



**HAL**  
open science

# Modélisation multi-physique d'actionneurs piézoélectriques et essais d'assistance au forgeage

Rith Ly

► **To cite this version:**

Rith Ly. Modélisation multi-physique d'actionneurs piézoélectriques et essais d'assistance au forgeage. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2010. Français. NNT : 2010METZ015S . tel-01752742

**HAL Id: tel-01752742**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752742>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



**THESE DE DOCTORAT**  
PRESENTEE A  
**L'UNIVERSITE PAUL VERLAINE – METZ**  
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**  
**ECOLE DOCTORALE ENERGIE MECANIQUE ET MATERIAUX**

**SPECIALITE : MECANIQUE**

PAR

**Rith LY**

**Modélisation multi-physique  
d'actionneurs piézoélectriques  
et essais d'assistance au forgeage**

SOUTENUE LE 8 JUIN 2010 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

M. Laurent DUBAR	: Président
Mme Betty SEMAIL	: Rapporteur
M. Jean-François ROUCHON	: Rapporteur
M. Christophe GIRAUD-AUDINE	: Co-encadrant
M. Régis BIGOT	: Co-directeur de thèse
M. Gabriel ABBA	: Directeur de thèse

Les travaux relatifs à cette thèse ont été effectués au  
Laboratoire de Conception, Fabrication et Commande (LCFC – EA 4495),  
Arts et Métiers ParisTech, 4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz Cedex 03, France



Metz





# Avant-propos

Les travaux présentés dans ce mémoire concrétisent trois années et demie de préparation de thèse et ont été effectués à l'université Paul Verlaine de Metz et au Laboratoire de Conception, Fabrication, Commande (LCFC) du centre de Metz d'Arts et Métiers ParisTech dans le cadre de l'École Doctorale "Energie, Mécanique et Matériaux" (EMMA) de Lorraine. Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance aux personnes qui m'ont formé sur le sujet de la " Modélisation multi physique d'actionneurs piézoélectriques et essais d'assistance au forgeage " et ont rendu possible l'achèvement de ce travail. Je tiens à remercier chaleureusement :

- Monsieur le Professeur Laurent Dubar, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.
- Madame le Professeur Betty Semail, qui a accepté d'être rapporteur de ma thèse et par ses remarques constructives et pertinentes m'a aidé à améliorer mon manuscrit.
- Monsieur le Professeur Jean-François Rouchon, qui a également accepté la charge de rapporteur et qui a porté un regard pertinent sur mon mémoire.
- Monsieur le Professeur Gabriel Abba, directeur de thèse, Monsieur le Professeur Régis Bigot, co-directeur de thèse, et Monsieur le Docteur Christophe Giraud-Audine, encadrant, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me proposant de réaliser ce travail. Je n'oublierai jamais leurs disponibilités, leurs encouragements, leur soutien, leur aide scientifique, leurs excellents conseils, leurs remarques constructives, la grande humanité dont ils ont fait preuve et le temps très précieux qu'ils y ont consacré dans une ambiance de travail des plus dynamique.
- Monsieur le Professeur Patrick Martin, directeur du Laboratoire de Conception, Fabrication, Commande (LCFC), qui m'a accueilli et m'a donné la chance

d'effectuer mes recherches au sein de son laboratoire. Je le remercie encore pour son soutien et sa disponibilité.

- Monsieur le Professeur Jean Chrétien, directeur du centre de Metz d'Arts et Métiers ParisTech, qui m'a accueilli et m'a donné l'opportunité d'effectuer mes recherches au sein de son établissement. Je le remercie vivement pour sa présence à ma soutenance.
- SE Monsieur Kim An Uch, ambassadeur du Cambodge en France, qui m'a fait le déplacement spécialement de Paris. Sa présence a été un très grand honneur pour notre école et moi. Sa présence témoigne du soutien et des encouragements qu'il témoigne aux étudiants cambodgiens vivants en France en général et aux ingénieurs du groupe TechnoCharity en particulier. Sa présence est le symbole du renforcement de l'éducation nationale au Cambodge et du rassemblement de nos intellectuels. J'espère que mes connaissances et mon expérience pourront un jour contribuer au développement de notre pays.
- Monsieur Eeng Lim, président d'honneur du TechnoCharity, Monsieur Bun Long Lao, président du MSNPVK, Monsieur Podinarath Kim, premier vice président du MSNPVK, Monsieur Soksensan Meas, premier secrétaire de l'ambassade du Cambodge en France, Monsieur Chanol Rith, premier secrétaire de l'ambassade du Cambodge en France qui ont tous accepté l'invitation de notre directeur d'école et se sont déplacés pour assister ma soutenance de thèse.
- Madame le Professeur Anne Leriche, Directrice du Laboratoire des Matériaux et Procédés et Présidente du Groupe Français de la Céramique, Monsieur le docteur Mohamed Rguiti, maître de conférence à l'UVHC, Monsieur le docteur Abdel Hajjaji maître de conférence à l'UVHC, pour la gentillesse qu'ils m'ont témoignée en se déplaçant de Maubeuge pour assister à ma soutenance, ainsi que pour leurs encouragements et leur soutien.
- Monsieur Luc Morhain, technicien à l'Arts et Métiers Paristech, pour sa gentillesse et sa compétence qui ont été d'un grand secours pour les aspects pratiques contribuant ainsi au bon déroulement de ma thèse.

Je remercie finalement toutes les personnes qui m'ont apporté une aide scientifique, technique ou administrative durant cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance aux collègues, amis et membres de ma famille pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes études.

# Table des matières

Avant-Propos	iii
Table des matières	vii
Liste des tableaux	viii
Table des figures	xi
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2 Modélisation du procédé de forgeage et essais expérimentaux</b>	<b>5</b>
2.1 Introduction . . . . .	5
2.2 Modélisation analytique de l'écrasement d'un lopin cylindrique . . . .	6
2.3 Description du dispositif expérimental . . . . .	9
2.4 Capteurs pour l'acquisition . . . . .	11
2.5 Identification du modèle de comportement en forgeage : cas de l'écrasement d'un lopin cylindrique . . . . .	13
2.5.1 Méthode d'identification par les moindres carrés . . . . .	15
2.5.2 Résultats par les moindres carrés . . . . .	15
2.5.3 Méthode d'identification non linéaire par optimisation d'un critère . . . . .	18
2.6 Simulation par éléments finis sous Forge2008 pour l'écrasement d'un lopin cylindrique . . . . .	21
2.7 Conclusion . . . . .	21
<b>3 Matériaux piézoélectriques</b>	<b>23</b>
3.1 Introduction . . . . .	23
3.2 Phénomène piézoélectrique . . . . .	24
3.3 Equations constitutives de la piézoélectricité . . . . .	25
3.4 Coefficients piézoélectriques et modes de couplage électromécanique .	29
3.5 Equations de la piézoélectricité en mode-33 . . . . .	29
3.6 Lagrangien et principe d'Hamilton d'une céramique piézoélectrique en mode-33 . . . . .	32

3.7	Conclusion . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Modélisation d'un actionneur piézoélectrique</b>	<b>37</b>
4.1	Introduction . . . . .	37
4.2	Modèle analytique . . . . .	39
4.2.1	Equations du mouvement . . . . .	39
4.2.2	Résolution des équations de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique . . . . .	43
4.3	Modèle par éléments finis . . . . .	53
4.3.1	Modélisation d'un élément discrétisé . . . . .	54
4.3.2	Assemblage des éléments . . . . .	57
4.3.3	Relations avec la tension d'alimentation . . . . .	62
4.4	Résultats et discussions . . . . .	64
4.4.1	Actionneur piézoélectrique libre avec effort externe . . . . .	65
4.4.2	Actionneur piézoélectrique avec masse externe . . . . .	70
4.5	Conclusion . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Simulation du système complet et essais expérimentaux</b>	<b>85</b>
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Etude de la fonction de détermination des efforts de forgeage assisté par des vibrations mécaniques . . . . .	86
5.3	Modèle du système complet . . . . .	91
5.4	Simulation du comportement du système complet . . . . .	91
5.4.1	Etude de l'effort de forgeage en fonction du déplacement de la matrice supérieure . . . . .	92
5.4.2	Etude en fonction de différentes amplitudes de vibrations de l'actionneur piézoélectrique . . . . .	94
5.4.3	Etude en fonction de différentes fréquences de vibrations de l'actionneur piézoélectrique . . . . .	94
5.5	Superposition des courbes mesurées et simulées . . . . .	97
5.5.1	Etude pour différentes vitesses maximales de vibrations . . . . .	98
5.6	Conclusion . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>104</b>
<b>A</b>	<b>Prise en main de la machine et le logiciel de pilotage</b>	<b>110</b>
A.1	Mise en marche de la machine . . . . .	110
A.2	Programmation d'un essai . . . . .	110
A.3	Réalisation de l'essai . . . . .	111
A.4	Préparation des lopins cylindriques . . . . .	112

<b>B</b>	<b>Calcul des paramètres filtrés</b>	<b>116</b>
B.1	Descriptif du schéma d'alimentation électrique . . . . .	116
B.2	Filtre d'entrée de l'onduleur . . . . .	118
B.3	Filtre de sortie de l'onduleur . . . . .	119
<b>C</b>	<b>Modèles de l'actionneur piézoélectrique alimenté en courant</b>	<b>122</b>
C.1	Modèle analytique de l'actionneur alimenté en courant : . . . . .	122
C.2	Modèle éléments finis de l'actionneur alimenté en courant . . . . .	125

# Liste des tableaux

- 2.1 Caractéristiques principales du CHR 150 N . . . . . 12
- 2.2 Caractéristiques principales du capteur de force 30KN . . . . . 14
- 2.3 Paramètres du modèle . . . . . 20
  
- 3.1 Notation des indices de matrices . . . . . 26
- 3.2 Relations constitutives de la piézoélectricité . . . . . 28
- 3.3 Construction des matrices à partir d'un couple de variables choisis . . 28
- 3.4 Matrices de coefficient des matériaux céramiques piézoélectriques . . 29
  
- 4.1 Paramètres de l'actionneur piézoélectrique . . . . . 65

# Table des figures

2.1	<i>Bloc diagramme de simulation du modèle analytique et par éléments finis</i>	6
2.2	<i>Modélisation géométrique de l'écrasement d'un lopin cylindrique</i>	7
2.3	<i>Vue du dispositif expérimental.</i>	10
2.4	<i>Schéma du dispositif expérimental.</i>	11
2.5	<i>Vue du dispositif mécanique.</i>	11
2.6	<i>Schéma d'alimentation électrique de l'APM.</i>	12
2.7	<i>Vue de capteur CHR150N</i>	13
2.8	<i>Vue de capteur de force 30KN</i>	13
2.9	<i>Mesures de l'effort d'écrasement en fonction du déplacement pour deux vitesses du coulisseau.</i>	14
2.10	<i>Comparaison entre mesures et modèle en fonction du déplacement.</i>	17
2.11	<i>Comparaison entre mesures et modèle en fonction de la déformation.</i>	18
2.12	<i>Comparaison entre mesures et modèle en fonction du déplacement.</i>	19
2.13	<i>Comparaison entre mesures et modèle en fonction de la déformation.</i>	20
2.14	<i>Efforts de forgeage sans vibrations en fonction du déplacement du coulisseau.</i>	21
3.1	<i>Effet piézoélectrique direct.</i>	24
3.2	<i>Effet piézoélectrique indirect.</i>	25
3.3	<i>Mode longitudinal (mode-33)</i>	30
3.4	<i>Barreau piézoélectrique en mode-33</i>	30
4.1	<i>Racines d'une fonction <math>f(\lambda_{3n}) = 0</math></i>	47
4.2	<i>Barreau piézoélectrique discrétisé</i>	54
4.3	<i>Représentation des noeuds de déplacement, de potentiel électrique, de force et de charge électrique</i>	57
4.4	<i>Comparaison des réponses fréquentielles (<math>\frac{u}{v}</math>) : MA-3 modes et MEF-3 éléments</i>	66
4.5	<i>Comparaison des réponses fréquentielles (<math>\frac{u}{F}</math>) : MA-3 modes et MEF-3 éléments</i>	67
4.6	<i>Erreurs relatives entre MEF et MA en fonction du nombre d'éléments pour les 3 premiers modes</i>	68

4.7	Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{v}$ ) : MA-15 modes et MEF-15 éléments (représentation des courbe jusqu'au 4 <sup>ème</sup> mode) . . . . .	69
4.8	Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{F}$ ) : MA-15 modes et MEF-15 éléments (représentation des courbe jusqu'au 4 <sup>ème</sup> mode) . . . . .	70
4.9	Réponse fréquentielle ( $\frac{u}{v}$ ) : avec des termes d'amortissement . . . . .	71
4.10	Réponse fréquentielle ( $\frac{u}{v}$ ) : sans (pour MA) et avec (MEF) des termes d'amortissement . . . . .	72
4.11	Vu des schémas du MA et MEF sous Matlab simulink . . . . .	73
4.12	Réponse temporelle : MA-15 modes et MEF-15 éléments ( $F=0N$ ) . . . . .	74
4.13	Réponse temporelle : MA-15 modes et MEF-15 éléments ( $F = 150N$ ) . . . . .	75
4.14	Zoom de la figure 4.13 au voisinage de l'instant $t = 5 ms$ . . . . .	76
4.15	MA sans amortissement et MEF avec les termes d'amortissement ( $F = 150N$ ) . . . . .	77
4.16	Zoom de la figure 4.15 au voisinage de l'instant $t = 5 ms$ . . . . .	77
4.17	MA sans amortissement et MEF avec les termes d'amortissement ( $F = 500N$ ) . . . . .	78
4.18	Zoom de la figure 4.17 au voisinage de l'instant $t = 5 ms$ . . . . .	78
4.19	$M_t = 50Kg$ , réponse fréquentielle ( $\frac{u}{F}$ ) . . . . .	79
4.20	Zoom de la figure 4.19 sur la première fréquence de résonance . . . . .	79
4.21	Zoom de la figure 4.19 sur la deuxième fréquence de résonance . . . . .	80
4.22	$M_t = 100Kg$ , réponse fréquentielle ( $\frac{u}{F}$ ) . . . . .	80
4.23	Zoom de la figure 4.22 sur la première fréquence de résonance . . . . .	81
4.24	Zoom de la figure 4.22 sur la deuxième fréquence de résonance . . . . .	81
4.25	Vu des schémas du MEF bouclé avec une masse sous Matlab simulink . . . . .	82
4.26	Bloc diagramme de simulation du MEF avec la masse . . . . .	82
4.27	$M_t = 50Kg$ , réponse temporelle à $50 Hz$ . . . . .	83
4.28	Temps de calcul du MA, du MEF et du MEF bouclé . . . . .	84
5.1	Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour la fréquence de $50 Hz$ . . . . .	87
5.2	Zoom de la figure 5.1 au voisinage du temps ( $t = 6 s$ ) . . . . .	88
5.3	Etude des efforts en fonction du coefficient de frottement . . . . .	88
5.4	Variation du rapport des efforts avec et sans vibrations . . . . .	89
5.5	Variation du rapport des efforts avec et sans vibrations . . . . .	90
5.6	Variation approchée du rapport des efforts avec et sans vibrations . . . . .	90
5.7	Bloc diagramme de simulation du Modèle Complet (MC) . . . . .	91
5.8	Réponse temporelle : MEFAP -3 éléments . . . . .	92
5.9	Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour la fréquence de $50 Hz$ . . . . .	93
5.10	Zoom de la figure 5.9 au voisinage du temps ( $t = 3 s$ ) . . . . .	94

5.11	<i>Rapport des efforts avec et sans vibrations en fonction du déplacement de la matrice supérieure</i>	95
5.12	<i>Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour des tensions de 0, 300 V et 400 V.</i>	95
5.13	<i>Zoom de la figure 5.12 au voisinage du temps (<math>t = 1</math> s)</i>	96
5.14	<i>Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour les fréquences <math>f = 60, 100</math> Hz</i>	96
5.15	<i>Superposition des efforts de forgeage mesurées et simulées</i>	97
5.16	<i>Superposition des efforts de forgeage mesurées et simulées</i>	98
A.1	<i>Fenêtre du logiciel lié au pilotage de la machine.</i>	111
A.2	<i>Fenêtre des étapes de l'essai.</i>	111
A.3	<i>Fenêtre principale du pilotage d'essai.</i>	112
A.4	<i>Outillage d'extrusion.</i>	113
A.5	<i>Outillage d'extrusion.</i>	114
B.1	<i>Schéma d'alimentation en continu.</i>	117
B.2	<i>Schéma d'alimentation en continu-alternative.</i>	117
B.3	<i>Schéma complète d'alimentation piézoélectrique.</i>	118
B.4	<i>Circuit LC.</i>	118
B.5	<i>Circuit L'C'.</i>	120
C.1	<i>Comparaison des réponses fréquentielles (<math>\frac{u}{F}</math>) : MA-15 modes et MEF-15 éléments</i>	126
C.2	<i>Comparaison des réponses fréquentielles (<math>\frac{u}{Q}</math>) : MA-15 modes et MEF-15 éléments</i>	127



# Chapitre 1

## Introduction générale

Plusieurs auteurs se sont penchés sur les bénéfices qu'il y a à superposer une vibration de faible amplitude au mouvement constant généralement mis en oeuvre dans les procédés de déformation. L'application de vibrations au procédé est bien entendu destinée à la réduction de l'effort de compression, la réduction des contraintes d'écoulement, la réduction des effets du frottement et l'amélioration de la qualité du produit fini [1] [2] [3] [4] [5]. Ces effets bénéfiques ont été étudiés plus en détails dans le cadre du procédé de filage dans les articles [6] [7] [8] [9] [10]. Plus récemment, certains auteurs ont étudié l'utilisation des vibrations dans les opérations de forgeage [11] [12] [13].

Ce travail de thèse s'intègre dans cette problématique de mise en forme de produits massifs assistée par des vibrations mécaniques générées par des actionneurs piézoélectriques, à terme, améliorer les performances du procédé [14] [15] [16]. Grâce aux nombreux bénéfices d'une grande rigidité, d'une capacité de charge élevée, d'une excellente puissance massique, d'un haut rendement de conversion énergétique et d'une taille compacte, les actionneurs piézoélectriques placés dans un dispositif mécanique sont bien adaptés pour assister le procédé de forgeage. L'utilisation des matériaux piézoélectriques remplace celle des autres actionneurs (par exemple : actionneurs électromagnétiques) afin d'économiser la consommation d'énergie. Un dispositif mécanique spécial a été construit de manière à pouvoir faire vibrer la matrice inférieure de forgeage selon un axe vertical pour des amplitudes allant de 0 à 75  $\mu m$  et des fréquences variant de 1 à 130  $Hz$  grâce à un actionneur piézoélectrique alimenté par un convertisseur électronique. L'alimentation électrique de l'actionneur piézoélectrique est composée de deux redresseurs et d'un onduleur commandé et de filtres LC pour pouvoir fournir correctement les formes d'onde de tension.

L'approche la plus fréquente est basée sur des simulations par éléments finis du procédé de mise en forme qui permet d'attribuer certains effets de réduction de l'effort à la diminution du coefficient de frottement, à la diminution de la plasticité du matériau . . . . Cependant, les résultats obtenus par simulation sont difficilement comparables aux résultats expérimentaux. Les modèles de simulation ne sont pas assez précis pour guider les orientations pratiques et permettre une optimisation des vibrations à appliquer.

Ce travail de thèse s'articule en deux volets. Un premier volet consiste à concevoir une expérimentation du procédé de forgeage soumis à des vibrations mécaniques qui est détaillée dans le chapitre 2, paragraphe 2.3. Un deuxième volet est de développer un modèle de couplage qui présente le comportement réel du dispositif expérimental basé sur les approches analytique et par éléments finis. Ce modèle de couplage se compose d'un modèle d'actionneur piézoélectrique (voir chapitre 4) et d'un modèle du procédé de forgeage (voir chapitre 2, paragraphe 2.2). Le principal avantage de ce modèle tient en la possibilité d'analyser l'influence des paramètres importants de l'ensemble du procédé (les paramètres du matériau et les caractéristiques des vibrations), ceci afin d'en optimiser la conception ainsi que son contrôle (voir chapitre 5). Le matériau utilisé pour les essais expérimentaux est la plasticine.

#### – Pour le modèle du procédé de forgeage

Une étude de comportement du procédé de forgeage a été effectuée par des expériences et par des simulations en utilisant un modèle analytique et un modèle par éléments finis. Actuellement, les modélisations proposées se basent sur des modèles éléments finis utiles pour comprendre l'origine de ces effets de réduction ci-dessus, mais impraticables dans l'optique d'une commande du procédé. Un modèle analytique de l'écrasement d'un lopin cylindrique a été développé en utilisant la méthode classique des tranches en se basant sur les travaux [17] [18] [19]. Cette méthode classique est très peu documentée. Nous étendons ensuite ce modèle de la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_0$  en y intégrant les termes de déplacement et de la vitesse de déplacement de l'actionneur piézoélectrique. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des expériences et des simulations par éléments finis sous *Forge2008*<sup>®</sup>.

#### – Pour le modèle d'actionneur piézoélectrique

Beaucoup de chercheurs ont développé des modèles de dispositifs piézoélectriques basés sur une approche par éléments finis [20] [21] [22]. Une modélisation analytique a également été effectuée pour caractériser le comportement d'un actionneur piézoélectrique utilisé spécifiquement dans des applications de structures flexibles [23] [22] [24]. On trouve rarement une modélisation piézoélectrique assistée pour le procédé

de formage. Pour cela deux modèles de l'actionneur piézoélectrique ont été proposés : le premier propose une solution analytique, le second une méthode par éléments finis pour établir un modèle d'état du comportement unidimensionnel de l'actionneur permettant d'intégrer le modèle analytique de l'écrasement cylindrique [25]. L'approche analytique permet par des méthodes de décompositions modales d'établir les solutions théoriques exactes. Des modèles fréquentiels (matrices de transfert) ont ainsi pu être développés dans des cas simples. La méthode est cependant rapidement limitée car elle suppose de recalculer les modes propres du système lorsque les conditions aux limites changent. Dans le cas d'interaction avec des systèmes non linéaires, qui est précisément notre objectif, la possibilité de résoudre les équations de comportement est très improbable. Néanmoins, la méthode analytique fournit un élément de comparaison et de validation pour le modèle basé sur les éléments finis. Les deux modèles ont été implémentés sous un logiciel de simulation *Matlab*<sup>®</sup>. Les comparaisons des réponses obtenues par les deux méthodes sont présentées dans les domaines fréquentiel et temporel. Les modèles ont été testés avec différents types d'actionneurs piézoélectriques et validés en faisant la comparaison des résultats par rapport à d'autres travaux antérieurs. Nous utilisons ensuite le modèle par éléments finis de l'actionneur piézoélectrique avec le modèle analytique de l'écrasement cylindrique par la suite appelé modèle de couplage. La comparaison montre un bon accord entre les résultats expérimentaux et les simulations par le modèle de couplage et par éléments finis sous *Forge2008*<sup>®</sup>.



# Chapitre 2

## Modélisation du procédé de forgeage et essais expérimentaux

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous résumons la mise en place d'un modèle analytique de l'écrasement d'un lopin cylindrique par la méthode classique des tranches en se basant sur les travaux [17] [18] [19]. Cette méthode classique est très peu documentée. Dans le chapitre 5, nous allons étendre ensuite ce modèle de la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_0$  en y intégrant les termes de déplacement et de la vitesse de déplacement de l'actionneur piézoélectrique. Nous présentons par la suite dans ce chapitre la description du dispositif expérimental utilisé. Les données fournies par les essais sont utilisées pour identifier les paramètres de la loi de comportement du matériau en utilisant la méthode des moindres carrés et la méthode d'optimisation d'un critère par *gradient* ou par *simplex*. Une fois les paramètres identifiés, la simulation par éléments finis sous *Forge2008*<sup>®</sup> est effectuée pour comparer des résultats avec ceux obtenus par le modèle analytique et les essais expérimentaux. L'objectif de la modélisation par la méthode des tranches est de permettre l'intégration du modèle de l'actionneur piézoélectrique par l'approche des éléments finis décrit dans le chapitre 4 au paragraphe 4.3. Ce modèle analytique constituera la liaison entrées-sorties du modèle par éléments finis (figure 2.1). L'analyse du modèle complet avec des vibrations mécaniques est effectuée dans la chapitre 5. Dans un premier temps nous allons présenter l'analyse des résultats des efforts de forgeage sans vibrations mécaniques.

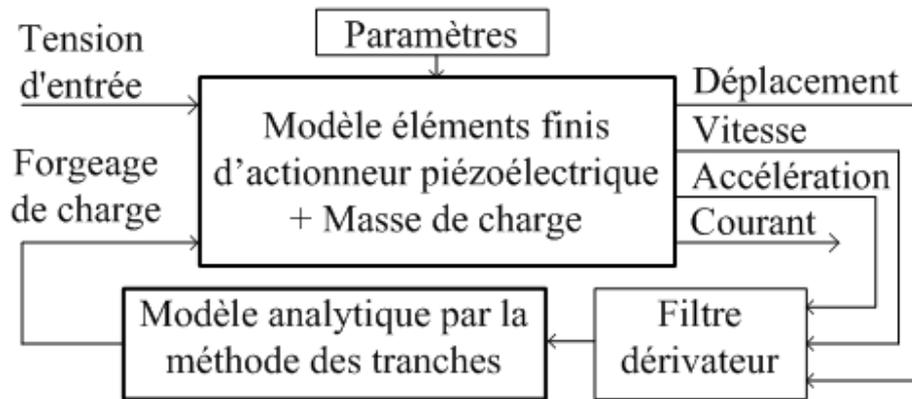


FIGURE 2.1 – Bloc diagramme de simulation du modèle analytique et par éléments finis

## 2.2 Modélisation analytique de l'écrasement d'un lopin cylindrique

Il y a plusieurs méthodes pour calculer analytiquement l'effort induit par le procédé de mise en forme par exemple la méthode de l'énergie de déformation uniforme, de la borne supérieure ou inférieure, la méthode des tranches, les méthodes d'encadrement ou de visualisation, etc [17] [18] [19] [26]. Nous avons besoin d'une méthode permettant de modéliser le procédé de mise en forme en tenant compte des frottements entre les surfaces de la matière et les outillages et en y intégrant des vibrations mécaniques générées par des actionneurs piézoélectriques. La méthode des tranches permet d'analyser les influences des vibrations sur les effets des frottements entre les surfaces de la pièce et les outillages et sur les contraintes dans le matériau.

D'après les travaux [17] [18] [19], la démarche de la méthode des tranches est tout d'abord de construire un modèle géométrique raisonnable du procédé. Puis on fait l'identification de la direction dans laquelle le gradient des contraintes est le plus important. Pour cela, on considère une tranche infinitésimale de matière qui est perpendiculaire à cette direction. On y suppose les contraintes homogènes et on écrit l'équilibre mécanique de la tranche : la résultante des forces appliquées est nulle. On réduit le nombre d'inconnues en utilisant le critère de plasticité et finalement la résolution d'équation différentielle permettant de fournir les contraintes et les forces sur les outils.

Considérons l'écrasement d'un lopin cylindrique (figure 2.2 [17]) ayant une hauteur  $h$  et un rayon extérieur  $R$ . Une tranche cylindrique d'épaisseur infinitésimale  $dr$

est perpendiculaire à la direction principale des contraintes selon l'axe radial ( $\sigma_r$ ). En supposant les contraintes homogènes et que la résultante des forces appliquées à

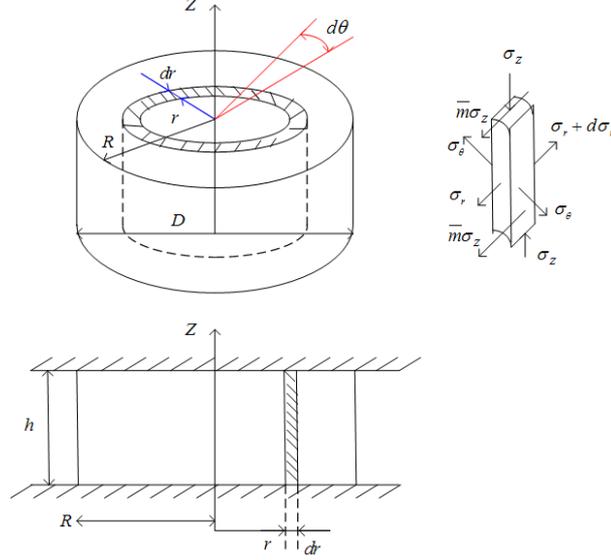


FIGURE 2.2 – Modélisation géométrique de l'écrasement d'un lopin cylindrique

la tranche comprise entre  $r$  et  $r + dr$  est nulle, l'équilibre mécanique de la tranche peut s'écrire en travaillant en coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$  [19] :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)hd\theta - \sigma_r rhd\theta - 2\sigma_\theta hdr \sin \frac{d\theta}{2} - 2\bar{m}\sigma_z r dr d\theta = 0 \quad (2.1)$$

où  $\bar{m}$  est le coefficient de frottement de Tresca,  $\sigma_r, \sigma_\theta$  et  $\sigma_z$  sont respectivement les contraintes principales selon l'axe  $r, \theta$  et  $z$ . En supposant que  $d\theta$  est très petit, on peut faire l'approximation  $\sin(d\theta/2) \simeq d\theta/2$ . L'équation (2.1) peut être simplifiée par la relation suivante :

$$d\sigma_r = [(\sigma_\theta - \sigma_r)\frac{1}{r} - \frac{2\bar{m}}{h}\sigma_z]dr \quad (2.2)$$

On désigne par  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement. A l'aide du critère de plasticité, on peut montrer que  $\sigma_r = \sigma_\theta$  et  $\sigma_z = \sigma_r - \sigma_0$ , l'équation (2.2) devient :

$$\frac{1}{\sigma_z}d\sigma_z = -\frac{2\bar{m}}{h}dr \quad (2.3)$$

La solution générale de l'équation (2.3) peut s'écrire par la relation suivante :

$$\sigma_z(r) = Ce^{-\frac{2\bar{m}}{h}r} \quad (2.4)$$

On suppose que lors de la déformation, la pièce garde une forme cylindrique. Le

paramètre  $C$  est calculé en utilisant la condition aux limites  $\sigma_r(R) = 0$  (surface libre), soit  $\sigma_z(R) = \sigma_0$ , l'équation (2.4) devient :

$$\sigma_z(r) = \sigma_0 e^{\frac{2\bar{m}}{h}(R-r)} \quad (2.5)$$

La détermination de l'effort de forgeage est effectuée par l'intégrale de  $\sigma_z$  sur la surface supérieure, on obtient l'expression de la force pour une pièce de forme cylindrique par la relation suivante :

$$F = \frac{\pi D^2 \sigma_0}{2A} \left[ \frac{1}{A} (e^A - 1) - 1 \right] \quad (2.6)$$

avec  $A = \frac{\bar{m}D}{h}$  un terme fonction du frottement entre les surfaces des outillages et de la pièce déformable.

L'écoulement plastique conserve le volume du lopin cylindrique. A chaque instant, le volume  $V(t)$ , la hauteur  $h(t)$  et l'aire  $S(t) = \pi \frac{D^2(t)}{4}$  de la section de la partie qui se déforme vérifient donc :

$$\pi \frac{D^2(t)}{4} h(t) = \pi \frac{D_0^2}{4} h_0 \quad (2.7)$$

où  $D_0$  et  $h_0$  sont respectivement les valeurs initiales de diamètre et de hauteur du lopin. En simplifiant l'équation (2.7), on obtient :

$$D(t) = D_0 \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}} \quad (2.8)$$

La contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_0$  dépend du modèle de comportement du matériau et peut être obtenue par une modélisation plus ou moins complexe qui dépend du matériau utilisé et des conditions physiques lors de l'essai. Dans notre étude, nous avons utilisé des lopins cylindriques en plasticine ayant un comportement en écrasement similaire à l'acier à chaud. En négligeant le terme fonction de la température, on peut par exemple choisir la formule très utilisée de Norton-Hoff suivante :

$$\sigma_0 = k \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \quad (2.9)$$

où  $k$  est la consistance du matériau,  $n$  et  $m$  sont des constantes propres au matériau. La déformation selon l'axe horizontale  $z$  peut être exprimée par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \quad (2.10)$$

et la vitesse de déformation par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)} \quad (2.11)$$

En l'absence des vibrations mécaniques, la vitesse du déplacement de la matrice supérieure  $\dot{h}(t)$  peut être introduite par la relation :

$$\dot{h}(t) = v_0 \quad (2.12)$$

où  $v_0$  est la vitesse du coulisseau. L'intégrale de l'équation (2.12) à l'aide des conditions initiales [ $h(t=0) = h_0$ ] donne la hauteur en fonction de temps :

$$h(t) = h_0 + v_0 t \quad (2.13)$$

Avec les valeurs initiales considérés ( $h_0$  et  $D_0$ ) et la vitesse du coulisseau  $v_0$ , nous pouvons calculer la hauteur  $h(t)$  par l'équation (2.13) et le diamètre par l'équation (2.8).

En remplaçant les différents termes dans l'équation (2.6), on obtient :

$$F = \frac{\pi D(t) h(t)}{2\bar{m}} k \left( \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \right)^n \left( \frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)} \right)^m \left( \frac{h(t)}{\bar{m} D(t)} \left( e^{\frac{\bar{m} D(t)}{h(t)}} - 1 \right) - 1 \right) \quad (2.14)$$

## 2.3 Description du dispositif expérimental

Un dispositif expérimental a été développé et placé au sein d'une machine d'essais de traction/compression Lloyd (figure 2.3). Cela a permis d'imposer une vitesse constante  $v_0$  (traverse mobile) et d'ajouter une vibration  $u_3(L, t)$  à travers un système élastique actionné par un actionneur piézoélectrique. La figure 2.3 montre une photo du dispositif expérimental. La traverse mobile de la machine Lloyd est reliée à la matrice supérieure de l'outillage permettant de comprimer un lopin cylindrique en plasticine à vitesse constante  $v_0$  (la préparation des lopins cylindriques est décrite dans l'annexe A.4). L'utilisation d'un lubrifiant adéquat permet d'obtenir une similitude entre les essais avec la plasticine et ceux de forgeage à chaud de l'acier. Les essais avec la plasticine constituent la première étape pour démontrer l'intérêt des vibrations associées au procédé de forgeage. L'intérêt de travailler avec la plasticine est que l'effort de forgeage est très faible de l'ordre 200N.

L'actionneur piézoélectrique multicouche (APM) a été intégré au sein d'un sys-

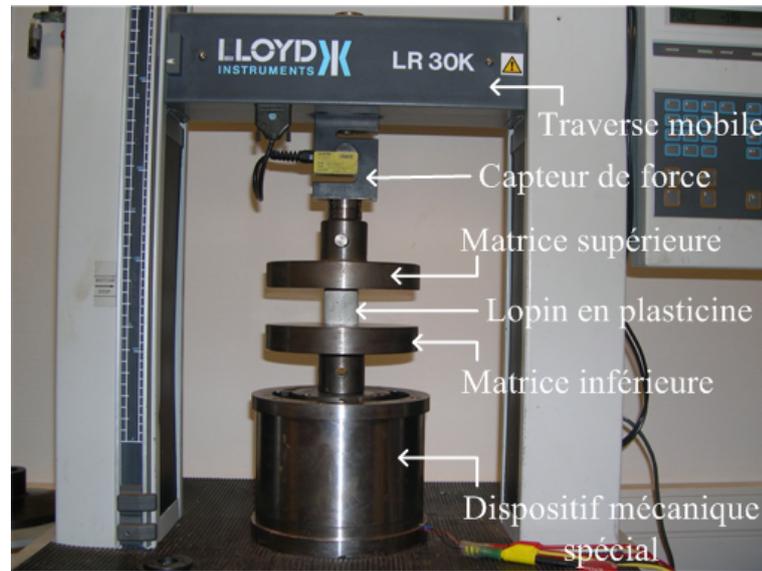


FIGURE 2.3 – Vue du dispositif expérimental.

tème élastique (dispositif mécanique) pour faire vibrer la matrice inférieure. L'actionneur piézoélectrique PSt 1000/16/60, fabriqué par Piezomechanik GmbH, a été retenu pour ses caractéristiques : i) charge maximale de  $12\text{KN}$ , ii) vibration d'amplitude maximale de  $75\mu\text{m}$  sous une tension bipolaire  $-200\text{V}/+1000\text{V}$ . Pour éviter tout dommage mécanique, l'APM doit être chargé uniquement selon son axe longitudinal. Pour cette raison, un dispositif mécanique spécial représenté sur la figure 2.5 a été conçu. Il autorise des vibrations dans la direction souhaitée et supprime tous les efforts sur l'APM dans les autres directions. A travers notre étude, nous avons utilisé un seul APM placé au centre du tube intérieur fixé au plateau du haut. Un appui ponctuel avec le plateau du haut permet de régler le découplage cinématique nécessaire pour l'actionneur. Le plateau du bas est encastré et solidaire du tube extérieur. Les lames flexibles relient le tube intérieur au tube extérieur. Six lames réparties en deux sous ensembles assurent une liaison glissière sans frottement. Le choix des lames flexibles associés à une précontrainte naturelle de chargement issu de la mise en forme évite tout jeu dans le mécanisme. Le dimensionnement des lames est effectué pour limiter la dissipation d'énergie lors de leur déformation. Ce système élastique reprend donc tous les autres efforts sur la structure extérieure. L'actionneur piézoélectrique fait finalement vibrer l'appui ponctuel, le tube intérieur et le plateau du haut par rapport au tube extérieur. L'alimentation électrique de l'actionneur piézoélectrique est réalisée par un redresseur, un onduleur commandé en modulation à largeur d'impulsion (MLI) et deux filtres passe bas comme représenté sur la figure 2.6. Le redresseur est connecté en série avec l'onduleur MLI en vue de pouvoir alimenter avec une tension sinusoïdale bipolaire  $-200\text{V}/+1000\text{V}$  aux bornes de l'actionneur piézoélectrique. L'onduleur est réalisé en vue de pouvoir modifier la

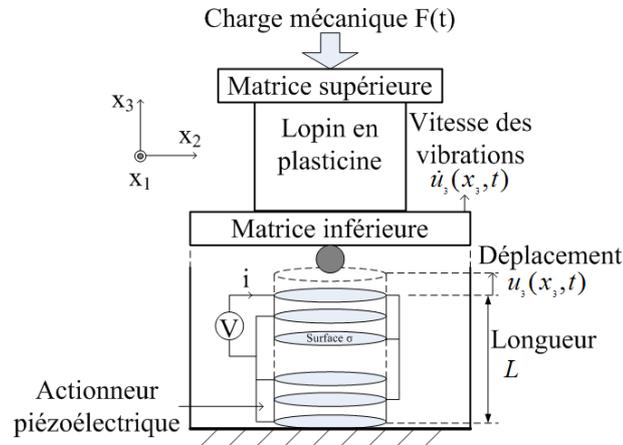


FIGURE 2.4 – Schéma du dispositif expérimental.

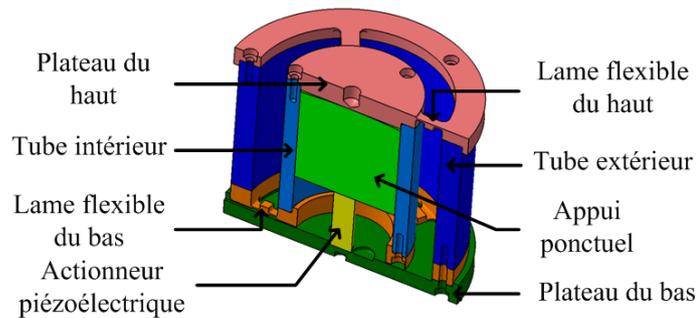


FIGURE 2.5 – Vue du dispositif mécanique.

fréquence, l'amplitude et la forme de l'onde de tension aux bornes de l'actionneur. Les filtres LC sont construits afin de pouvoir permettre d'adapter la source de tension de sortie de l'onduleur à l'impédance capacitive de l'actionneur et d'éviter que des harmoniques de tension excitent des fréquences de résonance du système. Le descriptif détaillé du schéma d'alimentation électrique et le calcul des paramètres des filtres sont donnés en annexe B.

