



HAL
open science

Méthode asymptotique numérique pour l'étude multi échelle des instabilités dans les matériaux hétérogènes

Saeid Nezamabadi

► **To cite this version:**

Saeid Nezamabadi. Méthode asymptotique numérique pour l'étude multi échelle des instabilités dans les matériaux hétérogènes. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2009. Français. NNT : 2009METZ046S . tel-01752669

HAL Id: tel-01752669

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752669>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Méthode Asymptotique Numérique pour l'étude multi échelle des instabilités dans les matériaux hétérogènes

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 3 décembre 2009

pour l'obtention du grade de

Doctorat de l'université Paul Verlaine - Metz

(Spécialité Mécanique des Matériaux)

par

Saeid NEZAMABADI

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	M. Marc GEERS	Eindhoven University of Technology, Netherlands
	M. Elias CUETO	University of Zaragoza, Spain
<i>Examineurs :</i>	M. Pierre VILLON	Université de Technologie de Compiègne, France
	M. Michel POTIER-FERRY	Université Paul Verlaine - Metz, France
<i>Directeur :</i>	M. Hamid ZAHROUNI	Université Paul Verlaine - Metz, France
<i>Co-directeur :</i>	M. Julien YVONNET	Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France

Mis en page avec la classe thloria.

*Je dédie cette thèse
aux deux femme de ma vie,
ma mère et mon amour, Zahra,
et à mon père.*

Remerciements

Aucun projet de recherche n'aurait été possible sans appui de beaucoup de gens. Ainsi, cette thèse doit son existence à ces personnes qui ont offert leurs aimables et sincères aides, des appuis et inspirations à son auteur.

Je voudrais tout d'abord remercier vivement mes deux directeurs de thèse, les professeurs Hamid ZAHROUNI et Julien YVONNET, pour leurs conseils avisés, leur disponibilité ainsi que pour m'avoir permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions possibles au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) à Metz. J'adresse également mes sincères remerciements au professeur Michel POTIER-FERRY pour son aide et ses réponses à toutes mes questions pendant ces trois années.

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à Messieurs les professeurs Marc GEERS et Elias CUETO pour avoir accepté la charge de rapporter ce travail de recherche. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance. Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs les professeurs Pierre VILLON et Michel POTIER-FERRY de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à Arnaud LEJEUNE pour m'avoir fait découvrir le calcul parallèle. Je voudrais également remercier l'ensemble des membres du LPMM, à mes amis et à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie beaucoup ma mère, mon frère et son épouse, et ma sœur et son époux pour leur soutien inconditionnel et l'amour qu'ils me portent. Je remercie tous les membres de ma famille qui m'ont apporté leurs encouragements et leur réconfort.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement Zahra, mon épouse, pour son soutien et sa patience durant les trois années de ce travail. Merci à tous.

Metz, le 3 décembre 2009.

Table des matières

Notations	ix
Introduction générale	xi
Chapitre 1 Rappels bibliographiques	1
1.1 Méthodes multi échelles pour le calcul des structures et des matériaux hétérogènes	1
1.1.1 Méthodes analytiques et semi analytiques	2
1.1.2 Méthodes numériques	4
1.2 Méthodes multi échelles pour le traitement des instabilités	6
1.3 Méthode de perturbation pour la résolution des problèmes d’instabilités	6
1.3.1 Technique de perturbation	8
1.3.2 Techniques de discrétisation et de résolution	12
1.3.3 Méthode de continuation	14
1.3.4 Approximants de Padé	15
1.3.5 Un exemple d’instabilité : flambage d’un arc circulaire profond	16
Chapitre 2 Méthode Asymptotique Numérique à deux échelles pour l’homogénéisation non linéaire	19
2.1 Formulation du problème multi échelle en grandes déformations	21
2.1.1 Problème au niveau macroscopique	21
2.1.2 Problème au niveau microscopique	21
2.1.3 Couplage entre les échelles	22
2.2 MAN et problème d’homogénéisation à deux échelles	24
2.2.1 Technique de perturbation	25
2.2.2 Localisation	27
2.2.3 Homogénéisation	29

2.2.4	Problème macroscopique à résoudre	29
2.2.5	Discrétisation et résolution	30
2.3	Validation numérique : flexion d'une poutre rectangulaire	32
2.4	Conclusion	36

Chapitre 3 Méthode Asymptotique Numérique pour les lois de comportement non linéaires **41**

3.1	Comportement hyperélastique	42
3.1.1	Formulations des matériaux hyperélastiques	43
3.1.2	Quelques modèles de lois hyperélastiques	44
3.1.3	Technique de perturbation	45
3.1.4	Exemples numériques	51
3.2	Comportement élastoplastique	52
3.2.1	Théorie de déformation totale	54
3.2.2	Théorie incrémentale	57
3.2.3	Exemple numérique	60
3.3	Conclusion	61

Chapitre 4 Applications au flambage des matériaux hétérogènes **63**

4.1	Flambage d'un toit mince composite	64
4.2	Microflambage élastique d'un matériau hétérogène	65
4.2.1	Structure composite à fibres longues en compression	66
4.2.2	Structure cellulaire	69
4.3	Microflambage plastique d'un composite à fibres longues	72
4.3.1	Mécanisme de microflambage plastique	73
4.3.2	Calcul multi échelle avec instabilités liées au microflambage plastique	75
4.4	Conclusion	77

Chapitre 5 Méthode Asymptotique Numérique pour l'homogénéisation du second ordre **79**

5.1	Formulation du problème multi échelle du second ordre	81
5.1.1	Problème microscopique et couplage entre les échelles micro et macro	81
5.1.2	Problème au niveau macroscopique	85
5.2	Résolution du problème du second ordre à l'aide de la MAN	86
5.2.1	Technique de perturbation	86

5.2.2	Localisation	89
5.2.3	Homogénéisation	90
5.2.4	Problème macroscopique à résoudre	91
5.3	Exemple numérique	92
5.4	Conclusion	94
Chapitre 6 MAN multi échelle et réduction des temps de calcul		97
6.1	Calcul parallèle	98
6.2	MAN multi échelle avec réduction de modèle	99
6.2.1	Approche de base réduite	99
6.2.2	Décomposition orthogonale propre (POD)	101
6.2.3	Une méthode MAN-POD multi échelle	102
6.2.4	Stratégie de calcul de base réduite	103
6.2.5	Exemple Numérique	104
6.3	Comportement sélectif	105
Conclusion générale		107
Annexe A Les approximants de Padé pour les séries de vecteur		111
Annexe B Rappel : Approche Lagrangienne totale		113
Annexe C Condition des déformations homogènes au niveau microscopique		115
Annexe D Matériaux hyperélastiques incompressibles et formulation dans le cadre de la MAN		117
Annexe E Exemples des matériaux hyperélastiques		121
Bibliographie		123

Notations

Paramètres matériels

- u** Vecteur champs de déplacements
- x** Vecteur de coordonnées d'un point dans la configuration actuelle
- X** Vecteur de coordonnées d'un point dans la configuration de référence
- N** Vecteur de normale unitaire sortante à la surface
- F** Tenseur gradient de déformation
- γ Tenseur de déformation de Green-Lagrange
- P** Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
- S** Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
- G** Tenseur gradient de déformation du second ordre
- Q** Tenseur des contraintes du second ordre

Calcul vectoriel et tensoriel

$$\begin{aligned}({}^t\mathbf{A})_{ij} &= A_{ji} \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} &= A_{ik}B_{kj} \\ \mathbf{A} : \mathbf{B} &= A_{ij}B_{ji} \\ \mathbf{A} \dot{ : } \mathbf{B} &= A_{ijk}B_{kji} \\ (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{ik}B_{jl} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{il}B_{jk} \\ (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= \frac{1}{2}(A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk}) \\ (\mathbf{A} \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{ij}B_{kl}\end{aligned}$$

Introduction générale

La plupart des matériaux naturels ou fabriqués industriellement sont hétérogènes. En vue de prédire le comportement ou d'optimiser les caractéristiques de ces matériaux, des modèles prenant en compte les caractéristiques de la microstructure (propriétés des constituants, morphologie) doivent être élaborés. L'enjeu est aussi bien scientifique, car de nombreuses difficultés restent à surmonter, qu'industriel, pour améliorer les performances et les coûts des structures, mécanismes, et constructions réalisées à partir de ces matériaux. Les matériaux composites ou autres matériaux hétérogènes sont considérés comme "multi échelle" dans le sens où les dimensions caractéristiques des constituants sont très différentes des dimensions de la structure élaborée à partir de ce matériau. Dans ce manuscrit, nous désignons par échelle macroscopique l'échelle de la structure et l'échelle microscopique l'échelle des constituants (de la microstructure). Nous excluons ici les échelles allant jusqu'au niveau atomique.

Si l'homogénéisation des matériaux hétérogènes linéaires est aujourd'hui bien maîtrisée aussi bien d'un point de vue analytique que numérique, l'homogénéisation non linéaire représente une difficulté d'un ordre de grandeur supplémentaire, en particulier dans le cas des transformations finies, avec possible évolution des microstructures. Les méthodes numériques multi échelles développées ces dernières années semblent des outils prometteurs permettant d'aborder ces difficultés. En particulier, les méthodes "concourantes" ou multi niveau se basent sur un modèle faisant intervenir deux échelles couplées. Ce type de méthode permet d'analyser des phénomènes telles que les instabilités dans les matériaux hétérogènes. Dans ce cadre, les instabilités peuvent survenir à la fois au niveau microscopique et macroscopique, en s'influçant mutuellement.

Dans la plupart des méthodes numériques multi échelles utilisées pour résoudre les problèmes non linéaires, une procédure itérative de Newton-Raphson est employée. Le principe est dans ce cadre de suivre des branches de solutions de manière progressive via une succession d'itérations pour atteindre l'équilibre. Cependant, dans le cadre des problèmes impliquant des instabilités, la présence de points limites fait diverger ce type d'algorithme sans stratégie de pilotage sophistiquée. Une alternative consiste à utiliser des méthodes de perturbation telle que la méthode asymptotique numérique (MAN), qui

constitue une technique efficace de continuation sans itération de correction. Le principe est de construire une branche de solution sous forme de séries entières tronquées à des ordres élevés. En introduisant un tel développement dans les équations d'un problème non linéaire, on aboutit à une suite de problèmes linéaires devant être résolus successivement. On peut ainsi linéariser les équations sur de grandes plages de déformations, ouvrant une voie nouvelle pour résoudre les problèmes d'homogénéisation non linéaires. En outre, en comparaisons avec les méthodes itératives, la MAN offre un cadre simple pour traiter les problèmes impliquant des instabilités et des bifurcations de solutions.

L'objectif de recherche de cette thèse est de proposer de nouvelles techniques basées sur la méthode asymptotique numérique pour résoudre les problèmes de structures non linéaires en grandes déformations, avec possibles instabilités à l'échelle microscopique.

Dans le premier chapitre, nous proposons une étude bibliographique des méthodes multi échelles pour le calcul des structures et des matériaux hétérogènes, ainsi que du traitement des instabilités. Dans ce cadre, nous rappelons les grands principes de la méthode asymptotique numérique, ainsi que les détails d'implantations de la technique pour un problème d'élasticité tridimensionnelle avec non linéarité géométrique.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une technique originale basée sur une résolution MAN des équations d'un problème de structure non linéaire à deux échelles. Les non linéarités traitées sont à ce niveau uniquement géométriques, afin de simplifier la compréhension. Après avoir détaillé les principes et les algorithmes de la méthode, nous présentons des exemples de validation associés à des structures hétérogènes non linéaires en grandes déformations.

Nous étendons dans le chapitre 3 la procédure proposée au cas des non linéarités matérielles, en traitant en particulier les lois de comportement locales (associées aux différentes phases de la microstructure) hyperélastiques et élastoplastiques.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons la méthode développée à des problèmes hétérogènes en grandes déformations en présence d'instabilités locales. Nous montrons l'efficacité de la technique pour résoudre ce type de problème.

Afin de traiter des problèmes où les échelles sont faiblement séparées, nous étendons la méthode MAN multi échelle au cas de l'homogénéisation du second ordre. Les équations dans ce contexte sont formulées et la procédure est illustrée au travers d'exemples numériques. Les différentes difficultés sont exposées.

Comme toute méthode numérique impliquant des calculs concourants (simultanément aux deux échelles), les temps de calculs nécessaires pour traiter un calcul de structure sont très importants. Quelques techniques sont présentées en vue de réduire ces temps de calculs.

Nous concluons en revenant sur les différents résultats mis en évidence dans ce mé-

moire. Nous proposons enfin quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappels bibliographiques

Sommaire

1.1 Méthodes multi échelles pour le calcul des structures et des matériaux hétérogènes	1
1.1.1 Méthodes analytiques et semi analytiques	2
1.1.2 Méthodes numériques	4
1.2 Méthodes multi échelles pour le traitement des instabilités .	6
1.3 Méthode de perturbation pour la résolution des problèmes d'instabilités	6
1.3.1 Technique de perturbation	8
1.3.2 Techniques de discrétisation et de résolution	12
1.3.3 Méthode de continuation	14
1.3.4 Approximants de Padé	15
1.3.5 Un exemple d'instabilité : flambage d'un arc circulaire profond	16

1.1 Méthodes multi échelles pour le calcul des structures et des matériaux hétérogènes

La plupart des matériaux produits et utilisés dans l'industrie sont des matériaux hétérogènes constitués de multiples phases au niveau microscopique. Pour ne citer que quelques exemples, on trouve dans cette catégorie les alliages métalliques polycristallins, les milieux poreux ou les matériaux composites. Les différentes phases, associées à des comportements mécaniques ou thermiques différents, ainsi que leurs géométries, constituent la microstructure. Les méthodes d'homogénéisation ou méthodes multi échelles ont pour

principal objectif de construire un modèle de comportement du matériau homogène équivalent, à partir de la connaissance de la microstructure. La prédiction du comportement effectif des matériaux hétérogènes est essentielle afin de mener des calculs de structures. Ces méthodes peuvent également permettre de concevoir de nouveaux matériaux plus performants (par exemple à la fois plus légers et rigides, ou plus légers et résistants), en jouant sur la morphologie et les matériaux constituant les différentes phases. Les méthodes d'homogénéisation et plus généralement les méthodes multi échelles sont donc essentielles aujourd'hui en ingénierie, et constituent un terrain de recherche extrêmement riche, encore largement à développer.

Le terme "multi échelle" est un terme général associé à un très grand nombre de méthodes en mécanique mais aussi en physique appliquée. Les méthodes multi échelles ont principalement deux objectifs. Le premier a pour objectif de déterminer le comportement à une échelle donnée (par exemple l'échelle macroscopique), à partir de l'échelle inférieure (par exemple l'échelle microscopique) : les méthodes associées incluent les méthodes d'homogénéisation. Le deuxième objectif est d'étudier des phénomènes intervenant simultanément à deux échelles, ou à une échelle inférieure sous des conditions imposées à l'échelle macroscopique (voir par exemple Ben Dhia (1998); Xiao et Belytschko (2004)). Dans cette thèse, le terme multi échelle est associé à l'homogénéisation.

Les différentes méthodes d'homogénéisation sont séparées en deux grandes classes : les méthodes analytiques ou semi analytiques, et les méthodes numériques. On peut également classer plus généralement les méthodes multi échelles en deux familles : (i) les méthodes "hiérarchiques" ou "séquentielles", où l'information est passée de l'échelle microscopique vers l'échelle macroscopique dans un seul sens (généralement les méthodes d'homogénéisation analytiques); et (ii) les méthodes "concourantes" ou "intégrées" dans lesquelles des informations sont échangées entre les échelles (généralement des méthodes numériques). Nous présentons dans ce chapitre plus en détails ces différentes méthodes.

1.1.1 Méthodes analytiques et semi analytiques

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à des problèmes concernant des matériaux hétérogènes fortement non linéaires. Les approches analytiques pour réaliser l'homogénéisation non linéaire suivent les techniques bien connues associées au cas linéaire. Parmi celles-ci, nous mentionnons les estimateurs pour les composites périodiques (voir Sanchez-Palencia (1980); Bensoussan et al. (1978)), ou les bornes pour les matériaux constitués de phases aléatoires (voir Hill (1952); Paul (1960)). Des bornes plus raffinées incorporant des informations statistiques à deux points ou trois points ont été introduites dans Hashin et Shtrikman (1962a,b, 1963). Pour un état de l'art sur les bornes dans le cas linéaire, voir Willis (1982, 1983). Des procédures *ad hoc* ont été proposées pour estimer

les propriétés effectives des composites linéaires pour certaines classes particulières de microstructures en utilisant l'approche auto cohérente (Hill (1965); Budiansky (1983)). Des extensions des modèles auto cohérents ont été introduits par Walpole (1986); Milton et Kohn (1988); Bornert et al. (1996).

Pour les composites avec des microstructures périodiques, les propriétés effectives peuvent être déterminées en utilisant un volume élémentaire et des conditions aux limites appropriées sous certaines restrictions (Suquet (1983, 1985)). Des bornes pour les matériaux élastiques parfaitement plastiques ont été proposées dans Bishop et Hill (1951a,b); Taylor (1938). L'approche auto cohérente a été généralisée pour certains cas non linéaires (par exemple les milieux poreux) dans Hill (1965); Hutchinson (1976); Berveiller et Zaoui (1979), et Gurson (1977). Dans les travaux pionniers de Willis (1986), et Talbot et Willis (1986), les auteurs ont systématiquement développé les approches variationnelles en étendant les principes variationnels de Hashin-Shtrikman pour les composites non linéaires et ont permis de construire des bornes rigoureuses prenant en compte des informations statistiques à deux points. De nouveaux principes variationnels utilisant des "composites linéaires de comparaison" ont été proposés par Ponte Castañeda (1991, 1992), et Talbot et Willis (1992). Cela permet la détermination de bornes de type Hashin-Shtrikman et de type plus généralisé, ainsi que d'estimateurs directement à partir des estimateurs associés au composite linéaire de comparaison. Suquet (1993) et Olson (1994) ont introduit des principes variationnels pour les composites de type loi-puissance et parfaitement plastiques, respectivement. La méthode sécante pour les composites non linéaires a été proposée dans Chu et Hashin (1971), et Tandon et Weng (1988). Dans Gurson (1977), et Ponte Castañeda et Zaidman (1994), les effets de modification de la microstructure dus à la prise en compte de grandes déformations ont été introduits. Des applications et des généralisations peuvent être trouvées dans Kailasam et Ponte Castañeda (1998); Gologanu et al. (1994a), et Gologanu et al. (1994b). Deux types d'estimateurs peuvent être construits, basés sur deux méthodes : la première est la méthode "variationnelle" comme dans Willis (1986); deBotton et Ponte Castañeda (1995); Ponte Castañeda et Nebozhyn (1997), et Nebozhyn et al. (2001). La seconde, plus récente est basée sur la méthode "d'homogénéisation du second ordre" de Ponte Castañeda (2002); Idiart et Ponte Castañeda (2007). Le lecteur souhaitant approfondir ses connaissances sur les composites non linéaires peut se reporter à Ponte Castañeda et Suquet (1998), et Willis (2000).

Une autre méthode très utilisée est la méthode d'homogénéisation asymptotique, introduite dans Bensoussan et al. (1978), et Sanchez-Palencia (1980). Cette méthode est basée sur un développement asymptotique des champs par rapport à un paramètre représentant le rapport entre les échelles impliquées. (voir par exemple, Tolenado et Murakami (1987); Devries et al. (1989); Guedes et Kikuchi (1990); Hollister et Kikuchi (1992); Fish

et al. (1999)). L'approche d'homogénéisation asymptotique fournit les propriétés effectives globales ainsi que les valeurs des champs locaux, comme par exemple les contraintes et les déformations. Toutefois, les considérations sont souvent limitées à des géométries microscopiques et des modèles simples de matériaux, le plus souvent dans le cas des petites déformations.

Dans le contexte des méthodes semi-analytiques, on peut mentionner l'analyse des champs de transformation non uniforme (Non uniform TFA). Dans Michel et Suquet (2003, 2004), un modèle est proposé pour décrire l'écroutissage des composites élastoplastiques ou élastoviscoplastiques. Cette approche est une généralisation de la méthode de Dvorak (Dvorak et al. (1994)), donnant les relations de comportement effectif des composites non linéaires, exprimées à l'aide d'un nombre réduit de variables internes associées aux composantes des champs plastiques microscopiques pour un ensemble fini de modes plastiques.

Bien que les estimations et les bornes analytiques de la littérature soient très importants du point de vue théorique et pratique, en raison des difficultés inhérentes à la résolution analytique des problèmes d'homogénéisation, les résultats restent limités par des hypothèses assez restrictives et ne sont pas suffisants pour réaliser des calculs de structures constituées de matériaux non linéaires, avec microstructures complexes et soumises à des chargements macroscopiques arbitraires.

1.1.2 Méthodes numériques

La croissance toujours constante de la puissance de calculs a permis depuis déjà de nombreuses années de développer des méthodes numériques pour aller au delà des restrictions liées aux méthodes analytiques et semi analytiques. Elles permettent de calculer la réponse de composites non linéaires pour des morphologies et des comportements réalistes de la microstructure. Nous ne faisons pas ici référence à des simulations complètes seulement limitées à l'échelle de la microstructure, mais à des approches faisant intervenir les deux échelles.

Une première approche numérique consiste à modéliser une structure entière ou une partie de celle-ci en modélisant explicitement toutes les hétérogénéités. Un maillage complet de la structure et des hétérogénéités doit alors être réalisé. Ce type d'approche est évidemment extrêmement lourd et impossible à mettre en œuvre lorsque les échelles sont séparées. Ces difficultés peuvent être allégées en partie par des méthodes de sous-domaines ou par la méthode LATIN (Ladevèze et al. (2001); Ladvèdeze et al. (2002); Ladvèdeze et Nouy (2003)), décomposant la structure en sous-structures et interfaces.

Une autre approche très répandue aujourd'hui est la méthode "d'homogénéisation numérique" ou méthode d'éléments finis multi échelles (FE² method) introduite par Feyel

(Feyel (1999); Feyel et Chaboche (2000); Feyel (2003)). L'idée très simple de cette technique numérique est d'associer à chaque point d'intégration de la structure macroscopique un volume élémentaire représentatif. Au cours de la procédure itérative de recherche d'équilibre de la structure, les contraintes doivent être déterminées aux points d'intégration, connaissant les déformations. Pour cela, un calcul local doit être effectué sur le volume élémentaire représentatif (VER) : les déformations macroscopiques au point d'intégration sont imposées sur le bord du VER ; le problème local est alors résolu numériquement. Les contraintes obtenues sont alors moyennées pour fournir les contraintes macroscopiques au point d'intégration. Cette procédure est alors répétée pour tous les points d'intégration, et pour toutes les itérations avant équilibre de la structure macroscopique. Le principal avantage de cette méthode est de s'affranchir totalement des limitations sur les lois de comportement locales, la morphologie des inclusions, voir une possible évolution de la microstructure. Cette idée a été introduite originalement par Renard et Marmonier (1987), puis par différents auteurs qui ont soit réinventé indépendamment la méthode, soit introduit des extensions (Smit et al. (1998); Feyel (1999); Feyel et Chaboche (2000); Feyel (2003); Terada et Kikuchi (2001); Ghosh et al. (2001); Yvonnet et He (2007); Monteiro et al. (2008); Kousnetzova et al. (2004)). L'inconvénient majeur est le coût de calcul lié au couplage entre les échelles, bien que des techniques aient été proposées pour réduire les calculs, comme l'utilisation d'une méthode de réduction de modèle de type POD au niveau micro (Yvonnet et He (2007); Monteiro et al. (2008)), ou de méthode de décomposition de domaine Feyel (1999). Des homogénéisations du premier ordre ou du deuxième ordre (Kousnetzova et al. (2004); Feyel (2003); Markovic et Ibrahimbegovic (2004)) peuvent être menées dans ce cadre. Toutes ces approches sont des approches "concourantes", car elles impliquent des calculs simultanés aux deux échelles.

Récemment, une nouvelle méthode numérique multi échelle véritablement séquentielle, permettant de traiter une large classe de problèmes non linéaires hétérogènes a été proposée par Yvonnet et al. (2009). L'idée centrale de cette technique est de calculer numériquement des valeurs discrètes d'un potentiel, duquel dérive la loi macroscopique, et d'interpoler ces valeurs dans l'hyperespace des déformations macroscopiques pour accéder aux tenseurs des contraintes et au tenseur élastique tangent par dérivation de la fonction continue construite.

Un état de l'art des différentes méthodes d'homogénéisation, analytiques et numériques, peut être trouvé par exemple dans Nemat-Nasser et Hori (1993), et Kanouté et al. (2009).

1.2 Méthodes multi échelles pour le traitement des instabilités

Les instabilités intervenant dans le contexte des matériaux hétérogènes sont de type structurel (macroscopique) et/ou matériel (microscopique). Ces deux types d'instabilités peuvent survenir indépendamment ou s'influencer mutuellement. Abeyaratne et Triantafyllidis (1984) ont mené des travaux pionniers dans ce contexte, en étudiant en particulier les instabilités macroscopiques d'un élastomère poreux périodique. L'étude des bifurcations dans les matériaux composites stratifiés a été menée dans Triantafyllidis et Maker (1985). Une connexion rigoureuse entre les instabilités au niveau microscopique et la perte de convexité de rang un des modules homogénéisés a été établie dans Geymonat et al. (1993) pour les élastomères périodiques. Triantafyllidis et Bardenhagen (1996) ont ensuite défini les surfaces limites dans l'espace des contraintes et des déformations pour des solides périodiques dans un domaine infini. Ce concept a été ensuite appliqué entre autres dans le cas des treillis (Schraad et Triantafyllidis (1997)), des structures d'aluminium en nid d'abeille sous traction bi-axiale (Triantafyllidis et Schraad (1998)), dans les mousses tridimensionnelles basées sur les cellules de Kelvin (Gong et al. (2005)) et, plus récemment, aux élastomères périodiques poreux et particuliers (Triantafyllidis et al. (2006)). Miehe et al. (2002) ont développé un cadre général pour le traitement théorique et numérique de ces problèmes d'instabilités micro/macro : deux principes de minimisation sont introduits : le principe du minimum de l'énergie potentielle de la structure macroscopique et le principe du minimum de l'énergie potentielle moyenne de la microstructure. deBotton et al. (2006) ont proposé une estimation pour le comportement des élastomères renforcés de fibres avec des phases de comportement Néo-Hookéen en utilisant des microstructures de type assemblages de Hashin (Hashin (1962)). Par ailleurs, la méthode d'homogénéisation du second ordre a été utilisée pour étudier les instabilités dans les matériaux hétérogènes (Lopez-Pamies et Ponte Castañeda (2005, 2006a,b, 2007a,b); Michel et al. (2007)). D'autres approches dans le cadre numérique ont été proposées, basées sur des formulations Lagrangiennes actualisées à deux échelles (Ohno et al. (2002, 2004); Okumura et al. (2002, 2004, 2008); Erami et al. (2006)).

1.3 Méthode de perturbation pour la résolution des problèmes d'instabilités

Les problèmes non linéaires en mécanique des structures sont généralement résolus par des méthodes numériques basées sur des algorithmes itératifs de type Newton Raphson.

En présence d'instabilité, ces algorithmes demandent une stratégie de pilotage élaborée pour pouvoir suivre des branches de réponses complexes. Une technique alternative à ces méthodes numériques est la méthode asymptotique numérique (MAN). Cette dernière est basée sur un développement en séries des variables intervenant dans le problème non linéaire. De ce fait, elle constitue un prédicteur d'ordre élevé qui permet de rechercher les solutions branche par branche. L'introduction des séries dans le problème non linéaire permet de transformer ce dernier en une suite récurrente de problèmes linéaires, bien posés, qui sont résolus par des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis. Tous ces problèmes linéaires admettent la même matrice de rigidité tangente, ce qui permet de ne décomposer qu'une seule matrice par pas asymptotique.

Comme les séries ont un rayon de convergence limité, une technique de continuation a été proposée par Cochelin (1994) pour parcourir toute la branche solution. La longueur de chaque pas est calculée a posteriori en exigeant que la différence relative entre les solutions à deux ordres consécutifs reste inférieure à une certaine précision. La fin de chaque pas asymptotique est utilisée alors comme point de départ pour le pas suivant. Notons que cette procédure est utilisée sans correction, c'est-à-dire que généralement la précision sur les longueurs de pas est choisie de façon à obtenir une bonne qualité de la solution tout au long des pas asymptotiques. Un avantage important de la MAN par rapport aux méthodes itératives classiques concerne les longueurs de pas qui sont calculées a posteriori à partir des termes des séries ainsi calculés. Les longueurs de pas sont donc plus au moins grandes en fonction de la non linéarité de la réponse.

Le rayon de validité de la solution asymptotique peut être largement amélioré en remplaçant les séries entières par des fractions rationnelles appelées approximants de Padé. L'expérience numérique montre que généralement, l'utilisation des approximants de Padé permet de diviser par deux le temps de calcul. En outre, dans le cadre de la MAN, des correcteurs d'ordre élevé ont été associés aux prédicteurs d'ordre élevé (Mallil et al. (2000); Lahmam et al. (2002); Aggoune et al. (2006)). Plusieurs stratégies de corrections sont construites et montrent que des corrections peuvent être obtenues à moindre coût puisque généralement une seule itération suffit pour la convergence et une seule matrice de rigidité tangente est décomposée par pas.

Pour les problèmes présentant des points de bifurcation, un indicateur est construit dans le cadre de la MAN permettant de détecter ces points (Boutyour et al. (2004)). C'est une fonction scalaire construite en introduisant une force fictive de perturbation dans le problème non linéaire. Elle est évaluée le long de la branche d'équilibre et s'annule exactement aux points singuliers. L'avantage de cette technique est qu'elle permet d'utiliser la même matrice de rigidité tangente construite pour le chemin fondamental, d'où un gain appréciable de temps de calcul puisque seuls des termes de seconds membres sont calculés.

Dans les sections suivantes, nous présentons les détails d'implantation de la méthode asymptotique numérique pour un problème d'élasticité tridimensionnel avec une non linéarité géométrique. Un exemple présentant des courbes de réponse complexes avec des points limites est détaillé en fin du présent chapitre.

1.3.1 Technique de perturbation

Pour un problème d'élasticité avec une non linéarité géométrique, la forme faible de la condition d'équilibre peut s'écrire, dans le cadre d'une formulation Lagrangienne totale sous la forme suivante (voir l'annexe B) :

$$\int_{\Omega} {}^t\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} d\Omega - \lambda \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0 , \quad (1.1)$$

où \mathbf{P} est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{F} est le tenseur gradient de déformation défini par $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$, où \mathbf{I} est le tenseur identité d'ordre deux et \mathbf{u} est le champ de déplacement. $\mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u})$ représente le travail virtuel des efforts extérieurs et λ est un paramètre de chargement. On considère, en outre, une loi de comportement linéaire avec la prise en compte des non linéarités géométriques. Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma} , \quad (1.2)$$

où \mathbb{C} représente le tenseur d'ordre quatre des constantes d'élasticité. \mathbf{S} est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff lié à \mathbf{P} par la relation : $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$. Le tenseur $\boldsymbol{\gamma}$ représente les déformations de Green Lagrange défini par la relation :

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) . \quad (1.3)$$

Notons que, dans ce chapitre, on se limite à une loi de comportement linéaire pour simplifier la formulation et que des lois de comportement non linéaire sont présentées dans le chapitre 3 dans le cadre de la MAN.

Finalement, le problème non linéaire d'élasticité est résumé dans le tableau 1.1.

Les inconnues du problème peuvent être représentées par le vecteur mixte $\mathbf{U} = \{\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{u}\}$. Notons que pour optimiser le stockage des inconnues, deux variables liées par une relation linéaire peuvent ne pas être stockées toutes les deux. Par exemple, comme la relation de comportement est linéaire, on peut stocker \mathbf{S} ou $\boldsymbol{\gamma}$.

La technique de perturbation consiste à développer les variables \mathbf{U} et λ sous forme de séries entières par rapport à un paramètre de chemin "a" et un ordre de troncature N au voisinage d'une solution de départ connue, (\mathbf{U}_0 et λ_0). Ainsi, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}(a) \\ \lambda(a) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}_0 \\ \lambda_0 \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^N a^i \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}_i \\ \lambda_i \end{array} \right\} . \quad (1.4)$$

TABLE 1.1 – Résumé du problème à résoudre.

Forme faible de l'équation d'équilibre	$\int_{\Omega} {}^t\mathbf{P} : \boldsymbol{\delta} \mathbf{F} \, d\Omega = \lambda \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u})$
Loi de comportement	$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma}$
Relations cinématiques	$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$ $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$

En injectant les développements (1.4) dans le problème du tableau 1.1, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^N a^i {}^t\mathbf{P}_i : \boldsymbol{\delta} \mathbf{F} \right) d\Omega = \sum_{i=0}^N a^i \lambda_i \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) \\ \sum_{i=0}^N a^i \mathbf{S}_i = \mathbb{C} : \sum_{i=0}^N a^i \boldsymbol{\gamma}_i \\ \sum_{i=0}^N a^i \mathbf{P}_i = \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{F}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{S}_i \right) \\ \sum_{i=0}^N a^i \boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=0}^N a^i {}^t\mathbf{F}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{F}_i \right) - \mathbf{I} \right] \\ \sum_{i=0}^N a^i \mathbf{F}_i = \mathbf{I} + \nabla \left(\sum_{i=0}^N a^i \mathbf{u}_i \right) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

En regroupant les termes de même puissance de "a", on obtient une suite récurrente de problèmes linéaires. Les termes à l'ordre 0 du problème (1.5) correspondent à la solution initiale connue pour laquelle le résidu de chaque équation est supposé faible.

Problème à l'ordre 1 :

Les termes correspondant à l'ordre 1 du développement asymptotique permettent de définir le problème tangent. Le problème correspond exactement à celui qu'on obtiendrait

dans le cadre d'un algorithme de type Newton-Raphson :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} {}^t\mathbf{P}_1 : \boldsymbol{\delta} \mathbf{F} \, d\Omega = \lambda_1 \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_1 = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{S}_0 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_1 + {}^t\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_0) \\ \mathbf{F}_1 = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Dans cette formulation, seul le vecteur déplacement sera discrétisé. Pour cela, une méthode de substitution est utilisée pour condenser les différentes équations dans celle d'équilibre. Pour cette raison, on commence d'abord par écrire la quatrième relation de (1.6) sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_1 + {}^t\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_0) = \mathbb{B} : \mathbf{F}_1 , \quad (1.7)$$

où \mathbb{B} est un tenseur d'ordre quatre dépendant de la solution initiale \mathbf{F}_0 défini par :

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_0) . \quad (1.8)$$

Ensuite, on substitue la relation (1.7) dans la deuxième relation de (1.6) :

$$\mathbf{S}_1 = \mathbb{C} : (\mathbb{B} : \mathbf{F}_1) . \quad (1.9)$$

En remplaçant (1.9) dans la troisième relation de (1.6), on peut réécrire cette relation sous la forme suivante :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_0 \cdot (\mathbb{C} : (\mathbb{B} : \mathbf{F}_1)) + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{S}_0 = \mathbb{H} : \mathbf{F}_1 , \quad (1.10)$$

où \mathbb{H} est un tenseur d'ordre quatre défini par :

$$\mathbb{H} = (\mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{I}) : \mathbb{C} : \mathbb{B} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}_0 . \quad (1.11)$$

Finalement, en substituant la relation (1.10) dans la première relation de (1.6) et en considérant la définition et le développement de \mathbf{F} , la forme tangente du problème (1.6₁) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} {}^t\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}_1 : \mathbb{H} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \, d\Omega = \lambda_1 \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) . \quad (1.12)$$

Remarquons que, dans cette équation, seule la variable de déplacement \mathbf{u}_1 est conservée ainsi que le paramètre de charge λ_1 inconnu. On peut également réécrire cette relation sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) = \lambda_1 \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) , \quad (1.13)$$

où \mathcal{L} est un opérateur tangent de rigidité qui dépend de la solution initiale :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} {}^t \nabla \mathbf{u}_1 : \mathbb{H} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega . \quad (1.14)$$

Notons qu'à l'ordre 1, la MAN est similaire aux méthodes numériques classiques basées sur une linéarisation du problème non linéaire. Par conséquence, l'opérateur tangent est exactement le même que celui obtenu dans la phase de prédiction d'un algorithme itératif classique. Faire une prédiction linéaire entraîne inévitablement une solution fortement approchée avec un résidu qui peut être inadmissible surtout pour de grandes longueurs de pas.

Problème à l'ordre p :

L'écriture des problèmes aux ordres supérieurs est simple puisque les équations du problème (1.1) sont quadratiques. Ainsi pour un ordre p ($1 < p \leq N$) le problème linéaire s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} {}^t \mathbf{P}_p : \delta \mathbf{F} \, d\Omega = \lambda_p \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_p = \mathbb{C} : \gamma_p \\ \mathbf{P}_p = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{S}_p + \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{S}_0 + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{F}_{p-r} \cdot \mathbf{S}_r \\ \gamma_p = \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_p + {}^t \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_0 + \sum_{r=1}^{p-1} {}^t \mathbf{F}_{p-r} \cdot \mathbf{F}_r \right) \\ \mathbf{F}_p = \nabla \mathbf{u}_p \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Remarquons que seules les deux équations non linéaires (1.15₃) et (1.15₄) fait apparaître un terme résiduel dépendant des solutions des ordres précédant l'ordre p . Ainsi la relation (1.15₄) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\gamma_p = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_p + {}^t \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_0) + \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{p-1} {}^t \mathbf{F}_{p-r} \cdot \mathbf{F}_r \right) = \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + \gamma_p^{nl} . \quad (1.16)$$

Remplaçons la relation (1.16) dans la deuxième relation de (1.15) donne :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C} : (\mathbb{B} : \mathbf{F}_p) + \mathbb{C} : \gamma_p^{nl} = \mathbb{C} : (\mathbb{B} : \mathbf{F}_p) + \mathbf{S}_p^{nl} . \quad (1.17)$$

On substitue l'équation (1.17) dans la troisième relation de (1.15) :

$$\mathbf{P}_p = [\mathbf{F}_0 \cdot (\mathbb{C} : (\mathbb{B} : \mathbf{F}_p)) + \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{S}_0] + \left[\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{S}_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{F}_{p-r} \cdot \mathbf{S}_r \right] = \mathbb{H} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl} . \quad (1.18)$$

Enfin, en remplaçant la relation (1.18) dans la première relation de (1.15), le problème à l'ordre p est obtenu sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}) = \lambda_p \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) + \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) , \quad (1.19)$$

où \mathcal{F}_p^{nl} est un vecteur résidu qui contient des termes dépendant des ordres inférieures à p :

$$\mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} {}^t \mathbf{P}_p^{nl} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega . \quad (1.20)$$

Remarquons que l'opérateur \mathcal{L} est exactement celui explicité à l'ordre 1. Notons également qu'il est possible d'établir une technique de différentiation automatique qui permet de simplifier la technique de substitution grâce à une surcharge des opérateurs sur le plan algorithmique (Charpentier et Potier-Ferry (2008)).

1.3.2 Techniques de discrétisation et de résolution

Les relations (1.13) et (1.19) peuvent être résolues par la méthode des éléments finis. Dans la méthode des éléments finis, le domaine Ω est découpé en sous-domaines appelés éléments et notés Ω^e . Sur chaque sous-domaine, les variables déplacements $\{u\}$ et gradients de déplacement $\{\nabla u\}$ s'expriment en fonction des déplacements aux nœuds dont les composantes sont rangées dans un vecteur $\{v\}^e$ appelé vecteur élémentaire des déplacements nodaux. Les vecteurs $\{u\}$ et $\{v\}^e$ sont liés par une matrice $[N]$ appelée matrice d'interpolation ou matrice des fonctions de forme. À partir de ces matrices, on définit facilement la matrice $[G]$ qui lie le gradient du déplacement en fonction du vecteur des déplacements nodaux $\{v\}^e$. Bien entendu, chaque terme de $[G]$ est une dérivée d'une fonction de forme. Le déplacement virtuel $\{\delta u\}$ est choisi en général de la même manière, ce qui correspond à une approximation de Galerkin. Cela conduit aux relations :

$$\{u\} = [N] \{v\}^e \quad \{\delta u\} = [N] \{\delta v\}^e , \quad (1.21)$$

$$\{\nabla u\} = [G] \{v\}^e \quad \{\nabla \delta u\} = [G] \{\delta v\}^e . \quad (1.22)$$

On réécrit le problème sous la forme discrétisée à l'ordre p :

$$\int_{\Omega} {}^t \{\nabla \delta u\} [\mathbf{H}] \{\nabla u_p\} \, d\Omega = \lambda_p \{P_{ext}(\delta u)\} - \int_{\Omega} {}^t \{\nabla \delta u\} \{P_p^{nl}\} \, d\Omega , \quad (1.23)$$

où $[\mathbf{H}]$ est la forme matricielle du tenseur \mathbb{H} . Donc, la forme élémentaire de la relation (1.23) peut s'écrire :

$$\sum_e {}^t \{\delta v\}^e \left([k_t^e] \{v_p\}^e - \lambda_p \{f\}^e - \{f_p^{nl}\}^e \right) = 0 , \quad (1.24)$$

où $\{f\}^e$ est le vecteur de la force extérieure élémentaire et :

$$[k_t^e] = \int_{\Omega_e} {}^t[G] [\mathbf{H}] [G] d\Omega , \quad (1.25)$$

$$\{f_p^{nl}\}^e = - \int_{\Omega_e} {}^t[G] \{F_p^{nl}\} d\Omega . \quad (1.26)$$

L'assemblage des formes élémentaires (1.25) et (1.26) donne le problème global au niveau de la structure qui s'écrit sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}_t] \{v_p\} = \lambda_p \{\mathcal{F}\} + \{\mathcal{F}_p^{nl}\} , \quad (1.27)$$

où $[\mathbf{K}_t]$ est la matrice de rigidité tangente globale, $\{\mathcal{F}\}$ est le vecteur force globale et $\{\mathcal{F}_p^{nl}\}$ est un vecteur résiduel global.

