



HAL
open science

Analyse harmonique sur certains groupes de Lie à croissance polynomiale

Raza Lahiani

► **To cite this version:**

Raza Lahiani. Analyse harmonique sur certains groupes de Lie à croissance polynomiale. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2010. Français. NNT : 2010METZ001S . tel-01752676

HAL Id: tel-01752676

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752676>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



PhD-FSTC-5-2010

Faculté des Sciences, de la Technologie et de la Communication
LMAM, Ecole doctorale IAEM Lorraine

THÈSE EN COTUTELLE

Soutenue le 09/03/2010 à Luxembourg

En vue de l'obtention du grade académique de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG
ET DE L'UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ

EN MATHÉMATIQUES

par

Raza Lahiani

née le 3 décembre 1982 à Sfax, Tunisie

ANALYSE HARMONIQUE SUR CERTAINS GROUPES
DE LIE A CROISSANCE POLYNOMIALE

Jury de thèse

Dr. Jean Ludwig, directeur de thèse
Professeur, Université Paul Verlaine-Metz

Dr. Carine Molitor-Braun, directrice de thèse
Professeur, Université du Luxembourg

Dr. Hidenori Fujiwara, rapporteur
Professeur, Kinki University, Japon

Dr. Didier Arnal, rapporteur
Professeur émérite, Université de Bourgogne

Dr. Martin Olbrich, président
Professeur, Université du Luxembourg

Dr. Angela Pasquale, présidente suppléante
Professeur, Université Paul Verlaine-Metz

A ma famille
A mon mari Youssef

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Madame le professeur Carine Molitor-Braun, ma directrice de thèse à l'Université du Luxembourg, qui m'a énormément appris au cours de nos innombrables discussions. Elle m'a aidé à venir à bout de difficultés mathématiques que j'aurais pu croire insurmontables, ce dont je lui suis particulièrement reconnaissante. Ses qualités humaines et scientifiques, sa compétence et son bienveillance méritent toute admiration.

Un grand merci également à Monsieur le professeur Jean Ludwig, mon directeur de thèse à l'Université Paul Verlaine-Metz. Il a toujours été disponible pour d'intenses et rationnelles discussions. Pour tout cela, sa confiance et son extrême gentillesse, je le remercie vivement.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Monsieur le Professeur Didier Arnal et Monsieur le professeur Hidenori Fujiwara, en acceptant de participer à la jury de cette thèse en tant que rapporteurs. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour l'intérêt porté à ce travail. Je remercie Monsieur le professeur Martin Olbrich et Madame le professeur Angela Pasquale pour avoir accepté de faire partie du jury ainsi que pour m'avoir aidé et soutenu tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Ma reconnaissance va à tous les membres de l'unité de recherche en mathématiques de l'Université du Luxembourg et du laboratoire LMAM de l'Université Paul Verlaine-Metz pour m'avoir accueilli et encouragé durant cette période.

Merci à ma famille pour le soutien sans faille qu'elle m'a apporté tout au long de ces quatre années de thèse. Mon père qui m'a appris à être simple, que l'on peut être heureux juste en regardant ceux qu'on aime à nos côtés. Ma mère, qui m'a appris à rester toujours debout face aux difficultés, à aimer la recherche et la science. Elle m'a embrassé mes échecs et mes réussites sans distinction. Je remercie mon frère et ma soeur de m'avoir donné tellement de chaleur et de joie de vivre, de m'avoir appris à ne jamais baisser les bras. Je sais ce que je leur dois.

Je remercie évidemment mon mari Youssef pour son irremplaçable et inconditionnel soutien. Il a été présent pour m'écouter, me soutenir, m'entourer d'affection et d'amour tendre et pure. Je remercie tous ceux, qui de près ou de loin, auront su contribuer à l'aboutissement de ce projet.

Sincèrement.....

Table des matières

	i
REMERCIEMENTS	iii
	ix
	xi
Introduction	xiii
1 Généralités	1
1.1 Représentations induites et intégrées.	1
1.1.1 Représentations induites.	1
1.1.2 Représentations intégrées.	3
1.1.3 Relation entre les fonctions noyaux.	3
1.2 Les formes génériques au sens de Ludwig-Zahir.	4
1.3 Résultats généraux sur les espaces homogènes.	6
1.4 Action d'un groupe de Lie compact sur un groupe de Lie nilpotent.	7
1.4.1 Action de K sur $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$	8
1.4.2 Action de K sur \mathfrak{n}^*	8
1.4.3 Action de K sur \widehat{N}	8
1.4.4 Action de K sur $L^1(N)$	11
1.4.5 Action combinée de K et N	12
1.4.6 Les différentes orbites dans \mathfrak{n}^*	13
1.4.7 Algèbre de Schwartz	14
2 Exemples de rétractes pour une action d'un groupe de Lie compact	17
2.1 Action de K sur \mathbb{R}^n	17
2.1.1 Stabilisateurs	18
2.1.2 Construction du rétracte	18
2.2 Action de $SO(2)$ sur H_1	21
2.2.1 Actions de $SO(2)$	21
2.3 Action de $SO(3)$ sur $F(3)$	23

2.3.1	Stabilisateur, indices de saut et éléments génériques	24
2.3.2	Polarisations de Vergne	26
2.3.3	Orbites co-adjointes	26
2.3.4	Orbites génériques et sections	30
2.3.5	Action de $SO(3)$ sur les formes génériques	32
2.3.6	Stabilisateurs	35
2.3.7	Détermination d'une fonction noyau.	37
2.3.8	Relation entre les fonctions noyaux	39
2.3.9	Conclusion	40
3	A smooth family of intertwining operators	41
3.1	On indices and bases.	43
3.1.1	Definitions.	43
3.1.2	Indices and a new family of smooth bases of polarizations.	45
3.2	Smooth bases and generalized Schwartz spaces.	47
3.2.1	Construction of smooth SP-bases.	47
3.2.2	SP-basis and invariant measure.	49
3.2.3	Generalized Schwartz spaces.	49
3.3	The generalized Kirillov theorem.	51
3.3.1	The statement of the theorem.	51
3.3.2	The theorem in variable Lie groups.	52
3.3.3	Proof of the variable generalized Kirillov theorem.	53
3.4	Smooth families of intertwining operators.	58
3.5	Kernel functions and intertwining operators.	68
3.5.1	68
3.5.2	68
3.5.3	69
3.5.4	69
3.6	Example of the Heisenberg group.	70
3.6.1	First method.	70
3.6.2	Second method.	71
4	La théorie du rétracte pour différentes réalisations des représentations	77
4.1	Stabilisateurs	79
4.2	Formes alignées.	80
4.3	Action sur une section de Pukanszky.	81
4.4	Résultat du rétracte sur $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$	85
4.4.1	Base coexponentielle de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$	85
4.4.2	Inversion de Fourier généralisée.	86
4.5	Résultat du rétracte global sur une sous-variété de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$	87
4.5.1	Paramétrisation d'une sous-variété de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$	87
4.5.2	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales.	88
4.5.3	Théorème du rétracte local sur une carte.	88

4.5.4	Remarques.	90
4.5.5	Partition de l'unité.	90
4.5.6	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux globales $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$	91
4.5.7	Théorème du rétracte global.	91
4.5.8	Remarque.	92
4.5.9	Application aux orbites de groupes compacts.	92
4.6	Résultat de rétracte sur $\tilde{K} \cdot l_0$	92
4.6.1	Base de Malcev de n par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$	93
4.6.2	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux sur $\tilde{K} \cdot l_0$	93
4.6.3	Théorème du rétracte sur $\tilde{K} \cdot l_0$	94
4.7	Résultat du rétracte sur \tilde{K}	96
4.7.1	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$	96
4.7.2	Théorème du rétracte sur \tilde{K}	97
4.8	Résultat du rétracte local pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur une section de \tilde{K}/K_{l_0}	98
4.8.1	Base de Malcev lisse de n par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$	99
4.8.2	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}'_0}$	99
4.8.3	Théorème du rétracte local pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur une section de \tilde{K}/K_{l_0}	100
4.9	Résultat du rétracte sur un ouvert de \tilde{K}	101
4.9.1	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux sur un ouvert de \tilde{K}	101
4.9.2	Théorème du rétracte local sur un ouvert de \tilde{K}	102
4.10	Translation sur K tout entier.	103
4.10.1	Base de Malcev de n par rapport $k_1 k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$	103
4.10.2	Définition des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{k_1, W_1, C_1}$	103
4.10.3	Relation de compatibilité tradatée.	104
4.10.4	Condition de covariance.	106
4.10.5	Théorème du rétracte tradaté	106
4.11	Un rétracte global sur K	108
4.11.1	Partition de l'unité.	108
4.11.2	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux globales	109
4.11.3	Théorème du rétracte global pour $\tilde{\pi}_{0,k}$	110
4.11.4	Conséquence.	110
4.12	Résultat du rétracte local pour ${}^k\pi_{l_0}$	111
4.12.1	Base de Malcev de n par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$	112
4.12.2	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales sur K/K_{l_0}	112
4.12.3	Théorème du rétracte local pour ${}^k\pi_{l_0}$ sur K/K_{l_0}	112
5	Théorie du rétracte sur les caractères	115
5.1	Fourier inverse sur la strate des caractères	116
5.1.1	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux	116
5.1.2	Théorème d'inversion de Fourier sur les caractères.	116
5.1.3	Remarques.	116
5.2	Action de K sur les caractères.	117

5.2.1	Stabilisateurs	117
5.2.2	Paramétrisation de $K \cdot l_0$	117
5.2.3	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales $\tilde{\mathcal{N}}_{(U,\varphi)}$	118
5.2.4	Théorème du rétracte local sur $K \cdot l_0$	118
5.2.5	Partition de l'unité	119
5.2.6	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux globales $\tilde{\mathcal{N}}$	120
5.2.7	Théorème du rétracte sur $K \cdot l_0$	120
5.3	Rétracte sur K	120
6	Idéaux K-invariants	123
6.1	Les idéaux K -invariants maximaux	123
6.2	Densité des fonctions de Schwartz dans l'orbite.	125
6.2.1	Partition de l'unité de K/K_{l_0}	126
6.2.2	Relation entre f et f_i	127
6.2.3	Relation entre $\text{Ker}\Omega_{l_0}$ et $\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$	128
6.3	Idéaux K -premiers	137
7	Action de $SO(4)$ sur $F(4)$	141
7.1	Stabilisateur, strates	142
7.1.1	Stabilisateur.	142
7.1.2	Strates.	144
7.2	Sections au sens de Pukanszky pour les strates intermédiaires.	151
7.3	Inversion de Fourier dans les strates intermédiaires.	151
7.3.1	Sens direct	151
7.3.2	Sens inverse.	154
7.3.3	Continuité du rétracte	158
7.3.4	Conclusion	158
7.4	Action de $SO(4)$ sur une section de Pukanszky	159
7.5	Résultat du rétracte sur $\tilde{K}_1 \cdot l_0$	161
7.5.1	Définition de l'ensemble des fonctions noyaux sur $\tilde{K}_1 \cdot l_0$	161
7.5.2	Théorème du rétracte sur $\tilde{K}_1 \cdot l_0$	161
7.6	Résultat du rétracte pour ${}^k\pi_{l_0}$	162
7.7	Idéaux K -premiers	162

Résumé

La première partie de la thèse porte sur l'étude de familles lisses d'opérateurs d'entrelacement entre deux réalisations différentes de représentations unitaires irréductibles et leur effet sur la théorie du rétracte.

Étant donné N un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, \mathfrak{n} son algèbre de Lie et \mathcal{W} une sous-variété de \mathfrak{n}^* telle que les polarisations associées aux éléments de \mathcal{W} soient de dimension fixe, on considère $(P(w))_w = (\exp p(w))_w$ et $(P'(w))_w = (\exp p'(w))_w$ deux familles lisses de polarisations en $w \in \mathcal{W}$. On sait d'après Kirillov que $\pi_w := \text{ind}_{P(w)}^N \chi_w$ et $\pi'_w := \text{ind}_{P'(w)}^N \chi_w$ sont équivalentes. On démontre alors l'existence locale d'une famille lisse d'opérateurs d'entrelacement entre les familles $(\pi_w)_w$ et $(\pi'_w)_w$, opérateurs donnés par une formule intégrale précise.

La deuxième partie de la thèse consiste à fournir certains résultats sur la théorie du rétracte sous à l'action de K , un sous-groupe de Lie compact du groupe des automorphismes de N où N est un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, (construction générale d'un rétracte pour la réalisation des représentations obtenue par induction à partir de polarisations de Vergne dans le cas générique, application à la construction d'un rétracte pour d'autres choix de polarisations ...). On y utilise la théorie développée dans la première partie.

Dans une troisième partie on caractérise les idéaux K -premiers de l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(N)$. Le passage aux idéaux K -premiers de l'algèbre de groupe $L^1(N)$ est alors réalisé via la théorie du rétracte développée dans la deuxième partie, au moins dans le cas générique et dans le cas des formes linéaires définissant les caractères.

Dans une quatrième partie de la thèse, on étudie l'action de $SO(4)$ sur $F(4)$, groupe de Lie libre nilpotent de pas 2 à 4 générateurs, en s'intéressant particulièrement aux strates non génériques (théorème de Fourier inverse, idéaux K -premiers).

Abstract

The first part of this thesis is devoted to the study of the existence of a smooth family of intertwining operators between two different families of equivalent representations and their effect on the retract theory.

Let N be a nilpotent Lie group, \mathfrak{n} its Lie algebra and \mathscr{W} a submanifold of \mathfrak{n}^* such that the dimension of all polarizations associated to elements of \mathscr{W} is fixed. We choose $(P(w))_w = (\exp \mathfrak{p}(w))_w$ and $(P'(w))_w = (\exp \mathfrak{p}'(w))_w$ two smooth families of polarizations in N . It is well known, by Kirillov theory, that $\pi_w := \text{ind}_{P(w)}^N \chi_w$ and $\pi'_w := \text{ind}_{P'(w)}^N \chi_w$ are equivalent for all w . We then prove the local existence of a smooth family of intertwining operators between $(\pi_w)_w$ and $(\pi'_w)_w$. Our study is based on a formula of G. Lion [11], who proved such a result for a fixed w .

The second issue of this thesis is the retract theory. Let K be a compact Lie subgroup of $\text{Aut}(N)$, acting smoothly on N . This action induces a corresponding action of K on \mathfrak{n} , \mathfrak{n}^* , \widehat{N} , \dots . The action of K on \widehat{N} is given by ${}^k\pi_l(x) := \pi_l(k^{-1} \cdot x)$ for all $x \in N$, $k \in K$ and $l \in \mathfrak{n}^*$. The purpose of this part is to construct a local retract theorem for ${}^k\pi_l$. It is easy to see that ${}^k\pi_l$ is unitary equivalent to $\tilde{\pi}_k$ where $\tilde{\pi}_k = \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_{k \cdot l}$. So, instead of proving the existence of a local retract for ${}^k\pi_l$, which turns out to be complicated, it is sufficient to prove such an existence for the representation $\tilde{\pi}_k$. But even this is not straightforward. Let us therefore define $\pi_{k \cdot l} := \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_{k \cdot l}$ where $P(k \cdot l) = \exp \mathfrak{p}(k \cdot l)$ and where $\mathfrak{p}(k \cdot l)$ is the Vergne polarization for $k \cdot l$ with respect to the fixed basis \mathscr{B} of \mathfrak{n} . If we are now dealing with generic linear forms $k \cdot l$ in the sense of Ludwig-Zahir [22] or with linear forms defining characters ($\langle k \cdot l, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$), we may use the Fourier inversion theorem (see [20] for the generic case), to prove the existence of a local retract for suitable kernel functions. Finally, the smooth family of intertwining operators gives the retract result for the representations $(\tilde{\pi}_k)_k$, and hence, locally, for the representations $({}^k\pi_l)_k$. In the case of the representations $\tilde{\pi}_k$, the local theorem even generates a global retract theorem.

In the third part, we first show that if the local retract theorem holds for $l \in \mathfrak{n}^*$, then Schwartz functions are dense in the kernel of the K -orbit Ω_l of l :

$$\overline{\text{Ker} \Omega_l \cap \mathscr{S}(N)}^{L^1(N)} = \text{Ker} \Omega_l.$$

This result is used in the study of K -prime ideals. We start by characterizing the K -prime ideals of the Schwartz algebra $\mathscr{S}(N)$, which are closed in at least one continuous norm, as being the sets $\text{Ker} \Omega_l \cap \mathscr{S}(N)$, $l \in \mathfrak{n}^*$. The passage to the K -prime ideals of the algebra $L^1(N)$ is then

realized via the retract theory developed in the second part and the density property of the Schwartz functions, at least in the generic case and in the character case. The K -prime ideal problem was solved in the fixed case by J. Ludwig [15] and in the case of exponential actions by J.Ludwig et C. Molitor-Braun [18].

Finally, we study the action of $SO(4)$ on $F(4)$, specially the not generic case where $F(4)$ denotes the free nilpotent Lie group of step 2 with 4 generators. We prove the Fourier inversion theorem in the non generic case and we characterize all the K -prime ideals.

Introduction

Comme l'indique le titre de la thèse, on va s'intéresser à quelques problèmes d'analyse harmonique sur certains groupes de Lie à croissance polynomiale, en particulier pour des groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes.

Parmi les questions d'analyse harmonique abordées, on trouve l'inversion de Fourier, la caractérisation des idéaux maximaux, la propriété de Wiener, la caractérisation des idéaux premiers, etc. Ces questions ont été d'abord résolues sur \mathbb{R}^n (le cas classique), puis elles ont été généralisées à des groupes de Lie nilpotents : L'inversion de Fourier ponctuelle est due à Howe ([8], 1977), la propriété de Wiener, qui dit que tout idéal fermé propre de $L^1(N)$ est contenu dans le noyau d'une représentation unitaire irréductible, est démontrée par Leptin en ([9], 1976) pour l'algèbre $L^1(N)$ où N est un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe, tandis qu'une propriété analogue a été prouvée par Ludwig ([16], 1987) pour l'algèbre $\mathcal{S}(N)$. Les idéaux maximaux, les idéaux premiers et les noyaux des représentations unitaires irréductibles coïncident dans le cas abélien. Par contre, dans le cas non abélien, ce résultat n'est pas nécessairement vrai et la classe des idéaux premiers joue un rôle très important.

Un idéal I est dit premier si quels que soient les idéaux I_1 et I_2 tels que $I_1 * I_2 \subset I$, $I \subset I_1$ ou $I \subset I_2$. Pour les groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes, J. Ludwig a montré en ([15], 1983) que les idéaux premiers fermés de $L^1(N)$ coïncident avec les noyaux des représentations unitaires irréductibles.

En introduisant une action exponentielle sur les groupes de Lie nilpotents, J. Ludwig et C. Molitor-Braun ([18], (1998)) ont établi un résultat analogue pour la caractérisation des idéaux premiers dans l'ensemble de tous les idéaux invariants sous cette action.

Dans les années 80, Poguntke étudie l'action d'un groupe compact abélien K sur un groupe de Lie nilpotent ([24], [25]). Il s'intéresse entre autres à la densité des fonctions de Schwartz dans le noyau d'une K -orbite. Les résultats de Poguntke impliquent la caractérisation des idéaux K -premiers, lorsque K est abélien. Le cas où le compact K n'est pas abélien est beaucoup plus complexe. Son étude représente la majeure partie de cette thèse.

Pus précisément, soient $N = \exp \mathfrak{n}$ un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe et K un sous-groupe de Lie compact du groupe des automorphismes de N . On suppose que K agit

d'une manière lisse sur N et donc également sur \mathfrak{n} , \mathfrak{n}^* , \widehat{N} , $L^1(N)$, $\mathcal{S}(N)$. Si $\pi_l = \text{ind}_{P(l)}^N \chi_l \in \widehat{N}$, les points de la K -orbite $\Omega_l = K \cdot l$ correspondent aux représentations ${}^k\pi_l$, étant donné que ${}^k\pi_l$ est unitairement équivalente à $\tilde{\pi}_k := \text{ind}_{k \cdot P(l)}^N \chi_{k \cdot l}$. D'où, on peut définir le noyau de la K -orbite, pour $l \in \mathfrak{n}^*$, par

$$\text{Ker}\Omega_l = \{f \in L^1(N) \mid {}^k\pi_l(f) = 0, \forall k \in K\} = \bigcap_{k \in K} \text{Ker}{}^k\pi_l$$

Grâce à ces définitions, la question soulevée par les travaux de Poguntke, Ludwig et Molitor-Braun est la suivante :

Pour tout idéal I fermé et K -premier de $L^1(N)$, c'est-à-dire, si I est K -invariant et vérifie la définition des idéaux premiers pour des idéaux K -invariants quelconques I_1 et I_2 , existe-t-il alors $l_0 \in \mathfrak{n}^*$ tel que $I = \text{Ker}\Omega_{l_0}$?

Une réponse affirmative à cette question, valable dans beaucoup de cas, est apportée dans cette thèse. En fait, on montre dans le chapitre 6 qu'il existe une K -orbite Ω_{l_0} dans \mathfrak{n}^* telle que

$$I \cap \mathcal{S}(N) = \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N).$$

Si de plus l_0 est générique au sens de Ludwig-Zahir pour au moins une base de Jordan-Hölder bien choisie ou si l_0 définit un caractère ($\langle l_0, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$), on en déduit alors que

$$I = \text{Ker}\Omega_{l_0}.$$

La caractérisation des idéaux K -premiers (chapitre 6) est résolue dans $\mathcal{S}(N)$ et l'essentiel des difficultés est formé par le passage de l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(N)$ à l'algèbre $L^1(N)$. Ce dernier se fait grâce à une relation entre $\text{Ker}\Omega_l$ et $\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$.

Pour étudier cette relation (chapitre 6), on a eu intérêt à étudier la théorie du rétracte sur les K -orbites. Pour tout $\pi_l \in \widehat{N}$ et tout $f \in \mathcal{S}(N)$, $\pi_l(f)$ est un opérateur à noyau. Sous l'action de K , il en est de même de ${}^k\pi_l(f) = \pi_l(f^k)$, le noyau correspondant est noté $F(k, \cdot, \cdot)$. Les calculs effectués sur la fonction f sont alors, sous certaines conditions, remplacés par un raisonnement sur les fonctions noyaux. Ceci est possible puisque tout F dans un certain espace des fonctions noyaux convenablement choisi possède un rétracte $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que ${}^k\pi_l(f)$ ait pour noyau $F(k, \cdot, \cdot)$. L'existence d'un tel rétracte (chapitre 6) est en fait établie à travers différentes étapes intermédiaires.

Tout d'abord, en remarquant que la représentation ${}^k\pi_l$ est unitairement équivalente à $\tilde{\pi}_k$, on peut se ramener à la construction d'un rétracte local pour la représentation $\tilde{\pi}_k$. Dans ce but, on introduit la représentation $\pi_{k \cdot l} = \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_{k \cdot l}$ où la construction du rétracte s'avère plus facile si $k \cdot l$ parcourt les strates des formes linéaires génériques au sens de Ludwig-Zahir (chapitre 6) ou bien si $k \cdot l$ parcourt la strate des formes linéaires définissant les caractères, c'est-à-dire, $\langle k \cdot l, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$. Dans le cas où $k \cdot l$ définit les caractères, les trois représentations équivalentes $\pi_{k \cdot l}$, $\tilde{\pi}_k$ et ${}^k\pi_l$ coïncident avec les caractères $\chi_{k \cdot l}$ et la construction du rétracte est plus simple (chapitre 5). Tandis que quand $k \cdot l$ parcourt les strates des formes linéaires génériques au sens de Ludwig-Zahir, on dispose d'un théorème général d'inversion de Fourier pour les formes linéaires génériques ([20]). Celui-ci permet alors d'établir les résultats pour $\pi_{k \cdot l}$.

Si $k \cdot l$ parcourt les strates intermédiaires, le problème d'inversion de Fourier reste encore ouvert dans le cas général. Mais néanmoins, on a réussi à construire un rétracte pour la représentation ${}^k\pi_l$ dans l'exemple de l'action de $SO(4)$ sur le groupe de Lie nilpotent libre $F(4)$ à 4 générateurs et de pas 2 (chapitre 7).

Pour que le passage entre la représentation $\tilde{\pi}_k$ et la représentation $\pi_{k \cdot l}$ soit lisse dans le cas où $k \cdot l$ parcourt la K -orbite de l , une étude sur les familles lisses des opérateurs d'entrelacements dans le cadre général (chapitre 3) est nécessaire.

Étant donnée \mathcal{W} une sous-variété de \mathfrak{n}^* telle que la dimension des polarisations soit fixe sur \mathcal{W} , on considère $(\mathfrak{p}(w))_w$ et $(\mathfrak{p}'(w))_w$ deux familles lisses de polarisations en w dans \mathfrak{n} . Soient alors

$$(\pi_w)_w = (\text{ind}_{P(w)}^N \chi_w)_w \text{ et } (\pi'_w)_w = (\text{ind}_{P'(w)}^N \chi_w)_w$$

deux familles de représentations unitaires irréductibles de N .

D'après G. Lion [11], pour w fixé, π_w et π'_w sont équivalentes et il existe un opérateur d'entrelacement $T(w)$ donné par

$$T(w)\xi(g) = \int_{P'(w)/P(w) \cap P'(w)} \xi(gh)dh$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_w}^\infty$ où $\mathcal{H}_{\pi_w}^\infty$ représente l'espace des vecteurs \mathcal{C}^∞ pour la représentation π_w . Cet opérateur se prolonge par continuité à \mathcal{H}_{π_w} tout entier.

On étudie alors la dépendance en w dans l'expression de $T(w)$ (chapitre 3) et on montre que le résultat de G. Lion reste vrai localement de manière lisse, c'est-à-dire, quand w varie dans un ouvert relatif non vide de \mathcal{W} .

Les chapitres 1 et 2 préparent le terrain pour notre objectif en introduisant tous les ingrédients nécessaires pour la suite et en étudiant sur quelques exemples l'effet de l'action compacte sur la théorie du rétracte : L'action de K sur \mathbb{R}^n , l'action de $SO(2)$ sur le groupe de Heisenberg et l'action de $SO(3)$ sur $F(3)$, où $F(3)$ est le groupe de Lie nilpotent libre à 3 générateurs et de pas 2.

Plan de la thèse.

Cette thèse comporte sept chapitres :

- Dans le premier chapitre, on rappelle les principales définitions et propriétés liées à la théorie des représentations induites et intégrées pour les groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes. On donne aussi une relation entre les fonctions noyaux ainsi que des résultats généraux sur les espaces homogènes. De plus, on définit les différentes actions d'un groupe de Lie compact.
- Dans le deuxième chapitre, on étudie dans quelques exemples l'effet de l'action compacte sur le résultat du rétracte associé à la représentation induite réalisée par une polarisation de Vergne. Par exemple : L'action de K sur \mathbb{R}^n , l'action de $SO(2)$ sur le groupe de Heisenberg

et l'action de $SO(3)$ sur $F(3)$, où $F(3)$ est le groupe de Lie nilpotent libre à 3 générateurs et de pas 2.

- Le troisième chapitre (texte d'un article soumis pour publication) est consacré à montrer que si on considère \mathcal{W} une sous-variété de \mathfrak{n}^* telle que les polarisations associées aux éléments de \mathcal{W} soient de dimension fixe, $(P(w))_w = (\exp \mathfrak{p}(w))_w$ et $(P'(w))_w = (\exp \mathfrak{p}'(w))_w$ deux familles lisses de polarisations en $w \in \mathcal{W}$, alors les deux familles de représentations $(\pi_w)_w := \text{ind}_{P(w)}^N \chi_w, w \in \mathcal{W}$ et $(\pi'_w)_w := \text{ind}_{P'(w)}^N \chi_w, w \in \mathcal{W}$ sont équivalentes et on a l'existence locale d'une famille lisse d'opérateurs d'entrelacement entre elles, opérateurs donnés par une formule intégrale précise.
- Au quatrième chapitre, nous construisons d'une manière continue un rétracte local pour la représentation ${}^k\pi_l$, définie par ${}^k\pi_l(x) := \pi_l(k^{-1} \cdot x)$ pour tout $x \in N$, où l est dans la strate des formes linéaires génériques au sens de Ludwig-Zahir et où k parcourt une section de K/K_{π_l} . Ici K_{π_l} désigne le stabilisateur de π_l .
- Dans le cinquième chapitre, on construit de même un rétracte pour la représentation ${}^k\pi_l$ mais quand l parcourt la strate des formes linéaires définissant les caractères, c'est-à-dire, $\langle l, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$. Dans ce cas, la représentation ${}^k\pi_l$ n'est d'autre que le caractère $\chi_{k \cdot l}$.
- Nous donnons, dans le sixième chapitre, une caractérisation des idéaux K -premiers de $L^1(N)$, c'est-à-dire, nous montrons qu'il existe une K -orbite Ω_{l_0} dans \mathfrak{n}^* telle que

$$I \cap \mathcal{S}(N) = \text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N).$$

Si l_0 est générique au sens de Ludwig-Zahir pour au moins une base de Jordan-Hölder bien choisie ou si l_0 définit un caractère ($\langle l_0, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$), on en déduit

$$I = \text{Ker } \Omega_{l_0}.$$

- Finalement, dans le dernier chapitre, on étudie l'exemple de l'action de $SO(4)$ sur $F(4)$ pour montrer que les idéaux fermés propres $SO(4)$ -premiers de $L^1(F(4))$ coïncident avec les noyaux des $SO(4)$ -orbites.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions nécessaires à la compréhension de cette thèse.

1.1 Représentations induites et intégrées.

Soient N un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{n} et H un sous-groupe fermé de N d'algèbre de Lie correspondante \mathfrak{h} .

Définition 1.1. Soit $\mathcal{B} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ une base de \mathfrak{n} . Soit $(\mathfrak{n}_k)_{k=1, \dots, n}$ la suite de sous-espaces vectoriels de \mathfrak{n} définie par

$$\mathfrak{n}_k = \sum_{i=k}^n \mathbb{R}Z_i.$$

1. \mathcal{B} est une base de Malcev de \mathfrak{n} si pour tout k , $1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel \mathfrak{n}_k est une sous-algèbre de \mathfrak{n} .
2. \mathcal{B} est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{n} si pour tout k , $1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel \mathfrak{n}_k est un idéal de \mathfrak{n} .

1.1.1 Représentations induites.

Soit ρ une représentation unitaire de H dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_ρ .
Considérons l'espace suivant

$$\mathcal{D}(N/H, \rho) = \{ \xi : N \longrightarrow \mathcal{H}_\rho, \text{ continue et à support compact modulo } H \text{ telle que} \\ \xi(nh) = \rho(h^{-1})(\xi(n)), \forall (n, h) \in N \times H \}$$

Si ξ est un élément dans $\mathcal{D}(N/H, \rho)$, l'application $n \longmapsto \|\xi(n)\|_{\mathcal{H}_\rho}^2$ est continue et à support compact modulo H . Cette relation nous permet de définir une norme L^2 sur $\mathcal{D}(N/H, \rho)$ de la manière suivante :

$$\|\xi\|_2 = \left(\int_{N/H} \|\xi(n)\|_{\mathcal{H}_\rho}^2 d\dot{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la représentation induite $ind_H^N \rho$ de N comme la représentation régulière gauche sur le complété $L^2(N/H, \rho)$ de $\mathcal{D}(N/H, \rho)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_2$ définie précédemment, c'est-à-dire,

$$(ind_H^N \rho)(x)(\xi(y)) = \xi(x^{-1}y), \quad \forall x, y \in N, \quad \xi \in L^2(N/H, \rho).$$

Cette méthode est fréquemment utilisée pour la construction des représentations unitaires à partir d'un sous-groupe fermé. En particulier, pour les représentations unitaires dites monomiales qui sont les représentations induites par un caractère unitaire d'un sous-groupe fermé défini comme suit :

$$\chi_l(\exp X) = e^{-i\langle l, X \rangle}, \quad \forall X \in \mathfrak{h}$$

Définition 1.2. *Un sous-espace $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$ est appelé polarisation en $l \in \mathfrak{n}^*$, si \mathfrak{p} est une sous-algèbre totalement isotrope maximale relativement à la forme bilinéaire antisymétrique B_l définie par*

$$B_l(X, Y) = \langle l, [X, Y] \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{n}$$

Définition 1.3. *Soient $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{n} , $\mathfrak{n}_j = \langle Z_j, \dots, Z_n \rangle$, $j \in \{1, \dots, n\}$ et $l \in \mathfrak{n}^*$. Posons $l_j = l|_{\mathfrak{n}_j}$ la restriction de l à \mathfrak{n}_j et $\mathfrak{n}_j(l_j)$ le noyau de la forme B_{l_j} sur $\mathfrak{n}_j \times \mathfrak{n}_j$.*

Définissons

$$\mathfrak{p}(l) = \sum_{j=1}^n \mathfrak{n}_j(l_j).$$

Alors $\mathfrak{p}(l)$ est appelé la polarisation de Vergne en l par rapport à la base de Jordan-Hölder $\{Z_1, \dots, Z_n\}$.

Soient $l \in \mathfrak{n}^*$ et \mathfrak{p} une polarisation en l . Définissons alors π par

$$\pi = ind_P^N \chi_l,$$

où $P = \exp \mathfrak{p}$, la représentation induite dans N par le caractère χ_l de P .

Définition 1.4. *Une représentation unitaire π est dite irréductible si les seuls sous-espaces invariants fermés sont $\{0\}$ ou \mathcal{H} , l'espace de Hilbert de la représentation π .*

Définition 1.5. *Soient π et π' deux représentations unitaires de N . On dit que π et π' sont unitairement équivalentes s'il existe un opérateur d'entrelacement unitaire U de \mathcal{H}_π vers $\mathcal{H}_{\pi'}$ vérifiant*

$$U \circ \pi(x) = \pi'(x) \circ U$$

pour tout $x \in N$. On note alors $\pi \simeq \pi'$.

1.1.2 Représentations intégrées.

Soit π une représentation induite unitaire irréductible de N . Soit $f \in L^1(N)$, on lui associe sa transformée de Fourier en π , définie par l'opérateur suivant sur \mathcal{H}_π

$$\pi(f) = \int_N f(x)\pi(x)dx,$$

c'est-à-dire,

$$(\pi(f)\xi)(y) = \int_N f(x)(\pi(x)\xi)(y)dy$$

Cette représentation de $L^1(N)$, appelée aussi représentation intégrée, agit sur $L^2(N/P, \chi_l)$, le même espace que π .

Proposition 1.1. *Pour toute fonction $f \in L^1(N)$, l'opérateur $\pi(f)$ est un opérateur à noyau. L'application $F_\pi : f \mapsto F_\pi(f)$, associant à $f \in L^1(N)$ le noyau de l'opérateur $\pi(f)$, est donnée par*

$$F(x, y) := F_\pi(f)(x, y) = \int_P f(xpy^{-1})\chi_l(p)dp, \quad (x, y) \in N \times N$$

Remarque 1.1. *Il est facile de vérifier que F satisfait la relation de covariance :*

$$F(xp, yp') = \overline{\chi_l(p)}\chi_l(p')F(x, y), \quad \forall x, y \in N, \forall p, p' \in P$$

1.1.3 Relation entre les fonctions noyaux.

Soient $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ deux polarisations en l et $P_i = \exp \mathfrak{p}_i$ où $i \in \{1, 2\}$. Notons $\pi_i = \text{ind}_{P_i}^N \chi_l$ la représentation induite correspondante de N pour tout $i \in \{1, 2\}$. Soit $f \in \mathcal{S}(N)$. L'opérateur $\pi_i(f)$ a pour noyau la fonction $F_i(\cdot, \cdot)$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. Les deux représentations π_1 et π_2 sont unitairement équivalentes et l'opérateur d'entrelacement est donné comme suit :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}_1^\infty &\longrightarrow \mathcal{H}_2^\infty \\ \xi &\longmapsto \int_{P_2/(P_1 \cap P_2)} \xi((\cdot)p)\chi_l(p)d\dot{p} \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}_i^\infty, i \in \{1, 2\}$ est l'espace des vecteurs \mathcal{C}^∞ de la représentation π_i . Cet opérateur est prolongé d'une manière continue à \mathcal{H}_i , l'espace de Hilbert pour la représentation π_i . D'après Gérard Lion [11], cet opérateur est bien défini à une constante positive près par la mesure sur $P_2/(P_1 \cap P_2)$. On peut fixer cette mesure de sorte que l'opérateur T soit une isométrie et même unitaire. On définit aussi pour $i \in \{1, 2\}$ une représentation induite en $-l$ comme suit

$$\bar{\pi}_i = \text{ind}_{P_i}^N \chi_{-l}$$

Remarque 1.2. – Pour tout $i \in \{1, 2\}$ la polarisation \mathfrak{p}_i en l est aussi une polarisation en $-l$.

Dans ce cas, l'opérateur d'entrelacement entre $\overline{\pi}_1$ et $\overline{\pi}_2$ est donné par

$$\begin{aligned} \overline{T} : \overline{\mathcal{H}}_1^\infty &\longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_2^\infty \\ \xi &\longmapsto \int_{P_2/(P_1 \cap P_2)} \xi((\cdot)p) \overline{\chi_l(p)} d\dot{p} \end{aligned}$$

où $\overline{\mathcal{H}}_i^\infty$, $i \in \{1, 2\}$ est l'espace des vecteurs \mathcal{C}^∞ de la représentation $\overline{\pi}_i$

– L'opérateur \overline{T} entrelace $\overline{\pi}_1$ et $\overline{\pi}_2$. De même, l'opérateur \overline{T} est bien défini à une constante positive près par la mesure sur $P_2/(P_1 \cap P_2)$ et il est de plus une isométrie si on choisit convenablement cette mesure.

– Les deux fonctions noyaux F_1 et F_2 sont liées par la relation suivante

$$F_2(x, y) = \int_{P_2/(P_1 \cap P_2)} \int_{P_2/(P_1 \cap P_2)} F_1(xp, yp') \chi_l(p) \overline{\chi_l(p')} d\dot{p} d\dot{p}', \quad x, y \in N, \quad p, p' \in P_2$$

si la mesure est normalisée de manière de faire de T une isométrie.

1.2 Les formes génériques au sens de Ludwig-Zahir.

On désigne par $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ le centre de \mathfrak{n} et $\mathfrak{n}(l)$ le stabilisateur de l dans \mathfrak{n} défini comme suit

$$\mathfrak{n}(l) = \{X \in \mathfrak{n} \mid \langle l, [X, \mathfrak{n}] \rangle = \{0\}\}$$

. On définit alors les indices suivants

$$\begin{aligned} j_1 &:= \max\{j \in \{1, \dots, n\} \mid Z_j \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{n})\} \\ r_1 &:= \max\{r \in \{1, \dots, n\} \mid [Z_{j_1}, Z_r] \neq 0\} \end{aligned}$$

Pour $l \in \mathfrak{n}^*$, soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal de \mathfrak{n} contenu dans $\mathfrak{n}(l)$.

Si $\mathfrak{a}(l) \neq \mathfrak{n}$, il existe alors des indices $j_1(l)$ et $r_1(l)$ définis par

$$\begin{aligned} j_1(l) &:= \max\{j \in \{1, \dots, n\} \mid Z_j \notin \mathfrak{a}(l)\} \\ r_1(l) &:= \max\{r \in \{1, \dots, n\} \mid \langle l, [Z_{j_1(l)}, Z_r] \rangle \neq 0\} \end{aligned}$$

On a alors $r_1(l) < j_1(l)$. Posons

$$\mathfrak{n}_1^* := \{l \in \mathfrak{n}^* \mid j_1(l) = j_1 \text{ et } r_1(l) = r_1\}$$

et pour tout $l \in \mathfrak{n}_1^*$, on définit

$$\mathfrak{p}_1(l) := \{X \in \mathfrak{n} \mid \langle l, [Z_{j_1(l)}, X] \rangle = 0\} = \{X \in \mathfrak{n} \mid \langle l, [Z_{j_1}, X] \rangle = 0\}$$

Il est facile de montrer que $\mathfrak{p}_1(l)$ est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{n} .

On considère aussi

$$\begin{aligned} Z_i^1(l) &:= Z_i - \frac{\langle l, [Z_{j_1}, Z_i] \rangle}{\langle l, [Z_{j_1}, Z_{r_1}] \rangle} Z_{r_1} \text{ pour } i = 1, \dots, r_1 - 1 \\ Z_{i-1}^1 &:= Z_i \text{ pour } i = r_1 + 1, \dots, n \end{aligned}$$

Il s'en suit alors que $\mathcal{B}^1 = \{Z_1^1(l), \dots, Z_{n-1}^1(l)\}$ est une base de Jordan-Hölder pour $\mathfrak{p}_1(l)$ (voir [22]).

On construit maintenant les indices $j_2(l), \dots, j_d(l), r_2(l), \dots, r_d(l)$ comme suit :

On considère l'algèbre $\mathfrak{p}_1(l)$ muni de la base \mathcal{B}^1 et $l|_{\mathfrak{p}_1(l)}$ pour définir comme précédemment les indices $j_2(l), r_2(l)$, l'algèbre $\mathfrak{p}_2(l)$ qui est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{p}_1(l)$ et \mathcal{B}^2 une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_2(l)$. Après d étapes, pour un certain $d \in \mathbb{N}$, on constate que $\mathfrak{p}_d(l)$ n'est autre que la polarisation de Vergne de l par rapport à la base Z_1, \dots, Z_n et le processus s'arrête. Notons

$$\mathcal{J}(l) = \{j_1(l), \dots, j_d(l), r_1(l), \dots, r_d(l)\}$$

Par récurrence, on définit

$$\mathfrak{n}_0^* = \mathfrak{n}^* \text{ et } \mathfrak{n}_1^* = \{l \in \mathfrak{n}^* \mid j_1(l) = j_1 \text{ et } r_1(l) = r_1\}$$

Pour $i = 1, \dots, d$, soit

$$\begin{aligned} j_i &= \max\{j \in \{1, \dots, n\} \mid Z_j^{i-1}(l) \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{p}_i(l)), l \in \mathfrak{n}_{i-1}^*\} \\ r_i &= \max\{r \in \{1, \dots, n\} \mid [Z_{j_i}^{i-1}(l), Z_r^{i-1}(l)] \neq 0, l \in \mathfrak{n}_{i-1}^*\} \end{aligned}$$

et on considère

$$\mathfrak{n}_i^* = \{l \in \mathfrak{n}_{i-1}^* \mid j_i(l) = j_i \text{ et } r_i(l) = r_i\}$$

Ce processus s'arrête quand $i = d$. Notons

$$\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_d, r_1, \dots, r_d\}$$

D'après [22], on définit l'ensemble des formes linéaires génériques au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base \mathcal{B} par

$$\mathfrak{n}_{gen}^* := \mathfrak{n}_d^* = \{l \in \mathfrak{n}^* \mid \mathcal{J}(l) = \mathcal{J}\}$$

Définition 1.6. L'ensemble \mathfrak{n}_{gen}^* est appelé l'ensemble des éléments génériques de \mathfrak{n}^* au sens de Ludwig-Zahir.

1.3 Résultats généraux sur les espaces homogènes.

Soit H un sous-groupe fermé de N d'algèbre de Lie \mathfrak{h} .

Définition 1.7. L'ensemble des classes à gauche modulo H est défini comme suit

$$N/H = \{xH \mid x \in N\}.$$

Soit $p : N \longrightarrow N/H$ la projection canonique. Une partie $\tilde{\mathcal{U}}$ de N/H est par définition ouverte si et seulement si $p^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ est ouverte dans N .

Théorème 1.1. Il existe un sous-espace vectoriel \mathfrak{s} de \mathfrak{n} tel que $\mathfrak{n} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} &\longrightarrow N \\ (X, Y) \equiv X + Y &\longmapsto \exp X \exp Y \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme local dans un voisinage de 0.

Preuve. Il suffit de montrer que $d\varphi_0 = \mathbb{I}_{\mathfrak{n}}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$;

$$\begin{aligned} ((d\varphi)_0(X+Y))(f)(\cdot) &= \frac{d}{dt} f((\exp tX \cdot \exp tY) \cdot) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp(tX + tY + \theta(t^2)) \cdot) \Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt} f(\exp(t(X+Y)) \cdot) \Big|_{t=0} \right) \\ &= (X+Y)f(\cdot) \end{aligned}$$

Il existe alors un voisinage Ω de e dans N tel que Ω soit difféomorphe à $\exp \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \exp \mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$ où $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ est un voisinage de 0 dans \mathfrak{s} et $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$ est un voisinage de 0 dans \mathfrak{h} . \square

Proposition 1.2. N/H est muni d'une structure de variété \mathcal{C}^∞ .

Preuve. N/H est un espace séparé puisque H est fermé. De plus, d'après le théorème 1.1, il existe dans N un voisinage Ω de e de la forme $\Omega = \exp \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \exp \mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$. On considère $p : N \longrightarrow N/H$ la projection canonique. Il s'en suit alors que $p(\Omega) = \exp \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \cdot H \subset N/H$ est un voisinage ouvert de $e \cdot H$ puisque la projection canonique est une application ouverte. Dans ce cas une carte de N/H en $e \cdot H$ est obtenue de la manière suivante :

L'ouvert $p(\Omega)$ de N/H est difféomorphe à l'ouvert $\exp \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ de $\exp \mathfrak{s}$, et donc à l'ouvert $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ de \mathfrak{s} . En identifiant l'espace vectoriel \mathfrak{s} à l'espace de ses coordonnées dans une base quelconque, on obtient une carte d'un voisinage de $e \cdot H$ dans N/H . Soit maintenant $n = u \cdot H$ un élément dans N/H . Une carte en $u \cdot H$ peut être considérée donc comme suit

$$u \cdot p(\Omega) = p(u \cdot \Omega) = u \cdot (\exp \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}) \cdot H$$

En d'autres termes, une carte de N/H en $u \cdot H$ n'est d'autre que la translatée de la carte de N/H en $e \cdot H$ par u . \square

1.4 Action d'un groupe de Lie compact sur un groupe de Lie nilpotent. 7

Théorème 1.2. Soit N un groupe de Lie qui agit sur une variété X d'une manière \mathcal{C}^∞ . Soit $x_0 \in X$. On définit le stabilisateur de x_0 dans N comme suit

$$N_{x_0} = \{n \in N \mid n \cdot x_0 = x_0\}.$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : N/N_{x_0} &\longrightarrow N \cdot x_0 \\ \dot{n} &\longmapsto n \cdot x_0 \quad n \in N \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de N/N_{x_0} sur l'orbite $N \cdot x_0$ munie de la structure héritée par N/N_{x_0} .

Preuve. Voir les détails dans [27], [23]. □

Théorème 1.3. Si l'orbite $N \cdot x$ est localement fermée, alors $N \cdot x$ est une sous-variété de X .

Preuve. Voir les détails dans [27]. □

Remarque 1.3. Si N est un groupe de Lie local, les théorèmes 1.2 et 1.3 restent vrais. Voir [27].

Corollaire 1.1. Si N est compact, les orbites $N \cdot x$ sont des sous-variétés compactes de X .

Preuve. En effet, dans ce cas les orbites sont compactes, donc fermées dans X . Voir les détails dans [23]. □

1.4 Action d'un groupe de Lie compact sur un groupe de Lie nilpotent.

Soit $K \subset \text{Aut}(N)$ un sous-groupe compact du groupe des automorphismes de N . On suppose que K est un groupe de Lie qui agit de manière \mathcal{C}^∞ sur N . On note cette action par :

$$\begin{aligned} K \times N &\longrightarrow N \\ (k, x) &\longmapsto k \cdot x \end{aligned}$$

1.4.1 Action de K sur $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$

Soit $k \in K \subset \text{Aut}(N)$, c'est-à-dire, k est un automorphisme de N . En particulier $k(e) = k \cdot e = e$ où e est l'élément neutre de N .

Soit $dk : T_e N = \mathfrak{n} \longrightarrow T_e N$ la différentielle de k . On considère la relation suivante :

$$k \cdot \exp tX = \exp(tdk(X)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $k \cdot \exp X = \exp(dk(X))$. Dans la suite, on notera simplement $k \cdot X$ au lieu de $dk(X)$. Cette notation est justifiée par le fait que si N est réalisé par \mathfrak{n} muni de la multiplication de Campbell-Baker-Hausdorff, alors l'application exponentielle est l'identité et on trouve bien

$$k \cdot X = dk(X) \text{ pour tout } X \in \mathfrak{n}.$$

De plus, si $k \in \text{Aut}(N)$, alors $k \equiv dk \in \text{Aut}(\mathfrak{n})$ et vérifie les propriétés suivantes :

- L'application $k \equiv dk$ est linéaire car toute différentielle est linéaire.
- L'application $k \equiv dk$ respecte le crochet de Lie, c'est-à-dire,

$$k \cdot [X, Y] = [k \cdot X, k \cdot Y].$$

1.4.2 Action de K sur \mathfrak{n}^*

On définit l'action de K sur \mathfrak{n}^* comme suit :

$$\begin{aligned} K \times \mathfrak{n}^* &\longrightarrow \mathfrak{n}^* \\ (k, l) &\longmapsto k \cdot l \end{aligned}$$

telle que $\langle k \cdot l, X \rangle := \langle l, k^{-1} \cdot X \rangle$ pour tout $X \in \mathfrak{n}$.

Cette action est bien définie.

1.4.3 Action de K sur \widehat{N}

L'action de K sur \widehat{N} est définie par :

$$\begin{aligned} K \times \widehat{N} &\longrightarrow \widehat{N} \\ (k, \pi) &\longmapsto {}^k \pi \end{aligned}$$

telle que ${}^k \pi(x) := \pi(k^{-1} \cdot x)$ pour tout $x \in N$.

Elle est bien définie et vérifie

$$\begin{aligned} ({}^{kk'}) \pi(x) &= \pi(k'^{-1} k^{-1} \cdot x) \\ &= \pi(k'^{-1} \cdot (k^{-1} \cdot x)) \\ &= {}^{k'} \pi(k^{-1} \cdot x) \\ &= {}^k ({}^{k'} \pi)(x) \end{aligned}$$

Remarque 1.4. On sait que toute représentation $\pi \in \widehat{N}$ est obtenue de la façon suivante : il existe $l \in \mathfrak{n}^*$ et $\mathfrak{p}(l) \subset \mathfrak{n}$ une polarisation de Vergne pour l telle que si $\chi_l(p) = e^{-i\langle l, \log p \rangle}$ est le caractère défini par l sur $P(l) = \exp \mathfrak{p}(l)$, alors $\pi \simeq \pi_l := \text{ind}_{P(l)}^N \chi_l$.

On définit les représentations équivalentes suivantes

$$\pi_{k \cdot l} := \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_k \cdot l$$

et

$$\tilde{\pi}_k := \text{ind}_{k \cdot P(l)}^N \chi_{k \cdot l}$$

Proposition 1.3. Soit $k \in K$, on a alors :

$${}^k \pi \simeq \tilde{\pi}_k$$

Preuve :

Il suffit de prouver l'existence d'un opérateur d'entrelacement

$U : \mathcal{H}_{k\pi} \longrightarrow \mathcal{H}_{\tilde{\pi}_k}$ vérifiant la relation :

$$U \circ {}^k \pi(x) = \tilde{\pi}_k(x) \circ U \quad \forall x \in N.$$

Tout d'abord, il est clair que si $\mathfrak{p}(l)$ est une polarisation en l alors $\mathfrak{p}'(l) = k \cdot \mathfrak{p}(l)$ est une polarisation en $l' = k \cdot l$. On sait qu'il existe des mesures invariantes à gauche positives sur $N/P(l)$, resp. $N/P'(l)$ notées

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^\infty(N/P(l)) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_{N/P(l)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^\infty(N/P'(l)) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \psi &\longmapsto \int_{N/P'(l)} \psi(u) du; \end{aligned}$$

Elles sont uniques à une constante positive multiplicative près.

Considérons à présent, pour k fixé,

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}_c^\infty(N/P'(l)) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \psi &\longmapsto \int_{N/P(l)} \psi(k \cdot t) dt \end{aligned}$$

- Cette application linéaire est bien définie.
- Cette application est invariante par translation car :

$$\begin{aligned} L(\lambda(s)\psi) &= \int_{N/P(l)} \psi(s^{-1}(k \cdot t)) dt \\ &= \int_{N/P(l)} \psi(k \cdot t) dt \\ &= L(\psi). \end{aligned}$$

– Elle est positive.

Donc L est une forme linéaire positive invariante sur $N/P'(l)$ et par suite il existe alors $c = c(k) > 0$ qui dépend de k et de la normalisation de la mesure telle que $\int_{N/P'(l)} \Psi(t) dt = c \int_{N/P(l)} \Psi(k \cdot t) dt$.

Soit maintenant l'opérateur

$$\begin{aligned} U : \mathcal{H}_{k\pi} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_k} \\ \xi &\longmapsto U\xi(t) := \frac{1}{\sqrt{c}} \xi(k^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que si $\xi \in \mathcal{H}_{k\pi}$, on a $U\xi \in \mathcal{H}_{\pi_k}$, c'est-à-dire, il faut vérifier la relation de covariance et la propriété de L^2 .

– Relation de covariance : Pour tout $t \in N$, $p' \in P'(l) = k \cdot P(l)$,

$$\begin{aligned} U\xi(tp') &= U\xi(t(k \cdot p)) \text{ pour } p' = k \cdot p \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \xi(k^{-1}(t(k \cdot p))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \xi((k^{-1} \cdot t)p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \overline{\chi_l(p)} \xi(k^{-1} \cdot t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{i\langle l, \log p \rangle} \xi(k^{-1} \cdot t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{i\langle k \cdot l, k \cdot \log p \rangle} \xi(k^{-1} \cdot t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{i\langle l', \log p' \rangle} \xi(k^{-1} \cdot t) \text{ pour } l' = k \cdot l \\ &= \overline{\chi_{l'}(p')} U\xi(t) \end{aligned}$$

– Propriété de L^2 :

On a U est inversible et $U^{-1}\eta(t) = \sqrt{c}\eta(k \cdot t)$ avec $\eta \in \mathcal{H}_{\pi_k}$.

De plus U est isométrique et

$$\begin{aligned} \|U\xi\|_2^2 &= \int_{N/P'} |U\xi(t)|^2 dt \\ &= \int_{N/P'} \frac{1}{c} |\xi(k^{-1} \cdot t)|^2 dt \\ &= c \int_{N/P} \frac{1}{c} |\xi(t)|^2 dt \\ &= \|\xi\|_2^2 \end{aligned}$$

Donc $U\xi \in \mathcal{H}_{\pi_k}$.

– Propriété d'entrelacement :

$$\begin{aligned}
 U({}^k\pi(x)\xi)(t) &= \frac{1}{\sqrt{c}} {}^k\pi(x)\xi(k^{-1}\cdot t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \pi(k^{-1}\cdot x)\xi(k^{-1}\cdot t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \xi((k^{-1}\cdot x)^{-1}(k^{-1}\cdot t)) \\
 \tilde{\pi}_k(x)(U\xi)(t) &= (U\xi)(x^{-1}t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \xi(k^{-1}\cdot (x^{-1}t)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \xi((k^{-1}\cdot x^{-1})(k^{-1}\cdot t)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \xi((k^{-1}\cdot x)^{-1}(k^{-1}\cdot t))
 \end{aligned}$$

D'où l'égalité et les représentations ${}^k\pi$ et $\tilde{\pi}_k$ sont bien unitairement équivalentes.

D'ailleurs, on peut choisir une famille \mathcal{C}^∞ de bases de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}' = k \cdot \mathfrak{p}$ de manière à ce que les mesures invariantes correspondantes de $N/k \cdot P(t)$ soient telles que $c = c(k)$ soit une fonction \mathcal{C}^∞ en k ou même soit la constante 1. En effet, si $\{X_1, \dots, X_r\}$ est une base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à \mathfrak{p} , alors $\{k \cdot X_1, \dots, k \cdot X_r\}$ est une base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}$. Les mesures invariantes sur N/P , respectivement $N/k \cdot P$ peuvent alors être définis par

$$\int_{N/P} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}^r} \varphi(\exp t_1 X_1 \cdots \exp t_r X_r) dt_1 \dots dt_r,$$

respectivement

$$\begin{aligned}
 \int_{N/k \cdot P} \psi(u) du &= \int_{\mathbb{R}^r} \psi(\exp(u_1 k \cdot X_1) \cdots \exp(u_r k \cdot X_r)) du_1 \dots du_r \\
 &= \int_{\mathbb{R}^r} \psi(k \cdot [\exp u_1 X_1 \cdots \exp u_r X_r]) du_1 \dots du_r \\
 &= \int_{N/P} \psi(k \cdot t) dt
 \end{aligned}$$

et $c(k) \equiv 1$.

1.4.4 Action de K sur $L^1(N)$

L'action est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 K \times L^1(N) &\longrightarrow L^1(N) \\
 (k, f) &\longmapsto f^k
 \end{aligned}$$

telle que $f^k(x) := f(k \cdot x)$ pour tout $x \in N$.

On a bien $f^k \in L^1(N)$ car :

$$\begin{aligned} \int_N |f^k(x)| dx &= \int_N |f(k \cdot x)| dx \\ &= \int_N |f(x)| dx \\ &< \infty \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que K est compact et donc que la fonction modulaire qui devrait normalement intervenir dans le changement de variables est l'identité.

1.4.5 Action combinée de K et N

On a vu précédemment que K agit sur N et N agit sur N par conjugaison, à savoir, pour tout $n \in N$, on définit $c(n)$ agissant sur N par :

$$c(n)(m) = nm n^{-1} \text{ pour tout } n, m \in N$$

Soit $C(N) = \{c(n) | n \in N\}$.

Proposition 1.4. *L'ensemble $K \cdot C(N)$ est isomorphe au groupe $K \times (N/\mathcal{Z})$ où \mathcal{Z} désigne le centre de N .*

Preuve :

Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} (k \cdot c(n))(m) &= k \cdot (nm n^{-1}) \\ &= (k \cdot n)(k \cdot m)(k \cdot n^{-1}) \\ &= c(k \cdot n)(k \cdot m) \\ &= (c(k \cdot n)k)(m) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (k \cdot c(n))(k_1 \cdot c(n_1))(m) &= (k \cdot c(n))(k_1 \cdot (n_1 m n_1^{-1})) \\ &= k \cdot (c(n)(k_1(n_1)k_1(m)k_1(n_1^{-1}))) \\ &= k \cdot (n(k_1 \cdot n_1)(k_1 \cdot m)(k_1 \cdot n_1^{-1})n^{-1}) \\ &= (k \cdot n)(kk_1 \cdot n_1)(kk_1 \cdot m)(kk_1 \cdot n_1^{-1})(k \cdot n^{-1}) \\ &= c((k \cdot n)(kk_1 \cdot n_1)) \cdot ((kk_1)(m)) \\ &= c((kk_1)((k_1^{-1} \cdot n)n_1)) \cdot ((kk_1)(m)) \\ &= (kk_1 \cdot c((k_1^{-1} \cdot n)n_1))(m) \end{aligned}$$

Donc en identifiant $k \cdot c(n)$ avec (k, n) , ceci définit la loi suivante sur $K \times N$:

$$(k, n)(k_1, n_1) = (kk_1, (k_1^{-1} \cdot n)n_1)$$

A savoir, on retrouve la loi de groupe du produit semi-direct $K \times (N/\mathcal{L})$. Donc

$$\begin{aligned} \Theta : K \times (N/\mathcal{L}) &\longrightarrow K \cdot C(N) \subset \text{Aut}(N) \\ (k, n \text{ mod } \mathcal{L}) &\longmapsto k \cdot c(n) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupe. En effet,

- la surjectivité est claire.
- l'injectivité de cette application découle du fait que $K \cap C(N) = \{e\}$, étant donné que $C(N)$ est formé d'automorphismes unipotents et ne contient donc aucun sous-groupe compact non trivial. Donc, si $k \cdot c(n) = e$ alors $k = c(n^{-1}) \in K \cap C(N) = \{e\}$ où e désigne l'identité de K . Ceci implique que $k = e$ et $n \in \mathcal{L}$ (car $c(n) = e$ si et seulement si $n \in \mathcal{L}$).
En fait, si on prend k, n, k' et n' tels que :

$$\begin{aligned} k \cdot c(n) = k' \cdot c(n') &\Leftrightarrow k'^{-1}k = c(n'n^{-1}) = e \\ &\Leftrightarrow k = k' \text{ et } n' = n \text{ mod } \mathcal{L} \end{aligned}$$

1.4.6 Les différentes orbites dans \mathfrak{n}^*

Dans \mathfrak{n}^* , on peut distinguer différents types d'orbites :

• Orbites co-adjointes

Soit $l \in \mathfrak{n}^*$, on définit

$$\mathcal{O}(l) = \{Ad^*(n)l \mid n \in N\} \subset \mathfrak{n}^*$$

où $\langle Ad^*(n)l, X \rangle = \langle l, Ad(n^{-1})X \rangle$.

L'ensemble des orbites forment une partition de \mathfrak{n}^* et $\mathcal{O}(l)$ est fermée dans \mathfrak{n}^* , puisque l'action est nilpotente.

• Orbites sous l'action de K

Pour $l \in \mathfrak{n}^*$, on définit :

$$\Omega(l) = \{k \cdot l \mid k \in K\}$$

où $\langle k \cdot l, X \rangle = \langle l, k^{-1} \cdot X \rangle$.

Ces orbites sont compactes étant donné que K est compact et que l'action est continue.

• **Orbites sous l'action de $K \ltimes N$**

Pour $l \in \mathfrak{n}^*$, on définit :

$$\begin{aligned}\mathscr{W}(l) &= \{k \cdot \text{Ad}^*(n)(l) \mid k \in K, n \in N\} \\ &= K \cdot \text{Ad}^*(N)l\end{aligned}$$

Les orbites $\mathscr{W}(l)$ sont fermées dans \mathfrak{n}^* car K est compact et N est nilpotent. En effet, soit $(l_j) = k_j \cdot \text{Ad}^*(n_j)(l)$ une suite de $\mathscr{W}(l)$ telle que $(l_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers l' dans \mathfrak{n}^* . Montrons que $l' \in \Omega(l)$.

On a $k_j \in K$, d'où il existe une sous-suite convergente dans K que nous appelons de nouveau k_j . Donc, $(k_j)_j$ converge vers k dans K . Or on a $\text{Ad}^*(n_j)l = k_j^{-1} \cdot [k_j \cdot \text{Ad}^*(n_j)(l)]$ converge vers $k^{-1} \cdot l'$ car les actions sont continues. De plus l'orbite co-adjointe $\text{Ad}^*(N)l$ est fermée. Donc $k^{-1} \cdot l' \in \text{Ad}^*(N)(l)$ et $k^{-1} \cdot l' = \text{Ad}^*(n)l$ pour un certain $n \in N$.

On en déduit alors que $l' = k \cdot \text{Ad}^*(n)(l) \in \mathscr{W}(l)$ et $\mathscr{W}(l)$ est fermée.

1.4.7 Algèbre de Schwartz

Définition 1.8. Soit $\mathcal{B} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ une base de Jordan-Hölder fixée de \mathfrak{n} . Une fonction f de N dans \mathbb{C} est une fonction de Schwartz si et seulement si

$$\begin{aligned}\|f\|_{\alpha, \beta} &= \int_{\mathbb{R}^n} |t^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta f(\text{exp}_{t_1} Z_1 \dots \text{exp}_{t_n} Z_n)| dt_1 \dots dt_n \\ &< \infty. \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\end{aligned}$$

où $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$ si $t = (t_1, \dots, t_n)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. De même $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\beta_n}$ pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

On note par $\mathcal{S}(N)$ l'ensemble de toutes les fonctions de Schwartz de N .

