = (0, L)$ . On procède comme dans la section 4.2.1 du chapitre précédent et on choisit les espaces d'état suivants

$$\mathcal{H}_1 = (H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3,$$

$\mathcal{H}_2 = (H_0^1(\Omega)) \times (H_*^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \times (L_*^2(\Omega))^2$ ,  
où  $H_*^1(\Omega)$  et  $L_*^2(\Omega)$  sont définis dans le chapitre 4. Chaque espace d'état est muni du produit scalaire suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle &:= \int_0^L \left( \rho_1 u_1 \bar{u}_2 + \rho_2 v_1 \bar{v}_2 + \rho_1 z_1 \bar{z}_2 + EI \psi_{1x} \bar{\psi}_{2x} \right. \\ &\quad \left. + Gh(\varphi_{1x} + \psi_1 + l\omega_1)(\bar{\varphi}_{2x} + \bar{\psi}_2 + l\bar{\omega}_2) + Eh(\omega_{1x} - l\varphi_1)(\bar{\omega}_{2x} - l\bar{\varphi}_2) \right) dx, \end{aligned} \right.$$

pour tout  $U_k = (\varphi_k, \psi_k, \omega_k, u_k, v_k, z_k)$  dans  $\mathcal{H}_i$   $i, k = 1, 2$ , qui induit la norme énergie

$$\left\{ \begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_i}^2 &= \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_1 \|z\|^2 + EI \|\psi_x\|^2 + Gh \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 \\ &\quad + Eh \|\omega_x - l\varphi\|^2. \end{aligned} \right. \quad (5.2.1)$$

Maintenant, on définit l'opérateur linéaire non borné  $\mathcal{A}_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}_i$  ( $i = 1, 2$ ) par

$$D(\mathcal{A}_1) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3,$$

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{ \begin{aligned} (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) &\in \mathcal{H}_2; \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi, \omega \in H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \psi_x, \omega_x &\in H_0^1(\Omega), u \in H_0^1(\Omega), v, z \in H_*^1(\Omega) \end{aligned} \right\},$$

et

$$\mathcal{A}_i U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_2}a_1(x)v \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_1}a_2(x)z \end{pmatrix}.$$

Alors, le système (5.1.1) peut se reformuler abstraitement en un problème d'évolution du premier ordre sur l'espace  $\mathcal{H}_i$ , sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} U'(t) &= \mathcal{A}_i U(t), \quad t > 0 \\ U(0) &= U^0 = (\varphi^0, \psi^0, \omega^0, \varphi^1, \psi^1, \omega^1) \in \mathcal{H}_i, \end{aligned} \right. \quad (5.2.2)$$

où  $i = 1, 2$  correspond aux conditions au bord (5.1.4) et (5.1.5) respectivement. Ici et dans la suite, on pose que  $l \neq \frac{n\pi}{L}$  pour tout entier naturel  $n$  lorsque  $i = 2$ .

**Remarque 5.2.1.** (*Importante*). Grâce au lemme 4.2.1 dans le chapitre précédent, on peut montrer que la norme énergie (5.2.1) est équivalente à la norme usuelle de  $\mathcal{H}_j$   $j = 1, 2$ .

L'existence et la régularité de la solution  $U$  de (5.2.2) sont données dans le théorème suivant :

**Théorème 5.2.1.** *L'opérateur  $\mathcal{A}_j$  engendre un  $C^0$ -semigroupe  $S_j(t)$  de contractions dans  $\mathcal{H}_j$   $j = 1, 2$ . Alors, pour toute donnée initiale  $U^0 \in \mathcal{H}_j$ , le système (5.2.2) possède une unique solution faible  $U(t)$  telle que  $U(t) \in C^0([0, \infty), \mathcal{H}_j)$   $j = 1, 2$ . En plus, si  $U^0 \in D(\mathcal{A}_j)$ , alors  $U(t)$  est une solution forte de (5.2.2) i.e.*

$$U(t) \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j) \cap C^0([0, \infty), D(\mathcal{A}_j)) \quad j = 1, 2.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 4.2.1 dans le chapitre précédent.

## 5.3 Stabilisation forte et stabilisation exponentielle

Nos résultats principaux dans ce paragraphe sont la décroissance asymptotique vers zéro et l'estimation de la décroissance exponentielle résumées dans les deux énoncés suivants :

**Théorème 5.3.1.** *Le semigroupe  $S_j(t)$  est fortement stable i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S_j(t)U^0\|_{\mathcal{H}_j} = 0 \quad j = 1, 2 \quad (5.3.1)$$

pour tout  $U_0 \in \mathcal{H}_j$ .

**Théorème 5.3.2.** *Si  $v_1 = v_2$ , alors le semigroupe  $S_j(t)$  est exponentiellement stable i.e. il existe deux constantes  $M, \epsilon > 0$  indépendantes de  $U^0$  telles que*

$$\|S_j(t)U^0\|_{\mathcal{H}_j} \leq Me^{-\epsilon t} \|U^0\|_{\mathcal{H}_j} \quad t \geq 0 \quad j = 1, 2. \quad (5.3.2)$$

Pour la démonstration de ces deux théorèmes le lemme suivant est nécessaire :

**Lemme 5.3.1.** *On a*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j), \quad (5.3.3)$$

où  $\rho(\mathcal{A}_j)$  est l'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}_j$   $j = 1, 2$ .

*Démonstration.* Supposons que (5.3.3) est fausse, alors il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $i\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A}_j)$  où  $\sigma(\mathcal{A}_j) := \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}_j)$ ,  $j = 1, 2$ . D'après la compacité de l'injection de  $D(\mathcal{A}_j)$  dans  $\mathcal{H}_j$   $j = 1, 2$ ,  $i\lambda_0$  est une valeur propre (voir

Brézis [19], théorème VI.8, p. 95). Soit  $U_1 = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z)$ ,  $U_1 \neq 0$  tel que  $\mathcal{A}_j U_1 = i\lambda_0 U_1$   $j = 1, 2$ . Alors, on déduit les équations suivantes

$$u = i\lambda_0 \varphi, \quad (5.3.4)$$

$$v = i\lambda_0 \psi, \quad (5.3.5)$$

$$z = i\lambda_0 \omega, \quad (5.3.6)$$

$$Gh(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + lEh(\omega_x - l\varphi) = i\rho_1 \lambda_0 u, \quad (5.3.7)$$

$$EI\psi_{xx} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_1(x)v = i\rho_2 \lambda_0 v, \quad (5.3.8)$$

$$Eh(\omega_{xx} - l\varphi_x) - lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_2(x)z = i\rho_1 \lambda_0 z. \quad (5.3.9)$$

Comme

$$\begin{cases} Re\langle \mathcal{A}U_1 - i\lambda_0 U_1, U_1 \rangle_{\mathcal{H}_j} = Re\langle \mathcal{A}U_1, U_1 \rangle_{\mathcal{H}_j} \\ = - \int_0^L (a_1(x)|v|^2 + a_2(x)|z|^2) = 0, \end{cases} \quad (5.3.10)$$

on peut déduire que

$$v = z \equiv 0 \quad \text{dans } \Theta. \quad (5.3.11)$$

Alors, d'après (5.3.5) et (5.3.6), on a

$$\psi = \omega \equiv 0 \quad \text{dans } \Theta. \quad (5.3.12)$$

Par suite, on déduit de (5.3.8) que  $\varphi_x = 0$  dans  $\Theta$ . Ensuite, en utilisant (5.3.4) dans (5.3.7) on obtient que  $\varphi = 0$  dans  $\Theta$ .

Pour obtenir la contradiction  $U_1 = 0$ , Il faut prouver que

$$\varphi = \psi = \omega = 0 \quad \text{dans } (0, L). \quad (5.3.13)$$

Comme

$$\varphi_x, \psi_x, \omega_x \in H^1(0, L) \hookrightarrow C([0, L]),$$

on a

$$\varphi, \psi, \omega \in C^1([0, L]).$$

Alors,

$$\varphi|_{0,L} = \varphi_x|_{0,L} = \psi|_{0,L} = \psi_x|_{0,L} = \omega|_{0,L} = \omega_x|_{0,L} = 0. \quad (5.3.14)$$

Par suite, en utilisant (5.3.4), (5.3.5) et (5.3.6) dans (5.3.7), (5.3.8) et (5.3.9) respectivement, avec les conditions initiales (5.3.14), on obtient le système

suivant

$$\begin{cases} Gh\varphi_{xx} + Gh\psi_x + (Ghl + lEh)\omega_x - l^2Eh\varphi = -\rho_1\lambda_0^2\varphi, \\ EI\psi_{xx} - Gh\varphi_x - Gh\psi - Ghl\omega - a_1(x)i\lambda_0\psi = \rho_2\lambda_0^2\psi, \\ Eh\omega_{xx} - (Ehl + lGh)\varphi_x - lGh\psi - l^2Gh\omega - a_2(x)i\lambda_0\omega = -\rho_1\lambda_0^2\omega, \\ \varphi|_{c,d} = \varphi_x|_{c,d} = \psi|_{c,d} = \psi_x|_{c,d} = \omega|_{c,d} = \omega_x|_{c,d} = 0. \end{cases} \quad (5.3.15)$$

En utilisant (5.3.5) et (5.3.6) dans (5.3.10), on obtient

$$\int_0^L (a_1(x)|\psi|^2 + a_2(x)|\omega|^2) = 0. \quad (5.3.16)$$

Donc (5.3.16) implique  $a_1(x)\psi = a_2(x)\omega \equiv 0$ . Ensuite le système (5.3.15) devient

$$\begin{cases} Gh\varphi_{xx} + Gh\psi_x + (Ghl + lEh)\omega_x - l^2Eh\varphi = -\rho_1\lambda_0^2\varphi, \\ EI\psi_{xx} - Gh\varphi_x - Gh\psi - Ghl\omega = -\rho_2\lambda_0^2\psi, \\ Eh\omega_{xx} - (Ehl + lGh)\varphi_x - lGh\psi - l^2Gh\omega = -\rho_1\lambda_0^2\omega, \\ \varphi|_{c,d} = \varphi_x|_{c,d} = \psi|_{c,d} = \psi_x|_{c,d} = \omega|_{c,d} = \omega_x|_{c,d} = 0. \end{cases} \quad (5.3.17)$$

Posons maintenant  $X = (\varphi, \varphi_x, \psi, \psi_x, \omega, \omega_x)$ . Alors le système (5.3.17) peut s'écrire sous la forme suivante

$$X' = \mathcal{M}X \quad \text{et} \quad X(0) = X(L) = 0, \quad (5.3.18)$$

où la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l^2Eh - \rho_1\lambda_0^2}{Gh} & 0 & 0 & -1 & 0 & -l(1 + \frac{E}{G}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Gh}{EI} & \frac{Gh - \rho_2\lambda_0^2}{EI} & 0 & \frac{Ghl}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & l(1 + \frac{lG}{E}) & \frac{lG}{E} & 0 & \frac{l^2Gh - \rho_1\lambda_0^2}{Eh} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que  $\det(\mathcal{M}) \neq 0$ . Donc le système différentiel ordinaire (5.3.18) admet une solution unique. Mais  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  est une solution de (5.3.18). D'où  $X = 0$ .

