



HAL
open science

Instabilités thermoconvectives pour des fluides viscoplastiques

Christel Metivier

► **To cite this version:**

Christel Metivier. Instabilités thermoconvectives pour des fluides viscoplastiques. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2006. Français. NNT : 2006INPL092N . tel-01752783

HAL Id: tel-01752783

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752783v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Institut National Polytechnique de Lorraine

UFR STMP
Ecole Doctorale EMMA
Département de formation Doctorale Mécanique - Energétique
LEMTA - UMR 7563 CNRS, INPL - UHP

Thèse de doctorat

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Christel METIVIER

le 8 décembre 2006.

Instabilités thermoconvectives pour des fluides viscoplastiques

JURY

Rapporteurs	Philippe Carrière Ian Frigaard	Chargé de Recherche CNRS, Lyon Professeur Associé, Vancouver (Canada)
Examineurs	Cathy Castelain François Charru Jean-Pierre Brancher Chérif Nouar (Directeur de thèse)	Chargé de Recherche CNRS, Nantes Professeur, Toulouse Professeur, Nancy Chargé de Recherche CNRS, Nancy
Invité	Emmanuel Plaut	Maître de Conférence, Nancy

Remerciements

Ce mémoire de thèse est le fruit de trois années de travail au sein du Laboratoire d’Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée. Trois années riches de découvertes, d’apprentissages et de rencontres. Mes remerciements s’adressent aux personnes qui ont bien voulu m’accompagner au cours de la thèse.

En tout premier lieu, c’est à *Chérif Nouar* que je souhaite apporter mes plus sincères remerciements. Durant ces trois années de thèse, sa disponibilité à toute épreuve, son soutien ainsi que son envie de partager sa passion et ses connaissances m’ont permis d’avancer dans un climat de grande confiance. Au-delà de ce travail de thèse, ma profonde gratitude et mon amitié lui sont acquises.

Je remercie également Jean-Pierre Brancher, Professeur à l’ENSEM, pour son soutien, les différentes discussions scientifiques et amicales et ses, toujours, très bons conseils. Merci à lui de m’avoir fait l’honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier Ian Frigaard, Professeur associé de l’Université de Colombie Britannique (Canada) pour les discussions chaleureuses et enrichissantes ainsi que les collaborations sur des parties de ma Recherche. J’associe à ces remerciements Philippe Carrière, Chargé de Recherche CNRS au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique de Lyon, tous deux m’ayant fait l’honneur de rapporter mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Cathy Castelain, Chargée de Recherche au Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, pour les différentes discussions et collaborations, ainsi qu’à François Charru, qui ont accepté tous deux de faire partie de mon jury de thèse.

Un chaleureux remerciement aussi à Emmanuel Plaut, Maître de Conférence à l’ENSEM pour sa disponibilité lors de mes différentes questions et pour m’avoir toujours indiqué le bon chemin pour sortir de certaines impasses. Je le remercie aussi à travers son poly de cours, sa relecture attentive de mon mémoire et sa participation à la soutenance en tant qu’invité.

Merci à Renée Gatignol pour m’avoir aidée et conseillée dans le choix du laboratoire d’accueil de thèse et pour ses différentes recommandations au cours de la thèse.

Je remercie les secrétaires, informaticiens et techniciens du laboratoire pour leur gentillesse et leur disponibilité. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance aux membres du LEMTA pour l’accueil chaleureux qu’ils m’ont réservé.

Dans ces remerciements, je ne voudrais pas oublier les doctorants, ex-doctorants et permanents pour leur bonne humeur, nombreuses discussions et aides bien précieuses !!! Je pense particulièrement à Ghania, Thomas, Mihai, Fadil, Yannick, Olivier, Michel G, Jérôme, aux Fabiens et Michel B. Il y a aussi le groupe d’amis rencontré en tout début de thèse : l’Anti-diaspora, groupe de scientifiques en tout genre avec lequel les soirées sont toujours agréables et animées. Je n’oublie pas non plus mes amis de plus longue date qui savent toujours m’apporter joie, bonne humeur, soutien, écoute, partage..., il s’agit d’Elodie et Nicolas, Marianne,

Vincent et Rachel (ma jumelle), Raph, ma petite Pauline.

Un grand merci à Jean-Paul qui a pris l'aventure en marche et m'a accompagnée jusqu'à son terme. Je lui suis reconnaissante de ce qu'il m'a apporté, de son soutien jusqu'au dernier moment, de sa confiance dans mon travail...

Je terminerai par mes proches : la famille Henry au grand complet pour leur intérêt et leur regard affectueux ; Léo, Fanny, Steph, *ma soeur Laetitia et mes parents*, pour leur soutien sans faille, inconditionnel et éternel.

MERCI.

Table des matières

Table des figures	vi
Liste des tableaux	x
Nomenclature	xi
Nomenclature	xiii
Introduction générale	xiii
Introduction générale	xvii
1 Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil	1
1.1 Description du comportement rhéologique des fluides à seuil	1
1.2 Concepts liés aux problèmes de stabilité	5
1.2.1 Stabilité	5
1.2.2 Stabilité conditionnelle	6
1.2.3 Stabilité globale	6
1.2.4 Stabilité monotone	6
1.2.5 Stabilité linéaire	6
1.3 Revue bibliographique	6
1.3.1 Problème de stabilité pour des fluides à seuil	6
1.3.2 Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide Newtonien	10
1.4 Démarche et Objectifs de la thèse	11
2 Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire	13
2.1 Description du problème	14
2.2 Equations gouvernant le problème	14
2.3 Autres hypothèses de travail	16
2.4 Analyse dimensionnelle	16
2.4.1 Grandeurs de référence	16
2.4.2 Equations sans dimension	17

2.5	Détermination de l'écoulement de base	18
2.5.1	Cas où la viscosité plastique, μ_p , est non thermo-dépendante	18
2.5.2	Viscosité plastique, μ_p , dépendant de la température	21
2.6	Analyse linéaire de stabilité	24
2.6.1	Formulation du problème	25
2.6.2	Problème aux valeurs propres, modes propres, normalisation des modes	31
2.7	Résolution numérique	31
2.8	Résultats	35
2.8.1	Cas où la viscosité plastique est constante	35
2.8.2	Cas où la viscosité plastique dépend de la température	39
2.9	Bilan	39
3	Analyse faiblement non linéaire de stabilité	49
3.1	Notation et mise en équation	51
3.1.1	Equation du mouvement	52
3.1.2	Equation de l'énergie	54
3.1.3	Conditions limites	55
3.2	Hypothèses de travail	55
3.3	Procédure	56
3.4	Mode 0	58
3.5	Mode 2	60
3.6	Problème adjoint	61
3.7	Equation de l'amplitude	62
3.8	Résolution numérique	64
3.9	Résultats	65
3.9.1	Mode 2	66
3.9.2	Mode 0	67
3.9.3	Evolution de l'amplitude	70
3.10	Bilan	73
4	Approche énergétique de la stabilité de l'écoulement	75
4.1	Identités énergie de la perturbation	76
4.1.1	Identités énergie dans les zones cisillées	76
4.1.2	Identités énergie dans la zone non cisillée	78
4.1.3	Identité énergie pour l'ensemble du problème	78
4.2	Conditions suffisantes de stabilité	79
4.2.1	Problème d'optimisation	79
4.2.2	Equations d'Euler-Lagrange correspondantes	81
4.2.3	Conditions suffisantes de stabilité	82
4.3	Résolution numérique et résultats	83
4.4	Approche analytique	85
4.4.1	Comportement asymptotique lorsque $B \rightarrow 0$	90

4.4.2	Comportement asymptotique lorsque $B \rightarrow \infty$	91
4.5	Conclusion	91
5	Analyse non linéaire de stabilité	93
5.1	Evolution temporelle de l'énergie totale de la perturbation	94
5.2	Approximation des différents termes de $\frac{dE_\lambda}{dt}$	95
5.3	Condition suffisante de stabilité	99
5.4	Calcul de la valeur de $Re_{EN}(B)$	103
5.5	Conclusion	107
	Conclusions et perspectives	107
6	Conclusions et perspectives	109
A	Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard pour une perturbation 1D	113
B	Facteurs liés aux schémas de discrétisation	115
C	Calculs des contraintes de part et d'autre la zone bouchon	117
D	Termes non linéaires du tenseur des contraintes	119
D.1	Viscosité	119
D.2	Tenseur des contraintes	119
D.3	Expression des termes quadratiques et cubiques de l'équation du mouvement .	120
E	Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon : recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0	123
E.1	Projection suivant \mathbf{e}_x : cas $i = 1$	126
E.1.1	Calcul de B_1	126
E.1.2	Calcul de B_2	129
E.1.3	Calcul de B_3	130
E.1.4	Bilan projeté sur \mathbf{e}_x	130
E.2	Projection suivant \mathbf{e}_y : cas $i = 2$	131
E.2.1	Calcul de C_1	131
E.2.2	Calcul de C_2	132
E.2.3	Calcul de C_3	133
E.2.4	Calcul de C_4	136
E.2.5	Calcul de C_5	137
E.2.6	Calcul de C_6	137
E.2.7	Bilan projeté sur \mathbf{e}_y	138

F	Opérateur adjoint	139
F.1	Calcul de l'opérateur adjoint de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$	139
F.1.1	Calcul de \mathcal{L}_1^\dagger	139
F.1.2	Calcul de \mathcal{L}_3^\dagger	141
F.2	Calcul de \mathcal{D}^\dagger	141
G	Approche énergétique basée sur les échelles caractéristiques du Chapitre 2	143
H	Détermination de la valeur optimale de λ	147
I	Calcul de la valeur de $\delta_{m\alpha\beta}$, lorsque $B \rightarrow \infty$	149
J	Troisième approche : en laissant libre le nombre de Reynolds	151
	Bibliographie	153

Table des figures

1	Problème de Rayleigh-Bénard	xviii
2	Représentation des structures thermoconvectives dans le cas Newtonien	xix
1.1	Essais de fluage pour une solution de Carbopol 940 à 0.2%. (a) Evolution de $\gamma(t)$ pour des contraintes appliquées de 0.5, 1, 2, 4, 6, 8 et 16 Pa. (b) Evolution simultanée de $\gamma(t)$ et $ \dot{\gamma}(t) $ pour l'essai de fluage à 8 Pa.	2
1.2	Evolution de la contrainte en fonction du taux de cisaillement pour un fluide de type Herschel-Bulkley (Carbopol), pour un fluide Newtonien (sirop de glucose) et pour un fluide de Cross (solution de Carboxy-méthyl-cellulose). Les courbes ont été obtenues à l'aide d'un rhéomètre AR2000	2
1.3	Evolution de τ_0 , K et n en fonction de la température T ($10^\circ\text{C} < T < 85^\circ\text{C}$) pour du Carbopol à 0.2% en masse	5
1.4	Schéma représentant les différents concepts de stabilité	7
1.5	Représentation schématique du problème de Rayleigh-Bénard.	8
2.1	Représentation schématique du problème.	14
2.2	Profils de vitesse pour différentes valeurs de y_0 . La zone bouchon centrale est délimitée par les traits pointillés	19
2.3	Evolution de y_0 en fonction de B (· · · · · : comportements asymptotiques)	21
2.4	Evolution de la viscosité effective dans la partie cisailée inférieure, pour différentes valeurs de y_0 . ((——— : $y_0 = 0.005$); (- - - : $y_0 = 0.105$); (- · - · - : $y_0 = 0.305$); (- · · - · - : $y_0 = 0.405$))	21
2.5	Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs de k et pour $y_0 = 0.125$. Les différentes zones bouchon sont délimitées par les traits pointillés	23
2.6	Evolution de la viscosité effective en échelle logarithmique pour différentes valeurs de k et pour $y_0 = 0.125$	23
2.7	Evolution de la zone bouchon en fonction du nombre de Pearson pour $y_0 = 0.125$	24
2.8	Evolution du débit volumique lorsque la viscosité plastique est Thermodépendante (Th), rapporté à sa valeur maximale obtenue dans le cas Non Thermodépendant (NTh), en fonction du nombre de Pearson (- · - · - : $y_0 = 0.125$; - - - - : $y_0 = 0.075$; - - - - : $y_0 = 0.003125$)	24
2.9	Evolution de la vitesse axiale maximale rapportée à sa valeur obtenue dans le cas non thermo-dépendant, en fonction du nombre de Pearson pour $y_0 = 0.125$	24
2.10	Domaine de discrétisation.	32

2.11	Spectre des plus grandes valeurs propres dans le cas $Re = 5$, $Pr = 10$ et $y_0 = 0,105$. La plus grande valeur est indiquée par une flèche. Cette partie du spectre n'est pas modifiée lorsque N augmente.	35
2.12	Courbe marginale dans le cas $Re = 5$, $Pr = 10$, $Ra = 108272.56$, $y_0 = 0.105$ et $\alpha = 6.1$ et $dy = 0.005$	36
2.13	Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite) (\cdots : θ_m, f_m); ($---$: θ_r, f_r); ($- \cdot - \cdot -$: θ_i, f_i)	41
2.14	Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite) pour différentes valeurs de y_0	42
2.15	Paramètres critiques en fonction de l'épaisseur de la zone bouchon pour $Re = 0,1$, $Pr = 10$ (carrés : " $B = 0$ " dans les termes de l'équation d'Orr-Sommerfeld, cercles : $B \neq 0$)	43
2.16	Paramètres critiques en fonction de l'épaisseur de la zone bouchon pour $Re = 0,1$, $Pr = 10$ (Triangles noirs : $\widetilde{Ra}_c, \widetilde{\alpha}_c$, Symboles nabra : \overline{Ra}_c)	43
2.17	Nombre de Rayleigh critique pour différents nombres de Reynolds : fluide de Bingham avec $B = 1.2 \times 10^{-2}$ ($y_0 = 3 \times 10^{-3}$) (\circ); fluide Newtonien, résultats donnés par Ref. Nicolas <i>et al.</i> (2000) (\blacksquare).	44
2.18	Profils de température et de vitesse pour le mode le moins stable (\cdots : θ_m, f_m); ($---$: θ_r, f_r); ($- \cdot - \cdot -$: θ_i, f_i) : Résultats numériques.	44
2.19	Perturbation de la position des interfaces supérieure et inférieure (cas $Re = 0,1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0,055$: $-----$, $y_0 = 0,155$: $---$ et $y_0 = 0,255$: $--- - --- - --- -$)	45
2.20	Iso-valeurs de la fonction courant de perturbations et zone bouchon perturbée. Cas $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0.105$	45
2.21	Paramètres critiques en fonction du nombre de Pearson pour $Re = 1$, $Pr = 10$ (Symboles nabra : $y_0 = 0.25$, triangles noirs : $y_0 = 0.125$, carrés noirs : $y_0 = 0.075$) 46	46
2.22	Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite) (\cdots : θ_m, f_m); ($---$: θ_r, f_r); ($- \cdot - \cdot -$: θ_i, f_i)	47
2.23	Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite). La zone bouchon de l'écoulement de base non perturbé est délimitée en pointillé.	48
3.1	Perturbation en terme de fonction courant pour les modes 1 et 2 : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. (Pointillés : Parties réelles); (Traits mixtes : Parties imaginaires)	66
3.2	Perturbation en température en terme de modes 1 et 2 : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. (Pointillés : Parties réelles); (Traits mixtes : Parties imaginaires)	67
3.3	Modes 2 (gauche) et 1 (droite) de la fonction courant de perturbation dans le plan (x, y) : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. Les traits pointillés délimitent la zone bouchon de l'écoulement de base.	68

3.4	Modes 2 (gauche) et 1 (droite) de la température de perturbation dans le plan (x, y) : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. Les traits pointillés délimitent la zone bouchon de l'écoulement de base.	68
3.5	Perturbation des interfaces correspondant au mode 2. Représentation de $Y_2^+ E^2$ et de $-Y_2^- E^2$. Cas $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0.105$ ((- - - : $Y_2^+ E^2$); (— : $-Y_2^- E^2$): Résultats numériques).	69
3.6	Vitesse de la perturbation pour le mode 0 et vitesse de l'écoulement de base: Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$	69
3.7	Température de la perturbation pour le mode 0 et température de l'écoulement de base: Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$	70
3.8	Perturbation des interfaces via le mode 0. Représentation de Y_0^+ et de $-Y_0^-$. Cas $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0.1$	70
3.9	Evolution de l'amplitude en fonction du temps juste après le seuil. $y_0 = 0.01$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$	71
3.10	Evolution du coefficient g_1 en fonction de y_0 pour différentes valeurs du nombre de Péclet. (\triangle : $Pe = 2$; \bullet : $Pe = 1.3$; \square : $Pe = 0.5$; \circ : $Pe = 0.1$)	72
3.11	Représentation schématique de l'évolution de l'amplitude en fonction de ϵ pour différentes valeurs de g_1 . (Traits pointillés: Bifurcation sous critique ($g_1 < 0$); Traits continus: Bifurcation surcritique ($g_1 > 0$))	73
4.1	Conditions suffisantes de stabilité d'un écoulement de convection mixte plan pour un fluide de Bingham. Diagramme de stabilité dans le plan (Ra, Re) . Cas où $Pr = 10$ (triangles noirs: $B = 1.662$ ($y_0 = 0.12$)), (carrés noirs: $B = 0.6198$ ($y_0 = 0.06$)), (cercles noirs: $B = 0.494$ ($y_0 = 0.05$))	84
4.2	Comparaison des nombres de Rayleigh critiques obtenus par les méthodes linéaire modale et énergétique respectivement, en fonction du nombre de Reynolds pour $B = 1.662$ ($y_0 = 0.12$) et $Pr = 10$ (Symboles \triangle : Ra_E), (Symboles ∇ : Ra_L)	85
5.1	Représentation schématique des différentes zones cisailées et non cisailées qui peuvent exister lorsque l'écoulement est soumis à une perturbation d'amplitude finie. Traits pointillés: Frontières de la zone bouchon pour l'écoulement de base. Zones hachurées: zones non cisailées pouvant apparaître.	97
5.2	Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil vis à vis de perturbations d'amplitude finie. Région I: Stabilité monotone, Région II: Croissance transitoire ou Instabilité.	101
5.3	Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil vis à vis de perturbations d'amplitude finie. Région I: Stabilité monotone, Région II: Croissance transitoire ou Instabilité.	102
5.4	Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil vis à vis de perturbations d'amplitude finie. Région I: Stabilité monotone, Région II: Croissance transitoire ou Instabilité.	103

5.5	Conditions critiques de stabilité monotone en fonction du nombre de Bingham. Cas d'une perturbation bidimensionnelle ($\beta = 0$). La droite en pointillé indique une variation en \sqrt{B} en échelles logarithmiques.	106
E.1	Représentation schématique de la zone bouchon perturbée.	124

Liste des tableaux

2.1	Conditions critiques pour différentes valeurs de N dans le cas Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide newtonien. Cas $Re = 1.5$, $Pr = 10$	34
2.2	Conditions critiques et plus grande valeur propre c_i correspondantes, pour différentes valeurs de N . Cas de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide de Bingham, $y_0 = 0.1$ $Re = 0.1$, $Pr = 10$	35
3.1	Rappel des notations concernant le Chapitre 3.	57
3.2	Valeurs numériques du coefficient g_1 obtenues avec une précision de calcul à l'ordre 2.	65
3.3	Valeurs numériques du coefficient g_1 obtenues avec une précision de calcul à l'ordre 4.	66
3.4	Valeurs numériques des coefficients qui caractérisent l'évolution de l'amplitude, $Pr = 10$, $Re = 0.1$	72
4.1	Valeurs numériques des conditions de stabilité Re_E et α_E pour différentes valeurs de B	84
5.1	Conditions critiques de stabilité monotone vis à vis d'une perturbation bidimensionnelle.	105
B.1	Facteurs pour schémas centrés. k_d : degré de dérivation, k_p : ordre de précision.	115
B.2	Facteurs pour schémas décentrés au niveau de la paroi inférieure. k_d : degré de dérivation, k_p : ordre de précision. Les facteurs encadrés correspondent au point où est calculée la dérivée.	116

Nomenclature

Symboles	Correspondance
x, y, z	Directions longitudinale, verticale, transverse de l'écoulement
t	Variable temporelle
e_x, e_y, e_z	Vecteurs unitaires des directions longitudinale, verticale et transverse de l'écoulement
E	Module d'Young
μ, μ_p, μ_0	Viscosité effective, viscosité plastique, viscosité plastique à la température de référence T_0
ρ, ρ_0	masse volumique, masse volumique de référence
\mathbf{g}	Vecteur accélération gravitationnel
α_0	Coefficient de dilatation thermique
a	Coefficient de diffusivité thermique
b, k	Coefficient de thermodépendance de la viscosité plastique, Nombre de Pearson (sans dimension associé à b)
L	Distance entre les deux parois
Ra	Nombre de Rayleigh
Re	Nombre de Reynolds
Pr	Nombre de Prandtl
B	Nombre de Bingham
Pe	Nombre de Péclet

$\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x + V \mathbf{e}_y + W \mathbf{e}_z$	Vecteur vitesse et ses différentes composantes.
P, P_m	Pression et pression motrice
T	Variable représentant la température
$T_1, T_2, \delta T, \bar{T}_0$	Température à la paroi inférieure, température à la paroi supérieure, différence de température entre les parois, température en $y = 0$
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tenseur des contraintes, composante ij de $\boldsymbol{\sigma}$
$\boldsymbol{\tau}, \tau_{ij}, \tau$	Déviateur du tenseur des contraintes, composante ij de $\boldsymbol{\tau}$, deuxième invariant de $\boldsymbol{\tau}$
τ_0	Contrainte seuil
$\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\gamma}$	Tenseur des taux de déformation, deuxième invariant de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$
U_b, T_b, p_b, y_b^\pm	Vitesse, température, pression, interfaces correspondant à l'écoulement de base
y_0	Demi-épaisseur de la zone bouchon de l'écoulement de base
U_0	Vitesse maximale de l'écoulement de base
$\dot{\gamma}_b = DU_b $	Taux de cisaillement relatif à l'écoulement de base
$\mu_b = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_b}$	Viscosité relative à l'écoulement de base
$\mathbf{u}, \psi, \theta, p, \pm Y^\pm$	Perturbation en vitesse, fonction courant, température, pression, position des interfaces
E, K, E_λ	Identités énergies liées aux perturbations en vitesse, température. Identité énergie totale du problème
$\tilde{\omega} = -\nabla^2 \Psi$	Composante transverse de la vorticité de l'écoulement perturbé
$\omega = -\nabla^2 \psi$	Perturbation de la composante transverse de la vorticité
$y_i^\pm = \pm y_0 \pm Y^\pm$	Positions des interfaces perturb�es
α, β	Composantes du nombre d'onde dans les directions x et z
$\sigma = -i\alpha c = -is$	Taux de croissance de la perturbation
$\omega_c = \alpha_c c$	Pulsation critique (analyse linéaire)
ω_m	Modification de la pulsation critique par effet non linéaire
$\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \ll 1$	Ecart relatif au seuil

$\mathcal{R}e(\bullet) \equiv (\bullet)_r$	Partie réelle de (\bullet)
$\mathcal{I}m(\bullet) \equiv (\bullet)_i$	Partie imaginaire de \bullet
$(\bullet)_n$	(\bullet) Relatif au mode n ,
$(\bullet)_{-n}$	Relatif au complexe conjugué de $(\bullet)_n$
$(\bullet)^*$	Complexe conjugué associé à \bullet
$\mathbf{V}_n = (f_n(y), \theta_n(y))$	Vecteur d'état de la perturbation en terme de fonction courant et température du mode n
$A_n \mathbf{V}_n E^n$	n ième harmonique de perturbation
A_n	Amplitude correspondant au mode n
A_0	Amplitude initiale
A_c	Amplitude d'équilibre
ε	Amplitude de la perturbation associée à l'analyse linéaire
$E^n = e^{in\alpha(x-ct)}$	Exponentielle décrivant les différentes harmoniques
$\langle \bullet \rangle_x$	Valeur moyennée de (\bullet) suivant x
$\langle \bullet \rangle$	Valeur moyennée sur le domaine
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	Produit scalaire hermitien sur les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} .
Mode n (\bullet)	Identification du terme en facteur de E^n dans l'expression (\bullet) exemple : Mode n $(N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V}))$ correspond à identifier le terme de $N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ en facteur de E^1
$\delta(\bullet)$	Opérateur variationnel appliqué à (\bullet)
$\mathcal{L}, \mathcal{L}^\dagger$	Opérateur \mathcal{L} et son adjoint correspondant

Introduction générale

Ces dernières décennies ont vu s'accroître la consommation d'énergie du fait du large développement industriel. Aujourd'hui, l'énergie est devenue un des soucis de notre époque et les Recherches s'y rapportant sont devenues très actives.

Le transfert de chaleur par convection thermique, qui présente un vaste champ d'applications, occupe une place importante dans ces activités de Recherche. En effet, de nombreux procédés industriels mettent en jeu des fluides qui peuvent être le siège de gradients thermiques.

La convection thermique étant le mode de transfert de chaleur le plus répandu, il reste néanmoins le moins bien connu des différents modes de transfert thermique, à savoir conduction, rayonnement et convection. Cela s'explique sans doute par le fait que le mode de transfert de chaleur par convection implique un mouvement de fluide qui nécessite une bonne connaissance de la mécanique des fluides en plus de la compréhension de l'aspect énergétique des phénomènes physiques mis en jeu.

Les études sur la convection thermique peuvent avoir pour objectif d'évaluer les différentes caractéristiques des écoulements en vue d'une meilleure optimisation des conditions et installations thermiques.

Dans cette optique, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'étude de la stabilité d'un écoulement de fluide soumis à une stratification thermique. L'étude des instabilités hydrodynamiques est essentielle dans la caractérisation des écoulements. Les écoulements instables, voire turbulents, peuvent présenter, dans le cas d'instabilités thermoconvectives par exemple, l'avantage d'offrir une meilleure homogénéisation de la température au sein du fluide. Le problème le plus largement étudié donnant lieu à des instabilités thermoconvectives est le problème de Rayleigh-Bénard, problème auquel sont associés des phénomènes de convection naturelle. Dans notre problème, la convection naturelle est induite par des forces internes au fluide, qui sont liées à la gravité, à des caractéristiques mécaniques et thermiques de celui-ci. Si nous nous plaçons dans un canal plan horizontal pour lequel, la paroi supérieure est portée à une température T_2 inférieure à celle de la paroi inférieure T_1 , il se produit une stratification thermique instable en densité. Cette situation est représentée par la Fig. 1, où $T_1 > T_2$. En effet, du fait de la décroissance de la densité lorsque la température augmente, le fluide le plus lourd se trouve du côté de la plaque supérieure froide et le fluide le plus léger du côté de la plaque inférieure chaude. Cette situation peut être maintenue tant que les forces de poussée n'arrivent pas à vaincre les forces d'origine visqueuse et la diffusion thermique. Le système est

alors purement conductif. A partir d'un certain écart de température entre les deux plaques, les forces de poussée deviennent suffisamment importantes pour vaincre les forces d'origine visqueuse et induire un mouvement ascendant des particules chaudes et descendant des particules froides. Il faut aussi noter que la diffusion thermique tend à limiter le déplacement des particules.

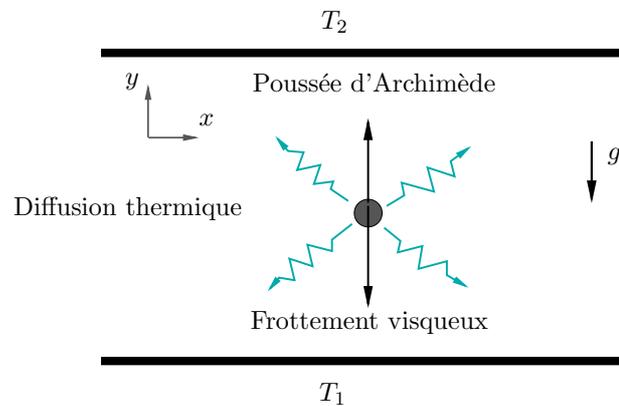


FIG. 1 – *Problème de Rayleigh-Bénard*

La compétition entre ces différentes forces est mise en évidence à travers un nombre sans dimension appelé nombre de Rayleigh et noté Ra :

$$Ra = \frac{\text{Poussée d'Archimède}}{\text{Force visqueuse} \times \text{Diffusion thermique}}$$

On parle de seuil de stabilité, ou Rayleigh critique Ra_c , lorsque la Poussée d'Archimède est suffisante pour créer les rouleaux thermoconvectifs. La poussée d'Archimède étant proportionnelle à la différence de température δT entre les deux plaques, on associe généralement un δT critique à l'apparition de l'instabilité.

Comme l'explique Nicolas (1997), l'étude de stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard fait apparaître une situation de convection mixte. En effet, à la convection naturelle de type Rayleigh-Bénard, s'ajoute un mouvement induit par une source externe caractérisée, dans notre cas, par un gradient de pression horizontal. Ce dernier donne lieu à un écoulement forcé (de type Poiseuille). L'écoulement de Poiseuille se caractérise par le nombre de Reynolds, noté Re .

Il a été montré, dans le cas Newtonien, par Luijckx (1983) la formation pour différents régimes d'écoulement de rouleaux thermoconvectifs perpendiculaires à l'écoulement (faibles nombres de Reynolds), appelés aussi rouleaux transversaux et pour des nombres de Reynolds plus élevés, la formation de rouleaux longitudinaux, parallèles à l'écoulement comme cela est indiqué sur la Fig. 2.

Dans notre étude, nous nous limitons aux écoulements de faibles valeurs de Re . On soulignera que dans ce cas, les rouleaux transversaux sont quasi-bidimensionnels en présence de bords latéraux et bidimensionnels lorsque les effets de bords sont négligeables. Notre étude

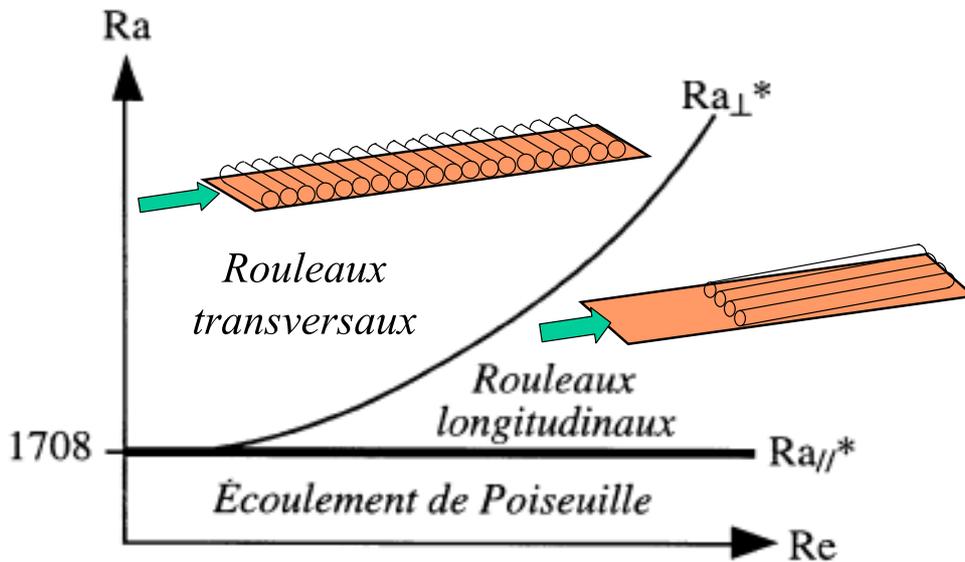


FIG. 2 – Représentation des structures thermoconvectives dans le cas Newtonien

considère le cas bidimensionnel, cas où seuls les rouleaux transversaux sont susceptibles d'apparaître.

En réalité, les fluides rencontrés dans les secteurs industriels sont pour la grande majorité des fluides non-Newtoniens. Notre étude considère le cas des fluides rhéofluidifiants qui possèdent une contrainte seuil d'écoulement : que l'on nomme fluides à seuil ou fluides visco-plastiques. Ces fluides sont présents dans une large gamme de domaines industriels tels que les domaines agroalimentaire, cosmétique, pétrolier, géophysique etc... Bird et Dai (1983) ont donné une liste de matériaux (allant du ciment au sang en passant par des produits cosmétiques ou agro-alimentaires..) dont le comportement présente une contrainte seuil τ_0 qui représente l'effort à vaincre pour obtenir l'écoulement du matériau.

L'origine physique de la contrainte seuil s'explique par l'existence au niveau de la microstructure, d'un réseau de liaisons entre les éléments constitutifs du matériau. La formation d'un tel réseau où le solvant est piégé constitue le processus de gélification. Pour provoquer l'écoulement d'un tel système, il est nécessaire d'apporter un effort minimal pour rompre le réseau. On distingue les gels d'origine chimique et les gels physiques. Les gels d'origine chimique sont généralement obtenus par réticulation. Les macromolécules se lient entre elles par des liaisons covalentes et forment une structure capable de supporter des efforts sans s'écouler. Les gels d'origine physique sont obtenus par des liaisons physiques (dipôle-dipôle, Van-der-Waals, liaisons H...), moins résistantes que les liaisons covalentes. Les gels physiques s'organisent souvent en zones (barreaux, domaines microcristallins,...) comme cela est expliqué par Larson (1999).

A l'approche du seuil de gélification, le changement des propriétés dynamiques du système

est l'aspect le plus perceptible. Avant le seuil, la viscosité augmente au fur et à mesure de la croissance des amas, pour devenir infinie au seuil, c'est à dire lors de l'apparition d'une croissance entre les limites de l'échantillon, lui conférant une élasticité permanente.

Les écoulements laminaires de ces fluides sont en général bien connus. Par contre, les transitions laminaire-turbulent sont moins bien maîtrisées. Les premières études de stabilité relatives à ces fluides ne sont réellement apparues qu'en 1994 et concernaient l'écoulement de Poiseuille. La première analyse linéaire de stabilité d'un fluide à seuil a été réalisée par Frigaard *et al.* (1994), la première analyse non linéaire de stabilité a été publiée par Nouar et Frigaard (2001). A notre connaissance, aucune analyse faiblement non linéaire de stabilité n'a été menée jusqu'alors pour des fluides à seuil.

Notre étude a pour objet d'analyser la stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil. Dans cette étude, nous chercherons à mettre en exergue l'effet qu'a la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement. Une difficulté importante dans l'étude de problèmes liés aux fluides à seuil est la possibilité d'avoir en présence deux phases : une phase "fluide" et une phase "gel" et de suivre les interfaces lorsque les deux phases sont en présence. Nous comparerons les résultats obtenus pour un fluide à seuil avec ceux obtenus dans le cas Newtonien.

Pour ce faire, nous nous proposons tout d'abord de présenter, dans le Chapitre 1 le comportement rhéologique des fluides à seuil et de donner le modèle que nous utiliserons dans notre étude, ainsi qu'une revue bibliographique des travaux déjà réalisés dans ce domaine. Dans un dernier paragraphe, nous montrerons que bien que notre étude soit effectuée à faibles valeurs de nombre de Reynolds, le passage à la limite, *i.e.* $Re = 0$ ne correspond pas au cas limite de notre étude. En effet, si $Re \neq 0$, l'écoulement de Poiseuille induit un gradient de pression constant qui permet de cisailer le matériau alors que si $Re = 0$, le matériau est non cisailé et se présente sous forme de gel.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse linéaire de stabilité temporelle pour laquelle une approche modale est considérée. Les équations gouvernant le problème, ainsi que les différentes hypothèses de notre étude seront tout d'abord données. Nous présenterons ensuite le formalisme lié à cette étude. La résolution numérique permettra finalement de déterminer les seuils d'instabilité ainsi que la caractérisation de l'écoulement perturbé. La dépendance des caractéristiques liées à l'apparition d'instabilité vis à vis des paramètres sans dimension, sera discutée.

Cette étude est considérée pour un fluide à seuil qui ne présente aucune thermo-dépendance quant à ses caractéristiques rhéologiques et pour un fluide à seuil dont les caractéristiques rhéologiques dépendent de la température. Ces deux modèles seront mis en parallèle uniquement dans ce chapitre, c'est à dire dans la caractérisation de l'écoulement de base et la caractérisation du développement d'instabilités vis à vis de perturbations infinitésimales.

Le troisième chapitre poursuit l'étude linéaire de stabilité, dans le sens où il présente l'analyse faiblement non linéaire. Cette étude permet de déterminer l'évolution de la perturbation au voisinage des conditions critiques données par l'analyse linéaire de stabilité. Elle permet notamment d'obtenir l'évolution de l'amplitude de la perturbation à travers l'équation complexe de type Stuart-Landau.

Le chapitre 4 traite de la stabilité du problème à partir d'une approche énergétique, *i.e.* non modale, lorsque l'écoulement est soumis à des perturbations infinitésimales.

Ce chapitre a pour objet de caractériser la différence que l'on peut obtenir entre les valeurs de seuils obtenues à partir d'une approche linéaire modale (Chapitre 2) et celles obtenues à partir d'une approche énergétique. La comparaison entre les valeurs de seuil obtenues à partir de ces approches, fournit des renseignements sur l'éventualité et la pertinence de l'étude de la croissance transitoire. Cette étude est réalisée en deux parties. La première partie consiste à déterminer le seuil d'instabilité à partir des équations d'Euler-Lagrange associées à un problème d'optimisation. La deuxième partie traite du problème d'optimisation par approximation des différentes identités énergies. Elle permet d'aboutir à la dépendance du seuil en fonction de la contrainte seuil.

Le chapitre 5 présente l'étude de l'écoulement de base soumis à des perturbations d'amplitude finie. Il s'agit d'une approche énergétique non linéaire. Ce chapitre permet de déterminer une région de stabilité monotone et une tendance quant à la limite entre les régions stables et instables. Cette étude étant basée sur un certain nombre d'approximation, elle ne permet pas d'avoir précisément les seuils de stabilité mais plutôt leur dépendance en fonction de la contrainte seuil.

Le dernier chapitre est consacré à la synthèse de ce travail. L'analyse de stabilité des écoulements de convections mixtes pour un fluide à seuil n'étant qu'à ses prémices, nous donnerons un certain nombre de perspectives à notre étude.

De nombreuses annexes sont données à la fin de ce mémoire, elles correspondent aux développements de calculs que nous avons préféré ne pas mettre dans le corps même du développement afin de ne pas rendre difficile la lecture de ce document. Elles sont référencées dans les différents chapitres correspondants.

Chapitre 1

Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

1.1 Description du comportement rhéologique des fluides à seuil

Comme nous le mentionnions dans l'introduction générale, les fluides à seuil sont des matériaux qui ne s'écoulent pas tant que la contrainte appliquée reste inférieure à la contrainte seuil τ_0 . Lorsque le matériau est au repos, le solvant est piégé dans une structure tridimensionnelle et le matériau se présente sous la forme d'un gel. Le comportement de ce dernier lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la valeur seuil peut être mis en évidence par des essais de fluage. Des essais ont été effectués sur une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse, après neutralisation, à l'aide d'un rhéomètre fonctionnant à couple imposé (AR2000) et muni d'une géométrie cône-plan. Les résultats concernant la déformation γ en fonction du temps t sont présentés sur la Fig.1.1 (Peixinho (2004)). Lorsque la contrainte appliquée est suffisamment faible ($\tau < 3$ Pa), le matériau se déforme sans que la structure du réseau soit modifiée. Pour des contraintes plus importantes ($\tau > 3$ Pa), les courbes $\gamma(t)$ présentent un point d'inflexion, traduisant un changement de phase sol-gel. En fait, le matériau subit d'abord une déformation élastique, suivie d'une déformation plastique. La fin de cette dernière étape coïncide avec le minimum de la courbe $|\dot{\gamma}(t)|$ (Fig. 1.1) et le début de la transition sol-gel. A partir de ce point, le matériau subit un fluage visqueux jusqu'à un écoulement stationnaire.

En ce sens, certains auteurs (Chang *et al.* (1999), Liddell et Boger (1996)) définissent deux contraintes seuil, la première correspondant à la limite de déformation élastique et la seconde à la limite de la déformation plastique (début de la rupture).

La Figure 1.2 (Peixinho (2004)) donne l'évolution de la contrainte τ en fonction du taux

1. Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

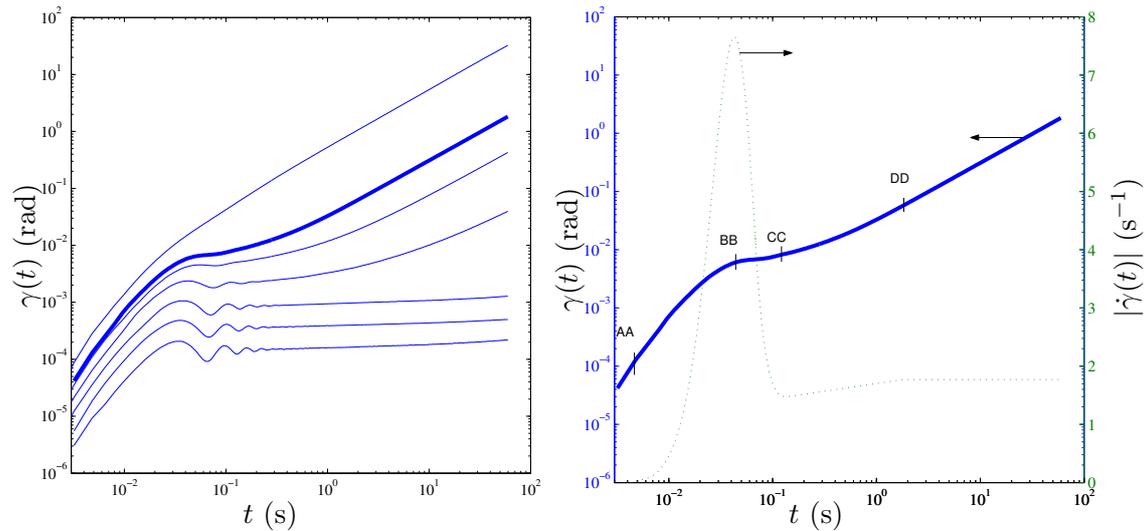


FIG. 1.1 – Essais de fluage pour une solution de Carbopol 940 à 0.2%. (a) Evolution de $\gamma(t)$ pour des contraintes appliquées de 0.5, 1, 2, 4, 6, 8 et 16 Pa. (b) Evolution simultanée de $\gamma(t)$ et $|\dot{\gamma}(t)|$ pour l’essai de fluage à 8 Pa.

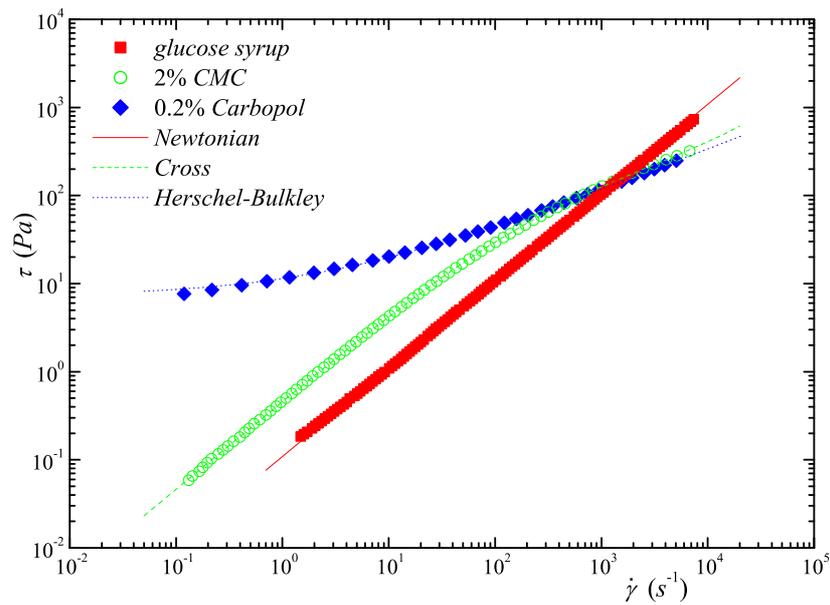


FIG. 1.2 – Evolution de la contrainte en fonction du taux de cisaillement pour un fluide de type Herschel-Bulkley (Carbopol), pour un fluide Newtonien (sirop de glucose) et pour un fluide de Cross (solution de Carboxy-méthyl-cellulose). Les courbes ont été obtenues à l’aide d’un rhéomètre AR2000

de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse¹. Le rhéogramme est com-

1. fluide à seuil modèle adopté dans plusieurs laboratoires

paré à celui obtenu pour un fluide Newtonien (solution de sirop de glucose) et un fluide rhéofluidifiant sans seuil (une solution de Carboxy-Méthyl-Cellulose) à 2% en masse. Dans la Fig. 1.2, le comportement rhéologique du fluide à seuil est décrit sur une large gamme de taux de cisaillement par le modèle de Herschel-Bulkley : $\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n$, où τ_0 est la contrainte seuil, K la consistance et n l'indice de structure. Pour les résultats présentés ici, Peixinho (2004) donne $\tau_0 = 7.2 \text{ Pa}$, $K = 4.3 \text{ Pa.s}^n$ et $n = 0.47$. Ces valeurs résultent en fait d'une régression non linéaire des données expérimentales pour le modèle considéré. Le seuil ainsi obtenu est un seuil apparent et ne fait que caractériser l'état du matériau dans la gamme de taux de cisaillement considéré. Il est ainsi possible d'avoir des valeurs différentes de τ_0 selon la gamme choisie de $\dot{\gamma}$. Ceci ne constitue pas une réelle difficulté tant que nous nous intéressons, par exemple, au calcul de profils de vitesse dans des situations simples. Dans des situations plus complexes, il peut être nécessaire de connaître le seuil vrai défini comme la limite de la déformation plastique.

Dans ce qui suit, nous rappelons les équations constitutives les plus utilisées dans la littérature pour décrire le comportement rhéologique d'un fluide à seuil. En situation 3D et en adoptant le critère de Von Mises, les équations constitutives sont données par :

Modèle de Bingham :

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{ssi } \tau > \tau_0, \quad (1.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0} \quad \text{ssi } \tau \leq \tau_0. \quad (1.2)$$

Modèle d'Herschel-Bulkley :

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K(\dot{\gamma})^{\frac{n-1}{2}} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{ssi } \tau > \tau_0, \quad (1.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0} \quad \text{ssi } \tau \leq \tau_0. \quad (1.4)$$

Modèle de Casson :

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K_C + \frac{K_C \tau_0}{\dot{\gamma}} \right)^{1/2} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{ssi } \tau > \tau_0, \quad (1.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0} \quad \text{ssi } \tau \leq \tau_0. \quad (1.6)$$

où μ_p correspond à la viscosité plastique dans le modèle de Bingham, K_C est la consistance dans le modèle de Casson. $\boldsymbol{\tau}$ et $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ correspondent respectivement au déviateur du tenseur des contraintes et au tenseur des taux de déformation, les scalaires $\dot{\gamma}$ et τ sont les seconds invariants des tenseurs correspondants.

Dans ces modèles, il est supposé que le matériau se déplace comme un solide indéformable lorsque $\tau < \tau_0$ et se comporte comme un fluide purement visqueux lorsque $\tau > \tau_0$, avec une viscosité effective qui varie non linéairement avec $\dot{\gamma}$.

Les différents modèles définis ci-dessus prédisent les mêmes caractéristiques fondamentales d'un écoulement de fluide à seuil, c'est à dire : l'existence d'une zone non cisailée lorsque la

1. Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

contrainte appliquée est inférieure à la valeur seuil, la présence d'interfaces entre les deux phases en présence, le comportement fluide visqueux non linéaire au-delà de τ_0 . Le modèle le plus simple, dans le sens où il n'introduit pas, en plus de la variation de la viscosité, des non linéarités supplémentaires, est le modèle de Bingham. Il est très largement utilisé dans la littérature car malgré sa "simplicité", il permet de rendre compte des principales caractéristiques des fluides à seuil. Concernant l'étude que nous présentons dans ce mémoire, notre choix s'est porté sur le modèle de Bingham.

Remarque :

D'autres modèles plus réalistes existent dans la littérature tels que, par exemple, le modèle d'Oldroyd (1947a) et (1947b) pour lequel, le comportement de la phase gel est décrit par la loi de Hooke lorsque la contrainte est inférieure à la contrainte seuil. La loi constitutive est donnée comme suit :

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{ssi } \tau > \tau_0, \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = E \boldsymbol{\gamma} \quad \text{ssi } \tau \leq \tau_0, \quad (1.8)$$

ou, est donnée, par une combinaison d'un modèle en loi puissance et d'un modèle de Hooke (Doraiswamy *et al.* (1991)).

Finalement, le modèle d'Oldroyd n'a jamais été repris, sans doute à cause de la complexité introduite par l'interaction entre un solide élastique et un fluide visqueux. En outre, très souvent le module d'Young est considéré comme étant faible et le comportement élastique est négligé (Beris *et al.* (1985), Coussot (1998), Frigaard *et al.* (1994), Huilgol (2001)...).

La connaissance de la thermo-dépendance des paramètres rhéologiques peut être importante dans certains procédés où intervient la thermisation des fluides à seuil. Pour le fluide modèle (Carbopol 940) utilisé au laboratoire, des essais rhéométriques ont été effectués à différentes températures $10^\circ\text{C} < T < 85^\circ\text{C}$. Les résultats sont consignés dans la Fig. 1.3 (Peixinho (2004)). Il est constaté que la thermodépendance des paramètres rhéologiques réside essentiellement au niveau de la consistance K . Une loi de type $K(T) = K_0 e^{-bT}$ est adoptée pour décrire la variation de K avec la température. Pour le fluide considéré la valeur pour b est $b = 0.011^\circ\text{C}^{-1}$ (par comparaison avec l'eau on a $b = 0.02^\circ\text{C}^{-1}$ pour $10^\circ\text{C} \leq T \leq 50^\circ\text{C}$). La non-thermodépendance de τ_0 est en générale admise pour des fluides dont la contrainte seuil résulterait d'un enchevêtrement de chaînes de polymères (Forrest et Wilkinson (1973)).

Concernant le calcul des écoulements de fluides à seuil, mis à part certaines situations simples, telles que les écoulements établis ou qui évoluent faiblement en espace, très peu de résultats existent dans la littérature. La difficulté majeure réside essentiellement dans la détermination de la frontière séparant les zones cisailées et non cisailées. Cette difficulté apparaît notamment dans les études de stabilité, où le comportement de la zone non cisailée

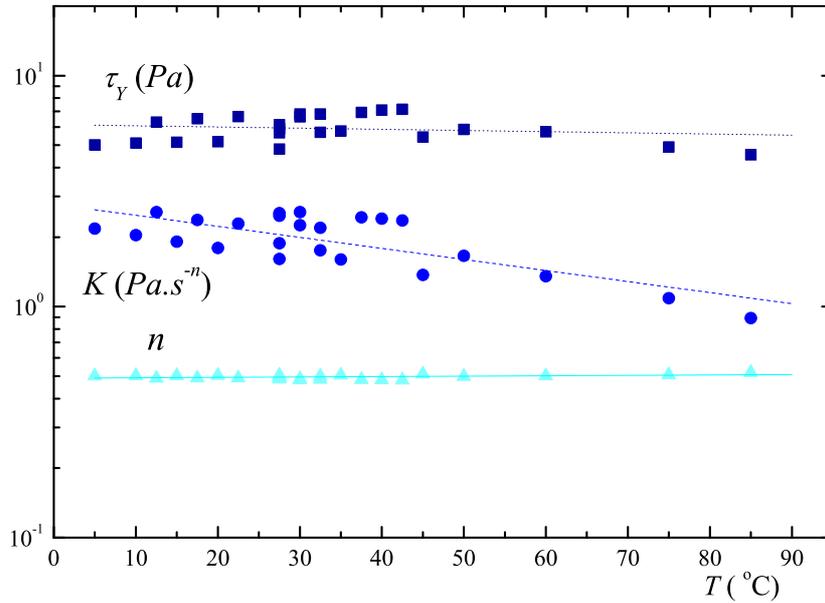


FIG. 1.3 – Evolution de τ_0 , K et n en fonction de la température T ($10^\circ C < T < 85^\circ C$) pour du Carbopol à 0.2% en masse

vis à vis d’une perturbation devient fondamentale.

Avant d’aborder les problèmes de stabilité qui nous concernent, il a paru utile de rappeler certains concepts relatifs à la stabilité d’un écoulement.

1.2 Concepts liés aux problèmes de stabilité

Les concepts que nous donnons dans cette section ont été indiqués par Joseph (1976) et repris par Schmid et Henningson (2000). Ces concepts sont principalement basés sur la norme $L2$ de la perturbation. Parfois celle-ci a une interprétation physique et correspond à l’énergie cinétique de la perturbation lorsque nous considérons la norme $L2$ de la perturbation en vitesse. Joseph (1976) introduit le terme “identité énergie” pour désigner la norme $L2$. Dans ce rapport, nous utiliserons “identité énergie” ou énergie indifféremment pour désigner la norme $L2$. Pour donner un caractère général à ces concepts, nous considérons une “identité énergie” E liée à la perturbation du problème. Au problème considéré, nous associons un paramètre de contrôle r .

1.2.1 Stabilité

Une solution \mathbf{V}_b de l’écoulement établi est stable vis à vis de perturbations si l’énergie de perturbation satisfait la condition suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{E(0)} \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

1. Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

1.2.2 Stabilité conditionnelle

La définition de la stabilité conditionnelle part du principe que la stabilité de l'écoulement de base peut dépendre de l'énergie initiale de perturbation.

S'il existe une énergie limite $E_l > 0$, telle que \mathbf{V}_b soit stable lorsque $E(0) < E_l$, alors la solution \mathbf{V}_b est dite conditionnellement stable.

1.2.3 Stabilité globale

Une solution \mathbf{V}_b est dite globalement stable si elle est conditionnellement stable avec $E_l \rightarrow \infty$.

On définit une valeur critique r_G pour le paramètre de contrôle r telle que lorsque $r < r_G$, l'écoulement est globalement stable.

1.2.4 Stabilité monotone

Si nous avons

$$\frac{dE}{dt} < 0 \quad \forall t > 0, \quad (1.10)$$

alors la solution est dite monotonement stable.

On définit en général r_E comme étant le seuil de stabilité lié à la stabilité monotone. Si $r < r_E$, alors l'écoulement sera monotonement stable.

1.2.5 Stabilité linéaire

Tout système physique est soumis à diverses sources de bruit, *i.e.*, des perturbations infinitésimales. Dans ce cas, nous cherchons à déterminer un seuil d'instabilité linéaire r_L tel que pour $r > r_L$, l'écoulement de base est instable. La solution des équations aux perturbations est recherchée sous la forme d'une superposition de modes normaux complexes.

