HAL
open science

Impact du délai de livraison sur le niveau de stock : une approche basée sur la méthode IPA

Sadok Turki

To cite this version:

Sadok Turki. Impact du délai de livraison sur le niveau de stock : une approche basée sur la méthode IPA. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2010. Français. NNT : 2010METZ029S . tel-01752979

HAL Id: tel-01752979

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752979v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ

UFR Mathématique, Informatique, Mécanique et Automatique

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz

Spécialité : **Automatique**

Par

TURKI Sadok

Impact du délai de livraison sur le niveau de stock : une approche basée sur la méthode IPA

Soutenue le 07 décembre 2010 devant le jury composé de :

Pr. Abdellah EL MOUDNI	Professeur à l'UTBM Belfort (Rapporteur)
Pr. Xiaolan XIE	Professeur à l'ENSM Saint-Etienne (Rapporteur)
Dr. Philippe THOMAS	Maitre de conférences à l'Université de Nancy II (Examinateur)
Dr. Naoufel CHEIKHROUHOU	Collaborateur scientifique à l'EPFL Lausanne (Examinateur)
Pr. Nathalie SAUER	Professeur à l'Université Paul Verlaine – Metz (Directeur de thèse)
Dr. Sophie HENNEQUIN	Maître de Conférences à ENIM Metz (Co-encadrant)

Table des matières

Liste des figures iii
Liste des tableaux iv
Notations v
Introduction générale 1
Chapitre 1 : Généralité et état de l'art 3
1.1 Introduction 3
1.2 Systèmes de production 3
1.2.1 Introduction 3
1.2.2 Définition 3
1.2.3 Modélisation d'un système de production 6
1.2.3.1 Les files d'attente 6
1.2.3.2 Les réseaux de Petri 7
1.2.3.3 Les modèles à flux discrets 8
1.2.3.4 Les modèles à flux continus 8
1.2.3.5 Conclusion 10
1.2.4 Contraintes industrielles 10
1.2.5 Prise de décision pour piloter un système de production 10
1.2.6 Conclusion 11
1.3 Evaluation des performances et optimisation 11
1.3.1 Indicateurs de performances 12
1.3.2 Simulation des systèmes 14
1.3.3 Méthodes analytiques 15
1.3.4 Analyse de sensibilité 16
1.3.5 La méthode d'analyse des perturbations 17
1.3.5.1 Principe de l'analyse des perturbations 17
1.3.5.2 Analyse des perturbations infinitésimale 19
1.3.6 Analyse des perturbations infinitésimale appliquée à l'optimisation 20
1.3.7 Conclusion 21
1.4 Conclusion 22
Chapitre 2 : Modèle à flux continus avec prise en compte d'un délai de livraison constant 23
2.1 Introduction 23
2.2 Système de production considéré 24
2.3 Etude des trajectoires 27
2.4 Optimisation basée sur la méthode IPA 36
2.4.1 Estimateurs IPA 36
2.4.2 Algorithme d'optimisation 42
2.4.3 Résultats numériques 43

2.5 Conclusion. 45
Chapitre 3 : Application de la méthode IPA sur un modèle à flux discrets d'un système de production avec un délai de livraison constant 46
3.1 Introduction 46
3.2 Système de production considéré 47
3.3 Etude des trajectoires 49
3.4 Optimisation basée sur la méthode IPA. 69
3.4.1 Estimateurs IPA 69
3.4.2 Algorithme d'optimisation 72
3.4.3 Résultats numériques 73
3.5 Conclusion 76
Chapitre 4 : Méthode IPA et Modèles à Flux pour un système de production avec des délais de livraison aléatoires. 78
4.1 Introduction 78
4.2 Modèle à flux continus 79
4.3 Modèle à flux discrets 81
4.4 Analyse des Perturbations Infinitésimales 82
4.4.1 Analyse des Perturbations Infinitésimales pour le modèle à flux continus ... 82
4.4.2 Analyse des Perturbations Infinitésimales pour le modèle à flux discrets. ... 86
4.4.3 Estimateurs IPA 89
4.4.3.1 Modèle à flux continus 89
4.4.3.2 Modèle à flux décrets. 94
4.5 Impact des unités de coût (*cs*, *ct*, cs^-, *ctr* et *cts*) sur le stock optimal 99
4.6 Comparaison du modèle à flux discrets et modèle à flux continus 100
4.6.1 Etude de la fonction de coût pour le modèle à flux continus 101
4.6.2 Etude de la fonction de coût pour le modèle à flux discrets 102
4.6.3 Conclusion de l'étude de la fonction de coût 102
4.7 Conclusion 103
Conclusion générale 104
Bibliographies 108
Annexe 1 116
Annexe 2 132

Liste des figures

Figure 1.1: Représentation graphique d'un système de files d'attente simple 6

Figure 1.2: Fonctionnement général de PA 18

Figure 2.1: Système de production avec un délai de livraison constant 24

Figure 2.2 : Décalage $\phi(t)$ entre le niveau du stock pour la trajectoire perturbée et celui pour la trajectoire nominale 28

Figure 2.3 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (exemple 1) 29

Figure 2.4 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (exemple 2) 29

Figure 2.5 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (deux cycles en alternance) 30

Figure 2.6 : Décalage $\phi(t)$ (zone $\left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$) 32

Figure 2.7 : Décalage $\phi(t)$ *(zone* $\left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$*)* 33

Figure 2.8 : Décalage $\phi(t)$ *(zone* $\left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$*)* 33

Figure 3.1 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas A) 50

Figure 3.2 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas B) 51

Figure 3.3 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (deux cycles en alternance) 51

Figure 3.4 : Fonction de coût moyen $CT_{ex}(h_d)$ en fonction de h_d 73

Figure 4.1 : Système de production avec temps de livraison aléatoire 79

Figure 4.2 : zone $\left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ 84

Figure 4.3 : $C_{sra}(t) = f(h_c, \tau_{ex})$ 102

Figure 4.4 : $CT_{dex}(t) = f(h_d, \tau_{ex})$ 102

Figure 0.1 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas C) 117

Figure 0.2 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas D) 117

Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Impact du délai de livraison sur h_c (cas 1) 44

Tableau 2.2 : Impact du délai de livraison sur h_c (cas 2) 44

Tableau 3.1 : Evénements possibles à l'instant $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$ 54

Tableau 3.2 : Impact du délai de livraison sur h_d (cas 1) 74

Tableau 3.3 : Impact du délai de livraison sur h_d (cas 2) 75

Tableau 3.4 : Comparaison des résultats donnés par les modèles à flux discrets et continus (résultats correspondant au cas 1)..... 75

Tableau 4.1 : Impact des coûts *cs, ct, cs⁻, ctr* et *cts* sur h_c..... 100

Tableau 4.2 : Impact des coûts *cs, ct, cs⁻, ctr* et *cts* sur h_d..... 100

Notations

cs	Coût unitaire de stockage.
cs^-	Coût unitaire pour les demandes perdues.
ct	Coût unitaire de transport.
ctr	Coût unitaire d'une livraison en retard.
cts	Coût unitaire d'une livraison en avance.
τ	Temps de livraison.
τ_{ex}	Temps de livraison planifié.
$MTBF$	Moyenne du temps de bon fonctionnement.
$MTTR$	Moyenne du temps de réparation.

❖ Modèle à flux discrets

$D_d(t)$	Demande client.
$u_d(t)$	Vitesse de production de la machine M à l'instant t.
U_d	Vitesse de production maximale.
$y_d(t)$	Nombre de pièces qui sort du stock à l'instant t.
$x_d(t)$	Niveau du stock à l'instant t.
$X_{Td}(t)$	Nombre de pièces transportées à l'instant.
h_d	Stock optimal.
$D_d^0(t+\tau)$	Nombre de demandes non satisfaites à l'instant t.
$s_d(t)$	Nombre de pièces arrivant en avance à l'instant t.
$r_d(t)$	Nombre de pièces qui arrivent en retard.

$Cd(t)$	Fonction de coût à l'instant *t*.
$CT_d(t)$	Coût moyen pendant une période de temps *T*.
δ	Valeur de la perturbation.
t_{sv}^{δ}	Instant où le stock est vide pour la trajectoire perturbée.
t_{sv}	Instant où le stock est vide pour la trajectoire nominale.
$y_d^{\delta}(t)$	Nombre de pièces sortant du stock à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$u_d^{\delta}(t)$	Taux de production à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$X_{Td}^{\delta}(t)$	Nombre de pièces transportées à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$s_d^{\eta}(t)$	Nombre de pièces arrivant en avance à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$r_d^{\eta}(t)$	Nombre de pièces qui arrivent en retard pour la trajectoire perturbée.
t_{ssj}^{δ}	*jième* instant où le stock pour la trajectoire perturbée devient saturé.
t_j	*jième* instant qui annule le décalage entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée.
CT_{ex}	Coût moyen pendant une période de temps *T*.
$C_{dsr}(t)$	Fonction de coût à l'instant *t (*cas système avec un temps de livraison planifié).
$CT_{dsr}(t)$	Fonction de coût moyen pendant une période de temps *T* (cas système avec un temps de livraison planifié).

❖ Modèle à flux continus

$D_c(t)$	Demande client.
$u_c(t)$	Vitesse de production de la machine *M* à l'instant *t*.
U_c	Vitesse de production maximale.

$x_c(t)$	Niveau du stock à l'instant *t*.
$g_c(t)$	Nombre de pièces transportées à l'instant *t*.
h_c	Stock optimal.
$D_c^0(t)$	Nombre de demandes non satisfaites par unité de temps à l'instant *t*.
$P_c(t)$	Nombre de demandes non satisfaites à l'instant *t*.
$s_c(t)$	Nombre de pièces arrivant en avance à l'instant *t*.
$r_c(t)$	Nombre de pièces qui arrivent en retard.
$C_c(t)$	Fonction de coût à l'instant *t*.
$C_a(t)$	Coût moyen pendant une période de temps *T*.
η	Valeur de la perturbation.
$\phi(t)$	Décalage entre la trajectoire nominale et perturbée à l'instant *t*.
$x_c^\eta(t)$	Niveau du stock pour la trajectoire perturbée à l'instant *t*.
$u_c^\eta(t)$	Vitesse de production à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$g_c^\eta(t)$	Nombre de pièces transportées à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$s_c^\eta(t)$	Nombre de pièces arrivant en avance à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$r_c^\eta(t)$	Nombre de pièces qui arrivent en retard pour la trajectoire perturbée.
$D_c^{0\eta}(t)$	Nombre de demandes non satisfaites par unité de temps à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
$P_c^\eta(t)$	Nombre de demandes non satisfaites à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.
t_{sj}	$j^{ième}$ instant pour lequel le stock sur la trajectoire nominale devient saturé.
t_{sj}^η	$j^{ième}$ instant pour lequel le stock sur la trajectoire perturbée devient saturé.
t_{vj}^η	$j^{ième}$ instant pour lequel le stock sur la trajectoire perturbée devient vide et qui annule le décalage entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée.
t_{vj}	Dernier instant pour lequel le stock pour la trajectoire nominale devient vide

entre t_{sj} et t_{vj}^{η}.

$C_{aT}(h_c + \eta)$ Estimation échantillonnée du coût moyen pour la trajectoire nominale.

$C_{aT}^{\eta}(h_c + \eta)$ Estimation échantillonnée du coût moyen pour la trajectoire perturbée.

$C_{csr}(t)$ Fonction de coût à l'instant t (cas système avec un temps de livraison planifié).

Introduction générale

Lors des dernières décennies, du fait d'une offre supérieure à la demande, le comportement des entreprises a évolué vers des produits avec plus de diversification et de nombreux services offerts. L'environnement concurrentiel actuel fait qu'il est impératif désormais pour toute entreprise de produire et de livrer dans des délais précis, à des coûts réduits, en satisfaisant des niveaux de service élevés exigés par les clients. Il est donc crucial que les systèmes de production aient, d'une part, des temps de production courts, et d'autre part, des stocks les plus faibles possible (stocks faibles pour réduire les coûts mais tout de même nécessaires pour assurer le taux de service). Les centres de production qui sont de plus en plus éloignés des fournisseurs et des clients afin de réduire les coûts de main d'œuvre et de matières premières, engendrent des coûts de transport et de stockage élevés. C'est pourquoi, le système de production et sa gestion, se sont imposés aujourd'hui comme des concepts clés dans les entreprises. Quel que soit l'angle sous lequel on aborde la conception, l'organisation, la gestion de production, la logistique, le management, etc., la gestion d'une chaîne logistique est devenue incontournable. Son objectif : intégrer et optimiser globalement les fonctions, les niveaux de décision et les différents segments d'activités.

Les progrès techniques et économiques et par conséquent la complexité croissante des systèmes de production soulèvent de plus en plus de nouveaux défis et de nouvelles problématiques. Ceci nécessite l'utilisation de méthodes bien adaptées pouvant guider le concepteur dans les choix qu'il est amené à faire dans les phases de conception, où elles permettent l'évaluation a priori des performances d'un système hypothétique que l'on veut dimensionner, et dans les phases d'exploitation où elles permettent, par exemple, l'évaluation de règles de pilotage du système.

Les industriels savent qu'ils peuvent faire la différence par rapport à leurs concurrents à travers une optimisation globale de leur système de production. Les entreprises doivent donc être plus performantes que jamais, toujours plus innovantes et plus réactives face à un marché exigeant, ces entreprises ont besoin d'outils d'aide à la décision capables d'améliorer sans cesse leurs performances et de garantir leur pérennité face à une concurrence de plus en plus forte et face à des contraintes industrielles plus importantes.

L'axe de notre recherche consiste à développer une méthodologie qui va permettre aux entreprises de prendre des décisions fiables lors de la conception et/ou le pilotage du système de production en identifiant et modélisant les contraintes industrielles et les phénomènes aléatoires.

Notre rapport s'articulera autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons présenter l'état de l'art qui concerne les systèmes de productions, l'évaluation de leurs performances.

Dans le deuxième chapitre, nous allons appliquer un modèle à flux continus à un système de production constitué par une machine qui peut tomber en panne, un stock de capacité infinie et un client qui demande à chaque instant une quantité de produit. La particularité de notre étude sera d'intégrer explicitement le temps de livraison. Une méthode appelée analyse des perturbations infinitésimale sera étudiée et appliquée à notre modèle. Cette méthode sera utilisée pour déterminer la valeur optimale du stock qui minimise la fonction de coût total. Des résultats numériques obtenus par un algorithme d'optimisation seront présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, un modèle à flux discrets sera appliqué au même système de production que celui étudié dans le deuxième chapitre. La méthode d'analyse des perturbations infinitésimale (IPA) sera également appliquée pour ce modèle pour trouver le niveau de stock optimal. La particularité de ce chapitre sera l'application de cette méthode à un modèle à flux discrets (qui à notre connaissance n'a jamais été menée). A la fin de ce chapitre, nous allons comparer les résultats donnés par l'application de la méthode IPA sur un modèle à flux continus (deuxième chapitre) à ceux obtenus par l'application de la méthode IPA sur un modèle à flux discrets.

Nous considérerons dans le quatrième chapitre un système de production avec un délai de livraison planifié entre le client et le producteur. En effet, nous supposerons que le producteur propose pour le client un délai de livraison, mais du fait des différents aléas qui peuvent se produire au niveau du transport, le produit sera livré à l'heure, en avance ou en retard (les délais de livraison aléatoires). Le but de ce chapitre est d'étudier l'impact des coûts de livraison sur le niveau de stock optimal. La méthode d'analyse des perturbations infinitésimale sera également appliquée pour les deux types de modèles (modèles à flux continus et discrets).

Nous terminons ce mémoire par une conclusion des travaux effectués, ensuite nous dégageons des perspectives qui peuvent être développées par la suite, ouvrant ainsi de nouvelles voies et propositions dans le but de poursuivre ce travail.

Chapitre 1 : Généralité et état de l'art

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons un état de l'art des recherches en génie industriel, et plus particulièrement sur le pilotage des systèmes de production. Ainsi, nous commençons par présenter les systèmes de production dans la première partie, avec leurs éléments caractéristiques, les modèles utilisables pour les représenter et les principales contraintes industrielles. Puis, dans la deuxième partie, nous étudions l'évaluation des performances qui joue un rôle important pour la prise de décision. Les principales méthodes utilisées en évaluation des performances sont présentées, ce qui nous permet d'introduire la méthode de l'analyse des perturbations infinitésimales que nous utilisons pour optimiser les systèmes de production considérés dans nos travaux.

1.2 Systèmes de production

1.2.1 Introduction

Depuis les années 1970, l'offre est supérieure à la demande, les entreprises se doivent donc de séduire des clients toujours plus exigeants en agissant fortement sur les délais de livraison, la qualité des produits et bien sûr tout en offrant des prix attractifs. L'évolution rapide des marchés, des technologies et des formes de concurrence impose un progrès permanent. Au cœur de ces enjeux, le système de production, outil de transformation des matières premières en produits consommables, est un élément clé pour augmenter la productivité et la compétitivité des entreprises industrielles.

Dans cette partie nous définissons les systèmes de production, puis nous présentons les différents éléments d'un système de production. Différents modèles sont présentés à la fin de cette partie.

1.2.2 Définition

Avant de définir un système de production, commençons par définir la fonction production telle qu'elle est décrite dans la littérature. La production est l'une des activités économiques les plus anciennes et traditionnelles dans l'évolution de l'humanité. Giard définit la production comme étant une transformation de ressources appartenant à un système productif et conduisant à la création de biens et de services. Les ressources peuvent être des équipements (machines,...), des hommes (opérateurs,...), des matières (matières premières et composants), des informations techniques ou procédurales (gammes, nomenclatures, fiches opératoires,...) [GIA88].

Fontanili pour sa part a donné une autre définition : « La production d'un bien s'effectue par une succession d'opérations consommant des ressources et transformant les caractéristiques morphologiques ou spatiales de "matières" » [FON99]. Gershwin définit la production comme suit : « la production est la transformation des matières en un objet utile et transférable » [GER94].

Dans sa thèse, Spérandio a défini un système de production comme une organisation d'éléments interagissant dans le but de réaliser des fonctions (économiques, financières, sociales) déterminées. L'intérêt d'une telle approche est de rendre explicites, d'une part, les relations entre le système et son environnement, et d'autre part les relations entre les fonctions externes (c'est-à-dire vis-à-vis du marché) du système et son organisation interne [SPE05]. Gershwin définit un système de production comme une fonction de production qui transforme les matières premières en un produit fini. Il s'agit de la collection de tous les éléments qui influent sur les processus de production tels que les machines, les moyens de transport, le stockage, les matières (matières premières, composants et produits finis,…), ainsi que les gens qui affectent la quantité et la qualité des produits tels que les travailleurs et les clients [GER94].

Dans l'industrie, il existe deux types de production, la production discrète et la production continue, ces deux types étant distingués par la mobilité des matières durant la production. En effet, la production est discrète lorsque la mobilité des matières est considérée comme des entités discrètes (pièce par pièce), par exemple la production d'automobiles, de circuits électroniques, d'ordinateurs,… La production est continue lorsque la mobilité des matières est considérée comme un flux continu, par exemple pendant le raffinage du pétrole, l'industrie chimique,…

Dans ce qui suit, nous allons détailler plus précisément les éléments qui constituent un système de production.

Une machine est un équipement essentiel dans un système de production permettant d'effectuer une ou plusieurs tâches sur des produits.

Plusieurs types de machine sont définis comme suit :

- Les machines mono-tâche qui ne sont capables de réaliser qu'un seul type d'opération sur un ou différents produits.
- Les machines multitâches qui peuvent faire plusieurs types d'opérations différentes.
- Les machines dédiées qui font une ou plusieurs opérations sur un même produit.
- Les machines d'assemblage [NOB08] qui réalisent des opérations d'assemblage sur plusieurs produits pour obtenir un produit unique.
- Les machines de désassemblage qui font des opérations inverses aux machines d'assemblage.
- Les machines d'inspection [COL06] qui ont pour tâche de contrôler la qualité des produits fabriqués.

Les matières produites par les machines sont généralement placées dans un stock.

Un stock est l'ensemble des matières premières, marchandises, fournitures, produits semi-ouvrés, produits finis, produits en cours, emballages, etc., qui appartiennent à une entreprise à une date donnée. Les matières qui existent dans le stock au cours du temps engendrent des frais de stockage. La capacité d'un stock [HID98], [GER81], [COC09] peut être limitée ou illimitée. Dans un système de production, les stocks sont utilisés pour absorber les aléas et réguler la production. Nous pouvons retrouver :

- Les stocks qui contiennent plusieurs types de produits en mêmes temps appelés stocks partagés.
- Les stocks qui sont utilisés pour stocker des produits entre deux opérations consécutives appelés stock tampons.

Les stocks jouent un rôle important dans les systèmes de production. Ils permettent de :

- Faire un équilibre entre la cadence de consommation et la cadence de production. En effet, il n'est pas toujours possible de produire quand la demande se manifeste. En d'autres mots, la production et la consommation ne coïncident pas toujours dans le temps et l'espace.
- D'éviter la propagation de dysfonctionnements. En effet, sans la présence des stocks, un dysfonctionnement au niveau d'un seul site dans un système de production peut se propager tout au long du système. Autrement dit, un retard d'exécution dans un poste de travail ou un problème de transport n'arrêtera pas immédiatement l'ensemble d'un processus de production s'il y a des stocks prévus dans ce processus.

Pour déplacer les produits entre deux stocks ou entre une machine et un stock, nous avons besoin d'un moyen de transport ou de manutention.

Un moyen de transport ou manutention est utilisé pour déplacer des produits d'un endroit à un autre. Nous pouvons citer :

- Les chariots filoguidés qui permettent d'assurer le déplacement d'un produit d'un point quelconque de l'atelier à un autre.
- Les robots qui effectuent des déplacements pour des produits légers.
- Des convoyeurs qui sont utilisés pour le déplacement de produits lourds ou à fort débit.
- Les systèmes de transport routier, ferroviaire ou aérien [LOL01].

Ces moyens de transport ont une capacité bien déterminée (nombre de pièces, débit d'un liquide,…). Le temps mis par ces moyens de transport pour déplacer les produits d'un point à un autre est appelé temps de transport ou de manutention.

L'ensemble de ces différents éléments (machines, moyens de transport, stocks) forment des ateliers de production. Plusieurs types d'ateliers peuvent être définis comme les lignes d'assemblage et/ou de désassemblage, les lignes en U, les cellules et ilots de production et les lignes de transfert [GER94], [DOL08], [SOR08], [KHA09].

Nous avons présenté et étudié le rôle des éléments qui constituent un système de production. La modélisation est un outil qui permet de présenter ces éléments et leurs comportements dont le but de simplifier l'étude d'un système de production. Nous allons étudier la modélisation des systèmes de production dans ce qui suit.

1.2.3 Modélisation d'un système de production

Avec la mondialisation et la globalisation des échanges marchands, l'entreprise doit aujourd'hui faire face à plusieurs contraintes, comme les délais, la qualité, la spécialisation et la complexification des produits, etc., tout en satisfaisant ses clients (les utilisateurs du produit mais également les actionnaires et salariés de l'entreprise). Ces différentes contraintes rendent les systèmes de productions très complexes. Il est donc très difficile d'étudier le comportement et de comprendre le fonctionnement d'un système actuel de production sans définir un bon modèle du système qui considère d'une part, les relations entre l'organisation interne et les fonctions du système, et, d'autre part, les relations entre le système et son environnement [LEM94]. D'une façon générale, la modélisation permet de réduire la complexité du système pour comprendre et analyser son comportement et donc ensuite permet son pilotage. Dans la littérature, plusieurs approches et modèles sont développés notamment les réseaux de Petri, les files d'attente, les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus, etc.

1.2.3.1 Les files d'attente

Les files d'attente sont un outil de modélisation qui est généralement composé par un serveur et des clients (voir Figure 1.1). Cet outil modélise un système en termes de serveurs ou machines et de clients ou nombre de pièces dans un stock en attente dans des files. Les clients circulent d'une file à une autre après avoir reçu un service. Les temps de service sont aléatoires et obéissent à des lois de probabilités généralement de type exponentiel. Les files d'attente sont apparues à la fin des années cinquante [JAC57], ensuite elles ont connu un développement considérable et des nombreuses extensions de leur formalisme [BRU00]. Les principaux domaines d'application des modèles de files d'attente sont les systèmes manufacturiers, les systèmes de production et de stockage, les systèmes de communication et les systèmes d'information.

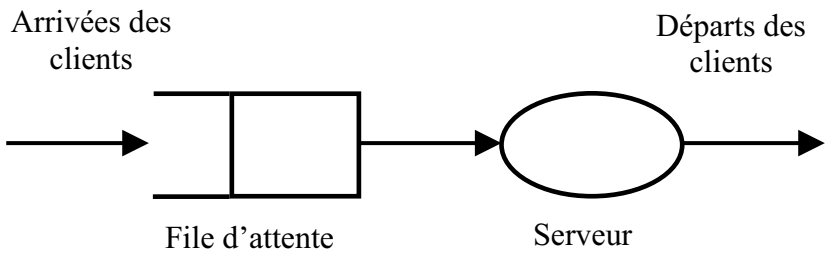

Figure 1.1: Représentation graphique d'un système de files d'attente simple

Les modèles de files d'attente sont particulièrement utiles pour l'analyse des systèmes à capacité limitée. Harkose *et al.* ont modélisé une méthode de planification de la production pour n'importe quel nombre de postes de travail par un réseau de files d'attente avec des capacités de stock limitées [HAR04]. Matta *et al.* [MAT05] ont traité un problème d'évaluation des performances des systèmes d'assemblage. Les auteurs ont utilisé des techniques de réseaux de files d'attente pour calculer les mesures de performance du système les plus importantes telles que le flux de production, le pourcentage des commandes satisfaites, le niveau moyen du stock (produits finis) et le pourcentage de commandes non satisfaites. D'autres approches ont abandonné le formalisme des réseaux de files d'attente et adoptent un nouveau formalisme plus puissant introduit au début des années 60. Il s'agit des réseaux de Petri.

1.2.3.2 Les réseaux de Petri

Les réseaux de Petri sont des outils graphiques et mathématiques permettant de décrire les relations existant entre des conditions et des événements. Ils permettent de modéliser le comportement de systèmes à événements discrets et de capturer divers phénomènes qui les caractérisent comme le parallélisme, Le synchronisme, le partage de ressources, la concurrence, etc. Le parallélisme traduit que les événements peuvent se produire d'une manière indépendante s'ils sont rendus actifs. Le synchronisme traduit qu'il n'y a pas de système d'horloge inhérent qui active les transitions. Le manque de décomposition hiérarchique et le manque de mécanismes qui expriment les contraintes temporelles représentent l'inconvénient des réseaux de Petri de base. Les réseaux de Petri ont été largement développés par plusieurs auteurs en intégrant particulièrement l'aspect temporel et stochastique dans le modèle initial, comme par exemple les réseaux de Petri temporisés et les réseaux de Petri stochastiques qui sont souvent utilisés pour la modélisation et l'évaluation de performances des systèmes de production. On peut citer par exemple, Al Jaar et Desrochers [ALJ90] qui ont utilisé les réseaux de Petri pour l'évaluation des performances d'un système automatisé. Kim *et al.* [KIM07] ont présenté une nouvelle méthode d'ordonnancement pour un système de production flexible basé sur le réseau de Petri temporel dans le but de minimiser le temps d'achèvement maximal. En effet, les auteurs ont utilisé un réseau de Petri temporel pour modéliser leur système afin de suivre son comportement physique et de décrire le comportement logique du processus de production. Kenneth et Gerrit [KEN04] ont développé un modèle général d'un réseau de Petri pour étudier et simuler un système composé de n machines et $n-1$ stocks de capacité finis, les machines peuvent tomber en panne et doivent être réparées. Les places dans ce réseau de Petri représentent les états de la machine ou les états du stock. Les auteurs ont simulé ce modèle pour déterminer le niveau optimal de chaque stock. En effet, les auteurs ont montré que le réseau Petri est capable de modéliser un système dans lequel les événements peuvent se produire en même temps, mais des contraintes sur la fréquence de coïncidences des événements peuvent apparaitre. Balbo *et al.* [BAL87] ont montré la supériorité des réseaux de Petri stochastiques par rapport aux réseaux de files d'attente pour la modélisation et l'analyse de performances d'ateliers flexibles.

Les réseaux de Petri sont utilisés pour diverses problématiques. Ils sont plus puissants que les réseaux de files d'attente. L'avantage le plus connu des réseaux de Petri est leur simplicité de compréhension et leur aptitude à donner des informations concernant l'exécution du système. Mais du fait de leur nature graphique, ils ne permettent pas la modélisation de phénomènes complexes.

1.2.3.3 Les modèles à flux discrets

Un modèle à flux discrets [FEN00] est une représentation discrète du flux des pièces dans un système de production [CAS07] qui évolue suivant l'occurrence d'événements. Les modèles à flux discrets sont souvent considérés comme des modèles plus réalistes pour la production discrète. Ils sont utilisés pour l'évaluation des performances pour suivre l'évolution du système pièce par pièce, ou dans le contrôle des flux à temps réel.

Dans la littérature, plusieurs auteurs ont considéré ce modèle. On peut notamment citer les travaux suivants :

- Mourani I. *et al.* [MOU03] ont étudié un modèle à flux discrets d'un système à un étage avec un seul produit. Leur étude prouve que la politique du point de séparation est la politique optimale pour ce système de production à flux discrets.

- Fu M. et Xie X. [FU02] ont étudié les dates de départs des produits avec les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus. Les auteurs ont montré que dans le cas où la taille des produits dans le modèle à flux discrets devient infinitésimalement petite, alors la date de départ d'une quantité q produite sur une machine dans un modèle à flux discrets converge vers la date de départ de la même quantité sur la même machine dans un modèle à flux continus.

- Tolio *et al.* [TOL02] ont considéré un modèle à flux discrets pour un système de production composé d'un stock à capacité finie et de deux machines non fiables. Les auteurs ont appliqué pour ce modèle une méthode analytique pour évaluer le taux de production et le niveau de stock. Le modèle considéré permet de suivre la production des machines et le niveau de stock pièce par pièce.

Le modèle à flux discrets est facile à simuler et à manipuler. Il est souvent utilisé pour l'évaluation des performances des systèmes de production, mais le processus discret des pièces rend l'analyse des performances plus difficile. En effet, lorsque le système de production comporte un nombre important de pièces, le modèle à flux discrets devient inexploitable du fait de l'augmentation rapide du nombre d'états. L'étude devient alors très complexe, et quelquefois impossible à mener. Ce problème peut être résolu par un autre modèle appelé modèle à flux continus.

1.2.3.4 Les modèles à flux continus

Un modèle à flux continus est une approximation continue du système physique. Les modèles à flux continus sont utilisés généralement pour des systèmes de production continus. Ils sont aussi largement utilisés pour la commande optimale et la conception de systèmes de production discrets dans le cas de productions à haut volume. Kimemia et Gershwin [KIM83]

sont les premiers à avoir utilisé le modèle à flux continus pour contrôler la production d'un système de fabrication avec prise en compte des pannes machine. L'avantage de ce modèle est qu'il permet de réduire la complexité inhérente à la modélisation traditionnelle des pièces discrètes, malheureusement ce modèle néglige certaines caractéristiques importantes des systèmes de production tels que les délais de transports. Dans la littérature, on trouve des travaux qui ont considéré ce modèle tels que :

- Wei *et al.* [WEI07] ont considéré un modèle à flux continus pour un système de production hybride (processus continus et événements discrets). Les auteurs ont appliqué à ce modèle la politique de point de contrôle [GER00] pour déterminer le niveau optimal du stock lorsque le taux maximum de production des machines varie.

- Tan et Gershwin [TAN07] ont utilisé un modèle à flux continus pour développer une méthodologie pour l'analyse générale d'un système de production avec un stock limité.

- Wardi et Melamed [WAR99] ont proposé un modèle à flux continus qui peut être utilisé pour la modélisation, simulation et l'analyse d'exemples de trajectoires pour plusieurs classes de réseaux.

- Liu *et al.* [LIU07] ont utilisé un modèle à flux continus pour analyser un système de production soumis à des pannes et des arrivées de demande en rafale. Les auteurs ont appliqué à ce modèle la politique du point de séparation pour déterminer le niveau optimal du stock lorsque l'arrivée de la demande varie.

- Mourani *et al.* [MOU08] ont utilisé un modèle à flux continus pour optimiser un système de production avec un seul étage et un seul type de produit, avec une demande constante et des délais de transport entre la machine et le stock. En effet, les modèles à flux continus ont l'avantage d'être simple et facile à analyser, mais ils ne tiennent pas compte des retards qui ont un impact important sur les performances du système de production. Dans cet article les auteurs ont considéré un modèle à flux continus en tenant compte des délais de transport. Ce travail est un axe intéressant pour introduire les retards dans les modèles à flux continus avec la conservation de la simplicité du modèle à flux continus.

- Suri et Fu [SUR91] ont utilisé les modèles à flux continus pour l'analyse des performances de lignes à flux discrets. Les auteurs ont formalisé la traduction des paramètres d'entrée et des mesures des performances entre les lignes à flux continus et celles à flux discrets. Puis, les auteurs ont montré que le modèle à flux continus peut être représenté comme un processus semi-markovien généralisé. Ceci mène à un algorithme concis de simulation pour un modèle à flux continus.

Les modèles à flux continus sont utilisés dans de nombreux travaux pour modéliser, analyser et simuler les systèmes de production. En effet, les modèles à flux continus sont simples à étudier analytiquement, sont des bonnes approximations des modèles discrets et

permettent d'utiliser les méthodes d'optimisation basées sur les gradients, mais également d'appliquer facilement des méthodes de contrôle comme la politique de point de séparation.

1.2.3.5 Conclusion

Bien que les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus ne modélisent pas les délais de livraison, ils semblent plus intéressants pour modéliser notre système. En effet, ces deux modèles offrent une facilité d'étude, de simulation et de manipulation. La politique de contrôle du point de séparation peut être appliquée facilement avec ces deux modèles. Dans notre travail, nous allons modéliser notre système de production selon ces deux différents modèles en tenant compte des contraintes comme les pannes machine et les demandes client, et les résultats donnés pour chaque modèle seront comparés. Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques contraintes industrielles qui seront considérées dans notre système.

1.2.4 Contraintes industrielles

Comme nous l'avons déjà noté, les systèmes de production sont soumis à différentes contraintes liées au système lui-même et à son environnement.

Parmi les contraintes, nous pouvons citer :

Panne machine est un dysfonctionnement durant lequel la quantité de matière produite par cette machine est égale à zéro. La prise en compte de la panne machine est très importante car elle a un impact direct sur les performances souhaitées. Xie [XIE89] a étudié la commande optimale d'un système perturbé par des pannes. Tolio *et al.* [TOL02] ont présenté une méthode analytique pour évaluer les performances d'une ligne de transfert avec un stock et deux machines non fiables. Chaque machine peut tomber en panne. Les temps entre deux pannes et le temps entre deux réparations sont générés par une distribution géométrique.

Demande client est la quantité de produits commandée par un client qui peut être variable ou constante au cours du temps. La satisfaction des clients est un élément clé actuellement du fait de l'offre supérieure à la demande et les entreprises mettent en œuvre toutes les entités de l'entreprise pour satisfaire le maximum de demandes client de façon à réduire les coûts de rupture et de fournir un meilleur service. De plus, l'environnement concurrentiel actuel rend difficile l'engagement des clients sur le moyen terme, ce qui oblige les entreprises à proposer des solutions et des méthodes pour s'adapter au mieux à une demande fluctuante. La prise en compte de la demande client pour la planification tactique dans les entreprises est donc un enjeu crucial pour leur bon fonctionnement [GAL08].

1.2.5 Prise de décision pour piloter un système de production

La prise de la décision a fait l'objet de nombreux travaux de recherche depuis plusieurs décennies notamment au sein d'un système de production. Le processus de décision est la démarche visant à analyser et modéliser une situation en vue d'en dégager les éléments pouvant conduire à la prise de décision. Il s'agit bien sûr d'identifier les alternatives, mais également les conséquences de chacune des décisions. La conception d'un produit au sein

d'un système de production a un impact sur les décisions prises lors de la conception de ce système. Pour ce sujet, il existe des outils et des méthodes proposés et parfois mis en place industriellement qui reposent sur des modèles contenant des données qui représentent les futures conditions d'exploitation. Ces données peuvent être imprécises, comme par exemple les temps de production ou les temps de transports, ou variées au cours du temps comme par exemple la demande client.

1.2.6 Conclusion

Nous avons présenté les différentes définitions dans la littérature d'un système de production et les éléments qui constituent ce système. Les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus sont considérés comme un paradigme alternatif aux réseaux de files d'attente [MAN08] pour l'analyse et la synthèse des systèmes de production, ils sont les modèles les plus utilisés pour les systèmes de production. Dans notre travail, nous allons modéliser le système de production avec un modèle à flux continus et un modèle à flux discrets.

La prise de la décision étant un sujet essentiel pour un système de production, il est crucial de connaitre les performances du système avant de pouvoir prendre une décision. L'évaluation des performances nous permet de valoriser les performances d'un système.

1.3 Evaluation des performances et optimisation

La modélisation et l'évaluation des performances des systèmes de production restent une préoccupation principale des différentes communautés scientifiques et en particulier du génie industriel. L'environnement économique et technologique des systèmes de production est en perpétuelle évolution. Ces systèmes sont soumis à des contraintes de plus en plus fortes, par exemple la satisfaction de ses clients ou de ses actionnaires. Cependant, les systèmes de production doivent se lancer dans de grands projets d'amélioration de leurs performances. Ceci nécessite l'utilisation de méthodes d'évaluation qui permettent de décrire l'évolution des facteurs de performance du système et donc de décider s'il est nécessaire de modifier le système pour améliorer ses performances.

Historiquement, les recherches en modélisation et évaluation de performances sont toujours deux sujets très liés. En général, la modélisation permet de représenter un système de production par des paramètres et de considérer les relations entre ces différents paramètres. L'évaluation de performances permet d'analyser l'effet de ces paramètres sur la variation des performances d'un système, et ainsi de constater l'évolution et le contrôle de ce système au cours du temps. Alors, l'utilisation d'outils d'évaluation de performances est nécessaire pour la conception et le choix de la politique à adopter au système devant atteindre des performances souhaitées malgré les aléas (panne machine, demande aléatoire du client, etc.). Plusieurs travaux utilisent des méthodes pour étudier les performances d'un système. Tan et Gershwin [TAN07] ont développé une méthodologie pour l'analyse générale d'un système de production à flux continus avec un stock fini. La méthodologie proposée est un outil d'évaluation de performances de ce système. Les performances mesurées sont le taux de production et le niveau optimal du stock. Gershwin [GER91] a présenté une méthode

d'évaluation de performances pour une ligne de transfert avec un stock de capacité finie basée sur un modèle à flux discrets pour décrire le comportement de cette ligne. En effet, il existe des méthodes d'évaluation de performances des systèmes qui peuvent être basées sur la simulation [ING98], l'utilisation de méthodes analytiques [TAY99] ou l'utilisation d'indicateurs de performances. Mais, avant de présenter plus en détail ces méthodes, nous allons présenter quelques travaux qui étudie l'évaluation des performances tels que :

- Tolio *et al.* [TOL02] ont présenté une méthode analytique pour l'évaluation des performances de lignes de production avec des temps de traitement déterministes, des machines avec multiples modes de panne, et des stocks à capacité finie. Les auteurs ont comparé cette méthode à une autre méthode obtenue par l'étude d'un système qui considère un seul mode de panne.

- Colledanil et Tolio [COL05] ont proposé une méthode d'analyse approximative basée sur des techniques de décomposition pour la modélisation et l'évaluation des performances des systèmes de production avec un modèle à flux discrets impliquant des flux de production qui se séparent et se réunissent, des produits multiples, des stock à capacité finie et des opérations de fabrication d'assemblage ou désassemblage.

- Levantesi *et al.* [LEV03] ont présenté une méthode analytique approximative efficace pour l'évaluation des performances des lignes de production asynchrone avec des délais de production déterministes, plusieurs modes de panne et un stock de capacité finie. Le flux discret de pièces est approximé par un flux de matériau continu et chaque machine peut être affectée par différents modes de panne, chacune des machines est caractérisée par un temps spécifique à la panne et un temps de réparation. La méthode est basée sur la technique de décomposition proposée par Gershwin [GER87], qui permet l'évaluation approximative d'une ligne avec K machines par l'évaluation de $K-1$ lignes de deux machines.

- Marcello et Tullio [MAR09] ont proposé une autre méthode d'analyse pour évaluer les performances des systèmes de production, les auteurs ont implanté dans ces systèmes les techniques de maîtrise des procédés statistiques. En effet, le comportement des machines est surveillé par des dispositifs d'inspection et d'échantillonnage, qui mesurent les caractéristiques de qualité des pièces produites. La performance du système de production est évaluée en appliquant un algorithme qui visite par alternance la machine et le niveau du stock. Les résultats numériques montrent la bonne précision de la méthode proposée, elle permet d'apporter de nouvelles perspectives dans les relations entre les deux domaines.

1.3.1 Indicateurs de performances

Le souci constant de tout décideur face aux systèmes de production actuels est l'amélioration de performances. Ces systèmes doivent être conduits de façon de plus en plus fine afin d'améliorer continuellement les performances, principalement dans les domaines du coût, du délai et de la qualité des produits. L'indicateur de performance est un outil d'évaluation de performance qui est apparu à partir des années 1980, et qui permet aux

concepteurs de vérifier le niveau de satisfaction d'un comportement considéré. AFGI [AFG92] propose la définition suivante : « un indicateur de performance est une donnée quantifiée, qui mesure l'efficacité ou l'efficience de tout ou partie d'un processus ou d'un système (réel ou simulé) par rapport à une norme, un plan ou un objectif déterminé et accepté dans le cadre d'une stratégie d'entreprise ». Selon Berrah [BER02] « les indicateurs de performance sont les instruments du pilotage ». D'une façon générale, les indicateurs de performance sont définis pour un domaine de comportement donné, il s'agit de vérifier par un processus itératif le niveau de satisfaction associé à une solution proposée par le concepteur. Dans ce processus, les solutions explorées sont mémorisées pour renseigner sur l'amélioration ou la dégradation relative des solutions successives. Chaque indicateur de performance associe trois paramètres : un objectif, une mesure et une variable d'état traduisant la performance (quantité, coût, délai). La mesure des performances doit être pertinente au regard des objectifs visés par le système. Elle doit être également cohérente vis-à-vis des actions engagées, c'est-à-dire que la mesure doit varier lorsque des décisions sont prises, d'où l'importance des indicateurs de performance pour la structure d'un système de production. En effet, dans un système de production les indicateurs de performance participent à la formation de tableaux de bord, qui sont destinés aux responsables des différents centres de décision impliqués dans le processus de production. Le rôle de chaque tableau de bord établi est d'informer le décideur concerné sur la performance réalisée et d'attirer son attention sur les dérives du système.

Les indicateurs de performances les plus fréquemment évaluées dans l'industrie sont : coût de rupture des stocks, rotation des stocks, délais de livraison, stock moyen, coûts de stockage, retards de livraison, taux d'occupation d'une machine ou d'une ressource, temps de cycle, fréquence de production. Nous allons présenter dans ce qui suite quelques performances qui concerne notre travail de thèse.

Le niveau de stock est la quantité de matière dans le stock (nombre de pièces, quantité de liquide, etc.). L'existence de cette quantité dans le stock au cours du temps engendre un coût de stockage. De nombreuses études sont effectuées pour chercher le niveau optimal du stock, qui minimise les coûts de stockage, éventuellement qui minimise le coût global. Jeonga et Kim [JEO00] ont déterminé les niveaux optimaux des stocks suivant la configuration des machines dans un système d'assemblage, le but de cette étude est de chercher la configuration la moins coûteuse.

Le taux de production est le nombre de pièces produites par unité de temps [GER94]. Ce taux est généralement commandé dans les systèmes de productions. Par exemple, le taux de production est réduit si la demande est faible ou si le stock est saturé. Beaucoup de travaux ont étudié le pilotage du taux de production. Chan *et al.* [CHA07] ont étudié un système de production avec un temps de retard, une demande incertaine et une production supplémentaire. Les auteurs ont établi un modèle mathématique pour un problème de pilotage de la production dont le but est de minimiser le coût du niveau des en-cours et le coût de production supplémentaire. Pour résoudre ce problème, une politique de type point de séparation à deux nivaux (production normale et supplémentaire) est établie. Sanjay [SAN08] a étudié un système de production avec un taux de production flexible, le taux de production

doit être réduit pour avoir des niveaux de stocks petits face à une contrainte de durée de conservation. Yuyue et Gin [YUY05] ont proposé un algorithme de programmation dynamique pour le calcul d'un calendrier de taux de production optimale pour le cas de demandes variées et pour le cas d'un système plus simple avec des demandes fixées. Dans notre thèse nous voulons contrôler le taux de production par la politique du point de séparation [AKE86].

Le temps de livraison est la période du temps que met une demande client entre le stock (entrepôt, magasin…) et son arrivée au client. Swihart et Papastavrou [SWI99] ont développé un modèle stochastique et dynamique pour les problèmes de livraison et de ramassage (enlèvement). Les auteurs ont considéré la variation des capacités des véhicules. Dolgui et Aly Ould-Louly [DOL02] ont présenté un modèle pour la planification d'approvisionnement sous des délais incertains. Les auteurs ont proposé une méthode pour déterminer la valeur optimale du délai planifié qui minimise le coût de stockage et le coût de pénurie. Van Ryzin *et al.* [VAN91] ont considéré l'impact du retard pour le control optimal d'un job shop dont le but est de minimiser le coût moyen. Nous constatons que le temps de livraison est un paramètre qui a un impact non négligeable sur les performances d'un système de production. Cependant, dans le cas de modèles à flux continus ou discrets, peu d'études considèrent ce délai explicitement dans le modèle. Dans ce travail, nous étudierons l'impact du temps de livraisons sur la valeur optimale du stock. Nous considérerons le coût de transport dans la fonction de coût total à minimiser ainsi que l'impact de ce temps de livraison sur le stock optimal.