Par conséquent  $U_1 = 0$ . D'où la contradiction. □

Maintenant on retourne aux preuves de nos théorèmes principaux.

*Preuve du théorème 5.3.1 :*

Comme conséquence du théorème de Rellish, on a que l'ensemble résolvant  $\rho(\mathcal{A}_j)$  soit compact car l'injection  $D(\mathcal{A}_j) \hookrightarrow \mathcal{H}_j$  est compacte, et on a  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$   $j = 1, 2$  d'après le lemme précédent. Donc en utilisant la théorie de décomposition de Sz-Nagy-Foias et Foguel, on montre que l'énergie  $E(t)$  décroît asymptotiquement vers zéro (voir Benchimol [21]) pour tout  $U_0 \in \mathcal{H}$ .

*Preuve du théorème 5.3.2 :*

On a démontré que  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$   $j = 1, 2$  d'après le lemme 5.3.1. Alors pour obtenir la preuve complète du théorème 5.3.2, il nous reste à démontrer que

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda - \mathcal{A}_j)^{-1}\|_{\mathcal{H}_j} < +\infty \quad j = 1, 2. \quad (5.3.19)$$

On suppose que la conclusion (5.3.19) est fausse. Alors il existe une suite réelle  $(\lambda_n)$  et une suite  $U^n = (\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n) \in D(\mathcal{A}_j)$  telles que  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ ,

$$\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1 \quad j = 1, 2, \quad (5.3.20)$$

et

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_j)U^n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}_j \quad j = 1, 2. \quad (5.3.21)$$

On rappelle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|U^n\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \int_0^L (\rho_1 |u^n|^2 + \rho_2 |v^n|^2 + \rho_1 |z^n|^2 + EI |\psi_x^n|^2 + Gh |\varphi_x^n|^2 + \psi^n + l \omega^n)^2 \\ \quad + Eh |\omega_x^n - l \varphi^n|^2) dx, \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

D'après la remarque 5.2.1, (5.3.21) implique

$$i\lambda_n \varphi^n - u^n = f_n^1 \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, L), \quad (5.3.22)$$

$$i\lambda_n \psi^n - v^n = f_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{dans } \begin{cases} H_0^1(0, L) & \text{pour } j = 1 \\ H_*^1(0, L) & \text{pour } j = 2 \end{cases}, \quad (5.3.23)$$



$$i\lambda_n \omega^n - z^n = f_n^3 \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \begin{cases} H_0^1(0, L) \text{ pour } j = 1 \\ H_*^1(0, L) \text{ pour } j = 2 \end{cases}, \quad (5.3.24)$$

$$i\lambda_n u^n - \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l\omega_x^n) - \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x^n - l\varphi^n) = f_n^4 \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L), \quad (5.3.25)$$

$$i\lambda_n v^n - \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx}^n + \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{1}{\rho_2}a_1(x)v^n = f_n^5 \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L) \quad (5.3.26)$$

et

$$i\lambda_n z^n - \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx}^n - l\varphi_x^n) + \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{1}{\rho_1}a_2(x)z^n = f_n^6 \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (5.3.27)$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\langle (i\lambda_n - \mathcal{A}_j)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}_j} = -\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}_j U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}_j} \\ = \int_0^L (a_1(x)|v^n|^2 + a_2(x)|z^n|^2) \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (5.3.28)$$

Donc, d'après (5.3.21) et (5.1.2), on a

$$v^n, z^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Theta). \quad (5.3.29)$$

De plus, en multipliant (5.3.22) par  $\rho_1 \overline{u^n}$ , (5.3.23) par  $\rho_2 \overline{v^n}$ , (5.3.24) par  $\rho_1 \overline{z^n}$ , en intégrant sur  $[0, L]$ , en additionnant les équations résultantes et en utilisant les faits que

$$f_1^n, f_2^n, f_3^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L),$$

et  $(u^n)$ ,  $(v^n)$ ,  $(w^n)$  sont bornées, on obtient

$$\begin{cases} i\lambda_n \int_0^L \rho_1 \varphi^n \overline{u^n} + i\lambda_n \int_0^L \rho_2 \psi^n \overline{v^n} + i\lambda_n \int_0^L \rho_1 \omega^n \overline{z^n} \\ - \int_0^L (\rho_1 |u^n|^2 + \rho_2 |v^n|^2 + \rho_1 |z^n|^2) \longrightarrow 0. \end{cases} \quad (5.3.30)$$

De même, en multipliant (5.3.25) par  $\rho_1 \overline{\varphi^n}$ , (5.3.26) par  $\rho_2 \overline{\psi^n}$ , (5.3.27) par  $\rho_1 \overline{z^n}$ , en intégrant sur  $[0, L]$ , en additionnant les équations résultantes et en utilisant les faits que  $f_4^n, f_5^n, f_6^n \longrightarrow 0$  dans  $L^2(0, L)$  et  $(\varphi^n)$ ,  $(\psi^n)$ ,  $(\omega^n)$  sont bornées, on obtient

$$\begin{cases} i\lambda_n \int_0^L \rho_1 u^n \overline{\varphi^n} + i\lambda_n \int_0^L \rho_2 v^n \overline{\psi^n} + i\lambda_n \int_0^L \rho_1 z^n \overline{\omega^n} \\ + \int_0^L (EI |\psi_x^n|^2 + Gh |\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh |\omega_x^n - l\varphi^n|^2) \longrightarrow 0. \end{cases} \quad (5.3.31)$$

Ensuite, en additionnant la partie réelle de (5.3.30) et celle de (5.3.31), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) \\ - \int_0^L (\rho_1|u^n|^2 + \rho_2|v^n|^2 + \rho_1|z^n|^2) \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.32)$$

Par suite, de (5.3.20) et (5.3.32), on déduit

$$\int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad (5.3.33)$$

et

$$\int_0^L (\rho_1|u^n|^2 + \rho_2|v^n|^2 + \rho_1|z^n|^2) \longrightarrow \frac{1}{2}. \quad (5.3.34)$$

Afin d'en tirer une contradiction de (5.3.33), plusieurs lemmes seront nécessaires.

**Lemme 5.3.2.** *On a*

$$\lambda_n \psi^n, \lambda_n \omega^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Theta), \quad (5.3.35)$$

et

$$\varphi^n, \psi^n, \omega^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (5.3.36)$$

*Démonstration.* (5.3.23), (5.3.24) et (5.3.29) impliquent (5.3.35).

De même (5.3.22), (5.3.23), (5.3.24) et le fait que  $|\lambda_n| \longrightarrow +\infty$  impliquent (5.3.36).  $\square$

**Lemme 5.3.3.** *Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on a*

$$\int_0^{c-\varepsilon} |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \int_{d+\varepsilon}^L |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0, \quad (5.3.37)$$

et

$$\int_0^{c-\varepsilon} |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \int_{d+\varepsilon}^L |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.3.38)$$

*Démonstration.* On choisit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, et on prend la fonction  $\xi \in \mathcal{D}(]0, L[)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \xi \leq 1, \\ \xi \equiv 1 & \text{sur} \quad [0, c - \varepsilon], \\ \xi \equiv 0 & \text{sur} \quad [c, L]. \end{array} \right.$$

Maintenant, on multiplie (5.3.26) par  $\rho_2 \xi \bar{\psi}^n$ , on intègre sur  $[0, L]$  et on prend la partie réelle de l'équation résultante, on obtient donc

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ i \int_0^c \rho_2 \xi \lambda_n v^n \bar{\psi}^n - EI \int_0^c \psi_{xx}^n \xi \bar{\psi}^n + Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \bar{\psi}^n \right. \\ & \quad \left. + \int_0^c a_1(x) v^n \xi \bar{\psi}^n \right\} = Re \left\{ \int_0^L \rho_2 \xi f_5^n \bar{\psi}^n \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.3.39)$$

Comme  $f_5^n \rightarrow 0$  dans  $L^2(0, L)$  et  $(\psi^n)$  est bornée, on déduit de (5.3.39) que

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ i \int_0^c \rho_2 \xi \lambda_n v^n \bar{\psi}^n - EI \int_0^c \psi_{xx}^n \xi \bar{\psi}^n + Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \bar{\psi}^n \right. \\ & \quad \left. + \int_0^c a_1(x) v^n \xi \bar{\psi}^n \right\} \rightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.40)$$

Alors en intégrant par parties, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ i \int_0^c \rho_2 \xi \lambda_n v^n \bar{\psi}^n \right\} + EI \int_0^c \xi |\psi_x^n|^2 - \frac{EI}{2} \int_0^c \xi_{xx} |\psi^n|^2 + \frac{EI}{2} [\xi_x |\psi^n|^2]_0^L \\ & \quad + Re \left\{ Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \bar{\psi}^n + \int_0^c a_1(x) v^n \xi \bar{\psi}^n \right\} \rightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.41)$$

De (5.3.35) et le fait que  $(v^n)$  est bornée d'après (5.3.20), on conclut

$$Re \left\{ i \int_0^c \rho_2 \xi \lambda_n v^n \bar{\psi}^n \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.42)$$

De même, de (5.3.36) et le fait que  $(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$  est bornées d'après (5.3.20), on obtient

$$Re \left\{ -\frac{EI}{2} \int_0^c \xi_{xx} |\psi^n|^2 + Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \bar{\psi}^n \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.43)$$

Ensuite, (5.3.21), (5.3.28) et le fait que  $(\psi^n)$  est bornée impliquent

$$Re \left\{ \int_0^c a_1(x) v^n \xi \bar{\psi}^n \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.44)$$

D'autre part, on a

$$\frac{EI}{2} [\xi_x |\psi^n|^2]_0^L = 0. \quad (5.3.45)$$

Par conséquent, en utilisant (5.3.42), (5.3.43), (5.3.44) et (5.3.45) dans (5.3.41), on obtient

$$EI \int_0^c \xi |\psi_x^n|^2 \rightarrow 0,$$

donc

$$EI \int_0^{c-\varepsilon} |\psi_x^n|^2 + EI \int_{c-\varepsilon}^c \xi |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

Alors

$$EI \int_0^{c-\varepsilon} |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

De même, on obtient

$$\int_{d+\varepsilon}^L EI |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

On répète les mêmes procédures pour démontrer (5.3.38). Alors, en multipliant (5.3.27) par  $\rho_1 \xi \bar{\omega}^n$ , en intégrant sur  $[0, L]$  et en prenant la partie réelle de l'équation résultante, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ i \int_0^c \rho_1 \xi \lambda_n z^n \bar{\omega}^n - Eh \int_0^c (\omega_{xx}^n - l \varphi_x^n) \xi \bar{\omega}^n + l Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n) \xi \bar{\omega}^n \right. \\ \left. + \int_0^c a_2(x) z^n \xi \bar{\omega}^n \right\} = Re \left\{ \int_0^L \rho_1 \xi f_6^n \bar{\omega}^n \right\}. \end{array} \right. \quad (5.3.46)$$