Le schéma de la Fig. 1.4 est une synthèse des différents concepts donnés précédemment. Dans la région I, l'énergie de la perturbation ne peut que décroître de manière monotone. Dans la région II, l'énergie de la perturbation peut croître aux temps courts mais décroît aux temps longs. Lorsque $r > r_G$, il est possible de destabiliser l'écoulement. En effet, la région pour laquelle $r_G < r < r_L$ caractérise la stabilité conditionnelle de l'écoulement : pour des énergies comprises dans la région III, la perturbation décroît aux temps longs ; pour des énergies de valeurs comprises dans la région IV, l'écoulement est instable. Finalement, l'intersection de la courbe en trait continu, qui décrit la variation de l'énergie limite E_l en fonction de r , avec l'axe $E = 0$ définit les valeurs de r à partir desquelles l'écoulement est instable vis à vis de perturbations infinitésimales.

1.3 Revue bibliographique

1.3.1 Problème de stabilité pour des fluides à seuil

La première étude de stabilité réalisée pour un fluide à seuil fut celle de Graebel (1964) pour l'écoulement de Taylor-Couette. Il montra que la contrainte seuil avait un rôle stabilisant

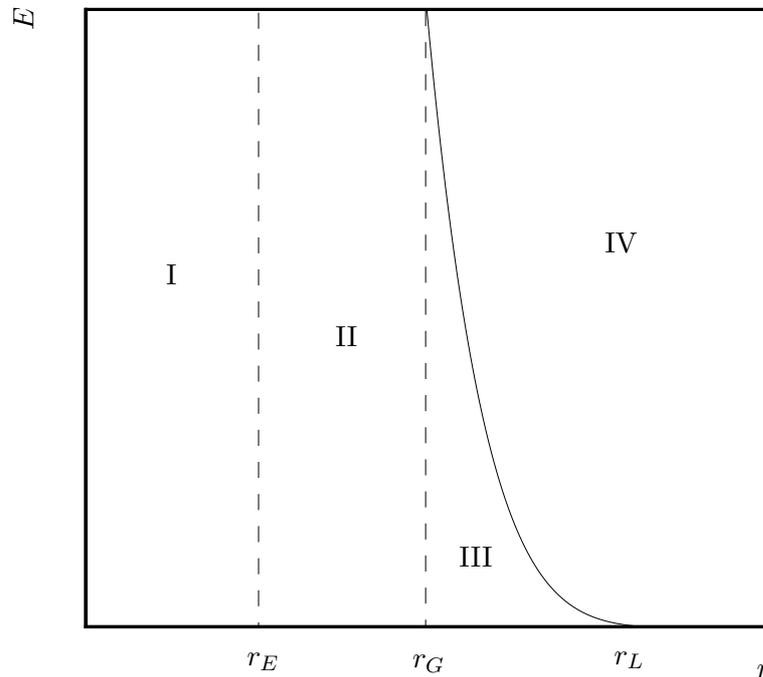


FIG. 1.4 – Schéma représentant les différents concepts de stabilité

sur l'écoulement. Cette étude n'a jamais été publiée ailleurs que dans un acte de congrès et n'a pas été poursuivie. Il faudra attendre le milieu des années 90 pour voir fleurir quelques études de stabilité. Elles restent à ce jour encore peu nombreuses.

Ces études se limitent principalement à des approches linéaires de stabilité (Frigaard *et al.* (1994), Coussot (1998), Peng et Zhu (2003) ...) qui permettent de conserver la même structure topologique que celle de l'écoulement de base lorsque celui-ci est soumis à des perturbations infinitésimales. Au-delà de l'analyse linéaire, et moyennant un certain nombre de précautions, une analyse faiblement non linéaire peut être réalisée, pourtant nous n'en connaissons aucune d'effectuée jusqu'à ce jour.

En présence d'une amplitude finie, le comportement de la (des) zone(s) non cisailée(s) est *a priori* inconnu. Cette difficulté provient en partie du fait que les contraintes sont indéterminées dans ces zones. Des études non linéaires ont été réalisées pour des fluides à seuil par Nouar et Frigaard (2001). Les auteurs considèrent une méthode énergétique pour contourner les difficultés liées aux zones non cisillées. Cette approche permet d'apporter des tendances sur l'évolution des conditions critiques de stabilité en fonction de la contrainte seuil.

La stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan isotherme pour des fluides à seuil a donné lieu à un certain nombre d'études, de part ses nombreuses applications. Il a été montré que cet écoulement est linéairement stable et que, d'un point de vue énergétique, une amplification

1. Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

de l'énergie de perturbation était possible. Il a été mis en évidence le rôle stabilisant de la contrainte seuil. En présence d'un gradient de température, l'écoulement de Poiseuille peut devenir instable si les forces de poussée sont suffisamment importantes. C'est ce que nous montrerons au cours de l'étude linéaire de stabilité de l'écoulement de base. L'étude de stabilité d'un écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil n'ayant jamais été réalisée, une première approche est de se concentrer sur le cas bidimensionnel, *i.e.* entre deux plaques parallèles infinies, à faibles débits ou faibles valeurs du nombre de Reynolds ($Re \neq 0$).

Dans ce qui suit, nous proposons d'examiner de manière qualitative le cas limite, *i.e.* $Re = 0$, soit le problème de Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil. Cette situation est fondamentalement différente de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard à très faibles valeurs de Re . En effet, dans le cas limite $Re = 0$, la zone non cisailée (gel) occupe tout l'espace entre les deux plaques. Il est clair que dans ce cas, la mise en mouvement des particules n'est possible que si la perturbation arrive au moins à vaincre la contrainte seuil.

Dans ce qui suit, nous souhaitons mettre en exergue les différentes forces en présence dans le problème de Rayleigh-Bénard pour un fluide de Bingham. La description physique s'inspire principalement de l'ouvrage "Hydrodynamique physique" par Guyon *et al.* (1991) et d'un article récent de Zhang *et al.* (2006).

Supposons que suite à une fluctuation, une particule sphérique de rayon R , située initialement à la cote y , est animée d'une vitesse initiale v normale aux parois (comptée positivement si elle dirigée vers le haut) Fig. 1.5. Le problème consiste à déterminer dans quelles conditions, le mouvement de la particule peut être entretenue.

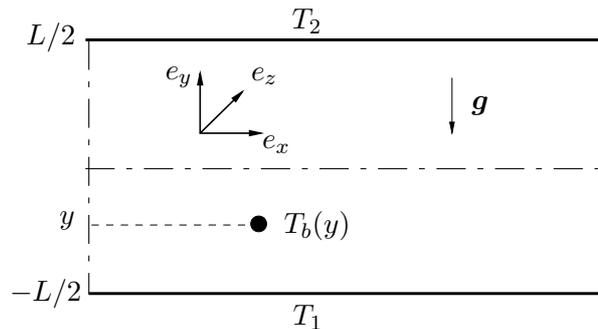


FIG. 1.5 – Représentation schématique du problème de Rayleigh-Bénard.

Soit t_c le temps caractéristique de la relaxation thermique de la particule par rapport au fluide environnant (temps caractéristique de transfert par conduction)

$$t_c = \frac{A_g R^2}{a} \tag{1.11}$$

où A_g est une constante géométrique et a la diffusivité thermique. Pendant ce temps, la particule s'est déplacée de $\delta'y = v t_c$ et les différences $\delta'T$ de température et $\delta'\rho$ de densité de

la particule par rapport au fluide environnant sont respectivement ² :

$$\delta'T = \frac{\partial T}{\partial y} \delta'y = A_g v \frac{R^2}{a} \frac{\delta T}{L}. \quad (1.12)$$

et

$$\delta'\rho = \rho_0 \alpha_0 \delta'T = \rho_0 \alpha_0 A_g v \frac{R^2}{a L} \frac{\delta T}{L}, \quad (1.13)$$

avec α_0 qui correspond au coefficient de dilatation thermique.

La particule sphérique sera alors soumise à une force de poussée donnée par :

$$F_m = F_{\text{Archimède}} = \frac{4}{3} \pi R^3 g \delta'\rho = \frac{4}{3} \pi R^5 \rho_0 \alpha_0 A_g \frac{v g \delta T}{a L}. \quad (1.14)$$

Le mouvement de la particule sera entretenue si la force motrice est supérieure à la force de freinage visqueux. Dans le cas d'un fluide de Bingham :

$$\mathbf{F}_v = - [\Lambda_1 \pi R^2 \tau_0 + \Lambda_2 \pi \mu_p R v] \mathbf{e}_y, \quad (1.15)$$

où Λ_1 et Λ_2 sont des constantes géométriques.

Dans cette relation, le cisaillement $\dot{\gamma}$ a été approché par $\frac{v}{R}$. Le premier terme $\Lambda_1 \pi R^2 \tau_0$, à droite de la relation, représente la force de frottement liée à la contrainte seuil, le deuxième terme $\Lambda_2 \pi \mu_p R v$ traduit le frottement visqueux dû à la viscosité plastique μ_p (terme que l'on retrouve dans le cas Newtonien). Finalement le mouvement de la particule sera entretenu si $|\mathbf{F}_m| > |\mathbf{F}_v|$:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 \alpha_0 g \delta'T \geq \Lambda_1 \pi R^2 \tau_0 + \Lambda_2 \pi \mu_p R v. \quad (1.16)$$

En prenant comme taille maximale pour la particule $R = \frac{L}{2}$ et une perturbation en température $\delta'T = \delta T$, il vient :

$$v = a \frac{\delta T L}{A_g R^2 \delta T}. \quad (1.17)$$

La condition d'instabilité est alors donnée par :

$$1 \geq 6^2 \frac{\tau_0}{\rho_0 g \alpha_0 \delta T L} + \frac{72}{A_g} \mu_p \frac{a}{\rho_0 g \alpha_0 \delta T L^3}, \quad (1.18)$$

soit :

$$1 \geq \Lambda_3 \tilde{B} + \Lambda_4 \frac{1}{Ra}, \quad (1.19)$$

où Λ_3, Λ_4 sont des constantes sans dimension, $Ra = \frac{\rho_0 \alpha_0 L^3 g \delta}{\mu_0 a}$ correspond au nombre de Rayleigh et \tilde{B} est un nombre de Bingham défini comme le rapport entre la contrainte seuil et une contrainte représentant la force motrice.

Cette approche phénoménologique montre, sans surprise, l'effet stabilisant de la contrainte seuil. En fait, la différence fondamentale avec un fluide purement visqueux est qu'à l'état statique, un fluide de Bingham n'est pas cisailé et la viscosité effective est infinie. L'approche classique d'analyse linéaire de stabilité ne peut plus être utilisée dans ce cas. En effet, d'un côté,

2. le symbole δ' est utilisé ici pour signifier de petites variations

1. Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

il n'est pas possible de linéariser autour d'une viscosité infinie et d'un autre côté, introduire une perturbation linéaire en contrainte ne modifie en rien la stabilité du système lorsque la contrainte seuil est finie et les contraintes résiduelles nulles. Dans ce cas, la seule approche possible est une approche énergétique où l'on s'intéresse à la norme $L2$ de la perturbation en vitesse et en température. Zhang *et al.* (2006) montrent alors que: (i) le système est linéairement stable quelle que soit la valeur de Ra ; (ii) pour un nombre de Ra inférieure à la valeur critique Newtonienne $Ra_{EN} = 1708$, le système est globalement asymptotiquement stable; (iii) pour $Ra > Ra_{EN}$, le système est conditionnellement stable. Les auteurs ont déterminé la norme $L2$ de la perturbation initiale limite en fonction de Pr , B et $Ra - Ra_{EN}$.

En outre, lorsque le système est asymptotiquement stable, la vitesse décroît en temps fini et la température décroît suivant deux échelles de temps avant et après l'arrêt de la convection.

Dans l'approche théorique résumée ci-dessus, le comportement rhéologique d'un fluide à seuil est supposé être décrit par le modèle de Bingham, qui ne rend pas compte de la rhéologie du matériau en dessous de la contrainte seuil. Les fluides réels tels que les boues de forage, magma ainsi que certains produits agro-alimentaires ont des comportements rhéologiques bien spécifiques, souvent dépendants de la température, qui peuvent influencer le développement des instabilités.

Dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard Poiseuille, l'écoulement de base se caractérise par la présence d'une zone non cisailée centrale et de zones cisillées de part et d'autre. Ces dernières rendent ainsi possible le développement de structures thermoconvectives lorsque l'écoulement est soumis à des perturbations infinitésimales.

1.3.2 Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide Newtonien

Les études de stabilité d'un écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard, pour un fluide Newtonien, ont été motivées par la volonté d'expliquer certains phénomènes atmosphériques, météorologiques, comme par exemple la formation de structures géométriques particulières dans les nuages. La motivation industrielle a trouvé son origine dans l'étude des dépôts chimiques en phase vapeur (Chemical Vapor Decomposition CVD). Il s'agit d'une méthode de dépôt de films minces à partir de précurseurs gazeux. Des explications et analyses plus complètes de cette application peuvent être trouvées dans Nicolas (2001). L'auteur effectue une revue bibliographique des écoulements de Poiseuille Rayleigh-Bénard en conduite rectangulaire.

Les premières études de stabilité pour l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard datent du début des années 60 avec Velte (1962) et Sani (1964). Des analyses linéaires temporelles de stabilité sont effectuées et sont complétées par des expériences. L'analyse de Gage et Reid (1968) montre que le problème 3D peut se ramener à un problème 2D par une transformation de Squire et que ce sont les rouleaux longitudinaux qui sont les structures les plus instables. Leur étude ne concernant que des valeurs de nombre de Prandtl égales à 1, elles sont généralisées par Platten (1971). En réalité, l'apparition de ces structures longitudinales,

supposées de dimension infinie dans le direction de l'écoulement, reste indépendante du débit imposé à l'écoulement et est obtenue pour une valeur de Rayleigh de 1708 (comme pour le problème de Rayleigh-Bénard dans le cas Newtonien). La transition entre les rouleaux longitudinaux avec les rouleaux transversaux est obtenue en augmentant la valeur du nombre de Rayleigh.

L'étude des instabilités convectives et absolues considère à la fois des analyses temporelles et spatiales de perturbations. Il s'agit dans ces études d'examiner la réponse à un pic de Dirac en espace et en temps du système. L'instabilité s'étale autour de l'origine du pic et tend à être advectée vers l'aval par l'écoulement moyen. La compétition entre (i) la croissance de l'instabilité en espace et en temps et (ii) son advection donne naissance à des instabilités absolues lorsque le cas (i) l'emporte sur (ii) et donne naissance à des instabilités convectives lorsque (i) n'est pas suffisante pour subsister face à (ii). En l'occurrence, Carrière et Monkewitz (1999) ont montré que seuls les rouleaux transversaux sont susceptibles de devenir absolument instables.

L'analyse linéaire suppose que la perturbation est infinitésimale, or une fois le seuil critique obtenu, il existe au moins un mode de la perturbation qui devient instable et croît de manière exponentielle. Pour rester dans le cadre de perturbations infinitésimales, il est nécessaire de prendre en compte la dynamique non-linéaire du système afin de saturer la croissance des instabilités. Les premiers à avoir étudié la dynamique non linéaire des rouleaux transversaux 2D à faibles valeurs de nombre de Reynolds sont Müller *et al.* (1989). Ces auteurs présentent une équation de Ginzburg-Landau qui décrit l'évolution de l'amplitude. Le formalisme simple de cette équation permet de donner une description de la physique de la convection. Elle indique l'évolution de la perturbation sous la condition que les variations spatiales et temporelles du systèmes sont lentes. On parle d'équation d'enveloppe dans laquelle l'amplitude est décrite comme une fonction complexe des coordonnées horizontales et du temps.

Plus récemment, des travaux concernant des systèmes inhomogènes ont été réalisés. Leur motivation trouve leur origine dans le fait que les systèmes rencontrés en dehors des laboratoires sont souvent des systèmes ouverts inhomogènes. Or, les études de stabilité convective-absolue s'intéressant à la réponse du système à un pic de Dirac autour duquel n'existe aucun bruit, sont adaptées au cas de système fermé, non ouvert. Ainsi, des analyses en modes globaux ont été réalisées par Carrière et Monkewitz (2001) où les auteurs considèrent un système faiblement inhomogène dans une direction (la fluctuation étant une variation dans une dimension du champ de température de la plaque inférieure). La généralisation à deux dimensions de cette étude est donnée par Martinand (2003) et Martinand *et al.* (2006).

1.4 Démarche et Objectifs de la thèse

En considérant un écoulement plan compris entre deux plaques parallèles infinies, de type Poiseuille Rayleigh-Bénard, nous examinons une analyse linéaire temporelle de stabilité, au Chapitre 2 afin de déterminer la différence de température entre les deux plaques suffisante pour faire naître le développement de structures thermoconvectives. Notre étude se limitant au cas de faibles valeurs du nombre de Reynolds, les seules structures capables de se développer

1. Description du problème de stabilité de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil

sont des rouleaux transversaux (TR), *i.e.* d'axes perpendiculaires à la direction de l'écoulement de base. Bien que le théorème de Squire, sur l'équivalence 2D 3D, ne soit pas valable dans le cas d'un fluide de Bingham, nous considérons une étude bidimensionnelle qui se justifie par le fait que les valeurs prises par le nombre de Reynolds sont faibles et qu'il n'y a pas d'effet de bord.

A travers les différentes études de stabilité déjà réalisées pour des fluides de Bingham, il apparaît clairement que le rôle de la contrainte seuil est loin d'être neutre vis à vis des conditions de stabilité du problème considéré mais aussi sur la topologie de l'écoulement. A chaque fois que cela sera possible, les effets de la contrainte seuil sur l'étude seront mis en évidence.

Sous certaines conditions, la topologie de l'écoulement de base est conservée lorsque l'on soumet le système à des perturbations infinitésimales. Aussi, la prise en compte de l'interface "gel"- "fluide" est importante et rend le problème plus ardu. Le suivi de l'interface se voit devenir analytiquement impossible lorsque le système est soumis à des perturbations d'amplitude finie dans la mesure où le modèle de Bingham laisse les contraintes indéterminées dans la zone non cisailée.

Au-delà de l'analyse linéaire de stabilité la prise en compte des termes non linéaires à partir d'une analyse faiblement non linéaire est rendue possible et présentée au Chapitre 3 car la perturbation reste gouvernée par le mode le moins stable déterminé dans l'étude linéaire. Cette analyse constitue la première réalisée pour des fluides à seuil et donne des précisions intéressantes quant à l'évolution de la perturbation au-delà du seuil. Des différences phénoménologiques avec le cas Newtonien sont trouvées et, une fois encore la contrainte seuil y est pour quelque chose.

Finalement pour faire le tour du problème de stabilité vis à vis de perturbations infinitésimales, nous avons réalisé une approche énergétique afin d'examiner dans quelle mesure l'énergie de perturbation du problème pouvait augmenter dans la région sous-critique (région dans laquelle la différence de température, déterminée par l'analyse linéaire, n'est pas suffisante pour destabiliser l'écoulement).

Bien que ces trois approches puissent apporter des informations pertinentes quant au rôle de la contrainte seuil ou encore quant à l'évolution de l'interface, les études ne permettent pas de remettre en cause la topologie de l'écoulement de base (c'est aussi pour cela que ces études sont rendues possibles), la rupture topologique est possible lorsque l'écoulement de base est soumis à des perturbations d'amplitude finie. Cette étude est examinée dans le Chapitre 5 par une approche énergétique. Cette analyse n'a pas pour objet de caractériser avec précision la structure de l'écoulement perturbé mais elle a plutôt pour objet de donner des réponses quant aux tendances des conditions critiques en fonction de la contrainte seuil.

Chapitre 2

Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

Ce chapitre présente une analyse linéaire temporelle de la stabilité d'un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide à seuil soumis à un gradient vertical de température, de telle sorte que les couches fluides les plus légères soient dans la partie inférieure et les couches fluides les plus lourdes dans la partie supérieure. Une approche modale est adoptée. Cette démarche est classique et constitue une première étape dans l'étude de stabilité d'un écoulement.

La première partie de ce chapitre donne les équations gouvernant le problème de convection mixte pour un fluide à seuil, ainsi que le modèle rhéologique associé et les différentes approximations utilisées. Cela nous permettra d'aboutir à la caractérisation de l'écoulement de base, à savoir les distributions de vitesse et de température, en régimes thermique et dynamique établis.

Ensuite, on étudie l'évolution des perturbations infinitésimales de l'écoulement de base par le formalisme classique de l'analyse linéaire de stabilité.

La partie suivante est consacrée à la présentation de la méthode de résolution numérique du problème aux valeurs propres issu de l'analyse linéaire. Les résultats obtenus concernant les conditions d'instabilité sont ensuite présentés. Nous nous attacherons à faire ressortir l'effet de la contrainte seuil sur les conditions critiques.

Un résumé synthétisant les résultats les plus significatifs vient conclure ce chapitre.

2.1 Description du problème

On considère l'écoulement d'un fluide à seuil entre deux plaques horizontales infinies distantes de \widehat{L} . La notation $(\widehat{\cdot})$ désigne les variables dimensionnelles de notre problème. La plaque inférieure est supposée être portée à la température ($\widehat{T}_1 = \widehat{T}_0 + \delta\widehat{T}/2$), plus importante que la température ($\widehat{T}_2 = \widehat{T}_0 - \delta\widehat{T}/2$) de la plaque supérieure. Un gradient de pression constant est imposé dans la direction longitudinale de l'écoulement \mathbf{e}_x . Les directions verticale et transverse sont définies respectivement par les vecteurs unitaires \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z . La Figure (2.1) représente sous forme schématique la géométrie et les caractéristiques définies précédemment.

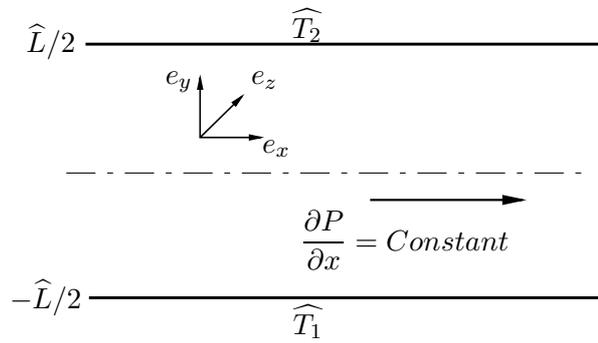


FIG. 2.1 – Représentation schématique du problème.

2.2 Equations gouvernant le problème

Le problème de convection mixte dans un canal plan pour un fluide à seuil incompressible est modélisé par les équations classiques de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie données respectivement par :

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{U}} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\left(\rho \widehat{\mathbf{U}}\right)_{\widehat{t}} + \left(\widehat{\mathbf{U}} \cdot \nabla\right) \left(\rho \widehat{\mathbf{U}}\right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \widehat{P} + \nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (2.1b)$$

$$\widehat{T}_{\widehat{t}} + \left(\widehat{\mathbf{U}} \cdot \nabla\right) \widehat{T} = a \Delta \widehat{T}, \quad (2.1c)$$

où le vecteur vitesse est noté $\widehat{\mathbf{U}}$, la pression \widehat{P} , le déviateur du tenseur des contraintes $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$, la température \widehat{T} , la masse volumique ρ , l'accélération gravitationnelle \mathbf{g} et a la diffusivité thermique. Dans l'Eq. (2.1c), il a été supposé implicitement que les cisaillements sont suffisamment faibles pour que la production de chaleur due à la dissipation visqueuse puisse être négligée¹. La notation indicielle $(\bullet)_{\widehat{t}}$ est équivalente à $\frac{\partial(\bullet)}{\partial \widehat{t}}$, \widehat{t} étant ici le temps. Cette

1. En effet si l'on considère une vitesse \widehat{U}_0 qui caractérise l'écoulement de base, alors dans notre cas le terme $\frac{\mu \widehat{U}_0}{\rho C_p a \delta \widehat{T}}$ reste négligeable devant 1. En réalité, ce terme définit le nombre sans dimension nommé nombre de Brinkman et noté Br .

notation sera aussi utilisée pour les dérivées partielles spatiales en x, y et z .

Les conditions limites associées au problème sont des conditions de non-glissement et de températures imposées aux parois. Elles s'écrivent de la manière suivante :

A la paroi inférieure ($\hat{y} = -\hat{L}/2$)

$$\hat{U}(-\hat{L}/2) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \hat{T}(-\hat{L}/2) = \hat{T}_1 \quad (2.2)$$

A la paroi supérieure ($\hat{y} = \hat{L}/2$)

$$\hat{U}(\hat{L}/2) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \hat{T}(\hat{L}/2) = \hat{T}_2. \quad (2.3)$$

Au système d'équations (2.1) muni de ces conditions limites (2.2)-(2.3), il convient de rajouter l'équation constitutive du matériau utilisé. Le comportement rhéologique est supposé être décrit par le modèle de Bingham, basé sur le critère de Von Mises, qui s'écrit :

² :

$$\hat{\tau} = \hat{\mu}\hat{\gamma} \quad \text{ssi} \quad \hat{\tau} > \hat{\tau}_0, \quad (2.4)$$

$$\hat{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{ssi} \quad \hat{\tau} \leq \hat{\tau}_0. \quad (2.5)$$

où $\hat{\mu}$ est la viscosité effective qui s'écrit, pour le fluide de Bingham, sous la forme :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_p + \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\gamma}}, \quad (2.6)$$

où $\hat{\tau}_0$ est la contrainte seuil, $\hat{\mu}_p$ la viscosité plastique indépendante du cisaillement et $\hat{\gamma}$ le tenseur des taux de déformations³ défini par $\hat{\gamma}_{ij} = (\hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i})$. Les seconds invariants du tenseur des taux de déformations et du déviateur du tenseur des contraintes, $\hat{\gamma}$ et $\hat{\tau}$, respectivement, sont données comme suit :

$$\hat{\gamma} = \left[\frac{1}{2} \hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

$$\hat{\tau} = \left[\frac{1}{2} \hat{\tau}_{ij} \hat{\tau}_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Concernant la thermo-dépendance des paramètres rhéologiques, on considère comme il a été indiqué dans le chapitre précédent qu'elle ne concerne que la viscosité plastique $\hat{\mu}_p = \hat{\mu}_p(\hat{T})$

2. La condition (2.5), qui est une condition sur le tenseur des taux de déformation, est équivalente dans ce cas à écrire : $\hat{\gamma} = 0$.

En effet, la condition d'incompressibilité implique que le premier invariant du tenseur des taux de déformation est nul. Si le deuxième invariant est nul, alors comme le tenseur est réel symétrique, nous obtenons $\hat{\gamma}_{ij} = 0$, c'est à dire que le tenseur est identiquement nul.

Nous rappelons que pour une matrice quelconque D , les invariants s'écrivent :

$D_1 = Tr(\mathbf{D})$, $D_2 = 1/2 (D_1^2 - Tr(\mathbf{D}^2))$ et $D_3 = Det(\mathbf{D})$.

3. Le lecteur notera que le tenseur des taux de déformations est défini par $\hat{\gamma}_{ij} = (\hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i})$ et non $\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i})$. La dernière notation est plus fréquemment utilisée dans le cas de fluides Newtonien.

Remarques sur le modèle de Bingham :

(i) Bien que le modèle de Bingham soit le modèle le plus simple pour les fluides à seuil, il rend néanmoins compte des principales caractéristiques des écoulements de ces fluides, à savoir, l'existence de zone non cisailée, d'interfaces et de la variation non linéaire de la viscosité effective dans les zones cisillées.

(ii) Lorsque la contrainte seuil $\hat{\tau}_0$ tend vers zéro, le comportement rhéologique d'un fluide de Bingham tend vers celui d'un fluide newtonien.

(iii) La loi de comportement d'un fluide de Bingham ne permet pas de connaître l'état des contraintes dans la zone non cisillée, où $\hat{\tau} \leq \hat{\tau}_0$. Dans cette zone, les contraintes restent indéterminées.

(iv) Le système d'équations (2.1) est valable dans tout le domaine d'écoulement aussi bien dans la zone où $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}$ que dans celle où $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \neq \mathbf{0}$.

2.3 Autres hypothèses de travail

Dans ce qui suit, la conductivité thermique et la chaleur spécifique seront supposées constantes. En outre, l'approximation de Boussinesq (1903) sera adoptée. Celle-ci suppose que la masse volumique est constante sauf dans le terme de poussée. A partir d'un développement asymptotique autour d'un état de référence (ρ_0, \hat{T}_0) , on a en première approximation :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_0(\hat{T} - \hat{T}_0)),$$

où α_0 est le coefficient de dilatation thermique à pression constante. Généralement, ce coefficient est de l'ordre de 10^{-4} . Un exposé plus détaillé sur l'approximation de Boussinesq et ses conditions de validité sont données dans l'ouvrage de Bois (2000) et dans l'article de Gray et Giorgini (1976) respectivement.

2.4 Analyse dimensionnelle

2.4.1 Grandeurs de référence

Les équations précédentes sont rendues sans dimension en adoptant les échelles caractéristiques suivantes :

- Echelle caractéristique de vitesse : \hat{U}_0 , la vitesse maximale de l'écoulement de base dans le cas où les paramètres rhéologiques sont constants. La variable réduite correspondante est : $U_i = \frac{\hat{U}_i}{\hat{U}_0}$,

- Echelle caractéristique de longueur : \widehat{L} , la distance qui sépare les deux plaques. La variable réduite correspondante est : $x_i = \frac{\widehat{x}_i}{\widehat{L}}$,
- Echelle caractéristique de viscosité : $\widehat{\mu}_0 = \widehat{\mu}_p(\widehat{T}_0)$, la viscosité plastique à la température de référence \widehat{T}_0 . La viscosité réduite devient : $\mu = \frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\mu}_0}$,
- Echelle caractéristique de temps : $\frac{\widehat{L}^2}{a}$, le temps de diffusion thermique. La variable de temps réduite s'écrit : $t = \frac{\widehat{t}}{\widehat{L}^2/a}$,
- Echelle caractéristique de température : $\delta\widehat{T}$, l'écart de température entre les deux plaques pour $\widehat{T} - \widehat{T}_0$. On notera la température réduite : $T = \frac{\widehat{T} - \widehat{T}_0}{\delta\widehat{T}}$.

Du choix des grandeurs précédentes, il en découle les échelles caractéristiques de contrainte et de pression obtenues à partir de l'équation de conservation de quantité de mouvement :

- la contrainte nominale $\frac{\widehat{\mu}_0 \widehat{U}_0}{\widehat{L}}$ pour les contraintes,
- la quantité $\frac{\widehat{\mu}_0 a}{\widehat{L}^2}$ pour la pression.

2.4.2 Equations sans dimension

Finalement, en tenant compte de l'hypothèse de Boussinesq, le système (2.1) sans dimension, s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.9a)$$

$$Re \mathbf{U}_t + Re^2 Pr (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P_m + Ra T \mathbf{e}_y + Re Pr \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.9b)$$

$$T_t + Re Pr (\mathbf{U} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T, \quad (2.9c)$$

où P_m représente la pression motrice correspondant à la densité constante ρ_0 :

$$P_m = P + \rho_0 gy. \quad (2.10)$$

Ce système d'équation doit être complété par les conditions aux limites suivantes :

A la paroi inférieure ($y = -1/2$)

$$\mathbf{U}(-1/2) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad T(-1/2) = T_1 = 1/2 \quad (2.11)$$

A la paroi supérieure ($y = 1/2$)

$$\mathbf{U}(1/2) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad T(1/2) = T_2 = -1/2. \quad (2.12)$$

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

Les nombres de Reynolds Re , de Prandtl Pr et de Rayleigh Ra sont définis par :

$$Re = \frac{\rho \widehat{U}_0 \widehat{L}}{\widehat{\mu}_0}, \quad Pr = \frac{\widehat{\mu}_0}{\rho a} \quad \text{et} \quad Ra = \frac{\alpha_0 g \delta \widehat{T} \widehat{L}^3}{\widehat{\mu}_0 a} .$$

La loi de comportement sans dimension s'écrit :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad \text{si } \tau > B, \quad (2.13)$$

$$\dot{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{si } \tau \leq B, \quad (2.14)$$

avec

$$\mu = \mu_p(T) + \frac{B}{\dot{\gamma}}. \quad (2.15)$$

B est le nombre de Bingham défini par le rapport entre la contrainte seuil et la contrainte visqueuse caractéristique

$$B = \frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\mu}_0 \frac{\widehat{U}_0}{\widehat{L}}}.$$

2.5 Détermination de l'écoulement de base

Ce paragraphe se propose de déterminer la répartition des vitesses et de la température entre les deux plaques horizontales, dans le cas où les régimes dynamique et thermique sont établis. Deux situations seront considérées selon que la thermo-dépendance est prise en compte ou non.

2.5.1 Cas où la viscosité plastique, μ_p , est non thermo-dépendante

En régimes dynamique et thermique établis, l'écoulement est unidirectionnel, *i.e.* $V = W = 0$. La vitesse se réduit à la seule composante $U = U_b(y)$ et le profil de température $T_b(y)$ est purement conductif. Le système (2.9) se réduit à :

$$0 = -\frac{\partial P_m}{\partial x} + Re Pr \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.16a)$$

$$0 = -\frac{\partial P_m}{\partial y} + Ra T_b(y), \quad (2.16b)$$

$$0 = D^2 T_b. \quad (2.16c)$$

Les équations constitutives se réduisent à :

$$\tau_{xy} = \left(1 + \frac{B}{|DU_b|}\right) DU_b \quad \text{dans la zone où } |\tau_{xy}| > B, \quad (2.17)$$

$$DU_b = 0 \quad \text{dans la zone où } |\tau_{xy}| \leq B, \quad (2.18)$$

où $D \equiv d/dy$ et où la viscosité effective prend la forme :

$$\mu = 1 + \frac{B}{|DU_b|}. \quad (2.19)$$

Par intégration du système d'équations (2.16), on obtient :

$$P_b(x,y) = P_{ref} - Ra \frac{y^2}{2} - 2 \frac{Re Pr}{(1/2 - y_0)^2} x. \quad (2.20)$$

P_{ref} désigne une pression de référence.

$$U_b(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |y| \leq y_0, \\ 1 - \left(\frac{|y| - y_0}{1/2 - y_0} \right)^2 & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.21)$$

et

$$T_b = -y \quad (2.22)$$

Comme il a été indiqué précédemment, l'écoulement de base se caractérise par la présence d'une zone centrale non cisailée appelée zone bouchon d'épaisseur $2y_0$. Elle est délimitée sur la Fig. 2.2 par des traits pointillés. On peut noter que lorsque $B \rightarrow 0$, la zone bouchon est réduite à une ligne centrale et le profil de vitesse tend vers celui d'un fluide Newtonien (Fig. 2.2(c)). En d'autres termes, le profil de vitesse limite pour un fluide de Bingham, lorsque $B \rightarrow 0$, est le même que celui du cas limite $B = 0$ (fluide Newtonien). En ce sens, le modèle de Bingham est consistant pour ce qui est de l'écoulement de base.

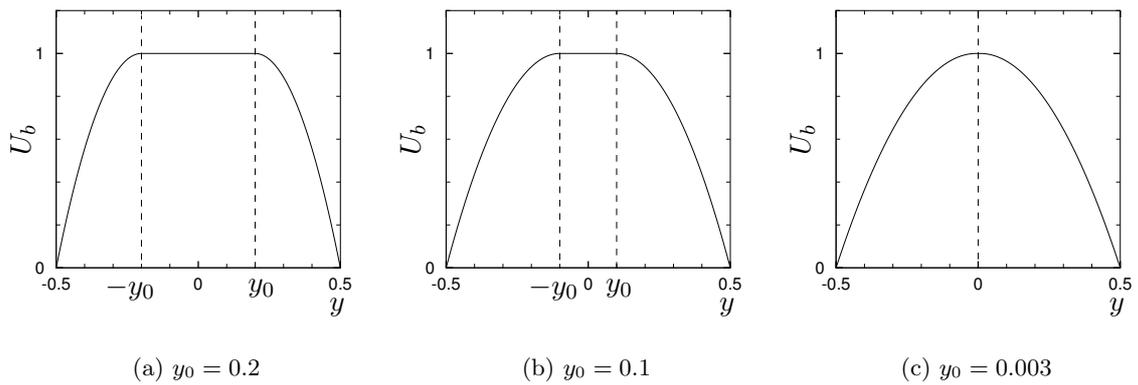


FIG. 2.2 – Profils de vitesse pour différentes valeurs de y_0 . La zone bouchon centrale est délimitée par les traits pointillés

La dépendance de y_0 en fonction de B est obtenue à partir de l'expression de la contrainte pariétale. En effet, par intégration de l'équation (2.16a)⁴ on a

4. L'équation (2.16a) permet d'obtenir l'état des contraintes dans tout le domaine d'écoulement y compris

$$\tau_{xy} = \frac{-C_0}{Re Pr} y + C_1, \quad (2.23)$$

avec C_0 et C_1 des constantes, où $\frac{\partial P}{\partial x} = -C_0$ et $C_1 = 0$ étant donnée la symétrie de l'écoulement. La valeur de la contrainte étant connue aux interfaces "fluide-gel", on obtient

$$B = \frac{C_0}{Re Pr} y_0. \quad (2.24)$$

En utilisant l'Eq. (2.23), la contrainte pariétale, $\tau_p = \tau_{xy}|_{y=\pm 1/2}$, sera donnée par

$$|\tau_p| = \frac{B}{2y_0}. \quad (2.25)$$

Par ailleurs, l'équation constitutive (2.17) nous permet d'écrire

$$\tau_p = -\frac{2}{1/2 - y_0} - B. \quad (2.26)$$

En combinant ces deux dernières équations nous obtenons

$$B(1 - 2y_0)^2 - 8y_0 = 0. \quad (2.27)$$

L'Equation (2.27) est un polynôme du deuxième ordre en y_0 , pour laquelle il existe deux solutions. Nous ne retenons que la solution physiquement acceptable ($0 \leq y_0 \leq 1/2$) soit :

$$y_0 = \frac{2 + B - 2\sqrt{B+1}}{2B}. \quad (2.28)$$

On déduit de cette équation les comportements asymptotiques de l'épaisseur de la zone bouchon à petites et grandes valeurs du nombre de Bingham :

$$y_0 = \frac{B}{8} - \frac{B^2}{16} + O(B^3) \quad \text{pour } B \rightarrow 0, \quad (2.29)$$

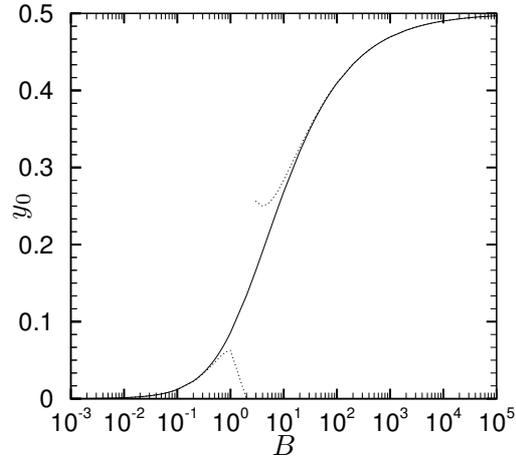
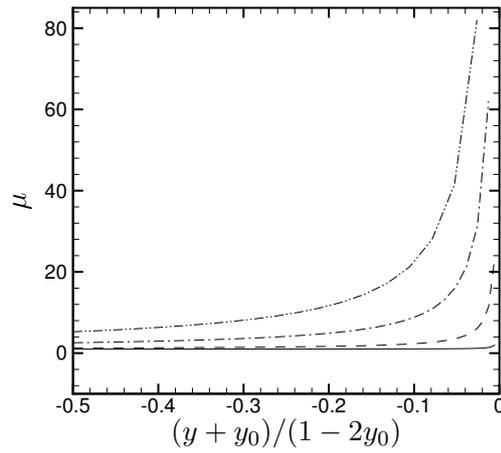
$$y_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{B} + O\left(\frac{1}{B^{3/2}}\right) \quad \text{pour } B \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

La figure 2.3 montre l'évolution de y_0 en fonction du nombre de Bingham ainsi que les comportements asymptotiques pour $B \rightarrow 0$ et $B \rightarrow \infty$. Globalement, les expressions (2.29) et (2.30) peuvent être utilisés respectivement pour $B \leq 0.1$ et $B \geq 30$.

La variation de la viscosité effective est représentée par la Fig. 2.4 pour différentes valeurs de y_0 . Elle augmente à partir de la paroi et tend vers l'infini au voisinage de l'interface.

Finalement, il est intéressant de noter que la structure de l'écoulement de base est gouverné par un seul paramètre sans dimension : le nombre de Bingham.

dans la zone non-cisaillée. Il est important de souligner que ce n'est que dans des situations simples telles que les écoulements unidirectionnels, qu'il est possible de déterminer la distribution des contraintes dans la zone non-cisaillée. Dans le cas général, l'état des contraintes reste indéterminé dans les zones non-cisaillées.


 FIG. 2.3 – Evolution de y_0 en fonction de B (\cdots : comportements asymptotiques)

 FIG. 2.4 – Evolution de la viscosité effective dans la partie cisailée inférieure, pour différentes valeurs de y_0 . (($----$: $y_0 = 0.005$); ($- \cdot - \cdot -$: $y_0 = 0.105$); ($- \cdot \cdot \cdot -$: $y_0 = 0.305$); (\cdots : $y_0 = 0.405$))

2.5.2 Viscosité plastique, μ_p , dépendant de la température

Dans ce paragraphe, on se propose d'examiner comment la thermodépendance de la viscosité plastique modifie la structure de l'écoulement. Il est clair que la dimension de la zone bouchon n'est pas modifiée puisque le même gradient de pression est imposé, mais elle sera déplacée vers la plaque supérieure ou inférieure selon que la viscosité augmente ou diminue avec la température. Ceci se traduit bien sûr par une perte de symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe de l'écoulement.

On suppose que la viscosité plastique varie avec la température selon une relation :

$$\hat{\mu}_p = \hat{\mu}_0 \exp(-b(T - T_0)). \quad (2.31)$$

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

Cette relation a été adoptée au vu des résultats d'essais rhéométriques effectués au laboratoire pour un fluide à seuil modèle (solution de Carbopol à différentes concentrations), à différentes températures.

La viscosité effective sans dimension $\mu(T)$ s'écrit :

$$\mu = \exp(-kT) + \frac{B}{\dot{\gamma}}, \quad (2.32)$$

où k donné par $k = b \delta \hat{T}$ correspond au nombre de Pearson⁵.

L'intégration des équations (2.16) combinées avec la relation $\tau_{xy} = \mu(T) DU_b$ conduit à :

$$U_b(y) = \begin{cases} \frac{B}{ky_0} \left[\left(y - \left(y_2 - \frac{1}{k} \right) \right) \exp(-ky) - \left(\frac{1}{2} - \left(y_2 - \frac{1}{k} \right) \right) \exp\left(-\frac{k}{2}\right) \right]; y_2 < y < \frac{1}{2}, \\ U_b(y_2) = U_b(y_1); & y_2 < y < y_1, \\ \frac{B}{ky_0} \left[\left(y - \left(y_1 - \frac{1}{k} \right) \right) \exp(-ky) + \left(\frac{1}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{k} \right) \right) \exp\left(\frac{k}{2}\right) \right]; -\frac{1}{2} < y < y_1, \end{cases} \quad (2.33)$$

où y_1 et y_2 désignent respectivement la position des interfaces inférieure et supérieure. Elles sont déterminées en écrivant d'une part que la vitesse axiale est la même en tout point de la zone bouchon, soit $U_b(y_1) = U_b(y_2)$, et d'autre part, que $y_2 - y_1 = 2y_0$. La combinaison de ce deux dernières relations avec (2.33) conduit à une équation de la forme $f(y_2, y_0, B, k) = 0$. Cette équation est résolue moyennant l'utilisation de la fonction d'optimisation "fminsearch" sur Matlab. Cette fonction attrait aux problèmes d'optimisation non linéaire en l'absence de contraintes et permet de trouver le minimum d'une fonction scalaire, en partant d'une estimation initiale. Il s'agit d'une approche de type "Simplex" modifiée sans utilisation de gradients.

Concernant, la pression et la température, elles conservent les mêmes expressions que précédemment, à savoir les Eq. (2.20) et (2.22) respectivement.

Le fait que les valeurs de k soient positives (voir la note de bas de page numéro 5) fait varier la viscosité apparente et modifie l'écoulement de base en déplaçant la zone bouchon vers la plaque chaude, comme permettent de le souligner les Fig. 2.5 et 2.6 qui représentent respectivement les profils de vitesse pour différentes valeurs de k , pour $y_0 = 0.105$ et l'évolution de la viscosité effective correspondante dans les zones cisailées. Le déplacement de la zone bouchon sera d'autant plus prononcé que la dépendance en température de la viscosité sera forte, c'est à dire pour des valeurs du nombre de Pearson plus importantes. Ceci est illustré par la Fig. 2.7 qui montre l'évolution des positions des interfaces supérieure et inférieure en

5. Pour les fluides fréquemment utilisés au Laboratoire, tels que les solutions de Carbopol 940 neutralisées ou les solutions de Carboxy-Méthyl-Cellulose (CMC), le coefficient de thermodépendance b varie entre $5 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$ et $5 \times 10^{-2} \text{ } ^\circ C^{-1}$. Ainsi, pour des valeurs de $\delta \hat{T}$ de l'ordre de quelques degrés à quelques dizaines de degrés, les valeurs prises par k sont comprises entre des valeurs de l'ordre de 10^{-3} et $O(1)$.

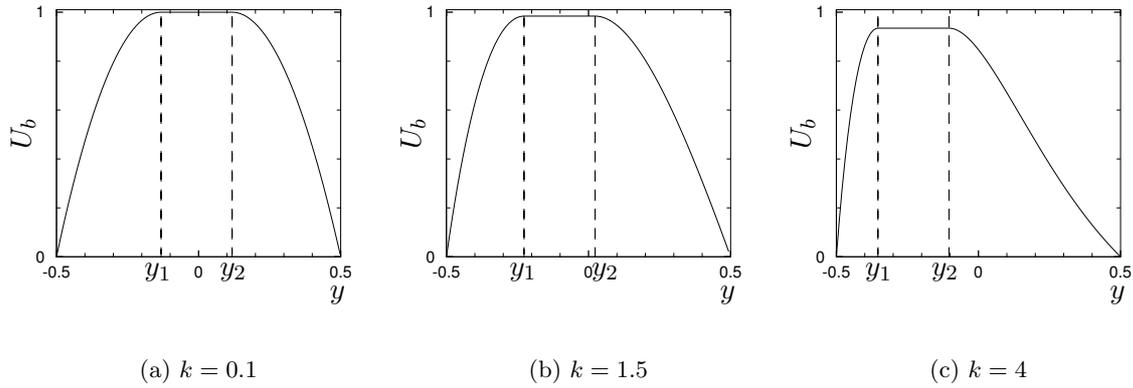


FIG. 2.5 – Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs de k et pour $y_0 = 0.125$. Les différentes zones bouchon sont délimitées par les traits pointillés

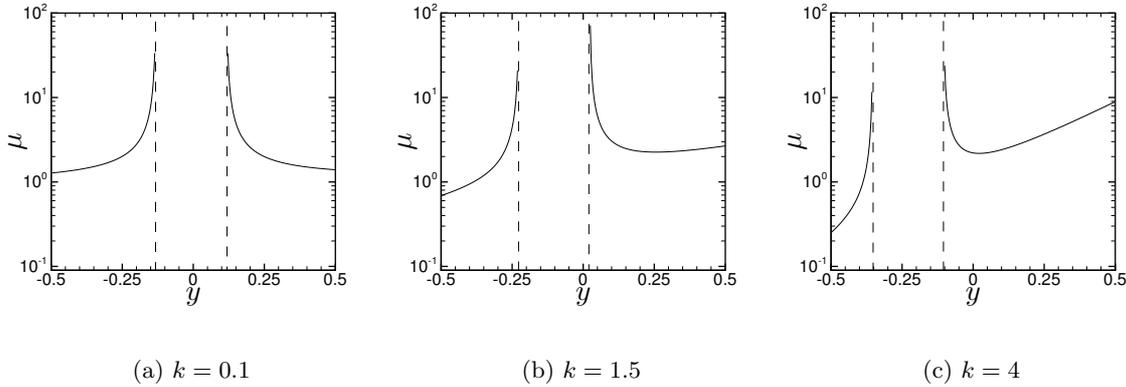


FIG. 2.6 – Evolution de la viscosité effective en échelle logarithmique pour différentes valeurs de k et pour $y_0 = 0.125$.

fonction du nombre de Pearson pour $y_0 = 0.125$.

Les résultats numériques montrent que la vitesse axiale de la zone bouchon ainsi que le débit volumique diminuent avec l'augmentation de k comme cela est indiqué par les Fig. 2.5, 2.9 et 2.8. Ce résultat pourrait être expliqué par le fait que la vitesse axiale a tendance à diminuer lorsque la viscosité est plus élevée. De plus, la zone bouchon étant insensible à la température, celle-ci se déplace vers la plaque de température plus élevée, c'est à dire la plaque inférieure. Finalement l'effet de diminution de la vitesse axiale dans la partie fluide supérieure est renforcée par l'augmentation de la dimension de cette zone.

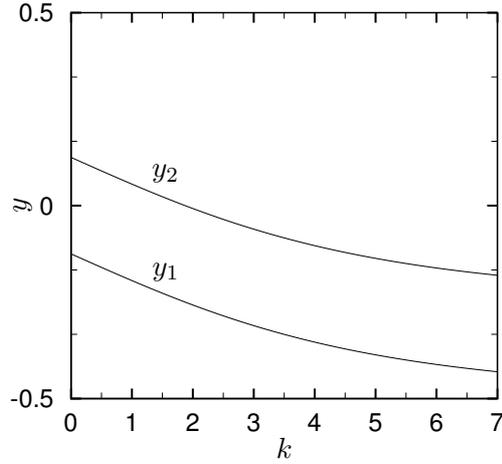


FIG. 2.7 – Evolution de la zone bouchon en fonction du nombre de Pearson pour $y_0 = 0.125$

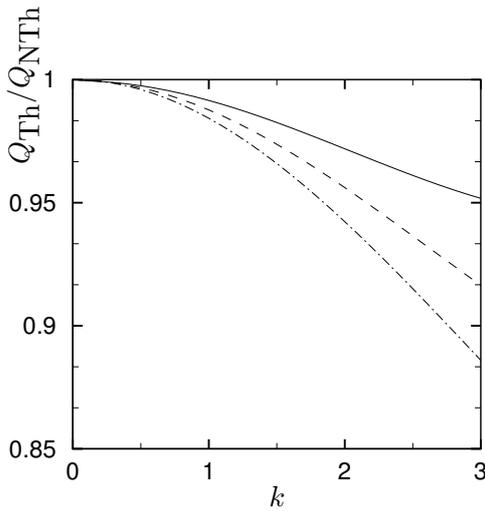


FIG. 2.8 – Evolution du débit volumique lorsque la viscosité plastique est Thermo-dépendante (Th), rapporté à sa valeur maximale obtenue dans le cas Non Thermo-dépendant (NTh), en fonction du nombre de Pearson ($- \cdot - \cdot - \cdot -$: $y_0 = 0.125$; $- - -$: $y_0 = 0.075$; $- - - -$: $y_0 = 0.003125$)

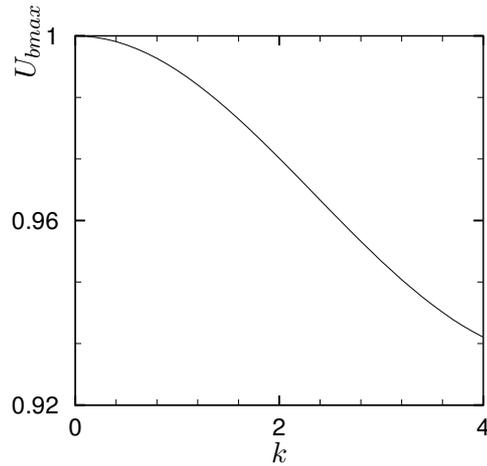


FIG. 2.9 – Evolution de la vitesse axiale maximale rapportée à sa valeur obtenue dans le cas non thermo-dépendant, en fonction du nombre de Pearson pour $y_0 = 0.125$

2.6 Analyse linéaire de stabilité

Cette section se propose d'examiner l'influence du nombre de Bingham et de la thermo-dépendance de la viscosité plastique sur les conditions critiques d'instabilité.

L'influence du nombre de Bingham provient de différents aspects :

- la modification de l'épaisseur de la zone cisailée où les cellules de Rayleigh-Bénard peuvent se développer,
- la modification de la dissipation visqueuse,
- la variation de la viscosité effective dans la zone cisailée.

La thermo-dépendance de $\widehat{\mu}_p$ provoque une perte de symétrie de l'écoulement de base parce que le profil de base de la température n'est pas symétrique. Cette dissymétrie aura une conséquence sur la stabilité de l'écoulement.

A chaque fois que cela sera pertinent, les résultats seront présentés de façon à faire ressortir séparément les différents effets sur les conditions critiques d'instabilité.

2.6.1 Formulation du problème

A l'écoulement de base, on superpose une perturbation infinitésimale notée $(\varepsilon \mathbf{u}, \varepsilon p, \varepsilon \theta)$, les perturbations en vitesse, pression et température respectivement ; ε représente un petit paramètre sans dimension.

L'écoulement perturbé s'écrit formellement sous la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_b + \varepsilon \mathbf{u}, \quad (2.34)$$

$$T = T_b + \varepsilon \theta, \quad (2.35)$$

$$P = P_b + \varepsilon p. \quad (2.36)$$

Dans la région où la condition $\tau(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{u}) > B$ est satisfaite, la viscosité effective de perturbation est déterminée à l'aide d'un développement de Taylor autour de l'écoulement de base. Au premier ordre, on a :

$$\mu(\mathbf{U}_b + \varepsilon \mathbf{u}) = \mu(\mathbf{U}_b) + \varepsilon \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{U}_b) + O(\varepsilon^2). \quad (2.37)$$

Dans ce qui suit, nous noterons $\mu' = \left(\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{U}_b) \right)$. Les éléments τ_{ij} du déviateur du tenseur des contraintes sont :

$$\tau_{ij} = \mu(\mathbf{U}_b + \varepsilon \mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \varepsilon \mathbf{u}) \quad (2.38)$$

$$= \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) + \varepsilon [\mu' \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) + \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})]. \quad (2.39)$$

En posant $\tau'_{ij} = \mu' \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) + \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})$ et tenant compte du fait que $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) = 0$ lorsque $ij \neq \{xy\}$ ou $\{yx\}$, il vient :

$$\tau'_{ij} = \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}), \quad (2.40)$$

et lorsque $ij = \{xy\}$ ou $\{yx\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\tau'_{ij} &= \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) + \left(\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{U}_b) \right) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b), \\ &= \left[\mu(\mathbf{U}_b) + \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{U}_b) \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \\ \tau'_{ij} &= \mu_t \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}),\end{aligned}\tag{2.41}$$

où $\mu_t = \mu(\mathbf{U}_b) + \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{U}_b)$ est la viscosité tangente.