Il existe des méthodes de conception d'indicateurs de performance, par exemple Balanced Scorecare [KAP92] qui est la plus utilisée actuellement. Il existe d'autres méthodes classiques issues des sciences de gestion telles ABC (Activity Based Costing) ou ABM (Activity Based Management) [CHA96]. L'outil indicateur de performance a parfois l'inconvénient de proposer un nombre important d'indicateurs qu'il n'est pas facile de suivre en continu de manière régulière. Il est donc nécessaire de faire appel à la simulation qui permet de modéliser finement les aspects dynamique et stochastique du système étudié. De plus, elle favorise la mise en évidence des liens existants entre les variables d'état (performance).

1.3.2 Simulation des systèmes

L'évaluation des performances d'un système de production fait souvent appel à la simulation informatique qui, quant à elle, est un outil puissant qui a prouvé son habilité à analyser des systèmes complexes comportant des phénomènes stochastiques et dynamiques. Grâce à ses avantages, la simulation est considérée comme un outil privilégié pour analyser les performances de cas à échelle réelle.

La simulation des systèmes de production représente les événements qui peuvent surgir quand le système est opérationnel, par une séquence d'étapes dans un programme informatique, reproduisant ainsi certains aspects du fonctionnement dynamique des systèmes de production. Elle permet aussi de prendre en compte l'aspect aléatoire de certains événements tels que les demandes client, pannes machines, réparations machines etc.

L'aptitude à décrire en détail et d'une façon précise les relations logiques existant entre les événements fait de la simulation un outil universel pour l'évaluation des performances des systèmes de production. Subhash *et al.* dans leur article [SUB09], décrivent comment la simulation peut être utilisée pour de la prise de décision et le contrôle des systèmes de production flexibles. En effet, les auteurs ont considéré un système de production flexible qui combine une productivité élevée et la flexibilité de la production. Une simulation est utilisée pour contrôler ce système complexe et prendre des décisions précises, afin d'assurer que ce système satisfasse les demandes du marché.

Généralement, la simulation représente une description détaillée des relations entre événements, leurs chronologies et leurs enchaînements. Ainsi elle permet de donner des résultats exacts et précis. Elle a le pouvoir de quantifier et de justifier des choix économiques et technologiques, plus particulièrement lors des phases de conception et de dimensionnement. Par exemple la simulation permet de déterminer les valeurs minimales des stocks dans un système de production. Ceci donne des indications sur la direction vers laquelle les efforts d'amélioration doivent être portés. Cependant, pour obtenir des résultats pertinents, il est nécessaire de passer par un processus itératif long dans lequel plusieurs simulations du système sont conduites afin d'obtenir des valeurs statistiquement significatives. Il faut aussi détenir un grand nombre de données afin de mener un processus d'optimisation par simulation. Ces données concernent généralement les paramètres structurels, les paramètres de dimensionnement des demandes et des machines (arrivée des demandes et la quantité des demandes, taux de production, temps entre deux pannes et temps entre deux réparations) et leurs lois de distribution. Les méthodes analytiques qui sont des outils d'évaluation des performances nécessitent une simplification du modèle mais proposent des solutions dans des délais très courts. Nous allons présenter quelques méthodes dans la partie suivante.

1.3.3 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques permettent de décrire un système par des relations mathématiques en se basant sur un modèle. Ces méthodes se basent essentiellement sur des réseaux de files d'attente ou sur des chaînes de Markov. Ces méthodes dans leur diversité, se distinguent par la facilité de leur mise en œuvre dans le cas où l'on procède à leur implémentation dans des procédures de calcul, d'une façon générale, et de dimensionnement plus particulièrement. De plus, elles paraissent intéressantes lors des premières phases de conception, lorsque toutes les données ne sont pas encore connues et que le choix des valeurs de variables est sujet à des méthodes d'optimisation. Cependant, dans le cas où le système étudié est complexe, ou que la taille du problème est élevée, requérant un temps de calcul important, des approximations (ou hypothèses simplificatrices) peuvent être formulées afin de ramener le problème de départ à un ensemble de sous-problèmes de taille moins importante, où des techniques de calcul s'avèrent plus simple à mettre en œuvre.

Parmi les différentes méthodes existantes, il existe une méthode analytique d'évaluation des performances très connue appelée analyse de sensibilité. Cette méthode consiste à analyser comment réagissent les sorties d'un modèle à des perturbations sur ses

variables d'entrée. L'analyse de sensibilité informe sur la façon dont se répercutent les perturbations d'entrée sur les variables de sortie. Ces informations sont utilisées pour prendre des décisions sur le système étudié. Dans ce qui suit, nous allons présenter la technique d'analyse de sensibilité.

1.3.4 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est une technique d'évaluation de performance des systèmes, elle consiste à étudier l'impact de la variabilité des entrées d'un modèle sur la variabilité de sa sortie. Elle permet d'évaluer des indices de sensibilité qui quantifient combien une variable ou un groupe de variables contribue à la variance de la sortie. En effet, nous considérons un modèle mathématique, formé d'un ensemble de variables d'entrée aléatoires, d'une fonction déterministe, et d'un ensemble de variables de sortie (ou réponses) aléatoires.

$$f : R^P \rightarrow R$$

$$X \rightarrow Y = f(X)$$

La fonction du modèle est f. L'ensemble des variables d'entrée $X = (X_1,..., X_p)$ regroupe toutes les entités considérées comme aléatoires dans le modèle. L'ensemble des variables de sortie est supposé réduit à une unique variable Y. Alors l'analyse de sensibilité étudie comment des perturbations sur les entrées du modèle engendrent des perturbations sur la réponse. Elle informe sur la façon dont se répercutent les incertitudes d'entrée sur les variables de sortie. Comme ces informations sont utilisées pour prendre des décisions sur le phénomène étudié, il est important d'avoir à l'esprit que des incertitudes sont associées au modèle utilisé. L'analyse de sensibilité regroupe deux types de méthodes: qualitatives ou quantitatives. Les méthodes qualitatives ou de "screening" consistent à classer les données d'entrée d'un système en différents groupes suivant l'influence qu'elles ont sur la variabilité de la sortie. Les méthodes quantitatives peuvent être locales ou globales suivant qu'elles autorisent les paramètres d'entrée d'un système à varier un par un ou tous à la fois ; mais elles visent surtout à mesurer précisément l'influence des perturbations des données d'entrée sur la variabilité de la sortie. De nombreux estimateurs statistiques de la sensibilité d'un système ont été proposés dans ce domaine [SAL00], [LAM09]. De nombreux travaux utilisent l'analyse de sensibilité pour traiter des problèmes de conception ou d'aide à la décision dans les systèmes de production [KLE98], [WAR01], [KLE04].

Nous nous intéressons dans notre thèse à une méthode plus particulière de l'analyse de sensibilité, appelée analyse des perturbations. Cette technique d'évaluation des performances est utilisée d'une part pour le dimensionnement des systèmes de production, et d'autre part pour leur pilotage. Elle permet de calculer les gradients de la mesure de performance en fonction des paramètres de configuration des systèmes de production (capacité de stockage, taux de production). Nous allons présenter cette technique dans la partie suivante.

1.3.5 La méthode d'analyse des perturbations

Les problèmes posés dans la conception des systèmes de production tournent autour de la proposition de méthodologies complètes et génériques de conception, de dimensionnement et de pilotage. Les difficultés sont relatives à l'occurrence d'événements aléatoires et aux environnements incertains dans lesquels évoluent ces systèmes. Face à ces contraintes, on procède généralement par des études séparées des différents modules de conception. En effet, pour obtenir un système à fonctionnement optimal il faut développer des méthodologies formelles et des techniques adaptées. Ces techniques sont généralement des modèles d'évaluation ou d'optimisation basés sur des approches cohérentes entre les différents niveaux fonctionnels. C'est ce qui justifie le développement des techniques basées sur l'analyse des perturbations (PA) dans le domaine de conception et l'optimisation de systèmes de production. La méthode PA a été proposée par Ho, Eyler et Chien en 1979 [HO79]. Elle a été définie comme une technique d'évaluation de performance des systèmes à événements discrets (SED) à travers les informations contenues dans une seule exécution de simulation [HO85], [HO91].

Elle a été utilisée initialement sur des systèmes de type réseaux de file d'attente [HO83], [HO97]. Plus récemment, [CHE01] a utilisé l'analyse des perturbations sur un système d'assemblage en ligne pour dimensionner les stocks intermédiaires afin de maximiser le taux de production.

PA consiste à analyser et suivre l'évolution de deux trajectoires échantillons (une trajectoire perturbée et l'autre dite nominale) d'un paramètre qui nous intéresse, afin d'étudier et de mesurer l'effet de sa perturbation sur les performances du système. Elle présente une souplesse d'utilisation et une rapidité de réponse aux changements dynamiques à travers les informations contenues dans une seule observation d'un système dans un environnement stochastique, ce qui a amené plusieurs auteurs à développer cette méthode pour résoudre des problèmes d'optimisation des systèmes de production. Autrement dit cette méthode a été utilisée comme un outil d'optimisation [PAS04].

En effet, Les problèmes d'optimisation des systèmes de production, sont aussi complexes qu'importants du point de vue des gestionnaires de la production, dont l'objectif ultime est de concevoir et de gérer des systèmes à rendement optimal et à coût minimal. Les techniques de résolution des problèmes de conception font appel à des compétences de développement d'algorithmes d'optimisation stochastique, basés sur le calcul de gradients à travers l'analyse des perturbations. Cette technique fournit une méthodologie d'optimisation des mesures de performance des systèmes, laquelle sera par la suite implantée dans des systèmes de production dans le but de déterminer la meilleure politique de commande. C'est ce qui justifie notre intérêt à utiliser cette méthode comme une technique d'évaluation de performance et d'optimisation. Nous allons présenter dans ce qui suit le principe de PA.

1.3.5.1 Principe de l'analyse des perturbations

PA permet de construire un ensemble de relations formelles liant le vecteur de décisions θ_i à la mesure de performance J afin de pouvoir estimer le gradient de la

performance $\nabla J(\theta)$ en chaque point θ_i. Ces relations sont déduites de l'étude des trajectoires. En effet, PA est issue de l'analyse de sensibilité. Elle permet d'estimer la sensibilité des indicateurs de performance grâce aux variations des variables de décision. A partir de cette analyse de sensibilité, le gradient de la fonction objectif peut-être calculé et le système optimisé en conséquence.

Le fonctionnement général de PA est le suivant (Figure 1.2) :

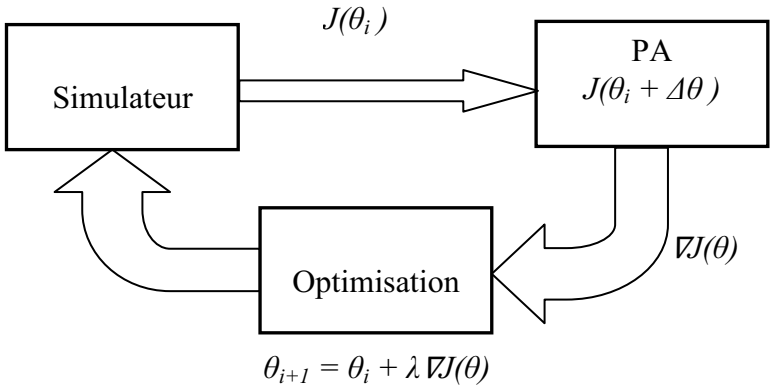

Figure 1.2: Fonctionnement général de PA

- A l'aide du simulateur, on mesure la performance J du système en un point de fonctionnement θ_i
- Le bloc Analyse des Perturbations (PA) qui est un algorithme à base de relations de la dynamique du système, permet de prédire la réponse du système au point ($\theta_i + \Delta\theta$) et ainsi calculer la sensibilité (le gradient $\nabla J(\theta)$) du système face à la perturbation $\Delta\theta$ introduite.
- Le gradient estimé $\nabla J(\theta)$ au point θ_i est alors utilisé dans un algorithme d'optimisation mathématique. Un nouveau point θ_{i+1} est ainsi déterminé suivant la direction du gradient ($\lambda \nabla J(\theta)$) et ainsi de suite.

Le bloc PA (Figure1.2) est basé sur la formalisation préalable de deux types de trajectoire : la trajectoire nominale qu'on obtient en simulant le système en un point de fonctionnement θ_i et la trajectoire perturbée obtenue en introduisant une perturbation sur le vecteur de décision : $\theta_i+\Delta\theta$. L'étude de ces deux trajectoires permet d'estimer la sensibilité du système par rapport à $\Delta\theta$, la perturbation introduite.

Si on introduit une perturbation infinitésimale sur le vecteur de décision et si on fait tendre la longueur des trajectoires (trajectoire perturbée et nominale) vers l'infini, on obtient directement une estimation du gradient de la mesure de performance moyen, dans ce cas la méthode PA sera appelée analyse des perturbations infinitésimale (IPA) [SUR87].

1.3.5.2 Analyse des perturbations infinitésimale

Analyse des perturbations infinitésimale ([YU04a]), ([CAS02]) estime la valeur de l'espérance de la valeur limite (quand $t \to \infty$) de la dérivée de la mesure de performance observée $dL(\theta,\xi)/d\theta$, avec $L(\theta,\xi)$ est la mesure de performance du système déterminée à partir de la simulation d'un modèle ou de l'observation d'un système réel et ξ est le vecteur des variables aléatoires qui représentent tous les phénomènes aléatoires du système. En effet, l'intérêt de l'IPA porte sur la détermination de la valeur de la dérivée de l'espérance de la valeur limite de $L(\theta,\xi)$, ($dE[L(\theta,\xi)]/d\theta$) si elle existe. $x(t,\theta,\xi)$ est l'évolution temporelle de l'état du système, comme par exemple le niveau du stock (la trajectoire du niveau du stock). $x(t,\theta,\xi)$ dépend des valeurs de réalisation des différentes variables aléatoires (ξ) lors de l'observation ou de la simulation. L'impartialité (unbiasedness) et la consistance de l'estimateur sont vérifiées respectivement par les deux conditions suivantes :

$$E[dL(\theta,\xi)/d\theta]=dE[L(\theta,\xi)]/d\theta \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to\infty} d[L(x(t,\theta,\xi))]/d\theta = d\left[\lim_{t\to\infty} L(x(t,\theta,\xi))\right]/d\theta \tag{1.2}$$

L'impartialité ou la convergence d'un estimateur traduit qu'il est sans biais. En effet, pour une perturbation $\Delta\theta$ et une réalisation de ξ, la trajectoire nominale ($x(t,\theta,\xi)$) et la trajectoire perturbée ($x(t,\theta+\Delta\theta,\xi)$) commenceront à diverger, si le cardinal de l'ensemble des trajectoires est assez grand. Alors l'évolution de la trajectoire perturbée est complètement différente de celle de la trajectoire nominale. Ce qui explique l'apparition d'une discontinuité dans la fonction pour une réalisation donnée de ξ. Cette discontinuité crée un problème de dérivabilité de la fonction $L(\theta,\xi)$, alors l'équation (1.1) n'est plus valide [SUR88]. Mais si l'équation (1.1) est valide, cela revient à obtenir des mesures de performance, représentant une continuité entre la trajectoire nominale ($x(t,\theta,\xi)$) et la perturbée ($x(t,\theta+\Delta\theta,\xi)$) .

La probabilité d'avoir des discontinuités de la fonction $L(\theta,\xi)$ est très faible si on considère une perturbation infinitésimale. En plus, si on rencontre une discontinuité, sa valeur serait suffisamment petite pour ne pas contribuer efficacement au mécanisme de calcul de la moyenne, d'où l'équation (1.1) reste valide.

La consistance est la traduction de la convergence stochastique de l'estimateur de la dérivée de la performance obtenue par une seule simulation, vers la dérivée de la performance stationnaire quand la longueur de la trajectoire est infinie. En effet, la consistance justifierait l'utilisation d'un estimateur d'IPA obtenu par une longue trajectoire échantillonnée au lieu de la moyenne de N estimations.

En conclusion, la méthode IPA avec ses deux caractéristiques (la convergence et la consistance) possède un avantage par rapport aux autres méthodes traditionnelles d'estimation de la dérivée : le fait que l'IPA permet d'estimer la dérivée de la mesure de performance en une seule simulation au lieu de N simulations. Cet avantage justifie l'utilisation de cette méthode dans de nombreux travaux pour résoudre des problèmes d'optimisation. Dans la partie suivante, nous allons présenter la méthode IPA comme technique d'optimisation.

1.3.6 Analyse des perturbations infinitésimale appliquée à l'optimisation

Dans la vie quotidienne, nous sommes souvent confrontés à des problèmes d'optimisation. Cela peut être par exemple une personne qui souhaite ranger son bureau (qui est l'objectif à atteindre), placer son mobilier, et aller jusqu'à l'optimisation des systèmes de production, par exemple pour minimiser des coûts de stockage, de transport, de maintenance etc. Ces exemples peuvent être exprimés sous la forme générale d'un "problème d'optimisation". Dans tous les domaines industriels, l'optimisation joue un rôle important, en effet, elle permet d'obtenir une configuration optimale ou un plan optimal qui satisfasse des besoins économiques ou fonctionnels. Mais, cette tâche n'est pas toujours simple et même parfois très difficile, il est alors nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'optimisation qui doivent trouver un compromis entre plusieurs facteurs : satisfaire les besoins, les coûts de développement et le choix entre différents concepts possible sur une base de faisabilité. D'une manière générale, l'objectif de ces méthodes d'optimisation est de fournir une solution de qualité à un problème donné en un temps raisonnable. Parmi les méthodes d'optimisation nous nous intéressons aux méthodes qui sont basées sur le calcul des gradients de la mesure de performance par rapport aux paramètres de décision. Ces méthodes sont considérées comme des techniques efficaces d'optimisation dans des environnements stochastiques. Leur principe consiste à calculer le gradient de performance en un point de fonctionnement donné, ensuite de faire évoluer ce point dans la direction du gradient, ce qui permet de trouver rapidement l'optimum sans avoir besoin de recouvrir tout le domaine des valeurs possibles (par exemples dans notre cas, le domaine des valeurs de niveau de stock). La méthode IPA est l'une des méthodes basées sur le gradient qui cherche à résoudre différents problèmes d'optimisation non classiques, et cela généralement dans un contexte stochastique. En effet, l'application de l'IPA à l'optimisation a connu un grand succès dans plusieurs travaux, ceci est justifié par le fait qu'elle présente une souplesse d'utilisation et une rapidité de réponse aux changements du système à travers les informations contenues dans une seule observation de l'évolution du système. Elle permet de réduire le nombre de simulations pour l'obtention d'un estimateur non biaisé du gradient. Une seule simulation est suffisante pour l'estimation de la dérivée de la mesure de performance, contrairement aux approches traditionnelles qui nécessitent au moins deux simulations pour l'estimation de ce même gradient en un point de fonctionnement donné. En effet, le non biais des estimateurs assure leur efficacité, par suite ils pourront être implantés dans un algorithme d'optimisation pour donner une solution proche de l'optimal. Ho a montré que l'algorithme basé sur IPA est le plus efficace pour obtenir des estimateurs de sensibilité [HO87]. En plus, il permet de réduire le temps de calcul. Un autre avantage remarquable de l'IPA est qu'elle évalue la performance des gradients directement et non par des différences finies.

Initialement, IPA est appliqué aux réseaux de files d'attente ([EGE02], [MAN08], [WAR95]). Ho et Cao [HO83] ont dérivé une information sur la sensibilité d'un débit d'un système par rapport à divers paramètres. Cette information peut être ensuite utilisée pour l'optimisation de réseaux de files d'attente. Yu et Cassandras [YU04b] ont examiné les systèmes de production avec des files d'attente uniques opérant avec un mécanisme de commande des informations. Les auteurs ont utilisé l'IPA pour déterminer les estimateurs de gradient d'un taux de pertes par rapport à la taille du stock. Par la suite, l'IPA a été appliquée

à des modèles à flux stochastiques ([TAN07], [WAR99]). Markou et Panayiotou [MAR07] ont utilisé des estimateurs IPA qui sont obtenus à partir d'un modèle stochastique fluide pour optimiser la performance d'un système à événements discrets. Les auteurs ont implanté les estimateurs d'IPA dans différents algorithmes pour les évaluer et pour l'optimisation du stock du système à événements discrets. La méthode IPA est appliquée aussi sur des modèles à flux continus pour l'optimisation des systèmes de production. Par exemple, Panayiotou et Cassandras [PAN06] ont appliqué la méthode IPA à un modèle à flux stochastiques (modèle à flux continus) pour déterminer les capacités optimales de deux stocks (points de séparation) de produits finis afin de minimiser la fonction de coût d'un système de production. Les auteurs ont déterminé les estimateurs des sensibilités (dérivés) de la fonction de coût (somme du coût de stockage et pénurie) par rapport aux capacités. Les auteurs ont montrés que ces estimateurs sont non biaisés et puis ils les utilisent dans un algorithme pour déterminer les capacités optimales. Yu et Cassandras [YU04a] ont utilisé un modèle à flux stochastiques pour la commande de la production d'un système de production. Les auteurs ont appliqué la méthode IPA à ce modèle pour déterminer les estimateurs des gradients du flux de production et du dépassement de stock par rapport aux paramètres de commande de la production. Les auteurs ont montré que ces estimateurs sont non biaisés, puis ils les utilisent pour optimiser la fonction objective qui est composée par le coût de dépassement du stock et le coût du flux de production.

1.3.7 Conclusion

Les méthodes d'évaluation des performances reposent sur la simulation, les méthodes analytiques ou l'utilisation d'indicateurs de performances. Ces méthodes permettent d'analyser l'impact des paramètres du système sur la variation des performances, afin d'informer le décideur s'il est nécessaire de modifier le système pour améliorer ses performances. Les méthodes d'évaluation des performances basées sur la simulation sont souvent adoptées par les industriels. La technique d'analyse de sensibilité qui est une méthode analytique, consiste à mesurer l'influence des perturbations des données d'entrée sur la variabilité de la sortie et de déterminer la variable d'entrée la plus influente sur les variables de sortie. La méthode d'analyse des perturbations (PA) est une variante de l'analyse de sensibilité, dans laquelle les variations des résultats sous l'effet de changements des valeurs de tous les paramètres d'entrée sont obtenues par analyse différentielle. Nous avons montré l'intérêt porté à PA comme technique d'évaluation de performances des systèmes, et aussi comme outil d'optimisation. Dans le cas d'une perturbation infinitésimale, la méthode PA sera appelée analyse de perturbations infinitésimale (IPA). Nous avons étudié cette méthode et présenté ses caractéristiques (impartialité et consistance). En effet, l'IPA semble la plus satisfaisante du fait qu'elle ne nécessite qu'une seule simulation du système afin de déterminer les gradients des mesures de performance, ce qui réduit largement les temps de calcul et de recherche de la solution optimale. D'où l'utilisation de cette méthode dans de nombreux travaux récents.

1.4 Conclusion

Nous avons présenté les systèmes de production avec leurs éléments. Nous avons détaillé ces éléments, et leur rôle dans les systèmes de production. Pour la modélisation des systèmes de production, nous avons présenté quatre types de modèles, les réseaux de Petri, les files d'attente, les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus. Le modèle à flux discrets est facile à simuler et à manipuler. Il est souvent utilisé pour l'évaluation des performances des systèmes de production, mais le processus discrets des pièces rend l'analyse des performances plus difficile. Le modèle à flux continus, plus simple à étudier analytiquement, est une bonne approximation des modèles discrets et permet d'utiliser les méthodes d'optimisation basées sur le gradient. Les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus ne tiennent pas compte des retards qui ont un impact important sur les performances du système de production. Dans cette thèse, nous allons modéliser le système de production avec un modèle à flux continus et un modèle à flux discrets, puis nous allons comparer les résultats données par chaque modèle.

L'évaluation des performances est très importante pour la conception d'un système de production et de son évolution. En effet, cette évaluation permettra de s'assurer avant l'implantation physique que le système de production atteindra, face aux aléas, les performances souhaitées. Elle permettra également de constater l'évolution des performances au cours du temps. Nous avons présenté les performances les plus fréquemment évaluées dans l'industrie : taux de production, le niveau de stock et le temps et de production. Nous avons présenté et étudié les méthodes d'évaluation des performances (la simulation, les méthodes analytiques et les indicateurs de performances). Parmi les méthodes analytiques, nous avons présenté la technique d'analyse de sensibilité puis la technique d'analyse des perturbations infinitésimale qui est issue de l'analyse de sensibilité. L'analyse de perturbations infinitésimale permet d'obtenir des estimateurs non biaisés du gradient par une seule simulation. Alors le grand avantage de cette méthode par rapport aux approches traditionnelles d'estimation de la dérivée de la mesure de performance via la simulation est le nombre de simulations relativement réduit. Ce qui a amené plusieurs travaux à utiliser cette méthode pour résoudre des problèmes d'optimisation des systèmes de production. Dans notre thèse, nous allons utiliser la méthode d'analyse de perturbations infinitésimale pour un système de production modélisé par un modèle à flux continus puis nous étendrons les résultats obtenus à un modèle à flux discrets.

Chapitre 2 : Modèle à flux continus avec prise en compte d'un délai de livraison constant

2.1 Introduction

Aujourd'hui, il n'y a aucun doute sur l'importance du rôle joué par l'optimisation dans divers domaines. Cependant, la résolution pratique des problèmes d'optimisation demeure encore difficile, pour un certain nombre de raisons, notamment la nécessité de définir d'une façon précise les éléments d'un problème d'optimisation, d'organiser ces éléments de telle sorte que le problème paraisse solvable et de choisir une méthode efficace pour résoudre le problème. La méthode IPA (analyse des perturbations infinitésimale) est l'une des méthodes d'optimisation qui se basent sur le calcul des gradients et qui est utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation non classiques dans les environnements stochastiques comme nous l'avons vu dans le chapitre 1. Dans ce chapitre nous allons appliquer la méthode IPA sur un modèle à flux continus pour déterminer le stock optimal.

Les modèles à flux continus [MAR07] sont largement utilisés pour la conception, l'analyse et l'optimisation des systèmes de production. L'utilisation de ces modèles est justifiée par le fait qu'ils ont donné de bons résultats dans plusieurs travaux. En comparant ces modèles aux modèles à flux discrets, les modèles à flux continus sont plus simples à étudier analytiquement et à exploiter. En effet, ils facilitent la manipulation et l'analyse des systèmes à événements discrets, ils permettent de réduire la complexité inhérente à la modélisation des flux discrets. Pour l'optimisation, les modèles à flux continus nous permettent d'utiliser des méthodes d'optimisation basées sur le gradient comme la méthode IPA. Malheureusement, les modèles à flux continus existants négligent certaines caractéristiques importantes des systèmes de production (de même pour les modèles à flux discrets) tels que les délais de livraison qui ont un impact important sur les mesures des performances. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous définissons un modèle à flux continus en représentant explicitement le délai de livraison et nous étudions l'impact de ce délai de livraison sur le niveau de stock.

Dans la première section de ce chapitre, nous allons appliquer à notre système un modèle à flux continus en intégrant les délais de livraison. Nous donnons par la suite les équations d'évolution du système. A la fin de cette section, nous précisons la fonction de coût moyenne qui dépend du surstockage, du nombre de demandes perdues et de nombre de pièces transportées.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous étudions les trajectoires selon la méthode IPA (une trajectoire nominale et une perturbée) pour le niveau du stock et les autres variables du système. Des exemples de ces trajectoires sont présentés. Nous donnons ensuite les théorèmes qui généralisent cette étude et qui seront utilisés dans la troisième section pour estimer, via une simulation, les gradients de la fonction de coût.

Dans la troisième section de ce chapitre, nous déterminons la valeur du stock optimal par l'utilisation d'un algorithme basé sur la méthode IPA. La première partie de cette section consiste à déterminer les estimateurs des gradients de la fonction de coût en utilisant les théorèmes déterminés dans la deuxième section, et nous montrons que les estimateurs des gradients de la fonction de coût sont non biaisés. Dans la deuxième partie de cette section, nous présentons un algorithme d'optimisation basé sur la méthode IPA qui utilise les estimateurs des gradients de la fonction de coût pour déterminer la valeur du stock optimal. Dans la troisième partie de cette section, les résultats donnés par l'algorithme d'optimisation sont présentés et analysés.

2.2 Système de production considéré

Dans ce mémoire, nous considérons un modèle à flux continus d'un système de production composé d'une machine M, d'un stock B de capacité infinie et d'un client. La machine produit un seul type de produit et la politique de commande utilisée est une politique de type point de séparation ([MOK05]). On note $D_c(t)$ est la quantité de produit par unité de temps (demande client) qui sort du stock à l'instant t pour être livrée chez le client à l'instant $t+\tau$. Nous notons que la demande $D_c(t)$ est aléatoire et est générée par une loi uniforme (pour l'événement demande) et normale (pour la valeur de la demande). Le nombre de pièces transportées à l'instant t entre le stock et le client est noté par $g_c(t)$ (Figure 2.1).

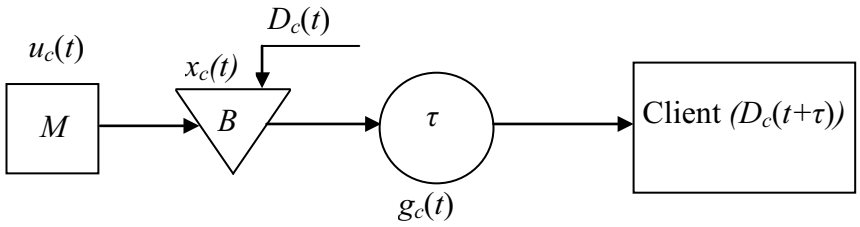

Figure 2.1: Système de production avec un délai de livraison constant

Supposons que la machine ne soit jamais affamée. La machine M peut être soit en état de panne, soit en état de marche. Une variable booléenne, dénotée $\alpha(t)$, est utilisée pour indiquer l'état de la machine à l'instant t.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si la machine est en état de marche à l'instant } t \\ 0 & \text{si la machine est en panne à l'instant } t \end{cases} \tag{2.1}$$

La vitesse de production de la machine M à l'instant t est dénotée par $u_c(t)$. Lorsque la machine est en état de marche (c'est-à-dire, $\alpha(t) = 1$), $u_c(t)$ peut prendre une valeur comprise entre 0 et U_c, où U_c la vitesse de production maximale (capacité maximale). Lorsque la machine est en panne (c'est-à-dire, $\alpha(t) = 0$), alors $u_c(t) = 0$.

Pour s'assurer que la demande puisse être satisfaite, nous supposons que la production maximale permet de satisfaire la demande, i.e. $U_c > D_c(t)\ \forall\ t$.

Nous considérons le cas d'une capacité infinie du stock, où le nombre de produits dans le stock B à l'instant t est noté par $x_c(t)$.

Les temps de bon fonctionnement et les temps de réparation sont exponentiellement distribués avec des taux notés λ et μ respectivement, c'est-à-dire que la moyenne des temps de bon fonctionnement $MTBF = 1/\lambda$ et que la moyenne des temps de réparation $MTTR = 1/\mu$. Ces temps ne dépendent pas des paramètres du système.

Dans le cas de demandes non satisfaites, nous considérons que la demande non satisfaite est perdue.

Nous considérons que le temps de livraison τ est strictement positif. Dans ce chapitre, nous considérons que τ est constant et connu.

Les événements possibles sont : panne machine (PM), réparation machine (RM), stock saturé (SS), stock vide (SV) et arrivée d'une demande (DE).

Hypothèse 2.1 : Nous supposons que la fonction de coût est dérivable dans $[0, \infty)$.

Hypothèse 2.2 : Pour l'application de la méthode IPA et afin d'éviter des discontinuités, nous devons considérer un seul événement à chaque instant, donc nous proposons des priorités entre les événements si différents événements se produisent au même instant. La priorité est attribuée dans un ordre décroissant comme suit :

- Evénement impliquant le stock : SS ou SV,
- Evénement impliquant la machine : PM ou RM,
- Evénement demande : DE.

La politique de commande utilisée est une politique de type point de séparation. Elle est donnée par :

$$u_c(t) = \begin{cases} D_c(t) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_c(t) = h_c \\ 0 & si\ \alpha(t) = 0\ ou\ x_c(t) > h_c \\ U_c & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_c(t) < h_c \end{cases} \tag{2.2}$$

Cette politique de pilotage est choisie car elle est simple et peut être implémentée facilement. En effet, cette politique assure que le nombre de pièces dans le stock ($x_c(t)$) ne dépasse pas un nombre donné, noté h_c. La politique Kanban [ZHO06] est généralement appliquée aux productions répétitives et quasi continue, cette politique ne peut pas répondre rapidement aux changements de la demande. En outre, la politique du point de séparation a été prouvée comme étant optimale ([AKE86]) lorsque le délai de livraison n'est pas considéré et la demande est constante. Par conséquent, nous utilisons cette politique pour notre système.

Le nombre de produits dans le stock dépend de la vitesse de production ($u_c(t)$) et de la demande ($D_c(t)$).

La dynamique du système est donnée par :

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = u_c(t) - D_c(t) \quad \text{avec } x_c(t) \geq 0 \tag{2.3}$$

Le nombre de demandes non satisfaites par unité de temps est noté par $D_c^0(t)$, qui dépend de la demande client et du niveau de stock. En effet, lorsque le client fait une demande $D_c(t)$ et le stock est vide, la demande ne sera pas satisfaite et elle sera perdue. Par conséquent, $D_c^0(t)$ est nul si le niveau de stock est strictement positif et est égal à la demande si le niveau de stock est nul. Le nombre de demandes non satisfaites par unité de temps à l'instant *t* est donné par :

$$D_c^0(t) = \begin{cases} 0 & si\ x_c(t) > 0 \\ D_c(t) & si\ x_c(t) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Nous avons défini la vitesse du nombre de demandes non satisfaites ($D_c^0(t)$), car nous en avons besoin pour déterminer les expressions du nombre de demandes non satisfaites (2.5), ainsi que le nombre de pièces transportées (2.6).

Le nombre de demandes non satisfaites à l'instant *t* est noté par $P_c(t)$ et donné par :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{dP_c(t)}{dt} = D_c^0(t) = D_c(t) & si\ x_c(t) = 0 \\ P_c(t) = 0 & si\ x_c(t) > 0 \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Nous avons défini $P_c(t)$, car nous en avons besoin dans la fonction de coût à l'instant *t* (2.7).

Le nombre de pièces transportées qui dépend de la demande et du niveau de stock est égal au nombre de pièces qui sortent du stock à l'instant $t - \tau$ et qui vont arriver à l'instant *t*. En effet, la vitesse du nombre de pièces transportées entre $t - \tau$ et *t* est égale à la demande client par unité de temps ($D_c(t)$) moins le nombre de demandes non satisfaites par unité de temps ($D_c^0(t)$). Alors le nombre de pièces transportées à l'instant *t* est donné par :

$$g_c(t) = \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t) - D_c^0(t)).dt \tag{2.6}$$

La fonction de coût $C_c(t)$, à l'instant *t*, qui dépend du nombre de pièces dans le stock *B*, du nombre de pièces transportées et des demandes perdues, est donnée par:

$$C_c(t) = cs.\,x_c(t) + cs^{-}.P_c\,(t) + ct.\,g_c(t) \tag{2.7}$$

Avec:

cs	:	le coût unitaire de stockage.
cs^{-}	:	le coût unitaire de la demande perdue.
ct	:	le coût unitaire de transport.

Le coût moyen pendant une période de temps T, noté par $C_a(t)$ est donné par :

$$C_a(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_{t=0}^{t=T} (C_c(t)).dt\right] \tag{2.8}$$

Dans la section suivante, nous allons appliquer la méthode IPA pour le modèle choisi. Ainsi, nous allons analyser les trajectoires du niveau du stock (une nominale et l'autre perturbée), afin d'étudier l'effet de la perturbation sur les performances du système. Cette étude nous permettra de déterminer les estimateurs IPA et de prouver que ces estimateurs sont non biaisés.

2.3 Etude des trajectoires

L'IPA est une approche qui permet d'évaluer les gradients des mesures des performances selon certains paramètres, par exemple dans notre cas, le niveau de stock optimal h_c. Cette méthode consiste à observer et analyser deux trajectoires : une trajectoire nominale et l'autre perturbée, afin de mesurer l'effet d'une perturbation η sur les performances du système. Soit $x_c(t)$ et $x_c^{\eta}(t)$ respectivement le niveau du stock de la trajectoire nominale et le niveau du stock de la trajectoire perturbée (Figure 2.3 et Figure 2.4). Nous avons h_c est le stock optimal de $x_c(t)$, nous supposons que h_c est augmenté par une perturbation notée η avec $\eta > 0$ (une perturbation négative peut être considérée d'une manière similaire). Le niveau du stock optimal pour la trajectoire perturbée est donc $h_c + \eta$. Nous étudions l'effet de la perturbation sur les variables du système et nous évaluons les changements induits dans la fonction de coût.

Lorsque le stock pour la trajectoire nominale devient saturé, un décalage entre les trajectoires nominale et perturbée, noté $\phi(t)$ (avec $0 < \phi(t) \le \eta$), commence à se produire jusqu'à atteindre la valeur η à l'instant où $x_c^{\eta}(t)$ devient saturé (i.e. $x_c^{\eta}(t) = h_c + \eta$). La Figure 2.2 montre l'évolution du décalage $\phi(t)$.

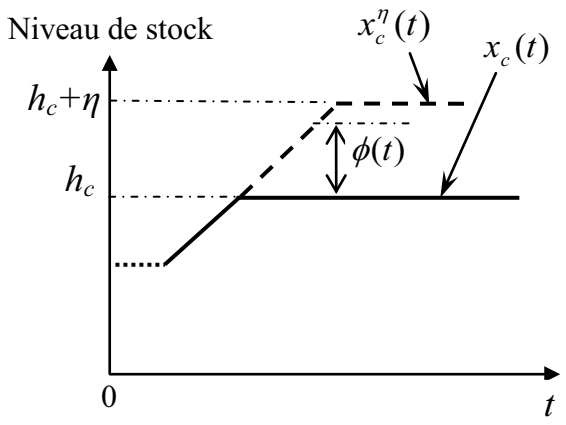

Figure 2.2 : Décalage $\phi(t)$ entre le niveau du stock pour la trajectoire perturbée et celui pour la trajectoire nominale

Pour l'étude des trajectoires nous supposons que :

1. Les variables aléatoires (arrivées des pannes, demandes du client, réparations machine) sont distribuées de la même façon pour les deux trajectoires et que par conséquent $\alpha(t)$ est le même pour les deux trajectoires.

2. La production maximale est identique pour les deux trajectoires.

Les notations suivantes sont utilisées :

$u_c^\eta(t)$: Vitesse de production à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.

$g_c^\eta(t)$: Nombre de pièces transportées à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.

$D_c^{0\eta}(t)$: Nombre de demandes non satisfaites par unité de temps à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.

$P_c^\eta(t)$: Nombre de demandes non satisfaites à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.

t_{sj} : $j^{ième}$ instant pour lequel le stock sur la trajectoire nominale devient saturé et qui entraîne un décalage $\phi(t)$ entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. Nous avons donc $\phi(t_{sj}) = 0$ et $\phi(t) > 0$ si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^\eta\right]$ (avec *j*=1,2 …).

t_{sj}^η : $j^{ième}$ instant pour lequel le stock sur la trajectoire perturbée devient saturé (i.e. $x_c^\eta(t_{sj}^\eta) = h_c + \eta$), à cet instant le décalage $\phi(t)$ atteint η.

t_{vj}^η : $j^{ième}$ instant pour lequel le stock sur la trajectoire perturbée devient vide et qui annule le décalage entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée, d'où $\phi(t_{vj}^\eta) = 0$ et $x_c^\eta(t_{vj}^\eta) = x_c(t_{vj}^\eta) = 0$.

t_{vj} : Dernier instant pour lequel le stock pour la trajectoire nominale devient vide entre t_{sj} et t_{vj}^{η}.

Des exemples d'évolution des deux trajectoires pour $\eta > 0$ sont donnés dans les Figures 2.3 et 2.4.

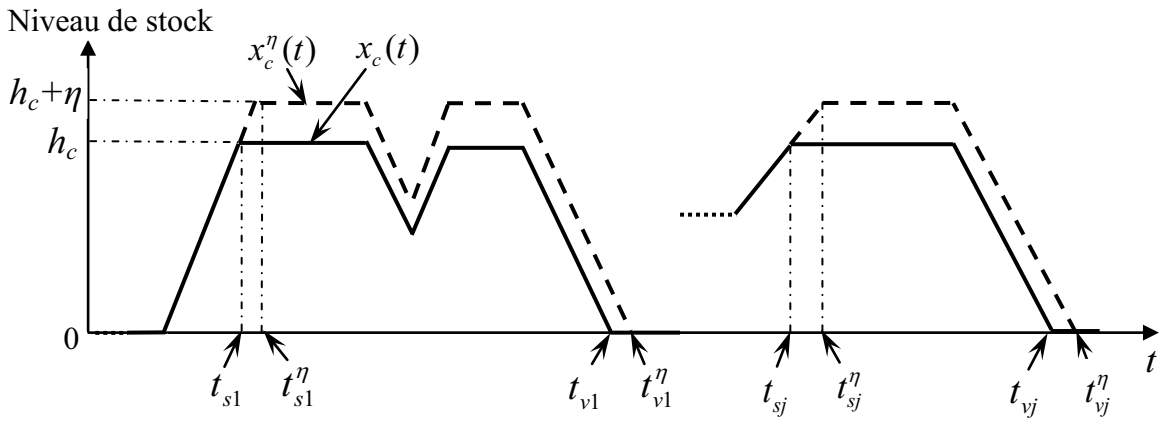

Figure 2.3 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (exemple 1)

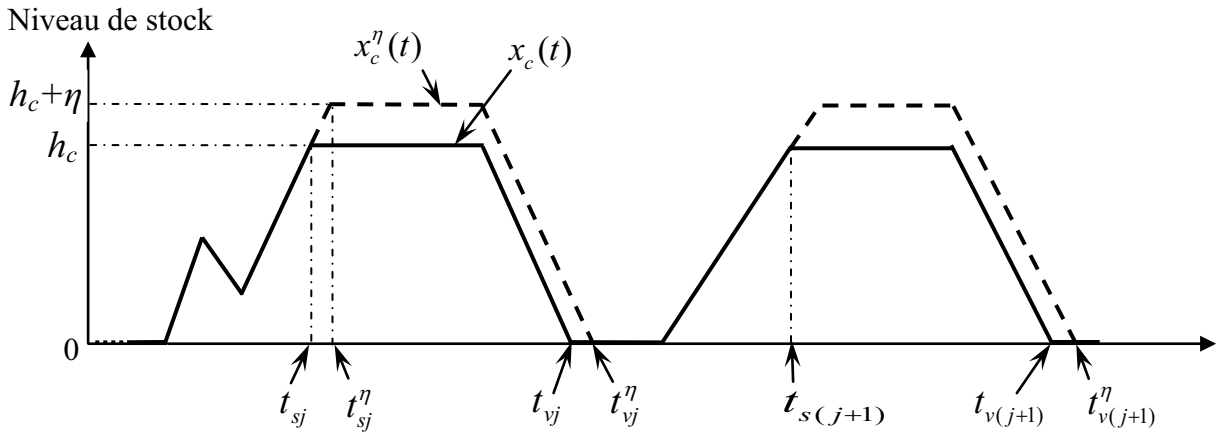

Figure 2.4 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (exemple 2)

L'intervalle $[0,T]$ peut être divisé selon deux cycles qui s'alternent (Figure 2.5) : les premiers cycles apparaissent lorsque $t \in \left]t_{sj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ et les autres lorsque $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$.

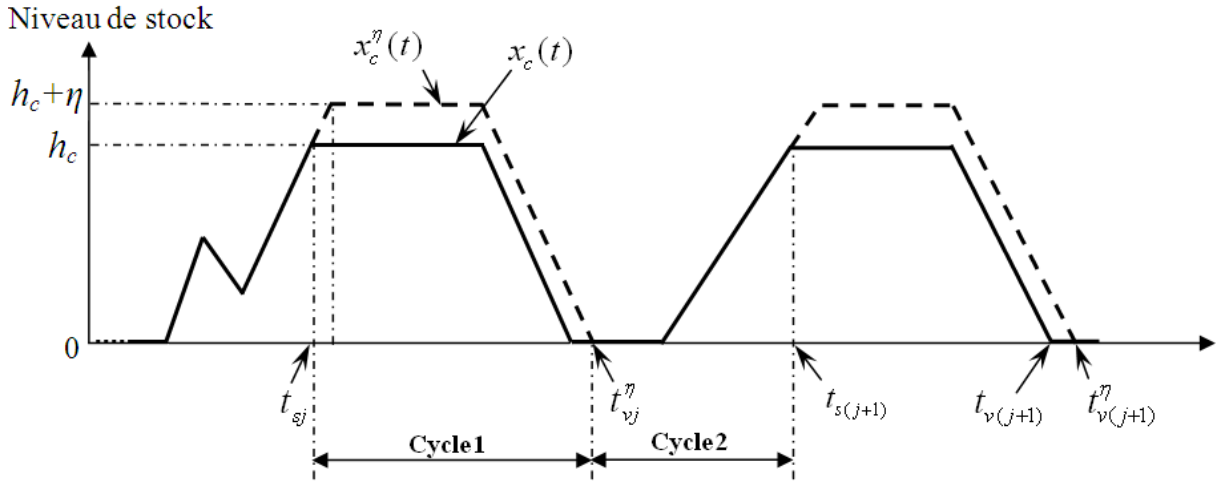

Figure 2.5 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (deux cycles en alternance)

Ces cycles seront utilisés dans les démonstrations des théorèmes qui généralisent l'étude des trajectoires.