Enfin, pour résoudre les problèmes linéaires résultant de la MAN (1.27), on a besoin de définir une équation supplémentaire comme pour la technique de pilotage proposée dans les algorithmes de Newton-Raphson. Le calcul peut être mené en imposant une force, un déplacement ou une combinaison des deux (technique de Riks ; Riks (1984)). En général, dans le cadre de la MAN, une procédure simple est choisie en considérant la projection du champ de déplacement sur sa tangente sous la forme discrétisée :

$$a = (\{v(a)\} - \{v_0\}) \cdot \{v_1\} . \quad (1.28)$$

On peut également combiner de nombreuses variables qui ne présentent pas le même comportement en terme de réponse pendant le chargement (Assidi et al. (2009)). En développant l'équation (1.28), les problèmes linéaires à résoudre peuvent s'écrire dans le cadre des éléments finis sous la forme suivante :

Ordre 1 :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] \{v_1\} = \lambda_1 \{\mathcal{F}\} \\ {}^t\{v_1\} \{v_1\} = 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

Ordre p :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] \{v_p\} = \lambda_p \{\mathcal{F}\} + \{\mathcal{F}_p^{nl}\} \\ {}^t\{v_p\} \{v_1\} = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

La résolution des problèmes (1.29) et (1.30) sont présentés sous forme de l'algorithme suivant (voir Cochelin et al. (2007)) :

Ordre 1 :

$$\begin{cases} \{\hat{v}\} = [\mathbf{K}_t]^{-1} \{\mathcal{F}\} \\ \lambda_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{{}^t\{\hat{v}\} \{\hat{v}\}}} \\ \{v_1\} = \lambda_1 \{\hat{v}\} \end{cases} \quad (1.31)$$

Ordre p :

$$\begin{cases} \{v_p^{nl}\} = [\mathbf{K}_t]^{-1} \{\mathcal{F}_p^{nl}\} \\ \lambda_p = -\lambda_1^t \{v_p^{nl}\} \{v_1\} \\ \{v_p\} = \frac{\lambda_p}{\lambda_1} \{v_1\} + \{v_p^{nl}\} \end{cases} \quad (1.32)$$

Notons que, en ayant le déplacement $\{v_p\}$, on peut obtenir facilement les variables \mathbf{S}_p , \mathbf{P}_p , γ_p et \mathbf{F}_p ($1 \leq p \leq N$) en utilisant les définitions de ses variables (voir les relations (1.6) et (1.15)).

1.3.3 Méthode de continuation

La stratégie de suivi de courbe de réponse non linéaire est d'une importance critique surtout en présence de phénomènes d'instabilité. Les problèmes non linéaires impliquant des instabilités sont généralement résolus en utilisant les algorithmes itératifs de Newton-Raphson associés aux techniques de longueur d'arc pour suivre les branches complexes présentant des points limites. Pour optimiser le temps de calcul, on doit utiliser des longueurs de pas adaptatives. En effet, pour une taille de pas fixe, une très faible longueur de pas peut conduire à un grand nombre de pas. Cependant, une grande longueur de pas permet de réduire le nombre de pas, mais peut conduire à la divergence du calcul ou à un très grand nombre d'itérations. En outre, les algorithmes linéaires itératifs convergent parfois vers une solution non désirée dans le cas des problèmes en présence d'une forte non linéarité (Eriksson et Kouhia (1995)). La meilleure stratégie doit utiliser de grands pas dans les régions de faible non linéarité et une petite longueur de pas dans les régions avec une forte non linéarité de la courbe de réponse comme dans le cas des points limites ou dans les situations de quasi-bifurcation. Dans le cas général, la meilleure stratégie n'est pas évidente à déterminer (Ramm (1981); Riks (1984); Wriggers et al. (1988); Eriksson (1991); Crisfield (1991); Battini (2007); Kouhia (2008)).

Dans le cadre de la MAN, les séries permettent d'obtenir une grande partie de la branche de solution en décomposant une seule matrice de rigidité tangente. Cette procédure peut être considérée comme un prédicteur d'ordre élevé, qui n'a généralement pas besoin de la phase de correction. Puisque les séries ont un rayon de convergence limité, une procédure de continuation peut être facilement mise en oeuvre en considérant le fait que la différence relative entre les solutions à deux ordres consécutifs N et $N - 1$ doit rester assez petite par rapport à une valeur critique δ . Si nous considérons la forme discrétisée du champ de déplacement, nous pouvons déterminer un rayon de validité des séries tronquées à l'aide de l'approximation suivante :

$$a_{max} = \left(\delta \frac{\| \{v_1\} \|}{\| \{v_N\} \|} \right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad (1.33)$$

où δ est un paramètre de précision et $\| \cdot \|$ présente la norme du vecteur.

De cette manière, l'ensemble de la solution est obtenu pas par pas en considérant chaque fin de pas comme point de départ du pas suivant. De plus, la longueur de pas est naturellement adaptative en fonction de la non linéarité locale de la courbe de réponse, car elle est calculée a posteriori en utilisant les termes des séries. Les détails de ces procédures peuvent être retrouvés dans les nombreuses références (par exemple, Cochelin (1994); Zahrouni et al. (1999); Cochelin et al. (2007)). Cette technique pour calculer le rayon de validité n'est pas unique; Assidi et al. (2009) ont proposé une procédure qui consiste à calculer le rayon de convergence pour toutes les variables développées en séries et à conserver la valeur la plus petite de a_{max} . Cela garantit que toutes les équations du problème considéré soient résolues avec une grande précision.

Comme le rayon de convergence limite la longueur de pas de la représentation en séries, les approximants de Padé peuvent être utilisés permettant d'augmenter la longueur de pas et d'améliorer la représentation de la solution par séries entières (par exemple, Cochelin et al. (1994); Najah et al. (1998); Elhage-Hussein et al. (2000)).

1.3.4 Approximants de Padé

L'approximation rationnelle par des fractions de type Padé (Baker et Graves-Morris (1981)) permet d'améliorer le domaine de convergence de la représentation polynômiale; c'est-à-dire, si on remplace les séries entières obtenues dans le cadre de la MAN par des approximations de Padé, on peut réduire de façon significative le nombre de pas total et par conséquent le temps total de calcul. Le domaine de validité de la solution asymptotique par séries entières est donc prolongé au delà du rayon de convergence. Différentes expériences numériques sur divers problèmes de la mécanique montrent que la représentation de la solution par les fractions rationnelles permet de diviser d'environ par deux le temps de calcul nécessaire pour une représentation par séries entières. Dans cette section, on montre brièvement la stratégie adoptée dans le cas des séries vectorielles afin d'utiliser les approximants de Padé dans le cadre de la MAN.

Afin de remplacer l'approximation polynomiale par des fractions rationnelles, des bases orthonormales \mathbf{U}_p^* et λ_p^* définies à partir de \mathbf{U}_p et λ_p par une ortho normalisation de Gram-Schmidt, est introduite car la représentation (1.4) n'est pas scalaire :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_p = \sum_{q=1}^p \alpha_{pq} \mathbf{U}_q^* \\ \lambda_p = \sum_{q=1}^p \alpha_{pq} \lambda_q^* \end{cases} \quad (1.34)$$

L'introduction de l'équation (1.34) dans la représentation polynômiale (1.4) donne :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}(a) - \mathbf{U}_0 \\ \lambda(a) - \lambda_0 \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^N a^p \sum_{q=p}^N \alpha_{pq} a^{q-p} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p^* \\ \lambda_p^* \end{Bmatrix}. \quad (1.35)$$

Ces approximations rationnelles présentent souvent des singularités qui peuvent provenir des pôles des dénominateurs. Pour les limiter, il est possible d'utiliser des fractions rationnelles à dénominateur commun :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a \frac{D_{N-2}}{D_{N-1}} \mathbf{U}_1 + \dots + a^{N-1} \frac{1}{D_{N-1}} \mathbf{U}_{N-1} \\ \lambda(a) = \lambda_0 + a \frac{D_{N-2}}{D_{N-1}} \lambda_1 + \dots + a^{N-1} \frac{1}{D_{N-1}} \lambda_{N-1} \end{cases} \quad (1.36)$$

où $D_i(a)$ est un polynôme de degré i à coefficients réels d_i ($i = 1 \dots N - 1$) :

$$D_i(a) = 1 + a d_1 + a^2 d_2 + \dots + a^i d_i. \quad (1.37)$$

Les définitions des variables $D_i(a)$ et d_i sont reportées dans l'annexe A. Les procédures de continuation et du calcul des longueurs de pas suivent la même technique que celle utilisée pour les séries entières. Le paramètre a_{max} est calculé en exigeant que la différence relative entre les solutions Padé à deux ordres consécutifs soit égale à une certaine précision qui peut être exigée par l'utilisateur. Le lecteur souhaitant plus de détails sur ses procédures peut consulter les références suivantes (Baker et Graves-Morris (1981); Azrar et al. (1993); Cochelin et al. (1994); Najah et al. (1998); Elhage-Hussein et al. (2000)).

1.3.5 Un exemple d'instabilité : flambage d'un arc circulaire profond

Pour montrer les performances et l'efficacité de la MAN dans la résolution des problèmes en présence d'instabilité sévère, on étudie le flambage d'un arc circulaire profond de rayon $R = 100 \text{ mm}$, d'épaisseur $h = 0,34 \text{ mm}$ et de longueur $l = 10 \text{ mm}$. Son module d'Young $E = 0,28 \times 10^8 \text{ MPa}$ et son coefficient de poisson est nul. Il présente une ouverture d'un angle $\alpha = 145^\circ$ et il est encastré sur une extrémité et simplement appuyé sur l'autre (liaison pivot) (Figure 1.1). Les caractéristiques géométriques sont telles que $EA = 100 EI$ et $EI = 10^6$ où A est la section de l'arc et I représente son moment quadratique. Les différents paramètres numériques concernant l'élément fini et la discrétisation utilisés sont détaillés dans Zahrouni (1998) et Lahmam et al. (2002).

La figure 1.2 montre la courbe représentant la charge λ en fonction du déplacement vertical du point d'application de la force. Les calculs sont effectués à l'aide des algorithmes MAN-Padé avec un ordre de troncature des séries $N = 15$. Pour obtenir une bonne précision le long de la courbe de réponse, le paramètre de précision δ est fixé à 10^{-5} .

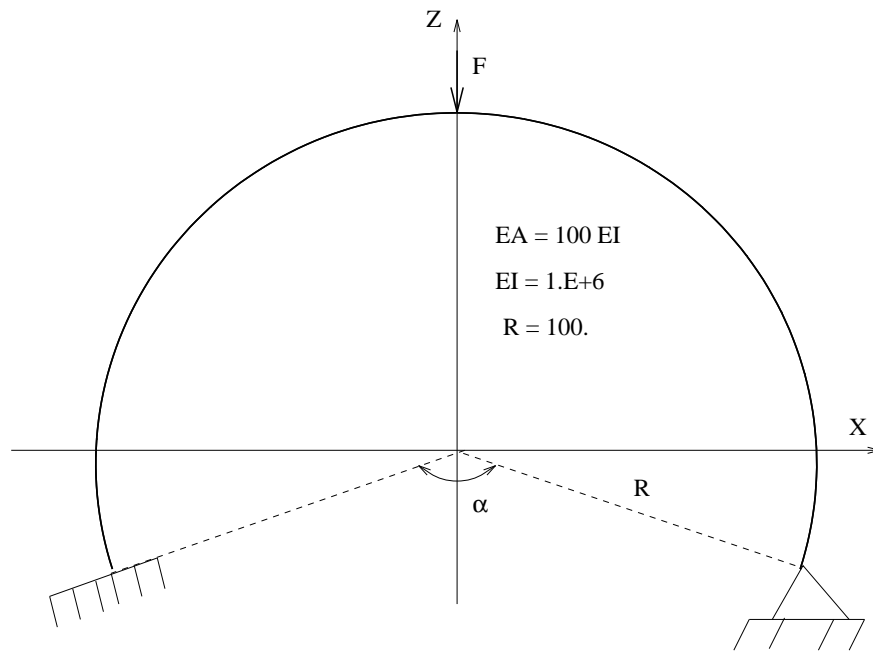


FIGURE 1.1 – Géométrie et conditions aux limites de l'arc circulaire profond

Cette courbe de réponse a été obtenue avec seulement 11 pas asymptotiques, alors que ce même problème résolu avec la procédure de Newton-Raphson par Simo et Vu-Quoc (1986), a demandé 155 pas, sans oublier le nombre d'itérations pour minimiser le résidu d'équilibre à chaque pas de calcul. Plusieurs auteurs ont présenté cet exemple comme un patch test numérique pour évaluer les performances des éléments finis ou des procédures de pilotages des calculs non linéaires. La majorité de ces auteurs considère que le passage des points limites de la courbe de réponse est assez difficile et plus particulièrement au deuxième point limite. Si l'algorithme de pilotage n'est pas adéquat, cela peut mener à une divergence des calculs.

On remarquera que dans le cadre de la MAN, les longueurs de pas asymptotiques sont complètement automatiques. On calcule d'abord les termes des séries et en suite et à partir de ces termes le rayon de validité " a_{max} " est estimé. Cette procédure montre que les longueurs de pas s'adaptent en fonction de la non linéarité locale de la courbe de réponse. La figure 1.2 montre des pas courts à proximité des points limites et de grands pas dans le reste de la courbe de réponse. La figure 1.3 montre quelques états déformés de l'arche pour différents niveaux de chargement.

Notons que le prédicteur d'ordre élevé de la MAN a été associé à des correcteurs d'ordre élevé pour résoudre ce problème. Le lecteur intéressé, peut consulter les détails des correcteurs d'ordre élevé dans Lahmam et al. (2002). Dans cette référence, la prédiction a

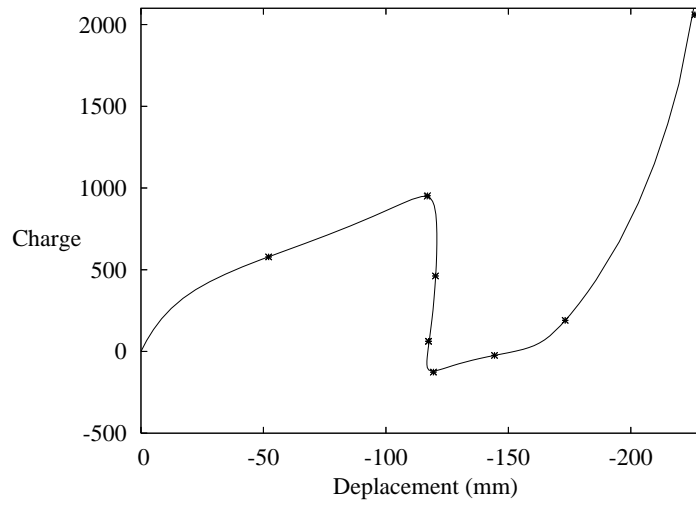


FIGURE 1.2 – Diagramme charge-déplacement vertical du point d’application de la force dans le problème du flambage de l’arc profond.

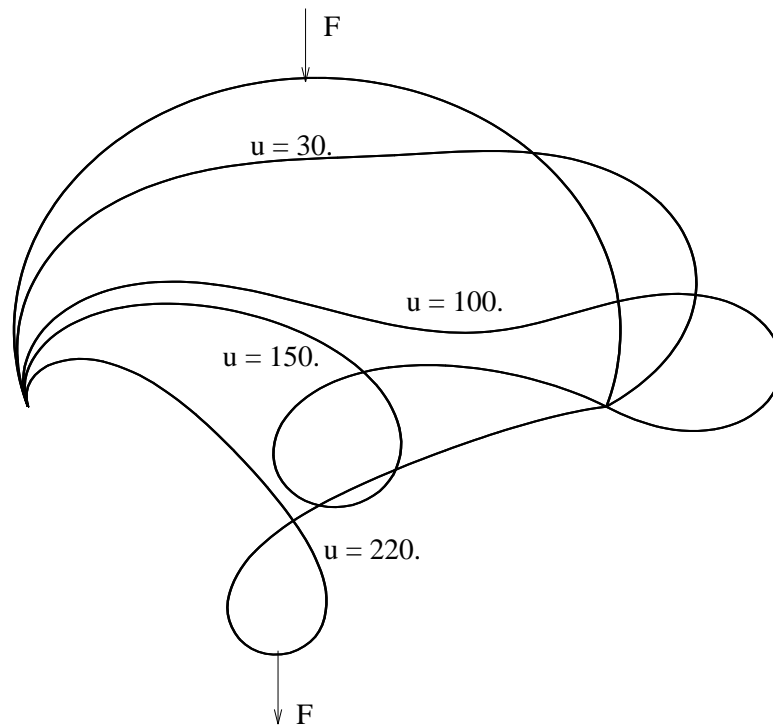


FIGURE 1.3 – Configuration déformée de l’arc pour différents niveaux de chargement. u est le déplacement vertical du point d’application de la force.

été calculée avec un ordre de troncature des séries $N = 15$ et les corrections avec $N_{corr} = 5$. Il est montré que dans le cadre de la MAN les corrections sont obtenues avec seulement une seule itération à petit ordre.

Chapitre 2

Méthode Asymptotique Numérique à deux échelles pour l'homogénéisation non linéaire

Sommaire

2.1	Formulation du problème multi échelle en grandes déformations	21
2.1.1	Problème au niveau macroscopique	21
2.1.2	Problème au niveau microscopique	21
2.1.3	Couplage entre les échelles	22
2.2	MAN et problème d'homogénéisation à deux échelles	24
2.2.1	Technique de perturbation	25
2.2.2	Localisation	27
2.2.3	Homogénéisation	29
2.2.4	Problème macroscopique à résoudre	29
2.2.5	Discrétisation et résolution	30
2.3	Validation numérique : flexion d'une poutre rectangulaire . .	32
2.4	Conclusion	36

La modélisation multi échelle des matériaux hétérogènes est une tâche difficile. Dans le contexte non linéaire, les propriétés effectives des matériaux hétérogènes ne peuvent pas être obtenues par les techniques utilisées pour les milieux linéaires car le principe de superposition n'est plus valable. Ainsi, dans le contexte des éléments finis, lorsque l'on a un matériau hétérogène avec une microstructure périodique, une alternative au maillage de l'ensemble de la structure avec la prise en compte de toutes les hétérogénéités, est l'utilisation d'éléments finis multi échelles (EF²) (Feyel (1999); Feyel et Chaboche (2000)).

Par ailleurs, les problèmes non linéaires aux niveaux microscopique et macroscopique sont souvent résolus par les procédures classiques de Newton-Raphson, qui sont généralement adaptées à la résolution des problèmes non linéaires mais qui présentent des difficultés en présence d'instabilités. Dans ce chapitre, nous présentons la combinaison de la méthode des éléments finis multi échelles (EF²) et la méthode asymptotique numérique (MAN). Notons que cette approche, malgré une terminologie similaire, est différente de la théorie d'homogénéisation asymptotique. Dans les méthodes d'homogénéisation asymptotique, le paramètre ϵ de développement en série est associé au rapport de taille entre les échelles. Dans notre approche, il s'agit d'un paramètre décrivant l'évolution du chargement. En introduisant le développement asymptotique dans les équations non linéaires aux deux niveaux micro et macro, on obtient une série de problèmes linéaires qui sont résolus de façon successive. Comparée à la méthode EF² résolue avec la procédure de Newton-Raphson, la méthode proposée présente les avantages suivants : (i) dans le cadre d'une analyse par éléments finis multi échelles, les solutions des problèmes non linéaires microscopiques sont obtenues par la résolution des problèmes linéaires de la série. Une conséquence directe est que le tenseur de localisation peut être construit pour chaque pas du développement asymptotique et la relation de comportement peut alors être construite à l'échelle macroscopique. Ainsi, en utilisant notre procédure, la linéarisation est valable tout au long du pas asymptotique alors que, dans la méthode EF², la linéarisation est valable uniquement à chaque itération de Newton-Raphson ; (ii) avec la MAN, la courbe de réponse est explicitement représentée sous la forme d'une série vectorielle qui est calculée avec une seule décomposition de la matrice de rigidité ; (iii) cette représentation en série contient plusieurs informations qui sont difficilement accessibles par les algorithmes classiques ; (iv) la longueur de chaque pas de calcul est estimée a posteriori ; (v) la MAN est une technique très simple à mettre en œuvre pour résoudre les problèmes impliquant des bifurcations et des instabilités, par comparaison aux méthodes itératives classiques basées sur la méthode de Newton-Raphson associée à une technique de pilotage en longueur d'arc pour passer les points limites.

Dans ce chapitre, on traite le cas des matériaux composites avec une loi de comportement élastique linéaire en prenant en compte la non linéarité géométrique à la fois au niveau macroscopique et microscopique. Le cas du comportement non linéaire est présenté dans le chapitre suivant.

2.1 Formulation du problème multi échelle en grandes déformations

2.1.1 Problème au niveau macroscopique

On considère un domaine Ω dans \mathbb{R}^D , D étant la dimension du domaine, avec un bord extérieur $\partial\Omega$ séparé en deux parties disjointes et complémentaires $\partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = 0$). Sur ces deux parties sont imposés les déplacements et les efforts, respectivement. Ce domaine désigne la structure au niveau macroscopique dans sa configuration de référence. On suppose que le matériau est hétérogène et caractérisé par une microstructure périodique. Les grandes déformations sont considérées et une formulation Lagrangienne totale est adoptée. Par la suite, la notation $(\bar{\cdot})$ sera utilisée pour indiquer les quantités macroscopiques. Le problème à résoudre, en l'absence des forces volumiques et les conditions aux limites est défini par :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{X}}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{N}} = \lambda \mathbf{f} & \text{sur } \partial\Omega_t \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\hat{\mathbf{u}}$ et \mathbf{f} sont les déplacements et les efforts imposés sur les bords de la macrostructure. $\bar{\mathbf{N}}$ est la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$. λ est un paramètre qui donne l'intensité de la charge appliquée.

La forme faible associée aux équations (2.1) est donnée par :

Trouver $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{S}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\Omega) = \{\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}, \bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \text{ sur } \partial\Omega_u\}$, \mathcal{L} étant l'espace des fonctions suffisamment régulières sur Ω , tel que :

$$\int_{\Omega} {}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}} \, d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \forall \delta\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{S}_0(\Omega), \quad (2.2)$$

où $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'espace des fonctions suffisamment régulières et cinématiquement admissibles et $\mathcal{S}_0(\Omega)$, $\mathcal{S}_0(\Omega) = \{\delta\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}, \delta\bar{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$, est l'espace des fonctions suffisamment régulières et nulles sur le bord Dirichlet.

A cette échelle, la relation de comportement entre $\bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{F}}$ est inconnue. Dans le contexte de l'analyse par éléments finis multi échelles, les contraintes macroscopiques sont obtenues directement en résolvant un problème non linéaire local d'éléments finis lié à la microstructure périodique. La formulation associée est présentée dans la section suivante.

2.1.2 Problème au niveau microscopique

On suppose que le matériau est hétérogène avec une microstructure périodique, caractérisée par un volume élémentaire représentative (VER) qui occupe un domaine ω dans

\mathbb{R}^D avec le bord extérieur $\partial\omega$ dans sa configuration de référence. Notons que nous utilisons le terme VER par abus de langage pour désigner un ensemble de cellules élémentaires représentant la microstructure. L'équation d'équilibre est donnée en l'absence des forces volumiques par :

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{dans } \omega . \quad (2.3)$$

Le VER est soumis aux conditions aux limites dépendant du tenseur gradient de déformation macroscopique $\bar{\mathbf{F}}$ qui seront expliqués dans la section suivante.

La forme faible associée au problème microscopique (2.3) s'écrit sous la forme suivante :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\omega)$ et satisfaisant les conditions aux limites microscopiques de type Dirichlet (équation (2.13) ou (2.14)), tel que :

$$\int_{\omega} {}^t\mathbf{P} : \delta\mathbf{F} \, d\omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{S}_0(\omega) . \quad (2.4)$$

Au niveau microscopique, on suppose que les lois de comportement sont connues en chaque phase du VER. Dans ce chapitre, on considère la loi de Saint Venant-Kirchhoff qui donne un modèle en grandes déformations avec une relation de comportement linéaire :

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}^{(r)} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}) , \quad (2.5)$$

où $\mathbb{C}^{(r)}$ est le tenseur d'ordre quatre des constantes d'élasticité du matériau de la phase r . Notons que toute autre loi de comportement (y compris les comportements inélastiques) peut être utilisée dans le contexte de la MAN. Nous présentons quelques unes de ces lois dans le chapitre suivant.

2.1.3 Couplage entre les échelles

Le couplage entre les échelles microscopique et macroscopique est basé sur des théorèmes de moyenne. Les expressions d'intégrale moyenne sont d'abord proposées par Hill (1963) pour les petites déformations et ensuite étendues au cadre des grandes déformations par Hill (1984) et Nemat-Nasser (1999). La première relation de couplage propose que le gradient de déformation macroscopique, $\bar{\mathbf{F}}$, est égal à la valeur moyenne du gradient de déformation microscopique, \mathbf{F} :

$$\bar{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \, d\omega , \quad (2.6)$$

où $|\omega|$ est le volume du VER.

On suppose que la position actuelle d'un point matériel est la superposition d'un champ moyen et un champ de perturbation $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ induit par la présence des hétérogénéités :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{w}(\mathbf{X}) . \quad (2.7)$$

On a ensuite :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}(\mathbf{X}) . \quad (2.8)$$

En introduisant (2.8) dans (2.6), on obtient :

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \bar{\mathbf{F}} d\omega + \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \nabla \mathbf{w}(\mathbf{X}) d\omega = \bar{\mathbf{F}} + \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \mathbf{w}(\mathbf{X}) \mathbf{N} d\Gamma , \quad (2.9)$$

qui induit :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \mathbf{w}(\mathbf{X}) \mathbf{N} d\Gamma = 0 , \quad (2.10)$$

avec \mathbf{N} le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\omega$. La condition (2.10) est satisfaite pour les conditions aux limites locales suivantes :

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega , \quad (2.11)$$

ou

$$\mathbf{w}^+(\mathbf{X}) = \mathbf{w}^-(\mathbf{X}) \quad \text{sur} \quad \partial\omega . \quad (2.12)$$

La première condition (2.11) est satisfaite en utilisant des déformations homogènes sur les bords du VER :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in \partial\omega . \quad (2.13)$$

La seconde condition (2.12) indique une périodicité des perturbations superposées \mathbf{w} sur $\partial\omega$. On peut décomposer les bords en parties $\partial\omega^+$ et $\partial\omega^-$, ($\partial\omega = \partial\omega^+ \cup \partial\omega^-$), avec les vecteurs normaux sortants \mathbf{N}^+ et \mathbf{N}^- , ($\mathbf{N}^+ = -\mathbf{N}^-$), aux deux points associés $\mathbf{X}^+ \in \partial\omega^+$ et $\mathbf{X}^- \in \partial\omega^-$ (voir figure 2.1) :

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = \bar{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) . \quad (2.14)$$

La troisième condition, associée aux tractions uniformes, $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{N}$, peut être exprimée sur les bords du VER, $\partial\omega$. Pour les VER irréguliers, les deux conditions aux limites, déformations homogènes et tractions uniformes sont généralement utilisées. Ces conditions donnent les limites supérieures et inférieures de la rigidité du VER qui convergent l'un vers l'autre si la taille du VER devient grande (Pour plus de détails sur les conditions aux limites au niveau microscopique, voir par exemple Miehe (2003)).

Dans nos études, on considère les déformations homogènes (2.13) et les conditions de périodicité (2.14) sur les bords du VER. Notons que ces conditions aux limites dépendent du tenseur gradient de déformation macroscopique, $\bar{\mathbf{F}}$.

La deuxième relation de couplage permet de déterminer la contrainte effective $\bar{\mathbf{P}}$ à un point particulier $\bar{\mathbf{X}}$ du domaine macroscopique Ω , où l'état de contrainte est supposé homogène dans le voisinage de $\bar{\mathbf{X}}$:

$$\bar{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P}(\mathbf{X}) d\omega . \quad (2.15)$$

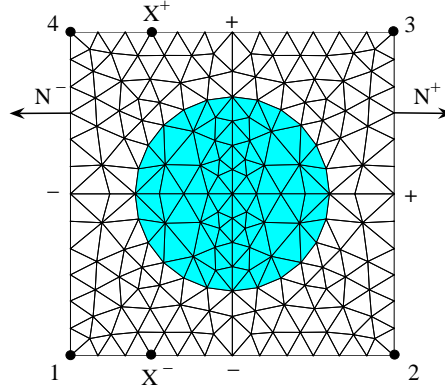


FIGURE 2.1 – Schéma d'un VER avec des conditions de périodicité.

Finalement, le théorème de la moyenne d'énergie, connu dans la littérature comme la condition de Hill-Mandel ou la condition de macrohomogénéité (Hill (1963); Suquet (1985)), exige que la moyenne de la variation du travail effectué dans le volume du VER soit égal à la variation locale du travail au niveau macroscopique :

$${}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}} = \langle {}^t\mathbf{P}(\mathbf{X}) : \delta\mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} {}^t\mathbf{P}(\mathbf{X}) : \delta\mathbf{F}(\mathbf{X}) d\omega \quad \forall \delta\mathbf{u} . \quad (2.16)$$

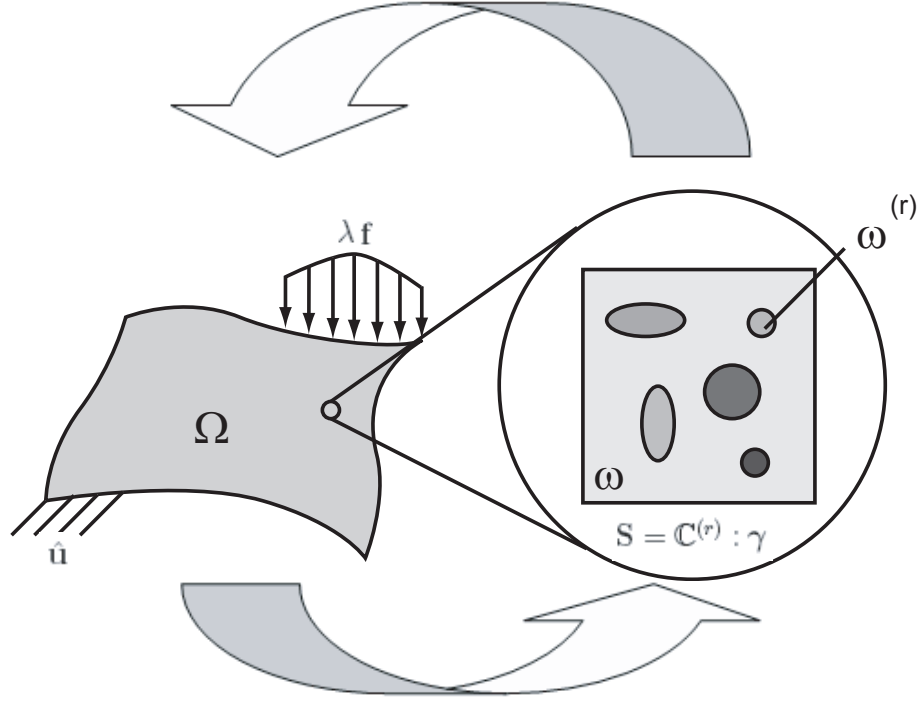
A ce stade, on cherche une relation entre les contraintes et les déformations macroscopiques. Le problème étant non linéaire, le principe de superposition ne peut pas s'appliquer pour construire le tenseur de localisation au niveau micro. On se propose d'appliquer la technique de perturbation qui permet de transformer le problème non linéaire en une série de problèmes linéaires et ainsi se ramener aux techniques habituelles pour construire le tenseur de localisation et la loi de comportement macroscopique.

2.2 MAN et problème d'homogénéisation à deux échelles

Les formulations micro et macro sont décrites par le système d'équations non linéaires (2.2, 2.4, 2.5, 2.14 et 2.15, voir figure 2.2). Nous montrons que la procédure de perturbation permet de transformer le problème non linéaire en une série de problèmes linéaires. En raison des équations de couplage, à chaque ordre asymptotique, la solution des problèmes linéaires résultant est obtenue en utilisant le principe de superposition. De plus, pour des raisons de clarté, dans cette présentation, on considère seulement le cas des conditions aux limites de périodicité au niveau microscopique. La condition des déformations homogènes est présentée dans l'annexe C.

$$\begin{array}{ll} \text{La forme faible macroscopique} & \text{La forme faible microscopique} \\ \int_{\Omega} {}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}} \, d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma & \int_{\omega} {}^t\mathbf{P} : \delta\mathbf{F} \, d\omega = 0 \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P}(\mathbf{X}) \, d\omega$$



$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \, d\omega$$

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I})(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-)$$

FIGURE 2.2 – Résumé du problème multi échelle à résoudre.

2.2.1 Technique de perturbation

La résolution des problèmes multi échelles non linéaires (2.2), (2.4), (2.5), (2.14) et (2.15) est effectuée à l'aide de la méthode asymptotique numérique. Pour le problème considéré dans cette étude, toutes les variables aux niveaux micro et macro sont développées en séries en utilisant la représentation en séries (1.4). Nous représentons ces variables dans le vecteur mixte $\mathbf{U} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{u}, \mathbf{P}, \dots)$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}(a) \\ \lambda(a) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^N a^i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \lambda_i \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

Perturbation au niveau macroscopique

Le problème macroscopique est défini par (2.2). A ce niveau, la relation de comportement n'est pas connue explicitement. Elle sera déduite à partir d'un calcul d'éléments finis au niveau microscopique. Les variables principales du problème non linéaire (2.2) sont $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{P}})$ et λ . Elles sont développées en séries entières en utilisant (2.17) comme nous l'avons montré dans le chapitre 1. L'introduction du développement asymptotique dans le problème non linéaire (2.2) permet d'obtenir une suite de problèmes linéaires :

Ordre 1 :

$$\int_{\Omega} {}^t\bar{\mathbf{P}}_1 : \delta\bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_1 \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (2.18)$$

Ordre p :

$$\int_{\Omega} {}^t\bar{\mathbf{P}}_p : \delta\bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (2.19)$$

Pour pouvoir résoudre les problèmes macroscopiques (2.18) et (2.19), il faut d'abord résoudre partiellement les problèmes linéaires au niveau microscopique obtenus par la même technique de perturbation.

Perturbation au niveau microscopique

Le problème au niveau microscopique peut s'écrire sous la forme suivante (voir le chapitre 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} {}^t\mathbf{P} : \delta\mathbf{F} d\omega = 0 \\ \mathbf{S} = \mathbb{C}^{(r)} : \boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{I} \end{array} \right. \quad \text{dans } \omega \quad (2.20)$$

+C.L. : $\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-)$ sur $\partial\omega$

Ce problème ressemble à celui présenté dans le chapitre 1 (voir le tableau 1.1). La différence principale est que, dans le problème du tableau 1.1, le chargement considéré est une force donnée et appliquée sur le bord du domaine, alors que, dans le système (2.20), le chargement est un déplacement imposé par les bords microscopiques. Une difficulté supplémentaire tout de même, ce déplacement imposé sur le bord du VER dépend du gradient de déformation macroscopique, $\bar{\mathbf{F}}$, qui est lui-même inconnu. Rappelons qu'au niveau du VER, les lois de comportement sont connues pour chaque phase (relation (2.20-2)).

Commençons d'abord par appliquer la technique de perturbation au problème non linéaire (2.20). Les variables à développer en séries sont \mathbf{P} , \mathbf{F} , \mathbf{S} , $\boldsymbol{\gamma}$ et \mathbf{u} . Comme il a

été détaillé dans le chapitre 1, l'introduction du développement asymptotique dans le problème non linéaire (2.20) permet d'obtenir les problèmes linéaires suivants :

Ordre 1 :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\delta u}) = 0 \\ \mathbf{S}_1 = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{P}_1 = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 = \nabla \mathbf{u}_1 \end{cases} \quad \text{dans } \omega \quad (2.21)$$

+C.L. : $\mathbf{u}_1^+ - \mathbf{u}_1^- = \bar{\mathbf{F}}_1 \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-)$ sur $\partial\omega$

Ordre p :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\delta u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\boldsymbol{\delta u}) \\ \mathbf{S}_p = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + \mathbf{S}_p^{nl} \\ \mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl} \\ \mathbf{F}_p = \nabla \mathbf{u}_p \end{cases} \quad \text{dans } \omega \quad (2.22)$$

+C.L. : $\mathbf{u}_p^+ - \mathbf{u}_p^- = \bar{\mathbf{F}}_p \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-)$ sur $\partial\omega$

où les définitions des opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{F}_p^{nl} et des tenseurs \mathbb{B} et $\mathbb{H}^{(r)}$ sont les mêmes qui sont données dans le chapitre 1. Notons que l'opérateur tangent \mathcal{L} est bien défini et reste le même pour tous les ordres de la série. Le second membre de l'équation (2.22-1), $\mathcal{F}_p^{nl}(\boldsymbol{\delta u})$, est calculé à partir des solutions obtenues aux ordres précédents $p > 1$.

2.2.2 Localisation

En raison des conditions de couplage entre les problèmes macroscopiques et microscopiques, on commence par résoudre partiellement les problèmes linéaires au niveau microscopique à chaque ordre. La solution obtenue permet de construire numériquement le tenseur de localisation et ensuite, la matrice des modules tangents pour résoudre le problème macroscopique.

Comme les problèmes (2.21) et (2.22) sont linéaires, nous pouvons appliquer le principe de superposition. Considérons d'abord le problème à l'ordre 1 (2.21). Grâce au principe de superposition, la solution à l'ordre 1, \mathbf{u}_1 , peut être exprimée comme une combinaison linéaire des modes de la solution obtenue en imposant indépendamment les champs de déformation homogène via les conditions aux limites dans le problème (2.21). Ici, nous donnons un exemple dans le cas 2D, quoique la méthodologie puisse être facilement étendue au cas 3D. Donc, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \bar{F}_1^{11} \tilde{\mathbf{u}}^{(11)}(\mathbf{X}) + \bar{F}_1^{12} \tilde{\mathbf{u}}^{(12)}(\mathbf{X}) + \bar{F}_1^{21} \tilde{\mathbf{u}}^{(21)}(\mathbf{X}) + \bar{F}_1^{22} \tilde{\mathbf{u}}^{(22)}(\mathbf{X}) \quad \text{dans } \omega, \quad (2.23)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^{(ij)}(\mathbf{X})$ sont les solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^{(ij)}, \boldsymbol{\delta u}) = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{(ij)+} - \tilde{\mathbf{u}}^{(ij)-} = \mathbf{X}^{(ij)+} - \mathbf{X}^{(ij)-} \quad \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}^{(11)+} - \mathbf{X}^{(11)-} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) , \\
 \mathbf{X}^{(12)+} - \mathbf{X}^{(12)-} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) , \\
 \mathbf{X}^{(21)+} - \mathbf{X}^{(21)-} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) , \\
 \mathbf{X}^{(22)+} - \mathbf{X}^{(22)-} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) .
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Les exposants (ij) indiquent tout simplement que la réponse recherchée est relative à la composante $\bar{\mathbf{F}}^{(ij)}$ du tenseur de gradient de déformation macroscopique. Finalement, la solution \mathbf{u}_1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \mathbb{A}(\mathbf{X}) : \bar{\mathbf{F}}_1 , \tag{2.26}$$

où \mathbb{A} est un tenseur d'ordre trois défini par $A_{ijk} = \tilde{u}_i^{(jk)}$. Par la suite, nous omettons la dépendance de \mathbf{X} dans un souci de clarté lorsqu'aucune confusion n'est possible. En dérivant (2.26) par rapport à \mathbf{X} et en utilisant $\nabla \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1$, on obtient :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbb{A}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{F}}_1 , \tag{2.27}$$

où $\mathbb{A}_{,\mathbf{X}}$ est un tenseur d'ordre quatre identifié comme un tenseur de localisation. Il est calculé numériquement sur le VER.

Ce tenseur de localisation est bien commun à tous les ordres de la série. Pour se convaincre, on considère le problème à l'ordre p (2.22). Dans ce cas, la solution \mathbf{u}_p est décomposée comme suit :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p^l + \mathbf{u}_p^{nl} \quad \text{dans } \omega , \tag{2.28}$$

avec, dans le cas 2D :

$$\mathbf{u}_p^l = \bar{F}_p^{11} \tilde{\mathbf{u}}^{(11)} + \bar{F}_p^{12} \tilde{\mathbf{u}}^{(12)} + \bar{F}_p^{21} \tilde{\mathbf{u}}^{(21)} + \bar{F}_p^{22} \tilde{\mathbf{u}}^{(22)} . \tag{2.29}$$

En comparant l'équation (2.29) avec l'équation (2.23), on peut conclure que les termes $\tilde{\mathbf{u}}^{(ij)}$ sont exactement ceux obtenus précédemment à l'ordre 1. Puis, nous avons un deuxième problème linéaire qui concerne des termes des seconds membres, \mathbf{u}_p^{nl} :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_p^{nl}, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) \quad \text{dans } \omega . \tag{2.30}$$

Notons qu'à l'ordre p , seule le vecteur \mathbf{u}_p^{nl} est calculé. Enfin, la solution \mathbf{u}_p peut être exprimée comme :

$$\mathbf{u}_p = \mathbb{A} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbf{u}_p^{nl} , \tag{2.31}$$

où \mathbb{A} est le même tenseur que celui obtenu à l'ordre 1. En considérant $\nabla \mathbf{u}_p = \mathbf{F}_p$, on obtient :

$$\mathbf{F}_p = \mathbb{A}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl}, \quad (2.32)$$

où $\mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl}$ est un tenseur d'ordre deux.

2.2.3 Homogénéisation

Pour obtenir la relation homogénéisée du comportement, nous considérons la relation (2.22-3) :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl}. \quad (2.33)$$

Remplaçons la relation (2.32) dans (2.33) :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl} + \mathbf{P}_p^{nl}. \quad (2.34)$$

En définissant $\mathbf{P}_p^{*nl} = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl} + \mathbf{P}_p^{nl}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,\mathbf{X}}$, on obtient finalement :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{L} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbf{P}_p^{*nl}. \quad (2.35)$$

Les contraintes effectives peuvent être obtenues à chaque ordre p en faisant la moyenne de l'équation (2.35) :

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \bar{\mathbb{L}} : \bar{\mathbf{F}}_p + \bar{\mathbf{P}}_p^{*nl}, \quad (2.36)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{L}} &= \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbb{L} d\omega, \\ \bar{\mathbf{P}}_p^{*nl} &= \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P}_p^{*nl} d\omega. \end{aligned}$$

Nous pouvons noter une analogie directe avec l'homogénéisation linéaire, où $\mathbb{H}^{(r)}$ remplace le tenseur élastique linéaire de la phase (r) et $\mathbb{A}_{,\mathbf{X}}$ remplace le tenseur de localisation reliant les déformations microscopiques linéarisées $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y})$ aux déformations macroscopiques linéarisées $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, où \mathbf{y} désigne les coordonnées microscopiques.