Nous pouvons aussi écrire le déviateur du tenseur des contraintes de perturbation sous la forme suivante:

$$\tau'_{ij} = \mu(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) + (\mu_t(\mathbf{U}_b) - \mu(\mathbf{U}_b)) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) (\delta_{1i} \delta_{2j} + \delta_{1j} \delta_{2i}),\tag{2.42}$$

avec δ_{ij} qui correspond au symbole de Kroeneker. Soit, sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\tau}' = \begin{pmatrix} \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{xx} & \mu_t(\mathbf{U}_b) \tau'_{xy} & \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{xz} \\ \mu_t(\mathbf{U}_b) \tau'_{xy} & \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{yy} & \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{yz} \\ \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{xz} & \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{yz} & \mu(\mathbf{U}_b) \tau'_{zz} \end{pmatrix}\tag{2.43}$$

Il est intéressant de noter que la rhéofluidification se traduit par une stratification en viscosité (premier terme de l'Eq. (2.42)) et une anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes de perturbations (deuxième terme de l'Eq. (2.42))

Remarques :

(i) La viscosité est définie de manière générale par un tenseur d'ordre 4 tel que :

$$\tau'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\gamma}_{kl}(\mathbf{u}).$$

Si le milieu est isotrope, nous avons :

$$C_{ijkl} = \mu(\mathbf{U}_b) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Dans notre cas, à cette dernière expression de la viscosité s'ajoute un terme d'anisotropie qui est uniquement dû à la perturbation. La viscosité prend la forme générale suivante :

$$C_{ijkl} = \mu(\mathbf{U}_b) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + (\mu(\mathbf{U}_b) - \mu_t(\mathbf{U}_b)) (\delta_{1k} \delta_{2l} + \delta_{1l} \delta_{2k}) (\delta_{1i} \delta_{2j} + \delta_{2i} \delta_{1j}).$$

(ii) Comme nous le verrons plus loin avec l'équation d'Orr-Sommerfeld modifiée (Eq. 2.59a), le théorème de Squire sur l'équivalence 2D-3D, reste valable lorsqu'il y a stratification uniquement mais ne tient plus *a priori* lorsque l'on tient compte de l'anisotropie.

Le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes étant linéairement perturbé, nous pouvons admettre que les interfaces y_i^\pm seront linéairement perturbées. Les positions respectives des interfaces s'écrivent :

$$y_i^\pm = y_b^\pm \pm \varepsilon h^\pm,\tag{2.44}$$

où y_b^\pm représente la position des interfaces de l'écoulement de base dans le cas général. On rappelle que la position des interfaces est contrôlée par le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes qui peut être calculé dans la zone cisailée.

Les équations de perturbation linéarisées sont obtenues en remplaçant $\tau_{ij}, \mathbf{U}, p, T$ par les expressions (2.34)-(2.36) et (2.38), dans le système (2.9). Après avoir soustrait les équations correspondantes à l'écoulement de base, on aboutit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.45a)$$

$$\frac{1}{Pr} \mathbf{u}_t + Re ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b + (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + Ra \theta \mathbf{e}_y + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}', \quad (2.45b)$$

$$\theta_t + Pr Re (U_b \theta_x) - v = \nabla^2 \theta. \quad (2.45c)$$

Dans les équations précédentes, nous avons utilisé la vitesse de diffusion thermique a/\hat{L} comme vitesse caractéristique de \mathbf{u} .

Dans la zone cisailée, les équations aux perturbations linéarisées sont données par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.46a)$$

$$\frac{1}{Pr} u_t + Re (U_b u_x + v DU_b) = -p_x + \mu \nabla^2 u + D\mu (u_y + v_x) + D[(\mu_t - \mu) DU_b], \quad (2.46b)$$

$$\frac{1}{Pr} v_t + Re (U_b v_x) = -p_y + Ra \theta + \mu \nabla^2 v + 2D\mu v_y + (\mu_t - \mu) (u_{xy} + v_{xx}), \quad (2.46c)$$

$$\frac{1}{Pr} w_t + Re (U_b w_x) = -p_z + \mu \nabla^2 w + D\mu (v_z + w_y), \quad (2.46d)$$

$$\theta_t + Pr Re (U_b \theta_x) - v - \nabla^2 \theta = 0. \quad (2.46e)$$

Dans la zone non cisailée, les particules ont un mouvement de solide indéformable, comme l'écoulement a lieu entre deux plans parallèles non bornés, tout mouvement de rotation est impossible. Le seul mouvement possible est donc un mouvement de translation qui se traduit par :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(t), \quad (2.47)$$

comme $\mathbf{U}_b = \text{cste}$, nous avons :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_B(t). \quad (2.48)$$

Conditions aux limites

Les équations gouvernant l'écoulement perturbé sus-citées sont complétées par les conditions aux limites aux parois et aux interfaces que nous donnons ci-après.

Aux parois :

La condition de non-glissement donne en terme de vitesse :

$$\mathbf{u} \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (2.49)$$

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

La condition isotherme donne en terme de température :

$$\theta \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Aux interfaces, $y = y_i^\pm$:

Par continuité de la vitesse à la traversée de l'interface, nous avons :

$$\mathbf{u} (x, y_i^\pm, z, t) = \mathbf{u}_B(t). \quad (2.51)$$

Le développement de cette équation autour de y_b^\pm au premier ordre, nous permet d'écrire :

$$\mathbf{u} (x, y_b^\pm, z, t) = \mathbf{u}_B(t). \quad (2.52)$$

De plus, au niveau des interfaces perturbées, nous avons $\tau = B$, et donc selon le modèle de Bingham, $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}) = 0$. Cette condition est développée autour de y_b^\pm côté zone cisailée, *i.e.* :

$$\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U})|_{y_b^\pm \pm \varepsilon h^\pm} = \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b)|_{y_b^\pm} \pm \varepsilon h^\pm \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b)}{\partial y} \Big|_{y_b^\pm} + \varepsilon \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})|_{y_b^\pm} + O(\varepsilon^2). \quad (2.53)$$

Or $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b)|_{y_b^\pm} = 0$, d'où :

$$\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})|_{y_b^\pm} = \mp h^\pm \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b)}{\partial y} \Big|_{y_b^\pm}. \quad (2.54)$$

Cette dernière équation nous permet d'obtenir les conditions supplémentaires suivantes :

$$u_y (x, y_b^\pm, t) = \mp h^\pm (x, y_b^\pm, z, t) D^2 U_b|_{y_b^\pm}, \quad (2.55)$$

$$v_y (x, y_b^\pm, z, t) = 0, \quad (2.56)$$

$$w_y (x, y_b^\pm, z, t) = 0 \quad (2.57)$$

Remarque :

Dans les conditions (2.55)-(2.57) qui proviennent de la condition $\dot{\gamma}_{ij} = 0$ aux interfaces, nous avons considéré que $\mathbf{u}_x (x, y_b^\pm, t) = \mathbf{u}_z (x, y_b^\pm, t) = \mathbf{0}$. En effet, ces dernières conditions sont données par l'Eq. (2.52) qui montre la non-dépendance du vecteur vitesse \mathbf{u} vis à vis des coordonnées x et z en $y = y_b^\pm$.

Problème aux valeurs propres

La dépendance en temps du système d'équations (2.46)-(2.56) permet de chercher une solution sous forme de mode normal, *i.e.* en $\exp(st)$. Il s'agit de superposer des modes normaux complexes solutions du système (2.46)-(2.56).

De plus, le système d'équations (2.46) étant invariant suivant les directions x et z , on peut supposer que la perturbation est périodique dans ces directions et qu'elle a pour périodes $2X$ et $2Z$ respectivement. Par conséquent, les solutions peuvent être recherchées sous la forme de modes de Fourier, *i.e.* $\exp(i(\alpha x + \beta z))$.

Finalement, on cherche des solutions du système (2.46) sous la forme suivante :

$$(\mathbf{u}, h^\pm, p, \theta) = (\mathbf{u}(y), h^\pm, p(y), \theta(y)) e^{i(\alpha x + \beta z - s t)}. \quad (2.58)$$

En mettant la perturbation sous cette forme, nous supposons qu'elle se développe dans le temps, avec une fréquence de l'onde complexe, $s = s_r + i s_i$ et les composantes du nombre d'onde réel α et β , dans les directions x et z respectivement. Le rapport s_r/α est la vitesse de phase de l'onde et la partie imaginaire s_i est le taux d'amplification ou d'amortissement temporel de la perturbation. Lorsque le signe de s_i est négatif, la perturbation décroît de manière exponentielle, l'écoulement de base est stable, alors que si le signe est positif, la perturbation s'amplifie donc l'écoulement de base est instable. Le cas où la valeur s_i est nulle correspond à la limite des états stable-instable, on parle d'état marginal.

Dans le cas de perturbations unidirectionnelles, c'est à dire $\alpha = \beta = 0$, on montre que l'écoulement est linéairement stable (voir Annexe A).

Dans le cas bidimensionnel ($\beta = 0$), on introduit la fonction courant ψ :
 $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$ et $\psi = f(y) e^{i\alpha(x-ct)}$, avec $c = \frac{s}{\alpha}$.

Pour la zone fluide :

Ici, la seule composante de la vorticité non nulle est celle suivant Oz que l'on note ω . Sachant que $\omega = -\Delta\psi$, la troisième équation du tourbillon, qui peut être déduite des équations (2.46b) et (2.46c), nous permet d'obtenir la première équation du système qui suit, la deuxième provenant de l'équation de l'énergie (Eq. (2.46e)).

$$\mathcal{L}_1 f + \mathcal{L}_2 \theta = c \mathcal{L}_3 f, \quad (2.59a)$$

$$\mathcal{L}_4 \theta + f = c \theta, \quad (2.59b)$$

où $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ et \mathcal{L}_4 sont les opérateurs différentiels linéaires que l'on donne ci-après.

– Dans le cas où la viscosité plastique n'est pas thermodépendante, les opérateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\equiv Pr Re U_b (D^2 - \alpha^2) - Pr Re D^2 U_b + i \frac{Pr}{\alpha} (D^2 - \alpha^2)^2 - 4 i \alpha Pr B D \left[\frac{D}{|DU_b|} \right], \\ \mathcal{L}_2 &\equiv Pr Ra, \\ \mathcal{L}_3 &\equiv D^2 - \alpha^2, \\ \mathcal{L}_4 &\equiv Pr Re U_b - i \alpha + \frac{i}{\alpha} D^2, \end{aligned} \quad (2.60)$$

A travers l'Eq. (2.59a), on reconnaît l'équation d'Orr-Sommerfeld avec un terme supplémentaire facteur du nombre de Bingham. Par la suite, nous nommerons cette équation l'équation d'Orr-Sommerfeld modifi e.

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

De plus, cette dernière, sans le terme en température, est similaire à celle obtenue pour l'écoulement de Poiseuille par Frigaard *et al.* (1994) et rappelée dans la thèse de Kabouya (2005).

– Dans le cas où la viscosité plastique est thermodépendante, les opérateurs deviennent :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &\equiv Pr Re (U_b \mathcal{L} - D^2 U_b) - 4 i \alpha Pr B D \left[\frac{D}{|DU_b|} \right] \\
 &\quad + i \frac{Pr}{\alpha} \exp(-ky) [\mathcal{L}^2 + k^2 \alpha^2 + 2\alpha^2 k D + k^2 D^2 - 2k D^3], \\
 \mathcal{L}_2 &\equiv i \frac{Pr}{\alpha} \exp(-ky) [(\alpha^2 k + k^3) D U_b - 2k^2 D^2 U_b + k D^3 U_b] \\
 &\quad i \frac{Pr}{\alpha} \exp(-ky) [(-2k D U_b + 2k D^2 U_b) D + k D^2 U_b D^2] \\
 \mathcal{L}_3 &\equiv \mathcal{L}, \\
 \mathcal{L}_4 &\equiv Pr Re U_b - i\alpha + \frac{i}{\alpha} D^2,
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

avec:

$$\mathcal{L} \equiv D^2 - \alpha^2. \tag{2.62}$$

Pour la zone non cisillée :

Concernant la zone non cisillée, le mouvement de translation de cette zone (\mathbf{U} indépendant des coordonnées spatiales), associé à l'hypothèse de modes normaux (Eq. (2.58)) conduit à : $f = u = v = 0$. Cela signifie d'un point de vue physique que : (i) la perturbation infinitésimale n'est pas capable de perturber le mouvement d'une longueur finie de la zone non cisillée, (ii) la perturbation en vitesse s'annule dans la zone bouchon.

Les équations linéarisées dans cette zone sont :

$$f = 0, \tag{2.63}$$

$$\mathcal{L}_4 \theta = c \theta. \tag{2.64}$$

Conditions aux limites :

Les conditions limites sont données en terme de fonction courant :

Aux parois, elles s'écrivent comme suit

$$f(\pm 1/2) = f'(\pm 1/2) = 0 \tag{2.65}$$

et

$$\theta(\pm 1/2) = 0. \tag{2.66}$$

Les conditions aux interfaces linéarisées conduisent à

$$f(y_b^\pm) = 0, \quad f_y(y_b^\pm) = 0, \tag{2.67}$$

$$f_{yy}(y_b^\pm) = \pm h^\pm D^2 U_b(y_b^\pm). \tag{2.68}$$

Remarque: En réalité, la condition (2.68) est une conditions sur h^\pm , non sur f . Cette condition est, d'une part, nécessaire pour rendre régulier le problème de $\frac{1}{|DU_b|}$ proche des interfaces, et d'autre part, permet d'obtenir la perturbation de la position des interfaces.

2.6.2 Problème aux valeurs propres, modes propres, normalisation des modes

Les équations (2.59), (2.63)-(2.68) représentent le problème aux valeurs propres pour lequel il peut exister des valeurs particulières de c , appelées valeurs propres, telles qu'il existe une solution $\mathbf{V} = (f, \theta)^T$ non identiquement nulle. A chaque valeur propre est associé un mode propre \mathbf{V} solution du problème. Le problème à résoudre est mis sous forme générale de la manière suivante :

$$c\mathcal{D}.\mathbf{V} = \mathcal{L}.\mathbf{V}, \quad (2.69)$$

avec \mathcal{D} et \mathcal{L} les opérateurs suivants :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

et

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & Pr Ra \\ 1 & \mathcal{L}_3 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

On notera qu'à chaque mode propre solution du problème tout vecteur proportionnel à celui-ci est aussi solution du problème. Afin de n'avoir qu'une solution de référence pour chaque valeur propre, on utilise la norme infinie⁶ pour normer les modes propres linéaires. De plus, les modes peuvent être déphasés les uns par rapport aux autres, on introduit alors un déphasage arbitraire x_0 comme référence de phase comme suit :

$$x_0 = \text{Arctan} \left(-\frac{\text{Im}(V_{m1})}{\text{Re}(V_{m1})} \right).$$

Le vecteur normé sera donc calculé de la manière suivante :

$$(\mathbf{V}_{c_1})_{\text{Normé}} = \frac{\exp(ix_0)}{V_{m1}} \mathbf{V}_{c_1}, \quad (2.72)$$

avec $\mathbf{V}_{c_1} = (f_{c_1}, \theta_{c_1})^T$ une solution du problème pour une valeur propre c_1 et $V_{m1} = \|\mathbf{V}_{c_1}\|_\infty$.

Par la suite, les résultats sont présentés sous forme de vecteurs propres normés que nous noterons \mathbf{V}_{c_1} au lieu de $(\mathbf{V}_{c_1})_{\text{Normé}}$ sans risque de confusion.

2.7 Résolution numérique

Les systèmes d'équations différentielles (2.59)-(3.68), munis de leurs conditions limites respectives, décrivent l'évolution des perturbations (f, θ) dans tout le domaine. La discrétisation

6. la norme infinie étant définie par $\|\mathbf{V}\|_\infty = \sup_y (V_r^2 + V_i^2)^{1/2}$

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

de ces systèmes est réalisée par une méthode aux différences finies. Deux schémas centrés d'ordre 2 et 4 ont été utilisés. Ce deuxième schéma, plus précis, a été nécessaire uniquement dans l'analyse faiblement non linéaire qui fait l'objet du chapitre 4. Dans ce qui suit, les détails de calculs seront donnés dans le cas simple d'un schéma centré d'ordre 2. L'extension au schéma d'ordre 4 sera ensuite donnée de façon succincte.

Le domaine $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ est divisé de manière uniforme en N points avec un pas dy . Le

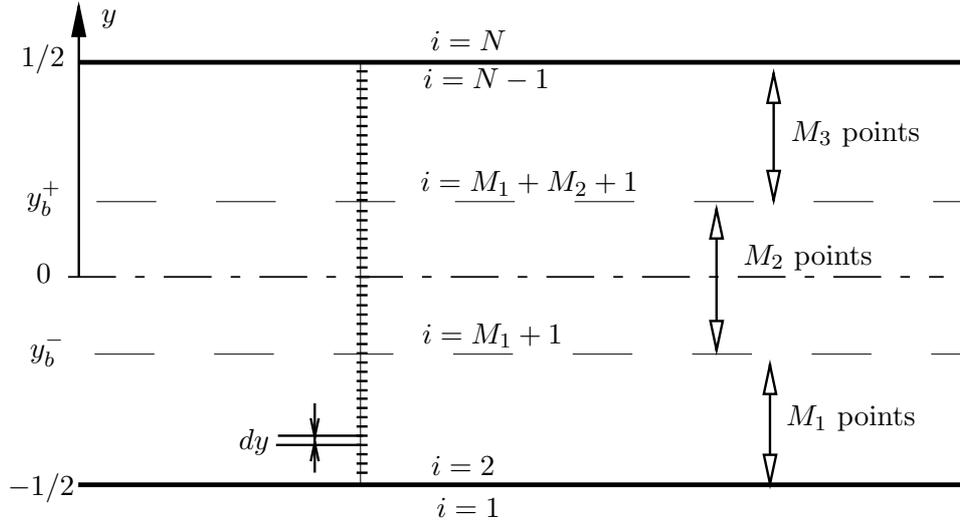


FIG. 2.10 – *Domaine de discrétisation.*

nombre de points est choisi de telle sorte que les interfaces $\pm y_0$ ou (y_1, y_2) coïncident avec des points de discrétisation comme le montre la Fig. (2.10).

Lorsque nous utilisons un schéma d'ordre 2, les conditions aux limites sont discrétisées comme suit :

A la paroi inférieure, on a $f = f_y = 0$. Ce qui se traduit par

$$f(y_{i=1}) = 0, \quad -\frac{3}{2}f(y_{i=1}) + 2f(y_{i=2}) - \frac{1}{2}f(y_{i=3}) = 0, \quad (2.73)$$

soit :

$$f(y_{i=1}) = 0, \quad \text{et} \quad f(y_{i=2}) = \frac{1}{4}f(y_{i=3}). \quad (2.74)$$

Au point $i = 3$, une dérivée d'ordre 2 est discrétisée en prenant en compte la dernière relation, par exemple pour une dérivée seconde :

$$D^2 f(y)|_{y=y_{i=3}} = \frac{f(y_{i=2}) - 2f(y_{i=3}) + f(y_{i=4})}{dy^2} \quad (2.75)$$

$$= \frac{(1/4 - 2)f(y_{i=3}) + f(y_{i=4})}{dy^2}. \quad (2.76)$$

De même pour les autres degrés de dérivation. Un calcul similaire peut être fait au niveau des interfaces et de la paroi supérieure. En outre, l'amplitude f de la fonction courant est connue dans toute la zone bouchon, $f = 0$. Par conséquent, la connaissance des valeurs de f aux conditions limites et dans toute la zone bouchon, permet de déterminer f sur uniquement $2M1 - 6$ points.

Pour ce qui est de la température θ , elle est connue aux parois $\theta(y_{i=1}) = \theta(y_{i=N}) = 0$. Elle est ainsi évaluée sur les $(N - 2)$ points internes au domaine.

Finalement la discrétisation des équations aux perturbations conduit à un problème qui s'écrit sous forme matricielle :

$$A \mathbf{X} = c B \mathbf{X}, \quad (2.77)$$

avec A et B deux matrices carrées de dimension $(2M1 + N - 8) \times (2M1 + N - 8)$, \mathbf{X} le vecteur de la perturbation tel que $\mathbf{X} = (\mathbf{f}', \boldsymbol{\theta}')^T$, où

$$\mathbf{f}' = (f(y_{i=3}), \dots, f(y_{i=M1-1}), f(y_{i=M1+M2+2}), \dots, f(y_{i=N-2}))$$

$$\text{et } \boldsymbol{\theta}' = (\theta(y_{i=2}), \dots, \theta(y_{i=N-1}));$$

c , la valeur propre à déterminer.

Remarque : Une fois le problème aux valeurs propres résolu, on prendra soin de compléter les modes propres obtenus en réinjectant les valeurs manquantes dans le vecteur $(\mathbf{f}', \boldsymbol{\theta}')^T$ pour obtenir le vecteur $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})^T$.

Lorsque la discrétisation est réalisée à partir d'une méthode à l'ordre 4, la même démarche que pour la méthode d'ordre 2 est réalisée. Pour les points internes, le schéma est centré et les conditions aux limites sont écrites, à la paroi inférieure, de la manière suivante :

$$f(y_{i=1}) = 0, \quad -\frac{25}{12}f(y_{i=1}) + 4f(y_{i=2}) - 3f(y_{i=3}) + \frac{4}{3}f(y_{i=4}) - \frac{1}{4}f(y_{i=5}) = 0, \quad (2.78)$$

soit :

$$f(y_{i=1}) = 0, \quad \text{et } f(y_{i=2}) = \frac{1}{4} \left(3f(y_{i=3}) - \frac{4}{3}f(y_{i=4}) + \frac{1}{4}f(y_{i=5}) \right). \quad (2.79)$$

Les schémas de dérivées qui font apparaître la valeur de f au point $i = 2$ prennent en compte la dernière relation. Par exemple, au point $i = 3$, la dérivée seconde s'écrit :

$$\begin{aligned} D^2 f(y)|_{y_3} &= \frac{1}{dy^2} \left(-\frac{1}{12}f(y_{i=1}) + \frac{4}{3}f(y_{i=2}) - \frac{5}{2}f(y_{i=3}) + \frac{4}{3}f(y_{i=4}) - \frac{1}{12}f(y_{i=5}) \right) \\ &= \frac{1}{dy^2} \left(\left(1 - \frac{5}{2}\right) f(y_{i=3}) + \left(-\frac{4}{9} + \frac{4}{3}\right) f(y_{i=4}) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\right) f(y_{i=5}) \right). \end{aligned}$$

Dans la formulation générale, on écrit :

$$D^{k_d} f|_{y_i} = \frac{1}{dy^{k_d}} \left(\sum_{k \in \text{stencil}} a_k f(y_{i=k}) \right) + O(dy^{k_p}) \quad (2.80)$$

avec les a_k , les facteurs liés au schéma de discrétisation, k_d le degré de dérivation, k_p l'ordre de précision, f la fonction pour laquelle on cherche la dérivée au point y_i , le terme

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

'stencil' définit l'ensemble des points de discrétisation. Les facteurs utilisés dans cette étude sont donnés dans les Tableaux récapitulatifs (B.1) et (B.2) de l'Annexe B.

La même méthode que celle à l'ordre 2 est utilisée au niveau des interfaces et de la paroi supérieure.

Finalement, le système matriciel (2.77) est résolu à l'aide de l'algorithme QZ implémenté dans Matlab 7.1.

Le code a été testé pour le problème de Poiseuille Rayleigh-Bénard dans le cas newtonien en faisant varier le pas de discrétisation. Le Tableau (2.1) présente les conditions critiques Ra_c et α_c pour le cas où $Re = 1.5$ et $Pr = 10$. La comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par Nicolas *et al.* (2000) ($Ra_c = 1750.42$ et $\alpha_c = 3.097$), permet de valider notre code dès $N = 51$ (0.5% d'erreur). La valeur de Ra_c , précise à l'unité, est obtenue pour $N = 201$.

N	Ra_c	α_c
51	1759.09	3.1
101	1752.63	3.1
151	1751.41	3.1
201	1750.98	3.1
251	1750.78	3.1
301	1750.67	3.1
351	1750.61	3.1
401	1750.56	3.1
451	1750.53	3.1
501	1750.51	3.1

TAB. 2.1 – Conditions critiques pour différentes valeurs de N dans le cas Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide newtonien. Cas $Re = 1.5$, $Pr = 10$.

Dans le cas du modèle de Bingham, nous nous sommes orientés vers le choix $N = 201$ car il donne un bon compromis entre les différentes contraintes, c'est à dire contraintes de temps de calcul, de convergence et de maillage, *i.e.* que les interfaces coïncident avec des points de discrétisation. Le code pour le modèle de Bingham a été testé pour différents nombres de points de discrétisation supérieurs à $N = 201$ afin de vérifier la convergence des résultats. Le Tableau (2.2) donne les valeurs numériques des conditions critiques obtenues, ainsi que celle de la plus grande valeur propre c_i correspondante. Dans le code, les conditions critiques sont calculées à chaque valeur de N , et de telle sorte que $|c_i| < 10^{-4}$. Les variations relatives obtenues sur les conditions critiques sont inférieures 0.14%, ce qui permet de justifier la convergence du code pour $N = 201$.

N	Ra_c	α_c	c_i	c_r
201	82470.30	5.5	$-8.55461 \cdot 10^{-6}$	$8.11786 \cdot 10^{-1}$
401	82377.33	5.5	$-2.30670 \cdot 10^{-6}$	$8.11917 \cdot 10^{-1}$
601	82359.47	5.5	$-6.11715 \cdot 10^{-5}$	$8.11501 \cdot 10^{-1}$

TAB. 2.2 – Conditions critiques et plus grande valeur propre c_i correspondantes, pour différentes valeurs de N . Cas de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide de Bingham, $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$.

2.8 Résultats

2.8.1 Cas où la viscosité plastique est constante

Un exemple de résultats du code décrit dans le paragraphe précédent est donné par la Fig. 2.11. Nous avons représenté le spectre des valeurs propres (c_r, c_i) pour $Re = 5$, $Pr = 10$, $Ra = 108272.56$, $y_0 = 0.105$ et $\alpha = 6.1$. Le mode le moins stable est indiqué par une flèche. Globalement, la forme du spectre n'est pas modifiée lorsque l'on considère un autre ensemble de paramètres (Re, Pr, y_0, α) . Néanmoins, en augmentant Ra , une valeur propre passe dans le demi-plan instable. On note Ra_1 , le nombre de Rayleigh à partir duquel, cette condition est satisfaite. La Figure 2.12 donne la courbe de stabilité marginale, *i.e.*, $Ra_1(\alpha)$ pour $Re = 5$, $Pr = 10$, et $y_0 = 0.105$. Le nombre de Rayleigh critique, Ra_c qui définit le seuil d'instabilité est donné par le minimum de la courbe de stabilité marginale : $Ra_c = \min_{\alpha} Ra_1(\alpha)$. Le nombre d'onde correspondant est noté α_c .

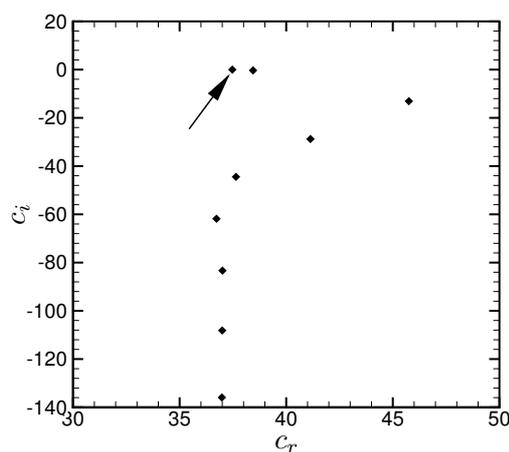


FIG. 2.11 – Spectre des plus grandes valeurs propres dans le cas $Re = 5$, $Pr = 10$ et $y_0 = 0,105$. La plus grande valeur est indiquée par une flèche. Cette partie du spectre n'est pas modifiée lorsque N augmente.

Les fonctions propres $f(y)$ et $\theta(y)$ associées aux conditions critiques sont données par la Fig. 2.13 pour $Re = 0.1$, $Pr = 10$ et pour différentes valeurs de y_0 . On peut noter la diminution de $\theta(y)$ lorsque y_0 augmente pour des perturbations équivalentes en fonction de

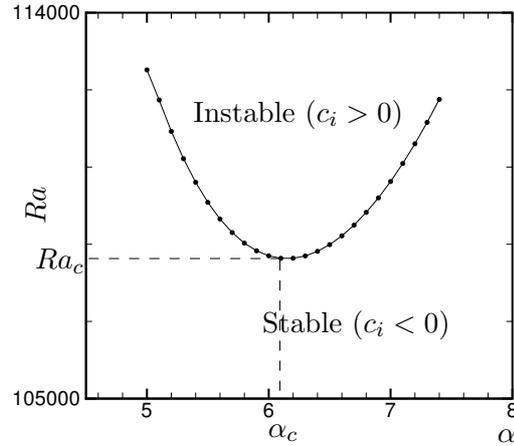


FIG. 2.12 – Courbe marginale dans le cas $Re = 5$, $Pr = 10$, $Ra = 108272.56$, $y_0 = 0.105$ et $\alpha = 6.1$ et $dy = 0.005$

courant. A partir de ces fonctions propres, on peut déterminer la perturbation associée au seuil d’instabilité. Elle est donnée par $\psi_r = \mathcal{R}e(f(y)e^{i\alpha x})$ et $\theta_r = \mathcal{R}e(\theta(y)e^{i\alpha x})$. Nous l’avons représenté sur la Fig. 2.14 sous forme de contours d’iso-valeurs de ψ_r (à droite) et de θ_r (à gauche), dans le domaine délimité par les parois et une longueur d’onde suivant x , soit $2\pi/\alpha_c$. La perturbation est caractérisée par des cellules contra-rotatives, similaires aux cellules de Rayleigh-Bénard, advectées par l’écoulement moyen.

Finalement, l’évolution des conditions critiques, Ra_c et α_c , en fonction de y_0 est donnée par la Fig. 2.15. Les résultats numériques sont représentées par des cercles. Comme on pouvait s’y attendre, la valeur du Rayleigh critique augmente avec y_0 du fait, d’une part, de la réduction de la zone cisailée où les cellules de Rayleigh-Bénard peuvent se développer, et d’autre part, de l’augmentation de la dissipation visqueuse. L’influence de la stratification et de l’anisotropie n’est pas intuitive. Elle pourra être identifiée une fois que l’influence de la dissipation visqueuse aura été quantifiée.

Le seul effet de la présence de la zone bouchon est mis en évidence à partir des résultats, représentés sur la Fig. 2.15 par des carrés, et obtenus lorsque les termes en Bingham sont annulés artificiellement dans l’équation d’Orr-Sommerfeld modifiée, Eq. (2.59a). Pour caractériser l’effet de la modification de la géométrie, on introduit des nombres de Rayleigh \widetilde{Ra} et d’onde $\widetilde{\alpha}$ basés sur l’épaisseur de la zone cisailée, soit :

$$\widetilde{Ra} = Ra(1 - 2y_0)^4$$

et

$$\widetilde{\alpha} = \alpha(1 - 2y_0).$$

Les conditions critiques \widetilde{Ra}_c et $\widetilde{\alpha}_c$ obtenues en annulant les termes de Bingham sont présentées sur la Fig. 2.16 par les triangles noirs. Les résultats permettent de montrer que le changement

d'échelle donné ci-dessus ne permet pas de rendre entièrement compte de la présence de la zone bouchon, car \widetilde{Ra}_c augmente légèrement avec y_0 . Ceci peut provenir du fait que la zone bouchon participe elle-même à la réduction de l'intensité de la perturbation, comme le montrent les modes propres représentés par la Fig. (2.13).

Afin de tenir compte de l'influence de la dissipation visqueuse, c'est à dire la modification globale de la viscosité effective lorsque B varie, on introduit un nombre de Rayleigh basé sur la viscosité pariétale, à défaut de ne pouvoir utiliser une viscosité moyenne, comme cela a été suggéré par Wall et Wilson (1996). On pose :

$$\overline{Ra} = \frac{\widetilde{Ra}}{\mu_w} \quad \text{avec} \quad \mu_w = \mu(y = \pm 1/2) = 1 + B \frac{(1 - 2y_0)}{4}.$$

La Figure 2.16 donne l'évolution des valeurs prises par \overline{Ra} en fonction de y_0 (symboles ∇). Un faible écart subsiste lorsqu'on compare ces résultats avec ceux obtenus sans les termes en Bingham. Cet écart permet de rendre compte de la stratification en viscosité. Cet effet est plus marqué par le nombre d'onde critique.

Finalement, nous venons de montrer que la modification de la géométrie l'écoulement, à travers la zone bouchon, reste l'effet prépondérant.

Cas particulier : $B \rightarrow 0$

Les résultats numériques montrent que lorsque $y_0 \rightarrow 0$, $Ra_c \rightarrow 21000$ et $\alpha_c \rightarrow 5.2$, alors que dans le cas Newtonien ($y_0 = 0$), on obtient $Ra_c = 1708$ et $\alpha_c = 3.1$. Cette différence est observée pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, comme le montre la Fig. 2.17 où nous avons présenté Ra_c (cercles) en fonction de Re obtenus pour $y_0 = 3.10^{-3}$ en utilisant le modèle de Bingham. Les résultats données par Nicolas *et al.* (2000) pour le cas Newtonien sont représentés par les carrés noirs.

Afin d'expliquer cette singularité, on se propose de s'intéresser particulièrement au cas où $B \rightarrow 0$. La linéarisation développée reste valable. En réalité, dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité, il est implicitement supposé que la perturbation est infinitésimale vis à vis de toute échelle caractéristique de l'écoulement de base. En particulier, on peut écrire : $\varepsilon = o(B)$, soit encore $\varepsilon = o(y_0)$ (Eq. (2.27)). L'interface est aussi linéairement perturbée et la zone bouchon reste intacte.

Dans le cas particulier du problème RBP où $y_0 \rightarrow 0$, une condition supplémentaire sur ε doit être satisfaite: $\varepsilon \leq O(B^3)$. En réalité, il y a un saut de pression à travers la zone bouchon qui induit des contraintes supplémentaires à l'intérieur du bouchon. La perturbation en terme de contraintes σ ($\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \tau_{ij}$) dans la zone bouchon doit satisfaire l'équation de conservation de quantité de mouvement qui se réduit ici à $\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}$, avec $\sigma_{yy}(\pm y_i) = \pm \varepsilon p e^{i\alpha x}$. La zone non cisailée étant très fine, $y_i \ll \Delta x = O(X)$, ainsi $\sigma_{xx} \gg \sigma_{xy} \gg \sigma_{yy}$. D'une part, on peut montrer que σ_{xx} est maximal aux interfaces. D'autre part, la zone bouchon reste intacte

si $\left(1/2 \sigma_{ij}^d \tau_{ij}\right)^{1/2} \leq B$. Finalement, on obtient l'inégalité $\sigma_{xx}(y_i) \leq O(B)$, qui conduit à la condition $\varepsilon \leq O(B^3)$. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples détails sur cet aspect dans l'Annexe C qui synthétise une communication privée avec J. Hinch.

L'écart observé entre les paramètres critiques obtenus pour un fluide newtonien et pour un fluide de Bingham est une conséquence de l'analyse de stabilité linéaire qui laisse la zone bouchon intacte. Dans ce cas, la zone bouchon se déplace à vitesse constante comme une plaque rigide de très faible épaisseur. De cette manière, nos résultats numériques sont à comparer avec les résultats obtenus dans le cas Newtonien pour le problème de Couette RBP.

A cet effet, nous allons montrer que lorsque la zone bouchon est réduite à une interface centrale, ($y_0 \rightarrow 0$), nous pouvons uniquement considérer le demi-domaine $[0; 1/2]$. Lorsque $y_0 \rightarrow 0$, le terme en B de Eq.(2.59a) est négligeable. Le système d'équations différentielles gouvernant le problème est symétrique, tout comme la géométrie du problème. De plus, nos résultats numériques ($\alpha \in [2; 8]$ et $Re \in [0.1; 20]$) ont permis de constater que le mode le moins stable est paire, un exemple est donné dans Fig. 2.18(a) et 2.18(b). La symétrie du mode le moins stable est posée comme conjecture. Il est alors suffisant de considérer le domaine $y \in [0; 1/2]$, avec les conditions limites suivantes :

$$\theta_y(0) = 0, \quad f(0) = f_y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(1/2) = 0, \quad f(1/2) = f_y(1/2) = 0. \quad (2.81)$$

A notre connaissance, le problème de Couette RBP n'a pas été considéré dans la littérature. Néanmoins, Gershuni et Zhudhovitskii (1976) traitent le problème Newtonien de Rayleigh-Bénard ($Re = 0$), avec les mêmes conditions limites pour θ que celles requises, Eq.(2.81). Cette situation peut être comparée à notre étude pour $Re \ll 1$. Les paramètres critiques, obtenus par Gershuni et Zhudhovitskii (1976), en ne considérant que le demi-domaine, sont : $Ra_c(B \rightarrow 0) = 2^4 \times 1304 = 20\,864$ et $\alpha_c(B \rightarrow 0) = 2 \times 2.56 = 5.12$. La différence avec nos résultats pour $Re \rightarrow 0$ et $B = o(Re)$ est inférieure à 1%.

Perturbation des interfaces

Comme nous l'avons montré dans ce qui précède, le nombre de Bingham joue un rôle fondamental sur la structure de l'écoulement et sur la stabilité de ce dernier. La présence de la zone non cisailée est une conséquence du modèle de Bingham et stabilise l'écoulement en imposant des conditions d'annulation sur la perturbation. Par ailleurs, l'introduction d'une perturbation ne laisse pas la zone non cisailée indifférente et il est important de connaître l'évolution de cette zone pour caractériser le problème. Dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire celle-ci reste intacte, néanmoins elle subit une modification de la position de ses interfaces. Cette modification est déterminée à partir des conditions limites de l'Eq. (2.68). La Figure 2.19) représente la perturbation de la position des interfaces supérieures (h^+) et inférieure (h^-) sur une période, rapportée à la valeur $2\pi/\alpha_c$, suivant x . On rappelle que la position réelle des interfaces est, pour l'interface supérieure, $y_i = y_0 + \varepsilon h^+$ et $-y_i = -y_0 - \varepsilon h^-$, pour l'interface inférieure. De part l'Eq. (2.68) et parce que la perturbation est paire (donc f_{yy}

paire), il vient que la zone bouchon subit une modification de type variqueux de ses interfaces, comme on peut l'observer sur la Fig. 2.20, qui représente la zone bouchon perturbée ainsi que les iso-valeurs de la fonction courant de perturbation caractérisant les rouleaux de convection. Les échelles de cette figure, concernant les positions des interfaces, ne sont pas réalistes mais ont été choisies dans le but d'observer la zone non cisailée perturbée.

2.8.2 Cas où la viscosité plastique dépend de la température

Cette section se propose d'examiner comment la thermodépendance de la viscosité plastique influe sur les conditions critiques d'instabilité et sur la structure des cellules de Rayleigh-Bénard. On considérera uniquement le cas où la viscosité plastique décroît avec la température. Les Figures 2.21(a) et 2.21(b) montrent les variations de Ra_c et de α_c rapportées aux valeurs obtenues pour $k = 0$, en fonction du nombre de Pearson et pour différentes épaisseurs de la zone bouchon. On note que le nombre de Rayleigh critique diminue de manière uniforme avec k . En d'autres termes, la décroissance de μ_p lorsque T croît favorise le déclenchement de l'instabilité. En outre, celle-ci se caractérise par des longueurs d'onde plus importantes (Fig. 2.21(b)).

A priori, il n'est pas évident de prédire ce type d'évolution, du fait, d'une part, de la dissymétrie caractérisée par le déplacement de la zone bouchon vers la paroi chaude, et d'autre part, du fait de la réorganisation de l'écoulement où les vitesses axiales sont fortement réduites dans la partie fluide supérieure par rapport à la situation où $k = 0$. Il semble néanmoins que ce sont les facteurs destabilisants - augmentation de l'épaisseur de la zone fluide supérieure et réduction de la vitesse axiale - qui dominent et induisent la diminution de Ra_c en fonction de μ . Cette interprétation est confirmée par la Fig. 2.22 où nous avons représenté les modules de f et θ lorsque $Ra = Ra_c$. Pour des valeurs de k suffisamment importantes, la perturbation est essentiellement concentrée dans la partie supérieure, et s'annule pratiquement dans toute la partie fluide inférieure. Ceci peut expliquer l'augmentation de la longueur d'onde. Enfin, la dissymétrie entre les parties fluides supérieures et inférieures est illustrée par la Fig. 2.23 qui représente les contours d'iso-valeurs de ψ_r et de θ_r pour différentes valeurs de k . L'orientation des iso-valeurs est bien sûre liée à la structure de l'écoulement de base.

2.9 Bilan

L'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil a été étudié dans le cadre d'une analyse linéaire de stabilité. Il se caractérise par l'apparition, à partir d'une valeur critique du nombre de Rayleigh Ra_c , de structures thermo-convectives advectées par l'écoulement moyen. Ces structures prennent la forme de rouleaux transverses contra-rotatifs.

Par comparaison au cas newtonien, les résultats numériques montrent que les conditions critiques associées à l'apparition de ces rouleaux sont fortement retardées en présence d'une contrainte seuil d'écoulement. L'effet stabilisant de celle-ci ou du nombre de Bingham cor-

2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire

respondant provient, d'une part, de l'annulation de la perturbation en vitesse dans la zone bouchon, réduisant ainsi l'épaisseur des zones "fluides" où les cellules peuvent se développer, et d'autre part, de l'augmentation globale de la viscosité effective et donc de l'augmentation de la dissipation visqueuse.

Il semble que la stratification de la viscosité, ainsi que l'anisotropie du tenseur des contraintes des perturbations n'aient pas un rôle fondamental sur les conditions critiques d'instabilité.

Les fluides à seuil ont en général un comportement rhéologique thermo-dépendant essentiellement à travers la viscosité plastique lorsqu'il s'agit d'un fluide de Bingham, ou de la consistance lorsqu'il s'agit d'un fluide d'Herschel-Bulkley. Cette thermodépendance est caractérisée dans la présente étude par le nombre de Pearson. L'écoulement de base perd son caractère symétrique par rapport à la situation où $\mu_p = \text{cte}$ et subit une réorganisation de l'écoulement. Les résultats numériques montrent que la décroissance de μ_p avec la température favorise le déclenchement des instabilités et les longueurs d'onde deviennent plus importantes. Cette tendance est attribuée à l'augmentation de l'épaisseur de la zone "fluide" supérieure, et à la diminution des vitesses axiales dans cette zone.

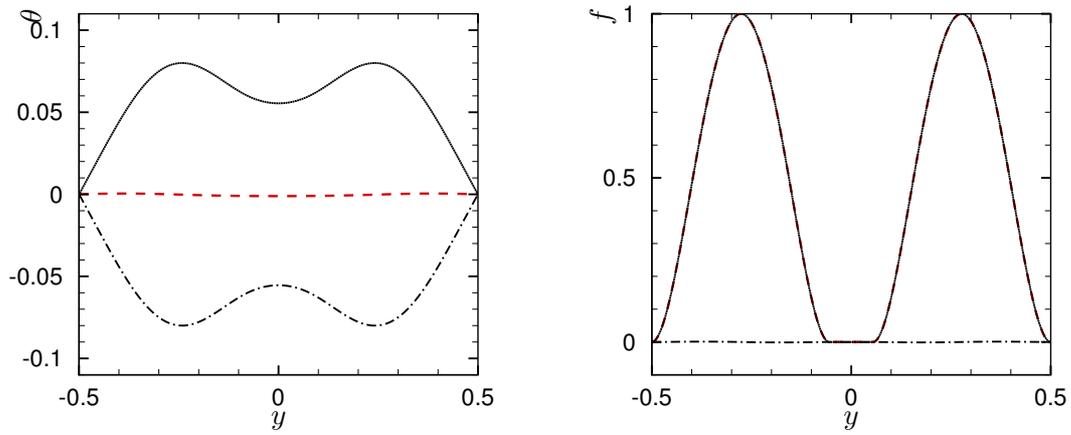
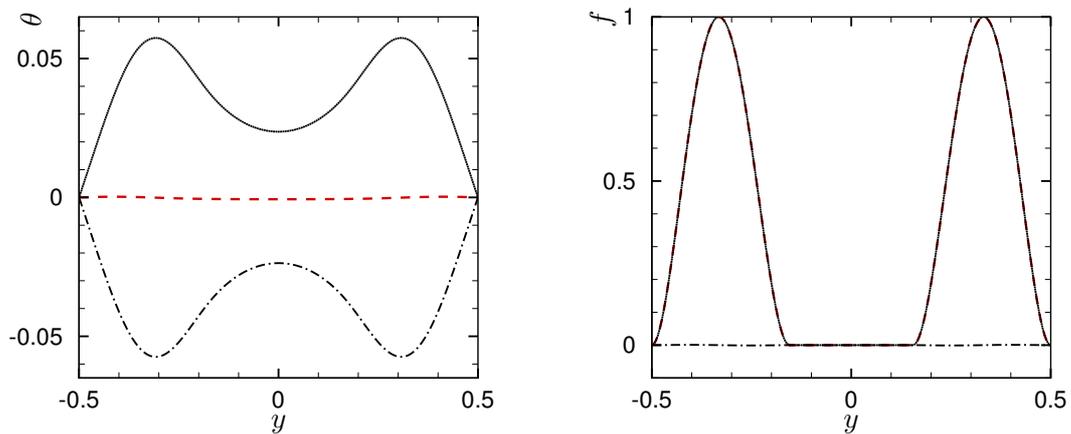
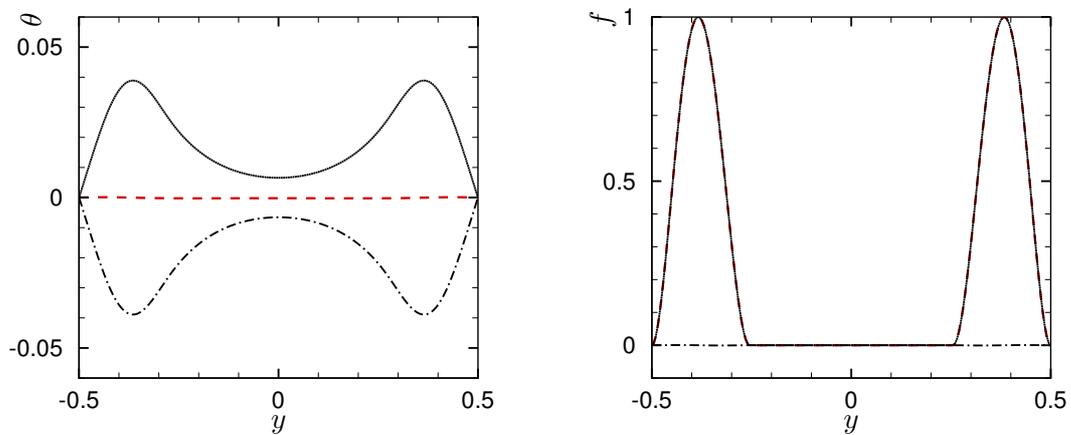
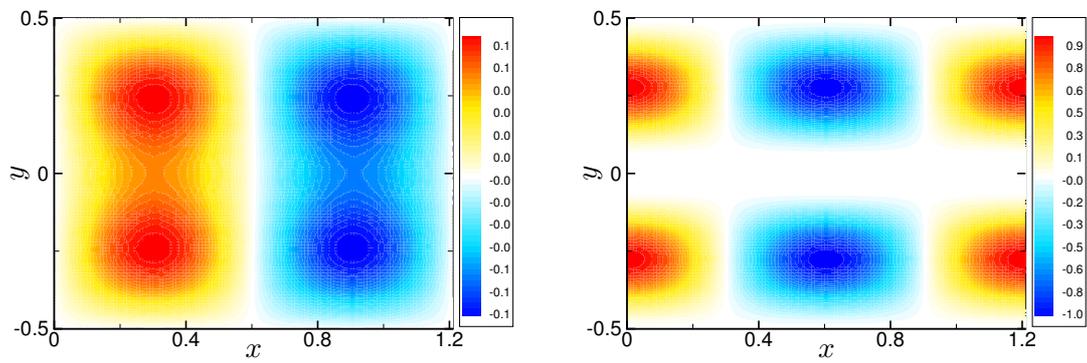
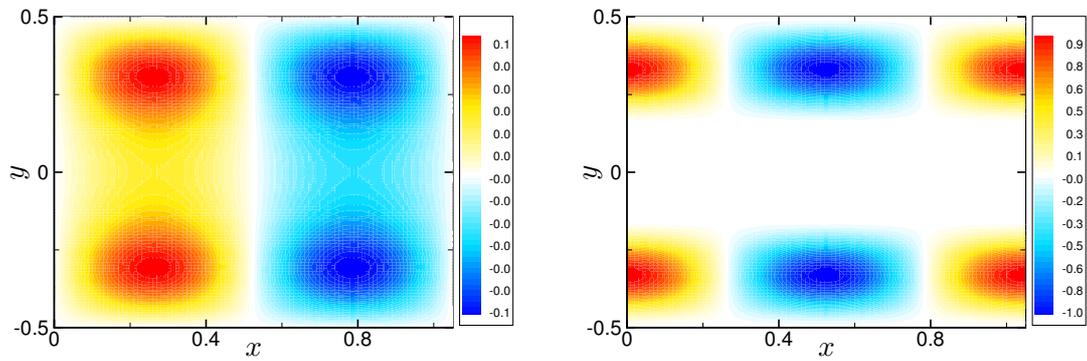
(a) $y_0 = 0.055$ (b) $y_0 = 0.155$ (c) $y_0 = 0.255$

FIG. 2.13 – Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite) (\cdots : θ_m, f_m) ; ($- - -$: θ_r, f_r) ; ($- \cdot - \cdot -$: θ_i, f_i)

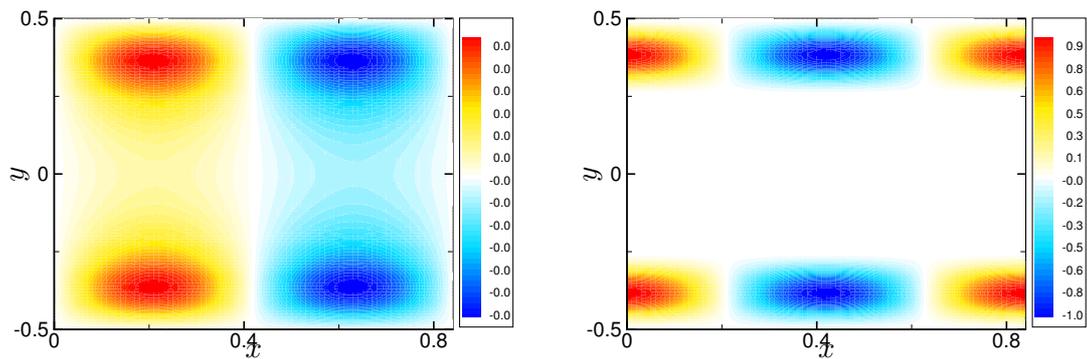
2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire



(a) $y_0 = 0.055$



(b) $y_0 = 0.155$



(c) $y_0 = 0.255$

FIG. 2.14 – Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite) pour différentes valeurs de y_0 .

