



HAL
open science

Analyse harmonique L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace

Mathieu Bohr

► **To cite this version:**

Mathieu Bohr. Analyse harmonique L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2010. Français. NNT : 2010METZ016S . tel-01752731

HAL Id: tel-01752731

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752731>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UPV-M

présentée par

Mathieu BOHR

afin d'obtenir le diplôme

de DOCTEUR de l'Université Paul Verlaine - Metz

spécialité : Mathématiques.

Titre : Analyse harmonique L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace.

soutenue le 04 novembre 2010.

devant le jury composé de :

Salah MEHDI	Professeur, UPV - Metz	Examineur
Gestur ÓLAFSSON	Professeur, Louisiana State University - Bâton Rouge	Rapporteur
Angela PASQUALE	Professeur, UPV - Metz	Directeur de thèse
Michael PEVZNER	Professeur, URCA - Reims	Rapporteur
Hubert RUBENTHALER	Professeur, ULP - Strasbourg I	Président

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma profonde reconnaissance à Angela Pasquale pour avoir accepté de diriger cette thèse. Sa disponibilité et ses précieux conseils m'ont été d'une grande aide, en particulier dans mes moments de doutes. Je l'en remercie vivement.

Tous mes remerciements vont également à Hubert Rubenthaler pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse me faisant ainsi un grand honneur.

Je remercie Gestur Ólafsson et Michael Pevzner d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs, et plus encore pour l'attention avec laquelle ils s'en sont acquittés : leur remarques et commentaires détaillés m'ont été d'une aide précieuse.

Enfin, c'est pour moi une grande joie de remercier Salah Mehdi de faire partie de ce jury.

Introduction

Le but de cette thèse est l'étude de l'analyse harmonique L^2 pour une transformée intégrale, dite transformée hypergéométrique de Laplace, qui généralise la transformée classique de Laplace. Dans le cas classique, la transformée de Laplace \mathbf{L} est définie pour des fonctions f assez régulières sur la demi-droite réelle $]0, +\infty[$ par

$$\mathbf{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{zx} dx$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale converge.

L'espace de Hardy $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ sur le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ est défini comme l'espace des fonctions a holomorphes sur $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ telles que

$$\sup_{\sigma < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\sigma + i\lambda)|^2 d\lambda < +\infty.$$

On sait que toute fonction $a \in H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ admet une valeur au bord sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire, il existe une fonction $a_+ \in L^2(i\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} a(\sigma + i\lambda) = a_+(i\lambda)$$

dans L^2 , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour simplifier, on notera $a_+(i\lambda) = a(i\lambda)$. La norme sur $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ est alors donnée par

$$\|a\|_{H^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda)|^2 d\lambda.$$

Muni du produit scalaire associé à cette norme, $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ devient un espace de Hilbert. Un théorème classique, dû à Paley et Wiener (voir [25], p. 8 theorem V), montre que \mathbf{L} réalise un isomorphisme isométrique de l'espace $L^2(]0, +\infty[)$ des fonctions de carré intégrable sur la demi-droite réelle sur $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$:

$$\forall f \in L^2(]0, +\infty[), \quad \|\mathbf{L}[f]\|_{H^2} = \|f\|_2.$$

On dira que ce théorème est un théorème "de type Plancherel" par analogie avec le cas de la transformée de Fourier.

La transformée hypergéométrique de Laplace est une généralisation de la transformée classique de Laplace. Elle est définie pour des fonctions f assez régulières sur $]0, +\infty[$ par

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) Q_\lambda^{(a,b)}(t) \delta(t) dt$$

où

$$Q_\lambda^{(a,b)}(t) = (2\text{cht})^{\lambda-a-b-1} {}_2F_1\left(\frac{a+b+1-\lambda}{2}, \frac{a-b+1-\lambda}{2}; 1-\lambda; \text{ch}^{-2}t\right)$$

est la fonction de Jacobi de deuxième espèce, et

$$\delta(t) = 2^{2b-1}(\text{sh}t)^{2a-1}(\text{cht})^{2b-1}.$$

Si $a = b = -\frac{1}{2}$, alors la transformée hypergéométrique de Laplace se réduit à la transformée classique de Laplace.

La transformée hypergéométrique de Laplace joue un rôle important en physique mathématique pour le cas $a = \frac{n-2}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. C'est le cas "géométrique" dans lequel elle est (à une normalisation près) la transformée sphérique de Laplace sur l'hyperboloïde à une nappe $SO_o(1, n)/SO_o(1, n-1)$.

Les hyperboloïdes à une nappe sont des espaces symétriques pseudo-Riemanniens particuliers. Ils appartiennent à la classe remarquable des espaces non compactement causaux.

L'analyse harmonique sur les espaces non compactement causaux a été commencée dans [10] et est actuellement un sujet de recherche très intense. L'analyse harmonique L^2 , c'est-à-dire, essentiellement les théorèmes d'inversion, de Paley-Wiener et de Plancherel, n'est encore seulement considérée que dans des cas très particuliers. Le travail de cette thèse donne en particulier des résultats dans le cas des hyperboloïdes et dans le cas complexe (qui correspond aux espaces non compactement causaux dits de type Olshanskii).

Le théorème principal de la thèse pour le cas de la transformée hypergéométrique de Laplace en dimension 1 (théorème 12 du chapitre 2) montre que la transformée hypergéométrique de Laplace réalise un isomorphisme isométrique entre l'espace $L^2([0, +\infty[, \delta(t)dt)$ et un espace de type Hardy noté $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$. Comme dans le cas classique, il consiste en des fonctions holomorphes sur le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}\lambda < 0\}$, et chacune de ces fonctions possède une valeur au bord sur l'axe imaginaire. Mais à la différence du cas classique de $H^2(\text{Re}\lambda < 0)$, les valeurs au bord ne sont pas dans L^2 mais dans des espaces de Sobolev opportuns. La norme de $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ est donnée par

$$\|a\|_*^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 |\lambda c(i\lambda)|^2 d\lambda$$

où $c(\lambda)$ est la fonction c de Harish-Chandra (voir (2.2)).

Les premières informations sur l'espace $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ viennent du théorème de Paley-Wiener qui caractérise l'image des fonctions lisses à support compact (théorème 6 du chapitre 2). Dans le cas géométrique des hyperboloïdes à une nappe, ce théorème a été démontré par Anderson et Ólafsson (voir [1]). Leur preuve se généralise dans le cas général de systèmes de racines pas nécessairement réduits et de multiplicités positives (théorème 5 du chapitre 2). La norme sur $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ est fixée de façon canonique par la relation entre la transformée hypergéométrique de Laplace, la transformée hypergéométrique de Fourier (également appelée transformée de Jacobi) et le bien connu théorème de Plancherel pour cette dernière (voir section 2.3).

Le théorème de Paley-Wiener fixe un sous espace dense de $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ et la norme est fixée comme on l'a dit précédemment. Le point important est de donner une expression explicite du complété de ce sous espace dense par rapport à cette norme. La construction de ce complété est développée dans la section 2.5.

On a mentionné précédemment que dans des cas très particuliers, l'analyse L^2 est connue. En terme de fonctions de multiplicité $m = (m_\alpha, m_{2\alpha})$, ces cas sont les suivants :

- $m_\alpha = m_{2\alpha} = 0$: C'est le cas Euclidien classique.
- $m_\alpha = 1$ et $m_{2\alpha} = 0$: L'isomorphisme a été montré par Stein et Wainger (voir [28]). Ce cas correspond au cas géométrique de $SL(2, \mathbb{R})$, et la méthode s'étend de façon naturelle au cas où $m_\alpha + m_{2\alpha} < 2$.
- $m_\alpha = n - 1$ et $m_{2\alpha} = 0$: Dans ce cas, on a des résultats partiels montrés par J. Unterberger (voir [33]), qui n'a considéré seulement quelques propriétés de la transformation de Laplace appliquée à $L^2(]r, +\infty[)$, pour $r > 0$, sans en déterminer une image isométrique de L^2 .

La généralisation des résultats de Stein et Wainger pour le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ est l'une des motivations principales aux résultats de cette thèse, en particulier pour ce qui concerne les applications aux développements en séries de polynômes de Jacobi de la section 1 du chapitre 3.

Il faut toutefois remarquer que le cas $m_\alpha = 1$ et $m_{2\alpha} = 0$ (et plus généralement le cas où $m_\alpha + m_{2\alpha} < 2$) est substantiellement différent du cas $m_\alpha + m_{2\alpha} \geq 2$. Cette différence vient du comportement de la fonction $|c(\lambda)|^2$ qui intervient dans la norme canonique sur l'image. Il faut également remarquer que parmi les cas géométriques, $SL(2, \mathbb{R})$ est l'unique tel que $m_\alpha + m_{2\alpha} < 2$. Dans cette thèse, on construit les espaces $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ de façon uniforme par rapport à la fonction de multiplicité m . Notre définition est a priori différente de celle de Stein et Wainger, mais dans la section 2.6, on vérifie que ces définitions coïncident bien.

Dans le chapitre 3, nous donnons quelques applications des résultats du chapitre 2. Tout d'abord, nous considérons des séries de polynômes de Jacobi dont les coefficients sont des multiples de la transformée de Laplace d'une fonction f . Nous montrons que, sous certaines conditions sur f , la série définit une fonction L^2 (avec une certaine mesure) et que cette fonction s'étend en une fonction holomorphe sur l'espace coupé $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$.

Le deuxième type d'applications concerne les hyperboloïdes réelles et utilise les premières sections du chapitre 3. C'est dans ce contexte que l'on voit le lien avec la physique mathématique. En particulier, les références pour cette partie sont les travaux de Bros et Viano, bien que les méthodes utilisées ainsi que les propriétés de régularité de la classe de fonctions étudiée soient différentes (voir [4], [5] et [6]). Le cadre de leur travail est la physique théorique, plus précisément, la théorie quantique des champs sur une variété espace-temps en forme d'hyperboloïde (l'univers de De Sitter).

Enfin, dans le chapitre 4, nous étudions le cas complexe, c'est-à-dire le cas d'un système de racines Σ (pas nécessairement de rang un) tel que $m_\alpha = 2$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Nous voyons comment la théorie L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace se ramène dans ce cas au cas Euclidien. En particulier, ces résultats nous permettent d'étudier l'analyse harmonique L^2 sur les espaces symétriques de type Olshanskii.

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	iii
1 Notations et rappels	1
1.1 Notations	1
1.1.1 Notations générales	1
1.1.2 La transformée de Fourier	1
1.1.3 La transformée de Laplace	3
1.1.4 La transformée de Hilbert	3
1.1.5 Intégrale de Poisson et intégrale de Poisson conjuguée	4
1.2 Préliminaires	5
1.2.1 Systèmes de racines	5
1.2.2 Structure des algèbres de Lie réelles semi-simples	5
1.2.3 Paires symétriques et espaces symétriques	7
1.2.4 Espaces symétriques NCC	7
2 Théorie L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace en rang un	11
2.1 Fonctions c	11
2.2 Opérateurs de Jacobi	13
2.3 Transformée hypergéométrique de Fourier	16
2.4 Transformée hypergéométrique de Laplace	17
2.5 Définition de l'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$	25
2.5.1 Les espaces L_s^2 et \mathcal{H}_s	25
2.5.2 L'espace $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$	26
2.5.3 Noyau de Cauchy et transformée de Cauchy-Bochner	27
2.5.4 Les espaces $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$	31
2.5.5 L'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$	34
2.6 Théorème de Plancherel pour $\tilde{\mathcal{L}}$	35
2.7 Propriétés complémentaires de l'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$	40
2.8 $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ en tant qu'espace de Hilbert de fonctions holomorphes	42
3 Applications	45
3.1 Développements en séries de polynômes de Jacobi	46
3.2 Espaces symétriques riemanniens de type compact et leurs fonctions sphériques	53
3.3 Analyse harmonique sphérique L^2 sur les hyperboloïdes réelles	55

3.3.1	Espaces hyperboliques réels	55
3.3.2	Structure de X_+^n et de X_-^n	57
3.3.3	Fonctions sphériques et transformée sphérique	58
3.3.4	Paramétrisation de $X_{\mathbb{C}}^n$, X_-^n et S^n	60
3.3.5	Extension holomorphe de séries de fonctions sphériques sur la sphère S^n . . .	61
4	Théorie L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace dans le cas complexe	65
4.1	La transformée Θ -hypergéométrique dans le cas complexe	65
4.2	La transformée de Laplace sur les cônes dans \mathbb{R}^n	70
4.3	Le théorème de Plancherel pour la transformée Θ -hypergéométrique dans le cas complexe	73
4.4	Analyse harmonique L^2 -sphérique sur les espaces symétriques de type Olshanskii . .	74
	Bibliographie	76

Chapitre 1

Notations et rappels

1.1 Notations

1.1.1 Notations générales

Dans toute la thèse, on utilisera les notations suivantes :

- \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels ou nuls.
- \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs.
- \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.
- \mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes.
- \mathbb{R}_+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls.
- \mathbb{R}_+^* désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

1.1.2 La transformée de Fourier

On rappelle que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de f est la fonction \widehat{f} définie sur \mathbb{R}^n par

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dm(x) \quad (1.1)$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , $dm(x) = (2\pi)^{-n/2} dx$ et $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$.

On note aussi $\widehat{f} = \mathbf{F}[f]$. La transformée de Fourier est bien définie sur l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact. La caractérisation de $\mathbf{F}[C_c^\infty(\mathbb{R}^n)]$ est l'objet d'un théorème classique dû à Paley et Wiener :

Soit $R > 0$. Une fonction F sur \mathbb{R}^n est la transformée de Fourier d'une fonction f de classe C^∞ à support contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R , si et seulement si F admet un prolongement en une fonction entière sur \mathbb{C}^n tel que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} e^{-R|\operatorname{Im}\xi|} (1 + |\xi|)^N |F(\xi)| < +\infty$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$.

On rappelle également la formule d'inversion, c'est-à-dire, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou plus généralement si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$), alors

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi \cdot x} dm(\xi). \quad (1.2)$$

Le théorème de Plancherel dit que la transformée de Fourier définie sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même : pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 dm(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dm(x). \quad (1.3)$$

L'égalité (1.3) est appelée formule de Plancherel.

Remarque 1 : Selon notre normalisation de la mesure de Lebesgue, on a

$$\mathbf{F}[f * g] = (2\pi)^{n/2} \mathbf{F}[f] \mathbf{F}[g]$$

pour toutes fonctions f et g assez régulières.

Remarque 2 : Soit W un sous groupe du groupe des transformations orthogonales de \mathbb{R}^n . On dit qu'une fonction f définie sur \mathbb{R}^n est W -invariante, si $f(wx) = f(x)$ pour tout $w \in W$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Si f est W -invariante, alors pour tout $w \in W$, on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(wx) e^{i\xi \cdot x} dm(x)$$

donc en posant $y = wx$, et comme w est une transformation orthogonale, on obtient

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i\xi \cdot w^{-1}y} dm(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{iw\xi \cdot y} dm(y) = \widehat{f}(w\xi)$$

c'est-à-dire, \widehat{f} est aussi W -invariante.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ D^\alpha f &= \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

On appelle espace de Schwartz, l'espace

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}.$$

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie associée aux semi-normes

$$N_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Le dual topologique $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées. Un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est donc une application linéaire continue $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on notera plutôt (T, f) à la place de $T(f)$. La transformée de Fourier de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est alors définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (\mathbf{F}[f], \varphi) = (f, \mathbf{F}[\varphi]). \quad (1.4)$$

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a la transformée de Fourier inverse

$$\mathbf{F}^{-1}[\varphi](x) = \mathbf{F}[\varphi^\vee](x) = (\mathbf{F}[\varphi])^\vee(x) \quad (1.5)$$

où

$$\varphi^\vee(\xi) = \varphi(-\xi). \quad (1.6)$$

L'application $^\vee$ s'étend à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$(T^\vee, \varphi) = (T, \varphi^\vee) \quad (1.7)$$

pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.3 La transformée de Laplace

Si f est une fonction assez régulière de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , alors sa transformée de Laplace est définie par

$$\mathbf{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{zx} dm(x) \quad (1.8)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale du second membre converge. Si f est à support dans \mathbb{R}_+ et si on note $z = \sigma + i\lambda$, alors on a

$$\mathbf{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{\sigma x} e^{i\lambda x} dm(x) = \mathbf{F}[f(x)e^{\sigma x}](\lambda)$$

1.1.4 La transformée de Hilbert

On peut définir la transformée de Hilbert Hf d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ par la relation

$$g = Hf \iff \mathbf{F}[g](t) = -i\mathbf{F}[f](t)\text{sgn}(t) \quad \text{p.p} \quad (1.9)$$

où

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases} .$$

On a alors les propriétés suivantes :

Lemme 1 Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors

1. H est \mathbb{C} -linéaire

2. $Hf \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$
3. $H(Hf) = -f$
4. $H(f^\vee) = -(Hf)^\vee$

Preuve :

1. Conséquence de la linéarité de \mathbf{F} .
2. D'après la formule de Plancherel (1.3), on a $\|\mathbf{F}[f]\|_2 = \|f\|_2$. Donc, si $g = Hf$, on obtient

$$\|g\|_2 = \|\mathbf{F}[g]\| = \|i\mathbf{F}[f]\|_2 = \|\mathbf{F}[f]\|_2 = \|f\|_2.$$

3. Si $g = Hf$, alors $\mathbf{F}[g](t) = -i\mathbf{F}[f](t)\text{sgn}(t)$, donc

$$\mathbf{F}[f](t) = i\text{sgn}(t)\mathbf{F}[g](t)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{F}[-f](t) = -i\text{sgn}(t)\mathbf{F}[g](t)$$

d'où $Hg = -f$.

4. On a $\mathbf{F}[f^\vee](t) = \mathbf{F}[f](-t) = (\mathbf{F}[f])^\vee(t)$, donc

$$\mathbf{F}[(Hf)^\vee](t) = (\mathbf{F}[Hf])^\vee(t) = (-i\text{sgn}(t)\mathbf{F}[f](t))^\vee = i\text{sgn}(t)(\mathbf{F}[f])^\vee(t) = i\text{sgn}(t)\mathbf{F}[f^\vee](t)$$

c'est-à-dire $H(f^\vee) = -(Hf)^\vee$.

c.q.f.d.

1.1.5 Intégrale de Poisson et intégrale de Poisson conjuguée

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit l'intégrale de Poisson $\mathcal{P}f$ de f et l'intégrale de Poisson conjuguée $\overline{\mathcal{P}}f$ de f par

$$\mathcal{P}f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \text{Re} \left(\frac{1}{it - z} \right) dt$$

$$\overline{\mathcal{P}}f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \text{Im} \left(\frac{1}{it - z} \right) dt.$$

pour $\text{Re } z < 0$. En calculant $\text{Re} \left(\frac{1}{it - z} \right)$ et $\text{Im} \left(\frac{1}{it - z} \right)$ pour $z = x + iy$ avec $x < 0$, on obtient

$$\mathcal{P}f(x + iy) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} dt \quad (1.10)$$

$$\overline{\mathcal{P}}f(x + iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{y - t}{x^2 + (y - t)^2} dt \quad (1.11)$$

1.2 Préliminaires

1.2.1 Systèmes de racines

Pour tout ce paragraphe, on peut se référer à [16]. Soit \mathfrak{a} un espace vectoriel euclidien réel de dimension finie l . On note \mathfrak{a}^* le dual réel de \mathfrak{a} . Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un isomorphisme de \mathfrak{a} sur \mathfrak{a}^* en associant à un élément non nul $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ l'élément $\tilde{H}_\alpha \in \mathfrak{a}$ déterminé par la condition $\alpha(H) = \langle H, \tilde{H}_\alpha \rangle$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$. Le vecteur normalisé $H_\alpha := 2\tilde{H}_\alpha / \langle \tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\alpha \rangle$ vérifie $\alpha(H_\alpha) = 2$. En posant $\langle \alpha, \beta \rangle := \langle \tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\beta \rangle$, on définit un produit scalaire sur \mathfrak{a}^* . Pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, on note r_α la réflexion dans \mathfrak{a}^* définie par

$$r_\alpha(\lambda) := \lambda - 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*.$$

Définition 1 *Un système de racines dans \mathfrak{a}^* est un ensemble fini Σ d'éléments non nuls qui engendrent \mathfrak{a}^* et qui satisfont $2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \beta, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ et $r_\alpha(\beta) \in \Sigma$ pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma$. On dit que Σ est réduit si $2\alpha \notin \Sigma$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Les éléments de Σ sont appelés les racines.*

Pour chaque $H \in \mathfrak{a}$ vérifiant $\alpha(H) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$, on peut définir un ensemble de racines positives Σ^+ dans Σ par $\Sigma^+ := \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) > 0\}$. Une racine $\alpha \in \Sigma^+$ est dite *simple* si elle n'admet pas de décomposition $\alpha = \beta + \gamma$ avec β et γ dans Σ^+ . L'ensemble Π des racines simples est une base de \mathfrak{a}^* et tout élément de Σ^+ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de Π avec coefficients entiers non négatifs. On dit que Π est le système fondamental de racines simples associé à Σ^+ .

Soit Σ un système de racines dans \mathfrak{a}^* . Soit Σ^+ un choix de racines positives dans Σ et $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ le système fondamental de racines simples associé à Σ^+ . Le groupe de Weyl W de Σ est le groupe fini des transformations orthogonales de \mathfrak{a}^* engendré par $\{r_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$. On note $r_j := r_{\alpha_j}$. Alors $\{r_j : j = 1, \dots, l\}$ est un système minimal de générateurs de W .

On note $\mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification de \mathfrak{a} et $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ l'espace des formes \mathbb{C} -linéaires sur \mathfrak{a} . L'action de W sur \mathfrak{a}^* s'étend à \mathfrak{a} par dualité, et à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ et $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ par \mathbb{C} -linéarité. Le groupe W agit sur des fonctions f définies sur l'un de ces espaces par $(wf)(x) := f(w^{-1}x)$ pour $w \in W$.

Définition 2 *Une fonction de multiplicité sur Σ est une fonction W -invariante $m : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$. Si on note $m_\alpha := m(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$, alors $m_{w\alpha} = m_\alpha$ pour tout $w \in W$ et $\alpha \in \Sigma$. On dit que m est une fonction de multiplicité positive si $m_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.*

1.2.2 Structure des algèbres de Lie réelles semi-simples

Comme pour la section précédente, une référence possible pour les notions décrites dans ce paragraphe est [16]. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle semi-simple, c'est-à-dire la forme de Killing $B(X, Y) := \text{tr}(adX adY)$ est une forme bilinéaire non dégénérée sur \mathfrak{g} . Soit θ une involution de Cartan de \mathfrak{g} et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \tag{1.12}$$

la décomposition de Cartan correspondante, c'est-à-dire, θ est un automorphisme de \mathfrak{g} , $\theta^2 = id$, \mathfrak{k} et \mathfrak{p} sont les sous espaces propres de θ pour les valeurs propres 1 et -1 respectivement :

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta(X) = X\} \quad (1.13)$$

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta(-X) = X\}. \quad (1.14)$$

La forme B est définie positive sur \mathfrak{p} et définie négative sur \mathfrak{k} . De telles involutions existent et elles sont toutes conjuguées. Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On peut montrer que θ est la différentielle d'un unique automorphisme involutif de G encore noté θ , et que le sous-groupe des points fixes $K := \{g \in G, \theta(g) = g\}$ est le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{k} . Si G est non compact, alors le sous groupe K est compact si et seulement si G est de centre fini, et dans ce cas, K est aussi un sous-groupe compact maximal. Supposons que G est de centre fini.

Soit \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{p} . On dit que \mathfrak{a} est un sous espace de Cartan de \mathfrak{g} . Tous ces sous-espaces sont conjugués par $Ad(K)$. On définit le rang réel de \mathfrak{g} comme la dimension de \mathfrak{a} . Pour exclure le cas de rang zéro, on suppose que $\theta \neq id$. Pour $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, on note

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \alpha(H)X \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\}. \quad (1.15)$$

On a alors $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$. On note $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$ et

$$\Sigma := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}, \dim \mathfrak{g}^\alpha > 0\}, \quad (1.16)$$

alors \mathfrak{g} admet la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}^\alpha. \quad (1.17)$$

On obtient un produit scalaire sur \mathfrak{a} en prenant la restriction de B à \mathfrak{a} . Alors Σ vérifie les axiomes d'un système de racines. On dit que Σ est le système de racines (restreintes) associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. On note Σ^+ le sous-ensemble de racines positives associé au choix d'une chambre de Weyl \mathfrak{a}^+ de \mathfrak{a} . On note $\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha$. Alors \mathfrak{n} est une sous-algèbre nilpotente de \mathfrak{g} . On note $m_\alpha := \dim \mathfrak{g}^\alpha$. Le nombre m_α est appelé multiplicité de la racine α . La fonction $m : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $m(\alpha) = m_\alpha$ est une fonction de multiplicité sur Σ . On pose

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha. \quad (1.18)$$

Soient $N := \exp \mathfrak{n}$ et $A := \exp \mathfrak{a}$, alors N et A sont des sous-groupes fermés de G difféomorphes à \mathfrak{n} et \mathfrak{a} . On note $\log : A \rightarrow \mathfrak{a}$ le difféomorphisme inverse de $\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ et $a \in A$, on pose $a^\lambda = e^{\lambda(\log a)}$. Soient

$$M := Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K, Ad(k)H = H \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\} \quad (1.19)$$

et

$$M' := N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K, Ad(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}, \quad (1.20)$$

alors M et M' sont des sous-groupes compacts de K , tous deux d'algèbre de Lie \mathfrak{m} , et M est normal dans M' . Le groupe $W := M'/M$ est fini et est isomorphe au groupe de Weyl du système de racines Σ . L'action de W sur \mathfrak{a} s'étend à A au moyen de l'application \exp .

Si \mathfrak{g} est de rang 1, alors $\Sigma = \{\alpha, -\alpha\}$ ou $\Sigma = \{\alpha, -\alpha, 2\alpha, -2\alpha\}$ avec $\alpha \in \mathfrak{a}^*$.