2.2.4 Problème macroscopique à résoudre

En introduisant (2.36) dans l'équation (2.19), on obtient la forme finale du problème linéaire à l'ordre p au niveau macroscopique :

$$\int_{\Omega} {}^t \bar{\mathbf{F}}_p : \bar{\mathbb{L}} : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Omega} {}^t \bar{\mathbf{P}}_p^{*nl} : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega. \quad (2.37)$$

Le module tangent est calculé numériquement à partir des problèmes construits au niveau microscopique. La procédure consiste à résoudre le problème (2.37) donnant les déplacements au niveau de la structure macroscopique \bar{u} . Ensuite, en chaque point d'intégration le tenseur $\bar{\mathbf{F}}$ peut être calculé ce qui permet de finir les calculs des différentes variables au niveau microscopique.

2.2.5 Discrétisation et résolution

La procédure de discrétisation dans le cadre de notre méthode MAN multi échelle est présentée ici. La discrétisation a été déjà expliqué dans le cadre de la MAN dans le chapitre 1. Puisque le problème au niveau microscopique est similaire à celui présenté dans le chapitre 1, la forme discrétisée de ce problème peut s'écrire sous la forme suivante :

Ordre 1 :

$$[\mathbf{K}_t] \{v_1\} = 0 , \quad (2.38)$$

Ordre p :

$$[\mathbf{K}_t] \{v_p\} = \{\mathcal{F}_p^{nl}\} , \quad (2.39)$$

où $[\mathbf{K}_t]$ et $\{\mathcal{F}_p^{nl}\}$ sont exactement les mêmes donnés dans le chapitre 1. De plus, les conditions de périodicité sur les bords du VER peuvent s'écrire sous la forme discrétisée dans le cas 2D en sachant que la méthodologie peut être facilement étendue au cas 3D :

$$\{v_p\}^+ - \{v_p\}^- = [\mathcal{X}] \{\bar{F}_p\} \quad p = 1, \dots, N , \quad (2.40)$$

avec

$$[\mathcal{X}] = [X^{(11)+} - X^{(11)-}, X^{(12)+} - X^{(12)-}, X^{(21)+} - X^{(21)-}, X^{(22)+} - X^{(22)-}] ,$$

$$\{\bar{F}_p\} = {}^t \langle \bar{F}_p^{11}, \bar{F}_p^{12}, \bar{F}_p^{21}, \bar{F}_p^{22} \rangle ,$$

et les signes $+$ et $-$ correspondant aux nœuds par paires sur les bords du VER (voir figure 2.1). Pour les nœuds sur les coins (nœuds 1, 2, 3 et 4), on utilise les conditions de déformation homogène :

$$\{v_p^i\} = [X^{(11)^i}, X^{(12)^i}, X^{(21)^i}, X^{(22)^i}] \{\bar{F}_p\} \quad i = 1, 2, 3, 4 . \quad (2.41)$$

Notons que le choix des conditions de déformation homogène pour les nœuds sur les coins du VER seulement est une stratégie pour résoudre le problème microscopique avec les conditions de périodicité.

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.2.2, le vecteur $\{v_p\}$ peut être décomposé en fonction du vecteur $\{\bar{F}_p\}$ qui est inconnu. Ainsi, on peut écrire :

$$\{v_p\} = [\mathbf{A}] \{\bar{F}_p\} + \{v_p^{nl}\} , \quad (2.42)$$

où dans le cas 2D :

$$[\mathbf{A}] = [\tilde{v}^{(11)}, \tilde{v}^{(12)}, \tilde{v}^{(21)}, \tilde{v}^{(22)}] , \quad (2.43)$$

où $\{v_p^{nl}\}$ est nul à l'ordre 1. Pour obtenir les termes $\tilde{v}^{(ij)}$, il nous faut résoudre les problèmes suivants à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] \{\tilde{v}^{(ij)}\} = 0 \\ +C.L.1 : \{\tilde{v}^{(ij)+} - \tilde{v}^{(ij)-}\} = \{X^{(ij)+} - X^{(ij)-}\} \\ +C.L.2 : \{\tilde{v}^{(ij)l}\} = \{X^{(ij)l}\} \quad l = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (2.44)$$

Pour résoudre ces types de problèmes, on peut utiliser la technique de multiplicateur de Lagrange. Notons qu'on résout 4 et 9 équations pour les cas 2D et 3D, respectivement. Par contre, pour obtenir $\{v_p^{nl}\}$ ($\forall p > 2$), le problème suivant est considéré :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] \{v_p^{nl}\} = \{\mathcal{F}_p^{nl}\} \\ \{v_p^{nl}\} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (2.45)$$

Finalement, on obtient les déplacements nodaux microscopiques, $\{v_p\}$, en fonction du gradient de déformation macroscopique $\{\bar{F}_p\}$ associé au point d'intégration de la macro-structure.

Le vecteur gradient de déformation microscopique à l'ordre p , $\{F_p\}$, peut s'écrire comme suit (voir l'équation (1.22)) :

$$\{F_p\} = [G] \{v_p\}^e = [G] [\mathbf{A}]^e \{\bar{F}_p\} + [G] \{v_p^{nl}\}^e = [\tilde{\mathbf{A}}]^e \{\bar{F}_p\} + \{v_{p,X}^{nl}\}^e . \quad (2.46)$$

En considérant la relation (2.33) et les définitions sous la forme discrétisée, la contrainte microscopique $\{P_p\}$ au point d'intégration du VER peut donc être obtenue par :

$$\{P_p\} = [\mathbf{H}^{(r)}] \{F_p\} + \{P_p^{nl}\} . \quad (2.47)$$

En remplaçant la relation (2.46) dans (2.47), on obtient :

$$\{P_p\} = [\mathbf{H}^{(r)}] [\tilde{\mathbf{A}}]^e \{\bar{F}_p\} + [\mathbf{H}^{(r)}] \{v_{p,X}^{nl}\}^e + \{P_p^{nl}\} = [\mathbf{L}^{(r)}] \{\bar{F}_p\} + \{P_p^{*nl}\} . \quad (2.48)$$

En utilisant les relations du couplage et $\{\bar{F}_p\} = [\bar{G}] \{\bar{v}_p\}^e$, la contrainte macroscopique est donnée en chaque point d'intégration macroscopique à l'ordre p comme suit :

$$\{\bar{P}_p\} = [\bar{\mathbf{L}}] [\bar{G}] \{\bar{v}_p\} + \{\bar{P}_p^{nl}\} . \quad (2.49)$$

De ce fait, on obtient le vecteur des contraintes macroscopiques et on peut obtenir l'équation (2.19) sous forme discrétisée :

$$\sum_e^t \{\delta\bar{v}\}^e \left([\bar{k}_t^e] \{\bar{v}_p\}^e - \lambda_p \{f\}^e - \{\bar{f}_p^{nl}\}^e \right) = 0 , \quad (2.50)$$

où

$$[\bar{k}_t^e] = \int_{\omega_e} {}^t [\bar{G}] [\bar{\mathbf{L}}] [\bar{G}] , \quad (2.51)$$

$$\{\bar{f}_p^{nl}\}^e = - \int_{\omega_e} {}^t [\bar{G}] \{\bar{P}_p^{nl}\} . \quad (2.52)$$

Enfin, l'assemblage sur la structure donne :

$$[\bar{\mathbf{K}}_t] \{\bar{v}_p\} = \lambda_p \{\mathcal{F}\} + \{\bar{\mathcal{F}}_p^{nl}\} , \quad (2.53)$$

où $[\bar{\mathbf{K}}_t]$ est la matrice de rigidité tangente globale, $\{\mathcal{F}\}$ est le vecteur force globale et $\{\bar{\mathcal{F}}_p^{nl}\}$ est le vecteur global des secondes membres de la structure macroscopique.

Pour résoudre les problèmes linéaires résultant (2.53), nous avons besoin de définir une équation supplémentaire comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1. Dans le cas présent, on considère la projection du champ de déplacement macroscopique sur sa tangente (voir l'équation (1.28)) :

$$a = (\{\bar{v}(a)\} - \{\bar{v}_0\}) \cdot \{\bar{v}_1\} . \quad (2.54)$$

Notons que l'équation (2.54) qui utilise la variable macroscopique $\{\bar{v}\}$, peut être remplacée en utilisant les variables locales comme le vecteur de déplacement de VER discrétisé considéré à un point d'intégration de la structure.

2.3 Validation numérique : flexion d'une poutre rectangulaire

Nous étudions la précision et l'efficacité de la technique proposée dans le cadre des problèmes non linéaires, en considérant la flexion d'une poutre rectangulaire constituée d'un matériau hétérogène. Cet exemple permet de montrer la validité de l'algorithme associant la méthode des éléments finis multi échelles et la méthode asymptotique numérique. Les problèmes d'instabilités ne sont pas traités dans cet exemple. Les résultats numériques de ce test sont comparés à ceux issus d'un modèle complet. Dans ce dernier, les détails de toutes les hétérogénéités sont maillés.

Le problème proposé a été discrétisé à l'aide d'éléments finis à deux dimensions dans le cadre des contraintes planes. La structure macroscopique est maillée avec des éléments quadrangulaires à quatre nœuds alors que les cellules élémentaires où les VER sont maillés avec des éléments triangulaires à trois nœuds.

Dans la procédure MAN, deux paramètres principaux sont importants : l'ordre de troncature N des séries qui est généralement choisi entre 10 et 20, et le paramètre de précision δ qui permet de limiter la longueur de chaque pas asymptotique dans la procédure

de continuation (voir équation (1.33)). Dans ce chapitre, nous avons résolu les problèmes non linéaires en utilisant la MAN avec $N = 15$ et $\delta = 10^{-6}$. Pour plus d'informations sur le choix de ces différents paramètres, le lecteur peut consulter les références suivantes Lahmam et al. (2002); Aggoune et al. (2006); Boutyour et al. (2004); Yvonnet et al. (2007); Cochelin et al. (2007).

On désigne par V le volume du VER, E_i , ν_i et V_i sont le module de Young, le coefficient de Poisson, et le volume de la matrice pour $i = 1$ et celui de l'inclusion pour $i = 2$, respectivement. Le coefficient de Poisson est égal à 0,3.

La géométrie de la structure ainsi que les conditions aux limites sont données dans la figure 2.3. La poutre est soumise à une charge concentrée au point C et encastrée sur son bord gauche.

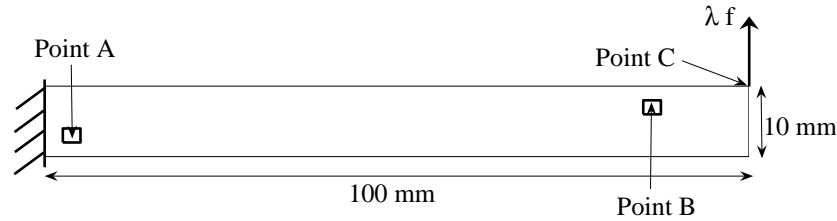


FIGURE 2.3 – Géométrie du problème de flexion et positions des cellules A et B considérées pour comparer les contraintes.

Nous considérons une déformation homogène sur les bords du VER comme décrit dans l'équation (2.13). Différents aspects liés à la technique d'homogénéisation sont étudiés. Pour ce faire, trois morphologies de VER sont considérées : (i) un VER biphasique avec une inclusion circulaire (figure 2.4a), (ii) un VER biphasique avec une inclusion elliptique verticale (figure 2.4b), et (iii) un VER biphasique avec une inclusion elliptique horizontale (figure 2.4c).

De plus, l'influence des rapports de rigidité E_2/E_1 et des fractions volumiques V_2/V est étudiée. V étant le volume total du VER. Nous avons comparé les résultats obtenus avec notre procédure multi échelle à ceux du modèle complet qui représente le maillage de toutes les hétérogénéités (voir la figure 2.5).

Pour étudier l'influence des rapports de rigidité, le matériau biphasique avec l'inclusion circulaire est considéré. Nous avons testé deux rapports de rigidité différents ($E_2/E_1 = 10$ et $E_2/E_1 = 0,1$). Ils correspondent à deux cas : dans le premier, l'inclusion est plus rigide que la matrice ($E_2/E_1 = 10$ et $E_2 = 100000MPa$). Dans le second, l'inclusion est moins rigide que la matrice ($E_2/E_1 = 0,1$ et $E_2 = 10000MPa$). La figure 2.6 montre le déplacement vertical du point C en fonction du paramètre de chargement λ pour les deux approches (MAN multi échelle et modèle complet). Les carrés et les cercles indiquent les fins de pas asymptotiques. Notons que la procédure multi échelle proposée peut repro-

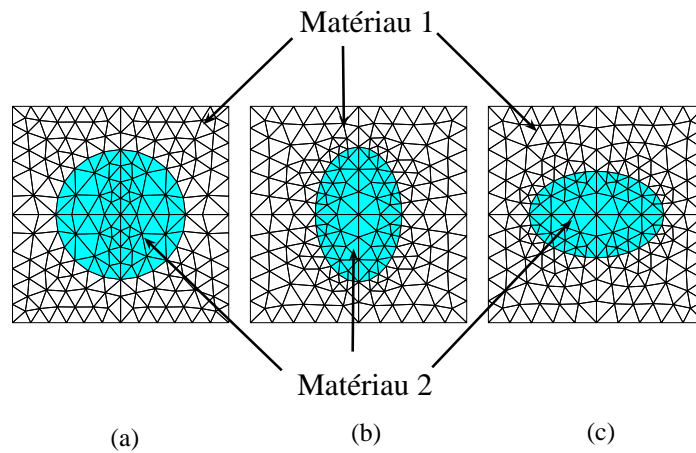


FIGURE 2.4 – (a) VER biphasique avec l'inclusion circulaire, (b) VER biphasique avec l'inclusion elliptique verticale, et (c) VER biphasique avec l'inclusion elliptique horizontale.

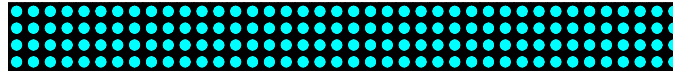


FIGURE 2.5 – Maillage complet de la poutre rectangulaire (58658 d.d.l.).

duire, avec une très bonne précision, la réponse de la structure hétérogène complète. La figure 2.7 montre le maillage déformé de la macrostructure homogène équivalente. Cette configuration est obtenue avec seulement deux pas asymptotiques en utilisant l'approche MAN multi échelle. Nous donnons également la microstructure déformée pour deux points d'intégration à deux éléments situés aux points A et B (voir la figure 2.3).

Pour étudier l'influence de la fraction volumique, nous considérons le matériau biphasique avec l'inclusion circulaire, le rapport de rigidité choisi est de $E_2/E_1 = 10$ et les différentes fractions volumiques sont $V_2/V = 28\%$ et $V_2/V = 7\%$. La figure 2.8 montre les déplacements du point C en fonction du paramètre de chargement. Pour analyser les variables locales obtenues avec les deux approches, les moyennes spatiales des contraintes macroscopiques à deux cellules situées aux points A et B ont été calculées dans le modèle complet et comparées avec celles obtenues dans l'approche MAN multi échelle. Les figures 2.9 et 2.10 montrent l'évolution des contraintes S_{11} , S_{22} et S_{12} en fonction du paramètre de chargement pour les deux modèles.

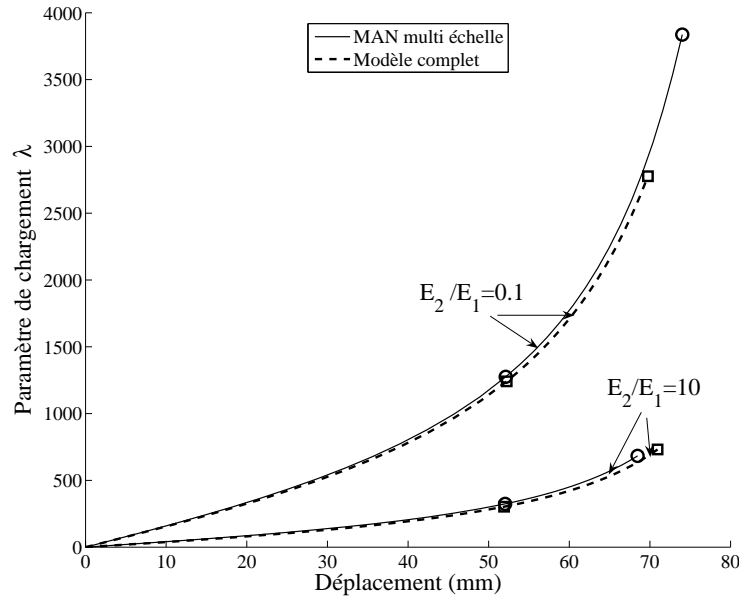


FIGURE 2.6 – Diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire et pour différents rapports de rigidité ; le fraction volumique est $V_2/V = 28\%$.

Enfin, les matériaux biphasiques avec les inclusions elliptiques verticale et horizontale sont considérés. Le rapport de rigidité est choisi égal à 10 et les fractions volumiques des deux morphologies de VER sont les mêmes et égales à 20%. Les déplacements du point C en fonction du paramètre de chargement sont présentés sur la figure 2.11.

Les tests proposés montrent la validité de l'approche MAN multi échelle puisque les résultats de cette approche sont très similaires à ceux obtenus à l'aide du modèle complet dans tous les tests proposés. Notons qu'avec seulement deux pas asymptotiques, on obtient un déplacement vertical représentant 70% de la longueur de la poutre. Seulement deux décompositions de la matrice de rigidité tangente sont nécessaires ce qui permet de réduire de façon significative le temps de calcul. Les procédures de transition d'échelles sont aussi utilisées une seule fois par pas. Une procédure itérative classique de type Newton-Raphson demande plusieurs pas et plusieurs itérations pour obtenir la même courbe de réponse.

Notons que, dans cette étude, nous avons effectué des comparaisons entre les résultats de notre modèle MAN multi échelle et le modèle complet et ceci en considérant des variables globales comme les déplacements, voir figures 2.6, 2.8 et 2.11, et des variables locales comme les contraintes, voir figures 2.9 et 2.10. Ces contraintes sont considérées en deux points : au point A en présence de grandes déformations et au point B en présence des grandes rotations.

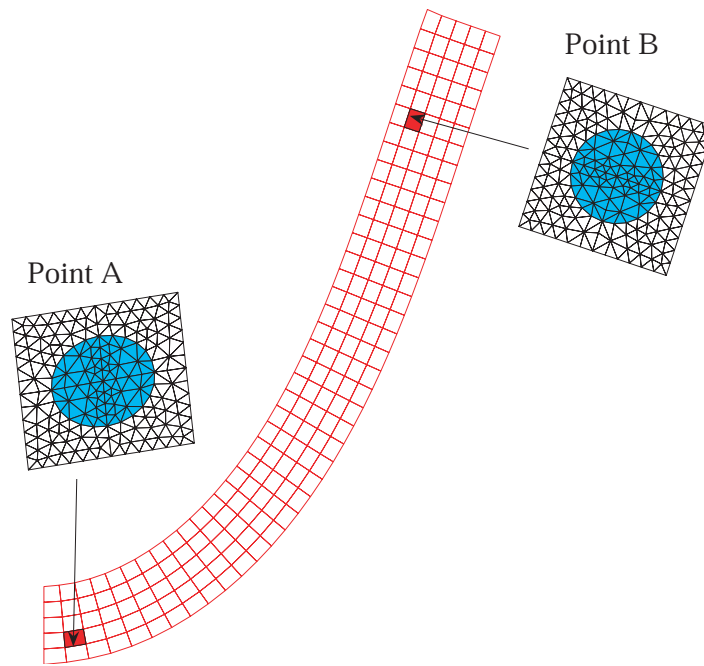


FIGURE 2.7 – Configuration déformée de la structure et du VER aux points d'intégration après deux pas asymptotiques du modèle MAN multi échelle (Cas considéré : l'inclusion circulaire, la fraction volumique de l'inclusion est 28% et le rapport de rigidité est 0, 1).

2.4 Conclusion

Nous avons proposé une technique numérique, dans le cadre des matériaux hétérogènes, combinant la *méthode d'éléments finis multi échelles* (EF²) et la *méthode asymptotique numérique* (MAN). Dans ce chapitre, nous nous sommes limités à une loi de comportement linéaire au niveau microscopique, mais les grands déplacements sont pris en compte aux deux niveaux micro et macro. Les lois de comportement non linéaire peuvent facilement être mises en œuvre dans ce modèle pour des applications plus réalistes (voir le chapitre 3). En utilisant la MAN, le problème non linéaire à résoudre est transformé en une succession de problèmes linéaires. Par conséquent, dans le contexte de l'homogénéisation, les tenseurs de localisation et d'homogénéisation peuvent être construits pour chaque problème local linéaire. Nous avons ensuite calculé la matrice de rigidité tangente qui est la même pour tous les problèmes linéaires locaux permettant une réduction significative du temps de calcul puisqu'une seule décomposition de cette matrice est nécessaire pour chaque pas asymptotique. La longueur de chaque pas est estimée a posteriori en utilisant les termes des séries déjà calculés. Ce qui permet d'obtenir naturellement un algorithme avec des longueurs de pas adaptatives. Ce n'est pas le cas pour les algorithmes classiques itératifs basés sur la procédure de Newton-Raphson.

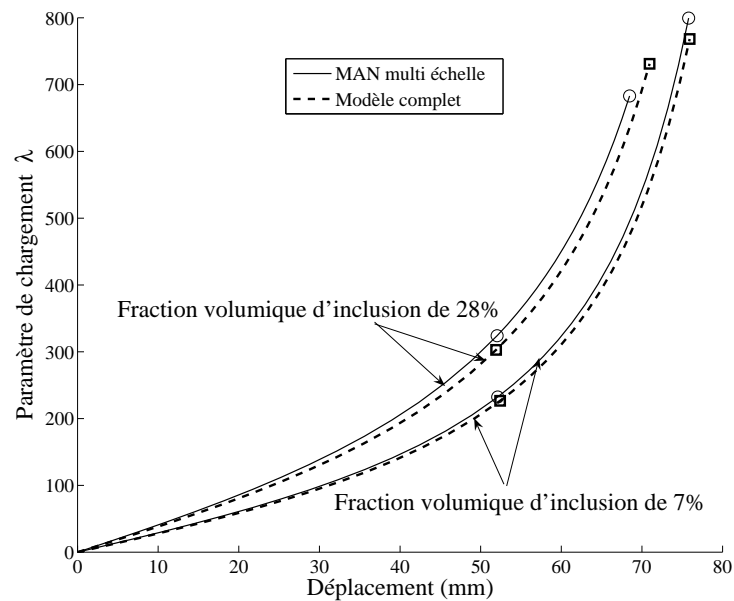


FIGURE 2.8 – Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour le VER biphasique avec l’inclusion circulaire, les différentes fractions volumiques et le rapport de rigidité de 10.

Nous avons validé l’algorithme proposé en étudiant la flexion d’une poutre rectangulaire hétérogène. Une comparaison avec le modèle complet montre que notre approche décrit précisément tout le comportement de la structure hétérogène en analysant les variables globales comme le champ de déplacements nodaux et les variables locales comme les contraintes moyennes spatiales. L’exemple présenté montre que la MAN permet d’obtenir de grands pas asymptotiques. Notons que dans le cadre de la MAN, il est possible d’utiliser des procédures itératives basées sur un prédicteur d’ordre élevé et un correcteur d’ordre élevé (voir Lahmam et al. (2002)). De plus, des algorithmes efficaces ont été établis pour la détection des points de bifurcation et pour le calcul du post flambage des structures minces (Boutyouur et al. (2004)). Cette procédure peut être facilement mise en œuvre dans l’algorithme proposé dans ce travail. La démarche et les formulations présentées dans ce chapitre ont fait l’objet d’une publication parus Nezamabadi et al. (2009a)

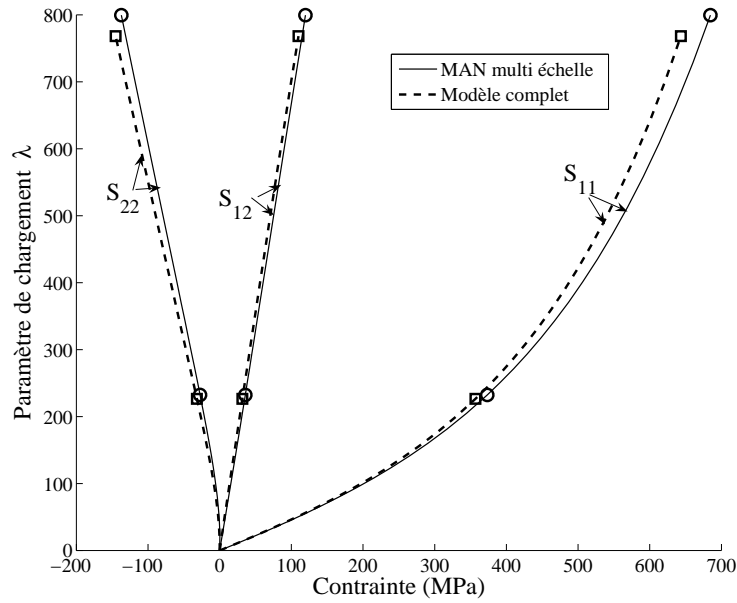


FIGURE 2.9 – Les diagrammes charge-contraintes du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire, la fraction volumique de 7% et le rapport de rigidité de 10 au point A .

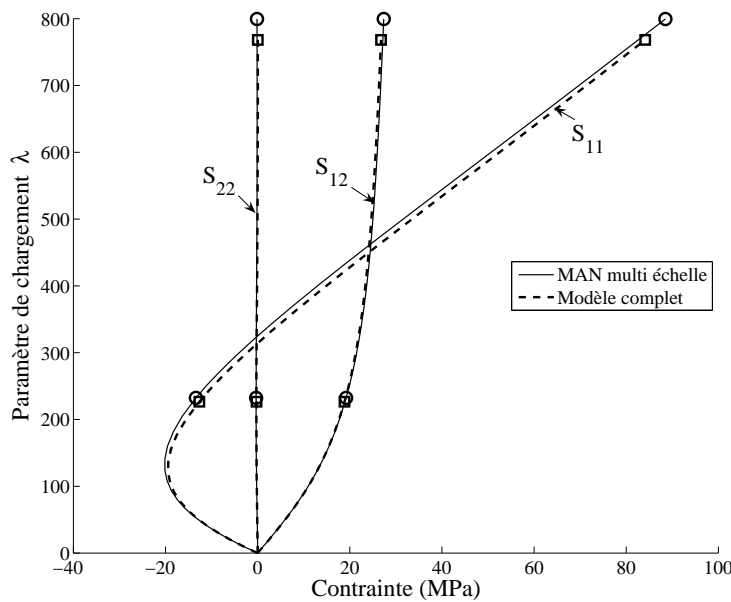


FIGURE 2.10 – Les diagrammes charge-contraintes du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire, la fraction volumique de 7% et le rapport de rigidité de 10 au point B .

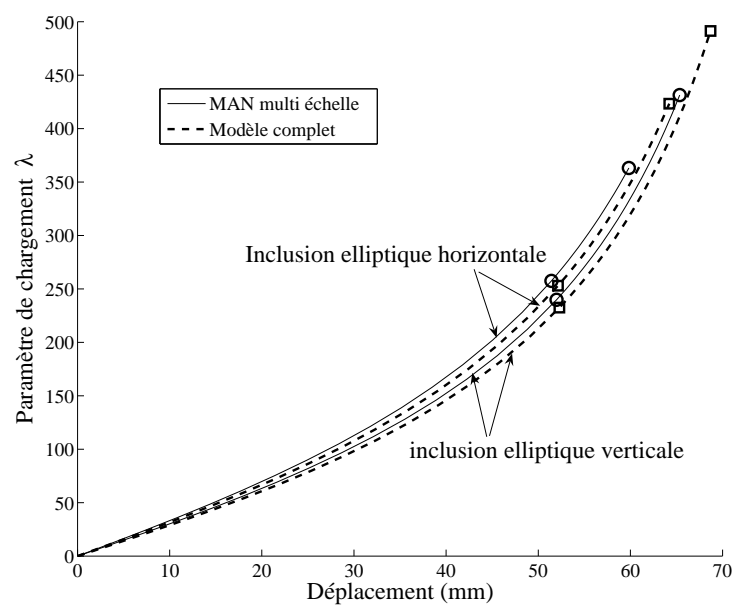


FIGURE 2.11 – Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour le VER biphasique avec les inclusions elliptiques verticale et horizontale et le rapport de rigidité de 10.

Chapitre 3

Méthode Asymptotique Numérique pour les lois de comportement non linéaires

Sommaire

3.1 Comportement hyperélastique	42
3.1.1 Formulations des matériaux hyperélastiques	43
3.1.2 Quelques modèles de lois hyperélastiques	44
3.1.3 Technique de perturbation	45
3.1.4 Exemples numériques	51
3.2 Comportement élastoplastique	52
3.2.1 Théorie de déformation totale	54
3.2.2 Théorie incrémentale	57
3.2.3 Exemple numérique	60
3.3 Conclusion	61

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la procédure MAN multi échelle combinant la méthode des éléments finis multi niveaux (EF^2) et la méthode asymptotique numérique (MAN), en nous limitant à une loi de comportement linéaire avec la prise en compte des grands déplacements et des grandes rotations. Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à l'extension de notre procédure aux lois de comportement non linéaires. Le comportement non linéaire concerne les différentes phases de la microstructure. De ce fait, dans la formulation multi échelle, les relations de comportement interviennent uniquement au niveau du VER. Pour appliquer la technique de perturbation, dans le cadre de la MAN pour ce type de comportement, on est amené à transformer les relations non régulières en des fonctions régulières. Pour cette raison, des procédures de régularisation

sont utilisées pour remplacer les relations singulières par des fonctions analytiques; c'est-à-dire, une formulation quadratique. Ensuite, des variables additionnelles sont introduites pour obtenir des formules de récurrence simples dans la procédure de perturbation. Des relations différentielles peuvent aussi être utilisées pour certaines fonctions fortement non linéaires (voir Potier-Ferry et al. (1997); Zahrouni et al. (1998, 2004); Cochelin et al. (2007)).

Rappelons que pour une loi de comportement linéaire, la relation de comportement à un ordre p quelconque s'écrit comme suit :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma}_p , \quad (3.1)$$

où \mathbb{C} représente le tenseur d'ordre 4 des constantes élastiques du matériau. En revanche, dans le cas du comportement non linéaire, cette relation s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\gamma}_p + \mathbf{S}_p^{res} , \quad (3.2)$$

où le tenseur \mathbb{C} est remplacé par le tenseur \mathbb{C}_t des modules tangents qui dépend à la fois des constantes élastiques du matériau et de l'état de contraintes. La non linéarité du matériau fait apparaître un second membre \mathbf{S}_p^{res} qui dépend des solutions aux ordres précédant l'ordre p . Cette relation est ensuite introduite dans le problème d'équilibre à l'ordre p . Le tenseur des modules tangents intervient dans le calcul de la matrice de rigidité tangente et le tenseur \mathbf{S}_p^{res} intervient dans le calcul des vecteurs seconds membres du problème d'équilibre.

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs lois de comportement hyperélastiques et élastoplastiques. Nous montrerons comment les adapter au cadre de la MAN. Rappelons que toutes les lois de comportement non linéaires présentées dans cette étude peuvent s'écrire sous la forme de la relation (3.2) à l'ordre p . Notons que l'application de la MAN aux problèmes avec un comportement non linéaire a fait l'objet de plusieurs travaux (voir Braikat (1995); Zahrouni (1998); Zahrouni et al. (1998); Imazaten (2001); Assidi (2007); Assidi et al. (2009)).

3.1 Comportement hyperélastique

Les études théoriques des matériaux hyperélastiques ont mobilisé beaucoup de chercheurs depuis des dizaines d'années; voir par exemple les travaux de Treloar (1975); Mullins et Thomas (1963); Gent (1974); Frakley et Payne (1978). Cependant, les premiers travaux importants ont été proposés par Mooney (1940) et Rivlin (1948). Valanis et Landel (1967) ont proposé d'écrire l'énergie de déformation sous une forme séparable

suivant les directions principales. Cette démarche a mené au modèle très utilisé d'Ogden (Ogden (1972, 1982)). Les difficultés liées à la modélisation de l'incompressibilité ont été traitées par Oden (Oden (1972); Oden et Kikuchi (1982)) dans le cadre de la méthode des éléments finis. Récemment, différents modèles ont été développés pour les matériaux hyperélastiques surtout dans le domaine biomécanique (par exemple, Nielsen et al. (1991); Holzapfel (2000); Holzapfel et Gasser (2000); Humphrey (2002); Criscione et al. (2003); Sacks (2003); Zulliger et al. (2004)). Dans cette section, on présente l'adaptation de quelques modèles classiques de matériaux hyperélastiques dans le contexte de la MAN. Notons que les développements introduits dans cette section sont originaux.

3.1.1 Formulations des matériaux hyperélastiques

Généralement, les contraintes dans les matériaux hyperélastiques dérivent d'un potentiel de déformations élastiques. Cette fonction d'énergie de déformation est donnée en fonction du gradient de déformation $\Psi = \Psi(\mathbf{F})$. C'est une fonction continue à valeur scalaire. Dans cette étude, on se limite au cas d'un comportement isotrope. Les matériaux hyperélastiques isotropes peuvent être exprimés en fonction d'un ensemble d'invariants du tenseur symétrique de déformation de Cauchy-Green droit, $\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$. L'énergie de déformation peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi = \Psi[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})] , \quad (3.3)$$

où

$$I_1 = \mathbf{I} : \mathbf{C} = Tr(\mathbf{C}) , \quad (3.4)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(Tr(\mathbf{C}))^2 - Tr(\mathbf{C}^2)] , \quad (3.5)$$

$$I_3 = J^2 = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F})^2 . \quad (3.6)$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) . \quad (3.7)$$

Les expressions explicites des dérivées des invariants par rapport à \mathbf{C} sont obtenues sous la forme suivante :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (Tr(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\mathbf{I} : \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} , \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left[2Tr(\mathbf{C})\mathbf{I} - \frac{\partial (Tr(\mathbf{C}^2))}{\partial \mathbf{C}} \right] = I_1\mathbf{I} - \mathbf{C} , \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial J^2}{\partial \mathbf{C}} = I_3\mathbf{C}^{-1} . \quad (3.10)$$

La substitution des équations (3.8), (3.9) et (3.10) dans l'équation (3.7) donne :

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (3.11)$$

Lorsque le comportement hyperélastique du matériau s'accompagne d'un changement négligeable du volume, on parle alors d'un matériau hyperélastique incompressible. La formulation de ce type de matériau est donnée dans l'annexe D.

3.1.2 Quelques modèles de lois hyperélastiques

Plusieurs formes de la fonction d'énergie de déformation ont été proposées dans la littérature pour représenter le comportement hyperélastique. Dans cette section, nous présentons quelques fonctions définissant le comportement hyperélastique isotrope des matériaux.

La plus populaire de ces fonctions très utilisées dans la littérature, est le modèle d'Ogden pour la modélisation des matériaux comme le caoutchouc. La loi de comportement compressible d'Ogden (Ogden (1984)) est exprimée en termes de valeurs propres $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ du tenseur de Cauchy-Green droit, \mathbf{C} , par :

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\lambda_1^{\alpha_i/2} + \lambda_2^{\alpha_i/2} + \lambda_3^{\alpha_i/2} - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} \left(J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right), \quad (3.12)$$

où N , μ_i , α_i et β_i sont des constantes du matériau. Le deuxième terme de droite de l'équation (3.12) exprime la partie volumique de l'énergie de déformation.

En dérivant l'énergie de déformation (3.12) par rapport au tenseur \mathbf{C} , on obtient le second tenseur de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\lambda_1^{(\alpha_i/2)-1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{C}} + \lambda_2^{(\alpha_i/2)-1} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{C}} + \lambda_3^{(\alpha_i/2)-1} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \mathbf{C}} - J^{-\alpha_i \beta_i} \mathbf{C}^{-1} \right). \quad (3.13)$$

Comme cas particuliers, on peut obtenir à partir de l'équation (3.12), les modèles de Mooney-Rivlin et Néo-Hookéen (voir Holzapfel (2000)). En définissant $N = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$, le modèle courant de Mooney-Rivlin pour les matériaux incompressibles peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi &= c_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2 (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \\ &= c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3), \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec les constantes $c_1 = \mu_1/2$ et $c_2 = -\mu_2/2$. La version compressible du modèle de Mooney-Rivlin peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi = c(J - 1)^2 - d \log(J) + c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3), \quad (3.15)$$

où c et d sont des constantes du matériau. En imposant que la configuration de référence est sans contrainte, on peut déduire $d = 2(c_1 + 2c_2)$. En utilisant (3.15) et (3.7), on obtient, après quelques manipulations :

$$\mathbf{S} = 2(c_1 + c_2 I_1) \mathbf{I} - 2c_2 \mathbf{C} + [2cJ(J - 1) - d] \mathbf{C}^{-1} . \quad (3.16)$$

Le modèle Néo-Hookéen peut être retrouvé à partir de l'énergie de déformation (3.15) en fixant $c_2 = 0$. Une autre version de ce modèle qui est une extension de la loi linéaire isotrope (loi de Hooke) en grandes déformations peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi = \frac{1}{2} \lambda_0 (\ln J)^2 - \mu_0 \ln J + \frac{1}{2} \mu_0 (I_1 - 3) , \quad (3.17)$$

où λ_0 et μ_0 sont des constantes du matériau. Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{S} = (\lambda_0 \ln J - \mu_0) \mathbf{C}^{-1} + \mu_0 \mathbf{I} . \quad (3.18)$$

Comme dernier modèle, on introduit la version compressible de la fonction d'énergie de Gent (Gent (1996)) :

$$\Psi = \frac{\mu}{2} \left[d(J^2 - 1) - 2(d + 1)(J - 1) - J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \right] , \quad (3.19)$$

où μ est le module de cisaillement, J_m la valeur limite de $I_1 - 3$ et d une constante du matériau. Par souci de cohérence avec la théorie de l'infiniment petit élastique, il peut être démontré que le coefficient d est lié au coefficient de Poisson ν via :

$$d = \frac{2}{3} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} + \frac{1}{3} - \frac{2}{J_m} , \quad (3.20)$$

et, par conséquence, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est obtenu sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \mu \left[J(dJ - d - 1) \mathbf{C}^{-1} + \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} \mathbf{I} \right] . \quad (3.21)$$

3.1.3 Technique de perturbation

Nous présentons dans cette section la technique de perturbation appliquée aux modèles de Mooney-Rivlin, Néo-Hookéen et de Gent. Les relations (3.16), (3.18) et (3.21) peuvent s'écrire sous une forme donnant une relation de comportement entre le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , et le tenseur de déformation de Green-Lagrange, $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$. Comme ces relations ne sont pas quadratiques, des variables additionnelles sont introduites pour faciliter les formules de récurrence dans le cadre de la MAN. En

développant les variables inconnues de ces relations, nous obtenons la loi de comportement à l'ordre p du développement asymptotique sous la forme présentée dans l'équation (3.2). Nous montrons tout d'abord les techniques qui permettent de traiter les fortes non linéarités pour mettre les relations de comportement sous forme quadratique; ensuite, nous exprimons les développements de ces différentes relations.

Traitement des fortes non linéarités

Les relations (3.16), (3.18) et (3.21) contiennent les variables suivantes : \mathbf{C}^{-1} , J , $\ln J$. Ces variables sont difficiles à traiter directement dans le cadre de la MAN. Pour appliquer la technique de perturbation, nous avons besoin de les écrire sous une forme adaptée. Pour cela, une variable additionnelle $\mathbf{C}^{inv} = \mathbf{C}^{-1}$ est introduite. Ce qui permet d'écrire la relation suivante $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{inv} = \mathbf{I}$. Le développement asymptotique à l'ordre p de cette relation donne :

$$\mathbf{C}_p^{inv} = -\mathbf{C}_0^{inv} \cdot \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{C}_0^{inv} - \mathbf{C}_0^{inv} \cdot \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{C}_{p-r}^{inv} = -(\mathbf{C}_0^{inv} \underline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) : \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_p^{inv(nl)} . \quad (3.22)$$

Ensuite, la variable scalaire J présente une forme cubique par rapport au tenseur \mathbf{C} : $J^2 = \det(\mathbf{C}) = \epsilon_{ijk} C_{i1} C_{j2} C_{k3}$. Pour cela, on transforme cette relation en une forme quadratique en introduisant une variable additionnelle $\tilde{C}_{ij} = C_{i1} C_{j2}$:

$$J^2 = \det(\mathbf{C}) = \epsilon_{ijk} \tilde{C}_{ij} C_{k3} . \quad (3.23)$$

Le développement à l'ordre p de J peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$2J_0 J_p + \sum_{r=1}^{p-1} J_r J_{p-r} = \epsilon_{ijk} \left[(\tilde{C}_{ij})_0 (C_{k3})_p + (\tilde{C}_{ij})_p (C_{k3})_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (\tilde{C}_{ij})_r (C_{k3})_{p-r} \right] , \quad (3.24)$$

où

$$(\tilde{C}_{ij})_p = (C_{i1})_0 (C_{j2})_p + (C_{i1})_p (C_{j2})_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (C_{i1})_r (C_{j2})_{p-r} .$$

On peut donc réécrire l'équation (3.24) sous la forme suivante :

$$J_p = \frac{\epsilon_{ijk}}{2J_0} [(C_{i1})_0 (C_{j2})_0 (C_{k3})_p + (C_{i1})_0 (C_{j2})_p (C_{k3})_0 + (C_{i1})_p (C_{j2})_0 (C_{k3})_0] + J_p^{nl} ,$$

$$J_p = \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + J_p^{nl} , \quad (3.25)$$

où \mathbb{J} est un tenseur d'ordre deux qui dépend de \mathbf{C}_0 et J_p^{nl} est un terme résiduel scalaire défini par :

$$J_p^{nl} = \frac{\epsilon_{ijk}}{2J_0} \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ (C_{i1})_r (C_{j2})_{p-r} (C_{k3})_0 + (\tilde{C}_{ij})_r (C_{k3})_{p-r} - J_r J_{p-r} \right\} . \quad (3.26)$$

Enfin, une nouvelle variable β est introduite pour traiter la fonction $\ln J$ telle que $\beta = \ln J$. Une relation quadratique est obtenue en considérant la forme différentielle de cette équation :

$$J \delta\beta - \delta J = 0 . \quad (3.27)$$

Le développement asymptotique de l'équation (3.27) donne à l'ordre p :

$$\beta_P = \frac{1}{J_0} \left(J_p - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{p-r}{p} J_r \beta_{p-r} \right) . \quad (3.28)$$

En utilisant la relation (3.25), on obtient :

$$\beta_P = \frac{1}{J_0} \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + \frac{1}{J_0} \left(J_p^{nl} - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{p-r}{p} J_r \beta_{p-r} \right) = \frac{1}{J_0} \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + \beta_P^{nl} . \quad (3.29)$$

Les différentes adaptations présentées dans cette section seront utilisées dans le développement asymptotique des lois de comportement hyperélastique qui font l'objet de la suite de cette section.