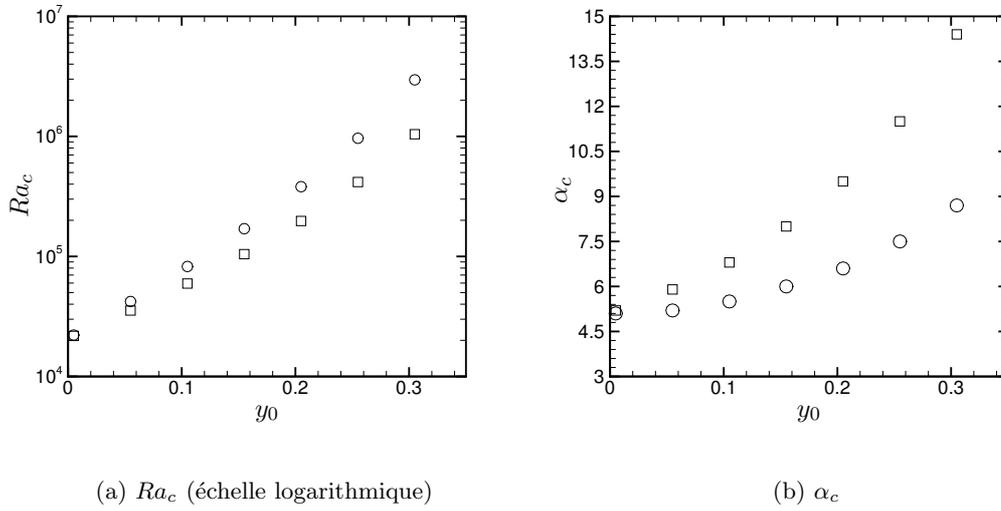


FIG. 2.15 – Paramètres critiques en fonction de l'épaisseur de la zone bouchon pour $Re = 0,1, Pr = 10$ (carrés: “ $B = 0$ ” dans les termes de l'équation d'Orr-Sommerfeld, cercles: $B \neq 0$)

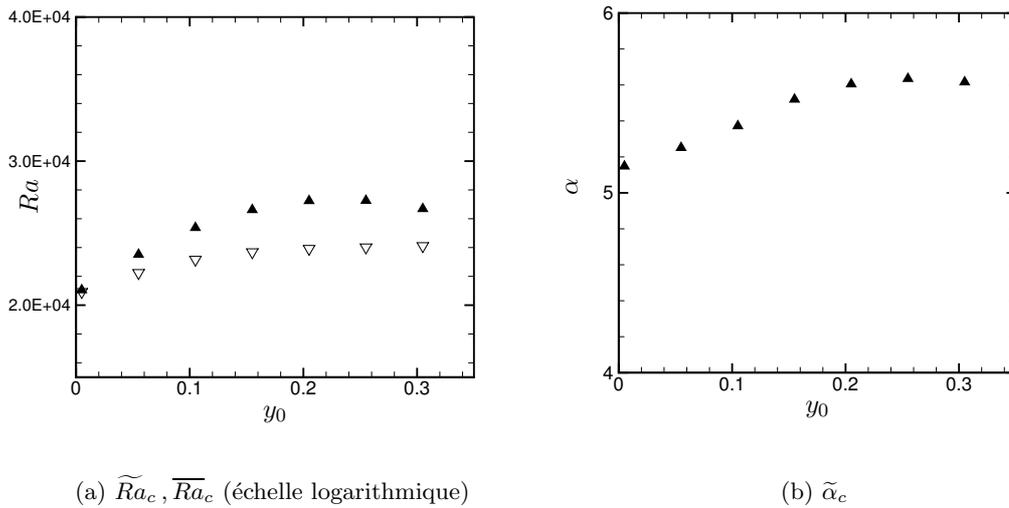


FIG. 2.16 – Paramètres critiques en fonction de l'épaisseur de la zone bouchon pour $Re = 0,1, Pr = 10$ (Triangles noirs: $\widetilde{Ra}_c, \widetilde{\alpha}_c$, Symboles nabra: \overline{Ra}_c)

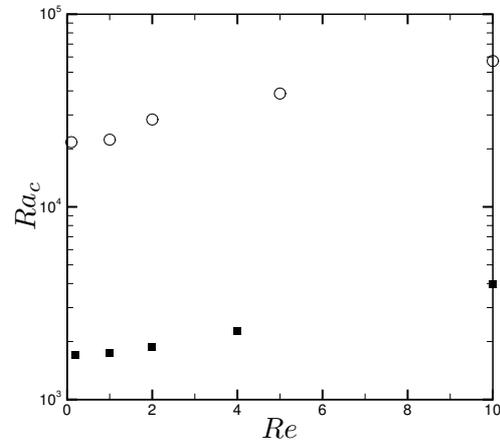


FIG. 2.17 – Nombre de Rayleigh critique pour différents nombres de Reynolds : fluide de Bingham avec $B = 1.2 \times 10^{-2}$ ($y_0 = 3 \times 10^{-3}$) (○) ; fluide Newtonien, résultats donnés par Ref. Nicolas et al. (2000) (■).

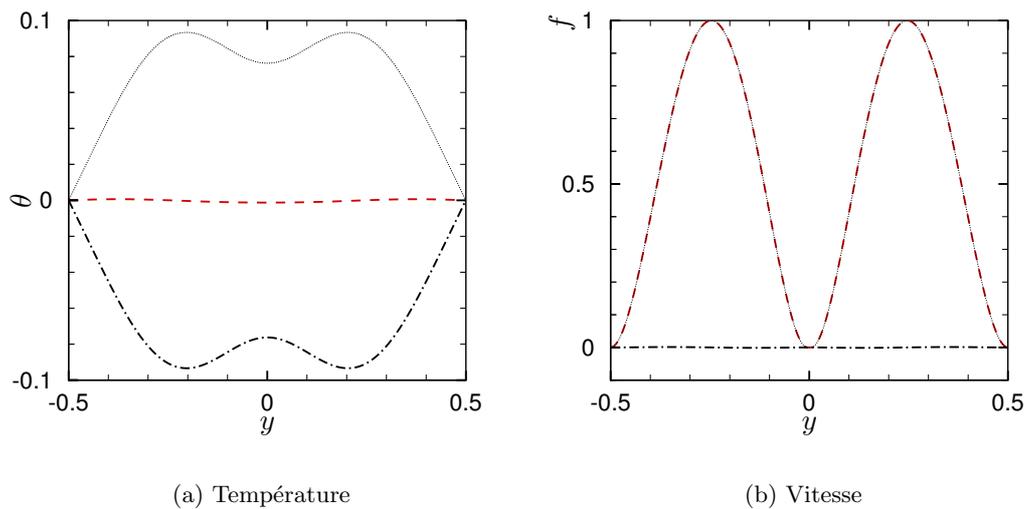


FIG. 2.18 – Profils de température et de vitesse pour le mode le moins stable ($\dots : \theta_m, f_m$) ; ($--- : \theta_r, f_r$) ; ($- \cdot - \cdot - : \theta_i, f_i$) : Résultats numériques.

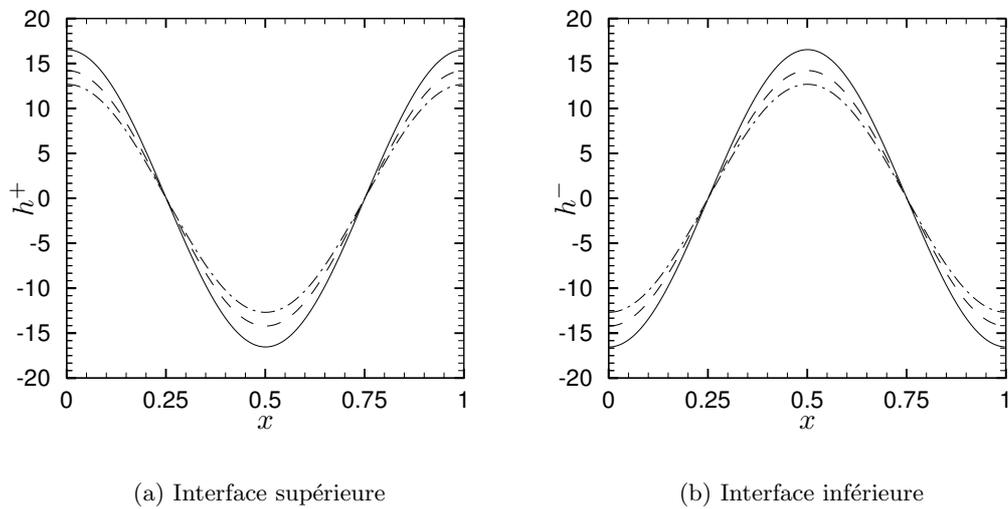


FIG. 2.19 – *Perturbation de la position des interfaces supérieure et inférieure (cas $Re = 0,1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0,055$: -----, $y_0 = 0,155$: - - - - et $y_0 = 0,255$: --- - - - - -)*

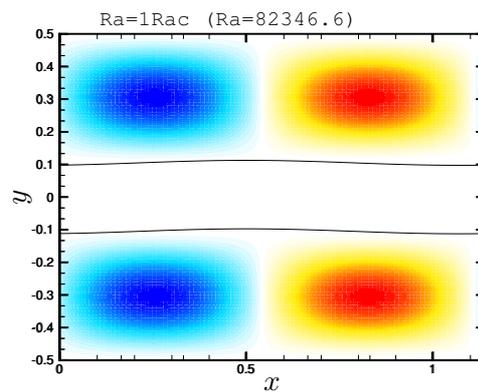
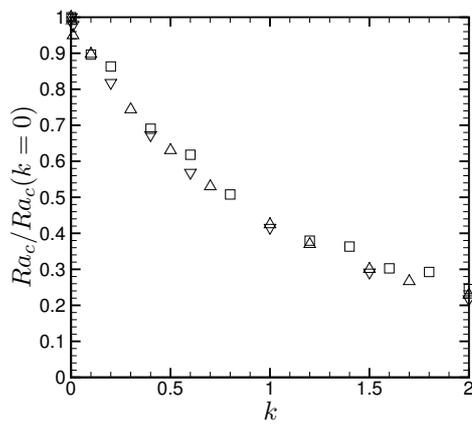
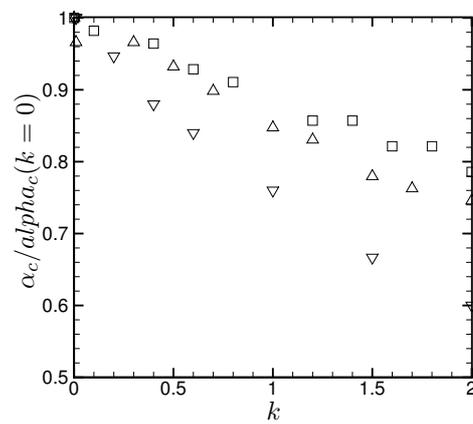


FIG. 2.20 – *Iso-valeurs de la fonction courant de perturbations et zone bouchon perturbée. Cas $Re = 0,1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0,105$*



(a) $Ra_c / Ra_c(k=0)$



(b) $\alpha_c / \alpha_c(k=0)$

FIG. 2.21 – Paramètres critiques en fonction du nombre de Pearson pour $Re = 1, Pr = 10$ (Symboles nabra: $y_0 = 0.25$, triangles noirs: $y_0 = 0.125$, carrés noirs: $y_0 = 0.075$)

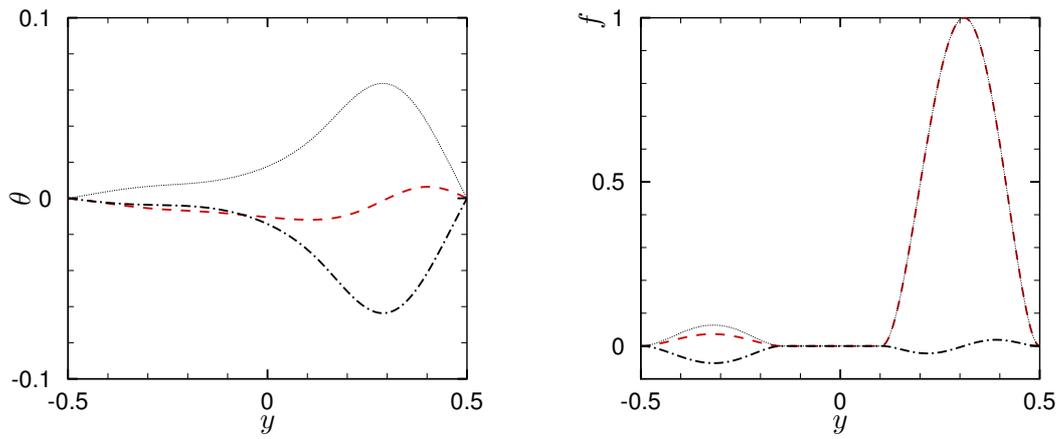
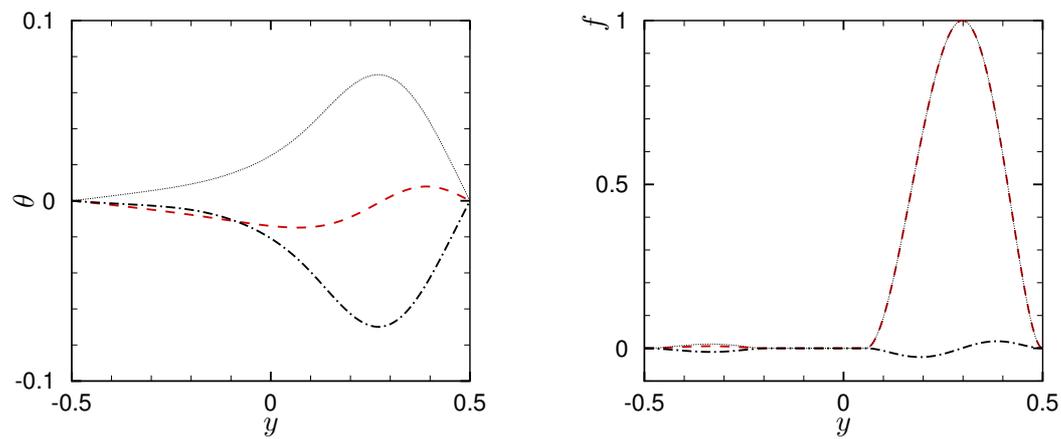
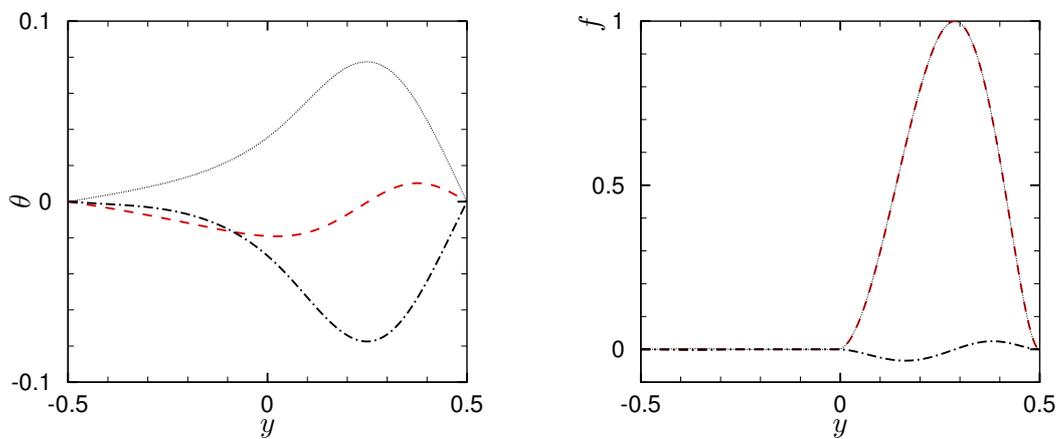
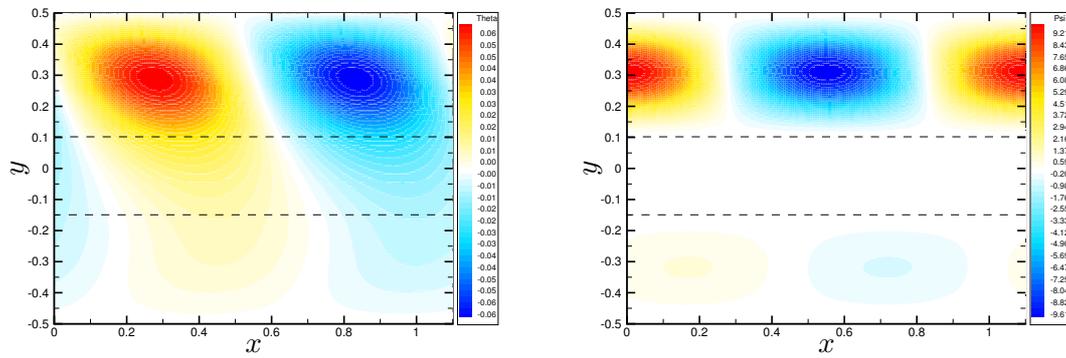
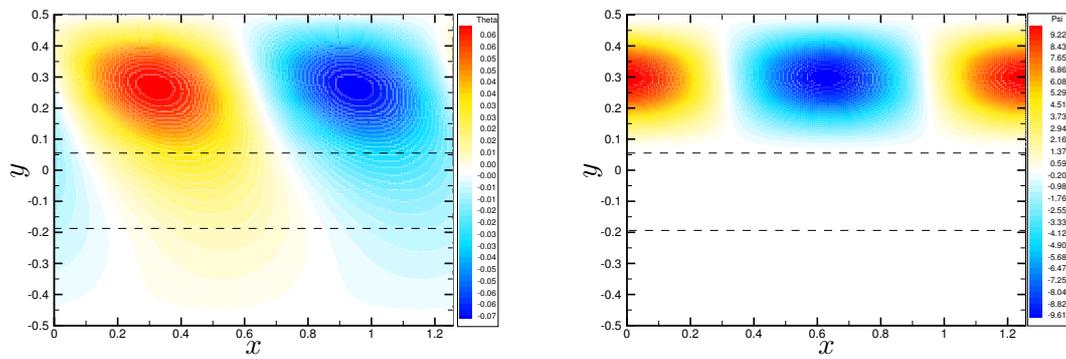
(a) $k = 0.3$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$

FIG. 2.22 – Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite) (\cdots : θ_m, f_m) ; ($- - -$: θ_r, f_r) ; ($- \cdot - \cdot -$: θ_i, f_i)

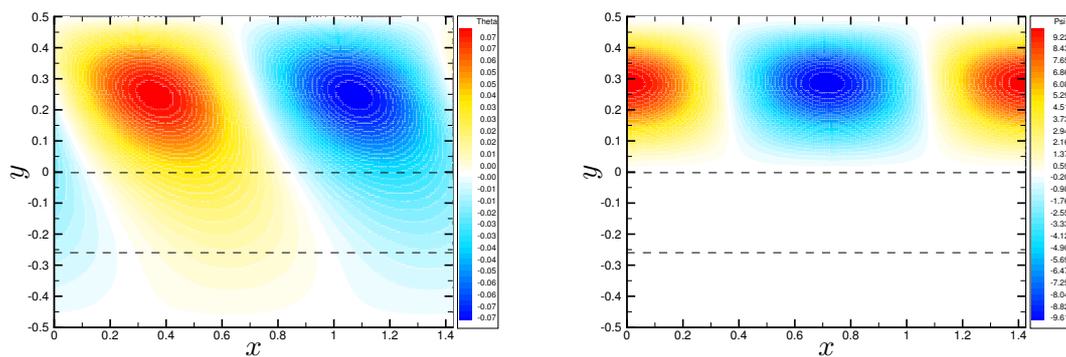
2. Convection mixte à faibles valeurs de nombre de Reynolds - Analyse de stabilité linéaire



(a) $k = 0.3$



(b) $k = 1$



(c) $k = 2$

FIG. 2.23 – Modes critiques de la perturbation : température (à gauche) et fonction courant (à droite). La zone bouchon de l'écoulement de base non perturbé est délimitée en pointillé.

Chapitre 3

Analyse faiblement non linéaire de stabilité

Au cours du Chapitre 2, nous avons effectué une analyse linéaire de stabilité d'un problème de convection mixte pour un fluide à seuil en écoulement entre deux plans horizontaux. A l'écoulement de base défini par (\mathbf{U}_b, T_b, p_b) , une perturbation infinitésimale¹ (\mathbf{u}, θ, p) , était imposée. Cette perturbation a ensuite été écrite sous la forme d'une superposition de modes normaux

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \theta, p) = & A \left(\tilde{\mathbf{u}}(y), \tilde{\theta}(y), \tilde{p}(y) \right) e^{i\alpha(x-ct)} \\ & + A^* \left(\tilde{\mathbf{u}}^*(y), \tilde{\theta}^*(y), \tilde{p}^*(y) \right) e^{-i\alpha(x-ct)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où A est une amplitude complexe de la perturbation avec $|A| \ll 1$. Dans l'équation précédente, le complexe conjugué $(\bullet)^*$ a été rajouté car seule la partie réelle a un sens physique. Le seuil d'instabilité (Ra_c, α_c) a été déterminé en fonction des paramètres sans dimension $(B, Re$ et $Pr)$. Au voisinage du point critique, c'est à dire pour un nombre de Rayleigh Ra , légèrement supérieur à la valeur critique Ra_c , $\left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \ll 1 \right)$, le mode critique n'est pas amorti et devient instable. Bien entendu, cette croissance exponentielle ne peut pas se poursuivre indéfiniment car cette augmentation va donner aux termes non linéaires provenant de $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ et $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{T}$ des équations de conservation un rôle qui ne peut plus être négligé. Le but de l'analyse faiblement non linéaire est justement d'examiner comment les termes non linéaires vont agir sur le mode le moins stable.

Dans cette approche, il est supposé que la solution du problème peut être écrite sous la forme d'un développement asymptotique autour du fondamental, *i.e.*, le mode critique. L'amplitude $A(t)$ de la perturbation étant considérée comme un petit paramètre. Par exemple, pour la perturbation de la fonction courant, on écrit :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & A_0(t) f_0(y) + A_1(t) f_1(y) e^{i\alpha(x-ct)} + c.c. \\ & + A_2(t) f_2(y) e^{2i\alpha(x-ct)} + c.c. \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

1. Contrairement au Chapitre 2, les perturbations sont notées (\mathbf{u}, θ, p) au lieu de $(\varepsilon\mathbf{u}, \varepsilon\theta, \varepsilon p)$ ($\varepsilon \ll 1$)

3. Analyse faiblement non linéaire de stabilité

Nous verrons par la suite que $A_0 = |A|^2$ et $A_2 = A^2$, avec $A = A_1$.

Examinons les termes non linéaires générés par l'Expression (3.2). En situation bidimensionnelle, les termes non linéaires dans l'équation de conservation de quantité de mouvement sont, par exemple, issus de :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \quad (3.3)$$

avec $\tilde{\omega} = -\nabla^2 \Psi$ qui correspond à la composante transverse (suivant z) de la vorticité.

En remplaçant $\Psi(x, y, t)$ par $\psi_b(y) + \psi(x, y, t)$, des termes quadratiques proportionnels à $|A|^2$, $A^2 e^{2i\alpha x}$ et $A^{*2} e^{-2i\alpha x}$ seront g en er es. Ainsi, le fondamental va générer une harmonique en $e^{\pm 2i\alpha x}$ dont la longueur d'onde est deux fois plus petite. Les termes en $|A|^2$, qui ne dépendent pas de x , vont modifier l'écoulement de base. A l'ordre suivant, les termes non linéaires g en er es sont proportionnels à $A|A|^2 e^{i\alpha x}$, $A^*|A|^2 e^{-i\alpha x}$, $A^3 e^{3i\alpha x}$ et $A^{*3} e^{-3i\alpha x}$. La description de cette cascade d'interactions non linéaires peut encore se poursuivre.

Comme il a été indiqu e, le but de cette approche est de déterminer l'évolution temporelle de la perturbation, soit $\frac{\partial A}{\partial t}$.

De la même manière que Rieutord (1997), on écrit $\frac{\partial A}{\partial t} = f(A)$ et on fait un développement de Taylor de f autour de A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = f(A) = f(0) + f'(0) A + \frac{f''(0)}{2} A^2 + \frac{f'''(0)}{6} A^3 + \dots \quad (3.4)$$

Comme $A = 0$ doit être solution du problème, alors $f(0) = 0$, de plus, la partie réelle de $f'(0)$ n'est autre que la partie réelle de la valeur propre $\sigma = -i\alpha c$ du problème linéaire. Pour des raisons de symétries (si A est solution $-A$ l'est aussi), les dérivées paires sont nulles donc : $f^{2n}(0) = 0$. Finalement, l'équation d'évolution de l'amplitude, équation de type Landau, est donnée par :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha c_i A + \lambda_1 |A|^2 A, \quad (3.5)$$

où λ_1 est la première correction engendrée par les termes non linéaires. Son équation conjuguée s'écrit :

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} = \alpha c_i A^* + \lambda_1^* |A|^2 A^*. \quad (3.6)$$

En effectuant la somme de $A^* \times (3.5)$ avec $A \times (3.6)$, nous obtenons :

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = 2\alpha c_i |A|^2 + 2\mathcal{R}e(\lambda_1) |A|^4. \quad (3.7)$$

Cette dernière équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial |A|^{-2}}{\partial t} = 2\alpha c_i |A|^{-2} + 2\mathcal{R}e(\lambda_1). \quad (3.8)$$

Ce qui nous permet de donner la solution générale de l'amplitude (Stuart (1960), Drazin et Reid (1981)) :

$$|A|^2 = \frac{|A_0|^2 e^{2\alpha c_i t}}{\left(1 + \frac{\mathcal{R}e(\lambda_1)}{\alpha c_i}\right) - \frac{\mathcal{R}e(\lambda_1)}{\alpha c_i} |A_0|^2 e^{2\alpha c_i t}}, \quad (3.9)$$

avec $|A_0|$ qui correspond à la valeur initiale de l'amplitude de la perturbation.

Selon les signes de c_i et de $\mathcal{Re}(\lambda_1)$, les non-linéarités vont soit permettre de modérer la croissance exponentielle de l'amplitude, soit au contraire l'accélérer.

On peut ainsi remarquer que l'amplitude peut être saturée par le terme en $|A|^4$ de l'Eq. (3.7). L'amplitude finale d'équilibre est donnée par :

$$|A_c|^2 = -\frac{\alpha c_i}{\mathcal{Re}(\lambda_1)}. \quad (3.10)$$

Dans la région surcritique, *i.e.* $c_i > 0$, la solution d'équilibre (3.10) n'existe que si $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$. Dans ce cas, la bifurcation est dite bifurcation en fourche *supercritique* et le système bifurque vers une solution stable donnée par (3.10). Les termes non linéaires contribuent à assurer un nouvel équilibre.

Dans le cas où la valeur de $\mathcal{Re}(\lambda_1)$ est positive, les solutions d'équilibre non nulles n'existent que si $c_i < 0$ et la perturbation prend comme valeur d'équilibre la valeur A_c donnée par l'Eq. (3.10) lorsque $t \rightarrow -\infty$. Si l'amplitude initiale est telle que $|A_0| < |A_c|$, alors $|A| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si l'amplitude est telle que $|A_0| > |A_c|$, alors la perturbation croît et tend vers l'infini lorsque $t = \frac{1}{2\alpha c_i} \ln \left(\frac{\alpha c_i}{|A_0|^2 \mathcal{Re}(\lambda_1)} + \frac{1}{|A_0|^2} \right)$, la solution n'est alors plus valable. Pour modérer le fait que l'amplitude devienne infinie pour un temps fini, il faut considérer les ordres supérieurs en amplitude dans l'Eq. (3.5). Ces termes ont des valeurs significatives dans le cas où $|A_0| > |A_c|$ et l'amplitude est alors croissante jusqu'à atteindre des valeurs finies. Ce cas est appelé instabilité *sous-critique* car l'instabilité se produit à des valeurs d'amplitude finies, là où l'écoulement reste stable vis à vis de perturbations infinitésimales.

Müller *et al.* (1989) ont montré que le problème de stabilité de type PRB pour un fluide Newtonien, donne lieu à une bifurcation supercritique à très faibles valeurs du nombre de Reynolds ($Re \ll 1$). On se propose dans ce qui suit de reprendre cette étude pour un fluide de Bingham, dans le cas où la viscosité plastique ne dépend pas de la température.

Pour cela, nous présenterons le principe de l'analyse faiblement non linéaire, ainsi que le formalisme associé pour aboutir finalement à l'équation de l'amplitude. Ce n'est qu'à partir des résultats numériques que nous pourrons conclure quant au type de bifurcation obtenue. A notre connaissance, cette étude faiblement non linéaire est la première réalisée pour des fluides à seuil. Encore une fois, comme il a été indiqué en introduction, la difficulté fondamentale réside dans le traitement des conditions aux interfaces de la zone bouchon avec la zone cisailée.

3.1 Notation et mise en équation

Comme il a été indiqué dans le paragraphe précédent, à l'écoulement de base défini par le vecteur (ψ_b, T_b) , on superpose une perturbation $\mathbf{V} = (\psi, \theta)$.

L'écoulement perturbé $(\psi_b + \psi, T_b + \theta)$ vérifie les équations de conservation de quantité de mouvement et d'énergie. Après avoir retranché la solution de l'écoulement de base, on obtient

les équations aux perturbations. De façon formelle, celles-ci peuvent être écrites sous la forme

$$\mathcal{D} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathcal{L}_R \mathbf{V} + N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V}) + \dots, \quad (3.11)$$

où \mathcal{D} et \mathcal{L}_R sont des opérateurs matriciels qui ne font intervenir que des dérivées partielles par rapport à x et y , avec :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

et

$$\mathcal{L}_R = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{R1} & \mathcal{L}_{R2} \\ \mathcal{L}_{R3} & \mathcal{L}_{R4} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Nous avons regroupé dans $\mathcal{L}_R \mathbf{V}$ tous les termes linéaires de type $(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u}$, $\nabla^2 \mathbf{u}$, etc... Les quantités $N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ et $N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})$ regroupent respectivement les termes non linéaires quadratiques et cubiques. Les termes quadratiques sont issus des expressions du type $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et de la perturbation de la viscosité. Les termes cubiques proviennent uniquement de la perturbation de la viscosité effective. Dans ce qui suit, nous nous proposons de donner les expressions des différents opérateurs \mathcal{D} et \mathcal{L}_R ainsi que les quantités $N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ et $N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})$.

3.1.1 Equation du mouvement

Les expressions qui suivent ne concernent que la **zone cisailée**.

$$\mathcal{D}_1 \psi = -\frac{1}{Pr} \Delta \psi. \quad (3.14)$$

Termes linéaires

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R1} \psi = & -\Delta^2 \psi + Re (U_b \partial_x (\Delta \psi) - D^2 U_b \partial_x \psi) \\ & - 4B D \left(\frac{\partial_{xxy} \psi}{\dot{\gamma}_b} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\dot{\gamma}_b = |DU_b|$. La notation $(\partial_x \bullet)$ correspond à la dérivée partielle de (\bullet) suivant x , de même pour les autres variables y et t .

$$\mathcal{L}_{R2} \theta = Ra \partial_x \theta. \quad (3.16)$$

On retrouve l'équation d'Orr-Sommerfeld modifiée donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}_1 \psi = \mathcal{L}_{R1} \psi + \mathcal{L}_{R2} \theta. \quad (3.17)$$

Termes non linéaires quadratiques

Les termes non linéaires quadratiques comportent deux parties :

La première provient du terme inertiel $\frac{1}{Pr} [\partial_y \psi \partial_x \omega - \partial_x \psi \partial_y \omega]$, avec $\omega = -\nabla^2 \psi$. Son écriture est immédiate.

La deuxième partie provient des composantes du déviateur du tenseur des contraintes et de la loi de comportement utilisée. En effet, la perturbation $\boldsymbol{\tau}(\psi)$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\tau}(\psi) = \boldsymbol{\tau}(\psi_b + \psi) - \boldsymbol{\tau}(\psi_b). \quad (3.18)$$

En introduisant la viscosité effective $\left(\mu(\Psi) = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\Psi)} = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\psi_b + \psi)} \right)$, la perturbation en contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}(\psi) = \mu(\Psi) [\dot{\boldsymbol{\gamma}}_b + \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\psi)] - \mu_b \dot{\boldsymbol{\gamma}}_b, \quad (3.19)$$

avec $\mu_b = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_b}$.

A partir d'un développement à l'ordre 3, on obtient de façon formelle :

$$\mu(\psi + \psi_b) = \mu_b + \mu_1(\psi) + \mu_2(\psi, \psi) + \mu_3(\psi, \psi, \psi) \quad (3.20)$$

où $\mu_1(\psi)$ est la perturbation de la viscosité au premier ordre, que nous avons utilisée dans le Chapitre 2. Les perturbations de viscosité aux ordres 2 et 3 correspondent respectivement à $\mu_2(\psi, \psi)$ et $\mu_3(\psi, \psi, \psi)$. Leurs expressions sont données dans l'Annexe D.

Finalement, à l'ordre 3, la perturbation $\boldsymbol{\tau}(\psi)$ peut s'écrire formellement comme suit :

$$\boldsymbol{\tau}(\psi) = \boldsymbol{\tau}_1(\psi) + \boldsymbol{\tau}_2(\psi, \psi) + \boldsymbol{\tau}_3(\psi, \psi, \psi), \quad (3.21)$$

avec :

$$\boldsymbol{\tau}_1(\psi) = \mu_b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\psi) + \mu_1(\psi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}_b. \quad (3.22)$$

Une fois encore, $\boldsymbol{\tau}_1(\psi)$ a déjà été donnée dans le Chapitre 2.

$$\boldsymbol{\tau}_2(\psi, \psi) = \mu_1(\psi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\psi) + \mu_2(\psi, \psi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}_b, \quad (3.23)$$

et

$$\boldsymbol{\tau}_3(\psi, \psi, \psi) = \mu_2(\psi, \psi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\psi) + \mu_3(\psi, \psi, \psi) \dot{\boldsymbol{\gamma}}_b. \quad (3.24)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})]_1 &= \frac{1}{Pr} [\partial_y \psi \partial_x \omega - \partial_x \psi \partial_y \omega] \\ &+ (\partial_{xx} - \partial_{yy}) \tau_{2xy}(\psi, \psi) + \partial_{xy} (\tau_{2yy}(\psi, \psi) - \tau_{2xx}(\psi, \psi)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Afin de pas alourdir le texte, l'expression développée finale de $[N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})]_1$ est donnée dans l'Annexe D.

Termes non linéaires cubiques

Les termes non linéaires cubiques ne proviennent que du déviateur du tenseur des contraintes.

Dans les zones cisillées, nous avons :

$$[N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})]_1 = (\partial_{xx} - \partial_{yy}) \tau_{3xy}(\psi, \psi, \psi) + \partial_{xy} [\tau_{3yy}(\psi, \psi, \psi) - \tau_{3xx}(\psi, \psi, \psi)]. \quad (3.26)$$

De même, l'expression développée peut être trouvée dans l'Annexe D.

Dans l'analyse faiblement non linéaire développée ici, il est supposé que la perturbation est dominée par le mode critique linéaire. Ainsi, de la même manière que dans l'analyse linéaire de stabilité, la zone bouchon est supposée rester intacte. En d'autres termes, nous supposons que la structure topologique de l'écoulement de base est conservée et qu'il n'y a pas de formation d'"îlots" de zone non cisillée.

Dans la zone bouchon, le modèle de Bingham impose la condition de non cisaillement $\dot{\gamma}_{ij} = 0$. Comme pour l'analyse linéaire de stabilité, la perturbation est supposée périodique suivant les directions longitudinale et transverse. Dans ce cas, le seul mouvement possible de la zone bouchon est un mouvement de translation. La vitesse est alors la même en tout point de la zone non cisillée :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_B(t), \quad (3.27)$$

en d'autres termes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

3.1.2 Equation de l'énergie

En identifiant les termes dans l'équation de l'énergie, on trouve :

$$\mathcal{D}_2(\theta) = -\theta. \quad (3.29)$$

Les parties linéarisées s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{R3}(\psi) = -DT_b \partial_x \psi, \quad (3.30)$$

et

$$\mathcal{L}_{R4}(\theta) = -\partial_{yy}\theta - \partial_{xx}\theta + P Re U_b (\partial_x \theta), \quad (3.31)$$

La partie non linéaire quadratique est donnée par :

$$[N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})]_2 = -(\partial_y \theta) (\partial_x \psi) + (\partial_x \theta) (\partial_y \psi). \quad (3.32)$$

Enfin :

$$[N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})]_2 = 0. \quad (3.33)$$

3.1.3 Conditions limites

Conditions aux parois

La condition de non glissement donne en terme de vitesse de perturbation :

$$u\left(\pm\frac{1}{2}\right) = v\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (3.34)$$

soit en terme de fonction de courant :

$$\psi_y\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\psi_x\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.35)$$

La condition de températures imposées fournit en terme de température de perturbation :

$$\theta\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.36)$$

Conditions aux interfaces, $y = y_i^\pm$

Comme nous le précisons précédemment, la condition de non cisaillement doit être vérifiée dans la zone bouchon ainsi qu'aux interfaces. Cela se traduit par :

$$\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U})|_{y_i^\pm} = 0. \quad (3.37)$$

A cela il convient de rajouter la condition de continuité des vitesses à travers les interfaces.

3.2 Hypothèses de travail

De manière classique, on suppose que la perturbation peut être approchée par une relation de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x, y, t) &= A_0(t) \mathbf{V}_0(y) \\ &+ A_1(t) \mathbf{V}_1(y) e^{i\alpha(x-ct)} + c.c. \\ &+ A_2(t) \mathbf{V}_2(y) e^{2i\alpha(x-ct)} + c.c. \\ &= \sum_{n=-2}^2 A_n(t) e^{in\alpha(x-ct)} \mathbf{V}_n(y) = \sum_{n=-2}^2 A_n(t) E^n \mathbf{V}_n(y), \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $\mathbf{V}_n(y) = (f_n(y), \theta_n(y))$ et $E^n = e^{in\alpha(x-ct)}$. Nous avons adopté les notations A_{-n} et \mathbf{V}_{-n} pour indiquer les complexes conjugués respectifs de A_n et \mathbf{V}_n ($A_{-n} = (A_n)^*$ et $\mathbf{V}_{-n} = (\mathbf{V}_n)^*$).

On suppose le développement asymptotique (3.38) valable pour des valeurs de nombre de Rayleigh proches de la valeur au seuil. En introduisant ϵ , l'écart relatif entre ces deux valeurs, nous avons :

- (i) Etude réalisée proche du mode marginal : $\epsilon = \frac{Ra}{Ra_c} - 1 \ll 1$.

On suppose, de plus, que l'amplitude complexe varie lentement en fonction du temps (ii) et que les amplitudes des différentes harmoniques sont passives devant l'amplitude du fondamental (iii) :

- (ii) Variations temporelles lentes des amplitudes complexes $A_n(t)$.
- (iii) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1, |A_n(t)| \ll |A_{\pm 1}(t)|$.

Enfin, nous admettrons que les interfaces perturbées prennent la même forme que l'Eq. (3.38). La position des interfaces est alors donnée par :

$$y_i^\pm = \pm y_0 \pm Y^\pm, \quad (3.39)$$

avec :

$$Y^\pm(x, t) = \sum_{n=-2}^2 A_n(t) E^n Y_n^\pm. \quad (3.40)$$

Ce chapitre étant riche en notations et afin d'éviter au lecteur de se référer sans cesse à la nomenclature, nous proposons, avant de poursuivre l'étude, un tableau récapitulatif (Tableau 3.1) des notations utilisées dans cette analyse.

3.3 Procédure

L'amplitude caractéristique de la perturbation est l'amplitude dominante, c'est à dire A_1 dans l'Eq. (3.38). Son évolution temporelle est décrite par l'équation de Landau complexe (Eq. (3.5)).

Pour aboutir à cette équation, on procède comme suit :

(i) Après avoir calculer les modes correspondants à la première harmonique, on remplace \mathbf{V} de l'Eq. (3.11) par son expression (3.38),

(ii) ensuite, on isole l'équation relative au mode 1 (termes en facteur de $e^{i\alpha(x-ct)}$) et enfin,

(iii) on réalise une projection de cette dernière équation sur le mode critique adjoint².

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes étapes nécessaires et précédant l'obtention de l'équation de l'amplitude. Il s'agira, dans un premier temps, de présenter les calculs permettant d'obtenir les harmoniques de la perturbation, *i.e.*, les modes 0 et 2. La section suivante s'attachera à poser le problème adjoint. L'équation de l'amplitude sera donnée dans la Section 3.7.

² Nous montrerons dans la remarque de la Section 3.7 que cette projection correspond à une condition de compatibilité

Notations	Correspondance
$U_b, T_b, p_b, \pm y_0$	Vitesse, température, pression, interfaces correspondant à l'écoulement de base
$\dot{\gamma}_b = DU_b $	Taux de cisaillement relatif à l'écoulement de base
$\mu_b = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_b}$	Viscosité relative à l'écoulement de base
$\mathbf{u}, \psi, \theta, p, \pm Y^\pm$	Perturbation en vitesse, fonction courant, température, pression, position des interfaces
$\tilde{\omega} = -\nabla^2 \Psi$	Composante transverse de la vorticité de l'écoulement perturbé
$\omega = -\nabla^2 \psi$	Perturbation de la composante transverse de la vorticité
$y_i^\pm = \pm y_0 \pm Y^\pm$	Positions des interfaces perturbées
$\sigma = -i \alpha c = -i s$	Taux de croissance de la perturbation
$\omega_c = \alpha_c c$	Pulsation critique (analyse linéaire)
ω_m	Modification de la pulsation critique par effet non linéaire
$\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \ll 1$	Ecart relatif au seuil
$(\bullet)_n$	(\bullet) Relatif au mode n ,
$(\bullet)_{-n}$	Relatif au complexe conjugué de $(\bullet)_n$
$\mathbf{V}_n = (f_n(y), \theta_n(y))$	Vecteur d'état de la perturbation en terme de fonction courant et température du mode n
$A_n \mathbf{V}_n E^n$	n ième harmonique de perturbation
A_n	Amplitude correspondant au mode n
$E^n = e^{in\alpha(x-ct)}$	Exponentielle décrivant les différentes harmoniques
$\langle \bullet \rangle_x$	Valeur moyennée de (\bullet) suivant x
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	Produit scalaire hermitien sur les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} .
Mode n (\bullet)	Identification du terme en facteur de E^n dans l'expression (\bullet) exemple: Mode n ($N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$) correspond à identifier le terme de $N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ en facteur de E^1

TAB. 3.1 – Rappel des notations concernant le Chapitre 3.

Enfin, la résolution numérique (Section 3.8) nous permettra de déterminer les coefficients de l'équation, ainsi que le type de bifurcation du problème.

Remarque :

Par souci de clarté, nous avons préféré noter α le nombre d'onde associé au mode critique plutôt que α_c comme nous l'avions défini dans la partie "résultats" du chapitre précédent. De la même façon pour les fonctions propres, elles sont notées \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_{-1} .

3.4 Mode 0

Le mode 0 correspond à l'harmonique qui ne dépend pas de la variable x , *i.e.* cas où $n = 0$ dans l'Eq. (3.38). Il provient de l'interaction du fondamental avec son complexe conjugué dans les termes non linéaires quadratiques. S'il est non nul, il peut modifier les caractéristiques de l'écoulement de base, indépendant de x .

En terme de vitesse et afin de satisfaire la conservation de la masse, ce mode prend la forme suivante: $\mathbf{u}_0 = (u_0(y), 0)$. De part la forme de \mathbf{u}_0 , il nous paraît plus naturel de travailler en terme de vitesse pour le mode 0. Les autres modes sont exprimés en terme de fonction courant.

Nous rappelons que θ_1 et f_1 sont les fonctions propres déterminées dans le Chapitre 2 pour $Ra = Ra_c$ et $\alpha = \alpha_c$, en outre $\theta_{-1} = \theta_1^*$ et $f_{-1} = f_1^*$.

Dans la zone cisailée, la vitesse $u_0(y)$ est obtenue par la résolution de l'équation de la quantité de mouvement suivant x , moyennée sur une période $2X = \frac{2\pi}{\alpha}$. On se place, de plus, dans des conditions de pertes de charge fixées, *i.e.* :

$$\langle \partial_x p_0 \rangle_x = 0, \tag{3.41}$$

où $\langle \bullet \rangle_x \equiv \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \bullet dx$.

Le terme de pression motrice disparaît alors dans l'équation de la quantité de mouvement moyennée. L'équation est identifiée en terme de " E^0 ". L'identification se limite aux termes qui ne dépendent pas de x , ainsi, nous obtenons, à l'ordre le plus bas :

$$\begin{aligned} \langle A_0 \partial_y \tau_{1xy}(u_0) \rangle_x &= |A_1|^2 \left\langle \frac{1}{Pr} (i \alpha D^2 f_1 f_{-1} - i \alpha f_1 D^2 f_{-1}) \right\rangle_x \\ &\quad - |A_1|^2 \langle \partial_y \tau_{2xy}(D f_1 E^1, D f_{-1} E^{-1}) \rangle_x, \end{aligned} \tag{3.42}$$

Nous en déduisons :

$$A_0 = |A|^2, \tag{3.43}$$

avec $A = A_1$.

Finalement, nous obtenons l'équation du mouvement dans la partie fluide :

$$\begin{aligned}
(Pr Re) D^2 u_0 = & i \alpha Re (D^2 f_1 f_{-1} - f_1 D^2 f_{-1}) \\
& + \frac{B \alpha^2}{DU_b \hat{\gamma}_b} (D^2 f_1 D f_{-1} + D^2 f_{-1} D f_1) - 2 \left(\frac{B \alpha^2 D^2 U_b}{(DU_b)^2 \hat{\gamma}_b} \right) (D f_1 D f_{-1}). \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Dans la zone non cisailée, la condition $\hat{\gamma}_{ij} = 0$ conduit à :

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad (3.45)$$

d'où :

$$u_0 = Cste. \quad (3.46)$$

En terme de température, l'équation de la chaleur est continue sur tout le domaine. Elle s'écrit à l'ordre $|A|^2$, en considérant les hypothèses quasistationnaires, de la manière suivante :

$$D^2 \theta_0 = i \alpha (D f_{-1} \theta_1 - D f_1 \theta_{-1} + f_{-1} D \theta_1 - f_1 D \theta_{-1}) \quad (3.47)$$

Conditions limites aux parois :

La condition de non glissement s'écrit en terme de vitesse

$$u_0(\pm 1/2) = 0. \quad (3.48)$$

La condition de températures imposées

$$\theta_0(\pm 1/2) = 0. \quad (3.49)$$

Conditions limites aux interfaces :

Les conditions aux limites provenant de la condition $\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{U})|_{y_i^\pm} = 0$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|_{\pm y_0} \pm Y_1^\pm [D^3 f_{-1}(\pm y_0) + \alpha^2 D f_{-1}(\pm y_0)] \\
\pm Y_{-1}^\pm [D^3 f_1(\pm y_0) + \alpha^2 D f_1(\pm y_0)] \pm Y_0^\pm D^2 U_b = 0. \quad (3.50)
\end{aligned}$$

A ces conditions, s'ajoutent celles obtenues à partir d'un bilan de conservation de quantité de mouvement sur un domaine $\Omega_s = [d-X; d+X] \times [y_i^-; y_i^+]$, avec d une constante quelconque, de la zone bouchon :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u})_i \iiint_{\Omega_s} d\mathcal{V} = \oint_{\delta\Omega_s} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \mathbf{e}_j dS + \iiint_{\Omega_s} Ra (T_b + \theta) \mathbf{e}_y d\mathcal{V}. \quad (3.51)$$

Le développement de ce système d'équations est détaillé dans l'Annexe E et permet finalement d'aboutir, par projection suivant \mathbf{x} et \mathbf{y} , aux équations donnant $Y_0^+ + Y_0^-$ et $Y_0^+ - Y_0^-$:

$$\begin{aligned}
Y_0^+ + Y_0^- = & \frac{1}{D^2 U_b} [Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) - Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0) - Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0)] \\
& - \frac{1}{D^2 U_b} [\alpha^2 B (|Y_1^+|^2 + |Y_1^-|^2)] \quad (3.52)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (Y_0^+ - Y_0^-) &= \frac{1}{y_0} (Y_1^+ \theta_{-1}(y_0) + Y_{-1}^+ \theta_1(y_0) + Y_1^- \theta_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^- \theta_1(-y_0)) \\ &+ \frac{y_0 \alpha^2}{2} (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2). \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.5 Mode 2

Le mode 2 correspond à l'harmonique de la perturbation qui modifie le fondamental. Il est généré par le fondamental qui interagit avec lui-même dans les termes non linéaires quadratiques $N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$:

$$\mathcal{D}.\partial_t(A_2 \mathbf{V}_2 E^2) - \mathcal{L}_R.A_2 \mathbf{V}_2 E^2 = N_2(A \mathbf{V}_1 E^1, A \mathbf{V}_1 E^1). \quad (3.54)$$

Sous l'hypothèse quasi-stationnaire de l'amplitude, nous écrivons :

$$A_2 [\mathcal{D}.\partial_t - \mathcal{L}_R] \mathbf{V}_2 E^2 = A^2 [N_2(\mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_1 E^1)], \quad (3.55)$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$A_2 = A^2. \quad (3.56)$$

Ainsi, le système d'équations gouvernant le Mode 2 prend la forme suivante :

Dans les parties cisillées :

$$\mathcal{P}_{12}f_2 + 2i\alpha Pr Re Ra\theta_2 = \mathcal{P}_{22}(f_1, f_1) \quad (3.57)$$

$$\mathcal{P}_{32}\theta_2 + 2i\alpha f_2 = -i\alpha(\theta_1 Df_1 - D\theta_1 f_1) \quad (3.58)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{12} &\equiv -2i\alpha c Re \mathcal{P} + 2i\alpha Pr Re^2 [U_b \mathcal{P} - D^2 U_b] - Pr Re \mathcal{P}^2 + 16 B 16 \alpha^2 Pr Re D \left[\frac{D}{|DU_b|} \right], \\ \mathcal{P} &\equiv D^2 - 4\alpha^2, \\ \mathcal{P}_{22}(f_1, f_1) &\equiv -Re i\alpha (Df_1 D^2 f_1 - f_1 D^3 f_1) \\ &+ B \left(\frac{1}{\dot{\gamma}_b DU_b} \right) \left(10\alpha^4 (Df_1)^2 + 8\alpha^4 f_1 D^2 f_1 + 9\alpha^2 (D^2 f_1)^2 + 9\alpha^2 Df_1 D^3 f_1 \right) \\ &+ B \left(\frac{D^2 U_b}{\dot{\gamma}_b (DU_b)^2} \right) (-16\alpha^4 f_1 Df_1 - 20\alpha^2 Df_1 D^2 f_1) \\ &+ B \left(\frac{(D^2 U_b)^2}{\dot{\gamma}_b (DU_b)^3} \right) (3\alpha^2 (Df_1)^2). \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\mathcal{P}_{32} \equiv -2i\alpha c + (Pr Re)2i\alpha U_b - (D^2 - 4\alpha^2)$$

Dans la zone non cisillée, la condition $\dot{\gamma}_{ij} = 0$ conduit à :

$$f_2 = 0. \quad (3.60)$$

Conditions limites aux parois

La condition de non glissement impose :

$$f_2(\pm 1/2) = 0. \quad (3.61)$$

De même, la condition de températures imposées implique une perturbation en température nulle aux parois :

$$\theta_2(\pm 1/2) = 0. \quad (3.62)$$

Conditions limites aux interfaces

Aux interfaces y_i^\pm , la condition $\dot{\gamma}_{ij}|_{y_i^\pm} = 0$ doit être satisfaite. L'identification des termes en facteurs de E^2 dans les expressions correspondantes à $\dot{\gamma}_{ij}$ permet d'écrire :

$$2 D f_2(\pm y_0) = (Y_1^\pm)^2 D^2 U_b, \quad (3.63)$$

$$D^2 f_2(\pm y_0) + 4 \alpha^2 f_2(\pm y_0) \pm Y_1^\pm D^3 f_1(\pm y_0) \pm Y_2^\pm D^2 U_b = 0. \quad (3.64)$$

Aux relations précédentes, il convient de rajouter la condition de continuité des vitesses aux interfaces qui conduit à :

$$f_2(\pm y_0) = 0 \quad (3.65)$$

Les équations (3.63) et (3.65) sont utilisées pour déterminer f_2 . L'équation (3.64) est une équation pour Y_2^\pm .

3.6 Problème adjoint

Cette section s'attache à présenter le problème adjoint du problème linéaire. Ce dernier est représenté sous sa forme générale $-i \alpha c \mathcal{D} \cdot (\mathbf{V}_1 E^1) = \mathcal{L}_R \cdot (\mathbf{V}_1 E^1)$ donnée par l'Eq. (2.69) au Chapitre 2.

Déterminer le problème adjoint consiste à rechercher les opérateurs \mathcal{D}^\dagger , \mathcal{L}_R^\dagger , tels que $\langle \mathcal{D} \mathbf{V}, \mathbf{V}_{ad} \rangle = \langle \mathbf{V}, \mathcal{D}^\dagger \mathbf{V}_{ad} \rangle$ et $\langle \mathcal{L}_R \mathbf{V}, \mathbf{V}_{ad} \rangle = \langle \mathbf{V}, \mathcal{L}_R^\dagger \mathbf{V}_{ad} \rangle$, où le produit scalaire hermitien est défini par :

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{W} \rangle = \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^* dx dy \quad (3.66)$$

Les détails de calcul du problème adjoint sont détaillés dans l'Annexe F. Finalement, nous obtenons :

– **Zone cisailée :**

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{R1}^\dagger & 1 \\ Pr Ra & \mathcal{L}_{R3}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{ad} \\ \theta_{ad} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{R2}^\dagger & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{ad} \\ \theta_{ad} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{V}_{ad} = (f_{ad}, \theta_{ad}), \quad (3.67)$$

le vecteur adjoint. Les opérateurs adjoints $\mathcal{L}_{R1}^\dagger, \mathcal{L}_{R2}^\dagger, \mathcal{L}_{R3}^\dagger$ et \mathcal{D}^\dagger sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{R1}^\dagger \equiv Pr Re [U_b (D^2 - \alpha^2) + 2DU_b D] - i \frac{Pr}{\alpha} (D^2 - \alpha^2)^2 + 4i \alpha Pr B D \left(\frac{D}{|DU_b|} \right), \\ \mathcal{L}_{R2}^\dagger \equiv D^2 - \alpha^2, \\ \mathcal{L}_{R3}^\dagger \equiv Pr Re U + i\alpha - \frac{i}{\alpha} D^2, \\ \mathcal{D}^\dagger \equiv \mathcal{D}. \end{cases}$$

– **Zone non cisillée :**

$$\begin{aligned} f_{ad} &= 0, \\ \mathcal{L}_{R3}^\dagger \theta_{ad} &= c \theta_{ad}. \end{aligned}$$

3.7 Equation de l'amplitude

La projection du système (3.11), dans lequel le terme en facteur de E^1 a été isolé, sur le mode critique adjoint \mathbf{V}_{adj} permet d'obtenir l'équation de l'amplitude.

L'Equation (3.11) ainsi identifiée s'écrit³ :

$$\begin{aligned} (Pr Re)^2 E^{-1} (\partial_t A - i \alpha c A) \mathcal{D}. (\mathbf{V}_1 E^1) &= (Pr Re)^2 E^{-1} A \mathcal{L}_R. (\mathbf{V}_1 E^1) \\ &+ (Pr Re)^2 \mathbf{Mode 1} ([N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})] + [N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})]), \end{aligned} \quad (3.68)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{Mode 1} (N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})) &= E^{-1} |A|^2 A ([N_2(\mathbf{V}_{-1} E^{-1}, \mathbf{V}_2 E^2)] + [N_2(\mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_0)]) \\ &+ E^{-1} (|A|^2 A [N_3(\mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_{-1} E^{-1})]). \end{aligned} \quad (3.69)$$

La projection de l'Eq. (3.68) sur le mode critique adjoint donne à l'ordre le plus bas :

$$\partial_t A + i \omega_c = \sigma \epsilon A + \lambda_1 |A|^2 A, \quad (3.70)$$

soit encore :

$$\partial_t A = \frac{1 + iS}{\tau} \epsilon A + \lambda_1 |A|^2 A. \quad (3.71)$$

Par identification nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(Pr Re)^2}{(Pr Re)^2 \langle \mathcal{D}. \mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_{adj} \rangle} \langle [N_2(\mathbf{V}_{-1} E^{-1}, \mathbf{V}_2 E^2)] + [N_2(\mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_0)], \mathbf{V}_{adj} \rangle \\ &+ \frac{(Pr Re)^2}{(Pr Re)^2 \langle \mathcal{D}. \mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_{adj} \rangle} \langle [N_3(\mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_1 E^1, \mathbf{V}_{-1} E^{-1})], \mathbf{V}_{adj} \rangle \end{aligned} \quad (3.72)$$

³. Nous avons rajouté E^{-1} en facteur à droite des Eqs. (3.68) et (3.69) pour signifier l'identification du mode

que nous écrivons aussi :

$$\lambda_1 = -g_1(1 + iC) \quad (3.73)$$

où g_1 et C sont des réels.