## 2.4 Capteurs pour l'acquisition

Le capteur confocale chromatique montré sur la figure 2.7 a été utilisé pour mesurer sans contact l'amplitude des vibrations. Ce type de capteur CHR 150N, fabriqué par STIL, possède les caractéristiques principales données dans le tableau 2.1. Il est possible d'utiliser différents collimateurs qui peuvent être associés à différents objectifs chromatiques en fonction de la distance de travail. La lame de référence définit

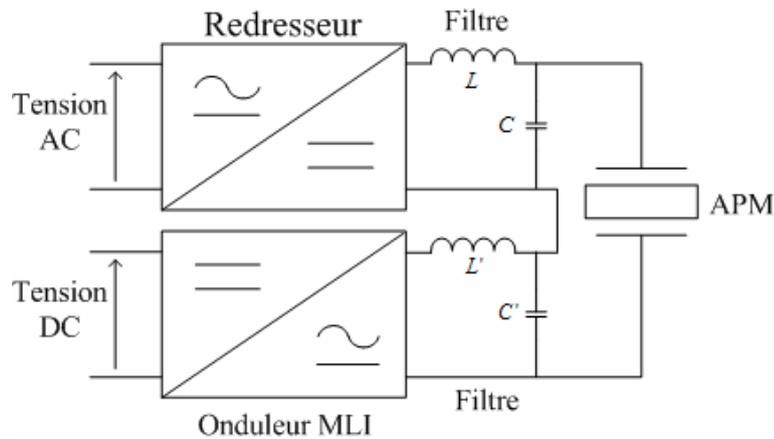


FIGURE 2.6 – Schéma d'alimentation électrique de l'APM.

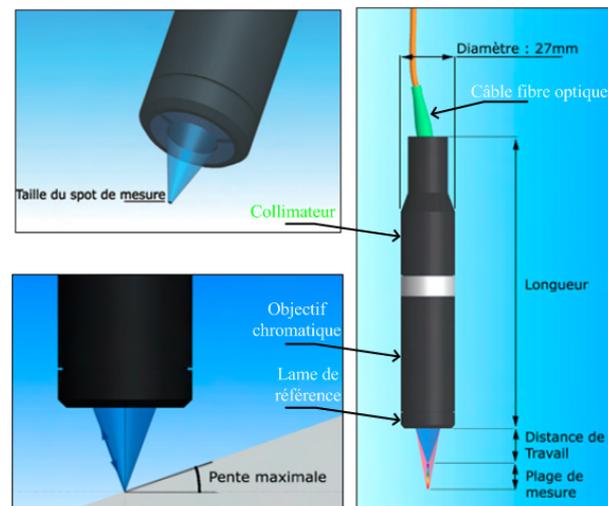
le zéro dans le champ de mesure du crayon optique. Elle permet de compenser les défauts du système de balayage.

Le capteur de force de série XLC30K pour la machine d'essais de traction/compression Lloyd est montré sur la figure 2.8 et les caractéristiques principales sont données dans le tableau 2.2.

Les valeurs de la tension, du courant, des amplitudes des vibrations et de l'effort sont mesurés respectivement par une sonde différentielle, une sonde de courant, un capteur confocale chromatique et un capteur de force. Toutes les données sont mesurées via une carte d'acquisition de National Instruments et traités avec le logiciel Matlab<sup>®</sup>.

TABLE 2.1 – Caractéristiques principales du CHR 150 N

Ref. 310 320	Focale 8mm 18mm	Plage de mesure 300 $\mu m$ 900 $\mu m$	Distance de travail environ 5mm environ 16mm
Résolution 0,05 $\mu m$ ou 0,015 $\mu m$	Erreur de linéarité $\pm 0,1\%$	Cadence de mesure 30 à 1000Hz	Source lumineuse lampe halogène

FIGURE 2.7 – Vue de capteur *CHR150N*FIGURE 2.8 – Vue de capteur de force *30KN*

## 2.5 Identification du modèle de comportement en forgeage : cas de l'écrasement d'un lopin cylindrique

Il est nécessaire maintenant d'identifier le modèle de comportement en écrasement d'un lopin cylindrique en plastiline ayant un diamètre de  $40\text{mm}$  et une hauteur de  $40\text{mm}$  placé entre les deux matrices (voir figure 2.3). Il est à noter que l'équation (2.14) dépend de quatre paramètres  $k$ ,  $n$ ,  $m$  et  $\bar{m}$ . L'identification du modèle consiste donc à déterminer ces quatre paramètres à partir d'une série de mesures en utilisant la méthode des moindres carrés ou la méthode d'optimisation d'un critère

TABLE 2.2 – Caractéristiques principales du capteur de force 30KN

Modèle	Force max	Résolution	Gamme de mesure
XLC30K	30KN	1,0N	600 à 30000N

par *gradient* ou par *simplex*.

Les essais ont été réalisés sur des lopins de plasticine de même dimension avec deux vitesses d'écrasement différentes. La machine d'essais Lloyd entraine la matrice supérieure avec deux vitesses de descente du coulisseau constantes  $v_0 = 1\text{mm/s}^{-1}$  et  $v_0 = 3\text{mm/s}^{-1}$ . Les données sont d'abord stockées dans un fichier Excell intitulé "identification NM.xls". Après mise en forme correcte pour l'utilisation sous Matlab<sup>®</sup>, et un filtrage par un filtre median suivi d'un filtre moyennneur sur 5 échantillons, on obtient les résultats de la figure 2.9.

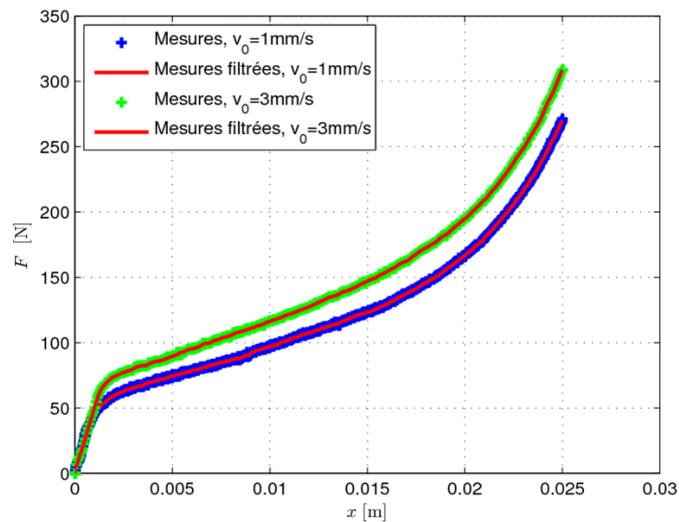


FIGURE 2.9 – Mesures de l'effort d'écrasement en fonction du déplacement pour deux vitesses du coulisseau.

### 2.5.1 Méthode d'identification par les moindres carrés

La méthode d'identification par les moindres carrés est très efficace, simple et permet d'obtenir les valeurs de coefficient d'un modèle sans aucun biais, mais elle nécessite cependant que certaines hypothèses soient remplies. En particulier, le modèle doit être linéaire en fonction des paramètres à déterminer, le bruit de mesure doit être aléatoire et aucune corrélation ne doit exister entre les différentes grandeurs mesurées.

La première question qui se pose est donc d'écrire l'équation (2.14) sous forme linéaire. Supposons d'abord que l'effet des frottements est négligeable. L'équation (2.14) devient :

$$F = \frac{\pi D^2(t)}{4} k \left( \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \right)^n \left( \frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)} \right)^m \quad (2.15)$$

En appliquant la fonction  $\log()$  à l'équation précédente, on obtient une équation linéaire en les coefficients inconnus que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\log(F) = \log\left(\frac{\pi D^2(t)}{4}\right) + \log(k) + n \log\left(\frac{h_0 - h(t)}{h(t)}\right) + m \log\left(\frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)}\right) \quad (2.16)$$

$$\log\left(\frac{4F}{\pi D^2(t)}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \log\left(\frac{h_0 - h(t)}{h(t)}\right) & \log\left(\frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(k) \\ n \\ m \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Nous pouvons donc choisir comme vecteur de mesure  $Y = \log\left(\frac{4F}{\pi D^2(t)}\right)$  et comme matrice d'observation  $\begin{bmatrix} 1 & \log\left(\frac{h_0 - h(t)}{h(t)}\right) & \log\left(\frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)}\right) \end{bmatrix}$  pour obtenir l'équation de la régression linéaire :

$$Y = M\Theta \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) a comme solution optimale,  $\hat{\Theta} = (M^t M)^{-1} M^t Y$ . On peut remarquer que la méthode ne convient pas (ou n'est pas suffisamment précise) si les colonnes de la matrice M ne sont pas riches, c'est-à-dire qu'ils ne varient pas suffisamment. Ceci est particulièrement le cas si l'on ne fait qu'un seul essai d'écrasement à une vitesse constante.

### 2.5.2 Résultats par les moindres carrés

L'écriture des données de mesure avec les deux vitesses différentes dans un même vecteur de mesure permet d'obtenir les trois paramètres du modèle pour une valeur

nulle du coefficient de frottement. On a limité les vecteurs de mesure à l'intervalle de déformation  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Pour des valeurs de déformation supérieure, le lopin de plasticine présente une forme en tonneau et des fissures apparaissent. Le modèle est donc moins précis pour les grandes déformations. On obtient les paramètres optimaux suivants :

$$\begin{aligned}\hat{k} &= 97512Pa \\ \hat{n} &= 0,0670 \\ \hat{m} &= 0,1517\end{aligned}\tag{2.19}$$

A partir de ces valeurs, l'équation (2.15) permet de calculer l'effort  $\hat{F}$  estimé par le modèle. L'erreur d'identification  $\epsilon = F - \hat{F}$  peut être déterminée et à partir de là les erreurs sur les coefficients sont calculées. On obtient :

- valeur efficace de l'erreur :  $\|\epsilon\| = 3,4N$
- valeur relative de l'erreur :  $\Delta F = \frac{\|\epsilon\|}{\|F\|} = 3\%$
- valeur relative de l'erreur de consistance :  $\Delta k = 4,4\%$
- valeur relative de l'erreur sur l'exposant  $n$  :  $\Delta n = 12,7\%$
- valeur relative de l'erreur sur l'exposant  $m$  :  $\Delta m = 11,6\%$

De plus, on remarque que la valeur moyenne de l'erreur n'est pas nulle. On a  $E(\epsilon) = -0,33N$ , il existe donc un biais sur les valeurs des coefficients déterminés précédemment. L'erreur relative est de 3%.

On peut améliorer la précision du modèle en tenant compte du coefficient de frottement  $\bar{m}$ . Comme on n'a pas trouvé de linéarisation du modèle par rapport à ce coefficient, la méthode consiste à optimiser l'identification par une boucle externe qui fait varier le coefficient  $\bar{m}$ . L'équation (2.14) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{2F\bar{m}}{\pi D(t)h(t)} \left( \frac{h(t)}{\bar{m}D(t)} \left( e^{\frac{\bar{m}D(t)}{h(t)}} - 1 \right) - 1 \right)^{-1} = k \left( \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \right)^n \left( \frac{-h_0\dot{h}(t)}{h^2(t)} \right)^m\tag{2.20}$$

En utilisant la fonction  $\log()$ , l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}\log \left( \frac{2F\bar{m}}{\pi D(t)h(t)} \right) - \log \left( \frac{h(t)}{\bar{m}D(t)} \left( e^{\frac{\bar{m}D(t)}{h(t)}} - 1 \right) - 1 \right) &= \log(k) + \\ n \log \left( \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \right) + m \log \left( \frac{-h_0\dot{h}(t)}{h^2(t)} \right)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Le nouveau vecteur de mesure s'écrit :

$$Y = \log \left( \frac{2F\bar{m}}{\pi D(t)h(t)} \right) - \log \left( \frac{h(t)}{\bar{m}D(t)} \left( e^{\frac{\bar{m}D(t)}{h(t)}} - 1 \right) - 1 \right)\tag{2.22}$$

La matrice d'observation reste inchangée. On peut alors imaginer faire varier la valeur du coefficient de frottement  $\bar{m}$  et par l'étude du minimum d'un critère chercher la valeur optimale du coefficient de frottement. Toute cette étude peut être reprise en

utilisant l'ensemble des données de mesure disponible, donc pour une déformation  $\varepsilon$  comprise entre 0 et 1,7. Lorsque le coefficient de frottement varie, on a trouvé alors un minimum pour  $\bar{m} = 0,02$ . Dans ces conditions, les résultats de l'identification sont représentés sur les figures 2.10 et 2.11. On obtient les résultats suivants sur les coefficients et les erreurs :

$$\begin{aligned}\hat{k} &= 93744 Pa \\ \hat{n} &= 0,0620 \\ \hat{m} &= 0,1447\end{aligned}\tag{2.23}$$

A partir de ces valeurs, l'équation (2.14) permet de calculer l'effort  $\hat{F}$  estimé par le modèle. L'erreur d'identification  $\epsilon = F - \hat{F}$  peut être déterminée et à partir de là les erreurs sur les coefficients sont calculées. On obtient :

- valeur efficace de l'erreur :  $\|\epsilon\| = 3,7N$
- valeur relative de l'erreur :  $\Delta F = \frac{\|\epsilon\|}{\|F\|} = 2,6\%$
- valeur relative de l'erreur de consistance :  $\Delta k = 2,7\%$
- valeur relative de l'erreur sur l'exposant  $n$  :  $\Delta n = 11,3\%$
- valeur relative de l'erreur sur l'exposant  $m$  :  $\Delta m = 9,0\%$

De plus, on remarque que la valeur moyenne de l'erreur n'est pas nulle. On a  $E(\epsilon) = -0,26N$ , il existe donc toujours un léger biais sur les valeurs des coefficients déterminés précédemment. L'erreur relative est de 2,6%.

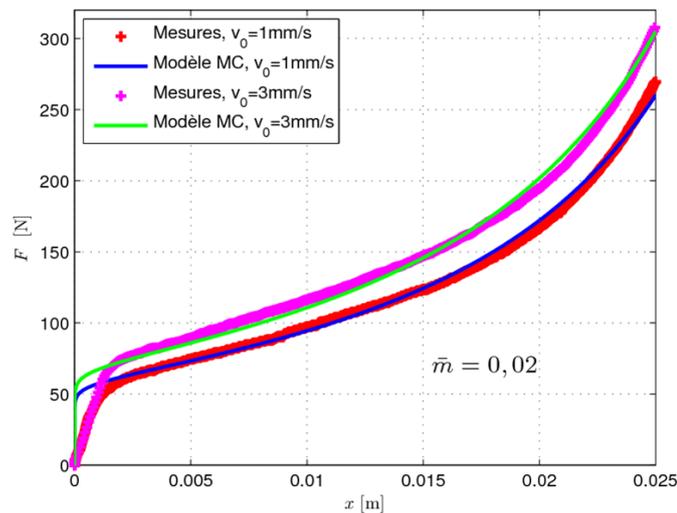


FIGURE 2.10 – Comparaison entre mesures et modèle en fonction du déplacement.

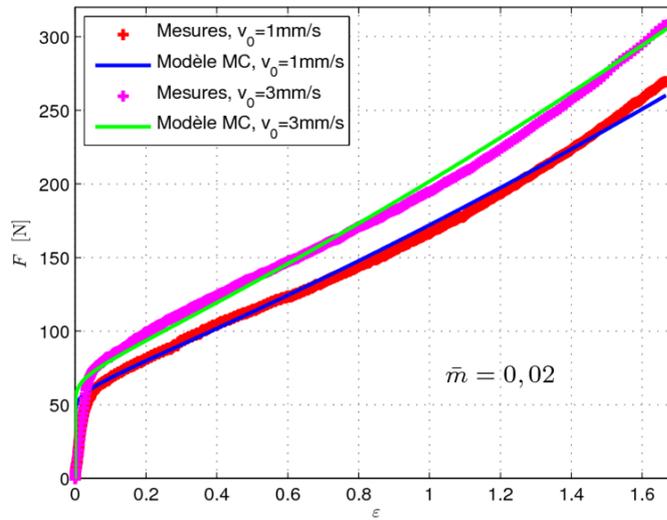


FIGURE 2.11 – Comparaison entre mesures et modèle en fonction de la déformation.

### 2.5.3 Méthode d'identification non linéaire par optimisation d'un critère

La méthode d'identification par les moindres carrés nécessite une écriture linéaire du critère en fonction des coefficients du modèle. Lorsque le modèle présente des discontinuités, en particulier lorsque la fonction est définie par morceaux, il apparaît clairement sur les simulations précédentes que le modèle ne correspond pas au début de la courbe. En effet, le comportement du matériau est d'abord élastique, puis plastique. Le comportement du matériau peut s'écrire :

$$F = \begin{cases} k_e \varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \frac{\pi D(t) h(t)}{2 \bar{m}} k \left( \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \right)^n \left( \frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)} \right)^m \left( \frac{h(t)}{\bar{m} D(t)} \left( e^{\frac{\bar{m} D(t)}{h(t)}} - 1 \right) - 1 \right) & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $\varepsilon_0$  est la déformation maximale dans la zone élastique,  $k_e$  est la constante du matériel en  $N$ ,  $A = \frac{\bar{m} D(t)}{h(t)}$  le terme dû aux frottements de surface et  $\sigma_0 = k \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m$ . La fonction de l'équation (2.24) est difficile à utiliser avec la méthode des moindres carrés alors qu'elle est simple à simuler. Il est donc possible d'écrire un modèle de simulation qui calcule la force  $F$  comme suit :

$$F = f(D(t), h(t), \theta) \quad (2.25)$$

avec  $\theta = [k_e \ k \ n \ m \ \bar{m}]$  et  $D(t)$  et  $h(t)$  les valeurs obtenues à partir des mesures du déplacement du coulisseau. On définit également un critère  $J$  :

$$J(\theta) = (F - F_m)^t(F - F_m) \tag{2.26}$$

La valeur optimale  $\hat{\theta}$  du vecteur des paramètres est celle qui minimise le critère. Les méthodes d'optimisation par *gradient* ou par *simplex* sont alors indiquées lorsque le vecteur de paramètres à optimiser comporte seulement 5 termes. On obtient les résultats suivants avec la méthode du gradient :

$$\begin{aligned} \hat{k}_e &= 1774N \\ \hat{k} &= 87356Pa \\ \hat{n} &= 0,0310 \\ \hat{m} &= 0,1417 \\ \hat{\bar{m}} &= 0,0759 \end{aligned} \tag{2.27}$$

- valeur efficace de l'erreur :  $\|\epsilon\| = 3,2N$
- valeur relative de l'erreur :  $\Delta F = \frac{\|\epsilon\|}{\|F\|} = 2,3\%$

La valeur moyenne de l'erreur est  $E(\epsilon) = 0,09N$ . Il existe donc toujours un léger biais sur les valeurs des coefficients déterminés précédemment, mais il est beaucoup plus faible. Cette méthode ne permet pas pour l'instant de déterminer la valeur relative de l'erreur sur les coefficients. A partir de ces valeurs, l'équation (2.24) permet de calculer l'effort  $\hat{F}$  estimé par le modèle. Les figures 2.12 et 2.13 superposent les mesures aux efforts recalculés par le modèle.

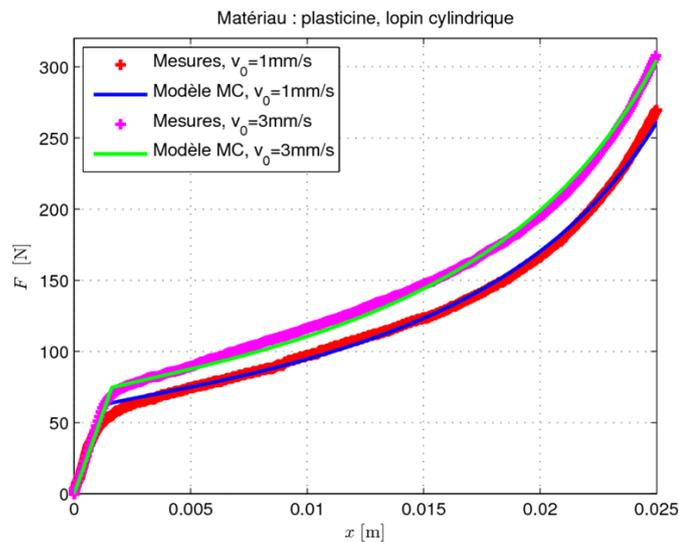


FIGURE 2.12 – Comparaison entre mesures et modèle en fonction du déplacement.

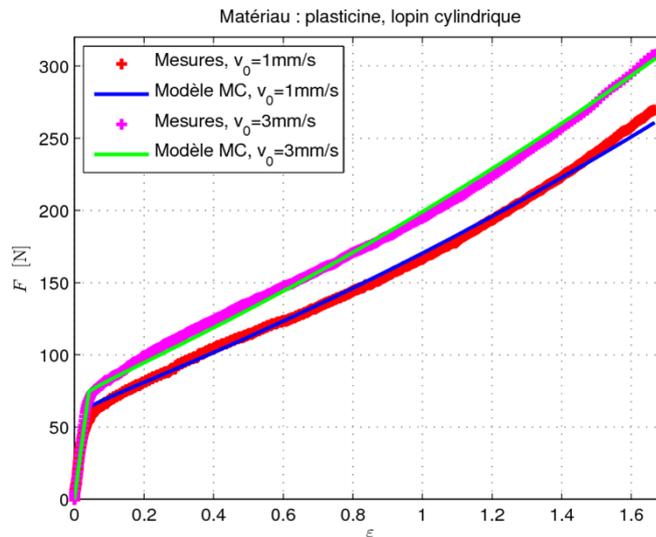


FIGURE 2.13 – Comparaison entre mesures et modèle en fonction de la déformation.

En conclusion, les méthodes utilisées dans la section 2.5 permettent d'identifier le modèle de comportement en écrasement d'un lopin de plastiline. Le modèle initialement utilisé est basé sur la méthode des tranches. Afin d'améliorer la précision de l'identification, on a ensuite ajouté une partie de caractéristique linéaire pour tenir compte du comportement élastique du matériau. Cette nouvelle caractéristique nécessite l'utilisation des méthodes d'optimisation d'un critère pour identifier l'ensemble des coefficients du modèle. La précision finale obtenue lors de l'identification est correcte. Cette méthode demande à être complétée par une étude de la précision relative des coefficients identifiés. Enfin, une réflexion est peut être nécessaire pour effectuer des essais avec un matériau et une préparation des lopins qui garantissent une meilleure reproductibilité des essais. Les paramètres d'un lopin cylindrique de plastiline sont obtenus dans le tableau 2.3.

TABLE 2.3 – Paramètres du modèle

Type de matériau	Plastiline
Dimension du matériau	Ø40mm × 40mm
Constante du matériel $k_e$ , $k$ , $n$ et $m$	1774, 87356Pa, 0,0310 et 0,1417
Coefficient de frottement	0,0759
Matrices	Acier
Vitesse de coulisseau	$3\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$
Déplacement de la matrice supérieure	25mm

## 2.6 Simulation par éléments finis sous Forge2008 pour l'écrasement d'un lopin cylindrique

L'analyse d'un modèle par éléments finis du procédé de forgeage d'un lopin cylindrique de plasticine sans vibrations mécaniques est développée sous un logiciel commercial éléments finis Forge2008<sup>®</sup>. Les conditions de la simulation sont configurées selon celles des essais et en utilisant les paramètres identifiés dans la section précédente (les paramètres peuvent être trouvés dans le tableau 2.3). Les matrices rigides sont pilotées selon les courbes représentant le déplacement en fonction du temps. Le pas de calcul en temps est de 0,0001s. La figure 2.14 superpose les mesures aux efforts recalculés par le modèle analytique et le modèle sous Forge2008<sup>®</sup>.

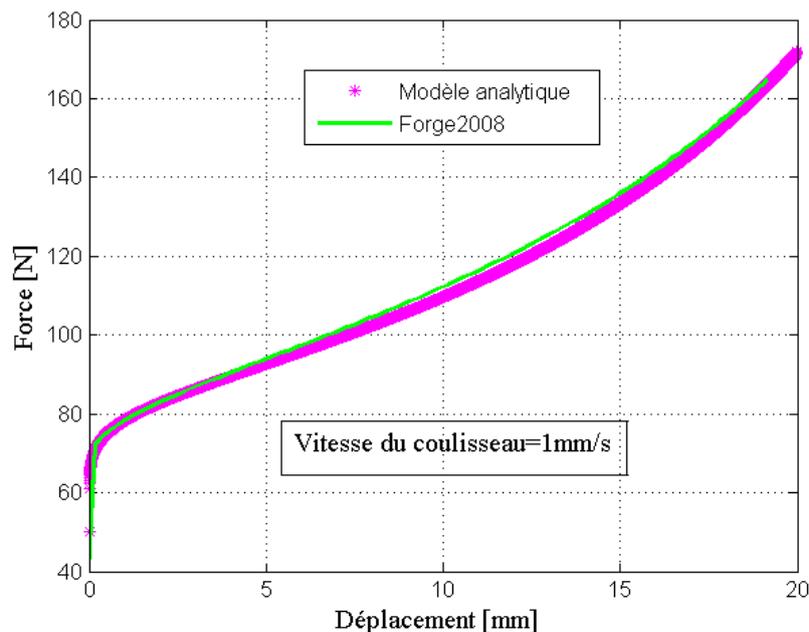


FIGURE 2.14 – Efforts de forgeage sans vibrations en fonction du déplacement du coulisseau.

## 2.7 Conclusion

Le modèle analytique d'un lopin cylindrique en plasticine par la méthode classique des tranches a été présenté dans ce chapitre. Le modèle a été implémenté en

utilisant le logiciel *Matlab*<sup>®</sup>. Dans le chapitre 5, ce modèle sera utilisé pour intégrer le modèle d'actionneur piézoélectrique par l'approche des éléments finis décrit dans le chapitre 4 au paragraphe 4.3 appelé par la suite modèle de couplage traduisant le comportement réel du dispositif expérimental complet. L'analyse de ce modèle complet sera étudiée dans le chapitre 5.

Un dispositif expérimental original complet permettant de générer les vibrations mécaniques a été conçu et réalisé. Il permet de faire vibrer la matrice inférieure de forgeage pour des amplitudes allant de 0 à  $60\mu m$  et des fréquences variant de 1 à  $130Hz$  grâce à un actionneur piézoélectrique alimenté par un convertisseur électronique. Le modèle de comportement en écrasement d'un lopin cylindrique de plasticine a été identifié à l'aide d'une série de mesures en utilisant la méthode des moindres carrés. Nous avons ensuite ajouté une partie de caractéristique linéaire pour tenir compte du comportement élastique du matériau afin d'améliorer la précision de l'identification en utilisant les méthodes d'optimisation d'un critère pour identifier l'ensemble des coefficients du modèle. Une fois les paramètres du modèle identifiés, nous avons effectué la simulation par éléments finis sous *Forge2008*<sup>®</sup> afin de comparer des résultats avec ceux obtenus par le modèle analytique du procédé d'écrasement et les essais expérimentaux. La comparaison montre une bonne concordance des résultats.

# Chapitre 3

## Matériaux piézoélectriques

### 3.1 Introduction

Tout d'abord, dans ce chapitre, nous introduisons le phénomène piézoélectrique, les équations constitutives de la piézoélectricité, les coefficients d'une céramique piézoélectrique et les modes de couplage électromécanique. Ensuite, nous déduisons les expressions de la contrainte  $T_3$  et de l'induction électrique  $D_3$  en fonction du couple de variables choisies (tenseur de déformation  $S_3$  et champ électrique  $E_3$ ). Finalement, nous élaborons l'expression de l'énergie du système (l'expression du Lagrangien et du principe d'Hamilton) en fonction des variables mixtes  $S_3$  et  $E_3$  qui servira au chapitre suivant à déduire les équations du mouvement du système.

Ce chapitre permet aussi de comprendre les études menées par d'autres équipes de recherche sur les actionneurs piézoélectriques, leurs modélisations et applications pour les chapitres suivants. Le travail de ce chapitre se fonde sur les références [27], [28], [29] [30] [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37] et [38]. Ikeda [27] et Kao [28] ont décrit les phénomènes ferroélectriques, piézoélectriques et pyroélectriques en introduisant les équations des interactions entre les variables thermiques, mécaniques et électriques. En négligeant l'effet pyroélectrique dans notre étude, nous établissons les équations linéaires piézoélectriques montrant les relations entre les grandeurs électriques et mécaniques. Par définition la piézoélectricité résulte de la combinaison de propriétés élastiques et électriques. Pour la déformation infinitésimale, nous résumons donc les relations linéaires diélectriques et élastiques en nous basant sur les références [30], [31], [32], [33] et [36]. Dans la mécanique classique, les indices des composants de coefficients élastiques et des composants de tenseurs sont de l'ordre de 4 et 2. Conformément aux normes piézoélectriques définies par l'IEEE [35], on

simplifie les indices respectivement à l'ordre de 2 et 1. Nos notations des coefficients piézoélectriques et des grandeurs électriques et mécaniques sont conformément aux notations des techniques de l'ingénieur [29]. Dans le cadre de notre étude, l'actionneur piézoélectrique, de type céramique PZT, fonctionne en mode longitudinal (ou mode-33). Les équations piézoélectriques sont donc exprimées pour le mode-33 et en fonction du couple de variables choisies ( $S_3$  et  $E_3$ ). Puisque l'expression de l'énergie cinétique est fonction de la vitesse du déplacement ( $\dot{u}_3$ ), il est plus intéressant d'exprimer les relations du Lagrangien en fonction des couples de variables choisies ( $S_3$  et  $E_3$ ) et ( $S_3$  et  $D_3$ ) afin de faciliter l'application du principe variationnel dans le chapitre suivant. Cependant dans ce chapitre, on donne les expressions du Lagrangien et du principe d'Hamilton uniquement en fonction des variables mixtes  $S_3$  et  $E_3$ .

## 3.2 Phénomène piézoélectrique

Le phénomène piézoélectrique a été découvert dans certains matériaux cristallins par Pierre Curie et son frère Paul Jacques Curie à Paris en 1880 (le préfixe "piezo" est le mot grec désignant la pression). Ce phénomène se manifeste sous deux formes principales : les effets piézoélectriques directs (figure 3.1) et les effets piézoélectriques inverses (figure 3.2). Les effets piézoélectriques apparaissent dans des matériaux à structure cristalline qui ne présentent pas de centre de symétrie [27] [28] [39]. Le premier effet est dû à l'apparition de charges électriques sous l'action d'une contrainte mécanique appliquée au matériau piézoélectrique. Le signe des charges dépend du sens de l'orientation des contraintes appliquées au matériau. Le deuxième effet apparaît lorsque le matériau piézoélectrique est soumis à un champ électrique, il en résulte une déformation en expansion ou en contraction du matériau. La propriété piézo-

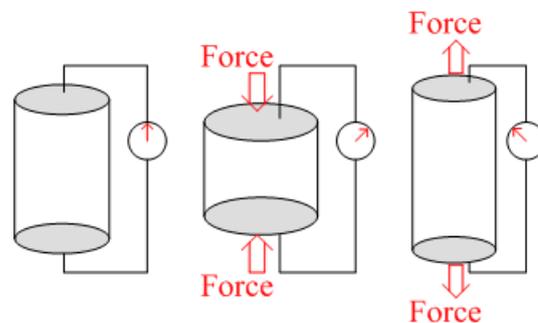
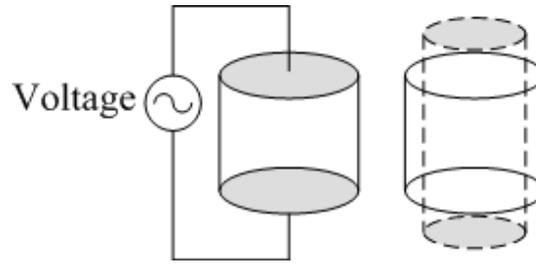


FIGURE 3.1 – *Effet piézoélectrique direct.*

électrique existe dans plusieurs types de matériaux naturels, le plus connu étant

FIGURE 3.2 – *Effet piézoélectrique indirect.*

le quartz. Toutefois il est à noter que les équations caractérisant leurs propriétés piézoélectriques naturelles possèdent des coefficients de gain de très faibles valeurs. C'est pour cela que la plupart des dispositifs modernes nécessitant des propriétés piézoélectriques très importantes sont fabriquées artificiellement en utilisant une céramique polycristalline composée des oxydes de plomb, de zirconium et de titane (PZT). Ensuite on y ajoute d'autres oxydes afin d'ajuster les propriétés piézoélectriques et d'obtenir des coefficients piézoélectriques plus importants par rapport à ceux caractérisant les cristaux naturels [29]. Les céramiques PZT synthétiques ont un taux de déformation par unité de champ électrique appliqué de l'ordre de 100 fois supérieur au quartz (matériaux naturels). Elles sont largement utilisées pour réaliser des actionneurs dans l'industrie. Quant aux polymères piézoélectriques (PVDF), ils présentent des constantes piézoélectriques encore plus importantes par rapport à celles des céramiques PZT. Les polymères piézoélectriques sont plus utilisés comme capteurs.

### 3.3 Equations constitutives de la piézoélectricité

Dans un milieu continu de matériau piézoélectrique, les grandeurs électriques et mécaniques à considérer sont respectivement les vecteurs induction électrique  $\mathbf{D}$  et champ électrique  $\mathbf{E}$  et les tenseurs de déformation  $\mathbf{S}$  et de contrainte  $\mathbf{T}$ . Pour un milieu continu déformable, lorsque le corps du solide est soumis à l'action de forces mécaniques extérieures, les tenseurs de contrainte représentent fondamentalement des forces internes dans le volume  $\Omega$  appelées **forces volumiques**  $\bar{X}$  et les forces sur la surface  $\Sigma$  appelées **forces superficielles**  $F_s$  [31]. Le corps solide se déforme et chaque point  $x$  de ce milieu se déplace d'une quantité  $u(x)$ . Pour la déformation infinitésimale, les composants du tenseur de déformation d'ordre 2 sont définis par la relation suivante [32] :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

où  $S_{ij}$  sont les composants du tenseur de déformation,  $i$  et  $j$  prennent les valeurs 1, 2, 3. On note  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $u_i$  sont les composants du champ du vecteur déplacement  $u(x)$  selon l'axe  $x_i$ . Les composants du tenseur de déformation sont symétriques et les termes vérifient donc :

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (3.2)$$

Il est à noter que les indices des composants de grandeur mécanique sont de l'ordre de 2. Pour la facilité d'écriture, les indices peuvent être simplifiés à l'ordre 1. Les indices  $i$  et  $j$  prennent les valeurs 1, 2, 3 qui peuvent être remplacés par les indices  $p$  et  $q$  prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 selon le tableau 3.1 [35]. Cette simplification d'écriture est appelée la notation de **Voigt**. Théoriquement la piézoélectricité résulte

---

TABLE 3.1 – Notation des indices de matrices

---

ij :	11	22	33	23 ou 32	31 ou 13	12 ou 21
p ou q :	1	2	3	4	5	6

---

de la combinaison de propriétés élastique et électrique. D'un point de vue mécanique, un milieu piézoélectrique est proche d'un milieu élastique. Selon la loi de Hooke, les composants du tenseur de déformation  $\mathbf{S}_p$  sont reliés aux composants du tenseur de contrainte  $\mathbf{T}_q$ . Les relations contraintes-déformations sont établis par les relations suivantes [30] :

$$\begin{aligned} T_p &= c_{pq} S_q \\ S_p &= s_{pq} T_q \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $c_{pq}$  et  $s_{pq}$  sont respectivement les composants de la constante élastique (ou rigidités) et de la souplesse du matériau. Quant au point de vue électrique, un milieu piézoélectrique est proche d'un milieu diélectrique. La loi du comportement est définie en reliant les composants de l'induction électrique  $\mathbf{D}_i$  aux composants du champ électrique  $\mathbf{E}_j$  par les relations suivantes [33] :

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_{ij} E_j \\ E_i &= \beta_{ij} D_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\varepsilon_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  sont respectivement les composants de la constante diélectrique du matériau (permittivités relatives) et de l'impermittivité relative. Et le champ électrique est la dérivée d'un potentiel scalaire :

$$E = -\phi_{,j} \quad (3.5)$$

Par définition, la piézoélectricité fait apparaître des charges électriques sur les faces du matériau sous l'action de forces mécaniques (effet piézoélectrique direct). Donc les

composantes de charge électrique sont proportionnelles aux composants du tenseur de contrainte. On obtient ainsi la relation suivante [34] :

$$D_i = d_{ip}T_p \quad (3.6)$$

où  $d_{ip}$  sont les composantes de la constante piézoélectrique ou encore du coefficient piézoélectrique de charge. Pour l'effet piézoélectrique inverse, l'application des charges électriques au matériau induit une déformation de la forme géométrique du matériau. Les composants du tenseur de déformation  $\mathbf{S}_p$  résultants sont proportionnels aux composants du champ électrique et donnés par :

$$S_p = d_{pj}E_j \quad (3.7)$$

Dans un milieu piézoélectrique, les phénomènes électriques et mécaniques interagissent et sont appelés **effets électromécaniques**. En négligeant l'effet pyroélectrique, les relations fondamentales de la piézoélectricité sont données par les équations suivantes [27] :

$$\begin{aligned} S_q &= s_{qp}^E T_p + d_{qi} E_i \\ D_j &= d_{jp} T_p + \varepsilon_{ji}^T E_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

Puisque les composants de la constante piézoélectrique sont symétriques, on peut donc dire  $d_{jp} = d_{qi}^t$ . L'exposant  $t$  indique une transposition. Dans les équations (3.8), l'expression du tenseur de déformation traduit respectivement l'effet élastique (équation 3.3) et l'effet piézoélectrique inverse (équation 3.7), et l'expression du vecteur induction électrique traduit l'effet piézoélectrique direct (équation 3.6) et l'effet diélectrique (équation 3.4). La présence de la piézoélectricité modifie les constantes élastiques et les permittivités pour les quelles il faut distinguer les modules de rigidité à champ ou à induction constante et les permittivités à contrainte ou à déformation constante [34]. Les constantes de souplesse  $s_{pq}$  et diélectriques  $\varepsilon_{ij}$  sont donc écrites respectivement avec un exposant  $E$  et  $T$ . L'exposant  $E$  indique que les composantes de souplesse sont mesurables lorsque le champ électrique est constant ou nul. De façon similaire, l'exposant  $T$  indique que les composantes de constante diélectrique sont mesurables lorsque la contrainte est constante ou nulle. Partant dans l'équation (3.8) d'un couple de variables  $(T_p, E_i)$ , les trois autres équations des couples de variables choisis  $(T_p, D_i)$ ,  $(S_p, E_i)$  et  $(S_p, D_i)$  peuvent être déduites sous forme matricielle comme montré dans le tableau 3.2.

Dans le tableau 3.2,  $d_{jp}$ ,  $g_{jp}$ ,  $e_{jp}$  et  $h_{jp}$  sont les matrices de constantes piézoélectriques,  $\varepsilon_{ji}^T$ ,  $\varepsilon_{ji}^S$ ,  $\beta_{ji}^T$  et  $\beta_{ji}^S$  sont les matrices de constantes diélectriques,  $s_{qp}^E$ ,  $s_{qp}^D$ ,  $c_{qp}^E$  et  $c_{pq}^D$  sont les matrices de constantes mécaniques. Les exposants  $S$  et  $D$  décrits dans le tableau 3.2 sont indiqués pour la mesure lorsque la déformation et l'induction sont constantes ou nuls. A partir du tableau 3.2, il est à noter que les coefficients

TABLE 3.2 – Relations constitutives de la piézoélectricité

Couple de variables choisis	Equations de comportement	Energie de Helmotz
$(T_p, E_i)$	$D_j = d_{jp}T_p + [\varepsilon_{ji}^T]E_i$ $S_q = s_{qp}^E T_p + d_{jp}^t E_i$	$dG = -S_q dT_p - D_j dE_i$
$(T_p, D_i)$	$E_j = -g_{jp}T_p + \beta_{ji}^T D_i$ $S_q = s_{qp}^D T_p + g_{jp}^t D_i$	$dG_1 = -S_q dT_p + E_j dD_i$
$(S_p, E_i)$	$D_j = e_{jp}S_p + \varepsilon_{ji}^S E_i$ $T_q = c_{qp}^E S_p - e_{jp}^t E_i$	$dG_2 = T_q dS_p - D_j dE_i$
$(S_p, D_i)$	$E_j = -h_{jp}S_p + \beta_{ji}^S D_i$ $T_q = c_{qp}^D S_p - h_{jp}^t D_i$	$dF = T_q dS_p + E_j dD_i$

du matériau piézoélectrique sont  $d_{jp}$ ,  $\varepsilon_{ji}^T$  et  $s_{qp}^E$  pour le couple de variables choisis  $(T_p, E_i)$ ,  $g_{jp}$ ,  $\beta_{ji}^T$  et  $s_{qp}^D$  pour le couple de variables choisis  $(T_p, D_i)$ ,  $e_{jp}$ ,  $\varepsilon_{ji}^S$  et  $c_{qp}^E$  pour le couple de variables choisis  $(S_p, E_i)$ ,  $h_{jp}$ ,  $\beta_{ji}^S$  et  $c_{qp}^D$  pour le couple de variables choisis  $(S_p, D_i)$ . Lorsqu'on connaît les coefficients pour un seul couple de variables choisis, on peut déterminer les coefficients pour tous les autres couples de variables choisis en utilisant la formule du tableau 3.3.