Développement du modèle de Mooney-Rivlin

La relation de comportement (3.16) concernant le modèle de Mooney-Rivlin peut s'écrire sous une forme quadratique en introduisant des variables additionnelles menant au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = 2(c_1 + c_2 I_1) \mathbf{I} - 2c_2 \mathbf{C} + \alpha \mathbf{C}^{inv} \\ \alpha = 2cJ(J-1) - d \\ \mathbf{C}^{inv} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} \\ I_1 = \mathbf{I} : \mathbf{C} \\ J^2 = \epsilon_{ijk} \tilde{C}_{ij} C_{k3} \\ \tilde{C}_{ij} = C_{i1} C_{j2} \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

En considérant les équations (3.22) et (3.25), le développement asymptotique à l'ordre p des équations (3.30) aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_p = 2c_2 ((I_1)_p \mathbf{I} - \mathbf{C}_p) + \alpha_0 \mathbf{C}_p^{inv} + \alpha_p \mathbf{C}_0^{inv} + \sum_{r=1}^{p-1} \alpha_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv} \\ \alpha_p = 2c \left[2J_0 J_p - J_p + \sum_{r=1}^{p-1} J_r J_{p-r} \right] \\ \mathbf{C}_p^{inv} = -(\mathbf{C}_0^{inv} \overline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) : \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_p^{inv(nl)} \\ (I_1)_p = \mathbf{I} : \mathbf{C}_p \\ J_p = \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + J_p^{nl} \\ (\tilde{C}_{ij})_p = (C_{i1})_0 (C_{j2})_p + (C_{i1})_p (C_{j2})_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (C_{i1})_r (C_{j2})_{p-r} \\ \gamma_p = \frac{1}{2} \mathbf{C}_p \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Pour obtenir la relation de comportement à l'ordre p sous la forme de l'équation (3.2), les différentes relations du système (3.31) sont substituées dans la première équation de ce système. Pour cela, on réécrit, tout d'abord, l'équation (3.31₂) en considérant (3.31₅) comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_p = 2c \left[2J_0 J_p - J_p + \sum_{r=1}^{p-1} J_r J_{p-r} \right] &= 2c (2J_0 - 1) \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + 2c (2J_0 - 1) J_p^{nl} \\ &+ \sum_{r=1}^{p-1} J_r J_{p-r} = 2c (2J_0 - 1) \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + \alpha_p^{nl} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Enfin, la relation de comportement à l'ordre p peut s'écrire sous la forme de l'équation (3.2) avec :

$$\mathbb{C}_t = 2 \left[2c_2 (\mathbf{I} \mathbf{I} - \mathfrak{S}) - \alpha_0 (\mathbf{C}_0^{inv} \overline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) + 2c (2J_0 - 1) \mathbf{C}_0^{inv} \mathbb{J} \right] , \quad (3.33)$$

$$\mathbf{S}_p^{res} = \alpha_0 \mathbf{C}_p^{inv(nl)} + \alpha_p^{nl} \mathbf{C}_0^{inv} + \sum_{r=1}^{p-1} \alpha_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv} . \quad (3.34)$$

Développement du modèle Néo-Hookéen

La même démarche est utilisée pour écrire le modèle Néo-Hookéen (extension de la loi linéaire isotrope) (3.18) sous une forme quadratique. Cela permet d'obtenir le système

suisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = (\lambda_0\beta - \mu_0) \mathbf{C}^{inv} + \mu_0\mathbf{I} \\ \beta = \ln J \\ \mathbf{C}^{inv} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} \\ J^2 = \epsilon_{ijk} \tilde{C}_{ij} C_{k3} \\ \tilde{C}_{ij} = C_{i1} C_{j2} \\ \gamma = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Le développement asymptotique à l'ordre p du système (3.35) permet d'obtenir les problèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_p = (\lambda_0\beta_0 - \mu_0) \mathbf{C}_p^{inv} + \lambda_0\beta_p \mathbf{C}_0^{inv} + \lambda_0 \sum_{r=1}^{p-1} \beta_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv} \\ \beta_p = \frac{1}{J_0} \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + \beta_p^{nl} \\ \mathbf{C}_p^{inv} = -(\mathbf{C}_0^{inv} \underline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) : \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_p^{inv(nl)} \\ J_p = \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + J_p^{nl} \\ (\tilde{C}_{ij})_p = (C_{i1})_0 (C_{j2})_p + (C_{i1})_p (C_{j2})_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (C_{i1})_r (C_{j2})_{p-r} \\ \gamma_p = \frac{1}{2} \mathbf{C}_p \end{array} \right. \quad (3.36)$$

La relation de comportement à l'ordre p s'écrit alors sous la forme de l'équation (3.2) avec :

$$\mathbb{C}_t = -2(\lambda_0\beta_0 - \mu_0) (\mathbf{C}_0^{inv} \underline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) + 2\frac{\lambda_0}{J_0} \mathbf{C}_0^{inv} \mathbb{J}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{S}_p^{res} = (\lambda_0\beta_0 - \mu_0) \mathbf{C}_p^{inv(nl)} + \lambda_0\beta_p^{nl} \mathbf{C}_0^{inv} + \lambda_0 \sum_{r=1}^{p-1} \beta_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv}. \quad (3.38)$$

où \mathbb{S} est un tenseur identité d'ordre quatre.

Développement du modèle de Gent

Le système des équations concernant le modèle de Gent (3.21) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \mu [\kappa \mathbf{C}^{inv} + \chi \mathbf{I}] \\ \kappa = J(dJ - d - 1) \\ (J_m + I_1 - 3) \chi = J_m \\ \mathbf{C}^{inv} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} \\ I_1 = \mathbf{I} : \mathbf{C} \\ J^2 = \epsilon_{ijk} \tilde{C}_{ij} C_{k3} \\ \tilde{C}_{ij} = C_{i1} C_{j2} \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \end{array} \right. \quad (3.39)$$

L'ordre p de ce système (3.39) permet d'obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_p = \mu \left[\kappa_0 \mathbf{C}_p^{inv} + \kappa_p \mathbf{C}_0^{inv} + \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv} + \chi_p \mathbf{I} \right] \\ \kappa_p = [2dJ_0 - (d+1)] J_p + d \sum_{r=1}^{p-1} J_r J_{p-r} \\ (J_m + (I_1)_o - 3) \chi_p + (I_1)_p \chi_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (I_1)_r \chi_{p-r} = 0 \\ \mathbf{C}_p^{inv} = -(\mathbf{C}_0^{inv} \overline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) : \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_p^{inv(nl)} \\ (I_1)_p = \mathbf{I} : \mathbf{C}_p \\ J_p = \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + J_p^{nl} \\ (\tilde{C}_{ij})_p = (C_{i1})_0 (C_{j2})_p + (C_{i1})_p (C_{j2})_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (C_{i1})_r (C_{j2})_{p-r} \\ \boldsymbol{\gamma}_p = \frac{1}{2} \mathbf{C}_p \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Les équations (3.40₂) et (3.40₃) peuvent être réécrites en considérant (3.40₅) et (3.40₆) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \kappa_p &= [2dJ_0 - (d+1)] J_p + \sum_{r=1}^{p-1} dJ_r J_{p-r} = [2dJ_0 - (d+1)] \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + [2dJ_0 - (d+1)] \mathbf{J}_p^{nl} \\ &+ \sum_{r=1}^{p-1} dJ_r J_{p-r} = [2dJ_0 - (d+1)] \mathbb{J} : \mathbf{C}_p + \kappa_p^{nl}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \chi_p &= -\frac{1}{J_m - (I_1)_0 + 3} \left\{ (I_1)_p \chi_0 + \sum_{r=1}^{p-1} (I_1)_r \chi_{p-r} \right\} = \\ &-\frac{\chi_0}{J_m - (I_1)_0 + 3} \mathbf{I} : \mathbf{C}_p + \chi_p^{nl}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Enfin, la relation de comportement à l'ordre p s'écrit sous la forme de l'équation (3.2) avec :

$$\mathbb{C}_t = 2\mu \left\{ -\kappa_0 (\mathbf{C}_0^{inv} \overline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) + [2dJ_0 - (d+1)] \mathbf{C}_0^{inv} \mathbb{J} + \frac{\chi_0}{J_m - (I_1)_0 + 3} \mathbf{I} \mathbf{I} \right\}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{S}_p^{res} = \mu \left\{ \kappa_0 \mathbf{C}_p^{inv(nl)} + \kappa_p^{nl} \mathbf{C}_0^{inv} + \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv} + \chi_p^{nl} \mathbf{I} \right\}. \quad (3.44)$$

Notons que, pour implanter ces lois dans le cadre de la procédure MAN multi échelle, il suffit de remplacer \mathbb{C} par \mathbb{C}_t et redéfinir \mathbf{S}_p^{nl} dans l'équation (2.22₂) :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C}_t : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + \mathbf{S}_p^{nl}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{S}_p^{nl} = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\gamma}_p^{nl} + \mathbf{S}_p^{res}. \quad (3.46)$$

Ensuite, la procédure MAN multi échelle reste exactement la même que celle présentée dans le chapitre 2.

3.1.4 Exemples numériques

Pour étudier la validité de notre approche dans le cadre de la MAN, une plaque rectangulaire encadrée sur le bord inférieur et soumise à un déplacement sur le bord supérieur est considérée pour la modélisation de la traction et de la compression (voir figure 3.1). Nous avons étudié les trois modèles de comportement hyperélastique détaillés précédemment. Nous présentons ici les résultats du modèle compressible de Mooney-Rivlin exprimé par l'équation (3.16) avec les paramètres $c_1 = 6,3 \times 10^5 N/m^2$, $c_2 = -0,012 \times 10^5 N/m^2$ et $c = 20 \times 10^5 N/m^2$. Les résultats des autres modèles sont reportés dans l'annexe E. La structure est discrétisée à l'aide d'éléments finis quadratiques à neuf nœuds en deux dimensions, dans le cadre des contraintes planes. L'ordre de troncature des séries est $N = 15$ et le paramètre de précision $\delta = 10^{-6}$.

Les résultats obtenus par la MAN sont comparés avec ceux réalisés à l'aide de la méthode classique de Newton-Raphson que nous avons implantée dans notre code pour la validation numérique. La figure 3.2 montre la courbe des contraintes S_{22} en fonction des déformations γ_{22} au point d'intégration situé sur l'élément indiqué par la couleur noire sur la figure 3.3. Dans la figure 3.2, les points noirs représentent les fins de pas asymptotiques, correspondant à une inversion de matrice. Ces courbes représentent les réponses des tests de traction et de compression. Nous constatons tout d'abord que les résultats de la MAN sont en très bon accord avec ceux de la méthode classique de Newton-Raphson ; peu de pas sont nécessaires pour obtenir une grande déformation de traction ou de compression. En effet, trois pas sont nécessaires pour obtenir environ 60% de déformation de traction ou

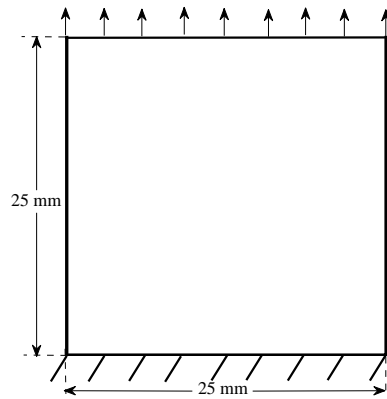


FIGURE 3.1 – Géométrie et conditions aux limites du problème de traction ou compression d’une plaque rectangulaire.

25% de déformation en compression. Rappelons nous que la procédure MAN ne nécessite aucune itération ni au niveau de l’équation d’équilibre global ni au niveau des équations de comportement. Sur la figure 3.3, nous présentons les états déformés de la structure en traction (60%) et en compression (25%).

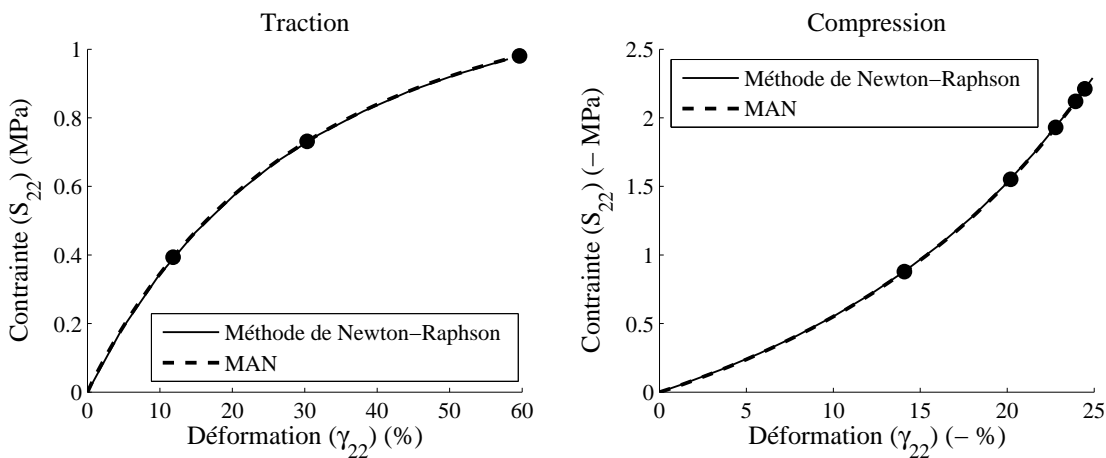


FIGURE 3.2 – Diagrammes contraintes-déformations pour les problèmes de traction et de compression pour le modèle compressible de Mooney-Rivlin.

3.2 Comportement élastoplastique

Dans cette section, on s’intéresse au comportement élastoplastique et particulièrement à l’adaptation des procédures MAN aux lois de comportement élastoplastique. Cette section peut être considérée comme bibliographique étant donné que ce problème a mobilisé

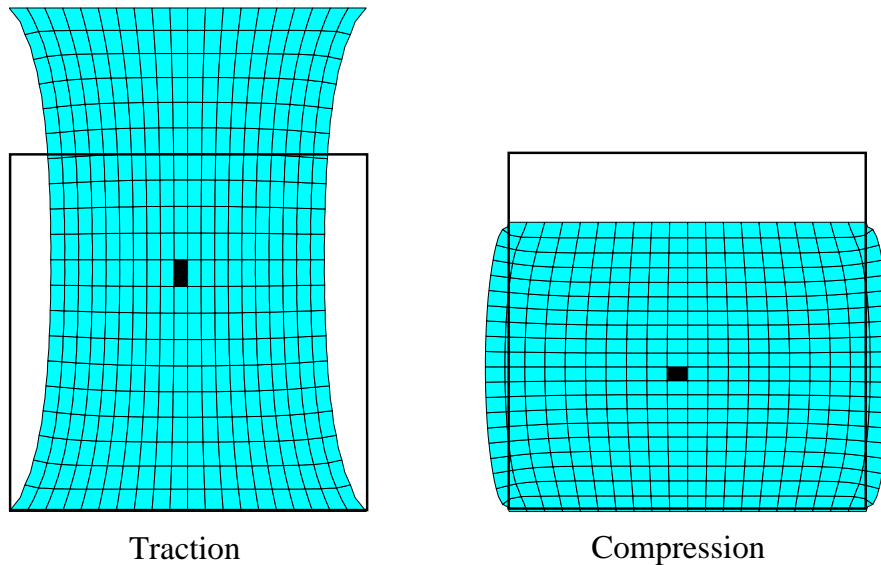


FIGURE 3.3 – États déformés de la structure en traction et en compression

notre équipe pendant plusieurs années et l'objectif de cette section est de montrer la faisabilité de l'extension à la plasticité de la démarche MAN multi échelle. Deux aspects seront étudiés, le premier concerne les lois de comportement en théorie de déformation totale qui a été proposée pour la première fois par Hencky (1924) et développée par Ilyushin (1943, 1947). Elle trouve son intérêt dans des applications pour lesquelles les non linéarités du comportement sont plus importantes que le caractère irréversible des mécanismes physiques de la déformation. Sur le plan algorithmique, elles ne présentent pas de difficulté majeure et se prêtent bien aux développements asymptotiques comme les lois relatives au comportement hyperélastique (Braikat (1995); Zahrouni (1998)). Le deuxième aspect quant à lui concerne le comportement élastoplastique proprement dit avec la prise en compte du retour élastique. Les lois relatives à ce type de comportement sont généralement incrémentales et font état de deux conditions unilatérales : la première concerne le passage de l'état purement élastique à l'état plastique et la deuxième condition unilatérale se réfère au retour élastique. Dans le cadre de la MAN, les principales difficultés de ces lois concernent les singularités induites par les deux conditions unilatérales. Les solutions apportées à ces difficultés sont l'introduction de procédures de régularisation qui permettent d'obtenir des formes analytiques pour ces équations de plasticité. Ensuite, des variables additionnelles sont utilisées pour permettre une meilleure efficacité de l'algorithme MAN ; elles sont introduites exactement de la même manière que dans les chapitres précédem-

ment présentés (voir aussi Potier-Ferry et al. (1997); Zahrouni et al. (2005); Assidi (2007); Assidi et al. (2009)).

Dans la suite de cette section, nous présentons donc les procédures qui permettent d'adapter une loi de comportement en théorie de déformation totale et ensuite celles pour la plasticité incrémentale.

3.2.1 Théorie de déformation totale

Nous présentons dans cette section une loi de comportement de type puissance basée sur la relation de Ramberg-Osgood et la théorie de déformation totale (Chen et Han (1998); Zahrouni et al. (1998); ABAQUS (2008)). Cette loi s'exprime de la manière suivante dans le cas 3D :

$$E \boldsymbol{\epsilon} = (1 + \nu) \boldsymbol{\sigma}^d - (1 - 2\nu) P \mathbf{I} + \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} \boldsymbol{\sigma}^d, \quad (3.47)$$

où E , ν , n et σ_y sont, respectivement, le module d'Young, le coefficient de Poisson, l'exposant réel d'écrouissage (en pratique $n > 1$) et la contrainte limite d'élasticité. Le paramètre α permet un décalage de la limite élastique (dans le cas unidimensionnel, α est tel que $\boldsymbol{\epsilon} = (1 + \alpha) \frac{\sigma_y}{E}$ lorsque $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_y$). $P = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$ est la trace du tenseur des contraintes. $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d}$ est la contrainte équivalente de von Mises, et $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} + P \mathbf{I}$ est le tenseur déviateur des contraintes.

Comme l'équation (3.47) est fortement non linéaire, il est pratique d'introduire des variables supplémentaires dans ce modèle. Cela nous permet ainsi d'obtenir une écriture quadratique du problème qui est judicieuse dans le cadre de la MAN (Potier-Ferry et al. (1997); Zahrouni et al. (1998); Abichou et al. (2002); Zahrouni et al. (2004)). En outre, cette loi n'est pas une relation analytique pour des contraintes σ_{eq} nulles lorsque le coefficient n n'est pas un entier. C'est pourquoi une procédure de régularisation et une relation différentielle sont introduites dans ce modèle permettant le développement en séries (Zahrouni et al. (1998)). Pour ce faire, la contrainte équivalente de von Mises est modifiée légèrement sous la forme suivante :

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + \eta^2 \sigma_y^2, \quad (3.48)$$

où η est un paramètre de régularisation. Lorsque $\eta = 0$, nous retrouvons la loi de comportement initiale (3.47). En outre, deux variables additionnelles κ et ζ sont introduites pour transformer la loi puissance en une relation différentielle :

$$\kappa(\sigma_{eq}) = \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} = \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{3}{2 \sigma_y^2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + \eta^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (3.49)$$

$$\zeta^2 = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} = \frac{3}{2} \frac{\sigma^d : \sigma^d}{\sigma_y^2} + \eta^2 . \quad (3.50)$$

Ces deux variables sont liées comme suit :

$$\kappa = \frac{3}{2} \alpha \zeta^{n-1} . \quad (3.51)$$

Si maintenant nous effectuons une différenciation de l'équation (3.51), on obtient une relation plus pratique pour les développements asymptotiques :

$$\zeta d\kappa = (n - 1) \kappa d\zeta . \quad (3.52)$$

De cette façon, on obtient un problème général avec une non linéarité quadratique par rapport aux nouvelles variables. En outre, pour obtenir la même pente au démarrage que celle de la loi de comportement non régularisée, le premier membre de l'équation (3.47) est multiplié par $(1 + \alpha\eta^n)$ (Zahrouni et al. (1998)). Le problème global de structure peut donc être formulé à l'aide des équations d'équilibre, de compatibilité et des équations relatives au comportement. Deux équations supplémentaires sont introduites qui résultent des variables intermédiaires κ et ζ . Ainsi, les équations de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned} E(1 + \alpha\eta^n) \boldsymbol{\epsilon} &= (1 + \nu)\boldsymbol{\sigma}^d - (1 - 2\nu)P\mathbf{I} + \kappa\boldsymbol{\sigma}^d \\ \zeta^2 &= \frac{3}{2} \frac{\sigma^d : \sigma^d}{\sigma_y^2} + \eta^2 \\ \zeta d\kappa &= (n - 1) \kappa d\zeta \\ \boldsymbol{\sigma}^d &= \boldsymbol{\sigma} + P \mathbf{I} \\ P &= -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Technique de perturbation

On procède dans cette section à l'application de la technique de perturbation pour résoudre le problème (3.53). Par rapport au cas élastique linéaire du chapitre précédent, nous remplaçons le tenseur des constantes d'élasticité \mathbb{C} par un tenseur des modules tangents \mathbb{C}_t pour calculer la matrice de rigidité tangente. En outre, en raison de la non linéarité de cette loi, le champ des contraintes implique, à l'ordre p , un vecteur résiduel $\boldsymbol{\sigma}_p^{res}$ (Zahrouni et al. (1998); Zahrouni (1998)). Ce dernier qui dépend des contraintes calculées jusqu'à l'ordre $(p - 1)$, conduit à des termes supplémentaires dans le second membre \mathbf{F}_p^{nl} . Ainsi, après le développement du problème (3.53), nous pouvons écrire le

problème, à l'ordre 1, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 E(1 + \alpha \eta^n) \boldsymbol{\epsilon}_1 &= (1 + \nu + \kappa_0) \boldsymbol{\sigma}_1^d - (1 - 2\nu) P_1 \mathbf{I} + \kappa_1 \boldsymbol{\sigma}_0^d \\
 \zeta_1 &= \frac{3}{2 \zeta_0 \sigma_y^2} \boldsymbol{\sigma}_0^d : \boldsymbol{\sigma}_1^d \\
 \kappa_1 &= \frac{3 (n - 1) \kappa_0}{2 \sigma_y^2 \zeta_0^2} \boldsymbol{\sigma}_0^d : \boldsymbol{\sigma}_1^d \\
 \boldsymbol{\sigma}_1^d &= \boldsymbol{\sigma}_1 + P_1 \mathbf{I} \\
 P_1 &= -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 : \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Après substitution des équations (3.54₂-3.54₅) dans (3.54₁), nous inversons analytiquement la relation de comportement afin d'explicitier la matrice des modules tangents \mathbb{C}_t . Ainsi, nous pouvons écrire la relation de comportement à l'ordre 1 comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = C_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + C_2 (\boldsymbol{\epsilon}_1 : \mathbf{I}) \mathbf{I} + C_3 (\boldsymbol{\epsilon}_1 : \boldsymbol{\sigma}_0^d) \boldsymbol{\sigma}_0^d , \tag{3.55}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = [C_1 \mathfrak{S} + C_2 \mathbf{I} \mathbf{I} + C_3 \boldsymbol{\sigma}_0^d \boldsymbol{\sigma}_0^d] : \boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\epsilon}_1 , \tag{3.56}$$

où C_1 , C_2 and C_3 sont des constantes définies par :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{E (1 + \alpha \eta^n)}{1 + \nu + \kappa_0} , \\
 C_2 &= \frac{(3 \nu + \kappa_0) C_1}{3 (1 - 2 \nu)} , \\
 C_3 &= \frac{-K C_1}{1 + \nu + \kappa_0 + K \boldsymbol{\sigma}_0^d : \boldsymbol{\sigma}_0^d} ,
 \end{aligned}$$

où

$$K = \frac{3 (n - 1) \kappa_0}{2 \sigma_y^2 \zeta_0^2} .$$

De la même manière, à l'ordre p , la relation de comportement prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{\sigma}_p^{res} , \tag{3.57}$$

où la matrice \mathbb{C}_t est exactement celle déterminée à l'ordre 1, et $\boldsymbol{\sigma}_p^{res}$ est un vecteur résiduel contenant les termes non linéaires provenant de la relation de comportement qui est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}_p^{res} &= \frac{1}{1 + \nu + \kappa_0} \left[C_5 \left[\vartheta \boldsymbol{\sigma}_0^d : \boldsymbol{\sigma}_0^d + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \boldsymbol{\sigma}_{p-r}^d \right) : \boldsymbol{\sigma}_0^d \right] - \vartheta \right] \boldsymbol{\sigma}_0^d \\
 &\quad - \frac{1}{1 + \nu + \kappa_0} \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \boldsymbol{\sigma}_{p-r}^d ,
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

où

$$C_5 = \frac{K}{1 + \nu + \kappa_0 + K \boldsymbol{\sigma}_0^d : \boldsymbol{\sigma}_0^d},$$

$$\vartheta = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{(p-r)(n-1) - r}{p \zeta_0} \zeta_{p-r} \kappa_r + \frac{3(n-1) \kappa_0}{4 \sigma_y^2 \zeta_0^2} \sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{\sigma}_r^d : \boldsymbol{\sigma}_{p-r}^d$$

$$- \frac{(n-1) \kappa_0}{2 \zeta_0^2} \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r \zeta_{p-r}.$$

Notons que cette loi peut être appliquée dans le cadre de la procédure MAN multi échelle de la même façon que les lois de comportement hyperélastique présentées dans la section précédente.

3.2.2 Théorie incrémentale

On s'intéresse ici au comportement élastoplastique classique défini par une surface de charge qui délimite les zones du comportement élastique et du comportement élastoplastique. Ce comportement entre dans le cadre de la théorie incrémentale de plasticité pour lequel la prise en compte de l'histoire du chargement est importante pour définir un état de contrainte. Ce type de comportement est défini généralement par trois hypothèses. La première stipule l'existence d'une contrainte définissant la limite initiale d'écoulement du matériau ; la deuxième hypothèse définit une règle d'évolution de l'écrouissage du matériau dans la zone plastique ; et enfin la troisième hypothèse quant à elle définit la règle d'écoulement du matériau qui dérive d'un potentiel plastique. Cette dernière permet de donner la direction de l'écoulement du matériau. D'un point de vue mathématique, le comportement élastoplastique fait état de deux singularités. La première marque le passage de l'état élastique à l'état plastique du matériau à travers la définition de la surface de charge qui s'annule à la limite du domaine élastique ; c'est-à-dire, lorsqu'on est sur la surface de charge, le comportement du matériau passe de l'élasticité à la plasticité. La deuxième singularité marque le passage du comportement plastique au comportement purement élastique. Cette phase est appelée communément retour élastique.

Pour pouvoir utiliser la technique de perturbation, ces deux singularités doivent être régularisées. Une étude détaillée de l'adaptation de la MAN à ce type de comportement est donnée dans Assidi (2007); Assidi et al. (2009). Dans cette section, on présente la démarche à suivre pour une loi de comportement 3-D avec un écrouissage isotrope de von Mises. On considère aussi le cadre des petites déformations sachant que la même démarche est valable pour les grandes déformations élastoplastiques (Assidi (2007)). On focalise notre démarche uniquement sur la relation de comportement au niveau d'un point

d'intégration de la structure. Comme on l'avait bien noté dans les chapitres précédents, l'insertion de la relation de comportement dans celle d'équilibre et ensuite assez aisée.

Si on considère une décomposition additive du taux de déformation, la loi de Hooke permet d'écrire la relation de comportement suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) , \quad (3.59)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\epsilon}^p$ représentent respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur des déformations totales et le tenseur des déformations plastiques. En considérant le critère isotrope de von Mises, la règle d'écoulement du matériau peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} n , \quad (3.60)$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique et n est un tenseur qui définit la direction de l'écoulement, s'écrivant en fonction du déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^d$ sous la forme suivante :

$$n = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}^d}{\sigma_{eq}} . \quad (3.61)$$

Le scalaire σ_{eq} représente la contrainte équivalente au sens de von Mises exprimé comme suit :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d} . \quad (3.62)$$

La fonction de charge est définie sous une forme adimensionnelle sous la forme suivante :

$$f = \frac{\sigma_{eq} - \sigma_e}{\sigma_e} . \quad (3.63)$$

Dans cette expression, σ_e désigne la contrainte effective qui représente la limite d'élasticité actuelle du matériau. Cette contrainte est généralement utilisée pour définir la relation d'écrouissage du matériau et s'écrit en fonction de la déformation plastique équivalente $\bar{\epsilon}^p$. Par exemple, si on considère un matériau élastoplastique avec un écrouissage linéaire, son expression peut être donnée sous la forme suivante :

$$\sigma_e = \sigma_y + h \bar{\epsilon}^p . \quad (3.64)$$

La contrainte σ_y est la limite initiale d'élasticité. Le facteur h est un paramètre d'écrouissage du matériau. Bien évidemment, d'autres expressions de la fonction d'écrouissage peuvent être considérées dans le cadre de la MAN.

La condition unilatérale définissant la relation entre le multiplicateur plastique et la fonction de charge s'écrit comme suit :

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 . \quad (3.65)$$

Cette relation, obtenue à partir des conditions de Kuhn-Tucker, est singulière. Elle doit être remplacée par une fonction analytique pour pouvoir appliquer la technique de perturbation. En combinant l'équation (3.65) et celles définissant le comportement (3.59 - 3.64), l'expression du multiplicateur plastique peut s'écrire sous la forme de produit de deux fonctions non régulières g et $\langle \cdot \rangle$:

$$\dot{\lambda} = g(f)\langle n : \dot{\epsilon} \rangle . \quad (3.66)$$

La fonction g est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} g(f) = 0 & \text{si } f < 0 \\ g(0) = \frac{2\mu}{3\mu+h} \end{cases} \quad (3.67)$$

où μ représente le module de cisaillement du matériau. Les parenthèses de MacAuley $\langle \cdot \rangle$ s'expriment pour une variable donnée x sous la forme suivante :

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.68)$$

Les deux fonctions singulières sont donc remplacées par deux fonctions régulières G et H . Les détails de cette procédure de régularisation sont donnés dans Assidi (2007); Assidi et al. (2009). Ainsi, l'équation (3.66) est reformulée comme suit :

$$\dot{\lambda} = GH . \quad (3.69)$$

La fonction de régularisation G est définie sous la forme suivante :

$$G = \eta_1 / \left(\frac{\sigma_e}{2\mu} f^2 + \eta_1 \left(\frac{3}{2} + \frac{h}{2\mu} (1 + f) \right) \right) , \quad (3.70)$$

où η_1 est un paramètre de régularisation. Il est choisi de sorte à ce que la fonction régularisée soit la plus proche possible de celle non régulière de départ. Une régularisation possible de la fonction partie positive $\langle n : \dot{\epsilon} \rangle$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$H(H - n : \dot{\epsilon}) = \eta_2^2 , \quad (3.71)$$

où η_2 est un deuxième paramètre de régularisation. Une dernière régularisation concerne la contrainte équivalente qui est singulière pour des contraintes nulles. Elle est remplacée par la définition suivante :

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + \eta_3^2 \sigma_y^2 . \quad (3.72)$$

Le coefficient η_3 est un paramètre de régularisation qui permet d'éviter une division par zéro au départ du calcul pour des contraintes nulles. Le problème est à présent bien posé

pour appliquer la procédure de perturbation. Nous résumons l'ensemble des équations dans le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n} \\ n = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}^d}{\sigma_{eq}} \\ \dot{\lambda} = G H \\ H(H - n : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \eta_2^2 \\ G = \eta_1 / \left(\frac{\sigma_e}{2\mu} f^2 + \eta_1 \left(\frac{3}{2} + \frac{h}{2\mu} (1 + f) \right) \right) \\ f = (\sigma_{eq} - \sigma_e) / \sigma_e \\ \sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + \eta_3^2 \sigma_y^2 \\ \sigma_e = \sigma_y + h \bar{\epsilon}^p \end{array} \right. \quad (3.73)$$

Une fois le problème bien posé, une étape nécessaire consiste à mettre les équations sous une forme quadratique. Dans le système 3.73, les équations à mettre sous la forme quadratique sont 3.73₃, 3.73₅, 3.73₆ et 3.73₇. Cela implique des variables additionnelles qui permettent de faciliter l'obtention des formules de récurrence. Après cela, la procédure de perturbation peut être appliquée à l'ensemble des équations de la loi de comportement de la même façon que pour les problèmes déjà exposés dans les sections précédentes. Ainsi, le problème non linéaire est transformé en une suite de problèmes linéaires. On utilise la technique de substitution qui consiste à condenser le système (3.73) en une équation donnant la relation entre le tenseur des contraintes et celui des déformations à un ordre p donné. Finalement, on obtient une équation semblable à l'équation (3.57) :

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{\sigma}_p^{res}. \quad (3.74)$$

Cette équation peut donc être injectée dans l'équation d'équilibre permettant ainsi d'explicitier l'opérateur tangent et les termes de seconds membres résultant de la loi de comportement. Bien sûr, la solution MAN permet d'obtenir le champ de déplacement à partir duquel toutes les variables apparaissant dans le système (3.73) peuvent être mises à jour.

3.2.3 Exemple numérique

Pour illustrer la validité de la technique proposée, on considère un problème de traction simple d'une plaque rectangulaire présentée sur la figure (3.4). Pour des raisons de symétries, on ne considère que le quart de la plaque discrétisée à l'aide d'éléments finis 2D à quatre nœuds en contraintes planes. Pour obtenir une courbe typique avec décharge, le chargement P est appliqué en deux phases. Dans la première phase, le chargement est augmenté de façon monotone de 0 à P_{max} en s'assurant que le matériau entre bien en

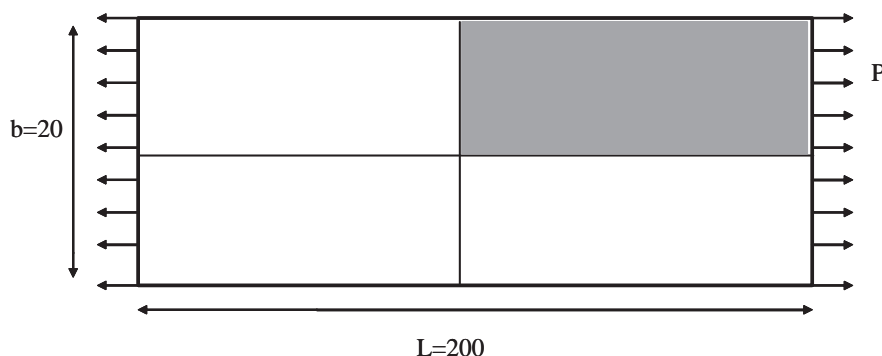


FIGURE 3.4 – Plaque en traction simple ($P = 20MPa$), description géométrique et de chargement.

plasticité. Dans la deuxième phase, le chargement est relâché pour annuler les contraintes.

La figure (3.5) montre la contrainte équivalente en fonction de la déformation ϵ_{11} . La solution MAN multi échelle est comparée à une courbe de référence. Cette courbe de référence est obtenue à l'aide d'un code itératif utilisant la loi de comportement sans régularisation et la méthode de Newton Raphson associée à la technique du retour radial pour le traitement de la loi de comportement. Les points sur la courbe MAN indiquent les fins de pas asymptotiques. Nous remarquons tout d'abord que la technique de perturbation permet d'obtenir la réponse avec une bonne précision. Les longueurs de pas sont adaptatives avec des accumulations proches des singularités. Rappelons que cette solution est obtenue sans aucune itération ni au niveau de l'équilibre global de la structure ni au niveau des points d'intégration pour respecter la relation de comportement. Plus de détails sur cette procédure peuvent être consultés dans les références Assidi (2007) et Assidi et al. (2009).

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des lois de comportement non linéaires et nous avons montré comment adapter les relations fortement non linéaires au cadre de la MAN. Dans ce contexte, les premières idées ont été présentées dans Potier-Ferry et al. (1997) et ont été étendues ensuite à différentes équations de contact, de frottement et de lois de comportement (Zahrouni et al. (1998); Elhage-Hussein et al. (2000); Brunelot (1999); Assidi et al. (2009)). La contribution originale effectuée dans le cadre de cette thèse concerne le traitement des lois de comportement hyperélastiques dans le cadre de la MAN. Globalement, l'application des méthodes MAN aux lois de comportement est assez maîtrisée

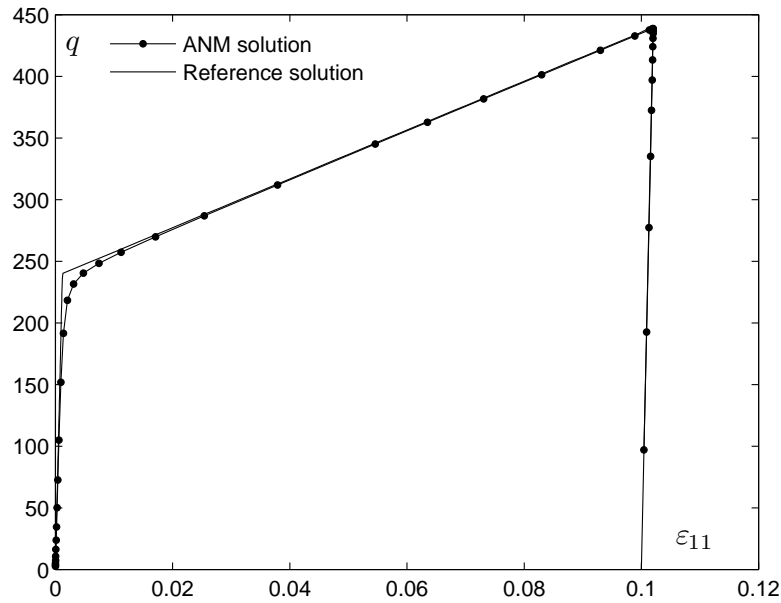


FIGURE 3.5 – Courbe de réponse contrainte équivalente σ_{eq} / déformation ϵ_{11} .

de nos jours. Des difficultés subsistent encore et sont liées aux différentes régularisations utilisées surtout pour les lois de plasticité avec décharge élastique (Assidi (2007); Assidi et al. (2009)).

Une fois les relations de comportement régularisées et mises sous une forme quadratique, l'application de la méthode MAN multi échelle ne pose pas de problème sur le plan algorithmique. Des applications MAN multi échelle avec loi de comportement non linéaire sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Applications au flambage des matériaux hétérogènes

Sommaire

4.1	Flambage d'un toit mince composite	64
4.2	Microflambage élastique d'un matériau hétérogène	65
4.2.1	Structure composite à fibres longues en compression	66
4.2.2	Structure cellulaire	69
4.3	Microflambage plastique d'un composite à fibres longues . . .	72
4.3.1	Mécanisme de microflambage plastique	73
4.3.2	Calcul multi échelle avec instabilités liées au microflambage plas- tique	75
4.4	Conclusion	77

Dans les chapitres précédents, la méthode MAN multi échelle a été proposée pour réaliser l'homogénéisation des composites non linéaires. Les formulations associées à différents comportements non linéaires locaux ont été développées. Dans ce chapitre, nous appliquons cette technique à des problèmes d'instabilités dans les matériaux hétérogènes. Nous montrons l'attrait important de la méthode asymptotique pour résoudre ce type de problèmes qui sont délicats lorsque la méthode de Newton-Raphson est utilisée. Dans un premier exemple, nous traitons un problème où une instabilité intervient seulement au niveau macroscopique, mais pour une structure hétérogène. Dans les deux exemples suivants, nous étudions la compression d'un matériau composite à fibres longues, où les instabilités locales induisent une variation brutale de la réponse dans la structure macroscopique. Les deux types de non linéarité, géométrique et matérielle, ont été abordés. Dans un premier cas, l'exemple met en jeu une loi de comportement linéaire entre contraintes et déformations (modèle de Saint Venant-Kirchhoff), mais avec la prise en compte des

grandes déformations aux niveaux macro et micro. Dans le deuxième cas, le comportement non linéaire est introduit au travers du microflambage plastique d'un composite à fibres longues.

Les exemples traités sont des problèmes en deux dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes. Deux types d'éléments finis ont été utilisés pour discrétiser les domaines associés aux deux échelles : pour la structure macroscopique, des éléments finis à quatre nœuds et pour les microstructures (VER), des éléments à trois nœuds linéaires ou à neuf nœuds quadratiques. Les paramètres liés à la MAN sont les suivants pour tous les exemples : l'ordre de troncature N a été pris égal à 15 et le paramètre de précision $\delta = 10^{-6}$.

4.1 Flambage d'un toit mince composite

Dans cet exemple, nous étudions le flambage d'un toit mince composite soumis à une charge concentrée en son milieu, en appui simple sur ses deux extrémités (voir figure 4.1). Le matériau est constitué de fibres disposées périodiquement dans une matrice. Les trois morphologies de VER étudiés sont représentées dans la figure 2.4. Pour les trois VER, la fraction volumique est identique, et le rapport de rigidité entre l'inclusion et la matrice est $E_i/E_m = 10$. En raison de la symétrie du problème, seulement la moitié de la structure macroscopique est discrétisée.