Cet ensemble ne dépend pas du choix de la base Jordan-Hölder [17]. C'est une algèbre pour le produit de convolution. On l'appelle algèbre de Schwartz. D'ailleurs,

$$f \in \mathcal{S}(N) \iff f \circ \text{exp} \in \mathcal{S}(\mathfrak{n})$$

où $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ est identifié à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ via une base quelconque.

Proposition 1.5. L'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(N)$ est K -invariante.

Preuve :

Soient $k \in K$ et $f \in \mathcal{S}(N)$. Montrons que $f^k \in \mathcal{S}(N)$. On a, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

1.4 Action d'un groupe de Lie compact sur un groupe de Lie nilpotent. 15

$$\begin{aligned}\|f^k\|_{\alpha,\beta} &= \int_{\mathbb{R}^n} |t^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta f^k(\text{expt}_1 Z_1 \dots \text{expt}_n Z_n)| dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |t^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta f(k \cdot (\text{expt}_1 Z_1 \dots \text{expt}_n Z_n))| dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |t^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta f(\text{expt}_1(k \cdot Z_1) \dots \text{expt}_n(k \cdot Z_n))| dt_1 \dots dt_n \\ &< \infty\end{aligned}$$

puisque $\{k \cdot Z_1, \dots, k \cdot Z_n\}$ est une base de Jordan-Hölder et que la définition de l'algèbre de Schwartz ne dépend pas du choix de la base de Jordan-Hölder.

Chapitre 2

Exemples de rétractes pour une action d'un groupe de Lie compact

Introduction

Dans ce chapitre, on donne sur quelques exemples, la construction du rétracte pour une action d'un groupe de Lie compact K sur un groupe de Lie nilpotent N . Pour une forme linéaire $l \in \mathfrak{n}^*$ fixée, il s'agit de montrer l'existence d'une fonction de Schwartz $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que les opérateurs $\pi_{k \cdot l}(f)$ admettent des noyaux d'opérateurs de la forme $F(k, \cdot, \cdot)$, où F est une fonction noyau appropriée donnée d'avance. Ici $\pi_{k \cdot l} = \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_{k \cdot l}$ désigne la représentation induite à partir de la polarisation de Vergne $P(k \cdot l)$ pour la forme linéaire $k \cdot l$, la base étant fixée, et $\chi_{k \cdot l}$ désigne le caractère défini sur $P(k \cdot l)$ par $\chi_{k \cdot l}(x) = e^{-i \langle k \cdot l, \log x \rangle}$ pour tout $x \in P(k \cdot l)$.

2.1 Action de K sur \mathbb{R}^n

Les représentations unitaires irréductibles de \mathbb{R}^n sont les caractères définis comme suit :

$$\begin{aligned} \chi_l : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \chi_l(x) = e^{-i \langle l, x \rangle} \end{aligned}$$

où l est une forme linéaire de $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$. De plus, $P = \mathbb{R}^n$ est une polarisation de \mathbb{R}^n pour l et par suite on obtient $N/P \cong \{0\}$.

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ξ une fonction qui peut être identifiée avec une constante et π_l la représentation unitaire irréductible de \mathbb{R}^n associée à l , qui coïncide donc avec le caractère χ_l . On a

$$\begin{aligned} \pi_l(f)\xi &= \chi_l(f)\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i \langle l, x \rangle} \xi dx \\ &= \widehat{f}(l)\xi \end{aligned}$$

2.1.1 Stabilisateurs

Stabilisateur K_{π_l}

Par définition, le stabilisateur K_{π_l} de la représentation π_l est

$$K_{\pi_l} = \{k \in K \mid {}^k\pi_l \simeq \pi_l\}$$

Dans notre cas, $\pi_l = \chi_l$ et par suite le stabilisateur sera

$$\begin{aligned} K_{\pi_l} &= \{k \in K \mid {}^k\chi_l \simeq \chi_l\} \\ &= \{k \in K \mid e^{-i\langle l, k^{-1} \cdot x \rangle} = e^{-i\langle l, x \rangle} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{k \in K \mid \chi_{k \cdot l} = \chi_l\} \\ &= \{k \in K \mid k \cdot l = l\} \end{aligned}$$

Stabilisateur K_l

Par définition, le stabilisateur K_l de la forme linéaire l est

$$K_l = \{k \in K \mid k \cdot l = l\}$$

On remarque que dans notre cas $K_{\pi_l} = K_l$. Mais, en général, on a seulement l'inclusion suivante

$$K_l \subset K_{\pi_l}$$

2.1.2 Construction du rétracte

Tout d'abord, définissons les orbites co-adjointes en l

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) &= \{Ad^*(x)l \mid x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{l\}. \end{aligned}$$

On considère aussi les orbites sous l'action de K

$$\Omega_l = K \cdot l = (K/K_l) \cdot l \equiv K/K_l$$

Soient $l_0 \in (\mathbb{R}^n)^* \equiv \mathbb{R}^n$ une forme linéaire fixée. Prenons pour espace de fonctions noyaux l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega_{l_0}) \equiv \mathcal{C}^\infty(K/K_{l_0})$ muni de la topologie induite par la famille de semi-normes suivantes : Pour tout $A \in \mathbb{N}$, pour toute carte (U_0, φ_0) de K/K_{l_0} , pour tout compact C' contenu dans U_0 , on pose

$$\|F\|_A^{U_0, C'} := \sup_{k_{U_0} \in \varphi_0(C')} \sup_{|a| \leq A} \left| \frac{\partial^a}{\partial k_{U_0}^a} F \circ \varphi_0^{-1}(k_{U_0}) \right| < \infty \quad (2.1)$$

où k_{U_0} désigne les coordonnées de \dot{k} dans K/K_{l_0} par rapport à la carte (U_0, φ_0) . La question de l'existence d'un rétracte est alors la suivante :

Pour $F \in \mathcal{C}^\infty(K/K_{l_0})$ arbitraire, existe-t-il une fonction f de Schwartz telle que $\pi_{k \cdot l_0}(f) = \widehat{f}(k \cdot l_0) = F(\dot{k})$ pour tout $\dot{k} \in K/K_{l_0}$?

Supposons qu'une telle fonction f existe. Alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même, et $\widehat{f}|_{\Omega_{l_0}} = F$. Donc, si une fonction $\tilde{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ existe telle que $\tilde{F}|_{\Omega_{l_0}} = F$ alors on prend $f = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{F})$, où \mathcal{F}^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse. Ceci nous ramène à résoudre un autre problème :

Pour tout $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{l_0})$, existe-t-il un prolongement de F en une fonction de Schwartz sur \mathbb{R}^n tout entier ?

En fait, comme l'orbite Ω_{l_0} est compacte et donc fermée, elle est régulièrement plongée dans \mathbb{R}^n . Ceci peut être réalisé de la manière suivante :

Soient $l \in \Omega_{l_0}$ et (U, φ) une carte qui paramétrise l'orbite Ω_{l_0} au voisinage de l_0 . Alors il existe une carte (V, ϕ) de \mathbb{R}^n au voisinage de l_0 telle que

$$V = \phi^{-1}(\varphi(U) \times \prod_{i=1}^{n-r}]-a_i, a_i[)$$

où $r = \dim \Omega_{l_0}$ et V est à adhérence compacte.

Pour construire un prolongement de F , il suffit de travailler localement sur la carte (U, φ) puis utiliser une partition de l'unité pour coller ensemble les différents prolongements locaux.

– Localement sur (U, φ) :

Supposons donc d'abord que F est à support compact contenu dans U . Pour $l \in U \subset \Omega_{l_0}$ tel que $\varphi(l) = (u_1, \dots, u_r)$ et F donnée, on définit F_1 par

$$F_1(u_1, \dots, u_r) = F_1(\varphi(l)) := F(l)$$

On construit alors un prolongement \tilde{F}_1 par

$$\tilde{F}_1(u_1, \dots, u_r, s_1, \dots, s_{n-r}) := F_1(u_1, \dots, u_r) \prod_{j=1}^{n-r} \psi_j(s_j)$$

où $\psi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(]-a_j, a_j[)$ et $\psi_j(0) = 1$.

La fonction \tilde{F}_1 prolonge donc la fonction F_1 car $\psi_j(0) = 1$. De plus, \tilde{F}_1 peut être considéré comme étant un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, à support contenu dans $\phi(V)$.

Finalement, on définit

$$\tilde{F}(l) = \tilde{F}_1(\phi(l)) \text{ si } l \in V \text{ et } \tilde{F}(l) = 0 \text{ si } l \notin V.$$

Alors $\tilde{F} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et \tilde{F} est un prolongement de F car, pour $l \in U \subset \Omega_{l_0}$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(l) &= \tilde{F}_1(\phi(l)) \\ &= \tilde{F}_1(\varphi(l), 0, \dots, 0) \\ &= F_1(\varphi(l)) \\ &= F(l). \end{aligned}$$

– Partition de l'unité :

Soit maintenant $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{l_0})$ quelconque. En utilisant la méthode des partitions de l'unité, on construit un prolongement de F à \mathbb{R}^n tout entier.

Rappelons que, pour tout l , il existe un voisinage $V = V(l)$ de l dans \mathbb{R}^n à adhérence compacte et il existe \tilde{F} un prolongement de F à $V(l)$.

On considère les ouverts $U(l), W(l)$ tels que

$$l \in U(l) \subset \overline{U(l)} \subset W(l) \subset \overline{W(l)} \subset V(l)$$

et $(U(l))_l$ forment un recouvrement de l'orbite Ω_{l_0} noté $(U_i)_{i \in I}$.

Or comme Ω_{l_0} est compact, il existe un nombre fini de $U_j, j \in J$ où $J = \{1, \dots, n\}$ est fini, tel que $K \cdot l_0 = \Omega_{l_0} \subset \cup_{j=1}^n U_j$.

On construit les fonctions $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_{l_0})$ avec

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_j \leq 1 \\ \varphi_j \equiv 1 \text{ sur } U_j \\ \text{supp } \varphi_j \subset \overline{W_j} \end{cases}$$

On obtient alors $\sum_{j=1}^n \varphi_j > 0$ sur Ω_{l_0} et on peut dans ce cas définir les fonctions h_j comme suit

$$h_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{j=1}^n \varphi_j}.$$

Donc on a

$$\sum_{j=1}^n h_j \equiv 1 \text{ et } F = \sum_{j=1}^n (h_j F) \text{ sur } \Omega_{l_0}$$

avec $\text{supp } (h_j F) \subset U_j$. Notons $F_j = h_j F$ et \tilde{F}_j le prolongement de F_j à $(\mathbb{R}^n)^* \equiv \mathbb{R}^n$. Posons

$$\tilde{F}(l) = \sum_{j=1}^n \tilde{F}_j(l)$$

Alors, pour tout $l \in \Omega_{l_0}$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(l) &= \sum_{j \in J} \tilde{F}_j(l) \\ &= \sum_{j \in J} h_j(l) F(l) \\ &= F(l) \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{F} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est donc bien le prolongement de F cherché et dans ce cas, il suffit de prendre $f = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{F})$ où \mathcal{F}^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse.

Théorème 2.1. Soit $l_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ fixée. Notons l'action de K sur $(\mathbb{R}^n)^*$ par $(k, l_0) \mapsto k \cdot l_0$. Pour tout $F \in \mathcal{C}^\infty(K/K_{l_0})$, il existe une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f}(k \cdot l_0) = F(k)$. Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu de cette manière. L'algorithme de construction du rétracte $R(F)$ peut être choisi de manière à ce que l'application $F \rightarrow R(F)$ de l'ensemble des fonctions noyaux lisses sur K/K_{l_0} dans $\mathcal{S}(N)$ soit continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux par la topologie induite par la famille des semi-normes (2.1).

2.2 Action de $SO(2)$ sur H_1

Soit $SO(2)$ le groupe compact défini par

$$SO(2) = \{A \in Gl(2, \mathbb{R}) \mid AA^t = I \text{ et } \det A = 1\}$$

Une matrice de ce groupe s'écrit comme suit :

$$A = A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in [0, 2\pi[\equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cette matrice vérifie la relation suivante :

$$A^{-1}(\alpha) = A(-\alpha) = A(\alpha)^*.$$

Soit H_1 le groupe de Heisenberg de dimension 3. En tant que variété, H_1 s'identifie à \mathbb{R}^3

2.2.1 Actions de $SO(2)$

Action de $SO(2)$ sur H_1

On définit l'action de $SO(2)$ sur H_1 comme suit :

$$\begin{aligned} SO(2) \times H_1 &\longrightarrow H_1 \\ (A, (x, y, z)) &= A \cdot (x, y, z) = (A(x, y), z) \end{aligned}$$

où $A(x, y) \equiv A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est défini par le produit matriciel habituel.

On obtient donc :

$$A(\alpha) \cdot (x, y, z) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha, z).$$

De plus, l'action de $SO(2)$ sur l'algèbre de Lie \mathcal{H}_1 est celle du groupe si on réalise $H_1 = (\mathcal{H}_1, \cdot_{C.B.H})$, où $\cdot_{C.B.H}$ désigne le produit de Campbell-Baker-Hausdorff.

Action de $SO(2)$ sur \mathcal{H}_1^*

Pour l'action de $SO(2)$ sur \mathcal{H}_1^* , on distingue 2 cas :

– Premier cas :

Si $l = (0, 0, \lambda)$ où $\lambda \neq 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} SO(2) \times \mathcal{H}_1^* &\longrightarrow \mathcal{H}_1^* \\ (A(\alpha), l) &\longmapsto A(\alpha) \cdot l \text{ telle que} \end{aligned}$$

pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{H}_1$ on a :

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha) \cdot l, (u, v, w) \rangle &= \langle l, A^*(\alpha)(u, v, w) \rangle \\ &= \langle l, (u \cos \alpha + v \sin \alpha, -u \sin \alpha + v \cos \alpha, w) \rangle \\ &= \langle (0, 0, \lambda), (u \cos \alpha + v \sin \alpha, -u \sin \alpha + v \cos \alpha, w) \rangle \\ &= \langle l, (u, v, w) \rangle . \end{aligned}$$

On obtient donc $A(\alpha) \cdot l = l$ pour tout $A(\alpha)$ et par suite $(K/K_l) \cdot l = \{l\}$ et la K -orbite (dans la section des orbites co-adjointes génériques) est ponctuelle.

Donc le problème qui consiste à construire le rétracte au point $(0, 0, \lambda)$ de \mathcal{H}_1^* est résolu par le résultat de Howe [8].

– Deuxième cas : $l = (l_1, l_2, 0) \neq (0, 0, 0)$

L'action de $SO(2)$ sur l vérifie :

$$\langle A(\alpha) \cdot l, (u, v, w) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle A(\alpha) \cdot l|_{\mathbb{R}^2}, (u, v) \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ désigne le produit scalaire habituel dans \mathbb{R}^3 et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ celui dans \mathbb{R}^2 .

La $SO(2)$ -orbite de $l = (l_1, l_2, 0)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} \Omega_l &= (A(\alpha) \left(\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array} \right), 0) \\ &= (l_1 \cos \alpha - l_2 \sin \alpha, l_1 \sin \alpha + l_2 \cos \alpha, 0) \end{aligned}$$

Donc les orbites ont la forme d'un cercle dans le plan (l_1, l_2) .

Les représentations de H_1 correspondant aux formes linéaires $l = (l_1, l_2, 0)$ sont réduites à des caractères de H_1 définis comme suit :

$$\chi_l(x, y, z) = e^{-i(l_1 x + l_2 y)}$$

De plus on a pour tout $f \in L^1(H_1)$,

$$\begin{aligned} \chi_l(f) &= \int_{H_1} f(x, y, z) \chi_l(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{H_1} f(x, y, z) e^{-i(l_1 x + l_2 y)} dx dy dz \\ &= \int_{H_1} f(x, y, z) e^{-i \langle l, (x, y, z) \rangle} dx dy dz \\ &= \widehat{f}(l) \\ &=: F(l). \end{aligned}$$

On se ramène donc au premier exemple avec $K = SO(2) \times \{1\}$ agissant sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Remarque 2.1. On a les mêmes résultats pour l'action de $SO(2n)$ sur H_n .

Théorème 2.2. Soit $l \in \mathcal{H}_1^*$ fixé tel que $l \in \mathbb{R}X^* + \mathbb{R}Y^*$, $l \neq (0,0,0)$. Notons l'action de $SO(2) \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur \mathcal{H}_1^* par $(A, l) \mapsto A \cdot l$.

Pour tout $F \in \mathcal{C}^\infty(SO(2)) \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, il existe une fonction $f \in \mathcal{S}(H_1)$ telle que l'opérateur $\pi_{A \cdot l}(f)$ admet $\chi_{A \cdot l}(f) = F(A)$ comme noyau pour tout $A \in SO(2)$. Si $l = \lambda Z^* \in \mathcal{H}_1^*$, $\lambda \neq 0$, la $SO(2)$ -orbite est ponctuelle et on a l'existence d'un rétracte ponctuel par le résultat de Howe [8].

2.3 Action de $SO(3)$ sur $F(3)$

Soit $F(3)$ un groupe de Lie libre nilpotent de pas 2 et à 3 générateurs. Son algèbre de Lie peut être définie comme suit :

$\mathcal{F}_3 = \mathbb{R}^3 \oplus \Sigma_3$

où $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mid u, v, w \in \mathbb{R} \right\}$ et $\Sigma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est l'ensemble des matrices réelles antisymétriques [1].

Le crochet de Lie de cette algèbre est :

$$[(u, U), (v, V)] = (0, uv^t - vu^t).$$

On peut réaliser le groupe de Lie libre $F(3)$ en munissant \mathcal{F}_3 de la loi de Campbell-Baker-Hausdorff et on obtient :

$$(u, U) \cdot (v, V) = (u + v, U + V + \frac{1}{2}(uv^t - vu^t))$$

L'action de $SO(3)$ sur $F(3)$ est définie comme suit :

$$A \cdot (u, U) = (Au, AUA^t)$$

La base de l'algèbre de Lie \mathcal{F}_3 est $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$ muni des crochets de Lie non triviaux :

$$[X_1, X_2] = Z_3$$

$$[X_2, X_3] = Z_1$$

$$[X_3, X_1] = Z_2$$

où $X_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right), X_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right), X_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right), Z_1 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right), Z_2 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), Z_3 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

2.3.1 Stabilisateur, indices de saut et éléments génériques

Le stabilisateur d'une forme linéaire l est défini comme suit :

$$\mathcal{F}_3(l) = \{X \in \mathcal{F}_3 \mid \langle l, [X, \mathcal{F}_3] \rangle = 0\}$$

Soient $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*$ et $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + b_3 Z_3$.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{F}_3(l) &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle l, [X, X_1] \rangle = 0 \\ \langle l, [X, X_2] \rangle = 0 \\ \langle l, [X, X_3] \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a_2 \beta_3 + a_3 \beta_2 = 0 \\ a_1 \beta_3 - a_3 \beta_1 = 0 \\ -a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- le rang de la matrice $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à 2 si un des β_i au moins est non nul pour $i \in \{1, 2, 3\}$
- Le rang de \tilde{B} est égal à 0 si les β_i sont nuls pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Dans le premier cas, le rang est 2 et par suite l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{B} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

est de dimension 1.

Si on prend par exemple $a_1 = \beta_1, a_2 = \beta_2, a_3 = \beta_3$, on voit alors que

$$\mathcal{F}_3(l) = \text{vec}\{Z_1, Z_2, Z_3, \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3\}$$

Ceci est réalisé dès qu'il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que β_i est non nul.

Dans le cas où le rang de \tilde{B} est nul, c'est-à-dire tous les β_i sont nuls, le stabilisateur $\mathcal{F}_3(l)$ sera toute l'algèbre \mathcal{F}_3 .

Rappelons qu'une forme linéaire l est générique au sens de Pukanszky par rapport à une base de Jordan-Hölder $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_6\}$ (avec $[Y_i, Y_j] \subset \langle Y_{r+1}, \dots, Y_n \rangle$ où $r = \max(i, j)$), si les indices de saut de l par rapport à cette base sont les plus grands possibles. On a alors :

– Si $\beta_1 \neq 0$:

On a $\mathcal{F}_3 = \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathcal{F}_3(l)$.

Les indices de saut au sens de Pukanszky correspondent aux vecteurs $\{X_3, X_2\}$ de la base de départ.

Si on prend la base de Jordan-Hölder suivante :

$$\mathcal{B}_1 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$$

où $Y_1 = X_1; Y_2 = X_2; Y_3 = X_3; Y_4 = Z_1; Y_5 = Z_2; Y_6 = Z_3$, alors les indices de saut sont $\{2, 3\}$.

Ils sont les plus grands possibles et l est générique par rapport à cette base.

– Si $\beta_2 \neq 0$:

On a $\mathcal{F}_3 = \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathcal{F}_3(l)$.

Les indices de saut au sens de Pukanszky correspondent aux vecteurs $\{X_3, X_1\}$ de la base de départ.

Si on prend la base de Jordan-Hölder suivante :

$$\mathcal{B}_2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$$

où $Y_1 = X_2; Y_2 = X_3; Y_3 = X_1; Y_4 = Z_2; Y_5 = Z_3; Y_6 = Z_1$, alors les indices de saut sont $\{2, 3\}$.

Ils sont les plus grands possibles et l est générique par rapport à cette base.

– Si $\beta_3 \neq 0$:

On a $\mathcal{F}_3 = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathcal{F}_3(l)$.

Les indices de saut correspondent au sens de Pukanszky aux vecteurs $\{X_1, X_2\}$ de la base de départ.

Si on prend la base de Jordan-Hölder suivante :

$$\mathcal{B}_3 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$$

où $Y_1 = X_3; Y_2 = X_1; Y_3 = X_2; Y_4 = Z_3; Y_5 = Z_1; Y_6 = Z_2$, alors les indices de saut sont $\{2, 3\}$.

Ils sont les plus grands possibles et l est générique par rapport à cette base.

Remarque 2.2. Dans cet exemple, les formes linéaires génériques au sens de Pukanszky [3] et au sens de Ludwig-Zahir [22] sont les mêmes. En effet,

– Si $\beta_1 \neq 0$, on a :

$$j_1 = \max\{j \in \{1, \dots, 6\} \mid Y_j \notin \mathfrak{z}(\mathcal{F}_3)\} = 3$$

$$k_1 = \max\{k \in \{1, \dots, 6\} \mid [Y_{j_1}, Y_k] \neq 0\} = 2$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal de \mathcal{F}_3 contenu dans $\mathcal{F}_3(l)$. Alors $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_3(l)$ et

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 6\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 3$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 6\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle \neq 0\} = 2$$

Ainsi on obtient

$$j_1(l) = j_1, \quad k_1(l) = k_1$$

et l est générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base \mathcal{B}_1 si $\beta_1 \neq 0$.

- Si $\beta_2 \neq 0$, l est générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base \mathcal{B}_2 .
 - Si $\beta_3 \neq 0$, l est générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base \mathcal{B}_3 .
- On trouve donc les mêmes résultats que pour les génériques au sens de Pukanszky.

2.3.2 Polarisation de Vergne

Soient $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*$ avec des β_i non tous nuls et $\mathcal{F}_3(l) = \text{vec}\{Z_1, Z_2, Z_3, \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3\}$.

Déterminons la polarisation de Vergne $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(l)$ en l par rapport à la base de Jordan-Hölder $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 = (Y_j)_{j \in \{1, \dots, 6\}}$. Par définition, on a :

$$\mathfrak{p}(l) = \sum_{j=1}^6 \mathcal{F}_3^j(l_j)$$

où $\mathcal{F}_3^j = \text{vec}\{Y_j, \dots, Y_6\}$ et $l_j = l|_{\mathcal{F}_3^j}$.

Commençons tout d'abord par calculer $\mathcal{F}_3^j(l_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, 6\}$.

Pour $j = 1$, on a $\mathcal{F}_3^1(l_1) = \mathcal{F}_3(l)$.

Pour $j = 2$, deux cas se présentent :

- Si $\beta_1 \neq 0$, $\mathcal{F}_3^2(l_2) = \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$.
- Si $\beta_1 = 0$, $\mathcal{F}_3^2(l_2) = \langle X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$.

Pour $j = 3$, on a $\mathcal{F}_3^3(l_3) = \langle X_3, Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$.

Pour $j = 4$, on a $\mathcal{F}_3^4(l_4) = \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$.

Pour $j = 5$, on a $\mathcal{F}_3^5(l_5) = \langle Z_2, Z_3 \rangle$.

Pour $j = 6$, on a $\mathcal{F}_3^6(l_6) = Z_3$.

Finalement la polarisation de Vergne $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ en l et par rapport à la base de Jordan-Hölder \mathcal{B}_1 est

$$\mathfrak{p}_1 = \begin{cases} \mathbb{R}Z_1 \oplus \mathbb{R}Z_2 \oplus \mathbb{R}Z_3 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}(X_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}X_2) & \text{si } \beta_1 \neq 0 \\ \mathbb{R}Z_1 \oplus \mathbb{R}Z_2 \oplus \mathbb{R}Z_3 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_2 & \text{si } \beta_1 = 0. \end{cases}$$

Par le même raisonnement, on obtient les polarisations de Vergne $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2(l)$ et $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_3(l)$ par rapport aux bases de Jordan-Hölder respectives comme suit :

$$\begin{aligned} - \mathfrak{p}_2 &= \begin{cases} \mathbb{R}Z_1 \oplus \mathbb{R}Z_2 \oplus \mathbb{R}Z_3 \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}(X_2 + \frac{\beta_3}{\beta_2}X_3) & \text{si } \beta_2 \neq 0 \\ \mathbb{R}Z_1 \oplus \mathbb{R}Z_2 \oplus \mathbb{R}Z_3 \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_3 & \text{si } \beta_2 = 0. \end{cases} \\ - \mathfrak{p}_3 &= \begin{cases} \mathbb{R}Z_1 \oplus \mathbb{R}Z_2 \oplus \mathbb{R}Z_3 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}(\frac{\beta_1}{\beta_3}X_1 + X_3) & \text{si } \beta_3 \neq 0 \\ \mathbb{R}Z_1 \oplus \mathbb{R}Z_2 \oplus \mathbb{R}Z_3 \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 & \text{si } \beta_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.3.3 Orbites co-adjointes

Première description des orbites

Soit $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*$ avec les β_i non tous nuls. On considère les trois cas précédants :

– Si $\beta_1 \neq 0$:

Une base de Malcev de \mathcal{F}_3 par rapport à $\mathcal{F}_3(l)$ est formée par $\{X_2, X_3\}$.

L'orbite co-adjointe est donc :

$$\mathcal{O}(l) = \{Ad^*(exp x_2 X_2) Ad^*(exp x_3 X_3) l; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_2 X_2) Ad^*(exp x_3 X_3) l, X_1 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_3 X_3)) Ad(exp(-x_2 X_2)) X_1 \rangle \\ &= \langle l, X_1 + x_2 Z_3 - x_3 Z_2 \rangle \\ &= \alpha_1 + x_2 \beta_3 - x_3 \beta_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_2 X_2) Ad^*(exp x_3 X_3) l, X_2 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_3 X_3)) Ad(exp(-x_2 X_2)) X_2 \rangle \\ &= \langle l, X_2 + x_3 Z_1 \rangle \\ &= \alpha_2 + x_3 \beta_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_2 X_2) Ad^*(exp x_3 X_3) l, X_3 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_3 X_3)) Ad(exp(-x_2 X_2)) X_3 \rangle \\ &= \langle l, X_3 - x_2 Z_1 \rangle \\ &= \alpha_3 - x_2 \beta_1. \end{aligned}$$

$$\langle Ad^*(exp x_2 X_2) Ad^*(exp x_3 X_3) l, Z_i \rangle = \beta_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) &= \{(\alpha_1 + x_2 \beta_3 - x_3 \beta_2) X_1^* + (\alpha_2 + x_3 \beta_1) X_2^* + (\alpha_3 - x_2 \beta_1) X_3^* \\ &\quad + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1}(\alpha_3 - z_3) - \frac{\beta_2}{\beta_1}(z_2 - \alpha_2)) X_1^* + z_2 X_2^* + z_3 X_3^* \\ &\quad + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*; z_2, z_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

– Si $\beta_2 \neq 0$:

Une base de Malcev de \mathcal{F}_3 par rapport à $\mathcal{F}_3(l)$ est formée par $\{X_1, X_3\}$. L'orbite co-adjointe est donc :

$$\mathcal{O}(l) = \{Ad^*(exp x_3 X_3) Ad^*(exp x_1 X_1) l; x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_3 X_3) Ad^*(exp x_1 X_1) l, X_1 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_1 X_1)) Ad(exp(-x_3 X_3)) X_1 \rangle \\ &= \langle l, X_1 - x_3 Z_2 \rangle \\ &= \alpha_1 - x_3 \beta_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_3 X_3) Ad^*(exp x_1 X_1) l, X_2 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_1 X_1)) Ad(exp(-x_3 X_3)) X_2 \rangle \\ &= \langle l, X_2 + x_3 Z_1 - x_1 Z_3 \rangle \\ &= \alpha_2 + x_3 \beta_1 - x_1 \beta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_3 X_3) Ad^*(exp x_1 X_1) l, X_3 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_1 X_1)) Ad(exp(-x_3 X_3)) X_3 \rangle \\ &= \langle l, X_3 + x_1 Z_2 \rangle \\ &= \alpha_3 + x_1 \beta_2. \end{aligned}$$

$$\langle Ad^*(exp x_3 X_3) Ad^*(exp x_1 X_1) l, Z_i \rangle = \beta_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) &= \{(\alpha_2 + x_3 \beta_1 - x_1 \beta_3) X_2^* + (\alpha_3 + x_1 \beta_2) X_3^* + (\alpha_1 - x_3 \beta_2) X_1^* \\ &\quad + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^*; x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2}(\alpha_1 - z_1) - \frac{\beta_3}{\beta_2}(z_3 - \alpha_3)) X_2^* + z_3 X_3^* + z_1 X_1^* \\ &\quad + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^*; z_1, z_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

– Si $\beta_3 \neq 0$:

Une base de Malcev de \mathcal{F}_3 par rapport à $\mathcal{F}_3(l)$ est formée par $\{X_1, X_2\}$.

L'orbite co-adjointe est :

$$\mathcal{O}(l) = \{Ad^*(exp x_1 X_1) Ad^*(exp x_2 X_2) l; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_1 X_1) Ad^*(exp x_2 X_2) l, X_1 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_2 X_2)) Ad(exp(-x_1 X_1)) X_1 \rangle \\ &= \langle l, X_1 + x_2 Z_3 \rangle \\ &= \alpha_1 + x_2 \beta_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_1 X_1) Ad^*(exp x_2 X_2) l, X_2 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_2 X_2)) Ad(exp(-x_1 X_1)) X_2 \rangle \\ &= \langle l, X_2 - x_1 Z_3 \rangle \\ &= \alpha_2 - x_1 \beta_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(exp x_1 X_1) Ad^*(exp x_2 X_2) l, X_3 \rangle &= \langle l, Ad(exp(-x_2 X_2)) Ad(exp(-x_1 X_1)) X_3 \rangle \\ &= \langle l, X_3 + x_1 Z_2 - x_2 Z_1 \rangle \\ &= \alpha_3 + x_1 \beta_2 - x_2 \beta_1. \end{aligned}$$

$$\langle Ad^*(exp x_1 X_1) Ad^*(exp x_2 X_2) l, Z_i \rangle = \beta_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) &= \{(\alpha_3 + x_1 \beta_2 - x_2 \beta_1) X_3^* + (\alpha_1 + x_2 \beta_3) X_1^* + (\alpha_2 - x_1 \beta_3) X_2^* \\ &\quad + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^*; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_3 + \frac{\beta_2}{\beta_3}(\alpha_2 - z_2) - \frac{\beta_1}{\beta_3}(z_1 - \alpha_1)) X_3^* + z_1 X_1^* + z_2 X_2^* \\ &\quad + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^*; z_1, z_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Description alternative des orbites co-adjointes

Rappelons tout d'abord que le modèle matriciel de l'algèbre \mathcal{F}_3 est défini par :

$$\mathcal{F}_3 = \mathbb{R}^3 \oplus \Sigma_3$$

Le crochet de Lie de cette algèbre est :

$$[(u, U), (v, V)] = (0, uv^t - vu^t).$$

Par contre dans l'autre modèle, \mathcal{F}_3 est muni de la base suivante :

$$\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$$

Ses crochets de Lie non triviaux sont :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = Z_3 \\ [X_2, X_3] = Z_1 \\ [X_3, X_1] = Z_2 \end{cases}$$

– Description de la dualité entre \mathcal{F}_3^* et \mathcal{F}_3 dans les deux modèles :

Soient $(b, B) = \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ un élément de \mathcal{F}_3^* et

$$(v, V) = \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

un élément de \mathcal{F}_3 . Alors, on peut écrire (b, B) et (v, V) comme suit :

$$\begin{aligned} (b, B) &\equiv b_1 X_1^* + b_2 X_2^* + b_3 X_3^* + s_1 Z_1^* + s_2 Z_2^* + s_3 Z_3^* \\ (v, V) &\equiv v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + r_1 Z_1 + r_2 Z_2 + r_3 Z_3 \end{aligned}$$

Les deux approches donnent la même expression de la dualité entre \mathcal{F}_3 et \mathcal{F}_3^* . En effet, soit

$$\langle (b, B), (v, V) \rangle = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$$

le produit scalaire euclidien obtenu en identifiant \mathcal{F}_3 et \mathcal{F}_3^* à \mathbb{R}^6 grâce aux bases fixées.

Dans le modèle matriciel, la dualité est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle (b, B), (v, V) \rangle &= b^t v + \frac{1}{2} \text{tr}(BV^t) \\ &= (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \frac{1}{2} (s_3 r_3 + s_2 r_2 + s_1 r_1 + s_3 r_3 + s_2 r_2 + s_1 r_1) \\ &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3. \end{aligned}$$

Les deux expressions coïncident, et grâce à cette dualité, on peut identifier \mathcal{F}_3 et \mathcal{F}_3^* à \mathbb{R}^6 .

– Calculons l'orbite co-adjointe dans le modèle matriciel :

Soient $(u, U), (v, V) \in \mathcal{F}_3$, et $(b, B) \in \mathcal{F}_3^*$

$$\begin{aligned}
 \langle Ad^*(exp(u, U))(b, B), (v, V) \rangle &= \langle (b, B), Ad(exp(u, U))^{-1}(v, V) \rangle \\
 &= \langle (b, B), Ad(exp(-u, -U))(v, V) \rangle \\
 &= \langle (b, B), (v, V) + [(-u, -U), (v, V)] \rangle \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + \langle (b, B), (0, -uv^t + vu^t) \rangle \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + \frac{1}{2}tr(B(-uv^t + vu^t)^t) \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + \frac{1}{2}tr(B(-vu^t + uv^t)) \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle - \frac{1}{2}tr((Bv)u^t) + \frac{1}{2}tr((Bu)v^t) \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle - \frac{1}{2}tr(uv^t B^t) + \frac{1}{2}tr((Bu)v^t) \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + \frac{1}{2}tr(uv^t B) + \frac{1}{2}tr((Bu)v^t) \\
 &\quad \text{car } B^t = -B \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + \frac{1}{2}tr((Bu)v^t) + \frac{1}{2}tr((Bu)v^t) \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + tr((Bu)v^t) \\
 &= \langle (b, B), (v, V) \rangle + \langle (Bu, 0), (v, V) \rangle \\
 &= \langle (b + Bu, B), (v, V) \rangle
 \end{aligned}$$

Conclusion : L'orbite co-adjointe de (b, B) est :

$$\mathcal{O}_{(b, B)} = (b + B\mathbb{R}^3, B)$$

où $B \in \Sigma_3$. Donc B est une matrice de rang 2 ou bien de rang 0.

2.3.4 Orbites génériques et sections

Pour simplifier les notations, posons $\mathfrak{n} = \mathcal{F}_3$. Distinguons maintenant trois cas :

– Premier cas :

Pour la base de Jordan-Hölder

$$\mathcal{B}_1 = \{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$$

l'ensemble des formes génériques au sens de Pukanszky [3] (et au sens de Ludwig-Zahir [22], chapitre 1) est :

$$\mathfrak{n}_{gen,1}^* = \{l \in \mathcal{F}_3^* \mid \beta_1 \neq 0\}.$$

L'orbite générique correspondante est :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) = & \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1}(\alpha_3 - z_3) - \frac{\beta_2}{\beta_1}(z_2 - \alpha_2) \right) X_1^* + z_2 X_2^* + z_3 X_3^* \right. \\ & \left. + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*; z_2, z_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \beta_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Soit Σ_1 la section au sens de Pukanszky des $l \in \mathfrak{n}_{gen,1}^*$ obtenue par $z_2 = z_3 = 0$. On obtient donc :

$$\mathcal{O}(l) \cap \Sigma_1 = \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \alpha_3 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_2 \right) X_1^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^* \right\} \quad \beta_1 \neq 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{O}(l)$ avec Σ_1 sont données par

$$(\alpha, 0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ dans la base } (X_1^*, X_2^*, X_3^*, Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*)$$

où $\alpha = \alpha_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \alpha_3 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_2$ et $\beta_1 \neq 0$.

On conclut donc que

$$\mathfrak{n}_{gen,1}^* \cap \Sigma_1 = \mathbb{R}X_1^* + \mathbb{R}Z_1^* + \mathbb{R}Z_2^* + \mathbb{R}Z_3^*.$$

– Deuxième cas :

Pour la base de Jordan-Hölder

$$\mathcal{B}_2 = \{X_2, X_3, X_1, Z_2, Z_3, Z_1\}$$

l'ensemble des formes génériques au sens de Pukanszky (et au sens de Ludwig-Zahir) est :

$$\mathfrak{n}_{gen,2}^* = \{l \in \mathcal{F}_3^* \mid \beta_2 \neq 0\}$$

L'orbite générique correspondante est :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) = & \left\{ \left(\alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2}(\alpha_1 - z_1) - \frac{\beta_3}{\beta_2}(z_3 - \alpha_3) \right) X_2^* + z_3 X_3^* + z_1 X_1^* \right. \\ & \left. + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^*; z_1, z_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \beta_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Soit Σ_2 la section au sens de Pukanszky des $l \in \mathfrak{n}_{gen,2}^*$ obtenue par $z_1 = z_3 = 0$. On obtient donc :

$$\mathcal{O}(l) \cap \Sigma_2 = \left\{ \left(\alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_1 + \frac{\beta_3}{\beta_2} \alpha_3 \right) X_2^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^* \right\} \quad \beta_2 \neq 0$$

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{O}(l)$ avec Σ_2 sont données par

$$(\gamma, 0, 0, \beta_2, \beta_3, \beta_1) \text{ dans la base } (X_2^*, X_3^*, X_1^*, Z_2^*, Z_3^*, Z_1^*)$$

où $\gamma = \alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_1 + \frac{\beta_3}{\beta_2} \alpha_3$ et $\beta_2 \neq 0$.

On conclut donc que

$$\mathfrak{n}_{gen,2}^* \cap \Sigma_2 = \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}Z_1^* + \mathbb{R}Z_2^* + \mathbb{R}Z_3^*.$$

- Troisième cas :
Pour la base de Jordan-Hölder

$$\mathcal{B}_3 = \{X_3, X_1, X_2, Z_3, Z_1, Z_2\}$$

l'ensemble des formes génériques au sens de Pukanszky (et au sens de Ludwig-Zahir) est :

$$\mathfrak{n}_{gen,3}^* = \{l \in \mathcal{F}_3^* \mid \beta_3 \neq 0\}$$

L'orbite générique correspondante est :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(l) = & \left\{ \left(\alpha_3 + \frac{\beta_2}{\beta_3}(\alpha_2 - z_2) - \frac{\beta_1}{\beta_3}(z_1 - \alpha_1) \right) X_3^* + z_1 X_1^* + z_2 X_2^* \right. \\ & \left. \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^*; z_1, z_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad \beta_3 \neq 0 \end{aligned}$$

Soit Σ_3 la section au sens de Pukanszky des $l \in \mathfrak{n}_{gen,3}^*$ obtenue par $z_1 = z_2 = 0$. On obtient donc :

$$\mathcal{O}(l) \cap \Sigma_3 = \left\{ \left(\alpha_3 + \frac{\beta_2}{\beta_3} \alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_3} \alpha_1 \right) X_3^* + \beta_3 Z_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* \right\} \quad \beta_3 \neq 0$$

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{O}(l)$ avec Σ_3 sont données par

$$(\delta, 0, 0, \beta_3, \beta_1, \beta_2) \text{ dans la base } (X_3^*, X_1^*, X_2^*, Z_3^*, Z_1^*, Z_2^*)$$

où $\delta = \alpha_3 + \frac{\beta_2}{\beta_3} \alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_3} \alpha_1$ et $\beta_3 \neq 0$.

On conclut donc que

$$\mathfrak{n}_{gen,3}^* \cap \Sigma_3 = \mathbb{R}X_3^* + \mathbb{R}Z_1^* + \mathbb{R}Z_2^* + \mathbb{R}^*Z_3^*.$$

2.3.5 Action de $SO(3)$ sur les formes génériques

Soit $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^*$. Calculons $A \cdot l$ pour tout $A \in SO(3)$.
On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} \langle A \cdot X_1^*, X_1 \rangle &= \langle X_1^*, A^t X_1 \rangle \\ &= \langle X_1^*, a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \rangle \\ &= a_{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle A \cdot X_1^*, X_2 \rangle &= \langle X_1^*, A^t X_2 \rangle \\ &= \langle X_1^*, a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \rangle \\ &= a_{21}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle A \cdot X_1^*, X_3 \rangle &= \langle X_1^*, A^t X_3 \rangle \\ &= \langle X_1^*, a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \rangle \\ &= a_{31} \end{aligned}$$

D'où $A \cdot X_1^* = a_{11}X_1^* + a_{21}X_2^* + a_{31}X_3^*$. De même on obtient :

$$\begin{aligned} A \cdot X_2^* &= a_{12}X_1^* + a_{22}X_2^* + a_{32}X_3^* \\ A \cdot X_3^* &= a_{13}X_1^* + a_{23}X_2^* + a_{33}X_3^* \end{aligned}$$

De plus on a :

$$A^t Z_1 A = \begin{pmatrix} 0 & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \\ a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32} & 0 & a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{32}a_{23} - a_{22}a_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $A^t Z_1 A = (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})Z_1 + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})Z_2 + (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})Z_3$. En utilisant le fait que dans la matrice orthogonale A , les lignes forment une base orthonormée directe et donc que la première ligne est le produit vectoriel des deux suivantes, on obtient :

$$A^t Z_1 A = a_{11}Z_1 - a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3$$

$$A^t Z_2 A = \begin{pmatrix} 0 & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} \\ a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & 0 & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \\ a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $A^t Z_2 A = (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33})Z_1 + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})Z_2 + (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})Z_3$. En utilisant le fait que dans la matrice orthogonale A , les lignes forment une base orthonormée directe et donc que la deuxième ligne est le produit vectoriel du troisième ligne et du première ligne, on obtient :

$$A^t Z_2 A = a_{21}Z_1 - a_{22}Z_2 + a_{23}Z_3$$

$$A^t Z_3 A = \begin{pmatrix} 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} & 0 & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $A^t Z_3 A = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})Z_1 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})Z_2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})Z_3$. En utilisant le fait que dans la matrice orthogonale A , les lignes forment une base orthonormée directe et donc que la troisième ligne est le produit vectoriel des deux premières, on obtient :

$$A^t Z_3 A = a_{31}Z_1 - a_{32}Z_2 + a_{33}Z_3$$

Calculons $A \cdot Z_i^*$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \langle A \cdot Z_1^*, Z_1 \rangle &= \langle Z_1^*, A^t Z_1 A \rangle \\ &= \langle Z_1^*, a_{11}Z_1 + a_{13}Z_2 - a_{12}Z_3 \rangle \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}\langle A \cdot Z_1^*, Z_2 \rangle &= a_{21} \\ \langle A \cdot Z_1^*, Z_3 \rangle &= a_{31}\end{aligned}$$

et par suite

$$A \cdot Z_1^* = a_{11}Z_1^* + a_{21}Z_2^* + a_{31}Z_3^*$$

—

$$\begin{aligned}\langle A \cdot Z_2^*, Z_1 \rangle &= \langle Z_2^*, A^t Z_1 A \rangle \\ &= \langle Z_2^*, a_{11}Z_1 - a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3 \rangle \\ &= -a_{12}\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}\langle A \cdot Z_2^*, Z_2 \rangle &= -a_{22} \\ \langle A \cdot Z_2^*, Z_3 \rangle &= -a_{32}\end{aligned}$$

et par suite

$$A \cdot Z_2^* = -a_{12}Z_1^* - a_{22}Z_2^* - a_{32}Z_3^*$$

—

$$\begin{aligned}\langle A \cdot Z_3^*, Z_1 \rangle &= \langle Z_3^*, A^t Z_1 A \rangle \\ &= \langle Z_3^*, a_{11}Z_1 - a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3 \rangle \\ &= a_{13}\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}\langle A \cdot Z_3^*, Z_2 \rangle &= a_{23} \\ \langle A \cdot Z_3^*, Z_3 \rangle &= a_{33}\end{aligned}$$

et par suite

$$A \cdot Z_3^* = a_{13}Z_1^* + a_{23}Z_2^* + a_{33}Z_3^*$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}A \cdot l &= \alpha_1 A \cdot X_1^* + \alpha_2 A \cdot X_2^* + \alpha_3 A \cdot X_3^* + \beta_1 A \cdot Z_1^* + \beta_2 A \cdot Z_2^* + \beta_3 A \cdot Z_3^* \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13})X_1^* + (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23})X_2^* + \\ &\quad (\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33})X_3^* + (\beta_1 a_{11} - \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13})Z_1^* \\ &\quad + (a_{21}\beta_1 - \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{23})Z_2^* + (\beta_1 a_{31} - \beta_2 a_{32} + \beta_3 a_{33})Z_3^*\end{aligned}$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} \\ \alpha'_2 = \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} \\ \alpha'_3 = \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} \\ \beta'_1 = \beta_1 a_{11} - \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13} \\ \beta'_2 = \beta_1 a_{21} - \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{23} \\ \beta'_3 = \beta_1 a_{31} - \beta_2 a_{32} + \beta_3 a_{33} \end{array} \right.$$

et on obtient par conséquent :

$$\begin{cases} A \cdot l \in \mathfrak{n}_{gen,1}^* \Leftrightarrow \beta'_1 \neq 0 \\ A \cdot l \in \mathfrak{n}_{gen,2}^* \Leftrightarrow \beta'_2 \neq 0 \\ A \cdot l \in \mathfrak{n}_{gen,3}^* \Leftrightarrow \beta'_3 \neq 0 \end{cases}$$

Remarque 2.3. Notons

$$\tilde{\mathfrak{n}}_{gen}^* := \mathfrak{n}_{gen,1}^* \cup \mathfrak{n}_{gen,2}^* \cup \mathfrak{n}_{gen,3}^*.$$

On a alors

$$A \cdot \tilde{\mathfrak{n}}_{gen}^* = \tilde{\mathfrak{n}}_{gen}^* \text{ pour tout } A \in SO(3)$$

En effet, si $l \in \tilde{\mathfrak{n}}_{gen}^*$, alors il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\beta_i \neq 0$. Or on a :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \beta'_3 \end{pmatrix}$$

Puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ est non nul alors pour tout $A \in SO(3)$, il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que

$\beta'_j \neq 0$, c'est à dire, pour tout $A \in SO(3)$, il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que $A \cdot l \in \mathfrak{n}_{gen,j}^*$.

On obtient donc $A \cdot \tilde{\mathfrak{n}}_{gen}^* \subset \tilde{\mathfrak{n}}_{gen}^*$ pour tout A et puisque A est une matrice orthogonale donc inversible, on a l'égalité.

2.3.6 Stabilisateurs

Travaillons dans le modèle matriciel.

Détermination des stabilisateurs

Calculons d'abord $K_{(b,B)}$ le stabilisateur de (b, B) :

$$\begin{aligned} K_{(b,B)} &= \{A \in SO(3) \mid A \cdot (b, B) = (b, B)\} \\ &= \{A \in SO(3) \mid Ab = b \text{ et } ABA^t = B\} \end{aligned}$$

Ecrivons $b = b_0 + b_1$ où $b_0 \in \text{Ker}B$ et $b_1 \in \text{Im}B$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} K_{(b,B)} &= \{A \in SO(3) \mid A(b_0 + b_1) = b_0 + b_1 \text{ et } ABA^t = B\} \\ &= \{A \in SO(3) \mid Ab_0 - b_0 = b_1 - Ab_1 \text{ et } AB = BA\} \\ &= \{A \in SO(3) \mid Ab_0 = b_0, Ab_1 = b_1 \text{ et } AB = BA\} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est due au fait que $\text{Ker}B \cap \text{Im}B = \{0\}$ (car B est une matrice antisymétrique), $Ab_0 - b_0 \in \text{Ker}B$ et $Ab_1 - b_1 \in \text{Im}B$.

En effet, sous l'hypothèse $AB = BA$, $B(Ab_0 - b_0) = A(Bb_0) - (Bb_0) = 0$ car $Bb_0 = 0$. Donc $Ab_0 - b_0 \in \text{Ker}B$. De plus, $b_1 = Bc$ pour un certain $c \in \mathbb{R}^3$ car $b_1 \in \text{Im}B$. Donc $Ab_1 - b_1 = ABC - Bc = B(Ac - c) \in \text{Im}B$. De plus, si $u = Bv \in \text{Ker}B \cap \text{Im}B$, alors

$$\begin{aligned} B^2v &= 0 \text{ et} \\ 0 &= \langle B^2v, v \rangle \\ &= \langle Bv, B^t v \rangle \\ &= -\|Bv\|^2 \text{ car } B^t = -B. \end{aligned}$$

Ceci implique que $u = Bv = 0$ et $\text{Ker}B \cap \text{Im}B = \{0\}$.

Déterminons ensuite $K_{\pi_{(b,B)}}$ le stabilisateur de la représentation $\pi_{(b,B)}$.

On remarque tout d'abord que le stabilisateur d'une représentation est aussi le stabilisateur de l'orbite. Ceci est dû à la bijection de Kirillov.

Soit $\mathcal{O}_{(b,B)} = (b + B\mathbb{R}^3, B)$ l'orbite co-adjointe de (b, B) , on obtient donc :

$$\begin{aligned} K_{\pi_{(b,B)}} &= \{A \in SO(3) \mid \pi_{A \cdot (b,B)} \simeq \pi_{(b,B)}\} \\ &= \{A \in SO(3) \mid A \cdot (b, B) \in \mathcal{O}_{(b,B)}\} \\ &= \{A \in SO(3) \mid (Ab, ABA^t) \in (b + B\mathbb{R}^3, B)\} \\ &= \{A \in SO(3) \mid Ab - b \in B\mathbb{R}^3 \text{ et } AB = BA\} \end{aligned}$$

Écrivons $b = b_0 + b_1$ où $b_0 \in \text{Ker}B$ et $b_1 \in \text{Im}B = B\mathbb{R}^3$. Or $b_1 \in \text{Im}B$, il existe donc $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $b_1 = Bc$ et $Ab_1 - b_1 = ABC - Bc = B(Ac - c) \in B\mathbb{R}^3$ sous l'hypothèse $AB = BA$. Donc $Ab - b \in B\mathbb{R}^3 = \text{Im}B$ si et seulement si $Ab_0 - b_0 \in B\mathbb{R}^3 = \text{Im}B$. D'autre part $Ab_0 - b_0 \in \text{Ker}B$. Donc $Ab_0 - b_0 \in \text{Im}B$ si et seulement si $Ab_0 = b_0$ comme $\text{Ker}B \cap \text{Im}B = \{0\}$. Ainsi

$$K_{\pi_{(b,B)}} = \{A \in SO(3) \mid Ab_0 = b_0 \text{ et } AB = BA\}$$

Remarque 2.4. Si $b_1 = 0$, c'est-à-dire si $b = b_0 \in \text{Ker}B$, alors

$$K_{\pi_{(b,B)}} = K_{(b,B)}$$

Égalité des stabilisateurs

Supposons d'abord que $\text{rg } B = 2$.

D'après Lipsman [12], sur chaque orbite $\mathcal{O}_{(b,B)}$, il existe un élément aligné $(b', B) \in \mathcal{O}_{(b,B)}$ vérifiant en particulier $K_{(b',B)} = K_{\pi_{(b',B)}}$.

Pour trouver un élément vérifiant cette dernière relation, il suffit de montrer que $(b + B\mathbb{R}^3) \cap \text{Ker}B \neq \emptyset$.

En effet on a $\dim \text{Ker}B = 1$ et $\text{rg } B = 2$ donc $\dim (b + B\mathbb{R}^3) = 2$ et $b + B\mathbb{R}^3$ est un plan affine de \mathbb{R}^3 passant par b .

Par l'absurde, supposons que $(b + B\mathbb{R}^3) \cap \text{Ker}B = \emptyset$. Alors $\text{Ker}B$ est parallèle à $b + B\mathbb{R}^3$ et $\text{Ker}B \subset B\mathbb{R}^3$. Mais on a $\text{Ker}B \cap \text{Im}B = \{0\}$ et $\dim \text{Ker}B = 1$. Ceci est une contradiction.

Donc $(b + B\mathbb{R}^3) \cap \text{Ker}B \neq \emptyset$ et $(b + B\mathbb{R}^3) \cap \text{Ker}B$ se réduit à un singleton, c'est-à-dire il existe un et un seul $b' \in (b + B\mathbb{R}^3) \cap \text{Ker}B$.

Alors $(b', B) \in (b + B\mathbb{R}^3, B) = \mathcal{O}_{(b,B)}$ et, comme $b' \in \text{Ker}B$,

$$K\pi_{(b',B)} = K_{(b',B)}$$

Dans le cas où $\text{rg } B = 0$, c'est-à-dire $B = 0$, on a $\mathcal{O}_{(b,0)} = \{b\}$ et $K\pi_{(b,0)} = K_{(b,0)}$. C'est un cas trivial.

2.3.7 Détermination d'une fonction noyau.

Calculons explicitement la fonction noyau \tilde{F}_1 quand $l \in \mathfrak{n}_{gen,1}^* \cap \Sigma_1$. Rappelons que $l = \alpha_1 X_1^* + \beta_1 Z_1^* + \beta_2 Z_2^* + \beta_3 Z_3^* \in \mathfrak{n}_{gen,1}^* \cap \Sigma_1$ avec $\beta_1 \neq 0$. On a alors

$$\mathfrak{p}_1(l) = \mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}Z_2 + \mathbb{R}Z_3 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}\left(X_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}X_2\right)$$

Dans ce cas,

$$\mathcal{F}_3/\mathfrak{p}_1(l) \equiv \mathbb{R}X_2.$$

Calculons maintenant la représentation induite $\pi_l^1 := \text{ind}_{P_1(l)}^{F(3)} \chi_l$ où $P_1(l) = \exp \mathfrak{p}_1(l)$ et χ_l est le caractère défini sur $P(l)$ comme suit

$$\chi_l(x) := e^{-i\langle l, \log x \rangle}$$

pour tout $x \in P_1(l)$.

Soit $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_l}$ et $u \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} [\pi_l^1(\exp x_1 X_1) \xi](\exp u X_2) &= \xi(\exp(-x_1 X_1) \cdot \exp u X_2) \\ &= \xi(\exp u X_2 \cdot \exp(-x_1 X_1 - u x_1 Z_3)) \\ &= e^{-ix_1 u \beta_3} \xi(\exp u X_2 \cdot \exp(-x_1 X_1)) \\ &= e^{-ix_1 u \beta_3} \xi(\exp u X_2 \cdot \exp(-x_1 X_1) \cdot \exp(x_1(X_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}X_2))) \\ &\quad \cdot \exp(-x_1(X_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}X_2))) \\ &= e^{-ix_1 u \beta_3} \xi(\exp u X_2 \cdot \exp(\frac{\beta_2}{\beta_1}x_1 X_2 - \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\beta_1} x_1^2 Z_3)) \\ &\quad \cdot \exp(-x_1(X_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}X_2))) \\ &= e^{-i(u\beta_3 + \alpha_1)x_1} e^{-i\frac{1}{2} \frac{\beta_2 \beta_3}{\beta_1} x_1^2} \xi(\exp(u + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1)X_2) \end{aligned}$$

$$[\pi_l^1(\exp x_2 X_2) \xi](\exp u X_2) = \xi(\exp(u - x_2)X_2)$$

$$\begin{aligned}
 [\pi_l^1(\exp x_3 X_3) \xi](\exp u X_2) &= \xi(\exp(-x_3 X_3) \cdot \exp u X_2) \\
 &= \xi(\exp u X_2 \cdot \exp(-x_3 X_3 + u x_3 Z_1)) \\
 &= e^{ix_3 u \beta_1} \xi(\exp u X_2 \cdot \exp(-x_3 X_3)) \\
 &= e^{-ix_3 u \beta_1} \xi(\exp u X_2)
 \end{aligned}$$

$$[\pi_l^1(\exp z_1 Z_1) \xi](\exp u X_2) = e^{-iz_1 \beta_1} \xi(\exp u X_2)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$[\pi_l^1(\exp z_3 Z_3) \xi](\exp u X_2) = e^{-iz_3 \beta_3} \xi(\exp u X_2)$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(F(3))$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 (\pi_l^1(f) \xi)(\exp u X_2) &= \int_{F(3)} f(x) \pi_l(x) \xi(\exp u X_2) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^6} f(\exp x_1 X_1 \dots \exp x_3 X_3 \cdot \exp z_1 Z_1 \dots \exp z_3 Z_3) \pi_l^1(\exp x_1 X_1) [\pi_l^1(\exp x_2 X_2) \\
 &\quad \pi_l^1(\exp x_3 X_3) \pi_l^1(\exp z_1 Z_1) \dots \pi_l^1(\exp z_3 Z_3) \xi](\exp u X_2) dx_1 dx_2 dx_3 dz_1 dz_2 dz_3
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 &[\pi_l^1(\exp x_1 X_1) \dots \pi_l^1(\exp x_3 X_3) \cdot \pi_l^1(\exp z_1 Z_1) \dots \pi_l^1(\exp z_3 Z_3) \xi](\exp u X_2) \\
 &= e^{-i(u\beta_3 + \alpha_1)x_1} e^{-i\frac{1}{2}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}x_1^2} e^{-i(u\beta_1 + \beta_2x_1 - \beta_1x_2)x_3} e^{-iz_1\beta_1} \dots e^{-iz_3\beta_3} \xi(\exp(u + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1 - x_2)X_2).
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned}
 (\pi_l^1(f) \xi)(\exp u X_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(u\beta_3 + \alpha_1)x_1} e^{-i\frac{1}{2}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}x_1^2} e^{-i(u\beta_1 + \beta_2x_1 - \beta_1x_2)x_3} \\
 &\quad \widehat{f}^{4,5,6}(x_1, x_2, x_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \xi(\exp(u + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1 - x_2)X_2) dx_1 \dots dx_3.
 \end{aligned}$$

Soit le changement de variable suivant $w = u + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1 - x_2$, ainsi $x_2 = u - w + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1$. Dans ce cas, le noyau de l'opérateur $\pi_l^1(f)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3; u, w) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(u\beta_3 + \alpha_1)x_1} e^{-i\frac{1}{2}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}x_1^2} e^{-i(w\beta_1)x_3} \\
&\quad \widehat{f}^{4,5,6}(x_1, u - w + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1, x_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dx_1 dx_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u\beta_3 + \alpha_1)x_1} e^{-i\frac{1}{2}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}x_1^2} \\
&\quad \widehat{f}^{3,4,5,6}(x_1, u - w + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1, w\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dx_1.
\end{aligned}$$

Posons maintenant la fonction

$$g(x_1, u, w, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = e^{-i\frac{1}{2}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}x_1^2} \widehat{f}^{3,4,5,6}(x_1, u - w + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1, w\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

Montrons alors que $g \in \mathcal{S}(F(3))$ si on limite β_1 à un compact contenu dans \mathbb{R}^* , ce qui sera le cas dans la suite, c'est-à-dire, si on suppose que la projection du support de \widehat{f}^4 sur l'axe des coordonnées β_1 est un compact contenu dans \mathbb{R}^* .

Soit l'application ψ définie comme suit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u \\ w \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 =: \tilde{x}_1 \\ u - w + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1 =: \tilde{u} \\ w\beta_1 =: \tilde{w} \\ \beta_1 =: \tilde{\beta}_1 \\ \beta_2 =: \tilde{\beta}_2 \\ \beta_3 =: \tilde{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

Il est clair que cette application est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ si on limite β_1 à un compact contenu dans \mathbb{R}^* . Il s'en suit alors que $\widehat{f}^{3,4,5,6} \circ \psi \in \mathcal{S}(F(3))$ puisque f l'est par hypothèse. Ainsi $g \in \mathcal{S}(F(3))$ puisque le facteur $e^{-i\frac{1}{2}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}x_1^2}$ est de norme 1.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3; u, w) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u\beta_3 + \alpha_1)x_1} g(x_1, u, w, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dx_1 \\
&= \widehat{g}^1(u\beta_3 + \alpha_1, u, w, \beta_1, \beta_2, \beta_3)
\end{aligned}$$

Remarque 2.5. On détermine de la même façon la fonction noyau \tilde{F}_2 (resp. \tilde{F}_3) quand $l \in \mathfrak{n}_{gen,2}^* \cap \Sigma_2$ (resp. $l \in \mathfrak{n}_{gen,3}^* \cap \Sigma_3$).

2.3.8 Relation entre les fonctions noyaux

Pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$ on définit les représentations unitaires irréductibles de $F(3)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\pi_l^i &= \text{ind}_{P_i(l)}^{F(3)} \chi_l \\ \pi_l^j &= \text{ind}_{P_j(l)}^{F(3)} \chi_l\end{aligned}$$

où $P_i(l) = \exp \mathfrak{p}_i(l)$ et $P_j(l) = \exp \mathfrak{p}_j(l)$.

Soient $\tilde{F}_j(l, \cdot, \cdot)$ et $\tilde{F}_i(l, \cdot, \cdot)$ les fonctions noyaux des opérateurs respectifs $\pi_l^j(f)$ et $\pi_l^i(f)$, par rapport aux bases de Jordan-Hölder \mathcal{B}_j et \mathcal{B}_i respectives ($i \neq j$), pour tout $f \in L^1(F(3))$. Alors ces noyaux vérifient la relation suivante :

$$\tilde{F}_i(l, \cdot, \cdot) = T_{\mathfrak{p}_i(l)\mathfrak{p}_j(l)} \tilde{F}_j(l, \cdot, \cdot) T_{\mathfrak{p}_i(l)\mathfrak{p}_j(l)}^{-1} \quad (2.2)$$

où $T_{\mathfrak{p}_i(l)\mathfrak{p}_j(l)}$ est défini comme suit [11]

$$\begin{aligned}T_{\mathfrak{p}_i(l)\mathfrak{p}_j(l)} : \mathcal{H}_j &\longrightarrow \mathcal{H}_i \\ k &\longmapsto \int_{\mathfrak{p}_i(l)/(\mathfrak{p}_i(l) \cap \mathfrak{p}_j(l))} k((\cdot)p_i) \chi_{A-l}(p_i) dp_i\end{aligned}$$

Des calculs explicites montrent que la relation (2.2) est donnée par

$$\tilde{F}_i(l, x, y) = \beta_j e^{-i\alpha_m(y-x)} \widehat{\tilde{F}_j}^{2,3}(l, \alpha_i + \beta_j x, -\alpha_i - \beta_j y)$$

où

$$\tilde{\tilde{F}}_j(l, u, z) = \tilde{F}_j(l, u, z) e^{-i \frac{\beta_j \beta_m}{2\beta_i} (u^2 - z^2)}$$

en posant $F(3)/P_i(l) \equiv \exp \mathbb{R}X_m$, $F(3)/P_j(l) \equiv \exp \mathbb{R}X_n$ où $m = (i+1) \bmod 3$ et $n = (j+1) \bmod 3$.