TABLE 3.3 – Construction des matrices à partir d'un couple de variables choisis

$c_{qp}^E = (s_{qp}^E)^{-1}$	$e_{jp} = d_{jp}(s_{qp}^E)^{-1}$	$\varepsilon_{ji}^S = \varepsilon_{ji}^T - d_{jp}(s_{qp}^E)^{-1}d_{jp}^t$
$c_{qp}^D = c_{qp}^E + e_{jp}^t(\varepsilon_{ji}^S)^{-1}e_{jp}$	$h_{jp} = (\varepsilon_{ji}^S)^{-1}e_{jp}$	$\beta_{ji}^S = (\varepsilon_{ji}^S)^{-1}$
$s_{qp}^D = (c_{qp}^D)^{-1}$	$g_{jp} = h_{jp}(c_{qp}^D)^{-1}$	$\beta_{ji}^T = \beta_{ji}^S - h_{jp}(c_{qp}^D)^{-1}h_{jp}^t$

### 3.4 Coefficients piézoélectriques et modes de couplage électromécanique

Considérons maintenant un matériau piézoélectrique de type céramique PZT. Selon la notation des techniques de l'ingénieur [29], les coefficients de la céramique piézoélectrique PZT,  $s_{qp}^E$ ,  $\varepsilon_{ji}^T$  et  $d_{jp}$  peuvent être obtenus en utilisant les formules du tableau 3.4. Les principaux modes de couplage électromécanique dans les céramiques

TABLE 3.4 – Matrices de coefficient des matériaux céramiques piézoélectriques

$s_{qp}^E = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{pmatrix}$	$\varepsilon_{ji}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix}$	$d_{jp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
---	---	--

PZT sont : le mode longitudinal (ou mode-33), le mode transversal (ou mode-31) et le mode de cisaillement (ou mode-15). Dans le cadre de notre étude, on ne s'intéresse qu'au mode-33 comme illustré sur la figure 3.3. Les dimensions de l'élément de matériau piézoélectrique considéré de forme parallélépipédique selon les trois axes sont respectivement a, b et L. Les électrodes sont placées sur les surfaces planes perpendiculaires à la direction de l'axe  $x_3$  et situées en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$ . Le mode-33 apparaît lorsque le matériau est soumis à un champ électrique selon l'axe 3 et se déforme suivant ce même axe.

### 3.5 Equations de la piézoélectricité en mode-33

Considérons un matériau céramique piézoélectrique utilisé comme décrit sur la figure 3.4 ayant la forme d'un barreau de longueur L, de section  $\sigma = a \times b$ , de volume  $\Omega = \sigma \times L$  et de surface fermée  $\Sigma_f$  orientée par le vecteur unitaire sortant  $n_i$ . Les électrodes sont collées sur les deux faces perpendiculaires à l'axe  $x_3$  et situées en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$ . Une des extrémités située dans le plan  $x_1x_2$  est encastree. L'autre extrémité supporte une masse  $M_t$  et une charge mécanique F(t) uniaxiale appliquée selon la direction  $x_3$ . Supposons que le barreau piézoélectrique est libre

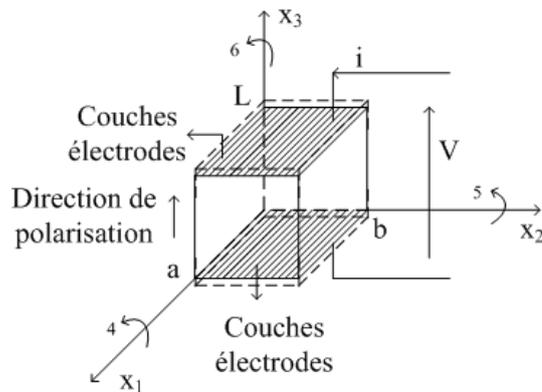


FIGURE 3.3 – Mode longitudinal (mode-33)

de contraintes de cisaillement. Lorsqu'on applique au barreau un champ électrique  $E_3$  parallèle à l'axe  $x_3$ , il se déforme parallèlement au champ électrique  $E_3$  et son déplacement  $u_3$  peut être calculé (mode longitudinal). Le choix du couple de va-

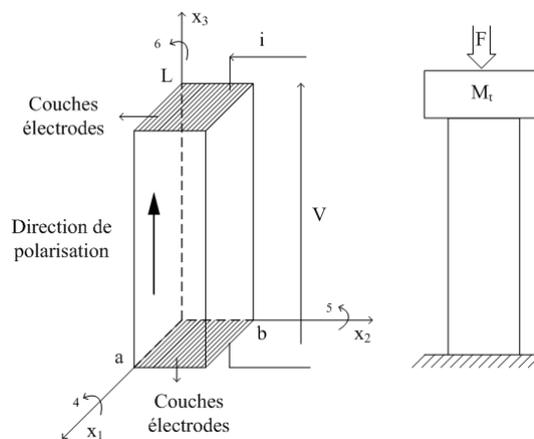


FIGURE 3.4 – Barreau piézoélectrique en mode-33

riables dépend de ses coefficients donnés par le constructeur. Nous supposons qu'on connaît les matrices des coefficients du matériau céramique piézoélectrique (tableau 3.4). Nous choisissons donc l'utilisation du couple de variables  $(T_p, E_i)$ . Nous remplaçons les matrices des coefficients dans les équations (3.8) correspondant au couple de variables choisies  $(T_p, E_i)$  de l'équation (3.8), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

On considère maintenant les dimensions latérales du barreau piézoélectrique très petites devant la hauteur ( $a, b \ll L$ ). Avec les hypothèses faites précédemment, on peut en déduire les conditions suivantes sur les grandeurs mécaniques :

$$T_1 = T_2 = T_4 = T_5 = T_6 = 0; T_3 \neq 0; S_1 \neq 0; S_2 \neq 0; S_3 \neq 0 \quad (3.11)$$

et sur les grandeurs électriques :

$$D_1 = D_2 = 0; D_3 \neq 0; E_1 = E_2 = 0; E_3 \neq 0 \quad (3.12)$$

En remplaçant les conditions électriques et mécaniques des équations (3.11) et (3.12) dans les équations (3.9) et (3.10), on obtient :

$$S_1 = S_2 = s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \quad (3.13)$$

$$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \quad (3.14)$$

$$S_4 = S_5 = S_6 = 0 \quad (3.15)$$

$$D_1 = D_2 = 0 \quad (3.16)$$

$$D_3 = d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3 \quad (3.17)$$

A partir des équations (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17), on peut aussi exprimer les équations selon un autre couple de variables désirées, par exemple ( $S_3$  et  $E_3$ ), ( $S_3$  et  $D_3$ ), ( $T_3$  et  $D_3$ ) et ( $T_3$  et  $E_3$ ). Dans le cas de notre étude, nous sommes intéressé à exprimer l'expression du Lagrangien en fonction des variables  $S_3$  et  $E_3$  dans la section 3.6. Nous avons donc déduit les relations de la contrainte  $T_3$  et de

l'induction électrique  $D_3$  en fonction des variables  $S_3$  et  $E_3$  suivantes :

$$\begin{cases} T_3 = c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \\ D_3 = e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \end{cases} \quad (3.18)$$

avec  $\underline{c}_{33}^E = \frac{1}{s_{33}^E}$  ;  $\underline{e}_{33} = \frac{d_{33}}{s_{33}^E}$  ;  $\underline{\varepsilon}_{33}^S = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E}$ .

De façon similaire, si on connaît les coefficients du matériau céramique piézoélectrique  $e$ ,  $\varepsilon^S$  et  $c^E$ , on les remplace dans les équations du couple de variables choisies  $(S_p, E_i)$  du tableau 3.2. Ensuite on utilise les conditions mécaniques de l'équation (3.11) et les conditions électriques de l'équation (3.12) pour exprimer  $T_3$  et  $D_3$  en fonction du couple de variables choisies  $S_3$  et  $E_3$ . Finalement on obtient les relations des coefficients piézoélectriques suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{c}_{33}^E &= c_{33}^E - 2 \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{11}^E + c_{12}^E} \\ \underline{e}_{33} &= e_{33} - 2 \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{11}^E + c_{12}^E} \\ \underline{\varepsilon}_{33}^S &= \varepsilon_{33}^S + 2 \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E + c_{12}^E} \end{aligned} \quad (3.19)$$

En connaissant les coefficients d'un seul couple de variables, nous pouvons exprimer  $T_3$  et  $D_3$  en fonction de couple variables choisies  $S_3$  et  $E_3$ .

### 3.6 Lagrangien et principe d'Hamilton d'une céramique piézoélectrique en mode-33

Généralement les équations du mouvement sont déduites en utilisant l'expression du Lagrangien et en appliquant le principe d'Hamilton (ou le principe de moindre action). Il faut donc tout d'abord déterminer l'expression du Lagrangien. L'application du principe d'Hamilton nécessite de connaître le Lagrangien et le travail virtuel des actions externes. Dans un milieu piézoélectrique, on peut exprimer les relations du Lagrangien en fonction du couple de variables désirées par exemple  $(S_3$  et  $E_3)$ ,  $(S_3$  et  $D_3)$ ,  $(T_3$  et  $D_3)$  et  $(T_3$  et  $E_3)$ . Puisque l'expression de l'énergie cinétique (équation 3.22) est en fonction de la vitesse du déplacement, il est plus intéressant d'exprimer les relations du Lagrangien en fonction des couples de variables choisies  $(S_3$  et  $E_3)$  et  $(S_3$  et  $D_3)$  afin de faciliter une application du principe de variation. Ce qui veut dire ici, on peut déduire les équations du mouvement par deux méthodes. Dans notre étude, on a choisi le couple de variables  $(S_3$  et  $E_3)$ . Pour déduire l'expression du principe d'Hamilton, il est nécessaire de déterminer précédemment l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le travail virtuel. Par définition, le Lagrangien  $L$  d'un

milieu piézoélectrique est égal à l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle. En remplaçant les expressions de l'équation (3.18) de la contrainte  $T_3$  et de l'induction  $D_3$  dans celle de la variation d'énergie potentielle  $dG_2$  du tableau 3.2, on obtient la relation suivante :

$$dG_2 = (\underline{c}_{33}^E S_3 - \underline{e}_{33} E_3) dS_3 - (\underline{e}_{33} S_3 + \underline{\varepsilon}_{33}^S E_3) dE_3 \quad (3.20)$$

Pour obtenir l'énergie potentielle, on fait l'intégration de l'équation (3.20) et on obtient :

$$G_2 = \frac{1}{2} \left( \underline{c}_{33}^E S_3^2 - 2 \underline{e}_{33} E_3 S_3 - \underline{\varepsilon}_{33}^S E_3^2 \right), \quad (3.21)$$

Par définition, l'énergie cinétique est donnée par la relation :

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_3^2(x_3, t) \quad (3.22)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique et  $u_3$  désigne le champ du déplacement selon l'axe  $x_3$  (un seul mouvement est considéré en mode-33). Le Lagrangien d'une céramique piézoélectrique est généralement obtenu par l'intégration sur le volume :

$$L = \int_{\Omega_0} (T - G_2) d\Omega \quad (3.23)$$

où  $\Omega_0$  est le volume du matériau céramique piézoélectrique non déformé. En remplaçant les équations (3.21) et (3.22) dans l'équation (3.23), on obtient l'expression du Lagrangien L en mode-33 :

$$L = \int_0^L \sigma \left[ \frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_3^2(x_3, t) - \frac{1}{2} \left( \underline{c}_{33}^E S_3^2 - 2 \underline{e}_{33} E_3 S_3 - \underline{\varepsilon}_{33}^S E_3^2 \right) \right] dx_3 \quad (3.24)$$

où  $\sigma$  et L sont respectivement la surface et la longueur du barreau piézoélectrique. D'après l'hypothèse décrite dans la section 3.5, la surface du barreau de la céramique piézoélectrique de la figure 3.4 en  $x_3 = 0$  est reliée à la masse électrique et encastree. La surface en  $x_3 = L$  est soumise à des charges électriques, à une masse  $M_t$  et à des forces mécaniques, ce qui représente les forces superficielles  $F_S$  et les forces volumiques  $\bar{X}$  dû à l'action de la gravité. Le travail virtuel peut donc être obtenu par la somme des énergies créées par les forces volumiques  $\bar{X}$ , les forces superficielles  $F_S$ , la charge électrique superficielle  $\bar{Q}$  et la masse  $M_t$  :

$$\begin{aligned} W = & \int_0^L \sigma \bar{X} u_3(x_3, t) dx_3 + \int_{\Sigma_S} F_S(t) u_3(L, t) d\Sigma - \int_{\Sigma_Q} \bar{Q}(t) V(t) d\Sigma \\ & + \frac{1}{2} M_t \dot{u}_3^2(L, t) - M_t g u_3(L, t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

où  $\Sigma_S$  et  $\Sigma_Q$  sont les surfaces où on impose respectivement les charges mécaniques et les charges électriques,  $V(t) = \phi(L, t) - \phi(0, t)$  est la différence de potentiel

aux bornes de la céramique piézoélectrique,  $g$  est l'intensité gravitationnelle et vaut  $9,81N.Kg^{-1}$ . D'après le principe d'Hamilton, la variation de l'action entre deux instants quelconques peut être obtenue par :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W) dt = 0 \quad (3.26)$$

où  $\delta$  est un opérateur de variation, les variations sont nulles pour  $t = t_1$  et  $t = t_2$ . L'introduction des équations (3.24) et (3.25) dans l'expression 3.26 de la variation donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \{ \sigma \int_0^L \frac{1}{2} [ \rho_0 \dot{u}_3^2(x_3, t) - \underline{c}_{33}^E S_3^2 + 2\underline{e}_{33} E_3 S_3 + \underline{\varepsilon}_{33}^S E_3^2 + 2\bar{X} u_3(x_3, t) ] dx_3 \\ - Q(t) (\phi(L, t) - \phi(0, t)) + F(t) u_3(L, t) + \frac{1}{2} M_t \dot{u}_3^2(L, t) \\ - M_t g u_3(L, t) \} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $F(t) = \sigma F_s(t)$  et  $Q(t) = \sigma \bar{Q}(t)$  sont respectivement la force externe appliquée et les charges électriques sur les surfaces du barreau. Compte tenu des relations de déformation infinitésimale donnée par l'équation (3.1) et de champ électrique donné par l'équation (3.5), le tenseur de déformation et le champ électrique en mode-33 se simplifient et on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S_3 &= u_{3,3}(x_3, t) \\ E_3 &= -\phi_{,3}(x_3, t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

On se rappelle ici les notations  $u_{3,3}(x_3, t) = \frac{\partial u_3(x_3, t)}{\partial x_3}$  et  $\phi_{,3}(x_3, t) = \frac{\partial \phi(x_3, t)}{\partial x_3}$ . En reportant les relations de l'équation (3.28) dans l'équation (3.27), l'expression (3.26) de la variation devient :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \{ \sigma \int_0^L \frac{1}{2} [ \rho_0 \dot{u}_3^2(x_3, t) - \underline{c}_{33}^E u_{3,3}^2(x_3, t) - 2\underline{e}_{33} \phi_{,3}(x_3, t) u_{3,3}(x_3, t) \\ + \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}^2(x_3, t) + 2\bar{X} u_3(x_3, t) ] dx_3 - Q(t) (\phi(L, t) - \phi(0, t)) + F(t) u_3(L, t) \\ + \frac{1}{2} M_t \dot{u}_3^2(L, t) - M_t g u_3(L, t) \} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Finalement on obtient l'expression du principe d'Hamilton en fonction des coordonnées généralisées  $u_3(x_3, t)$  et  $\phi(x_3, t)$ . Elle servira pour déduire les équations du mouvement dans le chapitre suivant.

### 3.7 Conclusion

Le phénomène piézoélectrique a été résumé dans ce chapitre. Il est à noter que les équations caractérisant les propriétés piézoélectriques peuvent être exprimées

sous forme de quatre couples de variables :  $(T_p, E_i)$ ,  $(T_p, D_i)$ ,  $(S_p, E_i)$  et  $(S_p, D_i)$ . Le choix du couple de variables dépend de ses coefficients donnés par le constructeur. On peut déterminer les coefficients de tous les couples de variables lorsqu'on connaît les coefficients d'un seul couple de variables en utilisant le formule du tableau 3.3. L'utilisation des notations de grandeurs électriques, mécaniques et leurs coefficients d'une céramique à travers nos études est basée sur le standard piézoélectrique d'IEEE et la notation des techniques de l'ingénieur. Dans le cadre de notre étude, nous avons utilisé un matériau piézoélectrique de type céramique PZT ayant une forme parallélépipédique. Nous avons remarqué que l'actionneur piézoélectrique PZT a trois principaux modes de couplage électromécanique, mais nous ne nous sommes intéressés qu'au mode-33. A partir de n'importe quel couple de variables choisies dont on connaît les coefficients, on peut exprimer les équations piézoélectriques (mode-33) en fonction du couple de variables choisies  $E_3$  et  $S_3$ . Afin de déduire les équations du mouvement dans le chapitre suivant, nous avons exprimé les expressions du Lagrangien et de l'Hamiltonien en fonction du couple de variables  $E_3$  et  $S_3$  pour le cas de l'utilisation qui sera faite dans le procédé de forgeage.



# Chapitre 4

## Modélisation d'un actionneur piézoélectrique

### 4.1 Introduction

En général, les problèmes pratiques nécessitent d'utiliser une approche analytique ou par éléments finis pour définir un modèle. Le choix de la méthode dépend du problème étudié et des paramètres de comportement du dispositif expérimental qu'on veut analyser. Dans notre étude, nous nous intéressons à l'utilisation de vibrations mécaniques à des fréquences très proches de la résonance pour assister un procédé de forgeage. Les effets dynamiques deviennent donc non négligeables dans notre étude. Dans ce chapitre, nous proposons des modèles de simulation qui permettent de décrire les comportements dynamiques de l'actionneur piézoélectrique et qui peuvent être couplés avec un modèle du procédé de forgeage.

De nombreux chercheurs ont développé un modèle piézoélectrique par une approche analytique [40] [37] [41] [42] [43] ou par une approche par éléments finis [21] [44] [45] [46] [47]. Ces modèles ont été utilisés dans le domaine des structures flexibles et implémentés en utilisant des logiciels de calcul par éléments finis. Les travaux de Tiersten [48] utilisent le principe d'Hamilton appliqué au milieu piézoélectrique pour déduire les équations de mouvement. Par la suite, Allik et Hughes [20] introduisent une formulation par éléments finis intégrée à une structure flexible. A la base de ces travaux, plusieurs auteurs [21] [46] [47] développent le modèle piézoélectrique par éléments finis. Ces modèles par éléments finis permettent de caractériser les comportements dynamiques dans le but de contrôler les vibrations de la structure. Toutefois, ils nécessitent deux logiciels séparés, l'un pour le modèle piézoélectrique

et l'autre pour le contrôle ce qui constitue pour nous un inconvénient important. Ces modèles ne peuvent pas non plus être utilisés pour coupler avec un modèle du procédé de forgeage.

Goldfarb and Celanovic [41] ont développé un modèle de comportement d'un matériau piézoélectrique, à l'aide des principes physiques, dans lequel le comportement mécanique a été modélisé par un système masse-ressort avec amortissement. Trois ans plus tard, Adrianens et al. [42] ont étendu ce modèle en y intégrant une équation différentielle du premier ordre pour décrire l'effet de l'hystérésis. Wagner [40] a développé un modèle analytique de comportement d'un matériau piézoélectrique pour décrire l'effet de l'hystérésis en utilisant l'enthalpie électrique pour modéliser cet effet observé durant l'expérimentation. Les équations du mouvement sont résolues en utilisant la perturbation technique. Giraud-Audine et Nogarède [23] ont aussi développé un modèle analytique fondé sur le principe d'Hamilton pour déduire les équations de mouvement du système. Ce modèle est utilisé pour prédire le comportement électromécanique d'un bilame piézoélectrique. La résolution de l'équation dynamique est basée sur la méthode de décomposition modale, largement utilisée pour résoudre un problème de vibrations mécaniques [49] [50]. Ce modèle peut être traduit sous la forme d'un circuit électrique équivalent, qui est bien adapté pour l'étude du couplage avec l'alimentation électronique. Ces modèles analytiques permettent d'étudier les comportements dynamiques mais ils peuvent difficilement intégrer le modèle du procédé de forgeage.

Pour arriver à notre objectif, nous proposons une approche modale permettant de caractériser les comportements dynamiques de l'actionneur piézoélectrique basé sur les travaux de Giraud-Audine [37] et de Timoshenko [50]. Nous proposons ensuite une approche par éléments finis qui peut décrire les comportements dynamiques de l'actionneur piézoélectrique et qui peut être utilisée avec le modèle du procédé de forgeage basé sur le travail de Gérardin [49]. Les deux approches ci-dessus sont implémentées en utilisant le logiciel Matlab<sup>®</sup>. Ces deux modèles se basent sur le principe d'Hamilton pour établir les équations du mouvement. Pour l'approche analytique, la technique de décomposition modale est utilisée pour résoudre les équations dynamiques et on obtient le modèle de la fonction de transfert du système. Théoriquement, l'approche analytique permet d'obtenir les solutions exactes. La méthode est cependant rapidement limitée car elle suppose de recalculer les données modales du système (valeurs propres, fréquences propres, modes propres et amplitudes  $\eta_n(t)$ ) à chaque fois que les conditions aux limites sont modifiées. Néanmoins, elle fournit des éléments de comparaison et de validation pour le modèle basé sur les éléments finis. Pour le modèle développé par l'approche par éléments finis, les équations de mouvement sont obtenues par l'utilisation du Lagrangien et du principe d'Hamilton. Ces équations peuvent se mettre sous la forme d'équation d'état [25] permettant d'as-

socier facilement le modèle du procédé de forgeage. Ainsi, le modèle analytique du procédé obtenu au chapitre 2 est utilisé simultanément avec le modèle par éléments finis de l'actionneur piézoélectrique. Cette association de modèle est appelée par la suite modèle de couplage [14]. Le principal avantage de ce modèle de couplage tient en la possibilité d'analyser l'influence des paramètres importants de l'ensemble du procédé, ceci afin d'en optimiser la conception ainsi que son contrôle et commande.

## 4.2 Modèle analytique

Le modèle analytique de l'actionneur piézoélectrique en mode-33 est développé dans ce paragraphe. Le procédure de construction du modèle analytique consiste en deux étapes principales. La première étape est d'exprimer les équations du mouvement. La deuxième étape est de les résoudre en utilisant la technique de décomposition modale qui consiste à déterminer les fréquences propres et les modes propres (ou valeurs propres et vecteurs propres) du système. Un modèle mathématique pour caractériser le comportement dynamique de l'actionneur piézoélectrique est ensuite construit en utilisant les résultats de la décomposition modale. Afin de comprendre toutes les notations et tous les symboles utilisés dans ce chapitre, il est conseillé de lire tout d'abord le chapitre 3.

### 4.2.1 Equations du mouvement

Les équations du mouvement d'une céramique piézoélectrique peuvent être déduites via l'expression du Lagrangien en appliquant le principe de moindre action. L'expression du principe d'Hamilton a été montrée dans le chapitre 3 pour le cas d'actionneur piézoélectrique en mode-33. On sait que pour la fonction unidimensionnelle  $f$ , les propriétés de l'opérateur de variation  $\delta$  sont généralement similaires à celles de l'opérateur de dérivation  $\mathbf{d}$  et que  $d\frac{\delta f}{dx} = \delta\frac{df}{dx}$  [51]. En appliquant la variation aux coordonnées généralisées  $u_3(x_3, t)$  et  $\phi(x_3, t)$  de l'expression du principe d'Hamilton donnée par l'équation (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \{ & \sigma \int_0^L [\rho_0 \dot{u}_3(x_3, t) \delta \dot{u}_3(x_3, t) - \underline{c}_{33}^E u_{3,3}(x_3, t) \delta u_{3,3}(x_3, t) - \underline{e}_{33} \phi_{,3}(x_3, t) \delta u_{3,3}(x_3, t) \\ & - \underline{e}_{33} u_{3,3}(x_3, t) \delta \phi_{,3}(x_3, t) + \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(x_3, t) \delta \phi_{,3}(x_3, t) + \bar{X}(t) \delta u_3(x_3, t)] dx_3 + F(t) \delta u_3(L, t) \\ & - Q(t) (\delta \phi(L, t) - \delta \phi(0, t)) + M_t \dot{u}_3(L, t) \delta \dot{u}_3(L, t) - M_t g \delta u_3(L, t) \} dt = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

On rappelle que la formulation de l'intégration par partie est :

$$\int_{x_1}^{x_2} U(x) \frac{dV(x)}{dx} dx = [U(x)V(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU(x)}{dx} V(x) dx. \text{ Afin d'exprimer la relation en}$$

fonction des variations de  $\delta\phi$  et  $\delta u_3$  (la variation selon  $x_3$ ), on fait l'intégration de l'équation (4.1) par partie par rapport à l'espace et au temps. On obtient, après factorisation la relation suivante en fonction des variations arbitraires  $\delta u_3$  et  $\delta\phi$  :

$$\begin{aligned} & [\int_0^L \sigma \rho_0 \dot{u}_3(x_3, t) \delta u_3(x_3, t) dx_3 + \dot{u}_3(L, t) M_t \delta u_3(L, t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \{ \int_0^L \sigma [-\rho_0 \ddot{u}_3(x_3, t) + \\ & \quad \underline{e}_{33} \phi_{,33}(x_3, t) + \underline{c}_{33}^E u_{3,33}(x_3, t) + \bar{X}] \delta u_3(x_3, t) dx_3 + \int_0^L \sigma [-\underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,33}(x_3, t) + \\ & \quad \underline{e}_{33} u_{3,33}(x_3, t)] \delta \phi(x_3, t) dx_3 + [-\sigma \underline{e}_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{c}_{33}^E u_{3,3}(L, t) + F(t) - \\ & \quad M_t \ddot{u}_3(L, t) - M_t g] \delta u_3(L, t) + [\sigma \underline{e}_{33} \phi_{,3}(0, t) + \sigma \underline{c}_{33}^E u_{3,3}(0, t)] \delta u_3(0, t) + \\ & \quad [\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{e}_{33} u_{3,3}(L, t) - Q(t)] \delta \phi(L, t) + [-\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(0, t) + \\ & \quad \sigma \underline{e}_{33} u_{3,3}(0, t) + Q(t)] \delta \phi(0, t) \} dt = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le principe de variation de l'équation (3.26) dans le chapitre 3 montre que  $\delta u_3(x_3, t)$  et  $\delta \phi(x_3, t)$  s'annulent aux points  $t = t_1$  et  $t = t_2$ . Le premier terme de l'équation est donc nul :

$$\left[ \int_0^L \sigma \rho_0 \dot{u}_3(x_3, t) \delta u_3(x_3, t) dx_3 + \dot{u}_3(L, t) M_t \delta u_3(L, t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (4.3)$$

D'après l'hypothèse considérée au chapitre 3, paragraphe 3.5, une des extrémités du barreau piézoélectrique située dans le plan  $x_1 0 x_2$  (voir la figure 3.4) est encastree et reliée à la masse électrique. Cela impose les conditions cinématiques aux frontières suivantes :

$$u_3(0, t) = 0 \quad (4.4)$$

$$\phi(0, t) = 0 \quad (4.5)$$

Par principe, la variation utilisée doit respecter la cinématique du problème, les variations arbitraires  $\delta u_3$  et  $\delta \phi$  sont donc nulles en  $x_3 = 0$ . On obtient les relations :

$$[\sigma \underline{e}_{33} \phi_{,3}(0, t) + \sigma \underline{c}_{33}^E u_{3,3}(0, t)] \delta u_3(0, t) = 0 \quad (4.6)$$

$$[-\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(0, t) + \sigma \underline{e}_{33} u_{3,3}(0, t) + Q(t)] \delta \phi(0, t) = 0 \quad (4.7)$$

L'équation (4.2) peut être simplifiée à l'aide des équations (4.3), (4.6) et (4.7), d'où on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \{ \int_0^L \sigma [-\rho_0 \ddot{u}_3(x_3, t) + \underline{e}_{33} \phi_{,33}(x_3, t) + \underline{c}_{33}^E u_{3,33}(x_3, t) + \bar{X}] \delta u_3(x_3, t) dx_3 \\ & \quad + \int_0^L \sigma [-\underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,33}(x_3, t) + \underline{e}_{33} u_{3,33}(x_3, t)] \delta \phi(x_3, t) dx_3 + \\ & \quad [-\sigma \underline{e}_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{c}_{33}^E u_{3,3}(L, t) + F(t) - M_t \ddot{u}_3(L, t) - M_t g] \delta u_3(L, t) + \\ & \quad [\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{e}_{33} u_{3,3}(L, t) - Q(t)] \delta \phi(L, t) \} dt = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les trajectoires des coordonnées généralisées dépendantes de  $u_3(x_3, t)$  et  $\phi(x_3, t)$  sont respectivement les chemins reliant  $u_3(x_3, t_1)$  et  $u_3(x_3, t_2)$  et  $\phi(x_3, t_1)$  et  $\phi(x_3, t_2)$  le long desquels l'action est stationnaire, ce qui signifie que la variation de l'action de l'équation (4.8) doit être nulle quelque soit les variations arbitraires de déplacement  $\delta u_3(x_3, t)$  et de potentiel électrique  $\delta \phi(x_3, t)$ . La vérification de l'équation (4.8) à l'égard des variations arbitraires donne les équations du mouvement d'un barreau piézoélectrique en mode-33 :

$$-\rho_0 \ddot{u}_3(x_3, t) + e_{33} \phi_{,33}(x_3, t) + c_{33}^E u_{3,33}(x_3, t) + \bar{X}(t) = 0 \quad (4.9)$$

$$-e_{33}^S \phi_{,33}(x_3, t) + e_{33} u_{3,33}(x_3, t) = 0 \quad (4.10)$$

les conditions aux limites mécaniques en  $x_3 = L$

$$-\sigma e_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma c_{33}^E u_{3,3}(L, t) + F(t) - M_t \ddot{u}_3(L, t) - M_t g = 0 \quad (4.11)$$

et les conditions aux limites électriques en  $x_3 = L$

$$\sigma e_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma e_{33} u_{3,3}(L, t) - Q(t) = 0 \quad (4.12)$$

Dans le cas où les forces dues à la gravité sur la masse de l'actionneur piézoélectrique lui-même peuvent être négligées ( $\bar{X}$  est nulle), les relations (4.9) et (4.10) peuvent être simplifiées comme suit :

$$\rho_0 \ddot{u}_3(x_3, t) - \chi u_{3,33}(x_3, t) = 0 \quad \text{avec} \quad \chi = e_{33} \alpha + c_{33}^E \quad (4.13)$$

$$\phi_{,33}(x_3, t) = \alpha u_{3,33}(x_3, t) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{e_{33}^S}{e_{33}} \quad (4.14)$$

Ce système d'équations différentielles à dérivées partielles doit être résolu par la suite selon différents modes de fonctionnement à considérer.

### – Système d'équilibre

En absence de force extérieure,  $F(t) = 0$ , on considère le système est équilibré dans la position définie en  $x_3 = L$  indépendante de temps. En équilibre, on a  $\ddot{u}_3(x_3, t) = 0$  et  $Q(t) = 0$ . Les équations (4.11) et (4.12) devient :

$$-\sigma e_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma c_{33}^E u_{3,3}(L, t) - M_t g = 0 \quad (4.15)$$

$$\sigma e_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma e_{33} u_{3,3}(L, t) = 0 \quad (4.16)$$

Les équations (4.15) et (4.16) permettent de déduire la position d'équilibre :

$$u_{3,3}(L) = -\frac{M_t g}{\sigma \chi} \quad (4.17)$$

$$u_3(L) = -\frac{M_t g}{\sigma \chi} L \quad (4.18)$$

$$\phi_{,3}(L) = -\frac{\alpha M_t g}{\sigma \chi} \quad (4.19)$$

$$\phi(L) = -\frac{\alpha M_t g}{\sigma \chi} L \quad (4.20)$$

Prenons la position d'équilibre pour origine, c'est-à-dire effectuons le changement de variable :

$$\begin{aligned} U_3(L, t) &= u_3(L) + u_3(L, t) \\ &= -\frac{M_t g}{\sigma \chi} L + u_3(L, t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} U_{3,3}(L, t) &= u_{3,3}(L) + u_{3,3}(L, t) \\ &= -\frac{M_t g}{\sigma \chi} + u_{3,3}(L, t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Phi(L, t) &= \phi(L) + \phi(L, t) \\ &= -\frac{\alpha M_t g}{\sigma \chi} L + \phi(L, t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{,3}(L, t) &= \phi_{,3}(L) + \phi_{,3}(L, t) \\ &= -\frac{\alpha M_t g}{\sigma \chi} + \phi_{,3}(L, t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $u_3(L, t)$  et  $\phi(L, t)$  sont respectivement le déplacement et le potentiel électrique autour de ses positions d'équilibre. En remplaçant  $U_{3,3}(L, t)$  et  $\Phi_{,3}(L, t)$  dans les conditions aux limites mécaniques et électriques (4.11) et (4.12), on obtient :

$$\begin{aligned} -\sigma \underline{e}_{33} \left( -\frac{\alpha M_t g}{\sigma \chi} + \phi_{,3}(L, t) \right) - \sigma \underline{e}_{33}^E \left( -\frac{M_t g}{\sigma \chi} + u_{3,3}(L, t) \right) + F(t) \\ - M_t \ddot{u}_3(L, t) - M_t g = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \left( -\frac{\alpha M_t g}{\sigma \chi} + \phi_{,3}(L, t) \right) - \sigma \underline{e}_{33} \left( -\frac{M_t g}{\sigma \chi} + u_{3,3}(L, t) \right) \\ - Q(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

En faisant la simplification des équations (4.25) et (4.26), on obtient les conditions d'équilibre aux limites mécaniques et électriques :

$$-\sigma \underline{e}_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{e}_{33}^E u_{3,3}(L, t) + F(t) - M_t \ddot{u}_3(L, t) = 0 \quad (4.27)$$

$$\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{e}_{33} u_{3,3}(L, t) - Q(t) = 0 \quad (4.28)$$

### 4.2.2 Résolution des équations de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique

Dans ce paragraphe, il s'agit de résoudre les équations du mouvement obtenues précédemment. En pratique, l'actionneur piézoélectrique peut être alimenté de deux manières : en tension ou en courant. La résolution des équations différentielles s'effectuent donc différemment pour chaque mode d'alimentation car les conditions aux limites sont modifiées. Une modélisation mathématique est établie selon chaque configuration. On a choisi un modèle d'actionneur piézoélectrique alimenté par une source de tension. Le modèle alimenté par le source de courant est décrit dans l'annexe C. La résolution des équations différentielles des relations (4.13) et (4.14) se base sur une méthode de décomposition modale, ce qui veut dire qu'on exprime la solution complète du problème comme la superposition d'une réponse quasi-statique et d'une décomposition modale. Pour le déplacement, on peut écrire la solution complète comme la somme d'une solution particulière et d'une solution des sollicitations mécaniques et électriques homogènes [37]. On obtient la relation suivante [49] :

$$u_3(x_3, t) = u_3^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) v_{3n}(x_3) \quad (4.29)$$

Le premier terme  $u_3^{qs}(x_3, t)$  (solution particulière) est le déplacement quasi-statique. La solution particulière  $u_3^{qs}(x_3, t)$  est une solution de l'équation homogène simplifiée, ce qui veut dire qu'on calcule  $u_3^{qs}(x_3, t)$  en considérant le terme d'accélération de l'équation (4.13) égal à zéro et en utilisant les conditions cinématiques imposées aux frontières et les conditions d'équilibre aux limites mécaniques et électriques non homogènes. Le second terme résulte d'une application de la superposition modale au reste de la réponse en utilisant les conditions aux limites homogènes simplifiées, où  $\eta_n$  caractérisent les amplitudes du déplacement et  $v_{3n}$  sont les modes propres caractérisant la forme de déformation de la structure. Ainsi la superposition modale regroupe uniquement les réponses dynamiques des modes.

Dans les équations de mouvement (4.14), nous pouvons remarquer que la dérivée seconde du potentiel électrique est proportionnelle à celle du déplacement. La solution complète du potentiel électrique  $\phi(x_3, t)$  est donc décrite de la même manière que celle du déplacement, soit :

$$\phi(x_3, t) = \phi^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \phi_{3n}(x_3) \quad (4.30)$$

Où  $\phi^{qs}(x_3, t)$  est le potentiel électrique quasi-statique,  $\phi_{3n}(x_3)$  est le mode propre du potentiel électrique.

– Réponse quasi-statique

En annulant le terme d'accélération de l'équation (4.13), on obtient les relations suivantes :

$$u_{3,33}^{qs}(x_3, t) = 0 \quad (4.31)$$

$$\phi_{,33}^{qs}(x_3, t) = 0 \quad (4.32)$$

Les solutions générales de l'équation (4.31) et (4.32) peuvent être écrites sous la forme :

$$u_3^{qs}(x_3, t) = a_1(t)x_3 + b_1(t) \quad (4.33)$$

$$\phi^{qs}(x_3, t) = a_2(t)x_3 + b_2(t) \quad (4.34)$$

où  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  sont des fonctions dépendant de la variable indépendante  $t$ . On peut déterminer ces fonctions avec les conditions cinématiques et les conditions d'équilibre mécaniques et électriques. La fonction  $b_2(t)$  peut être exprimée en utilisant l'équation (4.5) :

$$b_2(t) = 0 \quad (4.35)$$

Le générateur impose la différence de potentiel  $V(t)$  aux bornes de la céramique piézoélectrique, ce qui se traduit par :

$$V(t) = \phi^{qs}(L, t) - \phi^{qs}(0, t) = a_2(t)L \quad (4.36)$$

d'où  $a_2(t) = \frac{V(t)}{L}$ . L'équation (4.34) devient :

$$\phi^{qs}(x_3, t) = \frac{V(t)}{L}x_3 \quad (4.37)$$

La fonction  $b_1(t)$  peut être déterminée par l'équation (4.4) :

$$b_1(t) = 0 \quad (4.38)$$

La fonction  $a_1(t)$  peut être calculée par la combinaison de l'équation (4.27) et de l'équation (4.37), il vient :

$$a_1(t) = u_{3,3}(L, t) = \frac{1}{\epsilon_{33}^E} \left( -e_{33} \frac{V(t)}{L} + \frac{F(t)}{\sigma} \right) \quad (4.39)$$

L'équation (4.33) devient :

$$u_3^{qs}(x_3, t) = \frac{1}{\epsilon_{33}^E} \left( -e_{33} \frac{V(t)}{L} + \frac{F(t)}{\sigma} \right) x_3 \quad (4.40)$$

On vient d'obtenir les solutions quasi-statiques du déplacement et du potentiel élec-

trique. Il faut maintenant calculer la solution de l'équation homogène. Il y a deux étapes, la première étape est de calculer les modes propres et la deuxième étape est de calculer l'amplitude des modes  $\eta_n(t)$ .

#### – Détermination des valeurs propres

Dans le problème mécanique des vibrations, le calcul des valeurs et des vecteurs propres s'effectue en considérant le système libre de toutes les charges extérieures [49]. Cette méthode de calcul est étendue pour le cas d'actionneur piézoélectrique [37]. Dans le cas de notre étude, une céramique piézoélectrique est alimentée par une source de tension, fonctionne en mode-33 et est chargée par une force extérieure selon l'axe  $x_3$ . Afin de calculer les valeurs et les vecteurs propres, nous considérons l'actionneur piézoélectrique libre de toutes les charges extérieures. D'où on obtient :

$$F(t) = 0 \quad (4.41)$$

$$V(t) = \phi(x_3 = L, t) = \phi(x_3 = 0, t) = 0 \quad (4.42)$$

La simplification de l'équation (4.27) en utilisant l'équation (4.41) donne :

$$-\sigma_{e33}\phi_{,3}(L, t) - \sigma_{c33}^E u_{3,3}(L, t) - M_t \ddot{u}_3(L, t) = 0 \quad (4.43)$$

Remarque : Pour le cas de l'actionneur piézoélectrique alimenté par une source de tension, le calcul des valeurs et des vecteurs propres s'effectue en considérant le circuit d'alimentation en court-circuit ( $V(t)=\phi(L, t) = \phi(0, t) = 0$ ). Pour le cas de l'actionneur piézoélectrique alimenté par une source de courant, le calcul des valeurs et des vecteurs propres s'effectue en considérant le circuit d'alimentation comme ouvert ( $i(t)=0$ ).