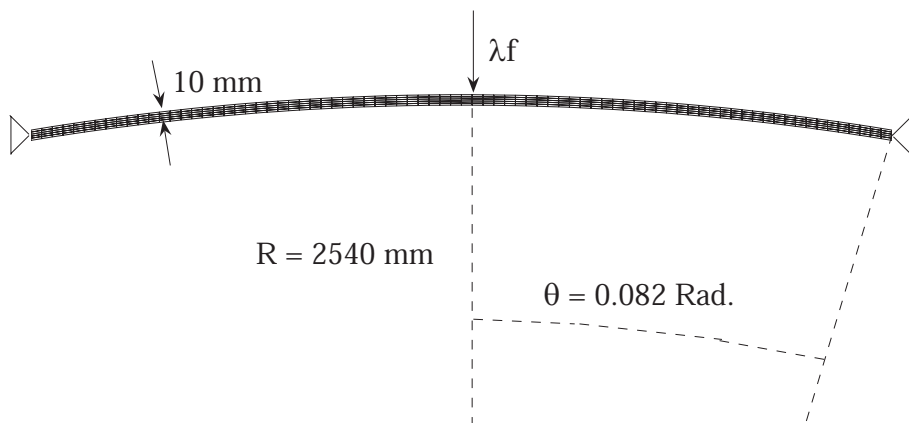


FIGURE 4.1 – Géométrie et conditions aux limites pour le problème de toit mince composite.

Dans cet exemple, on peut observer un flambement macroscopique de la structure. La réponse est représentée dans la figure 4.2, donnant le déplacement vertical du point de

l'application de la force en abscisse et le paramètre de chargement λ en ordonnée pour la morphologie des trois inclusions présentés dans la figure 2.4. Nous notons que dans chacun des cas, les réponses complètes sont obtenues avec seulement deux pas asymptotiques, et les points limites sont passés en un seul pas grâce à l'approximation MAN d'ordre élevée utilisée. Ce problème de toit mince, dans le cas homogène, a été étudié par de nombreux auteurs dans le cadre de la méthode de Newton-Raphson, comme par exemple dans Kouhia (1999) et Eriksson (1991). Dans le meilleur des cas, les algorithmes itératifs nécessitent environ 30 inversions de la matrice de rigidité, soient 10 incréments de chargement avec 3 itérations de Newton-Raphson en moyenne par incrément.

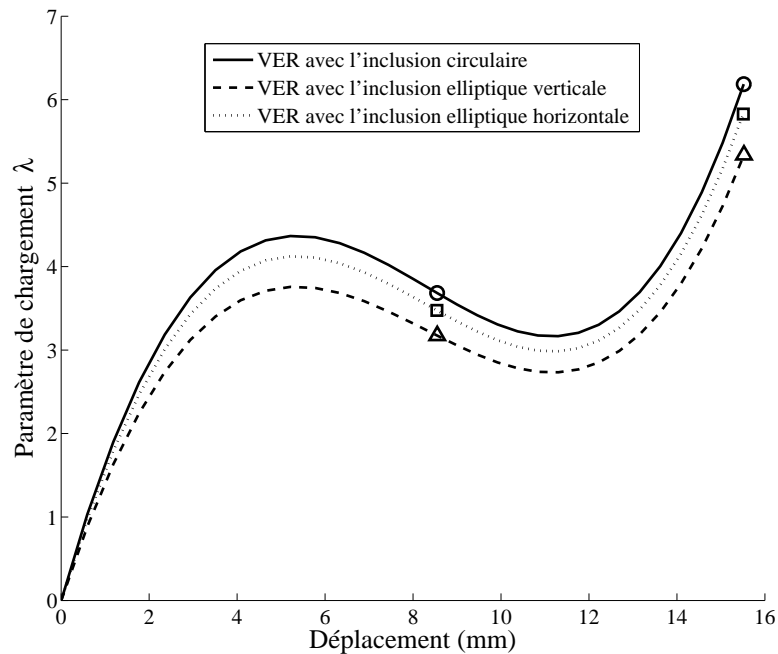


FIGURE 4.2 – Réponse charge-déplacement pour le problème de toit mince composite. Les VER associé à la microstructure sont les VER représentés dans la figure 2.4. Le rapport de rigidité entre inclusions et matrice est de 10.

4.2 Microflambage élastique d'un matériau hétérogène

Le microflambage des fibres est l'un des phénomènes d'instabilités les plus courants des matériaux hétérogènes et l'un des mécanismes principaux de rupture des composites à fibres longues en compression. Ce phénomène a fait l'objet de simulations numériques, comme par exemple dans Kyriakides et al. (1995); Lee et Waas (1999); Granddier et al.

(1992); Drapier et al. (2001). Dans ces travaux, les modèles macroscopiques sont déduits de calculs d'homogénéisation dans le plan transversal. Par rapport aux travaux existants, la méthode des éléments finis multi échelles combinée avec la méthode asymptotique numérique (MAN Multi échelle) apparaît comme une nouvelle approche attrayante pour modéliser l'adoucissement en compression dans les composites à fibres longues.

4.2.1 Structure composite à fibres longues en compression

Nous étudions à présent la réponse en compression d'un matériau composite à fibres longues, sollicité en compression dans le sens des couches. Ici, les instabilités interviennent aux deux échelles, microscopiques et macroscopiques. Le VER associé à la microstructure est représenté dans la figure 4.3. Des conditions aux limites de type déformation homogène sur les bords sont utilisées (voir l'équation (2.13)). Le rapport entre les rigidités des phases est de $E_{Fibre}/E_{Matrice} = 1000$, avec $E_{Fibre} = 100000 \text{ MPa}$. La géométrie de la structure et les conditions aux limites sont indiquées dans la figure 4.4. En raison de la symétrie du problème étudié, seule la moitié de la structure est modélisée.

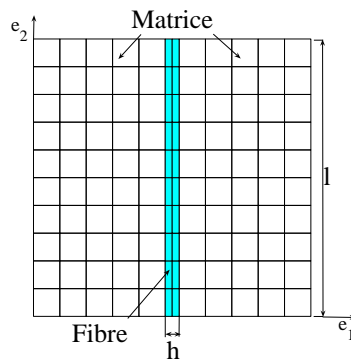


FIGURE 4.3 – Cellule élémentaire associée au matériau composite à fibres longues.

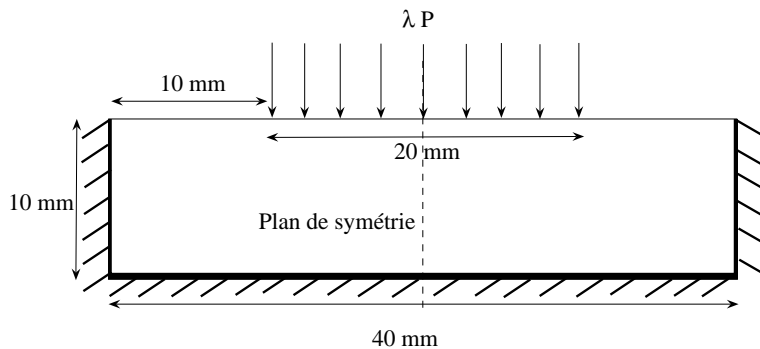


FIGURE 4.4 – Géométrie et conditions aux limites pour le problème de microflambage de composite à fibres longues.

La détermination de la taille de VER est critique en homogénéisation. Pour les problèmes d'instabilités microscopiques, la question est encore plus délicate, car dans certains cas les longueurs d'onde associées aux instabilités peuvent être de l'ordre de grandeur des dimensions de la structure. Dans ce cas, les méthodes d'homogénéisation classiques échouent, car la séparation des échelles n'est plus possible. Dans l'exemple traité ici, il est nécessaire, avant de réaliser un calcul, de définir, s'il existe, le VER. Pour cela, nous effectuons un test numérique sur la convergence de la réponse de différents VER en compression. Ces différents VER sont constitués de cellules élémentaires comme décrits précédemment en nombre croissant. Ainsi, nous notons VER_{ij} , un VER constitué de i cellules élémentaires dans la direction \mathbf{e}_1 et j dans la direction \mathbf{e}_2 . Les réponses charge-déplacement du point M (figure 4.7) pour différents VER sont représentés dans la figure 4.5. Nous observons l'instabilité intervenant au niveau microscopique. Les figures 4.5 et 4.6 montrent une convergence assez rapide de la charge critique de flambage λ_C qui correspond à la valeur maximale de λ . Cette convergence dépend du rapport entre les rigidités des phases qui, dans cet exemple, conduit à l'existence d'une longueur d'onde finie associée au microflambage.

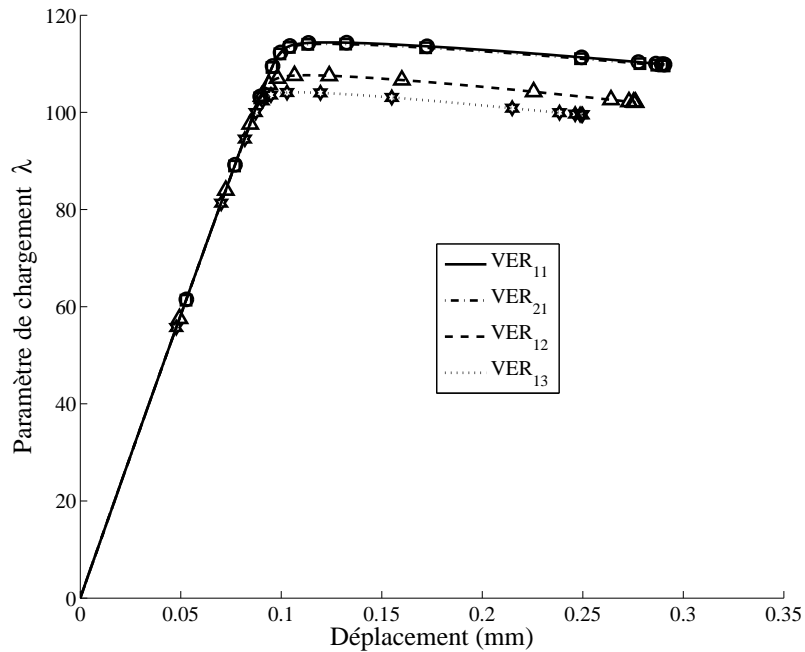


FIGURE 4.5 – Diagrammes charge-déplacement pour les différents VER construits à partir de la cellule élémentaire de la figure 4.3.

La figure 4.7 montre l'état déformé de la moitié de la macrostructure. Les figures 4.8 et 4.9 illustrent le flambage de la fibre dans la microstructure pour les différents types de

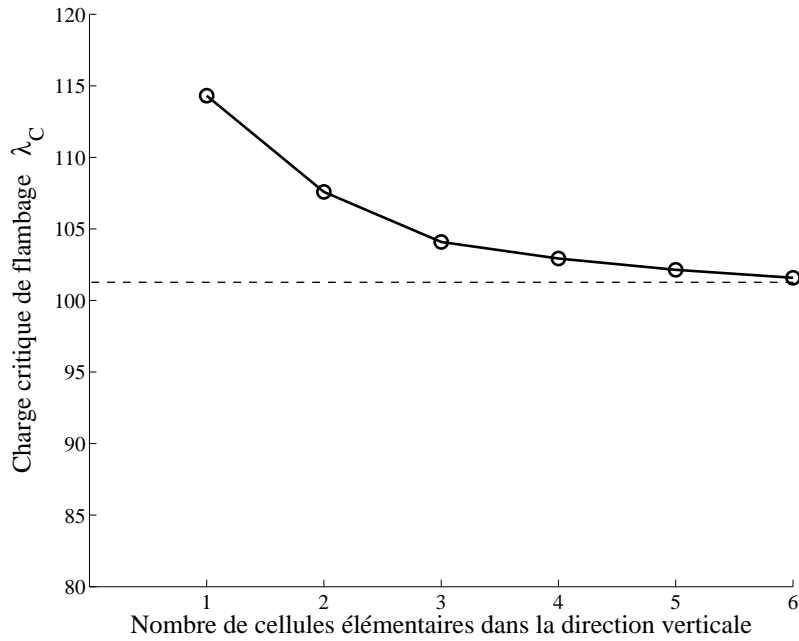


FIGURE 4.6 – Convergence de la charge critique par rapport au nombre de cellules élémentaires j dans la direction \mathbf{e}_2 .

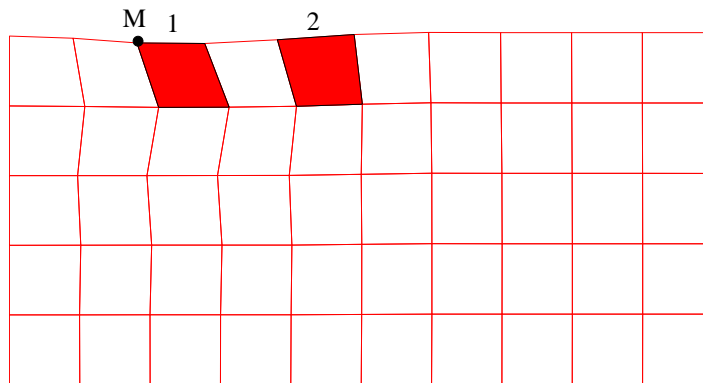


FIGURE 4.7 – État déformé de la macrostructure.

VER.

Dans cet exemple, les instabilités locales jouent un rôle important sur la réponse macroscopique, comme on peut le voir de façon nette dans la figure 4.10. Dans une première phase, précédant le point A , le comportement macroscopique est essentiellement linéaire. Lorsque des instabilités se produisent au niveau microscopique, un changement brutal (adoucissement) intervient (portion de courbe entre les points A et B). La figure 4.11 montre les états déformés du VER_{13} avant et après la charge globale de flambage (points

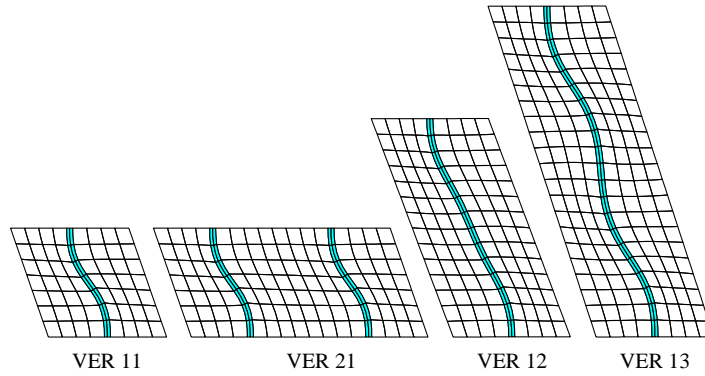


FIGURE 4.8 – Configurations déformées de la microstructure dans l'élément 1 (voir la figure 4.7)

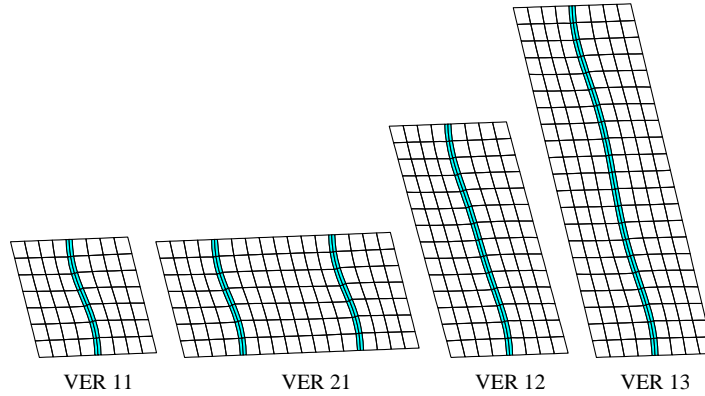


FIGURE 4.9 – Configurations déformées de la microstructure dans l'élément 2 (voir la figure 4.7)

A et B dans la figure 4.10). Il y a une grande différence entre les deux états déformés microstructuraux malgré la légère variation de la charge macroscopique, montrant les effets des instabilités microscopiques sur la réponse macroscopique.

4.2.2 Structure cellulaire

Dans cet exemple, nous étudions un matériau constitué d'une microstructure cellulaire comme représentée dans la figure 4.12a. Le matériau constituant les inclusions est ici moins rigide que la matrice ($E_{Matrice}/E_{inclusion} = 1000$, avec $E_{Matrice} = 100000 MPa$). Des conditions de périodicité sont ici utilisées (2.14). La structure macroscopique est la même que dans l'exemple précédent. Comme dans l'exemple précédent, la compression est le mode principal induisant le flambement de la microstructure. Ici encore, nous déterminons

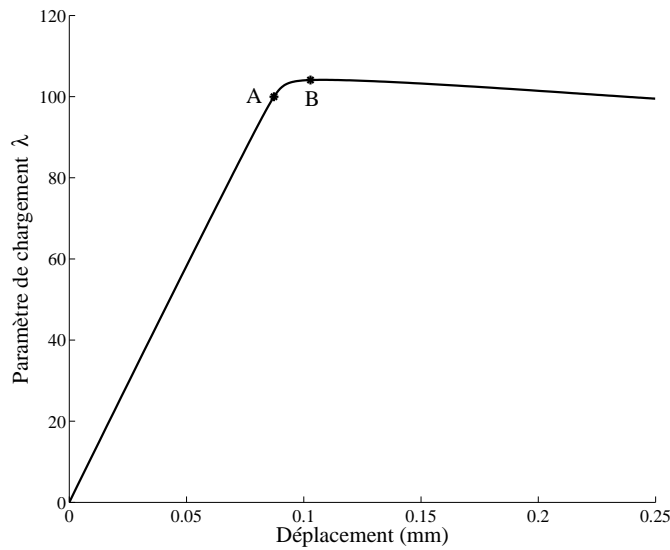


FIGURE 4.10 – Courbe de réponse charge-déplacement du VER₁₃.

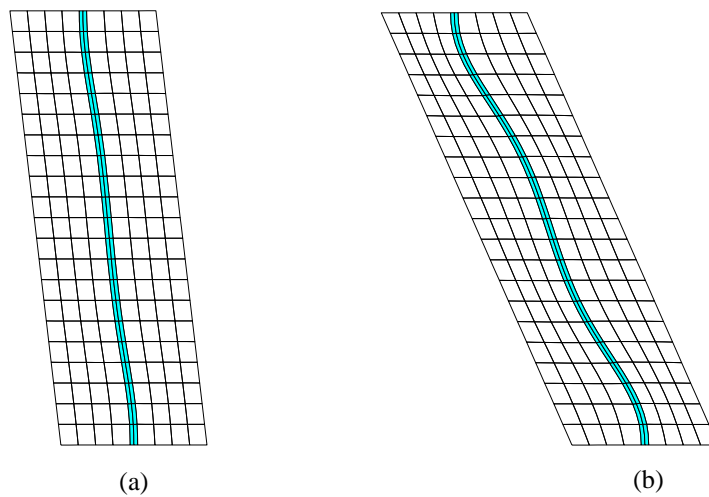


FIGURE 4.11 – Configurations déformées de la microstructure dans l'élément 1 (voir la figure 4.7) aux points (a) A et (b) B (voir la figure 4.10). Les déformations sont exagérées d'un facteur 5.

la taille du VER en testant la convergence de la réponse de plusieurs VER constitués d'un nombre croissant de cellules élémentaires. Des exemples de déformées pour les VER₁₁ et VER₂₂ sont représentés dans la figure 4.12.

Le chargement appliqué est une compression avec un cisaillement de faible amplitude, introduit comme défaut en vue de déclencher le flambage : $\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I} = [\bar{F}^{11} - 1; \bar{F}^{12}; \bar{F}^{21}; \bar{F}^{22} - 1] = [0; 0.01; 0; -1]$ (voir (2.14)). La figure 4.13 présente les contraintes moyennes en fonction des déformations macroscopiques pour les VER₁₁ et VER₂₂. On observe que les réponses

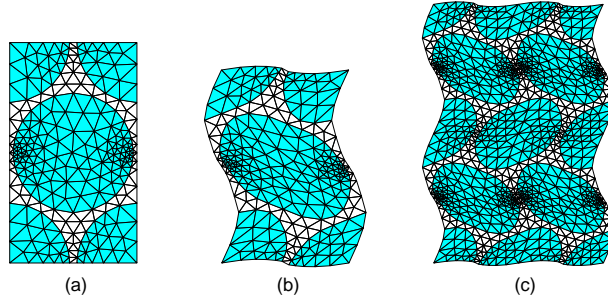


FIGURE 4.12 – (a) Cellule élémentaire associée à la microstructure cellulaire (VER_{11}); (b) état déformé en compression de la même cellule; (c) état déformé du VER constitué de quatre cellules élémentaires (VER_{22}).

pour ces deux VER sont presque identiques. On peut donc utiliser un VER constitué d'une seule cellule élémentaire par la suite.

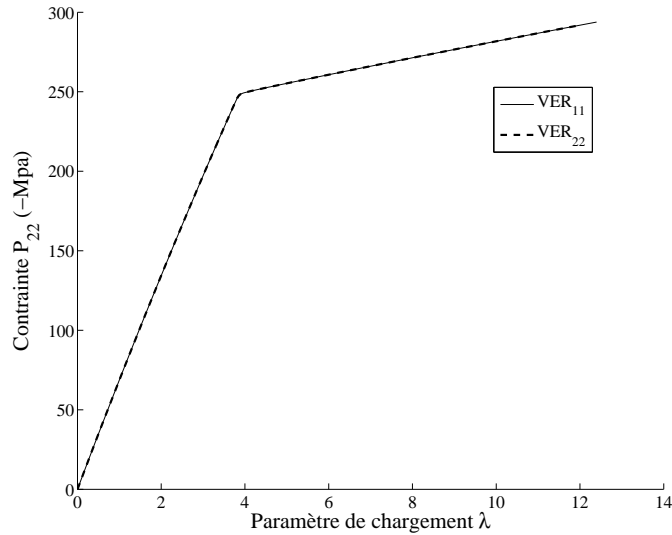


FIGURE 4.13 – Courbes de réponse contrainte-charge macroscopiques pour les VER_{11} et VER_{22} (voir la figure 4.12).

Nous utilisons ensuite notre algorithme multi échelle pour résoudre le problème macroscopique de la figure 4.4. La figure 4.14 représente le déplacement du point M (voir figure 4.7) par rapport au paramètre de chargement. On voit dans la figure 4.15 les états déformés du VER dans l'élément 1 pour les points de chargement A et B de la courbe 4.14. Comme dans l'exemple précédent, avant le point A , la réponse est essentiellement linéaire. Après le point A , des instabilités au niveau local induisent un changement brutal dans la rigidité de la structure.

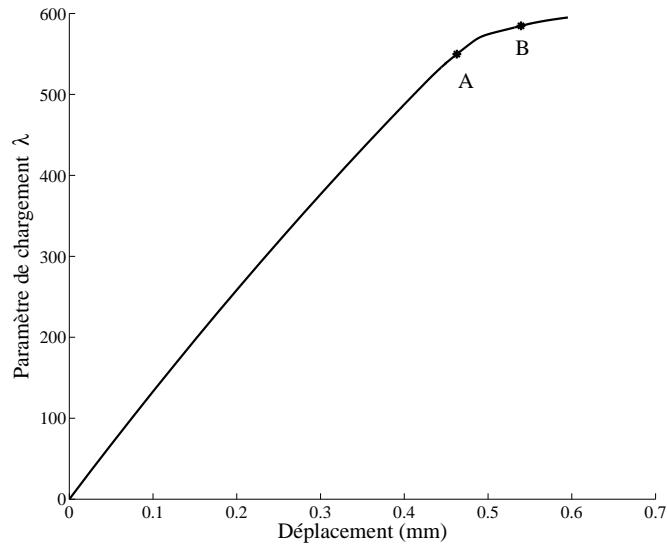


FIGURE 4.14 – Courbe de réponse charge-déplacement pour le problème de microflambage avec microstructure cellulaire.

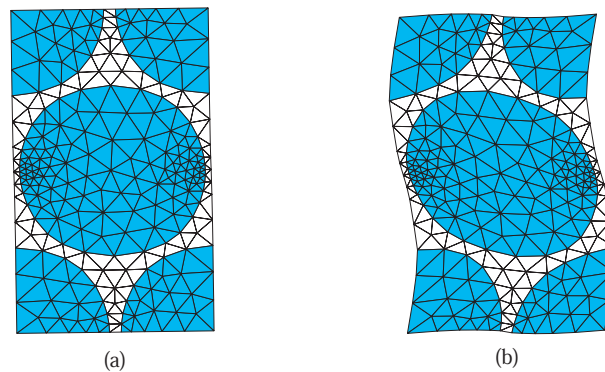


FIGURE 4.15 – Configurations déformées du VER dans l'élément 1 (voir figure 4.7) aux points A (a) et B (b) de la courbe de chargement 4.14. Les déformations représentées sont à l'échelle 1.

4.3 Microflambage plastique d'un composite à fibres longues

Les premières analyses associées au microflambage d'un composite à fibres longues en compression sont dues à Rosen (1964), montrant que dans un contexte élastique, la contrainte limite de microflambage est approximativement égale à la valeur du module de cisaillement du composite. Plus tard, Budiansky (1983) montra que les non linéarités et les courbures initiales des fibres doivent être prises en compte pour prédire correctement

le niveau de rupture des composites en compression.

Dans cette partie, nous étudions l'influence du flambage des fibres au niveau microscopique sur la réponse macroscopique avec comportement plastique de la matrice. Un matériau composite à fibres longues est considéré, avec un comportement non linéaire plastique (relation de comportement de Ramberg-Osgood (3.47)) pour la matrice et un comportement élastique linéaire (modèle de Saint Venant-Kirchhoff (1.2)) pour les fibres. Les grands déplacements sont pris en compte.

4.3.1 Mécanisme de microflambage plastique

Nous étudions ici le mécanisme de microflambage plastique d'un composite à fibres longues. Une représentation dans le plan transverse aux couches de la microstructure est donnée dans la figure 4.16, où \mathbf{e}_2 corresponde à la direction de chargement. Nous supposons une imperfection initiale avec l'amplitude v_0 constante à travers l'épaisseur, et variable suivant une loi sinusoïdale de période $200.\pi\mu m$ suivant \mathbf{e}_2 (voir figure 4.16). Ce problème a été étudié précédemment dans plusieurs travaux, comme par exemple dans Kyriakides et al. (1995); Drapier et al. (1997, 1998, 2001). Nous revisitons ici ce problème pour tester la MAN dans ce cas difficile. Nous considérons une microstructure formée d'une fibre élastique, présentant une imperfection géométrique, noyée dans une matrice dont le comportement est non linéaire. Des conditions de périodicité sont imposées sur les bords du domaine et nous considérons l'hypothèse des contraintes planes. Les propriétés mécaniques utilisées, correspondant à un composite T300/914, sont données dans le tableau 4.1, en considérant un comportement isotrope de chacune des phases (Wisnom (1991)). La microstructure est soumise à un mode de compression associé à une déformation macroscopique : $\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I} = [\bar{F}^{11} - 1; \bar{F}^{12}; \bar{F}^{21}; \bar{F}^{22} - 1] = [0; 0; 0; -1]$ (voir l'équation (2.14)). L'algorithme MAN est utilisé avec une approximation de Padé (voir la section 1.3.4), en utilisant un paramètre $\delta = 10^{-6}$.

TABLE 4.1 – Caractéristiques mécaniques du composite T300/914.

Fibre T300	Matrice 914
$E_f = 240$ Gpa	$E_m = 4.5$ Gpa
$\nu_f = 0.3$	$\nu_m = 0.4$
Fraction volumique de fibre : $f = 0.6$	$n = 6$
Diamètre de fibre : $d_f = 10\mu m$	$\sigma_y = 115$ MPa

La figure 4.17 montre la réponse en compression pour différentes amplitudes de l'im-

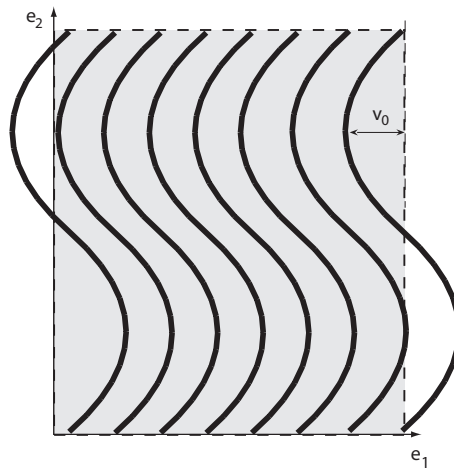


FIGURE 4.16 – La microstructure du composite à fibres longues avec l'imperfection.

perfection v_0 . Ce test difficile conduit pour les différentes valeurs d'amplitudes initiales à un point limite fortement marqué. Ces résultats concordent avec ceux obtenus dans Kyriakides et al. (1995) qui, en utilisant la méthode des éléments finis, ont modélisé la compression d'un ensemble de fibres en présence d'imperfections dans une matrice non linéaire. En moyenne, nous pouvons suivre la courbe de réponse avec 15 pas, malgré la variation brutale de la courbure lorsque la valeur de contrainte maximale de chargement est atteinte.

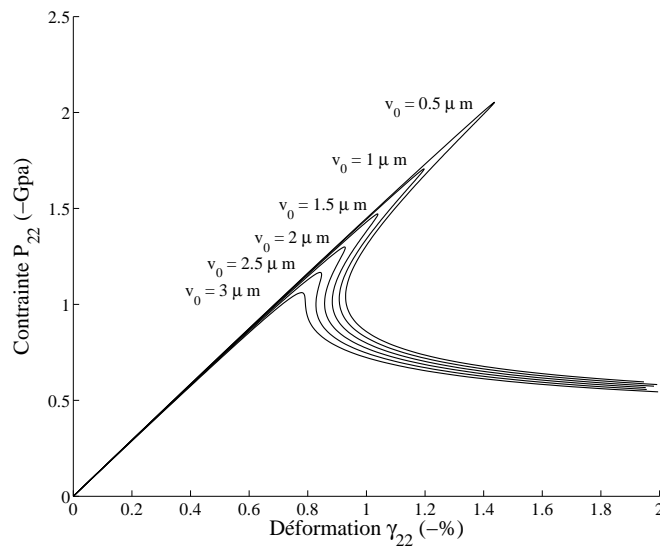


FIGURE 4.17 – Courbes contraintes-déformations macroscopiques pour différentes valeurs d'amplitudes de l'imperfection v_0 .

4.3.2 Calcul multi échelle avec instabilités liées au microflambage plastique

Nous étudions à présent un problème dans lequel deux échelles sont considérées. La structure macroscopique de la figure 4.4 est reprise ici. Le matériau est supposé hétérogène, avec une microstructure décrite dans le paragraphe précédent. L'amplitude de l'imperfection de la couche est choisie comme ayant une valeur de $3\mu m$. Nous utilisons notre procédure multi échelle pour résoudre ce problème micro-macro. Ici encore, l'algorithme MAN est utilisé avec les approximations de Padé et un paramètre de précision $\delta = 10^{-8}$.

Dans la figure 4.19, le déplacement du point M (figure 4.18) situé sur le bord supérieur de la structure macroscopique est donné en fonction du paramètre de chargement λ . L'influence des instabilités locales sur la réponse macroscopique est observée très nettement. Dans une première portion de la courbe précédant le point A , le comportement macroscopique est linéaire. Entre les points A et B , un changement brusque est observé. Ce phénomène est également observé entre les points B , C , D et E . Il est causé par l'initiation des flambements dans les microstructures associés aux différents points. Les états déformés de microstructure au point d'intégration $IP I$ (figure 4.18) sont représentés pour les états associés aux points A , B , C , D et E de la courbe 4.19. Malgré la faible différence du niveau de charge macroscopique entre les états A , B , C et D , nous constatons que les états déformés varient brusquement, en raison du flambage de la microstructure.

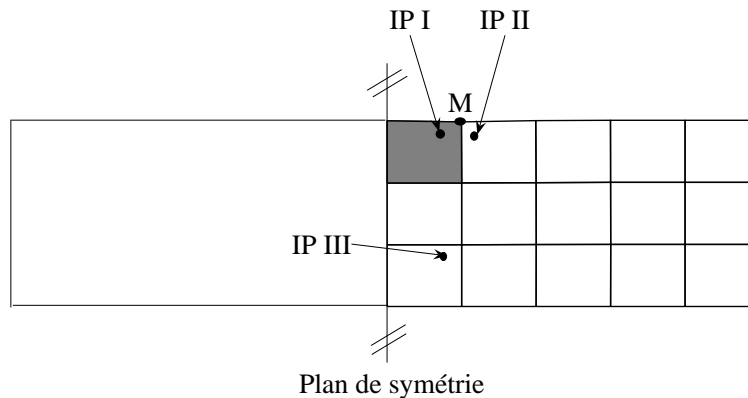


FIGURE 4.18 – Maillage utilisé pour la macrostructure.

Dans la figure 4.21, les diagrammes contraintes/déformations macroscopiques sont présentés pour les différents points d'intégration (I, II et III) indiqués sur la figure 4.18. Les états de déformations A , B , C , D et E de ces figures sont de même type que ceux de la figure 4.19. Notons que les différentes instabilités n'interviennent pas pour un même niveau de chargement macroscopique.

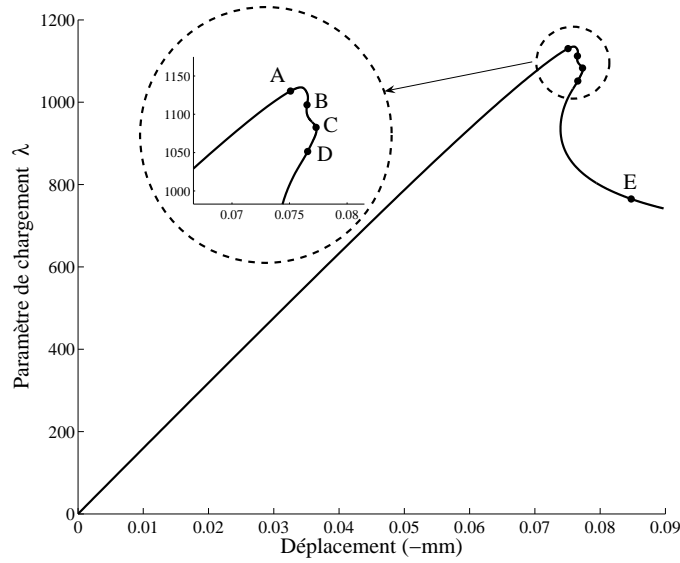


FIGURE 4.19 – Diagramme charge-déplacement pour le problème de microflambage plastique.

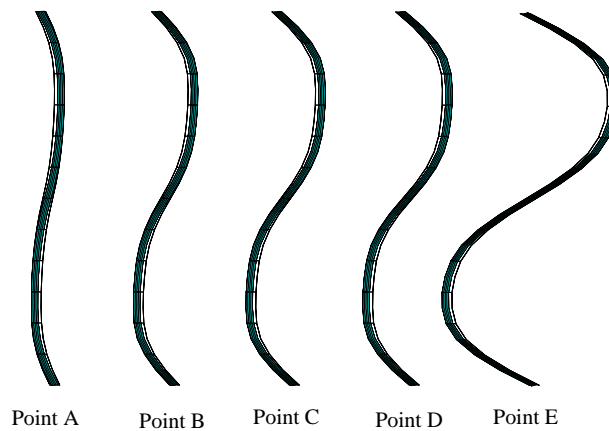


FIGURE 4.20 – États déformés associés au point d'intégration macroscopique $IP I$ (voir figure 4.18) pour les différents chargements (points A,B,C,D et E de la figure 4.19). Les déformations sont exagérées d'un facteur 10.

Ce phénomène entraîne une réduction de la longueur des pas asymptotiques, car la solution macroscopique devient beaucoup moins régulière lorsque les instabilités micro interviennent. Or il a été montré que la longueur des pas asymptotiques est fortement liée à la

régularité de la solution. L'apparition des instabilités locales successives induit également une dépendance de l'efficacité (longueur des pas) au maillage macroscopique. Lorsque le maillage est raffiné, un plus grand nombre d'instabilités sont détectées, entraînant une réduction importante des pas au voisinage des points limites. La MAN permet néanmoins de "passer" ces points limites, dans ce problème qui serait extrêmement difficile à traiter par une approche multi niveaux classique utilisant l'algorithme de Newton-Raphson associé au pilotage avec longueur d'arc. Ce problème de réduction des pas doit être amélioré et fera l'objet de travaux futurs.

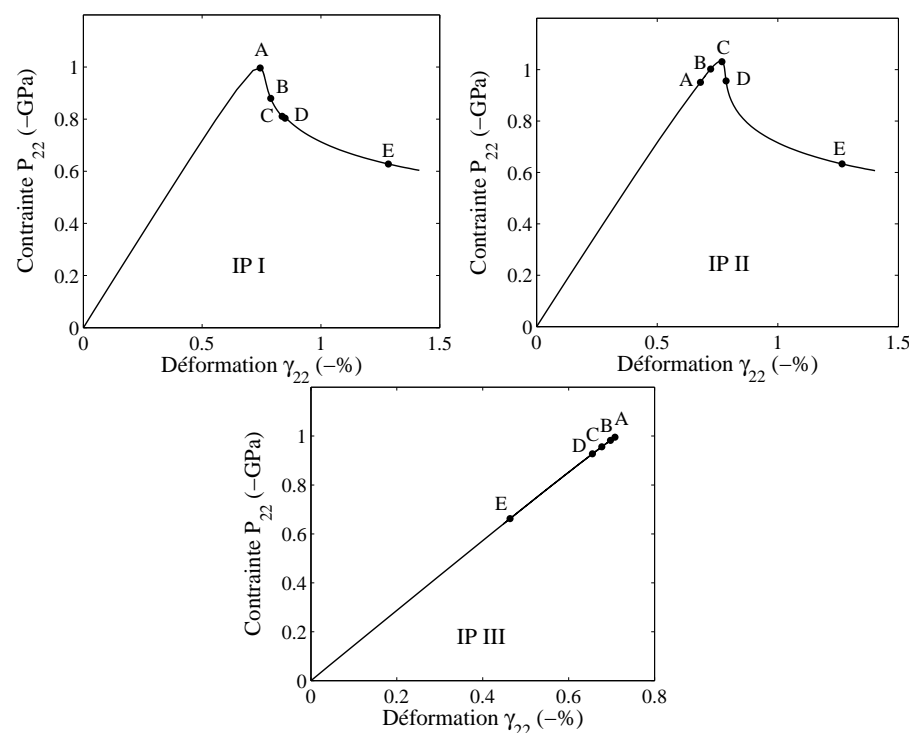


FIGURE 4.21 – Courbes contraintes-déformations macroscopiques pour les différents points d'intégration I, II et III (voir figure 4.18).

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des tests numériques qui permettent de valider la formulation MAN multi échelle proposée dans le chapitre 2. Nous avons montré clairement que l'association de la méthode EF² et la méthode MAN permet de résoudre efficacement des problèmes de structures hétérogènes non linéaires avec instabilités au niveau microscopique et au niveau macroscopique. Remarquons que l'idée principale est

de proposer une méthode numérique alternative aux méthodes itératives classiques pour la résolution de ce type de problèmes. Il n'était pas question de discuter en profondeur les limites et la validité de la modélisation pour les problèmes physiques traités dans ce chapitre.

Sur le plan numérique, l'exemple 4.3.2 est le plus sévère des problèmes présentés dans ce chapitre. Il présente, en effet, un comportement élastoplastique de la matrice et un flambage élastique de la fibre. Les différentes fibres flambent de façon successive au cours du chargement ce qui induit une difficulté importante pour le pilotage des calculs. Nous avons observé également un nombre de pas très important que nous n'avons pas discuté dans cette étude. Une perte d'ellipticité à la limite de chargement de la structure pourrait expliquer cette accumulation de pas asymptotiques que ce soit en cas de séries entières ou en cas d'approximants de Padé. Cette constatation nous a conforté dans l'idée d'étendre nos algorithmes à une formulation basée sur l'homogénéisation du second ordre. En effet, cette formulation permet d'améliorer le conditionnement pour les problèmes qui présentent une perte d'ellipticité et permet également de traiter les problèmes d'homogénéisation pour lesquels l'effet de taille des constituants de la microstructure est important. Cette formulation fait l'objet du chapitre suivant ; il s'agit de montrer que l'application de la MAN au problème d'homogénéisation du second ordre reste assez similaire sur le plan algorithmique que la procédure déjà présentée pour l'homogénéisation du premier ordre du chapitre 2.

Chapitre 5

Méthode Asymptotique Numérique pour l'homogénéisation du second ordre

Sommaire

5.1	Formulation du problème multi échelle du second ordre . . .	81
5.1.1	Problème microscopique et couplage entre les échelles micro et macro	81
5.1.2	Problème au niveau macroscopique	85
5.2	Résolution du problème du second ordre à l'aide de la MAN	86
5.2.1	Technique de perturbation	86
5.2.2	Localisation	89
5.2.3	Homogénéisation	90
5.2.4	Problème macroscopique à résoudre	91
5.3	Exemple numérique	92
5.4	Conclusion	94

Dans les chapitres précédents, la technique d'homogénéisation du premier ordre a été présentée avec succès dans le cadre de la MAN. Néanmoins, quelques restrictions limitent le domaine d'utilisation de cette technique : (i) elle n'est pas sensible à la taille de la microstructure malgré la prise en compte de la fraction volumique, de la distribution et de la morphologie des constituants. Dans le contexte de l'homogénéisation du premier ordre, on suppose que la taille de la microstructure est infiniment petite par rapport à celle de la macrostructure. Toutefois, il arrive que la taille de la microstructure soit comparable à la taille caractéristique de la structure; (ii) l'hypothèse de l'uniformité des champs macroscopiques (contrainte/déformation) associés à chaque VER, exigée dans le concept de la séparation des échelles, n'est pas appropriée dans les régions de forts gradients où les champs macroscopiques peuvent varier considérablement. En outre, si un adoucissement

se produit en un point du matériau au niveau macroscopique, la solution obtenue à l'aide de l'homogénéisation du premier ordre dépend du maillage macroscopique. Ceci vient du fait que le problème aux limites macroscopique est mal posé.