Comme  $f_6^n \longrightarrow 0$  dans  $L^2(0, L)$  et  $(\omega^n)$  est bornée, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ i \int_0^c \rho_1 \xi \lambda_n z^n \bar{\omega}^n - Eh \int_0^c (\omega_{xx}^n - l \varphi_x^n) \xi \bar{\omega}^n + l Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n) \xi \bar{\omega}^n \right. \\ \left. + \int_0^c a_2(x) z^n \xi \bar{\omega}^n \right\} \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.47)$$

Alors, en intégrant par parties, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ i \int_0^c \rho_1 \xi \lambda_n z^n \bar{\omega}^n \right\} + Eh \int_0^c \xi |\omega_x^n|^2 - \frac{Eh}{2} \int_0^c \xi_{xx} |\omega^n|^2 \\ + \frac{E}{2} \left[ \xi_x |\omega^n|^2 \right]_0^L + Re \left\{ l Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n) \xi \bar{\omega}^n \right. \\ \left. + l Eh \int_0^c \xi \varphi_x^n \bar{\omega}^n + \int_0^c a_2(x) z^n \xi \bar{\omega}^n \right\} \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.48)$$

De (5.3.35) et le fait que  $(z^n)$  est bornée d'après (5.3.20), on déduit que

$$Re \left\{ i \int_0^c \rho_1 \xi \lambda_n z^n \bar{\omega}^n \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.49)$$

De même, de (5.3.36), et le fait que  $(\varphi_x^n)$  est bornée car  $(\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n)$  est bornée et  $\psi^n, \omega^n \longrightarrow 0$ , on déduit que

$$Re \left\{ -\frac{Eh}{2} \int_0^c \xi_{xx} |\omega^n|^2 + l Eh \int_0^c \varphi_x^n \xi \bar{\omega}^n + l Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n) \xi \bar{\omega}^n \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.50)$$

Ensuite, d'après (5.3.21), (5.3.28) et le fait que  $(\omega^n)$  est bornée, on a

$$\operatorname{Re}\left\{\int_0^c a_2(x) z^n \xi \overline{\omega^n}\right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.51)$$

D'autre part, on a

$$\frac{Eh}{2} [\xi_x |\omega^n|^2]_0^L = 0. \quad (5.3.52)$$

Par conséquent, en utilisant (5.3.49), (5.3.50), (5.3.51) et (5.3.52) dans (5.3.48), on obtient

$$Eh \int_0^c \xi |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

Donc

$$Eh \int_0^{c-\varepsilon} |\omega_x^n|^2 + Eh \int_{c-\varepsilon}^c \xi |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

Alors

$$Eh \int_0^{c-\varepsilon} |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

De même, on démontre que

$$\int_{d+\varepsilon}^L Eh |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

D'où la preuve complète du lemme.  $\square$

**Lemme 5.3.4.** *Pour le même  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit dans le lemme 5.3.3, on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 + \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{\rho_1}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \omega^n|^2 + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 \\ - \frac{Gh}{2} |\varphi_x^n(L)|^2 + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\psi_x^n|^2 + \frac{Eh}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.53)$$

En plus, la suite  $(\varphi_x^n(L))$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $\delta > 0$  suffisamment petit et prenons la fonction  $\zeta \in \mathcal{D}(]0, L[)$  telle

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \zeta \equiv 1 & \text{sur } [c - \varepsilon, d + \varepsilon], \\ \zeta \equiv 0 & \text{sur } [0, c - \varepsilon - \delta] \cup [d + \varepsilon + \delta, L]. \end{array} \right.$$

La démonstration requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* En multipliant (5.3.25) par  $\rho_1 x \overline{\varphi_x^n}$ , en intégrant sur  $[0, L]$ , en utilisant (5.3.22) et en prenant la partie réelle de l'équation résultante, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ - \int_0^L \rho_1 \lambda_n^2 x \varphi^n \overline{\varphi_x^n} - Gh \int_0^L (\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l \omega_x^n) x \overline{\varphi_x^n} \right. \\ \left. - l E h \int_0^L (\omega_x^n - l \varphi^n) x \overline{\varphi_x^n} \right\} = Re \left\{ \rho_1 \int_0^L f_n^4 x \overline{\varphi_x^n} + i \rho_1 \int_0^L f_n^1 \lambda_n x \overline{\varphi_x^n} \right\}. \end{array} \right. \quad (5.3.54)$$

Comme  $f_4^n \rightarrow 0$ , et  $(\varphi_x^n)$  est bornée, on a

$$Re \left\{ \rho_1 \int_0^L f_n^4 x \overline{\varphi_x^n} \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.55)$$

D'autre part,

$$\int_0^L f_n^1 \lambda_n x \overline{\varphi_x^n} = - \int_0^L f_{n_x}^1 \lambda_n x \overline{\varphi^n} - \int_0^L f_n^1 \lambda_n \overline{\varphi^n} + \left[ f_n^1 \lambda_n x \overline{\varphi^n} \right]_0^L. \quad (5.3.56)$$

Mais  $f_n^1, f_{n_x}^1 \rightarrow 0$  et  $(\lambda_n \varphi^n)$  est borné d'après (5.3.21), alors

$$Re \left\{ \int_0^L f_{n_x}^1 \lambda_n x \overline{\varphi^n} \right\} \rightarrow 0, \quad (5.3.57)$$

et

$$Re \left\{ \int_0^L f_n^1 \lambda_n \overline{\varphi^n} \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.58)$$

D'autre part, on a

$$\left[ f_n^1 \lambda_n x \overline{\varphi^n} \right]_0^L = 0. \quad (5.3.59)$$

Alors, en utilisant (5.3.57), (5.3.58) et (5.3.59) dans (5.3.56), on obtient

$$Re \left\{ \int_0^L f_n^1 \lambda_n x \overline{\varphi_x^n} \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.60)$$

Par suite, en reportant (5.3.55) et (5.3.60) dans (5.3.54), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ - \int_0^L \rho_1 \lambda_n^2 x \varphi^n \overline{\varphi_x^n} - Gh \int_0^L (\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l \omega_x^n) x \overline{\varphi_x^n} \right. \\ \left. - l E h \int_0^L (\omega_x^n - l \varphi^n) x \overline{\varphi_x^n} \right\} \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.61)$$

En intégrant par parties, (5.3.61) implique

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 + \frac{Gh}{2} L |\varphi_x^n(L)|^2 + \operatorname{Re} \left\{ Gh \int_0^{c-\varepsilon} x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} \right. \\ & + Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} - Gh \int_{d+\varepsilon}^L x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} - lGh \int_0^{c-\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lGh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} \\ & - lGh \int_{d+\varepsilon}^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lEh \int_0^{c-\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lEh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lEh \int_{d+\varepsilon}^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} \Big\} \\ & \left. + \frac{l^2 Eh}{2} \int_0^L |\varphi^n|^2 \right\} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.62)$$

Donc, le lemme 5.3.3 et le fait que  $(\varphi_x^n)$  est bornée impliquent

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ Gh \int_0^{c-\varepsilon} x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} - Gh \int_{d+\varepsilon}^L x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} - lGh \int_0^{c-\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lGh \int_{d+\varepsilon}^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} \right. \\ & \left. - lEh \int_0^{c-\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lEh \int_{d+\varepsilon}^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lEh \int_{d+\varepsilon}^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.63)$$

D'autre part, (5.3.36) implique

$$\frac{l^2 Eh}{2} \int_0^L |\varphi^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.3.64)$$

Par conséquent, en utilisant (5.3.63) et (5.3.64) dans (5.3.62), on déduit

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 + \frac{Gh}{2} L |\varphi_x^n(L)|^2 + \operatorname{Re} \left\{ -Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} \right. \\ & \left. - lGh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - lEh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.65)$$

*Etape 2.* Maintenant, en multipliant (5.3.26) par  $\rho_2 \zeta x \overline{\psi_x^n}$ , en intégrant sur  $[0, L]$ , en utilisant (5.3.23) et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ - \int_0^L \rho_2 \lambda_n^2 \zeta x \psi_x^n \overline{\psi_x^n} - EI \int_0^L \psi_{xx}^n \zeta x \overline{\psi_x^n} + Gh \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \zeta x \overline{\psi_x^n} \right. \\ & \left. + \int_0^L a_1(x) v^n \zeta x \overline{\psi_x^n} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \rho_2 \int_0^L f_n^5 \zeta x \overline{\psi_x^n} + i \rho_2 \int_0^L f_n^2 \lambda_n \zeta x \overline{\psi_x^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.3.66)$$

En répétant les mêmes procédures de l'étape précédente, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\psi_x^n|^2 + Re \left\{ Gh \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} \zeta x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right. \\ \left. + Gh \int_0^L (\psi^n + l\omega^n) \zeta x \overline{\psi_x^n} + \int_0^L a_1(x) v^n \zeta x \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.67)$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 = \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{c-\varepsilon} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 \\ + \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{\rho_2}{2} \int_{d+\varepsilon}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2. \end{array} \right. \quad (5.3.68)$$

Ensuite, d'après (5.3.35), on a

$$\int_{c-\varepsilon-\delta}^{c-\varepsilon} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 + \int_{d+\varepsilon}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 \longrightarrow 0.$$

Alors, on déduit de (5.3.68)

$$\frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 = \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2. \quad (5.3.69)$$

De même, d'après (5.3.37) et le fait que  $(\varphi_x^n)$  est bornée, on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\zeta x)_x |\psi_x^n|^2 + Re \left\{ Gh \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right\} \\ = \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} (\zeta x)_x |\psi_x^n|^2 + Re \left\{ Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} q \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right\}. \end{array} \right. \quad (5.3.70)$$

De (5.3.21), (5.3.28) et le fait que  $(\psi_x^n)$  est bornée, on conclut

$$Re \left\{ \int_0^L a_1(x) v^n \zeta x \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.71)$$

Les faits que  $\psi^n, \omega^n \longrightarrow 0$  et  $(\psi_x^n)$  est bornée nous donnent

$$\int_0^L (\psi^n + l\omega^n) \zeta x \overline{\psi_x^n} \longrightarrow 0. \quad (5.3.72)$$



Par conséquent, en utilisant (5.3.69), (5.3.70), (5.3.71) et (5.3.72) dans (5.3.67), on obtient

$$\frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} (\zeta x)_x |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} (\zeta x)_x |\psi_x^n|^2 + \operatorname{Re} \left\{ Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.73)$$

Alors, (5.3.73) implique

$$\frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\psi_x^n|^2 + \operatorname{Re} \left\{ Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.74)$$

*Etape 3.* Dans cette étape, en multipliant (5.3.27) par  $\rho_1 \zeta x \overline{\omega_x^n}$ , en intégrant sur  $[0, L]$ , en utilisant (5.3.24) et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ - \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} \rho_1 \lambda_n^2 \zeta x \omega^n \overline{\omega_x^n} - Eh \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\omega_{xx}^n - l \varphi_x^n) \zeta x \overline{\omega_x^n} \right. \\ & \quad \left. + l Gh \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n) \zeta x \overline{\omega_x^n} + \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} a_2(x) z^n \zeta x \overline{\omega_x^n} \right\} \\ & \quad = \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \int_0^L f_n^6 \zeta x \overline{\omega_x^n} + i \rho_1 \int_0^L f_n^3 \lambda_n \zeta x \overline{\omega_x^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.3.75)$$