La vitesse de production sur la trajectoire perturbée est donnée par :

$$u_c^\eta(t) = \begin{cases} D_c(t) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_c^\eta(t) = h_c + \eta \\ 0 & si\ \alpha(t) = 0\ ou\ x_c^\eta(t) > h_c + \eta \\ U_c & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_c(t) < h_c + \eta \end{cases} \tag{2.5}$$

Le lemme 2.1 montre qu'à l'instant t_{sj}^η le niveau du stock pour la trajectoire perturbée devient saturé ce qui entraîne un décalage $\phi(t) = \eta$ entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. Nous allons utiliser ce lemme dans la démonstration du théorème 2.1.

Lemme 2.1 : Si $t = t_{sj}^\eta$ alors $x_c^\eta(t_{sj}^\eta) = x_c(t_{sj}^\eta) + \eta$.

Nous allons démontrer ce lemme après la démonstration du théorème 2.1.

Le théorème 2.1 montre que si $t \in \left]t_{sj}, t_{vj}^\eta\right[$ et $0 < \phi(t) \le \eta$, la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale plus le décalage $\phi(t)$. Ce théorème est utilisé après pour déterminer les estimateurs IPA et pour montrer qu'ils sont non biaisés.

Théorème 2.1 : Si $\eta > 0$, $x_c^\eta(0) = x_c(0)$ et $t \in \left]t_{sj}, t_{vj}^\eta\right[$, alors $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \phi(t)$ avec $0 < \phi(t) \le \eta$.

Preuve du Théorème 2.1 :

Nous avons $\left]t_{sj}, t_{vj}^\eta\right[= \left]t_{sj}, t_{sj}^\eta\right[\cup \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[\cup \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$, nous allons montrer que dans les intervalles, $\left]t_{sj}, t_{sj}^\eta\right[$, $\left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$ et $\left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ si $\eta > 0$ alors $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \phi(t)$.

❖ Si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ (Figure 2.):

Nous montrons par l'absurde que si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$, nous ne pouvons pas avoir $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$.

Nous supposons que si t' et $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ avec $t' < t$, nous avons $x_c^{\eta}(t') = x_c(t')$ et $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$.

Alors si t' et $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$, nous avons $x_c(t') > 0$ et $x_c^{\eta}(t') > 0$ et d'après l'équation (2.3) nous avons :

$$x_c(t) = x_c(t') + (u_c(t) - D_c(t)).(t - t')$$

et

$$x_c^{\eta}(t) = x_c^{\eta}(t') + (u_c^{\eta}(t) - D_c(t)).(t - t') = x_c(t') + (u_c^{\eta}(t) - D_c(t)).(t - t')$$

Si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ nous avons $x_c(t) > h_c$ ou $x_c(t) = h_c$ et $x_c^{\eta}(t) < h_c + \eta$, d'après l'équation (2.2) nous avons respectivement $u_c(t) = 0$ ou $u_c(t) = D_c(t)$ et $u_c^{\eta}(t) = U_c$.

Alors nous avons :

$$x_c^{\eta}(t) = x_c(t') + (U_c - D_c(t)).(t - t')$$

Si $u_c(t) = 0$ alors $x_c(t) = x_c(t') + (0 - D_c(t)).(t - t') = x_c(t') - (D_c(t)).(t - t') < x_c^{\eta}(t)$

Si $u_c(t) = D_c(t)$ alors $x_c(t) = x_c(t') + (D_c(t) - D_c(t)).(t - t') = x_c(t')$, donc $x_c(t) < x_c^{\eta}(t)$ car $U_c > D_c(t)$.

Dans tous les cas nous avons $x_c^{\eta}(t) > x_c(t)$, d'où il est impossible que $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$ si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$. Donc il existe un décalage $\phi(t) > 0$ entre $x_c^{\eta}(t)$ et $x_c(t)$ d'où $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \phi(t)$.

La Figure 2. représente le décalage $\phi(t)$ dans $\left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ (zoom de la zone $\left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ qui existe sur la Figure 2.3).

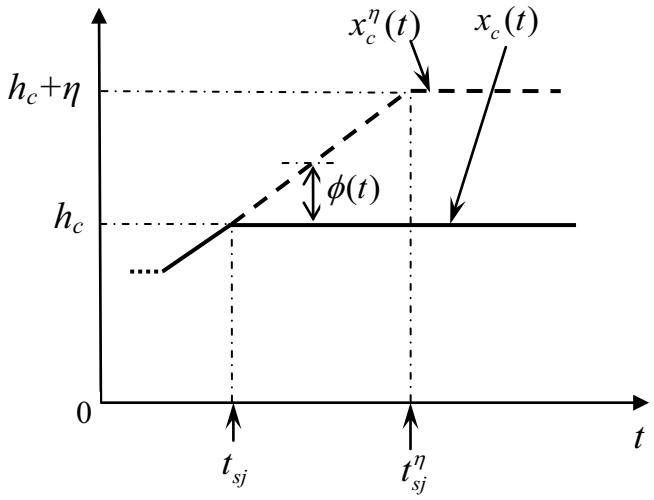

Figure 2.6 : Décalage $\phi(t)$ (zone $\left]t_{sj}, t_{sj}^\eta\right[$)

❖ si $t \in \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$ (Figure 2.7).

Nous montrons par récurrence que si $t \in \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$, nous avons $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \eta$.
Nous supposons que $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \eta$ et nous allons montrer qu'à l'instant $t' \in \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$que $x_c^\eta(t') = x_c(t') + \eta$ avec $t' < t$.
Si t'et $t \in \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$, nous avons :

$$x_c^\eta(t') = x_c^\eta(t) - ((u_c^\eta(t) - D_c(t)).(t - t')) = x_c(t) + \eta - ((u_c^\eta(t) - D_c(t)).(t - t'))$$

et

$$x_c(t') = x_c(t) - ((u_c(t) - D_c(t)).(t - t')).$$

Pour $u_c^\eta(t)$ et $u_c(t)$, nous avons trois cas selon les équations (2.2) et (2.5) :

- *cas 1* : lorsque $x_c^\eta(t) = h_c + \eta$ alors nous avons $x_c(t) = h_c$ et si $\alpha(t) = 1$, et $u_c^\eta(t) = u_c(t) = D_c(t)$.
- *cas 2* : lorsque $x_c^\eta(t) \le h_c + \eta$ alors nous avons $x_c(t) \le h_c$ et si $\alpha(t) = 1$, alors $u_c^\eta(t) = u_c(t) = U_c$.
- *cas 3* : lorsque $\alpha(t) = 0$ alors $u_c^\eta(t) = u_c(t) = 0$.

Par conséquent, $u_c^\eta(t) = u_c(t)$ si $t \in \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$.
Nous avons alors $x_c^\eta(t') = x_c(t') + \eta$, d'où $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \eta$.

Nous avons $x_c^\eta(t_{sj}^\eta) = x_c(t_{sj}^\eta) + \eta$ (*lemme2.1*). Donc $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \eta$ si $t \in \left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$.

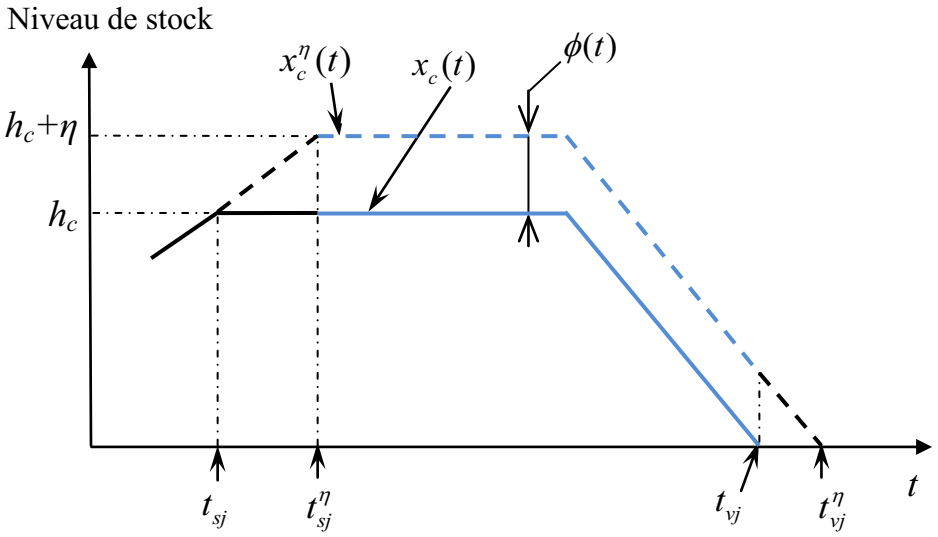

Figure 2.7 : Décalage $\phi(t)$ *(zone* $\left[t_{sj}^\eta, t_{vj}\right[$*)*

❖ si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$(Figure 2.8).

Nous montrons par l'absurde que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ nous ne pouvons pas avoir $x_c^\eta(t) = x_c(t)$.

Nous supposons que lorsque $t \in \left[\, t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$, nous avons $x_c^\eta(t) = x_c(t)$.

Si $x_c^\eta(t) = x_c(t)$ nous avons $x_c(t_{vj}) = x_c^\eta(t_{vj}) = 0$ dans ce cas $t_{vj} = t_{vj}^\eta$, ce qui est impossible car $t_{vj}^\eta \notin \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$. Alors $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \phi(t)\ \forall\ t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$.

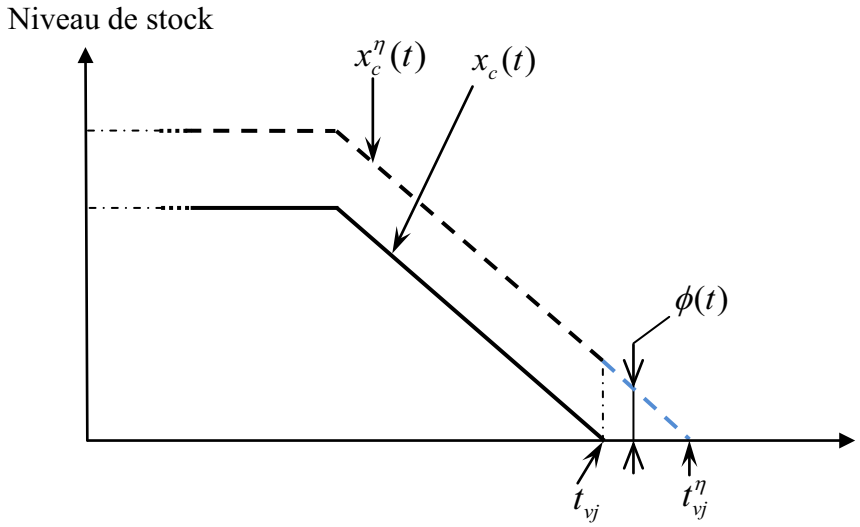

Figure 2.8 : Décalage $\phi(t)$ *(zone* $\left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$*)*

CQFD

Preuve du Lemme 2.1 :

Si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ nous avons

$$\begin{aligned}\phi(t) &= x_c^{\eta}(t) - x_c(t) \\ &= x_c^{\eta}(t') + (u_c^{\eta}(t) - D_c(t)).(t - t') - x_c(t') - (u_c(t) - D_c(t)).(t - t'), \text{ (avec } t' < t\text{)}.\end{aligned}$$

Nous avons $u_c^{\eta}(t) = U_c$ si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$, alors $\phi(t) = \phi(t') + (U_c - u_c(t)).dt$.

Nous avons deux cas si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ ($u_c(t) = 0$ ou $u_c(t) = D_c(t)$)

- Cas 1: si $u_c(t) = 0$ alors $\phi(t) = \phi(t') + (U_c).(t - t')$.
- Cas 2: si $u_c(t) = D_c(t)$ alors $\phi(t) = \phi(t') + (U_c - D_c(t)).(t - t')$.

Nous constatons que dans les deux cas $\phi(t)$ est croissant sur l'intervalle $\left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$. En effet, à l'instant $t = t_{sj}^{\eta}$ le décalage $\phi(t)$ atteint son maximum η (i.e. $\phi(t_{sj}^{\eta}) = \eta$). Alors $x_c^{\eta}(t_{sj}^{\eta}) = x_c(t_{sj}^{\eta}) + \eta$.

CQFD

Remarque 2.3 : Dans l'étude des trajectoires la perturbation η est infinitésimale et le temps de simulation tend vers l'infini, alors nous supposons que $\phi(t) = 0$ si $t \in \left]t_{sj}, t_{sj}^{\eta}\right[$ et $\phi(t) = \eta$ si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$, d'où le décalage $\phi(t) = \eta$ si $\left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}^{\eta}\right[$

Le lemme suivant montre qu'à l'instant t_{vj}^{η}, le niveau du stock de la trajectoire perturbée devient vide ce qui annule le décalage entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée, nous allons utiliser ce lemme dans la démonstration du théorème 2.2.

Lemme 2.2 : Si $t = t_{vj}^{\eta}$ alors $x_c^{\eta}(t_{vj}^{\eta}) = 0 = x_c(t_{vj}^{\eta})$.

Nous allons démontrer la preuve de ce lemme après la démonstration du théorème 2.2.

Dans le théorème 2.2 nous allons montrer que si $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$, alors la trajectoire nominale $x_c(t)$ et la trajectoire perturbée $x_c^{\eta}(t)$ sont égales.

Théorème 2.2 : Si $x_c^{\eta}(0) = x_c(0)$ et $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$ alors $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$ (voir Figure 2.4).

Preuve du Théorème 2.2 :

Nous montrons par l'absurde que si $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$, nous ne pouvons pas avoir $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \phi(t)$ avec $0 < \phi(t)$.

Nous supposons que $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \phi(t)$ si $t \in \left[t_{vj}^\eta, t_{s(j+1)}\right]$ avec $0 < \phi(t) \leq \eta$.

A l'instant $t = t_{vj}^\eta$ nous avons $x_c^\eta(t_{vj}^\eta) = 0 = x_c(t_{vj}^\eta)$ (lemme 2.2), alors $x_c^\eta(t_{vj}^\eta) = x_c(t_{vj}^\eta) + \phi(t_{vj}^\eta) = 0 + \phi(t_{vj}^\eta) = 0$, d'où $\phi(t_{vj}^\eta) = 0$, donc il est impossible que $\phi(t) > 0$ si $t \in \left[t_{vj}^\eta, t_{s(j+1)}\right]$.

Alors lorsque $t \in \left[t_{vj}^\eta, t_{s(j+1)}\right]$, nous avons $x_c^\eta(t) = x_c(t)$.

CQFD

Preuve du Lemme 2.2 :

Si $t = t_{vj}^\eta$ nous avons $x_c^\eta(t_{vj}^\eta) = 0 = x_c^\eta(t') + (u_c^\eta(t_{vj}^\eta) - D_c(t_{vj}^\eta)).(t_{vj}^\eta - t')$, (avec $t' < t_{vj}^\eta$).

$x_c(t_{vj}^\eta) = x_c(t') + (u_c(t_{vj}^\eta) - D_c(t_{vj}^\eta)).(t_{vj}^\eta - t')$.

Nous avons $u_c(t_{vj}^\eta) = u_c^\eta(t_{vj}^\eta) = 0$ et $x_c^\eta(t') = x_c(t') + \phi(t')$ avec $\phi(t') \geq 0$, d'ou

$x_c^\eta(t_{vj}^\eta) = 0 = x_c(t_{vj}^\eta) + \phi(t')$,

$x_c(t_{vj}^\eta) = -\phi(t')$, nous avons $\phi(t') \geq 0$ alors $x_c(t_{vj}^\eta) = 0$ (cas possible) ou $x_c(t_{vj}^\eta) < 0$ (cas impossible).

CQFD

Le théorème 2.3 montre que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$, le nombre de pièces transportées pour la trajectoire perturbée ($g_c^\eta(t)$) est égale à celui pour la trajectoire nominale ($g_c(t)$) plus la perturbation η.

Théorème 2.3 : Si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ et $D_c(t) > 0$ alors $g_c^\eta(t) = g_c(t) + \eta$.

Preuve du Théorème 2.3:

Si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ alors $x_c(t) = 0$ et $x_c^\eta(t) > 0$ et d'après l'équation (2.2) nous avons $D_c^0(t) = D_c(t)$ et $D_c^{\eta 0}(t) = 0$, d'où $g_c(t) = 0$ et $g_c^\eta(t) = \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t)).dt > 0$. Alors $g_c^\eta(t) > g_c(t)$ si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ et $D_c(t) > 0$.

Nous constatons que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$, le décalage entre le nombre de pièces transportées pour la trajectoire perturbée et celui pour la trajectoire nominale est égal au décalage entre le niveau de stock pour la trajectoire perturbée et celui de la trajectoire nominale. Or, d'après la Remarque 2.1 ce décalage est défini par η. Donc si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ le décalage entre $g_c^\eta(t)$ et $g_c(t)$ est égal à η.

Par conséquent, $g_c^{\eta}(t) = g_c(t) + \eta$.

CQFD

Le théorème 2.4 montre que si $t \in [0,T] \setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$, le nombre de pièces transportées pour la trajectoire perturbée et pour la trajectoire nominale sont égaux.

Théorème 2.4 : Si $t \in [0,T] \setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$ alors $g_c^{\eta}(t) = g_c(t)$.

Preuve du Théorème 2.4 :

Nous avons $[0,T] \setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[=]t_{sj}, t_{vj}^{\eta}[\setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[\cup [t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}]$.

- Si $t \in]t_{sj}, t_{vj}^{\eta}[\setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$ nous avons $x_c(t) > 0$ et $x_c^{\eta}(t) > 0$ et d'après l'équation (2.2) nous avons $D_c^0(t) = 0 = D_c^{\eta 0}(t)$, d'où $g_c(t) = \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t)).dt = g_c^{\eta}(t)$.

- Si $t \in [t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}]$ nous avons $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$ (théorème 2.2), alors si $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) > 0$ nous avons $g_c(t) = \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t)).dt = g_c^{\eta}(t)$ et si $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) = 0$ nous avons $g_c^{\eta}(t) = g_c(t)$.

Alors $g_c^{\eta}(t) = g_c(t)$ si $t \in [0,T] \setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$.

CQFD

Dans la section suivante, nous allons utiliser ces théorèmes pour déterminer les estimateurs IPA.

2.4 Optimisation basée sur la méthode IPA

Dans cette section, nous allons montrer que les estimateurs IPA sont non biaisés, ces estimateurs seront utilisés par la suite dans un algorithme d'optimisation pour déterminer la valeur du niveau de stock optimal.

2.4.1 Estimateurs IPA

Dans cette partie, nous allons déterminer les estimateurs IPA de la fonction de coût. La valeur moyenne des dérivées des trajectoires est obtenue par simulation et est utilisée à la place de la dérivée de l'espérance du coût. Par conséquent, nous devons montrer que les estimateurs du gradient sont non biaisés. En effet, la démonstration d'absence de biais est une condition pour utiliser ces estimateurs dans un algorithme d'optimisation ce qui nous permet de vérifier que les estimations des dérivées sont égales aux dérivées exactes. Pour cela, nous devons prouver que :

$E(\frac{d(C_a(t,h_c))}{dh}) = \frac{d(E(C_a(t,h_c)))}{dh}$ pour tout h_c dans H_c (H_c est l'ensemble des valeurs possibles de h_c [PAN06]).

Le coût moyen qui correspond à la trajectoire perturbée est donné par :

$$C_a^{\eta}(h_c+\eta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\int_{t=0}^{t=T}(cs.\,x_c^{\eta}(t)+cs^{-}.\,P_c^{\eta}(t)+ct.\,g_c^{\eta}(t)).dt\right]$$

L'estimation échantillonnée pour le coût moyen qui correspond à la trajectoire perturbée est la suivante :

$$C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta) = \frac{1}{T}E\left[\int_{t=0}^{t=T}(cs.\,x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)+cs^{-}.\,P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)+ct.\,g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)).dt\right].$$

L'estimation échantillonnée pour le coût moyen qui correspond à la trajectoire nominale est donnée par :

$$C_{aT}(t,h) = \frac{1}{T}E\left[\int_{t=0}^{t=T}(cs.\,x_c(t,h_c)+cs^{-}.\,P_c\,(t,h_c)+ct.\,g_c(t,h_c)).dt\right].$$

Nous pouvons maintenant déterminer les estimateurs des gradients de la fonction de coût.

L'estimation échantillonnée de la différence entre le coût moyen de la trajectoire perturbée et le coût moyen de la trajectoire nominale est donnée par :

$$C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c) =$$

$$\frac{1}{T}.E\Bigg[cs.\underbrace{\int_{t=0}^{t=T}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt}_{A}+$$

$$cs^{-}.\underbrace{\int_{t=0}^{t=T}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c\,(t,h_c)).dt}_{B}+$$

$$ct.\underbrace{\int_{t=0}^{t=T}(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)).dt}_{C}\Bigg].$$

Nous allons déterminer les expressions A, B et C.

Nous supposons dans l'intervalle $[0,T]$ qu'il y a m intervalles $[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}^{\eta}[$.

❖ Pour l'expression A :

Nous avons

$$\int_{t=0}^{t=T}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt=\int_{t=0}^{t=t_{s1}^{\eta}}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt+$$

$$\int_{t=t_{s1}^{\eta}}^{t=t_{v1}^{\eta}}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt+\int_{t=t_{v1}^{\eta}}^{t=t_{s2}^{\eta}}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt+...+$$

$$\int_{t=t_{sj}^{\eta}}^{t=t_{vj}^{\eta}}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt+...+\int_{t=t_{vm}^{\eta}}^{t=T}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt$$

Nous avons $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)+\eta$ si $t\in[t_{sj}^{\eta},t_{vj}^{\eta}[$ (théorème 2.1), et $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)$ si $t\in[0,T]\setminus[t_{sj}^{\eta},t_{vj}^{\eta}[$ (théorème 2.2).

Donc nous avons :

$$\int_{t=0}^{t=T}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt=\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{sj}^{\eta}}^{t_{vj}^{\eta}}(x_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt=\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{sj}^{\eta}}^{t_{vj}^{\eta}}\eta.dt\ .$$

❖ Pour l'expression B :

Nous avons

$$\int_{t=0}^{t=T}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c(t,h_c)).dt=$$

$$\int_{t=0}^{t=t_{v1}}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c(t,h_c)).dt+\int_{t=t_{v1}}^{t=t_{v1}^{\eta}}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c(t,h_c)).dt+$$

$$\int_{t=t_{v1}^{\eta}}^{t=t_{v2}}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c(t,h_c)).dt+...+\int_{t=t_{vj}}^{t=t_{vj}^{\eta}}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c(t,h_c)).dt+....$$

$$+\int_{t=t_{vm}^{\eta}}^{t=T}(P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-P_c(t,h_c)).dt\ .$$

Nous avons $P_c^{\eta}(t,h_c+\eta)$ et $P_c(t,h_c)$ qui sont égaux si $t\in[0,T]\setminus[t_{vj},t_{vj}^{\eta}[$ car dans ce cas les demandes sont satisfaites pour les deux trajectoires. Par contre lorsque $t\in[t_{vj},t_{vj}^{\eta}[$ le nombre de pièces satisfaites est égal au nombre de pièces dans le stock, d'où la différence entre le

nombre de pièces satisfaites pour la trajectoire perturbée et celui pour la trajectoire nominale est égale à $x_c^{\eta}(t) - x_c(t) = \eta$. La différence entre le nombre de pièces perdues (non satisfaites) pour la trajectoire perturbée et celui pour la trajectoire nominale est égale à l'opposé de celle pour le cas des pièces satisfaites, d'où $P_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - P_c(t, h_c) = \eta$.

$$\int_{t=0}^{t=T} (P_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - P_c(t, h_c)).dt = \sum_{j=m}^{j=m} \int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} (P_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - P_c(t, h_c)).dt = \sum_{j=m}^{j=m} \int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} (-\eta).dt$$

❖ Pour l'expression C :

Nous avons

$$\int_{t=0}^{t=T} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt =$$

$$\int_{t=0}^{t=t_{v1}} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt + \int_{t=t_{v1}}^{t=t_{v1}^{\eta}} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt +$$

$$\int_{t=t_{v1}^{\eta}}^{t=t_{v2}} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt + \ldots + \int_{t=t_{vj}}^{t=t_{vj}^{\eta}} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt + \ldots +$$

$$\int_{t=t_{vm}^{\eta}}^{t=T} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt$$

Nous avons $g_c^{\eta}(t) = g_c(t) + \eta$ si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ (théorème 2.3), et $g_c^{\eta}(t) = g_c(t)$ si $t \in [0, T] \setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ (théorème 2.4), d'où

$$\int_{t=0}^{t=T} (g_c^{\eta}(t, h_c + \eta) - g_c(t, h_c)).dt = \sum_{j=1}^{j=m} \int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} (\eta).dt$$

Alors nous avons :

$$C_{aT}^{\eta}(t, h_c + \eta) - C_{aT}(t, h_c) = \frac{1}{T} E\left[\sum_{j=1}^{j=m} \int_{t_{sj}^{\eta}}^{t_{vj}^{\eta}} cs.(\eta).dt + \sum_{j=1}^{j=m} \int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} cs^{-}.(-\eta).dt + \sum_{j=1}^{j=m} \int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} ct.(\eta).dt\right]$$

Supposons que $T_{sv} = \sum_{j=1}^{j=m} (t_{vj}^{\eta} - t_{sj}^{\eta})$, $T_w = \sum_{j=1}^{j=m} (t_{vj}^{\eta} - t_{vj})$ avec $T_{sv} + T_w \leq T$.

Alors

$$C_{aT}^{\eta}(t, h_c + \eta) - C_{aT}(t, h_c) = \frac{1}{T} E\left[\left(T_{sv}.cs + T_w.(ct - cs^{-})\right).\eta\right]$$

L'estimation échantillonnée de la différence du coût moyen est composée de trois parties qui sont : l'estimation de la différence du coût de stockage, du coût de demandes perdues et du coût de transport.

Les gradients de la fonction de coût sont définis par :

$$\frac{\partial C_{aT}(h_c)}{\partial h} = E\left[\frac{T_{sv}}{T}.cs - \frac{T_w}{T}.cs^- + \frac{T_w}{T}.ct\right]$$

$\frac{\partial C_{aT}(h_c)}{\partial h} = E\left[X_c^{'}(h_c).cs - B_c^{'}(h_c).cs^- + G_c^{'}(h_c).ct\right]$, avec $X_c^{'}(h_c)$, $G_c^{'}(h_c)$ et $B_c^{'}(h_c)$ les estimateurs des gradients du chaque partie de la fonction de coût qui sont donnés par :

$$X_c^{'}(h_c) = \frac{T_{sv}}{T}, G_c^{'}(h_c) = \frac{T_w}{T} \text{ et } B_c^{'}(h_c) = \frac{T_w}{T}.$$

Théorème 2.5 : Les estimateurs du gradient du coût moyen sont non biaisés.

Preuve du théorème 2.5 *:*

Pour montrer que les estimateurs du gradient du coût moyen sont non biaisés nous devons satisfaire les deux conditions suivantes :

- La dérivée de la fonction de coût ($d(C_a(h_c))/dh_c$) existent.
- La fonction de coût est continue par Lipschitz.

La première condition est garantie par l'hypothèse 2.1 ([PAN06], [GLA91]), il nous reste à montrer que la fonction de coût est continue par Lipschitz.

Le coût moyen est $C_a(h_c)$ continu par Lipschitz dans *Hc* si il existe une constante $k \in R_0$ telle que :

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t, h_c + \eta) - C_{aT}(t, h_c)\right| \leq k.\left|(h_c + \eta) - h_c\right| \quad \forall h_c, h_c + \eta \in H_c.$$

L'estimation échantillonnée de la différence entre le coût moyen de la trajectoire perturbée et le coût moyen de la trajectoire nominale est donnée par :

$$C_{aT}^{\eta}(t, h_c + \eta) - C_{aT}(t, h_c) = E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs + \frac{T_w}{T}.(ct - cs^-)\right).\eta\right]$$

Nous avons deux cas de cs^- :

❖ Cas 1 : si $cs^- \leq \frac{T_{sv}}{T_w}.cs + ct$

Nous avons $C_{aT}^{\eta}(t, h_c + \eta) - C_{aT}(t, h_c) = E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs + \frac{T_w}{T}.(ct - cs^-)\right).\eta\right] \geq 0$ alors

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|=\left|E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs+\frac{T_w}{T}.(ct-cs^-)\right).\eta\right]\right|\leq\ \left|E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs+\frac{T_w}{T}.ct\right).\eta\right]\right|$$

Nous avons $T_{sv}+T_w\leq T$ alors

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq\ \left|E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs+\frac{T_w}{T}.ct\right).\eta\right]\right|\leq\left|E\left[(cs+ct).\eta\right]\right|$$

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq\ \left|E\left[cs+ct\right]\right|.\left|\eta\right|$$

Nous supposons $k=\left|E\left[cs+ct\right]\right|$, alors $\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq k.\left|\eta\right|$.

❖ Cas 2 : si $cs^-\ >\frac{T_{sv}}{T_w}.cs+ct$

Nous avons $C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)=\ E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs+\frac{T_w}{T}.(ct-cs^-)\right).\eta\right]<0$ alors

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|=\left|E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs+\frac{T_w}{T}.\ (ct-cs^-)\right).\eta\right]\right|$$

$$=\left|E\left[\left(\frac{T_w}{T}.(cs^--ct)-\frac{T_{sv}}{T}.cs\right).\eta\right]\right|\leq\left|E\left[\left(\frac{T_w}{T}.cs^-\right).\eta\right]\right|$$

Nous avons $T_w\leq T$ alors

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq\ \left|E\left[\left(\frac{T_w}{T}.cs^-\right).\eta\right]\right|\leq\left|E\left[(cs^-).\eta\right]\right|$$

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq\ \left|E\left[cs^-\right]\right|.\left|\eta\right|$$

Nous supposons $k=\left|E\left[cs^-\right]\right|$, alors $\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq k.\left|\eta\right|$.

Dans tous les cas nous avons $\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c)\right|\leq k.\left|\eta\right|$, alors la fonction est continue selon Lipschitz.

CQFD

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme (algorithme d'estimation) permettant de déterminer les estimateurs IPA ($X_c^{'}(h_c)$, $G_c^{'}(h_c)$ et $B_c^{'}(h_c)$) qui seront utilisés par la suite dans un algorithme d'optimisation.

Soit S, F et R les estimateurs IPA (paramètres) qui seront utilisés dans l'algorithme suivant, tel que $X_c^{'}(h_c) = \frac{S}{T}$, $G_c^{'}(h_c) = \frac{R}{T}$ et $B_c^{'}(h_c) = \frac{F}{T}$.

Algorithme des estimateurs IPA.

Début

S= 0, F=0, R=0, t=0, q=0, l=0, w=0 // Initialisation

Faire

- Si $t = t_{sj}^{\eta}$ alors q=t_{sj}^{η}.
- Avancer t.
- Si $t = t_{vj}$ alors l=t_{vj}.
- Avancer t.
- Si $t = t_{vj}^{\eta}$ alors w=t_{vj}^{η}.

  S= S+ (w-q).

  R=F=F+ (w-l).

  q=l=w=0.
- Avancer t.

Tant que t<T

$X_c^{'}(h_c) = \frac{S}{T}$, $G_c^{'}(h_c) = \frac{R}{T}$ et $B_c^{'}(h_c) = \frac{F}{T}$.

Fin.

Dans ce qui suit, nous présentons l'algorithme d'optimisation qui détermine le niveau du stock optimal.

2.4.2 Algorithme d'optimisation

L'algorithme d'optimisation nous permet de déterminer le niveau du stock optimal h_c. Il est donné par :

Début

h_{cmin}=0 et h_{cmax}= $MTTR.D_{cmoy}(t)$, avec $D_{cmoy}(t)$ est la moyenne des demandes.

Faire

Etape 1 : h_c= h_{cmax}

Etape 2 : Déterminer les estimateurs R, S et F qui correspondent à h_c= h_{cmax} par l'utilisation de l'algorithme des estimateurs IPA.

Etape 3 : Déterminer l'estimation du gradient de la fonction de coût $V_c(h_c)$ à partir des estimateurs R, S et F, avec $V_c(h_c) = ((ct.\,R) + (cs.\,S) - (cs^{-}.\ F))/T$.

Etape 4 : Si $V_c(h_c) \leq 0$ alors h_{min} = h_{max} et h_{max}= 2*h_{max} et revenir à l'étape 1, sinon passer à l'étape 5.

Etape 5 : h_m= (h_{max}+ h_{min})/2 puis déterminer $V_c(h_m)$.

Etape 6 : Si $V_c(h_m) < 0$ alors $h_{min} = h_m$ si non $h_{max} = h_m$.

Etape 7 : Si $h_{max} - h_{min} > \varepsilon$ revenir à l'étape 1, sinon passer à l'étape 8.

Etape 8 : Le stock optimal est égal à h_m.

Fin.

Dans ce qui suit, des résultats numériques sont présentés pour montrer l'intérêt de notre méthode et étudier l'impact du délai de livraison sur la valeur de h_c.

2.4.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous étudions l'impact du délai de livraison sur h_c pour les deux cas suivants :

- Cas 1: la demande est comprise entre 0 et 1 durant τ. En effet, ce cas correspond au fait que le client s'attend à recevoir sa demande avant de faire une nouvelle demande. Autrement dit, si le client a fait une demande à l'instant t il doit attendre l'instant $t+\tau$ (l'instant où le client reçoit sa demande) pour faire une nouvelle demande.

- Cas 2: la demande est comprise entre 0 et 1 à chaque instant t. Ce cas correspond au fait que le client fait une demande à chaque instant t et il la reçoit l'instant $t+\tau$.

La demande est générée par la loi uniforme (pour l'événement demande) et normale (pour la valeur de la demande), *MTBF* et *MTTR* sont générés par des lois exponentielles. Pour valider les résultats des simulations, nous avons utilisé le teste de Student pour chaque simulation et qui consiste à calculer le coût ($C_c(h_c)$) itérativement cent fois, de déterminer à partir de ces valeurs calculés l'intervalle de confiance en utilisant la table de la loi de Student [SAD00] et enfin de vérifier que chaque valeur de coût ($C_c(h_c)$) appartient à cet intervalle. En effet, nous avons établie une fonction test qui permet de vérifier si chaque valeur de coût appartient à l'intervalle de confiance, puis de déterminer le pourcentage des valeurs qui appartiennent à cet intervalle. Nous présentons les résultats des simulations avec les pourcentages donnés par la fonction test. Les résultats des simulations des cas 1 et 2 sont présentés respectivement dans les tableaux Tableau 2.1 et Tableau 2.2.

Pour les deux cas, τ varie de 1 à 10 et le programme détermine le niveau du stock optimal h_c qui minimise la fonction de coût moyen en fonction de τ. Les paramètres de simulation sont les suivants :

- $U_c = 1$ pièce/unité de temps.
- La moyenne des demandes est égale à 0,8.
- La moyenne du temps de bon fonctionnement *MTBF* est égale à 2 et la moyenne du temps de réparation *MTTR* est égale à 1.
- Le coût unitaire de stockage cs est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire de transport ct est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire d'une demande perdue cs^- est égal à 20 unités monétaires.
- Le temps total de simulation est égal à 10E+07 unités de temps.

- Le nombre de degré de liberté choisi pour déterminer les bornes des intervalles de confiance à partir de la table de loi de Student est égal à 4 degrés de liberté.

τ	Niveau du stock optimal (h_c)	C_c (h_c) (*unité monétaire*)	Pourcentages des valeurs de coût qui appartiennent à l'intervalle de confiance
1	3,304688	4,4827688	100%
2	1,554688	2,5840229	100%
3	1,289063	2,1467997	100%
4	1,179688	1,0152657	100%
5	1,054688	0,9751879	100%
6	0,094891	0,2440277	98%
7	0,086890	0,2767514	99%
8	0,078889	0,2804922	100%
9	0,064000	0,0857413	99%
10	0,059900	0,0799672	98%

Tableau 2.1 : Impact du délai de livraison sur h_c (cas 1)

τ	Niveau du stock optimal (h_c)	C_c (h_c) (*unité monétaire*)	Pourcentages des valeurs de coût qui appartiennent à l'intervalle de confiance
1	3,318970	4,4819560	100%
2	3,304688	4,4827136	100%
3	3,304688	4,4829292	100%
4	3,304688	4,4840012	100%
5	3,318970	4,4828368	100%
6	3,304688	4,4825640	100%
7	3,304688	4,4829468	100%
8	3,304688	4,4828268	100%
9	3,318970	4,4832792	100%
10	3,304688	4,4816596	100%

Tableau 2.2 : Impact du délai de livraison sur h_c (cas 2)

Nous pouvons voir que le délai de livraison dans le cas 1 a un impact sur la valeur de h_c. En effet, le cas 1 le client s'attend à recevoir sa demande avant de faire une nouvelle demande. Alors, le nombre total de demandes diminue lorsque que le délai de livraison augmente, le niveau de stock diminue lorsque les demandes diminue (selon la politique du

point de séparation). Donc pour ce cas, la valeur de h_c qui minimise le coût moyen bien sûr diminue lorsque le délai de livraison τ augmente. Pour le cas 2, la demande est indépendante du délai de livraison, donc le niveau de stock est également indépendant du délai de livraison. Donc, pour le cas 2 le délai de livraison n'a pas d'impact sur la valeur de h_c.

2.5 Conclusion.

Nous avons appliqué un modèle à flux continus pour un système de production en tenant compte des délais de livraison. Le système est composé d'une machine, d'un stock de capacité infinie et d'un client qui demande à chaque instant une quantité de produit aléatoire. Le délai de livraison est connu et constant. Nous avons utilisé la politique du point de séparation pour piloter la production. Pour déterminer le niveau de stock optimal qui minimise le coût, nous avons appliqué la méthode IPA. Ainsi, nous avons étudié et analysé les trajectoires du niveau de stock et du nombre de pièces transportées. Nous avons obtenu deux cycles alternés et répétitifs : le premier cycle correspond au fait que la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale plus un décalage, ce cycle correspond à l'obtention du stock saturé sur la trajectoire perturbée. Le deuxième cycle correspond au fait que les trajectoires perturbée et nominale sont égales, ce cycle correspond à la construction du stock. Nous avons généralisé ces études par des théorèmes. Nous avons ensuite utilisé ces théorèmes pour déterminer les estimateurs IPA et prouvé qu'ils sont non biaisés.

Nous avons déterminé les valeurs optimales de h_c par un algorithme d'optimisation qui utilise les estimateurs IPA. Nous avons simulé deux cas qui étudient l'impact des délais de livraison sur h_c. Les délais de livraisons ont un impact sur la valeur du stock optimal dans le cas où la demande est comprise entre 0 et 1 durant τ. Ce cas correspond au fait que le client s'attend à recevoir sa demande avant de faire une nouvelle demande, d'où le nombre total de demandes diminue lorsque que le délai de livraison augmente. Alors le niveau de stock diminue lorsque les demandes diminuent.

Cette étude a donné lieu à une présentation dans une conférence internationale [TUR10a].

Dans la suite, nous allons modéliser notre système par un modèle à flux discrets, afin de faire une comparaison entre les résultats obtenus pour un modèle à flux discrets et pour un modèle à flux continus. En effet, la méthode IPA est largement appliquée au modèle à flux continus dans de nombreux travaux avec de bons résultats. Par conséquent, nous voulons évaluer les résultats obtenus pour un modèle à flux discrets en les comparants avec les résultats obtenus dans ce chapitre en utilisant les mêmes paramètres et mêmes hypothèses.

Chapitre 3 : Application de la méthode IPA sur un modèle à flux discrets d'un système de production avec un délai de livraison constant

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au même système de production que celui étudié dans le chapitre précédent. Nous avons utilisé dans le chapitre précédent un modèle à flux continus pour analyser et optimiser ce système. Dans ce chapitre, nous allons utiliser un modèle à flux discrets pour modéliser, analyser et simuler le système de production en tenant toujours compte des délais de livraison. La méthode IPA (analyse des perturbations infinitésimale) sera également appliquée pour ce modèle pour trouver le niveau de stock optimal. L'objectif de ce chapitre n'est pas seulement de déterminer le niveau de stock optimal, mais aussi de comparer les résultats trouvés dans le chapitre précédent à ceux qui sont trouvés dans ce chapitre. En effet, il s'agit de comparer les résultats donnés par l'application de la méthode IPA sur un modèle à flux continus (chapitre précédent) à ceux qui sont donnés par l'application de la méthode IPA sur un modèle à flux discrets.

Les modèles à flux discrets ([FEN00], [MOU07]) sont souvent considérés plus réalistes pour les systèmes de fabrication discrète que les modèles à flux continus. En effet, pour l'évaluation des performances ou le contrôle des flux en temps réel, les modèles à flux discrets permettent de suivre l'évolution du système pièce par pièce. Ainsi ils sont généralement plus faciles à simuler. D'après nos connaissances, il n'existe pas de travaux qui appliquent la méthode IPA à des modèles à flux discrets, en raison du fait que généralement les estimateurs deviennent biaisé pour ces modèles [CAS02]. En effet, l'absence de biais pour les estimateurs est la condition principale pour rendre l'application de l'IPA utile en pratique. Ces estimateurs non biaisés peuvent être ensuite utilisés dans des algorithmes d'approximation stochastique. Malheureusement, les modèles à flux discrets comme les modèles à flux continus négligent certaines caractéristiques importantes des systèmes de fabrication tels que les délais de production et les délais de livraison.

De nombreux fabricants pensent à réduire les retards de transport, tels que le délai de livraison. Ce délai a un impact considérable sur les mesures de performance. En général, les retards sont modélisés par l'utilisation d'équations différentielles de retard à la place des équations différentielles ordinaires. Il existe des travaux qui réalisent l'importance des retards en examinant l'impact des retards sur le pilotage optimal d'un job shop de façon à minimiser le coût total, mais le système considéré est composé seulement de deux étages. Mourani *et al.* [MOU07] ont étendu le modèle de Van Ryzin et ils ont proposé un modèle de réseau de Petri continu avec des retards pour la modélisation des performances et l'optimisation des lignes de transfert. Swihart et Papastavrou [SWI99] ont développé un modèle stochastique et

dynamique pour les problèmes de ramassage et de livraison. Les auteurs ont considéré les variations des capacités des véhicules. Proth *et al.* [PRO97] ont proposé un modèle de planification d'assemblage et de stockage des pièces sous l'hypothèse d'une demande constante pour les produits finis et des délais d'approvisionnement aléatoires pour les pièces à assembler. Les auteurs prennent en compte le coût de stockage des pièces et le coût de pénalité.

Cependant, l'étude des systèmes de production avec des délais de livraison combinée à l'IPA est un sujet très récent.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous allons déterminer les équations du système dans la première section de ce chapitre. Puis, nous allons écrire la fonction de coût moyen qui dépend du niveau de stock, du nombre de demandes perdues et du nombre de pièces transportées. Nous allons étudier dans la deuxième section les deux trajectoires IPA du niveau de stock (une trajectoire nominale et une perturbée), du nombre de pièces transportées et du nombre de pièces perdues pour une perturbation positive. Par la suite, nous donnons les théorèmes qui généralisent ces études et qui seront utilisés dans la troisième section pour estimer durant la simulation les différences de la fonction de coût. Ces estimateurs sont ensuite implantés dans un algorithme d'optimisation basé sur la méthode IPA pour déterminer la valeur du stock optimal, et les résultats donnés par cet algorithme sont présentées à la fin de la troisième section.

Dans la conclusion, nous synthétisons les résultats de ce chapitre et les critiquons en les comparants aux résultats du chapitre précédent. Enfin, nous donnons quelques perspectives à nos travaux.

3.2 Système de production considéré

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle à flux discrets pour le même système de production que celui présenté dans le chapitre précédent (Figure 2.1). Les variables $D_c(t)$, $u_c(t)$, U_c, $x_c(t)$ et h_c, sont remplacés respectivement par $D_d(t)$, $u_d(t)$, U_d, $x_d(t)$ et h_d, τ et $\alpha(t)$ sont inchangés. Nous ajoutons deux autres variables $y_d(t)$ (le nombre des pièces qui sortent du stock à l'instant t) et $X_{Td}(t)$ (le nombre des pièces transportées à l'instant t). La demande $D_d(t)$ est booléenne et arrive selon une distribution de Bernoulli. Nous conservons les mêmes hypothèses que celles du chapitre précédent.