De multiples auteurs ont travaillé sur ce sujet et ont proposé différentes techniques comme par exemple l'utilisation d'un milieu continu de degré supérieur ou développement de Taylor au second ordre du potentiel au voisinage de la déformation moyenne des constituants de la microstructure; en voici une liste non exhaustive des contributions sur ce sujet : Germain (1973); Peerlings et al. (1996); Ponte Castañeda (1996, 2002); Fleck et Hutchinson (1997); Forest et Sab (1998); Forest et al. (2001); Forest et Sievert (2003); Matsushima et al. (2002); Geers et al. (2003); Kousnetzova et al. (2002, 2004); Lahellec et Suquet (2004, 2007).

Dans ce travail, nous avons considéré la contribution sur l'homogénéisation du second ordre proposée par Kousnetzova et ses collaborateurs (Kousnetzova et al. (2002); Kousnetzova (2002); Kousnetzova et al. (2004)) dans laquelle le double gradient de déformation macroscopique est considéré dans la transition cinématique micro-macro. Le tenseur des contraintes macroscopiques et le tenseur de contraintes d'ordre élevé sont extraits en utilisant une extension de la condition de Hill-Mandel. Un milieu continu d'ordre supérieur est obtenu au niveau macroscopique, tandis que le problème aux limites microscopique reste classique. Ainsi, le calcul d'homogénéisation du second ordre établit directement une réponse de comportement du second ordre au niveau microscopique sans hypothèses supplémentaires au niveau macroscopique. Dans ce chapitre considéré comme prospectif, nous rappelons la formulation de l'homogénéisation du second ordre, ensuite nous montrons que la résolution, à l'aide de la MAN, du problème non linéaire résultant est assez simple. En effet, un effort important a été déployé pour résoudre le problème d'homogénéisation du premier gradient dans le chapitre 2. La technique MAN reste assez similaire sur le plan algorithmique pour le problème d'homogénéisation du second ordre. Un seul exemple de flexion est proposé pour valider l'implantation de l'algorithme. Un travail approfondi sera nécessaire ultérieurement avec des applications qui mettent en évidence l'apport de l'homogénéisation du second gradient avec la prise en compte de l'effet de taille ou d'instabilités avec perte d'ellipticité.

5.1 Formulation du problème multi échelle du second ordre

5.1.1 Problème microscopique et couplage entre les échelles micro et macro

Le problème au niveau microscopique est similaire à celui présenté dans le chapitre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} {}^t\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, d\omega = 0 \\ \mathbf{S} = \mathbb{C}^{(r)} : \boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

+C.L. au niveau microscopique.

La seule différence entre les deux formulations au niveau microscopique concerne les conditions aux limites. Ces conditions, dans le contexte de l'homogénéisation du second ordre, sont présentées dans cette section. Notons que toutes les lois de comportement présentées précédemment peuvent s'appliquer dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre de la même façon que celle détaillée pour le premier ordre.

La relation (2.7) présentée dans le chapitre 2 est le point de départ du calcul d'homogénéisation du premier ordre. Dans le cadre de la théorie d'homogénéisation du second ordre, cette relation est redéfinie en considérant le développement en série de Taylor à l'ordre 2 (voir Kousnetzova et al. (2002)) :

$$\Delta \mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \Delta \mathbf{X} + \Delta \mathbf{w} \, , \quad (5.2)$$

où $\bar{\mathbf{G}}$ est le tenseur, d'ordre trois, gradient de déformation du second ordre macroscopique défini par :

$$\bar{\mathbf{G}} = \boldsymbol{\nabla} \bar{\mathbf{F}} \, . \quad (5.3)$$

Comme le tenseur $\bar{\mathbf{G}}$ a une symétrie mineure selon sa définition (5.3), $\bar{G}^{(ijk)} = \bar{G}^{(kji)}$, il peut être réécrit sous la forme indicielle comme suit :

$$\bar{G}^{(ijk)} = \frac{1}{2} (\nabla^{(i)} \bar{F}^{(jk)} + \nabla^{(k)} \bar{F}^{(ji)}) \, . \quad (5.4)$$

Dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre, une extension de la condition de Hill-Mandel (voir l'équation (2.16)) peut s'écrire sous la forme suivante (Fleck et Hutchinson (1997); Kousnetzova et al. (2002)) :

$${}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}} : \delta \bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} {}^t\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, d\omega \quad \forall \delta \bar{\mathbf{u}} \, . \quad (5.5)$$

Dans cette équation, la contrainte du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{Q}}$, est liée aux variables microscopiques comme suit :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2|\omega|} \int_{\omega} ({}^t\mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{P}) d\omega . \quad (5.6)$$

Puisque ce tenseur, $\bar{\mathbf{Q}}$, a une symétrie mineure comme $\bar{\mathbf{G}}$, $\bar{Q}^{(ijk)} = \bar{Q}^{(kji)}$, il se réécrit sous forme indicielle comme suit :

$$\bar{Q}^{(ijk)} = \frac{1}{2|\omega|} \int_{\omega} (X^{(i)} P^{(jk)} + X^{(k)} P^{(ji)}) d\omega . \quad (5.7)$$

Conditions aux limites au niveau microscopique

Pour définir les conditions aux limites au niveau microscopique dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre, considérons d'abord la dérivée de l'équation (5.2) par rapport à \mathbf{X} :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \Delta\mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{G}} + \nabla(\Delta\mathbf{w}) . \quad (5.8)$$

Ensuite, l'application de la relation de couplage (2.6) définie dans le cadre de l'homogénéisation du premier ordre, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \bar{\mathbf{F}} d\omega + \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \Delta\mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{G}} d\omega + \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \nabla(\Delta\mathbf{w}) d\omega \\ &= \bar{\mathbf{F}} + \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \Delta\mathbf{X} d\omega \cdot \bar{\mathbf{G}} + \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \Delta\mathbf{w} \mathbf{N} d\Gamma . \end{aligned} \quad (5.9)$$

En mettant l'origine du repère, lié à la microstructure, au centre du VER de forme rectangulaire ($\mathbf{X}_{(c)} = 0$) (voir figure 5.1) et en écrivant l'équation (5.2) par rapport au centre du VER ; c'est-à-dire, $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{(c)}$ et $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{(c)}$, on peut obtenir facilement (voir Kousnetzova et al. (2002)) :

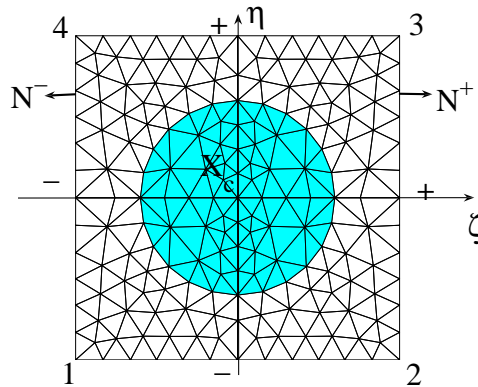


FIGURE 5.1 – Schéma d'un VER avec des conditions de périodicité.

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \Delta \mathbf{X} d\omega = 0 . \quad (5.10)$$

La même relation que (2.10) peut donc être obtenue :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \Delta \mathbf{w} \mathbf{N} d\Gamma = 0 . \quad (5.11)$$

Dans cette étude, pour satisfaire la condition ci-dessus, on suppose les conditions de périodicité sur les bords du VER :

$$\Delta \mathbf{w}^+ = \Delta \mathbf{w}^- \quad \text{sur } \partial\omega . \quad (5.12)$$

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = \bar{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}} : (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \mathbf{X}^-) \quad \text{sur } \partial\omega . \quad (5.13)$$

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}} : (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \mathbf{X}^-) \quad \text{sur } \partial\omega . \quad (5.14)$$

Notons que, pour satisfaire les conditions de périodicité sur les coins du VER (nœuds 1, 2, 3 et 4 sur la figure 5.1), les termes $\Delta \mathbf{w}$ aux quatre coins sont considérés nuls ($\Delta \mathbf{w}_{(i)} = 0$, $i = 1 \dots 4$.) (voir Kousnetzova (2002)). On peut donc écrire :

$$\Delta \mathbf{x}_{(i)} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{X}_{(i)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}_{(i)} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \Delta \mathbf{X}_{(i)}, \quad i = 1 \dots 4 . \quad (5.15)$$

Dans cette relation, la position actuelle du centre du VER, $\mathbf{x}_{(c)}$ ($\Delta \mathbf{x}_{(i)} = \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(c)}$) est inconnue. En fixant un coin du VER, par exemple le nœud 1, et en sachant que $\mathbf{X}_{(c)} = 0$, cette position, $\mathbf{x}_{(c)}$, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}_{(c)} = \mathbf{X}_{(1)} - \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X}_{(1)} - \frac{1}{2} \mathbf{X}_{(1)} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{X}_{(1)} . \quad (5.16)$$

Par conséquence, la position actuelle des coins du VER peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(j)} &= (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)}) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}} : (\mathbf{X}_{(j)} \mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}), \quad j = 2, 3, 4, \\ \mathbf{u}_{(1)} &= 0 . \end{aligned} \quad (5.17)$$

En outre, pour lier le gradient de déformation du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{G}}$, aux variables microscopiques, le gradient de déformation du second ordre microscopique est obtenu à partir de l'équation (5.8) :

$$\mathbf{G} = \nabla \mathbf{F} = \bar{\mathbf{G}} + \nabla (\nabla (\Delta \mathbf{w})) . \quad (5.18)$$

Si on suppose que le gradient de déformation du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{G}}$, est égal à la valeur moyenne du gradient de déformation du second ordre microscopique, \mathbf{G} :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{G} d\omega = \bar{\mathbf{G}} + \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \nabla (\nabla (\Delta \mathbf{w})) d\omega , \quad (5.19)$$

la relation suivante peut donc être obtenue :

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \nabla (\nabla (\Delta \mathbf{w})) d\omega = \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} (\nabla \Delta \mathbf{w}) \mathbf{N} d\Gamma = 0 . \quad (5.20)$$

En considérant la relation (5.12), cette équation est satisfaite ; c'est-à-dire, les conditions aux limites d'ordre supérieur sont exigées sur les bords du VER et donc, le problème au niveau microscopique est également un problème d'ordre supérieur contrairement à notre hypothèse selon laquelle, le problème aux limites microscopique reste classique (voir Kousnetzova et al. (2002)).

Par conséquence, il nous faut chercher une relation alternative entre le gradient de déformation du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{G}}$, et les variables microscopiques. Pour cette raison, l'intégrale suivante sur le volume initial du VER est considérée :

$$\int_{\omega} ({}^t\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{F}) d\omega . \quad (5.21)$$

Cette expression est choisie similaire à la définition du tenseur des contraintes du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{Q}}$ (voir équation (5.6)). La substitution de la relation (5.8) dans (5.21) donne :

$$\int_{\omega} ({}^t\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{F}) d\omega = \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}} + \int_{\omega} [(\nabla (\Delta \mathbf{w})) \mathbf{X} + \mathbf{X} ({}^t\nabla (\Delta \mathbf{w}))] d\omega , \quad (5.22)$$

où \mathbf{J} est un tenseur géométrique représentant un terme d'inertie défini sous la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \int_{\omega} \mathbf{X}\mathbf{X} d\omega . \quad (5.23)$$

Puisqu'un problème aux limites est résolu pour déterminer le comportement du VER, on peut lier les variables macroscopiques au déplacement microscopique défini seulement sur les bords du VER. En utilisant la règle, $(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{X} = \nabla (\mathbf{v}\mathbf{X}) - \mathbf{v}\mathbf{I}$, pour un vecteur arbitraire \mathbf{v} , qui peut être remplacé soit par $\Delta \mathbf{x}$ ou par $\Delta \mathbf{w}$, et le théorème de la divergence, la relation (5.22) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}} &= \int_{\partial\omega} (\mathbf{N} \Delta \mathbf{x} \mathbf{X} + \mathbf{X} \Delta \mathbf{x} \mathbf{N}) d\Gamma - 2 \left(\int_{\omega} \Delta \mathbf{x} d\omega \mathbf{I} \right) \\ &\quad - \int_{\partial\omega} (\mathbf{N} \Delta \mathbf{w} \mathbf{X} + \mathbf{X} \Delta \mathbf{w} \mathbf{N}) d\Gamma + 2 \left(\int_{\omega} \Delta \mathbf{w} d\omega \mathbf{I} \right) . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Finalement, en considérant les relations (5.2) et (5.10), le tenseur gradient de déformation du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{G}}$, est lié seulement aux variables définies sur les bords du VER :

$$\bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{J} : \bar{\mathbf{G}} \mathbf{I} = \int_{\partial\omega} (\mathbf{N} \Delta \mathbf{x} \mathbf{X} + \mathbf{X} \Delta \mathbf{x} \mathbf{N}) d\Gamma - \int_{\partial\omega} (\mathbf{N} \Delta \mathbf{w} \mathbf{X} + \mathbf{X} \Delta \mathbf{w} \mathbf{N}) d\Gamma . \quad (5.25)$$

On exige que la relation (5.25) soit indépendante des termes de perturbation. Cela permet d'écrire la relation suivante :

$$\int_{\partial\omega} (\mathbf{N} \Delta \mathbf{w} \mathbf{X} + \mathbf{X} \Delta \mathbf{w} \mathbf{N}) d\Gamma = 0 . \quad (5.26)$$

En considérant les conditions de périodicité (5.12) sur les bords du VER, la deuxième relation des conditions aux limites au niveau microscopique pour un VER rectangulaire dans le contexte de l'homogénéisation du second ordre est obtenue sous la forme suivante :

$$\int_{\partial\omega^-} \Delta \mathbf{w}^- d\Gamma = 0 , \quad (5.27)$$

$$\int_{\partial\omega^-} \Delta \mathbf{x}^- d\Gamma = \bar{\mathbf{F}} \cdot \int_{\partial\omega^-} \mathbf{X}^- d\Gamma + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}} : \int_{\partial\omega^-} \mathbf{X}^- \mathbf{X}^- d\Gamma . \quad (5.28)$$

En considérant l'équation (5.16), la condition (5.28) peut s'écrire finalement comme suit :

$$\int_{\partial\omega^-} \mathbf{u}^- d\Gamma = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- - \mathbf{X}_{(1)}) d\Gamma + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}} : \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- \mathbf{X}^- - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}) d\Gamma . \quad (5.29)$$

Notons que ces conditions aux limites nous permettent d'utiliser un milieu classique au niveau microscopique et un milieu d'ordre supérieur au niveau macroscopique.

5.1.2 Problème au niveau macroscopique

Dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre, la forme faible associée au problème macroscopique en l'absence des forces volumiques est définie par (voir Matsushima et al. (2002); Kousnetzova et al. (2002)) :

$$\int_{\Omega} \left\{ {}^t \bar{\mathbf{P}} : \delta \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}} : \delta \bar{\mathbf{G}} \right\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} + {}^t \mathbf{r} : \delta \bar{\mathbf{F}}) d\Gamma , \quad (5.30)$$

où \mathbf{r} est un tenseur de traction du second ordre défini par rapport à la contrainte du second ordre macroscopique, $\bar{\mathbf{Q}}$.

Selon cette forme faible, pour utiliser directement les éléments finis classiques basés sur le déplacement, on a besoin de fonctions d'interpolation au moins continues de classe C^1 ; c'est-à-dire, la fonction et sa dérivée première sont continues à travers les éléments. Plusieurs éléments continus de classe C^1 ont été proposés pour un milieu continu d'ordre élevé (par exemple, Xia et Hutchinson (1996); Begley et Hutchinson (1998); Zervos et al. (2001)). Toutefois, le développement des éléments continus C^1 adaptés pour les problèmes non linéaires multidimensionnels n'est pas simple car ces éléments nécessitent généralement plus d'hypothèses (par exemple géométrique).

Pour ces raisons, les éléments continus de classe C^0 sont très utilisés dans la littérature. Le développement de ce type d'éléments pour un problème du second ordre est basé

généralement sur une formulation mixte. La stratégie consiste à introduire un autre champ tensoriel inconnu qui présente un gradient de déformation, noté $\hat{\mathbf{F}}$, en plus du champ de déplacement inconnu $\bar{\mathbf{u}}$. La condition cinématique entre ces deux champs est imposée au sens faible par les multiplicateurs de Lagrange, $\boldsymbol{\mu}$:

$$\int_{\Omega} \left\{ {}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}} : \delta\hat{\mathbf{G}} + \delta \left({}^t\boldsymbol{\mu} : (\hat{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}) \right) \right\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} \left(\mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} + {}^t\mathbf{r} : \delta\hat{\mathbf{F}} \right) d\Gamma . \quad (5.31)$$

On décompose l'équation (5.31) en trois parties par rapport à $\delta\bar{\mathbf{u}}$, $\delta\hat{\mathbf{F}}$ et $\delta\boldsymbol{\mu}$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left\{ {}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}} - {}^t\boldsymbol{\mu} : \delta\bar{\mathbf{F}} \right\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \left\{ \bar{\mathbf{Q}} : \delta\hat{\mathbf{G}} + {}^t\boldsymbol{\mu} : \delta\hat{\mathbf{F}} \right\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} {}^t\mathbf{r} : \delta\hat{\mathbf{F}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \left\{ {}^t\delta\boldsymbol{\mu} : (\hat{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}) \right\} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

Les relations de comportement entre $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{G}}$, et entre $\bar{\mathbf{Q}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{G}}$ sont inconnues. Comme on l'a bien précisé dans le chapitre 2 pour l'homogénéisation du premier ordre, les contraintes macroscopiques, $\bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{Q}}$, sont obtenues directement en résolvant un problème non linéaire local d'éléments finis lié à la microstructure périodique.

Les conditions aux limites associées à ce type de problème ont été présentées par Shu et al. (1999). \mathbf{f} et \mathbf{r} sont les efforts imposés sur le bord $\partial\Omega_t$ de la macrostructure. Si le déplacement $\hat{\mathbf{u}}$ et la normale du gradient de déplacement, $(\mathbf{D} \mathbf{u})^*$, sur le bord $\partial\Omega_u$ sont donnés, les conditions aux limites sont définies par :

$$\bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{N} (\mathbf{D} \mathbf{u})^* + \nabla^s \hat{\mathbf{u}} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u , \quad (5.33)$$

où $\nabla^s = (\mathbf{I} - \mathbf{N} \mathbf{N}) \cdot \nabla$ et $\mathbf{D} = \mathbf{N} \cdot \nabla$.

5.2 Résolution du problème du second ordre à l'aide de la MAN

La résolution du système d'équations non linéaires dans le cadre d'homogénéisation du second ordre (2.4, 2.5, 2.15, 5.14, 5.17, 5.29, 5.6 et 5.32, voir la figure 5.2) est effectuée en utilisant la MAN. Dans ce cas, comme pour l'homogénéisation du premier ordre, le problème non linéaire est transformé en une série de problèmes linéaires, ce qui permet d'utiliser le principe de superposition.

5.2.1 Technique de perturbation

En appliquant la technique de perturbation aux problèmes multi échelles non linéaires du second ordre (2.4, 2.5, 2.15, 5.14, 5.17, 5.29, 5.6 et 5.32), toutes les variables sont

La forme faible macroscopique	La forme faible microscopique
$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \{ {}^t\bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}} - {}^t\mu : \delta\hat{\bar{\mathbf{F}}} \} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \left\{ \bar{\mathbf{Q}} : \delta\hat{\bar{\mathbf{G}}} + {}^t\mu : \delta\hat{\bar{\mathbf{F}}} \right\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_t} {}^t\mathbf{r} : \delta\hat{\bar{\mathbf{F}}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \{ {}^t\delta\mu : (\hat{\bar{\mathbf{F}}} - \bar{\mathbf{F}}) \} d\Omega = 0 \end{array} \right.$	$\int_{\omega} {}^t\mathbf{P} : \delta\mathbf{F} d\omega = 0$
$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{ \omega } \int_{\omega} \mathbf{P}(\mathbf{X}) d\omega \quad \bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2 \omega } \int_{\omega} ({}^t\mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{P}) d\omega$	
$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{ \omega } \int_{\omega} \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\omega$	
$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- &= (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{G}} : (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \mathbf{X}^-) \quad \text{sur } \partial\omega \\ \mathbf{u}_{(j)} &= (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)}) + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{G}} : (\mathbf{X}_{(j)}\mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)}\mathbf{X}_{(1)}) \quad j = 2, 3, 4 \\ \mathbf{u}_{(1)} &= 0 \\ \int_{\partial\omega^-} \mathbf{u}^- d\Gamma &= (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^{(1)}) d\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{G}} : \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- \mathbf{X}^- - \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)}) d\Gamma \end{aligned}$	

FIGURE 5.2 – Résumé du problème multi échelle du second ordre à résoudre.

développées en utilisant la représentation en séries (1.4). Ces variables sont présentées dans le vecteur mixte $\mathbf{U} = \{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{G}}, \bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \dots\}$.

Le problème microscopique est le même que celui présenté dans le chapitre 2, seules les conditions aux limites sont différentes. La technique de perturbation est appliquée au problème non linéaire microscopique de la même façon (voir les équations (2.21) et (2.22)). Par conséquent, les problèmes linéaires microscopiques à résoudre peuvent s'écrire sous la forme suivante :

Ordre 1 :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{S}_1 = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{P}_1 = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 = \nabla \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

$$+C.L. : \begin{cases} \mathbf{u}_1^+ - \mathbf{u}_1^- = \bar{\mathbf{F}}_1 \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}_1 : (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \mathbf{X}^-) \\ \mathbf{u}_{1(j)} = \bar{\mathbf{F}}_1 \cdot (\mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)}) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}_1 : (\mathbf{X}_{(j)} \mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}), \quad j = 2, 3, 4 \\ \mathbf{u}_{1(1)} = 0 \\ \int_{\partial\omega^-} \mathbf{u}_1^- d\Gamma = \bar{\mathbf{F}}_1 \cdot \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- - \mathbf{X}_{(1)}) d\Gamma + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}_1 : \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- \mathbf{X}^- - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}) d\Gamma \end{cases} \quad (5.34)$$

Ordre p :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_p = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + \mathbf{S}_p^{nl} \\ \mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl} \\ \mathbf{F}_p = \nabla \mathbf{u}_p \end{cases}$$

$$+C.L. : \begin{cases} \mathbf{u}_p^+ - \mathbf{u}_p^- = \bar{\mathbf{F}}_p \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}_p : (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \mathbf{X}^-) \\ \mathbf{u}_{p(j)} = \bar{\mathbf{F}}_p \cdot (\mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)}) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}_p : (\mathbf{X}_{(j)} \mathbf{X}_{(j)} - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}), \quad j = 2, 3, 4 \\ \mathbf{u}_{p(1)} = 0 \\ \int_{\partial\omega^-} \mathbf{u}_p^- d\Gamma = \bar{\mathbf{F}}_p \cdot \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- - \mathbf{X}_{(1)}) d\Gamma + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{G}}_p : \int_{\partial\omega^-} (\mathbf{X}^- \mathbf{X}^- - \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}) d\Gamma \end{cases} \quad (5.35)$$

où les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{F}_p^{nl} sont exactement les mêmes qui sont définis dans le chapitre 2.

Au niveau macroscopique, l'introduction du développement asymptotique dans le problème non linéaire (5.32) permet d'obtenir une suite de problèmes linéaires qui s'écrivent à l'ordre p comme suit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left\{ {}^t \bar{\mathbf{P}}_p : \delta \bar{\mathbf{F}} - {}^t \boldsymbol{\mu}_p : \delta \bar{\mathbf{F}} \right\} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \left\{ \bar{\mathbf{Q}}_p : \delta \hat{\mathbf{G}} + {}^t \boldsymbol{\mu}_p : \delta \hat{\mathbf{F}} \right\} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} {}^t \mathbf{r} : \delta \hat{\mathbf{F}} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \left\{ {}^t \delta \boldsymbol{\mu} : \left(\hat{\mathbf{F}}_p - \bar{\mathbf{F}}_p \right) \right\} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

Notons que si la loi de comportement macroscopique du second ordre est connue, on peut résoudre chaque problème à l'ordre p pour $\bar{\mathbf{u}}_p$, $\hat{\mathbf{F}}_p$ et λ_p . Puisque cette loi est inconnue, l'utilisation des conditions de couplage entre les échelles et des conditions aux limites microscopiques permet de construire le module tangent macroscopique comme il a été montré pour l'homogénéisation du premier ordre.

5.2.2 Localisation

On résout partiellement les problèmes linéaires au niveau microscopique à chaque ordre en considérant les conditions de couplage entre les problèmes macroscopiques et microscopiques de la même façon que pour le premier ordre. Par contre, dans ce cas, la solution obtenue permet de construire numériquement deux tenseurs de localisation : le tenseur de localisation du premier ordre et le tenseur de localisation du second ordre.

Le déplacement microscopique à l'ordre p , \mathbf{u}_p , peut être décomposé sous forme d'une combinaison linéaire des modes solutions des problèmes aux limites élémentaires résolus indépendamment en imposant les conditions aux limites microscopiques du second ordre (5.14), (5.17) et (5.29). Par exemple en 2D, on peut écrire en considérant la symétrie mineure de $\bar{\mathbf{G}}$ ($\bar{G}_{ijk} = \bar{G}_{kji}$) :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p^l + \mathbf{u}_p^{nl} \quad \text{dans } \omega, \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p^l = & \bar{F}_p^{(11)} \tilde{\mathbf{u}}^{(110)} + \bar{F}_p^{(12)} \tilde{\mathbf{u}}^{(120)} + \bar{F}_p^{(21)} \tilde{\mathbf{u}}^{(210)} + \bar{F}_p^{(22)} \tilde{\mathbf{u}}^{(220)} + \bar{G}_p^{(111)} \tilde{\mathbf{u}}^{(111)} + 2 \bar{G}_p^{(112)} \tilde{\mathbf{u}}^{(112)} \\ & + \bar{G}_p^{(121)} \tilde{\mathbf{u}}^{(121)} + 2 \bar{G}_p^{(122)} \tilde{\mathbf{u}}^{(122)} + \bar{G}_p^{(212)} \tilde{\mathbf{u}}^{(212)} + \bar{G}_p^{(222)} \tilde{\mathbf{u}}^{(222)}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^{(ijk)}$ ($i, j = 1 \dots 2$ et $k = 0 \dots 2$) sont les solutions des problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^{(ijk)}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \omega \\ \tilde{\mathbf{u}}^{(ijk)+} - \tilde{\mathbf{u}}^{(ijk)-} = \mathbf{X}^{(ijk)+} - \mathbf{X}^{(ijk)-} \quad \text{sur } \partial\omega \\ \tilde{\mathbf{u}}_{(j)}^{(ijk)} = \mathbf{X}_{(j)}^{(ijk)} - \mathbf{X}_{(1)}^{(ijk)}, \quad j = 2, 3, 4 \\ \tilde{\mathbf{u}}_{(1)}^{(ijk)} = 0 \\ \int_{\partial\omega^-} \tilde{\mathbf{u}}^{(ijk)-} d\Gamma = \int_{\partial\omega^-} \mathbf{X}^{(ijk)-} d\Gamma \quad \text{sur } \partial\omega^- \end{array} \right. \quad (5.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(110)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^{(120)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(210)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^{(220)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(111)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(112)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(121)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}^{(122)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} , \\
 \mathbf{X}^{(212)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} , \\
 \mathbf{X}^{(222)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} ,
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

et \mathbf{u}_p^{nl} est la solution du problème :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_p^{nl}, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) \text{ dans } \omega . \tag{5.41}$$

Notons que la méthodologie proposée pour 2D peut être facilement étendue au cadre 3D. Enfin, la solution \mathbf{u}_p peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_p = \mathbb{A} : \bar{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbb{A}} : \bar{\mathbf{G}}_p + \mathbf{u}_p^{nl} , \tag{5.42}$$

où le tenseur \mathbb{A} est le même que celui du chapitre 2 ($A_{ijk} = \tilde{\mathbf{u}}_i^{(jk0)}$) et $\tilde{\mathbb{A}}$ est un tenseur d'ordre quatre défini par $\tilde{A}_{ijkl} = \tilde{\mathbf{u}}_i^{(jkl)}$ ($i, j, k, l = 1 \dots 3$). En dérivant (5.42) par rapport à \mathbf{X} et en utilisant $\nabla \mathbf{u}_p = \mathbf{F}_p$, on obtient :

$$\mathbf{F}_p = \mathbb{A}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbb{A}}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{G}}_p + \mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl} , \tag{5.43}$$

où $\mathbb{A}_{,\mathbf{X}}$ et $\mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl}$ sont les mêmes tenseurs que ceux définis dans le chapitre 2 et $\tilde{\mathbb{A}}_{,\mathbf{X}}$ est un tenseur d'ordre cinq qui est identifié comme un tenseur de localisation du second ordre.

5.2.3 Homogénéisation

Pour obtenir la relation de comportement au niveau macroscopique, on utilise directement la relation (2.33) :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl} . \tag{5.44}$$

La substitution de l'équation (5.43) dans (5.44) donne :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbb{H}^{(r)} : \tilde{\mathbb{A}}_{,\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{G}}_p + \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl} + \mathbf{P}_p^{nl} . \tag{5.45}$$

En définissant $\mathbf{P}_p^{*nl} = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{u}_{p,\mathbf{X}}^{nl} + \mathbf{P}_p^{nl}$, $\mathbb{L}_1 = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbb{A}_{,\mathbf{X}}$ et $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}^{(r)} : \tilde{\mathbb{A}}_{,\mathbf{X}}$, on peut écrire :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{L}_1 : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbb{L}_2 : \bar{\mathbf{G}}_p + \mathbf{P}_p^{*nl} . \tag{5.46}$$

La moyenne de l'équation (5.46) donne la contrainte macroscopique à chaque ordre p , $\bar{\mathbf{P}}_p$, sous la forme suivante :

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \bar{\mathbb{L}}_1 : \bar{\mathbf{F}}_p + \bar{\mathbb{L}}_2 : \bar{\mathbf{G}}_p + \bar{\mathbf{P}}_p^{nl} . \tag{5.47}$$

où

$$\bar{\mathbf{P}}_p^{nl} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P}_p^{*nl} d\omega .$$

Pour obtenir la contrainte macroscopique du second ordre, on développe d'abord l'équation de couplage (5.6). Donc, à l'ordre p , on obtient :

$$\bar{\mathbf{Q}}_p = \frac{1}{2|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{Q}_p d\omega = \frac{1}{2|\omega|} \int_{\omega} ({}^t\mathbf{P}_p \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{P}_p) d\omega . \quad (5.48)$$

Ensuite, on introduit la relation (5.47) dans l'équation (5.48). Pour bien comprendre la procédure, on réécrit la contrainte microscopique du second ordre à l'ordre p , \mathbf{Q}_p , sous forme indicielle :

$$\begin{aligned} Q_p^{(ijk)} &= X^{(i)} P_p^{(jk)} + X^{(k)} P_p^{(ji)} = X^{(i)} \mathbb{L}_1^{(jklm)} \bar{F}_p^{(ml)} + X^{(i)} \mathbb{L}_2^{(jklmn)} \bar{G}_p^{(nml)} \\ &+ X^{(i)} P_p^{nl(jk)} + X^{(k)} \mathbb{L}_1^{(jilm)} \bar{F}_p^{(ml)} + X^{(k)} \mathbb{L}_2^{(jilmn)} \bar{G}_p^{(nml)} + X^{(k)} P_p^{nl(ji)} . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Donc, on peut exprimer la contrainte microscopique du second ordre à l'ordre p , \mathbf{Q}_p , par :

$$\mathbf{Q}_p = \mathbb{L}_3 : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbb{L}_4 : \bar{\mathbf{G}}_p + \mathbf{Q}_p^{nl} , \quad (5.50)$$

où

$$\mathbb{L}_3^{(ijklm)} = X^{(i)} \mathbb{L}_1^{(jklm)} + X^{(k)} \mathbb{L}_1^{(jilm)} , \quad (5.51)$$

$$\mathbb{L}_4^{(ijklmn)} = X^{(i)} \mathbb{L}_2^{(jklmn)} + X^{(k)} \mathbb{L}_2^{(jilmn)} , \quad (5.52)$$

$$Q_p^{nl(ijk)} = X^{(i)} P_p^{nl(jk)} + X^{(k)} P_p^{nl(ji)} . \quad (5.53)$$

Finalement, la contrainte effective du second ordre à l'ordre p est obtenue sous la forme suivante :

$$\bar{\mathbf{Q}}_p = \bar{\mathbb{L}}_3 : \bar{\mathbf{F}}_p + \bar{\mathbb{L}}_4 : \bar{\mathbf{G}}_p + \bar{\mathbf{Q}}_p^{nl} . \quad (5.54)$$

5.2.4 Problème macroscopique à résoudre

En substituant les relations de comportement (5.47) et (5.54) dans les équations (5.36), la forme finale du problème linéaire macroscopique du second ordre peut s'écrire à l'ordre p sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left\{ \left[{}^t\bar{\mathbf{F}}_p : \bar{\mathbb{L}}_1 + \hat{\mathbf{G}}_p : \bar{\mathbb{L}}_2 \right] : \delta\bar{\mathbf{F}} - {}^t\boldsymbol{\mu}_p : \delta\bar{\mathbf{F}} \right\} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Omega} {}^t\bar{\mathbf{P}}_p^{nl} : \delta\bar{\mathbf{F}} d\Omega \\ \int_{\Omega} \left\{ \left[{}^t\bar{\mathbf{F}}_p : \bar{\mathbb{L}}_3 + \hat{\mathbf{G}}_p : \bar{\mathbb{L}}_4 \right] : \delta\hat{\mathbf{G}} + {}^t\boldsymbol{\mu}_p : \delta\hat{\mathbf{F}} \right\} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_F} {}^t\mathbf{r} : \delta\hat{\mathbf{F}} d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{Q}}_p^{nl} : \delta\hat{\mathbf{G}} d\Omega \\ \int_{\Omega} \left\{ {}^t\delta\boldsymbol{\mu} : \left(\hat{\mathbf{F}}_p - \bar{\mathbf{F}}_p \right) \right\} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (5.55)$$

La résolution par éléments finis du problème (5.55) donne les déplacements $\bar{\mathbf{u}}$ ainsi que les déformations macroscopiques $\hat{\mathbf{F}}$ et les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$ au niveau de la structure macroscopique. Ces variables sont discrétisées en utilisant un élément fini mixte (voir Matsushima et al. (2002) et Kousnetzova et al. (2002)). Ensuite, le calcul des tenseurs $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{G}}$ en chaque point d'intégration permet de finir les calculs des différentes variables au niveau microscopique.

5.3 Exemple numérique

Nous considérons encore une fois la flexion d'une poutre rectangulaire constituée d'un matériau hétérogène pour étudier la validité et la précision de l'algorithme proposé dans ce chapitre pour l'homogénéisation du second ordre à l'aide de la MAN. Notons que les problèmes d'instabilités ne sont pas considérés dans cet exemple. Les résultats numériques de ce test sont comparés à ceux issus de la procédure du premier ordre (voir chapitre 2).

Le problème proposé a été discrétisé à l'aide d'éléments finis à deux dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes. La microstructure est maillée avec des éléments triangulaires à trois nœuds. En revanche, la structure macroscopique est maillée avec des éléments quadrangulaires à huit nœuds pour l'homogénéisation du premier ordre et avec des éléments mixtes QU8F4L1 pour l'homogénéisation du second ordre (voir figure 5.3). Les détails concernant l'élément QU8F4L1 peuvent être trouvés dans Matsushima et al. (2002) et Kousnetzova et al. (2002). Les paramètres liés à la MAN sont les suivants : l'ordre de troncature $N = 15$ et le paramètre de précision $\delta = 10^{-6}$.

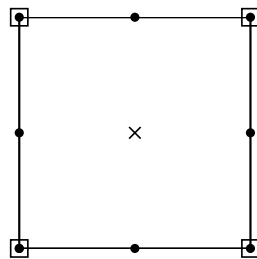


FIGURE 5.3 – Élément QU8F4L1 pour discrétisation de la macrostructure dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre (\bullet : déplacement \mathbf{u} , \square : gradient de déformation $\hat{\mathbf{F}}$, \times : multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$).

La géométrie de la structure ainsi que les conditions aux limites sont présentées dans la figure 5.4. Notons que la condition aux limites de type encastrement est prise en compte dans cet exemple de façon adéquate pour la théorie du premier ordre ainsi que pour celle du second ordre. La microstructure biphasique avec une inclusion circulaire (figure 5.4)

est considérée avec le rapport des rigidités entre l'inclusion et la matrice de 0,1 ($E_i/E_m = 0,1$ et $E_i = 10000MPa$). Le coefficient de Poisson est égal à 0,3. Par contre, dans cette étude, nous considérons les conditions de périodicité sur les bords du VER pour l'homogénéisation du premier et du second ordre.

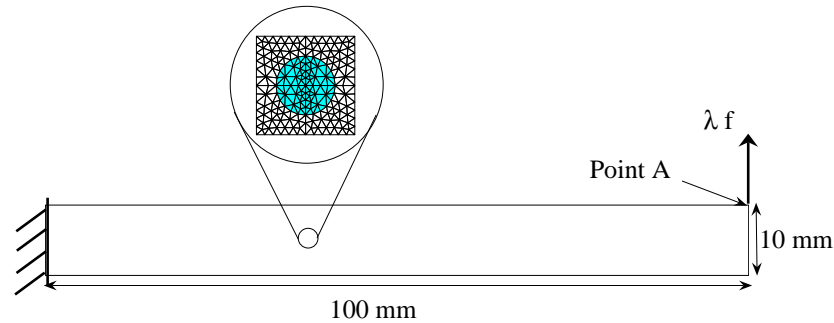


FIGURE 5.4 – Géométrie, conditions aux limites et la microstructure pour le problème de flexion.

La figure 5.5 montre les déplacements du point A (voir figure 5.4) en fonction du paramètre de chargement. Les carrés et les cercles indiquent les fins de pas asymptotiques. Notons que les résultats du premier et du second ordre sont en bons accords.

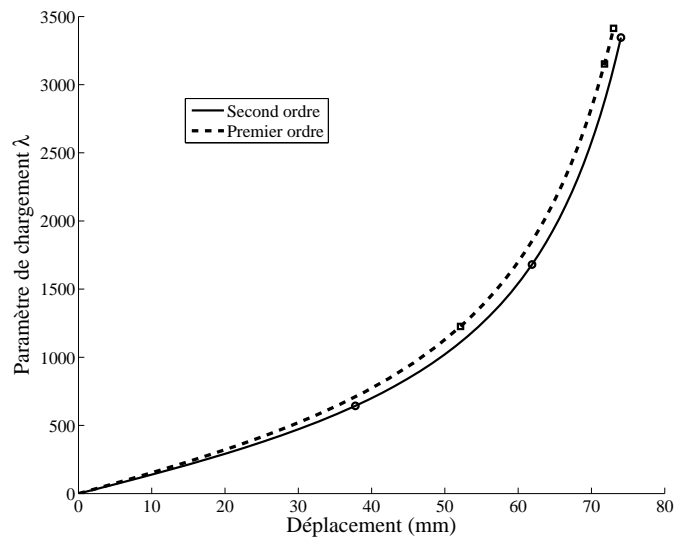


FIGURE 5.5 – Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour l'homogénéisation du premier et du second ordre.

La figure 5.6 montre les états déformés de la macrostructure et de la microstructure pour l'homogénéisation du second ordre (5.6a) et pour l'homogénéisation du premier ordre

(5.6b) au niveau de l'élément montré sur cette figure. Notons que les tailles du VER pour les deux calculs sont égales. Les modes de déformation obtenus au niveau microscopique sont différents, ce qui montre l'enrichissement cinématique de l'approximation du second ordre. Remarquons que la forme du VER, dans le cas du second ordre, présente le mode de flexion, ce qui est le résultat de la présence des modes de déformation d'ordre supérieur au niveau de la microstructure.

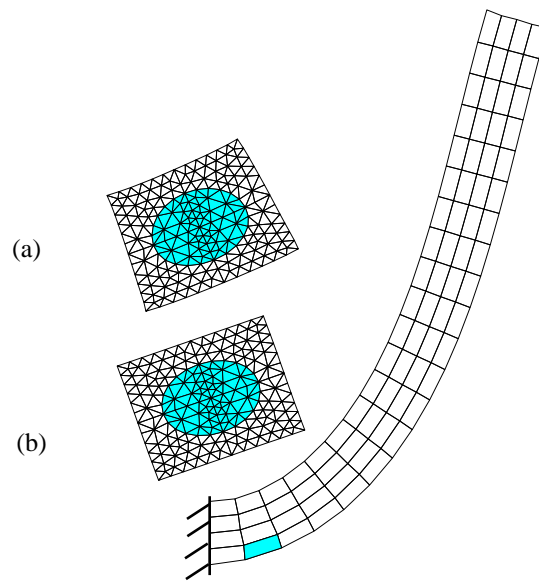


FIGURE 5.6 – Configuration déformée de la structure et des VER au niveau de l'élément colorié sur la figure (a) homogénéisation du second ordre et (b) homogénéisation du premier ordre.

Dans cet exemple, nous avons étudié seulement la validité de la procédure combinant la technique d'homogénéisation du second ordre et la méthode asymptotique numérique. L'efficacité de ce type d'homogénéisation pour certains cas a été déjà montrée dans les travaux de Kousnetzova et ses collaborateurs (Kousnetzova et al. (2002); Kousnetzova (2002); Kousnetzova et al. (2004)). L'apport de cette technique pour les problèmes présentant une perte d'ellipticité ou l'effet de taille de la microstructure fera l'objet de travaux futurs.

5.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une technique qui combine la méthode d'homogénéisation du second ordre et la méthode asymptotique numérique. La forme faible des

équations mécaniques au niveau de la microstructure est exactement la même que celle rencontrée en homogénéisation du premier ordre. En revanche, les conditions aux limites sont un peu plus complexes car elles concernent à la fois les variables (cinématique ou mécanique) du premier ordre ainsi que celles du second ordre. L'élément fini utilisé est un élément mixte dans lequel on considère que la variable déplacement, $\bar{\mathbf{u}}$ et le gradient de déformation, $\hat{\mathbf{F}}$ sont des variables indépendantes avec une équation de compatibilité respectée en moyenne sur le VER en utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

Sur le plan technique, l'implantation du second ordre dans le cadre de la MAN ne présente pas de difficulté si on part de l'algorithme déjà programmé pour le premier ordre. En ce qui concerne les applications, on s'est limité à la validation de l'implantation de l'algorithme. Ce travail sera complété par des applications dans lesquelles l'effet de taille est important et un phénomène de localisation de la déformation apparaît au cours du chargement.