De même, en répétant les mêmes procédures de l'étape 2 pour obtenir (5.3.74), on déduit

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \omega^n|^2 + \frac{Eh}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\omega_x^n|^2 + \operatorname{Re} \left\{ l Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \varphi_x^n \overline{\omega_x^n} \right. \\ & \quad \left. + l Eh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \varphi_x^n \overline{\omega_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.76)$$

*Etape 4.* Dans cette étape, en additionnant (5.3.65), (5.3.74) et (5.3.76), on obtient (5.3.53).  $\square$

**Lemme 5.3.5.** Dans le cas où  $j = 1$ , on a

$$\psi_x^n(L) \longrightarrow 0. \quad (5.3.77)$$

*Démonstration.* Prenons  $\chi \in \mathcal{D}(]0, L[)$  telle que

$$\left\{ \begin{aligned} & 0 \leq \chi \leq 1, \\ & \chi \equiv 0 \quad \text{sur} \quad [0, d + \varepsilon], \\ & \chi \equiv 1 \quad \text{sur} \quad [d + 2\varepsilon, L]. \end{aligned} \right.$$

On multiplie (5.3.26) par  $\chi \overline{\psi_x^n}$ , on utilise (5.3.21), et on prend la partie réelle de l'équation résultante, on obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \psi^n \overline{\psi_x^n} - \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \psi_{xx}^n \chi \overline{\psi_x^n} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} \right\} = Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L f_n^5 \chi \overline{\psi_x^n} + i \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_n^2 \chi \overline{\psi_x^n} \right\}. \end{array} \right. \quad (5.3.78)$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_n^2 \chi \overline{\psi_x^n} \right\} = Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_{n_x}^2 \chi \overline{\psi^n} \right. \\ \left. - \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_n^2 \chi_x \overline{\psi^n} + \left[ \lambda_n f_n^2 \chi \overline{\psi^n} \right]_0^L \right\} \longrightarrow 0 \end{array} \right. \quad (5.3.79)$$

car  $f_n^2, f_{n_x}^2 \longrightarrow 0$  dans  $L^2(0, L)$ ,  $(\psi^n)$ ,  $(\lambda_n \psi^n)$  sont bornées et  $\psi^n|_{0,L} = 0$ .

D'autre part, on a

$$Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L f_n^5 \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0 \quad (5.3.80)$$

car  $f_n^5 \longrightarrow 0$  dans  $L^2(0, L)$  et  $(\psi_x^n)$  est bornée.

Par conséquent, en utilisant (5.3.79) et (5.3.80) dans (5.3.78), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{EI}{2\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\psi_x^n|^2 - \frac{EI}{2\rho_2} |\psi_x^n(L)|^2 \\ + \frac{Gh}{\rho_2} Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.81)$$

D'après (5.3.35) on a

$$\int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\lambda_n \psi^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.3.82)$$

De même, d'après le lemme 5.3.3 et le fait que  $(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$  est bornée, on a

$$\int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0, \quad (5.3.83)$$

et

$$Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.84)$$

D'un autre côté, on déduit de (5.3.21), (5.3.28) et le fait que  $(\psi_x^n)$  est bornée que

$$\int_{d+\varepsilon}^L a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} \longrightarrow 0. \quad (5.3.85)$$

Finalemt, en utilisant (5.3.82), (5.3.83) et (5.3.84) dans (5.3.81), on obtient (5.3.77).  $\square$

**Lemme 5.3.6.** *Pour le même  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit dans le lemme 5.3.3, on a*

$$\int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.3.86)$$

*Démonstration.* La démonstration requiert plusieurs étapes.

*Etape 1.* On multiplie (5.3.25) par  $\chi \overline{\psi_x^n}$ , on utilise (5.3.22) et on prend la partie réelle de l'équation résultante, on obtient alors

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \varphi_x^n \overline{\psi^n} + \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n} - \left[ \chi \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n} \right]_0^L + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right. \\ & + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \left[ \chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right]_0^L - \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \omega_x^n \overline{\psi_x^n} - \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \omega_x^n \overline{\psi_x^n} \\ & \left. + \frac{Ehl^2}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi^n \overline{\psi_x^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\psi_x^n|^2 \right\} \\ & = Re \left\{ \int_0^L f_n^4 \chi \overline{\psi_x^n} + i \int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\psi_x^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.3.87)$$

Or

$$\int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\psi_x^n} = - \int_0^L \lambda_n f_{n_x}^1 \chi \overline{\psi^n} - \int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi_x \overline{\psi^n} + \left[ \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\psi^n} \right]_0^L.$$

Ensuite, on peut écrire le second membre de l'égalité (5.3.87) sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \int_0^L f_n^4 \chi \overline{\psi_x^n} + i \int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \\ & = Re \left\{ \int_0^L f_n^4 \chi \overline{\psi_x^n} - i \int_0^L \lambda_n f_{n_x}^1 \chi \overline{\psi^n} - i \int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi_x \overline{\psi^n} \right\} + \left[ \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\psi^n} \right]_0^L. \end{aligned} \right.$$

Comme  $f_n^1, f_{n_x}^1 \longrightarrow 0$ ,  $(\lambda_n \psi^n)$ ,  $(\psi_x^n)$  sont bornées et  $f_n^1|_{0,L} = 0$ , on déduit que

$$Re \left\{ \int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.88)$$

Le fait que  $f_n^4 \longrightarrow 0$  et la suite  $(\psi_x^n)$  est bornée impliquent

$$Re \left\{ \int_0^L f_n^4 \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.89)$$

Alors, en utilisant (5.3.88) et (5.3.89) dans (5.3.87), on déduit

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \varphi_x^n \overline{\psi^n} + \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n} - \left[ \chi \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n} \right]_0^L + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right. \\ & + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \left[ \chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right]_0^L - \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \omega_x^n \overline{\psi_x^n} - \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \omega_x^n \overline{\psi_x^n} \\ & \left. + \frac{Ehl^2}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi^n \overline{\psi_x^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\psi_x^n|^2 \right\} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.90)$$

Dans le cas  $j = 1$ , de (5.3.77) et du fait que  $(\varphi_x^n(x))$  est bornée d'après le lemme 5.3.5, on déduit

$$\frac{Gh}{\rho_1} \left[ \chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right]_0^L \longrightarrow 0. \quad (5.3.91)$$

Dans le cas  $j = 2$ , on a

$$\frac{Gh}{\rho_1} \left[ \chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} \right]_0^L = 0, \quad (5.3.92)$$

car  $\psi_x^n(0) = \psi_x^n(L) = 0$ .

Or

$$\int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n} = \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \lambda_n \varphi^n \lambda_n \overline{\psi^n}.$$

Comme

$$\lambda_n \psi^n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(d, L)$$

d'après (5.3.35) et  $(\lambda_n \varphi^n)$  est bornée d'après (5.3.23), on conclut

$$\int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n} \longrightarrow 0. \quad (5.3.93)$$

Par conséquent, du lemme 5.3.3 et du fait que  $(\varphi_x^n)$ ,  $(\omega_x^n)$  sont bornées, et en utilisant (5.3.93) et (5.3.91) pour  $j = 1$  ou (5.3.92) pour  $j = 2$  dans (5.3.90), on obtient

$$Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \varphi_x^n \overline{\psi^n} + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.94)$$

*Etape 2.* Maintenant, on multiplie (5.3.26) par  $\chi \overline{\varphi_x^n}$ , on utilise (5.3.23) et on

prend la partie réelle de l'équation résultante, on obtient alors

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \psi^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi_{xx}^n + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi^n \right. \\ & \quad \left. + \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} a_1(x) v^n \right\} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\varphi_x^n|^2 \\ & = Re \left\{ \int_0^L f_n^5 \chi \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \lambda_n f_n^2 \chi \overline{\varphi_x^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.3.95)$$

Or

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \int_0^L f_n^5 \chi \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \lambda_n f_n^2 \chi \overline{\varphi_x^n} \right\} = Re \left\{ \int_0^L f_n^5 \chi \overline{\varphi_x^n} - i \int_0^L \lambda_n f_{n_x}^2 \chi \overline{\varphi^n} \right. \\ & \quad \left. - i \int_0^L \lambda_n f_n^2 \chi_x \overline{\varphi^n} + i [\lambda_n f_n^2 \chi \overline{\varphi^n}]_0^L \right\}. \end{aligned} \right.$$

Comme  $f_n^5, f_n^2, f_{n_x}^2 \longrightarrow 0$ ,  $(\lambda_n \varphi^n)$  et  $(\varphi_x^n)$  sont bornées et  $\varphi^n|_{0,L} = 0$ , on déduit

$$Re \left\{ \int_0^L f_n^5 \chi \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \lambda_n f_n^2 \chi \overline{\varphi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.96)$$

Donc, en utilisant (5.3.96) dans (5.3.95), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \psi^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi_{xx}^n + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi^n \right. \\ & \quad \left. + \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} a_1(x) v^n \right\} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3.97)$$

Comme  $\omega^n \longrightarrow 0$  et  $(\varphi_x^n)$  est bornée, on a

$$Re \left\{ \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.98)$$

Ensuite, d'après (5.3.21), (5.3.28) et le fait que  $(\varphi_x^n)$  est bornée que

$$Re \left\{ \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} a_1(x) v^n \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.99)$$

D'autre part, comme  $\psi^n, \omega^n \longrightarrow 0$  et la suite  $(\varphi_x^n)$  est bornée, on a

$$Re \left\{ \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi^n + \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.3.100)$$

Par suite, en utilisant (5.3.98), (5.3.99) et (5.3.100) dans (5.3.97), on obtient

$$Re\left\{-\int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \psi^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{E}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi_{xx}^n\right\} + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.3.101)$$

*Etape 3.* Additionnons (5.3.94) et (5.3.101) et utilisons le fait que  $v_1 = v_2$ , on obtient alors

$$\int_{d+\varepsilon}^{d+2\varepsilon} \chi |\varphi_x^n|^2 + \int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

□

**Lemme 5.3.7.** *Pour le même  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit dans le lemme 5.3.3, on a*

$$\int_{d+3\varepsilon}^L |\lambda_n \varphi^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.3.102)$$

*Démonstration.* Maintenant, prenons la fonction  $\chi_1 \in \mathcal{D}(]0, L])$  telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \chi_1 \leq 1, \\ \chi_1 \equiv 0 & \text{sur } [0, d+2\varepsilon], \\ \chi_1 \equiv 1 & \text{sur } [d+3\varepsilon, L]. \end{cases}$$