2.3.9 Conclusion

Une détermination explicite d'un rétracte pour l'action de $SO(3)$ devient compliquée, surtout aussi vu la forme trop complexe des $SO(3)$ -orbites. Nous renvoyons donc à la théorie générale qui permet de démontrer l'existence (locale) des rétractes (chapitre 4) si l est générique au sens de Ludwig-Zahir dans au moins une base de Jordan-Hölder.

Chapitre 3

A smooth family of intertwining operators

Abstract : Let N be a connected, simply connected nilpotent Lie group with Lie algebra \mathfrak{n} and let \mathcal{W} be a submanifold of \mathfrak{n}^* such that the dimension of all polarizations associated to elements of \mathcal{W} is fixed. We choose $(\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ and $(\mathfrak{p}'(w))_{w \in \mathcal{W}}$ two smooth families of polarizations in \mathfrak{n} . Let $\pi_w = \text{ind}_{P(w)}^N \chi_w$ and $\pi'_w = \text{ind}_{P'(w)}^N \chi_w$ be the corresponding induced representations, which are unitary and irreducible. It is well known that π_w and π'_w are unitary equivalent. In this paper, we prove the existence of a smooth family of intertwining operator $(T_w)_w$ for these representations, where w runs through an appropriate non-empty relatively open subset of \mathcal{W} . The intertwining operators are given by an explicit formula.

Keywords : Smooth intertwining operators, smooth Malcev and Jordan-Hölder bases, generalized Kirillov result, generalized Schwartz spaces.

AMS Subject Classification : 22E30, 22E27, 43A20.

Supported by the research grant AHCM07 of the University of Luxembourg.

Introduction.

Let $N = \text{expn}$ be a connected, simply connected nilpotent Lie group. The Kirillov orbit method makes it possible to describe all the irreducible unitary representations of N . Let $l \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{p}(l)$ be an arbitrary polarization of l (a subalgebra of \mathfrak{n} with maximal dimension satisfying $\langle l, [\mathfrak{p}(l), \mathfrak{p}(l)] \rangle \equiv 0$) and let $P(l) = \text{exp}\mathfrak{p}(l)$. The induced unitary representation $\pi_l := \text{ind}_{P(l)}^N \chi_l$, where $\chi_l(p) = e^{-i\langle l, \log p \rangle}$ for all $p \in P(l)$, is then irreducible and all the irreducible unitary representations are obtained in this way, up to unitary equivalence. For two distinct linear forms l and l' , π_l and $\pi_{l'}$ are unitary equivalent if and only if l and l' belong to the same co-adjoint orbit. If $\mathfrak{p}(l)$ and $\mathfrak{p}'(l)$ are two distinct polarizations of the same l , then π_l and $\pi'_l := \text{ind}_{P'(l)}^N \chi_l$, where $P'(l) = \text{exp}\mathfrak{p}'(l)$, are unitary equivalent. This means that there exists a unitary operator $T(l) : \mathcal{H}_{\pi_l} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi'_l}$ (between the respective representation spaces) such that $T(l) \circ \pi_l(x) = \pi'_l(x) \circ T(l)$ for all $x \in N$. In [11], G. Lion gave an explicit formula for such an

intertwining operator :

$$T(l)\xi(g) = \int_{P'(l)/P(l) \cap P'(l)} \xi(gp)\chi_l(p)dp, \quad g \in N$$

for all $\xi \in \mathcal{S}(N/P(l), \chi_l) = \mathcal{H}_{\pi_l}^\infty$. This operator is unitary for an appropriate normalization of the measure dp on $P'(l)/P(l) \cap P'(l)$. In this formula, $l \in \mathfrak{n}^*$ is fixed. But one may ask the question of the dependency in l , if $(\mathfrak{p}(l))_l$ and $(\mathfrak{p}'(l))_l$ are two smooth families of polarizations.

As a matter of fact one often comes upon smooth families of polarizations, where l runs through a submanifold of \mathfrak{n}^* . Let us give some examples. Let $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ be a fixed Jordan-Hölder basis of \mathfrak{n} and \mathcal{W} be a submanifold of \mathfrak{n}^* (for instance $\mathcal{W} = \mathfrak{n}_{gen}^*$, the open set of generic elements of \mathfrak{n}^* , as in [20]). For each $w \in \mathcal{W}$, we denote by $\mathfrak{p}_{\mathcal{Z}}(w)$ the Vergne polarization associated to w with respect to the basis \mathcal{Z} (see [3]). Then $(\mathfrak{p}_{\mathcal{Z}}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ is a smooth family of Vergne polarizations. Changing to another Jordan-Hölder basis \mathcal{Z}' , would yield a second smooth family of Vergne polarizations $(\mathfrak{p}_{\mathcal{Z}'}(w))_{w \in \mathcal{W}}$.

A second important example is obtained in the following way : Let us assume that H is a closed subgroup of the group $Aut(N)$ of automorphisms of N acting smoothly on N . Let $l \in \mathfrak{n}^*$ be fixed. Then the orbit $H \cdot l$ is a submanifold of \mathfrak{n}^* , provided it is locally closed, by [27]. For a given fixed Jordan-Hölder basis \mathcal{Z} one may again consider the smooth family of Vergne polarizations $(\mathfrak{p}_{\mathcal{Z}}(w))_{w \in H \cdot l} = (\mathfrak{p}_{\mathcal{Z}}(h \cdot l))_{h \in H}$. But for this example there exists another natural smooth family of polarizations, $(h \cdot \mathfrak{p}_{\mathcal{Z}}(l))_{h \in H}$. Note that here the actions of H on \mathfrak{n} and \mathfrak{n}^* are defined by $h \cdot X = \log(h \cdot \exp X)$ and $\langle h \cdot l, X \rangle = \langle l, h^{-1} \cdot X \rangle$. Particular cases of this example are obtained if either H is the group of conjugations of N or if $H = K$ is any compact subgroup of $Aut(N)$. In the first case, $H \cdot l = Ad^*(N) \cdot l = \Omega(l)$ is the co-adjoint orbit of l , which is closed as N is nilpotent. In the second case, the orbit $H \cdot l$ is compact and hence closed. So both cases yield submanifolds of \mathfrak{n}^* .

We are hence naturally led to the following question : Given a submanifold \mathcal{W} of \mathfrak{n}^* and given two distinct smooth families of polarizations $(\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ and $(\mathfrak{p}'(w))_{w \in \mathcal{W}}$, is it possible to define a smooth family of intertwining operators $(T(w))_w$, via the formula of G. Lion ? One immediately sees that some restrictions are necessary. So we certainly must assume that all our polarizations, and hence all the co-adjoint orbits $Ad^*(N) \cdot w$, have the same dimension. But even then, one notices that the formula for $T(w)$ strongly depends on the dimension of $P'(w)/P(w) \cap P'(w)$ and will present singularities each time this dimension changes. In the example of the action of a group H , this is for instance the case at the point $l = e \cdot l$, where e is the identity element of H . So a smooth family of intertwining operators, if it exists, will probably only be defined on a non-empty relatively open subset of the submanifold \mathcal{W} .

In this paper, we prove the existence of such a smooth family of intertwining operators for an appropriate non-empty relatively open subset of the manifold \mathcal{W} , based on the formula of G. Lion [11]. The first section is devoted to introduce some definitions and tools. Then we explain the construction of different smooth bases and we define the generalized Schwartz spaces. In the third section, we use these tools to prove the main result of a generalized Kirillov theory. This result is a crucial tool to show that the family of operators $(T(w))_w$ constructed in the next section, is a smooth family of intertwining operators and defines a linear homeomorphism between $\mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ and $\mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi))$ where \mathcal{V}'_0 denotes the appropriate

non-empty relatively open subset of \mathcal{W} .

The existence of a smooth family of intertwining operators is very useful result. In the study of certain harmonic analysis properties, it will make it possible to choose a particularly well suited smooth family of polarizations and then to transpose the obtained result to an arbitrary setting. Hence, for instance in [20], the generalized Fourier inversion theorem gives the existence of a Schwartz-retract if the induced representations for $l \in \mathfrak{n}_{gen}^*$ and their operator kernels are realized via specially chosen Vergne polarizations. The existence of smooth families of intertwining operators will make it possible to transpose this result to other realizations of the representations, at least within a certain open subset of \mathfrak{n}_{gen}^* . A similar result is obtained for the example of the action of a compact Lie group K on a connected simply connected nilpotent Lie group N . The existence of a local retract for the families of Vergne polarizations $(\mathfrak{p}(k \cdot l))_k$ implies the existence of such retract for the family $(k \cdot \mathfrak{p}(l))_k$ of polarizations and the corresponding representations at least locally. Finally, the existence of singularities in this proceeding may already be studied in the example of the Heisenberg group.

3.1 On indices and bases.

We start this section by recalling some basic notions and by introducing some useful definitions which are needed in the next sections. As general references, we recommend [3], [6], [22]... First of all, let \mathfrak{n} be a nilpotent Lie algebra and $N = \exp \mathfrak{n}$ the corresponding connected, simply connected nilpotent Lie group. In this section, \mathcal{W} will denote any non-empty manifold.

3.1.1 Definitions.

Definition 1. A family of r vectors $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ is said to be a smooth family of vectors if for all $j \in \{1, \dots, r\}$, the map $w \mapsto X_j(w)$ is smooth.

Definition 2. A vector space basis $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ of the Lie algebra \mathfrak{n} is said to be a Jordan-Hölder basis if $[Z_i, Z_j] \in \langle Z_{r+1}, \dots, Z_n \rangle$ where $r = \max(i, j)$, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$ and where $\langle Z_{r+1}, \dots, Z_n \rangle$ denotes the subspace generated by Z_{r+1}, \dots, Z_n . If the family of vectors is smooth, we talk about a smooth Jordan-Hölder basis.

Definition 3. A vector space basis $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ of the Lie algebra \mathfrak{n} is said to be a Malcev basis if $\mathfrak{n}_j := \langle Z_j, \dots, Z_n \rangle$ is a subalgebra of \mathfrak{n} for all $j \in \{1, \dots, n\}$. If the family of vectors is smooth, we call it a smooth Malcev basis.

Definition 4. We define a smooth family of subalgebras $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ in the following way :

- All algebras $\mathfrak{q}(w)$, $w \in \mathcal{W}$, have the same fixed dimension denoted by r .
- There exists $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ a smooth family of Malcev bases of $(\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$.
If \mathcal{W} is a submanifold of \mathfrak{n}^* and if $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ is a smooth family of subalgebras, we say that $(\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ is a smooth family of polarisations if it satisfies moreover :
- $\mathfrak{p}(w)$ is a polarization of w in \mathfrak{n} , for all $w \in \mathcal{W}$.

Definition 5. Let \mathfrak{h} be a subalgebra of \mathfrak{n} . A family of vectors $\{Z_1, \dots, Z_d\}$ is called a Malcev basis of \mathfrak{n} relative to \mathfrak{h} if $\mathfrak{n} = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{R}Z_j \oplus \mathfrak{h}$ and if, for every $j = 1, \dots, d$, the subspace $\mathfrak{h}_j := \bigoplus_{i=j}^d \mathbb{R}Z_i \oplus \mathfrak{h}$ is a subalgebra of \mathfrak{n} .

If $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ is a smooth family of subalgebras, we define similarly a smooth Malcev basis $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ by requiring that :

- The family $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ is smooth.
- For any fixed $w \in \mathcal{W}$, $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}$ is a Malcev basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{q}(w)$.

Definition 6. Let $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ be a smooth family of subalgebras. A smooth family of vectors $\{X_1(w), \dots, X_d(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ is said to be a smooth supplementary basis of polynomial character (smooth SP-basis) of $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$, if, given any smooth family of bases $\{Y_{d+1}(w), \dots, Y_n(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ of $(\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$, the maps

$$\begin{aligned} \phi_w : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} &\longrightarrow N \\ (x_1, \dots, x_d, y_{d+1}, \dots, y_n) &\longmapsto \exp x_1 X_1(w) \dots \exp x_d X_d(w) \cdot \exp(y_{d+1} Y_{d+1}(w) + \dots + y_n Y_n(w)) \end{aligned}$$

are smooth polynomial diffeomorphisms, which means :

- For any fixed w , ϕ_w is a diffeomorphism.
- $\exp x_1 X_1(w) \dots \exp x_d X_d(w) \cdot \exp(y_{d+1} Y_{d+1}(w) + \dots + y_n Y_n(w)) = \exp(P_1(w, x, y) X_1(w) + \dots + P_d(w, x, y) X_d(w) + P_{d+1}(w, x, y) Y_{d+1}(w) + \dots + P_n(w, x, y) Y_n(w))$ with $P_j(w, x, y)$ polynomials in x, y with smooth coefficients in w .
- The inverse maps defined by

$$\phi_w^{-1} : N \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$$

$$g = \exp(x'_1 X_1(w) + \dots + x'_d X_d(w) + y'_{d+1} Y_{d+1}(w) + \dots + y'_n Y_n(w)) \longmapsto (Q_1(w, x', y'),$$

$$\dots, Q_d(w, x', y'), Q_{d+1}(w, x', y'), \dots, Q_n(w, x', y'))$$

are such that $Q_j(w, x', y')$ is polynomial in x', y' with smooth coefficients in w for every j , where the Q_j 's are defined by

$$\begin{aligned} \exp(x'_1 X_1(w) + \dots + x'_d X_d(w) + y'_{d+1} Y_{d+1}(w) + \dots + y'_n Y_n(w)) = \\ \exp Q_1(w, x', y') X_1(w) \dots \exp Q_d(w, x', y') X_d(w) \cdot \exp(Q_{d+1}(w, x', y') Y_{d+1}(w) + \dots + \\ Q_n(w, x', y') Y_n(w)) \end{aligned}$$

It is of course enough to impose these conditions for one chosen family of bases $\{Y_{d+1}(w), \dots, Y_n(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ of $(\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$.

Example 1. A smooth Malcev basis of \mathfrak{n} with respect to $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ is a smooth SP-basis. The proof of this fact is similar to the one in the fixed case (see [3]). In this process we may have to restrict to a non-empty relatively open subset of \mathcal{W} .

3.1.2 Indices and a new family of smooth bases of polarizations.

Let $(\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ be a smooth family of subalgebras in \mathfrak{n} of fixed dimension r and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ be a Jordan-Hölder basis of \mathfrak{n} . For each w , we define the associated index sets in the following way :

$$I_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)} = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \mathfrak{n}_j + \mathfrak{q}(w) = \mathfrak{n}_{j+1} + \mathfrak{q}(w)\} \quad \text{and} \quad J_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)} = \{1, \dots, n\} \setminus I_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)}$$

By construction, the set $\{Z_j, j \in J_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)}\}$ is a basis of a supplementary vector subspace to $\mathfrak{q}(w)$ in \mathfrak{n} . Hence, the cardinality of this set is $n - r$ and the cardinality of $I_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)}$ is r .

Let us write, for any fixed $w \in \mathcal{W}$, $J_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)} = \{u_1(w), \dots, u_{n-r}(w)\} \subset \{1, \dots, n\}$, ordered such that $u_{n-r}(w) < \dots < u_1(w)$.

Let

$$u_1 = \max_{w \in \mathcal{W}} u_1(w),$$

$$U_0 = \mathcal{W} \text{ and } U_1 = \{w \in U_0 \mid u_1(w) = u_1\}.$$

By induction, we define for $i = 1, \dots, n - r$,

$$u_i = \max_{w \in U_{i-1}} u_i(w) \text{ and } U_i = \{w \in U_{i-1} \mid u_i(w) = u_i\}$$

This inductive process will stop if $i = n - r$. Thus, we get fixed index sets $J = \{u_{n-r} < \dots < u_1\}$ and $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$.

Proposition 1. *The subsets U_i satisfy the following properties :*

(i) *For each $i = 1, \dots, n - r$, there exists a continuous function \mathcal{P}_i on \mathcal{W} such that,*

$$U_i = \{w \in U_0 \mid \mathcal{P}_1(w) \neq 0, \mathcal{P}_2(w) \neq 0, \dots, \mathcal{P}_i(w) \neq 0\}$$

(ii) *Each U_i is a non-empty relatively open subset of \mathcal{W} , as well as the subset $\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^{n-r} U_i$, and the index sets $I_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)}$ and $J_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{q}(w)}$ are constant if $w \in \tilde{U}$. They are denoted by I and J .*

Proof. Let $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}$ denote the given basis of $\mathfrak{q}(w)$. The fixed index set $J = \{u_{n-r} < \dots < u_1\}$ is obtained by construction. By construction also, the sets $U_i = \{w \in U_{i-1} \mid u_i(w) = u_i\}$ are non-empty. Then, we get

$$\begin{aligned} w \in U_i &\iff w \in U_{i-1} \text{ and } \text{rg}(Z_{u_i}, \dots, Z_n, X_1(w), \dots, X_r(w)) = \\ &\quad \text{rg}(Z_{u_{i+1}}, \dots, Z_n, X_1(w), \dots, X_r(w)) + 1 = r + (i - 1) + 1 = r + i \\ &\iff w \in U_{i-1} \text{ and } \sum D_{r+i}^2 \neq 0 \text{ where } D_{r+i} \text{ runs through all the sub-determinants} \\ &\quad (r + i) \times (r + i) \text{ chosen in the coefficient matrix of } Z_{u_i}, Z_{u_{i+1}}, \dots, Z_n, X_1(w), \dots, X_r(w) \\ &\iff w \in U_{i-1} \text{ and } \mathcal{P}_i(w) \neq 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 2. $\{Z_j, j \in J\}$ is a smooth Malcev basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{q}(w)$ for all $w \in \tilde{U}$. Similarly if the original basis is smooth.

Proof. Same argument as in the fixed case. We refer the reader to [6].

Proposition 3. There exists a non-empty relatively open subset V of \tilde{U} such that, for all $j \in I$ and for all $w \in V$, there is a unique vector $\tilde{Z}_j(w) \in \mathfrak{q}(w)$ of the form

$$\tilde{Z}_j(w) = Z_j - \sum_{i=j+1, i \notin I}^n \tilde{\beta}_{ij}(w) Z_i \in \mathfrak{q}(w)$$

Then $\tilde{Z}_j(w) \in \mathfrak{n}_j \setminus \mathfrak{n}_{j+1}$.

Moreover, the map $w \mapsto \tilde{Z}_j(w)$ is smooth and $\{\tilde{Z}_j(w), j \in I\}$ is a smooth Jordan-Hölder basis of $\mathfrak{q}(w)$. Let us put $\tilde{Z}_j(w) = Z_j$ if $j \notin I$. Then the set

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{\tilde{Z}_1(w), \dots, \tilde{Z}_n(w)\}$$

is a smooth Jordan-Hölder basis of all of \mathfrak{n} . For the two bases $\mathcal{Z} := \{Z_1, \dots, Z_n\}$ and $\tilde{\mathcal{Z}}$, the different subspaces \mathfrak{n}_j are the same. Hence, the indices computed in each one of the two bases are the same for any subalgebra. The same procedure may of course be applied if the original basis \mathcal{Z} is already a smooth basis in w .

Proof. Let us first prove the existence and the uniqueness of $\tilde{Z}_j(w)$ for any fixed $w \in \tilde{U}$:

$$\begin{aligned} j \in I &\iff Z_j \in \mathfrak{n}_{j+1} + \mathfrak{q}(w) \\ &\iff Z_j = \sum_{i=j+1}^n \alpha_{ij}(w) Z_i + Z'_j(w) \text{ for some } \alpha_{ij}(w) \in \mathbb{R} \text{ and } Z'_j(w) \in \mathfrak{q}(w) \\ &\implies Z'_j(w) = Z_j - \sum_{i=j+1, i \notin I}^n \alpha_{ij}(w) Z_i - \sum_{i=j+1, i \in I}^n \alpha_{ij}(w) Z_i \end{aligned}$$

Then, we repeat the same process for $i \geq j+1, i \in I$. We finally see that for each $j \in I$, there exists a vector $\tilde{Z}_j(w) \in \mathfrak{q}(w)$ of the form

$$\tilde{Z}_j(w) = Z_j - \sum_{i=j+1, i \notin I}^n \tilde{\beta}_{ij}(w) Z_i \in \mathfrak{q}(w)$$

An easy argument by contradiction shows the uniqueness of $\tilde{Z}_j(w)$. To prove the smoothness of $\tilde{Z}_j(w)$, we use the fact that there exists a non-empty relatively open subset V of \tilde{U} such that for all $w \in V$, $\mathfrak{q}(w)$ is characterized by $(n-r)$ independent cartesian equations $\sum_{i=1}^n b_{ki}(w) x_i = 0$ for all $1 \leq k \leq n-r$, where $w \mapsto b_{ki}(w)$ are smooth functions and where x_i are the coordinates in the fixed basis of \mathfrak{n} . Introducing $\tilde{Z}_j(w)$ in these equations, we obtain the conditions

$$\sum_{i=j+1, i \notin I}^n b_{ki}(w) \tilde{\beta}_{ij}(w) = b_{kj}(w) \quad 1 \leq k \leq n-r \quad (3.1)$$

Let $\mathfrak{a}_j(w)$ be the affine subspace defined by the following equations

$$\begin{cases} x_i = 0 & \text{if } 1 \leq i \leq j-1 \\ x_j = 1 \\ x_k = 0 & \text{if } k \geq j+1 \text{ and } k \in I \end{cases} \quad (3.2)$$

which means that all vectors of $\mathfrak{a}_j(w)$ have the form $Z_j + \sum_{i=j+1, i \notin I}^n x_i Z_i$. In particular $\tilde{Z}_j(w) \in \mathfrak{a}_j(w)$. We know that the combined system (1) and (2) has $\tilde{Z}_j(w)$ as a unique solution. As the coefficients of this system are smooth in w , the maps $w \mapsto \tilde{Z}_j(w)$ are smooth in a suitable non-empty relatively open subset of \tilde{U} . It is easy to prove that $\{\tilde{Z}_j(w), j \in I\}$ is a Jordan-Hölder basis of $\mathfrak{q}(w)$.

The other statements of the proposition are deduced easily from the particular form of the $\tilde{Z}_j(w)$'s. \square

3.2 Smooth bases and generalized Schwartz spaces.

3.2.1 Construction of smooth SP-bases.

Let $(\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathscr{W}}$ and $(\mathfrak{q}'(w))_{w \in \mathscr{W}}$ be two smooth families of subalgebras.

Lemma 1. *There exists a non-empty relatively open subset \tilde{V} of \mathscr{W} such that for all $w \in \tilde{V}$, the dimension of $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$ is constant and minimal. Furthermore we can choose a smooth basis of $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$.*

Proof. Let $\mathfrak{q}^\perp(w) = \{\psi \in \mathfrak{n}^* \mid \langle \psi, \mathfrak{q}(w) \rangle = 0\}$ be the orthogonal of $\mathfrak{q}(w)$ in \mathfrak{n}^* . The space $\mathfrak{q}^\perp(w)$ may be described by a homogenous system of $n - r$ independent equations for the coordinates in the basis $\{Z_1^*, \dots, Z_n^*\}$, whose coefficients are smooth functions of w , for w running through a non-empty relatively open subset U of \mathscr{W} . Thus, by solving this system, we may construct a smooth basis of $\mathfrak{q}(w)^\perp$ denoted $\{\varphi_{r+1}(w), \dots, \varphi_n(w)\}$ for all $w \in U$. Applying proposition 3 to $\mathfrak{q}'(w)$, we then conclude that there exists a non-empty relatively open subset V in U such that $\{\tilde{Z}'_{j'_1}(w), \dots, \tilde{Z}'_{j'_r}(w)\}$ is a smooth Jordan-Hölder basis of $\mathfrak{q}'(w)$ where $\tilde{Z}'_{j'_i}(w) = Z_{j'_i} - \sum_{k=j'_i+1, k \notin I'}^n \tilde{\beta}'_{k, j'_i}(w) Z_k$ for all $i \in \{1, \dots, r\}$ and where I' is the index set associated to all $\mathfrak{q}'(w)$'s.

In order for a vector $\tilde{C}(w) = \sum_{i=1}^r c_{j'_i} \tilde{Z}'_{j'_i}(w) \in \mathfrak{q}'(w)$ to belong to $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$, it is necessary and sufficient to have, for $r+1 \leq a \leq n$,

$$\sum_{f=1}^r \langle \varphi_a(w), \tilde{Z}'_{j'_f}(w) \rangle c_{j'_f} = \sum_{f=1}^r A_{af}(w) c_{j'_f} = 0$$

where $(A_{af}(w))_{r+1 \leq a \leq n; 1 \leq f \leq r} = (\langle \varphi_a(w), \tilde{Z}'_{j'_f}(w) \rangle)_{r+1 \leq a \leq n; 1 \leq f \leq r}$ is a smooth matrix. The solution set of this system is the sub-vector space $\mathfrak{q}'(w) \cap \mathfrak{q}(w)$ of $\mathfrak{q}'(w)$ whose dimension is equal to $r - \text{rank} A_{af}(w)$. To realize the constant and minimal dimension of the previous sub-vector

space, we choose one w_0 which realizes the biggest possible rank for the matrix $A_{af}(w)$, which will be denoted by p . In particular there is a sub-matrix $\tilde{A}(w_0)$ of dimension $p \times p$ such that $\det \tilde{A}(w_0) \neq 0$ and the dimension of $\mathfrak{q}(w_0) \cap \mathfrak{q}'(w_0)$ is equal to $r - p$. On the non-empty relatively open subset $V_1 = \{w \in V \mid \det \tilde{A}(w) \neq 0\}$, the dimension of $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$ is constant and minimal. Furthermore, by an argument similar to the one of proposition 3, there is a method to choose a smooth basis of $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$. To do this, we may have to limit ourselves to another non-empty relatively open subset \tilde{V} of V_1 . \square

We will now show the existence of a special smooth SP-basis associated to $(\mathfrak{q}(w))_{\mathscr{W}}$ and $(\mathfrak{q}'(w))_{w \in \mathscr{W}}$. In order to do this, we generalize the proof of G. Lion [11] to the smooth case.

Proposition 4. *Let $(\mathfrak{q}(w))_{\mathscr{W}}$ and $(\mathfrak{q}'(w))_{w \in \mathscr{W}}$ be two smooth families of subalgebras. Let us assume that the dimension of $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$ is constant and minimal on \mathscr{W} (by restriction of \mathscr{W} if necessary). Then there exists a non-empty open subset \tilde{V} of \mathscr{W} and a family of smooth SP-bases $\{U_1(w), \dots, U_s(w)\}$ of \mathfrak{n} with respect to $\mathfrak{q}(w)$, such that $\{U_{b+1}(w), \dots, U_s(w)\}$ is a smooth SP-basis of $\mathfrak{q}'(w)$ with respect to $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w)$ for all $w \in \tilde{V}$.*

Proof. By induction. To make this induction rigorous, we may even assume that both $(\mathfrak{q}(w))_w$ and $(\mathfrak{q}'(w))_w$ are in a smooth family of subalgebras $(\mathfrak{n}(w))_w$ (spanned by a smooth Jordan-Hölder basis) of the bigger Lie algebra \mathfrak{n} .

The induction is then made on $\dim(\mathfrak{n}(w)/\mathfrak{q}'(w))$.

If $\mathfrak{q}'(w) = \mathfrak{n}(w)$ for all w in a non-empty relatively open subset of \mathscr{W} , then $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{q}'(w) = \mathfrak{q}(w)$ and proposition 2 gives the SP-basis.

Otherwise, there exists a smooth family $(\mathfrak{n}_0(w))_w$ of ideals of codimension 1 in $\mathfrak{n}(w)$ such that $\mathfrak{q}'(w) \subset \mathfrak{n}_0(w)$ for all w . In fact, by proposition 2, there exists a smooth Malcev basis $\{Z_1(w), \dots, Z_a(w)\}$ of $\mathfrak{n}(w)$ relative to $\mathfrak{q}'(w)$. We may then take $\mathfrak{n}_0(w) = \bigoplus_{j=2}^a \mathbb{R}Z_j(w) \oplus \mathfrak{q}'(w)$. It is an ideal in $\mathfrak{n}(w)$, as it is a subalgebra of codimension 1.

Let us restrict the non-empty relatively open subset of \mathscr{W} such that the dimension of $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{n}_0(w)$ is constant and minimal.

By the induction hypothesis, there exists a smooth SP-basis $\{R_1(w), \dots, R_u(w)\}$ of $\mathfrak{n}_0(w)$ with respect to $\mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{n}_0(w)$ such that $\{R_{v+1}(w), \dots, R_u(w)\}$ is a smooth SP-basis of $\mathfrak{q}'(w)$ with respect to $\mathfrak{q}'(w) \cap \mathfrak{q}(w) \cap \mathfrak{n}_0(w) = \mathfrak{q}'(w) \cap \mathfrak{q}(w)$.

We then have to distinguish two cases :

If $\mathfrak{q}(w) \subset \mathfrak{n}_0(w)$ for all w in a non-empty relatively open subset of \mathscr{W} , let us pick a smooth vector $S(w)$ which is a Malcev basis of $\mathfrak{n}(w)$ relative to $\mathfrak{n}_0(w)$ (exists by proposition 2). Then $\{S(w), R_1(w), \dots, R_u(w)\}$ is the SP-basis of $\mathfrak{n}(w)$ relative to $\mathfrak{q}(w)$ we are looking for.

Otherwise, there exists w such that $\mathfrak{q}(w) \not\subset \mathfrak{n}_0(w)$. By smoothness, this is the case for all w in a non-empty relatively open subset of \mathscr{W} . It is then easy to see that $\{R_1(w), \dots, R_u(w)\}$ is the smooth SP-basis of $\mathfrak{n}(w)$ relative to $\mathfrak{q}(w)$ we are looking for, for all w in that non-empty relatively open subset.

At the end of the induction process, we take $\mathfrak{n}(w) = \mathfrak{n}$ for all w . \square

3.2.2 SP-basis and invariant measure.

Let $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ be any smooth family of subalgebras. We have the following smooth versions of results of [11].

Proposition 5. *Let $\{U_1(w), \dots, U_s(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ and $\{V_1(w), \dots, V_s(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ be two smooth SP-bases of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$. Then the maps*

$$\psi_w : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

defined by $(y_1, \dots, y_s)_w = \psi_w(x_1, \dots, x_s)_w$ if and only if

$$\exp x_1 U_1(w) \dots \exp x_s U_s(w) = \exp y_1 V_1(w) \dots \exp y_s V_s(w) \text{ mod } \exp \mathfrak{q}(w)$$

are polynomial with smooth coefficients in w . Similarly for ψ_w^{-1} . This is in particular the case for two smooth Malcev bases. One may have to restrict \mathcal{W} to a non-empty relatively open subset.

Proof. Obvious. □

Remark 1. *The maps ψ_w and ψ_w^{-1} define a change of coordinates in $N/Q(w)$ where $Q(w) = \exp \mathfrak{q}(w)$. As the Jacobians of this change of coordinates are polynomial functions with smooth coefficients in w as well for ψ_w and ψ_w^{-1} , these Jacobians have to be constants.*

This leads to the following result :

Proposition 6. *Let $\{U_1(w), \dots, U_s(w)\}_{w \in \mathcal{W}}$ be a smooth SP-basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}(w))_{w \in \mathcal{W}}$. Then*

$$f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(\exp(u_1 U_1(w) \dots \exp u_s U_s(w)) du_1 \dots du_s$$

defines an invariant measure on $N/Q(w)$, $Q(w) = \exp \mathfrak{q}(w)$, for every w . One may have to restrict \mathcal{W} .

Proof. We know that this is the case if the basis is a smooth Malcev basis. As there always exist smooth Malcev bases and as the transition between a smooth Malcev bases and a smooth SP-bases has a constant Jacobian, the result is true for any SP-bases. □

3.2.3 Generalized Schwartz spaces.

Let \mathcal{W} be a submanifold of \mathfrak{n}^* and $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ a smooth family of polarizations, i.e. such that all polarizations $\mathfrak{p}(w)$, $w \in \mathcal{W}$, have a fixed dimension r .

Definition 7. *Let W be a non-empty relatively open subset of \mathcal{W} . We denote $\mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$ the set of differential operators in the coordinates $(v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s$ with polynomial coefficients in*

the coordinates (v_1, \dots, v_s) , the coefficients of these polynomials being smooth functions on W . Formally, for each $w \in W$, we write

$$D_w(v) = \sum_{|\alpha| \leq a} \sum_{|\beta| \leq b} c_{\alpha\beta}(w) v^\beta \frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha}$$

for such a differential operator where $c_{\alpha\beta}(w)$ are smooth coefficients, α, β multi-indices and $a, b \in \mathbb{N}$.

For all $A, B, C \in \mathbb{N}$ and for all compact subset K contained in a local chart (U, φ) of W , we denote by $\frac{\partial^a}{\partial w^a}$ the partial derivatives with respect to the coordinate system of this chart U . Then, we define a semi-norm on the smooth functions from $W \times \mathbb{R}^s$ to \mathbb{C} in the following way :

$$\|\tilde{\xi}\|_{A,B,C}^K = \sup_{w \in K, (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C} \left| \frac{\partial^a}{\partial w^a} v^b \frac{\partial^c}{\partial v^c} \tilde{\xi}(w, v_1, \dots, v_s) \right|. \quad (3.3)$$

We can now define the generalized Schwartz space as follows :

Definition 8. *Let*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi)) &\equiv \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)) \\ &= \{ \xi = (\xi(w))_{w \in W} \mid \xi : W \longrightarrow \mathcal{S}(N/P, \chi) \text{ smooth,} \\ &\quad \xi(w; g(w)q(w)) := \xi(w)(g(w) \cdot q(w)) \\ &\quad = \overline{\chi_w(q(w))} \xi(w; g(w)) \text{ if } q(w) \in P(w) \text{ and } \|\tilde{\xi}\|_{A,B,C}^K < \infty \\ &\quad \text{for all } K \text{ and all } A, B, C \} \end{aligned}$$

where $\tilde{\xi}(w, v_1, \dots, v_s) := \xi(w, \exp v_1 V_1(w) \dots \exp v_s V_s(w))$ and where $\mathcal{S}(N/P, \chi) := (\mathcal{S}(N/P(w), \chi_w))_{w \in W}$.

The space $\mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ will be called generalized Schwartz space. Here $\{V_1(w), \dots, V_s(w)\}$ denotes an arbitrary smooth Malcev basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$ (see Proposition 7).

Then, the semi-norms given in 3.3 define the same topology on our function space as the following family of semi-norms :

$$\|\tilde{\xi}\|_{A,D}^K = \sup_{w \in K, (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s} \sup_{|a| < A} \left| \frac{\partial^a}{\partial w^a} D_w(v) \tilde{\xi}(w, v_1, \dots, v_s) \right| < \infty \quad (3.4)$$

for all $A \in \mathbb{N}$, for all $D = (D_w)_{w \in W} \in \mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$ and for all compact subset K contained in a chart of W .

Proposition 7. *The generalized Schwartz space is independent of the choice of the smooth Malcev basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$, provided we are willing to restrict the domain of w appropriately, if necessary.*

Proof. Let $\{V'_1(w), \dots, V'_s(w)\}$ be another smooth Malcev basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$. Let $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}$ be a smooth Malcev basis of $\mathfrak{p}(w)$. We may have to restrict \mathscr{W} for the existence of $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}$. Then, by lemma 5, for all $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W_1, \mathcal{S}(N/P, \chi))$, we have

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(w; v'_1, \dots, v'_s) &:= \xi(w; \exp v'_1 V'_1(w) \dots \exp v'_s V'_s(w)) \\ &= \xi(w; \exp(P_1(w; v'_1, \dots, v'_s) V_1(w)) \dots \exp(P_s(w; v'_1, \dots, v'_s) V_s(w)) \\ &\quad \exp(Q_1(w; v'_1, \dots, v'_s) X_1(w)) \dots \exp(Q_r(w; v'_1, \dots, v'_s) X_r(w))) \\ &= \prod_{j=1}^r e^{iQ_j(w; v'_1, \dots, v'_s) \langle w, X_j(w) \rangle} \tilde{\xi}(w; P_1(w; v'_1, \dots, v'_s), \dots, P_s(w; v'_1, \dots, v'_s)) \end{aligned}$$

where for all $j \in \{1, \dots, r\}$, $Q_j(w; v'_1, \dots, v'_s)$ is a polynomial function in the variables v'_1, \dots, v'_s with smooth coefficients in w and the map $(v'_1, \dots, v'_s) \mapsto (P_1(w; v'_1, \dots, v'_s), \dots, P_s(w; v'_1, \dots, v'_s))$ is a bi-polynomial diffeomorphism with smooth coefficients in w . We have similar relations for the passage from $\{V'_1(w), \dots, V'_s(w)\}$ to $\{V_1(w), \dots, V_s(w)\}$. Since our differential operator satisfies the smooth version lemma A.2.1 in [3], we get the result. \square

3.3 The generalized Kirillov theorem.

3.3.1 The statement of the theorem.

We denote by $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ the universal enveloping algebra of \mathfrak{n} . Let $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}(w) = \{V_1(w), \dots, V_s(w)\}$ be a smooth family of Malcev bases of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$. We identify the Hilbert space $L^2(N/P(w), \chi_w)$ with $L^2(\mathbb{R}^s)$ via the unitary operator U defined by $U\xi(w)(v_1, \dots, v_s) := \xi(w; \exp v_1 V_1(w) \dots \exp v_s V_s(w))$. We denote by $\rho_w = U \circ \pi_w \circ U^*$ the corresponding realization of the representation π_w of N on the space $L^2(\mathbb{R}^s)$. This realization ρ_w of π_w on the space $L^2(\mathbb{R}^s)$ depends of course on the choice of the basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$.

We may now present one of the main results of this paper, the generalized Kirillov theorem.

Theorem 1. *There exists a non-empty relatively open subset \mathscr{D} of \mathscr{W} such that for every $w_0 \in \mathscr{D}$ and for every relative neighborhood \mathscr{V}_0 of w_0 contained in \mathscr{D} , there are $w'_0 \in \mathscr{V}_0$ and a relative neighborhood \mathscr{V}'_0 of w'_0 contained in \mathscr{V}_0 which satisfy : For every $D = (D_w)_{w \in \mathscr{V}'_0} \in \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathscr{V}'_0, \mathbb{R}^s)$, there exists $(X_w)_{w \in \mathscr{V}'_0}$ with*

$$X_w = \sum_{|\zeta| < C} c_\zeta(w) Z^\zeta \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}), \quad \forall w \in \mathscr{V}'_0$$

where Z^ζ is defined by $Z^\zeta = Z_1^{\zeta_1} \dots Z_n^{\zeta_n}$ if $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ and where the maps $w \mapsto c_\zeta(w)$ are smooth, such that $d\rho_w(X_w) = D_w$ for all $w \in \mathscr{V}'_0$. This result is independent of the choice of the family of smooth Malcev bases used to define the realization ρ_w of π_w .

Here $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ denotes the fixed Jordan-Hölder basis of \mathfrak{n} .

3.3.2 The theorem in variable Lie groups.

To prove theorem 1, we will proceed by induction on the dimension of \mathfrak{n} . However, new parameters and new variations will appear in the proof. In order to control those, we shall carry out the proof not only for one single Lie algebra, but for so-called variable Lie algebras. We refer the reader to the references [21], [20], [10] for more details about variable Lie structures and we present only a few aspects which are useful in our proof.

Definition 9. Let \mathfrak{n} be a real vector space of finite dimension n and \mathfrak{b} be a submanifold of \mathbb{R}^d . We say $\mathfrak{n}_b := (\mathfrak{n}, [\cdot, \cdot]_b)$ is a variable nilpotent Lie algebra if it satisfies the following conditions :

1. For every $b \in \mathfrak{b}$, there exists a Lie bracket $[\cdot, \cdot]_b$ defined on \mathfrak{n} such that $(\mathfrak{n}, [\cdot, \cdot]_b)$ is a nilpotent Lie algebra.
2. There exists a fixed basis $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ of \mathfrak{n} such that the structure constants $c_{ij}^k(b)$ defined by $[Z_i, Z_j]_b = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k(b) Z_k$ are smooth and verify the following property : For all $b \in \mathfrak{b}$, for $k \leq \max(i, j)$, $c_{ij}^k(b) = 0$. This means that $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ is a Jordan-Hölder basis for every \mathfrak{n}_b .

Let $N_b = \exp_b \mathfrak{n}_b$ be the associated connected, simply connected variable nilpotent Lie group. We denote by \mathscr{W}' a smooth submanifold in $\mathfrak{b} \times \mathfrak{n}^*$.

For every $(b, w) \in \mathscr{W}'$, we consider the largest ideal $\mathfrak{a}(b, w)$ in \mathfrak{n}_b contained in the stabilizer $\mathfrak{n}_b(w) := \{X \in \mathfrak{n}, \langle w, [X, \mathfrak{n}]_b \rangle = 0\}$. We now define indices $j_1(b, w)$ and $k_1(b, w)$ by

$$\begin{aligned} j_1(b, w) &= \max\{j \in \{1, \dots, n\} \mid \langle w, [Z_j, \mathfrak{n}]_b \rangle \neq 0\} \\ &= \max\{j \in \{1, \dots, n\} \mid Z_j \notin \mathfrak{a}(b, w)\} \\ k_1(b, w) &= \max\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \langle w, [Z_{j_1(b, w)}, Z_k]_b \rangle \neq 0\}. \end{aligned}$$

The equality in the definition of $j_1(b, w)$ is due to the fact that $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ is a Jordan-Hölder basis. We consider also

$$\begin{aligned} j_1 &= \max\{j_1(b, w) \mid (b, w) \in \mathscr{W}'\} \\ k_1 &= \max\{k_1(b, w) \mid (b, w) \in \mathscr{W}' \text{ and } j_1(b, w) = j_1\}. \end{aligned}$$

Set $\mathscr{D}_1 := \{(b, w) \in \mathscr{W}' \mid j_1(b, w) = j_1 \text{ and } k_1(b, w) = k_1\}$. Then

$$\mathscr{D}_1 = \{(b, w) \in \mathscr{W}' \mid \langle w, [Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b \rangle \neq 0\}.$$

and it is a non empty relatively open subset of \mathscr{W}' . For further details, we refer the reader to [20], even if our definition of the indices j_1 and k_1 is slightly different. It is easy to see that, for all $(b, w) \in \mathscr{D}_1$, $\mathfrak{n}_1(b, w) := \{U \in \mathfrak{n}_b \mid \langle w, [U, Z_{j_1}]_b \rangle = 0\}$ is an ideal of codimension 1 in \mathfrak{n}_b and $\mathscr{B}_1(b, w) = \{Z_i^1(b, w) \mid i \in I^1\}$ is a smooth Jordan-Hölder basis of $\mathfrak{n}_1(b, w)$ for all $(b, w) \in \mathscr{D}_1$, where $I^1 := \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1\}$ and

$$Z_i^1(b, w) := Z_i - \frac{\langle w, [Z_{j_1}, Z_i]_b \rangle}{\langle w, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b \rangle} Z_{k_1}$$

(see [22]).

We define a new variable Lie algebra \mathfrak{n}_1 in the following way : As a vector space, \mathfrak{n}_1 is spanned by a basis denoted $\{Z_u^1, u \in I^1\}$, where, for fixed (b, w) , Z_u^1 is identified with $Z_u^1(b, w)$. The variable Lie brackets on \mathfrak{n}_1 are defined by $[Z_u^1, Z_v^1]_{(b,w)} := [Z_u^1(b, w), Z_v^1(b, w)]_b$ for all $(b, w) \in \mathcal{D}_1$. Then, $(\mathfrak{n}_1, [\cdot, \cdot]_{(b,w)})$ may be identified with $(\mathfrak{n}_1(b, w), [\cdot, \cdot]_b)$. Since we use this algebra in the induction, we will define a new variation on \mathfrak{n}_1 , i.e. a new submanifold \mathcal{W}_1 of $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{n}^*) \times \mathfrak{n}_1^*$ as follows :

$$(b, w, \tilde{w}) \in \mathcal{W}_1 \text{ with } (b, w) \in \mathcal{W}' \text{ and } \tilde{w} \in \mathfrak{n}_1^* \equiv \mathfrak{n}_1(b, w)^* \iff (b, w) \in \mathcal{W}' \text{ and } \tilde{w} \text{ is defined by} \\ \langle \tilde{w}, Z_j^1 \rangle := \langle w, Z_j^1(b, w) \rangle \forall j \in I^1$$

To prove theorem 1, it suffices to show the corresponding result in the variable case and then reduce \mathfrak{b} to a single point. As in the fixed case, we choose a family of smooth Malcev bases to define the realization $\rho_{(b,w)}$ of $\pi_{(b,w)}$.

Let's notice that the results of sections 3.1 and 3.2 remain valid if we replace the variation in w by a variation in (b, w) and we denote $\rho_{(b,w)}$ the realization of the representation $\pi_{(b,w)} := \text{ind}_{\mathfrak{p}(b,w)}^N \chi_{(b,w)}$ of N_b on the space $L^2(\mathbb{R}^s)$.

Theorem 2. *There exists a non-empty relatively open subset $\mathcal{D}' \subset \mathcal{W}'$ such that for all $(b_0, w_0) \in \mathcal{D}'$ and for every relative neighborhood \mathcal{V}_0 of (b_0, w_0) contained in \mathcal{D}' , there exist $(b'_0, w'_0) \in \mathcal{V}_0$ and a relative neighborhood \mathcal{V}'_0 of (b'_0, w'_0) contained in \mathcal{V}_0 such that : For every $D = (D_{(b,w)})_{(b,w) \in \mathcal{V}'_0} \in \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$, there is a smooth family of vectors $X = (X_{(b,w)})_{(b,w) \in \mathcal{V}'_0}$ in the enveloping algebras, i.e. $X_{(b,w)} = \sum_{|\zeta| < C} c_\zeta(b, w) Z^\zeta \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)$, satisfying $d\rho_{(b,w)}(X_{(b,w)}) = D_{(b,w)}$. In the previous formula, Z^ζ is defined by $Z^\zeta = Z_1^{\zeta_1} \dots Z_n^{\zeta_n}$ if $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ and the map $(b, w) \mapsto c_\zeta(b, w)$ is smooth. This result is independent of the choice of the family of smooth Malcev bases used to define the realizations $\rho_{(b,w)}$.*

3.3.3 Proof of the variable generalized Kirillov theorem.

The Kirillov theorem in the fixed case is known. But the proof has to be rewritten, in order to study the dependency on (b, w) .

According to lemma ??, it is easy to see that theorem 2 is independent of the choice of the smooth Malcev basis of \mathfrak{n}_b relative to $\mathfrak{p}(b, w)$ since the transition between two such smooth Malcev bases is given, modulo $\mathfrak{p}(b, w)$, by a smooth bi-polynomial function in the coordinates, with coefficients which are smooth functions in (b, w) for all $(b, w) \in W' \subset \mathcal{W}'$, where W' is a non-empty relatively open subset of \mathcal{W}' . In particular, our differential operators are transformed into differential operators of the same type via this transition. So we may choose appropriate bases to make the proof.

In order to get $\mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s) \subset (d\rho_{(b,w)}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)))_{(b,w)}$, we proceed by induction on the dimension of \mathfrak{n}_b .

If N_b is abelian for all b , then $s = 0$ and the result is trivial.

Assume now that the theorem is true for all variable nilpotent Lie groups and algebras of dimen-

sion less than or equal to $n - 1$. We will show that the theorem also holds for $(N_b)_{b \in \mathfrak{b}}$. Put

$$X(b, w) = \frac{Z_{k_1}}{\langle w, [Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b \rangle}; Y = Z_{j_1}; Z(b, w) = [X(b, w), Y]_b \in \mathfrak{a}(b, w)$$

for all $(b, w) \in \mathcal{D}_1$. If we replace Y by $Y(b, w) = Y - \langle w, Y \rangle Z(b, w)$, we obtain

$$\langle w, Z(b, w) \rangle = 1; \langle w, Y(b, w) \rangle = 0 \text{ and}$$

$$[X(b, w), Y(b, w)]_b = Z(b, w) - \langle w, Y \rangle [X(b, w), Z(b, w)]_b =: \tilde{Z}(b, w)$$

where $X(b, w)$, $Y(b, w)$, $Z(b, w)$ and $\tilde{Z}(b, w)$ are smooth functions.

Since $Z(b, w) \in \mathfrak{a}(b, w) \subset \mathfrak{n}(b, w)$, $\langle w, \tilde{Z}(b, w) \rangle = 1$. So we may replace $Z(b, w)$ by $\tilde{Z}(b, w)$ and call it again $Z(b, w)$.

Given $(b_0, w_0) \in \mathcal{D}_1$, we distinguish three cases :

First Case : $\langle w, [\mathfrak{p}(b, w), Z_{j_1}]_b \rangle = 0$, i.e. $\mathfrak{p}(b, w) \subset \mathfrak{n}_1(b, w)$ for all $(b, w) \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{D}_1$ where \mathcal{V}_0 is a relative neighborhood of (b_0, w_0) contained in \mathcal{D}_1 .

Let $N_1(b, w) = \exp_b \mathfrak{n}_1(b, w)$ be the closed normal subgroup of N_b of Lie algebra $\mathfrak{n}_1(b, w)$ and $N_{(b, w)}^1 = \exp_{(b, w)} \mathfrak{n}_1$ be the associated variable group of dimension $n - 1$. It's easy to see that $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}' \times \mathfrak{n}_1^*$ is a submanifold of $\mathfrak{b} \times \mathfrak{n}^* \times \mathfrak{n}_1^*$ such that

$$\begin{aligned} (b, w, \tilde{w}) \in \mathcal{W}_1 \text{ with } (b, w) \in \mathcal{V}_0 &\implies (b, w) \in \mathcal{W}' \\ &\implies \dim \mathfrak{p}(b, w) \text{ is constant and by hypothesis} \\ &\quad \mathfrak{p}(b, w) \subset \mathfrak{n}_1(b, w) \\ &\implies \text{The dimension of a polarization at } \tilde{w} \text{ in } \mathfrak{n}_1(b, w) \\ &\quad \text{is constant.} \end{aligned}$$

Let $\pi_{(b, w, \tilde{w})}^1$ be the representation of $N_{(b, w)}^1$ identified with the representation $\pi_{(b, w)}^1 = \text{ind}_{P(b, w)}^{N_1(b, w)} \chi_{(b, w)}$ of $N_1(b, w)$. By stage induction, we have $\pi_{(b, w)}^1 \simeq \text{ind}_{N_1(b, w)}^{N_b} \pi_{(b, w)}^1$. The intertwining operator between $\pi_{(b, w)}^1$ and $\text{ind}_{N_1(b, w)}^{N_b} \pi_{(b, w)}^1$ is given by $(V_{(b, w)} \xi(b, w))(t)(g_1) := \xi(b, w)(\exp_b(tX(b, w)) \cdot g_1)$ for all $\xi(b, w) \in L^2(N_b/P(b, w), \chi_{(b, w)})$. We can hence identify the Hilbert space $L^2(N_b/P(b, w), \chi_{(b, w)})$ with $L^2(\mathbb{R}, L^2(N_1(b, w)/P(b, w), \chi_{(b, w, \tilde{w})})) = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_{(b, w)}^1})$.

According to proposition 1 and proposition 2, there exists a non-empty relatively open subset \mathcal{V}'_0 of \mathcal{V}_0 such that $I_1 := I_{\mathcal{B}_1(b, w)}^{\mathfrak{p}(b, w)}$ is a fixed set and $\{Z_j^1(b, w), j \notin I_1\}$ is a smooth Malcev basis of $\mathfrak{n}_1(b, w)$ relative to $\mathfrak{p}(b, w)$ for all $(b, w) \in \mathcal{V}'_0$. We denote this basis by $\mathcal{Y}_{(b, w)}^1 := \{Y_2^1(b, w), \dots, Y_s^1(b, w)\}$. If we put $Y_1^1(b, w) = X(b, w)$, then $\mathcal{Y}'_{(b, w)} := \{Y_1^1(b, w), \dots, Y_s^1(b, w)\}$ is a smooth Malcev basis of \mathfrak{n}_b relative to $\mathfrak{p}(b, w)$.

Let $\pi'_{(b, w)} := \text{ind}_{N_1(b, w)}^{N_b} \pi_{(b, w)}^1$ be the induced representation of N_b on the space $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_{(b, w)}^1})$ and $E_{\mathcal{Y}'_{(b, w)}}(t_2, \dots, t_s) := \exp_b t_2 Y_2^1(b, w) \dots \exp_b t_s Y_s^1(b, w)$. Then $\pi'_{(b, w)}$ and $\rho_{(b, w)}$ are equivalent and the corresponding intertwining operator is given by $(V'_{(b, w)} \eta(b, w))(t, t_2, \dots, t_s) :=$

$\eta(b, w)(t)(E_{\mathcal{H}_{(b,w)}^1}(t_2, \dots, t_s))$ for all $\eta(b, w) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_{(b,w)}^1})$. A simple computation shows that we have for all $\xi(b, w) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_{(b,w)}^1})$ and all $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\pi'_{(b,w)}(\exp_b x X(b, w))\xi(b, w))(t) &= \xi(b, w)(t - x) \\ (\pi'_{(b,w)}(\exp_b y Y(b, w))\xi(b, w))(t) &= e^{iy}\xi(b, w)(t) \\ (\pi'_{(b,w)}(u_{(b,w)}^1)\xi(b, w))(t) &= \pi_{(b,w)}^1((u_{(b,w)}^1)^{(-t)})(\xi(b, w)(t)) \end{aligned}$$

where $u_{(b,w)}^1 \in N_{(b,w)}^1, x, y \in \mathbb{R}$ and where $(u_{(b,w)}^1)^{-t} := \exp_b(-tX(b, w)) \cdot u_{(b,w)}^1 \cdot \exp_b(tX(b, w))$. From now on we will work with \mathcal{C}^∞ vectors, i.e. with Schwartz functions only. It follows that for $X(b, w), Y(b, w) \in \mathfrak{n}_b, d_{(b,w)}^1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_1(b, w))$ and for a smooth vector $\xi(b, w)$, we have

$$\begin{aligned} (d\pi'_{(b,w)}(X(b, w))\xi(b, w))(t) &= -\frac{d}{dt}\xi(b, w)(t) \\ (d\pi'_{(b,w)}(Y(b, w))\xi(b, w))(t) &= it\xi(b, w)(t) \\ (d\pi'_{(b,w)}(d_{(b,w)}^1)\xi(b, w))(t) &= d\pi_{(b,w)}^1((d_{(b,w)}^1)^{-t})(\xi(b, w)(t)) \end{aligned}$$

where $(d_{(b,w)}^1)^{-t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} (ad_b(X(b, w)))^j d_{(b,w)}^1$. Since \mathfrak{n}_b is nilpotent, the previous sum is finite. We denote it by $\sum_{j=0}^m$.

Now we consider $d_{(b,w)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)$ and we define

$$\tilde{d}_{(b,w)} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!i^j} Y^j(b, w) ad_b^j X(b, w) d_{(b,w)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_b).$$

Let us compute $d\pi'_{(b,w)}(\tilde{d}_{(b,w)}^1)$ where $d_{(b,w)}^1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_1(b, w))$. For $\xi(b, w) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_{(b,w)}^1})$ and $t \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} (d\pi'_{(b,w)}(\tilde{d}_{(b,w)}^1)\xi(b, w))(t) &= d\pi_{(b,w)}^1((\tilde{d}_{(b,w)}^1)^{-t})(\xi(b, w)(t)) \\ &= d\pi_{(b,w)}^1\left(\left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!i^j} Y^j(b, w) ad_b^j X(b, w) d_{(b,w)}^1\right)^{-t}\right)(\xi(b, w)(t)) \\ &= (d\pi_{(b,w)}^1)\left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!i^j} (Y^j(b, w))^{-t} (ad_b^j X(b, w)) (d_{(b,w)}^1)^{-t}\right)(\xi(b, w)(t)). \end{aligned}$$

One shows easily that $d\pi_{(b,w)}^1(Y^{-t}(b, w)) = it\mathbb{I}_{\mathcal{H}_{\pi_{(b,w)}^1}}$. Then we get

$$\begin{aligned} (d\pi'_{(b,w)}(\tilde{d}_{(b,w)}^1)\xi(b, w))(t) &= d\pi_{(b,w)}^1\left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} t^j (ad_b^j X(b, w)) (d_{(b,w)}^1)^{-t}\right)(\xi(b, w)(t)) \\ &= d\pi_{(b,w)}^1(d_{(b,w)}^1)(\xi(b, w)(t)). \end{aligned}$$

Let $\rho'_{(b,w)}$ be the realization of the representation $\pi'_{(b,w)}$ on $L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{s-1}))$ with an appropriate choice of smooth Malcev bases of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(b, w)$. Since $\pi'_{(b,w)} \equiv \pi_{(b,w)}$, then $\rho_{(b,w)}$ and

$\rho'_{(b,w)}$ are equivalent and we denote $S_{(b,w)}$ the corresponding intertwining operator. It is defined by $(S_{(b,w)}\tilde{\xi}(b,w))(t_1)(t_2, \dots, t_s) = \tilde{\xi}(b,w)(t_1, t_2, \dots, t_s)$. For all $\eta(b,w) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$, we have

$$\begin{aligned} (d\rho_{(b,w)}(X(b,w))\eta(b,w))(t_1, \dots, t_s) &= -\frac{d}{dt_1}\eta(b,w)(t_1, \dots, t_s) \\ (d\rho_{(b,w)}(Y(b,w))\eta(b,w))(t_1, \dots, t_s) &= it_1\eta(b,w)(t_1, \dots, t_s) \\ (d\rho_{(b,w)}(\tilde{d}_{(b,w)}^1)\eta(b,w))(t_1, t_2, \dots, t_s) &= (d\rho_{(b,w)}^1(\tilde{d}_{(b,w)}^1)((S_{(b,w)}\eta(b,w))(t_1)))(t_2, \dots, t_s) \end{aligned}$$

where $\rho_{(b,w)}^1$ is the induced representation $\pi_{(b,w)}^1$ realized on $L^2(\mathbb{R}^{s-1})$.

Let now $D_{(b,w)}$ be a smooth differential operator in the coordinates (t_2, \dots, t_s) with polynomial coefficients in the coordinates (t_2, \dots, t_s) . We may of course identify it with a differential operator in the coordinates (t_1, \dots, t_s) , which is constant in the direction of t_1 and write

$$(D_{(b,w)}\eta(b,w))(t_1, \dots, t_s) = D_{(b,w)}((S_{(b,w)}\eta(b,w))(t_1))(t_2, \dots, t_s)$$

for all $\eta(b,w) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$. The induction hypothesis applied to $d\rho_{(b,w)}^1$ gives us the existence of a smooth family $(U_{(b,w)}^1)_{(b,w)}$ in the enveloping algebras such that

$$\begin{aligned} (D_{(b,w)}\eta(b,w))(t_1, \dots, t_s) &= D_{(b,w)}((S_{(b,w)}\eta(b,w))(t_1))(t_2, \dots, t_s) \\ &= d\rho_{(b,w)}^1(U_{(b,w)}^1)((S_{(b,w)}\eta(b,w))(t_1))(t_2, \dots, t_s) \\ &= d\rho_{(b,w)}(\tilde{U}_{(b,w)}^1)\eta(b,w)(t_1, t_2, \dots, t_s). \end{aligned}$$

This implies that $(d\rho_{(b,w)}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)))_{(b,w) \in \mathcal{V}'_0}$ contains all the (b,w) - smooth differential operators with polynomial coefficients in the variables (t_2, \dots, t_s) . As it also contains the operator $\frac{\partial}{\partial t_1}$ and the multiplication operator by t_1 , it contains all of $\mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$.

Second case : $\langle w, [\mathfrak{p}(b,w), Z_{j_1}]_b \rangle \neq 0$ for all $(b,w) \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{D}_1$, i.e. for all $(b,w) \in \mathcal{V}_0$, a relative neighborhood of (b_0, w_0) , we have $\mathfrak{p}(b,w) \not\subset \mathfrak{n}_1(b,w)$. Let us now show that there exists a smooth family of vectors $\tilde{X}(b,w)$ in \mathfrak{n} satisfying the following conditions

$$\tilde{X}(b,w) \in \mathfrak{p}(b,w); \quad \tilde{X}(b,w) - X(b,w) \in \mathfrak{n}_1(b,w); \quad \langle w, \tilde{X}(b,w) \rangle = 0$$

In fact, there exists $\tilde{X}(b,w) \in \mathfrak{p}(b,w)$ such that $\langle w, [\tilde{X}(b,w), Z_{j_1}] \rangle \neq 0$. As, $\mathfrak{n} = \mathbb{R}X(b,w) \oplus \mathfrak{n}_1(b,w)$, we may choose this vector of the form $\tilde{X}(b,w) = X(b,w) + U(b,w)$ with $U(b,w) \in \mathfrak{n}_1(b,w)$. By adding an appropriate multiple of $Z(b,w)$, we may even assume that $\langle w, \tilde{X}(b,w) \rangle = 0$.

Let us now show that the previous choice implies that the family $(\tilde{X}(b,w))_{(b,w)}$ can be chosen smoothly in a certain non-empty relatively open subset \mathcal{V}' of \mathcal{V}_0 . In fact, if we characterize $\mathfrak{p}(b,w)$ by a system of cartesian equations with smooth coefficients in (b,w) , then the three defining conditions of $\tilde{X}(b,w)$ can be expressed as a system of linear equations in the coordinates of $\tilde{X}(b,w)$ with smooth coefficients in (b,w) . By construction, this system has solutions for every (b,w) . We may then construct a smooth solution of the system in a certain non-empty relatively

open subset \mathcal{V}' in \mathcal{V}_0 .

One has $\mathfrak{p}(b, w) = \mathfrak{p}(b, w) \cap \mathfrak{n}_1(b, w) + \mathbb{R}\tilde{X}(b, w)$. Let us now consider $\mathfrak{p}'(b, w) = \mathfrak{p}(b, w) \cap \mathfrak{n}_1(b, w) + \mathbb{R}Y(b, w)$. It is easy to check that this is again a smooth family of polarizations.