Le terme $\left(\frac{1+iS}{\tau}\right)$ provient du taux de croissance $\sigma = -i\alpha c$ pour lequel un développement limité en ϵ est possible puisque l'étude est réalisée près du seuil. Le développement limité donne à l'ordre 1 :

$$\sigma = -i\omega_c + \frac{1+iS}{\tau}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (3.74)$$

où nous reconnaissons la pulsation critique $\omega_c = \alpha_c c$ et où $\tau = \frac{1}{\mathcal{R}e(\sigma)} > 0$ représente le temps caractéristique.

Remarque importante :

En réalité, dans le développement de la solution \mathbf{V} donnée par l'Eq. (3.38), il est clair que des termes d'ordres supérieurs existent, en particulier, un terme en $|A|^2 A e^{i\alpha(x-ct)}$ "corrige" le fondamental. Ainsi, un développement plus complet de la solution est :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & [A \mathbf{V}_1 E^1 + c.c.] + |A|^2 \mathbf{V}_0 + [A^2 \mathbf{V}_2 E^2 + c.c.] \\ & + [|A|^2 A \mathbf{V}_3 E^1 + c.c.] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.75)$$

Si l'on remplace \mathbf{V} donné par l'Eq. (3.75), dans l'Eq. (3.11), les termes en E^1 à l'ordre $\epsilon^{3/2}$ donnent :

$$|A|^2 A (\mathcal{L}_R + i\alpha c \mathcal{D}) \mathbf{V}_3 = \partial_t A \mathcal{D} \mathbf{V}_1 - A (\mathcal{L}_R + i\alpha c \mathcal{D}) \mathbf{V}_1 - \text{Mode } \mathbf{1} (N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})). \quad (3.76)$$

Or, nous avons montré que :

$$(\mathcal{L}_R + i\alpha c \mathcal{D}) \mathbf{V}_1 = \frac{1+iS}{\tau} \epsilon \mathcal{D} \mathbf{V}_1. \quad (3.77)$$

Une condition nécessaire pour résoudre l'Eq. (3.76) est que la projection de cette équation sur le mode adjoint \mathbf{V}_{adj} soit vérifiée :

$$\frac{|A|^2 A}{\langle \mathcal{D} \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_{adj} \rangle} \langle (\mathcal{L}_R + i\alpha c \mathcal{D}) \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_{adj} \rangle = \partial_t A - \epsilon \frac{1+iS}{\tau} A - \lambda_1 |A|^2 A, \quad (3.78)$$

or

$$\langle (\mathcal{L}_R + i\alpha c \mathcal{D}) \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_{adj} \rangle = \left\langle \mathbf{V}_3, \left(\mathcal{L}_R^\dagger + i\alpha c \mathcal{D}^\dagger \right) \mathbf{V}_{adj} \right\rangle = 0. \quad (3.79)$$

Finalement, en écrivant cette condition de compatibilité, nous retrouvons l'équation de l'amplitude (terme de droite de l'Eq. (3.78)).

Le signe du coefficient g_1 détermine le type de bifurcation. Lorsque $g_1 > 0$, la bifurcation est de type super-critique et lorsque $g_1 < 0$ la bifurcation est sous-critique.

Dans le cas d'une bifurcation super-critique, l'amplitude va croître au-delà du seuil jusqu'à atteindre une valeur de saturation.

En utilisant une représentation polaire de l'amplitude :

$$A = \rho e^{i\phi}, \quad (3.80)$$

avec ρ et ϕ des réels, nous obtenons en identifiant la partie réelle de l'Eq. (3.71) :

$$\partial_t \rho = \frac{\epsilon}{\tau} \rho - g_1 \rho^3, \quad (3.81)$$

$$\partial_t \phi = \frac{S\epsilon}{\tau} - g_1 C \rho^2, \quad (3.82)$$

Cette dernière équation montre que ρ se stabilise aux temps longs sur la valeur de saturation :

$$\rho = |A| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g_1}}. \quad (3.83)$$

A partir de cette valeur de saturation atteinte, la phase sera de la forme:

$$\phi = \phi_0 - \omega_m t, \quad (3.84)$$

où ϕ_0 correspond à la valeur initiale de la phase et

$$\omega_m = \frac{C - S}{\tau} \epsilon = g_1 (C - S) |A|^2. \quad (3.85)$$

ω_m a le même rôle qu'une correction de la pulsation $\omega_c = \alpha_c c$ du mode critique linéaire. Ainsi, on écrit :

$$E^1 \mathbf{Mode1}(\mathbf{V}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g_1}} e^{i\alpha_c x} e^{i[\phi_0 - (\omega_c + \omega_m)t]} \mathbf{V}_1(y), \quad (3.86)$$

ce qui montre, d'après l'Eq. (3.85) le phénomène de variation de la fréquence de l'oscillation avec son amplitude.

Dans le cas d'une bifurcation sous-critique, le coefficient g_1 est négatif. Cela signifie qu'à l'ordre cubique ($|A|^2 A$), les effets non linéaires ont tendance à renforcer l'instabilité et aucune solution stationnaire ne peut être obtenue à cet ordre. Ainsi, une solution saturante pour l'instabilité doit être recherchée aux ordres supérieurs.

3.8 Résolution numérique

La résolution du problème consiste à déterminer, à partir du mode critique obtenu lors de l'analyse linéaire, les Modes 0 et 2, le mode critique adjoint et finalement les valeurs numériques des coefficients permettant de caractériser l'évolution de l'amplitude (Eq. (3.71)).

La méthode numérique utilisée dans cette partie est une méthode aux différences finies centrées, présentée dans le Chapitre 2 (Section 2.7).

Le code a été testé pour un fluide Newtonien lorsqu'un schéma de discrétisation à l'ordre 2 est utilisé. En comparant nos résultats avec ceux obtenus par Müller *et al.* (1989), dans le

cas où $Pr = 1$, nous retrouvons que la bifurcation est surcritique ($g_1 > 0$) et que le coefficient C dépend linéairement du nombre de Reynolds. De plus, pour $N = 201$, nous trouvons $C = 0.01619 Re$ ce qui correspond à un coefficient $C = 0.0108 Re_{moy}$ lorsque le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse débitante. Ce coefficient est à comparer avec celui obtenu par Müller : $C = 0.0113 Re_{moy}$. La correspondance des valeurs à moins de 5% d'écart, nous a permis de valider notre code.

L'étude de la convergence du code est réalisée sur les valeurs prises par le coefficient g_1 de l'Eq. (3.72), en faisant varier le nombre de points de $N = 201$ jusqu'à $N = 1001$. Le Tableau 3.2 présente les valeurs numériques de ce coefficient obtenues à partir du schéma de discrétisation à l'ordre 2, pour $y_0 = 0.06$ et $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. Les valeurs obtenues pour g_1 ne convergent pas à cet ordre.

En réalité, cette étude nécessite le calcul des dérivations successives jusqu'à la dérivée quatrième et plus particulièrement les conditions limites aux interfaces (Eq. (3.53)-(3.64)) nécessitent une plus grande précision que pour l'analyse linéaire, puisqu'elles font apparaître une dérivée d'ordre 3.

N	$y_0 = 0.06$	$y_0 = 0.1$
201	29 430 949.11	59 417 500.84
301	33 158 752.30	66 807 899.77
401	35 187 645.45	70 729 840.29
501	36 482 785.68	73 162 388.76
601	37 369 101.86	74 854 884.06
701	37 987 298.48	76 013 828.89
801	38 519 329.92	76 920 703.86
901	37 186 900.47	76 074 434.24
1001	34 152 705.01	70 931 454.18

TAB. 3.2 – Valeurs numériques du coefficient g_1 obtenues avec une précision de calcul à l'ordre 2.

Finalement, un schéma d'ordre 4 a été adopté pour obtenir une meilleure précision de calcul, comme permet de le souligner le Tab. (3.3). Cette méthode fait apparaître une variation relative de la valeur de g_1 de 2% pour des nombres de points compris entre $N = 801$ et $N = 1001$.

Les résultats présentés dans la section suivante sont obtenus pour $N = 801$ points de discrétisation.

3.9 Résultats

Les résultats présentés ont été obtenus avec \mathbf{V}_1 normé (Chapitre 2).

N	$y_0 = 0.06$	$y_0 = 0.1$
201	33218493.02	66901359.44
301	35826996.10	71940273.26
401	37243335.88	74629608.08
501	38151943.94	76329014.19
601	38781781.61	77465274.90
701	39236768.60	78384871.21
801	39581486.95	78992245.32
901	39882930.32	79559705.19
1001	40263404.88	79977858.28

TAB. 3.3 – Valeurs numériques du coefficient g_1 obtenues avec une précision de calcul à l'ordre 4.

3.9.1 Mode 2

Le mode 2 est obtenu par résolution du système d'équations (3.57)-(3.60), muni de ces conditions aux limites (3.61)-(3.64). Il engendre une modification du fondamental de la perturbation.

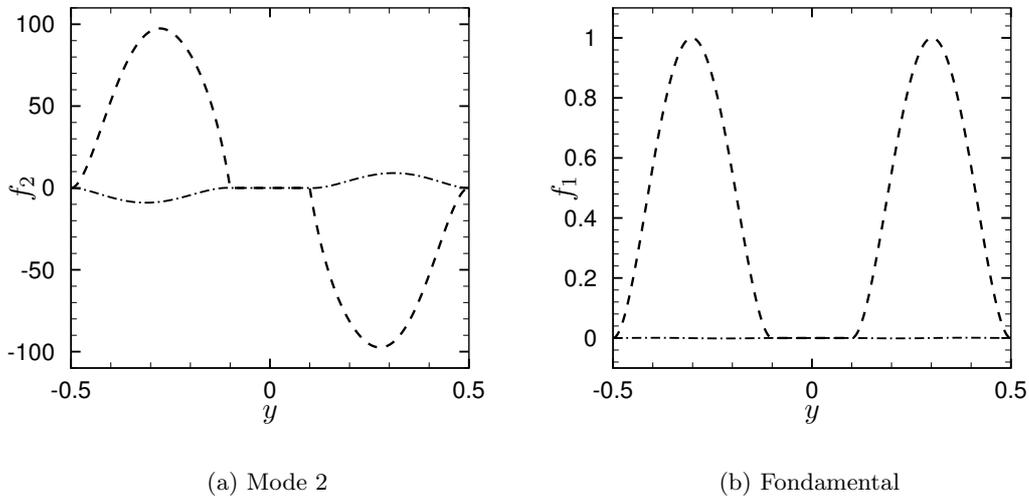


FIG. 3.1 – Perturbation en terme de fonction courant pour les modes 1 et 2: Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. (Pointillés: Parties réelles); (Traits mixtes: Parties imaginaires)

Les Figures 3.1 et 3.2 présentent les résultats numériques obtenus pour le mode 2 (à gauche), respectivement en terme d'amplitude de la fonction courant $f_2(y)$ et de la température $\theta_2(y)$. Sur les parties droites de ces figures, le fondamental est rappelé pour permettre la comparaison entre les deux modes.

Les Fig. 3.3 et 3.4 présentent les perturbations, respectivement les contours des isovaleurs

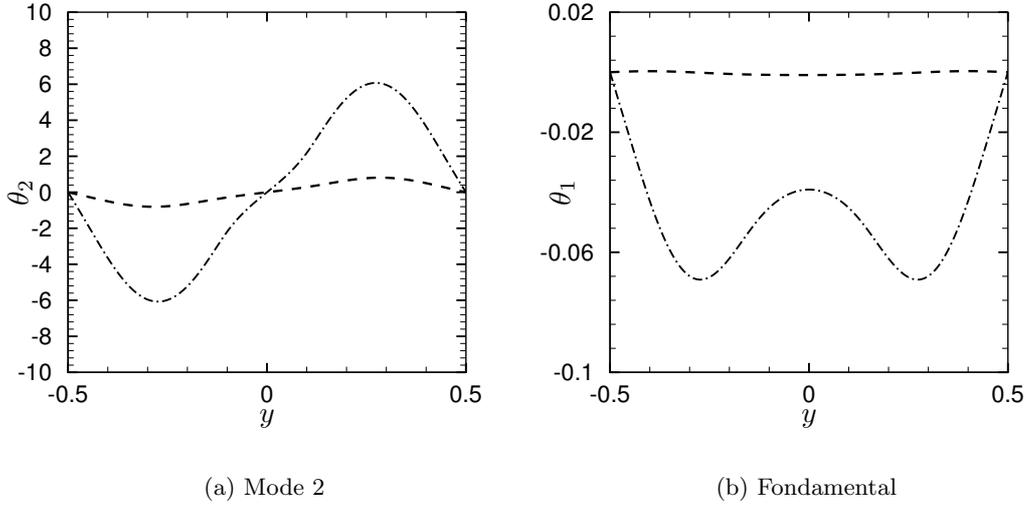


FIG. 3.2 – *Perturbation en température en terme de modes 1 et 2 : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. (Pointillés : Parties réelles); (Traits mixtes : Parties imaginaires)*

de la fonction courant $\psi_k(x, y) E^k$ et de la température $\theta_k(x, y) E^k$ ($k = 1$ ou 2) dans le plan (x, y) , sur une période $2\pi/\alpha$ suivant x . Nous retrouvons, à gauche la perturbation du mode 2 et à droite, celle du fondamental. L'harmonique correspondant au mode 2 présente la même structure que celle du fondamental, c'est à dire des rouleaux de convection de part et d'autre de la zone bouchon. Par contre, le nombre de motifs est plus important, pour le mode 2, du fait que la longueur d'onde est deux fois plus petite comparée à celle du fondamental.

Finalement, les perturbations des interfaces ($Y_2^+ E^2$) et ($-Y_2^- E^2$) sont présentées sur la Fig. 3.5.

Les résultats numériques montrent que les modules de $f_2(y)$, $\theta_2(y)$ et $\pm Y_2^\pm$ sont beaucoup plus importants que ceux correspondants au mode 1 (jusqu'à plus de 1000 fois, pour le cas présenté). Nous rappelons néanmoins que par hypothèse, le terme $A(t)^2 \mathbf{V}_2(y)$ doit rester négligeable devant le terme $A(t) \mathbf{V}_1(y)$. Cela nous conduit à considérer une première condition sur l'amplitude de perturbation : $|A| \ll 10^{-3}$.

3.9.2 Mode 0

Pour ce qui est du mode 0, celui-ci est obtenu par résolution du système d'équations (3.44)-(3.47) et de ces conditions limites (3.48)-(3.53). Comme il s'agit de l'écoulement moyen, les résultats correspondants sont présentés en parallèle avec ceux de l'écoulement de base.

Tout d'abord, les Fig. 3.6 et 3.7 présentent, respectivement, la perturbation en terme de vitesse et de température du mode 0 (à gauche) comparée aux composantes correspondantes

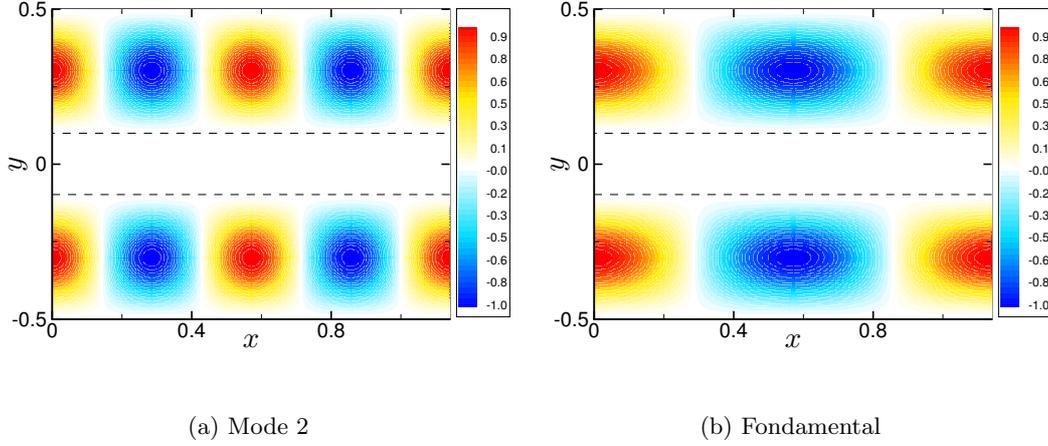


FIG. 3.3 – Modes 2 (gauche) et 1 (droite) de la fonction courant de perturbation dans le plan (x, y) : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. Les traits pointillés délimitent la zone bouchon de l’écoulement de base.

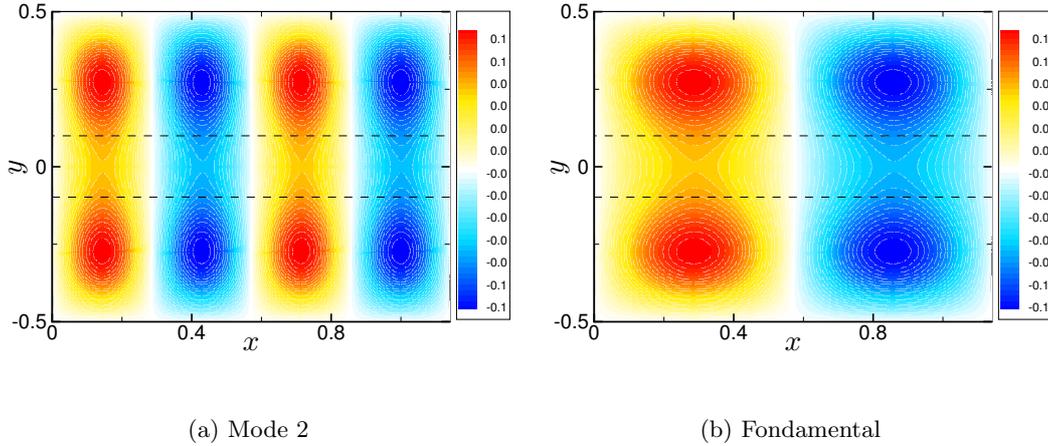


FIG. 3.4 – Modes 2 (gauche) et 1 (droite) de la température de perturbation dans le plan (x, y) : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$. Les traits pointillés délimitent la zone bouchon de l’écoulement de base.

de l’écoulement de base (à droite). La Figure 3.6 montre que la vitesse u_0 prend des valeurs négatives. Le mode 0 a donc tendance à ralentir l’écoulement de base. Il s’accompagne en même temps d’une augmentation de l’épaisseur de la zone non cisillée, comme le montre la Fig. 3.8. Les valeurs négatives de u_0 et positives de Y_0^+ caractérisent des conséquences opposées sur le développement des instabilités.

En outre, il faut noter que les valeurs de u_0 sont de l’ordre de 10^4 , dans le cas où $Re = 0.1$, $Pr = 10$. De la même manière que pour le mode 2, l’hypothèse (iii) de la section 3.2, qui impose que le fondamental, *i.e.* “ $A(t) \mathbf{V}_1$ ” domine les autres modes, sera satisfaite si $|A| \ll$

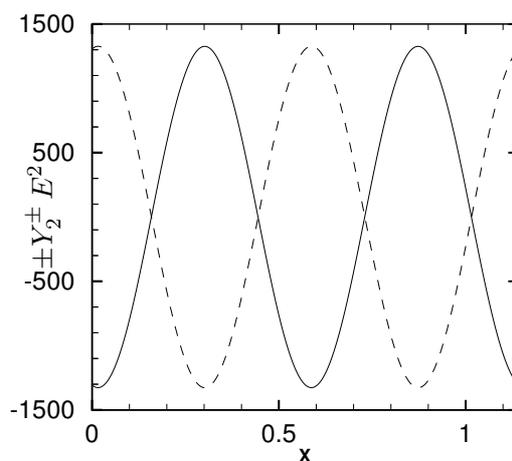


FIG. 3.5 – *Perturbation des interfaces correspondant au mode 2. Représentation de $Y_2^+ E^2$ et de $-Y_2^- E^2$. Cas $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0.105$ (- - - : $Y_2^+ E^2$); (— : $-Y_2^- E^2$): Résultats numériques).*

10^{-4} . L'analyse des résultats numériques montre que les grandes valeurs prises par la vitesse du mode 0 sont dues à la forte stratification de la viscosité effective, les variations les plus importantes étant aux abords des interfaces.

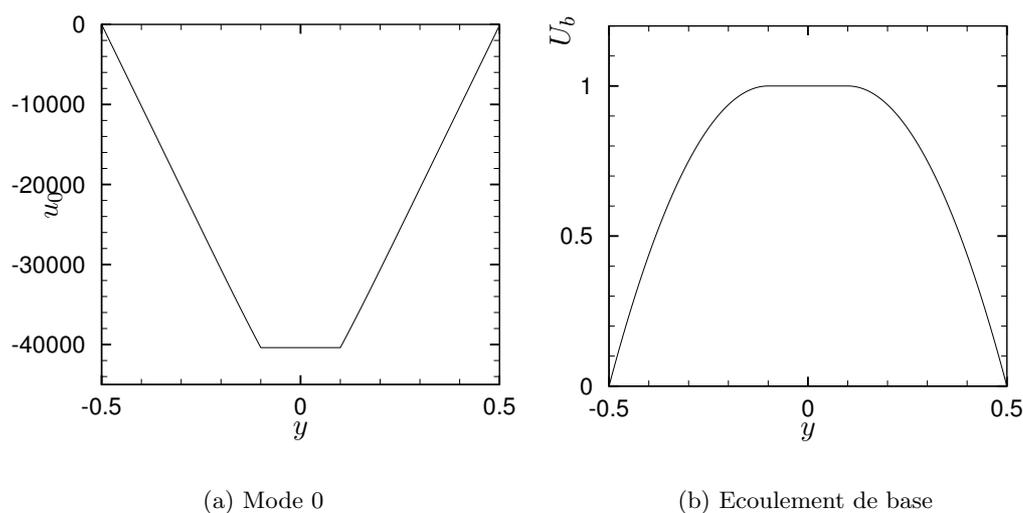


FIG. 3.6 – *Vitesse de la perturbation pour le mode 0 et vitesse de l'écoulement de base: Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$.*

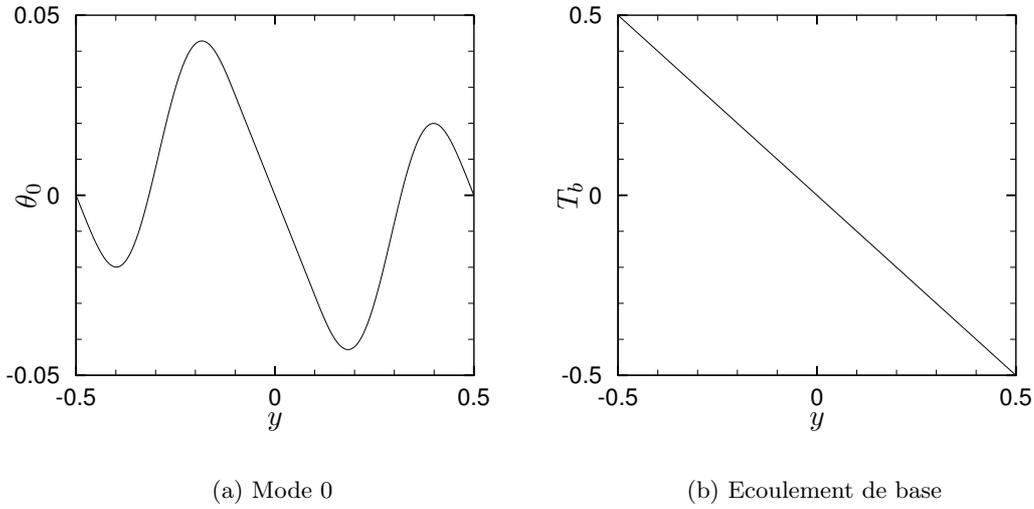


FIG. 3.7 – Température de la perturbation pour le mode 0 et température de l’écoulement de base : Résultats numériques pour le cas $y_0 = 0.1$, $Re = 0.1$ et $Pr = 10$.

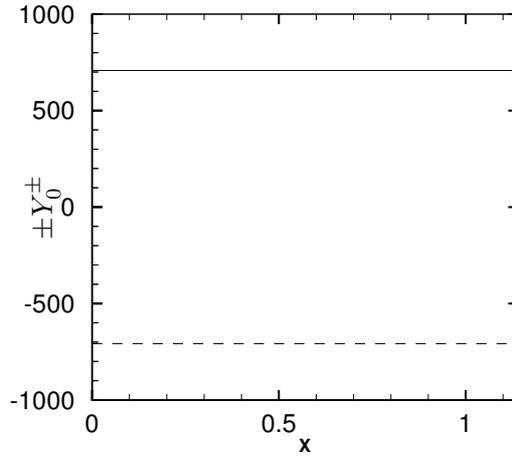


FIG. 3.8 – Perturbation des interfaces via le mode 0. Représentation de Y_0^+ et de $-Y_0^-$. Cas $Re = 0.1$, $Pr = 10$, $y_0 = 0.1$

3.9.3 Evolution de l’amplitude

L’évolution de l’amplitude $A(t)$ de la perturbation dépend du signe de g_1 dans l’Eq. (3.71). Les résultats numériques obtenus pour $Pr = 10$ et $Re = 0.1$ et différentes valeurs de y_0 sont consignés dans le Tableau 3.4. Pour ces paramètres, la valeur de g_1 est positive et par conséquent la bifurcation est super-critique. En d’autres termes, l’amplitude de la perturbation, une fois le seuil dépassé, va augmenter au cours du temps et va atteindre une amplitude de saturation $A_c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g_1}}$, comme le montre la Fig. 3.9. L’analyse des résultats numériques

indique aussi que pour des valeurs de $\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra}$ fixées, l'amplitude de saturation A_c diminue pour des nombres de Bingham croissants. En d'autres termes, pour une valeur de ϵ fixée, l'augmentation du nombre de Bingham limite le développement de la perturbation.

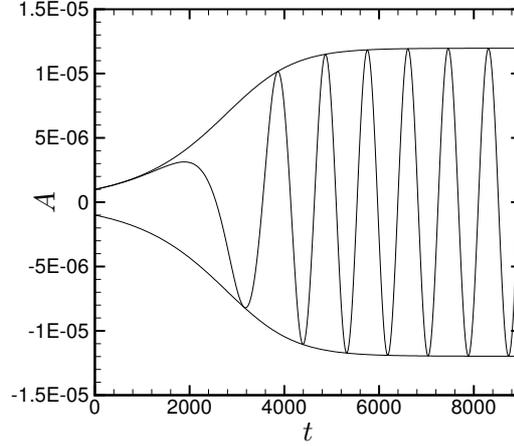


FIG. 3.9 – Evolution de l'amplitude en fonction du temps juste après le seuil. $y_0 = 0.01$, $Re = 0.1$, $Pr = 10$

Le calcul du coefficient $\frac{C - S}{\tau}$, se rapporte au calcul de la correction de la pulsation critique, *i.e.* ω_m , donnée par l'expression $\omega_m = \frac{C - S}{\tau} \epsilon$. Le signe de ce coefficient étant négatif, cela signifie que ω_m est du même signe que ω_c . En d'autres termes, les structures thermoconvectives advectées par l'écoulement moyen voient leur vitesse de phase augmenter à valeurs de ϵ croissantes. En réalité, dans la mesure où il existe une condition sur l'amplitude de la perturbation ($|A| \ll 10^{-4}$), les valeurs prises par ω_m restent faibles. On constate, de plus, que pour des valeurs de ϵ fixées (et faibles), la correction de la pulsation critique diminue avec le nombre de Bingham.

Des calculs numériques ont aussi été effectués pour y_0 fixé et différentes valeurs de Re et Pr . Les résultats montrent qu'en augmentant le nombre de Reynolds, la valeur de g_1 diminue et finalement change de signe. En d'autres termes, il existe une valeur du nombre de Reynolds à partir de laquelle la bifurcation devient sous-critique. En faisant varier le nombre de Prandtl entre 1 et 100, nous avons constaté que le changement de signe apparaît systématiquement à $Pe = Re Pr \simeq O(1)$. La bifurcation est sous-critique pour $Pe > O(1)$, comme le montre la Fig. 3.10 où nous avons représenté $\text{Sign}(g_1) \text{Log}_{10}(|g_1|)$ en fonction de y_0 , pour quatre valeurs de Pe : 0.1, 0.5, 1.3, 2. Nous avons cherché à identifier les termes de l'Eq. (3.72) qui seraient responsables de cette transition d'une bifurcation super-critique à une bifurcation sous-critique. L'analyse des valeurs numériques des différents termes de l'Eq. (3.72) montre que ce sont les termes non linéaires quadratiques et cubiques associés au nombre de Bingham qui sont à l'origine du changement de nature de la bifurcation. Ces termes font ressortir les effets de stratification de la viscosité effective, à travers le nombre de Bingham.

y_0	g_1	C	S	τ	$\frac{C - S}{\tau}$
0.03	17 359 533.09	-3.38	0.0032	0.0246	-137.53
0.06	39 581 486.95	-1.77	0.0054	0.0220	-67.47
0.08	57 371 505.12	-1.37	0.0064	0.0204	-78.00
0.1	78 992 245.32	-1.14	0.0067	0.0191	-60.03
0.14	144 819 441.26	-0.82	0.0083	0.0162	-51.13
0.16	196 424 727.94	-0.74	0.0142	0.0146	-51.66

TAB. 3.4 – Valeurs numériques des coefficients qui caractérisent l'évolution de l'amplitude, $Pr = 10$, $Re = 0.1$.

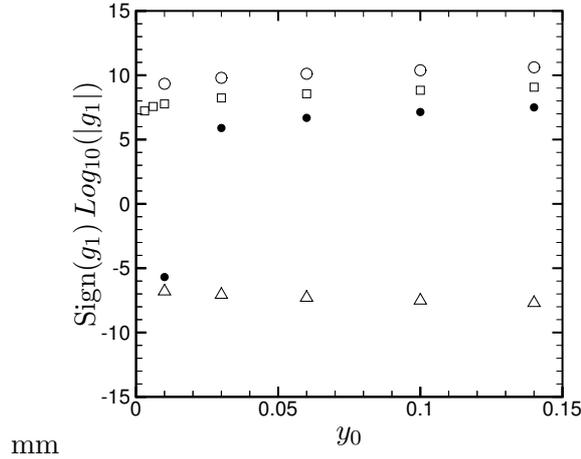


FIG. 3.10 – Evolution du coefficient g_1 en fonction de y_0 pour différentes valeurs du nombre de Péclet. (Δ : $Pe = 2$; \bullet : $Pe = 1.3$; \square : $Pe = 0.5$; \circ : $Pe = 0.1$)

Nous avons fait varier le nombre de Péclet par pas de 10^{-3} et il semblerait que le changement de signe de g_1 s'effectue sur une très faible gamme de valeurs de Pe . En l'occurrence, pour $y_0 = 0.01$, lorsque $Pe = 1.264$, nous avons obtenu la valeur : $g_1 = 20636.41$ et pour $Pe = 1.265$, nous avons : $g_1 = -45474.32$. En pratique, le passage d'une bifurcation super-critique à une bifurcation sous-critique serait difficilement observable. En parallèle, les résultats numériques indiquent que les harmoniques varient peu pour les valeurs de Pe considérées ci-dessus. Cela signifie que les conditions restrictives sur l'amplitude de $|A|$ restent les mêmes. Pour satisfaire ces conditions, τ conservant la même valeur, l'écart relatif au seuil ϵ doit être réduit. Le changement de type de bifurcation est schématisé par la Fig. 3.11.

En effet, dès lors que les modes 0 et 2 ont été déterminés, nous avons pu remarquer que le fondamental reste dominant vis à vis de ses harmoniques sous condition que les valeurs de l'amplitude de la perturbation restent faibles. Les valeurs du coefficient g_1 étant très importantes

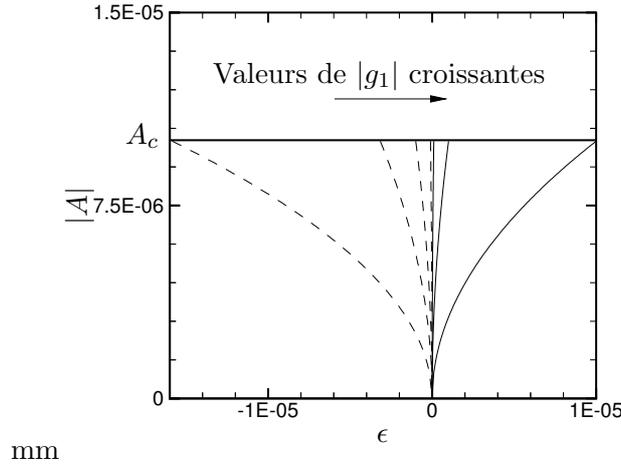


FIG. 3.11 – Représentation schématique de l'évolution de l'amplitude en fonction de ϵ pour différentes valeurs de g_1 . (Traits pointillés: Bifurcation sous critique ($g_1 < 0$); Traits continus: Bifurcation surcritique ($g_1 > 0$))

(voir Tableau 3.4), l'amplitude de saturation A_c reste faible si les valeurs de ϵ le sont aussi. Ainsi, non seulement l'amplitude de perturbation doit rester infime mais en plus, le domaine de validité de l'analyse est très limité puisque $\epsilon \ll 1$. D'un point de vue pratique, cela signifie qu'il semble difficile, voire impossible d'observer une quelconque structure thermoconvective tant que la zone bouchon est soumise à des perturbations infinitésimales. Ces résultats sont propres aux fluides de Bingham. Dans le cas d'un fluide Newtonien, le domaine de validité de l'étude est plus important dans la mesure où nos résultats numériques donnent des valeurs de g_1 limitées ($g_1 \sim O(10)$). Ainsi, les amplitudes de perturbation peuvent atteindre des valeurs observables expérimentalement (Ouazzani *et al.* (1994)).

3.10 Bilan

A partir du seuil de stabilité Ra_c obtenu lors de l'analyse linéaire, nous avons réalisé une analyse faiblement non linéaire afin de déterminer l'évolution de l'amplitude de la perturbation dans la région surcritique ($Ra > Ra_c$) proche du seuil. Lorsque $Pe < O(1)$, les résultats numériques de cette étude ont permis de mettre en évidence une augmentation de l'amplitude de la perturbation au-delà du seuil de stabilité jusqu'à atteindre une valeur saturante. Par contre, pour $Pe > O(1)$, la bifurcation devient sous-critique. Cette tendance laisse à supposer une croissance transitoire de l'énergie de perturbation que nous proposons d'examiner dans le chapitre suivant.

Les résultats de cette étude montrent que l'amplitude de saturation de la perturbation reste très faible. Ceci est la conséquence des hypothèses de cette analyse qui imposent implicitement que la zone bouchon reste intacte. Pour des valeurs de nombre de Bingham quelconques, l'étude faiblement non linéaire montre que la dynamique du problème devient presque immédiatement

fortement non linéaire. Nous pensons que ceci est la conséquence de la stratification de viscosité introduite par le terme $\frac{B}{\dot{\gamma}}$ dans l'expression de la viscosité effective.

Au-delà de l'analyse faiblement non linéaire, nous ne sommes plus en mesure de prédire analytiquement l'évolution de l'écoulement perturbé dans le sens où la topologie liée à l'écoulement de base risque d'être modifiée. Dès lors que la zone non cisailée se destruiture, les outils analytiques restent impuissants pour décrire l'évolution de l'écoulement dans la mesure où le lieu des parties non cisillées n'est *a priori* pas connu et qu'aucune loi n'est donnée pour déterminer les contraintes dans ces parties. En ce sens, nous rejoignons les remarques faites dans le Chapitre 1 concernant le problème de Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil, qui stipulaient que le système est sensible à la rhéologie du matériau en dessous de la contrainte seuil. Le modèle de Bingham ne rend pas compte de la rhéologie du matériau en-deça de la contrainte seuil, ce qui ne permet pas de décrire l'évolution de la zone non cisillée. L'utilisation de ce modèle nous permet à ce stade de reprendre une étude de stabilité non linéaire par une méthode énergétique, ce que nous proposons dans le Chapitre 5.

Chapitre 4

Approche énergétique de la stabilité de l'écoulement

Ce chapitre se propose de déterminer le nombre de Rayleigh maximal Ra_E , qui garantit la décroissance de l'énergie de perturbation de l'écoulement de base donné dans le Chapitre 2. Dans le cadre d'une analyse linéaire, la comparaison, à valeur de Reynolds fixée, de Ra_E avec Ra_L , *i.e.* nombre de Rayleigh critique déterminé par l'approche modale, fournit des renseignements sur la pertinence de l'étude de la croissance transitoire. Celle-ci provient du caractère non-normal de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld. Il est clair que lorsque $Re \rightarrow 0$, l'écart $Ra_E - Ra_L \rightarrow 0$. En effet, dans le problème de Rayleigh-Bénard Newtonien, l'opérateur qui intervient dans l'analyse linéaire est auto-adjoint, et donc $Ra_E = Ra_L$. Les deux approches modale (Chapitre 2) et énergétique conduisent au même problème aux valeurs propres (Chandrasekhar (1961)). Pour des valeurs croissantes du nombre de Reynolds, la non-normalité de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld devient plus marquée et Ra_E s'écarte de la valeur de Ra_L par valeurs inférieures ($Ra_E < Ra_L$).

L'existence d'une croissance transitoire de l'énergie de la perturbation pour $Ra_E < Ra_L$ a été indiquée dans le Chapitre 3 où l'analyse faiblement non linéaire mettait en évidence une bifurcation sous-critique pour $Pe > O(1)$.

La présente étude est une extension des travaux de Joseph (1966) relatifs à la stabilité d'un écoulement de convection mixte pour un fluide Newtonien au cas d'un fluide à seuil. Ce chapitre est structuré en deux parties.

La première partie définit tout d'abord des identités "énergie" liées aux perturbations en vitesse \mathbf{u} et en température θ . Ces identités correspondent, en fait, à la norme L^2 de ces perturbations. Les équations d'évolution correspondantes sont ensuite établies. L'écoulement de base est dit stable au sens "énergie" lorsque la norme L^2 des perturbations \mathbf{u} et θ décroît de façon monotone dans le temps. Ceci conduit à un problème d'optimisation avec contraintes. Les équations d'Euler Lagrange associées sont résolues numériquement. Les résultats sont présentés sous forme d'un diagramme de stabilité dans le plan (Re, Ra) , pour différentes valeurs du nombre de Bingham.

La deuxième partie de ce chapitre reprend le problème d'optimisation et établit une ex-

pression analytique de la dépendance de Ra_E en fonction de B . L'approche utilisée consiste à approximer les différents termes du problème d'optimisation en faisant appel aux inégalités fonctionnelles classiques du type Cauchy-Schwarz, Poincaré et inégalité triangulaire.

4.1 Identités énergie de la perturbation

4.1.1 Identités énergie dans les zones cisailées

On suppose *a priori* que la perturbation est périodique suivant les directions longitudinale x et transverse z et de périodes respectives $2X$ et $2Z$ ¹. Soit \mathcal{E} l'énergie cinétique moyenne de la perturbation dans une zone cisailée $\Omega = [-X; X] \times [y_0; 1/2] \times [-Z; Z]$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{y_0}^{1/2} \int_{-X}^X \int_{-Z}^Z \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dx dy dz, \quad (4.1)$$

avec $\|\Omega\| = 2X(1/2 - y_0)2Z$.

De la même façon, nous définissons l'énergie cinétique moyenne dans la zone cisailée inférieure $[-X; X] \times [-1/2; -y_0] \times [-Z; Z]$.

La variation temporelle $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ dans chacune des zones cisailées est obtenue à partir des équations aux perturbations linéarisées, multipliées par les composantes correspondantes de la vitesse et intégrées sur le domaine Ω . L'équation résultante est l'équation de Reynolds-Orr modifiée.

Remarques :

(i) Dans le cas d'un fluide Newtonien, l'équation de Reynolds-Orr donnant $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ pour une perturbation infinitésimale est la même que celle pour une perturbation d'amplitude finie, dans la mesure où la contribution des termes non linéaires provenant de $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ s'annule lors des différentes intégrations par parties. Ces termes non linéaires n'interviennent dans aucun processus physique qui modifie l'énergie de la perturbation, comme le souligne Henningson (1996).

(ii) Dans le cas d'un fluide à seuil, et en présence d'une perturbation d'amplitude finie, la zone bouchon peut être détruite et des "îlots" de zones non cisailées peuvent se former. Cette modification de la structure de l'écoulement rend l'équation de Reynolds-Orr obtenue dans le cas d'une perturbation infinitésimale non valable pour une perturbation d'amplitude finie. En ce sens, l'étude réalisée dans ce chapitre ne pourra pas être étendue au cas d'une perturbation d'amplitude finie. Ce dernier cas sera traité dans un chapitre suivant.

(iii) L'approche théorique développée dans ce chapitre utilise les mêmes échelles caractéristiques que celles proposées par Joseph (1976). Dans cette étude, les échelles caractéristiques de

1. Le développement théorique est présenté dans le cas général, même si on se restreint lors de la résolution numérique au cas 2D

l'écoulement de base restent les mêmes que celles introduites dans le Chapitre 2. Par contre pour la perturbation, les échelles caractéristiques de temps et de vitesse sont respectivement le temps de diffusion visqueuse $\frac{\widehat{L}^2 \widehat{\rho}_0}{\widehat{\mu}_0}$ et la vitesse de diffusion visqueuse $\frac{\widehat{\mu}_0}{\rho_0 \widehat{L}}$. Les autres échelles caractéristiques se déduisent directement des équations de conservation du mouvement et de l'énergie. Ainsi, pour la température, nous aurons $\sqrt{\frac{\widehat{\mu}_0^3 \delta \widehat{T}}{\alpha_0 a g \widehat{L}^3 \rho_0^3}} = \delta \widehat{T} \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}$ comme échelle caractéristique.

Ce choix particulier de grandeurs de référence présente l'avantage d'aboutir à un problème d'optimisation tel que, dans les équations d'Euler-Lagrange associées à ce problème, le nombre de Rayleigh apparaît directement comme une valeur propre.

Si nous conservons les mêmes échelles caractéristiques que celle du Chapitre 2, nous aboutissons à un problème d'optimisation similaire, sauf que cette fois-ci, le nombre de Rayleigh n'apparaît pas directement comme une valeur propre dans les équations d'Euler-Lagrange. La détermination des conditions suffisantes de stabilité nécessite un calcul numérique supplémentaire (voir Annexe G).

Par souci de gain de temps de calcul, nous avons préféré adopter les échelles caractéristiques proposées par Joseph (1976).

Dans ce qui suit, les calculs seront présentés uniquement dans la zone cisailée supérieure ($y \in]y_0; 1/2]$). Evidemment, les mêmes calculs sont effectués pour la zone cisailée inférieure ($y \in [-1/2; -y_0;]$). Après un calcul algébrique, nous obtenons une relation de la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Re I(\mathbf{u}) - \nu(\mathbf{u}) - B \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \sqrt{Ra} \mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}), \quad (4.2)$$

où $I(\mathbf{u})$, $\nu(\mathbf{u})$, $\mathcal{B}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u})$ désignent respectivement les termes d'inertie, de dissipation visqueuse pure, de dissipation visqueuse via le nombre de Bingham et les termes de flottabilité.

Ils sont donnés par :

$$I(\mathbf{u}) = - \langle u v D U_b \rangle, \quad (4.3)$$

$$\nu(\mathbf{u}) = \langle |\partial_x \mathbf{u}|^2 + |\partial_y \mathbf{u}|^2 + |\partial_z \mathbf{u}|^2 \rangle, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \langle \frac{3(Dv)^2 + (\partial_x u)^2 + (\partial_z u)^2 + (\partial_x w)^2 + (\partial_z w)^2 + (\partial_z v + \partial_y w)^2}{\dot{\gamma}_b} \rangle, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}) = \langle v \theta \rangle, \quad (4.6)$$

avec

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \bullet d\Omega. \quad (4.7)$$

Nous attirons l'attention sur le fait que le terme en facteur du nombre de Bingham a un rôle purement dissipatif dans la mesure où $\mathcal{B}(\mathbf{u}) > 0$.

4. Approche énergétique de la stabilité de l'écoulement

De la même façon que pour la vitesse, nous définissons une identité énergie liée à la température de perturbation θ par :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \theta^2 d\Omega. \quad (4.8)$$

L'évolution de \mathcal{K} au cours du temps est obtenue en multipliant l'équation de l'énergie par θ et en intégrant sur le domaine Ω . Tout calcul fait, on aboutit à une relation de la forme :

$$Pr \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \sqrt{Ra} C_v(\theta, \mathbf{u}) - C_d(\theta), \quad (4.9)$$

où C_v et C_d désignent des termes de convection et de dissipation thermique respectivement. Ils sont donnés par :

$$C_v(\theta, \mathbf{u}) = \langle v \theta \rangle, \quad (4.10)$$

et

$$C_d(\theta) = \langle \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 \rangle. \quad (4.11)$$

Remarque :

Contrairement à la norme L^2 de \mathbf{u} , il n'existe pas d'interprétation physique claire de la relation (4.9). Howard (1964) propose de relier cette relation à un taux de génération d'entropie. Nous préférons nous maintenir à l'expression "norme L^2 de θ ".

4.1.2 Identités énergie dans la zone non cisailée

Dans le Chapitre 2, nous avons montré que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ dans la zone bouchon. Comme toute perturbation admissible est une combinaison linéaire des solutions modales, alors $\mathcal{E} = 0$ et

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0. \quad (4.12)$$

L'identité énergie liée la température θ dans la zone bouchon s'écrit :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\|\Omega_B\|} \int_{\Omega_B} \frac{\theta^2}{2} d\Omega, \quad (4.13)$$

avec $\|\Omega_B\| = 2X \ 2y_0 \ 2Z$.

L'évolution de \mathcal{K} au cours du temps se réduit uniquement au terme de dissipation thermique :

$$Pr \frac{d\mathcal{K}}{dt} = -C_d(\theta) = -\frac{1}{\|\Omega_B\|} \int_{-X}^X \int_{-Z}^Z \int_{-y_0}^{y_0} |\nabla\theta|^2 dx dy dz. \quad (4.14)$$

4.1.3 Identité énergie pour l'ensemble du problème

En reprenant la même démarche que Joseph (1966), nous définissons une "énergie" E_λ de la perturbation correspondant au problème complet, par la relation :

$$E_\lambda = \mathcal{E} + \lambda Pr \mathcal{K}, \quad (4.15)$$

où λ est un paramètre de couplage positif. Nous introduisons en plus un deuxième paramètre positif ξ tel que $Re = \xi\sqrt{Ra}$.

A partir des expressions de $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ et $\frac{d\mathcal{K}}{dt}$, dans les zones cisillées et non cisillées, il est possible de montrer que

$$\frac{1}{D_\lambda} \frac{dE_\lambda}{dt} = -1 + \sqrt{Ra} \left[-\frac{I_\lambda}{D_\lambda} \right], \quad (4.16)$$

où I_λ et D_λ regroupent respectivement les termes qui favorisent ainsi que ceux qui freinent le développement des instabilités. Ils sont donnés par :

$$I_\lambda = I_1 + \lambda I_2 = \begin{cases} [-\xi I(\mathbf{u}) - \mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u})] - \lambda C_v & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pour } |y| \leq y_0. \end{cases} \quad (4.17)$$

et

$$D_\lambda = D_1 + \lambda D_2 = \begin{cases} \nu(\mathbf{u}) + B\mathcal{B}(\mathbf{u}) + \lambda C_d & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}, \\ \lambda C_d & \text{pour } |y| \leq y_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

4.2 Conditions suffisantes de stabilité

4.2.1 Problème d'optimisation

De la relation (4.16), il vient :

$$\frac{1}{D_\lambda} \frac{dE_\lambda}{dt} \leq -1 + \sqrt{Ra} \max \left(-\frac{I_\lambda}{D_\lambda} \right) = -1 + \frac{\sqrt{Ra}}{\Lambda}, \quad (4.19)$$

avec

$$\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}(\lambda, \xi) = \max \left(-\frac{I_\lambda}{D_\lambda} \right). \quad (4.20)$$

La condition de stabilité de l'écoulement de base au sens de la norme L^2 est garantie si $\frac{dE_\lambda}{dt} \leq 0$, soit $\sqrt{Ra} < \Lambda(\lambda, \xi)$.

Sous cette condition, D_λ étant un terme de dissipation ($D_\lambda > 0$), l'“énergie” de la perturbation décroît en fonction du temps. En effet, si $\sqrt{Ra} < \Lambda(\lambda, \xi)$, il existe alors une constante $d^2 > 0$ telle que :

$$E_\lambda(t, \lambda) \leq E_\lambda(0, \lambda) e^{-d^2 t \left(1 - \frac{\sqrt{Ra}}{\Lambda} \right)}, \quad (4.21)$$

où $d^2 = \min(a^2, b^2)$ et a^2, b^2 sont des constantes telles que :

$$\frac{a^2}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \leq D_1 \quad \text{et} \quad Pr \frac{b^2}{2} \langle |\theta|^2 \rangle \leq D_2.$$

Finalement le problème d'optimisation peut être énoncé de la manière suivante :

Déterminer $\Lambda(\lambda, \xi)$ tel que :

$$\frac{1}{\Lambda} = \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \theta \in \mathcal{V}_\theta} \left(-\frac{I_\lambda}{D_\lambda} \right), \quad (4.22)$$

$$\text{où } \mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} \in [\mathcal{C}^2(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } y = \pm \frac{1}{2} \right\},$$

$$\mathcal{V}_\theta = \left\{ \theta : \theta \in [\mathcal{C}^2(\Omega)], \theta = 0 \text{ en } y = \pm \frac{1}{2} \right\}.$$

Ce problème d'optimisation va générer un ensemble de valeurs de $\Lambda(\lambda, \xi)$ pour chaque couple (λ, ξ) . La valeur de ξ est donnée *a priori* ($\xi > 0$). Pour ce qui est de la valeur du paramètre de couplage, λ , nous retiendrons celle qui fournit la condition de stabilité optimale, *i.e.*, la plus grande valeur de Rayleigh. Cela se traduit par :

$$R(\xi) = \max_{\lambda > 0} \Lambda(\lambda, \xi). \quad (4.23)$$

Dans son article, Joseph (1966) montre que, dans le cas limite où $\xi \rightarrow 0$, la valeur optimale de λ est égale à 1. Dans la présente étude, nous avons montré que cette propriété ($\lambda^{opt} = 1$) reste vraie quelque soit ξ positif. La démonstration est donnée dans l'Annexe H. Finalement la condition (4.23) peut se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{R(\xi)} = \frac{1}{\Lambda(1, \xi)} = \max_{(\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \theta \in \mathcal{V}_\theta)} \left(-\frac{I_\lambda}{D_\lambda} \right). \quad (4.24)$$

La condition de normalisation suivante est introduite :

$$D_1 + D_2 = 1, \quad (4.25)$$

le problème d'optimisation devient alors :

$$-(I_1 + I_2) = \max_{(\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \theta \in \mathcal{V}_\theta)} \frac{1}{\Lambda(1, \xi)} \quad (4.26)$$

Pour tenir compte des contraintes de normalisation (4.25) et d'incompressibilité, les multiplicateurs de Lagrange R_λ (pour $D_1 + D_2 = 1$) et $p_\lambda(x, y, z, t)$ (pour $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) sont introduits². Le problème d'optimisation peut être reformulé comme suit :

$$\delta \left[I_1 + I_2 - \frac{2p_\lambda}{R_\lambda} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{R_\lambda} (D_1 + D_2) \right] = 0 \quad (4.27)$$

où δ représente l'opérateur variationnel.

2. Pour ne pas augmenter le nombre de notations, nous avons préféré garder λ en indice dans R_λ et p_λ , en sachant que $\lambda^{opt} = 1$.