Ensuite, on multiplie (5.3.25) par  $\chi_1 \overline{\varphi^n}$  et on prend la partie réelle de l'équation résultante, on a alors

$$\left\{ \begin{aligned} & -\int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\lambda_n \varphi^n|^2 - Re\left\{ \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \varphi_{xx}^n \overline{\varphi^n} + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \psi_x^n \overline{\varphi^n} \right. \\ & \quad \left. + \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \omega_x^n \overline{\varphi^n} - \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \omega_x \overline{\varphi^n} \right\} + \frac{l^2 Eh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi^n|^2 \\ & \quad = Re\left\{ \int_0^L f_n^4 \chi \overline{\varphi^n} + i \int_0^L \lambda_n f_n^1 \chi \overline{\varphi^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.3.103)$$

Or

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \varphi_{xx}^n \overline{\varphi^n} = -\int_{d+2\varepsilon}^L \chi_{1,x} \varphi_x^n \overline{\varphi^n} - \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi_x^n|^2 + \left[ \chi_1 \varphi_x^n \overline{\varphi^n} \right]_0^L \\ & \quad = -\int_{d+2\varepsilon}^L \chi_{1,x} \varphi_x^n \overline{\varphi^n} - \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi_x^n|^2. \end{aligned} \right. \quad (5.3.104)$$

Donc, en utilisant (5.3.104) dans (5.3.103) et les faits que  $f_n^4, f_n^1 \rightarrow 0$  et  $(\varphi^n), (\lambda_n \varphi^n)$  sont bornées, on conclut

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\lambda_n \varphi^n|^2 + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi_x^n|^2 - \operatorname{Re} \left\{ \frac{Gh}{2\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_{1_{xx}} |\varphi^n|^2 \right. \\ & \quad + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \psi_x^n \overline{\varphi^n} + \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \omega_x^n \overline{\varphi^n} - \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \omega_x^n \overline{\varphi^n} \Big\} \\ & \quad \left. + \frac{l^2 Eh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi^n|^2 \rightarrow 0. \right. \end{aligned} \right. \quad (5.3.105)$$

De nouveau, en utilisant les faits que  $\varphi^n \rightarrow 0$  et  $(\psi_x^n), (\omega_x^n)$  sont bornées, (5.3.105) implique

$$- \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\lambda_n \varphi^n|^2 + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi_x^n|^2 \rightarrow 0. \quad (5.3.106)$$

Ensuite d'après (5.3.86), (5.3.106) implique

$$\int_{d+2\varepsilon}^{d+3\varepsilon} \chi_1 |\lambda_n \varphi^n|^2 + \int_{d+3\varepsilon}^L |\lambda_n \varphi^n|^2 \rightarrow 0.$$

Alors

$$\int_{d+3\varepsilon}^L |\lambda_n \varphi^n|^2 \rightarrow 0.$$

□

**Lemme 5.3.8.** *Pour le même  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit dans le lemme 5.3.3, on a*

$$|\varphi_x^n(L)| \rightarrow 0. \quad (5.3.107)$$

*Démonstration.* D'abord, prenons la fonction  $\chi_2 \in \mathcal{D}(]0, L[)$  telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \chi_2 \leq 1, \\ \chi_2 \equiv 0 & \text{sur } [0, d+3\varepsilon], \\ \chi_2 \equiv 1 & \text{sur } [d+4\varepsilon, L]. \end{cases}$$

En multipliant (5.3.25) par  $\chi_2 \overline{\varphi_x^n}$ , en prenant la partie réelle de l'équation

résultante et en utilisant (5.3.22), on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} Re\left\{ -\int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \varphi_{xx}^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} \right. \\ \left. - \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{lEh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{l^2 Eh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \varphi^n \overline{\varphi_x^n} \right\} \\ = Re\left\{ \int_0^L \chi_2 f_n^4 \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \chi_2 \lambda^n f_n^1 \overline{\varphi_x^n} \right\}. \end{array} \right. \quad (5.3.108)$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} Re\left\{ \int_0^L \chi_2 f_n^4 \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \chi_2 \lambda^n f_n^1 \overline{\varphi_x^n} \right\} \\ = Re\left\{ \int_0^L \chi_2 f_n^4 \overline{\varphi_x^n} - i \int_0^L \chi_{2x} \lambda^n f_n^1 \overline{\varphi^n} - i \int_0^L \chi_2 \lambda^n f_{n_x}^1 \overline{\varphi^n} - i \left[ \chi_2 \lambda^n f_n^1 \overline{\varphi^n} \right]_0^L \right\} \\ = Re\left\{ \int_0^L \chi_2 f_n^4 \overline{\varphi_x^n} - i \int_0^L \chi_{2x} \lambda^n f_n^1 \overline{\varphi^n} - i \int_0^L \chi_2 \lambda^n f_{n_x}^1 \overline{\varphi^n} \right\}. \end{array} \right.$$

Alors, des faits que  $f_n^1, f_{n_x}^1, f_n^4 \rightarrow 0$  et  $(\lambda^n \varphi^n), (\varphi_x^n)$  sont bornées, on déduit

$$Re\left\{ \int_0^L \chi_2 f_n^4 \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \chi_2 \lambda^n f_n^1 \overline{\varphi_x^n} \right\} \rightarrow 0. \quad (5.3.109)$$

En utilisant (5.3.109) dans (5.3.108), on conclut

$$\left\{ \begin{array}{l} Re\left\{ -\int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \varphi_{xx}^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} \right. \\ \left. - \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{lEh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} - \frac{l^2 Eh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \varphi^n \overline{\varphi_x^n} \right\} \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.110)$$

Ensuite, d'après (5.3.86) et les faits que  $(\varphi^n), (\psi_x^n), (\omega_x^n)$  sont bornées, et en intégrant par parties, (5.3.110) implique

$$\frac{1}{2} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_{2x} |\lambda_n \varphi^n|^2 - \frac{1}{2} \left[ \chi_2 |\lambda_n \varphi^n|^2 \right]_0^L + \frac{Gh}{2\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_{2x} |\varphi_x^n|^2 - \frac{Gh}{2\rho_1} \left[ \chi_2 |\varphi_x^n|^2 \right]_0^L \rightarrow 0. \quad (5.3.111)$$

Donc, en utilisant (5.3.86) de nouveau et (5.3.102) dans (5.3.111), et comme  $\varphi^n|_{0,L} = 0$ , on obtient (5.3.107).  $\square$



Maintenant, on retourne à la preuve du théorème 5.1.1. En insérant (5.3.107) dans (5.3.53), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 + \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \psi^n|^2 + \frac{\rho_1}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \omega^n|^2 \\ + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\psi_x^n|^2 + \frac{Eh}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.3.112)$$

Alors

$$\varphi_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L),$$

et

$$\psi_x^n, \omega_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(c - \varepsilon, d + \varepsilon).$$

Mais d'après le lemme 5.3.3, on a

$$\psi_x^n, \omega_x^n \longrightarrow 0 \quad L^2((0, c - \varepsilon) \cup (d + \varepsilon, L)),$$

donc

$$\psi_x^n, \omega_x^n \longrightarrow 0 \quad L^2(0, L).$$

Par conséquent

$$\int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh|\varphi_x^n|^2 + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) \longrightarrow 0.$$

C'est une contradiction avec (5.3.33). D'où la preuve complète du théorème 5.1.1.  $\square$

## 5.4 Stabilisation polynômiale

Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance polynômiale résumée dans l'énoncé suivant. D'autre part, de la preuve du théorème 3.1 de [91], on peut voir que la décroissance du système de Bresse (5.1.1), (5.1.3) soumis aux conditions aux bords (5.1.4) ou (5.1.5) n'est pas exponentiellement stable si  $v_1 \neq v_2$ .

**Théorème 5.4.1.** *Si  $v_1 \neq v_2$ , alors il existe une constante  $C_k > 0$  indépendante de  $U_0 \in D(\mathcal{A}_j^k)$  telle que*

$$\|S_j(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq C_k \left( \frac{\ln t}{t} \right)^{\frac{k}{\gamma}} (\ln t) \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j^k)} \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4.1)$$

où  $\gamma > 2$ .

*Preuve.* Prenons  $\gamma > 2$ . D'après le théorème 5.1.2 dans la section 5.1, pour obtenir l'estimation (5.4.1), il faut démontrer les deux conditions suivantes

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j), \quad (5.4.2)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^\gamma} \|(i\lambda - \mathcal{A}_j)^{-1}\|_{\mathcal{H}_j} < +\infty \quad j = 1, 2. \quad (5.4.3)$$

La condition (5.4.2) a déjà démontré dans le lemme 5.3.1 de le paragraphe 5.3.

Maintenant, on va démontrer (5.4.3) en raisonnant par absurde. Si (5.4.3) est fausse, alors il existe une suite  $(\lambda_n)$  dans  $\mathbb{R}$  et une suite

$$U^n = (\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n) \in D(\mathcal{A}_j)$$

telles que

$$|\lambda_n| \longrightarrow +\infty, \quad \|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1 \quad j = 1, 2$$

et

$$\lambda_n^\gamma (i\lambda_n - \mathcal{A}_j)U^n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6) \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{H}_j. \quad (5.4.4)$$

L'équation (5.4.4) nous donne

$$\lambda_n^\gamma [i\lambda_n \varphi^n - u^n] = f_n^1 \longrightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(0, L), \quad (5.4.5)$$

$$\lambda_n^\gamma [i\lambda_n \psi^n - v^n] = f_n^2 \longrightarrow 0 \text{ dans } \begin{cases} H_0^1(0, L) \text{ pour } j = 1 \\ H_*^1(0, L) \text{ pour } j = 2 \end{cases}, \quad (5.4.6)$$

$$\lambda_n^\gamma [i\lambda_n \omega^n - z^n] = f_n^3 \longrightarrow 0 \text{ dans } \begin{cases} H_0^1(0, L) \text{ pour } j = 1 \\ H_*^1(0, L) \text{ pour } j = 2 \end{cases}, \quad (5.4.7)$$

$$\lambda_n^\gamma \left[ i\lambda_n u^n - \frac{Gh}{\rho_1} (\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l\omega_x^n) - \frac{lEh}{\rho_1} (\omega_x^n - l\varphi^n) \right] = f_n^4 \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L), \quad (5.4.8)$$

$$\lambda_n^\gamma \left[ i\lambda_n v^n - \frac{EI}{\rho_2} \psi_{xx}^n + \frac{Gh}{\rho_2} (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{1}{\rho_2} a_1(x) v^n \right] = f_n^5 \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L), \quad (5.4.9)$$

et

$$\begin{cases} \lambda_n^\gamma \left[ i\lambda_n z^n - \frac{Eh}{\rho_1} (\omega_{xx}^n - l\varphi_x^n) + \frac{lGh}{\rho_1} (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{1}{\rho_1} a_2(x) z^n \right] \\ = f_n^6 \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, L). \end{cases} \quad (5.4.10)$$

D'autre part, en multipliant (5.4.5) par  $\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \rho_1 \overline{u^n}$ , (5.4.6) par  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}} \rho_2 \overline{v^n}$ , (5.4.7) par  $\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \rho_1 \overline{z^n}$ , (5.4.8) par  $\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \rho_1 \overline{\varphi^n}$ , (5.4.9) par  $\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \rho_2 \overline{\psi^n}$ , (5.4.10) par  $\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \rho_1 \overline{\omega^n}$ , et en intégrant sur  $[0, L]$  et en répétant les mêmes procédures précédentes dans le paragraphe 5.3, on conclut

$$\int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (5.4.11)$$

et

$$\int_0^L (\rho_1|u^n|^2 + \rho_2|v^n|^2 + \rho_1|z^n|^2) \longrightarrow \frac{1}{2}. \quad (5.4.12)$$

Notre but est de montrer que

$$\int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) \longrightarrow 0.$$

D'après (5.4.4), on a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\langle \lambda_n^\gamma (i\lambda_n - \mathcal{A}_1)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}_1} = -\operatorname{Re}\langle \lambda_n^\gamma \mathcal{A}_1 U^n, U^n \rangle \\ = \int_0^L \lambda_n^\gamma (a_1(x)|v^n|^2 + a_2(x)|z^n|^2) \longrightarrow 0. \end{cases} \quad (5.4.13)$$

Alors, d'après (5.1.2) on obtient

$$\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}} v^n, \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}} z^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Theta). \quad (5.4.14)$$

Afin d'en tirer une contradiction de (5.4.11), plusieurs lemmes seront nécessaires.

