



**HAL**  
open science

# Contribution à l'élaboration d'un logiciel métier par éléments finis pour l'analyse thermomécanique globale d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes

Johan Dib

## ► To cite this version:

Johan Dib. Contribution à l'élaboration d'un logiciel métier par éléments finis pour l'analyse thermomécanique globale d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007. Français. NNT : 2007INPL025N . tel-01752886

**HAL Id: tel-01752886**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752886>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Contribution à l'élaboration d'un logiciel métier par éléments finis pour l'analyse thermomécanique globale d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes

## THESE

Présentée et soutenue publiquement le 14 Mai 2007

Pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**

**Spécialité : Mécanique et Énergétique**

Par

**Johan DIB**

### Composition du jury

Président :	<b>J-M. ROELANDT</b>	Professeur, UTC Compiègne
Rapporteurs :	<b>P. CARTRAUD</b> <b>P. COOREVITS</b>	Professeur, Centrale Nantes Professeur, Université de Picardie Jules Verne, IUT
Examineurs :	<b>J-L. BATOZ</b> <b>T. BEN ZINEB</b> <b>F. BILTERYST</b> <b>I. LEWON</b>	Professeur, UTC Compiègne Professeur, Université Henri Poincaré Nancy Maître-Assistant, GIP-InSIC Saint Dié Ingénieur Docteur, Nordon Cryogénie



*« Le peu que je sais, c'est à mon ignorance que je le dois »*  
Sacha Guitry (1885 – 1957)

À mes proches, à mes parents,  
À toi Rayan,...



# Remerciements

Le présent mémoire reflète trois années de recherche et de développement effectuées pour une part au sein de l'équipe ERMeP (Equipe de Recherche en Mécanique et Plasturgie), équipe située dans les murs du GIP-InSIC (Institut Supérieur d'Ingénierie de la Conception) à Saint-Dié-des-Vosges, et pour une autre part, au sein de l'entreprise Nordon Cryogénie implanté à Golbey dans les Vosges. Je désire donc tout d'abord remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer durant ces trois années, et qui ont, de près ou de loin, participé à leur bon déroulement, tant au niveau scientifique, qu'amical ou encore personnel. Une certaine émotion accompagnant inévitablement la fin d'une telle aventure, que les éventuels oubliés de ces remerciements me pardonnent.

J'adresse donc mes tous premiers remerciements à mon directeur de thèse Jean-Louis BATOZ, à mon co-directeur François BILTERYST et à mon encadreur industriel Ivan LEWON. Merci Jean-Louis ce fut un réel plaisir de travailler et de réfléchir avec toi : tes compétences, ta disponibilité et ta bonne humeur ont rendu mes années de thèse très agréables. Merci François pour m'avoir toujours particulièrement bien accompagné, tant humainement que scientifiquement. Et enfin, merci Ivan pour la confiance que tu m'as témoignée en me laissant souvent l'initiative dans nos travaux de R&D, ainsi que dans la gestion de ma thèse, tout en me faisant bénéficier de ton expérience de chercheur plus que passionné.

Ma reconnaissance s'adresse ensuite aux autres membres de mon jury : Patrice CARTRAUD, rapporteur, Patrice COOREVITS, rapporteur, Jean-Marc ROELANDT, examinateur et président, et Tarak BEN ZINEB, examinateur, pour avoir respectivement accepté de rapporter sur mon travail de thèse et de l'examiner. Je vous remercie de l'intérêt que vous avez porté à mon travail et reste très sincèrement flatté d'avoir, pour celui-ci, reçu vos appréciations. Aussi, je profite de l'occasion pour exprimer ma gratitude envers Patrice CARTRAUD et pour son bon accueil, tant humain que scientifique, qui m'a été réservé lors de mon court séjour à Nantes. Je tiens aussi particulièrement à remercier Jean-Marc DRON, directeur de Nordon Cryogénie, pour m'avoir accordé sa confiance aussi bien pendant la thèse que l'après thèse. Enfin, ceci peut paraître anecdotique, mais mérite d'être souligné : merci à tous d'être venus à Saint Dié malgré une météo quelque peu capricieuse...

Pendant ma thèse, j'ai eu le plaisir de travailler sur deux sites, différents certes mais complémentaires, et toujours dans un beau cadre naturel typique des Vosges. J'associe donc à ces remerciements tous les membres de l'équipe ERMeP, permanent et doctorants pour le dynamisme dont ils font preuve. J'exprime aussi mes remerciements aux membres du BE et de la R&D de l'entreprise, pour leurs soutien et conseils, avec une pensée plus particulière à Boris MARTIN pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté dans les derniers mois de ce travail de thèse.

Que ces remerciements s'envolent également vers ma famille et mes proches, qui ont su me soutenir et comprendre mon éloignement.

Enfin, je ne pourrais clore décemment ces remerciements sans avoir une pensée pour tous les professeurs qui m'ont accompagné pendant mes études. C'est aussi grâce à eux et à leur soutien que j'ai pu entreprendre et mener à bien cette thèse. Merci à tous et plus particulièrement à Denis CLODIC et Khalil EL KHOURY.



# RESUME

La nécessité continue d'optimiser les performances des échangeurs de chaleur à plaques et ondes constitue l'un des principaux objectifs du développement des logiciels au sein de l'entreprise. Les contraintes drastiques imposées par des dimensionnements de plus en plus précis justifient le besoin de disposer de modèles et d'outils logiciels adaptés pour une meilleure analyse du comportement thermique et mécanique des échangeurs en fonctionnement pour un éventail de configurations (disposition des ondes, des barres et des plaques...), et selon les conditions d'utilisation imposées (chargement en pression et en température).

C'est dans ce cadre que se situent les travaux envisagés dans cette thèse. Nos travaux consistent à adapter et à développer un logiciel métier basé sur la modélisation thermomécanique globale de l'échangeur tout en intégrant les techniques d'homogénéisation. L'intérêt de cette modélisation globale réside essentiellement dans la réduction de la taille du problème qui est traité numériquement par la méthode des éléments finis volumiques. D'autre part, l'analyse sera limitée aux comportements linéaires élastiques isotropes des matériaux. Les grandes difficultés à surmonter sur le plan de la modélisation résultent de l'hétérogénéité des caractéristiques de sollicitation (pression, température), de la complexité de la géométrie et dans la mise au point d'un outil métier rapide, efficace et de précision suffisante pour la détermination des déformations et des contraintes globales de l'échangeur avant de pouvoir en optimiser la conception.

Dans cette perspective, on propose tout d'abord une étude bibliographique des méthodes classiques d'homogénéisation en montrant leurs limitations dans notre cadre industriel. Cela nous amène à adapter dans un deuxième temps certaines de ces techniques à la modélisation élastique globale des échangeurs tout en profitant de la périodicité partielle de la structure. Une méthodologie de modélisation de l'échangeur constitué par un empilement de différentes ondes et tôles brasées, est donc adoptée. Cette méthodologie suppose que le comportement global de chaque couche d'ondes et tôles, est encadré par deux comportements limites déterminés par des approches mécanique périodique (HMP) et cinématique périodique (HCP). Ensuite, une mise en oeuvre pratique de ces techniques est formulée pour l'application numérique. Dans un dernier temps on applique les techniques d'homogénéisation pour étudier le chargement interne global dû à la température et à la pression.

Après la mise en oeuvre des techniques adaptées à l'homogénéisation de l'échangeur, on s'oriente ensuite à leurs applications et validations numériques. Un outil d'homogénéisation (HomPass) est ainsi développé afin de faciliter l'homogénéisation de l'échangeur. Cela nous permettra d'établir une librairie d'éléments ayant des comportements équivalents à chaque onde et tôle brasées. Cette librairie peut comporter aussi les chargements élémentaires homogénéisés en pression et température. Cela contribue au développement de l'outil métier final (SiTEME) dédié à l'étude thermomécanique globale de l'échangeur. De premiers résultats portant sur le corps d'échangeur sont présentés. La continuité du développement de cet outil pour compléter et enrichir le modèle, forme les perspectives de cette thèse.

Les développements des logiciels métiers HomPass (homogénéisation) et SiTEME (analyse globale thermomécanique) sont réalisés en utilisant le pré-post processeur [GiD] et le logiciel éléments finis [Code\_Aster].

**Mots-clefs : homogénéisation, thermomécanique, échangeur de chaleur, structure périodique, éléments finis volumiques.**



# Table des matières

<b>Chapitre I : Contexte technologique et introduction.....</b>	<b>15</b>
I.1 Historique.....	17
I.2 Principe de fonctionnement.....	18
I.2.1 Principe.....	18
I.2.2 Applications.....	19
I.2.3 Constitution d'un échangeur.....	20
a) Les ondes.....	21
b) Les passages.....	22
c) L'empilage.....	23
d) Les têtes.....	24
e) Les piquages.....	24
I.2.4 Caractéristiques générales de l'échangeur.....	25
I.3 Procédé de fabrication des échangeurs.....	26
I.3.1 Les ondes.....	26
I.3.2 L'empilage.....	26
I.3.3 Le brasage.....	27
I.3.4 La pose des têtes d'alimentation et de sortie des fluides.....	27
I.3.5 Le contrôle qualité.....	27
I.3.6 Autres.....	29
I.3.7 L'emballage.....	29
I.4 Les calculs menés sur l'échangeur.....	30
I.4.1 Les techniques.....	30
I.4.2 Les outils de calcul.....	30
I.4.3 Les besoins.....	35
I.5 Conclusions et objectif de la thèse.....	38
<b>Chapitre II : Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes.....</b>	<b>41</b>
II.1 Principes généraux de l'homogénéisation.....	43
II.1.1 Théorie de l'homogénéisation en élasticité.....	43
II.1.1.1 Origine et intérêt de l'homogénéisation.....	43
II.1.1.2 Définition des échelles et choix de la cellule de base représentative.....	45
II.1.1.3 Méthode asymptotique.....	47
II.1.1.4 Méthode des moyennes.....	51
II.1.2 Bilan des méthodes classiques d'homogénéisation.....	56
II.2 Adaptation des méthodes d'homogénéisation aux échangeurs.....	60
II.2.1 Empilement et hypothèses du comportement d'un passage.....	60
II.2.2 Bases théoriques des méthodes d'homogénéisation : HCP, HP et HMP...	63
II.2.3 Bilan.....	65
II.3 Mise en oeuvre des techniques d'homogénéisation HCP et HMP.....	66

## Table des matières

II.3.1	Méthode HCP.....	66
II.3.1.1	Formulation variationnelle.....	67
II.3.1.2	Problèmes élémentaires.....	67
II.3.1.3	Calcul des coefficients d'élasticité homogénéisés.....	68
II.3.1.4	Considérations énergétiques.....	68
II.3.2	Méthode HMP.....	71
II.3.2.1	Problèmes élémentaires.....	72
II.3.2.2	Considérations énergétiques.....	73
II.3.2.3	Décomposition des problèmes élémentaires.....	73
II.3.2.4	Bilan .....	76
II.3.3	Homogénéisation du chargement en température.....	78
II.3.3.1	Approche HCP.....	78
II.3.3.2	Méthode de transformation.....	80
II.3.3.3	Validation du chargement en température.....	81
II.3.3.4	Bilan.....	82
II.3.4	Homogénéisation du chargement en pression .....	83
II.3.4.1	Approche HCP.....	83
II.3.4.2	Méthode de transformation.....	84
II.3.4.3	Validation du chargement en pression.....	86
II.3.4.4	Bilan.....	88
II.3.5	Encadrement énergétique du comportement équivalent.....	88
II.4	Conclusions.....	91
<b>Chapitre III : Applications numériques de l'homogénéisation volumique.....</b>		<b>93</b>
III.1	Introduction.....	95
III.2	Validation théorique des méthodes d'homogénéisation.....	97
III.2.1	Comportement équivalent orthotrope.....	98
III.2.2	Patch test .....	99
III.2.3	Comparaisons des résultats de « HomPass » avec ceux des méthodes classiques.....	100
III.2.4	Application de la HMP sur le joint de culasse [Cartraud, 1997].....	103
III.2.5	Comparaison de la déformée des problèmes élémentaires (HCP et HMP) .....	103
III.3	Étude des paramètres du maillage et de la CAO.....	106
III.3.1	Influence de maillage.....	106
III.3.2	Encadrement énergétique .....	109
III.3.3	Choix de la période dans le plan .....	111
III.3.4	Type d'onde .....	112
III.3.5	Influence de la hauteur.....	114
III.3.6	Influence du pas d'onde.....	115
III.3.7	Influence des épaisseurs.....	116
III.3.8	Erreur de la modélisation globale des passages.....	119
III.4	Comparaison numérique des modèles micro et macro d'un passage 2D en pression.....	122
III.4.1	Position du problème.....	122
III.4.2	Résultats numériques.....	124

## Table des matières

III.4.3 Bilan.....	128
III.5 Conclusions.....	129
<b>Chapitre IV : Modélisation du comportement thermoélastique global des échangeurs</b> .....	<b>131</b>
IV.1 Aspect éléments finis particulier.....	133
IV.1.1 Discrétisation .....	133
IV.1.2 Type d'éléments utilisés.....	134
IV.1.3 Résolution numérique.....	136
IV.1.4 Prise en compte de la direction d'orthotropie.....	137
IV.1.5 Calcul des contraintes.....	139
IV.1.6 Choix de l'outil d'analyse par éléments finis.....	139
VI.2 Présentation de l'outil métier SiTEME (Simulation Thermo-élastique Macroscopique des Échangeurs).....	141
IV.3 Résultats numériques.....	146
IV.3.1 Maillage de « STAT3 ».....	147
IV.3.2 Résultats du chargement thermique linéaire.....	151
IV.3.3 Résultats du chargement en pression équivalente.....	153
IV.3.4 Exemple d'un chargement en pression avec une tête.....	156
IV.4 Conclusions.....	160
<b>Conclusions et perspectives.....</b>	<b>162</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>168</b>
<b>Annexe A.....</b>	<b>174</b>
Bilan de l'application tridimensionnel de la HMP .....	179
<b>Annexe B.....</b>	<b>182</b>



# Principales Notations

$\mathbf{x}$  : tenseur d'ordre variable, avec :

- $(\mathbf{a})_{ijkl} = a_{ijkl}$  : tenseur d'ordre quatre
- $(\mathbf{b})_{ij} = b_{ij}$  : tenseur d'ordre deux
- $(\mathbf{c})_i = c_i$  : tenseur d'ordre un

$[\mathbf{x}]$  : matrice associée au tenseur  $\mathbf{x}$  dans une base donnée  
 $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix}$  : vecteur colonne associé au tenseur  $\mathbf{x}$  dans une base donnée  
 $\langle \mathbf{x} \rangle$  : vecteur ligne associé au tenseur  $\mathbf{x}$  dans une base donnée

Dans ce mémoire on utilise la convention de sommation sur les indices répétés d'Einstein.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  : contraction simple, avec :

- $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})_i = b_{ij} \cdot c_j$
- $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = c_i \cdot c'_i$

$\mathbf{x} : \mathbf{y}$  : double contraction, avec :

- $(\mathbf{a} : \mathbf{b})_{ij} = a_{ijkl} \cdot b_{kh}$
- $\mathbf{b} : \mathbf{b}' = b_{ij} \cdot b'_{ij}$

$\mathbf{x} \otimes_s \mathbf{y}$  : produit tensoriel symétrique entre deux vecteurs, avec :

$$(\mathbf{c} \otimes_s \mathbf{c}')_{ij} = \frac{1}{2} (c_i c'_j + c_j c'_i)$$

$div_x$  : opérateur divergence par rapport à la base  $\mathbf{x}$ , avec  $(div_x(\mathbf{b}))_i = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}$

$\nabla_x$  : opérateur gradient par rapport à la base  $\mathbf{x}$ , avec  $(\nabla_x(\mathbf{c}))_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$

Invariants utilisés :

$Y$  : volume élémentaire représentatif ou cellule de base

$|Y|$  : mesure du volume de  $Y$

$\langle \cdot \rangle$  : opérateur moyenne sur  $Y$ , avec  $\langle f \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y f dy$

sup, inf : faces supérieure et inférieure de  $Y$



# Chapitre I

---

## Contexte technologique et introduction

**C**e chapitre trace le contexte technologique dans lequel l'étude de modélisation s'est déroulée. Le chapitre débute donc par une présentation succincte de l'historique de l'entreprise avant de passer, dans un deuxième temps, à la description du produit qui est l'échangeur à plaques et ondes en aluminium brasées. On définit alors, dans le but de bien comprendre le principe de fonctionnement de l'échangeur, les différents composants de l'échangeur aussi bien que les processus de fabrication qui sont mis en jeu pour passer de la matière première à la fabrication finale du produit. Ensuite, on présente dans un troisième temps les différentes techniques de calcul menées sur l'échangeur tout en justifiant le besoin de la modélisation thermomécanique de l'échangeur. Ce besoin nous mène finalement à définir l'objectif pour lequel les travaux de la thèse sont envisagés.

<b>Chapitre I : Contexte technologique et introduction.....</b>	<b>15</b>
I.1 Historique.....	17
I.2 Principe de fonctionnement.....	18
I.2.1 Principe.....	18
I.2.2 Applications.....	19
I.2.3 Constitution d'un échangeur.....	20
a) Les ondes.....	21
b) Les passages.....	22
c) L'empilage.....	23
d) Les têtes.....	24
e) Les piquages.....	24
I.2.4 Caractéristiques générales de l'échangeur.....	25
I.3 Procédé de fabrication des échangeurs.....	26
I.3.1 Les ondes.....	26
I.3.2 L'empilage.....	26
I.3.3 Le brasage.....	27
I.3.4 La pose des têtes d'alimentation et de sortie des fluides.....	27
I.3.5 Le contrôle qualité.....	27
I.3.6 Autres.....	29
I.3.7 L'emballage.....	29
I.4 Les calculs menés sur l'échangeur.....	30
I.4.1 Les techniques.....	30
I.4.2 Les outils de calcul.....	30
I.4.3 Les besoins.....	35
I.5 Conclusions et objectif de la thèse.....	38

## I.1 Historique

L'historique de l'entreprise se représente comme suit :

- En 1959, la société Air Liquide crée à Golbey une unité de production d'échangeurs de chaleurs baptisée CEMAT (Compagnie Européenne des Matériels Thermiques) à partir des procédés de l'américain TRANE, alors spécialiste de la fabrication des petits échangeurs destinés à l'aéronautique

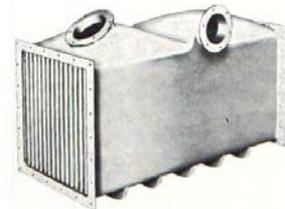


Figure I.1 - Échangeur air-air pour l'air conditionné des avions

- En 1965 Air Liquide revend la CEMAT à TRANE. La CEMAT change de nom et prend celui de TRANE. Cette société donnera naissance à l'échangeur à plaques et ondes en aluminium brasé.



Figure I.2 - Échangeur à plaques et ondes en aluminium brasé

- En 1986, TRANE décide de se séparer de ses unités de production d'échangeurs de chaleur. NORDON&Cie achète la technologie TRANE et ses ateliers de production. TRANE est rebaptisé alors NORDON CRYOGENIE. Ensuite, le groupe NORDON&Cie a été absorbé par le groupe Fives-Lille (99% des actions appartiennent à ce groupe).



Figure I.3 - Site de NORDON Cryogénie

- La société Nordon Cryogénie, fait désormais partie des 5 principaux constructeurs mondiaux (hors Chine et ex-URSS) d'échangeurs thermiques en aluminium brasé. Plus du tiers des appareils est livré en Asie, un tiers en Europe et le solde dans le reste du monde, mais Air Liquide demeure le principal client avec environ 40% du chiffre d'affaires.

- NORDON Cryogénie est spécialisée dans la conception, la fabrication et le montage d'échangeurs thermiques à plaques et ondes en aluminium brasé, et est membre de l'association ALPEMA qui regroupe les leaders du marché. Située dans les Vosges, ses ensembles de grand gabarit peuvent être expédiés vers les pôles industriels au moyen des dessertes routières, fluviales ou maritimes.



Figure I.4 - Montage sur site

- Chaque appareil est conçu sur mesure à partir du cahier des charges du client puis il est expédié sur site. D'ailleurs, la société propose l'étude et la réalisation des travaux de montage (soudure, contrôle, supervision). Enfin, pour un meilleur service après-vente, des équipes spécialisées interviennent pour le diagnostic et les réparations. Elle emploie environ 200 personnes pour un chiffre d'affaires situé entre 15 et 30 millions d'euros.

## I.2 Principe de fonctionnement.

Les échangeurs à plaques brasées sont des appareils complexes. Pour mieux les connaître, nous présentons une description technique de l'appareil ainsi que de son fonctionnement.

### I.2.1 Principe

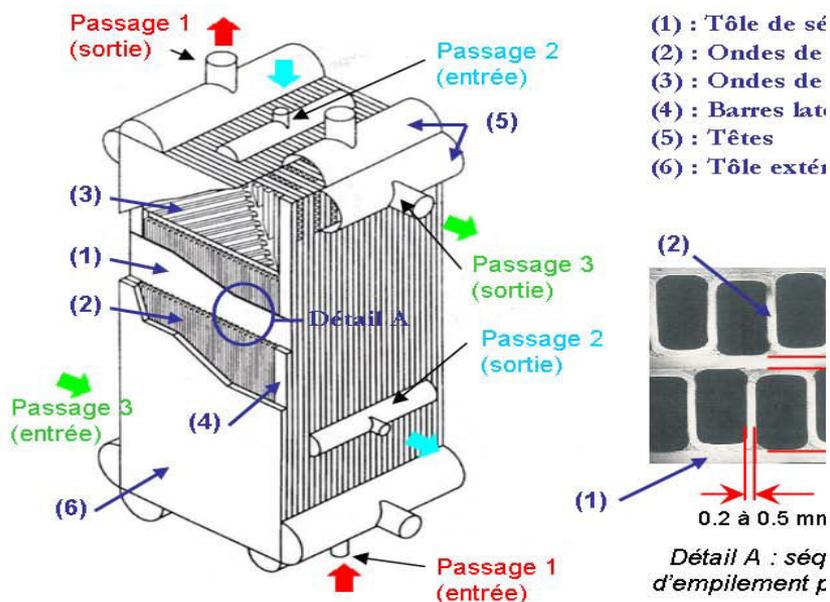


Figure I.5 - Composants d'un échangeur à plaques et ondes brasées

Dans son principe de base, un échangeur de chaleur à plaques et ondes en aluminium brasées est constitué d'un assemblage de différents passages (figure I.5). Chacun de ces passages résulte de l'assemblage de deux tôles planes parallèles séparées par un garnissage (ou onde) de hauteur constante, fermé sur sa périphérie par des barres en ménageant deux ouvertures, l'une pour l'entrée, l'autre pour la sortie de fluide.

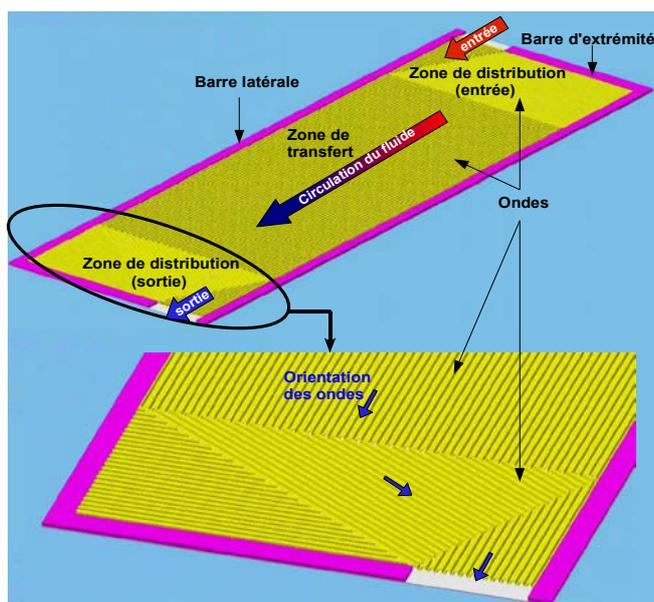


Figure I.6 - Description d'un passage d'échangeur

Le garnissage de chaque passage se présente donc sous la forme d'ondes dont les directions principales assurent l'écoulement du fluide à traiter. On peut noter sur la figure I.6 trois zones différentes : une zone d'entrée où le fluide est dirigé sur toute la largeur du passage, une zone de transfert où les principaux échanges ont lieu, et une zone de sortie. De plus, différents types d'ondes peuvent être utilisés. Les ondes droites, serrated sont principalement utilisées (figure I.9), certaines pouvant être également perforées et chacune d'elles devant satisfaire les caractéristiques attendues de chaque passage. Les blocs échangeur sont montés et fermés dessus et dessous par d'autres tôles. L'assemblage rigide est ensuite obtenu par brasage dans un four à vide tandis que les passages identiques sont reliés ensemble par les têtes positionnées sur les ouvertures (entrée, sortie ou sortie intermédiaire comme le passage 2 sur la figure I.5). Le principe peut être étendu jusqu'à 18 circuits de propriétés différentes selon la complexité du procédé.



Figure I.7 - Principe d'échange thermique

En faisant circuler deux fluides à des températures différentes dans deux passages consécutifs, on réalise un transfert ou échange de chaleur entre eux au travers les tôles de séparation (figure I.7). Les ondes constituent une surface d'échange secondaire entre le fluide chaud et le fluide froid. D'ailleurs, les ondes sont liées aux plaques par brasage, elles servent à contenir les efforts de pression. Ces ondes jouent donc un double rôle. En effet, elles permettent l'échange de chaleur (fluide chaud - structure), puis (structure - fluide froid) et elles assurent la stabilité mécanique d'un assemblage soumis à des pressions de service pouvant atteindre 110 bars et plus.

## 1.2.2 Applications

Les échangeurs de chaleur réalisés par NORDON Cryogénie sont en alliage d'aluminium, limitant l'emploi de ce type d'appareil à des températures inférieures à 200°C. A l'inverse, l'excellente tenue mécanique aux basses températures des alliages d'aluminium, associée à des caractéristiques élevées de conduction thermique lui ont réservé une place essentielle dans tous les procédés de séparation/liquéfaction de gaz à basse température.

Parmi les applications les plus courantes (cf. tableau I.1), on peut citer :

- Séparation de gaz de l'air pour la production d'oxygène, azote, argon.
- Séparation des gaz de vapocraquage pour extraction de l'éthylène.
- Séparation des divers mélanges de gaz en amont de synthèses, liquéfaction ou combinaison par réaction chimique : hydrogène, CO, méthane, H<sub>2</sub>, ...
- Liquéfaction de gaz pour les besoins de transport ou moteurs : gaz naturel, hydrogène, oxygène, argon, hélium, ...

## Chapitre I – Contexte technologique et introduction

- Procédés de réfrigération basse température : éthane, propane, éthylène, propylène, hélium, multicomposants,...

Installation	Produits & Fluides	Plage de température classique, °C	Plage de Pression, bar.a
Production du gaz industriel - Séparation d'air - Liquéfaction	Oxygène Azote Argon Gaz rares Dioxyde de carbone	+65 à -200	1 à 60
Liquéfaction gaz naturel	Gaz naturel liquéfié Réfrigérants multi-constituants	+65 à -200	5 à 75
Production pétrochimique - Éthylène - MTBE - Ammoniac - Purification de gaz de raffinage	Éthylène Propylène Éthane Propane MTBE Ammoniac Dioxyde de carbone Hydrogène	+120 à -200	1 à 100
Systèmes réfrigérants - Cascade de refroidissement - Liquéfaction	Hélium Fréon Propane Éthylène Propylène Azote Hydrogène Réfrigérants multi-constituants	+100 à -269	15 à 45
Procédés gaz naturel - Unités de rejet d'azote - Liquéfaction de gaz du pétrole - Récupération d'hélium	Méthane Éthane Propane Butane Pentane Azote Hélium Hydrogène Hexane Dioxyde de carbone	+100 à -130	15 à 100

Tableau I.1 - Principales applications des échangeurs à plaques et ondes en aluminium brasées [ALPEMA, 2000]

### I.2.3 Constitution d'un échangeur

Maintenant qu'on a vu le principe général de fonctionnement et les applications industrielles de ces échangeurs, on s'attarde sur la description technique des différentes composantes qui constituent ces échangeurs. Ces composants sont : Les ondes au coeur de la conception thermomécanique des échangeurs, les passages assurant la distribution

des fluides dans l'échangeur, l'empilage des passages chauds et froids garantissant un transfert thermique optimal et les têtes piquage assurant les liaisons entre les passages d'échangeurs et les tubulures extérieures.

**a) Les ondes**

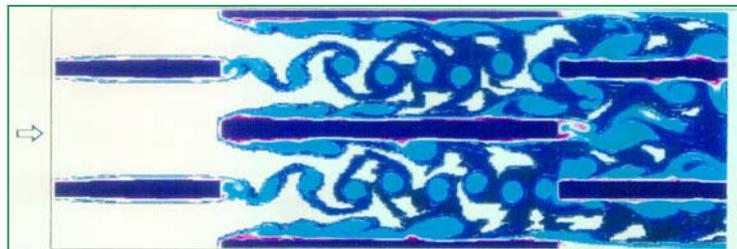


Figure I.8 - Carte instantanée des isothermes en entrée d'échangeur (onde serrated).

Les ondes sont des feuillards d'aluminium crantés qui permettent d'augmenter les pertes de charge au sein de l'échangeur et donc d'augmenter le transfert de chaleur dans celui-ci (figure I.8). Il existe plusieurs types d'ondes (cf. [Alpema, 2000]) mais la société NORDON Cryogénie en fabrique trois : ondes droites, ondes droites perforées et ondes serrated (figure I.9).

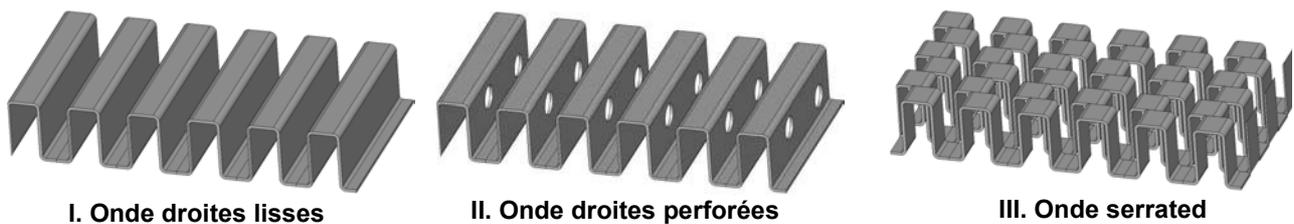


Figure I.9 - Différents types d'ondes

➤ *Les ondes droites perforées ou non*

Ces ondes se comportent comme un ensemble de canaux de forme rectangulaire. L'échange s'effectue grâce aux frottements de la couche de fluide au contact de la paroi de l'ailette.

➤ *Les ondes serrated*

On dit de ces ondes qu'elles sont à décalage. En effet, elles présentent une interruption de canal avec déplacement de la paroi de l'ailette. Ainsi la figure I.10 montre l'onde serrated comme étant deux ondes droites décalées d'un demi pas. Cette disposition permet un échange de chaleur entre le fluide et les ailettes mais aussi de mélanger les veines chaudes et froides au sein d'un même passage.

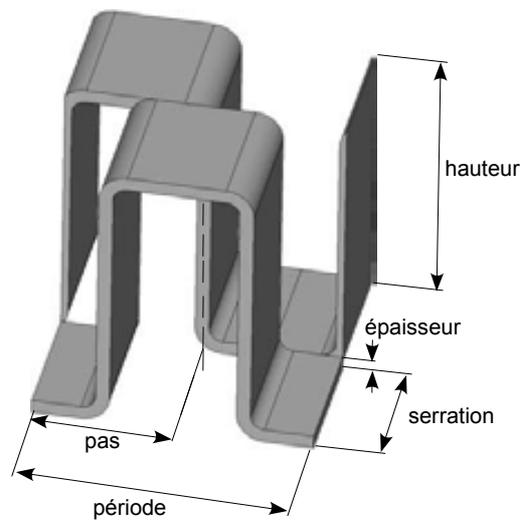


Figure I.10 - Caractéristiques géométriques des ondes

Chaque onde est caractérisée par sa hauteur, sa perforation, sa serration et le nombre d'ondes par mètre qui est égale à l'inverse du pas. Les valeurs standards de ces paramètres sont données par le tableau I.2.

<b>Hauteur des ondes</b>	3,53 à 9,63 mm
<b>Espacement des ailettes</b>	1,00 à 3,18 mm ou 240 à 1000 ailettes par mètre (fpm)
<b>Épaisseur des ondes</b>	0,2 à 0,5 mm
<b>Longueur de serration</b>	3,175 mm à 38,1 mm
<b>Taux de perforation</b>	2,5 à 25%

Tableau I.2 - Paramètres caractéristiques standards des ondes Nordon Cryogénie

### b) Les passages

Comme l'illustre la figure I.6, le passage est constitué d'une succession de zones d'échange et de transfert. Il peut aussi comporter plusieurs séquences : pour permettre de soutirer (ou injecter) une partie du fluide qui y circule, un distributeur intermédiaire peut être inséré dans la zone d'échange (e.g. passage INT de la figure I.11), mais un même passage peut également être partagé par plusieurs fluides indépendants, et les zones d'entrée et de sortie ne sont plus forcément situées en extrémité. Par ailleurs, pour des raisons liées au procédé, des zones mortes (qui n'ont aucune fonction d'échange ou de distribution) sont utilisées.

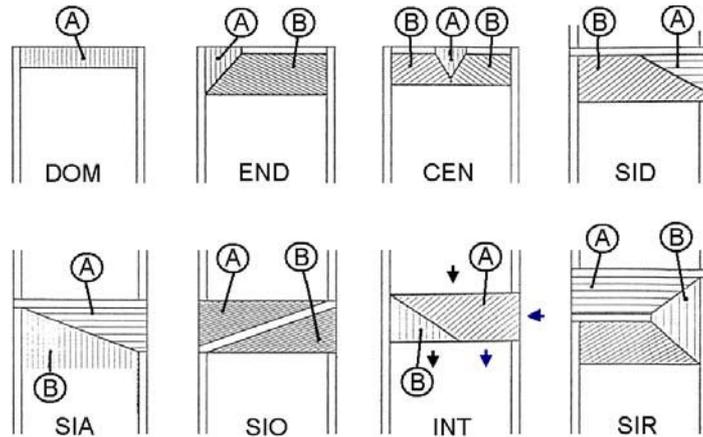


Figure I.11 - Disposition des distributeurs à l'intérieur d'un passage

La zone d'échange est constituée d'un simple rectangle et ses ondes sont orientées dans le sens de l'écoulement. Les distributeurs, quant à eux, sont constitués d'une ou plusieurs pièces d'orientation variable, et peuvent comporter une ou deux ouvertures. La figure I.11 représente les principaux types de distributeurs à une tête. Les distributeurs comportent tous une partie PORT (A) qui assure l'entrée ou la sortie du fluide dans le passage. La partie TURN (B) assure le changement de direction.

**c) L'empilage**

Plusieurs types de passages sont empilés pour constituer le corps (figure I.12). Un type de passage est caractérisé par ses composants et leur disposition, parmi lesquels, les types d'ondes de transfert et de distribution, la forme des plaques d'ondes, les types de barres, les ouvertures, les barres intérieures, les zones mortes. Au besoin, certains passages sont renforcés pour mieux supporter le brasage.

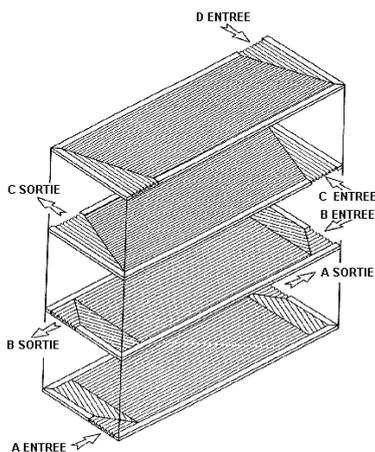


Figure I.12 - Exemple de configuration d'empilage

N°	A	B	C	D
1	■			
2		■		
3			■	
4				■
5	■			
6		■		
7			■	
8				■
9	■			
10		■		
11			■	
12				■

Figure I.13 - Exemple de séquence d'empilage sur un échangeur (12 passages, 4 types)

La séquence d'arrangement des passages dont une illustration est montrée par la figure I.13, est déterminée d'une manière à optimiser la conception thermique de l'échangeur. En effet, on peut avoir plusieurs passages froids et chauds avec des écarts de

température différents. En itérant sur l'arrangement de ces passages, on peut donc déterminer un mode optimal de performance. La figure I.13 décrit le plan d'empilement en montrant l'empilement d'un corps de 12 passages de quatre types différents. La première ligne indique le nom de chacun des types, souvent lié au fluide concerné.

#### d) Les têtes

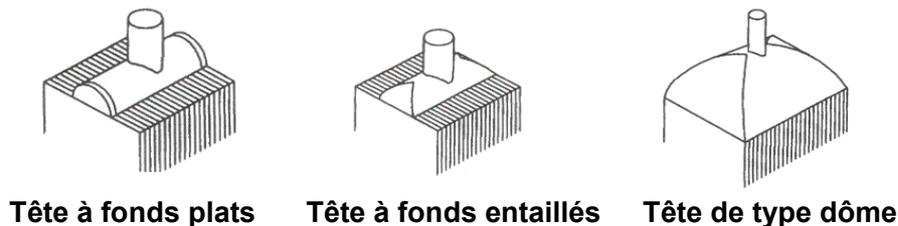


Figure I.14 - Les différentes types de tête sur un échangeur

Les têtes sont formées par des demi-cylindres qui ont le rôle de grouper les entrées et les sorties des passages du même circuit. Ces têtes peuvent recevoir différents types de fonds à leurs extrémités inférieure et supérieure (figure I.14) :

- Tête à fonds plats : réalisés par soudure de tôles d'épaisseur idoine aux extrémités de la portion de cylindre. Cette configuration est assez rarement réalisée.
- Tête à fonds entaillés : réalisés par soudure de portions de cylindre de même diamètre que la tête. Cette configuration est nettement plus avantageuse du point de vue de la tenue à la pression et équipe la quasi-totalité des têtes.
- Si l'ouverture est suffisamment importante, la tête n'est plus fixée sur le mur de barres, mais sur l'extrémité des murs de barres des côtés adjacents : dans ce cas elle prend l'appellation de dôme.

#### e) Les piquages

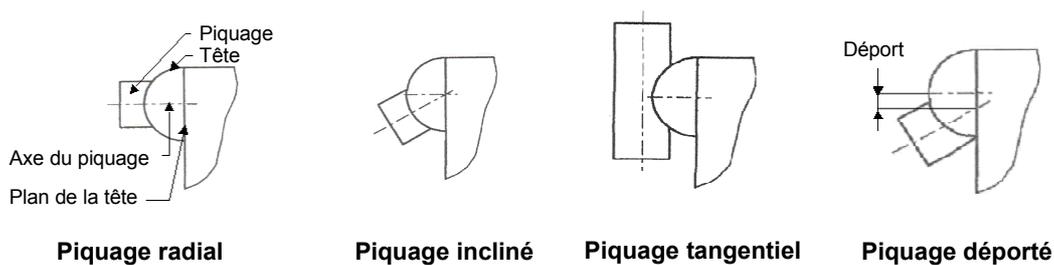


Figure I.15 - Disposition des piquages sur les têtes

Les piquages, ce sont des cylindres soudés sur les têtes pour assurer la liaison de l'échangeur aux tubulures. Divers types de raccordement de tuyauterie sont réalisables sur les têtes (figure I.15) :

- Le piquage radial dont l'axe est orthogonal à celui de la tête et à son plan d'attache.
- Le piquage incliné dont l'axe est orthogonal à celui de la tête, mais incliné par rapport à son plan d'attache.
- Le piquage tangentiel dont l'axe ne concourt pas avec l'enveloppe de la tête. Ce type de raccordement est assez rare et n'est pas réalisé dans les cas où la tenue

mécanique pose problème.

- Le piquage déporté, radial ou incliné, dont les axes ne sont pas concourants.

L'axe du piquage peut également être incliné sur celui de la tête.

### 1.2.4 Caractéristiques générales de l'échangeur

La conception modulaire des passages de l'échangeur permet une intégration exceptionnelle de procédés. Le dimensionnement est souple (tableau I.3) : en jouant sur la largeur du corps, le type d'onde, la hauteur d'empilage, l'ingénieur thermicien peut parfaitement répondre aux exigences thermiques en utilisant de façon optimale les pertes de charges. Les ondes de transfert sont sélectionnées en fonction de la nature des fluides en contact et du type d'échange recherché. Leur configuration spécifique offre une surface secondaire pouvant atteindre 90% de la surface totale et qui permet de loger jusqu'à 1800m<sup>2</sup> de surface d'échange par m<sup>3</sup> d'échangeur; la surface primaire correspondant à la surface des tôles en contact avec le fluide. Par ailleurs, l'utilisation de l'aluminium allie légèreté (densité de 800 à 1200 kg/ m<sup>3</sup>) et excellente tenue mécanique à basses températures. D'ailleurs, ces échangeurs sont des appareils compacts qui peuvent contenir un grand nombre de fluides simultanément. Mais le nombre de fluides est tout de même limité par les possibilités d'arrangement des distributeurs d'entrée et de sortie des fluides (un échangeur peut contenir 18 fluides au maximum). En utilisant ce type d'échangeur, on fait des économies d'énergie car on réalise des échanges entre plusieurs fluides thermiques en même temps avec de faibles écarts de température.

Paramètres	Plage de variation
Largeur	90 à 1300 mm
Longueur	Jusqu'à 7800 mm
Hauteur d'empilage	Jusqu'à 2050 mm
Types d'ondes	Droite, droite perforée, serrated
Ondes	Plus de 80 types, développement permanent.
Epaisseur des tôles de séparation	De 0.8 à 2.5 mm
Température d'utilisation	-269°C à +65°C
Pression d'utilisation (Ech. standards)	Jusqu'à 110 bars
Pression d'utilisation (Ech. réversibles)	Jusqu'à 10 bars

Tableau I.3 - Plage de variation des différents paramètres de conception

## I.3 Procédé de fabrication des échangeurs

Les échangeurs fabriqués par NORDON Cryogénie sont d'un type bien particulier et peu courant. Il est donc nécessaire de décrire le procédé de fabrication de tels appareils afin d'en comprendre mieux le fonctionnement

### I.3.1 Les ondes

Dans le processus de fabrication des ondes, le feuillard d'aluminium, conditionné sous forme de rouleau, est embouti dans une presse grâce à des outils qui sont spécifiques à chaque type d'onde.

Ces outils ou poinçons sont fabriqués sur le site avec la plus grande précision. En effet, la hauteur et la planéité des ondes doivent être constants pour assurer un brasage de bonne qualité.

Les outils peuvent être positionnés de quatre façons différentes dans la presse. Lorsqu'une face est usée, on positionne l'outil différemment.



Figure I.16 - Fabrication des ondes

### I.3.2 L'empilage

Cette étape correspond à l'assemblage de l'échangeur. Après avoir été découpées puis dégraissées, les pièces sont empilées sur une table de montage. On intercale une tôle de séparation et une onde. On ajoute ensuite autour de chaque onde des barres en aluminium qui vont permettre de délimiter les entrées et les sorties des fluides.



Figure I.17 - Empilage

### I.3.3 Le brasage

Les tôles de séparation sont constituées d'un alliage d'aluminium et d'un métal d'apport.

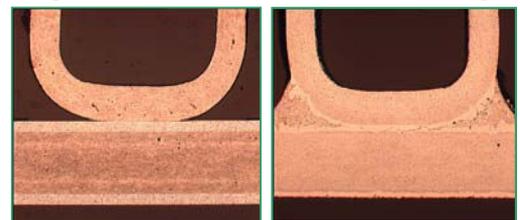
Dans un four sous vide, l'empilement est porté à la température de fusion du métal d'apport qui est légèrement plus faible que celle de l'aluminium. Lorsque cette température est atteinte le métal d'apport fond et ainsi assure la tenue mécanique de l'ensemble, son étanchéité et le contact thermique entre les passages grâce à une soudure.

Les températures et les pressions totales et partielles sont gérées par des automates et sont la clé d'un bon brasage.

D'autre part, la quantité de brasure est déterminée par la configuration des ondes : s'il faut suffisamment de métal pour réaliser un joint de qualité, son excès peut provoquer l'obturation des canaux.



Figure I.18 - Four utilisé pour le brasage



Avant brasage    Après brasage

Figure I.19 - Micrographie d'une onde et d'une tôle de séparation

### I.3.4 La pose des têtes d'alimentation et de sortie des fluides

Celles-ci permettent de relier entre eux tous les points d'entrées d'un côté et tous les points de sortie de l'autre et de raccorder l'échangeur à l'installation. Ces têtes sont fixées par soudage.



Figure I.20 - Échangeur muni de ses têtes

### I.3.5 Le contrôle qualité

➤ **Garantie des performances thermodynamiques**

On contrôle la qualité des ondes en utilisant le banc de pertes de charge. Ce contrôle s'effectue en cours de fabrication des ondes (cf. [V. Valeroff 04]).

➤ **Garantie de résistance mécanique**

Les échangeurs à plaques et ondes brasées sont des appareils à pression comportant plusieurs volumes internes à des pressions différentes.

On réalise une épreuve hydraulique, c'est-à-dire, qu'on remplit l'échangeur d'eau et on le monte en pression, le but ici est de vérifier l'absence de toute faiblesse de la construction lors du chargement en pression et de confirmer le comportement élastique de la structure sur toute la plage d'épreuve. Pendant cette épreuve hydraulique, on réalise un contrôle volumétrique ou essais de traction et un contrôle par émission acoustique. En effet, toute déformation plastique d'un matériau s'accompagne d'émission d'énergie acoustique, l'enregistrement des signaux d'émission acoustique des échangeurs en cours de montée en pression permet donc de s'assurer, par l'absence de signal, du comportement élastique de la structure sous contrainte.



**Figure I.21 - Épreuve hydraulique**

De la même manière, on réalise des tests pneumatiques. Ces essais sont réalisés après le brasage et après la pose des têtes.

➤ **Garantie d'étanchéité**

On teste l'étanchéité de l'échangeur vis-à-vis de l'extérieur en l'enfermant dans une housse en plastique gonflée d'hélium. La mesure du taux de particules d'hélium est faite au départ dans l'échangeur, elle correspond au taux présent dans l'air naturellement. Après avoir réalisé une dépression dans l'échangeur on refait une mesure du taux de particules d'hélium dans celui-ci. La différence entre les deux taux donne un taux de fuite, qui est pris comme référence pour mesurer l'étanchéité de l'échangeur.



**Figure I.22 - Test hélium**

➤ **Certifications**

Notons que les échangeurs NORDON répondent à de nombreuses certifications et normes telles que : ISO 9001; ASME U, R; CODAP...

### I.3.6 Autres

A la demande du client, on peut équiper l'échangeur et ses canalisations d'une boîte froide. Cette boîte est fermée après assemblage et remplie de perlite, roche minérale qui permet d'assurer l'isolation thermique de l'assemblage par rapport au milieu extérieur. Elle permet de mettre l'appareil sous atmosphère inerte (azote), elle contribue donc à la lutte contre la corrosion.

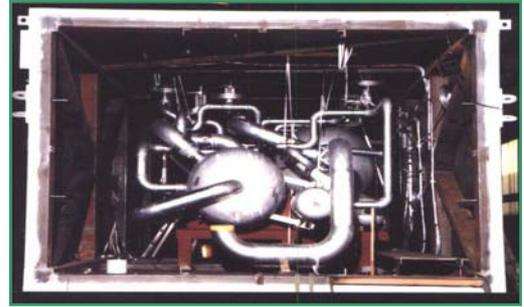


Figure I.23 - Intérieur d'une boîte froide



Figure I.24 - Boîte froide vue extérieure

Les échangeurs construits peuvent être également assemblés en série ou en parallèle pour constituer une batterie.



Figure I.25 - Échangeurs en batterie

### I.3.7 L'emballage

Les échangeurs qui ne sont pas conditionnés dans des boîtes froides sont transportés dans des caisses en bois.



Figure I.26 - Emballage

## I.4 Les calculs menés sur l'échangeur

### I.4.1 Les techniques

Ces techniques sont principalement issues de trois sources:

Le dimensionnement et la conception: la conception proprement dite se fait à partir des spécifications thermiques et énergétiques souhaitées par le client. Les outils doivent fournir une évaluation simple de la viabilité des choix techniques. A partir des solutions adoptées, le dimensionnement mécanique se fait essentiellement au bureau d'études, où l'analyse est menée plus en détail.

La validation : les échangeurs sont des appareils à pression et sont soumis à une législation internationale très stricte. Si la réglementation américaine est la plus communément utilisée, il existe autant de variantes que de pays, auxquelles il faut se conformer pour obtenir l'autorisation de vente de ce type d'appareils sur le territoire national. Une partie de la validation se fait par des tests de résistance sur l'appareil lui-même, mais la production unitaire rend impossible la réalisation de prototypes...autres que celui destiné au client. La justification dans chaque cas est lourde à gérer et la simulation serait un moyen standard d'opérer. En outre, les divers règlements sont en général moins pénalisants pour ces outils.

La recherche et développement: une bonne pratique du métier, alliée au bon sens physique et à la connaissance approfondie du produit offrent l'occasion d'avancer vers des solutions différentes. La maîtrise du comportement local est indispensable pour satisfaire le besoin de précision des procédés de plus en plus pointus. Les essais permettent une appréhension globale et qualitative des phénomènes et leur conclusion est souvent binaire et limitée à la comparaison avec d'autres solutions testées dans les mêmes conditions.

### I.4.2 Les outils de calcul

On distingue les outils utilisés dans le dimensionnement thermique de ceux utilisés dans le dimensionnement mécanique.

➤ **Conception thermique**

ProSec, un logiciel d'aide à la conception thermique, a été développé au sein de l'entreprise par [Averous, 2000]. Cet outil se base sur des algorithmes spécifiquement adaptés aux calculs basés sur les volumes finis. Compte tenu de la complexité de l'équipement, le modèle mathématique de représentation renferme un très grand nombre d'équations de formes très variées. Aussi des stratégies de résolution spécifiques et des méthodes numériques adaptées ont dû être mises en oeuvre afin d'assurer une convergence de la simulation sans essais laborieux.

Le rôle de l'ingénieur thermicien chez Nordon est de concevoir un échangeur capable de satisfaire les échanges thermiques souhaités, tout en respectant les contraintes de pertes de charge. ProSec est conçu pour l'aider dans cette tâche et lui permettre de vérifier aisément l'impact d'une modification de sa conception sur la température ou la pression des fluides. Il permet donc le calcul des performances thermiques et des pertes de charge d'un appareil, ou d'une batterie d'appareils en parallèle. A partir d'une description de

## Chapitre I – Contexte technologique et introduction

l'échangeur (topologie des fluides, définition des ondes, longueurs d'échange des différents circuits,...) et des propriétés thermodynamiques et de transport des fluides, le programme de simulation calcule :

- les caractéristiques globales de sortie des courants (température, état physique, pression,...);
- les profils de température des fluides dans chaque passage en fonction de la longueur;
- les profils de température des tôles de séparation des passages en fonction de la longueur;
- la convection de chaleur, réalisée pour des fluides monophasiques ou diphasiques (ébullition et condensation);
- les effets de mauvaise distribution des courants dans les séquences d'agencement.

ProSec permet aussi à l'utilisateur de décrire l'échangeur en détail, tout en limitant le nombre d'hypothèses. En particulier, il prend en compte les éléments suivants:

- la séquence d'agencement des fluides dans les passages et le comportement de chaque passage individuellement;
- jusqu'à 20 fluides (corps purs ou mélanges) en écoulement co-courant ou contre-courant;
- les ondes d'échange disponibles en base de données, provenant du constructeur ou fournies par l'utilisateur;
- les entrées/sorties latérales de courants;
- les redistributions avec ou sans soutirage et/ou alimentation dans le distributeur intermédiaire;
- le taux de partage du débit total du courant dans chaque passage.

Parmi les exemples d'application de ProSec, citons :

- le calcul des performances thermiques et des pertes de charge d'un appareil sur une unité de distillation d'air (un exemple du profil de perte de charge est illustré par la figure I.27)
- l'analyse thermique d'une batterie d'échangeurs en parallèle pour un procédé de liquéfaction de gaz naturel
- la simulation dynamique d'un échangeur de chaleur à plaques brasées pour prévoir les contraintes mécaniques

Enfin, la gamme ProSec se décline en deux catégories. La première concerne les programmes de simulation en deux dimensions, en régime permanent et dynamique. Ils sont actuellement utilisés pour répondre à des besoins spécifiques de dimensionnement et comme aide à la décision quant au choix optimal ou de vérification de la validité du fonctionnement d'une configuration donnée. La seconde catégorie concerne le développement d'un modèle plus général en trois dimensions. Une première version, fruit du travail de [Averous, 2000] est déjà opérationnelle au sein de l'entreprise. Une deuxième version plus complète est en cours de développement [Picard, 2007].

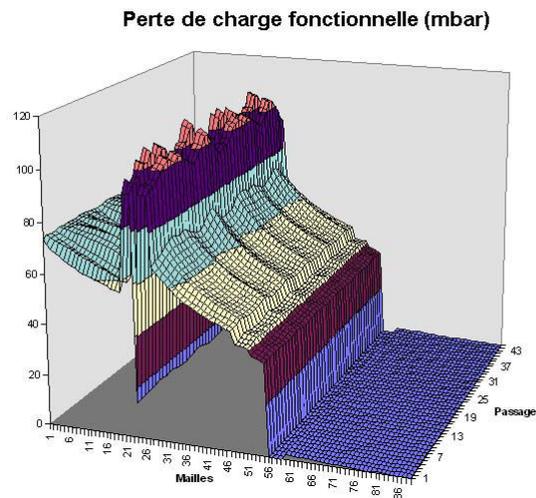


Figure I.27 - Exemple d'un profil de perte de charge dans l'échangeur [PROSEC]

➤ **Conception mécanique**

Dans le dimensionnement mécanique d'une batterie d'échangeurs, divers outils de calcul sont utilisés. De manière générale, ces outils sont issus soit d'un développement interne, soit du commerce. Les premiers traitent certaines spécificités du montage et les deuxièmes sont utilisés pour des cas de dimensionnement général. Pour mieux comprendre l'utilisation de ces outils, prenons l'exemple de la conception mécanique d'une batterie froide (figure I.28).

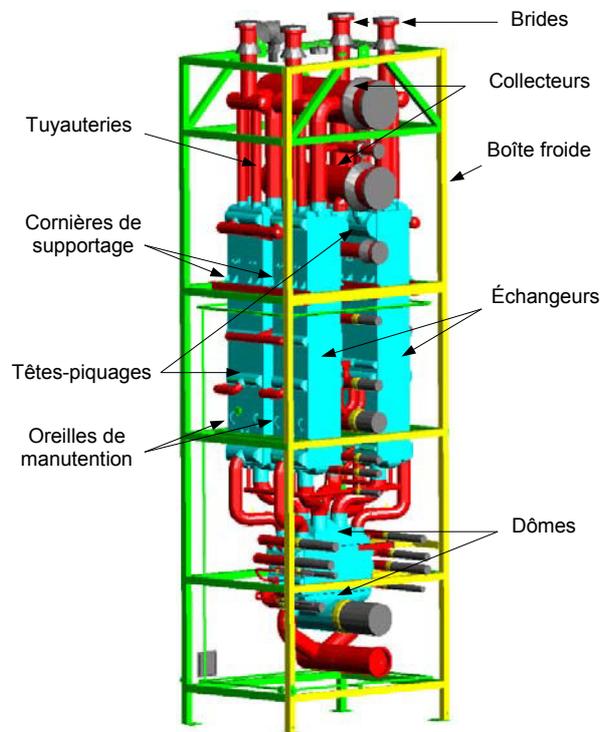
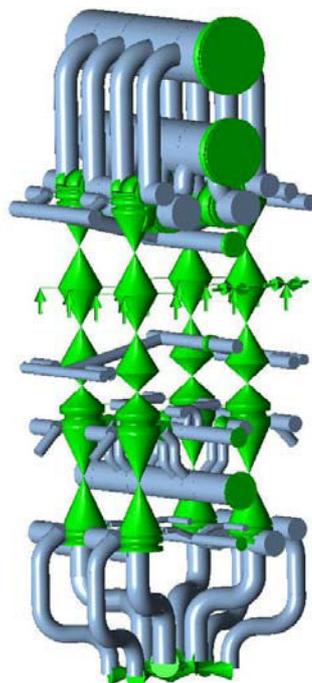


Figure I.28 - Les principaux composants d'une boîte froide

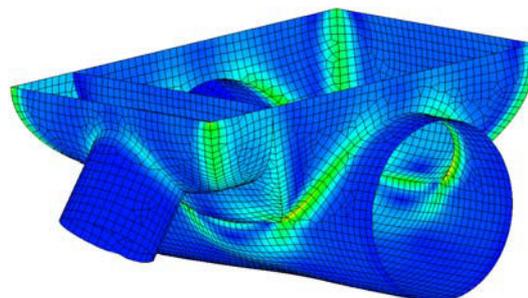
On retrouve sur cette figure les différentes parties dimensionnées au sein de l'entreprise. D'autres, par exemple la boîte froide, sont sous-traitées. On a ainsi quatre échangeurs montés en parallèle par l'intermédiaire des collecteurs et de tuyauteries de liaison. Le tout est supporté par une structure métallique formant le support.

Sur cette batterie d'échangeurs, on compte six circuits différents par échangeur. D'où la complexité des tuyauteries de liaison. D'ailleurs, une fois l'installation mise en marche, les bouts froids des échangeurs se contractent et les bouts chauds se dilatent tout en déformant les tubulures autour d'eux. Celles-ci doivent être assez flexibles pour supporter les fluctuations thermiques. Afin de modéliser cette flexibilité (figure I.29), on utilise un outil commercial [CESAR II]. Cet outil se base sur un calcul par éléments finis de tuyauterie et applique les codes internationaux en matière de chaudronnerie.



**Figure I.29 - Modélisation des tuyauteries [CESAR II]**

Un autre outil commercial permet de calculer les contraintes et déformations des dômes (figure I.30) par éléments finis de coque ou volumique [CASTOR]. Il est aussi utilisé pour vérifier les limites tolérées par des codes de construction comme l'ASME.



**Figure I.30 - Modélisation des dômes [CASTOR]**

D'autre part, tout en respectant les codes en vigueur, les éléments tels que brides, cornières de supportage, oreilles de manutention... sont calculés suivant des fiches de calcul élaborées par la société. D'autres outils informatiques permettent de faciliter l'application des différents codes qui dictent les liaisons entre pièces de tuyauterie et les appareils sous pressions, ainsi que les valeurs tolérées dans l'estimation des forces et des moments.

Concernant maintenant les efforts de liaison des tubulures sur le corps d'échangeur, un outil métier a été développé [Lewon, 2000] pour estimer la capacité du corps d'échangeur à supporter les efforts imposés par la présence de la tête. Les efforts sont essentiellement repris par les tôles de séparation, mais la répartition des contraintes au droit de la soudure dépend également de l'arrangement des passages et de la disposition des ondes. Cet outil permet de modéliser une partie de l'échangeur avec une demi tête (figures I.31 et I.32), en tenant compte des paramètres suivants : tôles de séparation, ouvertures, barres d'extrémités, type de soudure de la tête, diamètre et épaisseur de tête, pression dans chaque passage. En sortie il permet de vérifier, par calcul éléments finis volumiques et par application des codes de construction, si les contraintes sont tolérées ou pas. Tout cela en restant conservatif puisque les ondes sont exclues du modèle.

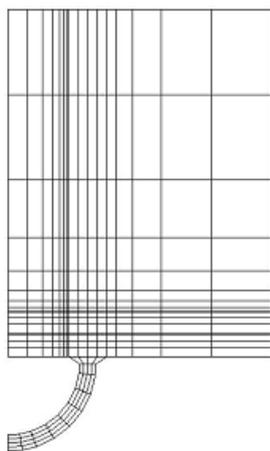


Figure I.31 - Maillage d'un bout d'échangeur avec demi-tête [PCDIAM]

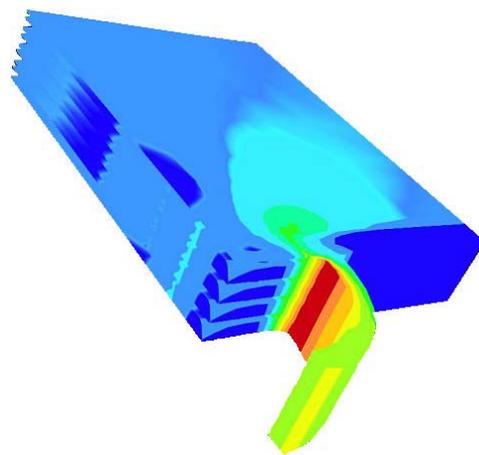


Figure I.32 - Modélisation 3D d'un bout d'échangeur avec demi-tête [PCDIAM]

A part les outils informatiques pour modéliser les différentes parties d'une batterie froide, on s'appuie également sur des démarches expérimentales, notamment lors du choix des ondes dans la conception de l'échangeur. En effet, on réalise des essais d'éclatement pour s'assurer que les ondes peuvent tenir des pressions pouvant aller jusqu'à 100 bars, ce qui vient en complément des caractéristiques thermiques et hydrauliques des ondes.

Ces essais consistent à braser un bout d'échangeur formé de trois passages (figure I.33) le passage comportant l'onde à caractériser se trouvant entre deux passages à l'air libre. Cette maquette d'échangeur est soumise à une pression hydraulique croissante jusqu'à éclatement. Après cet éclatement on détermine l'emplacement de la bulle ainsi formée et la pression maximale qui a été supportée par ce type d'onde. Ainsi, on peut formuler des données concernant la tenue mécanique des différentes ondes.

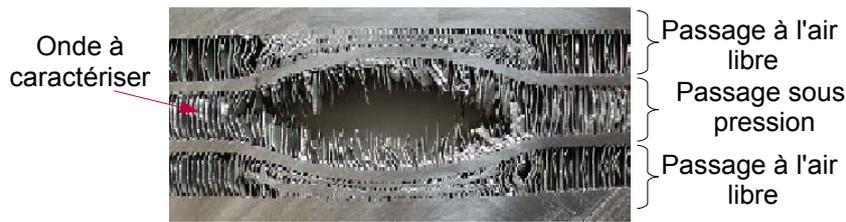


Figure I.33 - Essai d'éclatement

### 1.4.3 Les besoins

La particularité et la singularité des échangeurs à plaques et ondes brasées conduisent la société à développer ses propres outils de modélisation. Les outils actuellement utilisés (§ 1.4.2) montrent le besoin de développer un outil spécifique pour la modélisation thermomécanique complète des échangeurs. Dans cette perspective, l'hétérogénéité géométrique de la structure constitue un défi pour l'application de la simulation numérique.

Les premiers travaux menés par [Lewon, 1997] au sein de l'entreprise ont eu comme objectif de créer un modèle analytique d'homogénéisation d'ondes. Ayant comme entrée les données géométriques de l'onde, ce modèle se base, entre autres, sur les travaux de simulation mécanique des échangeurs menés par [Mizoguchi et al. 1982], [Nakagawa et al. 1984] et [Nakaoka et al. 1996]. Dans ces travaux, la géométrie de l'onde est réduite à une structure simple facile à calculer. Pour mieux comprendre ces modèles analytiques, on propose la démarche de calcul [Lewon, 2000] pour deux modules équivalents,  $E_z$  et  $G_{YZ}$  d'une onde droite:

a) Calcul du module de Young équivalent dans la direction  $Z$ ,  $E_z$  :

Soit  $E_{Al}$ ,  $K$ ,  $h$ ,  $p$  et  $e$  respectivement (figure I.34) le module de Young de l'aluminium, la longueur de la cellule suivant  $X$ , la hauteur suivant  $Z$ , le pas et l'épaisseur de l'onde;

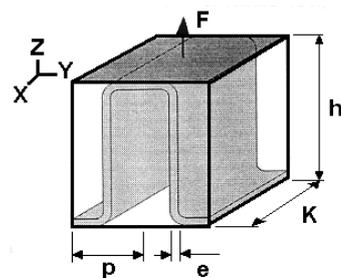


Figure I.34 - Traction en Z [Lewon, 2000]

si la force de traction  $F$  est exercée sur l'ensemble de la surface apparente, l'allongement en  $Z$  est :  $d = \frac{F \cdot h}{2 \cdot E_{Al} \cdot e \cdot K}$ , or cette cellule est supposée d'un matériau équivalent de module  $E_z$ , le déplacement apparent doit être le même, mais la section résistante est  $2 \cdot p \cdot K$  au lieu de  $2 \cdot e \cdot K$  par conséquent :  $E_z = \frac{E_{Al} \cdot e}{p}$ .

b) Calcul du coefficient  $G_{YZ}$  :

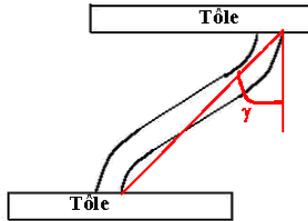


Figure I.35 - Calcul du cisaillement  $G_{YZ}$  [Lewon, 2000]

Ce coefficient ne s'obtient pas en considérant l'onde comme un matériau, mais comme une poutre bi-encastée (figure I.35). La symétrie permet de n'étudier que la moitié de la hauteur. L'application d'une force  $F$  à l'extrémité d'une poutre encastée de longueur  $\frac{h}{2}$  donne une flèche  $f$  :  $f = \frac{F \cdot h^3}{2 \cdot E_{Al} \cdot K \cdot e^3}$ . Pour l'ensemble de la cellule, le

déplacement est alors  $d = 2 \cdot f = \frac{F \cdot h^3}{E_{Al} \cdot K \cdot e^3}$  et la déformation angulaire apparente :

$$\gamma = \frac{d}{h} = \frac{F}{G_{YZ} \cdot K \cdot p}, \text{ soit } G_{YZ} = \frac{E_{Al} \cdot e^3}{h^2 \cdot p}.$$

Ces résultats sont confirmés par des chercheurs japonais (e.g. [Mizoguchi et al. 1982]). Cependant les hypothèses de ces modèles analytiques nous semblent très simplificatrices et limitées au seul comportement de l'onde droite. Ceci nous conduit à reconsidérer cette approche d'homogénéisation afin d'adopter des techniques numériques permettant de modéliser plus précisément les hétérogénéités.

Outre l'homogénéisation des caractéristiques thermoélastiques de l'échangeur, on souhaite s'intéresser aussi à l'étude du chargement équivalent en pression et en température.

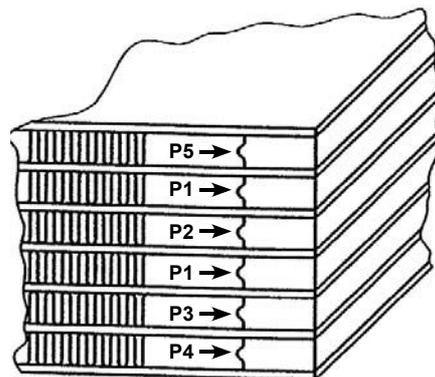


Figure I.36 - Exemple d'un chargement en pression

En effet, chaque circuit d'un échangeur à plaques est dimensionné pour résister à la pression qui lui est imposée. Ainsi, les ailettes (ou ondes) qui sont comprises entre les tôles planes constituent des entretoises immergées dans le fluide sous pression, dont la mise en tension assure la stabilité mécanique de l'ensemble. Les pressions peuvent être appliquées soit isolément, soit simultanément. Considérons un cas moyen d'un échangeur à 5 fluides (F1, F2, F3, F4, F5) soumis aux pressions correspondantes : P1, P2, P3, P4, P5. Les tôles de séparation sont soumises, dans le plan, à des efforts de traction qui

## Chapitre I – Contexte technologique et introduction

dépendent de l'arrangement des passages (figure I.36), d'où la particularité du chargement en pression dans ce type de structures multicouches.

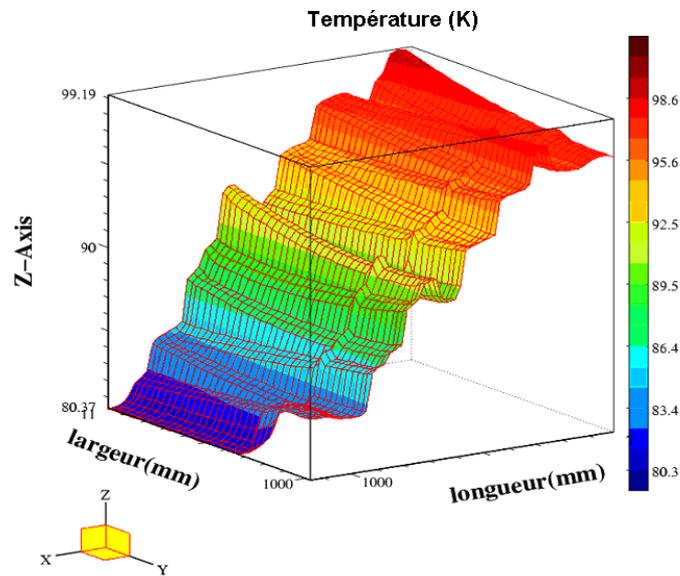


Figure I.37 - Exemple d'un profil de température dans les tôles de séparation [PROSEC]

Par ailleurs, l'effet thermique résultant des variations de température à l'intérieur est donné sous forme de carte de température établie au sein de l'entreprise (e.g. figure I.37).

## 1.5 Conclusions et objectif de la thèse

Les échangeurs en aluminium à plaques et ondes brasées sont utilisés avec succès dans de nombreuses applications, et tout spécialement dans le domaine des procédés cryogéniques. Ces procédés sont classiquement choisis pour réaliser la séparation et la purification des mélanges de gaz lorsque la capacité de traitement requise est importante ou pour atteindre un taux de pureté élevé, comme par exemple la séparation et la liquéfaction industrielle d'air (oxygène, azote, argon...), la liquéfaction du gaz naturel, la production pétrochimique (traitement des gaz), ou encore la liquéfaction d'hélium. Ces échangeurs multi-fluides (de deux à quinze, ou plus) sont d'une technologie complexe qui, si elle permet de très fortes intégrations énergétiques, rend l'étape de conception très délicate. La production du froid est connue comme un élément prépondérant dans le chiffrage de l'investissement pour de nouvelles unités cryogéniques, les échangeurs constituant généralement une part importante de ce coût. Le dimensionnement fin des échangeurs constitue donc une piste sérieuse d'optimisation des procédés concernés, sachant que des performances toujours plus élevées sont recherchées. Mais la variété même de choix technologiques offerte par les constructeurs d'échangeurs de chaleur à plaques brasées est telle que chaque réponse à appel d'offres sur une unité nouvelle appelle une solution différente par rapport à des affaires déjà traitées. La construction de banc d'essais ou le prototypage rapide de pilote sont inconcevables, si bien que les responsables de la conception sont obligés de se tourner vers les outils de simulation pour faire la preuve de la qualité de leur proposition. Cette validation a une importance tactique indiscutable qui justifie de disposer de modèles au bon niveau de détail.

L'industrie des procédés cryogéniques de séparation ou de purification de mélanges gazeux fait donc largement appel aux échangeurs à plaques brasées en aluminium.

L'hétérogénéité et la complexité des échangeurs à plaques et ondes brasées en aluminium, rendent prohibitive sinon impossible, toute tentative de calcul direct utilisant par exemple la méthode des éléments finis. Se pose donc le problème du développement d'outils d'aide à l'analyse et à la conception qui permettent, dans un premier temps, de faire la part entre les propriétés de résistance mécanique de l'appareil, puis ensuite, d'analyser les différents phénomènes intervenant au sein de ses composantes quand celles-ci sont soumises à des chargements thermomécaniques. Ces outils doivent de plus garantir une possibilité de mise en oeuvre numérique compatible avec les impératifs de production. Pour ces raisons, la société Nordon Cryogénie, qui conçoit et fabrique ce type d'échangeurs, a choisi de se doter d'outils de simulation thermique et mécanique performants.

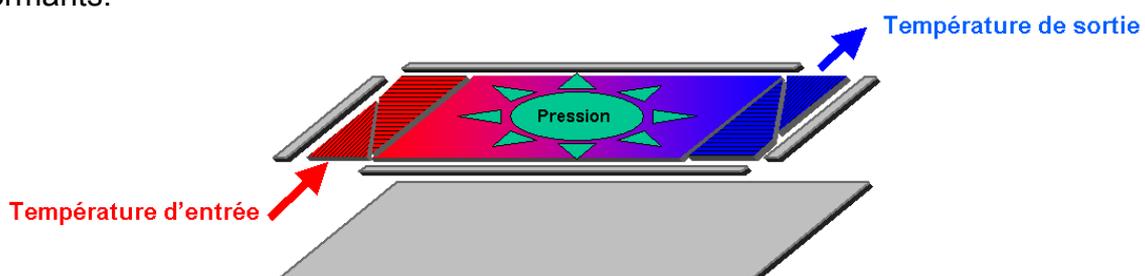


Figure I.38 - Sollicitations thermomécaniques dans un passage d'échangeur

Un des problèmes de base est celui de la modélisation thermomécanique de l'échangeur. Comme illustré par la figure I.38, chaque passage de cet échangeur est soumis à des sollicitations en pression et en température agissant sur la structure des ondes, tôles et barres. La pression est supposée constante dans le passage mais variable d'un passage à l'autre. Les profils de température quant à eux sont fournis, sous forme de cartes, par les outils de dimensionnement thermique de l'échangeur.

L'analyse sera limitée aux comportements linéaires élastiques isotropes des matériaux, sans prendre en compte les contraintes résiduelles dues à l'emboutissage (faibles après recuit dans le four de brasage) et celles dues à l'opération de brasage des ondes, plaques et barres. Les grandes difficultés à surmonter sur le plan de la modélisation résultent de l'hétérogénéité des caractéristiques de sollicitation (pression, température), de la complexité de la géométrie et dans la mise au point d'un outil métier rapide, efficace et de précision suffisante pour la détermination des déformations et des contraintes globales de l'échangeur avant de pouvoir en optimiser la conception.

La technique employée, pour remédier à la complexité de modélisation des échangeurs, consiste à substituer à une structure fortement hétérogène, un volume homogène de comportement mécanique 'moyen' dépendant des propriétés mécaniques et de la géométrie des différents constituants. C'est le processus d'homogénéisation. Pour la réalisation de ce travail, la méthode d'homogénéisation utilisée est celle relative aux milieux à structure périodique (e.g. [Hill, 1964], [Dumontet, 1990], [Cartraud, 1994], [Saidi, 2003]...). Elle permet, à partir d'un élément de volume représentatif de la micro-structure étudiée, non seulement de caractériser le comportement homogénéisé, mais aussi d'obtenir une bonne approximation des grandeurs, que l'on dénommera macroscopiques, au sein de la structure sollicitée par des chargements en pression et en température.

Une mise en oeuvre des techniques d'homogénéisation, permettant le passage de la théorie à l'application pratique, est nécessaire dans le développement de l'outil de modélisation globale. Elle s'appuie sur une plate-forme d'outils numériques (calculateur éléments finis, pré/post processeur...). Cette mise en oeuvre particulière permet de déterminer, en premier lieu, les caractéristiques de rigidité homogénéisée des différentes composantes de l'échangeur. A cela s'ajoute le chargement mécanique « équivalent » issu de la pression agissant dans les circuits internes de l'échangeur et le chargement thermique « équivalent » engendré par le gradient de température de la structure. Cela conduit finalement à la programmation de l'outil de modélisation thermomécanique globale de l'échangeur.

Dans le **deuxième chapitre**, on présente les outils théoriques nécessaires à l'étude du comportement global des échangeurs à microstructure partiellement périodique, soumis à des chargements en pression et en température. Ce chapitre débute donc par quelques rappels historiques sur les techniques classiques d'homogénéisation mettant en lumière la nécessité d'adapter ces techniques à l'application industrielle. On présente dans un deuxième temps et de façon concise, la méthodologie et les bases théoriques adoptées pour cette étude. Finalement, dans l'objectif de traiter numériquement, et ultérieurement, les problèmes d'homogénéisation, on s'intéresse en dernier lieu à la mise en oeuvre pratique de ces problèmes, à savoir l'homogénéisation des structures partiellement périodiques et l'homogénéisation des chargements en pression et en température.

Après la mise en oeuvre pratique des approches d'homogénéisation, on présente dans le **troisième chapitre** les résultats numériques issus de leurs applications. Dans l'objectif d'établir une liste de comportements volumiques homogènes des tôles et ondes brasées, un outil d'homogénéisation automatique, appelé « HomPass », a été développé. La pertinence de nos résultats est analysée et validée en commençant tout d'abord par la validation théorique des techniques d'homogénéisation à travers une série de tests numériques. Ensuite, dans un deuxième temps, on effectue une étude paramétrique afin d'analyser la sensibilité du comportement vis-à-vis du maillage et des données géométriques. Enfin, on réalise une application numérique globale pour comparer les modèles micro et macro d'un passage 2D sous chargement en pression.

Au cours du **chapitre quatre**, on applique les résultats de l'homogénéisation au développement d'un outil métier dédié à l'étude du comportement thermomécanique global des échangeurs, à savoir le comportement élastique équivalent aux hétérogénéités géométriques dues aux ondes et tôles brasées, le chargement équivalent en pression et le chargement global équivalent dû aux gradients locaux de température. Ainsi, la complexité géométrique des échangeurs est prise en charge par un logiciel métier, appelé « SiTEME », qui, à partir des données paramétriques (orientations d'onde, empilage, sollicitation thermique...), doit permettre de constituer automatiquement le modèle thermomécanique homogène des échangeurs en vue de l'analyse par éléments finis volumiques. On expose dans un premier temps l'aspect éléments finis particulier liée à la discrétisation de l'échangeur sous les sollicitations en pression et température. Dans un deuxième temps, on aborde l'architecture de l'outil métier et ses différents modules de programmation. On propose un exemple type d'échangeur homogénéisé passage par passage et les premiers résultats numériques obtenus à l'aide de l'outil métier « SiTEME » sont présentés et discutés.

Les conclusions et perspectives de poursuite du travail sont développées dans le **dernier chapitre**.

# Chapitre II

---

## Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes

On présente dans ce chapitre les outils théoriques nécessaires à l'étude du comportement global des échangeurs à microstructure partiellement périodique, soumis à des chargements en pression et en température. Le chapitre débute donc par quelques rappels historiques sur les techniques classiques d'homogénéisation mettant en lumière la nécessité d'adapter ces techniques à l'application industrielle. On présente dans un deuxième temps et de façon concise, la méthodologie et les bases théoriques adoptées pour cette étude. Finalement, dans l'objectif de traiter numériquement, et ultérieurement, les problèmes d'homogénéisation, on s'intéresse en dernier lieu à la mise en oeuvre pratique de ces problèmes, à savoir l'homogénéisation des structures partiellement périodiques et l'homogénéisation des chargements en pression et en température.

<b>Chapitre II : Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes.....</b>	<b>41</b>
II.1 Principes généraux de l'homogénéisation.....	43
II.1.1 Théorie de l'homogénéisation en élasticité.....	43
II.1.1.1 Origine et intérêt de l'homogénéisation.....	43
II.1.1.2 Définition des échelles et choix de la cellule de base représentative.....	45
II.1.1.3 Méthode asymptotique.....	47
II.1.1.4 Méthode des moyennes.....	51
II.1.2 Bilan des méthodes classiques d'homogénéisation.....	56
II.2 Adaptation des méthodes d'homogénéisation aux échangeurs.....	60
II.2.1 Empilement et hypothèses du comportement d'un passage.....	60
II.2.2 Bases théoriques des méthodes d'homogénéisation : HCP, HP et HMP...	63
II.2.3 Bilan.....	65
II.3 Mise en oeuvre des techniques d'homogénéisation HCP et HMP.....	66
II.3.1 Méthode HCP.....	66
II.3.1.1 Formulation variationnelle.....	67
II.3.1.2 Problèmes élémentaires.....	67
II.3.1.3 Calcul des coefficients d'élasticité homogénéisés.....	68
II.3.1.4 Considérations énergétiques.....	68
II.3.2 Méthode HMP.....	71
II.3.2.1 Problèmes élémentaires.....	72
II.3.2.2 Considérations énergétiques.....	73
II.3.2.3 Décomposition des problèmes élémentaires.....	73
II.3.2.4 Bilan .....	76
II.3.3 Homogénéisation du chargement en température.....	78
II.3.3.1 Approche HCP.....	78
II.3.3.2 Méthode de transformation.....	80
II.3.3.3 Validation du chargement en température.....	81
II.3.3.4 Bilan.....	82
II.3.4 Homogénéisation du chargement en pression .....	83
II.3.4.1 Approche HCP.....	83
II.3.4.2 Méthode de transformation.....	84
II.3.4.3 Validation du chargement en pression.....	86
II.3.4.4 Bilan.....	88
II.3.5 Encadrement énergétique du comportement équivalent.....	88
II.4 Conclusions.....	91

## II.1 Principes généraux de l'homogénéisation

Cette partie est consacrée à la présentation des principes de l'homogénéisation au travers de quelques éléments bibliographiques. On s'attachera tout d'abord à présenter diverses méthodes d'homogénéisation en montrant pour chacune d'entre elles, leurs propriétés et insuffisances. Une confrontation de ces méthodes dans le cadre de l'application des échangeurs à plaques et ondes brasées nous permet de justifier le choix ou non des méthodes.

### II.1.1 Théorie de l'homogénéisation en élasticité

La théorie de l'homogénéisation consiste à substituer à la structure fortement hétérogène, un volume homogène, censé présenter un comportement équivalent à la structure d'origine, une fois soumis aux mêmes chargements. L'objectif principal est donc de ramener le problème de départ sur une structure hétérogène complexe à un problème équivalent englobant ces hétérogénéités mais posé sur une structure de géométrie simple. C'est là l'objectif principal [Bornert et al. 2001] des méthodes d'homogénéisation. Cependant plusieurs modèles d'homogénéisation se trouvent dans la littérature. Sans prétendre être exhaustif et en s'appuyant sur l'analyse bibliographique de [Cartraud, 2003] qui donne une excellente vue d'ensemble des méthodes d'homogénéisation, nous citons :

- Les modèles d'homogénéisation des structures minces périodique. Notamment la modélisation des panneaux sandwich ([Kalamkarov, 1992], [Noor et al. 1995] , [Lewinski et Telega, 1999] et [Saidi et al.,2005]), et la modélisation des poutres ([Tutek, 1987], [Trabucho et Viano, 1996] et [Le Coq-Buannic, 2000]) .
- Les modèles d'homogénéisation des milieux poreux. Ces modèles sont appliqués surtout dans le domaine des structures discrètes comme les treillis de barres ([Noor, 1988], [Verna, 1991] et [Tollenaer, 1994]) et dans le domaine de matériaux cellulaires [Gibson et Ashby, 1997], [L'Hostis et al. 1998] et [Pradel, 1998]).
- Les modèles d'homogénéisation des milieux volumiques ([Débordes, 1989], [Willis, 2001], [Suquet, 1986] et [Cartraud, 1994]) et des composites ( [Léné, 1984], [Dumontet, 1990] et [Berrehili, 1997]) .

Dans le cadre de l'analyse du comportement thermomécanique des échangeurs, on s'intéresse aux modèles d'homogénéisation volumique ainsi qu'à leur adaptation au développement de l'outil métier recherché. Nous présentons alors par la suite un extrait de ces différents modèles.

#### II.1.1.1 Origine et intérêt de l'homogénéisation

Afin de mettre en évidence l'intérêt que suscite les méthodes d'homogénéisation, considérons une structure d'échangeur quelconque (figure I.1): il est alors aisé de concevoir que le comportement de cette structure dépend fortement des caractéristiques de ses constituants mais également de leurs interactions. C'est en ce sens que le comportement global en service, celui donc qui intéresse l'ingénieur et que nous appellerons comportement macroscopique, de cette structure, va fortement dépendre des mécanismes qui agissent au niveau de ses constituants. Il paraît donc primordial d'appréhender les comportements, dits microscopiques des constituants, afin de pouvoir prévoir le comportement des structures à l'échelle macroscopique. Or, réaliser un calcul de structure en prenant minutieusement en compte tous les mécanismes microscopiques

est, du fait même de la présence de nombreuses hétérogénéités, quasi impossible.

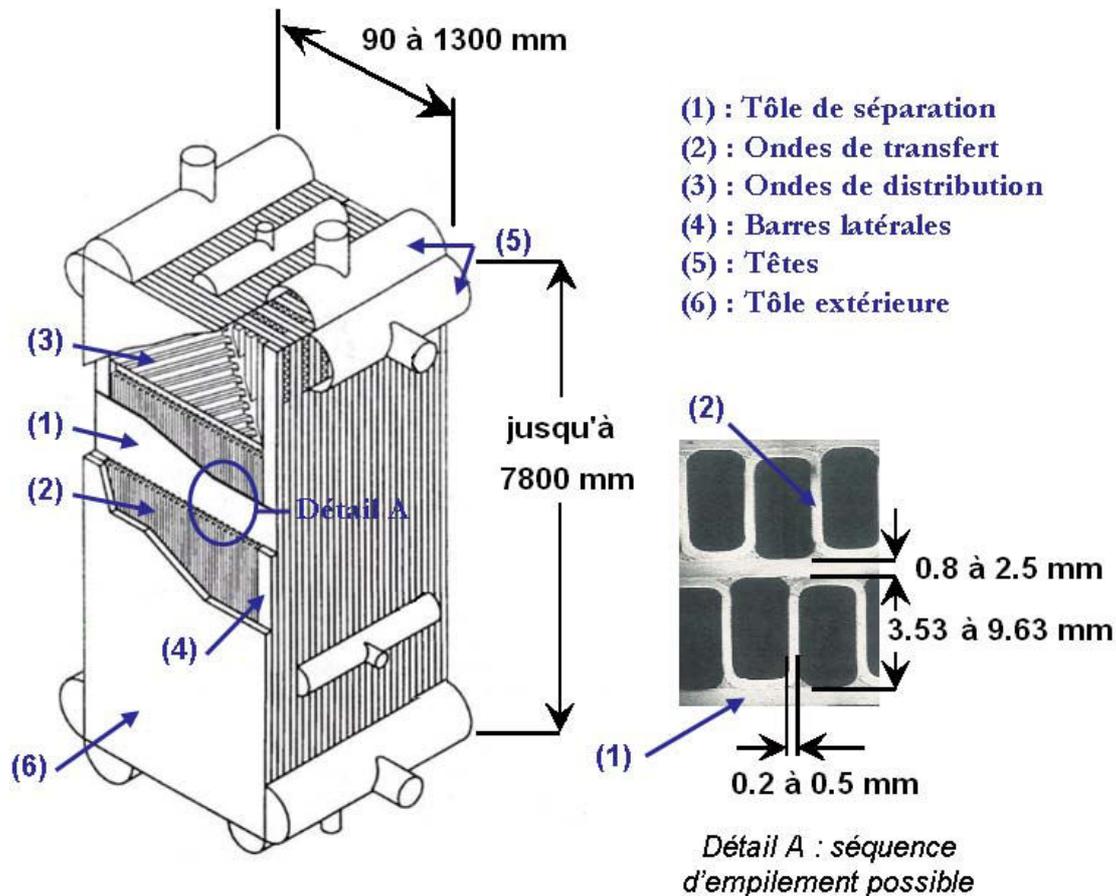
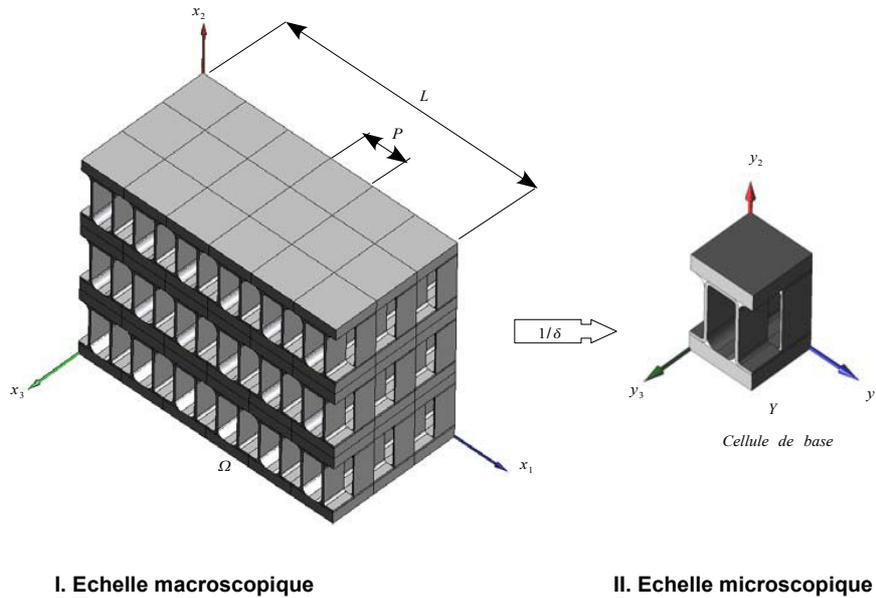


Figure I.1 - Dimensions géométriques d'un échangeur

Ainsi, l'illustration de cette théorie prend tout son sens si l'on se place d'un point de vue numérique. Considérons la structure globale d'un échangeur constituée des ondes et des plaques (figure I.1). Si l'on voulait procéder à un calcul direct, il faudrait être capable de mailler la structure (de l'ordre de quelques mètres dans la longueur de l'échangeur) à l'échelle des hétérogénéités (de l'ordre de 0.1 mm pour les épaisseurs des ondes), ce qui impliquerait des problèmes de taille beaucoup trop grande et donc des temps et coûts de calculs beaucoup trop élevés par rapport à ce qu'il est raisonnable de consacrer habituellement à un tel calcul. La théorie de l'homogénéisation permet alors de considérer, à l'échelle de la structure, des matériaux homogènes, « mélange » (dans un sens que nous préciserons plus tard) des entités constitutives initiales, qui se comporteraient globalement de la même manière que la structure hétérogène et sur lesquels il est alors beaucoup plus simple de mener les calculs permettant d'analyser le comportement global de la structure.

**II.1.1.2 Définition des échelles et choix de la cellule de base représentative**



**Figure II.2 - Les deux échelles d'espace**

La cellule de base (e.g. figure II.2) (notée par la suite  $Y$ , de bord  $\partial Y$ ) est, par nature, représentative des hétérogénéités de la structure. Elle est définie de manière à ce que chaque point de la structure, considérée comme globalement homogène, puisse être représenté par cette cellule de base. Ce choix de représenter un point afin de détailler les hétérogénéités qui lui sont associées, implique donc de faire la distinction entre deux échelles :

- l'échelle macroscopique qui est l'échelle de la structure et de toutes quantités dépendant uniquement de la position globale (ou macroscopique). Le vecteur position à cette échelle est noté  $x$  dans le domaine global  $\Omega$ .
- l'échelle microscopique qui est l'échelle de la cellule de base, à l'intérieur de laquelle le repérage est défini par le vecteur  $y$  représentant la position locale. Le domaine local est noté  $Y$ .

A partir de ces définitions, on dispose désormais de repérages associés à chacune des deux échelles, comme le montre la (figure II.2). Soit  $\delta$  le rapport d'échelle entre le microscopique (dimension caractéristique de la période) et le macroscopique (dimension caractéristique de la structure). Ce rapport peut être défini par  $\delta = P/L$  où «  $P$  » est une mesure de la périodicité tandis que «  $L$  » est la dimension globale de l'échangeur. On peut donc définir l'échelle macroscopique  $x$  comme étant une homothétie de l'échelle microscopique  $y$  :

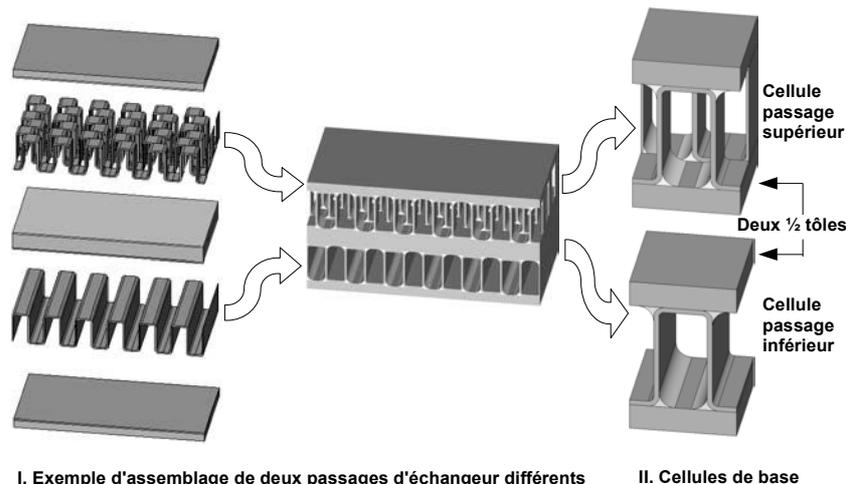
$$y = x / \delta \tag{II.1}$$

Les déformations (resp. contraintes) macroscopiques peuvent donc être définies comme étant les limites de déformations (resp. contraintes) microscopiques lorsque le petit paramètre  $\delta$  tend vers zéro. Si l'on note ainsi  $\epsilon^\delta$  et  $\sigma^\delta$  les champs locaux de contraintes et de déformation régnant dans la structure, les champs globaux de contraintes et de déformations régnant dans le milieu homogénéisé sont respectivement

$E$  et  $\Sigma$  tels que:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\epsilon}^\delta \\ \boldsymbol{\Sigma} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\sigma}^\delta \end{cases} \quad (II.2)$$

Dans un contexte technologique lié au procédé de fabrication des échangeurs à plaques et ondes brasées, le choix d'une seule cellule de base pour représenter les hétérogénéités de l'échangeur semble insuffisant. En effet, les échangeurs sont fabriqués pour répondre aux besoins des clients. De ce fait la structure de chaque échangeur peut être différente. Par ailleurs, l'assemblage des échangeurs se fait passage par passage où chaque passage possède ses propres caractéristiques. La représentation des hétérogénéités sera donc plus rigoureuse si on considère une cellule de base par passage (figure II.3). Cette cellule représente une hétérogénéité quelconque, géométrique ou matérielle (les matériaux de la brasure et de la structure sont des alliages d'aluminium) : elle différera donc d'un passage à l'autre. Cependant, dans le cadre de la thèse, le matériau de brasage est considéré comme ayant des caractéristiques identiques à celles du matériau de structure. Ainsi la seule hétérogénéité provient de la géométrie des ondes, des tôles et des couches de brasure fondues qui sont représentées par des congés à l'intersection de l'onde et des tôles.



**Figure II.3** - Représentation d'hétérogénéités d'un échangeur à deux passages

Dans notre étude, nous ne ferons a priori aucune hypothèse particulière de symétrie géométrique pour la cellule de base.

D'autre part, les ondes serrées et droites sont les plus utilisées dans la conception de l'échangeur. L'onde droite de géométrie simple possède deux plans orthogonaux de symétrie géométrique, ce qui conduit à un comportement orthotrope. Par contre, l'onde serrée est de géométrie plus compliquée. Elle possède un plan de symétrie géométrique dans la direction de la serration (figures II.4, 5) et un plan de symétrie matérielle dans la direction de la période (figure II.6). En effet, sur cette dernière figure, le comportement global est le même dans les cas A, B et C. En effectuant une symétrie dans le plan (XX') (plan de symétrie élastique parallèle au plan de symétrie géométrique (figure II.5)) à une cellule d'onde serrée, on passe du cas A au cas B en gardant le même comportement

global. Ensuite en effectuant une translation d'un demi pas (un quart de période) dans la direction de la périodicité de l'onde, tout en gardant la même longueur de période, le comportement homogène reste le même. Le cas C étant la représentation symétrique du cas A par rapport au plan (YY'), on peut dire que l'onde serrated possède un deuxième plan (YY') de symétrie élastique qui est perpendiculaire à (XX'). Finalement, le comportement équivalent de l'onde serrated est orthotrope. Cela est confirmé par les résultats numériques du paragraphe (§ III.2.1)

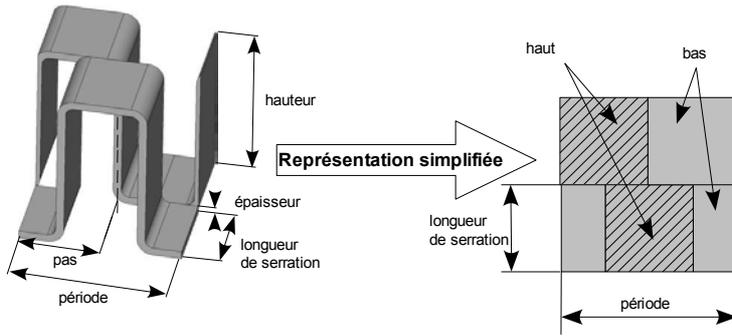


Figure II.4 - Représentation simplifiée (vue de dessus) d'une cellule d'onde serrated

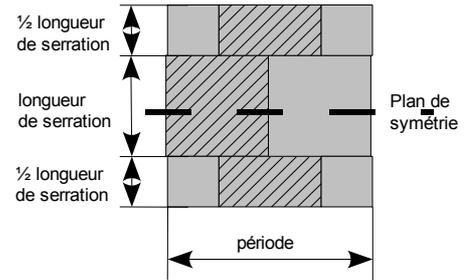


Figure II.5 - Représentation de la symétrie géométrique dans la direction de la serration

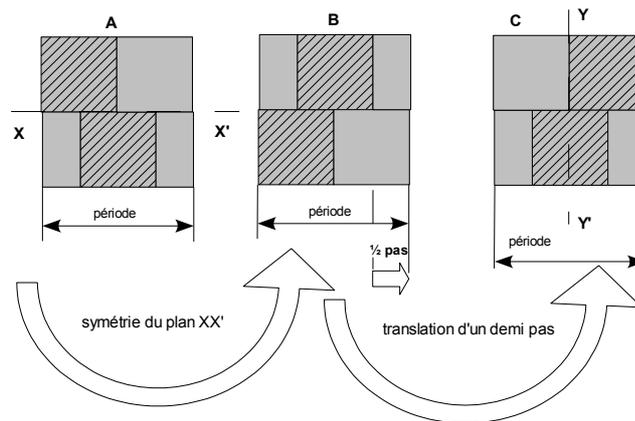


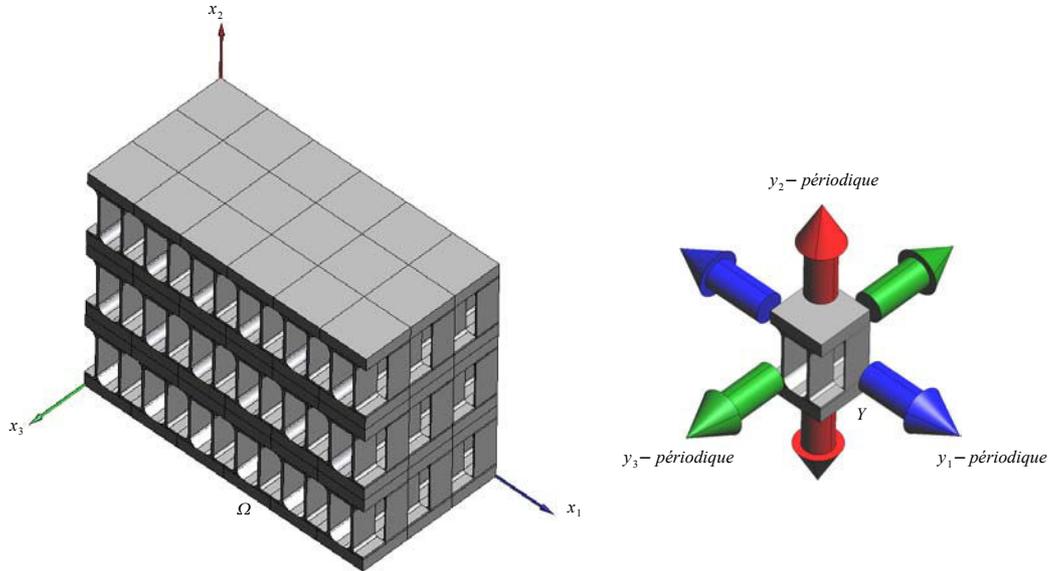
Figure II.6 - Représentation de la symétrie élastique dans la direction de la période

Une fois définies la cellule de base et les quantités macroscopiques  $E$  et  $\Sigma$  (II.2), la loi de comportement du milieu homogénéisé sera alors la relation liant ces deux quantités. Dans ce qui suit, on s'attarde sur deux façons d'obtenir cette loi. La première dite « asymptotique » avance des théories rigoureuses nécessaires à la résolution de ce genre de problèmes et la deuxième, dite de « moyennes », moins formelle, se base sur des raisonnements qui permettent d'approcher les choses d'une manière plus « physique ».

### II.1.1.3 Méthode asymptotique

Plusieurs auteurs se sont intéressés au développement et à l'application de cette approche. Sans prétendre être exhaustif, citons à titre indicatif les travaux de [Bensoussan et al. 1978], [Dumontet, 1990] et [Sanchez et Palancia, 1992]. La méthode des développements asymptotiques permet de déterminer les relations liant les limites de

déformations et contraintes microscopique  $\epsilon^\delta$  et  $\sigma^\delta$ , dans un cadre mathématique. Pour ce faire, on suppose que la cellule de base  $Y$  présente une périodicité tridimensionnelle (notée aussi  $Y$ -périodique). Ce serait le cas d'échangeurs qui seraient constitués d'un empilement de passages identiques (figure II.7), sur lequel le problème réel s'écrit comme suit :



I. Empilement identique du même passage

II. Y - périodicité

Figure II.7 - Représentation d'une structure Y-périodique

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \sigma^\delta(\mathbf{x}) = 0 \\ \sigma^\delta = \mathbf{h}^\delta : \epsilon^\delta \\ \epsilon(\mathbf{u}^\delta)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{u}^\delta + \nabla_x^T \mathbf{u}^\delta)(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (II.3)$$

où  $\Omega$  le domaine global, et  $\delta$  le rapport d'échelle entre le microscopique et le macroscopique définie par (II.1), complété par des conditions aux limites classiques (déplacements et contraintes imposés sur le bord)

La technique des développements asymptotiques consiste à chercher un champ de déplacement solution du problème d'équilibre hétérogène sous la forme du développement en puissance de  $\delta$  suivant :

$$\mathbf{u}^\delta(\mathbf{x}) = \sum_{n \geq 0} \delta^n \mathbf{u}^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (II.4)$$

La variable  $\mathbf{y}$  traduit les variations locales (microscopiques) et  $\mathbf{x}$  traduit les variations globales (macroscopiques) tout en engendrant, respectivement, des fonctions  $\mathbf{u}^n$  à oscillations rapides et lentes.

Ensuite, en substituant ce développement dans les équations du problème d'équilibre (II.3) et en remarquant que pour une fonction quelconque  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\delta)$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\delta}) \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad (\text{II.5})$$

on obtient les développements suivants pour les champs de déformation  $\epsilon^\delta(\mathbf{x})$  et de contrainte  $\sigma^\delta(\mathbf{x})$  :

$$\begin{cases} \epsilon^\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq -1}} \delta^n \epsilon^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \sigma^\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq -1}} \delta^n \sigma^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

avec :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right) \\ \epsilon_{ij}^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right) \quad \text{pour } n \geq 0 \\ \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= h_{ijkh}(\mathbf{y}) \epsilon_{kh}^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{pour } n \geq -1 \end{aligned}$$

En reportant les développements (II.6) dans l'équation d'équilibre (II.3.a) du milieu hétérogène, on obtient alors, aux différents ordres en  $\delta$ , les problèmes:

Ordre  $\delta^{-2}$  :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y$$

Ordre  $\delta^n$  :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y \quad \text{pour } n \geq -1$$

La résolution successive de ces problèmes (cf. par exemple [Berrehili, 1997]) jusqu'à l'ordre -1 permet de démontrer que :

$$\epsilon^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (\text{II.7})$$

On obtient d'autre part la relation suivante :

$$\langle \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = H_{ijkh}^{hom} \langle \epsilon_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y \quad (\text{II.8})$$

$$\text{avec } H_{ijkh}^{hom} = \langle h_{ijkh} \rangle_Y + \langle \sigma_{ij}(\mathbf{X}^{kh}) \rangle_Y \quad (\text{II.9})$$

où la notation  $\langle \cdot \rangle_Y$  désigne la formule de moyenne d'une fonction quelconque  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  par :

$$\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = \frac{1}{|Y(\mathbf{x})|} \int_Y f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{II.10})$$

Le champ  $\chi^{kh}$  dans (II.9) est le champ de déplacement solution du problème élémentaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}(\chi^{kh}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} : \boldsymbol{\epsilon}(\chi^{kh}) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\epsilon}(\chi^{kh}) = \frac{1}{2} (\nabla_y \chi^{kh} + \nabla_y^T \chi^{kh}) \\ \chi^{kh} \text{ est } Y\text{-périodique et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-}Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad \text{dans } Y \quad (\text{II.11})$$

avec  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{h} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\Gamma}^{kh})$  une précontrainte de déformation initiale correspondant à  $\epsilon_{pq}(\boldsymbol{\Gamma}^{kh}) = 1$  si  $pq = kh$  et  $\epsilon_{pq}(\boldsymbol{\Gamma}^{kh}) = 0$  si  $pq \neq kh$ . (II.11) représente ainsi la formulation de six problèmes élémentaires indépendants dans le cas 3D.

Par ailleurs pour une fonction  $f^\delta : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow f^\delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pouvant représenter une variable d'état quelconque de notre problème (figure II.8), [Suquet, 1982] montre que la fonction  $f^\delta$  possède comme limite la moyenne de cette fonction sur la cellule de base  $Y$  :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f^\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y(\mathbf{x})|} \int_{Y(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{Y(\mathbf{x})} \quad (\text{II.12})$$

En tenant compte de (II.12 et II.7) dans les développements (II.6), on peut donc déduire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\epsilon}^\delta(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\epsilon}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{Y(\mathbf{x})} = \mathbf{E}^0(\mathbf{x}) \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\sigma}^\delta(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{Y(\mathbf{x})} = \boldsymbol{\Sigma}^0(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

Ce qui conduit à dire que la relation (II.8) traduit le comportement macroscopique équivalent en liant les limites microscopiques des contraintes et déformations via les coefficients d'élasticité homogénéisés  $H_{ijkh}^{hom}$  définis en (II.9).

Dans la mise en oeuvre de cette méthode nous résolvons tout d'abord les six problèmes élémentaires (II.11). Ces problèmes sont à déformation initiale unitaire imposée dans la cellule de base (figure II.7.ii) qui est supposée périodique dans toutes les directions. Cette périodicité se traduit par des conditions cinématiques de périodicité sur tout le contour  $\partial Y$  de la cellule. L'expression de la rigidité homogénéisée se déduit ensuite de (II.9) en calculant les moyennes de contraintes engendrées par les problèmes élémentaires. On trouve dans la littérature ([Voldoire, 1993], [Berrehili, 1997]) d'autres écritures de la rigidité homogénéisée en fonction de l'énergie de déformation plus pratique à calculer à partir de l'énergie de déformation des problèmes élémentaires.

Certains auteurs appliquent le développement asymptotique dans le cadre des structures volumiques de type plaque ([Salha, 1988], [Kalamkarov, 1992]) ou poutre [Le Coq-Buannic, 2000] présentant deux ou une seule direction de périodicité. Dans ces problèmes, outre le petit paramètre caractérisant la finesse des hétérogénéités, il existe un

deuxième petit paramètre associé à la minceur ou à l'élanement de la structure. Ces deux petits paramètres appliqués à la modélisation d'un passage isolé d'échangeur sont de dimensions comparables, ce qui aboutira à un comportement de plaque. Cela est dû à la convergence du développement en présence d'une mesure locale de périodicité comparable à la hauteur du passage volumique à homogénéiser. Ceci entraîne du point de vue macroscopique la disparition des hétérogénéités représentées par la périodicité et la hauteur, d'où le comportement bidimensionnel en plaque. Toutefois, à partir de ce comportement on peut remonter au modèle volumique si on considère un comportement volumique orthotrope en contrainte plane [Saidi et al., 2005]. En conclusion, l'application classique de la méthode asymptotique sur un passage isolé d'échangeur conduit à un comportement de plaque incompatible avec notre approche volumique tridimensionnelle. Mettre en oeuvre donc l'approche asymptotique dans le cadre de notre application industrielle consisterait à considérer l'échangeur comme un bloc indissociable, par empilement de passages identiques, ce qui resterait un postulat assez grossier.

#### II.1.1.4 Méthode des moyennes

A la base de plusieurs méthodes classiques en homogénéisation (e.g. [Hill, 1964], [Willis, 2001], [Magoariec, 2003]), c'est l'approche souvent adoptée pour étudier le problème avec petit paramètre en avançant des explications physiques par rapport au cadre formel des théories mathématiques de convergence. Cette méthode repose sur les propriétés de moyenne des fonctions oscillantes.

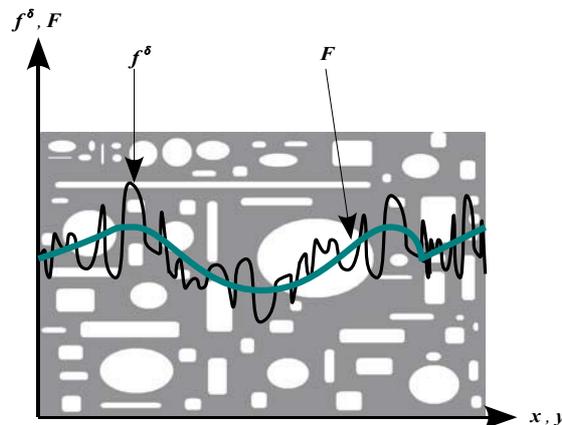


Figure II.8 - Valeur moyenne des variables d'état

Considérons une fonction  $f^\delta : (x, y) \rightarrow f^\delta(x, y) = f(x, y)$  représentant comme dans (§ II.1.1.3) une variable d'état quelconque de notre problème, par exemple les champs locaux de déformations ou de contraintes. Chaque constituant du matériau hétérogène possédant, par définition, des propriétés différentes, les valeurs de  $f^\delta$  au passage entre les constituants vont donc d'autant plus fluctuer que le nombre d'hétérogénéités est important et/ou leur taille est petite. Pour illustrer ceci, on représente (figure II.8) une partie de la structure hétérogène. A l'échelle microscopique, tout champ de variables  $f^\delta$  connaît alors une évolution d'autant plus rapidement oscillante que le nombre d'hétérogénéités est important. Cette fluctuation s'effectue autour d'une valeur moyenne. Il semble donc naturel de postuler que du point de vue macroscopique la limite de  $f^\delta$  lorsque le petit paramètre tend vers zéro est égale à la valeur moyenne de  $f$ , notée

$F$ . Sur les valeurs des champs mécaniques,  $E$  désigne alors la valeur moyenne de  $\epsilon^\delta$  et  $\Sigma$  la valeur moyenne de  $\sigma^\delta$ . En d'autres termes, ceci revient à dire que toute variable d'état macroscopique est moyenne de son homologue microscopique. Reste alors à définir cette notion de moyenne, en ayant bien à l'esprit que la fonction  $F$  est un champ global en  $x$  issu de variations locales sur un intervalle de  $y$ . Cette constatation nous conduit alors à poser, quelle que soit la nature du milieu étudié :

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y(\mathbf{x})|} \int_{Y(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{Y(\mathbf{x})} \quad (\text{II.14})$$

où  $|Y(\mathbf{x})|$  est une mesure de la cellule de base au point  $x$ , c'est-à-dire le volume de cette cellule dans le cas tridimensionnel. Pour en revenir aux grandeurs qui nous intéressent, ce raisonnement nous amène alors à poser les deux relations fondamentales suivantes, à la base de tout calcul ultérieur [Bornert et al. 01]

$$\begin{cases} E(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y(\mathbf{x})|} \int_{Y(\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \langle \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{Y(\mathbf{x})} \\ \Sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y(\mathbf{x})|} \int_{Y(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \langle \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{Y(\mathbf{x})} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

La définition de ces grandeurs macroscopiques suppose que le domaine hétérogène est formé de deux ou plusieurs composants parfaitement assemblés. En corollaire à cette hypothèse, les champs de déformations et de contraintes sont définis partout. Généralement, des cavités peuvent exister ce qui est fréquent quand il s'agit d'une hétérogénéité géométrique et dans l'étude du comportement des échangeurs. Dans ce cas les champs de déformations et de contraintes ne sont plus définis partout. Pour lever cette difficulté, des théorèmes mathématiques de prolongement peuvent être employés [Leguillon, 1990]. Nous donnons alors une définition plus générale de la moyenne qui soit utilisable dans tous les cas:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{|Y|} \left( \int_{Y^s} \epsilon d\mathbf{y} - \int_{\gamma} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n}) ds \right) = \langle \epsilon \rangle_Y \\ \Sigma = \frac{1}{|Y|} \left( \int_{Y^s} \sigma d\mathbf{y} - \int_{\gamma} \frac{1}{2} ((\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes_s \mathbf{y}) ds \right) = \langle \sigma \rangle_Y \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

où  $Y^s$  représente la partie structure de la cellule de base  $Y$  et  $\gamma$  le bord des cavités et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à  $\gamma$  dirigé vers l'intérieur de la cavité.

D'ailleurs par souci de simplicité de l'énoncé, on adopte la convention suivante:

- toute variable macroscopique sera représentée par une lettre majuscule latine ou grecque sous-entendant qu'elle est exprimée au point  $x$ ,
- toute variable microscopique sera, quant-à-elle, représentée par une lettre minuscule latine ou grecque sous-entendant qu'elle est exprimée au point  $(x, y)$ .

Maintenant que les notions de cellule de base et de moyenne entre les grandeurs macroscopiques et leurs homologues microscopiques sont précisées, nous allons nous intéresser à la méthodologie même de la théorie de l'homogénéisation, c'est-à-dire aux différentes étapes inhérentes au processus d'homogénéisation.

■ **Étape de représentation**

L'étape de représentation consiste, après avoir choisi les échelles, à définir le Volume élémentaire représentatif (noté VER). Ce VER est défini selon le processus d'homogénéisation. Le distinguo VER / cellule de base dans ce mémoire se fait alors:

- Cellule de base comme définie dans le paragraphe (§ II.1.1.2) c'est la plus petite cellule périodique représentant une image fidèle de la géométrie de la structure. Cette définition est utile pour étudier les structures volumiques présentant au moins une direction de périodicité par la représentation la plus réduite possible.
- VER est considéré dans le cas des structures périodiques comme étant constitué d'une répétition de cellules de base ordonnées dans la (les) direction(s) de la périodicité géométrique. Le nombre de ces cellules détermine la précision des méthodes employées d'homogénéisation comme nous le verrons plus loin.

Dans les deux cas, nous attribuerons des propriétés matérielles et géométriques aux différents constituants, qui seront alors considérés comme homogènes à l'échelle microscopique.

■ **Étape de localisation**

C'est la deuxième étape, lors de laquelle les différentes méthodes évoquées plus haut sont mises en oeuvre. En effet, dans cette étape on vise à déterminer les relations liant respectivement les déformations  $\epsilon$  et contraintes  $\sigma$  locales (microscopiques) aux déformations  $E$  et contraintes  $\Sigma$  globales (macroscopiques), dans le cadre de l'élasticité. Pour cela, on considère que les champs locaux régnant dans le VER sont déterminés à partir des sollicitations qui lui sont imposées sous forme de champs globaux, eux-mêmes résultant des sollicitations imposées à la structure sous forme de forces ou déplacements. A la fin de cette étape, on disposera donc des tenseurs  $a^E$  et  $a^\Sigma$ , respectivement appelés tenseur de localisation en déformation et en contrainte et définis par :

$$\begin{cases} \epsilon = a^E : E \\ \sigma = a^\Sigma : \Sigma \end{cases} \quad (II.17)$$

■ **Étape d'homogénéisation**

La dernière étape dans le processus d'homogénéisation, consiste à déterminer entièrement le comportement homogène équivalent, à partir des relations suivantes:

- les relations de moyennes (II.16), résultant d'approche en moyennes,
- les relations (II.17) issues de l'étape de localisation,
- les lois de comportements microscopiques, attribuées à chacun des constituants lors de l'étape de représentation.

A la fin de cette étape, on dispose d'une loi de comportement homogénéisée pouvant s'écrire sous une des formes suivantes :

$$\begin{cases} E = \langle \epsilon \rangle_Y = C : \Sigma \\ \Sigma = \langle \sigma \rangle_Y = H : E \end{cases} \quad (II.18)$$

■ **Un problème mal posé**

Afin d'exprimer les grandeurs microscopiques en fonction de leurs homologues

macroscopiques, les problèmes de localisation peuvent être appréhendés de deux manières différentes suivant les sollicitations imposées : soit en imposant un chargement moyen en déformation  $E$ , soit un chargement moyen en contrainte  $\Sigma$ . On obtient alors les problèmes respectifs suivants:

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma = 0 \\ \sigma = h : \epsilon \\ \langle \epsilon \rangle_Y = E \text{ ou respectivement } \langle \sigma \rangle_Y = \Sigma \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad (\text{II.19})$$

Ces problèmes présentent les mêmes équations d'équilibre (II.19.a) du VER  $Y$  qui ne font intervenir aucune force volumique, et les mêmes lois (II.19.b) de comportement local, définies par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité  $h$  choisi lors de l'étape de représentation. Par contre, la sollicitation imposée diffère d'un problème à l'autre : déformation macroscopique (II.19.c) pour le problème en déformation et contrainte macroscopique (II.19.d) pour le problème en contrainte. Or, ces relations liant déformations (respectivement contraintes) microscopiques et déformations (respectivement contraintes) macroscopiques n'étant, par définition, que des relations de moyenne, les problèmes de localisation (II.19) sont finalement mal posés, puisqu'ils ne possèdent aucune véritable condition aux limites. Il faut donc, pour éviter tout problème de non unicité de la solution, leur adjoindre des conditions limites sur le contour  $\partial Y$  du VER, représentant au mieux les phénomènes subis par le milieu hétérogène. C'est ce que se proposent de faire les méthodes énoncées ci-après, qui travaillent soit à déformation imposée, soit à contrainte imposée, afin de transformer les problèmes de localisation en des problèmes finalement bien posés.

### ■ Les différentes méthodes classiques

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude du processus d'homogénéisation incluant la méthode des moyennes. Ce paragraphe insiste sur le fondement de ces recherches, puis donne un aperçu desdites méthodes en analysant leurs spécificités. Les principales théories classiques sont : l'approximation de VOIGT et REUSS, la méthode des modules effectifs de HILL et MANDEL et la théorie de l'homogénéisation périodique pour lesquelles chaque tenseur  $a_{ijkh}^E$  (resp.  $a_{ijkh}^\Sigma$ ) liant les déformations (resp. contraintes) macroscopiques et microscopiques peut être différent.

#### ➤ Approximation de VOIGT-REUSS

Cette approximation consiste à supposer que la déformation (resp. contrainte) est uniforme dans le VER et donc égale à sa moyenne. On a ainsi :

- Pour l'approximation de VOIGT :

$$\epsilon = E \quad \text{dans } Y \quad (\text{II.20})$$

- Pour l'approximation de REUSS :

$$\sigma = \Sigma \quad \text{dans } Y \quad (\text{II.21})$$

Cela a l'avantage de simplifier les calculs mais reste tout de même très rarement valide, puisqu'elles ne tiennent absolument pas compte des fluctuations des variables d'état microscopiques dues aux hétérogénéités locales du VER. Appelées aussi lois de mélanges, ces approximations ne prennent pas en compte l'équation d'équilibre (II.19.a). Il

a été montré [Michel, 2001] qu'elles conduisaient en fait à une estimation par excès (VOIGT) ou par défaut (REUSS) des propriétés effectives.

➤ Méthode des modules effectifs de HILL MANDEL

Pour l'approche en déformation, ces auteurs laissent la déformation libre à l'intérieur du VER, mais imposent que le déplacement  $\mathbf{u}$  sur le bord  $\partial Y$  soit linéaire du type:

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} \text{ sur } \partial Y \quad (\text{II.22})$$

Tandis que pour l'approche en contrainte c'est une relation de type force qui est imposée et qui joue le rôle de condition aux limites sur le contour :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial Y \quad (\text{II.23})$$

Physiquement plus acceptables que les précédentes, ces hypothèses possèdent cependant, dans le cadre des milieux périodiques, un domaine de validité restreint. On trouve dans des travaux menés sur les composites à structure périodique dans toutes les directions ([Michel, 2001] et [Suquet, 1982]) des applications qui montrent que pour que les résultats soient représentatifs, il faut en effet que la taille du VER soit relativement grande vis-à-vis de la taille des hétérogénéités, ce qui revient à considérer un grand nombre d'hétérogénéités. Ceci annihile quelque peu l'intérêt de départ d'un raisonnement par homogénéisation qui est de réduire la complexité de la structure sur laquelle les calculs sont menés. Cette insuffisance sera mise en évidence dans le cas d'un VER de périodicité monodirectionnelle (cas 2D) qui représente dans notre cas la section d'un passage quelconque d'un échangeur.

➤ Homogénéisation périodique

Cette méthode, a priori applicable dans le cas de structures à microstructure périodique, considère que le champ de déplacements  $\mathbf{u}^{per}$  défini par :

$$\mathbf{u}^{per} = \mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y \cdot \mathbf{y} \quad (\text{II.24})$$

est périodique dans toutes les directions, tandis que le vecteur force  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est anti-périodique sur les parties de  $\partial Y$  qui se correspondent par périodicité :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{per} & \text{périodique sur } \partial Y \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial Y \\ \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_Y = \mathbf{E} & \text{ou respectivement } \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_Y = \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au bord  $\partial Y$ . L'avantage principal de cette théorie réside dans le fait qu'elle est exacte pour les milieux périodiques. En effet, il a été montré ([Duvaut, 1976], [Palencia, 1980] et [Suquet, 1982]) que dans le cas de l'homogénéisation périodique, les contraintes et déformations macroscopiques intervenant dans la loi homogénéisée sont effectivement les quantités vers lesquelles convergent les champs locaux de contraintes et de déformations régnant dans la cellule de base lorsque le petit paramètre  $\delta$  tend vers zéro. De plus, d'autres études (e.g. [Michel, 2001]) ont montré que les résultats issus de la résolution des problèmes de localisation par la méthode de l'homogénéisation périodique, ne dépendaient pas du nombre de cellules de base. D'où l'avantage de la mise en oeuvre de cette approche qui se contente d'une étude directe sur la cellule de base.

Par ailleurs, on retrouve pour cette approche une application identique à celle de l'approche asymptotique lorsqu'on cherche à déterminer les modules effectifs d'une structure de périodicité tridimensionnelle. De ce fait, comme pour la technique asymptotique, la mise en oeuvre pour ce type de structure suppose dans notre cadre d'application un empilement de passage parfaitement identique (figure II.7) ce qui est un cas de figure peu fréquent. Leur domaine d'application dans notre étude reste alors approximatif et limité aux vaporisateurs où l'empilement peut être périodique sur un ou plusieurs passages.

### II.1.2 Bilan des méthodes classiques d'homogénéisation

Parmi les méthodes classiques proposées, les trois primales et leurs duales associées, en plus de la méthode asymptotique, on s'oriente dans un premier temps vers l'approche asymptotique pour analyser les structures complètement périodiques et les méthodes de modules effectifs (Hill-Mandel) pour une approche d'homogénéisation passage par passage. Ce faisant, on mettra en évidence l'insuffisance de la méthode Hill-Mandel dans notre cadre d'application [Dib et al. CFM 2005] et on justifiera le besoin de recourir dans un deuxième temps à chercher et développer des approches plus adaptées à l'homogénéisation des échangeurs de chaleur à plaques et ondes brasées. Nous appliquons donc dans cette section la méthode des modules effectifs sur un cas 2D en déformation plane d'un passage d'échangeur.

L'application consiste à considérer un VER variable formé par des cellules de base ordonnées dans la direction de la périodicité. Pour un passage d'échangeur, le VER retenu est ainsi constitué par une onde droite brasée entre deux tôles (figure II.9), la seule direction de périodicité est alors la direction 1.

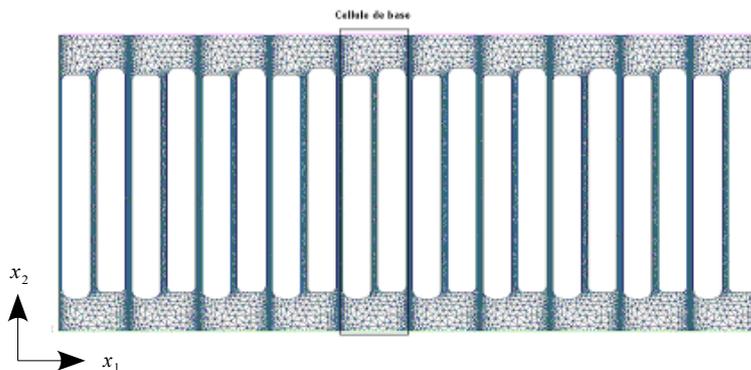


Figure II.9 - VER de (1x10) cellules de base retenu pour la mise en oeuvre de Hill-Mandel

Pour l'approche en déformation, nous imposons des tenseurs unités en déformation sur le contour  $\partial Y$  du VER, afin d'en déduire, à partir d'un calcul de moyenne sur les contraintes microscopiques, les rigidités homogénéisées liant la moyenne de déformation ou déformation macroscopique à la moyenne de contrainte ou contrainte macroscopique. Les formules de moyenne sont données par (II.16). En effet, il a été démontré à l'aide des formules de Green qu'en se donnant une déformation uniforme sur le contour du VER cela revient à l'imposer comme étant la moyenne de déformation sur ce VER. En d'autres termes, nous avons une déformation macroscopique égale à la même déformation microscopique uniforme imposée sur  $\partial Y$ . Prenons à titre d'exemple la déformation unité suivante, qu'on impose sur le contour du VER :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \langle \epsilon_{11} \rangle \\ \langle \epsilon_{22} \rangle \\ 2\langle \epsilon_{12} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Or d'après la relation d'homogénéisation nous avons :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ 2\langle \sigma_{12} \rangle \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle \epsilon_{11} \rangle \\ \langle \epsilon_{22} \rangle \\ 2\langle \epsilon_{12} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{II.27})$$

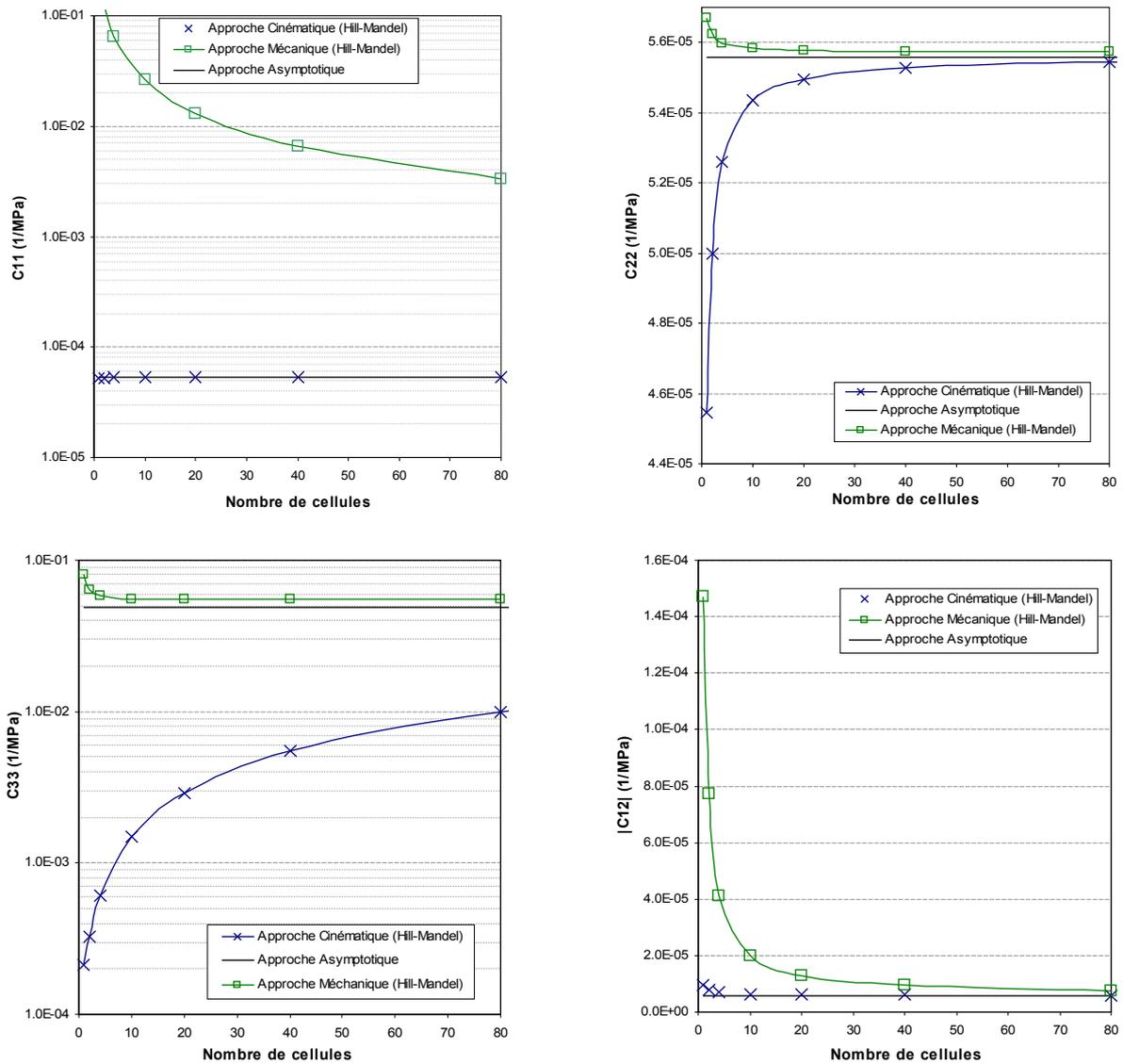
Ce qui permet, en injectant (II.26) dans (II.27), de déterminer la première colonne de la matrice de rigidité homogène tout en calculant la moyenne des contraintes engendrées par cette déformation unitaire. Par similitude, on détermine par l'approche en contrainte la matrice de souplesse en imposant des contraintes unités sur le contour et en calculant la moyenne des déformations.

Les calculs sont menés par [Code\_Aster] après un pré-traitement sous [GiD]. Les résultats (figure II.10) montrent que les modules homogénéisés varient avec le nombre de cellules de base. Leurs valeurs se stabilisent plus ou moins vite suivant cette taille de VER et cela de façon non homogène d'un coefficient homogénéisé à l'autre. Cela engendre de nombreux calculs impossibles à intégrer facilement dans le cadre du développement d'un outil métier fiable et efficace.

Les résultats ainsi obtenus sont comparées à ceux issus de l'approche asymptotique (figure II.10). On montre que les souplesses homogénéisées se stabilisent autour des valeurs fournies par l'approche asymptotique. Ces valeurs d'encadrement seront approfondies ultérieurement. L'avantage de l'approche asymptotique est forcément son temps de calcul raisonnable puisque l'application se fait sur une seule cellule de base. Cependant son champ d'application reste limité, comme on l'a déjà indiqué, à une structure d'échangeur constituée de passages identiques.

Dans la section § II.1.1.2, cette difficulté était déjà apparue à travers celle de la définition de la cellule de base : une seule cellule de base générique à tout l'échangeur était apparue utopique du fait de l'empilement de passages aux caractéristiques différentes.

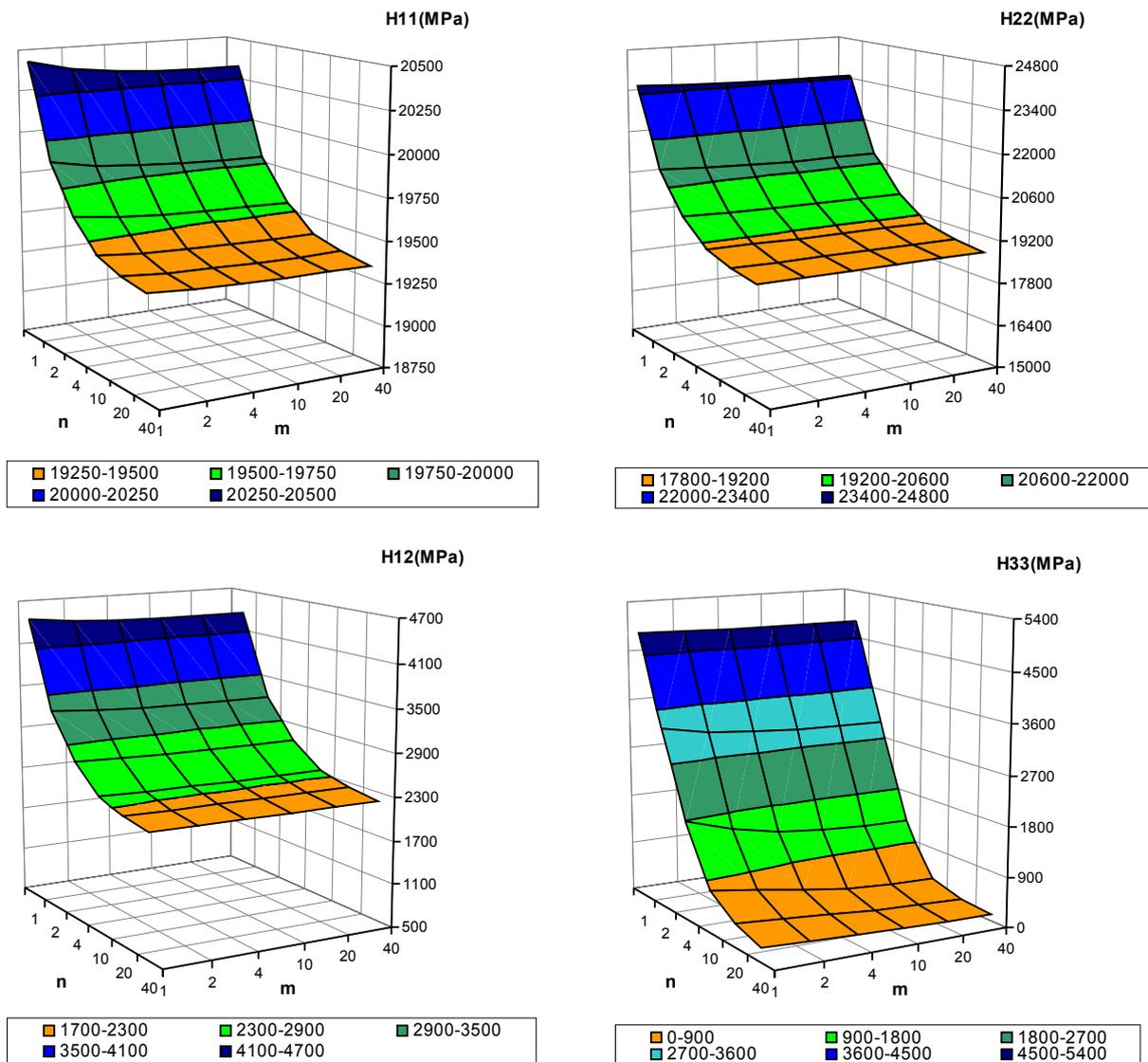
## Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes



**Figure II.10** - Évolution des souplesses homogénéisées en fonction de la taille du VER de périodicité unidirectionnelle (direction  $x_1$ , Maillage M2 (tableau II.1))

Les estimations suivant la méthode des modules effectifs des rigidités homogénéisées ont été aussi effectuées pour différentes formes de VER, définies comme multiples de la cellule de base dans les deux directions. La figure II.11 montre les évolutions des modules effectifs calculés par approche cinématique (Hill-Mandel). Ces courbes surfaciques sont fonctions de la taille et de la forme du VER. On note dans ce cas de figure le faible impact du nombre de cellules dans la seconde direction  $x_2$  sur le comportement homogène équivalent. En effet, la présence des tôles épaisses contribue à l'homogénéisation des conditions aux limites. Le comportement global du VER devient alors peu sensible vis-à-vis de la périodicité verticale (direction  $x_2$ ) d'une part et d'autre part des conditions cinématiques et mécaniques imposées sur les bords homogènes. Ces bords homogènes se manifestant essentiellement sur les faces supérieure et inférieure du VER (figure II.9) expliquent la bonne convergence du coefficient  $C_{22}$  (figure II.10.b) par rapport aux autres coefficients.

Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes



**Figure II.11** – Évolution de l'élasticité homogénéisée (Hill-Mandel) en fonction de la taille du VER.  $n$  = nombre de cellules direction  $x_1$ ,  $m$  = nombre de cellules direction  $x_2$ , (Maillage M1, (tableau II.1))

D'autre part, l'étude du maillage montre une influence significative sur le coefficient du cisaillement  $H_{33}$ , cela étant dû essentiellement au choix de l'élément fini linéaire triangulaire T3 pour la modélisation éléments finis 2D (tableau II.1).

(MPa)	M1	M2	Écart (%)
$H_{11}$	19358	18952	2,10
$H_{22}$	18682	18318	1,95
$H_{12}$	2191	2071	5,49
$H_{33}$	245	182	25,55

**Tableau II.1** – Influence de maillage sur les coefficients d'élasticité homogénéisés (cas 40 cellules en ligne, M1 = Maillage grossier 190 éléments T3 par cellule (un élément par jambe), M2 = Maillage raffiné 8996 éléments T3 par cellule (quatre éléments par jambe))

## II.2 Adaptation des méthodes d'homogénéisation aux échangeurs

N'ayant pas trouvé entière satisfaction dans les méthodes classiques d'homogénéisation (cf § II.1.2), on va s'appliquer dans un deuxième temps à adapter les méthodes de modules effectifs à notre application industrielle, notamment, en tenant compte des directions de périodicité géométrique dans un objectif de réduction des temps de calcul.

### II.2.1 Empilement et hypothèses du comportement d'un passage

La périodicité bidirectionnelle (figure II.12) est souvent présente dans le plan du passage, du fait de la géométrie et des types d'ondes (droites, serrated...) qui varient d'un passage à l'autre. Nous imaginons donc que dans un repère local à l'onde nous avons deux directions de périodicité orthogonales qui engendrent deux plans de symétrie élastique perpendiculaires ce qui définit un comportement équivalent orthotrope (§ II.1.1.2). Pour remonter au repère global, il suffit alors de définir l'orientation des ondes ce qui permettra de prendre en compte le changement d'orientation des ondes, dans le même passage, entre la zone de distribution et la zone de transfert. Nous pouvons donc ramener l'étude des caractéristiques homogénéisées au repère défini par les directions de périodicité de l'onde. D'autre part, pour s'en convaincre, la mise en évidence numérique de ces propriétés d'orthotropie sera faite au chapitre III.

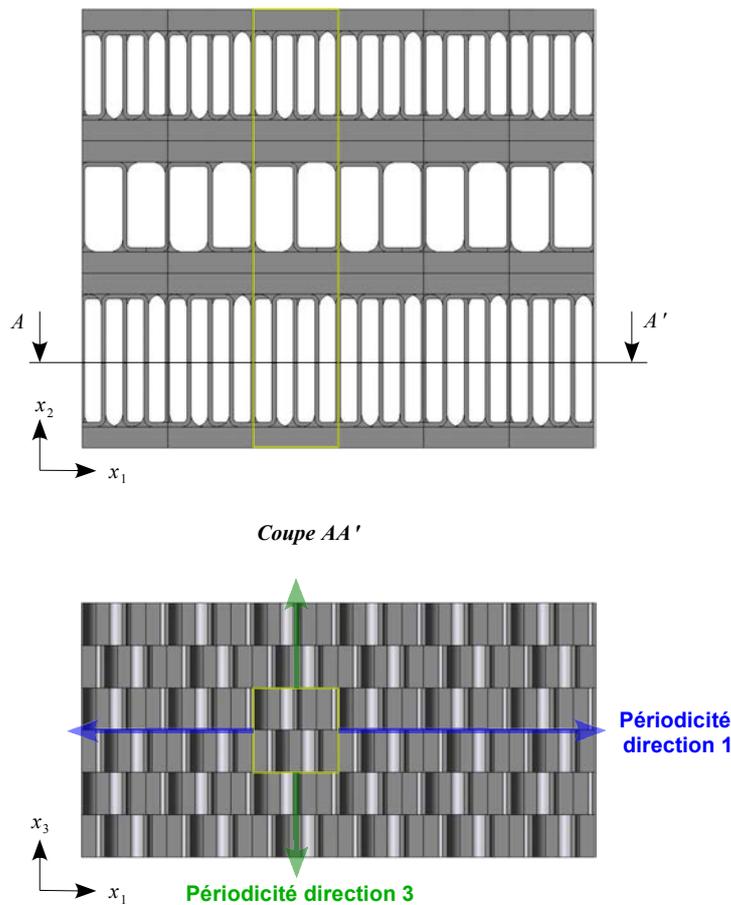


Figure II.12 – Exemple de périodicité bidirectionnelle d'un empilement de trois passages différents

Par ailleurs, le corps d'un échangeur est constitué par empilement de passages. C'est dans la phase de conception de l'échangeur que cet empilement est déterminé pour pouvoir répondre au mieux aux besoins du client, ce qui rend la conception des échangeurs Nordon spécifiques à ses utilisateurs. Par conséquent, il est légitime de considérer l'empilement aléatoire et l'étude du comportement global se focalisera sur une approche de modélisation passage par passage, schématisée par figure II.13.

L'approche passage par passage consiste à parcourir l'échangeur et isoler chaque passage qui est délimité sur ses faces supérieure et inférieure par des demi-tôles de séparation et sur ses côtés par les différentes zones du même passage (e.g. zone de distribution, zone de transfert...). Chaque passage est ainsi découpé en plusieurs zones, où chaque zone comporte une orientation d'écoulement et un type d'onde bien définis (e.g. figure II.1). Le passage ainsi isolé est défini par la cellule de base périodique de l'onde brasée entre deux demi-tôles (figure II.13). Cette approche passage par passage était déjà apparue implicitement indispensable lorsqu'on avait abordé le problème de la définition d'une cellule de base (§ II.1.1.2) et lors de la mise en oeuvre des méthodes asymptotiques.

Maintenant que nous avons la représentation  $x_1, x_3$ -*périodiques* de chaque zone de l'échangeur, nous y appliquons les méthodes d'homogénéisation adaptées pour estimer le comportement global de chaque configuration de passage. Ainsi, on peut constituer une librairie d'éléments 3D volumiques au comportement équivalent, nécessaire pour le développement de l'outil métier final. Cette librairie est fonction des paramètres géométriques et des types d'ondes ainsi que des caractéristiques géométriques des tôles supérieure et inférieure.

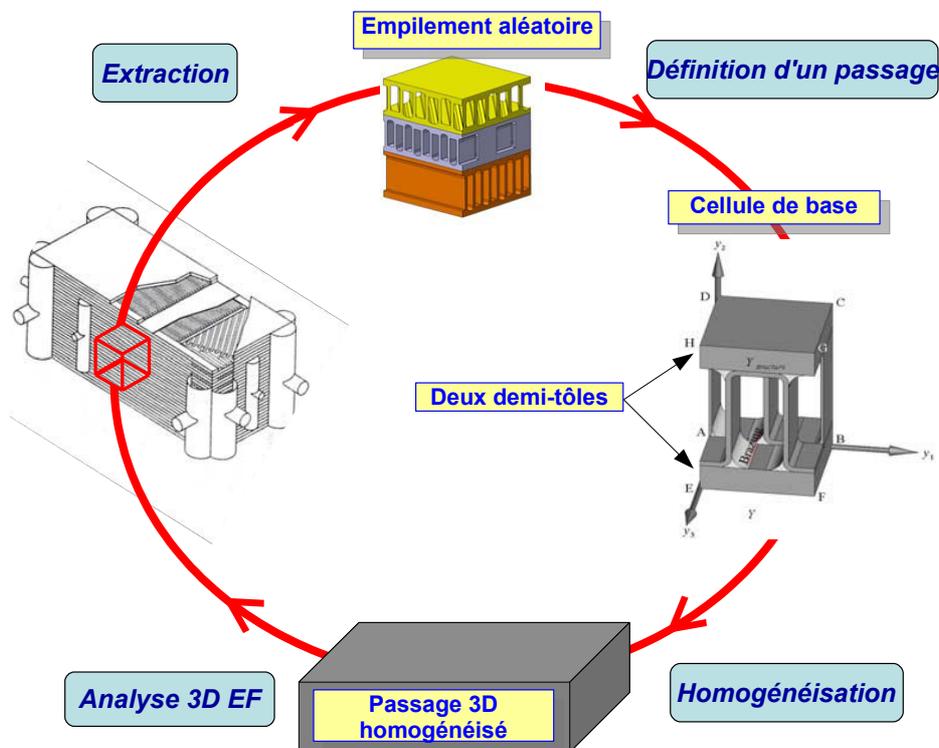


Figure II.13 - Approche générale passage par passage

## Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes

Toutefois, l'homogénéisation passage par passage ne peut se faire sans aucune hypothèse sur le milieu environnant immédiat et donc sur les passages adjacents. Ce milieu est a priori supposé inconnu en tant que conséquence directe d'un empilement aléatoire constituant le bloc échangeur. Pour illustrer cette dépendance du comportement au type d'empilement, supposons qu'un passage isolé (figure II.14) se trouve dans un milieu plutôt « mou », il est alors aisé de concevoir que sous les sollicitations de la pression interne, les faces de ce passage vont se déformer de manière « libre ». Cela est dû à la faible résistance des passages adjacents. Prenons maintenant ce même passage soumis aux mêmes sollicitations mais se trouvant dans un milieu plutôt rigide. Cette rigidité élevée impose une déformation constante sur ces faces d'où un comportement différent. Il est alors important d'appréhender l'effet du milieu environnant dans la technique d'homogénéisation adoptée.

Du point de vue physique, l'objectif est d'obtenir un encadrement des propriétés équivalentes du passage isolé. Ignorant les passages adjacents, on peut penser que le comportement équivalent réel de ce passage est compris entre le comportement équivalent obtenu avec un environnement souple et celui obtenu avec un environnement rigide. Ces comportements limites sont estimés en imposant sur les faces supérieure et inférieure des conditions linéaires en déplacement (approche en déformation) et des conditions uniformes en contrainte (approche en contrainte). Les autres faces de la cellule de base sont des faces périodiques (figure II.14). Ce sont donc les problèmes classiques de Hill-Mandel qui vont être adaptés à notre application industrielle.

La mise en évidence numérique de ces propriétés d'encadrement sera faite dans la section § III.3.2. Toutefois, on propose au lecteur de poursuivre notre démarche en partant de ce postulat.

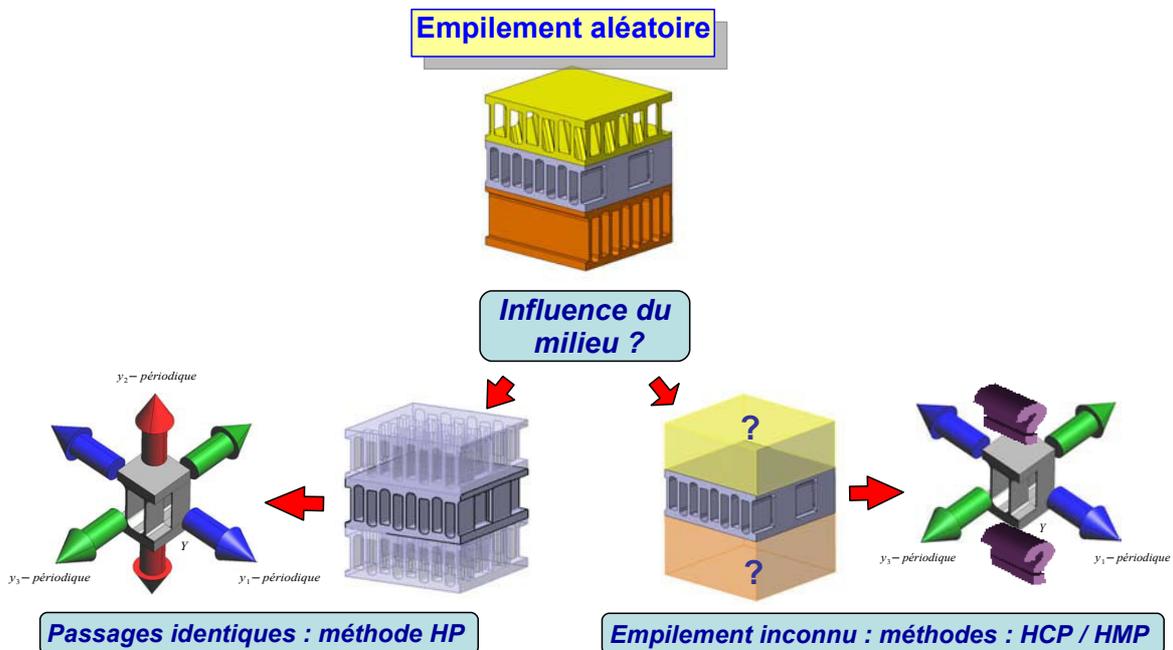


Figure II.14 - Différentes considérations pour l'homogénéisation

## II.2.2 Bases théoriques des méthodes d'homogénéisation : HCP, HP et HMP

Dans cette partie, on considère la formulation des problèmes d'homogénéisation qui regroupent les conditions cinématiques et mécaniques de Hill-Mandel tout en profitant de la périodicité du milieu, afin de poser ces problèmes sur une seule cellule de base périodique et non plus un VER dont le ratio taille/précision des calculs reste une contrainte majeure.

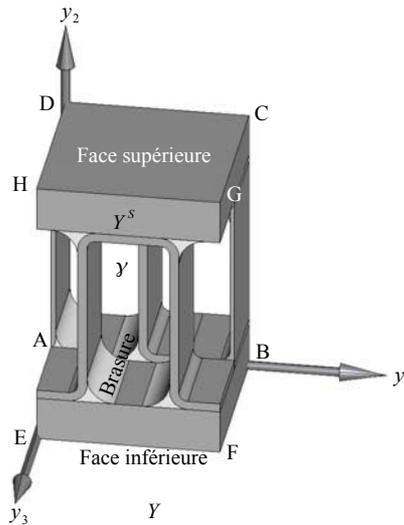


Figure II.15 - Cellule de base Y d'un passage d'échangeur

En tenant compte des chargements en température et en pression, la formulation de ces problèmes sur la cellule de base (figure II.15) s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) : (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}) \Delta T) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla_y \mathbf{u} + \nabla_y^T \mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \gamma \\ \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_Y = \mathbf{E} \text{ ou } \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_Y = \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Où :

- $\mathbf{E}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  sont des tenseurs constants symétriques
- $\boldsymbol{\alpha}$  : le tenseur de dilatation thermique supposé être le même dans la brasure, les ondes et les tôles (les matériaux utilisés étant des alliages d'aluminium)
- $\Delta T$  : la variation de la température supposée constante dans la cellule de base
- $p$  : la pression appliquée sur les cavités  $\gamma$  de la cellule de base

Le champ solution  $\mathbf{u}$  est supposé égal à la somme d'un champ moyen  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y \cdot \mathbf{y}$  à comportement global et d'un champ périodique  $\mathbf{u}^{per}$  traduisant les fluctuations périodiques de  $\mathbf{u}$  dues à la microstructure :

$$\mathbf{u} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{per} \quad (\text{II.29})$$

Cette écriture permet la prise en compte des directions de périodicité par la définition de  $\mathbf{u}^{per}$  comme étant un champ de déplacement  $y_1, y_3$ -périodiques. Ainsi on peut écrire les problèmes classiques sur la cellule de base tout en imposant le comportement (II.29) sur les faces périodiques. Mais à ce stade ces problèmes sont mal posés. Pour les rendre bien posés, on rajoute les conditions supplémentaires de Hill-Mandel sur les faces supérieure et inférieure:

a) pour l'approche dite « Homogénéisation Cinématique Périodique » (notée dans la suite HCP) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{u}^{per} = \mathbf{0} \text{ sur les faces sup. et inf. de } Y \quad (\text{II.30})$$

b) pour l'approche « Homogénéisation Périodique » (notée dans la suite HP) on a:

$$\mathbf{u}^{per} \text{ est } Y\text{-périodique} \quad (\text{II.31})$$

c) pour l'approche « Homogénéisation Mécanique Périodique » (notée HMP) on a :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ sur les faces sup. et inf.} \quad (\text{II.32})$$

La technique HCP permet d'exprimer les grandeurs microscopiques en fonction de leurs homologues macroscopiques en imposant des conditions cinématiques tout en respectant les directions de la périodicité géométrique. Ayant des conditions linéaires en déplacement sur les faces supérieure et inférieure de la cellule de base, ce schéma d'homogénéisation permet de déterminer le comportement du passage dans un milieu «plutôt rigide».

D'autre part, le schéma HMP s'oriente vers des conditions en contrainte uniforme. Cela laisse les faces supérieure et inférieure libres de se déformer sous l'influence de la contrainte imposée, ce qui traduit le comportement limite du passage dans un milieu «plutôt souple».

Enfin, dans le cas d'une périodicité tridimensionnelle, l'approche HP considère les faces supérieure et inférieure de la cellule de base périodiques. Cela conduit à imposer, en plus de la déformation moyenne macroscopique, des conditions de périodicité tridimensionnelle.

### Remarques importantes:

- 1) Les problèmes HCP et HMP peuvent être résolus à  $\mathbf{E}$  imposée ou à  $\boldsymbol{\Sigma}$  imposée. Cependant par analogie aux approches en déformation et en contrainte de Hill-Mandel, on développe dans ce mémoire la mise en oeuvre de la « HCP à  $\mathbf{E}$  imposée » et la « HMP à  $\boldsymbol{\Sigma}$  imposée ». La première conduit à déterminer les rigidités homogénéisées tandis que la deuxième calcule les souplesses homogénéisées.
- 2) Pour assurer la compatibilité des problèmes HCP et HMP avec l'hypothèse (II.29) on doit valider l'intégrale (cf. [Cartraud, 1994]):

$$\int_{Sup \cup Inf} (\mathbf{u}^{per} \otimes_s \mathbf{n}) ds = 0 \quad (\text{II.33})$$

En effet, si on suppose que la moyenne des déformations  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y$  est connue tout en imposant  $\mathbf{u}^{per}$  comme étant un champ de déplacement  $y_1, y_3$ -périodiques ,

on démontre sans difficulté que  $\langle \epsilon(\mathbf{u}^{per}) \rangle_Y = 0$ , d'où la validation.

En pratique, pour l'approche HCP, imposer  $E$  dans les conditions aux limites cinématiques, revient à identifier la déformation moyenne «  $\langle \epsilon(\mathbf{u}) \rangle_Y = E$  » (cf. § II.3.1). D'autre part, dans la mise en oeuvre de la « HMP à  $\Sigma$  imposée », l'idée de base est d'itérer sur  $\langle \epsilon(\mathbf{u}) \rangle_Y$  afin de trouver l'égalité entre la valeur imposée sur les bords périodiques et celle calculée à l'intérieure de la cellule et cela en respectant la relation d'homogénéisation  $\langle \epsilon(\mathbf{u}) \rangle_Y = C^{hom} : \Sigma$ . Ce point sera approfondi dans la mise en oeuvre de cette approche (§ II.3.2).

- 3) Concernant le mouvement du corps rigide, les problèmes HP et HMP sont définis à un mouvement du corps rigide près alors que la solution du problème HCP est un champ de déplacement unique.
- 4) Les techniques HCP, HP et HMP vérifient la relation de macro-homogénéité de Hill-Mandel suivante :

$$E : \Sigma = \langle \epsilon \rangle : \langle \sigma \rangle = \langle \epsilon : \sigma \rangle \quad (II.34)$$

Cette relation postule que l'énergie de déformation de la cellule de base définie à partir des champs macroscopiques  $E$  et  $\Sigma$  est égale à la moyenne de l'énergie microscopique de déformation.

### II.2.3 Bilan

Après confrontation bibliographique et numérique entre plusieurs techniques d'homogénéisation, on décèle une insuffisance de ces techniques quant à l'application industrielle attendue de cette thèse (temps de calcul considérable, convergence lente, mise en oeuvre difficile...). Dans ce cadre, on définit une approche globale d'homogénéisation des échangeurs fondée sur l'encadrement du comportement global de chaque zone entre deux comportements limites déterminés par les schémas appelés HCP et HMP.

La formulation des problèmes HCP et HMP se base respectivement sur l'adaptation des approches en déformation et en contrainte de la méthode Hill-Mandel aux spécificités des échangeurs. Les approches classiques doivent être appliquées sur des VERs qui, comme le montre la figure II.10, doivent être de taille considérable pour permettre de fournir des résultats pertinents. En revanche, en décomposant les champs solution de ces approches en un champ macroscopique et un champ microscopique périodique dans les directions de la périodicité géométrique, nous appréhendons ainsi le comportement du champ de déplacement solution à l'intérieur du VER pour finalement développer les techniques HCP et HMP sur une seule cellule de base. Les modules effectifs calculés par ces approches constituent des limites vers lesquelles les valeurs des méthodes classiques convergent numériquement quand le nombre de cellules de base arrangées dans un VER augmente indéfiniment [J. DIB et al. Giens 2005].

Du point de vue numérique, il faudra rajouter la condition  $y_1, y_3$  – périodiques sur les faces périodiques de la cellule de base aux conditions en déformation et en contrainte de Hill-Mandel pour obtenir respectivement les problèmes HCP et HMP. C'est toute la complexité de la mise en oeuvre de ces techniques qui va être abordée dans la section § II.3.

## II.3 Mise en oeuvre des techniques d'homogénéisation HCP et HMP

L'approche générale retenue est illustrée (figure II.13) et consiste à isoler chaque passage et à appliquer un schéma d'homogénéisation dont l'adéquation physique s'accorde aux différentes hypothèses suivantes quant aux passages directement adjacents (figure II.14):

- le milieu proche du passage étudié est « rigide »: dans ce cas, l'approche cinématique périodique (HCP) est retenue;
- le bloc échangeur est constitué de passages identiques : un schéma complètement périodique (HP) est utilisé;
- le milieu proche est « souple » : c'est alors l'approche mécanique périodique (HMP) qui fait foi.

Au cours de cette partie, nous abordons la mise en oeuvre des techniques HCP et HMP, en supposant que le comportement équivalent d'un passage d'échangeur est encadré par les comportements limites de ces approches. C'est la démarche qui va permettre de passer de la formulation des problèmes de base à l'application numérique et au calcul par éléments finis des modules effectifs. Cette étape est primordiale dans le développement d'un outil dédié à l'homogénéisation des passages en vue de l'étude du comportement global d'un bloc échangeur. Nous procédons tout d'abord par étudier les problèmes HCP et HMP sans tenir compte dans un premier temps des chargements en pression interne et en température. Ensuite, dans un deuxième temps, nous appliquons les techniques de transformation et d'homogénéisation pour homogénéiser ces chargements. Finalement nous déterminons une relation de classement énergétique entre les approches HCP et HMP dans l'objectif de mettre en évidence, numériquement, les propriétés d'encadrement de ces approches vis-à-vis du comportement réel d'un passage isolé (§ III.3.2).

### II.3.1 Méthode HCP

La mise en oeuvre de l'approche HCP se base sur son écriture variationnelle où un changement de variable sur le champ de déplacement permet de transformer le problème de départ en un problème périodique facile à résoudre par des calculateurs éléments finis.

Comme déjà évoqué dans (§ II.2.2), notre problème consiste à chercher le champ solution  $\mathbf{u} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{per}$  vérifiant le problème de base suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla_y \mathbf{u} + \nabla_y^T \mathbf{u}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{per}) \end{cases} \text{ dans } Y \quad (\text{II.35})$$

où  $\mathbf{E}$  est un tenseur constant symétrique imposé, et où  $\mathbf{u}^{per}$  est  $y_1, y_3$ -périodique vérifiant  $\mathbf{u}^{per} = \mathbf{0}$  sur les faces sup. et inf. de  $Y$ .

#### Remarque :

On vérifie sans difficulté que  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y = \mathbf{E}$

### II.3.1.1 Formulation variationnelle

Ce problème étant un problème cinématique, commençons tout d'abord par définir l'ensemble des fonctions test qui satisfont les conditions cinématiques. Soit  $V^C$  cet ensemble défini à un mouvement rigide près:

$$V^C(\mathbf{E}) = \left\{ \mathbf{v}, \text{régularité}, \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \right. \\ \left. \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1, y_3 \text{ périodique} \right\} \quad (II.36)$$

La forme variationnelle du problème HCP s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V^C \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \cdot dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^C \end{array} \right. \quad (II.37)$$

Dans le cadre de l'application de la HCP, on fait le choix de discrétiser le champ de déplacement périodique  $\mathbf{u}^{per}$  qui possède des conditions cinématiques de contour simples. On note par ailleurs que la mise en oeuvre de la HCP est possible si on procède à la discrétisation du champ  $\mathbf{u}$  directement. Cependant l'objectif final étant de développer un outil métier permettant l'application des différentes techniques d'homogénéisation, on se contente de transformer le problème de départ en un problème périodique:

$$\mathbf{u}^{per} = \mathbf{u} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} \quad (II.38)$$

Pour cela, on redéfinit l'ensemble des champs  $y_1, y_3$ -périodiques cinématiquement admissibles par :

$$V^{C, per} = \left\{ \mathbf{v}^{per}, \text{régularité}, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1, y_3 \text{ périodique} \right\} \quad (II.39)$$

La forme variationnelle devient alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{per} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\mathbf{u}^{per}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = -E_{ij} \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.40)$$

### II.3.1.2 Problèmes élémentaires

Nous rappelons que  $\mathbf{E}$ , tenseur symétrique, représente la déformation imposée à la cellule de base. La linéarité du problème permet alors de décomposer le champ solution  $\mathbf{u}^{per}$  de (II.39) six champs élémentaires  $\boldsymbol{\chi}^{pq}$  :

$$\mathbf{u}^{per} = E_{pq} \cdot \boldsymbol{\chi}^{pq} \quad (II.41)$$

où chaque champ  $\boldsymbol{\chi}^{pq}$  est  $y_1, y_3$ -périodique et solution de : (en remplaçant II.41 dans II.40)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\chi}^{pq} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = - \int_{Y^s} h_{pqkh} \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.42)$$

Ainsi on obtient six problèmes élémentaires présentant l'avantage de ne dépendre que de

la géométrie et des propriétés de la cellule de base. Ces problèmes, indépendants des chargements extérieurs, sont obtenus par calcul éléments finis sur la cellule de base soumise à une déformation unitaire imposée. Le deuxième membre de (II.42) représente ce chargement résultant de cette déformation initiale imposée. On note que chacun de ces six problèmes se distingue par une déformation prenant une seule composante non nulle unitaire.

### II.3.1.3 Calcul des coefficients d'élasticité homogénéisés

Pour déduire le comportement équivalent par l'approche HCP, on établit la relation d'homogénéisation qui lie la déformation moyenne  $\mathbf{E}$  à la contrainte moyenne  $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle$  :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{kh}(\mathbf{u}) \rangle = H_{khpq}^{HCP} \cdot E_{pq} \quad (II.43)$$

En effet, de (II.38) et (II.41), on déduit que :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = E_{pq} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) + E_{ij} \quad (II.44)$$

puis en appliquant la loi de comportement (II.35.b) et en prenant la moyenne :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{kh}(\mathbf{u}) \rangle = \langle h_{khij} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \rangle = \langle h_{khij} \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \rangle E_{pq} + \langle h_{khpq} \rangle E_{pq} \quad (II.45)$$

D'où finalement l'expression des rigidités homogénéisées :

$$H_{khpq}^{HCP} = \langle h_{khpq} \rangle + \langle h_{khij} \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \rangle = \langle h_{khpq} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \rangle \quad (II.46)$$

Ces coefficients possèdent les propriétés de symétrie classiques et on peut montrer que l'opérateur d'élasticité homogénéisée est défini positif (démonstration similaire à l'approche classique de Hill-Mandel (cf. [Leguillon, 1990])).

### II.3.1.4 Considérations énergétiques

Les coefficients homogénéisés donnés par (II.46) s'écrivent sous la forme d'une valeur moyennée des coefficients  $h_{khpq}$  ( $\langle h_{khpq} \rangle$ ) pondérée par un terme correcteur  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \rangle$ . D'ailleurs, par des considérations énergétiques, l'expression des rigidités homogénéisées peut être réécrite en remplaçant le terme correcteur par une énergie de déformation, facile à obtenir à l'issue d'un calcul par éléments finis (e.g. [Code\_Aster]).

En effet, pour les termes diagonaux  $H_{pqpq}^{HCP}$ , l'énergie de déformation des problèmes élémentaires  $\boldsymbol{\chi}^{pq}$ , en utilisant la forme variationnelle (II.42), s'écrit:

$$W_d(\boldsymbol{\chi}^{pq}) = \frac{1}{2} \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \cdot \epsilon_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \cdot dy = -\frac{1}{2} \int_{Y^s} h_{pqkh} \cdot \epsilon_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) dy = -\frac{|Y|}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}_{pq}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \rangle \quad (II.47)$$

avec  $Y^s$  la partie structure de la cellule de base et  $|Y|$  son module (i.e. son volume dans le cas 3D)

d'où

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{pq}(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \rangle = -\frac{2}{|Y|} W_d(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \quad (II.48)$$

En reportant cette dernière égalité dans (II.46), on obtient pour les termes diagonaux :

$$H_{ppqq}^{HCP} = \langle h_{ppqq} \rangle - \frac{2}{|Y|} W_d(\boldsymbol{\chi}^{pq}) \quad (II.49)$$

En revanche pour les termes hors diagonale  $H_{ppqq}^{HCP}$ , considérons le problème «  $\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}$  » combinaison linéaire des problèmes «  $\boldsymbol{\chi}^{pp}$  » et «  $\boldsymbol{\chi}^{qq}$  » ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = - \int_{Y^s} (h_{ppkh} + h_{qqkh}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.50)$$

L'énergie de déformation de ces problèmes s'écrit:

$$W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) = \frac{1}{2} \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) \cdot \epsilon_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) \cdot dy \quad (II.51)$$

$$W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) = W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp}) + W_d(\boldsymbol{\chi}^{qq}) + \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pp}) \cdot \epsilon_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{qq}) \cdot dy \quad (II.52)$$

Pour calculer le troisième terme du second membre précédent, remplaçons  $\mathbf{v}^{per}$  par  $\boldsymbol{\chi}^{qq}$  dans le problème élémentaire  $\boldsymbol{\chi}^{pp}$  défini par (II.42), il vient :

$$\int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\chi}^{pp}) \cdot \epsilon_{kh}(\boldsymbol{\chi}^{qq}) \cdot dy = -|Y| \langle \sigma_{pp}(\boldsymbol{\chi}^{qq}) \rangle \quad (II.53)$$

En reportant cette dernière égalité dans (II.52) on obtient :

$$\langle \sigma_{pp}(\boldsymbol{\chi}^{qq}) \rangle = -\frac{1}{|Y|} (W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) - W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp}) - W_d(\boldsymbol{\chi}^{qq})) \quad (II.54)$$

Finalement, on substitue le terme correcteur de l'expression des coefficients homogénéisés (II.46) par (II.54) pour obtenir les coefficients homogénéisés hors diagonale:

$$H_{ppqq}^{HCP} = \langle h_{ppqq} \rangle - \frac{1}{|Y|} (W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp} + \boldsymbol{\chi}^{qq}) - W_d(\boldsymbol{\chi}^{pp}) - W_d(\boldsymbol{\chi}^{qq})) \quad (II.55)$$

### II.3.1.5 Bilan

Pour déterminer les modules effectifs par un schéma cinématique à déformations imposées HCP (figure II.16), on commence par mettre en oeuvre les différents problèmes élémentaires (II.42 et II.50). Ensuite on calcule par la méthode des éléments finis l'énergie de déformation. Cette énergie permet de déterminer finalement les coefficients homogènes diagonaux (II.49) et hors-diagonaux (II.55). L'application de ces problèmes nécessite d'imposer des conditions de périodicité dans les directions de la périodicité géométrique tout en bloquant les faces opposées dans la deuxième direction de la cellule de base. Les sollicitations sont des déformations initiales unitaires imposées pour chaque problème élémentaire.

La figure II.16 propose un exemple de cette mise en oeuvre pour l'obtention du coefficient

$$H_{1111}^{HCP} .$$

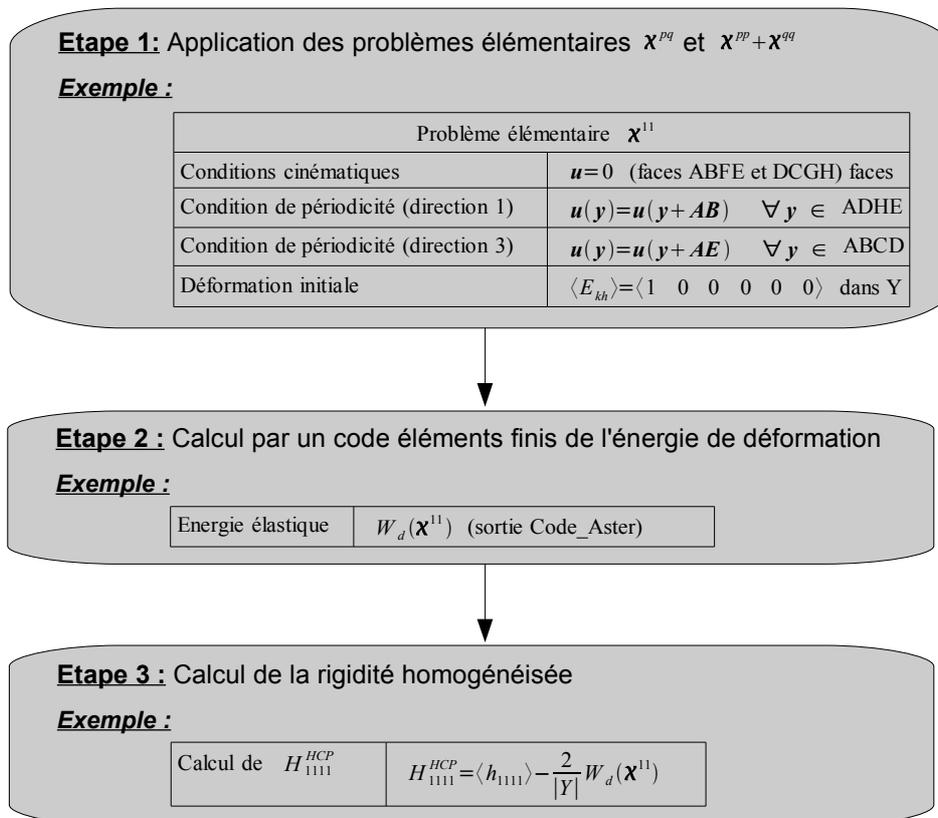


Figure II.16 - Étapes de calcul d'un coefficient de rigidité homogénéisée par schéma HCP (cf. figure II.15)

On note que, pour l'approche HP où le champ déplacement est supposé périodique dans toutes les directions, la mise en oeuvre est identique à celle de l'approche HCP tout en redéfinissant le champ cinématique à un mouvement de corps rigide près :

$$V^C(\mathbf{E}) = \{ \mathbf{v}, \text{régularité}, \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_2 y_3 \text{ périodique} \} \quad (II.56)$$

On a donc les mêmes expressions de rigidité homogénéisées (II.49 et II.55) et les mêmes problèmes élémentaires (II.42 et II.50). La seule différence réside dans les conditions de périodicité imposées, puisqu'ici les problèmes sont complètement périodiques dans les trois directions.

### II.3.2 Méthode HMP

Dans ce paragraphe, on propose une mise en oeuvre de l'approche « HMP à  $\Sigma$  imposée ». La particularité de cette approche réside dans le fait d'imposer une contrainte macroscopique alors qu'on cherche à déterminer un champ de déplacement solution supposé de la forme:

$$\mathbf{u} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{per} \quad (II.57)$$

où  $\mathbf{u}^{per}$  est  $y_1, y_3$ -périodiques

La déformation macroscopique «  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y$  » est inconnue à ce stade. Or d'après la relation d'homogénéisation qui relie les contraintes macroscopiques aux déformations microscopiques, on a :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y = \mathbf{C}^{HMP} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (II.58)$$

- $\boldsymbol{\Sigma}$  étant le tenseur des contraintes macroscopiques imposé
- $\mathbf{C}^{HMP}$  est le tenseur de souplesses homogénéisée à déterminer par approche HMP

En remplaçant cette dernière relation dans (II.57), on obtient:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{HMP} : \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{per} \quad (II.59)$$

Finalement, le problème de l'approche HMP appliqué à une cellule de base Y s'écrit (cf. II.2.2) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla_y \mathbf{u} + \nabla_y^T \mathbf{u}) \end{cases} \quad (II.60)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur les faces sup. et inf.} \quad (II.61)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{HMP} : \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{per} \quad \text{sur les faces périodiques} \quad (II.62)$$

où :

- $\boldsymbol{\Sigma}$  un tenseur constant symétrique imposé
- $\mathbf{u}^{per}$  est  $y_1, y_3$ -périodiques

Les souplesses homogénéisées «  $\mathbf{C}^{HMP}$  » sont à déterminer en même temps qu'elles sont imposées sur les faces périodiques. D'où l'approche itérative de cette technique d'homogénéisation. Pour ce faire, on estime tout d'abord les valeurs à imposer. Ensuite, on calcule la déformation macroscopique «  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y$  » dans la cellule de base. Cette déformation doit vérifier a priori la relation d'homogénéisation (II.58). Dans le cas contraire, on re-itére sur les valeurs imposées. Par contre, la linéarité du problème permet de simplifier cette démarche en établissant des relations énergétiques, fonction des souplesses homogénéisées, à partir de la décomposition du champ solution en des problèmes élémentaires. Ce point sera abordé dans les paragraphes qui suivent.

#### Remarques :

- On vérifie sans difficulté que lorsque  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y = \mathbf{C}^{HMP} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$  on a  $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle_Y = \boldsymbol{\Sigma}$

### II.3.2.1 Problèmes élémentaires

Le problème (II.60 à 62) étant linéaire élastique, on peut décomposer le champ solution par six champs  $\xi^{ij}$  qui ne dépendent que de la géométrie et des propriétés de la cellule de base, décomposition de la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_{ij} \xi^{ij} \quad (II.63)$$

Si bien que le problème peut se ré-écrire:

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}(\xi^{ij}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\xi^{ij}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\epsilon}(\xi^{ij}) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\xi^{ij}) = \frac{1}{2} (\nabla_y \xi^{ij} + \nabla_y^T \xi^{ij}) \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad (II.64)$$

avec les conditions:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\xi^{ij}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur les faces sup. et inf.} \quad (II.65)$$

$$\xi^{ij} = \mathbf{C}^{HMP} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\xi^{ij}) \cdot \mathbf{y} + \xi^{per,ij} \quad \text{sur les faces périodiques} \quad (II.66)$$

où :

$$\xi^{per,ij} \quad \text{est} \quad y_1, y_3 - \text{périodiques} \quad (II.67)$$

et

$$\tilde{\sigma}_{pq}(\xi^{ij}) = 1 \quad \text{si} \quad pq = ij \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_{pq}(\xi^{ij}) = 0 \quad \text{si} \quad pq \neq ij \quad (II.68)$$

La relation (II.66) peut être imposée sous forme d'une liaison cinématique entre les faces périodiques. Cela permet d'éliminer le terme  $\xi^{per,ij}$ . En effet, définissons  $\Delta^k \mathbf{y}$  le vecteur période dans la  $k^{\text{ième}}$  direction de périodicité (figure II.17). La liaison cinématique entre les faces périodiques dans cette direction est :

$$\Delta^k \xi^{ij} = \xi^{ij}(\mathbf{y} + \Delta^k \mathbf{y}) - \xi^{ij}(\mathbf{y}) = \mathbf{C}^{HMP} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\xi^{ij}) \cdot \Delta^k \mathbf{y} \quad \text{sur les faces périodiques} \quad (II.69)$$

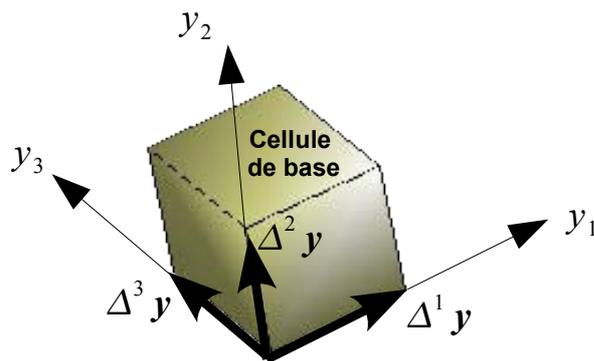


Figure II.17 - Vecteurs périodes pour une cellule de base Y-périodique

#### Remarque :

La liaison périodique (II.69) est facile à imposer dans le code de calcul éléments finis (e.g. [Code\_Aster]).

### II.3.2.2 Considérations énergétiques

En appliquant la relation de macro-homogénéité de Hill-Mandel (II.34) aux problèmes élémentaires  $(\xi^{ij})$  (II.64 à 66) on peut rapidement établir les relations énergétiques :

a) pour les coefficients diagonaux :

$$C_{ijj}^{HMP} = \frac{2}{|Y|} W_d(\xi^{ij}) \quad (II.70)$$

b) pour les coefficients hors-diagonaux :

$$C_{iij}^{HMP} = \frac{1}{|Y|} (W_d(\xi^{ii} + \xi^{jj}) - W_d(\xi^{ii}) - W_d(\xi^{jj})) \quad (II.71)$$

D'après ces considérations énergétiques on constate que les souplesses homogénéisées peuvent être calculées à partir de l'énergie de déformation des problèmes élémentaires qui eux dépendent à leurs tours des souplesses via la condition sur les faces périodiques (II.69). Ces souplesses peuvent donc être déterminées par approche itérative. Toutefois, on expose par la suite une démarche de calcul directe de ces coefficients, en prenant en compte d'autres relations énergétiques en fonction du chargement.

### II.3.2.3 Décomposition des problèmes élémentaires

Par souci de simplifier la lecture, on s'intéresse ici à un cas 2D ( $y_1$ -périodicité) (figure II.18). De ce fait, le cas volumique  $y_1, y_3$ -périodiques qui permet de modéliser les passages d'échangeur possédant deux directions de périodicité perpendiculaires, est déplacé en (annexe A).

L'application numérique des problèmes élémentaires  $(\xi^{ij})$  (II.64 à 66) nécessite d'imposer des conditions en contrainte (II.65) sur les faces supérieure et inférieure de la cellule de base et des liaisons cinématiques (II.69) sur les bords périodiques. Ces liaisons dépendent des modules équivalents qui sont inconnus. Pour déterminer ces inconnus, nous cherchons à décomposer les problèmes élémentaires en d'autres indépendants de ces modules.

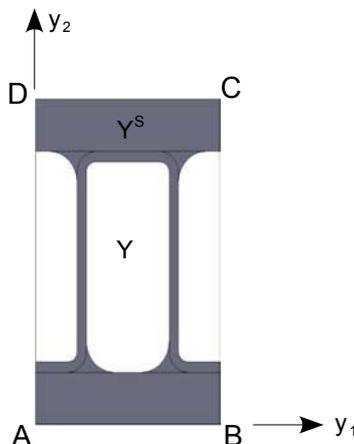


Figure II.18 - Cellule de base Y d'une onde droite

**Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes**

En effet, pour le cas 2D retenu ici,  $\Delta^1 \mathbf{y}$  désigne donc le vecteur période dans la direction 1:

$$\Delta^1 \mathbf{y} = \langle \overline{AB}, 0 \rangle \quad (II.72)$$

La relation (II.69) s'écrit :

$$\Delta^1 \xi^{ij} = \xi^{ij}(\mathbf{y} + \Delta^1 \mathbf{y}) - \xi^{ij}(\mathbf{y}) = \mathbf{C}^{HMP} : \tilde{\sigma}(\xi^{ij}) \cdot \langle \overline{AB}, 0 \rangle \quad (II.73)$$

En adoptant la notation indicielle suivante,

$$\mathbf{C}^{HMP} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{HMP} & C_{1122}^{HMP} & 0 \\ C_{1122}^{HMP} & C_{2222}^{HMP} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{HMP} \end{bmatrix} \quad (II.74)$$

on déduit le tableau de chargement suivant, défini à un mouvement de corps rigide près :

Problème élémentaire $\xi^{ij}$	Tenseur de contraintes sur les faces Sup. et Inf. $\tilde{\sigma}(\xi^{ij})$	Liaison cinématique sur les faces périodiques $\Delta^1 \xi^{ij}$
$\xi^{11}$	$\langle 1, 0, 0 \rangle$	$\langle C_{1111}^{HMP} \cdot \overline{AB}, 0 \rangle$
$\xi^{22}$	$\langle 0, 1, 0 \rangle$	$\langle C_{1122}^{HMP} \cdot \overline{AB}, 0 \rangle$
$\xi^{12}$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	$\langle 0, C_{1212}^{HMP} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \rangle$

**Tableau II.2** - Chargement HMP mixte cas 2D (  $y_1$  périodicité )

D'autre part et en tenant compte de la linéarité des problèmes  $\xi^{ij}$ , nous décomposons le chargement en un chargement en contrainte (tableau II.3) et un chargement de liaison cinématique (tableau II.4) tout en définissant des nouveaux problèmes indépendants de  $C_{ijkh}^{HMP}$ .

Problème élémentaire $\xi_{,0}^{ij}$	Tenseur de contraintes sur les faces Sup. et Inf. $\tilde{\sigma}(\xi_{,0}^{ij})$	Périodicité pure sur les faces périodiques $\Delta^1 \xi_{,0}^{ij}$
$\xi_{,0}^{11}$	$\langle 1, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$
$\xi_{,0}^{22}$	$\langle 0, 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$
$\xi_{,0}^{12}$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$

**Tableau II.3** - Chargement HMP en contrainte cas 2D (  $y_1$  périodicité )

Problème élémentaire $\kappa^{ij}$	Tenseur de contraintes sur les faces Sup. et Inf. $\tilde{\sigma}(\kappa^{ij})$	Liaison cinématique sur les faces périodiques $\Delta^1 \kappa^{ij}$
$\kappa^{11}$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle \overline{AB}, 0 \rangle$
$\kappa^{12}$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, \frac{\overline{AB}}{2} \rangle$

Tableau II.4 - Chargement HMP en liaison cinématique cas 2D (  $y_1$  périodicité )

Les problèmes  $\xi^{ij}$  sont donc des combinaisons linéaires des problèmes  $\xi_{,0}^{ij}$  et  $\kappa^{ij}$ . Nous établissons alors les relations énergétiques entre ces différents problèmes :

$$\begin{cases} W_d(\xi^{11}) = W_d(\xi_{,0}^{11}) + \kappa_{11} (C_{1111}^{HMP})^2 \\ W_d(\xi^{22}) = W_d(\xi_{,0}^{22}) + \kappa_{11} (C_{1122}^{HMP})^2 \\ W_d(\xi^{12}) = W_d(\xi_{,0}^{12}) + \kappa_{12} (C_{1212}^{HMP})^2 \end{cases} \quad (II.75)$$

où

- (a)  $\kappa_{11}$  est l'énergie de déformation du problème  $\kappa^{11}$  qui est obtenu à partir du problème  $\xi^{11}$  en supposant  $C_{1111}^{HMP} = 1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{11} = W_d(\kappa^{11}) = Cte \quad (II.76)$$

- (b)  $\kappa_{12}$  est l'énergie de déformation du problème  $\kappa^{12}$  qui est obtenue à partir du problème  $\xi^{12}$  en supposant  $C_{1212}^{HMP} = 1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{12} = W_d(\kappa^{12}) = Cte \quad (II.77)$$

- (c)  $W_d(\xi_{,0}^{ij})$  est l'énergie de déformation du problème  $\xi^{ij}$  soumis à un chargement en contrainte unitaire et d'une périodicité  $y_1$  périodicité (tableau II.3) :

$$W_d(\xi_{,0}^{ij}) = Cte \quad (II.78)$$

### Remarques importantes :

- 1) Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on montre que l'énergie de déformation du problème  $\kappa^{12}$  est nulle

$$\kappa_{12} = 0 \quad (II.79)$$

En effet, en empêchant le mouvement du corps solide tout en respectant la liaison cinématique, le problème  $\kappa^{12}$  est bien posé. D'autre part, on définit dans la cellule de base le champ de déplacement  $u = \langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \rangle$ . Ce champ vérifie les conditions aux limites du problème  $\kappa^{12}$  tout en engendrant une déformation microscopique

nulle et alors une énergie de déformation également nulle. Le problème admettant une unique solution qui minimise l'énergie de déformation, cette solution est déterminée alors par  $\kappa^{12} = \langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \rangle$ . Cette propriété sera confirmée numériquement par le biais d'un exemple tridimensionnel (cf. annexe B).

- 2) On note que l'énergie de déformation du problème  $\xi_{,0}^{11}$  est nulle, en l'absence de chargement sur les faces supérieures et inférieures :

$$W_d(\xi_{,0}^{11})=0 \quad (II.80)$$

Maintenant qu'on a montré que  $\kappa_{12}$  et  $W_d(\xi_{,0}^{11})$  sont nulles, les relations énergétiques (II.75) deviennent alors:

$$\begin{cases} W_d(\xi^{11}) = \kappa_{11} (C_{1111}^{HMP})^2 \\ W_d(\xi^{22}) = W_d(\xi_{,0}^{22}) + \kappa_{11} (C_{1122}^{HMP})^2 \\ W_d(\xi^{12}) = W_d(\xi_{,0}^{12}) \end{cases} \quad (II.81)$$

Finalement, à partir de ce dernier système et en tenant compte des considérations énergétiques (II.70) et des relations en moyenne (II.58), on peut déterminer successivement les coefficients d'homogénéisation comme suit :

$$\begin{aligned} C_{1111}^{HMP} &= \frac{|Y|}{2 \cdot \kappa_{11}} \\ C_{1122}^{HMP} &= \langle \epsilon_{22}(\xi^{11}(C_{1111}^{HMP})) \rangle \\ C_{2222}^{HMP} &= 2 \frac{W_d(\xi_{,0}^{22}) + \kappa_{11} (C_{1122}^{HMP})^2}{|Y|} \\ C_{1212}^{HMP} &= 2 \frac{W_d(\xi_{,0}^{12})}{|Y|} \end{aligned} \quad (II.82)$$

Enfin, on a au total quatre problèmes élémentaires (figure II.19) pour déterminer les quatre coefficients de souplesse homogénéisés dans le cas 2D. Ces problèmes élémentaires laissent les faces supérieure et inférieure de la cellule de base libres de se déformer sous des sollicitations en contrainte et des liaisons cinématiques imposées aux faces périodiques.

#### II.3.2.4 Bilan

Au cours de ce paragraphe, nous avons présenté la mise en oeuvre de la technique d'homogénéisation permettant de déterminer les souplesses effectives équivalentes d'un passage d'échangeur. Le comportement de l'empilement est considéré comme souple. Une synthèse des étapes de la mise en oeuvre numérique de l'approche HMP au cas 2D ( $y_1$ -périodicité) est illustrée par la figure II.19.

Afin de déterminer les souplesses homogénéisées, on commence par résoudre le premier problème  $\kappa^{11}$ , où on impose un écart de déplacement entre les faces  $[DA]$  et  $[BC]$  de module égal au vecteur période  $\Delta^1 y = \langle \overline{AB}, 0 \rangle$ . L'énergie de déformation calculée

détermine alors le coefficient  $C_{1111}^{HMP}$ . Ce dernier est nécessaire pour imposer les conditions en déplacement adéquates au problème  $\xi^{11}$  ayant les faces supérieure et inférieure libres. A l'issue du calcul par éléments finis de champ de déformation,  $C_{1122}^{HMP}$  peut être déterminé par un calcul de moyenne de «  $\epsilon_{12}(\xi^{11})$  ». Ce dernier coefficient et l'énergie de déformation du problème  $\xi_{,0}^{22}$  interviennent dans le calcul de  $C_{2222}^{HMP}$ ,  $\xi_{,0}^{22}$  étant le problème élémentaire d'une périodicité pure dans la direction de périodicité géométrique et d'une traction unitaire sur les faces supérieure et inférieure. Le cisaillement unitaire imposé sur ces faces avec la périodicité pure (problème  $\xi_{,0}^{33}$ ) permet de calculer le module de cisaillement homogénéisé indépendamment des autres problèmes.

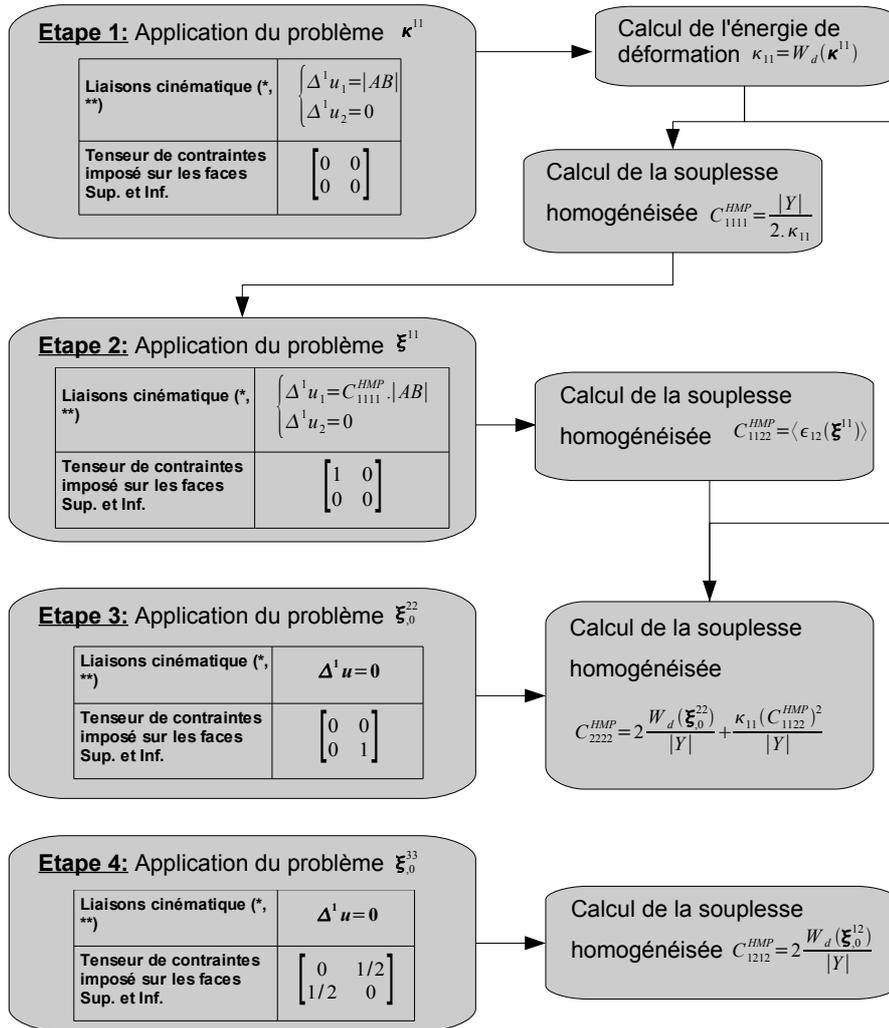


Figure II.19 - Étapes de calcul de la souplesse homogénéisée par schéma HMP, cas 2D  $y_1$  périodicité (se repérer à la figure II.18)

- (\*) on élimine le mouvement du corps rigide :  $\mathbf{u}(A) = \mathbf{0}$  et  $u_2(B) = 0$   
 (\*\*)  $\Delta^1 \mathbf{u} = \mathbf{u}(\Delta^1 \mathbf{y} + \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \text{face AD et } \Delta^1 \mathbf{y} = \langle \overline{AB}, 0 \rangle$

Finalement on note que dans le cadre d'un comportement orthotrope, on a au total quatre problèmes élémentaires pour déterminer les quatre modules effectifs dans le cas 2D ( $y_1$ -périodicité).

### II.3.3 Homogénéisation du chargement en température

Dans ce paragraphe, on propose deux méthodes de calcul du chargement équivalent en température. La première se base sur l'approche HCP et la deuxième, plus particulière, se base sur la transformation du chargement thermique dans une structure constituée d'un seul matériau. La comparaison des deux approches validera la valeur du chargement équivalent retenue.

La thermo-élasticité prend en compte les propriétés de dilatation des matériaux sous l'effet d'une élévation de température. Dans le domaine linéaire, la loi de comportement généralement retenue s'écrit :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{h}](\{\boldsymbol{\epsilon}\} - \{\boldsymbol{\alpha}\} \Delta T) \quad (\text{II.83})$$

La température «  $T$  » est supposée constante sur la cellule de base et ne dépend donc que de la variable macroscopique. Elle peut être déduite à partir des températures microscopique «  $\theta$  » par des formules de moyenne :

$$T = \langle \theta \rangle \quad (\text{II.84})$$

Le coefficient de dilatation thermique  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  est une fonction périodique, définie sur la cellule de base et étendue par périodicité à tout le domaine. La dilatation est supposée ici isotrope pour chaque constituant:

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.85})$$

#### II.3.3.1 Approche HCP

Rappelons tout d'abord la formulation de l'approche cinématique périodique en absence du chargement en pression :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V^C \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \cdot dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^C \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

avec :

$$V^C(\mathbf{E}) = \{ \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique} \} \quad (\text{II.87})$$

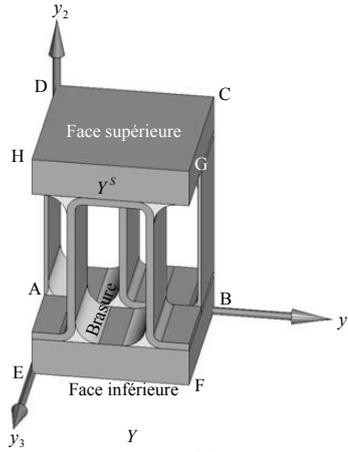


Figure II.20 - Cellule de base  $Y$  d'un passage d'échangeur

On utilise la décomposition de l'approche HCP (par analogie au § II.3.1) tout en considérant un nouveau champ périodique engendré par le chargement en température «  $\Delta T$  » à l'intérieur des passages «  $\Delta T \cdot \chi^{therm}$  ». On écrit alors le champ de déplacement solution:

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} + E_{pq} \cdot \chi^{pq} + \Delta T \cdot \chi^{therm} \quad (II.88)$$

Un nouveau problème élémentaire  $\chi^{therm}$  lié au chargement en température se définit alors par sa forme variationnelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi^{therm} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\chi^{therm}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = \int_{Y^s} h_{mnpq} \alpha_{pq} \epsilon_{mn}(\mathbf{v}^{per}) dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.89)$$

avec :

$$V^{C, per} = \{ \mathbf{v}^{per} \in V, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique} \} \quad (II.90)$$

Par ailleurs, l'homogénéisation du chargement en température s'obtient en écrivant la relation liant la moyenne de contraintes microscopiques à celles de déformations microscopiques (par analogie au § II.3.1.3). Il en résulte:

$$\langle \sigma_{kh}(\mathbf{u}) \rangle_Y = H_{khij}^{HCP} E_{ij} - \Delta T \cdot \tilde{\Sigma}_{kh}^{therm} \quad (II.91)$$

avec  $[H^{HCP}]$  la matrice de rigidité homogénéisée par approche HCP (II.49 et II.55).

$$\text{et } \tilde{\Sigma}_{kh}^{therm} = \left\{ \langle h_{khmn} \alpha_{mn} \rangle \delta_h^k - \langle \sigma_{kh}(\chi^{therm}) \rangle \right\} \quad (II.92)$$

$\tilde{\Sigma}_{kh}$  est donc la précontrainte à imposer dans le domaine homogène pour traduire l'effet macroscopique de la température. Cette précontrainte prend aussi la forme d'une moyenne  $\langle h_{khmn} \alpha_{mn} \rangle$  corrigée par la moyenne des contraintes engendrées par le problème élémentaire ( $\chi^{therm}$ ) sous chargement thermique. Dans ce problème élémentaire, les conditions cinématiques sont similaires aux conditions cinématiques des problèmes élémentaires  $\chi^{pq}$  (II.42) soient donc des conditions de périodicité sur les faces périodiques et des conditions uniformes en déplacement sur les faces supérieure et

inférieure de la cellule de base.

### II.3.3.2 Méthode de transformation

Dans cette méthode on considère un passage complet (figure II.21) sur lequel on souhaite transformer le chargement de température dans la structure en un chargement macroscopique sur ce passage. Pour cela, on écrit le problème thermo-mécanique réel sur ce passage considéré alors comme un volume élémentaire représentatif:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \cdot dy = \int_{Y^s} h_{mnpq} \cdot \alpha_{pq} \Delta T \cdot \epsilon_{mn}(\mathbf{v}^{per}) dy \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{cases} \quad (II.93)$$

avec  $V = \{ \mathbf{v} \text{ est régulier dans } Y \}$

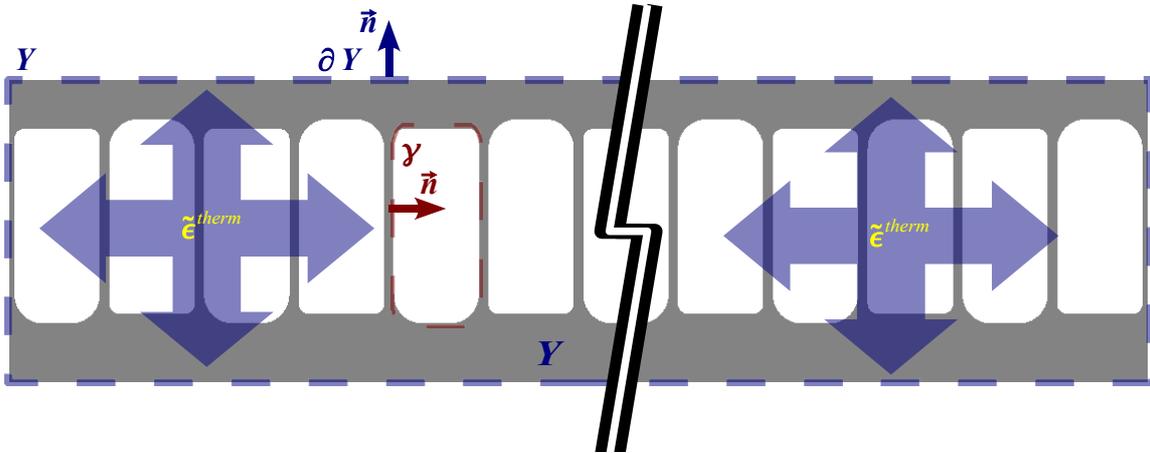


Figure II.21 - Exemple d'un passage d'échangeur sous chargement thermique

Il s'agit d'un problème thermo-mécanique posé sur chaque passage isolé. La sollicitation thermique peut être considérée comme une déformation initiale imposée sur la partie structure de ce passage:

$$\{ \tilde{\epsilon}^{therm} \} = T \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (II.94)$$

La structure est considérée comme étant constituée d'un seul matériau. Ce dernier chargement peut être alors écrit sous forme d'un chargement constant en déformation initiale à l'intérieur du domaine microscopique, ou via un déplacement imposé sur le contour extérieur  $\partial Y$  de ce domaine (en appliquant la transformation de Green par exemple). Ceci constitue un chargement macroscopique imposé sur le matériau homogénéisé. On a donc :

$$\{ \tilde{\mathbf{E}}^{therm} \} = \{ \tilde{\epsilon}^{therm} \} \quad (II.95)$$

$\{ \tilde{\mathbf{E}}^{therm} \}$  est la déformation initiale à imposer dans le domaine homogène pour simuler le

chargement macroscopique de la température dans les passages. Cette déformation peut être déduite à partir du coefficient de la dilatation thermique du matériau constituant chaque passage et la température macroscopique «  $T$  ». A noter que c'est une déformation isotrope qui générera des contraintes globales anisotropes. Cela est dû à l'orthotropie du comportement homogénéisé.

### II.3.3.3 Validation du chargement en température

Cette validation se base sur le calcul du chargement par les deux méthodes vues dans ce paragraphe. Pour simplifier l'écriture, on choisit le coefficient  $\tilde{E}_{11}^{therm} = \alpha \Delta T$  du chargement en température. Les autres coefficients peuvent être déterminés par analogie. La démarche est la suivante :

- Tout d'abord on établit une relation qui permet de relier les problèmes élémentaires thermique et mécanique de l'approche HCP. Cette relation est utile dans le développement ultérieur du chargement homogénéisé.
- Ensuite on développe l'expression du chargement donnée par l'approche HCP, tout en supposant que la structure est composée d'un seul matériau.
- Enfin on compare le chargement en température ainsi développé avec celui de la méthode de transformation.

Reprenant tout d'abord les formes variationnelles des problèmes élémentaires  $\chi^{11}$  et  $\chi^{therm}$ , on a respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi^{11} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\chi^{11}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = - \int_{Y^s} h_{11kh} \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.96)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi^{therm} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\chi^{therm}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = \int_{Y^s} h_{mnpq} \cdot \alpha_{pq} \cdot \epsilon_{mn}(\mathbf{v}^{per}) dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.97)$$

En remplaçant  $\mathbf{v}^{per}$  par  $\chi^{therm}$  dans (II.96) et par  $\chi^{11}$  dans (II.97) on démontre que:

$$\int_{Y^s} h_{mnpq} \cdot \alpha_{pq} \cdot \epsilon_{mn}(\chi^{11}) dy = - \int_{Y^s} h_{11kh} \cdot \epsilon_{kh}(\chi^{therm}) dy = -|Y| \langle \sigma_{11}(\chi^{therm}) \rangle \quad (II.98)$$

Ensuite, d'après (II.92) et en injectant (II.98), on développe  $\tilde{\Sigma}_{11}^{therm}$  calculé par approche HCP, tout en supposant que le coefficient de dilatation thermique «  $\alpha$  » et les rigidités  $[h]$  du matériau sont constants sur la structure (on rappelle que la méthode de transformation n'est applicable que lorsque la structure est constituée d'un seul matériau):

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11}^{therm} &= \left\{ \langle h_{11mn} \alpha_{mn} \rangle - \langle \sigma_{11}(\chi^{therm}) \rangle \right\} \\ &= \alpha \left\{ \langle h_{1111} + h_{1122} + h_{1133} \rangle + \langle (h_{1111} + h_{1122} + h_{1133}) \epsilon_{11}(\chi^{11}) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle (h_{2211} + h_{2222} + h_{2233}) \epsilon_{22}(\chi^{11}) \rangle + \langle (h_{3311} + h_{3322} + h_{3333}) \epsilon_{33}(\chi^{11}) \rangle \right\} \quad (\text{d'après II.98}) \\ &= \alpha \left\{ \langle h_{1111} + h_{1122} + h_{1133} \rangle + \langle h_{1111} \epsilon_{11}(\chi^{11}) + h_{1122} \epsilon_{22}(\chi^{11}) + h_{1133} \epsilon_{33}(\chi^{11}) \rangle + \right. \\ &\quad \left. \langle h_{2211} \epsilon_{11}(\chi^{11}) + h_{2222} \epsilon_{22}(\chi^{11}) + h_{2233} \epsilon_{33}(\chi^{11}) \rangle + \langle h_{3311} \epsilon_{11}(\chi^{11}) + h_{3322} \epsilon_{22}(\chi^{11}) + h_{3333} \epsilon_{33}(\chi^{11}) \rangle \right\} \end{aligned}$$

## Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes

$$\begin{aligned}
 &= \alpha \left\{ \langle h_{1111} \rangle + \langle h_{1122} \rangle + \langle h_{1133} \rangle + \langle \sigma_{11}(\mathbf{X}^{11}) \rangle + \langle \sigma_{22}(\mathbf{X}^{11}) \rangle + \langle \sigma_{33}(\mathbf{X}^{11}) \rangle \right\} \quad (\text{par symétrie}) \\
 &= \alpha \left\{ \langle h_{1111} \rangle + \langle h_{1122} \rangle + \langle h_{1133} \rangle + \langle \sigma_{11}(\mathbf{X}^{11}) \rangle + \langle \sigma_{11}(\mathbf{X}^{22}) \rangle + \langle \sigma_{11}(\mathbf{X}^{33}) \rangle \right\} \\
 &= \alpha \left\{ H_{1111}^{HCP} + H_{1122}^{HCP} + H_{1133}^{HCP} \right\} \quad (\text{d'après II.46})
 \end{aligned}$$

De la même façon en développant les autres composantes de  $\tilde{\Sigma}^{therm}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Sigma}_{11}^{therm} &= \alpha \left\{ H_{1111}^{HCP} + H_{1122}^{HCP} + H_{1133}^{HCP} \right\} \\
 \tilde{\Sigma}_{22}^{therm} &= \alpha \left\{ H_{2211}^{HCP} + H_{2222}^{HCP} + H_{2233}^{HCP} \right\} \\
 \tilde{\Sigma}_{33}^{therm} &= \alpha \left\{ H_{3311}^{HCP} + H_{3322}^{HCP} + H_{3333}^{HCP} \right\} \\
 \tilde{\Sigma}_{12}^{therm} &= \tilde{\Sigma}_{13}^{therm} = \tilde{\Sigma}_{23}^{therm} = 0
 \end{aligned} \tag{II.99}$$

Finalement, d'après II.91 et II.99, on déduit que :  $\tilde{E}_{11}^{therm} = \alpha T$  qui correspond au chargement en température calculé par la méthode de transformation (II.94).

En d'autres termes, la déformation thermique initiale du domaine homogénéisé est la même que celle du matériau que constitue la structure. Le coefficient de dilatation thermique homogénéisée est donc le même que celui du matériau :

$$\{A^{hom}\} = \{\alpha\} \tag{II.100}$$

On trouve d'autres démonstrations de ce résultat dans la littérature. Par exemple [Cardona, 2000] démontre que le coefficient de dilatation thermique d'un matériau troué est le même que celui du matériau massif.

### II.3.3.4 Bilan

En conclusion, le chargement thermique macroscopique se définit en imposant dans les passages homogénéisés le champ de température moyen (fourni par l'entreprise) et le coefficient de dilatation thermique du matériau constituant cet échangeur. Ayant un comportement orthotrope, cela générera des contraintes thermiques globales anisotropes. On rappelle que l'échangeur est considéré comme une structure constituée d'un matériau unique.

### II.3.4 Homogénéisation du chargement en pression

Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer le chargement macroscopique en pression par analogie à la démarche vue au paragraphe (§ II.3.3). Pour ce faire, on présente deux méthodes différentes. La première se base sur la formulation du problème HCP et la deuxième se base sur la transformation du chargement en pression. La comparaison des deux approches validera la valeur du chargement équivalent retenue.

#### II.3.4.1 Approche HCP

Pour étudier le chargement microscopique en pression, on considère un champ de déplacement périodique induit par ce chargement. Par conséquent, le champ solution peut être décomposé par :

- un champ moyen macroscopique :  $E \cdot y$
- des champs microscopiques prenant en compte la micro-structure périodique dépourvue de la pression :  $E_{pq} \cdot \chi^{pq}$
- un nouveau champ périodique engendré par le chargement en pression à l'intérieur des passages :  $-p \cdot \chi^{méca}$  ,  $p$  désignant la pression

Le champ de déplacement solution s'écrit alors:

$$u = E \cdot y + E_{pq} \cdot \chi^{pq} - p \cdot \chi^{méca} \quad (II.101)$$

Un nouveau problème élémentaire  $\chi^{méca}$  lié au chargement en pression apparaît ainsi et se définit par sa forme variationnelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi^{méca} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^S} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\chi^{méca}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = - \int_{\gamma} n_i \cdot v_i^{per} ds \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{array} \right. \quad (II.102)$$

avec :

$$V^{C, per} = \{ \mathbf{v}^{per} \in V, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique} \} \quad (II.103)$$

où  $Y^S$  représente la partie structure de la cellule de base  $Y$  ,  $\gamma$  les contours des cavités sur lesquelles une pression est imposée et  $n$  le vecteur normal à  $\gamma$  dirigé vers l'intérieur de la cavité.

Par ailleurs, l'homogénéisation du chargement en pression s'obtient en écrivant la relation liant la moyenne des contraintes microscopiques à celles des déformations microscopiques.

En effet, la définition générale de la moyenne en contrainte prenant en compte la présence des contraintes sur les cavités internes (relation (II.16)) s'écrit:

$$\langle \sigma_{kh} \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \left( \int_{Y^S} \sigma_{kh} dy - \int_{\gamma} \frac{1}{2} (\sigma_{ki} n_i y_h + \sigma_{hj} n_j y_k) ds \right) \quad (II.104)$$

Les contraintes sur  $\gamma$  résultent de l'action de la pression  $p$  sur les contours. En introduisant cette pression dans l'expression (II.104) et après développement on obtient :

$$\langle \sigma_{kh}(\mathbf{u}) \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} \sigma_{kh}(\mathbf{u}) dy + p \cdot \frac{|Y| - |Y^s|}{|Y|} \delta_h^k \quad (\text{II.105})$$

où  $\delta_h^k$  désigne l'indice de Kronecker ( $\delta_h^k = 1$  si  $k = h$  et  $\delta_h^k = 0$  si  $k \neq h$ )

On remplace maintenant le champ solution (II.101) dans cette dernière équation et après développement (par analogie au § II.3.1.3), on obtient une nouvelle expression d'homogénéisation :

$$\langle \sigma_{kh}(\mathbf{u}) \rangle_Y = H_{khij}^{HCP} E_{ij} + p \cdot \tilde{\Sigma}_{kh}^{méca} \quad (\text{II.106})$$

avec  $[H^{HCP}]$  la matrice de rigidité homogénéisée par approche HCP (II.49 et II.55)

$$\text{et } \tilde{\Sigma}_{kh}^{méca} = \left\{ \frac{|Y| - |Y^s|}{|Y|} \delta_h^k - \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} \sigma_{kh}(\chi^{méca}) dy \right\} \quad (\text{II.107})$$

$\tilde{\Sigma}_{kh}^{méca}$  est donc la précontrainte à imposer dans le domaine homogène pour traduire l'effet macroscopique de la pression. Cette précontrainte prend la forme d'une constante «  $\frac{|Y| - |Y^s|}{|Y|}$  » complétée par la moyenne des contraintes engendrées par le problème élémentaire ( $\chi^{méca}$ ) sous chargement en pression. Dans ce problème élémentaire, les conditions cinématiques sont similaires aux conditions cinématiques des problèmes élémentaires  $\chi^{pq}$  (II.42) à savoir, des conditions de périodicité sur les faces périodiques et des conditions uniformes en déplacement sur les faces supérieure et inférieure de la cellule de base.

### II.3.4.2 Méthode de transformation

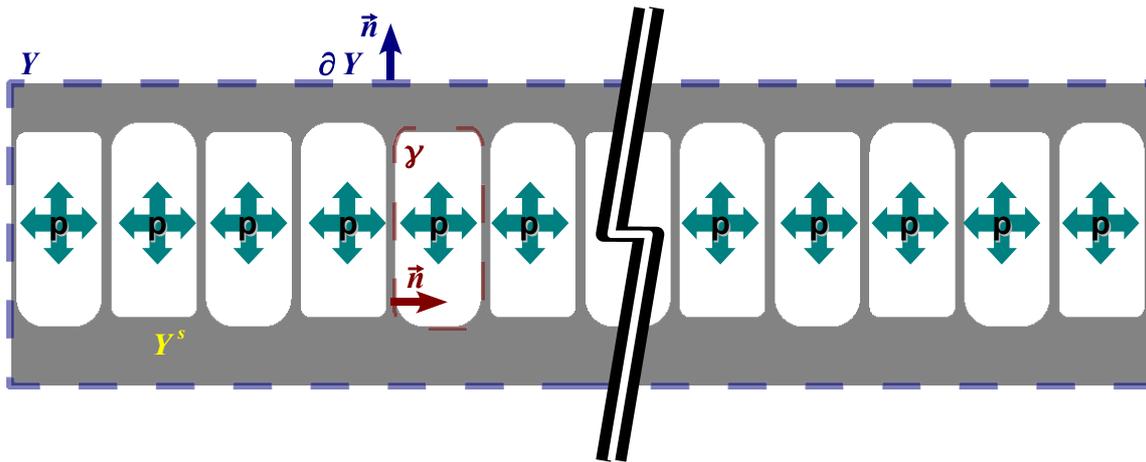


Figure II.22 - Exemple d'un passage d'échangeur sous chargement en pression

Dans cette méthode on considère un passage complet (toute la structure est considérée comme un VER constituée d'un seul matériau (figure II.22)) sur lequel on souhaite transformer la pression «  $p$  » supposée constante dans les cavités en un chargement dans la structure. Pour cela, on applique la transformation de Green au problème

mécanique réel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \cdot dy = -p \int_Y n_i \cdot v_i ds \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{array} \right. \quad (\text{II.108})$$

On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \cdot dy = p \int_{\partial Y} n_i \cdot v_i ds - p \int_{Y^s} \epsilon_{ii}(\mathbf{v}) dy \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{array} \right. \quad (\text{II.109})$$

Par linéarité, le chargement en pression se décompose alors (figure II.23) en un chargement sur le contour extérieur du passage :

$$p \int_{\partial Y} n_i \cdot v_i ds \quad (\text{II.110})$$

et un chargement en précontrainte dans la structure :

$$-p \int_{Y^s} \epsilon_{ii}(\mathbf{v}) dy \quad (\text{II.111})$$

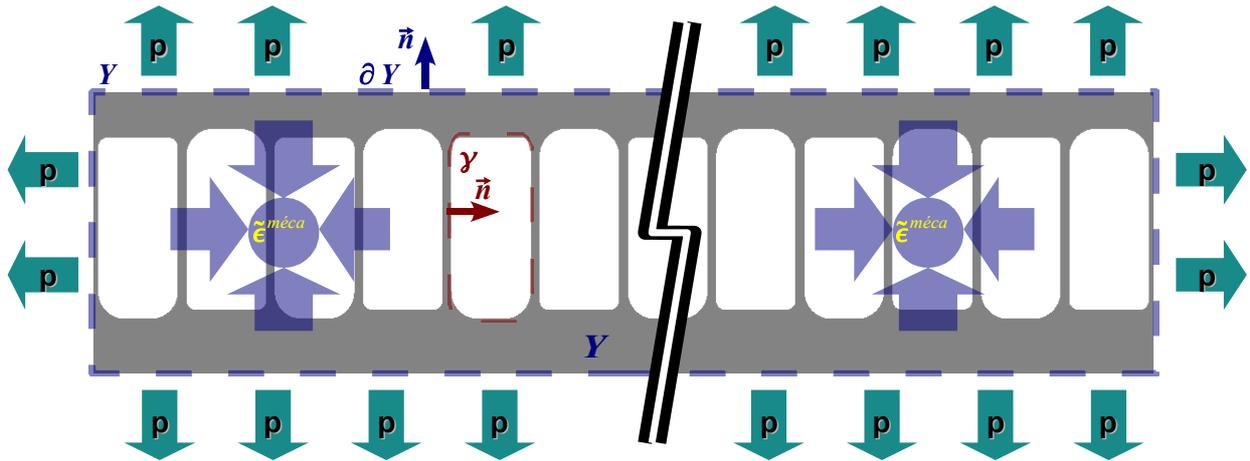


Figure II.23 - Transformation du chargement en pression

En considérant une structure de même matériau, ce dernier chargement peut être écrit sous forme d'un chargement constant en déformation initiale à l'intérieur du passage. Cette déformation, prolongée dans les cavités, peut être calculée à partir des souplesses de ce matériau :

$$\{\tilde{\epsilon}^{méca}\} = -p \begin{pmatrix} c_{1111} + c_{1122} + c_{1133} \\ c_{1122} + c_{2222} + c_{2233} \\ c_{1133} + c_{2233} + c_{3333} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.112})$$

avec  $[c]$  la souplesse isotrope microscopique du matériau de la structure.

En remplaçant maintenant la structure hétérogène par un matériau homogène à comportement équivalent, les chargements (II.110) et (II.112) restent les mêmes, étant donné qu'ils peuvent être imposés sur le contour  $\partial Y$  du VER. Ces chargements dans le domaine homogène peuvent se transformer en un vecteur de déformation initiale. Cette déformation est calculée à partir des souplesses homogénéisées  $[C^{Hom}]$  et élastiques  $[c]$  :

$$\{\tilde{\mathbf{E}}^{méca}\} = p \begin{pmatrix} C_{1111}^{Hom} + C_{1122}^{Hom} + C_{1133}^{Hom} - c_{1111} - c_{1122} - c_{1133} \\ C_{1122}^{Hom} + C_{2222}^{Hom} + C_{2233}^{Hom} - c_{1122} - c_{2222} - c_{2233} \\ C_{1133}^{Hom} + C_{2233}^{Hom} + C_{3333}^{Hom} - c_{1133} - c_{2233} - c_{3333} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (II.113)$$

$\{\tilde{\mathbf{E}}^{méca}\}$  est la déformation initiale à imposer dans le domaine homogène pour simuler le comportement macroscopique de la pression dans les passages. Cette déformation peut être déduite à partir du calcul des coefficients équivalents.

**Remarques :**

- On note que si les techniques d'homogénéisation convergent vers le même comportement global, le vecteur de chargement en pression macroscopique est le même quelle que soit l'approche d'homogénéisation choisie.
- Le signe de  $\{\tilde{\mathbf{E}}^{méca}\}$  est le même que celui de la pression. Si la pression est positive dans les cavités, la déformation initiale macroscopique est positive, ce qui a tendance à gonfler le passage homogénéisé.

**II.3.4.3 Validation du chargement en pression**

Ici aussi, on fonde la validation du chargement en pression sur la comparaison du  $\tilde{\Sigma}_{11}^{méca}$  calculé par les deux méthodes vues dans ce paragraphe. La démarche est similaire à celle de la validation du chargement en température :

Reprenant tout d'abord les formes variationnelle des problèmes élémentaires  $\chi^{11}$  et  $\chi^{méca}$ , on a respectivement :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi^{11} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\chi^{11}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = - \int_{Y^s} h_{11kh} \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) dy \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{cases} \quad (II.114)$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi^{méca} \in V^{C, per} \\ \int_{Y^s} h_{ijkh} \cdot \epsilon_{ij}(\chi^{méca}) \cdot \epsilon_{kh}(\mathbf{v}^{per}) \cdot dy = - \int_Y n_i \cdot v_i^{per} ds \quad \forall \mathbf{v}^{per} \in V^{C, per} \end{cases} \quad (II.115)$$

En remplaçant  $\mathbf{v}^{per}$  par  $\chi^{méca}$  dans (II.114) et par  $\chi^{11}$  dans (II.115) on démontre que:

$$\int_Y n_i \cdot \chi_i^{11} ds = \int_{Y^s} h_{11kh} \cdot \epsilon_{kh}(\chi^{méca}) dy = \int_{Y^s} \sigma_{11}(\chi^{méca}) dy \quad (II.116)$$

mais  $\chi^{11}$  est un champ périodique sur le contour  $\partial Y$  de la cellule de base. Cela engendre une déformation moyenne nulle:

$$\langle \epsilon_{ii}(\chi^{11}) \rangle = \int_{Y^s} \epsilon_{ii}(\chi^{11}) dy - \int_Y n_i \cdot \chi_i^{11} ds = 0 \quad (\forall i) \quad (\text{II.117})$$

(II.116) et (II.117) donnent finalement:

$$\int_{Y^s} \sigma_{11}(\chi^{méca}) dy = \int_{Y^s} (\epsilon_{11}(\chi^{11}) + \epsilon_{22}(\chi^{11}) + \epsilon_{33}(\chi^{11})) dy \quad (\text{II.118})$$

Ensuite, d'après (II.107) on développe  $\tilde{\Sigma}_{11}^{méca}$  calculé par approche HCP, tout en supposant que les souplesses isotropes  $[c]$  du matériau sont constantes sur la structure (on rappelle que la méthode de transformation n'est applicable que lorsque la structure est constituée d'un seul matériau):

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11}^{méca} &= \left\{ \frac{|Y| - |Y^s|}{|Y|} - \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} \sigma_{11}(\chi^{méca}) dy \right\} \\ &= \left\{ 1 - \frac{|Y^s|}{|Y|} - \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} (\epsilon_{11}(\chi^{11}) + \epsilon_{22}(\chi^{11}) + \epsilon_{33}(\chi^{11})) dy \right\} \quad (\text{d'après II.118}) \\ &= \left\{ 1 - \frac{|Y^s|}{|Y|} - \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} (c_{1111} \sigma_{11}(\chi^{11}) + c_{1122} \sigma_{22}(\chi^{11}) + c_{1133} \sigma_{33}(\chi^{11})) dy \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} (c_{2211} \sigma_{11}(\chi^{11}) + c_{2222} \sigma_{22}(\chi^{11}) + c_{2233} \sigma_{33}(\chi^{11})) dy \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} (c_{3311} \sigma_{11}(\chi^{11}) + c_{3322} \sigma_{22}(\chi^{11}) + c_{3333} \sigma_{33}(\chi^{11})) dy \right\} \\ &= \left\{ 1 - \frac{|Y^s|}{|Y|} (c_{1111} + c_{1122} + c_{1133}) (h_{1111} + h_{1122} + h_{1133}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|Y|} (c_{1111} + c_{1122} + c_{1133}) \int_{Y^s} (\sigma_{11}(\chi^{11}) + \sigma_{22}(\chi^{11}) + \sigma_{33}(\chi^{11})) dy \right\} \\ &= \left\{ 1 - (c_{1111} + c_{1122} + c_{1133}) (\langle h_{1111} \rangle + \langle \sigma_{11}(\chi^{11}) \rangle + \langle h_{1122} \rangle + \langle \sigma_{22}(\chi^{11}) \rangle + \langle h_{1133} \rangle + \langle \sigma_{33}(\chi^{11}) \rangle) \right\} \\ &\quad (\text{par symétrie}) \\ &= \left\{ 1 - (c_{1111} + c_{1122} + c_{1133}) (\langle h_{1111} \rangle + \langle \sigma_{11}(\chi^{11}) \rangle + \langle h_{1122} \rangle + \langle \sigma_{11}(\chi^{22}) \rangle + \langle h_{1133} \rangle + \langle \sigma_{11}(\chi^{33}) \rangle) \right\} \\ &= \left\{ 1 - (c_{1111} + c_{1122} + c_{1133}) (H_{1111}^{HCP} + H_{1122}^{HCP} + H_{1133}^{HCP}) \right\} \quad (\text{d'après II.46}) \end{aligned}$$

De la même façon en développant  $\tilde{\Sigma}_{22}^{méca}$  et  $\tilde{\Sigma}_{33}^{méca}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11}^{méca} &= \left\{ 1 - (c_{1111} + c_{1122} + c_{1133}) (H_{1111}^{HCP} + H_{1122}^{HCP} + H_{1133}^{HCP}) \right\} \\ \tilde{\Sigma}_{22}^{méca} &= \left\{ 1 - (c_{2211} + c_{2222} + c_{2233}) (H_{2211}^{HCP} + H_{2222}^{HCP} + H_{2233}^{HCP}) \right\} \\ \tilde{\Sigma}_{33}^{méca} &= \left\{ 1 - (c_{3311} + c_{3322} + c_{3333}) (H_{3311}^{HCP} + H_{3322}^{HCP} + H_{3333}^{HCP}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.119})$$

Finalement, d'après (II.106) et (II.119), on déduit que  $\tilde{E}_{11}^{méca} = p(C_{1111}^{Hom} + C_{1122}^{Hom} + C_{1133}^{Hom} - c_{1111} - c_{1122} - c_{1133})$  ce qui correspond au chargement en pression calculé par la méthode de transformation (II.113).

#### II.3.4.4 Bilan

En conclusion, le chargement équivalent en pression se déduit à partir des coefficients homogénéisés et des caractéristiques du matériau constituant les passages (cf. II.113). L'échangeur est considéré comme une structure à matériau unique.

### II.3.5 Encadrement énergétique du comportement équivalent

Commençons par rappeler [Bornert et al. 2001] les principes de minimum établis en élasticité linéaire :

- principe de minimum en déplacements : parmi tous les champs de déplacements  $\mathbf{v}$  cinématiquement admissibles pour un problème donné, le champ de déplacements solution est celui qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\frac{1}{2} \int_Y \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) dy - L(\mathbf{v}) \quad (\text{II.120})$$

où  $L(\mathbf{v})$  désigne le travail des efforts extérieurs donnés dans le champ de déplacement  $\mathbf{v} \in V$  ;

$$V = \{ \mathbf{v}, \text{régulier dans } Y \} \quad (\text{II.121})$$

- principe de minimum en contraintes : parmi tous les champs de contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  statiquement admissibles pour un problème donné, le champ de contraintes solution est celui qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\frac{1}{2} \int_Y \boldsymbol{\tau} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\tau} dy - L^*(\boldsymbol{\tau}) \quad (\text{II.122})$$

où  $L^*(\boldsymbol{\tau})$  désigne le travail des déplacements donnés dans le champ de contraintes  $\boldsymbol{\tau} \in T$  ;

$$T = \{ \boldsymbol{\tau} \text{ symétrique et régulier dans } Y, \text{ tel que } \text{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \text{ dans } Y \} \quad (\text{II.123})$$

Pour les champs  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  solution du problème, il est connu aussi (formule de Clapeyron) que :

$$\int_Y \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dy = \int_Y \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} dy = L(\mathbf{u}) + L^*(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{II.124})$$

Il est commode pour la suite d'introduire les ensembles duaux suivants :

a) approche HMP,  $\boldsymbol{\Sigma}$  connu :

$$\begin{cases} V^{HMP}(\boldsymbol{\Sigma}) = \{ \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique} \} \\ T^{HMP}(\boldsymbol{\Sigma}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in T, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial Y, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \text{ est } y_1 y_3 \text{ anti-périodique} \} \end{cases}$$

b) approche HMP,  $\mathbf{E}$  connu :

**Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes**

$$\begin{cases} V^{HMP}(\mathbf{E}) = \{ \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique et } \int_{Sup \cup Inf} \mathbf{u}^{per} \otimes_s \mathbf{n} ds = 0 \} \\ T^{HMP}(\mathbf{E}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in T, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial Y, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \text{ est } y_1 y_3 \text{ anti-périodique} \} \end{cases}$$

c) approche HCP,  $\boldsymbol{\Sigma}$  connu :

$$\begin{cases} V^{HCP}(\boldsymbol{\Sigma}) = \{ \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique} \} \\ T^{HCP}(\boldsymbol{\Sigma}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in T, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \text{ est } y_1 y_3 \text{ anti-périodique} \} \end{cases}$$

d) approche HCP,  $\mathbf{E}$  connu :

$$\begin{cases} V^{HCP}(\mathbf{E}) = \{ \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{v}^{per}, \mathbf{v}^{per} = 0 \text{ sur les faces sup. et inf.}, \mathbf{v}^{per} \text{ est } y_1 y_3 \text{ périodique} \} \\ T^{HCP}(\mathbf{E}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in T, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \text{ est } y_1 y_3 \text{ anti-périodique} \} \end{cases}$$

Considérons le problème HCP,  $\mathbf{E}$  imposé (« cas d »). Pour ce problème on a :

$$L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{II.125})$$

et le principe de minimum en déplacements entraîne :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle \leq \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V^{HCP}(\mathbf{E}) \quad (\text{II.126})$$

Mais,  $\mathbf{u}$  désignant le champ de déplacements solution pour le problème HCP, on a par ailleurs en utilisant le Lemme de Hill (II.34):

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{E} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E} \quad (\text{II.127})$$

En reportant cette dernière égalité dans (II.126) et en notant  $W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}))$  l'énergie élastique de déformations dans le déplacement  $\mathbf{v}$ ,  $W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})$ , on obtient :

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E} = \inf_{\mathbf{v} \in V^{HCP}(\mathbf{E})} \langle W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) \rangle \quad (\text{II.128})$$

Utilisons maintenant le principe de minimum en contraintes. Pour le problème considéré, on a  $L^+(\boldsymbol{\tau}) = |Y| \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \mathbf{E}$  et  $L^+(\boldsymbol{\sigma}) = |Y| \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$ , d'où :

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} \rangle - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \leq \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\tau} \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \mathbf{E} \quad (\text{II.129})$$

pour tout  $\boldsymbol{\tau}$  dans  $T^{HCP}(\mathbf{E})$ . Mais, compte tenu de (II.124) et (II.34), le membre de gauche de (II.124) vaut  $-\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E}$ . Il en résulte :

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E} = - \inf_{\boldsymbol{\tau} \in T^{HCP}(\mathbf{E})} [\langle W^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \mathbf{E}] \quad (\text{II.130})$$

en notant  $W^*(\boldsymbol{\tau})$  l'énergie élastique associée à  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $W^*(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\tau}$ .

## Chapitre II – Homogénéisation volumique des échangeurs à plaques et ondes

Il existe donc au moins deux façons différentes mais équivalentes de caractériser de façon variationnelle le tenseur des modules effectifs  $\mathbf{H}^{HCP}$ . D'un point de vue numérique, (II.130) n'est pas facile à mettre en oeuvre dans un code de calcul par éléments finis en déplacements et l'on préférera utiliser (II.128). D'un point de vue théorique, si l'on connaît des champs admissibles, (II.129) et (II.130) donnent le moyen d'aboutir à des estimations par excès et par défaut de  $\mathbf{H}^{HCP}$ .

Les mêmes remarques peuvent être faites à propos du tenseur de souplesses effectives  $\mathbf{C}^{HMP}$  (« cas a ») qui satisfait :

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{C}^{HMP} : \boldsymbol{\Sigma} = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in T^{HMP}(\boldsymbol{\Sigma})} \langle W^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle = - \inf_{\mathbf{v} \in V^{HMP}(\boldsymbol{\Sigma})} [\langle W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) \rangle - \boldsymbol{\Sigma} : \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle] \quad (\text{II.131})$$

De la même manière on obtient pour  $\mathbf{C}^{HCP}$  (l'inverse de  $\mathbf{H}^{HCP}$ , « cas c »)

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{C}^{HCP} : \boldsymbol{\Sigma} = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in T^{HCP}(\boldsymbol{\Sigma})} \langle W^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle = - \inf_{\mathbf{v} \in V^{HCP}(\boldsymbol{\Sigma})} [\langle W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) \rangle - \boldsymbol{\Sigma} : \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle] \quad (\text{II.132})$$

et pour  $\mathbf{H}^{HMP}$  (l'inverse de  $\mathbf{C}^{HMP}$ , « cas b ») :

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HMP} : \mathbf{E} = \inf_{\mathbf{v} \in V^{HMP}(\mathbf{E})} \langle W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) \rangle = - \inf_{\boldsymbol{\tau} \in T^{HMP}(\mathbf{E})} [\langle W^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \mathbf{E}] \quad (\text{II.133})$$

Les propriétés (II.128) et (II.133.a) donnent le moyen de comparer  $\mathbf{H}^{HCP}$  et  $\mathbf{H}^{HMP}$ . En effet,  $V^{HCP}(\mathbf{E}) \subseteq V^{HMP}(\mathbf{E})$ , on obtient :

$$\mathbf{E} : \mathbf{H}^{HMP} : \mathbf{E} \leq \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E} \quad (\text{II.134})$$

pour tout  $\mathbf{E}$  symétrique. De même,  $T^{HMP}(\boldsymbol{\Sigma}) \subseteq T^{HCP}(\boldsymbol{\Sigma})$ , on déduit de (II.131.a) et (II.132.a) :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{C}^{HCP} : \boldsymbol{\Sigma} \leq \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{C}^{HMP} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{II.135})$$

pour tout  $\boldsymbol{\Sigma}$  symétrique. Ces inégalités montrent que les tenseurs effectifs dépendent en toute rigueur de la condition homogène au contour choisie pour les obtenir. Le tenseur des modules (resp. des souplesses) est plus « raide » (resp. plus « souple ») dans le cas homogène en déformations que dans le cas homogène en contraintes.

## II.4 Conclusions

Après quelques rappels historiques dont les objectifs étaient d'introduire les théories classiques de l'homogénéisation et d'en justifier l'intérêt lors d'un calcul de structures hétérogènes sous chargement thermomécanique, nous avons montré l'insuffisance de ces théories vis-à-vis de l'application industrielle visée dans cette thèse. Cela nous mène, dans un deuxième temps à définir une approche globale d'homogénéisation fondée sur l'encadrement du comportement global de chaque zone de l'échangeur entre deux comportements limites déterminés par les schémas appelés HCP et HMP. La formulation de ces problèmes se base respectivement sur l'adaptation des approches en déformation et en contrainte de la méthode Hill-Mandel aux spécificités périodiques des échangeurs.

Dans un troisième temps, nous nous intéressons à la mise en oeuvre de ces techniques. Cette étape est primordiale dans le développement d'un outil dédié à l'homogénéisation des passages en vue de l'étude du comportement global d'un bloc d'échangeur. Dans ce cadre, on propose deux mises en oeuvre pour déterminer respectivement les rigidités homogénéisées par schéma HCP (cf. § II.3.1) et les souplesses homogénéisées par schéma HMP (cf. § II.3.2). Ensuite, une étude des chargements en température et en pression montre que :

- Le chargement thermique macroscopique équivalent s'obtient en imposant dans les passages homogénéisés le champ de température moyenne (fournie par l'entreprise) et le coefficient de dilatation thermique du matériau constituant l'échangeur.
- Le chargement équivalent en pression s'obtient à partir des coefficients homogénéisés, de la pression interne, et des caractéristiques du matériau constituant les passages (cf. II.113). L'échangeur est considéré comme étant une structure à matériau unique.

Finalement nous montrons que le tenseur des rigidités (resp. des souplesses) est plus « raide » (resp. plus « souple ») dans le cas homogène en déformations que dans le cas homogène en contraintes. Cela nous permettra de mettre en évidence, numériquement, les propriétés d'encadrement des approches HCP et HMP vis-à-vis du comportement d'un passage isolé (cf. Chapitre III, § III.3.2).

Ainsi, on dispose des outils théoriques pour développer un logiciel métier prenant en charge l'application de ces techniques d'homogénéisation et du chargement équivalent en pression et en température. L'analyse des résultats numériques de cet outil forme l'objectif du chapitre III. Cela permettra de constituer une librairie d'éléments à comportement homogénéisé à partir des caractéristiques de chaque passage. C'est l'étape nécessaire au développement de l'outil métier final permettant l'analyse thermomécanique globale de l'échangeur à partir de cette librairie, des différents paramètres géométriques (e.g. empilement, orientation des ondes...) et des sollicitations en température et en pression (chapitre IV).



# Chapitre III

## Applications numériques de l'homogénéisation volumique

**A**près la mise en oeuvre pratique des approches HCP et HMP, on présente dans ce chapitre les résultats numériques issus de leurs applications. Dans l'objectif d'établir une liste de comportements volumiques homogènes des ondes et tôles brasées, un outil d'homogénéisation automatique, appelé « HomPass », a été développé. La pertinence de nos résultats est analysée et validée en commençant tout d'abord par la validation théorique des techniques d'homogénéisation à travers une série de tests numériques. Ensuite, dans un deuxième temps, on effectue une étude paramétrique afin d'analyser la sensibilité du comportement vis-à-vis du maillage et des données géométriques. Enfin, dans un dernier lieu on réalise une application numérique globale pour comparer les modèles micro et macro d'un passage 2D sous chargement en pression.

<b>Chapitre III : Applications numériques de l'homogénéisation volumique.....</b>	<b>93</b>
III.1 Introduction.....	95
III.2 Validation théorique des méthodes d'homogénéisation.....	97
III.2.1 Comportement équivalent orthotrope.....	98
III.2.2 Patch test .....	99
III.2.3 Comparaisons des résultats de « HomPass » avec ceux des méthodes classiques.....	100
III.2.4 Application de la HMP sur le joint de culasse [Cartraud, 1997].....	103
III.2.5 Comparaison de la déformée des problèmes élémentaires (HCP et HMP) .....	103
III.3 Étude des paramètres du maillage et de la CAO.....	106
III.3.1 Influence de maillage.....	106
III.3.2 Encadrement énergétique .....	109
III.3.3 Choix de la période dans le plan .....	111
III.3.4 Type d'onde .....	112
III.3.5 Influence de la hauteur.....	114
III.3.6 Influence du pas d'onde.....	115
III.3.7 Influence des épaisseurs.....	116
III.3.8 Erreur de la modélisation globale des passages.....	119
III.4 Comparaison numérique des modèles micro et macro d'un passage 2D en pression.....	122
III.4.1 Position du problème.....	122
III.4.2 Résultats numériques.....	124
III.4.3 Bilan.....	128
III.5 Conclusions.....	129

## III.1 Introduction

Un logiciel dédié à l'homogénéisation des passages d'échangeur (intitulé « HomPass » : figure III.1) a été développé pour implémenter automatiquement les techniques d'homogénéisation cinématique et mécanique périodiques vues au chapitre II (HCP et HMP). On adopte alors la méthodologie d'encadrement qui suppose que le comportement équivalent d'un passage d'échangeur isolé est compris entre deux comportements limites déterminés par les approches HCP et HMP. Par conséquent, on exclut l'application de l'approche périodique (HP) applicable à un échangeur ayant un empilement de passages identiques. Ce dernier est un cas particulier peu fréquent dans l'application industrielle.

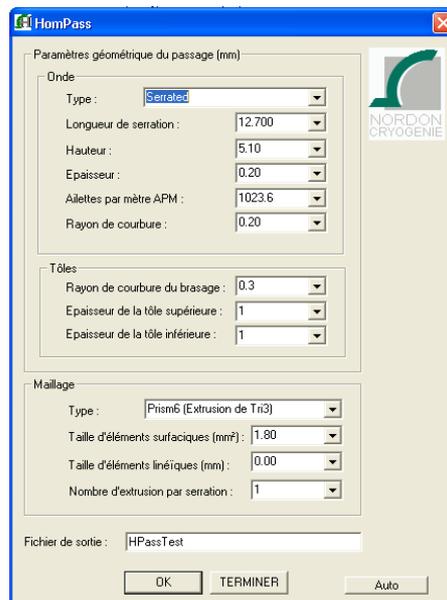


Figure III.1 - Interface d'entrée de « HomPass »

HomPass servira alors à établir une bibliothèque de comportements équivalents des passages à partir des paramètres de géométrie et de maillage :

- Type d'onde, l'utilisateur peut choisir entre une onde droite ou une onde serrated
- Longueur de serration pour l'onde serrated
- Hauteur de l'onde
- Épaisseur de l'onde
- Nombre d'ailettes par mètre (l'inverse du pas)
- Les épaisseurs des tôles
- Type d'élément, l'utilisateur peut choisir un maillage prismatique linéaire (triangle extrudé) ou un maillage hexaédrique linéaire (quadrilatère extrudé). Une possibilité est donnée au niveau du programme pour mailler avec des hexaèdres quadratiques (hexaèdre à 20 noeuds) dans le cadre de l'étude de sensibilité au maillage. Mais cette possibilité reste limitée à l'approche HCP.
- Taille moyenne de l'élément de base (triangle ou quadrilatère) pour générer automatiquement le maillage.
- Taille moyenne des éléments linéiques
- Nombre des éléments par serration pour les ondes Serrated

La technique de maillage adoptée par « HomPass » (figure II.2) consiste dans un premier temps à projeter la CAO de la cellule de base sur un plan 1-2. Ensuite, les surfaces projetées et intersections résultantes sont maillées. Ce maillage surfacique est ensuite extrudé dans la direction de serration (direction 3) fournissant un maillage aux éléments volumiques. Cette technique de projection, qui a été utilisée par [Lewon, 2000], permet de faciliter l'imposition des conditions de périodicité.

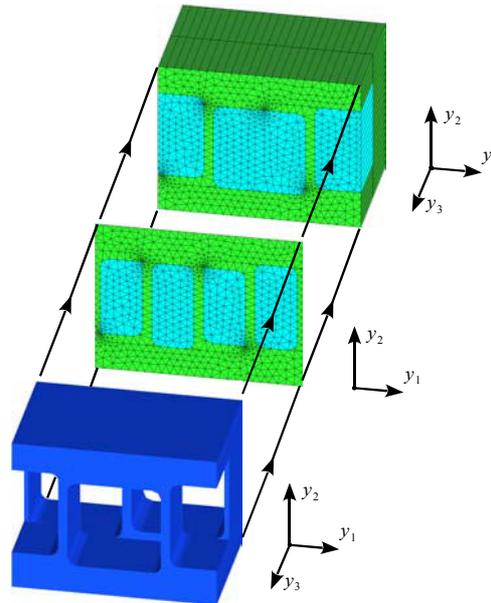


Figure III.2 - Technique de maillage par projection puis extrusion

L'architecture de « HomPass » (figure III.3) se base sur l'interfaçage avec des modules extérieurs comme [GID] et [Code\_Aster] par l'intermédiaire d'un code métier programmé sous [Ms Visual C++]. Le premier est un module de pré-traitement qui prend en charge la CAO et le maillage de la cellule de base, et le deuxième est un module de calcul éléments finis, qui prend en charge les calculs éléments finis. Les interfaces se font alors par l'intermédiaire des fichiers spécifiques de script : « HomPass » constitue des fichiers de commandes à partir des paramètres de géométrie et de maillage. Cela permet de générer un fichier de maillage en sortie du pré-processeur. Ce dernier associé aux fichiers programmés des techniques HCP et HMP, permet à son tour de lancer le calculateur éléments finis. Les résultats sont enfin récupérés et traités pour déterminer les modules homogénéisés.

Pour des raisons numériques pratiques dictées par la programmation de « HomPass », les cavités vides sont maillées et affectées d'un matériau fictif aux propriétés élastiques faibles. Pour s'assurer de la faible influence de ce matériau sur le calcul des coefficients, on vérifie systématiquement, via « HomPass » alors, que l'énergie de déformation du domaine « fictif » est négligeable.

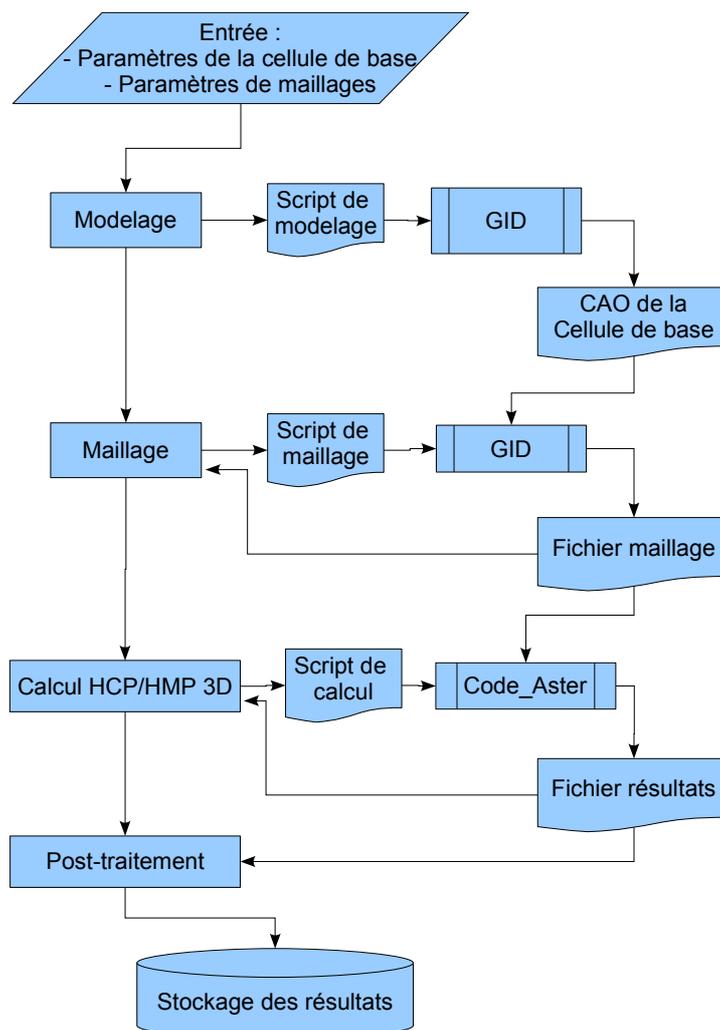


Figure III.3 - Organigramme de HomPass

L'objectif principal est donc de développer un logiciel dédié possédant une interface utilisateur unique intégrant les deux schémas différents d'homogénéisation, HCP et HMP, avec la possibilité de prise en compte des conditions de périodicité. Cela permettra d'analyser numériquement les résultats d'homogénéisation. On commence tout d'abord par la validation théorique des techniques d'homogénéisation en réalisant des tests numériques. Ensuite, dans un deuxième temps, on effectue une étude paramétrique afin d'analyser la sensibilité du comportement vis-à-vis du maillage et des données géométriques. Finalement, on réalise une application numérique globale pour comparer les modèles micro et macro d'un passage 2D sous chargement en pression.

## III.2 Validation théorique des méthodes d'homogénéisation

Au cours de cette partie, on propose de valider numériquement certains résultats issus de l'application des approches HCP et HMP par l'outil « HomPass ». On valide alors, dans un premier temps, l'orthotropie du comportement homogénéisé. Ensuite on applique les approches HCP et HMP sur un cas homogène isotrope en constituant un patch test.

### Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

Finalement, on valide les résultats d'homogénéisation avec ceux des approches classiques de Hill-Mandel abordées dans le chapitre II et ceux se trouvant dans la littérature.

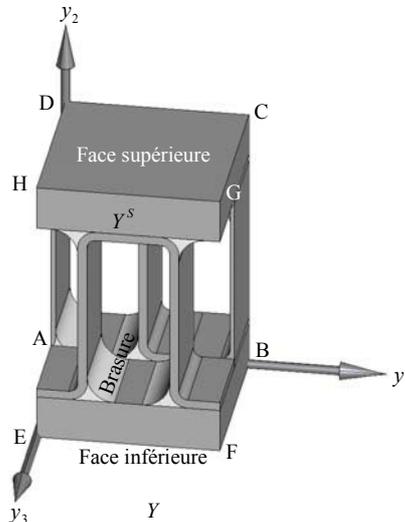


Figure III.4 - Exemple de cellule de base 3D d'un passage d'échangeur

Pour ce faire, considérons la cellule de base illustrée par la figure III.4. Cette cellule représente une hétérogénéité géométrique provenant de la géométrie de l'onde brasée entre deux tôles. Les matériaux de la brasure et de la structure (alliages d'aluminium) sont considérés comme ayant le comportement élastique de l'aluminium. Les caractéristiques élastiques utilisées dans les calculs numériques sont:

- module de Young :  $E^{Al} = 71000 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson :  $\nu^{Al} = 0,3$

#### III.2.1 Comportement équivalent orthotrope

Dans l'étude de l'homogénéisation des ondes droite et serrated, on a montré que le comportement équivalent est orthotrope (cf. § II.1.1.2). Dans ce paragraphe, on vérifie numériquement cette orthotropie pour une onde serrated. Pour ces calculs, on choisit la cellule de base possédant les caractéristiques listées par le tableau III.1 tout en adoptant l'approche HCP.

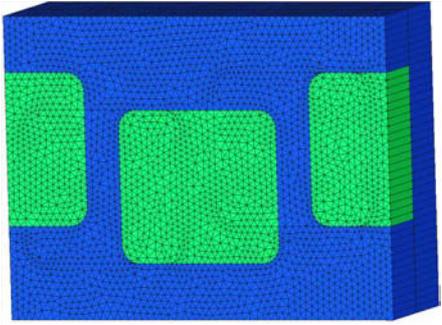
	Type d'onde	Serrated
	Longueur de serration	2 mm
	Hauteur de l'onde	5,10 mm
	Épaisseur d'onde	1 mm
	Rayons de courbure	0,5 mm
	Épaisseur des tôles de séparation	1,5 mm
	Ailettes par mètre	177,2
	Volume Cellule de base	365,6885 mm <sup>3</sup>
	Maillage	Prisme (P6)
	Nombre d'éléments	10840

Tableau III.1 - Caractéristiques d'un exemple de cellule de base

En effet, dans l'approche HCP, les coefficients sont déterminés à partir de calcul éléments finis des énergies de déformation des problèmes élémentaires. Ces problèmes peuvent être appliqués à tous les coefficients de  $[H^{HCP}]$  supposée donc a priori anisotrope, soit :

$$[H^{HCP} (MPa)] = \begin{bmatrix} H_{1111}^{HCP} & H_{1122}^{HCP} & H_{1133}^{HCP} & H_{1112}^{HCP} & H_{1113}^{HCP} & H_{1123}^{HCP} \\ H_{2211}^{HCP} & H_{2222}^{HCP} & H_{2233}^{HCP} & H_{2212}^{HCP} & H_{2213}^{HCP} & H_{2223}^{HCP} \\ H_{3311}^{HCP} & H_{3322}^{HCP} & H_{3333}^{HCP} & H_{3312}^{HCP} & H_{3313}^{HCP} & H_{3323}^{HCP} \\ H_{1211}^{HCP} & H_{1222}^{HCP} & H_{1233}^{HCP} & H_{1212}^{HCP} & H_{1213}^{HCP} & H_{1223}^{HCP} \\ H_{1311}^{HCP} & H_{1322}^{HCP} & H_{1333}^{HCP} & H_{1312}^{HCP} & H_{1313}^{HCP} & H_{1323}^{HCP} \\ H_{2311}^{HCP} & H_{2322}^{HCP} & H_{2333}^{HCP} & H_{2312}^{HCP} & H_{2313}^{HCP} & H_{2323}^{HCP} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38639 & 5461 & 11732 & -0,82 & 0,00 & 0,00 \\ 5461 & 22886 & 5272 & -1,07 & 0,00 & 0,00 \\ 11732 & 5272 & 38629 & -0,25 & 0,00 & 0,00 \\ -0,82 & -1,07 & -0,25 & 2150 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 12961 & -0,25 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,25 & 3544 \end{bmatrix}$$

Ce résultat confirme donc le comportement orthotrope des ondes serrated. On peut donc déterminer pour chaque souplesse homogénéisée  $[C]$  : (cf. figure III.4 pour les directions d'orthotropie)

- Trois modules de Young :  $E_1$  ,  $E_2$  et  $E_3$  ;

$$E_i = \frac{1}{C_{iii}} \quad (i = 1, 2 \text{ et } 3)$$

- Trois coefficients de cisaillement :  $G_{12}$  ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  ;

$$G_{ij} = \frac{1}{C_{ijj}} \quad (ij = 12, 13 \text{ et } 23)$$

- Trois coefficients de Poisson :  $\nu_{12}$  ,  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$  ;

$$\nu_{ij} = -C_{ijj} \cdot E_i \quad (ij = 12, 13 \text{ et } 23)$$

Ces modules sont programmables dans [Code\_Aster] afin d'imposer un comportement orthotrope sur un domaine homogène.

### III.2.2 Patch test

Le patch test consiste à affecter un même matériau (l'aluminium) dans toute la cellule de base y compris les cavités vides (figure III.5). Cela a comme objectif, de constituer un domaine homogène dont on connaît le comportement. Ensuite, nous comparons ce comportement avec les modules effectifs calculés par HomPass.

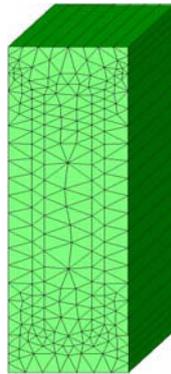


Figure III.5 - Maillage d'un domaine homogène 391 éléments prismes (P6)

En effet, pour l'approche HCP, on vérifie numériquement que le champ de déplacement périodique «  $\mathbf{u}^{per}=0$  » engendre des énergies de corrections nulles. On retrouve donc d'après le chapitre II (équations II.49 et II.55) les modules d'élasticité de l'aluminium.

Concernant l'approche HMP, on établit le tableau III.2 des énergies élémentaires et des coefficients effectifs calculés par l'intermédiaire l'outil d'homogénéisation 3D « HomPass » (suivant les équations A.26 de l'annexe A). On retrouve donc les souplesses isotropes de l'aluminium.

Problème élémentaire	Énergie Potentielle (mJ)	Coefficient de souplesse (1/MPa) (Sortie HomPass)
$\kappa^{11}$	5,90500E+06	$C_{1111}^{HMP} = 1,408451E-05$
$\kappa^{33}$	5,90501E+06	$C_{2222}^{HMP} = 1,408450E-05$
$\kappa^{1133}$	1,53530E+07	$C_{3333}^{HMP} = 1,408448E-05$
$\xi^{11}$	1,06597E-03	$C_{1212}^{HMP} = 3,661996E-05$
$\xi^{33}$	1,06597E-03	$C_{1313}^{HMP} = 3,661975E-05$
$\xi_{,0}^{22}$	7,91863E-04	$C_{2323}^{HMP} = 3,661996E-05$
$\xi_{,0}^{12}$	2,77154E-03	$C_{1122}^{HMP} = -4,225354E-06$
$\kappa^{13}$	2,06675E+06	$C_{1133}^{HMP} = -4,225333E-06$
$\xi_{,0}^{23}$	2,77154E-03	$C_{2233}^{HMP} = -4,225354E-06$

Tableau III.2 - Énergies potentielles des problèmes élémentaires HMP  
(  $|Y|=151,3679 \text{ mm}^3$  )

### III.2.3 Comparaisons des résultats de « HomPass » avec ceux des méthodes classiques

La méthode classique Hill-Mandel permettait d'étudier le comportement global d'un passage d'échangeur selon deux approches différentes : l'approche en déformation et l'approche en contrainte (chapitre II, § II.1.2). Les résultats de cette méthode dépendaient de la taille du volume élémentaire représentatif : plus ce volume est grand, plus la précision est meilleure. Comme conséquence directe, les temps de calcul deviennent considérables. L'application de la HCP et HMP permet de palier ce problème puisque les calculs s'effectuent sur une seule cellule de base. Dans ce cadre, on reprend l'exemple du

§ II.1.2 pour y situer les résultats de HomPass.

Les caractéristiques de la cellule de base sont alors :

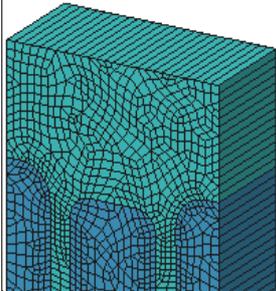
	Type d'onde	Droite
	Profondeur	1 mm
	Hauteur de l'onde	7,13 mm
	Épaisseur d'onde	0,2 mm
	Rayons de courbure	0,2-0,3 mm
	Épaisseur des tôles de séparation	1 mm
	Ailettes par mètre	930,23
	Maillage	Hexaèdre (H8)
	Nombre d'éléments	3888

Tableau III.3 - Caractéristiques d'un exemple de cellule de base

On rappelle que pour les approches classiques en déformation et en contrainte on a adopté un modèle 2D de mécanique linéaire en déformation plane. Cela est pour étudier le comportement global d'une onde droite supposée avoir une direction infinie (direction de l'écoulement et de l'extrusion  $y_3$ ). En revanche, le modèle adopté par « HomPass » est volumique mais possède une condition de périodicité dans cette direction infinie. Pour les ondes droites, la profondeur (dimension dans la direction  $y_3$ ) et le nombre d'éléments dans cette direction n'ont alors aucune influence sur les coefficients homogénéisés tridimensionnels.

Pour comparer le modèle volumique au modèle plan dans ce cas de figure, il suffit d'extraire de la matrice de rigidité calculée par approche HCP et HMP les coefficients correspondant à la matrice de rigidité en déformation plane.

D'autre part, pour les approches classiques, le calcul de certains coefficients en fonction de la taille du VER est limité par des capacités techniques. Comme le montre la figure II.10 du chapitre II, le seul coefficient qui atteint une stabilité relative vis-à-vis des différentes approches et du maillage, est le coefficient  $C_{2222}$ . On choisit alors ce coefficient pour comparer les approches classiques avec celles implémentées par « HomPass ».

Bien que la comparaison se base sur un seul coefficient  $C_{2222}$ , ce coefficient peut être considéré comme assez représentatif. En effet, pour obtenir ce coefficient à partir des schémas HCP et HMP (figure III.6), on parcourt les étapes suivantes :

- étape 1 : tout d'abord on calcule les matrices de rigidité et de souplesse homogénéisées respectivement par schémas HCP et HMP.
- étape 2 : ensuite on inverse la matrice de souplesse homogénéisée. On obtient ainsi la matrice de rigidité homogène calculée par approche HMP.
- étape 3 : de ces deux matrices de rigidité tridimensionnelles, on extrait les matrices bidimensionnelles correspondant à une déformation plane.
- étape 4 : enfin, on inverse les matrices de rigidité en déformation plane pour obtenir le coefficient  $C_{2222}$ .

En d'autres termes, le fait de baser la comparaison sur le coefficient  $C_{2222}$ , permet de valider numériquement plusieurs problèmes élémentaires liées aux approches HMP et

HCP.

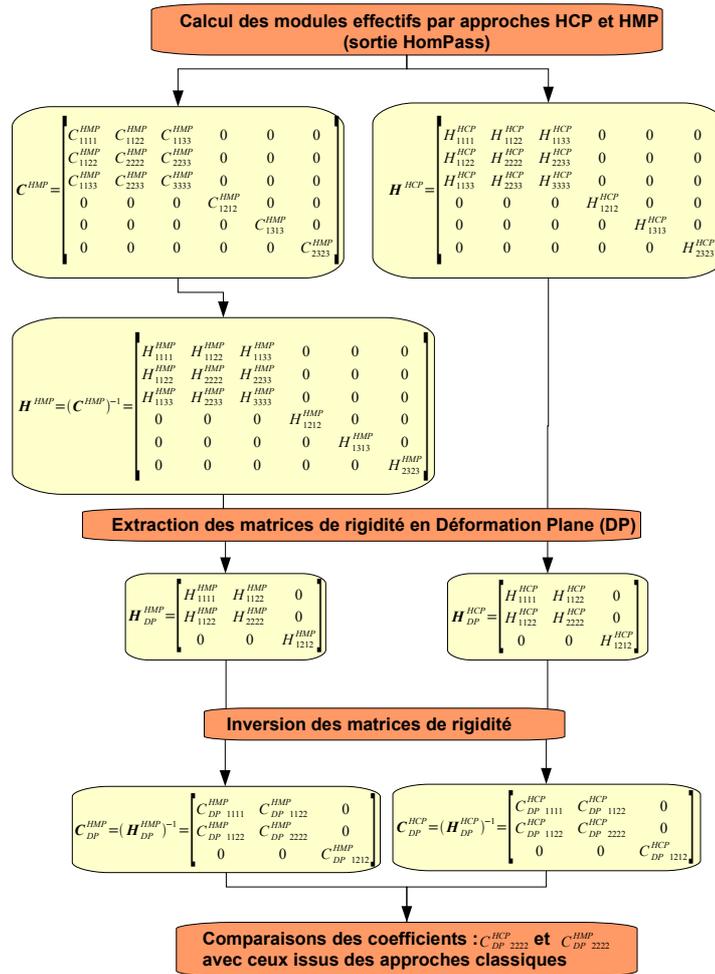
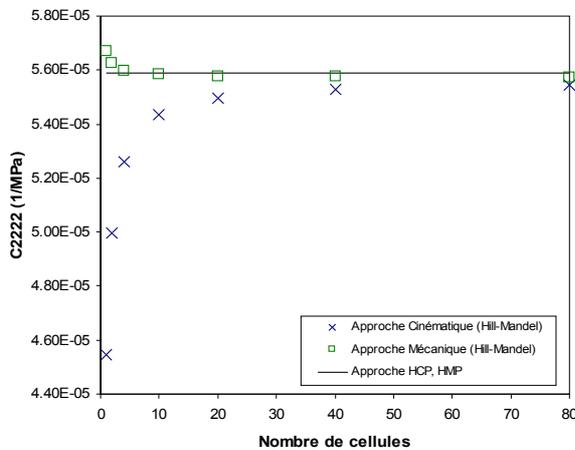


Figure III.6 - Démarche de validation du coefficient homogénéisé  $C_{2222}$

En calculant donc le coefficients de souplesse  $C_{2222}$  par les approches HCP et HMP, on trouve un bon accord (figure III.7) avec les approches classiques en déformation et en contrainte de Hill-Mandel.

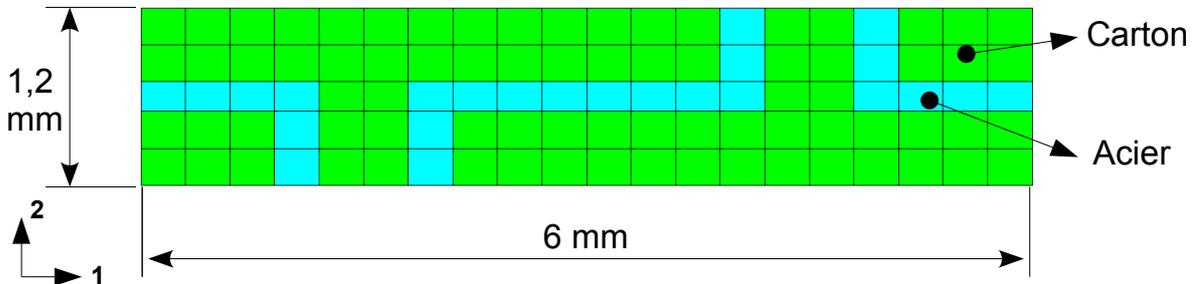


	$C_{2222} (MPa^{-1})$	Écart par rapport à l'approche HMP
Approche HMP	5,5890E-005	
Approche HCP	5,5862E-005	0,05%
Hill-Mandel (mécanique)	5,5745E-005	0,26%
Hill-Mandel (cinématique)	5,5429E-005	0,83%

Figure III.7 - Comparaison des approches HCP et HMP avec celles de Hill-Mandel

### III.2.4 Application de la HMP sur le joint de culasse [Cartraud, 1997]

Afin de comparer les résultats de la HMP avec ceux se trouvant dans la littérature, on adopte ici l'exemple du joint de culasse étudié dans la thèse de [Cartraud, 1997].



**Figure III.8** - Cellule de base d'un joint de culasse  
(Acier :  $E = 200\ 000\ \text{MPa}$ ,  $\nu = 0,3$  et Proportion = 21,67% ; Carton :  $E = 2\ 000\ \text{MPa}$  et  $\nu = 0,2$ )

Il s'agit d'une cellule de base constituée d'un matériau relativement dur (acier) et d'un matériau souple (carton) comme le montre la figure III.8. Sur ce cas simple, on applique l'approche HMP en utilisant les équations (II.82).

On obtient ainsi, après résolution successive des problèmes élémentaires (cf. § II.3.2.4), la matrice de souplesse homogénéisée:

$$C^{HMP} = \begin{bmatrix} 1,542E-04 & -3,283E-05 & 0 \\ -3,8283E-05 & 3,102E-04 & 0 \\ 0 & 0 & 8,207E-04 \end{bmatrix}$$

D'où on tire le module de Young équivalent :  $E_2 = 3223\ \text{MPa}$  .

Ce dernier est en bon accord (écart de 1,02%) avec celui obtenu dans [Cartraud, 1997] en adoptant une approche d'homogénéisation en contrainte à déformation imposée.

### III.2.5 Comparaison de la déformée des problèmes élémentaires (HCP et HMP)

Les figures III.9 et III.10 illustrent respectivement les déformées dues à la résolution des problèmes élémentaires par les approches HCP et HMP. Les paramètres de la cellule de base sont donnés par le tableau III.3 en considérant une onde serrated de serration égale à 3,175 mm.

On met ainsi en évidence la déformation des faces supérieure et inférieure de la cellule de base :

- Pour l'approche HCP, ces faces sont encastées pour simuler un comportement du milieu rigide.
- Pour l'approche HMP, elles sont libres de se déformer simulant ainsi un comportement de milieu mou.

On peut noter aussi la périodicité bidimensionnelle des autres faces.

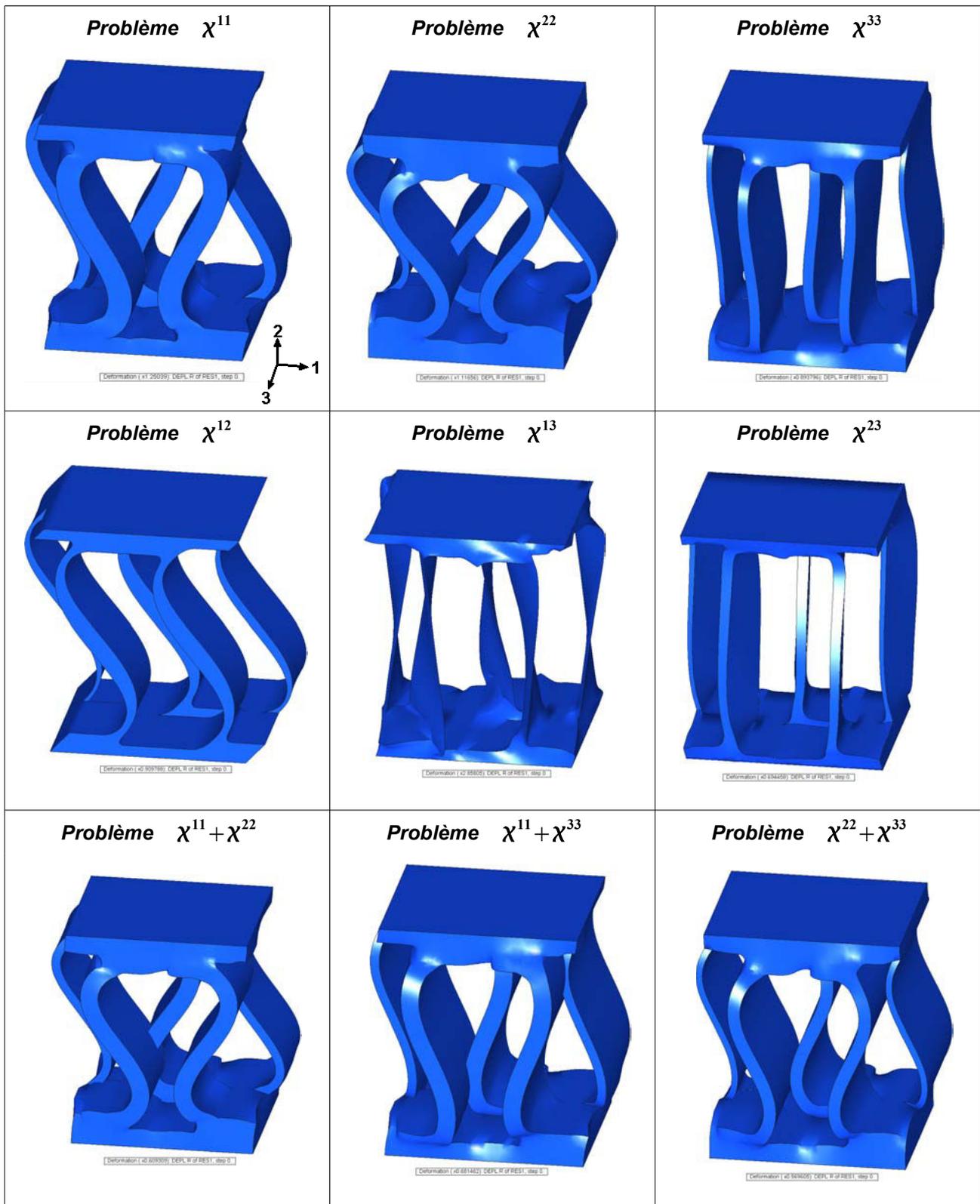


Figure III.9 - Déformée des problèmes élémentaires de l'approche HCP

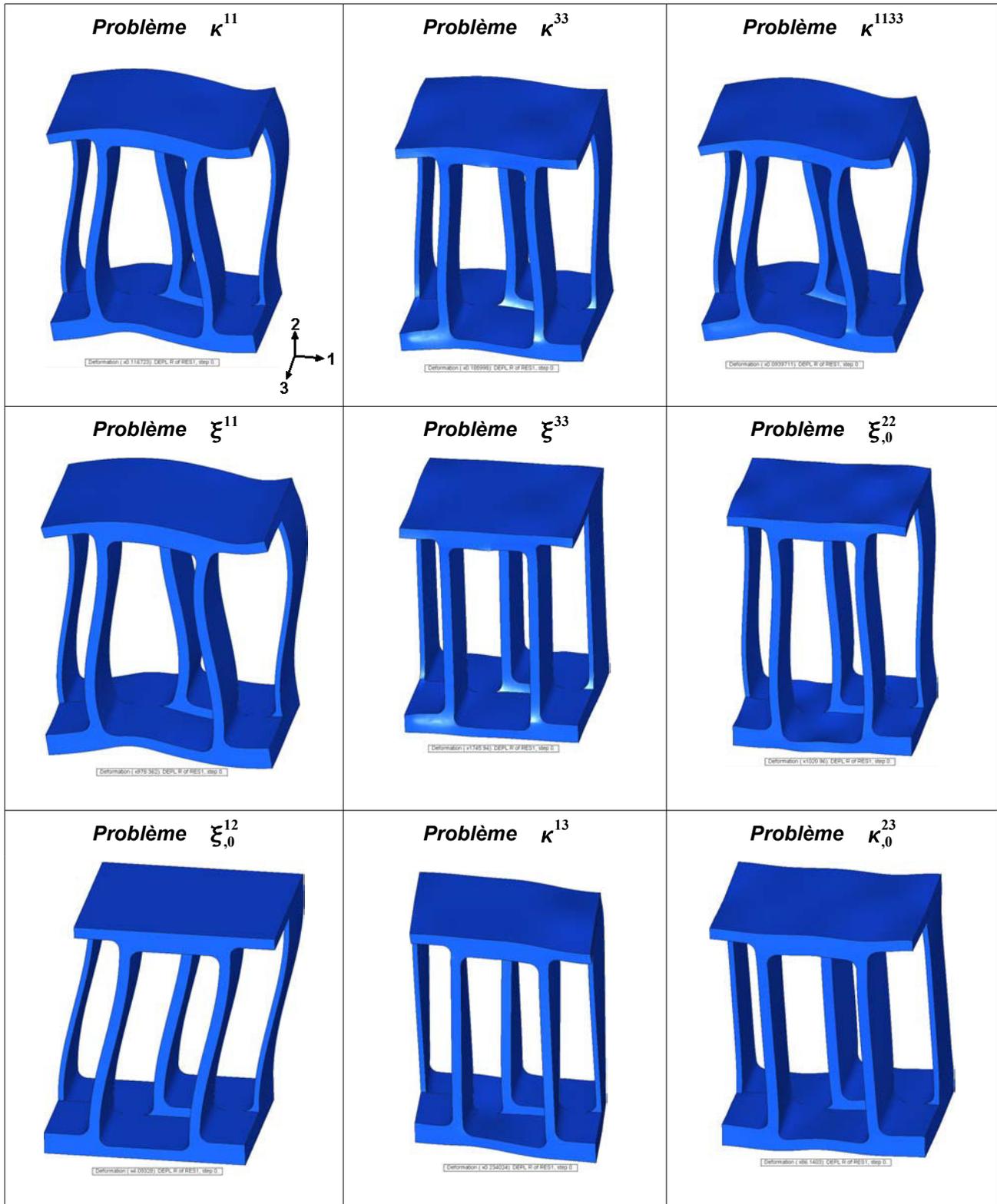


Figure III.10 - Déformée des problèmes élémentaires de l'approche HMP

### III.3 Étude des paramètres du maillage et de la CAO

Maintenant qu'on a validé l'application des approches HCP et HMP, on présente dans cette partie différentes études issues de l'implémentation de ces techniques par l'outil d'homogénéisation « HomPass ». On commence d'abord par une étude de maillage. Ensuite, on valide numériquement le classement énergétique des techniques HCP et HMP. Enfin, on s'attarde sur l'étude paramétrique du comportement global. On effectue alors l'étude de sensibilité sur :

- Le choix de la période dans la plan
- Le choix du type d'onde
- L'influence de la hauteur d'onde
- L'influence du pas de l'onde
- L'influence des épaisseurs de la cellule de base

Pour réaliser ces études, on se repère par rapport à la cellule de base ayant les caractéristiques listées par le tableau III.4.

Type d'onde	Droite
Profondeur	1 mm
Hauteur de l'onde	9,63 mm
Épaisseur d'onde	0,45 mm
Rayons de courbure	0,45-0,5 mm
Épaisseur des tôles de séparation	0,5 mm
Ailettes par mètre	236,2

Tableau III.4 - Caractéristiques géométrique d'un exemple de cellule de base

#### III.3.1 Influence de maillage

Cette étude consiste à appliquer différentes configurations de maillage en adoptant l'approche HCP, pour une onde droite (tableau III.4). Ainsi, on détermine l'influence du maillage sur la stabilité des coefficients homogénéisés.

La figure III.11 montre la convergence de certains coefficients homogénéisés en fonction du raffinement du maillage et en fonction du type d'éléments. On retrouve cette convergence pour tous les coefficients homogénéisés dans le tableau III.5 pour un maillage prismatique linéaire (prisme à 6 noeuds, P6) et dans le tableau III.6 pour un maillage hexaédrique linéaire (hexaèdre à 8 noeuds, H8). Le maillage hexaédrique quadratique (hexaèdre à 20 noeuds, H20) a été adopté uniquement pour l'approche HCP et dans le cadre de l'étude de sensibilité au maillage.

Comme cela est illustré par la figure III.11, à partir d'un certain nombre d'éléments, ces coefficients homogénéisés se stabilisent autour d'une valeur. Cette stabilisation dépend aussi du type d'éléments. Il est évident de retrouver une convergence plus rapide des éléments H20 que celle des éléments H8 et une convergence plus rapide de ces derniers par rapport à celle des éléments P6.

### Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

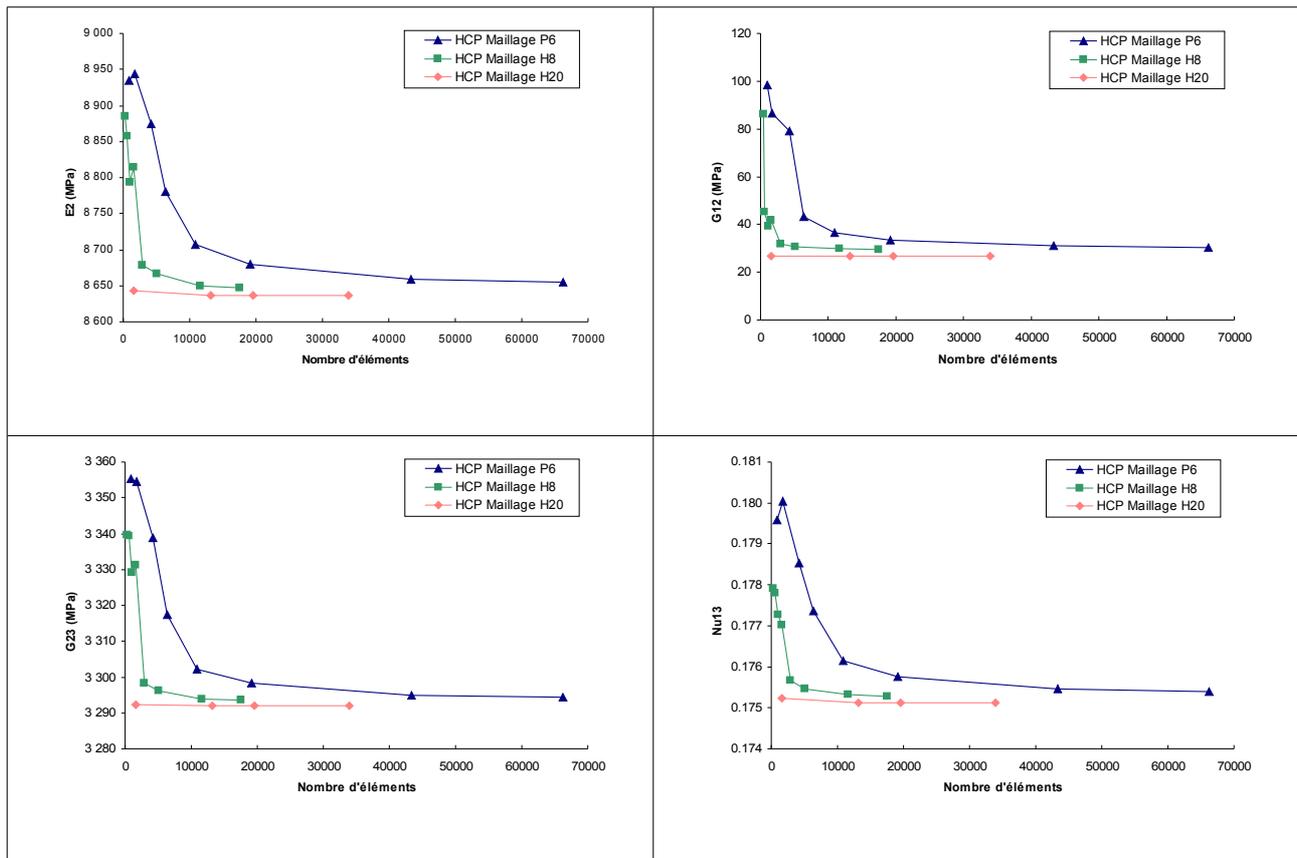


Figure III.11 - Évolution des modules homogénéisés en fonction du maillage

Les tableaux III.5 et III.6 montrent la variation des modules homogénéisés par rapport au maillage le plus fin. Cela est en fonction de nombre d'éléments décroissant. On note ainsi une influence considérable du maillage sur le coefficient de cisaillement  $G_{12}$ . Cette influence dépend du type d'éléments, du nombre total d'éléments et du nombre d'éléments dans l'épaisseur de la jambe, en effet :

- L'influence du maillage est plus considérable pour un maillage P6 que pour un maillage H8 étant donnée les caractéristiques numériques de ces éléments en cisaillement.
- Le nombre total d'éléments contribue à stabiliser  $G_{12}$
- Le nombre d'éléments dans l'épaisseur de la jambe joue un rôle important dans la stabilisation de ce coefficient, surtout pour les éléments P6; d'après le tableau III.5, en passant d'un élément par jambe à deux éléments par jambe, l'écart par rapport à la «valeur stable» passe de 185,55% à 20,55%.

En effet, dans ce mode de cisaillement, les jambes d'onde fléchissent suivant leur moment d'inertie le plus faible. Ces forts écarts s'expliquent donc d'une part par l'influence considérable du type et nombre d'éléments sur  $G_{12}$  et d'autre part par la faible valeur de ce coefficient par rapport aux autres coefficients de cisaillement.

Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

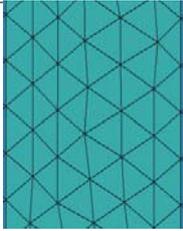
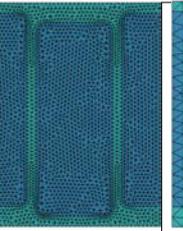
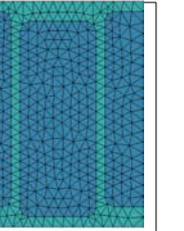
Maillage P6				
Nombre total d'éléments	66228	19120	10892	1696
E1 (MPa)	9617.02	0.23%	0.49%	3.20%
E2 (MPa)	8654.40	0.30%	0.61%	3.34%
E3 (MPa)	16449.13	0.03%	0.05%	0.53%
G12 (MPa)	30.25	10.97%	20.55%	185.55%
G13 (MPa)	3761.08	0.12%	0.25%	2.26%
G23 (MPa)	3294.45	0.12%	0.24%	1.82%
Nu12	0.004	8.75%	16.54%	86.46%
Nu13	0.175	0.21%	0.44%	2.65%
Nu23	0.158	0.27%	0.55%	2.79%
Eléments par jambe	6	3	2	1

Tableau III.5 - Influence des éléments prismatiques (P6)

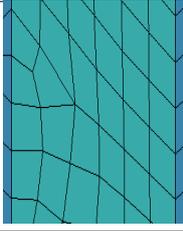
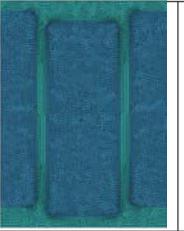
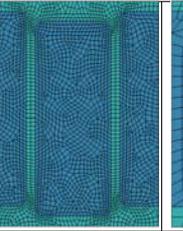
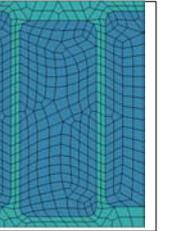
Maillage H8				
Nombre total d'éléments	17532	11606	2960	516
E1 (MPa)	9610,52	0.03%	0.27%	1.99%
E2 (MPa)	8647,71	0.03%	0.35%	2.42%
E3 (MPa)	16449,12	0.00%	0.05%	0.53%
G12 (MPa)	29,54	0.71%	7.65%	53.70%
G13 (MPa)	3760,12	0.01%	0.14%	1.60%
G23 (MPa)	3293,52	0.01%	0.14%	1.39%
Nu12	0,004	-1.87%	-5.11%	2.19%
Nu13	0,175	0.03%	0.22%	1.44%
Nu23	0,158	0.02%	0.30%	1.88%
Eléments par jambe	6	4	2	2

Tableau III.6 - Influence des éléments hexaédriques (H8)

Par ailleurs, en augmentant le nombre d'éléments total, on trouve une «limite de stabilité» pour tous les modules équivalents. Ces limites sont listées dans le tableau III.7. On montre ainsi un bon accord entre les valeurs stables issues des éléments H20, H8 et P6.

Type d'élément	Prisme P6	Hexaèdre H8	Hexaèdre H20
Nombre total d'éléments	66228	17532	33872
E1 (MPa)	9617,02	9610,52	9600,63
E2 (MPa)	8654,40	8647,71	8636,74
E3 (MPa)	16449,13	16449,12	16447,51
G12 (MPa)	30,25	29,54	26,73
G13 (MPa)	3761,08	3760,12	3758,11
G23 (MPa)	3294,45	3293,52	3291,98
Nu12	0,004	0,004	0,004
Nu13	0,175	0,175	0,175
Nu23	0,158	0,158	0,158
Eléments par jambe	6	6	8

Tableau III.7 - limite de convergence des modules homogénéisés

### III.3.2 Encadrement énergétique

Dans le paragraphe § II.3.5 du chapitre II, on a démontré théoriquement le classement énergétique entre les approches HCP et HMP. Ici on valide numériquement ce classement en fonction du maillage. Il s'agit donc de mettre en évidence numériquement l'équation (II.134):

$$\mathbf{E} : \mathbf{H}^{HMP} : \mathbf{E} \leq \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E} \quad (III.1)$$

Pour ce faire on propose une méthode de décomposition. Cette méthode consiste à décomposer l'équation III.1 en choisissant des vecteurs  $\mathbf{E}$  à une composante unitaire (tableau III.8).

$\mathbf{E}$	$\mathbf{E} : \mathbf{H}^{HMP} : \mathbf{E} \leq \mathbf{E} : \mathbf{H}^{HCP} : \mathbf{E}$
$\mathbf{E} = \langle 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$	$H_{1111}^{HMP} \leq H_{1111}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 0, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle$	$H_{2222}^{HMP} \leq H_{2222}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 0, 0, 1, 0, 0, 0 \rangle$	$H_{3333}^{HMP} \leq H_{3333}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 0, 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$	$H_{1212}^{HMP} \leq H_{1212}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 0, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$	$H_{1313}^{HMP} \leq H_{1313}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	$H_{2323}^{HMP} \leq H_{2323}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 1, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle$	$H_{1111}^{HMP} + H_{2222}^{HMP} + 2.H_{1122}^{HMP} \leq H_{1111}^{HCP} + H_{2222}^{HCP} + 2.H_{1122}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 1, 0, 1, 0, 0, 0 \rangle$	$H_{1111}^{HMP} + H_{3333}^{HMP} + 2.H_{1133}^{HMP} \leq H_{1111}^{HCP} + H_{3333}^{HCP} + 2.H_{1133}^{HCP}$
$\mathbf{E} = \langle 0, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle$	$H_{2222}^{HMP} + H_{3333}^{HMP} + 2.H_{2233}^{HMP} \leq H_{2222}^{HCP} + H_{3333}^{HCP} + 2.H_{2233}^{HCP}$

Tableau III.8 - Inégalités élémentaires en fonction des modules de rigidité homogénéisés

### Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

On calcule ensuite pour l'onde droite (tableau III.4) les coefficients de rigidité homogénéisés par schéma HCP et HMP. Cela va permettre de valider les inégalités du tableau III.8. Ainsi, la figure III.12 montre l'évolution de quatre de ces coefficients homogénéisés. Cette évolution, qui se stabilise avec le maillage fin, montre que les modules calculés par l'approche HCP sont supérieurs à ceux calculés par l'approche HMP.

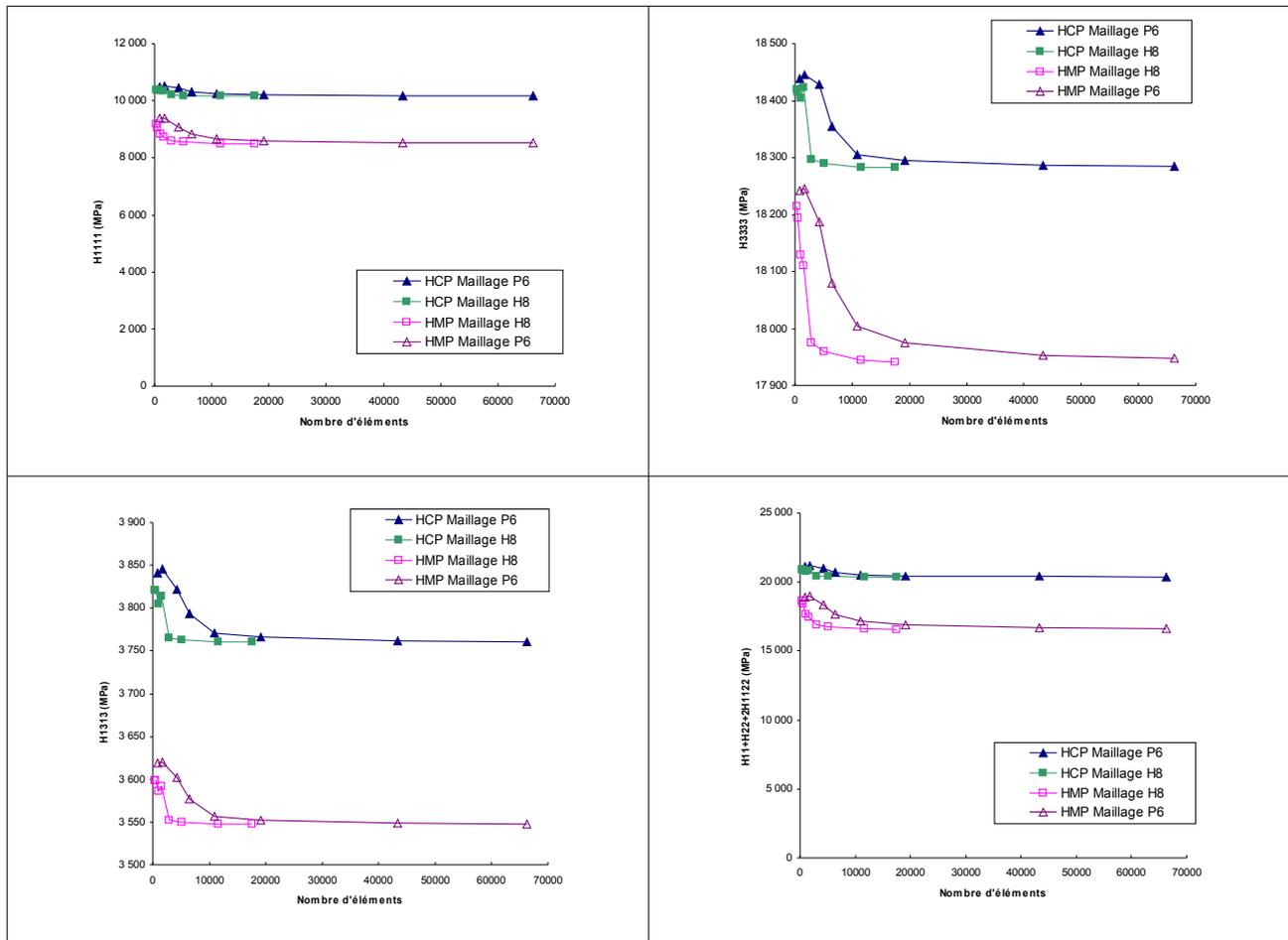


Figure III.12 - Évolution des modules homogénéisés en fonction du maillage (approches HCP et HMP)

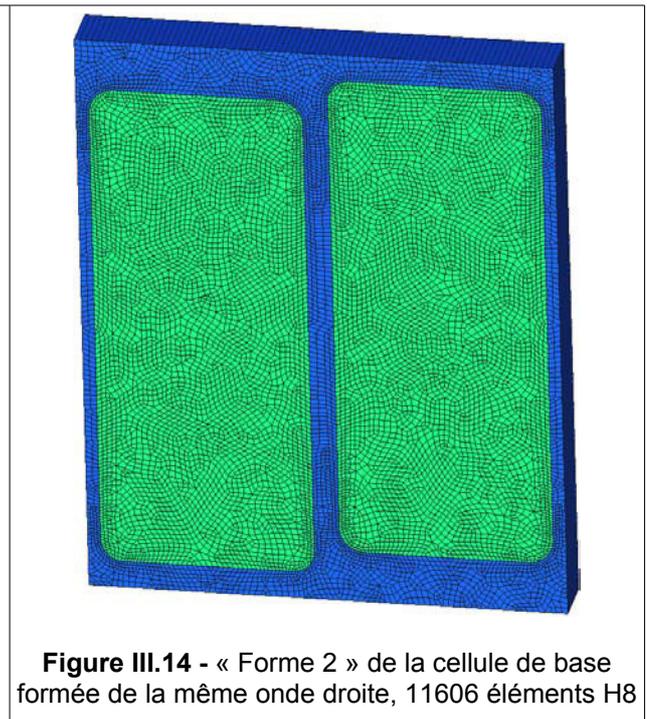
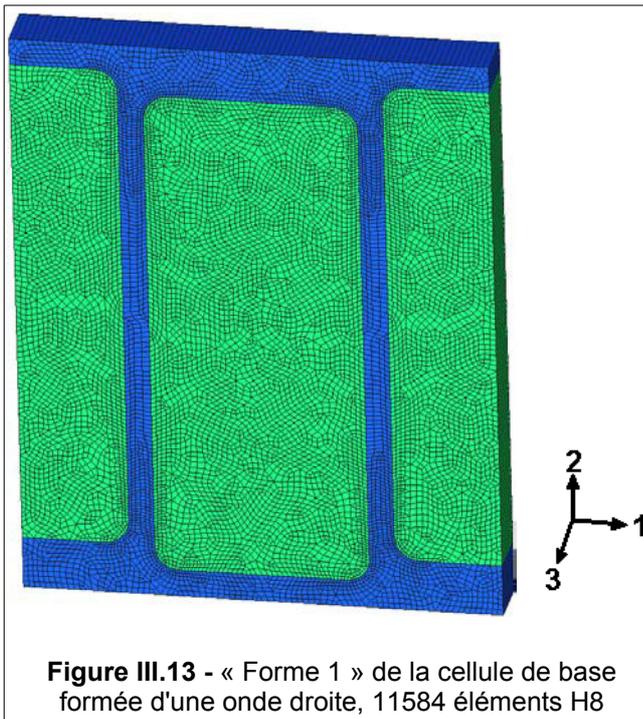
En prélevant les valeurs « stabilisées » en maillage H8, on liste dans le tableau III.9 tous les coefficients de rigidité issus des approches HCP et HMP. Leur écart relatif valide numériquement le classement énergétique de ces deux approches.

Rigidité (MPa)	Homogénéisation HCP	Homogénéisation HMP	Ecart relatif
$H_{1111}$	10176,24	8501,09	<b>16,46%</b>
$H_{2222}$	9106,14	6606,10	<b>27,45%</b>
$H_{3333}$	18282,21	17941,71	<b>1,86%</b>
$H_{1212}$	29,54	26,51	<b>10,25%</b>
$H_{1313}$	3760,12	3547,24	<b>5,66%</b>
$H_{2323}$	3293,52	3232,13	<b>1,86%</b>
$H_{1111}+H_{2222}+2H_{1122}$	20367,49	16583,52	<b>18,58%</b>
$H_{1111}+H_{3333}+2H_{1133}$	34889,68	31986,38	<b>8,32%</b>
$H_{2222}+H_{3333}+2H_{2233}$	33177,62	28954,37	<b>12,73%</b>

Tableau III.9 - Comparaison des coefficients calculés par approches HCP et HMP, 17532 éléments H8

### III.3.3 Choix de la période dans le plan

En reprenant les caractéristiques géométriques du tableau III.4, on établit deux formes différentes de cellule de base (figures III.13 et III.14 ) tout en gardant la périodicité. Ces deux formes peuvent être obtenues l'une par rapport à l'autre en décalant l'onde d'un demi-pas dans la direction de la périodicité.



Les tableaux III.8 et III.9, regroupent ainsi respectivement les modules calculés par une approche HCP et par une approche HMP, pour ces deux formes de cellule de base.

HCP	Forme 1	Forme 2	Ecart relatif
<b>Nombre total d'éléments (H8)</b>	11584	11606	
<b>Éléments par jambe</b>	4	4	
<b>E1 (MPa)</b>	9613,25	9613,52	<b>0,00%</b>
<b>E2 (MPa)</b>	8650,54	8650,22	<b>0,00%</b>
<b>E3 (MPa)</b>	16449,71	16449,66	<b>0,00%</b>
<b>G12 (MPa)</b>	29,70	29,75	<b>0,15%</b>
<b>G13 (MPa)</b>	3760,55	3760,62	<b>0,00%</b>
<b>G23 (MPa)</b>	3293,86	3293,84	<b>0,00%</b>
<b>Nu12</b>	0,004	0,004	<b>0,00%</b>
<b>Nu13</b>	0,175	0,175	<b>0,00%</b>
<b>Nu23</b>	0,158	0,158	<b>0,00%</b>

Tableau III.10 - Effet de la forme périodique de la cellule de base sur les résultats de l'approche HCP

HMP	Forme 1	Forme 2	Ecart relatif
<b>Nombre total d'éléments (H8)</b>	11584	11606	
<b>Éléments par jambe</b>	4	4	
<b>E1 (MPa)</b>	8055,73	8056,16	<b>0,01%</b>
<b>E2 (MPa)</b>	6334,19	6337,66	<b>0,05%</b>
<b>E3 (MPa)</b>	16449,75	16449,74	<b>0,00%</b>
<b>G12 (MPa)</b>	26,68	26,71	<b>0,12%</b>
<b>G13 (MPa)</b>	3547,71	3547,82	<b>0,00%</b>
<b>G23 (MPa)</b>	3232,51	3232,53	<b>0,00%</b>
<b>Nu12</b>	0,063	0,062	<b>-1,61%</b>
<b>Nu13</b>	0,147	0,147	<b>0,00%</b>
<b>Nu23</b>	0,116	0,116	<b>0,00%</b>

Tableau III.11 - Effet de la forme périodique de la cellule de base sur les résultats de l'approche HMP

Ces tableaux montrent que les modules homogénéisés sont en bon accord quelle que soit la forme périodique retenue. En effet, on s'attendait à ce résultat puisque le comportement global se doit d'être indépendant du choix de la période dans la cellule de base. Cela peut donc valider la programmation des approches HMP et HCP par l'outil d'homogénéisation « HomPass »

### III.3.4 Type d'onde

En gardant les mêmes caractéristiques géométriques listées par le tableau III.4, on calcule les modules homogénéisés pour deux cellules de base ayant respectivement une onde droite et une onde serrated de serration égale à 3,175 mm (figures III.15 et III.16). L'objectif ici est de comparer le comportement global des passages constitués par deux types différents d'onde (droite et serrated), tout en gardant les mêmes caractéristiques géométriques.

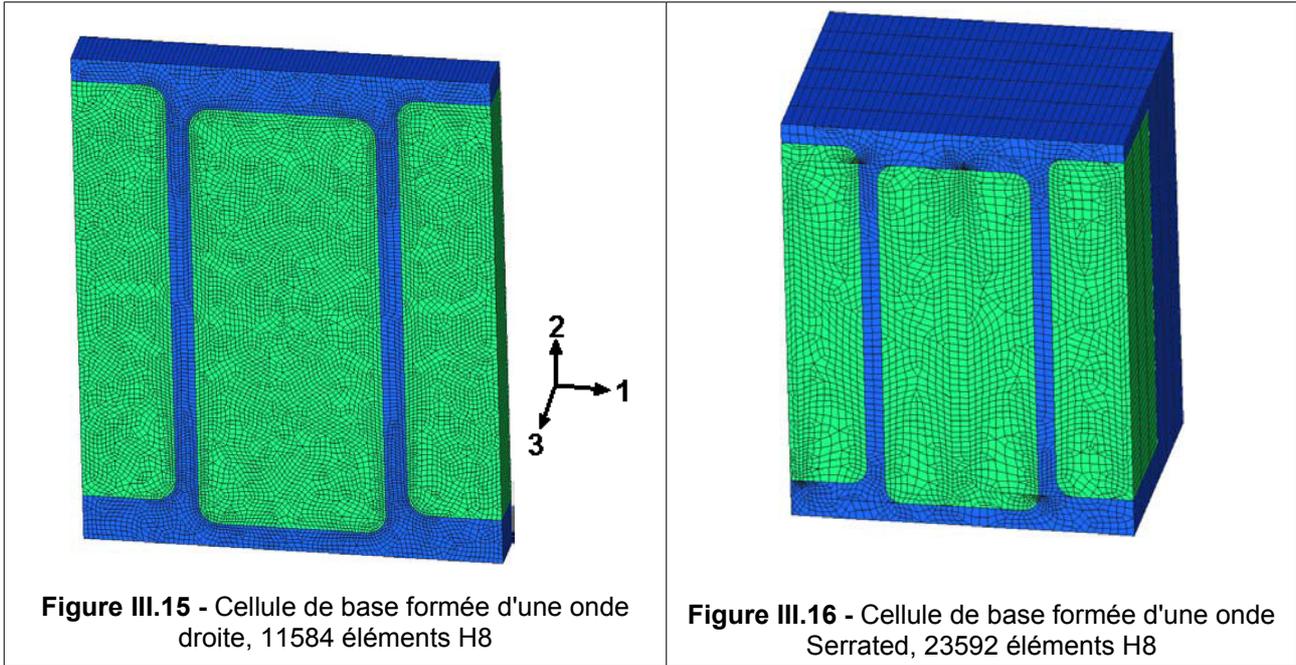


Figure III.15 - Cellule de base formée d'une onde droite, 11584 éléments H8

Figure III.16 - Cellule de base formée d'une onde Serrated, 23592 éléments H8

HCP	Onde Droite	Onde Serrated	Ecart relatif
Nombre total d'éléments (H8)	11584	23592	
Eléments par jambe	4	2	
E1 (MPa)	9613,25	9459,57	-1,62%
E2 (MPa)	8650,54	8472,62	-2,10%
E3 (MPa)	16449,71	10114,59	-62,63%
G12 (MPa)	29,70	31,86	6,77%
G13 (MPa)	3760,55	3715,83	-1,20%
G23 (MPa)	3293,86	780,87	-76,29%
Nu12	0,004	0,038	89,47%
Nu13	0,175	0,272	35,66%
Nu23	0,158	0,058	-63,29%

Tableau III.12 - Comparaison du comportement global des ondes Droite et Serrated (approche HCP)

HMP	Onde Droite	Onde Serrated	Ecart relatif
Nombre total d'éléments (H8)	11584	23592	
Eléments par jambe	4	2	
E1 (MPa)	8055,73	8326,61	3,25%
E2 (MPa)	6334,19	7779,79	18,58%
E3 (MPa)	16449,75	9859,85	-40,06%
G12 (MPa)	26,68	29,03	8,11%
G13 (MPa)	3547,71	3519,98	-0,79%
G23 (MPa)	3232,51	616,83	-80,92%
Nu12	0,063	0,053	-18,87%
Nu13	0,147	0,244	39,75%
Nu23	0,116	0,070	-39,66%

Tableau III.13 - Comparaison du comportement global des ondes Droite et Serrated (approche HMP)

Les tableaux III.12 et III.13 listent le comportement global calculé respectivement par les approches HCP et HMP. Ils montrent que les modules homogénéisés sont perturbés par l'introduction d'une serration à l'onde droite. On retrouve surtout une altération considérable des coefficients qui font intervenir la direction  $y_3$  (direction de la serration) notamment pour les coefficients  $E_3$  et  $G_{13}$ . On peut alors dire que les passages à onde droite sont plus rigides que ceux à onde serrated, en mode de traction  $y_3$  et en mode de cisaillement dans le plan  $(y_1, y_3)$ .

En effet pour la traction dans la direction  $y_3$  l'effort est supporté par les tôles et les jambes dans l'onde droite alors qu'il n'est tenu que dans les tôles de la cellule d'onde serrated en raison du décalage des jambes. Par ailleurs, en mode de cisaillement dans le plan  $(y_1, y_3)$ , ce décalage contribue à l'affaiblissement du moment quadratique dans ce plan. Ceci explique l'altération considérable des coefficients  $E_3$  et  $G_{13}$  de la cellule d'onde serrated par rapport à celle d'onde droite.

Par ailleurs, en mode de cisaillement dans le plan  $(y_1, y_2)$ , les jambes d'onde serrated et droite fléchissent dans leur moment d'inertie le plus faible. Cela explique la faible valeur du coefficient  $G_{12}$  par rapport aux autres modules de cisaillement.

#### III.3.5 Influence de la hauteur

Pour étudier la sensibilité de la hauteur sur le comportement global, on fait varier la hauteur dans le tableau III.4 tout en gardant invariables les autres paramètres géométriques. On illustre ainsi la variation des coefficients homogénéisés en fonction de la hauteur (figure III.17)

En augmentant la hauteur de l'onde on peut remarquer que :

- L'écart entre HMP et HCP diminue et la cellule de base devient moins sensible à l'influence des passages adjacents. En effet, si on se place d'un point de vue macroscopique, on constate qu'en augmentant la hauteur d'un passage tout en conservant les autres paramètres géométriques, le nombre d'ailettes par unité de hauteur augmente et la structure devient moins sensible à l'influence de son milieu adjacent.
- Les modules de cisaillement ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$ ) et de traction ( $E_1$  et  $E_2$ ) s'affaiblissent en général puisqu'on augmente le ratio volume vide / volume cellule de base.
- Les modules de Young  $E_2^{HCP}$  et  $E_2^{HMP}$  tendent vers une valeur constante indépendante de la hauteur.

### Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

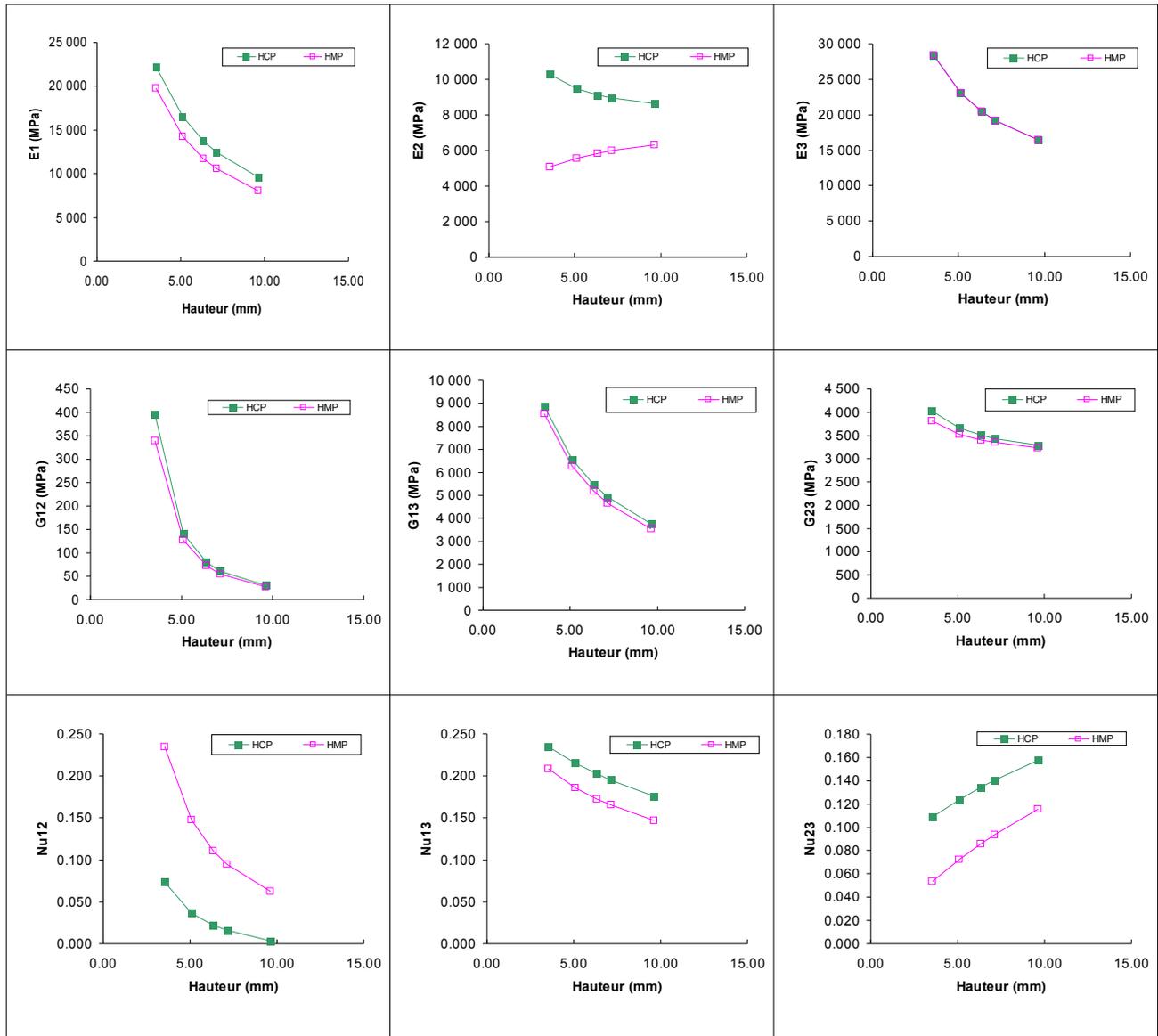


Figure III.17 - Évolution des modules homogénéisés en fonction de la hauteur d'onde

### III.3.6 Influence du pas d'onde

Pour illustrer l'influence du pas d'onde sur le comportement global, on fait varier le pas dans le tableau III.4 tout en gardant invariables les autres paramètres géométriques. On trace ainsi la variation des coefficients homogénéisés en fonction du pas (figure III.18).

### Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

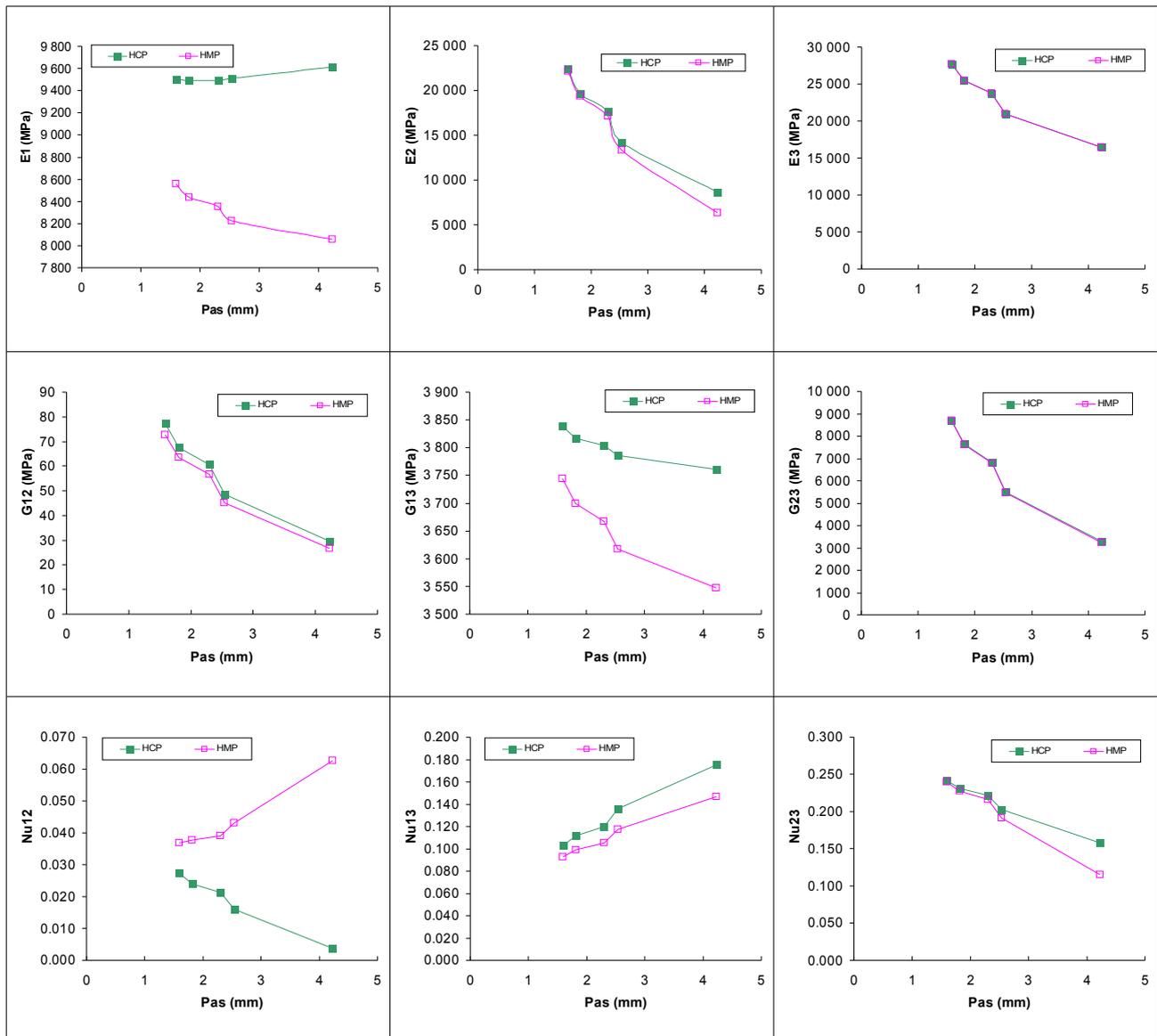


Figure III.18 - Évolution des modules homogénéisés en fonction du pas d'onde

En augmentant la période de l'onde on note que :

- L'écart entre HMP et HCP augmente et la cellule de base devient plus sensible à l'influence des passages adjacents. En effet, du point de vue macroscopique, si on augmente la période de l'onde tout en conservant les autres paramètres, le nombre d'ailettes par unité de hauteur diminue et la structure devient plus sensible à l'influence de son milieu adjacent.
- Les modules de cisaillement et de Young s'affaiblissent en général puisqu'on augmente le ratio volume vide / volume cellule de base.

#### III.3.7 Influence des épaisseurs

Dans ce paragraphe on étudie d'abord l'influence de l'épaisseur de l'onde puis l'épaisseur de la tôle de séparation et enfin l'influence des deux conjuguées.

##### a) influence de l'épaisseur de l'onde

On trace les courbes des modules homogénéisés en fonction de l'épaisseur de l'onde

(figure III.19) en faisant varier seulement ce paramètre dans le tableau III.4.

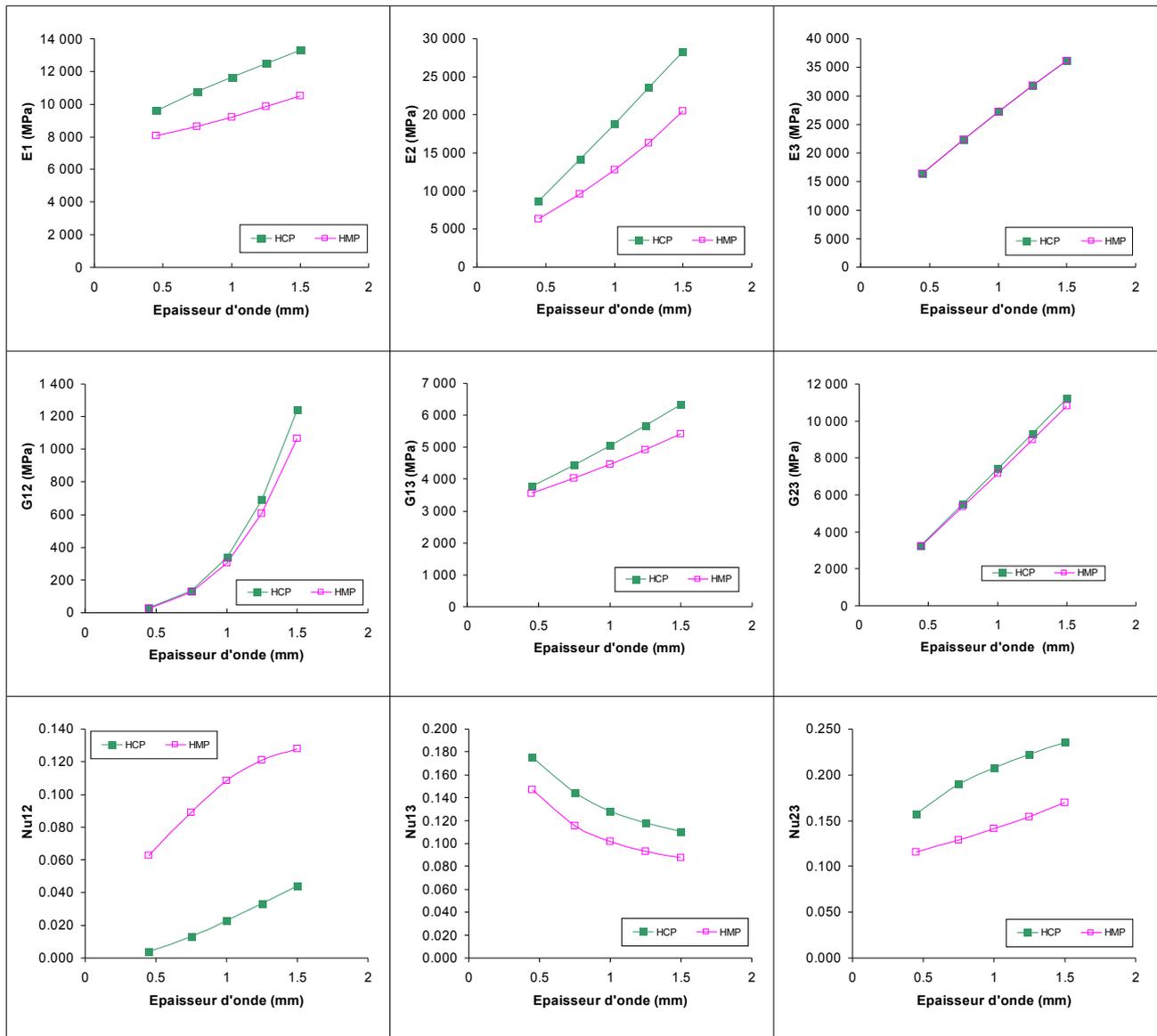


Figure III.19 - Évolution des modules homogénéisés en fonction de l'épaisseur d'onde

En augmentant l'épaisseur de l'onde, on constate que :

- L'écart entre HMP et HCP augmente et la cellule de base devient plus sensible à l'influence des passages adjacents.
- Les modules de cisaillement ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$ ) et de traction ( $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ ) augmentent en général puisqu'on diminue le ratio volume vide / volume cellule de base.
- Les modules de cisaillement  $G_{12}^{HCP}$  et  $G_{12}^{HMP}$  augmentent de façon parabolique avec l'épaisseur de l'onde. Respectivement les courbes de tendance sont :
  - ♦  $G_{12}^{HCP} = 1178,9e^2 - 1165,6e + 325,13$   
avec un coefficient de détermination :  $R^2 = 0,9987$
  - ♦  $G_{12}^{HMP} = 967,45e^2 - 908,7e + 246,5$   
avec un coefficient de détermination :  $R^2 = 0,9991$

**b) influence de l'épaisseur des tôles**

On trace les courbes des modules homogénéisés en fonction de l'épaisseur des tôles supérieure et inférieure (figure III.20) en faisant varier seulement ce paramètre (cf. tableau III.4).

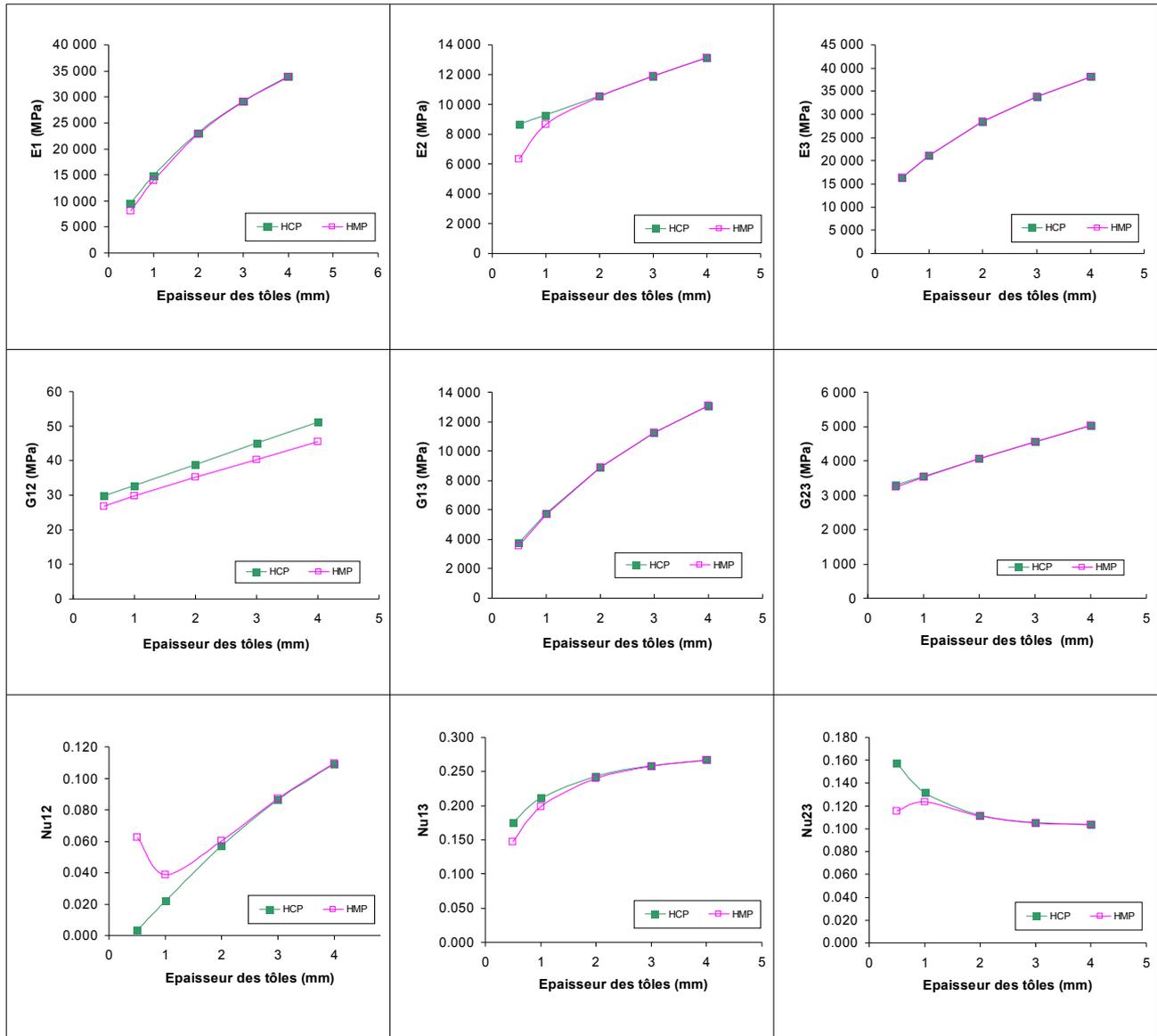


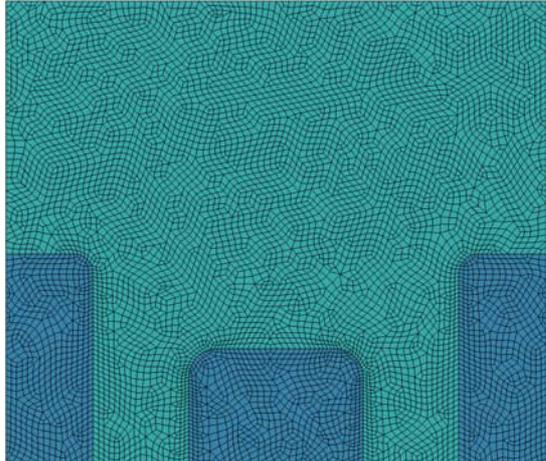
Figure III.20 - Évolution des modules homogénéisés en fonction de l'épaisseur des tôles

En augmentant l'épaisseur des tôles de séparation, on constate que :

- A l'exception de  $G_{12}$ , l'écart entre HMP et HCP diminue et tend vers zéro. En effet, l'épaisseur des tôles homogénéisent les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la cellule de base.
- L'écart entre  $G_{12}^{HCP}$  et  $G_{12}^{HMP}$  est sensible à l'épaisseur des tôles et de l'onde.
- Les modules de cisaillement ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$ ) et de traction ( $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ ) augmentent en général puisqu'on diminue le ratio volume vide / volume cellule de base.

**c) influence des épaisseurs de l'onde et des tôles de séparation**

On calcule ici le comportement global pour des sur-épaisseurs des ondes et des tôles de séparation, tout en gardant les autres paramètres du tableau III.4 invariables. Les résultats pour les approches HCP et HMP sont listés dans le tableau III.14.



	HCP	HMP	Ecart relatif
Nombre total d'éléments (H8)	18180		
Éléments par jambe	19		
Épaisseur jambe	1,5 mm		
Épaisseur tôle	4 mm		
E1 (MPa)	36045,46	35918,08	0,35%
E2 (MPa)	36520,41	36460,29	0,16%
E3 (MPa)	49979,85	49979,83	0,00%
G12 (MPa)	1937,67	1922,30	0,79%
G13 (MPa)	14429,81	14425,75	0,03%
G23 (MPa)	14494,55	14491,74	0,02%
Nu12	0,143	0,144	-0,70%
Nu13	0,216	0,216	0,00%
Nu23	0,219	0,219	0,00%

Tableau III.14 - Influence des sur-épaisseurs de la cellule de base sur le comportement globale

Ce tableau montre un très bon accord entre le comportement global calculé par l'approche HCP et celui calculé par l'approche HMP. En effet en augmentant les épaisseurs des tôles de séparation et de l'onde, on contribue à la diminution des cavités en rigidifiant la structure. Cela va permettre d'homogénéiser les conditions aux limites, principale source de différence entre les approches HCP et HMP.

D'ailleurs, dans [Cartraud, 1994] on retrouve, pour le module  $E_2$ , le faible écart entre approche en déformation et celle en contrainte appliquées sur un cas similaire au notre, lorsqu'on augmente l'épaisseur sur les faces supérieure et inférieure de la cellule de base. Cela permettra de valider l'application numérique des approches HCP et HMP.

**III.3.8 Erreur de la modélisation globale des passages**

Au cours de l'étude de la sensibilité du comportement global vis-à-vis des paramètres géométriques, on a trouvé que l'écart entre les approches HCP et HMP diminue en augmentant l'épaisseur, la hauteur de l'onde et en diminuant le pas. D'où, on définit un groupement adimensionnel de sensibilité au milieu adjacent en fonction des paramètres d'onde:

$$S_{milieu} = \frac{p^2}{e.h} \tag{III.2}$$

avec :

- $e$  : épaisseur de l'onde
- $h$  : hauteur de l'onde
- $p$  : pas de l'onde (l'inverse du nombre d'ailette par mètre)

L'épaisseur des tôles de séparation étant prédéfinie,  $S_{milieu}$  mesure l'aptitude de la cellule de base de résister à l'influence du milieu extérieur. Plus  $S_{milieu}$  est petit, plus l'écart entre

les comportements globaux déterminés par les approches HCP et HMP diminué.

Ainsi, en parcourant la liste des ondes utilisées par l'entreprise, on peut déterminer la sensibilité de chaque onde. On choisit alors pour chaque type d'onde la sensibilité la plus grande. Cela va permettre de déterminer l'écart maximal qui peut exister sur les modules par application des approches HCP et HMP (tableaux III.15 et III.16).

Onde Serrated 2830	HCP	HMP	Ecart relatif
E1 (MPa)	13770,89	13325,06	3,24%
E2 (MPa)	10695,04	10555,64	1,30%
E3 (MPa)	15478,22	15359,10	0,77%
G12 (MPa)	28,65	25,60	10,63%
G13 (MPa)	5404,34	5355,88	0,90%
G23 (MPa)	2106,92	2037,16	3,31%
Nu12	0,053	0,058	-8,62%
Nu13	0,266	0,258	3,01%
Nu23	0,076	0,075	1,32%

**Tableau III.15** - Comportement globaux de l'onde serrated N° 2830  
( $S_{milieu}=2,47$  ; épaisseurs tôles de séparation = 0,5 mm; 28392 éléments H8)

Onde Droite 2892	HCP	HMP	Ecart relatif
E1 (MPa)	16728,53	14364,72	14,13%
E2 (MPa)	9579,31	5824,00	39,20%
E3 (MPa)	23166,53	23166,53	0,00%
G12 (MPa)	141,44	127,85	9,61%
G13 (MPa)	6633,59	6321,60	4,70%
G23 (MPa)	3677,47	3554,62	3,34%
Nu12	0,042	0,161	-73,91%
Nu13	0,217	0,186	14,29%
Nu23	0,124	0,075	39,52%

**Tableau III.16** - Comportement globaux de l'onde droite N° 2892  
( $S_{milieu}=7,81$  ; épaisseurs tôles de séparation = 0,5 mm; 10232 éléments H8)

En partant de l'hypothèse que le comportement global réel du passage est compris entre celui déterminé par approche HCP (milieu plutôt rigide) et HMP (milieu plutôt mou), on peut, en choisissant un comportement intermédiaire, réduire l'écart relatif entre les comportements dictés par ces différentes approches. Désignons alors le comportement moyen des souplesses homogénéisées (noté CMSH) comme le comportement intermédiaire à ceux des approche HCP et HMP :

$$C^{CMSH} = \frac{C^{HCP} + C^{HMP}}{2} \quad (III.3)$$

Les modules effectifs du comportement médian sont alors:

$$E_i^{CMSH} = 2 \frac{E_i^{HCP} E_i^{HMP}}{E_i^{HCP} + E_i^{HMP}} \quad (i = 1, 2 \text{ et } 3)$$

$$G_{ij}^{CMSH} = 2 \frac{G_{ij}^{HCP} G_{ij}^{HMP}}{G_{ij}^{HCP} + G_{ij}^{HMP}} \quad (ij=12, 13 \text{ et } 23)$$

$$\nu_{ij}^{CMSH} = \frac{E_i^{CMSH}}{2} \left( \frac{\nu_{ij}^{HCP}}{E_i^{HCP}} + \frac{\nu_{ij}^{HMP}}{E_i^{HMP}} \right) \quad (ij=12, 13 \text{ et } 23)$$

### Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique

On calcule ensuite (cf. tableaux III.17 et III.18) l'écart maximal des modules homogènes déterminés par l'approche CMSH avec ceux calculés par les approches HCP et HMP. Cet écart représente l'erreur maximale par homogénéisation de l'onde ayant la plus grande sensibilité vis-à-vis des passages adjacents. Le choix de l'approche CMSH permet de réduire l'erreur estimée par rapport à l'homogénéisation par approche HCP ou HMP. Ainsi, si on met l'accent sur l'estimation des modules de Young et de cisaillement, l'erreur maximale de modélisation est de :

- 24% sur le module  $E_2^{CMSH}$  ce qui représente 19,6% sur le coefficient de souplesse homogène  $C_{2222}^{CMSH}$  pour l'onde droite N° 2892 (cf. tableau III.17)
- 5,6% sur le module  $G_{12}^{CMSH}$  ce qui représente 5,3% sur le coefficient de souplesse homogène  $C_{1212}^{CMSH}$  de l'onde serrated N° 2830 (cf. tableau III.18)

Onde Serrated 2830	CMSH	HCP	HMP	Erreur max de CMSH
E1 (MPa)	13544,30	13770,89	13325,06	1,65%
E2 (MPa)	10624,88	10695,04	10555,64	0,66%
E3 (MPa)	15418,43	15478,22	15359,10	0,39%
G12 (MPa)	27,04	28,65	25,60	5,61%
G13 (MPa)	5380,00	5404,34	5355,88	0,45%
G23 (MPa)	2071,45	2106,92	2037,16	1,68%
Nu12	0,056	0,053	0,058	-4,58%
Nu13	0,262	0,266	0,258	1,53%
Nu23	0,075	0,076	0,075	0,66%

**Tableau III.17** - Comportement global intermédiaire de l'onde serrated N° 2830 ( $S_{milieu}=2,47$  ; épaisseurs tôles de séparation = 0,5 mm; 28392 éléments H8)

Onde Droite 2892	CMSH	HCP	HMP	Erreur max de CMSH
E1 (MPa)	15456,78	16728,53	14364,72	7,60%
E2 (MPa)	7243,88	9579,31	5824,00	24,38%
E3 (MPa)	23166,53	23166,53	23166,53	0,00%
G12 (MPa)	134,30	141,44	127,85	5,05%
G13 (MPa)	6473,84	6633,59	6321,60	2,41%
G23 (MPa)	3615,00	3677,47	3554,62	1,70%
Nu12	0,106	0,042	0,161	-60,39%
Nu13	0,200	0,217	0,186	7,69%
Nu23	0,094	0,124	0,075	24,58%

**Tableau III.18** - Comportement global intermédiaire de l'onde droite N° 2892 ( $S_{milieu}=7,81$  ; épaisseurs tôles de séparation = 0,5 mm; 10232 éléments H8)

#### Remarque :

On vérifie sans difficulté que  $C^{CMSH}$  est définie positive :

$$E : \frac{C^{HCP} + C^{HMP}}{2} : E \geq 0 \quad \forall E \quad (III.5)$$

## III.4 Comparaison numérique des modèles micro et macro d'un passage 2D en pression

Après avoir validé la modélisation du comportement global des passages d'échangeur, il est intéressant de comparer le comportement d'un modèle homogénéisé à celui du modèle réel de départ. Cependant, plusieurs limitations peuvent surgir :

- Le comportement global réel du passage, dépendant des passages adjacents, est inconnu. Cependant il est supposé encadré par le comportement en milieu plutôt «rigide» (approche HCP) et celui en milieu plutôt «mou» (approche HMP).
- La comparaison est souvent indirecte entre quantités micro et macro.

Pour remédier à ces limitations, on adopte les caractéristiques du passage listées dans le tableau III.14 et complétées par le tableau III.4. Ce passage possède l'avantage d'être peu sensible à l'influence des passages adjacents. Par conséquent, les comportements globaux calculés par approche HCP et HMP convergent vers les mêmes valeurs. Ces valeurs sont supposées, d'après l'hypothèse de l'encadrement, les valeurs du comportement global réel. Cette étude permet alors la validation numérique de cette hypothèse.

### III.4.1 Position du problème

#### **Le modèle microscopique :**

Comme illustré par la figure III.21, ce modèle est constitué d'un passage d'échangeur d'onde droite (cf. tableau III.14 et III.4 pour les caractéristique du passage) servant à étudier l'effet du milieu adjacent quelconque. On considère alors deux tôles massives supérieure et inférieure à ce passage avec une barre d'extrémité pour représenter le milieu «rigide». Techniquement ce cas de figure correspond au milieu le plus rigide dans l'assemblage des échangeurs. Le cas le plus «mou» serait celui d'un passage à l'air libre : sans les tôles massives mais avec la moins large barre d'extrémité (cf. par exemple figure III.25). Un troisième cas considère un empilement identique de trois passages (cf. figure III.28).

#### **Le modèle macroscopique :**

Comme illustré, par exemple, par la figure III.23, ce modèle reprend le modèle microscopique en remplaçant le passage étudié par son comportement orthotrope global (cf. tableau III.14 pour le comportement homogène). Le milieu adjacent (tôles massives, air libre ou passages identiques), la barre d'extrémité et les conditions cinématiques sont les mêmes dans les deux modèles. A noter :

- Un déplacement horizontal nul imposé sur l'axe de symétrie :  $U_{(\text{axe de symétrie})}=0$
- Un déplacement vertical nul imposé au coin du passage (point A) pour empêcher le mouvement de corps rigide:  $V_{(A)}=0$

Les modèles micro et macro sont soumis respectivement à un chargement en pression unitaire appliqué sur le contour des cavités et à un chargement en déformation initiale équivalente appliqué dans le domaine homogène orthotrope. Ce dernier est calculé par les deux méthodes vues dans le chapitre II (§ II.3.4) dans la perspective d'une validation numérique.

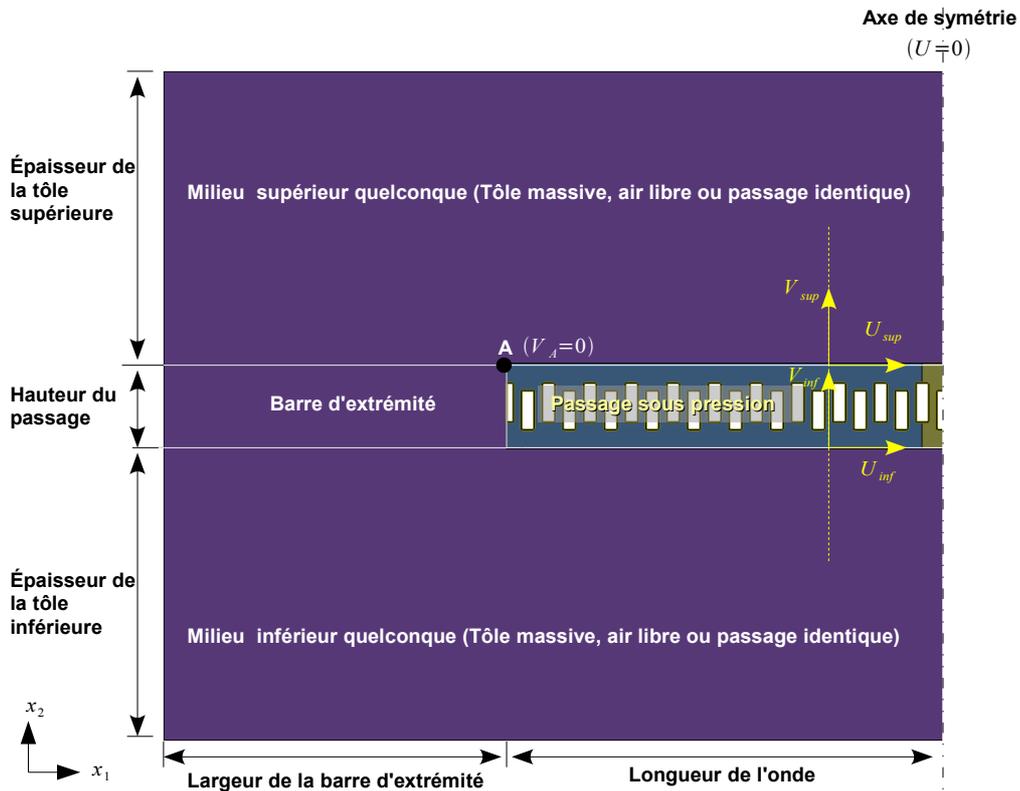
**Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique**

Le calcul du tenseur de déformation initiale par la méthode de transformation de chargement (cf. II.113) donne :

$$\langle \tilde{E}_{kh} \rangle = \langle 1,2152e-5 \quad 1,1791e-5 \quad 2,3694e-6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

Ce tenseur est en très bon accord avec celui calculé, à partir de II.106, par l'approche HCP:

$$\langle \tilde{E}_{kh} \rangle = \langle 1,2154e-5 \quad 1,1793e-5 \quad 2,3694e-6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$



**Figure III.21 – Modélisation numérique d'un passage sous pression dans un milieu quelconque**

Ayant un modèle 2D en déformation plane, les caractéristiques homogénéisées sont extraites de la matrice de rigidité homogène. On obtient :

- Les modules équivalents du passage en 2D déformation plane:

<b>E1 (MPa)</b>	38547
<b>E2 (MPa)</b>	39091
<b>G12 (MPa)</b>	1938
<b>Nu12</b>	0,22

- L'élasticité de l'aluminium

<b>E (MPa)</b>	71000
<b>Nu12</b>	0,3

- Le tenseur de chargement équivalent:

$$\{ \tilde{E}_{kh} \} = \begin{Bmatrix} 1,2862e-5 \\ 1,2502e-5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### III.4.2 Résultats numériques

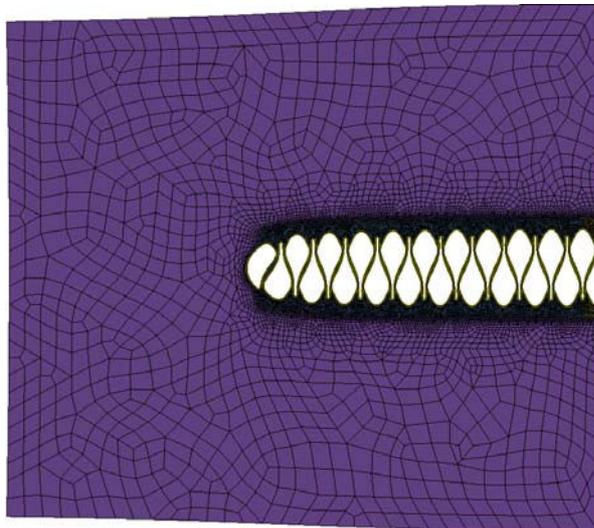
La difficulté de comparaison du modèle micro avec celui macro réside dans la comparaison directe des résultats numériques (déplacements, déformation...). Pour s'en apercevoir, il suffit de regarder la déformée d'un passage à l'air libre (figures III.25 et III.26). Il est évident que dans le cas homogène, le passage possède deux axes de symétrie. La déformée de la face supérieure est alors symétrique par rapport à celle de la face inférieure. Ce n'est pas le cas pour le passage hétérogène qui ne possède qu'un seul axe de symétrie vertical.

Par ailleurs, la comparaison macro/micro ne peut se faire que si on considère des quantités en moyennes. En effet par définition, les quantités macroscopiques sont les moyennes des quantités microscopiques. Dans ce cadre, on propose de comparer les écarts relatifs de déplacement vertical entre les faces supérieure et inférieure des passages (cf. figure III.21):

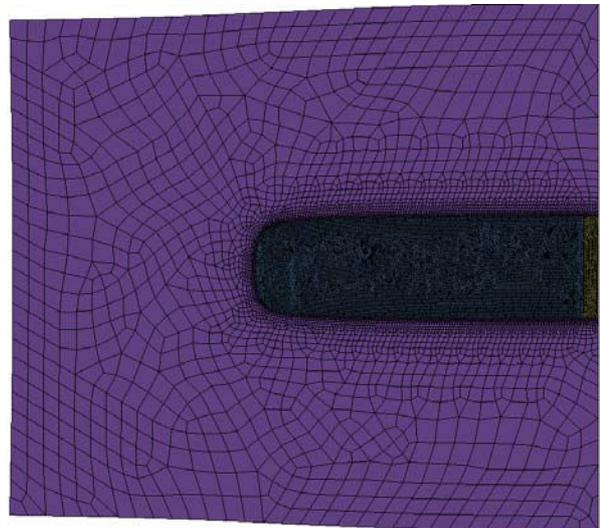
$$DV = V_{sup} - V_{inf} = \int_{inf}^{sup} \epsilon_{22} dx_2 \quad (III.6)$$

#### **a) cas d'un milieu rigide**

Dans ce cas, on compare les écarts relatifs de déplacement vertical entre les faces supérieure et inférieure des passages de deux modèles micro et macro. Pour simuler le comportement d'un milieu rigide on entoure les passages étudiés par des tôles massives et une barre d'extrémité.

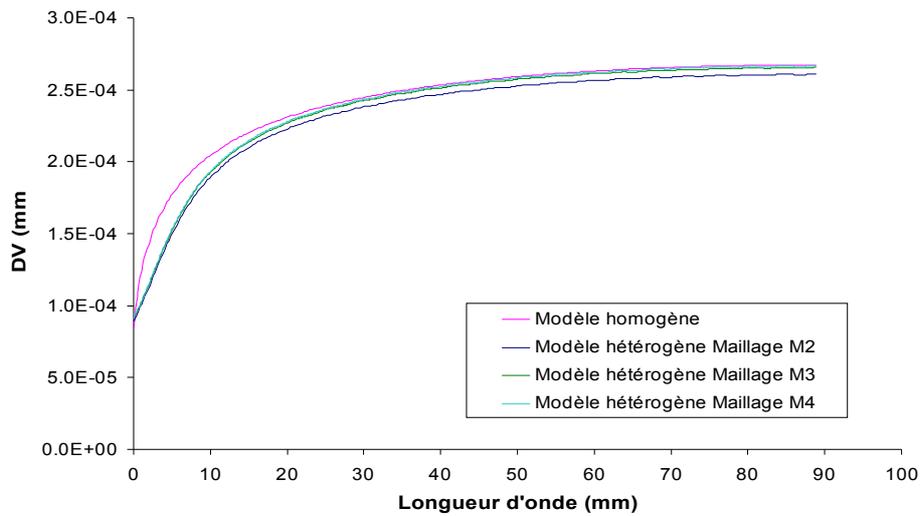


**Figure III.22** – Déformée du modèle microscopique hétérogène sous chargement en pression (Maillage M2 :1406 éléments Q4 )



**Figure III.23** – Déformée du modèle macroscopique sous chargement équivalent en précontrainte (19395 éléments Q4)

Les figures III.22 et III.23 montrent qualitativement les déformées respectives des modèles micro et macro. Les tôles massives et la barre d'extrémité qui entourent le passage hétérogène dans le cas micro et le passage homogène dans le cas macro, sont en aluminium. Ces passages sont soumis respectivement à un chargement en pression et un chargement équivalent en déformation initiale.



**Figure III.24** – Déplacement vertical relatif des faces (passage dans l'aluminium)  
 (l'origine correspond au point A, cf. figure III.21 ,  $DV = V_{sup} - V_{inf}$  , dépouillement sur les noeuds)

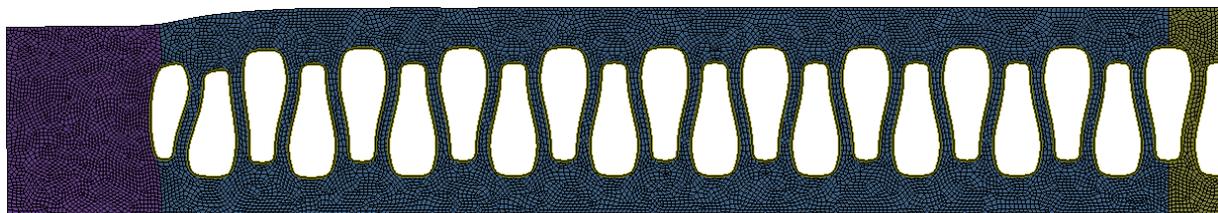
Quantitativement, les courbes de déplacement relatif (figure III.24) montrent un bon accord entre les modèles micro et macro. Ce bon accord est obtenu loin des effets de bord se manifestant au voisinage du point A (cf. figure III.21). Le maillage du milieu homogène étant stable, l'influence de celui du domaine hétérogène est illustrée en augmentant le nombre d'éléments. Le tableau III.19 montre la faible influence du maillage sur le calcul de l'énergie potentielle du modèle hétérogène.

Maillage	M2	M3	M4
Nombre total d'éléments (Q4)	14061	40343	148736
Energie potentielle totale (mJ)	1.11458E-02	1.94%	2.36%

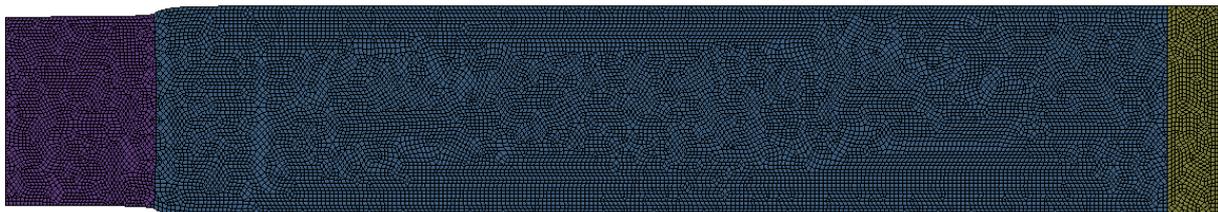
**Tableau III.19** - Influence du maillage du domaine réel en milieu rigide sur l'énergie potentielle totale

***b) cas d'un milieu mou (passage à l'aire libre)***

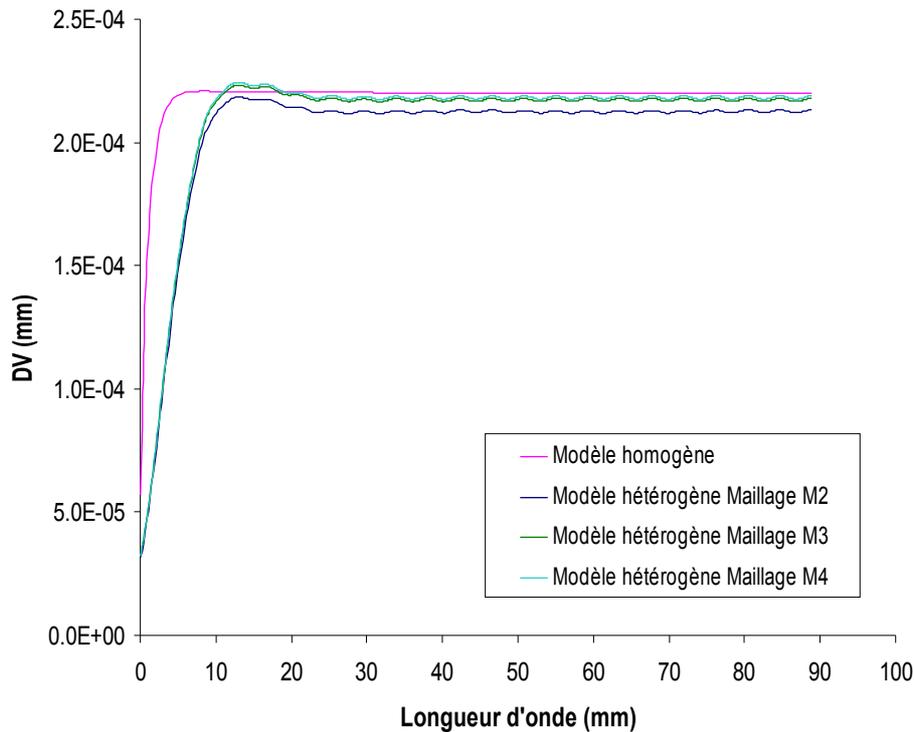
Dans ce cas, pour étudier le comportement à l'air libre, on considère ici les mêmes passages étudiés sans les tôles massives mais avec une barre d'extrémité fine. Techniquement ce cas de figure correspond à l'assemblage du passage dans un milieu mou.



**Figure III.25** – Déformée du passage à l'air libre (Maillage M2)



**Figure III.26** – Déformée du passage homogénéisé à l'air libre (17096 éléments Q4)



**Figure III.27** – Déplacement vertical relatif des faces (passage à l'air libre)  
 (l'origine correspond au point A, cf. figure III.21 ,  $DV = V_{sup} - V_{inf}$  , dépouillement sur les noeuds)

Les résultats (figure III.27) montrent un bon accord entre les modèles macro et micro quand on s'éloigne du bord. On remarque ainsi les fluctuations périodiques relatives des faces supérieure et inférieure du passage. En effet, ces faces sont libres de se déformer sous l'influence de la pression interne.

**c) cas d'un empilement de trois passages identiques**

Pour étudier l'influence des passages adjacents sur le passage homogénéisé, on considère ici un empilement de trois passages identiques. On compare alors les écarts relatifs de déplacement vertical entre les faces supérieure et inférieure du passage de milieu. Dans le cas micro (figure III.28), les passages sont soumis à un chargement en pression sur ses cavités intérieures tandis que dans le cas macro (figure III.29) les passages supérieur et inférieure sont soumis à un chargement en pression et le passage homogénéisé est soumis à un chargement équivalent en pression.

Les résultats (figure III.30) montrent aussi, dans ce cas, le bon accord entre les modèles macro et micro quand on s'éloigne du bord. On note ainsi, la bonne convergence du modèle micro vers le modèle macro tout en augmentant le nombre d'éléments du modèle hétérogène. D'autre part, les milieux adjacents de structure périodique induisent au comportement en moyenne du passage homogène une fluctuation périodique.

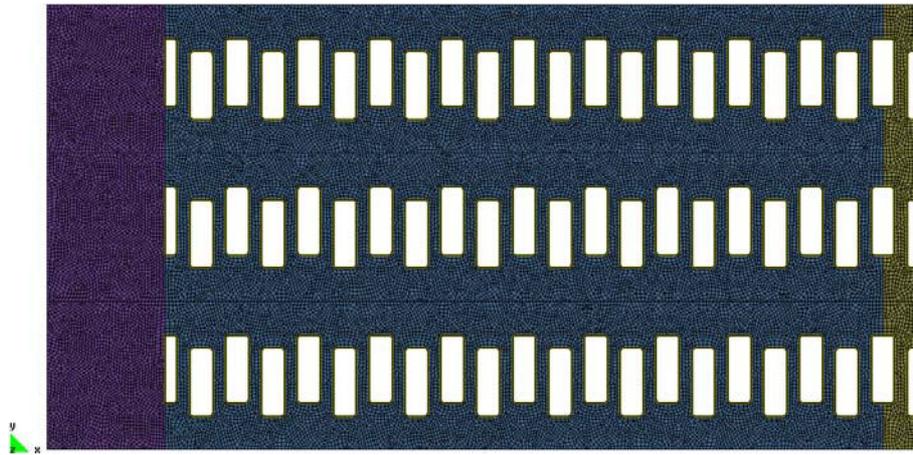


Figure III.28 – Modèle micro (empilement de trois passages identiques (Maillage 31772 éléments))

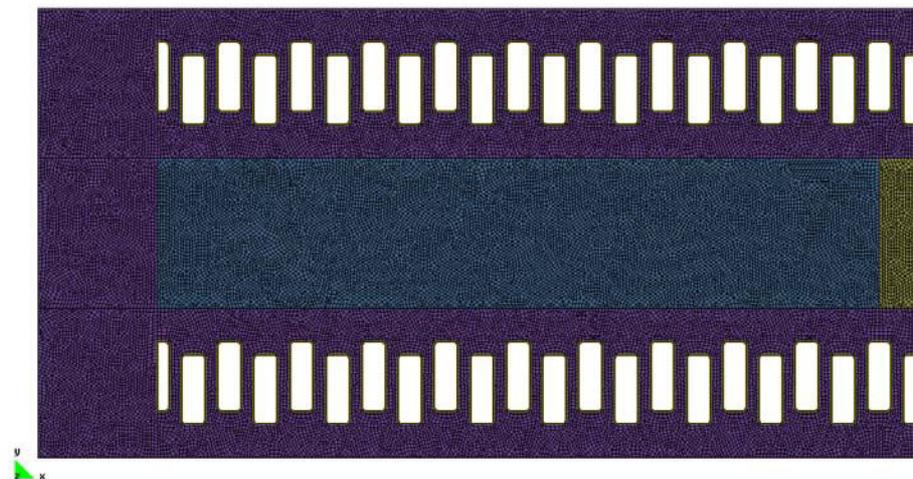


Figure III.29 – Modèle macro (empilement des passages micro sur un passage homogénéisé (Maillage 34356 éléments))

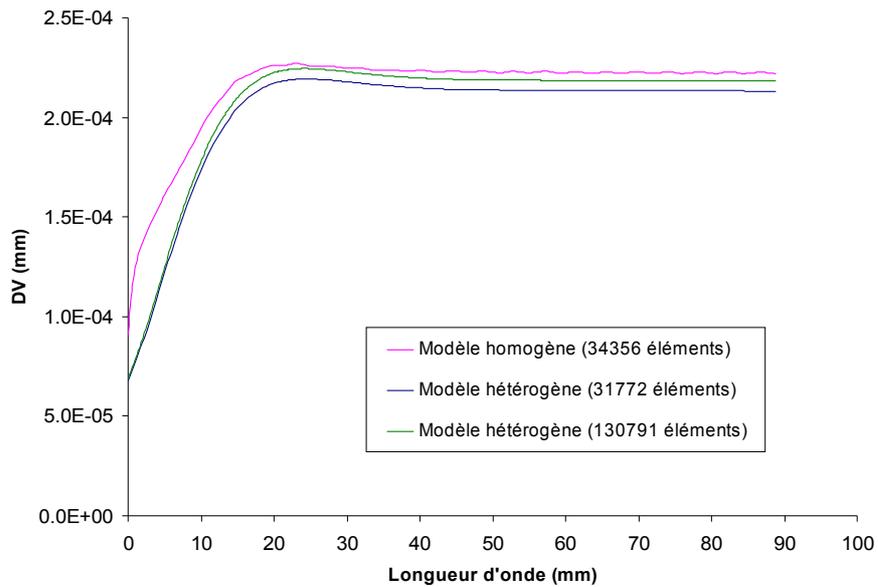
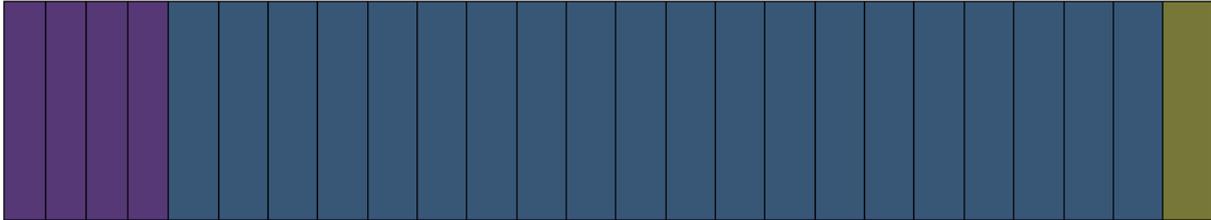


Figure III.30 – Déplacement vertical relatif des faces du passage de milieu (empilement de trois passages identiques) (l'origine correspond au point A, cf. figure III.21,  $DV = V_{sup} - V_{inf}$ , dépouillement sur les noeuds)

**Remarque :**

Le maillage du domaine homogène est choisi assez fin afin d'établir des courbes représentatives. Le dépouillement se fait sur les noeuds des faces supérieure et inférieure. Cependant, l'objectif direct de l'homogénéisation est de réduire la taille du problème en réalisant des maillages grossiers. On met donc en évidence la faible influence de ce maillage par rapport au comportement global. Le tableau III.20 montre la stabilisation de l'énergie potentielle totale du passage homogénéisé à l'air libre. Cette énergie est calculée pour un maillage fin (figure III.26) et un maillage plus réaliste vis-à-vis de notre application industrielle (figure III.31).



**Figure III.31** – Maillage grossier d'un passage homogène (passage à l'air libre; 25 éléments Q4)

Nombre total d'éléments (Q4)	17096	25
Energie potentielle totale (mJ)	1.25812E-02	0,25%

**Tableau III.20** - Influence du maillage du domaine homogène à l'air libre sur l'énergie potentielle totale

**III.4.3 Bilan**

Une étude numérique d'un passage homogénéisé soumis à un chargement équivalent en pression a été effectuée. La comparaison des quantités moyennées de ce passage avec celles du modèle réel montre un bon accord. Cela valide numériquement le comportement global réel d'un passage sous chargement en pression.

Par ailleurs, les caractéristiques du passage étudié ont été choisies pour avoir une faible sensibilité vis-à-vis des passages adjacents : épaisseurs d'onde et de tôles importantes avec un faible pas par rapport à la hauteur. Cette sensibilité a été validée par la bonne convergence des résultats macro et micro indépendamment du milieu adjacent (trois milieux ont été choisis, le premier représente techniquement le milieu le plus rigide dans l'assemblage de l'échangeur, le deuxième représente le milieu le plus mou et le dernier un empilement de trois passages identiques).

Concernant l'hypothèse d'encadrement qui suppose que le comportement réel global d'un passage d'échangeur est compris entre deux comportements limites déterminés par les approches HCP et HMP, il était évident de voir que quand ces deux comportements limites tendent vers les mêmes valeurs (conséquence de choix d'un passage à faible sensibilité vis-à-vis du milieu adjacent), le comportement réel global doit aussi tendre vers ces mêmes valeurs. Cela a été démontré numériquement dans ce paragraphe.

## III.5 Conclusions

Au cours de ce chapitre, on a présenté les résultats de l'application numérique des approches HCP et HMP. Dans un premier temps, un outil d'homogénéisation, appelé « HomPass », a été développé afin d'implémenter automatiquement ces approches. Ensuite, plusieurs tests ont été réalisés afin de valider numériquement les résultats de cet outil. Cela s'est fait via:

- Un patch test du domaine homogène: on applique les différentes approches d'homogénéisation implémentées par « HomPass » sur un matériau homogène. A la sortie, on récupère les caractéristiques isotropes de ce matériau.
- Un bon accord avec les résultats des méthodes classiques Hill-Mandel d'homogénéisation et ceux disponibles dans la littérature.

Dans un deuxième temps, l'étude de sensibilité des paramètres géométriques de la cellule de base permet de mettre en évidence un groupement adimensionnel de sensibilité du milieu. Ce groupement propre à chaque onde permet de montrer l'aptitude à résister à l'influence des passages adjacents. Cette influence se manifeste par l'écart entre le comportement global dans un milieu plutôt rigide et celui dans un milieu plutôt mou, déterminé respectivement par les approches HCP et HMP.

Ce groupement adimensionnel de sensibilité nous permet, de choisir une cellule de base ayant le même comportement équivalent déterminé par ces deux approches différentes : on rappelle que la HCP (approche en déformation avec une périodicité dans le plan) et la HMP (approche en contrainte avec périodicité dans le plan) correspondent à deux problèmes physiquement différents. Cela a conduit dans un dernier temps, à valider numériquement (en effectuant des comparaisons sur des quantités moyennées) le modèle macroscopique avec celui microscopique d'un passage sous chargement en pression. D'ailleurs, on mettra en évidence d'un côté, la faible sensibilité du passage choisi envers son milieu adjacent (trois milieux ont été choisis, le premier représente techniquement le milieu le plus rigide dans l'assemblage de l'échangeur, le deuxième représente le milieu le plus mou et le dernier un empilement de trois passages identiques) et d'un autre côté la validation numérique de l'hypothèse d'encadrement. En effet, cette hypothèse suppose que le comportement réel global d'un passage d'échangeur est compris entre deux comportements limites déterminés par les approches HCP et HMP. Il était alors évident de voir que quand ces deux comportements limites tendent vers les mêmes valeurs (conséquence de choix d'un passage à faible sensibilité vis-à-vis du milieu adjacent), le comportement réel global tend aussi numériquement vers ces mêmes valeurs.

Enfin, une librairie du comportement global des ondes et tôles brasées peut être établie à l'aide de l'outil d'homogénéisation « HomPass ». Ce comportement moyen aux souplesses homogénéisées par les approches HCP et HMP, noté CMSH, possède une erreur de modélisation maximale de 19,6% pour l'onde droite N°2892 et de 5,3% pour l'onde serrated N°2830. Ce sont ces dernières ondes qui possèdent la plus grande sensibilité vis-à-vis des passages adjacents. Il reste alors le développement d'un outil métier final, se servant de cette librairie pour attribuer le comportement équivalent à chaque zone, en respectant les paramètres géométriques de l'échangeur (e.g. empilement, orientation d'onde...) et en affectant les sollicitations en température et en pression équivalentes pour

### **Chapitre III – Applications numériques de l'homogénéisation volumique**

déterminer les comportement thermoélastique global. Cela constituera l'objectif du chapitre IV.

# Chapitre IV

## Modélisation du comportement thermoélastique global des échangeurs

**A**u cours de ce chapitre on applique les résultats de l'homogénéisation dans le développement d'un outil métier dédié à l'étude du comportement thermomécanique global des échangeurs, à savoir, le comportement élastique équivalent aux hétérogénéités géométriques dues aux ondes et tôles brasées, le chargement global équivalent en pression et le chargement global équivalent dû aux gradients locaux de température. La complexité géométrique des échangeurs est prise en charge par un logiciel métier appelé « SiTEME » qui, à partir des données paramétriques (orientations d'onde, empilage, sollicitation thermique...), doit permettre de constituer automatiquement le modèle thermomécanique homogène des échangeurs en vue de l'analyse par éléments finis volumique. On expose dans un premier temps l'aspect éléments finis particulier liée à la discrétisation de l'échangeur sous les sollicitations en pression et température. Dans un deuxième temps, on aborde l'architecture de l'outil métier et ses différents modules de programmation. On propose un exemple type d'échangeur homogénéisé passage par passage et les premiers résultats numériques obtenus à l'aide de l'outil métier « SiTEME » sont présentés et discutés.

<b>Chapitre IV : Modélisation du comportement thermoélastique global des échangeurs</b>	<b>131</b>
.....	
IV.1 Aspect éléments finis particulier.....	133
IV.1.1 Discrétisation .....	133
IV.1.2 Type d'éléments utilisés.....	134
IV.1.3 Résolution numérique.....	136
IV.1.4 Prise en compte de la direction d'orthotropie.....	137
IV.1.5 Calcul des contraintes.....	139
IV.1.6 Choix de l'outil d'analyse par éléments finis.....	139
VI.2 Présentation de l'outil métier SiTEME (Simulation Thermo-élastique Macroscopique des Échangeurs).....	141
IV.3 Résultats numériques.....	146
IV.3.1 Maillage de « STAT3 ».....	147
IV.3.2 Résultats du chargement thermique linéaire.....	151
IV.3.3 Résultats du chargement en pression équivalente.....	153
IV.3.4 Exemple d'un chargement en pression avec une tête.....	156
IV.4 Conclusions.....	160

## IV.1 Aspect éléments finis particulier

On présente dans ce paragraphe la méthode des éléments finis d'une manière générale. On s'oriente alors vers la résolution numérique de l'échangeur homogénéisé soumis aux sollicitations thermomécaniques. Pour plus de détails sur la méthode des éléments finis, le lecteur peut se référer à [Dhatt et Touzot, 1981] ou [Batoz et Dhatt, 1990] par exemple.

### IV.1.1 Discrétisation

La méthode des éléments finis est couramment utilisée pour obtenir des valeurs numériques représentatives des quantités cinématiques (déplacements, déformations) et mécaniques (contraintes) liés à l'équilibre d'un corps solide soumis à des sollicitations. Cette méthode permet d'obtenir une solution approximative satisfaisant les lois de la physique écrites sous une forme variationnelle. En effet, pour un problème mécanique linéaire élastique, il s'agit de trouver le champ solution  $\mathbf{u}$  parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles  $\mathbf{u}^*$  (appelé aussi champ virtuel test) qui rend minimum l'énergie potentielle totale. Les conditions de stationnarité de l'énergie potentielle totale (correspondant aussi au principe des travaux virtuels) se traduisent par:

$$W(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = W_{int}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) - W_{ext}(\mathbf{u}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u}^* \text{ C.A.} \quad (IV.1)$$

où  $W_{int}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u})$  est le travail virtuel interne de déformation incluant les sollicitations (contraintes) initiales  $\sigma_0$  (ici les contraintes thermiques  $\sigma_{th}$  sont incluses dans  $\sigma_0$  pour simplifier l'écriture):

$$W_{int}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \int_V (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) : \boldsymbol{\sigma}_0) dV \quad (IV.2)$$

et  $W_{ext}(\mathbf{u}^*)$  est le travail virtuel des forces de volume  $\mathbf{f}_v$  et de surface  $\mathbf{f}_s$  :

$$W_{ext}(\mathbf{u}^*) = \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV + \int_S \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS \quad (IV.3)$$

$\forall \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u}^* \text{ C.A.}$  (cinématiquement admissibles) signifient  $\nabla \mathbf{u}^* = 0$  sur la partie du contour  $S_u$  où les déplacements  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  sont imposées.

Par ailleurs, la méthode des éléments finis consiste à substituer au domaine étudié une partition en éléments de géométrie simple le recouvrant aussi bien que possible. Cette discrétisation, qui conduit au « maillage » de la pièce, sous-tend les deux idées fondamentales qui caractérisent la méthode :

- se ramener à l'étude du comportement d'éléments standards de forme simple ; ces éléments sont de dimension finie (par opposition aux éléments infinitésimaux qui sont utilisés dans l'approche analytique);
- on se contentera de rechercher une approximation aussi bonne que possible de la solution aux points privilégiés que sont les noeuds permettant une représentation continue approchée des champs de déplacements. Pour un problème linéaire élastique, la solution approchée est obtenue par résolution d'un système d'équations linéaires dont le nombre de variables est, aux conditions limites prés, égal au produit du nombre de noeuds par le nombre d'inconnues par noeud (trois déplacements dans

le cas 3D).

Ainsi, pour évaluer des diverses intégrales sur le domaine  $V$  et sa frontière  $S$ ,  $V$  est représenté par un ensemble de sous-domaines, appelés éléments finis tels que  $V = \sum_e V^e$ .

L'expression de principe des travaux virtuels peut donc être évaluée sur l'ensemble des éléments finis :

$$W(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \sum_e W^e(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \sum_e (W_{int}^e(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) - W_{ext}^e(\mathbf{u}^*)) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u}^* C.A. \quad (IV.4)$$

avec

- $W_{int}^e = \int_{V^e} (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) : \boldsymbol{\sigma}_0) dV^e$
- $W_{ext}^e = \int_{V^e} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV^e + \int_{S^e} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS^e$

### IV.1.2 Type d'éléments utilisés

Dans le cas des échangeurs, le domaine 3D est discrétisé en éléments volumiques de type hexaèdre à 8 noeuds (H8) ou prisme à 6 noeuds (P6), compatibles (voir § IV.2). Ces deux éléments sont décrits succinctement:

- Élément Hexaédrique à 8 noeuds (H8), figure IV.1

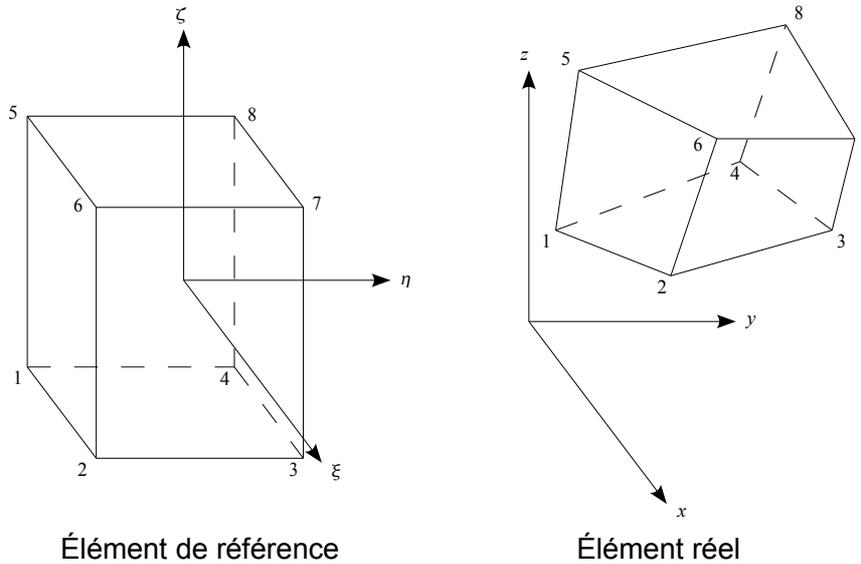


Figure IV.1 - Hexaèdre à 8 noeuds

Pour l'élément de référence, on a :

$$\begin{cases} -1 \leq \xi \leq 1 \\ -1 \leq \eta \leq 1 \\ -1 \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

- Élément prismatique à 6 noeuds (P6), figure IV.2

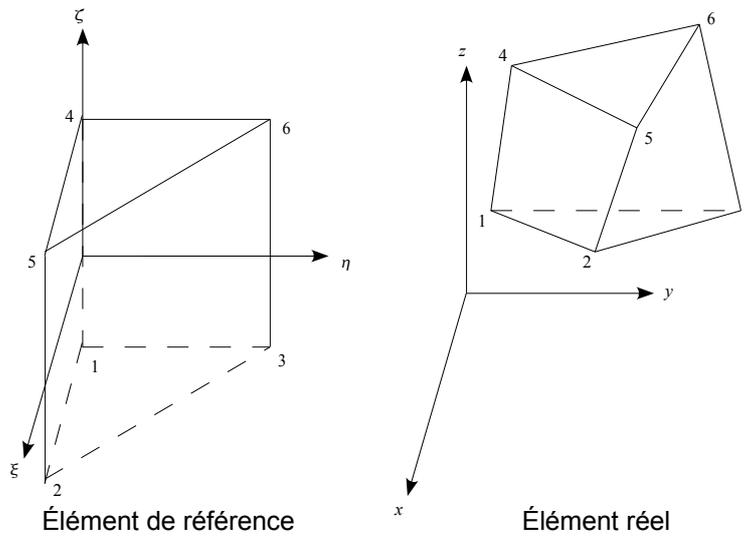


Figure IV.2 - Prisme à 6 noeuds

Pour l'élément de référence, on a :

$$\begin{cases} \xi \geq 0 \\ \eta \geq 0 \\ 1 - \xi - \eta \geq 0 \\ -1 \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

Chaque point de l'élément de référence  $V^r$  possède une image unique dans l'élément réel  $V^e$ , on a ainsi:

$$x = \langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{x_n\}, \quad y = \langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{y_n\}, \quad z = \langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{z_n\} \quad (\text{IV.5})$$

avec :

- $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  et  $\{z_n\}$  vecteurs des coordonnées réelles du noeud « n » de l'élément  $V^e$
- $\langle N \rangle = \langle \dots N_i(\xi, \eta, \zeta) \dots \rangle$   $i=1, n$  vecteur des fonctions de forme. Les fonctions  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  peuvent être trouvées dans [Dhatt et al., 1981] pour les éléments H8 et P6. Elles sont trilineaires en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  pour H8, linéaires en  $\xi$ ,  $\eta$  et bilinéaires en  $\xi$ ,  $\zeta$  et  $\eta$ ,  $\zeta$  pour P6.

Par représentation isoparamétrique, les fonctions solutions  $u$  et virtuelles  $u^*$  sont aussi approximées dans chaque élément par :

$$\{u(\xi, \eta, \zeta)\} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \{u_n\}; \quad \{u^*(\xi, \eta, \zeta)\} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \{u_n^*\} \quad (\text{IV.6})$$

avec :

- $\{u_n\}$  variables nodales caractérisant le champ de déplacement solution aux noeuds
- $\{u_n^*\}$  variables nodales caractérisant le champ de déplacement virtuel aux noeuds

En prenant en compte les relations précédentes, on peut ainsi écrire la contribution de

chaque élément à l'équilibre global soit  $W^e = W_{int}^e - W_{ext}^e$  (cf. IV.4) par une forme matricielle:

$$W_{int}^e = \langle \mathbf{u}_n^* \rangle ([\mathbf{k}] \{ \mathbf{u}_n \} - \{ \mathbf{f}_{\sigma_{th}} \}) \quad \text{et} \quad W_{ext}^e = \langle \mathbf{u}_n^* \rangle \{ \mathbf{f}_n \} \quad (IV.7)$$

avec

- $[\mathbf{k}] = \int_{V^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}] dV$  matrice de rigidité élémentaire (obtenue par intégration numérique, 8 points de Gauss pour H8 et 6 points pour P6)
- $\{ \mathbf{f}_{\sigma_{th}} \} = - \int_{V^e} [\mathbf{B}]^T \{ \sigma_{th} \} dV$  vecteur des forces équivalentes dues aux contraintes thermiques
- $\{ \mathbf{f}_n \} = - \int_{S^e} [\mathbf{N}]^T \{ \mathbf{f}_s \} dV$  vecteur des forces élémentaires dû aux forces de surface (idem pour les forces de volume éventuelles).
- $[\mathbf{B}]$  et  $[\mathbf{N}]$  sont des matrices déterminées à partir des fonctions de formes. Ces matrices peuvent être trouvées dans [Dhatt et al., 1981] pour les éléments H8 et P6.  $[\mathbf{B}]$  Permet d'exprimer les six déformations  $\{ \epsilon \}$  en fonction des variables nodales  $\{ \mathbf{u}_n \}$  :  
 $\{ \epsilon \} = [\mathbf{B}] \{ \mathbf{u}_n \}$  avec  $\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle$
- $[\mathbf{H}]$  est la matrice du comportement élastique homogénéisé exprimé dans le repère global  $x, y, z$  avec :  
 $\{ \sigma \} = [\mathbf{H}] \{ \epsilon \} + \{ \sigma_0 \}$  et  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rangle$  vecteur des contraintes

Ainsi l'assemblage des formes variationnelles élémentaires (IV.7) dans la forme variationnelle globale du domaine discrétisé (IV.4) aboutit à l'expression finale:

$$W = \sum_e W^e = \langle \mathbf{U}_n^* \rangle ([\mathbf{K}_n] \{ \mathbf{U}_n \} - \{ \mathbf{F}_n \}) = 0 \quad \forall \{ \mathbf{U}_n^* \} \text{ et } \{ \mathbf{U}_n \} \text{ C.A.} \quad (IV.8)$$

avec

- $[\mathbf{K}_n]$  matrice de rigidité globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires de rigidité  $[\mathbf{k}]$
- $\{ \mathbf{F}_n \}$  vecteur sollicitation global obtenu par assemblage des vecteurs de forces élémentaires dues aux contraintes thermiques et aux forces de surface.
- $\{ \mathbf{U}_n^* \}$  et  $\{ \mathbf{U}_n \}$  sont les vecteurs de variables nodales caractérisant respectivement le champ de déplacement test et solution (variables nodales à déterminer) sur l'ensemble de tous les noeuds du domaine discrétisé.

### IV.1.3 Résolution numérique

La résolution numérique de (IV.8) avec prise en compte des conditions aux limites sur  $S_u$  conduit à déterminer le vecteur  $\{ \mathbf{U}_n \}$  solution d'un système d'équations linéaires:

$$[\mathbf{K}_n] \{ \mathbf{U}_n \} = \{ \mathbf{F}_n \} \quad (IV.9)$$

Les techniques de résolution de ce système sont de deux types :

- Les méthodes directes bien connues et dérivées de la méthode d'élimination de Gauss, aboutissent au résultat en un nombre fini d'opérations.
- Les méthodes itératives (cf. [Golub et Van Loan, 1991] comme la méthode du gradient conjugué) procèdent par amélioration progressive de la solution, mais le nombre d'itérations est difficile à prévoir et dépend de la structure de  $[\mathbf{K}_n]$  .

Si les algorithmes directs ne semblent plus inspirer les scientifiques que pour profiter des avancées en matière de capacité de calcul des machines ([Dongarra et al., 1998]), les techniques itératives, en revanche, sont l'objet de nombreuses recherches dont le but est de réduire le nombre d'itérations ou d'améliorer la robustesse et la convergence. Par ailleurs, de nombreux travaux tentent d'accélérer les opérations inhérentes à la résolution, comme la multiplication de matrices ou de vecteurs ([Strassen, 1969], [Coppersmith et Winograd 1990]). L'architecture matérielle peut également être mise à profit ([Bilmes et al., 1997]) afin d'utiliser au mieux les fonctionnalités du processeur et la mémoire cache, qui bénéficie du coefficient multiplicateur de la carte mère ([Fleischhauer, 1997]).

### IV.1.4 Prise en compte de la direction d'orthotropie

Le comportement global étudié résulte d'un comportement volumique local orthotrope où la direction d'orthotropie varie selon l'orientation des ondes dans chaque passage. On introduit alors les matrices de transformation qui permettent d'affecter le comportement orthotrope (repère local :  $y_3, y_1, y_2$  ) dans un repère lié à l'échangeur (repère global :  $x, y, z$  ) avec les chargements correspondant (cf. figure IV.3). Cette figure montre que le repère local peut être obtenu à partir du repère global en effectuant une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$ . La matrice de rotation  $[Q]$  qui permet de transformer un vecteur quelconque  $\{f\}$  (e.g. vecteur force ou déplacement) du repère global à celui local, est définie donc par:

$$\{f_{orth}\}=[Q]\{f\} \tag{IV.10}$$

avec :

- $[Q]=\begin{bmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ,  $\{f\}=\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}$  et  $\{f\}=\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$
- $C=\cos(\alpha)$  et  $S=\sin(\alpha)$

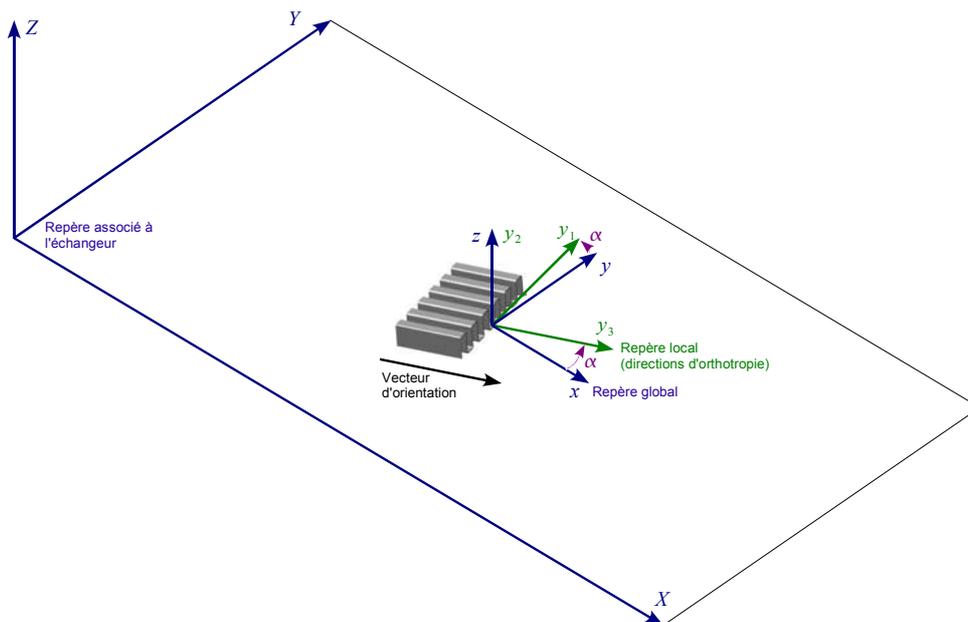


Figure IV.3 - Orientation du repère local de l'onde par rapport au repère global de l'échangeur

Soit  $[T_\epsilon]$  la matrice de transformation reliant les déformations  $\{\epsilon\}$  dans le repère global de l'échangeur ( $x, y, z$ ), à celles  $\{\epsilon_{orth}\}$  dans le repère orthotrope ( $y_3, y_1, y_2$ ) de l'onde, est donné par (cf. [Batoz et Dhatt, 1995]) :

$$\{\epsilon_{orth}\} = [T_\epsilon] \{\epsilon\} \quad (IV.11)$$

avec :

$$- [T_\epsilon] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & 0 & -CS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2CS & 2CS & 0 & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}, \quad \{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\epsilon_{orth}\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{33} \\ \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$- C = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad S = \sin(\alpha)$$

Ainsi, pour obtenir la matrice d'élasticité  $[H]$  à partir de celle orthotrope  $[H_{orth}]$ , on applique la transformation:

$$[H] = [T_\epsilon]^T [H_{orth}] [T_\epsilon] \quad (IV.12)$$

avec :

$$- [H] = \begin{bmatrix} H_{xxxx} & H_{xxyy} & H_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ H_{xxyy} & H_{yyyy} & H_{yyzz} & 0 & 0 & 0 \\ H_{xxzz} & H_{yyzz} & H_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{xyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{xzxz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{yzyz} \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$- [H_{orth}] = \begin{bmatrix} H_{3333} & H_{1133} & H_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ H_{1133} & H_{1111} & H_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ H_{2233} & H_{1122} & H_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{1212} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, en inversant la matrice  $[T_\epsilon]$ , on peut déduire  $\{\epsilon\}$  à partir de  $\{\epsilon_{orth}\}$  :

$$\{\epsilon\} = [T_\epsilon]^{-1} \{\epsilon_{orth}\} \quad (IV.13)$$

avec :

$$- [T_\epsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & -CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & 0 & CS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2CS & -2CS & 0 & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & C \end{bmatrix}$$

Cette dernière transformation permet d'imposer dans le repère global, sous forme d'une déformation initiale, le vecteur de chargement équivalent en pression déterminé dans le repère local à l'onde.

### IV.1.5 Calcul des contraintes

Le tenseur de contrainte calculé par la méthode des éléments finis est souvent donné dans le repère global :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

A partir de ce tenseur, on peut déterminer une base orthonormée  $(\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III})$  de vecteurs propres permettant de définir le tenseur des contraintes principales :

$$[\sigma_p] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

$\sigma_I$  ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det([\sigma] - \lambda [I]) = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Cela permet de définir une contrainte de Von-Mises  $\sigma_{VM}$  :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\left( \frac{1}{2} ((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2) \right)} \quad \text{ou encore} \quad (\text{IV.17})$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\left( \frac{1}{2} ((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2) + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right)}$$

Le critère de Von-Mises est basé sur l'observation selon laquelle une pression hydrostatique ne peut pas provoquer la déformation plastique d'un matériau. De ce fait, on peut en conclure naturellement que seule l'énergie de distorsion influence la transition d'un état élastique à un état plastique. La contrainte de Von-Mises  $\sigma_{VM}$  est donc une contrainte équivalente qui peut être utilisée dans l'analyse du comportement de l'échangeur.

### IV.1.6 Choix de l'outil d'analyse par éléments finis

Dans le cadre du développement de l'outil métier final, on s'oriente vers une intégration des modules spécialisés en calcul éléments finis dans un code métier adapté aux besoins de la simulation linéaire thermo-mécanique des échangeurs. L'approche est de développer des interfaces avec des logiciels professionnels en s'inspirant de l'architecture de HomPass (Chapitre III). Dans ce but, nous avons fait le choix d'utiliser [Code\_Aster] comme calculateur éléments finis et [GID] comme pré/post processeur prenant en charge la CAO, le maillage et le post-traitement.

## Chapitre IV – Modélisation du comportement thermoélastique global des échangeurs

Développé par EDF, Code\_Aster est un code de calcul de structures 2D ou 3D par éléments finis en mécanique statique et dynamique, en thermique et métallurgie. Les phénomènes peuvent être traités avec des modélisations linéaires ou non linéaires, séparément ou couplés. La Direction des Études et Recherches d'EDF capitalise les développements dans le domaine de la modélisation numérique en mécanique des structures, et le retour d'expérience des utilisateurs.

Le Code\_Aster est constitué de différents « modules » que l'on peut classer en :

- Un programme principal en FORTRAN 77,
- Des fonctions C réalisant certaines tâches « système » difficiles en FORTRAN 77 : allocation dynamique, mesure de temps, ...
- Des routines CAL (CRAY assembling language) qui ont été écrites pour optimiser les performances (CPU) de la méthode de résolution des systèmes linéaires par Gradient Conjugé.
- Des Catalogues qui sont des fichiers textes qui paramètrent certains programmes : principalement l'analyseur de commandes et les calculs élémentaires (au sens de la méthode des éléments finis)

L'ensemble des textes de ces modules constitue le source d'Aster (Analyse des Structures et Thermomécanique pour des Etudes et Recherches). En résumé, l'architecture du Code\_Aster repose sur un gestionnaire de la mémoire/image disque, un "superviseur" des commandes et un moteur de calculs sur les éléments finis (algorithmes construits indépendamment de la formulation des éléments). Pour de plus amples informations sur l'utilisation du code\_Aster et plus particulièrement sur son architecture, le lecteur peut se référer au [Code\_Aster].

GiD et Code\_Aster constituent les deux logiciels importants du code métier «SiTEME» que nous avons développé dans cette thèse, et qui sera décrit en détail au paragraphe § IV.2.

## VI.2 Présentation de l'outil métier SiTEME (*Simulation Thermo-élastique Macroscopique des Échangeurs*)

Ayant fixé le choix de la plate forme destinée au développement de l'outil métier final, en particulier Code\_Aster comme code de calcul éléments finis et [GiD] comme pré/post processeur, on adopte [MS Visual C++] comme langage de programmation de cet outil. Intitulé « SiTEME » (Simulation Thermo élastique Macroscopique des Echangeurs à plaques et ondes en aluminium brasées), cet outil comprend plusieurs modules (figure IV.4) :

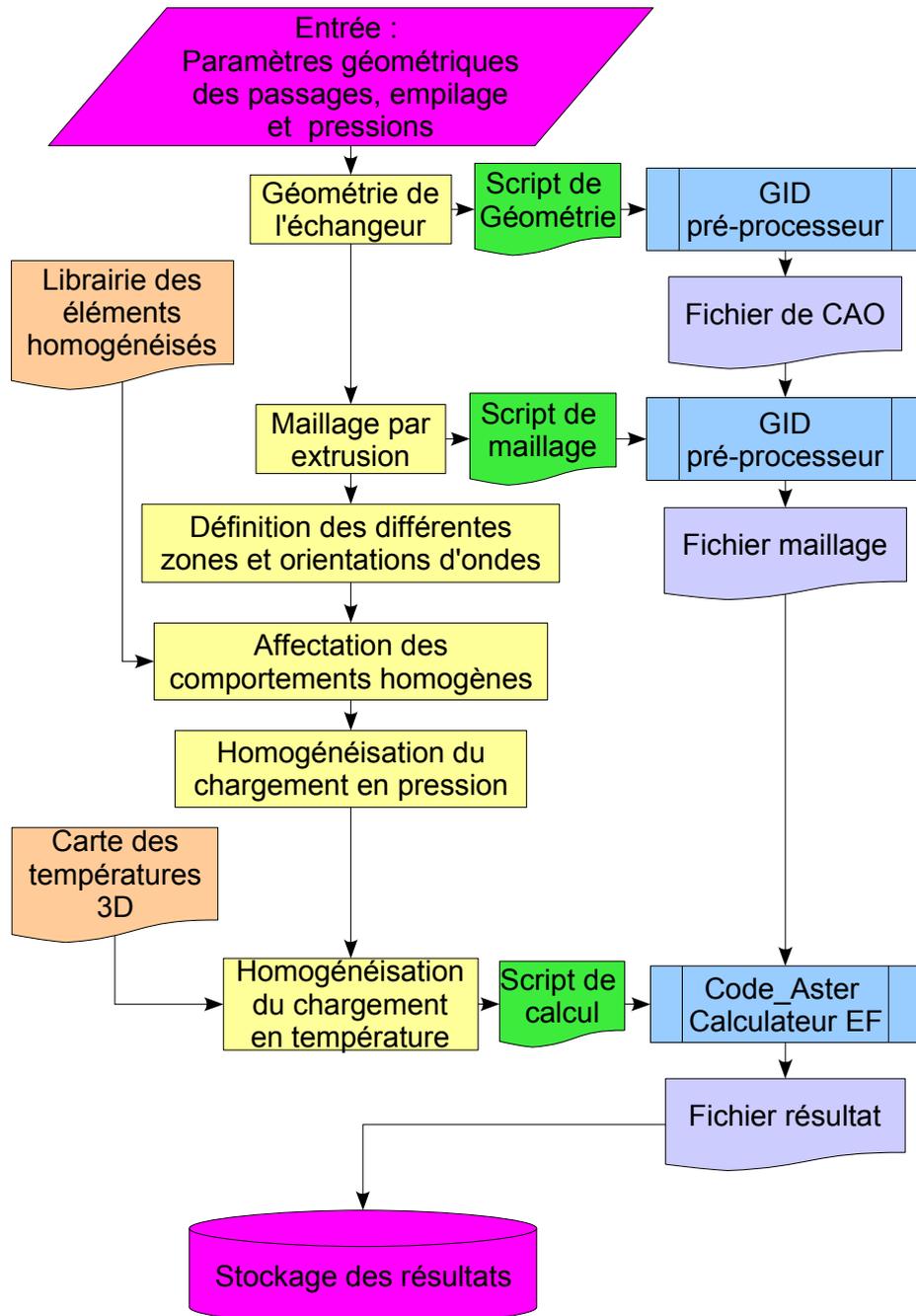


Figure IV.4 - Organigramme de « SiTEME »

### 1) Module d'entrée:

Il s'agit d'une interface avec un autre outil utilisé par l'entreprise pour dessiner automatiquement les plans de passage. Cette interface se fait par l'intermédiaire d'un fichier ASCII, où on stocke les différents paramètres géométriques des passages de l'échangeur. On note :

- Le type des zones de distribution et d'échange
- La disposition de ces zones
- Les ondes utilisées
- La pression dans les passages
- Les ouvertures de chaque passage
- Les caractéristiques des barres d'extrémités

Ces données seront complétées par l'empilement de ces passages, en précisant la séquence et les épaisseurs de tôles de séparation et d'extrémité.

### 2) La géométrie (CAO) :

Après avoir pris en charge les paramètres d'entrée, « SiTEME » constitue la CAO de l'échangeur. Pour ce faire, on fait appel à un module extérieur de pré-processeur [GID] à l'aide de commandes de lancement de type 'SHELL' . Cela nécessite de monter un fichier script comportant des commandes CAO propres à ce pré-processeur : d'abord on construit les lignes des passages dans le même plan (xy). Ensuite, on intersecte ces lignes pour former les contours de surfaces élémentaires. Après création de ces surfaces, on clôture le fichier script par les commandes de sauvegarde de la CAO compilée. On a finalement la CAO de tous les passages d'échangeur projetés dans le même plan (e.g. figure IV.8).

### 3) Le maillage :

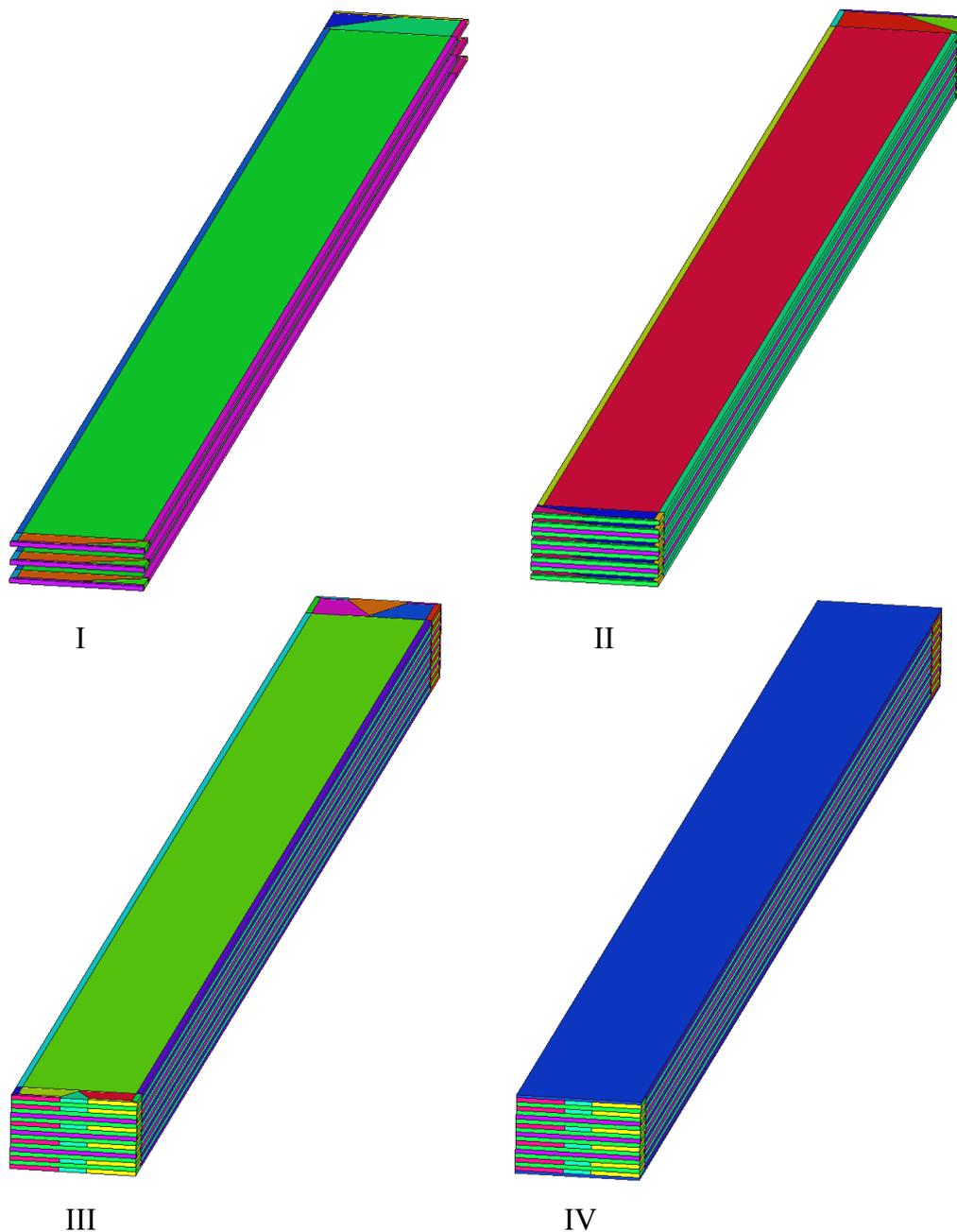
De la même façon que pour la géométrie, on construit un fichier script comportant les commandes de maillage propres à [GID] . Pour mailler le corps d'échangeur, on procède d'abord par «mailler» en 2D la CAO des passages projetée dans le même plan. On utilise pour cela des éléments triangulaires (T3) ou quadrilatères (Q4). Ensuite, on extrude ce maillage selon l'empilage pour former un maillage 3D en prisme (P6) ou hexaèdre (H8). On a ainsi par cette approche un élément par passage, à compter à partir de la demi-tôle inférieure jusqu'à la demi-tôle supérieure. Finalement, on constitue un fichier maillage du corps de l'échangeur (e.g. figure IV.10) qui est compatible avec le module externe de calcul éléments finis [Code\_Aster].

### 4) La définition des différentes zones et orientations d'ondes

En général, une zone est un groupe de mailles représentant un milieu homogénéisé ayant une orientation d'onde bien précise. La définition des différentes zones de l'échangeur est primordiale dans l'objectif d'affectation des différents chargements et comportements homogénéisés. Par exemple, une zone peut représenter une barre d'extrémité, une zone de transfert ou une partie d'un distributeur.

La figure IV.5 illustre les différentes zones de l'exemple du corps d'échangeur «STAT3». Ces zones sont représentées par des couleurs différentes. Chaque couleur possède une orientation d'onde bien définie. Les schémas I à IV de la figure IV.5 montrent alors respectivement l'accumulation des zones de passages P3, P2, P1 et les tôles

d'extrémités. A noter que les zones correspondant aux barres et tôles d'extrémités seront affectées par l'aluminium comme matériau alors que les autres seront affectées par les comportements homogénéisés de chaque passage.



**Figure IV.5** - Accumulation des différentes zones de l'échangeur « STAT3 »

De I à IV sont montrées respectivement l'accumulation de passages P3, P2, P1 et les tôles d'extrémités

### 5) Affectation des comportements homogènes

Dans ce module de programmation, on affecte le comportement homogène de chaque zone. En effet, à partir de l'outil d'homogénéisation des passages « HomPass », on établit une librairie dans lequel on sauvegarde les comportements homogénéisés calculés dans un repère local à l'onde. Il s'agit des six modules diagonaux équivalents de type Young, de cisaillement et des trois coefficients non diagonaux de type Poisson. On rappelle que ces

coefficients sont calculés par deux approches d'homogénéisation différentes : HCP et HMP (cf. chapitre II). Ainsi, on offre la possibilité de choisir entre ces deux approches ou une approche intermédiaire (e.g. comportement moyen des souplesses homogénéisées noté CMSH; cf. chapitre III). Par ailleurs, en se référant au classement énergétique de ces approches, on note que l'approche HCP permet de sur-estimer les contraintes globales alors que l'approche HMP permet de sur-estimer les déformations globales.

Ensuite à partir de cette librairie, « SiTEME » recherche les modules homogénéisés de chaque zone en les affectant dans le fichier script de calcul propre à [Code\_Aster]. Il suffit donc de préciser ces modules dans un repère local. Ce repère (figure IV.3) est défini par les directions d'orthotropie de l'onde (  $y_3, y_1, y_2$  ), ce qui correspond aux directions d'orthotropie (  $L, T, N$  ) dans [Code\_Aster]. Enfin, on définit l'angle de rotation  $\alpha$  de ce repère local. Cet angle est calculé à partir des composants du vecteur orientation pour chaque zone.

### 6) Homogénéisation du chargement en pression

L'homogénéisation du chargement en pression se traduit en imposant une déformation initiale calculée à partir du comportement homogénéisé (cf. chapitre II). Cette déformation étant élaborée dans le repère orthotrope de l'onde (figure IV.3), on calcule alors pour chaque zone cette déformation dans le repère global à partir de la formule de transformation (IV.13) :

$$\{\epsilon_p\} = [T_\epsilon]^{-1} \{\epsilon_{orth}\} \quad (IV.18)$$

avec :

$$- [T_\epsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & -CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & 0 & CS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2CS & -2CS & 0 & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & C \end{bmatrix}, \quad \{\epsilon_p\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\epsilon_{orth}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{33} \\ \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$- C = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad S = \sin(\alpha)$$

Finalement, on obtient:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = C^2 \epsilon_{33} + S^2 \epsilon_{11} \\ \epsilon_{yy} = S^2 \epsilon_{33} + C^2 \epsilon_{11} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{22} \\ \epsilon_{xy} = 2CS \epsilon_{33} - 2CS \epsilon_{11} \\ \epsilon_{xz} = 0 \\ \epsilon_{yz} = 0 \end{cases} \quad (IV.19)$$

Les contraintes mécaniques engendrées par ce type de chargement sont données par:

$$\{\sigma\} = [H](\{\epsilon\} + \{\epsilon_p\}) \quad (IV.20)$$

Pour chaque zone, « SiTEME » impose alors le vecteur de chargement équivalent en pression dans un repère global. Calculé pour une pression unitaire, ce vecteur est multiplié par la pression supposée constante dans chaque passage (en négligeant alors la perte de charge des fluides).

### 7) Homogénéisation du chargement en température

Dans ce module « SiTEME » impose le chargement homogénéisé dû aux champs de température. On rappelle que lorsque la structure est constituée d'un seul matériau le coefficient de dilatation thermique global est égal à celui du matériau (cf. § II.3.3).

Il s'agit donc d'imposer tout d'abord le coefficient de dilatation thermique du matériau considéré dans chaque zone. Ensuite, une température moyenne est affectée à chaque élément. Cette température moyenne est importée à partir d'une carte de températures et adaptée au maillage de l'échangeur. Ayant un format bien défini, cette carte peut être établie par un autre outil thermique utilisé au sein de l'entreprise.

### 8) Les calculs

C'est l'étape finale de « SiTEME ». Ce module va transcrire l'affectation des comportements homogènes et des chargements globaux en température et en pression dans un fichier script propre à [Code\_Aster]. On constitue ainsi un fichier de commandes nécessaire pour lancer le calcul éléments finis. Par ailleurs, ce fichier contient aussi les conditions générales de calcul, comme l'élimination des mouvements du corps solide, la définition du modèle de calcul, l'allocation de la mémoire, la sauvegarde des résultats.

Finalement, on calcule des quantités globales sur des éléments (H8) ou (P6). Comme le montre la figure IV.6, ces éléments représentent des structures en tôles et ondes homogénéisées. Le comportement global (déformation globale, réactions aux appuis) est précis ainsi que les efforts résultants transmis aux tubulures. On peut également localiser les zones à risques dans le corps d'échangeur. A partir de ces données, la localisation qui est la démarche inverse à l'homogénéisation, permet de remonter dans un deuxième temps aux quantités microscopiques (au niveau des tôles et des ondes) tout en réalisant des calculs sur des parties limitées de la structure. Cette dernière démarche dépasse le cadre de la présente thèse et reste un domaine à exploiter dans l'outil métier tout en s'appuyant sur les travaux de localisation se trouvant dans la littérature (e.g. [Chung et al. 2001], [Pistre et al. 1983]...).

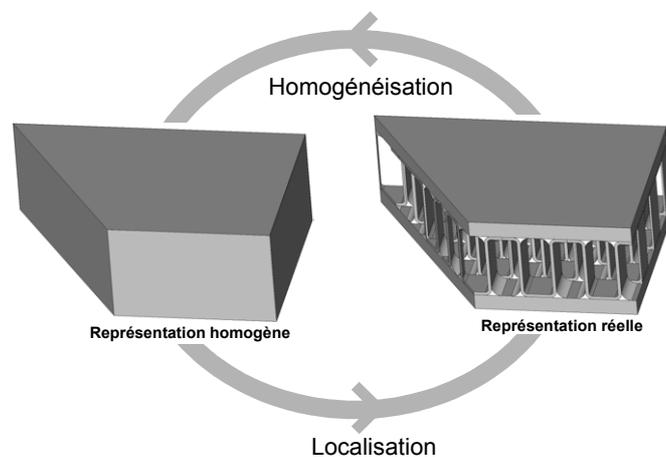


Figure IV.6 - Représentation réelle d'un élément H8 homogène

### IV.3 Résultats numériques

On présente dans ce paragraphe quelques résultats obtenus avec la première version de « SiTEME » dédiée à l'étude du comportement thermo-élastique global du corps d'échangeur. Pour ce faire, on représente un exemple type d'un échangeur utilisé dans la programmation de l'outil métier final. Il s'agit donc d'un corps d'échangeur nommé « STAT3 » de dimensions géométriques données par le tableau IV.1. On se limite dans ce chapitre à des premières observations qualitatives des résultats. L'objectif principal est de tester la fonctionnalité de la première version de « SiTEME » tout en identifiant des améliorations qui pourront être intégrées dans de prochaines versions.

Longueur totale	4736 mm
Largeur totale	302 mm
Hauteur totale	193,71 mm

Tableau IV.1 - Dimensions géométriques de « STAT3 »

L'échangeur « STAT3 » est constitué de trois passages différents (figure IV.7). Sur ces passages on retrouve les différentes zones de distribution et de transfert décrites au chapitre I. On utilise respectivement pour ces deux types de zones, les ondes droite N°2835 et serrated N°2950 (tableau IV.2).

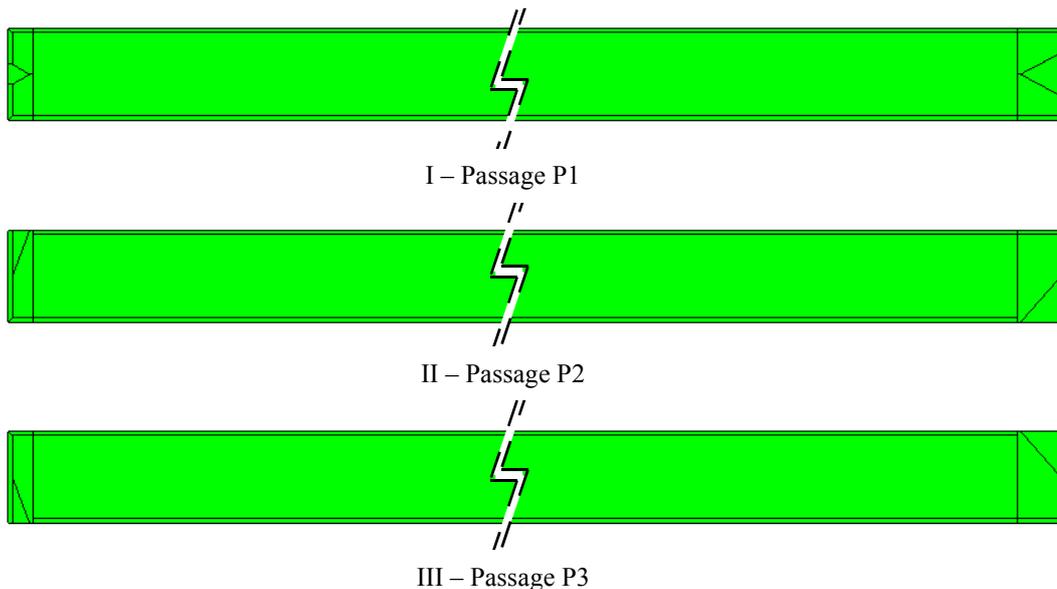


Figure IV.7 - Exemple d'un corps d'échangeur « STAT3 » à trois passages différents

N° d'onde	2835	2905
Type d'onde	Droite	Serrated
Épaisseur d'onde	0,45 mm	0,2 mm
Hauteur d'onde	9,63 mm	9,63 mm
Serration	N/A	3,175 mm
Ailettes/m	236,2	944,9

Tableau IV.2 - Caractéristiques des ondes utilisées dans « STAT3 »

## Chapitre IV – Modélisation du comportement thermoélastique global des échangeurs

Ces passages (notés P1, P2 et P3) sont empilés suivant une séquence symétrique (par rapport au passage N°9) illustrée par le tableau IV.3. Les tôles de séparation, séparant les passages les uns les autres, font 1 mm d'épaisseur et celles d'extrémité font 6 mm.

N°	P1	P2	P3
17	■		
16		■	
15	■		
14		■	
13			■
12	■		
11		■	
10			■
9			
8	■		
7		■	
6	■		
5		■	
4			■
3	■		
2		■	
1	■		

Tableau IV.3 - Empilage symétrique : (P1 - P2 - P1 - P2 - P3 - P2 - P1 - P2 - P3 - P2 - P1 - P2 - P3 - P2 - P1 - P2 - P1)

On a ainsi au total 17 passages de hauteurs identiques. Pour chacun de ces passages, on cherche à remplacer les hétérogénéités géométriques dues à l'onde et ses demi-tôles inférieur et supérieur par un volume homogène. Pour ce faire, on adopte la technique de maillage décrite dans le paragraphe suivant.

### IV.3.1 Maillage de « STAT3 »

La technique utilisée pour le maillage du corps d'échangeur « STAT3 », consiste à projeter les passages sur un même plan. Ensuite on effectue un maillage 2D, puis on obtient un maillage 3D par extrusion. En effet, on construit d'abord les lignes des passages juxtaposés dans le même plan (xy). Ensuite, on intersecte ces lignes pour former les contours de surfaces élémentaires. On a ainsi la CAO de tous les passages d'échangeur projetés dans le même plan (figure IV.8). Après cette étape, on procède au maillage automatique des passages projetés. On utilise pour ça une taille moyenne des éléments quadrilatères (Q4) (figure IV.9). Ce maillage est ensuite extrudé selon l'empilage pour former un maillage 3D en hexaèdre (H8). On a ainsi par cette approche un élément par passage, à compter à partir de la demi-tôle inférieure jusqu'à la demi-tôle supérieure (figure IV.10), sauf dans le cas des tôles d'extrémités supérieure et inférieure de l'échangeur prises en compte en totalité. On assure ainsi par cette technique la connectivité des éléments entre les différents passages tout en ayant un élément par hauteur de passage homogénéisé. Les différentes étapes de cette démarche sont programmées dans « SiTEME ». Il suffit donc de fournir les paramètres de la CAO et du maillage pour générer automatiquement le maillage volumique.

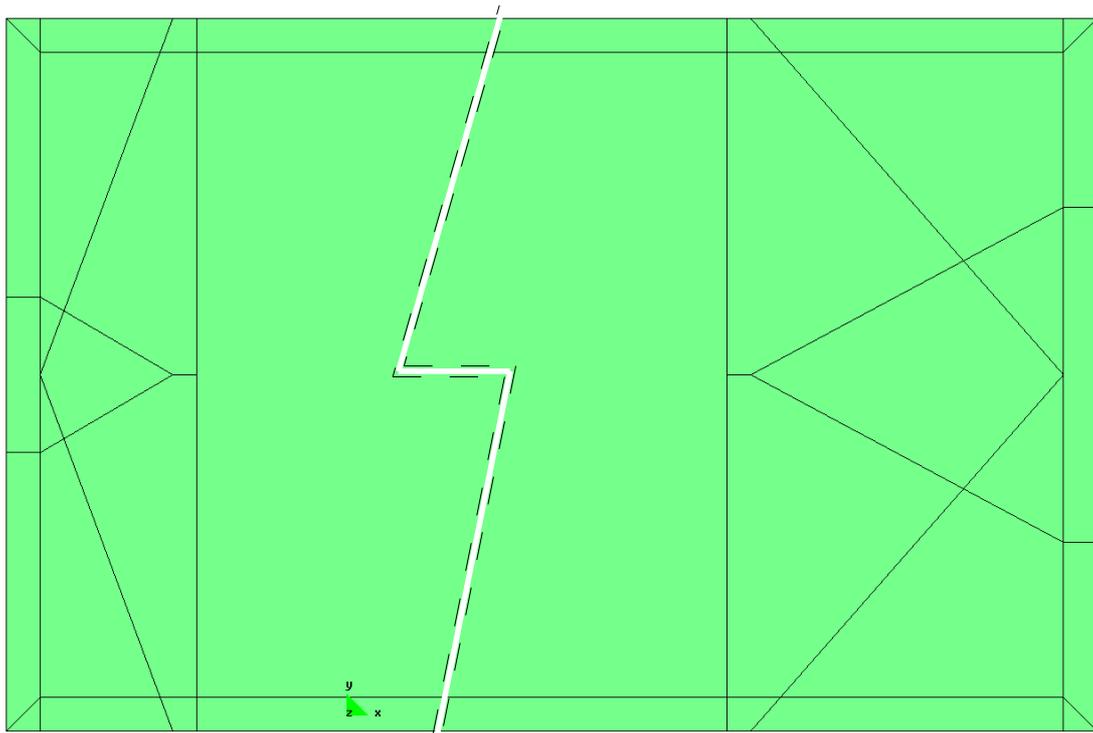


Figure IV.8 - CAO de la projection des trois passages (P1, P2 et P3) de l'échangeur « STAT3 »

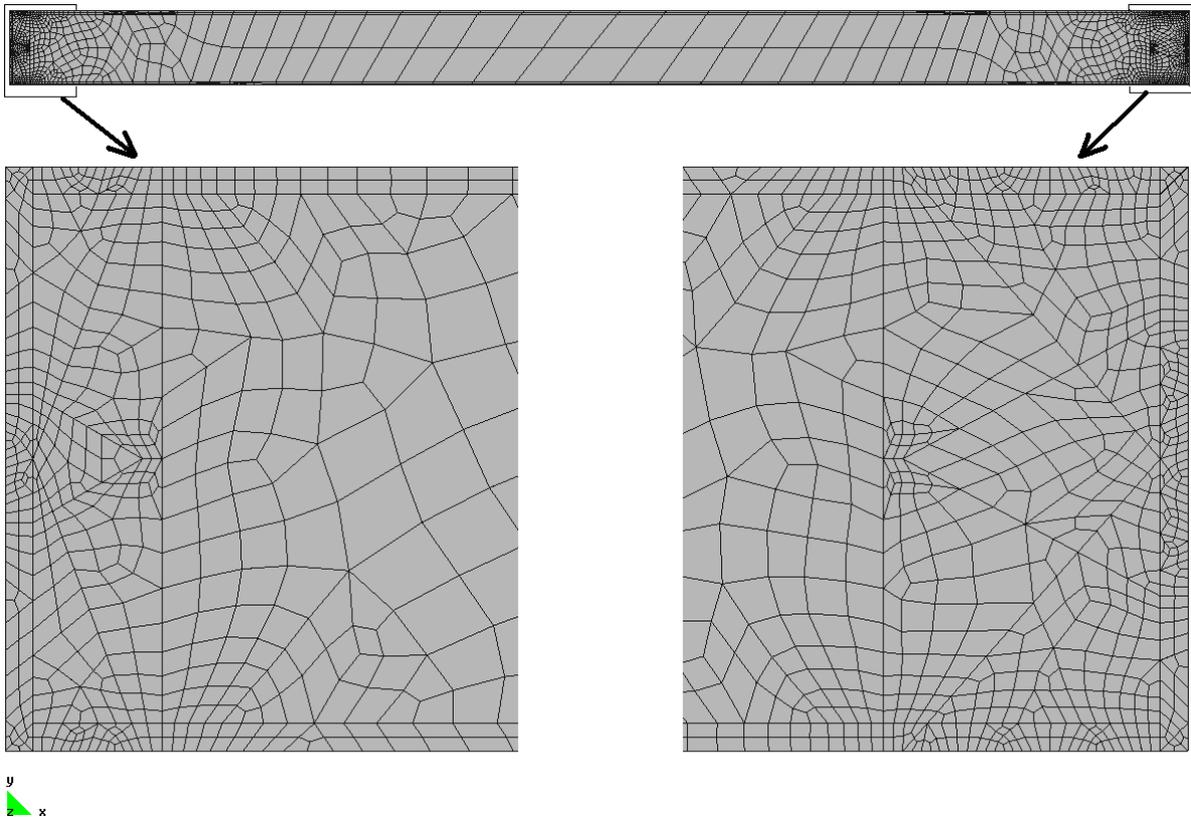


Figure IV.9 - Maillage automatique de la projection des passages d'échangeur

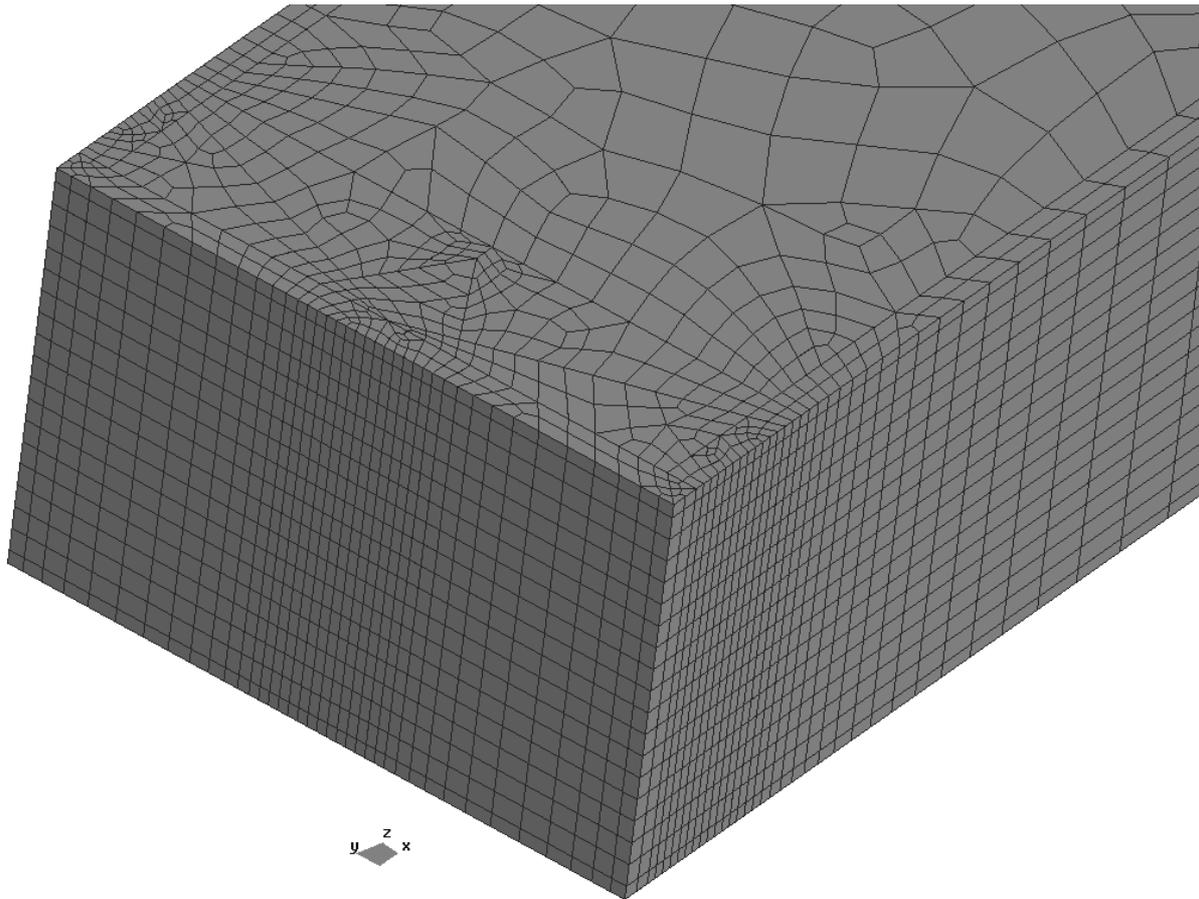


Figure IV.10 - Maillage volumique par extrusion de l'échangeur « STAT3 »

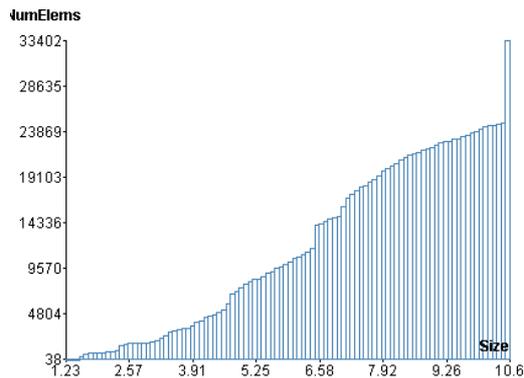
Les caractéristiques de ce maillage sont listées par le tableau IV.4 et illustrées par les figures IV.9 et IV.10. On note ainsi un maillage grossier au milieu de l'échangeur (zone de transfert) et à un maillage plus fin aux extrémités (zones de distribution). Par ailleurs on assume une continuité géométrique en tout point alors qu'en pratique il existe un léger jeu entre les barres et les ondes. En effet ce jeu comparable à la période de l'onde, peut être considéré comme une hétérogénéité microscopique lié à l'onde et qui, par définition de l'homogénéisation, disparaîtra à l'échelle macroscopique.

Nombre total de noeuds	38580
Nombre total d'éléments H8	33440
Nombre de noeuds dans le plan (xy)	1929
Nombre des éléments Q4 dans le plan (xy)	1760
Hauteur d'un passage homogénéisé (selon z)	10,63 mm
Hauteur des tôles supérieure et inférieure (selon z)	6,5 mm

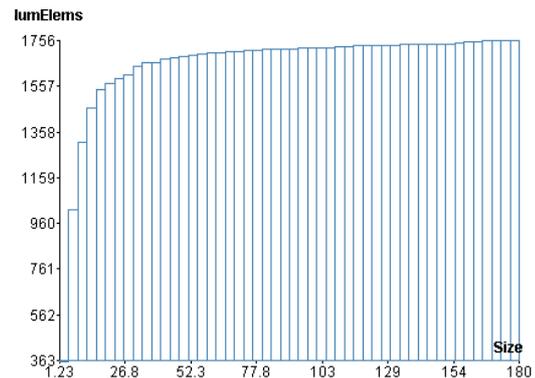
Tableau IV.4 - Caractéristiques de maillage de l'échangeur « STAT3 »

Les figures IV.11 et IV.12 montrent respectivement la distribution cumulative du plus petit côté des éléments volumiques H8 et planes Q4 (dans le plan xy).

## Chapitre IV – Modélisation du comportement thermoélastique global des échangeurs



**Figure IV.11** - Distribution cumulative de la taille (le plus petit côté en mm) des éléments H8 (cf. figure IV.10)



**Figure IV.12** - Distribution cumulative de la taille (le plus petit côté en mm) des éléments Q4 dans le plan (xy) (cf. figure IV.9)

Cependant, certaines limitations sont imposées au maillage, notamment du point de vue taille maximale du problème. Ces limitations proviennent de la version utilisée de [Code\_Aster] et de la technique de maillage adoptée qui peut générer des concentrations d'éléments dans certains cas. Cela justifiera alors, en perspective de travaux futurs, la programmation des modules d'optimisation permettant la réduction de nombre d'éléments tout en assurant la bonne qualité de résultat.

Après le maillage, on affecte par l'intermédiaire de « SiTEME » les caractéristiques matérielles des zones de distribution et de transfert. On utilise respectivement pour ces deux types de zone, les matériaux homogènes MH283511 et MH295011 (tableau IV.5). Les tôles d'extrémités supérieure et inférieure et les barres latérales seront eux affectées par de l'aluminium (tableau IV.6).

Cellule de base	MH283511	MH295011
Épaisseur des tôles Sup. et Inf.	0,5 mm	0,5 mm
N° d'onde	2835	2905
<b>E1 (MPa)</b>	8760	7983
<b>E2 (MPa)</b>	7300	14825
<b>E3 (MPa)</b>	16449	9512
<b>G12 (MPa)</b>	28,00	10,30
<b>G13 (MPa)</b>	3650	3181
<b>G23 (MPa)</b>	3262	1310
<b>Nu12</b>	0,036	0,035
<b>Nu13</b>	0,160	0,251
<b>Nu23</b>	0,133	0,098

**Tableau IV.5** - Caractéristiques des matériaux homogènes utilisés dans « STAT3 » (pour les directions d'orthotropie  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ , cf. figure IV.3)

<b>Module de Young MPa</b>	73000
<b>Coefficient de Poisson</b>	0,3
<b>Coefficient de dilatation thermique (1/°C)</b>	2,20E-005

**Tableau IV.6** - Caractéristiques moyennes de l'aluminium utilisé dans « STAT3 »

Concernant les sollicitations thermiques, pour chaque passage (cf. figure IV.7) on a un bout chaud à droite et un bout froid à gauche (tableau IV.7). En l'absence de carte de

température pour « STAT3 », on propose des profils en température qui varient linéairement entre les bouts chaud et froid. En outre, on suppose que la température reste constante dans la direction de la largeur.

	Bout chaud à droite	Bout froid à gauche	Circulation de fluide	Pression (MPa)
Passage P1	31,85°C	-176,9°C	Gauche - Droite	13
Passage P2	35°C	-167,28°C	Gauche - Droite	13
Passage P3	31,85°C	-171,8°C	Droite - Gauche	13

Tableau IV.7 - Températures d'extrémités des passages

D'autre part en négligeant la perte de charge due à l'écoulement de fluide, on suppose que la pression reste constante dans tous les passages et est égale à 13 MPa (tableau IV.7).

Afin d'éliminer les six mouvements du corps rigide, on impose des conditions cinématiques suivantes (figure IV.14):

- au point A :  $u_A=0$  ,  $v_A=0$  et  $w_A=0$
- au point B :  $v_B=0$  et  $w_B=0$
- au point D :  $w_D=0$

### IV.3.2 Résultats du chargement thermique linéaire

Différents tests simples ont été réalisés pour valider la programmation de « SiTEME ». Parmi ces tests, on impose une variation de température constante partout dans le corps d'échangeur. Ensuite on valide le déplacement du bout chaud avec les formules analytiques de RDM. Toutefois, il est bon de noter, que ces tests constituent des conditions nécessaires mais pas suffisantes pour la validation.

Par ailleurs, pour analyser le comportement de « STAT3 » sous un chargement thermique, on considère des profils simples en température (tableau IV.7). Cela consiste à établir une carte où la température varie linéairement en fonction de la longueur. Sous l'effet de ce chargement et en prenant comme température de référence  $T_{ref}=0^{\circ}C$  , on calcule les déformations et les contraintes globales dans le corps d'échangeur. La figure IV.13, illustre la déformée de l'échangeur en vue de dessus (plan xy).

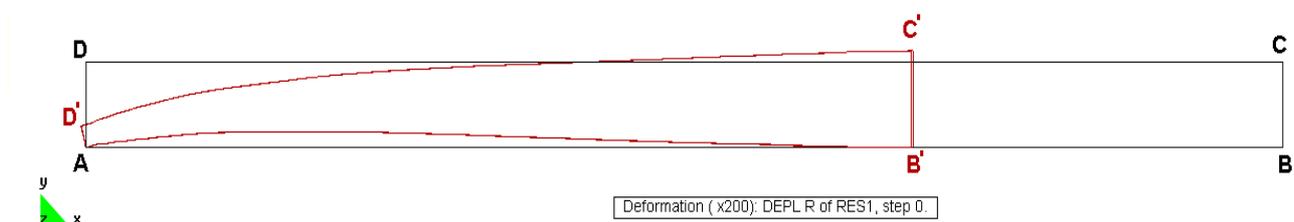


Figure IV.13 - Déformée de l'échangeur sous sollicitation thermique linéaire (vue de dessus)

Ainsi, sous l'effet de la température cryogénique (négative) l'échangeur a tendance à se contracter en ramenant le bout chaud (BC) vers (B'C'). La section (B'C') se dilate légèrement. Le bout froid (AD) se contracte en (AD'). Cela générera des contraintes globales en compression. Les déplacements des points B et D sont donnés par le tableau

IV.8. On valide ainsi, la faible valeur des déformations thermiques dans l'échangeur.

	Déplacement
BB'	7,3163 mm
DD'	1,1348 mm
BB'  /  AB	0,00154
DD'  /  AD	0,00376

Tableau IV.8 - Déplacements des point B et D (cf. figure IV.13)

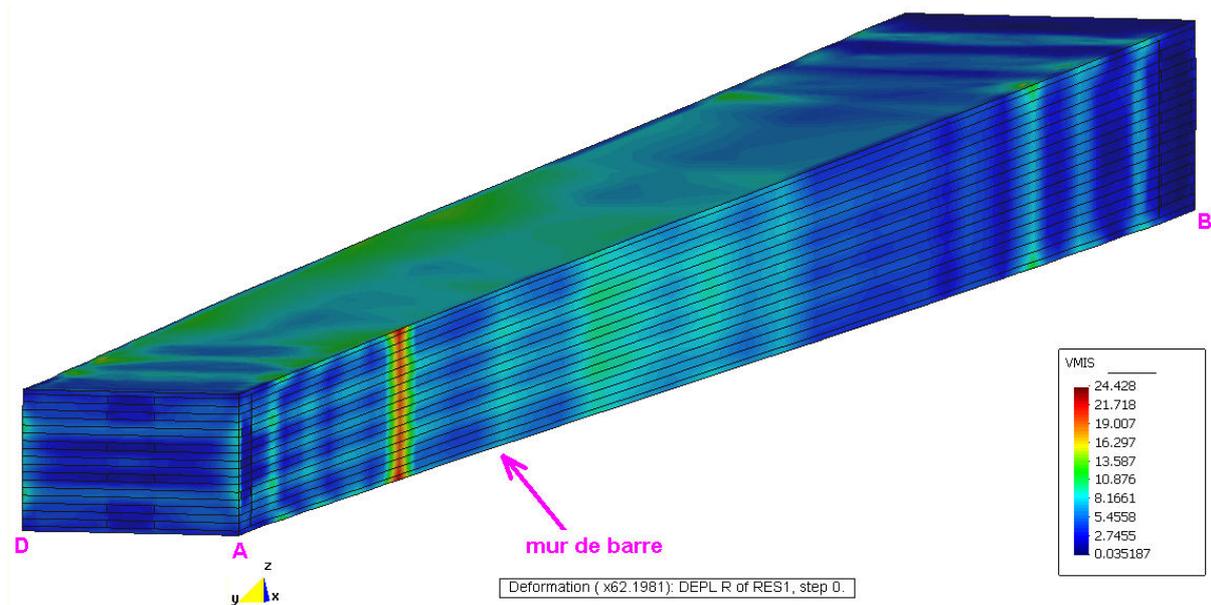


Figure IV.14 - Contraintes équivalentes (en MPa) du corps d'échangeur sous sollicitations thermiques linéaires (temps de calcul CPU = 35 min (Pentium4))

On présente ensuite les contraintes équivalentes dans le corps d'échangeur (figure IV.14). La zone de contraintes maximales (zone rouge) se situe sur le mur de barre à l'endroit où celui ci présente une déformation de flexion importante. En effet, comme le montre la figure IV.13, la contraction de l'échangeur ramenant le point B en B' provoque la flexion de ce mur de barre.

La figure IV.15 montre que les contraintes globales sont plus élevées dans les tôles d'extrémités que dans les passages. Cela peut se justifier par le fait de «moyenner» les contraintes microscopiques en fonction de la zone de structure étudiée: dans les tôles massives et les barres, la matière est plus importante que dans les passages où des cavités vides peuvent exister.

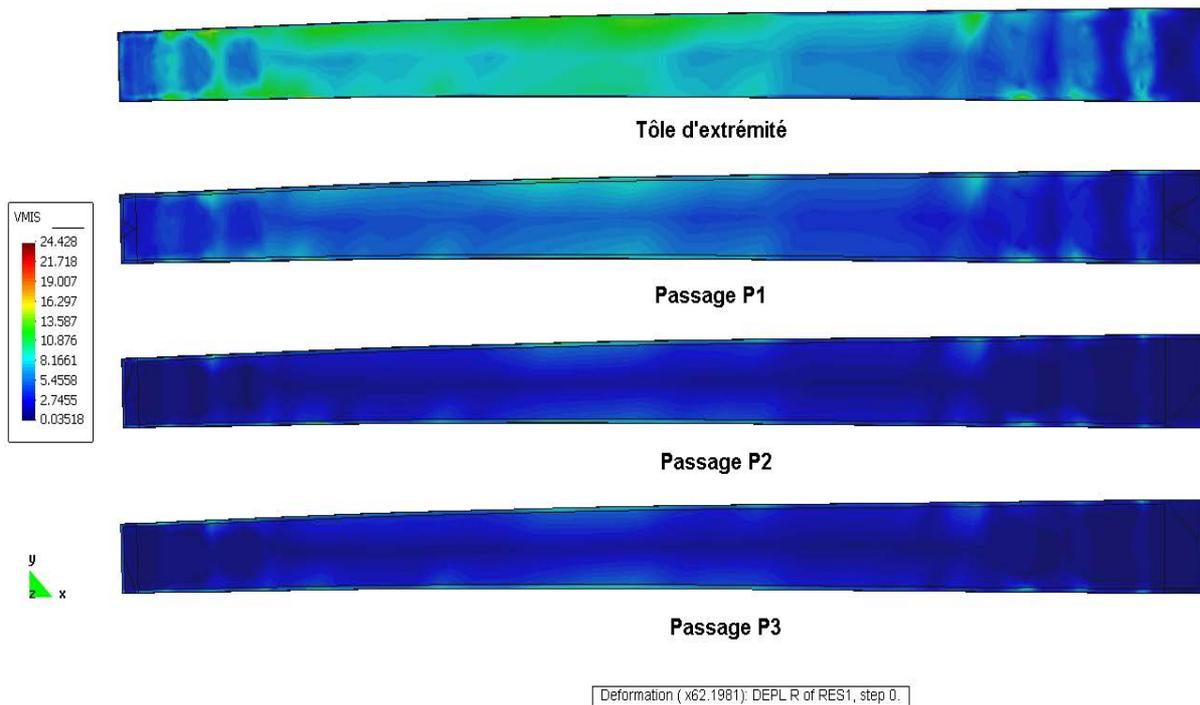


Figure IV.15 - Contraintes de Von Mises (en MPa) dans les passages

### IV.3.3 Résultats du chargement en pression équivalente

On impose ici le chargement équivalent en pression dans les zones homogénéisées (tableau IV.9) tout en éliminant les mouvements du corps rigide. Ce chargement est calculé à partir des caractéristiques homogènes des différentes zones tout en considérant une pression intérieure constante de 13 MPa. Ces zones homogénéisées remplaçant les ondes et les tôles à l'intérieur du corps d'échangeurs, se trouvent alors confinées entre les murs de barres latéraux et les tôles massives supérieure et inférieure (figure IV.16). Cela constitue une enveloppe rigide en ces zones, à l'exception des ouvertures assurant l'entrée et la sortie des fluides. Ces dernières deviennent des surfaces limites des passages homogénéisées «encastrées» dans le mur de barre. Ainsi le chargement en pression équivalent exerce une poussée sur l'enveloppe rigide qui a tendance à la gonfler (figure IV.16).

Déformation initiale	MH283511	MH295011
Ep11	0,001220	0,001091
Ep22	0,001419	0,000663
Ep33	0,000245	0,000801

Tableau IV.9 - Chargement équivalent en pression imposé dans les matériaux homogènes de « STAT3 » (pour les directions d'orthotropie  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ , cf. figure IV.3)

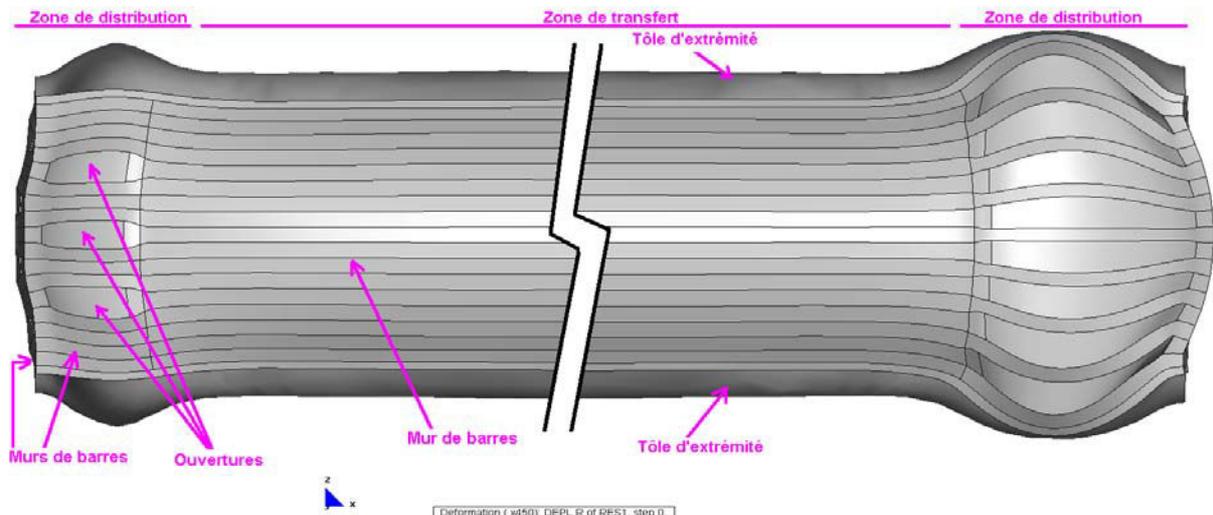


Figure IV.16 - Déformée du corps d'échangeur sous sollicitation en pression équivalente

La figure IV.16 montre la déformée du corps de l'échangeur sous l'influence du chargement en pression homogénéisée. Ainsi, on note le gonflement global de l'échangeur, ce gonflement est plus important dans les zones de distribution que dans les zones de transfert. Cela peut être justifié par le fait d'utiliser des ondes droites moins résistantes à la pression dans les zones de distribution. Celles des zones de transfert sont des ondes Serrated plus résistantes à la pression. En effet, il suffit de regarder les modules de Young dans la direction  $z$  ( $E_2$ ) des matériaux homogènes MH283511 et MH295011 (tableau IV.5) utilisés respectivement dans les zones de distribution et de transfert. On remarque que le matériau utilisé dans les zones de distribution est plus souple que celui utilisé dans les zones de transfert dans la direction des  $z$ .

On peut aussi observer sur la figure IV.16 la symétrie de la déformée par rapport au plan horizontal médian de l'échangeur. En effet, cela découle de l'empilage symétrique et des conditions en chargement.

En 3D, la déformée montre aussi le gonflement important des ouvertures (figure IV.17) sur lesquels des têtes devraient se poser (e.g. figure IV.20). D'autre part, les contraintes équivalentes montrent des valeurs élevées (zones rouges) sur les tôles massives d'extrémités. Ces zones sont localisées dans la tôle à partir des murs de barre comme le montre la figure IV.18.a.

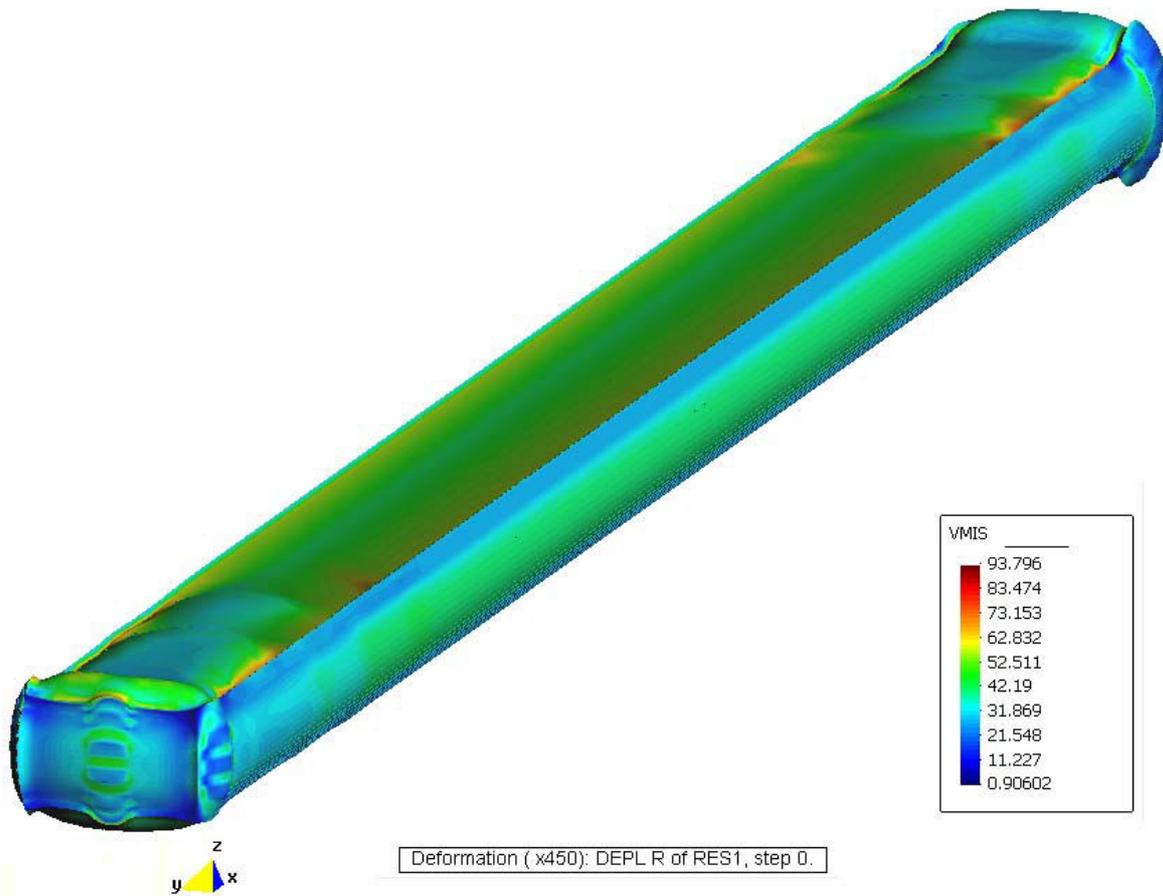
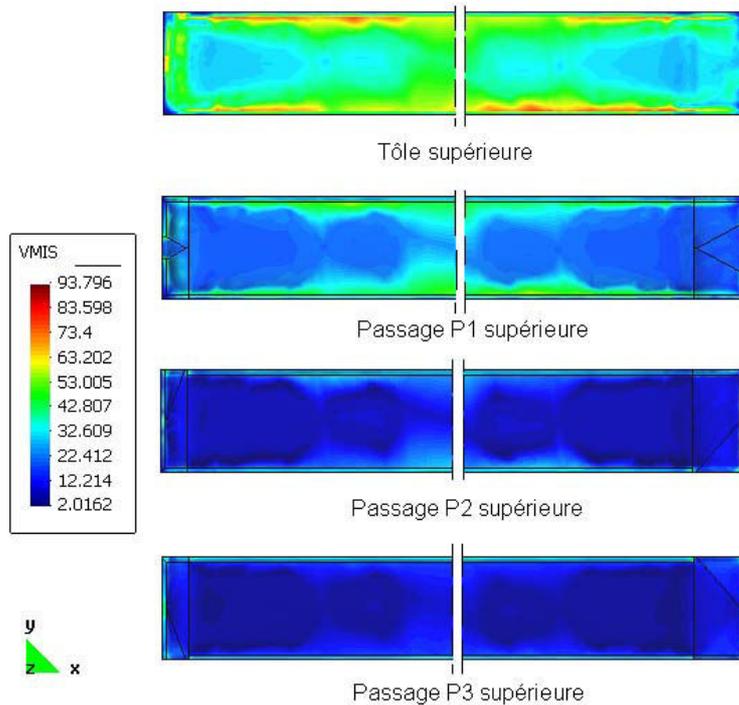


Figure IV.17 - Contraintes équivalentes (en MPa) du corps d'échangeur sous sollicitation en pression (13 MPa) (temps de calcul CPU = 16 min (Pentium4))



**Figure IV.18** - Contraintes de Von Mises (en MPa) dans les passages (Pression = 13 MPa)  
 Comme dans l'exemple du chargement thermique, on note aussi dans ce cas la faiblesse des contraintes équivalentes dans les passages par rapport aux tôles d'extrémités et les faibles valeurs des déplacements maximums dans le corps d'échangeur (tableau IV.10).

	Déplacement maximal
DX	1,453 mm
DY	0,204 mm
DZ	0,165 mm
EpXX	0,00131
EpYY	0,00182
EpZZ	0,00385

**Tableau IV.10** - Déplacements maximal de l'échangeur « STAT3 » sous chargement en pression (13 MPa)

#### IV.3.4 Exemple d'un chargement en pression avec une tête

Les têtes/piquages (figure IV.19) représentent les tubulures soudées sur le corps d'échangeur pour assurer l'alimentation et l'évacuation des différents circuits de fluide.

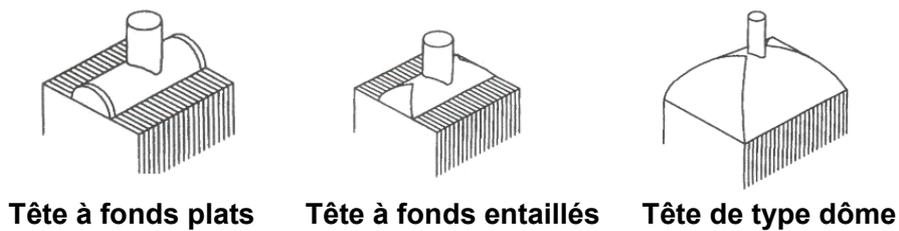


Figure IV.19 - Exemples de têtes/piquages soudés sur le corps d'échangeur

Les sollicitations de chargement en pression peuvent ainsi être complétées par l'intégration de ces tubulures dans le modèle. Cela consiste à imposer en plus du chargement équivalent en pression dans les zones homogénéisées, une pression à l'intérieur des têtes, pression agissant aussi sur les ouvertures et la surface de mur de barre couvertes par ces têtes. Cependant des problèmes d'incompatibilité de maillage se posent. En effet, à l'heure actuelle et dans le cadre de la plate-forme utilisée, le maillage automatique des têtes/piquages n'est possible qu'avec des éléments tétraèdres (T4). Ces derniers sont incompatibles avec le maillage hexaédrique (H8) du corps d'échangeur.

Pour ces raisons techniques, nous avons dû nous contenter d'étudier un corps d'échangeur avec une tête demi-cylindrique, sans piquage, ni fond (figure IV.20). Un extrait de maillage est donné par la figure IV.21. On impose à l'intérieur de cette tête la pression du circuit correspondant et on simule l'effet du fond en imposant un chargement axial vertical sur les faces supérieure et inférieure de cette tête. On maintient par ailleurs, le chargement équivalent en pression interne et les conditions d'élimination des mouvements de corps rigide. L'objectif est de regarder qualitativement le comportement mécanique dans les soudures, les murs de barres et les têtes.

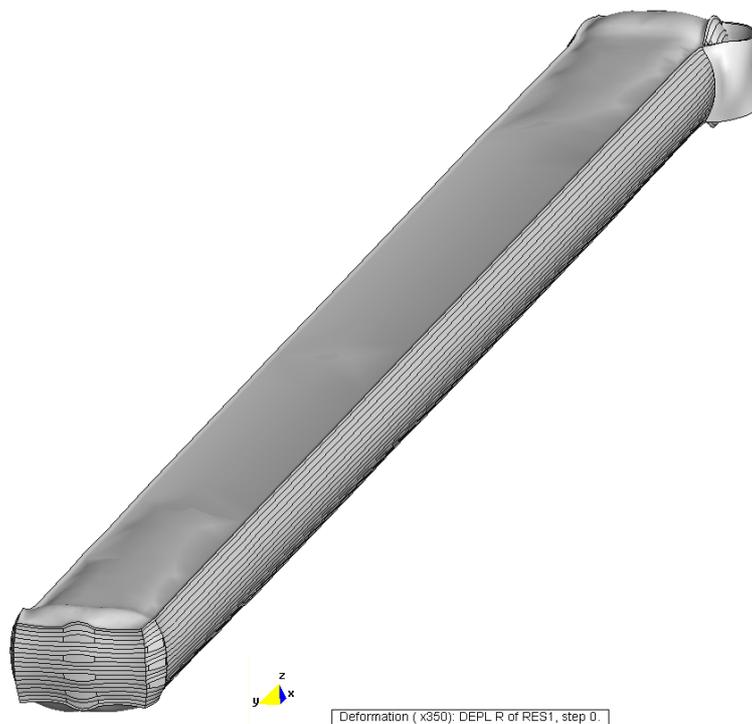


Figure IV.20 - Déformée d'un exemple de corps d'échangeur avec une tête demi-cylindrique sous sollicitation en pression équivalente (temps de calcul CPU = 9 min (Pentium4))

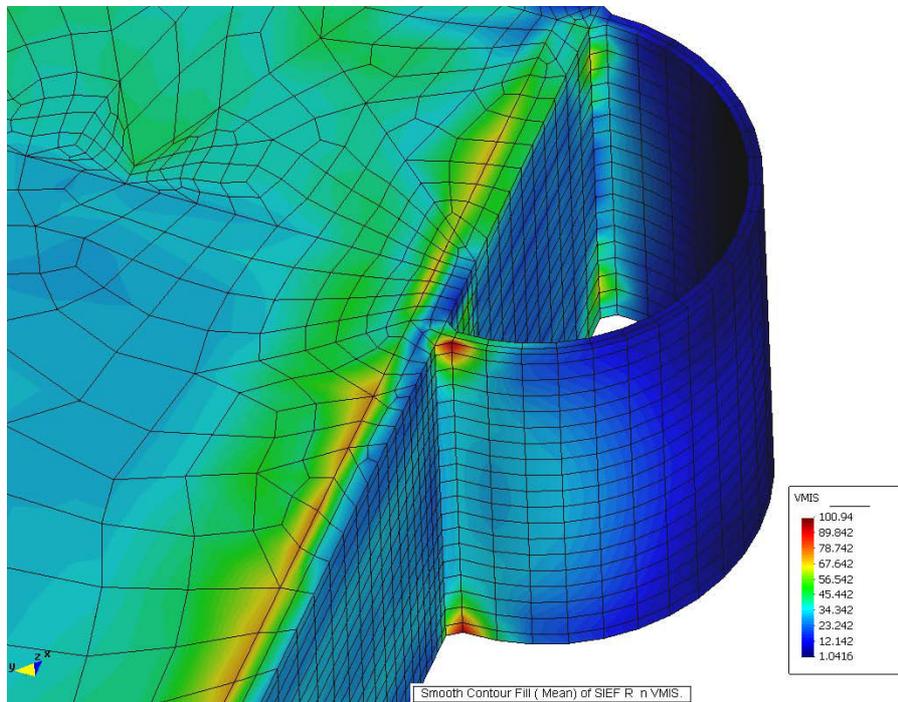


Figure IV.21 - Contraintes équivalentes (en MPa) de l'exemple d'échangeur sous sollicitation en pression (13 MPa)

Les contraintes équivalentes (figure IV.21) montrent que les contraintes dans la tête sont plus faibles que celles dans le corps d'échangeur. Cependant si on compare l'échelle des contraintes dans cet exemple avec celle de l'échangeur sans la tête (figure IV.17), on trouve que ces contraintes sont plus importantes en présence de la tête, sachant qu'on a le même chargement équivalent en pression à l'intérieur de l'échangeur. Les contraintes maximales sont situées dans les cordons de soudure de la tête, comme le montre la figure IV.22. On doit cependant relativiser les valeurs de contraintes maximum au voisinage des extrémités de liaison tête échangeur car les fonds n'ont pas été pris en compte dans cet exemple, même si les effets de pression sur ces fonds ont été eux pris en compte dans les sollicitations globales. En fait la présence des piquages et des fonds peut avoir une influence considérable sur l'évaluation des contraintes au niveau des soudures, têtes et tôles. Cette modélisation complète des têtes et piquages avec le corps de l'échangeur s'inscrit alors dans les perspectives de travaux futurs.

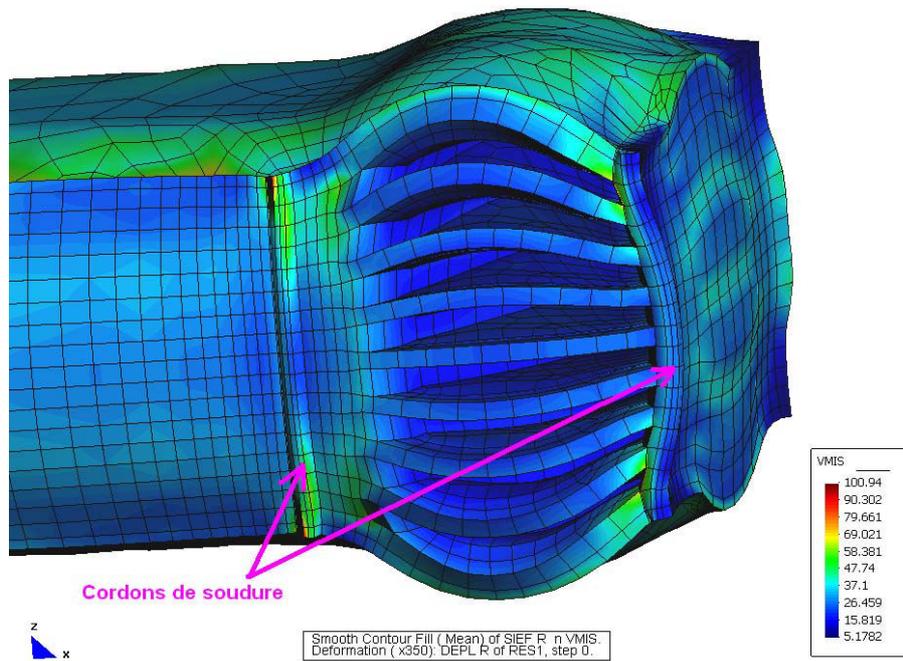


Figure IV.22 - Contraintes équivalentes dans les cordons de soudure (MPa) (Pression = 13 MPa)

## IV.4 Conclusions

Au cours de ce chapitre, on a décrit le développement de l'outil métier final « SiTEME » prenant en charge les étapes de la modélisation thermomécanique globale de l'échangeur. A partir des paramètres de géométries et de maillage, l'outil permet de constituer le maillage volumique du corps d'échangeur homogénéisé passage par passage. Dans ces passages, les comportements homogènes des ondes et tôles brasées, calculés par l'outil d'homogénéisation « HomPass », sont affectés au maillage en respectant les différentes orientations du repère d'orthotropie lié aux ondes. Le chargement en température est ensuite pris en charge en affectant le coefficient de dilatation thermique et le champ de température moyenne calculée par des outils thermiques propres à l'entreprise. Enfin le chargement équivalent en pression peut être déterminé à partir des comportements homogènes et les pressions supposées constantes dans chaque passage.

On présente ensuite quelques résultats obtenus avec la première version de « SiTEME » en se limitant à des premières observations qualitatives. On teste alors la fonctionnalité de cette version tout en identifiant des améliorations qui pourront être intégrées dans de prochaines versions.

Dans ce cadre, on représente un exemple type d'un échangeur nommé « STAT3 ». Les résultats montrent que:

- sous un chargement thermique linéaire, une zone de contrainte maximum est localisée sur le mur de barre
- sous un chargement en pression constant dans tout l'échangeur, une zone de contrainte maximum est localisée dans les tôles d'extrémité
- les déplacements maximums relatifs aux dimensions sont faibles (de l'ordre de 4<sup>millième</sup>)

Enfin, à partir d'un exemple simple, on met en évidence l'importance de la modélisation complète de l'échangeur en incluant les têtes piquages. Ces travaux sont envisagés dans de prochaines versions de « SiTEME ».

# Conclusions et perspectives

Les recherches décrites dans ce mémoire ont abouti à la construction d'outils métiers de modélisation thermomécanique globale des échangeurs. A cet effet, l'utilisation de la méthode d'homogénéisation volumique des structures partiellement périodiques nous a permis, de caractériser le comportement élastique homogène équivalent de structures partiellement périodiques puis ensuite, de déterminer le chargement équivalent aux sollicitations thermomécaniques issues des gradients de température et de pression dans les circuits internes de l'échangeur. L'outil métier d'homogénéisation permet de constituer une librairie d'éléments à comportement homogénéisé en partant des caractéristiques de chaque passage. C'est l'étape nécessaire au développement de l'outil métier final permettant l'analyse thermomécanique globale de l'échangeur à partir de cette librairie, des différents paramètres géométriques (e.g. empilement, orientation des ondes...) et des sollicitations en température et en pression.

Dans le **deuxième chapitre**, après quelques rappels historiques dont les objectifs étaient d'introduire les théories classiques de l'homogénéisation et d'en justifier l'intérêt lors d'un calcul de structures hétérogènes sous chargement thermomécanique, on a montré l'insuffisance de ces théories vis-à-vis de l'application industrielle visée dans cette thèse. Cela nous mène, dans un deuxième temps à définir une approche globale d'homogénéisation fondée sur l'encadrement du comportement global de chaque zone de l'échangeur entre deux comportements limites déterminés par les schémas appelés HCP et HMP. La formulation de ces problèmes se base respectivement sur l'adaptation des approches en déformation et en contrainte de la méthode Hill-Mandel aux spécificités périodiques des échangeurs.

Dans un troisième temps, nous nous intéressons à la mise en oeuvre de ces techniques. Cette étape est primordiale dans le développement d'un outil dédié à l'homogénéisation des passages en vue de l'étude du comportement global d'un bloc d'échangeur. Dans ce cadre, on propose deux mises en oeuvre pour déterminer respectivement les rigidités homogénéisées par schéma HCP et les souplesses homogénéisées par schéma HMP. Ensuite, une étude des chargements en température et en pression montre que :

- Le chargement thermique macroscopique équivalent s'obtient en imposant dans les passages homogénéisés le champ de température moyenne (fournie par l'entreprise) et le coefficient de dilatation thermique du matériau constituant l'échangeur.
- Le chargement équivalent en pression s'obtient à partir des coefficients homogénéisés et des caractéristiques du matériau constituant les passages. L'échangeur est considéré comme étant une structure à matériau unique.

## Conclusions et perspectives

Finalement on montre que le tenseur des modules (resp. des souplesses) est plus «raide» (resp. plus «souple») dans le cas homogène en déformations que dans le cas homogène en contraintes. Cela a permis de mettre en évidence, numériquement, les propriétés d'encadrement des approches HCP et HMP vis-à-vis du comportement d'un passage isolé (cf. chapitre III, § III.3.2).

Le **troisième chapitre**, concerne les résultats de l'application numérique des approches HCP et HMP. Dans un premier temps, un outil d'homogénéisation, appelé « HomPass », a été développé afin d'implémenter automatiquement ces approches. Ensuite, plusieurs tests ont été réalisés afin de valider numériquement les résultats de cet outil. Cela s'est fait via :

- Un patch test du domaine homogène : on applique les différentes approches d'homogénéisation implémentées par « HomPass » sur un matériau homogène. A la sortie, on récupère les caractéristiques isotropes de ce matériau.
- Un bon accord avec les résultats des méthodes classiques Hill-Mandel d'homogénéisation et ceux disponibles dans la littérature.

Dans un deuxième temps, l'étude de sensibilité des paramètres géométriques de la cellule de base permet de mettre en évidence un groupement adimensionnel de sensibilité du milieu. Ce groupement propre à chaque onde permet de montrer l'aptitude à résister à l'influence des passages adjacents. Cette influence se manifeste par l'écart entre le comportement global dans un milieu plutôt rigide et celui dans un milieu plutôt mou, déterminé respectivement par les approches HCP et HMP.

Ce groupement adimensionnel de sensibilité nous permet, de choisir une cellule de base ayant le même comportement équivalent déterminé par ces deux approches différentes : on rappelle que la HCP (approche en déformation avec une périodicité dans le plan) et la HMP (approche en contrainte avec périodicité dans le plan) correspondent à deux problèmes physiquement différents. Cela a conduit dans un dernier temps, à valider numériquement (en effectuant des comparaisons sur des quantités moyennées) le modèle macroscopique avec celui microscopique d'un passage sous chargement en pression. D'ailleurs, on met en évidence d'un côté, la faible sensibilité du passage choisi envers son milieu adjacent et d'un autre côté la validation numérique de l'hypothèse d'encadrement. En effet, cette hypothèse suppose que le comportement réel global d'un passage d'échangeur est compris entre deux comportements limites déterminés par les approches HCP et HMP. Il était alors évident de voir que quand ces deux comportements limites tendent vers les mêmes valeurs (conséquence du choix d'un passage à faible sensibilité vis-à-vis du milieu adjacent), le comportement réel global tend aussi numériquement vers ces mêmes valeurs.

Enfin, une librairie du comportement global des ondes et tôles brasées peut être établie à l'aide de l'outil d'homogénéisation « HomPass ». Ce comportement moyen aux souplesses homogénéisées par les approches HCP et HMP, noté CMSH, possède une erreur de modélisation maximale de 19,6% pour l'onde droite N°2892 et de 5,3% pour l'onde serrated N°2830. Ce sont ces dernières ondes qui possèdent la plus grande sensibilité vis-à-vis des passages adjacents. Cela permet alors le développement d'un outil métier final, se servant de cette librairie pour attribuer le comportement équivalent à chaque zone, en respectant les paramètres géométriques de l'échangeur (e.g. empilement, orientation

## Conclusions et perspectives

d'onde...) et en affectant les sollicitations en température et en pression équivalentes pour déterminer les comportement thermoélastique global.

Dans le **chapitre quatre**, on a décrit le développement de l'outil métier final « SiTEME » prenant en charge les étapes de la modélisation thermomécanique globale de l'échangeur. A partir des paramètres de géométries et de maillage, l'outil permet de constituer le maillage volumique du corps d'échangeur homogénéisé passage par passage. Dans ces passages, les comportements homogènes des ondes et tôles brasées, calculés par l'outil d'homogénéisation « HomPass » en adoptant l'approche CMSH, sont affectés au maillage en respectant les différentes orientations du repère d'orthotropie lié aux ondes. Le chargement en température est ensuite pris en charge en affectant le coefficient de dilatation thermique et le champ de température moyenne calculée par des outils thermiques propres à l'entreprise. Enfin le chargement équivalent en pression peut être déterminé à partir des comportements homogènes et les pressions supposées constantes dans chaque passage.

On a présenté ensuite quelques résultats obtenus avec la première version de « SiTEME » en se limitant à des premières observations qualitatives. On teste alors la fonctionnalité de cette version tout en identifiant des améliorations qui pourront être intégrées dans de prochaines versions.

Dans ce cadre, on a représenté un exemple type d'un échangeur nommé « STAT3 ». Les résultats montrent que:

- sous un chargement thermique linéaire, une zone de contrainte maximum est localisée sur le mur de barre
- sous un chargement en pression constant dans tout l'échangeur, une zone de contrainte maximum est localisée dans les tôles d'extrémité
- les déplacements maximums relatifs aux dimensions sont faibles (de l'ordre de 4<sup>millième</sup>) ce qui valide l'hypothèse des faibles déformations

Enfin, à partir d'un exemple simple, on met en évidence l'importance de la modélisation complète de l'échangeur en incluant les têtes piquages. Ces travaux sont envisagés dans de prochaines versions de « SiTEME ».

## Conclusions et perspectives

Programmé à l'aide d'un langage orienté objet (Visual C++), « SiTEME » constitue une structure de base offrant la possibilité d'optimiser et d'enrichir le modèle. Cela s'inscrit, comme pour tous les outils métiers, dans un programme de développement et d'amélioration continus. Dans ces **perspectives**, on soulève les premières orientations inspirées en partie par le retour d'expérience de cette version :

### **1) optimisation du calcul par éléments finis.**

On note que la capacité en calcul du Code\_Aster est limitée. Cela provient surtout de la version compilée sous MS Windows. Cette version limite l'allocation de la mémoire et par conséquent la taille du problème. Cela peut impliquer des processus d'optimisation de maillage afin de réduire le nombre de degrés de liberté et de chercher à augmenter la capacité d'allocation. On identifie ici deux possibilités d'améliorer l'outil de calcul :

a) Des modules de programmation peuvent être rajoutés dans SiTEME. Cela prendra en compte de :

- l'élimination des concentrations inutiles des éléments dans le maillage : Cet aspect provient de la projection de la CAO des passages sur un seul plan. Cela constituera un ensemble de surfaces élémentaires où on peut retrouver des petites surfaces adjacentes à des surfaces de plus grande taille. Or, en générant automatiquement le maillage, le module du pré-processeur tend à raffiner le maillage entre ces deux tailles de surface pour assurer la connectivité de maillage tout en augmentant la taille du problème. La solution qui peut être proposée est de fusionner les petites surfaces avec leurs voisins.
- le choix du type d'élément (prisme ou hexa) en fonction de chaque surface élémentaire (la version actuelle permet de choisir un type unique d'élément (resp. une taille moyenne) pour toutes les surfaces élémentaires). L'amélioration réside dans l'élaboration d'une procédure de choix de type d'élément en fonction des besoins de discrétisation des surfaces.

b) Une autre solution consiste d'effectuer les calculs avec un autre système d'exploitation ou avec une autre version de [Code\_Aster] qui s'opère avec des capacités supérieures en allocation de mémoire.

Enfin, la mise à jour des modules de pré-post processeur [GiD] et du calculateur éléments finis [Code\_Aster] permet d'améliorer continuellement les processus de maillage et de calcul.

### **2) Variation des coefficients en fonction de la température**

Certaines caractéristiques varient en fonction de la température à l'intérieur de l'échangeur (e.g. module de Young, coefficient de la dilatation thermique...). Cela peut nous ramener à considérer la variation de la température entre l'état initial et l'état final dans l'affectation des caractéristiques homogénéisées. La version actuelle suppose que ces coefficients sont affectés par leur valeur moyenne indépendamment de la température. L'amélioration ici consiste à intégrer un programme qui permet de calculer ces valeurs moyennes en fonction du profil de ces coefficients et la variation de la température.

### **3) Intégration des têtes piquages au modèle thermo-élastique du corps d'échangeur**

La modélisation des têtes piquages soudées sur le corps d'échangeur est primordiale pour

## Conclusions et perspectives

l'analyse des contraintes au niveau des jonctions et tubulures. Dans ce cadre, des études vont être menées pour assurer l'assemblage du maillage des têtes piquages avec celui du corps d'échangeur.

Par ailleurs, les éléments volumiques classiques des têtes piquages peuvent être remplacés par des éléments volumiques (de type H8 ou P6 modifiés) à comportement coque afin de réduire la taille du problème.

### 4) Localisation

C'est la démarche inverse de l'homogénéisation qui permet de localiser les quantités microscopiques à partir du modèle homogène.

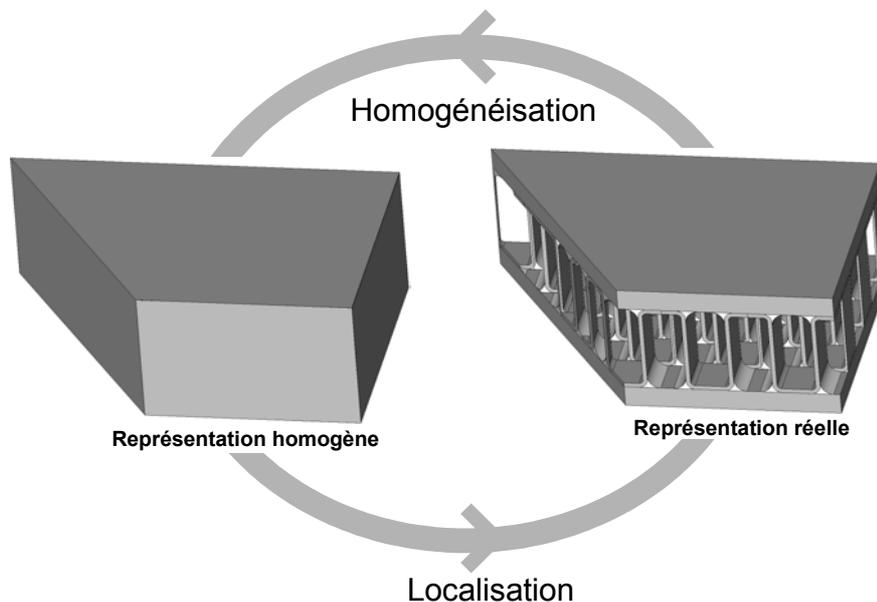


Figure 1 - Représentation réelle d'un élément H8 homogène

En effet on calcule des quantités globales sur des éléments (H8) ou (P6). Comme le montre la figure 1, ces éléments représentent des structures en tôles et ondes homogénéisées. Le comportement global (déformation global, réactions aux appuis) est précis ainsi que les efforts résultants transmis aux tubulures. On peut également localiser les zones à risques dans le corps d'échangeur. A partir de ces données, la localisation qui est la démarche inverse à l'homogénéisation, permet de remonter dans un deuxième temps aux quantités microscopiques (au niveau des tôles et des ondes) tout en réalisant des calculs sur des parties limitées de la structure. Cette dernière démarche dépasse le cadre de la présente thèse et reste un domaine à exploiter dans l'outil métier tout en s'appuyant sur les travaux de localisation se trouvant dans la littérature (e.g. [Chung et al. 2001], [Pistre et al. 1983]...).

### 5) Essais expérimentaux

Pour garantir la qualité des résultats, des essais expérimentaux peuvent être menés soit sur des maquettes soit sur des échangeurs réels.



# Bibliographie

**ALPEMA. (2000).** The standards of the brazed aluminium plate-fin heat exchanger manufacturer's association, Second Edition, (<https://www.alpema.org>).

**AVEROUS, D. (2000).** Modélisation et simulation des échangeurs de chaleur multifluides à plaques brasées en configurations complexes. Thèse doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

**BATOZ, J.L. et DHATT, G. (1990).** Modélisation des structures par éléments finis, volume 1, Hermes, ISBN 2-86601-243-7.

**BERREHILI, Y. (1997).** Etude du comportement effectif des matériaux composites à constituants décollés, Thèse doctorat, Université Paris 13.

**BENSOUSSAN, A., LIONS, J.L. et PAPANICOLAOU, G. (1978).** Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North Holland Ed., Amsterdam.

**BILMES, J., ASANOVIC, K., CHIN C.W., DEMMEL, J. (1997).** Optimizing matrix Multiply using PhiPAC : a Portable High-Performance, ANSI C Coding Methodology, International Computer Science Institute, Vienne.

**BORNERT, M., BRETHEREAU, T. et GILORMINI, P. (2001).** Homogénéisation en mécanique des matériaux 1, Hermes, ISBN 2-7462-0199-2.

**CARDONA, J.M. (2000).** Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine. Thèse doctorat, Ecole des Mines de Paris.

**CARTRAUD, P. (1994).** Contribution à la modélisation numérique et à l'homogénéisation du comportement élastoplastique d'un joint de culasse. Thèse doctorat, Université de Nantes.

**CARTRAUD, P. (2003).** Contribution à l'analyse asymptotique et à l'homogénéisation de structures périodiques. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Ecole Centrale de Nantes.

**CASTOR.** Logiciel commercial de calcul éléments finis. Cetim, [www.cetim.fr](http://www.cetim.fr)

**CESAR II.** Logiciel commercial de simulation de tuyauteries. Coade, <http://www.coade.com>

**CHUNG, W.P., TAMMA, K.T. et NAMBURU, R.R. (2001).** Asymptotic expansion homogenization for heterogeneous media : computational issues and applications. Composites: Part A 32 (2001) 1291-1301.

## Bibliographie

- CODE\_ASTER, (2006).** Calculateur EF, EDF R&D, <http://www.code-aster.org>.
- COPPERSMITH, D. et WINOGRAD, S. (1990).** Matrix multiplication via arithmetic progressions. Journal of Symbolic Computation, Vol 9, pp 251-280.
- DEBORDES O. (1989).** Homogénéisation périodique, cours, université Laval.
- DHATT, G. et TOUZOT, G. (1981).** Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine, ISBN 2.224-00700-0.
- DIB, J., BILTERYST, F., BATOZ, J.L. et LEWON, I. (2005).** Application des techniques d'homogénéisation pour l'analyse tridimensionnelle d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes, Acte du 7e Colloque national en Calcul des Structures (Giens 2005), ISBN 2-7462-1139-4, R. Ohayon, J.-P. Grellier et A. Rassineux (eds.), Mai 17e 20e 2005, Lavoisier, p.417-422.
- DIB, J., BILTERYST, F., BATOZ, J.L. et LEWON, I. (2005).** Détermination par homogénéisation des propriétés mécaniques d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes, 8e Congrès Français de Mécanique, CFM 2005.
- DIB, J., BILTERYST, F., BATOZ, J.L. et LEWON, I. (2006).** Contribution à l'élaboration d'un logiciel métier pour la conception d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes intégrant les techniques d'homogénéisation. III European Conference on Computational Mechanics, ECCM Lisbon 2006.
- DONGARRA, J., DUFF, I., SORENSEN, D., VAN DER VORST, H. (1998).** Numerical linear algebra for high-performance computers, SIAM.
- DUMONTET, H., (1990).** Homogénéisation et effets de bords dans les composites, Thèse d'état, Univ. Paris 6.
- DUVAUT, G. (1976).** Analyse Fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus, in Theoretical and Applied Mechanics, W. Koiter Ed., North Holland, pp. 119-132.
- FLEISCHHAUER, C. (1997).** Grand livre Visual C++ 5. Micro-Application, Paris.
- GID, (2006).** pré et post processeur. Cimne, <http://gid.cimne.upc.es>.
- GIBSON, L. et ASHBY, M. (1997).** Cellular solids, Structure and properties. Second edition, Cambridge University Press.
- GOLUB, G.H. et VAN LOAN, C.F. (1991).** Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, Baltimor & London.
- HILL, H. (1964).** Theory of mechanical properties of fiber strenghtend material : I Elasticc behaviour, J. Mech. Phys. Solids, Vol.12, p199.
- KALAMKAROV, A.L. (1992).** Composite and reinforced elements of construction, Wiley,

## Bibliographie

ISBN 0-471-93593-X.

**LE COQ-BUANNIC, N. (2000).** Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes, Thèse doctorat, Université de Nantes.

**LEGUILLON, D. (1990).** Homogénéisation des milieux périodiques, Cours de DEA, Université Paris 6.

**LENE, F. (1984).** Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement. Thèse d'Etat, Université Paris 6.

**LEWINSKI, T. et TELEGA, J. (1999).** Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization. World Scientific.

**LEWON, I. (1997).** Evaluation des caractéristiques mécaniques du matériau homogène équivalent à une onde en aluminium en vue d'une modélisation par éléments finis anisotropes, DEA Université Henri Poincaré, Nancy I.

**LEWON, I. (2000).** Simulation par éléments finis du comportement mécanique d'un échangeur à plaques : conception et validation d'un logiciel métier. Thèse doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.

**L'HOSTIS, G., DEVRIES, F. et LENE, F. (1998).** Méthode simplifiée pour le calcul du comportement thermoélastique de composites alvéolaires. Revue des composites et des matériaux avancés, 8, 91-118.

**MAGOARIEC, H. (2003).** Adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique, thèse doctorat, Université Aix-Marseille II.

**MICHEL, J.C. (2001).** Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : matériaux élastiques et milieux périodiques, Chapitre 2 : « Théorie des modules effectifs. Approximations de Voigt et de Reuss » pages 41-56. Hermes Science.

**MIZOGUCHI, T., UENO, K., OKADA, K. et NAKAOKI, K. (1982).** Fatigue strength of corrugated fin type heat exchanger, ASME, 82-PVP-29.

**MS VISUAL C++.** Microsoft Visual C++, <http://msdn.microsoft.com/visualc/>.

**NAKAGAWA, T. et SOU, T. (1984).** Three-dimensional analysis of the plate-fin heat exchanger, ASME, 84-PVP-7.

**NAKAKAOKA, T., NAKAGAWA, T., MITSUHASHI, K. et UENO, K. (1996).** Evaluation of fatigue strength of plate-fin heat exchanger under thermal loading, Proceedings of the International Conference on Pressure Vessel Technology, Vol 1, ASME.

**NOOR, A. (1988).** Continuum modeling for repetitive lattice structures. Appl. Mech. Rev., 41, 285-296.

## Bibliographie

**NOOR, A., BURTON, W., et BERT, C. (1995).** Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 155, 155-199.

**PICARD, F. (2007).** Modélisation et simulation 3D des échangeurs de chaleur multifluides à plaques brasées en configurations complexes. Thèse doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (en préparation).

**PISTRE, F., BEGIS, D., BESTAGNO, A., DUVAUT, G., HASSIM, A. et NUC, M. (1983).** Calcul des contraintes dans les matériaux composites (Stress analysis in composite materials). Rapport N° DGRST, INIST-CNRS.

**PCDIAM,** Logiciel de calcul de tête. Outil métier, Nordon Cryogénie.

**PRADEL, F. (1998).** Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses. Thèse, E.N.P.C.

**SALHA, B. (1988).** Eléments pour une théorie des plaques hétérogènes. Note technique, Département Mécanique et Modèles Numérique, Electricité de France.

**PROSEC,** Logiciel de simulation thermique des échangeurs. Outil métier, Nordon Cryogénie.

**SAIDI, A., COOREVITS, P. et GUESSASMA, M. (2005).** Homogenization of a sandwich structure and validity of the corresponding two-dimensional equivalent model. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 2005; 7;7; DOI: 10.1177/1099636205043820.

**SANCHEZ-PALANCIA, E. (1980).** Non homogeneous media and vibration theory : Lecture notes in Physics n°127.

**SANCHEZ-HUBERT, J. et SANCHEZ-PALANCIA, E. (1992).** Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation, Masson, Paris.

**STRASSEN, V. (1969).** Gaussian elimination is not optimal. *Numerics and mathematics*, vol 13, 354-356.

**SUQUET, P. (1982).** Placiticité et homogénéisation, thèse d'état, Université P. et M. Curie.

**SUQUET, P. (1986).** Elements of homogenization for inelastic solid mechanics, Springer-Verlag, ISBN 0-387-17616-0.

**TOLLENAERE, H. (1994).** Modèles bidimensionnels de tissés. Homogénéisation de treillis en vibrations libre. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.

**TRABUCHO, L. et VIANO, J. (1996).** Mathematical modelling of rods. P. Ciarlet et J. Lions, éditeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, 487-974. North Holland.

**TUTEK, Z. (1987).** A homogenized model of a rod in linear elasticity. P. Ciarlet et E. Sanchez-Palencia, éditeurs, *Applications of Multiple Scaling in Mechanics*, 316-331.

## **Bibliographie**

Masson.

**VALROFF, V. (2004).** Etude des pertes de charge des ondes droites dans les échangeurs en aluminium brasé. Rapport de stage, diplôme univ. tech. de génie chimique et génie des procédés, I.U.T. De Nancy Brabois.

**VERNA, P. (1991).** Modélisation continue de structures discrètes par homogénéisation : cas des treillis. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.

**VOLDOIRE, F. (1993).** Comportement Homogénéisé des Plaques Perforées des Générateurs de Vapeur. Electricite de France, Direction des Etudes et Recherches, ISSN 1161-059X.

**WILLIS, J.R. (2001).** Mechanics of composites, Cours école Polytechnique.



# Annexe A

## Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$ – périodiques)

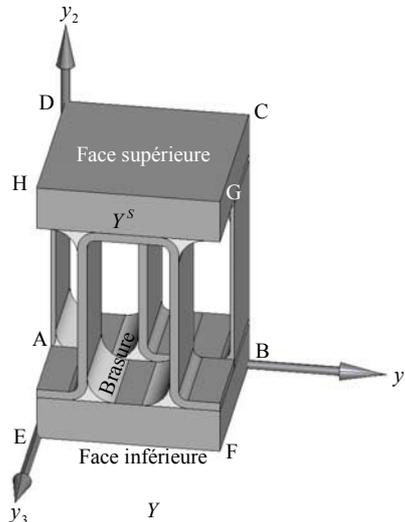


Figure A.1 - Exemple de cellule de base 3D d'un passage d'échangeur

Rappelons tout d'abord, les problèmes élémentaires  $\xi^{ij}$  vus dans la mise en oeuvre de l'approche « HMP à  $\Sigma$  imposé » (§ II.3.2):

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma(\xi^{ij}) = 0 \\ \sigma(\xi^{ij}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) : \epsilon(\xi^{ij}) \\ \epsilon(\xi^{ij}) = \frac{1}{2} (\nabla_y \xi^{ij} + \nabla_y^T \xi^{ij}) \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad (\text{A.1})$$

et

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \tilde{\sigma}(\xi^{ij}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur les faces sup. et inf.} \quad (\text{A.2})$$

$$\xi^{ij} = C^{HMP} : \tilde{\sigma}(\xi^{ij}) \cdot \mathbf{y} + \xi^{per,ij} \quad \text{sur les faces périodiques} \quad (\text{A.3})$$

où :

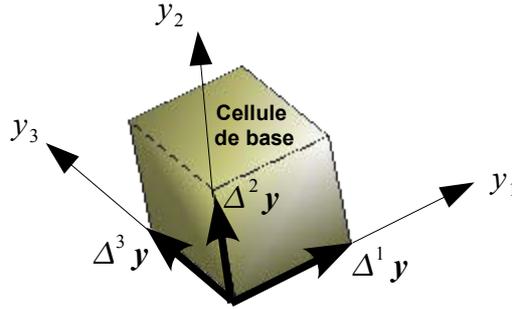
$$\xi^{per,ij} \text{ est } y_1 y_3 \text{ - périodique} \quad (\text{A.4})$$

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**

$$\tilde{\sigma}_{pq}(\xi^{ij})=1 \text{ si } pq=ij \text{ et } \tilde{\sigma}_{pq}(\xi^{ij})=0 \text{ si } pq \neq ij \quad (\text{A.5})$$

La relation (A.3) peut être imposée sous forme d'une liaison cinématique entre les faces périodiques. Cela permet d'éliminer le terme  $\xi^{per.ij}$ . En effet, si on définit  $\Delta^k \mathbf{y}$  le vecteur période dans la  $k^{i\text{ème}}$  direction de périodicité (figure A.2), la liaison cinématique entre les faces périodiques dans cette direction est :

$$\Delta^k \xi^{ij} = \xi^{ij}(\mathbf{y} + \Delta^k \mathbf{y}) - \xi^{ij}(\mathbf{y}) = \mathbf{C}^{HMP} : \tilde{\sigma}(\xi^{ij}) \cdot \Delta^k \mathbf{y} \text{ sur les faces périodiques} \quad (\text{A.6})$$



**Figure A.2 - Vecteurs périodes pour une cellule de base Y-périodique**

Par ailleurs les relations énergétiques entre les problèmes  $\xi^{ij}$  et les coefficients homogénéisés sont donnés par (cf. § II.3.2.2) :

a) pour les coefficients diagonaux :

$$C_{ijj}^{HMP} = \frac{2}{|Y|} W_d(\xi^{ij}) \quad (\text{A.7})$$

b) pour les coefficients hors-diagonaux :

$$C_{iij}^{HMP} = \frac{1}{|Y|} (W_d(\xi^{ii} + \xi^{jj}) - W_d(\xi^{ii}) - W_d(\xi^{jj})) \quad (\text{A.8})$$

D'après ces considérations énergétiques on constate que les souplesses homogénéisées peuvent être calculées à partir de l'énergie de déformation des problèmes élémentaires qui eux dépendent à leurs tours de ces souplesses imposées sur les faces périodiques (A.6). Ces souplesses peuvent donc être déterminées par approche itérative. Toutefois, on expose par la suite une démarche de calcul directe de ces coefficients, en prenant en compte d'autres relations énergétiques en fonction du chargement (cf. cas 2D ( $y_1$  – périodicité) § II.3.2.3).

On considère alors le cas de la modélisation volumique du passage d'échangeur possédant deux directions de périodicité perpendiculaire (cf. figure A.1). Dans ce cas les vecteurs périodes sont :

$$\Delta^1 \mathbf{y} = \langle \overline{AB}, 0, 0 \rangle \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta^3 \mathbf{y} = \langle 0, 0, \overline{AE} \rangle \quad (\text{A.10})$$

Les liaisons cinématiques (A.6) s'écrivent alors :

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**

$$\Delta^1 \xi^{ij} = C^{HMP} : \tilde{\sigma}(\xi^{ij}) \cdot \langle \overline{AB}, 0, 0 \rangle \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta^3 \xi^{ij} = C^{HMP} : \tilde{\sigma}(\xi^{ij}) \cdot \langle 0, 0, \overline{AE} \rangle \quad (\text{A.12})$$

Soit la notation indicielle :

$$C^{HMP} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{HMP} & C_{1122}^{HMP} & C_{1133}^{HMP} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122}^{HMP} & C_{2222}^{HMP} & C_{2233}^{HMP} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133}^{HMP} & C_{2233}^{HMP} & C_{3333}^{HMP} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212}^{HMP} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}^{HMP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323}^{HMP} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

D'où nous déduisons le tableau de chargement des problèmes élémentaires (A.1 à A.3) à un mouvement de corps rigide près :

Problème élémentaire $\xi^{ij}$	Tenseur de contraintes sur les faces Sup. et Inf. $\tilde{\sigma}(\xi^{ij})$	Liaison cinématique sur les faces $y_1$ -périodique $\Delta^1 \xi^{ij}$	Liaison cinématique sur les faces $y_3$ -périodique $\Delta^3 \xi^{ij}$
$\xi^{11}$	$\langle 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$	$\langle C_{1111}^{HMP} \cdot \overline{AB}, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, C_{1133}^{HMP} \cdot \overline{AE} \rangle$
$\xi^{22}$	$\langle 0, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle$	$\langle C_{1122}^{HMP} \cdot \overline{AB}, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, C_{2233}^{HMP} \cdot \overline{AE} \rangle$
$\xi^{33}$	$\langle 0, 0, 1, 0, 0, 0 \rangle$	$\langle C_{1133}^{HMP} \cdot \overline{AB}, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, C_{3333}^{HMP} \cdot \overline{AE} \rangle$
$\xi^{12}$	$\langle 0, 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, C_{1212}^{HMP} \cdot \frac{\overline{AB}}{2}, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$
$\xi^{13}$	$\langle 0, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, C_{1313}^{HMP} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \rangle$	$\langle C_{1313}^{HMP} \cdot \frac{\overline{AE}}{2}, 0, 0 \rangle$
$\xi^{23}$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, C_{2323}^{HMP} \cdot \frac{\overline{AE}}{2}, 0 \rangle$

**Tableau A.1** - Chargement HMP mixte cas 3D (  $y_1, y_3$  – périodicité )

En tenant compte de la linéarité des problèmes  $\xi^{ij}$  nous décomposons le chargement en un chargement en contrainte (tableau A.2) et un chargement de liaison cinématique (tableau A.1) tout en définissant des nouveaux problèmes indépendant de  $C_{ijkh}^{HMP}$ .

Problème élémentaire	Tenseur de contraintes sur les faces Sup. et Inf.	Liaison cinématique sur les faces $y_1, y_3$ -périodique
$\xi_{,0}^{ij}$	$\tilde{\sigma}(\xi_{,0}^{ij}) = \langle \delta_{11}^{ij}, \delta_{22}^{ij}, \delta_{33}^{ij}, \delta_{12}^{ij}, \delta_{13}^{ij}, \delta_{23}^{ij} \rangle$	$\Delta^1 \xi_{,0}^{ij} = \Delta^3 \xi_{,0}^{ij} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

**Tableau A.2** - Chargement HMP en contraintes cas 3D (  $y_1, y_3$  – périodicité )

avec  $\delta_{pq}^{ij} = 1$  si  $pq = ij$  et  $\delta_{pq}^{ij} = 0$  si  $pq \neq ij$

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**

Problème élémentaire $\kappa^{ij}$	Tenseur de contraintes sur les faces Sup. et Inf. $\tilde{\sigma}(\kappa^{ij})$	Liaison cinématique sur les faces $y_1$ -périodique $\Delta^1 \kappa^{ij}$	Liaison cinématique sur les faces $y_3$ -périodique $\Delta^3 \kappa^{ij}$
$\kappa^{11}$	$\langle 0,0,0,0,0,0 \rangle$	$\langle \overline{AB}, 0,0 \rangle$	$\langle 0,0,0 \rangle$
$\kappa^{33}$	$\langle 0,0,0,0,0,0 \rangle$	$\langle 0,0,0 \rangle$	$\langle 0,0,\overline{AE} \rangle$
$\kappa^{1133}$	$\langle 0,0,0,0,0,0 \rangle$	$\langle \overline{AB}, 0,0 \rangle$	$\langle 0,0,\overline{AE} \rangle$
$\kappa^{12}$	$\langle 0,0,0,0,0,0 \rangle$	$\langle 0, \frac{\overline{AB}}{2}, 0 \rangle$	$\langle 0,0,0 \rangle$
$\kappa^{13}$	$\langle 0,0,0,0,0,0 \rangle$	$\langle 0,0, \frac{\overline{AB}}{2} \rangle$	$\langle \frac{\overline{AE}}{2}, 0,0 \rangle$
$\kappa^{23}$	$\langle 0,0,0,0,0,0 \rangle$	$\langle 0,0,0 \rangle$	$\langle 0, \frac{\overline{AE}}{2}, 0 \rangle$

**Tableau A.3** - Chargement HMP en liaison cinématique cas 3D (  $y_1, y_3$  – périodicité )

Les problèmes  $\xi^{ij}$  sont donc des combinaisons linéaires des problèmes  $\xi_{,0}^{ij}$  et  $\kappa^{ij}$ . Nous établissons alors les relations énergétiques entre ces différents problèmes :

$$\begin{cases} W_d(\xi^{11}) = W_d(\xi_{,0}^{11}) + \kappa_{11} (C_{1111}^{HMP})^2 + \kappa_{33} (C_{1133}^{HMP})^2 + \gamma_{1133} \cdot (C_{1111}^{HMP} C_{1133}^{HMP}) \\ W_d(\xi^{22}) = W_d(\xi_{,0}^{22}) + \kappa_{11} (C_{1122}^{HMP})^2 + \kappa_{33} (C_{2233}^{HMP})^2 + \gamma_{1133} \cdot (C_{1122}^{HMP} C_{2233}^{HMP}) \\ W_d(\xi^{33}) = W_d(\xi_{,0}^{33}) + \kappa_{11} (C_{1133}^{HMP})^2 + \kappa_{33} (C_{3333}^{HMP})^2 + \gamma_{1133} \cdot (C_{1133}^{HMP} C_{3333}^{HMP}) \\ W_d(\xi^{12}) = W_d(\xi_{,0}^{12}) + \kappa_{12} (C_{1212}^{HMP})^2 \\ W_d(\xi^{13}) = W_d(\xi_{,0}^{13}) + \kappa_{13} (C_{1313}^{HMP})^2 \\ W_d(\xi^{23}) = W_d(\xi_{,0}^{23}) + \kappa_{23} (C_{2323}^{HMP})^2 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où

(a)  $\kappa_{11}$  est l'énergie de déformation du problème  $\kappa^{11}$  qui est obtenu à partir du problème  $\xi^{11}$  en supposant  $C_{1111}^{HMP}=1$  et  $C_{1133}^{HMP}=0$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{11} = W_d(\kappa^{11}) = Cte \quad (\text{A.15})$$

(b)  $\kappa_{33}$  est l'énergie de déformation du problème  $\kappa^{11}$  qui est obtenu à partir du problème  $\xi^{11}$  en supposant  $C_{1111}^{HMP}=0$  et  $C_{1133}^{HMP}=1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{33} = W_d(\kappa^{33}) = Cte \quad (\text{A.16})$$

(c)  $\kappa_{1133}$  est l'énergie de déformation du problème  $\kappa^{1133}$  qui est obtenu à partir du problème  $\xi^{11}$  en supposant  $C_{1111}^{HMP}=1$  et  $C_{1133}^{HMP}=1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**

$$\kappa_{1133} = W_d(\boldsymbol{\kappa}^{1133}) = Cte \quad (\text{A.17})$$

(d) A partir de (a,b et c) on peut déduire l'énergie de couplage  $\gamma_{1133}$  par :

$$\gamma_{1133} = \kappa_{1133} - \kappa_{11} - \kappa_{33} = Cte \quad (\text{A.18})$$

(e)  $\kappa_{12}$  est l'énergie de déformation du problème  $\xi^{12}$  en supposant  $C_{1212}^{HMP} = 1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{12} = W_d(\boldsymbol{\kappa}^{12}) = Cte \quad (\text{A.19})$$

(f)  $\kappa_{13}$  est l'énergie de déformation du problème  $\xi^{13}$  en supposant  $C_{1313}^{HMP} = 1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{13} = W_d(\boldsymbol{\kappa}^{13}) = Cte \quad (\text{A.20})$$

(g)  $\kappa_{23}$  est l'énergie de déformation du problème  $\xi^{23}$  mais en supposant  $C_{2323}^{HMP} = 1$  (les faces supérieure et inférieure étant libres):

$$\kappa_{23} = W_d(\boldsymbol{\kappa}^{23}) = Cte \quad (\text{A.21})$$

(h)  $W_d(\boldsymbol{\xi}_{,0}^{ij})$  est l'énergie de déformation du problème  $\xi^{ij}$  ayant un tenseur de contrainte unitaire imposé sur les faces supérieure et inférieure avec une périodicité  $y_1, y_3$  – périodiques (tableau A.2):

$$W_d(\boldsymbol{\xi}_{,0}^{ij}) = Cte \quad (\text{A.22})$$

De plus, et par analogie au cas 2D (Cf. remarques du paragraphe § II.3.2.3), on montre que:

$$\kappa_{12} = \kappa_{23} = 0 \quad (\text{A.23})$$

et

$$W_d(\boldsymbol{\xi}_{,0}^{11}) = W_d(\boldsymbol{\xi}_{,0}^{33}) = W_d(\boldsymbol{\xi}_{,0}^{13}) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Après développement de (A.14, A.8 et A.7) tout en tenant compte de (A.23 et A.24) et de la relation d'homogénéisation :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_Y = \mathbf{C}^{HMP} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}^{ij}) \quad (\text{A.25})$$

on déduit successivement les modules de souplesse homogénéisés :

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**

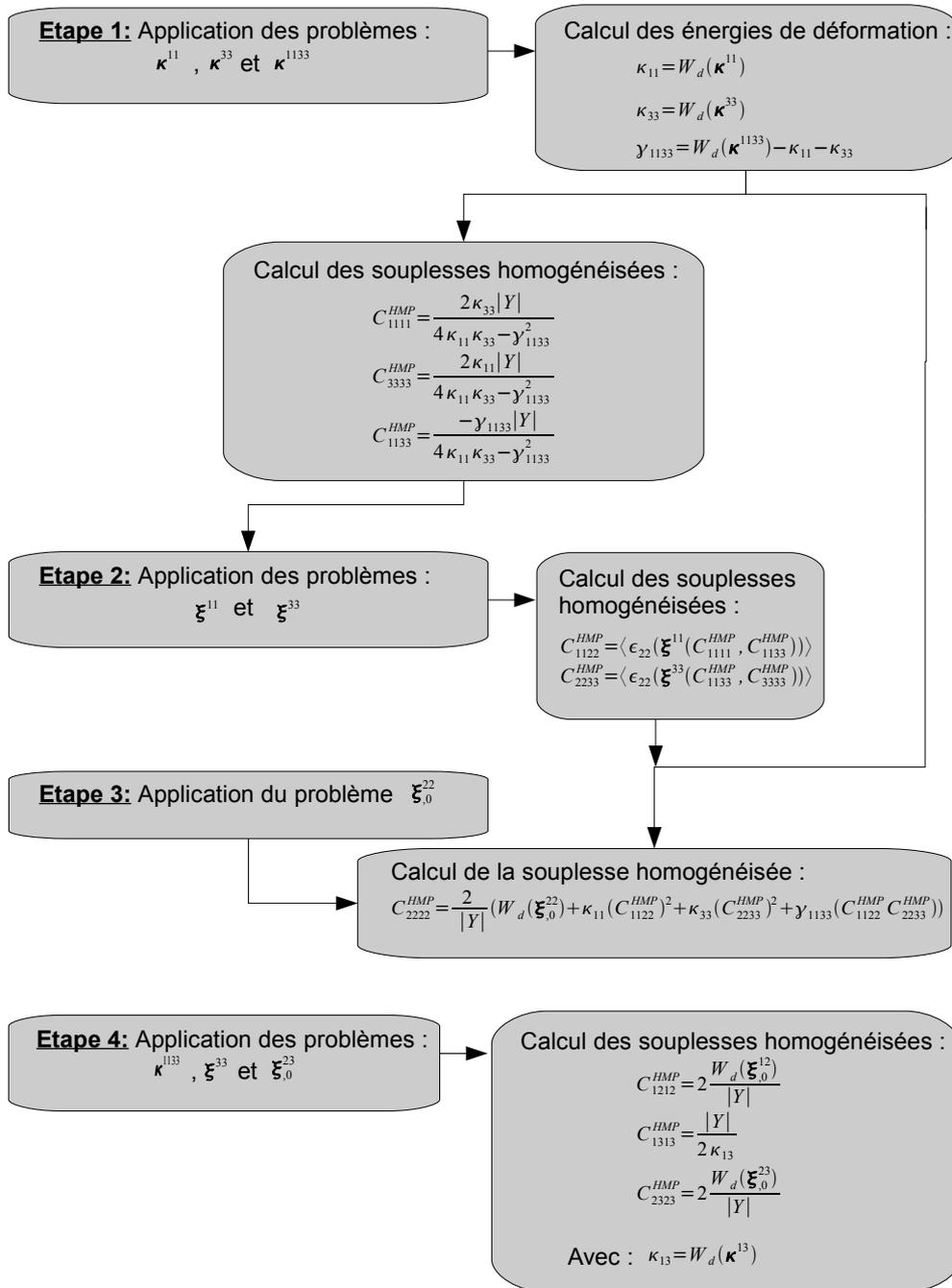
$$\begin{aligned}
 C_{1111}^{HMP} &= \frac{2\kappa_{33}|Y|}{4\kappa_{11}\kappa_{33}-\gamma_{1133}^2} \\
 C_{3333}^{HMP} &= \frac{2\kappa_{11}|Y|}{4\kappa_{11}\kappa_{33}-\gamma_{1133}^2} \\
 C_{1133}^{HMP} &= \frac{-\gamma_{1133}|Y|}{4\kappa_{11}\kappa_{33}-\gamma_{1133}^2} \\
 C_{1122}^{HMP} &= \langle \epsilon_{22}(\xi^{11}(C_{1111}^{HMP}, C_{1133}^{HMP})) \rangle \\
 C_{2233}^{HMP} &= \langle \epsilon_{22}(\xi^{33}(C_{1133}^{HMP}, C_{3333}^{HMP})) \rangle \\
 C_{2222}^{HMP} &= \frac{2}{|Y|} (W_d(\xi_{,0}^{22}) + \kappa_{11}(C_{1122}^{HMP})^2 + \kappa_{33}(C_{2233}^{HMP})^2 + \gamma_{1133}(C_{1122}^{HMP} C_{2233}^{HMP})) \\
 C_{1212}^{HMP} &= 2 \frac{W_d(\xi_{,0}^{12})}{|Y|} \\
 C_{1313}^{HMP} &= \frac{|Y|}{2\kappa_{13}} \\
 C_{2323}^{HMP} &= 2 \frac{W_d(\xi_{,0}^{23})}{|Y|}
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

## Bilan de l'application tridimensionnel de la HMP

Dans le cas 3D  $y_1, y_3$  – *périodicité* (figure A.3) on commence par appliquer les problèmes  $\kappa^{11}$ ,  $\kappa^{33}$  et  $\kappa^{1133}$  pour déterminer les coefficients  $C_{1111}^{HMP}$ ,  $C_{3333}^{HMP}$  et  $C_{1133}^{HMP}$  par calcul de l'énergie de déformation. Ensuite ces coefficients permettent de mettre en oeuvre les problèmes  $\xi^{11}$  et  $\xi^{33}$  pour déterminer les coefficients  $C_{1122}^{HMP}$  et  $C_{2233}^{HMP}$  par un calcul de moyenne. Enfin, l'application du problème  $\xi_{,0}^{22}$  nous permet avec les calculs précédents, de disposer de tous les coefficients nécessaires pour déterminer le le coefficient  $C_{2222}^{HMP}$ . Concernant les coefficients de cisaillement  $C_{1212}^{HMP}$ ,  $C_{1313}^{HMP}$  et  $C_{2323}^{HMP}$ , ils sont déterminés respectivement à partir de la résolution numérique des problèmes  $\xi_{,0}^{12}$ ,  $\kappa^{13}$  et  $\xi_{,0}^{23}$ .

Finalement on note que dans le cadre d'un comportement orthotropique, on a au total neuf problèmes élémentaires pour déterminer les neuf modules dans le cas 3D.

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**



**Figure A.3 – Étapes de calcul de la souplesse homogénéisée par schéma HMP, cas 3D  $y_1, y_3$  – périodiques**

**ANNEXE A – Application de l'approche HMP au cas 3D ( $y_1, y_3$  – périodiques)**

# Annexe B

## Calcul numérique du problème élémentaire $\kappa^{12}$

Lors de la mise en oeuvre de l'approche HMP, on a démontré analytiquement (cf. aux remarques du § II.3.2.3) que le problème  $\kappa^{12}$  a une énergie de déformation nulle.

On calcule ici numériquement cette énergie pour une cellule de base possédant les caractéristiques listées dans le (tableau B.1):

Type d'onde	Droite
Profondeur	1 mm
Hauteur de l'onde	9,63 mm
Epaisseur d'onde	0,45 mm
Rayons de courbure	0,45-0,5 mm
Epaisseur des tôles de séparation	1 mm
Ailettes par mètre	236,2
Maillage	Hexaèdre (H8)
Nombre d'éléments	17532

Tableau B.1 - Caractéristiques d'un exemple de cellule de base

Ce problème consiste à appliquer sur la cellule de base 3D (cf. Annexe A, figure A.1) une liaison cinématique sur les faces (ADHE) et (BCGF) d'une valeur de  $\Delta^1 \kappa^{12} = \langle 0, \frac{\overline{AB}}{2}, 0 \rangle$  et sur la faces (ABCD) et (EFGH) une relation de périodicité. Par conséquent et pour empêcher le mouvement du corps rigide, on impose un déplacement nul aux points A et E et une autre, de valeur  $\langle 0, \frac{\overline{AB}}{2}, 0 \rangle$  aux points B et F.

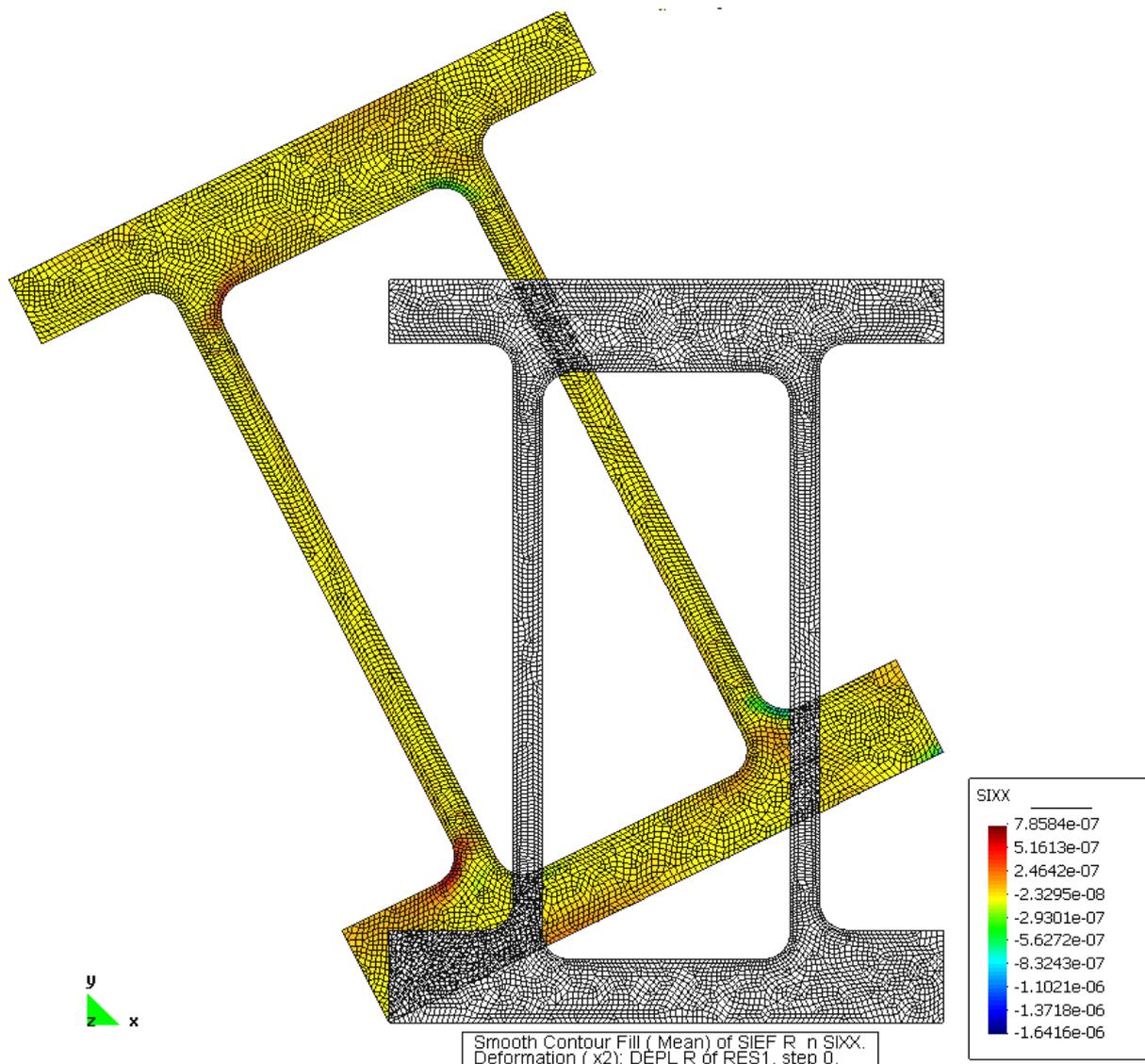


Figure B.1 - Déformée et champ de contrainte

La résolution numérique de ce problème (figure B.1) montre que le champ de déplacement solution vérifie bien la solution analytique :  $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{y_2}{2}, \frac{y_1}{2}, 0 \right\rangle$ .

D'autre part, l'énergie de déformation, calculée numériquement, est égale à  $\kappa_{12} = W_d(\kappa^{12}) = 9.37928E-16 \text{ mJ}$ . Cette valeur est négligeable si on compare l'ordre de grandeur avec celui d'un autre problème similaire (cf. chapitre III par exemple).

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur Patrice CARTRAUD, Professeur, Centrale Nantes, Nantes**

**Monsieur Patrice COOREVITS, Professeur, Université de Picardie Jules Verne, St-Quentin**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur DIB Johan**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Contribution à l'élaboration d'un logiciel métier par éléments finis pour l'analyse  
thermomécanique globale d'échangeurs de chaleur à plaques et ondes"**

NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 54501  
VANDŒUVRE CEDEX

en vue de l'obtention du titre de :

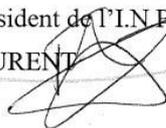
DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique - Energétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 26 avril 2000

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT





## CONTRIBUTION A L'ELABORATION D'UN LOGICIEL METIER PAR ELEMENTS FINIS POUR L'ANALYSE THERMOMECHANIQUE GLOBALE D'ECHANGEURS DE CHALEUR A PLAQUES ET ONDES

**Résumé :** Ce travail consiste à adapter et à développer un logiciel métier basé sur la modélisation thermomécanique linéaire de l'échangeur tout en intégrant les techniques d'homogénéisation. Une méthodologie de modélisation de l'échangeur constitué par un empilement de différentes ondes et tôles brasées, est donc adoptée. Cette méthodologie suppose que le comportement global de chaque couche d'ondes et tôles, est encadré par deux comportements limites déterminés par des approches mécanique périodique (HMP) et cinématique périodique (HCP). Ensuite, une mise en oeuvre pratique de ces techniques est formulée dans l'objectif de la résolution numérique. Enfin, les techniques d'homogénéisation sont appliquées pour étudier le chargement interne global dû à la température et à la pression.

Après la mise en oeuvre des techniques adaptées à l'homogénéisation de l'échangeur, on s'intéresse ensuite à leurs applications et validations numériques. Un outil d'homogénéisation (HomPass) est donc développé afin de faciliter l'homogénéisation de l'échangeur. Cela nous permettra d'établir une librairie d'éléments ayant des comportements équivalents à chaque onde et tôle brasées. Cette librairie peut comporter aussi les chargements élémentaires homogénéisés en pression et température. Cela contribue aussi au développement de l'outil métier final (SiTEME) dédié à l'étude thermomécanique globale de l'échangeur. De premiers résultats portant sur le corps d'échangeur sont présentés. La continuité du développement de cet outil pour compléter et enrichir le modèle, forme les perspectives de cette thèse.

**Mots-clefs :** homogénéisation, thermomécanique, échangeur de chaleur, structure périodique, éléments finis volumiques.

## CONTRIBUTION TO THE DEVELOPMENT OF A SOFTWARE TOOL BY FINITE ELEMENTS FOR THE GLOBAL THERMOMECHANICAL ANALYSIS OF PLATE-FIN HEAT EXCHANGERS

**Abstract :** This work consists of adapting and developing a software tool based on the linear thermomechanical modeling of the heat exchanger using homogenization techniques. A methodology for modeling the heat exchanger constituted by stacking of different brazed fins and sheets is adopted. This methodology assumes that the global behavior of every layer of fins and sheets is found between two behavior limits determined by periodic mechanical approach (HMP) and periodic kinematical approach (HCP). Then a practical implementation of these techniques is formulated in the aim of numerical resolution. Finally, homogenization techniques are applied to study the global loading due to the temperature and pressure internal loads.

After the implementation of the adapted homogenization techniques, their numerical application and validation is discussed. A homogenization tool (HomPass) is thus developed in order to facilitate the numerical homogenization of the heat exchanger. That enables us to establish a library of elements having equivalent behaviors to each layer of brazed fins and sheets. This library can also include the elementary equivalent loadings in pressure and temperature. That contributes also to the development of the final software tool (SiTEME) dedicated to the global thermomechanical study of the heat exchanger. First results relating to the heat exchanger's core are then presented. The continuity of the development of this tool to complete and enrich the model constitutes the perspectives of this thesis.

**Keywords :** homogenization, thermomechanic, heat exchanger, periodic structure, solid finite elements.

**Discipline :** Sciences de l'Ingénieur