4.2.2 Equations d'Euler-Lagrange correspondantes

Les équations d'Euler-Lagrange sont directement déduites de l'Eq. (4.27), elles s'écrivent :

Dans la zone cisillée :

$$\xi v DU_b + \frac{2}{R_\lambda} \partial_x p_\lambda - \frac{2}{R_\lambda} \left(\Delta u + B \frac{\partial_{xx} u + \partial_{zz} u}{\dot{\gamma}_b} \right) = 0 \quad (4.28a)$$

$$\xi u DU_b + \frac{2}{R_\lambda} \partial_y p_\lambda - \frac{2}{R_\lambda} \left[\Delta v + B \left(\frac{\partial_{zz} v + \partial_{yz} w}{\dot{\gamma}_b} + 3 \partial_y \left(\frac{\partial_y v}{\dot{\gamma}_b} \right) \right) \right] - 2\theta = 0 \quad (4.28b)$$

$$\frac{2}{R_\lambda} \partial_z p_\lambda - \frac{2}{R_\lambda} \left[\Delta w + B \left(\frac{\partial_{xx} w + \partial_{zz} w}{\dot{\gamma}_b} + \partial_y \left(\frac{\partial_y w + \partial_z v}{\dot{\gamma}_b} \right) \right) \right] = 0 \quad (4.28c)$$

$$-v - \frac{1}{R_\lambda} \Delta \theta = 0. \quad (4.28d)$$

Dans la zone non cisillée, nous avons les conditions suivantes sur la vitesse et la température de perturbation :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.29a)$$

$$\Delta \theta = 0. \quad (4.29b)$$

Le système d'équations (4.28)-(4.29) est muni des conditions aux limites suivantes :

– **Aux parois :**

Les conditions de non glissement et de températures imposées se traduisent par :

$$\mathbf{u} \left(\pm \frac{1}{2} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.30)$$

et

$$\theta \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (4.31)$$

– **Aux interfaces :**

$$\mathbf{u} (y_i^\pm) = \mathbf{0}. \quad (4.32)$$

Les solutions des équations d'Euler-Lagrange (4.28) sont cherchées sous la forme :

$$(\mathbf{u}, \theta) = (\mathbf{u}(y), \theta(y)) e^{i(\alpha x + \beta z)}.$$

Si nous nous plaçons dans le cas bidimensionnel, $\beta = 0$, et si nous travaillons en terme de fonction courant, le système (4.28) se réduit à la résolution du problème suivant :

Pour la zone cisailée :

$$\frac{1}{2} [\mathcal{L}_{1E} f + 2i\alpha\theta] = \frac{1}{R_\lambda} \mathcal{L}_{2E} f \quad (4.33a)$$

$$i\alpha f = \frac{1}{R_\lambda} \mathcal{L}\theta, \quad (4.33b)$$

avec les opérateurs \mathcal{L}_{1E} , \mathcal{L}_{2E} et \mathcal{L} qui s'écrivent de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{1E} \equiv -i\alpha\xi (2DU_b D + D^2U_b) \quad (4.34)$$

$$\mathcal{L}_{2E} \equiv \mathcal{L}^2 - 4B\alpha^2 D \left(\frac{D}{\dot{\gamma}_b} \right) \quad (4.35)$$

$$\mathcal{L} \equiv D^2 - \alpha^2 \quad (4.36)$$

Pour la zone non cisailée :

Dans cette zone nous obtenons le système suivant :

$$f = 0 \quad (4.37a)$$

$$\mathcal{L}\theta = 0. \quad (4.37b)$$

Conditions aux limites :

Ce sont les mêmes conditions que celles obtenues au Chapitre 2 et données par (2.65)-(2.68). Nous les rappelons ci-dessous en terme de fonction courant :

Aux parois :

$$f(\pm 1/2) = f_y(\pm 1/2) = 0 \quad (4.38)$$

$$\theta(\pm 1/2) = 0. \quad (4.39)$$

Aux interfaces :

$$f(y_b^\pm) = 0, \quad f_y(y_b^\pm) = 0. \quad (4.40)$$

4.2.3 Conditions suffisantes de stabilité

Le système d'Eq. (4.33) représente un problème aux valeurs propres, où $\frac{1}{R_\lambda}$ est la valeur propre à déterminer. La valeur maximale des valeurs propres est la solution du problème d'optimisation (4.26). Ainsi :

$$\Lambda^{-1}(1, \xi) = \max \frac{1}{R_\lambda(\xi)}, \quad (4.41)$$

en d'autres termes, nous retenons la plus grande valeur propre réelle positive de la famille des valeurs propres. Finalement, la condition suffisante de stabilité est donnée par :

$$Ra_E(\xi) = \Lambda^2(1, \xi) = (\min R_\lambda(\xi))^2. \quad (4.42)$$

Nous rappelons aussi que pour chaque valeur donnée de ξ , nous cherchons la perturbation la plus dangereuse, c'est à dire le nombre d'onde α_E tel que :

$$Ra_E(\xi) = \min_{\alpha} (\min R_{\lambda=1}(\xi))^2. \quad (4.43)$$

4.3 Résolution numérique et résultats

Les Equations (4.33), (4.37), munies des conditions aux limites (4.38)-(4.40) sont discrétisées par une méthode aux différences finies avec un schéma centré d'ordre 2, comme dans le chapitre précédent. On aboutit à un problème aux valeurs propres généralisé traité sous Matlab 7.1. Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus avec un nombre de points de discrétisation $N = 201$, répartis uniformément entre les deux parois. Les calculs ont été effectués pour $10^{-4} \leq \xi \leq 100$ et $0.08 \leq B \leq 16$.

Le code a été validé en considérant le cas d'un fluide Newtonien avec $Re = 0$. Nous trouvons que le seuil de stabilité énergétique est atteint pour $Ra_E(\xi = 0) = 1708$, $\alpha_E(\xi = 0) = 3.1$ avec une erreur inférieure à 1%.

La Figure 4.1 présente, pour trois valeurs de B , le diagramme de stabilité dans le plan (Ra, Re) , ainsi que la variation du nombre d'onde α_E , associé à la perturbation la plus dangereuse, en fonction du nombre de Reynolds.

Comme on pouvait s'y attendre, nous retrouvons l'effet stabilisant du nombre de Bingham. En effet, l'aire du domaine où les conditions suffisantes de stabilité sont assurées augmente avec B . Lorsque $Re \rightarrow 0$, la valeur obtenue pour Ra_E correspond à la valeur Ra_L obtenue dans l'analyse linéaire modale. L'augmentation du débit, à travers le nombre de Reynolds, réduit la stabilité de l'écoulement de base au sens L^2 .

De plus, la frontière qui délimite la zone de stabilité passe par le cas limite $(Ra = 0, Re = Re_E(B))$ correspondant à la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan bidimensionnel d'un fluide de Bingham, où $Re_E(B)$ est défini comme suit :

$$\frac{1}{Re_E(B)} = \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}\mathbf{u}} \frac{I(\mathbf{u})}{\nu(\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{u})}. \quad (4.44)$$

Le tableau 4.1 donne les valeurs $Re_E(B)$ et $\alpha_E(B)$ pour différentes valeurs de B .

Comme nous l'avons déjà précisé au cours du Chapitre 1, la frontière qui délimite la zone de stabilité ne passe pas par le cas limite de Rayleigh-Bénard, dans la mesure où ce dernier conduit à un problème linéairement stable ($Ra_E(Re = 0) = Ra_L(Re = 0) = +\infty$). Le cas où $Re = 0$ n'est pas considéré dans cette étude.

4. Approche énergétique de la stabilité de l'écoulement

B	Re_E	α_E
0.174	376.68	7.78
0.494	438.26	7.96
0.6198	461.04	8.03
1.25	566.40	8.32
3.51	882.50	9.03
9.03	1492.90	10.03
15.00	2050.53	10.73
80.00	6528.58	14.08
575.00	33079.41	20.18

TAB. 4.1 – Valeurs numériques des conditions de stabilité Re_E et α_E pour différentes valeurs de B .

Enfin, nous pouvons noter que les longueurs d'onde des perturbations les plus dangereuses augmentent lorsque B croît.

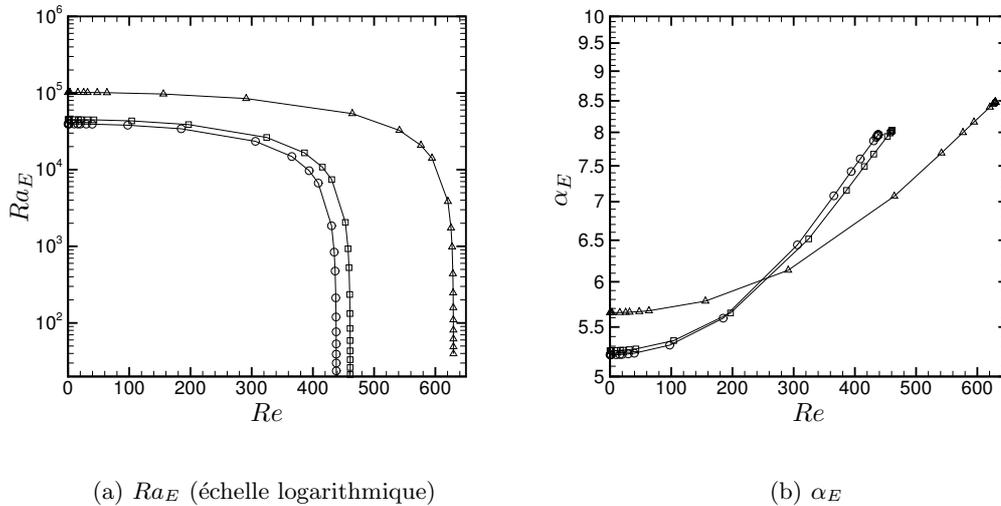


FIG. 4.1 – Conditions suffisantes de stabilité d'un écoulement de convection mixte plan pour un fluide de Bingham. Diagramme de stabilité dans le plan (Ra, Re) . Cas où $Pr = 10$ (triangles noirs: $B = 1.662$ ($y_0 = 0.12$)), (carrés noirs: $B = 0.6198$ ($y_0 = 0.06$)), (cercles noirs: $B = 0.494$ ($y_0 = 0.05$))

La Figure 4.2 compare, pour un nombre de Bingham fixé, le nombre de Rayleigh maximal Ra_E pour lequel l'écoulement de base est stable au sens de la norme L^2 et le nombre de Rayleigh critique Ra_L , déterminé par une approche modale (Chapitre 2), au-delà duquel l'écoulement de base devient instable. L'écart $Ra_E - Ra_L$ est positif et augmente avec Re . Par conséquent, pour Re fixé et $Ra_E < Ra < Ra_L$, il y a une croissance transitoire de l'énergie

de la perturbation.

Ceci est la signature de la non-normalité de l'opérateur linéaire \mathcal{L}_1 du système d'équations (2.59). La non-normalité provient plus précisément du terme de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld $U_b D^2 f$, *i.e.*, terme où il y a couplage entre l'écoulement de base et la perturbation.

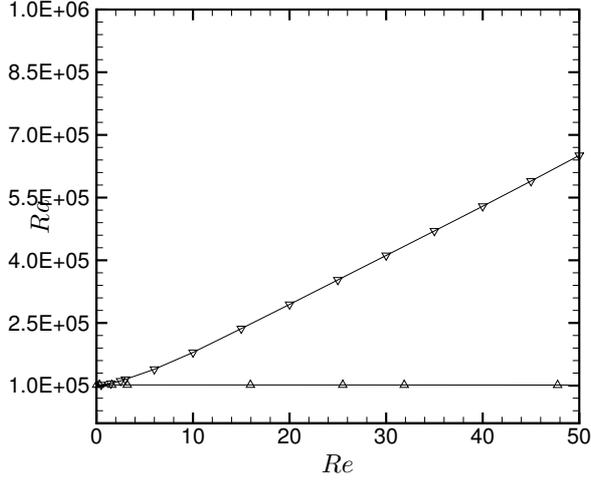


FIG. 4.2 – Comparaison des nombres de Rayleigh critiques obtenus par les méthodes linéaire modale et énergétique respectivement, en fonction du nombre de Reynolds pour $B = 1.662$ ($y_0 = 0.12$) et $Pr = 10$ (Symboles \triangle : Ra_E), (Symboles ∇ : Ra_L)

4.4 Approche analytique

La variation de Ra_E en fonction du nombre de Bingham décrite dans la section précédente peut être obtenue à partir d'une approche analytique basée essentiellement sur l'approximation des différents termes qui interviennent dans l'expression de la variation temporelle de l'énergie. Les approximations mises en oeuvre font appel aux inégalités fonctionnelles classiques. Il est clair que les valeurs de Ra_E obtenues par cette approche sont peu précises, par contre nous pensons que la dépendance de Ra_E vis à vis de B reste précise dans la mesure où aucun terme n'est négligé. Cette approche analytique a été initiée par Serrin (1959), reprise ensuite par Joseph (1965) dans le cas 2D newtonien et étendu par Frigaard et Nouar (2003) au cas 3D et pour un fluide à seuil.

En écrivant les solutions sous forme de modes normaux :

$$(\mathbf{u}, h^\pm, p, \theta) = (\mathbf{u}(y), h^\pm, p(y), \theta(y)) e^{i(\alpha x + \beta z - s t)}, \quad (4.45)$$

avec $s = s_R + i s_I$, les équations aux perturbations linéarisées **dans la zone cisailée** se

réduisent à :

$$i(\alpha u + \beta w) + Dv = 0, \quad (4.46a)$$

$$-isu = -Re(i\alpha U_b u + v DU_b) - i\alpha p + \Delta u + B \left(\frac{-(\alpha^2 + \beta^2)u - i\alpha Dv}{\dot{\gamma}_b} \right), \quad (4.46b)$$

$$-isv = -Re(i\alpha U_b v) - Dp + \Delta v + \sqrt{Ra} \theta + B \left(D \left(\frac{2Dv}{\dot{\gamma}(U)} \right) + \frac{-\beta^2 v - i\beta Dw}{\dot{\gamma}_b} \right) \quad (4.46c)$$

$$-isw = -Re(i\alpha U_b w) - i\beta p + \Delta w + B \left(D \left(\frac{i\beta v + Dw}{\dot{\gamma}_b} \right) - \frac{i\beta Dv + (\alpha^2 + \beta^2)w}{\dot{\gamma}_b} \right) \quad (4.46d)$$

$$-is Pr \theta + Pr Re(i\alpha U_b \theta) - \sqrt{Ra} v - \Delta \theta = 0. \quad (4.46e)$$

avec $\Delta = D^2 - \alpha^2 - \beta^2$.

Des identités énergie liées à la perturbation en vitesse \mathbf{u} et en température θ peuvent être définies dans une zone cisailée, par exemple $y \in [y_0; 1/2]$, à partir des équations (4.46) multipliées par les complexes conjugués correspondants u^*, v^*, w^*, θ^* et intégrées entre l'interface et la paroi. Encore une fois, les calculs sont présentés uniquement pour le domaine $y \in [y_0; 1/2]$. Des calculs similaires sont effectués pour le domaine $y \in [-1/2; -y_0]$.

Après quelques manipulations algébriques, la partie réelle s'écrit :

$$s_i \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle = Re I(\mathbf{u}) - \nu(\mathbf{u}) - B \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \sqrt{Ra} \mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}), \quad (4.47a)$$

$$s_i Pr \langle |\theta|^2 \rangle = -C_d(\theta) + \sqrt{Ra} C_v(\theta, \mathbf{u}), \quad (4.47b)$$

où $I(\mathbf{u})$, $\nu(\mathbf{u})$, $\mathcal{B}(\mathbf{u})$, $\mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u})$, $C_v(\theta, \mathbf{u})$ et $C_d(\theta)$ sont donnés par :

$$I(\mathbf{u}) = \langle -(u_r v_r + u_i v_i) DU_b \rangle, \quad (4.48)$$

$$\nu(\mathbf{u}) = \langle |D\mathbf{u}|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|\mathbf{u}|^2 \rangle, \quad (4.49)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \left\langle \frac{3|Dv|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(|u|^2 + |w|^2) + |Dw + i\beta v|^2}{\dot{\gamma}_b} \right\rangle, \quad (4.50)$$

$$\mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}) = C_v(\theta, \mathbf{u}) = \langle v_r \theta_r + v_i \theta_i \rangle, \quad (4.51)$$

et

$$C_d(\theta) = \langle |D\theta|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|\theta|^2 \rangle. \quad (4.52)$$

La partie imaginaire conduit aux équations suivantes :

$$s_r \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle = Re [\alpha \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \langle DU_b (u_r v_i - u_i v_r) \rangle] + \sqrt{Ra} \langle \theta_r v_i - \theta_i v_r \rangle, \quad (4.53a)$$

$$s_r Pr \langle |\theta|^2 \rangle = Pe \alpha \langle U_b |\theta|^2 \rangle + \sqrt{Ra} \langle \theta_i v_r - \theta_r v_i \rangle. \quad (4.53b)$$

En tenant compte du fait que, dans la zone bouchon (indice B) $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nous avons :

$$\mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad Pr \langle |\theta|^2 \rangle_B = -[C_d(\theta)]_B, \quad (4.54)$$

nous définissons comme précédemment une identité "énergie" $E = |\mathbf{u}|^2 + Pr |\theta|^2$ pour l'ensemble du problème et définie dans tout le domaine ($y \in [-1/2; 1/2]$), nous avons alors :

$$s_i E = (I_1 + I_2) - (D_1 + D_2), \quad (4.55)$$

où

$$I_1 + I_2 = \begin{cases} -Re I(\mathbf{u}) - \sqrt{Ra} [\mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}) + C_v] & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pour } |y| \leq y_0. \end{cases} \quad (4.56)$$

et

$$D_1 + D_2 = \begin{cases} \nu(\mathbf{u}) + B\mathcal{B}(\mathbf{u}) + C_d & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}, \\ C_d & \text{pour } |y| \leq y_0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Finalement, une condition suffisante de stabilité est obtenue en déterminant Re_E tel que pour tout $Re \leq Re_E$, on ait $s_I \leq 0$.

Remarque :

De la même façon, nous avons :

$$s_r E = Re \alpha \langle -U_b |\mathbf{u}|^2 + (u_i v_i - u_r v_r) DU_b \rangle + Pe \alpha \langle U_b |\theta|^2 \rangle. \quad (4.58)$$

Cette relation semble être en accord avec les résultats numériques observés, pour lesquels la vitesse de phase évolue linéairement avec Re dans la gamme des valeurs considérées.

Avant d'aller plus loin dans l'analyse de la relation (4.55), nous introduisons le nombre de Reynolds maximal $Re_E(B)$, qui permet d'assurer la stabilité d'un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham :

$$\frac{1}{Re_E(B)} = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}} \left(\frac{I(\mathbf{u})}{\nu(\mathbf{u}) + B\mathcal{B}(\mathbf{u})} \right) \quad (4.59)$$

En supposant $Re < Re_E(B)$, il vient dans les zones cisillées :

$$s_I \langle |u|^2 \rangle \leq - \left(1 - \frac{Re}{Re_E(B)} \right) (\nu(\mathbf{u}) + B\mathcal{B}(\mathbf{u})) + \sqrt{Ra} \langle v_r \theta_r + v_i \theta_i \rangle. \quad (4.60)$$

Nous proposons d'analyser, dans ce qui suit, les différents termes énergétiques de l'Eq. (4.55).

Terme de dissipation provenant du nombre de Bingham :

4. Approche énergétique de la stabilité de l'écoulement

L'équation de conservation de la masse nous permet d'écrire :

$$|Dv|^2 = |\alpha u + \beta w|^2 \leq \alpha^2 |u|^2 + \beta^2 |w|^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2) |u^2 + w^2|. \quad (4.61)$$

Soit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}) &\geq \frac{\langle 4|Dv|^2 + |Dw + i\beta v|^2 \rangle}{|DU_b|_{max}} \geq \frac{\langle 4|Dv|^2 \rangle}{|DU_b|_{max}} \\ &\geq 4 \frac{\int_0^1 |Dv(y_{u+})|^2 dy_{u+} + \int_0^1 |Dv(y_{u-})|^2 dy_{u-}}{(1/2 - y_0) |DU_b|_{max}}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

où $y_{u+} = \frac{y - y_0}{1/2 - y_0}$ et $y_{u-} = \frac{y + 1/2}{1/2 - y_0}$.

Or, nous avons :

$$|DU_b|_{max} = \frac{2}{(1/2 - y_0)} = \frac{B(1/2 - y_0)}{y_0}.$$

Finalement, par l'inégalité de Poincaré, nous obtenons :

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) \geq \frac{4\pi^2 y_0}{B(1/2 - y_0)^2} \left[\int_0^1 |v(y_{u+})|^2 dy_{u+} + \int_0^1 |v(y_{u-})|^2 dy_{u-} \right]. \quad (4.63)$$

Si nous posons $E_v = \langle |v|^2 \rangle = (1/2 - y_0) \left[\int_0^1 |v(y_{u+})|^2 dy_{u+} + \int_0^1 |v(y_{u-})|^2 dy_{u-} \right]$, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) \geq \frac{4\pi^2 y_0}{B(1/2 - y_0)^3} E_v. \quad (4.64)$$

Terme de dissipation dû à la viscosité plastique :

$$\nu(\mathbf{u}) = \langle |D\mathbf{u}|^2 + (\alpha^2 + \beta^2) |\mathbf{u}|^2 \rangle. \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{u}) &= \langle |Dv|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + w^2) \rangle + \langle (\alpha^2 + \beta^2)v^2 \rangle + \langle |Du|^2 + |Dw|^2 \rangle \\ &\geq \langle 2|Dv|^2 \rangle + \langle (\alpha^2 + \beta^2)v^2 \rangle + \langle |Du|^2 + |Dw|^2 \rangle \end{aligned}$$

Or d'après l'équation de conservation de la masse, il est possible d'écrire :

$$|\alpha Du + \beta Dw|^2 = |D^2 v|^2,$$

$$\text{d'où : } (\alpha^2 + \beta^2) |Du|^2 + |Dw|^2 \geq |D^2 v|^2,$$

soit encore :

$$\langle |Du|^2 + |Dw|^2 \rangle \geq \frac{\langle |D^2v|^2 \rangle}{(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{\int_0^1 |D^2v(y_{u+})|^2 dy_{u+} + \int_0^1 |D^2v(y_{u-})|^2 dy_{u-}}{(1/2 - y_0)^3 (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (4.66)$$

$$\geq \frac{\pi^4}{(1/2 - y_0)^4 (\alpha^2 + \beta^2)} E_v. \quad (4.67)$$

Finalement, on obtient :

$$\nu(\mathbf{u}) \geq \left(\frac{\pi^4}{(1/2 - y_0)^4 (\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2\pi^2}{(1/2 - y_0)^2} + (\alpha^2 + \beta^2) \right) E_v.$$

Terme de flottabilité :

$$\langle v_r \theta_r + v_i \theta_i \rangle \leq \frac{1}{2} \left(\delta_1 E_v + \frac{1}{\delta_1} \int_0^1 |\theta(y_t)|^2 dy_t \right), \quad \forall \delta_1 > 0. \quad (4.68)$$

Terme de dissipation thermique :

$$\langle |D\theta|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|\theta|^2 \rangle = \int_0^1 (|\partial_{y_t}\theta(y_t)|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|\theta(y_t)|^2) dy_t \quad (4.69)$$

$$\geq (\pi^2 + (\alpha^2 + \beta^2)) \int_0^1 |\theta(y_t)|^2 dy_t. \quad (4.70)$$

Finalement, ces différentes inégalités nous permettent d'écrire :

$$s_I \langle |u|^2 \rangle \leq -A_1 E_v + \sqrt{Ra} \frac{1}{2} \left(\delta_1 E_v + \frac{1}{\delta_1} \int_0^1 |\theta(y_t)|^2 dy_t \right)$$

$$Pr s_I \langle |\theta|^2 \rangle \leq -C_1 \int_0^1 |\theta(y_t)|^2 dy_t + \sqrt{Ra} \frac{1}{2} \left(\delta_1 E_v + \frac{1}{\delta_1} \int_0^1 |\theta(y_t)|^2 dy_t \right), \quad (4.71)$$

avec

$$A_1 = \left(1 - \frac{Re}{Re_L(B)} \right) \left[\frac{\pi^4}{(\frac{1}{2} - y_0)^4 (\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2\pi^2}{(\frac{1}{2} - y_0)^2} + (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{4\pi^2 y_0}{(\frac{1}{2} - y_0)^3} \right] \quad (4.72)$$

et

$$C_1 = \pi^2 + (\alpha^2 + \beta^2). \quad (4.73)$$

On pose :

$$E = \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle, \quad (4.74)$$

et

$$K = \langle |\theta|^2 \rangle. \quad (4.75)$$

En considérant l'énergie totale $E_\lambda(\mathbf{u}, \theta)$ telle que $s_I E_\lambda(\mathbf{u}, \theta) = s_I [E + Pr K]$, nous obtenons :

$$s_I E_\lambda \leq \left[-A_1 + \delta_1 \sqrt{Ra} \right] E + \left[-C_1 + \frac{\sqrt{Ra}}{\delta_1} \right] K.$$

En posant $\delta_1 = \left(\frac{A_1}{C_1} \right)^{1/2}$, on peut écrire :

$$s_I E_\lambda \leq \left(-(A_1 C_1)^{1/2} + \sqrt{Ra} \right) \left[\left(\frac{A_1}{C_1} \right)^{1/2} E + \left(\frac{C_1}{A_1} \right)^{1/2} K \right]. \quad (4.76)$$

On cherche Ra de telle sorte que $s_I E_\lambda < 0$. C_1 et A_1 étant positifs, on peut donc en conclure une condition de stabilité sur le nombre de Rayleigh :

$$s_I < 0 \quad \text{si} \quad Ra < A_1 C_1 \quad (4.77)$$

soit encore la condition de stabilité :

$$Ra < [\pi^2 + \delta_{\alpha\beta}^2] \left(1 - \frac{Re}{Re_L(B)} \right) \left[\frac{\pi^4}{\left(\frac{1}{2} - y_0\right)^4 \delta_{\alpha\beta}^2} + \frac{2\pi^2}{\left(\frac{1}{2} - y_0\right)^2} + \delta_{\alpha\beta}^2 + \frac{4\pi^2 y_0}{\left(\frac{1}{2} - y_0\right)^3} \right], \quad (4.78)$$

où

$$\delta_{\alpha\beta}^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (4.79)$$

4.4.1 Comportement asymptotique lorsque $B \rightarrow 0$

Nous avons déterminé dans le Chapitre précédent le comportement de y_0 , lorsque celui-ci tend vers zéro, en fonction du nombre de Bingham. Nous rappelons ici son comportement :

$$y_0 = \frac{B}{8} - \frac{B^2}{16} + O(B^3) \quad \text{pour} \quad B \rightarrow 0 \quad (4.80)$$

Nous en déduisons donc le comportement du nombre de Rayleigh, lorsque $B \rightarrow 0$, à la limite de stabilité :

$$Ra_E \sim (\pi^2 + \delta_{\alpha\beta}^2) \left(1 - \frac{Re}{Re_L(B)} \right) \left[\left(\delta_{\alpha\beta}^2 + 8\pi^2 + \frac{16\pi^2}{\delta_{\alpha\beta}^2} \right) + B \left(20\pi^2 + \frac{16\pi^4}{\delta_{\alpha\beta}^2} \right) \right] \quad (4.81)$$

4.4.2 Comportement asymptotique lorsque $B \rightarrow \infty$

Lorsque les valeurs prises par le nombre de Bingham sont grandes, y_0 se comporte de la manière suivante :

$$y_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{B} + O\left(\frac{1}{B^{3/2}}\right) \quad \text{pour } B \rightarrow \infty, \quad (4.82)$$

ainsi, le comportement asymptotique du nombre de Rayleigh, lorsque $B \rightarrow \infty$, à la limite de stabilité peut être obtenu, il s'écrit :

$$Ra_E \sim (\pi^2 + \delta_{\alpha\beta}^2) \left(1 - \frac{Re}{Re_L(B)}\right) \left[2\pi^2 B^{5/2} + B^2 \left(6\pi^2 + \frac{\pi^4}{\delta_{\alpha\beta}^2}\right) + B^{3/2} \left(14\pi^2 + \frac{4\pi^4}{\delta_{\alpha\beta}^2}\right)\right]. \quad (4.83)$$

Soit $\delta_{m\alpha\beta}$, la valeur de $\delta_{\alpha\beta}$ qui rend maximale la partie droite de l'Eq. (4.78) :

$$\frac{dRa}{d\delta}(\delta_{m\alpha\beta}) = 0. \quad (4.84)$$

Son comportement est donné par :

$$\delta_{m\alpha\beta}^2 \sim \frac{59\pi^2}{160\sqrt{10}} B. \quad (4.85)$$

Le détail des calculs donnant le comportement de $\delta_{m\alpha\beta}$ est présenté dans l'Annexe I.

Finalement, le comportement asymptotique du nombre de Rayleigh Ra_E est donné par :

$$Ra_E \sim \left(1 - \frac{Re}{Re_E}\right) \frac{59\pi^4}{80\sqrt{10}} B^{7/2}. \quad (4.86)$$

Dans le cas bidimensionnel ($\beta = 0$), le comportement du nombre d'onde en fonction du nombre de Bingham s'écrit :

$$\alpha \sim \sqrt{\frac{59\pi^2}{160\sqrt{10}}} \sqrt{B}. \quad (4.87)$$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les conditions de stabilité au sens de la norme L^2 de l'écoulement de base vis à vis d'une perturbation infinitésimale. La comparaison avec les valeurs du nombre de Rayleigh Ra_L , au-delà desquelles l'écoulement de base est instable fait ressortir la possibilité d'une croissance transitoire de l'énergie pour des nombres de Rayleigh compris entre Ra_E et Ra_L . Cet effet résulte de la non-normalité des opérateurs qui interviennent dans l'analyse linéaire de stabilité et est d'autant plus marqué que le nombre de Reynolds est important.

La dépendance de Ra_E vis à vis du nombre de Bingham a été précisée à partir d'une approche analytique où il a été montré en particulier que pour de grandes valeurs de B , $Ra_E \sim B^{7/2}$.

4. Approche énergétique de la stabilité de l'écoulement

Chapitre 5

Analyse non linéaire de stabilité

Les analyses de stabilité que nous avons effectuées dans les Chapitres 2 - 4 considéraient le cas où l'écoulement de base était soumis à des perturbations infinitésimales. Dans le cadre de ces études, il a été supposé implicitement que la zone bouchon subsistait et nous avons déterminé les positions des interfaces au voisinage des conditions critiques, par $y_i^\pm = \pm y_0 \pm Y^\pm$. Cela présupposait que l'écoulement de base ne pouvait pas subir de rupture de topologie.

Lorsque l'écoulement de base est soumis à une perturbation d'amplitude finie, la zone bouchon peut être détruite et il est possible de se trouver en présence "d'îlots" de zones non cisailées. La principale difficulté, dans une analyse non linéaire de stabilité de l'écoulement d'un fluide à seuil, réside justement dans la détermination de l'évolution de la zone bouchon dans laquelle les contraintes sont indéterminées ainsi que dans le suivi des interfaces qui délimitent les différentes zones non cisailées. Pour contourner ces difficultés, la seule approche possible est celle basée sur la méthode énergétique. Elle fait apparaître des grandeurs moyennées sur tout le domaine de l'écoulement, et conduit à un problème d'optimisation avec contraintes que nous traiterons moyennant un certain nombre d'approximations basées sur des inégalités fonctionnelles classiques. Il est clair que cette approche ne permet pas d'avoir de façon précise les conditions suffisantes de stabilité, néanmoins, des informations pertinentes peuvent être obtenues quant à leur dépendance vis à vis du nombre de Bingham.

Cette procédure a été utilisée par Nouar et Frigaard (2001) dans l'analyse non linéaire de stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide à seuil. Le présent chapitre se propose d'étendre ces travaux au problème de Poiseuille Rayleigh-Bénard.

A ces fins, nous commencerons par donner l'expression de la variation temporelle de l'énergie totale d'une perturbation d'amplitude finie (sorte d'équation de Reynolds-Orr). L'analyse des différents termes nous permet de proposer un diagramme de stabilité dans le plan (Ra, Re) . La frontière délimitant la zone de stabilité monotone sera déterminée. Ce diagramme nécessite au préalable l'évaluation des conditions suffisantes de stabilité dans deux cas limites : le cas Rayleigh-Bénard lorsque $Re = 0$ et le cas Poiseuille plan isotherme pour $Ra = 0$.

Tout comme les chapitres précédents, les équations sont écrites en 3D mais la résolution numérique a été restreinte au cas bidimensionnel, pour rester en accord avec l'analyse linéaire (Chapitre 2) et pour pouvoir effectuer des comparaisons.

5.1 Evolution temporelle de l'énergie totale de la perturbation

Nous considérons un écoulement de convection mixte en régimes dynamique et thermique établis, pour un fluide à seuil dans un canal plan. A l'écoulement de base déterminé lors du Chapitre 2, par les Eq. (2.20)-(2.22), on superpose une perturbation arbitraire (\mathbf{u}, p, θ) en terme de vitesse, pression et température respectivement. L'écoulement perturbé doit satisfaire les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Les équations aux perturbations sont obtenues en retranchant les équations satisfaites par l'écoulement de base. En adoptant les mêmes échelles caractéristiques que dans le Chapitre 4, nous avons :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.1a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + Re [(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{U}_b + \mathbf{u})] = - \nabla p + \sqrt{Ra} \theta \mathbf{e}_y \\ + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau} (\mathbf{U}_b)), \end{aligned} \quad (5.1b)$$

$$Pr \theta_t + Pr ((Re \mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \cdot \nabla) \theta - \sqrt{Ra} v = \nabla^2 \theta, \quad (5.1c)$$

muni des conditions de non glissement et de températures imposées aux parois ($y = \pm 1/2$) suivantes :

$$\mathbf{u}(\pm 1/2) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \theta(\pm 1/2) = 0. \quad (5.2)$$

De la même manière que dans le Chapitre 4, la perturbation est supposée périodique suivant les directions x et z et de périodes $2X$ et $2Z$ respectivement. Les densités d'énergie cinétique et thermique moyennées sur le domaine¹ $\Omega = [-X; X] \times [-1/2; 1/2] \times [-Z; Z]$, sont définies respectivement par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2X 2Z} \int_{\Omega} \frac{u_i^2}{2} d\Omega, \quad (5.3)$$

et

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2X 2Z} \int_{\Omega} \frac{\theta^2}{2} d\Omega, \quad (5.4)$$

On définit une énergie totale E_λ par :

$$E_\lambda = \mathcal{E} + \lambda Pr \mathcal{K}. \quad (5.5)$$

L'évolution temporelle de la densité d'énergie cinétique moyenne de la perturbation est obtenue en multipliant les équations aux perturbations (Eq. (5.1b)) par les composantes correspondantes de la vitesse. Nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Re I(\mathbf{u}) - \nu(\mathbf{u}) + \sqrt{Ra} \mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}) \quad (5.6)$$

1. Dans ce chapitre, Ω correspond au domaine compris entre les parois supérieure et inférieure suivant y , il prend en compte les zones cisailées et non cisailées. La difficulté liée à l'indétermination des contraintes dans les zones non cisailées est contournée, et détaillée dans la section 5.2, en réalisant différentes approximations sur $\boldsymbol{\tau}$.

avec

$$I(\mathbf{u}) = - \langle u v D U_b \rangle , \quad (5.7)$$

$$\nu(\mathbf{u}) = \left\langle \frac{1}{2} (\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \tau_{ij}(\mathbf{U}_b)) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \right\rangle , \quad (5.8)$$

$$\mathcal{R}a(\theta, \mathbf{u}) = \langle v \theta \rangle , \quad (5.9)$$

$$\text{et } \langle \bullet \rangle = \frac{1}{2X 2Z} \int_{\Omega} \bullet d\Omega.$$

Remarques :

(i) De la même manière que dans le Chapitre 4, nous pouvons de nouveau noter que les termes non linéaires provenant de $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ n'interviennent dans aucun processus physique qui modifie l'énergie de la perturbation (Henningson (1996)).

(ii) L'indétermination des contraintes dans les zones non cisillées ne permet pas une évaluation précise des termes $\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})$ et $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})$.

La variation temporelle de la norme $L2$ de θ est obtenue en multipliant l'équation de l'énergie (Eq. (5.1c)) par θ . Une fois intégrée, cette équation s'écrit :

$$Pr \frac{d\mathcal{K}}{dt} = -\mathcal{C}_d(\theta) + \sqrt{Ra} \mathcal{C}_v(\theta, \mathbf{u}), \quad (5.10)$$

avec :

$$\mathcal{C}_v(\theta, \mathbf{u}) = \langle v \theta \rangle , \quad (5.11)$$

et

$$\mathcal{C}_d(\theta) = \langle |\nabla \theta|^2 \rangle . \quad (5.12)$$

Finalement l'évolution en fonction du temps de l'énergie totale, $E_\lambda = \mathcal{E} + \lambda Pr \mathcal{K}$, prend la forme suivante :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = Re I(\mathbf{u}) - \nu(\mathbf{u}) + \sqrt{Ra} (1 + \lambda) \langle v \theta \rangle - \lambda \mathcal{C}_d(\theta). \quad (5.13)$$

L'objectif de ce chapitre est de déterminer un nombre de Rayleigh critique Ra_{NL} tel que pour tout $Ra < Ra_{NL}$ et pour tout $\lambda > 0$, nous ayons $\frac{dE_\lambda}{dt} \leq 0$. L'approche utilisée consiste comme précédemment (Chapitre 4) à maximiser ou minimiser les différents termes qui interviennent dans l'Eq. (5.13).

5.2 Approximation des différents termes de $\frac{dE_\lambda}{dt}$

Etant donné que le comportement de la zone bouchon vis à vis d'une perturbation d'amplitude finie est inconnue, les différentes situations possibles ont d'abord été recensées (Nouar et Frigaard (2001)) puis les différentes intégrales ont été analysées selon que la zone considérée

soit cisailée ou non.

Différentes situations possibles :

En présence d'une perturbation d'amplitude finie, quatre zones possibles peuvent exister dans l'écoulement. Elles sont schématisées par la Fig. 5.1 et décrites dans ce qui suit :

- Zone a : Région dans laquelle le matériau n'est pas cisailé pour les écoulements de base et perturbé, *i.e.* $\tau(\mathbf{U}_b) \leq B$ et $\tau(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \leq B$.
- Zone b : Région dans laquelle l'écoulement de base est non cisailé alors que l'écoulement perturbé est cisailé, *i.e.* $\tau(\mathbf{U}_b) \leq B$ et $\tau(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) > B$.
- Zone c : Région dans laquelle l'écoulement de base est cisailé alors que l'écoulement perturbé est non cisailé, *i.e.* $\tau(\mathbf{U}_b) > B$ et $\tau(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \leq B$.
- Zone d : Région dans laquelle les écoulements de base et perturbé sont cisailés $\tau(\mathbf{U}_b) > B$ et $\tau(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) > B$.

Examinons la quantité $n(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} (\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \tau_{ij}(\mathbf{U}_b)) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})$ dans chacune des zones décrites ci-dessus ($-\nu(\mathbf{u}) = \langle n(\mathbf{u}) \rangle$). La dissipation visqueuse $\nu(\mathbf{u})$ résulte, d'une part, de la contribution de la viscosité plastique (dissipation visqueuse pure), et d'autre part, de celle provenant de la contrainte seuil, via le nombre de Bingham. Intuitivement, il est clair que $\nu(\mathbf{u}) \geq \langle \dot{\gamma}_{ij}^2(\mathbf{u}) \rangle$, où $\langle \dot{\gamma}_{ij}^2(\mathbf{u}) \rangle$ représente la dissipation visqueuse pure. De la même manière que Nouar et Frigaard (2001), examinons ceci, zone par zone.

- **Dans la zone a :** $\dot{\gamma}_{ij} = 0$ et $\nu(\mathbf{u}) = 0$, on peut encore écrire :

$$-\nu(\mathbf{u}) \leq -\langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (5.14)$$

- **Dans la zone b :** $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) = 0$ et $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u})$, soit $\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = \dot{\gamma}(\mathbf{u})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} n(\mathbf{u}) &\leq -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) + B \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \\ &\leq -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\mathbf{u})} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) + B \dot{\gamma}(\mathbf{u}) = -\dot{\gamma}^2(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

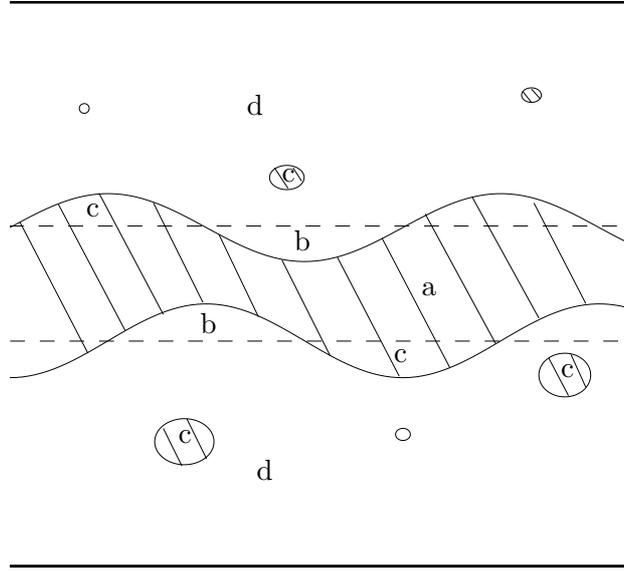


FIG. 5.1 – Représentation schématique des différentes zones cisailées et non cisailées qui peuvent exister lorsque l'écoulement est soumis à une perturbation d'amplitude finie. Traits pointillés : Frontières de la zone bouchon pour l'écoulement de base. Zones hachurées : zones non cisailées pouvant apparaître.

- **Dans la zone c** : nous avons $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = 0$ et $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) + \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) = 0$ soit $\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b) = -\dot{\gamma}(\mathbf{u})$. De façon similaire à la zone b, nous obtenons :

$$\begin{aligned} n(\mathbf{u}) &\leq B \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b)} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \\ &\leq B \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\mathbf{u})} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) = -\dot{\gamma}^2(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

- **Dans la zone d**, nous avons :

$$\begin{aligned} n(\mathbf{u}) &= -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{U}_b) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b)} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{U}_b) \end{aligned} \quad (5.17)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les termes en facteur du nombre de Bingham nous permet d'obtenir :

$$-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{U}_b) \leq \dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{U}_b) \quad (5.18)$$

et

$$\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{U}_b) \leq \dot{\gamma}(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u} - \mathbf{U}_b) \quad (5.19)$$

La borne qui concerne les termes en facteur du nombre de Bingham est nulle et nous obtenons donc dans cette zone :

$$n(\mathbf{u}) \leq -\dot{\gamma}^2(\mathbf{u}). \quad (5.20)$$

Finalement, nous venons de démontrer que dans chaque zone, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$-\nu(\mathbf{u}) \leq -\langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (5.21)$$

Nous pouvons encore écrire :

$$-\langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle \leq -C_0 \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle, \quad (5.22)$$

où $C_0 = 3.74 \pi^2$. Cette constante a été donnée par Serrin (1959) et Velte (1962). Elle est obtenue en résolvant le problème d'optimisation :

$$C_0 = \max \frac{\langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle}{\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle}, \quad (5.23)$$

avec la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Terme d'inertie :

Le terme d'inertie est représenté par $I(\mathbf{u})$ défini par l'Eq. (5.7).

$$-\int_{\Omega} u v D U_b d\Omega = \frac{B}{y_0} \int_{\Omega_0} \text{signe}(y) (|y| - y_0) u v d\Omega_0, \quad (5.24)$$

avec $\Omega_0 = [-X; X] \times [-1/2; -y_0] \cup [y_0; 1/2] \times [-Z; Z]$.

Nous avons :

$$-\int_{\Omega_0} u v D U_b d\Omega_0 \leq \frac{B(1/2 - y_0)}{2y_0} \int_{\Omega_0} (u^2 + v^2) d\Omega_0. \quad (5.25)$$

En supposant $y > y_0$, nous pouvons écrire :

$$v^2 = \left[\int_{1/2}^y \frac{\partial v}{\partial s}(x, s, z, t) ds \right]^2. \quad (5.26)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'obtenir :

$$v^2 \leq \int_{y_0}^{1/2} ds \int_{y_0}^{1/2} \left[\frac{\partial v}{\partial s}(x, s, z, t) \right]^2 ds = (1/2 - y_0) \int_{y_0}^{1/2} \left[\frac{\partial v}{\partial s}(x, s, z, t) \right]^2 ds. \quad (5.27)$$

La même méthode est utilisée pour le cas où $y < -y_0$. Finalement, nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega_0} (u^2 + v^2) d\Omega_0 \leq \int_{\Omega_0} \left[(1/2 - y_0) \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega_0 \right] d\Omega_0 \leq (1/2 - y_0)^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega. \quad (5.28)$$

L'inégalité sur le terme inertiel est donc :

$$-\langle uv DU_b \rangle \leq \frac{B(1/2 - y_0)^3}{2y_0} \langle \dot{\gamma}_{ij}^2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (5.29)$$

Terme de flottabilité :

$$\langle v\theta \rangle \leq \frac{1}{2} \left(\delta_2 \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \frac{1}{\delta_2} \langle \theta^2 \rangle \right) \quad \forall \delta_2 > 0. \quad (5.30)$$

Terme de flux conductif :

Par l'inégalité de Poincaré, nous avons :

$$\langle |\nabla \theta|^2 \rangle \geq \pi^2 \langle \theta^2 \rangle. \quad (5.31)$$

5.3 Condition suffisante de stabilité

Il s'agit de déterminer la frontière qui délimite dans le plan (Re, Ra) la zone où les conditions suffisantes de stabilité sont assurées, *i.e.*, où $\frac{dE_\lambda}{dt} < 0$.

Première approche :

Elle est dite basée sur le problème de Poiseuille isotherme, dans le sens où nous nous plaçons à une valeur de Re inférieure à la valeur critique $Re_{EN}(B)$, valeur qui assure la stabilité monotone de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham, et pour laquelle nous recherchons le nombre de Rayleigh maximal, c'est à dire l'écart maximal de température, qui assure la condition $\frac{dE_\lambda}{dt} < 0$.

D'après (5.21), la variation temporelle de l'énergie totale vérifie :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq -\lambda \langle |\nabla \theta|^2 \rangle - \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle - Re \langle uv DU_b \rangle + \sqrt{Ra} (1 + \lambda) \langle v\theta \rangle. \quad (5.32)$$

Comme il a été indiqué ci-dessus, il est supposé que $Re < Re_{EN}(B)$, avec $Re_{EN}(B)$ défini comme suit :

$$\frac{1}{Re_{EN}(B)} = \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} - \frac{\langle uv DU_b \rangle}{\langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle}, \quad (5.33)$$

où \mathcal{V}_u conserve la même définition que dans le chapitre précédent :

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} \in [\mathcal{C}^2(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } y = \pm \frac{1}{2} \right\}.$$

La dépendance de Re_{EN} vis à vis du nombre de Bingham a été restreinte à la modification du gradient de vitesse correspondant à l'écoulement de base. Le calcul de cette valeur critique énergétique sera déterminée ultérieurement (Section 5.4).

En tenant compte de (5.33), l'inégalité (5.32) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq - \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right) \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle + \sqrt{Ra} (1 + \lambda) \langle v\theta \rangle - \lambda \langle |\nabla \theta|^2 \rangle. \quad (5.34)$$

On peut montrer au préalable, par une méthode tout à fait analogue à celle décrite dans l'Annexe H, que la valeur optimale de λ , *i.e.*, celle qui fournit la plus grande valeur de Ra , est $\lambda = 1$.

L'inégalité précédente devient alors :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq - \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right) \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle + 2\sqrt{Ra} \langle v\theta \rangle - \langle |\nabla \theta|^2 \rangle. \quad (5.35)$$

Moyennant les inégalités (5.22) et (5.30), nous avons :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq - \left(C_0 \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right) - \sqrt{Ra} \delta_2 \right) \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \left(\frac{\sqrt{Ra}}{\delta_2} - C_1 \right) \langle \theta^2 \rangle. \quad (5.36)$$

Finalement, nous avons :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq \left(-\sqrt{A_1 C_1} + \sqrt{Ra} \right) \left(\sqrt{\frac{A_1}{C_1}} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \sqrt{\frac{C_1}{A_1}} \langle \theta^2 \rangle \right), \quad (5.37)$$

avec

$$A_1 = C_0 \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right) \quad (5.38)$$

et

$$C_1 = \pi^2. \quad (5.39)$$

Les conditions suffisantes de stabilité sont assurées pour :

$$Ra \leq C_0 C_1 \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right) = 364.31 \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right). \quad (5.40)$$

Le long de la frontière délimitant la zone de stabilité monotone (Fig. 5.2), le nombre de Rayleigh critique varie linéairement avec $\frac{Re}{Re_{EN}(B)}$. Lorsque $Re \rightarrow 0$, les valeurs de Ra obtenues sont très inférieures à la valeur critique Newtonienne. Une façon d'améliorer les résultats aux faibles valeurs de Re est d'imposer que la frontière qui délimite la zone de stabilité passe par le point $(0; Ra_N) = (0; 1708)$. C'est ce qui est proposé dans le paragraphe qui suit.

Deuxième approche :

Nous imposons aux conditions de stabilité de satisfaire les deux cas limites :

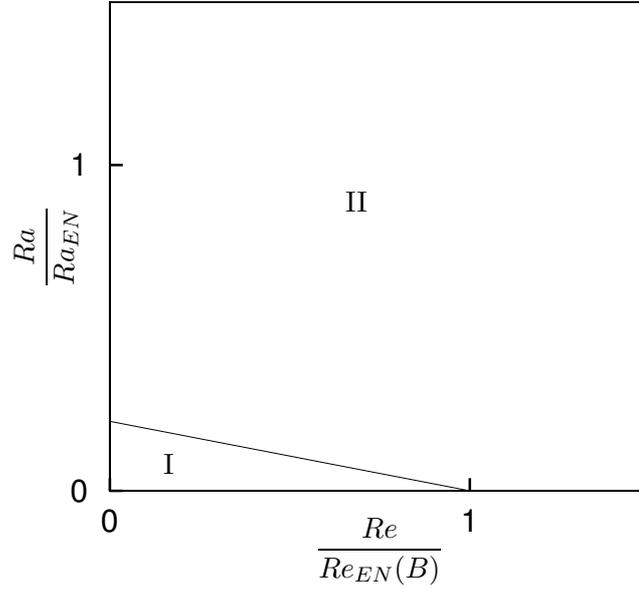


FIG. 5.2 – Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil vis à vis de perturbations d'amplitude finie. Région I: Stabilité monotone, Région II: Croissance transitoire ou Instabilité.

(i) le problème de Rayleigh-Bénard ($Re = 0$)

et

(ii) le problème de Poiseuille plan ($Ra = 0$).

Pour le problème de Rayleigh-Bénard, (i), nous introduisons la quantité Λ_N de la manière suivante :

$$\frac{1}{\Lambda_N} = \max_{(\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \theta \in \mathcal{V}_\theta)} \frac{2 \langle v\theta \rangle}{\langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle + \langle |\nabla \theta|^2 \rangle}, \quad (5.41)$$

où \mathcal{V}_θ est défini comme au chapitre précédent, *i.e.* $\mathcal{V}_\theta = \left\{ \theta : \theta \in [\mathcal{C}^2(\Omega)], \theta = 0 \text{ en } y = \pm \frac{1}{2} \right\}$.

D'après les relations (5.32) et (5.41), la condition suffisante de stabilité pour le problème de Rayleigh-Bénard est donnée par $\sqrt{Ra_{EN}} = \Lambda_N$. Cette valeur est la même que celle obtenue pour un fluide Newtonien puisque le terme de dissipation ne fait intervenir que la viscosité plastique. Le problème a été résolu entre autre par Joseph (1966). Cette valeur est identique à celle obtenue à partir d'une analyse modale : $Ra_{EN} = 1708$.

Considérons le cas (ii) du problème de Poiseuille plan. Le nombre de Reynolds maximal $Re_{EN}(B)$, qui assure une condition suffisante de stabilité, est donné par l'Eq. (5.33).

En considérant les écoulements qui satisfont la condition $Re \leq Re_{EN}(B)$, nous pouvons

réécrire l'énergie totale de la manière suivante :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle - \left(1 - \sqrt{\frac{Ra}{Ra_{EN}}} \right) (\langle |\nabla \theta|^2 \rangle + \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle), \quad (5.42)$$

soit encore :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq - \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} - \sqrt{\frac{Ra}{Ra_{EN}}} \right) \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle - \left(1 - \sqrt{\frac{Ra}{Ra_{EN}}} \right) \langle |\nabla \theta|^2 \rangle. \quad (5.43)$$

Les conditions de stabilité étant telles que l'énergie totale soit décroissante dans le temps, nous avons alors :

$$Re \leq Re_{EN}(B), \quad (5.44a)$$

$$Ra \leq Ra_{EN} \quad (5.44b)$$

$$\frac{Ra}{Ra_{EN}} \leq \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)} \right)^2. \quad (5.44c)$$

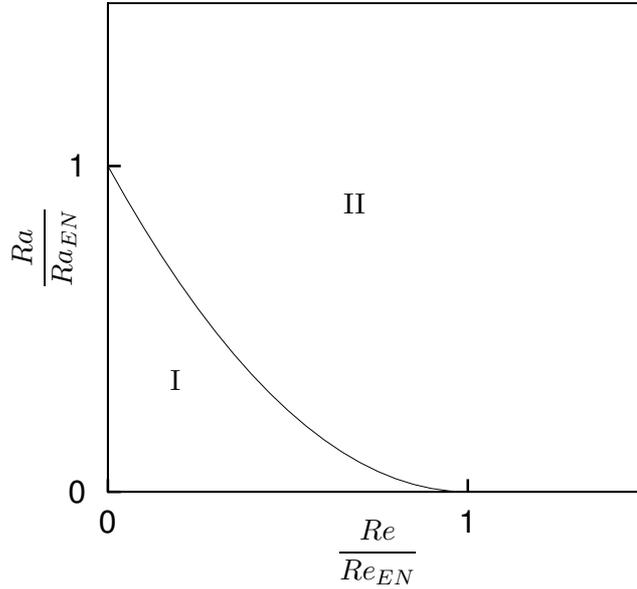


FIG. 5.3 – Stabilité de l'écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil vis à vis de perturbations d'amplitude finie. Région I: Stabilité monotone, Région II: Croissance transitoire ou Instabilité.

Les Equations (5.44) permettent de tracer la frontière (Fig. 5.3) qui délimite la zone où la condition de stabilité monotone (Région I) est assurée. Au-delà de cette frontière, il est possible d'être en situation de croissance transitoire ou d'instabilité (Région II).

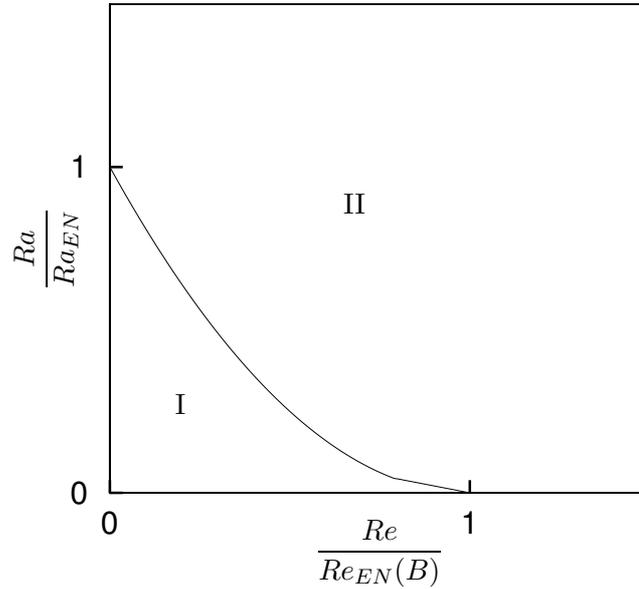


FIG. 5.4 – Stabilité de l’écoulement de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil vis à vis de perturbations d’amplitude finie. Région I: Stabilité monotone, Région II: Croissance transitoire ou Instabilité.

Finalement en combinant les conditions obtenues par les deux approches, nous obtenons la condition de stabilité représentée par la Fig. 5.4 et dont l’expression est donnée comme suit :

$$\frac{Ra}{Ra_{EN}} \leq \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)}\right)^2 \quad \text{si} \quad Re \in \left[0, \frac{Ra_{EN} - C_0 \pi^4}{Ra_{EN}}\right] \quad (5.45a)$$

$$\frac{Ra}{Ra_{EN}} \leq \frac{364.31}{Ra_{EN}} \left(1 - \frac{Re}{Re_{EN}(B)}\right) \quad \text{si} \quad Re \in \left[\frac{Ra_{EN} - C_0 \pi^4}{Ra_{EN}}, 1\right] \quad (5.45b)$$

Remarque :

Une troisième approche dite basée sur le problème de Rayleigh-Bénard, dans le sens où nous nous plaçons à des valeurs de Ra inférieures à Ra_{EN} et que le nombre de Reynolds est laissé libre, peut être considérée. Son développement est donné dans l’Annexe J et montre que cette dernière approche ne permet pas d’améliorer la région de stabilité monotone obtenue par les deux premières approches.