Nous considérons le cas d'une capacité infinie du stock, où le nombre de produits dans le stock à l'instant t est noté par $x_d(t)$ et donné par :

$$x_d(t) = x_d(t\text{-}dt) + u_d(t\text{-}dt) - y_d(t) \tag{3.1}$$

Les pièces qui sortent du stock prennent un temps de livraison τ pour être transportée. Le nombre des pièces qui sortent du stock à l'instant t est noté par $y_d(t)$ et donné par :

$$y_d(t) = \begin{cases} D_d(t) & si\ x_d(t\text{-}dt) \geq D_d(t) \\ 0 & si\ x_d(t\text{-}dt) = 0 \\ x_d(t-dt) & si\ x_d(t\text{-}dt) < D_d(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour notre système, nous supposons que les pièces qui sortent du stock seront transportées dans un véhicule qui est considéré comme un stock. Nous supposons aussi que le nombre de pièces existantes dans ce véhicule à l'instant t est le nombre de pièces transportées à l'instant t. En effet, le nombre de pièces qui sortent du stock ($y_d(t)$) est le nombre de pièces qui entrent dans le véhicule et le nombre de pièces qui arrivent au client est le nombre de pièces qui sortent du véhicule. Alors le comportement du nombre des pièces transportées est semblable à celui du nombre des pièces stockées. On note $X_{Td}(t)$ est le nombre des pièces transportées à l'instant t. Il est égal au nombre des pièces transportées à l'instant précédent ($X_{Td}(t - dt)$), plus le nombre de pièces qui sortent du stock ($y_d(t)$), moins le nombre de pièces qui arrivent chez le client ($y_d(t - \tau)$). D'où l'équation :

$$X_{Td}(t)= X_{Td}(t - dt) + y_d(t) - y_d(t - \tau) \tag{3.3}$$

Lorsque la machine est en panne (i.e. $\alpha(t) = 0$) $u_d(t)=0$. Lorsque la machine est en état de marche (i.e. $\alpha(t) = 1$), $u_d(t)$ peut prendre une valeur entre 0 et U_d inclus.

$$u_d(t) = \begin{cases} U_d & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d(t) < h_d \\ D_d(t) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d(t) = h_d \\ D_d(t) - (x_d(t) - h_d) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d(t) > h_d \\ 0 & si\ \alpha(t) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Hypothèse 3.1 : Nous supposons que le niveau optimal du stock est strictement supérieur à 1 (h_d>1). En effet, lorsque h_d =1 l'étude théorique des trajectoires IPA ne peut pas être généralisée.

Remarque 3.1: Nous allons justifier l'hypothèse 3.1 dans les démonstrations du lemme 3.3 (dans la section 3.3).

Les événements possibles sont les mêmes événements que ceux considérés dans le chapitre précédent en ajoutant un événement production machine (UM).

Hypothèse 3.2 : Pour l'application de la méthode IPA et afin d'éviter des discontinuités importantes, nous devons considérer un seul événement à chaque instant, donc nous proposons des priorités entre les événements si différents événements se produisent au même instant. La priorité est attribuée dans un ordre décroissant comme suit :

- Evénement impliquant le stock : SS ou SV,
- Evénement impliquant la machine : UM, PM ou RM,
- Evénement demande : DE.

Cette priorisation des événements n'a pas d'effet sur l'évolution du système, puisqu'on tient compte de tous les événements qui arrivent au même instant.

Remarque 3.2 : Nous avons à un instant t l'événement DE si $\alpha(t)=0$ (machine en panne), et si nous ne n'avons pas SS ou SV, et si nous n'avons pas forcément un événement PM ($u_d(t)$=0).

La fonction de coût $C_d(t)$, à l'instant t, qui dépend du nombre de pièces dans le stock B, le nombre de pièces transportées et des demandes perdues, est donnée par:

$$C_d(t) = cs.x_d(t) + cs^-.D_d^0(t) + ct.X_{Td}(t) \tag{3.5}$$

(cs , ct , cs^- sont définis dans le chapitre précédent)

Avec $D_d^0(t)$ le nombre de demandes non satisfaites (perdues) ($D_d^0(t) = D_d(t) - y_d(t)$).

La fonction de coût total, notée par $CT_d(h_d)$ et qui dépend de h_d est donnée par :

$$CT_d(h_d) = \sum_{t=0}^{t=T} C_d(t) \text{ avec } T \text{ le temps total de simulation} \tag{3.6}$$

Dans la section suivante, nous analysons les trajectoires du niveau du stock, les pièces sortantes du stock et les pièces transportées. Cette étude nous permettra de trouver les estimateurs IPA et de prouver que ces estimateurs sont non biaisés.

3.3 Etude des trajectoires

Soit $x_d(t)$ le niveau du stock de la trajectoire nominale avec comme stock optimal h_d, et $x_d^\delta(t)$ le niveau du stock pour la trajectoire perturbée si la perturbation est positive (Figure 3.1 et Figure 3.2). Le cas d'une perturbation négative est donné en Annexe. Pour cela, nous supposons que le niveau du stock optimal dans le cas δ >0 est augmenté par une perturbation, et nous évaluons les changements induits dans la fonction de coût en utilisant des arguments géométriques.

Remarque 3.3 : Le niveau du stock optimal de la trajectoire perturbée est $h_d + \delta$.

Pour l'étude des trajectoires nous conservons les mêmes hypothèses et les mêmes remarques que celles présentées dans le chapitre précédent en ajoutant l'hypothèse suivante :

La perturbation $|\delta| = 1$ (dans la théorie de l'IPA, la perturbation δ doit être très petite mais différente de 0, alors nous avons choisi $|\delta| = 1$ (plus petite valeur entière)).

Les notations suivantes sont utilisées :

t_{sv}^δ : Instant où le stock est vide pour la trajectoire perturbée.

t_{sv} : Instant où le stock est vide pour la trajectoire nominale.

$y_d^\delta(t)$: Nombre de pièces sortant du stock à l'instant t pour la trajectoire perturbée.

$u_d^\delta(t)$: Taux de production à l'instant t pour la trajectoire perturbée.

$X_{Td}^{\delta}(t)$: Nombre de pièces transportées à l'instant *t* pour la trajectoire perturbée.

t_{ssj}^{δ} : $j^{ième}$ instant où le stock pour la trajectoire perturbée devient saturé et qui entraîne un décalage ε entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée $\varepsilon(t) = x_d^{\delta}(t) - x_d(t) = \delta$ alors on a $\varepsilon(t_{ssj}^{\delta} - dt) \neq \varepsilon(t_{ssj}^{\delta})$.

t_j : $j^{ième}$ instant qui annule le décalage entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée avec $\varepsilon(t_j) = 0$ d'où $\varepsilon(t_j - dt) \neq \varepsilon(t_j)$.

L'instant t_j correspond à l'un des instants t_{sv}^{δ} (le stock devient vide pour la trajectoire perturbée) et qui peut correspondre à l'un des deux cas suivants :

- Cas A (Figure 3.1) : ce cas se produit à l'instant *t+dt,* lorsque nous avons à l'instant *t* $\alpha(t) = 0$ ($u_d(t) = u_d^{\delta}(t) = 0$) et $x_d(t) = 0$, et si à l'instant *t+dt* $D_d(t + dt) = 1$. L'instant *t+dt* est l'instant t_j.
- Cas B (Figure 3.2) : ce cas se produit à l'instant *t+dt,* lorsque nous avons à l'instant *t* $\alpha(t) = 1$ ($u_d(t) = u_d^{\delta}(t) = 1$) et $x_d(t) = 0$, et si à l'instant *t+dt* $D_d(t + dt) = 1$.

L'instant *t+dt* est l'instant t_j.

On peut conclure que si $t = t_j$ alors nous avons deux cas possibles :

- Cas A nous avons $x_d(t_j) = 0 = x_d^{\delta}(t_j)$.
- Cas B nous avons $x_d(t_j) = 1 = x_d^{\delta}(t_j)$.

Des exemples d'évolution des deux trajectoires pour δ>0 et qui représentent les cas A et B sont donnés respectivement dans les Figure 3.1et Figure 3.2.

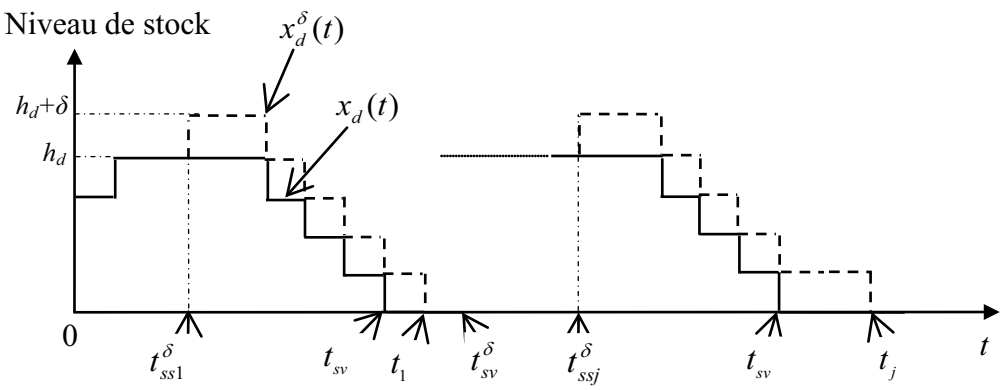

Figure 3.1 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas A)

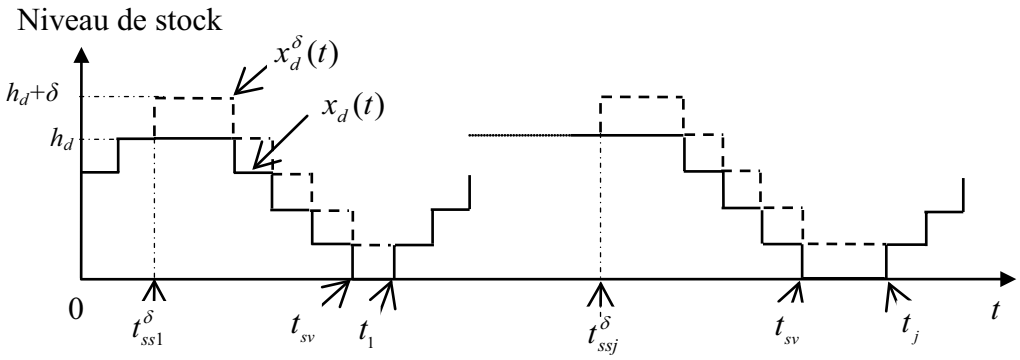

Figure 3.2 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas B)

Soit $[0,T]$ un horizon fini, nous considérons les trajectoires $x_d(t)$ et $x_d^\delta(t)$ avec $t \in [0,T]$. L'intervalle $[0,T]$ peut être divisé selon deux cycles qui s'alternent : les premiers cycles apparaissent lorsque $t \in [t_{ssj}^\delta, t_j[$ et les autres lorsque $t \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$(voir Figure 3.3). Pour ces intervalles, les trajectoires perturbée et nominale sont analysées et comparées.

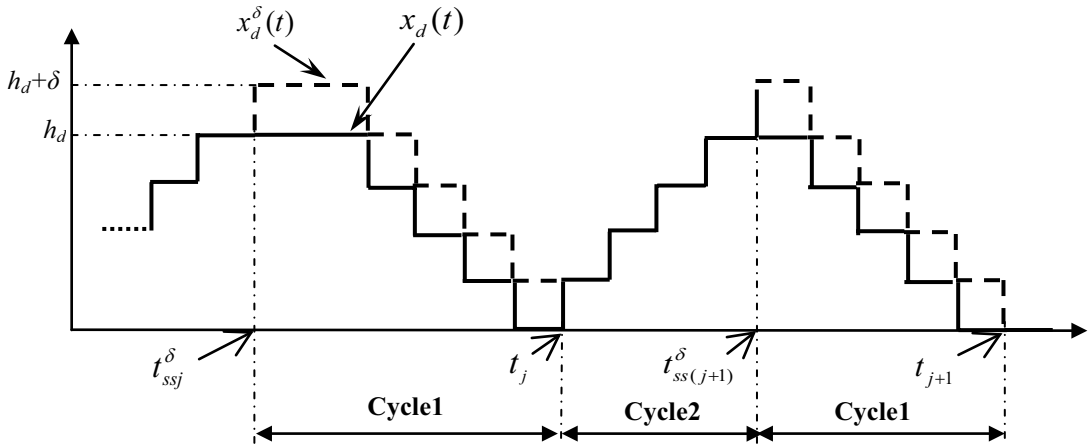

Figure 3.3 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (deux cycles en alternance)

Dans ce qui suit, l'étude des trajectoires sera généralisée dans six théorèmes qui seront utilisés pour déterminer les estimateurs IPA.

Nous allons montrer que si $t \in [t_{ss}^\delta, t_j[$, $\delta > 0$ et $h_d > 1$ la trajectoire perturbée $x_d^\delta(t)$ est égale à la trajectoire nominale $x_d(t)$ plus la perturbation δ (Théorème 3.1), puis si $t \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$ et $h_d > 1$ la trajectoire nominale $x_d(t)$ est égale à la trajectoire perturbée $x_d^\delta(t)$ (Théorème 3.2).

Dans ce qui suit, nous présentons les lemmes 3.1 et 3.2 qui seront utilisés dans les démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.2. En effet, le niveau du stock dépend de la production de la machine en amont mais également des pièces qui sont transportées chez le client

(équation (3.2)). Les lemmes 3.1 et 3.2 suivants nous permettent de connaître le nombre de pièces transportées pour la trajectoire nominale et pour la trajectoire perturbée.

Lemme 3.1: Si $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[\setminus \{t_{sv}\}$ alors $y_d^{\delta}(t+dt) = y_d(t+dt) = D_d(t+dt)$.

Preuve du Lemme 3.1 :

Si $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[\setminus \{t_{sv}\}$ nous avons $x_d^{\delta}(t) > 0$, car si $t = t_j$ nous avons $x_d^{\delta}(t_j) = 0$ ou 1, or t_j n'est pas inclus dans l'intervalle $\left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$. D'où $y_d^{\delta}(t+dt) = D_d(t+dt)$ (équation (3.2)).

Etudions $y_d(t+dt)$:

(a) : Si $x_d(t) > 0$ alors $y_d(t+dt) = D_d(t+dt)$ (équation (3.2)). Dans ce cas, nous avons bien $y_d(t+dt) = y_d^{\delta}(t+dt) = D_d(t+dt)$.

(b) : Si $x_d^{\delta}(t) = 0$ alors $y_d(t+dt) = 0$ (Ce cas est impossible car $t \neq t_{sv}$)

Donc $\forall t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$ si on n'a pas l'événement SV pour la trajectoire nominale, alors $y_d(t+dt) = y_d^{\delta}(t+dt) = D_d(t+dt)$.

CQFD

Remarque 3.4 : L'étude des valeurs de $y_d(t+dt)$ et $y_d^{\delta}(t+dt)$ dans le cas d'événement SV sera traité dans l'étude du cas 1 du théorème 3.1 (cas où le premier événement à $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$ pour la trajectoire nominale est SV).

Lemme 3.2 : Si $t \in \left]t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}\right[\setminus \{t_{sv}\}$ et $t + dt \in \left]t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}\right[\setminus \{t_{sv}\}$ et si $x_d^{\delta}(t-dt) = x_d(t-dt)$ et $x_d^{\delta}(t) = x_d(t)$ alors $y_d^{\delta}(t+dt) = y_d(t+dt) = D_d(t+dt)$.

Preuve du Lemme 3.2 :

Si $t \in \left]t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}\right[\setminus \{t_{sv}\}$ alors $x_d(t_j + n.dt) > 0$ et $x_d^{\delta}(t_j + n.dt) > 0$ (n=1,2…), car si $t \neq \{t_{sv}, t_j\}$ alors $x_d(t_j + n.dt) > 0$ et $x_d^{\delta}(t_j + n.dt) > 0$ (cas A et cas B).

Alors d'après l'équation (3.2) on a :

$$y_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt) = D_d(t_j + (n+1).dt) \text{ si } x_d^{\delta}(t_j + n.dt) > 0.$$

$$y_d(t_j + (n+1).dt) = D_d(t_j + (n+1).dt) \text{ si } x_d(t_j + n.dt) > 0 \ .$$

D'où $y_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt) = y_d(t_j + (n+1).dt)$.

CQFD

Le lemme suivant montre qu'à l'instant t_{ssj}^{δ} le niveau du stock de la trajectoire perturbée devient saturé ce qui entraîne un décalage (égal à δ) entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée, ce lemme correspond à la condition initiale du théorème 3.1.

Lemme 3.3 : Si $\delta > 0$ et $h > 1$, alors $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}) = x_d(t_{ssj}^{\delta}) + \delta$.

Nous allons démontrer ce lemme après les démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.2 parce que celles-ci sont liées.

Le Théorème 3.1 montre que la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale plus la perturbation si $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$, cette période correspond à l'achèvement du stock saturé pour la trajectoire perturbée.

Théorème 3.1 : Si $\delta > 0$ et si $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}) = x_d(t_{ssj}^{\delta}) + \delta = h_d + \delta$ alors $x_d^{\delta}(t) = x_d(t) + \delta$ pour tout $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$.

Preuve du théorème 3.1 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Supposons qu'à l'instant $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$, l'égalité $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta$ soit vraie, nous devons montrer qu'à l'instant $t + dt = t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt$, $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) + \delta$.

En utilisant l'hypothèse de la récurrence, les équations du stock sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) &= x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) \\ &= x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta + u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) \end{aligned}$$

Et

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - y_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt).$$

D'après le lemme 3.1, si $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[\setminus \{t_{sv}\}$ nous avons:

$$x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta + u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - D_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt).$$

Et

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - D_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt).$$

Par conséquent, $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) - x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta$.

Donc, il suffit d'étudier les six cas $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt)$ et $u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt)$ pour montrer ce théorème.

A l'instant $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$, différents événements peuvent se produire. Ils sont donnés dans le Tableau 3.1.

cas	Premier événement à $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$ pour la trajectoire nominale
1	SV
2	SS
3	PM
4	RM
5	UM
6	DE

Tableau 3.1 : Evénements possibles à l'instant $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$

Avant de démontrer cette récurrence dans les six cas possibles, il ne faut pas oublier que le niveau maximal du stock de la trajectoire perturbée est $h_d + \delta$ et que par conséquent $u_d^{\delta}(t)$ est donné par :

$$u_d^{\delta}(t) = \begin{cases} U_d & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d^{\delta}(t) < h_d + \delta \\ D_d(t) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d^{\delta}(t) = h_d + \delta \\ D_d(t) - (x_d^{\delta}(t) - (h_d + \delta)) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d^{\delta}(t) > h_d + \delta \\ 0 & si\ \alpha(t) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

❖ **Cas 1 :** A $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est SV, avec $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$ et $t + dt \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$.

Nous avons donc $x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = 0$ et $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta = \delta$.

Deux cas sont possibles : $u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt)$ et $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt)$ selon les équations (3.4) et (3.7).

- *Cas (1.a)* : Si $\alpha(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = 1$ nous avons $h_d > 1$ ($h_d + \delta > \delta$) alors $u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = U_d$ et $u^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = U_d$, d'où $u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = U_d = u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt)$.

- *Cas (1.b)* : Si, $\alpha(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = 0$ alors $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = 0$.

  Par conséquent, dans tous les cas $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt)$.

Etudions $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt)$ et $x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt)$ suivant les différentes valeurs possibles de $y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt)$ et $y_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt)$ données par l'équation (3.2) (le lemme 3.1 n'est pas applicable dans ce cas).

Nous avons $y_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=0$ car $x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=0$.

Etudions la valeur de $y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)$ à $t=t_{ssj}^{\delta}+n.dt$.

Nous avons $y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=D_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)$ car $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=\delta=1$.

- *Cas(1.c)* : Si $D_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=0$ alors $y_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=0=y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)$

  D'où $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)+\delta=1$.

- *Cas(1.d)* : Si $D_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=1$ alors
  $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=1+u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-1=u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$.

  Selon la valeur de $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$ nous obtenons deux cas :

  - *Cas(1.d.1)* : Si $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=1$ (RM à *t=n+dt*), nous remarquons que ce cas correspond au cas B (Figure 3.2), alors $t+dt=t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt=t_j$, cas impossible car dans ce cas $t+dt\notin\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$.

  - *Cas(1.d.2)* : Si $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=0$, nous remarquons que ce cas correspond au cas A (Figure 3.1), alors $t+dt=t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt=t_j$, cas impossible car sinon $t+dt\notin\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$.

D'où le *Cas(1.d)* est impossible. Le seul cas possible lorsque nous avons SV pour la trajectoire nominale est donc le *Cas(1.c)* ($D_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=0$). Ce qui donne $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)+\delta=1$.

Donc $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)+\delta$.

- **Cas 2 :** A $t=t_{ssj}^{\delta}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est SS, avec $t\in\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$ et $t+dt\in\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$.

Si à $t=t_{ssj}^{\delta}+n.dt$, on a l'événement SS pour la trajectoire nominale (i.e. $x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)\geq h$), nous avons également l'événement SS pour la trajectoire perturbée car $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)+\delta\geq h+\delta$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$ et $u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$ données par les équations (3.4) et (3.7).

- *Cas (2.a)* : Si $\alpha(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=1$ et $x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)<h_d$. Ceci n'est pas possible car nous avons l'événement SS.

- *Cas (2.b)* : Si $\alpha(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=1$ (UM et SS ou RM et SS) et $x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=h_d$ alors $\forall\ h>1$, nous avons $u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=D_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$.

Comme $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)+\delta=h_d+\delta$, alors $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=D_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)\ \ \forall\ h>1$.

Par conséquent, nous avons bien $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$.

- *Cas (2.c)* : Si $\alpha(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=1$ (UM et SS ou RM et SS), $x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)>h$ et $\forall\ h>1$ alors, nous avons $u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=D_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-(x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-h_d)$.

Comme $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)+\delta>h_d+\delta$ alors

$$\begin{aligned}u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)&=D_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-(x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-(h_d+\delta))\\&=D_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-(x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)+\delta-h_d-\delta)\\&=D_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-(x_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)-h_d).\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons bien $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$.

- *Cas (2.d)* : Si $\alpha(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=0$ (PM et SS), $u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=0$.

Par conséquent dans tous les sous cas $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)$ et donc $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)+\delta$.

- ***Cas* 3 :** A $t=t_{ssj}^{\delta}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est PM, avec $t\in\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$ et $t+dt\in\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$.

Si à $t=t_{ssj}^{\delta}+n.dt$, on a l'événement PM pour la trajectoire nominale, nous avons également l'événement PM pour la trajectoire perturbée. Donc $\alpha(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=0$ et par conséquent, $u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=u_d(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=0$.

Alors nous avons bien $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssj}^{\delta}+(n+1).dt)+\delta$.

- **Cas 4 et 5 :** à $t=t_{ssj}^{\delta}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est RM ou UM, avec $t\in\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$ et $t+dt\in\left[t_{ssj}^{\delta},t_j\right[$.

Nous avons $\alpha(t_{ssj}^{\delta}+n.dt)=1$.

Nous n'avons pas SS et SV pour la trajectoire nominale. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir ces événements pour la trajectoire perturbée.

Si nous avions SS pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) \geq h_d + \delta$), alors nous aurions $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) - \delta \geq h_d$, ce qui est impossible.

De la même façon, si nous avions SV pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$), alors nous aurions $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) - \delta = -\delta$, ce qui est impossible.

Puisque $h_d > 1$ alors $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = U_d = 1$ (équations (3.4) et (3.7)), d'où

$$x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta .$$

- **Cas 6 :** à $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est DE, avec $t \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$ et $t + dt \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$, par conséquent, les premiers événements SS, SV, UM. PM et RM ne sont pas possibles pour la trajectoire nominale, d'où $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$ et d'après les équations (3.4) et (3.7) on a $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$.

Alors nous avons bien $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta$.

CQFD.

Remarque 3.5: à $t = t_j$ nous avons la condition initiale du théorème 3.2.

Le lemme suivant montre qu'à l'instant t_j le niveau du stock de la trajectoire perturbée devient vide ce qui annule le décalage entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée, ce lemme correspond à la condition initiale du théorème 3.2.

Lemme 3.4 : à $t = t_j$ nous avons $x_d^\delta(t_j) = x_d(t_j)$.

Nous allons démontrer la preuve de ce lemme après la démonstration du théorème 3.2.

Le théorème 3.2 montre que la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale si $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$. Cette période correspond à la construction du stock.

Théorème 3.2 : Si δ>0 et h>1, et si $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = x_d(t_{ssj}^\delta)$, alors $x_d^\delta(t) = x_d(t)$ pour tout $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$.

Preuve du théorème 3.2 :

Nous allons également démontrer ce théorème par récurrence.

Les équations des stocks sont les suivantes :

$$x_d^\delta(t_j+(n+1).dt) = x_d^\delta(t_j+n.dt) + u_d^\delta(t_j+n.dt) - y_d^\delta(t_j+(n+1).dt)$$
$$= x_d(t_j+n.dt) + u_d^\delta(t_j+n.dt) - y_d^\delta(t_j+(n+1).dt).$$

et

$$x_d(t_j+(n+1).dt) = x_d(t_j+n.dt) + u_d(t_j+n.dt) - y_d(t_j+(n+1).dt).$$

Nous allons donc démontrer cette récurrence dans les six cas possibles.

- ***Cas 1 :*** à $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est SV, avec $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$ et $t+dt \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$ donc $x_d(t_j+n.dt) = 0$ alors $x_d^\delta(t_j+n.dt) = 0$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $y_d^\delta(t_j+(n+1).dt)$ et $y_d(t_j+(n+1).dt)$ données par l'équation (3.2).

Nous avons $y_d^\delta(t_j+(n+1).dt) = y_d(t_j+(n+1).dt) = 0$ car $x_d^\delta(t_j+n.dt) = x_d(t_j+n.dt) = 0$ (SV).

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_j+n.dt)$ et $u_d(t_j+n.dt)$ données par les équations (3.4) et (3.7).

- *Cas (a.1) :* Si $\alpha(t_j+n.dt) = 1$ (UM et SS ou RM et SS) alors $u_d^\delta(t_j+n.dt) = u_d(t_j+n.dt) = U = 1$ car $h > 1$.

- *Cas (b.1) :* Si $\alpha(t_j+n.dt) = 0$ (PM et SS), alors $u_d^\delta(t_j+n.dt) = u_d(t_j+n.dt) = 0$.

Par conséquent dans tous les sous-cas nous avons $u_d^\delta(t_j+n.dt) = u_d(t_j+n.dt)$ et $x_d^\delta(t_j+(n+1).dt) = x_d(t_j+(n+1).dt)$.

- ***Cas 2 :*** à $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est SS, avec $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$ et $t+dt \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$.

On ne peut pas avoir l'événement SS pour la trajectoire perturbée au même instant car $t = t_j + n.dt \notin \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$.

Donc si on a l'événement SS pour la trajectoire nominale, on n'a pas d'événement SS pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_j+n.dt) < h_d + \delta$). Comme la supposition de la récurrence dit que $x_d(t_j+n.dt) = x_d^\delta(t_j+n.dt)$ alors $x_d^\delta(t_j+n.dt) = h_d$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_j+n.dt)$ et $u_d(t_j+n.dt)$ données par les équations (3.4) et (3.7).

- *Cas (2.a)* : si $x_d^\delta(t_j + n.dt) = x_d(t_j + n.dt) > h \ \forall\ h > 1$. Cas impossible car $t = t_j + n.dt \notin \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$.

- *Cas (2.b)* : Si $\alpha(t_j + n.dt) = 1$ (UM et SS ou RM et SS), et $x_d(t_j + n.dt) = h_d$ alors $\forall\ h > 1$, nous avons $u_d(t_j + n.dt) = D_d(t_j + n.dt)$.

Comme $x_d^\delta(t_j + n.dt) = x_d(t_j + n.dt) = h_d$, alors $u_d^\delta(t_j + n.dt) = D_d(t_j + n.dt) \ \ \forall\ h > 1$.

- *Cas (2.c)* : $u_d(t_j + n.dt) = u_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$ si $\alpha(t) = 0$ (PM et SS).

Par conséquent, nous avons bien $u_d^\delta(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt)$ et $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

- ***Cas 3 :*** à $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est PM, avec $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$ et $t + dt \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$. Donc $\alpha(t_j + n.dt) = 0$ et par conséquent $u^\delta(t_j + n.dt) = u(t_j + n.dt) = 0$.

  Alors, nous avons bien $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

- ***Cas 4 et 5 :*** à $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est RM ou UM, avec $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$ et $t + dt \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$.

Nous avons $\alpha(t_j + n.dt) = 1$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_j + n.dt)$ et $u_d(t_j + n.dt)$ données par les équations (3.4) et (3.7) dans le cas où $\alpha(t_j + n.dt) = 1$. Comme le premier événement considéré est RM ou UM, nous n'avons pas SS et SV pour la trajectoire nominale. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir ces événements pour la trajectoire perturbée.

Nous ne pouvons pas avoir l'événement SS pour la trajectoire perturbée, car $t = t_j + n.dt \notin \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$

Si nous avons SV pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$), or $x_d(t_j + n.dt) = x_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$, ce qui est impossible car à $t = t_j + n.dt$ on n'a pas d'événement SV pour la trajectoire nominale.

Puisque $h > 1$ alors $u_d^\delta(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt) = U = 1$ (équations (3.4) et (3.7)).

Nous avons bien $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

❖ ***Cas 6 :*** à l'instant $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est DE, avec $t \in \left[t_j, t^{\delta}_{ss(j+1)}\right[$ et $t + dt \in \left[t_j, t^{\delta}_{ss(j+1)}\right[$.

Pour appliquer le lemme 3.2 dans ce cas, on doit montrer que si nous avons pour la trajectoire nominale l'événement DE, alors nous n'avons pas l'événement SV pour la trajectoire perturbée.

Si nous avons SV pour la trajectoire perturbée (i.e. $x^{\delta}_d(t_j + n.dt) = 0$), alors $x_d(t_j + n.dt) = x^{\delta}_d(t_j + n.dt) = 0$, ce qui est impossible car à $t = t_j + n.dt$ on a un événement DE pour la trajectoire nominale.

Etudions les différents valeurs possibles de $u^{\delta}_d(t_j + n.dt)$ et $u_d(t_j + n.dt)$ donnés par les équations (3.4) et (3.7).

Nous avons l'événement DE pour la trajectoire nominale, alors les événements SS, SV, UM, PM et RM ne sont pas possibles pour la trajectoire nominale, et $\alpha(t_j + n.dt) = 0$ et d'après les équations (3.4) et (3.7), nous avons $u_d(t_j + n.dt) = u^{\delta}_d(t_j + n.dt) = 0$.

Alors, nous avons bien $x^{\delta}_d(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

CQFD

Remarque 3.6: à $t = t^{\delta}_{ssj}$ nous avons la condition initiale du théorème 3.1.

Nous allons montrer les lemmes 3.3 et 3.4.

Preuve du Lemme 3.3 :

À l'instant $t = t^{\delta}_{ssj}$, le niveau du stock est donné par :

$$x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj}) = x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) + u^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) - y^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj}) = h_d + \delta$$

$$x_d(t^{\delta}_{ssj}) = x_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) + u_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) - y_d(t^{\delta}_{ssj}) \ .$$

À l'instant $t = t^{\delta}_{ssj}$ le niveau du stock pour la trajectoire perturbée devient saturé, alors à l'instant $t^{\delta}_{ssj} - dt$ nous avons $x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) < h_d + \delta$.

Le niveau du stock peut augmenter ou diminuer d'une unité, sinon il reste constant. Alors entre $t^{\delta}_{ssj} - dt$ et t^{δ}_{ssj} le niveau du stock a augmenté d'une pièce, ce qui implique que $x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) = x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj}) - 1 = h_d + \delta - 1 = h_d$.

Nous avons $t^{\delta}_{ssj} - dt \in \left[t_{(j-1)}, t^{\delta}_{ssj}\right[$ alors $x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) = x_d(t^{\delta}_{ssj} - dt) = h_d$ (théorème 3.2).

Alors, si $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = h_d + \delta$ et $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta - dt) = h_d$, forcément $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta - dt) = 1$ et $y_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = 0$.

Si $y_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = 0$ et d'après l'équation (3.3) nous avons deux cas:

- Cas 1: $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta - dt) = 0$, ce cas est impossible car $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta - dt) = h_d > 0$.
- Cas 2 : $D_d(t_{ssj}^\delta + \tau) = 0$, alors $y_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = 0 = y_d(t_{ssj}^\delta)$.

Par conséquent nous avons :

$$\begin{aligned} x_d^\delta(t_{ssj}^\delta) &= x_d(t_{ssj}^\delta) + u_d^\delta(t_{ssj}^\delta - dt) - u_d(t_{ssj}^\delta - dt) = h_d + \delta \\ &= x_d(t_{ssj}^\delta) + 1 - u_d(t_{ssj}^\delta - dt) = h_d + \delta . \end{aligned}$$

Etudions les valeurs de $u_d(t_{ssj}^\delta - dt)$.

D'après l'équation (3.4), nous avons $u_d(t_{ssj}^\delta - dt) = D_d(t_{ssj}^\delta - dt)$ car $x_d(t_{ssj}^\delta - dt) = h_d$.

Pour cela, nous allons étudier les valeurs de $D_d(t_{ssj}^\delta - dt)$.

- Cas 3: si $D_d(t_{ssj}^\delta - dt) = 0 = u_d(t_{ssj}^\delta - dt)$ alors:

$$x_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = x_d(t_{ssj}^\delta) + 1 - 0 = h_d + \delta = x_d(t_{ssj}^\delta) + h_d$$

- Cas 4: si $D_d(t_{ssj}^\delta - dt) = 1 = u_d(t_{ssj}^\delta - dt)$ alors:

$$x_d(t_{ssj}^\delta) = x_d(t_{ssj}^\delta - dt) + 1 - 0 = h_d + \delta .$$

Ce cas dépend de h_d.

- *Cas 4.1:* si $h_d > 1$.

Nous allons étudier la possibilité de ce cas selon les valeurs possibles de $x_d(t_{ssj}^\delta - 2.dt)$. Autrement dit, pour chaque valeur de $x_d(t_{ssj}^\delta - 2.dt)$ et pour $D_d(t_{ssj}^\delta - dt) = 1$, nous allons vérifier si $x_d(t_{ssj}^\delta - dt) = h_d$.

Entre $t_{ssj}^\delta - 2.dt$ et $t_{ssj}^\delta - dt$, le niveau du stock peut augmenter ou diminuer d'une unité, sinon il reste constant. Alors nous avons trois valeurs possibles de $x_d(t_{ssj}^\delta - 2.dt)$ qui sont étudiées dans les sous-cas suivants :

- *Cas 4.1.1:* si $x_d(t_{ssj}^\delta - 2.dt) = x_d(t_{ssj}^\delta - dt) + 1 = h_d + 1$ (le niveau de stock est diminué d'une pièce entre $t_{ssj}^\delta - 2.dt$ et $t_{ssj}^\delta - dt$), ce cas est impossible car

$t_{ssj}^{\delta} - 2.dt \in \left\lfloor t_{(j-1)}, t_{ssj}^{\delta} \right\rfloor$, cette période correspond à la construction du stock (théorème 3.2), alors $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) < h_d + 1$.

- *Cas 4.1.2:* si $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = h_d$ (le niveau de stock est le même entre $t_{ssj}^{\delta} - 2.dt$ et $t_{ssj}^{\delta} - dt$), ce cas est le même entre $t_{ssj}^{\delta} - 2.dt$ et $t_{ssj}^{\delta} - dt$.

- *Cas 4.1.3:* si $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) - 1 = h_d - 1$ le niveau de stock est augmenté d'une pièce entre $t_{ssj}^{\delta} - 2.dt$ et $t_{ssj}^{\delta} - dt$), ce cas est impossible car nous avons :

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = h_d = x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) - y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt)$$

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = h_d = h_d - 1 - y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt).$$

Or $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = h_d - 1 > 0$ ($h_d > 1$), alors $y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = D_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = 1$ (équation (3.2)), ce qui implique que ce cas est impossible.

Par conséquent le cas 4 est impossible si $h_d > 1$.

➢ *Cas 4.2 :* si $h_d = 1$.

Comme nous avons étudié le cas 4.1, nous allons étudier la possibilité de ce cas selon les valeurs possibles de $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt)$. Nous avons donc trois sous-cas :

- *Cas 4.2.1:* si $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = h_d + 1$(ce cas est identique au sous-cas 4.1.1).

- *Cas 4.2.2:* si $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = h_d$ (voir sous-cas 4.1.2).

- *Cas 4.2.2:* si $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = h_d - 1$.

Ce cas est possible si et seulement si $y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = 0$ et $u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = 1$, d'où :

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = h_d = x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) - y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt)$$

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = h_d = h_d - 1 - y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt).$$

Nous avons $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = h_d - 1 = 0$ ($h = 1$), alors $y_d(t_{ssj}^{\delta} - dt) = 0$ (équation (3.2)).

Alors nous avons deux cas pour $u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt)$.

- *Cas 4.2.2.a :* si $u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = 0$, alors le cas 4.2.2 est impossible.

- *Cas 4.2.2.b :* si $u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = 1$, alors le cas 4.2.2 est possible.

Nous pouvons donc en conclure que le cas 4 est possible si $h_d = 1$, $u_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = 1$ et $x_d(t_{ssj}^{\delta} - 2.dt) = h_d - 1$. Dans ce cas $x_d(t_{ssj}^{\delta}) = h_d + \delta$, alors le lemme 3.3 n'est pas vérifié. Alors, nous supposons que $h_d > 1$ (*hypothèse 3.1*) pour éviter le cas $h_d = 1$.

Alors nous avons bien $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}) = x_d(t_{ssj}^{\delta}) + \delta$ si $h_d > 1$.

CQFD

Remarque 3.7: Bien que le cas $h_d = 1$ ne soit pas considéré dans la partie théorique, nous les prendrons en compte dans les simulations numériques.

Preuve du Lemme 3.4 :

Nous allons montrer qu'à $t = t_j$ nous avons $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}) = x_d(t_{ssj}^{\delta})$.

Nous avons à $t = t_j$:

$$x_d^{\delta}(t_j) = x_d^{\delta}(t_j - dt) + u_d^{\delta}(t_j - dt) - y_d^{\delta}(t_j) = 0$$

$$x_d(t_j) = x_d(t_j - dt) + u_d(t_j - dt) - y_d(t_j) \ .$$

t_j correspond à l'instant où le stock devient vide d'où $x_d^{\delta}(t_j - dt)$>0, or le niveau du stock d'un instant à un autre peut augmenter ou diminuer d'une unité, ou rester constant.

D'où le stock entre $t_j - dt$ et t_j a diminué d'une unité, alors $x_d^{\delta}(t_j - dt) = 1$.

Nous avons $t_j - dt \in [t_{ssj}^{\delta}, t_j[$, d'après le théorème 3.1 nous avons $x_d^{\delta}(t_j - dt) = x_d(t_j - dt) + \delta$ d'où $x_d(t_j - dt) = 1 - \delta = 0$, alors nous avons $y_d(t_j) = 0$ (équation (3.2))

Pour avoir $x_d^{\delta}(t_j) = 0$ il faut que $u_d^{\delta}(t_j - dt) = 0$ et $y_d^{\delta}(t_j) = 1$.

Si $u_d^{\delta}(t_j - dt) = 0$, nous avons deux cas donnés par l'équation (3.7)

$\alpha(t_j - dt) = 0$.

$u_d^{\delta}(t_j - dt) = D_d(t_j - dt) = 0$ si $x_d^{\delta}(t_j - dt) = 1 = h_d$, c'est un cas impossible car ($h_d > 1$).

Alors le cas possible est lorsque $\alpha(t_j - dt) = 0$ et d'après (3.4) nous avons $u_d(t_j - dt) = 0$.

Alors nous avons :

$$x_d(t_j) = x_d(t_j - dt) + u_d(t_j - dt) - y_d(t_j) = 0 + 0 - 0 = 0 .$$

Nous avons bien $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta) = x_d(t_{ssj}^\delta)$.

CQFD

Nous avons étudié le niveau du stock pour les trajectoires perturbée et nominale, nous allons maintenant étudier le nombre de pièces transportées pour les trajectoires perturbée et nominale ($X_{Td}^\delta(t)$ et $X_{Td}(t)$) qui dépendent du nombre de pièces qui sortent du stock pour les trajectoires perturbée et nominale ($y_d^\delta(t)$ et $y_d(t)$). Commençons par étudier tout d'abord $y_d^\delta(t)$ et $y_d(t)$ dans les théorèmes 3.3 et 3.4 puis $X_{Td}^\delta(t)$ et $X_{Td}(t)$ dans les théorèmes 3.5 et 3.6.

Le théorème 3.3 démontre que si $t \neq t_j$, les nombres de pièces qui sortent du stock pour les trajectoires perturbée et nominale sont égaux, ce qui explique aussi que les nombres de demandes satisfaites pour les trajectoires perturbée et nominale sont égaux si $t \neq t_j$.

Théorème 3.3 : Si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ alors $y_d^\delta(t) = y_d(t)$.

Preuve du théorème 3.3 :

❖ Si $t \in [0,T] \setminus \{t_{sv}\}$

nous avons $x_d^\delta(t) > 0$ et $x_d(t) > 0$ alors $y_d^\delta(t+dt) = y_d(t+dt) = D_d(t+dt)$. Soit $x_d^\delta(t) = 0 = x_d(t)$ alors $y_d^\delta(t+dt) = y_d(t+dt) = 0$ (équation (3.2)), d'où $\forall t \in [0,T] \setminus \{t_{sv}\}$ nous avons $y_d^\delta(t+dt) = y_d(t+dt)$.

Étudions maintenant les valeurs de $y_d^\delta(t+dt)$ et $y_d(t+dt)$ à $t = t_{sv}$.

❖ Si $t = t_{sv} \neq t^\delta{}_{sv}$

alors $x_d(t_{sv}) = 0$ et $x_d^\delta(t_{sv}) = \delta$ (théorème 3.1), d'où $y_d(t_{sv}+dt) = 0$ et $y_d^\delta(t_{sv}+dt) = D_d(t_{sv}+dt)$.

Nous avons quatre cas :

- Cas 1 : si $D_d(t_{sv}+dt) = 0$ et $\alpha(t_{sv}) = 0$ alors $u_d^\delta(t_{sv}) = 0 = u_d(t_{sv})$, dans ce cas $y_d^\delta(t_{sv}+dt) = 0 = y_d(t_{sv}+dt)$.

  Nous avons :

  $x_d(t_{sv}+dt) = 0$.

  $x_d^\delta(t_{sv}+dt) = x_d^\delta(t_{sv}) - y_d^\delta(t_{sv}+dt) + u_d^\delta(t_{sv}) = \delta - 0 + u_d^\delta(t_{sv})$.

D'où $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=\delta$ alors dans ce cas $t+dt=t_{sv}+dt\neq t_j$ ou $t=t_{sv}\neq t_j-dt$).

- Cas 2 : si $D_d(t_{sv}+dt)=0$ et $\alpha(t_{sv})=1$ alors $u_d^\delta(t_{sv})=1=u_d(t_{sv})$ (car dans ce cas $x_d(t_{sv})<h_d$ et $x_d^\delta(t_{sv})<h_d+\delta$), d'où $y_d^\delta(t_{sv}+dt)=0=y_d(t_{sv}+dt)$.

  Nous avons :

  $x_d(t_{sv}+dt)=x_d(t_{sv})-y_d(t_{sv}+dt)+u_d(t_{sv})=0-0+1=1$

  $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=x_d^\delta(t_{sv})-y_d^\delta(t_{sv}+dt)+u_d^\delta(t_{sv})=\delta-0+u_d^\delta(t_{sv})$.

  D'où $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=\delta+1$ alors dans ce cas $t+dt=t_{sv}+dt\neq t_j$ ou $t=t_{sv}\neq t_j-dt$).

- Cas 3 : si $D(t_{sv}+dt)=1$ et $\alpha(t_{sv})=0$ alors $u^\delta(t_{sv})=0=u(t_{sv})$ or ce cas correspond au cas A (Figure 3.1), d'où $t+dt=t_{sv}+dt=t_j$ ou $t=t_{sv}=t_j-dt$ (cas non traité ici car $t\in[0,T]\setminus\{t_{sv}\}$).

- Cas 4 : si $D(t_{sv}+dt)=1$ et $\alpha(t_{sv})=1$ alors $u^\delta(t_{sv})=1=u(t_{sv})$ or ce cas correspond au cas B (Figure 3.2), d'où $t+dt=t_{sv}+dt=t_j$ ou $t=t_{sv}=t_j-dt$ (cas non traité ici car $t\in[0,T]\setminus\{t_{sv}\}$).

Conclusion : si $t\in[0,T]\setminus\{t_j-dt\}$ alors $y_d^\delta(t+dt)=y_d(t+dt)$, puisque $y_d^\delta(0)=y_d(0)$ nous obtenons si $t\in[0,T]\setminus\{t_j\}$ $y_d^\delta(t)=y_d(t)$.

CQFD

Le théorème 3.4 démontre que si $t=t_j$, le nombre de pièces qui sortent du stock pour la trajectoire perturbée est égal au nombre de pièces qui sortent du stock pour la trajectoire nominale plus la perturbation, ce qui explique aussi que la demande est satisfaite pour la trajectoire perturbée et pas pour la trajectoire nominale car à t_j-dt nous avons $x_d(t_j-dt)=0$.

Théorème 3.4 : Si $t=t_j$ alors $y_d^\delta(t_j)=y_d(t_j)+\delta$.

Preuve du théorème 3.4 :

Si $t=t_j=t_{sv}+dt$, nous avons $x_d(t_{sv})=0$ et $y_d(t_{sv}+dt)=y_d(t_j)=0$ alors nous avons deux cas :

- Cas 1 : le cas où $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=0$, ce cas se produit lorsque $D_d(t_{sv}+dt)=1$ et $\alpha(t_{sv})=0$ ($u_d^\delta(t_{sv})=0=u_d(t_{sv})$) d'où
  $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=x_d^\delta(t_{sv})-y_d^\delta(t_{sv}+dt)+u_d^\delta(t_{sv})=\delta-1+u_d^\delta(t_{sv})=0$

Alors $y_d^\delta(t_{sv}+dt)=1=y_d(t_{sv}+dt)+\delta$.