On considère que le système est linéaire (pas de pertes viscoélastiques) pour l'hypothèse de mouvement harmonique et la vitesse initiale étant nulle. Lorsque le barreau piézoélectrique vibre en  $n^{ième}$  mode, la solution harmonique du déplacement de l'équation (4.13) est donnée par la relation suivante [50] [52] :

$$u_3(x_3, t) = v_{3n}(x_3) \cos(\omega_{3n}t) \quad (4.44)$$

où  $\omega_{3n}$  sont les pulsations propres,  $v_{3n}(x_3)$  sont les modes propres de déplacement. La solution harmonique du potentiel électrique est donnée par la relation suivante :

$$\phi(x_3, t) = \phi_{3n}(x_3) \cos(\omega_{3n}t) \quad (4.45)$$

où  $\phi_{3n}(x_3)$  sont les modes propres du potentiel. Puisque l'hypothèse des vitesses

initiales nulles est faite, le déphasage entre le déplacement et le potentiel électrique est nul. En remplaçant les équations (4.44) et (4.45) dans les équations dynamiques (4.13) et (4.14), on obtient les relations suivantes :

$$\chi v_{3n,33}(x_3) + \rho_0 \omega_{3n}^2 v_{3n}(x_3) = 0 \quad (4.46)$$

$$\phi_{3n,33}(x_3) - \alpha v_{3n,33}(x_3) = 0 \quad (4.47)$$

avec  $\chi = \underline{e}_{33}\alpha + \underline{c}_{33}^E$ ,  $\alpha = \frac{\underline{e}_{33}}{\underline{\epsilon}_{33}}$  et  $\omega_{3n}^2 = \frac{\chi \lambda_{3n}^2}{\rho_0 L^2}$ . Les solutions générales des équations (4.46) et (4.47) sont de la forme :

$$v_{3n}(x_3) = A_n \sin(\lambda_{3n} \frac{x_3}{L}) + B_n \cos(\lambda_{3n} \frac{x_3}{L}) \quad (4.48)$$

$$\phi_{3n}(x_3) = \alpha v_{3n}(x_3) + C_n x_3 + D_n \quad (4.49)$$

où  $\lambda_{3n}^2 = \frac{\rho_0 \omega_{3n}^2 L^2}{\chi}$  sont les valeurs propres.  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont les paramètres constants qui peuvent être calculés à l'aide des conditions aux limites électriques et mécaniques correspondantes. Le paramètre  $B_n$  peut être déterminé en utilisant l'équation (4.4) :

$$B_n = 0 \quad (4.50)$$

Le paramètre  $D_n$  peut être déterminé en utilisant l'équation (4.5) :

$$D_n = 0 \quad (4.51)$$

Le paramètre  $C_n$  peut être déterminé en utilisant l'équation (4.42), on obtient :

$$C_n = -\frac{\alpha A_n}{L} \sin \lambda_{3n} \quad (4.52)$$

Le paramètre  $A_n$  est calculé de sorte que la base des modes propres soit orthonormée. Les équations (4.48) et (4.49) peuvent être simplifiées et permettent de déduire les vecteurs propres sous la forme ci-dessous :

$$v_{3n}(x_3) = A_n \sin(\lambda_{3n} \frac{x_3}{L}) \quad (4.53)$$

$$\phi_{3n}(x_3) = \alpha [v_{3n}(x_3) - \frac{A_n x_3}{L} \sin(\lambda_{3n})] \quad (4.54)$$

avec les pulsations propres  $\omega_{3n} = \frac{\lambda_{3n}}{L} \sqrt{\frac{\chi}{\rho_0}}$ . La combinaison des équations (4.53), (4.54) et (4.43) permet de déduire la relation suivante :

$$\sigma \chi \lambda_{3n} \cos \lambda_{3n} - \left( \sigma \underline{e}_{33} \alpha + M_t \frac{\chi \lambda_{3n}^2}{\rho_0 L} \right) \sin \lambda_{3n} = 0 \quad (4.55)$$

Les valeurs propres  $\lambda_{3n}$  sont calculés par la résolution de l'équation caractéristique (4.55) ci-dessus. On remarque que l'équation (4.55) ne peut pas être manipulée et être résolue analytiquement. Même si la solution analytique est possible, elle est

fastidieuse parce qu'on doit la résoudre  $n$  fois pour chaque mode. On utilise donc une méthode numérique. On trace tout d'abord la fonction  $f(\lambda_{3n})$  de l'équation (4.55) par exemple pour 7 modes. La figure 4.1 montre les racines  $\lambda_{31} \cdots \lambda_{37}$ . Les valeurs de  $\lambda_{3n}$  données permettent d'obtenir celles de  $f(\lambda_{3n})$ . L'estimation des racines  $\lambda_{3n}$  est effectuée en prenant la valeur lorsque le changement du signe de  $f(\lambda_{3n})$  [53].

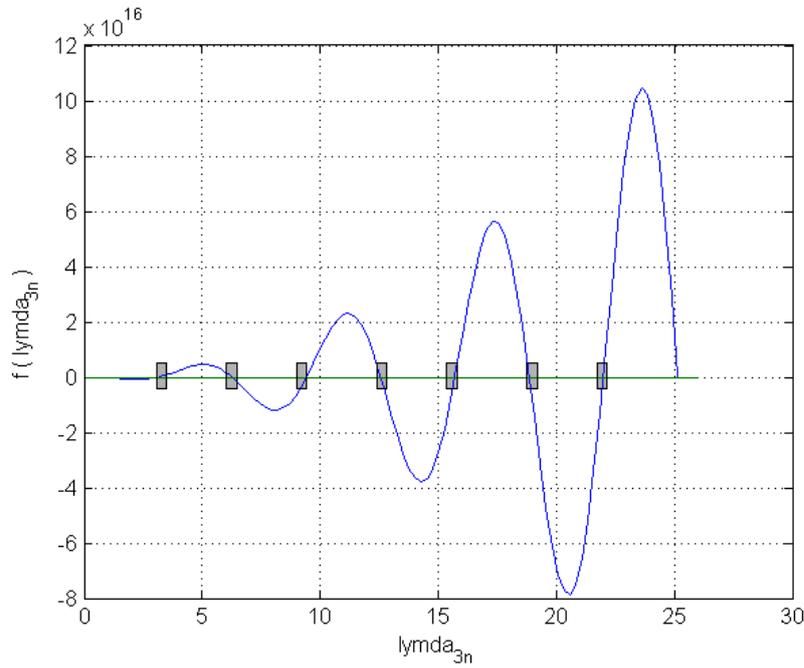


FIGURE 4.1 – Racines d'une fonction  $f(\lambda_{3n}) = 0$

On obtient alors les vecteurs propres (ou modes propres)  $v_{3n}(x_3)$ ,  $\phi_{3n}(x_3)$ , les valeurs propres  $\lambda_{3n}$  et les pulsations propres  $\omega_{3n}$ . Il faut maintenant calculer l'amplitude du déplacement  $\eta_n$ . Afin d'exprimer  $\eta_n$ , il est nécessaire de déduire les propriétés des modes propres qui serviront à simplifier les démarches de calcul.

#### – Propriétés des modes propres

Afin d'exprimer les propriétés des modes propres, on projette l'équation (4.46) sur le vecteur propre  $v_{3n}(x_3)$  et on obtient la relation suivante :

$$\int_0^L v_{3n}(x_3) \sigma[\chi v_{3m,33}(x_3) + \rho_0 \omega_{3m}^2 v_{3m}(x_3)] dx_3 = 0 \quad (4.56)$$

En intégrant par partie le premier terme, l'équation (4.56) devient :

$$\int_0^L v_{3n}(x_3) \sigma \rho_0 \omega_{3m}^2 v_{3m}(x_3) dx_3 + [\sigma \chi v_{3n}(x_3) v_{3m,3}(x_3)]_0^L - \int_0^L \sigma \chi v_{3m,3}(x_3) v_{3n,3}(x_3) dx_3 = 0 \quad (4.57)$$

En utilisant la condition aux limites (4.4), le second terme de l'équation (4.57) se simplifie et on obtient :

$$\int_0^L v_{3n}(x_3) \sigma \rho_0 \omega_{3m}^2 v_{3m}(x_3) dx_3 + \sigma \chi v_{3n}(L) v_{3m,3}(L) - \int_0^L \sigma \chi v_{3m,3}(x_3) v_{3n,3}(x_3) dx_3 = 0 \quad (4.58)$$

En traitant l'équation (4.46) de la même manière et en projetant sur les vecteurs propres  $v_m(x_3)$ , on obtient la relation suivante :

$$\int_0^L v_{3m}(x_3) \sigma \rho_0 \omega_{3n}^2 v_{3n}(x_3) dx_3 + \sigma \chi v_{3m}(L) v_{3n,3}(L) - \int_0^L \sigma \chi v_{3n,3}(x_3) v_{3m,3}(x_3) dx_3 = 0 \quad (4.59)$$

La soustraction de l'équation (4.58) à l'équation (4.59) donne la relation suivante :

$$(\omega_{3m}^2 - \omega_{3n}^2) \int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) dx_3 + \sigma \chi [v_{3n}(L) v_{3m,3}(L) - v_{3m}(L) v_{3n,3}(L)] = 0 \quad (4.60)$$

La combinaison des équations (4.43), (4.44), (4.45), (4.54) permet de déduire la relation suivante :

$$v_{3n,3}(L) = \frac{\alpha \epsilon_{33} A_n}{L \chi} \sin \lambda_{3n} + \frac{M_t \omega_{3n}^2}{\sigma \chi} v_{3n}(L) \quad (4.61)$$

En remplaçant  $v_{3n,3}(L)$  et  $v_{3m,3}(L)$  dans l'équation (4.60), le second terme de l'équation (4.60) se simplifie et il vient :

$$(\omega_{3m}^2 - \omega_{3n}^2) \left[ \int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) dx_3 + M_t v_{3n}(L) v_{3m}(L) \right] = 0 \quad (4.62)$$

Pour  $n \neq m$ , on a  $\omega_{3m}^2 - \omega_{3n}^2 \neq 0$ . Pour que l'équation (4.62) soit vérifiée, nécessairement le terme entre crochet doit être nul  $\int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) dx_3 + M_t v_{3n}(L) v_{3m}(L) = 0$ . En conclusion les modes propres  $v_{3m}(x_3)$  et  $v_{3n}(x_3)$  sont orthogonaux. Pour calculer le paramètre  $A_n$ , on souhaite que la base constituée par les modes propres soit orthonormée, ce qui se traduit par :

$$\int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) dx_3 = \delta_{nm} - M_t v_{3n}(L) v_{3m}(L) \quad (4.63)$$

avec  $\delta_{nm}$ , la fonction de Dirac, définie par  $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$ .

En remplaçant l'équation (4.63) dans le premier terme de l'équation (4.59), on

obtient la relation suivante :

$$\int_0^L \sigma \chi v_{3n,3}(x_3) v_{3m,3}(x_3) dx_3 = \delta_{nm} \omega_{3n}^2 + \frac{\sigma \alpha \epsilon_{33}}{L} A_n \sin \lambda_{3n} v_{3m}(L) \quad (4.64)$$

Les relations des équations (4.63) et (4.64) sont appelées les propriétés d'orthogonalité des modes propres. Pour  $m = n$ , l'équation (4.63) permet de calculer le paramètre  $A_n$  :

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{\sigma \rho_0 [L - \frac{L}{2\lambda_{3n}} \sin(2\lambda_{3n})] + 2M_t \sin^2(\lambda_{3n})}} \quad (4.65)$$

#### – Calcul de l'amplitude des modes $\eta_n(t)$

En remplaçant  $u_3(x_3, t)$  de l'expression générale (4.29) dans l'équation d'équilibre (4.13), puis en projetant l'équation obtenue selon les modes  $v_{3m}(x_3)$  (4.53), on obtient la relation suivante :

$$\int_0^L \sigma v_{3m}(x_3) \left\{ -\rho_0 [\ddot{u}_3^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) v_{3n}(x_3)] + \chi [u_{3,33}^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) v_{3n,33}(x_3)] \right\} dx_3 = 0 \quad (4.66)$$

En utilisant la relation (4.31), l'équation (4.66) se simplifie :

$$-\int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) \ddot{u}_3^{qs}(x_3, t) dx_3 - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) dx_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^L \chi \sigma v_{3m}(x_3) v_{3n,33}(x_3) dx_3 = 0 \quad (4.67)$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres définie par l'équation (4.63), le deuxième terme de l'équation (4.67) devient :

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) dx_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) (\delta_{nm} - M_t v_{3n}(L) v_{3m}(L)) \quad (4.68)$$

En intégrant par partie le troisième terme de l'équation (4.67) puis en utilisant l'équation (4.4), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^L \chi \sigma v_{3m}(x_3) v_{3n,33}(x_3) dx_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \chi \sigma v_{3m}(L) v_{3n,3}(L) - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^L \chi \sigma v_{3m,3}(x_3) v_{3n,3}(x_3) dx_3 \quad (4.69)$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres définies par l'équation (4.64), le deuxième terme de l'équation (4.69) se simplifie :

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^L \chi \sigma v_{3m,3}(x_3) v_{3n,3}(x_3) dx_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \left( \delta_{nm} \omega_{3n}^2 + \frac{\sigma \alpha \epsilon_{33}}{L} A_n \sin \lambda_{3n} v_{3m}(L) \right) \quad (4.70)$$

En remplaçant les équations (4.29) et (4.30) dans l'équation (4.27), on obtient :

$$\begin{aligned} & -\sigma e_{33} \phi_{3,3}^{qs}(L, t) - \sigma c_{33}^E u_{3,3}^{qs}(L, t) + F(t) - M_t \ddot{u}_3^{qs}(L, t) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \left( \sigma \chi v_{3n,3}(L) - \frac{\sigma \alpha e_{33}}{L} A_n \sin \lambda_{3n} \right) - M_t \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n v_{3n}(L) = 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

L'équation (4.71) se simplifie et on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \sigma \chi v_{3n,3}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -M_t \ddot{\eta}_n v_{3n}(L) + \eta_n(t) \frac{\sigma \alpha e_{33}}{L} A_n \sin \lambda_{3n} \right) - M_t \ddot{u}_3^{qs}(L, t) \quad (4.72)$$

En remplaçant les équations (4.70) et (4.72) dans l'équation (4.69), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^L \chi \sigma v_{3m}(x_3) v_{3n,33}(x_3) dx_3 &= - \sum_{n=1}^{\infty} M_t \ddot{\eta}_n v_{3n}(L) v_{3m}(L) - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \delta_{nm} \omega_{3n}^2 \\ & - M_t \ddot{u}_3^{qs}(L, t) v_{3m}(L) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Compte tenu des équations (4.68) et (4.73), la relation (4.67) devient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \delta_{nm} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \delta_{nm} \omega_{3n}^2 = \psi_m(t) \quad (4.74)$$

où a été introduit le facteur de participation :

$$\psi_m(t) = - \int_0^L \sigma \rho_0 v_{3m}(x_3) \ddot{u}_3^{qs}(x_3, t) dx_3 - M_t \ddot{u}_3^{qs}(L, t) v_{3m}(L) \quad (4.75)$$

L'équation (4.40) permet de déduire la relation suivante en transformée de Laplace :

$$u_3^{qs}(L, s) = \frac{1}{c_{33}^E} \left( -e_{33} V(s) + \frac{L F(s)}{\sigma} \right) \quad (4.76)$$

Pour des conditions initiales nulles, l'insertion du déplacement quasi-statique de l'équation (4.40) dans le facteur de participation de l'équation (4.75) donne l'expression suivante :

$$\psi_m(s) = - \frac{\sigma \rho_0 A_m}{c_{33}^E} s^2 \left( - \frac{e_{33}}{L} V(s) + \frac{F(s)}{\sigma} \right) \int_0^L \sin(\lambda_{3m} \frac{x_3}{L}) x_3 dx_3 - M_t s^2 u_3^{qs}(L, s) v_{3m}(L) \quad (4.77)$$

On a :

$$- \int_0^L \sin(\lambda_{3m} \frac{x_3}{L}) x_3 dx_3 = \frac{L^2}{\lambda_{3m}} \left( \cos \lambda_{3m} - \frac{\sin \lambda_{3m}}{\lambda_{3m}} \right) \quad (4.78)$$

En remplaçant les équations (4.76) et (4.78) dans l'équation (4.77), on obtient le

facteur de participation :

$$\begin{aligned} \psi_m(s) &= \frac{\sigma \rho_0 L^2 A_m}{\underline{c}_{33}^E \lambda_{3m}} s^2 \left( -\frac{\underline{e}_{33}}{L} V(s) + \frac{F(s)}{\sigma} \right) \left( \cos \lambda_{3m} - \frac{\sin \lambda_{3m}}{\lambda_{3m}} \right) \\ &\quad - \frac{M_t A_m s^2}{\underline{c}_{33}^E} \left( -\underline{e}_{33} V(s) + \frac{L}{\sigma} F(s) \right) \sin \lambda_{3m} \end{aligned} \quad (4.79)$$

A l'aide de l'équation (4.55), le facteur de participation peut être simplifié :

$$\psi_m(s) = -\frac{\sigma \rho_0 L^2 A_m \sin \lambda_{3m}}{\chi \lambda_{3m}^2} \left( -\frac{\underline{e}_{33}}{L} V(s) + \frac{F(s)}{\sigma} \right) s^2 \quad (4.80)$$

Pour des conditions initiales nulles et pour  $n = m$ , l'équation (4.74) peut être exprimée en utilisant leur transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \eta_n(s) &= \frac{\psi_n(s)}{\omega_{3n}^2 + s^2} \\ &= -\frac{\sigma \rho_0 L^2 A_n \sin \lambda_{3n}}{\chi \lambda_{3n}^2} \left( -\frac{\underline{e}_{33}}{L} V(s) + \frac{F(s)}{\sigma} \right) \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Finalement on obtient tous les éléments (déplacement quasi-statique  $u_3^{qs}$ , vecteurs propres  $v_{3n}$  et amplitudes  $\eta_n$ ) pour construire la solution complète. En remplaçant les différents termes dans les équations dynamiques de l'équation (4.13) et avec des conditions initiales nulles, les solutions complètes du déplacement ( $u_3$ ) peuvent être exprimées sous forme de leur transformée de Laplace dans le cas où on impose la différence de potentiel électrique aux bornes de l'actionneur piézoélectrique :

$$\begin{aligned} u_3(L, s) &= u_3^{qs}(L, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(s) v_{3n}(L) \\ &= \frac{1}{\underline{c}_{33}^E} \left( -\underline{e}_{33} V(s) + \frac{L}{\sigma} F(s) \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma \rho_0 L^2 A_n^2 \sin^2 \lambda_{3n}}{\chi \lambda_{3n}^2} \left( -\frac{\underline{e}_{33}}{L} V(s) + \frac{F(s)}{\sigma} \right) \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Pour  $F(s) = 0$ , on obtient la fonction de transfert entre la sortie en déplacement et l'entrée en tension :

$$\frac{u_3(L, s)}{V(s)} = -\frac{\underline{e}_{33}}{\underline{c}_{33}^E} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma \rho_0 L \underline{e}_{33} A_n^2 \sin^2 \lambda_{3n}}{\chi \lambda_{3n}^2} \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \quad (4.83)$$

Pour  $V(s) = 0$ , on obtient la fonction de transfert entre la sortie en déplacement et

l'entrée en force :

$$\frac{u_3(L, s)}{F(s)} = \frac{L}{\sigma \underline{e}_{33}^E} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_0 L^2 A_n^2 \sin^2 \lambda_{3n}}{\chi \lambda_{3n}^2} \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \quad (4.84)$$

Pour calculer la charge électrique, on utilise la condition aux limite de l'équation (4.28) :

$$Q(t) = \sigma \left( \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \underline{e}_{33} u_{3,3}(L, t) \right) \quad (4.85)$$

Pour calculer  $u_{3,3}$  et  $\phi_{,3}$ , on utilise les équations (4.29) et (4.30) à l'aide des équations (4.53) et (4.54), on obtient :

$$u_{3,3}(x_3, t) = \frac{1}{\underline{e}_{33}^E} \left( -\frac{\underline{e}_{33} V(t)}{L} + \frac{F(t)}{\sigma} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \frac{A_n \lambda_{3n}}{L} \cos(\lambda_{3n} \frac{x_3}{L}) \quad (4.86)$$

$$\phi_{,3}(x_3, t) = \frac{V(t)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \left( \frac{\alpha A_n \lambda_{3n}}{L} \cos(\lambda_{3n} \frac{x_3}{L}) - \frac{\alpha A_n}{L} \sin \lambda_{3n} \right) \quad (4.87)$$

Aux conditions initiales nulles, on exprime l'équation (4.85) sous forme de leur transformée de Laplace à l'aide des équations (4.76), (4.86) et (4.87) :

$$\begin{aligned} Q(s) &= \sigma \left( \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(L, s) - \underline{e}_{33} u_{3,3}(L, s) \right) \\ &= \frac{\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S V(s)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(s) \sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \left( \frac{\alpha A_n \lambda_{3n}}{L} \cos \lambda_{3n} - \frac{\alpha A_n}{L} \sin \lambda_{3n} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma \underline{e}_{33}}{\underline{e}_{33}^E} \left( -\frac{\underline{e}_{33} V(s)}{L} + \frac{F(s)}{\sigma} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(s) \frac{\sigma \underline{e}_{33} A_n \lambda_{3n}}{L} \cos \lambda_{3n} \end{aligned} \quad (4.88)$$

La simplification de l'équation (4.88) donne :

$$Q(s) = \frac{\sigma}{L} \left( \underline{\varepsilon}_{33}^S + \frac{\underline{e}_{33}^2}{\underline{e}_{33}^E} \right) V(s) - \frac{\underline{e}_{33}}{\underline{e}_{33}^E} F(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(s) \left( \frac{\sigma \underline{e}_{33} A_n}{L} \sin \lambda_{3n} \right) \quad (4.89)$$

En remplaçant  $\eta_n(s)$  de l'équation (4.81) dans l'équation (4.89), on obtient finalement la charge électrique :

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\sigma}{L} \left( \underline{\varepsilon}_{33}^S + \frac{\underline{e}_{33}^2}{\underline{e}_{33}^E} \right) V(s) - \frac{\underline{e}_{33}}{\underline{e}_{33}^E} F(s) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2 \rho_0 L \underline{e}_{33}}{\chi} \frac{A_n^2 \sin^2 \lambda_{3n}}{\lambda_{3n}^2} \left( -\frac{\underline{e}_{33}}{L} V(s) + \frac{F(s)}{\sigma} \right) \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Pour  $F(s) = 0$ , on obtient la fonction de transfert entre la sortie en charge électrique

et l'entrée en tension :

$$\frac{Q(s)}{V(s)} = \frac{\sigma}{L} \left( \frac{\epsilon_{33}^S}{\epsilon_{33}^E} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2 \rho_0 e_{33}^2 A_n^2 \sin^2 \lambda_{3n}}{\chi \lambda_{3n}^2} \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \quad (4.91)$$

Pour  $V(s) = 0$ , on obtient la fonction de transfert entre la sortie en charge électrique et l'entrée en force :

$$\frac{Q(s)}{F(s)} = -\frac{e_{33}}{c_{33}^E} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma \rho_0 L e_{33} A_n^2 \sin^2 \lambda_{3n}}{\chi \lambda_{3n}^2} \frac{s^2}{\omega_{3n}^2 + s^2} \quad (4.92)$$

A travers le calcul de ce modèle analytique (MA), nous remarquons que les charges mécaniques dépendent du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'extrémité de l'actionneur piézoélectrique. Ceci requiert donc de recalculer les données modales (valeurs propres, fréquences propres, modes propres et  $\eta_n(t)$ ) à chaque fois que les conditions aux limites sont modifiées. C'est l'inconvénient majeur du modèle analytique. Or dans le cas du forgeage, la charge est non linéaire et il est probablement impossible de recalculer. Pour résoudre cette problématique, nous avons donc proposé pour la suite un modèle éléments finis (MEF) de l'actionneur piézoélectrique qui permet d'intégrer directement les charges mécaniques par une boucle externe.

### 4.3 Modèle par éléments finis

Le barreau piézoélectrique en mode-33 de la figure 3.4 est divisé en  $N$  éléments d'épaisseur  $\ell_e$  comme représenté sur la figure 4.2. On suppose qu'un élément discrétisé  $e$  quelconque ( $e$  variant de 1 à  $N$ ) a deux noeuds et chaque noeud est caractérisé par un déplacement  $u_i(t)$ , un potentiel électrique  $\phi_i(t)$ , une force  $F_i(t)$  et une charge électrique  $Q_i(t)$  selon l'axe  $x_3$  avec  $i$  variant de 0 à  $N$ . Les valeurs entre ces noeuds sont interpolées linéairement par la fonction polynomiale du premier ordre de la forme :

$$f_e(x_3, t) = a_1(t) + a_2(t)x_3 \quad (4.93)$$

où l'indice  $e$  représente la fonction quelconque pour un élément  $e$ . La fonction  $f(x_3, t)$  peut être les fonctions du déplacement  $u_3(x_3, t)$ , du potentiel  $\phi(x_3, t)$ , de la force  $F(x_3, t)$  et de la charge électrique  $Q(x_3, t)$ . La modélisation d'un barreau piézoélectrique par l'approche éléments finis est divisée en deux étapes. La première étape consiste à modéliser un élément discrétisé pris isolé et la seconde étape assemble tous les éléments discrétisés pour couvrir l'ensemble de la géométrie du barreau.

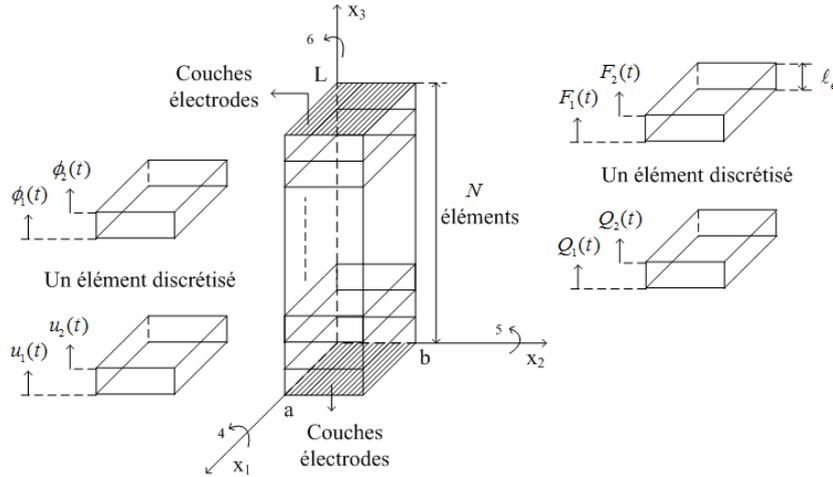


FIGURE 4.2 – Barreau piézoélectrique discrétisé

### 4.3.1 Modélisation d'un élément discrétisé

Tout d'abord on écrit la fonction polynomiale de l'équation (4.93) sous une forme matricielle. On choisit un élément quelconque  $e$  de la figure 4.2. Pour l'élément  $e$ , on a :

$$\begin{aligned} f_e(x_3 = 0, t) &= f_1(t) \\ f_e(x_3 = \ell_e, t) &= f_2(t) \end{aligned} \quad (4.94)$$

En  $x_3 = 0$ , la fonction polynômiale du 1<sup>er</sup> ordre (4.93) peut être simplifiée et on obtient les relations suivantes :

$$f_e(0, t) = a_1(t) \quad (4.95)$$

et pour  $x_3 = \ell_e$

$$f_e(\ell_e, t) = a_1(t) + a_2(t)\ell_e \quad (4.96)$$

La combinaison des équations (4.94), (4.95) et (4.96) permet de déduire les fonctions d'interpolation par les relations suivantes :

$$f_e(x_3, t) = f_1(t)\varphi_1(x_3) + f_2(t)\varphi_2(x_3) \quad (4.97)$$

où  $\varphi_1(x_3) = 1 - \frac{x_3}{\ell_e}$  et  $\varphi_2(x_3) = \frac{x_3}{\ell_e}$  sont appelés les formes de la fonction [49]. La relation de l'équation (4.97) peut être exprimée sous forme matricielle par les relations suivantes :

$$f_e(x_3, t) = N_e(x_3)F_e(t) \quad (4.98)$$

avec  $F_e(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}^t$  et  $N_e(x_3) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_3) & \varphi_2(x_3) \end{pmatrix}$  où l'exposant  $t$  indique une transposition. De façon similaire pour le déplacement, le potentiel électrique, la force mécanique et la charge électrique d'un élément  $\mathbf{e}$ , on peut les exprimer respectivement sous forme matricielle par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_{3e}(x_3, t) &= N_e(x_3)U_e(t) \\ \phi_e(x_3, t) &= N_e(x_3)\Phi_e(t) \\ F_e(x_3, t) &= N_e(x_3)F_e(t) \\ Q_e(x_3, t) &= N_e(x_3)Q_e(t) \end{aligned} \quad (4.99)$$

où  $U_e(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix}^t$ ,  $\Phi_e(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{pmatrix}^t$ ,  $F_e(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) & F_2(t) \end{pmatrix}^t$  et  $Q_e(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \end{pmatrix}^t$ . La déformation et le champ électrique de l'équation (3.28) peuvent être exprimés pour un élément  $\mathbf{e}$  comme suit :

$$\begin{aligned} S_{3e} &= u_{3e,3}(x_3, t) = \frac{dN_e(x_3)}{dx_3}U_e(t) = B_e(x_3)U_e(t) \\ E_{3e} &= -\phi_{3,3}(x_3, t) = -\frac{dN_e(x_3)}{dx_3}\Phi_e(t) = -B_e(x_3)\Phi_e(t) \end{aligned} \quad (4.100)$$

où  $B_e(x_3) = \frac{dN_e(x_3)}{dx_3}$  et  $d$  est un opérateur différentiel. La substitution des équations (4.99) et (4.100) dans la relation de l'équation (3.29) donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{U}_e^t(t) \left[ \int_0^{\ell_e} \sigma \rho_0 N_e^t(x_3) N_e(x_3) dx_3 \right] \dot{U}_e(t) - \frac{1}{2} U_e^t(t) \left[ \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{c}_{33}^E B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 \right] U_e(t) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Phi_e^t(t) \left[ \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{e}_{33} B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 \right] U_e(t) - \frac{1}{2} U_e^t(t) \left[ \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{e}_{33} B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 \right] \Phi_e(t) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Phi_e^t(t) \left[ \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 \right] \Phi_e(t) + U_e^t(t) \int_0^{\ell_e} \sigma \bar{X}(t) N_e^t(x_3) dx_3 \right. \\ \left. + U_e^t(t) N_e^t(\ell_e) N_e(\ell_e) F_e(t) - \Phi_e^t(t) N_e^t(\ell_e) N_e(\ell_e) Q_e(t) \right. \\ \left. + \Phi_e^t(t) N_e^t(0) N_e(0) Q_e(t) + \frac{1}{2} m_e \dot{U}_e^t [N_e^t(\ell_e) N_e(\ell_e)] \dot{U}_e \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Considérons que la force interne  $\bar{X}$  dans le volume  $\Omega$  est négligeable. En effectuant la variation des coordonnées généralisées  $U_e(t)$  et  $\Phi_e(t)$  de l'équation (4.101), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \dot{U}_e^t(t) M_e \dot{U}_e(t) - \delta U_e^t(t) K_{eu} U_e(t) - \delta \Phi_e^t(t) K_{e\phi u} U_e(t) \right. \\ \left. - \delta U_e^t K_{e\phi u} \Phi_e(t) + \delta \Phi_e^t(t) K_{e\phi\phi} \Phi_e(t) + \delta U_e^t(t) G_e^{\ell_e} F_e(t) \right. \\ \left. - \delta \Phi_e^t(t) G_e^{\ell_e} Q_e(t) + \delta \Phi_e^t(t) G_e^0 Q_e(t) + m_e \delta \dot{U}_e^t(t) G_e^{\ell_e} \dot{U}_e(t) \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

où  $M_e$ ,  $K_{eu}$ ,  $K_{e\phi u}$  et  $K_{e\phi\phi}$  sont les matrices de masse, de rigidité élastique, de raideur de couplage électromécanique et de rigidité diélectrique pour un élément discrétisé

**e** :

$$\begin{aligned}
M_{em} &= M_e + m_e G_e \\
&= \int_0^{\ell_e} \sigma \rho_0 N_e^t(x_3) N_e(x_3) dx_3 + m_e N_e^t(\ell_e) N_e(\ell_e) \\
&= \frac{m \ell_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + m_e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

$$K_{eu} = \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{c}_{33}^E B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 = \frac{\sigma \underline{c}_{33}^E}{\ell_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.104}$$

$$K_{e\phi u} = \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{e}_{33} B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 = \frac{\sigma \underline{e}_{33}}{\ell_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.105}$$

$$K_{e\phi\phi} = \int_0^{\ell_e} \sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S B_e^t(x_3) B_e(x_3) dx_3 = \frac{\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S}{\ell_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

où  $m = \sigma \rho_0$  est la masse linéique. On suppose que  $m_e$  est la charge de masse imposée sur l'élément **e** en  $x_3 = \ell_e$ .  $G_e^{\ell_e}$  représente la matrice du coefficient des forces  $F_e(t)$  et des charges électriques  $Q_e$  appliquées sur l'extrémité de l'élément en  $x_3 = \ell_e$  :

$$G_e^{\ell_e} = N_e^t(\ell_e) N_e(\ell_e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.107}$$

$G_e^0$  représente la matrice du coefficient des charges électriques  $Q_e$  appliquées sur l'extrémité de l'élément en  $x_3 = 0$  :

$$G_e^0 = N_e^t(0) N_e(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

En intégrant par partie par rapport au temps l'équation (4.102), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&[\delta U_e^t(t) M_{em} \dot{U}_e(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} [\delta U_e^t(t) M_{em} \ddot{U}_e(t) + \delta U_e^t(t) K_{eu} U_e(t) + \delta \Phi_e^t(t) K_{e\phi u} U_e(t) \\
&\quad + \delta U_e^t(t) K_{e\phi u} \Phi_e(t) - \delta \Phi_e^t K_{e\phi\phi} \Phi_e(t) - \delta U_e^t G_e^{\ell_e} F_e(t) \\
&\quad + \delta \Phi_e^t(t) (G_e^{\ell_e} - G_e^0) Q_e(t)] dt = 0
\end{aligned} \tag{4.109}$$

D'après la condition de variation de la coordonnée généralisée  $U_e(t)$ , on a  $\delta U_e(t_1) = \delta U_e(t_2) = 0$ . Le premier terme de l'équation (4.109) est donc égal à zéro. L'équation (4.109) peut être simplifiée et regroupée en fonction de la variation arbitraire de

déplacement  $\delta U_e(t)$  et de potentiel électrique  $\delta \Phi_e(t)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \delta U_e^t(t) \left[ M_{em} \ddot{U}_e(t) + K_{eu} U_e(t) + K_{e\phi u} \Phi_e(t) - G_e^{\ell e} F_e(t) \right] dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \delta \Phi_e^t(t) \left[ K_{e\phi u} U_e(t) - K_{e\phi\phi} \Phi_e(t) + (G_e^{\ell e} - G_e^0) Q_e(t) \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

En appliquant le principe de moindre action à l'équation (4.110), on obtient les équations du mouvement pour un élément discrétisé  $e$

$$\begin{aligned} M_{em} \ddot{U}_e(t) + K_{eu} U_e(t) + K_{e\phi u} \Phi_e(t) - G_e^{\ell e} F_e(t) &= 0 \\ K_{e\phi u} U_e(t) - K_{e\phi\phi} \Phi_e(t) + (G_e^{\ell e} - G_e^0) Q_e(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.111)$$

### 4.3.2 Assemblage des éléments

La deuxième étape de la modélisation consiste à assembler tous les éléments discrétisés d'un barreau piézoélectrique (figure 4.2) afin d'obtenir les équations dynamiques approchées du système global. Le processus d'assemblage nécessite tout d'abord la construction des matrices structurelles de déplacement  $U(t)$ , de potentiel électrique  $\Phi(t)$ , de force  $F(t)$  et de charge électrique  $Q(t)$ . La figure 4.3 représente tous les  $N+1$  noeuds discrétisés du déplacement, du potentiel électrique, de la force et de la charge électrique. Toutes les matrices structurelles  $U(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $F(t)$  et  $Q(t)$

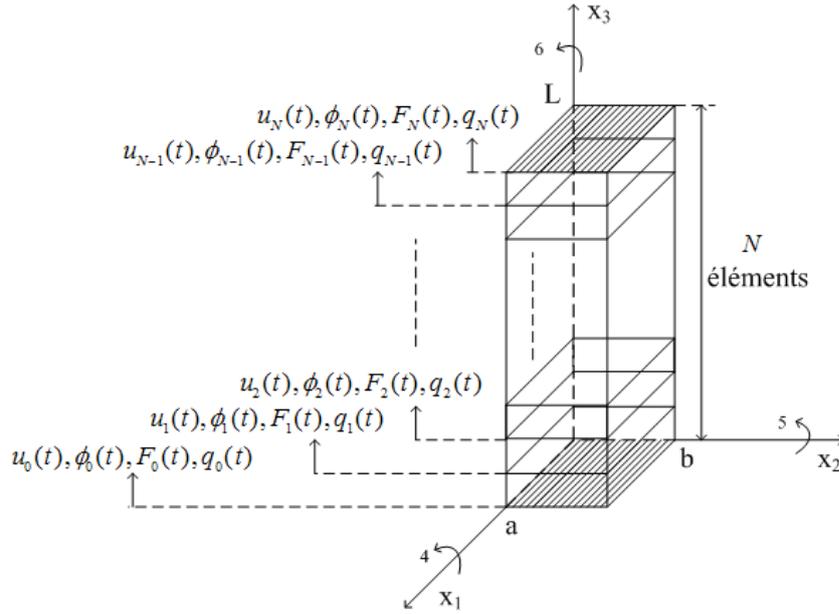


FIGURE 4.3 – Représentation des noeuds de déplacement, de potentiel électrique, de force et de charge électrique

ont pour dimension  $N+1$  lignes et une colonne. En introduisant une notation sous forme de vecteurs transposés, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U(t) &= \left( u_0(t) \quad u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_N(t) \right)^t \\ \Phi &= \left( \phi_0(t) \quad \phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \dots \quad \phi_N(t) \right)^t (t) \\ F &= \left( F_0(t) \quad F_1(t) \quad F_2(t) \quad \dots \quad F_N(t) \right)^t (t) \\ Q(t) &= \left( Q_0(t) \quad Q_1(t) \quad Q_2(t) \quad \dots \quad Q_N(t) \right)^t \end{aligned} \quad (4.112)$$

Les déplacements, les potentiels électriques, les forces et les charges électriques pour chaque élément discrétisé peuvent être caractérisés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U_e(t) &= L_e U(t) \\ \Phi_e(t) &= L_e \Phi(t) \\ F_e(t) &= L_e F(t) \\ Q_e(t) &= L_e Q(t) \end{aligned} \quad (4.113)$$

où  $L_e$  est la matrice booléenne de dimension  $2 \times (N + 1)$ . Par exemple pour les éléments  $1, \dots, N$  de la figure 4.3, les matrices booléennes peuvent être écrites comme suit [49] :

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ L_N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.114)$$

En remplaçant les matrices élémentaires des équations (4.113) dans la relation (4.110) pour chaque élément  $e$ , on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \delta U^t(t) L_e^t [M_{em} L_e \ddot{U}(t) + K_{eu} L_e U(t) + K_{e\phi u} L_e \Phi(t) - G_e L_e F(t)] dt \\ - \int_{t_1}^{t_2} \delta \Phi^t(t) L_e^t [K_{e\phi u} L_e U(t) - K_{e\phi\phi} L_e \Phi(t) + G_e L_e Q(t)] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.115)$$

Ensuite, on fait la sommation sur tous les éléments discrétisés et on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \delta U^t(t) [\sum_{e=1}^N (L_e^t M_e L_e) \ddot{U}(t) + \sum_{e=1}^N (L_e^t K_{eu} L_e) U(t) + \sum_{e=1}^N (L_e^t K_{e\phi u} L_e) \Phi(t) \\ - \sum_{e=1}^N (L_e^t G_e L_e) F(t)] dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \Phi^t(t) [\sum_{e=1}^N (L_e^t K_{e\phi u} L_e) U(t) \\ - \sum_{e=1}^N (L_e^t K_{e\phi\phi} L_e) \Phi(t) + \sum_{e=1}^N L_e^t G_e L_e Q(t)] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.116)$$