**Lemme 5.4.1.** *On a*

$$\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi^n, \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \omega^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Theta), \quad (5.4.15)$$

$$\varphi^n, \psi^n, \omega^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (5.4.16)$$

*Démonstration.* On peut facilement déduire (5.4.16) de (5.4.5), (5.4.6), (5.4.7) et le fait que  $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ .

Maintenant, on va démontrer (5.4.15). Divisons (5.4.6) par  $\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}$ , on obtient

$$i\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi^n - \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} v^n = \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}} f_n^2 \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, L). \quad (5.4.17)$$

D'autre part, on a

$$\|i\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\psi^n\|_{L^2(\Theta)} \leq \|i\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\psi^n - \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}v^n\|_{L^2(0,L)} + \|\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}}v^n\|_{L^2(\Theta)}.$$

Donc, en utilisant (5.4.14) et (5.4.6) on conclut (5.4.15).

De même, d'après (5.4.7) et (5.4.14) on déduit que

$$\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\omega^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Theta).$$

□

**Lemme 5.4.2.** *Pour le même  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit dans le lemme 5.3.3 du paragraphe 5.3, on a*

$$\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\psi_x^n, \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\omega_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0, c - \varepsilon) \quad (5.4.18)$$

et

$$\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\psi_x^n, \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}\omega_x^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(d + \varepsilon, L). \quad (5.4.19)$$

*Démonstration.* On va démontrer d'abord (5.4.18). On choisit le même  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit dans le lemme 5.3.3 du paragraphe 5.3.

Maintenant, en multipliant (5.4.9) par  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}-1}}\xi\overline{\psi^n}$  où la fonction  $\xi$  est définie dans le démonstration du lemme 5.3.1 dans le paragraphe 5.3, en intégrant sur  $[0, L]$  et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ i \int_0^c \xi v^n \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+2} \overline{\psi^n} - \frac{EI}{\rho_2} \int_0^c \psi_{xx}^n \xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} \right. \\ & \quad \left. + \frac{Gh}{\rho_2} \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} + \int_0^c a_1(x) \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} v^n \xi \overline{\psi^n} \right\} \\ & = Re \left\{ \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}-1}} \int_0^L f_n^5 \xi \overline{\psi^n} \right\}, \end{aligned} \right.$$

Donc, en intégrant par parties, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{EI}{\rho_2} \int_0^c \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \xi |\psi_x^n|^2 + Re \left\{ i \int_0^c \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+2} \xi v^n \overline{\psi^n} - \frac{EI}{\rho_2} [\xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi_x^n \overline{\psi^n}]_0^L \right. \\ & \quad \left. + \frac{EI}{\rho_2} \int_0^c \xi_x \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi_x^n \overline{\psi^n} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^c a_1(x) v^n \xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} \right\} \longrightarrow 0, \end{aligned} \right. \quad (5.4.20)$$

car  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}-1}} \longrightarrow 0$ ,  $f_n^5 \longrightarrow 0$  et  $(\psi^n)$  est bornée.

D'autre part, de (5.4.14) et (5.4.15), on conclut

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{ \int_0^c \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+2} \xi v^n \overline{\psi^n} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \int_0^c \xi \lambda_n v^n \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} \right\} \\ \leq \operatorname{Re}\left\{ \int_0^c \xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}} v^n \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{cases} \quad (5.4.21)$$

De même, (5.4.13) et (5.4.15) impliquent

$$\operatorname{Re}\left\{ \int_0^c a_1(x) \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} v^n \xi \overline{\psi^n} \right\} \longrightarrow 0. \quad (5.4.22)$$

Ensuite, il est clair que

$$[\xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi_x^n \overline{\psi^n}]_0^L = 0, \quad (5.4.23)$$

et

$$\operatorname{Re}\left\{ \int_0^c \xi_x \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi_x^n \overline{\psi^n} \right\} \longrightarrow 0 \quad (5.4.24)$$

d'après (5.4.15) et le fait que la suite  $(\psi_x^n)$  est bornée.

De même

$$\operatorname{Re}\left\{ \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \overline{\psi^n} \right\} \longrightarrow 0 \quad (5.4.25)$$

d'après (5.4.15) et le fait que la suite  $(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$  est bornée.

Par conséquent, en utilisant (5.4.21), (5.4.22), (5.4.23) et (5.4.24) et (5.4.25) dans (5.4.20), on obtient

$$\int_0^{c-\varepsilon} \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

De la même manière, on montre

$$\int_0^{c-\varepsilon} \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0,$$

mais en multipliant (5.4.10) par  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}} \xi \overline{\omega^n}$ . En répétant les mêmes procédures ci-dessus on montre que

$$\int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0, \quad \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} |\omega_x^n|^2 \longrightarrow 0.$$

□

**Lemme 5.4.3.** *Dans le cas où  $j = 1$ , on a*

$$\lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} |\psi_x^n(L)|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.4.26)$$

*Démonstration.* Eliminons  $v^n$  dans (5.4.15) en utilisant (5.4.9) et prenons le produit scalaire avec  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{3\gamma-2}{4}}} \chi \overline{\psi_x^n}$  dans  $L^2(0, L)$ , alors on obtient en intégrant par parties

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+10}{4}} \chi_x |\psi^n|^2 + \frac{EI}{2\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \chi_x |\psi_x^n|^2 - \frac{EI}{2\rho_2} \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} |\psi_x^n(L)|^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \\ & = \frac{1}{\lambda_n^{\frac{3\gamma-2}{4}}} \operatorname{Re} \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L f_5^n \chi \overline{\psi_x^n} + i \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_2^n \chi \overline{\psi_x^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.4.27)$$

D'où

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+10}{4}} \chi_x |\psi^n|^2 + \frac{EI}{2\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \chi_x |\psi_x^n|^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{EI}{2\rho_2} \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} |\psi_x^n(L)|^2 + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} \right\} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right. \quad (5.4.28)$$

D'après (5.4.15), on a

$$\int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+10}{4}} \chi_x |\psi^n|^2 \leq \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1} \psi^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.4.29)$$

Comme  $|\lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}}| \leq |\lambda_n^{\frac{\gamma}{2}+1}|^2$  et  $|\lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}}| \leq |\lambda_n^\gamma|$  pour  $\gamma > 2$ , on déduit de (5.4.19) et (5.4.13) que

$$\int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \chi_x |\psi_x^n|^2 \longrightarrow 0, \quad (5.4.30)$$

$$\int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} \longrightarrow 0, \quad (5.4.31)$$

et

$$\int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} \longrightarrow 0. \quad (5.4.32)$$

Par conséquent, en insérant (5.4.29), (5.4.30), (5.4.31) et (5.4.32) dans (5.4.28), on obtient (5.4.26).  $\square$

**Lemme 5.4.4.** *On a*

$$\int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0. \quad (5.4.33)$$

*Démonstration.* Eliminons  $v^n$  dans (5.4.9) en utilisant (5.4.6) et prenons le produit scalaire avec  $\frac{1}{\lambda_n^{\frac{3\gamma+2}{4}}} \chi \overline{\varphi_x^n}$  dans  $L^2(0, L)$ , on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma+6}{4}} \chi \psi^n \overline{\varphi_x^n} + \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^{-1} \overline{\varphi_{xx}^n} \lambda_n^{\frac{\gamma+2}{4}} \psi_x^n \right. \\ & + \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \chi_x \overline{\varphi_x^n} \psi_x^n - \frac{EI}{\rho_2} \left[ \lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \chi \overline{\varphi_x^n} \psi_x^n \right]_0^L + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \chi \overline{\varphi_x^n} \psi^n \\ & + \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \chi \overline{\varphi_x^n} a_1(x) v^n \Big\} \\ & + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \chi |\varphi_x^n|^2 = \frac{1}{\lambda_n^{\frac{3\gamma+2}{4}}} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^L f_5^n \chi \overline{\varphi_x^n} + i \int_0^L \lambda_n f_2^n \chi \overline{\varphi_x^n} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.4.34)$$

En divisant (5.4.8) par  $\lambda_n^{\gamma+1}$  on vérifie que  $(\lambda_n^{-1} \varphi_{xx}^n)$  est bornée. Alors en répétant les mêmes procédures dans les démonstrations des lemmes 5.4.2 et 5.4.3, on déduit

$$\lambda_n^{\frac{\gamma-2}{4}} \int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0, \quad (5.4.35)$$

où  $\gamma > 2$  toujours. Par suite,

$$\int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 \longrightarrow 0. \quad \square \quad (5.4.36)$$

Maintenant, en répétant les mêmes procédures du paragraphe 5.3 à partir du lemme 5.3.7, mais en multipliant les multiplicateurs par  $\frac{1}{\lambda_n^\gamma}$ , on conclut une contradiction avec (5.4.11). D'où la démonstration complète du théorème 5.4.1, dans le deux cas  $j = 1, 2$ .  $\square$

**Commentaire.** On peut obtenir les mêmes résultats de la décroissance exponentielle (5.3.2) et polynômiale (5.4.1) dans le cas où le système de Bresse est non uniforme *i.e.* les coefficients  $\rho_1, \rho_2, l, h$  sont des fonctions scalaires, et  $G, E$  sont des constantes positives, en remplaçant le terme  $x$  dans les multiplicateurs utilisés dans le cas du système Bresse uniforme, par  $q(x) := e^{\eta x} - 1$  et en choisissant  $\eta > 0$  suffisamment grand.

## 5.5 Stabilisation indirecte du système de Timoshenko soumis à un seul feedback localement distribué

On considère le système de Timoshenko suivant, qui est un cas particulier de celui de Bresse en négligeant le déplacement longitudinal  $\omega$  et la constante  $l$ .