- Cas 2 : le cas où $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=1$, se produit lorsque $D_d(t_{sv}+dt)=1$ et $\alpha(t_{sv})=1$ ($u_d^\delta(t_{sv})=1=u_d(t_{sv})$) d'où
  $x_d^\delta(t_{sv}+dt)=x_d^\delta(t_{sv})-y_d^\delta(t_{sv}+dt)+u_d^\delta(t_{sv})=\delta-1+1=1=x_d(t_{sv}+dt)$, alors
  $y_d^\delta(t_{sv}+dt)=1=y_d(t_{sv}+dt)+\delta$.

Dans les deux cas nous avons bien $y_d^\delta(t_j)=y_d(t_j)+\delta$.

CQFD

Le théorème 3.5 montre que le décalage entre le nombre de pièces transportées pour la trajectoire perturbée et celui pour la trajectoire nominale, augmente à l'instant t_j et diminue à l'instant $t_j+\tau$.

Théorème 3.5 : Si $x_d(0)=x_d^\delta(0)$, $y_d^\delta(0)=y_d(0)$ et $X_{Td}^\delta(0)=X_{Td}(0)$, alors pour $t\in\left\lfloor t_j,(t_j+\tau)\right\rfloor$, nous avons $X_{Td}^\delta(t)=X_{Td}(t)+z(t).\delta$, avec $z(t)=\{1,2,...\}$.

Preuve du théorème 3.5 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Nous supposons que $X_{Td}^\delta(n.dt)=X_{Td}(n.dt)+z(n.dt).\delta$ si $(n.dt)\in\left\lfloor t_j,(t_j+\tau)\right\rfloor$.

Nous allons montrer que $X_{Td}^\delta((n+1).dt)=X_{Td}((n+1).dt)+z((n+1).dt).\delta$ si $((n+1).dt)\in\left\lfloor t_j,(t_j+\tau)\right\rfloor$.

Nous avons :

$$X_{Td}^\delta((n+1).dt)=X_{Td}^\delta(n.dt)+y_d^\delta((n+1).dt)-y_d^\delta((n+1).dt-\tau),$$

$$X_{Td}((n+1).dt)=X_{Td}(n.dt)+y_d((n+1).dt)-y_d((n+1).dt-\tau),$$

Nous allons étudier $y_d^\delta((n+1).dt)$ et $y_d((n+1).dt)$.

Cas1: si $(n+1).dt\in\left\lfloor t_j,(t_j+\tau)\right\rfloor\backslash\{t_{j+p}\}$ (avec $p=\{1,2,...\}$, i.e. $\{t_{j+p}\}=\{t_{j+1},t_{j+2},...\}$) alors $y_d^\delta((n+1).dt)=y_d((n+1).dt)$ (théorème 3.3).

Cas 2: si $(n+1).dt=\{t_{j+p}\}$ alors $y_d^\delta((n+1).dt)=y_d((n+1).dt)+\delta$ (théorème 3.4).

Nous écrivons $X_{Td}^\delta((n+1).dt)$ en fonction des deux cas (selon l'étude de $y_d^\delta((n+1).dt)$ et $y_d((n+1).dt)$.

- *Cas 1:* si $(n+1).dt \in \left\lfloor t_j,(t_j+\tau)\right\rfloor \backslash \left\{t_{j+p}\right\}$ nous avons :

$$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}^{\delta}(n.dt) + y_d^{\delta}((n+1).dt) - y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) - y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau)$$

Nous avons deux cas $y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau)$ et $y_d((n+1).dt-\tau)$.

  - *Cas 1.1*: si $((n+1).dt-\tau) \in [0,T] \backslash \left\{t_{j-q}\right\}$ (avec $q = \{1, 2, ...\}$, *i.e.* $\left\{t_{j-q}\right\} = \left\{t_{j-1}, t_{j-2}, ...\right\}$), alors $y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau)$.

    Dans ce cas nous avons

$$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}((n+1).dt) + z(n.dt).\delta .$$

    Dans ce cas $z((n+1).dt) = z(n.dt)$,

    Alors nous avons $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) + z((n+1).dt).\delta$.

  - *Cas 1.2*: si $((n+1).dt-\tau) = \left\{t_{j-q}\right\}$ alors $y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau) + \delta$.

    Dans ce cas, nous avons :

$$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau) - \delta$$
$$= X_{Td}((n+1).dt) + (z(n.dt)-1).\delta .$$

    Dans ce cas, $z((n+1).dt) = z(n.dt) - 1$,

    Alors nous avons $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) + z((n+1).dt).\delta$

- *Cas 2:* si $(n+1).dt = \left\{t_{j+p}\right\}$ alors

$$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}^{\delta}(n.dt) + y_d^{\delta}((n+1).dt) - y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) + \delta - y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau) .$$

  Nous avons deux cas de $y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau)$ et $y_d((n+1).dt-\tau)$.

  - *Cas 2.1*: si $((n+1).dt-\tau) \in [0,T] \backslash \left\{t_{j-q}\right\}$

    Dans ce cas, nous avons :

$$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) + \delta - y_d((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}(n.dt) + (z(n.dt)+1).\delta + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}((n+1).dt) + (z(n.dt)+1).\delta$$

Dans ce cas, $z((n+1).dt) = z(n.dt)+1$,

Alors, nous avons $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) + z((n+1).dt).\delta$.

- *Cas 2.2*: si $((n+1).dt-\tau) = \{t_{j-q}\}$

Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) &= X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) + \delta - y_d((n+1).dt-\tau) - \delta \\ &= X_{Td}(n.dt) + z(n.dt).\delta + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau) \\ &= X_{Td}((n+1).dt) + z(n.dt).\delta \end{aligned}$$

Dans ce cas, $z((n+1).dt) = z(n.dt)$,

Alors, nous avons $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) + z((n+1).dt).\delta$.

Q.E.D.

Théorème 3.6 : Si $x_d(0) = x_d^{\delta}(0)$, $y_d^{\delta}(0) = y_d(0)$ et $X_{Td}^{\delta}(0) = X_{Td}(0)$, alors pour $t \in [0,T] \setminus \lfloor t_j, (t_j+\tau) \rfloor$ nous avons $X_{Td}^{\delta}(t) = X_{Td}(t)$.

Preuve du théorème 3.6 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Nous supposons que $X_{Td}^{\delta}(n.dt) = X_{Td}(n.dt)$ si $(n.dt) \in [0,T] \setminus \lfloor t_j, (t_j+\tau) \rfloor$.

Nous allons montrer que $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt)$ si $((n+1).dt) \in [0,T] \setminus \lfloor t_j, (t_j+\tau) \rfloor$.

À $t = (n+1).dt$ nous avons

$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}^{\delta}(n.dt) + y_d^{\delta}((n+1).dt) - y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau)$,

$X_{Td}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau)$.

Nous avons $((n+1).dt) \in [0,T] \setminus \lfloor t_j, (t_j+\tau) \rfloor$ alors $(n+1).dt \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ et $(n+1).dt \in [0,T] \setminus \{t_j+\tau\}$ (i.e. $(n+1).dt-\tau \in [0,T] \setminus \{t_j\}$), d'après le théorème 3.3 nous avons $y_d^{\delta}((n+1).dt) = y_d((n+1).dt)$ et $y_d^{\delta}((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau)$.

D'où $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau)$.

$= X_{Td}((n+1).dt)$.

CQFD

Nous avons déterminé les théorèmes qui généralisent l'étude des trajectoires, ces théorèmes sont utilisés pour déterminer le stock optimal dans la section suivante.

3.4 Optimisation basée sur la méthode IPA.

Dans cette section, nous allons déterminer le stock optimal h_d à l'aide d'un algorithme d'optimisation basé sur la méthode IPA. Cet algorithme suit l'évolution de la fonction de coût en fonction du stock optimal h_d par le calcul des estimateurs de la différence de la fonction de coût. Ces estimateurs sont déterminés à partir des différents théorèmes donnés dans l'étude des trajectoires. Pour cela, nous allons tout abord déterminer ces estimateurs.

3.4.1 Estimateurs IPA

Dans cette partie, nous allons déterminer les estimateurs puis nous montrer qu'ils sont non biaisés.

Le coût moyen sur un horizon fini $[0,T]$ est définie par :

$$CT_{ex} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\sum_{t=0}^{t=T} C_d(t)\right] \tag{3.8}$$

Cette fonction peut être divisée en trois parties telles que :

$$CT_{ex} = \lim_{T\to\infty}(cs.E[X(h_d)] + ct.E[XT(h_d)] + cs^{-}.E[B(h_d)]),$$

avec $X(h_d) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} x_d(t)$, $XT(h_d) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} X_{Td}(t)$ et $B(h_d) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} D_d^0(t)$.

Nous pouvons maintenant déterminer les estimateurs de la différence de chaque partie de l'espérance du coût. Ces estimateurs sont efficaces dans la pratique lorsqu'ils sont non biaisés, alors nous devons vérifier l'absence de bais des estimateurs avant de pouvoir les utiliser dans l'algorithme d'optimisation.

Théorème 3.7 : Les estimateurs de la différence de chaque partie de l'espérance du coût sont non biaisés :

(i) $$\frac{\Delta E[X(h_d)]}{\Delta h_d} = E\left[\frac{\Delta[X(h_d)]}{\Delta h_d}\right]$$

(ii) $$\frac{\Delta E[XT(h_d)]}{\Delta h_d} = E\left[\frac{\Delta[XT(h_d)]}{\Delta h_d}\right]$$

(iii) $$\frac{\Delta E[B(h_d)]}{\Delta h_d} = E\left[\frac{\Delta[B(h_d)]}{\Delta h_d}\right].$$

Preuve du théorème 3.7 :

Nous supposons que dans $[0,T]$ il existe n intervalles $[t_{ssj}^{\delta}, t_j[$, et l intervalles $]t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}[$.

(i) Pour $X(h_d)$ nous avons $\Delta[X(h_d)] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} \Delta(x_d(t)) = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} x_d^{\delta}(t) - x_d(t)$.

Nous avons $x_d^{\delta}(t) - x_d(t) = \delta$ pour tout $t \in [t_{ssj}^{\delta}, t_j[$ (théorème 3.1) et $x_d^{\delta}(t) - x_d(t) = 0$ pour tout $t \in [t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}[$ (théorème 3.2), alors :

$$\Delta[X(h_d)] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} x_d^{\delta}(t) - x_d(t) = \frac{1}{T}.\left[\sum_{j=1}^{j=n} \frac{(t_j - t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta$$

Alors $E\left[\frac{\Delta[X(h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{j=1}^{j=n} \frac{(t_j - t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta \Big/ \Delta h_d\right]$.

Nous avons $E[X(h_d)] = E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} x_d(t)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} E[x_d(t)]$, alors

$$\begin{aligned}\Delta\left(E\left[X(h_d)\right]\right) &= \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} \Delta\left(E\left[x_d(t)\right]\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} E\left[x_d^{\delta}(t)\right] - E\left[x_d(t)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} E\left[x_d^{\delta}(t) - x_d(t)\right] \\ &= E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}\left[x_d^{\delta}(t) - x_d(t)\right]\right] = E\left[\frac{1}{T}.\left[\sum_{j=1}^{j=n} \frac{(t_j - t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta\right]\end{aligned}$$

Donc, nous avons bien :

$$\frac{\Delta E[X(h_d)]}{\Delta h_d} = E\left[\frac{1}{T}.\left[\sum_{j=1}^{j=n} \frac{(t_j - t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta \Big/ \Delta h_d\right] = E\left[\frac{\Delta[X(h_d)]}{\Delta h_d}\right].$$

(ii) Pour $XT(h)$ nous avons $\Delta[XT(h_d)] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} X_{Td}^{\delta}(t) - X_{Td}(t)$

Nous avons $X_{Td}^{\delta}(t) - X_{Td}(t) = z(t).\delta$ (théorème 3.5), alors $\Delta[XT(h_d)] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} z(t).\delta$.

Nous avons $z(t) = \{1, 2, ...\}$ dans les intervalles $\lfloor t_j, (t_j + \tau)\rfloor$ et $z(t) = 0$ si $t \in [0, T] \backslash \lfloor t_j, (t_j + \tau)\rfloor$.

Alors, $\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} z(t).\delta = \frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\left(\frac{(t_j + \tau) - t_j}{dt}\right).\delta = \frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\left(\frac{\tau}{dt}\right).\delta = \Delta[XT(h_d)]$.

D'où, $E\left[\frac{\Delta[XT(h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\left(\frac{\tau}{dt}\right).\delta \Big/ \Delta h_d\right]$.

Nous avons $E[XT(h_d)] = E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} X_{Td}(t)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} E[X_{Td}(t)]$

Alors $\Delta E\left[XT(h_d)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}\Delta(E\left[X_{Td}(t)\right]) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[X_{Td}^{\delta}(t)\right] - E\left[X_{Td}(t)\right]$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[X_{Td}^{\delta}(t) - X_{Td}(t)\right] = E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}\left[X_{Td}^{\delta}(t) - X_{Td}(t)\right]\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\left(\frac{\tau}{dt}\right).\delta\right]$$

Alors, nous avons bien $\frac{\Delta E\left[XT(h_d)\right]}{\Delta h_d} = E\left[\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\left(\frac{\tau}{dt}\right).\delta \Big/ \Delta h_d\right] = E\left[\frac{\Delta\left[XT(h_d)\right]}{\Delta h_d}\right]$.

(iii) Pour $B(h_d)$ nous avons $\Delta\left[B(h_d)\right] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t)$, avec $D_d^{0\delta}(t)$ le nombre de demandes non satisfaites pour la trajectoire perturbée.

Alors $D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t) = D_d(t) - y_d^{\delta}(t_j) - D_d(t) + y_d(t_j)$

$$= y_d(t_j) - y_d^{\delta}(t_j) = -\delta \quad \text{(théorème 3.3).}$$

$$\Delta\left[B(h_d)\right] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t) = \frac{1}{T}.\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta).$$

Par conséquent, $E\left[\frac{\Delta\left[B(h_d)\right]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{1}{T}\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta) \Big/ \Delta h_d\right]$.

Nous avons :

$$\Delta E\left[B(h_d)\right] = \Delta E\left[\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}D_d^0(t)\right] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}E\left[D_d^{0\delta}(t)\right] - E\left[D_d^0(t)\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t)\right] = E\left[\frac{1}{T}.\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta)\right]$$

Alors, nous avons bien $\frac{\Delta E\left[B(h_d)\right]}{\Delta h_d} = E\left[\frac{1}{T}\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta) \Big/ \Delta h_d\right] = E\left[\frac{\Delta\left[B(h_d)\right]}{\Delta h_d}\right]$.

CQFD

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme (algorithme d'estimation) permettant de déterminer les estimateurs IPA qui sont utilisés ensuite dans un algorithme d'optimisation.

Soit *TS*, *C1* et *C2* les estimateurs IPA (paramètres),

Avec $E\left[\frac{\Delta[X(h_d)]}{\Delta h_d}\right]=E\left[\frac{TS}{T}\right]$, $E\left[\frac{\Delta[XT(h_d)]}{\Delta h_d}\right]=E\left[\frac{C1}{T}\right]$ et $E\left[\frac{\Delta[B(h_d)]}{\Delta h_d}\right]=E\left[\frac{(-C2)}{T}\right]$.

Algorithme des estimateurs IPA.

Début

$C1$= 0, $C2$=0 TS=0, t=0 // *Initialisation*

Faire

- Si $t=t_j$ alors $TS = TS+ ((t_j - t^{\delta}{}_{ssj}) / dt)$.
- Si $t=t_j+\tau$ alors $C1= C1+ (\tau / dt)$.
- Si $t=t^{\delta}_{ssj}$ alors $C2= C2+1$.
- $t= t+dt$. // *avancement du temps*

Tant que $t<T$

$\frac{\Delta[X(h_d)]}{\Delta h_d}=\frac{TS}{T}$, $\frac{\Delta[XT(h_d)]}{\Delta h_d}=\frac{C1}{T}$ et $\frac{\Delta[B(h_d)]}{\Delta h_d}=\frac{-C2}{T}$.

Fin.

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme d'optimisation qui détermine le niveau du stock optimal.

3.4.2 Algorithme d'optimisation

L'algorithme d'optimisation nous permet de déterminer le niveau du stock optimal h_d et est donné par :

Début

h_{new} = 2 (h_d>1)

cout2 = $CT_{ex}(h_{new})$

Faire

- $h_d = h_{new}$
- cout1 = cout2
- Déterminer les estimateurs *C1, C2* et *TS* par l'utilisation de l'Algorithme des estimateurs d'IPA.
- Déterminer la différence des estimateurs $W(h_d)$ avec,

  $W(h_d)=((cs^{-}.\ C2)-(cs.TS)-(ct.C1))/T$
- Si $W(h_d)>0$ alors h_{new}=h_d+1.
- Sinon $h_{new} = h_d$ -1.
- Cout2 = $CT_{ex}(h_d)$

Tant que (cout2 < cout1)

Fin.

Remarque 3.8: $W(h_d)$ dépend de *C1*, *C*2 et *TS*, et varie à chaque itération ($W(h_d)$ n'est pas constant).

Dans ce qui suit, les résultats numériques sont présentés pour montrer l'intérêt de notre méthode et étudier l'impact du délai de livraison sur la valeur de h_d.

3.4.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous comparons deux types de simulation différente : simulation type système à événements discrets (SED) et simulation basée sur la méthode IPA. Par la suite, nous étudions l'impact des délais de livraison sur h_d.

La simulation est effectuée avec les paramètres suivants :

- U_c = 1 pièce/unité de temps.
- La demande qui est booléenne est donnée selon une distribution de Bernoulli de probabilité p=0,8.
- La moyenne du temps de bon fonctionnement *MTBF* de la machine est égale à 2 et la moyenne du temps de réparation *MTTR* est égale à 1.
- Le coût unitaire de stockage cs est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire de transport ct est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire d'une demande perdue cs^- est égal à 20 unités monétaires.
- Le temps total de simulation est égal à 10E+07 unités de temps.

La Figure 3.4 montre les résultats donnés pour les deux types de simulations : simulation type SED et simulation basée sur la méthode IPA.

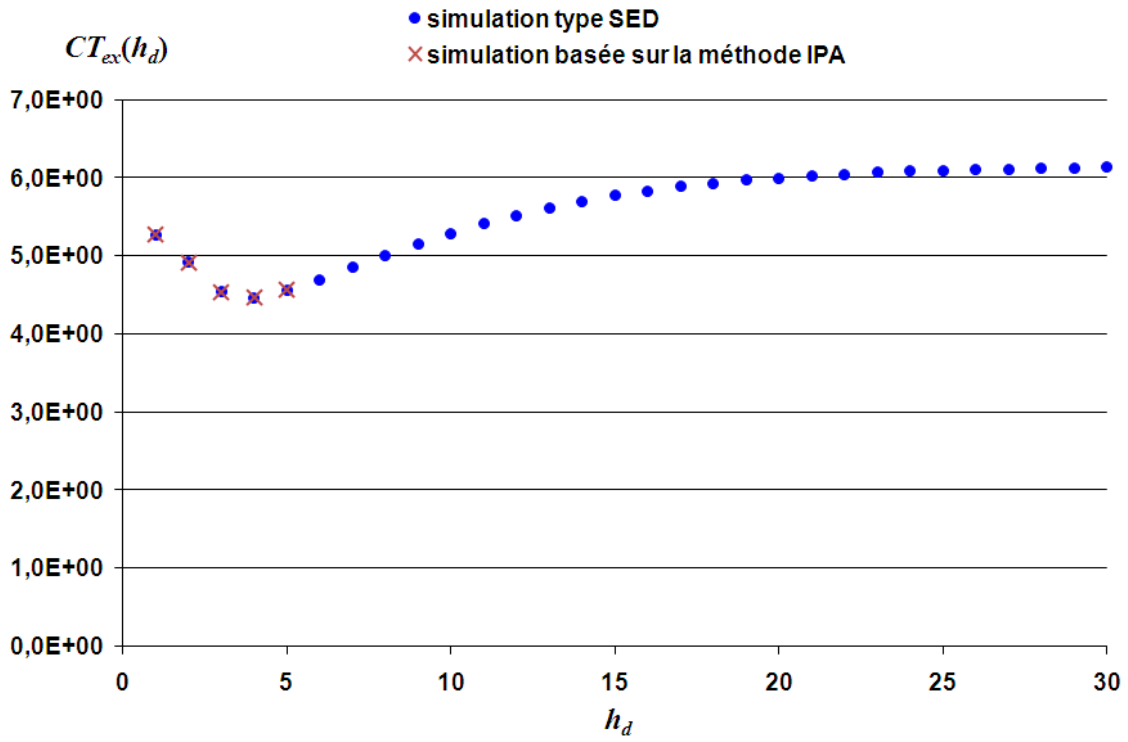

Figure 3.4 : Fonction de coût moyen $CT_{ex}(h_d)$ en fonction de h_d

Pour notre exemple, le plus bas coût moyen $CT_{ex}(h_d)$ est obtenu pour h_d = 4. On voit que la simulation basée sur la méthode IPA donne bien sûr les mêmes résultats que celle donnée par la simulation de type SED, la seule différence est le nombre d'itérations. En effet, par l'utilisation de la simulation de type SED, on doit calculer pour toutes les valeurs de h_d le

$CT_{ex}(h_d)$ correspondant, mais par l'utilisation de la simulation basée sur la méthode IPA on doit calculer le $CT_{ex}(h_d)$ correspondant à cinq valeurs de h_d. Cette différence s'explique par le fait que l'optimisation basée sur l'IPA calcule la différence des estimateurs $W(h_d)$ à chaque instant où h_d prend une nouvelle valeur, et la valeur de $W(h_d)$ donne des informations sur le moment où la simulation doit s'arrêter (la valeur optimale de h_d est obtenue). La simulation de type SED (méthode exhaustive) doit calculer pour chaque h_d le $CT_{ex}(h_d)$ correspondant.

Étude de l'impact des délais de livraison sur h_d :

Dans cette partie, nous étudions l'impact du délai de livraison sur h_d selon deux cas suivants :

- Cas 1 : la demande est égale à 1 ou 0 durant τ.
- Cas 2 : la demande est égale à 1 ou 0 à chaque instant t.

Pour les deux cas, τ varie de 1 à 10 et le programme détermine pour chaque valeur de τ le niveau de stock optimal h_d qui minimise la fonction de coût moyen. Les paramètres de simulation sont les mêmes que ceux présentés dans la partie précédente. Afin de comparer les résultats donnés par le modèle à flux discrets et le modèle à flux continus (chapitre précédent), les générations des variables dans ces simulations sont effectuées de manière équivalente à ceux du chapitre précédent. Pour valider les résultats des simulations, nous avons utilisé la même méthode que celle dans le chapitre précédent, et qui consiste à vérifier que chaque valeur de coût ($CT_{ex}(h_d)$) appartient à l'intervalle de confiance. Les résultats de simulations des cas 1 et 2 sont présentés respectivement dans les tableaux Tableau 3.2 et Tableau 3.3.

τ	le niveau de stock optimal (h_d)	$CT_{ex}(h_d)$ *(unité monétaire)*	Pourcentages des valeurs de coût qui appartiennent à l'intervalle de confiance
1	3	4,6168548	100%
2	2	3,0574420	100%
3	1	2,3024168	100%
4	1	1,9333006	100%
5	1	1,7162652	100%
6	1	1,5763483	100%
7	1	1,4797712	100%
8	1	1,4084706	100%
9	1	1,3540878	100%
10	1	1,3131593	100%

Tableau 3.2 : Impact du délai de livraison sur h_d (cas 1)

Lorsque le délai de livraison τ est dans l'intervalle [3, 10], nous avons h_d égal à 1, ces résultats ne sont pas considérés dans l'étude théorique, car $h_d > 1$ (*hypothèse 3.1*). Cependant,

nous pouvons noter que ces résultats pourraient être obtenus par notre algorithme d'optimisation basée sur la simulation. Nous voulons dire que l'hypothèse 3.1 est nécessaire pour les démonstrations des théorèmes mais pas pour l'application numérique.

τ	le niveau de stock optimal (h_d)	$CT_{ex}(h_d)$ *(unité monétaire)*	Pourcentages des valeurs de coût qui appartiennent à l'intervalle de confiance
1	3	4,6198232	100%
2	3	4,6182784	100%
3	3	4,6210424	100%
4	3	4,6223776	100%
5	3	4,6202780	100%
6	3	4,6203380	100%
7	3	4,6195928	100%
8	3	4,6154868	100%
9	3	4,6184312	100%
10	3	4,6218880	100%

Tableau 3.3 : Impact du délai de livraison sur h_d (cas 2)

Nous pouvons voir que le délai de livraison dans le cas 1 a un impact sur h_d. En effet, le cas 1 correspond au fait que le client s'attend à recevoir sa demande avant de faire une nouvelle demande. Alors, le nombre total de demandes diminue lorsque le délai de livraison augmente, le niveau de stock diminue lorsque le nombre de demandes diminue (selon la politique du point de séparation). Donc pour ce cas, la valeur de h_d qui minimise le coût moyen bien sûr diminue lorsque le délai de livraison τ augmente. Pour le cas 2, le nombre total de demandes est indépendant du délai de livraison, donc le niveau de stock est indépendant du τ délai de livraison. Donc, pour le cas 2 le délai de livraison n'a pas d'impact sur la valeur de h_d.

Le tableau suivant représente les résultats donnés par la simulation d'un modèle à flux continus et la simulation d'un modèle à flux discrets pour le cas 1 afin de comparer les résultats obtenus en discret de la méthode IPA (à notre connaissance ce type d'étude n'a pas été menée par ailleurs) comparativement à l'application en continu.

τ	le niveau de stock optimal (h_d) (modèle à flux discrets)	le niveau de stock optimal (h_c) (modèle à flux continus)
1	3	3,304688
2	2	1,654688
3	1	1,289063
4	1	1,179688
5	1	1,054688

Tableau 3.4 : Comparaison des résultats donnés par les modèles à flux discrets et continus (résultats correspondant au cas 1)

La méthode IPA est largement utilisée dans plusieurs travaux dans la littérature pour l'optimisation d'un modèle à flux continus (sans prise en compte du délai de transport) et a donné de bons résultats. Alors nous supposons que les résultats trouvés dans le chapitre précédent sont les résultats de références pour les résultats trouvés par l'application de la méthode IPA sur le modèle à flux discrets. Pour les mêmes paramètres de simulation, les valeurs du niveau de stock optimal qui sont déterminées par les deux modèles sont proches. Donc la méthode IPA qui est appliquée sur le modèle à flux discrets semble très efficace.

3.5 Conclusion

Nous avons considéré un système de production composé d'une machine qui peut tomber en panne, d'un stock de capacité infinie et d'un client qui demande à chaque instant une quantité aléatoire de produit. Cette demande est perdue si elle n'est pas satisfaite. Nous avons proposé un modèle à flux discrets pour modéliser le délai de livraison entre le stock et le client. Le délai de livraison est connu et constant. Nous avons utilisé la politique du point de séparation pour piloter le taux de production de la machine et pris en compte le délai de livraison, les pannes de la machine et les demandes aléatoires. Nous avons appliqué la méthode IPA (analyse des perturbations infinitésimale). D'après nos connaissances, l'application de cette méthode pour le modèle à flux discrets est un nouveau sujet de recherche.

Nous avons utilisé l'IPA pour étudier et analyser les trajectoires du niveau de stock. Nous avons obtenu deux cycles répétitifs. Le premier correspond au fait que la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale plus la perturbation. Ce cycle correspond à l'achèvement du stock saturé pour la trajectoire perturbée. Le deuxième cycle correspond au fait que les trajectoires perturbées et nominale sont égales. Ce cycle correspond à la construction du stock. Ensuite, nous avons étudié les trajectoires, et nous avons déterminé les estimateurs IPA et prouvé qu'ils sont non biaisés.

Ces estimateurs sont implantés alors dans un algorithme d'optimisation, qui détermine la valeur optimale de h_d. L'optimisation basée sur la méthode IPA permet de réduire le temps de simulation comparativement à une simulation type SED. Deux cas de délais de livraison sont simulés afin d'étudier l'impact des délais de livraison sur h_d. Le délai de livraison a un impact sur h_d dans le cas où le client attend de recevoir sa demande avant d'en faire une nouvelle (la demande est égale à 1 ou 0 pendant τ). En effet, pour ce cas, la valeur de h_d diminue quand le délai de livraison τ augmente. Pour le deuxième cas, le délai de livraison n'a pas d'impact sur la valeur de h_d parce que nous considérons à chaque moment une demande, alors le nombre total de demandes est indépendant du temps de livraison. Nous avons ensuite comparé les résultats donnés par le modèle à flux continus et ceux pour le modèle à flux discrets. Ils sont très proches. Par conséquent la méthode IPA qui est appliquée sur le modèle à flux discrets semble être très efficace.

Ces travaux ont fait l'objet à un article accepté à un journal international (IJAOM) [TUR10b] et trois présentations dans des conférences internationales [TUR09a], [TUR09b] [TUR09c].

Les recherches futures concernent un système plus complexe avec un délai de livraison aléatoire. Dans ce cas, nous proposerons un délai de livraison planifié basé sur la méthode IPA. Pour ce problème, il sera difficile de prouver que les estimateurs IPA sont non biaisés.

Chapitre 4 : Méthode IPA et Modèles à Flux pour un système de production avec des délais de livraison aléatoires.

4.1 Introduction

De nombreuses entreprises font des progrès pour réduire le temps de transport tels que le délai de livraison, qui représente la période de temps que la demande prend entre un entrepôt et un client. En effet, lors de ces dernières années les offres ont évoluées de telle façon qu'elles sont devenues supérieures aux demandes. Alors les entreprises se doivent de séduire des clients toujours plus exigeants sur les délais de livraison, une meilleure qualité des produits et des prix attractifs. Actuellement, plusieurs entreprises proposent des délais de livraison planifiés comme une nouvelle stratégie de marketing pour attirer les clients. Dans ce chapitre, nous supposons que le producteur propose pour le client un délai de livraison planifié et que les délais de livraison sont aléatoires. On va s'intéresser à l'évaluation des performances de notre système et nous allons étudier l'impact des coûts de livraison sur le stock optimal.

Le comportement d'un système de production est défini par des mesures de performances telles que les coûts liés au stockage, à la rupture du stock et aux délais de livraison. Autrement dit, l'évaluation des performances est une étude qui permet de connaître a priori le comportement d'un système de production pour une configuration donnée. L'étude de performance de toute entreprise a pour but de mesurer l'amélioration de la compétitivité. D'où elle joue un rôle très important dans la conception et le choix de la politique adoptée pour un système qui doit atteindre ces performances souhaitées.

Le temps de livraison est un paramètre qui a un impact non négligeable sur les performances d'un système de production. Dans ce chapitre nous considérons le même système de production que celui présenté dans les chapitres précédents avec la considération d'un temps de livraison aléatoire et un temps de livraison planifié notés respectivement par $\tau(t)$ et τ_{ex} (voir Figure 4.2). En effet, les pièces qui sortent du stock à l'instant t sont chargées dans un moyen de transport (camion, avion, bateau…), et arrivent chez le client à l'instant $t+\tau(t)$. Nous supposons que le temps de chargement est inclus dans le temps de livraison $\tau(t)$. Nous supposons aussi que le producteur propose pour le client un temps de livraison planifié τ_{ex} (fixe), autrement dit les pièces qui sortent du stock à l'instant t sont supposées arriver à l'instant $t+\tau_{ex}$.

La Figure 4.1 représente le système de production avec le temps de livraison aléatoire et le nombre de pièces qui arrivent chez le client à l'instant t.

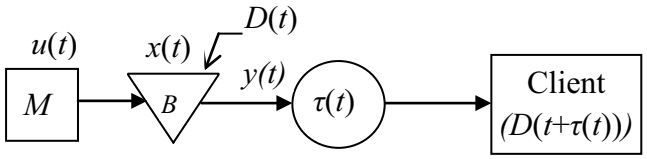

Figure 4.1 : Système de production avec temps de livraison aléatoire

Nous avons trois cas possible en fonction de $\tau(t)$ et τ_{ex}.

- Les pièces transportées arrivent à l'heure planifiée (i.e. $\tau_{ex} = \tau(t)$).
- Les pièces transportées arrivent avant l'heure planifiée (i.e. $\tau(t) < \tau_{ex}$). Dans ce cas la demande est acceptée par le client mais avec un coût d'avance payé par le producteur, ce coût est appelé coût d'une livraison en avance.
- Les pièces transportées arrivent après l'heure planifiée (i.e. $\tau(t) > \tau_{ex}$). Dans ce cas la demande est acceptée par le client mais avec un coût de retard payé par le producteur, ce coût est appelé coût d'une livraison retardée.

Dans ce chapitre nous tenons compte du coût des livraisons en avance et du coût des livraisons retardées dans la fonction du coût total.

Nous allons modéliser le système par deux modèles différent : modèle à flux continus et modèle à flux discrets. Nous étudions ensuite ces deux modèles et comparerons leurs résultats.

La méthode IPA sera également appliquée pour les deux types de modèles pour l'évaluation des performances.

Pour chaque modèle, les événements possibles et leur priorité sont les mêmes que ceux considérés dans les chapitres précédents.

4.2 Modèle à flux continus

Dans cette partie, nous modélisons notre système de production pour un modèle à flux continus. Les variables $D(t)$, $u(t)$, U, $x(t)$ et h sont remplacés respectivement par $D_c(t)$, $u_c(t)$, U_c, $x_c(t)$, et h_c. Les variables $\tau(t)$ et $\alpha(t)$ sont inchangées. Nous conservons les mêmes hypothèses que celles du chapitre deux, nous ajoutons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1 : Pour simplifier notre problème, nous supposons que le temps de livraison est invariant entre deux événements demande (ED). Autrement dit, à chaque nouvel événement demande (ED) on génère une nouvelle valeur de la demande $D_c(t)$ et du temps de livraisons $\tau(t)$.

La dynamique du système est donnée par :

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = \begin{cases} u_c(t) - D_c(t) & si\ x_c(t) > 0 \\ u_c(t) & si\ x_c(t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

La politique de commande est donnée par :

$$u_c(t) = \begin{cases} D_c(t) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_c(t) = h_c \\ 0 & si\ \alpha(t) = 0\ ou\ x_c(t) > h_c \\ U_c & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_c(t) < h_c \end{cases} \tag{4.2}$$

Lorsque le temps de livraison $\tau(t)$ est égale au temps de livraison planifié τ_{ex}, alors les pièces qui sortent du stock à l'instant t vont arriver à l'heure planifiée. Nous notons $g_c(t)$ est le nombre de pièces transportées qui vont arriver à l'heure planifiée et qui est donné par :

$$g_c(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t) - D_c^0(t)).dt & si\ \tau(t) = \tau_{ex}\ et\ x_c(t) > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{4.3}$$

Le nombre de pièces qui vont arriver en avance est égale au nombre de pièces qui sortent du stock, si le temps de livraison $\tau(t)$ est strictement inférieur au temps de livraison planifié τ_{ex}. Dans ce cas les pièces arrivent chez le client avant l'instant planifié $t+\tau_{ex}$. Nous notons $s_c(t)$ est le nombre de pièces qui vont arriver en avance et qui est donné par :

$$s_c(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t) - D_c^0(t)).dt & si\ \tau(t) < \tau_{ex}\ et\ x_c(t) > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{4.4}$$

De même nous définissons le nombre de pièces qui vont arriver en retard noté $r_c(t)$ et qui est donné par :

$$r_c(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t) - D_c^0(t)).dt & si\ \tau(t) > \tau_{ex}\ et\ x_c(t) > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{4.5}$$

Si le temps de livraison $\tau(t)$ est strictement supérieur au temps de livraison planifié τ_{ex}, le niveau de stock est strictement supérieur à zéro et la demande $D_c(t)$ est strictement supérieur à zéro alors $r(t)$ est supérieur à zéro.

Le nombre de demandes non satisfaites par unité de temps à l'instant t est donné par :

$$D_c^0(t) = \begin{cases} 0 & si\ x_c(t) > 0 \\ D_c(t) & si\ x_c(t) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Le nombre de demandes non satisfaites à l'instant t est noté par $P_c\ (t)$ et donné par :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{dP_c\ (t)}{dt} = D_c^0(t) = D_c\ (t) & si\ x_c(t) = 0 \\ P_c\ (t) = 0 & si\ x_c(t) > 0 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

La fonction de coût (noté $C_{csr}(t)$) à l'instant t, qui dépend du nombre de pièces dans le stock B, du nombre de pièces transportées (somme de $g_c(t), r_c(t)$ et $s_c(t)$), du nombre de pièces arrivant en retard, du nombre de pièces arrivant en avance et des demandes perdues, est donnée par:

$$C_{csr}(t) = cs.\ x_c(t) + cs^-.P_c\ (t) + ct.(g_c(t) + r_c(t) + s_c(t)) + ctr.r_c(t) + cts.s_c(t) \tag{4.8}$$

Avec :

cs	:	coût unitaire de stockage.
cs^-	:	coût unitaire de la demande perdue.
ct	:	coût unitaire de transport.
ctr	:	coût unitaire d'une livraison en retard.
cts	:	coût unitaire d'une livraison en avance.

La fonction de coût moyen dans l'intervalle $[0,T]$, notée par $C_{sra}(t)$ est donnée par :

$$C_{sra}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_{t=0}^{t=T} (C_{csr}(t)).dt \right] \tag{4.9}$$

4.3 Modèle à flux discrets

Dans cette partie, nous modélisons pour notre système de production un modèle à flux discrets. Les variables $D(t)$, $u(t)$, U, $y(t)$, $x(t)$ et h sont remplacées respectivement par $D_d(t)$, $u_d(t)$, U_d, $y_d(t)$, $x_d(t)$ et h_d. Les variables $\tau(t)$ et $\alpha(t)$ sont inchangées. Nous conservons les mêmes hypothèses que celle du chapitre trois.

Le nombre de produits dans le stock à l'instant t noté par $x_d(t)$ est donné par :

$$x_d(t) = x_d(t\text{-}dt) + u_d(t\text{-}dt) - y_d(t). \tag{4.10}$$

Le nombre des pièces qui sortent du stock ($y_d(t)$) est donné par :

$$y_d(t) = \begin{cases} D_d(t) & si\ x_d(t\text{-}dt) \geq D_d(t) \\ x_d(t\text{-}dt) & si\ x_d(t\text{-}dt) < D_d(t) \end{cases} \tag{4.11}$$

La politique de commande est donnée par :

$$u_d(t) = \begin{cases} U_d & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d(t) < h_d \\ D_d(t) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d(t) = h_d \\ D_d(t) - (x_d(t) - h_d) & si\ \alpha(t) = 1\ et\ x_d(t) > h_d \\ 0 & si\ \alpha(t) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Le nombre des pièces transportés à l'instant t est noté $g_d(t)$:

$$g_d(t) = \begin{cases} y_d(t) & si\ \tau(t) = \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{4.13}$$

Le nombre de pièces arrivant en avance à l'instant t noté $s_d(t)$ est donné par :

$$s_d(t) = \begin{cases} y_d(t) & si\ \tau(t) < \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{4.14}$$

De même nous définissons le nombre de pièces qui arrivent en retard noté $r_d(t)$ et qui est donné par :

$$r_d(t) = \begin{cases} y_d(t) & si\ \tau(t) > \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{4.15}$$

Nous notons $C_{dsr}(t)$ la fonction de coût à l'instant t qui dépend du nombre de pièces dans le stock B, du nombre de pièces transportées, du nombre de pièces arrivant en retard, du nombre de pièces arrivant en avance et des demandes perdues. $C_{dsr}(t)$ est donnée par:

$$C_{dsr}(t) = cs.x_d(t) + cs^-.D_d^0(t) + ct.\tau(t).(g_d(t) + r_d(t) + s_d(t)) + ctr.r_d(t) + cts.s_d(t) \tag{4.16}$$

La fonction de coût total, dénotée par $CT_{dsr}(h_d)$ et qui dépende de h_d est donnée par :

$$CT_{dsr}(t) = \sum_{t=0}^{t=T} C_{dsr}(t) \text{ avec } T \text{ est le temps total de simulation.} \tag{4.17}$$

Dans la section suivante, nous analysons les trajectoires du niveau du stock pour ces deux types modèles, Cette étude nous permettra de trouver les estimateurs IPA de la fonction de coût et de prouver que ces estimateurs sont non biaisés.

4.4 Analyse des Perturbations Infinitésimales

Dans cette section nous commençons par étudier les trajectoires du niveau de stock pour les modèles à flux continus et discrets. Nous allons ensuite déterminer les estimateurs de la fonction de coût pour chaque modèle. Nous présentons par la suite un algorithme d'optimisation qui utilise les gradients de la fonction de coût pour déterminer le stock optimal.

4.4.1 Analyse des Perturbations Infinitésimales pour le modèle à flux continus

Dans cette section, nous allons étudier les trajectoires du $x_c^\eta(t)$ et $x_c(t)$ pour déterminer le décalage entre elles. Par la suite nous allons aussi déterminer les décalages entre le nombre

de pièces transportées ($g_c^\eta(t)$ et $g_c(t)$) puis entre le nombre de pièces arrivant en avance pour la trajectoire perturbée (noté $s_c^\eta(t)$) et celui pour la trajectoire nominale ($s_c(t)$), enfin entre le nombre de pièces arrivant en retard pour la trajectoire perturbée (noté $r_c^\eta(t)$) et celui pour la trajectoire nominale ($r_c(t)$). En effet, nous devons étudier ces décalages pour déterminer les estimateurs des dérivées de la fonction de coût.

Les théorèmes suivants sont utilisés ensuite pour déterminer les estimateurs IPA et pour montrer qu'ils sont non biaisés.

Le théorème 4.1 montre que si $t \in \left]t_{sj}, t_{vj}^\eta\right[$ et $0 < \phi(t) \leq \eta$ la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale plus le décalage $\phi(t)$.

Théorème 4.1 : si $\eta > 0$ et $t \in \left]t_{sj}, t_{vj}^\eta\right[$ alors $x_c^\eta(t) = x_c(t) + \phi(t)$ avec $0 < \phi(t) \leq \eta$.

Preuve du Théorème 4.1 : (Voir annexe 2).

Dans le théorème 4.2 nous allons montrer que si $t \in \left[t_{vj}^\eta, t_{s(j+1)}\right]$ alors la trajectoire nominale $x_c(t)$ et la trajectoire perturbée $x_c^\eta(t)$ sont égales.

Théorème 4.2 : si $t \in \left[t_{vj}^\eta, t_{s(j+1)}\right]$ alors $x_c^\eta(t) = x_c(t)$.

Preuve du Théorème 4.2 : (Voir annexe 2).

Le théorème 4.3 montre que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ et que le temps de transport est égale au temps de transport planifié ($\tau(t) = \tau_{ex}$), alors le nombre de pièces transportées pour la trajectoire perturbée ($g_c^\eta(t)$) est égale à celui pour la trajectoire nominale ($g_c(t)$) plus la perturbation η . Cela signifie que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ les demandes sont mieux satisfaites sur la trajectoire perturbée que sur la trajectoire nominale. Nous allons utiliser ce théorème pour déterminer le nombre de pièces transportées sur les deux trajectoires.

Théorème 4.3 : si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ alors $g_c^\eta(t) = g_c(t) +$ si $\tau(t) = \tau_{ex}$ et $D_c(t) > 0$.

Preuve du Théorème 4.3 :

Si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ (voir Figure 4.2) alors $x_c(t) = 0$ et $x_c^\eta(t) > 0$, donc nous avons $D_c^0(t) = D_c(t)$ et $D_c^{\eta 0}(t) = 0$. Alors si $\tau(t) = \tau_{ex}$ nous avons $g_c(t) = 0$ et $g_c^\eta(t) = \int_{t\tau-}^{t} (D_c(t)).dt > 0$, d'ou $g_c^\eta(t) > g_c(t)$ si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$, $\tau(t) = \tau_{ex}$ et $D_c(t) > 0$.

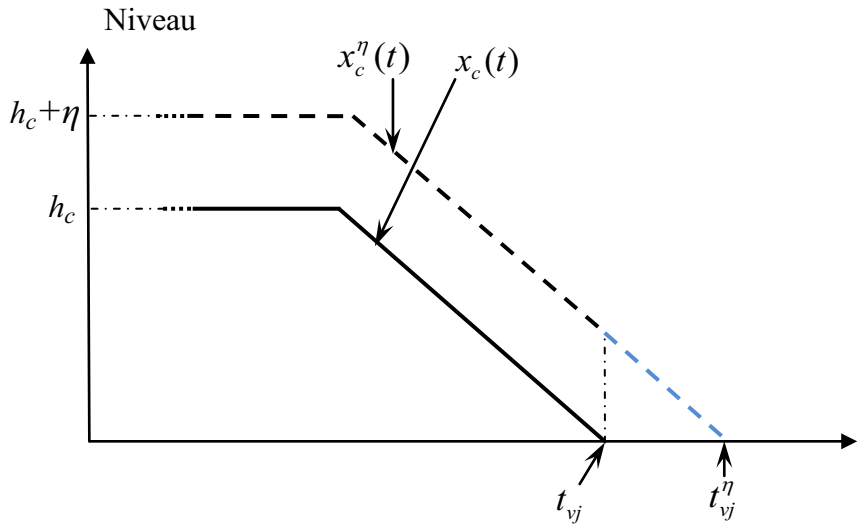

Figure 4.2 : zone $\left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$

Nous constatons que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ et si $\tau(t) = \tau_{ex}$, la quantité de pièces qui sort du stock entre t_{vj} et t_{vj}^η et qui sera transportée à l'heure chez le client pour la trajectoire perturbée est égale à la quantité qui existe dans le stock $x_c^\eta(t)$. Cette quantité correspond à la différence entre le niveau de stock pour la trajectoire perturbée et celui de la trajectoire nominale, que nous avons définie dans le chapitre 2 par le décalage η (Remarque 3.2). Donc si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ le décalage entre $g_c^\eta(t)$ et $g_c(t)$ est égale η.