According to the first case, we know that the generalized Kirillov result is true for the family of polarizations $\mathfrak{p}'(b, w) \subset \mathfrak{n}_1(b, w)$. We are going to transfer this result to the family of polarizations $(\mathfrak{p}(b, w))_{(b, w)}$ by studying explicitly the intertwining operators between the families of associated representations, as well as their dependency in (b, w) . Since $\mathfrak{p}'(b, w)$ is a polarization of w in \mathfrak{n}_b , it implies that $\pi_{(b, w)} \simeq \pi'_{(b, w)}$ where $\pi'_{(b, w)} = \text{ind}_{P'(b, w)}^{N_b} \chi_{(b, w)}$ and $P'(b, w) = \exp_b \mathfrak{p}'(b, w)$. Hence there exists a family of intertwining operators $T_{(b, w)}$. For a fixed (b, w) , this intertwining operator may be given by

$$\begin{aligned} T_{(b, w)} \xi((b, w))(g_1 \cdot \exp_b x \tilde{X}(b, w)) &:= \int_{\mathbb{R}} \xi(b, w)(g_1 \cdot \exp_b x \tilde{X}(b, w) \cdot \exp_b y Y(b, w)) \\ &\quad \underbrace{\chi_{(b, w)}(\exp_b y Y(b, w))}_{=1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \xi(b, w)(g_1 \cdot \exp_b y Y(b, w)) dy \end{aligned}$$

according to [11], for all $g_1 \in N_1(b, w)$ and $x \in \mathbb{R}$.

We now have to study the realizations of $\pi_{(b, w)}$ and $\pi'_{(b, w)}$ on the space $L^2(\mathbb{R}^s)$. As the result of the theorem will be independent of the choice of the corresponding smooth families of Malcev bases, let's proceed as follows : It is easy to check that $\mathfrak{p}(b, w) + \mathfrak{p}'(b, w)$ is a subalgebra of \mathfrak{n}_b for all (b, w) . Hence we may pick an arbitrary smooth family $\{V_1(b, w), \dots, V_{s-1}(b, w)\}$ of Malcev bases of \mathfrak{n}_b relative to $\mathfrak{p}(b, w) + \mathfrak{p}'(b, w)$. This may for instance be done by the index method in proposition 2, which remains valid in the variable case. It is even possible to choose these vectors $V_1(b, w), \dots, V_{s-1}(b, w)$ in $\mathfrak{n}_1(b, w)$, what we will do. In the process of choosing this family of bases, we might have to restrict once more the relatively open set \mathcal{V}' to a non-empty relatively open subset \mathcal{V}'_0 of \mathcal{V}_0 .

Then one checks that $\{V_1(b, w), \dots, V_{s-1}(b, w), Y(b, w)\}$ is a smooth family of Malcev bases of \mathfrak{n}_b relative to $\mathfrak{p}(b, w)$ and that $\{V_1(b, w), \dots, V_{s-1}(b, w), \tilde{X}(b, w)\}$ is a smooth family of Malcev bases of \mathfrak{n}_b relative to $\mathfrak{p}'(b, w)$. These two families of bases are then used to define $\rho_{(b, w)}$ and $\rho'_{(b, w)}$. For any $\xi(b, w) \in \mathcal{H}_{\pi_{(b, w)}}$, we define $\tilde{\xi}(b, w) \in L^2(\mathbb{R}^s)$ by

$$\tilde{\xi}(b, w)(v_1, \dots, v_{s-1}, y) := \xi(b, w)(\exp v_1 V_1(b, w) \dots \exp v_{s-1} V_{s-1}(b, w) \cdot \exp y Y(b, w))$$

and we identify thus $\mathcal{H}_{\pi_{(b, w)}}$ with $L^2(\mathbb{R}^s)$, and $\pi_{(b, w)}$ with $\rho_{(b, w)}$. Similarly, for $\xi'(b, w) \in \mathcal{H}_{\pi'_{(b, w)}}$, we define $\tilde{\xi}'(b, w) \in L^2(\mathbb{R}^s)$ by

$$\tilde{\xi}'(b, w)(v_1, \dots, v_{s-1}, x) := \xi'(b, w)(\exp v_1 V_1(b, w) \dots \exp v_{s-1} V_{s-1}(b, w) \cdot \exp x \tilde{X}(b, w))$$

and we identify thus $\mathcal{H}_{\pi'_{(b, w)}}$ with $L^2(\mathbb{R}^s)$, and $\pi'_{(b, w)}$ with $\rho'_{(b, w)}$ acting on $L^2(\mathbb{R}^s)$. The intertwining operator $\tilde{T}_{(b, w)}$ between $\rho_{(b, w)}$ and $\rho'_{(b, w)}$ is then deduced from $T_{(b, w)}$ and is given by

$$(\tilde{T}_{(b, w)} \tilde{\xi}(b, w))(v_1, \dots, v_{s-1}, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \tilde{\xi}(b, w)(v_1, \dots, v_{s-1}, y) dy.$$

It is nothing but a partial Fourier transform which sends $\mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ onto itself and $\mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$ onto itself. As the Kirillov result is true for the family $(\rho'_{(b,w)})_{(b,w)}$ by the first case, it remains hence true for the family $(\rho_{(b,w)})_{(b,w)}$, thanks to this smooth family of intertwining operators, i.e. $\mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s) \subset (d\rho_{(b,w)}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)))_{(b,w) \in \mathcal{V}'_0}$.

Third case : $\langle w_0, [\mathfrak{p}(b_0, w_0), Z_{j_1}]_{b_0} \rangle = 0$ and for every neighborhood \mathcal{V}_0 of (b_0, w_0) there exists $(b', w') \in \mathcal{V}_0$ such that $\langle w', [\mathfrak{p}(b', w'), Z_{j_1}]_{b'} \rangle \neq 0$. Then there exists a neighborhood \mathcal{V}' of (b', w') contained in \mathcal{V}_0 such that for all $(b'', w'') \in \mathcal{V}'$, we have $\langle w'', [\mathfrak{p}(b'', w''), Z_{j_1}]_{b''} \rangle \neq 0$ and we apply the second case to all $(b'', w'') \in \mathcal{V}'$. This proves that there exists a non-empty relatively open subset \mathcal{V}'_0 of \mathcal{V}' such that $\mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s) \subset (d\rho_{(b,w)}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)))_{(b,w) \in \mathcal{V}'_0}$.

The other inclusion, $(d\rho_{(b,w)}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_b)))_{(b,w) \in \mathcal{V}'} \subset \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}', \mathbb{R}^s)$, for any non-empty relatively open subset \mathcal{V}' in \mathcal{W}' , may be easily checked. \square

Remark 2. If \mathfrak{b} is reduced to a single point, i.e. if there is no variable structure but a fixed Lie group, then we have theorem 1.

Remark 3. In the particular case where $\mathcal{W} = \mathfrak{n}_{gen}^*$, the set of generic linear forms in the sense of Ludwig-Zahir [22], there exists a more precise result : For every differential operator D on \mathbb{R}^s , there exists a rational mapping

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{gen}^* &\longrightarrow \mathcal{U}(n) \\ w &\longmapsto A(w) = \sum_{|I| \leq n_0} a_I(w) Z^I \end{aligned}$$

such that $d\rho_w(A(w)) = D$ for all $w \in \mathfrak{n}_{gen}^*$ (see [21]).

3.4 Smooth families of intertwining operators.

Let $(\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ and $(\mathfrak{p}'(w))_{w \in \mathcal{W}}$ be two smooth families of polarisations in \mathfrak{n} . Let us first recall that there exist a non-empty relatively open subset W of \mathcal{W} and a smooth SP-basis $\{U_1(w), \dots, U_s(w)\}$ of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$ such that $\{U_{b+1}(w), \dots, U_s(w)\}$ is a smooth SP-basis of $\mathfrak{p}'(w)$ relative to $\mathfrak{p}(w) \cap \mathfrak{p}'(w)$ for all $w \in W$ (proposition 4). Similarly, there exist a non-empty relatively open subset \tilde{W} of W and a smooth SP-basis $\{U'_1(w), \dots, U'_s(w)\}$ of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}'(w)$ such that $\{U'_{b+1}(w), \dots, U'_s(w)\}$ is a smooth SP-basis of $\mathfrak{p}(w)$ relative to $\mathfrak{p}(w) \cap \mathfrak{p}'(w)$ for all $w \in \tilde{W}$. Let us also recall that we may use SP-bases instead of Malcev bases to define invariant measures on the quotients.

We may then apply the results of G. Lion [11] pointwise. Let $w \in W$ be fixed. For every

$\xi(w) \in \mathcal{H}_{\pi_w}^\infty = \mathcal{S}(N/P(w), \chi_w)$, the integral

$$\begin{aligned} T_w \xi(w; g) &:= T_w \xi(w)(g) \\ &= \int_{P'(w)/P(w) \cap P'(w)} \xi(w; gu) \chi_w(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^{s-b}} \xi(w; g \cdot \exp u_{b+1} U_{b+1}(w) \dots \exp u_s U_s(w)) \\ &\quad e^{-i \langle w, \log(\exp u_{b+1} U_{b+1}(w) \dots \exp u_s U_s(w)) \rangle} du_{b+1} \dots du_s \end{aligned}$$

converges for every $g \in N$. The operator T_w defines a homeomorphism from $\mathcal{H}_{\pi_w}^\infty = \mathcal{S}(N/P(w), \chi_w)$ onto $\mathcal{H}_{\pi'_w}^\infty = \mathcal{S}(N/P'(w), \chi_w)$. It may be extended to an intertwining operator for π_w and π'_w , between the spaces $\mathcal{H}_{\pi_w} = L^2(N/P(w), \chi_w)$ and $\mathcal{H}_{\pi'_w} = L^2(N/P'(w), \chi_w)$. If the measure on $P'(w)/P(w) \cap P'(w)$ is correctly normalized (which may for instance be obtained by multiplying one of the vectors of the basis \mathcal{Z}_w by a constant), then T_w is an isometry.

In this section, our aim is to establish similar results for the family $(T_w)_{w \in \mathcal{U}}$ as a whole, for some non-empty relatively open subset \mathcal{U} of W and to do it in a smooth way. This has of course to be specified. We need some preliminary results.

Let us first introduce some definitions and notations (see also definition 8). For every $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ we denote, as previously, the corresponding element of $\mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s))$ by $\tilde{\xi}$, the identification of $\mathcal{S}(N/P, \chi)$ with $\mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ being made via any smooth Malcev basis. For $A \in \mathbb{N}$, $D = (D_w)_{w \in W} \in \mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$, we put

$$\|\tilde{\xi}(w)\|_{A,D} = \sup_{|a| \leq A} \sup_{(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^s} \left| \frac{\partial^a}{\partial w^a} D_w(u) \tilde{\xi}(w; u_1, \dots, u_s) \right| < \infty,$$

if w is in a fixed chart of W , so that $\frac{\partial^a}{\partial w^a}$ makes sense.

For any compact subset K contained in a chart of W , we have

$$\|\tilde{\xi}\|_{A,D}^K = \sup_{w \in K} \|\tilde{\xi}(w)\|_{A,D}.$$

Let now $g := (g_w)_{w \in W}$ a family of elements of N such that the map $w \mapsto g_w$ is smooth and let $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$. We write ${}_{g^{-1}}\xi$ for the function defined by

$$({}_{g^{-1}}\xi)(w)(x) = {}_{g^{-1}}(\xi(w))(x) = \xi(w)(g_w \cdot x) = \xi(w; g_w \cdot x).$$

It is easy to check that ${}_{g^{-1}}\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ too.

Let $\mathcal{B}_w = \{V_1(w), \dots, V_n(w)\}$ be any smooth Malcev basis of \mathfrak{n} . If $g_w = \prod_{i=1}^n \exp(g_i(w)V_i(w))$, we write $\|g_w\|_{\mathcal{B}_w}^2 = \sum_{i=1}^n g_i(w)^2$. If \mathcal{B}'_w is any other such smooth Malcev basis, then there exist a strictly positive continuous function $w \mapsto C(w)$ and $R \in \mathbb{N}^*$ such that

$$\|g_w\|_{\mathcal{B}'_w}^2 \leq C(w)(1 + \|g_w\|_{\mathcal{B}_w}^2)^R \quad (3.5)$$

for all w . The exponent R may be chosen independently of w . As a matter of fact it only depends on the structure of the Campbell-Baker-Hausdorff formula, i.e. on the degree of nilpotency of \mathfrak{n} . This inequality is obtained by passing from coordinates of the second kind to coordinates of the first kind, making the change of basis and going back to coordinates of the second kind.

Now, we introduce some technical lemmas.

Lemma 2. Let $\tilde{\mathcal{B}}_w = \{V_1(w), \dots, V_s(w), X_1(w), \dots, X_r(w)\}$ be a any smooth Malcev basis of \mathfrak{n} such that $\{V_1(w), \dots, V_s(w)\}$ is a smooth Malcev basis of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}(w)$ and $\{X_1(w), \dots, X_r(w)\}$ is a smooth Malcev basis of $\mathfrak{p}(w)$. So $s + r = n$. Let $g = (g_w)_w$ be smooth and let $g_1(w), \dots, g_n(w)$ denote the coordinates of the second kind of g_w . If one defines $u : w \mapsto u(w) = \exp u_1 V_1(w) \dots \exp u_s V_s(w)$ where $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}$ are independent of w , then

$$g_w \cdot u(w) = \exp(Q_1(w; g_1(w), \dots, g_n(w), u_1, \dots, u_s) V_1(w)) \dots \exp(Q_s(w; g_1(w), \dots, g_n(w), u_1, \dots, u_s) V_s(w)) \cdot R(w; g_1(w), \dots, g_n(w), u_1, \dots, u_s)$$

where $R(w; g_1(w), \dots, g_n(w), u_1, \dots, u_s) \in P(w)$.

The map $(u_1, \dots, u_s) \mapsto (Q_1(w; g_1(w), \dots, g_n(w), u_1, \dots, u_s), \dots, Q_s(w; g_1(w), \dots, g_n(w), u_1, \dots, u_s))$ is bi-polynomial with respect to the variables (u_1, \dots, u_s) . The coefficients of these polynomial functions may be expressed as polynomial functions in $g_1(w), \dots, g_n(w)$ with coefficients that are \mathcal{C}^∞ in w . Similarly for the inverse map.

Proof. Similar arguments as in the fixed case. See for instance [3]. □

Lemma 3. Let us take the same hypotheses as in lemma 2 and let's assume that w runs through a fixed chart of W . Given $A \in \mathbb{N}$ and $D \in \mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$, there exists a finite collection $N_j, A_j \in \mathbb{N}$, $D_j \in \mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$ and smooth positive functions $C_j(w)$, for $j \in \{1, \dots, d\}$ such that for all $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s))$ and every smooth family $g = (g_w)_{w \in W}$ of elements of N we have,

$$\begin{aligned} \|[g^{-1}\tilde{\xi}(w)]\tilde{\ } \|_{A,D} &= \|[g_w^{-1}(\tilde{\xi}(w))]\tilde{\ } \|_{A,D} \\ &\leq \sum_{j=1}^d C_j(w) (1 + \|g_w\|_{\mathcal{B}_w}^2)^{N_j} \|\tilde{\xi}(w)\|_{A_j, D_j} < \infty. \end{aligned}$$

If K is any compact subset of W contained in the fixed chart of W , we have for some positive constant C depending on g

$$\|(g^{-1}\tilde{\xi})\tilde{\ } \|_{A,D}^K \leq C \sum_{j=1}^d \|\tilde{\xi}\|_{A_j, D_j}^K < \infty.$$

If $A = 0$, i.e. if there is no derivative in w , then all the A_j 's may be taken to be 0 too.

Proof. Obvious by lemma 2 and by the facts that all the functions in w are bounded on the compact set K . □

Remark 4. In case the coordinates $g_i = g_i(w)$ are all fixed, the second bound may be written as

$$\|(g^{-1}\tilde{\xi})\tilde{\ } \|_{A,D}^K \leq C (1 + \sum_{i=1}^n g_i^2)^N \sum_{j=1}^d \|\tilde{\xi}\|_{A_j, D_j}^K < \infty$$

where $N = \max(N_1, \dots, N_d)$.

We denote $\tilde{\xi}$ and $\tilde{\xi}(w; \cdot)$ for the function ξ written in the coordinates of the second kind in any smooth Malcev basis $\{V_1(w), \dots, V_s(w)\}$. On the other hand, we will write $\tilde{\xi}_{SP}$ for the corresponding function on $\mathbb{R}^{s-b} \equiv P'(w)/P(w) \cap P'(w)$, resp. on $\mathbb{R}^s \equiv N/P(w)$, defined by

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{SP}(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s) &= \xi(w; \exp u_{b+1} U_{b+1}(w) \dots \exp u_s U_s(w)) \\ \tilde{\xi}_{SP}(w; u_1, \dots, u_s) &= \xi(w; \exp u_1 U_1(w) \dots \exp u_s U_s(w))\end{aligned}$$

where the $U_j(w)$'s are the vectors of the SP-basis. This will in particular be used to compute integrals over $P'(w)/P(w) \cap P(w)$.

We remark that for fixed $w \in W$, we have the intertwining operator T_w defined by

$$T_w \xi(w; g) = \int_{P'(w)/P(w) \cap P'(w)} \xi(w; gu) \chi_w(u) du.$$

This defines $T = (T_w)_w$ on $\mathcal{H} \mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ by $(T\xi)(w) := T_w(\xi(w))$. We may also view it as acting on $\mathcal{H} \mathcal{S}(W, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s))$ by $\tilde{T} = (\tilde{T}_w)_w$ where $(\tilde{T}\tilde{\xi})(w) = \tilde{T}_w(\tilde{\xi}(w)) := (T_w(\xi(w)))^\sim$. For fixed w , \tilde{T}_w is then an intertwining operator between ρ_w and ρ'_w . We will use the smooth Malcev basis $\{V_1(w), \dots, V_s(w)\}$ to compute the Schwartz semi-norms on $\mathcal{S}(N/P(w), \chi_w)$, as explained in the beginning of this section, by identifying $\xi(w)$ and $\tilde{\xi}(w)$.

We have the following result :

Lemma 4. *For every $\tilde{M} \in \mathbb{N}$, there exists $M \in \mathbb{N}$ and a continuous family of positive constants $(C(w))_w$ such that*

$$\begin{aligned}\|\tilde{\xi}_{SP}(w)\|_{0, D_{\tilde{M}}} &:= \sup_{(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^s} \left| \left(1 + \sum_{j=1}^s u_j^2\right)^{\tilde{M}} \tilde{\xi}_{SP}(w)(u_1, \dots, u_s) \right| \\ &= \sup_{(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^s} \left| \left(1 + \sum_{j=1}^s u_j^2\right)^{\tilde{M}} \xi(w)(\exp u_1 U_1(w) \dots \exp u_s U_s(w)) \right| \\ &\leq C(w) \sup_{(v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s} \left| \left(1 + \sum_{j=1}^s v_j^2\right)^M \xi(w)(\exp v_1 V_1(w) \dots \exp v_s V_s(w)) \right| \\ &\leq C(w) \sup_{(v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s} \left| \left(1 + \sum_{j=1}^s v_j^2\right)^M \tilde{\xi}(w)(v_1, \dots, v_s) \right| \\ &=: C(w) \|\tilde{\xi}(w)\|_{0, D_M}\end{aligned}$$

Proof. As a smooth Malcev basis is also an SP-basis, we know by proposition 5 that the change of coordinates

$$(u_1, \dots, u_s) \longmapsto (v_1, \dots, v_s)$$

is bipolynomial with smooth coefficients in w in both directions. Moreover any polynomial $P(w, x_1, \dots, x_s)$ is bounded by some $C(w)(1 + \sum_{j=1}^s x_j^2)^N$. \square

We then get the following bounds for these intertwining operators T_w and \tilde{T}_w .

Lemma 5. *There exist a continuous family of positive constants $(C(w))_w$ and an integer $M \in \mathbb{N}^*$ such that, for all w ,*

$$|T_w \xi(w; e)| = |\tilde{T}_w \tilde{\xi}(w; 0)| \leq C(w) \|\tilde{\xi}(w)\|_{0, D_M} < \infty$$

where e is the unit element of the group N and D_M is the element of $\mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$ defined by multiplication by $(1 + \sum_{j=1}^s v_j^2)^M$ if the coordinates of $\tilde{\xi}(w)$ are denoted by (v_1, \dots, v_s) .

If K is a compact subset of a fixed chart and if $w \in K$ we have of course

$$|T_w \xi(w; e)| = |\tilde{T}_w \tilde{\xi}(w; 0)| \leq C \|\tilde{\xi}\|_{0, D_M}^K < \infty.$$

where $C = \sup_{w \in K} C(w)$.

Proof. Let $\tilde{M} \in \mathbb{N}^*$ such that

$$A := \int_{\mathbb{R}^{s-b}} \frac{1}{(1 + \sum_{j=b+1}^s u_j^2)^{\tilde{M}}} du_{b+1} \dots du_s < \infty.$$

Then

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_w \tilde{\xi}(w; 0)| &= |T_w \xi(w, e)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{s-b}} |\tilde{\xi}_{SP}(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)| du_{b+1} \dots du_s \\ &\leq A \cdot \sup_{(u_{b+1}, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^{s-b}} |(1 + \sum_{j=b+1}^s u_j^2)^{\tilde{M}} \tilde{\xi}_{SP}(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)| \\ &\leq A \cdot \|\tilde{\xi}_{SP}(w)\|_{0, D_{\tilde{M}}} \\ &\leq C(w) \|\tilde{\xi}(w)\|_{0, D_M} < \infty \end{aligned}$$

for some M and some $C(w)$. □

Let $\tilde{\mathcal{B}}_w$ be the smooth Malcev basis as in lemma 2. Similarly, let $\tilde{\mathcal{B}}'_w = \{V'_1(w), \dots, V'_s(w), X'_1(w), \dots, X'_r(w)\}$ be any similar smooth Malcev basis of \mathfrak{n} , replacing $\mathfrak{p}(w)$ by $\mathfrak{p}'(w)$. We have :

Lemma 6. *There exist a finite family of smooth positive functions $\tilde{C}_j(w)$, integers $A_j, M_j, \tilde{M}_j \in \mathbb{N}$, partial differential operators $D_{M_j} \in \mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$, $j \in \{1, \dots, d\}$ such that*

$$|T_w \xi(w; g_w)| \leq \sum_{j=1}^d \tilde{C}_j(w) (1 + \|g_w\|_{\tilde{\mathcal{B}}'_w}^2)^{\tilde{M}_j} \|\tilde{\xi}(w)\|_{0, D_{M_j}} < \infty$$

for all $\xi \in \mathcal{K}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$, for every smooth family $g = (g_w)_w$, of elements N and for all $w \in W$.

Proof.

$$\begin{aligned}
|T_w \xi(w; g_w)| &= |T_w(g_w^{-1} \xi(w; e))| \\
&\leq C(w) \| (g_w^{-1} \xi)(w) \|_{0, D_M} \text{ by lemma 5} \\
&\leq C(w) \sum_{j=1}^d C_j(w) (1 + \|g_w\|_{\mathcal{B}_w}^2)^{N_j} \| \tilde{\xi}(w) \|_{0, D_{M_j}} \text{ by lemma 3} \\
&\leq \sum_{j=1}^d \tilde{C}_j(w) (1 + \|g_w\|_{\mathcal{B}_w}^2)^{\tilde{M}_j} \| \tilde{\xi}(w) \|_{0, D_{M_j}} < \infty \text{ by (3.5)}
\end{aligned}$$

Remark 5. If g_w is of the form $g_w = \exp v_1 V_1'(w) \dots \exp v_s V_s'(w)$ for fixed $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}$, we have

$$| \tilde{T}_w \tilde{\xi}(w; v_1, \dots, v_s) | \leq (1 + \sum_{i=1}^s v_i^2)^M \sum_{j=1}^d \tilde{C}_j(w) \| \tilde{\xi}(w) \|_{0, D_{M_j}}$$

where $M = \sup_{j=1, \dots, d} \tilde{M}_j$. For $w \in K$, we even have

$$| \tilde{T}_w \tilde{\xi}(w; v_1, \dots, v_s) | \leq C (1 + \sum_{i=1}^s v_i^2)^M \sum_{j=1}^d \| \tilde{\xi} \|_{0, D_{M_j}}^K.$$

Remark 6. Let now K be a compact subset contained in a chart so that $\frac{\partial^a}{\partial w^a}$ makes sense. For a multi-index a and $w \in K$, we have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^a}{\partial w^a} (\tilde{T}_w \tilde{\xi})(w; 0) &= \frac{\partial^a}{\partial w^a} \int_{\mathbb{R}^{s-b}} \tilde{\xi}_{SP}(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s) \prod_{j=b+1}^s e^{-iu_j \langle w, U_j(w) \rangle} du_{b+1} \dots du_s \\
&= \int_{\mathbb{R}^{s-b}} \frac{\partial^a}{\partial w^a} [\tilde{\xi}_{SP}(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s) \prod_{j=b+1}^s e^{-iu_j \langle w, U_j(w) \rangle}] du_{b+1} \dots du_s.
\end{aligned}$$

In fact, $\tilde{\xi}_{SP} \in \mathcal{H} \mathcal{S}(W, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s))$, as this is the case for $\tilde{\xi}$ and as the change of coordinates is bipolynomial with smooth coefficients. It is then easy to check the hypothesis of the theorem which allows to interchange derivation and integration [5]. If we apply successively the formula of derivation of a product of functions, we see that there exist two finite families of polynomial functions $P_k(w, 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)$ and $Q_i(w, 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)$, indexed by multi-indices k and i which are \mathcal{C}^∞ in w such that

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^a}{\partial w^a} (\tilde{T}_w \tilde{\xi})(w; 0) &= \int_{\mathbb{R}^{s-b}} \sum_{|k| \leq |a|} [(\frac{\partial^k}{\partial w^k} \tilde{\xi}_{SP})(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)] \\
&\quad \cdot P_k(w, 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s) \prod_{j=b+1}^s e^{-iu_j \langle w, U_j(w) \rangle} du_{b+1} \dots du_s \\
&= \int_{\mathbb{R}^{s-b}} \sum_{|i| \leq |a|} \frac{\partial^i}{\partial w^i} [Q_i(w, 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s) \tilde{\xi}_{SP}(w; 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)] \\
&\quad \prod_{j=b+1}^s e^{-iu_j \langle w, U_j(w) \rangle} du_{b+1} \dots du_s.
\end{aligned}$$

Let us consider $Q_i(w, 0, \dots, 0, u_{b+1}, \dots, u_s)$ as a polynomial in u_1, \dots, u_s which is constant in u_1, \dots, u_b and which we will also denote by Q_i . Let (v_1, \dots, v_s) denote the coordinates in the Malcev basis $(V_1(w), \dots, V_s(w))$. We know that the change of coordinates between the u 's and the v 's is bipolynomial with smooth coefficients in w . In this change of coordinates the polynomial Q_i is hence changed into a new polynomial R_i in the variables v_1, \dots, v_s , such that $Q_i = (R_i)_{SP}$. Hence $Q_i(w, \cdot) \tilde{\xi}_{SP}(w, \cdot)$ becomes $R_i(w, \cdot) \tilde{\xi}(w, \cdot)$ if we change from coordinates u_j to v_j and

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^a}{\partial w^a} (\tilde{T}_w \tilde{\xi})(w; 0) \right| &\leq \sum_{|i| \leq |a|} \left| \tilde{T}_w \left(\frac{\partial^i}{\partial w^i} (Q_i(w; \cdot) \tilde{\xi}_{SP}(w; \cdot))(0) \right) \right| \\ &\leq C(w) \sum_{|i| \leq |a|} \left\| \frac{\partial^i}{\partial w^i} (R_i(w; \cdot) \tilde{\xi}(w; \cdot)) \right\|_{0, D_{M_i}} \text{ by lemma 5} \\ &\leq C(w) \sum_{|i| \leq |a|} \left\| \tilde{\xi}(w) \right\|_{|a|, D_{M_i} D_i} \\ &\leq C(w) \sum_{|i| \leq |a|} \left\| \tilde{\xi}(w) \right\|_{|a|, \tilde{D}_i} < \infty \end{aligned}$$

where D_i is the element of $\mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$ obtained by multiplication by R_i and $\tilde{D}_i = D_{M_i} D_i$. Finally, we get :

Lemma 7. *For any compact subset K contained in a fixed chart of W and for any multi-index a , there exist $C > 0, M \in \mathbb{N}$ and finite families of multi-indices A_j and of differential operators $D_j \in \mathcal{P}\mathcal{D}(W, \mathbb{R}^s)$, $j \in \{1, \dots, d\}$ such that*

$$\left| \frac{\partial^a}{\partial w^a} (\tilde{T}_w \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s) \right| \leq C \left(1 + \sum_{i=1}^s v_i^2 \right)^M \sum_{j=1}^d \left\| \tilde{\xi} \right\|_{A_j, D_j}^K < \infty$$

for all $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s))$ and for all $w \in K$.

Proof. By arguments similar to the ones in lemma 6 and remark 5. □

Definition 10. A family $T = (T_w)_w$ of linear operators from $\mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ to $\mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P', \chi))$ is said to be smooth if, for every $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P, \chi))$ and $\xi' \in \mathcal{H}\mathcal{S}(W, \mathcal{S}(N/P', \chi))$, the map $w \mapsto \langle T_w(\xi(w)), \xi'(w) \rangle_{L^2(N/P'(w), \chi_w)}$ is smooth. In this definition, we assume of course that we have chosen a smooth family of bases of \mathfrak{n} relative to $\mathfrak{p}'(w)$ and that we endow $N/P'(w)$ with the corresponding Lebesgue measure.

We are now prepared for our final result.

Theorem 3. *Let \mathcal{W} be a submanifold of \mathfrak{n}^* such that the dimension of polarizations associated to elements of \mathcal{W} is fixed. We consider $(\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ and $(\mathfrak{p}'(w))_{w \in \mathcal{W}}$ two smooth families of polarizations of the elements of \mathcal{W} in \mathfrak{n} . Then, there exists a non-empty relative open subset $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$*

such that for every $w_0 \in \mathcal{U}$ and for every relative open neighborhood \mathcal{V}_0 of w_0 in \mathcal{U} there exist $w'_0 \in \mathcal{V}_0$ and a relative open neighborhood \mathcal{V}'_0 of w'_0 in \mathcal{V}_0 such that

$$T := (T_w)_w : \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi)) \longrightarrow \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi))$$

defines a continuous linear operator. Moreover, $(T_w)_w$ is a smooth family of intertwining operators between (π_w) and (π'_w) .

Proof. We know by [11], that $T_w(\xi(w))$ converges for every w and may be extended to all $\xi(w) \in L^2(N/P(w), \chi_w)$, that T_w intertwines π_w and π'_w , and that \tilde{T}_w intertwines ρ_w and ρ'_w . The smoothness of $w \mapsto \langle T_w(\xi(w)), \xi'(w) \rangle_{L^2(N/P'(w), \chi_w)}$ is due to the fact that it is possible interchange derivation and integration (see [5]).

In the proof of the continuity of $T = (T_w)_w$, we will use the bounds established for

$|\frac{\partial^a}{\partial w^a} \tilde{T}_w(\tilde{\xi}(w))|$ in lemma 7.

By theorem 1, there exists a non-empty relatively open subset \mathcal{U} of W such that for every $w_0 \in \mathcal{U}$ and for every relative neighborhood \mathcal{V}_0 of w_0 in \mathcal{U} there exists $w'_0 \in \mathcal{V}_0$ and a relative neighborhood \mathcal{V}'_0 of w'_0 in \mathcal{V}_0 with the following properties : For every $D = (D_w)_w \in \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$, there exists $U_w = \sum_{|\zeta| < C} c_\zeta(w) Z^\zeta \in \mathcal{U}(n)$ where Z^ζ is defined by $Z^\zeta = Z_1^{\zeta_1} \dots Z_n^{\zeta_n}$ if $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ and $c_\zeta(w)$ are smooth such that $d\rho'_w(U_w) = D_w$ for all $w \in \mathcal{V}'_0$. If M is the integer obtained by lemma 7, let us choose an integer $\tilde{M} \geq M$ and denote by $D_{\tilde{M}} \in \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$ the operator obtained by multiplication by $(1 + \sum_{i=1}^s v_i^2)^{\tilde{M}}$. For any $D' = (D'_w)_w \in \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$, we define $D = (D_w)_w$ by $D_w := D_{\tilde{M}} D'_w$. We then obtain, for every $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(\mathbb{R}^s))$,

$$\begin{aligned} |D_{\tilde{M}} \frac{\partial^a}{\partial w^a} D'_w(v) (\tilde{T} \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s)| &= | \frac{\partial^a}{\partial w^a} D_w(v) (\tilde{T} \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s) | \\ &= | \frac{\partial^a}{\partial w^a} d\rho'_w(U_w) (\tilde{T} \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s) | \\ &= | \frac{\partial^a}{\partial w^a} \tilde{T}(d\rho_w(U_w) \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s) | \\ &= | \frac{\partial^a}{\partial w^a} \tilde{T}(D_1 \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s) | \\ &\leq C(1 + \sum_{i=1}^s v_i^2)^M \sum_{j=1}^d \|D_1 \tilde{\xi}\|_{A_j, D_{M_j}}^K \\ &\leq C(1 + \sum_{i=1}^s v_i^2)^M \sum_{j=1}^d \|\tilde{\xi}\|_{A_j, D_{M_j} D_1}^K \end{aligned}$$

for some smooth families $(U_w)_w$ in $\mathcal{U}(n)$ and $D_1 = (D_{1,w})_w \in \mathcal{P}\mathcal{D}(\mathcal{V}'_0, \mathbb{R}^s)$ such that $d\rho_w(U_w) = D_{1,w}$. Hence

$$| \frac{\partial^a}{\partial w^a} D'_w(v) (\tilde{T} \tilde{\xi})(w; v_1, \dots, v_s) | \leq C \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^s v_i^2)^{\tilde{M}-M}} \sum_{j=1}^d \|\tilde{\xi}\|_{A_j, D_{M_j} D_1}^K < \infty.$$

As $\tilde{M} \geq M$, $\|\tilde{T}\tilde{\xi}\|_{A,D'}^K < \infty$ and $T\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi))$ for all $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi))$. The continuity of T for the topology of the generalized Schwartz spaces is deduced from the inequality

$$\|(\tilde{T}\tilde{\xi})\|_{A,D'}^K \leq C \sum_{j=1}^d \|\tilde{\xi}\|_{A_j, D_{M_j}, D_1}^K$$

□

Proposition 8. *There exist a smooth function $|\alpha(w)|$ and a smooth normalization of the bases and measures of $(N/P(w))_w$ and $(N/P'(w))_w$ such that $R = (R_w)_w$ is a smooth family of unitary intertwining operators between $(\pi_w)_w$ and $(\pi'_w)_w$ where $R_w = \frac{1}{|\alpha(w)|} T_w$.*

Proof. It is well known that for a fixed w , π_w acts algebraically irreducibly on the space of the \mathcal{C}^∞ -vectors and there exists a unitary intertwining operator S_w between π_w and π'_w . Since T_w is also an intertwining operator between π_w and π'_w , $S_w^{-1} \circ T_w$ intertwines π_w . By Schur's Lemma, $S_w^{-1} \circ T_w = \alpha(w) \mathbb{I}_{\mathcal{S}(N/P(w), \chi_w)}$ where $\alpha(w) \in \mathbb{C}^*$ and $R_w := \frac{1}{|\alpha(w)|} T_w$ is a unitary operator. In addition, the map $w \mapsto |\alpha(w)|$ is smooth. This is due to smoothness of the map

$$w \longrightarrow \langle T_w \xi(w), T_w \xi(w) \rangle_{L^2(N/P'(w), \chi_w)}$$

by theorem 3. In fact, let's choose a smooth family $\xi = (\xi(w))_w$ with $\xi(w) \in L^2(N/P(w), \chi_w)$ and $\|\xi(w)\|_2^2 = 1$ for all w . Then

$$\begin{aligned} d(w) := \langle T_w \xi(w), T_w \xi(w) \rangle_{L^2(N/P'(w), \chi_w)} &= |\alpha(w)|^2 \langle S_w \xi(w), S_w \xi(w) \rangle_{L^2(N/P'(w), \chi_w)} \\ &= |\alpha(w)|^2 \|\xi(w)\|_2^2 \text{ since } S_w \text{ is a unitary operator} \\ &= |\alpha(w)|^2 \end{aligned}$$

and $w \mapsto |\alpha(w)| = \sqrt{d(w)}$ is smooth. Hence $R = (R_w)$ is a smooth family of unitary intertwining operators. □

We may now make a similar construction by interchanging the roles of $\mathfrak{p}(w)$ and $\mathfrak{p}'(w)$. We get a smooth family of intertwining operators

$$T' := (T'_w)_w : \mathcal{H}\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{V}}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi)) \longrightarrow \mathcal{H}\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{V}}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi))$$

by

$$T'_w \xi'(w, g) = \int_{P(w)/P(w) \cap P'(w)} \xi'(w; gu) \chi_w(u) du.$$

Note that the non-empty relatively open subset of \mathcal{W} had perhaps to be restricted once more and is now denoted by $\tilde{\mathcal{V}}'_0$. By the same arguments as previously, there exist $\alpha'(w) \in \mathbb{C}^*$ and a unitary intertwining operator S'_w such that $(S'_w)^{-1} \circ T'_w = \alpha'(w) \mathbb{I}_{\mathcal{S}(N/P'(w), \chi_w)}$ and also $R'_w := \frac{1}{|\alpha'(w)|} T'_w$ defines a smooth family of unitary intertwining operators and the map $w \mapsto |\alpha'(w)|$ is smooth. On the other hand, $T'_w \circ T_w$ intertwines π_w . But such an operator must be a multiple $c(w)$ of the

identity by Schur's lemma where $c(w) \in \mathbb{C}^*$ and the map $w \mapsto c(w)$ is smooth by the same argument as previously. By [7] and [11], we know that $c(w) > 0$. Since

$$R'_w \circ R_w = \frac{1}{|\alpha'(w)||\alpha(w)|} T'_w \circ T_w = \frac{1}{|\alpha'(w)||\alpha(w)|} c(w) \mathbb{I}_{\mathcal{S}(N/P(w), \chi_w)}$$

is unitary and since $c(w) > 0$, we obtain $|\alpha'(w)||\alpha(w)| = c(w)$ and $R'_w = R_w^{-1}$. This implies that

$$R = (R_w)_w : \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi)) \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi))$$

is a linear homeomorphism.

Let us now define for all K compact subset of \mathcal{V}'_0 and for every $\xi(w) \in L^2(N/P(w), \chi_w)$ such that $w \mapsto \|\xi(w)\|_{L^2(N/P(w), \chi_w)}$ is measurable, the following semi-norm

$$\|\xi\|_{2,K} = \left(\int_K \|\xi(w)\|_{L^2(N/P(w), \chi_w)}^2 d\mu(w) \right)^{\frac{1}{2}}$$

where $d\mu(w)$ denotes the usual measure on the submanifold \mathcal{V}'_0 obtained locally from the Lebesgue measure on the charts. Then we consider

$$\begin{aligned} L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P, \chi)) &= \{ \xi = (\xi(w))_{w \in \mathcal{V}'_0} \mid \xi(w) \in L^2(N/P(w), \chi_w) \forall w, \text{ such that} \\ &\quad w \mapsto \|\xi(w)\|_{L^2(N/P(w), \chi_w)} \text{ is measurable and } \|\xi\|_{2,K} < \infty, \\ &\quad \forall K \subset \mathcal{V}'_0 \text{ compact} \} \end{aligned}$$

Note that $L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P, \chi))$ is a Fréchet space and that

$$L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P, \chi)) = \overline{\mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi))}^{L_c^2}.$$

Proposition 9. *The families of intertwining operators $T = (T_w)_w$ and $R = (R_w)_w$ may be extended continuously to families of intertwining operators from $L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P, \chi))$ to $L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P', \chi))$.*

Proof. For $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi))$, we have

$$\begin{aligned} \|T\xi\|_{2,K}^2 &= \int_K \|T_w \xi(w)\|_{L^2(N/P'(w), \chi_w)}^2 d\mu(w) \\ &= \int_K |\alpha(w)|^2 \|R_w \xi(w)\|_{L^2(N/P'(w), \chi_w)}^2 d\mu(w) \\ &\leq C \|\xi\|_{2,K}^2 \end{aligned}$$

where $0 \leq C := \sup_{w \in K} |\alpha(w)|^2 < \infty$. So the extension of T to the Fréchet space $L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P, \chi))$ is possible. For $R = (R_w)_w$ the argument is similar, except that $|\alpha(w)|^2$ is replaced by 1. So T and R can be extended to operators from $L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P, \chi))$ to $L_c^2(\mathcal{V}'_0, L^2(N/P', \chi))$. \square

3.5 Kernel functions and intertwining operators.

3.5.1

As before, let $(\mathfrak{p}(w))_{w \in \mathcal{W}}$ and $(\mathfrak{p}'(w))_{w \in \mathcal{W}}$ be two smooth families of polarizations of the elements of \mathcal{W} . Let π_w and π'_w be the corresponding unitary irreducible representations and $R = (R_w)_w$ and $R' = (R'_w)_w$ be the smooth families of unitary intertwining operators obtained in proposition 8, where w runs through a certain non-empty open subset of \mathcal{W} . Let now $f \in \mathcal{S}(N)$. Then the operator $\pi_w(f)$ (resp. $\pi'_w(f)$) is a kernel operator whose kernel function F (resp. F') is given by the formula

$$F(w, x, y) = \int_{P(w)} f(xpy^{-1}) \chi_w(p) dp$$

(resp. $F'(w, x, y) = \dots$ with $P'(w)$ instead of $P(w)$ in the formula). It is easy to check that in this case the kernel functions F and F' are related by the formula

$$\begin{aligned} F'(w, x, y) &= (R_w \otimes \overline{R_w}) F(w, x, y) \\ &= \frac{1}{|\alpha(w)|^2} \int_{P'(w)/P(w) \cap P'(w)} \int_{P'(w)/P(w) \cap P'(w)} F(w, xu, yv) \chi_w(u) \overline{\chi_w(v)} dudv. \end{aligned}$$

3.5.2

Conversely, one may ask the question whether, given an appropriate kernel function F , there exists $f \in \mathcal{S}(N)$ such that $\pi_w(f)$ is a kernel operator and has $F(w, \cdot, \cdot)$ as a kernel function. In this case, $R(F) := f$ is called a retract for F .

For fixed w , this question has been solved by R.Howe [7]. If w runs through n_{gen}^* , set of generic linear forms in the sense of Ludwig-Zahir [22] and if the polarizations and bases are particularly well chosen, a solution to this problem is given by the generalized Fourier inversion theorem, found in [20]. In particular, the function F has to satisfy the following covariance condition

$$F(w, xp, yp') = \overline{\chi_w(p)} \chi_w(p') F(w, x, y) \quad \forall p, p' \in P(w), \forall x, y \in N.$$

If moreover, the polarizations $(\mathfrak{p}(w))_w$ are Vergne polarizations with respect to a fixed Jordan-Hölder basis, we need the following compatibility relation for kernel functions corresponding to equivalent representations :

$$w' = Ad^*(m)w \text{ for some } m \in N \implies F(w', x, y) = F(w, xm, ym), \forall x, y \in N.$$

This condition just translates the equivalence relation between the corresponding representations into a relation between the kernel functions. Furthermore, these conditions are necessary (but not sufficient) for the existence of a retract.

The compatibility condition may of course be transferred to any other smooth choice of polarizations $(\mathfrak{p}'(w))_w$, at least locally, when theorem 3 and proposition 8 apply. A corresponding family of operator kernels $F'(w, \cdot, \cdot)$ will have to satisfy

$$w' = Ad^*(m)w \text{ for some } m \in N \implies ((R'_{w'} \otimes \overline{R'_{w'}}) F')(w', x, y) = ((R'_w \otimes \overline{R'_w}) F')(w, xm, ym) \\ \forall x, y \in N.$$

3.5.3

The smoothness of the family of intertwining operators is necessary for the following reason : the theorems for the existence of a retract, when w runs through an appropriate non-empty relatively open set in our submanifold \mathscr{W} , require the potential kernel functions to be generalized Schwartz functions and smooth families of intertwining operators send such kernel functions into functions of the same type. This allows, under appropriate conditions, to transfer results on the existence of a retract for representations built by using a particular type of polarizations to a more general or more suitable family of polarizations and representations, at least locally, where we have the existence of the smooth family of intertwining operators. The next paragraph will give a more precise example.

3.5.4

Let $N = \text{expn}$ be a connected, simply connected, nilpotent Lie group, let \mathscr{B} be a fixed Jordan-Hölder basis and let K be a compact Lie subgroup of $\text{Aut}(N)$, acting smoothly on N . Of course, this action induces a corresponding action of K on \mathfrak{n} , \mathfrak{n}^* , \widehat{N} , ... Let us assume that for any $l' \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{p}(l')$ denotes the Vergne polarization of l' with respect to the basis \mathscr{B} . The action of K on \widehat{N} is given by

$${}^k\pi_l(x) := \pi_l(k^{-1} \cdot x) \quad \forall x \in N, \quad \forall k \in K.$$

Hence the question : Does there exist a local retract theorem for π_l^k , where k runs through an appropriate section of K/K_{π_l} ? Here K_{π_l} denotes the stabilizer of π_l and is equal to the set of all k 's in K such that ${}^k\pi_l$ is equivalent to π_l . Let us assume l to be generic in the sense of Ludwig-Zahir. Let us notice that $k \cdot \mathfrak{p}(l)$ is a polarization for $k \cdot l$ and let us define $\tilde{\pi}_k = \text{ind}_{k \cdot P(l)}^N \chi_{k \cdot l}$. It is easy to see that ${}^k\pi_l$ and $\tilde{\pi}_k$ are unitary equivalent through the intertwining operator U_k defined by $U_k \xi(t) := \xi(k^{-1} \cdot t)$ for all $\xi \in \mathscr{H}_{k \cdot \pi_l}$. So, instead of proving the existence of a local retract for ${}^k\pi_l$, which turns out to be very complicated, it is sufficient to prove such an existence for the representation $\tilde{\pi}_k$. But even this is not straightforward. Let us therefore define $\pi_{k \cdot l} := \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_{k \cdot l}$ where $P(k \cdot l) = \text{exp} \mathfrak{p}(k \cdot l)$ and where $\mathfrak{p}(k \cdot l)$ is the Vergne polarization for $k \cdot l$ with respect to the fixed basis \mathscr{B} . We do this for $k \in \tilde{K} := \{k \in K | k \cdot l \in \mathfrak{n}_{gen}^*\}$. As we are now dealing with generic linear forms $k \cdot l$ and Vergne polarizations $\mathfrak{p}(k \cdot l)$, we may use the Fourier inversion theorem [20], to prove the existence of a local retract for suitable kernel functions (having compact k - support for k in a local section of K/K_{π_l} , generalized Schwartz conditions, covariance and compatibility conditions). Finally, the smooth family of intertwining operators gives the retract result for the representations $(\tilde{\pi}_k)_k$, and hence for the representations $({}^k\pi_l)_k$, locally where theorem 3 and proposition 8 hold. The details of the argument require a very careful definition of the potential kernel functions and the proof of the fact that the smooth family of intertwining operators respects these kernel functions.

3.6 Example of the Heisenberg group.

In the case of the Heisenberg group $H = \exp\mathfrak{h}$ where $\mathfrak{h} = \langle X, Y, Z \rangle$ with $[X, Y] = Z$, we consider the submanifold of \mathfrak{h}^* given by

$$\mathcal{W} = \{l_\varepsilon := (1 + \varepsilon)Z^* \mid \varepsilon \in]-1, 1[\}.$$

Then $\mathfrak{p}(l_\varepsilon) = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ and $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon) = \mathbb{R}(Y + \varepsilon X) + \mathbb{R}Z$ define two smooth families of polarizations of the collection of l_ε 's, for $\varepsilon \in]-1, 1[$, and we denote by $\pi_\varepsilon := \text{ind}_{P(l_\varepsilon)}^N \chi_{l_\varepsilon}$ et $\pi'_\varepsilon := \text{ind}_{P'(l_\varepsilon)}^N \chi_{l_\varepsilon}$ the corresponding induced representations of H where $P(l_\varepsilon) = \exp\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$ and $P'(l_\varepsilon) = \exp\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$. We will compute explicitly the families of intertwining operators $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ and $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ and we will show how the singularities appear and behave.

3.6.1 First method.

We construct a basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$ which respects $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$ by the index method of section 3.2.1. Similarly, we construct a basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$ which respects $\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$. To do this, we write the basis $\{X, Y, Z\}$ as follows

$$Y_1 = X; Y_2 = Y; Y_3 = Z.$$

Then, we obtain the following index sets $I := I^{\mathfrak{p}(l_\varepsilon)} = \{2, 3\}$ and $I' := I^{\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)} = \{1, 3\}$, which are fixed for $\varepsilon \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. Moreover, by proposition 3, we construct $\{Y_1 + \frac{1}{\varepsilon}Y_2, Y_3\} = \{X + \frac{1}{\varepsilon}Y, Z\}$ as a smooth Jordan-Hölder basis of $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$ and $\{Y_2, Y_3\} = \{Y, Z\}$ as a smooth Jordan-Hölder basis of $\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$. Finally, we obtain that $\{X + \frac{1}{\varepsilon}Y\}$ is a smooth Malcev basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$ and that $\{Y\}$ is a smooth Malcev basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$.

Let $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ be arbitrary and let us identify it with a function of $\mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{W}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ which is constant in ε . We then define the function $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{W}, \mathcal{S}(H/P(l), \mathcal{X}))$ by

$$\xi(\varepsilon, \exp(x(X + \frac{1}{\varepsilon}Y)) \exp y Y \exp z Z) = e^{i(1+\varepsilon)z} \xi(\varepsilon, \exp(x(X + \frac{1}{\varepsilon}Y))) := e^{i(1+\varepsilon)z} \tilde{\xi}(x),$$

thanks to the covariance relation. We then have

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi})(y) &:= (T_\varepsilon \xi)(\varepsilon; \exp y Y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(\varepsilon; \exp y Y \cdot \exp x(X + \frac{1}{\varepsilon}Y)) \underbrace{\chi_{l_\varepsilon}(\exp x(X + \frac{1}{\varepsilon}Y))}_{=1} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(\varepsilon; \exp x(X + \frac{1}{\varepsilon}Y)) e^{-i(1+\varepsilon)xy} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\xi}(x) e^{-i(1+\varepsilon)xy} dx \\ &= \widehat{\tilde{\xi}}((1 + \varepsilon)y). \end{aligned}$$

Formally, $(\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi})(y)$ converges to $\widehat{\tilde{\xi}}(y)$ when ε tends to 0. But, this makes no sense for our problem, as the norm of the vector $X + \frac{1}{\varepsilon}Y$ of the Malcev basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$ tends to infinity. Even, if we would replace this vector by $V(\varepsilon) := \varepsilon(X + \frac{1}{\varepsilon}Y) = Y + \varepsilon X$, then $V(\varepsilon)$ would converge to $Y \in \mathfrak{p}(l)$, where $l_0 = l$, for $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. the limit vector would no longer be a Malcev basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}(l)$. This illustrates the fact that the singularities are inherent to this problem and method.

3.6.2 Second method.

In this particular example of the Heisenberg group, one may find another, "natural" Malcev basis of \mathfrak{h} relative to $\mathfrak{p}(l_\varepsilon)$, respectively $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$, i.e. $\{X\}$, which is a good choice for both families of polarizations.

As we will see, the singularity at $\varepsilon = 0$ will, in this approach, lead to a nice interpretation : As a matter of fact, for $\varepsilon = 0$, $l_\varepsilon = l$ and $\mathfrak{p}(l_\varepsilon) = \mathfrak{p}'(l_\varepsilon) = \mathfrak{p}(l) = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$. So, for $\varepsilon = 0$, the polarizations and representations coincide. The intertwining operator may be taken to be the identity. We will show that, for an appropriate choice of the unitary intertwining operators R_ε (these are only defined up to a constant of module 1), the family $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ will converge weakly and strongly towards the identity operator. Unfortunately, this cannot be done smoothly, nor in the generalized Schwartz topologies. Moreover, in the case of a general nilpotent Lie group, such an approach is not possible.

Again, we start with an arbitrary function $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and we define $\xi \in \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{W}, \mathcal{S}(H/P, \chi))$ by

$$\xi(\varepsilon, \exp xX \cdot \exp yY \cdot \exp zZ) = e^{i(1+\varepsilon)z} \tilde{\xi}(\varepsilon, \exp xX) =: e^{i(1+\varepsilon)z} \tilde{\xi}(x),$$

thanks to the covariance relation. As $\{Y + \varepsilon X\}$ is a Malcev basis of $\mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$ relative to $\mathfrak{p}(l_\varepsilon) \cap \mathfrak{p}'(l_\varepsilon)$, we have

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi})(x) &:= (T_\varepsilon \xi)(\varepsilon, \exp xX) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(\varepsilon, \exp xX \cdot \exp y(Y + \varepsilon X)) \underbrace{\chi_{l_\varepsilon}(\exp y(Y + \varepsilon X))}_{=1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi(\varepsilon, \exp(x + y\varepsilon)X) e^{-i\frac{1}{2}y^2\varepsilon(1+\varepsilon)} dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \xi(\varepsilon; \exp(x + y)X) e^{-i\frac{1}{2}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\xi}(x + y) e^{-i\frac{1}{2}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}y^2} dy. \end{aligned}$$

By elementary computation and by the use of integration by parts, the integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ix^2} dx = \frac{(1 \pm i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

(see[8]) implies that for Schwartz function $\tilde{\xi}$ on \mathbb{R} and every $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\xi}(x+s) e^{\pm ius^2} ds = \frac{(1 \pm i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}(x).$$

In order to use this result, let's put $u := \frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{|\varepsilon|}$ and $\text{sgn}(\varepsilon) = \begin{cases} +1 & \text{if } \varepsilon > 0 \\ -1 & \text{if } \varepsilon < 0 \end{cases}$

Hence

$$(\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi})(x) = \frac{\sqrt{2}}{\text{sgn}(\varepsilon) \sqrt{|\varepsilon|(1+\varepsilon)}} \cdot [\sqrt{u} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\xi}(x+y) e^{-i \text{sgn}(\varepsilon) u y^2} dy]$$

which implies that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |(\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi})(x)| = +\infty$ for all x . Let's define

$$\tilde{R}_\varepsilon := \frac{\text{sgn}(\varepsilon) \sqrt{|\varepsilon|(1+\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 + \text{sgn}(\varepsilon)i}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{T}_\varepsilon.$$

We then have the following pointwise convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{R}_\varepsilon \tilde{\xi})(x) = \tilde{\xi}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

if $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Of course, the \tilde{R}_ε 's are intertwining operators. Moreover they are isometries and hence unitary, by the arguments of proposition 8. To show the isometry property, we make the following computations :

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi})(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\xi}(x+y) e^{-i \frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} y^2} dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} e^{-i \frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} x^2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\tilde{\xi}(u) e^{-i \frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} u^2}}_{=: \eta(\varepsilon, u)} e^{i \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} ux} du \\ &= \frac{1}{\varepsilon} e^{-i \frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} x^2} \hat{\eta}\left(\varepsilon, -\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} x\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \hat{\eta}\left(\varepsilon, -\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} x\right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\varepsilon|}{1+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\eta}(\varepsilon, u)|^2 du \\ &= \frac{2\pi}{|\varepsilon|(1+\varepsilon)} \|\eta(\varepsilon, \cdot)\|_2^2 \\ &= \frac{2\pi}{|\varepsilon|(1+\varepsilon)} \|\tilde{\xi}\|_2^2 \end{aligned}$$

Finally,

$$\|\tilde{R}_\varepsilon \tilde{\xi}\|_2 = \frac{\sqrt{|\varepsilon|(1+\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi}} \|\tilde{T}_\varepsilon \tilde{\xi}\|_2 = \|\tilde{\xi}\|_2 \quad \forall \tilde{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

and $\|\tilde{R}_\varepsilon\|_{op} = 1$. The operators R_ε may hence be extended to all of $L^2(\mathbb{R})$.

We have seen that $\tilde{R}_\varepsilon \tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}$ pointwise, when $\varepsilon \rightarrow 0$. This implies that $\tilde{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ weakly and strongly, where $\mathbb{I}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ is the identity operator on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, and hence also on $L^2(\mathbb{R})$ similarly. As a matter of fact, for all $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle \tilde{R}_\varepsilon \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle = \tilde{R}_\varepsilon(\tilde{\xi} * \overline{\tilde{\eta}})(0) \rightarrow \tilde{\xi} * \overline{\tilde{\eta}}(0) = \langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle, \quad \text{if } \varepsilon \rightarrow 0,$$

by the pointwise convergence, where $\check{\eta}(x) := \tilde{\eta}(-x)$. So, as the \tilde{R}_ε 's are isometries,

$$\|\tilde{R}_\varepsilon - \tilde{\xi}\|_2^2 = \|\tilde{\xi}\|_2^2 - \langle \tilde{R}_\varepsilon \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle - \langle \tilde{\xi}, \tilde{R}_\varepsilon \tilde{\xi} \rangle + \|\tilde{\xi}\|_2^2 \rightarrow 0, \quad \text{if } \varepsilon \rightarrow 0$$

for all $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. We have weak and strong convergence of $(\tilde{R}_\varepsilon)_\varepsilon$ towards $\mathbb{I}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, and hence in $L^2(\mathbb{R})$ similarly, by density of $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$. Unfortunately the family $(\tilde{R}_\varepsilon)_{\varepsilon \in]-1,1[}$, where $\tilde{R}_0 = \mathbb{I}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, is not smooth at the origin, nor do we have convergence in the generalized Schwartz topologies.

Bibliographie

- [1] A. Baklouti, H. Fujiwara and J. Ludwig, Intertwining operators of irreducible representations for exponential solvable Lie groups, preprint.
- [2] A. Baklouti and J. Ludwig, Entrelacement des restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Annales de l'Institut Fourier*, **51** (2001), 395-429.
- [3] L. Corwin and P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **18** (1990).
- [4] A. Didier, H. Fujiwara and J. Ludwig, Opérateurs d'entrelacement pour les groupes de Lie exponentiels, *Amer. J. Math.* **118** (1996), no 4, 839-878.
- [5] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse 2*, Gauthier-Villars, Paris, (1969).
- [6] H. Fujiwara, Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentiels et leurs applications, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, **36**, (1982).
- [7] R. Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillary integrals associated to singularities, *Pacific J. Math.*, **73** (1977), 329-363.
- [8] J. Howie, *Complex Analysis*, Spinger undegraduate mathematics series (2003).
- [9] H. Leptin and J. Ludwig, *Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups*, De Gruyter Expositions in Mathematics **18** (1994).
- [10] G. Lion, Intégrales d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov, *Lectures Notes in Math*, **587** Springer (1977), 160-176.
- [11] J. Ludwig, C. Molitor-Braun and L. Scuto, On Fourier's inversion theorem in the context of nilpotent Lie groups, *Acta Sci. Math.* , **73** (2007), 547-591.
- [12] J. Ludwig and D. Müller, Sub-Laplacians of holomorphic L^p -type on Rank One AN-Groups and Related Solvable Groups, *Journal of Functional Analysis* **170** (2000), 366-427.
- [13] J. Ludwig and S. Zahir, On the nilpotent *-Fourier transform, *Lett. Math. Phys* **30** (1994), 23-34.
- [14] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer (1984).

Chapitre 4

La théorie du rétracte pour différentes réalisations des représentations

Introduction

Soient N un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe et \mathfrak{n} l'algèbre de Lie correspondant munie d'une base de Jordan-Hölder \mathcal{B} . On considère aussi un sous-groupe de Lie compact K du groupe des automorphismes de N .

On note cette action par :

$$\begin{aligned} K \times N &\longrightarrow N \\ (k, x) &\longmapsto k \cdot x \end{aligned}$$

Le but de ce chapitre consiste à fournir certains résultats sur la théorie du rétracte soumis à l'action de K (construction générale d'un rétracte pour la réalisation des représentations obtenues par induction à partir de polarisations de Vergne dans le cas générique, application à la construction d'un rétracte pour d'autres choix de polarisations ...). Ainsi, les résultats trouvés sur les rétractes permettront de remplacer certains raisonnements sur les fonctions $f \in \mathcal{S}(N)$ par des raisonnements sur les noyaux des opérateurs soumis à l'action de K . Ces techniques vont être utiles et importantes dans l'étude des idéaux K -premiers de l'algèbre de groupe et dans l'étude de la densité des fonctions de Schwartz dans les noyaux des K -orbites.

Notons π_l la représentation induite de N définie comme suit

$$\pi_l = \text{ind}_{P(l)}^N \chi_l$$

où l est une forme linéaire de \mathfrak{n}^* , $\mathfrak{p}(l)$ la polarisation de Vergne en l par rapport la base \mathcal{B} , $P(l) = \exp \mathfrak{p}(l)$ et χ_l est le caractère défini par $\chi_l(x) = e^{-i \langle l, \log x \rangle}$ pour tout $x \in P(l)$.

Suite aux différentes actions de K sur \widehat{N} , le dual de N , \mathfrak{n}^* , etc., on définit les représentations

irréductibles de N comme suit

$$\begin{aligned}\pi_{k \cdot l} &= \text{ind}_{P(k \cdot l)}^N \chi_{k \cdot l} \\ \tilde{\pi}_k &= \text{ind}_{k \cdot P(l)}^N \chi_{k \cdot l} \\ {}^k \pi_l(x) &= \pi_l(k^{-1} \cdot x).\end{aligned}$$

Nous avons montré que ${}^k \pi_l$ et $\tilde{\pi}_k$ sont unitairement équivalentes par l'opérateur d'entrelacement U_k défini par $U_k \xi(t) := \xi(k^{-1} \cdot t)$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{k \pi_l}$, espace de Hilbert associé à ${}^k \pi_l$ (voir chapitre 1). Ainsi, au lieu de prouver l'existence d'un rétracte local pour ${}^k \pi_l$, ce qui s'avère être compliqué, il est suffisant de prouver une telle existence pour la représentation $\tilde{\pi}_k$. Malheureusement, ceci ne peut pas non plus être fait directement. En fait, le seul outil à notre disposition est un théorème d'inversion de Fourier dans l'ensemble \mathfrak{n}_{gen}^* des formes linéaires génériques au sens de Ludwig-Zahir [20], lorsque les polarisations utilisées sont les polarisations de Vergne. Ce résultat sera utilisé pour montrer l'existence d'un rétracte local pour les représentations $\pi_{k \cdot l}$, à savoir lorsqu'on utilise des polarisations de Vergne. Pour des raisons techniques, on établit d'abord le résultat du rétracte dans une section de Pukanszky avant de passer à la partie de la K -orbite formée d'éléments génériques. Finalement ce résultat est réécrit de manière à prendre comme variable $k \in K$, au lieu de $k \cdot l \in \mathfrak{n}_{gen}^*$. C'est ce dernier résultat qui peut être transféré localement aux représentations $\tilde{\pi}_k$, à savoir aux représentations induites à partir de polarisations de la forme $k \cdot \mathfrak{p}(l)$, via la théorie des familles lisses d'opérateurs d'entrelacement. Ce transfert n'est a priori assuré que sur un certain ouvert relatif dans une section de K/K_l . Dans une première étape, on passe alors à un certain ouvert relatif de K tout entier, avant de translater arbitrairement cet ouvert dans K . Le recours à une partition de l'unité finalement nous donne un résultat de rétracte global sur K pour les représentations $\tilde{\pi}_k$.

Enfin la restriction de ce résultat à une section de K/K_l permet le passage aux représentations de la forme ${}^k \pi_l$. C'est ce dernier résultat qui sera utilisé dans le chapitre 6. Ces différentes étapes successives nécessitent quelques commentaires. Certains passages ne sont possibles que lorsque la forme linéaire l de départ est alignée, c'est-à-dire, lorsque les stabilisateurs de l , K_l , et de son orbite co-adjointe, K_{π_l} , coïncident. Ceci n'est pas une restriction, étant donné que chaque orbite co-adjointe contient une forme linéaire alignée.

D'autre part, par soucis de rigueur nous avons donné, à chaque étape, la définition de l'espace des fonctions noyaux correspondant, ainsi que le détail de l'argumentation. Malheureusement, ces définitions et argumentations sont en fait très similaires, ce qui peut donner une certaine impression de répétitions. Le lecteur avisé peut évidemment sauter ces parties assez évidentes. Insistons cependant sur le fait que ces différentes étapes sont nécessaires dans une approche qui se veut rigoureuse, la démonstration de l'existence du rétracte pour ${}^k \pi_l$ ne se faisant pas directement.

4.1 Stabilisateurs

On considère les stabilisateurs suivants :

$$\begin{aligned}
K_l &= \{k \in K \mid k \cdot l = l\} \\
K_{\pi_l} &= \{k \in K \mid {}^k \pi_l \simeq \pi_l\} \\
&= \{k \in K \mid \pi_{k \cdot l} \simeq \pi_l\} \\
&= \{k \in K \mid \tilde{\pi}_k \simeq \pi_l\} \\
&= \{k \in K \mid k \cdot l \in \text{Ad}^*(N) \cdot l\}
\end{aligned}$$

Les stabilisateurs K_l et K_{π_l} sont des sous-groupes fermés de K .

Remarque 4.1. En général, on a toujours une inclusion entre K_l et K_{π_l} , c'est-à-dire, $K_l \subset K_{\pi_l}$. Par contre l'autre inclusion n'est pas toujours vraie car :

$$\begin{aligned}
k \in K_{\pi_l} &\Leftrightarrow k \in K \text{ et } \pi_{k \cdot l} \simeq \pi_l \\
&\Leftrightarrow k \in K, \exists n_k \in N \text{ t.q. } k \cdot l = \text{Ad}^*(n_k)l \\
&\Leftrightarrow k \in K, \exists n_k \in N \text{ t.q. } \text{Ad}^*(n_k^{-1})k \cdot l = l
\end{aligned}$$

Donc, si $k \in K_{\pi_l}$, k stabilise l'orbite co-adjointe de l , mais ne stabilise pas nécessairement l lui-même.

Proposition 4.1. Pour $k \in K$, on a

$$\begin{aligned}
K_{k \cdot l} &= k \cdot K_l \cdot k^{-1} \\
K_{\pi_{k \cdot l}} &= k \cdot K_{\pi_l} \cdot k^{-1}
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $k \in K$. On a alors

$$\begin{aligned}
k' \in K_{\pi_{k \cdot l}} &\Leftrightarrow \pi_{k'k \cdot l} \simeq \pi_{k \cdot l} \\
&\Leftrightarrow k'k \cdot l \in \mathcal{O}(k \cdot l) \\
&\Leftrightarrow \exists n \in N \text{ t.q. } k'k \cdot l = \text{Ad}^*(n)k \cdot l \\
&\Leftrightarrow \exists n \in N \text{ t.q. } k^{-1}k'k \cdot l = k^{-1}\text{Ad}^*(n)k \cdot l \\
&\Leftrightarrow \exists n \in N \text{ t.q. } k^{-1}k'k \cdot l = \text{Ad}^*(k^{-1} \cdot n)l \\
&\Leftrightarrow k^{-1}k'k \cdot l \in \mathcal{O}(l) \\
&\Leftrightarrow k^{-1}k'k \in K_{\pi_l} \\
&\Leftrightarrow k' \in kK_{\pi_l}k^{-1}.
\end{aligned}$$

Avec un raisonnement analogue, on montre que $K_{k \cdot l} = k \cdot K_l \cdot k^{-1}$. □

4.2 Formes alignées.

Proposition 4.2. *Soit $\mathcal{O}(l)$ une orbite co-adjointe dans \mathfrak{n}^* . Alors $\mathcal{O}(l)$ contient un élément aligné l_0 , qui vérifie $K_{l_0} = K_{\pi_{l_0}}$.*

Preuve. Lipsman a montré l'existence d'une telle forme linéaire alignée sur chaque orbite coadjointe. Pour plus de détails, voir [12]. \square

Soit maintenant $l \in Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. Il existe alors $l_0 \in Ad^*(N) \cdot l \subset Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ tel que l_0 est aligné. Donc, il existe $m \in N$ tel que $l_0 = Ad^*(m)\tilde{l}$ avec $\tilde{l} \in \mathfrak{n}_{gen}^* \cap Ad^*(N)l$. Ainsi l_0 est générique par rapport à la base de Jordan-Hölder $\{Ad(m)Z_1, \dots, Ad(m)Z_n\}$. Appelons de nouveau cette base $\{Z_1, \dots, Z_n\}$.

Dans la suite, on suppose toujours que l_0 est une forme linéaire alignée et générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base de Jordan-Hölder $\{Z_1, \dots, Z_n\}$.

Proposition 4.3. *Si l_0 aligné, $K_{k \cdot l_0} = K_{\pi_{k \cdot l_0}}$ pour tout $k \in K$. De plus, chaque orbite coadjointe coupe $K \cdot l_0$ au plus en un point.*

Preuve. D'après la proposition 4.1, on a, pour tout $k \in K$,

$$K_{k \cdot l_0} = k \cdot K_{l_0} \cdot k^{-1} = k \cdot K_{\pi_{l_0}} \cdot k^{-1} = K_{\pi_{k \cdot l_0}}$$

si l_0 est aligné. Supposons maintenant que

$$\begin{aligned} Ad^*(m_1) \cdot l &= k_1 \cdot l_0 \\ Ad^*(m_2) \cdot l &= k_2 \cdot l_0 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} k_1 \cdot l_0 &= Ad^*(m_1) \cdot l \\ &= Ad^*(m_1 m_2^{-1}) k_2 \cdot l_0 \\ &= k_2 \underbrace{[k_2^{-1} Ad^*(m_1 m_2^{-1}) k_2]}_{\in Ad^*(N)} \cdot l_0 \end{aligned}$$

Il s'en suit alors

$$\begin{aligned} k_2^{-1} k_1 \cdot l_0 \in Ad^*(N) \cdot l_0 &\implies k_2^{-1} \cdot k_1 \in K_{\pi_{l_0}} = K_{l_0} \\ &\implies k_1 \in k_2 \cdot K_{l_0} \\ &\implies k_1 \cdot l_0 = k_2 \cdot l_0 \end{aligned}$$

On en déduit alors que chaque orbite coadjointe coupe $K \cdot l_0$ au plus en un point. \square

4.3 Action sur une section de Pukanszky.

Soit Σ une section des formes linéaires génériques obtenue par la méthode de Pukanszky [3]. Quite à traduire cette section, on peut toujours supposer que $l_0 \in \Sigma$. Définissons maintenant

$$\tilde{K} = \{k \in K \mid k \cdot l_0 \in Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*\}.$$

On constate que \tilde{K} est un ouvert non vide puisque l'application de K dans \mathfrak{n}^* définie par $k \mapsto k \cdot l_0$ est continue, $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ est un ouvert non vide de \mathfrak{n}^* et \tilde{K} est l'image réciproque de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. De plus, $e \in \tilde{K}$ étant que l_0 est générique. Ainsi, il existe un voisinage ouvert V de e , contenu dans \tilde{K} , tel que $V \cdot V \subset \tilde{K}$ et l'application différentiable

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \tilde{K} \\ (k, k') &\longmapsto k \cdot k' \end{aligned}$$

satisfait les conditions suivantes

- $e \cdot k = k \cdot e = k$ pour tout $k \in V$.
- $(k \cdot k') \cdot k'' = k \cdot (k' \cdot k'')$ pour tout $k, k', k'' \in V$ tels que $k \cdot k' \in V$ et $k' \cdot k'' \in V$.

Ainsi, \tilde{K} est un groupe de Lie local. (Voir [23]).

On définit une action de \tilde{K} sur $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma$ de la manière suivante :

Soit $l_1 = Ad^*(m)k_1 \cdot l_0 \in Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma$. Par définition, si $k, k_1 \in V$, alors $kk_1 \in \tilde{K}$,

$$k * l_1 := (l_1)_k$$

est l'unique élément de \mathfrak{n}^* vérifiant

$$\begin{aligned} \{(l_1)_k\} &= Ad^*(N)(k \cdot l_1) \cap \Sigma \\ &= Ad^*(N)(Ad^*(k \cdot m))(kk_1) \cdot l_0 \cap \Sigma \\ &= Ad^*(N)(kk_1 \cdot l_0) \cap \Sigma \quad \text{seulement si } k, k_1 \in V. \end{aligned}$$

Il existe donc $m' = m_k \in N$ tel que

$$(l_1)_k = Ad^*(m_k)(kk_1) \cdot l_0$$

L'élément m_k n'est en général pas unique. L'image $(l_1)_k$ est bien définie et unique, puisque $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \subset \mathfrak{n}_{puk}^*$ où \mathfrak{n}_{puk}^* désigne l'ensemble des éléments génériques au sens de Pukanszky [3] (pour la base fixée d'avance) et puisque toute orbite coadjointe dans \mathfrak{n}_{puk}^* coupe Σ en exactement un point. De plus, $*$ est une action du groupe de Lie local \tilde{K} sur $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0$, à savoir pour tout $k, k' \in V$ tels que $k'kk_1 \in \tilde{K}$, on a

$$\begin{aligned} k' * (k * l_1) &= k' * (l_1)_k \\ &= k' * (Ad^*(m_k)kk_1 \cdot l_0) \quad \text{pour un certain } m_k \in N \\ &= Ad^*(m_{k'})k'Ad^*(m_k)kk_1 \cdot l_0 \quad \text{pour un certain } m_{k'} \in N \\ &= Ad^*(m_{k'})Ad^*(k' \cdot m_k)(k'kk_1) \cdot l_0 \\ &= (l_1)_{k'k} \end{aligned}$$

En particulier, $e * (l_1)_k = (l_1)_{e \cdot k} = (l_1)_k$, $k * l_0 = (l_0)_k =: l_{0,k}$ et

$$\begin{aligned} Ad^*(N)(\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma &= \{l_{0,k}, k \in \tilde{K}\} \\ &= \{k * l_0, k \in \tilde{K}\} \\ &= \tilde{K} * l_0. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant la paramétrisation des orbites coadjointes génériques au sens de Pukanszky.

Il existe deux ensembles d'indices disjoints S et T tels que $S \cup T = \{1, \dots, n\}$, un ouvert de Zariski \mathfrak{n}_{puk}^* de \mathfrak{n}^* , et des fonctions rationnelles $Q_1(l, t), \dots, Q_n(l, t)$ où $(l, t) = (l_1, \dots, l_n, t_1, \dots, t_d)$ avec $d = \text{card}S$ vérifiant les propriétés suivantes : Si $S = \{j_1 < \dots < j_d\}$ et $l = \sum_{i=1}^n l_i Z_i^*$, on a alors

- Les fonctions $Q_i(l, t)$ sont rationnelles en l non singulières sur $\mathfrak{n}_{puk}^* \times \mathbb{R}^d$. Pour l fixé dans \mathfrak{n}_{puk}^* , ce sont des polynômes en t .
- Pour chaque $l = \sum_{i=1}^n l_i Z_i^*$ fixé, la fonction $Q(l, t) = \sum_{i=1}^n Q_i(l, t) Z_i^*$ envoie \mathbb{R}^d difféomorphiquement sur l'orbite $N \cdot l$.
- Pour l fixé, la fonction $Q_j(l, t)$ dépend uniquement des t_i tels que $j_i < j$.
- Si $j \notin S$, alors $Q_j(l, t) = l_j + R_j(l_1, \dots, l_{j-1}, t_1, \dots, t_i)$ où i est le plus grand indice tel que $j_i < j$ et R_j est rationnel. De plus $Q_1(l, t) = l_1$.
- $Q_{j_i}(l, t) = t_i, \forall i = 1, \dots, d$.
- Posons $\Sigma = \sum_{i \in T} \mathbb{R} Z_i^*$ et $\mathcal{O}(l)$ l'orbite coadjointe de l . Pour l fixé, $\mathcal{O}(l) \cap \Sigma$ est égal à $Q(l, 0)$.

Pour plus de détails, on se réfère à [3]. On peut évidemment aussi traduire la section de manière à passer par le point $c = \sum_{j=1}^n c_j Z_j^*$ où c est un point arbitraire fixé de \mathfrak{n}_{puk}^* . Alors l'intersection de $\mathcal{O}(l)$ avec cette section est donnée par $Q(l, [c])$ où $[c]$ désigne l'ensemble des coordonnées de c correspondant aux indices de S .

Proposition 4.4. *L'action $*$ est une action \mathcal{C}^∞ .*

Preuve. Etant donné que les orbites coadjointes sont paramétrisées comme précédemment, que l'application $k \mapsto k \cdot l$ est \mathcal{C}^∞ et que les fonctions $Q_i(l, t)$ sont polynomiales en t pour l fixé, on a alors que l'application $k \mapsto l_k = Q(k \cdot l, 0)$ (resp. $Q(k \cdot l, [c])$) est lisse en k . \square

Par définition, on a

$$\{l_{0,k}\} = (Ad^*(N)k \cdot l_0) \cap \Sigma.$$

Ainsi, il existe $m_k := m(k) \in N$ tel que $l_{0,k} = Ad^*(m_k)k \cdot l_0$. En fait m_k est unique modulo $N(k \cdot l_0) = \text{expn}(k \cdot l_0)$ où $\mathfrak{n}(k \cdot l_0)$ est le stabilisateur de $k \cdot l_0$ défini par

$$\mathfrak{n}(k \cdot l_0) = \{X \in \mathfrak{n} \mid \langle k \cdot l_0, [X, \mathfrak{n}] \rangle = 0\} = k \cdot \mathfrak{n}(l_0).$$

En effet, si $Ad^*(m_k)k \cdot l_0 = Ad^*(m'_k)k \cdot l_0$, on a $Ad^*((m'_k)^{-1}m_k)k \cdot l_0 = k \cdot l_0$ et par suite

$$m_k = m'_k \text{ mod } N(k \cdot l_0).$$

Définition 4.1. On dit que (V, η) est une section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} (resp. K/K_{l_0}) si V est un ouvert de \tilde{K}/K_{l_0} (resp. K/K_{l_0}) et $\eta : V \longrightarrow \tilde{K}$ (resp. K) une application lisse telle que

$$p \circ \eta = id_{\tilde{K}/K_{l_0}}|_V \text{ (resp. } id_{K/K_{l_0}}|_V)$$

où p est la projection canonique de \tilde{K} (resp. K) dans \tilde{K}/K_{l_0} (resp. K/K_{l_0}).

Remarque 4.2. Pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert W de x et une application $\eta : W \longrightarrow \eta(W)$ qui est un difféomorphisme tel que $\eta(W)$ soit une sous-variété de \tilde{K} . Pour les détails, voir [27].

Dans la suite, on prend les sections (V, η) de \tilde{K}/K_{l_0} (resp. K/K_{l_0}) telle que V soit un ouvert de \tilde{K}/K_{l_0} (resp. K/K_{l_0}) et $\eta : V \longrightarrow \eta(V)$ soit un difféomorphisme avec $\eta(V)$ une sous-variété de \tilde{K} (resp. de K) décrite entièrement à l'aide d'une seule carte (en prenant une restriction éventuelle de la section si nécessaire).

Proposition 4.5. Il existe une section lisse (V, η) de \tilde{K}/K_{l_0} , un ouvert relatif \tilde{V} dans $\eta(V) \subset \tilde{K}$ et une application

$$\begin{aligned} \varphi : \tilde{V} &\longrightarrow N \\ k &\longmapsto m_k \text{ où } m_k = m(k) \text{ t. q. } l_{0,k} = Ad^*(m_k)k \cdot l_0 \end{aligned}$$

qui est une injection lisse.

Preuve. D'après [27], il existe une section locale lisse (V, η) de \tilde{K}/K_{l_0} contenant e . De plus on pourra se limiter à une seule carte de cette section, également notée V , qui au besoin pourra être identifiée avec l'ensemble des coordonnées correspondant.

D'après la proposition 4.4, l'action $*$ est lisse, c'est-à-dire,

$$l_{0,k} = Q(k \cdot l_0, [c])$$

est lisse en k et d'autre part

$$l_{0,k} = Ad^*(m_k)k \cdot l_0,$$

où les coordonnées de $Ad^*(m)k \cdot l_0$ sont des polynômes en m et à coefficients \mathcal{C}^∞ en k . Ainsi, m_k vérifie les équations en m données par

$$\begin{cases} (Ad^*(m)k \cdot l_0)_j = Q_j(k \cdot l_0, [c]) & \text{si } j \in T, \\ (Ad^*(m)k \cdot l_0)_j = c_j, & \text{si } j \in S. \end{cases}$$

Ceci se résume à un système d'équations implicites polynomiales en m et à coefficients \mathcal{C}^∞ en k , c'est-à-dire,

$$\tilde{Q}_j(k, m) = 0 \quad 1 \leq j \leq n \quad (I)$$

où \tilde{Q}_j sont des polynômes en m et à coefficients \mathcal{C}^∞ en k .

Considérons maintenant la matrice jacobienne (par rapport aux coordonnées de m)

$$J(k, m) = \left[\frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial (m)_i} \right]_{i,j} \quad k \in \eta(V), m \in N$$

et choisissons (k_0, m_{k_0}) un point qui réalise le rang le plus grand possible pour $J(k, m)$. Notons ce rang par p . En particulier, il existe une sous-matrice $\tilde{J}(k_0, m_{k_0})$ dans $J(k_0, m_{k_0})$ de dimension $p \times p$ telle que $\det \tilde{J}(k_0, m_{k_0}) \neq 0$. Ainsi, en appliquant le théorème des fonctions implicites généralisées [4], il existe \tilde{V} un ouvert relatif non vide dans $\eta(V) \subset \tilde{K}$ et une fonction lisse φ de \tilde{V} dans un ouvert \tilde{U} d'un sous-espace affine de dimension p de l'espace des coordonnées de N telles qu'on a l'équivalence suivante

$$\forall (k, m_k) \in (\tilde{V} \times \tilde{U}) \quad \tilde{Q}_j(k, m_k) = 0 \quad \forall j \iff m_k = \varphi(k)$$

En fait, $n - p$ coordonnées de m_k seront prises comme paramètres et pourront être fixées arbitrairement (ce qui détermine le choix des m_k .) \square

Proposition 4.6. $Ad^*(N)(\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma$ est localement fermé dans Σ .

Preuve. Il suffit de montrer que

$$Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 = (Ad^*(N)K \cdot l_0) \cap (Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*)$$

En effet,

- (C) $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \subset Ad^*(N)K \cdot l_0$ car $\tilde{K} \subset K$ et $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \subset Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ car $\tilde{K} \cdot l_0 \subset Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$
- (D) Soit $l = Ad^*(m_k)k \cdot l_0 = Ad^*(m'_k) \cdot l_1$ avec $l_1 \in \mathfrak{n}_{gen}^*$. Alors $k \cdot l_0 = Ad^*(m_k^{-1}m'_k) \cdot l_1 \in Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ et par suite $k \in \tilde{K}$.

D'autre part, on a $Ad^*(N)K \cdot l_0$ est fermé car N est nilpotent et K est compact (voir chapitre 1) et $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ est ouvert. Ainsi, on peut conclure que $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0$ est localement fermé. \square

Proposition 4.7. $Ad^*(N)(\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma$ est une sous-variété de Σ contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$.

Preuve. Tout d'abord, remarquons que le stabilisateur de l_0 par rapport à l'action $*$ n'est autre que K_{l_0} . En effet,

$$\begin{aligned} k * l_0 = l_0 &\iff Ad^*(m_k)k \cdot l_0 = l_0 \text{ pour un certain } m_k \in N \\ &\iff k \cdot l_0 = Ad^*(m_k^{-1}) \cdot l_0 \in \mathcal{O}(l_0) \\ &\iff k \in K_{\pi_{l_0}} = K_{l_0} \text{ car } l_0 \text{ est aligné.} \end{aligned}$$

De plus étant donné que K_{l_0} un sous-groupe fermé de K , K/K_{l_0} est muni d'une structure de variété \mathcal{C}^∞ d'après la proposition 1.2. Puisque \tilde{K} est un ouvert non vide dans K contenant K_{l_0} , \tilde{K}/K_{l_0} est aussi muni d'une structure de variété \mathcal{C}^∞ . Soit maintenant l'application suivante

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{K}/K_{l_0} &\longrightarrow Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma = \tilde{K} * l_0 \\ \dot{k} &\longmapsto l_{0,k} = k * l_0 \end{aligned}$$

Il est clair que cette application est une bijection \mathcal{C}^∞ et localement de rang constant. Ainsi localement, les topologies de \tilde{K}/K_{l_0} et $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma$ coïncident.

D'autre part, d'après la proposition 4.6, $(Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma$ est localement fermé et par suite c'est

une sous-variété de Σ contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ en appliquant la version locale du théorème 1.3. \square

Soit maintenant $\pi_{l_{0,k}}$ la représentation induite de N définie comme suit

$$\pi_{l_{0,k}} = \text{ind}_{P(l_{0,k})}^N \chi_{l_{0,k}}$$

où $P(l_{0,k}) = \text{exp}(\mathfrak{p}(l_{0,k}))$ et $\mathfrak{p}(l_{0,k})$ est la polarisation de Vergne en $l_{0,k}$ par rapport à la base de Jordan-Hölder \mathcal{B} . Pour des raisons techniques, on va construire un rétracte local associé à la représentation $\pi_{l_{0,k}}$ afin d'en déduire un résultat du rétracte local associé à la représentation $\pi_{k \cdot l_0}$. Pour cela, on va résoudre le problème du rétracte localement sur une carte d'une sous-variété quelconque de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$ en utilisant le théorème d'inversion de Fourier généralisé [20].

4.4 Résultat du rétracte sur $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$.

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats sur l'inversion de Fourier généralisée [20], qui exige de travailler avec des polarisations de Vergne et de rester dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$.

4.4.1 Base coexponentielle de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$.

Rappelons la construction d'une base coexponentielle (qui est en fait une base de Malcev, voir remarque 4.3) de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ où $\mathfrak{p}(l)$ désigne la polarisation de Vergne en l pour tout $l \in Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on considère $\mathfrak{n}_j = \text{vec}\{Z_j, \dots, Z_n\}$ et $l_j = l|_{\mathfrak{n}_j}$. Ainsi, j est un indice de saut local pour l si

$$\mathfrak{n}_j + \mathfrak{n}_j(l_j) \not\supseteq \mathfrak{n}_{j+1} + \mathfrak{n}_j(l_j)$$

où

$$\mathfrak{n}_j(l_j) = \{X \in \mathfrak{n}_j \mid \langle l, [X, \mathfrak{n}_j] \rangle \equiv 0\}$$

Notons alors $\mathcal{R} = \{i_1, \dots, i_d\}$ l'ensemble des indices de saut locaux ordonné par valeurs croissantes. Cet ensemble est constant pour \mathfrak{n}_{gen}^* , et même pour $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$, comme on peut le démontrer facilement. Dans ce cas, $\{X_1, \dots, X_d\} := \{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_d}\}$ est une base coexponentielle de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ et on peut identifier $N/P(l)$ à \mathbb{R}^d via le difféomorphisme suivant

$$\begin{aligned} E_{N/P(l)} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow N/P(l) \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\longmapsto \exp(x_1 X_1) \dots \exp(x_d X_d) \cdot P(l) \end{aligned}$$

Pour les détails, voir [20].

Remarque 4.3. La base coexponentielle $\{X_1, \dots, X_d\}$ de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$, construite à partir des indices de saut locaux de l , coïncide avec la base de Malcev $\{Z_j, j \in J\}$ de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$, construite à partir des ensembles d'indices définis comme suit

$$I = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \mathfrak{n}_j + \mathfrak{p}(l) = \mathfrak{n}_{j+1} + \mathfrak{p}(l)\} \text{ et } J = \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

Il suffit de remarquer que \mathcal{R} , l'ensemble des indices de saut locaux, coïncide avec J . Il est clair que $J \subset \mathcal{R}$ puisque $\mathfrak{p}(l)$ est une polarisation de Vergne et $\text{card}J = \text{card}\mathcal{R}$.

4.4.2 Inversion de Fourier généralisée.

★ Ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N}_{gen} .

L'espace des fonctions noyaux \mathcal{N}_{gen} est défini comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : \mathfrak{n}^* \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions suivantes :

- Le support de F en l est contenu dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$.
- Le support de F en l , pour $l \in \Sigma$, est compact.
- F vérifie la condition de covariance suivante

$$F(l, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_l(p)} \chi_l(q) F(l, x, y)$$

pour tout $p, q \in P(l)$ et $l \in Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$.

- F est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, si on désigne par \tilde{l} les coordonnées de l dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$, on a pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$ et pour tout compact C_0 contenu dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$,

$$\|F'\|_{A,B,C,D,E}^{C_0} := \sup_{\tilde{l} \in C_0, x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E}$$

$$\left| x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial \tilde{l}^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} F'(\tilde{l}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) \right| < \infty \quad (4.1)$$

où $F'(\tilde{l}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := F(\tilde{l}, \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d, \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d)$ et X_1, \dots, X_d désigne la base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ construite comme dans la section 4.4.1.

- F vérifie la condition de compatibilité suivante :

$$F(Ad^*(m)l, x, y) = F(l, x \cdot m, y \cdot m)$$

pour tout $m \in N$.

★ Remarque

L'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N} est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ utilisées pour exprimer la condition de Schwartz.

★ **Théorème d'inversion de Fourier généralisé**

Théorème 4.1. *Soit \mathcal{B} une base de Jordan-Hölder donnée. Pour toute fonction noyau $F \in \mathcal{N}_{gen}$, il existe alors $f \in \mathcal{S}(N)$ unique tel que $\pi_l(f)$ a pour noyau $F(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ et $\pi_l(f) = 0$ si $l \notin Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. Ici π_l désigne la représentation induite $ind_{P(l)}^N \chi_l$ de N avec $P(l) = \text{exp}(\mathfrak{p}(l))$ et $\mathfrak{p}(l)$ est la polarisation de Vergne en l par rapport à la base donnée. Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu. Alors l'application linéaire $F \rightarrow R(F)$ de l'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N}_{gen} dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.1) et si on se limite à des fonctions noyaux F dont le support en l dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ est contenu dans un fermé fixe de \mathfrak{n}^* contenu dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$.*

Preuve. Pour les détails, voir [20].

4.5 Résultat du rétracte global sur une sous-variété de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$.

On commence tout d'abord par résoudre le problème du rétracte localement sur une carte d'une sous-variété de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$, puis on va coller ensemble à l'aide d'une partition de l'unité d'un compact fixe de la sous-variété pour avoir un résultat du rétracte global sur cette sous-variété. Ce résultat du rétracte concerne les représentations induites à partir de polarisations de Vergne, tout en se limitant à la section de Pukanszky Σ .

4.5.1 Paramétrisation d'une sous-variété de $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$.

Soit \mathcal{V} une sous-variété de dimension r de la section Σ de dimension $m = n - d$ contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$. Pour $l \in \mathcal{V}$, il existe une carte (U, φ) qui paramétrise \mathcal{V} au voisinage de l telle qu'elle soit la restriction d'une carte (W, ρ) de l dans Σ de la forme

$$W = \rho^{-1}(\varphi(U) \times \prod_{j=1}^{m-r} W_j)$$

où W_j est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R} , d'adhérence compacte et tel que $\rho(l') = (\varphi(l'), 0, \dots, 0)$ pour tout $l' \in U \subset \mathcal{V}$ (où le voisinage initial U a été réduit si nécessaire). Ceci résulte de la définition d'une sous-variété et signifie qu'on peut prolonger un paramétrage d'un voisinage de l dans \mathcal{V} en un paramétrage d'un voisinage de l dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$. De plus, nous pouvons supposer que W est d'adhérence compacte, contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$

4.5.2 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales.

Supposons que notre sous-variété \mathcal{V} est munie d'une famille de cartes qui peuvent être considérées comme la restriction à \mathcal{V} de cartes de Σ au sens précédent dans 4.5.1.

Soit (U, φ) une telle carte. Supposons en plus que l'adhérence \overline{U} est un compact contenu dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$, de même que \overline{W} où W est comme en 4.5.1. Les notations l_U désigneront les coordonnées de l dans la carte (U, φ) et $\frac{\partial^a}{\partial l_U^a}$ désigneront les dérivées partielles par rapport à ces coordonnées. Ainsi, l'espace des fonctions noyaux locales $\mathcal{N}_{(U, \varphi)}$ est défini comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : \mathcal{V} \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- F est à support compact en l contenu dans U .
- F vérifie la condition de covariance suivante

$$F(l, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_l(p)} \chi_l(q) F(l, x, y)$$

pour tout $p, q \in P(l)$ et pour tout $l \in U$.

- F est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, si on désigne par l_U les coordonnées de l par rapport à une carte (U, φ) de \mathcal{V} on a , pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$ et pour tout compact C_0 contenu dans U ,

$$\begin{aligned} \|F'\|_{A,B,C,D,E}^{C_0} &:= \sup_{l_U \in \varphi(C_0); x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} \\ &|x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial l_U^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} F' \circ (\varphi^{-1} \otimes id \otimes id)(l_U, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $F'(l, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := F(l, \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d, \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d)$

D'après la section 4.4.1, $N/P(l)$ est identifié à \mathbb{R}^d via la base de Malcev $\{X_1, \dots, X_d\}$.

Proposition 4.8. *L'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{(U, \varphi)}$ est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$.*

Preuve. L'indépendance par rapport au choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ provient de l'indépendance par rapport au choix de ces bases de l'espace topologique défini par les semi-normes (4.2). \square

4.5.3 Théorème du rétracte local sur une carte.

Théorème 4.2. *Soit \mathcal{V} une sous-variété de la section Σ , contenue dans $(Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*) \cap \Sigma$ et munie d'un atlas de cartes (U, φ) comme en 4.5.1. Pour toute fonction noyau locale F dans $\mathcal{N}_{(U, \varphi)}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_l(f)$ admet comme fonction noyau $F(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in U$ et $\pi_l(f) = 0$ si $l \in \mathcal{V} \setminus U$. De plus, $\pi_l(f) = 0$ si $l \notin Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$.*

Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu. La construction de ce rétracte peut être faite de manière

à ce que l'application linéaire $F \longrightarrow R(F)$ de l'ensemble des fonctions noyaux locales $\mathcal{N}_{(U,\varphi)}$ vers $\mathcal{S}(N)$ soit continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.2).

Preuve. La fonction F est définie sur $\mathcal{V} \times N \times N$. Pour pouvoir appliquer le théorème d'inversion de Fourier généralisé (théorème 4.1), il faut prolonger F , localement sur la section Σ , tel que son support en l , qui est compact, soit contenu dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$. Ceci est réalisé grâce à la paramétrisation de 4.5.1 tout en veillant à ce que \overline{W} soit contenu dans $(Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*) \cap \Sigma$. Soit (W, ρ) cette paramétrisation.

- Prolongement local sur la section :
Remarquons d'abord qu'on a :

$$F(l; x, y) = F(\rho^{-1}(\varphi(l), 0, \dots, 0); x, y) \quad \forall l \in U, \forall x, y \in N$$

Définissons F^1 sur $(\varphi(U) \times \{(0, \dots, 0)\}) \times N \times N$ par :

$$F^1((v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0); x, y) := F(\rho^{-1}(v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0); x, y)$$

où r est la dimension de la sous-variété \mathcal{V} . Soit m la dimension de la section Σ . Ainsi, on prolonge F^1 en une fonction \check{F}^1 sur $(\varphi(U) \times \prod_{j=1}^{m-r} W_j) \times N \times N$ par

$$\check{F}^1((u_1, \dots, u_r, s_1, \dots, s_{m-r}); x, y) := F^1((u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0); x, y) \prod_{j=1}^{m-r} \theta_j(s_j)$$

où $\theta_j \in \mathcal{C}_c^\infty(W_j)$ avec $\theta_j(0) = 1$ est arbitraire, mais fixé une fois pour toutes. Finalement, on obtient un prolongement \check{F} de F par

$$\check{F}(l'; x, y) = \check{F}^1(\rho(l'); x, y) \quad \forall l' \in W \subset \Sigma, \forall x, y \in N$$

La fonction \check{F} est bien un prolongement de F à W car

$$\begin{aligned} \check{F}(l; x, y) &= \check{F}^1(\rho(l); x, y) \\ &= \check{F}^1((\varphi(l), 0, \dots, 0); x, y) \\ &= F^1((\varphi(l), 0, \dots, 0); x, y) \cdot 1 \\ &= F(\rho^{-1}(\varphi(l), 0, \dots, 0); x, y) \\ &= F(l; x, y) \end{aligned}$$

pour tout $l \in U \subset W$.

- Application du théorème d'inversion de Fourier généralisé à la fonction \check{F} :

On remarque tout d'abord que dans les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier généralisé (théorème 4.1), $\frac{\partial^a}{\partial l^a}$ désignent les dérivées partielles par rapport aux coordonnées habituelles de l dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$. Par contre dans notre cas, $\frac{\partial^a}{\partial l_W^a}$ désignent les dérivées partielles par rapport aux nouvelles coordonnées de l dans W . Donc afin d'appliquer le

théorème d'inversion de Fourier, il suffit de constater que le changement entre ces deux systèmes de coordonnées est un difféomorphisme et ne modifie donc pas l'ensemble des fonctions noyaux.

En appliquant ce théorème d'inversion, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que l'opérateur $\pi_l(f)$ admet $\check{F}(l, \cdot, \cdot)$ comme noyau si $l \in W \subset \Sigma$, $\pi_l(f) \equiv 0$ si $l \in \Sigma \setminus W$, ainsi que $\pi_l(f) = 0$ si $l \notin Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. Comme pour $l \in U$ on a $\check{F}(l, \cdot, \cdot) = F(l, \cdot, \cdot)$, on obtient le résultat.

La continuité du rétracte est donnée par la continuité du rétracte dans le théorème d'inversion de Fourier et par le fait que nos opérations de prolongement des fonctions noyaux sont également continues. \square

4.5.4 Remarques.

- Le rétracte construit dans théorème 4.2 n'est évidemment pas unique. Il dépend du prolongement choisi pour la fonction noyau. La continuité du théorème 4.2 fait référence au choix concret du rétracte opéré dans la démonstration du théorème.
- Le fait d'exiger dans la définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales que le support compact en l soit contenu dans $U \subset \mathcal{V} \subset Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$, implique qu'on reste éloigné de $\mathfrak{n}_{sing}^* = \mathfrak{n}^* \setminus Ad^*(N)\mathfrak{frakn}_{gen}^*$. Ceci est important pour l'application du théorème d'inversion de Fourier.

4.5.5 Partition de l'unité.

Soit \tilde{C} un compact donné dans la sous-variété \mathcal{V} de Σ qui est munie d'un système de cartes. On peut donc choisir pour tout $l \in \mathcal{V}$, des ouverts relatifs $U(l)$, $V(l)$ et $W(l)$ d'adhérence compacte tels que

$$l \in U(l) \subset \overline{U(l)} \subset W(l) \subset \overline{W(l)} \subset V(l) \subset \mathcal{V}$$

et tel que $V(l)$ soit contenu entièrement dans une même carte de la variété. Comme $\tilde{C} \subset \mathcal{V}$ est compact, il existe un nombre fini de $l^i \in \mathcal{V}$ et de $U(l^i)$ qui recouvrent \tilde{C} avec $i \in I$ où I est fini. On construit les fonctions $\varphi(l^i)(\cdot) = \varphi_i(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ avec

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_i(\cdot) \leq 1 \\ \varphi_i(\cdot) |_{W(l^i)} \equiv 1 \\ \text{supp } \varphi_i \subset V(l^i) \end{cases}$$

On considère aussi la fonction $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_0 \leq 1 \\ \varphi_0 \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{V} \setminus \cup_{i \in I} W(l^i) \\ \text{supp } \varphi_0 \subset \mathcal{V} \setminus \cup_{i \in I} U(l^i) \end{cases}$$

On obtient alors $\sum_{i' \in I \cup \{0\}} \varphi_{i'} > 0$ sur \mathcal{V} et on peut dans ce cas définir les fonctions $h_{i'}$ comme suit

$$h_{i'} = \frac{\varphi_{i'}}{\sum_{m \in (I \cup \{0\})} \varphi_m} \quad \forall i' \in I \cup \{0\}$$

On a bien $\sum_{i' \in (I \cup \{0\})} h_{i'} \equiv 1$. De plus, sur \tilde{C} , $\varphi_0 \equiv 0$.

Donc on a que $(h_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité sur \tilde{C} telle que pour $i \in I$, $supp h_i \subset V(l^i)$ est contenu entièrement dans une même carte et

$$\sum_{i \in I} h_i \equiv 1 \text{ sur } \tilde{C}$$

4.5.6 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux globales $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$.

Étant donné un compact fixe \tilde{C} dans une sous-variété \mathcal{V} de Σ contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$, on définit l'espace des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$ comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : \mathcal{V} \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de F en l est contenu dans \tilde{C} .
- F vérifie la condition de covariance suivante

$$F(l, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_l(p)} \chi_l(q) F(l, x, y)$$

pour tout $p, q \in P(l)$.

- F est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$ et pour tout compact \tilde{C} contenu dans $\tilde{C} \cap U$ où (U, φ) est une carte quelconque de la sous-variété \mathcal{V} , $\frac{\partial^a}{\partial l_U^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte où l_U représente les coordonnées de l dans la carte (U, φ) . On exige

$$\begin{aligned} \|F'\|_{A,B,C,D,E}^{\tilde{C}} &:= \sup_{l_U \in \varphi(\tilde{C}); x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} \\ &|x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial l_U^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} F' \circ (\varphi^{-1} \otimes id \otimes id)(l_U, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $F'(l, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := F(l, \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d, \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d)$.

De même, $N/P(l)$ est identifié à \mathbb{R}^d via la base de Malcev $\{X_1, \dots, X_d\}$ et l'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$ est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$.

4.5.7 Théorème du rétracte global.

Théorème 4.3. Soit \tilde{C} un compact donné dans une sous-variété \mathcal{V} de la section Σ contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^* \cap \Sigma$. Pour toute fonction noyau F dans $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_l(f)$ admet comme fonction noyau $F(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in \tilde{C}$ et $\pi_l(f) = 0$ si $l \in \mathcal{V} \setminus \tilde{C}$. De plus, $\pi_l(f) = 0$ si $l \notin Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$.

Ce rétracte est obtenu par un algorithme bien précis et sera noté $f = R(F)$. Alors l'application linéaire $F \longrightarrow R(F)$ de l'ensemble $\mathcal{N}_{\tilde{C}}$ des fonctions noyaux à support en l contenu dans le compact fixe \tilde{C} dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.3).

Preuve. Considérons la partition de l'unité construite en 4.5.5. On pose pour tout $i \in I$,

$$F_i(l, x, y) := h_i(l)F(l, x, y)$$

Les fonctions F_i vérifient alors les hypothèses du théorème 4.2. Pour tout $i \in I$, il existe donc $f_i \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_l(f_i)$ a pour noyau $F_i(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in V_i = V(l^i)$ et $\pi_l(f_i) = 0$ si $l \in \mathcal{V} \setminus V(l^i)$. En fait, vu la définition de F_i , ceci prouve que $\pi_l(f_i)$ a pour noyau $F_i(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in \mathcal{V}$. Or

$$F(l, x, y) = \sum_{i \in I} h_i(l)F(l, x, y) = \sum_{i \in I} F_i(l, x, y)$$

pour tout $l \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $\pi_l(f_i) = 0$ si $l \in \mathcal{V} \setminus \tilde{\mathcal{C}}$. Donc $f = \sum_{i \in I} f_i \in \mathcal{S}(N)$ est tel que $\pi_l(f)$ a pour noyau $F(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in \tilde{\mathcal{C}}$ et même pour tout $l \in \mathcal{V}$.

Pour une partition de l'unité fixée, les applications $F \mapsto F_i$ sont continues. La continuité du rétracte des F_i , donnée dans le théorème 4.2, permet alors de conclure à la continuité de $F \mapsto R(F)$. \square

4.5.8 Remarque.

Le choix de la partition de l'unité n'est pas canonique. Donc le rétracte n'est pas unique.

4.5.9 Application aux orbites de groupes compacts.

Avec les mêmes hypothèses que ceux de la section 4.3, on a montré dans la proposition 4.7 que $(Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma$ est une sous-variété de Σ contenue dans $Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. Ainsi, on a le résultat suivant.

Théorème 4.4. *Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ un compact fixe dans $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma$. Pour toute fonction noyau F dans $\mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{C}}}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_l(f)$ admet comme fonction noyau $F(l, \cdot, \cdot)$ pour tout $l \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $\pi_l(f) = 0$ si $l \in (Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma) \setminus \tilde{\mathcal{C}}$. De plus, $\pi_l(f) = 0$ si $l \notin Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$. En particulier, $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \in K \setminus \tilde{K}$.*

Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $F \mapsto R(F)$ de l'ensemble $\mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ des fonctions noyaux à support en l contenu dans le compact fixe $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.3).

Une fois que le rétracte de la représentation $\pi_{l_{0,k}}$ est construit où $\{l_{0,k}\} = (Ad^*(N)k \cdot l_0) \cap \Sigma$ pour tout $k \in \tilde{K}$, on peut maintenant établir un rétracte pour la représentation $\pi_{k \cdot l_0}$. Ceci exige tout d'abord le passage par une section locale de \tilde{K}/K_{l_0} .

4.6 Résultat de rétracte sur $\tilde{K} \cdot l_0$.

Dans cette section, on établit un résultat de rétracte sur la K -orbite de l_0 dans \mathfrak{n}^* , pour des représentations induites à partir de polarisations de Vergne.

Rappelons que, pour $l_0 \in \Sigma$ générique et alignée, on a défini

$$\tilde{K} = \{k \in K \mid k \cdot l_0 \in Ad^*(N)n_{gen}^*\}$$

L'action de \tilde{K} sur n_{gen}^* est donnée par l'action de départ $k \mapsto k \cdot l_0$ qui est \mathcal{C}^∞ pour tout $k \in \tilde{K}$. Le stabilisateur de l_0 par rapport cette action n'est d'autre que K_{l_0} . Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \tilde{K}/K_{l_0} &\longrightarrow \tilde{K} \cdot l_0 \\ \dot{k} &\longrightarrow k \cdot l_0 \end{aligned}$$

est une bijection \mathcal{C}^∞ et de rang constant. Il s'en suit alors que les topologies de \tilde{K}/K_{l_0} et donc $\tilde{K} \cdot l_0$ coïncident localement. D'autre part, il est facile de montrer que

$$\tilde{K} \cdot l_0 = K \cdot l_0 \cap Ad^*(N)n_{gen}^*$$

et que $\tilde{K} \cdot l_0$ est localement fermé puisque c'est une intersection entre un ouvert et un fermé. Par suite $\tilde{K} \cdot l_0$ est une sous-variété de \mathfrak{n}^* contenue dans $Ad^*(N)n_{gen}^* \subset \mathfrak{n}^*$ et l'application $\tilde{\phi}$ est un difféomorphisme.

4.6.1 Base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$.

Soit n_{Puk}^* l'ensemble des formes linéaires génériques au sens de Pukanszky [3]. On sait que

$$Ad^*(N)n_{gen}^* \subset n_{Puk}^*$$

puisque n_{Puk}^* est $Ad^*(N)$ -invariant. De plus les indices de saut locaux sont fixes par 4.4.1. Puisque nos polarisations sont des polarisations de Vergne, la base $\{X_1, \dots, X_d\}$ construite à partir des indices de saut locaux, est une base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ pour tout $l \in Ad^*(N)n_{gen}^*$, par 4.4.1. Ceci est donc en particulier le cas pour $l \in Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0$.

4.6.2 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux sur $\tilde{K} \cdot l_0$

Soit (V, η) une section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} et un ouvert relatif \tilde{V} dans $\eta(V)$. Pour tout compact fixe \tilde{C}_0 contenu dans $\tilde{V} \cdot l_0$, on définit l'espace des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}_0}$ comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F_0 : \tilde{K} \cdot l_0 \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de F_0 en l est contenu dans \tilde{C}_0 .
- F_0 vérifie la condition de covariance suivante

$$F_0(l', x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_{l'}(p)} \chi_{l'}(q) F_0(l', x, y)$$

pour tout $p, q \in P(l')$ et pour tout $l' \in \tilde{K} \cdot l_0$.

- F_0 est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour tout compact \tilde{C}_0 contenu dans $\tilde{C}_0 \cap U'$, où (U', φ') est une carte quelconque de $\tilde{V} \cdot l_0$, $\frac{\partial^a}{\partial l_{U'}^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et $l'_{U'}$ les coordonnées de l' par rapport à cette carte. Il faut alors que

$$\|F'_0\|_{A,B,C,D,E}^{\tilde{C}_0} := \sup_{l'_{U'} \in \varphi'(\tilde{C}_0); x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} |x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial l_{U'}^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} F'_0 \circ (\varphi'^{-1} \otimes id \otimes id)(l'_{U'}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \quad (4.4)$$

où

$$F'_0(l', x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := F_0(l', \exp(x_1 X_1) \dots \exp(x_d X_d), \exp(y_1 X_1) \dots \exp(y_d X_d))$$

L'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}_0}$ est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$.

Remarque 4.4. Par la proposition 4.3, toute orbite coadjointe coupe $\tilde{V} \cdot l_0$ en un point au plus. On n'a donc pas besoin de condition de compatibilité.

4.6.3 Théorème du rétracte sur $\tilde{K} \cdot l_0$.

Théorème 4.5. Il existe une section lisse (V, η) de \tilde{K}/K_{l_0} et un ouvert relatif non vide \tilde{V} dans $\eta(V)$ telle que pour tout compact donné \tilde{C}_0 dans $\tilde{V} \cdot l_0 \subset \tilde{K} \cdot l_0$ on a : Pour toute fonction noyau F_0 dans $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}_0}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_{k \cdot l_0}(f)$ admet comme fonction noyau $F_0(k \cdot l_0, \cdot, \cdot)$ si $k \cdot l_0 \in \tilde{C}_0$ et $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \cdot l_0 \in \tilde{K} \cdot l_0 \setminus \tilde{C}_0$. De plus, $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \in K \setminus \tilde{K}$.

Il existe alors un algorithme bien précis pour construire un tel rétracte tel que l'application linéaire $F_0 \rightarrow R(F_0) := f$, de l'ensemble $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}_0}$ des fonctions noyaux à support en $k \cdot l_0$ contenu dans le compact fixe \tilde{C}_0 dans $\mathcal{S}(N)$, soit continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.4).

Preuve. Soit (V, η) la section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} obtenue par la proposition 4.5. Donc il existe un ouvert relatif non vide \tilde{V} dans $\eta(V)$ et une application lisse

$$\begin{aligned} \varphi : \tilde{V} &\longrightarrow N \\ k &\longmapsto m_k \end{aligned}$$

telle que $l_{0,k} = Ad^*(m_k)k \cdot l_0$ où $\{l_{0,k}\} = (Ad^*(N)k \cdot l_0) \cap \Sigma$ pour tout $k \in \tilde{V}$.

Prolongeons maintenant la fonction F_0 à une fonction F_1 définie sur $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \times N \times N$ comme suit

$$F_1(Ad^*(m)k \cdot l_0, x, y) := F_0(k \cdot l_0, x \cdot m, y \cdot m)$$

pour tout $m \in N$.

La fonction F_1 est bien définie. En effet, si $Ad^*(m)k \cdot l_0 = Ad^*(m')k \cdot l_0$, c'est-à-dire, si $m = m' \bmod N(k \cdot l_0)$, on a

$$\begin{aligned} F_1(Ad^*(m)k \cdot l_0, x, y) &= F_0(k \cdot l_0, x \cdot m, y \cdot m) \\ &= F_0(k \cdot l_0, (x \cdot m')(m'^{-1} \cdot m), (y \cdot m')(m'^{-1} \cdot m)) \\ &= \overline{\chi_{k \cdot l_0}(m'^{-1}m)} \chi_{k \cdot l_0}(m'^{-1}m) F_0(k \cdot l_0, x \cdot m', y \cdot m') \text{ car } m'^{-1}m \in N(k \cdot l_0) \subset P(k \cdot l_0) \\ &= F_1(Ad^*(m')k \cdot l_0, x, y) \end{aligned}$$

Ensuite, on considère $F := F_1|_{(Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma \times N \times N}$ la restriction de F_1 à $(Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma \times N \times N$. En particulier,

$$F(l_{0,k}, x, y) = F(Ad^*(m_k)k \cdot l_0, x, y) = F_0(k \cdot l_0, x \cdot m_k, y \cdot m_k)$$

lorsque $l_{0,k}$ parcourt $(Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0) \cap \Sigma$. Ainsi, il suffit de montrer que $F \in \mathcal{N}_{\tilde{C}}$ pour un certain compact fixe \tilde{C} dans $Ad^*(N)\tilde{K} \cdot l_0 \cap \Sigma$.

- La fonction F est une fonction \mathcal{C}^∞ puisque F_0 est \mathcal{C}^∞ par hypothèse et d'après la proposition 4.5, l'application $k \mapsto m_k$ est lisse.
- Condition de covariance :

Soit $Ad^*(m_k)k \cdot l_0 \in Ad^*(N)\tilde{V} \cdot l_0 \cap \Sigma$. Pour tout $p, q \in P(Ad^*(m_k)k \cdot l_0)$, on a

$$\begin{aligned} F(Ad^*(m_k)k \cdot l_0, x \cdot p, y \cdot q) &= F_1(Ad^*(m_k)k \cdot l_0, x \cdot p, y \cdot q) \\ &= F_0(k \cdot l_0, xp \cdot m_k, yq \cdot m_k) \\ &= F_0(k \cdot l_0, xm_k \cdot p_1, ym_k \cdot q_1) \\ &\quad \text{avec } p_1 = m_k^{-1}pm_k, q_1 = m_k^{-1}qm_k \in m_k^{-1} \cdot P(Ad^*(m_k)k \cdot l_0)m_k \\ &= P(k \cdot l_0) \\ &= \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p_1)} \chi_{k \cdot l_0}(q_1) F_0(k \cdot l_0, x \cdot m_k, y \cdot m_k) \\ &= \overline{\chi_{Ad^*(m_k)k \cdot l_0}(p)} \chi_{Ad^*(m_k)k \cdot l_0}(q) F(Ad^*(m_k)k \cdot l_0, x, y) \end{aligned}$$

Ainsi la condition de covariance est vérifiée.

- Par hypothèse, le support de F_0 en $l_{0,k}$ est contenu dans un compact fixe \tilde{C}_0 de $\tilde{V} \cdot l_0$. Or, par construction,

$$F(Ad^*(m_k)k \cdot l_0, x, y) = F_0(k \cdot l_0, x \cdot m_k, y \cdot m_k)$$

Il s'en suit alors que le support de F en $l_{0,k}$ est contenu dans le compact $\tilde{C} := Ad^*(N)\tilde{C}_0 \cap \Sigma$ de $Ad^*(N)\tilde{V} \cdot l_0 \cap \Sigma$. La compacité est due à la continuité de l'application

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\longrightarrow \Sigma \\ k &\longmapsto Ad^*(m_k)k \cdot l_0 \end{aligned}$$

et au difféomorphisme entre \tilde{V} et $\tilde{V} \cdot l_0$.

- Fonction de Schwartz généralisée : Étant donné que la base de Malcev $\{X_1, \dots, X_d\}$ de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$ est également la base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport $\mathfrak{p}(l_{0,k})$, que F_0 est une fonction de Schwartz généralisée et que l'application $k \mapsto m_k$ est lisse, $k \in \tilde{V}$, on montre alors que F est une fonction de Schwartz généralisée. En effet, on a

$$\begin{aligned} F'(l_{0,k}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) &= F(l_{0,k}, \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d, \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d) \\ &= F_0(k \cdot l_0, \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d \cdot m_k, \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d \cdot m_k) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d \cdot m_k &= \exp \tilde{x}_1(k, x) X_1 \dots \exp \tilde{x}_d(k, x) X_d \cdot p(k, x) \\ \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d \cdot m_k &= \exp \tilde{y}_1(k, y) X_1 \dots \exp \tilde{y}_d(k, y) X_d \cdot q(k, y) \end{aligned}$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$, $p(k, x), q(k, y) \in P(k \cdot l_0)$ et l'application $x \mapsto \tilde{x}_j(k, x)$ (resp. $y \mapsto \tilde{y}_j(k, y)$) est bi-polynomiale et à coefficients \mathcal{C}^∞ en k et où $p(k, x)$ et $q(k, y)$ sont polynomiaux en x (resp. y) et sont lisses en k pour tout $k \in \tilde{V}$ puisque l'application $k \mapsto m_k$ est lisse sur \tilde{V} . Ainsi,

$$\begin{aligned} F'(l_{0,k}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) &= e^{i \langle k \cdot l_0, p(k, x) \rangle} e^{-i \langle k \cdot l_0, q(k, y) \rangle} \\ &F'_0(k \cdot l_0, \tilde{x}_1(k, x), \dots, \tilde{x}_d(k, x), \tilde{y}_1(k, y), \dots, \tilde{y}_d(k, y)) \end{aligned}$$

et il est alors facile de vérifier que F' est une fonction de Schwartz généralisée.

Finalement $F \in \mathcal{N}_{\tilde{C}}$ et d'après le théorème 4.4, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_{l_{0,k}}(f)$ admet $F(l_{0,k}, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau pour tout $k \in \tilde{K}$ et $\pi_{l_{0,k}}(f) = 0$ si $l_{0,k} \notin \tilde{C} = Ad^*(N)\tilde{C}_0 \cap \Sigma$ (compact). Donc, $\pi_{k \cdot l_0}(f)$ admet $F_1(k \cdot l_0, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau si $k \cdot l_0 \in \tilde{C}_0$. De plus, $l_{0,k} = Ad^*(m_k)k \cdot l_0 \notin \tilde{C}$ si et seulement si $k \cdot l_0 \notin \tilde{C}_0$, étant donné que toute orbite coadjointe coupe $K \cdot l_0$ en au plus un point. Donc $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \cdot l_0 \notin \tilde{C}_0$. Si $k \in K \setminus \tilde{K}$, $k \cdot l_0 \notin Ad^*(N)\mathfrak{n}_{gen}^*$ et $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ par le théorème 4.4. \square

A l'aide d'une condition de compatibilité, on peut prolonger ce résultat local du rétracte en dehors de l'orbite $\tilde{K} \cdot l_0$.

4.7 Résultat du rétracte sur \tilde{K} .

Dans cette section, nous considérons $k \in \tilde{K}$ comme variable, au lieu de $k \cdot l_0 \in \mathfrak{n}^*$, et nous donnons un résultat de rétracte pour les représentations induites à partir de polarisations de Vergne.

4.7.1 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N}_C .

Étant donné un compact fixe C dans \tilde{K} tel que $C = C \cdot K_{l_0}$, on définit l'espace des fonctions noyaux \mathcal{N}_C comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : \tilde{K} \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de F en k est contenu dans C .
- F vérifie la condition de covariance suivante

$$F(k, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) F(k, x, y)$$

pour tout $p, q \in P(k \cdot l_0)$.

- F est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour tout compact C' contenu dans $C \cap \tilde{U}$, où $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ est une carte de \tilde{K} , $\frac{\partial^a}{\partial k_{\tilde{U}}^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et $k_{\tilde{U}}$ les coordonnées de k par rapport à cette carte. Il faut alors que

$$\|F'\|_{A,B,C,D,E}^{C'} := \sup_{k_{\tilde{U}} \in \tilde{\varphi}(C'); x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} |x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial k_{\tilde{U}}^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} F' \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \otimes id \otimes id)(k_{\tilde{U}}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \quad (4.5)$$

où $F'(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := F(k, \exp(x_1 X_1) \dots \exp(x_d X_d), \exp(y_1 X_1) \dots \exp(y_d X_d))$.

- Condition de compatibilité :
Si $k = k' \text{ mod } K_{l_0}$, on a

$$F(k, x, y) = F(k', x, y) \text{ pour tout } x, y \in N$$

L'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N}_C est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$.

4.7.2 Théorème du rétracte sur \tilde{K} .

Théorème 4.6. *Il existe (V, η) une section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} et \tilde{V} un ouvert relatif non vide dans $\eta(V)$ tels que pour tout C un compact dans $\tilde{V} \cdot K_{l_0}$ tel que $C = C \cdot K_{l_0}$, on a : Pour toute fonction noyau F dans \mathcal{N}_C , il existe alors $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\pi_{k \cdot l_0}(f)$ admet comme fonction noyau $F(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in \tilde{K}$ et $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \in K \setminus \tilde{K}$. En particulier, $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \notin V$*

Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $F \rightarrow R(F)$ de l'ensemble \mathcal{N}_C des fonctions noyaux à support en k contenu dans le compact fixe C dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.5).

Preuve. Notons d'abord que (V, η) et \tilde{V} sont à nouveau obtenus comme dans la proposition 4.5. Il suffit de poser la fonction

$$F_0(k \cdot l_0, x, y) := F(k, x, y)$$

pour tout $x, y \in N$ et $k \in \tilde{K}$. Il est facile de vérifier que $F_0 \in \mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}_0}$ où \tilde{V} un ouvert relatif non vide dans $\eta(V)$ avec (V, η) est la section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} et où $\tilde{C}_0 := C \cdot l_0$ un compact fixe dans $\tilde{V} \cdot l_0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème 4.5 et on obtient le résultat. \square

4.8 Résultat du rétracte local pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur une section de \tilde{K}/K_{l_0} .

Dans cette section, nous établissons un résultat du rétracte pour des représentations induites à partir d'une famille de polarisations $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$ obtenues par translation à partir d'une polarisation fixe. Dans un premier temps, nous nous limitons à une section de \tilde{K}/K_{l_0} . Les raisonnements sont basés sur l'étude des familles lisses d'opérateurs d'entrelacement (chapitre 3), dont nous rappelons le résultat pour le contexte considéré.

On considère la famille des polarisations lisses $(k \cdot \mathfrak{p}(l_0))_k$ en $k \cdot l_0$. On définit alors les représentations induites correspondantes $(\tilde{\pi}_{0,k})_k := (\text{ind}_{k \cdot P(l_0)}^N \chi_{k \cdot l_0})_k$ dans N . D'après Kirillov, on sait que les familles des représentations irréductibles $(\tilde{\pi}_{0,k})_k$ et $(\pi_{k \cdot l_0})_k$ sont équivalentes. Ainsi, d'après le résultat sur la famille lisse des opérateurs d'entrelacements (voir chapitre 3), on a alors :

Théorème 4.7. *Pour toute section (V, η) de \tilde{K}/K_{l_0} , il existe un ouvert relatif non vide \mathcal{U} dans $\eta(\tilde{V}) \cdot l_0$ tel que pour tout $k_0 \cdot l_0 \in \mathcal{U}$ et pour tout \mathcal{V}_0 un voisinage relatif de $k_0 \cdot l_0$ dans \mathcal{U} , il existe $k' \cdot l_0 \in \mathcal{V}_0$ et \mathcal{V}'_0 un voisinage relatif de $k' \cdot l_0$ et une fonction lisse strictement positive $k \mapsto \alpha(k) := \alpha_{\mathfrak{p}(k \cdot l_0), k \cdot \mathfrak{p}(l_0)}(k)$ tels que $R = (R_k)_{k \in \mathcal{V}'_0}$ définie par*

$$R : \mathcal{H} \mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi)) \longrightarrow \mathcal{H} \mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P, \chi)),$$

$P = (P(k \cdot l_0))_k$ et $P' = (k \cdot P(l_0))_k$ tel que pour tout $\xi \in \mathcal{H} \mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi))$ on a

$$\begin{aligned} R_k \xi(k \cdot l_0)(g) &:= \frac{1}{\alpha(k)} \int_{P(k \cdot l_0)/P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0)} \xi(k \cdot l_0)(gp) \chi_{k \cdot l_0}(p) dp \\ &:= \frac{1}{\alpha(k)} T_{\mathfrak{p}(k \cdot l_0), k \cdot \mathfrak{p}(l_0)} \xi(k \cdot l_0)(g) \end{aligned}$$

est une famille lisse d'opérateurs d'entrelacement unitaires entre $(\pi_{k \cdot l_0})_k$ et $(\tilde{\pi}_{0,k})_k$ si $k \in \mathcal{V}'_0$. De plus, la famille $(R_k^{-1})_k = (R'_k)_k$ est donnée par une formule analogue en remplaçant $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$ par $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$ et inversement. Ici la fonction $\alpha_{\mathfrak{p}(k \cdot l_0), k \cdot \mathfrak{p}(l_0)}(k)$ est déterminée de la manière suivante :

$$\alpha_{\mathfrak{p}(k \cdot l_0), k \cdot \mathfrak{p}(l_0)}^2(k) = \|T_{\mathfrak{p}(k \cdot l_0), k \cdot \mathfrak{p}(l_0)} \xi(k \cdot l_0)\|_{L^2(N/k \cdot P(l_0), \chi_{k \cdot l_0})}^2$$

pour $\xi \in \mathcal{H} \mathcal{S}(\mathcal{V}'_0, \mathcal{S}(N/P', \chi))$ de norme 1 arbitraire.

Pour les détails, voir chapitre 3.

Il est donc logique de construire un rétracte pour la représentation $\tilde{\pi}_{0,k}$ à partir d'un résultat de rétracte pour la représentation $\pi_{k \cdot l_0}$. Ceci exige de travailler sur une section bien précise de \tilde{K}/K_{l_0} et de restreindre le domaine de définition des fonctions noyaux le moins possible en utilisant le résultat sur la famille lisse des opérateurs d'entrelacement. Ainsi, on construit un rétracte local sur une section, associé à la représentation $\tilde{\pi}_{0,k}$.

4.8.1 Base de Malcev lisse de n par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$.

On sait qu'il existe une base de Malcev lisse de n par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$. Cette base est construite d'une façon canonique à partir d'une base de Malcev de n par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$. En effet, on considère $\{X_1, \dots, X_d\}$ une base de Malcev de n par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$. Il s'en suit alors que $\{k \cdot X_1, \dots, k \cdot X_d\}$ est une base de Malcev lisse de n par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$. Dans ce cas, on peut identifier $N/k \cdot P(l_0)$ à \mathbb{R}^d via le difféomorphisme suivant

$$\begin{aligned} E_{N/k \cdot P(l_0)} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow N/k \cdot P(l_0) \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\longmapsto \exp(x_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(x_d(k \cdot X_d)) \cdot (k \cdot P(l_0)). \end{aligned}$$

4.8.2 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}'_0}$.

Soit (V, η) une section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} et \tilde{V} un ouvert relatif non vide de $\eta(V) \subset \tilde{K}$. Pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans \tilde{V} , on définit $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}'_0}$ l'ensemble de toutes les fonctions noyaux \mathcal{C}^∞

$$\tilde{F}_0 : \tilde{V} \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de \tilde{F}_0 en k est contenu dans \tilde{C}'_0 .
- \tilde{F}_0 vérifie la condition de covariance suivante :

$$\tilde{F}_0(k, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) \tilde{F}_0(k, x, y)$$

pour tout $p, q \in k \cdot P(l_0)$.

- \tilde{F}_0 est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour toute carte (U, φ) de \tilde{V} et pour tout compact \tilde{C}_0 contenu dans $\tilde{C}'_0 \cap U$, $\frac{\partial^a}{\partial k_U^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et k_U désignera les coordonnées de k dans cette carte. Il faut alors que \tilde{F}_0 vérifie

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}'_0\|_{A,B,C,D,E}^{\tilde{C}_0} &:= \sup_{k_U \in \varphi(\tilde{C}_0); x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} \\ &|x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial k_U^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} \tilde{F}'_0 \circ (\varphi^{-1} \otimes id \otimes id)(k_U, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \end{aligned} \quad (4.6)$$

où

$$\tilde{F}'_0(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := \tilde{F}_0(k, \exp(x_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(x_d(k \cdot X_d)), \exp(y_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(y_d(k \cdot X_d)))$$

D'après la section 4.8.1, $N/k \cdot P(l_0)$ est identifié à \mathbb{R}^d via la base de Malcev lisse $\{k \cdot X_1, \dots, k \cdot X_d\}$.

Proposition 4.9. *L'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}'_0}$ est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de n par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$.*

Preuve. L'indépendance par rapport au choix des bases de Malcev lisses provient de l'indépendance par rapport au choix des bases de l'espace topologique défini par les semi-normes (4.6). \square

4.8.3 Théorème du rétracte local pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur une section de \tilde{K}/K_{l_0} .

Théorème 4.8. *Il existe (V, η) une section lisse de \tilde{K}/K_{l_0} et V' un ouvert relatif non vide dans $\eta(V)$ tel que pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans V' , on a : Pour toute fonction noyau \tilde{F}_0 dans $\mathcal{N}_{V', \tilde{C}'_0}$, il existe $f_0 \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0,k}(f_0)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ si $k \in \tilde{C}'_0$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f_0) = 0$ si $k \in \tilde{K} \setminus \tilde{C}'_0 \cdot K_{l_0}$.*

Notons $f_0 = R(\tilde{F}_0)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $\tilde{F}_0 \rightarrow R(\tilde{F}_0)$ de l'ensemble $\mathcal{N}_{V', \tilde{C}'_0}$ des fonctions noyaux à support en k contenu dans le compact fixe \tilde{C}'_0 dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.6).

Preuve. Soient (V, η) et \tilde{V} comme dans les théorèmes 4.5 et 4.6. Pour toute fonction noyau $\tilde{F}_0 \in \mathcal{N}_{\tilde{V}, \tilde{C}'_0}$, on définit l'application

$$\tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, x, y) := \tilde{F}_0(k, x, y)$$

pour tout $x, y \in N$ avec $(k \cdot \mathfrak{p}(l_0))_{k \in \tilde{V}}$ est une famille lisse de polarisations en $k \cdot l_0$ définies univoquement. Étant donné que $\tilde{V} \cdot l_0$ est une sous-variété de \mathfrak{n}^* (par choix de la section), on définit la fonction F_0 comme suit :

$$\begin{aligned} F_0(k \cdot l_0, x, y) &:= (R_{k \cdot l_0} \otimes \overline{R_{k \cdot l_0}}) \tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, x, y) \\ &= \frac{1}{\alpha^2(k)} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, xp, yq) \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) d\dot{p}d\dot{q} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \tilde{V}$ et où $R_{k \cdot l_0}$ (resp. $\overline{R_{k \cdot l_0}}$) et $\alpha(k) := \alpha_{\mathfrak{p}(k \cdot l_0), k \cdot \mathfrak{p}(l_0)}(k)$ sont définis comme dans le théorème 4.7. Ainsi d'après le théorème 4.7, il existe un ouvert relatif non vide V' dans \tilde{V} tel que $(R_{k \cdot l_0} \otimes \overline{R_{k \cdot l_0}}) \tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, \cdot, \cdot)$ soit une fonction lisse et de Schwartz généralisée pour tout $k \in V'$. En fait, dans l'étude des familles lisses des opérateurs d'entrelacement unitaires (chapitre 3, les bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$ et de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$ sont obtenues par un algorithme bien précis. Tandis que dans notre cas, ces bases sont construites d'une autre manière. Mais puisque le changement entre ces bases lisses est aussi lisse et ne modifie pas la définition de l'ensemble des fonctions noyaux en général, le résultat des opérateurs d'entrelacement reste vrai. Il s'en suit alors pour toute fonction noyau $\tilde{F}_\eta \in \mathcal{N}_{V', \tilde{C}'_0}$, F_0 est une fonction noyau (voir 1.1.3) vérifiant les propriétés suivantes :

- La fonction F_0 est une fonction lisse puisque l'application $k \mapsto \alpha^2(k)$ est lisse.
- $\text{supp } F_0$ en $k \cdot l_0$ est contenu dans $\tilde{C}'_0 \cdot l_0$ où \tilde{C}'_0 est un compact contenu dans V' .
- La fonction F_0 est une fonction de Schwartz généralisée.

– F_0 vérifie bien la condition de covariance : Pour tout $p, q \in P(k \cdot l_0)$, on a

$$\begin{aligned}
F_0(k \cdot l_0, xp, yq) &= \frac{1}{\alpha^2(k)} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, xpp', yqq') \\
&\quad \chi_{k \cdot l_0}(p') \overline{\chi_{k \cdot l_0}(q')} d\dot{p}' d\dot{q}' \\
&= \frac{1}{\alpha^2(k)} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, xp', yq') \\
&\quad \chi_{k \cdot l_0}(p^{-1}p') \overline{\chi_{k \cdot l_0}(q^{-1}q')} d\dot{p}' d\dot{q}' \\
&= \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) \frac{1}{\alpha^2(k)} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{P(k \cdot l_0)/(P(k \cdot l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \\
&\quad \tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, xp', yq') \chi_{k \cdot l_0}(p') \overline{\chi_{k \cdot l_0}(q')} d\dot{p}' d\dot{q}' \\
&= \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) F_0(k \cdot l_0, x, y)
\end{aligned}$$

Par suite, en appliquant le théorème 4.5, il existe donc une fonction $f_0 \in \mathcal{S}(N)$ telle que $\pi_{k \cdot l_0}(f_0)$ admet $F_0(k \cdot l_0, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau si $k \in \tilde{C}'_0$ et $\pi_{k \cdot l_0}(f_0) = 0$ si $k \in \tilde{K} \setminus \tilde{C}'_0 \cdot K_{l_0}$. De plus, $\pi_{k \cdot l_0}(f_0) = 0$ si $k \in K \setminus \tilde{K}$. Par suite l'opérateur $\tilde{\pi}_{0,k}(f_0)$ admet $\tilde{F}_\eta(k \cdot l_0, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau si $k \in \tilde{C}'_0$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f_0) = 0$ si $k \in V' \setminus \tilde{C}'_0$ et finalement $\tilde{\pi}_{0,k}(f_0)$ admet $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau si $k \in \tilde{C}'_0$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f_0) = 0$ si $k \in K \setminus \tilde{K}$. La continuité du rétracte résulte du fait que le rétracte donné par le théorème 4.5 est continu et que la famille des opérateurs d'entrelacement est lisse. \square

4.9 Résultat du rétracte sur un ouvert de \tilde{K} .

En introduisant une condition de compatibilité bien précise, on peut avoir un rétracte local sur un ouvert de \tilde{K} , au lieu de travailler uniquement sur une section. C'est ce qui est fait dans cette partie. Il s'agit toujours du rétracte pour les représentations induites à partir des translatés $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$ d'une polarisation fixe. Pour le moment, on reste limité à un certain ouvert de \tilde{K} .

4.9.1 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux sur un ouvert de \tilde{K} .

Soit $U = U \cdot K_{l_0}$ un ouvert non vide dans \tilde{K} , saturé par rapport à K_{l_0} . Pour tout compact fixe $C_0 = C_0 \cdot K_{l_0}$ dans U , on définit \mathfrak{n}_{U, C_0} comme l'ensemble de toutes les fonctions noyaux \mathcal{C}^∞

$$\tilde{F} : K \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions suivantes :

- Le support de \tilde{F} en k est contenu dans C_0 .
- \tilde{F} vérifie la relation de covariance suivante

$$\tilde{F}(k, x \cdot p, y, q) = \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) \tilde{F}(k, x, y)$$

pour tout $p, q \in k \cdot P(l_0)$.

- \tilde{F} est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour tout compact C'_0 contenu dans $C_0 \cap \tilde{U}$, où $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ une carte de \tilde{K} , $\frac{\partial^a}{\partial k_{\tilde{U}}^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte où $k_{\tilde{U}}$ présente les coordonnées de k dans cette carte. Il faut alors que

$$\|\tilde{F}\|_{A,B,C,D,E}^{C'_0} := \sup_{k_{\tilde{U}} \in \tilde{\varphi}(C'_0); x=(x_1, \dots, x_d), y=(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} |x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial k_{\tilde{U}}^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} \tilde{F} \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \otimes id \otimes id)(k_{\tilde{U}}, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \quad (4.7)$$

où

$$\tilde{F}(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) = \tilde{F}(k, \exp(x_1(k \cdot Y_1)) \dots \exp(x_d(k \cdot Y_d)), \exp(y_1(k \cdot Y_1)) \dots \exp(y_d(k \cdot Y_d))).$$

- \tilde{F} satisfait la condition de compatibilité suivante :

Si $k = k' \text{ mod } K_{l_0}$, il existe un nombre positif $\alpha(k, k')$ telle qu' on a

$$\tilde{F}(k, x, y) = \frac{1}{\alpha^2(k, k')} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{k' \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \tilde{F}(k', xp, yq) \chi_{k' \cdot l_0}(p) \overline{\chi_{k' \cdot l_0}(q)} dp dq$$

pour tout $x, y \in N$ et pour tout $k, k' \in U$ tel que $k = k' \text{ mod } K_{l_0}$. Ici, $\alpha(k, k') = \alpha_{k \cdot p(l_0), k' \cdot p(l_0)}(k \cdot l_0)$ est déterminée comme dans le théorème 4.7. En effet dans ce cas les représentations $\tilde{\pi}_{0,k}$ et $\tilde{\pi}_{0,k'}$ sont équivalentes. Cette équivalence se traduit par la relation précédente entre les fonctions noyaux (G. Lion [11] et 1.1.3).

4.9.2 Théorème du rétracte local sur un ouvert de \tilde{K} .

Théorème 4.9. *Il existe un ouvert saturé non vide $U = U \cdot K_{l_0}$ dans \tilde{K} tel que pour tout compact fixe saturé $C_0 = C_0 \cdot K_{l_0}$ dans U , on a : Pour toute fonction noyau \tilde{F} dans \mathfrak{n}_{U, C_0} , il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0,k}(f)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in C_0$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f) = 0$ si $k \in K \setminus C_0$. Notons $f = R(\tilde{F})$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $\tilde{F} \mapsto R(\tilde{F})$ de l'ensemble des fonctions noyaux à support compact en k dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.7).*

Preuve. Prenons (V, η) la section locale lisse de \tilde{K}/K_{l_0} obtenue par le théorème 4.8 et soit \tilde{U} un ouvert relatif non vide de $\eta(V)$. On obtient alors $U = \tilde{U} \cdot K_{l_0}$ un ouvert saturé non vide de $\eta(V)$. D'après la remarque 4.2, il existe \tilde{V}' un ouvert dans \tilde{K}/K_{l_0} contenu dans V tel que $U = \eta(\tilde{V}')$ puisque η est un difféomorphisme. Soit $p : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}/K_{l_0}$ la projection canonique. On obtient alors

$$\begin{aligned} U \cdot K_{l_0} &= p^{-1}(p(U)) \\ &= p^{-1}(p \circ \eta(\tilde{V}')) \\ &= p^{-1}(\tilde{V}') \end{aligned}$$

est un ouvert non vide de \tilde{K} (voir la définition 4.1). Posons

$$\tilde{F}_0 := \tilde{F}|_{U \times N \times N}$$

et puis appliquons le théorème 4.8. On utilise la condition de compatibilité pour avoir le résultat sur $U \cdot K_{l_0}$. \square

Une fois qu'on a le résultat du rétracte local pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur un ouvert de \tilde{K} , on peut tout d'abord translater ce résultat local n'importe où dans K puis coller ensemble pour avoir un résultat de rétracte global pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ grâce à une partition de l'unité de K . Ceci est un point crucial pour pouvoir passer après au rétracte associé à la représentation ${}^k\pi_{l_0}$. Commençons donc par translater le résultat du rétracte local sur \tilde{K} .

4.10 Translation sur K tout entier.

Les résultats de la section précédente peuvent être translétés à un voisinage ouvert de n'importe quel point de K . En effet étant donné W un ouvert saturé non vide de \tilde{K} pour lequel le théorème 4.9 est vrai, on considère l'ouvert translété $W_1 = k_1 \cdot W$ par $k_1 \in K$ quelconque mais fixé.

4.10.1 Base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport $k_1 k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$.

Étant donnée $\{k \cdot X_1, \dots, k \cdot X_d\}$ la base de Malcev lisse de \mathfrak{n} par rapport $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$, construite dans 4.8.1, on considère alors $\{k_1 k \cdot X_1, \dots, k_1 k \cdot X_d\}$ la base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport $k_1 k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$ pour tout $k_1 \in K$. Ainsi \mathbb{R}^d est identifié à $N/k_1 k \cdot P(l_0)$ via le difféomorphisme suivant

$$\begin{aligned} E_{N/k_1 k \cdot P(l_0)} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow N/k_1 k \cdot P(l_0) \\ x = (x_1, \dots, x_d) &\longmapsto \exp(x_1(k_1 k \cdot X_1)) \dots \exp(x_d(k_1 k \cdot X_d)) \cdot (k_1 k \cdot P(l_0)). \end{aligned}$$

4.10.2 Définition des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{k_1, W_1, C_1}$.

Soient $k_1 \in K$ et $W_1 := k_1 \cdot W$ un ouvert non vide de K vérifiant $W_1 = W_1 \cdot K_{l_0}$. Pour tout compact fixe saturé $C_1 := k_1 \cdot C_0 = C_1 \cdot K_{l_0}$ contenu dans W_1 , on définit $\mathcal{N}_{k_1, W_1, C_1}$ l'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{C}^∞

$$\tilde{F}_1 : K \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de \tilde{F}_1 en k est contenu dans $C_1 \subset W_1$.
- \tilde{F}_1 vérifie la condition de covariance suivante :

$$\tilde{F}_1(k, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) \tilde{F}_1(k, x, y)$$

pour tout $p, q \in k \cdot P(l_0)$ avec $k \in W_1$.

- \tilde{F}_1 vérifie la condition de compatibilité :
Si $k = k' \bmod K_{l_0}$, il existe alors un nombre positif $\alpha(k, k')$ tel qu' on a

$$\tilde{F}_1(k, x, y) = \frac{1}{\alpha^2(k, k')} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \tilde{F}_1(k', xp, yq) \chi_{k' \cdot l_0}(p) \chi_{k' \cdot l_0}(q) dp dq$$

pour tout $x, y \in N$ et pour tout $k, k' \in W_1$ tels que $k = k' \bmod K_{l_0}$. Ici $\alpha(k, k') = \alpha_{k \cdot p(l_0), k' \cdot p(l_0)}(k, k')$ est déterminée comme dans le théorème 4.7.

- \tilde{F}_1 est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour tout compact C'_1 contenu dans $C_1 \cap V$, où (V, φ) est une carte de K , $\frac{\partial^a}{\partial k_V^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et où k_V présente les coordonnées de k dans cette carte. Il faut alors que

$$\|\tilde{F}_1\|_{A,B,C,D,E}^{C'_1} := \sup_{k_V \in \varphi(C'_1); x=(x_1, \dots, x_d), y=(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} |x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial k_V^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} \tilde{F}_1 \circ (\varphi^{-1} \otimes id \otimes id)(k_V, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \quad (4.8)$$

où

$$\tilde{F}_1(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) = \tilde{F}_1(k, \exp(x_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(x_d(k \cdot X_d)), \exp(y_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(y_d(k \cdot X_d))).$$

avec $k \in k_1 \cdot W$.

4.10.3 Relation de compatibilité translaturée.

On doit vérifier si en translaturant par k_1 , la propriété de compatibilité est transformée en la bonne propriété de compatibilité.

Lemme 4.1. *L'expression $\alpha(k, k')$ pour $k = k' \bmod K_{l_0}$ est positive et invariante par translation par k_1 , c'est-à-dire, $\alpha(k_1 k, k_1 k') = \alpha(k, k')$ pour tout $k_1 \in K$.*

Preuve. D'après le chapitre 3, la fonction $\alpha(k, k')$ est déterminée de la manière suivante :

Soit $\xi \in \mathcal{H}_{\tilde{\pi}_{0, k'}}^\infty$ tel que $\|\xi\|_{L^2(N/k \cdot P(l_0), \chi_{k' \cdot l_0})} = 1$ arbitraire. Alors, si $k = k' \bmod K_{l_0}$,

$$\alpha^2(k, k') = \langle T_{k, k'} \xi, T_{k, k'} \xi \rangle_{L^2(N/k \cdot P(l_0), \chi_{k \cdot l_0})} = \|T_{k, k'} \xi\|_{L^2(N/k \cdot P(l_0), \chi_{k \cdot l_0})}^2$$

avec

$$T_{k, k'} \xi(x) = \int_{k \cdot P(l_0) / (k \cdot P(l_0) \cap k' \cdot P(l_0))} \xi(x \cdot p) \chi_{k' \cdot l_0}(p) dp.$$

Or pour tout $x \in N$ et pour tout $\xi \in L^2(N/k_1k' \cdot P(l_0), \chi_{k_1k' \cdot P(l_0)})$ tel que $\|\xi\|_{L^2(N/k_1k' \cdot P(l_0), \chi_{k_1k' \cdot l_0})} = 1$, on a

$$\begin{aligned}
T_{k_1k, k_1k'} \xi(x) &= \int_{k_1k \cdot P(l_0)/k_1k \cdot P(l_0) \cap k_1k' \cdot P(l_0)} \xi(x \cdot p) \chi_{k_1k' \cdot l_0}(p) dp \\
&= \int_{k \cdot P(l_0)/k \cdot P(l_0) \cap k' \cdot P(l_0)} \xi(x \cdot (k_1 \cdot q)) \chi_{k' \cdot l_0}(q) dq \quad p = k_1 \cdot q \\
&= \int_{k \cdot P(l_0)/k \cdot P(l_0) \cap k' \cdot P(l_0)} \xi^{k_1}((k_1^{-1} \cdot x) \cdot q) \chi_{k' \cdot l_0}(q) dq \\
&= T_{k, k'}(\xi^{k_1})(k_1^{-1} \cdot x) \\
&= (T_{k, k'}(\xi^{k_1}))^{k_1^{-1}}(x)
\end{aligned}$$

Cette notation a un sens puisque $\xi^{k_1} \in L^2(N/k \cdot P(l_0), \chi_{k \cdot l_0})$. En effet, on a pour tout $s \in k \cdot P(l_0)$,

$$\begin{aligned}
\xi^{k_1}(x \cdot s) &= \xi((k_1 \cdot x)(k_1 \cdot s)) \\
&= \frac{\chi_{k_1k \cdot l_0}(k_1 \cdot s)}{\chi_{k_1k \cdot l_0}(k_1 \cdot x)} \xi(k_1 \cdot x) \\
&= \frac{\chi_{k \cdot l_0}(s)}{\chi_{k \cdot l_0}(x)} \xi^{k_1}(x)
\end{aligned}$$

De plus

$$\|\xi\|_{L^2(N/k_1k' \cdot P(l_0), \chi_{k_1k' \cdot l_0})} = \|\xi^{k_1}\|_{L^2(N/k' \cdot P(l_0), \chi_{k' \cdot l_0})} = 1$$

puisque la fonction modulaire correspondante est égale à 1, le groupe K étant compact.

Par suite

$$\begin{aligned}
\alpha^2(k_1k, k_1k') &= \|T_{k_1k, k_1k'} \xi\|_{L^2(N/k_1k \cdot P(l_0), \chi_{k_1k \cdot l_0})}^2 \\
&= \|(T_{k, k'}(\xi^{k_1}))^{k_1^{-1}}\|_{L^2(N/k_1k \cdot P(l_0), \chi_{k_1k \cdot l_0})}^2 \\
&= \|(T_{k, k'}(\xi^{k_1}))\|_{L^2(N/k \cdot P(l_0), \chi_{k \cdot l_0})}^2 \\
&= \alpha^2(k, k')
\end{aligned}$$

car $\|\xi\|_{L^2(N/k_1k' \cdot P(l_0))} = \|\xi^{k_1}\|_{L^2(N/k' \cdot P(l_0))} = 1$. □

On définit maintenant la fonction \tilde{F} sur \tilde{K} à partir d'une fonction noyau \tilde{F}_1 dans $\mathcal{N}_{k_1, W_1, C_1}$ comme suit

$$\tilde{F}(k, x, y) := \tilde{F}_1(k_1k, k_1 \cdot x, k_1 \cdot y)$$

avec $\text{supp} \tilde{F}$ en k est contenu dans W . Ainsi, on a si $k = k' \text{ mod } K_{l_0}$, alors $k_1k = k_1k' \text{ mod } K_{l_0}$ et

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(k, x, y) &:= \tilde{F}_1(k_1 k, k_1 \cdot x, k_1 \cdot y) \\
 &= \frac{1}{\alpha^2(k_1 k, k_1 k')} \int_{k_1 k \cdot P(l_0) / (k_1 k' \cdot P(l_0) \cap k_1 k \cdot P(l_0))} \int_{k_1 k \cdot P(l_0) / (k_1 k' \cdot P(l_0) \cap k_1 k \cdot P(l_0))} \\
 &\quad \tilde{F}_1(k_1 k', (k_1 \cdot x)p, (k_1 \cdot y)q) \chi_{k_1 k' \cdot l_0}(p) \chi_{k_1 k' \cdot l_0}(q) d\dot{p} d\dot{q} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2(k_1 k, k_1 k')} \int_{k_1 k \cdot P(l_0) / (k_1 k' \cdot P(l_0) \cap k_1 k \cdot P(l_0))} \int_{k_1 k \cdot P(l_0) / (k_1 k' \cdot P(l_0) \cap k_1 k \cdot P(l_0))} \\
 &\quad \tilde{F}_1(k_1 k', k_1(x \cdot k_1^{-1} \cdot p), k_1(y \cdot k_1^{-1} \cdot q)) \chi_{k' \cdot l_0}(k_1^{-1} \cdot p) \chi_{k' \cdot l_0}(k_1^{-1} \cdot q) d\dot{p} d\dot{q} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2(k_1 k, k_1 k')} \int_{k_1 k \cdot P(l_0) / (k_1 k' \cdot P(l_0) \cap k_1 k \cdot P(l_0))} \int_{k_1 k \cdot P(l_0) / (k_1 k' \cdot P(l_0) \cap k_1 k \cdot P(l_0))} \\
 &\quad \tilde{F}(k', x \cdot k_1^{-1} \cdot p, y \cdot k_1^{-1} \cdot q) \chi_{k' \cdot l_0}(k_1^{-1} \cdot p) \chi_{k' \cdot l_0}(k_1^{-1} \cdot q) d\dot{p} d\dot{q} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2(k, k')} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \\
 &\quad \tilde{F}(k', x p_1, y q_1) \chi_{k' \cdot l_0}(p_1) \chi_{k' \cdot l_0}(q_1) d\dot{p}_1 d\dot{q}_1 \quad (p_1 = k_1^{-1} p \text{ et } q_1 = k_1^{-1} q)
 \end{aligned}$$

Enfinement \tilde{F} vérifie la bonne relation de compatibilité.

4.10.4 Condition de covariance.

Comme dans la section précédente, on considère la fonction noyau \tilde{F} comme suit

$$\tilde{F}(k, x, y) := \tilde{F}_1(k_1 k, k_1 \cdot x, k_1 \cdot y)$$

pour tout $\tilde{F}_1 \in \mathcal{N}_{k_1, W_1, C_1}$. Ainsi on a, pour tout $p, q \in k \cdot P(l_0)$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(k, xp, yq) &:= \tilde{F}_1(k_1 k, (k_1 \cdot x)(k_1 \cdot p), (k_1 \cdot y)(k_1 \cdot q)) \quad \text{avec } k_1 \cdot p, k_1 \cdot q \in k_1 k \cdot P(l_0) \text{ et } k_1 k \in k_1 \cdot W \\
 &= \frac{\chi_{k_1 k \cdot l_0}(k_1 \cdot p) \chi_{k_1 k \cdot l_0}(k_1 \cdot q)}{\chi_{k \cdot l_0}(p) \chi_{k \cdot l_0}(q)} \tilde{F}_1(k_1 k, k_1 \cdot x, k_1 \cdot y) \\
 &= \frac{\chi_{k \cdot l_0}(p) \chi_{k \cdot l_0}(q)}{\chi_{k \cdot l_0}(p) \chi_{k \cdot l_0}(q)} \tilde{F}(k, x, y)
 \end{aligned}$$

Par suite \tilde{F} vérifie bien la relation de covariance.

4.10.5 Théorème du rétracte translaté

Théorème 4.10. Soit W tel que $W = W \cdot K_{l_0}$ l'ouvert non vide de \tilde{K} tel que le théorème 4.9 soit vrai et C_0 tel que $C_0 = C_0 \cdot K_{l_0}$ un compact quelconque saturé contenu dans W . Pour tout $k_1 \in K$, soient $W_1 = k_1 \cdot W$ l'ouvert non vide de K et $C_1 = k_1 \cdot C_0$ le compact fixe dans W_1 obtenus par translation par k_1 . Pour toute fonction noyau $\tilde{F}_1 \in \mathcal{N}_{k_1, W_1, C_1}$, il existe alors $f_1 \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0, k}(f_1)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}_1(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in C_1$ et $\tilde{\pi}_{0, k}(f_1) = 0$ si $k \in K \setminus C_1$. Notons $f_1 = R(\tilde{F}_1)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire

$\tilde{F}_1 \longmapsto R(\tilde{F}_1)$ de l'ensemble des fonctions noyaux à support en k contenu dans le compact fixe C_1 dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.8).

Preuve. Considérons la fonction noyau

$$\tilde{F}(k, x, y) = \tilde{F}_1(k_1 k, k_1 x, k_1 y)$$

Il est clair que la fonction \tilde{F} est bien définie. De plus son support en k est contenu dans $C_0 = k_1^{-1} C_1$ qui est compact. D'après les sections 4.10.3 et 4.10.4, la fonction \tilde{F} vérifie la bonne condition de covariance et compatibilité. Il reste alors à montrer que cette fonction est une fonction de Schwartz généralisée. Ceci est facile à voir puisque \tilde{F}_1 est une fonction de Schwartz généralisée. En fait, on a

$$\begin{aligned} \tilde{F}'(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) &:= \tilde{F}(k, \exp x_1(k \cdot X_1) \dots \exp x_d(k \cdot X_d), \exp y_1(k \cdot X_1) \dots \exp y_d(k \cdot X_d)) \\ &= \tilde{F}_1(k_1 k, k_1 \cdot [\exp x_1(k \cdot X_1) \dots \exp x_d(k \cdot X_d)], \\ &\quad k_1 \cdot [\exp y_1(k \cdot X_1) \dots \exp y_d(k \cdot X_d)]) \\ &= \tilde{F}_1(k_1 k, \exp x_1(k_1 k \cdot X_1) \dots \exp x_d(k_1 k \cdot X_d), \exp y_1(k_1 k \cdot X_1) \dots \\ &\quad \exp y_d(k_1 k \cdot X_d)) \\ &=: \tilde{F}'_1(k_1 k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d). \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, \tilde{F}'_1 est une fonction de Schwartz généralisée. Il en est donc de même pour \tilde{F}' . Puisque \tilde{F} vérifie les hypothèses du théorème 4.9, il existe alors $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0,k}(f)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in C_0$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f) = 0$ si $k \in K \setminus C_0$. Soit $f_1(x) := f^{k_1^{-1}}(x) = f(k_1^{-1} \cdot x)$. Il s'en suit que $\tilde{\pi}_{0,k}(f_1)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}_1(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in C_1$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f_1) = 0$ si $k \in K \setminus C_1$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(k, x, y) &= \tilde{F}(k_1^{-1} k, k_1^{-1} x, k_1^{-1} y) \\ &= \int_{k_1^{-1} k \cdot P(l_0)} f(k_1^{-1} x \cdot p \cdot k_1^{-1} y^{-1}) \chi_{k_1^{-1} k \cdot l_0}(p) dp \\ &= \int_{k_1^{-1} k \cdot P(l_0)} f^{k_1^{-1}}(x \cdot (k_1 p) \cdot y^{-1}) \chi_{k \cdot l_0}(k_1 \cdot p) dp \end{aligned}$$

Posons $p' = k_1 \cdot p$, on obtient

$$\tilde{F}_1(k, x, y) = \int_{k \cdot P(l_0)} f_1(x p' y^{-1}) \chi_{k \cdot l_0}(p') dp'$$

la fonction noyau de l'opérateur $\tilde{\pi}_{0,k}(f_1)$ pour tout $k \in C_1$. De plus, si $k \in K \setminus C_1$, $k_1^{-1} k \in K \setminus C_0$. Donc $\tilde{\pi}_{0, k_1^{-1} k}(f) = 0$ et

$$\int_{k_1^{-1} k \cdot P(l_0)} f(x \cdot p \cdot y^{-1}) \chi_{k_1^{-1} k \cdot l_0}(p) dp = 0 \quad \forall x, y$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \int_{k \cdot P(l_0)} f_1(x \cdot p_1 \cdot y^{-1}) \chi_{k \cdot l_0}(p_1) dp_1 &= \int_{k \cdot P(l_0)} f((k_1^{-1}x) \cdot (k_1^{-1}p_1) \cdot (k_1^{-1}y^{-1})) \chi_{k \cdot l_0}(p_1) dp_1 \\
 &= \int_{k_1^{-1}k \cdot P(l_0)} f((k_1^{-1}x) \cdot p \cdot (k_1^{-1}y^{-1})) \chi_{k_1^{-1}k \cdot l_0}(p) dp \quad p = k_1^{-1}p_1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et $\tilde{\pi}_{0,k}(f_1) = 0$.

La continuité du rétracte est donnée par la continuité dans le théorème 4.9 et par le fait que la translation par k_1 est continue. \square

Grâce à la partition de l'unité de K , nous construisons un rétracte global pour la représentation $\tilde{\pi}_{0,k}$.

4.11 Un rétracte global sur K .

A présent, nous sommes en mesure d'établir un résultat de rétracte global, sur K tout entier, les représentations considérées étant toujours des représentations induites à partir des translatés $k \cdot p(l_0)$ d'une polarisation fixe.

4.11.1 Partition de l'unité.

Étant donné W l'ouvert de \tilde{K} (et donc de K) obtenu dans le théorème 4.9, soient \tilde{U} et \tilde{V} des ouverts non vides d'adhérences compactes tels que

$$\tilde{U} \subset \overline{\tilde{U}} \subset \tilde{V} \subset \overline{\tilde{V}} \subset W \subset K$$

Comme W est saturé par rapport à K_{l_0} , on peut supposer que \tilde{U} et \tilde{V} le sont également. Comme K est compact, il existe un nombre fini d'ouverts translatés $U_i := k_i \cdot \tilde{U}$ qui recouvrent K et $i \in I$ où I est fini.

On construit les fonctions $\varphi_i(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(K)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi_i(\cdot) \leq 1 \\ \varphi_i(\cdot) |_{U_i} \equiv 1 \\ \text{supp } \varphi_i \subset V_i \text{ où } V_i := k_i \cdot \tilde{V} \\ \varphi_i \text{ constant sur les classes modulo } K_{l_0} \end{array} \right.$$

pour tout $i \in I$.

On obtient alors $\sum_{i \in I} \varphi_i > 0$ sur K et on peut dans ce cas définir les fonctions h_i comme suit

$$h_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{m \in I} \varphi_m}.$$

On a bien $\sum_{i \in I} h_i \equiv 1$. Donc on a $(h_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité de K telle que $\text{supp } h_i \subset V_i$ si $i \in I$ et

$$\sum_{i \in I} h_i \equiv 1 \text{ sur } K.$$

Notons de plus tous les U_i, V_i et $W_i := k_i \cdot W$ sont saturés par rapport à K_{l_0} .

4.11.2 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux globales

On note par \mathcal{N} l'ensemble de toutes les fonctions noyaux \mathcal{C}^∞ telle que

$$\check{F} : K \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifient les conditions suivantes :

- \check{F} est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour tout compact \check{C} contenu dans V , où (V, φ) est une carte de K , $\frac{\partial^a}{\partial k_V^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et où k_V présente les coordonnées de k dans cette carte. Il faut alors que

$$\|\check{F}'\|_{A,B,C,D,E}^{\check{C}} := \sup_{k_V \in \varphi(\check{C}); x=(x_1, \dots, x_d), y=(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \leq A, |\beta| \leq B, |\gamma| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E}$$

$$\left| x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial k_V^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} \check{F}' \circ (\varphi^{-1} \otimes id \otimes id)(k_V, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) \right| < \infty \quad (4.9)$$

où

$$\check{F}'(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) = \check{F}(k, \exp(x_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(x_d(k \cdot X_d)), \exp(y_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(y_d(k \cdot X_d))).$$

- \check{F} satisfait la condition de compatibilité suivante
Si $k = k' \text{ mod } K_{l_0}$, il existe $\alpha(k, k')$ un nombre positif tel qu' on a

$$\check{F}(k, x, y) = \frac{1}{\alpha^2(k, k')} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \int_{k \cdot P(l_0) / (k' \cdot P(l_0) \cap k \cdot P(l_0))} \check{F}(k', xp, yq) \overline{\chi_{k' \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) d\dot{p} d\dot{q}$$

pour tout $x, y \in N$. Le nombre $\alpha(k, k')$ est déterminé comme dans le théorème 4.7.

- \check{F} satisfait la condition de covariance suivante :

$$\check{F}(k, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) \check{F}(k, x, y)$$

pour tout $p, q \in k \cdot P(l_0)$ et $k \in K$.

4.11.3 Théorème du rétracte global pour $\tilde{\pi}_{0,k}$.

Théorème 4.11. *Pour toute fonction noyau \check{F} dans \mathcal{N} , il existe $\check{f} \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0,k}(\check{f})$ admet comme fonction noyau $\check{F}(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in K$.*

Notons $\check{f} = R(\check{F})$ le rétracte obtenu. Ce rétracte peut être construit par un algorithme précis. Dans ce cas, l'application linéaire $\check{F} \mapsto R(\check{F})$ de l'ensemble des fonctions noyaux globales dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.9).

Preuve. Considérons la partition de l'unité construite en 4.11.1. On pose pour tout $i \in I$,

$$\tilde{F}_i(k, x, y) := h_i(k)\check{F}(k, x, y)$$

Les fonctions \tilde{F}_i vérifient alors les hypothèses du théorème 4.10. Pour tout $i \in I$, il existe donc $f_i \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0,k}(f_i)$ a pour noyau $\tilde{F}_i(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in K$. D'ailleurs $\tilde{\pi}_{0,k}(f_i) = 0$ si $k \notin W_i$. Or

$$\check{F}(k, x, y) = \sum_{i \in I} h_i(k)\check{F}(k, x, y) = \sum_{i \in I} \tilde{F}_i(k, x, y)$$

pour tout $k \in K$. Donc $\check{f} = \sum_{i \in I} f_i \in \mathcal{S}(N)$ est tel que $\pi_{0,k}(\check{f})$ a pour noyau $\check{F}(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in K$, l'ensemble d'indices I étant fini.

Pour une partition de l'unité fixée de K , les applications $\check{F} \mapsto \tilde{F}_i$ sont continues. La continuité du rétracte des \tilde{F}_i , donnée dans le théorème 4.10, permet alors de conclure à la continuité de $\check{F} \mapsto R(\check{F})$. \square

Remarque 4.5. *Le choix de la partition de l'unité n'est pas canonique. Donc le rétracte n'est pas unique.*

4.11.4 Conséquence.

Afin de préparer le passage aux représentations ${}^k\pi_{l_0}$, donnons la restriction du résultat sur les rétractes à une section locale arbitraire (S, ζ) de K/K_{l_0} .

• Définition des fonctions noyaux sur une section de K/K_{l_0} .

Pour tout $k_0 \in K$, il existe une section locale (S, ζ) de K/K_{l_0} contenant \dot{k}_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K . Pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans $\zeta(S)$, on définit $\mathcal{N}_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$ l'ensemble de toutes les fonctions noyaux \mathcal{C}^∞ définies sur $\zeta(S) \times N \times N$ et vérifiant les mêmes conditions que dans 4.8.2.

• Théorème du rétracte pour $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur une section de K/K_{l_0} .

Théorème 4.12. *Pour tout $k_0 \in K$, il existe une section locale (S, ζ) de K/K_{l_0} contenant \dot{k}_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K . Pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans $\zeta(S)$, on a : Pour toute fonction noyau $\tilde{F}_0 \in \mathcal{N}_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$, il existe $f' \in \mathcal{S}(N)$ telle que $\tilde{\pi}_{0,k}(f')$ admet $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ comme*

fonction noyau si $k \in \zeta(S)$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f') = 0$ si $k \notin S$.

Notons $f' = R(\tilde{F}_0)$ le rétracte obtenu. Ce rétracte peut être construit par un algorithme précis. Dans ce cas, l'application linéaire $\tilde{F}_0 \mapsto R(\tilde{F}_0)$ de l'ensemble des fonctions noyaux locales sur une section de K/K_{l_0} dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par les semi-normes correspondantes.

Preuve. Il suffit de considérer une section locale de K/K_{l_0} , de prolonger la fonction noyau à K grâce à la condition de compatibilité et d'appliquer le théorème 4.11.

Rappelons maintenant que $\tilde{\pi}_{0,k}$ est équivalente à la représentation ${}^k\pi_{l_0}$ définie comme suit

$${}^k\pi_{l_0}(x) = \pi_{l_0}(k^{-1} \cdot x)$$

pour tout $x \in N$.

L'opérateur d'entrelacement correspondant est défini de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathcal{H}_k\pi_{l_0} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\tilde{\pi}_{0,k}} \\ \xi &\longmapsto \mathcal{U}\xi(t) := \xi(k^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}(k)$ est une isométrie, si $\{X_1, \dots, X_d\}$ est une base de Malcev quelconque de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$ et $\{k \cdot X_1, \dots, k \cdot X_d\}$ est la base correspondante de \mathfrak{n} par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$ et si ces bases servent à fixer les mesures dans la définition de $\mathcal{H}_k\pi_{l_0}$, resp. $\mathcal{H}_{\tilde{\pi}_{0,k}}$ (voir 1.4.3).

Suite à cette équivalence, on va construire un rétracte local pour ${}^k\pi_{l_0}$ sur une section de K/K_{l_0} à partir d'un rétracte local pour la représentation $\tilde{\pi}_{0,k}$.

4.12 Résultat du rétracte local pour ${}^k\pi_{l_0}$.

Finalement, nous obtenons un résultat de rétracte local pour ${}^k\pi_{l_0}$, sur une section locale autour de n'importe quel point de K/K_{l_0} . C'est ce résultat qui sera utilisé au chapitre 6.

Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned} {}^k\pi_{l_0} \simeq {}^{k'}\pi_{l_0} &\iff {}^{k'^{-1}k}\pi_{l_0} \simeq \pi_{l_0} \\ &\iff \tilde{\pi}_{0,k'^{-1}k} \simeq \pi_{l_0} \\ &\iff \pi_{k'^{-1}k \cdot l_0} \simeq \pi_{l_0} \\ &\iff k'^{-1}k \in K\pi_{l_0} \\ &\iff k'^{-1}k \in K_{l_0} \text{ car } l_0 \text{ est aligné.} \\ &\iff k = k' \text{ mod } K_{l_0}. \end{aligned}$$

4.12.1 Base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$.

On considère ici $\{X_1, \dots, X_d\}$ la base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$ construite comme dans 4.4.1.

4.12.2 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales sur K/K_{l_0} .

Pour tout $k_0 \in K$, il existe (S, ζ) une section lisse de K/K_{l_0} contenant k_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K . Pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans $\zeta(S)$, on définit $\mathcal{N}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$ l'ensemble de toutes les fonctions noyaux \mathcal{C}^∞

$$\tilde{F}_0 : \zeta(S) \times N \times N \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de \tilde{F}_0 en k est contenu dans \tilde{C}'_0 .
- \tilde{F}_0 vérifie la condition de covariance suivante :

$$\tilde{F}_0(k, x \cdot p, y \cdot q) = \overline{\chi_{l_0}(p)} \chi_{l_0}(q) \tilde{F}_0(k, x, y)$$

pour tout $p, q \in P(l_0)$.

- \tilde{F}_0 est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour toute carte (U, φ) de $\zeta(S)$ et pour tout compact \tilde{C}_0 contenu dans $\tilde{C}'_0 \cap U$, $\frac{\partial^a}{\partial k_U^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et k_U désignera les coordonnées de k dans cette carte. Il faut alors que \tilde{F}_0 vérifie

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}'_0\|_{A,B,C,D,E}^{\tilde{C}_0} &:= \sup_{k_U \in \varphi(\tilde{C}_0); x, y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} \\ &|x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial k_U^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} \tilde{F}'_0 \circ (\varphi^{-1} \otimes id \otimes id)(k_U, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)| < \infty \end{aligned} \quad (4.10)$$

où

$$\tilde{F}'_0(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := \tilde{F}_0(k, \exp(x_1 X_1) \dots \exp(x_d X_d), \exp(y_1 X_1) \dots \exp(y_d X_d))$$

Ici $N/P(l_0)$ est identifié à \mathbb{R}^d via la base de Malcev lisse $\{X_1, \dots, X_d\}$ de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$ construite dans la section 4.12.1.

L'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$ est indépendant du choix des bases de Malcev lisses de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$.

4.12.3 Théorème du rétracte local pour ${}^k \pi_{l_0}$ sur K/K_{l_0} .

Théorème 4.13. *Pour tout $k_0 \in K$, il existe (S, ζ) une section lisse de K/K_{l_0} contenant k_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K . Pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans $\zeta(S)$, on a : Pour*

toute fonction noyau \tilde{F}_0 dans $\tilde{\mathcal{N}}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$, il existe $f_0 \in \mathcal{S}(N)$ tel que ${}^k\pi_{l_0}(f_0)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in \zeta(S)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f) = 0$ si $k \notin S$.

Notons $f_0 = R(\tilde{F}_0)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $\tilde{F}_0 \rightarrow R(\tilde{F}_0)$ de l'ensemble $\tilde{\mathcal{N}}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$ des fonctions noyaux à support en k contenu dans le compact fixe \tilde{C}'_0 dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (4.10).

Preuve. Soit la fonction \tilde{F}_0 définie sur $\zeta(S) \times N \times N$ comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(k, x, y) &:= \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \tilde{F}_0(k, x, y) \\ &= \tilde{F}_0(k, k^{-1} \cdot x, k^{-1} \cdot y) \end{aligned}$$

où $\mathcal{U} = \mathcal{U}(k)$ comme dans 4.11.4.

Ainsi,

- \tilde{F}_0 est une fonction \mathcal{C}^∞ telle que son support en k est contenu dans \tilde{C}'_0 puisque \tilde{F}_0 l'est aussi et l'application $k \mapsto k^{-1} \cdot x$ est lisse.
- \tilde{F}_0 vérifie bien la condition de covariance. En effet, pour tout $p, q \in k \cdot P(l_0)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(k, x \cdot p, y \cdot q) &= \tilde{F}_0(k, (k^{-1}x)(k^{-1}p), (k^{-1}y)(k^{-1}q)) \\ &= \overline{\chi_{l_0}(k^{-1}p)} \chi_{l_0}(k^{-1}q) \tilde{F}_0(k, k^{-1}x, k^{-1}y) \\ &= \overline{\chi_{k \cdot l_0}(p)} \chi_{k \cdot l_0}(q) \tilde{F}_0(k, x, y) \end{aligned}$$

- \tilde{F}_0 est bien une fonction de Schwartz généralisée.

Etant donné $\{X_1, \dots, X_d\}$ la base de Malcev de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$ construite dans la section 4.12.1, on construit d'une manière canonique $\{k \cdot X_1, \dots, k \cdot X_d\}$ la base de Malcev lisse de \mathfrak{n} par rapport à $k \cdot \mathfrak{p}(l_0)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_0(k, x_1, \dots, x_d) &:= \tilde{F}_0(k, \exp(x_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(x_d(k \cdot X_d)), \exp(y_1(k \cdot X_1)) \dots \exp(y_d(k \cdot X_d))) \\ &= \tilde{F}_0(k, k^{-1} \exp(x_1(k \cdot X_1)) \dots k^{-1} \exp(x_d(k \cdot X_d)), \\ &\quad k^{-1} \exp(y_1(k \cdot X_1)) \dots k^{-1} \exp(y_d(k \cdot X_d))) \\ &= \tilde{F}_0(k, \exp(x_1 X_1) \dots \exp(x_d X_d), \exp(y_1 X_1) \dots \exp(y_d X_d)) \\ &= \tilde{F}'_0(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) \end{aligned}$$

Il s'en suit alors que

$$\|\tilde{F}'_0\|_{A,B,C,D,E,F}^{\tilde{C}'_0} = \|\tilde{F}'_0\|_{A,B,C,D,E,F}^{\tilde{C}_0} < \infty$$

quels que soient $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{N}$ et pour tout compact \tilde{C}'_0 contenu dans $\tilde{C}'_0 \cap U$ Par suite d'après le théorème 4.12, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\tilde{\pi}_{0,k}(f)$ admet $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau si $k \in \zeta(S)$ et $\tilde{\pi}_{0,k}(f) = 0$ si $k \notin S$. On obtient ainsi ${}^k\pi_{l_0}(f)$ admet $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ comme fonction

noyau si $k \in \zeta(S)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f) = 0$ si $k \notin S$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{F}}_0(k, x, y) &= \tilde{F}_0(k, k \cdot x, k \cdot y) \\ &= \int_{k \cdot P(l_0)} f(kx \cdot p \cdot (ky)^{-1}) \chi_{k \cdot l_0}(p) dp \\ &= \int_{k \cdot P(l_0)} f^k(x(k^{-1}p)y^{-1}) \chi_{l_0}(k^{-1}p) dp\end{aligned}$$

Posons $p_1 = k^{-1} \cdot p \in P(l_0)$, on obtient alors, puisque ce changement de variables est unimodulaire,

$$\tilde{\tilde{F}}_0(k, x, y) = \int_{P(l_0)} f^k(x p_1 y^{-1}) \chi_{l_0}(p_1) dp_1$$

Or

$$\int_{P(l_0)} f^k(x p_1 y^{-1}) \chi_{l_0}(p_1) dp_1$$

n'est rien d'autre que le noyau de l'opérateur $\pi_{l_0}(f^k) = {}^k\pi_{l_0}(f)$ agissant sur $\mathcal{H}_{\pi_{l_0}} = \mathcal{H}^k_{\pi_{l_0}}$, pour tout $k \in \tilde{C}'_0$. Si $k \notin \tilde{C}'_0 \cdot K_{l_0}$, alors $\tilde{\pi}_{0,k}(f) = 0$ et il en est donc de même de ${}^k\pi_{l_0}(f)$ étant donné que $\tilde{\pi}_{0,k}$ et ${}^k\pi_{l_0}$ sont équivalentes.

La continuité du rétracte résulte du fait que le rétracte donné par le théorème 4.11 est continu. \square

Chapitre 5

Théorie du rétracte sur les caractères

Introduction

L'objectif de cette partie est de construire un rétracte, sous l'action d'un compact K , sur la strate des caractères.

Soient N un groupe de Lie connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{n} , l une forme linéaire sur \mathfrak{n} et soit K un sous-groupe de Lie compact des automorphismes de N . Définissons

$$\mathcal{C} = \{l \in \mathfrak{n}^* \mid \langle l, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0\}.$$

Alors \mathcal{C} est la strate de \mathfrak{n}^* qui correspond aux caractères de N . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de \mathfrak{n}^* .

Soit $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{n} qui passe par $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, c'est à dire,

$$\mathfrak{n} = \langle Y_1, \dots, Y_d \rangle \oplus \underbrace{\langle Y_{d+1}, \dots, Y_n \rangle}_{\in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{l \in \mathfrak{n}^* \mid \langle l, Y_i \rangle = 0, d+1 \leq i \leq n\} \\ &= \mathbb{R}Y_1^* \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_d^* \end{aligned}$$

Les représentations unitaires irréductibles de N correspondant aux éléments de \mathcal{C} sont les caractères de N tout entier définis comme suit :

$$\begin{aligned} \chi_l : N &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \chi_l(x) = e^{-i \langle l, \log x \rangle} \end{aligned}$$

où l est une forme linéaire de \mathcal{C} . La représentation unitaire irréductible associée π_l coïncide alors avec χ_l dans le sens suivant :

$$\mathcal{H}_{\pi_l} \equiv \mathbb{C}$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_l} \equiv \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\pi_l(x)\xi &= \chi_l(x) \cdot \xi \quad \forall x \in N \\ \pi_l(f)\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle l, x \rangle} \xi dx \\ &= \widehat{f}(l)\xi\end{aligned}$$

5.1 Fourier inverse sur la strate des caractères

5.1.1 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux

Pour tout compact C contenu dans \mathcal{C} , on définit l'espace des fonctions noyaux \mathcal{N}_C comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que leurs supports en l soient contenus dans C .

5.1.2 Théorème d'inversion de Fourier sur les caractères.

Théorème 5.1. *Soit C un compact contenu dans \mathcal{C} . Pour toute fonction noyau $F \in \mathcal{N}_C$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$, c'est-à-dire $f \circ \exp \in \mathcal{S}(\mathfrak{n})$, tel que $\widehat{f \circ \exp}(l) = F(l)$ si $l \in \mathcal{C}$ et $\widehat{f \circ \exp}(l) = 0$ si $l \in \mathcal{C} \setminus C$. Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu par une méthode bien précise. Celle-ci peut être choisie telle que l'application $F \longrightarrow R(F)$ de l'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N}_C dans $\mathcal{S}(N)$ est continue si on munit \mathcal{N}_C de la topologie induite par les semi-normes de l'espace de Schwartz.*

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}Y_{d+1}^* \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_n^*)$ telle que $\varphi(0) = 1$. Posons alors $\tilde{F} := F \otimes \varphi$. Ainsi $\tilde{F} \in \mathcal{S}(\mathfrak{n}^*) \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Il existe alors $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $f \circ \exp \in \mathcal{S}(\mathfrak{n})$ et $\widehat{f \circ \exp} = \tilde{F} \in \mathcal{S}(\mathfrak{n}^*)$. Il suffit en effet de prendre $f \circ \exp = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{F})$ où \mathcal{F}^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse.

Pour $l \in \mathcal{C}$, on a $\chi_l \in \widehat{N}$ et

$$\chi_l(f \circ \exp) = \widehat{f \circ \exp}(l) = \tilde{F}(l) = \varphi(0)F(l) = F(l)$$

□

5.1.3 Remarques.

- Le rétracte construit n'est pas unique car il dépend du choix de la fonction φ .
- La construction du rétracte se fait de manière continue, pour φ fixé.

5.2 Action de K sur les caractères.

Proposition 5.1. \mathcal{C} est stable par l'action de K .

Preuve. Soient $k \in K$ et $l \in \mathcal{C}$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle k \cdot l, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle &= \langle l, [k^{-1}\mathfrak{n}, k^{-1}\mathfrak{n}] \rangle \\ &= \langle l, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $k \cdot l \in \mathcal{C}$ et \mathcal{C} est stable par l'action de K . □

5.2.1 Stabilisateurs

Par définition, le stabilisateur K_{π_l} d'une représentation π_l est

$$K_{\pi_l} = \{k \in K \mid {}^k\pi_l \simeq \pi_l\}$$

Dans notre cas, $\pi_l = \chi_l$ et par suite le stabilisateur sera

$$\begin{aligned} K_{\pi_l} &= \{k \in K \mid {}^k\chi_l \simeq \chi_l\} \\ &= \{k \in K \mid e^{-i\langle l, k^{-1} \cdot X \rangle} = e^{-i\langle l, X \rangle} \text{ pour tout } X \in \mathfrak{n}\} \\ &= \{k \in K \mid \chi_{k \cdot l} = \chi_l\} \\ &= \{k \in K \mid k \cdot l = l\} \end{aligned}$$

D'autre part, le stabilisateur K_l d'une forme linéaire l est donné par

$$K_l = \{k \in K \mid k \cdot l = l\}$$

Ainsi, dans notre cas, on a $K_{\pi_l} = K_l$.

5.2.2 Paramétrisation de $K \cdot l_0$

Soit $l_0 \in \mathcal{C}$ fixé et $K \cdot l_0$ la K -orbite de l_0 . C'est une sous-variété compacte dans \mathcal{C} . Elle est régulièrement plongée dans \mathcal{C} . Soient $l \in K \cdot l_0$ et (U, φ) une carte qui paramétrise l'orbite $K \cdot l_0$ au voisinage de l . Alors il existe une carte (V, ρ) de \mathcal{C} au voisinage de l telle que

$$V = \rho^{-1}(\varphi(U) \times \prod_{i=1}^{d-r}]-a_i, a_i[)$$

où $r = \dim K \cdot l_0$ et V est à adhérence compacte.

5.2.3 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux locales $\tilde{\mathcal{N}}_{(U,\varphi)}$

Soit $l_0 \in \mathcal{C}$ fixé. Supposons que la sous-variété $K \cdot l_0$ est munie d'une famille de cartes qui peuvent être considérées comme la restriction à \mathcal{C} de cartes au sens de 5.2.2. Soit (U, φ) une telle carte. On définit l'ensemble des fonctions noyaux $\tilde{\mathcal{N}}_{(U,\varphi)}$ comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : K \cdot l_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que F soit à support compact en l contenu dans U . Soit C un compact fixe dans U . On note alors

$$\mathcal{N}_{(U,\varphi),C} := \{F \in \tilde{\mathcal{N}}_{(U,\varphi)} \mid \text{supp}_l F \subset C\}.$$

Ici $\text{supp}_l F$ désigne le support en $l = k \cdot l_0$ de la fonction F .

5.2.4 Théorème du rétracte local sur $K \cdot l_0$

Théorème 5.2. *Soit $l_0 \in \mathcal{C}$ et $K \cdot l_0$ la K -orbite correspondante, qui est évidemment une sous-variété compacte de \mathfrak{n}^* . Soient (U, φ) une carte de $K \cdot l_0$ et C un compact fixe dans U . Pour toute fonction noyau $F \in \mathcal{N}_{(U,\varphi),C}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ telle que $\widehat{f \circ \exp}(l) = F(l)$ pour tout $l \in K \cdot l_0$. Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu. La construction de ce rétracte peut être faite de manière à ce que l'application linéaire $F \longrightarrow R(F)$ de l'ensemble des fonctions noyaux locales $\mathcal{N}_{(U,\varphi),C}$ dans $\mathcal{S}(N)$ soit continue si on munit $\mathcal{N}_{(U,\varphi),C}$ par la topologie induite par les semi-normes de l'espace de Schwartz.*

Preuve. Pour construire le rétracte f , on va prolonger F localement sur la carte (V, ρ) de \mathcal{C} pour tout $F \in \mathcal{N}_{(U,\varphi),C}$ puis appliquer le théorème 5.1.

- Prolongement local sur (V, ρ) :
- Remarquons d'abord qu'on a :

$$F(l) = F(\rho^{-1}(\varphi(l), 0, \dots, 0)) \quad \forall l \in C \subset U$$

Définissons F^1 sur $(\varphi(U) \times \{(0, \dots, 0)\})$ par :

$$F^1((v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0)) := F(\rho^{-1}(v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0))$$

où r est la dimension de la sous-variété $K \cdot l_0$. Ensuite, on prolonge F^1 en une fonction \check{F}^1 sur $(\varphi(U) \times \prod_{j=1}^{d-r}]-a_j, a_j[)$ par

$$\check{F}^1(u_1, \dots, u_r, s_1, \dots, s_{d-r}) := F^1(u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0) \prod_{j=1}^{d-r} \theta_j(s_j)$$

où $\theta_j \in \mathcal{C}_c^\infty(]-a_j, a_j[)$ avec $\theta_j(0) = 1$ est arbitraire, mais fixé une fois pour toutes.

Finalement, on obtient un prolongement \check{F} de F par

$$\check{F}(l) = \check{F}^1(\rho(l)) \quad \forall l \in V \text{ et } \check{F}(l) = 0 \text{ si } l \in \mathcal{C} \setminus V$$

La fonction \check{F} est bien un prolongement de F à V car

$$\begin{aligned}\check{F}(l) &= \check{F}^1(\rho(l)) \\ &= \check{F}^1(\varphi(l), 0, \dots, 0) \\ &= F^1(\varphi(l), 0, \dots, 0) \cdot 1 \\ &= F(\rho^{-1}(\varphi(l), 0, \dots, 0)) \\ &= F(l)\end{aligned}$$

pour tout $l \in C \subset U \subset V$.

– Application du théorème 5.1 :

En appliquant le théorème d'inversion de Fourier sur la strate des caractères, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\widehat{f \circ \exp}(l) = \check{F}(l)$ si $l \in V \subset \mathcal{C}$ et $\widehat{f \circ \exp}(l) \equiv 0$ si $l \in K \cdot l_0 \setminus C$. Ainsi, pour $l \in U$, on a $\check{F}(l) = F(l)$ et on obtient le résultat.

La continuité du rétracte est donnée par la continuité du rétracte dans le théorème 5.1 et par le fait que nos opérations de prolongement des fonctions noyaux sont également continues, le choix des θ_j étant fixé une fois pour toutes. \square

5.2.5 Partition de l'unité

Étant donnée $K \cdot l_0$ la sous-variété compacte de \mathcal{C} qui est munie d'un système de cartes, on choisit alors pour tout $l \in K \cdot l_0$, des ouverts relatifs $U(l)$, $V(l)$ et $W(l)$ de $K \cdot l_0$ tels que

$$l \in U(l) \subset \overline{U(l)} \subset W(l) \subset \overline{W(l)} \subset V(l) \subset K \cdot l_0$$

et tel que $V(l)$ soit contenu entièrement dans une même carte de la sous-variété $K \cdot l_0$. Puisque $K \cdot l_0$ est compact, il existe alors un nombre fini de $l^i \in K \cdot l_0$ et de $U(l^i)$ qui recouvrent $K \cdot l$ avec $i \in I$ où I est fini.

On construit les fonctions $\varphi(l^i)(\cdot) = \varphi_i(\cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(K \cdot l_0)$ avec

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_i(\cdot) \leq 1 \\ \varphi_i(\cdot) |_{U(l^i)} \equiv 1 \\ \text{supp } \varphi_i \subset W(l^i) \end{cases}$$

On obtient alors $\sum_{i \in I} \varphi_i > 0$ sur $K \cdot l_0$ et on peut dans ce cas définir les fonctions h_i comme suit

$$h_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{m \in I} \varphi_m} \quad \forall i \in I$$

Ainsi $(h_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité sur $K \cdot l_0$ telle que pour $i \in I$, $\text{supp } h_i \subset W(l^i)$ est contenu entièrement dans une même carte et

$$\sum_{i \in I} h_i \equiv 1 \text{ sur } K \cdot l_0$$

5.2.6 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux globales $\tilde{\mathcal{N}}$

Soit $l_0 \in \mathcal{C}$ fixé. On définit l'ensemble des fonctions noyaux globales $\tilde{\mathcal{N}}$ comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F : K \cdot l_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que pour tout $A \in \mathbb{N}$, pour tout compact C' contenu dans U où (U, φ) est une carte de $K \cdot l_0$, on a

$$\|F\|_A^{U, C'} := \sup_{l_U \in \varphi(C')} \sup_{|a| \leq A} \left| \frac{\partial^a}{\partial l_U^a} F \circ \varphi^{-1}(l_U) \right| < \infty \quad (5.1)$$

où l_U désigne les coordonnées de $l \in K \cdot l_0$ dans la carte (U, φ) .

On munit $\tilde{\mathcal{N}}$ de la topologie définie par l'ensemble de toutes les semi-normes (5.1)

5.2.7 Théorème du rétracte sur $K \cdot l_0$

Théorème 5.3. *Pour toute fonction noyau $F \in \tilde{\mathcal{N}}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ telle que $\widehat{f \circ \exp}(l) = F(l)$ si $l \in K \cdot l_0$. Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu de cette manière. L'algorithme de construction du rétracte $R(F)$ peut être choisi de manière à ce que l'application $F \longrightarrow R(F)$ de l'ensemble des fonctions noyaux $\tilde{\mathcal{N}}$ dans $\mathcal{S}(N)$ soit continue.*

Preuve. Considérons la partition de l'unité construite en 5.2.5. On pose pour tout $i \in I$,

$$F_i(l) := h_i(l)F(l)$$

Les fonctions F_i vérifient alors les hypothèses du théorème 5.2. Pour tout $i \in I$, il existe donc $f_i \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\widehat{f_i \circ \exp}(l) = F_i(l)$ pour tout $l \in K \cdot l_0$ et $\widehat{f_i \circ \exp}(l) = 0$ si $l \in K \cdot l_0 \setminus W(l^i)$. Or

$$F(l) = \sum_{i \in I} h_i(l)F(l) = \sum_{i \in I} F_i(l)$$

pour tout $l \in K \cdot l_0$. Donc $f = \sum_{i \in I} f_i \in \mathcal{S}(N)$ est tel que $\widehat{f \circ \exp}(l) = F(l)$ pour tout $l \in K \cdot l_0$. Pour une partition de l'unité fixée, les applications $F \longmapsto F_i$ sont continues. La continuité du rétracte des F_i , donnée dans le théorème 5.2, permet alors de conclure à la continuité de $F \longmapsto R(F)$. \square

5.3 Rétracte sur K .

Remarque 5.1. *Dans la strate des caractères, les différentes représentations unitaires irréductibles, soumises à l'action de K , coïncident. En fait on a*

$$\chi_{k \cdot l_0} = \pi_{k \cdot l_0} = \tilde{\pi}_{0,k} = {}^k \pi_{l_0}$$

où $\pi_{k \cdot l_0}$, $\tilde{\pi}_{0,k}$ et ${}^k \pi_{l_0}$ sont les représentations définies dans le chapitre 4.

Par définition, le stabilisateur K_{l_0} d'une forme linéaire l_0 est

$$K_{l_0} = \{k \in K \mid k \cdot l_0 = l_0\}$$

Il existe alors un difféomorphisme entre $K \cdot l_0$ et K/K_{l_0} (chapitre 4). Ainsi on peut définir les fonctions noyaux sur K/K_{l_0} , ou même sur (S, ζ) une section de K/K_{l_0} , au lieu de $K \cdot l_0$.

Dans ce cas, on définit l'ensemble des fonction noyaux locales $\tilde{\mathcal{N}}'_{\zeta(S), C_0}$ comme suit : Pour tout $k_0 \in K$, il existe une section lisse (S, ζ) de K/K_{l_0} contenant k_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K décrite entièrement à l'aide d'une seule carte (U_0, φ_0) . Pour tout compact fixe C_0 contenu dans $\zeta(S)$, on définit les fonctions noyaux \mathcal{C}^∞ ,

$$F : \zeta(S) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que leurs supports en k soient contenus dans C_0 et telles que pour tout $A \in \mathbb{N}$, on a

$$\|F\|_A^{U_0, C_0} := \sup_{k_{U_0} \in \varphi_0(C_0)} \sup_{|a| \leq A} \left| \frac{\partial^a}{\partial k_{U_0}^a} (F \circ \varphi_0^{-1})(k_{U_0}) \right| < \infty. \quad (5.2)$$

Ici, k_{U_0} désigne les coordonnées de k dans la carte (U_0, φ_0) .

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 5.4. *Pour tout $k_0 \in K$, il existe une section lisse (S, ζ) de K/K_{l_0} contenant k_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K décrite entièrement à l'aide d'une seule carte. Pour tout compact fixe C_0 contenu dans $\zeta(S)$, on a : Pour toute fonction noyau F dans $\tilde{\mathcal{N}}'_{\zeta(S), C_0}$, il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\chi_{k \cdot l}(f) = \hat{f}(k \cdot l) = F(k)$ pour tout $k \in \zeta(S)$.*

Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $F \longrightarrow R(F)$ de l'ensemble $\tilde{\mathcal{N}}'_{\zeta(S), C_0}$ des fonctions noyaux à support en k contenu dans le compact fixe C_0 dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (5.2).

Preuve. Puisque un rétracte global sur $K \cdot l_0$ existe d'après le théorème 5.3, il suffit de remarquer qu'il existe un difféomorphisme entre $K \cdot l_0$ et K/K_{l_0} . Ainsi on pourra construire, d'une manière analogue que dans le chapitre 4, un rétracte local sur une section de K/K_{l_0} . Pour les détails, voir le chapitre 4 □

De même, on définit l'ensemble des fonctions noyaux globales \mathcal{N} sur K tout entier comme l'ensemble de toutes les fonctions

$$F : K \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui sont lisses et telles que

- Si $k = k_1 \bmod K_{l_0}$, il faut que

$$F(k) = F(k_1)$$

- Pour tout compact C'_1 contenu dans U' où (U', φ') est une carte de K , on a

$$\|F\|_A^{U', C'_1} := \sup_{k_{U'} \in \varphi'(C'_1)} \sup_{|a| \leq A} \left| \frac{\partial^a}{\partial k_{U'}^a} F \circ (\varphi')^{-1}(k_{U'}) \right| < \infty \quad (5.3)$$

où $k_{U'}$ désigne les coordonnées de $k \in K$ par rapport à la carte (U', φ') .

Théorème 5.5. *Pour toute fonction noyau F dans \mathcal{N} , il existe $f \in \mathcal{S}(N)$ tel que $\chi_{k,l}(f) = \widehat{f}(k \cdot l) = F(k)$ pour tout $k \in K$.*

Notons $f = R(F)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $F \rightarrow R(F)$ de l'ensemble \mathcal{N} des fonctions noyaux globales dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (5.3).

Preuve. La construction du rétracte se fait comme dans le théorème 4.11 du chapitre 4. □

Chapitre 6

Idéaux K –invariants

Dans ce chapitre, on caractérise les idéaux K –invariants. On étudie deux catégories d'idéaux : les idéaux K –invariants maximaux et les idéaux K –premiers. La première partie du chapitre consiste à déterminer les idéaux K –invariants maximaux et la deuxième partie compare les idéaux K –premiers aux noyaux $\text{Ker}\Omega_l$ des K –orbites Ω_l .

6.1 Les idéaux K –invariants maximaux

Cette partie est une adaptation à l'action compacte, du cas des actions exponentielles [18].

Définition 6.1. Soit I un idéal de $L^1(N)$, resp. $\mathcal{S}(N)$. On dit que I est K –invariant si $f \in I$ et $k \in K$ entraîne $f^k \in I$ où $f^k(x) = f(k \cdot x)$ pour tout $x \in N$.

Définition 6.2. Pour tout $l \in \mathfrak{n}^*$, on note Ω_l la K –orbite donnée par

$$\Omega_l = \{k \cdot l \mid k \in K\}$$

Remarque 6.1. Les K –orbites Ω_l sont compactes, donc fermés.

On sait que chaque $\pi_l \in \widehat{N}$ est obtenue de la manière suivante : Il existe $l \in \mathfrak{n}^*$ et $\mathfrak{p}(l)$ une polarisation de l tels que si $\chi_l(x) = e^{-i\langle l, \log x \rangle}$ est un caractère défini sur $P(l) = \exp \mathfrak{p}(l)$, π_l est équivalente à la représentation induite $\text{ind}_{P(l)}^N \chi_l$. De plus, la représentation ${}^k \pi_l$, définie par ${}^k \pi_l(x) = \pi_l(k^{-1} \cdot x)$ pour tout $x \in N$, est unitairement équivalente à la représentation induite $\tilde{\pi}_k := \text{ind}_{k \cdot P(l)}^N \chi_{k \cdot l}$. Ceci explique la définition suivante du noyau d'une orbite puisque

$${}^k \pi_l(f) = 0 \iff \tilde{\pi}_k(f) = 0, \quad f \in L^1(N).$$

Définition 6.3. Soit $\pi_l \in \widehat{N}$ une représentation unitaire irréductible de N . On définit alors le noyau de l'orbite Ω_l comme suit

$$\text{Ker}\Omega_l = \{f \in L^1(N) \mid {}^k \pi_l(f) = 0 \forall k \in K\}$$

Proposition 6.1. Soit Ω_l une K -orbite. Alors $\text{Ker}\Omega_l$ est un idéal K -invariant fermé propre de $L^1(N)$.

Preuve. Evident.

Proposition 6.2. Soit $\pi = \pi_p \in \widehat{N}$ tel que $\text{Ker}\Omega_l \subset \text{Ker}\pi_p$. Alors $p \in \Omega_l$.

Preuve. Ceci découle du fait que pour les groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes, $\text{Prim}_*L^1(N)$ muni de la topologie de Jacobson et l'espace des orbites coadjointes sont homéomorphes. De plus l'orbite Ω_l est fermée.

Théorème 6.1. Les idéaux K -invariants fermés maximaux propres de $L^1(N)$ coïncident avec les noyaux $\text{Ker}\Omega_l$ correspondant aux K -orbites.

Preuve. Soit J un idéal fermé propre K -invariant de $L^1(N)$ tel que $\text{Ker}\Omega_l \subset J$. D'après la propriété de Wiener [9], c'est-à-dire, tout idéal fermé propre est contenu dans le noyau d'une représentation unitaire irréductible, il existe $\pi = \pi_p \in \widehat{N}$ tel que $\text{Ker}\Omega_l \subset J \subset \text{Ker}\pi_p$. Par la proposition 6.2, $p \in \Omega_l$ et $\Omega_l = \Omega_p$. D'autre part, puisque J est K -invariant,

$$\text{Ker}\Omega_l \subset J \subset \bigcap_{k \in K} (\text{Ker}\pi_p)^k = \bigcap_{k \in K} (\text{Ker}^k \pi_p) = \text{Ker}\Omega_p = \text{Ker}\Omega_l$$

Il s'en suit alors $J = \text{Ker}\Omega_l$ et $\text{Ker}\Omega_l$ est maximal. Réciproquement, soit J un idéal K -invariant maximal. Par le même raisonnement que précédemment, il existe $\pi = \pi_l \in \widehat{N}$ tel que

$$J \subset \bigcap_{k \in K} \text{Ker}({}^k \pi_l) = \text{Ker}\Omega_l$$

c'est-à-dire tel que $J = \text{Ker}\Omega_l$ par maximalité. \square

Théorème 6.2. Tout idéal fermé propre K -invariant de $L^1(N)$ est contenu dans un idéal K -invariant maximal de $L^1(N)$.

Preuve. Soit I un idéal fermé propre K -invariant. D'après la propriété de Wiener, il existe $\pi_l \in \widehat{N}$ tel que $I \subset \text{Ker}\pi_l$ et même $I \subset \bigcap_{k \in K} \text{Ker}({}^k \pi_l) = \text{Ker}\Omega_l$. \square

Théorème 6.3. A condition de savoir que

$$\overline{\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} = \text{Ker}\Omega_l \quad \forall l \in \mathfrak{n}^*,$$

on a :

Les idéaux K -invariants fermés maximaux propres de $\mathcal{S}(N)$ coïncident avec les noyaux $\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$ correspondant aux K -orbites de \mathfrak{n}^* . En particulier, ils sont obtenus par restriction à $\mathcal{S}(N)$ des idéaux K -invariants maximaux de $L^1(N)$.

Preuve. Soit \mathfrak{J} un idéal K -invariant maximal de $\mathcal{S}(N)$, en particulier il est fermé propre dans $\mathcal{S}(N)$. Soit $I = \overline{\mathfrak{J}}^{L^1(N)}$ l'idéal fermé K -invariant dans $L^1(N)$ correspondant. En appliquant la propriété de Wiener [16] pour $\mathcal{S}(N)$, il existe $\pi = \pi_p \in \widehat{N}$ tel que $\mathfrak{J} \subset \text{Ker}\pi_p \cap \mathcal{S}(N)$. Ainsi,

$$I = \overline{\mathfrak{J}}^{L^1(N)} \subset \overline{\text{Ker}\pi_p \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} \subset \text{Ker}\pi_p$$

et I est propre. Par le théorème 6.2, il existe Ω_l dans \mathfrak{n}^* tel que $I \subset \text{Ker}\Omega_l$. Alors $\mathfrak{J} \subset \text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$ et même

$$\mathfrak{J} = (\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N))$$

par maximalité de \mathfrak{J} . Réciproquement, supposons qu'il existe un idéal \mathfrak{J} fermé propre K -invariant de $\mathcal{S}(N)$ tel que $(\text{Ker}\Omega_p \cap \mathcal{S}(N)) \subset \mathfrak{J}$. Par le raisonnement de la première partie, il existe Ω_l tel que

$$\text{Ker}\Omega_p \cap \mathcal{S}(N) \subset \mathfrak{J} \subset \text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N).$$

Par suite, à condition de savoir que

$$\overline{\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} = \text{Ker}\Omega_l \quad \forall l \in \mathfrak{n}^*,$$

on a

$$\text{Ker}\Omega_p = \overline{\text{Ker}\Omega_p \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} \subset \overline{\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} = \text{Ker}\Omega_l.$$

Par maximalité de $\text{Ker}\Omega_p$ (théorème 6.2) dans $L^1(N)$, $\text{Ker}\Omega_p = \text{Ker}\Omega_l$ et $(\text{Ker}\Omega_p \cap \mathcal{S}(N)) = \mathfrak{J}$. Ceci montre que $(\text{Ker}\Omega_p \cap \mathcal{S}(N))$ est maximal. \square

Remarque 6.2. *La condition*

$$\overline{\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} = \text{Ker}\Omega_l$$

sera démontrée ultérieurement pour les formes linéaires génériques et les formes linéaires définissant les caractères, ainsi que, dans un exemple particulier, pour les K -orbites des autres strates. Donc, si \mathfrak{n}^ ne contient que des formes linéaires génériques ou des formes linéaires définissant les caractères, le résultat du théorème 6.3 caractérise tous les idéaux K -maximaux fermés de $\mathcal{S}(N)$. Ceci est en particulier le cas pour le groupe de Heisenberg ou le groupe de Lie nilpotent libre de pas 2 à 3 générateurs (chapitre 2). Même pour le groupe de Lie nilpotent libre de pas 2 et à 4 générateurs, le résultat reste vrai (chapitre 7).*

6.2 Densité des fonctions de Schwartz dans l'orbite.

La caractérisation des idéaux K -premiers se fait d'abord pour l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(N)$ puis pour l'algèbre $L^1(N)$. Le passage à $L^1(N)$ se fait grâce à une relation entre $\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$ et $\text{Ker}\Omega_l$. Pour étudier la relation entre $\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$ et $\text{Ker}\Omega_l$, on se base sur la théorie du rétracte sur les K -orbites développée dans les chapitres 4 et 5. Dans ce chapitre, nous reprenons les mêmes notations que celles du chapitre 4. Nous rappelons donc le résultat du rétracte local pour la représentation ${}^k\pi_{l_0}$ qui va nous servir à déterminer la relation cherchée. Ici, l_0 désigne une forme linéaire générique au sens de Ludwig-Zahir.

Théorème 6.4. *Si l_0 est en plus alignée, pour tout $k_0 \in K$, il existe (S, ζ) une section lisse de K/K_{l_0} contenant k_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K . Pour tout compact fixe \tilde{C}'_0 contenu dans $\zeta(S)$, on a : Pour toute fonction noyau \tilde{F}_0 dans $\tilde{\mathcal{N}}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$, l'ensemble des fonctions noyaux à*

support en k contenu dans le compact fixe \tilde{C}'_0 , il existe $f_0 \in \mathcal{S}(N)$ tel que ${}^k\pi_{l_0}(f_0)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in \zeta(S)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f_0) = 0$ si $\dot{k} \notin S$.

Notons $f_0 = R(\tilde{F}_0)$ ce rétracte. Celui-ci peut être obtenu par un algorithme bien précis tel que l'application linéaire $\tilde{F}_0 \rightarrow R(\tilde{F}_0)$ de $\mathcal{N}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_0}$ dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie d'espace de Schwartz généralisé définie par des semi-normes appropriées comme dans le chapitre 4.

6.2.1 Partition de l'unité de K/K_{l_0} .

Pour tout $k \in K$, étant donnée (S, ζ) une section lisse de K/K_{l_0} contenant \dot{k} , il existe alors des voisinages U, W et V de \dot{k} dans K/K_{l_0} tels que

$$\dot{k} \in U \subset \bar{U} \subset W \subset \bar{W} \subset V \subset \bar{V} \subset S \subset K/K_{l_0}.$$

On suppose de plus que S soit complètement contenu dans une même carte de l'atlas de K/K_{l_0} et S un ouvert dans cette carte. Ainsi W peut être identifié à un ouvert, d'adhérence compacte, d'un espace \mathbb{R}^p , pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

Comme K/K_{l_0} est compact, il existe des familles finies d'ouverts $(U_i)_{i \in I}, (W_i)_{i \in I}, (V_i)_{i \in I}$ et une famille finie de sections $(S_i, \zeta_i)_{i \in I}$ tels que les $U_i, i \in I$, recouvrent K/K_{l_0} où I est fini. On construit alors $\psi_i(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(K/K_{l_0})$ avec

$$\begin{cases} 0 \leq \psi_i(\cdot) \leq 1 \\ \psi_i(\cdot) |_{U_i} \equiv 1 \\ \text{supp } \psi_i \subset W_i \end{cases}$$

pour tout $i \in I$.

Définissons les fonctions h_i comme suit

$$h_i = \frac{\psi_i}{\sum_{m \in I} \psi_m}.$$

On a alors

$$\sum_{i \in I} h_i \equiv 1 \text{ sur } K/K_{l_0}$$

et $(h_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité de K/K_{l_0} telle que $\text{supp } h_i \subset W_i \subset \bar{W}_i$.

Chaque h_i peut donc être identifiée à une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans un \mathbb{R}^p , étant donné que $\text{supp } h_i$ est entièrement contenu dans une carte de l'atlas de K/K_{l_0} .

Remarque 6.3. $\zeta_i(\bar{W}_i)$ est un compact contenu dans $\zeta_i(S_i)$, donc dans $\zeta_i(S_i) \cdot K_{l_0} = p^{-1}(S_i)$ où $p : K \rightarrow K/K_{l_0}$ est la projection canonique. De même, $\zeta_i(\bar{W}_i) \cdot K_{l_0} \subset p^{-1}(S_i)$.

6.2.2 Relation entre f et f_i

Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(N)$ arbitraire. Avec les choix précédents, soit $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ le noyau de l'opérateur ${}^k\pi_{l_0}(f)$ pour tout $k \in K$, $\tilde{\tilde{F}}_0(k, \cdot, \cdot)$ le noyau de l'opérateur ${}^k\pi_{l_0}(f)$ pour tout $k \in \xi(S)$ et $(h_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité de K/K_{l_0} construite comme en 6.2.1.

Posons

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{0,i}(k, \cdot, \cdot) &:= h_i(\dot{k})\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot) \quad \forall k \in K \text{ et} \\ \tilde{\tilde{F}}_{0,i} &:= \tilde{F}_{0,i}|_{\zeta_i(S_i) \times N \times N}\end{aligned}$$

où $(\zeta_i, S_i)_{i \in I}$ est la famille finie de sections lisses de K/K_{l_0} associée à la partition de l'unité.

Alors $\tilde{\tilde{F}}_{0,i} \in \mathcal{N}'_{\zeta_i(S_i), C_i}$ avec $C_i := \zeta_i(\overline{W}_i)$ un compact fixe contenu dans $\zeta_i(S_i)$. Ainsi, en appliquant le théorème 6.4, il existe $f_i \in \mathcal{S}(N)$ tel que ${}^k\pi_{l_0}(f_i)$ possède $\tilde{\tilde{F}}_{0,i}(k, \cdot, \cdot)$ comme noyau d'opérateur pour tout $k \in \zeta_i(S_i)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f_i) = 0$ si $\dot{k} \notin S_i$.

Lemme 6.1. *Supposons que pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(N)$, on a*

$${}^k\pi_{l_0}(f_1) = {}^k\pi_{l_0}(f_2).$$

Alors, pour tout $k_0 \in K_{l_0}$,

$${}^{kk_0}\pi_{l_0}(f_1) = {}^{kk_0}\pi_{l_0}(f_2)$$

Preuve. Puisque ${}^k\pi_{l_0}(f_1) = {}^k\pi_{l_0}(f_2)$, on a $f_1 - f_2 \in \text{Ker } {}^k\pi_{l_0}$. Mais

$${}^k\pi_{l_0} \simeq \pi_{k \cdot l_0} = \pi_{kk_0 \cdot l_0} \simeq {}^{kk_0}\pi_{l_0}$$

Donc

$$\text{Ker } {}^k\pi_{l_0} = \text{Ker } {}^{kk_0}\pi_{l_0}$$

et par suite $f_1 - f_2 \in \text{Ker } {}^{kk_0}\pi_{l_0}$. □

Proposition 6.3.

$${}^k\pi_{l_0}(f_i) = h_i(\dot{k})({}^k\pi_{l_0}(f)) \quad \forall k \in K$$

Preuve. Tout d'abord, on remarque que pour tout $k \in \zeta_i(S_i)$ et pour tout $\xi \in \mathcal{S}(N/P(l_0), \mathcal{X}_{l_0})$, on a

$$\begin{aligned}({}^k\pi_{l_0}(f_i)\xi)(x) &= \int_{N/P(l_0)} \tilde{\tilde{F}}_{0,i}(k, x, y)\xi(y)dy \\ &= h_i(\dot{k}) \int_{N/P(l_0)} \tilde{F}_0(k, x, y)\xi(y)dy \\ &= h_i(\dot{k})({}^k\pi_{l_0}(f)\xi)(x) \\ &= ({}^k\pi_{l_0}(h_i(\dot{k})f)\xi)(x)\end{aligned}$$

pour tout $x \in N$. D'après le lemme 6.1 on a, pour tout $k_0 \in K_{l_0}$,

$$\begin{aligned} {}^k\pi_{l_0}(f_i) = {}^k\pi_{l_0}(h_i(\dot{k})f) &\implies {}^{kk_0}\pi_{l_0}(f_i) = {}^{kk_0}\pi_{l_0}(h_i(\dot{k})f) \\ &\implies {}^{kk_0}\pi_{l_0}(f_i) = {}^{kk_0}\pi_{l_0}(h_i((kk_0)\dot{\cdot})f) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$${}^k\pi_{l_0}(f_i) = h_i(\dot{k})({}^k\pi_{l_0}(f)) \quad \forall k \in \zeta_i(S_i) \cdot K_{l_0}.$$

Si $\dot{k} \notin S_i$, c'est-à-dire, $k \notin \zeta_i(S_i) \cdot K_{l_0}$, on a ${}^k\pi_{l_0}(f_i) = 0$ et $h_i(\dot{k}) = 0$. Donc les deux membres coïncident. Ainsi

$${}^k\pi_{l_0}(f_i) = h_i(\dot{k})({}^k\pi_{l_0}(f)) \quad \forall k \in K$$

□

Notons

$$\tilde{f} := \sum_{i \in I} f_i \in \mathcal{S}(N)$$

Proposition 6.4.

$$f = \tilde{f} \text{ mod } \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$$

Preuve :

Pour $\tilde{f} = \sum_{i \in I} f_i$, on a

$$\begin{aligned} {}^k\pi_{l_0}(\tilde{f}) &= \sum_{i \in I} {}^k\pi_{l_0}(f_i) \\ &= \sum_{i \in I} \underbrace{h_i(\dot{k})}_{=1} {}^k\pi_{l_0}(f) \quad \text{d'après la proposition 6.3} \\ &= {}^k\pi_{l_0}(f) \quad \forall k \in K \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f = \tilde{f} \text{ mod } \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$$

□

6.2.3 Relation entre $\text{Ker}\Omega_{l_0}$ et $\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$

Pour déterminer une relation entre $\text{Ker}\Omega_{l_0}$ et $\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$, on se base sur les travaux de J. Ludwig et C. Molitor-Braun [18] pour une action exponentielle.

Soit $f \in L^1(N)$. Notons par $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ la fonction noyau de ${}^k\pi_{l_0}(f)$ pour tout $k \in K$ et

$$\tilde{\tilde{F}}_0 := \tilde{F}_0 |_{\zeta(S) \times N \times N}$$

où (S, ζ) est une section lisse de K/K_{l_0} .

Considérons aussi une fonction $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty(K)$ telle que

$$\psi_0 \geq 0, \quad \psi_0(e) > 0 \quad \text{et} \quad \int_K \psi_0(k) dk = 1.$$

Pour tout $f \in L^1(N)$, on définit

$$f^\sharp = \int_K f^{k'} \psi_0(k') dk'$$

avec $f^{k'}(x) := f(k' \cdot x)$ pour tout $x \in N$. On vérifie que

$${}^k \pi_{l_0}(f^\sharp) = \int_K {}^{k''} \pi_{l_0}(f) \psi_0(k'' k^{-1}) dk''$$

pour tout $k \in K$ et la fonction noyau de l'opérateur ${}^k \pi_{l_0}(f^\sharp)$ est donnée par

$$\tilde{F}_0^\sharp(k, \cdot, \cdot) = \int_K \tilde{F}_0(k'', \cdot, \cdot) \psi_0(k'' k^{-1}) dk''.$$

En effet, par définition, on a pour tout $\xi \in \mathcal{S}(N/P(l_0), \chi_{l_0})$,

$${}^k \pi_{l_0}(f) \xi(x) = \int_{N/P(l_0)} \tilde{F}_0(k, x, y) \xi(y) dy$$

Par suite

$$\begin{aligned} ({}^k \pi_{l_0}(f^\sharp) \xi)(x) &= \int_K {}^{k''} \pi_{l_0}(f) \xi(x) \psi_0(k'' k^{-1}) dk'' \\ &= \int_K \int_{N/P(l_0)} \tilde{F}_0(k'', x, y) \xi(y) \psi_0(k'' k^{-1}) dy dk'' \\ &= \int_{N/P(l_0)} \left(\int_K \tilde{F}_0(k'', x, y) \psi_0(k'' k^{-1}) dk'' \right) \xi(y) dy \end{aligned}$$

Ainsi

$$\tilde{F}_0^\sharp(k, \cdot, \cdot) = \int_K \tilde{F}_0(k'', \cdot, \cdot) \psi_0(k'' k^{-1}) dk''$$

Lemme 6.2. *Pour toute section (S, ζ) de K/K_{l_0} , pour tout compact de la forme $\zeta(\overline{W})$ contenu dans $p^{-1}(V)$, donc dans $p^{-1}(S)$, il existe K_0 un voisinage compact de e dans K suffisamment petit tel que*

$$K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \subset p^{-1}(V) \subset p^{-1}(S)$$

où $p : K \rightarrow K/K_{l_0}$ désigne la projection canonique. Ici les ouverts W, V sont comme dans 6.2.1

Preuve. Étant donnée (S, ζ) une section lisse de K/K_{l_0} , on considère W et V des ouverts d'adhérence compactes dans K/K_{l_0} tels que

$$W \subset \overline{W} \subset V \subset \overline{V} \subset S \subset K/K_{l_0}$$

Ainsi $\zeta(\overline{W})$ est un compact dans K contenu dans $\zeta(V)$, donc dans $\zeta(V) \cdot K_{l_0} = p^{-1}(V)$ où p est la projection canonique de K dans K/K_{l_0} .

Soit

$$\begin{aligned} m : K \times K &\longrightarrow K \\ (k, k') &\longmapsto k \cdot k' \end{aligned}$$

la multiplication sur K qui est uniformément continue, étant donné que K est compact. Ainsi, pour tout $k \in \zeta(\overline{W}) \subset \zeta(V) \subset p^{-1}(V) \subset p^{-1}(S)$, il existe \mathcal{V}_k un voisinage de e tel que

$$\mathcal{V}_k \cdot k \subset p^{-1}(V),$$

étant donné que $p^{-1}(V)$ est un ouvert de K contenant k .

Soit maintenant \mathcal{W}_k un voisinage ouvert de e d'adhérence compacte telle que

$$\overline{\mathcal{W}_k} \cdot \overline{\mathcal{W}_k} \subset \mathcal{V}_k$$

Étant donné que $\zeta(\overline{W})$ est un compact dans K , il existe alors une famille finie d'ouverts $(\mathcal{W}_{k_r} \cdot k_r)_{r \in R}$, R est fini, qui recouvrent $\zeta(\overline{W})$.

Posons $\mathcal{W} := \bigcap_{r \in R} \mathcal{W}_{k_r}$. On a alors

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}} \cdot (\overline{\mathcal{W}_{k_r}} \cdot k_r) &\subset \overline{\mathcal{W}_{k_r}} \cdot \overline{\mathcal{W}_{k_r}} \cdot k_r \\ &\subset \mathcal{V}_{k_r} \cdot k_r \\ &\subset p^{-1}(V) \end{aligned}$$

Il s'en suit alors que

$$\overline{\mathcal{W}} \cdot \zeta(\overline{W}) \subset \overline{\mathcal{W}} \cdot (\bigcup_{r \in R} \overline{\mathcal{W}_{k_r}} \cdot k_r) \subset p^{-1}(V) \subset p^{-1}(S)$$

Il suffit alors de prendre $K_0^{-1} = \overline{\mathcal{W}}$. □

Remarque 6.4. *Remarquons également que,*

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot) = 0 &\iff {}^k \pi_{l_0}(f) = 0 \\ &\iff {}^{kk_0} \pi_{l_0}(f) = 0 \quad \forall k_0 \in K_{l_0} \text{ d'après le lemme 6.1} \\ &\iff \tilde{F}_0(kk_0, \cdot, \cdot) = 0 \quad \forall k_0 \in K_{l_0} \end{aligned}$$

Donc $\text{supp}_k \tilde{F}_0$ est saturé, c'est-à-dire $\text{supp}_k \tilde{F}_0 = (\text{supp}_k \tilde{F}_0) \cdot K_{l_0}$.

Supposons à présent que $\tilde{F}_0(k, \cdot, \cdot)$ est une fonction noyau telle que $\text{supp}_k \tilde{F}_0 \subset \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0} \subset \zeta(S) \cdot K_{l_0}$, avec (S, ζ) et W comme précédemment. Soit K_0 le voisinage compact de e tel que $K_0^{-1} \zeta(\overline{W}) \subset p^{-1}(S)$ comme dans le lemme 6.2 et soit ψ_0 comme précédemment avec $\text{supp} \psi_0 \subset K_0$.

Définissons \tilde{F}_0^\sharp et $\tilde{\tilde{F}}_0^\sharp := \tilde{F}_0^\sharp |_{\zeta(S) \times N \times N}$. On vérifie alors que $\text{supp}_k \tilde{F}_0^\sharp \subset K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0}$ et

$$\text{supp}_k \tilde{\tilde{F}}_0^\sharp \subset (K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0}) \cap \zeta(S).$$

De plus $(K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0}) \cap \zeta(S)$ est un compact. En effet, on a

$$\underbrace{K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W})}_{\text{compact}} \subset p^{-1}(V) \subset p^{-1}(S).$$

Ainsi,

$$K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0} \subset p^{-1}(\overline{V}) \subset p^{-1}(S)$$

et

$$(K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0}) \cap \zeta(S) \subset \underbrace{p^{-1}(\overline{V}) \cap \zeta(S)}_{=\zeta(\overline{V})} \subset \zeta(S)$$

Par suite

$$(K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0}) \cap \zeta(S) = (K_0^{-1} \cdot \zeta(\overline{W}) \cdot K_{l_0}) \cap \zeta(\overline{V})$$

qui est compact.

Lemme 6.3.

$$Ker\Omega_{l_0} = Ker \Omega_{Ad^*(N)l_0}$$

Preuve. Il faut montrer que, pour tout $f \in L^1(N)$, on a

$${}^k\pi_{l_0}(f) = 0 \iff {}^k\pi_{Ad^*(n)l_0}(f) = 0, \forall n \in N.$$

On sait que $\pi_{Ad^*(n)l_0} \simeq \pi_{l_0}$ par la théorie de Kirillov, c'est-à-dire, il existe un opérateur d'entrelacement unitaire T tel que

$$\pi_{Ad^*(n)l_0}(x) \circ T = T \circ \pi_{l_0}(x), \quad x \in N$$

Alors, pour tout $k \in K$ et tout $x \in N$,

$${}^k\pi_{Ad^*(n)l_0}(x) \circ T = \pi_{Ad^*(n)l_0}(k^{-1} \cdot x) \circ T = T \circ \pi_{l_0}(k^{-1} \cdot x) = T \circ {}^k\pi_{l_0}(x)$$

et donc ${}^k\pi_{Ad^*(n)l_0} \simeq {}^k\pi_{l_0}$. □

Proposition 6.5. *Si $l_0 \in \mathfrak{n}^*$ est générique au sens de Ludwig-Zahir pour au moins une base de Jordan-Hölder bien choisie ou si $\langle l_0, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$ (c'est-à-dire, si l_0 définit un caractère sur N tout entier), alors, on a :*

$$L^1(N) * L^1(N) * Ker\Omega_{l_0} * L^1(N) * L^1(N) \subset \overline{Ker\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)}$$

Remarque 6.5. *Ce résultat est une adaptation aux cas des actions compactes du résultat correspondant dans le cas fixe [15] ou dans le cas des actions exponentielles [18].*

Preuve.

- Premier cas : Si l_0 est générique au sens de Ludwig Zahir, il suffit de faire la démonstration pour une forme générique alignée, étant donné que toute orbite co-adjointe contient une forme alignée et que $Ker\Omega_{l_0}$ ne dépend pas du choix de la forme linéaire sur l'orbite coadjointe (voir le lemme 6.3).

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que pour tout $\phi \in L^\infty(N)$ telle que $\langle \phi, \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N) \rangle = 0$, on a

$$\langle \phi, L^1(N) * L^1(N) * \text{Ker}\Omega_{l_0} * L^1(N) * L^1(N) \rangle = 0$$

Soient $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{S}(N)$ et $f \in \mathcal{S}(N)$. On considère f_i comme dans 6.2.2 et $\tilde{f} := \sum_{i \in I} f_i$, la somme étant finie.

Notons par $G_{0,1}, G_{0,2}, G_{0,3}, G_{0,4}$ et $\tilde{F}_{0,i}$ les noyaux des opérateurs respectifs ${}^k\pi_{l_0}(g_1), {}^k\pi_{l_0}(g_2), {}^k\pi_{l_0}(g_3), {}^k\pi_{l_0}(g_4)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f_i)$ si $k \in K$, pour i fixé, et par $\tilde{G}_{0,1}, \tilde{G}_{0,2}, \tilde{G}_{0,3}, \tilde{G}_{0,4}$ et $\tilde{\tilde{F}}_{0,i}$ les noyaux des opérateurs respectifs ${}^k\pi_{l_0}(g_1), {}^k\pi_{l_0}(g_2), {}^k\pi_{l_0}(g_3), {}^k\pi_{l_0}(g_4)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f_i)$ si $k \in \zeta_i(S_i)$ où $(S_i, \zeta_i)_{i \in I}$ est la famille de sections lisses de K/K_{l_0} comme en 6.2.1 qui a servi à construire les f_i .

Si on définit le produit de deux fonctions noyaux par

$$F_1 \circ F_2(k, x, y) = \int_{N/P(l_0)} F_1(k, x, x') F_2(k, x', y) dx',$$

on montre alors que le noyau de l'opérateur ${}^k\pi_{l_0}(g_1 * g_2 * f_i * g_3 * g_4)$ est donné par

$$G_{0,1} \circ G_{0,2} \circ \tilde{F}_{0,i} \circ G_{0,3} \circ G_{0,4}(k, \cdot, \cdot)$$

si $k \in K$ et par

$$\tilde{G}_{0,1} \circ \tilde{G}_{0,2} \circ \tilde{\tilde{F}}_{0,i} \circ \tilde{G}_{0,3} \circ \tilde{G}_{0,4}(k, \cdot, \cdot)$$

si $k \in \zeta_i(S_i)$.

En appliquant la définition de \sharp à la fonction $g_1 * g_2 * f_i * g_3 * g_4$, on obtient

$$(g_1 * g_2 * f_i * g_3 * g_4)^\sharp(x) = \int_K (g_1 * g_2 * f_i * g_3 * g_4)(k' \cdot x) \psi_0(k') dk'$$

et l'opérateur ${}^k\pi_{l_0}((g_1 * g_2 * f_i * g_3 * g_4)^\sharp)$ admet comme fonction noyau

$$(G_{0,1} \circ G_{0,2} \circ \tilde{F}_{0,i} \circ G_{0,3} \circ G_{0,4})^\sharp(k, \cdot, \cdot) = \int_K G_{0,1} \circ G_{0,2} \circ \tilde{F}_{0,i} \circ G_{0,3} \circ G_{0,4}(k'', \cdot, \cdot) \psi_0(k'' k^{-1}) dk''$$

pour $k \in K$. D'ailleurs, en choisissant K_0 suffisamment petit, on peut utiliser le même K_0 et la même fonction ψ_0 pour tout $i \in I$. Notons

$$(\tilde{G}_{0,1} \circ \tilde{G}_{0,2} \circ \tilde{\tilde{F}}_{0,i} \circ \tilde{G}_{0,3} \circ \tilde{G}_{0,4})^\sharp := (G_{0,1} \circ G_{0,2} \circ \tilde{F}_{0,i} \circ G_{0,3} \circ G_{0,4})^\sharp|_{\zeta_i(S_i) \times N \times N}$$

avec $\text{supp}((\tilde{G}_{0,1} \circ \tilde{G}_{0,2} \circ \tilde{\tilde{F}}_{0,i} \circ \tilde{G}_{0,3} \circ \tilde{G}_{0,4})^\sharp) \subset C_i^\sharp \times N \times N$ où $C_i^\sharp := (K_0^{-1} \cdot \zeta_i(\bar{W}_i) \cdot K_{l_0}) \cap \zeta_i(S_i) \subset \zeta_i(S_i)$ est un compact.

En passant en coordonnées via la base coexponentielle $\{X_1, \dots, X_d\}$ de \mathfrak{n} par rapport à $\mathfrak{p}(l_0)$, on note

$$\tilde{F}'_{0,i}(k, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) = \tilde{F}_{0,i}(k, \exp x_1 X_1 \dots \exp x_d X_d, \exp y_1 X_1 \dots \exp y_d X_d)$$

si $k \in K$. On définit $\tilde{G}'_{0,1}$, $\tilde{G}'_{0,2}$, $\tilde{G}'_{0,3}$, $\tilde{G}'_{0,4}$ et $\tilde{F}'_{0,i}$ de manière analogue.

Construisons maintenant des distributions tempérées sur des fonctions noyaux définies sur une section de K/K_{l_0} .

Notons par $\mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support dans le compact fixe C_i^\sharp et à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. On définit alors une forme linéaire μ_i sur $\mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ comme suit

$$\langle \mu_i, G \rangle := \langle \phi, g \rangle$$

pour tout $G \in \mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$, où $g = R(G)$ le rétracte obtenu par le théorème 6.4 et où $\phi \in L^\infty(N)$ tel que $\langle \phi, \text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N) \rangle = 0$. En effet, tout $G \in \mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ définit une fonction noyau sur $C_i^\sharp \times N \times N$, via la base coexponentielle $\{X_1, \dots, X_d\}$ et la relation de covariance.

Il est clair que μ_i est bien défini puisque $\langle \phi, \text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N) \rangle = 0$. En effet, soient $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(N)$ deux rétractes distincts de F_1 pour un certain $F_1 \in \mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$. Alors

$${}^k \pi_{l_0}(f_1) = {}^k \pi_{l_0}(f_2)$$

pour tout $k \in K$, c'est-à-dire, $f_1 - f_2 \in \text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$. Donc

$$\langle \phi, f_1 - f_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle \phi, f_1 \rangle = \langle \phi, f_2 \rangle .$$

De plus la forme linéaire μ_i est continue sur $\mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ pour la topologie d'espace de Schwartz. Comme $C_i^\sharp \subset \zeta_i(S_i)$ et que S_i est entièrement contenu dans une même carte de la variété K/K_{l_0} , on peut identifier C_i^\sharp à un compact dans un espace de \mathbb{R}^p . Il est alors facile à voir que μ_i est la restriction à $\mathcal{S}(C_i^\sharp, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ d'une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$. La description des distributions tempérées ([26]) nous dit alors que μ_i est de la forme

$$\langle \mu_i, G \rangle = \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma| \leq M} \int_{C_i^\sharp \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tau_{\alpha,\beta,\gamma}(k,x,y) \left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma G(k,x,y) dk dx dy$$

où $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont des fonctions continues à croissance modérée et $M \in \mathbb{N}$ si $\text{supp}_k G \subset C_i^\sharp$ et où k est identifié avec ses coordonnées locales dans la carte.

Considérons maintenant la forme linéaire continue ϕ^\sharp , définie sur $\mathcal{S}(N)$, comme suit :

$$\langle \phi^\sharp, f \rangle := \langle \phi, (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)^\sharp \rangle .$$

Soit f_i comme dans 6.2.2. Montrons qu' il existe $C'(i, \psi_0) > 0$ telle que

$$|\langle \phi^\sharp, f_i \rangle| \leq C'(i, \psi_0) \cdot \text{sup}_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(f) \|_{op} .$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\langle \phi^\sharp, f_i \rangle &= \langle \phi, (g_1 * g_2 * f_i * g_3 * g_4)^\sharp \rangle \\
&= \langle \mu_i, (\tilde{G}'_{0,1} \circ \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3} \circ \tilde{G}'_{0,4})^\sharp |_{C_i^\sharp \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rangle \\
&= \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma| \leq M} \int_{C_i^\sharp \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tau_{\alpha,\beta,\gamma}(k,x,y) \\
&\quad \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma (\tilde{G}'_{0,1} \circ \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3} \circ \tilde{G}'_{0,4})^\sharp(k,x,y) dk dx dy
\end{aligned}$$

Ici, on identifie k avec ses coordonnées locales dans la carte contenant $\zeta_i(S_i)$. De plus,

$$\begin{aligned}
(\tilde{G}'_{0,1} \circ \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3} \circ \tilde{G}'_{0,4})^\sharp(k,x,y) &= \int_{K_1} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tilde{G}'_{0,1}(k'',x,x') \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3}(k'',x',y') \\
&\quad \tilde{G}'_{0,4}(k'',y',y) \psi_0(k''k^{-1}) dx' dy' dk'' .
\end{aligned}$$

En effet, comme $k \in C_i^\sharp$ et $\text{supp} \psi_0 \subset K_0$, on peut limiter le domaine d'intégration en k'' à $K_1 := K_0 \cdot C_i^\sharp$.

$$\begin{aligned}
\text{Par suite } \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma (\tilde{G}'_{0,1} \circ \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3} \circ \tilde{G}'_{0,4})^\sharp(k,x,y) \\
= \int_{K_1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \tilde{G}'_{0,1}(k'',x,x') \right] \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3}(k'',x',y') \right. \\
\left. \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}'_{0,4}(k'',y',y) \right] dx' dy' \right\} \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^\alpha \psi_0(k''k^{-1}) dk'' .
\end{aligned}$$

Définissons maintenant les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
(G_{0,1}^\beta)'(k'',x,x') &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \tilde{G}'_{0,1}(k'',x,x') \\
(G_{0,4}^\gamma)'(k'',y',y) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}'_{0,4}(k'',y',y) \\
\psi'_0(k,k'') &= \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^\alpha \psi_0(k''k^{-1})
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle \phi^\sharp, f_i \rangle| &\leq \| \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3} \|_{L^2(K \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \\
&\quad \cdot \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma| \leq M} \left\{ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left[\int_{C_i^\sharp \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\tau_{\alpha,\beta,\gamma}(k,x,y) \psi'_0(k,k'') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (G_{0,1}^\beta)'(k'',x,x') (G_{0,4}^\gamma)'(k'',y',y) | dk dx dy \right]^2 dk'' dx' dy' \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Il existe alors

$$\begin{aligned} C(i, \psi_0) &:= \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq M} \left\{ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left[\int_{C_i^\# \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\tau_{\alpha, \beta, \gamma}(k, x, y) \psi_0'(k, k'') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (G_{0,1}^\beta)'(k'', x, x') (G_{0,4}^\gamma)'(k'', y', y) | dk dx dy \right]^2 dk'' dx' dy' \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} | \langle \phi^\#, f_i \rangle | &\leq C(i, \psi_0) \cdot \| \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3} \|_{L^2(K \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \\ &\leq C(i, \psi_0) \cdot \sqrt{\text{mes}(K)} \cdot \sup_{k \in K} \| \tilde{G}'_{0,2} \circ \tilde{F}'_{0,i} \circ \tilde{G}'_{0,3}(k, \cdot, \cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \\ &= C(i, \psi_0) \cdot \sqrt{\text{mes}(K)} \cdot \sup_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(g_2) {}^k \pi_{l_0}(f_i) {}^k \pi_{l_0}(g_3) \|_{HS} \end{aligned}$$

où $\| \cdot \|_{HS}$ est la norme de Hilbert-Schmidt.

Finalement, on a, pour de nouvelles constantes,

$$\begin{aligned} | \langle \phi^\#, f_i \rangle | &\leq C_1(i, \psi_0) \cdot \sup_{k \in K} [\| {}^k \pi_{l_0}(g_2) \|_{HS} \cdot \| {}^k \pi_{l_0}(g_3) \|_{HS}] \cdot \sup_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(f_i) \|_{op} \\ &\leq C'(i, \psi_0) \cdot \sup_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(f_i) \|_{op} \\ &= C'(i, \psi_0) \cdot \sup_{k \in K} \| h_i(k) {}^k \pi_{l_0}(f) \|_{op} \\ &\leq C'(i, \psi_0) \cdot \sup_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(f) \|_{op} \text{ car } 0 \leq h_i \leq 1 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} | \langle \phi^\#, \tilde{f} \rangle | &= \left| \sum_i \langle \phi^\#, f_i \rangle \right| \\ &\leq \sum_i | \langle \phi^\#, f_i \rangle | \\ &\leq \left(\sum_i C'(i, \psi_0) \right) \sup_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(f) \|_{op} \\ &= C(\psi_0) \sup_{k \in K} \| {}^k \pi_{l_0}(f) \|_{op} \\ &\leq C(\psi_0) \| f \|_1 \end{aligned}$$

où $C(\psi_0) := \sum_i C'(i, \psi_0)$ est une somme finie.

D'après la proposition 6.4, $f = \tilde{f} + h$ où $h \in \text{Ker} \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$. Par suite, on a

$$\langle \phi^\#, f \rangle = \langle \phi^\#, \tilde{f} \rangle + \langle \phi^\#, h \rangle$$

Le second terme de la somme est nul. En effet,

$$(g_1 * g_2 * h * g_3 * g_4)^k = g_1^k * g_2^k * h^k * g_3^k * g_4^k.$$

Puisque $h \in \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$ et que $\mathcal{S}(N)$ est K -invariant, $h^k \in \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$,

$$g_1^k * g_2^k * h^k * g_3^k * g_4^k \in \text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$$

et

$$\langle \phi, (g_1 * g_2 * h * g_3 * g_4)^k \rangle = 0$$

comme ϕ annule $\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$. D'où également

$$\begin{aligned} \langle \phi^\sharp, h \rangle &= \langle \phi, (g_1 * g_2 * h * g_3 * g_4)^\sharp \rangle \\ &= \langle \phi, \int_K (g_1 * g_2 * h * g_3 * g_4)^k \psi_0(k) dk \rangle \\ &= \int_K \psi_0(k) \langle \phi, (g_1 * g_2 * h * g_3 * g_4)^k \rangle dk \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} |\langle \phi^\sharp, f \rangle| &= |\langle \phi^\sharp, \tilde{f} \rangle| \\ &\leq C(\psi_0) \cdot \sup_{k \in K} \|\pi_{l_0}^k(f)\|_{op} \\ &\leq C(\psi_0) \|f\|_1 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(N) \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{S}(N)$ est dense dans $L^1(N)$ et que la forme linéaire $f \mapsto \langle \phi^\sharp, f \rangle$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$, la forme linéaire se prolonge à $L^1(N)$ tout entier et l'inégalité reste vraie aussi pour tout $f \in L^1(N)$. En particulier, si $f \in \text{Ker}\Omega_{l_0}$, on a ${}^k\pi_{l_0}(f) = 0$ pour tout $k \in K$ et

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi^\sharp, f \rangle \\ &= \langle \phi, (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)^\sharp \rangle \\ &= \int_K \int_N \phi(x) (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)^k(x) \psi_0(k) dx dk. \end{aligned}$$

En choisissant les fonctions ψ_0 de sorte que leurs supports, qui sont contenus dans une carte de K , forment une base de voisinages de l'élément neutre, on obtient le résultat suivant

$$\int_N \phi(x) (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)(x) dx = 0$$

pour tout $f \in \text{Ker}\Omega_{l_0}$ et pour tout $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{S}(N)$, puis aussi pour $g_1, g_2, g_3, g_4 \in L^1(N)$.

Finalement on a

$$L^1(N) * L^1(N) * \text{Ker}\Omega_{l_0} * L^1(N) * L^1(N) \subset \overline{\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)}$$

- Deuxième cas : Si $\langle l_0, [n, n] \rangle = 0$, alors ${}^k\pi_{l_0} = \chi_{k.l_0}$ est un caractère et le raisonnement précédant reste correct, avec des simplifications évidentes. En effet, dans ce cas on a également un théorème du rétracte (théorème 5.4)

□

Théorème 6.5. Soit l_0 une forme linéaire générique au sens de Ludwig-Zahir pour une base de Jordan-Hölder bien choisie ou bien soit l_0 une forme linéaire définissant un caractère, c'est-à-dire, $\langle l_0, [n, n] \rangle = 0$. On a alors

$$\text{Ker}\Omega_{l_0} = \overline{\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)}$$

Preuve. Soit (v_t) une unité approchée de $L^1(N)$ formée d'éléments de $\mathcal{S}(N)$. On a pour tout $f \in \text{Ker}\Omega_{l_0}$

$$v_t * v_t * f * v_t * v_t \in L^1(N) * L^1(N) * \text{Ker}\Omega_{l_0} * L^1(N) * L^1(N) \subset \overline{\text{Ker}\Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)}$$

Ainsi, en passant par la limite en t , on trouve le résultat. □

6.3 Idéaux K –premiers

Ce qui suit est une adaptation à l'action d'un groupe compact, du cas des actions exponentielles [18]. Certaines simplifications sont dues au fait que les K –orbites sont fermées, K étant compact.

Définition 6.4. Un idéal propre K –invariant de $L^1(N)$ (resp. de $\mathcal{S}(N)$) est appelé K –premier si et seulement si pour tout I_1, I_2 deux idéaux K –invariants de $L^1(N)$ (resp. de $\mathcal{S}(N)$), on a

$$I_1 * I_2 \subset I \implies I_1 \subset I \text{ ou } I_2 \subset I$$

Proposition 6.6. Pour toute K –orbite Ω_l dans \mathfrak{n}^* , $\text{Ker}\Omega_l$ est un idéal K –premier de $L^1(N)$.

Preuve. Il est clair que $\text{Ker}\Omega_l$ est un idéal K –invariant. Soient I_1 et I_2 deux idéaux K –invariants tels que $I_1 \not\subset \text{Ker}\Omega_l$ et $I_2 \not\subset \text{Ker}\Omega_l$.

Étant donné que I_1 et I_2 sont K –invariants et ${}^k\pi_l(f) = \pi_l(f^k)$, il existe alors $f_1 \in I_1$ et $f_2 \in I_2$ tels que $\pi_l(f_1) \neq 0$ et $\pi_l(f_2) \neq 0$. Il s'en suit alors qu'il existe $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_l}$ tel que $\pi_l(f_2)\xi \neq 0$.

Puisque π_l est irréductible, $\pi_l(L^1(N))\pi_l(f_2)\xi$ est dense dans \mathcal{H}_{π_l} et $\pi_l(f_1)\pi_l(L^1(N))\pi_l(f_2)\xi \neq 0$. Ainsi, il existe $g \in L^1(N)$ tel que $\pi_l(f_1)\pi_l(g*f_2) = \pi_l(f_1*g*f_2) \neq 0$. Comme $g*f_2 \in I_2$, $I_1 * I_2 \not\subset \text{Ker}\pi_l$ et par suite $I_1 * I_2 \not\subset \text{Ker}\Omega_l$ et d'où la contradiction. □

Remarque 6.6. Pour toute K –orbite Ω_l dans \mathfrak{n}^* , $\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$ est un idéal K –premier de $\mathcal{S}(N)$. En effet, pour \mathfrak{I}_1 et \mathfrak{I}_2 deux idéaux K –invariants de $\mathcal{S}(N)$ tels que $\mathfrak{I}_1 * \mathfrak{I}_2 \subset \text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$, il suffit de considérer $I_1 = \overline{\mathfrak{I}_1}^{L^1(N)}$ et $I_2 = \overline{\mathfrak{I}_2}^{L^1(N)}$. Alors I_1 et I_2 sont deux idéaux K –invariants de $L^1(N)$ tels que

$$I_1 * I_2 = \overline{\mathfrak{I}_1}^{L^1(N)} * \overline{\mathfrak{I}_2}^{L^1(N)} \subset \overline{\mathfrak{I}_1 * \mathfrak{I}_2}^{L^1(N)} \subset \overline{\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} \subset \overline{\text{Ker}\Omega_l}^{L^1(N)} = \text{Ker}\Omega_l.$$

Dans ce cas, en appliquant la proposition 6.6, $I_1 \subset \text{Ker}\Omega_l$ ou $I_2 \subset \text{Ker}\Omega_l$ et par conséquent, $\mathfrak{I}_1 \subset \text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$ ou $\mathfrak{I}_2 \subset \text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$.

Notons par $\text{Prim}_*L^1(N)$, resp. $\text{Prim}\mathcal{S}(N)$, l'ensemble des noyaux des représentations topologiquement irréductibles de $L^1(N)$ (resp. algèbriquement irréductibles de $\mathcal{S}(N)$), muni de la topologie de Jacobson. On peut montrer que l'application $\text{Ker } \pi_l \mapsto \text{Ker } \pi_l \cap \mathcal{S}(N)$ est un homéomorphisme entre $\text{Prim}_*L^1(N)$ et $\text{Prim}\mathcal{S}(N)$, si N est un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe ([16], [2]).

Définition 6.5. Soit A une partie de $\mathcal{S}(N)$ (resp. $L^1(N)$). On définit l'enveloppe de A dans $\text{Prim}\mathcal{S}(N)$ (resp. $\text{Prim}_*L^1(N)$), notée $h(A)$, comme suit

$$h(A) = \{B \in \text{Prim}\mathcal{S}(N) \text{ (resp. } \text{Prim}_*L^1(N)) \mid A \subset B\}$$

Remarque 6.7. Soit A une partie de $\mathcal{S}(N)$ (resp. $L^1(N)$). La définition de l'enveloppe de A est équivalente à

$$h(A) = \{\pi_l \in \widehat{N} \mid \pi_l(A) = \{0\}\}$$

Définition 6.6. Soit C une partie fermée de \widehat{N} . Le noyau de C est défini par

$$\text{Ker}C = \bigcap_{\pi_l \in C} \text{Ker}\pi_l \subset L^1(N)$$

Définition 6.7. Soit C une partie fermée de \widehat{N} . On dit que $j(C)$ (resp. $\tilde{j}(C)$) est l'idéal minimal d'enveloppe C dans $\mathcal{S}(N)$ (resp. $L^1(N)$) s'il est l'unique idéal dans $\mathcal{S}(N)$ (resp. $L^1(N)$) dont son enveloppe $h(j(C))$ (resp. $h(\tilde{j}(C))$) est égale à C et qui est contenu dans tout idéal J vérifiant $h(J) = C$.

L'existence de ces idéaux $j(C)$ et $\tilde{j}(C)$ est démontrée dans [14], [16].

Lemme 6.4. Pour tout idéal fermé I de $L^1(N)$,

$$h(I) = h(I \cap \mathcal{S}(N))$$

si les espaces $\text{Prim}\mathcal{S}(N)$ et $\text{Prim}_*L^1(N)$ sont identifiés.

Preuve. Si les deux espaces $\text{Prim}\mathcal{S}(N)$ et $\text{Prim}_*L^1(N)$ sont identifiés, on a

$$\begin{aligned} \text{Ker}\pi_l \in h(I) &\implies I \subset \text{Ker}\pi_l \\ &\implies I \cap \mathcal{S}(N) \subset \text{Ker}\pi_l \cap \mathcal{S}(N) \\ &\implies \text{Ker}\pi_l \cap \mathcal{S}(N) \in h(I \cap \mathcal{S}(N)) \end{aligned}$$

Ainsi $h(I) \subset h(I \cap \mathcal{S}(N))$. D'autre part, on note par $j(h(I))$ et $\tilde{j}(h(I))$ les idéaux minimaux de $\mathcal{S}(N)$, resp. $L^1(N)$ associés à $h(I)$. Par définition de l'idéal minimal, $\tilde{j}(h(I)) \subset I$, $j(h(I)) \subset I \cap \mathcal{S}(N)$. Par conséquent,

$$h(I \cap \mathcal{S}(N)) \subset h(j(h(I))) = h(I)$$

Ainsi, $h(I \cap \mathcal{S}(N)) \subset h(I)$.

Proposition 6.7. Soit I un idéal fermé pour une norme continue et K -premier de $\mathcal{S}(N)$. Alors

$$I = \text{Ker } C$$

où $C = h(I)$ désigne l'enveloppe de I .

Preuve. Voir [19].

Définition 6.8. Soit C une partie K -invariante de \widehat{N} . On dit que C est K -première si pour tout C_1 et C_2 deux parties fermées K -invariantes de C telles que $C = C_1 \cup C_2$, on a $C_1 = C$ ou $C_2 = C$.

Lemme 6.5. Soit C une partie K -invariante fermée de \widehat{N} telle que $\text{Ker } C \subset \mathcal{S}(N)$ est un idéal K -premier. Alors C est K -première.

Preuve. Voir [19]. □

Proposition 6.8. Soit I un idéal propre K -premier de $\mathcal{S}(N)$, fermé dans la topologie induite par une norme continue quelconque de $\mathcal{S}(N)$. Alors il existe une K -orbite Ω_l telle que $I = \text{Ker } \Omega_l \cap \mathcal{S}(N)$.

Preuve. Voir [19]. □

Théorème 6.6. Soit I un idéal fermé propre K -premier de $L^1(N)$. Alors, il existe une K -orbite Ω_{l_0} dans \mathfrak{n}^* telle que

$$I \cap \mathcal{S}(N) = \text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N).$$

Si l_0 est générique au sens de Ludwig-Zahir pour au moins une base de Jordan-Hölder bien choisie ou si l_0 définit un caractère ($\langle l_0, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$), on en déduit

$$I = \text{Ker } \Omega_{l_0}.$$

Preuve. Soit $\mathfrak{J} = I \cap \mathcal{S}(N)$ l'idéal fermé pour la norme continue $\|\cdot\|_1$ et K -invariant de $\mathcal{S}(N)$ correspondant. Montrons \mathfrak{J} est K -premier. Soient $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ deux idéaux K -invariants de $\mathcal{S}(N)$ tels que $\mathfrak{J}_1 * \mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{J}$. Posons alors $I_1 = \overline{\mathfrak{J}_1}^{L^1(N)}$ et $I_2 = \overline{\mathfrak{J}_2}^{L^1(N)}$ deux idéaux fermés K -invariants de $L^1(N)$. On obtient alors

$$I_1 * I_2 \subset \overline{\mathfrak{J}_1 * \mathfrak{J}_2}^{L^1(N)} \subset \overline{\mathfrak{J}}^{L^1(N)} \subset I$$

puisque I est fermé dans $L^1(N)$. Comme I est K -premier, $I_1 \subset I$ ou $I_2 \subset I$. Il s'en suit alors

$$\mathfrak{J}_1 \subset I_1 \cap \mathcal{S}(N) \subset I \cap \mathcal{S}(N) = \mathfrak{J}$$

ou

$$\mathfrak{J}_2 \subset I_2 \cap \mathcal{S}(N) \subset I \cap \mathcal{S}(N) = \mathfrak{J}$$

Par suite \mathfrak{J} est K -premier. Par la proposition 6.8, il existe une orbite Ω_{l_0} telle que $\mathfrak{J} = \text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)$. On a alors

$$h(I) = h(\mathfrak{J}) = h(\text{Ker } \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)) = h(\text{Ker } \Omega_{l_0}) = \Omega_{l_0}$$

par application du lemme 6.4. De plus, par définition de $h(I)$,

$$I \subset \text{Ker} \Omega_{l_0}.$$

D'autre part, si l_0 est générique au sens de Ludwig-Zahir dans au moins une base de Jordan-Hölder bien choisie ou si l_0 définit un caractère, d'après la proposition 6.5, on a

$$\begin{aligned} L^1(N) * L^1(N) * \text{Ker} \Omega_{l_0} * L^1(N) * L^1(N) &\subset \overline{\text{Ker} \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} \\ &= \overline{I \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)} \\ &\subset I. \end{aligned}$$

Comme I est K -premier et $L^1(N) \not\subset I$, $\text{Ker} \Omega_{l_0} \subset I$ et $I = \text{Ker} \Omega_{l_0}$. □

Remarque 6.8. Le résultat $I = \text{Ker} \Omega_{l_0}$ reste vrai chaque fois que

$$\text{Ker} \Omega_{l_0} = \overline{\text{Ker} \Omega_{l_0} \cap \mathcal{S}(N)}^{L^1(N)}.$$

Ceci est en particulier le cas lorsqu'on a une théorie du rétracte pour la strate de l_0 dans \mathfrak{n}^* au sens de Ludwig-Zahir. C'est donc également le cas pour tout $l_0 \in \mathfrak{n}^*$ dans l'exemple de l'action de $SO(4)$ sur $F(4)$, étudié au chapitre suivant.

Conjecture. Pour tout idéal I fermé et K -premier de $L^1(N)$, il existe $l_0 \in \mathfrak{n}^*$ tel que $I = \text{Ker} \Omega_{l_0}$, où Ω_{l_0} désigne la K -orbite de l_0 dans \mathfrak{n}^* .

Proposition 6.9. L'application

$$\Omega_{l_0} \longmapsto \text{Ker} \Omega_{l_0}$$

est une injection de l'ensemble des K -orbites dans l'ensemble des idéaux fermés propres K -premiers de $L^1(N)$.

Preuve. Soient Ω_1 et Ω_2 deux K -orbites qui sont fermées, K étant compact, telles que $\text{Ker} \Omega_1 = \text{Ker} \Omega_2$. On a alors

$$\Omega_1 = \overline{\Omega_1} = h(\text{Ker} \Omega_1) = h(\text{Ker} \Omega_2) = \overline{\Omega_2} = \Omega_2$$

□

Remarque 6.9. L'application de la proposition 6.9 est une bijection si tout idéal K -premier est de la forme $\text{Ker} \Omega_{l_0}$. Ceci est le cas, par exemple si on a l'action de $SO(2)$ sur le groupe de Heisenberg ou bien l'action de $SO(3)$ sur $F(3)$ (voir le chapitre 2) car dans ces exemples toute forme linéaire sur l'algèbre de Lie est soit générique dans au moins une base de Jordan-Hölder, soit elle définit un caractère. Dans le cas de l'action de $SO(4)$ sur $F(4)$, l'application $\Omega_{l_0} \longmapsto \text{Ker} \Omega_{l_0}$ est également une bijection (voir le chapitre 7).

Chapitre 7

Action de $SO(4)$ sur $F(4)$

Introduction

Soit $F(4)$ le groupe de Lie libre nilpotent de pas 2 et à 4 générateurs. Soit $\mathcal{B} = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, \dots, Y_{10}\}$ une base de Jordan-Hölder de \mathcal{F}_4 , l'algèbre de Lie de $F(4)$. Les crochets de Lie non triviaux sont :

$$[Y_1, Y_2] = Y_5 \quad [Y_2, Y_3] = Y_8$$

$$[Y_1, Y_3] = Y_6 \quad [Y_2, Y_4] = Y_9$$

$$[Y_1, Y_4] = Y_7 \quad [Y_3, Y_4] = Y_{10}$$

On peut aussi définir l'algèbre de Lie \mathcal{F}_4 comme suit :

$$\mathcal{F}_4 = \mathbb{R}^4 \oplus \Sigma_4$$

où $\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \mid u, v, w, z \in \mathbb{R} \right\}$ et

$$\Sigma_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

est l'ensemble des matrices réelles antisymétriques.

Le crochet de Lie de cette algèbre est :

$$[(u, U), (v, V)] = (0, uv^t - vu^t).$$

Ainsi, on réalise le groupe de Lie libre $F(4)$ en munissant \mathcal{F}_4 de la loi de Campbell-Backer-Hausdorff et on obtient :

$$(u, U) \cdot (v, V) = (u + v, U + V + \frac{1}{2}(uv^t - vu^t)).$$

On définit alors l'action de $SO(4)$ sur $F(4)$ de la manière suivante :

$$A \cdot (u, U) = (Au, AUA^t).$$

7.1 Stabilisateur, strates

7.1.1 Stabilisateur.

Le stabilisateur d'une forme linéaire l est défini comme suit :

$$\mathcal{F}_4(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [X, \mathcal{F}_4] \rangle = 0\}$$

Soient $l = a_1 Y_1^* + \dots + a_{10} Y_{10}^*$ et $X = x_1 Y_1 + \dots + x_{10} Y_{10}$.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{F}_4(l) &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle l, [X, Y_1] \rangle = 0 \\ \langle l, [X, Y_2] \rangle = 0 \\ \langle l, [X, Y_3] \rangle = 0 \\ \langle l, [X, Y_4] \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a_5 x_2 - a_6 x_3 - a_7 x_4 = 0 \\ a_5 x_1 - a_8 x_3 - a_9 x_4 = 0 \\ a_6 x_1 + a_8 x_2 - a_{10} x_4 = 0 \\ a_7 x_1 + a_9 x_2 + a_{10} x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_5 & 0 & -a_8 & -a_9 \\ a_6 & a_8 & 0 & -a_{10} \\ a_7 & a_9 & a_{10} & 0 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*) \end{aligned}$$

Sachant que $\det B = (a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_9 a_6)^2$, on distingue deux cas :

- Si $\det B = (a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_9 a_6)^2 \neq 0$, le rang de B est égal à 4 et dans ce cas on obtient uniquement la solution triviale pour les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 . Ainsi, $\mathcal{F}_4(l) = \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4) = \langle Y_5, \dots, Y_{10} \rangle = [\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_4]$.
- Si $\det B = (a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_9 a_6)^2 = 0$, deux sous-cas se présentent :
 - $rg B = 0$ si tous les $a_i = 0, i \in \{5, \dots, 10\}$. Dans ce cas, $\mathcal{F}_4(l) = \mathcal{F}_4$ et χ_l est un caractère.

- $rgB = 2$ si au moins un des a_i est non nul pour $i \in \{5, \dots, 10\}$.
- Si $a_{10} \neq 0$, on a alors $a_5 = \frac{-a_7a_8 + a_6a_9}{a_{10}}$. Dans ce cas, on montre qu'une base de solutions de (*) est donnée par les vecteurs de coordonnées

$$x_1 = 0, x_2 = a_{10}, x_3 = -a_9, x_4 = a_8$$

$$\text{et } x_1 = a_{10}, x_2 = 0, x_3 = -a_7, x_4 = a_6.$$

Par suite

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}}Y_3 + \frac{a_6}{a_{10}}Y_4) \oplus \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}}Y_3 + \frac{a_8}{a_{10}}Y_4) \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

- Si $a_{10} = 0$ et $a_9 \neq 0$, on a alors $a_6 = \frac{a_7a_8}{a_9}$. Dans ce cas, on montre qu'une base de solutions de (*) est donnée par les vecteurs de coordonnées

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = a_9, x_4 = -a_8$$

$$\text{et } x_1 = a_9, x_2 = -a_7, x_3 = 0, x_4 = a_5.$$

Par suite

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_7}{a_9}Y_2 + \frac{a_5}{a_9}Y_4) \oplus \mathbb{R}(Y_3 - \frac{a_8}{a_9}Y_4) \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

- Si $a_{10} = a_9 = 0$, $a_8 \neq 0$, on a alors $a_7 = 0$. Dans ce cas, on montre qu'une base de solutions de (*) est donnée par les vecteurs de coordonnées

$$x_1 = a_8, x_2 = -a_6, x_3 = a_5, x_4 \text{ arbitraire mais fixé}$$

$$\text{et } x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 \neq 0.$$

Par suite

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_6}{a_8}Y_2 + \frac{a_5}{a_8}Y_3) \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

- Si $a_{10} = a_9 = a_8 = 0$, $a_7 \neq 0$. On montre qu'une base de solutions de (*) est donnée par les vecteurs de coordonnées

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = a_7, x_4 = -a_6$$

$$\text{et } x_1 = 0, x_2 = a_7, x_3 = 0, x_4 = -a_5.$$

Par suite

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_5}{a_7}Y_4) \oplus \mathbb{R}(Y_3 - \frac{a_6}{a_7}Y_4) \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

- Si $a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = 0$, $a_6 \neq 0$. On montre qu'une base de solutions de (*) est donnée par les vecteurs de coordonnées

$$x_1 = 0, x_2 = a_6, x_3 = -a_5, x_4 \text{ arbitraire mais fixé}$$

$$\text{et } x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 \neq 0.$$

Par suite

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_5}{a_6}Y_3) \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

- Si $a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$ et $a_5 \neq 0$. On montre qu'une base de solutions de (*) est donnée par les vecteurs de coordonnées

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \text{ arbitraire mais fixe}, x_4 = 0$$

et $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4$ arbitraire mais fixe.

Par suite

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}Y_3 \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Remarque 7.1. – On voit donc que

$$\det B \neq 0 \iff \mathcal{F}_4(l) = \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)$$

- $\mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)$ est $SO(4)$ -invariant. En effet, pour tout $X \in \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)$, $Y \in \mathcal{F}_4$ et $A \in SO(4)$, on a

$$[A \cdot X, Y] = A \cdot [X, A^{-1}Y] = 0.$$

Par suite $A \cdot X \in \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)$.

- Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{ l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \mid \det B = 0 \right\} \\ &= \left\{ l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \mid a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_9 a_6 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Alors, \mathcal{V} est $SO(4)$ -invariant.

En effet, supposons que \mathcal{V} est non $SO(4)$ -invariant. Il existe alors $l \in \mathcal{V}$ tel que $A \cdot l \notin \mathcal{V}$ pour un certain $A \in SO(4)$. Par suite, $\mathcal{F}_4(A \cdot l) = \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)$ qui est $SO(4)$ -invariant. Il s'en suit alors

$$\mathcal{F}_4(l) = A^{-1} \cdot \mathcal{F}_4(A \cdot l) = \mathcal{F}_4(A \cdot l) = \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)$$

et donc $\det B \neq 0$. Ceci est en contradiction avec $l \in \mathcal{V}$.

7.1.2 Strates.

• Strates des génériques au sens de Ludwig-Zahir.

La détermination des strates des génériques au sens de Ludwig-Zahir se fait par un algorithme bien précis [22].

Rappelons maintenant que dans le cas où $\det B \neq 0$, c'est-à-dire, $a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_9 a_6 \neq 0$, on a $\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}Y_5 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_{10}$. Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu dans $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$.

Si $a_{10} \neq 0$ et $a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_9 a_6 \neq 0$, on a

$$j_1 = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{z}(\mathcal{F}_4)\} = 4 \text{ et}$$

$$k_1 = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid [Y_{j_1}, Y_k] = [Y_4, Y_k] \neq 0\} = 3.$$

Alors forcément $j_2 = 2$ et $k_2 = 1$.

D'autre part

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 4 \quad \text{et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_4, Y_k] \rangle \neq 0\} = 3.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_4, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_1^1(l) = Y_1 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_1] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_3] \rangle} Y_3 = Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}} Y_3;$$

$$Y_2^1(l) = Y_2 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_2] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_3] \rangle} Y_3 = Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3;$$

$$Y_4^1(l) = Y_4; Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Ensuite, on utilise l'algèbre $\mathfrak{p}_1(l)$, la base $Y_i^1(l)$, $l|_{\mathfrak{p}_1(l)}$ pour construire les indices $j_2(l)$, $k_2(l)$. Ainsi, on trouve

$$j_2(l) = j_2 = 2$$

$$k_2(l) = k_2 = 1$$

et $\mathfrak{p}_2(l) = \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3) \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}$.

Le procédé s'arrête à l'étape 2 puisque $\mathfrak{p}_2(l)$ est une polarisation pour l . En conclusion, on trouve la strate générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base Y_1, \dots, Y_{10} qu'on note

$$\mathfrak{g}_{gen,1}^* := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} \neq 0 \text{ et } a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_9 a_6 \neq 0\} = \mathfrak{s}_1^*.$$

• **Strates génériques dans d'autres bases.**

– Si $a_{10} = 0$, $a_9 \neq 0$ et $a_8 a_7 - a_9 a_6 \neq 0$, on a

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 4 \quad \text{et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_4, Y_k] \rangle \neq 0\} = 2.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_4, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_1^1(l) = Y_1 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_1] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_2] \rangle} Y_2 = Y_1 - \frac{a_7}{a_9} Y_2;$$

$$Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4; Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Ensuite, on utilise l'algèbre $\mathfrak{p}_1(l)$, la base $Y_i^1(l)$, $l|_{\mathfrak{p}_1(l)}$ pour construire les indices $j_2(l)$ et $k_2(l)$. Ainsi, on trouve

$$j_2(l) = 3; k_2(l) = 1; \mathfrak{p}_2(l) = \mathbb{R}Y_3 \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à l'étape 2 puisque $\mathfrak{p}_2(l)$ est une polarisation en l . Ainsi la strate

$$\mathfrak{s}_2^* := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = 0, a_9 \neq 0 \text{ et } a_7 a_8 - a_9 a_{10} \neq 0\}$$

est une strate non générique par rapport à la base de Jordan-Hölder de départ \mathcal{B} . Mais si on considère la base de Jordan-Hölder

$$\mathcal{B}_2 = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{10}\}$$

où $Z_1 = Y_1; Z_2 = Y_3; Z_3 = Y_2; Z_4 = Y_4; \dots; Z_{10} = Y_{10}$, on a alors que

$$\mathfrak{g}_{gen,2}^* := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_9 \neq 0 \text{ et } a_{10} a_5 + a_7 a_8 - a_9 a_6 \neq 0\}$$

est une strate générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base \mathcal{B}_2 et joue le même rôle que $\mathfrak{g}_{gen,1}^*$. De plus $\mathfrak{s}_2^* \subset \mathfrak{g}_{gen,2}^*$.

- Si $a_{10} = a_9 = 0, a_8 \neq 0$ et $a_8 a_7 \neq 0$. On a alors $a_7 \neq 0$. Dans ce cas,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 4 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_j, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_4, Y_k] \rangle \neq 0\} = 1.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_4, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_2^1(l) = Y_2 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_2] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_1] \rangle} Y_1 = Y_2;$$

$$Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4; Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Ensuite, on utilise l'algèbre $\mathfrak{p}_1(l)$, la base $Y_i^1(l)$, $l|_{\mathfrak{p}_1(l)}$ pour construire les indices $j_2(l)$ et $k_2(l)$. Ainsi, on trouve

$$j_2(l) = 3; k_2(l) = 2; \mathfrak{p}_2(l) = \mathbb{R}Y_3 \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à l'étape 2 puisque $\mathfrak{p}_2(l)$ est une polarisation en l . Ainsi, on trouve une strate non générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base de Jordan-Hölder \mathcal{B} qu'on note

$$\mathfrak{s}_3^* := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = a_9 = 0, a_8 \neq 0 \text{ et } a_7 \neq 0\}.$$

Mais si on considère la base de Jordan-Hölder

$$\mathcal{B}_3 = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{10}\}$$

où $Z_1 = Y_2; Z_2 = Y_3; Z_3 = Y_1; Z_4 = Y_4; \dots; Z_{10} = Y_{10}$, on a alors que

$$\mathfrak{g}_{gen,3}^* := \left\{ l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_8 \neq 0 \text{ et } a_{10}a_5 + a_7a_8 - a_6a_9 \neq 0 \right\}$$

est une strate générique au sens de Ludwig-Zahir par rapport à la base \mathcal{B}_3 et joue le même rôle que $\mathfrak{g}_{gen,3}^*$. De plus, $\mathfrak{s}_3^* \subset \mathfrak{g}_{gen,3}^*$.

- **Strate des caractères.**

Rappelons que dans le cas $\det B = 0$ et $rg B = 0$, on a $\mathcal{F}_4(l) = \mathcal{F}_4$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{l \in \mathcal{F}_4^* \mid \langle l, [\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_4] \rangle = 0\} \\ &= \{l \in \mathcal{F}_4^* \mid a_5 = \dots = a_{10} = 0\} \\ &= \mathbb{R}Y_1^* + \dots + \mathbb{R}Y_4^*. \end{aligned}$$

De plus, $l \in \mathcal{C}$ si et seulement si χ_l est un caractère sur le groupe tout entier.

- **Strates intermédiaires.**

Rappelons que dans le cas $\det B = 0$ et $rg B = 2$, on a 6 cas à distinguer.

– Si $a_{10} \neq 0$ et $a_5a_{10} + a_7a_8 - a_9a_6 = 0$, on a alors

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}}Y_3 + \frac{a_6}{a_{10}}Y_4) \oplus \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}}Y_3 + \frac{a_8}{a_{10}}Y_4) \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi, on obtient $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 4 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_j, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_4, Y_k] \rangle \neq 0\} = 3.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_4, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_1^1(l) = Y_1 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_1] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_3] \rangle} Y_3 = Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}} Y_3;$$

$$Y_2^1(l) = Y_2 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_2] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_3] \rangle} Y_3 = Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3;$$

$$Y_4^1(l) = Y_4; Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à cette étape car $\mathfrak{p}_1(l)$ est une polarisation en l . Finalement, on trouve une strate intermédiaire qu'on note

$$\mathcal{S}_1 := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} \neq 0 \text{ et } a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_6 a_9 = 0\}.$$

– Si $a_{10} = 0$, $a_9 \neq 0$ et $a_7 a_8 - a_6 a_9 = 0$, on a alors

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_7}{a_9} Y_2 + \frac{a_5}{a_9} Y_4) \oplus \mathbb{R}(Y_3 - \frac{a_8}{a_9} Y_4) \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi, on obtient $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 4 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_4, X] \rangle \neq 0\} = 2.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_4, Y_k] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_1^1(l) = Y_1 - \frac{\langle l, [Y_4, Y_1] \rangle}{\langle l, [Y_4, Y_2] \rangle} Y_2 = Y_1 - \frac{a_7}{a_9} Y_2;$$

$$Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4; Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à cette étape car $\mathfrak{p}_1(l)$ est une polarisation en l . Finalement, on trouve une strate intermédiaire qu'on note

$$\mathcal{S}_2 := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = 0, a_9 \neq 0 \text{ et } a_7 a_8 - a_6 a_9 = 0\}.$$

– Si $a_{10} = a_9 = 0$, $a_8 \neq 0$ et $a_7 a_8 = 0$ (donc $a_7 = 0$), on a alors

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_6}{a_8} Y_2 + \frac{a_5}{a_8} Y_3) \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi, on obtient $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 3 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_3, Y_k] \rangle \neq 0\} = 2.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_3, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_1^1(l) = Y_1 - \frac{\langle l, [Y_3, Y_1] \rangle}{\langle l, [Y_3, Y_2] \rangle} Y_2 = Y_1 - \frac{a_6}{a_8} Y_2;$$

$$Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4; Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à cette étape car $\mathfrak{p}_1(l)$ est une polarisation en l . Finalement, on trouve une strate intermédiaire qu'on note

$$\mathcal{S}_3 := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = a_9 = 0, a_8 \neq 0 \text{ et } a_7 = 0\}.$$

– Si $a_{10} = a_9 = a_8 = 0$ et $a_7 \neq 0$, on a alors

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_5}{a_7} Y_4) \oplus \mathbb{R}(Y_3 - \frac{a_6}{a_7} Y_4) \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi, on obtient $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 4 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_4, Y_k] \rangle \neq 0\} = 1.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_4, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_2^1(l) = Y_2; Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4;$$

$$Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à cette étape car $\mathfrak{p}_1(l)$ est une polarisation en l . Finalement, on trouve une strate intermédiaire qu'on note

$$\mathcal{S}_4 := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = a_9 = a_8 = 0 \text{ et } a_7 \neq 0\}.$$

– Si $a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = 0$ et $a_6 \neq 0$, on a alors

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_5}{a_6} Y_3) \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi, on obtient $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 3 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_3, Y_k] \rangle \neq 0\} = 1.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_3, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_2^1(l) = Y_2; Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4;$$

$$Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à cette étape car $\mathfrak{p}_1(l)$ est une polarisation en l . Finalement, on trouve une strate intermédiaire qu'on note

$$\mathcal{S}_5 := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = 0 \text{ et } a_6 \neq 0\}.$$

– Si $a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0$ et $a_5 \neq 0$, on a alors

$$\mathcal{F}_4(l) = \mathbb{R}Y_3 \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \mathbb{R}Y_5 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}.$$

Soit $\mathfrak{a}(l)$ le plus grand idéal contenu $\mathcal{F}_4(l)$. Ainsi, on obtient $\mathfrak{a}(l) = \mathcal{F}_4(l)$,

$$j_1(l) = \max\{j \in \{1, \dots, 10\} \mid Y_j \notin \mathfrak{a}(l)\} = 2 \text{ et}$$

$$k_1(l) = \max\{k \in \{1, \dots, 10\} \mid \langle l, [Y_{j_1}, Y_k] \rangle = \langle l, [Y_2, Y_k] \rangle \neq 0\} = 1.$$

Soit

$$\mathfrak{p}_1(l) = \{X \in \mathcal{F}_4 \mid \langle l, [Y_2, X] \rangle = 0\}.$$

Cherchons une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{p}_1(l)$.

$$Y_2^1(l) = Y_2; Y_3^1(l) = Y_3; Y_4^1(l) = Y_4;$$

$$Y_5^1(l) = Y_5; \dots; Y_{10}^1(l) = Y_{10}.$$

Le procédé s'arrête à cette étape car $\mathfrak{p}_1(l)$ est une polarisation en l . Finalement, on trouve une strate intermédiaire qu'on note

$$\mathcal{S}_6 := \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = a_6 = 0 \text{ et } a_5 \neq 0\}.$$

Remarque 7.2. Pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$, notons \mathcal{S}'_i l'ensemble

$$\mathcal{S}'_i := \{l = \sum_{j=1}^{10} a_j Y_j^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10-i+1} \neq 0 \text{ et } a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_6 a_9 = 0\}.$$

Dans ce cas, on a

$$\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}'_i.$$

Pour $i = 1$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}'_1$. En changeant de base de Jordan-Hölder, \mathcal{S}'_i joue le rôle de

$$\mathcal{S}_1 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} \neq 0 \text{ et } a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_6 a_9 = 0\}.$$

Il suffit donc de résoudre le problème d'inversion de Fourier seulement pour \mathcal{S}_1 . Il le sera alors pour tous les \mathcal{S}'_i .

7.2 Sections au sens de Pukanszky pour les strates intermédiaires.

Notons par S l'ensemble des indices de saut au sens de Pukanszky. Cet ensemble coïncide avec l'ensemble $\{j_1(l), k_1(l)\}$. Soit $T = \{1, \dots, 10\} \setminus S$. Ainsi, d'après [3], on obtient

- $\Sigma_1 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_3 = c_3; a_4 = c_4\}$ une section au sens de Pukanszky pour la strate \mathcal{S}_1 où c_3, c_4 sont deux constantes réelles arbitraires mais fixes.
- $\Sigma_2 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_2 = c_2; a_4 = c_4\}$ une section au sens de Pukanszky pour la strate \mathcal{S}_2 où c_2, c_4 sont deux constantes réelles arbitraires mais fixes.
- $\Sigma_3 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_2 = c_2; a_3 = c_3\}$ une section au sens de Pukanszky pour la strate \mathcal{S}_3 où c_3, c_2 sont deux constantes réelles arbitraires mais fixes.
- $\Sigma_4 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_1 = c_1; a_4 = c_4\}$ une section au sens de Pukanszky pour la strate \mathcal{S}_4 où c_1, c_4 sont deux constantes réelles arbitraires mais fixes.
- $\Sigma_5 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_3 = c_3; a_1 = c_1\}$ une section au sens de Pukanszky pour la strate \mathcal{S}_5 où c_3, c_1 sont deux constantes réelles arbitraires mais fixes.
- $\Sigma_6 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_2 = c_2; a_1 = c_1\}$ une section au sens de Pukanszky pour la strate \mathcal{S}_6 où c_1, c_2 sont deux constantes réelles arbitraires mais fixes.

7.3 Inversion de Fourier dans les strates intermédiaires.

Dans cette partie, on va étudier le théorème d'inversion de Fourier sur la strate intermédiaire $\mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$ par exemple puisque les autres strates intermédiaires sont contenues dans des \mathcal{S}_i' qui jouent le même rôle que \mathcal{S}_1 , après changement de base.

Rappelons que

$$\mathcal{S}_1 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} \neq 0 \text{ et } a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_6 a_9 = 0\}.$$

Dans ce cas, $a_5 = \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}$.

On considère

$$\mathfrak{p}(l) = \mathbb{R}(Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}} Y_3) \oplus \mathbb{R}(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3) \oplus \mathbb{R}Y_4 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Y_{10}$$

la polarisation de Vergne en l par rapport à la base de Jordan-Hölder \mathcal{B} . Dans ce cas, on obtient

$$\mathcal{F}_4 / \mathfrak{p}(l) \cong \mathbb{R}Y_3.$$

7.3.1 Sens direct

Plaçons nous dans la section $\mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$. Paramétrisons les éléments de $\mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$ par

$$l = a_1 Y_1^* + a_2 Y_2^* + c_3 Y_3^* + c_4 Y_4^* + \left(\frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}\right) Y_5^* + a_6 Y_6^* + \dots + a_{10} Y_{10}^*$$

où c_3, c_4 sont des constantes fixes. Donc $\mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$ est une variété différentielle paramétrisée à l'aide d'une seule carte. Les paramètres $(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10})$ varient dans $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^*$.

Calculons maintenant la représentation induite $\pi_l := \text{ind}_{P(l)}^{F(4)} \chi_l$ où $P(l) = \exp \mathfrak{p}(l)$ et χ_l est le caractère défini sur $P(l)$ comme suit

$$\chi_l(x) := e^{-i\langle l, \log x \rangle}$$

pour tout $x \in P(l)$.

Soit $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_l}$ et $u \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} [\pi_l(\exp y_1 Y_1) \xi](\exp u Y_3) &= \xi(\exp(-y_1 Y_1) \cdot \exp u Y_3) \\ &= \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_1 Y_1 - u y_1 Y_6)) \\ &= e^{-i y_1 u a_6} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_1 Y_1)) \\ &= e^{-i y_1 u a_6} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_1 Y_1) \cdot \exp(y_1(Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}} Y_3))) \\ &\quad \cdot \exp(-y_1(Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}} Y_3))) \\ &= e^{-i y_1 u a_6} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-\frac{a_7}{a_{10}} y_1 Y_3 + \frac{1}{2} \frac{a_7}{a_{10}} y_1^2 Y_6)) \\ &\quad \cdot \exp(-y_1(Y_1 - \frac{a_7}{a_{10}} Y_3))) \\ &= e^{-i(u a_6 + a_1 - \frac{a_7 c_3}{a_{10}}) y_1} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} \xi(\exp(u - \frac{a_7}{a_{10}} y_1) Y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\pi_l(\exp y_2 Y_2) \xi](\exp u Y_3) &= \xi(\exp(-y_2 Y_2) \cdot \exp u Y_3) \\ &= \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_2 Y_2 - u y_2 Y_8)) \\ &= e^{-i y_2 u a_8} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_2 Y_2)) \\ &= e^{-i y_2 u a_8} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_2 Y_2) \cdot \exp(y_2(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3))) \\ &\quad \cdot \exp(-y_2(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3))) \\ &= e^{-i y_2 u a_8} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-\frac{a_9}{a_{10}} y_2 Y_3 + \frac{1}{2} \frac{a_9}{a_{10}} y_2^2 Y_8)) \\ &\quad \cdot \exp(-y_2(Y_2 - \frac{a_9}{a_{10}} Y_3))) \\ &= e^{-i(u a_8 + a_2 - \frac{a_9 c_3}{a_{10}}) y_2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} \xi(\exp(u - \frac{a_9}{a_{10}} y_2) Y_3) \end{aligned}$$

$$[\pi_l(\exp y_3 Y_3) \xi](\exp u Y_3) = \xi(\exp(u - y_3) Y_3)$$

$$\begin{aligned} [\pi_l(\exp y_4 Y_4) \xi](\exp u Y_3) &= \xi(\exp(-y_4 Y_4) \cdot \exp u Y_3) \\ &= \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_4 Y_4 + u y_4 Y_{10})) \\ &= e^{i y_4 u a_{10}} \xi(\exp u Y_3 \cdot \exp(-y_4 Y_4)) \\ &= e^{-i(c_4 - u a_{10}) y_4} \xi(\exp u Y_3) \end{aligned}$$

$$[\pi_l(\exp y_5 Y_5) \xi](\exp u Y_3) = e^{-ia_5 y_5} \xi(\exp u Y_3) = e^{-i(\frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}) y_5} \xi(\exp u Y_3)$$

$$[\pi_l(\exp y_6 Y_6) \xi](\exp u Y_3) = e^{-ia_6 y_6} \xi(\exp u Y_3)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$[\pi_l(\exp y_{10} Y_{10}) \xi](\exp u Y_3) = e^{-ia_{10} y_{10}} \xi(\exp u Y_3)$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(F(4))$. Ainsi

$$\begin{aligned} (\pi_l(f) \xi)(\exp u Y_3) &= \int_{F(4)} f(y) \pi_l(y) \xi(\exp u Y_3) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{10}} f(\exp y_1 Y_1 \dots \exp y_{10} Y_{10}) \pi_l(\exp y_1 Y_1) [\pi_l(\exp y_2 Y_2) \dots \\ &\quad \pi_l(\exp y_{10} Y_{10}) \xi](\exp u Y_3) dy_1 \dots dy_{10}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &[\pi_l(\exp y_1 Y_1) \cdot \pi_l(\exp y_2 Y_2) \dots \pi_l(\exp y_{10} Y_{10}) \xi](\exp u Y_3) \\ &= e^{-i(u a_6 + a_1 - \frac{a_7 c_3}{a_{10}}) y_1} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} e^{-i(u a_8 + a_2 - \frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9 c_3}{a_{10}}) y_2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} e^{-i(c_4 - u a_{10} + a_7 y_1 + a_9 y_2 + a_{10} y_3) y_4} \\ &e^{-i \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}} y_5} \dots e^{-ia_{10} y_{10}} \xi(\exp(u - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2 - y_3) Y_3). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} (\pi_l(f) \xi)(\exp u Y_3) &= \int_{\mathbb{R}^4} e^{-i(u a_6 + a_1 - \frac{a_7 c_3}{a_{10}}) y_1} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} \\ &e^{-i(u a_8 + a_2 - \frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9 c_3}{a_{10}}) y_2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} e^{-i(c_4 - u a_{10} + a_7 y_1 + a_9 y_2 + a_{10} y_3) y_4} \end{aligned}$$

$$\widehat{f}^{5,6,\dots,10}(y_1, y_2, y_3, y_4; \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}) \xi(\exp(u - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2 - y_3) Y_3) dy_1 \dots dy_4.$$

Soit le changement de variable suivant $w = u - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2 - y_3$, ainsi $y_3 = u - w - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2$.

Dans ce cas, le noyau de l'opérateur $\pi_l(f)$ est donné par

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}; u, w) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(u a_6 + a_1 - \frac{a_7 c_3}{a_{10}}) y_1} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} \\ &e^{-i(u a_8 + a_2 - \frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9 c_3}{a_{10}}) y_2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} e^{-i(c_4 - w a_{10}) y_4} \\ &\widehat{f}^{5,6,\dots,10}(y_1, y_2, u - w - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2, y_4; \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}) dy_1 dy_2 dy_4. \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(u a_6 + a_1 - \frac{a_7 c_3}{a_{10}}) y_1} e^{-i(u a_8 + a_2 - \frac{a_9 c_3}{a_{10}}) y_2} e^{i \frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 y_2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} \end{aligned}$$

$$\widehat{f}^{4,5,6,\dots,10}(y_1, y_2, u - w - \frac{a_7}{a_{10}}y_1 - \frac{a_9}{a_{10}}y_2, c_4 - wa_{10}, \frac{a_6a_9 - a_7a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}) dy_1 dy_2.$$

Posons maintenant la fonction

$$g(y_1, y_2, u, w, a_6, \dots, a_{10}) = e^{i\frac{a_7a_8}{a_{10}}y_1y_2} e^{i\frac{1}{2}\frac{a_7a_6}{a_{10}}y_1^2} e^{i\frac{1}{2}\frac{a_9a_8}{a_{10}}y_2^2} \widehat{f}^{4,5,6,\dots,10}(y_1, y_2, u - w - \frac{a_7}{a_{10}}y_1 - \frac{a_9}{a_{10}}y_2, c_4 - wa_{10}, \frac{a_6a_9 - a_7a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}).$$

Montrons alors que $g \in \mathcal{S}(F(4))$ si on limite a_{10} à un compact contenu dans \mathbb{R}^* , ce qui sera le cas dans la suite, c'est-à-dire, si on suppose que la projection du support de \widehat{f}^{10} sur l'axe des coordonnées a_{10} est un compact contenu dans \mathbb{R}^* .

Soit l'application ψ définie comme suit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u \\ w \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{10} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 =: \tilde{y}_1 \\ y_2 =: \tilde{y}_2 \\ u - w - \frac{a_7}{a_{10}}y_1 - \frac{a_9}{a_{10}}y_2 =: \tilde{u} \\ c_4 - wa_{10} =: \tilde{w} \\ a_6 =: \tilde{a}_6 \\ \vdots =: \vdots \\ a_{10} =: \tilde{a}_{10} \end{pmatrix}$$

Il est clair que cette application est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ si on limite a_{10} à un compact contenu dans \mathbb{R}^* . Il s'en suit alors que $\widehat{f}^{4,5,\dots,10} \circ \psi \in \mathcal{S}(F(4))$ puisque f l'est par hypothèse. Ainsi $g \in \mathcal{S}(F(4))$ puisque le facteur $e^{i\frac{a_7a_8}{a_{10}}y_1y_2} e^{i\frac{1}{2}\frac{a_7a_6}{a_{10}}y_1^2} e^{i\frac{1}{2}\frac{a_9a_8}{a_{10}}y_2^2}$ est de norme 1.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}; u, w) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(ua_6 + a_1 - \frac{a_7c_3}{a_{10}})y_1} e^{-i(ua_8 + a_2 - \frac{a_9c_3}{a_{10}})y_2} g(y_1, y_2, \\ &\quad u, w, a_6, \dots, a_{10}) dy_1 dy_2 \\ &= \widehat{g}^{1,2}(ua_6 + a_1 - \frac{a_7c_3}{a_{10}}, ua_8 + a_2 - \frac{a_9c_3}{a_{10}}, u, w, \\ &\quad a_6, \dots, a_{10}). \end{aligned}$$

7.3.2 Sens inverse.

Construisons maintenant le rétracte de π_l pour tout $l \in \mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$. Rappelons d'abord que $\mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$ est paramétrisé par la carte unique

$$\{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in \mathbb{R}^7 \mid a_{10} \neq 0\} \cong \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^*$$

puisque

$$\mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1 = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \mid l = a_1 Y_1^* + a_2 Y_2^* + c_3 Y_3^* + c_4 Y_4^* + \frac{a_6 a_9 - a_8 a_8}{a_{10}} Y_5^* + a_6 Y_6^* + \dots + a_{10} Y_{10}^*, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Définition de l'ensemble des fonctions noyaux.

Soit C un compact arbitraire mais fixe contenu dans l'ensemble $\{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in \mathbb{R}^7 \mid a_{10} \neq 0\}$. On note par \mathcal{N}_C l'ensemble de toutes les fonctions noyaux, \mathcal{C}^∞ , définies sur $\{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in \mathbb{R}^7 \mid a_{10} \neq 0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{C} vérifiant les conditions suivantes :

- F est à support compact en $(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10})$, contenu dans C
- F est une fonction de Schwartz généralisée : Pour tout $A_i, i \in \{1, \dots, 10\}, B, D, E, F \in \mathbb{N}$, on a

$$\|F\|_{A_i, B, D, E, F}^C := \sup_{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in C; u, w \in \mathbb{R}} \sup_{|b_i| \leq A_i, |b| \leq B, |d| \leq D, |\alpha| \leq E, |\beta| \leq F} |u^\alpha w^\beta \frac{\partial^{b_1}}{\partial a_1^{b_1}} \cdots \frac{\partial^{b_{10}}}{\partial a_{10}^{b_{10}}} \frac{\partial^b}{\partial u^b} \frac{\partial^d}{\partial w^d} F(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}, u, w)| < \infty$$

Remarque 7.3. L'ensemble des fonctions noyaux \mathcal{N}_C est muni de la topologie induite par la famille des semi-normes $\|\cdot\|_{A_i, B, D, E, F}^C$.

Construction du rétracte.

Pour toute fonction noyau $F \in \mathcal{N}_C$, cherchons une fonction $f \in \mathcal{S}(F(4))$ telle que

$$F(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}; u, w) = \widehat{g}^{1,2}(ua_6 + a_1 - \frac{a_7 c_3}{a_{10}}, ua_8 + a_2 - \frac{a_9 c_3}{a_{10}}, u, w, a_6, \dots, a_{10})$$

où

$$g(y_1, y_2, u, w, a_6, \dots, a_{10}) = e^{i \frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 y_2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} e^{i \frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} \widehat{f}^{4,5,6, \dots, 10}(y_1, y_2, u - w - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2, c_4 - w a_{10}, \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}).$$

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &:= ua_6 + a_1 - \frac{a_7 a_3}{a_{10}} \\ \tilde{a}_2 &:= ua_8 + a_2 - \frac{a_9 a_3}{a_{10}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\widehat{g}^{1,2}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, u, w, a_6, \dots, a_{10}) = F(\tilde{a}_1 - ua_6 + \frac{a_7 c_3}{a_{10}}, \tilde{a}_2 - ua_8 + \frac{a_9 c_3}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}, u, w).$$

Par suite

$$g(y_1, y_2, u, w, a_6, \dots, a_{10}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{a}_1 y_1} e^{i\tilde{a}_2 y_2} F\left(\tilde{a}_1 - ua_6 + \frac{a_7 c_3}{a_{10}}, \tilde{a}_2 - ua_8 + \frac{a_9 c_3}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}, u, w\right) d\tilde{a}_1 d\tilde{a}_2.$$

Or, à condition que $f \in \mathcal{S}(F(4))$ existe, et que g soit comme dans la première partie, on a

$$g(y_1, y_2, u, w, a_6, \dots, a_{10}) = e^{i\frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 y_2} e^{i\frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} e^{i\frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} \widehat{f}^{4,5,6,\dots,10}\left(y_1, y_2, u - w - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2, c_4 - wa_{10}, \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}\right).$$

Posons alors

$$\begin{aligned} y_3 &:= u - w - \frac{a_7}{a_{10}} y_1 - \frac{a_9}{a_{10}} y_2 \\ y_4 &:= c_4 - wa_{10}. \end{aligned}$$

Ainsi, il faut que la fonction f vérifie

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{4,5,6,\dots,10}\left(y_1, y_2, y_3, y_4, \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}\right) &= e^{-i\frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 y_2} e^{-i\frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} e^{-i\frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} \\ &g\left(y_1, y_2, y_3 + \frac{a_7}{a_{10}} y_1 + \frac{a_9}{a_{10}} y_2 + \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}\right). \end{aligned}$$

Soit C un compact fixe contenu dans $\{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in \mathbb{R}^7 \mid a_{10} \neq 0\}$. Considérons alors seulement les fonctions noyaux dont le support en $(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10})$ est contenu dans C . Définissons $K = p(C)$ la projection de C sur l'espace des variables (a_6, \dots, a_{10}) , qui est également compacte. Ainsi, le support de g en (a_6, \dots, a_{10}) est contenu dans K .

Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} \phi : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_6, \dots, a_{10}) &\longmapsto \frac{a_6 a_9 - a_7 a_8}{a_{10}}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\phi(K)$ est un compact dans \mathbb{R} .

Soit alors une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur $\phi(K)$.

Recherchons alors une fonction $f \in \mathcal{S}(F(4))$ telle que

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{4,5,6,\dots,10}(y_1, y_2, y_3, y_4, a_5, a_6, \dots, a_{10}) &= e^{-i\frac{a_7 a_8}{a_{10}} y_1 y_2} e^{-i\frac{1}{2} \frac{a_7 a_6}{a_{10}} y_1^2} e^{-i\frac{1}{2} \frac{a_9 a_8}{a_{10}} y_2^2} \varphi(a_5) \\ &g\left(y_1, y_2, y_3 + \frac{a_7}{a_{10}} y_1 + \frac{a_9}{a_{10}} y_2 + \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}\right). \end{aligned}$$

En fait $\widehat{f}^{4,5,\dots,10}$ est une fonction de Schwartz si g l'est. Dans ce cas, il suffit d'appliquer la transformée de Fourier inverse pour trouver

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2, y_3, x_4, x_5, \dots, x_{10}) &= \frac{1}{(2\pi)^7} \int_{\mathbb{R}^7} e^{iy_4x_4} e^{ia_5x_5} \dots e^{ia_{10}x_{10}} e^{-i\frac{a_7a_8}{a_{10}}y_1y_2} e^{-i\frac{1}{2}\frac{a_7a_6}{a_{10}}y_1^2} e^{-i\frac{1}{2}\frac{a_9a_8}{a_{10}}y_2^2} \\
&\quad \varphi(a_5) g\left(y_1, y_2, y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, \right. \\
&\quad \left. a_6, \dots, a_{10}\right) dy_4 da_5 \dots da_{10} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^7} \int_{\mathbb{R}^7} e^{iy_4x_4} e^{ia_5x_5} \dots e^{ia_{10}x_{10}} e^{-i\frac{a_7a_8}{a_{10}}y_1y_2} e^{-i\frac{1}{2}\frac{a_7a_6}{a_{10}}y_1^2} e^{-i\frac{1}{2}\frac{a_9a_8}{a_{10}}y_2^2} \\
&\quad \varphi(a_5) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{a}_1y_1} e^{i\tilde{a}_2y_2} F\left[\tilde{a}_1 - a_6\left(y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}\right) + \frac{a_7c_3}{a_{10}}, \tilde{a}_2 - a_8\left(y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}\right) + \frac{a_9c_3}{a_{10}}, a_6, \dots, a_{10}, y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}\right] d\tilde{a}_1 d\tilde{a}_2 dy_4 da_5 \dots da_{10} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^9} \int_{\mathbb{R}^9} e^{i\tilde{a}_1y_1} e^{i\tilde{a}_2y_2} e^{iy_4x_4} e^{ia_5x_5} \dots e^{ia_{10}x_{10}} e^{-i\frac{a_7a_8}{a_{10}}y_1y_2} e^{-i\frac{1}{2}\frac{a_7a_6}{a_{10}}y_1^2} \\
&\quad e^{-i\frac{1}{2}\frac{a_9a_8}{a_{10}}y_2^2} \varphi(a_5) F\left[\tilde{a}_1 - a_6\left(y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}\right) + \frac{a_7c_3}{a_{10}}, \right. \\
&\quad \left. \tilde{a}_2 - a_8\left(y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}\right) + \frac{a_9c_3}{a_{10}}, \right. \\
&\quad \left. a_6, \dots, a_{10}, y_3 + \frac{a_7}{a_{10}}y_1 + \frac{a_9}{a_{10}}y_2 + \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}, \frac{c_4 - y_4}{a_{10}}\right] \\
&\quad d\tilde{a}_1 d\tilde{a}_2 dy_4 da_5 \dots da_{10}.
\end{aligned}$$

Vu les propriétés de F , cette fonction f appartient bien à $\mathcal{S}(F(4))$. Ainsi, étant donnée une fonction noyau $F \in \mathcal{N}_C$, il existe $f \in \mathcal{S}(F(4))$ tel que l'opérateur $\pi_l(f)$ admet $F(l, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau pour tout $l \in \mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$.

Notons

$$\mathcal{S} = \cup_{i=1}^6 \mathcal{S}'_i = \left\{ l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^*, a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_6 a_9 = 0 \text{ et } \sum_{i=5}^{10} a_i^2 \neq 0 \right\}$$

Soit par exemple $l_0 \in \mathcal{S}$ tel que $l_0 \notin \mathcal{S}_1$, c'est-à-dire, $a_{10} = 0$ et $a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_6 a_9 = 0$. Montrons alors que $\pi_{l_0}(f) = 0$.

Pour cela, on va approcher l_0 par des formes linéaires l_ε , $\varepsilon > 0$ telles que $l_\varepsilon \in \mathcal{S}_1$.

Écrivons $l_\varepsilon = \sum_{j=1}^{10} b_j(\varepsilon)Y_j^*$ telle que

$$\begin{cases} b_{10}(\varepsilon) = \varepsilon, \varepsilon > 0; \\ b_j(\varepsilon), j = 5, \dots, 9 \text{ tels que } b_5(\varepsilon)\varepsilon + b_7(\varepsilon)b_8(\varepsilon) - b_6(\varepsilon)b_9(\varepsilon) = 0 \\ \text{et } b_j(\varepsilon) \longrightarrow a_j, \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ et } b_j(\varepsilon) = a_j \text{ si } j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Ce choix est possible. Par exemple, si $b_5(\varepsilon) = a_5 \neq 0$, $b_6(\varepsilon) = a_6$, $b_7(\varepsilon) = a_7 \neq 0$, $b_9(\varepsilon) = a_9$, il suffit alors de prendre $b_8(\varepsilon) = \frac{a_6 a_9 - a_5 \varepsilon}{a_7}$. Le raisonnement est analogue si un autre des a_j est non nul.

On vérifie alors que pour tous ces choix possibles de $b_j(\varepsilon)$, $l_\varepsilon \longrightarrow l_0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $l_\varepsilon \in \mathcal{S}_1$. Soit maintenant

$$\begin{aligned} l_{\varepsilon, \Sigma_1} &= Ad^*(F(4))l_\varepsilon \cap \Sigma_1 \\ &= \sum_{j=1}^{10} c_j(\varepsilon)Y_j^* \end{aligned}$$

avec $c_j(\varepsilon) = b_j(\varepsilon)$ pour tout $j \in \{5, \dots, 10\}$ et $c_{10}(\varepsilon) = b_{10}(\varepsilon) = \varepsilon$. Ceci est dû au fait que Y_5, \dots, Y_{10} sont centraux.

Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $l = \sum_{j=1}^{10} l_j Y_j^* \in C$, on a $|l_{10}| \geq \delta > 0$, étant donné que C est un compact ne contenant pas 0. Ainsi, pour $0 < \varepsilon < \delta$, on a $l_{\varepsilon, \Sigma_1} \notin C$. Il s'en suit alors que $F(l_{\varepsilon, \Sigma_1}, \cdot, \cdot) \equiv 0$ puisque $supp_l F|_{\Sigma_1 \times \mathbb{R}^2} \subset C$. Dans ce cas, $\pi_{l_{\varepsilon, \Sigma_1}}(f) \equiv 0$ et $\pi_{l_\varepsilon}(f) \equiv 0$.

D'autre part, $l_\varepsilon \longrightarrow l_0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Par suite la suite des orbites coadjointes $(\mathcal{O}_{l_\varepsilon})_\varepsilon$ converge vers l'orbite coadjointe \mathcal{O}_{l_0} dans la topologie de l'espace des orbites $\mathcal{F}_4^*/Ad^*(F(4))$. Ceci entraîne que la famille des représentations unitaires irréductibles $(\pi_{l_\varepsilon})_\varepsilon$ converge vers la représentation unitaire irréductible π_{l_0} dans la topologie de \widehat{N} qui est l'image réciproque de la topologie de Jacobson de l'espace des idéaux primitifs $Prim(C^*(F(4)))$.

Ainsi, puisque $\pi_{l_\varepsilon}(f) = 0$ si $0 < \varepsilon < \delta$, $f \in \cap_{0 < \varepsilon < \delta} Ker(\pi_{l_\varepsilon})$ et donc $f \in Ker(\pi_{l_0})$ par définition de la topologie de Jacobson. Donc on obtient $\pi_{l_0}(f) = 0$ si $l_0 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$. On a un résultat analogue pour les autres indices i .

7.3.3 Continuité du rétracte

Soit C un compact fixé contenu dans $\{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in \mathbb{R}^7 \mid a_{10} \neq 0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fixé comme en 7.3.2. Notons $f =: R(F)$. Alors, par construction, l'application $F \longmapsto f$ de l'ensemble \mathcal{N}_C des fonctions noyaux à support en $(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10})$ contenu dans le compact fixe C dans $\mathcal{S}(F(4))$ est continue. Si on varie la fonction φ , on trouve d'autres rétractes.

7.3.4 Conclusion

Théorème 7.1. *Soit $\{Y_1, \dots, Y_{10}\}$ la base de Jordan-Hölder de \mathcal{F}_4 introduite en 7. On considère C un compact fixe contenu dans $\{(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10}) \in \mathbb{R}^7 \mid a_{10} \neq 0\}$. Pour toute fonction noyau $F \in \mathcal{N}_C$, il existe une fonction $f \in \mathcal{S}(F(4))$ telle que $\pi_l(f)$ admet $F(l, \cdot, \cdot)$ comme fonction noyau si $l \in \mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$ et $\pi_l(f) = 0$ si $l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$.*

Notons $f =: R(F)$. Le rétracte n'est en général pas unique. Mais il existe un algorithme précis pour la construction du rétracte $R(F)$ tel que l'application $F \longmapsto f$ de l'ensemble \mathcal{N}_C des

fonctions noyaux à support en $(a_1, a_2, a_6, \dots, a_{10})$ contenu dans le compact fixe C dans $\mathcal{S}(F(4))$ est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par tout les semi-normes $\|\cdot\|_{A_i, B, D, E, F}^C$.

7.4 Action de $SO(4)$ sur une section de Pukanszky

Soit $l \in \mathcal{S} = \cup_{i=1}^6 \mathcal{S}'_i$. On peut par exemple supposer $l \in \mathcal{S}'_1 = \mathcal{S}_1$. En effet, par une permutation des vecteurs de base, les strates intermédiaires \mathcal{S}'_i jouent toutes le même rôle que \mathcal{S}_1 . Pour cela, il suffit de travailler seulement sur la strate $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{S}_1$.

Rappelons que

$$\mathcal{V} = \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \mid a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_6 a_9 = 0\} \subset \mathbb{R}^{10} \equiv \mathcal{F}_4^*$$

est stable par l'action de $SO(4)$.

Il est clair que \mathcal{V} est un fermé dans \mathbb{R}^{10} , donc un espace topologique localement compact.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{l = \sum_{i=1}^{10} a_i Y_i^* \in \mathcal{F}_4^* \mid a_{10} \neq 0 \text{ et } a_5 a_{10} + a_8 a_7 - a_6 a_9 = 0\} \\ &= \{l \in \mathcal{V} \mid a_{10} \neq 0\} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{S}_1 est un ouvert de \mathcal{V} dans \mathcal{F}_4^* . De plus, \mathcal{S}_1 est $Ad^*(F(4))$ -invariant. Ceci est dû au fait que Y_5, \dots, Y_{10} sont centraux.

Dans ce qui suit on note $SO(4)$ par K . Soit l_0 une forme linéaire alignée dans \mathcal{S}_1 . On peut toujours supposer que la section de Pukanszky Σ_1 a été choisie de manière à passer par l_0 .

Définissons

$$\tilde{K}_1 = \{k \in K \mid k \cdot l_0 \in Ad^*(F(4))\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1\}$$

puisque \mathcal{S}_1 est $Ad^*(F(4))$ -invariant. Ainsi \tilde{K}_1 est un ouvert non vide. En effet, puisque \mathcal{V} est K -invariant d'après la remarque 7.1, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow \mathcal{V} \\ k &\longmapsto k \cdot l_0 \end{aligned}$$

est continue et \mathcal{S}_1 est un ouvert non vide dans \mathcal{V} . Par suite $\tilde{K}_1 = \varphi^{-1}(\mathcal{S}_1)$ est un ouvert non vide de K . De plus, $e \in \tilde{K}_1$ étant que $l_0 \in \mathcal{S}_1$. Ainsi, il existe un voisinage ouvert V_1 de e , contenu dans \tilde{K}_1 , tel que $V_1 \cdot V_1 \subset \tilde{K}_1$ et l'application différentiable

$$\begin{aligned} V_1 \times V_1 &\longrightarrow \tilde{K}_1 \\ (k, k') &\longmapsto k \cdot k' \end{aligned}$$

satisfait les conditions suivantes :

- $e \cdot k = k \cdot e = k$ pour tout $k \in V_1$.
- $(k \cdot k') \cdot k'' = k \cdot (k' \cdot k'')$ pour tout $k, k', k'' \in V_1$ tels que $k \cdot k' \in V_1$ et $k' \cdot k'' \in V_1$.

Ainsi, \tilde{K}_1 est un groupe de Lie local.

On définit une action de \tilde{K}_1 sur $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 \cap \Sigma_1$ de la manière suivante :

Soit $l_1 = Ad^*(m)k_1 \cdot l_0 \in Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 \cap \Sigma_1$. Par définition

$$k * l_1 := (l_1)_k$$

est l'unique élément de \mathcal{F}_4^* vérifiant

$$\begin{aligned} \{(l_1)_k\} &= Ad^*(F(4))(k \cdot l_1) \cap \Sigma_1 \\ &= Ad^*(F(4))(Ad^*(k \cdot m))(kk_1) \cdot l_0 \cap \Sigma_1 \\ &= Ad^*(F(4))((kk_1) \cdot l_0) \cap \Sigma_1 \end{aligned}$$

pour tout k tel que $kk_1 \in \tilde{K}_1$. Il existe donc $m = m_k \in F(4)$ tel que

$$(l_1)_k = Ad^*(m_k)(kk_1) \cdot l_0$$

L'élément m_k n'est en général pas unique. L'image $(l_1)_k$ est bien définie et unique, puisque $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_{puk}^*$ où \mathcal{S}_{puk}^* désigne la strate de Pukanszky correspondante [3] (ceci est dû au fait que \mathcal{S}_1 est construite à partir des indices $j_1(l)$ et $k_1(l)$ et que ces indices coïncident avec les indices de saut au sens de Pukanszky [20]) et puisque toute orbite coadjointe dans \mathcal{S}_{puk}^* coupe Σ_1 en exactement un point. De plus, $*$ est une action du groupe de Lie local \tilde{K}_1 sur $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0$. Cette action est \mathcal{C}^∞ (pour plus de détails, voir le chapitre 4).

Proposition 7.1. $Ad^*(F(4))(\tilde{K}_1 \cdot l_0) \cap \Sigma_1$ est localement fermé.

Preuve. Il suffit de montrer que

$$Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 = (Ad^*(F(4))K \cdot l_0) \cap \mathcal{S}_1$$

En effet,

(\subset) $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 \subset Ad^*(F(4))K \cdot l_0$ car $\tilde{K}_1 \subset K$ et $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 \subset \mathcal{S}_1$ car $\tilde{K}_1 \cdot l_0 \subset \mathcal{S}_1$ et que \mathcal{S}_1 est $Ad^*(F(4))$ -invariant.

(\supset) Soit $l = Ad^*(m_k)k \cdot l_0 = l_1$ avec $l_1 \in \mathcal{S}_1$. Alors $k \cdot l_0 = Ad^*(m_k^{-1}) \cdot l_1 \in \mathcal{S}_1$ et par suite $k \in \tilde{K}_1$.

D'autre part, on a $Ad^*(F(4))K \cdot l_0$ est fermé car $F(4)$ nilpotent et K compact et \mathcal{S}_1 est ouvert dans \mathcal{V} . Ainsi, on peut conclure que $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0$ est localement fermé dans \mathcal{V} . Comme \mathcal{V} lui-même est fermé dans \mathfrak{n}^* , $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0$ est également localement fermé dans \mathcal{F}_4^* et $Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 \cap \Sigma_1$ est localement fermé, Σ_1 étant fermé.

Proposition 7.2. $Ad^*(F(4))(\tilde{K}_1 \cdot l_0) \cap \Sigma_1$ est une sous-variété de Σ_1 contenue dans $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{V}$.

Preuve. La démonstration de cette proposition reste la même que celle du proposition 4.6 du chapitre 4.

7.5 Résultat du rétracte sur $\tilde{K}_1 \cdot l_0$

7.5.1 Définition de l'ensemble des fonctions noyaux sur $\tilde{K}_1 \cdot l_0$

Soit (V_1, η_1) une section lisse de \tilde{K}_1/K_{l_0} et un ouvert relatif \tilde{V}_1 dans $\eta_1(V_1)$. Pour tout compact fixe \tilde{C}_1 contenu dans $\tilde{V}_1 \cdot l_0$, on définit l'espace des fonctions noyaux $\mathcal{N}_{\tilde{V}_1, \tilde{C}_1}$ comme l'ensemble de toutes les fonctions \mathcal{C}^∞

$$F_1 : \tilde{K}_1 \cdot l_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

- Le support de F_1 en l est contenu dans \tilde{C}_1 .
- F_1 est une fonction de Schwartz généralisée, c'est-à-dire, pour tout $A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$, pour tout compact \tilde{C}_0 contenu dans $\tilde{C}_1 \cap U'$, où (U', φ') est une carte de $\tilde{V}_1 \cdot l_0$, $\frac{\partial^a}{\partial l'^a}$ désignera les dérivées partielles par rapport à cette carte et $l'_{U'}$ les coordonnées de l' par rapport à cette carte. Il faut alors que

$$\|F_1\|_{A,B,C,D,E}^{\tilde{C}_0} = \sup_{l'_{U'} \in \varphi'(\tilde{C}_0); x, y \in \mathbb{R}} \sup_{|a| \leq A, |b| \leq B, |c| \leq C, |\alpha| \leq D, |\beta| \leq E} |x^\alpha y^\beta \frac{\partial^a}{\partial l'^a} \frac{\partial^b}{\partial x^b} \frac{\partial^c}{\partial y^c} F_1 \circ (\varphi'^{-1} \otimes id \otimes id)(l'_{U'}, x, y)| < \infty \quad (7.1)$$

7.5.2 Théorème du rétracte sur $\tilde{K}_1 \cdot l_0$

Théorème 7.2. *Il existe une section lisse (V_1, η_1) de \tilde{K}_1/K_{l_0} et un ouvert relatif non vide \tilde{V}_1 dans $\eta_1(V_1)$ telle que pour tout compact donné \tilde{C}_1 dans $\tilde{V}_1 \cdot l_0 \subset \tilde{K}_1 \cdot l_0$ on a : Pour toute fonction noyau F_1 dans $\mathcal{N}_{\tilde{V}_1, \tilde{C}_1}$, il existe $f \in \mathcal{S}(F(4))$ tel que $\pi_{k \cdot l_0}(f)$ admet comme fonction noyau $F_1(k \cdot l_0, \cdot, \cdot)$ si $k \cdot l_0 \in \tilde{C}_1$ et $\pi_{k \cdot l_0}(f) = 0$ si $k \cdot l_0 \in K \cdot l_0 \setminus \tilde{C}_1$.*

De plus, il existe un algorithme bien précis pour construire un tel rétracte tel que l'application linéaire $F_1 \longmapsto R(F_1) := f$, de l'ensemble $\mathcal{N}_{\tilde{V}_1, \tilde{C}_1}$ des fonctions noyaux à support en $k \cdot l_0$ contenu dans le compact fixe \tilde{C}_1 dans $\mathcal{S}(F(4))$, soit continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux de la topologie définie par toutes les semi-normes de type (7.1).

Preuve. La preuve de ce théorème est analogue à celle du chapitre 4 mais avec quelques changements tout en appliquant le résultat du rétracte pour la représentation induite

$$\pi_{l_{0,k}} := \text{ind}_{P(l_{0,k})}^{F(4)} \chi_{l_{0,k}}$$

pour $l_{0,k} \in \text{Ad}^*(F(4))(\tilde{K}_1 \cdot l_0) \cap \Sigma_1$. Ce dernier est exactement le même résultat que pour les strates génériques. En fait, il suffit d'appliquer le théorème d'inversion de Fourier pour la strate intermédiaire \mathcal{S}_1 localement sur une carte de la sous-variété $\text{Ad}^*(F(4))(\tilde{K}_1 \cdot l_0) \cap \Sigma_1$ puis coller ensemble à l'aide d'une partition de l'unité d'un compact fixe de la sous-variété. En effet, remarquons que :

- La base de Malcev de \mathcal{F}_4 par rapport à $\mathfrak{p}(l)$ pour tout $l \in \mathcal{S}_1 \cap \Sigma_1$ est $\{Y_3\}$, en particulier pour $l = l_{0,k} \in Ad^*(F(4))\tilde{K}_1 \cdot l_0 \cap \Sigma_1$. Cette base de Malcev reste aussi la base de Malcev de \mathcal{F}_4 par rapport à $\mathfrak{p}(k \cdot l_0)$ puisque nos polarisations sont des polarisations de Vergne et que $k \cdot l_0 \in \mathcal{S}_1$ pour tout $k \in \tilde{K}_1$.
- $\tilde{K}_1 \cdot l_0$ est une sous-variété \mathcal{F}_4^* contenue dans \mathcal{S}_1 . Il suffit de montrer que $\tilde{K}_1 \cdot l_0 = K \cdot l_0 \cap \mathcal{S}_1$ est localement fermé. Ceci est vrai puisque K est compact, donc fermé et \mathcal{S}_1 est ouvert.

Donc les raisonnements du chapitre 4 s'appliquent.

7.6 Résultat du rétracte pour ${}^k\pi_{l_0}$

Rappelons tout d'abord que les représentations

$$\pi_{k \cdot l_0} = \text{ind}_{P(k \cdot l_0)}^{F(4)} \chi_{k \cdot l_0}, \quad \tilde{\pi}_{0,k} = \text{ind}_{k \cdot P(l_0)}^{F(4)} \chi_{k \cdot l_0} \quad \text{et} \quad {}^k\pi_{l_0}(\cdot) = \pi_{l_0}(k^{-1} \cdot)$$

sont équivalentes. Pour déterminer le rétracte de ${}^k\pi_{l_0}$, il faut tout d'abord avoir un rétracte pour la représentation $\tilde{\pi}_{0,k}$ sur une section de K/K_{l_0} . Ce dernier est construit d'une manière analogue à ce qui a été fait dans les strates génériques. Une fois que celui-ci est construit, on peut alors construire aussi un rétracte local pour la représentation ${}^k\pi_{l_0}$ de la même façon que pour les strates génériques. Ainsi, on définit l'ensemble des fonctions noyaux $\mathcal{N}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_1}$ comme dans le chapitre 4 et on obtient le résultat suivant :

Théorème 7.3. *Pour tout $k_0 \in K$, il existe (S, ζ) une section lisse de K/K_{l_0} contenant \dot{k}_0 telle que $\zeta(S)$ soit une sous-variété de K . Pour tout compact fixe \tilde{C}'_1 contenu dans $\zeta(S)$, on a : Pour toute fonction noyau \tilde{F}_1 dans $\mathcal{N}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_1}$, il existe $f_1 \in \mathcal{S}(N)$ tel que ${}^k\pi_{l_0}(f_1)$ admet comme fonction noyau $\tilde{F}_1(k, \cdot, \cdot)$ pour tout $k \in \zeta(S)$ et ${}^k\pi_{l_0}(f_1) = 0$ si $\dot{k} \notin S$.*

Notons $f_1 = R(\tilde{F}_1)$ le rétracte obtenu par un algorithme bien précis. Alors l'application linéaire $\tilde{F}_1 \longrightarrow R(\tilde{F}_1)$ de l'ensemble $\mathcal{N}'_{\zeta(S), \tilde{C}'_1}$ des fonctions noyaux à support en k contenu dans le compact fixe \tilde{C}'_1 dans $\mathcal{S}(N)$, est continue si on munit l'ensemble des fonctions noyaux par la topologie définie par toutes les semi-normes utilisées dans la définition de l'ensemble des fonctions noyaux.

7.7 Idéaux K -premiers

Proposition 7.3. *Pour tout $l \in \mathcal{F}_4^*$, on a*

$$\overline{Ker\Omega_l \cap \mathcal{S}(F(4))}^{L^1(F(4))} = Ker\Omega_l$$

où Ω_l désigne la K -orbite.

Preuve. Si l est générique au sens de Ludwig-Zahir dans au moins une base de Jordan-Hölder ou si l définit un caractère χ_l sur $F(4)$ tout entier, c'est vrai par le chapitre 6.

Si l appartient à une strate intermédiaire, l'existence du rétracte (théorème 7.3) permet de refaire la même démonstration qu'au chapitre 6. \square

Théorème 7.4. *Les idéaux fermés propres K -premiers de $L^1(F(4))$ coïncident avec les noyaux $\text{Ker}\Omega_l$, $l \in \widehat{\mathcal{F}}_4^*$, des K -orbites $\Omega_l = K \cdot l$.*

Preuve. Tout $\text{Ker}\Omega_l$ est un idéal K -premier par la proposition 6.6 du chapitre 6. Si I est un idéal K -premier, il existe $l \in \widehat{\mathcal{F}}_4^*$ tel que $\text{Ker}\Omega_l \cap \mathcal{S}(F(4)) = I \cap \mathcal{S}(F(4))$ (voir chapitre 6). Par la proposition 7.3, $I = \text{Ker}\Omega_l$, grâce à une argumentation analogue à celle de la section 6.3 du chapitre 6. \square

Bibliographie

- [1] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratcliff, On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **321**, 85-116 (1990).
- [2] J. Boidol, H. Leptin, J. Schürman, D. Vahle, Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren, *Math. Ann.* **236**, 1-13 (1978).
- [3] L. Corwin and P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **18**, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [4] J. Dixmier, *Cours de mathématiques du premier cycle*, Gauthier-Villars Paris (1969).
- [5] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse 2*, Gauthier-Villars, Paris.
- [6] A. Baklouti and J. Ludwig, Entrelacement des restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Annales de l'Institut Fourier*, (51) (2001), 395-429.
- [7] H. Fujiwara, Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentielles et leurs applications, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, (36) (1982).
- [8] R. Howe, On a connection between Nilpotent Groups and Oscillatory Integrals associated to Singularities, *Pacific J. of Math.* **73**, (1977), 329-363.
- [9] H. Leptin, Ideal Theory in Group Algebras of Locally Compact Groups, *Inventiones math.* **31**, (1976), 259-278.
- [10] H. Leptin and J. Ludwig, Unitary Representation Theory of Exponential Lie groups, *De Gruyter expositions in Mathematics* (18)
- [11] G. Lion, Intégrales d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov, *Lectures Notes in Math*, **587** Springer (1977), 160-176.
- [12] R. L. Lipsman, Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical, *J. Math. pures et appliquées* **59** (1980), 337-374.
- [13] J. Ludwig, Good Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie Group, *Math. Z.* **161**, (1978), 195-210.
- [14] J. Ludwig, Polynomial growth and ideals in group algebras, *Manuscr. Math.* **30** (1980), 215-221.
- [15] J. Ludwig, On Primary Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie Group, *Math. Ann.* **262**, (1983), 287-304.

- [16] J. Ludwig, Minimal C^* -dense ideals and algebraically irreducible representations of the Schwartz-algebra of a nilpotent Lie group, *Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math.* **1359** Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1987), 209-217.
- [17] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent, *Travaux mathématiques, Publications du Centre Univ. Luxembourg*, **VII** (1995), 25-67.
- [18] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, Exponential actions, Orbits and their kernels, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **57**, (1998), 497-513.
- [19] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, Représentations irréductibles bornées des groupes de Lie exponentiels, *Canad. J. Math.*, **53**, (2001), 944-978.
- [20] J. Ludwig, C. Molitor-Braun and L. Scuto, On Fourier's inversion theorem in the context of nilpotent Lie groups, *Acta Sci. Math.*, **73** (2007), 547-591.
- [21] J. Ludwig and D. Müller, Sub-Laplacians of holomorphic L^p -type on Rank One AN-Groups and Related Solvable Groups, *Journal of Functional Analysis* **170** (2000), 366-427.
- [22] J. Ludwig and S. Zahir, On the nilpotent *-Fourier transform, *Lett. Math. Phys* **30** (1994), 23-34.
- [23] A. L. Onihchik, E. B. Vinberg, *Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups*, Springer (1997).
- [24] D. Poguntke, Über das Synthese-Problem für nilpotente Liesche Gruppen, *Math. Ann.*, **269** (1984), 431-467.
- [25] D. Poguntke, Spectral Synthesis of Orbits of Compact Groups, Harmonic analysis and operator algebras, *Mini-conf. Canberra/ Aust. 1987, Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ.* **16** (1988), 247-261.
- [26] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1973).
- [27] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer (1984).