Chapitre 6

MAN multi échelle et réduction des temps de calcul

Sommaire

6.1	Calcul parallèle	98
6.2	MAN multi échelle avec réduction de modèle	99
6.2.1	Approche de base réduite	99
6.2.2	Décomposition orthogonale propre (POD)	101
6.2.3	Une méthode MAN-POD multi échelle	102
6.2.4	Stratégie de calcul de base réduite	103
6.2.5	Exemple Numérique	104
6.3	Comportement sélectif	105

Dans les chapitres précédents, la procédure de couplage complet entre deux échelles microscopique et macroscopique à l'aide de la MAN a été présentée. Cette procédure permet de résoudre les problèmes non linéaires pour les matériaux hétérogènes avec la prise en compte de l'interaction entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. Cependant, cette méthode, impliquant simultanément des calculs aux deux échelles, est très coûteuse, comme toutes les méthodes d'éléments finis multi niveaux. Pour cette raison, nous proposons dans ce chapitre plusieurs techniques permettant de réduire les coûts de calcul. La première approche est le calcul parallèle (voir par exemple Feyel et Chaboche (2000) dans le cadre de EF^2). Une seconde méthode proposée est l'utilisation d'une méthode de réduction de modèle de type POD au niveau microscopique (Yvonnet et He (2007); Monteiro et al. (2008)). Enfin, nous introduisons une technique dite de "comportement sélectif" : dans les régions de faibles déformations, un comportement linéarisé (tangent), obtenu à partir du VER micro, est utilisé. Dans les régions de forts gradients, le couplage micro-macro "simultané" est réalisé (Ghosh et al. (2001)). Les détails de ces

trois techniques dans le cadre de la MAN multi échelle sont exposés dans ce chapitre qui est considéré comme prospectif et a pour objectif de donner des pistes pour des études futures plus approfondies. .

6.1 Calcul parallèle

Dans la procédure MAN multi échelle, la discrétisation des VER (au niveau microscopique) et de la structure macroscopique induit p et P points d'intégration, respectivement. Le coût de calcul en termes des variables locales et globales est donc de l'ordre de $\mathcal{O}(p \times P)$. Ce coût augmente très vite avec la taille (nombre d'éléments) de la structure à étudier.

Ici, la parallélisation intervient au niveau des calculs microscopiques à réaliser. En distribuant des calculs liés à des groupes de points d'intégration sur plusieurs processeurs, on réduit les coûts sans introduire de développement particuliers au niveau informatique ou algorithmique.

Pour montrer l'efficacité de l'approche par calcul parallèle, un problème de flexion d'une poutre (voir 2.3) a été résolu avec 200 éléments quadrangulaires à quatre nœuds au niveau macroscopique et 336 éléments triangulaires à trois nœuds au niveau microscopique, et $N = 15$ et 2 pas asymptotiques, en utilisant plusieurs nombres de processeurs. Les temps de calcul sont présentés pour différents nombres de processeurs dans le tableau 6.1. Ces temps sont réduits, de toute évidence, lorsque le nombre de processeurs augmente. Notons que la réduction du temps ne diminue pas linéairement avec le nombre de processeurs, et se stabilise ici pour approximativement 8 processeurs. Ce phénomène peut être expliqué par la procédure de parallélisation, elle-même, et par le temps de communication entre les processeurs qui dépend de l'architecteur de la machine utilisée.

TABLE 6.1 – Temps de calcul par rapport au nombre de processeurs pour le problème de flexion d'une poutre.

Nombre de processeurs	Temps (s)	Nombre de processeurs	Temps (s)
1	7465	6	1697
2	3526	7	1545
3	2470	8	1265
4	2047	9	1348
5	1850	10	1351

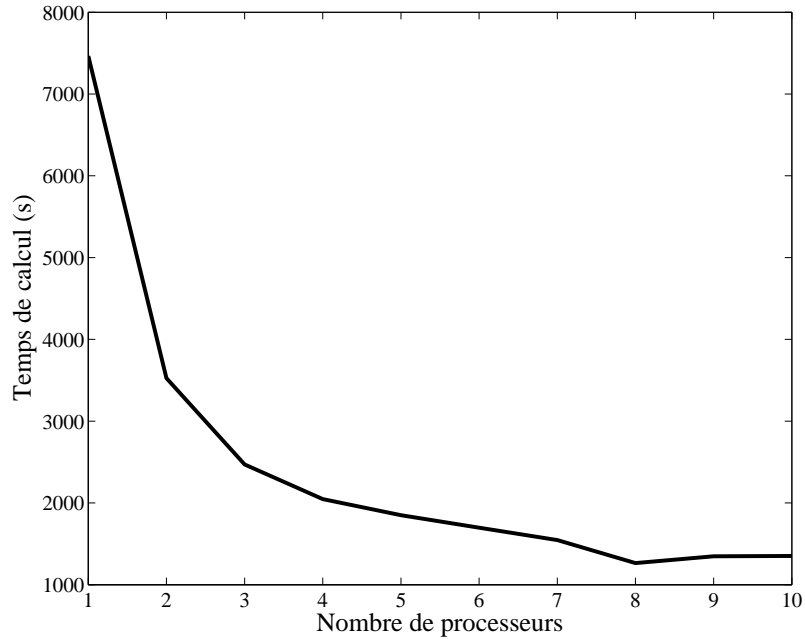


FIGURE 6.1 – Diagramme du temps de calcul en fonction du nombre de processeurs pour un problème de flexion d'une poutre.

6.2 MAN multi échelle avec réduction de modèle

Dans certains problèmes, comme l'analyse de sensibilité, les approches inverses ou l'analyse multi échelle, un grand nombre de problèmes "similaires" doivent être résolus. Dans ce contexte, il est judicieux d'exploiter l'information redondante pour construire des modèles simplifiés en vue de réduire les coûts de calculs. Le couplage MAN/POD a été proposé initialement dans Yvonnet et al. (2007) et dans le cadre EF^2 dans Yvonnet et He (2007); Monteiro et al. (2008). Ici, nous présentons celui-ci dans le cadre MAN multi échelle.

6.2.1 Approche de base réduite

Soit une structure définie dans un domaine inclus dans un espace de dimension D , dont l'évolution est décrite par un ensemble fini de r paramètres, $\zeta = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$, associé aux propriétés des matériaux, aux caractéristiques géométriques, ou aux conditions aux limites. Sans perte de généralité, on suppose par la suite que $\zeta \in \mathbb{R}^r$. Soit \mathbf{q} un vecteur à valeurs réelles décrivant la réponse du système, comme par exemple les composants des déplacements de N points du solide. Dans ce cas, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{DN}$. Si l'opérateur $f : \zeta \rightarrow \mathbf{q}$ est non linéaire, il est nécessaire de résoudre un problème non linéaire pour chaque ensemble

de paramètre $\zeta' \in \zeta$ pour trouver \mathbf{q} . Pour réduire les calculs, on souhaite remplacer \mathbf{q} par une solution approximative, $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{DN}$, pouvant être obtenue de façon moins coûteuse en utilisant certaines informations sur l'évolution du système. Un choix attractif est d'utiliser une méthode de base réduite pour remplacer le problème non linéaire complet associé à chaque ensemble de paramètres ζ' par un problème impliquant seulement un petit nombre de d.d.l.. L'idée principale est de projeter l'équation d'un problème linéaire¹ sur une base de taille réduite $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M\}$, $\phi_i \in \mathbb{R}^M$, avec $M \ll DN$. Dans ce contexte, la solution approximative est exprimée par :

$$\tilde{\mathbf{q}}(\zeta) = \phi_0 + \sum_{m=1}^M \phi_m \xi_m(\zeta) , \quad (6.1)$$

et le problème linéaire :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \mathcal{F} , \quad (6.2)$$

qui après discrétisation, mène à la décomposition d'une matrice $(DN) \times (DN)$, est remplacé par un problème réduit :

$${}^t \Phi \mathcal{L}'(\xi) = {}^t \Phi \mathcal{F} , \quad (6.3)$$

qui ne conduit qu'à l'assemblage et à la décomposition d'une matrice $M \times M$, induisant des gains importants en temps de calcul. Dans l'équation (6.3), ξ est un vecteur de M paramètres inconnus. En donnant ξ , la solution approximative peut être construite en utilisant l'équation (6.1).

Ici, on considère une approche de construction de base réduite "a posteriori", par opposition aux approches "a priori" (Ryckelynck (2005)) dans lesquelles la base est améliorée au fil de l'évolution du calcul. Dans le cas "a posteriori", les vecteurs de base sont construits en utilisant les informations extraites à partir de la simulation du système pour les différents états. Une première solution simple est de résoudre le problème non linéaire pour les différents ensembles des paramètres ζ' , et d'utiliser les solution comme des fonctions de base :

$$\Phi = \{\mathbf{q}(\zeta_1), \mathbf{q}(\zeta_2), \dots, \mathbf{q}(\zeta_S)\} , \quad (6.4)$$

où S est le nombre de simulations réalisées. De toute évidence, la base obtenue est non optimale car le nombre de vecteurs de base est égal au nombre de simulations, et ne sont pas orthonormés. Une deuxième solution consiste à utiliser la décomposition orthogonale propre (POD²), dont les principes sont rappelés dans la section suivante.

1. Pour les problèmes non linéaires, le problème linéarisé (tangente) est généralement utilisé. Dans le cadre de la MAN, on utilise les équations de la série des problèmes linéaires obtenus par la méthode de perturbation.

2. Proper orthogonal decomposition

6.2.2 Décomposition orthogonale propre (POD)

L'idée principale de la POD est de détecter la corrélation entre les séquences des ensembles de données en utilisant des méthodes statistiques et en extrayant uniquement l'information pertinente. La caractéristique la plus remarquable de la POD est son optimalité. Elle fournit le moyen le plus efficace de capturer les phénomènes dominant d'une procédure de grande dimension avec seulement un petit nombre de modes. La technique est connue sous une multitude de noms, telles que la transformée de Karhunen-Loève (TKL) (Karhunen (1946), Loève (1955)), l'analyse de composants principaux (Hotelling (1933)), les fonctions orthogonales empiriques (Lorenz (1956)), ou la méthode des moindres carrés totaux (Gloub et C.F. (1983)). La terminologie non uniforme vient du fait que la POD a été réinventée à plusieurs reprises et très utilisée dans de nombreux domaines de la science et de la technologie. Plus d'informations peut être trouvé dans Holmes et al. (1998).

La TKL approxime un processus stochastique dans le sens des moindres carrés. Elle peut être formulée à la fois en temps continu et en temps discret. Par la suite, on se concentre sur la TKL discrète pour l'analyse mécanique non linéaire. La théorie mathématique de la TKL repose sur les propriétés des espaces d'Hilbert. Un espace d'Hilbert H est un espace vectoriel qui est complet comme un espace métrique et a un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est définie comme $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ pour $\psi \in H$ et la métrique est définie comme $d(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\|$ pour $\psi, \phi \in H$. Sans perte de généralité, on considère ici les espaces d'Hilbert seulement dans \mathbb{R}^N . Le concept d'orthonormalité est crucial pour la dérivation du TKL : deux vecteurs $\psi_i, \psi_j \in H$ sont orthonormaux si $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$. Une base Ψ d'un espace d'Hilbert est orthonormale si chaque couple de vecteurs distincts $\psi_i, \psi_j \in \Psi$ sont orthonormés.

Dans le cadre de la POD, le vecteur $\tilde{\mathbf{q}}(\zeta) \in \mathbb{R}^{DN}$ donné par (6.1) doit minimiser la quantité :

$$\sum_{i=1}^S \|\mathbf{q}(\zeta_i) - \tilde{\mathbf{q}}(\zeta_i)\|^2, \quad (6.5)$$

avec les conditions de contrainte :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (6.6)$$

La résolution de ce problème d'optimisation donne ϕ_0 sous la forme suivante (Liang et al. (2002); Dür (1998)) :

$$\phi_0 = \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \mathbf{q}(\zeta_i), \quad (6.7)$$

et ϕ_i ($i = 1, \dots, DN$) les vecteurs propres du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{Q}\phi_i = \lambda_i\phi_i. \quad (6.8)$$

Ci-dessus, \mathbf{Q} est la matrice de covariance définie par :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{S} \mathbf{U} \cdot {}^t \mathbf{U} , \quad (6.9)$$

où la matrice \mathbf{U} est une matrice de taille $(DN \times S)$ dans chaque colonne les vecteurs centrés :

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{q}(\zeta_1) - \bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}(\zeta_2) - \bar{\mathbf{q}}, \dots, \mathbf{q}(\zeta_S) - \bar{\mathbf{q}}\} . \quad (6.10)$$

Notons que \mathbf{Q} est une matrice semi-définie positive de $(DN \times DN)$, dont les valeurs propres λ_i sont arrangées dans le sens décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_M \geq \dots \lambda_{DN} \geq 0$.

En pratique, les valeurs propres diminuent rapidement. En outre, l'erreur induite par l'approximation de la POD par rapport à celle des éléments finis complets est donnée par (voir Liang et al. (2002)) :

$$\epsilon(M) = \sum_{i=1}^S \|\mathbf{q}(\zeta_i) - \tilde{\mathbf{q}}(\zeta_i)\| = \left(\sum_{i=M+1}^{DN} \lambda_i \right)^{1/2} , \quad (6.11)$$

où M est le nombre de fonctions de base sélectionné. Un modèle réduit peut être obtenu en utilisant seulement un petit nombre M de fonctions de base dans l'équation (6.1) tel que :

$$\frac{(\sum_{i=M+1}^{DN} \lambda_i)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^{DN} \lambda_i)^{1/2}} < \delta , \quad (6.12)$$

où δ est un paramètre de tolérance d'erreur donné, faible par rapport à 1.

Toutefois, pour les problèmes impliquant un grand nombre de d.d.l., le problème aux valeurs propres est grand. Dans cette étude, on utilise une approche pour réduire le coût de calcul formulée par Sirovitch (1987) : étant donné que toutes les valeurs propres non nulles de la matrice ${}^t \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ sont également les valeurs propres de la matrice de covariance $\mathbf{U} \cdot {}^t \mathbf{U}$ qui est éventuellement tronquée, la base de la POD peut être trouvée en résolvant un autre problème généralisé aux valeurs propres :

$${}^t \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \cdot \Psi = \Psi \cdot \Lambda , \quad (6.13)$$

où la taille de ${}^t \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ est nettement inférieure à celle de $\mathbf{U} \cdot {}^t \mathbf{U}$ si $S < DN$. Ensuite, la base de la POD est formée par :

$$\Phi = \mathbf{U} \cdot \Psi \cdot \Lambda^{-1/2} . \quad (6.14)$$

6.2.3 Une méthode MAN-POD multi échelle

Nous présentons ici une technique dans laquelle les équations linéaires obtenues dans le cadre de la MAN sont projetées sur une base réduite, en vue de décrire le problème à

l'échelle microscopique. En particulier, les termes du développement asymptotique dans (2.17) associés aux déplacements microscopiques sont exprimés comme des fonctions de la base réduite de la POD, Φ . Notons qu'une unique base réduite est construite pour tous les VER. La stratégie employée pour construire Φ sera présentée dans la section suivante. On développe ensuite le terme \mathbf{u}_p associé à l'ordre p dans la base de Ritz par le biais de M fonctions de Φ_m comme :

$$\mathbf{u}_p = \sum_{m=1}^M \phi_m \zeta_p^m = \Phi \cdot \boldsymbol{\xi}_p , \quad (6.15)$$

où les colonnes de la matrice Φ sont constituées des vecteurs ϕ_m . Les inconnues ζ_p^m dans (6.15) sont des coefficients arbitraires. Le nouveau développement asymptotique \mathbf{u} peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(a) = \Phi \left\{ \boldsymbol{\xi}_0 + \sum_{p=1}^N a^p \boldsymbol{\xi}_p \right\} , \quad (6.16)$$

où $\boldsymbol{\xi}_0$ représente la solution connue. En introduisant la relation (6.16) dans (2.22₁) on obtient :

$$\mathcal{L}(\Phi \cdot \boldsymbol{\xi}_p, \Phi \cdot \boldsymbol{\delta\xi}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\Phi \cdot \boldsymbol{\delta\xi}) . \quad (6.17)$$

En discrétisant ce problème dans le cadre des éléments finis, en appliquant les conditions aux limites au niveau microscopique et en utilisant le fait que ${}^t\Phi \cdot \Phi = \mathbf{I}$, on aboutit à une suite de problèmes au niveau microscopique sous la forme suivante :

Ordre 1 :

$${}^t[\Phi] [\mathbf{K}_t] [\Phi] \{\xi_1\} = 0 , \quad (6.18)$$

Ordre p :

$${}^t[\Phi] [\mathbf{K}_t] [\Phi] \{\xi_p\} = {}^t[\Phi] \{\mathcal{F}_p^{nl}\} . \quad (6.19)$$

En résolvant ces problèmes, le déplacement microscopique à l'ordre p , $\{v_p\}$, est donné par :

$$\{v_p\} = [\Phi] [\mathbf{A}^R] \{\bar{F}_p\} + [\Phi] \{\xi_p^{nl}\} , \quad (6.20)$$

où $[\mathbf{A}^R]$ et $\{\xi_p^{nl}\}$ sont les solutions des problèmes (6.18) et (6.19). La suite de la procédure est identique à celle présentée dans le chapitre 2.

6.2.4 Stratégie de calcul de base réduite

En suivant Yvonnet et He (2007) et Yvonnet et al. (2007), la base réduite est construite de la manière suivante. Premièrement, une série de problèmes complets décrivant le problème micro est résolue. Ensuite, tous les déplacements microscopiques obtenus pour

chaque VER sont stockés utilisés comme "snapshots" pour construire la base réduite Φ , en utilisant la procédure décrite dans la section 6.2.2. La contribution originale ici est de proposer un calcul de base réduite "pas par pas" : pour le premier pas, les problèmes complets sont résolus. Pour le deuxième pas, on utilise la base réduite construite à partir de la solution du premier pas. Pour les pas suivants, la base réduite est construite à partir des pas précédents. Notons que le coût du calcul complet pour le premier pas est inférieur aux autres pas car les matrices tangentes sont identiques pour les différents VER.

6.2.5 Exemple Numérique

Pour montrer la précision et l'efficacité de la procédure combinant la méthode MAN multi échelle et la POD, nous considérons la résolution du problème de flexion d'une poutre (voir 2.3) avec un VER biphasique contenant une inclusion circulaire (voir figure 2.4a). Le rapport de rigidités entre l'inclusion et la matrice est 10 ($E_i/E_m = 10$ et $E_2 = 100000MPa$). Les déplacements du point C (voir figure 2.3) en fonction du paramètre de chargement pour les deux procédures (MAN multi échelle et MAN multi échelle + POD) sont présentés sur la figure 6.2, montrant une bonne concordance des résultats.

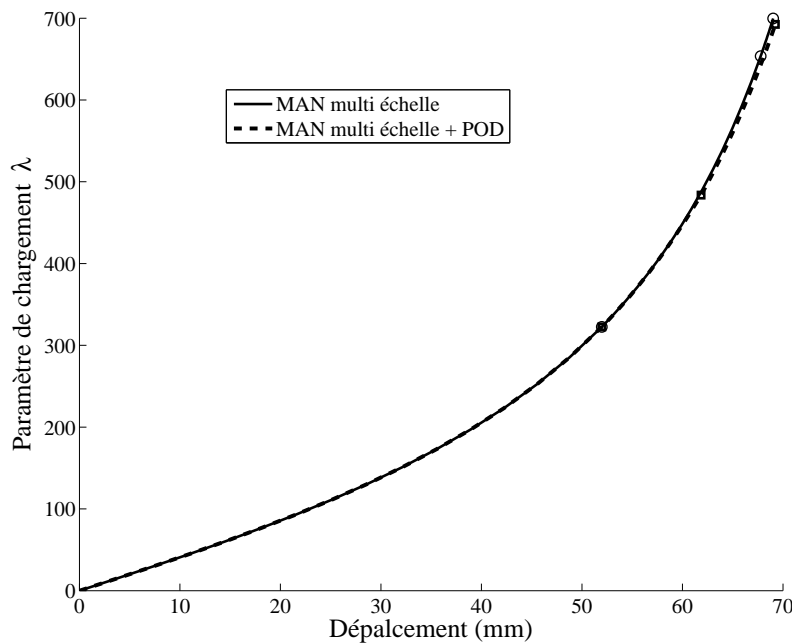


FIGURE 6.2 – Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour les deux procédures de MAN multi échelle et de MAN multi échelle + POD, le rapport de rigidité est 10.

6.3 Comportement sélectif

Dans le but de gagner du temps de calcul, certains problèmes peuvent être décomposés en plusieurs parties. En effet, lorsque le phénomène à observer est localisé dans une région de la structure, on peut utiliser, dans les régions de faibles déformations (Niveau I sur la figure 6.3), un comportement tangent linéarisé construit à partir d'un VER et dans les régions de forts gradients (Niveau II sur la figure 6.3), un couplage micro-macro classique qui suit l'histoire de la déformation. En d'autres termes, on exige un couplage fort entre les échelles dans les zones critiques et on simplifie le comportement dans les autres zones. En outre, dans le cas de problèmes en présence de phénomènes d'endommagement, l'hypothèse de microstructure périodique est remise en cause. Dans ce cas, il serait souhaitable d'utiliser un maillage complet avec la prise en compte des détails de la microstructure dans la zone concernée par l'endommagement (Niveau III sur la figure 6.3) (Ghosh et al. (2001); Song et Belytschko (2009)). Le couplage entre les trois modèles peut être effectué par différentes techniques proposées dans la littérature (Ben Dhia (1998); Xiao et Belytschko (2004)).

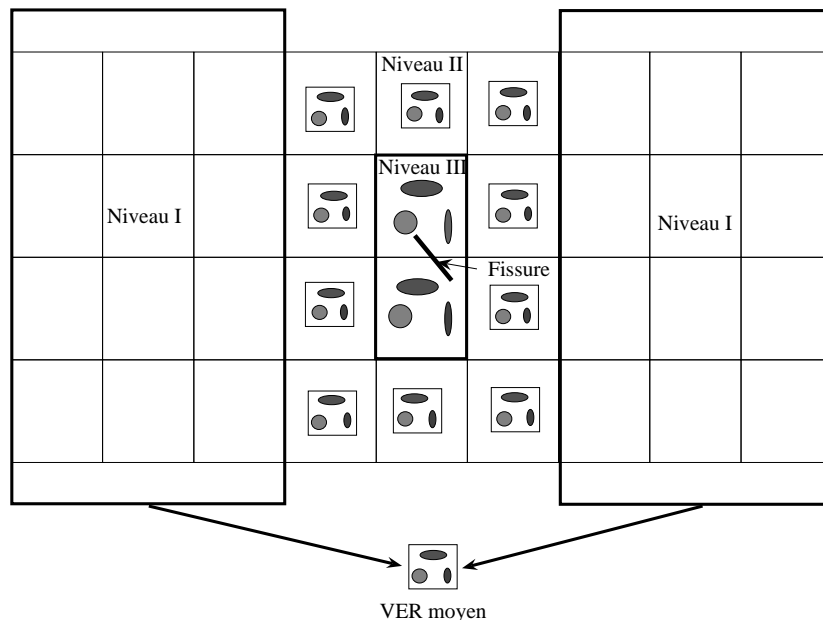


FIGURE 6.3 – Schéma montrant différentes régions de calcul; Niveau I : les régions de faibles déformations; Niveau II : les régions de forts gradients; Niveau III : les régions présentant de l'endommagement.

Conclusion générale

Dans ce mémoire et les articles publiés dans le cadre de cette thèse (Nezamabadi et al. (2009a,b)), nous avons proposé une technique numérique originale et efficace pour résoudre des problèmes de structures hétérogènes en grandes déformations, avec possibles instabilités au niveau microscopique. La méthode combine la méthode des éléments finis multi échelles (EF²) et la méthode asymptotique numérique (MAN) (nous désignons cette méthode dans le mémoire par "MAN multi échelle"). Ce travail comporte les innovations suivantes : il s'agit du premier développement de la MAN dans le cadre multi échelle ; le développement asymptotique des équations non linéaires permet d'offrir un nouveau cadre pour l'homogénéisation non linéaire ; des formulations MAN pour plusieurs lois de comportement non linéaires ont été proposées ainsi que la formulation MAN dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre. L'approche proposée permet de traiter avec succès une large classe de problèmes de structures hétérogènes, avec des instabilités pouvant intervenir aux deux échelles et s'influencer mutuellement. L'approche a été illustrée au travers de nombreux exemples, dont une grande partie est validée par des calculs de référence où la structure est entièrement maillée avec toutes les hétérogénéités.

En utilisant la MAN, les problèmes non linéaires à résoudre sont transformés en une succession de problèmes linéaires. Par conséquent, les tenseurs de localisation et de comportement effectif peuvent être construits pour chaque ordre de développement asymptotique. L'opérateur linéaire étant le même pour tous les ordres, une seule construction de la matrice tangente est nécessaire à chaque pas. Le couplage entre échelles micro et macro est ensuite réalisé par le biais des conditions aux limites appliquées sur le volume élémentaire représentatif (VER) et l'homogénéisation des contraintes au niveau micro. La longueur de chaque pas est estimée a posteriori en utilisant les termes calculés précédemment dans la série, permettant d'obtenir naturellement un algorithme avec des longueurs de pas adaptatives. Notons que dans le cadre de la MAN, il est possible d'effectuer les procédures itératives en utilisant un algorithme d'ordre élevé pour la prédiction et un algorithme d'ordre élevé pour la correction (voir Lahmam et al. (2002)). De plus, des algorithmes efficaces ont été établis pour détecter les points de bifurcation et pour calculer la réponse du post-flambage des structures minces (Bouty et al. (2004); Vannucci et al.

(1998)).

Toutes les lois de comportement linéaires et non linéaires peuvent être mises en œuvre dans le cadre de cette approche, avec en plus la prise en compte des grandes déformations géométriques. Nous avons développé les équations dans le cadre de la MAN pour une large classe de lois hyperélastiques. Les lois de comportement élastoplastiques ont été traitées dans des travaux antérieurs à cette thèse (Zahrouni et al. (2005); Assidi et al. (2009)) et ont été rappelées ici pour montrer la possibilité d'introduire ces lois dans l'approche MAN multi échelle. Pour traiter des problèmes plus réalistes, il serait intéressant d'implanter des modèles d'endommagement et d'interfaces imparfaites.

La précision et l'efficacité de la procédure proposée ont été démontrées par plusieurs exemples. Nous avons étudié des problèmes où les instabilités globales, locales, ou simultanées peuvent survenir. Les exemples ont montré la capacité de l'algorithme à traiter efficacement les instabilités dans les matériaux hétérogènes.

L'un des ingrédients des méthodes d'homogénéisation est la détermination de la taille du VER qui constitue une difficulté majeure. Une discussion a été proposée à ce sujet. Dans les exemples traités, nous avons effectué des tests de convergence de la réponse macroscopique dans une approche macroscopique en déformations et pour un type de trajet de chargement, en vue de déterminer la taille du VER. Etablir une méthodologie générale efficace dans ce sens reste un problème ouvert et nécessitera dans le futur des études complémentaires.

La procédure proposée dans le chapitre 2 se base sur l'hypothèse que les échelles sont largement séparées, en vue d'appliquer une procédure d'homogénéisation du premier ordre. Nous avons proposé dans le chapitre 5 les développements MAN d'une procédure multi échelle avec homogénéisation du second ordre. Cette technique a pour objectif de traiter des problèmes où les échelles sont faiblement séparées : par exemple, lorsque les dimensions des hétérogénéités sont de l'ordre de celles des variations des chargements macroscopiques. Ce chapitre est prospectif et de nombreux points restent à éclaircir et à développer aux travers d'études futures. Nous avons montré la validité de notre algorithme associant MAN et homogénéisation du second ordre sur un exemple de flexion. Il faut approfondir notre analyse et l'appliquer à des problèmes pour lesquels l'effet de taille de la microstructure est important et à des problèmes qui présentent une perte d'ellipticité.

Dans le chapitre 6, nous avons proposé quelques pistes de réflexion qui permettent de réduire le temps de calcul. En effet, la réduction du temps peut être obtenue en utilisant le calcul parallèle, la procédure de réduction de modèle et la technique basée sur un comportement sélectif. Ces deux dernières procédures doivent être utilisées avec précaution en fonction de la complexité du phénomène physique présent dans le problème à résoudre. Par exemple, pour un problème avec un endommagement localisé, il peut être intéressant

d'utiliser un modèle fin avec un maillage complet au voisinage de la zone endommagée et un modèle simplifié dans le reste de la structure.

Annexe A

Les approximants de Padé pour les séries de vecteur

Depuis Padé (1892), nous savons que les fractions rationnelles sont plus appropriées que les polynômes pour représenter une fonction dans le cas général. On peut trouver une présentation moderne des approximants de Padé dans Baker et Graves-Morris (1981). Nous utilisons les approximants de Padé dans le cadre de la MAN de la manière suivante :

(i) Á partir des vecteurs U_1, U_2, \dots, U_p , nous construirons une base orthogonale en utilisant la procédure classique de Gram-Schmidt (Nous détaillons les calculs pour $p = 6$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_1 = \alpha_{11} \mathbf{U}_1^* \\ \mathbf{U}_2 = \alpha_{21} \mathbf{U}_1^* + \alpha_{22} \mathbf{U}_2^* \\ \mathbf{U}_3 = \alpha_{31} \mathbf{U}_1^* + \alpha_{32} \mathbf{U}_2^* + \alpha_{33} \mathbf{U}_3^* \\ \mathbf{U}_4 = \alpha_{41} \mathbf{U}_1^* + \alpha_{42} \mathbf{U}_2^* + \alpha_{43} \mathbf{U}_3^* + \alpha_{44} \mathbf{U}_4^* \\ \mathbf{U}_5 = \alpha_{51} \mathbf{U}_1^* + \alpha_{52} \mathbf{U}_2^* + \alpha_{53} \mathbf{U}_3^* + \alpha_{54} \mathbf{U}_4^* + \alpha_{55} \mathbf{U}_5^* \\ \mathbf{U}_6 = \alpha_{61} \mathbf{U}_1^* + \alpha_{62} \mathbf{U}_2^* + \alpha_{63} \mathbf{U}_3^* + \alpha_{64} \mathbf{U}_4^* + \alpha_{65} \mathbf{U}_5^* + \alpha_{66} \mathbf{U}_6^* \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Ensuite, nous introduisons ces relations dans la représentation polynomiale qui introduit six polynômes avec un degré décroissant (de 5 à 0) comme les facteurs du champ de vecteur U_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = & a \mathbf{U}_1^* (\alpha_{11} + a\alpha_{21} + a^2\alpha_{31} + a^3\alpha_{41} + a^4\alpha_{51} + a^5\alpha_{61}) + a^2 \mathbf{U}_2^* (\alpha_{22} + a\alpha_{32} \\ & + a^2\alpha_{42} + a^3\alpha_{52} + a^4\alpha_{62}) + a^3 \mathbf{U}_3^* (\alpha_{33} + a\alpha_{43} + a^2\alpha_{53} + a^3\alpha_{63}) + \\ & a^4 \mathbf{U}_4^* (\alpha_{44} + a\alpha_{54} + a^2\alpha_{64}) + a^5 \mathbf{U}_5^* (\alpha_{55} + a\alpha_{65}) + a^6 \mathbf{U}_6^* (\alpha_{66}) . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

(ii) Nous remplaçons les polynômes par les approximants de Padé ayant le même

dénominateur ($D_5 = d_1 + ad_2 + \dots + a^5d^5$), de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} + a\alpha_{21} + a^2\alpha_{31} + a^3\alpha_{41} + a^4\alpha_{51} + a^5\alpha_{61} \approx \frac{b_0+ab_1+a^2b_2+a^3b_3+a^4b_4}{D_5} \\ \alpha_{22} + a\alpha_{32} + a^2\alpha_{42} + a^3\alpha_{52} + a^4\alpha_{62} \approx \frac{c_0+ac_1+a^2c_2+a^3c_3}{D_5} \\ \alpha_{33} + a\alpha_{43} + a^2\alpha_{53} + a^3\alpha_{63} \approx \frac{e_0+ae_1+a^2e_2}{D_5} \\ \alpha_{44} + a\alpha_{54} + a^2\alpha_{64} \approx \frac{f_0+af_1}{D_5} \\ \alpha_{55} + a\alpha_{65} \approx \frac{g_0+af_1}{D_5} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Les coefficients b_i, c_i, e_i, f_i et g_i sont calculées par les mêmes principes que les approximants classiques de Padé; nous exigeons que chaque fraction ait les mêmes développements de Taylor que les polynômes correspondant jusqu'à l'ordre 5, 4, 3, 2, 1, respectivement. Cela conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} b_0 &= \alpha_{11} , \\ b_1 &= \alpha_{21} + \alpha_{11} d_1 , \\ b_2 &= \alpha_{31} + \alpha_{21} d_1 + \alpha_{11} d_2 , \\ b_3 &= \alpha_{41} + \alpha_{31} d_1 + \alpha_{21} d_2 + \alpha_{11} d_3 , \\ b_4 &= \alpha_{51} + \alpha_{41} d_1 + \alpha_{31} d_2 + \alpha_{21} d_3 + \alpha_{11} d_4 , \\ c_0 &= \alpha_{22} , & e_1 &= \alpha_{43} + \alpha_{33} d_1 , \\ c_1 &= \alpha_{32} + \alpha_{22} d_1 , & e_2 &= \alpha_{53} + \alpha_{43} d_1 + \alpha_{33} d_2 , \\ c_2 &= \alpha_{42} + \alpha_{32} d_1 + \alpha_{22} d_2 , & f_0 &= \alpha_{44} , \\ c_3 &= \alpha_{52} + \alpha_{42} d_1 + \alpha_{32} d_2 + \alpha_{22} d_3 , & f_1 &= \alpha_{54} + \alpha_{44} d_1 , \\ e_0 &= \alpha_{33} , & g_0 &= \alpha_{55} . \end{aligned}$$

(iii) Après quelques réarrangements, nous obtenons une nouvelle forme de la représentation rationnelle précédente, qui n'implique que les vecteurs \mathbf{U}_k et les coefficients d_i :

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = a \frac{D_4}{D_5} \mathbf{U}_1 + a^2 \frac{D_2}{D_5} \mathbf{U}_2 + a^3 \frac{D_2}{D_5} \mathbf{U}_3 + a^4 \frac{D_1}{D_5} \mathbf{U}_4 + a^5 \frac{1}{D_5} \mathbf{U}_5 . \quad (\text{A.4})$$

Avec la même manière, nous obtenons :

$$\lambda - \lambda_0 = a \frac{D_4}{D_5} \lambda_1 + a^2 \frac{D_2}{D_5} \lambda_2 + a^3 \frac{D_2}{D_5} \lambda_3 + a^4 \frac{D_1}{D_5} \lambda_4 + a^5 \frac{1}{D_5} \lambda_5 . \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

Rappel : Approche Lagrangienne totale

La méthode Lagrangienne totale est appropriée pour les grandes rotations et les petites déformations, mais peut aussi être appliquée à des grandes déformations élastiques (comme dans le caoutchouc), si un modèle hyperélastique approprié est considéré (voir le chapitre 3). Cette méthode peut également être utilisée pour les problèmes élastoplastique avec des petites déformations, mais des grandes rotations. Pour l'approche Lagrangienne totale, les équations discrètes sont formulées par rapport à une configuration de référence. On définit le champ de déplacement, \mathbf{u} en tout point \mathbf{X} de la configuration de référence comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} , \quad (\text{B.1})$$

où \mathbf{x} représente les coordonnées d'un point dans la configuration actuelle (déformée). Cette dernière équation peut être différenciée pour donner :

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X} , \quad (\text{B.2})$$

où \mathbf{F} est le tenseur de gradient de déformation et \mathbf{I} est un tenseur identité de second ordre. Pour prendre en compte la non linéarité géométrique, on définit le tenseur de déformation de Green-Lagrange, γ :

$$\gamma = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) . \quad (\text{B.3})$$

Pour définir notre problème, on considère un domaine Ω dans \mathbb{R}^D , D étant la dimension du domaine, avec un bord extérieur $\partial\Omega$, et soumis aux déplacements et efforts imposés sur les parties complémentaires disjointes du bord $\partial\Omega_u$ (conditions aux limites de type Dirichlet) et $\partial\Omega_t$ (conditions aux limites de type Neumann), respectivement ($\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = 0$). Le problème en élasticité est décrit par l'équation d'équilibre :

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}) + \mathbf{b} = 0 \quad \text{dans } \Omega , \quad (\text{B.4})$$

où $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff associé à un point \mathbf{X} du domaine Ω dans sa configuration de référence et \mathbf{b} est un terme des forces volumiques. Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} & \text{sur } \partial\Omega_t \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

où \mathbf{N} est la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$ et, $\hat{\mathbf{u}}$ et \mathbf{t} sont les déplacements et efforts imposés, respectivement.

La forme faible associée au problème (B.4) est donnée par :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\Omega) = \{\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}, \bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \text{ sur } \partial\Omega_u\}$, \mathcal{L} étant l'espace des fonctions suffisamment régulières sur Ω , tel que :

$$\int_{\Omega} {}^t\mathbf{P} : \delta\mathbf{F} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{S}_0(\Omega) , \quad (\text{B.6})$$

où $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'espace des fonctions suffisamment régulières et cinématiquement admissibles et $\mathcal{S}_0(\Omega)$, $\mathcal{S}_0(\Omega) = \{\delta\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}, \delta\bar{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$, est l'espace des fonctions suffisamment régulières et nulles sur le bord Dirichlet.

Une forme alternative peut être obtenue en introduisant le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , lié à \mathbf{P} via :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} . \quad (\text{B.7})$$

En introduisant cette relation dans l'équation (B.6) et en utilisant l'équation (B.3), la forme faible (B.6) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta\boldsymbol{\gamma} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{S}_0(\Omega) . \quad (\text{B.8})$$

Annexe C

Condition des déformations homogènes au niveau microscopique

Les problèmes linéaires (2.21) et (2.22) peuvent se réécrire en considérant la condition des déformations homogènes sous la forme suivante :

Ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{S}_1 = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{P}_1 = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 = \nabla \mathbf{u}_1 \end{array} \right. \quad \text{dans } \omega \quad (\text{C.1})$$

+C.L. : $\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{X}$ sur $\partial\omega$

Ordre p :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_p = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + \mathbf{S}_p^{nl} \\ \mathbf{P}_p = \mathbb{H}^{(r)} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl} \\ \mathbf{F}_p = \nabla \mathbf{u}_p \end{array} \right. \quad \text{dans } \omega \quad (\text{C.2})$$

+C.L. : $\mathbf{u}_p = \bar{\mathbf{F}}_p \mathbf{X}$ sur $\partial\omega$

Comme la section 2.2.2, la solution à l'ordre p , \mathbf{u}_p , peut s'écrire en considérant le principe de superposition, sous la forme suivante dans le cas 2D, quoique la méthodologie puisse être facilement étendue au cas 3D :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p^l + \mathbf{u}_p^{nl} \quad \text{dans } \omega , \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\mathbf{u}_p^l = \bar{F}_p^{11} \tilde{\mathbf{u}}^{(11)} + \bar{F}_p^{12} \tilde{\mathbf{u}}^{(12)} + \bar{F}_p^{21} \tilde{\mathbf{u}}^{(21)} + \bar{F}_p^{22} \tilde{\mathbf{u}}^{(22)} , \quad (\text{C.4})$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^{(ij)}$ sont les solutions des problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^{(ij)}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \omega \\ \tilde{\mathbf{u}}^{(ij)} = \mathbf{X}^{(ij)} \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad (\text{C.5})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(11)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(21)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^{(22)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

et \mathbf{u}_p^{nl} est la solution d'un deuxième problème linéaire qui concerne des termes des seconds membres :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_p^{nl}, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) \quad \text{dans } \omega. \quad (\text{C.7})$$

Notons qu'à l'ordre p , seule le vecteur \mathbf{u}_p^{nl} est calculé. Enfin, la solution \mathbf{u}_p peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_p = \mathbb{A} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbf{u}_p^{nl}, \quad (\text{C.8})$$

où \mathbb{A} est un tenseur d'ordre trois défini par $A_{ijk} = \tilde{u}_i^{(jk)}$. Le reste de la procédure MAN multi échelle est exactement le même comme on l'a présenté dans le chapitre 2.

Annexe D

Matériaux hyperélastiques incompressibles et formulation dans le cadre de la MAN

Certains matériaux hyperélastiques peuvent supporter des déformations finies avec un changement négligeable de volume et sont caractérisés par la condition d'incompressibilité :

$$J = 1 . \quad (\text{D.1})$$

Notons que la compressibilité est représentée en ajoutant une énergie de déformation, Ψ_{vol} . Elle définit la réponse élastique purement volumétrique et est nulle pour les matériaux incompressibles. Par conséquent, la représentation découplée de la fonction de l'énergie de déformation peut être considérée, $\Psi = \Psi_{iso} + \Psi_{vol}$. Ainsi, afin de dériver les équations générales de comportement pour des matériaux hyperélastiques isotropes incompressibles ($I_3 = 1$), on peut considérer la fonction de l'énergie de déformation sous la forme suivante :

$$\Psi = \Psi_{iso}[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C})] - p(J - 1) , \quad (\text{D.2})$$

où la valeur scalaire p est considérée comme un multiplicateur de Lagrange indéterminé, qui peut être identifiée comme une pression hydrostatique. Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi_{iso}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}_{iso} - p \mathbf{C}^{-1} . \quad (\text{D.3})$$

Pour résoudre le problème avec des matériaux hyperélastiques incompressible, on a besoin d'utiliser une formulation mixte en définissant p comme un multiplicateur de Lagrange. La relation d'incompressibilité peut s'écrire comme suit :

$$\int_{\Omega} (J - 1) \delta p \, d\Omega = 0 . \quad (\text{D.4})$$

Par conséquent, en considérant le tableau 1.1, le problème non linéaire des matériaux hyperélastiques incompressible peut être résumé dans le tableau D.1.