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + a(x)\psi_t = 0, \end{cases} \quad (5.5.37)$$

où  $t > 0$  et  $0 < x < L$ . Ici, la fonction  $a$  est positive sur  $[0, L]$  et satisfait

$$a(x) \geq a_- > 0 \quad \text{pour tout } x \in \Theta = ]0, c[ \cup ]d, L[, \quad 0 < c < d < L. \quad (5.5.38)$$

On peut appliquer notre résultats de la décroissance exponentielle (5.3.2) et polynômiale (5.4.1) au système de Timoshenko en répétant les mêmes arguments utilisés dans le système de Bresse, en négligeant  $\omega$  et  $l$ . Mais, dans le cas où  $j = 2$ , on prend l'espaces d'état

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2,$$

et le domaine

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \psi, u, v) \in \mathcal{H}_2; \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi \in H^2(\Omega), \\ \psi_x \in H_0^1(\Omega), u \in H_0^1(\Omega), v \in H^1(\Omega) \end{array} \right\}.$$



# Perspectives

De nombreuses questions sont encore ouvertes.

1. Dans le chapitre I, on a étudié l'espace  $\mathcal{F}$  défini par  $\left(\int_0^T \int_{\omega} |u_1'|^2 dx dt\right)^{1/2}$ . Une question très intéressante est l'étude de l'espace  $\mathcal{F}$  défini par

$$\left(\int_0^T \int_{\omega} |u_1|^2 dx dt\right)^{1/2},$$

et l'étude de l'espace  $\mathcal{F}$  défini par

$$\left(\int_0^T |u_1(b, t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

où  $b$  est un point quelconque de  $\Omega$ , c'est le cas du *contrôle ponctuel*.

Une autre question se pose dans la situation de ce chapitre, *a-t-on contrôlabilité exacte pour  $\alpha > 0$  **quelconque** ? pour une **fonction scalaire**  $\alpha$  ?*

2. Un aspect important du modèle abstrait étudié dans le chapitre II est la propriété de **coercivité** donnée par les termes de couplage d'**ordre zéro**. Il serait intéressant de savoir si l'hypothèse de coercivité avec des opérateurs de couplage d'**ordre un** peut nous donner des résultats positifs d'observabilité indirecte.
3. On s'intéresse à l'optimalité de la stabilisation polynomiale du système de Bresse avec deux feedbacks localement distribués seulement. D'un autre côté, pour le système de Timoshenko, il a déjà été démontré que l'on pouvait stabiliser le système par un seul feedback agissant sur l'équation donnant l'angle de cisaillement (cf. [7], [14], [100]). On souhaite à étudier si un tel résultat peut être généralisé au système de Bresse, et si le taux de décroissance de l'énergie peut s'obtenir par la méthode des multiplicateurs (cf. [50], [69], [70]) et des techniques inégalités intégrales et de convexité (cf. [3]).

4. Comme on a vu dans le chapitre III, on a étudié l'observabilité indirecte du système de Timoshenko en observant  $\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt$ . On s'intéresse à l'observabilité indirecte du système de Timoshenko en observant  $\int_0^T \int_\Theta |\psi|^2 dx dt$  où  $\Theta$  est un voisinage du bord, et en observant encore  $\int_0^T |\psi(t, L)|^2 dx dt$ .

# Références Bibliographiques

- [1] F. Alabau, *A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems*. SIAM J. Control Optim. 42 (2003), pp.871-906.
- [2] F. Alabau, *Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems*. in : Siam J. on Control and Optimization, 2002, vol.41, p.511-541.
- [3] F. Alabau, *Convexity and Weighted Integral Inequalities for Energy Decay Rates of Nonlinear Dissipative Hyperbolic Systems*. Appl. Math. and Optimization 51, no.1, 61-105 (2005).
- [4] F. Alabau ; V. Komornik, *Boundary observability, controllability, and stabilization of linear elastodynamic systems*. SIAM J. Control Optim.37 (1999), no.2, 521-542.
- [5] F. Alabau, *Observabilité frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), no.7, 645-650.
- [6] F. Alabau, P. Cannarsa, et V. Komornik, *Indirect internal stabilization of weakly coupled systems*. J. Evol. Equ., 2 (2002), pp.127-150.
- [7] F. Alabau, *Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control*. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 14 (2007), no. 5-6, 643-669.
- [8] F. Alabau, *Piecewise multiplier method and nonlinear integral. inequalities for Petrowsky equation with nonlinear dissipation*. J. Evol. Equ., 6 (2006), pp. 95-112.
- [9] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math 328, 1015-1020 (1999).
- [10] P. Albano ; D. Tataru, *Carleman estimates and boundary observability for a coupled parabolic-hyperbolic system*. Electron. J. Differential Equations 2000, No.22, 15 pp.
- [11] M. Afilal ; F. Ammar Khodja, *Stability of coupled second order equations*. Comput. Appl. Math.19 (2000), no.1.
- [12] F. Ammar Khodja ; A. Benabdallah ; D. Teniou, *Stability of coupled systems*. Abstr. Appl. Anal.1 (1996), no.3, 327-340.

- [13] F. Ammar Khodja ; A. Bader, *Stabilizability of systems of one-dimensional wave equations by one internal or boundary control force*. SIAM J. Control Optim. 39 (2001), no.6, 1833-185.
- [14] F. Ammar-Khodja ; A. Benabdallah ; J. E. Muñoz Rivera ; R. Racke, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*. J. Differential Equations 194 (2003), no.1, 82-115.
- [15] R. F. Apolaya ; H. R. Clark ; A. J. Feitosa, *On a nonlinear coupled system with internal damping*. Electron. J. Differential Equations 2000, No.64,17 pp. (electronic).
- [16] M. Aassila, *Stabilization of a nonlinear Timoshenko beam*. Z. Angew. Math. Phys. 53 (2002), no.5, 747-768.
- [17] J. J. Bae, *On uniform decay of the solution for a damped nonlinear coupled system of wave equations with nonlinear boundary damping and memory term*. Appl. Math. Comput.148 (2004), no.1, 207-223.
- [18] C. Bardos ; G.Lebeau ; J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*. SIAM J. Control Optim.30 (1992), no.5, 1024-1065.
- [19] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1992.
- [20] J.A.C. Bresse, *Cours de Mécanique Appliquée*. Mallet Bachelier, 1859.
- [21] C. Benchimol, *A note on weak stabilizability of contraction semigroups*. SIAM J. Control Optimization 16 (1978), no.3, 373-379.
- [22] A. Beyrath, *Indirect linear locally distributed damping of coupled systems*. Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 22 (2004), no.2, 17-34.
- [23] H. T. Banks ; R. C. Smith ; Y. Wang, *The modeling of piezoceramic patch interactions with shells, plates, and beams*. Quart. Appl. Math. 53 (1995), no.2, 353-381.
- [24] N. Burq ; G. Lebeau, *Mesures de défaut de compacité, application au système de Lamé*. Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) 34 (2001), no.6, 817-870.
- [25] E. Bisognin ; V. Bisognin ; G. Perla Menzala, *Exponential stabilization of a coupled system of Korteweg-de Vries equations with localized damping*. Adv. Differential Equations 8 (2003), no.4, 443-469.
- [26] M. M. Cavalcanti, *Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary condition and time-dependent coefficients*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 8 (1999), no.1, 53-89.
- [27] S. Chen ; K. Liu ; Z. Liu, *Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping*. SIAM J. Appl. Math. 59 (1999), no.2, 651-668.
- [28] F. Conrad ; B. Rao, *Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback*. Asymptotic Anal.7 (1993), no.3, 159-177.

- [29] C. M. Dafermos, *On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*. Arch. Rational Mech. Anal. 29 (1968) 241-271.
- [30] V. N. Domingos Cavalcanti ; J. S. Prates Filho, *Exact internal controllability of the elasticity system*. Southwest J. Pure Appl. Math. 1998, no. 1, 29-43
- [31] Y.F. Du ; Q. Zhang ; F. Huang, L. Fa Lun, *Stabilization for an Euler-Bernoulli beam of free ends with locally distributed damping and boundary feedback*. (Chinese) Sichuan Daxue Xuebao 38 (2001), no. 1, 22-28.
- [32] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for linear Evolution Equations*. Grad. Texts in Math. 194. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [33] S. Feng ; D. Feng, *Exact internal controllability for shallow shells*. Sci. China Ser. F 49 (2006), no.5, 566-577.
- [34] M. Gugat, *Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam*. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 6 (2001), 333-360.
- [35] J. S. Gibson, *A note on stabilization of infinite-dimensional linear oscillators by compact linear feedback*. SIAM J. Control Optim. 18 (1980), no.3, 311-316.
- [36] P. Grisvard, *Contrôlabilité exacte dans les polygones et polyèdres*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 304 (1987), no.13, 367-370.
- [37] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*. Research in Applied Mathematics 22. Masson and Springer-Verlag, , Paris, Berlin, 1992.
- [38] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman, London, 1985.
- [39] A. Guesmia, *Energy decay for a damped nonlinear coupled system*. J. Math. Anal. Appl. 239 (1999), no.1, 38-48.
- [40] A. Guesmia, *Inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Verlaine, France, 2006.
- [41] A. Guesmia ; S. A. Messaoudi, *On the boundary stabilization of a compactly coupled system of nonlinear wave equations*. Int. J. Evol. Equ.1 (2005), no.3, 211- 224.
- [42] A. Haraux, *Semi-groupes linéaires et équations d'évolutions linéaires périodiques*. Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No. 78011 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [43] A. Haraux, *Non linear evolution equations-global behavior of solutions*. Lecture Notes in Mathematics 841, Springer-Verlag Berlin-NewYork (1981).
- [44] F. L. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces*. Ann. of Diff. Eqs, 1(1) 1985, pp. 43-56.
- [45] T. Havârneau ; C. Popa ; S. S. Sritharan, *Exact internal controllability for the two-dimensional magnetohydrodynamic equations*. SIAM J. Control Optim.46 (2007), no.5, 1802-1830

- [46] S. Jaffard, Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 307 (1988), no.14, 759-762.
- [47] S. Jaffard, Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. Portugal. Math. 47 (1990), no.4, 423-429.
- [48] B.V. Kapitonov, *Uniform stabilization and exact controllability for a class of coupled hyperbolic systems*. Mat. Apl. Comput.15 (1996), no.3, 199-212.
- [49] B.V. Kapitonov ; J. S. Souza, *Observability and uniqueness theorem for a coupled hyperbolic system*. Int. J. Math. Math. Sci. 24 (2000), no.6, 423-432.
- [50] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization*. The Multiplier Method, RAM Res. Appl.Math., Masson, Paris, John Wiley, Chicester, UK, 1994.
- [51] V. Komornik, *On the exact internal controllability of a Petrowsky system*. J. Math. Pures Appl. (9) 71 (1992), no.4, 331-342.
- [52] V. Komornik, *Rapid boundary stabilization of linear distributed systems*. SIAM J. Control Optim. 35 (1997), no.5, 1591-1613.
- [53] V. Komornik ; P. Loreti, *Observabilité frontière de systèmes couplés par analyse non harmonique vectorielle*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), no.8, 895-900.
- [54] V. Komornik ; P. Loreti, *Ingham-type theorems for vector-valued functions and observability of coupled linear systems*. SIAM J. Control Optim. 37 (1998) 461-485.
- [55] V. Komornik ; P. Loreti, *Partial observability of coupled linear systems*. Acta Math. Hungar. 86 (2000), no.1-2, 49-74.
- [56] V. Komornik ; B. Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations*. Asymptot. Anal.14 (1997), no.4, 339-359.
- [57] J. U. Kim ; Y. Renardy, *Boundary control of the Timoshenko beam*. SIAM J. Control Optim. 25, no. 6, 1417-1429 (1987).
- [58] W. Krabs ; G. M. Sklyar, *On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam*. Z. Anal. Anwendungen 18 (1999), no. 2, 437-448.
- [59] W. Krabs ; G. M. Sklyar ; J. Wozniak, *On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams*. Z. Anal. Anwendungen 22 (2003), no.1, 215-228.
- [60] J. E. Lagnese, G. Leugering et E. J. P. G. Schmidt, *Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams*. Math. Meth. in Appl. Sci., Vol. 16(1993), pp.327-358.
- [61] J. E. Lagnese, *Uniform stabilization of a thin elastic plate by nonlinear boundary feedback*. Advances in computing and control (Baton Rouge, LA, 1988), 305-317, Lecture Notes in Control and Inform. Sci.,130, Springer, Berlin, 1989.
- [62] J. E. Lagnese, *Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion*. SIAM J. Control Optim. 21 (1983), no.1, 68-85.

- [63] I. Lasiecka, *Uniform decay rates for full von Kármán system of dynamic thermoelasticity with free boundary conditions and partial boundary dissipation*. Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no.9-10, 1801-1847.
- [64] I. Lasiecka ; D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*. Differential Integral Equations 6 (1993), no.3, 507-533.
- [65] I. Lasiecka ; R. Triggiani, *Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control*. Appl. Math. Optim. 19 (1989), no. 3, 243-290.
- [66] I. Lasiecka ; R. Triggiani, *Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with controls in the Dirichlet and Neumann boundary conditions : a nonconservative case*. Semigroup theory and applications (Trieste, 1987), 241-260, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 116, Dekker, New York, 1989.
- [67] I. Lasiecka ; R. Triggiani, *Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations*. Partial differential equation methods in control and shape analysis (Pisa), 215-243, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 188, Dekker, New York, 1997.
- [68] G. Lebeau ; E. Zuazua, *Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity*. Arch. Ration. Mech. Anal. 148 (1999), no. 3, 179-231.
- [69] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués*. Vol.1, Masson, Paris, 1988.
- [70] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués*. Vol. 2, Masson, Paris, 1988.
- [71] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites Non-Homogenes et Applications*. Vol. 1 et 2. Dunod, Paris, 1968.
- [72] K. Liu, *Locally distributed control and damping for the conservative systems*. SIAM J. Control Optimization 35 (1997), 1574-1590.
- [73] Z. Liu ; B. Rao, *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation*. Z. Angew. Math. Phys. 56 (2005), no.4, 630-644.
- [74] Z. Liu ; B. Rao, *Frequency domain approach for the polynomial stability of a system of partially damped wave equations*. J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), no.2, 860-881.
- [75] Z. Liu ; B. Rao, *Energy Decay of the Thermoelastic Bresse System*. Z. Angew. Math. Phys. (2008).
- [76] Z. Liu ; S. Zheng, *Semigroups Associated with dissipative systems*. 398 Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, 1999.
- [77] K. Liu ; Z. Liu, *Exponential stability and analyticity of abstract linear thermoelastic systems*. Z. Angew. Math. Phys. 48 (1997), no.6, 885-904.
- [78] K. Liu ; Z. Liu, *Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping*. SIAM J. Control Optim. 36, no. 3, 1086-1098 (1998).

- [79] P. Loreti ; B. Rao, *Compensation spectrale et taux de décroissance optimal de l'énergie de systèmes partiellement amortis*. C. R. Acad. Sci. Paris, 337, Série I (2003), 531-536.
- [80] P. Loreti ; B. Rao, *Optimal energy decay rate for partially damped systems by spectral compensation*. SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no.5, 1612-1632.
- [81] W. Liu ; G. Williams, *Exact internal controllability for the semilinear heat equation*. J. Math. Anal. Appl. 211 (1997), no.1, 258-272.
- [82] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for the dissipative systems with localized damping*. Rev. Mat. Complut. 12 (1999), 251-283.
- [83] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for the dissipative systems*. ESAIM. Control, Optim. and Cal. Vol. 4, p. 419-444 (1999).
- [84] P. Martinez, *Stabilization for the wave equation with Neumann boundary condition by a locally distributed damping*. Contrôle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (Nancy, 1999), 119-136 (electronic), ESAIM Proc., 8, Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 2000.
- [85] M. Moness, *Controllability, observability and internal stability of unobservable decoupled systems*. Internat. J. Systems Sci. 22 (1991), no.12, 2393-2406.
- [86] M. A. Moreles, *Uniform controllability for Kirchoff and Mindlin-Timoshenko elastic systems*. Electron. J. Differential Equations 1999, No. 3, 13 pp. (electronic).
- [87] L. A. Medeiros, *Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams*. Adv. Math. Sci. Appl. 2 (1993), no. 1, 47-61.
- [88] J.E. Muñoz Rivera ; M.G. Naso, *Exact controllability for hyperbolic thermoelastic systems with large memory*. Adv. Differential Equations 9 (2004), no.11-12, 1369-1394.
- [89] J. E. Muñoz Rivera ; R. Racke, *Smoothing properties, decay, and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type*. SIAM J. Math. Anal. 26 (1995), no.6, 1547-1563.
- [90] J. E. Muñoz Rivera ; R. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability*. J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), no.1, 248-278.
- [91] J. E. Muñoz Rivera ; R. Racke, *Global stability for damped Timoshenko systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 9 (2003) 1625-1639.
- [92] S. Nicaise, *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications*. Rend. Mat. Appl. (7) 23 (2003), no.1, 83-116.
- [93] A. Pazy, *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, V.44, Springer- Verlag, 1983.
- [94] J. Prüss, *On the Spectrum of  $C_0$  Semigroups*. Trans. Amer. Math. Soc., 284 (1984), pp. 847-857.



- [95] B. Rao, *Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control*. SIAM J. Control Optim. 36 (1998), no.1, 148-163.
- [96] C.A. Raposo ; J. Ferreira ; J. Santos ; N. N. O. Castro, *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*. Appl. Math. Lett. 18 (2005), no. 5, 535-541.
- [97] J. Rauch ; X. Zhang ; E. Zuazua, *Polynomial decay for a hyperbolic-parabolic coupled system*. J. Math. Pures Appl. (9) 84 (2005), no.4, 407-470.
- [98] D. L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions*. SIAM Rev.20 (1978), no.4, 639-739.
- [99] D. L. Russell, *A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems*. J. Math. Anal. Appl. 173 (1993), no.2, 339-358.
- [100] A. Soufyane, *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 328(1999), pp. 731-734.
- [101] A. Soufyane, *Uniform stability of displacement coupled second-order equations*. Electron. J. Differential Equations 2001, No.25, 10 pp. (electronic).
- [102] A. Soufyane ; A. Wehbe, *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping*. Electron. J. Differential Equations 2003, No. 29, 14 pp. (electronic).
- [103] S. K. Si ; S. P. Chen, *Exact internal controllability for the Petrovsky plate equation*. (Chinese) Chinese Ann. Math. Ser. A 22 (2001), no.1, 81-88 ; translation in Chinese J. Contemp. Math. 22 (2001), no.1, 69-78.
- [104] D. Shi ; D. Feng, *Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback*. ANZIAM J. 44, 205-220 (2002).
- [105] D. Shi ; D. Feng, *Optimal energy exponential decay rate of Timoshenko beam with locally distributed feedback*. Proceeding of the 99'IFAC World Congress, Beijing, Vol F.
- [106] D. Shi ; D. Feng, *Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback*. IMA J. Math. Control Inform. 18 (2001), no.3, 395-403.
- [107] S. Shoukui ; *Exponential stabilization of nonuniform Timoshenko beam with locally distributed feedbacks*. Appl. Math. J. Chinese Univ. ser. B. 15(3) : 341-349 (2000).
- [108] M. A. Shubov, *Exact controllability of damped coupled Euler-Bernoulli and Timoshenko beam model*. IMA J. Math. Control Inform. 23 (2006), no. 3, 279-300.
- [109] M. A. Shubov, *Exact controllability of damped Timoshenko beam*. IMA J. Math. Control Inform. 17 (2000), no. 4, 375-395.
- [110] J. Saint Jean Paulin ; L. R. Tcheugoué Tébou, *Contrôlabilité exacte interne dans des domaines perforés avec une condition aux limites de Fourier sur le bord des trous*. Asymptot. Anal.4 (1997), no.3, 193-221.

- [111] B. Sun ; Y. Zhao, *Exact internal controllability for the semilinear heat equation*. Acta Anal. Funct. Appl.5 (2003), no.1, 1-8.
- [112] S. W. Taylor, *Boundary control of the Timoshenko beam with variable physical characteristics*. Research Report, Dept. Math. Univ. Auckland 356, (1998).
- [113] R. Triggiani, *Global exact controllability on  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$  of semilinear wave equations with Neumann  $L_2(0, T; L_2(\Gamma_1))$ -boundary control*. Control theory of partial differential equations, 273-336, Lect. Notes Pure Appl. Math., 242, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [114] L. R. Tcheugoué Tébou, *Contrôlabilité exacte interne des vibrations d'un corps mince*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322 (1996), no. 8, 745–748.
- [115] M. Tucsnak , G. Weiss, *Simultaneous exact controllability and some applications*, in : SIAM J. Control Optim., 2000, vol.38, no 5, p.1408-1427.
- [116] L. Wan ; Q.X. Yan, *Exponential stabilization of nonuniform Timoshenko beam with a locally distributed feedback and a boundary one*. (Chinese) Math. Practice Theory 35 (2005), no.5, 202–208.
- [117] Q.X. Yan ; S. H. Hou ; G. Huang ; L. Wan, *Stabilization of nonuniform Timoshenko beam with coupled locally distributed feedbacks*. J. Syst. Sci. Complex. 18 (2005), no. 3, 419–428.
- [118] X. Zhang, *Exact internal controllability of Maxwell's equations*. Appl. Math. Optim.41 (2000), no.2, 155-170.
- [119] C.G. Zhang ; H. L. Zhao ; K. S. Liu, *Exponential stabilization of a nonhomogeneous Timoshenko beam with the coupled control of locally distributed feedback and boundary feedback*. (Chinese) Chinese Ann. Math. Ser. A 24, 757-764. (2003).
- [120] X. J. Zong ; Y. Zhao ; G. G. Liu, *Exact controllability of the linear Petrowsky system with interior and boundary controls*. (Chinese) J. Lanzhou Univ. Nat. Sci. 43 (2007), no.5, 101-105.
- [121] E. Zuazua, *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear feedbacks*. SIAM J. Control Optimization 28 (1989), 265-268.
- [122] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*. Comm. Partial Differential Equations 15 (1990), no.2, 205–235.