En appliquant le principe de moindre action à l'équation (4.116), les équations dynamiques du système global sont obtenues :

$$M\ddot{U}(t) + K_u U(t) + K_{\phi u} \Phi(t) - \Lambda F(t) = 0 \quad (4.117)$$

$$K_{\phi u} U(t) - K_{\phi\phi} \Phi(t) + \Lambda Q(t) = 0 \quad (4.118)$$

où  $M$ ,  $K_u$ ,  $K_{\phi u}$  et  $K_{\phi\phi}$  sont les matrices de masse, de rigidité élastique, de couplage électromécanique et de rigidité diélectrique pour le système global. Pour le premier élément, une extrémité située dans le plan  $x_1 0 x_2$  est fixée mécaniquement et reliée à la masse électrique (c'est à dire  $u_0(t) = 0$ ,  $\phi_0(t) = 0$ ). Ces conditions limites permettent de supprimer les valeurs de la première colonne et de la première ligne des matrices  $M$ ,  $K_u$ ,  $K_{\phi u}$  et  $K_{\phi\phi}$ , et on obtient les matrices de dimension  $N \times N$  :

– Matrice structurale de masse ( $N \times N$ ) :

$$M = \sum_{e=1}^N [L_e^t M_e L_e] = \frac{m\ell_e}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

où  $m = \sigma \varrho_0$  est la masse linéique. Chaque noeud n'est pas imposé respectivement par les masses  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{N-1}$ . Sauf le dernier noeud  $(N+1)^{\text{ème}}$  est imposé par la masse  $M_t$ , d'où  $m_N = M_t$ . La matrice de l'équation (4.119) devient :

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{e=1}^N [L_e^t M_e L_e] \\
&= \frac{m\ell_e}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 + \frac{6}{m\ell_e} M_t \end{pmatrix} \quad (4.120)
\end{aligned}$$

– Matrice structurelle de rigidité élastique ( $N \times N$ ) :

$$\begin{aligned}
K_u &= \sum_{e=1}^N L_e^t K_{eu} L_e \\
&= \frac{c_{33}^E \sigma}{\ell_e} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.121)
\end{aligned}$$

– Matrice structurelle de couplage électromécanique ( $N \times N$ ) :

$$\begin{aligned}
K_{\phi u} &= \sum_{e=1}^N [L_e^t K_{e\phi u} L_e] \\
&= \frac{e_{33} \sigma}{\ell_e} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.122)
\end{aligned}$$

– Matrice structurelle de rigidité diélectrique ( $N \times N$ ) :

$$\begin{aligned}
K_{\phi\phi} &= \sum_{e=1}^N L_e^t K_{e\phi\phi} L_e \\
&= \frac{\varepsilon_{33}^S \sigma}{\ell_e} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.123)
\end{aligned}$$

– Matrice structurelle du coefficient de force et de charge électrique :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{e=1}^N L_e^t G_e L_e \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.124)
\end{aligned}$$

Chaque noeud  $n$ 'a pas de forces externes  $F_1(t), F_2(t), F_3(t) \cdots F_{N-1}(t)$  et de charges électriques  $Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t) \cdots Q_{N-1}(t)$ . A l'exception du  $(N+1)^{\text{ème}}$  noeud, où on impose à l'élément  $e = N$  la force  $F_N(t)$  et la charge électrique  $Q_N(t)$ . Les vecteurs transposés de la force et de charge électrique définis à l'équation (4.112) deviennent finalement :

$$\begin{aligned}
F^t(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & F_N(t) \end{pmatrix} \\
Q^t(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & Q_N(t) \end{pmatrix} \quad (4.125)
\end{aligned}$$

et la matrice de l'équation (4.124) devient un vecteur :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{e=1}^N L_e^t G_e L_e \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.126)
\end{aligned}$$

L'équation (4.117) peut être complétée avec le terme d'amortissement  $C_a\dot{U}(t)$  et écrite comme suit :

$$M\ddot{U}(t) + C_a\dot{U}(t) + K_u U(t) + K_{\phi u}\Phi(t) - \Lambda F(t) = 0 \quad (4.127)$$

où  $C_a$  est la proportionnalité d'amortissement de la combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, on obtient :

$$C_a = \alpha M + \beta K_u \quad (4.128)$$

Le calcul des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  s'effectue en utilisant la formule ci-dessous [54] :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\xi_1\omega_1 - 2\xi_m\omega_m}{\omega_1^2 - \omega_m^2} \\ \alpha &= 2\xi_1\omega_1 - \beta\omega_1^2 \end{aligned} \quad (4.129)$$

où  $\xi_1$ ,  $\omega_1$  sont respectivement le rapport d'amortissement et la pulsation du premier mode. L'indice  $m$  désigne le  $m^{\text{ème}}$  mode considéré pour l'analyse. Le rapport d'amortissement  $\xi_i$ ,  $i \leq m$ , peut être calculé en utilisant la relation linéaire [54] :

$$\xi_i = \frac{\xi_m - \xi_1}{\omega_m - \omega_1} (\omega_i - \omega_1) + \xi_1 \quad (4.130)$$

### 4.3.3 Relations avec la tension d'alimentation

Dans le cas où on connaît la tension aux bornes de l'actionneur piézoélectrique, on peut déterminer les déplacements et les charges électriques de tous les noeuds des éléments discrétisés. La matrice structurelle du potentiel électrique peut être séparée en un terme indéterminé  $\Phi_d$  et en un terme fixé  $\Phi_{im}$  :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_d \\ \Phi_{im} \end{pmatrix} \quad (4.131)$$

où  $\Phi_d^t = (\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_{N-1})$  est de dimension  $(1 \times N - 1)$  et  $\Phi_{im} = \phi_N$  est de dimension  $(1 \times 1)$ . La matrice structurelle de couplage électromécanique peut être aussi séparée en deux termes  $K_{\phi ud}$  et  $K_{\phi uim}$  :

$$K_{\phi u} = \begin{pmatrix} K_{\phi ud} & K_{\phi uim} \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

où  $K_{\phi ud}$  est de dimension  $(N \times N - 1)$  et  $K_{\phi uim}$  est de dimension  $(N \times 1)$ . La matrice structurelle de rigidité diélectrique peut être séparée en deux termes  $K_{\phi\phi d}$  et  $K_{\phi\phi im}$  :

$$K_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & K_{\phi\phi im} \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

où  $K_{\phi\phi d}$  est de dimension  $(N \times N - 1)$  et  $K_{\phi\phi im}$  est de dimension  $(N \times 1)$ . En remplaçant les équations (4.131), (4.132) et (4.133) dans les équations (4.127) et (4.118), on obtient les relations suivantes :

$$M\ddot{U}(t) + C_a\dot{U}(t) + K_u U(t) + \begin{pmatrix} K_{\phi ud} & 0_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_d(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} + K_{\phi uim} \Phi_{im}(t) - \Lambda F(t) = 0 \quad (4.134)$$

$$K_{\phi u} U(t) - \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_d(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} - K_{\phi\phi im} \Phi_{im}(t) = 0 \quad (4.135)$$

où  $0_{N1}$  est la matrice de zéro de dimension  $(N \times 1)$ . L'équation (4.135) peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Phi_d(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi u} U(t) - \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi\phi im} \Phi_{im}(t) \quad (4.136)$$

L'introduction de l'équation (4.136) dans l'équation (4.134) donne la relation suivante :

$$M\ddot{U}(t) + C_a\dot{U}(t) + \left[ K_u + \begin{pmatrix} K_{\phi ud} & 0_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi u} \right] U(t) + \left( \left[ -\begin{pmatrix} K_{\phi ud} & 0_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi\phi im} + K_{\phi uim} \right] -\Lambda \right) \begin{pmatrix} \Phi_{im}(t) \\ F(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.137)$$

où  $\left[ -\begin{pmatrix} K_{\phi ud} & 0_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi\phi im} + K_{\phi uim} \right]$  est de dimension  $(N \times 1)$ . L'équation (4.137) peut être simplifiée :

$$M\ddot{U}(t) + C_a\dot{U}(t) + K_{NN} U(t) + K_{N2} \begin{pmatrix} \Phi_{im}(t) \\ F(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.138)$$

avec

$$K_{NN} = \left[ K_u + \begin{pmatrix} K_{\phi ud} & 0_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi u} \right] \quad (4.139)$$

$$K_{N2} = \left( \left[ -\begin{pmatrix} K_{\phi ud} & 0_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\phi\phi d} & -\Lambda \end{pmatrix}^{-1} K_{\phi\phi im} + K_{\phi uim} \right] -\Lambda \right).$$

où  $K_{NN}$  est de dimension  $(N \times N)$  et  $K_{N2}$  est de dimension  $(N \times 2)$ . L'équation (4.138) peut être transformée pour être mise sous la forme d'équation d'état. On pose :

$$\begin{aligned} x_1 &= U(t) \\ x_2 &= \dot{U}(t) = \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (4.140)$$

et par dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}C_a x_2 - M^{-1}K_{NN}x_1 - M^{-1}K_{N2} \begin{pmatrix} \Phi_{im}(t) \\ F(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.141)$$

En notant  $X = (x_1 \ x_2)^t$  et  $U = (\Phi_{im}(t) \ F(t))^t$ . On obtient les équations d'état par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mathbf{A}X + \mathbf{B}U \\ Y &= \mathbf{C}X + \mathbf{D}U \end{aligned} \quad (4.142)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0_{NN} & I_{NN} \\ -M^{-1}K_{NN} & -M^{-1}C_a \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0_{N2} \\ -M^{-1}K_{N2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= (0_{1(N-1)} \ 1 \ 0_{1N}) \\ \mathbf{D} &= (0 \ 0) \end{aligned} \quad (4.143)$$

où  $I_{NN}$  est la matrice identité de dimension  $(N \times N)$ ,  $0_{NN}$ ,  $0_{N2}$ ,  $0_{1(N-1)}$  et  $0_{1N}$  sont respectivement les matrices de zéro de dimension  $(N \times N)$ ,  $(N \times 2)$ ,  $(1 \times N - 1)$  et  $(1 \times N)$ .  $M^{-1}K_{N2}$  est la matrice de dimension  $(N \times 2)$ .

## 4.4 Résultats et discussions

Le but de ce paragraphe est d'analyser les réponses temporelles et fréquentielles en vue de valider les modèles obtenues par la méthode analytique et l'approche par éléments finis. Les programmes de calcul du modèle analytique (MA) et du modèle par éléments finis (MEF) du barreau piézoélectrique en mode-33 sont implémentés en utilisant le logiciel Matlab<sup>®</sup> et testés sous différentes conditions. L'actionneur piézoélectrique utilisé dans le cadre de notre étude est de type Pst 1000/16/60 fabriqué par Piezomechanik GmbH. Les paramètres de son modèle sont donnés dans le tableau 4.1. Concernant la réponse dynamique de l'actionneur piézoélectrique, les données fournies par le constructeur correspondent seulement au premier mode dans le cas des vibrations libres.

Les modèles permettent de simuler l'actionneur piézoélectrique en tenant compte de la contribution de tous les modes afin d'obtenir la réponse précise, et peuvent être exploités pour identifier les données manquantes, typiquement les facteurs d'amortissement. Les modèles d'actionneurs piézoélectriques proposés fournissent la descrip-

TABLE 4.1 – Paramètres de l'actionneur piézoélectrique

$V_{PP} = 1000 \text{ V}$	$f_{1N} = 10 \text{ kHz}$	$\underline{\epsilon}_{33}^S = 2.86 \cdot 10^{-5} \text{ F m}^{-1}$
$u_{3\max} = 60 \mu\text{m}$	$\sigma = 16 \text{ mm}$	$\underline{c}_{33}^E = 3.18 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$
$\rho_0 = 7700 \text{ kg m}^{-3}$	$l = 54 \text{ mm}$	$\underline{e}_{33} = 1.90 \cdot 10^3 \text{ N V}^{-1} \text{ m}^{-1}$

tion des entrées-sorties pouvant intégrer le modèle de charges mécaniques complexes. Pour l'analyse des résultats, nous avons divisé notre étude en deux cas : le premier est d'analyser les réponses dans le cas d'actionneur piézoélectrique sans masse externe liée à l'extrémité libre et le deuxième est d'étudier les réponses dans le cas de l'actionneur piézoélectrique supportant une masse  $M_t$ .

#### 4.4.1 Actionneur piézoélectrique libre avec effort externe

L'analyse des réponses s'effectue dans les domaines fréquentiel et temporel. A partir des équations (4.82) et (4.142), on calcule les réponses fréquentielles entre la sortie en déplacement et l'entrée en tension  $[\frac{u_3(L,s)}{V(s)}]$  et entre la sortie en déplacement et l'entrée en force  $[\frac{u_3(L,s)}{F(s)}]$ . Ensuite les résultats obtenus par les fonctions de transfert sont envoyées à un modèle Simulink afin de simuler les réponses temporelles de l'actionneur piézoélectrique. Nous allons présenter tout d'abord les réponses dans le domaine fréquentiel et ensuite dans le domaine temporel.

##### – Réponses dans le domaine fréquentiel

Les figures 4.4 et 4.5 montrent les réponses obtenues par la simulation avec 3 modes pour MA et avec 3 éléments pour MEF. Les résultats obtenus par le modèle analytique sont utilisés comme référence pour la discussion. Il est à noter que les courbes coïncident pour les basses fréquences (0 à  $2 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ ). La figure 4.4 est la réponse fréquentielle entre le déplacement en sortie et l'entrée en tension. Le gain statique est de l'ordre de  $-144 \text{ dB}$ , ce qui signifie que pour une valeur de tension crête à crête de  $1000 \text{ V}$ , le déplacement est de l'ordre de  $63 \mu\text{m}$ , ce qui est très proche de la valeur donnée par le constructeur qui est de  $60 \mu\text{m}$  (voir tableau 4.1). La première fréquence de résonance  $f_1 = 10,17 \text{ kHz}$  est aussi très proche de la valeur donnée par le constructeur. D'après le modèle analytique, les deux fréquences de résonance

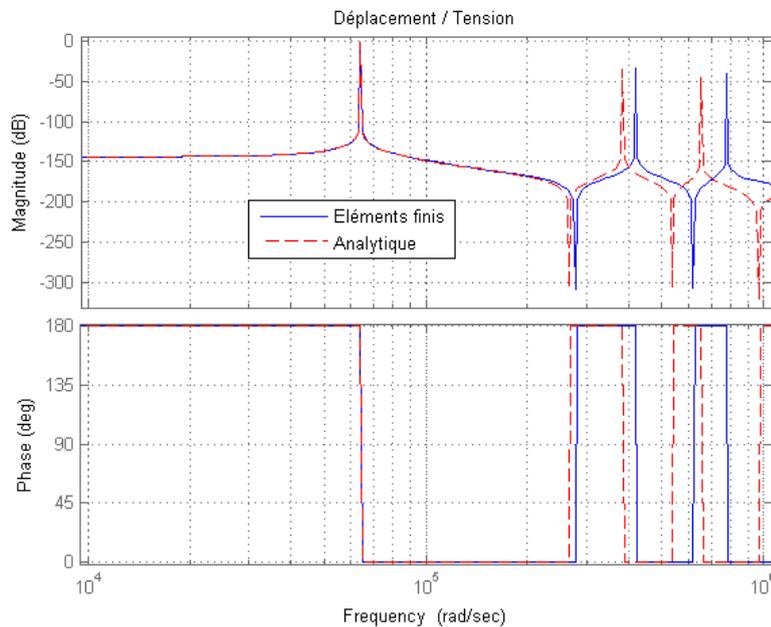


FIGURE 4.4 – Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{v}$ ) : MA-3 modes et MEF-3 éléments

suivantes sont  $f_2 = 60,8 \text{ kHz}$  et  $f_3 = 103,8 \text{ kHz}$ . La figure 4.5 montre la réponse fréquentielle entre le déplacement en sortie et l'entrée en force. Jusqu'à la première fréquence de résonance, les courbes coïncident. Pour les deux modes suivants, les fréquences de résonance du MEF s'écartent de celles du MA.

Pour chaque fréquence de résonance, les erreurs relatives entre le modèle analytique et le modèle par éléments finis pour un nombre d'éléments différents sont présentées sur la figure 4.6. Pour diminuer les erreurs, il faut augmenter le nombre des éléments finis. Toutefois les erreurs sont déjà au-dessous de 2% avec 12 éléments du MEF. Seul le premier mode est considéré dans le cadre de notre étude et la simulation avec 3 éléments du MEF fournit déjà une bonne précision de l'ordre de 0,28%. Nous avons vu que les fréquences utilisées dans le procédé du forgeage sont au-dessous de  $1 \text{ kHz}$ , donc la précision sur le deuxième et le troisième mode ne sont pas critiques. Malgré tout, on peut conclure que le MEF est vraiment acceptable et que le temps de calcul est très faible pour la simulation avec 3 éléments (voir la figure 4.28). Cette étude montre que le MEF à 15 éléments fournit précisément les réponses comme montrée sur les figures 4.7 et 4.8.

L'effet d'amortissement existe dans le matériau piézoélectrique et peut être introduit dans le MEF comme montré dans l'équation (4.127). La figure 4.9 montre

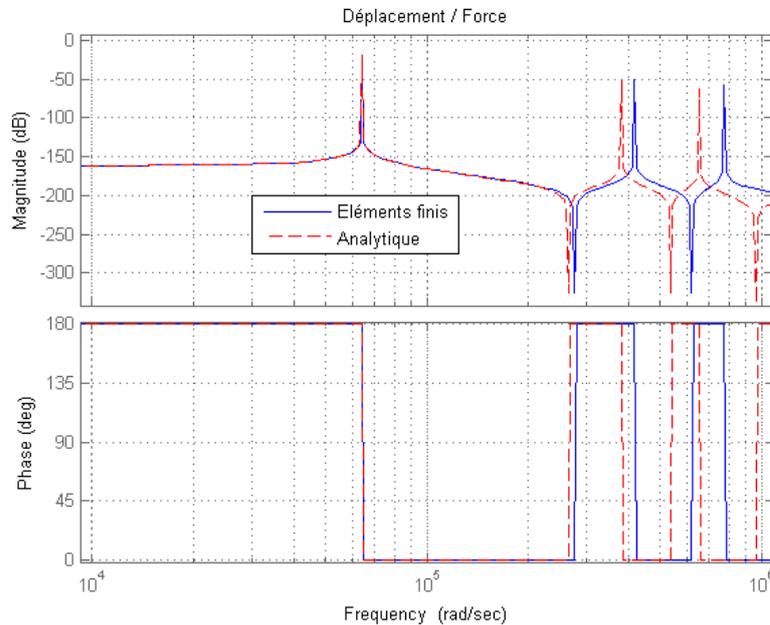


FIGURE 4.5 – Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{F}$ ) : MA-3 modes et MEF-3 éléments

une réponse dans le domaine fréquentiel du MEF avec des termes d'amortissement.

Le gain est de l'ordre de  $-117 \text{ dB}$  pour la première fréquence de résonance qui a été simulée avec un rapport d'amortissement de  $\xi_1 = 2\%$  pour le premier mode et de  $\xi_6 = 10\%$  pour le sixième mode. D'après la relation linéaire de l'équation (4.130), nous pouvons déterminer les rapports d'amortissement  $\xi_2 = 0,0384$ ,  $\xi_3 = 0,0540$ ,  $\xi_4 = 0,0694$  et  $\xi_5 = 0,0847$ . La figure 4.10 montre la comparaison des réponses fréquentielles : la courbe rouge est obtenue par la simulation du MA sans termes d'amortissement et la courbe bleue est obtenue par la simulation du MEF avec des termes d'amortissement.

Il est à noter que le gain de la première fréquence de résonance est plus important par rapport aux gains des autres fréquences de résonance. Il est donc plus intéressant d'utiliser si nécessaire la première fréquence de résonance pour le procédé de forgeage.

#### – Réponses dans le domaine temporel

Les réponses dans le domaine temporel du MEF sont comparées avec celles du MA. Dans cette simulation, l'actionneur piézoélectrique est alimenté par une tension

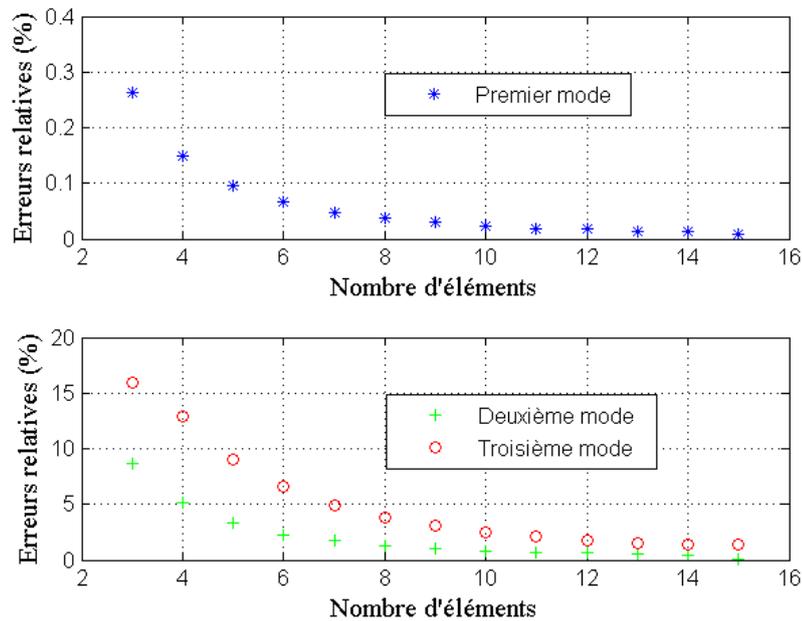


FIGURE 4.6 – Erreurs relatives entre MEF et MA en fonction du nombre d'éléments pour les 3 premiers modes

sinusoïdale d'amplitude crête à crête de  $1000 V_{pp}$  à la fréquence  $50 Hz$  et une force de compression constante de  $150 N$  est imposée à l'extrémité de l'actionneur située en  $x_3 = L$  à l'instant  $t = 5 ms$ . Après avoir programmé les équations (4.82) et (4.142) sous le logiciel Matlab<sup>®</sup>, on intègre maintenant les données obtenues sous Simulink (voir figure 4.11) afin d'exploiter les réponses dans le domaine temporel.

La figure 4.12 montre les réponses temporelles du déplacement et de la charge électrique lorsque l'actionneur piézoélectrique est soumis à une tension sinusoïdale de  $1000 V_{pp}$  à  $50 Hz$  sans la force externe appliquée (simulation avec 3-modes du MA et avec 15-éléments du MEF).

On peut remarquer que les courbes coïncident. L'amplitude crête du déplacement est de  $31,5 \mu m$  et correspond aux données du constructeur. A partir de la charge électrique, nous pouvons calculer le condensateur équivalent qui vaut  $541,4 nF$  et correspond aux données du constructeur. Dans une autre simulation, on applique à l'instant  $t = 5 ms$  la force de compression constante de  $F = 150 N$  et on obtient la réponse de la figure 4.13.

Avant d'appliquer la force de compression, les vibrations observées sur le déplacement résultent de la solution quasi-statique. La contribution du premier mode peut

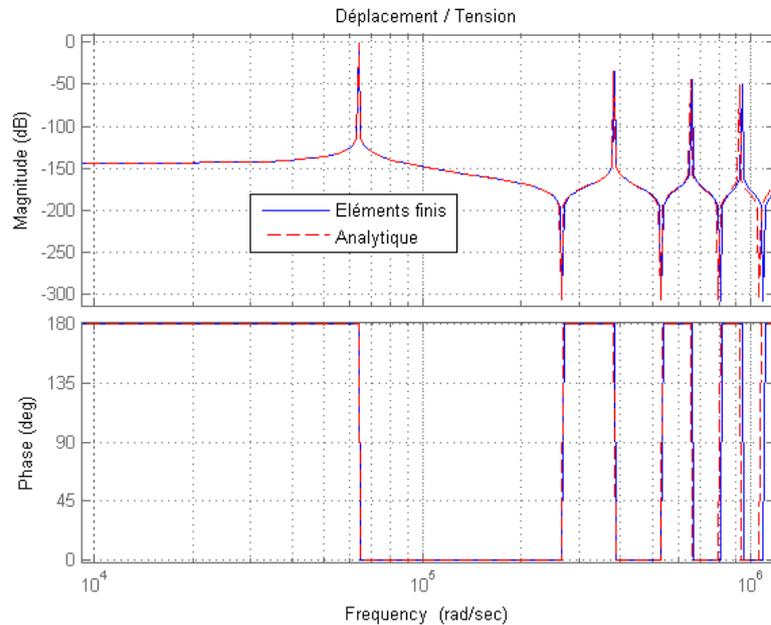


FIGURE 4.7 – Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{v}$ ) : MA-15 modes et MEF-15 éléments (représentation des courbe jusqu'au 4<sup>ème</sup> mode)

être détectée sur l'agrandissement de la figure 4.14.

A l'instant  $t = 5 \text{ ms}$ , la contribution du premier mode est amplifiée par l'impact de l'effort externe de compression. Il est à noter que dans cette simulation, les modèles ne prennent pas en compte les termes d'amortissement.

Le MEF peut prendre en compte les termes d'amortissement comme montré dans l'équation (4.127). La figure 4.15 montre les réponses temporelles du déplacement et de la charge électrique : la courbe bleue obtenue par la simulation du MA qui ne prend pas en compte les effets d'amortissement et la courbe rouge est obtenue par la simulation du MEF qui prend en compte les termes d'amortissement.

La figure 4.16 est un agrandissement de la figure 4.15 au voisinage de  $t = 5 \text{ ms}$ .

On réalise une nouvelle simulation où on applique à l'instant  $t = 5 \text{ ms}$ , une force constante de  $F = 500 \text{ N}$ . Nous remarquons que la courbe bleue de la figure 4.17 montre clairement une amplification à la première fréquence de résonance due à la force.

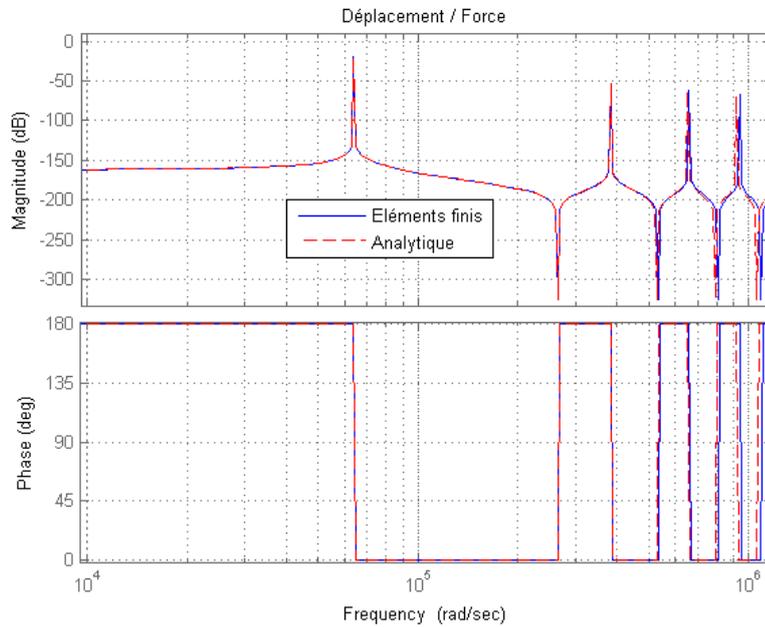


FIGURE 4.8 – Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{F}$ ) : MA-15 modes et MEF-15 éléments (représentation des courbe jusqu'au 4<sup>ème</sup> mode)

La courbe rouge de la figure 4.18 montre que l'amplification est lissée par les termes d'amortissement.

#### 4.4.2 Actionneur piézoélectrique avec masse externe

Un des problèmes du MA est qu'il dépend des conditions aux limites, c'est-à-dire qu'il y a besoin de recalculer les valeurs propres et les vecteurs propres chaque fois que les conditions aux limites changent. Par contre le MEF peut directement intégrer les charges mécaniques externes.

On montre par la suite un exemple dans le cas d'une charge externe représentée par une masse  $M_t$ . L'analyse des réponses est effectuée dans le domaine fréquentiel et ensuite dans le domaine temporel. Le but de l'analyse des réponses dans ce paragraphe est de montrer que le MEF peut intégrer le modèle de charges mécaniques externes.

##### – Réponses dans le domaine fréquentiel

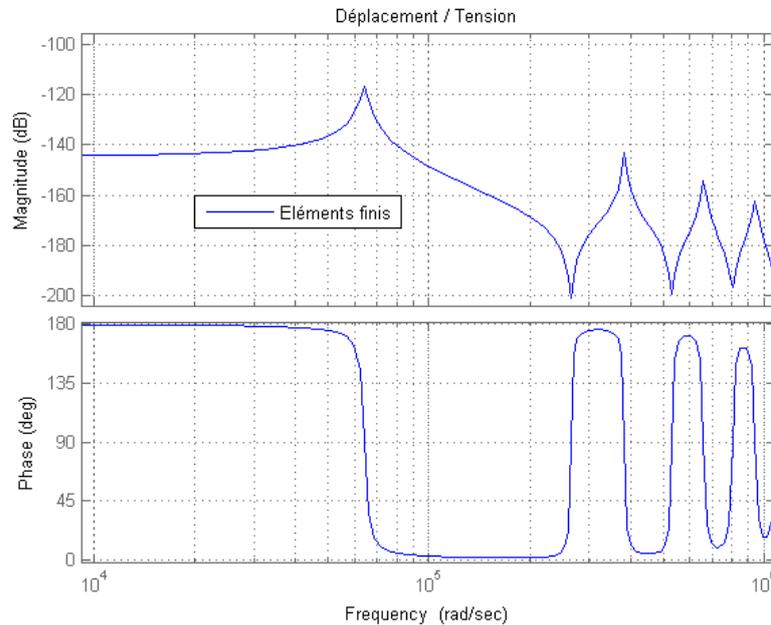


FIGURE 4.9 – Réponse fréquentielle ( $\frac{u}{v}$ ) : avec des termes d'amortissement

Pour une masse  $M_t = 50 \text{ kg}$ , la figure 4.19 montre les réponses fréquentielles entre le déplacement en sortie et l'entrée en force  $[\frac{u_3(L,s)}{F(s)}]$ .

La courbe rouge montre la réponse du MA simulée avec 15 modes et la courbe bleue simulée avec 15 éléments du MEF. Il est à noter que l'amplitude de la première fréquence de résonance est toujours plus importante que l'amplitude des fréquences de résonance suivantes. La masse  $M_t$  déplace la première fréquence de résonance à  $f_1 = 243 \text{ Hz}$  et lisse les amplitudes des fréquences de résonance suivantes. Plus la fréquence est élevée, plus l'amplitude diminue. On peut conclure que la première fréquence de résonance est plus intéressante et les autres fréquences de résonance suivantes sont inutiles en vue de les appliquer au procédé de forgeage. Les figures 4.20 et 4.21 montrent les zooms de la figure 4.19 sur la première et la deuxième fréquence de résonance.

On réalise une nouvelle simulation pour la masse  $M_t = 100 \text{ kg}$ , on obtient la figure 4.22 et la première fréquence de résonance est de l'ordre de  $f_1 = 175 \text{ Hz}$ . On remarque que plus la masse  $M_t$  est grande, plus la première fréquence de résonance diminue. Les figures 4.23 et 4.24 montrent les zooms de la figure 4.22 sur la première et la deuxième fréquence de résonance.

#### – Réponses dans le domaine temporel

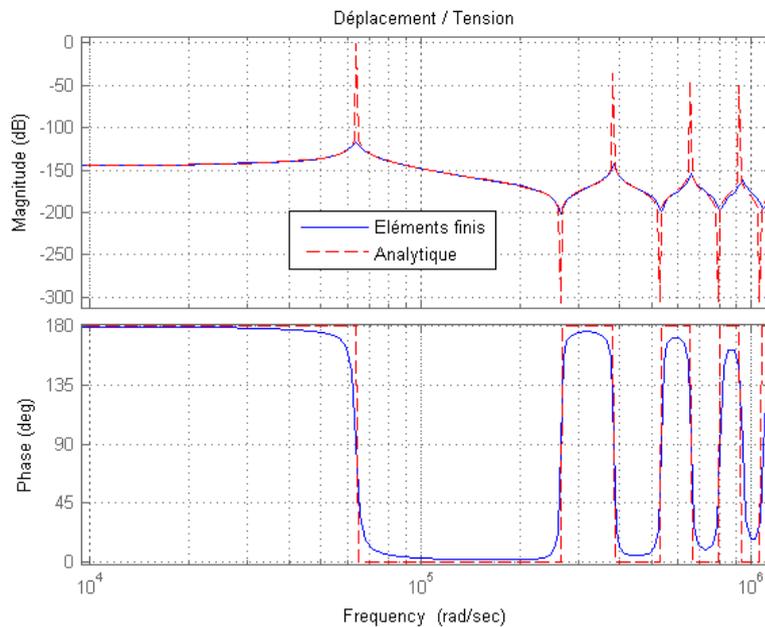


FIGURE 4.10 – Réponse fréquentielle ( $\frac{u}{v}$ ) : sans (pour MA) et avec (MEF) des termes d'amortissement

Les données obtenues précédemment sont envoyées au modèle Simulink (voir figure 4.25) pour simuler l'actionneur piézoélectrique afin de déterminer les réponses temporelles.

Pour le modèle couplé avec la masse  $M_t$ , nous avons trois possibilités pour obtenir les réponses temporelles. La première est obtenu par le MA. Pour la seconde, le MEF sans masse est bouclé avec la masse et relié à l'entrée en effort du MEF (voir figure 4.26). Pour la troisième, la masse est directement prise en compte dans le MEF.

Dans cette simulation, l'actionneur piézoélectrique est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête de  $1000 V_{pp}$  à la fréquence de  $50 Hz$  et supporte la masse de  $M_t = 50 kg$ . La figure 4.27 est obtenue par les trois méthodes précisés.

L'entrée du bloc  $\langle masse \rangle$  est l'accélération du déplacement. Pour éviter du bruit amplifié par l'opérateur de dérivation, nous avons utilisé un filtre dérivateur. La courbe rouge obtenue par la première méthode colle bien avec la courbe bleue obtenue par la troisième méthode. La courbe verte obtenue par la deuxième méthode correspond bien avec celles de la première et de la troisième méthode en début de période. La courbe verte dérive à la fin de la période à cause des bruits créés par l'opérateur de dérivation.

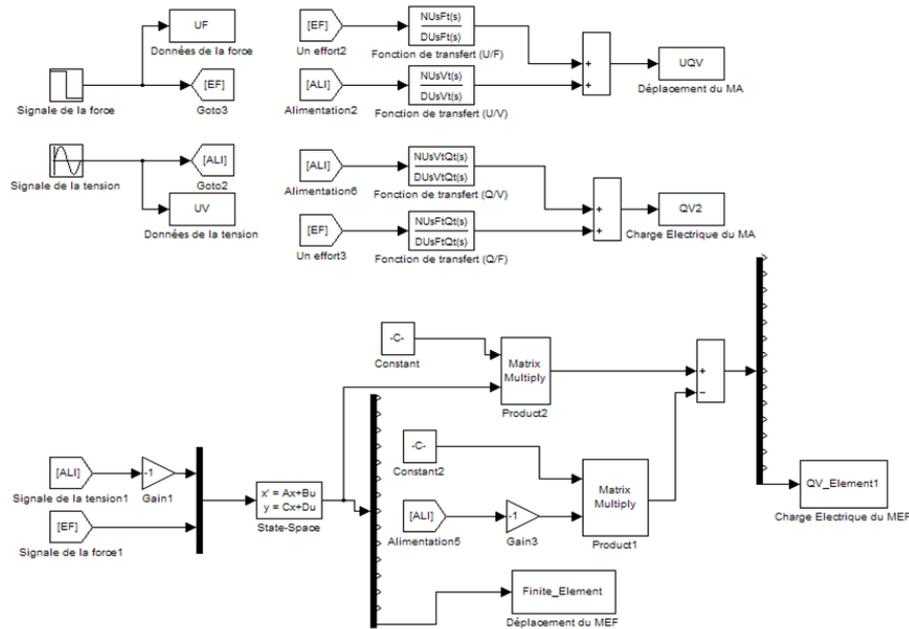


FIGURE 4.11 – Vu des schémas du MA et MEF sous Matlab simulink

– Le temps de simulation du MA et du MEF

L'actionneur piézoélectrique supporte une masse de  $50kg$  et est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête de  $1000V_{pp}$  à la fréquence  $f = 50Hz$ . Pour ce cas, nous avons trois modèles différents pour les simulations de deux périodes ( $T = \frac{1}{f} = 0,04s$ ). La figure 4.28 montre les temps de simulation calculés par le modèle analytique avec la masse, par le modèle éléments finis sans masse couplé avec la masse en boucle externe et par le modèle éléments finis dans lequel la masse est directement prise en compte dans la matrice de masse. On remarque que le temps de simulation calculé par le modèle analytique en fonction du nombre de modes est croissant plus vite que celui calculé par le modèle éléments finis en fonction du nombre d'éléments.

### 4.5 Conclusion

Les approches analytique et par éléments finis utilisées pour la modélisation dans ce chapitre permettent de décrire les comportements dynamiques de l'actionneur piézoélectrique. Nous avons obtenu la modélisation d'un actionneur piézoélectrique pouvant être couplé avec le modèle du procédé de forgeage en boucle fermée.

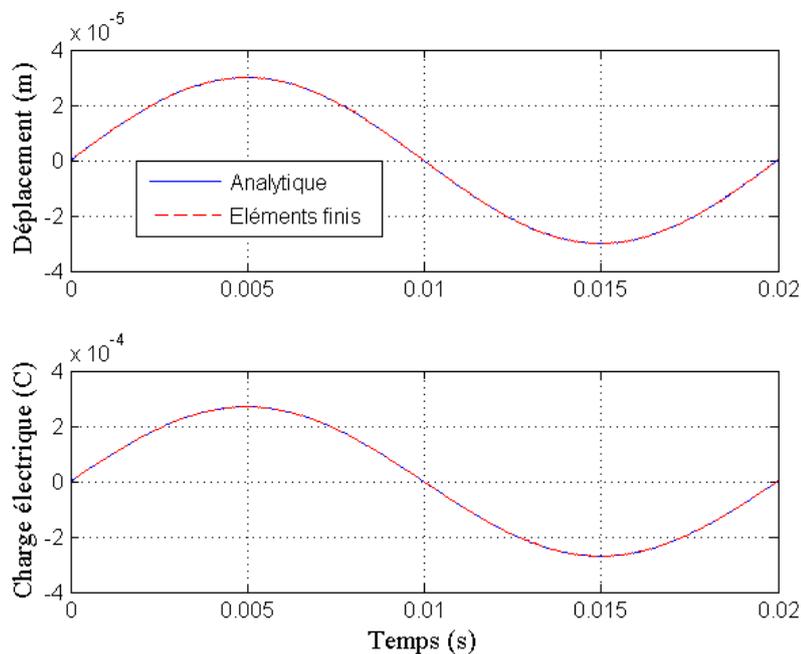
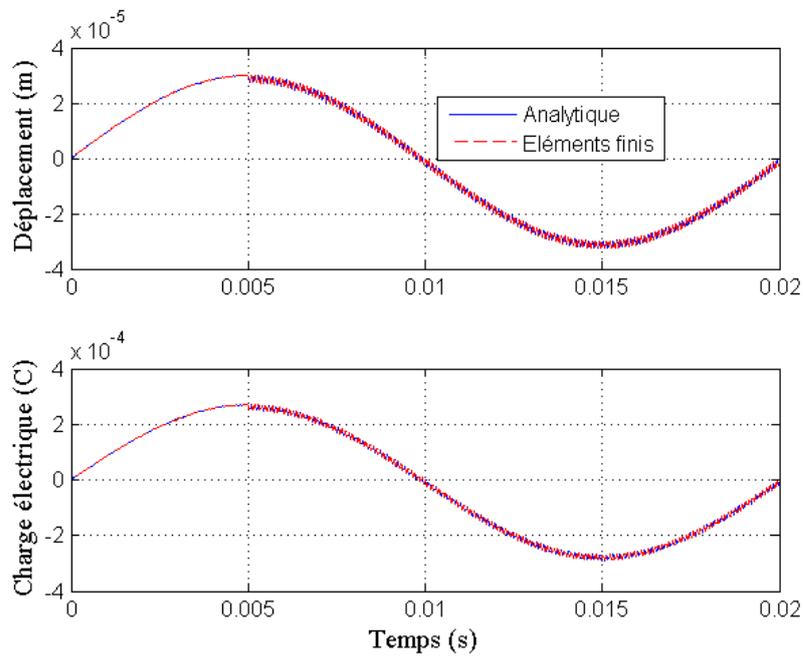


FIGURE 4.12 – Réponse temporelle : MA-15 modes et MEF-15 éléments ( $F=0N$ )

Les équations de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique ont tout d'abord été établies en utilisant l'application du principe d'Hamilton. L'approche analytique utilise la technique de décomposition modale afin de résoudre les équations de fonctionnement. Cette technique nécessite le calcul des données modales. Il est à noter que l'approche analytique nécessite de recalculer toutes les données modales à chaque fois que les conditions aux limites sont modifiées. Ceci veut dire que le modèle analytique ne peut pas être utilisé pour déterminer le comportement du système avec les charges externes en boucle fermée. L'approche modale fournit un modèle de type fonction de transfert entrée-sortie permettant d'analyser les réponses dans les domaines temporel et fréquentiel.

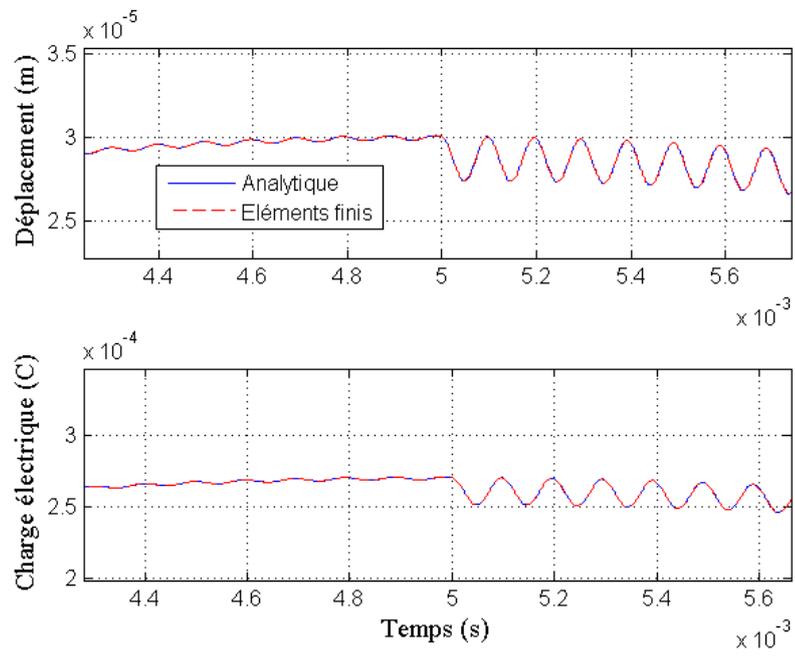
L'approche par éléments finis fournit l'équation d'état du système qui permet de structurer le bloc diagramme de la simulation. Les sorties du modèle éléments finis intègrent les charges extérieures en boucle fermée.

Nous avons comparé les réponses fréquentielles et temporelles du modèle analytique et du modèle par éléments finis. L'étude comprend également la détermination de la précision du modèle par éléments finis en fonction du nombre d'éléments. L'augmentation du nombre des éléments permet d'obtenir une bonne précision, mais le temps de calcul augmente. La fréquence intéressante à utiliser dans notre étude est proche de la première fréquence de résonance. La simulation avec 3 éléments du

FIGURE 4.13 – Réponse temporelle : MA-15 modes et MEF-15 éléments ( $F = 150N$ )

MEF fournit déjà une bonne précision de l'ordre de 0,28% pour le premier mode de résonance et le temps le calcul est très faible. Le MEF complété avec le terme d'amortissement a également été déterminé.

Nous avons montré ensuite un exemple lorsque la charge extérieure est une masse  $M_t$ . Nous avons obtenu les résultats conformes avec ceux obtenus avec le modèle analytique. Cela signifie que le modèle par éléments finis peut être utilisé pour être intégré avec le modèle du procédé de forgeage en boucle fermée. Cette intégration sera étudiée en détail dans le chapitre 5.

FIGURE 4.14 – Zoom de la figure 4.13 au voisinage de l'instant  $t = 5 \text{ ms}$

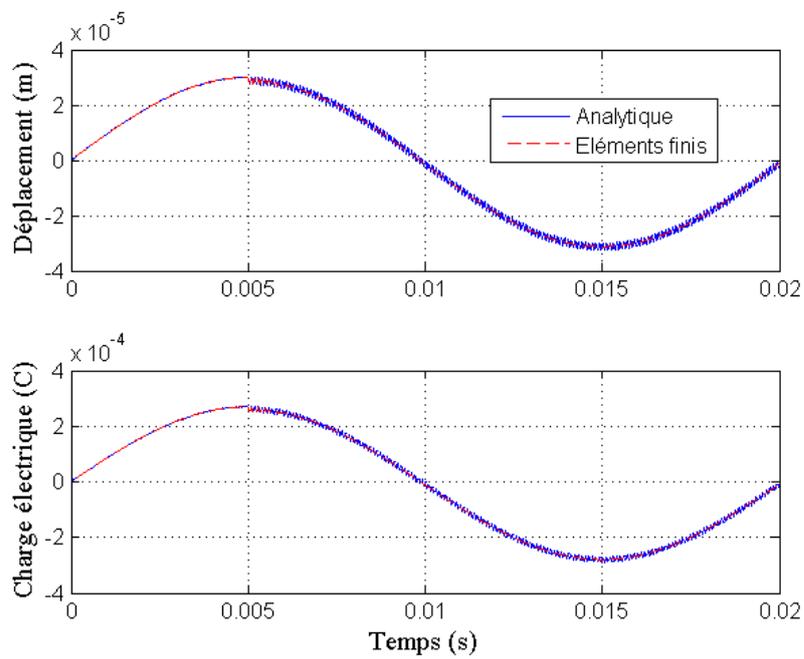


FIGURE 4.15 – MA sans amortissement et MEF avec les termes d'amortissement ( $F = 150N$ )

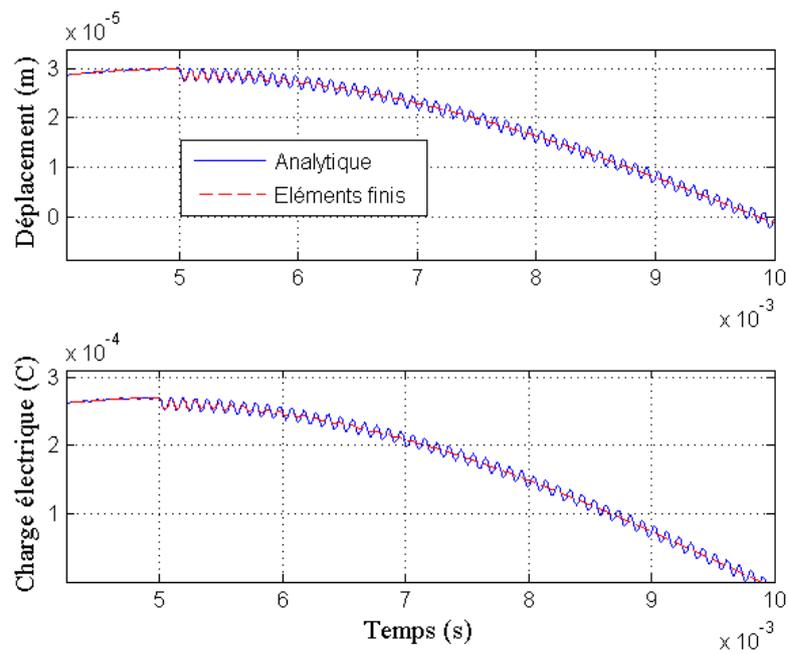


FIGURE 4.16 – Zoom de la figure 4.15 au voisinage de l'instant  $t = 5$  ms

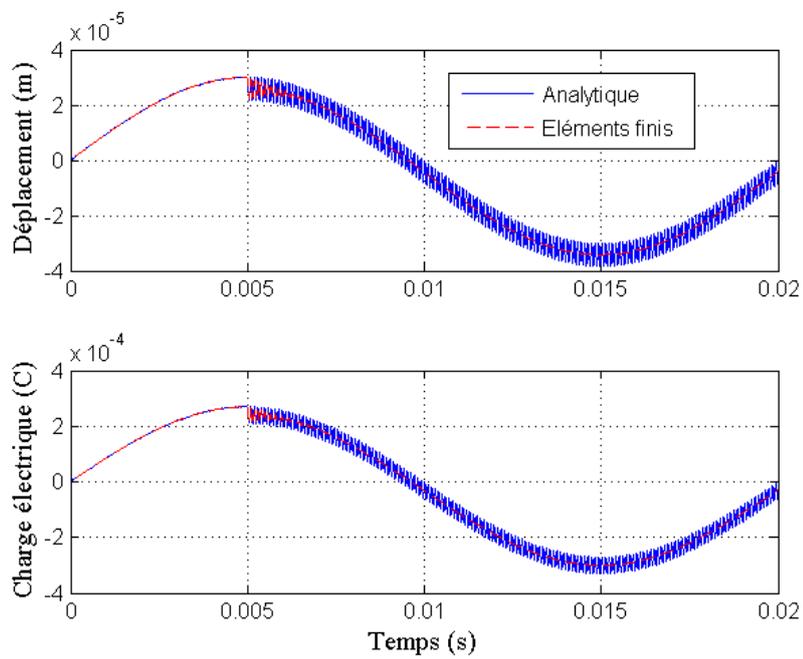


FIGURE 4.17 – MA sans amortissement et MEF avec les termes d'amortissement ( $F = 500N$ )

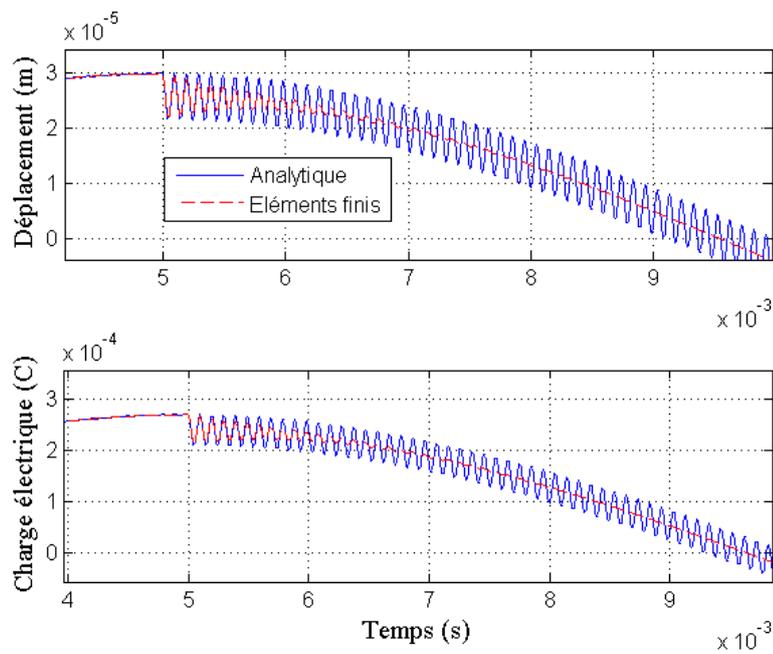


FIGURE 4.18 – Zoom de la figure 4.17 au voisinage de l'instant  $t = 5$  ms

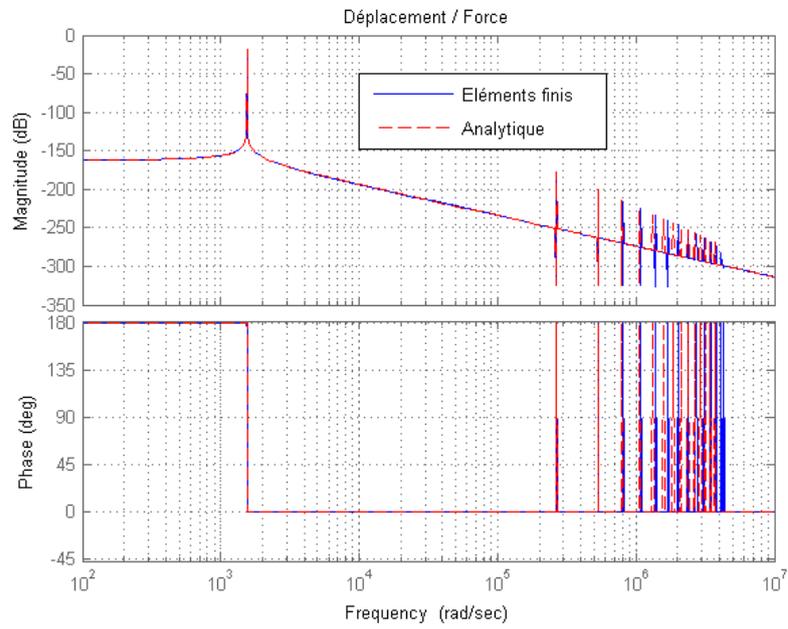


FIGURE 4.19 –  $M_t = 50Kg$ , réponse fréquentielle ( $\frac{u}{F}$ )

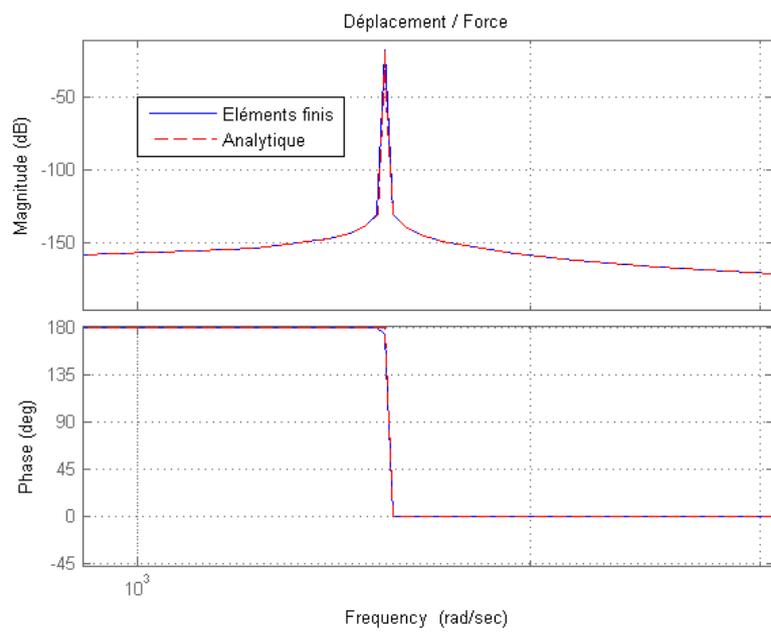


FIGURE 4.20 – Zoom de la figure 4.19 sur la première fréquence de résonance

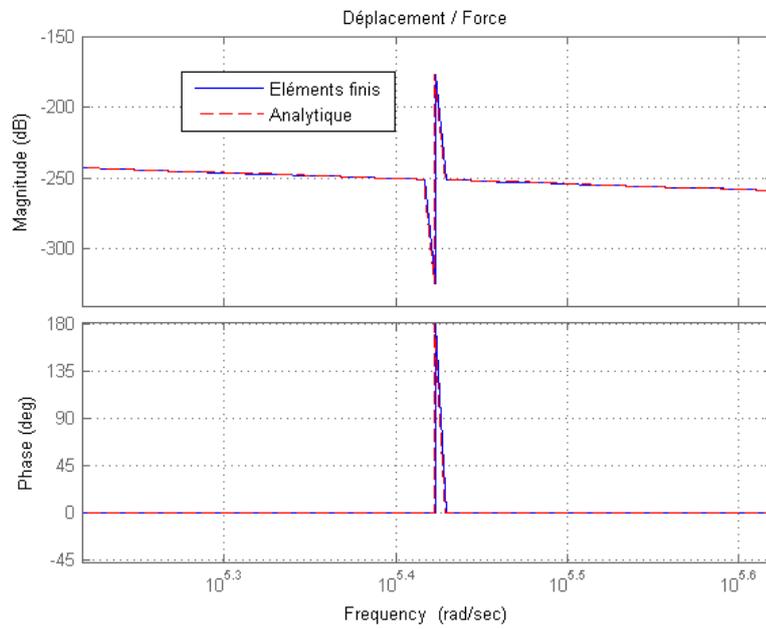


FIGURE 4.21 – Zoom de la figure 4.19 sur la deuxième fréquence de résonance

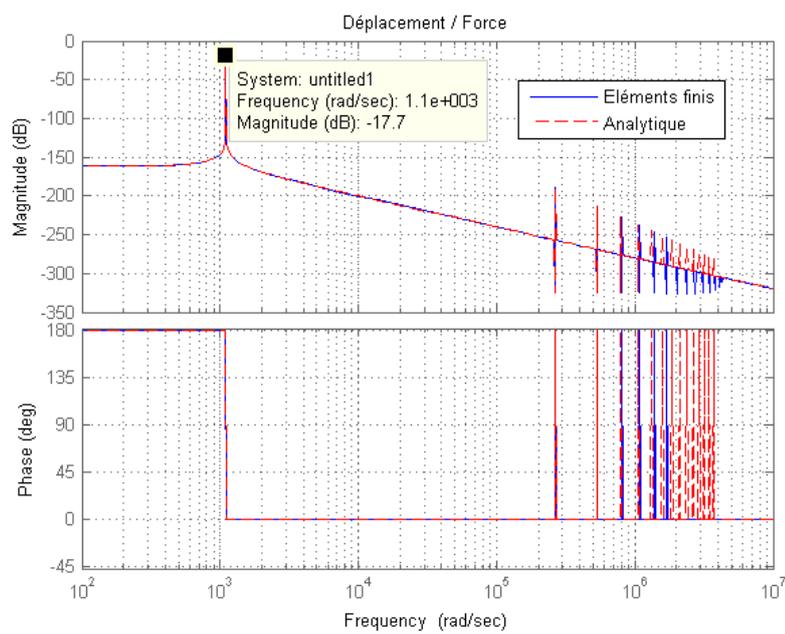


FIGURE 4.22 –  $M_t = 100Kg$ , réponse fréquentielle ( $\frac{u}{F}$ )

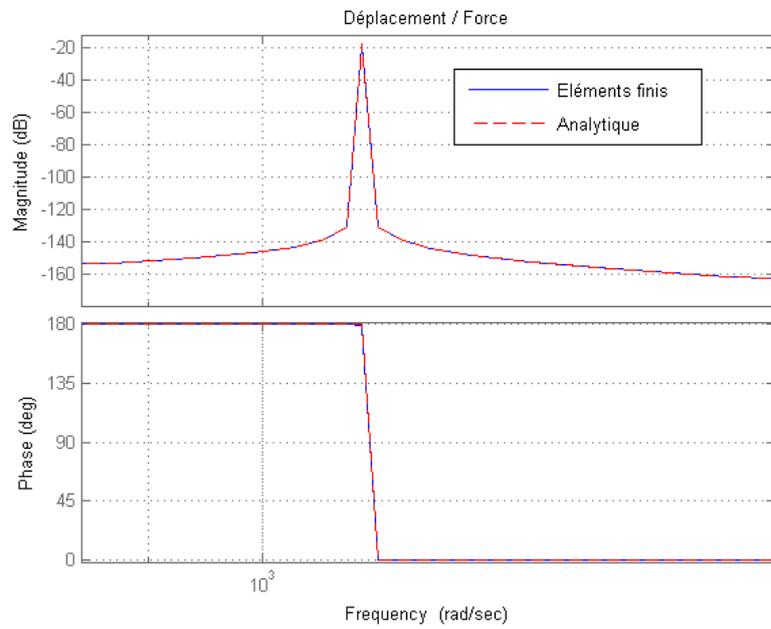


FIGURE 4.23 – Zoom de la figure 4.22 sur la première fréquence de résonance

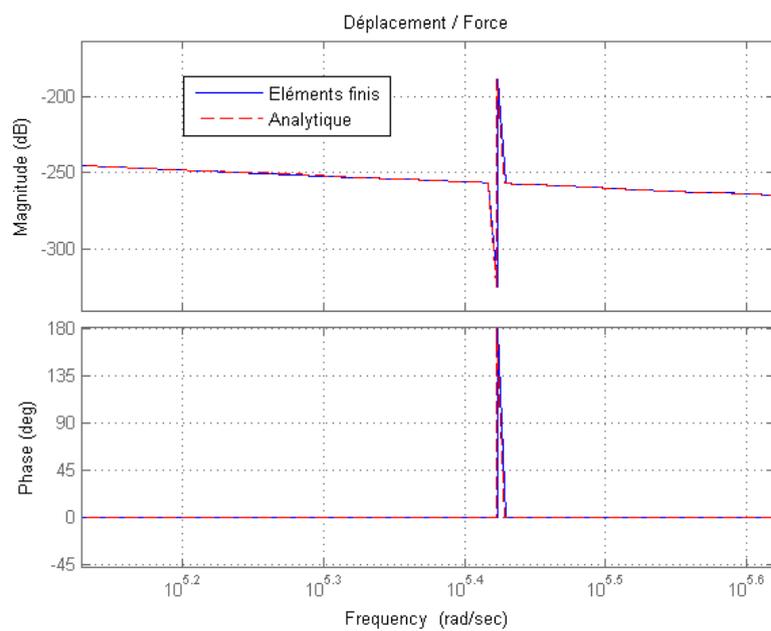


FIGURE 4.24 – Zoom de la figure 4.22 sur la deuxième fréquence de résonance

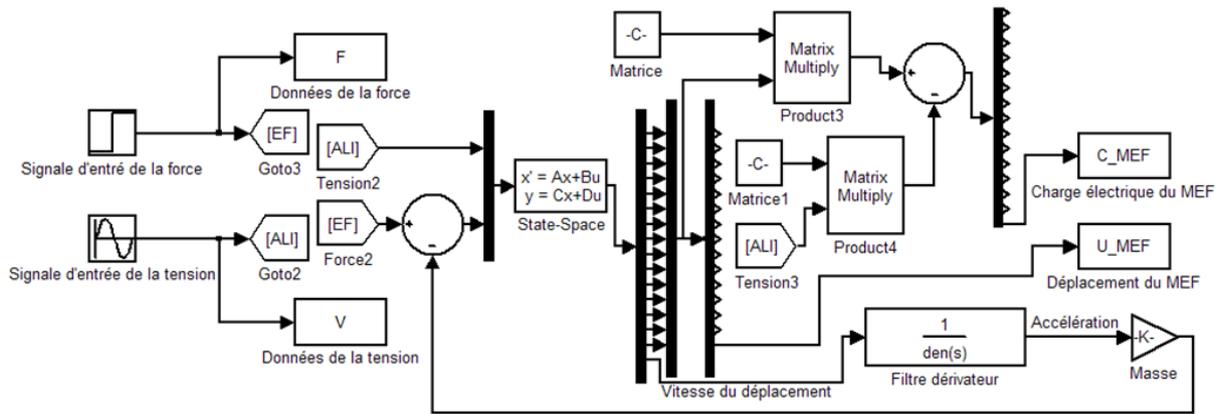


FIGURE 4.25 – Vue des schémas du MEF bouclé avec une masse sous Matlab simulink

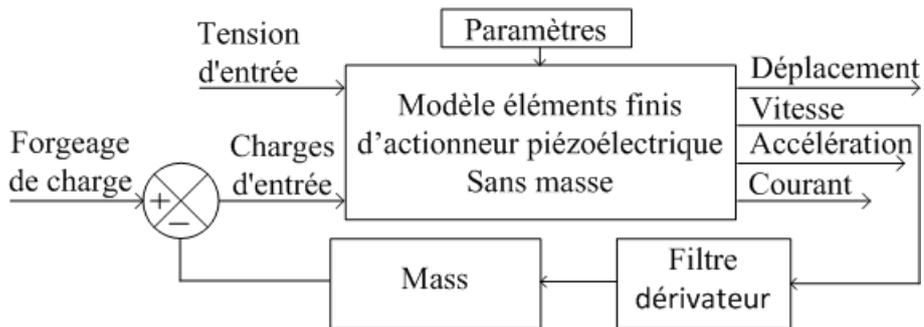
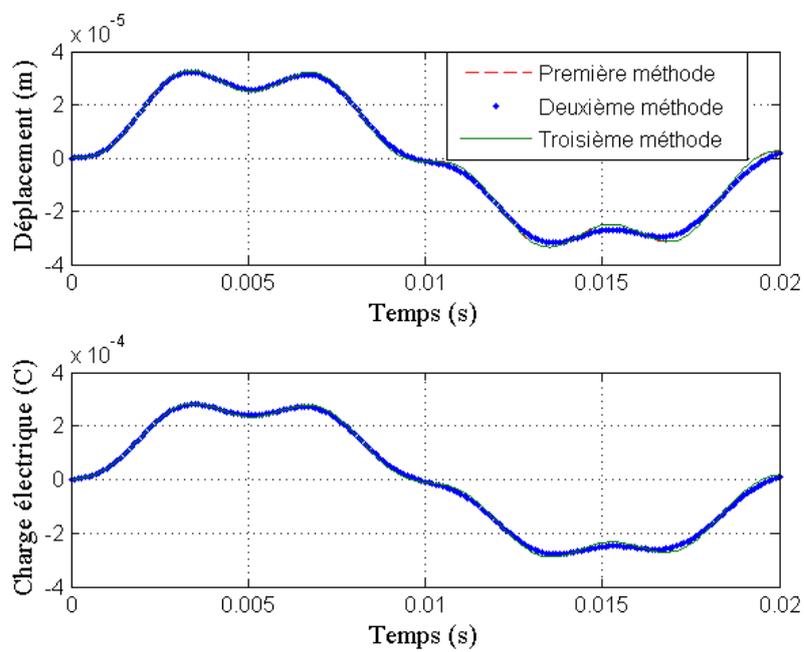


FIGURE 4.26 – Bloc diagramme de simulation du MEF avec la masse

FIGURE 4.27 –  $M_t = 50Kg$ , réponse temporelle à 50 Hz

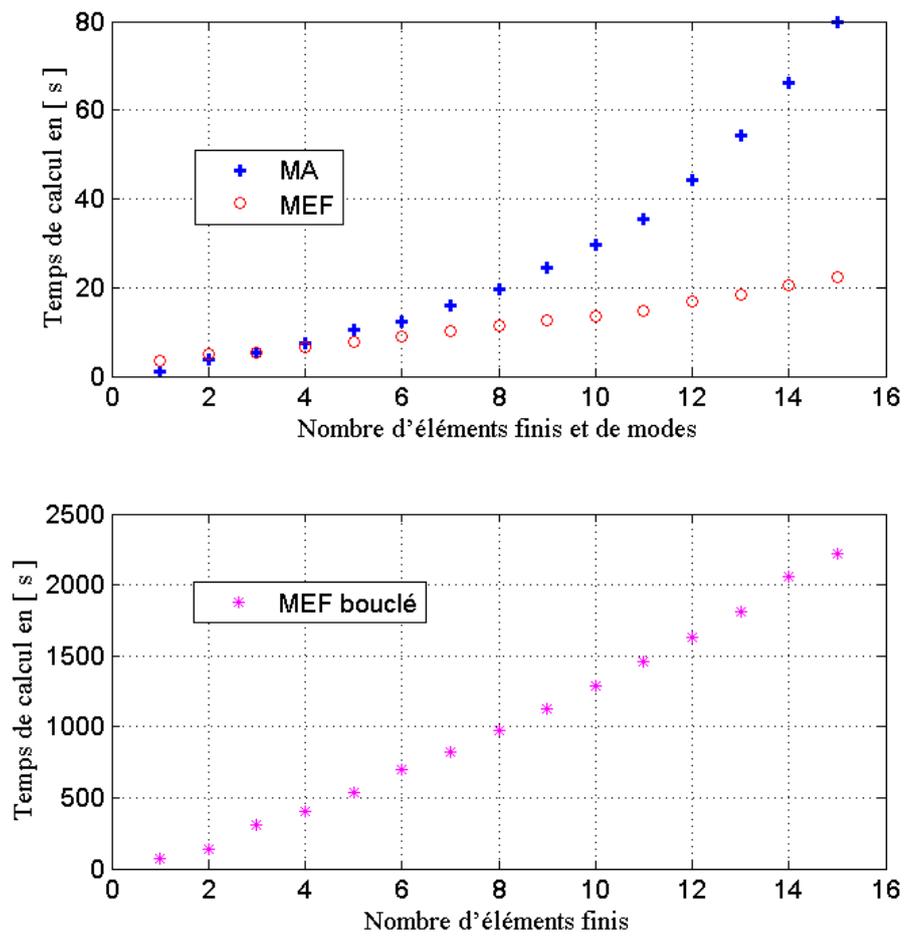


FIGURE 4.28 – Temps de calcul du MA, du MEF et du MEF bouclé

# Chapitre 5

## Simulation du système complet et essais expérimentaux

### 5.1 Introduction

Nous avons développé un modèle d'actionneur piézoélectrique et un modèle du procédé de forgeage dans les chapitres précédents. La détermination du modèle de l'actionneur piézoélectrique a été effectuée par la méthode analytique et par l'approche par éléments finis dans le chapitre 4. Le modèle analytique de l'écrasement cylindrique (MAEC) a été développé dans le chapitre 2. Le modèle analytique de l'actionneur piézoélectrique (MAAP) ne peut pas être utilisé pour déterminer le comportement du système avec les forces externes en boucle fermée (résultant du paragraphe 4.2). Dans ce chapitre, nous étendons le MAEC du chapitre 2 par la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_0$  en y intégrant les termes de déplacement et de la vitesse de déplacement de l'actionneur piézoélectrique. Nous utilisons ensuite le modèle par éléments finis de l'actionneur piézoélectrique (MEFAP) avec le MAEC par la suite appelé modèle de couplage (MC) qui permet de traduire les comportements réels de l'ensemble du dispositif expérimental. Le dispositif expérimental a été décrit au chapitre 2. A l'aide de ce modèle, nous effectuons les essais de l'écrasement cylindrique assisté par les vibrations mécaniques. La simulation sous *Forge2008*<sup>®</sup> est aussi effectuée pour comparer des résultats avec ceux obtenus par le modèle de couplage et les essais expérimentaux.

## 5.2 Etude de la fonction de détermination des efforts de forgeage assisté par des vibrations mécaniques

A l'aide du chapitre 2 au paragraphe 2.2, nous intégrons le MAEC avec les vibrations mécaniques générés par l'actionneur piézoélectrique. D'après l'équation 2.12, la vitesse du déplacement de la matrice supérieure  $\dot{h}(t)$  peut être introduite par la relation :

$$\dot{h}(t) = v_0 + \dot{u}_3(L, t) \quad (5.1)$$

où  $v_0$  est la vitesse du coulisseau et  $\dot{u}_3$  est la vitesse de déplacement de l'actionneur piézoélectrique (vitesse de la matrice inférieure). L'intégrale de l'équation (5.1) à l'aide des conditions initiales [ $h(t=0) = h_0$  et  $\dot{u}_3(L, 0) = 0$ ] donne la hauteur en fonction de temps :

$$h(t) = h_0 + v_0 t + u_3(L, t) \quad (5.2)$$

Avec les valeurs initiales considérés ( $h_0$  et  $D_0$ ) et la vitesse du coulisseau  $v_0$ , nous pouvons calculer la hauteur  $h(t)$  par l'équation (5.2) et le diamètre par l'équation (2.8).

En remplaçant les différents termes dans l'équation (2.6), on obtient :

$$F = \frac{\pi D(t) h(t)}{2\bar{m}} k \left( \frac{h_0 - h(t)}{h(t)} \right)^n \left( \frac{-h_0 \dot{h}(t)}{h^2(t)} \right)^m \left( \frac{h(t)}{\bar{m} D(t)} \left( e^{\frac{\bar{m} D(t)}{h(t)}} - 1 \right) - 1 \right) \quad (5.3)$$

Les hypothèses utilisées pour cette modélisation ne couvrent pas la perte de contact entre les matrices et le lopin. Cette perte de contact se produit lorsque le lopin n'est plus en compression, c'est à dire lorsque la vitesse relative entre les matrices inférieure et supérieure change de signe. Ceci se produit lorsque la vitesse du coulisseau est inférieure en valeur absolue à la vitesse maximale de la matrice inférieure. L'hypothèse utilisée dans ce travail peut s'écrire sous la forme :  $|v_0| > \max(\dot{u}_3(L, t))$ . La gestion de la perte de contact, faisant explicitement intervenir les propriétés élastiques du matériau sont en cours d'étude. Le modèle analytique de l'écrasement (MAE) par la méthode des tranches est implémenté sous Matlab<sup>®</sup>. Il permet ainsi de réaliser une simulation avec le modèle d'actionneur piézoélectrique par l'approche des éléments finis (MEF) décrite dans le chapitre 4 du paragraphe 4.2 (voir la figure 2.1).

On suppose que la vitesse de déformation (variation de la hauteur de la pièce) est donnée par la somme de la vitesse du coulisseau  $v_0$  et de la vitesse induite

par le mouvement de l'actionneur piézoélectrique  $\dot{u}_3(L, t)$ . La vitesse maximale des vibrations sinusoïdales est égale à la valeur de la vitesse du coulisseau. A l'aide de l'équation 5.1, on obtient :

$$\dot{h}(t) = v_0 + v_0 \sin(2\pi ft) \quad (5.4)$$

L'intégrale de l'équation (5.4) en utilisant les conditions initiales  $[h(t = 0) = h_0]$  donne la hauteur en fonction de temps :

$$h(t) = h_0 + \frac{v_0}{2\pi f} + v_0 t - \frac{v_0}{2\pi f} \cos(2\pi ft) \quad (5.5)$$

Les paramètres du modèle de comportement en écrasement d'un lopin cylindrique de plasticine sont les mêmes que ceux identifiés au chapitre 2, paragraphe 2.5. Avec ces paramètres, on fait la simulation pour montrer théoriquement l'effet des vibrations sur le modèle d'écrasement du cylindre. La figure 5.1 suivante montre la force de forgeage simulée avec et sans vibration. Le procédé est simulé durant un temps de 20 s. La hauteur finale est donc de  $h(t_f) = 20 \text{ mm}$ .

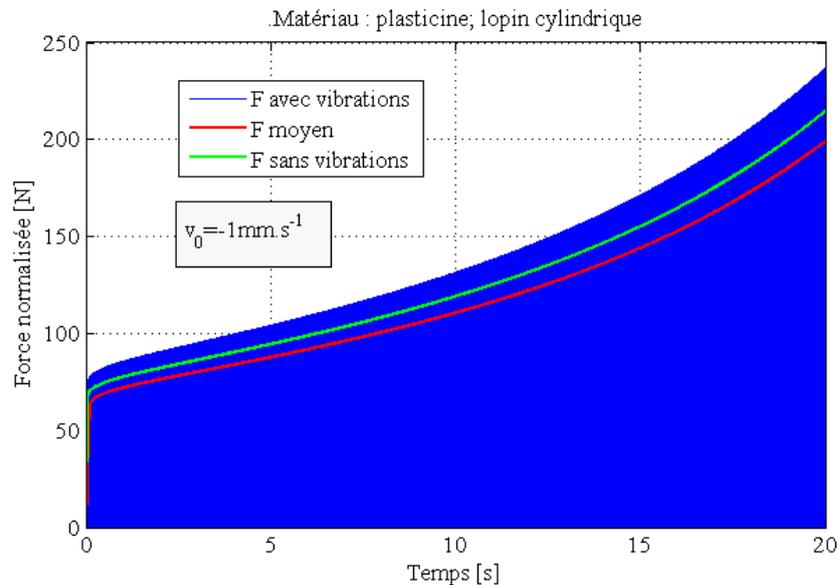


FIGURE 5.1 – Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour la fréquence de 50 Hz

La courbe en vert donne la force de forgeage  $F_0$  en fonction du temps en l'absence de vibrations. La courbe en bleu donne la force instantanée  $F(t)$  avec les vibrations sinusoïdales de la fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ . La courbe en rouge correspond à la valeur moyenne de la force de forgeage  $F_m$  avec vibrations calculée par période de la vibration.

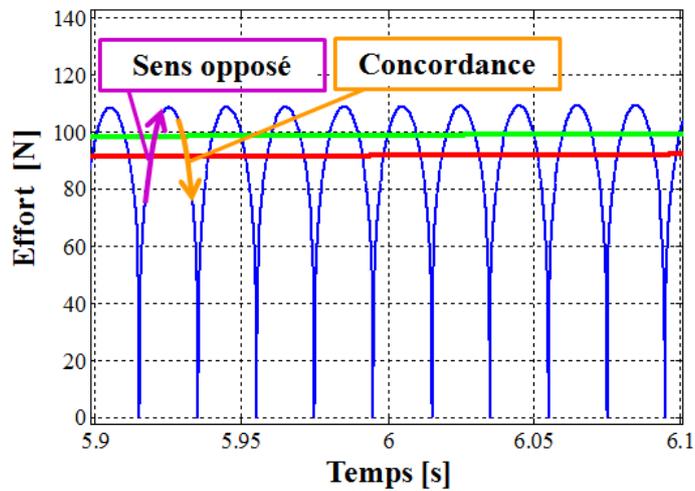


FIGURE 5.2 – Zoom de la figure 5.1 au voisinage du temps ( $t = 6$  s)

La figure 5.2 est un agrandissement de la figure 5.1 au voisinage du temps  $t = 6$  s. Lorsque le signe d'une vitesse de coulisseau est opposé de celui des vibrations, on voit que l'effort de forgeage augmente progressivement. Lorsqu'ils sont en parallèles, l'effort de forgeage se diminue.

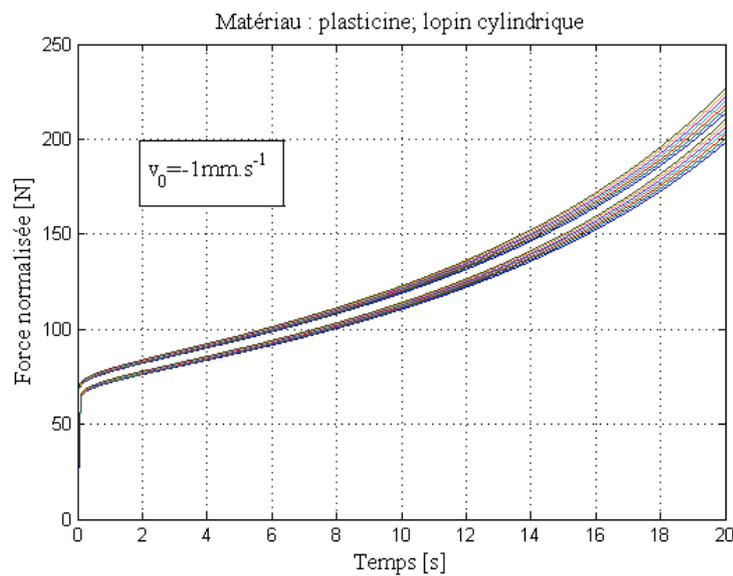


FIGURE 5.3 – Etude des efforts en fonction du coefficient de frottement

La figure 5.3 montre la variation de la force de forgeage en fonction du temps pour différents coefficients de frottement compris entre 0,07 et 0,13. Les courbes du haut donnent les résultats pour un essai sans vibrations et les courbes du bas les

résultats de la force moyenne avec vibrations.

On peut définir le gain du procédé avec vibrations en calculant le rapport de la force moyenne avec vibrations et de la force sans vibrations  $Gain = \frac{F_m}{F_0}$ , on obtient la figure 5.4.

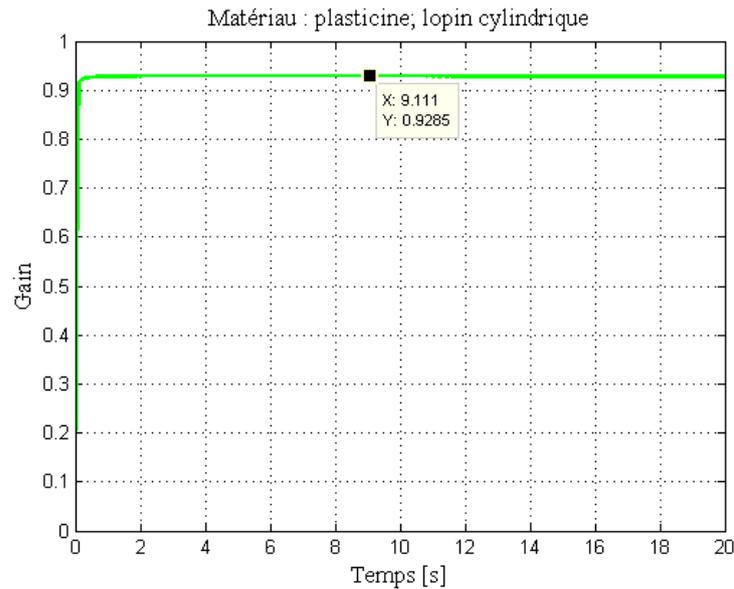


FIGURE 5.4 – Variation du rapport des efforts avec et sans vibrations

On remarque que le gain du procédé est d'environ 10 %. Il est indépendant du temps (sauf au début où les calculs ne sont pas assez précis, mais cette partie de la courbe nous intéresse moins). Les simulations ont montrées que le gain est également indépendant du coefficient de frottement. Par contre, il dépend fortement de  $m$ , l'exposant de la vitesse de déformation. La courbe tracée figure 5.4 fournit la valeur maximale pour la vitesse de vibration choisie. Si on garde la vitesse du coulisseau et on diminue la vitesse des vibrations, le gain sur le procédé sera plus faible. Avec une vitesse plus élevée, on observe le même type de courbes.