5.4 Calcul de la valeur de $Re_{EN}(B)$

Les bornes limites que nous obtenons lorsque $Re = 0$ et $Ra = 0$ sont respectivement les valeurs critiques Ra_{EN} , correspondant au problème de Rayleigh-Bénard pour un fluide Newtonien et $Re_{EN}(B)$ qui concerne le problème de Poiseuille plan pour lequel nous avons considéré l’écoulement de base d’un fluide à seuil. En effet, l’approximation que nous faisons

ici revient à considérer un problème pour lequel l'écoulement perturbé ne fait apparaître aucune zone non cisailée et pour lequel la viscosité effective du fluide correspond à la viscosité plastique. Cependant, le problème ne se réduit pas complètement au cas d'un fluide Newtonien dans le sens où l'écoulement de base considéré est celui d'un fluide à seuil, c'est à dire un écoulement caractérisé par une zone centrale non cisailée.

Nous nous proposons dans cette section de déterminer $Re_{EN}(B)$ en fonction du nombre de Bingham. Il s'agit de résoudre un problème d'optimisation défini par l'Eq. (5.33) avec la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Ce problème peut être réécrit de la manière suivante :

$$\delta \left[-u v DU_b + \frac{1}{Re_\lambda} \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) - p_\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \right] = 0, \quad (5.46)$$

où δ correspond à l'opérateur variationnel et p_λ est un multiplicateur de Lagrange qui a été introduit pour tenir compte de la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Les équations d'Euler-Lagrange associées à (5.46) s'écrivent :

$$v DU_b + \frac{2}{Re_\lambda} \partial_x p_\lambda - \frac{2}{Re_\lambda} \Delta u = 0 \quad (5.47a)$$

$$u DU_b + \frac{2}{Re_\lambda} \partial_y p_\lambda - \frac{2}{Re_\lambda} \Delta v = 0 \quad (5.47b)$$

$$\frac{2}{Re_\lambda} \partial_z p_\lambda - \frac{2}{Re_\lambda} \Delta w = 0 \quad (5.47c)$$

avec les conditions de non-glissement aux parois :

$$\mathbf{u}(\pm 1/2) = \mathbf{0}. \quad (5.48)$$

Remarque :

Le problème (5.47) est défini dans tout le domaine $y \in \left[-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right]$. L'effet du nombre de Bingham a été restreint uniquement à la modification du gradient de vitesse.

La perturbation est supposée périodique suivant les directions longitudinale et transverse, nous cherchons donc la solution de la perturbation sous la forme de modes de Fourier :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(y) e^{i(\alpha x + \beta z)}.$$

Si nous nous limitons au cas d'une perturbation bidimensionnelle, le système (5.47)-(5.48) devient :

$$-i \alpha (2 DU_b Df + D^2 U_b f) = \frac{2}{Re_\lambda} (D^2 - \alpha^2)^2 f, \quad (5.49)$$

muni des conditions limites aux parois :

$$f(\pm 1/2) = f'(\pm 1/2) = 0. \quad (5.50)$$

Les Equations (5.49)-(5.50) représentent un problème aux valeurs propres où $\frac{1}{Re}$ est la valeur propre. La valeur critique du nombre de Reynolds est finalement obtenue de la manière suivante :

$$Re_{EN}(B) = \min_{\alpha} Re_{\lambda}. \quad (5.51)$$

De la même manière que dans les Chapitres 2 et 4, ces équations sont discrétisées par une méthode aux différences finies centrées d'ordre 2. Les résultats présentés sont obtenus avec un nombre de points de discrétisation $N = 201$.

Le Tableau 5.1 présente les valeurs critiques du nombre de Reynolds $Re_{EN}(B)$ et du nombre d'onde α_{cE} en fonction du nombre de Bingham, la Fig. 5.5 donne leur représentation graphique.

y_0	B	$Re_E(B)$	α_{cE}
0	0	175.19	4.2
0.05	0.4938	191.94	4.28
0.08	0.9070	206.10	4.36
0.12	1.6620	230.71	4.52
0.14	2.1605	245.98	4.63
0.2	4.4444	307.80	5.15
0.25	8.0000	385.62	6.10
0.305	16.0421	512.37	8.69
0.32	19.7531	557.70	9.67
0.34	26.5625	630.09	11.11
0.36	36.7347	722.64	12.83
0.38	52.7778	846.71	15.04
0.40	80.0000	1023.05	18.12
0.44	244.4444	1775.91	30.73
0.46	575.0000	2895.91	47.173
0.47	1044.4444	4380.64	64.04

TAB. 5.1 – Conditions critiques de stabilité monotone vis à vis d'une perturbation bidimensionnelle.

Remarque :

Pour $B = 0$, c'est à dire pour un fluide Newtonien, les calculs indiquent que la stabilité monotone de l'écoulement de Poiseuille plan vis à vis d'une perturbation bidimensionnelle ($\beta = 0$) est garantie pour $Re \leq 175$.

En fait, lorsqu'une perturbation tridimensionnelle est considérée, la stabilité monotone est assurée par $Re \leq 98.2$ et la perturbation la plus dangereuse est sous forme de rouleaux

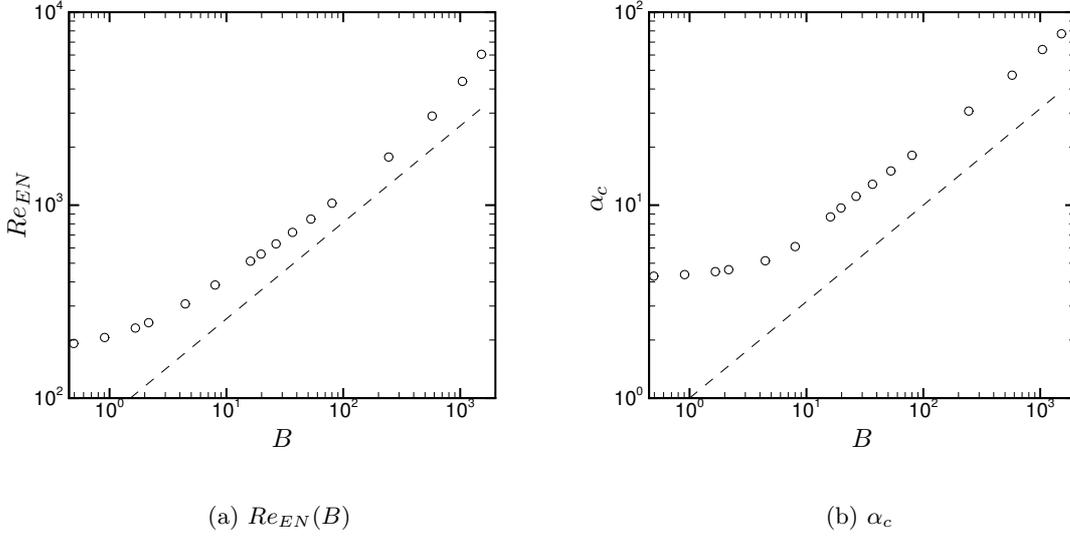


FIG. 5.5 – Conditions critiques de stabilité monotone en fonction du nombre de Bingham. Cas d’une perturbation bidimensionnelle ($\beta = 0$). La droite en pointillé indique une variation en \sqrt{B} en échelles logarithmiques.

longitudinaux ($\alpha = 0$) avec un nombre d’onde transverse $\beta = 2.04$ (Joseph (1966)).

Comme nous pouvons nous y attendre, l’augmentation du nombre de Bingham s’accompagne de l’augmentation de la valeur de Re_{EN} . La perturbation associée a une longueur d’onde qui décroît avec B . En outre, les résultats montrent que $Re_{EN}(B) \sim \sqrt{B}$ lorsque $B \rightarrow \infty$. Ce résultat peut être montré analytiquement. En effet, l’évolution au cours du temps de l’énergie cinétique s’écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}_{Poisueille}(B)}{dt} = -Re \langle uv DU_b \rangle - \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (5.52)$$

D’après l’inégalité (5.29), nous avons :

$$\frac{d\mathcal{E}_{Poisueille}(B)}{dt} \leq - \left[-Re \frac{B(1/2 - y_0)^3}{2y_0} + 1 \right] \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (5.53)$$

Ainsi, la décroissance de l’énergie du problème soumise à une perturbation initiale arbitraire est assurée si la condition suivante est satisfaite :

$$Re < \frac{2y_0}{B(1/2 - y_0)^3}. \quad (5.54)$$

Si nous posons $Re_{EN}(B) = \frac{2y_0}{B(1/2 - y_0)^3}$, le comportement de cette borne lorsque $B \rightarrow \infty$ s’écrit :

$$Re_{EN}(B) = \sqrt{B} + 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right). \quad (5.55)$$

5.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons déterminé, par une approche énergétique, des conditions de stabilité de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide de Bingham vis à vis de perturbations d'amplitudes finies. Une région de stabilité monotone a été déterminée. Cette région fait apparaître deux cas limites: (i) le cas où $Re = 0$ représentant le problème de Rayleigh-Bénard, (ii) le cas où $Ra = 0$ représentant l'écoulement de Poiseuille plan. A ces deux cas limites correspondent des bornes de stabilité: Ra_{EN} pour le cas (i), Re_{EN} pour le cas (ii).

La dépendance de Ra_{EN} vis à vis du nombre de Bingham n'a pas pu être mise en évidence dans la mesure où le terme de dissipation visqueuse $\nu(\mathbf{u})$ (dûe à la fois à la viscosité et à la contrainte seuil) est uniquement bornée par le terme de dissipation visqueuse pure. Ainsi, Ra_{EN} a été pris égal au seuil obtenu dans le cas d'un fluide Newtonien, *i.e.* $Ra_{EN} = 1708$.

La dépendance de Re_{EN} vis à vis du nombre de Bingham n'a pas non plus pu être traduite au travers du terme de dissipation visqueuse, cela pour les mêmes raisons que le cas (i), mais elle est apparue au travers du gradient de vitesse de l'écoulement de base. Nous avons finalement montré que $Re_{EN} \sim \sqrt{B}$ pour de grandes valeurs de B .

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Tout au long de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de stabilité de l'écoulement 2D de type Poiseuille Rayleigh-Bénard pour un fluide à seuil. La formulation mathématique relative à cet écoulement a été développée en adoptant le modèle de Bingham, pour le comportement rhéologique, et l'approximation de Boussinesq, pour le terme de poussée d'Archimède. L'écoulement de base pour un tel fluide se caractérise, dans le cas où les paramètres rhéologiques sont indépendants de la température, par une zone centrale non cisailée (zone bouchon) et de zones cisillées de part et d'autre. L'épaisseur de la zone bouchon ne dépend que du nombre de Bingham (contrainte seuil adimensionnelle). Une même structure topologique est observée si on considère le cas d'un matériau qui présente une viscosité plastique thermo-dépendante, par contre, l'écoulement de base perd sa symétrie et la zone non cisillée est décalée vers le bas.

Dans une première étape, une étude de stabilité vis à vis de perturbations infinitésimales a été réalisée. Deux situations ont été considérées selon que la thermo-dépendance de la viscosité plastique est prise en compte ou non. Pour ces deux cas, une analyse linéaire a été effectuée pour déterminer le seuil d'instabilité ($Ra_c = Ra_L, \alpha_c = \alpha_L$). L'instabilité se traduit par l'apparition de structures thermo-convectives advectées par l'écoulement moyen. Les calculs effectués à différentes valeurs de B , montrent clairement que la contrainte seuil stabilise l'écoulement. Cet effet stabilisant provient de l'augmentation, d'une part, de la dissipation visqueuse dans les zones cisillées, et d'autre part, de la zone bouchon où la perturbation en vitesse s'annule. Enfin, les résultats numériques indiquent que la décroissance de la viscosité plastique, μ_p , avec la température (caractérisée par le nombre de Pearson) tend à destabiliser l'écoulement.

Une analyse de stabilité au sens de la norme $L2$ de la perturbation a été mise en oeuvre et a permis de compléter l'analyse linéaire en caractérisant la possibilité que l'énergie de la perturbation puisse augmenter dans la région sous-critique (région dans laquelle $Ra < Ra_L$). Lorsque $Re \rightarrow 0$, nous avons montré que $Ra_L = Ra_E$, par contre pour de plus grandes valeurs de Re , nous constatons que $Ra_L > Ra_E$ et que l'écart se creuse à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Ces derniers résultats sont en accord avec ceux obtenus dans l'analyse faiblement non linéaire qui montre que la bifurcation est super-critique à faibles valeurs du nombre de Péclet (et donc du nombre de Reynolds) et que lorsque $Pe > O(1)$, la bifurcation devient rapidement sous-critique, dans le sens où la transition se fait pour une très faible variation du nombre de Péclet. L'originalité de notre étude se situe justement dans ce Chapitre 3 qui permet pour la première fois, dans les études de stabilité d'un écoulement de fluide à seuil, de quantifier l'amplitude de la perturbation maximale qui conserve la structure topologique de l'écoulement de base, ce qui n'est pas possible de déterminer à partir d'une théorie linéaire. Nous avons montré que l'analyse faiblement non linéaire a un domaine de validité très réduit et l'écoulement perturbé devient fortement non linéaire pour des valeurs de Rayleigh surcritiques mais qui restent proches de la valeur du seuil d'instabilité Ra_L . Il ne paraît pas évident de poursuivre cette analyse par une étude fortement non linéaire basée sur des méthodes de continuation, dans la mesure où aucune indication n'est formulée quant à l'évolution des zones non cisillées. Cela ne nous permettrait pas de prendre en compte la (les) zone(s) non cisillée(s).

De plus, d'après l'analyse faiblement non linéaire, les faibles valeurs obtenues pour l'amplitude de perturbation laissent à penser qu'au voisinage de l'instabilité, il serait difficile d'observer expérimentalement des structures thermoconvectives. Ceci vient du fait que les analyses linéaires et faiblement non linéaires imposent implicitement que la zone bouchon reste intacte.

La suite de l'étude concerne une analyse non linéaire par une approche énergétique. Lorsque l'écoulement est soumis à des perturbations d'amplitude finie, la zone non cisillée va se destructurer et différentes topologies pour l'écoulement perturbé ont été considérées (Régions a, b, c et d dans la Section 5.2). Dans cette analyse, les inégalités fonctionnelles mises en oeuvre ne tiennent pas compte de la dissipation visqueuse dû au nombre de Bingham. Ce dernier apparaît essentiellement à travers l'écoulement de base.

Finalement, dans la mesure où nous pouvons *a priori* déterminer le lieu des zones cisillées et non cisillées de l'écoulement perturbé, alors il est possible de réaliser des études de stabilité. Cette condition ne nous permet d'étudier, de manière analytique, que le cas de perturbations infinitésimales, qui n'occasionnent pas de destruction de la zone non cisillée ou le cas de perturbations d'amplitude finie qui permettent à l'écoulement d'être entièrement cisillé. La question qui découle de cette constatation est de savoir comment et sous quelles conditions la zone non cisillée va commencer à se destructurer. Une ébauche de réponse est déjà donnée lorsque $B \rightarrow 0$ dans la mesure où une condition de non rupture (ou non destruction) liée à l'analyse linéaire de stabilité est que $|A| < O(B^3)$. Dans ce cas particulier, la zone non cisillée va se destructurer rapidement si tant est que, dans la pratique, il soit possible de la faire apparaître. Pour des nombres de Bingham quelconques, nous ne connaissons pas de conditions sur une valeur d'amplitude qui engendrerait la destruction de la zone non cisillée. La connaissance du comportement rhéologique des zones non cisillées devient fondamentale pour étudier des problèmes de stabilité au-delà des perturbations infinitésimales.

Le modèle de Bingham est un modèle simple qui permet de décrire un certain nombre de problèmes mais qui présente aussi ses limites. Une limite que nous soulignons dans l'étude de stabilité de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard est qu'il ne rend pas bien compte du comportement du matériau lorsque ce dernier se présente sous forme de gel. Comme cela a été stipulé au cours du Chapitre 1, Oldroyd considéra un comportement élastique dans la zone où $\tau \leq B$. En réalité, les essais expérimentaux (oscillations, démarrage...) montrent clairement que la transition entre les domaines élastiques et visqueux n'est pas brutale mais au contraire progressive. Plusieurs modèles thixotropes ont été proposés pour décrire cette transition. Une revue bibliographique de ces modèles est donnée par Mujumdar *et al.* (2002) et Doraiswamy *et al.* (1991). Une perspective intéressante à notre étude consisterait à mieux considérer la physique du gel et d'utiliser un modèle qui permettrait de déterminer les contraintes lorsque $\tau \leq B$. Cela aurait le grand avantage de nous ouvrir les portes des études non linéaires de stabilité.

De plus, en dépit de l'originalité des résultats obtenus, notre travail reste académique en l'absence de preuves expérimentales ou de compléments d'informations que nous ne sommes pas en mesure d'obtenir analytiquement puisque nous ne connaissons pas les contraintes dans les zones non cisailées. Un montage expérimental concernant ce problème serait d'un grand intérêt pour permettre d'observer la manière dont l'écoulement perturbé évolue au-delà du seuil calculé. Il permettrait d'apprécier la valeur du nombre de Rayleigh permettant d'observer des rouleaux thermoconvectifs et d'apprécier l'évolution de la structure topologique de l'écoulement perturbé.

Dans un avenir proche, notre projet est de modéliser de manière numérique l'évolution de l'écoulement perturbé. Il s'agit d'un projet qui serait réalisé en collaboration avec une équipe de l'Institut Français du Pétrole qui a développé un code numérique permettant de déterminer le lieu des zones cisailées et non cisailées en évaluant directement le tenseur des taux de cisaillement. La détermination de ces régions se faisant à partir du critère de Von Mises imposant un taux de cisaillement nul dans les régions non cisailées. Cette méthode dérive de la théorie des inégalités variationnelles et bénéficie des techniques de multiplicateurs de Lagrange (Duvaut et Lions (1976)). Ce problème consiste à minimiser une fonctionnelle (appelée Lagrangien augmenté) grâce à un algorithme d'Uzawa. Cette technique ayant pour grand avantage de prendre en compte la discontinuité introduite par la loi de comportement du fluide de Bingham. La discrétisation est réalisée au moyen d'une méthode de Volumes Finis. Les techniques de résolutions sont détaillées dans Vinay *et al.* (2005). Dans cet article, la méthode de résolution numérique est utilisée pour simuler le transport par pipeline d'un brut de paraffinique, soumis à des conditions thermiques extérieures. Dans ce problème, les auteurs réussissent à effectuer le suivi des différentes zones. Ainsi, notre projet a pour objet d'adapter le code 2D décrit par Vinay *et al.* (2005) au problème de stabilité de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard 2D pour un fluide de Bingham. Nous pourrions dans un premier temps vérifier les conclusions que nous avons faites à partir des études théoriques présentées dans ce mémoire. Dans un deuxième temps, notre objectif est d'augmenter le nombre de Rayleigh au-delà du seuil Ra_L et de la limite de validité de l'analyse faiblement non linéaire

afin d'avoir des informations essentielles quant au devenir de la zone non cisailée et de la manière dont l'instabilité se développera.

Annexe A

Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard pour une perturbation 1D

On se place dans le cas où la forme de la solution est donnée par l'Eq. (2.58). Substituant (2.58) à l'équation linéaire de perturbations Eq. (2.46a) et prenant en compte les conditions limites aux parois, nous obtenons $v(y) = 0$. De plus, l'équation de l'énergie Eq. (2.46e) donne :

$$\lambda\theta(y) - \theta_{yy} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Cette équation linéaire, associée avec les conditions isothermiques aux parois, conduit à la solution :

$$\theta(y) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ensuite, l'Eq. (2.46c) donne :

$$p_y = 0. \quad (\text{A.3})$$

Finalement, il ne reste que le problème pour $u(y)$ et h^\pm (Eqs. (2.46b), (2.49) et (2.55)) :

$$u(y) - \frac{P}{\lambda}u_{yy} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$u\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$u_y = \pm\frac{4h^\pm}{(1-y_0)^2}. \quad (\text{A.6})$$

De plus, on remarque que $u(-y)$ satisfait les mêmes équation et conditions limites que $u(y)$, ainsi u est paire, u_y impaire et $h^+ = h^-$.

Considérons alors le cas $y > 0$.

La solution de (A.4) muni de sa condition limite à la paroi est de la forme ($\lambda > 0$) :

$$u(y) = C \left(e^{\sqrt{\frac{P}{\lambda}}y} - e^{\sqrt{\frac{P}{\lambda}}(2-y)} \right), \quad (\text{A.7})$$

avec C une constante.

A. Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh-Bénard pour une perturbation 1D

Si $h^+ > 0$, il vient $u_y(y_0) > 0$ et en dérivant (A.7) on remarque que u_y est de même signe que C , for all y , d'où $C > 0$. De plus, la vitesse est constante dans toute la zone bouchon, *i.e.*, $u(0) = u(y_0) = C \left(1 - e^{2\sqrt{\frac{P}{\lambda}}}\right) < 0$. Ainsi, $u\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et u augmente. Cela signifie que u est négative pour $y > 0$. Finalement $u < 0$ dans tout le domaine car u est paire. Le cas où $h^+ < 0$ conduit à $u > 0$ pour $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. En d'autres termes, la vitesse perturbée conserve le même signe dans tout le domaine, ainsi $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u \cdot dy \neq 0$. A travers cette condition, la conservation du débit de la vitesse n'est pas satisfaite pour $C \neq 0$. Finalement, la seule solution possible correspond à $u = 0, v = 0$, ainsi l'écoulement reste linéairement stable pour toute perturbations unidimensionnelles.

Annexe B

Facteurs liés aux schémas de discrétisation

k_d	k_p	Points de discrétisation								
		...	i-3	i-2	i-1	i	i+1	i+2	i+3	...
1	2				-1/2	0	1/2			
	4			1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
2	2				1	-2	1			
	4			-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12		
3	2			-1/2	1	0	-1	1/2		
	4		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8	
4	2			1	-4	6	-4	1		
	4		-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6	

TAB. B.1 – Facteurs pour schémas centrés. k_d : degré de dérivation, k_p : ordre de précision.

B. Facteurs liés aux schémas de discrétisation

k_d	k_p	Points de discrétisation							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	$\boxed{-3/2}$	2	$-1/2$					
	4	$\boxed{-25/12}$	4	-3	$4/3$	$-1/4$			
	4	$-1/4$	$\boxed{-5/6}$	$3/2$	$-1/2$	$1/12$			
2	2	$\boxed{2}$	-5	4	-1				
	4	$\boxed{15/4}$	$-77/6$	$107/6$	-13	$61/12$	$-5/6$		
	4	$5/6$	$\boxed{-5/4}$	$-1/3$	$7/6$	$-1/2$	$1/12$		
3	2	$\boxed{-5/2}$	9	-12	7	$-3/2$			
	2	$-3/2$	$\boxed{5}$	-6	3	$-1/2$			
	4	$\boxed{-49/8}$	29	$-461/8$	62	$-307/8$	13	$-15/8$	
	4	$-15/8$	$\boxed{7}$	$-83/8$	8	$-29/8$	1	$-1/8$	
	4	$-1/8$	-1	$\boxed{35/8}$	-6	$29/8$	-1	$1/8$	
4	2	$\boxed{3}$	-14	26	-24	11	-2		
	2	2	$\boxed{-9}$	16	-14	6	-1		
	4	$\boxed{28/3}$	$-111/2$	142	$-1219/6$	176	$-185/2$	$82/3$	$-7/2$
	4	$7/2$	$\boxed{-56/3}$	$85/2$	-54	$251/6$	-20	$-11/2$	$-2/3$
	4	$2/3$	$-11/6$	$\boxed{0}$	$31/6$	$-22/3$	$9/2$	$-4/3$	$1/6$

TAB. B.2 – Facteurs pour schémas décentrés au niveau de la paroi inférieure. k_d : degré de dérivation, k_p : ordre de précision. Les facteurs encadrés correspondent au point où est calculée la dérivée.

Annexe C

Calculs des contraintes de part et d'autre la zone bouchon

Nous étudions le cas où la position des interfaces y_i^\pm sont indépendantes de x . Le bilan de quantité de mouvement sur la zone bouchon (sur le domaine $y \in [-y_i; y_i]$ et $x \in [x; x + dx]$, avec $dx < 2X$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} = 0. \quad (\text{C.2})$$

avec les conditions limites aux interfaces $y = y_i^\pm$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \pm P e^{i\alpha x}, \\ \sigma_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En considérant le cas limite d'une zone bouchon très fine, le bilan de quantité de mouvement donne: $\sigma_{xx} \gg \sigma_{xy} \gg \sigma_{yy}$. De plus, comme $y_0 \rightarrow 0$, il est possible de chercher une solution pour les contraintes des Eq. (C.1)-(C.2) sur la base $F(y) e^{i\alpha x}$, où, $F(y)$ est une fonction polynomiale.

Soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F_1(y) e^{i\alpha x}, \\ \sigma_{xy} &= F_2(y) e^{i\alpha x}, \\ \sigma_{yy} &= F_3(y) e^{i\alpha x}. \end{aligned}$$

Les Equations (C.1) et (C.2) impliquent que :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (C_1 y) e^{i\alpha x}, \\ \sigma_{xy} &= (B_2 y^2 + D_2) e^{i\alpha x}, \\ \sigma_{yy} &= (A_3 y^3 + C_3 y) e^{i\alpha x}. \end{aligned}$$

C. Calculs des contraintes de part et d'autre la zone bouchon

– Pour σ_{yy} :

Les conditions aux limites conduisent à : $A_3 y_i^3 + C_3 y_i = P(y_i)$.

De plus, nous avons (à partir de l'Eq.(C.2)) : $\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}(y_i) = -\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy}(y_i) = 0$, en d'autres termes : $3 A_3 y_i^2 + C_3 = 0$.

Nous obtenons finalement :

$$\sigma_{yy} = P \left(\frac{3y_i^2 y - y^3}{2y_i^3} \right) e^{i\alpha x}. \quad (\text{C.4})$$

– Pour σ_{xy} :

L'Equation (C.2) donne :

$$i \alpha (B_2 y^2 + D_2) + 3 (A_3 y^2 + C_3) \quad (\text{C.5})$$

Nous trouvons alors :

$$\sigma_{xy} = i \frac{3P}{2\alpha y_i} \left(\frac{y_i^2 - y^2}{y_i^2} \right) e^{i\alpha x}. \quad (\text{C.6})$$

– Pour σ_{xx} :

L'Equation (C.1) donne :

$$i \alpha (C_1 y) + 2B_2 y = 0. \quad (\text{C.7})$$

Nous écrivons finalement :

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{3P}{\alpha^2 y_i^2} \cdot \frac{y}{y_i} \right) e^{i\alpha x}. \quad (\text{C.8})$$

La contrainte maximale est atteinte pour $y = y_i$. La condition sur la contrainte (maximale) à satisfaire est de ne pas dépasser la valeur de la contrainte seuil. La condition s'écrit ainsi :

$$\frac{3P}{\alpha^2 y_i^2} < \tau_0 \quad (\text{C.9})$$

Une fois les variables rendues sans dimension, on obtient :

$$\frac{3 \mu_0 U_0}{L} \varepsilon \frac{1}{B^2} < \frac{\mu_0 U_0 B}{L} \quad (\text{C.10})$$

Finalement, la condition que ε doit satisfaire, dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité, est :

$$\varepsilon < B^3. \quad (\text{C.11})$$

Annexe D

Termes non linéaires du tenseur des contraintes

D.1 Viscosité

La viscosité de l'écoulement de base s'écrit :

$$\mu_b = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_b} \quad (\text{D.1})$$

Concernant l'écoulement perturbé, le terme linéarisé de la viscosité est :

$$\mu_1 = \frac{B(-\partial_{yy}\psi + \partial_{xx}\psi)}{DU_b \dot{\gamma}_b} \quad (\text{D.2})$$

Les termes non linéaires donnent à l'ordre 2 et 3 respectivement :

$$\mu_2 = \frac{B}{(Pr Re) 2 DU_b^2 \sqrt{DU_b^2}} \left(2(\partial_{yy}\psi)^2 - (\partial_{xy}\psi)^2 - 4\partial_{yy}\psi\partial_{xx}\psi + 2(\partial_{xx}\psi)^2 \right) \quad (\text{D.3})$$

$$\mu_3 = \frac{-B}{(Pr Re)^2 2 DU_b^3 \sqrt{DU_b^2}} (\partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi) \left(2(\partial_{yy}\psi)^2 - 3(\partial_{xy}\psi)^2 - 4\partial_{yy}\psi\partial_{xx}\psi + 2(\partial_{xx}\psi)^2 \right) \quad (\text{D.4})$$

D.2 Tenseur des contraintes

Dans la partie fluide, le modèle de Bingham permet d'écrire le déviateur du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (\text{D.5})$$

De la même manière, en développant, on trouve pour l'écoulement de base :

$$\boldsymbol{\tau}_b = \begin{pmatrix} \tau_{bxx} & \tau_{bxy} \\ \tau_{bxy} & \tau_{byy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(DU_b)(B + \dot{\gamma}_b)}{\dot{\gamma}_b} \\ \frac{(DU_b)(B + \dot{\gamma}_b)}{\dot{\gamma}_b} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Pour l'écoulement perturbé, on obtient les différents termes suivants :

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 2 \left(1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_b}\right) \partial_{xy}\psi & \partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi \\ \partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi & -2 \left(1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_b}\right) \partial_{xy}\psi \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

pour le tenseur linéaire,

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{Pr Re} \begin{pmatrix} \frac{-2B \partial_{xy}\psi (\partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi)}{DU_b \dot{\gamma}_b} & \frac{-B (\partial_{xy}\psi)^2}{2 DU_b \dot{\gamma}_b} \\ \frac{-B (\partial_{xy}\psi)^2}{2 DU_b \dot{\gamma}_b} & \frac{2B \partial_{xy}\psi (\partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi)}{DU_b \dot{\gamma}_b} \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

pour le tenseur non linéaire d'ordre 2. Enfin, pour le terme non linéaire d'ordre 3, le tenseur s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \begin{pmatrix} \tau_{3xx} & \tau_{3xy} \\ \tau_{3xy} & \tau_{3yy} \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Avec :

$$\tau_{3xx} = \tau_{3yy} = \frac{-B \partial_{xy}\psi (-2 (\partial_{yy}\psi)^2 + (\partial_{xy}\psi)^2 + 4 (\partial_{yy}\psi)(\partial_{xx}\psi) - 2 (\partial_{xx}\psi)^2)}{(Pr Re)^2 \dot{\gamma}_b^3} \quad (\text{D.10})$$

et

$$\tau_{3xy} = \frac{B (\partial_{xy}\psi)^2 (\partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi)}{2 \dot{\gamma}_b^3 (Pr Re)^2} \quad (\text{D.11})$$

D.3 Expression des termes quadratiques et cubiques de l'équation du mouvement

La partie non linéaire quadratique, $[N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})]_1$ des équations du mouvement, s'écrit :

$$\begin{aligned} (Pr Re) \times [N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})]_1 &= Re (-u \Delta v + v \Delta u) \\ &+ B \left[4\partial_{xy} \left(\frac{\partial_x u (\partial_y u + \partial_x v)}{(DU_b)^2} \right) \right] \\ &+ B \left[\frac{1}{2} \text{sign}(DU_b) (D^2 - (\partial_x^2)) \circ \left(\frac{\partial_x u}{DU_b} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Soit encore, en développant et sous forme de fonction courant :

$$\begin{aligned} (Pr Re) [N_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})]_1 &= - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [D^3 U_b (\partial_{xy}\psi)^2 + 4D^2 U_b (2(\partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi) \partial_{xxy}\psi)] \\ &- \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} 4D^2 U_b (\partial_{xy}\psi (3\partial_{xyy}\psi - 2\partial_{xxx}\psi)) \\ &+ \frac{B}{(DU_b) \dot{\gamma}_b} \left[3 \frac{(D^2 U_b)^2}{(DU_b)^2} (\partial_{xy}\psi)^2 + 5(\partial_{xyy}\psi)^2 - 5(\partial_{xxy}\psi)^2 + 4(\partial_y - \partial_x) \Delta \psi \right] \\ &+ \frac{B}{(DU_b) \dot{\gamma}_b} [4\partial_{xxy}\psi (\partial_{yy}\psi - \partial_{xx}\psi) + 5\partial_{xy}\psi (\partial_{x3y}\psi - \partial_{3xy}\psi)] \\ &+ Re [-\partial_x \psi (\partial_y \Delta \psi) + \partial_y \psi (\partial_x \Delta \psi)]. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

La partie cubique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (Pr Re)^2 \times [N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})]_1 = & 2BD \left[\frac{1}{\dot{\gamma}_b^3} \partial_x ((\partial_x u)^3 - 2\partial_x u(\partial_x v + \partial_y u)^2) \right] \\
 & - BD^2 \left[\frac{1}{\dot{\gamma}_b^3} (\partial_x u)^2 (\partial_y u + \partial_x v) \right] \\
 & + \frac{B}{\dot{\gamma}_b^3} \partial_{xx} ((\partial_x u)^2 (\partial_y u + \partial_x v))
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
 (Pr Re)^2 \times [N_3(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})]_1 = & - \frac{6B}{(DU_b)^4 \dot{\gamma}_b} [2(D^2 U_b)^2 (\partial_{xy} \psi)^2 (\partial_{yy} \psi - \partial_{xx} \psi)] \\
 & - \frac{6B}{(DU_b)^4 \dot{\gamma}_b} [DU_b D^2 U_b (\partial_{yyy} \psi (\partial_{xy} \psi)^2)] \\
 & - \frac{12B}{(DU_b)^3 \dot{\gamma}_b} D^2 U_b [\partial_{xxy} \psi ((\partial_{xx} \psi)^2 + (\partial_{yy} \psi)^2 - 2(\partial_{xy} \psi)^2)] \\
 & - \frac{12B}{(DU_b)^3 \dot{\gamma}_b} D^2 U_b [\partial_{xxy} \psi (-2(\partial_{xx} \psi)(\partial_{yy} \psi))] \\
 & - \frac{12B}{(DU_b)^3 \dot{\gamma}_b} D^2 U_b [\partial_{xy} \psi (\partial_{yy} \psi - \partial_{xx} \psi) (3\partial_{xyy} \psi - 2\partial_{xxx} \psi)] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^3 \dot{\gamma}_b} [3D^3 U_b (\partial_{xy} \psi)^2 (\partial_{xx} \psi - \partial_{yy} \psi)] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [10(\partial_{yy} \psi - \partial_{xx} \psi) ((\partial_{xyy} \psi)^2 + (\partial_{xy} \psi) (\partial_{xyy} \psi))] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [\partial_{xxy} \psi (28\partial_{xy} \psi \partial_{xyy} \psi + 10\partial_{xxy} \psi (\partial_{xx} - \partial_{yy}) \psi)] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [\partial_{xxyy} \psi (4(\partial_{yy} \psi - \partial_{xx} \psi)^2 - 8(\partial_{xy} \psi)^2)] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [4\partial_{3y} \psi (2(\partial_{yy} \psi - \partial_{xx} \psi) \partial_{xxy} \psi + \partial_{xy} \psi (-2\partial_{3x} \psi))] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [12(\partial_{3y} \psi) (\partial_{xy} \psi) (\partial_{xyy} \psi) + \partial_{4y} \psi (\partial_{xy} \psi)^2] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [\partial_{3x} \psi (8\partial_{xyy} \psi (\partial_{xx} \psi - \partial_{yy} \psi) + 12\partial_{xy} \psi \partial_{xxy} \psi)] \\
 & - \frac{B}{(DU_b)^2 \dot{\gamma}_b} [\partial_{xy} \psi (10\partial_{3xy} \psi (\partial_{xx} \psi - \partial_{yy} \psi) + \partial_{xy} \psi \partial_{4x} \psi)]
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Annexe E

Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon : recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0

Pour compléter les conditions limites obtenues pour le mode 0 données par l'Eq. (3.50), un bilan mécanique est effectué sur la zone bouchon. A cet effet, nous considérons un domaine $\Omega_s = [d - X; d + X] \times [-y_i; y_i]$, d étant une constante quelconque. Une représentation schématique de la zone bouchon perturbée, ainsi que le domaine considéré est donnée sur la Fig. E.1. Le bilan s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_i \iiint_{\Omega_s} d\mathcal{V} = \oint_{\delta\Omega_s} \sigma_{ij} (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) n_j dS + \iiint_{\Omega_s} Ra (T_b + \theta) \delta_{i2} e_2 d\mathcal{V}. \quad (\text{E.1})$$

Les différents vecteurs normaux aux faces (1),(2), (3) et (4) s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{n}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^+}{\partial x} + O(A^3) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^+}{\partial x} + O(A^3) \\ 1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x}\right)^2 + O(A^4) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{n}_{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y^-}{\partial x} + O(A^3) \\ -1 + 1/2 \left(\frac{\partial Y^-}{\partial x}\right)^2 + O(A^4) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{n}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

et

$$\mathbf{n}_{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

**E. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon :
recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0**

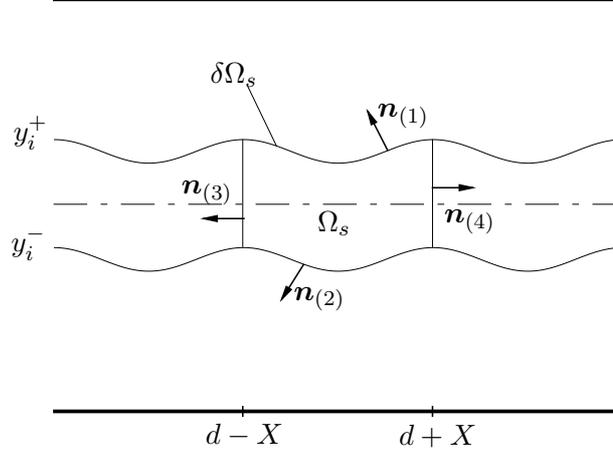


FIG. E.1 – Représentation schématique de la zone bouchon perturbée.

Il est à noter que le développement des composantes des vecteurs $\mathbf{n}_{(1)}$ et $\mathbf{n}_{(2)}$ est réalisé jusqu'à l'ordre quadratique au plus car nous ne nous intéressons, ici, à identifier seulement le Mode 0.

Nous savons d'ores et déjà que les vitesses des Modes 1 et 2, *i.e.* \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , s'annulent dans la zone bouchon (Eq. (2.63) et (3.60)). D'après l'Eq. (3.38), nous savons également que le terme " $E^0 \mathbf{u}_0$ " ne dépend pas du temps t . De plus, les hypothèses quasi-stationnaires (Hypothèse (ii) de la Section 3.2) sur l'amplitude permettent d'écrire que le terme de gauche s'annule, c'est à dire :

$$\frac{d}{dt} u_i \iiint dV = 0. \quad (\text{E.6})$$

L'équation devient alors :

$$\oint_{\delta\Omega_s} \sigma_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) e_j dS + \iiint_{\Omega_s} Ra (T_b + \theta) \delta_{i2} e_2 dV = 0, \quad (\text{E.7})$$

ou encore sous forme développée :

$$\begin{aligned} & \int_{d-X}^{d+X} \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times ((-p_b - p) \delta_{i1} + \tau_{i1}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})) \right]_{-y_i}^{y_i} dx \\ & + \int_{d-X}^{d+X} \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times (-(p_b + p) \delta_{i2} + \tau_{i2}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})) \right]_{-y_i}^{y_i} dx \\ & + \int_{-y_i}^{y_i} [-p_b \delta_{i1} + \tau_{i1}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})]_{d-X}^{d+X} dy + \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X Ra (T_b + \theta) \delta_{i2} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Si nous nous intéressons aux deux premiers termes de cette dernière équation, nous remarquons que les intégrandes ne dépendent pas de la variable x lorsque celles-ci sont identifiées par

rapport au Mode 0. Ceci est vrai pour tous les termes excepté pour la pression de l'écoulement de base p_b , qui dépend linéairement de x (Eq. (2.20)).

Or, nous savons que si le bilan est effectué sur une surface fermée, alors les termes **constants** de pression (contraintes) s'annulent. En effet, en considérant A , une constante, nous avons :

$$\oint_{\delta\Omega_s} A e_j dS = A \oint_{\delta\Omega_s} e_j dS = 0. \quad (\text{E.9})$$

A partir de cette constatation, nous définissons une pression P_D de la manière suivante :

$$P_D = p_b - P_{md} = \left(p_{ref} - Ra \frac{y^2}{2} - \frac{Bi}{y_0} x \right) - \int_{d-X}^{d+X} \left(-\frac{Bi}{y_0} x \right) dx. \quad (\text{E.10})$$

Cette pression P_D n'est autre que la pression de l'écoulement de base à laquelle est soustraite une pression constante P_{md} définie comme la pression moyenne sur l'intervalle $[d-X; d+X]$. P_{md} étant une valeur constante, le résultat de l'intégration de p_b ou celui de P_D sera identique. De plus, on constate que dans le cas où $d=0$, $P_D = p_b$ car $P_{m0} = 0$ sur l'intervalle considéré, c'est à dire pour $x \in [-X; X]$. Il est alors possible d'écrire :

$$\int_{-y_i}^{y_i} \int_{d-X}^{d+X} p_b e_j dS = \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X P_D e_j dS, \quad (\text{E.11})$$

ce qui signifie que le bilan de quantité de mouvement réalisé sur un domaine $\Omega_s = [d-X; d+X] \times [-y_i; y_i]$ est équivalent à celui réalisé sur le domaine $\Omega_s = [-X; X] \times [-y_i; y_i]$.

Ainsi, dans la suite nous nous affranchirons de la constante d mais aussi de la constante p_{ref} dans l'expression de p_b de l'Eq. (2.20).

Finalement, en posant $P = P_D - p_{ref}$, on obtient :

$$\int_{-y_i}^{y_i} \int_{d-X}^{d+X} P_b e_j dS = \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X P e_j dS \quad (\text{E.12})$$

$$= \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X \left(-Ra \frac{y^2}{2} - \frac{Bi}{y_0} x \right) e_j dS \quad (\text{E.13})$$

Remarque importante :

Dans toute la suite de cette annexe, nous travaillerons en terme de fonction courant pour ce qui concerne le déviateur du tenseur des contraintes. Ainsi, nous rappelons certaines notations :

$$\Psi = \psi_b + \psi, \quad (\text{E.14})$$

où ψ_b correspond à la fonction courant décrivant l'écoulement de base et ψ correspond à la perturbation de la fonction courant. Nous introduisons la notation ψ_n définie comme suit :

$$\psi = \sum_{n=-2}^{n=2} A_n \psi_n \quad \text{avec} \quad \psi_n = \sum_{n=-2}^{n=2} f_n E^n. \quad (\text{E.15})$$

E.1 Projection suivant e_x : cas $i = 1$

Le bilan suivant la direction e_x s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{-X}^X \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times (-P - p + \tau_{xx}(\Psi)) \right]_{-y_i}^{y_i} dx \\ & + \int_{-X}^X \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} dx \\ & + \int_{-y_i}^{y_i} [-P + \tau_{xx}(\Psi)]_{-X}^X dy = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

On pose :

$$B_1 = \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times (-P - p + \tau_{xx}(\Psi)) \right]_{-y_i}^{y_i}, \quad (\text{E.17})$$

$$B_2 = \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} \quad (\text{E.18})$$

et

$$B_3 = \int_{-y_i}^{y_i} [-P_b + \tau_{xx}(\Psi)]_{-X}^X dy. \quad (\text{E.19})$$

Dans ce qui suit, nous cherchons à calculer les différents termes B_1 , B_2 , B_3 identifiés par rapport au Mode 0.

E.1.1 Calcul de B_1

Soit :

$$\begin{aligned} B_1 &= \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times ((-P - p) + \tau_{xx}(\Psi)) \right]_{-y_i}^{y_i} \\ &= + \frac{\partial Y^+}{\partial x} \times [((-P - p) + \tau_{xx}(\Psi))]_{y_i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial Y^-}{\partial x} \right) \times [((-P - p) + \tau_{xx}(\Psi))]_{-y_i} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Y_0^\pm ne dépendant pas de x , pour obtenir le mode 0 de B_1 , on identifie les produits des modes 1 et -1, c'est à dire :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial Y_1^\pm}{\partial x} \times \mathbf{Mode -1} (-P - p + \tau_{xx}(\Psi)) \right]_{-y_i}^{y_i} \\ & + \left[\frac{\partial Y_{-1}^\pm}{\partial x} \times \mathbf{Mode 1} (-P - p + \tau_{xx}(\Psi)) \right]_{-y_i}^{y_i} \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Ainsi :

$$[-P - p]_{-y_i}^{y_i} = [-P - p]_{-y_0}^{y_0} + \left[\pm Y^\pm \frac{\partial}{\partial y} (-P - p) \right]_{-y_0}^{y_0} - 1/2 \left[(Y^\pm)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (-P - p) \right]_{-y_0}^{y_0} + T.O.S \quad (E.22)$$

$$\text{Mode 1} \left([-P - p]_{-y_i}^{y_i} \right) = [\pm Y_1^\pm Ra y]_{-y_0}^{y_0} - [p_1]_{-y_0}^{y_0} \quad (E.23)$$

$$\text{Mode -1} \left([-P - p]_{-y_i}^{y_i} \right) = [\pm Y_{-1}^\pm Ra y]_{-y_0}^{y_0} - [p_{-1}]_{-y_0}^{y_0}. \quad (E.24)$$

En multipliant ces termes par $\frac{\partial Y^\pm}{\partial x}$ et en identifiant le mode 0, on a :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times (-P - p) \right]_{-y_i}^{y_i} \right) &= \left[\frac{\partial Y_1^\pm}{\partial x} (\pm Y_{-1}^\pm Ra y - p_{-1}) \right]_{-y_0}^{y_0} \\ &+ \left[\frac{\partial Y_{-1}^\pm}{\partial x} (\pm Y_1^\pm Ra y - p_1) \right]_{-y_0}^{y_0} \end{aligned} \quad (E.25)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times (-P - p) \right]_{-y_i}^{y_i} \right) &= [i \alpha Y_1^\pm (\pm Y_{-1}^\pm Ra y - p_{-1})]_{-y_0}^{y_0} \\ &+ [-i \alpha Y_{-1}^\pm (\pm Y_1^\pm Ra y - p_1)]_{-y_0}^{y_0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (E.26)$$

On cherche à déterminer la pression pour les modes 1 et -1. Pour celà, on écrit l'équation de conservation de quantité de mouvement suivant x . Soit pour le mode 1, on a :

$$-\frac{i \alpha c}{Pr} D f_1 + Re (U_b \times i \alpha D f_1 - i \alpha f_1 D U_b) = -i \alpha p_1 + D^3 f_1 - \alpha^2 D f_1 - 2 \frac{Bi}{\dot{\gamma}_b} \alpha^2 D f_1. \quad (E.27)$$

On souhaite évaluer cette équation en $y = y_0$ et $y = -y_0$.

On sait que $f_1(\pm y_0) = f_1'(\pm y_0) = 0$ et $\dot{\gamma}_b(\pm y_0) = 0$.

On écrit alors :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_1'}{\dot{\gamma}_b} = \lim_{y_0} \frac{f_1''}{D \dot{\gamma}_b} = \frac{f_1''(y_0)}{D \dot{\gamma}_b(y_0)} = \frac{Y_1^+ D^2 U_b(y_0)}{-D^2 U_b(y_0)} = -Y_1^+, \quad (E.28)$$

de même, on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow -y_0} \frac{f_1'}{\dot{\gamma}_b} = -Y_1^-. \quad (E.29)$$

On obtient finalement en $y = y_0$:

$$p_1(y_0) = \frac{2 Bi \alpha}{i} Y_1^+ + \frac{1}{i \alpha} D^3 f_1(y_0), \quad (E.30)$$

et en $y = -y_0$:

$$p_1(-y_0) = \frac{2 Bi \alpha}{i} Y_1^- + \frac{1}{i \alpha} D^3 f_1(-y_0). \quad (E.31)$$

**E. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon :
recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0**

De la même manière pour le mode -1, on a :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f'_1}{\hat{\gamma}_b} = -Y_{-1}^+, \quad (\text{E.32})$$

$$\lim_{y \rightarrow -y_0} \frac{f'_1}{\hat{\gamma}_b} = -Y_{-1}^-, \quad (\text{E.33})$$

$$p_{-1}(y_0) = -\frac{2Bi\alpha}{i} Y_{-1}^+ - \frac{1}{i\alpha} D^3 f_{-1}(y_0), \quad (\text{E.34})$$

$$p_{-1}(-y_0) = -\frac{2Bi\alpha}{i} Y_{-1}^- - \frac{1}{i\alpha} D^3 f_{-1}(-y_0). \quad (\text{E.35})$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times (-P - p) \right]_{-y_i}^{y_i} \right) &= 4Bi\alpha^2 (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2) + Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) \\ &\quad - Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0) - Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0). \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

On procède de la même manière pour le terme τ_{xx} :

$$\text{Mode 1} \left([\tau_{xx}(\Psi)]_{-y_i}^{y_i} \right) = [\tau_{1xx}(\psi_1)]_{-y_0}^{y_0} \pm Y_1^\pm \left[\frac{\partial \tau_{bxx}}{\partial y} \right]_{-y_0}^{y_0} + T.O.S.$$

$$\text{Mode -1} \left([\tau_{xx}(\Psi)]_{-y_i}^{y_i} \right) = [\tau_{1xx}(\psi_{-1})]_{-y_0}^{y_0} \pm Y_{-1}^\pm \left[\frac{\partial \tau_{bxx}}{\partial y} \right]_{-y_0}^{y_0} + T.O.S.,$$

comme $\tau_{bxx} = 0$, on obtient finalement :

$$\text{Mode 1} \left([\tau_{xx}(\Psi)]_{-y_i}^{y_i} \right) = [\tau_{1xx}(\psi_1)]_{-y_0}^{y_0}$$

$$\text{Mode -1} \left([\tau_{xx}(\Psi)]_{-y_i}^{y_i} \right) = [\tau_{1xx}(\psi_{-1})]_{-y_0}^{y_0}.$$

On a :

$$\tau_{1xx}(\psi_1) = 2 \left(1 + \frac{B}{\hat{\gamma}_b} \right) \times i\alpha f'_1 \quad (\text{E.37})$$

et

$$\tau_{1xx}(\psi_{-1}) = 2 \left(1 + \frac{B}{\hat{\gamma}_b} \right) \times (-i\alpha) f'_{-1}. \quad (\text{E.38})$$

D'où :

$$\tau_{1xx}(\psi_1)|_{y_0} = -2i\alpha Bi Y_1^+$$

$$\tau_{1xx}(\psi_1)|_{-y_0} = -2i\alpha Bi Y_1^-$$

$$\tau_{1xx}(\psi_{-1})|_{y_0} = 2i\alpha Bi Y_{-1}^+$$

$$\tau_{1xx}(\psi_{-1})|_{-y_0} = 2i\alpha Bi Y_{-1}^-$$

Le mode 0 de ce terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times \tau_{xx}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} \right) &= i\alpha \times 2i\alpha Bi [Y_1^+ \times Y_{-1}^+ - Y_1^- \times Y_{-1}^-] \\ &\quad - i\alpha \times 2i\alpha Bi [Y_{-1}^+ \times Y_1^+ - Y_{-1}^- \times Y_1^-] \\ &= -4\alpha^2 Bi [|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2]. \end{aligned}$$

Finalement, le mode 0 de B_1 s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Mode\ 0}(B_1) &= Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) - Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) \\ &+ Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0) - Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0). \end{aligned}$$

E.1.2 Calcul de B_2

$$B_2 = \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} \quad (\text{E.39})$$

Evaluons tout d'abord :

$$\tau_{xy}(\Psi)|_{y_i} = \tau_{xy}(\Psi)|_{y_0} + Y^+ \frac{\partial \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y} \Big|_{y_0} + \frac{(Y^+)^2}{2} \frac{\partial^2 \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y^2} \Big|_{y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.40})$$

Nous avons pour le mode 0 (sachant que $\frac{\partial^2 \tau_{bxy}}{\partial y^2} = 0$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Mode\ 0}(\tau_{xy}(\Psi)|_{y_i}) &= \tau_{1xy}(u_0)|_{y_0} + Y_0^+ \frac{\partial \tau_{bxy}}{\partial y} \Big|_{y_0} \\ &+ Y_1^+ \frac{\partial \tau_{1xy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{1xy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0}, \end{aligned}$$

Après développement, nous trouvons :

$$\mathbf{Mode\ 0}(\tau_{xy}(\Psi)|_{y_i}) = Du_0(y_0) - \frac{Bi}{y_0} Y_0^+ + Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0). \quad (\text{E.41})$$

De la même manière, nous obtenons en $y = -y_i$:

$$\mathbf{Mode\ 0}(\tau_{xy}(\Psi)|_{-y_i}) = Du_0(-y_0) + \frac{Bi}{y_0} Y_0^- - Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) - Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0). \quad (\text{E.42})$$

Evaluons ensuite le terme suivant :

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x} \right)^2 \tau_{xy}(\Psi)|_{y_i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x} \right)^2 \times \left[\tau_{xy}(\Psi)|_{y_0} + Y^+ \frac{\partial \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y} \Big|_{y_0} + T.O.S. \right]. \quad (\text{E.43})$$

L'identification du mode 0 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Mode\ 0} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x} \right)^2 \tau_{xy}(\Psi)|_{y_i} \right) &= -\frac{1}{2} \times 2 \times \alpha^2 |Y_1^+|^2 \times \tau_{bxy}|_{y_0} \\ &= Bi \alpha^2 |Y_1^+|^2. \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

De même, on trouve au niveau de l'interface inférieure :

$$\mathbf{Mode\ 0} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y^-}{\partial x} \right)^2 \tau_{xy}(\Psi)|_{-y_i} \right) = -Bi \alpha^2 |Y_1^-|^2. \quad (\text{E.45})$$

Cela nous permet ainsi d'obtenir l'expression de B_2 , comme suit :

**E. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon :
recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0**

$$\boxed{\text{Mode } \mathbf{0}(B_2) = [Du_0]_{-y_0}^{y_0} - \frac{Bi}{y_0} (Y_0^+ + Y_0^-) + Bi \alpha^2 (|Y_1^-|^2 + |Y_1^+|^2) + Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) + Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0) + Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0).} \quad (\text{E.46})$$

E.1.3 Calcul de B_3

Soit :

$$\int_{-y_i}^{y_i} B_3 dy = \int_{-y_i}^{y_i} [-P + \tau_{xx}(\Psi)]_{-X}^X dy. \quad (\text{E.47})$$

L'identification du mode 0 de B_3 ne donne rien pour ce qui est du terme τ_{xx} . Soit :

$$\text{Mode } \mathbf{0} \left(\int_{-y_i}^{y_i} B_3 dy \right) = \text{Mode } \mathbf{0} \left(\int_{-y_i}^{y_i} [-P]_{-X}^X dy \right) \quad (\text{E.48})$$

$$= (Y_0^+ + Y_0^-) \times 2X \frac{8 Re Pr}{(1 - y_0)^2}. \quad (\text{E.49})$$

$$\boxed{\text{Mode } \mathbf{0} \left(\int_{-y_i}^{y_i} B_3 dy \right) = (Y_0^+ + Y_0^-) \times 2X \frac{Bi}{y_0}.} \quad (\text{E.50})$$

E.1.4 Bilan projeté sur e_x

Le mode 0 de l'équation (E.16) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & [Du_0]_{-y_0}^{y_0} + (Y_0^+ + Y_0^-) \times \left(-\frac{Bi}{y_0} + \frac{Bi}{y_0} \right) + \alpha^2 Bi (|Y_1^+|^2 + |Y_1^-|^2) \\ & + 2 (Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

Soit :

$$\begin{aligned} & [Du_0]_{-y_0}^{y_0} = -\alpha^2 Bi (|Y_1^+|^2 + |Y_1^-|^2) \\ & - 2 (Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

L'équation (??) permet d'exprimer $Y_0^+ + Y_0^-$ en fonction de $[Du_0]_{-y_0}^{y_0}$, comme suit :

$$\begin{aligned} & [Du_0]_{-y_0}^{y_0} = -D^2 U_b Y_0^+ - Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) - Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0) \\ & - D^2 U_b Y_0^- - Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) - Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0) \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

On obtient finalement une équation donnant la somme des termes Y_0^+ et Y_0^- :

$$\boxed{Y_0^+ + Y_0^- = \frac{1}{D^2 U_b} [Y_1^+ D^3 f_{-1}(y_0) - Y_1^- D^3 f_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^+ D^3 f_1(y_0) - Y_{-1}^- D^3 f_1(-y_0)] - \frac{1}{D^2 U_b} [\alpha^2 Bi (|Y_1^+|^2 + |Y_1^-|^2)]} \quad (\text{E.54})$$

E.2 Projection suivant \mathbf{e}_y : cas $i = 2$

Le bilan suivant la direction \mathbf{e}_y s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-X}^X \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} dx \\
 & + \int_{-X}^X \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times (-P + p) + \tau_{yy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} dx \\
 & + \int_{-y_i}^{y_i} [\tau_{xy}(\Psi)]_{-X}^X dy \\
 & + Ra \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X (T_b + \theta) dx dy = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{E.55}$$

On pose :

$$C_1 = \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i}, \tag{E.56}$$

$$C_2 = \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times \tau_{yy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i}, \tag{E.57}$$

$$C_3 = [-P + p]_{-y_i}^{y_i}, \tag{E.58}$$

$$C_4 = \left[-1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \times (-P - p) \right]_{-y_i}^{y_i}, \tag{E.59}$$

$$C_5 = [\tau_{xy}(\Psi)]_{-X}^X \tag{E.60}$$

et

$$C_6 = Ra \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X (T_b + \theta) dx dy \tag{E.61}$$

De la même manière que précédemment, on cherche à identifier le Mode 0 de ces différents termes.