TABLE D.1 – Résumé du problème à résoudre des matériaux hyperélastiques incompressibles

Forme faible de l'équation d'équilibre	$\int_{\Omega} {}^t\mathbf{P} : \boldsymbol{\delta} \mathbf{F} \, d\Omega = \lambda \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{u})$
Condition d'incompressibilité	$\int_{\Omega} (J - 1) \, \boldsymbol{\delta} p \, d\Omega = 0$
Loi de comportement	$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{iso} - p \mathbf{C}^{-1}$
Relations cinématiques	$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$ $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}$

Nous présentons ici la formulation des équations dans le cadre de la MAN. La relation de comportement peut s'écrire à l'ordre p :

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{S}_{iso(p)} - p_p \mathbf{C}_0^{inv} - p_0 \mathbf{C}_p^{inv} - \sum_{r=1}^{p-1} p_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv} , \quad (\text{D.5})$$

En considérant les développements présentés dans la section 3.1.3, $\mathbf{S}_{iso(p)}$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{S}_{iso(p)} = \mathbb{C}_t^{iso} : \boldsymbol{\gamma}_p + \mathbf{S}_{iso(p)}^{res} . \quad (\text{D.6})$$

La substitution des relations (1.16), (3.22), (3.40₈) et (D.6) dans (D.5) donne :

$$\mathbf{S}_p = \mathbb{C}_t : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + \mathbf{S}_p^{nl} - p_p \mathbf{C}_0^{inv} , \quad (\text{D.7})$$

où

$$\mathbb{C}_t = \mathbb{C}_t^{iso} - 2 p_0 (\mathbf{C}_0^{inv} \underline{\otimes} \mathbf{C}_0^{inv}) , \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{S}_p^{nl} = \mathbb{C}_t : \boldsymbol{\gamma}_p^{nl} + \mathbf{S}_{iso(p)}^{res} - p_0 \mathbf{C}_p^{inv(nl)} - \sum_{r=1}^{p-1} [p_r \mathbf{C}_{p-r}^{inv}] . \quad (\text{D.9})$$

Ensuite, on remplace cette relation dans (1.15₃). En utilisant la relation (1.18), on obtient :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{H} : \mathbf{F}_p + \mathbf{P}_p^{nl} - p_p \mathbf{F}_0 \mathbf{C}_0^{inv} . \quad (\text{D.10})$$

Enfin, en substituant (D.10) dans (1.15₁) et en utilisant (1.19), le problème à l'ordre p peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\delta u}) = \lambda_p \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta u}) + \mathcal{F}_p^{nl}(\boldsymbol{\delta u}) - \int_{\Omega} p_p \ ({}^t\mathbf{C}_0^{inv} {}^t\mathbf{F}_0) : \nabla \boldsymbol{\delta u} \ d\Omega . \quad (\text{D.11})$$

En outre, en considérant les relations (3.25) et (3.40₈), la relation de compatibilité peut s'écrire à l'ordre p comme :

$$\int_{\Omega} J_p \ \boldsymbol{\delta p} \ d\Omega = \int_{\Omega} (2 \mathbb{J} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p + 2 \mathbb{J} : \boldsymbol{\gamma}_p^{nl} + J_p^{nl}) \ \boldsymbol{\delta p} \ d\Omega = 0 . \quad (\text{D.12})$$

En définissant $J_p^{nl*} = 2 \mathbb{J} : \boldsymbol{\gamma}_p^{nl} + J_p^{nl}$, on obtient :

$$2 \int_{\Omega} (\mathbb{J} : \mathbb{B} : \mathbf{F}_p) \ \boldsymbol{\delta p} \ d\Omega = - \int_{\Omega} J_p^{nl*} \ \boldsymbol{\delta p} \ d\Omega . \quad (\text{D.13})$$

Finalement, le problème à résoudre à l'ordre p peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\delta u}) = \lambda_p \mathcal{P}_{ext}(\boldsymbol{\delta u}) + \mathcal{F}_p^{nl}(\boldsymbol{\delta u}) - \int_{\Omega} p_p \ ({}^t\mathbf{C}_0^{inv} {}^t\mathbf{F}_0) : \nabla \boldsymbol{\delta u} \ d\Omega \\ 2 \int_{\Omega} (\mathbb{J} : \mathbb{B} : \nabla \mathbf{u}_p) \ \boldsymbol{\delta p} \ d\Omega = - \int_{\Omega} J_p^{nl*} \ \boldsymbol{\delta p} \ d\Omega \end{array} \right. \quad (\text{D.14})$$

Dans le cadre des éléments finis, on discrétise le déplacement \mathbf{u} et le multiplicateur de Lagrange p pour résoudre le problème (D.14). Les éléments utilisés dans ce cadre peuvent être trouvés dans des plusieurs références. Pour plus de détails sur la résolution de ce type de problème dans le cadre des éléments finis, voir par exemple Crisfield (1991).

Annexe E

Exemples des matériaux hyperélastiques

Dans cette annexe, nous montrons les résultats de deux modèles de matériaux hyperélastiques pour l'exemple présenté dans la section 3.1.4 (voir figure 3.1) : (i) un modèle incompressible Néo-Hookéen exprimé par l'équation (3.18) avec $\mu_0 = 12,6 \times 10^5 N/m^2$ et (ii) un modèle compressible de Gent exprimé par l'équation (3.21) avec les paramètres $J_m = 100$ et $\nu = 0,4$, et $E = 1000 Pa$ pour définir le module de cisaillement, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Le problème proposé a été discrétisé à l'aide d'éléments finis à deux dimensions dans le cadre des contraintes planes. La structure est maillée avec des éléments quadrangulaires à neuf nœuds. De plus, dans le cadre des matériaux incompressibles (voir annexe D), on utilise le même élément avec quatre nœuds de pression sur les quatre cotés des éléments. L'ordre de troncature des séries est $N = 15$ et le paramètre de précision $\delta = 10^{-6}$.

Pour comparer les résultats obtenus par la MAN avec ceux réalisés par la méthode classique de Newton-Raphson, dans les figures E.1 et E.2, nous présentons les courbes contraintes-déformations pour le point d'intégration situé sur l'élément indiqué par la couleur noire sur la figure 3.3. Ces courbes représentent les réponses des tests de traction et de compression et montrent que les résultats des deux méthodes s'accordent bien.

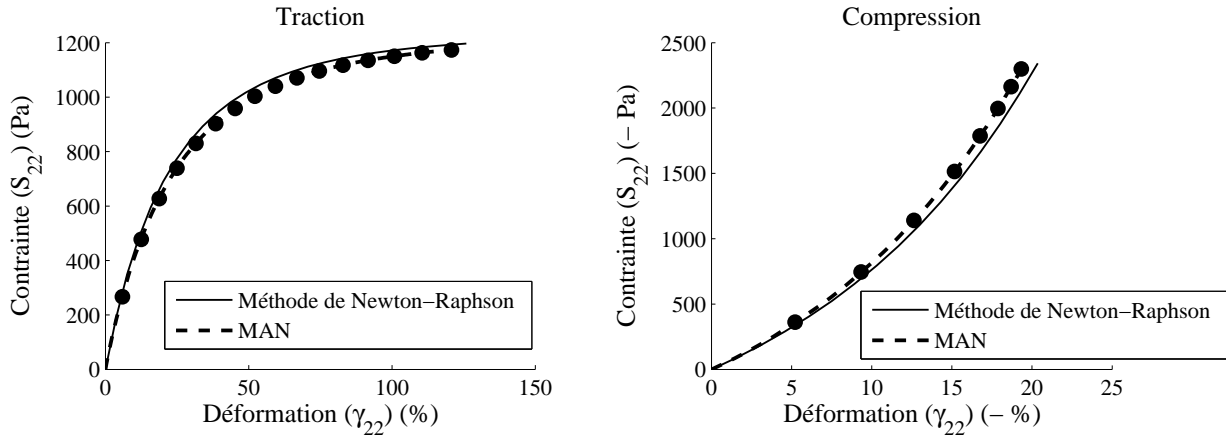


FIGURE E.1 – Diagrammes contraintes-déformations pour les problèmes de traction et de compression pour le modèle incompressible Néo-Hookéen.

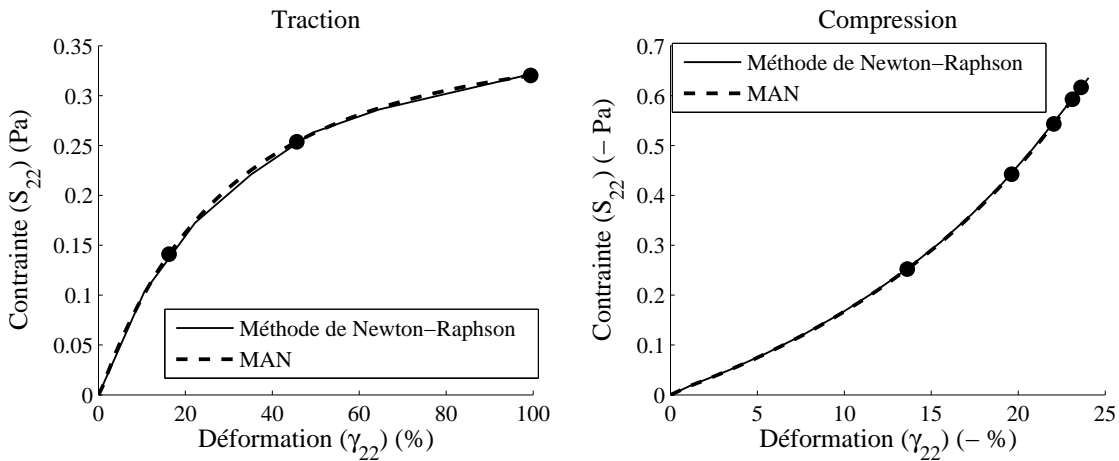


FIGURE E.2 – Diagrammes contraintes-déformations pour les problèmes de traction et de compression pour le modèle compressible de Gent.

Bibliographie

- Theory Manual ABAQUS, 2008. Version 6.8, Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc.
- R. Abeyaratne et N. Triantafyllidis. An investigation of localization in a porous elastic material using homogenization theory. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :481–486, 1984.
- H. Abichou, H. Zahrouni, et M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for problems coupling several nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :5795–5810, 2002.
- W. Aggoune, H. Zahrouni, et M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for unilateral contact. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 68 :605–631, 2006.
- M. Assidi. *Méthode asymptotique numérique pour la plasticité*. PhD thesis, Université Paul Verlaine de Metz, Metz, France, 2007.
- M. Assidi, H. Zahrouni, N. Damil, et M. Potier-Ferry. Regularization and perturbation technique to solve plasticity problems. *International Journal of Material Forming*, 2 : 1–14, 2009.
- L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 36 :1251–1277, 1993.
- G.A. Baker et P. Graves-Morris. *Padé Approximants*, volume 13. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1981.
- J.C. Battini. A modified corotational framework for triangular shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1905–1914, 2007.
- M.R. Begley et J.W. Hutchinson. The mechanics of size-dependent indentation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :2949–2968, 1998.
- H. Ben Dhia. Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris IIb*, 326 :899–904, 1998.

- A. Bensoussan, J.-L. Lionis, et G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- B Berveiller et A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325–344, 1979.
- J.F.W. Bishop et R. Hill. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-center metal. *Philosophical Magazine*, 42 :1298–1307, 1951a.
- J.F.W. Bishop et R. Hill. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Philosophical Magazine*, 42 :414–427, 1951b.
- M. Bornert, C. Stolz, et A. Zaoui. Morphologically representative patten-based bounding in elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 :307–331, 1996.
- E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, et M. Boudi. Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :1987–2012, 2004.
- B. Braikat. *Méthode asymptotique numérique et et fortes non linéarités*. PhD thesis, Faculté des sciences Ben M’sik Casablanca, Maroc, 1995.
- J. Brunelot. *Simulation de la mise en forme à chaud par la méthode asymptotique numérique*. PhD thesis, Faculté des sciences Ben M’sik Casablanca, Maroc, 1999.
- B. Budiansky. Micromechanics. *Computers & Structures*, 16 :3–12, 1983.
- I. Charpentier et M. Potier-Ferry. Automatic differentiation of the asymptotic numerical method : the diamant approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 336 :336–340, 2008.
- W.F. Chen et D.J. Han. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- T. Chu et Z. Hashin. Plastic behavior of composites and porous media under isotropic stress. *International Journal of Engineering Science*, 9 :971–994, 1971.
- B. Cochelin. A path following technique via an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, 53 :1181–1192, 1994.
- B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical methods and Padé approximants for non linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1187–1213, 1994.

-
- B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès Science Publications, 2007.
- J.C. Criscione, M.S. Sacks, et W.C. Hunter. Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes : I. Theory. *Journal of Biomechanical Engineering*, 125 :94–99, 2003.
- M.A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley, Chichester, 1991.
- G. deBotton, I. Hariton, et E.A. Socolsky. Neo-Hookean fiber reinforced composites in finite elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :533–559, 2006.
- G. deBotton et P. Ponte Castañeda. Variational estimates for the creep behaviour of polycrystals. *Proceedings of the Royal Society A*, 448 :121–142, 1995.
- F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, et F. Lene. Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27 : 285–298, 1989.
- S. Drapier, J.C. Grandidier, et M. Potier-Ferry. Theoretical study of structural effects on the compressive strength of laminates composites. *Compte Rendue de l'Académie des Sciences, Paris*, 324 :219–227, 1997.
- S. Drapier, J.C. Grandidier, et M. Potier-Ferry. A nonlinear numerical approach to the analysis of microbuckling. *Composites Science and Technology*, 58 :785–790, 1998.
- S. Drapier, J.C. Grandidier, et M. Potier-Ferry. A structural approach of plastic microbuckling in long fibre composites : comparison with theoretical and experimental results. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :3877–3904, 2001.
- A. Dür. On the optimality of the discrete Karhunen-Loève expansion. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 36 :1937–1939, 1998.
- G.J. Dvorak, Y.A. Bahei-El-Din, et A.M. Wafa. The modelling of inelastic composite materials with the transformation field analysis. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2 :571–586, 1994.
- A. Elhage-Hussein, M. Potier-Ferry, et N. Damil. A numerical continuation method based on Padé approximants. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :6981–7001, 2000.

- K. Erami, N. Ohno, et D. Okumura. Long-wave in-plane buckling of elastoplastic square honeycombs. *International Journal of Plasticity*, 22 :1569–1585, 2006.
- A. Eriksson. Derivatives of tangential stiffness matrices for equilibrium path descriptions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1093–1113, 1991.
- A. Eriksson et R. Kouhia. On step size adjustments in structural continuation problems. *Computers and Structures*, 55 :495–506, 1995.
- F. Feyel. Multiscale FE² elastovisplastic analysis of composite structures. *Computational Materials Science*, 16 :344–354, 1999.
- F. Feyel. A multilevel finite element method (FE²) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3233–3244, 2003.
- F. Feyel et J.L. Chaboche. FE² multiscale approach for modeling the elastoviscoplastic behavior of long fiber SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330, 2000.
- J. Fish, Q. Yu, et K. Shek. Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenisation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :1657–1679, 1999.
- N.A. Fleck et J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity. *Advances in applied mechanics*, 33 :295–361, 1997.
- S. Forest, F. Pradel, et K. Sab. Asymptotic analysis of heterogeneous cosserat media. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :4585–4608, 2001.
- S. Forest et K. Sab. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25 :449–454, 1998.
- S. Forest et R. Sievert. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, 160 :71–111, 2003.
- P.K. Frakley et A.R. Payne. *Theory and practice of enginnering with rubber*. Applied Science Publishers, London, 1978.
- Geers, M.G.D., R.L.J.M. Ubachs, et R.A.B. Engelen. Strongly nonlocal gradient-enhanced finite strain elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 :2039–2068, 2003.

-
- A.N. Gent. Rubber and rubber elasticity ; a review. *Journal of Polymer Science : Polymer Symposia*, 48 :1–17, 1974.
- A.N. Gent. A new constitutive relation for rubber. *Rubber chemistry and technology*, 69 : 59–61, 1996.
- P. Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- G. Geymonat, S. Muller, et N. Triantafyllidis. Homogenization of nonlinearly elastic materials : microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 122 :231–290, 1993.
- S. Ghosh, K. Lee, et P. Raghavan. A multilevel computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous media. *International Journals of Solids and Structures*, 38 :2335–2385, 2001.
- G.H. Golub et Van Loan C.F. *Matrix computations*. North Oxford Academic, Oxford, 1983.
- M. Gologanu, J.B. Leblond, et J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - Case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116 :290–297, 1994a.
- M. Gologanu, J.B. Leblond, et J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :1723–1754, 1994b.
- L. Gong, S. Kyriakides, et N. Triantafyllidis. On the stability of Kelvin cell foams under compressive loads. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :771–794, 2005.
- J.C. Grandidier, G. Ferron, et M. Potier-Ferry. Microbuckling and strength in long-fiber composites - theory and experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :1753–1761, 1992.
- J. M. Guedes et N. Kikuchi. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83 :143–198, 1990.
- A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.

- Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 29 :143–150, 1962.
- Z. Hashin et S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :335–342, 1962a.
- Z. Hashin et S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :343–352, 1962b.
- Z. Hashin et S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :127–140, 1963.
- H. Hencky. Zur theorie deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nebenspannungen. *Zeitschrift Für Angewandte mathematik und Mechanik*, 4 :323–334, 1924.
- R. Hill. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society A*, 65 :349–354, 1952.
- R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :357–372, 1963.
- R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :213–222, 1965.
- R. Hill. On macroscopic effects of heterogeneity in elastoplastic media at finite strain. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 95 :481–494, 1984.
- S. J. Hollister et N. Kikuchi. A comparison of homogenization and standard mechanics analysis for periodic porous composites. *Computational Mechanics*, 10 :73–95, 1992.
- P. Holmes, J.L. Lumley, et G. Berkooz. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach For Engineering*. Wiley, 2000.
- G.A. Holzapfel et T.C. Gasser. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, 61 :1–48, 2000.

-
- H. Hotelling. Analysis of complex statistical variables in principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24 :498–520, 1933.
- J.D. Humphrey. *Cardiovascular Solid Mechanics : Cells, Tissues and Organs*. Springer, New York, 2002.
- J.W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society A*, 348 :101–127, 1976.
- M.I. Idiart et P. Ponte Castañeda. Fields in nonlinear composites : I. Theory. *Proceedings of the Royal Society A*, 463 :183–202, 2007.
- A.A. Ilyushin. Some problems of the theory of plastic deformation. *Prikl. Mat. Mekh.*, 7, 1943.
- A.A. Ilyushin. The elasto-plastic stability of plates. *National Advisory Commitee for Aeronautics, Technical Memorandum, Washington*, 1188, 1947.
- A. Imazaten. *Quelques techniques pour appliquer la MAN aux structures plastiques et aux grands systèmes*. PhD thesis, Université Paul Verlaine de Metz, Metz, France, 2001.
- M. Kailasam et P. Ponte Castañeda. A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :427–465, 1998.
- P. Kanouté, D. P. Boso, J. L. Chaboche, et B. A. Schrefler. Multiscale methods for composites : A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16 :31–75, 2009.
- K. Karhunen. Zur spektraltheorie stochastischer prozesse. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*, 34 :1–7, 1946.
- R. Kouhia. *Techniques for the analysis of non-linear systems with applications to solids and structural mechanics*. PhD thesis, In the series 'Acta Polytechnica Scandinavia', Espoo, Finland, 1999.
- R. Kouhia. Stabilized forms of orthogonal residual and constant incremental work control path following next term methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :1389–1396, 2008.
- V.G. Kousnetzova. *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. PhD thesis, Universiteitsdrukkerij TU Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands, 2002.

- V.G. Kousnetzova, M.G.D. Geers, et W.A.M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 : 1235–1260, 2002.
- V.G. Kousnetzova, M.G.D. Geers, et W.A.M. Brekelmans. Multi-scale second order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5525–5550, 2004.
- S. Kyriakides, R. Arseculeratne, E.J. Perry, et K.M. Liechti. On the compressive failure of fiber-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 32 :689–738, 1995.
- P. Ladevèze, O. Loiseau, et D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :121–138, 2001.
- P. Ladvèdeze et A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenisation for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087, 2003.
- P. Ladvèdeze, A. Nouy, et O. Loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891, 2002.
- N. Lahellec et P. Suquet. Nonlinear composites : a linearization procedure, exact to second-order in contrast and for which the strain-energy and affine formulations coincide. *Comptes Rendus Mécanique*, 332 :693–700, 2004.
- N. Lahellec et P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II- A second-order procedure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 : 1964–1992, 2007.
- H. Lahmam, J.M. Cadou, H. Zahrouni, N. Damil, et M. Potier-Ferry. High-order predictor-corrector algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55 : 685–704, 2002.
- S.H. Lee et A.M. Waas. Compressive response and failure of fiber reinforced unidirectional composites. *International Journal of Fracture*, 100 :275–306, 1999.

-
- Y.C. Liang, H.P. Lee, S.P. Lim, Lin W.Z., et K.H. Lee. Proper orthogonal decomposition and its applications : I - Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252 :527–544, 2002.
- O. Lopez-Pamies et P. Ponte Castañeda. Second-order estimated for the macroscopic response and loss of ellipticity in porous rubbers at large deformations. *Journal of Elasticity*, 76 :247–287, 2005.
- O. Lopez-Pamies et P. Ponte Castañeda. On the overall behavior, microstructure evolution, and macroscopic stability in reinforced rubbers at large deformations : I- Theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :807–830, 2006a.
- O. Lopez-Pamies et P. Ponte Castañeda. On the overall behavior, microstructure evolution, and macroscopic stability in reinforced rubbers at large deformations : II- Application to cylindrical fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :831–863, 2006b.
- O. Lopez-Pamies et P. Ponte Castañeda. Homogenization-based constitutive models for porous elastomers and implications for macroscopic instabilities : I- Analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1677–1701, 2007a.
- O. Lopez-Pamies et P. Ponte Castañeda. Homogenization-based constitutive models for porous elastomers and implications for macroscopic instabilities : II- Results. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1702–1728, 2007b.
- E.N. Lorenz, 1956. Empirical orthogonal eigenfunctions and statistical weather prediction, Technical report, MIT, Department of Meteorology, Statistical forecasting project.
- M. Loève. *Probability theory*. Van Nostrand, New York, 1955.
- E. Mallil, H. Lahmam, N. Damil, et M. Potier-Ferry. An iterative process based on homotopy and perturbation techniques. *Computer Methods in Applied mechanics and Engineering*, 190 :1845–1858, 2000.
- D. Markovic et A. Ibrahimbegovic. On micro-macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5503–5523, 2004.
- T. Matsushima, R. Chambon, et D. Caillerie. Large strain finite element analysis of a local second gradient model : application to localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :499–521, 2002.

- J.C. Michel, O. Lopez-Pamies, P. Ponte Castañeda, et N. Triantafyllidis. Microscopic and macroscopic instabilities in finitely strained porous elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :900–938, 2007.
- J.C. Michel et P. Suquet. Nonuniform transformation fields analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :6937–6955, 2003.
- J.C. Michel et P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation fields analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5477–5502, 2004.
- C. Miehe. Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :559–591, 2003.
- C. Miehe, J. Schröder, et M. Becker. Computational homogenization analysis in finite elasticity : material and structural instabilities on the micro- and macro-scales of periodic composites and their interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(4) :4971–5005, 2002.
- G.W. Milton et R. Kohn. Variational bounds of the effective moduli of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36 :597–629, 1988.
- E. Monteiro, J. Yvonnet, et Q.C. He. Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction. *Computational Materials Science*, 42 :704–712, 2008.
- M. Mooney. A theory of large elastic deformations. *Journal of Applied Mechanics*, 11 : 582–592, 1940.
- L. Mullins et A.G. Thomas. *The chemistry and physics of rubber-like substances*. Editor : L. Bateman, Maclaren and Sons, London, 1963.
- A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry. Effect of thermal residual stress and fiber packing on deformation of metal-matrix composites. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5 :31–50, 1998.
- M.V. Nebozhyn, P. Gilormini, et P. Ponte Castañeda. Variational self-consistent estimates for cubic viscoplastic polycrystals : the effects of grain anisotropy and shape. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :313–340, 2001.

-
- S. Nemat-Nasser. Averaging theorems in finite deformation plasticity. *Mechanics of Materials*, 31 :493–523, 1999.
- S. Nemat-Nasser et M. Hori. *Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials*. North-Holland Series, Applied Mathematics and Mechanics 37, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- S. Nezamabadi, J. Yvonnet, H. Zahrouni, et M. Potier-Ferry. A multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :2099–2110, 2009a.
- S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet, et M. Potier-Ferry. A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, *accepté*, 2009b.
- P.M. Nielsen, P.J. Hunter, et B.H. Smaill. Biaxial testing of membrane biomaterials : Testing equipment and procedures. *Journal of Biomechanical Engineering*, 113 :295–300, 1991.
- J.T. Oden. *Finite elements of non-linear continua*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- J.T. Oden et N. Kikuchi. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 :701–725, 1982.
- R.W. Ogden. Large deformation isotropic elastic - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society A*, 326 : 565–584, 1972.
- R.W. Ogden. *Elastic deformation of rubber-like solids*. Mechanics of Solids, The Rondey Hill 60th Anniversary Volume, Editor : H.G. Hopkins and M.J. Sewell, Pergamon, Oxford, 1982.
- R.W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, Chichester, UK, 1984.
- N. Ohno, D. Okumura, et T. Niikawa. Long-wave buckling of elastic square honeycombs subject to in-plane biaxial compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46 :1697–1713, 2004.
- N. Ohno, D. Okumura, et H. Noguchi. Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :1125–1153, 2002.

- D. Okumura, N. Ohno, et H. Noguchi. Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :3487–3503, 2002.
- D. Okumura, N. Ohno, et H. Noguchi. Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :641–666, 2004.
- D. Okumura, A. Okada, et N. Ohno. Buckling behavior of Kelvin open-cell foams under $[0\ 0\ 1]$, $[0\ 1\ 1]$ and $[1\ 1\ 1]$ compressive loads. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :3807–3820, 2008.
- T. Olson. Improvements on Taylor’s upper bound for rigid-plastic composites. *Materials Science and Engineering A*, 175 :15–19, 1994.
- H. Padé. Sur la représentation approchée d’une fonction par des fractions rationnelles. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 9 :3–93, 1892.
- B. Paul. Prediction of the elastic constants of multiphase materials. *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Engng.*, 218 :36–41, 1960.
- R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, et J.H.P. de Vree. Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3391–3403, 1996.
- P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :45–71, 1991.
- P. Ponte Castañeda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1757–1788, 1992.
- P. Ponte Castañeda. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanic and Physics of Solids*, 44 : 827–862, 1996.
- P. Ponte Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I- Theory. *Journal of the Mechanic and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- P. Ponte Castañeda et M.V. Nebozhyn. Variational estimates of the self-consistent type for some model nonlinear polycrystals. *Proceedings of the Royal Society A*, 453 :2715–2724, 1997.

-
- P. Ponte Castañeda et P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York*, 34 :171–302, 1998.
- P. Ponte Castañeda et M. Zaidman. Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42 :1459–1497, 1994.
- M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J.M. Cadou, H.L. Cao, et A. Elhage Hussein. Traitement des fortes non linéarités par la méthode asymptotique numérique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB*, 324 :171–177, 1997.
- E. Ramm. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Dans W. Wunderlich, E. Stein, et Bathe K.J., éditeurs, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pages 63–89. Springer, Berlin, 1981.
- J. Renard et M. F. Marmonier. Etude de l'initiation de l'endommagement dans la matrice d'un matériau composite par une méthode d'homogénéisation. *Aerospace Science and Technology*, 9 :37–51, 1987.
- E. Riks. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47 :219–259, 1984.
- R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 241 :379–397, 1948.
- B.W. Rosen. Mechanics of composite strengthening. *Fiber composite materials, American Society for Metals Seminar*, 3 :37–75, 1964.
- D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202 :346–366, 2005.
- M.S. Sacks. Incorporation of experimentally-derived fiber orientation into a structural constitutive model for planar collagenous tissues. *Journal of Biomechanical Engineering*, 125 :280–287, 2003.
- E. Sanchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory, In : Lecture Notes in Physics. *Springer-Verlag, Berlin*, 127, 1980.
- M.W. Schraad et N. Triantafyllidis. Scale effects in media with periodic and nearly periodic microstructures : II- Failure mechanisms. *Journal of Applied Mechanics*, 64 : 763–771, 1997.

- J.Y. Shu, W.E. King, et N.A. Fleck. Finite elements for materials with strain gradient effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :373–391, 1999.
- J.C. Simo et L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite-strain rod model : II- Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :79–116, 1986.
- L. Sirovitch. Turbulence and the dynamics of coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45 :561–590, 1987.
- R. Smit, W. Brekelmans, et H. Meijer. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 :181–192, 1998.
- J.H. Song et T. Belytschko. Multiscale aggregating discontinuities method for micro-macro failure of composites. *Composites : Part B, Engineering*, 40 :417–426, 2009.
- P. Suquet. Analyse limite et homogénéisation. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Paris II*, 295 :1355–1358, 1983.
- P. Suquet. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. Dans A. Sawczuk et G. Bianchi, éditeurs, *Plasticity today : modelling, methods and applications*, pages 279–310. Elsevier Applied Science Publishers, London, 1985.
- P. Suquet. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :981–1002, 1993.
- D.R.S. Talbot et J.R. Willis. Variational principles for nonlinear inhomogeneous media. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 35 :39–54, 1986.
- D.R.S. Talbot et J.R. Willis. Some explicit bounds for the overall behavior of nonlinear composites. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :1981–1987, 1992.
- G. Tandon et G. Weng. A theory of particle-reinforced plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 55 :126–135, 1988.
- G.I. Taylor. Plastic strains in metals. *Journal Institute of Metals*, 62 :307–324, 1938.
- K. Terada et N. Kikuchi. A class of general algorithms for multi-scale analysis of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :5427–5464, 2001.
- A. Tolenado et H. Murakami. A high-order mixture model for periodic particulate composites. *International Journal of Solids and Structures*, 23 :989–1002, 1987.

-
- L.R.G. Treloar. *The physics of rubber elasticity*. 3rd edition, Oxford university press, 1975.
- N. Triantafyllidis et S.G. Bardenhagen. The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 :1891–1928, 1996.
- N. Triantafyllidis et B.N. Maker. On the comparison between microscopic and macroscopic instability mechanisms in a class of fiber-reinforced composites. *Journal of Applied Mechanics*, 52 :794–800, 1985.
- N. Triantafyllidis, M.D. Nestorović, et M.W. Schraad. Failure surfaces for finitely strained two-phase periodic solids under general in-plane loading. *Journal of Applied Mechanics*, 73 :505–515, 2006.
- N. Triantafyllidis et M.W. Schraad. Onset of failure in aluminium honeycombs under general in-plane loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :1089–1124, 1998.
- K.C. Valanis et R.F. Landel. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38 :2997–3002, 1967.
- P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry. An asymptotic-numerical method to compute bifurcated branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 :1365–1389, 1998.
- L. Walpole. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems : I and II. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14 :151–162, 1986.
- J.R. Willis. Elasticity theory of composites. Dans H.A. Hopkins et M.I. Sewell, éditeurs, *Mechanics of Solids, The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*, pages 653–686. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- J.R. Willis. The overall elastic response of composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1202–1209, 1983.
- J.R. Willis. Variational estimates for the overall response of an inhomogeneous media. Dans J.L. Ericksen et al., éditeurs, *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media*, pages 247–263. Springer-Verlag, New-York, 1986.
- J.R. Willis. The overall response of nonlinear composite media. *European Journal of Mechanics A, Solids*, 19 :165–184, 2000.

- M.R. Wisnom. The effect of specimen size on the bending strength of unidirectional carbon fibre-epoxy. *Composites Structures*, 18 :47–63, 1991.
- P. Wriggers, W. Wagner, et C. Miehe. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability point in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 :329–347, 1988.
- Z.C. Xia et J.W. Hutchinson. Crack tip fields in strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 :1621–1648, 1996.
- S.P. Xiao et T. Belytschko. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :1645–1669, 2004.
- J. Yvonnet, D. Gonzalez, et Q.C. He. Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :2723–2737, 2009.
- J. Yvonnet et Q.C. He. The Reduced Model Multiscale Method (R3M) for the nonlinear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223 :341–368, 2007.
- J. Yvonnet, H. Zahrouni, et M. Potier-Ferry. A model reduction method for the post-buckling analysis of cellular microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :265–280, 2007.
- H. Zahrouni. *Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations*. PhD thesis, Université Paul Verlaine de Metz, Metz, France, 1998.
- H. Zahrouni, W. Aggoune, J. Brunelot, et M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for strong nonlinearities. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 118 :13–97, 2004.
- H. Zahrouni, B. Braikat, N. Damil, et M. Potier-Ferry. Solving plasticity problems by a perturbation technique. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 5 :455–456, 2005.
- H. Zahrouni, B. Cochelin, et M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175 :71–85, 1999.
- H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, H. Elasmr, et N. Damil. Asymptotic numerical method for nonlinear constitutive laws. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 7 :841–869, 1998.

-
- A. Zervos, P. Papanastasiou, et I. Vardoulakis. A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1369–1388, 2001.
- M.A. Zulliger, P. Fridez, K. Hayashi, et N. Stergiopoulos. A strain energy function for arteries accounting for wall composition and structure. *Journal of Biomechanics*, 37 : 989–1000, 2004.

Table des figures

1.1	Géométrie et conditions aux limites de l'arc circulaire profond	17
1.2	Diagramme charge-déplacement vertical du point d'application de la force dans le problème du flambage de l'arc profond.	18
1.3	Configuration déformée de l'arc pour différents niveaux de chargement. u est le déplacement vertical du point d'application de la force.	18
2.1	Schéma d'un VER avec des conditions de périodicité.	24
2.2	Résumé du problème multi échelle à résoudre.	25
2.3	Géométrie du problème de flexion et positions des cellules A et B considérées pour comparer les contraintes.	33
2.4	(a) VER biphasique avec l'inclusion circulaire, (b) VER biphasique avec l'inclusion elliptique verticale, et (c) VER biphasique avec l'inclusion elliptique horizontale.	34
2.5	Maillage complet de la poutre rectangulaire (58658 d.d.l.).	34
2.6	Diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire et pour différents rapports de rigidité ; le fraction volumique est $V_2/V = 28\%$	35
2.7	Configuration déformée de la structure et du VER aux points d'intégration après deux pas asymptotiques du modèle MAN multi échelle (Cas considéré : l'inclusion circulaire, la fraction volumique de l'inclusion est 28% et le rapport de rigidité est 0, 1).	36
2.8	Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire, les différentes fractions volumiques et le rapport de rigidité de 10.	37
2.9	Les diagrammes charge-contraintes du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire, la fraction volumique de 7% et le rapport de rigidité de 10 au point A.	38

2.10	Les diagrammes charge-contraintes du problème de flexion pour le VER biphasique avec l'inclusion circulaire, la fraction volumique de 7% et le rapport de rigidité de 10 au point B	38
2.11	Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour le VER biphasique avec les inclusions elliptiques verticale et horizontale et le rapport de rigidité de 10.	39
3.1	Géométrie et conditions aux limites du problème de traction ou compression d'une plaque rectangulaire.	52
3.2	Diagrammes contraintes-déformations pour les problèmes de traction et de compression pour le modèle compressible de Mooney-Rivlin.	52
3.3	États déformés de la structure en traction et en compression	53
3.4	Plaque en traction simple ($P = 20MPa$), description géométrique et de chargement.	61
3.5	Courbe de réponse contrainte équivalente σ_{eq} / déformation ϵ_{11}	62
4.1	Géométrie et conditions aux limites pour le problème de toit mince composite.	64
4.2	Réponse charge-déplacement pour le problème de toit mince composite. Les VER associé à la microstructure sont les VER représentés dans la figure 2.4. Le rapport de rigidité entre inclusions et matrice est de 10.	65
4.3	Cellule élémentaire associée au matériau composite à fibres longues.	66
4.4	Géométrie et conditions aux limites pour le problème de microflambage de composite à fibres longues.	66
4.5	Diagrammes charge-déplacement pour les différents VER construits à partir de la cellule élémentaire de la figure 4.3.	67
4.6	Convergence de la charge critique par rapport au nombre de cellules élémentaires j dans la direction \mathbf{e}_2	68
4.7	État déformé de la macrostructure.	68
4.8	Configurations déformées de la microstructure dans l'élément 1 (voir la figure 4.7)	69
4.9	Configurations déformées de la microstructure dans l'élément 2 (voir la figure 4.7)	69
4.10	Courbe de réponse charge-déplacement du VER_{13}	70
4.11	Configurations déformées de la microstructure dans l'élément 1 (voir la figure 4.7) aux points (a) A et (b) B (voir la figure 4.10). Les déformations sont exagérées d'un facteur 5.	70

4.12	(a) Cellule élémentaire associée à la microstructure cellulaire (VER_{11}); (b) état déformé en compression de la même cellule; (c) état déformé du VER constitué de quatre cellules élémentaires (VER_{22}).	71
4.13	Courbes de réponse contrainte-charge macroscopiques pour les VER_{11} et VER_{22} (voir la figure 4.12).	71
4.14	Courbe de réponse charge-déplacement pour le problème de microflambage avec microstructure cellulaire.	72
4.15	Configurations déformées du VER dans l'élément 1 (voir figure 4.7) aux points A (a) et B (b) de la courbe de chargement 4.14. Les déformations représentées sont à l'échelle 1.	72
4.16	La microstructure du composite à fibres longues avec l'imperfection.	74
4.17	Courbes contraintes-déformations macroscopiques pour différentes valeurs d'amplitudes de l'imperfection v_0	74
4.18	Maillage utilisé pour la macrostructure.	75
4.19	Diagramme charge-déplacement pour le problème de microflambage plastique.	76
4.20	États déformés associés au point d'intégration macroscopique $IP I$ (voir figure 4.18) pour les différents chargements (points A,B,C,D et E de la figure 4.19). Les déformations sont exagérées d'un facteur 10.	76
4.21	Courbes contraintes-déformations macroscopiques pour les différents points d'intégration I, II et III (voir figure 4.18).	77
5.1	Schéma d'un VER avec des conditions de périodicité.	82
5.2	Résumé du problème multi échelle du second ordre à résoudre.	87
5.3	Élément QU8F4L1 pour discrétisation de la macrostructure dans le cadre de l'homogénéisation du second ordre (\bullet : déplacement \mathbf{u} , \square : gradient de déformation $\hat{\mathbf{F}}$, \times : multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$).	92
5.4	Géométrie, conditions aux limites et la microstructure pour le problème de flexion.	93
5.5	Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour l'homogénéisation du premier et du second ordre.	93
5.6	Configuration déformée de la structure et des VER au niveau de l'élément colorié sur la figure (a) homogénéisation du second ordre et (b) homogénéisation du premier ordre.	94
6.1	Diagramme du temps de calcul en fonction du nombre de processeurs pour un problème de flexion d'une poutre.	99

6.2	Les diagrammes charge-déplacement du problème de flexion pour les deux procédures de MAN multi échelle et de MAN multi échelle + POD, le rapport de rigidité est 10.	104
6.3	Schéma montrant différentes régions de calcul ; Niveau I : les régions de faibles déformations ; Niveau II : les régions de forts gradients ; Niveau III : les régions présentant de l'endommagement.	105
E.1	Diagrammes contraintes-déformations pour les problèmes de traction et de compression pour le modèle incompressible Néo-Hookéen.	122
E.2	Diagrammes contraintes-déformations pour les problèmes de traction et de compression pour le modèle compressible de Gent.	122

Résumé

La modélisation multi échelle des matériaux hétérogènes est un challenge en mécanique numérique. Dans le contexte non linéaire, les propriétés effectives des matériaux hétérogènes ne peuvent pas être obtenues par les techniques utilisées pour les milieux linéaires car le principe de superposition n'est plus valable. Ainsi, dans le contexte des éléments finis, une alternative au maillage de l'ensemble de la structure avec la prise en compte de toutes les hétérogénéités, est l'utilisation de la méthode d'éléments finis multi échelles (EF²). Les techniques de ce type offrent de nombreux avantages, tels que la prise en compte : des grandes déformations au niveau micro et macro, de la non linéarité du comportement, et de l'évolution de la microstructure. Les problèmes non-linéaires aux échelles micro et macro sont souvent résolus par les procédures classiques de Newton-Raphson, qui sont généralement adaptées à la résolution des problèmes non linéaires mais qui présentent des difficultés en présence d'instabilités.

Dans cette thèse, la combinaison de la méthode des éléments finis multi échelles (EF²) et la méthode asymptotique numérique (MAN), surnommée MAN multi échelle, permet de mettre en œuvre une technique numérique efficace pour traiter les problèmes d'instabilités dans le cadre des matériaux hétérogènes. Ces instabilités peuvent survenir à la fois au niveau micro et au niveau macro. Différentes classes de comportement des matériaux ont été implantées dans notre procédure. Pour améliorer le conditionnement du problème multi échelle à résoudre, une technique d'homogénéisation du second ordre a été également adaptée dans le cadre de la technique MAN multi échelle. Par ailleurs, afin de réduire le temps de calcul, quelques techniques ont été proposées dans ce travail.

Mots-clés: Méthode des éléments finis multi échelles (EF²), Méthode asymptotique numérique (MAN), Homogénéisation non linéaire, Homogénéisation du second ordre, Instabilités, Flambage.

Abstract

The multiscale modelling of the heterogeneous materials is a challenge in computational mechanics. In the nonlinear case, the effective properties of heterogeneous materials cannot be obtained by the techniques used for linear media because the superposition principle is no longer valid. Hence, in the context of the finite element method, an alternative to mesh the whole structure, including all heterogeneities, is the use of the multiscale finite element method (FE²). These techniques have many advantages, such as taking into account : large deformations at the micro and macro scales, the nonlinear constitutive behaviors of the material, and microstructure evolution. The nonlinear problems in micro and macro scales are often solved by the classical Newton-Raphson procedures, which are generally suitable for solving nonlinear problems but have difficulties in the presence of instabilities.

In this thesis, the combination of the multiscale finite element method (FE²) and the asymptotic numerical method (ANM), called Multiscale-ANM, allows one to obtain a numerical effective technique for dealing with the instability problems in the context of heterogeneous materials. These instabilities can occur at both micro and macro levels. Different classes of material constitutive relation have been implemented within our procedure. To improve the multiscale problem conditioning, a second order homogenization technique was also adapted in the framework of Multiscale-ANM technique. Furthermore, to reduce the computational time, some techniques been proposed in this work.

Keywords: Multiscale finite element method (FE²), Asymptotic numerical method (ANM), Nonlinear homogenization, Second order homogenization, Instabilities, Buckling