La figure 5.5 montre la simulation pour une vitesse  $v_0 = -5\text{mm.s}^{-1}$ . Le procédé est simulé durant un temps de 4 s. La hauteur finale est donc de 20mm. Il est à noter que le gain reste constant quelque soit la hauteur ou la déformation. Le  $Gain = \frac{F_m}{F_0}$  peut être calculée par une formule approchée en utilisant un développement limite à l'ordre 4 de  $\dot{\varepsilon}^m$ . On obtient la relation suivante :

$$Gain = 1 + \frac{m(m-1)}{4} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{16} \quad (5.6)$$

Cette relation est tracée sur la figure 5.6. La valeur minimale est obtenue pour  $m = 0,42$ .

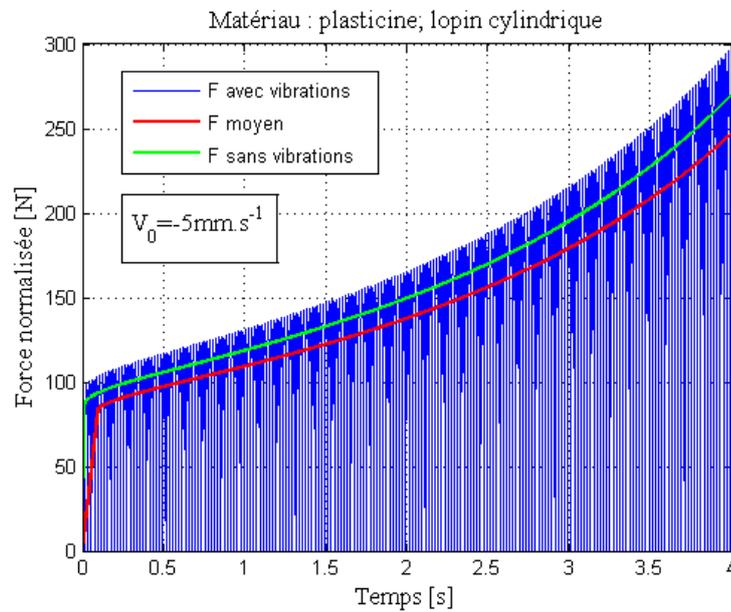


FIGURE 5.5 – Variation du rapport des efforts avec et sans vibrations

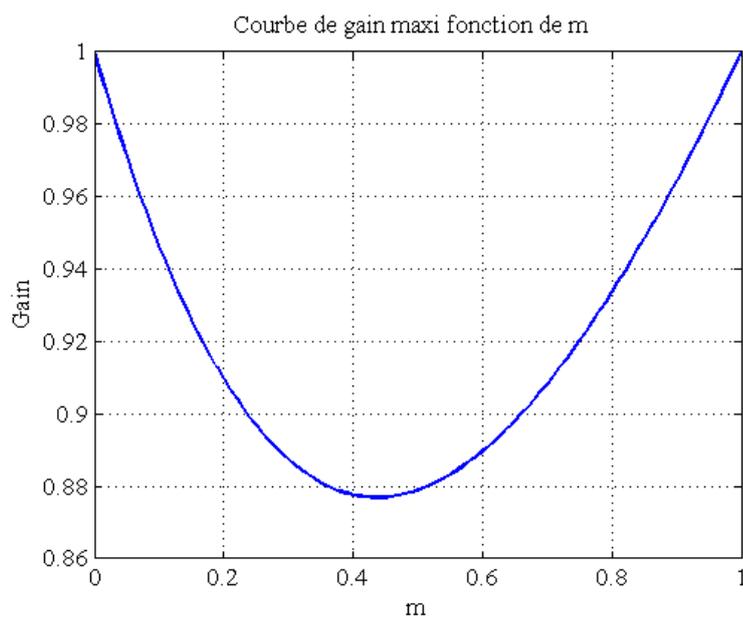


FIGURE 5.6 – Variation approchée du rapport des efforts avec et sans vibrations

### 5.3 Modèle du système complet

Le modèle de l'actionneur piézoélectrique par l'approche par éléments finis permet de fournir un modèle de multi entrées et multi sorties (voir équation 4.142). La masse supplémentaire due à la matrice inférieure et la masse de la pièce à forger a été pris en compte dans la matrice de masse (voir l'équation 4.120). Les sorties du modèle de l'actionneur piézoélectrique sont le courant électrique, le déplacement et la vitesse de déplacement qui sont utilisés comme entrées du MAEC (voir figure 5.7).

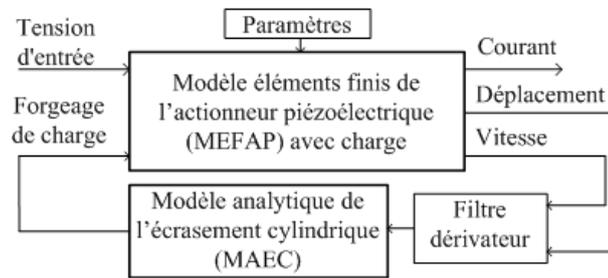


FIGURE 5.7 – Bloc diagramme de simulation du Modèle Complet (MC)

La vitesse de déplacement est obtenue par un calcul de dérivation du déplacement. L'opérateur de dérivation amplifie les bruits dus à la quantification des grandeurs, aux approximations du pas de calcul et à la discrétisation des éléments du modèle de l'actionneur. Nous avons donc utilisé un filtre dérivateur avec une pulsation de coupure  $\omega_c = 62832 \text{ rad.s}^{-1}$ . La sortie du MAEC détermine l'effort de forgeage imposée à l'actionneur piézoélectrique. On obtient ainsi le Modèle Complet (MC).

### 5.4 Simulation du comportement du système complet

Un signal sinusoïdal d'amplitude et de fréquence variables est choisi comme entrée du modèle de l'actionneur piézoélectrique. On calcule respectivement le déplacement  $u_3(L, t)$ , la vitesse  $\dot{u}_3(L, t)$  et l'accélération  $\ddot{u}_3(L, t)$  des vibrations de l'actionneur piézoélectrique. La force appliquée à l'actionneur est celle issue du modèle d'écrasement.

Les paramètres du modèle de comportement en écrasement d'un lopin cylindrique de plastiline sont les mêmes que ceux identifiés au chapitre 2, paragraphe 2.5. Avec ces paramètres, on fait la simulation de l'ensemble du système.

D'après la figure 4.6 du chapitre 4, la simulation du MEF avec 3 éléments finis donne une bonne précision pour les fréquences variant entre 10 à 110  $Hz$ . Nous avons donc choisi 3 éléments finis pour la simulation de l'ensemble du système.

### 5.4.1 Etude de l'effort de forgeage en fonction du déplacement de la matrice supérieure

L'actionneur piézoélectrique est simulé avec une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête de  $V_{cc} = 100$  V à la fréquence  $f = 50$  Hz. On obtient le déplacement de l'actionneur comme montré dans la figure 5.8.

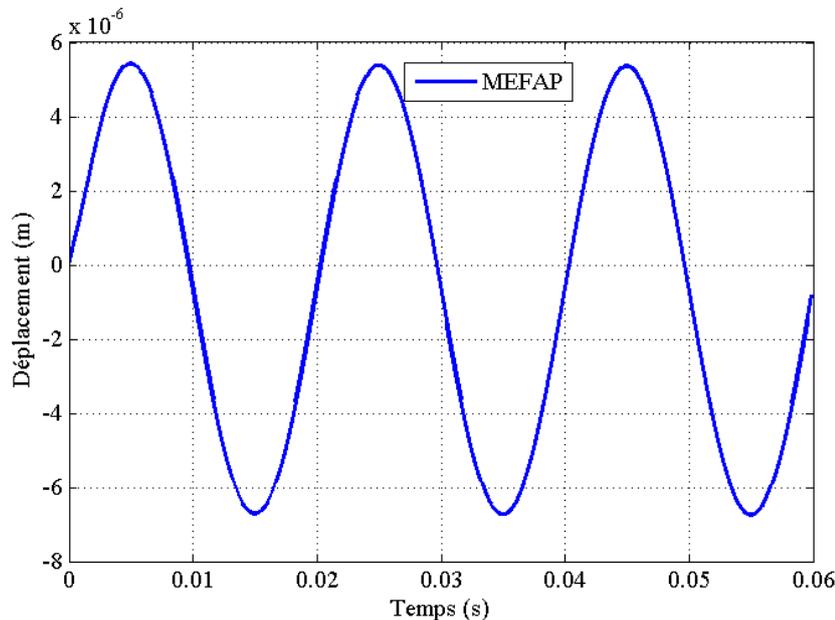


FIGURE 5.8 – Réponse temporelle : MEFAP -3 éléments

Le bloc du MAEC (voir figure 5.7) détermine l'effort de forgeage appliqué à l'actionneur piézoélectrique, il en résulte un déplacement de valeur moyenne non nulle. Le déplacement crête à crête est de l'ordre  $u_{3cc}(L, t) = 12,6 \mu m$  pour faire vibrer la matrice inférieure. On obtient donc la vitesse maximale de déplacement  $\dot{u}_{3max}(L, t) = 2\pi f \frac{u_{3cc}(L, t)}{2} = 1,97 \text{ mm.s}^{-1}$ . D'après les hypothèses du chapitre 5 au

paragraphe 5.2, le MAEC est valable sous condition  $|v_0| \geq \max(\dot{u}_3(L, t))$ . Un lopin cylindrique doit être écrasé avec des vitesses de coulisseau plus grandes ou égale à  $1,97 \text{ mm.s}^{-1}$ . On obtient la figure 5.9 représentant l'évolution de l'effort de forgeage en fonction du temps pour la vitesse de coulisseau  $3 \text{ mm.s}^{-1}$ . Le procédé est simulé durant un temps de  $6,66 \text{ s}$ . La hauteur finale est donc de  $20 \text{ mm}$ .

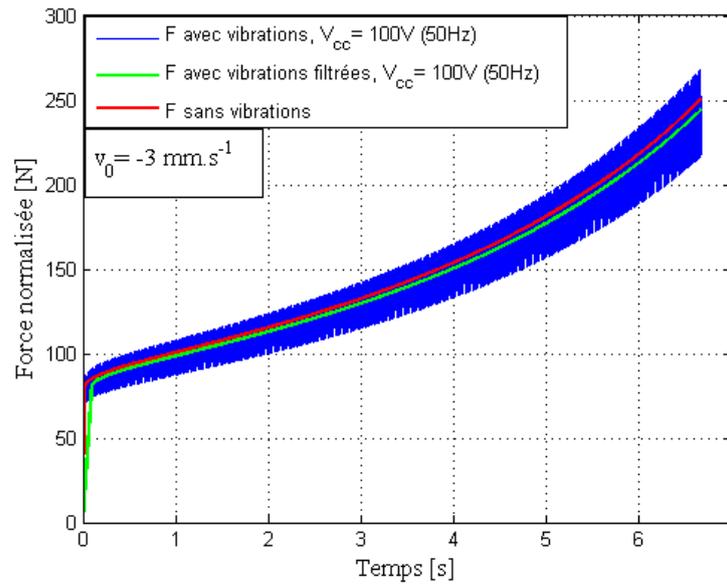
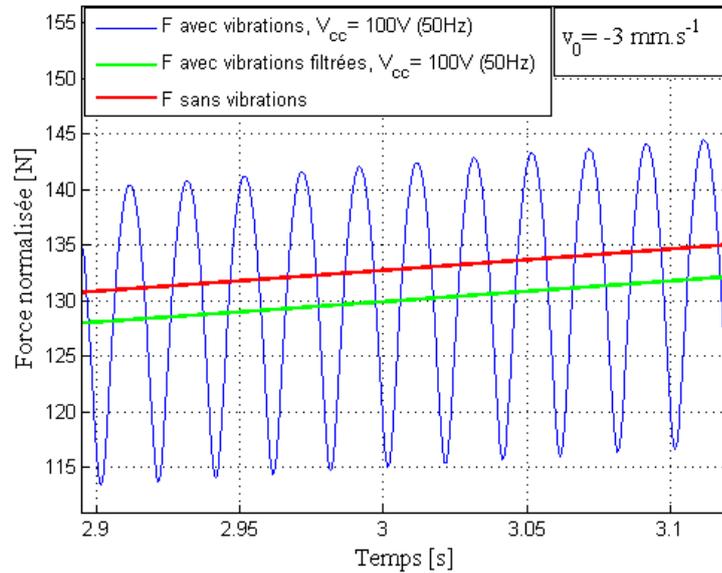


FIGURE 5.9 – Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour la fréquence de 50 Hz

La courbe rouge est l'effort de forgeage sans vibrations de la matrice inférieure. La courbe bleue est l'effort de forgeage avec vibrations de la matrice inférieure pour la fréquence de 50 Hz. La courbe verte est la valeur moyenne par période de la courbe bleue. La figure 5.10 montre le zoom de la figure 5.9 au voisinage du temps ( $t = 3 \text{ s}$ ).

On remarque qu'il y a une réduction des efforts de mise en forme lors de l'utilisation d'une vibration. On calcule ensuite le rapport des efforts de forgeage avec vibrations (courbe verte de la figure 5.9) et sans vibrations (courbe rouge de la figure 5.9). On obtient le gain en fonction du déplacement de la matrice supérieure comme montré sur la figure 5.11. On remarque que le gain est pratiquement constant et de l'ordre 0,976, on gagne donc environ 2,4% de l'effort. Il est à noter que le modèle développé permet de voir l'évolution des vibrations pendant la mise en forme des matériaux.

FIGURE 5.10 – Zoom de la figure 5.9 au voisinage du temps ( $t = 3$  s)

#### 5.4.2 Etude en fonction de différentes amplitudes de vibrations de l'actionneur piézoélectrique

On garde les mêmes paramètres et on prend la vitesse de coulisseau  $v_0 = -8$   $\text{mm.s}^{-1}$ . On simule avec une tension sinusoïdale pour deux amplitudes crête à crête différentes,  $V_{cc} = 300$  V et 400 V à la fréquence  $f = 50$  Hz. Avec ces paramètres, les vitesses maximales de la matrice inférieure sont  $\dot{u}_{3max} = 5,7$   $\text{mm.s}^{-1}$  et 7,5  $\text{mm.s}^{-1}$  respectivement. Elles vérifient donc la condition  $|v_0| > \max(\dot{u}_3(L, t))$  du chapitre 2. La figure 5.12 montre les efforts de forgeage sans et avec vibrations. Le procédé est simulé durant un temps de 2,5 s. La hauteur finale est donc de 20 mm. La figure 5.13 montre le zoom de la figure 5.12 au voisinage du temps ( $t = 1$  s).

On remarque que l'augmentation de l'amplitude de tension apporte une diminution de l'effort de forgeage.

#### 5.4.3 Etude en fonction de différentes fréquences de vibrations de l'actionneur piézoélectrique

On garde les mêmes paramètres et on prend la vitesse de coulisseau  $v_0 = -4,5$   $\text{mm.s}^{-1}$ . On simule avec une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête  $V_{cc} = 100$

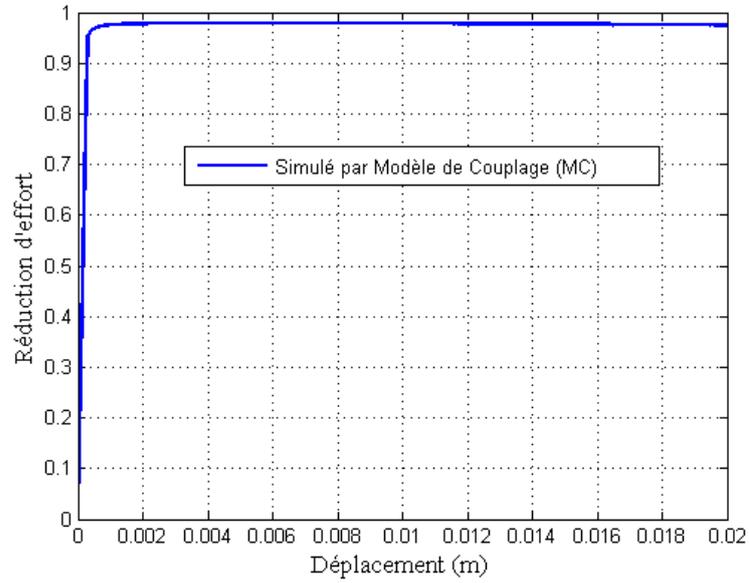


FIGURE 5.11 – Rapport des efforts avec et sans vibrations en fonction du déplacement de la matrice supérieure

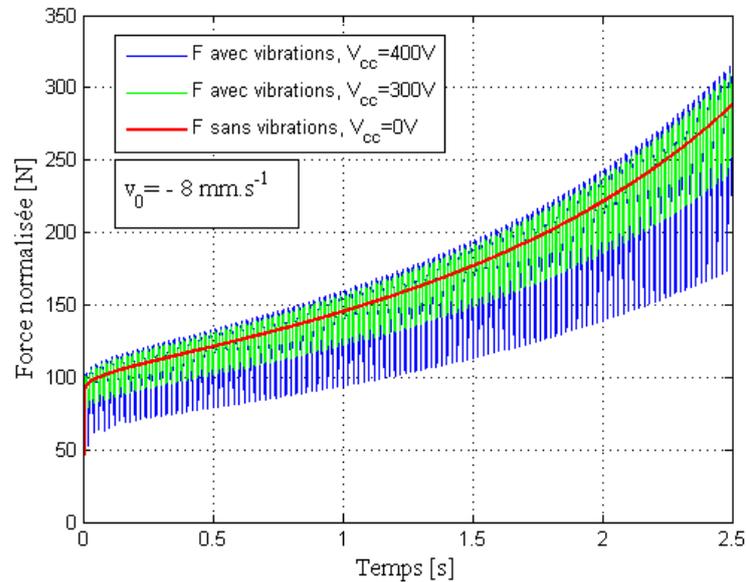
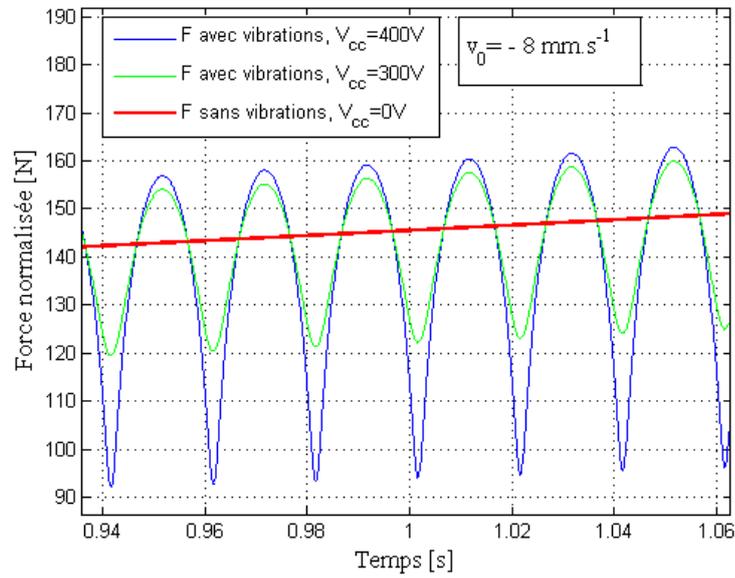
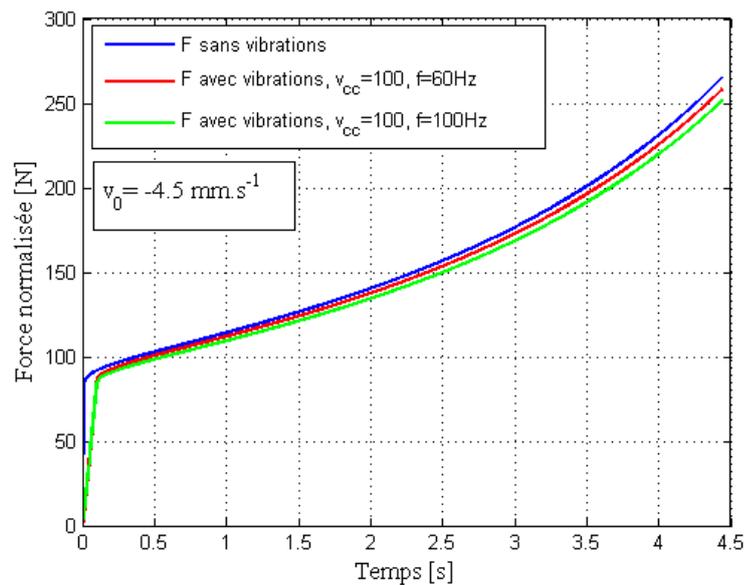


FIGURE 5.12 – Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour des tensions de 0, 300 V et 400 V.

V pour deux fréquences différentes  $f = 60 \text{ Hz}$  et  $f = 100 \text{ Hz}$ , ce qui correspond à des vitesses maximales de la matrice inférieure  $\dot{u}_{3max} = 2,2 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{u}_{3max} = 3,4 \text{ mm.s}^{-1}$ . Elles vérifient donc la condition  $|v_0| > \max(\dot{u}_3(L, t))$ . La figure 5.14 montre

FIGURE 5.13 – Zoom de la figure 5.12 au voisinage du temps ( $t = 1$  s)

la variation des efforts de forgeage avec et sans vibrations en fonction du temps pour différentes fréquences. Le procédé est simulé durant un temps de 4,44 s. La hauteur finale est donc de 20 mm.

FIGURE 5.14 – Comparaison des efforts de forgeage sans vibrations et avec vibrations pour les fréquences  $f = 60, 100$  Hz

On remarque que l'augmentation des fréquences apporte une diminution de l'effort de forgeage.

## 5.5 Superposition des courbes mesurées et simulées

La description du dispositif expérimental a été présentée dans le chapitre 2. La prise en main de la machine et le logiciel de pilotage sont écrites dans l'annexe A. Les essais ont été réalisés sur des lopins de plasticine de même dimension avec une vitesse d'écrasement  $v_0 = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ . L'actionneur piézoélectrique est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête  $V_{cc} = 100 \text{ V}$  à la fréquence de  $50 \text{ Hz}$ . Pour chaque condition de mesure, nous avons répété les essais plusieurs fois afin d'obtenir une certitude sur la mesure de l'effort de forgeage. Les données sont mesurées à l'aide de la carte d'acquisition et traitées en utilisant le logiciel Matlab<sup>®</sup>. Les efforts mesurés sont filtrés par filtre médian et moyenne glissante sur 3 échantillons. La simulation est configurée selon les paramètres des essais expérimentaux. On obtient la figure 5.15 qui montre une superposition des courbes mesurée et simulée.

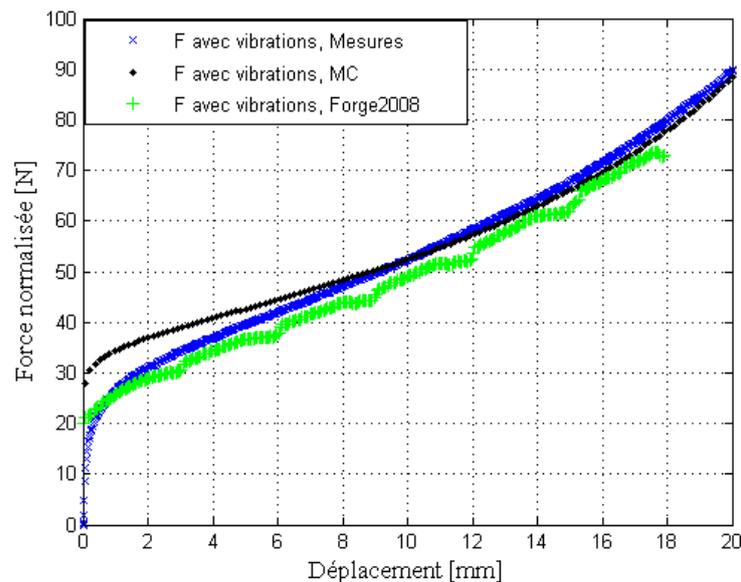


FIGURE 5.15 – Superposition des efforts de forgeage mesurés et simulés

### 5.5.1 Etude pour différentes vitesses maximales de vibrations

Compte tenu des résultats dans les paragraphes précédents, on a remarqué qu'une réduction des efforts de mise en forme est observée lors de l'utilisation d'une vibration, ce gain est directement relié à la vitesse maximale de vibrations utilisée pour actionner la matrice. En utilisant les résultats précédents, on peut tracer le gain en fonction du rapport des vitesses de vibrations et de coulisseau. On obtient la figure 5.16.

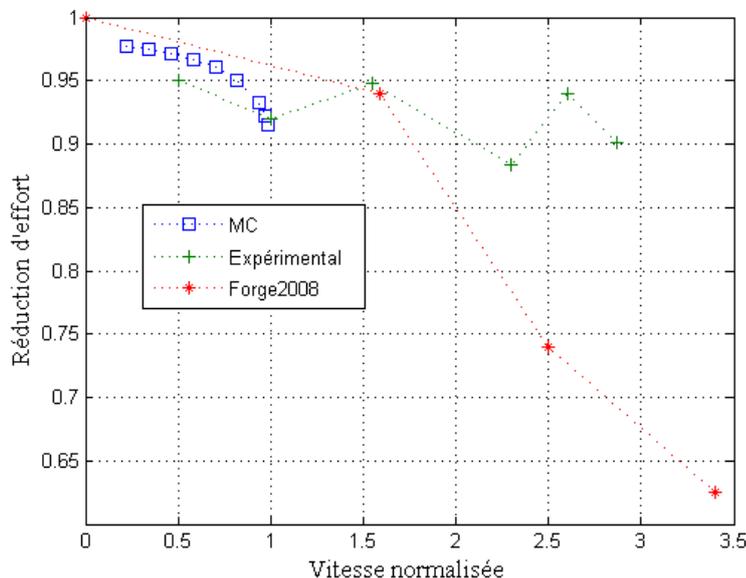


FIGURE 5.16 – Superposition des efforts de forgeage mesurés et simulés

Pour le modèle complet (MC), la meilleure réduction est observée lorsque la vitesse des vibrations est proche de celle de coulisseau. D'un point de vue tribologique, l'augmentation de la vitesse de frottement relative entre deux matériaux conduit à une diminution du coefficient de frottement équivalent [55] [56]. Cet effet est mis à profit dans les essais pour limiter le frottement local.

D'après les simulations sous différentes conditions ci-dessus, on obtient le gain en effort du procédé en fonction du rapport de vitesse  $\left[\frac{v_3}{v_0}\right]$  comme montré sur la figure 5.16. Les symboles carrés bleus montrent les valeurs du gain en effort obtenues par la simulation du Modèle Complet (voir figure 5.7). Les symboles verts donnent les résultats obtenus par les essais d'écrasement sur la plasticine. Les symboles étoiles en rouge montrent le résultat obtenu par la méthode des éléments finis

sous *Forge2008*<sup>®</sup>. Le début des trois courbes coïncide. Au delà d'une vitesse normalisée de 2, la courbe obtenue par éléments finis s'écarte des valeurs expérimentales, ce qui correspond bien au problème évoqué dans le chapitre 5 au paragraphe 5.2 avec la perte de contact entre les matrices et le lopin. Le modèle analytique n'est pas valable pour des vitesses normalisées supérieures à 1, d'où le tracé de la courbe entre 0 et 1.

## 5.6 Conclusion

Nous avons intégré dans ce modèle la formulation de la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_0$  en fonction des vibrations mécaniques générées par l'actionneur piézo-électrique.

Un dispositif expérimental original complet soumis à des vibrations mécaniques a été conçu et réalisé. Un modèle complet traduisant son comportement réel a été développé et implémenté en utilisant le logiciel *Matlab*<sup>®</sup>. L'expérimentation et les simulations montrent que le rapport entre la vitesse des vibrations et la vitesse de coulisseau est un facteur important pour le gain en effort du procédé. Le modèle classique du procédé de formage par la méthode des tranches n'est pas capable d'expliquer complètement la réduction des efforts. Ce modèle permet de simuler le procédé lorsque la vitesse du coulisseau dépasse la vitesse maximale de la matrice inférieure et également d'analyser l'influence des paramètres de frottement qui est un facteur important pour le gain du procédé. Pour compléter l'étude, la consommation d'énergie électrique doit être comparée avec le gain du procédé pour pouvoir améliorer le bilan énergétique.



# Chapitre 6

## Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré à la modélisation complète de la mise en forme de produits massifs assistée par des vibrations mécaniques générées par des actionneurs piézoélectriques. Cette modélisation a pour objectif la description du comportement de système global afin d'améliorer les performances du procédé.

Dans le premier chapitre, nous avons effectué une étude bibliographique de différents procédés de formage assistés par des vibrations. L'effet des vibrations apporte une réduction parfois significative de l'effort de formage. Nous avons ensuite étudié les travaux antérieurs de modélisation d'actionneur piézoélectrique par des approches analytique et par éléments finis. Nous n'avons pas trouvé de modélisation complète du procédé de formage assistée par des vibrations dans la littérature. Ce travail de thèse fournit ainsi une modélisation complète du procédé de forgeage assisté par des vibrations générées par des actionneurs piézoélectriques qui ont également été modélisés et simulés.

Le deuxième chapitre est consacré à développer un modèle analytique de l'écrasement d'un lopin cylindrique par la méthode classique des tranches et à la description du dispositif expérimental utilisé. Nous avons intégré dans ce modèle la formulation de la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_0$  en fonction de la vitesse de déformation. L'identification des paramètres de la loi de comportement du matériau en utilisant la méthode des moindres carrés et la méthode d'optimisation d'un critère par gradient ou par simplex a été effectuée sur la base d'une série de mesures. Nous avons ensuite ajouté une partie de caractéristique linéaire pour tenir compte du comportement élastique du matériau afin d'améliorer la précision de l'identification

en utilisant les méthodes d'optimisation d'un critère pour identifier l'ensemble des coefficients du modèle. Une fois les paramètres du modèle identifiés, la simulation par éléments finis sous *Forge2008*<sup>®</sup> a été effectuée afin de comparer des résultats avec ceux obtenus par le modèle analytique du procédé d'écrasement et les essais expérimentaux. La comparaison montre une bonne concordance des résultats. Ce chapitre apporte finalement une modélisation de l'écrasement d'un lopin cylindrique permettant l'intégration avec le modèle d'actionneur piézoélectrique.

Dans le troisième chapitre, nous avons rappelé le phénomène piézoélectrique, les équations constitutives de la piézoélectricité, les coefficients d'une céramique piézoélectrique et les modes de couplage électromécanique. Nous avons ensuite introduit les équations fondamentales piézoélectriques en mode-33 à l'aide d'une hypothèse simplificatrice. Nous avons finalement exprimé les expressions du Lagrangien et de l'Hamiltonien en fonction du couple de variables  $E_3$  et  $S_3$  qui permettent de déduire les équations du mouvement dans le chapitre suivant.

Aux réponses des chapitres précédents, le quatrième chapitre a donc développé un modèle de barreau de l'actionneur piézoélectrique de type encastré-libre avec une masse supplémentaire à l'extrémité libre. Le développement du modèle a été effectué par une approche analytique et par une approche par éléments finis permettant la description de ses comportements dynamiques. Une modélisation en système continu fournit des résultats analytiques et exacts. Les résultats obtenus par l'approche analytique ont été utilisés comme une solution de référence. Nous avons utilisé une décomposition modale pour l'approche analytique fournissant les résultats avec une infinité de modes. Nous nous sommes intéressés qu'au premier mode de fréquence de résonance qui donne une amplitude de déplacement élevée. Les modes suivants sont lissés par l'effet de la masse supplémentaire et conduisent à une amplitude de déplacement très faible. La précision de la méthode par éléments finis dépend du nombre discrétisé d'éléments finis utilisés dans le modèle. L'analyse des résultats montre que la simulation donne une bonne précision pour le premier mode de fréquence de résonance avec 3 éléments finis seulement. L'approche par éléments finis fournit l'équation d'état du système ce qui permet de structurer le bloc diagramme de la simulation. Les sorties du modèle par éléments finis permettent d'intégrer les charges extérieures dans une boucle fermée de simulation. Le modèle par éléments finis a donc été utilisé dans le chapitre 5 pour coupler avec le modèle analytique de l'écrasement d'un lopin cylindrique.

Le dernier chapitre combine les résultats précédents afin d'obtenir un modèle général traduisant les comportements réels du système complet. L'expérimentation du procédé de l'écrasement d'un lopin cylindrique assisté par des vibrations mécaniques a été effectuée et les résultats sont comparés avec ceux obtenus par une

simulation du modèle général. Le modèle classique du procédé de forgeage par la méthode des tranches n'est pas capable d'expliquer complètement la réduction des efforts. Ce modèle permet de simuler le procédé lorsque la vitesse de coulisseau ne dépasse pas la vitesse de la matrice inférieure. Une simulation par éléments finis sous *Forge2008*<sup>®</sup> a également été effectuée. Il est à noter que le rapport entre la vitesse des vibrations et la vitesse de coulisseau est un facteur important pour le gain en effort du procédé.

L'actionneur piézoélectrique a été installé dans un dispositif mécanique permettant de faire vibrer la matrice inférieure de forgeage avec des amplitudes allant de 0 à  $60\mu m$  et des fréquences variant de 1 à  $130Hz$ . D'après l'analyse des résultats dans le chapitre 4, l'effet de la masse lisse l'amplitude du déplacement aux modes des fréquences de résonance. Le dispositif mécanique doit être amélioré pour que la masse appuie légèrement sur l'actionneur piézoélectrique.

Pour compléter l'étude, la consommation d'énergie électrique doit être comparée avec le gain du procédé pour pouvoir améliorer le bilan énergétique. Pour que le modèle complet soit proche de la réalité, le modèle de l'écrasement d'un lopin cylindrique doit être amélioré. Le terme du coefficient de frottement intervenant avec les vibrations d'actionneur piézoélectrique doit être modélisé plus finement.

Pour une modélisation du système continue en utilisant la décomposition modale, il est techniquement difficile de résoudre les équations de mouvement lorsque l'actionneur piézoélectrique est couplé avec le modèle non-linéaire du procédé. Un autre inconvénient existe lorsqu'on a un changement des conditions aux limites, on doit alors recalculer toutes les données modales. Il est donc impossible de l'utiliser pour le contrôle du procédé en boucle fermée, mais il est possible de travailler en boucle ouverte.

Une modélisation discrétisée permet d'obtenir un modèle d'état pouvant être intégré avec le modèle analytique du procédé de forgeage, de filage, etc. ... en boucle fermée. Elle permet aussi de servir dans le contrôle actif des vibrations de la structure mécanique vibrante mise en place avec l'outillage.



# Bibliographie

- [1] Z. Huang, M. Lucas, and M. J. Adams, “Modelling wall boundary conditions in an elasto-viscoplastic material forming process,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 107, pp. 267–275, 2000.
- [2] M. Murakawa and M. Jin, “The utility of radially and ultrasonically vibrated dies in the wire drawing process,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 113, pp. 81–86, 2001.
- [3] M. Lucas, “Vibration sensitivity in the design of ultrasonic forming dies,” *Ultrasonics*, vol. 34, pp. 35–41, 1996.
- [4] Y. Ashida and H. Aoyama, “Press forming using ultrasonic vibration,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 187-188, pp. 118–122, 2007.
- [5] A. Eaves, A. Smith, W. Waterhouse, and D. Sansome, “Review of the application of ultrasonic vibrations to deforming metals,” *Ultrasonics*, vol. 13, pp. 162–170, 1975.
- [6] K. Siegert and J. Ulmer, “Influencing the friction in metal forming processes by superimposing ultrasonic waves,” in *Annals of CIRP 501*, 2001, pp. 195–200.
- [7] M. Hayashi, M. Jin, S. Thipprakmas, M. Murakawa, J. Hung, Y. Tsai, and C. Hung, “Simulation of ultrasonic-vibration drawing using the finite element method,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 140, p. 140, 2003.
- [8] S. Mousavi, H. Feizi, and R. Madoliat, “Investigations on the effects of ultrasonic vibrations in the extrusion process,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 187-188, pp. 657–661, 2007.
- [9] S. A. Mousavi, H. Feizi, and R. Madoliat, “Investigations on the effects of ultrasonic vibrations in the extrusion process,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 187-188, pp. 657–661, 2007.
- [10] B. Gouveia, J. Rodrigues, N. Bay, and P. Martinsa, “Finite-element modelling of cold forward extrusion,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 94, pp. 85–93, 1999.

- [11] Z. Huang, M. Lucas, and M. J. Adams, "Influence of ultrasonics on upsetting of a model paste," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 40, pp. 43–48, 2002.
- [12] J. Hung and C. Hung, "The influence of ultrasonic-vibration on hot upsetting of aluminium alloy," *Ultrasonics*, vol. 43, pp. 692–698, 2005.
- [13] J. Hung, Y.-C. Tsai, and C. Hung, "Frictional effect of ultrasonic-vibration on upsetting," *Ultrasonics*, vol. 46, pp. 277–284, 2007.
- [14] R. LY, C. Giraud-Audine, G. Abba, and R. Bigot, "Experimentally validated approach for the simulation of the forging process using mechanical vibration," *International Journal of Material Forming*, vol. 2 Suppl 1, pp. 133–136, 2009, doi 10.1007/s12289-009-0538-1.
- [15] ———, "Simulation et essais d'un procédé de formage assisté par des vibrations mécaniques," 19ème Congrès Français de Mécanique, Marseille, France, 24-28, août 2009, cdRom CFM2009-315.pdf.
- [16] C. Giraud-Audine, R. Bigot, G. Abba, L. Morhain, and R. LY, "Procédé de mise en forme assisté par vibrations," Demande de brevet français n° 09 04042, Marseille, France, déposé le 25 août 2009, à l'INPI.
- [17] P. Baque, E. Felder, J. Hyafil, and Y. Descatha, *Mise en forme des métaux ; calculs par la plasticité*. Paris, Dunod, 1973.
- [18] E. Felder, "Analyse des procédés de mise en forme - méthodes de calcul des contraintes," M3 008, 2009.
- [19] T. Balan, "Calcul des procédés de formage : la méthode des tranches," Rapport des travaux dirigés, Metz.
- [20] H. Allik and T. Hughes, "Finite element method for piezoelectric vibration," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 2, pp. 151–157, 1970.
- [21] V. Piefort and A. Preumont, "Modeling of smart piezoelectric shell structures with finite elements," in *25th International Conference on Noise and Vibration Engineering*, ISMA, Ed., Leuven, Belgium, September 13-15 2000, pp. 891–898.
- [22] C. Poizat and A. Benjeddou, "On analytical and finite element modelling of piezoelectric extension and shear bimorphs," *Computers and Structures*, vol. 84, pp. 1426–1437, 2006.
- [23] C. Giraud-Audine and B. Nogarède, "Analytical modelling of travelling-wave piezomotor stators using a variational approach," *Eur. Phys. J. AP*, vol. 6, pp. 71–79, 1999.

- [24] P.-A. Juang, “Analytic modeling and driving for an ultrasonic wheels system,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, pp. 514–522, 2009.
- [25] R. LY, C. Giraud-Audine, R. Bigot, and G. Abba, “Longitudinal vibration modeling of a piezoelectric actuator used in forming process,” The 5<sup>th</sup> IEEE international conference on Mechatronics, Malaga, Spain, April 14-17, 2009, accepted.
- [26] E. Felder, “Analyse des procédés de mise en forme - méthodes énergétique,” M3 007, 2009.
- [27] T. IKEDA, *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford Science, 1990.
- [28] K. C. Kao, *Dielectric Phenomena in Solids*. California, USA : ELSEVIER ACADEMIC PRESS, 2004.
- [29] B. NOGAREDE, “Moteurs piézoélectriques,” *Techniques de l’ingénieur*, D3 765, 1996.
- [30] —, “Théorie de l’élasticité,” *Physique théorique*, 1982.
- [31] D. D. et D. Bellet, “Elasticité linéaire,” Paris, 1995.
- [32] D. Bellet and J. Barrau, “Cours d’élasticité,” Publié avec le concours du MRT, Paris, 1990.
- [33] K. Uchino, *Ferroelectric Devices*. Copyrigt by Marcel Dekker, Inc., 2000.
- [34] M. Brissaud, *Matériaux piézoélectriques*. ©presse polytechnique et universitaires romandes, 2007.
- [35] IEEE, “Ieee standard on piezoelectricity,” ANSI/IEEE Std 176, 1987.
- [36] N. Bellomo and P. D. Torino, *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Birkhauser Boston : LAP/SB, 2006.
- [37] C. Giraud-Audine, “Contribution à la modélisation analytique d’action-neurs en vue de leur conception et dimensionnement,” PhD, INPT, Toulouse, 1998.
- [38] A. Preumont, *Mechatronics Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, G. Gladwell, Ed. Springer, 2006.
- [39] R. E. Newnham, *Properties of materials*. New York, USA : Oxford university Press, 2005.
- [40] U. von Wagner, “Non linear longitudinal vibrations of piezoceramics excited by weak electric fields,” *Int. J. Non Linear Mech.*, vol. 38, pp. 565–574, 2003.

- [41] M. Goldfarb and N. Celanovic, "Modelling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation," *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 17, no. 3, pp. 69–79, June 1997.
- [42] H. Adriaens, W. L. de Koning, and R. Banning, "Modeling piezoelectric actuators," *IEEE/ASME Trans. Mechatro.*, vol. 5, p. 331, 2000.
- [43] A. Fernandes and J. Pouget, "An accurate modelling of piezoelectric multi-layer plates," *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 21, pp. 629–651, 2002.
- [44] M. Samal, P. Seshu, S. Parashar, U. von Wagner, P. Hagedorn, B. Dutta, and H. Kushwaha, "A finite element model for nonlinear behaviour of piezoceramics under weak electric fields," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, pp. 1464–1480, 2005.
- [45] S. Park and S. Yang, "A mathematical approach for analyzing ultra precision positioning system with compliant mechanism," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 164-165, pp. 1584–1589, 2005.
- [46] Z. Wang, S. Chen, and W. Han, "Static shape control for intelligent structures," *Finite elements Anal. Des.*, vol. 26, pp. 303–314, 1997.
- [47] S. Tliba, H. Abou-Kandil, and C. Prieur, "Active vibration damping of a smart flexible structure using piezoelectric transducers : Hinfinity design and experimental results," in *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, vol. 16. Prague, Czech Republic : Elsevier, July 4-8 2005.
- [48] H. Tiersten, "Hamilton's principle for linear piezoelectric media," *Proceedings of IEEE*, vol. 55, no. 8, pp. 1523–1524, August 1967.
- [49] M. Géradin and D. Rixen, *Mechanical Vibrations, Theory and Application to structural Dynamics*. Masson Edition, 1994.
- [50] S. Timoshenko, W. Weaver, and D. Young, *Vibration Problems in Engineering*. ©1928, 1937, by D. Van Nostrand Company, Inc, 1928.
- [51] D. V. Wallerstein, *A VARIATIONAL APPROACH TO STRUCTURAL ANALYSIS*. A Wiley Interscience Publication, 2002.
- [52] G. Genta, *Vibration Dynamics and Control*, F. Ling, Ed. ©Springer+Business Media, 2009.
- [53] G. W. Recktenwald, *NUMERICAL METHODS WITH MATLAB*. ©2000 by Prentice-Hall, Inc, 2000.

- [54] I. Chowdhury and S. P. Dasgupta, "Computation of rayleigh damping coefficients for large systems," *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 8, no. C, 2003.
- [55] O. Barrau, C. Boher, G. R. b, and F. Rezai-Aria, "Analysis of the friction and wear behaviour of hot work tool steel for forging," *Wear*, vol. 255, pp. 1444–1454, 2003.
- [56] E. Doege, H. Nagele, and U. Schliephake, "Aspects of wear prediction in precision forging," *Part B : Journal of Engineering Manufacture*, vol. 208, pp. 111–119, 1994.



# Annexe A

## Prise en main de la machine et le logiciel de pilotage

La machine d'essais Lloyd est utilisée dans le cadre de notre travail de thèse pour la déformation d'un lopin en plasticine soumis à des vibrations mécaniques. Le guide permet de prendre en main la machine d'essais de traction/compression Lloyd et le logiciel de pilotage :

### A.1 Mise en marche de la machine

Les boutons noir et jaune sur le bâti de la machine servent pour le marche-arrêt et le réarmement de la sécurité respectivement. Après un délai d'initialisation, la machine affiche le message : "COMMANDE LOCALE B, COMMANDE A DISTANCE A". On choisit A sur le clavier de la machine. En ce moment l'ordinateur doit être allumé. Par la suite, on lance le logiciel de pilotage pour la commande de la machine comme montré dans la figure [A.1](#).

### A.2 Programmation d'un essai

Dans le menu **Procédure** de la figure [A.1](#), on sélectionne le **Test Stages** et on obtient la fenêtre des **Etapes de l'essai** comme montré dans la figure [A.2](#) où on peut fixer les conditions des essais.

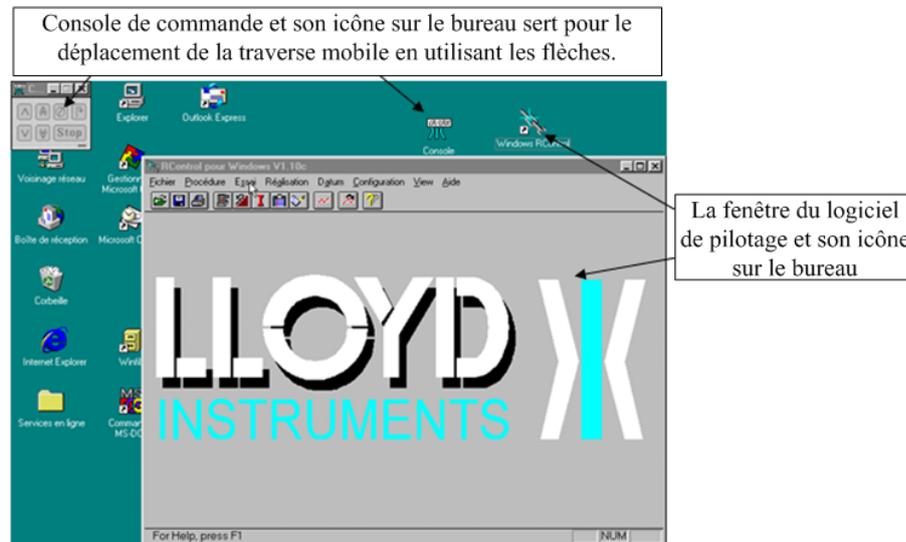


FIGURE A.1 – Fenêtre du logiciel lié au pilotage de la machine.

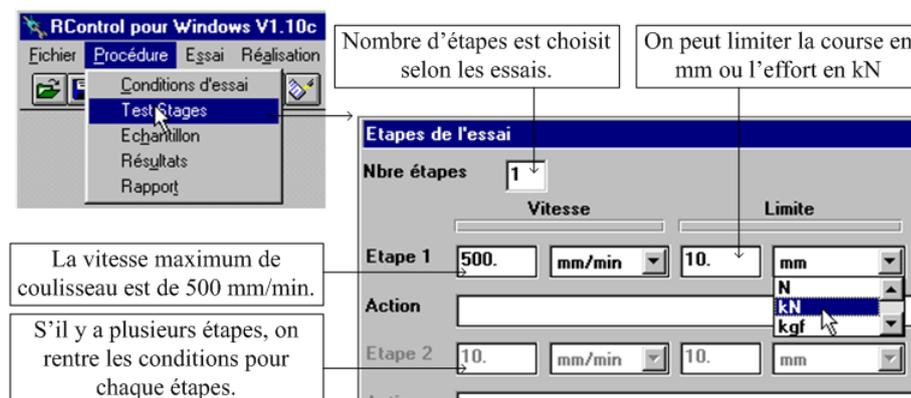


FIGURE A.2 – Fenêtre des étapes de l'essai.

### A.3 Réalisation de l'essai

Pour démarrer l'essai, on clique sur le menu **Essai** de la figure A.1. Plusieurs fenêtres sont proposées pour numéroté et commenter l'essai. Pour les essais simples, singuliers, on peut ne rien inscrire dans ces fenêtres (cliquer sur OK). Par la suite, on obtient la fenêtre principale du pilotage d'essai comme montré dans la figure A.3. A la fin de l'essai, on a la possibilité de sauvegarder les résultats (*nom – fichier.fsd*). Il s'agit d'un format spécifique à la machine. Ces fichiers peuvent être rechargés avec le logiciel via le menu **Réalisation**. Ceci permet de revisualiser le graphe. Pour récupérer les données des résultats sous Excel, une copie du fichier résultats (dans un format compatible avec Excel) est faite dans le dossier *C : \00Lloyd \ Excel*.

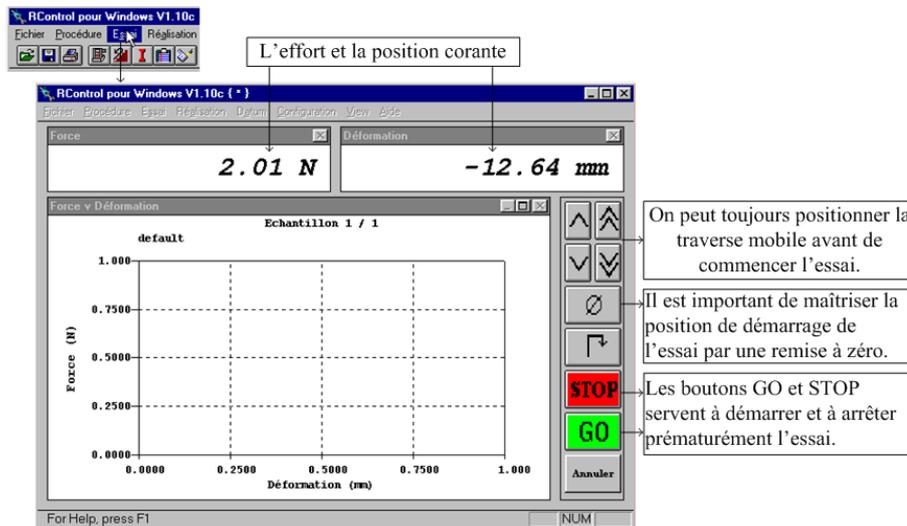


FIGURE A.3 – Fenêtre principale du pilotage d'essai.

## A.4 Préparation des lopins cylindriques

La fabrication des lopins cylindriques en plasticine sont réalisés par filage. L'outillage d'extrusion est composé des éléments suivants indiqués sur la figure A.4. Les étapes de la fabrication des lopins cylindriques sont suivantes :

- Assembler les éléments de l'outillage d'extrusion comme montré dans la figure A.5. On assemble tout d'abord la filière sous le conteneur cylindrique dans le quel on remplit les plasticines en introduisant le poinçon au-dessus. En suite, on assemble la filière sur le support et les poser entre le bâti de la machine et le plateau supérieur. La traverse mobile ne doit pas passer la butée supérieure.
- Programmer l'essai de compression (voir l'annexe A.2). Par la suite, on réalise l'extrusion à l'aide de l'annexe A.3. Finalement on obtient les lopins cylindriques en plasticine.

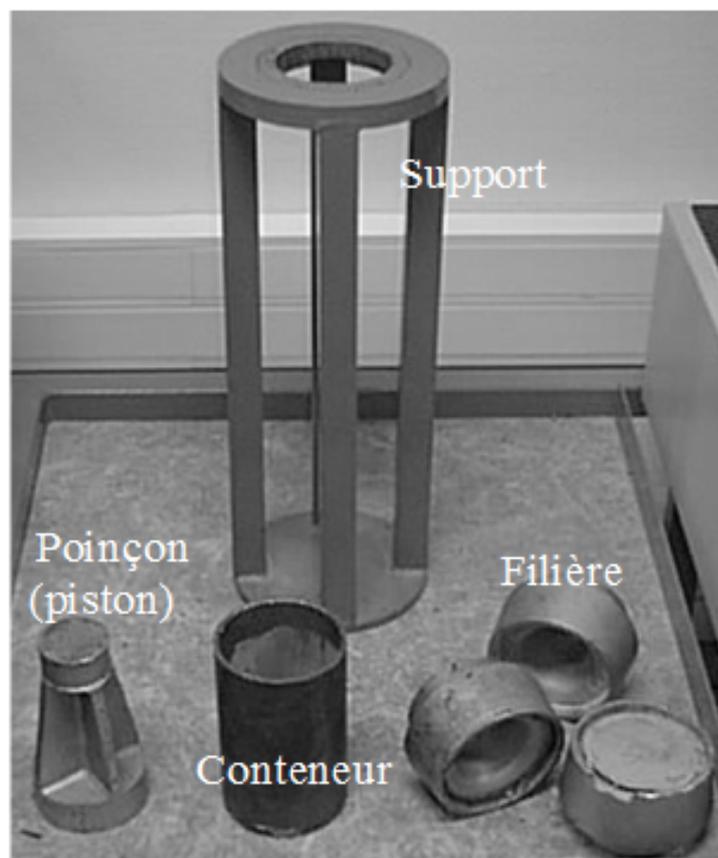


FIGURE A.4 – *Outillage d'extrusion.*

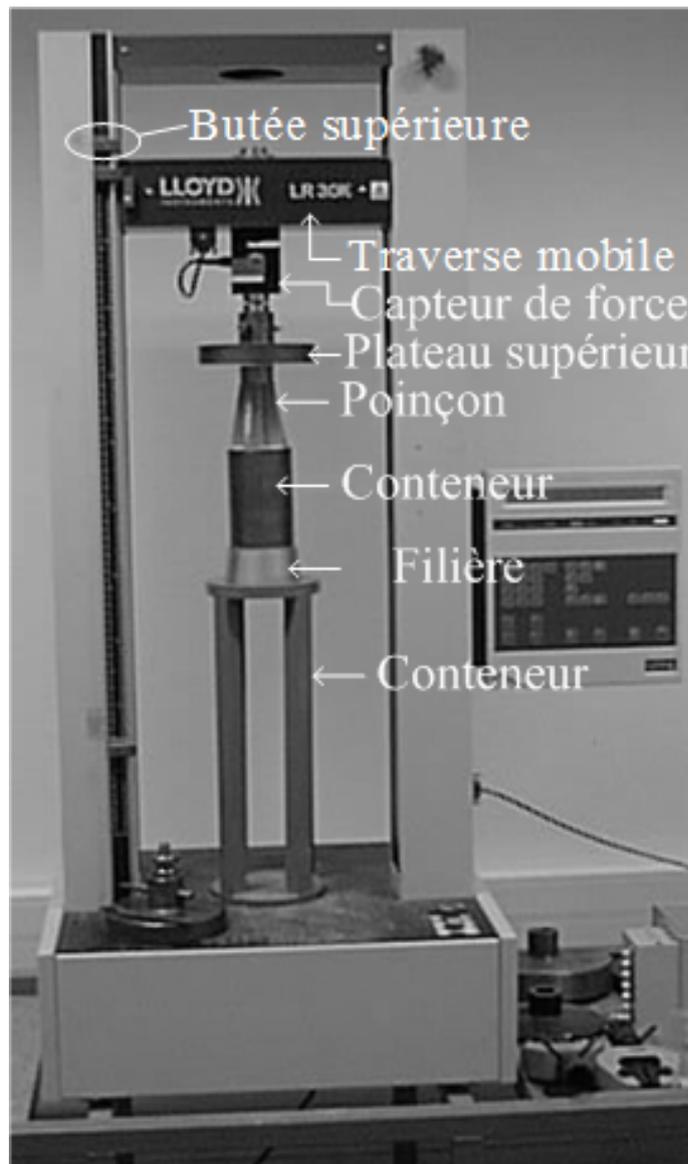


FIGURE A.5 – *Outillage d'extrusion.*



# Annexe B

## Calcul des paramètres filtrés

### B.1 Descriptif du schéma d'alimentation électrique

Les formes de vibrations pour vibrer les outillages pendant la mise en forme peuvent être en sinusoïdale, en triangle  $\dots$  etc. L'utilisation des formes d'onde est selon les applications du procédé de formage afin d'optimiser sa performance. Pour avoir ces formes de vibrations, il est nécessaire de construire spécifiquement une alimentation de l'actionneur piézoélectrique. Pour ce faire, il y a donc deux étapes : la première étape consiste à créer le signal continu et la deuxième étape est de convertir le signal continu en alternatif. Le but de construire cette alimentation est de permettre de faire varier l'amplitude et la fréquence des vibrations.

- Première étape

Une source tension utilisée est le réseau alternatif **EDF** (120V, 50 Hz). Dans un premier temps, il consiste à convertir le réseau alternatif en signal le plus continu possible (figure **B.1**). Ce fonctionnement de l'alimentation se compose d'un auto-transformateur et d'un redresseur équipé avec un filtre passe bas. L'autotransformateur sert à varier la tension en gardant la même fréquence. Le redresseur sert à convertir le signal alternatif en signal continue. Mais le signal obtenu n'est pas nettement continu. Donc le filtre passe bas est équipé avec la tension de sortie du redresseur pour obtenir sensiblement continu. Ce filtre passe bas est constitué par un circuit **LC** qui permet d'empêcher les harmoniques inutiles  $h\omega$ . L'inductance permet de lisser l'ondulation du courant  $i$  et la capacité permet de réduire l'ondulation de la tension  $u$ . Le schéma équivalent **B.1** permet d'obtenir une tension  $u$  sensiblement constante pour fournir à l'onduleur de tension. En plus ce filtre passe bas permet de

minimiser la déformation de la puissance absorbé par un onduleur de tension. En pratique, il est impossible de supprimer complètement les harmoniques de courant.

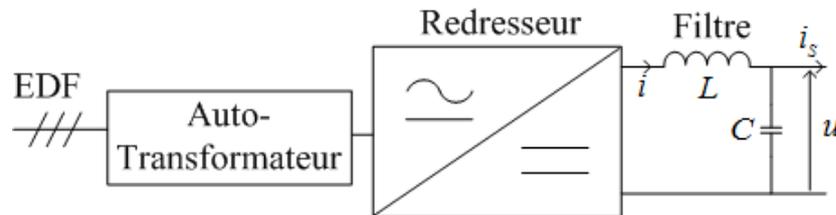


FIGURE B.1 – Schéma d'alimentation en continu.

– Deuxième étape

Le signal continu obtenu par le redresseur ci-dessus nécessite une conversion en signal alternative pour fournir à l'actionneur piézoélectrique. Un onduleur de tension commandé en modulation à largeur d'impulsion (MLI) peut fournir une tension de sortie à la forme de plusieurs créneaux de même amplitude mais de largeurs différentes. Cette alimentation est entouré avec le filtre  $L'C'$  (figure B.2) permettant d'obtenir une tension sensiblement alternative de sortie à l'impédance capacitive de l'actionneur et d'éviter que les harmoniques de tension excitent des fréquences de résonances de l'APM.

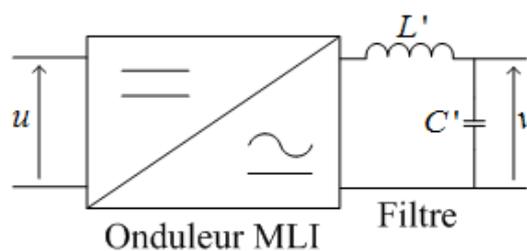


FIGURE B.2 – Schéma d'alimentation en continu-alternative.

La tension limitée entre les bornes de l'actionneur piézoélectrique est de  $-200\text{ V}/+1000\text{ V}$ . Pour cette alimentation, il est nécessaire de composer d'une tension alternative en série avec d'une tension continue (voir la figure B.3). Finalement l'alimentation d'actionneur piézoélectrique se compose de deux autotransformateurs, de deux redresseurs, d'un onduleur MLI et de trois filtres.

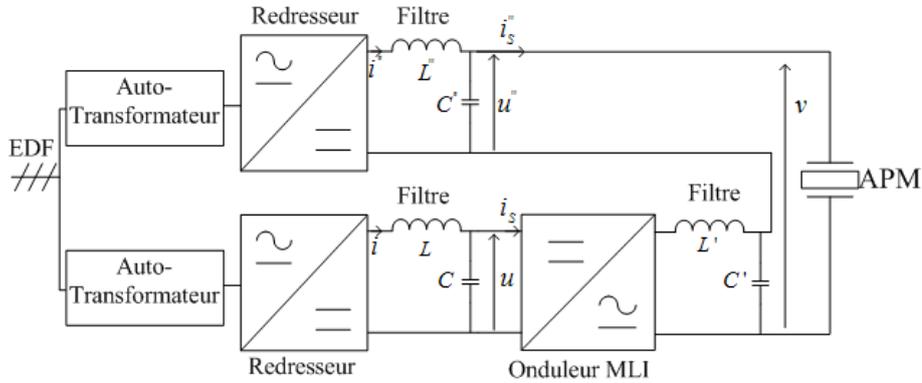


FIGURE B.3 – Schéma complète d'alimentation piézoélectrique.

## B.2 Filtre d'entrée de l'onduleur

Pendant les intervalles entre commutations, il y a les brusques variations de tension et de courant absorbés par l'onduleur. Pour corriger ces ondulations, il s'agit de calculer les paramètres filtrés. Le redresseur de la figure B.1 fournit une tension sensiblement continue grâce à un filtre LC pour générer à l'onduleur MLI. Le circuit LC de la figure B.4 permet d'écrire une relation suivante :

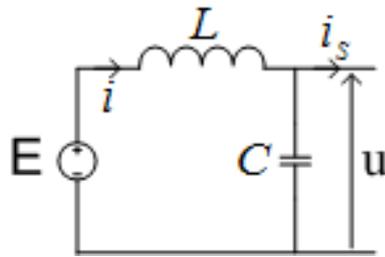


FIGURE B.4 – Circuit LC.

$$L \frac{di}{dt} + u = E \quad (\text{B.1})$$

$$i - C \frac{u}{dt} = i_s \quad (\text{B.2})$$

La dérivation en temporelle d'une équation B.1 peut s'écrire sous la forme comme ci-dessous :

$$\frac{du}{dt} = -L \frac{d^2 i_s}{dt^2} \quad (\text{B.3})$$

Le remplaçant d'une équation B.3 dans B.2 donne une relation qui peut s'écrire sous la forme harmonique de courant et de tension comme ci-dessous :

$$I_h = \frac{I_{Sh}}{|1 - LC h^2 \omega^2|} \quad (\text{B.4})$$

L'équation B.4 permet de déduire la fréquence propre du filtre et égale à :

$$\omega_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{B.5})$$

Le reportant d'une équation B.4 dans B.3 donne une relation suivante :

$$U_h = \sqrt{\frac{L}{C}} I_{Sh} \frac{\frac{h\omega}{\omega_f}}{|1 - (\frac{h\omega}{\omega_f})^2|} \quad (\text{B.6})$$

Les expressions B.4 et B.6 peuvent exprimer les variations, en fonction de  $\frac{h\omega}{\omega_f}$ , du rapport  $\frac{I_h}{I_{Sh}}$  et du rapport  $\frac{U_h}{I_{Sh} \sqrt{L/C}}$ .

Pour minimiser l'ondulation de courant  $i$ , il faut que le rapport  $\frac{h_1\omega}{\omega_f}$  soit nettement supérieur à l'unité pour le premier harmonique du courant  $i_s$ , ceci obtient :

$$\sqrt{LC} \gg \frac{1}{h_1\omega} \quad (\text{B.7})$$

Pour minimiser l'ondulation de tension  $E$ , il faut que, pour le premier harmonique :

$$C \gg \frac{I_{h_1}}{U_S h_1 \omega} \quad (\text{B.8})$$

Pour que les conditions B.7 et B.8 soient satisfaites pour le premier harmonique, il sera plus encore pour les termes de pulsation plus élevée. En respectant les conditions ci-dessus, nous avons choisis les paramètres calculés LC comme ci-dessous :

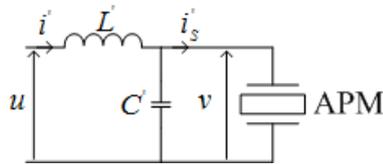
$$C \simeq 1.98 \cdot 10^{-5}$$

$$L \simeq 0.12$$

### B.3 Filtre de sortie de l'onduleur

La charge est la piézoélectricité qui absorbe une tension sinusoïdale, triangle ...etc. Ici on monte un exemple d'une tension de sortie à la forme sinusoïdale. L'onduleur de tension commandé MLI délivre une tension de sortie à la forme de plusieurs

créneaux convenable. Le filtre  $L'C'$  (figure B.5) est placé à la sortie de l'onduleur pour destiner à obtenir une tension sensiblement sinusoïdale. La charge piézoélectrique est représentée par une admittance, l'étude de calcul du filtre est dépend de type onduleur utilisé.

FIGURE B.5 – Circuit  $L'C'$ .

Pour que la valeur efficace  $v$  du fondamental de la tension de sortie ne soit pas trop affectée par les variations du fondamental  $i'_s$  du courant absorbé par la charge, il faut que :

$$L'\omega i'_s < v \quad (\text{B.9})$$

Pour que le courant absorbé par le condensateur ne rende pas le courant pris à l'onduleur nettement plus important que celui fourni à la charge, il faut que :

$$C'\omega v < i'_s \quad (\text{B.10})$$

En regroupant les conditions (B.9) et (B.10), on obtient :

$$L'C'\omega^2 < 1 \quad (\text{B.11})$$

ou

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{L'C'}} \quad (\text{B.12})$$

D'après le calcul pour la fréquence  $f = 250 \text{ Hz}$ ,  $v = 250 \text{ V}$  et  $i'_s = 1.5 \text{ A}$ , on obtient :

$$C' \simeq 3.82 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$L' \simeq 0.10 \text{ H}$$



# Annexe C

## Modèles de l'actionneur piézoélectrique alimenté en courant

### C.1 Modèle analytique de l'actionneur alimenté en courant :

Dans cette annexe, nous étudions seulement le cas sans masse. D'après le chapitre 4, paragraphe 4.2.1, nous résumons les équations de mouvement :

$$\rho_0 \ddot{u}_3(x_3, t) - \chi u_{3,33}(x_3, t) = 0 \quad \text{avec} \quad \chi = \underline{e}_{33} \alpha + \underline{c}_{33}^E \quad (\text{C.1})$$

$$\phi_{,33}(x_3, t) = \alpha u_{3,33}(x_3, t) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\underline{e}_{33}}{\underline{\varepsilon}_{33}^S} \quad (\text{C.2})$$

et les conditions d'équilibre aux limites mécaniques et électriques :

$$-\sigma \underline{e}_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{c}_{33}^E u_{3,3}(L, t) + F(t) = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma \underline{\varepsilon}_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma \underline{e}_{33} u_{3,3}(L, t) - Q(t) = 0 \quad (\text{C.4})$$

L'appellation des paramètres et des symboles est détaillée dans le chapitre 3 et 4. La solution de décomposition modale du déplacement :

$$u_3(x_3, t) = u_3^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) v_{3n}(x_3) \quad (\text{C.5})$$

et du potentiel électrique :

$$\phi(x_3, t) = \phi^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \phi_{3n}(x_3) \quad (\text{C.6})$$

### – Réponse quasi-statique

Les paramètres  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  des équations (4.33) et (4.34) peuvent être calculés en utilisant les conditions cinématiques aux frontières (voir les équations 4.4 et 4.5) et les conditions d'équilibre aux limites mécaniques et électriques (voir les équations C.3 et C.4). On obtient donc les réponses quasi-statiques :

$$u_3^{qs}(x_3, t) = \left( \frac{F(t) + \alpha Q(t)}{\sigma \chi} \right) x_3 \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \phi^{qs}(x_3, t) &= \left( \frac{\alpha}{\chi} F(t) + \left( \frac{\alpha^2}{\chi} - \frac{1}{\sigma \varepsilon_{33}^S} \right) Q(t) \right) x_3 \\ &= \alpha u_3^{qs}(x_3, t) - \frac{Q(t)}{\sigma \varepsilon_{33}^S} x_3 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

### – Détermination des valeurs propres

D'après une remarque du chapitre 4, paragraphe 4.2.2, pour le cas de l'actionneur piézoélectrique alimenté par une source de courant, le calcul des valeurs et des vecteurs propres s'effectue en considérant le circuit d'alimentation comme ouvert ( $i(t)=0$ ) et l'actionneur piézoélectrique libre de toutes les charges extérieures. Les conditions d'équilibre aux limites mécaniques et électriques deviennent :

$$-\sigma \varepsilon_{33} \phi_{,3}(L, t) - \sigma \varepsilon_{33}^E u_{3,3}(L, t) = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$\sigma \varepsilon_{33}^S \phi_{,3}(L, t) - \sigma \varepsilon_{33} u_{3,3}(L, t) = 0 \quad (\text{C.10})$$

Les paramètres  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  des équations (voir les équations 4.48 et 4.49), peuvent être calculés en utilisant les conditions cinématiques aux frontières (voir les équations 4.4 et 4.5) et les conditions homogènes d'équilibre aux limites mécaniques et électriques (voir les équations C.9 et C.10). On obtient donc les vecteurs propres :

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{3n}(x_3) \\ \phi_{3n}(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \sin(\lambda_{3n} \frac{x_3}{L}) \\ \alpha v_{3n}(x_3) \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$\omega_{3n} = \frac{\lambda_{3n}}{L} \sqrt{\frac{X}{\rho_0}}$  sont les pulsations propres. En utilisant les équations (C.9) et (C.10), on obtient la relation suivante :

$$\sin \lambda_{3n} = 0 \quad (\text{C.12})$$

d'où on peut déduire les valeurs propres  $\lambda_{3n} = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$ .

### – Propriétés des modes propres

De la même manière qu'une alimentation en tension, l'équation (4.46) est multipliée par le vecteur propre de l'équation (C.11) et en intégrant sur le volume :

$$\int_0^L v_{3n}(x_3) \sigma [\chi v_{3m,33}(x_3) + \rho_0 \omega_{3m}^2 v_{3m}(x_3)] dx_3 = 0 \quad (\text{C.13})$$

Les démarches de la démonstration se font comme dans le cas de l'alimentation en tension. Le procédé de calcul utilise les conditions et les expressions calculées dans le cas où l'actionneur piézoélectrique est alimenté en courant. Finalement, on obtient les propriétés d'orthogonalité par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0 v_{3m}(x_3) v_{3n}(x_3) d\Omega &= \delta_{nm} \\ \int_{\Omega_0} \chi v_{3n,3}(x_3) v_{3m,3}(x_3) d\Omega &= \delta_{nm} \omega_{3n}^2 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

La propriété d'orthogonalité du premier terme de l'équation permet de calculer le paramètre  $A_n$  :

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{\sigma \rho_0 L}} \quad (\text{C.15})$$

### – Calcul de l'amplitude des modes $\eta_n(t)$

Pour calculer le paramètre  $\eta_n(t)$ , l'équation C.5 est introduit dans l'équation dynamique en multipliant par les vecteurs propres transposés  $V_{3m}^t(x_3)$  de l'équation ??, et on obtient :

$$\int_{\Omega} v_{3m}(x_3) [-\rho_0 (\ddot{u}_3^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) v_{3n}(x_3)) + \chi (u_{3,33}^{qs}(x_3, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) v_{3n,33}(x_3))] d\Omega = 0 \quad (\text{C.16})$$

L'équation C.16 peut être simplifiée en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres :

$$\ddot{\eta}_n(t) + \omega_n^2 \eta_n(t) = \psi_{nQ} \quad (\text{C.17})$$

avec le facteur participation  $\psi_{nQ} = - \int_{\Omega_0} \rho_0 v_{3n}(x_3) \ddot{u}_3^{qs}(x_3, t) d\Omega$ . L'insertion du déplacement quasi-statique (C.7) dans le facteur participation donne :

$$\psi_{nQ} = \frac{\rho_0 l^2 A_n}{\chi \lambda_{3n}^2} (\ddot{F}(t) + \alpha \ddot{Q}(t)) (-1)^n \quad (\text{C.18})$$

Enfin les solutions complètes des équations dynamiques peuvent être mises sous la forme d'une transformée de LAPLACE dans le cas où on alimente en courant :

$$\begin{aligned} u_3(L, s) &= \frac{l}{\sigma\chi}F(s) + \frac{\alpha l}{\sigma\chi}Q(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{\lambda_{3n}^2} \left( \frac{\chi_{1Q} S^2}{S^2 + \omega_{3n}^2} Q(s) \right) \\ \phi(l, s) &= \alpha u_3(l, s) - \frac{l}{\sigma\epsilon_{33}^s} Q(s) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

avec  $\chi_{1Q} = \frac{\mu_0 l^2}{\sigma\chi}$  ;  $\chi_{2Q} = \frac{\mu_0 l^2 \alpha}{\sigma\chi}$ . Dans les deux cas d'alimentation en tension et en courant, ces modèles analytiques sont implémentés en utilisant *Matlab*®. Cette implémentation permet d'afficher les résultats en réponses fréquentielles et temporelles. Ces résultats vont comparer avec celles obtenus par l'approche éléments finis.

## C.2 Modèle éléments finis de l'actionneur alimenté en courant

Dans le cas où on impose les charges électriques sur les surfaces extrémités du barreau piézoélectrique situées en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$ , on détermine les déplacements et les potentiels électriques en tous éléments. La deuxième ligne de l'équation 4.117 peut être exprimée sous la forme :

$$\Phi(t) = K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} U(t) - K_{\phi\phi}^{-1} \Lambda J(t) \quad (\text{C.20})$$

L'introduction de l'équation C.20 dans la première ligne de l'équation 4.117 donne la relation suivante :

$$M\ddot{U}(t) + (K_u + K_{\phi u} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u})U(t) - \begin{pmatrix} K_{\phi u} K_{\phi\phi}^{-1} \Lambda & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(t) \\ G(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.21})$$

L'équation C.21 peut être introduite sous la forme d'équation d'état. On suppose :

$$\begin{aligned} x_1 &= U(t) \\ x_2 &= \dot{U}(t) = \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

et ses dérivations :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(K_u + K_{\phi u} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u})x_1 + \begin{pmatrix} M^{-1} K_{\phi u} K_{\phi\phi}^{-1} \Lambda & M^{-1} \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(t) \\ G(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

On suppose  $X^t = (x_1 \ x_2)$  et  $U^t = (J(t) \ G(t))$ . On obtient les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K_u + K_{\phi u}K_{\phi\phi}^{-1}K_{\phi u}) & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M^{-1}K_{\phi u}K_{\phi\phi}^{-1}\Lambda & M^{-1}\Lambda \end{pmatrix} \\ C &= (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \\ D &= (0 \ 0) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

où  $I$  est la matrice identité de dimension  $(N \times N)$ .

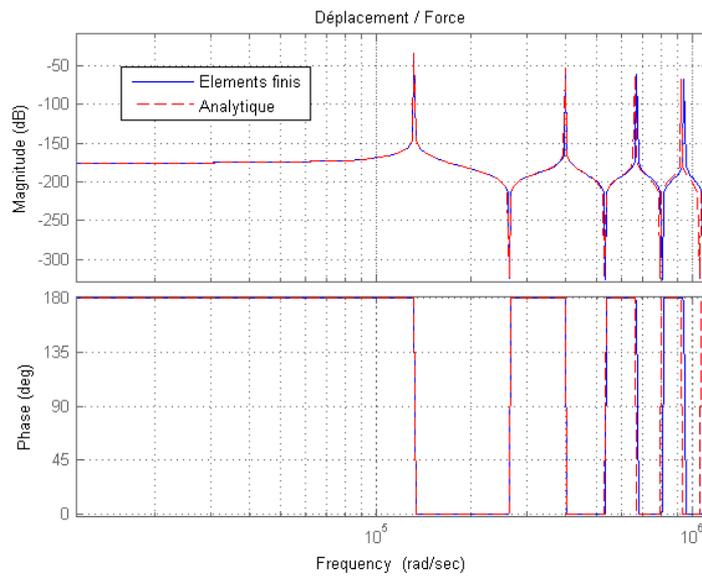


FIGURE C.1 – Comparaison des réponses fréquentielles  $(\frac{u}{F})$  : MA-15 modes et MEF-15 éléments

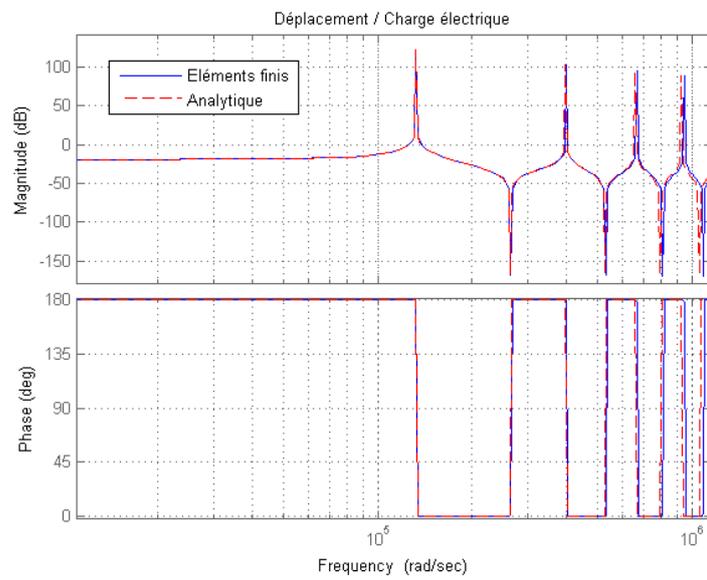


FIGURE C.2 – Comparaison des réponses fréquentielles ( $\frac{u}{Q}$ ) : MA-15 modes et MEF-15 éléments

## Résumé

Le travail présenté concerne la modélisation d'actionneurs piézoélectriques utilisés comme générateur de vibrations mécaniques pour l'assistance à la mise en forme de matériaux massifs. L'actionneur multicouche est monté en mode encastré-libre et seule la direction de déplacement longitudinale est considérée dans le cadre de ces travaux de recherche. La modélisation est fondée sur l'application du principe d'Hamilton pour établir les équations du mouvement du système global. L'approche analytique utilise une décomposition modale pour résoudre les équations de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique. Un modèle de type fonction de transfert entrées-sorties permet l'analyse des réponses dans les domaines temporel et fréquentiel. La difficulté du modèle analytique est de recalculer toutes les données modales dès que les conditions aux limites sont modifiées. Une approche par éléments finis placés selon la direction longitudinale de l'actionneur est également développée. Par comparaison au modèle analytique, une étude de la précision de modèle par éléments finis fonction du nombre d'éléments est effectuée. Les deux modèles développés sont ensuite couplés à un modèle analytique simplifié du procédé de forgeage basé sur des lois viscoplastiques afin de modéliser l'ensemble du procédé soumis à des vibrations mécaniques. Le principal avantage de ce modèle tient en la possibilité d'analyser et d'optimiser l'ensemble actionneur-procédé. Une comparaison entre les simulations par éléments finis sous *Forge2008*®, le modèle de couplage sous *Matlab*® et les essais expérimentaux est présentée. Lors des essais, l'actionneur piézoélectrique alimenté par un onduleur de tension commandé en modulation à largeur d'impulsion fait vibrer la matrice inférieure à des amplitudes allant de 0 à 80  $\mu m$  et des fréquences entre 10 et 130  $Hz$ . La comparaison des résultats expérimentaux et des simulations dans le cas d'un écrasement plan est encourageante. La modélisation du comportement du dispositif expérimental constitue un élément de base d'un futur outil de conception des dispositifs mécaniques vibrants.

**Mots clés :** *procédé de forgeage, vibration mécanique, actionneur piézoélectrique, modélisation mécatronique, modèle analytique, modèle éléments finis*

## Abstract

The work presented concerns the modelling of piezoelectric actuators used as a generator of mechanical vibrations for assistance in shaping bulk materials. The multilayer actuator is set in clamped-free mode and only the direction of longitudinal displacement is considered in the context of this research. The modelling is based on the application of Hamilton principle to establish the equations of motion of the global system. The analytic approach uses a modal composition to solve the equations of operation of the piezoelectric actuator. A transfer function of Multiple-Input Multi-Output (MIMO) systems permits the analysis of the responses in time and frequency domains. The difficulty of the analytical model is to recalculate all the modal data when the boundary conditions are changed. A finite element approach placed along the longitudinal direction of the actuator is also developed. Compared to the analytical model, a study of the accuracy of finite element model function of the number of elements is performed. The two models developed are then coupled to a simplified analytical model of the forging process based on viscoplastic laws in order to model the entire process subject to mechanical vibrations. The main advantage of this model lies in the ability to analyze and optimize the entire process-actuator. A comparison between the finite element simulations under *Forge2008*®, the coupling model under *Matlab*® and experimental tests is presented. During testing, the piezoelectric actuator fed by Pulse Width Modulated voltage inverter vibrates the lower die at amplitudes ranging from 0 to 80  $\mu m$  and frequencies between 10 and 130  $Hz$ . The comparison of experimental results and simulations in the case of upsetting process is encouraging. The modelling of the behaviours of the experimental device constitutes a basic element of a future design tool of vibrating mechanical devices.

**Keywords :** *forging process, mechanical vibration, piezoelectric actuator, mechatronic modeling, analytical model, finite element model*