E.2.1 Calcul de C_1

$$C_1 = \left[\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i} \tag{E.62}$$

$$= \left[\frac{\partial Y^+}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{y_i} - \left[\frac{\partial Y^-}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i}. \tag{E.63}$$

On a :

$$\left[\frac{\partial Y^+}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{y_i} = \left[\frac{\partial Y^+}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{y_0} + \left[Y^+ \frac{\partial Y^+}{\partial x} \times \frac{\partial \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y} \right]_{y_0} + T.O.S. \tag{E.64}$$

**E. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon :
recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0**

On rappelle que Y_0 ne dépend pas de x , ainsi, on écrit :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^+}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{y_i} \right) &= i\alpha \left(Y_1^+ \tau_{1xy}(\psi_{-1})|_{y_0} - Y_{-1}^+ \tau_{1xy}(\psi_1)|_{y_0} \right) \\ &\quad + i\alpha \left(Y_{-1}^+ Y_1^+ \frac{\partial \tau_{bxy}}{\partial y} \Big|_{y_0} - Y_1^+ Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{bxy}}{\partial y} \Big|_{y_0} \right) \\ &= i\alpha \left(Y_1^+ \tau_{1xy}(\psi_{-1})|_{y_0} - Y_{-1}^+ \tau_{1xy}(\psi_1)|_{y_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.65})$$

En évaluant les contraintes, on obtient finalement:

$$\text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^+}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{y_i} \right) = i\alpha \left(Y_1^+ D^2 f_{-1}(y_0) - Y_{-1}^+ D^2 f_1(y_0) \right). \quad (\text{E.66})$$

De même, en $y = -y_i$, nous avons :

$$\left[\frac{\partial Y^-}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i} = \left[\frac{\partial Y^-}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_0} - \left[Y^- \frac{\partial Y^-}{\partial x} \times \frac{\partial \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y} \right]_{-y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.67})$$

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^-}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i} \right) &= i\alpha \left(Y_1^- \tau_{1xy}(\psi_{-1})|_{-y_0} - Y_{-1}^- \tau_{1xy}(\psi_1)|_{-y_0} \right) \\ &\quad - i\alpha \left(Y_{-1}^- Y_1^- \frac{\partial \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y} \Big|_{-y_0} - Y_1^- Y_{-1}^- \frac{\partial \tau_{xy}(\Psi)}{\partial y} \Big|_{-y_0} \right) \\ &= i\alpha \left(Y_1^- \tau_{1xy}(\psi_{-1})|_{-y_0} - Y_{-1}^- \tau_{1xy}(\psi_1)|_{-y_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

Nous obtenons finalement:

$$\text{Mode 0} \left(\left[\frac{\partial Y^-}{\partial x} \times \tau_{xy}(\Psi) \right]_{-y_i} \right) = i\alpha \left(Y_1^- D^2 f_{-1}(-y_0) - Y_{-1}^- D^2 f_1(-y_0) \right). \quad (\text{E.69})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0}(C_1) &= i\alpha \left(Y_1^+ D^2 f_{-1}(y_0) - Y_{-1}^+ D^2 f_1(y_0) \right) \\ &\quad - i\alpha \left(Y_1^- D^2 f_{-1}(-y_0) - Y_{-1}^- D^2 f_1(-y_0) \right). \end{aligned}$$

(E.70)

E.2.2 Calcul de C_2

$$C_2 = \left[\left(1 - 1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \right) \times \tau_{yy}(\Psi) \right]_{-y_i}^{y_i}. \quad (\text{E.71})$$

On sait que $\tau_{byy} = 0$, cela signifie que :

$$\text{Mode 0} \left(-1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \times \tau_{yy}(\Psi) \right) = \emptyset. \quad (\text{E.72})$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\mathbf{Mode\ 0}\ (C_2) = \mathbf{Mode\ 0}\ \left([\tau_{yy}(\Psi)]_{-y_i}^{y_i} \right) \quad (\text{E.73})$$

On a :

$$[\tau_{yy}(\Psi)]_{y_i} = [\tau_{yy}(\Psi)]_{y_0} + \left[Y^+ \frac{\partial \tau_{yy}(\Psi)}{\partial y} \right]_{y_0} + \left[\frac{(Y^+)^2}{2} \frac{\partial^2 \tau_{yy}(\Psi)}{(\partial y)^2} \right]_{y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.74})$$

De plus, $\tau_{1yy}(u_0) = 0$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\mathbf{Mode\ 0}\ \left([\tau_{yy}(\Psi)]_{y_i} \right) = Y_1^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0} \quad (\text{E.75})$$

De même, en $y = y_i$, on obtient :

$$\mathbf{Mode\ 0}\ \left([\tau_{yy}(\Psi)]_{-y_i} \right) = -Y_1^- \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{-y_0} - Y_{-1}^- \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{-y_0} \quad (\text{E.76})$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{Mode\ 0}\ (C_2) = Y_1^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_1^- \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{-y_0} + Y_{-1}^- \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{-y_0}} \quad (\text{E.77})$$

E.2.3 Calcul de C_3

$$C_3 = [-(P + p)]_{-y_i}^{y_i}, \quad (\text{E.78})$$

On a :

$$-P|_{y_i} = -P|_{y_0} - Y^+ \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y_0} - \frac{(Y^+)^2}{2} \frac{\partial^2 P}{(\partial y)^2} \Big|_{y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.79})$$

$$\mathbf{Mode\ 0}\ \left(-P|_{y_i} \right) = -Y_0^+ (-Ra\ y_0) - |Y_1^+|^2 (-Ra) \quad (\text{E.80})$$

$$= Ra\ y_0 Y_0^+ + Ra\ |Y_1^+|^2 \quad (\text{E.81})$$

De même, on a :

$$\mathbf{Mode\ 0}\ \left(-P|_{-y_i} \right) = Y_0^- (Ra\ y_0) - |Y_1^-|^2 (-Ra) \quad (\text{E.82})$$

$$= Ra\ y_0 Y_0^- + Ra\ |Y_1^-|^2 \quad (\text{E.83})$$

D'où :

$$\mathbf{Mode\ 0}\ \left([-P]_{-y_i}^{y_i} \right) = Ra\ y_0 (Y_0^+ - Y_0^-) + Ra\ (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2) \quad (\text{E.84})$$

Concernant la perturbation de pression, on peut écrire :

$$-p|_{y_i} = -p|_{y_0} - Y^+ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y_0} - \frac{(Y^+)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{(\partial y)^2} \Big|_{y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.85})$$

**E. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon :
recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0**

$$\text{Mode 0} \left(-p \Big|_{y_i} \right) = -p_0(y_0) - Y_1^+ \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{y_0} - Y_{-1}^+ \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y_0} \quad (\text{E.86})$$

De même :

$$-p \Big|_{-y_i} = -p \Big|_{-y_0} + Y^- \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{-y_0} - \frac{(Y^-)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{(\partial y)^2} \Big|_{-y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.87})$$

$$\text{Mode 0} \left(-p \Big|_{-y_i} \right) = -p_0(-y_0) + Y_1^- \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{-y_0} + Y_{-1}^- \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{-y_0} \quad (\text{E.88})$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0} \left([-p]_{-y_i}^{y_i} \right) &= [-p_0]_{-y_0}^{y_0} - Y_1^+ \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{y_0} - Y_{-1}^+ \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y_0} \\ &\quad - Y_1^- \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{-y_0} - Y_{-1}^- \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{-y_0} \end{aligned} \quad (\text{E.89})$$

A ce stade, on cherche à éliminer les termes de perturbations de pression des modes 0, 1 et -1 de l'Eq. (E.89). Pour les termes p_1, p_{-1} , on pourrait reprendre les expressions déjà obtenues dans le cas précédent (calcul de B_1). Cependant, on remarque que dans le calcul de C_2 , apparaissent les termes $\frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{-y_0}$, $\frac{\partial \tau_{1xy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0}$ et leurs conjugués (mode -1). Cela donne l'idée d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant y , partie fluide, pour les modes 1 et -1.

Pour le mode 1, on obtient en $y = y_0$:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y_0} + \frac{\partial \tau_{1xy}(\psi_1)}{\partial x} \Big|_{y_0} + \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0} + Ra \theta_1(y_0) = 0, \quad (\text{E.90})$$

soit :

$$-Y_{-1}^+ \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0} = -Y_{-1}^+ Ra \theta_1(y_0) - Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{1xy}(\psi_1)}{\partial x} \Big|_{y_0} \quad (\text{E.91})$$

finalement :

$$-Y_{-1}^+ \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_{-1}^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{y_0} = -Y_{-1}^+ Ra \theta_1(y_0) - i\alpha Y_{-1}^+ D^2 f_1(y_0). \quad (\text{E.92})$$

Il en va de même pour les autres termes. On obtient ainsi :

$$-Y_1^+ \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{y_0} + Y_1^+ \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{y_0} = -Y_1^+ Ra \theta_{-1}(y_0) + i\alpha Y_1^+ D^2 f_{-1}(y_0), \quad (\text{E.93})$$

$$-Y_{-1}^- \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{-y_0} + Y_{-1}^- \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_1)}{\partial y} \Big|_{-y_0} = -Y_{-1}^- Ra \theta_1(-y_0) - i\alpha Y_{-1}^- D^2 f_1(-y_0), \quad (\text{E.94})$$

$$-Y_1^- \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{-y_0} + Y_1^- \frac{\partial \tau_{1yy}(\psi_{-1})}{\partial y} \Big|_{-y_0} = -Y_1^- Ra \theta_{-1}(-y_0) + i\alpha Y_1^- D^2 f_{-1}(-y_0), \quad (\text{E.95})$$

Pour ce qui est du mode 0 de la pression de perturbation (*i.e.* le terme p_0), on écrit l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant y , identifiée pour le mode 0 :

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{1xy}(u_0)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1yy}(u_0)}{\partial y} + Ra \theta_0 + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{2yy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2yy}(\psi_{-1}, \psi_1)) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{2xy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2xy}(\psi_{-1}, \psi_1)). \quad (\text{E.96})$$

On rappelle que :

$$\frac{\partial \tau_{1xy}(u_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{1yy}(u_0)}{\partial y} = 0$$

et $\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{2xy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2xy}(\psi_{-1}, \psi_1)) = 0,$

car $\tau_{2xy}(\psi_1, \psi_{-1})$ et $\tau_{2xy}(\psi_{-1}, \psi_1)$ ne dépendent pas de x .

En intégrant cette équation par rapport à y de $-y_0$ à y_0 , on obtient :

$$[p_0]_{-y_0}^{y_0} = \lim_{y_0} [\tau_{2yy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2yy}(\psi_{-1}, \psi_1)] - \lim_{-y_0} [\tau_{2yy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2yy}(\psi_{-1}, \psi_1)] + \int_{-y_0}^{y_0} Ra T_0 dy. \quad (\text{E.97})$$

Or :

$$\tau_{2yy}(\psi_1, \psi_{-1}) = \frac{2i\alpha Bi}{\dot{\gamma}_b} f_1' (D^2 f_{-1} + \alpha^2 f_{-1}) \quad (\text{E.98})$$

$$\tau_{2yy}(\psi_{-1}, \psi_1) = -\frac{2i\alpha Bi}{\dot{\gamma}_b} f_{-1}' (D^2 f_1 + \alpha^2 f_1) \quad (\text{E.99})$$

$$\begin{aligned} \lim_{y_0} [\tau_{2yy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2yy}(\psi_{-1}, \psi_1)] &= 2i\alpha Bi \left[D^2 f_{-1}(y_0) \lim_{y_0} \frac{f_1'}{\dot{\gamma}_b} - D^2 f_1(y_0) \lim_{y_0} \frac{f_{-1}'}{\dot{\gamma}_b} \right] \\ &= 2i\alpha Bi [Y_{-1}^+ D^2 U_b \times (-Y_1^+) - Y_1^+ D^2 U_b \times (-Y_{-1}^+)] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.100})$$

De même, en $y = -y_0$, on obtient :

$$\lim_{-y_0} [\tau_{2yy}(\psi_1, \psi_{-1}) + \tau_{2yy}(\psi_{-1}, \psi_1)] = 0. \quad (\text{E.101})$$

On trouve finalement :

$$[p_0]_{-y_0}^{y_0} = Ra \int_{-y_0}^{y_0} \theta_0 dy. \quad (\text{E.102})$$

Finalement, on écrira :

$$\begin{aligned} \text{Mode 0 } (C_3) &= Ra y_0 (Y_0^+ - Y_0^-) + Ra (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2) \\ &\quad - Ra \int_{-y_0}^{y_0} T_0 dy - Y_1^+ \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{y_0} - Y_{-1}^+ \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{y_0} \\ &\quad - Y_1^- \frac{\partial p_{-1}}{\partial y} \Big|_{-y_0} - Y_{-1}^- \frac{\partial p_1}{\partial y} \Big|_{-y_0} \end{aligned} \quad (\text{E.103})$$

E.2.4 Calcul de C_4

$$C_4 = \left[-1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \times (-P - p) \right]_{-y_i}^{y_i} \quad (\text{E.104})$$

On a :

$$\mathbf{Mode\ 0} \left(\left[-1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \times (-p) \right]_{-y_i}^{y_i} \right) = \emptyset. \quad (\text{E.105})$$

D'où :

$$\mathbf{Mode\ 0}(C_4) = \mathbf{Mode\ 0} \left(\left[-1/2 \left(\frac{\partial Y^\pm}{\partial x} \right)^2 \times (-P) \right]_{-y_i}^{y_i} \right). \quad (\text{E.106})$$

Or :

$$-1/2 \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x} \right)^2 \times (-P) \Big|_{y_i} = 1/2 \left(\frac{\partial Y^+}{\partial x} \right)^2 P \Big|_{y_0} + O(A^3) \quad (\text{E.107})$$

$$= \alpha^2 |Y_1^+|^2 P(y_0, x) \quad (\text{E.108})$$

$$= \alpha^2 |Y_1^+|^2 \left(-Ra \frac{y_0^2}{2} - \frac{Bi}{y_0} x \right), \quad (\text{E.109})$$

de même :

$$-1/2 \left(\frac{\partial Y^-}{\partial x} \right)^2 \times (-P) \Big|_{-y_i} = \alpha^2 |Y_1^-|^2 P(-y_0, x) \quad (\text{E.110})$$

$$= \alpha^2 |Y_1^-|^2 \left(-Ra \frac{y_0^2}{2} - \frac{Bi}{y_0} x \right). \quad (\text{E.111})$$

Les Eq. (E.111) et (E.109) font apparaître un terme constant et un terme qui dépend de x . Par définition, le terme facteur de x ne peut pas être identifié en terme de mode. On se propose de développer la fonction $x \mapsto x$, définie sur $[-X; X]$, sur la base $(e^{in\alpha x})_n$. Calculons les coefficients $(x_n)_n$ tels que :

$$x = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\alpha x) + i \sum_n b_n \sin(n\alpha x) \quad (\text{E.112})$$

Le calcul des coefficients donnent :

$$a_0 = \frac{1}{2X} \int_{-X}^X x dx = 0 \quad (\text{E.113})$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = 0 \quad (\text{E.114})$$

car la fonction est impaire, et :

$$b_n = \frac{2}{X} \int_{-X}^X i x \sin(n\alpha x) dx = -\frac{i}{n\alpha}. \quad (\text{E.115})$$

Ainsi :

$$x = \sum_n \frac{1}{n\alpha} \sin(n\alpha x). \quad (\text{E.116})$$

D'où, l'identification du Mode 0 pour x se réduit à

$$\mathbf{Mode\ 0}(x) = 0. \quad (\text{E.117})$$

Finalement on obtient pour le Mode 0 :

$$\mathbf{Mode\ 0}(C_4) = -\alpha^2 Ra \frac{y_0^2}{2} (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2). \quad (\text{E.118})$$

E.2.5 Calcul de C_5

$$\begin{aligned} [\tau_{xy}(\Psi)]_{-X}^X &= [\tau_{bxy}(\Psi)]_{-X}^X + [\tau_{1xy}(u_0)]_{-X}^X \\ &+ [\tau_{1xy}(\psi_1)]_{-X}^X + [\tau_{1xy}(\psi_{-1}) + T.O.S.]_{-X}^X \end{aligned} \quad (\text{E.119})$$

$$[\tau_{bxy}(\Psi)]_{-X}^X = [\text{Cste}]_{-X}^X = 0, \quad (\text{E.120})$$

de même, $\tau_{1xy}(u_0)$ ne dépend pas de x , d'où :

$$[\tau_{1xy}(u_0)]_{-X}^X = 0, \quad (\text{E.121})$$

les termes qui restent ont aussi pour période $2X$:

$$[\tau_{1xy}(\psi_1)]_{-X}^X = [\tau_{1xy}(\psi_{-1})]_{-X}^X = 0. \quad (\text{E.122})$$

Finalement :

$$[\tau_{xy}(\Psi)]_{-X}^X = 0, \quad (\text{E.123})$$

d'où :

$$\boxed{C_5 = 0.} \quad (\text{E.124})$$

E.2.6 Calcul de C_6

$$C_6 = Ra \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X (T_b + T) dx dy \quad (\text{E.125})$$

$$C_6 = Ra \int_{-y_i}^{y_i} \int_{-X}^X (T_b) dx dy \quad (\text{E.126})$$

$$\text{car } \int_{-X}^X T_1 dx = \int_{-X}^X T_{-1} dx = \int_{-X}^X T_2 dx = \int_{-X}^X T_{-2} dx = 0.$$

On rappelle, de plus, que: $T_b = -y$ (Eq. (2.22)). On écrit ainsi :

$$C_6 = 2X Ra \int_{-y_i}^{y_i} (-y + \theta_0) dy \quad (\text{E.127})$$

$$= 2X Ra \left(\left[-\frac{y^2}{2} \right]_{-y_i}^{y_i} + \int_{-y_i}^{y_i} \theta_0 dy \right). \quad (\text{E.128})$$

**E. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de la zone bouchon :
recherche de conditions supplémentaires pour le mode 0**

$$\mathbf{Mode\ 0}(C_6) = 2X Ra \left(-(|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2) + \mathbf{Mode\ 0} \left(\int_{-y_i}^{y_i} \theta_0 dy \right) \right). \quad (\text{E.129})$$

Posons Θ_0 , une primitive de θ_0 . On a :

$$\int_{-y_i}^{y_i} \theta_0 dy = [\Theta_0]_{-y_i}^{y_i} \quad (\text{E.130})$$

$$= \Theta_0(y_i) - \Theta_0(-y_i). \quad (\text{E.131})$$

Or :

$$\Theta_0(y_i) = \Theta_0(y_0) + Y^+ \left. \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} \right|_{y_0} + T.O.S. \quad (\text{E.132})$$

Ainsi :

$$\mathbf{Mode\ 0}(\Theta_0(y_i)) = \Theta_0(y_0). \quad (\text{E.133})$$

De même, en $y = -y_i$:

$$\mathbf{Mode\ 0}(\Theta_0(-y_i)) = \Theta_0(-y_0). \quad (\text{E.134})$$

Finalement, on a :

$$\mathbf{Mode\ 0} \left(\int_{-y_i}^{y_i} \theta_0 dy \right) = \int_{-y_0}^{y_0} \theta_0 dy. \quad (\text{E.135})$$

Et :

$$\mathbf{Mode\ 0}(C_6) = 2X Ra \left(-|Y_1^+|^2 + |Y_1^-|^2 + \int_{-y_0}^{y_0} \theta_0 dy \right).$$

(E.136)

E.2.7 Bilan projeté sur e_y

En conclusion, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement suivant y s'écrit :

$$\begin{aligned} Ra y_0 (Y_0^+ - Y_0^-) &= Ra (Y_1^+ \theta_{-1}(y_0) + Y_{-1}^+ \theta_1(y_0) + Y_1^- \theta_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^- \theta_1(-y_0)) \\ &+ Ra \frac{y_0^2}{2} \alpha_c^2 (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2). \end{aligned} \quad (\text{E.137})$$

Soit :

$$\begin{aligned} (Y_0^+ - Y_0^-) &= \frac{1}{y_0} (Y_1^+ \theta_{-1}(y_0) + Y_{-1}^+ \theta_1(y_0) + Y_1^- \theta_{-1}(-y_0) + Y_{-1}^- \theta_1(-y_0)) \\ &+ \frac{y_0 \alpha_c^2}{2} (|Y_1^+|^2 - |Y_1^-|^2). \end{aligned}$$

(E.138)

Annexe F

Opérateur adjoint

F.1 Calcul de l'opérateur adjoint de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$

On cherche $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}^\dagger$ tel que :

$$\langle \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \mathbf{V}, \mathbf{V}_{ad} \rangle = \langle \mathbf{V}, \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^\dagger \mathbf{V}_{ad} \rangle. \quad (\text{F.1})$$

avec $\mathbf{V} = (f_v, \theta_v)$ et $\mathbf{V}_{ad} = (f_u, \theta_u)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \mathbf{V}, \mathbf{V}_{ad} \rangle &= \frac{1}{2X} \int_{-X}^X dx \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_{ad}^* dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} [(\mathcal{L}_1 f_v + Pr Ra \theta_v) f_u^* + (f_v + \mathcal{L}_3 \theta_v) \theta_u^*] dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} [(\mathcal{L}_1 f_v) f_u^* + f_v \theta_u^*] dy + \int_{-1/2}^{1/2} [\theta_v (Pr Ra f_u)^* + (\mathcal{L}_3 \theta_v) \theta_u^*] dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} [f_v (\mathcal{L}_1^\dagger f_u + \theta_u)^*] dy + \int_{-1/2}^{1/2} [\theta_v (Pr Ra f_u + \mathcal{L}_3^\dagger \theta_u)^*] dy. \end{aligned}$$

\mathbf{U} conserve les mêmes propriétés physiques et mêmes conditions aux limites que \mathbf{V} . Nous pouvons ainsi écrire :

- Conditions limites aux parois

$$\mathbf{V}_{ad} \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (\text{F.2})$$

- Conditions aux interfaces

$$f_u(\pm y_0) = f_u'(\pm y_0) = 0. \quad (\text{F.3})$$

- Dans la zone non cisillée :

$$f_u = 0. \quad (\text{F.4})$$

L'opérateur adjoint \mathcal{L}^\dagger sera déterminé par la connaissance de \mathcal{L}_1^\dagger et \mathcal{L}_3^\dagger .

F.1.1 Calcul de \mathcal{L}_1^\dagger

Puisque les perturbations des fonctions courant s'annulent dans la zone non cisillée, nous avons :

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\mathcal{L}_1 f_v) f_u^* dy = \int_{-1/2}^{-y_0} (\mathcal{L}_1 f_v) f_u^* dy + \int_{y_0}^{1/2} (\mathcal{L}_1 f_v) f_u^* dy. \quad (\text{F.5})$$

Considérons tout d'abord le domaine de la zone cisailée supérieure $\Omega^+ = [-X; X] \times]y_0; 1/2] \times [-Z; Z]$. En réalité, l'opérateur adjoint \mathcal{L}_1^\dagger de \mathcal{L}_1 aura la même expression sur le domaine Ω^+ que sur $\Omega^- = [-X; X] \times [-1/2; -y_0] \times [-Z; Z]$ dans la mesure où les conditions aux limites aux parois et aux interfaces sont égales (nulles).

(i) Soit la partie newtonienne de \mathcal{L}_1 :

$$\mathcal{L}_{1Nw} = Pr Re (U_b (D^2 - \alpha^2) - D^2 U_b) + \frac{i Pr}{\alpha} (D^2 - \alpha^2)^2.$$

Le premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} Pr Re \int_{y_0}^{1/2} D^2 f_v (U_b f_u^*) dy &= Pr Re [D f_v U_b f_u^*]_{y_0}^{1/2} - Pr Re [f_v (D U_b f_u^* + U_b D f_u^*)]_{y_0}^{1/2} \\ &+ Pr Re \int_{y_0}^{1/2} f_v (D^2 U_b f_u^* + 2 D U_b D f_u^* + U_b D^2 f_u^*) dy \\ &= Pr Re \int_{y_0}^{1/2} f_v (D^2 U_b f_u^* + 2 D U_b D f_u^* + U_b D^2 f_u^*) dy, \end{aligned}$$

en intégrant par parties et en considérant les conditions aux limites.

De plus, on a :

$$Pr Re \int_{y_0}^{1/2} f_v (-\alpha^2 U_b - D^2 U_b) f_u^* dy = Pr Re \int_{y_0}^{1/2} f_v [(-\alpha^2 U_b - D^2 U_b) f_u]^* dy$$

On remarque, par intégration par parties successives que l'opérateur $(D^2 - \alpha^2)^2$ est auto-adjoint.

On obtient finalement :

$$\mathcal{L}_{1Nw}^\dagger = Pr Re (U_b (D^2 - \alpha^2) + 2 D U_b D) - \frac{i Pr}{\alpha} (D^2 - \alpha^2)^2. \quad (\text{F.6})$$

(ii) Considérons maintenant le terme en Bingham :

$$\mathcal{L}_{1B} = -4i \alpha Pr B D \left(\frac{D}{\dot{\gamma}_b} \right). \quad (\text{F.7})$$

On a :

$$\int_{y_0}^{1/2} D \left(\frac{D f_v}{\dot{\gamma}_b} \right) f_u^* dy = \int_{y_0}^{1/2} \left(\frac{D^2 f_v}{\dot{\gamma}_b} \right) f_u^* dy - \int_{y_0}^{1/2} \left(\frac{D f_v D \dot{\gamma}_b}{\dot{\gamma}_b^2} \right) f_u^* dy. \quad (\text{F.8})$$

Le premier terme devient :

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{1/2} D^2 f_v \left(\frac{f_u}{\dot{\gamma}_b} \right)^* dy &= \left[D f_v \left(\frac{f_u}{\dot{\gamma}_b} \right)^* \right]_{y_0}^{1/2} - \left[f_v D \left(\frac{f_u}{\dot{\gamma}_b} \right)^* \right]_{y_0}^{1/2} + \int_{y_0}^{1/2} f_v D^2 \left(\frac{f_u}{\dot{\gamma}_b} \right)^* dy \\ &= \int_{y_0}^{1/2} f_v \left(\frac{D^2 f_u}{\dot{\gamma}_b} - 2 \frac{D \dot{\gamma}_b D f_u}{\dot{\gamma}_b^2} + 2 \frac{(D \dot{\gamma}_b)^2 f_u}{\dot{\gamma}_b^3} \right)^* dy \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Le second terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{1/2} -D f_v \left(\frac{D \dot{\gamma}_b f_u}{\dot{\gamma}_b^2} \right)^* dy &= - \left[f_v \left(\frac{D \dot{\gamma}_b f_u}{\dot{\gamma}_b^2} \right)^* \right]_{y_0}^{1/2} + \int_{y_0}^{1/2} f_v D \left(\frac{D \dot{\gamma}_b f_u}{\dot{\gamma}_b^2} \right)^* dy \\ &= \int_{y_0}^{1/2} f_v \left(\frac{D \dot{\gamma}_b D f_u}{\dot{\gamma}_b^2} - 2 \frac{(D \dot{\gamma}_b)^2 f_u}{\dot{\gamma}_b^3} \right)^* dy \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{1/2} D \left(-4i\alpha Pr B \frac{Df_v}{\dot{\gamma}_b} \right) f_u^* dy &= \int_{y_0}^{1/2} f_v \left[4i\alpha Pr B \left(\frac{D^2}{\dot{\gamma}_b} - \frac{D\dot{\gamma}_b D}{\dot{\gamma}_b^2} \right) f_u \right]^* dy \\ &= \int_{y_0}^{1/2} f_v \left[4i\alpha Pr B D \left(\frac{Df_u}{\dot{\gamma}_b} \right) \right]^* dy. \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

On a montré que l'opérateur \mathcal{L}_{1B} est auto-adjoint conjugué.

Finalement, nous obtenons pour \mathcal{L}_1^\dagger :

$$\boxed{\mathcal{L}_1^\dagger \equiv Pr Re [U_b (D^2 - \alpha^2) + 2DU_b D] - i \frac{Pr}{\alpha} (D^2 - \alpha^2)^2 + 4i\alpha Pr B D \left(\frac{D}{|DU_b|} \right)} \quad (\text{F.12})$$

F.1.2 Calcul de \mathcal{L}_3^\dagger

Le calcul de \mathcal{L}_3^\dagger peut être réalisé sur tout le domaine $\Omega = [-X; X] \times [-1/2; 1/2] \times [-Z; Z]$ puisque θ est continue sur tout le domaine $y \in [-1/2; 1/2]$.

Nous écrivons :

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (\mathcal{L}_3 \theta_v) \theta_u^* dy &= \int_{-1/2}^{1/2} \left[\left(Pr Re U_b - i\alpha + \frac{i}{\alpha} D^2 \right) \theta_v \right] \theta_u^* dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} [(Pr Re U_b + i\alpha) \theta_u]^* \theta_v dy + [D\theta_v \theta_u^*]_{-1/2}^{1/2} \\ &\quad - [\theta_v D\theta_u^*]_{-1/2}^{1/2} + \int_{-1/2}^{1/2} \left(-\frac{i}{\alpha} D^2 \theta_u \right)^* \theta_v dy \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{L}_3^\dagger \equiv \left(Pr Re U_b + i\alpha - \frac{i}{\alpha} D^2 \right)} \quad (\text{F.14})$$

F.2 Calcul de \mathcal{D}^\dagger

On remarque que l'opérateur \mathcal{D} est auto-adjoint :

$$\boxed{\mathcal{D}^\dagger = \mathcal{D}}. \quad (\text{F.15})$$

Annexe G

Approche énergétique basée sur les échelles caractéristiques du Chapitre 2

Dans cette annexe, la méthode énergétique mise en oeuvre dans le Chapitre 4 (Sections 4.1-4.2) est reprise en conservant les mêmes échelles caractéristiques que celles introduites au Chapitre 2.

A partir des équations aux perturbations linéarisées, (2.46), nous construisons de la même manière que dans le Chapitre 4 une "énergie totale" E_λ de perturbation liée au problème. Cette "énergie totale" est construite comme étant une combinaison linéaire des termes $\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$ et $\langle |\theta|^2 \rangle$:

$$E_\lambda = \frac{1}{2 Pr Ra} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle |\theta|^2 \rangle. \quad (\text{G.1})$$

L'évolution temporelle de E_λ s'écrit :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = -(I_\lambda + D_\lambda), \quad (\text{G.2})$$

avec

$$I_\lambda = \begin{cases} -Pr Re I(\mathbf{u}) - (Pr Ra + 1) \langle v \theta \rangle & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pour } |y| \leq y_0. \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

et

$$D_\lambda = \begin{cases} Pr \nu(\mathbf{u}) + B Pr \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \mathcal{C}_d & \text{pour } y_0 < |y| < \frac{1}{2}, \\ \mathcal{C}_d & \text{pour } |y| \leq y_0. \end{cases} \quad (\text{G.4})$$

où les différents termes $I(\mathbf{u})$, $\nu(\mathbf{u})$, $\mathcal{B}(\mathbf{u})$ et \mathcal{C}_d sont donnés respectivement par les Eq. (4.3), (4.4), (4.5) et (4.11).

Une condition pour que E_λ soit décroissante en fonction du temps est que le terme de droite soit négatif. Il s'agit par exemple, en reprenant la même approche que celle développée

G. Approche énergétique basée sur les échelles caractéristiques du Chapitre 2

par Doering et Constantin (1996), que la fonctionnelle quadratique $\mathcal{F}\{\mathbf{u}, \theta\}$, définie comme suit :

$$\mathcal{F}\{\mathbf{u}, \theta\} = -[I_\lambda + D_\lambda], \quad (\text{G.5})$$

soit positive. Dans ce cas, le terme E_λ aura une décroissance exponentielle en temps avec un taux de décroissance minimum $\Lambda^{(0)}$ donné par le problème d'optimisation suivant :

$$\Lambda^{(0)} = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \theta \in \mathcal{V}_\theta} \left[\frac{\mathcal{F}\{\mathbf{u}, \theta\}}{E_\lambda} \right], \quad (\text{G.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u &= \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} \in [\mathcal{C}^2(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } y = \pm \frac{1}{2} \right\}, \\ \mathcal{V}_\theta &= \left\{ \theta : \theta \in [\mathcal{C}^2(\Omega)], \theta = 0 \text{ en } y = \pm \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Les numérateur et dénominateur étant quadratiques en θ et \mathbf{u} , le problème d'optimisation peut être réécrit de la manière suivante :

$$\Lambda^{(0)} = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u, \theta \in \mathcal{V}_\theta} (\mathcal{F}\{\mathbf{u}, \theta\}), \quad (\text{G.7})$$

où les variables θ et \mathbf{u} sont contraintes par la condition de normalisation :

$$\frac{1}{2PrRa} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle |\theta|^2 \rangle = 1. \quad (\text{G.8})$$

Pour tenir compte des contraintes de normalisation et de continuité, les multiplicateurs de Lagrange $p(x, y, z, t)$, pour $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, et Λ , pour $\frac{1}{2PrRa} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle |\theta|^2 \rangle = 1$, sont introduits. Le problème d'optimisation peut être reformulé comme suit :

$$\delta \left[\mathcal{F}\{\mathbf{u}, \theta\} - 2p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Lambda \left(\frac{1}{2PrRa} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle |\theta|^2 \rangle \right) \right] = 0 \quad (\text{G.9})$$

où δ est utilisé pour l'opérateur variationnel.

Dans la zone cisailée, les équations d'Euler-Lagrange correspondantes à l'Eq. (G.9) s'écrivent :

$$\Lambda u = -\frac{1}{2}PrRe v DU_b - \partial_x p + Pr \left(\Delta u + B \frac{\partial_{xx}u + \partial_{zz}u}{\dot{\gamma}_b} \right) = 0 \quad (\text{G.10a})$$

$$\Lambda v = -\frac{1}{2}PrRe u DU_b - \partial_y p + Pr \left[\Delta v + B \left(\frac{\partial_{zz}v + \partial_{yz}w}{\dot{\gamma}_b} + 3\partial_y \left(\frac{\partial_y v}{\dot{\gamma}_b} \right) \right) \right] + PrRa\theta \quad (\text{G.10b})$$

$$\Lambda w = -\partial_z p + Pr \left[\Delta w + B \left(\frac{\partial_{xx}w + \partial_{zz}w}{\dot{\gamma}_b} + \partial_y \left(\frac{\partial_y w + \partial_z v}{\dot{\gamma}_b} \right) \right) \right] = 0 \quad (\text{G.10c})$$

$$\Lambda \theta = v + \Delta \theta, \quad (\text{G.10d})$$

Dans la zone non cisailée, nous avons :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\text{G.11a})$$

$$\Delta\theta = 0. \quad (\text{G.11b})$$

Ces systèmes d'équations est muni des conditions aux limites suivantes :

– **Aux parois :**

La condition de non-glissement donne en terme de vitesse :

$$u\left(\pm\frac{1}{2}\right) = v\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (\text{G.12})$$

La condition isotherme donne en terme de température :

$$\theta\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (\text{G.13})$$

– **Aux interfaces :**

$$\mathbf{u}(\pm y_i) = \mathbf{0}. \quad (\text{G.14})$$

Le système (G.10), muni de ces conditions limites, représente un problème aux valeurs propres, où Λ est la valeur propre à déterminer. Le taux de décroissance minimum $\Lambda^{(0)}$ correspond à la plus petite valeur propre positive de ce problème. De plus, la condition de stabilité assurant la décroissance de 'l'énergie' de perturbation, est que le spectre des valeurs propres soit positif.

Si nous nous plaçons dans le cas bidimensionnel, les solutions des équations d'Euler-Lagrange (4.28) sont cherchées sous la forme :

$$(\mathbf{u}, \theta) = (u(y), \theta(y)) e^{i\alpha x}.$$

Finalement cette approche nous conduit à un problème aux valeurs propres où la valeur propre à déterminer correspond au taux de décroissance de 'l'énergie' de perturbation. Il s'agit en réalité de déterminer la plus petite valeur propre positive en faisant varier deux paramètres : le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde α .

Annexe H

Détermination de la valeur optimale de λ

Cette annexe a pour objet de calculer la valeur de λ qui satisfait la condition d'optimisation décrite par l'Eq. (4.23).

On pose :

$$F(\mathbf{u}, \theta, \lambda, \xi) = -\frac{I_\lambda}{D_\lambda} \quad (\text{H.1})$$

et

$$J(\lambda, \xi) = \max_{(\mathbf{u}, \theta)} F(\mathbf{u}, \theta, \lambda, \xi). \quad (\text{H.2})$$

Un moyen simple pour trouver la valeur de λ qui optimise l'Eq. (H.2) est de déterminer les fonctions G et H , telles que :

$$J(\lambda, \xi) = G(\xi) H(\lambda). \quad (\text{H.3})$$

A cet effet, posons $\tilde{\theta} = -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} \theta$ et $\chi = \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \xi$; et évaluons $F(\mathbf{u}, \tilde{\theta}, \lambda_1, \chi)$ en fonction de $F(\mathbf{u}, \tilde{\theta}, \lambda_2, \chi)$:

$$F(\mathbf{u}, \tilde{\theta}, \lambda_1, \chi) = \frac{-\frac{1+\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} \chi \langle uv DU_b \rangle + (1+\lambda_2) \langle \tilde{\theta} v \rangle \left(\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_2}\right) \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}{\nu(\mathbf{u}) + B \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \lambda_2 \langle |\nabla \tilde{\theta}|^2 \rangle} \quad (\text{H.4})$$

$$= \left(\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_2}\right) \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} F(\mathbf{u}, \tilde{\theta}, \lambda_2, \chi). \quad (\text{H.5})$$

Cette dernière équation montre que la fonction $\frac{\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} J(\lambda, \chi)$ reste invariante lorsque λ varie et lorsque la valeur de χ est fixée.

Nous en déduisons $G(\chi)$:

$$G(\chi) = \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} J(\lambda, \chi), \quad (\text{H.6})$$

et donc pour $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$H(\lambda) = \frac{1+\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \quad (\text{H.7})$$

H. Détermination de la valeur optimale de λ

L'Equation (4.23) est équivalente à chercher la valeur optimale de λ qui minimise la fonction $J(\lambda, \chi)$. Or :

$$\min_{\lambda > 0} J(\lambda, \chi) = G(\chi) \min_{\lambda > 0} (H(\lambda)). \quad (\text{H.8})$$

Finalement la valeur optimale de λ est solution de :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1 + \lambda}{\sqrt{\lambda}} \right] = 0, \quad (\text{H.9})$$

et est obtenue pour $\lambda = 1$.

Nous en déduisons ainsi que $\xi = 2\chi$.

Annexe I

Calcul de la valeur de $\delta_{m\alpha\beta}$, lorsque $B \rightarrow \infty$

Cette annexe a pour objet de déterminer la valeur du nombre d'onde $\delta_{m\alpha\beta}$ telle que la valeur du nombre de Rayleigh Ra_E soit minimale. Nous avons :

$$Ra_E = [\pi^2 + \delta_{\alpha\beta}^2] \left(1 - \frac{Re}{Re_L(B)} \right) \left[\frac{\pi^4}{(\frac{1}{2} - y_0)^4 \delta_{\alpha\beta}^2} + \frac{2\pi^2}{(\frac{1}{2} - y_0)^2} + \delta_{\alpha\beta}^2 + \frac{4\pi^2 y_0}{(\frac{1}{2} - y_0)^3} \right]. \quad (I.1)$$

Introduisons la fonction F de la manière suivante :

$$F(\delta) = [\pi^2 + \delta^2] \left[\frac{\pi^4}{(\frac{1}{2} - y_0)^4 \delta^2} + \frac{2\pi^2}{(\frac{1}{2} - y_0)^2} + \delta^2 + \frac{4\pi^2 y_0}{(\frac{1}{2} - y_0)^3} \right]. \quad (I.2)$$

Nous cherchons la valeur de $\delta_{\alpha\beta}$ qui annule la dérivée de la fonction F . La dérivée s'écrit :

$$F'(\delta) = 2\pi^2 \delta + 4\delta^3 - \frac{2\pi^6}{\delta^3 (1/2 - y_0)^4} + \frac{4\pi^2 \delta}{(1/2 - y_0)^2} + \frac{8\pi^2 \delta y_0}{(1/2 - y_0)^3}. \quad (I.3)$$

Lorsque $B \rightarrow \infty$, nous avons :

$$F'(\delta) = -\frac{2\pi^6}{\delta^3} B^2 + B^{3/2} \left[4\pi^2 \delta - \frac{8\pi^6}{\delta^3} \right] + B \left[8\pi^2 \delta - \frac{20\pi^6}{\delta^3} \right]. \quad (I.4)$$

Si $F'(\delta) = 0$, alors nous avons :

$$\delta^4 \left(8\pi^2 + 4\pi^2 \sqrt{B} \right) = 2\pi^6 B + 8\pi^6 \sqrt{B} + 20\pi^6. \quad (I.5)$$

En posant $\delta = a_0 + a_1 \sqrt{B} + a_2 B$, nous obtenons, par identification dans l'Eq. (I.5) :

$$a_0 = \sqrt{\frac{5}{2}} \pi^2, \quad (I.6)$$

$$a_1 = -\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\pi^2}{8}, \quad (I.7)$$

$$a_2 = \frac{59\pi^2}{160\sqrt{10}}. \quad (I.8)$$

Finalement :

$$\delta^2 \sim \frac{59\pi^2}{160\sqrt{10}} B \quad (I.9)$$

I. Calcul de la valeur de $\delta_{m\alpha\beta}$, lorsque $B \rightarrow \infty$

Annexe J

Troisième approche : en laissant libre le nombre de Reynolds

Dans cette approche, nous fixons la valeur limite du nombre de Rayleigh telle que $Ra \leq Ra_{EN}$ et nous laissons libre la valeur du nombre de Reynolds. Nous pouvons écrire :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq -Re \langle u v DU_b \rangle - \left(1 - \frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{Ra_{EN}}} \right) (\langle |\nabla\theta|^2 \rangle + \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle). \quad (\text{J.1})$$

De plus, d'après l'Eq. 5.29, qui donne une borne pour le terme inertiel ($-\langle u v DU_b \rangle$), nous pouvons écrire :

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq - \left(1 - \frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{Ra_{EN}}} \right) \langle |\nabla\theta|^2 \rangle - \left(1 - \frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{Ra_{EN}}} - Re \frac{B(1/2 - y_0)^3}{2y_0} \right) \langle \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (\text{J.2})$$

Cette dernière inégalité nous permet de déduire une nouvelle condition sur le nombre de Rayleigh pour que l'énergie de la perturbation décroisse au cours du temps :

$$\frac{Ra}{Ra_{EN}} \leq \left(1 - Re \frac{B(1/2 - y_0)^3}{2y_0} \right)^2. \quad (\text{J.3})$$

Cette dernière inégalité est très similaire à celle obtenue lors de la deuxième approche (Condition (5.44c)). En réalité, nous pouvons affirmer que la condition obtenue dans cette troisième approche ne permet pas d'améliorer la région I, c'est à dire la région de stabilité monotone car dans cette approche le terme inertiel est borné alors que dans la deuxième approche, le terme $Re_E(B)$ est calculé numériquement à partir des équations d'Euler-Lagrange (sans approximation sur le terme d'inertie).

Bibliographie

- A.N. BERIS, J.A. TSAMOPOULOS, R.C. AMSTRONG et R.A. BROWN : Creeping motion of a sphere through a bingham plastic. *J. Fluid Mech.*, 158:219, 1985.
- R.B. BIRD et G.C. DAI : The rheology and flow of viscoplastic materials. *Reviews in Chemical Engineering*, 1 (1):1–70, 1983.
- P.A. BOIS : *Mécanique théorique des fluides*. Ellipses, 2000.
- J. BOUSSINESQ : *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonique avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courants de convection*. Gauthier-Villars, 1903.
- P. CARRIÈRE et P. MONKEWITZ : Convective versus absolute instability in mixed rayleigh-bénard-poiseuille convection. *J. Fluid Mech.*, 43:384, 1999.
- P. CARRIÈRE et P. MONKEWITZ : Transverse-roll global modes in a rayleigh-bénard-poiseuille system with streamwise variable heating. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 20:751–770, 2001.
- S. CHANDRASEKHAR : *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961.
- Cheng CHANG, Q. Dzuy NGUYEN et HansPetter RØNNINGSEN : Isothermal start-up of pipeline transporting waxy crude oil. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 87:127–154, 1999.
- P. COUSSOT : Saffman-taylor instability in yield stress fluids. *J. Fluid Mech.*, 380:363, 1998.
- C. R. DOERING et P. CONSTANTIN : Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows. iii. convection. *Physical Review E*, 53 (6):5957–5981, 1996.
- D. DORAISWAMY, A.N. MUJUMDAR, I. TSAO, A.N. BERIS, S.C. DANFORTH et A.B BETZNER : The cox-merz rule extended: A rheological model for concentrated suspensions and other materials with a yield stress. *J. Rheol.*, 35 (4):647–684, 1991.
- P.G. DRAZIN et W.H. REID : *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- G. DUVAUT et J.L. LIONS : *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, 1976.
- G. FORREST et W.L. WILKINSON : Laminar heat transfer to temperature-dependant bingham fluids in tubes. *Int. J. Heat Mass Transfert*, 16:2377–2391, 1973.
- I.A. FRIGAARD, S.D. HOWISON et I.J. SOBEY : On the stability of poiseuille flow of a bingham fluid. *J. Fluid Mech.*, 263:133, 1994.
- I.A. FRIGAARD et C. NOUAR : On three-dimensional linear stability of poiseuille flow of bingham fluids. *Phys. Fluids*, 15 (10):2843–2851, 2003.
- K.S. GAGE et W.H. REID : The stability of thermally stratified plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 33:21–32, 1968.

- G.Z. GERSHUMI et E.M. ZHUDHOVITSKII : *Convective stability of incompressible fluids*. Keter Publish House Jerusalem Ltd, 1976.
- W. P. GRAEBEL : The hydrodynamic stability of a bingham fluid in a couette flow. *International Symposium of Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics, Haifa, Pergamon, 1964*.
- D. D. GRAY et A. GIORGINI : The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19:545–551, 1976.
- E. GUYON, J.P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique Physique*. Editions du CNRS, 1991.
- D. HENNINGSON : Comment on 'transition in shear flows. nonlinear normality versus non-normal linearity. *Phys. Fluids*, 8 (8):2257, 1996.
- L. N. HOWARD : Heat transport by turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 17:405–432, 1964.
- R.R. HUILGOL : Variational inequalities in the flows of yield stress fluids including inertia: Theory and applications. *Phys. Fluids*, 14:1269, 2001.
- D.D. JOSEPH : On the stability of the boussinesq equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, (1) 20:59–71, 1965.
- D.D. JOSEPH : Nonlinear stability of the boussinesq equations by the method of energy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 22 (3):163–184, 1966.
- D.D. JOSEPH : *Stability of Fluid Motions II*. Springer-Verlag, 1976.
- N. KABOUYA : *Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique : Etudes modale et non modale*. Thèse de doctorat, Universtié Henri Poincaré - Nancy 1, 2005.
- R.G. LARSON : *The Structure and Rheology of Complex Fluids*. Oxford University, 1999.
- Petra V. LIDDELL et David V. BOGER : Yield stress measurements with the vane. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 63:235–261, 1996.
- J.-M. LUIJKX : *Influence de la présence de parois latérales sur l'apparition de la convection libre, forcée et mixte*. Thèse de doctorat, Universtié de l'Etat à Mons, 1983.
- D. MARTINAND : *Détermination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh-Bénard-Poiseuille*. Thèse de doctorat, Université Lyon I Claude Bernard, 2003.
- D. MARTINAND, P. CARRIÈRE et P.A. MONKEWITZ : Three-dimensional global instability modes associated with a localized hot spot in rayleigh-bénard-poiseuille convection. *J. Fluid Mech.*, 551:275–301, 2006.
- H.W. MÜLLER, M. LÜCKE et M. KAMPS : Convective patterns in horizontal flow. *Europhys. Lett.*, 10 (5):451, 1989.
- A. MUJUMDAR, A.N. BERIS et A.B. METZNER : Transient phenomena in thixotropic systems. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 102:157–178, 2002.
- X. NICOLAS : *Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, 1997.

- X. NICOLAS: Revue bibliographique sur les écoulements de poiseuille-rayleigh-bénard: écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas. *International Journal of Thermal Sciences*, 41:961–1016, 2001.
- X. NICOLAS, J.-M. LUIJKX et J.-K. PLATTEN: Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 43:589, 2000.
- C. NOUAR et I.A. FRIGAARD: Nonlinear stability of poiseuille flow of a bingham fluid: theoretical results and comparison with phenomenological criteria. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 100:127–149, 2001.
- J.G. OLDROYD: Two-dimensional plastic flow of a bingham solid. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 43:383, 1947a.
- M.T. OUAZZANI, J.K. PLATTEN, H.W. MÜLLER et M. LÜCKE: Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes iii. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38 (5):875–886, 1994.
- J. PEIXINHO: *Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, 2004.
- Jie PENG et Ke-Qin ZHU: Linear stability of bingham fluids in spiral couette flow. *J. Fluid Mech.*, 512:21–45, 2003.
- J.K. PLATTEN: A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients. *Int. Eng. Sci.*, 9:855–869, 1971.
- M. RIEUTORD: *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, 1997.
- R. SANI: Note on flow instabilities in heated ducts. *Z. Angew. Maht. Phys.*, (15):591–600, 1964.
- P.J. SCHMID et Dan S. HENNINGSON: *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer-Verlag, 2000.
- J. SERRIN: On the stability of viscous fluid motions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, (1) 3:1–13, 1959.
- J.T. STUART: On the non-linear mechanics of wave disturbance in stable and unstable parallel flows. part i. the basic behaviour in plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 9:353–370, 1960.
- W. VELTE: Über ein stabilitätskriterium der hydrodynamik. *Arch. Rational Mech. Anal.*, (1) 9:9–20, 1962.
- Guillaume VINAY, Anthony WACHS et Jean-François AGASSANT: Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 128:144–162, 2005.
- D.P. WALL et S.K. WILSON: The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependant viscosity. *J. Fluid Mech.*, 323:107–132, 1996.
- J. ZHANG, D. VOLA et I.A. FRIGAARD: Yield stress effects on rayleigh-bénard convection. *J. Fluid Mech.*, 566:389–419, 2006.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Ian FRIGAARD, Professeur Associé, University of British Columbia, Canada

Monsieur Philippe CARRIERE, Chargé de Recherche, LMFA, EC de Lyon, Ecully

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Madame METIVIER Christel

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Instabilités thermoconvectives pour des fluides viscoplastiques"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et énergétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 21 novembre 2006

Le Président de l'I.N.P.L.,

L. SCHUFFENECKER



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX