



**HAL**  
open science

# Analyse des fissures elliptiques en statique et en fatigue par hybridation de fonctions de Green

Brahim El Khalil Hachi

► **To cite this version:**

Brahim El Khalil Hachi. Analyse des fissures elliptiques en statique et en fatigue par hybridation de fonctions de Green. Autre [cond-mat.other]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007. Français. NNT : 2007INPL034N . tel-01752894

**HAL Id: tel-01752894**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752894>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Institut National Polytechnique de Lorraine

\* \* \*

Ecole Doctorale E.M.M.A.

THESE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité : Mécanique et Energétique

Soutenue publiquement

par

**Brahim El Khalil HACHI**

(Magister de l'ENP-Alger)

le 22 Juin 2007

Titre :

**Analyse des fissures elliptiques en  
statique et en fatigue par hybridation de  
fonctions de Green**

---

**Jury**

*Rapporteurs :*

D. KONDO  
J. LI

Professeur LML-Université de Lille 1  
Professeur LPMTM-Université de Paris 13

*Examineurs :*

G. MAURICE  
S. RECHAK  
Z. BELHACHMI

Professeur LEMTA-INPL Nancy  
Professeur LGMD-ENP Alger  
Maître de Conf. (H.D.R.) LMAM-Université de Metz

*Directeur de thèse :*

M. TAGHITE

Maître de Conf. (H.D.R.) LEMTA-UHP Nancy

*Codirecteur de thèse :*

M. HABOUSSI

Maître de Conf. LEMTA-INPL Nancy

*Invité :*

B. KEBLI

Maître de Conf. ENP Alger

---

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée – UMR CNRS 7563

## Avant-propos

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, sous la responsabilité de Monsieur M'Barek TAGHITE, Maître de Conférence et H.D.R. à l'U.H.P. de Nancy ; je le remercie très sincèrement pour la formation que j'ai acquise sous sa direction, pour toute l'aide scientifique qu'il m'a apportée, l'attention et le soutien moral qu'il m'a accordés.

Mohamed HABOUSSI, Maître de Conférence à l'EEIGM de Nancy, a considérablement contribué à mon travail en tant que codirecteur de thèse, non seulement par son apport scientifique mais aussi par sa patience, sa disponibilité, et ses critiques à la rédaction de la thèse ; pour tous cela je lui témoigne ma profonde gratitude.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'un accord-programme entre le LEMTA et le Laboratoire Génie Mécanique et Développement (LGMD) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger dont Gérard MAURICE, Professeur à l'EEIGM de Nancy, est le responsable (coté français). Je profite de cette occasion pour le remercier pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche et pour les nombreux services logistiques qu'il m'a rendus. Je lui suis aussi reconnaissant d'avoir accepté de présider le jury de thèse et d'évaluer mon travail en qualité d'examineur.

Je veux également remercier Monsieur Said RECHAK, Professeur à l'ENP d'Alger, le responsable (coté algérien) de l'accord-programme mentionné ci-dessus, qui a aussi contribué scientifiquement à cette étude, d'avoir accepté d'évaluer mon travail en qualité d'examineur.

Je suis sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs : Djimédo KONDO (Professeur LML-Université de Lille 1) et Jia LI (Professeur LPMTM-Université de Paris 13), d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse en qualité de rapporteurs.

J'exprime aussi ma sympathie à Madame Hélène DUCAUQUIS-LANCHON, Professeur émérite au LEMTA, pour le soutien moral qu'elle m'a apporté tout le long de cette thèse.

De manière générale, je remercie tous ceux qui ont, directement ou indirectement, participé à l'élaboration de ce travail, lequel s'est déroulé dans de bonnes conditions.

# Table des Matières

## **Chapitre I : A propos de la mécanique de la rupture ..... 6**

I.1. APERÇU HISTORIQUE.....	7
I.2. MODES DE RUPTURE ET FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE.....	10
I.3. CRITERES DE RUPTURE.....	13
I.3.1 Critère de rupture en mode I.....	13
I.3.2 Critère de rupture en mode mixte.....	13
I.4 METHODES NUMERIQUES EMPLOYEES EN MECANIQUE DE LA RUPTURE.....	15
I.4.1. La méthode des éléments finis (FEM).....	16
I.4.2. La méthode des éléments de frontières (BEM).....	16
I.4.3. La méthode des fonctions de poids (WFM).....	18
I.5. SYNTHÈSE COMPARATIVE DES METHODES NUMERIQUES.....	19

## **Chapitre II : Présentation de la méthode d'hybridation et son application sur les fissures internes ..... 21**

II.1. INTRODUCTION.....	22
II.2. RAPPEL SUCCINT SUR LA THEORIE DE LA FONCTION DE GREEN.....	23
II.3. PRESENTATION DE L'IDEE D'HYBRIDATION.....	24
II.3. MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE DE LA METHODE D'HYBRIDATION.....	29
II.3.1. L'intégrale de surface.....	29
II.3.2. L'intégrale de contour.....	31
II.4. TESTS DE VALIDATION POUR DES FISSURES ELLIPTIQUES INTERNES.....	35
II.4.1. Fissure elliptique interne dans un milieu infini soumise à un chargement polynomial.....	35
II.4.2. Fissure elliptique interne transversale dans une plaque sous flexion.....	44
II.4.3. Fissure elliptique interne dans un tube sous pression.....	48
II.5. CONCLUSION.....	51

## **Chapitre III : Couplage de la méthode d'hybridation avec la PWFm et son application sur les fissures débouchantes..... 52**

III.1. INTRODUCTION.....	53
III.2. PRESENTATION DU COUPLAGE DE LA METHODE D'HYBRIDATION AVEC LA PWFm.....	53
III.3. TESTS DE VALIDATION POUR DES FISSURES SEMI-ELLIPTIQUES DEBOUCHANTES.....	58
III.3.1. Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince.....	58
III.3.2. Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube épais.....	61
i) Cas d'un chargement polynomial.....	61
ii) Cas d'un chargement de Lamé.....	64
III.3.3. Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion.....	66
III.3.4. Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement polynomial.....	74
III.3.5. Plaque contenant une fissure semi-elliptique sous un chargement exponentiel.....	78
III.4. CONCLUSION.....	82

## **Chapitre IV : Application de la méthode d'hybridation en fatigue ..... 83**

IV.1. RAPPELS SUR LES NOTIONS DE FATIGUE DES MATERIAUX.....	84
IV.1.1. Introduction.....	84
IV.1.2. Lois de propagation de fissure par fatigue.....	85
i) Loi de Paris.....	85
ii) Loi de Sih.....	87
IV.2. APPLICATION DE L'APPROCHE D'HYBRIDATION EN FATIGUE.....	88

IV.2.1. Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Sukumar et al. [Suk-2003])	91
i) Cas où $a_0 = 0.05 \text{ cm}$ , $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 2.1$	91
ii) Cas où $a_0 = 0.05 \text{ cm}$ , $\alpha_0 = 0.5$ , $\Delta a_{max} = 0.025a_0$ , $m = 2.1$	92
IV.2.2. Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Lazarus [Laz-2003])	93
i) Cas où $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 2$ (matériau ductile)	93
ii) Cas où $\alpha_0 = 0.4$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 2$ (matériau ductile)	95
iii) Cas où $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{max} = 0.1a_0$ , $m = 50$ (matériau fragile)	96
iv) Cas où $\alpha_0 = 0.4$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 50$ (matériau fragile)	99
IV.2.3. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Newman et Raju [New-1981])	101
IV.2.4. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Kim et Hwang [Kim-1997])	104
IV.2.5. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Lin et Smith [Lin-1999])	106
IV.2.6. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans un tube sous pression interne	111
IV.2.7. Application de l'approche énergétique de Sih dans la prédiction de la propagation d'une fissure dans une pièce à joints de soudure	115
IV.3. CONCLUSION	121

## Conclusions et perspectives ..... 123

## References bibliographiques ..... 127

## Annexe : Présentation du code de calcul HWFun ..... A1

A.1. INTRODUCTION	A2
A.2. LES DIFFERENTS MODULES DU CODE DE CALCUL	A2
A.2.1. Module du mailleur automatique	A2
A.2.2. Module de visualisation tridimensionnelle du maillage	A9
A.2.3. Module de Calcul du FIC pour une fissure elliptique	A9
A.2.4. Module de Calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique	A12
A.3. L'INTERFACE GRAPHIQUE DU CODE DE CALCUL <i>HWFUN</i>	A13
A.4. QUELQUES TESTS DE PERFORMANCES DU CODE DE CALCUL <i>HWFUN</i>	A17
A.4.1. Tests sur l'intégrale de surface	A17
A.4.2. Tests sur l'intégrale de contour	A19
A.5. CONCLUSION	A19

# Nomenclature

## Notations

$E$	Module de Young.
$D$	Variable d'endommagement.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\mu$	Module de cisaillement.
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Les facteurs d'intensité de contrainte en Modes I, II et III respectivement.
$P$	Le travail des forces extérieures.
$U$	L'énergie élastique récupérable stockée dans le solide.
$T$	L'énergie cinétique.
$K_{Ic}$	La ténacité du matériau.
$G$	Taux de restitution d'énergie.
$S$	Facteur de densité de déformation.
$\hat{L}$	L'opérateur différentiel d'une fonction.
$\delta$	La fonction de Dirac (au sens d'une distribution).
$G(,)$	La fonction de Green.
$Q$	Le point arbitraire de la surface de l'ellipse.
$Q'$	Le point de calcul du Facteur d'intensité de contrainte (FIC) sur le contour de l'ellipse.
$K_{IQ'}$	Le FIC en mode I au point $Q'$ .
$q$	Le chargement appliqué à un point arbitraire de l'ellipse.
$a$	Le petit axe de l'ellipse.
$b$	Le grand axe de l'ellipse.
$W_{QQ'}$	La fonction de poids liée au problème.
$r, \varphi$	Les coordonnées polaires du point arbitraire $Q$ .
$R$	La distance entre le centre de la fissure elliptique et son bout en passant par $Q$ .
$l_{QQ'}$	La distance entre $Q$ et $Q'$ .
$(\Gamma)$	La courbe de l'ellipse (front de fissure).
$\rho_Q$	La distance entre le point $Q$ et le segment infinitésimal $d\Gamma$ .
$\theta$	La position angulaire du point $Q'$ .
$\theta_r$	L'angle réduit de $\theta$ .
$\alpha$	Le rapport entre les axes de l'ellipse.
$R_c$	Le rayon de courbure du front de fissure.
$\beta$	Le paramètre définissant la proportion entre les deux zones de l'ellipse.
$\beta_1$	Le paramètre définissant l'influence du rayon de courbure de l'ellipse.
$\beta_2$	Le paramètre définissant l'influence du gradient du rayon de courbure de l'ellipse.
$R_0$	Le rayon du premier demi-cercle concernant le maillage de surface.
$r_i$	Le rayon d' $i^{ème}$ demi-cercle concernant le maillage de surface.

$K()$	L'intégrale elliptique de première espèce.
$E()$	L'intégrale elliptique de seconde espèce.
$\Delta$	L'épaisseur de la bande ignorée de la surface $S$ .
$\psi$	La position angulaire de $d\Gamma$ .
$T()$	L'angle situé entre la tangente en un point de $(\Gamma)$ et la droite passant par le centre de l'ellipse et ce même point.
$\delta\Gamma$	Le segment élémentaire de $(\Gamma)$ .
$\varepsilon$	L'erreur de linéarisation de $\delta\Gamma$ .
$\delta\psi$	L'ouverture angulaire du segment $\delta\Gamma$ .
$N$	Le nombre de point subdivisant le quart du contour $(\Gamma)$ .
$W_{QQ'}^A$	La composante asymptotique de $W_{QQ'}$ .
$W_{QQ'}^C$	La composante correctrice de $W_{QQ'}$ .
$Q_x$	Le symétrique du point $Q$ par rapport à l'axe des abscisses.
$D(,)$	Le paramètre géométrique de correction lié à $\alpha$ et $\theta$ .
$\sigma$	La distribution du chargement à l'intérieur de l'ellipse.
$\bar{K}_I, F_I, F_I', Y_A, Y_B$	Les FIC adimensionnels utilisés pour les différents problèmes.
$p_i$	La pression à l'intérieur d'un tube.
$R_i$	Le rayon interne d'un tube.
$t$	L'épaisseur d'un tube ou d'une plaque.
$w$	La largeur d'une plaque.
$\sigma_t$	La contrainte de traction appliquée sur une plaque.
$\sigma_f$	La contrainte de flexion appliquée sur une plaque.
$M$	Le moment de flexion appliqué sur une plaque.
$A$	Le point du fond d'une fissure semi-elliptique.
$B$	Le point de surface d'une fissure semi-elliptique.
$N_c$	Nombre de cycles de fatigue.
$C, m$	paramètres du matériau lié à la loi de Paris en fatigue.
$C', m'$	paramètres du matériau lié à la loi de Sih en fatigue.
$F_g$	Coefficient d'amplification lié à la concentration de contrainte.

## Abréviations

PNB	Produit National Brut.
FIC	Facteur d'Intensité de Contrainte.
CTOD	Crack Tip Opening Displacement.
HRR	Hutchinson, Rice et Rosengren.
FEM	Finite Element Method.
BEM	Boundary Element Method.
DDM	Displacement Discontinuity Method.
FSM	Fictitious Stress Method.
WFM	Weight Function Method.
PWFM	Point Weight Function Method.
XFEM	eXtended Finite Element Method.
FMM	Fast Marching Method.
HBEM	Hybrid Boundary Element Method.
SGBEM	Symmetric Galerkin Boundary Element Method.



GFEBM Green Function Boundary Element Method.  
LSM Line Spring Model.  
MBFM Modified Body Force Method.  
DDL Degré De Liberté.

# Introduction générale

## Introduction générale

Cette thèse est une contribution à la modélisation par la mécanique de la rupture de la fissuration des solides basée sur le développement de méthodes numériques dites de fonctions de poids (de Green). On y aborde :

- La fissuration parmi les modes de ruine des structures.
- La mécanique de la rupture parmi les modèles traitant de la fissuration des structures.
- Les méthodes de fonctions de poids parmi les méthodes numériques applicables en mécanique de la rupture.

Les modes de ruine en mécanique des solides sont nombreux. Parmi ceux-ci, il y a la fissuration qui est un danger essentiel à prendre en compte lors de la conception de structures à côté d'autres modes comme la ruine par déformation plastique, flambement, fluage, corrosion, etc. La fissuration prend en compte l'existence de défauts comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore des zones d'endommagement à partir desquels des fissures vont s'initier puis se propager pour parvenir à une taille provoquant la ruine de la structure. En général, on distingue deux types de fissuration :

a) La fissuration stable qui comprend,

- la fissuration quasi-statique sous une charge constante,
- la fissuration par fatigue sous une charge répétée (cyclique),
- et la fissuration dynamique lorsqu'une charge est appliquée soudainement.

b) La fissuration instable est-elle instantanée et à laquelle peut conduire la fissuration stable.

Dans cette thèse, seules les fissurations quasi-statiques et par fatigue seront considérées.

Il y a principalement deux modèles pour décrire la fissuration des structures : la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture.

Selon la mécanique de l'endommagement, les défauts comme les micro-fissures et leurs croissances sont décrits de manière continue par le biais de variables d'endommagement. Celles-ci sont des variables internes qui représentent l'état du matériau. Ainsi, une partie du matériau contenant des défauts possède des variables d'endommagement de valeur élevée, qui donnent une dégradation des propriétés matérielles. Dans un modèle simple, la relation entre les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\varepsilon$  en présence d'endommagement devient  $\sigma = (1 - D)E\varepsilon$ , où  $E$  est le module de Young et  $D$  est la variable d'endommagement variant entre 0 et 1 pour

laquelle il reste à postuler un modèle d'évolution. La mécanique de l'endommagement est appropriée pour représenter l'initiation de la fissuration à partir de micro-fissures mais aussi d'autres modes de ruine comme le fluage, par exemple.

A contrario, la mécanique de la rupture suppose l'existence d'une ou plusieurs macro-fissures présentes dans le matériau de part et d'autre desquelles les déplacements, les déformations et les contraintes sont discontinues. La mécanique de la rupture peut s'appliquer soit en conception et dimensionnement après une analyse d'endommagement qui prédit une bande de fort endommagement pouvant être modélisée par une fissure, soit en prédiction si une fissure est décelée dans une structure en service pour évaluer la durée de vie résiduelle de celle-ci.

Les fissures sont des nouvelles frontières internes. On appelle *lèvres de la fissure* les deux surfaces qui forment la nouvelle frontière d'une fissure. Les lèvres sont reliées par une courbe qu'on appelle le *front de fissure*. Cette courbe est ouverte pour une fissure débouchante et fermée pour une fissure interne. Notons que dans cette thèse, comme dans une grande partie des travaux antérieurs en mécanique de la rupture ayant pour but de modéliser la fissuration quasi-statique ou par fatigue, ces fissures de forme internes ou débouchantes sont assimilées à des formes elliptiques sensées représenter beaucoup de formes réelles de fissures présentes dans différentes structures.

Afin de prévoir le comportement du matériau fissuré, une loi de propagation est nécessaire pour décrire l'accroissement de la fissure. Dans cette thèse, orientée vers le développement d'une procédure de simulation analytique/numérique, nous utilisons principalement la loi de propagation de Paris [Par-1963] qui, malgré sa simplicité, présente un champ d'application, dans le cas de la fissuration par fatigue, appréciable. De manière plus limitée, la loi de propagation de Sih [Sih-1979] est également utilisée à titre de comparaison.

Pour modéliser ces fissures, différentes approches numériques existent parmi lesquelles on distingue la méthode de fonctions de poids (de Green). Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation de la fissuration à travers le calcul des facteurs d'intensité de contrainte (FIC) en mode I de fissures internes et débouchantes. Il s'agit en particulier d'améliorer l'évaluation de ces FIC en hybridant différentes fonctions de poids. Cette approche d'hybridation sera appliquée pour des fissures elliptiques (internes) et semi-elliptiques (débouchantes) sous

chargement quasi-statique ainsi que pour la prédiction de la propagation de ces fissures en fatigue.

Ce rapport de thèse est structuré en quatre chapitres. Le **chapitre I** est consacré, dans sa première partie, à un rappel de quelques notions de la mécanique de la rupture pour modéliser la fissuration concernant les différents modes et critères de rupture ainsi que les paramètres principaux (FIC, taux de restitution d'énergie, ...). Dans la deuxième partie de ce chapitre, une aperçue sur les différentes méthodes numériques utilisées en mécanique de la rupture est proposée. On insistera notamment sur la méthode de fonctions de poids (de Green) sur laquelle s'appuie notre étude. Après un petit rappel sur la théorie de la fonction de Green, nous allons décrire en détail dans le **chapitre II** l'idée d'hybridation développée dans ce travail. Nous y détaillerons la formulation mathématique, l'implémentation numérique ainsi que le traitement des singularités de la formulation de la méthode. Afin de valider l'approche d'hybridation, plusieurs applications concernant des fissures elliptiques internes de différentes configurations géométriques soumises à différents types de chargement sont présentées dans la seconde partie de ce chapitre. Dans le but d'étendre l'utilisation de l'approche d'hybridation à la modélisation des fissures semi-elliptiques débouchantes, un couplage avec la méthode appelée « Point Weight Function Method (PWF) » a été réalisé. Ce couplage ainsi que les corrections appropriées sur la fonction de poids d'une fissure elliptique pour tenir compte de l'effet de la surface libre, que ce couplage nécessite sont détaillés dans le **chapitre III**. L'efficacité de ce couplage a été vérifiée à travers des exemples rassemblés dans ce même chapitre.

Notons que dans les chapitres II et III, les modes de chargement de fissuration traités sont quasi-statiques. Nous nous intéressons au **chapitre IV** au cas de la fatigue. Dans ce chapitre, nous commençons par donner un rappel sur la notion de fatigue à travers des lois de propagation en liaison avec le contexte de la mécanique de la rupture. Des applications sont également proposées pour valider l'extension de l'approche d'hybridation en fatigue. Des prédictions concernant la durée de vie et l'évolution de fissures elliptiques et semi-elliptiques sont alors effectuées. Finalement, nous terminons ce rapport de thèse par une **conclusion générale** et des **perspectives**.

Une **annexe** est jointe à ce rapport pour décrire les différents modules constituant le code de calcul élaboré dans cette étude ainsi que l'interface graphique de celui-ci. Des tests de

performance du code de calcul sont également proposés. Ils permettent de donner une idée sur l'évolution du temps d'exécution et sur la précision de calcul en fonction des discrétisations adoptées.

# Chapitre I : A propos de la mécanique de la rupture

<b>Chapitre I : A propos de la mécanique de la rupture</b> .....	<b>6</b>
I.1. APERÇU HISTORIQUE.....	7
I.2. MODES DE RUPTURE ET FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE.....	10
I.3. CRITERES DE RUPTURE.....	13
I.3.1 Critère de rupture en mode I.....	13
I.3.2 Critère de rupture en mode mixte.....	13
I.4 METHODES NUMERIQUES EMPLOYEES EN MECANIQUE DE LA RUPTURE.....	15
I.4.1. La méthode des éléments finis (FEM).....	16
I.4.2. La méthode des éléments de frontières (BEM).....	16
I.4.3. La méthode des fonctions de poids (WFM).....	18
I.5. SYNTHESE COMPARATIVE DES METHODES NUMERIQUES.....	19

Dans cette thèse, l'objet de la recherche est la modélisation de fissures internes et débouchantes à travers le calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode I dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire, selon Irwin [Irw-1957].

On propose dans ce qui suit un aperçu historique menant aux différentes écoles de la mécanique de la rupture. Cet aperçu est inspiré de la référence [Zeg-2003].

## **I.1. APERÇU HISTORIQUE**

Le coût des accidents liés aux ruptures catastrophiques des structures jusqu'à la fin des années quatre-vingt du siècle dernier représente, d'après une étude économique [Zeg-2003], près de 4% du Produit National Brut (PNB) dans les pays industriels développés. D'après la même étude, on pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture d'une part et d'autre part de 25% supplémentaires par le développement de recherches dans le domaine de la rupture. La pertinence de la maîtrise d'une telle science est due à l'importance des incidents liés à la rupture et à la délicatesse de la prévention de leurs risques.

On distingue deux causes majeures provoquant la rupture des structures :

- Une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure qui pourrait être évitée si la structure avait été bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et un chargement correctement évalué.
- L'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue où la prévention de la rupture est plus délicate ; en effet lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours.

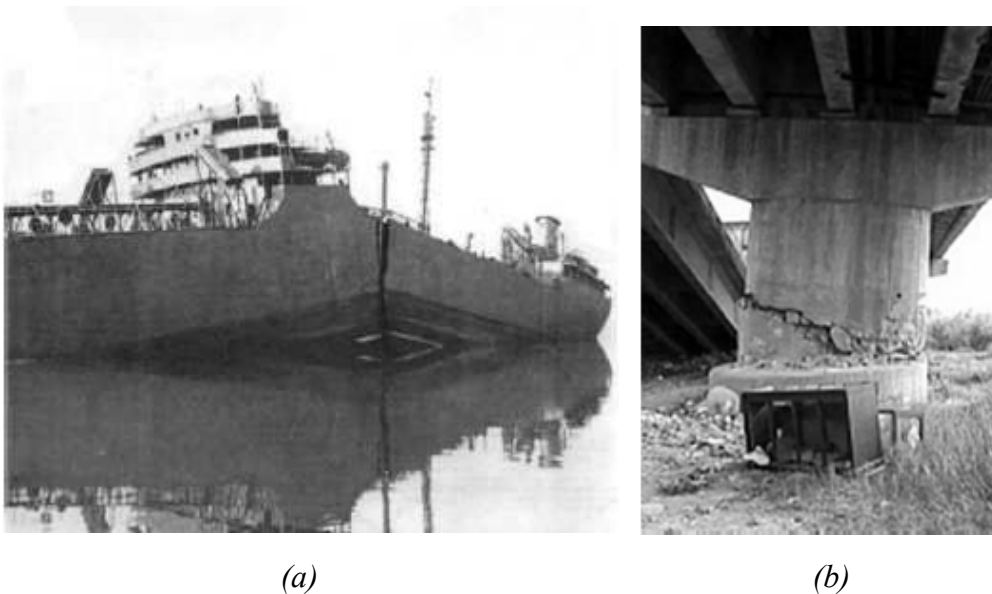
Eviter la rupture des édifices et des structures était depuis longtemps une préoccupation pour l'homme. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux des civilisations qui leurs ont succédé (romaine, perse, musulmane, ...) nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler, ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Mais comme les structures anciennes de pierre, de brique ou de mortier étaient chargées en compression, elles ont autant résisté car le risque de rupture par fissuration était très faible en l'absence de la traction contribuant directement à l'ouverture des fissures.

Le problème de la rupture est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique utilisant des matériaux travaillant en traction tels que



les aciers, les alliages métalliques et récemment les composites. Les avancées dans la connaissance en mécanique de la rupture permettent dans les temps modernes et plus précisément depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, de mieux prévenir le risque de rupture. Cependant, la première vraie interprétation qualitative de la rupture est exposée en 1920 par Griffith [Gri-1920] qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux de Inglis [Ing-1913] au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin [Irw-1948, Irw-1949] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Après ce qui arriva au bateau « Liberty » de la flotte navale américaine qui se fissa en deux parties lors de la deuxième guerre mondiale entre la Sibérie et l'Alaska (voir figure1 [Pom-2005]) et à une dizaine d'autres navires sur les 2700 en service, qui subiront ensuite le même sort, la mécanique de la rupture passa du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique fortement imposée dans l'ingénierie de la construction.



**Figure 1** (a) Rupture fragile d'un liberty-ship (après la seconde guerre mondiale) au cours d'un hiver rigoureux, (b) Rupture d'un autopont lors d'un tremblement de terre [Pom-2005].

Après, Irwin [Irw-1956], avec un groupe de chercheurs dans les laboratoires de la marine américaine, développa en 1956 le concept de *taux de restitution d'énergie* à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard [Wes-1939], Irwin [Irw-1957] montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié au taux de restitution d'énergie. Ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est appelé le *Facteur d'Intensité de Contrainte* (FIC). Le concept de FIC fut également utilisé par Paris [Par-1963] afin de décrire la propagation des fissures en remplaçant la notion d'endurance par la notion de fatigue pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles concurrentes. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et d'autre part ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs comme Irwin [Irw-1962], Dugdale [Dug-1960] et Barenblatt [Bar-1962] proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique ; la taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC. Wells [Wel-1961], un des représentants de la deuxième école, proposa en 1961 le déplacement en fond de fissure CTOD (Crack Tip Opening Displacement) comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture ou plus précisément au concept de FIC, lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. Plus tard, Hutchinson [Hut-1968], Rice et Rosengren [Ric-1968] (HRR) développèrent un nouveau paramètre appelé *intégrale J* pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (champ HRR). Landes et Begley [Lan-1972] caractérisèrent la ténacité à l'aide du paramètre *J* et développèrent une procédure standard pour l'utilisation de cette intégrale dans des cas pratiques. Shih et Hutchinson [Shi-1976] proposèrent également une méthodologie pour utiliser l'intégrale *J* non seulement pour décrire la ténacité mais aussi pour la relier à la taille du défaut et au champ des contraintes appliquées. Shih [Shi-1981] établit par la suite la relation existante entre l'intégrale *J* et le CTOD. Avec les travaux de Nguyen [Ngu-1980], l'effet thermique a été introduit dans l'analyse de la rupture en utilisant les lois thermodynamiques (selon [Mau-1999]).

Actuellement, on s'intéresse en plus aux comportements viscoplastiques et/ou viscoélastiques. Généralement, le comportement viscoplastique est observé à température élevée lorsque les phénomènes de fluage deviennent importants alors le comportement viscoélastique caractérise plutôt les matériaux polymères de plus en plus utilisés dans l'industrie. L'apparition des matériaux composites « de nature fragile » a de nouveau permis l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture (la première école) pour décrire le comportement de ces matériaux.

Plus récemment, de nouvelles approches tentent de relier le comportement local à l'échelle microscopique au comportement global lors de la rupture d'un matériau. Ces approches micro-macro deviennent parfois nécessaires lorsqu'on atteint les limites d'utilisation des autres approches classiques concrétisées par les deux écoles précédemment citées. Cependant, beaucoup de mécanismes de rupture restent toujours mal connus notamment lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés.

## I.2. MODES DE RUPTURE ET FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE

L'objectif de la mécanique de la rupture est de développer un critère de ruine qui prend en compte l'existence des fissures au sein d'un matériau. Il est important alors, de définir un facteur de charge lié à un problème donné pour le comparer à un paramètre caractéristique du matériau utilisé. Ce facteur est obtenu après examen de l'état de contrainte et de déformation au voisinage du front de fissure pour les trois modes élémentaires I, II et III de fissuration, Figure 2.

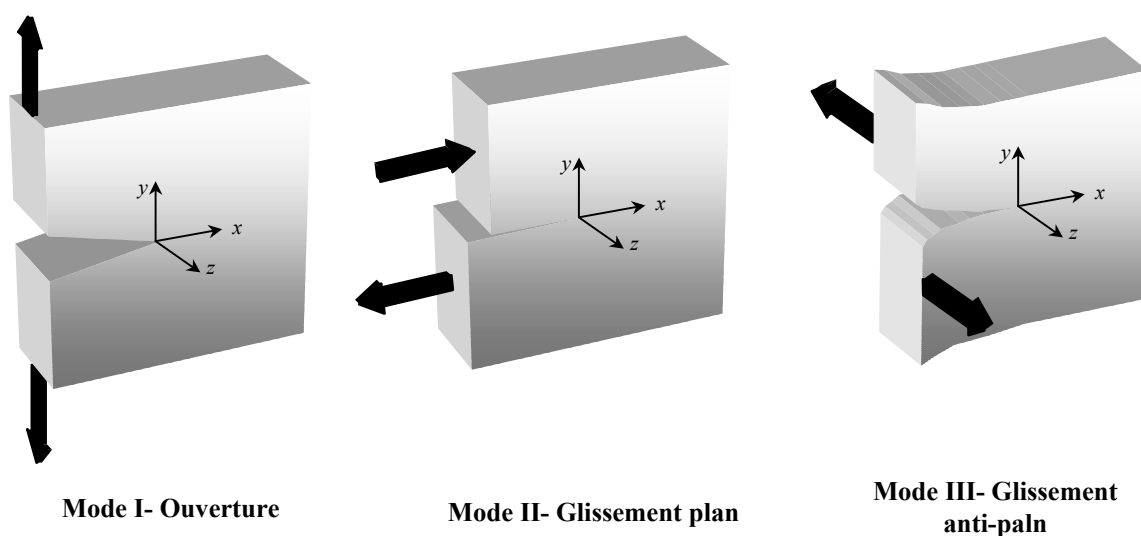


Figure 2 : Les trois modes de rupture

D'après Irwin [Irw-1949], les champs de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de fissure s'expriment dans le cadre de l'élasticité et en déformations planes par les relations suivantes pour les différents modes (voir la figure 3 pour les notations) :

**En mode I :**

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 w &= 0
 \end{aligned} \tag{1a}$$

**En mode II :**

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x - \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 u &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 v &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 w &= 0
 \end{aligned} \tag{1b}$$

**En mode III :**

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\
 w &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = u = v = 0
 \end{aligned} \tag{1c}$$

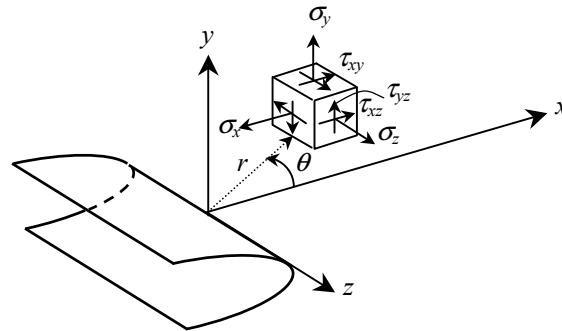


Figure 3 : Elément de volume au voisinage d'un front de fissure rectiligne

Dans les relations (1a, 1b, 1c),  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $\mu$ , le module de cisaillement. Les coefficients  $K_I$ ,  $K_{II}$ , et  $K_{III}$  exprimés en  $\text{MPa}\sqrt{m}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte (FIC) respectivement en mode I, II et III. Ils caractérisent à la fois la géométrie de la fissure et la nature des sollicitations auxquelles elle est soumise. Ces facteurs suffisent à caractériser la sévérité d'une situation vis-à-vis du phénomène de fissuration. Ils constituent donc l'un des éléments du critère de rupture (de ruine) d'une structure fissurée (voir le développement dans la section I.3).

Si l'on connaît leurs valeurs, ils permettent de déterminer complètement les champs de contraintes où de déplacements au voisinage de la fissure contenue dans une structure considérée élastique. Inversement, si l'on connaît les expressions des composantes anti-planes du tenseur de contraintes  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{yz}$  (approche statique) ou les discontinuités des composantes des déplacements relatifs  $[u]$ ,  $[v]$  et  $[w]$  des lèvres de la fissure (approche cinématique), on peut déterminer les FIC des différents modes en un point donné du front de fissure  $M$  par les expressions suivantes [Lem-2001] (voir la figure 3 pour les notations) :

$$\begin{aligned}
 K_I(M) &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_y \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [v] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \\
 K_{II}(M) &= \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{xy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [u] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \\
 K_{III}(M) &= \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} [w] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Il faut noter que les expressions (2) restent toujours valables en déformation plane.

### I.3. CRITERES DE RUPTURE

#### I.3.1 Critère de rupture en mode I

Dans cette étude on s'intéresse au mode de rupture le plus abordé en mécanique de la rupture, à savoir le mode I. On donne dans cette section le critère de ruine relatif à ce mode.

D'après [Bar-1980], si l'on suppose que les points d'application des forces extérieures auxquelles est soumise la fissure de longueur caractéristique  $a$ , ne changent pas durant la propagation de la celle-ci, on peut écrire :

$$\frac{d}{da}(P-U) = G_I = \frac{K_I^2}{E_1} \quad (11)$$

Où  $P$  représente le travail des forces extérieures appliquées à la fissure,  $U$  représente l'énergie élastique de déformation récupérable du solide et  $(P - U)$  est alors l'énergie dissipée.

La quantité  $\frac{d}{da}(P-U)$  désignée par  $G_I$  est appelée le taux de restitution d'énergie ou encore la force d'extension de la fissure en mode I pur. Lorsque cette grandeur atteint une valeur critique  $G_{Ic}$  caractéristique du matériau, la fissure se propage d'une manière instable :

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E_1} \quad (12)$$

Il existe donc une valeur critique  $K_{Ic}$  correspond à  $G_{Ic}$ .

Par conséquent, la fissure ne se propage de façon instable (rupture brutale) que lorsque :

$$G_I \geq G_{Ic} \Leftrightarrow K_I \geq K_{Ic} \quad (13)$$

En fait,  $K_{Ic}$  caractérise la résistance du matériau à la propagation plane des fissures en mode I. Le paramètre  $K_{Ic}$  est appelé la ténacité du matériau. Il est indépendant de la géométrie de la fissure et du type de chargement à condition que le matériau soit isotrope (voir la section 28 de la référence [Bar-1980]). Nous avons utilisé essentiellement ce critère universel dans notre étude.

A titre indicatif, le taux de restitution d'énergie dans le cas général (en mode mixte) peut s'écrire selon la formule d'Irwin [Irw-1957] :

$$G = \frac{1}{E_1}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (14)$$

#### I.3.2 Critère de rupture en mode mixte

Un critère en mode mixte, a été développé par Sih [Sih-1974] et qui est basé sur la densité d'énergie de déformation par unité de volume liée aux paramètres  $\theta$  et  $\phi$  de la figure 4 donnée par :

$$\frac{dU}{dV} = \frac{a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2}{16\pi\mu r \cos\phi} \quad (15)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\kappa - \cos\theta)(1 + \cos\theta) \\ a_{12} &= (2\cos\theta - \kappa + 1)\sin\theta \\ a_{22} &= (\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1) \\ a_{33} &= 4 \end{aligned} \quad (16)$$

$\kappa$  est un facteur qui vaut  $(3 - 4\nu)$  en état de déformation plane et  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$  en état de contrainte plane.

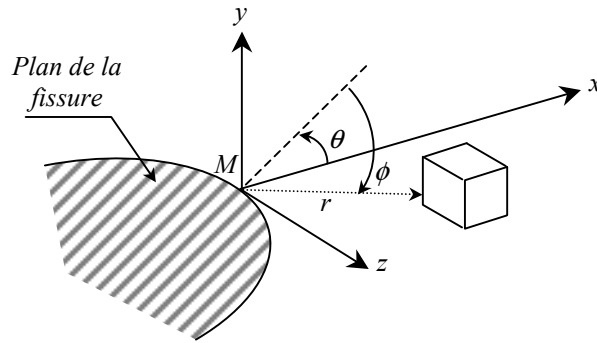


Figure 4 : Elément de volume au voisinage d'un front de fissure courbé

On définit alors un facteur de densité d'énergie de déformation  $S$  par la relation :

$$S = r \frac{dU}{dV} \quad (17)$$

Le critère de rupture de Sih [Sih-1974] repose sur les trois hypothèses suivantes :

- i) La propagation de la fissure se fait dans la direction où la densité de l'énergie de déformation est minimale, c'est-à-dire la direction définie par les angles  $\theta_0$  et  $\phi_0$  tels que :

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (18)$$

- ii) L'instabilité se produit lorsque la densité d'énergie de déformation dans la direction  $(\theta_0, \phi_0)$  définie par les conditions (18) atteint une valeur critique  $S_c$ , caractéristique du matériau. La valeur  $S_c$  correspond à  $K_{Ic}$  en adoptant le cas du

mode I pur. En mode I (le cas de notre étude), les expressions (15) et (17) donnent :

$$S = \frac{a_{11}K_I^2}{16\pi\mu \cos\phi} = (\kappa - \cos\theta)(1 + \cos\theta) \frac{K_I^2}{16\pi\mu \cos\phi} \quad (19)$$

Les équations (18) sont satisfaites pour  $\theta_0 = \phi_0 = 0$  d'après [Bar-1980]. Ce qui donne en déformation plane ainsi qu'en tridimensionnel :

$$S_{\min} = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} K_I^2 \quad (20)$$

A l'instabilité, on a donc :

$$S_{\min} \geq S_c = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} K_{Ic}^2 \quad (21)$$

- iii) La fissuration sub-critique (avant instabilité) se fait de telle sorte qu'elle suit les lignes de la densité de l'énergie de déformation  $dU/dV$  constante [Sih-1980].

**Remarque :** Il faut noter qu'on peut déduire un autre critère de rupture en mode mixte en substituant  $G_I$  dans l'équation (13) par  $G$  de l'expression (14).

Les critères évoqués ci-dessus vont être utilisés dans le chapitre 4 traitant des problèmes de propagation de fissures.

#### **I.4 METHODES NUMERIQUES EMPLOYEES EN MECANIQUE DE LA RUPTURE**

Il est rare qu'un problème réel où la géométrie et les conditions de chargement sont souvent très complexes, soit soluble analytiquement. Parfois on est amené à simplifier le problème pour le rapprocher à un cas où la solution analytique est envisageable. Mais une telle situation n'est pas possible sans trop s'éloigner du cas réel ; ce qui demande de faire appel aux méthodes numériques qui englobent depuis leur apparition une grande variété de techniques. Parmi lesquelles citons les méthodes des différences finies (FDM), des volumes finis (FBM), des éléments finis (FEM), des éléments de frontière (BEM) et des fonctions de poids (WFM). D'autres méthodes existent qui sont parfois une association de deux, voire plus, des méthodes citées précédemment. Dans le cas particulier de la mécanique de la rupture, ce sont les trois dernières méthodes à savoir la FEM, la BEM et la WFM qui sont les plus utilisées en raison, notamment, de leur efficacité dans le traitement des singularités de contraintes au voisinage des fissures.

On propose dans ce qui suit une description bibliographique de chacune de ces trois méthodes clôturée par une synthèse comparative.



#### **I.4.1. La méthode des éléments finis (FEM)**

Depuis son introduction dans les années cinquante [Lev-1947, Lev-1953, Arg-1954, Clo-1960], la méthode numérique basée sur les éléments finis a largement été utilisée dans la résolution des problèmes de mécanique de la rupture. On citera par exemple les travaux de Newman & Raju [Raj-1982, New-1979, New-1981, 1988] et ceux d'Atluri et al. [Atl-1979, Atl-1983, Rhe-1986] portant sur les plaques sous traction et sous flexion ainsi que les tubes sous pression interne, les travaux de Grebner & Strathmeier [Gre-1985] utilisant des éléments de bouts de fissures axisymétriques, les travaux de Yoshimura et al. [Yos-1989] sur la rupture non-linéaire des matériaux viscoplastiques, les travaux de Kobayashi et al. [Du-1992, Yu-1993] sur la rupture des tubes sous chargement dynamique, les travaux de Rahman [Rah-1995] sur les modèles stochastiques en rupture élasto-plastique et les travaux de Wang & Lambert [Wan-1997, Wan-1998] qui ont travaillé sur le développement des fonctions de poids intervenant dans des relations empiriques par optimisation basée sur des résultats d'éléments finis.

Plus récemment, des formulations de la FEM mieux adaptées aux problèmes de la mécanique de la rupture ont été développées. Nous pensons en particulier à la XFEM (eXtended Finite Element Method) [Bel-1999, Suk-2000, Sto-2001, Suk-2001, Bel-2003, Suk-2003]. Dans cette méthode des éléments spéciaux (crack tip elements) sont conçus et employés en bout de fissures. Ceci permet une réduction importante du nombre d'éléments utilisés dans la discrétisation de la structure étudiée avec une précision de calcul améliorée.

Une autre extension de la FEM appelée *la méthode sans maillage* (Meshless Methods) a été proposée par [Bel-1994, Suk-1997, Kry-1999, Moe-1999]. Elle présente l'avantage d'éviter le remaillage des structures à géométrie variable (le cas de propagation de fissure par exemple).

#### **I.4.2. La méthode des éléments de frontières (BEM)**

Dans le cas général, la BEM consiste en la transformation des équations décrivant le comportement des fonctions inconnues des différents champs physiques à l'intérieur et sur la frontière d'un domaine, en une équation intégrale reliant les inconnues et certaines de leurs dérivées aux valeurs qu'elles prennent sur la frontière. En mécanique de la rupture, ces inconnues sont les déplacements et les vecteurs contraintes ; ces derniers permettent de calculer le FIC après leur évaluation au voisinage du bout de fissure pour le cas de la rupture fragile (élastique) ou à travers l'intégrale  $J$  de Rice [Ric-1968] pour la rupture élasto-plastique.

Ainsi, la BEM repose sur la transformation des équations aux dérivées partielles en des équations intégrales sur la frontière par le biais d'une certaine solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. On note au passage que l'étude de ces équations a commencé il y a plus d'un siècle et constitue une branche de la physique mathématique classique qui est la théorie de potentiel. L'identité intégrale de Somigliana (cité par [Bon-1995]) pour l'élasto-statique par exemple, a été publiée en 1886. Le développement de la BEM en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui de la FEM. Les premiers développements numériques de la BEM ont été proposés à la fin des années soixante par des auteurs tels que Rizzo [Riz-1967], Cruse [Cru-1969] et Shaw [Sha-1970].

Si les équations intégrales issues de la théorie de potentiel portent sur des inconnues intermédiaires, elles sont qualifiées « méthodes indirectes » qui ont été développées essentiellement par Crouch & Starfield [Cro-1983]. Ces méthodes regroupent deux approches ; la méthode de discontinuité de déplacement (DDM) et la méthode de discontinuité de contrainte appelée parfois la méthode des contraintes fictives (FSM).

D'autres formulations intégrales dites « méthodes directes » établissent une relation entre les grandeurs physiques (vecteur déplacement et vecteur contrainte) sur la frontière du domaine d'étude sans variables intermédiaires. Leur domaine de validité n'est pas restreint à des conditions aux limites spécifiques. Citons pour les méthodes directes en élasto-statique les travaux de Lachat & Watson [Lac-1976], de Bui [Bui-1977] ainsi que ceux d'Aliabadi & Rooke [Ali-1991].

On constate aussi qu'au fil des années, des auteurs ont pensé à hybrider les méthodes BEM citées plus haut entre elles dans le but de concevoir des approches optimales telles que la HBEM (Hybrid Boundary Element Method) et de profiter des avantages que représentent les unes par rapport aux autres. Citons notamment les travaux de Guozhong et al. [Guo-1995, Guo-2000, Guo-2004]. Il a également été possible d'adapter la BEM pour des problèmes de rupture non-linéaires en introduisant la notion d'élément dual grâce notamment aux travaux de Portela & Aliabadi [Por-1992], Cisilino and Aliabadi [Cis-1999], et ceux de Kebir et al. [Keb-1999, Keb-2006].

Il faut noter que la BEM, comme toute méthode de simulation numérique, a aussi ses inconvénients. Citons notamment les problèmes liés aux singularités qui demandent des

traitements analytiques et/ou numériques aussi importants que la mise en œuvre de la méthode elle-même. Ceci a amené des auteurs comme Keat et al. [Kea-1988], Wang & Atluri [Wan-1996], Frangi & Novati [Fra-2002] et Margonari & Bonnet [Mar-2005] au couplage la FEM (pour modéliser la majorité du domaine) avec la BEM (pour modéliser les régions fissurées). Parfois, un couplage de plus de deux méthodes est effectué. On citera par exemple le cas de Han & Atluri [Han-2002] où la méthode FEM a été utilisée dans les zones non fissurées, avec la méthode de l'élément symétrique de Galerkin associée à la méthode des éléments de frontières (SGBEM) pour modéliser les zones fissurées.

### **I.4.3. La méthode des fonctions de poids (WFM)**

Le développement de la méthode des fonctions de poids en mécanique de la rupture, remonte aux travaux de Bueckner [Bue-1970] portant sur l'étude d'une fissure semi-infinie dans un milieu infini. L'approche développée alors utilisait la fonction de Green [Gre-1828]. Depuis, la recherche de nouvelles fonctions de poids combinée à un approfondissement du bilan énergétique de Rice [Ric-1972] a fait l'objet de plusieurs travaux, parmi lesquels, Paris et al. [Par-1976], Oore et Burns [Oor-1980] et Bortmann et al. [Bor-1983]. En 1986, Gao et Rice [Gao-1986] ont introduit l'étude de la stabilité de la forme rectiligne du front de fissure pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes (FIC). Par la suite, beaucoup de travaux utilisant cette technique se sont succédés. Les problèmes traités concernent alors la forme de la fissure, le mode de rupture ainsi que le domaine d'application (statique, dynamique, thermo-élastique, . . .). Citons notamment, parmi ces travaux, par ordre chronologique, Rice [Ric-1989], Fett & al. [Fet-1989], Bower & Ortiz [Bow-1990], Vainshtok & al. [Vai-1990], Dominguez & al. [Dom-1992], Bower & Ortiz [Bow-1993], Rooke & al. [Roo-1994], Orynyak & al. [Ory-1995], Zheng & al. [Zhe-1997], Kiciak & al. [Kic-1998], Pommier & al. [Pom-1999], Krasowsky & al. [Kra-1999], Hachi & al. [Hac-2003], Lazarus [Laz-2003], et Hachi & al. [Hac-2005, Hac-2006].

La technique de fonction de poids consiste à utiliser une ou plusieurs solutions connues (solution de référence) d'un cas particulier dans le but de trouver la solution pour le cas général. La solution de référence vient généralement de résultats analytiques (exactes). Mais dans certains cas, l'absence de tels résultats oblige les auteurs, tels que Orynyak et al. [Ory-1994, Ory-1995] pour la méthode de fonction de poids du point (PWF), à utiliser des solutions approximatives des fissures elliptiques pour déterminer la solution générale dans le cas de fissures semi-elliptiques [Ory-1995] et quart-elliptiques [Ory-1994].

## **I.5. SYNTHÈSE COMPARATIVE DES MÉTHODES NUMÉRIQUES**

La méthode FEM reste relativement simple du point de vue de la formulation mathématique, mais se révèle, sur le plan numérique, très gourmande en terme de mémoire de calcul notamment pour les problèmes tridimensionnels. En effet, cette méthode impose la discrétisation de toute la structure. On mentionne également les problèmes de la FEM liés à la convergence des calculs itératifs et son « incompatibilité » avec le traitement des problèmes de milieux infinis [Bon-1995].

S'agissant de la méthode BEM, celle-ci réduit d'une dimension le problème par rapport à la FEM et permet donc un gain appréciable en terme de mémoire, étant donné qu'on discrétise uniquement la frontière du domaine. D'autre part, on a une grande aptitude est offerte par la BEM pour la modélisation des problèmes de milieux infinis. Cependant, la méthode est très complexe sur le plan de la formulation mathématique et mène à des singularités d'ordre relativement élevé pouvant aller jusqu'à l'ordre 7 ( $1/r^7$ ) pour certains problèmes ; la variable  $r$  étant la distance entre le point de calcul et le point arbitraire du domaine étudié. Le traitement de ces problèmes de singularité est aussi complexe que la formulation elle-même.

De par sa conception, la méthode des fonctions des poids ne possède pas la même adaptabilité pour être appliquée à différents domaines et traiter différentes configurations par rapport à la FEM et à la BEM. Néanmoins, elle présente une simplicité et une efficacité remarquables que ce soit sur le plan mathématique ou d'un point de vue numérique.

Sur le plan numérique, la discrétisation se limite à la partie ayant le plus d'influence sur la solution recherchée du problème. Donc, pour les problèmes de fissuration, on s'intéresse uniquement au maillage de la fissure sur laquelle on projette toutes les conditions aux limites du problème (voir l'exemple discrétisée dans la figure 5). Cette approche permet donc un gain en taille de mémoire de calcul par rapport à la BEM puisqu'elle n'exige pas de mailler toutes les frontières et permet encore plus de gain par rapport à la FEM puisqu'on ne discrétise pas toute la structure.

Sur le plan de la formulation mathématique, la solution est donnée par un calcul intégral direct. Ce qui n'est pas le cas en fissuration pour les autres méthodes FEM et BEM, où l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte est un calcul indirect, passant obligatoirement par la détermination du champ de contrainte ou du champ de déplacement ou encore par des évaluations énergétiques. Il est à signaler aussi que les singularités présentes dans la solution

donnée moyennant les fonctions de poids (de Green) sont nettement moins compliquées que celles de la BEM, l'ordre est plus faible et leur traitement est très abordable vu qu'elles ne se reproduisent pas à chaque passage sur un élément de maillage (ceci sera développé pour cette étude, dans le chapitre suivant).

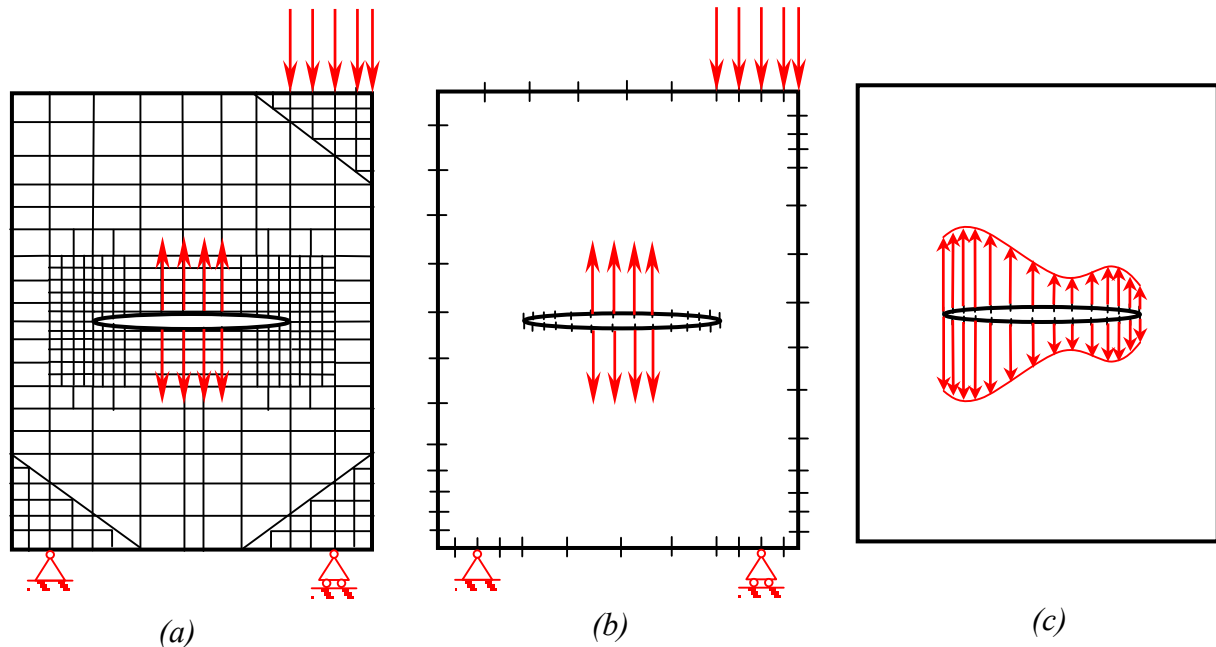


Figure 5 : Exemple de discrétisation d'un domaine bidimensionnel fissuré.  
(a) par FEM - (b) par BEM - (c) par WFM

La question de l'efficacité relative des différentes méthodes numériques FEM, BEM et WFM, objet de nombreuses discussions notamment entre les deux premières, ne nous semble pas essentielle. En effet, la FEM occupe une position dominante, son champ d'application est plus grand que celui des autres. La BEM présente une supériorité pour le traitement de certaines situations (problèmes linéaires, fissuration en utilisant des éléments de discontinuité de déplacement, milieux infinis, frontières mobiles, ...). La WFM est destinée à des domaines d'application plus restreints mais présente, pour les problèmes dont on dispose déjà de l'implémentation analytique en terme de fonction de poids, une simplicité et une efficacité remarquable. Ces différentes approches sont donc complémentaires plutôt que concurrentes.

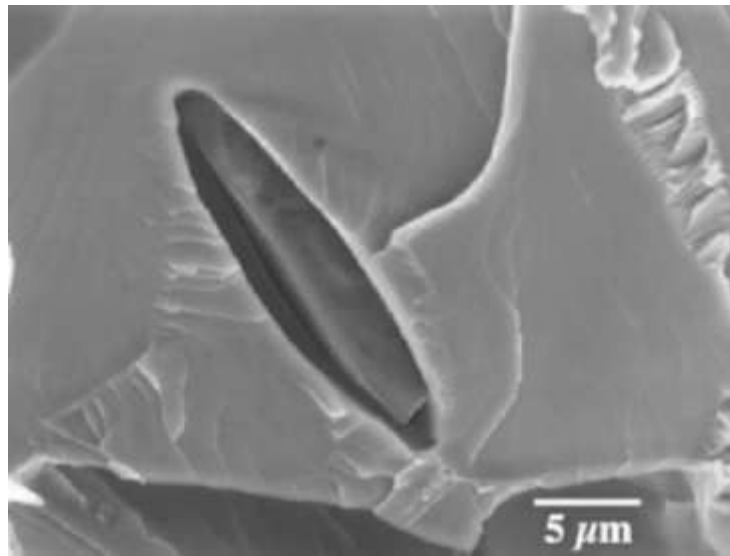
Dans la présente étude, la méthode de fonctions de poids a été adoptée en raison de sa simplicité, sur le plan de la formulation mathématique et au niveau du traitement numérique comparée à la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontières (BEM).

# Chapitre II : Présentation de la méthode d'hybridation et son application sur les fissures internes

<b>Chapitre II : Présentation de la méthode d'hybridation et son application sur les fissures internes .....</b>	<b>21</b>
II.1. INTRODUCTION.....	22
II.2. RAPPEL SUCCINT SUR LA THEORIE DE LA FONCTION DE GREEN .....	23
II.3. PRESENTATION DE L'IDEE D'HYBRIDATION.....	24
II.3. MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE DE LA METHODE D'HYBRIDATION .....	29
II.3.1. L'intégrale de surface.....	29
II.3.2. L'intégrale de contour.....	31
II.4. TESTS DE VALIDATION POUR DES FISSURES ELLIPTIQUES INTERNES .....	35
II.4.1. Fissure elliptique interne dans un milieu infini soumise à un chargement polynomial .....	35
II.4.2. Fissure elliptique interne transversale dans une plaque sous flexion.....	44
II.4.3. Fissure elliptique interne dans un tube sous pression.....	48
II.5. CONCLUSION .....	51

## II.1. INTRODUCTION

Notre étude porte sur l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte sur le contour des fissures internes et des fissures débouchantes en mode I. Le but de cette évaluation du FIC est de prévoir un éventuel risque de fissuration brutale ou par fatigue pour un certains nombre de cas pratiques, tout en restant dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire (l'école d'Irwin). Ces fissures sont considérées de forme elliptique. Celle-ci est une forme géométrique très utilisée en mécanique de la rupture [Sha-1971, New-1981, Vai-1990, Guo-1995, Wan-1998, Kra-1999, ...] qui permet de simuler, en jouant sur le rapport des axes de l'ellipse, différentes formes de fissures réelles présentes dans les structures (voir la photo de la figure 6).



**Figure 6 :** Exemple d'une fissure interne de forme pratiquement elliptique due à une inclusion de sulfure de manganèse dans l'acier du Titanic [Pom-2005].

Ce chapitre constitue le noyau de notre étude. Dans un premier temps, un aperçu sur la théorie de la fonction de Green est proposé. Ensuite, nous allons exposer le principe de l'idée d'hybridation, sa formulation mathématique tenant compte de l'optimisation des paramètres géométriques relatifs à la fissure. Nous développerons également la mise en œuvre numérique de l'approche, qui est une tâche aussi importante que la formulation de l'approche, avec notamment, les traitements des singularités des intégrales curvilignes et surfaciques présentes dans la formulation de la méthode d'hybridation. La deuxième partie sera consacrée aux tests

de validation de la présente approche d'hybridation à travers des exemples concernant des fissures elliptiques internes sous différents modes de chargements quasi-statiques.

## II.2. RAPPEL SUCCINT SUR LA THEORIE DE LA FONCTION DE GREEN

Avant d'entamer la présentation de notre approche, il est utile de mettre en évidence la notion de la fonction de Green qui est généralement à la base des formulations analytiques des fonctions de poids. Pour cela, nous allons présenter la définition de la fonction de Green dans sa forme la plus simple.

Soit une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre  $n$  :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) f^{(i)}(x) = \phi(x) \Leftrightarrow \hat{L}(x) f(x) = \phi(x), \quad \hat{L}(x) \stackrel{\text{Déf}}{=} \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \quad (22)$$

$\hat{L}(x)$  étant un opérateur différentiel.

La fonction de Green de cette équation est la fonction qui satisfait l'équation (22) en remplaçant le second membre (ou le terme source)  $\phi(x)$  par la fonction (au sens d'une distribution) de Dirac  $\delta(x-x')$  ayant la propriété :

$$\delta(x-x') = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x = x' \\ 0 & \text{pour } x \neq x' \end{cases} \quad (23)$$

Et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x') dx' = 1. \quad (24)$$

Alors, on a par définition de la fonction de Green  $G$  :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} G(x, x') \stackrel{\text{Déf}}{=} \delta(x-x') \Leftrightarrow \hat{L}(x) G(x, x') \stackrel{\text{Déf}}{=} \delta(x-x') \quad (25)$$

En appliquant les propriétés de la fonction de Dirac (23) et (24) il s'en suit pour (25) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x') \phi(x') dx' = \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(x) G(x, x') \phi(x') dx' \quad (26)$$

Ce qui donne avec l'équation (22) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(x) G(x, x') \phi(x') dx' = \hat{L}(x) f(x) \Leftrightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' \quad (27)$$

Alors, nous avons fini par trouver une solution de notre équation différentielle (22) pouvant servir comme solution particulière. La solution générale sera la somme de la solution homogène et de la solution particulière donnée par l'équation (27) :

$$f(x) = f_h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' \quad (28)$$



Pour résumer son intérêt, la fonction de Green est une fonction, une fois connue pour une équation différentielle, pourra facilement servir à trouver une solution particulière.

### II.3. PRESENTATION DE L'IDEE D'HYBRIDATION

L'expression du FIC pour une fissure elliptique dans un milieu infini, basée sur les fonctions de poids, est donnée par [Oor-1980] :

$$K_{I_{Q'}} = \int_{(S)} W_{QQ'} q(Q) dS \quad (29)$$

$K_{I_{Q'}}$  représente le facteur d'intensité de contrainte en mode I au point  $Q'$  du bout de fissure,  $q(Q)$  est le chargement au point  $Q$  et  $S$  la surface de l'ellipse (fissure). Quant à  $W_{QQ'}$ , il représente classiquement la fonction de poids liée au problème. Notons que pour une force unitaire appliquée au point  $Q$ ,  $W_{QQ'}$  est traduit comme le facteur d'intensité de contrainte, solution du problème. D'après l'équation (28),  $W_{QQ'}$  correspond donc à une fonction de Green  $G(x, x')$ , où les variables  $x$  et  $x'$  sont remplacées par les positions des points  $Q'$  et  $Q$  conformément au cadre bidimensionnel. Ainsi, le domaine de variation de  $Q$  est la surface  $(S)$  au lieu de l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , l'élément différentiel est la surface  $dS$  au lieu de  $dx'$  et  $q(Q)$  remplace  $\phi(x')$ . La fonction  $K_{I_{Q'}}$  qui correspond à  $f(x)$  est à la fois la solution particulière selon l'équation (27) et la solution générale selon (28), la solution homogène  $f_h(x)$  étant nulle puisque  $\phi(x') = q(Q) = 0$ . Ceci est cohérent avec le fait que le FIC  $K_{I_{Q'}}$  est nul pour un chargement nul.

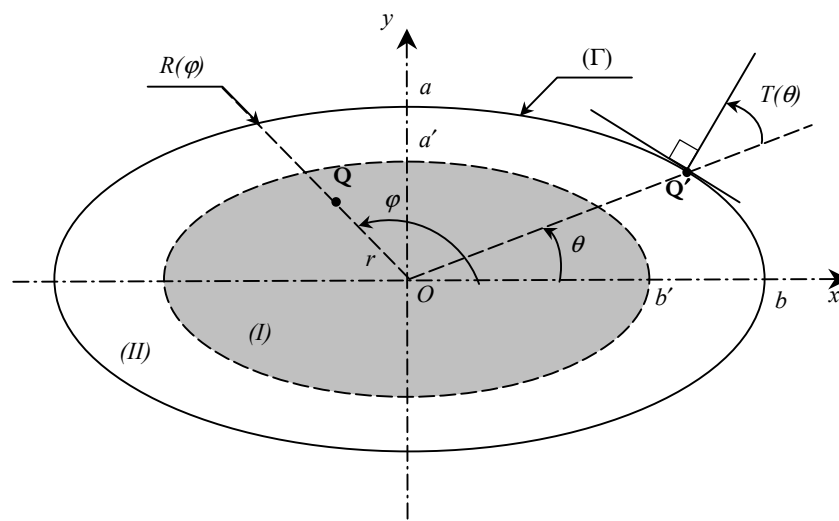


Figure 7 : Paramètres géométriques et subdivision de la fissure elliptique

Dans le présent travail, on se propose de définir la fonction  $W_{QQ'}$  par hybridation de deux fonctions de poids. On montre alors qu'il est possible d'améliorer l'évaluation du FIC en restant dans des temps de calcul comparables voire inférieurs à ceux observés pour les méthodes standards.

La méthode d'hybridation développée ici utilise deux types de fonctions de poids. La première fonction a été développée par Oore & Burns [Oor-1980] pour modéliser toute forme fermée de fissure dans un milieu infini :

$$W_{QQ'} = \frac{\sqrt{2}}{\pi l_{QQ'}^2 \sqrt{\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}}} \quad (30)$$

La deuxième est celle développée par Krasowsky *et al.* [Kra-1999] pour les fissures elliptiques dans un milieu infini :

$$W_{QQ'} = \frac{2\Pi^{1/4}(\theta)}{\sqrt{\pi a \left(1 - \frac{r^2(\varphi)}{R^2(\varphi)}\right) l_{QQ'}^2 \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}}} \quad (31)$$

Dans les relations (30) et (31), on a (voir la figure 7) :

$r$  et  $\varphi$  : les coordonnées polaires du point arbitraire  $Q$ ,

$R(\varphi)$  : la distance entre l'origine  $O$  et le bout de fissure en passant par  $Q$ ,

$l_{QQ'}$  : la distance entre le point  $Q'$  et le point arbitraire  $Q$ ,

$(\Gamma)$  : la courbe de l'ellipse (front de fissure),

$\rho_Q$  : la distance entre le point  $Q$  et le segment infinitésimal  $d\Gamma$ ,

$\theta$  : la position angulaire du point  $Q'$ .

$\alpha = a/b$  : le rapport entre les axes de l'ellipse et  $\Pi(\theta) = \left( \frac{\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right)$ .

Partant de l'observation que les fonctions de poids n'ont pas la même efficacité numérique partout à l'intérieur de l'ellipse, l'idée de l'hybridation consiste à considérer que la surface de l'ellipse est séparable en deux zones I et II (voir la figure 7). Sur chacune des deux zones, on utilise la fonction de poids qui est la plus efficace. Les deux zones sont définies par :

$$\begin{cases} \text{zone I : } \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 \leq 1 \\ \text{zone II : } \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 > 1 \end{cases} \quad (32)$$

On peut introduire le paramètre  $\beta$  définissant la proportion entre les zones et qui est tel que  $a'/a = b'/b = \beta$  et  $\beta \in [0, 1]$ . On verra ultérieurement le rôle précis de ce paramètre.

Ainsi, dans notre approche, nous avons remplacé le problème physique classique associé à une fissure elliptique, sous un chargement  $q(Q)$  et pour laquelle nous utilisons une seule fonction de poids  $W_{QQ'}$ , par un autre équivalent réalisé par la décomposition en deux problèmes physiques. Comme le montre la figure 8 : le premier représente une fissure elliptique soumise au chargement appliqué uniquement sur la Zone (I) ; le deuxième représente la même fissure elliptique soumise au reste du chargement appliqué sur la Zone (II).

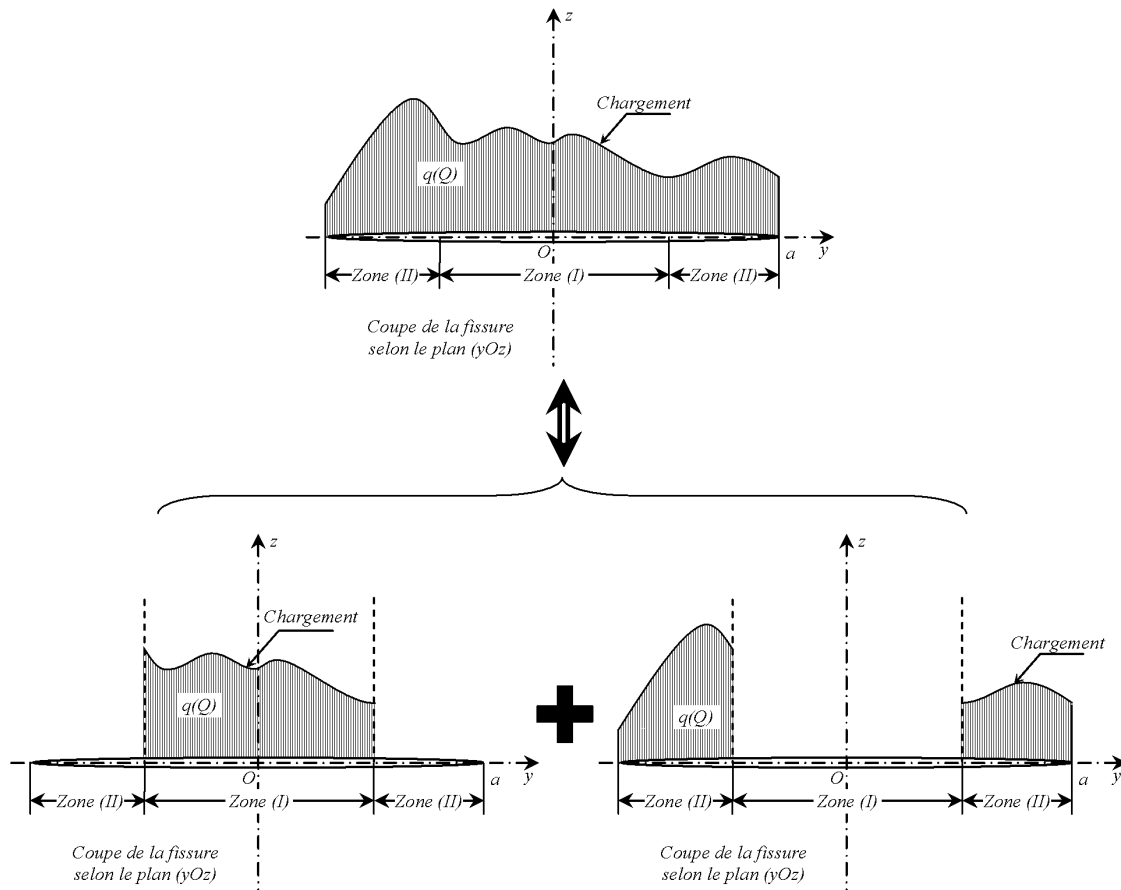


Figure 8 : Décomposition du problème physique

Il faut de plus noter que, pour qu'une fonction de poids  $W_{QQ'}$  soit analytiquement acceptable [Kra-1999], il faut qu'elle vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} W_{QQ'} = W_{QQ'}(d' \text{une fissure rectiligne}) \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1} W_{QQ'} = W_{QQ'}(d' \text{une fissure circulaire}) \end{cases} \quad (33)$$

avec :

$$W_{QQ'}(d' \text{une fissure rectiligne}) = \sqrt{2d} / (\pi \sqrt{\pi} l_{QQ'}^2) \quad (34)$$

$$W_{QQ'}(d' \text{une fissure circulaire}) = \sqrt{R^2 - r^2} / (\pi \sqrt{\pi R} l_{QQ'}^2) \quad (35)$$

$d$  étant la plus courte distance entre le point  $Q$  et le front de la fissure rectiligne et  $R$  représente dans ce cas le rayon de la fissure circulaire.

On vérifie donc que l'hybridation est analytiquement acceptable car les deux fonctions de poids (30) et (31) vérifient simultanément les conditions (33).

La fonction de poids de l'expression (31) est destinée exclusivement aux fissures de forme elliptique. Néanmoins, lors de l'évaluation numérique de l'intégrale de surface donnée par l'équation (29), l'expression (31) présente une singularité supplémentaire  $(1-r/R)^{-1/2}$  par rapport à l'expression (30). Sachant que cette intégrale et l'intégrale curviligne présente dans les fonctions (30) et (31) seront évaluées indépendamment (voir la section II.3), cet argument nous a conduit à choisir la fonction de poids (31) pour la zone elliptique I et la fonction de poids (30) pour la zone II, autrement dit :

$$W_{QQ'} = \begin{cases} W_{QQ'} \text{ de l'eqn (31) si } Q \in \text{zone I} \\ W_{QQ'} \text{ de l'eqn (30) si } Q \in \text{zone II} \end{cases} \quad (36)$$

Il reste à déterminer la proportion adéquate  $\beta$  entre les deux zones I et II.

Il faut signaler que la fonction (30) d'Oore & Burns a une forme très similaire aux fonctions (34) et (35) pour une fissure rectiligne et une fissure circulaire, respectivement. D'ailleurs lors de son développement Oore & Burns se sont particulièrement appuyés sur les fonctions (34) et (35) pour déduire les constantes présumées de l'expression finale (30) (voir les pages 203 et 204 de la référence [Oor-1980]). Ce qui n'est pas le cas pour la fonction (31) de Krasowsky et al. [Kra-1999] qui est déduite à partir de la variation élémentaire du bilan énergétique du Rice lors d'une propagation élémentaire de la fissure. Ce qui donne l'avantage à la fonction (30) par rapport à la fonction (31) lorsqu'il s'agit des deux cas suivants :

- Bout de fissure d'une forme proche d'un cercle ( $\alpha \rightarrow 1$ ) ; ceci est confirmé numériquement comme le montre le graphe de la figure 9 où les paramètres  $f_1$  et  $f_2$  sont

$$\text{définis par : } f_1 = \frac{\int_S (W_{QQ'})_{eqn(30)} dS}{\int_S (W_{QQ'})_{eqn(35)} dS} \text{ et } f_2 = \frac{\int_S (W_{QQ'})_{eqn(31)} dS}{\int_S (W_{QQ'})_{eqn(35)} dS}.$$

Ce graphe montre clairement que la fonction (30) converge plus rapidement vers celle d'une fissure circulaire, par rapport à la fonction (31).

- Bout de fissure proche d'une droite (faibles valeurs de  $\alpha$  avec des valeurs de  $\theta$  loin de zéro).

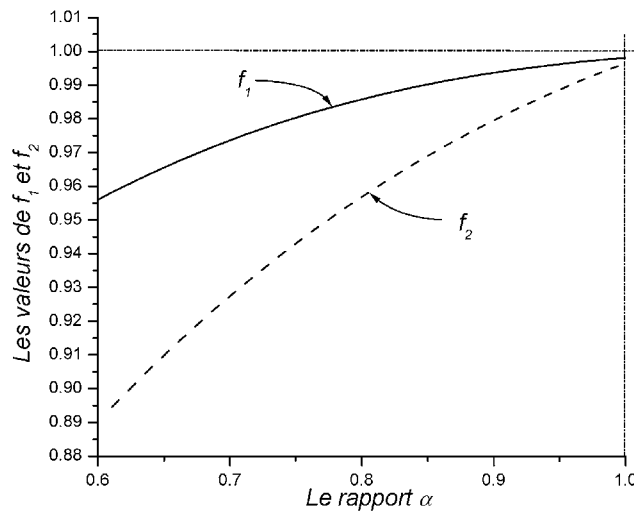


Figure 9 : Comparaison des fonctions de poids (30) et (31) avec celle d'une fissure circulaire pour  $\alpha \in [0.6, 1]$

En fait ces deux cas correspondent à des situations où la variation du rayon de courbure  $R_c$  de la fissure est très faible tout en s'éloignant des faibles valeurs relative de  $R_c$  (faibles valeurs de  $\alpha$  et  $\theta \rightarrow 0$ ). Dans le cas contraire c'est la fonction de poids (31) de Krasowsky et al. qui est favorisée puisqu'elle est nettement plus adaptée aux cas à grande variation de  $R_c$ . Ceci est confirmé par la présence via la fonction  $\Pi(\theta)$  du rayon de courbure  $R_c = \frac{a}{\alpha} \Pi^{3/2}(\theta)$  dans l'expression de la fonction (31).

Par conséquent, plus le rayon de courbure est relativement faible ou sa dérivée (gradient du rayon de courbure) est élevée, plus la zone I devrait s'agrandir vis à vis de la zone II et vice versa.

Compte tenu de toutes ces considérations, nous avons proposé une forme relative et simple de la représentation de l'influence du rayon de courbure par rapport au grand axe de l'ellipse. Elle est donnée par l'expression suivante:

$$\beta_1 = \frac{(b - \min(R_c, a))}{b} \quad (37)$$

Concernant la représentation de l'influence du gradient du rayon de courbure pour un  $\alpha$  donné est donnée, nous proposons l'expression suivante du rapport entre les deux zones :

$$\beta_2 = \frac{\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right) - \left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\min}}{\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\max} - \left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\min}} \quad (38)$$

avec  $\frac{\partial R_c}{\partial \theta}$  la dérivée partielle par rapport à la position angulaire du point  $Q'$ , ses valeurs maximale et minimale intervenant dans (38) sont calculées en balayant tout le contour de l'ellipse pour un  $\alpha$  donné. Ce calcul de dérivée est évalué numériquement.

Le paramètre de proportion  $\beta$  s'exprime alors être logiquement par :

$$\beta = \max(\beta_1, \beta_2) \quad (39)$$

### II.3. MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE DE LA METHODE D'HYBRIDATION

Le calcul du FIC nécessite l'évaluation de deux types d'intégrale ; de surface dans l'expression (29) et curviligne par l'intermédiaire des fonctions de poids (30) et (31). Les différentes singularités présentes dans ces intégrales nécessitent un traitement qu'on va détailler ci-après.

#### II.3.1. L'intégrale de surface

Pour l'intégrale de surface de l'équation (29), la technique de traitement de la singularité  $1/l_{OQ'}^2$  est celle employée efficacement par Krasowsky *et al.* [Kra-1999]. Elle consiste à entourer le point  $Q'$  par un petit demi-cercle de rayon  $R_0$  sur lequel l'intégrale (29) est analytiquement évaluée en utilisant la fonction de poids (34) d'une fissure rectiligne.

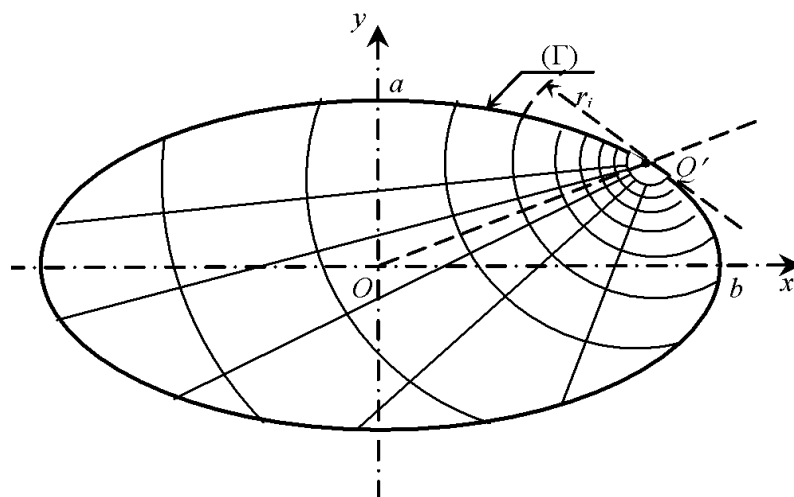


Figure 10 : Discrétisation de la fissure

On trouve ainsi :

$$K_I^{S'} = \frac{8}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{R_0}\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]q(Q') \approx 1.21703\sqrt{R_0}q(Q') \quad (40)$$

Le FIC est donné dans ce cas par  $K_I^S = K_I^{S'} + K_I^{S''}$  avec  $S$  la surface de l'ellipse,  $S'$  la surface intérieure au demi-cercle et  $S''$  la surface restante,  $K$  et  $E$  sont les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, respectivement.

Pour réduire l'erreur due à la linéarisation de la courbure au point  $Q'$ , on prendra dans (40) :

$$\frac{\min(R_c(Q'), a)}{30} \leq R_0 \leq \frac{\min(R_c(Q'), a)}{20} \quad (41)$$

Cet intervalle est moins restrictif que celui proposé par Krasowsky *et al.* [Kra-1999] en prenant la seule valeur :  $R_0 = \min(R_c(Q'), a)/30$ .

En vue du calcul numérique de l'intégrale de surface, le domaine ( $S''$ ) est discrétisé en traçant des demi-cercles concentriques de centre  $Q'$  et de rayons  $R_0 < r_0 < r_1 < r_2 < r_3 \dots$  et demi-droites partant de  $Q'$  (environ 60 dans la plupart des discrétisations effectuées dans cette étude) comme le montre la figure 10.

Deux types d'éléments sont générés à l'issue de ce maillage :

- Des quadrangles à 4 nœuds provenant de l'intersection de demi-cercles avec les demi-droites et parfois de l'intersection des demi-droites avec la Frontière de ( $S''$ ) (voir la figure 11a). Dans ce cas, nous utilisons des fonctions de formes de Lagrange de degré 1 associées à l'élément de référence de la figure 11b, que nous estimons suffisante pour une intégration numérique. Elles sont données par :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 0.25(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ N_2 &= 0.25(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ N_3 &= 0.25(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ N_4 &= 0.25(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

- Des éléments triangulaires à 3 nœuds, localisés uniquement au voisinage de la Frontière de ( $S''$ ), car ils proviennent de l'intersection entre cette dernière avec les demi-cercles et les demi-droites (voir la figure 11a). Dans ce cas, nous utilisons pour l'élément de référence de la figure 11c, des fonctions de formes linéaires :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta \\ N_2 &= \xi \\ N_3 &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

L'algorithme utilisé lors de l'intégration numérique sur la surface ( $S''$ ) est celui de Gauss à 9 points pour les éléments quadrilatéraux et à 7 points pour les éléments triangulaires.

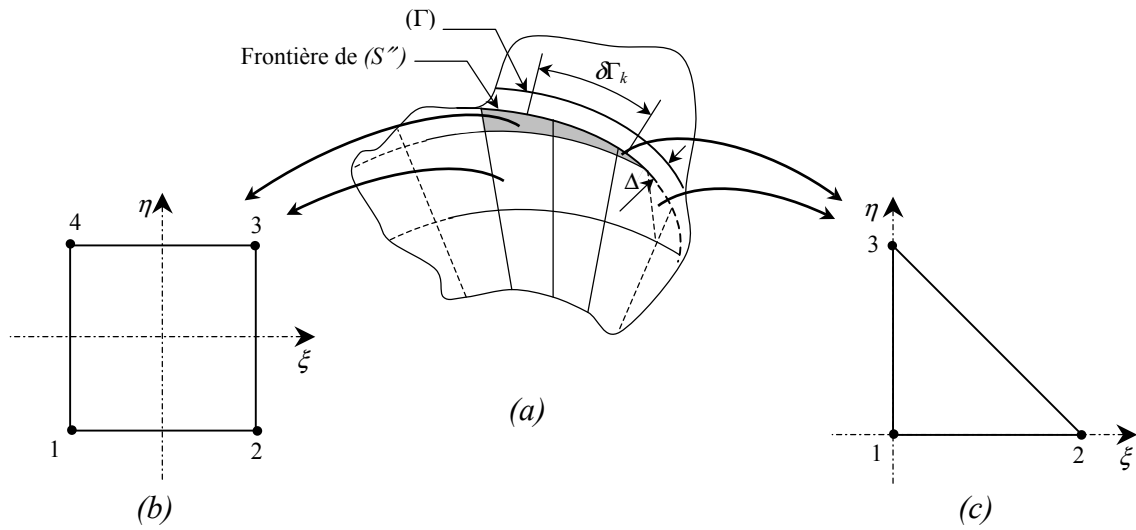


Figure 11 : (a) Passage des éléments réels aux éléments de référence (b) Élément de référence carré à 4 nœuds – (c) Élément de référence triangulaire à 3 nœuds

### II.3.2. L'intégrale de contour

Il s'agit de l'intégrale  $\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}$  présente dans le dénominateur de chacune des fonctions de poids (30) et (31). Tant que le point  $Q$  est loin du front de fissure ( $\Gamma$ ), l'intégrale en question se transforme en une somme :

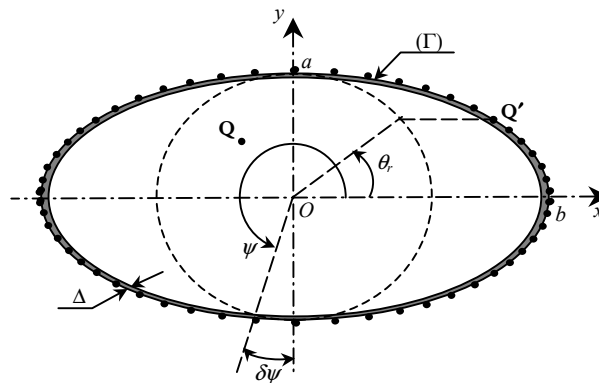


Figure 12 : Discrétisation du front de la fissure

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} = \sum_{i=1}^{4N} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \quad (44)$$



Dans la relation (44),  $N$  désigne le quart du nombre de point subdivisant le contour ( $\Gamma$ ) et  $d\Gamma$  son segment élémentaire.

Lorsque le point  $Q$  est très proche du bout de fissure, l'intégrale  $\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}$  devient singulière ( $\rho_Q \rightarrow 0$ ) et son évaluation numérique devient délicate. Pour traiter cette singularité nous ignorons, comme Krasowsky *et al.* [Kra-1999], une bande très fine à proximité du contour (voir la figure 12) d'épaisseur constante :

$$\Delta = \gamma a \text{ où } \gamma = 1/300 \quad (45)$$

Cette équation nous distingue de Krasowsky *et al.* [Kra-1999], pour lesquels cette épaisseur est variable et dépend de la position angulaire  $\psi$  de  $d\Gamma$  (voir la figure 12) :

$$\Delta(\psi) = \frac{1}{300} \cos(T(\psi)) \min(R_i(\psi), a) \quad (46)$$

L'angle  $T$  en un point du bout de la fissure est mesuré entre la tangente en ce point et la droite passant par ce point et l'origine  $O$  (voir la figure 7).

L'utilisation d'une telle équation rend le maillage automatique que nous utilisons, relativement complexe voire impossible, d'où le choix d'un  $\Delta$  constant donné par l'équation (45). En ce qui concerne Krasowsky *et al.* [Kra-1999], ces derniers ont adopté l'équation (46) sans se soucier du maillage automatique.

L'erreur sur l'évaluation de l'intégrale (29) provoquée par l'exclusion de la bande d'épaisseur

$\Delta$  est estimée par [Kra-1999], à environ  $\left( \int_0^{\gamma} \sqrt{x} dx / \int_0^1 \sqrt{x} dx \right) \approx \left( \frac{1}{300} \right)^{3/2}$  contre  $\left( \frac{2}{300} \right)^{3/2}$  pour

notre choix de  $\Delta$  constant. Ces deux valeurs sont identiquement très faibles.

Le domaine effectif de la fissure devient :

$$\left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{y}{a} \right)^2 \leq \left( 1 - \frac{\Delta}{R(\theta)} \right)^2 \quad (47)$$

Il nous paraît nécessaire que l'épaisseur  $\Delta$  reste inférieure à la taille caractéristique d'une maille du domaine discrétisé, représentée par la distance entre deux arcs de demi-cercles consécutifs (voir la figure 11a). Cette condition a pour but de ne pas tomber sur le cas pathologique des éléments excessivement petits, induisant des temps de calcul prohibitifs sans un gain significatif en précision. Donc, à la limite,  $\Delta$  doit satisfaire la condition suivante [Kra-1999] :

$$\Delta = (r_{i+1} - r_i)_{\min} = r_0 - R_0 \quad (48)$$

Ce qui nous donne, avec les équations (41) et (45), la proportion de progression du rayon  $r_i$  suivante :

$$\nu = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i} = \frac{r_0 - R_0}{R_0} \in \left[ \frac{1}{15}, \frac{1}{10} \right] \quad (49)$$

Le calcul numérique de l'intégrale de contour nécessite évidemment la discrétisation de ce dernier avec un nombre fini de points, délimitant des segments de droite de longueur  $\delta\Gamma$  (voir la figure 12). L'erreur  $\xi$  de linéarisation du l'arc  $\widehat{\delta\Gamma}$  est donnée en utilisant le développement limité de  $\sin(\delta\psi/2)$  au voisinage de zéro, à savoir

$$\sin(\delta\psi/2) = (\delta\psi/2) - \frac{(\delta\psi/2)^3}{3!} + \dots \text{ ce qui entraîne,}$$

$$\xi = \frac{\widehat{\delta\Gamma} - \delta\Gamma}{\widehat{\delta\Gamma}} \approx \frac{(\delta\psi)^2}{24} \quad (50)$$

avec  $\delta\psi$  l'ouverture angulaire du segment  $\delta\Gamma$ .

Pour uniformiser l'erreur  $\varepsilon$  sur toute la courbe ( $\Gamma$ ), nous prenons la valeur moyenne (comme s'il s'agit d'un cercle) :

$$\xi = \frac{1}{24} \left( \frac{\pi}{2N} \right)^2 = \frac{1}{24} (\delta\psi_r)^2 \quad (51)$$

Le paramètre  $\psi_r$  représente l'angle réduit de  $\psi$  tel que :

$$\psi = \arctan[\alpha \tan(\psi_r)] \quad (52)$$

Comme l'angle réduit du  $i^{\text{ème}}$  point est :

$$\psi_r(i) = i(\delta\psi_r) = i \frac{\pi}{2N} \quad (53)$$

On obtient, en substituant (53) dans (52), l'angle du  $i^{\text{ème}}$  point :

$$\psi(i) = \arctan \left[ \alpha \tan \left( i \frac{\pi}{2N} \right) \right] \quad (54)$$

On remarque donc que les  $N$  points discrétisant le contour de la fissure ne pourront pas être équidistants, s'ils n'ont pas le même rayon de courbure. Krasowsky *et al.* [Kra-1999] ont trouvé une équation très similaire à (54) sauf qu'au lieu de  $\alpha$ , ils ont mis  $\alpha^2$  sans expliquer la démarche adoptée pour obtenir leur résultat.

Pour que l'erreur  $\varepsilon$  demeure toujours faible, Krasowsky *et al.* [Kra-1999] ont imposé la condition suivante :

$$l_1(\psi)/\Delta \leq \mu \quad (55)$$

avec  $\mu = l_1/l_0 \in [0.1; 0.2]$ , les distances  $l_0$  et  $l_1$  sont mentionnées sur la figure 13.

Comme l'erreur est supposée constante et égale à celle d'un cercle,  $l_1$  peut être évalué en utilisant les deux premiers termes de développement limité de  $\cos(\delta\psi/2)$  au voisinage de zéro :

$$l_1 = a - a \cos(\delta\psi/2) \approx a \frac{(\delta\psi/2)^2}{2} \quad (56)$$

Cette équation utilisée dans la condition (55) peut nous offrir avec l'équation (45), une borne inférieure du nombre de points  $N$  :

$$N \geq \pi / (2\sqrt{8\mu\gamma}) \quad (57)$$

Si le point  $Q$  est situé à proximité de la bande fine ignorée, donc suffisamment proche du  $k^{\text{ème}}$  segment du front de fissure discrétisé (figure 13), l'intégrale est évaluée analytiquement sur ce segment afin d'éviter tout risque de singularité pouvant perturber le bon déroulement du calcul :

$$\int_{(\partial\Gamma)_k} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} \approx \int_{c_1}^{c_2} \frac{dc}{c^2 + d^2} = \left| \frac{1}{d} \left( \arctan \frac{c_2}{d} - \arctan \frac{c_1}{d} \right) \right| \quad (58)$$

L'équation (44) devient alors :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\partial\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} + \int_{(\partial\Gamma)_k} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} + \sum_{i=k+1}^{4N} \frac{(\partial\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \quad (59)$$

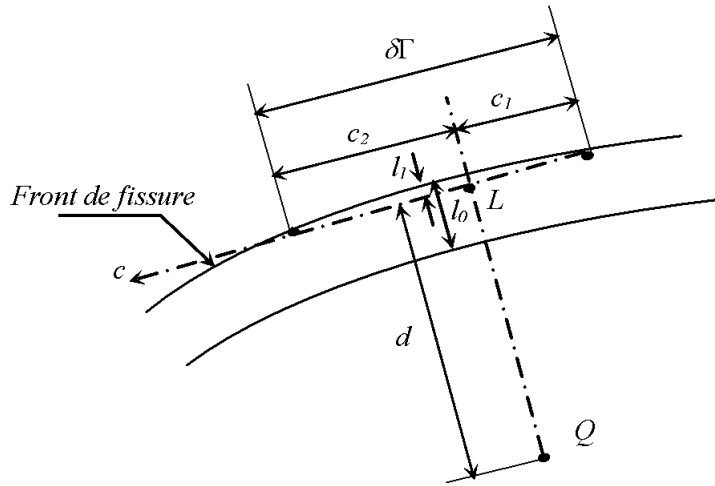


Figure 13 : Agrandissement au voisinage du front de fissure

L'utilisation de (59) au lieu de (44) est justifiée par l'amélioration des résultats obtenus et permet d'éviter une discrétisation excessivement raffinée de la courbe ( $\Gamma$ ), obligatoire lorsque  $Q$  se rapproche de celle-ci.

Si on prend, par exemple, le point  $L$  (voir la figure 13) au milieu de  $\delta\Gamma$  ( $c_1 = -c_2$ ), pour le cas  $\delta\Gamma \approx a(\delta\psi_r) = a(\pi/2N) = a\sqrt{8\mu\gamma}$  et  $d \approx \Delta = a\gamma$ , les intégrales calculées pour le  $k^{ème}$  terme via l'équation (44) et l'équation (58) sont respectivement :

$$I_1 = \frac{d\Gamma}{d^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{8\mu}{\gamma^3}} \approx 5600a^{-1} \text{ et } I_2 = \left| \frac{2}{a\gamma} \arctan\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\gamma}}\right) \right| \approx 880a^{-1} \quad (60)$$

L'erreur commise sur le  $k^{ème}$  terme est alors très importante (Erreur relative supérieure à 600%).

Dans notre code de calcul, nous avons préféré utiliser l'équation (59) pour chaque élément de la surface ( $S''$ ) dont au moins un des nœuds est situé sur le segment  $\delta\Gamma_k$  (les éléments en gris dans la figure 13b).

## **II.4. TESTS DE VALIDATION POUR DES FISSURES ELLIPTIQUES INTERNES**

Dans le but de valider notre approche d'hybridation, trois exemples pratiques sont traités ci-après en utilisant le code de calcul *HWFun*, développé dans le cadre de cette thèse (présenté dans l'Annexe). Ils concernent respectivement le cas d'une fissure elliptique interne dans un milieu infini sous un chargement polynomial, le cas d'une fissure elliptique interne dans une plaque sous flexion et finalement le cas d'une fissure elliptique interne dans un tube sous pression.

### **II.4.1. Fissure elliptique interne dans un milieu infini soumise à un chargement polynomial**

Nous considérons dans cet exemple une fissure elliptique dans un milieu élastique infini (bords du domaine situés suffisamment loin de la fissure). La fissure est considérée soumise à un chargement (contrainte) de répartition polynomiale, de la forme suivante :

$$\sigma(x, y) = \sum_j \sum_i a_{ij} \left(\frac{x}{b}\right)^i \left(\frac{y}{a}\right)^j \quad i, j \in \{0,1,2,3\} \quad (61)$$

Ce mode de chargement est couramment utilisé dans la littérature (voir par exemple Shah & Kobayashi [Sha-1971], Raju & Newman [Raj-1982], Orynyak & Gienko [Ory-2002]), car il permet de simuler de multiples situations pratiques.

Dans le cas particulier du chargement uniforme ( $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{00} = \sigma_0$ ), nous calculons le

$$\text{facteur d'intensité de contrainte adimensionnel en mode I sous la forme } \bar{K}_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)}$$

où  $E(k)$  est l'intégrale elliptique de seconde espèce et  $k = \sqrt{1 - \alpha^2}$ .

Les FIC est évalué en utilisant la méthode numérique d'hybridation précédemment décrite. Les valeurs trouvées sont comparées aux résultats de Krasowsky et al. [Kra-1999] et d'Oore & Burns [Oor-1980]. Ces résultats sont résumés dans les tableaux I et II.

**Tableau I :** Comparaison du FIC adimensionnel  $\bar{K}_I$  sur le contour de la fissure elliptique sous chargement uniforme pour différentes valeurs du rapport  $\alpha$ .

$\alpha$	$\theta_r$ °	$\bar{K}_I(\text{exacte})$	Résultats obtenus par <i>HWFun</i>				Résultats de Krasowsky et al	
			$\bar{K}_I$ (par hybridation)	Er(%)	$\bar{K}_I$ ( $\beta = 0$ , F.P. de Oore & Burns)	Er(%)	$\bar{K}_I$	Er(%)
1.0	0.	1.00000	1.00056	0.056	0.99893	0.107	1.00035	0.035
	30.	1.00000	1.00057	0.057	0.99894	0.106	1.00035	0.035
	60.	1.00000	1.00058	0.058	0.99896	0.104	1.00035	0.035
	90.	1.00000	1.00059	0.059	0.99897	0.103	1.00035	0.035
0.8	0.	1.00000	1.00940	0.940	1.01155	1.155	0.98523	1.477
	30.	1.00000	1.00346	0.346	1.00384	0.384	0.99170	0.830
	60.	1.00000	0.99555	0.445	0.99266	0.734	1.00573	0.573
	90.	1.00000	0.99339	0.661	0.98886	1.114	1.01184	1.184
0.6	0.	1.00000	1.00858	0.858	1.03387	3.387	0.96532	3.468
	30.	1.00000	0.99823	0.177	1.00915	0.915	0.98550	1.450
	60.	1.00000	0.99493	0.507	0.98480	1.520	1.00985	0.985
	90.	1.00000	0.99851	0.149	0.97884	2.116	1.01390	1.390
0.4	0.	1.00000	0.99780	0.220	1.07704	7.704	0.94460	5.540
	30.	1.00000	0.98987	1.013	1.01327	1.327	0.98180	1.820
	60.	1.00000	0.99619	0.381	0.97608	2.392	1.00540	0.540
	90.	1.00000	0.99994	0.006	0.96953	3.047	1.02053	2.053
0.2	0.	1.00000	0.99399	0.601	<b>1.17519</b>	<b>17.519</b>	<b>0.93730</b>	<b>6.270</b>
	30.	1.00000	<b>0.98730</b>	<b>1.270</b>	1.01328	1.328	0.99690	0.310
	60.	1.00000	0.99575	0.425	0.96876	3.124	1.00400	0.400
	90.	1.00000	0.99315	0.685	0.96531	3.469	1.00400	0.400
0.1	0.	1.00000	1.00294	0.294	--	--	--	--
	30.	1.00000	0.99957	0.043	--	--	--	--
	60.	1.00000	0.99349	0.651	--	--	--	--
	90.	1.00000	0.99007	0.993	--	--	--	--

Sur le tableau I, nous avons reporté les valeurs du FIC fournies par le code de calcul *HWFun* basé sur la méthode d'hybridation dans le cas étudié pour différentes valeurs du rapport  $\alpha$  et d'angle réduit  $\theta_r = \arctan\left(\frac{\tan(\theta)}{\alpha}\right)$ . Sur ce tableau, sont également reportés pour le même problème traité, la solution exacte, les résultats trouvés par Krasowsky et al. [Kra-1999] ainsi

que les résultats trouvés par le code *HWFun* en utilisant la fonction de poids de Oore & Burns [Oor-1980] sur tout le domaine ( $\beta = 0$ ). Comme il ne s'agit pas des mêmes valeurs de l'angle réduit  $\theta_r^\circ$ , nous avons préféré mettre les résultats trouvés par Oore & Burns [Oor-1980] pour le même problème dans le tableau II. D'après le tableau I, nous constatons que l'erreur maximale sur la valeur de FIC est de 6.27% pour les résultats de Krasowsky et al. [Kra-1999], 17.52% en utilisant la fonctions de poids d'Oore & Burns [Oor-1980] sur tout le domaine et finalement 1.27% pour l'approche d'hybridation. Pour les résultats d'Oore & Burns [Oor-1980], l'erreur maximale sur le FIC est de 9.51% comme le montre le tableau II.

**Tableau II :** FIC adimensionnel  $\bar{K}_I$  trouvé par Oore & Burns sur le contour de la fissure elliptique sous chargement uniforme pour différentes valeurs du rapport  $\alpha$ .

$\alpha$	$\theta_r^\circ$	$\bar{K}_I(\text{exacte})$	Résultats d'Oore & Burns	
			$\bar{K}_I$	Er(%)
1.0	16	1.00000	1.01212	1.212
	36	1.00000	1.00767	0.767
	49	1.00000	1.00766	0.766
	70	1.00000	1.01917	1.917
	88.2	1.00000	1.01473	1.473
0.8	14	1.00000	1.03170	3.170
	32.5	1.00000	0.99976	0.024
	49	1.00000	1.00442	0.442
	73	1.00000	1.00700	0.700
	88.2	1.00000	1.00184	0.184
0.6	12.5	1.00000	1.04112	4.112
	28.2	1.00000	1.02799	2.799
	50	1.00000	0.99731	0.269
	75	1.00000	0.99252	0.748
	88.6	1.00000	0.98868	1.132
0.4	10	1.00000	<b>1.09510</b>	<b>9.510</b>
	27	1.00000	1.01981	1.981
	50	1.00000	0.98773	1.227
	74.6	1.00000	0.97867	2.133
	89	1.00000	0.97417	2.583
0.2	2.2	1.00000	1.05026	5.026
	15.6	1.00000	0.96778	3.222
	31.3	1.00000	0.98808	1.192
	69.4	1.00000	0.97980	2.020
	89.5	1.00000	0.96747	3.253

Nous observons donc une amélioration de la précision de calcul sur la valeur de FIC pour la présente approche basée sur l'hybridation par rapport aux résultats obtenus par Krasowsky et al. [Kra-1999] ou Oore et Burns [Oor-1980]. On signale également un domaine d'applicabilité plus large pour l'approche par hybridation des fonctions de poids, en particulier dans le cas

( $\alpha = 0.1$ ) non traité par les autres méthodes. Ceci est dû peut être à de limitations rencontrées par ces auteurs concernant de calcul et la facilité de remaillage, les fissures aplaties nécessitant des maillages très raffinés.

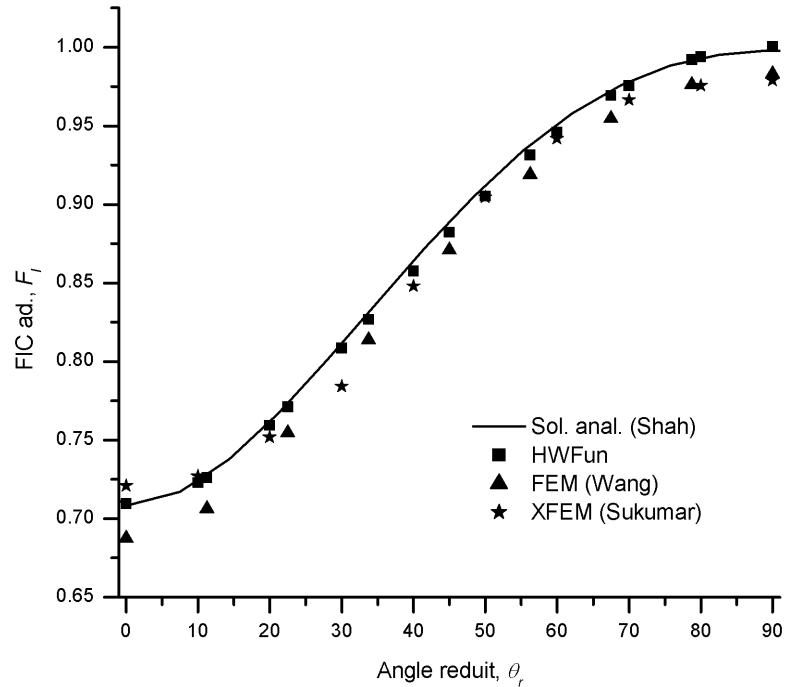


Figure 14 : FIC adimensionnel sur le contour d'une fissure elliptique pour  $\alpha = 0.5$

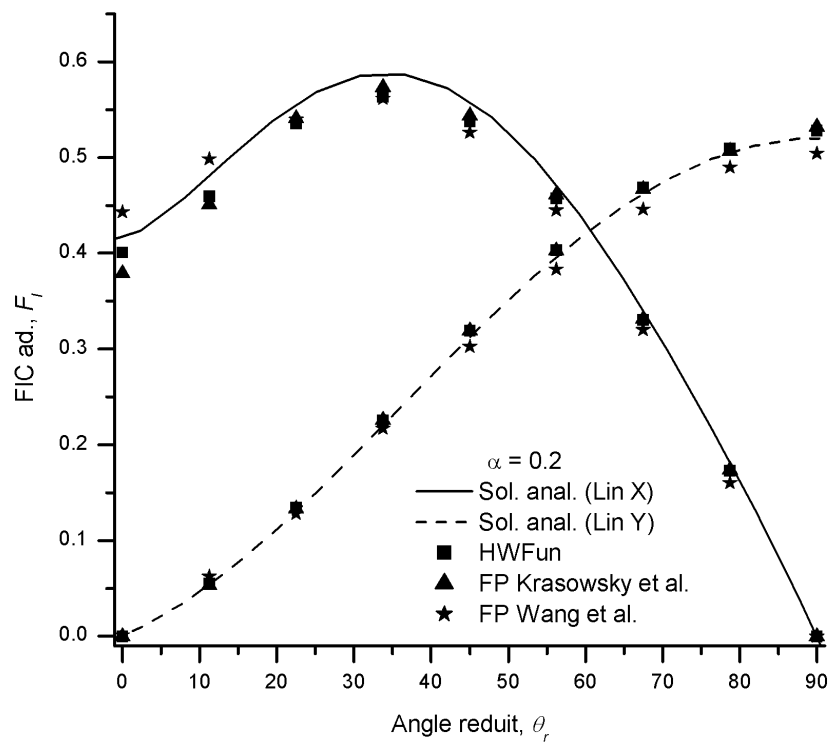
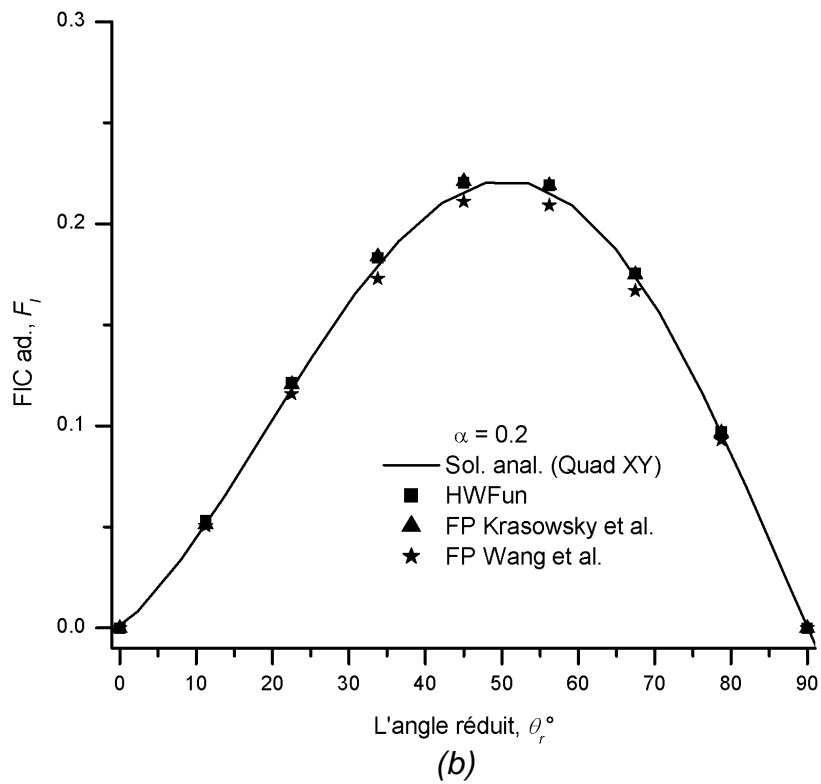
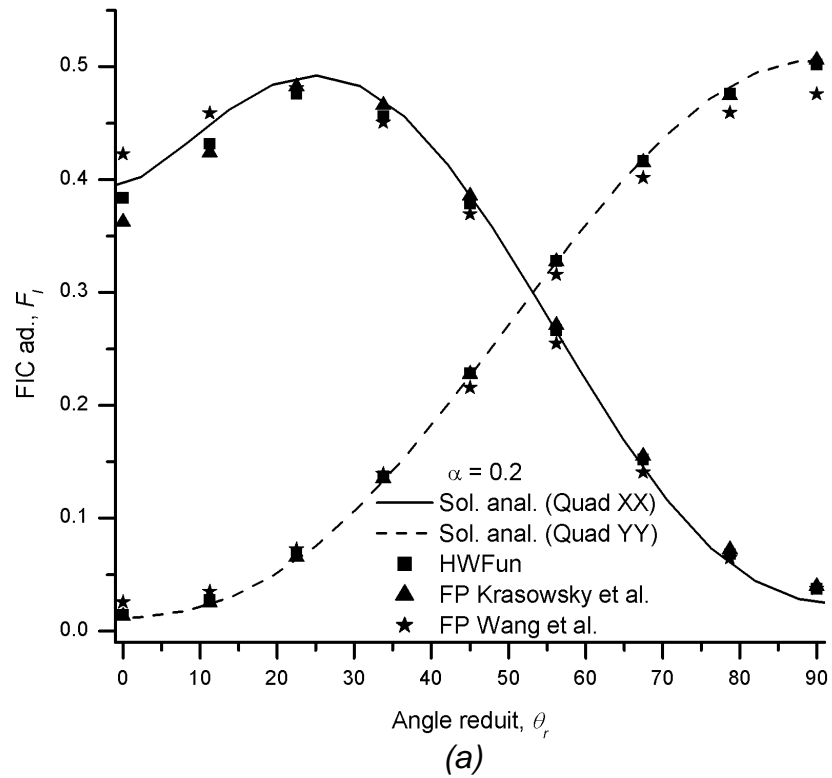


Figure 15 : FIC adimensionnel  $F_I$  sur le contour de la fissure elliptique pour  $\alpha = 0.2$  avec un chargement linéaire



**Figure 16 :** FIC adimensionnel  $F_I$  sur le contour de la fissure elliptique pour  $\alpha = 0.2$   
 (a) Chargement quadratique XX et YY – (b) Chargement quadratique XY



Pour un chargement uniforme, une comparaison entre les résultats de la méthode des éléments finis (FEM) trouvés par Wang et al. [Wan-1998], les résultats de son extension (XFEM) trouvés par Sukumar et al. [Suk-2003], et ceux de la présente approche est effectuée pour  $\alpha = 0.5$  sur la figure 14. Le FIC adimensionnel  $y$  est alors défini par  $F_I = K_I E(k) / (\sigma_0 \sqrt{\pi a})$ .

La figure 14 montre que les résultats obtenus avec l'hybridation dans ce cas sont de très bonne qualité, leur concordance avec la solution analytique semble meilleur que celle des autres approches.

Pour les chargements d'ordre supérieur,

- i) linéaire (LinX :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{10} = \sigma_0$  et LinY :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{01} = \sigma_0$  dans l'équation (61)),
- ii) quadratique (QuadXX :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{20} = \sigma_0$  ; QuadYY :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{02} = \sigma_0$  ; QuadXY :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{11} = \sigma_0$  dans l'équation (61)),
- iii) cubique (CubXXX :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{30} = \sigma_0$  ; CubXYY :  $a_{ij} = 0$ , sauf  $a_{12} = \sigma_0$  dans l'équation (61)).

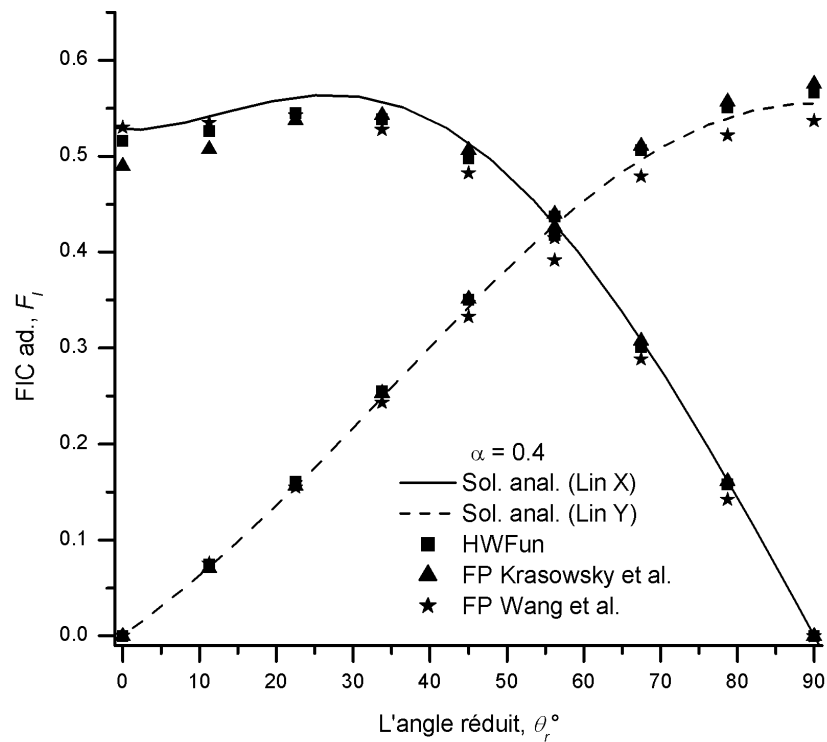


Figure 17 : FIC adimensionnel  $F_I$  sur le contour de la fissure elliptique pour  $\alpha = 0.4$  avec un chargement linéaire

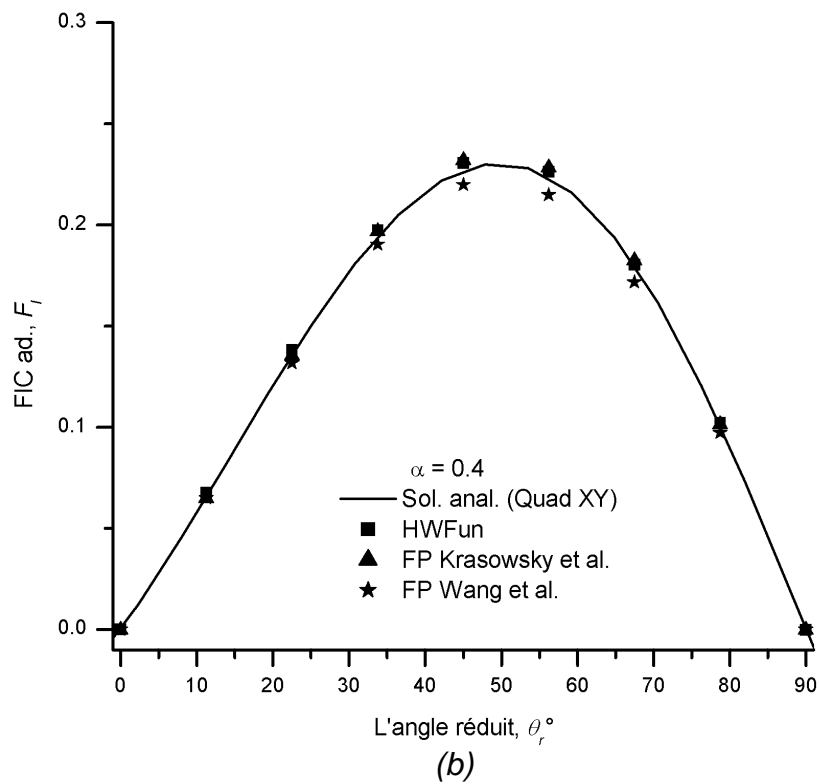
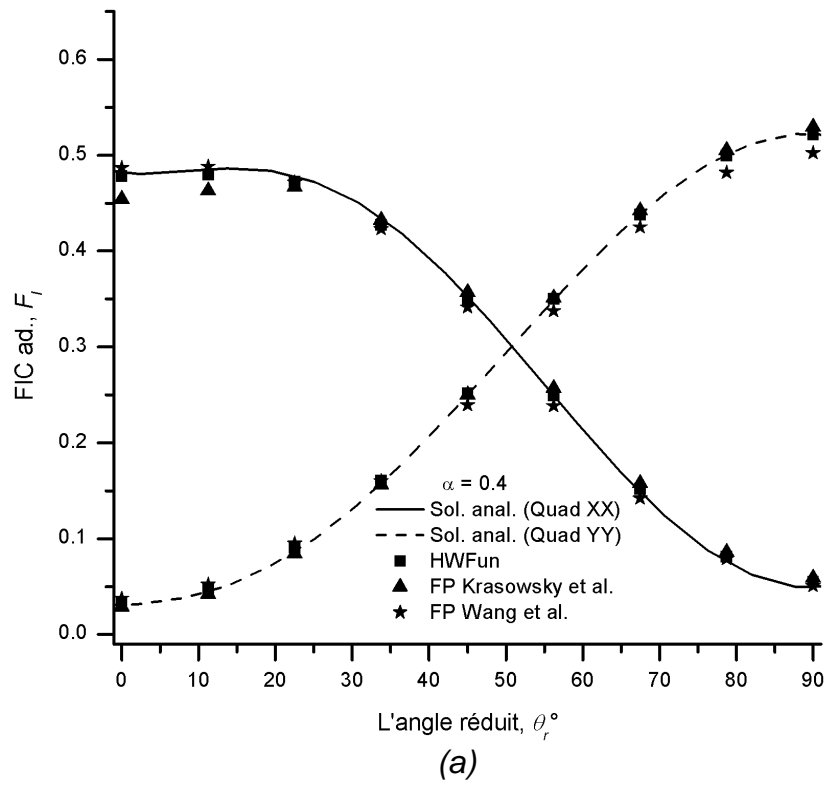


Figure 18 : FIC adimensionnel  $F_I$  sur le contour de la fissure elliptique pour  $\alpha = 0.4$   
 (a) Chargement quadratique XX et YY – (b) Chargement quadratique XY

Les résultats trouvés pour le FIC adimensionnel  $F_I$  par l'approche d'hybridation pour différentes valeurs de  $\alpha$  (0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1.0) montrent une bonne corrélation avec la solution analytique de Shah & Kobayashi [Sha-1971] pour des angles réduits entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Les comparaisons proposées sur les figures 15, 16, 17, 18, 19 et 20 correspondant à trois valeurs de  $\alpha$  (0.2 ; 0.4 ; 0.6) en sont représentatives. Ces comparaisons sont effectuées entre la présente approche d'hybridation, la fonction de poids de Wang et al. [Wan-1998] et la fonction de poids Krasowsky et al. [Kra-1999] appliquée sur tout le domaine dans le code *HWFun* ( $\beta = 1$ ).

Globalement les différentes méthodes permettent une bonne évaluation du FIC avec un léger avantage à la méthode d'hybridation surtout pour les faibles valeurs de  $\alpha$  où on observe un décrochement plus claire (figure 15 et 16).

Dans le cas d'un chargement cubique, les résultats obtenus par hybridation des fonction de poids sont en parfaite concordance avec la solution analytique développée par Orynyak & Gienko [Ory-2002]. La fonction de poids de Wang et al. [Wan-1998] ne fournit pas de résultats pour ce mode de charge ce qui prouve la plus grande applicabilité, tout en préservant une bonne qualité des résultats, de la présente approche. Dans la figure 21, une illustration de ces résultats est proposée.

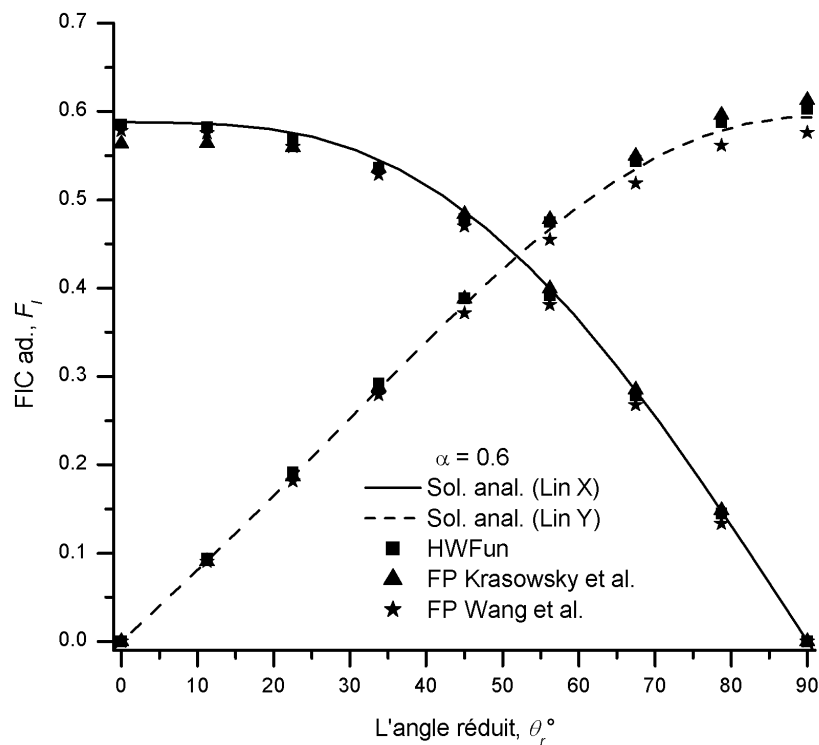


Figure 19 : FIC adimensionnel  $F_I$  sur le contour de la fissure elliptique pour  $\alpha = 0.6$  avec un chargement linéaire

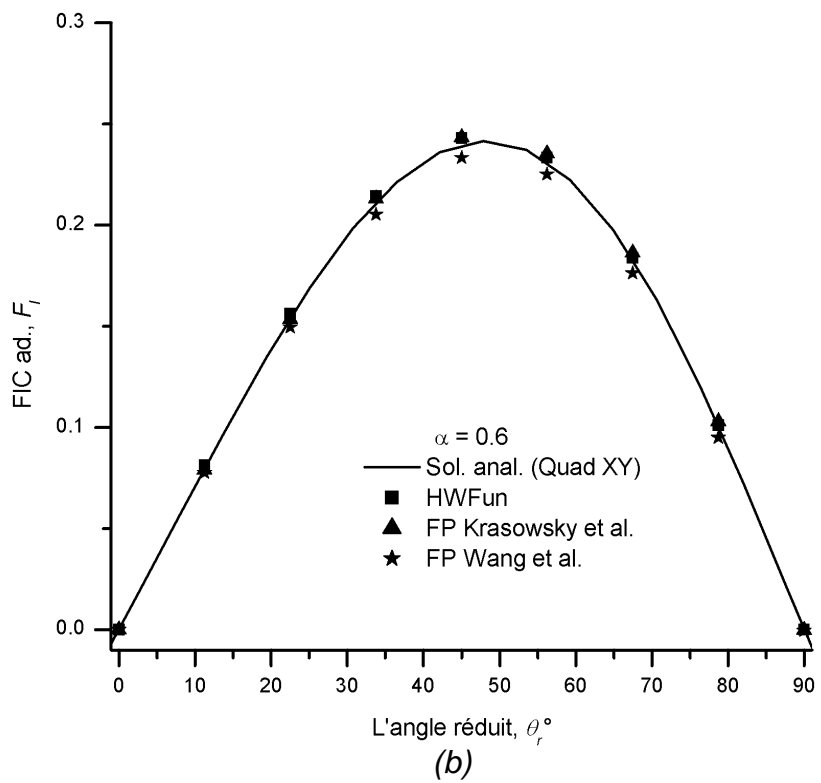
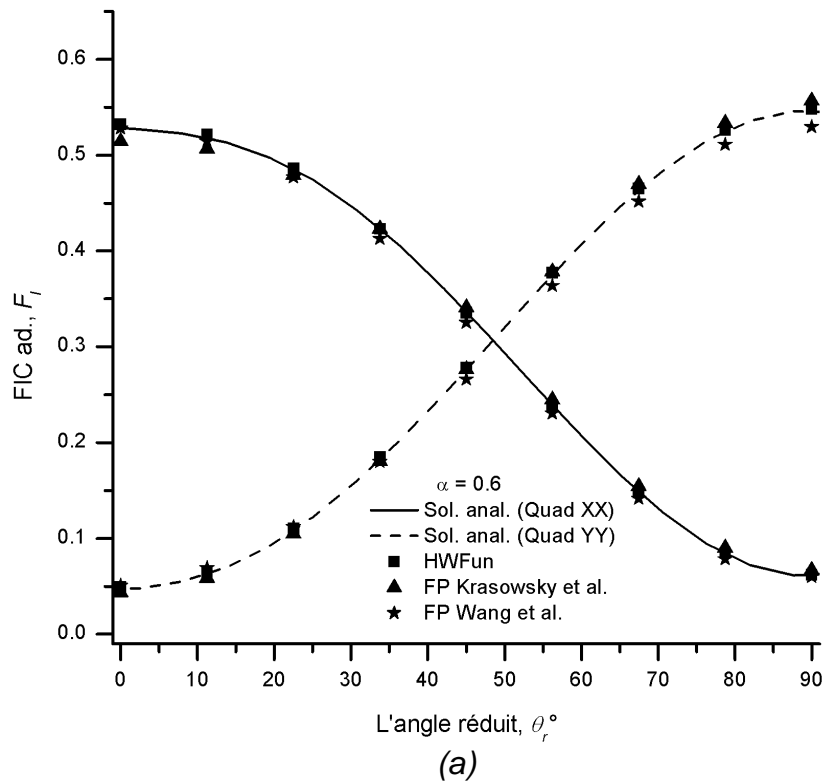


Figure 20 : FIC adimensionnel  $F_I$  sur le contour de la fissure elliptique pour  $\alpha = 0.6$   
 (a) Chargement quadratique XX et YY – (b) Chargement quadratique XY

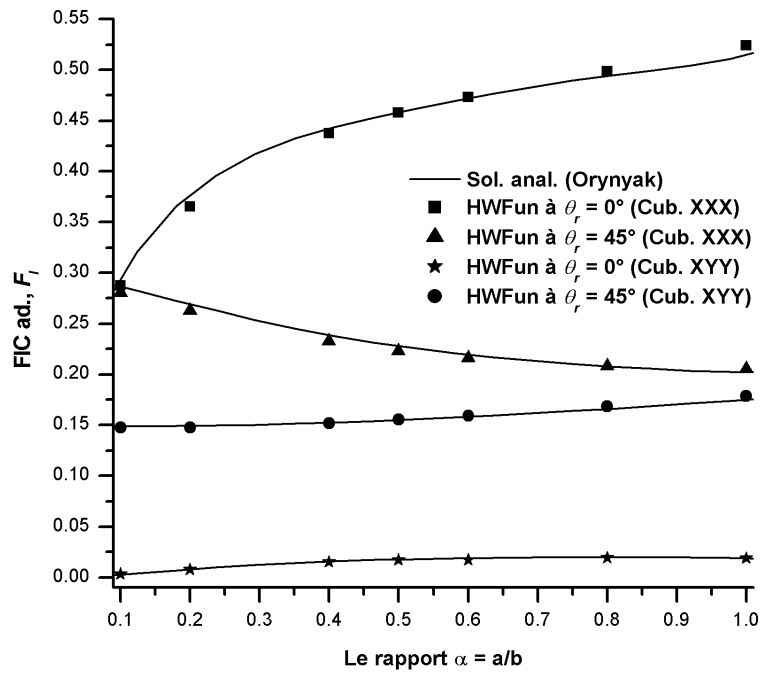


Figure 21 : Variation du FIC adimensionnel  $F_I$  en fonction du rapport  $\alpha$  à  $\theta_r = 0^\circ$  et  $45^\circ$  pour des chargements cubiques

#### II.4.2. Fissure elliptique interne transversale dans une plaque sous flexion

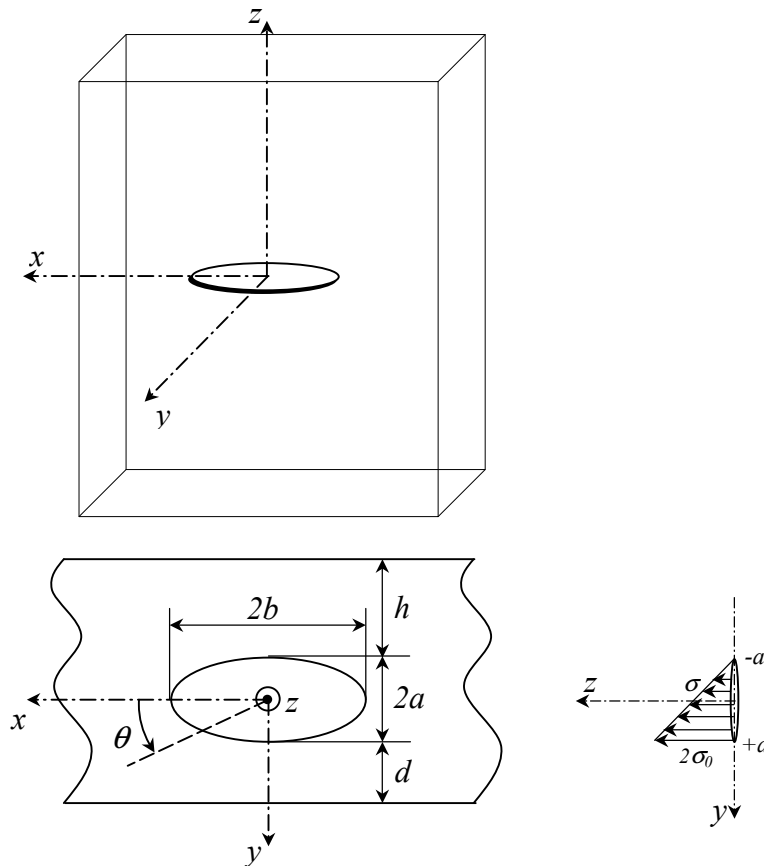


Figure 22 : Fissure elliptique interne dans une plaque infinie sous flexion

La présence des lacunes et des inclusions à l'intérieur des plaques travaillant en flexion constitue un problème rencontré couramment en pratique. L'existence de tels défauts fragilise les structures en diminuant considérablement leur résistance et augmente leur risque de fissuration. Dans l'étude de ces structures, les défauts sont souvent assimilés à des fissures elliptiques planes plus au moins aplaties, afin de pouvoir affiner le calcul de leur résistance. Pour une plaque de grandes dimensions sollicitée en flexion et comprenant une fissure elliptique transversale (voir la figure 22), l'expression du FIC est donnée par [Bar-1980] :

$$K_I = C\sigma\sqrt{\frac{\pi a}{\omega}}(\cos^2\theta_r + \alpha^2\sin^2\theta_r)^{1/4}\left[1 - \frac{k^2 E(k)\cos\theta_r}{(1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)}\right] \quad (62)$$

où  $\sigma$  est la contrainte appliquée sur la fissure,  $C$  est un facteur correcteur dépendant des paramètres géométriques  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $a/d$  et de la limite élastique ( $\sigma_e$ ),  $K(k)$  et  $E(k)$  sont les intégrales elliptiques respectivement de première espèce et seconde espèce,  $\omega$  est un paramètre qui vaut  $E(k)^2$  pour les faibles valeurs du rapport  $\sigma/\sigma_e$ . Le paramètre  $d$  est la distance de la fissure à la surface libre la plus proche et  $h$  sa distance à la deuxième surface libre ( $h \geq d$ ). Pour un coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ , la référence [Bar-1980] nous fournit les valeurs de  $C$  sous la forme d'abaques. Par exemple, pour  $a/d \leq 0.2$ ,  $\theta_r \in [-\pi/2, \pi/2]$  et  $\alpha \in [0.1, 1.0]$ , on a  $C \approx 1$ .

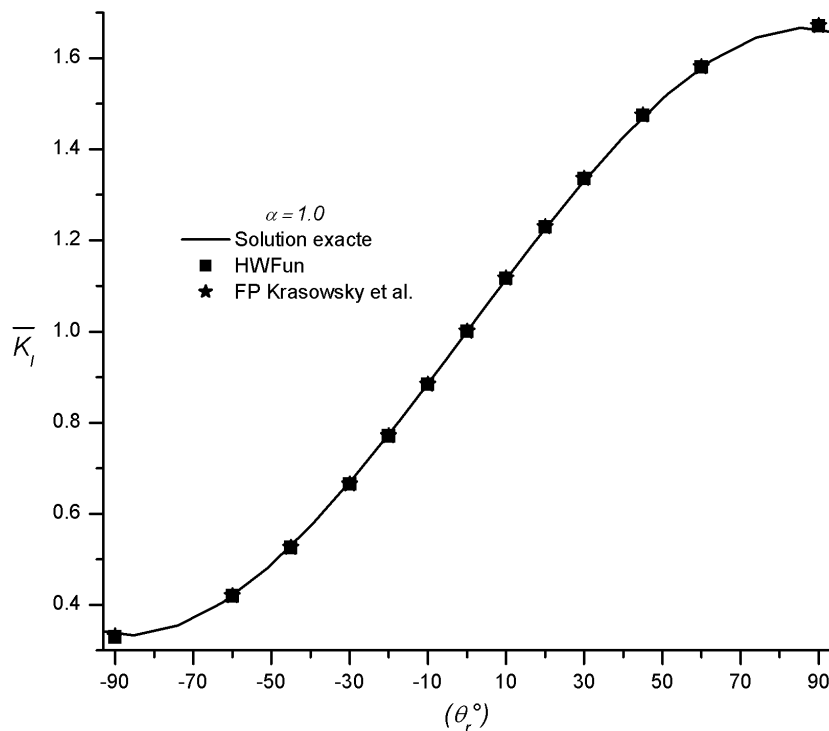


Figure 23 : Variation du FIC adimensionnel  $K_I$  sur le contour d'une fissure circulaire ( $\alpha = 1.0$ )

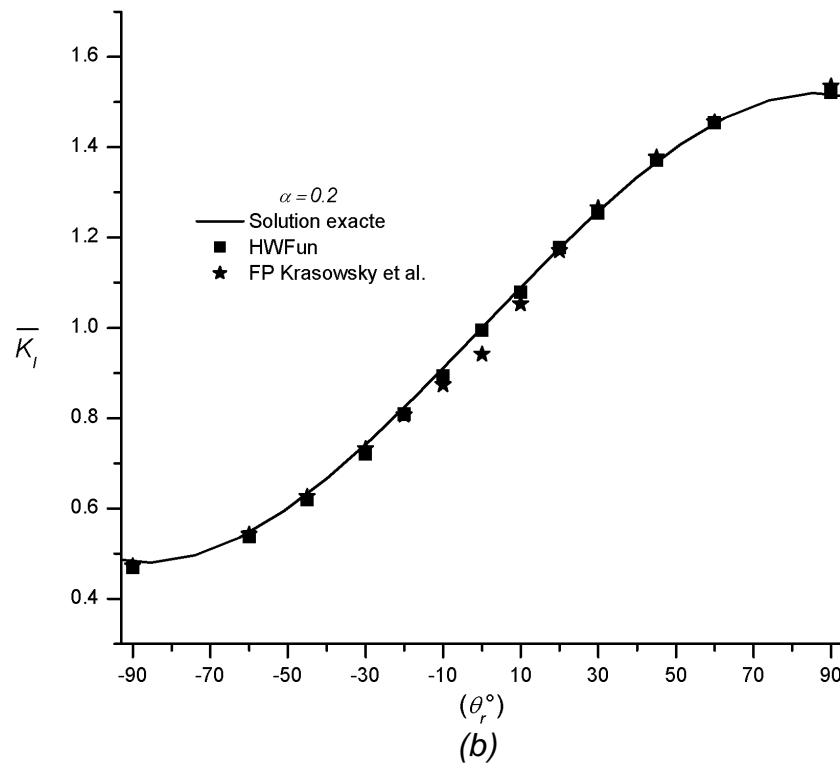
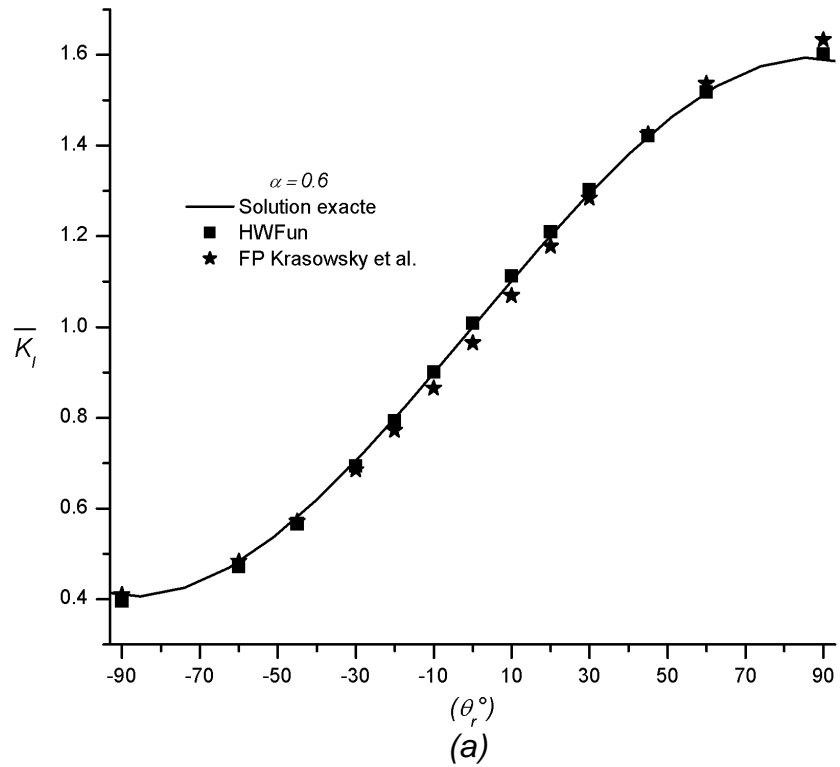


Figure 24 : Variation du FIC adimensionnel  $\bar{K}_I$  pour une fissure elliptique dans une plaque sous flexion  
 (a) pour  $\alpha = 0.6$ , (b) pour  $\alpha = 0.2$

Le cas d'une plaque de grandes dimensions (considérée comme infinie), soumise à une flexion pure comme illustré sur la figure 22 avec  $a/d \leq 0.2$  et  $\sigma(y) = \sigma_0(1+(y/a))$ , est considéré et résolu par l'approche d'hybridation. Les résultats trouvés sont reportés sur les figures 23, 24 et 25. Le graphe de la figure 23 donne le FIC en fonction de  $\theta_r$  dans le cas d'une fissure circulaire. On observe que les résultats trouvés par hybridation (*HWFun*) ou en utilisant une seule fonction de poids (celle de Krasowsky et al. [Kra-1999] utilisée dans le code *HWFun*) corroborent de façon presque identique avec la solution analytique (62), comme c'était le cas pour un milieu infini et un chargement uniforme (voir le tableau I).

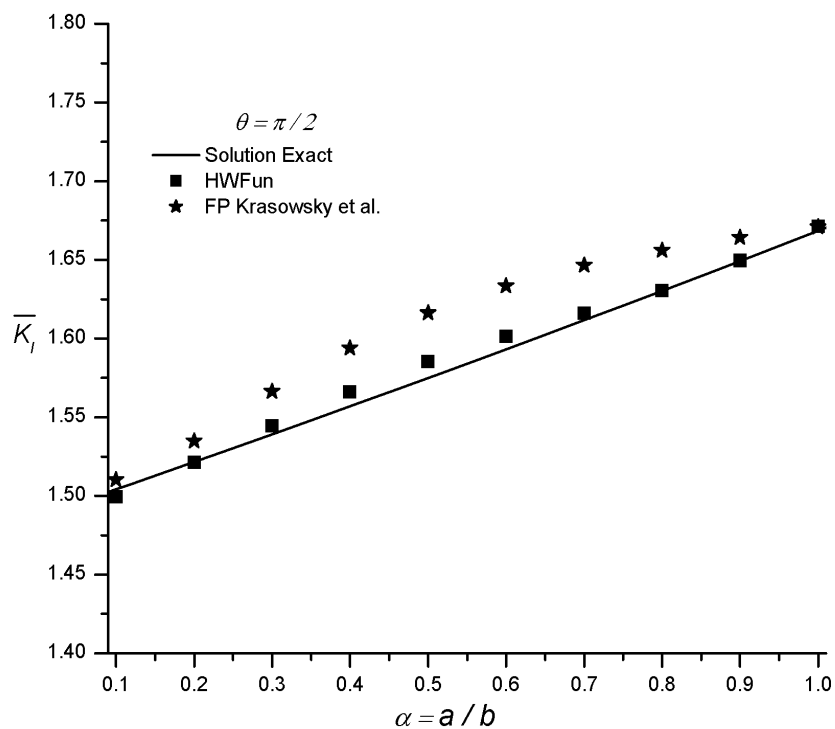


Figure 25 : Variation du FIC adimensionnel  $\bar{K}_I$  pour une fissure elliptique dans une plaque sous flexion pour  $\alpha \in [0.1, 1.0]$  et  $\theta = \pi/2$ .

Les graphes de la figure 24 montrent la même qualité de résultats concernant  $\bar{K}_I$  calculés avec notre code *HWFun* basé sur l'hybridation et ceux trouvés en utilisant la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999]. On constate notamment un net avantage de l'approche par hybridation pour  $-30^\circ < \theta_r < +30^\circ$ . Sur le graphe de la figure 25, on s'intéresse au FIC maximum sur le contour de la fissure ( $\theta_r = \pi/2$ ) pour différentes valeurs de  $\alpha$  (de 0.1 à 1.0). Comparés à la solution analytique, on observe que les résultats obtenus par hybridation sont



meilleurs que ceux obtenus en utilisant la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999] sur tout le domaine de la fissure ( $\beta = 1$ ).

### II.4.3. Fissure elliptique interne dans un tube sous pression

Le problème des tubes travaillant sous pression interne est aussi répondu que le problème précédent (plaque sous flexion). La présence de lacunes, d'inclusions ou de défauts de joints de soudure dans ces structures fragilise ces dernières et diminue leur ténacité. Comme pour le cas des plaques ces défauts sont couramment décrits comme des fissures de forme elliptique. Ces fissures peuvent être transversales, longitudinales ou autres. Ce sont les fissures longitudinales, objet de notre étude, qui sont les plus dangereuses compte tenu du risque d'ouverture de la fissure sous l'effet de la pression interne. C'est un problème où le chargement, dû essentiellement à la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  à l'intérieur de la fissure, a une distribution non-polynomiale. Cette dernière est donnée par la relation de Lamé :

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i \left[ \left( \frac{R_i + t}{R_i + t_1 + y} \right)^2 + 1 \right] / \left[ \left( \frac{R_i + t}{R_i} \right)^2 - 1 \right] \quad (63)$$

avec  $R_i$  le rayon intérieur du tube,  $t$  son épaisseur,  $t_1$  et  $t_2$  les distances entre le centre de la fissure et les parois du tube,  $p_i$  la pression intérieure et  $y$  l'ordonnée du point  $Q$  liée au repère mentionné sur la figure 26.

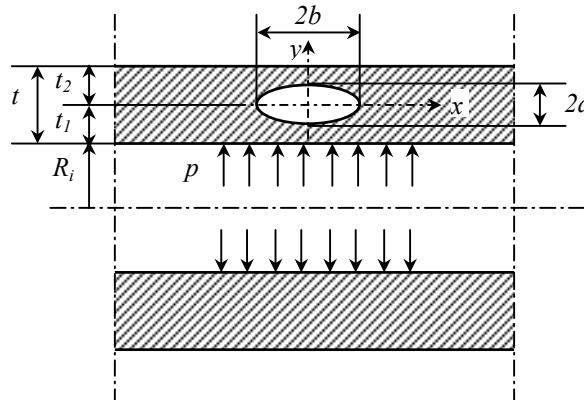


Figure 26 : Fissure elliptique interne dans un tube sous pression

La présente approche est comparée avec la méthode des éléments de frontières hybrides HBEM développée par Guozhong & Kankda [Guo1-1995]. Le FIC adimensionnel  $F_I' = K_I E(k) / (p(R_i/t)\sqrt{\pi a})$  est alors déterminé sur le contour de l'ellipse pour les configurations suivantes :  $t/R_i = \{0.1, 0.25\}$ ,  $a/t_1 = a/t_2 \in \{0.2, 0.4\}$ ,  $\alpha \in \{0.25, 0.50, 1.00\}$ .

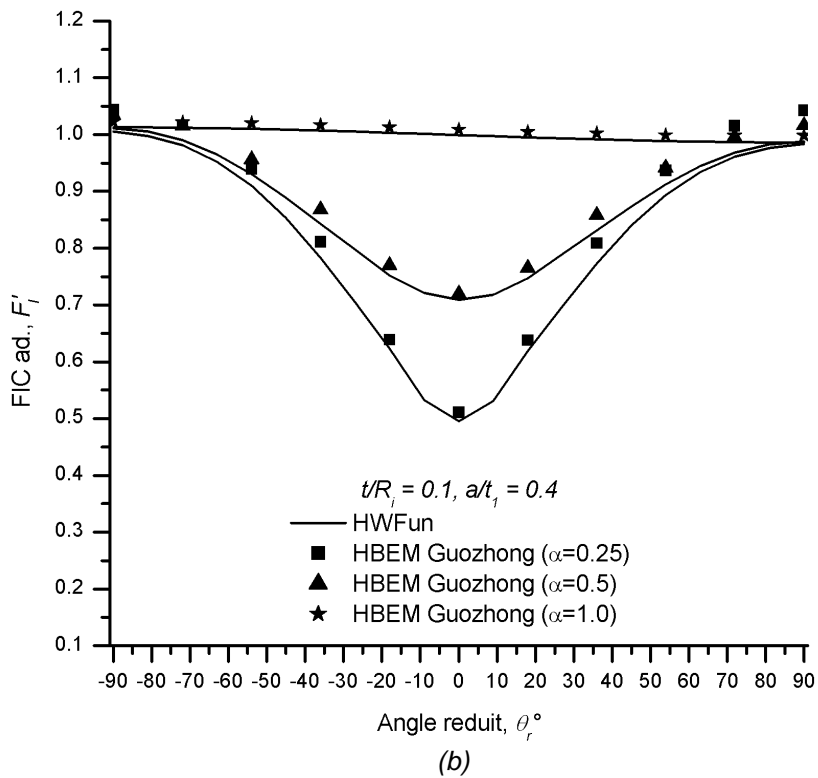
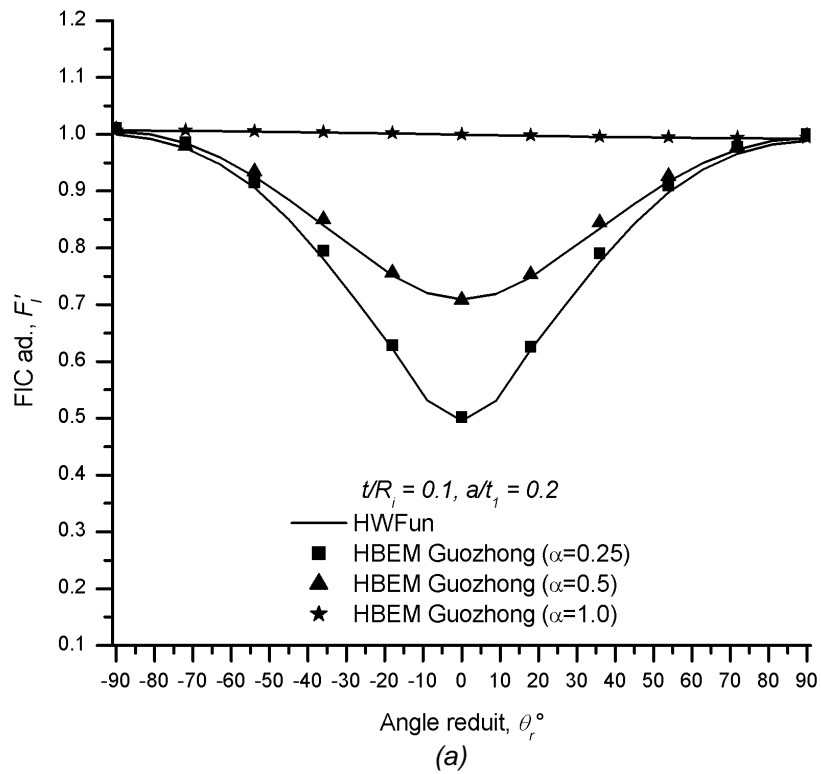


Figure 27 : FIC adimensionnel  $F_I'$  pour  $t/R_I=0.1$  (a) avec  $a/t_I = 0.2$  – (b) avec  $a/t_I = 0.4$

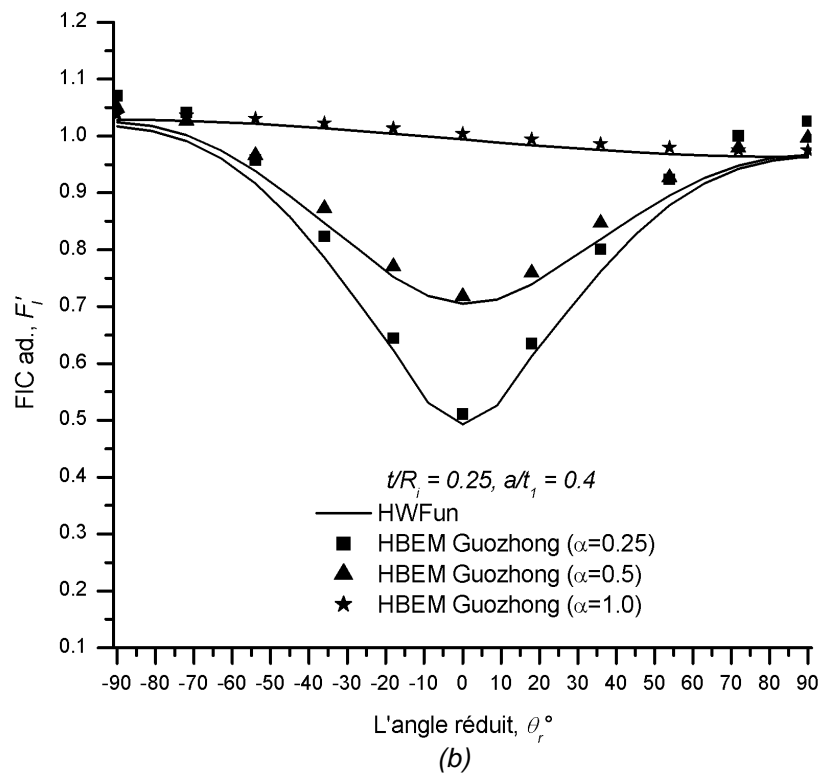
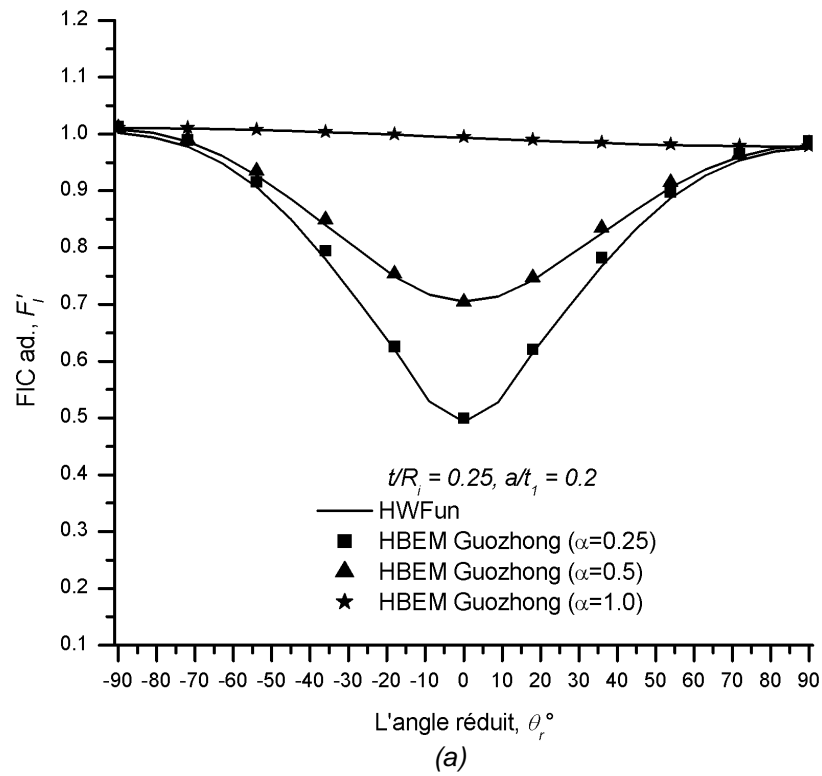


Figure 28 : FIC adimensionnel  $F_I'$  pour  $t/R_i=0.25$  (a) avec  $a/t_1 = 0.2$  – (b) avec  $a/t_1 = 0.4$

Comme on peut le constater sur les comparaisons reportées sur les figures 27a et 27b pour  $t/R_i=0.1$ , notre approche initialement prévue pour des corps infinis reste valable même pour des corps finis (c'est le cas pour le tube étudié). Le décalage avec la HBEM, qui est une approche plus générale, ne dépasse pas les 6% tant que  $a/t_1$  et  $a/t_2 \leq 0.4$ .

Le décalage augmente en se rapprochant des surfaces libres du tube, c'est-à-dire lorsque le rapport  $a/t_1$  augmente ou lorsque  $\theta_r$  tend vers  $\pm 90^\circ$ . Les surfaces libres engendrent des concentrations de contraintes non prises en compte par la méthode d'hybridation dans sa version actuelle. Comme prévu, on remarque que la HBEM montre une certaine sensibilité à cet effet au voisinage de la surface libre ( $\theta \rightarrow \pm 90^\circ$ ) lorsque  $a/t_1$  augmente. Les mêmes remarques sont maintenues pour  $t/R_i=0.25$  car l'influence de l'épaisseur du tube sur la convergence des résultats n'est pas trop importante comme le montrent les figures 28a et 28b.

## **II.5. CONCLUSION**

Dans ce chapitre, une présentation détaillée de la technique d'hybridation a d'abord été proposée. Dans le but d'exploiter cette technique pour résoudre le problème de structures fissurées, les équations de la méthode ont été programmées en langage C++ pour donner naissance à un code de calcul appelé HWFun. Ce dernier a été utilisé pour réaliser des tests de validation des structures tridimensionnelles élastiques (milieu infini sous chargement polynomial, plaque en flexion et tube sous pression interne) contenant des fissures elliptiques. Les comparaisons entre les valeurs du FIC en mode I obtenues par hybridation et les résultats analytiques (lorsqu'ils existent) ou les résultats numériques basés sur les fonctions de poids « simples » ont permis de mettre en évidence l'apport de l'hybridation dans l'amélioration de la précision dans l'évaluation du FIC et l'élargissement du domaine d'applicabilité (validité) de ce type de méthodes. Des résultats probants ont également été obtenus par hybridation en la comparant à des méthodes plus générales (FEM, XFEM et HBEM).

# Chapitre III : Couplage de la méthode d'hybridation avec la PWFm et son application sur les fissures débouchantes

<b>Chapitre III : Couplage de la méthode d'hybridation avec la PWFm et son application sur les fissures débouchantes.....</b>	<b>52</b>
III.1. INTRODUCTION.....	53
III.2. PRESENTATION DU COUPLAGE DE LA METHODE D'HYBRIDATION AVEC LA PWFm.....	53
III.3. TESTS DE VALIDATION POUR DES FISSURES SEMI-ELLIPTIQUES DEBOUCHANTES .....	58
III.3.1. Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince .....	58
III.3.2. Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube épais .....	61
i) <i>Cas d'un chargement polynomial</i> .....	61
ii) <i>Cas d'un chargement de Lamé</i> .....	64
III.3.3. Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion .....	66
III.3.4. Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement polynomial .....	74
III.3.5. Plaque contenant une fissure semi-elliptique sous un chargement exponentiel .....	78
III.4. CONCLUSION .....	82

### **III.1. INTRODUCTION**

L'étude des fissures semi-elliptiques présente un grand intérêt pratique dès qu'on s'intéresse à des milieux présentant des surfaces libres. C'est le cas de beaucoup de structures industrielles (barres, plaques, tubes, ...) ou des milieux semi infinis (roches, massifs de béton, structures métalliques de grandes dimensions, ...). L'importance d'une telle étude découle de la dangerosité et de risques de rupture causés par ce genre de fissures. Il faut signaler que pour ce cas, l'effet de la surface libre multiplie de façon importante le risque de fissuration par rapport à une fissure interne, comme on va s'en apercevoir en avançant dans le développement de ce chapitre. Par ailleurs, les fissures semi-elliptiques débouchantes représentent l'avantage d'être plus exploitables du point de vue expérimental par rapport aux fissures internes, notamment lorsqu'il s'agit de propagation de fissure par fatigue. Ceci est dû essentiellement à la facilité relative pour accéder aux mesures de déformations/déplacements à l'intérieur de la fissure, surtout lorsque les dimensions de cette dernière augmentent sous l'action de la sollicitation.

Le prolongement de notre méthode d'hybridation vers le traitement des fissures semi-elliptiques se voit justifier par toutes ces considérations. Afin de réaliser cet objectif, nous avons adopté une démarche basée sur le couplage de l'hybridation avec une autre technique appelée PWFm (Point Weight Function Method) développée par Orynyak [Ory-1994].

### **III.2. PRESENTATION DU COUPLAGE DE LA METHODE D'HYBRIDATION AVEC LA PWFm**

La PWFm consiste à chercher l'expression de la fonction de poids  $W_{QQ'}$  du cas semi-elliptique en se basant sur la solution du cas elliptique. La fonction de poids  $W_{QQ'}$  est alors décomposée en deux parties asymptotique et correctrice [Ory-1995] :

$$W_{QQ'} = W_{QQ'}^A + W_{QQ'}^C \quad (64)$$

où  $W_{QQ'}^A$  et  $W_{QQ'}^C$  sont respectivement les composantes asymptotique et correctrice.

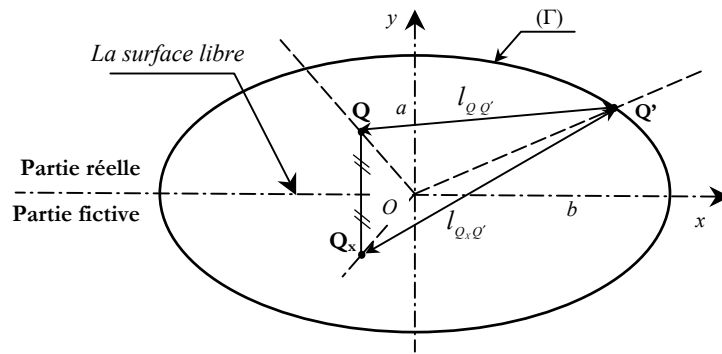
La composante asymptotique  $W_{QQ'}^A$  représente l'approximation principale de la fonction de poids  $W_{QQ'}$  qui se confond avec celle-ci lorsqu'elle atteint sa valeur maximale (ceci sera développé ultérieurement). Elle est donc supposée être la composante la plus importante du point de vue quantitatif.

Afin de déterminer l'expression de  $W_{QQ'}^A$ , on se place d'abord dans la zone sans influence de la surface libre mentionnée sur la figure 29. Dans ce cas,  $Q$  ou  $Q'$  sont des points internes et

la fissure semi-elliptique est sensée se comporter comme une fissure elliptique de même géométrie mais chargée uniquement sur sa moitié. Nous considérons  $W_{QQ'}^A$  comme la fonction de poids d'une fissure elliptique qu'on note  $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$  et prend la forme suivante par hybridation:

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} = \begin{cases} W_{QQ'} & \text{de l'eqn (31) si } Q \in \text{zone I} \\ W_{QQ'} & \text{de l'eqn (30) si } Q \in \text{zone II} \end{cases} \quad (65)$$

conformément à l'équation (36).



**Figure 29 :** Mise en évidence de la partie réelle et la partie fictive d'une fissure semi-elliptique débouchante

Dans le cas où l'effet de la surface libre est très fort, introduisant une plus grande ouverture de la fissure, on aura par conséquent une fonction de poids  $W_{QQ'}^A$  aux valeurs plus élevées, lorsque  $Q$  et  $Q'$  sont simultanément très proches de la surface libre. Dans ce cas, la fissure est supposée se comporter comme une fissure elliptique mais chargée sur sa totalité par un chargement symétrique par rapport au plan de la surface libre. La partie du chargement rajoutée par symétrie est fictive et a pour intérêt la prise en compte de l'effet de la surface libre dans le calcul du FIC.

Chaque point  $Q$  chargé par  $q(Q)$  est associé à son symétrique  $Q_x$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Le point  $Q_x$  se trouvant à une distance  $l_{Q_xQ'}$  du point  $Q'$  (voir la figure 29) est soumis au même chargement. On peut établir d'après les équations (30) et (31) donnant l'expression de  $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$ , la relation suivante entre les fonctions de poids  $W_{Q_xQ'}^{(Ellipse)}$  et  $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$  :

$$W_{Q_xQ'}^{(Ellipse)} = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left( \frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_xQ'}^2} \right) \quad (66)$$

ce qui permet de rassembler ces deux fonctions de poids en une seule, à savoir :

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} + W_{Q_x Q'}^{(Ellipse)} = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left[ 1 + \frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_x Q'}^2} \right] \quad (67)$$

On retrouve dans (67) le résultat énoncé par Isida et al.[Isi-1984] et Orynyak et al.[Ory-1995] sans une justification explicite.

L'autre souci qui n'est également pas explicitement traité par Orynyak et al. [Ory-1994, Ory-1995] porte sur l'absence de la solution lorsqu'on est entre ces deux cas limites. Autrement dit, quels sont les intervalles de validité de chacune des équations (65) et (67) en fonction des positions de  $Q$  et  $Q'$  ? on se propose dans ce qui suit de tenter de répondre à cette question.

Pour respecter les conditions liées à chacune des équations (65) et (67) tout en offrant une solution pour les situations intermédiaires, nous proposons une forme compacte de  $W_{QQ'}^A$  valide pour toutes les positions des points  $Q$  et  $Q'$  :

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left[ 1 + \left( \frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_x Q'}^2} \right) \left( 1 - \frac{y_{Q'}}{a} \right) \left( 1 - \frac{y_Q}{a} \right) \right] \quad (68)$$

où  $y_Q$  et  $y_{Q'}$  sont la projection sur l'axe ( $O_y$ ) des points  $Q$  et  $Q'$ .

Pour le choix de la composante correctrice, on doit, en premier lieu, exploiter la définition de  $W_{QQ'}^A$  pour en tirer la première condition concernant  $W_{QQ'}^C$ . On a déjà évoqué que  $W_{QQ'}^C$  de l'équation (64) et  $W_{QQ'}^A$  se confondent lorsque  $W_{QQ'}^A$  prend sa valeur maximale. Ce qui correspond au maximum de  $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$  et correspond à son tour au minimum de la distance  $l_{QQ'}$  d'après l'équation (67). Donc pour  $W_{QQ'}^C$ , la première condition à respecter est

$$W_{QQ'}^C \rightarrow W_{QQ'}^A \text{ lorsque } l_{Q_x Q'} \rightarrow 0 \text{ ce qui équivaut à } \frac{W_{QQ'}^C}{W_{QQ'}^A} \rightarrow 0 \text{ lorsque } Q \rightarrow Q'.$$

Par ailleurs, pour obtenir l'expression de  $W_{QQ'}^A$ , on a assimilé une fissure semi-elliptique à une fissure de forme elliptique, ce qui est un peu loin de la réalité si on observe le problème tel qu'il est décrit sur la figure 30. Ceci nous a amené à envisager un terme correctif  $W_{QQ'}^C$  à ajouter à  $W_{QQ'}^A$  dans l'équation (64). Cependant, il faut noter que ce terme n'est nécessaire que lorsque  $Q$  s'éloigne du front de la fissure ( $\Gamma$ ), c'est-à-dire dans la zone où l'ouverture d'une fissure semi-elliptique ne coïncide plus avec celle d'une fissure elliptique (voir la figure 30).

Ceci nous fournit la deuxième condition concernant  $W_{QQ'}^C$  qui se résume à  $\frac{W_{QQ'}^C}{W_{QQ'}^A} \rightarrow 0$  lorsque

$Q$  est au voisinage de ( $\Gamma$ ).



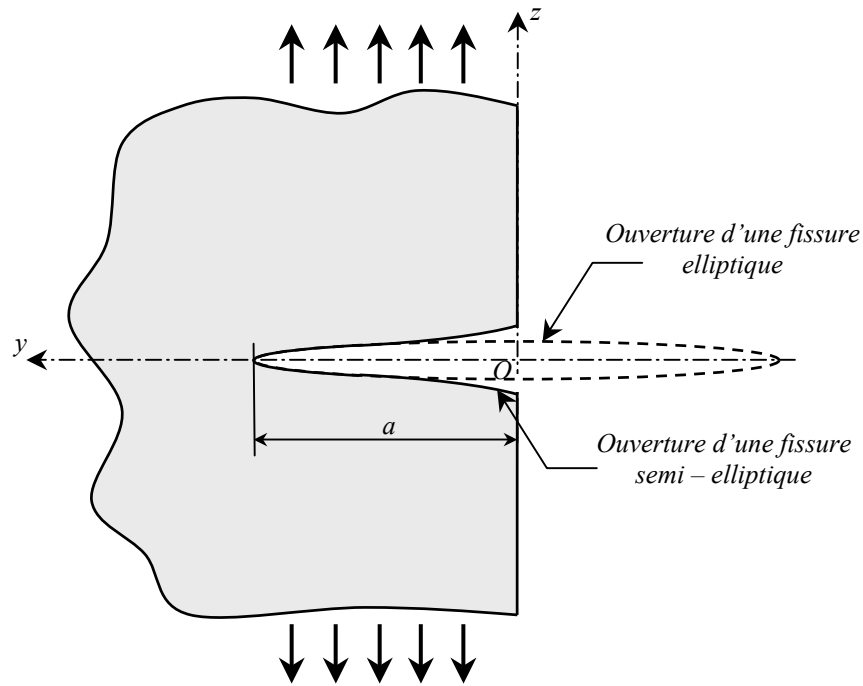


Figure 30 : Coupe d'une fissure semi - elliptique débouchante suivant le plan (Oyz)

Pour récapituler, nous avons deux conditions à respecter concernant le rapport  $W_{QO'}^C / W_{QO'}^A$ . Il doit être négligeable ( $W_{QO'}^C / W_{QO'}^A \rightarrow 0$ ) lorsque :

- i) Le point de chargement  $Q$  est très proche du point de calcul  $Q'$ .
- ii) Le point de chargement  $Q$  est au voisinage du contour ( $\Gamma$ ).

On trouve ces même conditions chez Orynyak et al.[Ory-1995] qui les ont énoncé sans justification. Ils ont choisi :

$$W_{QO'}^C = W_{QO'}^A \left(1 - \frac{r}{R}\right) D(\theta, \alpha) \quad (69)$$

pour satisfaire la première condition, et :

$$W_{QO'}^C = W_{QO'}^A \left(\frac{l_{QO'}^2}{a^2}\right) D(\theta, \alpha) \quad (70)$$

pour la deuxième condition.

$D(\theta, \alpha)$  est la seule fonction inconnue à déterminer. Elle est liée à la géométrie de la fissure et la position angulaire du point de calcul  $Q'$ . Orynyak et al. [Ory-1994] n'ont pas précisé également les intervalles d'utilisation de chacune des équations (69) et (70).

De la même manière que pour  $W_{QQ'}^A$ , nous proposons une forme compacte de la composante  $W_{QQ'}^C$ . Elle convient également à n'importe quelle position de  $Q$ , tout en essayant de vérifier les deux conditions citées ci-dessus :

$$W_{QQ'}^C = W_{QQ'}^A \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\min(l_{QQ'}^2, a^2)}{a^2} D(\theta, \alpha) = \bar{W}_{QQ'}^C D(\theta, \alpha) \quad (71)$$

Par rapport à l'expression donnée par Orynyak et al. [Ory-1995], nous avons remplacé  $l_{QQ'}^2$  par  $\min(l_{QQ'}^2, a^2)$  pour forcer le rapport  $l_{QQ'}^2/a^2$  à être inférieur à 1, ceci n'a pas également été suivi de la moindre indication dans la référence [Ory-1995].

Le facteur géométrique  $D(\theta, \alpha)$  est déterminé lors du développement de la méthode de calcul dans la section suivante.

Nous considérons que la distribution du chargement à l'intérieur de la fissure est arbitraire,  $q(Q) = \sigma(x, y)$  et nous adoptons le FIC adimensionnel  $G(\theta, \alpha)$  suivant :

$$G(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} K_I(\theta, \alpha) \quad (72)$$

On rappelle que  $E(k)$  est l'intégrale elliptique de seconde espèce et  $k = \sqrt{1 - \alpha^2}$ .

En utilisant l'équation (29) donnant l'expression intégrale de  $K_I$  avec l'équation (64), on obtient :

$$G(\theta, \alpha) = I^A(\theta, \alpha) + I^C(\theta, \alpha) D(\theta, \alpha) \quad (73)$$

Avec l'équation (71), les intégrales adimensionnelles  $I^A, I^C$  peuvent être données par :

$$I^A(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \int_{(S)} \sigma(x, y) W_{QQ'}^A dS \quad \text{et} \quad I^C(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \int_{(S)} \sigma(x, y) \bar{W}_{QQ'}^C dS \quad (74)$$

Si pour un chargement particulier  $\sigma_0$ , la solution  $G_0(\theta, \alpha)$  est connue (solution de référence), le calcul des intégrales  $I_0^A(\theta, \alpha)$  et  $I_0^C(\theta, \alpha)$  liées à ce cas de référence permet de déterminer le paramètre  $D(\theta, \alpha)$  en appliquant l'équation (73) :

$$D(\theta, \alpha) = \frac{G_0(\theta, \alpha) - I_0^A(\theta, \alpha)}{I_0^C(\theta, \alpha)} \quad (75)$$

L'introduction de cette équation dans (73) permet de trouver la solution générale donnant le FIC adimensionnel pour toute autre chargement  $\sigma(x, y)$  :

$$G(\theta, \alpha) = I^A(\theta, \alpha) + I^C(\theta, \alpha) \left( \frac{G_0(\theta, \alpha) - I_0^A(\theta, \alpha)}{I_0^C(\theta, \alpha)} \right) \quad (76)$$

En appliquant la technique basée sur le couplage exposée ci-dessus, nous envisageons dans la section suivante de traiter les fissures semi-elliptiques pour des problèmes types.

### **III.3. TESTS DE VALIDATION POUR DES FISSURES SEMI-ELLIPTIQUES DÉBOUCHANTES**

Dans cette partie, on se propose de résoudre cinq problèmes types de fissures semi-elliptiques débouchantes en utilisant la technique d'hybridation couplée avec la PWFm dans le cas quasi-statique. Pour se faire, l'effet de bord du à la surface libre est pris en compte en modifiant la fonction de poids hybride donnée par (36) selon les expressions (64), (68) et (71) développées dans la section (III.2). En l'absence de solutions analytiques exactes pour l'évaluation du FIC dans le cas de fissures semi-elliptiques ou de valeurs expérimentales, plus disponibles en fatigue (voir le chapitre IV), les résultats obtenus avec la présente approche seront comparés à des résultats de la littérature obtenus par approximation numérique ou par une démarche empirique. Les problèmes traités dans ce chapitre sont dans l'ordre :

- 1) Tube mince contenant une fissure semi-elliptique débouchante interne sous un chargement polynomial.
- 2) Fissure semi-elliptique à l'intérieur d'un tube épais sous un chargement polynomial et sous un chargement de Lamé.
- 3) Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion et sous sollicitation composée (flexion+traction).
- 4) Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque avec un chargement polynomial.
- 5) Plaque contenant une fissure semi-elliptique débouchante sous un chargement exponentiel.

On va successivement examiner les cinq cas mentionnés précédemment.

#### **III.3.1. Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince**

La théorie de Lamé (voir la référence [Tim-1970]) montre que les fissures longitudinales situées sur la paroi interne d'un tube comme le montre la figure 31 sont les plus dangereuses. Nous appliquons l'approche d'hybridation couplée avec la PWFm développée ici pour évaluer le FIC dans le cas d'un tube relativement mince avec  $t/R_i = 0.1$ ,  $a/t = 0.5$  pour  $\alpha = 1.0$  et  $\alpha = 0.4$  (voir la figure 31) renfermant une fissure soumise à un chargement intérieur de forme polynomiale  $p = \sigma_0(y/a)^i$ . Nous considérons que la solution de référence est celle qui

correspond à  $p=\sigma_0$  en accord avec la technique de PWFm. Le calcul de  $\bar{K}_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)}$

est réalisé pour les deux points caractéristiques de la fissure  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$  successivement pour des chargements linéaire ( $i=1$ ), quadratique ( $i=2$ ) et cubique ( $i=3$ ). D'après les graphes de la figure 32, les résultats trouvés avec notre code de calcul *HWFun* sont en bon accord avec ceux trouvés par Raju & Newman [Raj-1982] utilisant la méthode des éléments finis et ceux trouvés par Krasowsky *et al.* [Kra-1999], Vainshtock [Vai-1991] et Orynyak *et al.* [Ory-1995] utilisant les méthodes de fonction de poids. D'après ces graphes, le mode de chargement imposé influe de manière significative sur les valeurs du FIC. En effet,

- i) Plus  $\alpha$  diminue plus les valeurs du FIC augmentent.
- ii) Le maximum du FIC correspond au chargement uniforme pour lequel le calcul de résistance sera éventuellement effectué.
- iii) Seul le chargement uniforme provoque un FIC plus important au point de surface ( $\theta = 0^\circ$ ) qu'au point du fond de la fissure ( $\theta = 90^\circ$ ).

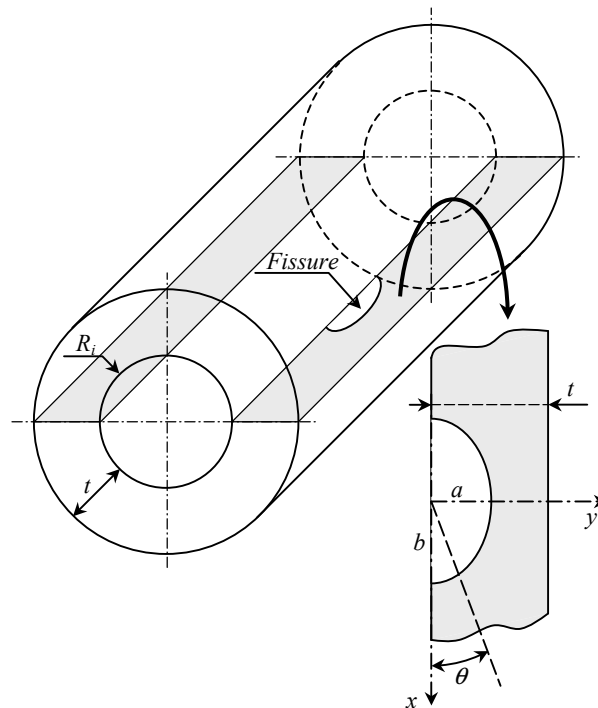


Figure 31 : Fissure semi – elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube

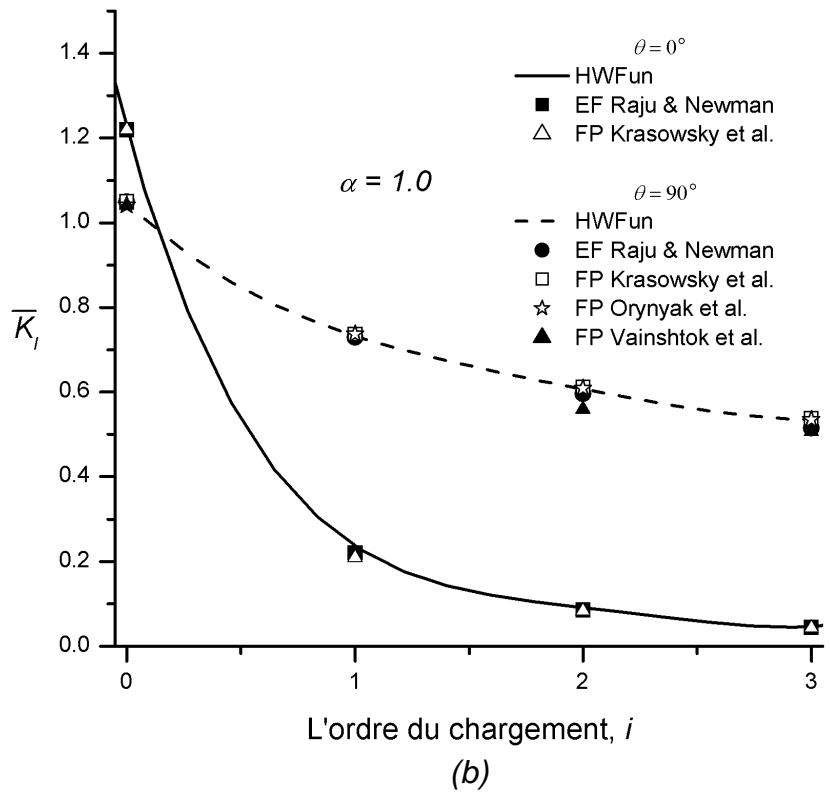
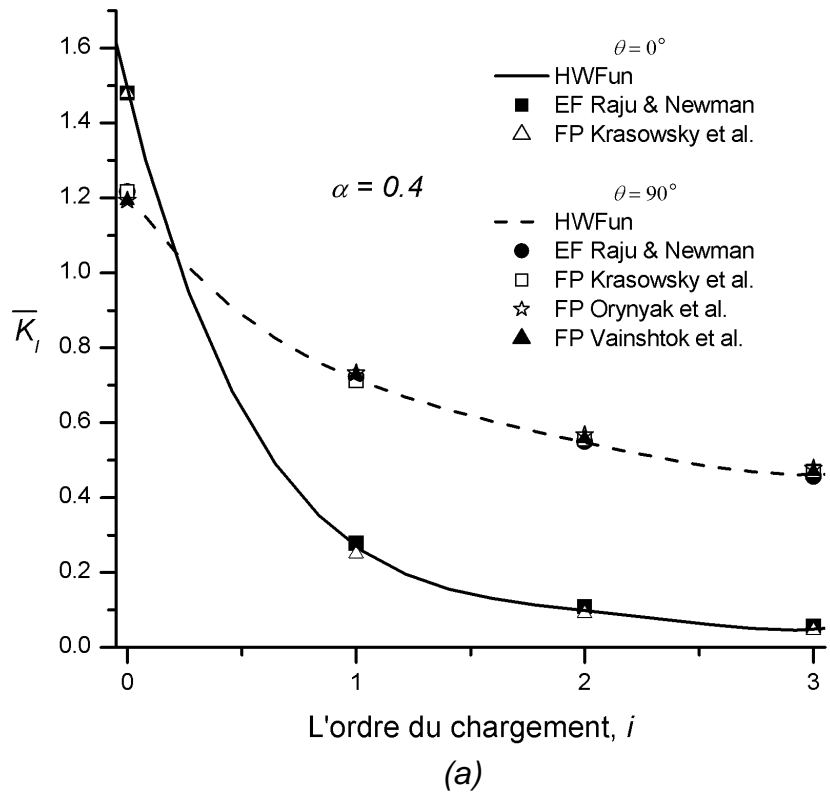


Figure 32 : FIC adimensionnel pour une fissure semi-elliptique dans un tube mince et sous un chargement polynomial - (a)  $\alpha = 1.0$  - (b)  $\alpha = 0.4$

### **III.3.2. Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube épais**

#### ***i) Cas d'un chargement polynomial***

Dans cet exemple, on résout le même type de problème qu'en (III.3.1) posé sur un tube de même épaisseur et de rayon intérieur relativement faible ( $t/R_i = 0.5$ ). Le but étant de tester la validité de l'approche d'hybridation et de mieux connaître ses limites notamment lorsqu'on s'éloigne de l'hypothèse d'un milieu semi-infini (une surface libre loin d'être plate), comme c'est le cas de cet exemple.

Le chargement considéré est similaire à celui de l'exemple précédent. Il s'agit d'un chargement à l'intérieur de la fissure de la forme polynomiale  $p = \sigma_0 (y/a)^i$ . Les deux cas relatifs au rapport  $\alpha$  que nous retenons pour le présent calcul sont ceux traités par Mettu *et al.* [Met-1992] à savoir  $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 1$ . Nous considérons que l'ordre du chargement et la profondeur relative de la fissure sont variables ;  $i \in \{0, 0.5, 1, 2, 3\}$  et  $\frac{a}{t} \in [0, 1]$ .

Comme pour le cas du tube mince, la solution de référence retenue est celle qui correspond au chargement le plus simple  $p = \sigma_0$  ( $i=0$ ). Dans les figures 33 et 34, nous proposons une comparaison entre les valeurs du FIC adimensionnel  $\bar{K}_I$  obtenues en utilisant notre code de calcul et celles obtenues par Mettu *et al.* [Met-1992] pour les deux points caractéristiques du bout de la fissure ; le point de surface ( $\theta = 0^\circ$ ) et le point du fond ( $\theta = 90^\circ$ ). Les résultats de Mettu *et al.* [Met-1992], obtenus par la méthode des éléments finis basée sur le maillage de toute la structure, nous serviront comme des résultats de référence que nous utiliserons pour apprécier la fiabilité de la technique d'hybridation.

Les comparaisons effectuées (figures 33 et 34) permettent de montrer la très bonne concordance de nos résultats avec ceux de Mettu *et al.* [Met-1992]. Cette concordance se dégrade en augmentant la profondeur relative de la fissure  $a/t$ . Ce que nous trouvons très logique vu l'influence de la deuxième surface libre (paroi externe du tube) non prise en compte par notre approche.

Les observations faites dans l'exemple précédent concernant l'influence du mode de chargement restent valables. Ce qu'on peut rajouter est le fait que le FIC croit aussi en augmentant la profondeur relative  $a/t$ . Cet effet est plus accentué pour des valeurs de  $\alpha$  faibles ( $\alpha = 0.2$ ). Ceci est physiquement plausible compte tenu de la fragilisation de la structure (réduction de sa ténacité) due à l'augmentation de la profondeur de la fissure (moins de matière supportant la traction).

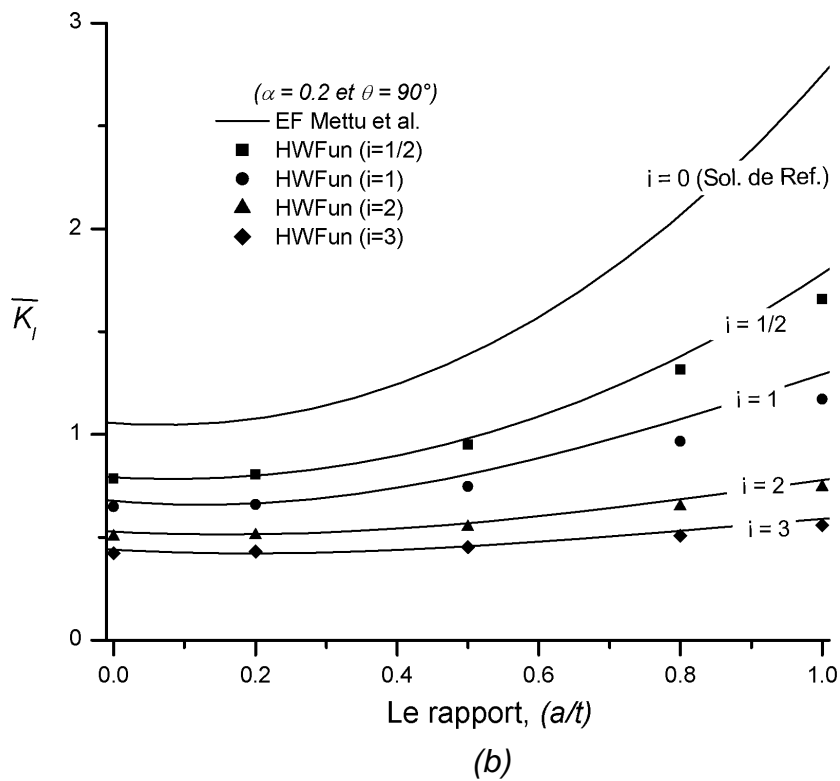
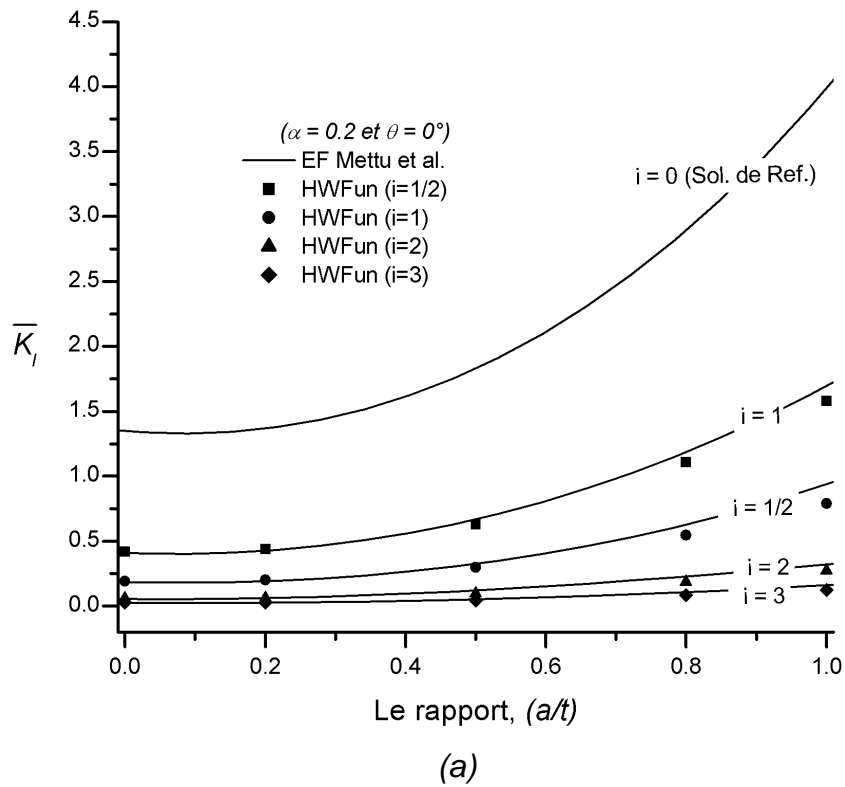


Figure 33 : FIC adimensionnel pour une fissure semi – elliptique pour dans un tube épais et sous un chargement polynomial pour  $\alpha=0.2$  (a) pour  $\theta = 0^\circ$  - (b) pour  $\theta = 90^\circ$

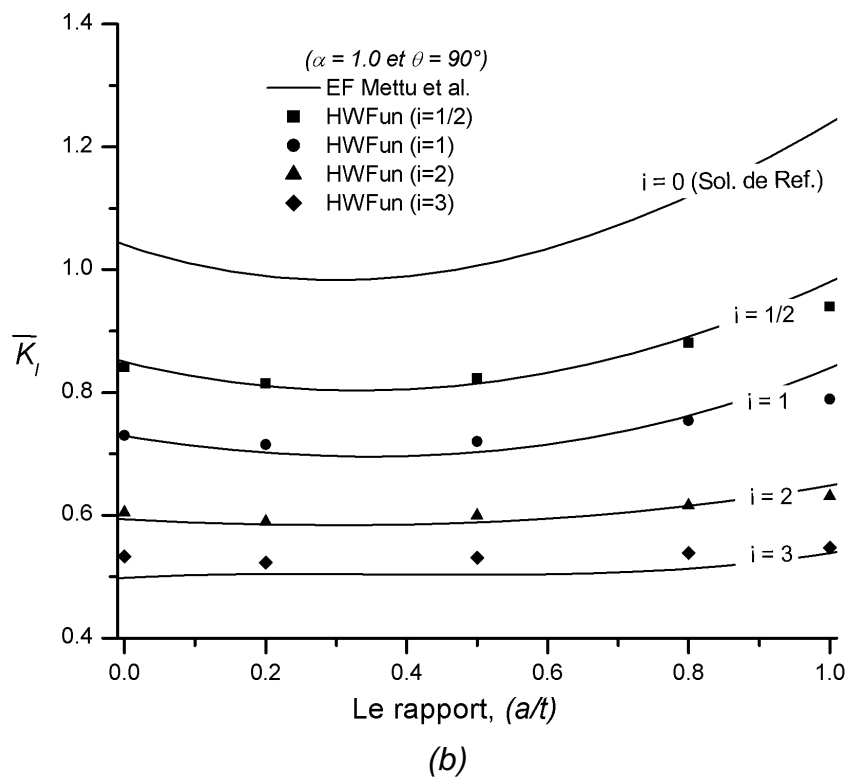
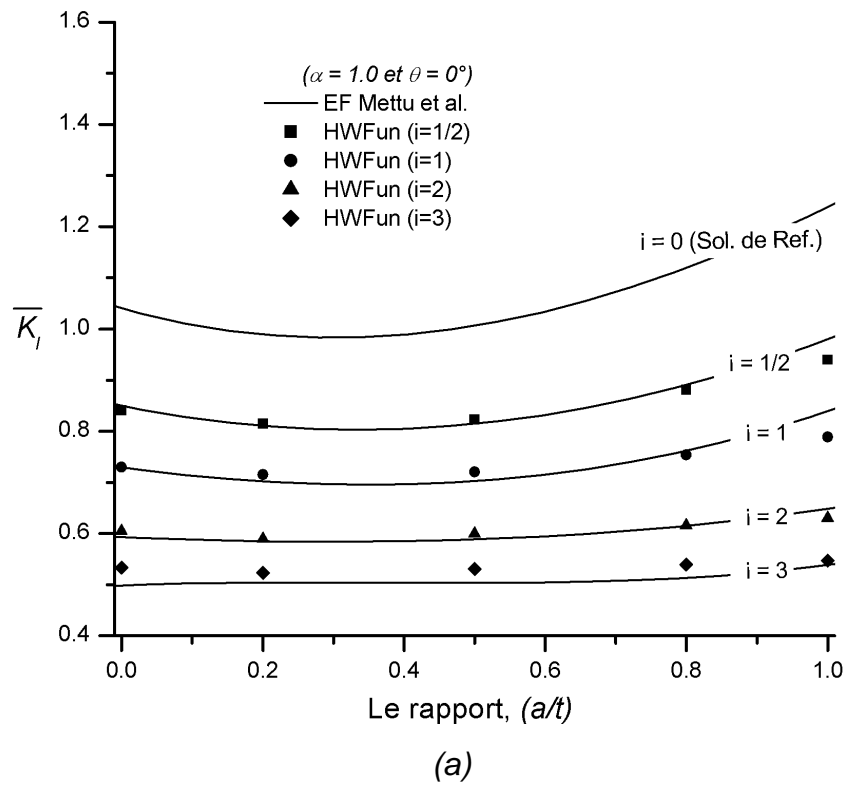


Figure 34 : FIC adimensionnel pour une fissure semi – elliptique pour dans un tube épais et sous un chargement polynomial pour  $\alpha=1.0$  (a) pour  $\theta = 0^\circ$  - (b) pour  $\theta = 90^\circ$



**ii) Cas d'un chargement de Lamé**

Dans cette partie, nous nous intéressons à un mode de chargement plus concret. Il s'agit d'appliquer directement la sollicitation due essentiellement à la contrainte de Lamé  $\sigma_{\theta\theta}$  donnée par l'équation (63), sans faire appel à des approximations polynomiales du chargement comme dans les précédents cas. L'étude de ce type de chargement est utile compte tenu de l'influence que peut avoir  $\sigma_{\theta\theta}$  sur la tenue mécanique de la structure. En effet, cette contrainte de par sa nature tend à ouvrir la fissure. De plus, sa variation en fonction de la position dans l'épaisseur donnée par (63) montre qu'elle prend son maximum au niveau de la paroi interne, ce qui rend cette contrainte encore plus néfaste pour l'intégrité physique de la structure.

De plus, dans le cas d'un écoulement à l'intérieur du tube, la contrainte due à la pression du fluide  $p_i$  qui s'infiltrerait entre les lèvres de la fissure doit être prise en compte pour trouver le chargement effectif appliqué à la fissure. Ce dernier se présente donc sous la forme suivante :

$$\sigma(y) = p_i \left[ 1 + \frac{R_i^2}{(2R_i + t)t} \left( 1 + \left( \frac{R_i + t}{R_i + y} \right)^2 \right) \right] \quad (77)$$

$y$  étant l'ordonnée selon le repère lié à l'épaisseur du tube (voir la figure 31).

Partant d'un FIC adimensionnel donné par  $\bar{K}_I = \frac{K_I E(k)}{p_i \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)}$ , nous présentons sur la figure

35 une comparaison entre les résultats que nous avons obtenus avec le code de calcul *HWFun* basé sur la technique d'hybridation des fonctions de poids et ceux trouvés par des auteurs tels que Kobayashi et al. [Kob-1979], Kendall & Perez [Ken-1993], Guozhong et al. [Guo2-1995], Zheng et al. [Zhe-1997] et Telles et al. [Tel-2002] utilisant d'autres techniques (la méthode des éléments finis, la méthode hybride des éléments de frontière HBEM, la méthode des fonction de poids et la méthode de fonction de Green utilisée dans la méthode des éléments de frontière GFBEM). Ces résultats, plus ou moins dispersés, sont purement numériques et nulle solution exacte n'est connue à ce jour comme nous l'avons précédemment évoqué. Les comparaisons permettent néanmoins d'observer la concordance du point de vue de l'allure entre nos résultats et ceux obtenus par les autres auteurs pour une profondeur relative de la fissure  $a/t$  allant de 0 à 1. Nous constatons que pour ce problème, les valeurs du FIC sont nettement plus grandes pour le point de surface ( $\theta = 0^\circ$ ) que pour le point du fond ( $\theta = 90^\circ$ ), notamment en  $\alpha = 0.2$ , et ceci pour toutes les valeurs de la profondeur relative de la fissure  $a/t$ .

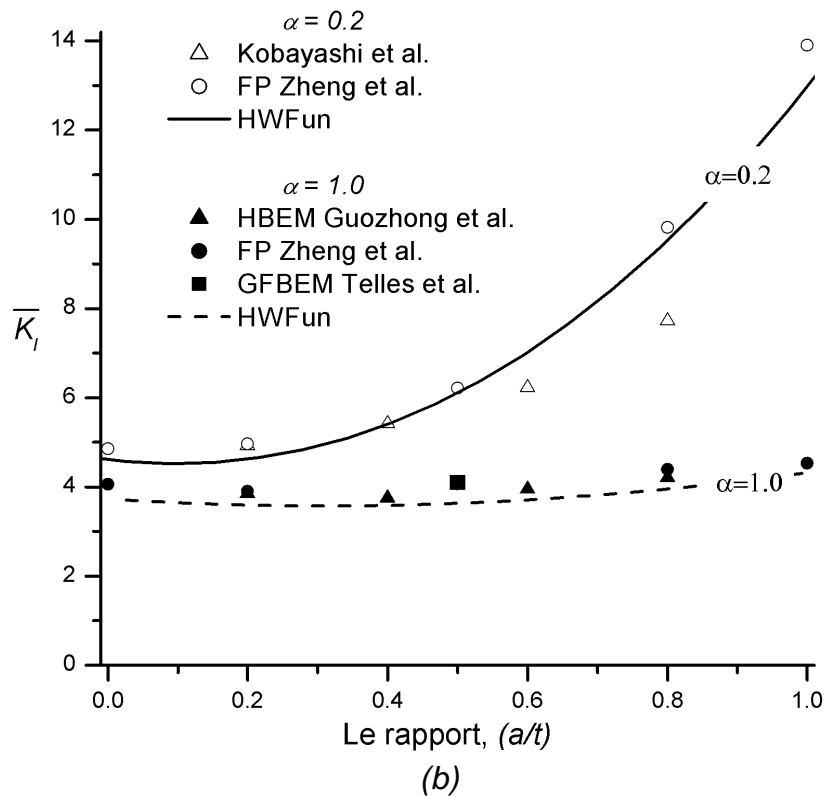
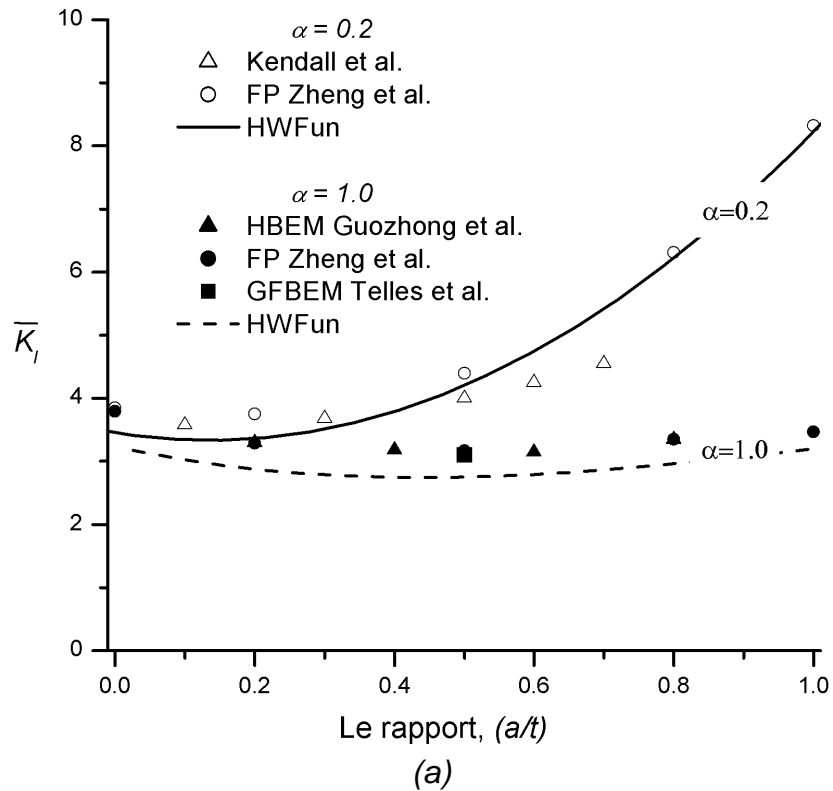


Figure 35 : FIC adimensionnel pour une fissure semi-elliptique dans un tube épais et sous un chargement de Lamé (a) pour  $\theta = 90^\circ$ , (b) pour  $\theta = 0^\circ$ .

### III.3.3. Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion

Les défauts dus aux procédés de fabrication des plaques et notamment ceux de soudure constituent souvent une source de fragilisation des plaques en augmentant le risque de rupture par fissuration de ces dernières. Ces défauts sont fréquemment modélisés par des fissures débouchantes de forme semi-elliptique plus ou moins aplaties. Le présent exemple est une illustration de ce type de problème. C'est le cas d'une plaque d'épaisseur  $t$  et de largeur  $w$  contenant une fissure semi-elliptique débouchante (voir figure 36).

Nous nous intéressons dans cet exemple au calcul du FIC adimensionnel  $F_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$  de la

fissure soumise à un chargement donné par  $\sigma_0 = \max(\sigma_t, \sigma_f)$  où  $\sigma_t$  et  $\sigma_f$  représentent respectivement les contraintes de traction et de flexion. Cette dernière est exprimée en

fonction du moment de flexion  $M$  par  $\sigma_f = \frac{3M}{wt^2}$ .

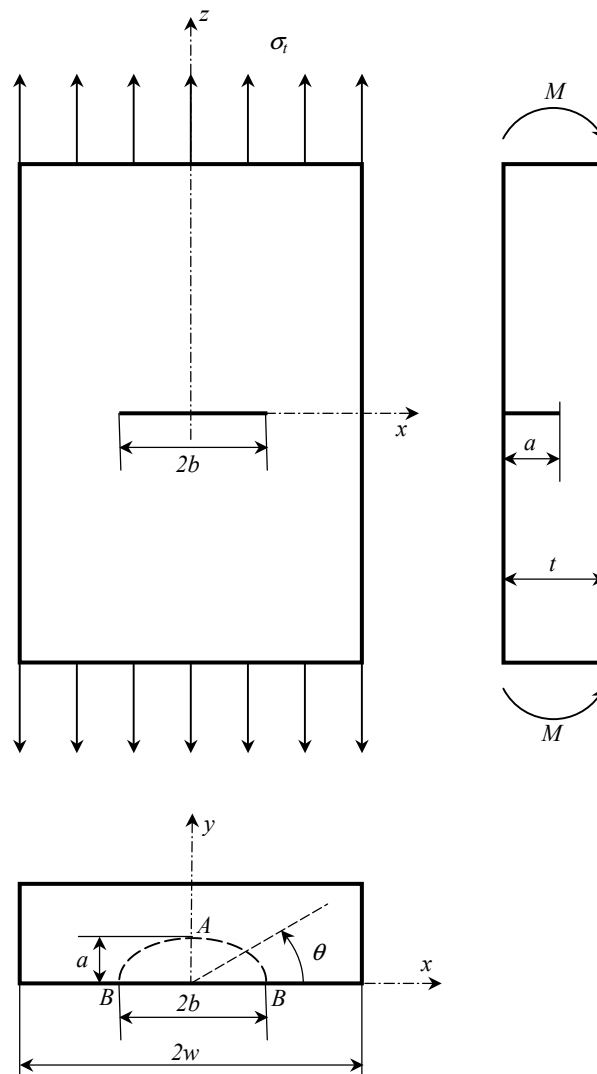


Figure 36 : Fissure semi – elliptique dans une plaque sous sollicitation composée (traction+flexion).

Deux modes de chargement sont considérés ; un chargement de flexion simple ( $\sigma_t=0$  et  $\sigma_f=1$ ) et un chargement de flexion composée ( $\sigma_t=1$  et  $\sigma_f=1$ ).

Ce même problème a été traité par Newman & Raju [New-1979, New-1981] chronologiquement par la méthode des éléments finis et de manière empirique. Les auteurs proposent ainsi l'expression empirique suivante du FIC [New-1981]:

$$K_I = (\sigma_t + H\sigma_f) \frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)} U \quad (78)$$

$H$  et  $U$  sont des fonctions à plusieurs variables liées à la configuration géométrique de la structure étudiée  $\left(\frac{a}{t}, \alpha, \frac{b}{w}, \theta_r\right)$ ,  $\theta_r = \arctan\left(\frac{\tan(\theta)}{\alpha}\right)$  étant l'angle réduit. La fonction  $U$  est un facteur de correction concernant la contrainte de traction de la plaque par rapport à un milieu infini. Pour la contrainte de flexion, le facteur correcteur est le produit des deux fonctions  $U$  et  $H$ . Les expressions détaillées de ces fonctions sont fournies dans la référence [New-1981].

Ce problème a aussi été traité par Isida et al. [Isi-1984] en utilisant la méthode des volumes finis modifiés (MBFM) et par Gonçalves & de-Castro [Gon-1999] par la méthode appelée « Line Spring Model » (LSM).

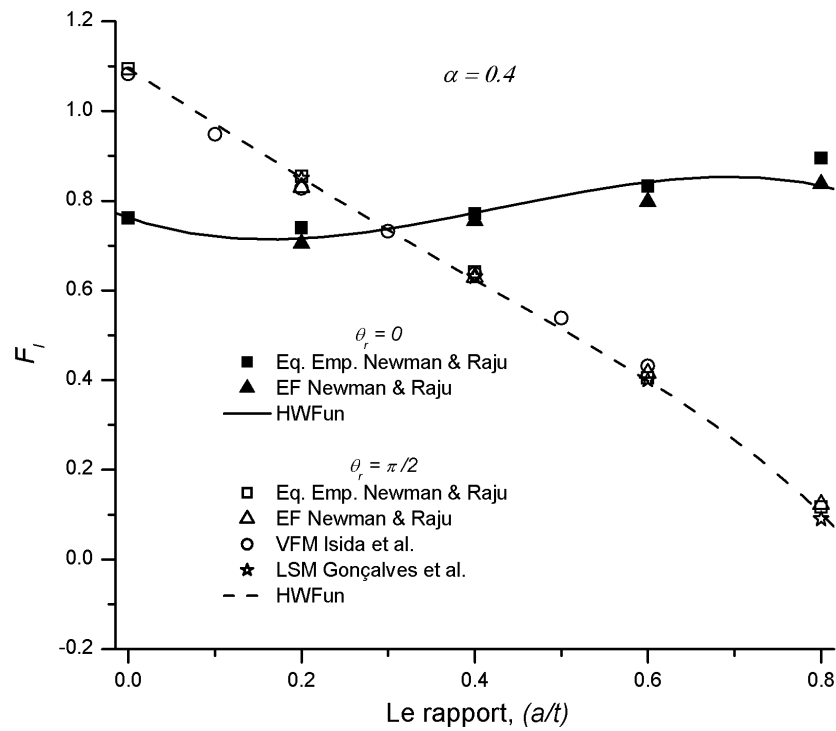
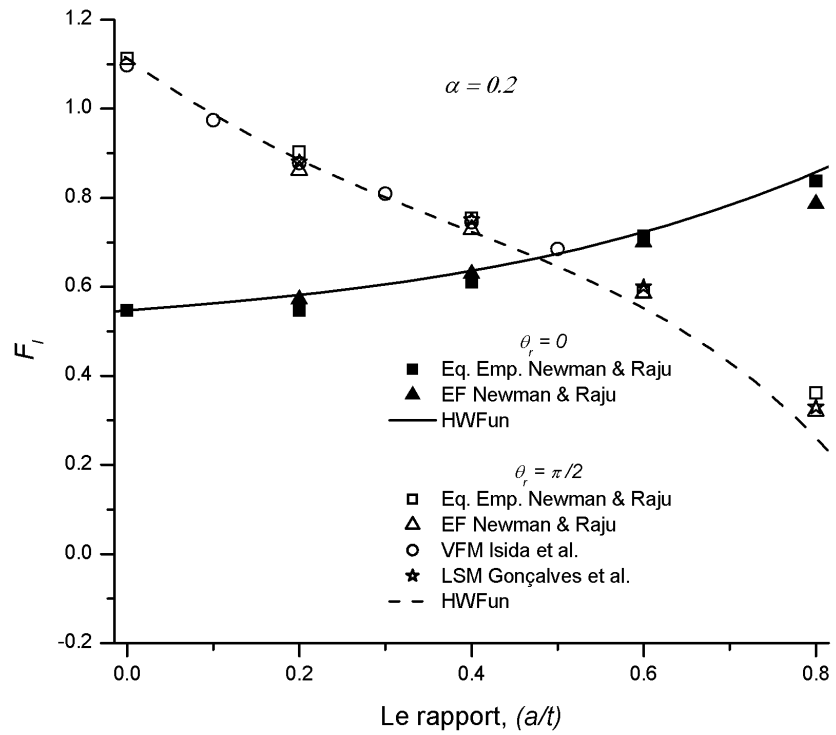
Dans la suite, nous retenons comme solution de référence du problème, la solution trouvée par Newman & Raju [New-1979] basée sur la méthode des éléments finis pour un chargement de traction pure ( $\sigma_t=1$  et  $\sigma_f=0$ ).

Plusieurs configurations sont considérées dans cet exemple, à savoir :

- $\alpha \in \{0.2, 0.4\}$  pour  $\theta_r \in \{0, \pi/2\}$  et  $a/t \in [0, 0.8]$ .
- $\alpha \in \{0.6, 1.0\}$  pour  $\theta_r \in \{0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2\}$  et  $a/t \in [0, 0.8]$ .

On reporte sur les figures 37, 38 et 39 les résultats obtenus par différentes approches pour le mode de flexion simple.

Sur la figure 37, on s'est limité, pour  $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 0.4$ , à la présentation des courbes concernant les points caractéristiques  $A$  ( $\theta_r = \pi/2$ ) et  $B$  ( $\theta_r = 0$ ), celles correspondant aux autres points ( $\theta_r = \pi/8$ ,  $\theta_r = \pi/4$ ,  $\theta_r = 3\pi/8$ ) étant très proches les unes des autres. Cependant, pour des valeurs plus grandes de  $\alpha$  ( $\alpha = 0.6$  et  $\alpha = 1.0$ ), les courbes concernant les valeurs intermédiaires ( $\theta_r = \pi/8$ ,  $\theta_r = \pi/4$ ,  $\theta_r = 3\pi/8$ ) sont présentées sur les figures 38b et 39b où les variations du FIC en fonction de  $\theta_r$  sont plus distinctes.



**Figure 37 :** FIC adimensionnel à  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  dans le cas d'une flexion pure ( $\sigma_r = 0$  et  $\sigma_r = 1$ ) (a) pour  $\alpha = 0.2$ , (b) pour  $\alpha = 0.4$

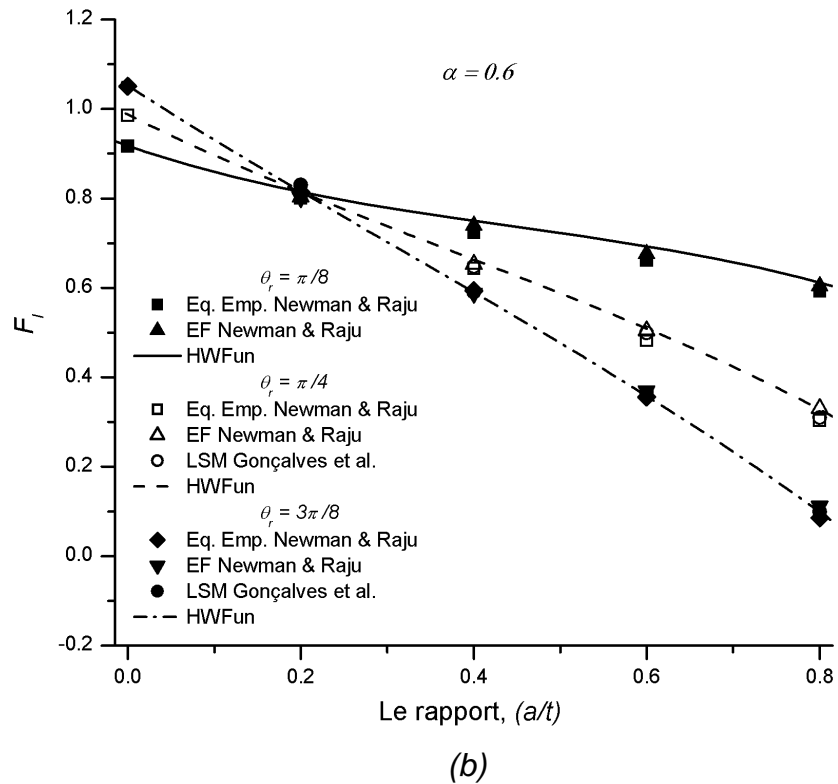
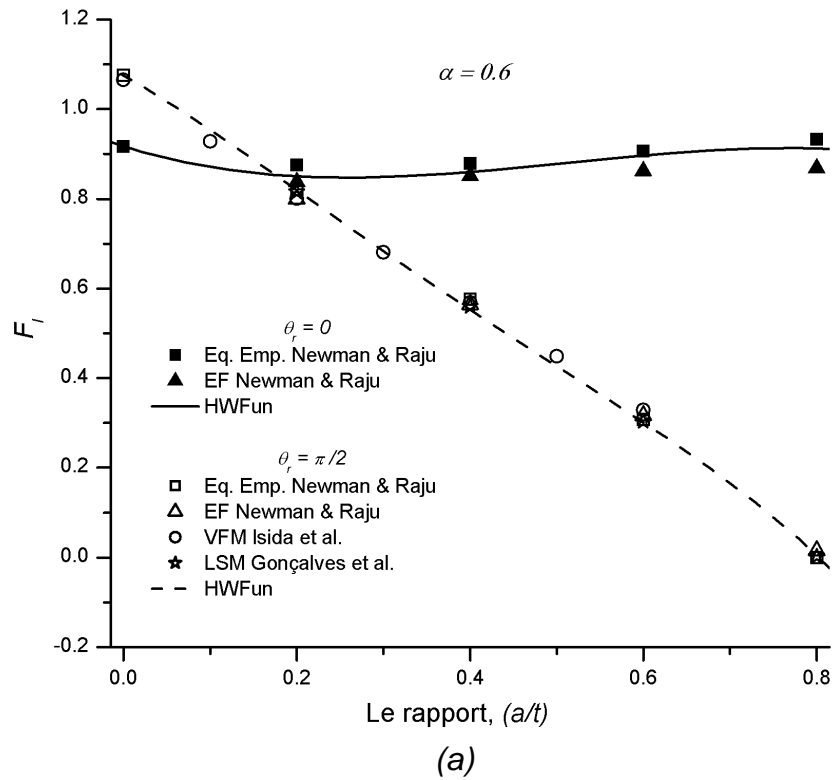
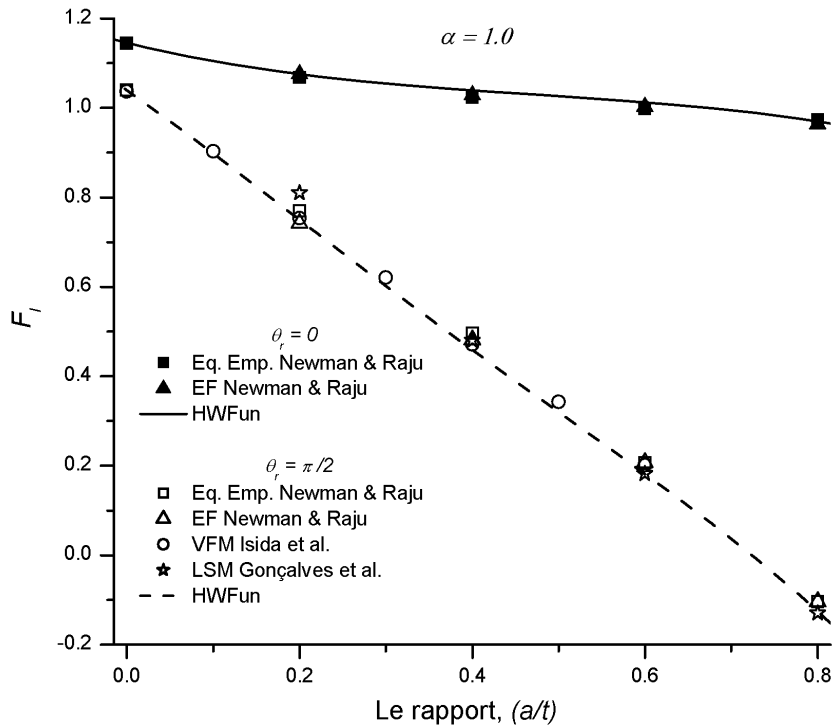
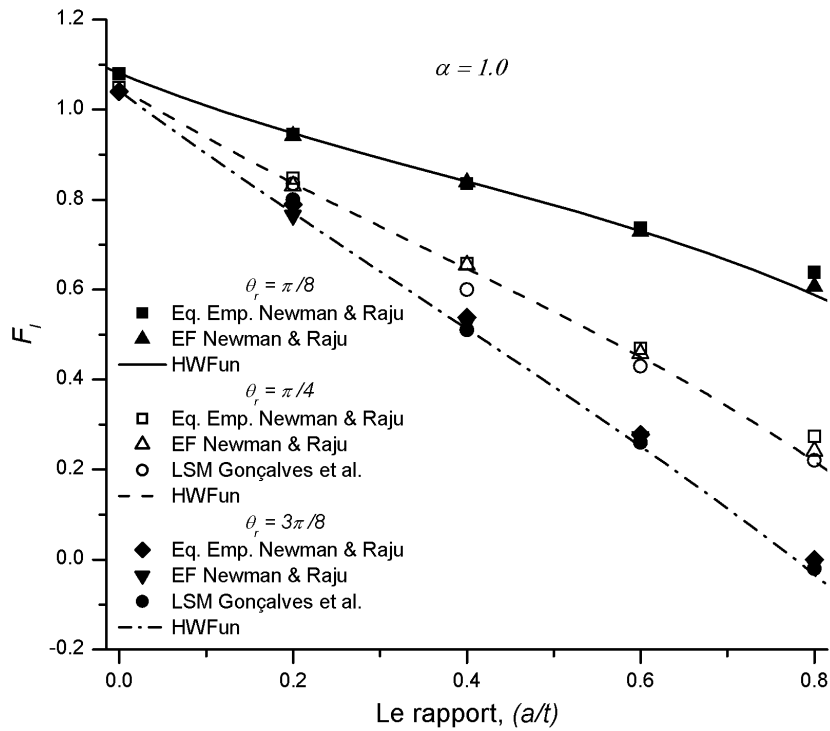


Figure 38 : FIC adimensionnel pour  $\alpha = 0.6$  dans le cas d'une flexion pure ( $\sigma_r = 0$  et  $\sigma_f = 1$ ) (a) à  $\theta = \pi/2, \theta = 0$  (b) à  $\theta = \pi/8, \theta = \pi/4$  et  $\theta = 3\pi/8$

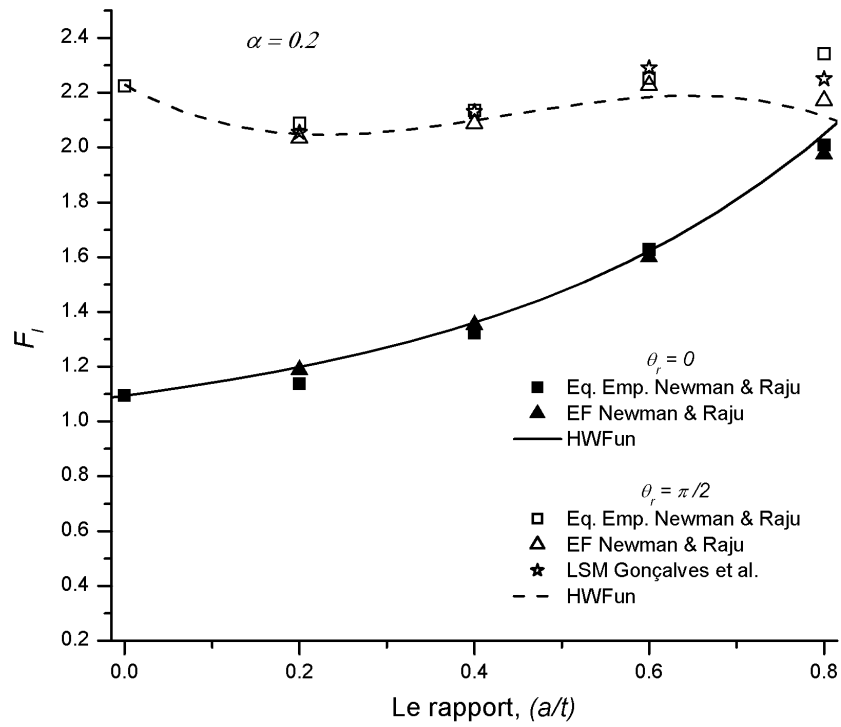


(a)

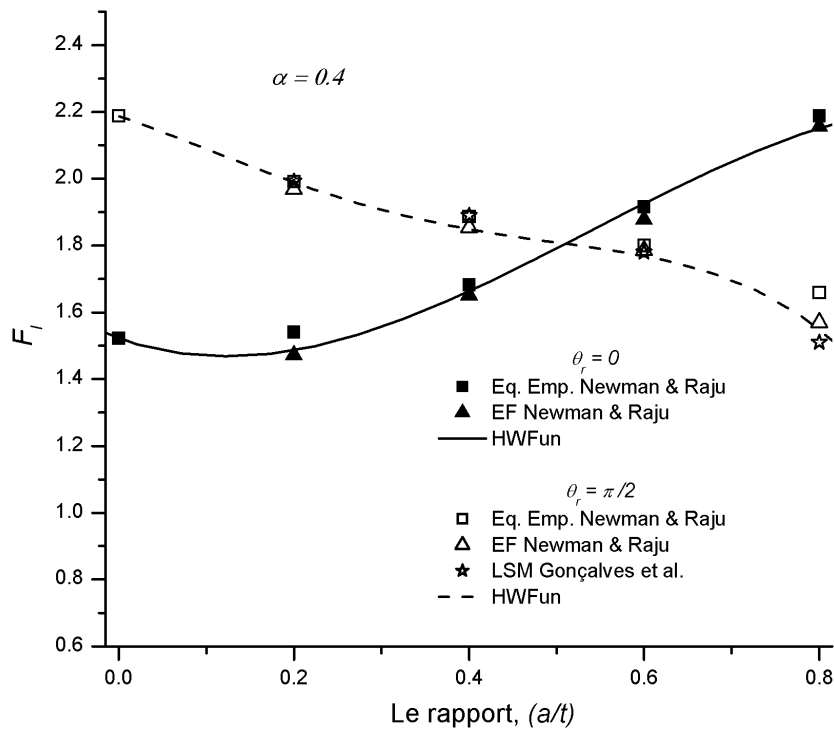


(b)

Figure 39 : FIC adimensionnel pour  $\alpha = 1.0$  dans le cas d'une flexion pure ( $\sigma_r = 0$  et  $\sigma_r = 1$ ) (a) à  $\theta = \pi/2, \theta = 0$  (b) à  $\theta = \pi/8, \theta = \pi/4$  et  $\theta = 3\pi/8$



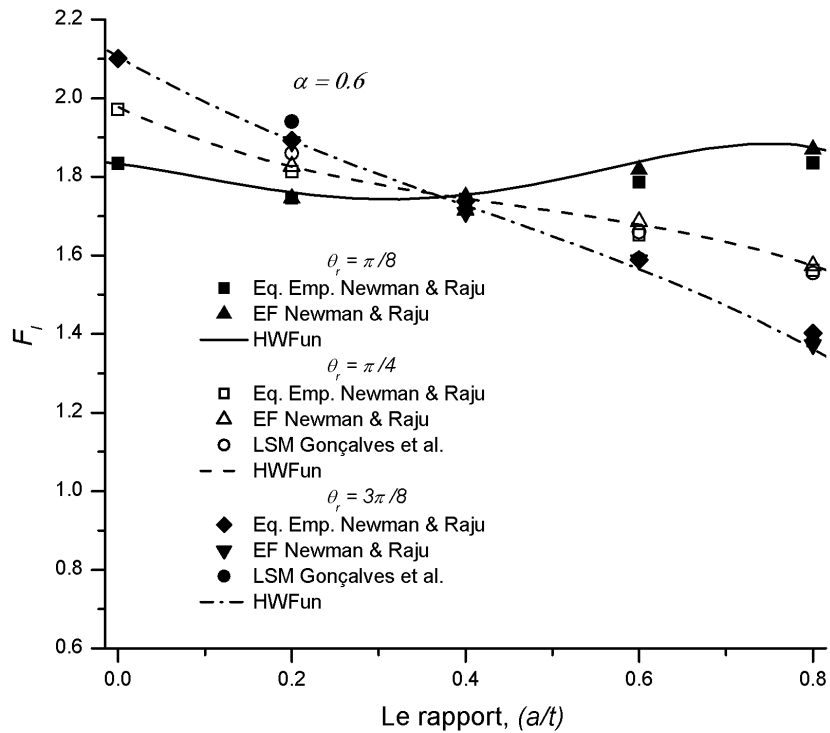
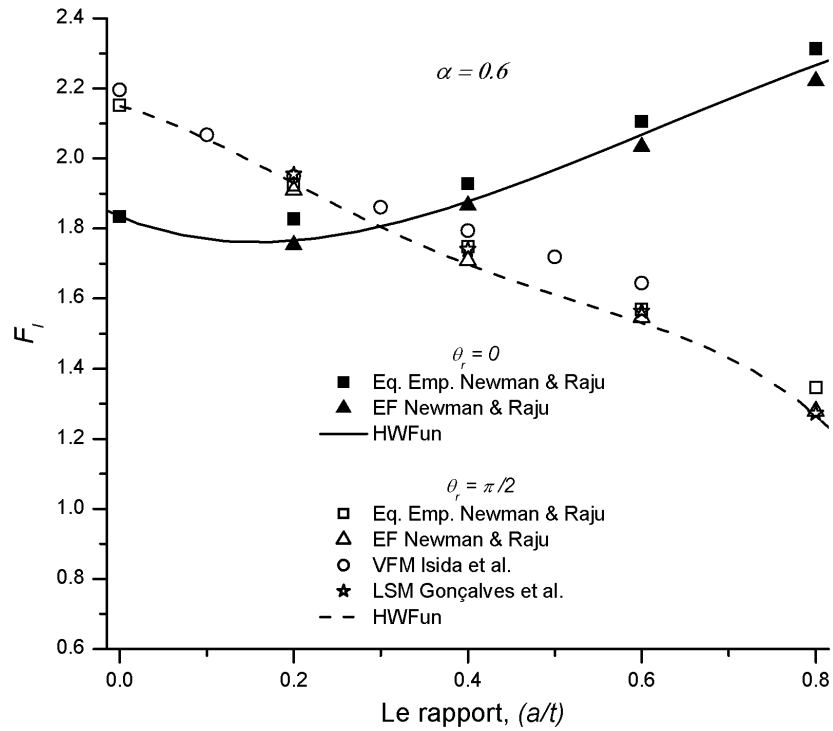
(a)



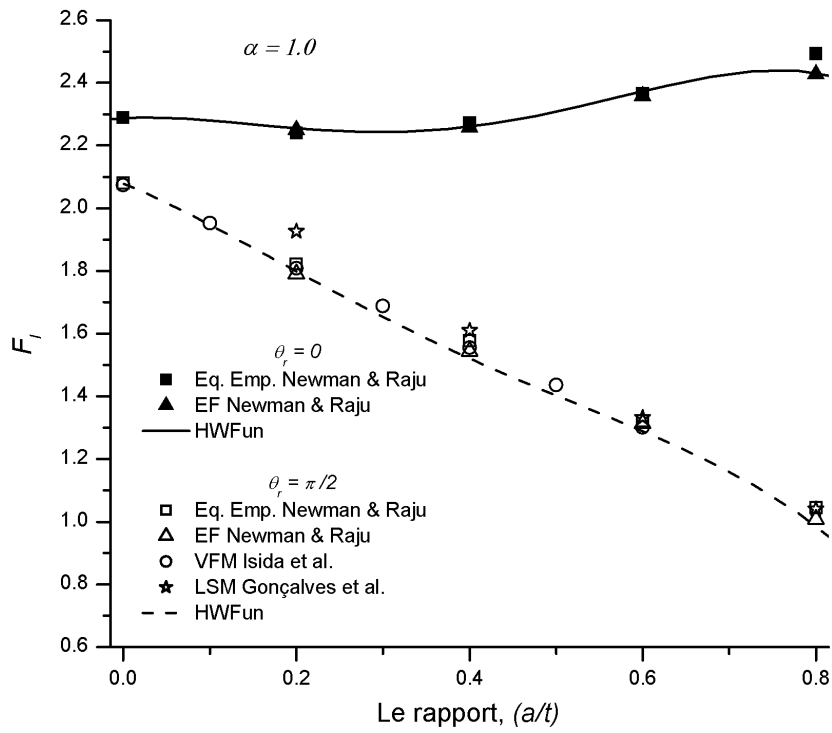
(b)

Figure 40 : FIC adimensionnel à  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  dans le cas d'une flexion composée ( $\sigma_i = 1$  et  $\sigma_f = 1$ ) (a) pour  $\alpha = 0.2$ , (b) pour  $\alpha = 0.4$

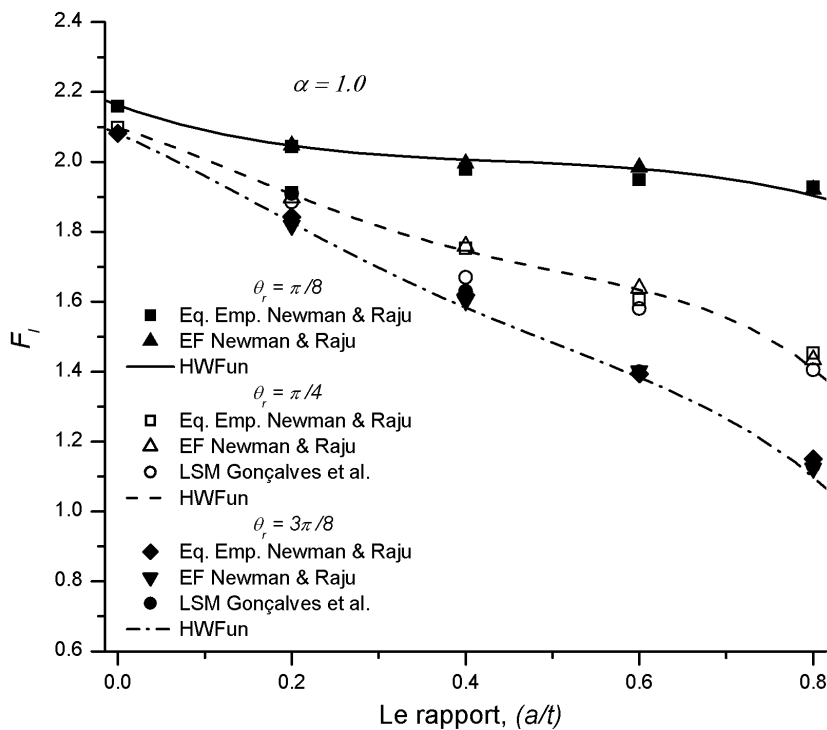




**Figure 41** : FIC adimensionnel pour  $\alpha = 0.6$  dans le cas d'une flexion composée ( $\sigma_t = 1$  et  $\sigma_f = 1$ ) (a) à  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = 0$  (b) à  $\theta = \pi/8$ ,  $\theta = \pi/4$  et  $\theta = 3\pi/8$



(a)



(b)

Figure 42 : FIC adimensionnel pour  $\alpha = 1.0$  dans le cas d'une flexion composée ( $\sigma_r = 1$  et  $\sigma_f = 1$ ) (a) à  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = 0$  (b) à  $\theta = \pi/8$ ,  $\theta = \pi/4$  et  $\theta = 3\pi/8$

A l'exception de la courbe de la figure 39a (pour  $\alpha = 1.0$ ), nous constatons que le maximum du FIC pour toutes les autres courbes correspond au point du fond de la fissure  $A$  ( $\theta_r = \pi/2$ ) pour  $a/t \rightarrow 0$ . Notons aussi, d'après les figures 37, 38 et 39, que la décroissance du FIC en fonction du rapport  $a/t$  est plus rapide pour le point  $A$  ( $\theta_r = \pi/2$ ) puisqu'il est le plus proche de la surface arrière de la plaque (voir figure 36), donc c'est le point le plus exposé à l'influence de l'épaisseur de la plaque. En ce point, le FIC peut atteindre des valeurs négatives (qui sont physiquement des valeurs nulles) pour les cas  $\alpha = 0.6$  et  $\alpha = 1.0$  (voir les figures 38a et 39a) à cause des contraintes négatives (compression) au voisinage du point  $A$  dues à la flexion.

Nos résultats, obtenus avec le logiciel *HWFun*, sont dans leur intégralité conformes aux calculs de Newman & Raju [New-1979, New-1981] utilisant la méthode des éléments finis et l'équation empirique (78) découlant de la FEM ainsi qu'aux résultats d'Isida et al. [Isi-1984] et Gonçalves & de-Castro [Gon-1999] utilisant les approches MBFM et LSM, respectivement. Cette concordance des résultats est moins marquante lorsque le rapport  $a/t$  tend vers l'unité étant donné que les différentes approches, y compris la notre, se différencient dans la prise en compte de l'effet du bord arrière de la plaque (la surface libre arrière).

On reprend les calculs pour le même problème avec le mode de chargement d'une flexion composée (flexion + traction). Les résultats sont reportés sur les figures 40, 41 et 42. Ce que nous pouvons rajouter ici, par rapport aux observations faites pour le cas d'une flexion simple, est l'augmentation des valeurs du FIC sous l'effet de la traction (ouverture des lèvres de la fissure plus importante) et par conséquent une disparition des valeurs négatives du FIC (voir les figures 41a et 42a). Les valeurs maximales du FIC correspondent toujours au point  $A$  pour les profondeurs relatives de la fissure très faibles ( $a/t \rightarrow 0$ ), à l'exception toujours du cas d'une fissure circulaire (voir la figure 42a) pour lequel la maximum du FIC est au point  $B$ .

### **III.3.4. Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement polynomial**

Le chargement polynomial, couramment utilisé dans la littérature, permet la représentation d'une large gamme de sollicitations rencontrées en pratique. Le choix de ce type de chargement est motivé par la possibilité d'approximer par interpolation ou extrapolation différentes distributions du chargement. Le chargement polynomial que nous avons retenu ici est donné par l'équation (79) appliqué au même type de structure abordée précédemment, c'est à dire une plaque renfermant une fissure débouchante :

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right)^n \quad (79)$$

On s'intéressera en particulier aux distributions quadratique ( $n = 2$ ) et cubique ( $n = 3$ ). La distribution linéaire ( $n = 1$ ), représentant le cas d'une flexion composée, a été traité dans l'exemple précédent.

Nous calculons pour cet application le FIC adimensionnel  $F_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$  en deux points caractéristiques de la fissure ; le point de surface  $B$  ( $\theta = 0$ ) et le point du fond  $A$  ( $\theta = \pi/2$ ) (voir la figure 36) pour des rapports d'axes de l'ellipse  $\alpha = 0.6$ ,  $\alpha = 1.0$  et une profondeur relative de la fissure  $a/t \in [0 ; 0.8]$ .

Nous utilisons, comme solution de référence, celle adoptée dans le problème précédent. On rappelle qu'elle a été trouvée par Newman & Raju [New-1979] en se basant sur la méthode des éléments finis pour un chargement de traction ( $n = 0$ ). Les résultats sont regroupés dans les graphes de la figure 43 pour le chargement quadratique et dans les graphes de la figure 44 pour le chargement cubique.

Les résultats obtenus avec notre code de calcul *HWFun* sont comparés à ceux trouvés par :

- i) Shiratori *et al.* [Shi-1987] utilisant les éléments finis,
- ii) Wang & Lambert [Wan-1997] utilisant des fonctions de poids déduites des résultats obtenus par éléments finis.

A première vue, nous pouvons constater que les valeurs du FIC dans la figure 43 sont nettement plus faibles pour le mode du chargement quadratique ( $n = 2$ ) comparé au cas du chargement linéaire de l'exemple précédent ( $F_I$  ne dépasse jamais l'unité). Ces valeurs continuent à diminuer en passant au chargement cubique correspond à  $n = 3$  (voir la figure 44). La décroissance du FIC avec l'augmentation de l'ordre du chargement  $n$  est due à la diminution de la contrainte  $\sigma$  donnée par (79) via le facteur  $\left(1 - \frac{y}{a}\right)$  qui est inférieur à l'unité.

Ce même facteur a maintenu le chargement  $\sigma$  positif sur toute la fissure (pas de zone de compression) et quelque soit la profondeur relative de la fissure  $a/t$ . Ce qui explique la légère croissance du FIC adimensionnel  $F_I$  en fonction du rapport  $a/t$  pour le point du fond  $A$  (voir les figures 43 et 44), contrairement à l'exemple précédent. Par conséquent, la valeur maximale du FIC pour cette application aura lieu lorsque  $a/t$  s'approchera de l'unité.

Les graphes des figures 43 et 44 montrent une bonne corrélation de nos résultats avec les autres travaux aussi bien pour le chargement quadratique que pour le chargement cubique.

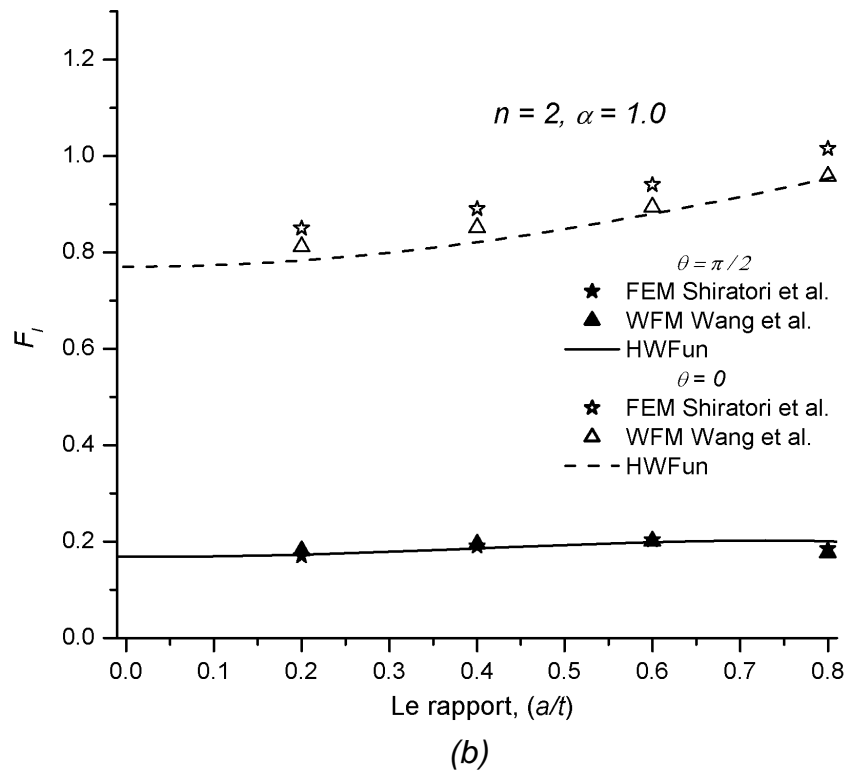
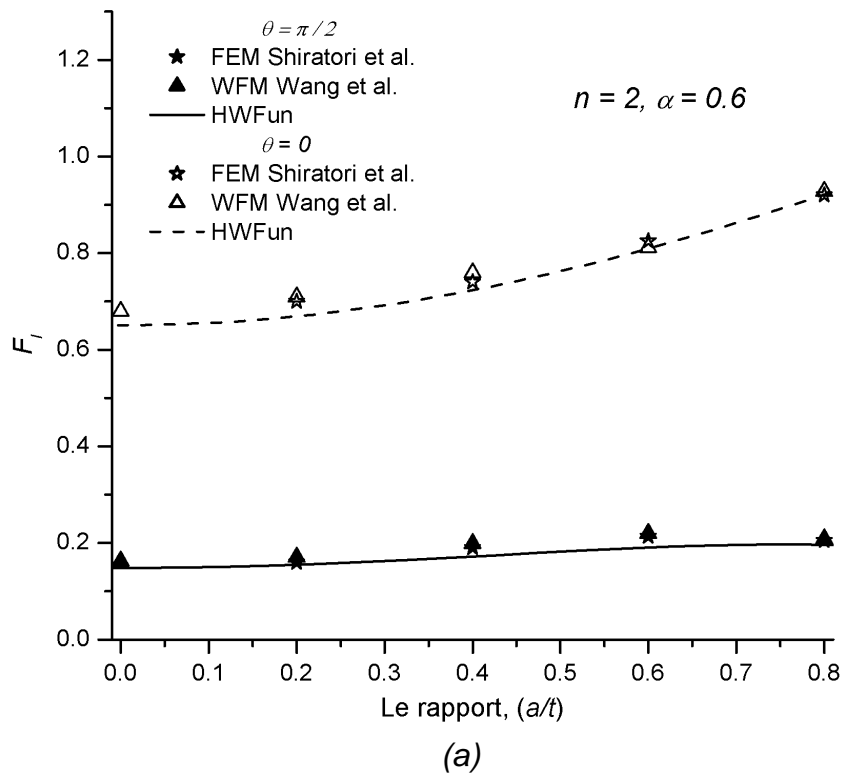
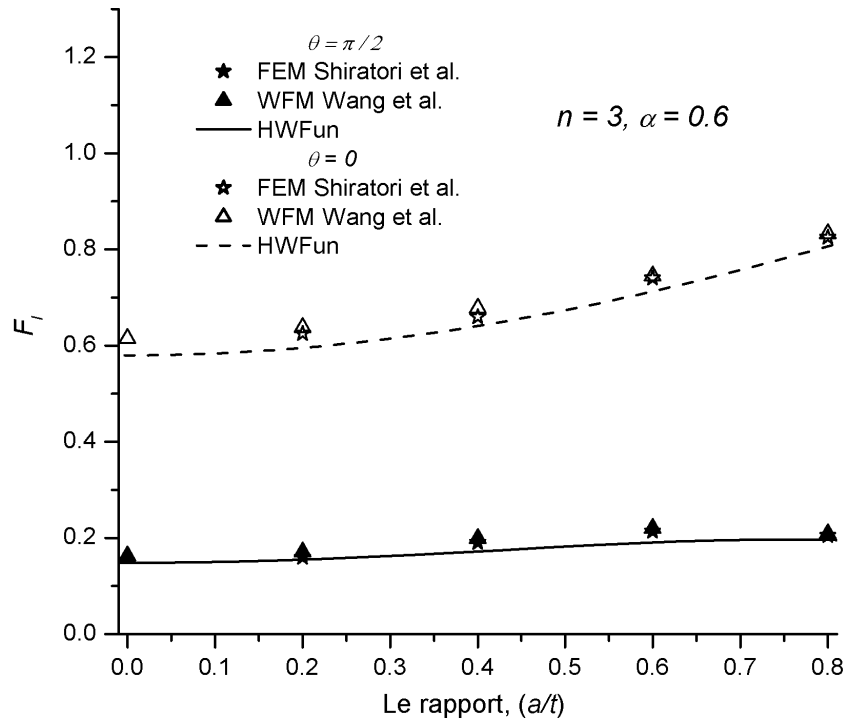
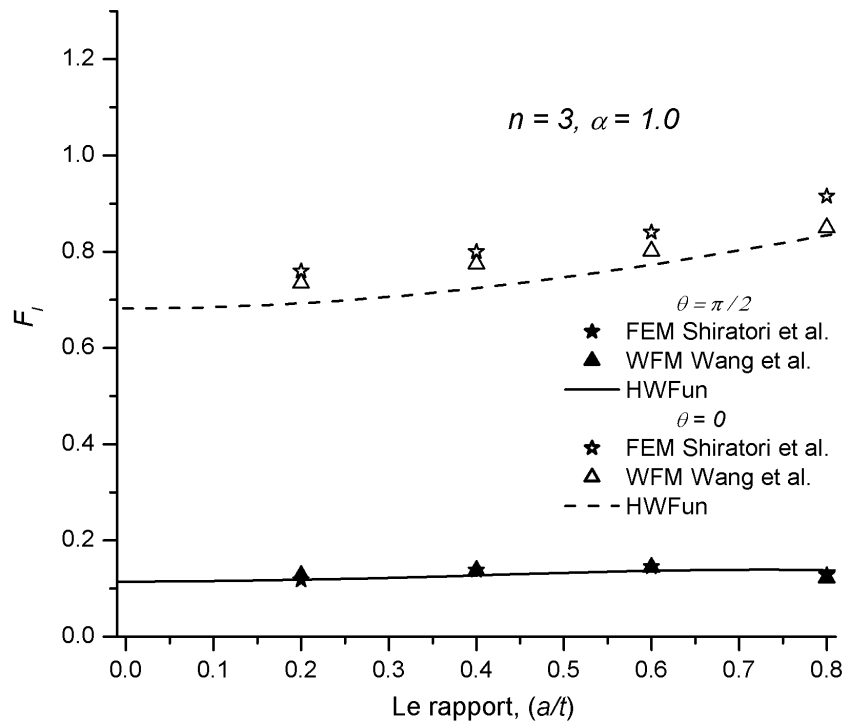


Figure 43 : FIC adimensionnel au point de surface et au point du fond d'une fissure semi-elliptique débouchante sous un chargement quadratique.



(a)



(b)

Figure 44 : FIC adimensionnel au point de surface et au point du fond d'une fissure semi – elliptique débouchante sous un chargement cubique.

### III.3.5. Plaque contenant une fissure semi-elliptique sous un chargement exponentiel

Dans les plaques soumises à la traction ou la flexion, la présence de rainures ou d'entailles au voisinage des fissures (voir la figure 45) peut modifier considérablement la loi de distribution du chargement supportée par les lèvres de la fissure sous l'effet des concentrations de contraintes.

Fett & Munz [Fet-1999] ont étudié ce problème en considérant des distributions de contraintes sur les lèvres de la fissure de formes exponentielles, à savoir :

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y} \quad (80a)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2} \quad (80b)$$

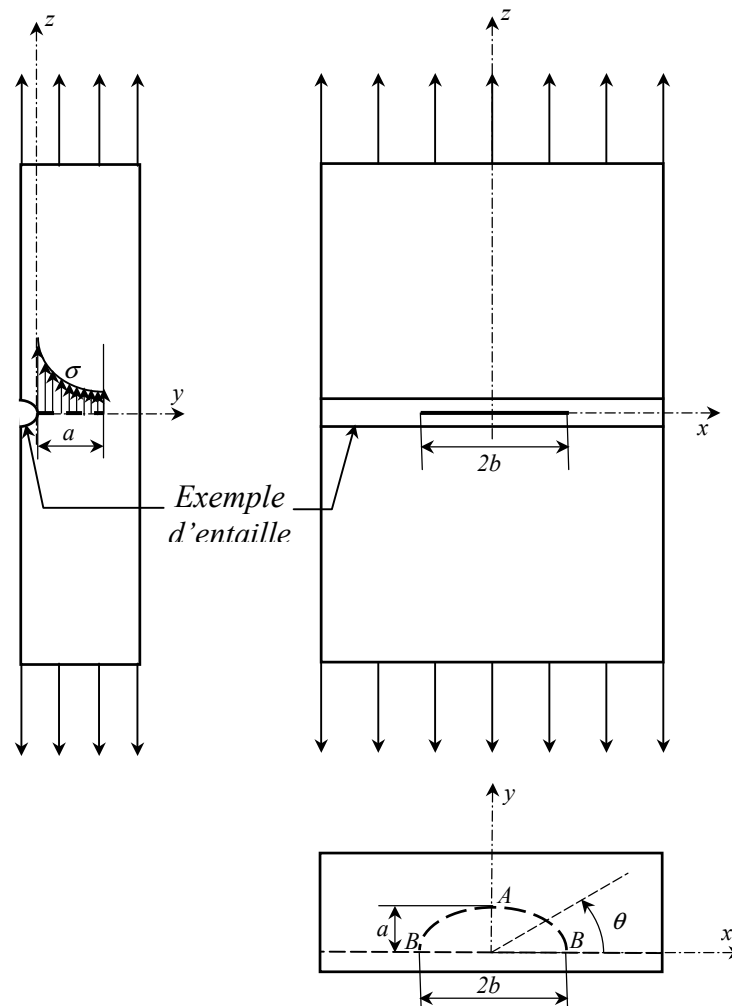


Figure 45 : Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque et au voisinage d'une entaille.

Ils ont en particulier calculé les FIC adimensionnels  $Y_A$  et  $Y_B$  aux points  $A$  et  $B$  de la fissure (voir la figure 45), en fonction de l'exposant  $\lambda$ . Nous présentons dans les figures 46 et 47 les résultats qu'on a obtenus avec le code de calcul *HWFun* et ceux obtenus par Fett & Munz [Fet-1999] pour les configurations suivantes :

- Au point  $A$  pour  $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y}$ ,  $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$  et  $\lambda\alpha \in [0, 3.5]$ (figure 46a).
- Au point  $B$  pour  $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y}$ ,  $\alpha \in \{0.2, 0.4, 1.0\}$  et  $\lambda\alpha \in [0, 3]$ (figure 46b).
- Au point  $A$  pour  $\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2}$ ,  $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$  et  $\lambda\alpha \in [0, 2.0]$ (figure 47a).
- Au point  $B$  pour  $\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2}$ ,  $\alpha \in \{0.2, 0.4, 1.0\}$  et  $\lambda\alpha \in [0, 1.75]$ (figure 47b).

Les valeurs des paramètres considérés lors de ces différents calculs ont été choisies en accord avec les résultats disponibles de Fett & Munz [Fet-1999]. Nous avons ignoré quelques valeurs de  $\alpha$  ( $\alpha = 0.6$  et  $\alpha = 0.8$ ) pour le point  $B$  afin d'éviter une éventuelle surcharge et illisibilité des graphes.

Les FIC adimensionnels  $Y_A$  et  $Y_B$  sont donnés par l'expression :

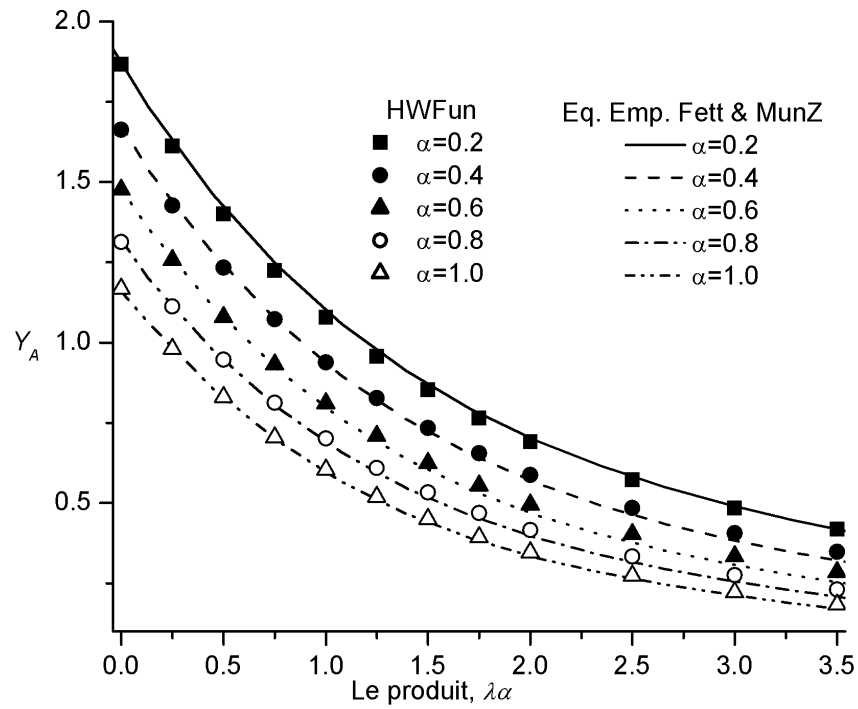
$$Y_{(A,B)} = \frac{K_{I(A,B)}}{\sigma_0 \sqrt{a}} \quad (81)$$

D'après la figure 46, nous constatons que les valeurs des FIC adimensionnels  $Y_A$  et  $Y_B$  décroissent en augmentant l'exposant  $\lambda$ , vu que l'intensité du chargement diminue d'après (80). La valeur maximale du FIC est observée au point  $A$  pour  $\lambda = 0$  (chargement constant).

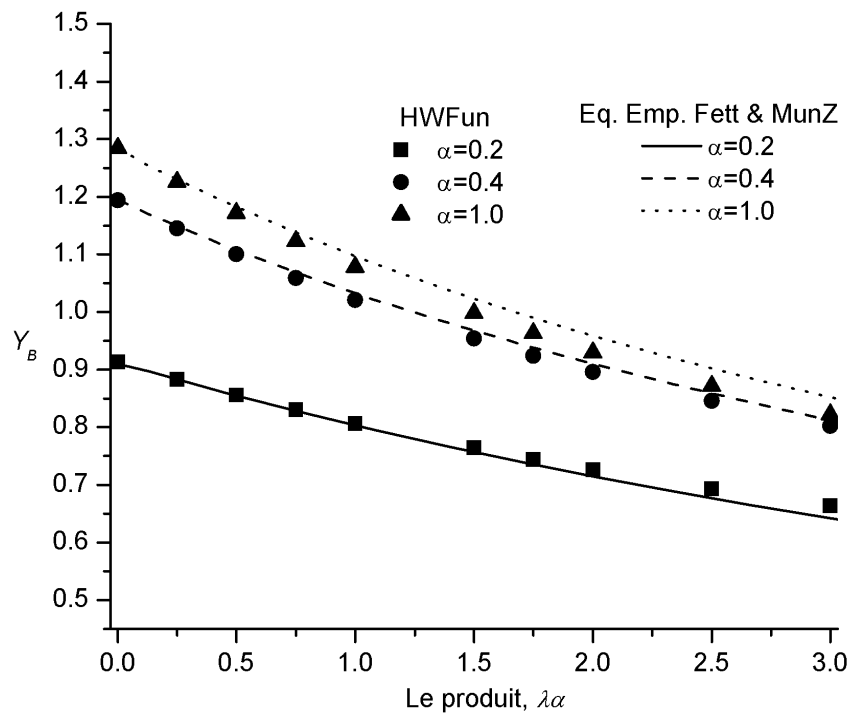
On peut constater la bonne concordance de nos résultats avec ceux de Fett & Munz [Fet-1999] au point  $A$ . Cette corrélation est moins bonne pour le point  $B$ , considéré comme le plus exposé à l'effet de la surface libre étant donné que l'épaisseur de la plaque est considérée très grande. Notons que les résultats de Fett & Munz [Fet-1999] sont des approximations basées sur interpolations et extrapolations polynomiales de la forme exponentielle du chargement donné par (80a) et (80b) utilisant les résultats de ces mêmes auteurs dans [Fet-1997] pour le point  $A$  et ceux de Cruse & Besuner [Cru-1975] pour le point  $B$ .

Pour le deuxième mode du chargement exponentiel donné par (80b), les graphes de la figure 47 montrent que le maximum du FIC correspond toujours aux faibles valeurs de l'exposant  $\lambda$ . Cependant, nous constatons que le gradient des FIC adimensionnel  $Y_A$  et  $Y_B$  est minimal pour les faibles valeurs de  $\lambda$  contrairement au cas du chargement exponentiel (80a). Ceci est dû au fait que le gradient du chargement donné par (80b) est minimal pour les faibles valeurs de l'exposant  $\lambda$  alors que celui donné par (80a) est maximal.





(a)



(b)

Figure 46 : FIC adimensionnel d'une fissure semi – elliptique débouchante sous un chargement  $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y}$ , (a) au point du fond, (b) au point de surface

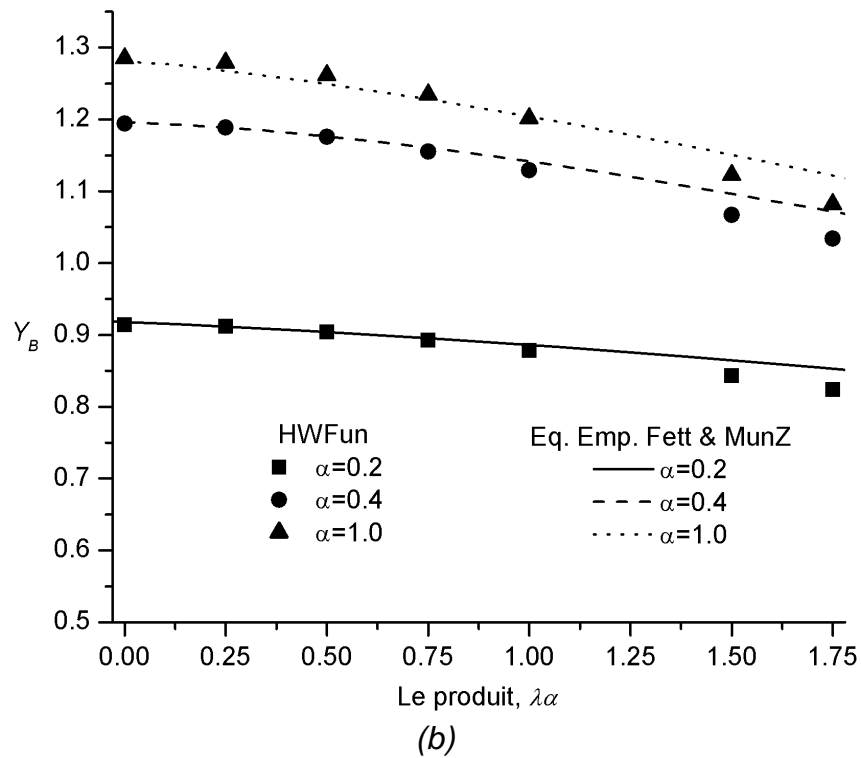
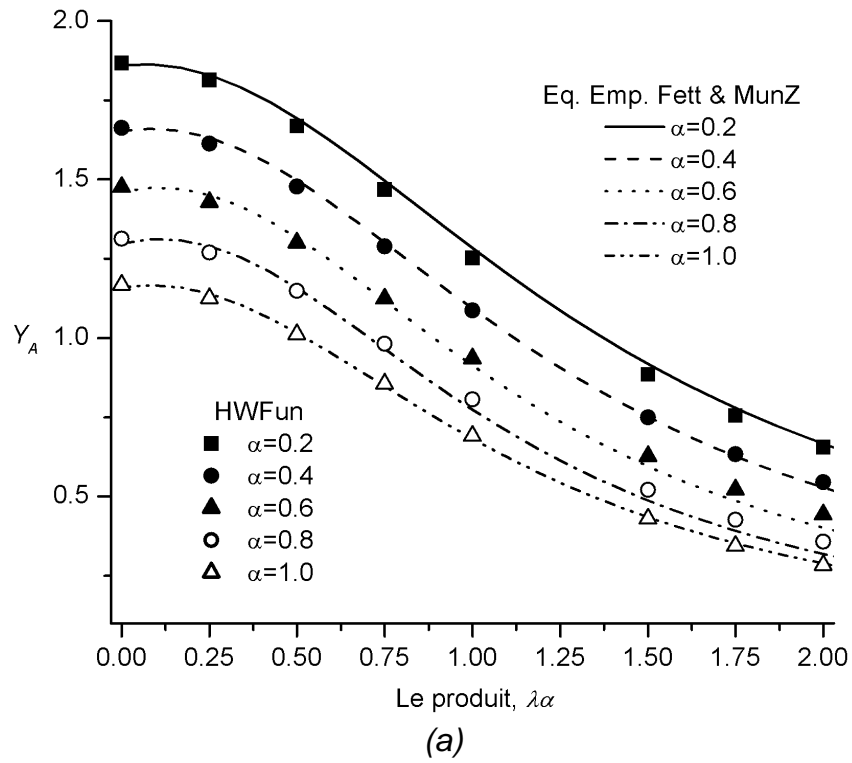


Figure 47 : FIC adimensionnel d'une fissure semi – elliptique débouchante sous un chargement  $\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2}$ , (a) au point du fond, (b) au point de surface

### **III.4. CONCLUSION**

Un premier objectif a été atteint dans ce chapitre à savoir la réalisation du couplage de la technique d'hybridation avec la méthode PWFm. Ceci nous a permis de tenir en compte de l'effet de la surface libre et par conséquent l'extension de cette étude au traitement des fissures semi-elliptiques débouchantes. On a pu constater que cet effet multiplie de façon non négligeable le risque de fissuration.

Un important travail relatif au test des corrections apportées à l'hybridation des fonctions de poids adoptées pour réaliser le couplage a été entrepris à travers une variété d'exemples pratiques de structures contenant une fissure semi-elliptiques débouchantes tels que : le cas d'un tube mince et épais avec un chargement polynomial et de Lamé et le cas d'une plaque sous flexion simple et flexion composée, sous un chargement polynomial ou sous un chargement exponentiel. Les résultats obtenus dans la deuxième partie de ce chapitre ont été comparés à des travaux utilisant plusieurs méthodes (FEM, WFM, HBEM, GFBEM, LSM, FBM, Eq. Emp.). La cohérence observée entre nos résultats et ceux obtenus par d'autres approches met en exergue l'intérêt d'une telle étude.

# Chapitre IV : Application de la méthode d'hybridation en fatigue

<b>Chapitre IV : Application de la méthode d'hybridation en fatigue .....</b>	<b>83</b>
IV.1. RAPPELS SUR LES NOTIONS DE FATIGUE DES MATERIAUX.....	84
IV.1.1. Introduction .....	84
IV.1.2. Lois de propagation de fissure par fatigue.....	85
i) Loi de Paris.....	85
ii) Loi de Sih.....	87
IV.2. APPLICATION DE L'APPROCHE D'HYBRIDATION EN FATIGUE.....	88
IV.2.1. Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Sukumar et al. [Suk-2003]).....	91
i) Cas où $a_0 = 0.05 \text{ cm}$ , $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 2.1$ .....	91
ii) Cas où $a_0 = 0.05 \text{ cm}$ , $\alpha_0 = 0.5$ , $\Delta a_{max} = 0.025a_0$ , $m = 2.1$ .....	92
IV.2.2. Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Lazarus [Laz-2003]).....	93
i) Cas où $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 2$ (matériau ductile).....	93
ii) Cas où $\alpha_0 = 0.4$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 2$ (matériau ductile).....	95
iii) Cas où $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{max} = 0.1a_0$ , $m = 50$ (matériau fragile).....	96
iv) Cas où $\alpha_0 = 0.4$ , $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ , $m = 50$ (matériau fragile).....	99
IV.2.3. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Newman et Raju [New-1981]).....	101
IV.2.4. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Kim et Hwang [Kim-1997]) .....	104
IV.2.5. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Lin et Smith [Lin-1999]).....	106
IV.2.6. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans un tube sous pression interne.....	111
IV.2.7. Application de l'approche énergétique de Sih dans la prédiction de la propagation d'une fissure dans une pièce à joints de soudure .....	115
IV.3. CONCLUSION.....	121

## IV.1. RAPPELS SUR LES NOTIONS DE FATIGUE DES MATERIAUX

### IV.1.1. Introduction

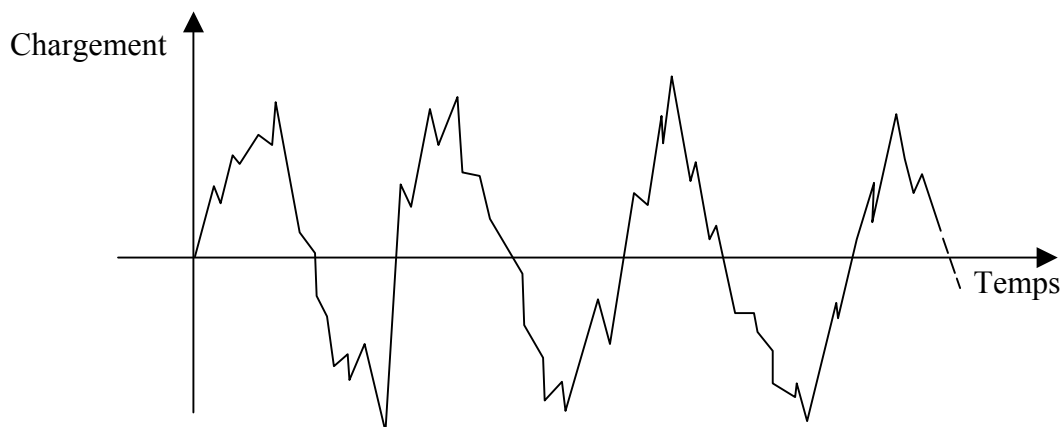


Figure 48 : Oscillations d'un chargement arbitraire en fonction du temps

Lorsqu'une structure est soumise à une sollicitation variable dans le temps comme celle illustrée sur la figure 48, elle est exposée au phénomène de fatigue qui pourrait à tout moment, conduire à une rupture même si le chargement est admissible du point de vue résistance dans le cas statique. Ce phénomène est généralement lié à la présence d'une fissure initiale. On peut distinguer trois étapes lors de la propagation d'une fissure par le phénomène de fatigue :

- i) *L'initiation de la fissure* : elle est le résultat d'un défaut préexistant (de fabrication par exemple) ou d'un amorçage suite à une décohésion locale du matériau du fait d'une forte concentration de contrainte.
- ii) *La propagation lente de la fissure* : au cours de cette étape, la fissure peut croître plus au moins lentement selon le matériau et l'intensité du chargement. Elle peut atteindre dans certains cas des longueurs importantes. Dans d'autres situations, cette étape pourrait être très brève et la fissure pourrait ne pas croître de façon substantielle.
- iii) *La rupture totale de la structure* : il s'agit ici de l'étape ultime du phénomène qui se produit lorsque la fissure atteint une limite appelée seuil de stabilité (voir la section 3 du chapitre I). Pour les matériaux très fragiles, on pourrait passer très rapidement voire directement de l'étape (i) à cette dernière étape.

### IV.1.2. Lois de propagation de fissure par fatigue

Dans ce travail, on s'intéresse uniquement aux chargements dont l'amplitude est constante, pour lesquels la différence entre la contrainte nominale maximale et la contrainte nominale minimale est également constante ( $\Delta\sigma = \text{constante}$ ) comme l'illustre la figure 49. Nous considérons également que, pour la plupart des cas,  $\sigma_{min}$  est égale à 0, auquel cas  $\Delta\sigma = \sigma_{max}$ . La résolution du problème de fatigue où la prédiction de l'évolution de la forme de la fissure et de la durée de vie de la structure, repose sur l'utilisation de lois de propagation de fissure obtenues le plus souvent de façon empirique [Bar-1980]. Ces lois relient la vitesse de croissance de la fissure  $da/dN_c$  aux paramètres de fissuration caractérisant le matériau et le chargement imposé ( $N_c$  étant le nombre de cycle de répétition du chargement et  $a$  est une longueur caractéristique de la fissure). Nous proposons dans ce qui suit, une présentation des lois de propagation adoptées dans les applications à venir. Il s'agit de la loi de Paris [Par-1963], majoritairement utilisée, ainsi que la loi de Sih [Sih-1979] adoptée dans le dernier exemple.

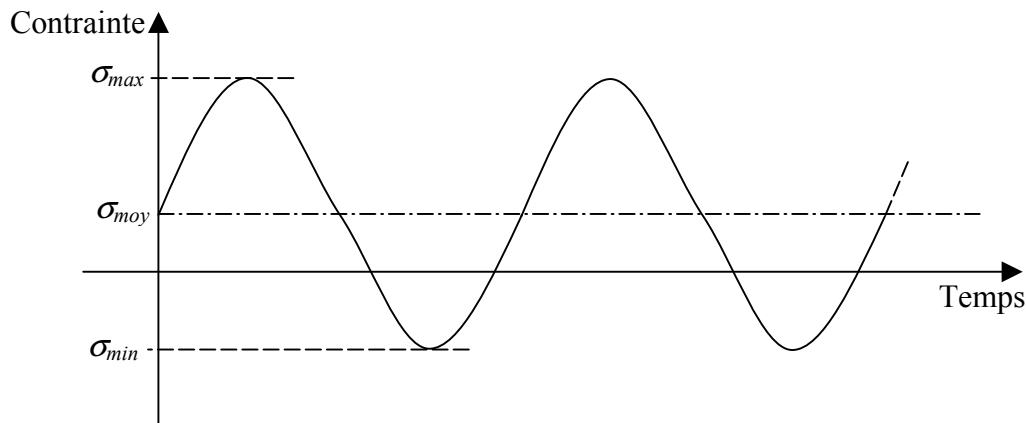


Figure 49 : Oscillation d'un chargement à amplitude constante en fonction du temps

#### i) Loi de Paris

Il s'agit de la loi la plus utilisée en pratique en raison à la fois de sa simplicité et de sa capacité à corroborer de nombreux résultats expérimentaux. En se basant sur de multiples essais, Paris [Par-1963] a proposé de relier la vitesse d'avance  $da/dN_c$  à l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte en mode I ( $\Delta K_I$ ) à travers l'expression :

$$\frac{da}{dN_c} = C(\Delta K_I)^m \quad (82)$$

où  $\Delta K_I = K_{I(\max)} - K_{I(\min)} = K_I(\sigma_{\max}) - K_I(\sigma_{\min})$  qui devient  $\Delta K_I = K_I(\sigma_{app})$  si  $\sigma_{\min} = 0$ .

Les coefficients  $C$  et  $m$  de la relation (82) sont deux constantes propres du matériau dans son environnement (température, humidité, ...) obtenues généralement d'une manière expérimentale [Bar-1980]. Des valeurs de ces coefficients sont proposées par [Bar-1980]. On notera que les valeurs élevées du coefficient  $m$  sont obtenues pour des matériaux fragiles et que le coefficient  $C$  change selon qu'on soit en contrainte ou en déformation plane sous l'influence des effets de bord [New-1981].

Pour une fissure elliptique (voir la figure 50), objet de cette étude, la loi de Paris est écrite, pour un point  $a_i$  du contour de l'ellipse, sous la forme :

$$\frac{da_i}{dN_c} = C_i (\Delta K_I^i)^m \quad i = 1, \dots, N \quad (N : \text{nombre de subdivisions du contour de l'ellipse}) \quad (83)$$

Si on veut exprimer la relation entre les avances de deux points différents du contour de l'ellipse, on aura d'après l'équation précédente :

$$\frac{da_j}{da_i} = \frac{C_j}{C_i} \left( \frac{\Delta K_I^j}{\Delta K_I^i} \right)^m \quad i, j = 1, \dots, N \quad (84)$$

Pour un milieu infini, en l'absence alors des effets de bord, le coefficient  $C_i$  prend une valeur constante ( $C_j / C_i = 1$  dans la relation (84)) d'après [New-1981, Suk-2003].

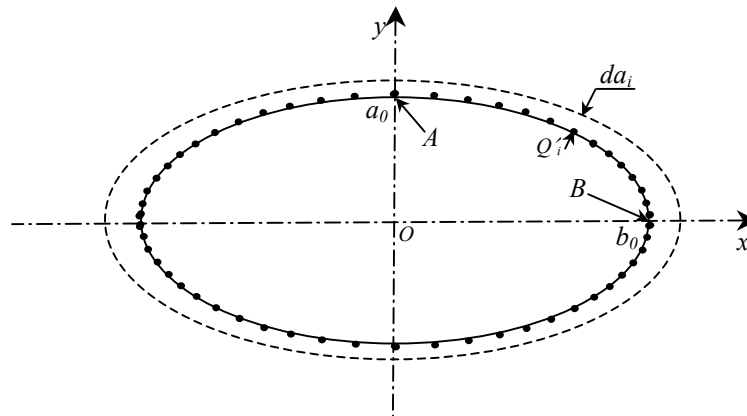


Figure 50 : Progression multipoints du front d'une fissure elliptique

**Remarque :** D'autres lois inspirées de celle de Paris existent où l'expression de la vitesse d'avance de la fissure  $da/dN_c$  est corrigée en faisant intervenir d'autres paramètres comme le rapport des contraintes  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$  [Bar-1974], la ténacité du matériau  $K_{Ic}$  [McE-1973], sa limite élastique  $\sigma_e$  et son module de Young  $E$  [Aus-1977, Aus-1978]. Néanmoins, on observe que ces lois ne permettent la prédiction du comportement en fatigue que pour un éventail

restreint de matériaux. Il s'agit de lois empiriques établies sur la base d'expériences sur des matériaux spécifiques avec des modes de chargement bien particuliers. Ceci empêche la généralisation de leur emploi à d'autres types de problèmes avec d'autres matériaux et sous autres sollicitations. La loi de Paris reste donc la plus répondue [Laz-2003, Lin-1997, Lin-1999, New-1981, Suk-2003].

**ii) Loi de Sih**

La loi de Sih [Sih-1979] aurait pu être considérée comme une simple variante de la loi de Paris. Cependant, sa conception basée sur le facteur de densité d'énergie de déformation (exposé dans le premier chapitre) justifie qu'elle soit présentée à part. En fait, les deux handicaps majeurs entourant la loi de Paris sont les suivants :

- Elle ne fait appel qu'à un seul paramètre de chargement  $\Delta\sigma$ .
- Elle est valable qu'en mode simple qui est le mode I (ouverture – fermeture).

Dans le but de résoudre ces deux problèmes, Sih [Sih-1979] a proposé une loi de forme très similaire à celle de Paris avec une amplitude de densité d'énergie au lieu d'une amplitude de FIC. Elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{da}{dN_c} = C'(\Delta S_{\min})^{m'} \quad (85)$$

Dans cette équation,  $S_{\min}$  représente le facteur de densité d'énergie de déformation minimal (favorable à la propagation de la fissure), satisfaisant la condition  $dS = 0$  (voir l'équation (18)). Pour ne pas alourdir les expressions avec beaucoup d'indices, on remplace  $S_{\min}$  par  $S$  et on aura donc :

$$\Delta(S_{\min}) = S(\sigma_{\max}) - S(\sigma_{\min}) = \Delta S \quad (86)$$

Dans le cas où la fissure est sollicitée uniquement en mode I, celui qui nous intéresse ici, on aura d'après les équations (15), (17) et (19) :

$$\Delta S = \frac{a_{11}}{16\pi\mu} (K_{I(\max)}^2 - K_{I(\min)}^2) = \frac{a_{11}}{16\pi\mu} (1 - R^2) K_{I(\max)}^2 \quad (87)$$

où  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$  est le rapport des contraintes et  $a_{11}$ , un paramètre donné par l'équation (16). L'amplitude  $\Delta S$  est donnée par Sih [Sih-1979] sous une forme généralisée (en modes mixtes) comme :

$$\Delta S = \frac{1}{8\pi\mu} [a_{11}\Delta K_I \bar{K}_I + a_{12}(\Delta K_I \bar{K}_{II} + \Delta K_{II} \bar{K}_I) + a_{22}\Delta K_{II} \bar{K}_{II} + a_{33}\Delta K_{III} \bar{K}_{III}] \quad (88)$$



avec  $\Delta K_i = K_{i(\max)} - K_{i(\min)}$ ,  $\bar{K}_i = (K_{i(\max)} + K_{i(\min)})/2$  pour  $i \in \{I, II, III\}$ ; les  $a_{ij}$  étant définis par l'équation (16).

Il est évident qu'avec la loi de Sih, le critère de rupture approprié sera celui de Sih donné par l'équation (21) du premier chapitre.

## **IV.2. APPLICATION DE L'APPROCHE D'HYBRIDATION EN FATIGUE**

Mise à part le dernier exemple traité en utilisant la loi de Sih, la loi de Paris donnée par les équations (83) ou (84) est utilisée majoritairement pour prédire la durée de vie de la structure et l'évolution de la géométrie de la fissure caractérisées respectivement par  $da/dN_c$  et  $da/db$  ( $a$ ,  $b$  sont les deux axes de l'ellipse). Avec l'hypothèse que la fissure elliptique se propage dans son plan, le calcul de fatigue que nous effectuons est basé sur l'évaluation du FIC en deux points caractéristiques de la fissure  $A$  et  $B$  (voir la figure 50).

Cette procédure, rendue populaire grâce aux travaux de Newman et Raju [New-1981], est appelée la méthode à deux degrés de liberté (double-DDL) [Lin-1997] ou encore la méthode « two-point plus ellipse » [Lin-1999]. Elle a été adoptée dans cette étude pour deux raisons majeures. La première est sa simplicité relative de mise en œuvre. En effet, suivre l'évolution de la fissure via cette procédure, nécessite de connaître les valeurs du FIC en deux points seulement du contour de la fissure. Ceci permet un gain appréciable en temps machine, la même étape étant répétée plusieurs fois lors de la propagation de la fissure. La deuxième raison, directement liée à l'utilisation de cette procédure avec la méthode d'hybridation de fonctions de poids, est la conservation du profil elliptique de la fissure du fait que seuls les points  $A$  et  $B$  du profil changent de positions. Le rapport des axes de l'ellipse  $\alpha$  peut alors changer mais la forme de la fissure reste elliptique. D'autres procédures existent qui considèrent soit plusieurs points de calcul sur le front de fissure (méthode multi-DDL) soit un seul point de calcul (simple-DDL). La méthode multi-DDL est basée sur une modélisation numérique de la fissure (par éléments finis par exemple [Lin-1997]). Elle vise à se rapprocher du cas réel de la propagation en s'affranchissant de l'hypothèse de la forme elliptique de la fissure. A contrario, le profil elliptique et le rapport des axes sont maintenus dans la méthode à simple-DDL. Un schéma représentatif illustre ces trois méthodes dans la figure 51.

L'adoption de la méthode à double degré de liberté (double DDL) est un bon compromis entre les deux méthodes citées plus haut. Il est justifié a posteriori par des résultats obtenus en utilisant la méthode à multi DDL qui montrent la convergence de formes non elliptiques de la

fissure vers une forme elliptique après propagation (voir les exemples traités dans ce chapitre inspirés des travaux de Lazarus [Laz-2003], Lin et Smith [Lin-1997]).

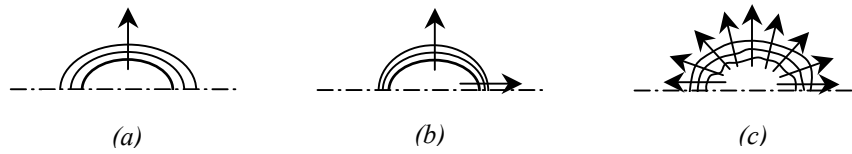


Figure 51 : Les méthodes de progression (a) à simple DDL - (b) à double DDL - (c) à multi DDL

S'appuyant sur cette procédure, le calcul se déroule selon l'organigramme de la figure 52. Dans un premier temps, le FIC est déterminé aux points  $A$  et  $B$ . On affecte alors une avance  $\Delta a_{max}$  au point dont le FIC est maximal et on cherche l'avance  $\Delta a$  de l'autre point selon l'équation (84). Ensuite, on recalcule les FIC pour les deux points après prise en compte des changements géométriques de la fissure et on compare de nouveau les deux FIC affiliés aux deux points  $A$  et  $B$ . L'avance  $\Delta a_{max}$  sera affectée toujours au point ayant un FIC maximal et ainsi de suite.

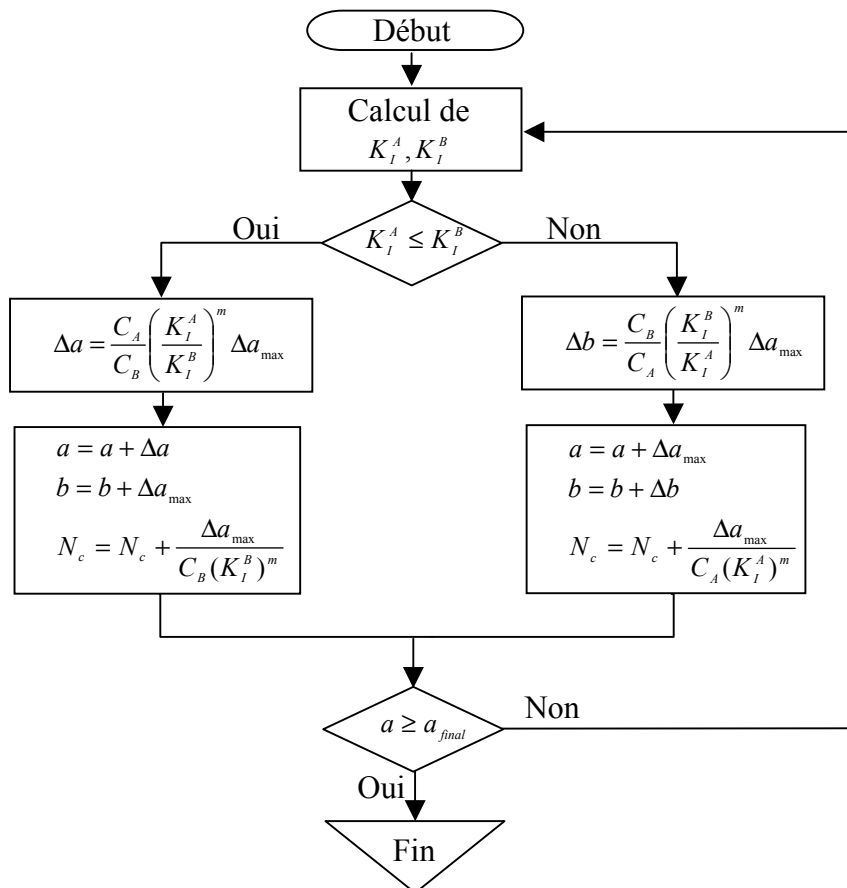


Figure 52 : Organigramme de la procédure de calcul en propagation de fissure

Pour valider l'extension de l'approche d'hybridation en fatigue, nous allons utiliser la procédure décrite précédemment pour traiter différents problèmes de propagation de fissure rencontrés dans la littérature. Nous en dénombrons sept en fonction de la configuration géométrique et du mode de chargement de la structure fissurée. Plus précisément, ces problèmes sont :

- 1) Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Sukumar et al. [Suk-2003]).
- 2) Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Lazarus [Laz-2003]).
- 3) Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Newman et Raju [New-1981]).
- 4) Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Kim et Hwang [Kim-1997]).
- 5) Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Lin et Smith [Lin-1999]).
- 6) Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans un tube sous pression interne.
- 7) Application de l'approche énergétique de Sih dans la prédiction de la propagation d'une fissure dans une pièce à joints de soudure.

Les exemples (1) et (2) concernent le problème d'une fissure elliptique dans un milieu infini sous un chargement de traction uniforme avec des configurations géométriques et des matériaux différents pour chaque exemple. L'exemple (1) a été traité par Sukumar et al. [Suk-2003] en utilisant la XFEM associée à la FMM (Fast Marching Method) alors que l'exemple (2) a été traité par Lazarus [Laz-2003] par la méthode de fonction de poids. Les exemples (3), (4) et (5) d'une plaque contenant une fissure semi-elliptique débouchante, soumise à un chargement de flexion composée, se différencient par les configurations géométriques, les caractéristiques des matériaux et les amplitudes de chargement appliqué. Ils ont été traités respectivement par Newman et Raju [New-1981], Kim et Hwang [Kim-1997] et Lin et Smith [Lin-1999]. L'exemple (6) qui a été traité par Lin et Smith [Lin-1997] concerne le problème d'un tube sous pression interne, contenant une fissure externe longitudinale et débouchante. Le dernier exemple concerne le problème traité par Choi et Choi [Cho-2005] de propagation de fissure semi-elliptique débouchante contenue dans d'une pièce d'une structure d'avion. Le chargement de la fissure est le résultat d'une concentration de contrainte due à la géométrie de

la pièce. Les multiples applications, traités ici, nous permettent d'avoir le domaine de validation, le plus vaste possible, de la méthode d'hybridation en fatigue.

#### IV.2.1. Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Sukumar et al. [Suk-2003])

Nous nous intéressons ici au problème d'une fissure elliptique dans un milieu infini sous un chargement de traction cyclique  $\sigma_t = \Delta\sigma_t$  comme le présente la figure 53, traité par Sukumar et al. [Suk-2003] en utilisant la XFEM pour les configurations suivantes :

i)  $a_0 = 0.05\text{cm}$ ,  $\alpha_0 = a_0/b_0 = 1.0$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $m = 2.1$

ii)  $a_0 = 0.05\text{cm}$ ,  $\alpha_0 = a_0/b_0 = 0.5$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.025a_0$ ,  $m = 2.1$

$a_0, b_0$ , représentent les axes initiaux de l'ellipse.

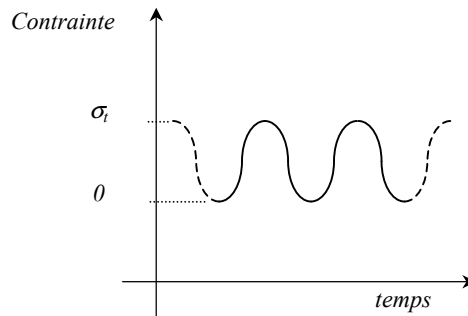


Figure 53 : Schématisation d'une contrainte de traction cyclique

En supposant que le coefficient de propagation de fissure  $C_i = C_j$  est égale à une constante, et que  $a_j = a_{\max}$  dans la loi de Paris prise sous la forme (84), Sukumar et al. [Suk-2003] aboutissent à la relation suivante :

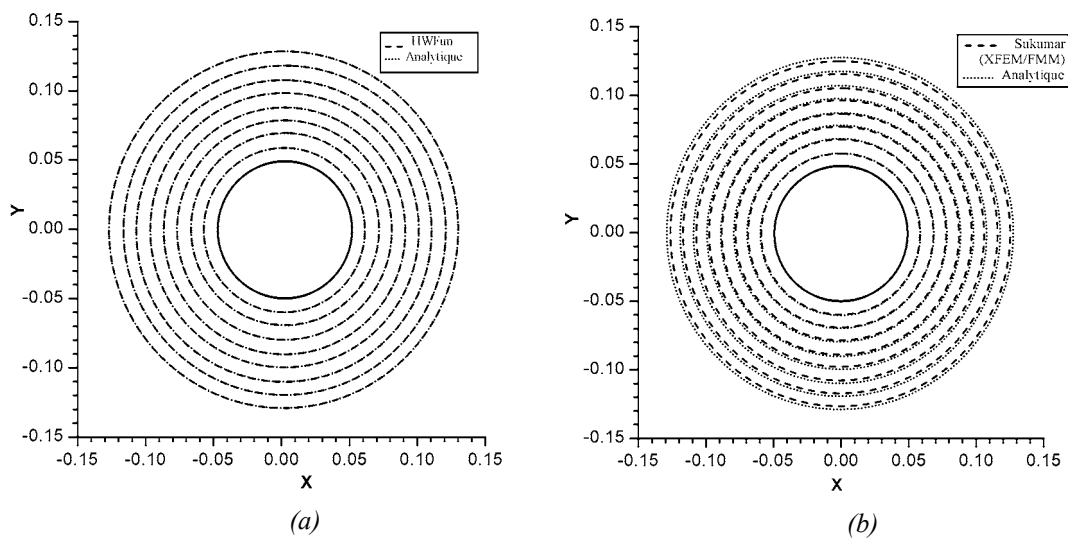
$$\frac{\Delta a_i}{\Delta a_{\max}} = \left( \frac{K_I^i}{K_I^{\max}} \right)^m \quad (89)$$

reliant l'avance  $\Delta a_i$  d'un point du contour de la fissure à l'avance du point correspondant au FIC maximal en fonction des FIC en ces deux points.

##### **i) Cas où $a_0 = 0.05\text{ cm}$ , $\alpha_0 = 1.0$ , $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ , $m = 2.1$**

Sur les figures 54a et 54b, nous avons reporté les résultats obtenus par la présente approche basée sur hybridation concernant l'évolution de la fissure. Sur les mêmes figures, nous avons représenté le même type de résultats obtenus par Sukumar et al. [Suk-2003] en utilisant la XFEM couplée avec la FMM (Fast Marching Method) ainsi que la solution analytique

proposée par [Suk-2003] pour ce cas particulier. Nous observons que, pour les trois méthodes les fissures prises initialement circulaires gardent leur forme même avec un pas d'avancement  $\Delta a_{max}$  relativement grand (par rapport à celui choisi dans la deuxième configuration) et que ces figures montrent également que la méthode d'hybridation permet d'obtenir une prédiction de l'évolution de la fissure de qualité meilleure à celle proposée par Sukumar et al. [Suk-2003]. Ceci est dû probablement à la performance de la méthode d'hybridation dans l'évaluation du FIC par rapport à la méthode XFEM/FMM utilisée par Sukumar et al. [Suk-2003], comme on a pu le vérifier dans le deuxième chapitre (voir la figure 14).



**Figure 54 :** Evolution d'une fissure circulaire dans le plan  $(Oxy)$  et comparaison de la solution analytique avec la solution de : (a) La présente approche - (b) Sukumar et al. [Suk-2003]

**Remarque :** En accord avec la relation (89), l'évolution de la forme de la fissure est indépendante de la valeur du chargement, celui-ci se simplifiant lors du calcul du rapport des FIC.

**ii) Cas où  $a_0 = 0.05\text{cm}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$ ,  $\Delta a_{max} = 0.025a_0$ ,  $m = 2.1$**

Pour cette deuxième configuration, les résultats obtenus par Sukumar et al. [Suk-2003] et ceux obtenus par la présente approche d'hybridation sont illustrés sur les figures 55a et 55b. L'approche d'hybridation, à double DDL, nous fournit dans ce cas également des prédictions analogues à celles données par la méthode XFEM/FMM de Sukumar et al. [Suk-2003]. Par ailleurs, le maintien de la forme elliptique est confirmé par les résultats de Sukumar et al. [Suk-2003]. On constate en effet que la fissure elliptique se transforme graduellement en une fissure circulaire en se propageant dans le milieu infini.

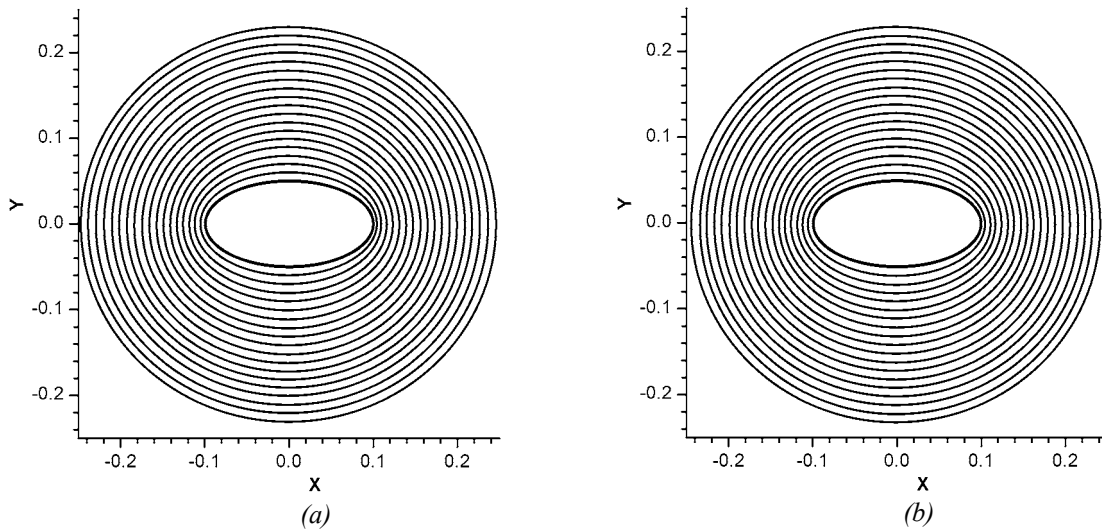


Figure 55 : Evolution d'une fissure elliptique ( $\alpha_0=0.5$ ) dans le plan ( $Oxy$ ) obtenue par :  
 (a) La présente approche - (b) Sukumar et al. [Suk-2003]

#### IV.2.2. Propagation par fatigue d'une fissure elliptique dans un milieu infini (exemple de Lazarus [Laz-2003])

Dans cet exemple, le même problème d'une fissure elliptique interne dans un milieu infini sous un chargement de traction cyclique est traité. Par rapport à l'exemple précédent, on essaie dans cette partie de mettre en évidence la différence entre le comportement en fatigue d'un matériau ductile et celui d'un matériau fragile en variant le paramètre  $m$ . Les quatre configurations retenues dans cette partie sont celles traitées par Lazarus [Laz-2003] utilisant la méthode de fonctions de poids (WFM) :

- i)  $\alpha_0 = a_0 / b_0 = 1.0$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $m = 2$  (matériau ductile).
- ii)  $\alpha_0 = a_0 / b_0 = 0.4$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $m = 2$  (matériau ductile).
- iii)  $\alpha_0 = a_0 / b_0 = 1.0$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.1a_0$ ,  $m = 50$  (matériau fragile).
- iv)  $\alpha_0 = a_0 / b_0 = 0.4$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $m = 50$  (matériau fragile).

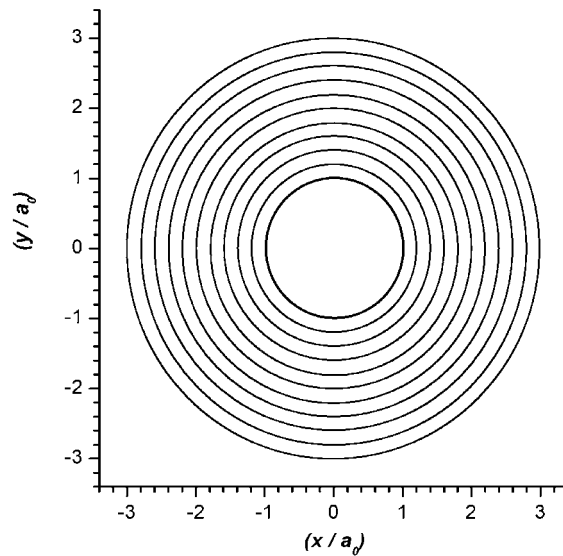
##### **i) Cas où $\alpha_0=1.0$ , $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ , $m = 2$ (matériau ductile)**

Pour une fissure initialement circulaire ( $\alpha_0=1$ ), seule la propagation de la fissure basée sur l'approche d'hybridation est présentée (voir la figure 56), les résultats exactes (analytiques) [Laz-2003] ainsi que ceux obtenus par Lazarus [Laz-2003] étant très proches. En effet, la différence maximale entre les résultats fournis par ces différentes approches est d'environ

$10^{-4}$  % sur les valeurs relatives  $(x/a_0)$  et  $(y/a_0)$ . Par ailleurs, tous ces résultats montrent qu'une fissure initialement circulaire reste circulaire pour cette configuration.

Dans la prédiction de la propagation des fissures par fatigue, l'évolution de la forme de la fissure n'est pas la seule préoccupation. Il y a aussi le nombre de cycles  $N_c$  correspondant à chaque avance de la fissure qui permet de caractériser la durée de vie de la structure étudiée, notamment pour les matériaux ductiles (le cas des deux premières configurations). L'évolution du nombre de cycles caractérisé par la grandeur adimensionnelle  $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1}$ , obtenue par l'approche d'hybridation et de façon analytique, est donnée sur la figure 57 où on observe une très bonne concordance entre les deux méthodes.

**Remarque :** On vérifie aisément, d'après l'équation de Paris [Par-1963] donnée par (82), que la grandeur  $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1}$  est adimensionnelle.



**Figure 56 :** Evolution d'une fissure circulaire dans le plan  $(Oxy)$  obtenue par la présente approche d'hybridation pour  $m = 2$

La solution analytique pour ce problème est obtenue par intégration de l'équation (82) en utilisant l'expression analytique du FIC pour une fissure circulaire  $\sigma_t \sqrt{a/\pi}$  avec  $m = 2$  [Laz-2003] :

$$N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1} = N_c C(\Delta\sigma_t)^2 = \frac{\pi}{4} \ln \frac{a}{a_0} \quad (90)$$

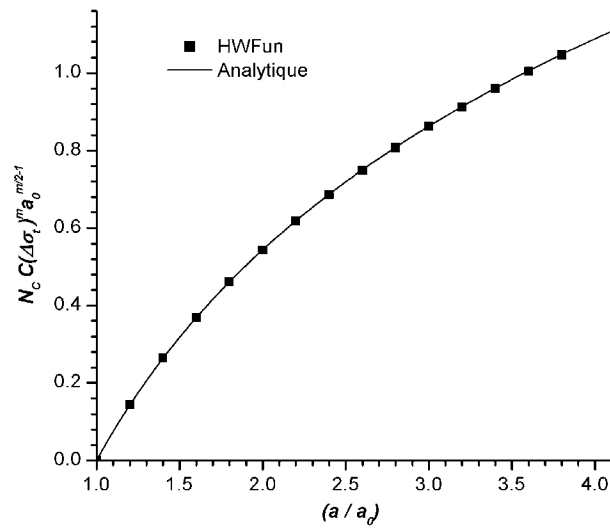


Figure 57 : Evaluation du nombre de cycles en fonction de l'avance pour une fissure circulaire lorsque  $m = 2$  (matériau ductile)

ii) Cas où  $\alpha_0 = 0.4$ ,  $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ ,  $m = 2$  (matériau ductile)

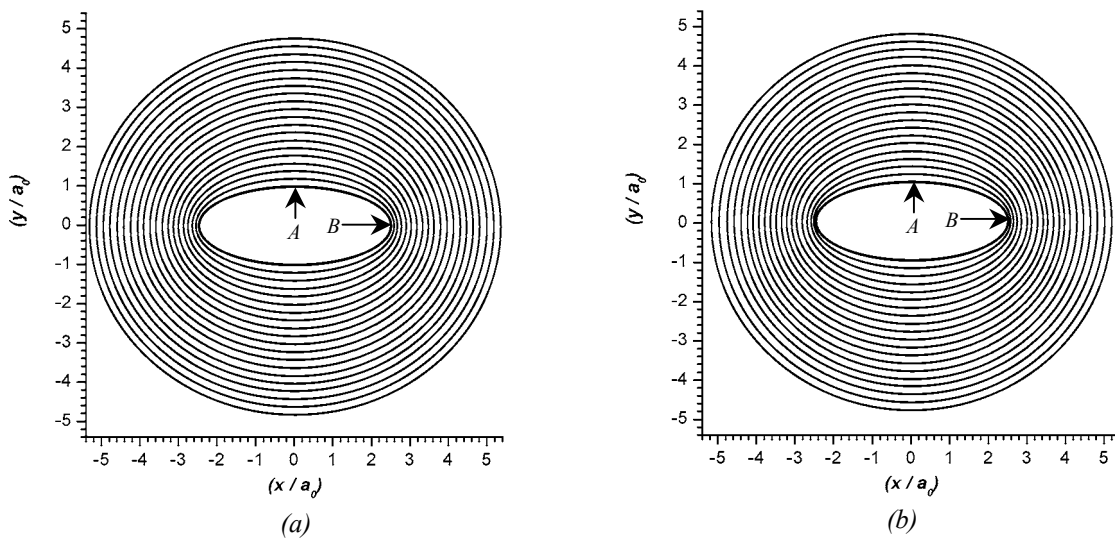


Figure 58 : Evolution d'une fissure elliptique ( $\alpha_0 = 0.4$ ) dans le plan  $(Oxy)$  pour  $m = 2$  obtenue par : (a) La présente approche - (b) Lazarus [Laz-2003]

Concernant cette deuxième configuration, les figures 58a et 58b donnent respectivement la progression de la fissure obtenue par l'approche d'hybridation et par Lazarus [Laz-2003]. Les deux allures de la progression sont très semblables. Elles confortent le constat du cas (IV.2.1.ii) concernant la convergence des fissures elliptiques vers une forme circulaire après progression.



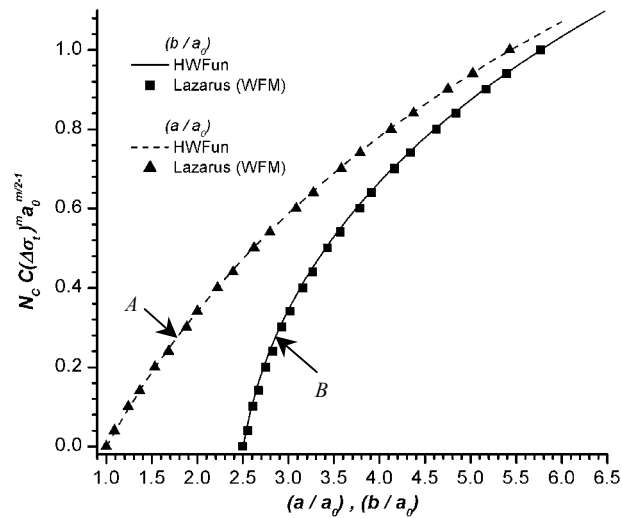


Figure 59 : Evaluation du nombre de cycles en fonction de l'avance pour une fissure elliptique ( $\alpha_0=0.4$ ).

L'évolution du nombre de cycles caractérisée par  $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1}$  en fonction des avances des points caractéristiques de l'ellipse  $A(\theta = \pi/2)$  et  $B(\theta = 0)$  obtenues par l'approche d'hybridation et celle obtenue par Lazarus [Laz-2003] utilisant la WFM sont rassemblées sur la figure 59. En l'absence de la solution exacte, la concordance entre les deux approches est manifeste.

La figure 59 montre que les pentes des courbes diminuent avec la succession des cycles. Ce qui signifie que la vitesse de propagation  $da/dN_c$  augmente avec le temps, indiquant un affaiblissement de la structure avec la propagation de la fissure. On constate aussi qu'au début de la propagation ( $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1} < 0.6$ ), l'avance du point  $A$  est plus rapide que celle du point  $B$ . Cette différence de vitesse est de moins en moins importante avec le nombre de cycles effectués jusqu'à la jonction des deux courbes lorsque l'ellipse devient un cercle.

**iii) Cas où  $\alpha_0=1.0$ ,  $\Delta a_{max} = 0.1a_0$ ,  $m = 50$  (matériau fragile)**

Pour les deux dernières configurations de cet exemple, on s'intéresse à un matériau beaucoup plus fragile que celui utilisé dans les deux premières configurations en prenant le paramètre  $m$  très élevé ( $m = 50$ ). La figure 60 montre qu'une fissure initialement circulaire le reste tout au long de sa propagation même avec un matériau fragile. Le même résultat a été obtenu par Lazarus [Laz-2003].

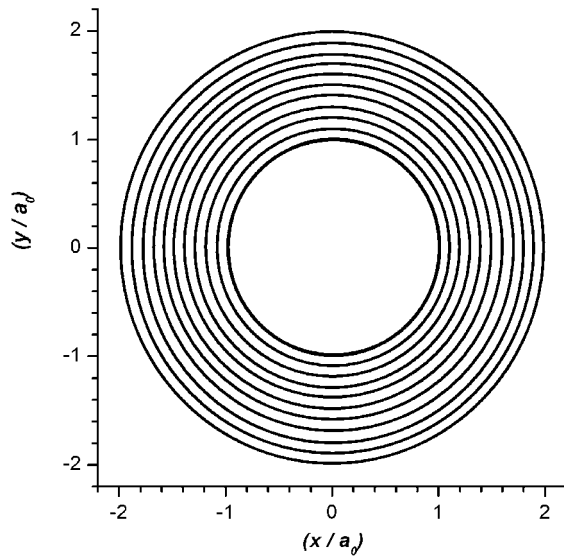


Figure 60 : Evolution d'une fissure circulaire dans le plan  $(Oxy)$  obtenue par la présente approche d'hybridation pour  $m=50$

Sur la figure 61, l'évolution du nombre de cycle  $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1}$  a été représentée en fonction du rapport  $(a/a_0)$  pour différentes valeurs de  $m$ . On observe sur ces figures que plus  $m$  est élevé (matériau de plus en plus fragile) moins le paramètre  $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1}$  varie avec la progression de la fissure. En d'autres termes, la rupture fragile intervient pour des valeurs très faibles de  $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1}$  ( $N_c C(\Delta\sigma_t)^m a_0^{m/2-1} < 10^{-4}$  pour  $m = 50$ ). Pour mieux le constater, une représentation semi-logarithmique est adoptée sur la figure 61b.

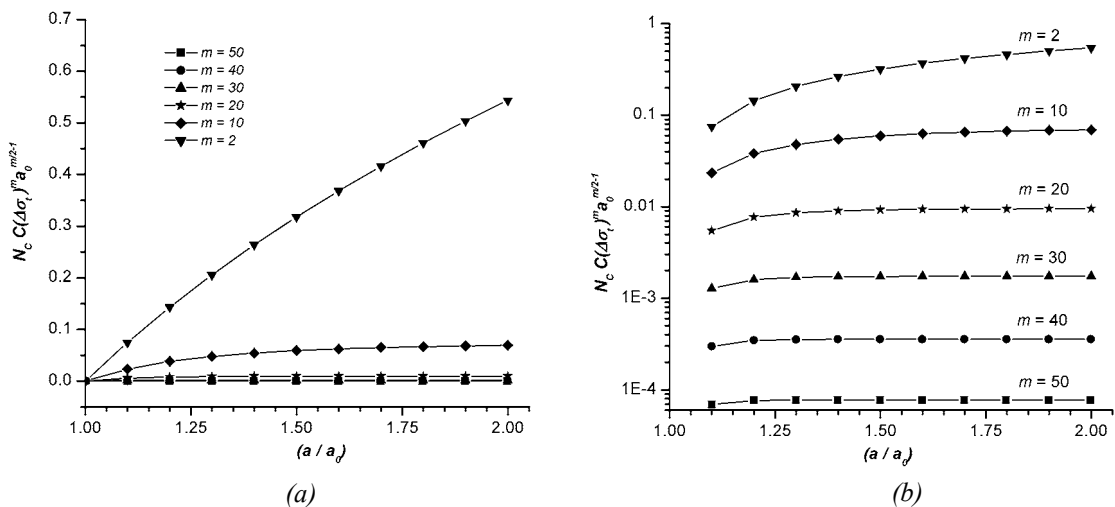


Figure 61 : Evaluation du nombre de cycles en fonction de l'avance pour une fissure circulaire pour  $m = 50$  (a) Echelle linéaire-linéaire (b) Echelle linéaire-logarithmique

En réalité, ce qui nous intéresse dans le cas d'une rupture fragile est le seuil de stabilité de la fissure au lieu de la durée de vie. Ce seuil est exprimé en fonction de la ténacité ( $K_{Ic}$ ) et est caractérisé par la grandeur adimensionnelle [Laz-2003] :

$$\Delta\sigma_t(a_0^{1/2}/K_{Ic}) = \Delta\sigma_t(a_0^{1/2}/K_I) \quad (91)$$

Cette relation découle du critère de la rupture évoqué dans la section 3 du premier chapitre. Notons que lorsque  $K_I$  atteint la valeur critique  $K_{Ic}$ , la stabilité de la propagation de la fissure devient incertaine (voir l'étape (iii) de la section IV.1.1). L'évaluation de la grandeur  $\Delta\sigma_t(a_0^{1/2}/K_{Ic})$  donnée par l'équation (91) nous permet de déterminer, pour une avance donnée de la fissure, le chargement seuil à ne pas dépasser pour rester dans le domaine de stabilité.

L'ensemble des valeurs trouvées est reporté sur la figure 62 où une comparaison est proposée avec les valeurs analytiques pour une fissure circulaire ( $K_I = \sigma_t \sqrt{a/\pi}$ ), sous la forme suivante :

$$\Delta\sigma_t(a_0^{1/2}/K_{Ic}) = \frac{\sqrt{\pi a_0}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a/a_0}} \quad (92)$$

La figure 62 montre une concordance parfaite entre les prédictions basées sur l'hybridation et la solution analytique.

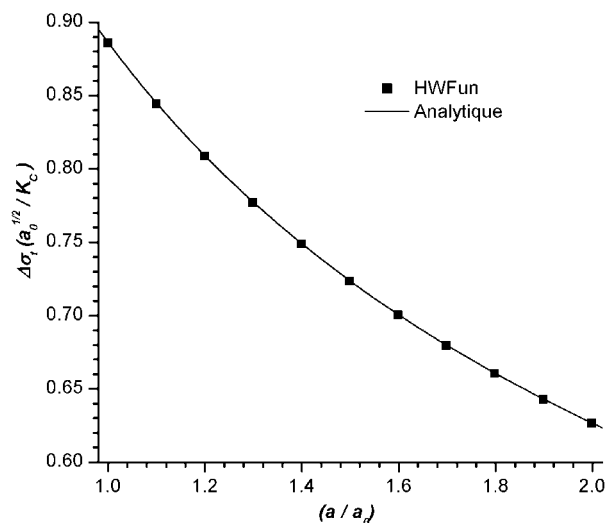


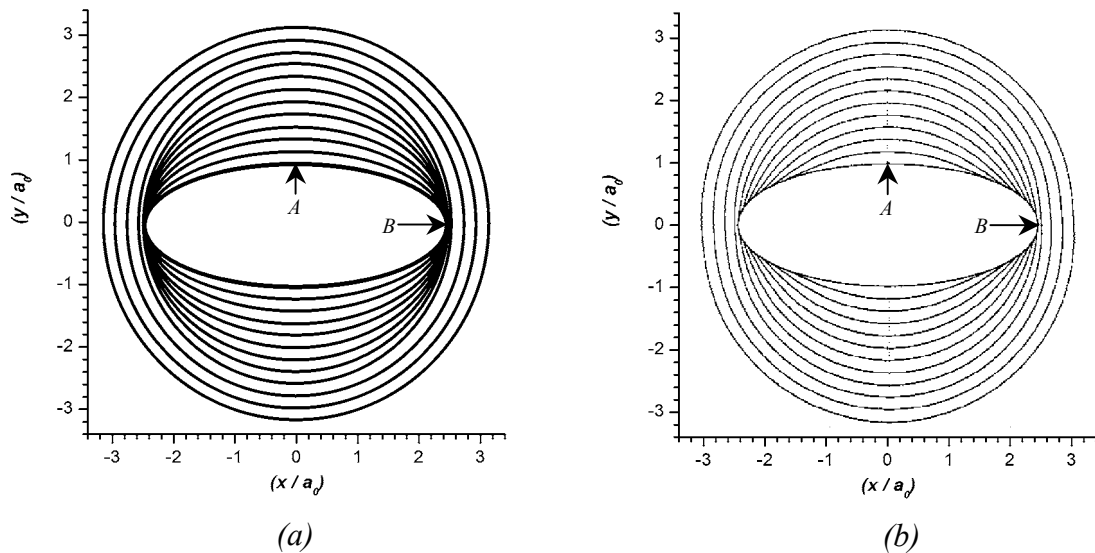
Figure 62 : Evaluation des valeurs de seuils de stabilité pour une fissure circulaire

Il suffit que la quantité adimensionnelle  $\Delta\sigma_t(a_0^{1/2}/K_{Ic})$  atteigne une valeur aux alentours de 0.9 (voir la figure 62) pour que la propagation s'enclenche. On remarque aussi que le seuil de stabilité diminue au fur et à mesure que la fissure avance. Pour arrêter cette propagation à une avance donnée, il faudra ramener la valeur de  $\Delta\sigma_t(a_0^{1/2}/K_{Ic})$  en dessous de la courbe, chose qui est loin d'être facile à réaliser en pratique.

**iv) Cas où  $\alpha_0=0.4$ ,  $\Delta a_{max} = 0.2a_0$ ,  $m = 50$  (matériau fragile)**

On considère le même problème d'une fissure chargée en traction avec une forme initialement elliptique ( $\alpha_0 = 0.4$ ) dans un milieu infini constitué d'un matériau très fragile ( $m = 50$ ).

Les deux figures 63a et 63b représentent les progressions de la fissure obtenues respectivement par l'approche d'hybridation et la WFM de Lazarus [Laz-2003]. L'allure globale des profiles de la fissure est pratiquement la même d'une approche à l'autre. Ces profiles montrent que la fissure initialement elliptique tend à devenir circulaire comme pour le matériau ductile des exemples précédents.



**Figure 63 :** Evolution d'une fissure elliptique ( $\alpha_0=0.4$ ) dans le plan  $(Oxy)$  pour  $m = 50$  obtenue par : (a) La présente approche - (b) Lazarus [Laz-2003]

On remarque par ailleurs, que Lazarus [Laz-2003] prévoit en début de propagation une déviation par rapport au profile elliptique puis un retour à celui-ci, contrairement à l'approche d'hybridation où la forme de la fissure reste toujours elliptique par hypothèse.

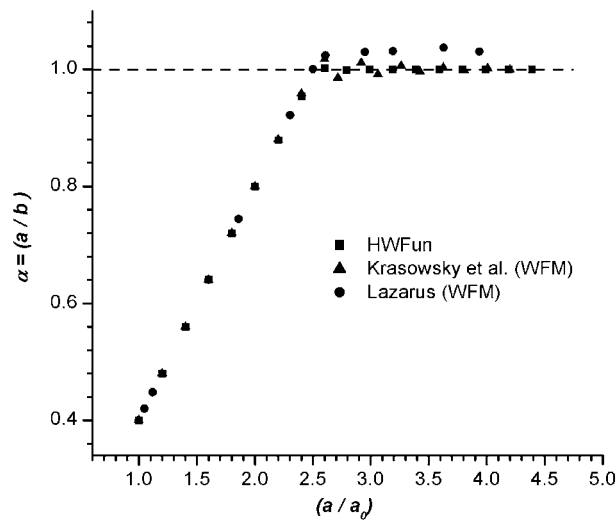


Figure 64 : Evolution de la forme d'une fissure elliptique ( $\alpha_0=0.4$ ) en fonction de l'avance obtenue par les différentes approches

Sur la figure 64, l'évolution du rapport  $\alpha$  des axes de l'ellipse est représentée durant la propagation de la fissure. Il est à noter que pour les trois approches mentionnées,  $\alpha$  augmente rapidement et se stabilise autour de 1 pour l'approche d'hybridation, oscille avant de se stabiliser autour de 1 pour l'approche basée sur la fonction de poids de Krasowsky [Kra-1999] et se stabilise légèrement au-dessus de 1 pour l'approche basée sur la fonction de poids de Lazarus [Laz-2003]. Ceci peut justifier encore l'intérêt qu'on apporte à l'approche d'hybridation dans le cadre de cette étude.

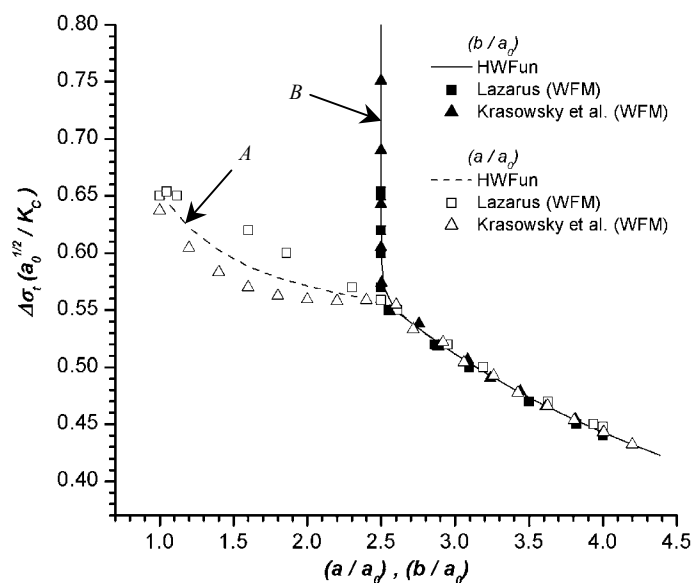


Figure 65 : Evaluation des valeurs seuils de stabilité pour une fissure elliptique ( $\alpha_0=0.4$ ) obtenues par les différentes approches

Les prédictions du seuil de stabilité pour les points  $A(\theta = \pi/2)$  et  $B(\theta = 0)$  d'une fissure elliptique à  $\alpha_0 = 0.4$ , obtenues par la présente approche d'hybridation et celles obtenues en utilisant la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999] ou l'approche de fonction de poids de Lazarus [Laz-2003], sont présentées sur la figure 65. Ces approches donnent globalement des résultats très similaires. Le décalage le plus important entre les différentes courbes concerne le point  $A$  et est obtenu pour  $a/a_0 < 2.5$ . Dans cet intervalle l'approche d'hybridation est encadrée par les deux autres approches en étant plus proche à celle de Lazarus [Laz-2003]. D'après la figure 65, on constate également l'existence de multiple solutions pour le point  $B$  autour de la valeur initiale  $b/a_0 = 2.5$ . Ce qui indique que la fissure peut avoir un comportement stable sur une fourchette importante de chargement mais qu'elle pourrait se propager suite à la moindre avance et ce d'une manière irréversible.

### IV.2.3. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Newman et Raju [New-1981])

On traite ici le problème d'une fissure semi-elliptique contenue dans une plaque (voir la figure 66) soumise à un chargement dans lequel seule la contrainte de flexion est non nulle ( $\Delta\sigma_t = 0$  et  $\Delta\sigma_f \neq 0$ ) comme le montre la figure 67a. Le même type de fissure a été traité dans le chapitre III avec un chargement statique.

Newman et Raju [New-1981] ont également traité le même problème de propagation de fissure par fatigue avec les configurations suivantes :

- i)-  $\alpha_0 = 0.320$ ,  $a_0/t = 0.060$ ,  $t = 9.5\text{mm}$ ,  $m = 4$ .
- ii)-  $\alpha_0 = 0.350$ ,  $a_0/t = 0.030$ ,  $t = 9.5\text{mm}$ ,  $m = 4$ .
- iii)-  $\alpha_0 = 1.000$ ,  $a_0/t = 0.056$ ,  $t = 9.5\text{mm}$ ,  $m = 4$ .
- iv)-  $\alpha_0 = 1.000$ ,  $a_0/t = 0.275$ ,  $t = 9.5\text{mm}$ ,  $m = 4$ .

Ces configurations ont été retenues par Corn [Cor-1971] lors d'essais expérimentaux qu'il a réalisés sur des éprouvettes en aluminium 2014-T651. Les résultats obtenus par Corn [Cor-1971] nous serviront dans les comparaisons à venir.

Pour traiter ce type de problème, Newman et Raju [New-1981] ont utilisé la loi de Paris (82) pour les deux points caractéristiques  $A(\theta = \pi/2)$  et  $B(\theta = 0)$  de manière à avoir :

$$\frac{da}{dN_c} = C_A (\Delta K_A)^m \quad (93)$$

$$\frac{db}{dN_c} = C_B (\Delta K_B)^m \quad (94)$$

où  $C_A$  et  $C_B$  sont les coefficients de propagation de fissure liés respectivement au points  $A$  et  $B$ . Pour les milieux infinis, ces coefficients sont généralement pris identiques ( $C_A = C_B = C =$  constante, hypothèse déjà utilisée dans la section IV.2.1). Cependant, Newman et Raju [New-1981] considèrent que  $C_A \neq C_B$  en s'appuyant pour cela sur les résultats expérimentaux de Corn [Cor-1971] et de Yen et Pendleberry [Yen-1962] qui montrent que :

$$C_B = (0.9)^m C_A \quad (95)$$

Ceci est dû essentiellement d'après Newman et Raju [New-1981] au décalage par excès d'environ 10% de la valeur du FIC au point  $B$  par rapport à celle du point  $A$  pour une fissure semi-circulaire. Newman et Raju [New-1981] généralisent ce résultat pour les autres rapports de  $\alpha$ , chose que nous allons adopter tout au long de cette application.

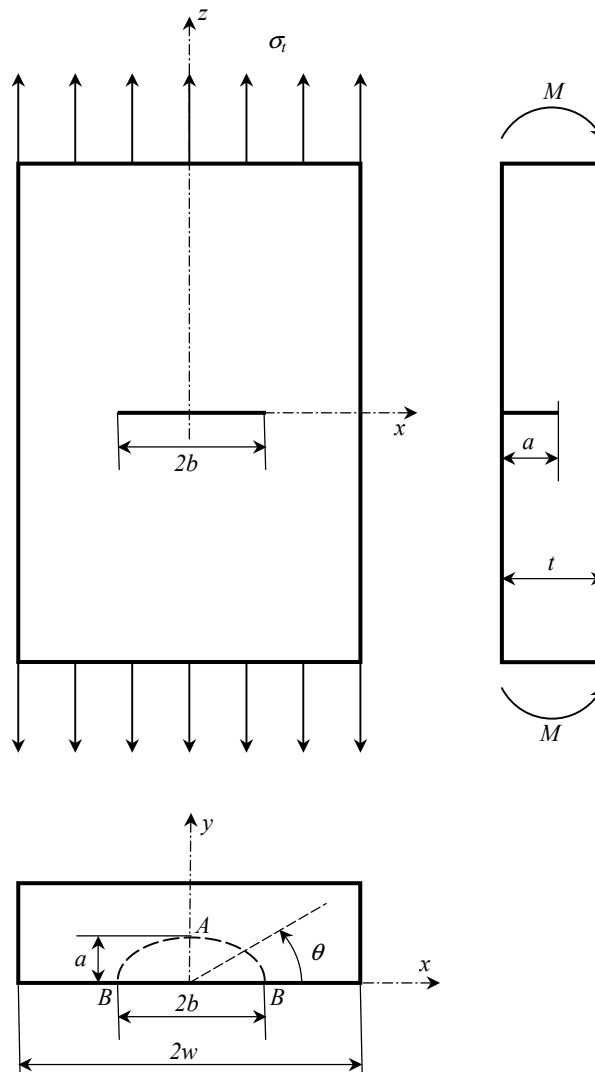
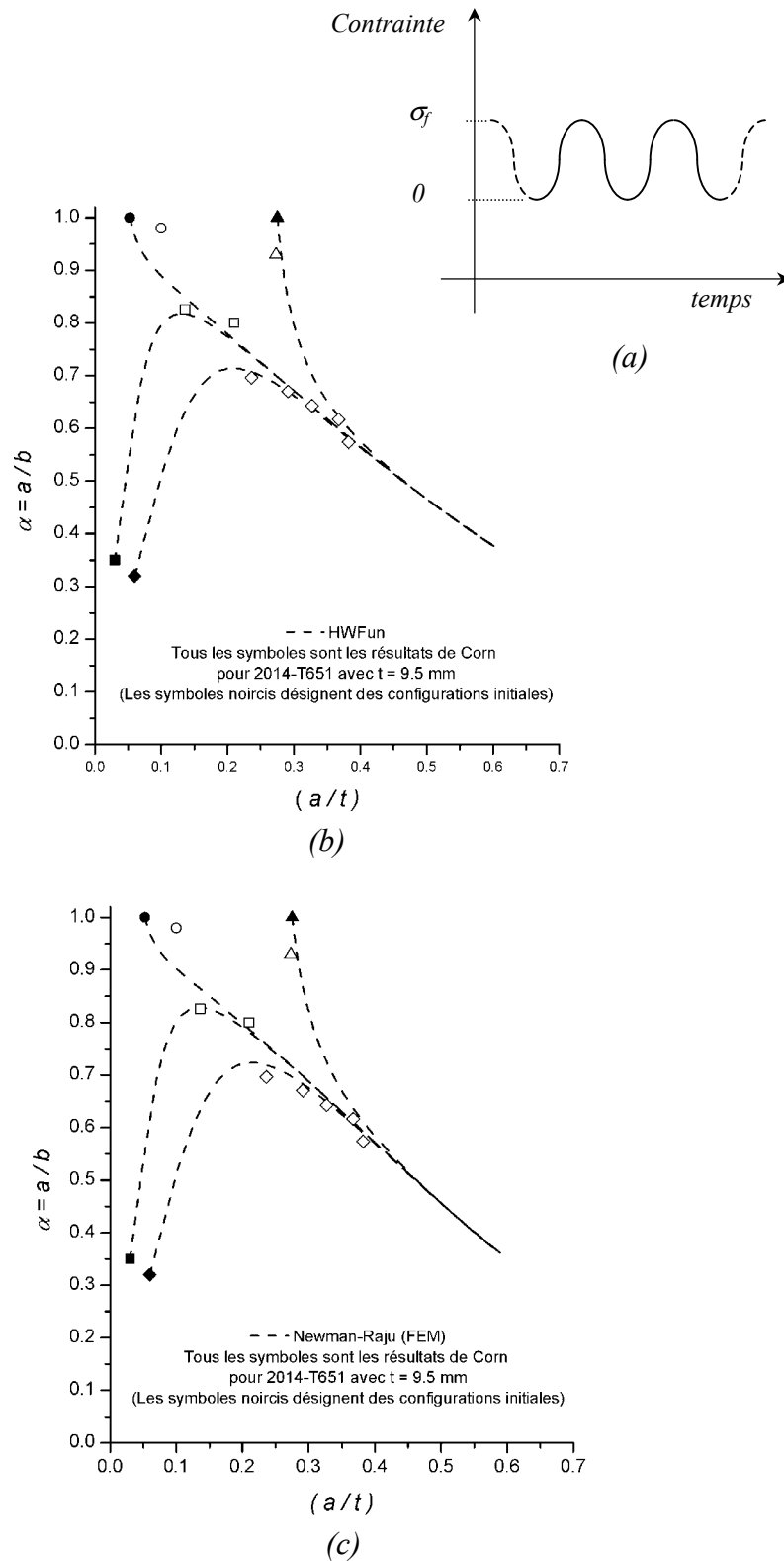


Figure 66 : Fissure semi – elliptique dans une plaque sous flexion en fatigue

**Remarque :** Il est à noter que la différence entre  $C_A$  et  $C_B$  peut se justifier aussi par le changement d'un état de contrainte plane en  $B$  à un état de déformation plane en  $A$ .



**Figure 67 :** Evolution d'une fissure semi-elliptique dans une plaque sous flexion pure cyclique ( $\sigma_i = 0$  et  $\sigma_f \neq 0$ )  
 (a) La contrainte cyclique appliquée - (b) Les résultats de la présente approche comparés aux résultats expérimentaux - (c) Les résultats de Newman et Raju [New-1981] comparés aux résultats expérimentaux.



La relation (95) combinée aux relations (93) et (94) donne l'expression suivante,

$$\Delta a = \frac{C_A}{C_B} \left( \frac{\Delta K_A}{\Delta K_B} \right)^m \Delta b = \left( \frac{\Delta K_A}{0.9 \Delta K_B} \right)^m \Delta b \quad (96)$$

pour l'avance  $\Delta b$  du point  $B$  en fonction de l'avance  $\Delta a$  du point  $A$ . La relation (96) est combinée à l'approche d'hybridation et est utilisée pour évaluer les changements de la forme semi-elliptiques de la fissure.

Les résultats obtenus, pour les différentes configurations traitées, sont reportés sur la figure 67 ainsi que les résultats expérimentaux de Corn [Cor-1971] pour les mêmes configurations. Sur la même figure, les résultats numériques de Newman et Raju [New-1981] sont également comparés à ceux de Corn [Cor-1971].

Les graphes des figures 67b et 67c donnant les variations du rapport des axes  $\alpha = a/b$  en fonction du taux d'avancement de la fissure  $a/t$  montrent une bonne concordance entre les résultats donnés par les différentes approches. Ces derniers montrent que les fissures correspondant aux quatre configurations différentes convergent toutes vers la même forme en se propageant, ce qui a été vérifiée par Corn [Cor-1971] expérimentalement.

#### IV.2.4. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Kim et Hwang [Kim-1997])

Dans cet exemple, le problème précédent ( $\sigma_t = \Delta\sigma_t = 0$  et  $\sigma_f = \Delta\sigma_f \neq 0$ ) est traité en considérant pour les éprouvettes utilisées différentes configurations proposées par Kim et Hwang [Kim-1997] :

i)  $a_0 = 0.127$ ,  $b_0 = 1.27$ ,  $a_{final} = 1.320$ ,  $b_{final} = 2.019$ ,  $t = 6.350$ ,  $w = 6.350$ ,  
 $\Delta a_{max} = 0.1a_0$ ,  $m = 3$ .

ii)  $a_0 = 0.127$ ,  $b_0 = 1.27$ ,  $a_{final} = 1.778$ ,  $b_{final} = 2.413$ ,  $t = 6.150$ ,  $w = 6.337$ ,  
 $\Delta a_{max} = 0.1a_0$ ,  $m = 3$ .

On observe que, par rapport à l'exemple précédent, de nouvelles caractéristiques géométriques sont retenues pour les éprouvettes. Les valeurs des différentes cotes (voir la figure 68) sont données en (mm) et les valeurs limites ( $a_{final}$  et  $b_{final}$ ) des axes de l'ellipse sont considérées.

Pour traiter ce problème, Kim et Hwang [Kim-1997] proposent, sur la base d'expériences qu'ils ont réalisées, une correction du rapport  $C_B/C_A$  différente de celle de Newman et Raju

[New-1981], à savoir  $C_B/C_A = \tau^m$  avec  $\tau = 0.904$  au lieu de 0.9 selon Newman et Raju [New-1981].

L'utilisation du nouveau rapport,  $C_B/C_A = (0.904)^m$ , dans la loi de progression (96) avec les FIC obtenus par la méthode d'hybridation donnent des variations de formes  $\alpha = a/b$  que nous avons représentées en fonction de l'avance de la fissure sur la figure 68. Sur le même graphe, sont représentées les valeurs trouvées en utilisant l'équation empirique (78) de Newman et Raju [New-1981] pour évaluer les FIC ainsi que les valeurs expérimentales de Kim et Hwang [Kim-1997]. Une bonne concordance est observée entre les différentes approches, la correction ne modifiant pas le calcul de manière significative.

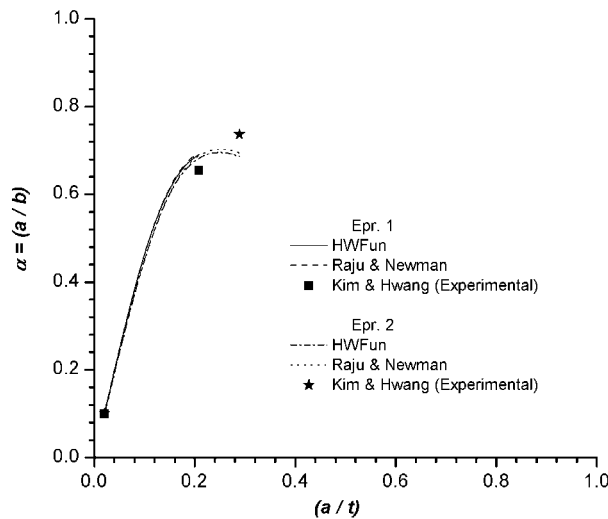
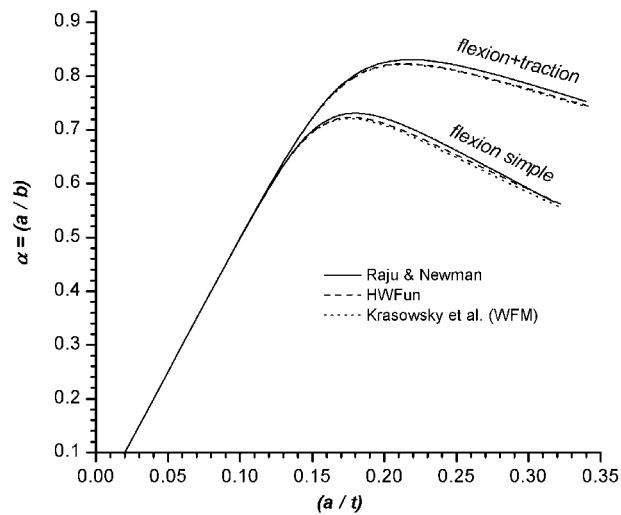


Figure 68 : Evolution de la forme d'une fissure en fonction du taux d'avance pour les éprouvettes de Kim et Hwang [Kim-1997] lorsque  $m = 3$

Nous avons ensuite testé la première éprouvette en la supposant constituée d'un matériau plus fragile ( $m = 10$ ) avec deux modes de chargements ; flexion simple et flexion composée (flexion + traction). Les résultats trouvés par la présente approche d'hybridation sont comparés avec ceux obtenus en utilisant respectivement l'équation empirique (78) de Raju et Newman [New-1981] et la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999].

Par rapport au cas précédent ( $m = 3$ ), on observe d'après la figure 69 que le maximum de  $\alpha = a/b$  reste le même avec un matériaux plus fragile et se décale un peu à gauche (correspond à une avance plus faible). Ce maximum est plus important pour un chargement de flexion composée. Ces observations reviennent au changement de la valeur de l'avance correspondant au basculement de la valeur maximal du FIC entre le point A et le point B du bout de la

fissure. Par ailleurs, toutes les approches donnent des résultats très semblables (voir la figure 69), notamment ceux obtenus par hybridation et par l'utilisation de la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999]. Cependant, pour le cas de flexion simple pour une avance  $a/t > 0.28$  les résultats de l'hybridation sont plus proches à ceux de Raju et Newman [New-1981] qu'à ceux de Krasowsky et al. [Kra-1999].



**Figure 69 :** Evolution de la forme d'une fissure en fonction du taux d'avance pour les éprouvettes de Kim et Hwang [Kim-1997] lorsque  $m = 10$

#### IV.2.5. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion (exemple de Lin et Smith [Lin-1999])

Le problème d'une fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque a également été traité par Lin et Smith [Lin-1999] en utilisant une modélisation basée sur la méthode des éléments finis. Deux modes de chargement ont été considérés ; une flexion simple et une flexion composée (flexion + traction). Les configurations prises en compte ont été les suivantes :

- i)-  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.1a_0$ ,  $m = 3$ .
- ii)-  $\alpha_0 = 0.5$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.1a_0$ ,  $m = 3$ .
- iii)-  $\alpha_0 = 1.0$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.1a_0$ ,  $m = 3$ .

Pour ce comparer aux résultats de Lin et Smith [Lin-1999] basés sur la FEM, le problème de propagation de fissure a été traité pour les configurations ci-dessus avec la même loi de propagation (96) qui a servi dans IV.2.3.

Pour un chargement de flexion simple ( $\Delta\sigma_t = 0$  et  $\Delta\sigma_f = 1\text{MPa}$ ), les évolutions trouvées par hybridation sont illustrées sur les figures 70. Celles-ci appellent plusieurs constatations :

1- La fissure avance d'une manière continue dans le sens de la largeur de la plaque (sur la surface libre  $y = 0$ ), contrairement à sa propagation dans le sens de l'épaisseur où la fissure est d'autant plus freinée qu'elle se rapproche du plan de la deuxième surface libre ( $y = t$ ). La progression est tellement lente qu'elle donne l'impression de stagner avant d'atteindre la deuxième surface libre (numériquement, la fissure n'évolue plus dans l'épaisseur après 180 incréments). Ce phénomène de stagnation est vraisemblablement dû à la partie compressive de  $\sigma_f$  qui tend à fermer les lèvres de la fissure, ce qui empêche son avancement.

2- L'incrément d'avance maximal  $\Delta a_{max}$  correspond toujours au point  $B$  pour  $\alpha_0 = 1.0$  (la figure 70c). Cependant, pour les deux autres configurations  $\alpha_0 = 0.2$  et  $\alpha_0 = 0.5$  représentées sur les figures 70a et 70b, le lieu de l'avance maximale  $\Delta a_{max}$  passe du point  $A$  au point  $B$  après quelques incréments. Ceci est dû au basculement de la valeur maximale du FIC du point  $A$  vers le point  $B$  en raison de l'augmentation de  $\alpha$  au début de la propagation. Cette observation est également valable pour un chargement de traction simple. Se faisant, la fissure avance plus dans la direction de  $x$ , entraînant par la même, une diminution de  $\alpha$ . On s'attend alors à un retour de la valeur maximale du FIC vers le point  $A$ . Ceci ne se produit pas dans le cas présent, à cause du chargement mixte (traction et compression dues à la flexion) auquel est soumise la fissure.

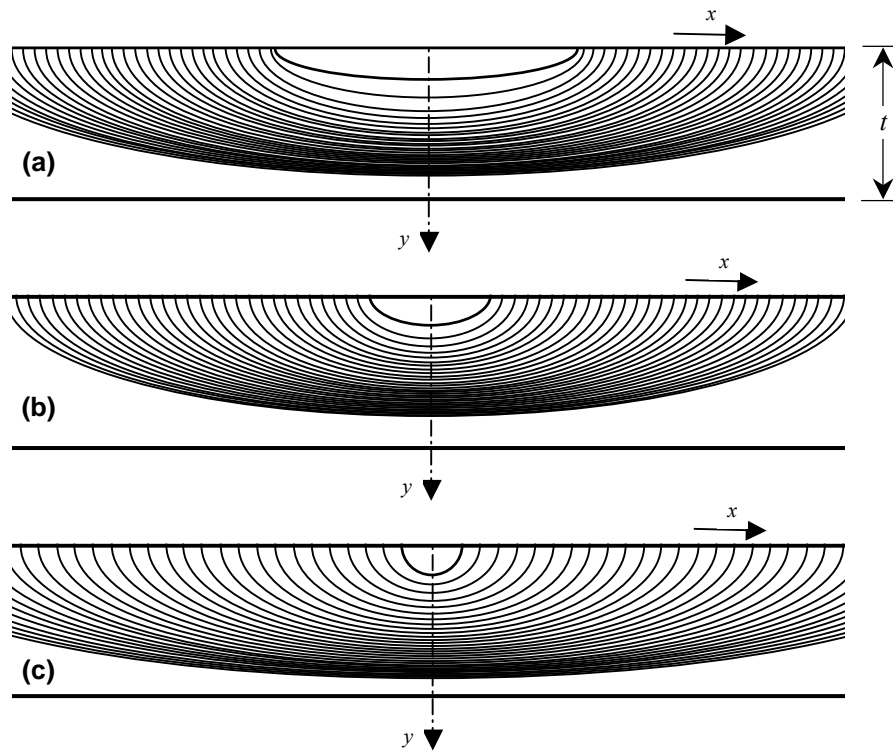


Figure 70 : Evolution d'une fissure semi-elliptique dans une plaque sous flexion pure  
(a) pour  $\alpha_0 = 0.2$  - (b) pour  $\alpha_0 = 0.5$  - (c) pour  $\alpha_0 = 1.0$

On s'intéresse maintenant au chargement de flexion composée ( $\Delta\sigma_t = \Delta\sigma_f = 0.5\text{MPa}$ ) avec les trois configurations (i, ii, iii). L'évolution de la forme de la fissure durant sa propagation, obtenue par l'approche d'hybridation, est présentée sur la figure 71. On note particulièrement sur cette figure la disparition du phénomène de freinage de la fissure observé pour le chargement de flexion simple. Ceci est dû à la suppression de la contrainte négative (de compression) en raison du chargement de traction imposée. La fissure avance donc aussi bien dans le sens de la largeur de la plaque que dans le sens de l'épaisseur jusqu'à atteindre la deuxième surface libre ( $y = t$ ).

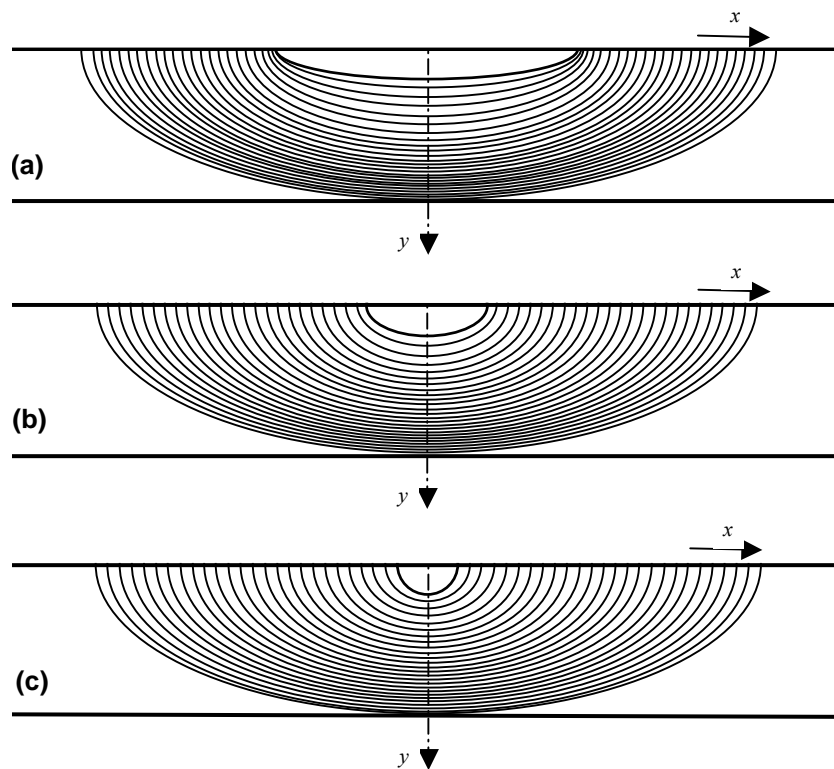


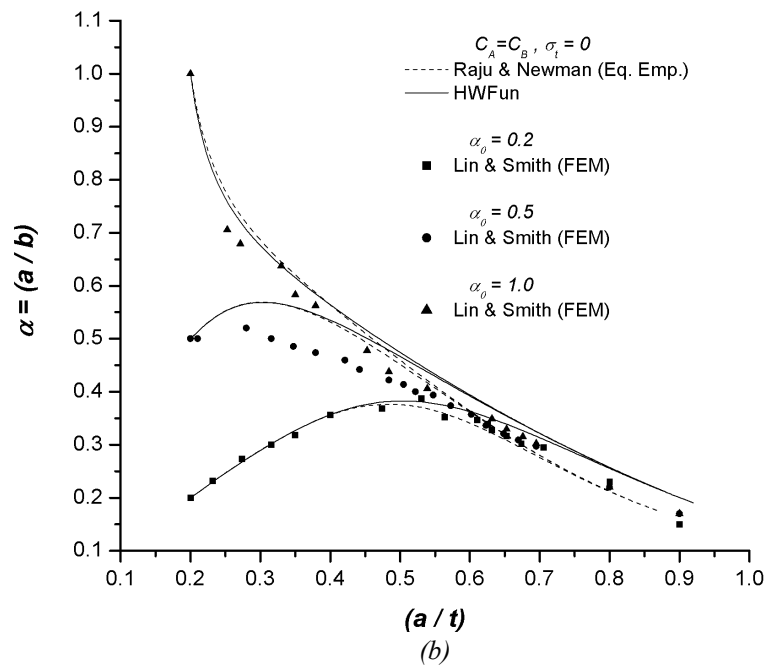
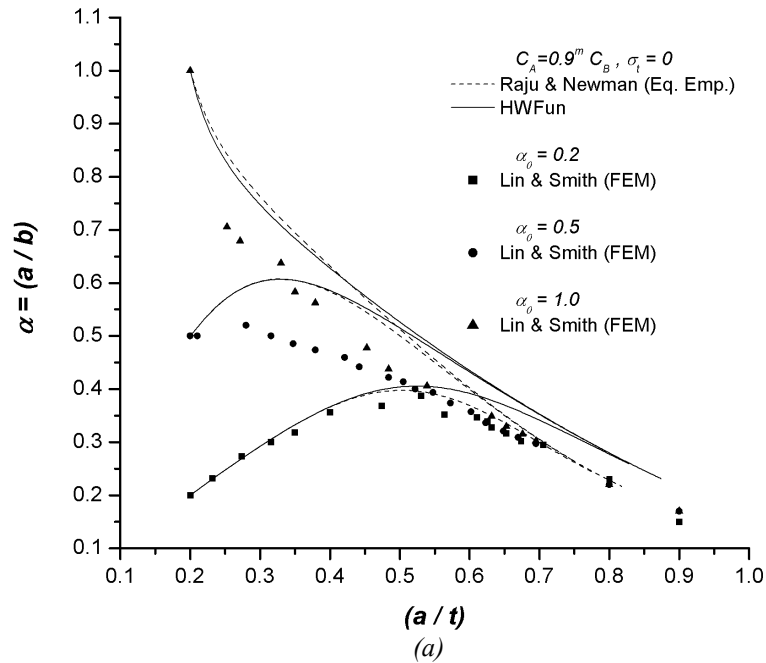
Figure 71 : Evolution d'une fissure semi-elliptique dans une plaque sous flexion composée : (a) pour  $\alpha_0 = 0.2$  - (b) pour  $\alpha_0 = 0.5$  - (c) pour  $\alpha_0 = 1.0$

Il faut noter que les évolutions de la forme de la fissure de la figure 71 obtenues dans cette étude pour cet exemple sont très similaires à celles rapportées par Lin et Smith [Lin-1999] pour les deux modes de chargements (voir pages 526-527 de la référence [Lin-1999]).

Sur les figures 72a et 72b, nous avons représenté l'évolution du rapport  $\alpha$  des axes de la fissure elliptique en fonction de l'avance de celle-ci obtenue par la méthode d'hybridation et comparée aux résultats FEM de Lin et Smith [Lin-1999] et empiriques (de source FEM) de Newman et Raju [New-1981] pour les trois configurations.

La différence entre les figures 72a et 72b est l'hypothèse faite sur les coefficients  $C_A$  et  $C_B$ .

La variation du rapport  $\alpha = a/b$  de l'ellipse en fonction de l'avancement  $a/t$  de la fissure pour un chargement de flexion simple obtenue par l'approche d'hybridation, en utilisant l'équation (96) avec  $C_A = (0.9)^m C_B$ , est présentée sur la figure 72a.



**Figure 72 :** Evolution de la forme d'une fissure semi-elliptique dans une plaque sous flexion simple en fonction de taux d'avance : (a) Avec  $C_A = (0.9)^m C_B$  - (b) Avec  $C_A = C_B$

Pour  $a/t < 0.5$ , les différentes approches donnent des résultats globalement proches pour  $\alpha_0 = 0.2$ , en revanche la concordance avec les résultats de Lin et Smith [Lin-1999] se détériore

pour  $\alpha_0 = 0.5$  et  $\alpha_0 = 1.0$ . Un écart de la méthode d'hybridation avec les autres approches commence à apparaître pour  $a/t$  de plus en plus élevé ( $a/t > 0.5$ ). Ceci est dû à l'effet de la deuxième surface libre ( $y = t$ ) non pris en compte par notre approche contrairement aux autres approches basées sur des résultats d'éléments finis où cet effet est considéré (la même remarque est observée pour le cas statique ; dans les exemples III.3.3 et III.3.4 du chapitre précédent). Cependant, l'utilisation de l'hypothèse  $C_A = C_B$  pour toutes les approches a rendu la concordance des résultats globalement plus claire comme le montre la figure 72b.

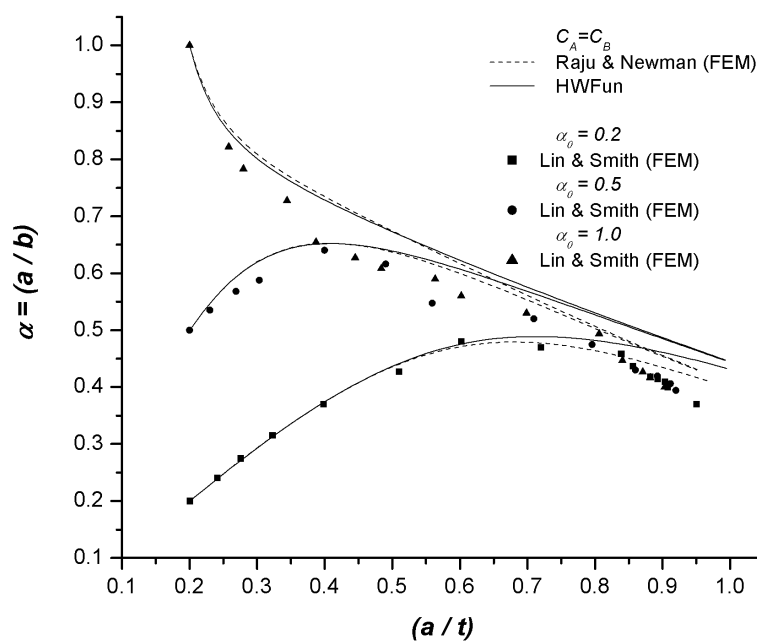


Figure 73 : Evolution de la forme d'une fissure semi-elliptique dans une plaque sous flexion composée en fonction de taux d'avance

Avec un chargement de flexion composée ( $\Delta\sigma_t = \Delta\sigma_f = 0.5\text{MPa}$ ) et en considérant dans l'équation (96) que  $C_A = C_B$  pour toutes les approches, les résultats donnant la variation de  $\alpha$  en fonction du taux d'avance  $a/t$  durant la propagation de la fissure sont illustrés sur la figure 73. D'après cette figure, les différentes approches donnent des résultats globalement semblables avec un écart de la méthode d'hybridation pour des valeurs de  $a/t$  élevées. D'après le même graphe et par rapport à un chargement de flexion simple, la flexion composée retarde un peu la convergence des différentes configurations vers une propagation unique. Ceci peut être attribué à la partie traction du chargement. Notons qu'avec un chargement de traction

simple, la convergence des différents profils ( $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  et  $\alpha_0 = 1$ ) est beaucoup moins rapide pour le même problème (voir page 533 de la référence [Lin-1999]).

#### IV.2.6. Propagation par fatigue d'une fissure semi-elliptique débouchante dans un tube sous pression interne

Dans cette application, on considère le problème de propagation de fissure semi-elliptique débouchante à l'extérieur d'un tube d'épaisseur  $t$  et de rayon interne  $R_i$  sous une pression interne  $p$  (voir la figure 74). L'évolution de la forme de la fissure est déterminée pour les configurations suivantes traitées par Lin et Smith [Lin-1997] :

- i)  $\alpha_0 = 1.0$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $t/R_i = 0.1$  (tube mince),  $\Delta a_{\max} = t/125$ ,  $m = 3$ .
- ii)  $\alpha_0 = 0.4$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $t/R_i = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = t/125$ ,  $m = 3$ .
- iii)  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $t/R_i = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = t/125$ ,  $m = 3$ .
- iv)  $\alpha_0 = 1.0$ ,  $a_0/t = 0.2$ ,  $t/R_i = 1.0$  (tube épais),  $\Delta a_{\max} = t/125$ ,  $m = 3$ .

La pression interne  $p$  est supposée varier de 0 à 1 MPa durant le cycle de chargement.

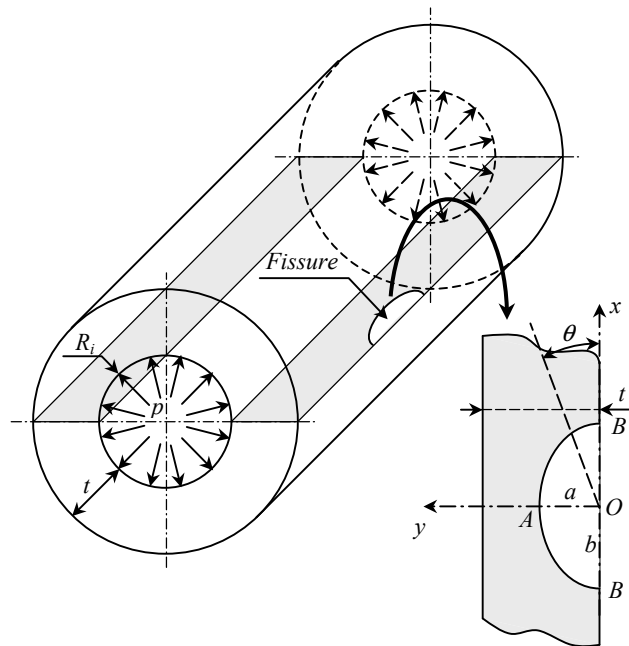


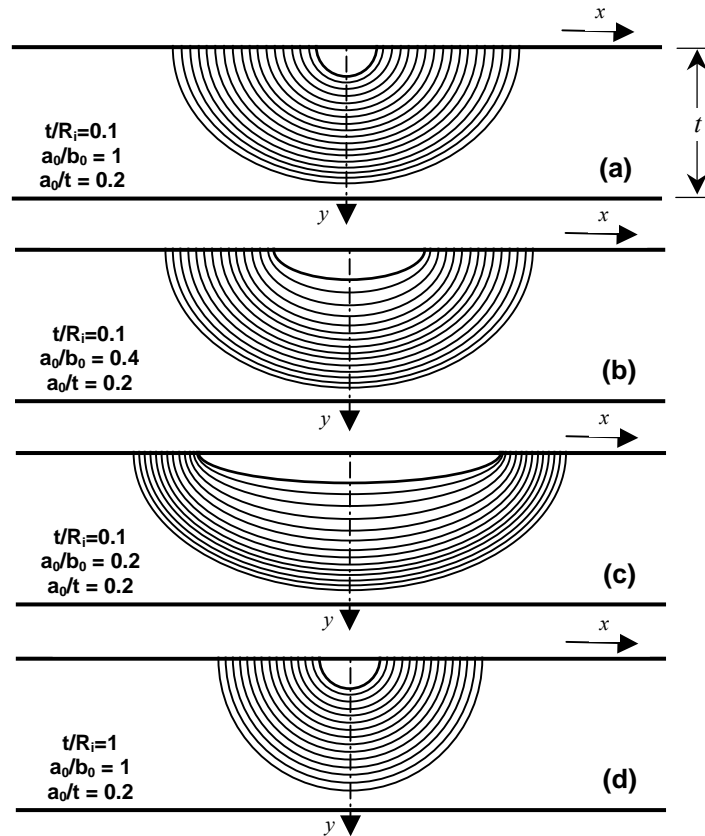
Figure 74 : Fissure semi-elliptique débouchante à l'extérieur d'un tube sous une pression interne cyclique

La loi d'évolution utilisée dans ce problème est celle de Paris donnée par l'expression (89), où l'on considère que  $C_A = C_B = C$ . Le chargement agissant sur les lèvres de la fissure est



supposé celui correspondant à la contrainte circonférentielle de Lamé  $\sigma_{\theta\theta}$  donnée par (voir l'équation (63) du chapitre II) :

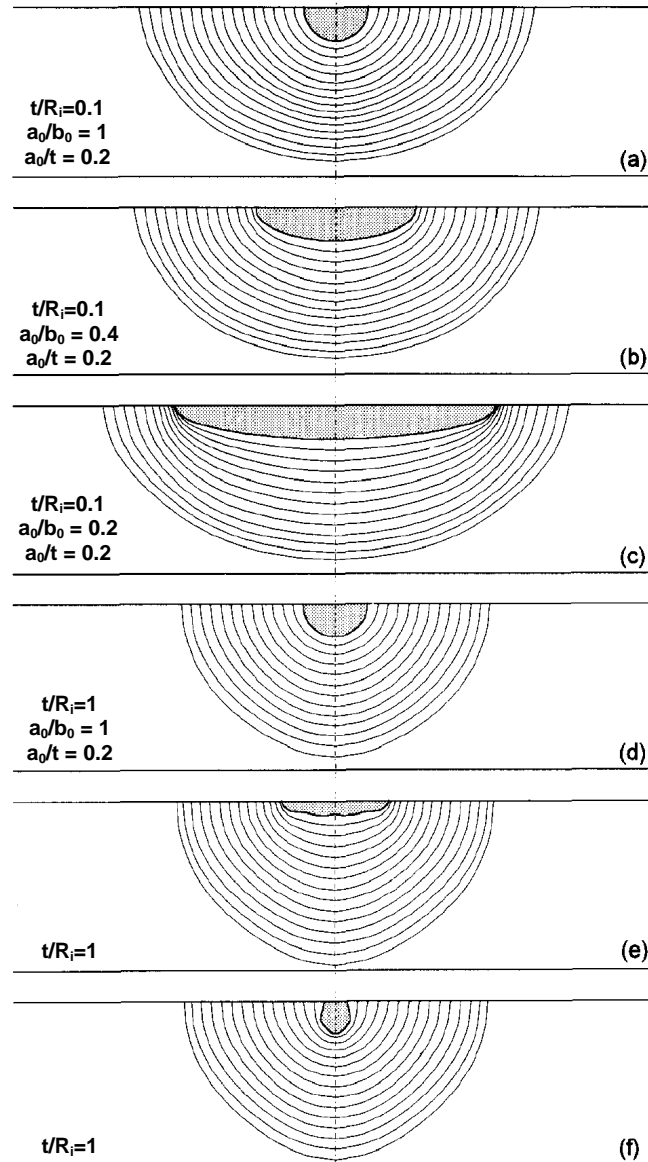
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(y) = \frac{pR_i^2}{t(2R_i + t)} \left[ 1 + \left( \frac{R_i + t}{R_i + t - y} \right)^2 \right] \quad (97)$$



**Figure 75 :** Evolution obtenue par *HWFun* d'une fissure semi-elliptique dans un tube sous pression interne (a) pour  $t/R_i=0.1$  et  $\alpha_0=1$  - (b) pour  $t/R_i=0.1$  et  $\alpha_0=0.4$  - (c) pour  $t/R_i=0.1$  et  $\alpha_0=0.2$  - (d) pour  $t/R_i=1$  et  $\alpha_0=1$

Les évolutions des fissures calculées sont reportées sur la figure 75. On constate qu'en début de propagation, pour  $\alpha_0=0.4$  et  $\alpha_0=0.2$ , la fissure se propage plus dans le sens de l'épaisseur que dans le sens de la surface externe du tube avant de devenir uniforme dans les deux sens. Ce comportement de la fissure est lié exclusivement à la différence entre les valeurs du FIC aux points *A* et *B* (comme pour le cas de plaque en flexion). Pour  $\alpha_0=1.0$  (figures 75a et 75d), la propagation est plutôt uniforme dès le début aussi bien pour un tube mince ( $t/R_i=0.1$ ) que pour un tube épais ( $t/R_i=1.0$ ). Néanmoins, dans le dernier cas, l'avance maximale  $\Delta a_{max}$  change du point *B* au point *A* (basculement du FIC maximal) en fin de propagation. Ceci est expliqué par le différentiel important de la valeur de la contrainte

$\sigma_{\theta\theta}$  entre l'extérieur et l'intérieur du tube épais ( $\sigma_{\theta\theta}^{\text{int}}/\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}=2.5$  pour  $t/R_i=1.0$  contre  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{int}}/\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}=1.1$  pour  $t/R_i=0.1$ ).



**Figure 76** : Evolution de la fissure obtenue par Lin et Smith (photo de [Lin-1997])  
 (a) pour  $t/R_i=0.1$  et  $\alpha_0=1$  - (b) pour  $t/R_i=0.1$  et  $\alpha_0=0.4$  - (c) pour  $t/R_i=0.1$  et  $\alpha_0=0.2$  -  
 (d) pour  $t/R_i=1$  et  $\alpha_0=1$  - (e) et (f) formes bizarroïdes pour  $t/R_i=1$

Des résultats similaires ont été trouvés par Lin et Smith [Lin-1997] comme le montrent les figures 76a, 76b, 76c et 76d. Comme ces auteurs utilisent la méthode à multi DDL, basée sur la méthode des éléments finis combinée à l'équation (84) de la propagation de fissure, ils étaient capables de modéliser des fissures de formes quelconques comme celles illustrées sur les figures 76e et 76f. On observe sur ces figures que les fissures se propagent d'une manière

proche à celle d'une fissure demi-circulaire de surface comparable, soit par exemple celle de la figure 76d. Ces résultats peuvent encore justifier le choix d'une forme elliptique ou semi-elliptique fait dans beaucoup d'études y compris la notre pour simuler une forme quelconque de fissure.

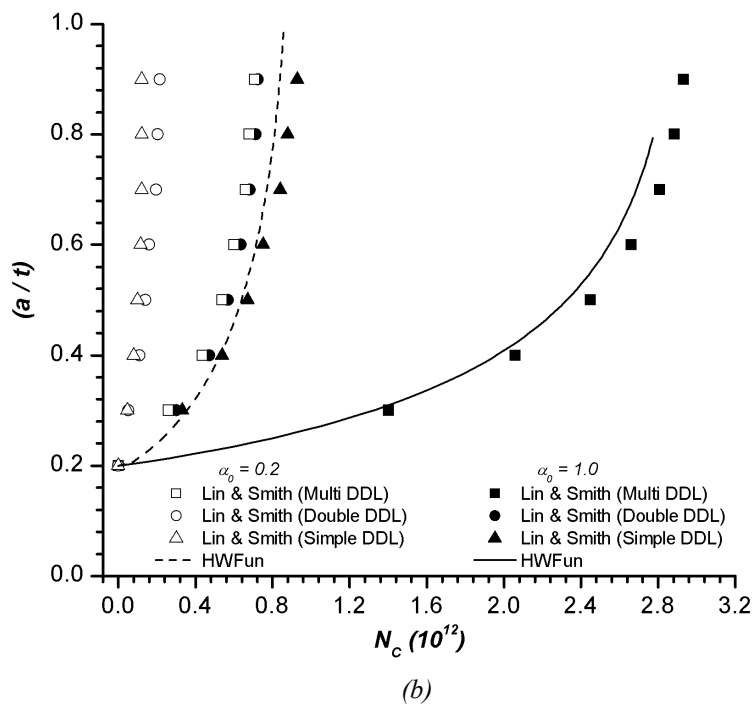
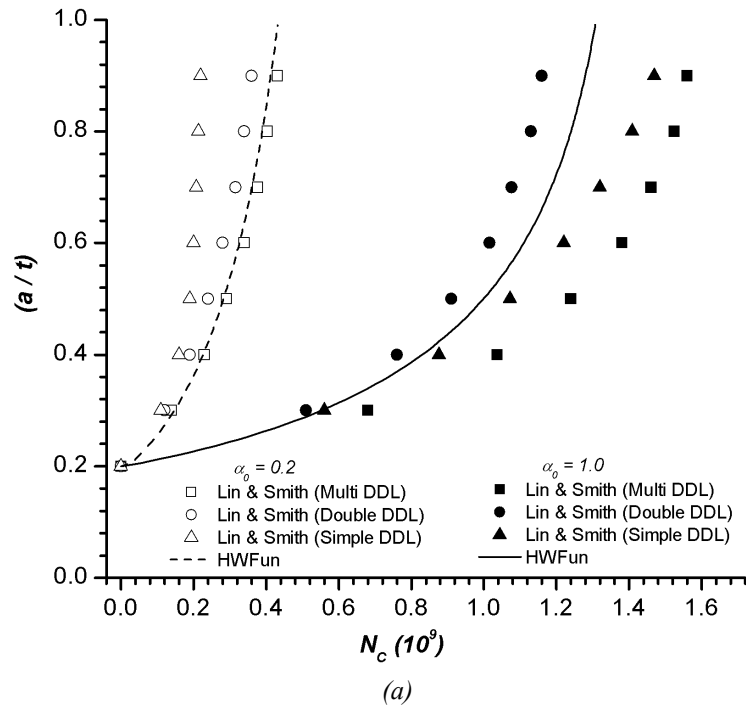


Figure 77 : Evaluation du nombre de cycles d'une fissure débouchante dans un tube sous pression : (a) pour  $t/R_i=0.1$  - (b) pour  $t/R_i=1$

Lin et Smith [Lin-1997] ont aussi prédit la durée de vie caractérisée par la variation du taux d'avance en fonction du nombre de cycles en adoptant les trois méthodes à différents DDL (multi DDL, double DDL, simple DDL) pour les configurations suivantes :

i)-  $\alpha_0 = 1.0$ ,  $t/R_i = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $C = 1.83 \cdot 10^{+13} \text{ mm}^{-1} \text{ MPa}^{-3} \text{ cycle}^{-1}$ .

ii)-  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $t/R_i = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $C = 1.83 \cdot 10^{+13} \text{ mm}^{-1} \text{ MPa}^{-3} \text{ cycle}^{-1}$ .

iii)-  $\alpha_0 = 1.0$ ,  $t/R_i = 1.0$ ,  $m = 3$ ,  $C = 1.83 \cdot 10^{+13} \text{ mm}^{-1} \text{ MPa}^{-3} \text{ cycle}^{-1}$ .

iv)-  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $t/R_i = 1.0$ ,  $m = 3$ ,  $C = 1.83 \cdot 10^{+13} \text{ mm}^{-1} \text{ MPa}^{-3} \text{ cycle}^{-1}$ .

Les figures 77a et 77b montrent que pour toutes les configurations, la fissure avance de plus en plus vite dans le temps (avec le nombre de cycles effectués). D'après ces figures, la méthode à multi DDL, sensée être la plus précise, est la plus optimiste (de plus longues durées de vie sont prédites) notamment pour les configurations à tube épais. Les résultats que nous avons obtenus avec la méthode d'hybridation ont globalement une allure semblable à celle des résultats de Lin et Smith [Lin-1997]. A l'exception du cas ( $\alpha_0 = 1.0$ ,  $t/R_i = 0.1$ ), les résultats obtenus en utilisant la méthode d'hybridation à double DDL sont les plus proches aux résultats de Lin et Smith [Lin-1997] utilisant la méthode à multi DDL. Les résultats de Lin et Smith [Lin-1997] concernant la méthode à double DDL sont obtenus en faisant appel à l'équation empirique (78) de Newman et Raju [New-1981] et en approximant le chargement de Lamé linéairement entre  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{int}}$  et  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}$ . Ceci peut expliquer la perte de précision de l'approche de Lin et Smith [Lin-1997] à double DDL, par rapport à la modélisation par hybridation de fonctions de poids qui utilise le chargement de Lamé exacte.

#### **IV.2.7. Application de l'approche énergétique de Sih dans la prédiction de la propagation d'une fissure dans une pièce à joints de soudure**

L'exemple suivant concerne une pièce présentant des joints de soudure et faisant partie de la structure d'un avion. Cette pièce est connue sous le nom « out-of-plane gusset welded joints » et est décrite sur la figure 78.

Sous l'action d'un chargement de traction, l'initiation d'une fissure surfacique sur la portion 2 au voisinage de sa jonction avec la portion 1 ou 3 est très probable à cause de la concentration de contrainte à cet endroit (voir la figure 78). Le problème a été étudié par Choi et Choi [Cho-2005] qui ont examiné deux cas de figure. Dans le premier, les joints de soudure sont présents uniquement sur les grands côtés des portions 1 et 3 (c'est-à-dire le cas où  $\rho = 0$ ). Dans le deuxième cas, des joints de soudure de rayon de courbure  $\rho = 30$  mm sur les petits côtés des

portions 1 et 3 sont considérés. Pour réaliser leur prédiction concernant la propagation de la fissure, Choi et Choi [Cho-2005] ont utilisé la méthode des éléments finis (code de calcul LUSAS) pour évaluer le FIC en bout de fissure ainsi que la loi de propagation de Sih basé sur le facteur de densité d'énergie donnée par la relation (85).

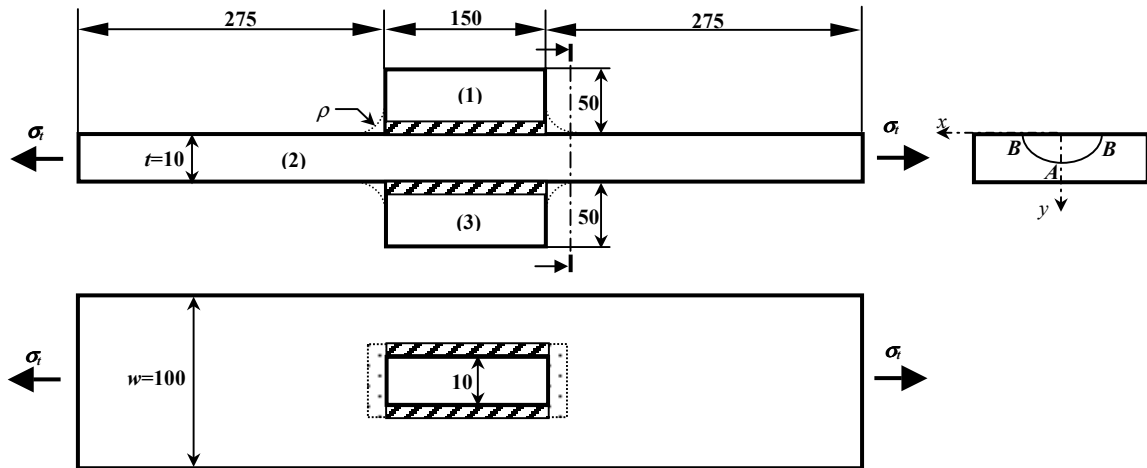


Figure 78 : Schéma de description de la pièce étudiée

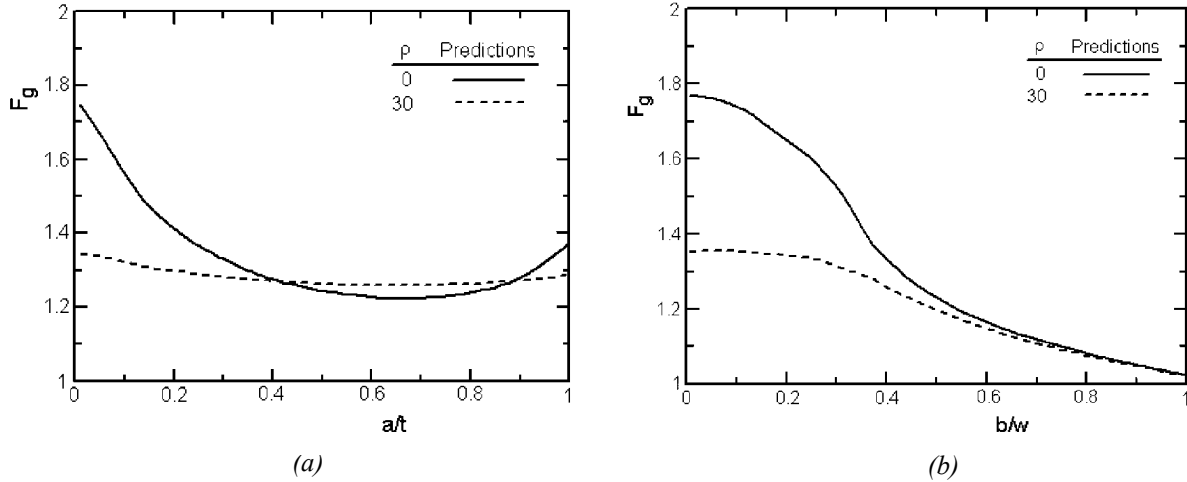
Choi et Choi [Cho-2005] justifient le choix de la loi de Sih au dépend de celle de Paris en invoquant deux raisons. La première est l'absence du rapport des contraintes appliquées  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$  dans la loi de Paris. Ce rapport, caractérisant la contrainte moyenne appliquée, semble influencer sur la propagation de la fissure d'après les tests expérimentaux réalisés par les auteurs. La deuxième raison est que la loi de Paris est incapable de prédire une propagation non perpendiculaire au chargement, qui serait envisageable dans le cas présent compte tenu de la complexité de la géométrie. Cependant, il faut signaler que dans ce problème, Choi et Choi [Cho-2005] adoptent des hypothèses correspondant au mode I de la rupture à savoir ( $K_{II} = K_{III} = 0$  et  $\partial S / \partial \theta = 0$  correspondant à  $\theta = 0$ ), rendant caduc l'évocation de la deuxième raison pour justifier leur choix.

Comme Choi et Choi [Cho-2005], nous supposons que les fissures initiales sont de forme semi-elliptique, ce qui nous permet de tester l'approche d'hybridation à double DDL pour l'analyse de leur propagation aussi bien avec la loi de Paris qu'avec la loi de Sih. Les résultats trouvés seront comparés à ceux de Choi et Choi [Cho-2005].

La pièce étudiée est en acier appelé POSTEN80 dont le module de cisaillement et le coefficient de Poisson sont respectivement 77GPa et 0.3 d'après [Cho-2005]. Lors de

l'évaluation du FIC aux points A ( $\theta = 90^\circ$ ) et B ( $\theta = 0^\circ$ ) du bout de la fissure, Choi et Choi [Cho-2005] posent :

$$K_I = K_I(\sigma_t) F_g \quad (98)$$



**Figure 79** : Evolution de  $F_g$  en fonction du taux d'avance de la fissure (photo de [Cho-2005]) : (a) pour le point A - (b) pour le point B

où  $\sigma_t$  est la contrainte de traction appliquée et  $F_g$  un coefficient d'amplification tenant compte de la concentration de contrainte causée par la présence des portions 1 et 3 de la pièce. Ce coefficient est déterminé moyennant l'évaluation de la contrainte de traction par éléments finis (le code LUSAS) dans le plan de la fissure en supposant que la pièce est saine (sans fissure). Cette démarche a permis à Choi et Choi [Cho-2005] de tracer l'évolution de  $F_g$  pour les points A et B en fonction de leurs positions relatives par rapport respectivement à l'épaisseur  $t$  et la largeur  $w$  de la pièce (voir les figures 78 et 79).

Dans nos calculs basés sur la méthode d'hybridation, le coefficient  $F_g$  est introduit en modifiant la valeur de la contrainte de traction à  $F_g \sigma_t$  aussi bien pour le point A que pour le point B à chaque avance  $\Delta a$  ou  $\Delta b$ . Afin de rendre facile cette modification du point de vue numérique, nous avons approché  $F_g$  avec un polynôme du cinquième degré obtenu par lissage des courbes de la figure 79. La fonction  $F_g$  ainsi trouvée est ensuite incorporée dans le code de calcul *HWFun*. Les approximations polynomiales obtenues sont les suivantes :

**Pour  $\rho = 0$  mm :**

$$F_g(A) = 1.7866 - 2.7340 \left(\frac{a}{t}\right) + 5.2790 \left(\frac{a}{t}\right)^2 - 4.5752 \left(\frac{a}{t}\right)^3 + 0.8653 \left(\frac{a}{t}\right)^4 + 0.7527 \left(\frac{a}{t}\right)^5 \quad (99)$$

$$F_g(B) = 1.7357 + 0.9971 \left(\frac{b}{w}\right) - 10.3377 \left(\frac{b}{w}\right)^2 + 17.9929 \left(\frac{b}{w}\right)^3 - 11.8539 \left(\frac{b}{w}\right)^4 + 2.4715 \left(\frac{b}{w}\right)^5$$

Pour  $\rho = 30 \text{ mm}$  :

$$F_g(A) = 1.3497 - 0.3270 \left(\frac{a}{t}\right) + 0.2861 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + 0.2674 \left(\frac{a}{t}\right)^3 - 0.6223 \left(\frac{a}{t}\right)^4 + 0.3362 \left(\frac{a}{t}\right)^5$$

$$F_g(B) = 1.3485 + 0.1032 \left(\frac{b}{w}\right) - 0.2127 \left(\frac{b}{w}\right)^2 - 3.5585 \left(\frac{b}{w}\right)^3 + 6.1949 \left(\frac{b}{w}\right)^4 - 2.8622 \left(\frac{b}{w}\right)^5 \quad (100)$$

Dans la première partie de leur travail, Choi et Choi [Cho-2005] ont essayé, à travers de nombreux essais expérimentaux, de trouver les paramètres du matériau nécessaires pour utiliser la loi de Sih ( $C'$  et  $m'$ ) et la loi de Paris ( $C$  et  $m$ ) données respectivement par les équations (85) et (82). On retient de leurs résultats le tableau de valeurs suivant :

**Tableau III** Paramètres de propagation de fissure du POSTEN80 obtenus par Choi et Choi [Cho-2005]

$\rho$	$\alpha$	$C'$	$m'$	$C$ (x $10^{-13}$ )	$m$	$\Delta\sigma$ (MPa)	$N_c$ de la ruine (x $10^4$ )		
0	0.1 - 1.0	0.63	2.11	3.66	4.22	93	276	316	+405
						124	79	102	139
						155	35	36	48
30	0.1 - 1.0	0.11	2.09	0.84	4.18	124	470	+500	+550
						155	160	174	192
						207	51	52	62

D'après ce tableau, on constate que les constantes du matériau obtenues sont valables pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $(\Delta\sigma)$  mais pour une valeur unique de rayon de courbure  $\rho$ . Ce qui laisse penser que les constantes du matériau sont très sensibles à ce paramètre.

Il faut signaler que Choi et Choi [Cho-2005] ont pris l'expression du facteur de densité d'énergie  $S$  égale à  $\frac{1-2\nu}{4\mu} K_I^2$  (en cas de déformation plane) au lieu de  $\frac{1-2\nu}{4\pi\mu} K_I^2$  comme le

suggère l'équation (20) du premier chapitre. Nous remarquons qu'il manque un  $\pi$  au dénominateur de l'expression de  $S$  (faute reproduite aussi dans la référence des mêmes auteurs [Cho-2006]). Nous avons rectifié les valeurs de  $C'$  données dans le tableau III en les multipliant par  $(\pi)^{m'}$ .

Pour les applications numériques, nous traitons les configurations suivantes considérées par Choi et Choi [Cho-2005] :

- i)-  $\rho = 0$ ,  $a_0 = 0.4 \text{ mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.4$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t = 93 \text{ MPa}$ ,  $R = 0.1$ .
- ii)-  $\rho = 0$ ,  $a_0 = 0.4 \text{ mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.4$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t = 124 \text{ MPa}$ ,  $R = 0.1$ .
- iii)-  $\rho = 0$ ,  $a_0 = 0.4 \text{ mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.4$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t = 155 \text{ MPa}$ ,  $R = 0.1$ .
- iv)-  $\rho = 30 \text{ mm}$ ,  $a_0 = 0.3 \text{ mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t = 124 \text{ MPa}$ ,  $R = 0.1$ .

v)-  $\rho = 30\text{mm}$ ,  $a_0 = 0.3\text{mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_i = 155\text{MPa}$ ,  $R = 0.1$ .

vi)-  $\rho = 30\text{mm}$ ,  $a_0 = 0.3\text{mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_i = 207\text{MPa}$ ,  $R = 0.1$ .

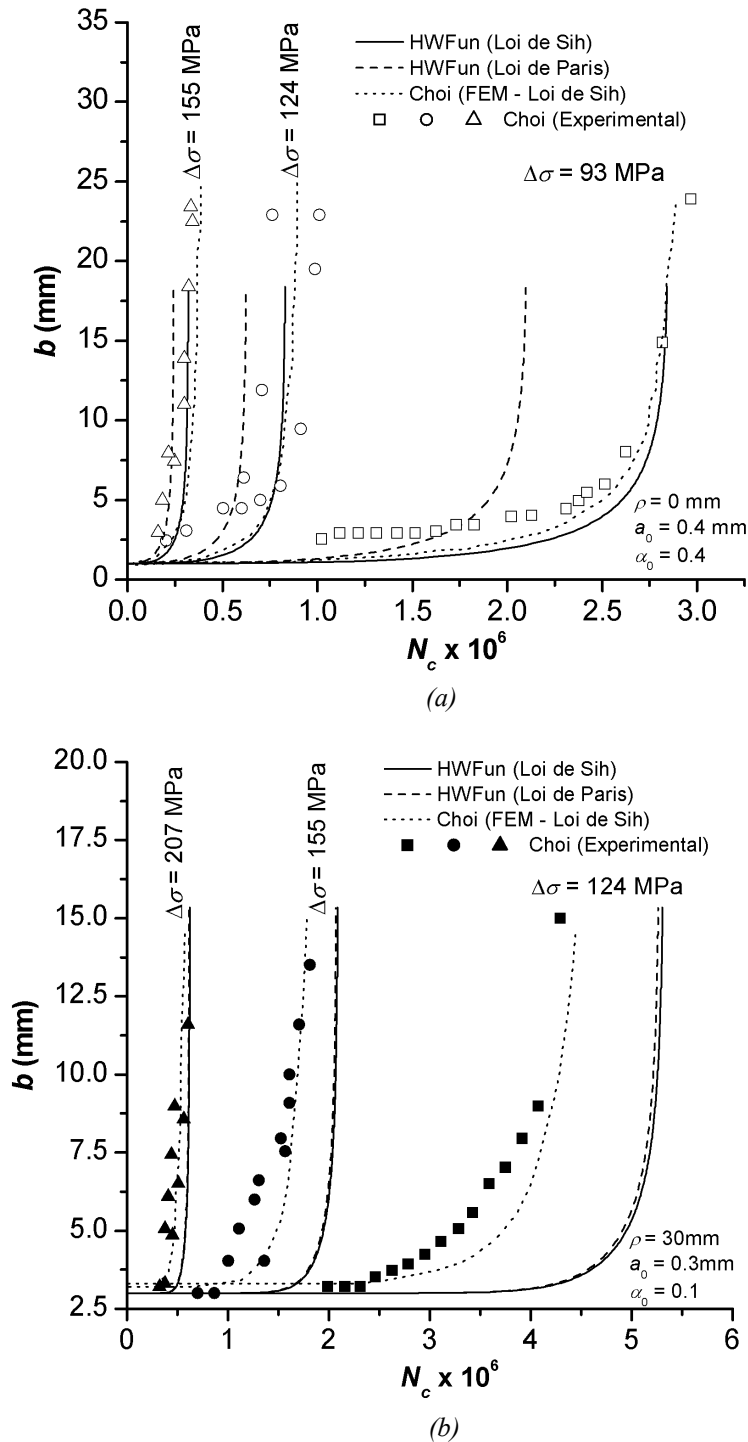


Figure 80 : Prédiction du nombre de cycles avec différentes approches :  
(a) pour  $\rho = 0$  - (b) pour  $\rho = 30$  mm



Les figures 80a et 80b présentent les résultats de Choi et Choi [Cho-2005] (expérimentaux et numériques en utilisant l'approche de Sih) ainsi que les résultats obtenus avec la méthode d'hybridation des fonction de poids associée aux lois de propagation de Sih et de Paris. Les comparaisons à venir nous permettront entre autres d'apprécier l'apport qualitatif de la loi de Sih par rapport à celle de Paris.

Plusieurs constatations peuvent être faites à partir des courbes 81a et 81b :

- 1- Pour la même amplitude de contrainte  $\Delta\sigma_i$ , la pièce a une durée de vie beaucoup plus important en adoptant une soudure au rayon de courbure  $\rho$  plus grand.
- 2- Toutes nos prédictions basées sur la méthode d'hybridation sont globalement proches des résultats numériques et expérimentaux de Choi et Choi [Cho-2005] à l'exception de la quatrième configuration ( $\rho = 30mm$ ,  $\Delta\sigma_i = 124MPa$ ), où l'écart est significatif entre les résultats de Choi et Choi [Cho-2005] et nos prédictions obtenues aussi bien avec la loi de Sih qu'avec la loi de Paris. Quoique ces points expérimentaux pour ce cas correspondent à une série de mesures parmi trois autres dont Choi et Choi [Cho-2005] n'ont présenté que les valeurs finales de  $N_c$  (correspondant à la ruine totale de la pièce), voir la dernière colonne du tableau III issu de la référence [Cho-2005]. D'après ce tableau, le nombre de cycle de ruine de la structure, correspondant à  $b \approx 50mm$ , mesuré dans 2 des 3 expériences effectuées par Choi et Choi [Cho-2005], est proche de la valeur qu'on obtiendrait par extrapolation des résultats de l'hybridation de la figure 80. Notons que par simulation, il ne nous est pas possible de dépasser une certaine valeur de  $b$  (entre 15 et 20  $mm$ ) étant donné qu'on sortirait dans ce cas du cadre de la fissure elliptique. Nous pensons donc que l'évolution de la fissure caractérisée par  $b$  en fonction de  $N_c$  obtenue par hybridation coïnciderait mieux avec les expériences ignorées par Choi et Choi [Cho-2005] dans le graphe 81.
- 3- Les résultats obtenus avec la loi de Sih sont globalement plus proches aux tests expérimentaux que ceux obtenus avec l'approche de Paris. Néanmoins, il faut dire que pour de faibles valeurs de  $R$  ( $R = 0.1$ ), l'apport de la loi de Sih ne nous semble pas significatif devant la complexité relative à son utilisation et notamment la rareté des travaux donnant les paramètres matériau liés à son utilisation.

Sur la figure 81, l'évolution prédite de la forme de la fissure lors de sa propagation est présentée pour deux rayons de courbure du joint de soudure ( $\rho = 0$  et  $\rho = 30mm$ ). Les résultats obtenus avec la loi de Sih et ceux obtenus avec la loi de Paris sont pratiquement superposés.

Ceci confirme la cohérence des ces deux approches malgré le différence au niveau de leur conception.

Pour conclure, les résultats, obtenus dans cet exemple, ont montré que l'approche de Sih permet de modéliser d'une manière appropriée la propagation de fissure pour le problème traité. Cependant, compte tenu des difficultés rencontrées pour collecter les paramètres de la loi de Sih et en l'absence de ceux-ci, la loi des Paris offre une alternative efficace et simple dans la prédiction de la propagation de fissure pour de faibles valeurs de  $R$ .

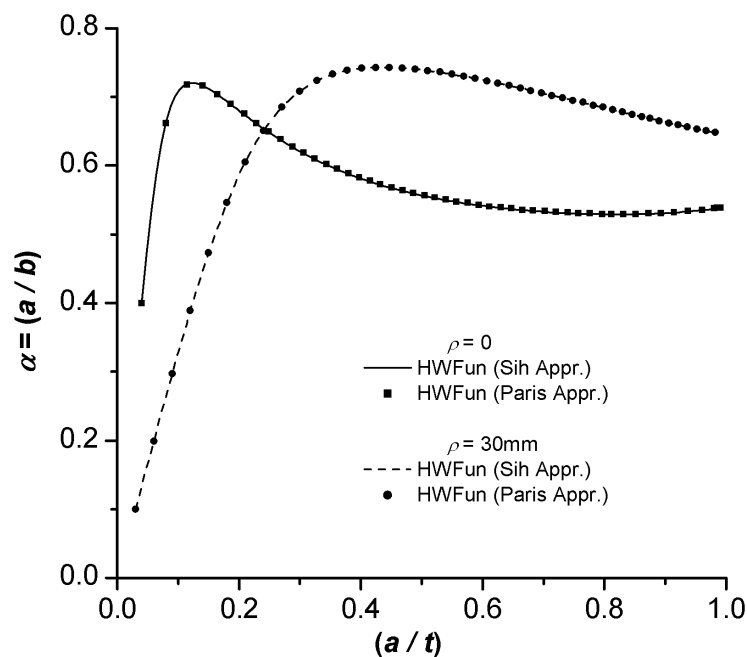


Figure 82 : Comparaison des résultats obtenus avec la loi de Sih et ceux obtenus avec la loi de Paris

### IV.3. CONCLUSION

Plusieurs applications d'aspect pratique de la fatigue ont été traitées dans ce chapitre avec l'approche d'hybridation de fonctions de poids. La validation de cette dernière repose sur des comparaisons avec des solutions analytiques lorsqu'elles sont disponibles ainsi qu'avec des résultats obtenus en utilisant différentes modélisations pour les mêmes applications (voir le tableau récapitulatif IV de la page suivante). Ces tests ont, dans leur globalité, montré que l'approche d'hybridation se positionne favorablement parmi les différentes techniques de calcul en fatigue concernant la prédiction de la propagation des fissures elliptiques et semi-elliptiques contenues dans différentes structures.

**Tableau IV** Récapitulatif des résultats obtenus dans les différents exemples traités

Type de structure	Type de fissure	Loi de propagation utilisée	Type de chargement cyclique	Type de matériau	Résultats d'autres travaux présentés	Commentaires sur les résultats obtenus par <i>HWFun</i>
Milieu infini	Elliptique	Paris	traction	Ductile	Sukumar et al. (XFEM/FMM)	- La prédiction de l'évolution de la fissure circulaire est en meilleure concordance avec la solution analytique comparée à celle de Sukumar et al. (Cf. fig. 55). - La prédiction de l'évolution de la fissure elliptique est en bonne concordance avec celle de Sukumar et al. (Cf. fig. 56).
			traction	Ductile + Fragile	Lazarus (WFM)	- Les prédictions des évolutions de la fissure circulaire, du nombre de cycle pour un matériau ductile et du seuil de chargement pour un matériau fragile sont en parfaite concordance avec les solutions analytiques (Cf. figs. 57,58,61,63). - Les prédictions des évolutions de la fissure elliptique, du nombre de cycle pour un matériau ductile et du seuil de chargement pour un matériau fragile sont en bonne concordance avec celles de Lazarus (Cf. figs. 59,60,64,66).
Plaque	Semi-elliptique	Paris	Flexion simple	Ductile	Newman et Raju (Eq. Emp.) + Corn (Expérimental)	- Les prédictions de l'évolution de la forme des fissures sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux de Corn et les simulations de Newman et Raju (Cf. fig. 68).
			Flexion simple	Ductile	Kim et Hwang (Expérimental)	- Les prédictions de l'évolution de la forme des fissures sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux de Kim et Hwang (Cf. fig. 69).
			Flexion (simple + composée)	Ductile	Lin et Smith (FEM)	- Les prédictions de l'évolution des fissures et de leurs formes sont en bonne concordance avec les résultats de Lin et Smith (Cf. figs. 71,72,73,74).
Tube	Semi-elliptique	Paris	Contrainte de Lamé	Ductile	Lin et Smith (FEM)	- Les prédictions de l'évolution des fissures et des nombres de cycles sont globalement en bonne concordance avec les résultats de Lin et Smith (Cf. figs. 76,77,78).
Pièce d'avion	Semi-elliptique	Paris + Sih	Concentration de contrainte	Ductile	Choi et Choi (Experimental + FEM)	- Les prédictions de l'évolution des nombres de cycles sont globalement en concordance acceptable avec celles obtenues par Choi et Choi aussi bien avec la loi de Sih qu'avec la loi de Paris (Cf. fig. 81). - La prédiction de la forme de la fissure obtenue en utilisant la loi de Paris est en parfaite concordance avec celle obtenue en utilisant la loi de Sih (Cf. fig. 82).

# **Conclusions et perspectives**

## Conclusions et perspectives

Les objectifs de ce travail ont été multiples :

- i) développer une méthode basée sur l'hybridation de fonctions de poids permettant l'amélioration de l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte de fissure elliptique en mode I,
- ii) coupler cette méthode avec la méthode de fonction de poids du point (PWF) afin de l'appliquer aux fissures semi-elliptiques (débouchantes) en mode I,
- iii) étendre cette l'approche d'hybridation aux problèmes de fatigue en l'associant avec les lois de propagation de fissure telles que la loi de Paris et la loi de Sih,
- iv) valoriser ces développements à travers la conception d'un progiciel de calcul. Celui-ci nous servira pour réaliser les différents tests de validation et de prédiction.

Concernant le **premier objectif**, une approche basée sur l'hybridation des fonctions de poids d'Oore et Burns (1980) et de Krasowsky *et al.* (1999) a été développée et largement détaillée dans le chapitre II. L'idée d'hybridation que nous avons proposée consiste à subdiviser la fissure en deux zones pour appliquer sur chacune d'elles la fonction de poids appropriée. L'affectation des fonctions de poids est effectuée de manière à atténuer les problèmes de singularités en bord de la fissure liées à l'expression de ces fonctions de poids. La proportion entre les deux zones est-elle obtenue par optimisation des paramètres géométriques de l'ellipse de manière à mieux prendre en compte les effets de courbure du front de fissure. Dans ce même chapitre, la mise en œuvre numérique de cette approche a également été présentée d'une manière détaillée. Elle concerne principalement l'évaluation des différentes intégrales présentes dans l'approche après discrétisation des domaines et traitement des différentes singularités. Afin de valider la méthode d'hybridation, elle a été utilisée, dans la dernière partie de ce chapitre, pour modéliser des fissures elliptiques internes présentes dans des structures utilisées en pratique. Les résultats obtenus concernant le FIC ont été comparés à des solutions analytiques, quand elles sont disponibles, et à des solutions numériques de la littérature obtenues par des méthodes comme la FEM, la XFEM et la BEM. Les différentes comparaisons permettent d'apprécier la qualité des résultats concernant le FIC obtenus avec la présente approche. Le chapitre III est consacré aux bases théoriques du couplage entre la méthode d'hybridation développée précédemment et la PWF, ce point relevant du **deuxième objectif** de cette recherche. Ce couplage a été réalisé en cherchant une correction aux

fonctions de poids retenues précédemment pour la prise en compte de l'effet de bord de la fissure conformément à la théorie PWFm. Ensuite, dans ce même chapitre, on s'intéresse à la validation du couplage entre la méthode d'hybridation et la PWFm. Le problème de fissures débouchantes semi-elliptiques a été traité pour différentes structures (plaques, tubes) soumises à des chargements divers (flexions simple et composée, chargement polynomial, chargement exponentiel). En l'absence de solutions exactes pour ce type de problèmes, les comparaisons ont été réalisées avec des résultats numériques issus d'approches numériques (FEM, WFM, HBEM, GFBEM, LSM, FBM) ou empiriques. Elles ont permis de vérifier la bonne concordance entre ces différentes approches et la présente méthode d'hybridation. Il est à signaler que cette dernière présente l'avantage d'être applicable à une large gamme de sollicitations.

Dans le cadre du **troisième objectif**, l'évolution des fissures elliptiques et semi-elliptiques ainsi que de la durée de vie des structures étudiées, ont été prédites en utilisant l'approche d'hybridation. Ceci a été rendu possible en associant la méthode d'hybridation avec la loi de propagation de fissure de Paris, utilisée majoritairement dans cette étude, et aussi avec celle de Sih. Plusieurs applications pratiques de la fatigue ont été traitées dans le chapitre IV avec la présente approche. La validation de cette dernière repose sur des comparaisons avec des solutions analytiques lorsqu'elles sont disponibles ainsi qu'avec des résultats obtenus en utilisant différentes méthodes de simulations pour les mêmes applications. Ces tests ont dans leur globalité, montré que l'approche d'hybridation se positionne favorablement parmi les différentes techniques de prédiction en fatigue.

Le **quatrième objectif**, concernant le développement d'un code de calcul basé sur la présente approche, s'étale sur les trois chapitres (II, III, IV) et une annexe. Dans la partie annexe, la structure du code de calcul, appelé HWFun, est exposée ainsi que les différents développements qui sont liés à son élaboration et quelques tests de performance de calcul durant son exécution. La réalisation de ce code de calcul qui est une concrétisation des développements théoriques de l'hybridation, a constitué une grande partie de ce travail.

De multiples perspectives à ce travail peuvent être envisagées. Parmi lesquelles :

- i) L'extension du couplage de la présente approche avec la PWFm pour les fissures en quart d'ellipse (fissures de coin), considérées comme des fissures très répondues dans les structures rivetées. Cette extension devrait donner une nouvelle

dimension à l'applicabilité de l'approche d'hybridation aussi bien pour des chargements quasi-statiques que pour des chargements cycliques (de fatigue).

- ii) Le développement d'une hybridation similaire à la présente approche pour les autres modes de rupture, à savoir les modes II, III et mixte.
- iii) Modélisation des fissures internes et débouchante de formes quelconques et sous l'action d'un chargement arbitraire quasi-statique ou de fatigue en utilisant la variation élémentaire du bilan énergétique de Rice. L'implémentation numérique de cette technique en s'appuyant sur l'évaluation des différentes intégrales présentes dans l'approche d'hybridation est envisageable vu la similitude entre les deux approches vis-à-vis du problème des singularités.

# Références bibliographiques



## Références bibliographiques

---

### A

---

- [Ali-1991] Aliabadi M. H., Rooke D. P., *Numerical Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications*, Southampton, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1991.
- [Arg-1954] Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft Engineering* 1954, 26-27 (Oct. 1954–May 1955).
- [Atl-1979] Atluri S.N., *On Rate Principles for Finite Strain Analysis of Elastic and Inelastic Nonlinear Solids Recent Research on Mechanical Behavior*, University of Tokyo Press 1979, p 79-107.
- [Atl-1983] Atluri, S.N., *Alternate Stress and Conjugate Strain Measures, and Mixed Variational Formulations Involving Rigid Rotations, for Computational Analyses of Finitely Deformed Plates and Shells: Part-I*, Thoery Computers & Structures 1983, Vol. 18-1, p 93-116.
- [Aus-1977] Austen I. M. and Walker E. F., *Quantitative understanding of the effects of mechanical and environmental variables on corrosion fatigue crack growth behaviour*, The Influence of Environment on Fatigue, Institute of Mechanical Engineers Conference Publications, p 1-10, London, 1977.
- [Aus-1978] Austen I.M., *Quantitative Understanding of Corrosion Fatigue Crack Growth, Europeen Offshore Steels Research Select Seminar*, U.K. Department of Enrgy, commission of the Eurpean Communities, Welding Institute, A bington Hall, Cambridge, England 1978, p 495-502.

---

### B

---

- [Bar-1962] Barenblatt G.I., *The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture*, Advances in Appl. Mech. 1962, Vol. 7, p 55-129.
- [Bar-1974] Barssom J.M., *Fatigue behavior of pressure-vessel steels*, WRC Bulletin 194, Welding Research Council, New York, 1974.
- [Bar-1980] Barthelemy B., *Notions pratiques de la mécanique de la rupture*, Ed. Eyrolles, Paris, 1980.
- [Bel-1994] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., *Element free Galerkin methods*, Int. J. Nun. Meth. Engng. 1994, Vol. 37, p 229-256.
- [Bel-1999] Belytschko T., Black T., *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, Int J Numer Meth Eng 1999, Vol. 45-5, p 601-620.
- [Bel-2003] Belytschko T., Parimi C., Moes N., Sukumar N., Usui S., *Structured extended finite element methods for solids denned by implicit surfaces*, Int. J. Numer. Meth. Engng 2003, Vol. 56, p 609-635.
- [Bon-1995] Bonnet M., *Equations intégrales et éléments de frontières*, Ed. Eyrolles/CNRS, Paris, 1995.
- [Bor-1983] Bortmann Y., Banks-Sills L., *An extended weight function method for 2D and 3D-problems*, Journal of Applied Mechanics 1983, Vol. 50, p 907-909.

- [Bow-1990] Bower A. F., Ortiz M., Solution of Three-Dimensional Crack Problems by a Finite Perturbation Method, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1990, Vol. 38-4, p 443-480.
- [Bow-1993] Bower A. F., Ortiz M., An Analysis of Crack Trapping by Residual Stresses in Brittle Solids, *ASME Journal of Applied Mechanics* 1993, Vol. 60, p 175-182.
- [Bue-1970] Bueckner H.F., A novel principle for the computation of stress intensity factors, *Z. Angew Meth.* 1970, Vol. 50, p 529-546.
- [Bui-1977] Bui H.D., An integral equations method for solving the problem of plane crack of arbitrary shape, *J. Mech. Phys. Solids* 1977, Vol. 25, p 29-39.

---

## C

---

- [Cho-2005] Choi D.H., Choi H.Y., Fatigue life prediction of out-of-plane gusset welded joints using strain energy density factor approach, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 2005, Vol. 44, p 17-27.
- [Cho-2006] Choi D.H., Choi H.Y., Lee D., Fatigue life prediction of in-plane gusset welded joints using strain energy density factor approach, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 2006, Vol. 45, p 108-116.
- [Cis-1999] Cisilino, A.P., Aliabadi M.H., Threedimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems, *Eng. Fract. Mech.* 1999, Vol. 63, p 713-733.
- [Clo-1960] Clough R.W., The Finite Element Method in plane stress analysis, in 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA 1960.
- [Cor-1971] Corn D.L., A study of cracking techniques for obtaining partial thickness cracks of pre-selected depths and shapes, *Engn. Fracture Mech.* 1971, Vol. 3-1, p 45-52.
- [Cro-1983] Crouch, S. L., Starfield A. M., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, George Allen & Unwin, London 1983.
- [Cru-1969] Cruse T.A., Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, *International Journal of Solids and Structures* 1969, Vol. 5, p 1259-1274,.
- [Cru-1975] Cruse T.A., Besuner P.M., Residual life prediction for surface cracks in complex structural details, *J. of Aircraft* 1975, Vol. 12, p 369-375.

---

## D

---

- [Dom-1992] Dominguez J., Gallego F., *Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations*, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 1992, Vol. 33, p 635-647.
- [Du-1992] Du J., Yon J.H., Hawkins N.M., Arakawa K., Kobayashi A.S., *Fracture process zone for concrete for dynamic loading*, *ACI Materials Journal* 1992, Vol. 89-3, p 252-258.
- [Dug-1960] Dugdale D.S., *Yielding of Steel Sheets Containing Slits*, *J. Mech. Phys. Solids* 1960, Vol. 8, p 100-108.

---

## E

---

- [Erd-1989] Erdogan F., Sih G.C., *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, *Journal of basic engineering* Dec. 1963.

---

F

---

- [Fet-1989] Fett T., Mattheck C., Munz D., *Approximate weight function for 2D and 3D-problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements 1989, Vol. 6, p 37-48.
- [Fet-1997] Fett T., Munz D., *Stress intensity factors and weight functions*, Computational Mechanics Publications, Southampton 1997.
- [Fet-1999] Fett T., Munz D., *Local stress intensity factors for small semi-elliptical cracks under exponentially distributed stresses*, Engineering Fracture Mechanics 1999, Vol. 64, p 105-116.
- [For-1995] Fortin A., *Analyse numérique pour ingénieurs*, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Montréal 1995.
- [Fra-2002] Frangi A., Novati G., Springhetti R., Rovizzi M., *3D fracture analysis by the symmetric Galerkin BEM*, Computational Mechanics 2002, Vol. 28, p 220-232.

---

G

---

- [Gao-1986] Gao H., Rice J.R., *Shear stress intensity factors for planar crack with slightly curved front*, Journal of Applied Mechanics 1986, Vol. 53, p 774-778.
- [Gon-1999] Gonçalves J.P.M., de-Castro P.M.S.T., *Application of the line spring model to some geometries, and comparison with three-dimensional results*, Int. J. Press. Vess. Piping. 1999, Vol. 76, p 551-560.
- [Gre-1828] Green G.; *An essay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity & magnetism*, Printed by Wheelhouse. Sold by Hamilton, Adams & Co. 33, Paternoster Row; Longman & Co. and W.Joy, London; and S. Bennett, H. Barnett, and W. Dearden, Nottingham, 1828.
- [Gre-1985] Grebner H., Strathmeier U., *Stress Intensity Factors for Circumferential Semi-elliptical Surface Cracks in a Pipe Under Thermal Loading*, Engineering Fracture Mechanics 1985, Vol. 22, p 1-7.
- [Gri-1920] Griffith A. A., *The Phenomena of Rupture and Flow of Solids*, Philosophical Transactions of Royal Society 1920, Vol. A-221, p 163-197.
- [Guo1-1995] Guozhong C., Kankda C., *Analysis of embedded elliptical cracks in cylindrical pressure vessels*, Int. J. Pres. Ves. & Piping 1995, Vol. 64, p 153-159.
- [Guo2-1995] Guozhong C., Kangda Z., Wu D., *Stress intensity factors for internal semi-elliptical surface cracks in pressurized thick-walled cylinders using the hybrid boundary element method*. Engineering Fracture Mechanics 1995, Vol. 52, p 1055-1064.
- [Guo-2000] Guozhong C., Kangda Z., *Stress intensity factors for interaction of surface crack and embedded crack in a cylindrical pressure vessel*, International Journal of Pressure Vessels and Piping 2000, Vol. 77-9, p 539-548.
- [Guo-2004] Guozhong C., Xianfeng J., Gan L., Zhimin F., *Boundary element analysis on interaction of external surface crack and embedded crack in a pressurized cylinder*, Nuclear Engineering and Design 2004, Vol. 231-1, p 1-11.

---

H

---

- [Hac-2003] Hachi B.K., Belkacemi Y., Rechak S., *Détermination du champ de contrainte et du facteur d'intensité de contrainte en tridimensionnel par l'utilisation de la fonction de Green dans la méthode de discontinuité de déplacement*, Revue de mécanique appliquée et théorique 2003, Vol. 1-5, p 289-310.

- [Hac-2005] Hachi B.K., Rechak S., Belkacemi Y., Maurice G., *Modelling of elliptical cracks in infinite body and in pressurized cylinder by a hybrid weight function approach*, Int. J. Press. Vess. Piping. 2005, Vol. 82, p 917-924.
- [Hac-2006] Hachi B.K., Rechak S., Haboussi M., Taghite M., *Modélisation des fissures elliptiques internes par hybridation de fonctions de poids*, C.R. Mécanique 2006, Vol. 334, p 83-90.
- [Han-2002] Han Z. D., Atluri S. N., *SGBEM (for cracked local subdomain) - FEM (for uncracked global structure) alternating method for analyzing 3D surface cracks and their fatigue-growth*, Tech Science Press CMES-Comp. Model. Eng. Sci., Vol. 3-6, pp.699-716, 2002.
- [Hut-1968] Hutchinson J.W., *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 1968, Vol. 16, p 13-31.

---

## I

---

- [Ing-1913] Inglis C.E., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Naval Architects 1913, Vol. 55, p 219-241.
- [Irw-1948] Irwin G.R., *Fracture Dynamics*, Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland 1948.
- [Irw-1949] Irwin G.R., *Fracturing of metals*, Fracturing of Metals, American Society for Metals, Chio, Cleveland 1949, p 147.
- [Irw-1956] Irwin, G. R., *Relation of Stresses Near a Crack to the Crack Extension Force*, Proceedings of the 9th International Congress on Applied Mechanics, Brussels 1956.
- [Irw-1957] Irwin G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate*, J. of Appl. Mech. Transactions 1957, p 361-364.
- [Irw-1962] Irwin G. R., *The Crack Extension Force for a Part Through Crack in a Plate*, Journal of Applied Mechanics 1962, Vol. 29-4, p 651-654.
- [Isi-1984] Isida M., Noguchi H., Yoshida T., *Tension and bending of finite plates with a semi-elliptical surface crack*, Int. J. Fracture 1984, Vol. 26, p 157-188.

---

## K

---

- [Kea-1988] Keat W.D., Annigeri B.S., Cleary M.P., *Surface integral and finite element hybrid method for two and three-dimensional fracture mechanics analysis*, Int. J. Fracture 1988, Vol. 36, p 35-53.
- [Keb-1999] Kebir H., Roelandt J. M., Foulquier J., *A new singular boundary element for crack problems: Application to bolted joints*, Engineering Fracture Mechanics 1999, Vol. 62-6, p 497-510.
- [Keb-2006] Kebir H., Roelandt J. M., Chambon L., *Dual boundary element method modelling of aircraft structural joints with multiple site damage*, Engineering Fracture Mechanics 2006, Vol. 73-4, p 418-434.
- [Ken-1993] Kendall D.P., Perez E.H., *Comparison of stress intensity factor solutions for thick walled pressure vessels*, In High Pressure-Codes, Analysis and Applications, ASME 1993, p 115-119.
- [Kic-1998] Kiciak A., Glinka G., Eman M., *Weight functions and stress intensity factors for corner quarter-elliptical crack in finite thickness plate subjected to in-plane loading*, Engng. Fracture Mech. 1998, Vol. 60-2, p 221-238.
- [Kim-1997] Kim J.H., Hwang I.S., *Crack shape evolution of surface flaws under fatigue loading of austenitic pipes*, Nuclear Engineering and Design 1997, Vol. 174, p 17-24.

- [Kob-1979] Kobayashi A.S., Emery A.F., Love W.J., Jain A., *Further studies on stress intensity factors of semi-elliptical cracks in pressurized cylinders*, In Structural mechanics in reactor technology, SMiRT'79, Transactions of the 5<sup>th</sup> international conference, Eds A. Jaeger and Boley 1979, Paper G4/1.
- [Kra-1999] Krasowsky A.J., Orynyak I.V., Gienko A.Yu., *Approximate Closed from Weight Function for an Elliptical Crack in an Infinite Body*, Int. J. Fracture 1999, Vol. 99-1/2, p 117-130.
- [Kry-1999] Krysl P., Belytschko T., *The element-free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-d cracks*. Int J Numer Meth Eng 1999, Vol. 44-6, p 767–800.

---

## L

---

- [Lac-1976] Lachat J.C., Watson J.O., *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations; a Formulation for Three Dimensional Elastostatics*, Int. J. Num. Meth. Engng. 1976, Vol. 10, p 991-1005.
- [Laz-1976] Lazarus V., Brittle fracture and fatigue propagation paths of 3D plane cracks under uniform remote tensile loading, International Journal of Fracture 2003, Vol. 122, p 23–46.
- [Lan-1972] Landes J. D., Begley J. A., *The Effect of Specimen Geometry on JIC*, Fracture Toughness, ASTM STP 514, American Society for Testing and Materials, Philadelphia 1972, p 24-39.
- [Lem-2001] Lemaitre J., Chaboche J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Ed. Dunod, Paris, 2001.
- [Lev-1947] Levy S., *Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback*, J. Aero. Sci. 1947, Vol. 14, p 547-560,
- [Lev-1953] Levy S., *Structural analysis and influence coefficients for delta wings*, J. Aero. Sci. 1953, Vol. 20, p 677-684.
- [Lin-1997] Lin X.B., Smith R.A., Numerical analysis of fatigue growth of external surface cracks in pressurised cylinders, Int. J. Pres. Ves. & Piping 1997, Vol. 71, p 293-300.
- [Lin-1999] Lin X.B., Smith R.A., Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates Part II: Crack shape change, Engineering Fracture Mechanics 1999, Vol. 63, p 523-540.

---

## M

---

- [Mar-2005] Margonari M., Bonnet M., *Fast multipole method applied to elastostatic BEM-FEM coupling*, Computers and Structures 2005, Vol. 83, p 700-717.
- [Mau-1999] Maugin G. A., *The thermodynamics nonlinear irreversible behaviours an introduction*, series A Vol. 27, page 204, World scientific series on nonlinear science Ed., Singapore 1999.
- [McE-1973] McEvily A.J., Significance of detects in welded structures, Proceedings of the Japan-US Seminar 1973, Tokyo, Japan, Univ. of Tokyo Press.
- [Met-1992] Mettu S.R., Raju I.S., Forman R.G., *Stress intensity factors for part-through surface cracks in hollow cylinders*, NASA Technical Report 1992, N° JSC25685, LESC 30124.
- [Moe-1999] Moes N., Dolbow J., Belytschko T., *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Nun. Meth. Engng. 1999, Vol. 46, p 131-150.

---

N

---

- [New-1979] Newman J.C. Jr., Raju I.S., *Analyses of surface cracks in finites plates under tension or bending loads*, NASA TP-1578, National Aeronautic and Space Administration, Washington DC 1979.
- [New-1981] Newman J.C. Jr., Raju I.S., *An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack*, Engng. Fracture Mech. 1981, Vol. 15-1/2, p 185-192.
- [Ngu-1980] Nguyen Q.S., *Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture*, J. de Méca. 1980, Vol. 19-2, p 363-386.

---

O

---

- [Oor-1980] Oore M., Burns D.J., *Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields*. Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology 1980, Vol. 102-2, p 202-211.
- [Ory-1994] Orynyak I.V., Borodii M.V., Torop V.M., *Approximate construction of a weight function for quarter-elliptical and semi-elliptical cracks subjected to normal stresses*, Engng. Fract. Mech. 1994, Vol. 40, p 143-151.
- [Ory-1995] Orynyak I.V., Borodii M.V., *Point weight function method application for semi-elliptical mode I cracks*, Int. J. Fracture 1995, Vol. 70, p 117-124.
- [Ory-2002] Orynyak I. V., Gienko A. Yu., *Mode-I elliptical crack in an infinite elastic body- Part I: Crack-face displacement for the polynomial law of loading*, Strength of Materials 2002, Vol. 34-1, p 12-26.

---

P

---

- [Par-1963] Paris P., Erdogan F., *A critical analysis of crack propagation laws*, Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 1963, p 528-534.
- [Par-1976] Paris P.C., McMeeking R.M. & Tada H., *Cracks and Fracture*, ed. S-W, STP601, ASTM 1976, p 471-489.
- [Pom-1999] Pommier S., Sakae C., Murakami Y., *An empirical stress intensity factor set of equations for a semi-elliptical crack in semi-infinite body subjected to a polynomial stress distribution*, Int. J. Fatigue 1999, Vol. 21, p 243-251.
- [Pom-2005] Pommier S., *Science des Matériaux*, Cours Université de Pierre & Marie Curie 2005-2006, Paris 2005.
- [Por-1992] Portela A., Aliabadi M.H., *The dual boundary element method: effective implementation for crack problems*. Int J Numer Methods Engng 1992, Vol. 33, p 1269-1287.

---

R

---

- [Rah-1995] Rahman S., *A stochastic model for elastic-plastic fracture analysis of circumferential through-wall-cracked pipes subject to bending*, Eng. Frac. Mech. 1995, Vol. 52-2, p 265-288.
- [Raj-1982] Raju I.S., Newman J. C. Jr., *Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels*, Transaction of the ASME Journal of Pressure Vessel Technology 1982, Vol. 104, p 293-298.

- [Raj-1988] Raju I. S., Newman J. C., Jr., *Stress-Intensity Factors for Corner Cracks in Rectangular Bars*, Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium, ASTM STP 969, T. A. Cruse (ed.), American Society for Testing and Materials 1988, p 43-55.
- [Rhe-1986] Rhee H. C., Atluri S.N., *Polygon-Circle Paradox in the Bending of Simply Supported Circular Plates*, Computers and Structures 1986, Vol. 22-4, p 553-558.
- [Ric-1968] Rice J.R., Rosengren G.F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 1968, Vol. 16, p 1-12.
- [Ric-1972] Rice J.R., *Some remarks on elastic crack-tip stress fields*. International Journal of Solids & Structures 1972, Vol. 8, p 751-758.
- [Ric-1989] Rice, J.R., Weight Function Theory for Three-Dimensional Elastic Crack Analysis, In R. P. Wei and R. P. Gangloff Eds., Fracture Mechanics: Perspectives and Directions (Twentieth Symposium), Philadelphia, USA 1989, pp. 29-57.
- [Riz-1967] Rizzo F.J., *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics 1967, Vol. 25, p 83-95.
- [Roo-1994] Rooke D.P., Aliabadi M.H., *The use of fundamental fields to obtain weight functions for mixed-mode cracks*, Int. J. Engng. Sci. 1994, Vol. 32, p 155-166.

---

## S

---

- [Sha-1970] Shaw R.P., *An Integral Equation Approach to Diffusion Problems*, ESSA and JTRE Report 1970, 29 pp.
- [Sha-1971] Shah R.C., Kobayashi A.S., *Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading*, Engineering Fracture Mechanics 1971, Vol. 3, p 71-96.
- [Shi-1976] Shih C.F., Hutchinson J.W., *Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems*, J. Engineering Materials and Technology 1976, Vol. 98, p 289-295.
- [Shi-1981] Shih C.F., *Relationship between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks*, J. of Mech. Phys. Solids 1981, Vol. 29, p 305-326.
- [Shi-1987] Shiratori M., Niyoshi T., Tanikawa K., *Analysis of stress intensity factors surface cracks subjected to arbitrarily distributed surface stresses*, In Stress Intensity Factors Handbook, ed. Murakami et al. 1987, Vol. 2, p 698-705.
- [Sih-1968] Sih G.C., Liebowitz H., *Mathematical theories of brittle fracture, Mathematical Fundamental of Fracture*, Academic press, New York, 1968.
- [Sih-1974] Sih G.C., *Strain-energy density factor applied to mixed mode crack problems*, International Journal of Fracture 1974, Vol. 10-3, p 305-321.
- [Sih-1979] Sih G.C., *An introduction to Fracture Mechanics*, Reference Material for the course on Advanced Fracture Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pa., USA, 1979.
- [Sih-1980] Sih G.C., *Mechanics of crack growth : geometrical size effect in fracture*, Proceedings on Fracture Mechanics in Engineering Applications, Edited by Sih & Valluri, 1980.
- [Sto-2001] Stolarska M., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., *Modeling crack growth by level sets and the extended finite element method*. Int J Numer Meth Eng 2001, Vol. 51-8, p 943-60.
- [Suk-1997] Sukumar N., Moran B., Black T., Belytschko T., *An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics*, Computat Mech 1997, Vol. 20, p 170-5.

- [Suk-2000] Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T., *Extended Finite element method for three-dimensional crack modeling*. Int J Numer Meth Eng 2000, Vol. 48-11, p 1549-1570.
- [Suk-2001] Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., *Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method.*, Comp Meth Appl Mech Eng 2001, Vol. 190-46/47, p 6183–6200.
- [Suk-2003] Sukumar N., Chopp D.L., Moran B., *Extended Finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation*, Engineering Fracture Mechanics 2003, Vol. 70, p 29-48.

---

T

---

- [Tel-2002] Telles J.C.F., Vera-Tudela C.A.R., Guimaraes S., *Extended Applications of the Numerical Green's Function BEM Analysis*. *Electronic Journal of Boundary Elements* 2002, Vol. BETEC2001, N° 2, p 136-150.
- [Tim-1970] Timoshenko S. and Coodier J.N., *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill 3rd Ed., New York 1970.

---

V

---

- [Vai-1990] Vainshtok V.A., Varfolomeyev I.V., *Stress intensity factor analysis for part-elliptical cracks in structures*. International Journal of Fracture 1990, Vol. 46, p 1-24.
- [Vai-1991] Vainshtok V.A., *Application of the weight function method to solving multi-parametric three-dimensional fracture mechanics problems*, Int. J. Fracture 1991, Vol. 47, p 201-212.

---

W

---

- [Wan-1996] Wang, L., Atluri, S.N., *Recent Advances in the alternating methods for elastic and inelastic fracture analyses*, Com. methods in Appl. Mech. and Engng 1996, Vol. 137, p 1-57.
- [Wan-1997] Wang X., Lambert S.B., *Stress intensity factors and weight functions for high aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates*, Engng. Fract. Mech. 1997, Vol. 57-1, p 13-24.
- [Wan-1998] Wang X., Lambert S.B., Glinka G., *Approximate weight functions for embedded elliptical cracks*, Engng. Fracture Mech. 1998, Vol. 59, p 381-392.
- [Wel-1961] Wells A.A., *Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture*, Proceedings of the Crack Propagation Symposium, College of Aeronautics and the Royal Aeronautical Society, Cranfield 1961, Vol. 1, p 210-230.
- [Wes-1939] Westergaard H.M., *Bearing pressures and cracks*, J. Appl. Mech. 1939, Vol. 61, p A49-A53.

---

Y

---

- [Yos-1989] Yoshimura S. Y., Yagawa G., Atluri S.N., *Generation and Propagation Analysis of High-Strain-Rate Dynamic Crack Propagation in a Visco-Plastic Solid*, Nuclear Engineering and Design 1989, Vol. 111, p 273-289.



[Yu-1993] Yu C.T., Kobayashi A.S., Hawkins N.M., *Energy-dissipation mechanisms associated with rapid fracture of concrete*, Experimental Mechanics 1993, Vol. 33-3, p 205-211.

[Yen-1962] Yen C.S., Pendleberry S.L., *Technique for making shallow cracks in sheet metals*, Matls Res. Standards 1962, Vol. 2-11, p 913-916.

---

**Z**

---

[Zeg-2003] Zegloul A., *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture*, Cours Université de Metz 2003-2004, Metz 2003.

[Zhe-1997] Zheng X.J., Kiciak A., Glinka G., *Weight functions and stress intensity factors for internal surface semi-elliptical crack in thick-walled cylinder*, Engng. Fracture Mech. 1997, Vol. 58-3, p 207-221.

# Annexe : Présentation du code de calcul HWFun

<b>Annexe : Présentation du code de calcul HWFun.....</b>	<b>A1</b>
A.1. INTRODUCTION.....	A2
A.2. LES DIFFERENTS MODULES DU CODE DE CALCUL .....	A2
A.2.1. Module du mailleur automatique .....	A2
A.2.2. Module de visualisation tridimensionnelle du maillage .....	A9
A.2.3. Module de Calcul du FIC pour une fissure elliptique .....	A9
A.2.4. Module de Calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique.....	A12
A.3. L'INTERFACE GRAPHIQUE DU CODE DE CALCUL <i>HWFUN</i> .....	A13
A.4. QUELQUES TESTS DE PERFORMANCES DU CODE DE CALCUL <i>HWFUN</i> .....	A17
A.4.1. Tests sur l'intégrale de surface.....	A17
A.4.2. Tests sur l'intégrale de contour.....	A19
A.5. CONCLUSION .....	A19

## A.1. INTRODUCTION

Notre objectif dans ce travail de thèse est d'évaluer le facteur d'intensité de contrainte sur le contour des fissures elliptiques internes et semi-elliptiques débouchantes par la technique d'hybridation de fonctions de poids. Les développements réalisés dans ce cadre ont été présentés d'une manière détaillée dans le chapitre précédent. Ils ont été concrétisés par l'élaboration d'un code de calcul nommé *HWFun* qu'on propose de décrire dans le présent chapitre.

Le code *HWFun* est réalisé en utilisant le langage C++ orienté objet, reconnu par sa puissance aussi bien dans le calcul arithmétique que dans la présentation graphique. Il comporte deux parties ; une partie principale regroupant les différents modules de programmation liés au calcul physique concernant le problème étudié, et une partie secondaire formée par les différentes fonctionnalités nécessaires pour améliorer l'utilisation et l'accessibilité du code de calcul. Dans ce qui suit, on choisit de présenter la partie principale en laissant la présentation de la partie secondaire pour la section A.3 consacrée à l'interface graphique du code.

## A.2. LES DIFFERENTS MODULES DU CODE DE CALCUL

Le code de calcul *HWFun* est formé principalement de quatre modules différents (voir la figure A1). Ils concernent dans l'ordre :

- i) le maillage automatique de la fissure.
- ii) la présentation graphique en 3D du maillage réalisé dans le premier module.
- iii) l'évaluation du FIC sur le contour des fissures elliptiques internes après avoir récupéré les données du maillage issues du premier module.
- iv) le calcul du FIC pour les fissures semi-elliptiques débouchantes.

Nous allons procéder dans ce qui suit à la description de la structure de chacun de ces modules.

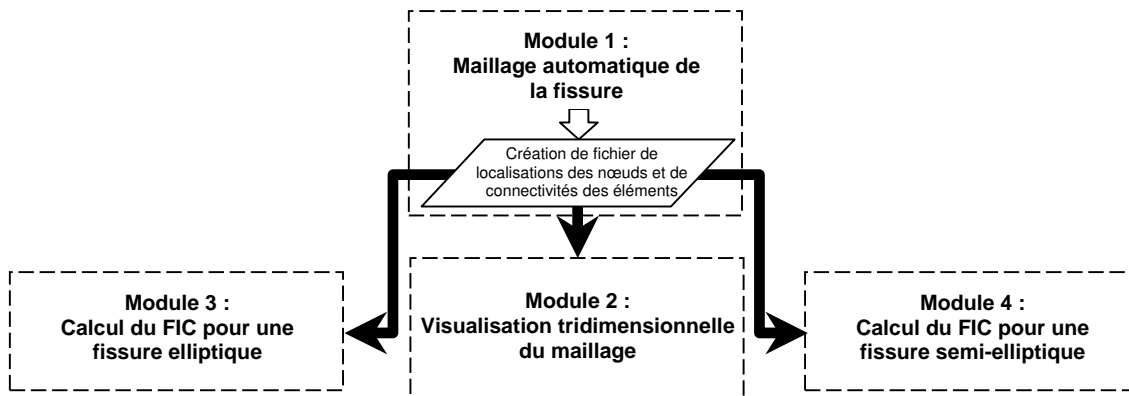


Figure A1 : Organigramme général du code de calcul *HWFun*

### A.2.1. Module du maillage automatique

Dans ce module la progression des étapes de calcul suit la chronologie décrite dans l'organigramme de la figure A2, comprenant les étapes suivantes :

#### a) Lecture des données globales

Les données globales nécessaires à nos calculs sont la configuration géométrique de l'ellipse (le petit axe  $a$  et le grand axe  $b$ ), la position angulaire du point de calcul ( $Q'$ ) ainsi que les paramètres liés au maillage. Il s'agit pour

ces derniers du rayon  $R_0$  du petit demi-cercle, du nombre des subdivisions angulaire  $n$  des demi-droites autour du point ( $Q'$ ), du paramètre  $\gamma$  lié à la bande ignorée, de la proportion  $\nu$  de la progression des rayons des demi-cercles et du paramètre  $\mu$  (paramètres décrits dans la section III.3 du chapitre III).

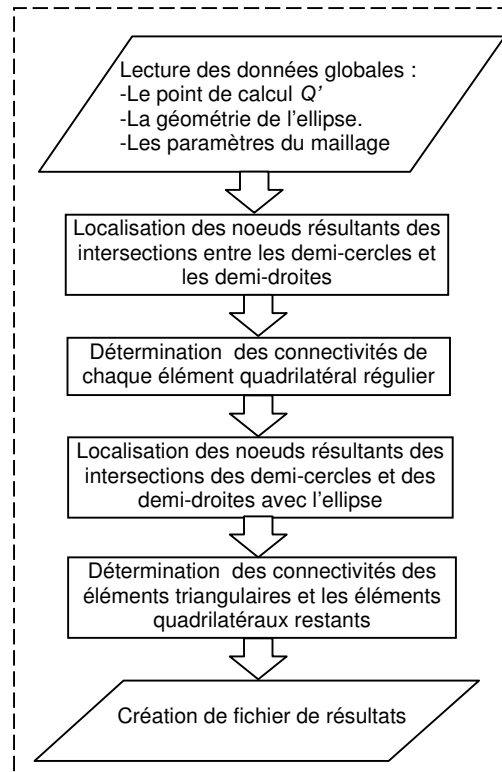


Figure A2 : Structure du Module 1 concernant le maillage automatique

**b) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires réguliers**

Les éléments réguliers sont ceux résultant de l'intersection des demi-cercles et demi-droites (voir la figure A3). Les coordonnées des ces intersections sont évaluées analytiquement pour chaque point ( $Q'$ ) en résolvant par substitution un système de deux équations (équation d'une droite et équation d'un cercle) à deux inconnues ( $x$  et  $y$ ) donné par :

$$\begin{cases} y = Ax + B \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases} \quad (A1)$$

Où  $A = \tan(\phi_j)$  représente la pente des demi-droites,  $B = y_{Q'} - Ax_{Q'}$ ,  $x_0 = x_{Q'}$ ,  $y_0 = y_{Q'}$  et  $r = r_i$  (voir la figure A3)

Les nœuds ainsi trouvés vont former construire une grille de quadrangles réguliers, dont les dimensions sont de plus en plus grandes en s'éloignant du point ( $Q'$ ).

Ces éléments restent réguliers tant qu'ils sont loin du front de fissure elliptique ( $\Gamma$ ). Au voisinage de ce dernier, des éléments non-réguliers apparaissent pour lesquels des nœuds résultent des intersections entre demi-droites et ellipse ainsi qu'entre demi-cercles et ellipse (voir la figure A3). Ces intersections sont nettement plus complexes à évaluer que celles des éléments réguliers.

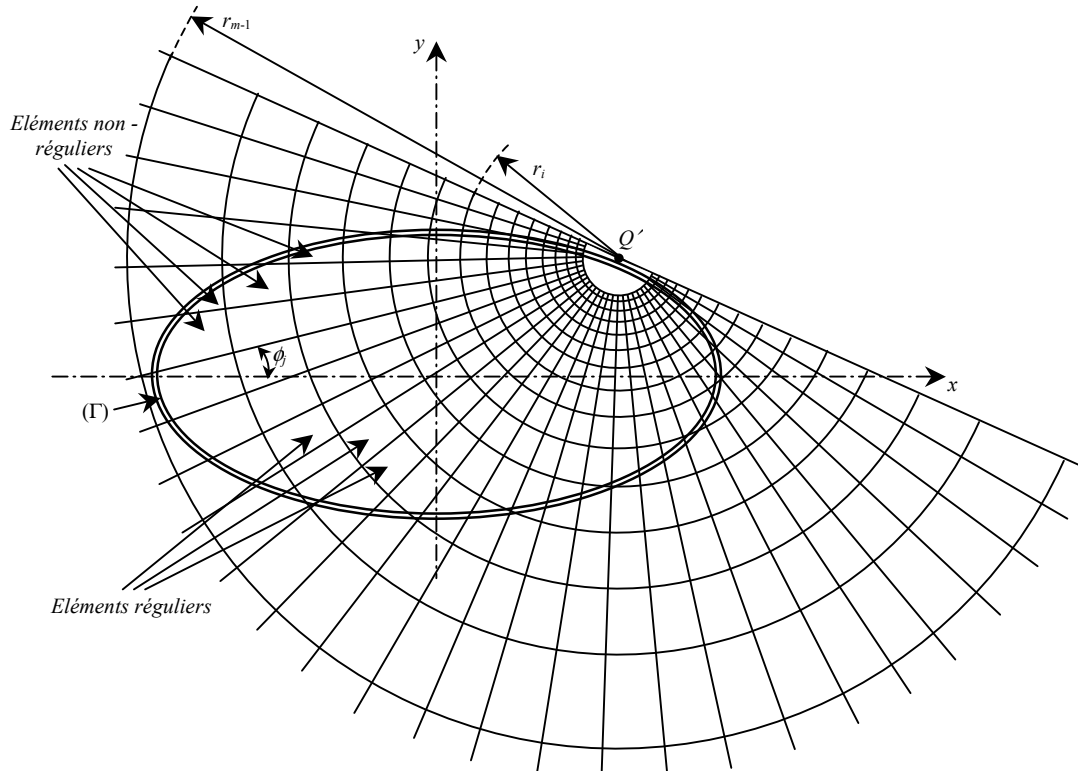


Figure A3 : Grille des mailles du demi-plan de la fissure

Avant d'entamer les calculs des intersections pour les éléments non-réguliers, nous terminons le calcul portant sur la localisation des intersections entre demi-droites et demi-cercles de toute la grille. Cette grille est délimitée par la tangente à l'ellipse au point ( $Q'$ ) et le premier demi-cercle de rayon  $r_{m-1}$  qui ne coupe pas l'ellipse comme le montre la figure A3. La détermination des connectivités des éléments réguliers obéit à l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l}
 l = 1 \\
 \left. \begin{array}{l}
 con1_l = (i-1)n + j \\
 con2_l = (i-1)n + j + 1 \\
 con3_l = (i)n + j \\
 con4_l = (i)n + j + 1 \\
 l = l + 1
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 j = 1, 2, \dots, n \\
 i = 1, 2, \dots, m
 \end{array}
 \end{array} \quad (A2)$$

Le paramètre  $l$  représente le numéro de l'élément,  $i$ , le numéro du rangé d'éléments,  $m$ , le nombre de rangés,  $j$ , le numéro de la portion,  $n$ , le nombre de portions,  $con1_l, \dots, con4_l$  sont les quatre connectivités de l'élément numéro  $l$ .

Sachant que cet algorithme est conçu en supposant que les nœuds sont numérotés d'une façon progressive pour chaque rangé en suivant le sens trigonométrique.

#### c) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires non-réguliers

Les éléments dont une partie se trouve à l'extérieur de la surface effective de l'ellipse, qu'on a appelés éléments non-réguliers, deviendront des éléments triangulaires, quadrangulaires déformés ou pentagonaux (voir la figure A4). Afin que leur implémentation numérique soit envisageable, les éléments pentagonaux seront subdivisés en deux éléments ; un élément triangulaire et un autre quadrangulaire (voir la figure A4). Les nouveaux nœuds,

comme déjà évoqué, représentent d'une part les intersections des demi-cercles avec l'ellipse et d'autre part les intersections des demi-droites avec l'ellipse. Ces derniers sont obtenus en procédant à la résolution par substitution d'un système très similaire au système d'équations (A1). Le nouveau système d'équations est obtenu en remplaçant l'équation du cercle dans (A1) par l'équation de la courbe délimitant la surface effective de l'ellipse donnée par (47), à savoir :

$$\begin{cases} y = Ax + B \\ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{\Delta}{R(\theta)}\right)^2 \end{cases} \quad (A3)$$

La détermination des intersections entre ellipse et demi-cercles revient à résoudre un système de deux équations quadratiques à deux inconnues qui est donné par :

$$\begin{cases} (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 = r_i^2 \\ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{\Delta}{R(\theta)}\right)^2 \end{cases} \quad (A4)$$

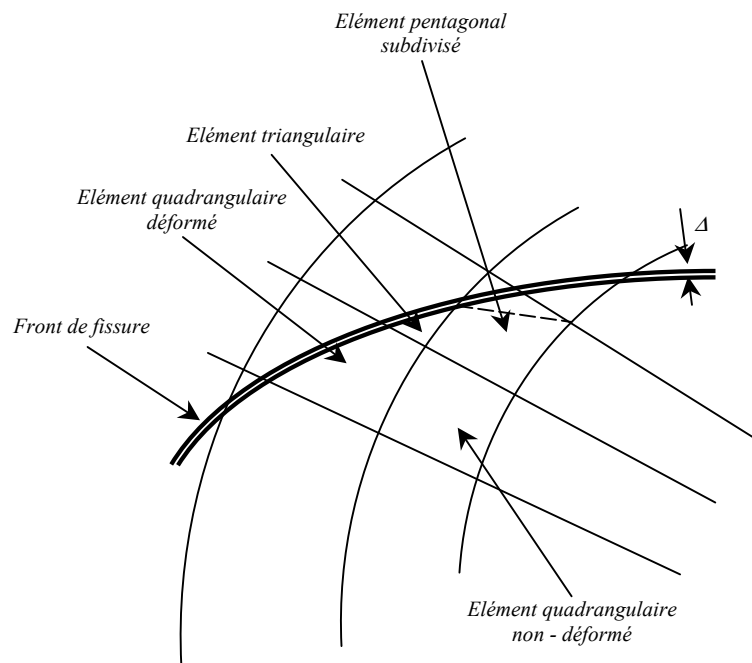
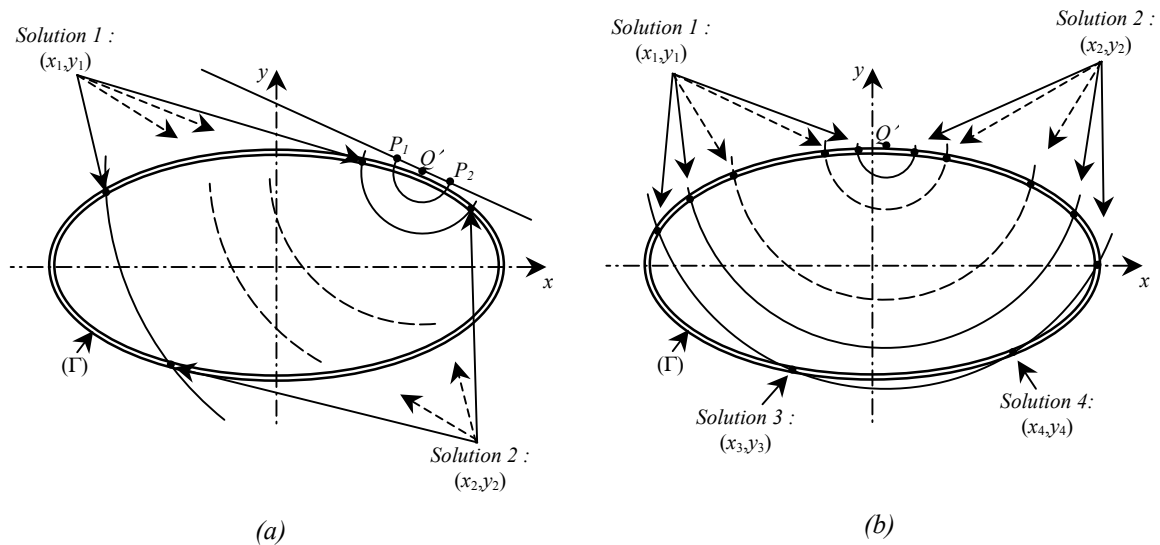


Figure A4 : Agrandissement de l'intersection de la grille de mailles et l'ellipse

Compte tenu de la complexité de la substitution due à la puissance variable des inconnues dans le système (A4), une technique de résolution de type Newton-Rafson [For-1995] a été retenue. Cette méthode utilise  $(x, y)_0$  comme étant une valeur initiale de la solution pour trouver, s'il y a convergence, une approximation à la solution  $(x, y)$  en effectuant un nombre fini d'itérations. A priori, l'intersection entre les demi-cercles et l'ellipse, se produit en deux points différents (voir la figure A5a), alors, selon la valeur de  $(x, y)_0$  retenue, on est à proximité de l'une ou l'autre des deux solutions présumées  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  et on convergera forcément vers l'une ou l'autre solution. Autrement dit, pour trouver la première solution  $(x_1, y_1)$ , on doit s'assurer que le point initial  $(x, y)_0$  soit plus proche de  $(x_1, y_1)$  que de  $(x_2, y_2)$ , et vice-versa.

Pour cela nous avons adopté une procédure simple, qui nous a rassuré du bon choix des points initiaux  $(x, y)_0$  et ce d'une manière automatique. Nous avons commencé par calculer les intersections du demi-cercle de rayon  $R_0$  avec la tangente à l'ellipse au point  $Q'$  qui nous a donné les points  $P_1$  et  $P_2$  (voir la figure A5a). Ces deux points vont nous servir comme points initiaux afin de déterminer les solutions  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  en  $r_i = R_0$ , respectivement. Une fois calculées, les deux solutions sont considérées comme points initiaux pour évaluer les solutions  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  en  $r_i = r_0$  et ainsi de suite. D'une manière générale,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  en  $r_i$  sont les points initiaux pour calculer les solutions  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  à  $r_{i+1}$ .



**Figure A5 :** Intersections entre demi-cercles et ellipse  
(a) cas avec uniquement deux solutions – (b) cas avec quatre solutions

Cette procédure de calcul nous a permis de déterminer les intersections entre diverses courbes d'une manière efficace et opérationnelle. Nous l'avons testé et validé sur plusieurs configurations, et elle a fonctionné avec perfection. Cependant, nous avons constaté son handicap lorsqu'il s'agit de quatre solutions au lieu de deux, le cas où le rapport des axes  $\alpha$  est faible et la position angulaire  $\theta$  du point  $Q'$  est très proche de  $(\pi/2)$  comme le montre la figure A5b. Ce qui nous empêche de prévoir, à partir d'un point initial, laquelle des solutions allons nous obtenir ? Ceci nous a poussé à remettre en question toute cette procédure de maillage automatique, et nous a incité à rechercher une autre méthode, plus valide de point de vue programmation pour n'importe quelle configuration du problème.

Cette nouvelle procédure consiste, d'abord à revenir au début et faire une extension du calcul de connectivité donné dans la section (b) pour les éléments possédant une partie à l'extérieur de l'ellipse, en les considérant totalement à l'intérieur de l'ellipse. Ensuite, on traite ces éléments selon leurs positions par rapport à l'ellipse, afin de trouver les localisations des nœuds et les connectivités des éléments non-réguliers qui les contiennent (triangles et quadrangles déformés comme la figure A4). Alors, après utilisation de l'algorithme de connectivité donné par les relations (A2), nous avons les localisations des nœuds ainsi que les connectivités de plusieurs éléments que nous pouvons trier, selon leurs positions par rapport à l'ellipse, comme suit :

- i) L'élément est totalement à l'intérieur de l'ellipse : Dans ce cas, tout l'élément fait partie du maillage et ses connectivités sont maintenues.

ii) L'un des nœuds de l'élément est en dehors de l'ellipse : L'élément ne pourra évidemment pas garder ses connectivités étant donné que le 3<sup>ème</sup> nœud (l'exemple de la figure A6) sera ignoré. Comme on l'a déjà vu, l'élément pentagonal restant à l'intérieur de l'ellipse est subdivisé en quadrangle 1-2-6-4 et un triangle 2-5-6. Le problème de la détermination de la position du nœud 6 est résolu dans cette nouvelle procédure en supposant que l'arc 3-4 est un segment de droite. Comme le nœud 5, le nœud 6 est alors trouvé en évaluant analytiquement l'intersection entre une droite et une ellipse. Malgré cette approximation, la rentabilité de ce calcul sera récompensée par le gain sur le temps d'exécution et la précision d'un calcul direct par rapport à un calcul itératif.

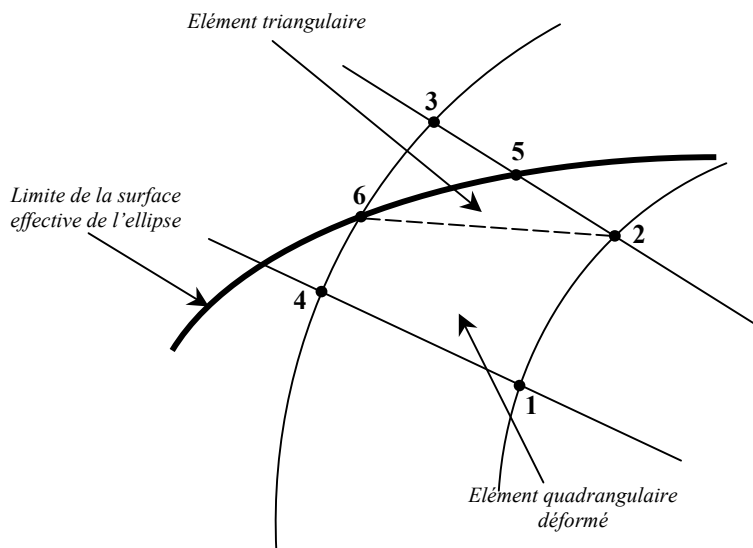


Figure A6 : Quadrangle de la grille avec un nœud en dehors de l'ellipse

Dans la base de données concernant les localisations des nœuds et les connectivités des éléments, nous allons rajouter les localisations des deux nouveaux nœuds et les connectivités du nouvel élément triangulaire et modifier les connectivités de l'élément quadrangulaire. Une démarche similaire aurait pu être suivie si un seul autre nœud (1, 2 ou 4) est en dehors de l'ellipse.

iii) Cas où deux nœuds de l'élément sont en dehors de l'ellipse :

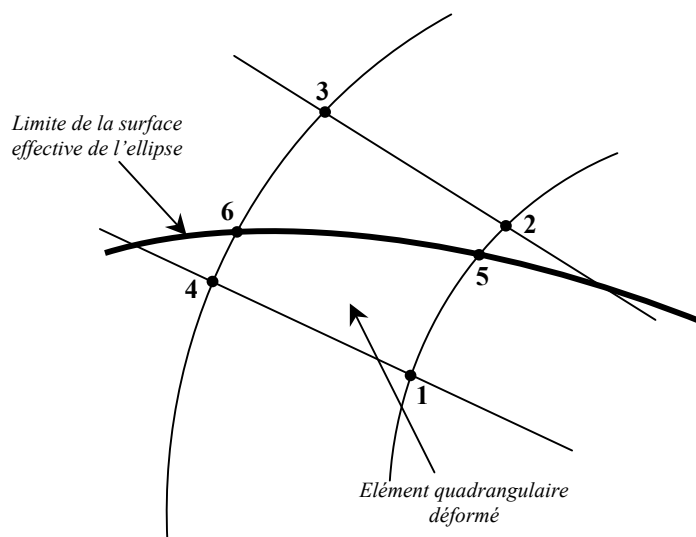


Figure A7 : Quadrangle de la grille avec deux nœuds en dehors de l'ellipse



Ces nœuds peuvent être 2-3 (comme le cas de la figure A7), ou n'importe quel couple de nœuds appartenant au même côté (1-2, 3-4 ou 1-4). Dans ce cas, l'élément initial 1-2-3-4 prend la forme de 1-5-6-4 mais reste toujours un quadrangle. Ce qui nécessite une modification de ses connectivités. Les localisations des nouveaux nœuds 5 et 6 sont évaluées de la même manière que le nœud 6 du cas précédent.

iv) Cas où trois nœuds de l'élément sont en dehors de l'ellipse :

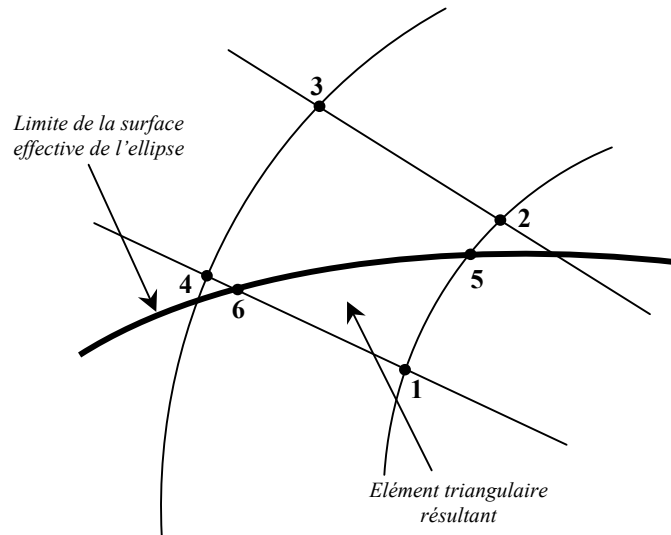


Figure A8 : Quadrangle de la grille avec trois nœuds en dehors de l'ellipse

Quatre possibilités sont envisageables pour ce cas. Les nœuds peuvent être 2-3-4 (l'exemple de la figure A8), 1-2-3, 1-2-4 ou 1-3-4. Dans ce cas de la figure A8, la partie située à l'intérieur de l'ellipse est alors considérée comme étant un triangle (1-5-6) dont une connectivité est déjà localisée (le nœud 1) et les deux autres (5 et 6) sont déterminées de la même manière exposé précédemment.

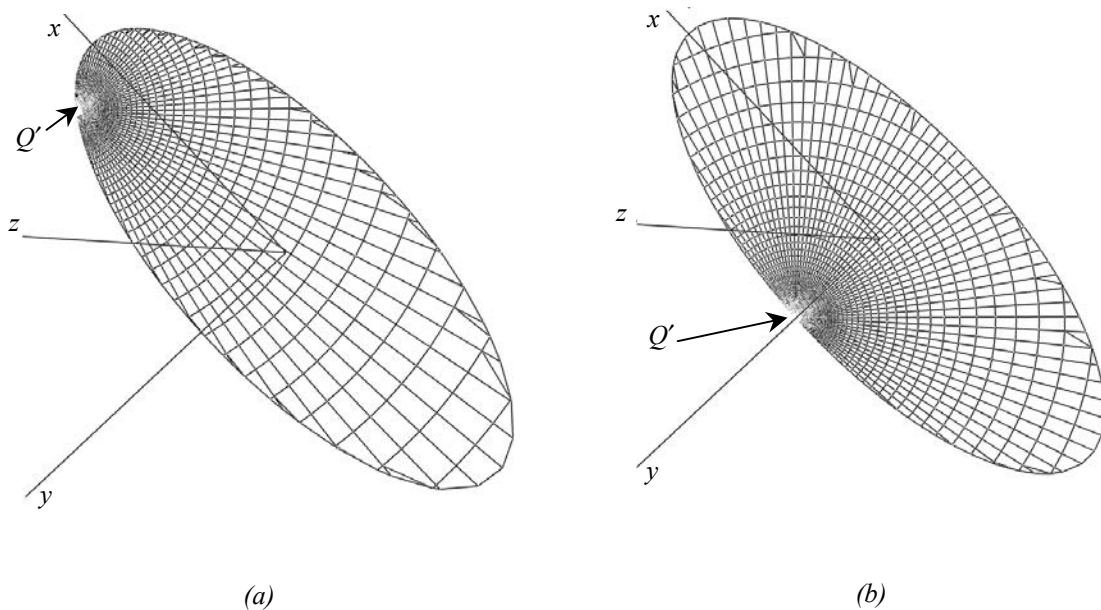


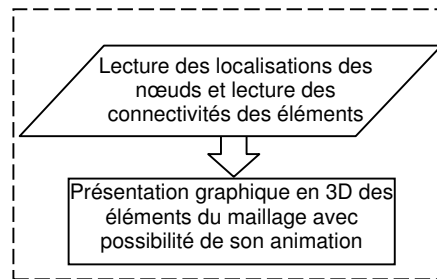
Figure A9 : Maillage réel d'une fissure elliptique avec  $\alpha = 0.4$  : (a) à  $\theta_c = 30^\circ$  - (b) à  $\theta_c = 90^\circ$

En fait, l'ensemble des différents cas de situation de l'élément par rapport à la surface effective de l'ellipse, représentent, en terme d'algorithme de calcul et de programmation, 13 possibilités différentes. Dans le code de calcul, chacune de ces possibilités est traitée séparément, afin d'insérer les localisations des nouveaux nœuds et les connectivités des nouveaux éléments et éventuellement d'effectuer les changements des connectivités des anciens éléments. Deux cas de maillage réel sont présentés sur la figure A9, justifiant l'intérêt de la procédure adaptée dans le mailleur automatique utilisé dans notre code de calcul *HWFun*.

#### **d) Création du fichier résultat**

Une fois que toutes les localisations des nœuds et les connectivités des éléments ont été déterminées, le code de calcul ouvre une boîte de dialogue Windows sur laquelle l'utilisateur spécifie le nom et l'emplacement du fichier où toutes les informations concernant les nœuds et les éléments seront stockées. Ce fichier représentera une vraie base de donnée du maillage exploitable par les autres modules de calcul (évaluation du FIC et présentation 3D du maillage).

### **A.2.2. Module de visualisation tridimensionnelle du maillage**



**Figure A10 :** Structure du Module 2 concernant la visualisation 3D du maillage

Dans le module 2 décrit sur la figure A10, le code de calcul commence par lire les données concernant les localisations des nœuds et les connectivités des éléments à partir du fichier résultats créé à l'issue du Module 1. Ensuite, la visualisation tridimensionnelle des éléments du maillage est assurée en utilisant les différentes options des fonctions graphiques nommées OpenGL (l'équivalent du DirectX inclus dans le Windows). Les fonctions OpenGL sont reconnues pour leur grande puissance dans l'exploitation du matériel graphique de la machine (la carte graphique dans notre cas). La visualisation du maillage est réalisée en procédant avec une boucle répétitive qui affiche un élément du maillage à chaque passage avec un petit temps d'arrêt. Ceci donne un effet d'animation et de progressivité de la génération du maillage autour du point ( $Q'$ ). L'exécution de ce module est alors un moyen très efficace pour vérifier le bon déroulement de la procédure de maillage automatique exposé dans le module 1.

### **A.2.3. Module de Calcul du FIC pour une fissure elliptique**

C'est le module où on concrétise numériquement la technique d'hybridation présentée dans cette étude. Il contient tous les développements théoriques transformés en numérique concernant la subdivision de la fissure en deux zones, l'évaluation des intégrales, traitement des singularités, et ceci dans le but de calculer le FIC sous plusieurs formes adimensionnelles pour les données du problème considéré. Par le biais du code de calcul on

effectue donc une succession d'actions lors de l'exécution de ce module comme le montre l'organigramme de la figure A11 :

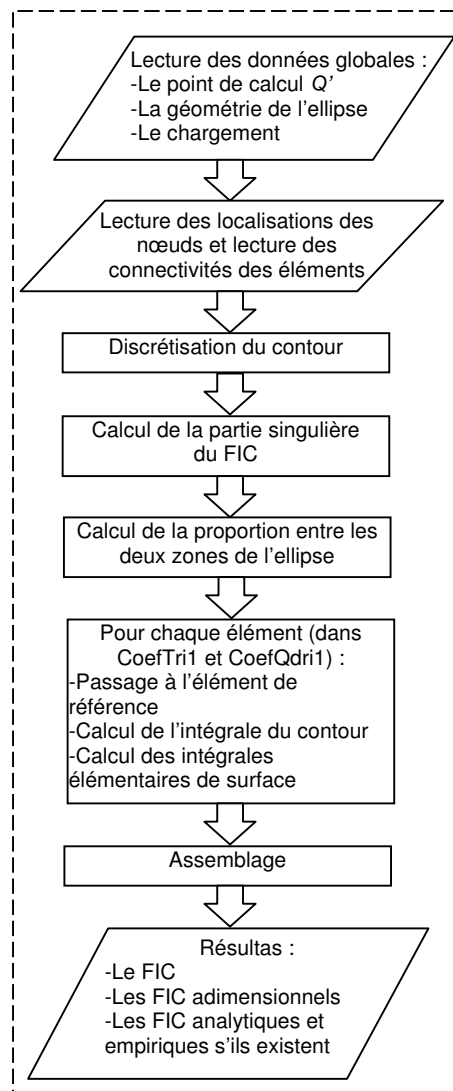


Figure A11 : Structure du Module 3 concernant le calcul du FIC pour une fissure elliptique

**a) Lecture des données du problème**

En premier, on lit les données globales du problème concernant la configuration géométrique de l'ellipse et la position angulaire du point de calcul ( $Q'$ ) ainsi que les données concernant le chargement appliqué. Ensuite, on récupère toutes les informations concernant le maillage de la surface de l'ellipse à partir du fichier résultat créé par le Module 1.

**b) Discrétisation du contour de l'ellipse**

Le code entame ensuite la discrétisation du contour en plusieurs petits segments de droite, nécessaire lors de l'évaluation de l'intégrale curviligne donnée par l'équation (44). Ces petits segments sont de longueur de plus en plus petite en se rapprochant des faibles valeurs du rayon de courbure, conformément à l'équation (54). A ce niveau, notre code de calcul offre la possibilité de visualiser cette discrétisation en activant l'option de traçage des graphes (décrite ultérieurement dans la section de l'interface du code).

**c) Calcul de la partie singulière du FIC**

La partie singulière du facteur d'intensité de contrainte désignée par  $K_I^{S^*}$  est donnée par l'expression (40). Comme on a besoin uniquement de la valeur du chargement au point de calcul ( $Q$ ) et la valeur de  $R_0$  lue avec les données globales du problème, l'évaluation de cette partie singulière est un calcul direct dont le résultat sera stocké pour être rajouté à la partie restante du FIC  $K_I^{S^*}$ .

**d) Calcul de la valeur optimale de la proportion  $\beta$**

Avant d'entamer le calcul de la partie restante du FIC, on s'intéresse dans cette partie au calcul de la proportion  $\beta$  des deux zones de la fissure. Celle-ci dépend des valeurs de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  d'après l'équation (39). Le calcul de  $\beta_1$  est effectué directement à partir de l'équation (37). Cependant, le calcul de  $\beta_2$  n'est possible qu'après l'évaluation des termes  $\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\min}$ , et  $\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\max}$  comme l'exprime l'équation (38). Ces derniers sont calculés en déterminant, par balayage du front de fissure, la valeur de  $\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)$  pour chaque subdivision du contour de l'ellipse. La valeur de la dérivée partielle sera évaluée par l'approximation numérique classique suivante [For-1995]:

$$\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\theta_i} = \frac{(R_c)_{\theta_{i+1}} - (R_c)_{\theta_i}}{\theta_{i+1} - \theta_i} \quad (A5)$$

**e) Calcul de la partie restante du FIC**

L'intégrale de surface restante sera évaluée numériquement comme évoqué au premier chapitre. Pour cela, une boucle sur l'ensemble des éléments constituant le maillage de la surface de l'ellipse sera adoptée. Pour chacun des éléments, on calcule la partie de l'intégrale correspondante. Ce calcul est effectué en appelant pour chaque élément et selon son type, triangulaire ou quadrangulaire, le sous-programme CoefTri1 ou CoefQdri1, respectivement. Les connectivités de chaque élément et les coordonnées de ses connectivités constituent les variables d'entrée de ces sous-programmes.

A l'intérieur des sous-programmes, on commence par faire les changements de variables permettant de passer de l'élément réel à l'élément de référence. A ce stade, l'algorithme de Gauss est utilisé pour l'intégration numérique sur la surface de l'élément, avec 9 points (3 x 3) pour les éléments quadrangulaires et 7 points pour les éléments triangulaires. Ce choix a été fait, après plusieurs tests, sur la base d'une optimisation entre la précision et le temps machine afin de minimiser le coût de calcul.

A l'intérieur de la procédure d'intégration numérique sur la surface de l'élément, l'intégrale du contour présente dans l'expression des deux fonctions de poids (30) et (31), est aussi évaluée en utilisant l'expression (44). Parallèlement, la proximité de chaque subdivisant  $\partial\Gamma$  du contour est testée afin d'enclencher éventuellement l'intégration analytique donnée par l'expression (59).

Les variables communes entre les deux fonctions de poids (30) et (31) telles que  $r, R, l_{QQ}$  ainsi que le chargement  $q$  lié au point seront toutes calculées pour n'importe quel point de l'élément de référence. Ensuite, on teste la position de ce point par rapport aux deux zones de la fissure décrites par les expressions (32) et redéfinies par les changements des variables liés au passage vers l'élément de référence. Ce test nous permet de choisir la fonction de poids convenable, conformément à l'équation (36), afin d'achever le calcul de l'intégrale de surface concernant l'élément considéré. L'assemblage des éléments se fait en calculant la somme de toutes les intégrales élémentaires de surface dans le but de quantifier la valeur finale de la partie restante du FIC désignée par  $K_I^{S^*}$ .

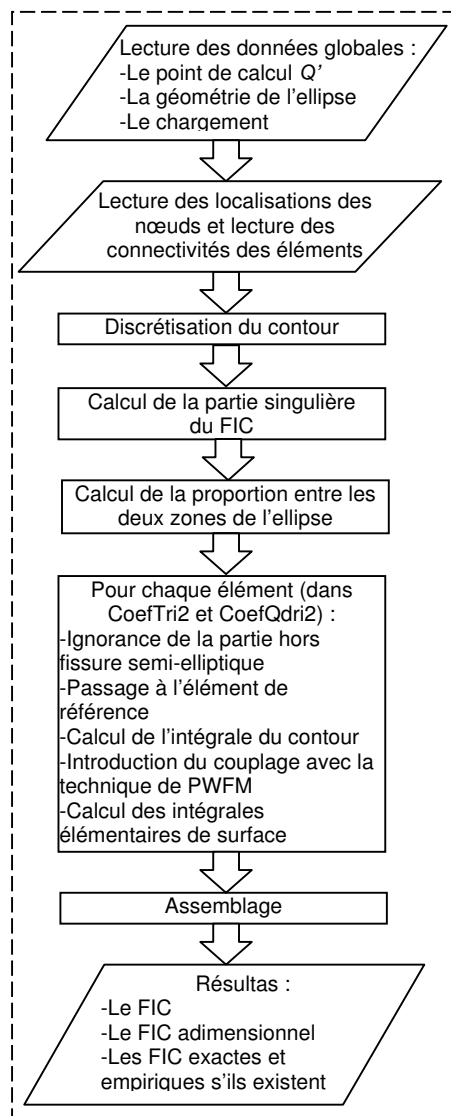
**f) Affichage des résultats**

Les résultats affichés à l'issue de ce module concernent principalement le FIC :

- La valeur dimensionnelle (la valeur effective en  $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ ).
- Les valeurs adimensionnelles selon leurs définitions données dans la partie applications de l'hybridation (chapitre IV et V).
- Eventuellement, La valeur analytique et/ou empirique.

Le code de calcul *HWFun* permet aussi et d'une manière automatique l'évaluation du FIC pour plusieurs valeurs de la position angulaire  $\theta$  du point ( $Q'$ ) ou pour plusieurs valeurs du rapport des axes de l'ellipse  $\alpha$ . Pour cela, nous utilisons une boucle de calcul en série (voir la zone *h* l'interface graphique exposé dans la section A.3) qui permet à chaque passage d'exécuter le Module 1 ensuite le Module 2 en incrémentant sur  $\theta$  ou  $\alpha$  d'un incrément donnée et jusqu'à une valeur finale donnée. L'intérêt de cette fonction est de réduire l'intervention de l'utilisateur et par conséquent le risque d'erreur et le temps d'exécution global dans le cas où on a besoin de la variation du FIC en fonction de  $\theta$  ou  $\alpha$ .

**A.2.4. Module de Calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique**



**Figure A12** : Structure du Module 4 concernant le calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique

Ce module remplace le module 3 dans le cas d'une fissure semi-elliptique débouchante afin de trouver le FIC sur son contour. Par rapport au module 3, ce module comprend les mêmes étapes de calcul (voir la figure A12) mais avec d'autres sous-programmes *CoefTri2* et *CoefQdri2* pour l'intégration numérique sur la surface de chaque élément. A l'intérieur de ces sous-programmes, un test supplémentaire est effectué sur la position du point arbitraire de l'élément par rapport à la surface libre pour ignorer la partie de l'ellipse située en aval de la surface libre en bénéficiant du maintien de la même procédure du maillage utilisée pour le cas d'une fissure elliptique. Conformément aux développements présentés dans la section IV.2 du chapitre IV, le calcul des fonctions de poids est aussi modifié en ajoutant les corrections liées au couplage avec la PWFm conformément aux équations (64), (68) et (71). Ce calcul est fait simultanément pour le chargement appliqué et le chargement de référence  $\sigma_0$  pour déduire le paramètre géométrique  $D(\theta, \alpha)$  donné par l'équation (75). Un autre changement est nécessaire au niveau du calcul de la partie singulière du FIC pour laquelle il faut éventuellement déduire la partie du petit demi-cercle de rayon  $R_0$  se trouvant en aval de la surface libre (pour les faibles valeurs de  $\theta$ ).

### A.3. L'INTERFACE GRAPHIQUE DU CODE DE CALCUL HWFUN

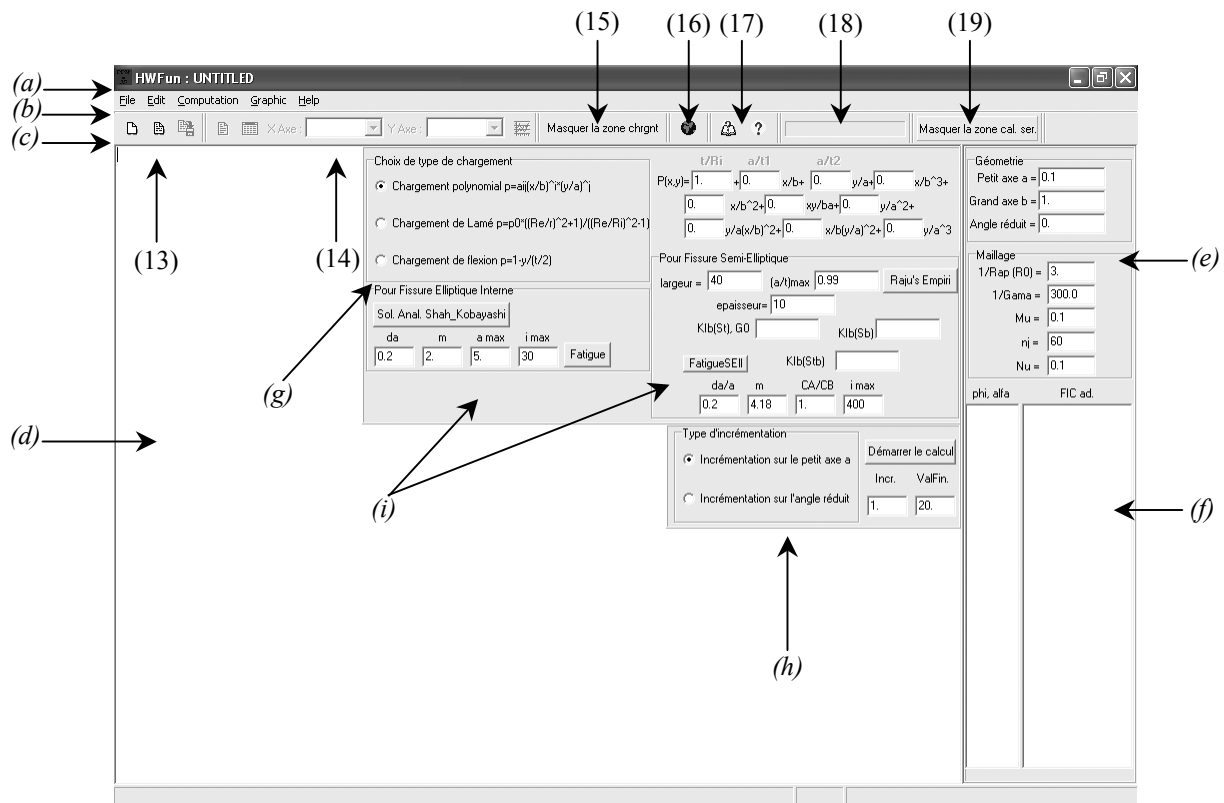


Figure A13 : Interface graphique principale du code de calcul HWFun

HWFun est un code de calcul réalisé sous la forme d'un progiciel avec interface graphique, installable et totalement indépendant de son compilateur (C++). En dehors du maillage et du calcul du FIC présentés à travers les différents modules de la section A.2, ce code comprend beaucoup d'autres fonctionnalités secondaires mais très utiles pour l'utilisateur. Parmi lesquelles, on cite :

- L'accès total au disque dur de la machine (ouverture, fermeture et modification des fichiers).
- Les fonctionnalités d'édition (Copier, Couper, Coller, Sélectionner tout, ...).

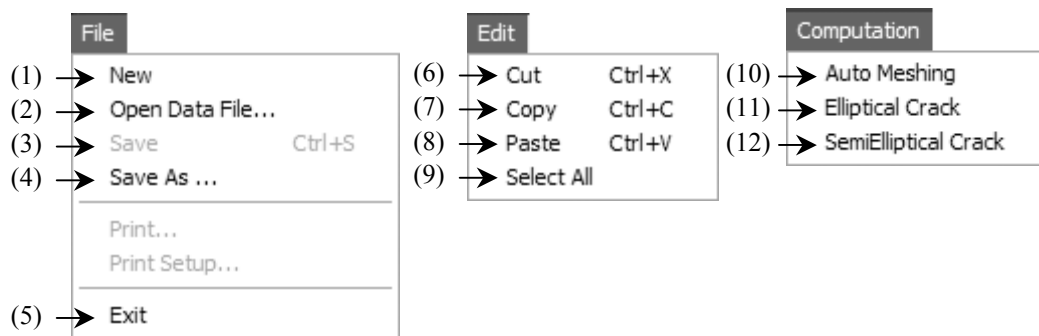
- Traçage des graphes des différents résultats sous la forme de courbes 2D.
- Un service d'aide (Help), sur lequel un manuel d'utilisation du code est disponible.

Malgré la multitude de ses fonctions, il est à signaler que l'installable de notre code de calcul ne dépasse pas la taille d'une seule disquette (inférieur à 1.44Mo). L'interface graphique du code est présentée sur la figure A13, sur laquelle on distingue plusieurs zones, à savoir :

**a) La ligne de titre**

Comme toute fenêtre Windows sur cette ligne apparaît le nom de l'application (*HWFun*) suivi par le nom du fichier actuellement ouvert nommé par défaut *UNTITLED*. Au bout de cette ligne, les trois boutons (réduire, agrandir, fermer) communs des fenêtres Windows sont présents.

**b) La ligne de menu**



**Figure A14 :** Fonctions principales de la ligne de menu.

**Tableau A1 :** Description des fonctions de la ligne de menu

N° de fct.	Nom de fct.	Description de fct.
1	New	Créer un nouveau fichier, éventuellement un fichier de données de format texte.
2	Open Data File...	Ouvrir un fichier existant (un fichier de données par défaut) en exécutant la boîte de dialogue OpenFile du Windows.
3	Save	Enregistrer le fichier en cours (ouvert). Activer une fois le fichier en cours est modifié. Ctrl+S sont des touches de raccourcie.
4	Save As...	Ouvrir la boîte de dialogue SaveAs du Windows pour pouvoir enregistrer le fichier en cours sous un nom et format personnalisés (.dat par défaut et .txt éventuellement)
5	Exit	Fermer toute l'application <i>HWFun</i> en vérifiant l'enregistrement du fichier en cours.
6	Cut	Couper les chaînes de caractères sélectionnées du texte du fichier en cours en le sauvegardant dans la presse-papier.
7	Copy	Faire une copie des chaînes de caractères sélectionnées en le sauvegardant dans la presse-papier.
8	Paste	Coller les chaînes de caractères sauvegardées dans la presse-papier à l'endroit actuel du curseur.
9	Select All	Sélectionner toutes les chaînes de caractères appartenant au texte du fichier en cours.
10	Auto-meshing	Lancer l'exécution du Module 1 (maillage automatique).
11	Elliptical crack	Lancer l'exécution du Module 3 (calcul du FIC pour une fissure elliptique)
12	Semi-elliptical crack	Lancer l'exécution du Module 4 (calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique)

Cette ligne comporte cinq groupes de fonctions parmi lesquels des groupes standards (File, Edit et Help) que l'on trouve dans beaucoup d'applications Windows, et des groupes spécifiques à notre code de calcul (Computation et Graphic). Sur le tableau I, nous exposons la description des principales fonctions de ces groupes présentées sur la figure A14.

**c) La ligne de commande**

Comme toute application Windows, cette ligne est une zone contenant des boutons de lancement rapide des fonctions se trouvant déjà dans la ligne du menu et beaucoup d'autres se trouvant nulle par ailleurs. Ce sont les fonctions sensées les plus utilisées qui sont rassemblées dans cette ligne de commande. Nous pouvons récapituler le contenu de cette ligne d'après la figure A13, à travers le tableau II.

**Tableau AII : Description des fonctions de la ligne de commande**

N°	Nom	Description
13	Groupe du traitement de fichier	Lancement rapide des trois fonctions 1, 2 et 3 du groupe File de la ligne du menu.
14	Groupe du mode graphique	Lancement rapide des deux fonctions de basculement vers et depuis le tableau des résultats, le choix des deux axes parmi les colonnes du tableau et finalement le lancement du traçage du graphe.
15	Masquer/Afficher la zone du chargement	Masquer ou afficher la zone ( $g$ ) concernant le chargement.
16	Présentation 3D	Exécuter le Module 2 (visualisation tridimensionnelle du maillage) en ouvrant une nouvelle fenêtre décrite dans la section ( $i$ ).
17	Groupe d'aide	Lancement rapide de la fonction d'aide (Help) sur l'utilisation du code et de la fonction « A propos de... » (About...) qui ouvre une boîte de dialogue affichant la version et le concepteur de l'application.
18	Progression de calcul	Afficher la progression et le pourcentage d'avancement du calcul en cours.
19	Masquer/Afficher la zone de calcul en série	Masquer ou afficher la zone ( $g$ ) concernant le calcul répétitif.

**d) La zone principale de texte**

C'est la zone où le contenu du fichier en cours est affiché. On peut ainsi modifier facilement le texte par saisie ou par l'utilisation des fonctions d'édition (couper, copier et coller). Il faut évidemment terminer ces opérations par l'enregistrement pour qu'elles prennent effet. La capacité d'affichage de cette zone dépasse les 68000 lignes, permettant l'affichage des informations d'un grand nombre d'éléments de maillage.

**e) La zone de saisie des données globales**

Cette zone sert à saisir les données globales du problème traité par Hybridation de fonctions de poids. La zone de saisie de données est décomposée en deux parties ; la partie des données géométriques, à savoir le petit axe, le grand axe et la position angulaire ( $\theta_r$ ) du point de calcul ( $Q$ ), et la deuxième partie concerne les données du maillage, à savoir le rayon du petit cercle  $R_0$ , le paramètre de l'épaisseur de la bande  $\gamma$ , le paramètre de la progression des demi-cercles  $\nu$ , le paramètre de discrétisation du contour  $\mu$  et le nombre de portions angulaires du maillage  $n$ .

**f) La zone d'affichage des résultats**

Cette zone est composée de deux colonnes, une grande à droite et une petite à gauche (voir la figure A13). La grande colonne sert à afficher la valeur du FIC et celle des différents FIC adimensionnels selon l'exemple traité.



La petite colonne est utilisée uniquement en cas de calcul en série pour afficher les valeurs progressives de l'angle réduit  $\theta_r$  ou du rapport des axes  $\alpha$  en face des valeurs du FIC correspondantes.

**g) La zone de chargement**

C'est une zone sur laquelle on saisit les paramètres du chargement et on choisit son mode selon le problème traité. On trouve aussi sur cette zone un bouton pour activer le calcul analytique du FIC développée par Shah & Kobayashi [Sha-1971] pour les fissures elliptiques sous un chargement polynomial.

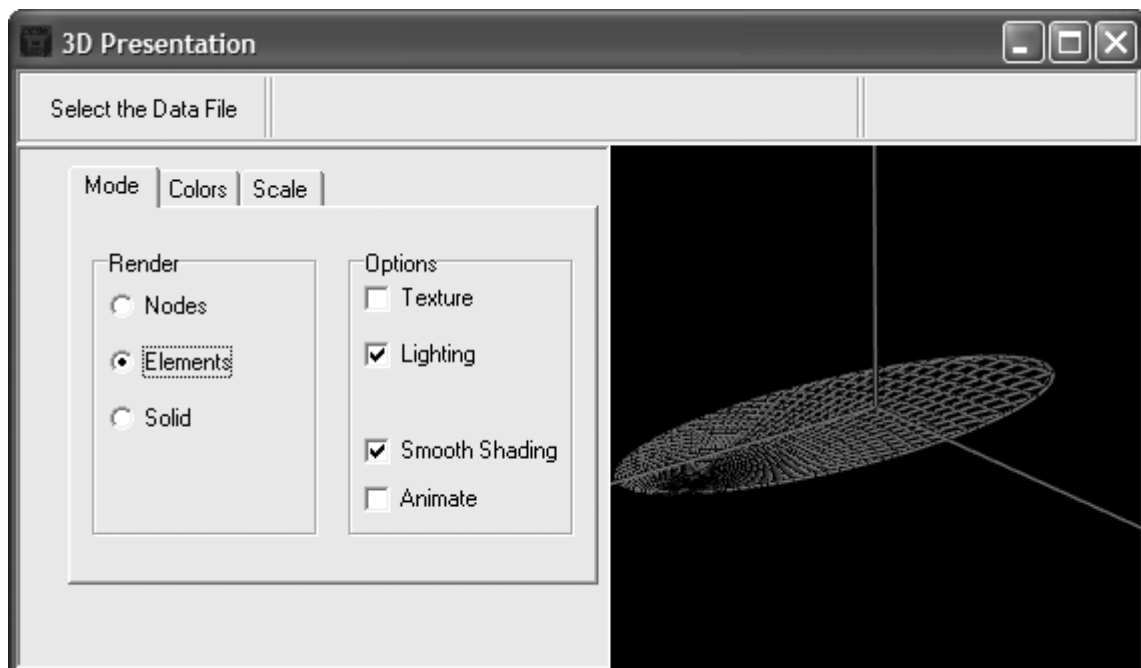
**h) La zone de calcul en série**

Cette zone comporte le champ de saisie de la valeur de l'incrément sur l'angle réduit  $\theta_r$  ou le rapport des axes  $\alpha$  et le champ de saisie de sa valeur finale, en prenant leurs valeurs saisies dans la zone des données globales comme valeurs initiales. Le bouton « démarrer le calcul » lance le calcul en série.

**i) La fenêtre de calcul de fatigue**

Cette zone comporte respectivement, les champ de saisie de la valeur d'avance  $\Delta a_{max}$ , des valeurs des constantes caractéristique du matériau liées à la fatigue, de la valeur finale du petit axe  $a$  et de celle du nombre d'avances maximal. Le calcul de fatigue se déroule selon l'algorithme de la figure 52 du chapitre IV. Notons que les FIC à chaque avance sont calculé en faisant appel successivement au module 1 et module 3 pour les fissures elliptiques et module 1 et module 4 pour les fissures semi-elliptiques.

**j) La fenêtre de présentation 3D**



**Figure A15 :** La fenêtre de présentation 3D du code HWFun

Cette fenêtre est composée essentiellement de trois zones (voir la figure A15). La zone supérieure comprenant le bouton « Select the data file » qui lance la présentation graphique en 3D du maillage en désignant le fichier contenant les résultats du maillage. La deuxième zone (à gauche) rassemble toutes les options liées aux fonctions OpenGL selon lesquelles la présentation 3D est réalisée. Le tableau III récapitule le détail des principales

fonctions. La troisième zone (à droite) est celle de la visualisation graphique tridimensionnelle sur laquelle apparaît la progression du maillage.

**Tableau AIII** : Description des fonctions de la fenêtre de Présentation 3D

Anglet	Option	Description
Mode	Nodes	Afficher uniquement les nœuds des éléments
	Elements	Afficher les coté des éléments
	Solid	Afficher les éléments pleins
	Lighting	Activer l'effet de la lumière
	Animate	Fait tourner l'ensemble du maillage aléatoirement autour de ses trois axes.
Colors	Background	Modifier la couleur de l'arrière-plan de la zone de visualisation.
	Object	Modifier la couleur de l'objet (les éléments)
	Light	Modifier la couleur de l'effet de lumière.
Scale	Scale X	Modifier la proportion de la taille de l'ensemble selon l'axe X.
	Scale Y	Modifier la proportion de la taille de l'ensemble selon l'axe Y.
	Scale Z	Modifier la proportion de la taille de l'ensemble selon l'axe Z.
	Gang	Raccorder les trois proportions de la taille entre elles.

#### A.4. QUELQUES TESTS DE PERFORMANCES DU CODE DE CALCUL *HWFUN*

On s'intéresse dans cette partie de l'annexe à présenter les résultats de quelques tests de performances de notre code de calcul par rapport aux deux paramètres les plus importants dans les simulations numériques. Il s'agit du temps de calcul (temps machine) et de la précision de calcul caractérisée par l'erreur relative concernant l'évaluation de la valeur du FIC. Cette erreur est calculée pour un FIC adimensionnel  $\bar{K}$ , défini dans l'exemple A.4.1 pour un chargement uniforme (le cas le plus basique) et pour lequel la solution analytique (exacte) est l'unité (voir le tableau I). Afin de rendre ce calcul de l'erreur plus légitime, cette dernière sera évaluée pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  allant de 0.1 à 1.0 avec un pas de 0.1 pour l'angle  $\theta = 0$  (l'angle ou l'erreur est globalement maximale). Les valeurs enregistrées de l'erreur et du temps de calcul dans ces tests sont alors des valeurs moyennes pour les différentes valeurs de  $\alpha$ .

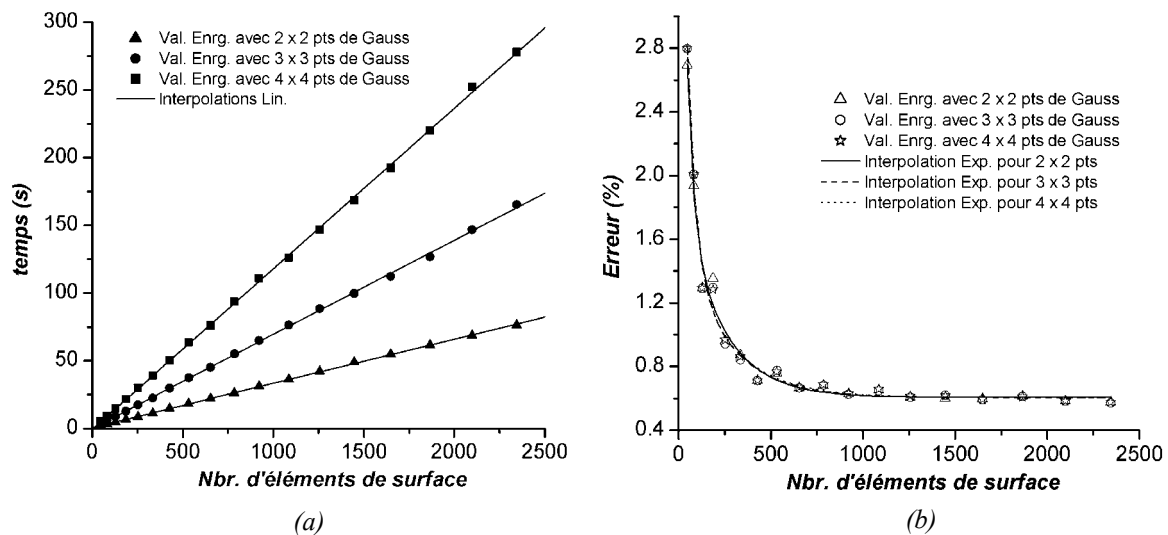
Compte tenu de l'importance du calcul intégral dans notre code de calcul *HWFun*, les tests de performance sont focalisés sur l'évaluation numérique de l'intégrale de surface de l'ellipse et de l'intégrale du contour de l'ellipse. L'importance de ces intégrales est due à leur grande répétition lors d'un calcul du FIC. Sachant qu'un calcul d'intégrale de surface élémentaire se répète autant de fois qu'on a d'éléments de surface ( $N_{el}$  de fois pour une valeur de FIC calculée), tandis que le calcul de l'intégrale du contour élémentaire se reproduise autant de fois qu'on a d'éléments du contour mais pour chaque élément de surface ( $N_{el} \times N_c$  de fois pour une valeur de FIC calculée).  $N_{el}$  et  $N_c$  sont respectivement le nombre d'éléments de surface de l'ellipse et le nombre d'éléments de son contour.

##### A.4.1. Tests sur l'intégrale de surface

Pour l'intégrale de surface, les deux paramètres de performance (temps, erreur) sont évalués en fonction du nombre d'éléments de surface l'augmentant progressivement. Cette augmentation est réalisée en variant progressivement les paramètres de maillage influant directement le nombre d'éléments sans tenir en compte de leurs intervalles proposées dans le chapitre III. Il s'agit de  $R_0$  donnée par l'équation (41), du nombre de portions  $n_f$  (voir la section III.3.1 du chapitre III) et du facteur  $\nu$  de l'équation (49).

L'évaluation de temps machine en fonction du nombre d'éléments est présentée sur la figure A16a en tenant compte de l'impacte du choix de nombre de points de Gauss utilisée lors du calcul numérique de l'intégrale de surface pour les éléments quadrangles (98% du nombre d'éléments total). Par ailleurs, il faut mentionner que le temps de calcul enregistré est avec un PC de microprocesseur Intel® Centrino® à 1.85GHz de 2Go de mémoire cache et 1Go de RAM.

En premier, il faut signaler que d'après la figure A16a, les simulations avec la méthode d'hybridation consomme de très faibles temps machine (2.5 minute pour 2500 éléments à 3x3 points de Gauss). Ensuite, l'évolution du temps d'après les courbe de cette figure est quasiment linéaire en fonction du nombre d'éléments de surface et ce pour chaque variante du nombre de points de Gauss (2x2, 3x3 ou 4x4 points). Bien évidemment, ce temps augmente aussi bien avec le nombre d'éléments qu'avec le nombre de points de Gauss d'une manière remarquable. Ceci est lié directement à l'augmentation des opérations de calcul arithmétique exécutée par le microprocesseur.



**Figure A16 :** Tests de performance en fonction de nombre d'éléments de surface  
 (a) Evolution du temps de calcul - (b) Evolution de l'erreur de calcul

Avec les mêmes configurations utilisées dans l'évaluation du temps de calcul, l'évolution de l'erreur de calcul sur la valeur du FIC est présentée sur la figure A16b. La régression de l'erreur avec le raffinement du maillage de la surface de la fissure est très forte au début (jusqu'à 500 éléments), mais après l'erreur devient de plus en plus stagne. D'ailleurs, l'évolution de l'erreur suit une allure plutôt exponentielle régressive. Ce qui est remarquable dans la figure A16b, le très faible décalage entre les courbes de différentes configurations de points de Gauss. En effet, l'augmentation du nombre de points de Gauss n'améliore pas forcément la précision des calculs de FIC.

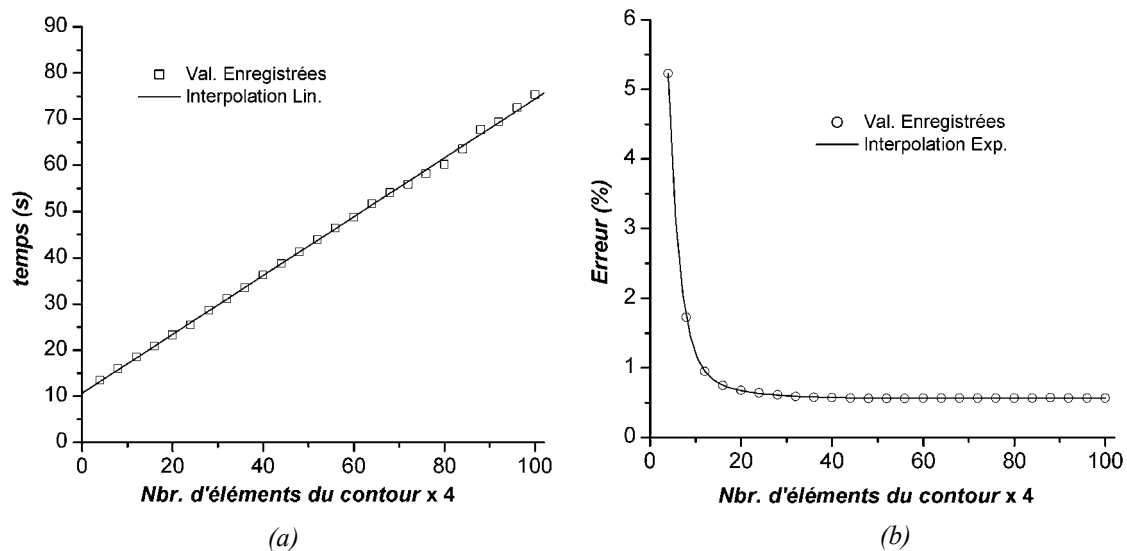
Ce qu'on peut conclure des deux figures A16a et A16b, c'est que si les configurations considérées sont assez représentatifs de toutes les simulations possibles dans cette étude, on aurait dû choisir la configuration 2x2 points de Gauss au lieu de 3x3 points de Gauss avec des maillage de surface de 750 éléments au maximum. Ceci aurait augmenter la performance du code via l'augmentation du rapport « précision / temps de calcul ». Cependant, pour nos simulations dans cette étude (avec une moyenne de 1500 éléments de surface), nous avons l'objectif

d'améliorer la précision de calcul plutôt que de réduire le temps machine qui est à la base très faible pour toutes les simulations effectuées.

#### A.4.2. Tests sur l'intégrale de contour

Les évolutions des deux paramètres temps et erreur en fonction du nombre d'éléments de discrétisation du contour sont présentées respectivement sur les figures A17a et A17b.

Des constats très similaires à celles concernant les tests sur l'intégrale de surface peuvent être observés à propos de l'évolution linéaire du temps machine et la régression d'allure exponentielle de l'erreur avec l'augmentation du nombre des éléments du contour. D'après les résultats de ces tests, nous pouvons conclure qu'un calcul avec 20 à 30 éléments de contour de l'ellipse pourrait être optimal (un rapport « précision / temps machine » maximal).



**Figure A17 :** Tests de performance en fonction de nombre d'éléments de contour  
 (a) Evolution du temps de calcul - (b) Evolution de l'erreur de calcul

#### A.5. CONCLUSION

Dans cette annexe, nous avons présenté en détail le développement menant au code de calcul *HWFun* à travers la description de ses différents modules de calcul. Ces derniers représentent les procédures numériques des différents développements analytiques présentés dans les chapitres III, IV. Elles sont présentées également, les différentes fonctions d'accessibilité (traitement des fichiers, réalisation des graphes, ...) mises à la disposition de l'utilisateur du code de calcul sont exposées en décrivant l'interface graphique du programme. Cette annexe termine par quelques tests de performance du code de calcul réalisé *HWFun* concernant le temps et la précision de calcul liés à l'évaluation numérique du FIC. Cette annexe a pour objectif de mettre en avant l'importance du travail lié à l'élaboration de ce code de calcul pour qu'il soit optimal de point de vue performance et facilité d'utilisation.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :  
**Monsieur Djimédo KONDO, Professeur, LML, Cité Scientifique, Villeneuve d'Ascq**  
**Monsieur Jia LI, Professeur, PMTM, Université Paris 13, Villetaneuse**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur HACHI Brahim El Khalil**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Analyse des fissures elliptiques en statique et en fatigue par hybridation de fonctions de Green"**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et énergétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 11 juin 2007

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



## Résumé

Une méthode améliorant le calcul des facteurs d'intensité de contrainte en mode I par hybridation de deux fonctions de poids est présentée et appliquée aux cas de fissures elliptiques sous différents chargements. L'hybridation consiste à utiliser l'une ou l'autre des deux fonctions dans la zone de la fissure où la fonction est la plus efficace. La délimitation des zones est faite après optimisation des paramètres géométriques de la fissure. Afin d'étendre l'utilisation de cette approche à la modélisation des fissures semi-elliptiques, son couplage avec la PWF (Point Weight Function Method) pour tenir compte de l'effet de la surface libre a été réalisé. L'utilisation des lois de propagation de fissure (de Paris et de Sih) a permis l'extension de l'application de l'approche d'hybridation aux problèmes de fatigue. La qualité des résultats trouvés pour les fissures elliptiques et semi-elliptiques est bonne aussi bien pour les chargements quasi-statiques que pour ceux de fatigue.

---

## Titre en Anglais :

Analysis of elliptical cracks in static and fatigue by hybridization of Green's functions

---

## Abstract

A method improving the evaluation of the stress intensity factor by hybridization of two weight functions is presented and applied for embedded elliptical cracks under various loadings. The hybridization consists in using one or another function in the zone of the crack where it is the most efficient. The delimitation of the zones is achieved after optimizing the geometrical parameters of the crack. In order to extend the use of this approach to the modeling of semi-elliptical surface cracks, its coupling with the PWF (Point Weight Function Method) to take account of the free edge effect were carried out. The use of the fatigue crack growth laws (Paris law and Sih's law) allowed the extension of the application of the hybrid approach to the fatigue problems. The quality of the results found for the elliptical and the semi-elliptical cracks is good for the static loads as well as for the fatigue ones.

---

## Discipline

Mécanique et Energétique

---

## Mots-clés

Hybridation ; Fonction de green ; Facteur d'intensité de contrainte ; Fissure elliptique ; Propagation de fissure par fatigue.

---

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée – UMR CNRS 7563  
LEMTA-ENSEM, 2 Avenue de la Forêt de Haye – BP 160, 54500 Vandoeuvre-Les-Nancy.