Définition 3 Soient \mathfrak{a} un espace vectoriel euclidien réel de dimension finie, Σ un système de racine dans \mathfrak{a}^* et m une fonction de multiplicité sur Σ . On dit que le triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est géométrique s'il existe une algèbre de Lie réelle semi-simple \mathfrak{g} telle que \mathfrak{a} soit un sous espace de Cartan de \mathfrak{g} , Σ soit le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ et m soit la fonction de multiplicité de Σ .

1.2.3 Paires symétriques et espaces symétriques

On garde la notation des paragraphes précédents. Soit τ une involution non triviale de \mathfrak{g} . On suppose que τ et θ commutent. Comme τ est une involution non triviale, ses valeurs propres sont -1 et 1 . On a donc la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$$

où

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}, \tau(X) = X\} \quad (1.21)$$

et

$$\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}, \tau(X) = -X\}. \quad (1.22)$$

De plus, comme τ et θ commutent, on a la décomposition en sous espaces propres communs

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}.$$

Soit H un sous groupe fermé de G tel que

$$G_o^\tau \subseteq H \subseteq G^\tau$$

où $G^\tau = \{g \in G, \tau(g) = g\}$ et G_o^τ est la composante connexe de l'élément neutre dans G^τ . On dit alors que G/H est un espace symétrique. On dit aussi que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une paire symétrique.

On remarque que \mathfrak{h} est alors l'algèbre de Lie de H .

Si $\tau = \theta$ et $H = K$, et si G est non compact, l'espace G/K est un espace symétrique riemannien de type non compact. Si $\tau \neq \theta$, l'espace symétrique correspondant est pseudo-riemannien. La (pseudo) métrique de G/H est celle associée à la forme de Killing de \mathfrak{g} . Le sous espace \mathfrak{q} s'identifie à l'espace tangent à G/H en le point base $eH = o$.

Si $G = U$ est compact, alors l'espace U/K est un espace symétrique riemannien de type compact.

Définition 4 On dit que la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est irréductible si les seuls idéaux de \mathfrak{g} invariants par τ sont $\{0\}$ et \mathfrak{g} . On dit que l'espace symétrique G/H est irréductible, si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est irréductible.

1.2.4 Espaces symétriques NCC

Pour cette section, on peut se référer à [14] et [10] pour plus de détails.

Définition 5 Soit $C \neq \emptyset$ une partie ouverte et convexe de \mathfrak{q} . On dit que C est hyperbolique, si pour tout $X \in C$, $ad(X)$ est semi-simple avec valeurs propres réelles.

Définition 6 Soit G/H un espace symétrique irréductible. On dit que G/H est non compactement causal (NCC), s'il existe un cône $C \in \mathfrak{q}$ non-vide, ouvert, convexe et H -invariant ne contenant aucune droite affine pour lequel l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. C est hyperbolique
2. Il existe un élément non nul $T_0 \in \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}$, qui est $H \cap K$ -invariant.

Pour un espace symétrique NCC, il existe un tel cône maximal, noté C_{\max} .

Remarque : L'élément T_0 de la définition précédente est unique à multiplication par un scalaire près. Il possède les valeurs propres 0 et $\pm a$ avec $a > 0$. Ainsi, on peut prendre T_0 tel que $\text{ad}(T_0)$ admette pour valeurs propres $-1, 0, 1$.

Soit donc G/H un espace symétrique NCC. Soit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ un sous-espace abélien maximal contenant T_0 . Comme G/H est NCC, \mathfrak{a} est aussi maximal abélien dans \mathfrak{p} et dans \mathfrak{q} . On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$. Comme \mathfrak{a} est maximal abélien dans \mathfrak{q} et dans \mathfrak{p} , on a également $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ et on a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

où

$$\mathfrak{g}^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

et $\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}, \mathfrak{g}^{\alpha} \neq \{0\}\}$ est l'ensemble des racines restreintes associées à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. De plus, les valeurs propres de $\text{ad}(T_0)$ étant $-1, 0$ et 1 , on obtient la décomposition

$$\Sigma = \Sigma_n^- \sqcup \Sigma_0 \sqcup \Sigma_n^+$$

où $\Sigma_n^{\pm} = \{\alpha \in \Sigma, \alpha(T_0) = \pm 1\}$ et $\Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma, \alpha(T_0) = 0\}$. On choisit un système de racines positives $\Sigma^+ = \Sigma_0^+ \cup \Sigma_n^+$ où Σ_0^+ est un choix de système de racines positives dans Σ_0 . On peut montrer que le système fondamental de racines simples Π associé à Σ^+ est de la forme $\Pi = \Pi_0 \cup \{\gamma\}$ où Π_0 est le système fondamental de racines simples associé à Σ_0^+ et γ est l'unique élément de Σ_n^+ . On pose aussi $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$ et $N = \exp \mathfrak{n}$.

On définit maintenant un cône convexe dans \mathfrak{a} par

$$c_{\max} = \{X \in \mathfrak{a}, \forall \alpha \in \Sigma_n^+, \alpha(X) \geq 0\}.$$

On a alors

$$c_{\max} = C_{\max} \cap \mathfrak{a}.$$

On peut montrer que $S = H \exp(c_{\max})H$ est un semi-groupe contenu dans HAN . Son intérieur $S^0 = H \exp(c_{\max}^0)H$ est le domaine H -biinvariant sur lequel la théorie des fonctions sphériques sur G/H est développée.

Rappelons que HAN est ouvert dans G et que l'application

$$\begin{aligned} H \times A \times N &\longrightarrow G \\ (h, a, n) &\longmapsto han \end{aligned}$$

est un difféomorphisme sur HAN . On écrira

$$\begin{aligned} HAN &\longrightarrow H \times A \times N \\ x &\longmapsto (h_H(x), a_H(x), n_H(x)) \end{aligned}$$

pour l'application inverse. Les applications h_H , a_H et n_H sont alors analytiques. Si $H = K$ est le sous groupe maximal compact de G , alors $G = KAN$ et on a donc une décomposition globale de G , dite décomposition de Iwasawa. Pour $x \in G$, on notera $x = k(x)a(x)n(x)$ avec $k(x) \in K$, $a(x) \in A$ et $n(x) \in N$.

Chapitre 2

Théorie L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace en rang un

Dans ce chapitre, on considère un triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ de rang un, c'est-à-dire $\dim \mathfrak{a} = 1$. L'ensemble Σ^+ est alors de la forme $\Sigma^+ = \{\alpha\}$ ou $\Sigma^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$. On suppose de plus que $m = (m_\alpha, m_{2\alpha})$ est une fonction de multiplicité positive. Par convention, on posera $m_{2\alpha} = 0$ si 2α n'est pas une racine. Fixons H dans \mathfrak{a} tel que $\alpha(H) = 1$. Alors le choix de α et H permettent d'identifier \mathfrak{a} et \mathfrak{a}^* avec \mathbb{R} . On notera alors ρ le nombre $\rho(H)$, c'est-à-dire

$$\rho = \frac{m_\alpha}{2} + m_{2\alpha} \quad (2.1)$$

2.1 Fonctions c

La fonction c de Harish-Chandra est la fonction définie sur \mathbb{C} au moyen de la fonction Gamma par

$$c(m, \lambda) = C_0 \frac{2^{-(\lambda + \frac{m_\alpha}{2}) + 1} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{m_{2\alpha}}{2})} \quad (2.2)$$

où C_0 est une constante déterminée par la condition $c(m, \rho) = 1$. Explicitement, on a

$$C_0 = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(m_\alpha + m_{2\alpha})}{\Gamma(\frac{m_\alpha}{2} + \frac{m_{2\alpha}}{2})}. \quad (2.3)$$

On écrira souvent $c(\lambda)$ à la place de $c(m, \lambda)$. Si Σ est réduit, on a $m_{2\alpha} = 0$ et $\rho = \frac{m_\alpha}{2}$. Dans ce cas

$$c(\lambda) = C_0 \frac{2^{-(\lambda + \frac{m_\alpha}{2}) + 1} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4})}$$

et en utilisant la formule (1.2.15) dans [7]

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/2), \quad (2.4)$$

on obtient

$$c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C_0 \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \rho)} = \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \rho)}. \quad (2.5)$$

On rappelle que la fonction $z \mapsto \Gamma(z)$ est une fonction méromorphe avec pôles simples en $z = 0, -1, -2, \dots$. De plus, la fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est une fonction entière. Par conséquent, les singularités de la fonction c sont au plus des pôles simples aux points $\lambda = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 2 *La fonction $\lambda \mapsto \lambda c(\lambda)$ n'a ni zéros, ni pôles pour $\operatorname{Re} \lambda < 1$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ tel que $|\lambda|$ soit assez grand, il existe une constante C'_0 telle que*

$$|\lambda c(-\lambda)| \sim C'_0 |\lambda|^{1 - \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}}.$$

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$|c(i\lambda)|^2 = c(i\lambda)c(-i\lambda). \quad (2.6)$$

Preuve : En utilisant l'égalité (2.4), on a

$$\lambda c(\lambda) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} 2^{1 - \frac{m_\alpha}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{m_{2\alpha}}{2}\right)}$$

Maintenant, on se sert de l'estimation (1.18.4) dans [7] (voir p.7) : pour $|z|$ assez grand tel que $-\pi < \arg z < \pi$,

$$\frac{\Gamma(z+a)\Gamma(z+b)}{\Gamma(z+c)\Gamma(z+d)} \sim z^{a+b-c-d}. \quad (2.7)$$

On a donc pour $|\lambda|$ assez grand

$$|\lambda c(\lambda)| \sim C'_0 |\lambda|^{1 - \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}}$$

où

$$C'_0 = C_0 \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{1 - \frac{m_\alpha}{2}} = 2^{1 - \frac{m_\alpha}{2}} \frac{\Gamma(m_\alpha + m_{2\alpha})}{\Gamma\left(\frac{m_\alpha}{2} + \frac{m_{2\alpha}}{2}\right)}.$$

La formule (2.6) est conséquence de la propriété $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$ de la fonction Γ .

c.q.f.d.

On aura aussi besoin de la fonction

$$\tilde{c}(m, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} - \frac{m_{2\alpha}}{2} + 1\right)}{2^{\lambda + \frac{m_\alpha}{2}} \Gamma(-\lambda + 1)}. \quad (2.8)$$

Les singularités de cette fonction sont parmi celles de $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} - \frac{m_{2\alpha}}{2} + 1\right)$, c'est-à-dire parmi les points $\lambda = 2n + 1 - \frac{m_\alpha}{2}$ et $\lambda = 2n + 2 - \rho$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas réduit ($m_{2\alpha} = 0$), on a

$$\tilde{c}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} + 1\right)}{2^{\lambda + \frac{m_\alpha}{2}} \Gamma(-\lambda + 1)}$$

En utilisant l'égalité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et l'égalité (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(m, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-\lambda - \rho)\Gamma(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\rho}{2})}{2^{\lambda+\rho+1}\Gamma(-\lambda+1)} \\
&= \frac{(-\lambda - \rho)\Gamma(-\lambda - \rho)2^{\lambda+\rho+1}}{2^{\lambda+\rho+1}\Gamma(-\lambda+1)} \\
&= \frac{\Gamma(-\lambda - \rho + 1)}{\Gamma(-\lambda + 1)}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Le plus souvent, on notera $\tilde{c}(\lambda)$ au lieu de $\tilde{c}(m, \lambda)$.

2.2 Opérateurs de Jacobi

La fonction hypergéométrique de Gauss est définie pour $|z| < 1$ par

$${}_2F_1(a, b; c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin -\mathbb{N}$, et le symbole de Pochhammer $(a)_k$ est défini par $(a)_0 := 1$ et $(a)_k := a(a+1)\dots(a+k-1)$. Considérée comme fonction de la variable z , la fonction ${}_2F_1(a, b; c; z)$ est l'unique solution de l'équation différentielle hypergéométrique

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0 \tag{2.10}$$

holomorphe en 0 et égale à 1 en 0.

On définit maintenant l'opérateur de Jacobi L par

$$L := \frac{d^2}{dt^2} + (m_\alpha \coth t + 2m_{2\alpha} \coth 2t) \frac{d}{dt}$$

ainsi que l'équation différentielle de Jacobi de paramètre spectral $\lambda \in \mathbb{C}$

$$L(u) = (\lambda^2 - \rho^2)u. \tag{2.11}$$

L'opérateur de Jacobi est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ où

$$\delta(t) = (\text{sh}t)^{m_\alpha} (\text{sh}2t)^{m_{2\alpha}}. \tag{2.12}$$

En posant

$$\begin{aligned}
a &:= \frac{\rho - \lambda}{2}, \\
b &:= \frac{\rho + \lambda}{2}, \\
c &:= \frac{1 + m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}, \\
z &:= -\text{sh}^2 t,
\end{aligned}$$

l'équation de Jacobi (2.11) se transforme en l'équation hypergéométrique (2.10). Donc la fonction de Jacobi de 1^{ème} espèce

$$\psi_\lambda(m, t) := {}_2F_1\left(\frac{\rho - \lambda}{2}, \frac{\rho + \lambda}{2}; \frac{1 + m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}; -\text{sh}^2 t\right) \quad (2.13)$$

est l'unique solution paire C^∞ sur \mathbb{R} de l'équation de Jacobi telle que $\psi_\lambda(m, 0) = 1$. Puisque ${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z)$, on a

$$\psi_{-\lambda}(m, t) = \psi_\lambda(m, t). \quad (2.14)$$

En outre, la fonction $\lambda \mapsto \psi_\lambda(m, t)$ est entière. Pour $\lambda \notin \mathbb{Z}$, la fonction de Jacobi de 2^{ème} espèce

$$\Phi_\lambda(m, t) := (2\text{cht})^{\lambda - \rho} {}_2F_1\left(\frac{\rho - \lambda}{2}, \frac{1 - \lambda + \frac{m_\alpha}{2}}{2}; 1 - \lambda; \text{ch}^{-2} t\right) \quad (2.15)$$

est une autre solution de l'équation de Jacobi définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$. En utilisant la relation (2.1.22) dans [7]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1 - z)^{-a} {}_2F_1(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}) \quad (2.16)$$

on obtient

$$\Phi_\lambda(m, t) = (2\text{sht})^{\lambda - \rho} {}_2F_1\left(\frac{\rho - \lambda}{2}, \frac{1 - \lambda - \frac{m_\alpha}{2}}{2}; 1 - \lambda; -\text{sh}^{-2} t\right). \quad (2.17)$$

Ainsi,

$$\Phi_\lambda(m, t) \sim e^{(\lambda - \rho)t} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2.18)$$

La fonction $[\Gamma(c)]^{-1} {}_2F_1(a, b; c; z)$ est entière en $a, b, c \in \mathbb{C}$ (voir [7] p.68). Donc, $\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \Phi_\lambda(m, t)$ est une fonction entière de $\lambda \in \mathbb{C}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, c'est-à-dire $\Phi_\lambda(m, t)$ possède au plus des poles simples en les points $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

Pour $\lambda \notin \mathbb{Z}$, on a la relation (voir [18])

$$\psi_\lambda(m, t) = c(\lambda) \Phi_\lambda(m, t) + c(-\lambda) \Phi_{-\lambda}(m, t). \quad (2.19)$$

Exemples :

1. Cas euclidien : Dans ce cas, on a $m = (0, 0)$ et d'après [7] 2.8(10) et 2.8(11), on obtient

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(0, t) &= {}_2F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}; \frac{1}{2}; -\text{sh}^2 t\right) = \cos(i\lambda t) = \text{ch}(\lambda t) \\ \Phi_\lambda(0, t) &= (2\text{cht})^\lambda {}_2F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1 - \lambda}{2}; 1 - \lambda; \text{ch}^{-2} t\right) = e^{\lambda t} \end{aligned}$$

2. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$, on a $\Sigma = \{\pm\alpha\}$ avec $m_\alpha = 1$, donc $\rho = \frac{m_\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \rho)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \\ \Phi_\lambda(1, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(-\lambda + 1)}{\Gamma(-\lambda + \frac{1}{2})} Q_{-\lambda - \frac{1}{2}}(\text{cht}) = -\lambda c(-\lambda) Q_{-\lambda - \frac{1}{2}}(\text{cht}) \\ \psi_\lambda(1, t) &= P_{-\lambda - \frac{1}{2}}(\text{cht}) \end{aligned}$$

où P et Q sont respectivement les fonctions de Legendre de 1^{ère} et de 2^{ème} espèce.

3. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$, on a $\Sigma = \{\pm\alpha\}$ avec $m_\alpha = 2$, donc $\rho = \frac{m_\alpha}{2} = 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \rho)} = \frac{1}{\lambda} \\ \Phi_\lambda(2, t) &= \frac{e^{\lambda t}}{2\text{sht}} \end{aligned}$$

De plus, d'après (2.19)

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(2, t) &= c(\lambda)\Phi_\lambda(2, t) + c(-\lambda)\Phi_{-\lambda}(2, t) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda t}}{2\text{sht}} - \frac{1}{\lambda} \frac{e^{-\lambda t}}{2\text{sht}} \\ &= \frac{\text{sh}(\lambda t)}{\lambda \text{sht}} \end{aligned}$$

Lemme 3 Soit $\sigma > 0$, alors il existe une constante c_σ telle que

$$|\Phi_\lambda(m, t)| \leq c_\sigma e^{(\text{Re}\lambda - \rho)t}$$

pour $\text{Re}\lambda \leq 0$ et $t \in]\sigma, +\infty[$.

Preuve : (voir [12], p.151-152) La fonction $\Phi_\lambda(m, t)$ est l'unique solution de l'équation de Jacobi telle que $\Phi_\lambda(m, t) \sim e^{(\lambda - \rho)t}$ quand $t \rightarrow +\infty$. On considère alors une solution de cette équation de la forme $e^{(\lambda - \rho)t} \sum_{n \geq 0} e^{-nt} \Gamma_n(\lambda)$ avec $\Gamma_n(\lambda)$ à déterminer et $\Gamma_0 \equiv 1$. On trouve une relation de récurrence qui définit $\Gamma_n(\lambda)$ univoquement si $\lambda \notin \mathbb{N}$. On peut alors trouver des constantes $K, d > 0$ telles que

$$|\Gamma_n(\lambda)| \leq K(1 + n)^d$$

pour $\text{Re}\lambda \leq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On en déduit le résultat.

c.q.f.d.

On définit maintenant la fonction sphérique $\varphi_\lambda(m, t)$ par

$$\varphi_\lambda(m, t) := \tilde{c}(\lambda)\Phi_\lambda(m, t), \quad t > 0. \quad (2.20)$$

où $\tilde{c}(\lambda)$ est définie en (2.8). En tant que fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi_\lambda(m, t)$ est une fonction méromorphe dont les singularités sont au plus des pôles doubles en les singularités du numérateur de la fonction $\tilde{c}(\lambda)$, c'est-à-dire parmi les points $\lambda = 2n + 1 - \frac{m_\alpha}{2}$ et $\lambda = 2n + 2 - \rho$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les pôles sont au plus simples parmi les points $\lambda = -\rho + n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ si Σ est réduit.

2.3 Transformée hypergéométrique de Fourier

La théorie de la transformée hypergéométrique de Fourier en rang un est classique. On renvoie à [17] et [18] pour plus d'informations.

On définit la transformée hypergéométrique de Fourier $f \mapsto \mathcal{F}f$ par

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \int_0^{+\infty} f(t)\psi_\lambda(m, t)\delta(t)dt \quad (2.21)$$

pour toute fonction mesurable paire f sur \mathbb{R} et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels le second membre est bien défini. D'après (2.14), la fonction $\mathcal{F}f$ est paire. Supposons que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est paire. Alors $\mathcal{F}f$ est une fonction paire entière d'après les théorèmes de Morera et Fubini. De plus, d'après (2.11) et comme l'opérateur de Jacobi L est auto-adjoint par rapport à $\delta(t)dt$, on a

$$\mathcal{F}(Lf)(\lambda) = (\lambda^2 - \rho^2)\mathcal{F}f(\lambda). \quad (2.22)$$

Exemples :

1. Cas euclidien : On a $m = (0, 0)$ et donc

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\psi_\lambda(0, t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)\text{ch}(\lambda t)dt.$$

d'où $\mathcal{F}f(i\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$ est la cosinus-transformée de Fourier de f .

2. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$, on a $m = (1, 0)$ et on obtient

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\psi_\lambda(1, t)\text{sht}dt = \int_0^{+\infty} f(t)P_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\text{cht})\text{sht}dt = \int_1^{+\infty} f^\sharp(x)P_{-\lambda-\frac{1}{2}}(x)dx,$$

la transformée de Legendre de la fonction $f^\sharp(x) = f(\text{argch } x)$.

3. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$, on a $m = (2, 0)$ et

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\psi_\lambda(2, t)\text{sh}^2t dt = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{\text{sh}(\lambda t)}{\lambda}\text{sht}dt.$$

d'où $i\lambda\mathcal{F}f(i\lambda) = \int_0^{+\infty} f^\sharp(t)\sin(\lambda t)dt$ est la sinus-transformée de $f^\sharp(t) = f(t)\text{sht}$.

Théorème 1 (Formule d'inversion) *Pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ paire et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{F}f(i\lambda)\psi_{-i\lambda}(m, t)|c(i\lambda)|^{-2}d^\bullet\lambda.$$

avec

$$d^\bullet\lambda = \frac{2^{m_\alpha-1}}{\pi}d\lambda. \quad (2.23)$$

Preuve : Voir [18], p.52-56. La normalisation de la mesure vient du fait que la fonction delta utilisée dans [18] est $2^{m_\alpha} \delta(t)$.

c.q.f.d.

Soit $R > 0$ et soit $\mathcal{H}_R(\mathbb{C})$ l'espace des fonctions entières paires g telles que

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{-R|\operatorname{Re}\lambda|} (1 + |\lambda|)^N |g(\lambda)| < \infty$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. De plus, on note $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ la réunion des espaces $\mathcal{H}_R(\mathbb{C})$ pour $R > 0$. On définit une topologie d'espace de Fréchet sur $\mathcal{H}_R(\mathbb{C})$ grâce aux semi-normes

$$\sigma_N(g) := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{-R|\operatorname{Re}\lambda|} (1 + |\lambda|)^N |g(\lambda)|.$$

De plus, on munit l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de la topologie inductive.

Théorème 2 (Paley-Wiener) *La transformée hypergéométrique de Fourier est un isomorphisme topologique linéaire de $C_c^\infty(\mathbb{R})^{\text{paire}}$ sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Plus précisément, c'est un isomorphisme topologique linéaire de $\{f \in C_c^\infty(\mathbb{R})^{\text{paire}}, \operatorname{supp} f \subseteq [-R, R]\}$ sur $\mathcal{H}_R(\mathbb{C})$.*

Preuve : Voir [17].

c.q.f.d.

Théorème 3 (Formule de Plancherel) *Pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ paire, on a*

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 \delta(t) dt = \int_0^{+\infty} |\mathcal{F}f(i\lambda)|^2 |c(i\lambda)|^{-2} d^\bullet \lambda.$$

Ainsi, l'application $f \mapsto \mathcal{F}f$ s'étend à une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+, \delta(t)dt)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+, |c(\lambda)|^{-2} d^\bullet \lambda)$.

Preuve : Voir [18], p.52-56.

c.q.f.d.

2.4 Transformée hypergéométrique de Laplace

On définit la transformée hypergéométrique de Laplace par

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty f(t) \Phi_\lambda(m, t) \delta(t) dt$$

pour toute fonction mesurable f sur \mathbb{R}_+ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels le deuxième membre est bien défini.

Exemples :

1. Dans le cas euclidien, on a

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\lambda t} dt.$$

En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et à une constante près, $\mathcal{L}f(i\lambda)$ est la transformée de Fourier $\mathbf{F}[f](\lambda)$ si f est à support dans \mathbb{R}_+ .

2. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$,

$$\mathcal{L}f(\lambda) = -\lambda c(-\lambda) \int_0^{+\infty} f(t)Q_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\text{cht})\text{sht}dt \quad (2.24)$$

$$= -\lambda c(-\lambda) \int_1^{+\infty} f^\sharp(x)Q_{-\lambda-\frac{1}{2}}(x)dx \quad (2.25)$$

est essentiellement la transformée de Legendre de deuxième espèce de $f^\sharp(x) = f(\text{argch } x)$.

3. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t)e^{\lambda t}\text{sht}dt.$$

est, à une constante près, la transformée de Laplace de la fonction $f^\sharp(t) = f(t)\text{sht}$.

Supposons $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, alors d'après les théorèmes de Morera et de Fubini et vu les singularités possibles de la fonction $\Phi_\lambda(m, t)$ listées page 14, $\mathcal{L}f$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} et holomorphe pour $\text{Re}\lambda < 1$. Pour $R > r > 0$, on note $C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ l'espace des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}_+^* à support compact inclus dans $[r, R]$. La croissance pour $\text{Re}\lambda \leq 0$ de $\mathcal{L}f$ est liée au support de la fonction f comme le montre le lemme suivant :

Lemme 4 *Soient $R > r > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, alors il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de r, R et m , telle que*

$$\sup_{\text{Re}\lambda \leq 0} e^{-r\text{Re}\lambda} (1 + |\lambda|^2)^N |\mathcal{L}f(\lambda)| \leq C \sum_{n=0}^N \|(L + \rho^2)^n f\|_\infty < \infty$$

pour $f \in C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

Preuve : Pour $f \in C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_r^R f(t)\Phi_\lambda(m, t)\delta(t)dt$$

donc d'après le lemme 3, il existe une constante C_r telle que pour $\text{Re}\lambda \leq 0$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}f(\lambda)| &\leq C_r \int_r^R f(t)e^{(\text{Re}\lambda - \rho)t}\delta(t)dt \\ &\leq C_r e^{r\text{Re}\lambda} \|f\|_\infty \int_r^R e^{\rho t}\delta(t)dt \end{aligned}$$

donc il existe une constante C_0 dépendant de r , R et m telle que

$$|\mathcal{L}f(\lambda)| \leq C_0 e^{r\operatorname{Re}\lambda} \|f\|_\infty. \quad (2.26)$$

Maintenant, comme $L\Phi = (\lambda^2 - \rho^2)\Phi$, on a $\mathcal{L}(Lf)(\lambda) = (\lambda^2 - \rho^2)\mathcal{L}f(\lambda)$. De plus, on peut écrire $\lambda^2 = \lambda^2 - \rho^2 + \rho^2$, donc

$$(1 + |\lambda|^2)^N |\mathcal{L}f(\lambda)| = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} |\lambda|^{2n} |\mathcal{L}f(\lambda)| = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} |\mathcal{L}((L + \rho^2)^n f)(\lambda)|$$

donc, d'après (2.26),

$$e^{-r\operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|^2)^N |\mathcal{L}f(\lambda)| \leq C_0 \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \|(L + \rho^2)^n f\|_\infty$$

d'où le résultat.

c.q.f.d.

La formule d'inversion ci-dessous a été démontrée par Mizony (voir [19]).

Théorème 4 (Formule d'inversion) *Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ alors*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(i\lambda) \psi_{-i\lambda}(m, t) c(-i\lambda)^{-1} d^\bullet \lambda.$$

Preuve : De la relation (2.19), on déduit

$$c(\lambda)\mathcal{L}f(\lambda) + c(-\lambda)\mathcal{L}f(-\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda). \quad (2.27)$$

On obtient le résultat en appliquant la formule d'inversion de \mathcal{F} (Théorème 1).

c.q.f.d.

Définition 7 *Soient $R > r > 0$. On définit l'espace de Paley-Wiener $PW_{r,R}(\mathbb{C})$ comme l'espace des fonctions méromorphes g sur \mathbb{C} , avec pôles au plus pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$, telles que*

1. pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \leq 0} e^{-r\operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|)^N |g(\lambda)| < +\infty$$

2. La fonction

$$P^{av}g(\lambda) := c(\lambda)g(\lambda) + c(-\lambda)g(-\lambda)$$

s'étend à une fonction de $\mathcal{H}_R(\mathbb{C})$.

De plus, on note $PW(\mathbb{C})$ la réunion des espaces $PW_{r,R}(\mathbb{C})$ pour tout $R > r > 0$. On définit une topologie d'espace de Fréchet sur $PW_{r,R}(\mathbb{C})$ grâce aux semi-normes

$$\sigma_{r,N}(g) := \sup_{\operatorname{Re}\lambda \leq 0} e^{-r\operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|)^N |g(\lambda)|$$

et

$$\sigma_{R,N}(g) := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{-R|\operatorname{Re}\lambda|} (1 + |\lambda|)^N |P^{av}g(\lambda)|.$$

De plus, on munit l'espace $PW(\mathbb{C})$ de la topologie inductive.

Remarque : Comme la transformée hypergéométrique de Fourier \mathcal{F} est injective, on a pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,

$$P^{av}\mathcal{L}(f) = \mathcal{F}(f) = 0 \implies f = 0,$$

donc $P^{av}\mathcal{L}$ est injective.

Lemme 5 Soit g une fonction méromorphe sur \mathbb{C} satisfaisant la condition 1 de la définition 7. Supposons que $P^{av}g = 0$, alors $g = 0$.

Preuve : Soit $g^1(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{c(-\lambda)}$, alors

$$P^{av}g(\lambda) = 2c(\lambda)c(-\lambda)av g^1(\lambda),$$

où $av g^1(\lambda) = \frac{1}{2}(g^1(\lambda) + g^1(-\lambda))$. Comme $P^{av}g = 0$, on a $av g^1 = 0$.

Soit $\gamma(s) = \int_{\mathbb{R}} g^1(i\lambda) e^{-is\lambda} d^\bullet \lambda$, $s \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier de $g^1(i\cdot)$.

D'après la condition 1 et [13], prop IV.7.2, g satisfait également la condition 1. En particulier $g^1(i\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$. Toujours d'après la condition 1, g est holomorphe dans un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}z \leq 0\}$. De plus, d'après le théorème de Cauchy, $\operatorname{supp}\gamma = [r, +\infty[$. D'autre part, $av \gamma$ est la transformée de Fourier de $av g^1 = 0$, donc $av \gamma = 0$ et donc $\gamma = 0$ d'après la condition sur le support. Comme la transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$, on a $g^1 = 0$ et donc $g = 0$.

c.q.f.d.

Le théorème de Paley-Wiener a été démontré dans le cas $m_\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $m_{2\alpha} = 0$ par Andersen et Ólafsson (voir [1]). La preuve que nous donnons ici dans le cas $m_\alpha, m_{2\alpha} \geq 0$ quelconques est une extension simple de leur preuve.

Théorème 5 (Paley-Wiener) \mathcal{L} est un isomorphisme topologique linéaire de $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ sur $PW(\mathbb{C})$. Plus précisément, \mathcal{L} est un isomorphisme topologique linéaire de $C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ sur $PW_{r,R}(\mathbb{C})$ pour tous $R > r > 0$.

Preuve : D'après le théorème de Paley-Wiener pour la transformée hypergéométrique de Fourier (Théorème 2), le lemme 3 et le théorème de l'application ouverte pour les espaces de Fréchet, il suffit de montrer que pour tous $R > r > 0$, l'application \mathcal{L} est surjective de $C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ sur $PW_{r,R}(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{L}(C_{r,R}(\mathbb{R}_+^*)) = PW_{r,R}(\mathbb{C}).$$

Soit $g \in PW_{r,R}(\mathbb{C})$. On considère $Ig \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ défini par

$$Ig(t) = \int_{\mathbb{R}} g(i\lambda) \psi_{-i\lambda}(m, t) c(-i\lambda)^{-1} d^\bullet \lambda$$

pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de Cauchy, on a pour $0 < t < r$ et $\mu < 0$

$$\begin{aligned} Ig(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(i\lambda) \psi_{-i\lambda}(m, t) c(-i\lambda)^{-1} d^\bullet \lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(i\lambda + \mu) \psi_{-i\lambda - \mu}(m, t) c(-i\lambda - \mu)^{-1} d^\bullet \lambda \end{aligned}$$

Donc quand $\mu \rightarrow -\infty$, on a $Ig(t) \rightarrow 0$, car pour $\text{Re}\lambda \geq 0$ et d'après le lemme 2

$$|\psi_\lambda(m, t) c(\lambda)^{-1}| \leq C(1 + |\lambda|)^\rho (1 + t) e^{(\text{Re}\lambda - \rho)t}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Ig(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(i\lambda) \psi_{-i\lambda}(m, t) c(-i\lambda)^{-1} d^\bullet \lambda \\ &= \frac{1}{2} \sum_{w=\pm 1} \int_{\mathbb{R}} g(iw\lambda) \psi_{-iw\lambda}(m, t) c(-iw\lambda)^{-1} d^\bullet \lambda \\ &= \frac{1}{2} \sum_{w=\pm 1} \int_{\mathbb{R}} c(iw\lambda) g(iw\lambda) \psi_{-iw\lambda}(m, t) |c(i\lambda)|^{-2} d^\bullet \lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{w=\pm 1} c(iw\lambda) g(iw\lambda) \right) \psi_{-i\lambda}(m, t) |c(i\lambda)|^{-2} d^\bullet \lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} P^{av} g(i\lambda) \psi_{-i\lambda}(m, t) |c(i\lambda)|^{-2} d^\bullet \lambda \end{aligned}$$

donc Ig est la transformée hypergéométrique de Fourier inverse de $P^{av}g \in \mathcal{H}_R(\mathbb{C})$. Donc d'après la théorème de Paley-Wiener pour la transformée hypergéométrique de Fourier,

$$Ig(t) = 0 \quad \text{pour tout } t > R.$$

Comme $P^{av}(\mathcal{L}f) = \mathcal{F}f$, pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$P^{av}\mathcal{L}(Ig) = \mathcal{F}(Ig) = P^{av}g.$$

D'où, d'après le lemme 5,

$$\mathcal{L}(Ig) = g,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)) = PW_{r,R}(\mathbb{C}).$$

Pour prolonger la transformée hypergéométrique de Laplace à $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$, la renormalisation suivante de la transformée \mathcal{L} est plus appropriée.

Définition 8 La transformée hypergéométrique de Laplace modifiée d'une fonction mesurable f sur \mathbb{R}_+^* est définie par

$$\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda) := i \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} \delta(t) dt = i \frac{\mathcal{L}f(\lambda)}{\lambda c(-\lambda)}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lequel l'intégrale converge.

Exemples :

1. Dans le cas euclidien, on a $c(\lambda) = 1$, donc

$$\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda) = i \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} dt.$$

2. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$, on a

$$\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda) = -i \int_0^{+\infty} f(t) Q_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\text{cht}) \text{sht} dt.$$

3. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$, on obtient $\lambda c(-\lambda) = -1$, donc

$$\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda) = -\frac{i}{2} \int_0^{+\infty} f(t) e^{\lambda t} \text{sht} dt.$$

Lemme 6 Les singularités de la fonction $\lambda \mapsto \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)}$ sont :

1. parmi les points $\lambda = \rho + n$ avec $n \in \mathbb{N}$, si $m_{2\alpha} = 0$,
2. parmi les points $\lambda = \rho + 2n_1$ avec $n_1 \in \mathbb{N}$ et les points $\lambda = \frac{m_\alpha}{2} + 2n_2$ avec $n_2 \in \mathbb{N}$, si $m_{2\alpha} \neq 0$.

Preuve : Par définition de la fonction c , on a, à une constante près,

$$\frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} = 2^\lambda \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{m_{2\alpha}}{2}\right) \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\Gamma(-\lambda + 1)}.$$

De plus, $\lambda \mapsto \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\Gamma(-\lambda + 1)}$ est une fonction entière en λ . Ainsi, si $m_{2\alpha} = 0$, on a, toujours à une constante près,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} &= 2^\lambda \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\Gamma(-\lambda + 1)} \\ &= 2^{2\lambda} \Gamma(-\lambda + \rho) \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\Gamma(-\lambda + 1)} \quad \text{d'après (2.4)} \end{aligned}$$

D'où, les singularités de la fonction $\lambda \mapsto \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)}$ sont parmi les points $\rho, \rho + 1, \dots$

Par contre, si $m_{2\alpha} \neq 0$, les singularités de la fonction $\lambda \mapsto \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)}$ sont parmi les singularités de $\Gamma(-\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}) \Gamma(-\frac{\lambda}{2} + \frac{m_\alpha}{4} + \frac{m_{2\alpha}}{2})$, c'est-à-dire parmi les points $\rho, \rho + 2, \dots$ et les points $\frac{m_\alpha}{2} + 1, \frac{m_\alpha}{2} + 3, \dots$

c.q.f.d.

On notera par la suite $S(\Phi, m)$ l'ensemble des λ -singularités de la fonction $\frac{\Phi(m, \lambda, t)}{\lambda c(-\lambda)}$ listées dans le lemme 6.

Proposition 1 (Formule d'inversion) *Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, alors*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{L}}f(i\lambda) \psi_{-i\lambda}(m, t) \lambda d^\bullet \lambda.$$

Preuve : Conséquence directe du théorème 4.

c.q.f.d.

A partir du théorème 5, on déduit maintenant un théorème de Paley-Wiener pour la transformation hypergéométrique de Laplace modifiée. On remarque d'abord que $\lambda c(-\lambda)$ n'a ni pôles, ni zéros dans $\text{Re} \lambda \leq 0$, donc $\tilde{\mathcal{L}}f$ est holomorphe sur $\text{Re} \lambda < 0$ si et seulement si $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur $\text{Re} \lambda \leq 0$. De plus, grâce au lemme 2, on voit que $\tilde{\mathcal{L}}f$ satisfait la condition 1 de la définition de $PW_{r, R}(\mathbb{C})$ (définition 7) si et seulement si $\mathcal{L}f$ vérifie cette condition. Pour modifier la condition 2 de la définition de $PW_{r, R}(\mathbb{C})$, on observe que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}f(i\lambda) - \tilde{\mathcal{L}}f(-i\lambda) &= i \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{\Phi_{i\lambda}(m, t)}{i\lambda c(-i\lambda)} + \frac{\Phi_{-i\lambda}(m, t)}{i\lambda c(i\lambda)} \right] \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda c(i\lambda) c(-i\lambda)} \int_0^{+\infty} f(t) \psi_{i\lambda}(t) \delta(t) dt \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\mathcal{L}}f(i\lambda) - \tilde{\mathcal{L}}f(-i\lambda) = \frac{1}{\lambda |c(i\lambda)|^2} \mathcal{F}f(i\lambda). \quad (2.28)$$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 9 *Soient $R > r > 0$. On définit l'espace de Paley-Wiener modifié $\widetilde{PW}_{r, R}(\mathbb{C})$ comme l'espace des fonctions méromorphes g sur \mathbb{C} , avec pôles au plus pour $\lambda \in S(\Phi, m)$, telles que*

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \leq 0} e^{-r\operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|)^N |g(\lambda)| < +\infty$$

2. La fonction

$$\widetilde{P}^{av}g(\lambda) = \lambda c(\lambda)c(-\lambda) [g(\lambda) - g(-\lambda)] \quad (2.29)$$

s'étend à une fonction de $\mathcal{H}_R(\mathbb{C})$.

De plus, on note $\widetilde{PW}(\mathbb{C})$ la réunion des espaces $\widetilde{PW}_{r,R}(\mathbb{C})$ pour tout $R > r > 0$. On définit une topologie d'espace de Fréchet sur $\widetilde{PW}_{r,R}(\mathbb{C})$ grâce aux semi-normes

$$\sigma_{r,N}(g) = \sup_{\operatorname{Re}\lambda \leq 0} e^{-r\operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|)^N |g(\lambda)|$$

et

$$\tilde{\sigma}_{R,N}(g) := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{-R|\operatorname{Re}\lambda|} (1 + |\lambda|)^N |\widetilde{P}^{av}g(\lambda)|.$$

En outre, on munit l'espace $\widetilde{PW}(\mathbb{C})$ de la topologie inductive.

La relation (2.28) conduit également à la définition suivante. On note

$$\|a\|_*^2 := \int_{\mathbb{R}} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda. \quad (2.30)$$

Alors, d'après (2.28) et le théorème de Plancherel pour \mathcal{F} (Théorème 3), on a

$$\|\tilde{\mathcal{L}}f\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(i\lambda)|^2 \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2} = \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 \delta(t) dt. \quad (2.31)$$

On a donc montré le théorème suivant :

Théorème 6 (Paley-Wiener) *La transformée hypergéométrique de Laplace modifiée $\tilde{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme topologique linéaire de $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ sur $\widetilde{PW}(\mathbb{C})$. Plus précisément, $\tilde{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme topologique linéaire de $C_{r,R}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ sur $\widetilde{PW}_{r,R}(\mathbb{C})$ pour tout $R > r > 0$.*

De plus, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,

$$\|\tilde{\mathcal{L}}f\|_* = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)}.$$

Puisque $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est une partie dense de $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$, le théorème 6 fixe de façon canonique un candidat pour une norme, afin que la transformation hypergéométrique de Laplace modifiée soit une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ sur un espace de Hilbert qui est le complété de $\widetilde{PW}(\mathbb{C})$ par rapport à cette norme.

Le but de la prochaine section est de développer les outils nécessaires pour définir l'espace de Hilbert cherché.

2.5 Définition de l'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$

2.5.1 Les espaces L_s^2 et \mathcal{H}_s

Soit $s \in \mathbb{R}$. On considère l'espace $L_s^2 := L^2(\mathbb{R}, (1 + \xi^2)^s d\xi)$, c'est-à-dire l'espace de Hilbert des fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_{L_s^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi < +\infty,$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{L_s^2}$ ainsi définie.

De cette définition découlent plusieurs propriétés immédiates réunies dans le lemme suivant :

Lemme 7 *On a*

1. Pour $s' \geq s$, $L_{s'}^2 \subseteq L_s^2$
2. $L_0^2 = L^2(\mathbb{R}, d\xi)$ où $d\xi$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .
3. Pour $s \geq 0$, $L_s^2 \subseteq L_0^2 \subseteq L_{-s}^2$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} . Alors $L_s^2 \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, donc la transformée de Fourier de $f \in L_s^2$ peut être définie en terme de distribution tempérée (voir (1.4)). Ainsi, on peut définir l'espace de Sobolev \mathcal{H}_s comme l'ensemble des distributions qui sont la transformée de Fourier d'un élément de L_s^2 ,

$$\mathcal{H}_s := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad f = \mathbf{F}[g], \quad g \in L_s^2\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}_s} := \|\mathbf{F}^{-1}[f]\|_{L_s^2} = \|g\|_{L_s^2}$$

si $f = \mathbf{F}[g] \in \mathcal{H}_s$.

Par définition, \mathcal{H}_s est isométrique à L_s^2 . Il possède donc les mêmes propriétés énoncées pour L_s^2 dans le lemme 7 :

Lemme 8 *On a*

1. Pour $s' \geq s$, $\mathcal{H}_{s'} \subseteq \mathcal{H}_s$
2. $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}, d\xi)$
3. Pour $s \geq 0$, $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{-s}$

Remarque : Les éléments de \mathcal{H}_s sont en général des distributions tempérées et pas des fonctions. Toutefois, on utilisera parfois la notation $f(\lambda)$ pour souligner la variable sur laquelle agit la distribution.

Théorème 7 *L'espace \mathcal{H}_s est un espace de Hilbert isomorphe à L_s^2 et on a*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

De plus, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans \mathcal{H}_s .

Preuve : Voir [34], p.152.

c.q.f.d.

Soient $s, \sigma \in \mathbb{R}$ et soient $f \in \mathcal{H}_s$ et $g \in \mathcal{H}_\sigma$, alors le produit de convolution $f * g$ existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et est donné par

$$f * g = \sqrt{2\pi} \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{F}[f] \mathbf{F}[g]]. \quad (2.32)$$

De plus, comme L_{-s}^2 est le dual de L_s^2 , on a que \mathcal{H}_{-s} est le dual de \mathcal{H}_s . Donc, si $f \in \mathcal{H}_{-s}$ et $g \in \mathcal{H}_s$ pour $s \geq 0$, alors on a (voir [34], p.155-156),

$$(f * g)(x) = (f(x'), g(x - x')). \quad (2.33)$$

On rappelle que la transformée de Laplace \mathbf{L} d'une fonction mesurable g sur \mathbb{R}_+ assez régulière est donnée par

$$\mathbf{L}[g](\sigma + i\lambda) := \left(\mathbf{F} [g(\xi) e^{\sigma \cdot \xi}] \right) (\lambda).$$

Remarque : Si $g \in L_s^2(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$\forall \sigma \in]-\infty, 0[, \quad \xi \mapsto g(\xi) e^{\sigma \cdot \xi} \in L_s^2(\mathbb{R}_+^*)$$

car $\xi \mapsto e^{\sigma \cdot \xi} \in L^\infty$. D'où, $\mathbf{L}[g](\sigma + i \cdot) \in \mathcal{H}_s$.

2.5.2 L'espace $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ l'espace des fonctions a holomorphes sur $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ telles que

$$\|a\|_{H^{(s)}} := \sup_{\sigma < 0} \|a(\sigma + i\lambda)\|_{\mathcal{H}_s} < +\infty.$$

C'est un espace de Banach relativement à la norme $\|\cdot\|_{H^{(s)}}$. Si $s = 0$, on retrouve l'espace de Hardy classique $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ sur le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ (voir [29]). Les espaces $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ sont donc des espaces de Hardy généralisés. La preuve du fait que $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ est un espace de Banach est semblable à la preuve classique pour $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et on renvoie à [34] pour les détails. Les propriétés suivantes sont conséquences des définitions et du lemme 8 :

Lemme 9 *On a*

1. $H^{(s')}(\operatorname{Re}\lambda < 0) \subseteq H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ pour $s' \geq s$

2. $H^{(0)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$
3. $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) \subseteq H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) \subseteq H^{(-s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ pour $s \geq 0$.

Le théorème suivant généralise aux espaces $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ les résultats classiques sur les valeurs au bord des éléments de $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. On souligne que les valeurs au bord sont maintenant dans les espaces de Sobolev \mathcal{H}_s (ou de manière équivalente dans L_s^2 , à une transformation de Fourier près).

Théorème 8 1. Une fonction holomorphe $a : \{\operatorname{Re}\lambda < 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ si et seulement s'il existe $g \in L_s^2(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $a = \mathbf{L}[g]$.

2. Toute fonction $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ possède pour $\sigma = \operatorname{Re}\lambda$ tendant vers 0, une unique valeur au bord $a_+ \in \mathcal{H}_s$. De plus, si $a = \mathbf{L}[g]$, alors $a_+ = \mathbf{F}[g]$.

3. On a $\|a\|_{H^{(s)}} = \|a_+\|_{\mathcal{H}_s} = \|g\|_{L_s^2}$.

Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{L} : L_s^2(\mathbb{R}_+^*) &\longrightarrow H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) \\ g &\longmapsto a = \mathbf{L}[g] \end{aligned}$$

et l'application "valeurs au bord" (Boundary values)

$$\begin{aligned} \text{BdV} : H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) &\longrightarrow \mathcal{H}_s \\ a = \mathbf{L}[g] &\longmapsto a_+ = \mathbf{F}[g] \end{aligned}$$

sont des isomorphismes isométriques.

Preuve : Voir [34], p.172-174.

c.q.f.d.

2.5.3 Noyau de Cauchy et transformée de Cauchy-Bochner

Le noyau de Cauchy K est défini pour $z = \sigma + i\lambda$ avec $\sigma < 0$ par

$$K(\sigma + i\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{(\sigma+i\lambda)\cdot\xi} d\xi$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} K(\sigma + i\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{\sigma\cdot\xi} e^{i\lambda\cdot\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\chi_{[0, +\infty[}(\xi) e^{\sigma\cdot\xi} \right) e^{i\lambda\cdot\xi} d\xi \\ &= \sqrt{2\pi} \mathbf{F} \left[\chi_{[0, +\infty[}(\xi) e^{\sigma\xi} \right] (\lambda) \end{aligned}$$

où $\chi_{[0, +\infty[}$ désigne la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$.
Explicitement, on a

$$K(\sigma + i\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{(\sigma+i\lambda)\xi} d\xi = \frac{1}{\sigma + i\lambda} \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} e^{(\sigma+i\lambda)\xi} - 1 \right] = -\frac{1}{\sigma + i\lambda}$$

c'est-à-dire, $K(z) = -\frac{1}{z}$.

Lemme 10 *Pour tout $\sigma < 0$ fixé, $\lambda \mapsto K(\sigma + i\lambda) \in \mathcal{H}_s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Preuve : A une constante près, on a $K(\sigma + i\lambda) = \mathbf{F} [\chi_{[0, +\infty[}(\xi)e^{\sigma \cdot \xi}] (\lambda)$, donc par le théorème 8, il suffit de montrer que $\chi_{[0, +\infty[}(\xi)e^{\sigma \cdot \xi} \in L^2_s$, ce qui est vrai puisque $\sigma < 0$.

c.q.f.d.

Remarques :

1. K s'étend à une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^*
2. $K(\sigma - i\lambda) = \overline{K(\sigma + i\lambda)}$
3. $K(-(\sigma + i\lambda)) = -K(\sigma + i\lambda)$
4. $K(\sigma + i\lambda) = -\frac{\sigma - i\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2}$, donc $\operatorname{Re}(K(\sigma + i\lambda)) = -\frac{\sigma}{\sigma^2 + \lambda^2}$ et $\operatorname{Im}(K(\sigma + i\lambda)) = \frac{\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2}$

Suivant [34], p.166, on définit la transformée de Cauchy-Bochner de $f \in \mathcal{H}_s$ par

$$CB(f)(\sigma + i\lambda) = \frac{1}{2\pi} (f(\lambda'), K(\sigma + i\lambda - i\lambda')) = \frac{1}{2\pi} (f * K(\sigma + i\cdot))(\lambda).$$

Si $f \in L^2 = \mathcal{H}_0$, On a donc

$$CB(f)(\sigma + i\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda')}{\sigma + i(\lambda - \lambda')} d\lambda' = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda')}{\lambda' - (\sigma + i\lambda)} d\lambda'$$

et on retrouve l'intégrale de Cauchy classique (à une constante près).

Le lemme suivant a été montré dans [34], p.167, formule (3.6). On en donne une preuve élémentaire.

Lemme 11 *Pour tout $\sigma < 0$, on a*

$$\|CB(f)(\sigma + i\cdot)\|_{\mathcal{H}_s} \leq \|f\|_{\mathcal{H}_s}.$$

En particulier, si $f \in \mathcal{H}_s$, alors $CB(f) \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et $\|CB(f)\|_{H^{(s)}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}_s}$.

Preuve : On note $\chi_{]0, +\infty[}$ la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$. Grâce aux propriétés de la transformation de Fourier, on a

$$\begin{aligned}
CB(f)(\sigma + i\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{F}[f] \mathbf{F}[K(\sigma + i\cdot)]] (\lambda) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{F} \left[(\mathbf{F}[f])^\vee (\mathbf{F}[K(\sigma + i\cdot)])^\vee \right] (\lambda) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{F} [\mathbf{F}^{-1}[f] \mathbf{F}^{-1}[K(\sigma + i\cdot)]] (\lambda) \\
&= \mathbf{F} \left[\mathbf{F}^{-1}[f](\xi) \chi_{]0, +\infty[}(\xi) e^{\sigma \cdot \xi} \right] (\lambda)
\end{aligned}$$

donc, pour la norme, on obtient pour $\sigma < 0$

$$\begin{aligned}
\|CB(f)(\sigma + i\cdot)\|_{\mathcal{H}_s}^2 &= \|\mathbf{F}^{-1}[f](\xi) \chi_{]0, +\infty[}(\xi) e^{\sigma \cdot \xi}\|_{L_s^2}^2 \\
&= \int_0^{+\infty} |\mathbf{F}^{-1}[f](\xi)|^2 e^{2\sigma \cdot \xi} (1 + \xi^2)^s d\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{F}^{-1}[f](\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi = \|f\|_{\mathcal{H}_s}^2
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Remarque : On a montré que

$$\begin{aligned}
CB(f)(\sigma + i\lambda) &= \mathbf{F} \left[\mathbf{F}^{-1}[f](\xi) \chi_{]0, +\infty[}(\xi) e^{\sigma \cdot \xi} \right] (\lambda) \\
&= \mathbf{L} [\mathbf{F}^{-1}[f](\xi) \chi_{]0, +\infty[}(\xi)] (\sigma + i\lambda)
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{F}^{-1}[f] \chi_{]0, +\infty[} \in L_s^2(\mathbb{R}_+^*)$. La valeur au bord de $CB(f)(\sigma + i\lambda)$ est donc d'après le théorème 8

$$\begin{aligned}
CB(f)_+ &= \mathbf{F} [\mathbf{F}^{-1}[f] \chi_{]0, +\infty[}] \\
&= \mathbf{F} [\mathbf{F}^{-1}[f] \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{F} [\chi_{]0, +\infty[}]]] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \mathbf{F} [\chi_{]0, +\infty[}]
\end{aligned}$$

On remarque aussi que

$$\chi_{]0, +\infty[} \in L_s^2 \iff \int_0^{+\infty} (1 + \xi^2)^s d\xi < +\infty \iff s < -\frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{F} [\chi_{]0, +\infty[}] \in \mathcal{H}_s \iff s < -\frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, $\sqrt{2\pi} \mathbf{F} [\chi_{]0, +\infty[}]$ est la valeur au bord dans \mathcal{H}_s de $K(\sigma + i\lambda)$.

Définition 10 On pose

$$\tilde{K} := \sqrt{2\pi} \mathbf{F} [\chi_{]0, +\infty[}]. \tag{2.34}$$

La transformée de Hilbert Hf de $f \in \mathcal{H}_s$ est

$$Hf = -\frac{1}{\pi}f * \text{Im}\tilde{K}. \quad (2.35)$$

Lemme 12 Si $f \in \mathcal{H}_s$, on a

$$CB(f)_+ = \frac{1}{2\pi}f * \tilde{K} = \frac{1}{2\pi}f * \text{Re}\tilde{K} + i\frac{1}{2\pi}f * \text{Im}\tilde{K} = \frac{1}{2}f - \frac{i}{2}Hf.$$

Preuve : Par définition de \tilde{K} et d'après la remarque précédente, on a $CB(f)_+ = \frac{1}{2\pi}f * \tilde{K}$. De plus, pour $f \in \mathcal{H}_s$, on a d'après [34](4.6) p.168

$$f = \frac{1}{\pi}f * \text{Re}\tilde{K}.$$

En effet, dans ce cas, la condition $\text{supp}\mathbf{F}[f] \subseteq -C^* \cup C^*$ énoncée dans [34] (4.6), p.168, est toujours vraie puisque $-C^* \cup C^* =]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$.

c.q.f.d.

Remarque : En notant $C =]0, +\infty[$, on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et pour la fonction caractéristique χ_C de C :

1. $\overline{\mathbf{F}[\chi_C]} = \mathbf{F}[\chi_{-C}]$
2. $\text{Re}\tilde{K} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{F}[\chi_C] + \overline{\mathbf{F}[\chi_C]}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbf{F}[\chi_C + \chi_{-C}]$
3. $\text{Im}\tilde{K} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{i}(\mathbf{F}[\chi_C] - \overline{\mathbf{F}[\chi_C]}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{i}\mathbf{F}[\chi_C - \chi_{-C}]$
4. $\mathbf{F}[Hf] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i}\mathbf{F}[f * \mathbf{F}[\chi_C - \chi_{-C}]] = \frac{1}{i}\mathbf{F}[f](\chi_C - \chi_{-C}) = -i(\chi_C - \chi_{-C})\mathbf{F}[f]$

On rappelle la notation T^\vee pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ introduite en (1.7). On dit que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est paire si $T^\vee = T$, et impaire si $T^\vee = -T$. Cette définition étend la notion usuelle de parité d'une fonction.

Lemme 13 Pour $f \in \mathcal{H}_s$, on a $\|Hf\|_{\mathcal{H}_s} = \|f\|_{\mathcal{H}_s}$

Preuve : D'après la remarque précédente, on a

$$\mathbf{F}^{-1}[Hf] = \mathbf{F}[Hf]^\vee = [i(\chi_C - \chi_{-C})]\mathbf{F}[f]^\vee = i(\chi_C - \chi_{-C})\mathbf{F}^{-1}[f]$$

d'où

$$\|Hf\|_{\mathcal{H}_s} = \|\mathbf{F}^{-1}[Hf]\|_{L^2_s} = \|i(\chi_C - \chi_{-C})\mathbf{F}^{-1}[f]\|_{L^2_s} = \|\mathbf{F}^{-1}[f]\|_{L^2_s} = \|f\|_{\mathcal{H}_s}$$

c.q.f.d.

Lemme 14 Soit $f \in \mathcal{H}_s$, alors

1. f est paire si et seulement si Hf est impaire
2. f est impaire si et seulement si Hf est paire

Preuve : Comme \mathbf{F} conserve la parité, il suffit de montrer que

$$\mathbf{F}[f] \text{ est paire (resp. impaire)} \iff \mathbf{F}[Hf] \text{ est impaire (resp. paire),}$$

ce qui immédiat d'après la remarque précédente puisque $\chi_C - \chi_{-C}$ est impaire.

c.q.f.d.

Corollaire 1 Pour $f \in \mathcal{H}_s$, on a

$$CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee = \begin{cases} f & \text{si } f \text{ est impaire} \\ -iHf & \text{si } f \text{ est paire} \end{cases}$$

Preuve : D'après le lemme 12, on a

$$CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee = \frac{1}{2}f - i\frac{1}{2}Hf - \left(\frac{1}{2}f^\vee - \frac{i}{2}(Hf)^\vee \right)$$

d'où le résultat d'après le lemme précédent.

c.q.f.d.

2.5.4 Les espaces $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$

Définition 11 Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ comme l'espace des fonctions $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ telles que

$$\|a\|_{*,s}^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^s d\lambda < +\infty$$

où $a(i\lambda) := \mathbf{F}^{-1}[a_+](\lambda)$.

On verra dans la section 2.7 qu'on pourra légèrement simplifier cette définition.

Lemme 15 $\|\cdot\|_{*,s}$ est une norme sur $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ associée au produit scalaire

$$\langle a, b \rangle_{*,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} (a(i\lambda) - a(-i\lambda)) \overline{(b(i\lambda) - b(-i\lambda))} (1 + \lambda^2)^s d\lambda.$$

Preuve : Le point non trivial est de montrer que $\|a\|_{*,s} = 0$ implique $a = 0$. Supposons donc que

$$0 = \|a\|_{*,s}^2 = \int_{\mathbb{R}} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^s d\lambda$$

alors

$$a(i\lambda) - a(-i\lambda) = 0 \quad p.p.$$

Comme $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, le support de $\mathbf{F}^{-1}[a_+]$ est contenu dans $[0, +\infty[$ d'après le théorème 8. Donc $\mathbf{F}^{-1}[a_+]^\vee$ a un support contenu dans $] -\infty, 0]$. Ainsi,

$$0 = a(i\lambda) - a(-i\lambda) = \mathbf{F}^{-1}[a_+](\lambda) - \mathbf{F}^{-1}[a_+]^\vee(\lambda)$$

implique que

$$\mathbf{F}^{-1}[a_+] = 0 \quad p.p.,$$

c'est-à-dire $a_+ = 0$ car \mathbf{F} est une isométrie de L_s^2 sur \mathcal{H}_s . D'où $a = 0$, car $\|a\|_{H^{(s)}} = \|a_+\|_{\mathcal{H}_s} = 0$.

c.q.f.d.

On va montrer que $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ est isomorphe à l'espace $(L_s^2)^{impaire}$ des fonctions impaires dans L_s^2 . Pour cela on considère les applications suivantes :

$$\psi = CB \circ \mathbf{F} : (L_s^2)^{impaire} \longrightarrow H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) \quad (2.36)$$

$$g \longmapsto CB(\mathbf{F}[g]) \quad (2.37)$$

$$\varphi = P_{av} \circ \mathbf{F}^{-1} \circ BdV : H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) \longrightarrow (L_s^2)^{impaire} \quad (2.38)$$

$$a \longmapsto a(i\lambda) - a(-i\lambda) \quad (2.39)$$

où $P_{av}h = h - h^\vee$ pour $h \in L_s^2$, et $a(i\lambda) = \mathbf{F}^{-1}[a_+](\lambda)$.

Proposition 2 On a $\psi \left((L_s^2)^{impaire} \right) \subseteq H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et $\varphi \circ \psi = id_{(L_s^2)^{impaire}}$.

Preuve : Si $g \in (L_s^2)^{impaire}$, alors

$$\begin{aligned} P_{av} \left(\mathbf{F}^{-1}[\psi(g)_+] \right) (\lambda) &= \mathbf{F}^{-1}[\psi(g)_+(\lambda)] - \mathbf{F}^{-1}[\psi(g)_+(-\lambda)] \\ &= \mathbf{F}^{-1}[\psi(g)_+ - \psi(g)_+^\vee](\lambda) \\ &= \mathbf{F}^{-1} \left[CB(\mathbf{F}[g])_+ - CB(\mathbf{F}[g])_+^\vee \right] (\lambda) \end{aligned}$$

Or d'après le corollaire précédent, $CB(\mathbf{F}[g])_+ - CB(\mathbf{F}[g])_+^\vee = \mathbf{F}[g]$ car g est impaire, d'où

$$P_{av} \left(\mathbf{F}^{-1}[\psi(g)_+] \right) (\lambda) = g(\lambda).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(g)(i\lambda) - \psi(g)(-i\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^s d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} |P_{av}(\mathbf{F}^{-1}[\psi(g)_+])(\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^s d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^s d\lambda < +\infty. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Donc, $\psi(g) \in H_*^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)$ et le calcul précédent montre que $\varphi \circ \psi(g) = g$.

c.q.f.d.

Pour montrer que $\psi \circ \varphi = id_{H_*^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)}$, on aura besoin du théorème suivant.

Théorème 9 *Soit a une fonction définie sur $\{\text{Re}\lambda < 0\}$, alors $a \in H^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)$ si et seulement si a possède la représentation de Cauchy-Bochner*

$$CB(a_+)(\sigma + i\lambda) = \frac{1}{2\pi} (a_+(\lambda'), K(\sigma + i\lambda - i\lambda')) = \begin{cases} a(\sigma + i\lambda) & \text{si } \sigma < 0 \\ 0 & \text{si } \sigma > 0 \end{cases}$$

Preuve : Voir [34] p.174.

c.q.f.d.

Proposition 3 *On a $\psi \circ \varphi = id_{H_*^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)}$*

Preuve : Si $f \in \mathcal{H}_s$, alors

$$(\mathbf{F} \circ P_{av} \circ \mathbf{F}^{-1})(f) = \mathbf{F} [\mathbf{F}^{-1}[f] - \mathbf{F}^{-1}[f]^\vee] = f - f^\vee$$

donc, pour $a \in H_*^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)$,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(a) &= (CB \circ \mathbf{F} \circ P_{av} \circ \mathbf{F}^{-1} \circ BdV)(a) \\ &= CB \circ (\mathbf{F} \circ P_{av} \circ \mathbf{F}^{-1})(a_+) \\ &= CB(a_+) - CB(a_+^\vee). \end{aligned}$$

Maintenant, d'après le théorème précédent, $CB(a_+) = a$ sur $\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}\lambda < 0\}$ et pour $\sigma < 0$,

$$\begin{aligned} CB(a_+^\vee)(\sigma + i\lambda) &= \frac{1}{2\pi} (a_+^\vee(\lambda'), K(\sigma + i\lambda - i\lambda')) \\ &= \frac{1}{2\pi} (a_+(-\lambda'), K(\sigma + i\lambda - i\lambda')) \\ &= \frac{1}{2\pi} (a_+(\lambda'), K(\sigma + i\lambda + i\lambda')) \\ &= -\frac{1}{2\pi} (a_+(\lambda'), K(-\sigma - i\lambda - i\lambda')) \\ &= -CB(a_+)(-\sigma - i\lambda) \\ &= 0 \quad (\text{car } -\sigma > 0) \end{aligned}$$

d'où $(\psi \circ \varphi)(a) = a$.

c.q.f.d.

Théorème 10 $(H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_{*,s})$ est un espace de Hilbert isomorphe isométrique à $(L_s^2)^{\text{impaire}}$.

Preuve : la fonction $\varphi = P_{av} \circ \mathbf{F}^{-1} \circ BdV$ est linéaire et les deux propositions précédentes prouvent que φ est une bijection. De plus, par construction et d'après 2.40, on a

$$\|\varphi(a)\|_{L_s^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^s d\lambda = \|a\|_{*,s}^2,$$

d'où φ est un isomorphisme isométrique.

c.q.f.d.

2.5.5 L'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$

On va maintenant faire le lien avec les sections précédentes. Pour cela, on pose

$$s(m) = 1 - \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}.$$

Lemme 16 Les normes $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}, |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda)}$ et $\|\cdot\|_{L_{s(m)}^2}$ sont équivalentes. En particulier, $L^2(\mathbb{R}, |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda)$ et $L_{s(m)}^2$ sont égaux en tant qu'ensembles.

Preuve : La fonction $\lambda \mapsto \lambda c(i\lambda)$ est une fonction méromorphe en $\lambda \in \mathbb{C}$ mais n'a ni zéros ni pôles pour $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, d'après le lemme 2, on a $|\lambda c(i\lambda)|^2 \sim K_m (1 + \lambda^2)^{s(m)}$ pour $|\lambda| \rightarrow +\infty$ (avec $K_m > 0$), d'où le résultat.

c.q.f.d.

Définition 12 On note $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ l'espace $H_*^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ muni de la norme

$$\|a\|_*^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda$$

associée au produit scalaire

$$\langle a, b \rangle_* = \int_{-\infty}^{+\infty} (a(i\lambda) - a(-i\lambda)) \overline{(b(i\lambda) - b(-i\lambda))} |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda.$$

Remarque : $\|\cdot\|_*$ est bien une norme d'après le lemme 16 et l'équivalence $|\lambda c(i\lambda)|^2 \sim K(1+\lambda^2)^{s(m)}$.

Théorème 11 *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}, |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet\lambda)^{\text{impaire}} \\ a &\longmapsto a(i\lambda) - a(-i\lambda) \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique. Par conséquent, $(H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$ est un espace de Hilbert.

Preuve : C'est une conséquence directe du théorème 10 et du lemme 16.

c.q.f.d.

2.6 Théorème de Plancherel pour $\tilde{\mathcal{L}}$

L'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, construit dans la définition 12, est l'espace de Hilbert qui va nous permettre d'établir un théorème de type Plancherel pour la transformée hypergéométrique de Laplace modifiée.

Lemme 17 *On a $\tilde{\mathcal{L}}(C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)) \subseteq H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$.*

Preuve : Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $\operatorname{supp} f \subset [r, R]$ avec $R > r > 0$. D'après le théorème de Paley-Wiener (théorème 6), $\tilde{\mathcal{L}}f \in \widetilde{PW}_{r,R}(\mathbb{C})$ et $\|\tilde{\mathcal{L}}f\|_*^2 = \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 \delta(t) dt < +\infty$. Donc par la condition 1 de la définition 9, la fonction $\tilde{\mathcal{L}}f$ est holomorphe sur $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Il reste à montrer que $\tilde{\mathcal{L}}f \in H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. D'après la condition 1 de la définition 9, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que pour $\sigma < 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$|\tilde{\mathcal{L}}f(\sigma + i\lambda)| \leq C_N(1 + |\sigma + i\lambda|)^{-N} e^{\sigma r} \leq C_N(1 + |\sigma + i\lambda|)^{-N}$$

Or, on a

$$(1 + |\sigma + i\lambda|)^2 \geq 1 + |\sigma + i\lambda|^2 = 1 + \sigma^2 + \lambda^2 \geq 1 + \lambda^2$$

donc

$$|\tilde{\mathcal{L}}f(\sigma + i\lambda)| \leq C_N(1 + \lambda^2)^{-\frac{N}{2}},$$

d'où,

$$\sup_{\sigma < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\mathcal{L}}(\sigma + i\lambda)|^2 (1 + \lambda^2)^{s(m)} d\lambda \leq C_N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \lambda^2)^{s(m)}}{(1 + \lambda^2)^N} d\lambda = C_N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \lambda^2)^{N-s(m)}} d\lambda < +\infty$$

si $N \geq 1 + s(m)$.

c.q.f.d.

Lemme 18 Dans $(H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$, on a $\tilde{\mathcal{L}}(C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*))^\perp = \{0\}$.

Preuve : Soit $a \in H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ tel que pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle \tilde{\mathcal{L}}f, a \rangle_* = 0$.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{L}}f, a \rangle_* &= \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\mathcal{L}}f(i\lambda) - \tilde{\mathcal{L}}f(-i\lambda)) \overline{(a(i\lambda) - a(-i\lambda))} |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(i\lambda) \overline{(a(i\lambda) - a(-i\lambda))} \lambda d^\bullet \lambda \quad \text{d'après (2.28)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(i\lambda) \overline{(a(i\lambda) - a(-i\lambda))} \lambda |c(i\lambda)|^2 \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2} \end{aligned}$$

Si on note $A(\lambda) = \overline{(a(i\lambda) - a(-i\lambda))} \lambda |c(i\lambda)|^2$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} |A(\lambda)|^2 \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2} = \|a\|_* < +\infty.$$

On a donc $\langle \tilde{\mathcal{L}}f, a \rangle_* = \langle \mathcal{F}f, A \rangle$ avec $A \in L^2(\mathbb{R}, \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2})^{\text{paire}}$, et donc pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle \mathcal{F}f, A \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$A \in (\operatorname{Im}\mathcal{F})^\perp = \left(L^2\left(\mathbb{R}, \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2}\right)^{\text{paire}} \right)^\perp = \{0\}.$$

En particulier, $\|a\|_* = 0$, et donc $a = 0$.

c.q.f.d.

Théorème 12 (Théorème de Plancherel) $\tilde{\mathcal{L}}$ s'étend en une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ sur $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt), \quad \|\tilde{\mathcal{L}}f\|_* = \|f\|_2.$$

Preuve : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$, alors il existe une suite (f_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $f_n \xrightarrow{L^2} f$. On a alors d'après le théorème 6

$$\|\tilde{\mathcal{L}}f_n - \tilde{\mathcal{L}}f_m\|_* = \|f_n - f_m\|_2 \longrightarrow 0,$$

donc $(\tilde{\mathcal{L}}f_n)$ est une suite de Cauchy dans $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. Comme $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ est complet, il existe $g \in H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ telle que $\tilde{\mathcal{L}}f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} g$. On pose alors $g = \tilde{\mathcal{L}}f$, et on a

$$\|\tilde{\mathcal{L}}f\|_* = \|g\|_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\mathcal{L}}f_n\|_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$$

donc $\tilde{\mathcal{L}}$ s'étend à une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ à valeurs dans $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. De plus, d'après le lemme 18, $\tilde{\mathcal{L}}$ est surjective.

c.q.f.d.

Le théorème de Plancherel pour $\tilde{\mathcal{L}}$ a été démontré par Stein et Wainger (voir [28]) dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $m = (1, 0)$, mais la définition de l'espace $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ y était différente. En fait, la définition utilisée par Stein et Wainger est envisageable uniquement dans le cas $m_\alpha + m_{2\alpha} \leq 2$, c'est-à-dire dans le cas où la densité $|\lambda c(\lambda)|^2$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive. C'est en effet dans ce cas seulement que la valeur au bord $a(i\lambda)$ d'une fonction dans $H^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} . Nous allons montrer maintenant que dans ce cas particulier, les deux définitions coïncident, et donc qu'on obtient bien le même espace. Dans tout le reste de cette section, on supposera que $m_\alpha + m_{2\alpha} \leq 2$.

Rappelons tout d'abord la définition utilisée par Stein et Wainger (voir [28]), que l'on étend à tout cas $m = (m_\alpha, m_{2\alpha})$ avec $m_\alpha + m_{2\alpha} \leq 2$:

Définition 13 *L'espace $H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0)$ est l'ensemble des fonctions $a \in H^2(\text{Re}\lambda < 0)$ telles que*

$$\|a\|_*^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda < +\infty.$$

On remarque que la norme utilisée est la même, donc $(H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$ est bien un espace normé. Le théorème suivant a été démontré dans [28], p.563, dans le cas $m = (1, 0)$. La preuve s'étend à tout m avec $0 \leq m_\alpha + m_{2\alpha} \leq 2$.

Théorème 13 *$(H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve : Puisque $m_\alpha + m_{2\alpha} \leq 2$, on a d'après le lemme 2, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda c(i\lambda)| \sim K_m(1 + \lambda^2)^{s(m)} \geq K_m > 0$, donc

$$\begin{aligned} \|a\|_*^2 &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda = 2\|a\|_{H^2(\text{Re}\lambda < 0)}^2. \end{aligned}$$

La dernière égalité est conséquence du fait que $a \in H^2(\text{Re}\lambda < 0)$. On généralisera cette propriété à tout espace $H^{(s)}(\text{Re}\lambda < 0)$ dans le corollaire 3 de la section 2.7.

c.q.f.d.

Nous donnons une autre preuve du théorème 13 plus en adéquation avec la méthode utilisée dans la section précédente. Dans le cas $m = (1, 0)$, la propriété utilisée dans la preuve a aussi été remarquée par Stein et Wainger (voir [28], p.564).

Preuve : on note

$$\begin{array}{ccc} \varphi : H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}, |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda)^{\text{impaire}} \\ a & \longmapsto & \varphi(a) \end{array}$$

avec $\varphi(a)(\lambda) = a(i\lambda) - a(-i\lambda)$. On a bien que $\varphi(a)$ est impaire et $\|\varphi(a)\|_2^2 = \|a\|_*^2 < \infty$, donc φ est bien définie. Maintenant, soit $f \in L^2(\mathbb{R}, |\lambda c(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda)^{\text{impaire}}$. D'après le lemme 2, il existe $K > 0$ telle que $|\lambda c(i\lambda)|^2 \geq K > 0$, donc $f \in L^2(\mathbb{R})^{\text{impaire}}$.

On considère alors u l'intégrale de Poisson de f et v l'intégrale de Poisson conjuguée de f . Pour $\sigma < 0$, on a

$$\begin{aligned} u(\sigma + i\lambda) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\sigma}{\sigma^2 + (\lambda - t)^2} dt \\ v(\sigma + i\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\lambda - t}{\sigma^2 + (\lambda - t)^2} dt. \end{aligned}$$

Alors on sait que $a(\sigma + i\lambda) = u(\sigma + i\lambda) + iv(\sigma + i\lambda) \in H^2(\text{Re}\lambda < 0)$. De plus, comme f est impaire, on a

$$\begin{aligned} u(\sigma - i\lambda) &= -u(\sigma + i\lambda) \\ v(\sigma - i\lambda) &= v(\sigma + i\lambda). \end{aligned}$$

On a donc

$$a(i\lambda) - a(-i\lambda) = 2u(\sigma + i\lambda) \longrightarrow 2f(\lambda) \text{ p.p. } (\sigma \rightarrow 0),$$

c'est-à-dire, $a(i\lambda) - a(-i\lambda) = 2f(\lambda)$ p.p.

Maintenant, si on note $\tilde{a} = \frac{a}{2} \in H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0)$, alors $f = \varphi(\tilde{a})$. Donc φ est un isomorphisme unitaire, et $H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0)$ est un espace de Hilbert.

c.q.f.d.

Il reste à montrer qu'on retrouve bien le même espace $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$. Pour cela, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 19 Soit $a \in H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})^{\text{paire}}$ tel que

$$\|a - \tilde{\mathcal{L}}g\|_* < \varepsilon.$$

Preuve : Comme $a \in H_{*,SW}^2(\text{Re}\lambda < 0)$, alors $\|a\|_* < +\infty$. Or

$$\|a\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda c(i\lambda)|^2 (a(i\lambda) - a(-i\lambda)) \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2}$$

donc $\lambda |c(i\lambda)|^2 (a(i\lambda) - a(-i\lambda)) \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2}\right)^{\text{paire}}$.

Donc d'après la théorème de Plancherel pour \mathcal{F} , il existe $b \in L^2(\mathbb{R}, \delta(t)dt)^{\text{paire}}$ telle que

$$\mathcal{F}b(\lambda) = \lambda |c(i\lambda)|^2 (a(i\lambda) - a(-i\lambda))$$

et

$$\|a\|_*^2 = \|\mathcal{F}b\|_2^2 = \|b\|_2^2.$$

Comme $b \in L^2(\mathbb{R}, \delta(t)dt)^{paire}$, il existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})^{paire}$ telle que

$$\|b - g\|_2 < \varepsilon.$$

D'où

$$\|\mathcal{F}b - \mathcal{F}g\|_2 = \|b - g\|_2 < \varepsilon.$$

Or, d'après (2.28),

$$\mathcal{F}g(i\lambda) = \lambda|c(i\lambda)|^2 \left(\tilde{\mathcal{L}}g(i\lambda) - \tilde{\mathcal{L}}g(-i\lambda) \right),$$

donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}b - \mathcal{F}g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| (a(i\lambda) - \tilde{\mathcal{L}}g(i\lambda) - a(-i\lambda) + \tilde{\mathcal{L}}g(-i\lambda)) \lambda|c(i\lambda)|^2 \right|^2 \frac{d^\bullet \lambda}{|c(i\lambda)|^2} \\ &= \|a - \tilde{\mathcal{L}}g\|_*^2 \end{aligned}$$

donc

$$\|a - \tilde{\mathcal{L}}g\|_* < \varepsilon.$$

c.q.f.d.

Théorème 14 On a $(H_{*,SW}^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*) = (H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$.

Preuve : Rappelons qu'en tant qu'ensemble, on a

$$H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$$

avec $s(m) = 1 - \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}$. Or $m_\alpha + m_{2\alpha} \leq 2$, donc $s(m) \leq 0$. D'où, d'après le lemme 8,

$$H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0) \subseteq H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$$

c'est-à-dire

$$H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) \subseteq H_{*,SW}^2(\operatorname{Re}\lambda < 0). \quad (2.41)$$

De plus, $\tilde{\mathcal{L}}(C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*))$ est dense dans $H_{*,SW}^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ (lemme 19) et dans $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ (lemme 18). Ainsi, d'après (2.41) et comme les espaces $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et $H_{*,SW}^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ sont complets, on a

$$H_{*,SW}^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0).$$

c.q.f.d.

2.7 Propriétés complémentaires de l'espace $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$

Dans cette section, on montre que $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ en tant qu'ensembles et que les normes $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_{H^{(s(m))}}$ sont en fait équivalentes. Cela permet d'avoir une description simplifiée de $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. On commence avec quelques propriétés complémentaires des espaces \mathcal{H}_s et $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$.

Lemme 20 *Pour tout $f \in \mathcal{H}_s$, on a $H^2 f = -f$.*

Preuve : Par la remarque p.30, si $C =]0, +\infty[$, on a

$$\mathbf{F}[Hf] = -i(\chi_C - \chi_{-C})\mathbf{F}[f]$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[H^2 f] &= -i(\chi_C - \chi_{-C})\mathbf{F}[Hf] \\ &= (-i)^2(\chi_C - \chi_{-C})^2\mathbf{F}[f] \\ &= -\mathbf{F}[f] = \mathbf{F}[-f] \end{aligned}$$

car $(\chi_C - \chi_{-C})^2 = \chi_C^2 + \chi_{-C}^2 = 1$. Ainsi, comme \mathbf{F} est injective sur \mathcal{H}_s , on obtient $H^2 f = -f$.

c.q.f.d.

Proposition 4 *Pour tout $f \in \mathcal{H}_s$, on a*

$$\|CB(f)_+ + CB(f)_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s} = \|CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s}.$$

Preuve : D'après les lemmes 12 et 14, on a

$$\begin{aligned} CB(f)_+ + CB(f)_+^\vee &= \begin{cases} f & \text{si } f \text{ est paire} \\ -iHf & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases} \\ CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee &= \begin{cases} f & \text{si } f \text{ est impaire} \\ -iHf & \text{si } f \text{ est paire} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{H}_s$, on a d'après le lemme 20

$$CB(f)_+ + CB(f)_+^\vee = -iH(CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee),$$

d'où, d'après le lemme 13,

$$\|CB(f)_+ + CB(f)_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s} = \|CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s}.$$

c.q.f.d.

Lemme 21 *Pour tout $f \in \mathcal{H}_s$, on a $\|f^\vee\|_{\mathcal{H}_s} = \|f\|_{\mathcal{H}_s}$.*

Preuve : Si $f \in \mathcal{H}_s$, alors $f = \mathbf{F}[g]$ avec $g \in L_s^2$ et donc $f^\vee = \mathbf{F}[g^\vee]$. D'où

$$\|f^\vee\|_{\mathcal{H}_s} = \|g^\vee\|_{L_s^2} = \|g\|_{L_s^2} = \|f\|_{\mathcal{H}_s}.$$

c.q.f.d.

Si $f \in \mathcal{H}_s$ avec $f = \mathbf{F}[g]$, alors par définition, on a $\|f\|_{\mathcal{H}_s} = \|g\|_{L_s^2}$, donc la norme sur \mathcal{H}_s est associée à un produit scalaire (qui dérive du produit scalaire sur L_s^2 via la transformée de Fourier inverse \mathbf{F}^{-1}). Ainsi, pour $f_1, f_2 \in \mathcal{H}_s$,

$$\|f_1 \pm f_2\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \|f_1\|_{\mathcal{H}_s}^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}_s} + \|f_2\|_{\mathcal{H}_s}^2$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{H}_s}^2 &\iff \operatorname{Re}\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}_s} = 0 \\ &\iff \|f_1 \pm f_2\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \|f_1\|_{\mathcal{H}_s}^2 + \|f_2\|_{\mathcal{H}_s}^2. \end{aligned}$$

Corollaire 2 *Pour tout $f \in \mathcal{H}_s$,*

$$\|CB(f)_+ + CB(f)_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \|CB(f)_+ - CB(f)_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s}^2 = 2\|CB(f)_+\|_{\mathcal{H}_s}^2.$$

Preuve : Conséquence immédiate de la proposition 4 et du lemme 21.

c.q.f.d.

Théorème 15 *Pour tout $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, on a*

$$\|a_+ - a_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \|a_+ + a_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s}^2 = 2\|a_+\|_{\mathcal{H}_s}^2.$$

Preuve : D'après le théorème 9, si $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, on a $a = CB(a_+)$ et donc $a_+ = CB(a_+)_+$. D'où le résultat d'après le corollaire 2.

c.q.f.d.

Soit maintenant $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. Alors d'après le théorème 15, on a

$$\begin{aligned}
\|a\|_{*,s} &= \|\mathbf{F}^{-1}[a_+] - \mathbf{F}^{-1}[a_+]^\vee\|_{L_s^2} \\
&= \|\mathbf{F}^{-1}[a_+ - a_+^\vee]\|_{L_s^2} \\
&= \|a_+ - a_+^\vee\|_{\mathcal{H}_s} \\
&= \sqrt{2}\|a_+\|_{\mathcal{H}_s} \\
&= \sqrt{2}\|a\|_{H^{(s)}}
\end{aligned}$$

d'où $\|a\|_{*,s} < +\infty$ si et seulement si $\|a\|_{H^{(s)}} < +\infty$. Ceci nous permet d'obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 3 *En tant qu'ensembles, on a $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et pour tout $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, on a*

$$\|a\|_{*,s}^2 = 2\|a\|_{H^{(s)}}^2.$$

Théorème 16 *$H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ en tant qu'ensembles. De plus, $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_{H^{(s(m))}}$ sont équivalentes.*

Preuve : D'après la définition de $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et le corollaire 3, on a, en tant qu'ensembles

$$H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H_*^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0).$$

De plus, toujours par le corollaire 3, $\|\cdot\|_*$ est équivalente à $\|\cdot\|_{*,s} = \sqrt{2}\|\cdot\|_{H^{(s(m))}}$.

c.q.f.d.

Le théorème 16 nous donne la description simplifiée de $H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ suivante :

Corollaire 4 *$H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ est l'espace vectoriel $H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ muni de la norme*

$$\|a\|_*^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 |\lambda c(i\lambda)|^2 d\bullet\lambda.$$

2.8 $H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ en tant qu'espace de Hilbert de fonctions holomorphes

On rappelle ici la définition d'un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur un domaine D de \mathbb{C} ainsi qu'une caractérisation de ces espaces qui nous sera utile dans cette section. On renvoie à [8] pour plus d'informations dans le cas général où $D \subseteq \mathbb{C}^n$.

On munit l'espace $\mathcal{O}(D)$ des fonctions holomorphes sur D de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Définition 14 *Un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur D est un sous-espace \mathcal{H} de $\mathcal{O}(D)$ muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que l'inclusion $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{O}(D)$ est continue.*

Lemme 22 *Soit \mathcal{H} un sous-espace de $\mathcal{O}(D)$ muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que, pour tout compact $Q \subseteq D$, il existe $M = M(Q) > 0$ telle que*

$$\forall f \in \mathcal{H}, \forall z \in Q, |f(z)| \leq M\|f\|.$$

Alors \mathcal{H} est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur D .

Preuve : Soit (f_n) une suite dans \mathcal{H} convergeant vers $f \in \mathcal{H}$, et soit Q un compact. Par hypothèse, il existe $M = M(Q) > 0$ telle que

$$\forall z \in Q, |f_n(z) - f(z)| \leq M\|f - f_n\|.$$

Donc, on obtient

$$\sup_{z \in Q} |f(z) - f_n(z)| \leq M\|f - f_n\|$$

et (f_n) converge vers f dans $\mathcal{O}(D)$, c'est-à-dire $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{O}(D)$ est continue.

c.q.f.d.

Dans cette section, nous allons montrer que $(H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$ est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes en utilisant le lemme 22. Pour cela, nous aurons besoin de quelques propriétés supplémentaires des espaces \mathcal{H}_s et $H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$.

On a vu dans le théorème 9 que pour $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, on a la représentation de Cauchy-Bochner

$$a(\sigma + i\lambda) = CB(a_+)(\sigma + i\lambda) = \frac{1}{2\pi}(a_+(\lambda'), K(\sigma + i\lambda - i\lambda'))$$

pour $\sigma < 0$. Maintenant, d'après [34], (3.4), p. 166, on a pour $\sigma < 0$

$$|CB(a_+)(\sigma + i\lambda)| \leq C_s \|a_+\|_{\mathcal{H}_s} \frac{1 + |\sigma|^s}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

où C_s est une constante dépendant de s . Par conséquent, pour $a \in H^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ et $\sigma < 0$, on a

$$|a(\sigma + i\lambda)| \leq C_s \|a\|_{H^{(s)}} \frac{1 + |\sigma|^s}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.42)$$

Ainsi, on obtient le théorème suivant :

Théorème 17 *Soit $a \in H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, alors il existe une constante $C'_s > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\sigma < 0$, on a*

$$|a(\sigma + i\lambda)| \leq C'_s \frac{1 + |\sigma|^s}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \|a\|_{*,s}.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de (2.42) et du corollaire 3.

c.q.f.d.

Corollaire 5 $(H_*^{(s)}(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_{*,s})$ est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur $\{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

En considérant l'isomorphisme entre $(H_*^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_{*,s})$ et $(H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$, on obtient

Théorème 18 Soit $a \in H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, alors il existe une constante $C_{s(m)} > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $\sigma < 0$,

$$|a(\sigma + i\lambda)| \leq C_{s(m)} \frac{1 + |\sigma|^{s(m)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \|a\|_*.$$

En particulier, $(H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0), \|\cdot\|_*)$ est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes.

Corollaire 6 Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $\sigma < 0$,

$$|\tilde{\mathcal{L}}f(\sigma + i\lambda)| \leq C \frac{1 + |\sigma|^{1 - \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2}}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \|f\|_2.$$

Preuve : C'est immédiat d'après l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{L}} : L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)) \rightarrow H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$.

c.q.f.d.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications de l'analyse harmonique L^2 développée dans le chapitre 2. Le premier type d'applications concerne le développement en séries de polynômes de Jacobi. Plus précisément, on considère une série de polynômes de Jacobi $P_n^{(a,b)}(x)$ avec coefficients qui sont multiples de $\tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho)$ où f est une fonction C^∞ à support compact sur \mathbb{R}_+^* (ou plus généralement $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ à support dans $]r, +\infty[$ avec $r > 0$), et μ décrit un ensemble discret. On montre que la série ainsi définie converge dans $L^2(]-1, 1[, (1-x)^a(1+x)^b dx)$ vers une fonction, notée F . Cette fonction F est holomorphe dans l'espace coupé $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. De plus, si F_+ et F_- sont les valeurs au bord de F sur l'axe réel par partie imaginaire positive, respectivement négative, alors le saut $F_+ - F_-$ sur $[1, +\infty[$ est une reparamétrisation de la fonction originale f . Ce type d'étude a été initiée par Stein et Wainger dans le cas de polynômes de Legendre (c'est-à-dire pour $m = (1, 0)$ qui correspond au cas géométrique de $SL(2, \mathbb{R})$; voir [28], théorème 4). Dans le cas $m = (n, 0)$ des résultats similaires (avec preuves différentes) peuvent être trouvés dans [33], sections 3.1 et 3.2. L'application $f \mapsto F$ obtenue est appelée transformée de Stieltjes dans [33].

Les polynômes $P_n^{(a,b)}(x)$ sont liés aux fonctions sphériques sur les espaces symétriques Riemanniens de type non compact de rang un. Dans la section 2, on rappelle les principales définitions des représentations sphériques et des fonctions sphériques dans ce contexte. Dans la section 3, on passe au cas des espaces hyperboliques réels. On a alors $G = SO_o(1, n)$, $K = SO(n)$, $U = SO(n+1)$, $H = SO_o(1, n-1)$, $G_{\mathbb{C}} = SO(1, n, \mathbb{C})$ et les quatre espaces symétriques jouant un rôle sont :

1. La "nappe supérieure" de l'hyperboloïde à deux nappes, $X_+^n = SO_o(1, n)/SO(n)$
2. La sphère $S^n = SO(n+1)/SO(n)$
3. L'hyperboloïde à une nappe $X_-^n = SO_o(1, n)/SO_o(1, n-1)$
4. L'hyperboloïde complexe $X_{\mathbb{C}}^n = SO(1, n, \mathbb{C})/SO(1, n-1, \mathbb{C})$

Chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ définit une fonction H -invariante toujours notée f sur le "future" S^0/H du point base $o = eH$ de X_-^n . La transformée hypergéométrique de Laplace de f du chapitre 2 coïncide, à une normalisation près, avec la transformée de Laplace sphérique $\mathcal{L}f$ de f . On forme alors une série de Fourier sphérique sur S^n avec coefficients déterminés par $\mathcal{L}f$. Le théorème de développement en séries de polynômes de Jacobi dit que, si f s'annule au voisinage de l'origine, alors la série de Fourier sphérique s'étend à une fonction holomorphe $SO(1, n-1, \mathbb{C})$ -

invariante définie sur l'hyperboloïde complexe coupé le long d'une sous-variété. Les valeurs au bord de F sur la coupure sont liées à la fonction originale f .

L'aspect géométrique liant ces espaces symétriques trouve son origine dans les travaux de Bros et Viano (voir [4], [5] et [6]) où l'extension holomorphe de ce qu'ils appellent "perikernels" a été considérée. Les méthodes utilisées dans ces articles (basées sur la transformée horosphérique de Radon) sont différentes des nôtres. Les propriétés de régularité de la classe de fonctions étudiée sont également différentes. Les travaux de Bros et Viano sont dans le cadre de la physique théorique, plus précisément, dans le cadre de la théorie quantique des champs sur une variété espace-temps en forme d'hyperboloïde (l'univers de De Sitter) et dans l'analyse du moment angulaire complexe dans la théorie de diffusion potentielle. On renvoie à [4], [5] et [6] pour plus d'informations et des références supplémentaires.

3.1 Développements en séries de polynômes de Jacobi

Lemme 23 Soient $R > r > 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ avec $\text{supp} f \subseteq [r, R]$, alors il existe une constante $C_{m,r,R}$ dépendant de m, r et R telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}\lambda < 0$

$$|\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda)| \leq C_{m,r,R}(1 + |\lambda|)^{\frac{m\alpha+m2\alpha}{2}-1} \|f\|_2 e^{r\text{Re}\lambda}$$

où

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \delta(t) dt.$$

Preuve : Soit $\sigma > 0$ tel que $\sigma < r$, alors d'après le lemme 3, il existe une constante c_σ telle que

$$|\Phi_\lambda(m, t)| \leq c_\sigma e^{(\text{Re}\lambda - \rho)t}$$

pour $\text{Re}\lambda < 0$ et $t \in]\sigma, +\infty[$. De plus, on a

$$|c(\lambda)|^{-1} \sim |\lambda| (1 + |\lambda|)^{\frac{m\alpha}{2} + \frac{m2\alpha}{2} - 1}.$$

Ainsi, pour $\text{Re}\lambda < 0$ et pour $t > \sigma$,

$$\left| \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} \right| \leq c_\sigma (1 + |\lambda|)^{\frac{m\alpha}{2} + \frac{m2\alpha}{2} - 1} e^{(\text{Re}\lambda - \rho)t}.$$

On a donc, pour $\text{Re}\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda)| &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \left| \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} \right| \delta(t) dt = \int_r^R |f(t)| \left| \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} \right| \delta(t) dt \\ &\leq c_\sigma \int_r^R (1 + |\lambda|)^{\frac{m\alpha+m2\alpha}{2}-1} e^{(\text{Re}\lambda - \rho)t} |f(t)| \delta(t) dt \\ &\leq C_{m,r}^{(1)} (1 + |\lambda|)^{\frac{m\alpha+m2\alpha}{2}-1} e^{r\text{Re}\lambda} \int_r^R |f(t)| \delta(t) dt \\ &\leq C_{m,r} (1 + |\lambda|)^{\frac{m\alpha+m2\alpha}{2}-1} e^{r\text{Re}\lambda} \|f\|_2 \end{aligned}$$

Remarques :

1. Puisque $\text{supp} f \subseteq [r, R]$, les conditions $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$ sont équivalentes. De plus, $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.
2. Dans le cas où $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, des estimations plus fortes sont possibles pour $\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda)$. En effet, par des calculs analogues à ceux de la preuve du lemme 4 du chapitre 2, on peut montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_{N,r,R} > 0$ telle que

$$|\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda)| \leq C_{N,r,R}(1 + |\lambda|)^{-N} e^{r\text{Re}\lambda} \|f\|_2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}\lambda < 0$.

On note \mathcal{S} le plan complexe privé de la demi-droite $[1, +\infty[$ et on note $H^2(\mathcal{S})$ l'espace des fonctions F holomorphes sur \mathcal{S} telle que

$$\sup_{y \neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx < +\infty.$$

En particulier, si $F \in H^2(\mathcal{S})$, alors $F_\pm(x) = \lim_{y \rightarrow 0, y > 0} F(x \pm iy)$ existe en norme L^2 . On peut alors poser

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_+(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |F_-(x)|^2 dx.$$

Muni du produit scalaire associé à cette norme, $H^2(\mathcal{S})$ est un espace de Hilbert. De plus, la caractérisation suivante des fonctions de $H^2(\mathcal{S})$, démontrée par Stein et Wainger (voir [28], p.561), va nous être utile par la suite.

Proposition 5 $F \in H^2(\mathcal{S})$ si, et seulement s'il existe une fonction $f \in L^2([1, +\infty[)$ telle que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u - z} du. \quad (3.1)$$

De plus, on a

$$\|F\|^2 = \int_1^{+\infty} |f(u)|^2 du.$$

Preuve : (voir [28], p.561). Si $F \in H^2(\mathcal{S})$, alors comme F est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$, on a

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad F_+(x) = F_-(x).$$

Comme F est dans l'espace de Hardy du demi-plan supérieur, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(x)}{x - z} dx = \begin{cases} F(z) & \text{si } \text{Im}z > 0 \\ 0 & \text{si } \text{Im}z < 0 \end{cases}$$

De même, F est dans l'espace de Hardy du demi-plan inférieur, donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(x)}{x-z} dx = \begin{cases} -F(z) & \text{si } \text{Im}z < 0 \\ 0 & \text{si } \text{Im}z > 0 \end{cases}$$

On peut donc écrire, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(x) - F_-(x)}{x-z} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{F_+(x) - F_-(x)}{x-z} dx.$$

Ainsi, en notant $f(x) = F_+(x) - F_-(x)$ pour $x \geq 1$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z} dx.$$

De plus, comme $F_+, F_- \in L^2(\mathbb{R})$, on a $f \in L^2([1, +\infty[)$ et donc la fonction $z \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z} dx$ est continue sur \mathcal{S} . Comme F est continue sur le même domaine \mathcal{S} , on obtient

$$\forall z \in \mathcal{S}, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z} dx.$$

Réciproquement, si $f \in L^2([1, +\infty[)$, alors l'intégrale (3.1) est dans $H^2(\mathcal{S})$ et $f(x) = F_+(x) - F_-(x)$. Ceci provient du fait que si $y \geq 0$, $F(x+iy) \mp F(x-iy)$ sont l'intégrale de Poisson et l'intégrale de Poisson conjuguée de f , et que si $y \rightarrow 0$, elles convergent vers f et iHf respectivement, où Hf dénote la transformée de Hilbert de f (voir section 1.1.4).

c.q.f.d.

Théorème 19 Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ à support compact. On considère la série

$$F(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon\mathbb{N}} d_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) P_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{(a,b)}(x), \quad -1 < x < 1$$

avec

$$d_\mu = \frac{\varepsilon i \Gamma(2\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + 1\right) (\mu + \rho)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right)} \quad (3.2)$$

et

$$\varepsilon = \begin{cases} 2 & \text{si } 2\alpha \in \Sigma \\ 1 & \text{si } 2\alpha \notin \Sigma \end{cases}. \quad (3.3)$$

Alors $F \in (L^2(]-1, 1[), (1-x)^a(1+x)^b dx)$ et F s'étend en une fonction de $H^2(\mathcal{S})$, notée également F , telle que

$$\|F\|_{H^2(\mathcal{S})}^2 = \int_1^{+\infty} |f^\natural(x)|^2 dx$$

où $f^\natural(x) = f\left(\frac{1}{\varepsilon} \text{argch}x\right)$ pour $x > 1$. De plus, F est unique et $f^\natural = F_+ - F_-$.

Preuve : Montrons tout d'abord que la série définissant F converge dans $(L^2([-1, 1]), (1-x)^a(1+x)^b dx)$. Pour cela, on va distinguer deux cas. Supposons que $2\alpha \in \Sigma$. Dans ce cas, on a

$$a = \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} - 1}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{m_{2\alpha} - 1}{2}$$

et en utilisant [30], p.68, on obtient

$$\begin{aligned} \|P_n^{(a,b)}\|_2^2 &= \int_{-1}^1 |P_n^{(a,b)}(x)|^2 (1-x)^a (1+x)^b dx \\ &= \frac{2^\rho}{\mu + \rho} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_{2\alpha} + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \rho\right)} \end{aligned}$$

avec $\mu = 2n$. Ainsi, par définition de d_μ , on a

$$d_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) P_n^{(a,b)}(x) = \underbrace{\frac{i2^{\frac{\rho}{2}+1} \Gamma(2\rho)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_{2\alpha} + 1}{2}\right) (\mu + \rho)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \rho\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}}_{b_\mu} \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) \frac{P_{\frac{\mu}{2}}^{(a,b)}(x)}{\|P_{\frac{\mu}{2}}^{(a,b)}\|_2}.$$

Or, d'après [7], (1.18.4), on a

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_{2\alpha} + 1}{2}\right) (\mu + \rho)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \rho\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right)} \sim \left(\frac{\mu}{2}\right)^{2-m_\alpha-m_{2\alpha}}$$

donc, d'après le lemme 23,

$$|b_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho)|^2 \leq C_{m,r} e^{-r\mu}$$

et donc

$$\sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} |b_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho)|^2 < +\infty.$$

Ainsi, d'après la théorie de Fourier L^2 pour la transformée associée aux polynômes orthogonaux $\frac{P^{(a,b)}}{\|P^{(a,b)}\|}$, il existe $F \in (L^2([-1, 1]), (1-x)^a(1+x)^b dx)$ telle que

$$F(x) = \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} d_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) P_{\frac{\mu}{2}}^{(a,b)}(x).$$

Le raisonnement est le même dans le cas $2\alpha \notin \Sigma$, mais dans ce cas, on a

$$a = b = \frac{m_\alpha - 1}{2}$$

et donc, toujours d'après [30], p.68,

$$\|P_n^{(a,b)}\|_2^2 = \frac{2^{2\rho-1}}{\mu + \rho} \frac{\Gamma\left(\mu + \rho + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\mu + 2\rho)}$$

avec $\mu = n$. Ainsi,

$$d_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) P_n^{(a,b)}(x) = \underbrace{\frac{i2^{\rho-\frac{1}{2}} \Gamma(2\rho)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho)} \left(\frac{\Gamma(\mu + 1) (\mu + \rho)}{\Gamma(\mu + 2\rho)} \right)^{\frac{1}{2}}}_{b_\mu} \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) \frac{P_\mu^{(a,b)}(x)}{\|P_\mu^{(a,b)}\|_2}.$$

Or, d'après [7], (1.18.4),

$$\frac{\Gamma(\mu + 1)(\mu + \rho)}{\Gamma(\mu + 2\rho)} \sim \mu^{2-m_\alpha}.$$

d'où

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}} |b_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho)|^2 < +\infty$$

et on conclut de la même manière que dans le cas précédent.

On définit maintenant

$$F^\natural(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{f^\natural(u)}{u - z} du \quad (3.4)$$

où $f^\natural(x) = f\left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{argch} x\right)$ pour $x > 1$. Puisque $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ est à support compact, on a $f^\natural \in L^2([1, +\infty[)$. Donc, d'après la proposition précédente, $F^\natural \in H^2(\mathcal{S})$. On montre maintenant que pour $x > 1$, $F^\natural = F$ et $f^\natural = F_+ - F_-$. Pour cela, on utilise le développement (voir [30], p.251)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(y) P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2} \frac{(y-1)^{-a}(y+1)^{-b}}{y-x}$$

où $h_n^{(a,b)} = \|P_n^{(a,b)}\|^2$. Cette série converge uniformément si $x \in [-1, 1]$ et si y appartient à un sous-intervalle convenable de $]1, +\infty[$. À ce stade, il convient de distinguer les cas.

Si $2\alpha \in \Sigma$: On pose $y = \operatorname{ch}2t$, et donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(\operatorname{ch}2t) P_n^{(a,b)}(x) &= \frac{1}{2} \frac{(\operatorname{ch}2t - 1)^{-a}(\operatorname{ch}2t + 1)^{-b}}{\operatorname{ch}2t - x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\operatorname{sh}^2t)^{-a}(2\operatorname{ch}^2t)^{-b}}{\operatorname{ch}2t - x} \\ &= 2^{-(a+b+1)} \frac{(\operatorname{sh}t)^{-2a}(\operatorname{cht})^{-2b}}{\operatorname{ch}2t - x} \end{aligned}$$

De plus, en posant $u = \operatorname{ch}2t$ dans l'intégrale définissant F , on obtient

$$F^\natural(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f^\natural(\operatorname{ch}2t)}{\operatorname{ch}2t - x} \operatorname{sh}2t dt = \frac{2}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\operatorname{ch}2t - x} \operatorname{sh}t \operatorname{cht} dt.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned} F^\natural(x) &= \frac{2}{\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(\operatorname{ch}2t) P_n^{(a,b)}(x) \right) 2^{a+b+1} (\operatorname{sh}t)^{2a+1} (\operatorname{cht})^{2b+1} dt \\ &= \frac{2^{a+b+2}}{\pi i} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \frac{Q_n^{(a,b)}(\operatorname{ch}2t)}{h_n^{(a,b)}} (\operatorname{sh}t)^{2a+1} (\operatorname{cht})^{2b+1} dt \right) P_n^{(a,b)}(x). \end{aligned}$$

L'intervertion de la somme et de l'intégrale vient du fait que la série converge uniformément et que f est à support compact. Or dans ce cas, $a = \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} - 1}{2}$, $b = \frac{m_{2\alpha} - 1}{2}$ et pour $\mu = 2n$,

$$\frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(\text{ch}2t) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) (-\mu - \rho)}{2^{\frac{m_\alpha}{2}} \Gamma(\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right)} \frac{\Phi_{-\mu-\rho}(m, t)}{(-\mu - \rho)c(\mu + \rho)}.$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} F^\natural(x) &= \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} \frac{2i\Gamma(2\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) (\mu + \rho)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right)} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\Phi_{-\mu-\rho}(m, t)}{(-\mu - \rho)c(\mu + \rho)} \delta(t) dt \right) P_{\frac{\mu}{2}}^{(a,b)}(x) \\ &= \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} d_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) P_{\frac{\mu}{2}}^{(a,b)}(x). \end{aligned}$$

Si $2\alpha \notin \Sigma$: On pose $y = \text{cht}$ et dans ce cas, on a $b = a = \frac{m_\alpha - 1}{2}$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(\text{cht}) P_n^{(a,b)}(x) &= \frac{1}{2} \frac{(\text{cht} - 1)^{-a} (\text{cht} + 1)^{-b}}{\text{cht} - x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\text{ch}^2 t - 1)^{-\frac{m_\alpha - 1}{2}}}{\text{cht} - x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\text{sht})^{-m_\alpha + 1}}{\text{cht} - x} \end{aligned}$$

De plus,

$$F^\natural(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f^\natural(u)}{u - x} du = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\text{cht} - x} \text{sht} dt,$$

donc

$$F^\natural(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(\text{cht}) P_n^{(a,b)}(x) \right) (\text{sht})^{m_\alpha} dt.$$

En utilisant

$$\frac{1}{h_n^{(a,b)}} Q_n^{(a,b)}(\text{cht}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\rho) \Gamma(\mu + 1) (-\mu - \rho)}{\Gamma(\rho) \Gamma\left(\mu + \rho + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Phi_{-\mu-\rho}(m, t)}{(-\mu - \rho)c(\mu + \rho)}$$

On obtient

$$\begin{aligned} F^\natural(x) &= \sum_{\mu \in \mathbb{N}} d_\mu \left(\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\Phi_{-\mu-\rho}(m, t)}{(-\mu - \rho)c(\mu + \rho)} \delta(t) dt \right) P_\mu^{(a,b)}(x) \\ &= \sum_{\mu \in \mathbb{N}} d_\mu \tilde{\mathcal{L}}f(-\mu - \rho) P_\mu^{(a,b)}(x) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Pour étendre le théorème 19 à des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ sans support compact, on utilise le lemme suivant :

Lemme 24 *Supposons que $m_\alpha + m_{2\alpha} \geq 1$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t)dt)$ à support contenu dans $]r, +\infty[$ pour $r > 0$, et soit $f^\natural(x) = f\left(\frac{1}{\varepsilon} \text{argch}x\right)$ où ε est donné en (3.3). Alors $f^\natural \in L^2(]1, +\infty[)$.*

Preuve : Le changement de variable $x = \text{ch}(\varepsilon t)$ donne

$$\int_1^{+\infty} |f^\natural(x)|^2 dx = \varepsilon \int_0^{+\infty} |f^\natural(\text{ch}(\varepsilon t))|^2 \text{sh}(\varepsilon t) dt = \varepsilon \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 \text{sh}(\varepsilon t) dt. \quad (3.5)$$

Puisque $m_\alpha + m_{2\alpha} \geq 1$, il existe une constante $C_r > 0$ telle que $\text{sh}(\varepsilon t) \leq C_r \delta(t)$ pour tout $t \in]r, +\infty[$, d'où le résultat.

c.q.f.d.

Maintenant, dans le cas où $m_\alpha + m_{2\alpha} > 2$, on a une amélioration du théorème 19 en utilisant le corollaire 6 du chapitre 2 :

Théorème 20 *Supposons que $m_\alpha + m_{2\alpha} > 2$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \delta(t) dt)$ avec support contenu dans $]r, +\infty[$ pour $r > 0$. On considère la série*

$$F(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon \mathbb{N}} d_\mu \tilde{\mathcal{L}} f(-\mu - \rho) P_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{(a, b)}(x), \quad -1 < x < 1$$

avec

$$d_\mu = \frac{\varepsilon i \Gamma(2\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + 1\right) (\mu + \rho)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho) \Gamma\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\right)} \quad (3.6)$$

et

$$\varepsilon = \begin{cases} 2 & \text{si } 2\alpha \in \Sigma \\ 1 & \text{si } 2\alpha \notin \Sigma \end{cases}. \quad (3.7)$$

Alors $F \in (L^2(] - 1, 1[), (1 - x)^a (1 + x)^b dx)$ et F s'étend en une fonction de $H^2(\mathcal{S})$, notée également F , telle que

$$\|F\|_{H^2(\mathcal{S})}^2 = \int_1^{+\infty} |f^\natural(x)|^2 dx$$

où $f^\natural(x) = f\left(\frac{1}{\varepsilon} \text{argch } x\right)$ pour $x > 1$. De plus, F est unique et $f^\natural = F_+ - F_-$.

Preuve : La preuve est quasiment identique à celle du théorème précédent, sauf qu'on utilise directement l'estimation de $\tilde{\mathcal{L}}$ donnée dans le corollaire 6. Avec les mêmes notations que dans la preuve précédente, on obtient

$$|b_\mu \tilde{\mathcal{L}} f(-\mu - \rho)|^2 \sim \mu^{3-2(m_\alpha + m_{2\alpha})}$$

dans le cas où $m_{2\alpha} \neq 0$. La convergence de la série $\sum |b_\mu \tilde{\mathcal{L}} f(-\mu - \rho)|^2$ est donc assurée si $3 - 2(m_\alpha + m_{2\alpha}) < -1$, c'est-à-dire si $m_\alpha + m_{2\alpha} > 2$.

Dans le cas où $m_{2\alpha} = 0$, on a

$$|b_\mu \tilde{\mathcal{L}} f(-\mu - \rho)|^2 \sim \mu^{3-2m_\alpha},$$

ce qui assure la convergence de la série pour $3 - 2m_\alpha < -1$, c'est-à-dire $m_\alpha > 2$.

Le reste de la preuve est identique à la preuve précédente.

c.q.f.d.

Remarque 1 : L'application $f \mapsto F$ considérée dans les théorèmes 19 et 20 est toujours une bijection. Toutefois, l'égalité (3.5) montre qu'elle ne peut être une isométrie que dans le cas géométrique où $m = (1, 0)$ (le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ traité dans [28]) et dans le cas non-géométrique où $m = (0, 1)$.

Remarque 2 : La fonction f^{\natural} est l'obstruction à une extension holomorphe de F en une fonction entière sur \mathbb{C} . En particulier, si $\text{supp } f \subseteq]r, R[$ avec $0 < r < R \leq +\infty$, alors F s'étend de façon holomorphe au domaine plus large $\mathbb{C} \setminus [\text{ch}(\varepsilon r), \text{ch}(\varepsilon R)]$. Ce domaine n'est pas simplement connexe si $R < +\infty$.

3.2 Espaces symétriques riemanniens de type compact et leurs fonctions sphériques

La différence entre les cas $2\alpha \in \Sigma$ et $2\alpha \notin \Sigma$ dans le théorème 19 reflète la différence entre ces deux cas dans l'analyse harmonique sphérique sur les espaces symétriques Riemannien de type compact de rang un.

Dans cette section, on rappelle brièvement quelques résultats sur les représentations sphériques. On renvoie le lecteur à [13] (chapitre 5) ou [9] (chapitre 4) pour plus d'information.

Supposons que U/K est un espace symétrique Riemannien de type compact. Alors U est un groupe de Lie compact (que l'on supposera connexe) et K est un sous groupe fermé de U tel que $U_o^\theta \subseteq K \subseteq U^\theta$ pour un certain automorphisme involutif θ de U . Comme précédemment, $U^\theta = \{u \in U, \theta(u) = u\}$ et U_o^θ est la composante connexe de l'identité dans U^θ .

Soit π une représentation irréductible de dimension finie de U dans un espace vectoriel complexe V . On fixe un produit scalaire sur V pour lequel π est unitaire. On dit qu'un vecteur $v \in V$ est K -fixe, si $\pi(k)v = v$ pour tout $k \in K$. On note $V^K = \{v \in V, v \text{ est } K\text{-fixe}\}$. On dit que la représentation π est K -sphérique si $V^K \neq \{0\}$. Dans ce cas, on peut montrer que $\dim V^K = 1$. Le théorème de Cartan-Helgason paramétrise les classes de représentations irréductibles K -sphériques par les plus haut poids restreints. Pour faire cette construction, prenons \mathfrak{u} l'algèbre de Lie de U et soit $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sa complexification. Soit $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ tel que $U \subseteq G_{\mathbb{C}}$. On considère la décomposition $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_*$ en sous espaces propres de θ . L'involution θ s'étend par \mathbb{C} -linéarité à $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ et s'élève en un automorphisme involutif de $G_{\mathbb{C}}$, toujours noté θ . Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} = i\mathfrak{p}_*$. Le sous groupe connexe G de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie \mathfrak{g} est non compact et G/K est un espace symétrique Riemannien de type non compact d'involution de Cartan θ . De plus, $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Soit Σ le système de racines (restreintes) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ avec système de racines positives Σ^+ . On choisit une sous algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ contenant \mathfrak{a} et on note $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ sa complexification. Alors $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$. Les classes d'équivalence des représentations irréductibles de dimension finie de U sont paramétrées par les plus hauts poids, d'après le théorème classique du plus haut poids. Le théorème de Cartan-Helgason dit quels sont les plus hauts poids qui correspondent aux représentations sphériques.

Théorème 21 (Cartan-Helgason) *Supposons que U est simplement connexe. La forme linéaire $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ est le plus haut poids d'une représentation irréductible sphérique de dimensions finie de U*

si et seulement si

$$\mu|_{\mathfrak{t}} = 0 \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in \Sigma^+, \quad \frac{\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{N}.$$

Preuve : Voir [13], théorème 4.1 et corollaire 4.2. Voir aussi [35], p.248, pour voir que les éléments $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ caractérisés par la condition du théorème sont les plus hauts poids de représentations irréductibles de dimension finie de U .

c.q.f.d.

Les éléments μ déterminés par le théorème de Cartan-Helgason sont appelés plus hauts poids restreints des représentations sphériques de U . Leur ensemble sera noté $\Lambda^+(U/K)$. Un représentant de la classe de représentations sphériques de plus haut poids restreint μ sera notée (π_{μ}, V_{μ}) ou plus simplement π_{μ} . Les fonctions sphériques sur U/K sont les coefficients matriciels des représentations sphériques. Plus précisément, soit (π_{μ}, V_{μ}) une représentation sphérique de plus haut poids restreint μ . On fixe $u \in V_{\mu}^K$ tel que $\|u\| = 1$, alors la fonction sphérique sur U/K de paramètre spectral μ est la fonction K -invariante

$$\phi_{\mu}(u) = \langle \pi_{\mu}(u)v, v \rangle$$

pour $u \in U$.

On peut montrer que la fonction ϕ_{μ} s'étend à une fonction holomorphe $K_{\mathbb{C}}$ -invariante sur $G_{\mathbb{C}}$, que l'on notera encore ϕ_{μ} . La restriction de φ_{μ} à G donne une fonction sphérique sur G/K . Plus précisément, on a

$$(\varphi_{\mu})|_G = \psi_{\mu+\rho}$$

dans la notation de la section 3.3.3. Ces résultats peuvent être trouvés dans [13], p.540-541, ou dans [3], paragraphe 2.

Dans le cas d'un espace symétrique riemannien de type compact U/K de rang un avec U simplement connexe, et en identifiant $\alpha \equiv 1$ où $\Sigma^+ = \{\alpha\}$ ou $\Sigma^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$, on a que la restriction à $\mathfrak{a} \equiv \mathbb{R}$ d'un plus haut poids restreint μ est :

1. $\mu = n$, $n \in \mathbb{N}$, si $2\alpha \notin \Sigma^+$
2. $\mu = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, si $2\alpha \in \Sigma^+$

En mettant ensemble les formules de [13], p.543, et les calculs de la preuve du théorème 19, on obtient le résultat bien connu suivant :

Lemme 25 *On garde les notations et les hypothèses sur U/K faites ci-dessus. Pour $H = t \in i\mathfrak{a}$, les fonctions sphériques sur U/K et les fonctions sphériques sur G/K sont données par les formules suivantes :*

1. Si $2\alpha \notin \Sigma^+$, alors pour $\mu \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{\mu}(\exp H) = \psi_{\mu+\rho}(\exp H) = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\rho+\frac{1}{2})} P_{\mu}^{(a,a)}(cht)$$

$$\text{où } \rho = \frac{m_{\alpha}}{2} \text{ et } a = \rho - \frac{1}{2} = \frac{m_{\alpha}-1}{2}.$$

2. Si $2\alpha \in \Sigma^+$, alors pour $\mu \in 2\mathbb{N}$,

$$\phi_\mu(\exp H) = \psi_{\mu+\rho}(\exp H) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\rho - \frac{m_{2\alpha}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2} + \frac{1}{2}\right)} P_{\frac{\mu}{2}}^{(a,b)}(ch2t)$$

$$\text{où } \rho = \frac{m_\alpha}{2} + m_{2\alpha}, \quad a = \frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2} - \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{m_{2\alpha}}{2} - \frac{1}{2}.$$

3.3 Analyse harmonique sphérique L^2 sur les hyperboloïdes réelles

3.3.1 Espaces hyperboliques réels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On considère la \mathbb{K} -forme bilinéaire non dégénérée sur \mathbb{K}^{n+1} définie par

$$[z, w] = z_0 w_0 - z_1 w_1 - \cdots - z_n w_n$$

pour $z = (z_0, \dots, z_n)$ et $w = (w_0, \dots, w_n)$ dans \mathbb{K}^{n+1} . On note alors $O(1, n, \mathbb{K})$ le sous groupe de $GL(n+1, \mathbb{K})$ préservant $[\cdot, \cdot]$, c'est-à-dire

$$O(1, n, \mathbb{K}) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{K}), [gz, gw] = [z, w] \quad \forall z, w \in \mathbb{K}^{n+1}\}.$$

De plus, $SO(1, n, \mathbb{K}) = \{g \in O(1, n, \mathbb{K}), \det g = 1\}$ est un sous groupe ouvert de $O(1, n, \mathbb{K})$.

Remarques : Le groupe $SO(1, n, \mathbb{C})$ est un groupe de Lie connexe appelé groupe de Lorentz complexe généralisé. Le groupe $SO(1, n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes. La composante connexe de l'identité est un groupe de Lie connexe appelé groupe de Lorentz généralisé, généralement noté $SO_o(1, n)$.

Le groupe $GL(n+1, \mathbb{K})$ agit sur \mathbb{K}^{n+1} par la multiplication matricielle

$$g \cdot z := gz$$

où $z \in \mathbb{K}^{n+1}$ est considéré comme un vecteur colonne et gz dénote le produit de matrices usuel. Cette action se restreint à une action de $SO(1, n, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^{n+1} et de $SO(1, n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^{n+1} .

On note $z^0 = (0, \dots, 0, 1)$. L'orbite $SO(1, n, \mathbb{C}) \cdot z^0$ est la quadrique complexe de dimension n

$$X_{\mathbb{C}}^n = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}, [z, z] = -1\}$$

parfois appelée variété de De Sitter. Le stabilisateur de z^0 est

$$\left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in SO(1, n-1, \mathbb{C}) \right\} \cong SO(1, n-1, \mathbb{C}).$$

L'action de $SO(1, n, \mathbb{C})$ sur $X_{\mathbb{C}}^n$ est transitive et on peut identifier, en tant qu'espaces homogènes,

$$X_{\mathbb{C}}^n = SO(1, n, \mathbb{C}) / SO(1, n-1, \mathbb{C}).$$

L'orbite $SO_o(1, n) \cdot z^0$ est la quadrique réelle de dimension n

$$X_{\mathbb{R}}^n = X_{\mathbb{C}}^n \cap \mathbb{R}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, [x, x] = -1\}.$$

On a, en tant qu'espaces homogènes,

$$X_-^n = SO_0(1, n)/SO_o(1, n-1).$$

On considère maintenant le produit scalaire euclidien sur \mathbb{K}^{n+1}

$$(z, w) = z_0w_0 + z_1w_1 + \cdots + z_nw_n.$$

On rappelle que $O(n+1, \mathbb{K})$ est le sous groupe de $GL(n+1, \mathbb{K})$ préservant (\cdot, \cdot) , c'est-à-dire

$$O(n+1, \mathbb{K}) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{K}), (gz, gw) = (z, w) \quad \forall z, w \in \mathbb{K}^{n+1}\}.$$

On rappelle également que

$$SO(n+1, \mathbb{K}) = \{g \in O(n+1, \mathbb{K}), \det g = 1\}$$

est la composante connexe de l'identité dans $O(n+1, \mathbb{K})$. On notera simplement $SO(n+1)$ à la place $SO(n+1, \mathbb{K})$. Pour $z = (z_0, \cdots, z_n)$ avec $z_j = x_j + iy_j$ ($0 \leq j \leq n$), on note $\tilde{z} = (iy_0, x_1, \cdots, x_n)$ et $\tilde{z}' = (-ix_0, y_1, \cdots, y_n)$. L'ensemble

$$\{g \in GL(n+1, \mathbb{C}), [g\tilde{z}, g\tilde{w}] = [\tilde{z}, \tilde{w}] \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^{n+1}, \det g = 1\}$$

est un sous groupe de $SO(1, n, \mathbb{C})$. En effet, pour un tel g et pour tout $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$[gz, gw] = [g(\tilde{z} + i\tilde{z}'), g(\tilde{w} + i\tilde{w}')] = [z, w].$$

Ce sous groupe est isomorphe à $SO(n+1)$. On restreint à $SO(n+1) \subseteq SO(1, n, \mathbb{C})$ l'action de $SO(1, n, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^{n+1} . L'orbite $SO(n+1) \cdot z^0$ est la sphère réelle de dimensions n

$$\begin{aligned} S^n &= \{(iy_0, x_1, \cdots, x_n) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, y_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \\ &= X_{\mathbb{C}}^n \cap (i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Le stabilisateur de z^0 dans $SO(n+1)$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in SO(n) \right\} \cong SO(n).$$

Ainsi, en tant qu'espaces homogènes, on a

$$S^n = SO(n+1)/SO(n).$$

On considère maintenant le point $w^0 = (1, 0, \cdots, 0)$. L'orbite $SO_o(1, n) \cdot w^0$ est

$$X_+^n = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, [x, x] = 1, x_0 > 0\} = SO_o(1, n)/SO(n).$$

En tant qu'espaces symétriques,

1. $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ est riemannien de type compact
2. $X_+^n = SO_o(1, n)/SO(n)$ est riemannien de type non compact
3. $X_-^n = SO_o(1, n)/SO_o(1, n-1)$ est pseudo-riemannien.

Ce sont des espaces symétriques de rang un.

Remarque : On peut aussi voir X_+^n dans $X_{\mathbb{C}}^n$ en considérant l'action de $GL(n+1, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^{n+1} par multiplication. On a alors

$$X_+^n = SO_o(1, n) \cdot iz_0 = X_{\mathbb{C}}^n \cap (i\mathbb{R}^{n+1}).$$

Plus précisément, les espaces X_-^n sont des espaces symétriques non compactement causaux (NCC). En fait, ce sont les uniques espaces symétriques non compactement causaux de rang réel un.

3.3.2 Structure de X_+^n et de X_-^n

Prenons le cas de $G = SO_o(1, n)$ (voir [10], p.959-960). L'involution de Cartan est donnée par $\theta(g) = (g^{-1})^t$. On a alors $K = G^\theta = G_o^\theta \equiv SO(n)$ et donc

$$X_+^n = SO_o(1, n)/SO(n) = G/K$$

est un espace symétrique riemannien de type non compact. Maintenant, on considère l'involution τ donnée par

$$\tau(g) = JgJ$$

où

$$J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec I_n désignant la matrice identité d'ordre n . τ commute avec θ et en prenant $H = SO_o(1, n-1)$, on a :

$$X_-^n = SO_o(1, n)/SO_o(1, n-1) = G/H$$

est un espace symétrique pseudo-riemannien.

On a alors

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \left\{ X_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

et

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \text{cht} & 0 & \text{sht} \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \text{sht} & 0 & \text{cht} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

En choisissant la racine positive par

$$\alpha(X_t) = t,$$

on a alors

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v^t & 0 \\ v & 0 & -v \\ 0 & v^t & 0 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\},$$

et

$$N = \left\{ n(v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\|v\|^2 & v^t & -\frac{1}{2}\|v\|^2 \\ v & I_{n-1} & -v \\ \frac{1}{2}\|v\|^2 & v^t & 1 - \frac{1}{2}\|v\|^2 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

où $\|v\|^2 = |v_1|^2 + \dots + |v_{n-1}|^2$.

Notons que

$$m_\alpha = n - 1, \quad m_{2\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \rho = \frac{m_\alpha}{2} = \frac{n-1}{2}. \quad (3.8)$$

3.3.3 Fonctions sphériques et transformée sphérique

On renvoie à [22] ou [2] pour plus de détails sur les fonctions sphériques. On garde les notations des paragraphes précédents et on renvoie à la section 1.2 pour la structure des espaces symétriques.

Une fonction $\varphi : S^0 \rightarrow \mathbb{C}$ est H -bi-invariante si $\varphi(h_1 x h_2) = \varphi(x)$ pour tout $x \in S^0$ et tout $h_1, h_2 \in H$.

Soit $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre (commutative) des opérateurs différentiels G -invariants sur G/H . Une fonction sphérique sur G/H est une fonction continue H -bi-invariante $\varphi : S^0 \rightarrow \mathbb{C}$ qui est fonction propre commune de tous les éléments de $\mathbb{D}(G/H)$, c'est-à-dire, il existe un caractère $\chi : \mathbb{D}(G/H) \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $D\varphi = \chi(D)\varphi$, pour tout $D \in \mathbb{D}(G/H)$.

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ on définit

$$a_H(x)^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin HAN \\ e^{\lambda(\log a_H(x))} & \text{si } x \in HAN. \end{cases}$$

Soit \mathcal{E} l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ pour lesquels la fonction $h \rightarrow a_H(xh)^{\lambda-\rho}$ est intégrable sur H . Pour $\lambda \in \mathcal{E}$, la fonction φ_λ définie sur S^0 par

$$\varphi_\lambda(x) = \int_H a_H(xh)^{\lambda-\rho} dh \quad (3.9)$$

est une fonction sphérique. On peut montrer que la convergence de l'intégrale définissant $\varphi_\lambda(x)$ ne dépend que de λ et pas de x .

Dans le cas où $G/H = SO_o(1, n)/SO_o(1, n-1)$, on a pour $a_t = \exp(tT_0) \in S^0 \cap \mathfrak{a} \equiv \mathbb{R}_+$,

$$\varphi_\lambda(a_t) = c_\Omega(\lambda)(2\text{cht})^{\lambda-\rho} {}_2F_1\left(\frac{-\lambda+\rho}{2}, \frac{-\lambda+\rho+1}{2}; 1-\lambda; \text{ch}^{-2}t\right) \quad (3.10)$$

avec

$$c_\Omega(\lambda) = 2^{2\rho-1} \Gamma(\rho) \frac{\Gamma(-\lambda-\rho+1)}{\Gamma(-\lambda+1)}. \quad (3.11)$$

A une constante près, on retrouve la fonction $\tilde{c}(\lambda)$ donnée en (2.9).

Maintenant, la transformée sphérique de Laplace d'une fonction H -invariante f suffisamment régulière sur S^0/H est définie (pour une normalisation convenable de la mesure H -invariante dx sur G/H) par

$$\mathcal{L}_{NCC} f(\lambda) = \int_{S^0/H} f(x) \varphi_\lambda(x) dx = \int_{A^+} f(a) \varphi_\lambda(a) \delta(a) da. \quad (3.12)$$

De même, une fonction sphérique sur G/K est une fonction continue K -bi-invariante $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$, avec $\varphi(e) = 1$, qui est fonction propre commune de tous les éléments de $\mathbb{D}(G/K)$, c'est-à-dire, il existe un caractère $\chi : \mathbb{D}(G/K) \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $D\varphi = \chi(D)\varphi$, pour tout $D \in \mathbb{D}(G/K)$.

On peut montrer que les fonctions sphériques sur G/K sont données par

$$\psi_\lambda(a_t) = \int_K a_k(xk)^{\lambda-\rho} dk \quad (3.13)$$

pour $a_t \in A$.

De plus, dans le cas où $G/K = SO_o(1, n)/SO(n)$, on a

$$\psi_\lambda(a_t) = {}_2F_1\left(\frac{\lambda+\rho}{2}, \frac{-\lambda+\rho}{2}; \rho + \frac{1}{2}; -\text{sh}^2 t\right). \quad (3.14)$$

Maintenant, la transformée de Fourier sphérique sur G/K est définie pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G/K)$ K -invariante par

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_G f(x)\psi_\lambda(x)dx = \int_{A^+} f(a)\psi_\lambda(a)\delta(a)da \quad (3.15)$$

Supposons que U/K est un espace symétrique de type compact, avec U simplement connexe. Les fonctions sphériques sur U/K sont alors liées aux fonctions sphériques sur le dual non compact et aux polynômes de Jacobi, d'après les formules du lemme 25. Dans le cas de la sphère vue comme quotient $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, certaines précautions sont nécessaires car $U = SO(n+1)$ n'est pas simplement connexe (son revêtement universel est le groupe $\text{Spin}(n+1)$ et l'application quotient $\text{Spin}(n+1) \rightarrow SO(n+1)$ a pour noyau $\{\pm 1\}$). Cependant, on peut montrer (voir [31], chapitre 3, paragraphe 12) que pour chaque plus haut poids restreint μ donné par le lemme 25, la fonction sphérique sur $\text{Spin}(n+1)$ induit une fonction sphérique sur S^n . La décomposition $SO(n+1) = SO(n)T$ où $T = \exp(i\mathfrak{a})$ est le tore maximal du lemme 25 permet d'identifier les fonctions sphériques avec leurs restrictions au tore.

Le théorème de Paley-Wiener, la formule d'inversion et le théorème de Plancherel pour la transformée hypergéométrique de Fourier et de Laplace du chapitre 2 donnent des théorèmes correspondants pour la transformée sphérique de Fourier et de Laplace sur X_+^n et X_-^n respectivement. On écrit ici le théorème de Plancherel pour X_-^n (les autres théorèmes dans ce cas géométrique particulier sont déjà dans la littérature (voir [1])).

En comparant (2.15) et (3.10), on a

$$\varphi_\lambda(a_t) = c_\Omega(\lambda)\Phi_\lambda(m, t)$$

donc en identifiant $A^+ \equiv]0, +\infty[$, on obtient d'après (3.12),

$$\begin{aligned} i \frac{\mathcal{L}_{NCC}f(\lambda)}{\lambda c(-\lambda)} &= i c_\Omega(\lambda) \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\Phi_\lambda(m, t)}{\lambda c(-\lambda)} \delta(t) dt \\ &= c_\Omega(\lambda) \tilde{\mathcal{L}}f(\lambda) \end{aligned}$$

On rappelle également (voir section 2.5) que $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ est l'espace $H_*^{(s(m))}(\text{Re}\lambda < 0)$ muni de la norme

$$\|a\|_*^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 |\lambda c(i\lambda)|^2 d\lambda.$$

Le théorème s'écrit alors de la manière suivante :

Théorème 22 Soit $H = SO_o(1, n-1)$ et soit S^0/H le future du point base de X^n . Alors, convenablement normalisée, la transformée de Laplace sphérique réalise un isomorphisme isométrique entre l'espace $L^2(S^0/H)^H$ des fonctions H -invariantes L^2 sur S^0/H muni du produit scalaire L^2 et l'espace $H_*^2(\text{Re}\lambda < 0)$ muni du produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_*$, c'est-à-dire

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{NCC}f(\lambda)}{\lambda_C(-\lambda)C_\Omega(\lambda)} \right\|_* = \|f\|_2$$

pour toute fonction $f \in l^2(S^0/H)^H$.

3.3.4 Paramétrisation de $X_{\mathbb{C}}^n$, X_-^n et S^n

La variété de De Sitter $X_{\mathbb{C}}^n$ admet la paramétrisation globale de variables complexes $\theta \in \mathbb{C}$ et $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in X_{\mathbb{C}}^{n-1}$ donnée par

$$\begin{cases} z_j &= (ish\theta)w_j & 0 \leq j \leq n-1 \\ z_n &= \text{ch}\theta \end{cases} \quad (3.16)$$

En effet, on a alors

$$\begin{aligned} [z, z] &= [(z_0, \dots, z_{n-1}), (z_0, \dots, z_{n-1})] - \text{ch}^2\theta \\ &= -\text{sh}^2\theta[\omega, \omega] - \text{ch}^2\theta \\ &= \text{sh}^2\theta - \text{ch}^2\theta \\ &= -1. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in X_{\mathbb{C}}^n$. Alors $-1 = [z, z] = z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_n^2$. On pose $z_n = \text{ch}\theta \in \mathbb{C}$. Si $z_n = 1$, alors $z_0 = z_1 = \dots = z_{n-1} = 0$ et la paramétrisation donnée convient pour $\theta = 2\pi ki$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si $z_n \neq 1$, alors

$$z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_{n-1}^2 = z_n^2 - 1 = \text{ch}^2\theta - 1 = -(ish\theta)^2$$

et $\text{sh}\theta \neq 0$. En posant $w_j = \frac{z_j}{ish\theta}$, on obtient $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in X_{\mathbb{C}}^{n-1}$ et on a bien les relations de (3.16). Remarquons que la paramétrisation n'est pas bijective à cause de la $2\pi i$ -periodicité des fonctions $\text{ch}\theta$ et $\text{sh}\theta$.

Tout élément $z \in X_{\mathbb{C}}^n$ est donc de la forme $z = ((ish\theta)\omega, \text{ch}\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{C}$ et $\omega \in X_{\mathbb{C}}^{n-1}$.

Comme $X_{\mathbb{C}}^{n-1} = SO(1, n-1, \mathbb{C}) \cdot z_{(n)}^0$ avec $z_{(n)}^0 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{C}^n$, tout élément z de $X_{\mathbb{C}}^n$ est de la forme

$$z = ((ish\theta)kz_{(n)}^0, \text{ch}\theta) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot ((ish\theta)z_{(n)}^0, \text{ch}\theta)$$

avec $k \in SO(1, n-1, \mathbb{C})$ et $\theta \in \mathbb{C}$.

Une fonction $f : X_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est $SO(1, n-1, \mathbb{C})$ -invariante si

$$f\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z\right) = f(z)$$

pour tout $z \in X_{\mathbb{C}}^n$ et $k \in SO(1, n-1, \mathbb{C})$. D'après ce qui précède, une telle fonction dépend uniquement de $z_n = \text{ch}\theta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot ((\text{ish}\theta)z_{(n)}^0, \text{ch}\theta)\right) \\ &= f((\text{ish}\theta)z_{(n)}^0, \text{ch}\theta) \\ &= F(\text{ch}\theta) \end{aligned}$$

Cette paramétrisation de $X_{\mathbb{C}}^n$ se restreint à une paramétrisation globale de $X_{\mathbb{C}}^n$:

$$\begin{cases} x_j &= (\text{ish}\theta)\omega_j & 0 \leq j \leq n-1 \\ x_n &= \text{ch}\theta \end{cases}$$

avec $\omega \in X_+^{n-1}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Une fonction $f : X_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}$ qui est $SO_o(1, n-1)$ -invariante dépend donc seulement de $x_n = \text{ch}\theta$:

$$f(x) = F(\text{ch}\theta).$$

Supposons maintenant que $\theta = i\tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \text{sh}(i\tau) &= i \sin \tau \\ \text{ch}(i\tau) &= \cos \tau \end{aligned}$$

De plus, si $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in X_-^{n-1}$, alors

$$((i\omega_0, \dots, \omega_{n-1}), (i\omega_0, \dots, \omega_{n-1})) = -\omega_0^2 + \omega_1^2 + \dots + \omega_{n-1}^2 = 1.$$

Par restriction de la paramétrisation de $X_{\mathbb{C}}^n$, on obtient la paramétrisation de $S^n = X_{\mathbb{C}}^n \cap (i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ suivante :

$$\begin{cases} z_0 &= i(\sin \tau)i\omega_0 \\ z_j &= (\sin \tau)\omega_j & 1 \leq j \leq n-1 \\ z_n &= \cos \tau \end{cases}$$

avec $\tau \in \mathbb{R}$ et $\omega = (i\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in S^{n-1}$.

Si on considère l'identification de $SO(n+1)$ comme sous-groupe de $SO(1, n, \mathbb{C})$ donnée en section 3.3.2, et l'immersion de $SO(1, n-1, \mathbb{C})$ dans $SO(1, n, \mathbb{C})$ en tant que stabilisateur de z^0 , alors

$$SO(n+1) \cap SO(1, n-1, \mathbb{C}) \equiv SO(n) \times \{id\} \equiv SO(n).$$

Une fonction sur S^n qui est $SO(n)$ -invariante dépend alors uniquement de $z_n = \cos \tau$.

3.3.5 Extension holomorphe de séries de fonctions sphériques sur la sphère S^n

On garde les notations des sections précédentes. Une série de Fourier sphérique sur $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ est une série formelle

$$\sum_{\mu \in \Lambda^+(U/K)} a_{\mu} \psi_{\mu}(u), \quad u \in SO(n+1). \quad (3.17)$$

Quand elle converge, cette série définit une fonction $SO(n)$ -bi-invariante sur $SO(n+1)$, donc une fonction $SO(n)$ -invariante sur S^n . Par $SO(n)$ -invariance, la série est déterminée par sa restriction au tore T , et le lemme 25 donne

$$\sum_{\mu \in \Lambda^+(U/K)} a_\mu \psi_\mu(\exp H) = \Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right) \sum_{\mu \in \mathbb{N}} a_\mu \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu + \rho + \frac{1}{2})} P_\mu^{(a,a)}(\cos \tau) \quad (3.18)$$

si $H = i\tau \in i\mathfrak{a} \equiv i\mathbb{R}$.

Comme application des théorèmes 19 et 20, on étudie l'extension holomorphe de séries de Fourier sphériques de la forme (3.17) quand les coefficients a_μ sont les valeurs de la transformée de Laplace sphérique d'une fonction L^2 et H -invariante sur le futur S^0/H du point base $z^0 \in X_-^n$.

Dans le cas $m = (n-1, 0)$, les coefficients d_μ dans (3.2) deviennent

$$d_\mu = i \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu + \rho + \frac{1}{2})},$$

donc

$$d_\mu P_\mu^{(a,a)}(\cos \tau) = i \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \psi_\mu(\cos \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

D'après les formules (2.5) et (3.11), on a

$$\begin{aligned} \lambda c(-\lambda) c_\Omega &= \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\lambda \Gamma(-\lambda)}{\Gamma(-\lambda + \rho)} 2^{2\rho-1} \Gamma(\rho) \frac{\Gamma(-\lambda - \rho + 1)}{\Gamma(-\lambda + 1)} \\ &= -\Gamma(2\rho) 2^{2\rho-1} \frac{\Gamma(-\lambda - \rho + 1)}{\Gamma(-\lambda + \rho)}. \end{aligned}$$

D'où

$$d_\mu \tilde{\mathcal{L}} f(-\mu - \rho) P_\mu^{(a,a)}(\cos \tau) = \frac{1}{2^{2\rho-1} \Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(\mu + 2\rho)}{\Gamma(\mu + 1)} \mathcal{L}_{NCC} f(-\mu - \rho) \psi_\mu(\cos \tau).$$

La série des théorèmes 19 et 20 devient alors

$$\frac{1}{2^{2\rho-1} \Gamma(\rho)} \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(\mu + 2\rho)}{\Gamma(\mu + 1)} \mathcal{L}_{NCC} f(-\mu - \rho) \psi_\mu(\cos \tau) \quad (3.19)$$

avec $x = \cos \tau \in]-1, 1[$, c'est-à-dire $\tau \in]-\pi, 0[$.

On va regarder cette fonction $SO(n)$ -invariante sur S^n en utilisant la paramétrisation de S^n pour laquelle le paramètre θ de $X_{\mathbb{C}}^n$ est lié au paramètre τ par $\theta = i\tau$.

Pour $z = \text{ch}\theta \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ si et seulement si $\theta \notin \mathbb{R}_+ 2k\pi i$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On peut maintenant formuler le théorème 19 dans ce contexte :

Théorème 23 *Soit $H = SO_o(1, n-1)$ et soit S^0/H le futur du point base $z^0 \in X_-^n$. Soit $f \in L^2(S^0/H)^H$ telle que (en considérant f comme une fonction H -bi-invariante sur S^0), on ait $f|_{\mathbb{C}_{\max}^0}$ à support compact. Alors la série de Fourier sphérique*

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(\mu + 2\rho)}{\Gamma(\mu + 1)} \mathcal{L}_{NCC} f(-\mu - \rho) \psi_\mu(u), \quad u \in S^n$$

converge dans L^2 vers une fonction $F \in L^2(S^n)$.

Si on considère la sphère S^n incluse dans $X_{\mathbb{C}}^n$ par $S^n = X_{\mathbb{C}}^n \cap (i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors F s'étend en une fonction holomorphe $SO(1, n-1, \mathbb{C})$ -invariante sur le domaine $D_{\mathbb{C}}^n$ donné par

$$D_{\mathbb{C}}^n = \{z = (z_0, \dots, z_n) \in X_{\mathbb{C}}^n, z_n \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[\}$$

De plus, F possède des valeurs au bord F_+ et F_- le long de $X_{\mathbb{C}}^n = X_{\mathbb{C}}^n \cap \mathbb{R}^{n+1}$ dans le sens suivant :

$$F_{\pm}(x) = \lim_{y \rightarrow 0} F(ish(\theta \pm iy)\omega_0, \dots, ish(\theta \pm iy)\omega_{n-1}, ch(\theta \pm iy))$$

si $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_{\mathbb{C}}^n$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in X_{\mathbb{C}}^{n-1}$,

$$x_j = ish(\theta)\omega_j, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad \text{et} \quad x_n = ch\theta.$$

Alors les valeurs au bord F_{\pm} sont des fonctions $SO_o(1, n-1)$ -invariantes bien définies sur S^0/H et pour tout $x \in S^0/H$,

$$f(x) = F_+(x) - F_-(x).$$

Chapitre 4

Théorie L^2 de la transformée hypergéométrique de Laplace dans le cas complexe

4.1 La transformée Θ -hypergéométrique dans le cas complexe

Le cas complexe correspond à un triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ où \mathfrak{a} est un espace vectoriel euclidien réel, Σ est un système de racines réduit dans \mathfrak{a}^* et m est une fonction de multiplicité sur Σ telle que $m_\alpha = 2$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Chaque triplet de cette forme est géométrique et correspond à un espace symétrique riemannien de type non compact muni d'une structure complexe.

Soit Π un système fondamental de racines simples dans Σ associé à un choix de racines positives Σ^+ . A chaque sous-ensemble Θ de Π correspond une transformée hypergéométrique de Laplace appelée transformée Θ -hypergéométrique (voir [26]). Cette transformée est définie pour des fonctions ayant pour domaine de définition un cône dans \mathfrak{a} qui est naturellement associé à Θ de la manière suivante. Soit $\langle \Theta \rangle$ l'ensemble des éléments de Σ qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de Θ . Alors $\langle \Theta \rangle$ est un système de racines, plus précisément un sous-système de Σ . Le groupe de Weyl W_Θ de $\langle \Theta \rangle$ est un sous-groupe de W engendré par les réflexions $r_j := r_{\alpha_j}$ avec $\alpha_j \in \Theta$. On note $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Sigma^+$. Soit

$$\overline{\mathfrak{a}^+} = \{H \in \mathfrak{a}, \alpha(H) \geq 0, \forall \alpha \in \Sigma^+\}$$

l'adhérence de \mathfrak{a}^+ . On définit $\mathfrak{a}_\Theta = (W_\Theta \overline{\mathfrak{a}^+})^0$ où 0 désigne l'intérieur. Alors $\overline{\mathfrak{a}_\Theta}$ est un cône convexe fermé W_Θ -invariant dans \mathfrak{a} et son intérieur \mathfrak{a}_Θ est également convexe (voir [26], lemme 3.4). Remarquons que si $\Theta = \emptyset$, on a $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a}^+$ et $W_\Theta = \{id\}$, alors que si $\Theta = \Pi$, on a $\mathfrak{a}_\Pi = \mathfrak{a}$ et $W_\Pi = W$. Si $\dim \mathfrak{a} = 1$, alors le cas complexe se réduit au cas de $SL(2, \mathbb{C})$ qui a été détaillé dans l'exemple 3, p.14, 16 et 22. De plus, on remarque que dans cet exemple, on a $\Pi = \{\alpha\} = \Sigma^+$ et donc $\Theta = \emptyset$ et $\Theta = \Pi$ sont les seules possibilités. Ainsi, on a les deux transformées suivantes :

- La transformée hypergéométrique de Laplace, définie pour des fonctions f sur $\mathfrak{a}^+ \equiv \mathbb{R}_+$ par

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}^+} f(t) \Phi_\lambda(m, t) \delta(t) dt \quad \text{avec} \quad \Phi_\lambda(m, t) = \frac{e^{\lambda t}}{2\text{sht}}.$$

- La transformée hypergéométrique de Fourier, définie pour des fonctions paires f sur $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}^+} f(t)\psi_\lambda(m, t)\delta(t)dt$$

avec $\psi_\lambda(m, t) = c(\lambda)\Phi_\lambda(m, t) + c(-\lambda)\Phi_{-\lambda}(m, t)$ et $c(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Remarquons également que $\lambda c(-\lambda) = -1$, donc à une constante près on a $\tilde{\mathcal{L}}f = \mathcal{L}$.

Dans le cas complexe général, on a une famille de "fonctions base" $\{\varphi_{\Theta, \lambda}(m, H)\}$ sur \mathfrak{a}_Θ pour chaque Θ fixé. Chacune de ces familles de fonctions intervient dans la définition de la transformée Θ -hypergéométrique correspondante.

On note respectivement \mathfrak{a}^* et $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ le dual réel et le dual complexe de \mathfrak{a} . On étend $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à \mathfrak{a}^* comme dans la section 1.2.1, et à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ par \mathbb{C} -bilinearité. On utilisera la notation $\lambda_\alpha = \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ pour $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \Sigma$. Suivant les notations de [26], exemple 3.9, p.93, on définit pour Θ fixé

$$c_\Theta^+(2, \lambda) = \left(\prod_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \lambda_\alpha \right)^{-1} \quad (4.1)$$

$$c_\Theta^-(2, \lambda) = \left(\prod_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \lambda_\alpha \right)^{-1}, \quad (4.2)$$

où par convention, un produit indexé sur l'ensemble vide est égal à 1.

La fonction $\varphi_{\emptyset, \lambda}(2, H)$ est un multiple de la série de Harish-Chandra de paramètre λ pour $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$. La série de Harish-Chandra de paramètre spectral λ est

$$\Phi_\lambda(2, H) = \Delta(H)^{-1}e^{\lambda(H)}, \quad H \in \mathfrak{a}^+ \quad (4.3)$$

où

$$\Delta(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (e^{\alpha(H)} - e^{-\alpha(H)}) \quad (4.4)$$

est le dénominateur de Weyl.

Comme dans [26], def 3.1, on définit la fonction Θ -hypergéométrique de paramètre spectral λ par

$$\varphi_{\Theta, \lambda}(2, H) = c_\Theta^-(2, \lambda) \sum_{w \in W_\Theta} c_\Theta^+(2, w\lambda)\Phi_{w\lambda}(2, H) \quad (4.5)$$

pour $H \in \mathfrak{a}^+$. D'après [26], (16), on a $w(\Sigma^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+) \subseteq \Sigma^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+$ pour tout $w \in W_\Theta$. On définit

$$\Pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \lambda_\alpha. \quad (4.6)$$

Exemples :

1. Si $\Theta = \emptyset$, alors $c_\emptyset^+(2, \lambda) = 1$, $c_\emptyset^-(2, \lambda) = \Pi(\lambda)^{-1}$ et $W_\emptyset = \{id\}$, donc

$$\varphi_{\emptyset, \lambda}(2, H) = \Pi(\lambda)^{-1}\Phi_\lambda(2, H).$$

2. Si $\Theta = \Pi$, alors $c_{\Pi}^-(2, \lambda) = 1$, $c_{\Pi}^+(2, \lambda) = \Pi(\lambda)^{-1}$ et $W_{\Pi} = W$, donc dans ce cas

$$\begin{aligned}\varphi_{\Pi, \lambda}(2, H) &= \sum_{w \in W} \frac{1}{\Pi(w\lambda)} \Phi_{w\lambda}(2, H) \\ &= \frac{1}{\Pi(\lambda)} \sum_{w \in W} \det(w) \Phi_{w\lambda}(2, H)\end{aligned}$$

coïncide, à une constante près, avec la restriction à $\mathfrak{a}(\equiv A = \exp(\mathfrak{a}))$ de la fonction sphérique de Harish-Chandra de paramètre spectral λ .

On pose

$$\Pi_{\Theta}^-(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \lambda_{\alpha}. \quad (4.7)$$

En remarquant que $c_{\Theta}^+(2, w\lambda) = \det(w)c_{\Theta}^+(2, \lambda)$ pour tout $w \in W_{\Theta}$, on a le lemme suivant.

Lemme 26 *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$,*

$$\varphi_{\Theta, \lambda}(2, H) = \Pi(\lambda)^{-1} \Delta(H)^{-1} \sum_{w \in W_{\Theta}} \det(w) e^{w\lambda(H)}. \quad (4.8)$$

En particulier, $\varphi_{\Theta, \lambda}(2, H)$ s'étend en une fonction W_{Θ} -invariante, méromorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^$ et réelle analytique en $H \in \mathfrak{a}_{\Theta}$. De plus, la fonction $\Pi_{\Theta}^-(\lambda)\varphi_{\Theta, \lambda}(2, H)$ est entière en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\Theta}$ fixé.*

Définition 15 *La transformée Θ -hypergéométrique d'une fonction W_{Θ} -invariante suffisamment régulière $f : \mathfrak{a}_{\Theta} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction W_{Θ} -invariant $\mathcal{F}_{\Theta}f(2, \lambda)$ définie pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ par*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\Theta}f(2, \lambda) &:= \frac{1}{|W_{\Theta}|} \int_{\mathfrak{a}_{\Theta}} f(H) \varphi_{\Theta, \lambda}(2, H) \delta(H) dH \\ &= \int_{\mathfrak{a}^+} f(H) \varphi_{\Theta, \lambda}(2, H) \delta(H) dH\end{aligned} \quad (4.9)$$

où

$$\delta(H) = \Delta(H)^2 \quad (4.10)$$

Exemples :

1. Si $\Theta = \Pi$, alors $\mathcal{F}_{\Theta}f$ coïncide, à une constante près, avec la transformée hypergéométrique de Heckman et Opdam (voir [24]) pour le cas complexe, donc aussi avec la transformée sphérique de Harish-Chandra des fonctions K -bi-invariantes sur un espace symétrique riemannien muni d'une structure complexe.
2. Si $\dim \mathfrak{a} = 1$, on a $\varphi_{\emptyset, \lambda} = \frac{1}{\lambda} \Phi_{\lambda}(2, H)$. Donc $\mathcal{F}_{\emptyset}f(2, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f(\lambda)$ dans les notations du cas de rang un.
Si $\Theta = \Pi$, on a $\varphi_{\Pi, \lambda}(2, H) = C\psi_{\lambda}(2, H)$ où C est une constante. Donc, $\mathcal{F}_{\Pi}f(2, \lambda) = C\mathcal{F}f(\lambda)$.

Dans le cas où $\Theta = \Pi$, la formule d'inversion, le théorème de Paley-Wiener et le théorème de Plancherel ont été démontrés par Opdam (voir [24]) pour une fonction de multiplicité positive m arbitraire.

La formule d'inversion pour Θ arbitraire et m positive a été montrée dans [27]. Le théorème de Paley-Wiener pour Θ et m arbitraires n'est pas encore connu. dans le cas de fonctions de multiplicité paires (c'est-à-dire $m_\alpha \in 2\mathbb{N}$ pour tout α), et avec certaines conditions supplémentaires sur Θ si $m_\alpha \neq 2$ pour $\alpha \in \Sigma$, le théorème de Paley-Wiener a été prouvé par Ólafsson et Pasquale dans [23]. Nous allons maintenant rappeler ces théorèmes dans le cas complexe. Les preuves se simplifient dans ce cas. Remarquons tout d'abord que (4.8) permet d'avoir une version simplifiée de (4.9).

Proposition 6 *Soit f une fonction W_Θ -invariante sur \mathfrak{a}_Θ suffisamment régulière (par exemple $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_\Theta)^{W_\Theta}$), alors pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, on a*

$$\mathcal{F}_\Theta f(2, \lambda) = \frac{1}{\Pi(\lambda)} \int_{\mathfrak{a}_\Theta} f(H) \Delta(H) e^{\lambda(H)} dH.$$

Preuve : On a $\Delta(wH) = \det(w) \Delta(H)$ et $\det(w) = \det(w^{-1})$ puisque w est orthogonal. De plus, on a $w\lambda(H) = \lambda(w^{-1}H)$. Donc, d'après (4.8), (4.10) et par la W_Θ -invariance de f , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\Theta f(2, \lambda) &= \frac{1}{|W_\Theta|} \int_{\mathfrak{a}_\Theta} f(H) \left(\Pi(\lambda)^{-1} \sum_{w \in W_\Theta} \det(w) e^{w\lambda(H)} \right) \Delta(H) dH \\ &= \frac{1}{\Pi(\lambda)} \frac{1}{|W_\Theta|} \sum_{w \in W_\Theta} \int_{\mathfrak{a}_\Theta} f(w^{-1}H) \Delta(w^{-1}H) e^{\lambda(w^{-1}H)} dH \\ &= \frac{1}{\Pi(\lambda)} \int_{\mathfrak{a}_\Theta} f(H) \Delta(H) e^{\lambda(H)} dH \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Remarque : Si $\Theta \neq \Pi$, alors la formule obtenue dans la proposition 6 est l'analogue en plusieurs variables de la formule pour $\frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f(\lambda)$ dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$ de l'exemple p.

Théorème 24 (Formule d'inversion) *Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_\Theta)^{W_\Theta}$, alors pour tout $H \in \mathfrak{a}_\Theta$, on a*

$$\Delta(H) f(H) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathfrak{a}^*} \Pi(i\lambda) \mathcal{F}_\Theta f(2, i\lambda) e^{-i\lambda(H)} d\lambda,$$

où $n = \dim \mathfrak{a}$.

Preuve : D'après la proposition 6,

$$\begin{aligned} \Pi(i\lambda) \mathcal{F}_\Theta f(2, i\lambda) &= \int_{\mathfrak{a}} (f(H) \Delta(H) \chi_{\mathfrak{a}_\Theta}(H)) e^{i\lambda(H)} dH \\ &= (2\pi)^{n/2} \mathbf{F}[\chi_{\mathfrak{a}_\Theta} \cdot \Delta \cdot f](\lambda) \end{aligned}$$

où $\chi_{\mathfrak{a}_\Theta}$ est la fonction caractéristique du cône \mathfrak{a}_Θ et \mathbf{F} désigne la transformée de Fourier classique. La formule d'inversion donne alors, pour $H \in \mathfrak{a}$,

$$\chi_{\mathfrak{a}_\Theta}(H)\Delta(H)f(H) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathfrak{a}^*} \Pi(i\lambda)\mathcal{F}_\Theta f(2, i\lambda)e^{-i\lambda(H)}d\lambda.$$

c.q.f.d.

On rappelle que, pour une partie convexe et compact C de \mathfrak{a} , la fonction support $q_C : \mathfrak{a}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$q_C(\lambda) := \sup_{H \in C} \lambda(H). \quad (4.11)$$

Définition 16 Soit C une partie convexe, compact et W_Θ -invariant de \mathfrak{a}_Θ . L'espace de Paley-Wiener $PW_\Theta(2, C)$ est l'espace des fonctions méromorphes W_Θ -invariantes $g : \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant la propriété suivante : la fonction $\Pi(\lambda)g(\lambda)$ est une fonction entière à décroissance rapide de type exponentiel C , c'est-à-dire, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N \geq 0$ telle que

$$|\Pi_\Theta^-(\lambda)g(\lambda)| \leq C_N(1 + |\lambda|)^{-N}e^{q_C(\operatorname{Re}\lambda)}$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$.

On note $C_c^\infty(C)^{W_\Theta}$ l'espace des fonctions C^∞ et W_Θ -invariantes $f : \mathfrak{a}_\Theta \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\operatorname{supp} f \subseteq C$.

Théorème 25 (Paley-Wiener) La transformée Θ -hypergéométrique $\mathcal{F}_\Theta(2, \cdot)$ est une bijection de $C_c^\infty(C)^{W_\Theta}$ sur $PW_\Theta(2, C)$.

Preuve : Voir [23], théorème 1.3 et proposition 6.1.

c.q.f.d.

Venons en maintenant au théorème de Plancherel pour $\mathcal{F}_\Theta(2, \cdot)$. La formule pour $\mathcal{F}_\Theta(2, \cdot)$ de la proposition 6 suggère que le théorème de Plancherel devrait être lié au théorème correspondant pour la transformée de Laplace de fonctions à support dans un certain cône de \mathbb{R}^n . On montre maintenant comment le théorème de Plancherel en rang 1 pour $\tilde{\mathcal{L}}$ se simplifie dans le cas complexe de $SL(2, \mathbb{C})$.

Exemple : Dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$, on a $m_\alpha = 2$ et $m_{2\alpha} = 0$, donc $s(m) = 0$. Ainsi, $H^{(s(m))}(\operatorname{Re}\lambda < 0) = H^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$ est l'espace de Hardy classique. Pour $a \in H_*^2(\operatorname{Re}\lambda < 0)$, comme $|\lambda c(\lambda)| = 1$, on a

$$\|a\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}} |a(i\lambda) - a(-i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda = 2 \int_{\mathbb{R}} |a(i\lambda)|^2 d^\bullet \lambda = 2C\|a\|_{H^2}^2$$

où C est une constante venant de la normalisation de la mesure $d^\bullet \lambda$. Ainsi, $H_*^2(\operatorname{Re} \lambda < 0) = H^2(\operatorname{Re} \lambda < 0)$. De plus,

$$\tilde{\mathcal{L}}f(\lambda) = -\frac{i}{2} \int_0^\infty (f(t)\operatorname{sht})e^{\lambda t} dt,$$

et $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \delta(t)dt)$ si et seulement si $f(t)\operatorname{sht} \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. Donc, par une renormalisation adéquate des normes, l'isomorphisme isométrique entre $L^2(\mathbb{R}_+, \delta(t)dt)$ et $H_*^2(\operatorname{Re} \lambda < 0)$ donné par $\tilde{\mathcal{L}}$ correspond à l'isomorphisme isométrique classique entre $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ et $H^2(\operatorname{Re} \lambda < 0)$ via \mathcal{L} .

Dans la prochaine section, nous donnons les grandes lignes de la théorie classique de la transformée de Laplace sur les cônes. Cela nous permettra de donner le théorème de Plancherel pour la transformée Θ -hypergéométrique dans le cas complexe avec $\Theta \neq \Pi$.

4.2 La transformée de Laplace sur les cônes dans \mathbb{R}^n

Les résultats de cette section sont classiques et peuvent être trouvés dans [29], chapitre 3. Soit B un ouvert de \mathbb{R}^n . Le *tube* T_B de base B est le sous ensemble

$$T_B = \{\lambda + i\eta \in \mathbb{C}^n, \lambda \in B\}.$$

En particulier, si Γ est un cône ouvert $T_\Gamma = \{\lambda + i\eta \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \Gamma\}$. On définit le cône dual de Γ ,

$$\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n, x \cdot \lambda \geq 0, \forall \lambda \in \Gamma\}.$$

Définition 17 *L'espace $H^2(T_\Gamma)$ est l'espace des fonctions holomorphes $F : T_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ telles que*

$$\|F\|_{H^2}^2 := \sup_{\lambda \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |F(\lambda + i\eta)|^2 dm(\eta) < +\infty.$$

Remarque : Pour $z, w \in \mathbb{C}^n$, on note $z \cdot w = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$, donc en particulier, $z \cdot x = \sum_{j=1}^n z_j x_j$ si $x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 26 *Soit Γ un cône ouvert, alors $F \in H^2(T_\Gamma)$ si et seulement si*

$$F(\lambda + i\eta) = \int_{-\Gamma^*} e^{(\lambda+i\eta) \cdot x} f(x) dx$$

où f est une fonction de $L^2(-\Gamma^*)$. De plus, on a

$$\|F\|_{H^2} = \|f\|_2.$$

En particulier, $H^2(T_\Gamma)$ contient une fonction non identiquement nulle si et seulement si Γ est régulier (c'est-à-dire $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$)

Preuve : (voir [29], théorème 2.3 page 93 et théorème 3.1 page 101) Soit $f \in L^2(-\Gamma^*)$ et soit $\lambda \in \Gamma$ fixé. On définit une fonction $f_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\lambda \cdot x} f(x) & x \in -\Gamma^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\lambda \cdot x \leq 0$ pour $x \in -\Gamma^*$, on a $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, comme Γ est ouvert, on peut trouver un voisinage N de λ contenu dans Γ et une fonction $g \in L^1(-\Gamma^*)$ tels que $e^{\nu \cdot x} |f(x)| \leq |g(x)|$ pour tout $(\nu, x) \in N \times (-\Gamma^*)$. Par conséquent, $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On peut donc définir une fonction F sur T_Γ par

$$\begin{aligned} F(\lambda + i\eta) &= \int_{-\Gamma^*} e^{(\lambda + i\eta) \cdot x} f(x) dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) e^{i\eta \cdot x} dm(x) \\ &= \hat{f}_\lambda(\eta) \end{aligned}$$

et F est holomorphe sur T_Γ d'après le théorème de Morera. La formule de Plancherel pour la transformée de Fourier rappelée précédemment montre enfin que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(\lambda + i\eta)|^2 dm(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^2 dm(x) = \int_{-\Gamma^*} e^{2\lambda \cdot x} |f(x)|^2 dm(x)$$

d'où, on a

$$\|F\|_{H^2}^2 = \sup_{\lambda \in \Gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(\lambda + i\eta)|^2 dm(\eta) \right) = \int_{-\Gamma^*} |f(x)|^2 dm(x) = \|f\|_2^2.$$

Réciproquement, si $F \in H^2(T_\Gamma)$ alors on peut écrire

$$F(\lambda + i\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{(\lambda + i\eta) \cdot x} dm(x)$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|F\|_{H^2}^2 = \sup_{\lambda \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\lambda \cdot x} |f(x)|^2 dm(x).$$

En effet, on considère pour $\lambda \in \Gamma$ fixé, la transformée de Fourier inverse f_λ de $F(\lambda + i\eta)$ considérée comme fonction de $\eta \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, on a dans L^2

$$f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + i\eta) e^{-i\eta \cdot x} dm(\eta). \quad (4.12)$$

On vérifie (voir [29], p. 100-101) que pour tout $\lambda, \mu \in \Gamma$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$e^{-\lambda \cdot x} f_\lambda(x) = e^{-\mu \cdot x} f_\mu(x).$$

La fonction $f(x) = e^{-\lambda \cdot x} f_\lambda(x)$ est donc définie presque partout indépendamment de $\lambda \in \Gamma$. D'après la formule de Plancherel, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 e^{2\lambda \cdot x} dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^2 dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |F(\lambda + i\eta)|^2 dm(\eta) \leq \|F\|_{H^2}^2 < +\infty.$$

L'argument de [29], pp. 92-93, montre alors que $|f_\lambda(x)| = |f(x)|e^{\lambda \cdot x}$ est majorée par une fonction intégrable sur \mathbb{R}^n , d'où $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Cela implique que $\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)e^{i\eta \cdot x} dm(x)$ est bien définie et donne une fonction continue de $\eta \in \mathbb{R}^n$. D'après (4.12), cette fonction doit être $F(\lambda + i\eta)$. Donc

$$\begin{aligned} F(\lambda + i\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)e^{i\eta \cdot x} dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\lambda \cdot x} e^{i\eta \cdot x} dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{(\lambda + i\eta) \cdot x} dm(x) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\text{supp} f \subseteq -\Gamma^*$. Soit $x_0 \notin -\Gamma^*$, alors il existe $\lambda_0 \in \Gamma$ tel que $\lambda_0 \cdot x_0 > 0$. Comme Γ^* est fermé, il existe un voisinage N de x_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus (-\Gamma^*)$ et $\delta > 0$ tels que

$$\lambda_0 \cdot x > \delta > 0, \quad x \in N,$$

donc pour tout $k > 0$, $(k\lambda_0) \cdot x > k\delta$. Comme $k\lambda_0 \in \Gamma$, on a

$$\int_N e^{2k\lambda_0 \cdot x} |f(x)|^2 dm(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{2k\lambda_0 \cdot x} |f(x)|^2 dm(x) \leq \|F\|_{H^2}^2,$$

donc

$$\int_N e^{2k\delta} |f(x)|^2 dm(x) \leq \|F\|_{H^2}^2 < +\infty \quad \forall k > 0.$$

D'où $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in N$. On en déduit que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \notin -\Gamma^*$.

c.q.f.d.

Corollaire 7 Si $F \in H^2(T_\Gamma)$, alors il existe une fonction $\eta \mapsto F(i\eta)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $F(\lambda + i\eta) \rightarrow F(i\eta)$ en norme L^2 quand $\lambda \in \Gamma$ tend vers 0.

Preuve : (voir [29], corollaire 3.4) Comme $F \in H^2(T_\Gamma)$, alors d'après le théorème 26,

$$F(\lambda + i\eta) = \int_{-\Gamma^*} e^{(\lambda + i\eta) \cdot x} f(x) dm(x)$$

où $f \in L^2(-\Gamma^*)$. Formellement, on définit alors $F(i\eta)$ par

$$F(i\eta) = \int_{-\Gamma^*} e^{i\eta \cdot x} f(x) dm(x).$$

Plus précisément, $F(i \cdot)$ est la transformée de Fourier de f , avec f étendue sur \mathbb{R}^n en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin -\Gamma^*$. Or $F(\lambda + i\eta)$ est la transformée de Fourier de $e^{\lambda \cdot x} f(x)$ qui converge vers $f(x)$ en norme L^2 lorsque λ tend vers 0. Donc, d'après la formule de Plancherel, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(\lambda + i\eta)|^2 dm(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\lambda \cdot x} |f(x)|^2 dm(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |F(i\eta)|^2 dm(\eta).$$

c.q.f.d.

Corollaire 8 *Pour tout $F \in H^2(T_\Gamma)$, on a*

$$\|F\|_{H^2} = \|F(i\cdot)\|_2.$$

De plus, $H^2(T_\Gamma)$ est un espace de Hilbert.

Preuve : L'égalité $\|F\|_{H^2} = \|F(i\cdot)\|_2$ est une conséquence directe du corollaire 7. De plus, d'après le théorème 26, $H^2(T_\Gamma)$ est isomorphe isométrique à $L^2(-\Gamma^*)$ qui est complet, donc $H^2(T_\Gamma)$ est normé complet. Maintenant, si pour $F, G \in H^2(T_\Gamma)$ on pose

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F(i\eta) \overline{G(i\eta)} dm(\eta)$$

alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $H^2(T_\Gamma)$ et on a

$$\langle F, F \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |F(i\eta)|^2 dm(\eta) = \|F(i\cdot)\|_2^2 = \|F\|_{H^2}^2$$

d'où $H^2(T_\Gamma)$ est un espace de Hilbert.

c.q.f.d.

Corollaire 9 *Soit W un sous groupe du groupe des transformations orthogonales de \mathbb{R}^n . La restriction à $L^2(\mathbb{R}^n)^W$ de l'isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $H^2(T_\Gamma)$, obtenue dans le théorème 26, est une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}^n)^W$ sur $H^2(T_\Gamma)^W$.*

4.3 Le théorème de Plancherel pour la transformée Θ -hypergéométrique dans le cas complexe

Comme nous l'avons déjà remarqué, dans le cas $\Theta = \Pi$, la transformée Θ -hypergéométrique est un cas particulier de la transformée hypergéométrique de Heckman et Opdam. Le théorème de Plancherel, dans ce cas, a été montré dans [24].

Si $\Theta \subseteq \Pi$ et $\Theta \neq \Pi$, la situation est différente, car la transformée Θ -hypergéométrique est définie pour des fonctions à support dans le cône propre $\mathfrak{a}_\Theta \subseteq \mathfrak{a}$. Pour utiliser le théorème de Plancherel du cas Euclidien de la section 4.2, on doit trouver le cône Γ tel que $\mathfrak{a}_\Theta = -\Gamma^*$.

Pour chaque $\alpha \in \Sigma^+$, on note $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ l'unique élément tel que $\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$. On pose

$$C_\Theta = \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathbb{R}_+ H_\alpha. \quad (4.13)$$

Le lemme suivant a été démontré dans ([26]), lemme 3.4.

Lemme 27 Soit C_Θ^* le cône dual de C_Θ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} C_\Theta^* &= \{H \in \mathfrak{a}, \langle H, Y \rangle \geq 0 \quad \forall Y \in C_\Theta\} \\ &= \{H \in \mathfrak{a}, \alpha(H) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+\}. \end{aligned}$$

Alors, $C_\Theta^* = \overline{\mathfrak{a}_\Theta}$.

Le cône Γ de la section 4.2 est donc $-C_\Theta$. On définit la transformée Θ -hypergéométrique modifiée par

$$\tilde{\mathcal{F}}_\Theta f(\lambda) = \Pi(\lambda) \mathcal{F}_\Theta f(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}_\Theta} f(H) \Delta(H) e^{\lambda(H)} dH$$

d'après la proposition 6. On définit alors $H^2(T_\Gamma)$ comme l'espace des fonctions holomorphes sur \mathfrak{a}_Θ^* telle que

$$\|F\|_{H^2} = \sup_{\sigma \in \Gamma} \int_{\mathfrak{a}^*} |F(\sigma + i\lambda)|^2 d\lambda < +\infty. \quad (4.14)$$

On obtient alors le théorème suivant (en multipliant éventuellement la norme $\|\cdot\|_{H^2}$ par une constante) :

Théorème 27 Soit $\Gamma = -C_\Theta$, alors $F \in H^2(T_\Gamma)^{W_\Theta}$ si et seulement si

$$F(\sigma + i\lambda) = \int_{\mathfrak{a}_\Theta} f(H) \Delta(H) e^{(\sigma+i\lambda)(H)} dH$$

avec $f \in L^2(\mathfrak{a}_\Theta, \delta(H)dH)^{W_\Theta}$. De plus, $\|f\|_2 = \|F\|_{H^2}$. Par conséquent, dans le cas complexe, la transformée θ -hypergéométrique modifiée est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathfrak{a}_\Theta, \delta(H)dH)^{W_\Theta}$ sur $H^2(T_\Gamma)^{W_\Theta}$.

Corollaire 10 Si $F \in H^2(T_\Gamma)^{W_\Theta}$, alors il existe une fonction $\eta \mapsto F(i\lambda)$ dans $L^2(\mathfrak{a}^*)$ telle que $F(\sigma + i\lambda) \rightarrow F(i\lambda)$ en norme L^2 quand $\sigma \in \Gamma$ tend vers 0.

4.4 Analyse harmonique L^2 -sphérique sur les espaces symétriques de type Olshanskii

L'analyse harmonique sphérique sur les espaces symétriques de type Olshanskii est un cas particulier de l'analyse harmonique Θ -hypergéométrique du cas complexe.

Soit \mathfrak{h} une algèbre de Lie semi-simple et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\mathbb{C} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification de \mathfrak{h} . La conjugaison de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} est définie par

$$\overline{X + iY} = X - iY$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{h}$. On note τ cette involution de \mathfrak{g} . Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} tel que τ s'intègre en une involution de G . Si H est un sous groupe connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , alors $H = G_o^\tau$. Donc, G/H est un espace symétrique. La décomposition de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ en sous espaces propres de τ est donnée par $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$. Dans ce cas, les cônes $\text{Ad}(H)$ -invariants dans \mathfrak{q} correspondent aux cônes $\text{Ad}(H)$ -invariants dans \mathfrak{h} . L'existence d'une structure non compactement causale sur l'espace symétrique G/H vient des travaux de Olshanskii (voir [20]) et Ólafsson (voir [21]). C'est pourquoi les espaces G/H de ce type qui admettent une structure non compactement causale sont parfois appelés espaces symétriques de type Olshanskii. Ces espaces sont le c -dual des espaces symétriques compactement causaux dans le cas du groupe (voir [21]). La classification des paires $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ avec \mathfrak{h} simple est la suivante (voir [21]) :

\mathfrak{g}	\mathfrak{h}
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p, q)$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$
$\mathfrak{so}(n+2, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2, n)$
$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
e_6	$e_{6(-14)}$
e_7	$e_{7(-25)}$

On choisit un sous espace abélien maximal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ comme dans la section 1.2.4 et on considère le système de racine associé $\Sigma = \Sigma_n^- \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_n^+$. On choisit aussi Σ^+ et $\Pi = \Pi_0 \cup \{\gamma\}$ comme dans la section mentionnée ci-dessus. Alors, on peut montrer (voir [26]) que la restriction à c_{\max}^0 des fonctions sphériques sur l'espace non compactement causal G/H coïncident, à une constante près, avec les fonctions Θ -sphériques pour le triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m = 2)$ quand $\Theta = \Pi_0$. De plus, on a $W_{\Pi_0} = W_0$. La transformée sphérique de Laplace des fonctions H -invariantes sur S^0/H correspond à la transformée θ -sphérique des fonctions W_0 -invariantes sur $c_{\max} = (W_0(\overline{\mathfrak{a}^+}))^0$. Les théorèmes montrés précédemment dans ce chapitre peuvent être réécrit dans le langage de la transformée de Laplace sphérique. Dans ce cas particulier, la formule d'inversion et l'inclusion du théorème de Paley-Wiener ont été montrés dans [10].

On note $C_c^\infty(S^0/H)^H$ l'espace des fonctions H -invariantes f sur S^0/H telles que la restriction de f à c_{\max}^0 soit à support compact (alors cette restriction est nécessairement W_0 -invariante). On note $L^2(S^0/H)^H$ l'espace L^2 des fonctions H -invariantes sur S^0/H .

Théorème 28 1. Soit f une fonction H -invariante sur S^0/H suffisamment régulière. Alors, la transformée de Laplace sphérique de f est donnée par

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_{S^0/H} f(x)\varphi_\lambda(x)dx = \frac{1}{\Pi(\lambda)} \int_{c_{\max}} f(\exp Y)\Delta(Y)e^{\lambda(Y)}dY$$

pour $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ pour lesquels l'intégrale converge, et où $\Delta(Y)$ et $\Pi(\lambda)$ sont donnés dans (4.4) et (4.6) respectivement.

2. Si $f \in C_c^\infty(S^0/H)^H$, alors pour tout $Y \in c_{\max}$,

$$\Delta(Y)f(\exp Y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathfrak{a}^*} \Pi(i\lambda)\mathcal{L}f(i\lambda)e^{-i\lambda(Y)}d\lambda$$

où $n = \dim \mathfrak{a}$ est le rang réel de G/K .

3. Pour toute partie compacte, convexe et W_0 -invariante C de c_{\max} , on note $C_C^\infty(S^0/H)^H$ le sous espace de $C_c^\infty(S^0/H)^H$ des fonctions f dont le support de leur restriction à c_{\max}^0 est inclus dans C . Soit $PW_{\Pi_0}(2, \mathbb{C})$ l'espace de Paley-Wiener de la définition 16, alors \mathcal{L} est une bijection de $C_C^\infty(S^0/H)^H$ sur $PW_{\Pi_0}(2, \mathbb{C})$.
4. Soit $\Gamma = -c_{\min}$ et soit $H^2(T_{-c_{\min}})^{W_0}$ défini comme à la page 74. Alors $\tilde{\mathcal{L}} = \Pi(\lambda)\mathcal{L}$ est un isomorphisme isométrique de $L^2(S^0/H)^H$ sur $H^2(T_{-c_{\min}})^{W_0}$.

Bibliographie

- [1] N. B. Andersen, G. Ólafsson, *A Paley-Wiener theorem for the spherical Laplace transform on causal symmetric spaces of rank 1*, Proc. Amer. Math. Soc. **129**, n1 (2001), 173-179.
- [2] N. B. Andersen, G. Ólafsson, H. Schlichtkrull, *On the inversion of the Laplace and Abel transforms for causal symmetric spaces*, Forum Math. **15** (2003), 701-725.
- [3] T. Branson, G. Ólafsson, A. Pasquale, *The Paley-Wiener theorem and the local Huygens' principle for compact symmetric spaces*, Indag. Math. **16** (2005), 393-428.
- [4] J. Bros, G. A. Viano, *Connection between the harmonic analysis on the sphere and the harmonic analysis on the one-sheeted hyperboloid I*, Forum. Math. **8** (1996), 621-658.
- [5] J. Bros, G. A. Viano, *Connection between the harmonic analysis on the sphere and the harmonic analysis on the one-sheeted hyperboloid II*, Forum. Math. **8** (1996), 659-722.
- [6] J. Bros, G. A. Viano, *Connection between the harmonic analysis on the sphere and the harmonic analysis on the one-sheeted hyperboloid III*, Forum. Math. **9** (1997), 165-192.
- [7] A. Erdelyi et al, *Higher transcendental functions, vol. 1*, McGraw-Hill, 1953.
- [8] J. Faraut, *Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces hyperboliques*, Analyse harmonique (P. Eymard ed.), Les cours du C.I.M.P.A., Nancy, 1980
- [9] J. Faraut, *Espaces Hilbertiens invariants de fonctions holomorphes*. In : J. Faraut, F. Rouvière, M. Vergne, Analyse sur les groupes de Lie et théorie des représentations, Séminaires et congrès 7, Société Math. de France, 2003.
- [10] J. Faraut, J. Hilgert, G. Ólafsson, *Spherical functions on ordered symmetric spaces*, Annales Inst Fourier **44**, n3 (1994), 927-963
- [11] J. Faraut, G. Ólafsson, *Causal semisimple symmetric spaces, the geometry and harmonic analysis*, Semigroups in algebra, geometry and analysis (Oberwolfach, 1993), 3-32, de Gruyter Exp. Math., 20, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [12] M. Flensted-Jensen, *Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces*, Ark. Mat. **10** (1972), 143-162.
- [13] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [14] J. Hilgert, G. Ólafsson, *Causal symmetric spaces, geometry and harmonic analysis*, Academic Press, 1997.
- [15] E. Hille, *Analytic function theory. Vol II*, introductions to higher mathematics, Ginn and Co, 1962.
- [16] A. W. Knap, *Lie groups beyond an introduction*. Second edition. Birkhauser Boston, Boston 2002.

- [17] T. H. Koorwinder, *A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform*, Ark. Mat. **13** (1975), 145-159.
- [18] T. H. Koorwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, Math. Appl. (1984), 1-85.
- [19] M. Mizony, *Une transformation de Laplace-Jacobi*, SIAM J. Math. Anal. **14**, n5 (1983), 987-1003.
- [20] G. I. Ol'shanskii, *Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups and invariant causal structures (orderings) on pseudo-Riemannian symmetric spaces*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), no. 3, 537-541.
- [21] G. Ólafsson, *Symmetric spaces of Hermitian type*, Differential Geom. Appl. **1** (1991), no. 3, 195-233.
- [22] G. Ólafsson, A. Pasquale, *On the meromorphic extension of the spherical functions on non-compactly causal symmetric spaces*, J. Func. Anal. **181** (2001), 346-401
- [23] G. Ólafsson, A. Pasquale, *A Paley-Wiener theorem for the Θ -hypergeometric transform : the even multiplicity case*, J. Math. Pures. Appl. **83** (2004), 869-927.
- [24] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175** (1995), 75-121.
- [25] R. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, American Mathematical Society, 1934.
- [26] A. Pasquale, *Asymptotic analysis of Θ -hypergeometric functions*, Invent. Math. **157** (2004), no. 1, 71-122.
- [27] A. Pasquale, *The Θ -spherical transform and its inversion*, Math. Scand. **95** (2004), no. 2, 265-284.
- [28] E. M. Stein, S. Wainger, *Analytic properties of expansions and some variants of Parseval-Plancherel formulas*, Ark. Math. **5** (1965), 553-567.
- [29] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidian spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [30] G. Szego, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., 1939.
- [31] M. Takeuchi, *Modern spherical functions*, Amer. Math. Soc., 1994.
- [32] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Third edition, Chelsea Publishing Co., New-York, 1986.
- [33] J. Unterberger, *Analyse harmonique sur un espace symétrique ordonné et sur son dual compact*, thèse, Paris VI, 1999.
- [34] V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir Publishers, 1979.
- [35] J. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces*, Amer. Math. Soc., 2007.