Alors $g_c^\eta(t) = g_c(t) +$ si $\tau(t) = \tau_{ex}$ et $D_c(t) > 0$.

CQFD

Le théorème 4.4 montre que si $t \in [0,T] \setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$, les nombres de pièces transportées pour la trajectoire perturbée et pour la trajectoire nominale sont égaux.

Théorème 4.4 : si $t \in [0,T] \setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[$ alors $g_c^\eta(t) = g_c(t)$.

Preuve du Théorème 4.4 :

Nous avons $[0,T] \setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[= \left]t_{sj}, t_{vj}^\eta\right[\setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^\eta\right[\cup \left[t_{vj}^\eta, t_{s(j+1)}\right]$.

- Si $t \in \left]t_{sj}, t_{vj}^{\eta}\right[\backslash \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ nous avons $x_c(t) > 0$ et $x_c^{\eta}(t) > 0$, d'après l'équation (4.3) nous avons $D_c^0(t) = 0 = D_c^{\eta 0}(t)$ si $\tau(t) = \tau_{ex}$, d'où $g_c(t) = \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t)).dt = g_c^{\eta}(t)$. Si non (si $\tau(t) \neq \tau_{ex}$) nous avons $g_c(t) = g_c^{\eta}(t) = 0$
- Si $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$ nous avons $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$ (théorème 2.2), alors si $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) > 0$ et $\tau(t) = \tau_{ex}$ nous avons $g_c(t) = \int_{t-\tau}^{t} (D_c(t)).dt = g_c^{\eta}(t)$ et si $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) = 0$ nous avons $g_c^{\eta}(t) = g_c(t)$.

Alors $g_c^{\eta}(t) = g_c(t)$ si $t \in [0,T] \backslash \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$.

CQFD

Le théorème 4.5 montre que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$, le nombre de pièces arrivant en avance pour la trajectoire perturbée ($s_c^{\eta}(t)$) est égal à celui pour la trajectoire nominale ($s_c(t)$) plus la perturbation η.

Théorème 4.5 : si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ alors $s_c^{\eta}(t) = s_c(t) + \eta \quad si\, \tau(t) < \tau_{ex}\ et\ D_c(t) > 0$.

Preuve du Théorème 4.5 *:*

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.3 avec une différence que : $s_c^{\eta}(t) = s_c(t) + \eta$ si $\tau(t) < \tau_{ex}$ et $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$.

CQFD

Le théorème 4.6 montre que si $t \in [0,T] \backslash \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$, les nombres de pièces arrivant en avance pour la trajectoire perturbée et pour la trajectoire nominale sont égaux.

Théorème 4.6 : si $t \in [0,T] \backslash \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ alors $s_c^{\eta}(t) = s_c(t)$

Preuve du Théorème 4.6 :

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.4.

CQFD

Le théorème 4.7 montre que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$, le décalage entre le nombre de pièces arrivant en retard pour la trajectoire perturbée ($r_c^{\eta}(t)$) est égal à celui pour la trajectoire nominale ($r_c(t)$) plus la perturbation η.

Théorème 4.7 : si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ alors $r_c^{\eta}(t) = r_c(t) + \eta \quad si\, \tau(t) > \tau_{ex}\ et\, D_c(t) > 0$.

Preuve du Théorème 4.7 :

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.3 avec une différence que : $r_c^{\eta}(t) = r_c(t) + \eta$ si $\tau(t) > \tau_{ex}$ et $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$.

CQFD

Le théorème 4.8 montre que si $t \in [0,T] \setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$, les nombres de pièces arrivant en retard pour la trajectoire perturbée et pour la trajectoire nominale sont égaux.

Théorème 4.8 : si $t \in [0,T] \setminus \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ alors $r_c^{\eta}(t) = r_c(t)$.

Preuve du Théorème 4.8 :

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.4.

CQFD

Dans la partie qui suit nous allons étudier les trajectoires du niveau de stock pour le cas d'un modèle à flux discrets.

4.4.2 Analyse des Perturbations Infinitésimales pour le modèle à flux discrets.

Nous allons déterminer les décalage entre $x_d^{\delta}(t)$ et $x_d(t)$, $y_d^{\delta}(t)$ et $y_d(t)$, le nombre de pièces arrivant à l'heure pour la trajectoire perturbée (noté $g_d^{\eta}(t)$) et celui pour la trajectoire nominale ($g_d(t)$), puis entre le nombre de pièces arrivant en avance pour la trajectoire perturbée (noté $s_d^{\eta}(t)$) et celui pour la trajectoire nominale ($s_d(t)$), enfin entre le nombre de pièces arrivant en retard pour la trajectoire perturbée (noté $r_d^{\eta}(t)$) et celui pour la trajectoire nominale ($r_d(t)$).

Théorème 4.9 montre que la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale plus la perturbation si $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$.

Théorème 4.9 : Si $\delta > 0$ et si $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta}) = x_d(t_{ssj}^{\delta}) + \delta = h_d + \delta$ alors $x_d^{\delta}(t) = x_d(t) + \delta$ pour tout $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$.

Preuve du Théorème 4.9 : (Voir annexe 2).

CQFD

Théorème 4.10 montre que la trajectoire perturbée est égale à la trajectoire nominale si $t \in \left[t_j, t^{\delta}_{ss(j+1)}\right[$.

Théorème 4.10 : Si δ>0 et h>1, et si $x^{\delta}_d(t^{\delta}_{ssj}) = x_d(t^{\delta}_{ssj})$, alors $x^{\delta}_d(t) = x_d(t)$ pour tout $t \in \left[t_j, t^{\delta}_{ss(j+1)}\right[$.

Preuve du Théorème 4.10: (Voir annexe 2).

CQFD

Théorème 4.11 démontre que si $t \neq t_j$, les nombres de pièces qui sortent du stock sur les trajectoires perturbée et nominale sont égaux.

Théorème 4.11 : Si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ alors $y^{\delta}_d(t) = y_d(t)$.

Preuve du Théorème 4.11 : (Voir annexe 2).

CQFD

Théorème 4.12 démontre que si $t = t_j$, le nombre de pièces qui sortent du stock sur la trajectoire perturbé est égale au nombre de pièces qui sortent du stock sur la trajectoire nominale plus la perturbation.

Théorème 4.12 : Si $t = t_j$ alors $y^{\delta}_d(t_j) = y_d(t_j) + \delta$.

Preuve du Théorème 4.12 : (Voir annexe 2).

CQFD

Nous montrons dans le théorème 4.13 que si $t = t_j$, le nombre de pièces arrivant à l'heure pour la trajectoire perturbée ($g^{\delta}_d(t)$) est égal à celui pour la trajectoire nominale ($g_d(t)$) plus la perturbation δ.

Théorème 4.13 : si $t = t_j$ alors $g^{\delta}_d(t) = g_d(t) + \delta \quad si\, \tau(t) = \tau_{ex}\ et\ D_d(t) > 0$.

Preuve du Théorème 4.13 :

Nous avons

$$g^{\delta}_d(t) = \begin{cases} y^{\eta}_d(t) & si\, \tau(t) = \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

$$g_d(t) = \begin{cases} y_d(t) & si\, \tau(t) = \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Si $t = t_j$ alors $y_d^{\delta}(t_j) = y_d(t_j) + \delta$ (Théorème 4.12) et si $D_d(t) = 0$ alors $y_d^{\eta}(t_j) = y_d(t_j) = 0$ (4.11).

Alors $g_d^{\delta}(t) = g_d(t) + \delta$ si $\tau(t) = \tau_{ex}$ et $D_d(t) > 0$.

Q.E.D.

Théorème 4.14 : si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ alors $g_d^{\delta}(t) = g_d(t)$.

Preuve du Théorème 4.14 :

Nous avons

$$g_d^{\delta}(t) = \begin{cases} y_d^{\eta}(t) & si\, \tau(t) = \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

$$g_d(t) = \begin{cases} y_d(t) & si\, \tau(t) = \tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ alors $y_d^{\delta}(t) = y_d(t)$ (Théorème 4.11).

Alors $g_d^{\delta}(t) = g_d(t)$.

CQFD

Le théorème 4.15 montre que si $t = t_j$, le nombre de pièces arrivant en avance pour la trajectoire perturbée ($s_d^{\delta}(t)$) est égal à celui pour la trajectoire nominale ($s_d(t)$) plus la perturbation δ.

Théorème 4.15 : si $t = t_j$ alors $s_d^{\delta}(t) = s_d(t) + \delta$ si $\tau(t) = \tau_{ex}$ et $D_d(t) > 0$.

Preuve du Théorème 4.15:

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.13 avec une différence que : $s_c^{\eta}(t) = s_c(t) + \eta$ si $\tau(t) < \tau_{ex}$ et $t = t_j$.

CQFD

Le théorème 4.16 montre que si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$, le nombre de pièces arrivant en avance pour la trajectoire perturbée ($s_d^{\delta}(t)$) est égale à celui pour la trajectoire nominale ($s_d(t)$).

Théorème 4.16 : si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ alors $s_d^{\delta}(t) = s_d(t)$

Preuve du Théorème 4.16 :

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.14.

CQFD

Le théorème 4.17 montre que si $t = t_j$, le nombre de pièces arrivant en retard pour la trajectoire perturbée ($r_d^{\delta}(t)$) est égal à celui pour la trajectoire nominale ($r_d(t)$) plus la perturbation δ.

Théorème 4.17 : si $r_d^{\delta}(0) = r_d(0)$ et $t = t_j$ alors $r_d^{\delta}(t) = r_d(t) + \delta$ si $\tau(t) < \tau_{ex}$ et $D_d(t) > 0$

Preuve du Théorème 4.17 :

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.13 avec une différence que : $r_d^{\eta}(t) = r_d(t) + \delta$ si $\tau(t) < \tau_{ex}$ et $t = t_j$.

CQFD

Le théorème 4.18 montre que si $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$, le nombre de pièces arrivant en retard pour la trajectoire perturbée ($r_d^{\delta}(t)$) est égal à celui pour la trajectoire nominale ($r_d(t)$).

Théorème 4.18 : si $r_d^{\delta}(0) = r_d(0)$ et $t \in [0,T] \setminus \{t_j\}$ alors $r_d^{\delta}(t) = r_d(t)$

Preuve du Théorème 4.18 :

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.14.

CQFD

Dans la section suivante, nous allons utiliser ces théorèmes pour déterminer les estimateurs IPA et montrer qu'ils ne sont pas biaisés.

4.4.3 Estimateurs IPA

Dans cette section, nous allons montrer pour les deux types de modèles que les estimateurs IPA sont non biaisés, ces estimateurs seront utilisés par la suite dans un algorithme d'optimisation pour déterminer le stock optimal h_c. En utilisant les théorèmes de la section précédente, nous allons déterminer les estimateurs du gradient de la fonction de coût pour le cas du modèle à flux continus, et les estimateurs de la différence de la fonction de coût pour le cas du modèle à flux discrets.

4.4.3.1 Modèle à flux continus

Le coût moyen qui correspond à la trajectoire perturbée est donné par :

$$C_{sra}^{\eta}(t, h_c + \eta) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E\left[\int_{t=0}^{t=T} (cs.\, x_c^{\eta}(t, h_c + \eta) + cs^{-}.\, P_c^{\eta}(t) + ct.\, (g_d^{\eta}(t, h_c + \eta) + h_c^{\eta}(t, s_c + \eta) + h_d^{\eta}(t, s_c + \eta)) + ctr.\, r_c^{\eta}(t, h_c + \eta) + cs^{-}.\, h_c^{\eta}(t, s_c + \eta)).\, \right]$$

Pour déterminer les estimateurs IPA de la fonction de coût, nous devons déterminer le coût par simulation. Alors nous allons représenter le coût moyen simulé par une estimation échantillonnée.

L'estimation échantillonnée pour le coût moyen qui correspond à la trajectoire perturbée est la suivante :

$$C^{\eta}_{sraT}(t,h_c+\eta)=$$

$$\frac{1}{T}E\left[\int_{t=0}^{t=T}(cs.x^{\eta}_c(t,h_c+\eta)+cs^-.P^{\eta}_c(t)+ct.(g^{\eta}_c(t,h_c+\eta)+r^{\eta}_c(t,h_c+\eta)+s^{\eta}_c(t,h_c+\eta))+ctr.r^{\eta}_c(t,h_c+\eta)+cts.s^{\eta}_c(t,h_c+\eta)).dt\right]$$

L'estimation échantillonnée pour le coût moyen qui correspond à la trajectoire nominale est donné par :

$$C_{sraT}(t,h_c)=\frac{1}{T}E\left[\int_{t=0}^{t=T}(cs.x_c(t,h_c)+cs^-.P_c(t)+ct.(g_c(t,h_c)+r_c(t,h_c)+s_c(t,h_c))+ctr.r_c(t,h_c)+cts.s_c(t,h_c)).dt\right]$$

Nous pouvons maintenant déterminer les estimateurs des gradients de la fonction de coût.

L'estimation échantillonnée de la différence entre le coût moyen de la trajectoire perturbée et le coût moyen de la trajectoire nominale est donnée par :

$$C^{\eta}_{sraT}(t,h_c+\eta)-C_{sraT}(t,h_c)=$$

$$\frac{1}{T}.E\left[\int_{t=0}^{t=T}(cs.(x^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt+\int_{t=0}^{t=T}cs^-.(P^{\eta}_c(t+\tau_{ex})-P_c(t+\tau_{ex})).dt+\right.$$

$$\int_{t=0}^{t=T}ct.(g^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c)).dt+$$

$$\left.\int_{t=0}^{t=T}ctr.(r^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)).dt+\int_{t=0}^{t=T}cts.(s^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c)).dt\right]$$

Nous supposons que dans l'intervalle $[0,T]$ il y a m intervalles $[t^{\eta}_{sj},t^{\eta}_{vj}[$.

Nous avons montré dans le chapitre précédent que :

$$\int_{t=0}^{t=T}(x^{\eta}_c(t,h_c+\eta)-x_c(t,h_c)).dt=\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t^{\eta}_{sj}}^{t^{\eta}_{vj}}\eta.dt \quad \text{et} \quad \int_{t=0}^{t=T}(P^{\eta}_c(t)-P_c(t)).dt=\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{vj}}^{t^{\eta}_{vj}}(-\eta).dt\ .$$

Pour $\int_{t=0}^{t=T} ct.(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c)).dt$

- Si $t \in [0,T] \setminus [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$ alors $g_c^{\eta}(t)=g_c(t)$, $r_c^{\eta}(t)=r_c(t)$ et $s_c^{\eta}(t)=s_c(t)$ (théorème 4.4, 4.6 et 4.8). Alors $(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c))=0$

- Si $t \in [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$ nous avons trois cas de $\tau(t)$

  - Cas 1 si $\tau(t)=\tau_{ex}$: alors $g_c^{\eta}(t)=g_c(t)+\eta$, $r_c^{\eta}(t)=r_c(t)$ et $s_c^{\eta}(t)=s_c(t)$ (théorème 4.3, 4.5 et 4.7). Alors

    $(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c))=\eta$.

  - Cas 2 si $\tau(t)<\tau_{ex}$: alors $g_c^{\eta}(t)=g_c(t)$, $r_c^{\eta}(t)=r_c(t)$ et $s_c^{\eta}(t)=s_c(t)+\eta$ (théorème 4.3, 4.5 et 4.7). Alors

    $(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c))=\eta$.

  - Cas 3 si $\tau(t)>\tau_{ex}$: alors $g_c^{\eta}(t)=g_c(t)$, $r_c^{\eta}(t)=r_c(t)+\eta$ et $s_c^{\eta}(t)=s_c(t)$ (théorème 4.3, 4.5 et 4.7). Alors

    $(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c))=\eta$

Alors dans les trois cas nous avons

$(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c))=\eta$ si $t \in [t_{vj}, t_{vj}^{\eta}[$,

alors

$$\int_{t=0}^{t=T} ct.\tau(t).(g_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-g_c(t,h_c)+r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)+s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c)).dt = \sum_{j=1}^{j=m} \int_{t_{sj}^{\eta}}^{t_{vj}^{\eta}} ct.\eta.dt$$

Nous avons $\int_{t=0}^{t=T} ctr.(r_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-r_c(t,h_c)).dt = ctr.1.[\tau(t)>\tau_{ex}].\sum_{j=1}^{j=m} \int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} \eta.dt$ avec

$$1.[\tau(t)>\tau_{ex}] = \begin{cases} 1 & si\ \tau(t)>\tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Nous avons $\int_{t=0}^{t=T} cts.(s_c^{\eta}(t,h_c+\eta)-s_c(t,h_c)).dt = cts.1.[\tau(t)<\tau_{ex}].\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} \eta.dt$ avec

$$1.[\tau(t)<\tau_{ex}] = \begin{cases} 1 & si\ \tau(t)<\tau_{ex} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Alors

$$C_{sraT}^{\eta}(h_c+\eta)-C_{sraT}(h_c) = \frac{1}{T}.E\left[\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{sj}^{\eta}}^{t_{vj}^{\eta}} cs.\eta.dt + \sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} cs^{-}.(-\eta).dt + \sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{sj}^{\eta}}^{t_{vj}^{\eta}} ct.\eta.dt + \right.$$

$$\left. ctr.1.[\tau(t)>\tau_{ex}].\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} \eta.dt + cts.1.[\tau(t)<\tau_{ex}].\sum_{j=1}^{j=m}\int_{t_{vj}}^{t_{vj}^{\eta}} \eta.dt \right]$$

Supposons que $T_{sv} = \sum_{j=1}^{j=m}(t_{vj}^{\eta}-t_{sj}^{\eta})$, $T_w = \sum_{j=1}^{j=m}(t_{vj}^{\eta}-t_{vj})$ avec $T_{ls}+T_{lv} \le T$.

Alors

$$C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta)-C_{aT}(t,h_c) = \frac{1}{T}E\left[\left(T_{sv}.cs + T_w.(ct - cs^{-} + ctr.1.[\tau(t)>\tau_{ex}] + cts.1.[\tau(t)<\tau_{ex}])\right).\eta\right]$$

L'estimation échantillonnée de la différence du coût moyen est composée de cinq parties qui sont : l'estimation de la différence du coût de stockage, du coût de demandes perdues, du coût de transport, du coût de demandes arrivant en retard et du coût de demandes arrivant en avance.

Les gradients de la fonction de coût sont définis par :

$$\frac{\partial C_{aT}(h_c)}{\partial h} = E\left[\frac{T_{sv}}{T}.cs - \frac{T_w}{T}.cs^{-} + \frac{T_w}{T}.ct + \frac{T_w}{T}.1.[\tau(t)>\tau_{ex}].ctr + \frac{T_w}{T}.1.[\tau(t)<\tau_{ex}].cts\right]$$

$\frac{\partial C_{aT}(h_c)}{\partial h} = E\left[X_c^{'}(t,h_c).cs - B_c^{'}(t,h_c).cs^{-} + XT_c^{'}(t,h_c).ct + R_c^{'}(t,h_c) + S_c^{'}(t,h_c)\right]$, avec $X_c^{'}(t,h_c)$, $XT_c^{'}(t,h_c)$, $B_c^{'}(t,h_c)$, $R_c^{'}(t,h_c)$ et $S_c^{'}(t,h_c)$ les estimateurs des gradients du chaque partie de la fonction de coût qui sont donnés par :

$X_c^{'}(t,h_c) = \frac{T_{sv}}{T}$, $XT_c^{'}(t,h_c) = \frac{T_w}{T}$, $B_c^{'}(t,h_c) = \frac{T_w}{T}$, $R_c^{'}(t,h_c) = \frac{T_w}{T}.1.[\tau(t)>\tau_{ex}]$ et $S_c^{'}(t,h_c) = \frac{T_w}{T}.1.[\tau(t)<\tau_{ex}]$.

Théorème 4.19 : les estimateurs du gradient ($X_c^{'}(t,h_c), XT_c^{'}(t,h_c), B_c^{'}(t,h_c), R_c^{'}(t,h_c)$ et $S_c^{'}(t,h_c)$) du coût moyen sont non biaisés.

Preuve du Théorème 4.19 :

Pour montrer que les estimateurs du gradient du coût moyen sont non biaisés nous devons satisfaire les deux conditions suivantes :

- La dérivée de la fonction de coût ($d(C_a(h))/dh$) existent.
- La fonction de coût est continue par Lipschitz.

La première condition est garantie par l'hypothèse 2.1 (chapitre 2), Il nous reste à montrer que la fonction de coût est continue par Lipschitz.

Le coût moyen $C_a(h)$ est continu par Lipschitz dans H si il existe une constante $k \in R_0$ tel que :

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h+\eta) - C_{aT}(t,h)\right| \leq k.\left|(h_c+\eta) - h_c\right| \quad \forall h, h+\eta \in H .$$

L'estimation échantillonnée de la différence entre le coût moyen de la trajectoire perturbée et le coût moyen de la trajectoire nominale est donné par :

$$C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta) - C_{aT}(t,h_c) = E\left[\left(\frac{T_{sv}}{T}.cs + \frac{T_w}{T}.(ct - cs^{-} + 1.\left[\tau(t) > \tau_{ex}\right].ctr + 1.\left[\tau(t) < \tau_{ex}\right].cts)\right).\eta\right]$$

Nous avons $T_{sv} + T_w \leq T$ alors

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta) - C_{aT}(t,h_c)\right| \leq \left|(cs + ct - cs^{-} + 1.\left[\tau(t) > \tau_{ex}\right].ctr + 1.\left[\tau(t) < \tau_{ex}\right].cts).\eta\right| .$$

$$\left|C_{aT}^{\eta}(t,h_c+\eta) - C_{aT}(t,h_c)\right| \leq \left|cs + ct - cs^{-} + 1.\left[\tau(t) > \tau_{ex}\right].ctr + 1.\left[\tau(t) < \tau_{ex}\right].cts\right|.\left|\eta\right| .$$

Nous supposons $k = \left|cs + ct - cs^{-} + 1.\left[\tau(t) > \tau_{ex}\right].ctr + 1.\left[\tau(t) < \tau_{ex}\right].cts\right|$, alors $\left|C_{aT}^{\eta}(t,h+\eta) - C_{aT}(t,h)\right| \leq k.\left|\eta\right|$.

Alors, la fonction est continue selon Lipschitz.

CQFD

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme (algorithme d'estimation) permettant de déterminer les estimateurs IPA ($X_c^{'}(t,h_c)$, $XT_c^{'}(t,h_c), B_c^{'}(t,h_c), R_c^{'}(t,h_c)$ et $S_c^{'}(t,h_c)$) qui seront utilisés par la suite dans un algorithme d'optimisation.

Soit *F, G, Z, R et S* les estimateurs IPA (paramètres) qui seront utilisés dans l'algorithme suivant.

Avec $X_c^{'}(t,h_c)=\frac{F}{T}$, $XT_c^{'}(t,h_c)=\frac{G}{T}=B_c^{'}(t,h_c)$, $R_c^{'}(t,h_c)=\frac{R}{T}$ et $S_c^{'}(t,h_c)=\frac{S}{T}$.

Algorithme des estimateurs IPA.

Début

F=0, *G*=0, *Z*=0, *R*=0, *S*= 0, *t*=0, *q*=0, *l*=0, *w*=0 // *Initialisation*

Faire

- Si $t=t_{sj}^{\eta}$ alors $q=t_{sj}^{\eta}$.
- Avancer *t*.
- Si $t=t_{vj}$ alors $l=t_{vj}$.
- Avancer *t*.
- Si $t=t_{vj}^{\eta}$ alors $w=t_{vj}^{\eta}$.

  $F=F+(w-q)$.
  $G=G+(w-l)$.
  $R=R+1.\left[\tau(t)>\tau_{ex}\right].(w-l)$.
  $S=S+1.\left[\tau(t)<\tau_{ex}\right].(w-l)$.
  $q=l=w=0$.

- Avancer *t*.

Tant que $t<T$

$X_c^{'}(t,h_c)=\frac{F}{T}$, $XT_c^{'}(t,h_c)=\frac{G}{T}=B_c^{'}(t,h_c)$, $R_c^{'}(t,h_c)=\frac{R}{T}$ et $S_c^{'}(t,h_c)=\frac{S}{T}$.

Fin.

Dans ce qui suit, nous présentons l'algorithme d'optimisation qui détermine le niveau du stock optimal.

4.4.3.2 Modèle à flux décrets.

L'espérance du coût actualisé sur un horizon infini $[0,T]$ est défini par :

$$CT_{dex}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\sum_{t=0}^{t=T}C_{dsr}(t,h_d)\right].$$

Cette fonction est divisée en cinq parties :

$$CT_{d\,x}=\lim_{T\to\infty}(cs.E\left[X_d(t,h_d)\right]+ct.E\left[XT_d(t,h_d)\right]+cs^{-}.E\left[B_d(t,h_d)\right]+ cts.E\left[S_d(t,h_d)\right]+ctr.E\left[R_d(t,h_d)\right])$$

avec

$$X_d(t,h_d)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}x_d(t)\,,\ XT_d(t,h_d)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}(g_d(t)+r_d(t)+s_d(t))\,,$$

$$B_d(t,h_d)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}D_d^0(t)\,,\ R_d(t,h_d)=\sum_{t=0}^{t=T}r_d(t)\,,\ S_d(t,h_d)=\sum_{t=0}^{t=T}s_d(t)$$

Nous pouvons maintenant déterminer les estimateurs de la différence de chaque partie de l'espérance du coût.

Théorème 4.20 : Les estimateurs de la différence de chaque partie de l'espérance du coût sont non biaisés :

$$\frac{\Delta E[X_d(t,h_d)]}{\Delta h}=E\left[\frac{\Delta[X_d(t,h_d)]}{\Delta h}\right],\ \frac{\Delta E[XT_d(t,h_d)]}{\Delta h}=E\left[\frac{\Delta[XT_d(t,h_d)]}{\Delta h}\right],$$
$$\frac{\Delta E[B_d(t,h_d)]}{\Delta h}=E\left[\frac{\Delta[B_d(t,h_d)]}{\Delta h}\right],\ \frac{\Delta E[S_d(t,h_d)]}{\Delta h}=E\left[\frac{\Delta[S_d(t,h_d)]}{\Delta h}\right] \text{ et}$$
$$\frac{\Delta E[R_d(t,h_d)]}{\Delta h}=E\left[\frac{\Delta[R_d(t,h_d)]}{\Delta h}\right].$$

Preuve Théorème 4.20 :

Nous supposons que dans $[0,T]$ il existe *n* intervalles $[t_{ssj}^{\delta},t_j[$, et *l* intervalles $[t_j,t_{ss(j+1)}^{\delta}[$.

❖ Pour $X_d(t,h_d)$ nous avons $\Delta[X_d(t,h_d)]=\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}\Delta(x_d(t,h_d))=\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-x_d(t,h_d)$.

Nous avons $x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-x_d(t,h_d)=\delta$ pour tout $t\in[t_{ssj}^{\delta},t_j[$(théorème 4.9) et $x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-x_d(t,h_d)=0$ pour tout $t\in[t_j,t_{ss(j+1)}^{\delta}[$ (théorème 4.10), alors :

$$\Delta[X_d(t,h_d)]=\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-x_d(t,h_d)=\frac{1}{T}.\left[\sum_{j=1}^{j=n}\frac{(t_j-t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta\,,$$

d'où $E\left[\frac{\Delta[X_d(t,h_d)]}{\Delta h_d}\right]=E\left[\frac{1}{T}\left[\sum_{j=1}^{j=n}\frac{(t_j-t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta\Big/\Delta h_d\right]$.

Nous avons $E[X_d(t,h_d)]=E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}x_d(t,h_d)\right]=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E[x_d(t,h_d)]$, alors

$$\Delta\left(E\left[X_d(t,h_d)\right]\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}\Delta\left(E\left[x_d(t,h_d)\right]\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)\right]-E\left[x_d(t,h_d)\right]$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-x_d(t,h_d)\right]=E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}\left[x_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-x_d(t,h_d)\right]\right]$$

$$=E\left[\frac{1}{T}.\left[\sum_{j=1}^{j=n}\frac{(t_j-t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta\right]$$

D'ou nous avons bien

$$\frac{\Delta E\left[X_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}=E\left[\frac{1}{T}.\left[\sum_{j=1}^{j=n}\frac{(t_j-t_{ssj}^{\delta})}{dt}\right].\delta\Big/\Delta h_d\right]=E\left[\frac{\Delta\left[X_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}\right].$$

❖ Pour $XT_d(t,h_d)$ nous avons

$$\Delta\left[XT_d(t,h_d)\right]=$$

$$\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_s^{\delta}(t,h_d+\delta)-s_d(t,h_d))$$

- Si $t\in[0,T]\setminus\{t_j\}$ nous avons $g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)=0$ (théorème 4.14), $r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)=0$ (théorème 4.16) et $s_s^{\delta}(t,h_d+\delta)-s_d(t,h_d)=0$ (théorème 4.18). Alors $g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_s^{\delta}(t,h_d+\delta)-s_d(t,h_d)=0$ si $t\in[0,T]\setminus\{t_j\}$.

- Si $t=t_{vj}$ nous avons trois cas de $\tau(t)$.

  - Cas 1 si $\tau(t)=\tau_{ex}$: alors $g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=g_d(t,h_d)+\delta$, $r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=r_d(t,h_d)$ et $s_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=s_d(t,h_d)$ (théorème 4.13, 4.15 et 4.17), d'ou

$$(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_d^{\delta}(t,h_c+\delta)-s_d(t,h_d))=\delta$$

  - Cas 2 si $\tau(t)<\tau_{ex}$: alors $g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=g_d(t,h_d)$, $r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=r_d(t,h_d)$ et $s_d^{\eta}(t,h_d+\delta)=s_d(t,h_d)+\delta$, d'ou

$$(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_d^{\delta}(t,h_c+\delta)-s_d(t,h_d))=\delta.$$

  - Cas 3 si $\tau(t)>\tau_{ex}$: alors $g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=g_d(t,h_d)$, $r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=r_d(t,h_d)+\delta$ et $s_d^{\delta}(t,h_d+\delta)=s_c(t,h_d)$, d'ou

$$(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_d^{\delta}(t,h_c+\delta)-s_d(t,h_d))=\delta$$

Alors dans les trois cas nous avons

$(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_d^{\delta}(t,h_c+\delta)-s_d(t,h_d))=\delta$ si $t=t_{vj}$, alors $\Delta\left[XT_d(t,h_d)\right]=\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\delta$.

D'ou, $E\left[\frac{\Delta\left[XT_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}\right]=E\left[\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\delta\Big/\Delta h_d\right]$.

$$\sum_{t=0}^{t=T}(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-r_d(t,h_d)+s_s^{\delta}(t,h_d+\delta)-s_d(t,h_d))$$

Nous avons

$$\begin{aligned}E\left[XT_d(t,h_d)\right] &= E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}g_d(t,h_d)+r_d(t,h_d)+s_d(t,h_d)\right]\\ &=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[g_d(t,h_d)+r_d(t,h_d)+s_d(t,h_d)\right]\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\Delta E\left[XT_d(t,h_d)\right]&=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}\Delta(E\left[g_d(t,h_d)+r_d(t,h_d)+s_d(t,h_d)\right])\\ &=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)+s_s^{\delta}(t,h_d+\delta)\right]-\\ &\qquad E\left[g_d(t,h_d)+r_d(t,h_d)+s_d(t,h_d)\right].\\ &=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T}E\left[(g_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-g_d(t,h_d)+r_d^{\delta}(t,h_d+\delta)-\right.\\ &\qquad \left.r_d(t,h_d)+s_d^{\delta}(t,h_c+\delta)-s_d(t,h_d))\right]\\ &=E\left[\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\delta\right]\end{aligned}$$

Alors nous avons bien $\frac{\Delta E\left[XT_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}=E\left[\frac{1}{T}.\sum_{j=1}^{j=l}\delta\Big/\Delta h_d\right]=E\left[\frac{\Delta\left[XT_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}\right]$.

❖ Pour $B_d(t,h_d)$

nous avons $\Delta\left[B_d(t,h_d)\right]=\frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T}D_d^{0\delta}(t)-D_d^{0}(t)$, avec $D^{0\delta}(t)$ est le nombre des demandes non satisfaites pour la trajectoire perturbée.

Alors

$$D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t) = D_d(t) - y_d{}^{\delta}(t_j) - D_d(t) + y_d(t_j)$$
$$= y_d(t_j) - y_d{}^{\delta}(t_j) = -\delta$$

$$\Delta\left[B_d(t,h_d)\right] = \frac{1}{T}.\sum_{t=0}^{t=T} D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t) = \frac{1}{T}.\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta)\,.$$

Alors $E\left[\dfrac{\Delta\left[B_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\dfrac{1}{T}\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta)\Big/\Delta h_d\right]$.

Nous avons

$$\Delta E\left[B_d(t,h_d)\right] = \Delta E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} D_d^0(t)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} E\left[D_d^{0\delta}(t)\right] - E\left[D_d^0(t)\right]$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} E\left[D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t)\right] = E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{t=T} D_d^{0\delta}(t) - D_d^0(t)\right]$$
$$= E\left[\frac{1}{T}.\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta)\right]$$

Alors nous avons bien $\dfrac{\Delta E\left[B_d(t,h_d)\right]}{\Delta h_d} = E\left[\dfrac{1}{T}\sum_{r=1}^{r=l}(-\delta)\Big/\Delta h_d\right] = E\left[\dfrac{\Delta\left[B(t,h_d)\right]}{\Delta h_d}\right]$.

- Pour $S_d(t,h_d)$ nous avons $S_d^{\delta}(t,h_d+\delta) - S_d(t,h_d) = \sum_{j=1}^{j=l} 1.\left[\tau(t_j) < \tau_{ex}\right]\delta$, alors $\dfrac{\Delta E\left[S_d(t,h_d)\right]}{\Delta h} = E\left[\sum_{j=1}^{j=l} 1.\left[\tau(t_j) < \tau_{ex}\right]\delta / \Delta h\right] = E\left[\dfrac{\Delta\left[S_d(t,h_d)\right]}{\Delta h}\right]$

- Pour $R_d(t,h_d)$ nous avons $R_d^{\delta}(t,h_d+\delta) - R_d(t,h_d) = \sum_{j=1}^{j=l} 1.\left[\tau(t_j) > \tau_{ex}\right]\delta$, alors $\dfrac{\Delta E\left[R_d(t,h_d)\right]}{\Delta h} = E\left[\sum_{j=1}^{j=l} 1.\left[\tau(t_j) > \tau_{ex}\right]\delta / \Delta h\right] = E\left[\dfrac{\Delta\left[R_d(t,h_d)\right]}{\Delta h}\right]$

CQFD

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme (algorithme d'estimation) permettant de déterminer les estimateurs d'IPA qui sera utilisée par la suite dans un algorithme d'optimisation.

Soit *TS*, *C1, C2*, *C3* et *C4* les estimateurs d'IPA (paramètres),

avec $E\left[\frac{\Delta[X(t,h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{TS}{T}\right]$, $E\left[\frac{\Delta[XT(t,h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{C1}{T}\right]$, $E\left[\frac{\Delta[B(t,h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{(-C2)}{T}\right]$, $E\left[\frac{\Delta[S_d(t,h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{(C3)}{T}\right]$ et $E\left[\frac{\Delta[R_d(t,h_d)]}{\Delta h_d}\right] = E\left[\frac{(C4)}{T}\right]$.

Algorithme des estimateurs IPA.

$C1$= 0, $C2$=0, $C3$=0, $C4$=0 TS=0, t=0 //
Début
Faire

- Si $t = t^{\delta}_{ssj}$ alors, $C2 = \delta + C2$.
- Si $t = t_j$ alors $TS = ((t_j - t^{\delta}_{ssj}).\delta)/dt$, et $C1 = C1 + \delta$.
- Si $t = t_j + \tau_{ex}$ et $\tau(t_j) < \tau_{ex}$ alors $C3 = C3 + \delta$.
- Si $t = t_j + \tau_{ex}$ et $\tau(t_j) > \tau_{ex}$ alors $C4 = C4 + \delta$.
- t= t+dt.
- Tant que t<T.

Fin.

Dans ce qui suit, les résultats numériques sont présentés pour montrer l'intérêt de notre méthode et qui sera utilisée pour étudier l'impact des coûts de livraison sur la valeur de h.

4.5 Impact des unités de coût (*cs*, *ct*, *cs*$^-$, *ctr* et *cts*) sur le stock optimal

Nous allons étudier l'impact des unités de coût sur la valeur du stock optimale pour les deux modèles différents. En effet, la fonction de coût ($C_{csr}(t)$ ou $C_{dsr}(t)$) dépend de la valeur des coûts unitaires *cs, ct, cs*$^-$*, ctr* et *cts*. La valeur du stock optimal (h_c ou h_d) qui minimise le coût dépend aussi de ces coûts unitaires. Dans cette partie nous nous somme intéressés à étudier l'impact des coûts unitaires *ctr* et *cts* sur le stock optimal, nous varions ces coûts unitaires et nous utilisons la méthode IPA pour déterminer le stock optimale correspond.

Nous présentons des exemples de résultats de simulation dans les tableaux Tableau 4.1 et Tableau 4.2.

Les paramètres de simulation pour les deux modèles sont les suivants :

- U = 1 pièce/unité de temps.
- La moyenne des demandes est égale à 0,8.
- La moyenne du temps de bon fonctionnement *MTBF* est égale à 2,5 et la moyenne du temps de réparation *MTTR* est égale à 1.
- Le temps total de simulation est égale à 10E+07 unité de temps.

- Le temps de livraison $\tau(t)$ est aléatoire et compris entre 1 et 3.

cs	ct	cs$^-$	cts	ctr	Stock optimal (h_c)
1	1	30	1	1	5,1823
1	1	30	1	10	5,0625
1	1	30	10	1	5,0625
1	1	30	10	10	4,6875
1	1	30	1	30	4,3220
1	1	30	30	1	4,3225
1	1	20	1	1	3,0625
1	1	20	1	10	2,8370
1	1	20	10	1	2,8325
1	1	20	10	10	2,1875

Tableau 4.1 : Impact des coûts *cs, ct, cs$^-$, ctr* et *cts* sur h_c

cs	ct	cs$^-$	cts	ctr	Stock optimal (h_d)
1	1	30	1	1	5
1	1	30	1	10	5
1	1	30	10	1	5
1	1	30	10	10	4
1	1	30	1	30	4
1	1	30	30	1	4
1	1	20	1	1	3
1	1	20	1	10	3
1	1	20	10	1	3
1	1	20	10	10	2

Tableau 4.2 : Impact des coûts *cs, ct, cs$^-$, ctr* et *cts* sur h_d

Nous constatons que plus les coûts de livraison (*ctr* et *cts*) deviennent important par rapport au coût de la demande perdue (*cs$^-$*) plus la valeur du stock optimal (h_c ou h_d) diminue. En effet, lorsque les coûts unitaires *ctr* et *cts* deviennent important plus le coût de livraison total (coût de transport plus coût de livraison en retard plus le coût de livraison en avance) augmente, d'où le coût $C_{csr}(t)$ augmente. Donc la valeur du stock optimal (h_c ou h_d) qui minimise le coût $C_{csr}(t)$ diminue lorsque que les coûts unitaires *ctr* et *cts* augmentent.

4.6 Comparaison du modèle à flux discrets et modèle à flux continus

L'objectif de cette section est de comparer les résultats donnés par le modèle à flux continus et ceux qui sont donnés par le modèle à flux discrets. Pour cela, nous allons étudier la fonction de coût pour les deux modèles différents, en même temps nous allons étudier

l'impact du temps planifié sur le stock optimal. En effet, pour les deux modèles, τ_{ex} varie de 2 à 11 et pour chaque valeur de τ_{ex} le programme détermine les valeurs des coûts qui correspondent aux valeurs du stock optimal entre 1 et 10. Afin de comparer les deux modèles, les générations des demandes, des pannes et des réparations sont données d'une manière équivalente. Les temps de livraison planifiés sont de 2 jusqu'au 11 (la plus petite valeur du temps de livraison planifié pour le cas discrets = 2).

Les paramètres de simulation sont les suivants :

- U_c = 1 pièce/unité de temps.
- La moyenne des demandes est égale à 0,8.
- La moyenne du temps de bon fonctionnement *MTBF* est égale à 2,5 et la moyenne du temps de réparation *MTTR* est égale à 1.
- Le temps total de simulation est égale à 10E+07 unités de temps.
- Le coût unitaire de stockage cs est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire de transport ct est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire d'une demande perdue cs^- est égal à 30 unités monétaires.
- Le coût unitaire d'une livraison en retard *ctr* est égal à 1 unité monétaire.
- Le coût unitaire d'une livraison en avance *cts* est égal à 1 unité monétaire.

4.6.1 Etude de la fonction de coût pour le modèle à flux continus

Nous présentons dans cette partie le coût moyen ($C_{sra}(t)$) en fonction du stock et du temps de livraison (voir Figure 4.3).

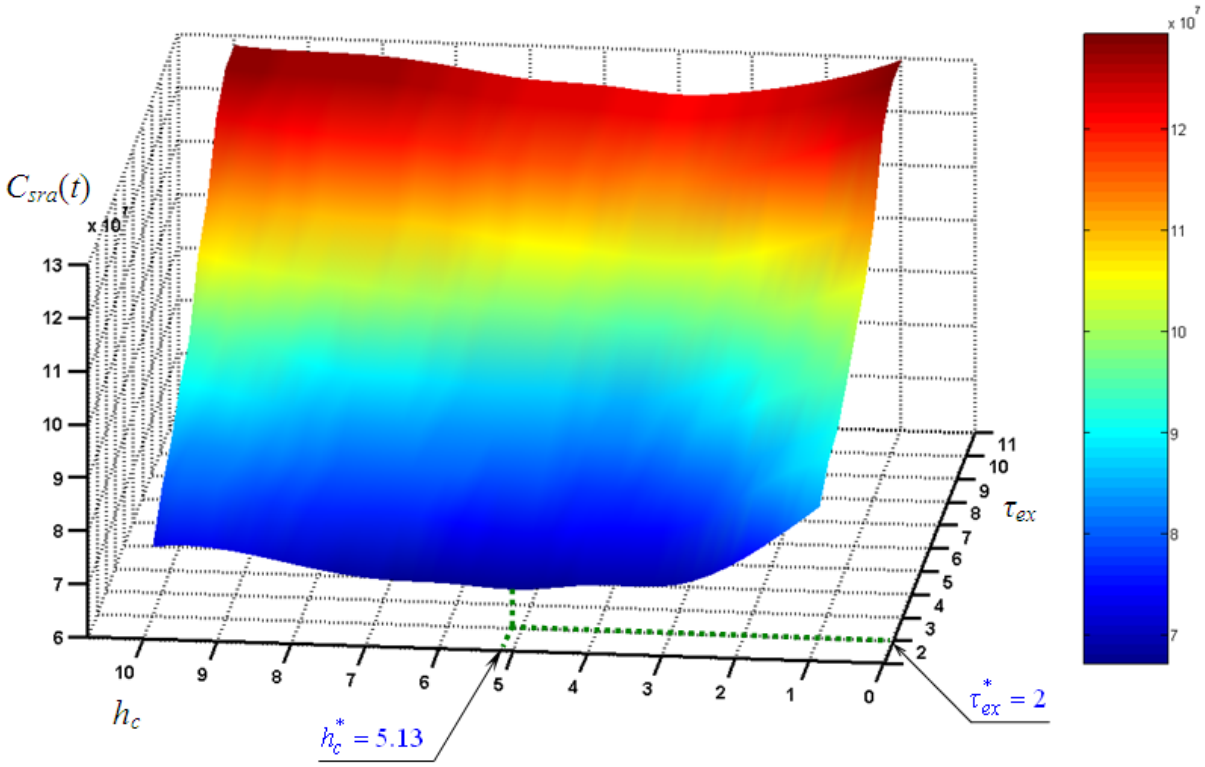

Figure 4.3 : $C_{sra}(t) = f(h_c, \tau_{ex})$

- h_c^* est la valeur optimale de h_c qui correspond au coût minimal.
- τ_{ex}^* est la valeur optimale de τ_{ex} qui correspond au coût minimal.

4.6.2 Etude de la fonction de coût pour le modèle à flux discrets

Le coût moyen ($CT_{dex}(t)$) en fonction du stock et du temps de livraison est représenté sur la Figure 4.4.

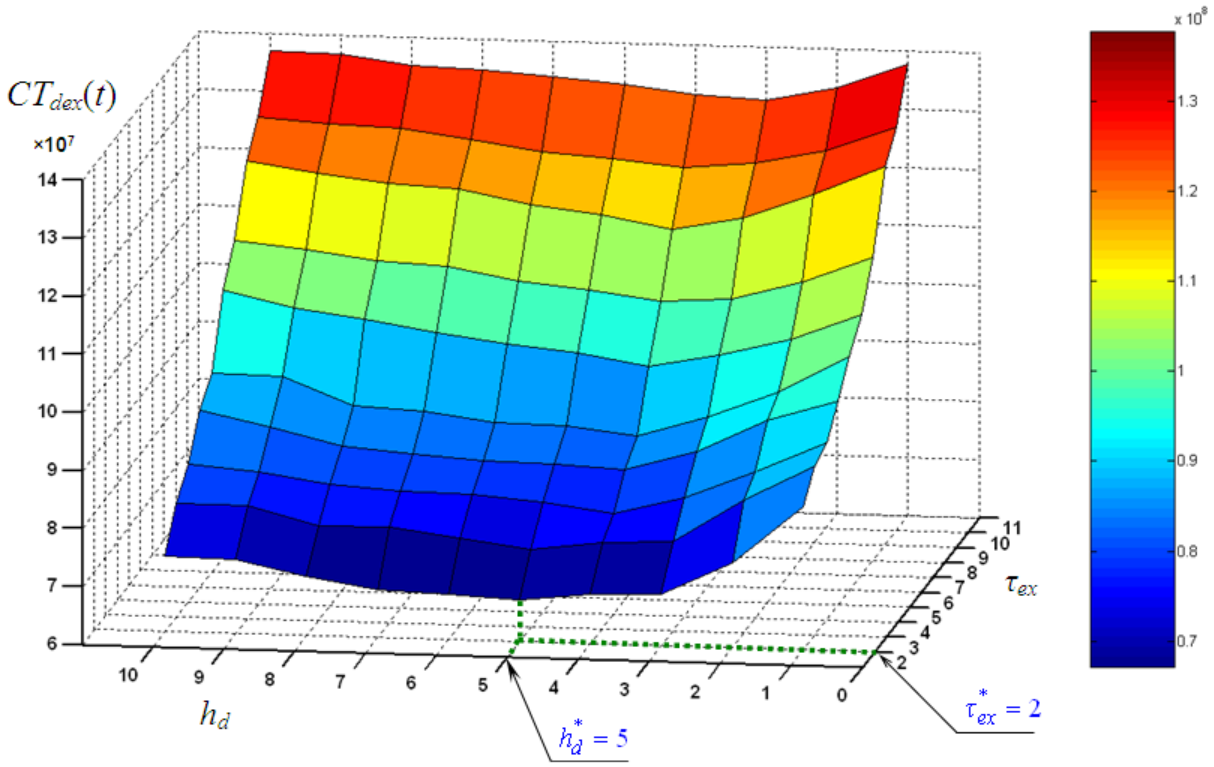

Figure 4.4 : $CT_{dex}(t) = f(h_d, \tau_{ex})$

- h_d^* est la valeur optimale de h_d qui correspond au coût minimal.

4.6.3 Conclusion de l'étude de la fonction de coût

Pour les deux modèles, la fonction de coût est convexe. Pour chaque valeur de τ_{ex} nous avons un stock optimal qui minimise la fonction de coût. Les valeurs des stocks optimaux déterminées par la simulation du modèle à flux continus (h_c) sont proches aux celles déterminées par la simulation du modèle à flux discrets (h_d). Le temps de livraison a un impact sur le stock pour les deux modèles. En effet, la valeur de h_c (respectivement h_d) qui minimise le coût décroit si la valeur du temps de livraison planifié augmente. Pour le modèle à flux discrets, nous constatons que la valeur du stock optimal est la même sur des intervalles du temps de livraison planifié, par exemple dans notre cas nous avons h_d^*=4 si τ_{ex} varie de 4 à 9 (voir Figure 4.4). Pour le cas du modèle à flux continus, nous constatons que le stock

optimal est différent pour chaque valeur du temps de livraison planifié. En effet, le modèle à flux continus nous permet de déminer la valeur du stock optimal plus précisément que le modèle à flux discrets, cela est expliqué par le fait que le modèle à flux discrets détermine des valeurs entières, d'où il ne permet pas de déterminer des valeurs précises du stock optimal.

4.7 Conclusion

Nous avons considéré un système de production avec un temps de livraison aléatoire entre le stock et le client. Le système est composé d'une machine, d'un stock de capacité infinie et d'un client qui demande à chaque instant une quantité de produit aléatoire. Nous avons supposé que le producteur propose pour le client un temps de livraison planifié (τ_{ex}), d'où nous avons trois cas de temps de livraison aléatoire ($\tau(t)$) en fonction du temps de livraison planifié : les pièces transportées arrivent à l'heure planifiée (i.e. $\tau_{ex} = \tau(t)$), les pièces transportées arrivent avant l'heure planifiée (i.e. $\tau(t) < \tau_{ex}$) et les pièces transportées arrivent après l'heure planifiée (i.e. $\tau(t) > \tau_{ex}$). Nous avons proposé pour notre système deux modèles différents : modèle à flux continus et modèle à flux discrets. La méthode IPA est appliquée pour les deux types de modèles pour l'évaluation des performances. Ainsi, pour les deux modèles nous avons étudié les trajectoires du niveau de stock, du nombre de pièces transportées, du nombre de pièces arrivant en avance et du nombre de pièces arrivant en retard. Ces études sont généralisées par des théorèmes qui sont utilisés ensuite pour déterminer les estimateurs IPA et prouver qu'ils sont non biaisés.

Pour l'évaluation de performances, Nous avons étudié l'impact des unités de coût sur la valeur du stock optimal pour les deux modèles différents. Nous avons utilisé pour chaque modèle un algorithme d'optimisation basé sur la méthode IPA pour déterminer le stock optimal en fonction des unités de coût. La valeur du stock optimal (h_c ou h_d) qui minimise le coût diminue lorsque que les coûts unitaires *ctr* et *cts* augmentent. Nous avons étudié la fonction de coût pour le modèle à flux continus et celle du modèle à flux discrets, en même temps nous avons étudié l'impact du temps planifié sur le stock optimal. Pour les mêmes paramètres de simulation, les valeurs des coûts déterminées par la simulation du modèle à flux continus sont proches de celles déterminées par la simulation du modèle à flux discrets. La valeur du stock optimal (h_c ou h_d) qui minimise le coût décroit si la valeur du temps de livraison planifié augmente. Le modèle à flux continus nous permet de déterminer la valeur du stock optimale plus précisément que le modèle à flux discrets.

Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons étudié l'évaluation des performances et l'optimisation d'un système de production en utilisant deux modèles différents (modèles à flux continus et modèles à flux discrets) tout en incluant dans ces différents modèles le délai de livraison. Le délai de livraison ainsi représenté est dans un premier temps considéré comme déterministe, puis, dans un deuxième temps, les résultats obtenus sont étendus avec un délai de livraison aléatoire. Le système de production considéré est composé d'une machine soumise à pannes, d'un stock de capacité infinie et d'un client qui demande aléatoirement une quantité de produit.

Ce travail commence d'abord, par une étude bibliographique portant sur les systèmes de production et la modélisation de ces systèmes. Les éléments qui constituent un système de production (machines, stocks, moyens de transport…) ont été présentés et définis avec leurs rôles. Nous avons distingué quatre types d'outils de modélisation (les réseaux de Petri, les files d'attente, les modèles à flux discrets et les modèles à flux continus) par leurs avantages et inconvénients, les notions et les principaux travaux utilisant ces outils ont été exposés. Les réseaux de Petri sont plus puissants que les réseaux de files d'attente, mais ils ne permettent pas la modélisation de phénomènes complexes. Le modèle à flux discrets devient inexploitable lorsque le système de production comporte un nombre d'états important (cas d'un nombre important de pièces à produire). Mais il est facile à simuler et à manipuler, en plus il est très utilisé pour l'évaluation de performances pour le contrôle des flux à temps réel. Le modèle à flux continus est simple à étudier analytiquement, il permet d'utiliser les méthodes d'optimisation basées sur les gradients et aussi d'appliquer facilement la politique de point de séparation. Il est généralement utilisé pour des systèmes de production continus et pour la commande optimale de systèmes de production discrets dans le cas de productions à haut volume. Ensuite, nous avons présenté les méthodes d'évaluation de performances des systèmes de production avec leurs caractéristiques. La méthode d'analyse des perturbations infinitésimale (IPA) permet de déterminer les gradients des mesures de performance par une seule simulation du système, d'où elle permet de trouver la solution optimale dans un temps de calcul très réduit. Alors nous avons utilisé cette méthode pour déterminer le niveau de stock optimal de notre système de production. Le modèle à flux continus comme le modèle à flux discrets néglige certaines caractéristiques importantes des systèmes de production tels que les délais de transports, d'où nous avons appliqué à notre système un modèle à flux continus et un modèle à flux discrets en intégrant les délais de livraison.

Dans le deuxième chapitre, nous avons modélisé notre système de production par un modèle à flux continus en tenant compte du délai de livraison. Le délai de livraison est connu et constant. La politique du point de séparation est utilisée pour piloter la production. La méthode IPA qui est utilisée avec succès dans de nombreux travaux, est appliquée pour déterminer le niveau de stock optimal qui minimise le coût. Les trajectoires du niveau de stock et du nombre de pièces transportées ont été étudiées et analysées. Des théorèmes ont été

exposés pour généraliser l'étude des trajectoires, et démontrer que les estimateurs IPA sont non biaisés. Ces estimateurs sont utilisés ensuite dans un algorithme qui détermine la valeur du niveau de stock optimal. En utilisant cet algorithme nous avons étudié l'impact des délais de livraison sur la valeur du niveau de stock optimal dans deux cas :

- Cas 1 : la demande est comprise entre 0 et 1 durant le temps de livraison ;

- Cas 2 : la demande est comprise entre 0 et 1 à chaque instant *t*.

Les résultats montrent que le temps de livraison a bien sur un impact sur le niveau de stock optimal dans le cas 1. Ce cas correspond au fait que le client s'attend à recevoir sa demande avant de faire une nouvelle demande. Par conséquent, le nombre total de demandes diminue lorsque que le délai de livraison augmente.

Dans le troisième chapitre, nous avons modélisé le même système de production que celui étudié dans le deuxième chapitre par un modèle à flux discrets. La politique du point de séparation est utilisée pour piloter le taux de production de la machine. Le délai de livraison, les pannes de la machine et les demandes aléatoires sont également pris en compte. La méthode IPA est toujours appliquée pour ce modèle afin de trouver le niveau de stock optimal, sachant que d'après nos connaissances il n'existe pas de travaux qui appliquent la méthode IPA à des modèles à flux discrets, en raison du fait que généralement les estimateurs deviennent biaisé pour ces modèles. Nous avons indiqué dans le premier chapitre que l'absence de biais pour les estimateurs est la condition principale pour rendre l'application de l'IPA utile en pratique. Les trajectoires du niveau de stock ont été analysées et étudiées, ensuite cette étude est généralisée par des théorèmes. Les estimateurs IPA ont été déterminés et le non biaise de ces estimateurs est prouvé. Ensuite, nous avons implanté ces estimateurs dans un algorithme d'optimisation pour déterminer la valeur du niveau de stock optimal. La comparaison de l'optimisation basée sur la méthode IPA par rapport à une simulation de type systèmes à événements (SED) a été menée et permet de mettre en évidence que l'optimisation basée sur la méthode IPA permet de réduire le temps de simulation comparativement à une simulation type SED. Pour l'étude de l'impact des délais de livraison sur la valeur du niveau de stock optimal, nous avons étudié deux cas du temps de livraison :

- Cas 1 : la demande est égale à 1 ou 0 durant le temps de livraison :

- Cas 2 : la demande est égale à 1 ou 0 à chaque instant *t*.

Ces deux cas sont équivalents à ceux du deuxième chapitre. Afin de comparer les résultats donnés par le modèle à flux discrets (troisième chapitre) et le modèle à flux continus (deuxième chapitre), les générations de variables aléatoires dans les simulations des cas 1 et 2 dans le troisième chapitre sont effectuées de manière équivalente à ceux du deuxième chapitre. L'objectif est d'évaluer les résultats donnés par la méthode IPA appliquée sur le modèle à flux discrets. En effet, l'application de la méthode IPA sur le modèle à flux continus a connu un grand succès dans des nombreux travaux. Alors nous considérons que les résultats données par la méthode IPA appliquée sur le modèle à flux continus (deuxième chapitre) sont des valeurs de référence pour les résultats données par la méthode IPA appliquée sur le

modèle à flux discrets (troisième chapitre). Nous avons constaté que les résultats donnés par le modèle à flux discrets sont proches de ceux donnés par le modèle à flux continus et par conséquent la méthode IPA qui est appliquée sur le modèle à flux discrets semble être très efficace.

La dernière partie de ce travail a été présentée dans le quatrième chapitre. Elle a été consacrée à l'optimisation d'un système de production avec un temps de livraison aléatoire. Pour ce système, un temps de livraison planifié (τ_{ex}) est proposé par le producteur au client, d'où trois cas du temps de livraison aléatoire ($\tau(t)$) en fonction du temps de livraison planifié ont été considérés (les pièces transportées arrivent à l'heure planifiée, les pièces transportées arrivent avant l'heure planifiée et les pièces transportées arrivent après l'heure planifiée). Nous avons proposé pour ce système deux modèles différents : modèle à flux continus et modèle à flux discrets. La méthode IPA est appliquée pour les deux types de modèles pour évaluer ses performances. Pour les deux modèles, les trajectoires du niveau de stock, du nombre de pièces transportées, du nombre de pièces arrivant en avance et du nombre de pièces arrivant en retard ont été analysées et étudiées. De même que pour les autres chapitres, les études sont généralisées par des théorèmes qui sont utilisés ensuite pour déterminer les estimateurs IPA et prouver qu'ils sont non biaisés. Pour la partie de l'évaluation de performances du système, nous avons étudié l'impact des unités de coût sur le stock optimal pour les deux différents modèles. Un algorithme d'optimisation basé sur la méthode IPA a été utilisé pour chaque modèle afin de déterminer la valeur du niveau de stock optimal en fonction des unités de coût. La valeur du niveau de stock optimal qui minimise le coût diminue lorsque que le coût unitaire d'une livraison en retard (*ctr*) et le coût unitaire d'une livraison en avance (*cts*) augmentent. L'impact du temps planifié sur le stock optimal a été étudié. En effet, pour les deux différents modèles la valeur du niveau de stock optimal qui minimise le coût décroit si la valeur du temps de livraison planifié augmente. La fonction de coût pour le modèle à flux continus et celle du modèle à flux discrets ont été étudiées et comparées. Nous avons constaté que les valeurs des coûts déterminées par la simulation du modèle à flux continus sont proches de celles déterminées par la simulation du modèle à flux discrets, et que le modèle à flux continus permet de déminer la valeur du niveau de stock optimal plus précisément que le modèle à flux discrets.

On peut envisager plusieurs perspectives à nos travaux :

- Il pourrait être envisagé de considérer un système de production plus complexe : considérer une ligne de transfert, un système de production avec plusieurs clients avec une demande aléatoire pour chaque client. Aussi, considérer un système multi-étage avec plusieurs machines et plusieurs stocks et déterminer le niveau optimal pour chaque stock.

- Proposer au système un stock de sécurité qui peut être considéré comme un complément au stock. Ce stock de sécurité permet de satisfaire la demande client en cas de rupture du stock. Il serait intéressant de déterminer la valeur du niveau de stock optimal de sécurité qui minimise la fonction de coût en tenant compte de l'incertitude de la demande client et des pannes des machines.

- Pour le temps de livraison planifié, les recherches futures concernent la proposition d'un service de livraison plus réel. Il serait intéressant que le producteur propose pour le client n dates de livraison (n valeurs du temps de livraison planifié). Pour chaque demande, le client choisit une date de livraison (une valeur du temps de livraison planifié) parmi les n dates proposées par le producteur, sachant que ce choix est aléatoire.

- Pour plus de réalité, nous supposons que dans le cas où la demande arrive après l'heure planifiée elle sera rejetée par le client, et ensuite elle sera retournée dans le stock. Ainsi, il faut tenir compte du coût de retour (coût de transport) de chaque demande rejetée par le client. Il serait intéressant aussi de déterminer la valeur du niveau de stock optimal en tenant compte des demandes retournées (rejetées par le client).

Bibliographies

[AFG92] Association Française de Gestion Industrielle., “Evaluer pour évoluer, les indicateurs de performance au service du pilotage ”, ouvrage collectif AFGI, 1992.

[AKE86] Akella R. and Kumar P.R., “Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.31, pp.116–126. 1986.

[ALJ90] Al Jaar Y. and Desrochers A., “Performance evaluation of automated manufacturing systems using generalized stochastic Petri nets”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.6.1990.

[BAL87] Balbo G., Chiola G., Franceschinis G. and Molinar Roet G., “Generalized Stochastic Petri Nets for the performance Evaluation of FMS”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol.2, pp. 1013-1018. 1987.

[BER02] Berrah L., “L’indicateur de performance: concepts et applications” Cepadues, 2002.

[BRU00] Bruno B., “ Théorie des files d’attente : Des chaînes de Markov aux réseaux à forme produits”, *Edition Hermes Science,* 2000.

[CAS02] Cassandras C.G., Wardi Y., Melamed B., Sun G., and Panayiotou C.G., “Perturbation analysis for online control and optimisation of stochastic fluid models”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.47, No.8, pp.1234-1248. 2002.

[CAS07] Cassandras C.G., and Lafortune S., **“**Introduction to Discrete Event Systems”. *Springer,* pp.426-496. 2007.

[CHA96] Chauvey J.N., “L’analyse d’activités, un outil d’information stratégique pour les services”, *Revue Française de Comptabilité*, juin 1996.

[CHA07] Chan F.T.S., Wang Z., and Zhang JA., “two–level hedging point policy for controlling a manufacturing system with time–delay, demand uncertainty and extra capacity”. *European Journal of Operational Research*, Vol.176, pp.1528–1558. 2007.

[CHE01] Cheikhrouhou N., “Apport de l’Analyse de Perturbation pour le Dimensionnement and le pilotage des systèmes de Production”, Thèse de doctorat de l’INP de Grenoble, France. 2001.

[COC09] Cochran J.K., Kokangul A., and Khaniyev T.A., “Stochastic approximations for optimal buffer capacity of many-station production lines”, *Int. J. Mathematics in Operational Research*, Vol.1. 2009.

[COL05] Colledanil M., and Tolio T., “A Decomposition Method to Support the Configuration / Reconfiguration of Production Systems”. *CIRP Annals - Manufacturing Technology,* Vol.54, pp.441-444. 2005.

[COL06] Colledani M., and Tolio T., “Impact of Quality Control on Production System Performance”, *CIRP annals ISSN 0007-8506*, Vol.55, pp. 453-456. 2006.

[DOL02] Dolgui A. and Ould-Louly M-Aly., “A model for supply planning under lead time uncertainty”, *International journal on production economics,* pp.145–152. 2002.

[DOL08] Dolgui A., Guschinsky N., Levin G. and Proth J.-M., “Optimisation of multi-position machines and transfer lines”, *European Journal of Operational Research,* Vol.185, pp.1375–1389. 2008.

[EGE02] Egerstedt M., and Wardi Y., “Multi-process control using queuing theory”, *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol.2, pp.1991-1999, Las Vegas, USA. 2002.

[FEN00] Fen Y. and Houmin Y., “Optimal production control in a discrete manufacturing system with unreliable machines and random demands”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.45, pp.2280–2296. 2000.

[FON99] Fontanili F., “Intégration d'outils de simulation et d'optimisation pour le pilotage d'une ligne d'assemblage multi produit à transfert asynchrone”, *Thèse de l'Université de Paris 13*. 1999.

[FU02] Fu M. and Xie X., “Derivative estimation for buffer capacity of continuous transfer lines subject to operation dependent failures”, *Journal of Discrete event dynamic systems: theory and application,* Vol.12, pp.447-469. 2002.

[GAL08] Galasso F. and Thierry C., “Aide à la planification avec incertitude, imprécision et incomplétude sur la demande”, *Modélisation, Optimisation et Simulation des Systèmes : Communication, Coopération et Coordination (MOSIM 2008), Paris*, 31-MAR-08-02-APR-08. 2008.

[GER81] Gershwin S.B. and Berman O., “Analysis of transfer lines consisting of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers”, *AIIE Transactions*, 13, 2-11. 1981.

[GER87] Gershwin S.B., “An efficient decomposition algorithm for the approximate evaluation of tandem queue with finite storage space and blocking”, *Oper. Res.*, Vol.35, pp.291–305. 1987.

[GER91] Gershwin S.B., “Assembly/disassembly system: an efficient decomposition algorithm for tree-structured network”, *IIE Transactions*, Vol.23, pp. 302 -314. 1991.

[GER94] Gershwin S.B., “Manufacturing systems engineering”, *Prentice Hall*. 1994.

[GER00] Gershwin S.B., “Design and Operation of Manufacturing Systems-The Control Point Policy”. *IIE Transactions,* Vol.32, pp. 891-906. 2000.

[GIA88] Giard V., “Gestion de la Production”, *Editions Economica, 2ème edition*. 1988.

[GLA91] Glasserman P., “Gradient estimation via perturbation analysis”. *Kluwer Academic Publisher*. 1991.

[HAR04] Harkose A., Kingsman B. and Worthington D.,” Performance analysis of make-to-order manufacturing systems under different workload control regimes”. *International journal of production economics* 90:169-186, 2004.

[HID98] Hideaki Y. and Tayfur A., “Buffer capacity allocation for a desired throughput in production lines”, *IIE Transactions*, Vol.30, pp.883-891. 1998.

[HO79] Ho Y.C., Eyler M.A. and Chien T.T., “A gradient technique for general buffer storage design in a production line*”*, *I. J. of Production Research,* vol. 17, No 6, pp. 557-580.1979.

[HO83] Ho Y.C., and Cao X., “Perturbation Analysis and Optimization of Queuing Networks”, *journal of Optimization Theory Application*, Vol.40, No 4, pp.559-581. 1983.

[HO85] Ho Y.C., “A survey of the Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems”, *Annals of Op. Research*, vol. 3, pp. 393-402, 1985.

[HO87] Ho Y. C., “Performance Evaluation and Perturbation Analysis of Discrete Systems: Perspective and Open Problems”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-32, pp.563-572. 1987.

[HO91] Ho Y.C. and Cao X.R., “Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems*”*, Norwell, MA: Kluwer, 1991.

[HO97] Ho Y.C. and Cassandrass C.G., “Perturbation Analysis for Control and Optimization of Queuing Systems: An Overview and the state of the art”, *Frontiers in Queuing*, pp.395-420. 1997.

[ING98] Ingalls R.G., “The value of simulation in modelling supply chain” *Proc. Of the 1998 Winter Simulation conference, D.J. Medeiros and al. (eds)*, pp.900-906. 1998.

[JAC57] Jackson J.R., “Networks of waiting lines”. *Operations Research,* Vol 5, pp. 518-521, 1957.

[JEO00] Jeonga K.C. and Kim Y.D., “Heuristics for selecting machines and determining buffer capacities in assembly systems”, *Computers & Industrial Engineering*, Vol.38, pp. 341-360. 2000.

[KAP92] Kaplan R. et Norton D., “The Balanced Scorecard : Measures that drive performance”, *Harvard Business Review*, pp. 71-79.1992.

[KEN04] Kenneth S. and Gerrit K. J., “**A** Petri net model of a continuous flow transfer line with unreliable machines”, European *Journal of Operational Research,* pp. 248-262.2004.

[KHA09] Khalid R. A. and Jaber E.A., “Definition of Flexible Transfer Line with Rework Paths and Its Simulator for Optimal Production Design”, *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, Vol.9 No.1, January 2009.

[KIM83] Kimemia J.G. and Gershwin S.B., “An algorithm for the computer control of production in flexible manufacturing system”, *IIE Transactions*, Vol.15, pp.353–362. 1983.

[KIM07] Kim Y., Tatsuya T. and Tatsuo N., “FMS scheduling based on timed Petri Net model and reactive graph Search”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol 31, Issue 6, June, 955-970. 2007.

[KLE98] Kleijnen J.P.C., “Experimental design for sensitivity analysis, optimization, and validation of simulation models”, *Handbook of Simulation*. Wiley, NewYork, pp. 173–223.1998.

[KLE04] Kleijnen J. P.C., “An overview of the design and analysis of simulation experiments for sensitivity analysis” *Department of Information Systems and Management, Center for Economic Research, Tilburg University*, Netherlands. 2004.

[LAM09] Lamboni M., Makowski D., Lehuger S., Gabrielle B., and Monod H., “Multivariate global sensitivity analysis for dynamic crop model”, *Field Crop Research*. Vol 113, pp. 312-320. 2009.

[LEM94] Lemoigne J.L., “La théorie du système général - théorie de la modélisation”, Editions Presses Universitaires de France, 1ère éd. 1977, 4ème éd. 1994.

[LEV03] Levantesi R., Matta A. and Tolio T., “Performance evaluation of continuous production lines with machines having different processing times and multiple failure modes”, *Performance Evaluation*, Vol.51,pp.247–268. 2003.

[LIU07] Liu J., Rui Z.Y., Zhao J.T. and Su W.H, “Near-optimal Buffer Size Control Problem for Hybrid Production System with Bursty Demand Arrivals”, *2007IEEE International Conference on Control and Automation*, Harbin, CHINA - August 5 - 8, 2007.

[LOL01] Lolito P. Mancinelli E. and Quadrat J.-P. “A minplus derivation of the fundamental car-traffic law”, Report 324, INRIA, 2001.

[MAN08] Manitz M. “Queuing-model based analysis of assembly lines with finite buffers and general service times”, *Computers & Operations Research,* Vol.35, pp.2520-2536. 2008.

[MAR07] Markou M., and Panayiotou C.G., “Optimisation of Discrete Event System Parameters using SFM-Based Infinitesimal Perturbation Analysis Estimates”, *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orlean.USA, pp.5068-5073. 2007.

[MAR09] Marcello C. and Tullio T., “Performance evaluation of production systems monitored by statistical process control and off-line inspections”, *Int. J. Production Economics*, 120, pp.348–367. 2009.

[MAT05] Matta A. Dallery Y. and Di Mascolo M., “Analysis of assembly systems controlled with kanbans”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 166, pp. 310-336. 2005.

[MOK05] Mokou, P.Y. and Porter B., “Evolutionary optimization of hedging points for unreliable manufacturing systems”, *International Journal Adv Manufacturing Technologies*, pp.205–214. 2005.

[MOU03] Mourani I., Hennequin S. and Xie X., “Optimal discrete-flow control of a single-stage failure-prone manufacturing system”, *42nd IEEE Conference on Decision and Control,* Vol.5, pp.5462-5467. December 2003.

[MOU07] Mourani I., Hennequin S. and Xie X., “Failure models and throughput rate transfer lines”, *International Journal of Production Research*, Vol. 45, No 8, pp.1835-1859. 2007.

[MOU08] Mourani I., Hennequin S. and Xie X., “Simulation-based optimization of a single stage failure-prone manufacturing system with transportation delay”, *International Journal of Production Economics,* Vol.12, 26-36, ISSN 0925-5273. 2008.

[NOB08] Nobuyuki S., Yasuhiro S. and Michiko M., “Product and machine agents for an autonomous assembly production system”, *SCIS & ISIS*, Nagoya (Japan), pp.1271-1276, September 2008.

[PAN06] Panayiotou C. and Cassandras C.G., ”Infinitesimal Perturbation Analysis and Optimisation for Make-to-Stock Manufacturing Systems Based on Stochastic Fluid Models”, *Discrete Event Dynamic System*, Vol.16, No 1, pp.109–142. 2006.

[PAS04] Paschalidis I.C., Liu Y., Cassandras C.G. and Panayiotou C.G., “Inventory control for supply chains with service level constraints: A synergy between large deviation and perturbation analysis”, *Annals of Operations Research,* Vol.126, pp. 231-258. 2004.

[PRO97] Proth J.M., Mauroy G., Wardi Y., Chu C. and Xie X., “Supply management for cost minimization in assembly systems with random component yield times”, *Journal of Intelligent Manufacturing*, pp. 385-403. 1997.

[SAD00] SADO G. et SADO M.C., “Les plans d'expériences : de l'expérimentation à l'assurance qualité ”, AFNOR, 2000.

[SAL00] Saltelli A., Chan K. and Scott E.M., “*Sensitivity Analysis*”, Wiley, 2000.

[SAN08] Sanjay S., “On the flexibility of demand and production rate”, *European Journal of Operational Research*, 190, pp. 557–561. 2008.

[SOR08] Sörensen K. and Janssens G. K., “A Petri net model of a continuous flow transfer line with unreliable machines”, *European Journal of Operational Research*, 152, pp.248–262. 2004.

[SPE05] Sperandio S., “Usage de la modélisation multi-vue d’entreprise pour la conduite des systèmes de production”, *Thèse de l'Université de Bordeaux1*. 2005.

[SUB09] Subhash W. Ajay S. and Anuj P., “Simulation Modeling of Control Strategies in Flexible Manufacturing System”, *Global Journal of Enterprise Information System*, Vol. 1. 2009.

[SUR87] Suri R., “Infinitesimal Perturbation Analysis for General Discrete Event Systems”, *J. of the ACM*, Vol. 34, No 3, pp. 686-717, 1987.

[SUR88] Suri R. et Zazanis M., “Perturbation Analysis Gives strongly consistent sensitivity estimates for the M/G/1 Queue”, *Management Science*, Vol. 34, No 1, pp. 39-64, 1988.

[SUR91] Suri R. and Fu B.R., “On using continuous flow lines for performance estimation of discrete production lines”, *proceeding of the 1991 Winter Simulation Conference*, (B. L. Nelson, W. D. Kelton, and G. M. Clark, Eds.), Phoenix, Arizona, pp.968-977, December 8-11. 1991.

[SWI99] Swihart M.R. and Papastavrou J.D., “A stochastic and dynamic model for the single-vehicle pick-up and delivery problem”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 114, pp. 447-464. 1999.

[TAN07] Tan B., and Gershwin S. B., “Modeling and Analysis of Markovian Continuous Flow Production Systems with a Finite Buffer: Methodology and Applications”, Working Paper n°381-07, MIT. 2007.

[TAY99] Tayur S., Ganeshan R. and Magazine M., “Quantitative Models for Supply Chain Management”, *Kluwer Academic Publishers*. 1999.

[TOL02] Tolio T., Matta A. and Gershwin S.B., “Analyse of two-machine lines with multiple failure modes”, *IIE Transactions,* Vol.34, pp. 51-62. 2002.

[TUR09a] Turki, S.; S. Hennequin; and N. Sauer., “Performances evaluation of a failure-prone manufacturing system with time to delivery and stochastic demand”, *INCOM 09,13th IFAC Symposium On Information Control Problems in Manufacturing.* 04/06/2009.

[TUR09b] Turki, S.; S. Hennequin; and N. Sauer., “Performances evaluation and optimization of a failure-prone manufacturing system with random delivery time and random demand”, *ISC'2009 Industrial Simulation Conference.* 06/06/2009.

[TUR09c] Turki, S.; S. Hennequin; and N. Sauer., “Perturbation analysis based-optimization for a failure-prone manufacturing system with constant delivery time and stochastic demand”, *39th CIE39 International Conference on Computer and Industrial Engineering.* 06/07/2009.

[TUR10a] Turki, S.;S. Hennequin; and N. Sauer., “Perturbation analysis for continuous and discrete flow models: a failure-prone manufacturing system study”, 8th International Conference of Modeling and Simulation - MOSIM’10. 12/05/2010.

[TUR10b] Turki, S., S. Hennequin, and N. Sauer., “Perturbation analysis based-optimization for discrete flow model: a failure-prone manufacturing system with constant delivery time and stochastic demand”, Int. J. Advanced Operations Management. 07/12/2010.

[VAN91] Van Ryzin G.J., Lou S.X.C. and Gershwin S.B., “Scheduling job shops with delay”, *International Journal of Production Research*, Vol.29, No.7,1407-1422. 1991.

[WAR95] Wardi Y., Cao X.R. and Gong W.B., “III-conditioned performance functions of queueing systems”, *IEEE Transactions,* pp.1074-1079. 1995.

[WAR99] Wardi, Y. and Melamed B., “Continuous flow models: modeling, simulation and continuity properties”, *38th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol.1, pp.34-39. 1999.

[WAR01] Wardi Y. and Melamed B., “Variational bounds and sensitivity analysis of traffic processes in continuous flow models”, *Discrete Event Dynamic Systems: Theory Applications* Vol.11, pp. 249–282. 2001.

[WEI07] Wei Y.B., Liu J., Rui Z.Y. and Zhao J.T., “The Buffer Size Control Problem for Hybrid Systems with Machines' Capacity Uncertainty”, *2007IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Guangzhou, CHINA - May 30 to June 1, 2007.

[XIE89] Xie. X., “optimal control in a failure prone manufacturing system”, research report n° 1020, INRIA, 1989.

[YU04a] Yu H., and Cassandras C.G., “Perturbation analysis for production control and optimization of manufacturing systems”, *Automatica,* Vol. 40, No. 6, pp. 945–956. 2004.

[YU04b] Yu H., and Cassandras C.G., “Perturbation Analysis of Feedback-Controlled Stochastic Flow Systems”, *Automatic Control, IEEE Transaction on*, Vol. 49, No. 8, pp. 1317- 1332. 2004.

[YUY05] Yuyue S. and Gin H.C., “Single item lot-sizing problems with backlogging on a single machine at a finite production rate”, *European Journal of Operational Research*, Vol.161, pp.191–202. 2005.

[ZHO06] Zhou L., Naima M.M., Tang O. and Towilla D.R., “Dynamic performance of a hybrid inventory system with a Kanban policy in remanufacturing process”, *International Journal of Manufacturing Science*, pp. 585 – 598. 2006.

Annexe 1

Etude des trajectoires : cas d'une perturbation négative

Pour l'étude des trajectoires pour le cas d'une perturbation négative nous utilisons les notations suivantes :

t_{ssi} : $i^{ième}$ instant où le stock pour la trajectoire nominale devient saturé et qui fait un décalage ε entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée avec $\varepsilon(t) = x_d(t) - x_d^{\delta}(t) = \delta$ d'où $\varepsilon(t_{ssi} - dt) \neq \varepsilon(t_{ssi})$.

t_i: $i^{ième}$ instant qui annule le décalage ε entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée avec $\varepsilon(t) = x_d(t) - x_d^{\delta}(t) = 0$ d'où $\varepsilon(t_i - dt) \neq \varepsilon(t_i)$.

L'instant t_i correspond à l'un des instants t_{sv} (le stock devient vide pour la trajectoire nominale) et qui peut correspondre à l'un des deux cas suivants :

- Cas C : ce cas se produit à l'instant *t+dt,* lorsque nous avons à l'instant *t* $\alpha(t) = 0$ ($u_d(t) = u_d^{\delta}(t) = 0$) et $x_d^{\delta}(t) = 0$, et si à l'instant *t+dt* $D_d(t + dt) = 1$.

  L'instant *t+dt* est l'instant t_i (Figure 0.1).

- Cas D : ce cas se produit à l'instant *t+dt,* lorsque nous avons à l'instant *t* $\alpha(t) = 1$ ($u_d(t) = u_d^{\delta}(t) = 1$) et $x_d^{\delta}(t) = 0$, et si à l'instant *t+dt* $D_d(t + dt) = 1$.

  L'instant *t+dt* est l'instant t_i (Figure 0.2).

On peut conclure que si $t = t_j$ alors nous avons deux cas possibles :

- Cas C nous avons $x_d(t_i) = 0 = x_d^{\delta}(t_i)$.

- Cas D nous avons $x_d(t_i) = 1 = x_d^{\delta}(t_i)$.

Des exemples d'évolution de ces deux trajectoires pour δ<0 et qui représentent les cas C et D sont donnés respectivement dans les Figure 0.1 et Figure 0.2.

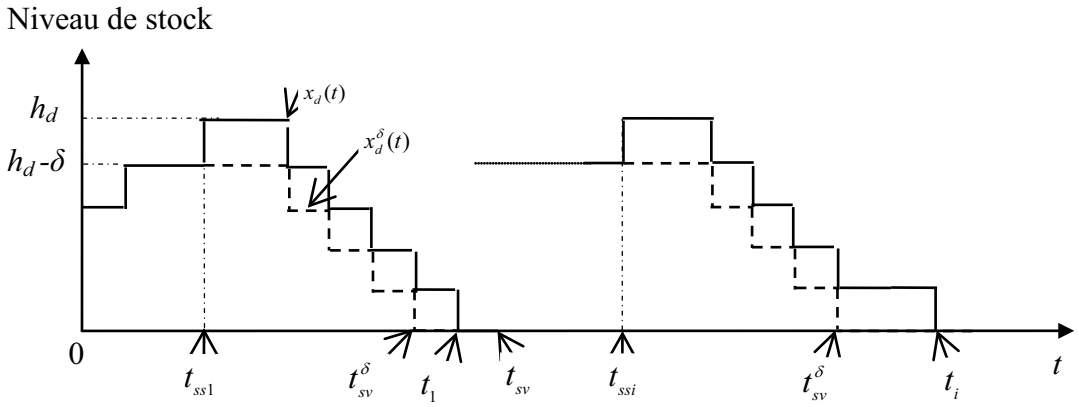

Figure 0.1 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas C)

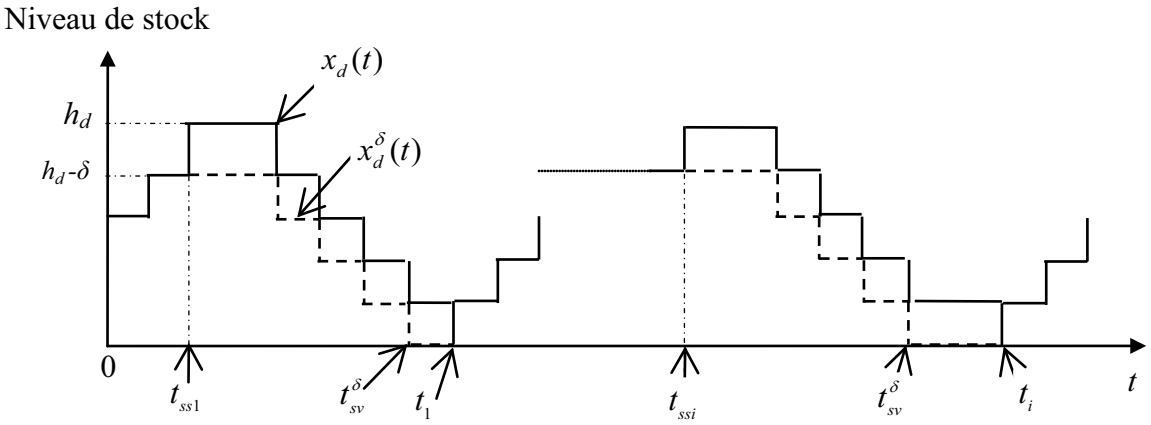

Figure 0.2 : Niveau du stock des trajectoires nominale et perturbée (cas D)

Nous considérons les trajectoires $x_d(t)$ et $x_d^\delta(t)$ avec $t \in [0,T]$. L'intervalle $[0,T]$ est divisé sur deux cycles en alternance: les premiers lorsque $t \in [t_{ssi}, t_i[$ et les autres lorsque $t \in [t_i, t_{ss(i+1)}[$. Pour ces intervalles, les trajectoires perturbées et nominales seront analysées et comparées.

Dans ce qui suit, l'étude des ces trajectoires sera généralisée dans six théorèmes qui seront utilisés pour déterminer les estimateurs de l'IPA.

Nous allons montrer que si $t \in [t_{ssi}, t_i[$, $\delta < 0$ et h_d<1 la trajectoire perturbée $x_d^\delta(t)$ est égale à la trajectoire nominale $x_d(t)$ moins la valeur absolu de la perturbation δ (Théorème 0.1), puis que si $t \in [t_i, t_{ss(i+1)}[$ et h_d<1 la trajectoire nominale $x_d(t)$ est égale à la trajectoire perturbée $x_d^\delta(t)$ (Théorème 0.2)

Remarque 0.1 : Si $\delta < 0$ le stock optimal correspond à $h_d + \delta = h_d - |\delta|$, pour simplifier les démonstrations des théorèmes et des lemmes, nous allons utiliser l'écriture $h_d - |\delta|$.

Les événements sont les mêmes événements présentés dans la partie précédente, d'ou nous avons (SS, SV, UM, PM, RM et DE).

Dans ce qui suit, nous présentons les lemmes 0.1 et 0.2 qui seront utilisés dans les démonstrations des Théorèmes 0.1 et 0.2.

Lemme 0.1: Si $t \in [t_{ssi}, t_i[/ \{t_{sv}^{\delta}\}$, $t + dt \in [t_{ssi}, t_i[/ \{t_{sv}^{\delta}\}$ et si $x_d^{\delta}(t) = x_d(t) - |\delta|$ et $x_d^{\delta}(t - dt) = x_d(t - dt) - |\delta|$ alors $y_d^{\delta}(t) = y_d(t) = D_d(t)$.

Preuve du Lemme 0.1:

Nous avons $x_d(t) > 0$, car sinon nous ne serions pas dans l'intervalle $t \in [t_{ssi}, t_i[/ \{t_{sv}^{\delta}\}$. D'où $y_d(t + dt) = D_d(t + dt)$. (équation (3.2)).

Etudions $y_d(t + dt)$:

- si $x_d^{\delta}(t) > 0$ alors $y_d^{\delta}(t + dt) = D_d(t + dt)$ (Equation (3.2)) et $y_d(t + dt) = y_d^{\delta}(t + dt) = D_d(t + dt)$.
- si $x_d^{\delta}(t) = 0$ alors $y_d^{\delta}(t + dt) = 0$ (Equation (3.2)). Ce cas est impossible car $t \neq t_{sv}^{\delta}$.

Donc $t \in [t_{ssi}, t_i[/ \{t_{sv}^{\delta}\}$ nous avons $y_d(t + dt) = y_d^{\delta}(t + dt) = D_d(t + dt)$.

Remarque 0.2 : L'étude des valeurs de $y_d(t + dt)$ et $y_d^{\delta}(t + dt)$ dans le cas d'un événement SV pour la trajectoire perturbée sera traitée dans le cas 1 du Théorème 0.3 (cas où le premier événement à $t = t_{ssi} + n.dt$ pour la trajectoire perturbée est SV).

Lemme 0.2 : Si $t \in]t_i, t_{ss(i+1)}[/ \{t_{sv}^{\delta}\}$ et $t + dt \in]t_i, t_{ss(i+1)}[/ \{t_{sv}^{\delta}\}$ et si $x_d^{\delta}(t) = x_d(t)$ et $x_d^{\delta}(t - dt) = x_d(t - dt)$, alors $y_d^{\delta}(t_i + (n+1).dt) = y_d(t_i + (n+1).dt)$.

Preuve du Lemme 0.2 :

Si on a l'événement PM,UM, RM, DE, ou SS pour la trajectoire nominale et pour la trajectoire perturbée, ou SS (pour la trajectoire perturbée seulement), alors pour les deux trajectoires on n'a pas d'événement SV, ce qui implique $x_d(t_i + n.dt) > 0$ et $x_d^{\delta}(t_i + n.dt) > 0$. Alors d'après l'équation (3.2) on a $y_d^{\delta}(t_i + (n+1).dt) = y_d(t_i + (n+1).dt)$.

Remarque 0.3: L'étude des valeurs du $y_d(t+dt)$ et $y_d^\delta(t+dt)$ dans le cas d'événement SV sera traitée dans l'étude du cas 1 du Théorème 0.4.

Le lemme suivant montre qu'à l'instant t_{ssi} le niveau du stock de la trajectoire nominale devient saturé ce qui entraîne un décalage (égal à $|\delta|$) entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée, ce lemme correspond à la condition initiale du Théorème 0.1.

Lemme 0.3: Si $t = t_{ssi}$ alors $x_d^\delta(t_{ssi}) = x_d(t_{ssi}) - |\delta|$.

Preuve Lemme 0.3 :

A $t = t_{ssi}$ le stock est saturé pour la trajectoire nominale, alors $x_d(t_{ssi}) = h_d$

Supposons à $t = t_{ssi}$ que nous n'avons pas d'événement SS pour la trajectoire perturbée, alors $x_d^\delta(t_{ssi}) < h_d - |\delta|$, si nous supprimons de $x_d(t_{ssi})$ une perturbation δ, nous aurons à $t = t_{ssi}$ une valeur perturbée $x_d^\delta(t_{ssi}) = x_d(t_{ssi}) - |\delta| < h_d - |\delta|$ d'ou $x_d(t_{ssi}) < h_d$, impossible car $x_d(t_{ssi}) = h_d$.

Alors le a stock est saturé pour la trajectoire perturbée d'ou $x_d^\delta(t_{ssi}) = h_d - |\delta|$, alors $x_d^\delta(t_{ssi}) = x_d(t_{ssi}) - |\delta|$.

CQFD

Théorème 0.1 : Si $\delta <$ 0 et si $x_d^\delta(t_{ssi}) = x_d(t_{ssi}) - |\delta| = h_d - |\delta|$ avec h_d >0, alors $x_d^\delta(t) = x_d(t) - |\delta|$ pour tout $t \in [t_{ssi}, t_i[$.

Preuve de Théorème 0.1 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

A $t = t_{ssi}$, nous avons $x_d^\delta(t_{ssi}) = x_d(t_{ssi}) - \delta = h_d - |\delta|$, avec h_d >0.

Supposons qu'à l'instant $t = t_{ssi} + n.dt$, l'égalité $x_d^\delta(t_{ssi} + n.dt) = x_d(t_{ssi} + n.dt) - |\delta|$ soit vraie, nous devons montrer qu'à l'instant $t + dt = t_{ssi} + (n+1).dt$ que $x_d^\delta(t_{ssi} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssi} + (n+1).dt) - |\delta|$.

En utilisant l'hypothèse de la récurrence, les équations du stock sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_d^\delta(t_{ssi} + (n+1).dt) &= x_d^\delta(t_{ssi} + n.dt) + u_d^\delta(t_{ssi} + n.dt) - y_d^\delta(t_{ssi} + (n+1).dt) \\ &= x_d(t_{ssi} + n.dt) - |\delta| + u_d^\delta(t_{ssi} + n.dt) - y_d^\delta(t_{ssi} + (n+1).dt) \end{aligned}.$$

et

$$x_d(t_{ssi} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssi} + n.dt) + u_d(t_{ssi} + n.dt) - y_d(t_{ssi} + (n+1).dt).$$

D'après le lemme 0.1, nous avons :

$$x_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+n.dt)-|\delta|+u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)-D_d(t_{ssi}+(n+1).dt).$$

et

$$x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+n.dt)+u_d(t_{ssi}+n.dt)-D_d(t_{ssi}+(n+1).dt)$$

$$\forall\, t\in[t_{ssi},t_i[/\{t_{sv}^\delta\}.$$

Par conséquent

$$x_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)-x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)-u_d(t_{ssi}+n.dt)-|\delta| \quad \text{si}$$

$$t\in[t_{ssi},t_i[/\{t_{sv}^\delta\}.$$

Avant de démontrer cette récurrence dans les 6 cas possibles, il ne faut pas oublier que le niveau maximal du stock de la trajectoire perturbée est $h_d-|\delta|$ et que par conséquent $u_d^\delta(t)$ est donné par l'équation (0.1):

$$u_d^\delta(t)=\begin{cases} U_d & si\ \alpha(t)=1\ et\ x_d^\delta(t)<h_d-|\delta| \\ D_d(t) & si\ \alpha(t)=1\ et\ x_d^\delta(t)=h_d-|\delta| \\ D_d(t)\text{ - }(x_d^\delta(t)\text{ - }(h_d-|\delta|)) & si\ \alpha(t)=1\ et\ x_d^\delta(t)>h_d-|\delta| \\ 0 & si\ \alpha(t)=0 \end{cases} \tag{0.1}$$

- ***Cas 1 :*** A $t=t_{ssi}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est SV, avec $t\in[t_{ssi},t_i[$ et $t+dt\in[t_{ssi},t_i[$.

Nous avons donc $x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=0$ alors $x_d(t_{ssi}+n.dt)-|\delta|=0$ d'ou $x_d(t_{ssi}+n.dt)=|\delta|$.

Plusieurs cas sont possibles pour $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)$ et $u_d(t_{ssi}+n.dt)$ donnés par les équations (3.4) et (0.1).

- ***Cas (1.a) :*** Si $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=1$ et $h_d-|\delta|>0$ donc $h_d>1$ alors $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)=U_d=1$.
- ***Cas (1.b) :*** Si $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=1$ et $h_d-|\delta|=0$ donc $h_d=1$ alors $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)=D_d(t_{ssi}+n.dt)$.
- ***Cas (1.c) :*** Si $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=0$ alors $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)=0$.

Par conséquent dans tous les sous cas $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)$.

Etudions $x_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)$ et $x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)$ suivant les différentes valeurs possibles de $y_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)$ et $y_d(t_{ssi}+(n+1).dt)$ (le lemme 0.1 n'est plus applicable dans ce cas).

Si nous avons $x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=0$ donc $y_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)=0$ et $x_d(t_{ssi}+n.dt)=|\delta|=1$ alors $y_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=D_d(t_{ssi}+(n+1).dt)$.

Cas 1 : Si $D_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=0$ alors $y_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=0=y_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)$.

Cas 2 : Si $D_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=1$, alors
$x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=1+u_d(t_{ssi}+n.dt)-1=u_d(t_{ssi}+n.dt)$.

Cas 2.1 : Si $u_d(t_{ssi}+n.dt)=1$, alors $x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=1$ et
$x_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)-1 \;=u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)-1=0$.

Par conséquent

$x_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)=1-|\delta|=x_d(t^\delta{}_{ssi}+(n+1).dt)-|\delta|$.

Cas 2.2 : Si $u_d(t_{ssi}+n.dt)=0$ alors $x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)=0$, cas impossible car dans ce cas $t+dt\notin[t_{ssi},t_i[$.

Donc $x_d^\delta(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)-|\delta|$.

❖ ***Cas 2 :*** A $t=t_{ssi}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est SS, avec $t\in[t_{ssi},t_i[$ et $t+dt\in[t_{ssi},t_i[$.

Si à $t=t_{ssi}+n.dt$, on a l'événement SS pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)\geq h_d-|\delta|$), nous avons également l'événement SS pour la trajectoire nominale car $x_d(t_{ssi}+n.dt)=x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)+|\delta|\geq h_d$.

Plusieurs cas sont possibles pour $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)$ et $u_d(t_{ssi}+n.dt)$ donnés par les équations (3.4) et (0.1).

- *Cas (2.a)* : Si $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=1$ et $x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=h_d-|\delta|$ alors $\forall\, h_d>0$, nous avons $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=D_d(t_{ssi}+n.dt)$.

  Comme $x_d(t_{ssi}+n.dt)=x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)+|\delta|=h_d$, alors $u_d(t_{ssi}+n.dt)=D_d(t_{ssi}+n.dt)$ $\forall\, h_d>0$.

  Par conséquent, nous avons bien $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)$.

- *Cas (2.b) :* Si $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=1$, $x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)>h_d-|\delta|$ et si $h_d>1$ alors, nous avons $u_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)=D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d^\delta(t_{ssi}+n.dt)-h_d+|\delta|)$.

Comme $x_d(t_{ssi}+n.dt)=x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)+|\delta|>h_d$ alors

$$\begin{aligned} u_d(t_{ssi}+n.dt) &= D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d(t_{ssi}+n.dt)-h_d) \\ &= D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)+|\delta|-h_d) \end{aligned}$$

Si $h_d=1$ alors, nous avons

$$\begin{aligned} u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt) &= D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)-h_d+|\delta|) \\ &= D_d(t_{ssi}+n.dt)-x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} u_d(t_{ssi}+n.dt) &= (D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d(t_{ssi}+n.dt)-h_d) \\ &= (D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)+|\delta|-h_d) \\ &= (D_d(t_{ssi}+n.dt)-(x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)). \end{aligned}$$

Donc $u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)$.

- *Cas (2.c) :* Si $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=0$, $u_d(t_{ssi}+n.dt)=u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=0$ et $x_d^{\delta}(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)-|\delta|$.

- ***Cas 3 :*** A $t=t_{ssi}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est PM, avec $t\in[t_{ssi},t_i[$ et $t+dt\in[t_{ssi},t_i[$.

Si à $t=t_{ssi}+n.dt$, on a l'événement PM pour la trajectoire perturbée, nous avons également l'événement PM pour la trajectoire nominale (d'après les hypothèses). Donc $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=0$ et par conséquent $u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)=0$.

Alors nous avons bien $x_d^{\delta}(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)-|\delta|$.

- ***Cas 4 et 5*** : A $t=t_{ssi}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est RM ou UM, avec $t\in[t_{ssi},t_i[$ et $t+dt\in[t_{ssi},t_i[$.

Nous avons $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=1$.

Nous n'avons pas SS et SV pour la trajectoire perturbée. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir ces événements pour la trajectoire nominale.

Si nous avions SS pour la trajectoire nominale (i.e. $x_d(t_{ssi}+n.dt)\geq h_d$), alors nous aurions $x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=x_d(t_{ssi}+n.dt)-|\delta|\geq h_d-|\delta|$, ce qui est impossible.

De la même façon, si nous avions SV pour la trajectoire nominale (i.e. $x_d(t_{ssi}+n.dt)=0$), alors nous aurions $x_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=x_d(t_{ssi}+n.dt)-|\delta|=-|\delta|$, ce qui est impossible.

Donc le seul cas possible est $u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)=U_d=1\ \forall h_d>1$.

Remarque 0.4 : le cas $h_d=1$ entraine un événement stock vide pour la trajectoire perturbée et donc il n'est pas traité ici.

Par conséquent $u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)$ et donc
$x_d^{\delta}(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)-|\delta|$

- ***Cas 6 :*** A $t=t_{ssi}+n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est DE, avec $t\in[t_{ssi},t_i[$ et $t+dt\in[t_{ssi},t_i[$par conséquent, les événements SS, SV,UM, PM et RM ne sont pas possibles pour la trajectoire perturbée, d'ou $\alpha(t_{ssi}+n.dt)=0$ et d'après les équation (3.4) et (0.1) on a $u_d^{\delta}(t_{ssi}+n.dt)=u_d(t_{ssi}+n.dt)=0$.

CQFD

Alors nous avons bien $x_d^{\delta}(t_{ssi}+(n+1).dt)=x_d(t_{ssi}+(n+1).dt)-|\delta|$.

Le lemme suivant montre qu'à l'instant t_i le niveau du stock de la trajectoire nominale devient vide ce qui annule le décalage (égal à $|\delta|$) entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. Ce lemme correspond à la condition initiale du Théorème 0.2.

Lemme 0.4: Si $x_d^{\delta}(t_i)=x_d(t_i)\ à\ t=t_i$.

Preuve du Lemme 0.4:

A $t=t_i$ on a un stock vide pour la trajectoire nominale d'où $x_d(t_i)=0$.

Supposons à $t=t_i$ que nous n'avons pas d'événement SV pour la trajectoire perturbée, alors $x_d^{\delta}(t_i)>0$, donc si nous retranchons de $x_d(t_i)$ une perturbation $|\delta|$, nous aurons à $t=t_i$ une valeur perturbée :

$x_d^{\delta}(t_i)=x_d(t_i)-\delta>0$ d'ou $x_d(t_i)>\delta$, impossible car $x_d(t_i)=0$.

Alors on a un stock vide pour la trajectoire perturbée, d'ou $x_d^{\delta}(t_i)=0$, alors $x_d^{\delta}(t_i)=x_d(t_i)$.

CQFD

Théorème 0.2 : Si $\delta<0$ et si $x_d^{\delta}(t_i)=x_d(t_i)$, alors $x_d^{\delta}(t)=x_d(t)$ pour tout $t\in[t_i,t_{ss(i+1)}[$.

Preuve du Théorème 0.2 :

Ce théorème est démontré par récurrence de la même façon que le Théorème 0.1.

Nous supposons que $x_d^{\delta}(t_i+n.dt)=x_d(t_i+n.dt)$

En utilisant l'hypothèse de la récurrence, les équations des stocks sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_d^\delta(t_i+(n+1).dt) &= x_d^\delta(t_i+n.dt)+u_d^\delta(t_i+n.dt)-y_d^\delta(t_i+(n+1).dt) \\ &= x_d(t_i+n.dt)+u_d^\delta(t_i+n.dt)-y_d^\delta(t_i+(n+1).dt). \end{aligned}$$

Et

$$x_d(t_i+(n+1).dt) = x_d(t_i+n.dt)+u_d(t_i+n.dt)-y_d(t_i+(n+1).dt).$$

Comme pour le Théorème 0.1, nous avons 6 cas à étudier, les cas correspondant à tous les événements possibles pour la trajectoire perturbée à $t = t_i + n.dt$.

- ***Cas 1 :*** A $t = t_i + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est SV, avec $t \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ et $t + dt \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ donc $x_d^\delta(t_i + n.dt) = x_d(t_i + n.dt) = 0$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $y_d(t_i+(n+1).dt)$ et $y_d^\delta(t_i+(n+1).dt)$.

Nous avons $y_d^\delta(t_i+(n+1).dt) = y_d(t_i+(n+1).dt) = 0$ si $x_d^\delta(t_i+n.dt) = x_d(t_i+n.dt) = 0$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_{svi}+n.dt)$ et $u_d(t_{svi}+n.dt)$ Plusieurs cas sont possibles :

- ***Cas (1.a) :*** Si $\alpha(t_i+n.dt) = 1 \quad \forall\, h > 1$ alors $u_d^\delta(t_i+n.dt) = u_d(t_i+n.dt) = U_d = 1$.
- ***Cas (1.b) :*** Si $\alpha(t_i+n.dt) = 1$ et $h = 1$ alors $x_d^\delta(t_i+n.dt) = 0 = h_d - |\delta|$ donc $u_d^\delta(t_i+n.dt) = u_d(t_i+n.dt) = D_d(t_i+n.dt)$.
- ***Cas (1.c) :*** Si $\alpha(t_{svi}+n.dt) = 0$, $u_d^\delta(t_i+n.dt) = u_d(t_i+n.dt) = 0$.

Par conséquent $u_d^\delta(t_i+n.dt) = u_d(t_i+n.dt)$ et $x_d^\delta(t_i+(n+1).dt) = x_d(t_i+(n+1).dt)$.

- ***Cas 2 :*** A $t = t_i + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est SS, avec $t \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ *et* $t + dt \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ donc $x_d^\delta(t_i+n.dt) \geq h_d - |\delta|$.

L'événement SS pour la trajectoire nominale n'est pas possible car $t = t_i + n.dt \notin \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$.

Par conséquent, $x_d(t_i+n.dt) < h_d$. Comme la supposition de la récurrence dit que $x_d(t_i+n.dt) = x_d^\delta(t_i+n.dt)$ alors $x_d(t_i+n.dt) = h_d - |\delta|$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_{svi}+n.dt)$ et $u_d(t_{svi}+n.dt)$.

- *Cas (a)* : si $x_d^\delta(t_i+n.dt) = x_d(t_i+n.dt) > h_d - \delta \quad \forall\, h_d > 0$. C'est un cas impossible car $t = t_i + n.dt \notin \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$.

- *Cas (b)* : Si $\alpha(t_i + n.dt) = 1$ et $x_d^\delta(t_i + n.dt) = h_d - \delta$ alors $\forall\, h_d > 0$, nous avons $u_d^\delta(t_i + n.dt) = D_d(t_i + n.dt)$.

Comme $x_d^\delta(t_i + n.dt) = x_d(t_i + n.dt) = h_d - |\delta|$, alors $u_d(t_i + n.dt) = D_d(t_i + n.dt)$ $\forall\, h_d > 0$.

- *Cas (c)* : *si* $\alpha(t) =$ 0 alors $u_d(t_i + n.dt) = u_d^\delta(t_i + n.dt) = 0$.

Par conséquent, nous avons bien $u_d^\delta(t_i + n.dt) = u_d(t_i + n.dt)$ alors $x_d^\delta(t_i + (n+1).dt) = x_d(t_i + (n+1).dt)$.

❖ ***Cas 3 :*** A $t = t_i + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est PM, avec $t \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ et $t + dt \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$. Donc $\alpha(t_i + n.dt) = 0$ et par conséquent $u_d^\delta(t_i + n.dt) = u_d(t_i + n.dt) = 0$.

Nous avons bien $x_d^\delta(t_i + (n+1).dt) = x_d(t_{si} + (n+1).dt)$.

❖ ***Cas 4 et 5*** : A $t = t_i + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est RM ou UM, avec $t \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ et $t + dt \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$.. Dans ce cas $\alpha(t_i + n.dt) = 1$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_{svi} + n.dt)$ et $u_d(t_{svi} + n.dt)$. Comme le premier événement considéré est RM ou UM, nous n'avons pas d'événement SS et SV pour la trajectoire perturbée au même instant. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir ces événements pour la trajectoire nominale.

Nous ne pouvons pas avoir SS pour la trajectoire nominale, car $t = t_i + n.dt \notin \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$.

Si nous avions SV pour la trajectoire nominale (i.e. $x_d(t_i + n.dt) = 0$), alors nous aurions $x_d(t_i + n.dt) = x_d^\delta(t_i + n.dt) = 0$, ce qui est impossible car à $t = t_i + n.dt$. On a UM ou RM pour la trajectoire perturbée.

Donc le seul cas possible est $u_d^\delta(t_i + n.dt) = u_d(t_i + n.dt) = U_d = 1 \;\; \forall h_d > 1$.

Nous avons bien $x_d^\delta(t_{svi} + (n+1).dt) = x_d(t_{svi} + (n+1).dt)$.

❖ ***Cas 6 :*** A l'instant $t = t_i + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire perturbée est DE, avec $t \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$ *et* $t + dt \in \lfloor t_i, t_{ss(i+1)} \rfloor$.

Pour appliquer le *lemme 3.4* dans ce cas, on doit montrer qu'il n'est pas possible d'avoir l'événement SV pour la trajectoire nominale si nous avons pour la trajectoire perturbée l'événement DE,

Si nous avions SV pour la trajectoire nominale (i.e. $x_d(t_i + n.dt) = 0$), or $x_d(t_{svi} + n.dt) = x_d^\delta(t_{svi} + n.dt) = 0$, ce qui est impossible car à $t = t_{svi} + n.dt$ on a l'événement DE pour la trajectoire perturbée.

D'ou le lemme 3.4 est vrai dans ce cas.

Etudions les différents valeurs possibles de $u_d^\delta(t_i + n.dt)$ et $u_d(t_i + n.dt)$.

Le fait d'avoir l'événement DE pour la trajectoire perturbée signifie qu'à $t = t_{ssi} + n.dt$ on n'a pas les événements SS, SV, UM et RM, pour la trajectoire perturbée $\alpha(t_i + n.dt) = \alpha(t_i + n.dt) \neq 1$, alors $\alpha(t_i + n.dt) = 0$, d'ou $u_d^\delta(t_i + n.dt) = u_d(t_i + n.dt) = 0$.

Alors nous avons bien $x_d^\delta(t_i + (n+1).dt) = x_d(t_i + (n+1).dt) - |\delta|$.

CQFD

Nous avons étudié le niveau du stock pour les trajectoires perturbée et nominale. Nous allons étudier les nombres de pièces transportées pour les trajectoires perturbée et nominale ($X_{Td}^\delta(t)$ et $X_{Td}(t)$) et qui dépendent des nombres de pièces qui sortent du stock pour la trajectoire perturbée et nominale ($y_d^\delta(t)$ et $y_d(t)$). Alors nous étudions tout abord $y_d^\delta(t)$ et $y_d(t)$ dans les Théorèmes 0.3 et 0.4 puis $X_{Td}^\delta(t)$ et $X_{Td}(t)$ dans les Théorèmes 0.5 et 0.6.

Théorème 0.3 démontre que si $t \neq t_i$, les nombres de pièces qui sortent du stock pour les trajectoires perturbée et nominale sont égaux, ce qui explique aussi que les nombres des pièces satisfaites pour les trajectoires perturbée et nominale sont égaux si $t \neq t_i$.

Théorème 0.3 : Si $t \in [0,T] \setminus \{t_i\}$ alors $y_d^\delta(t) = y_d(t)$.

Preuve du Théorème 0.3:

Si $t \in [0,T] \setminus \{t_{sv}^\delta\}$ nous avons :

- soit $x_d(t) > 0$ et $x_d^\delta(t) > 0$ alors $y_d(t + dt) = y_d^\delta(t + dt) = D_d(t + dt)$,
- soit $x_d(t) = 0 = x_d^\delta(t)$ alors $y_d(t + dt) = y_d^\delta(t + dt) = 0$ (équation (3.2)),

D'où $\forall t \in [0,T] \setminus \{t_{sv}^\delta\}$ nous avons $y_d^\delta(t + dt) = y_d(t + dt)$.

Étudions maintenant les valeurs de $y_d^\delta(t + dt)$ et $y_d(t + dt)$ à $t = t_{sv}^\delta$.

Si $t = t_{sv}^\delta \neq t_{sv}$ alors $x_d^\delta(t_{sv}^\delta) = 0$ et $x_d(t_{sv}^\delta) = |\delta|$ (Théorème 0.1), d'ou $y_d^\delta(t_{sv}^\delta + dt) = 0$ et $y_d(t_{sv}^\delta + dt) = D_d(t_{sv}^\delta + dt)$.

Nous avons quatre cas :

- Cas 1 : si $D_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=0$ et $\alpha(t_{sv}^{\delta})=0$, alors $y_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}+dt)=0=y_d(t_{sv}^{\delta}+dt)$ (équation (3.2)) et $u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})=0=u_d(t_{sv}^{\delta})$ (équations (3.4) et (0.1)).

  Nous avons :

  $x_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}+dt)=0$.

  $x_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=x_d(t_{sv}^{\delta})-y_d(t_{sv}^{\delta}+dt)+u_d(t_{sv}^{\delta})=|\delta|-0+0=|\delta|$.

  D'où $x_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=|\delta|$,alors dans ce cas $t+dt=t_{sv}^{\delta}+dt\neq t_i$ ou $t=t_{sv}^{\delta}\neq t_i-dt$.

- Cas 2 : si $D_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=0$ et $\alpha(t_{sv}^{\delta})=1$, alors $y_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}+dt)=0=y_d(t_{sv}^{\delta}+dt)$ et $u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})=1=u_d(t_{sv}^{\delta})$ (car dans ce cas $x_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})<h_d-|\delta|$ et $x_d(t_{sv}^{\delta})<h_d$).

  Nous avons :

  $$x_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}+dt)=x_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})-y_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}+dt)+u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})=0-0+1=1$$
  $$x_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=x_d(t_{sv}^{\delta})-y_d(t_{sv}^{\delta}+dt)+u_d(t_{sv}^{\delta})=|\delta|-0+1=|\delta|+1.$$

  D'où $x_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=|\delta|+1$ alors dans ce cas $t+dt=t_{sv}^{\delta}+dt\neq t_i$ ou $t=t_{sv}^{\delta}\neq t_i-dt$).

- Cas 3 : si $D_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=1$ et $\alpha(t_{sv}^{\delta})=0$ alors $u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})=0=u_d(t_{sv}^{\delta})$ or ce cas correspond au cas C (Figure 3.4), d'ou $t+dt=t_{sv}^{\delta}+dt=t_i$ ou $t=t_{sv}^{\delta}=t_i-dt$ (cas non traité ici).

- Cas 4 : si $D_d(t_{sv}^{\delta}+dt)=1$ et $\alpha(t_{sv}^{\delta})=1$ alors $u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta})=1=u_d(t_{sv}^{\delta})$ or ce cas correspond au cas D (Figure 3.5), d'où $t+dt=t_{sv}^{\delta}+dt=t_i$ ou $t=t_{sv}^{\delta}=t_i-dt$ (cas non traité ici).

Conclusion : alors si $t\in[0,T]\setminus\{t_i-dt\}$ alors $y_d^{\delta}(t+dt)=y_d(t+dt)$, puisque $y_d^{\delta}(0)=y_d(0)$ nous pouvons écrire si $t\in[0,T]\setminus\{t_i\}$ alors $y_d^{\delta}(t)=y_d(t)$.

CQFD

Théorème 0.4 démontre que si $t=t_i$, le nombre de pièces qui sortent du stock pour la trajectoire nominale est égal au nombre de pièces qui sortent du stock pour la perturbée plus la valeur absolue de la perturbation, ce qui explique aussi que la demande est satisfaite pour la trajectoire nominale et pas pour la trajectoire perturbée car à t_i-dt nous avons $x_d(t_i-dt)=0$.

Théorème 0.4 : Si $t=t_i$ alors $y_d^{\delta}(t_i)=y_d(t_i)-|\delta|$.

Preuve du Théorème 0.4 :

Si $t = t_i = t_{sv}^{\delta} + dt$, nous avons $x_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}) = 0$ alors $y_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta} + dt) = y_d^{\delta}(t_i) = 0$ alors nous avons deux cas :

- Cas 1 : le cas où $x_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = 0$, ce cas se produit lorsque $D_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = 0$ et $\alpha(t_{sv}^{\delta}) = 0$ ($u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}) = 0 = u_d(t_{sv}^{\delta})$) d'où
  $x_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = x_d(t_{sv}^{\delta}) - y_d(t_{sv}^{\delta} + dt) + u_d(t_{sv}^{\delta}) = |\delta| + 1 + 0 = 0$,

alors $y_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = 1 = y_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta} + dt) + |\delta|$.

- Cas 2 : le cas où $x_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = 1$, ce cas se produit lorsque $D_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = 1$ et $\alpha(t_{sv}^{\delta}) = 1$ ($u_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta}) = 1 = u_d(t_{sv}^{\delta})$) d'où $x_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = x_d(t_{sv}^{\delta}) - y_d(t_{sv}^{\delta} + dt) + u_d(t_{sv}^{\delta}) = |\delta| - 1 + 1 = 1$,
  alors $y_d(t_{sv}^{\delta} + dt) = 1 = y_d^{\delta}(t_{sv}^{\delta} + dt) + |\delta|$.

D'où dans les deux cas nous avons $y_d^{\delta}(t_i) = y_d(t_i) - |\delta|$.

CQFD

Par l'interprétation des Théorèmes 0.3 et 0.4, le Théorème 0.5 montre que le nombre de pièces transportées de la trajectoire perturbée diminue de la valeur absolue de la perturbation à l'instant t_i et augmente de la valeur absolue de la perturbation à l'instant $t_i + \tau$ par rapport à la trajectoire nominale.

Théorème 0.5 : Si $x_d(0) = x_d^{\delta}(0)$, $y_d^{\delta}(0) = y_d(0)$ et $X_{Td}^{\delta}(0) = X_{Td}(0)$, alors pour $t \in [t_i, (t_i + \tau)]$, nous avons $X_{Td}^{\delta}(t) = X_{Td}(t) - z(t).|\delta|$, avec $z(t) = \{1, 2, ...\}$.

Preuve du Théorème 0.5 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Nous supposons que $X_{Td}^{\delta}(n.dt) = X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta|$ si $(n.dt) \in [t_i, (t_i + \tau)]$.

Nous allons montrer que $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) - z((n+1).dt).|\delta|$ si $((n+1).dt) \in [t_i, (t_i + \tau)]$.

Nous avons :

$$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}^{\delta}(n.dt) + y_d^{\delta}((n+1).dt) - y_d^{\delta}((n+1).dt - \tau),$$

$$X_{Td}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt - \tau),$$

Nous allons étudier $y_d^{\delta}((n+1).dt)$ et $y_d((n+1).dt)$.

❖ *Cas 1*: si $(n+1).dt \in [t_i,(t_i+\tau)] \setminus \{t_{i+p}\}$ (avec $p = \{1, 2, ...\}$, i.e. $\{t_{i+p}\} = \{t_{i+1}, t_{i+2}, ...\}$) alors $y_d^\delta((n+1).dt) = y_d((n+1).dt)$ (Théorème 0.3).

Dans ce cas nous avons:

$$X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}^\delta(n.dt) + y_d^\delta((n+1).dt) - y_d^\delta((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - y_d^\delta((n+1).dt-\tau)$$

Nous avons deux cas de $y_d^\delta((n+1).dt-\tau)$ et $y_d((n+1).dt-\tau)$.

➢ *Cas 1.1*: si $((n+1).dt-\tau) \in [0,T] \setminus \{t_{i-q}\}$ (avec $q = \{1, 2, ...\}$, *i.e.* $\{t_{i-q}\} = \{t_{i-1}, t_{i-2}, ...\}$), alors $y_d^\delta((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau)$.

Dans ce cas nous avons

$$X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}((n+1).dt) - z(n.dt).|\delta|.$$

Dans ce cas $z((n+1).dt) = z(n.dt)$,

Alors nous avons $X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) - z((n+1).dt).|\delta|$.

➢ *Cas 1.2*: si $((n+1).dt-\tau) = \{t_{i-q}\}$ alors $y_d^\delta((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau) - |\delta|$.

Dans ce cas nous avons

$$X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau) + |\delta|$$
$$= X_{Td}((n+1).dt) - (z(n.dt)-1).|\delta|.$$

Dans ce cas $z((n+1).dt) = z(n.dt) - 1$,

Alors nous avons $X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) - z((n+1).dt).|\delta|$

❖ *Case 2*: si $(n+1).dt = \{t_{i+p}\}$ alors $y_d^\delta((n+1).dt) = y_d((n+1).dt) - |\delta|$ (Théorème 0.4).

Alors nous avons :

$$X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}^\delta(n.dt) + y_d^\delta((n+1).dt) - y_d^\delta((n+1).dt-\tau)$$
$$= X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - |\delta| - y_d^\delta((n+1).dt-\tau).$$

Nous avons deux cas de $y_d^\delta((n+1).dt-\tau)$ et $y_d((n+1).dt-\tau)$.

➢ *Cas 2.1*: si $((n+1).dt-\tau) \in [0,T] \setminus \{t_{i-q}\}$, ($y_d^\delta((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau)$).

Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) &= X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - |\delta| - y_d((n+1).dt - \tau) \\ &= X_{Td}(n.dt) - (z(n.dt)+1).|\delta| + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt - \tau) \\ &= X_{Td}((n+1).dt) - (z(n.dt)+1).|\delta| . \end{aligned}$$

Dans ce cas $z((n+1).dt) = z(n.dt)+1$,

Alors nous avons $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) - z((n+1).dt).|\delta|$.

- *Cas 2.2*: si $((n+1).dt - \tau) = \{t_{i-q}\}$, ($y_d^{\delta}((n+1).dt - \tau) = y_d((n+1).dt - \tau) - |\delta|$).

Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) &= X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - |\delta| - y_d((n+1).dt - \tau) + |\delta| \\ &= X_{Td}(n.dt) - z(n.dt).|\delta| + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt - \tau) \\ &= X_{Td}((n+1).dt) - z(n.dt).|\delta| \end{aligned}$$

Dans ce cas $z((n+1).dt) = z(n.dt)$,

Alors nous avons $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt) - z((n+1).dt).|\delta|$.

CQFD

Théorème 0.6 : Si $x_d(0) = x_d^{\delta}(0)$, $y_d^{\delta}(0) = y_d(0)$ et $X_{Td}^{\delta}(0) = X_{Td}(0)$, alors pour $t \in [0,T] \setminus [t_i, (t_i + \tau)]$ nous avons $X_{Td}^{\delta}(t) = X_{Td}(t)$.

Preuve du Théorème 0.6 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Nous supposons que $X_{Td}^{\delta}(n.dt) = X_{Td}(n.dt)$ si $(n.dt) \in [0,T] \setminus [t_i, (t_i + \tau)]$.

Nous allons montrer que $X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}((n+1).dt)$ si $((n+1).dt) \in [0,T] \setminus [t_i, (t_i + \tau)]$.

À $t = (n+1).dt$ nous avons

$X_{Td}^{\delta}((n+1).dt) = X_{Td}^{\delta}(n.dt) + y_d^{\delta}((n+1).dt) - y_d^{\delta}((n+1).dt - \tau)$,

$X_{Td}((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt - \tau)$.

Nous avons $((n+1).dt) \in [0,T] \setminus [t_i, (t_i+\tau)]$ alors $(n+1).dt \in [0,T] \setminus \{t_i\}$ et $(n+1).dt \in [0,T] \setminus \{t_i+\tau\}$ (i.e. $(n+1).dt-\tau \in [0,T] \setminus \{t_i\}$), d'après le Théorème 0.3 nous avons $y_d^\delta((n+1).dt) = y_d((n+1).dt)$ et $y_d^\delta((n+1).dt-\tau) = y_d((n+1).dt-\tau)$.

D'où $X_{Td}^\delta((n+1).dt) = X_{Td}(n.dt) + y_d((n+1).dt) - y_d((n+1).dt-\tau)$.

$$= X_{Td}((n+1).dt).$$

CQFD

Annexe 2

Preuve du théorème 4.1 :

Nous avons $\left]t_{sj},t_{vj}^{\eta}\right[=\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[\cup\left[t_{sj}^{\eta},t_{vj}\right[\cup\left[t_{vj},t_{vj}^{\eta}\right[$, nous allons montrer que dans les intervalles, $\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$, $\left[t_{sj}^{\eta},t_{vj}\right[$et $\left[t_{vj},t_{vj}^{\eta}\right[$ si $\eta>0$ alors $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)+\phi(t)$.

❖ Si $t\in\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$:

Nous montrons par l'absurde que si $t\in\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$, nous ne pouvons pas avoir $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)$.

Nous supposons que si t' et $t\in\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$ avec $t'<t$, nous avons $x_c^{\eta}(t')=x_c(t')$ et $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)$.

Alors si t' et $t\in\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$, nous avons $x_c(t')>0$ et $x_c^{\eta}(t')>0$ d'ou :

$$x_c(t)=x_c(t')+(u_c(t)-D_c(t)).(t-t')$$

et

$$x_c^{\eta}(t)=x_c^{\eta}(t')+(u_c^{\eta}(t)-D_c(t)).(t-t')=x_c(t')+(u_c^{\eta}(t)-D_c(t)).(t-t')$$

Si $t\in\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$ nous avons $x_c(t)>h_c$ ou $x_c(t)=h_c$ et $x_c^{\eta}(t)<h_c+\eta$, d'après l'équation (2.2) nous avons respectivement $u_c(t)=0$ ou $u_c(t)=D_c(t)$ et $u_c^{\eta}(t)=U_c$.

Alors nous avons :

$$x_c^{\eta}(t)=x_c(t')+(U_c-D_c(t)).(t-t')$$

Si $u_c(t)=0$ alors $x_c(t)=x_c(t')+(0-D_c(t)).(t-t')=x_c(t')-(D_c(t)).(t-t')<x_c^{\eta}(t)$

Si $u_c(t)=D_c(t)$ alors $x_c(t)=x_c(t')+(D_c(t)-D_c(t)).(t-t')=x_c(t')$, donc $x_c(t)<x_c^{\eta}(t)$ car $U_c>D_c(t)$.

Dans tous les cas nous avons $x_c^{\eta}(t)>x_c(t)$, d'où il est impossible que $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)$ si $t\in\left]t_{sj},t_{sj}^{\eta}\right[$. Donc il existe un décalage $\phi(t)>0$ entre $x_c^{\eta}(t)$ et $x_c(t)$ d'où $x_c^{\eta}(t)=x_c(t)+\phi(t)$.

❖ si $t \in \left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$.

Nous montrons par récurrence que si $t \in \left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$, nous avons $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \eta$.
Nous supposons que $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \eta$ et nous allons montrer qu'à l'instant $t' \in \left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$que $x_c^{\eta}(t') = x_c(t') + \eta$ avec $t' < t$.
Si t'et $t \in \left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$, nous avons :

$$x_c^{\eta}(t') = x_c^{\eta}(t) - ((u_c^{\eta}(t) - D_c(t)).(t - t')) = x_c(t) + \eta - ((u_c^{\eta}(t) - D_c(t)).(t - t'))$$

et

$$x_c(t') = x_c(t) - ((u_c(t) - D_c(t)).(t - t')).$$

Pour $u_c^{\eta}(t)$ et $u_c(t)$, nous avons trois cas selon l'équation (2.2) :

- *cas 1* : lorsque $x_c^{\eta}(t) = h_c + \eta$ alors nous avons $x_c(t) = h_c$ et si $\alpha(t) = 1$, et $u_c^{\eta}(t) = u_c(t) = D_c(t)$.
- *cas 2* : lorsque $x_c^{\eta}(t) \le h_c + \eta$ alors nous avons $x_c(t) \le h_c$ et si $\alpha(t) = 1$, alors $u_c^{\eta}(t) = u_c(t) = U_c$.
- *cas 3* : lorsque $\alpha(t) = 0$ alors $u_c^{\eta}(t) = u_c(t) = 0$.

Par conséquent, $u_c^{\eta}(t) = u_c(t)$ si $t \in \left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$.
Nous avons alors $x_c^{\eta}(t') = x_c(t') + \eta$, d'où $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \eta$.

Nous avons $x_c^{\eta}(t_{sj}^{\eta}) = x_c(t_{sj}^{\eta}) + \eta$ (*lemme2.1*). Donc $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \eta$ si $t \in \left[t_{sj}^{\eta}, t_{vj}\right[$.

❖ si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$.

Nous montrons par l'absurde que si $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$ nous ne pouvons pas avoir $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$.

Nous supposons que lorsque $t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$, nous avons $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$.

Si $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$ nous avons $x_c(t_{vj}) = x_c^{\eta}(t_{vj}) = 0$ dans ce cas $t_{vj} = t_{vj}^{\eta}$, ce qui est impossible car $t_{vj}^{\eta} \notin \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$. Alors $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \phi(t)\ \forall\ t \in \left[t_{vj}, t_{vj}^{\eta}\right[$.

CQFD

Preuve du théorème 4.2

Nous montrons par l'absurde que si $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$ nous ne pouvons pas avoir $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \phi(t)$ avec $0 < \phi(t)$.

Nous supposons que $x_c^{\eta}(t) = x_c(t) + \phi(t)$ si $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$ avec $0 < \phi(t) \leq \eta$.

A l'instant $t = t_{vj}^{\eta}$ nous avons $x_c^{\eta}(t_{vj}^{\eta}) = 0 = x_c(t_{vj}^{\eta})$ (*lemme2.2*), alors $x_c^{\eta}(t_{vj}^{\eta}) = x_c(t_{vj}^{\eta}) + \phi(t_{vj}^{\eta}) = 0$, d'où $\phi(t_{vj}^{\eta}) = 0$, donc il est impossible que $\phi(t) > 0$ si $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$.

Alors lorsque $t \in \left[t_{vj}^{\eta}, t_{s(j+1)}\right]$ nous avons $x_c^{\eta}(t) = x_c(t)$.

CQFD

Preuve du théorème 4.9

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Supposons qu'à l'instant $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$, l'égalité $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta$ soit vraie, nous devons montrer qu'à l'instant $t + dt = t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt$, $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) + \delta$.

En utilisant l'hypothèse de la récurrence, les équations du stock sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) &= x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) \\ &= x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta + u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - y_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) \end{aligned}$$

Et

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - y_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt).$$

D'après le *lemme 3.1 (voir chapitre3)*, nous avons:

$$x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta + u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - D_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt).$$

Et

$$x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - D_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt).$$

Par conséquent, $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) - x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) - u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) + \delta$.

Donc, il suffit d'étudier les six cas $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ et $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ pour montrer ce théorème.

A l'instant $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, différents événements peuvent se produire.

- **Cas 1 :** A $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est SV, avec $t \in [t_{ssj}^\delta, t_j[$ et $t + dt \in [t_{ssj}^\delta, t_j[$.

  Nous avons donc $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$ et $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) + \delta = \delta$.

  Deux cas sont possibles : $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ et $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ donnés par l'équation (4.10).

  - *Cas (1.a) :* Si $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 1$ nous avons $h_d > 1$ ($h_d + \delta > \delta$) alors $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = U_d$ et $u^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = U_d$, d'où $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = U_d = u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

  - *Cas (1.b) :* Si $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$, alors $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$.

    Par conséquent dans tous les cas $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

    Etudions $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$ et $x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$ suivant les différentes valeurs possibles de $y_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$ et $y_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$ données par l'équation (4.9) (le lemme 3.1 n'est pas applicable dans ce cas).

Nous avons $y_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = 0$ car $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$.

Etudions la valeur de $y_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$ à $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$.

Nous avons $y_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = D_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$ car $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = \delta = 1$.

- *Cas(1.c)* : Si $D_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = 0$ alors $y_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = 0 = y_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt)$

  D'où $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta = 1$.

- *Cas(1.d)* : Si $D_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = 1$ alors $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = 1 + u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) - 1 = u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

  Selon la valeur de $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ nous obtenons deux cas :

- *Cas(1.d.1)* : Si $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 1$ (RM à *t=n+dt*), nous remarquons que ce cas correspond au *cas B*, alors $t + dt = t_{ssj}^\delta + (n+1).dt = t_j$, cas impossible car dans ce cas $t + dt \notin \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$.

- *Cas(1.d.2)* : Si $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$, nous remarquons que ce cas correspond au *cas A*, alors $t + dt = t_{ssj}^\delta + (n+1).dt = t_j$, cas impossible car sinon $t + dt \notin \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$.

D'où le *Cas(1.d)* est impossible. Le seul cas possible lorsque nous avons SV pour la trajectoire nominale est donc le *Cas(1.c)* ($D_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = 0$). Ce qui donne $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta = 1$.

Donc $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta$.

❖ **Cas 2 :** A $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, le premier événement considéré pour la trajectoire nominale est SS, avec $t \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$ et $t + dt \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$.

Si à $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, on a l'événement SS pour la trajectoire nominale (i.e. $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) \geq h$), nous avons également l'événement SS pour la trajectoire perturbée car $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) + \delta \geq h + \delta$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ et $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

- *Cas (2.a)* : Si $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 1$ et $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) < h_d$. Ceci n'est pas possible car nous avons l'événement SS.

- *Cas (2.b)* : Si $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 1$ (UM et SS ou RM et SS) et $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = h_d$ alors $\forall\ h > 1$, nous avons $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = D_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

Comme $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) + \delta = h_d + \delta$, alors $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = D_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)\ \ \forall\ h > 1$.

Par conséquent, nous avons bien $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

- *Cas (2.c)* : Si $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 1$ (UM et SS ou RM et SS), $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) > h$ et $\forall\ h > 1$ alors, nous avons $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = D_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) - (x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) - h_d)$.

Comme $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) + \delta > h_d + \delta$ alors

$$u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = D_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) - (x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) - h_d - \delta) = D_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) - (x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) - h_d)$$

Par conséquent, nous avons bien $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$.

- *Cas (2.d)* : Si $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$ (PM et SS), $u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$.

Par conséquent dans tous les sous cas $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt)$ et donc $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta$.

- ***Cas 3 :*** A $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est PM, avec $t \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$ et $t + dt \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$.

  Si à $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, on a l'événement PM pour la trajectoire nominale, nous avons également l'événement PM pour la trajectoire perturbée. Donc $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$ et par conséquent, $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$.

  Alors nous avons bien $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta$.

- ***Cas 4 et 5*** : A $t = t_{ssj}^\delta + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est RM ou UM, avec $t \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$ et $t + dt \in \left[t_{ssj}^\delta, t_j\right[$.

  Nous avons $\alpha(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 1$.

  Nous n'avons pas SS et SV pour la trajectoire nominale. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir ces événements pour la trajectoire perturbée.

  Si nous avions SS pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) \geq h_d + \delta$), alors nous aurions $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) - \delta \geq h_d$, ce qui est impossible.

  De la même façon, si nous avions SV pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = 0$), alors nous aurions $x_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) - \delta = -\delta$, ce qui est impossible.

  Puisque $h_d > 1$ alors $u_d^\delta(t_{ssj}^\delta + n.dt) = u_d(t_{ssj}^\delta + n.dt) = U_d = 1$, d'où

  $x_d^\delta(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^\delta + (n+1).dt) + \delta$.

- ***Cas 6 :*** A $t = t_{ssj}^{\delta} + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est DE, avec $t \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$ et $t + dt \in \left[t_{ssj}^{\delta}, t_j\right[$, par conséquent, les premiers événements SS, SV,UM.PM et RM ne sont pas possibles sur la trajectoire nominale, d'ou $\alpha(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = 0$ et d'après l' équation (4.10) on a $u_d(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = u_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + n.dt) = 0$.

  Alors nous avons bien $x_d^{\delta}(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) = x_d(t_{ssj}^{\delta} + (n+1).dt) + \delta$.

CQFD.

Preuve du théorème 4.10 :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

Les équations des stocks sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt) &= x_d^{\delta}(t_j + n.dt) + u_d^{\delta}(t_j + n.dt) - y_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt) \\ &= x_d(t_j + n.dt) + u_d^{\delta}(t_j + n.dt) - y_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt). \end{aligned}$$

et

$$x_d(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + n.dt) + u_d(t_j + n.dt) - y_d(t_j + (n+1).dt).$$

Nous allons donc démontrer cette récurrence dans les six cas possibles.

- ***Cas 1 :*** A $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est SV, avec $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}\right[$ et $t + dt \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^{\delta}\right[$ donc $x_d(t_j + n.dt) = 0$ alors $x_d^{\delta}(t_j + n.dt) = 0$.

  Etudions les différentes valeurs possibles de $y_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt)$ et $y_d(t_j + (n+1).dt)$ données par l'équation (4.9).

  Nous avons $y_d^{\delta}(t_j + (n+1).dt) = y_d(t_j + (n+1).dt) = 0$ car $x_d^{\delta}(t_j + n.dt) = x_d(t_j + n.dt) = 0$ (SV).

  Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^{\delta}(t_j + n.dt)$ et $u_d(t_j + n.dt)$ données par les l'équation (4.10).

  - *Cas (a.1) :* Si $\alpha(t_j + n.dt) = 1$ (UM et SS ou RM et SS) alors $u_d^{\delta}(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt) = U = 1$ car $h > 1$.

  - *Cas (b.1) :* Si $\alpha(t_j + n.dt) = 0$ (PM et SS), alors $u_d^{\delta}(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt) = 0$.

Par conséquent dans tous les sous-cas nous avons $u_d^\delta(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt)$ et $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

- ***Cas 2 :*** A $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est SS, avec $t \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$ et $t + dt \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$.

  On ne peut pas avoir l'événement SS sur la trajectoire perturbée au même instant car $t = t_j + n.dt \notin [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$.

  Donc si on a l'événement SS pour la trajectoire nominale, on n'a pas d'événement SS pour la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_j + n.dt) < h_d + \delta$). Comme la supposition de la récurrence dit que $x_d(t_j + n.dt) = x_d^\delta(t_j + n.dt)$ alors $x_d^\delta(t_j + n.dt) = h_d$.

  Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_j + n.dt)$ et $u_d(t_j + n.dt)$ données par l'équation (4.10).

  - *Cas (2.a)* : si $x_d^\delta(t_j + n.dt) = x_d(t_j + n.dt) > h_d \ \forall\ h_d > 1$. Cas impossible car $t = t_j + n.dt \notin [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$.

  - *Cas (2.b)* : Si $\alpha(t_j + n.dt) = 1$ (UM et SS ou RM et SS), et $x_d(t_j + n.dt) = h_d$ alors $\forall\ h_d > 1$, nous avons $u_d(t_j + n.dt) = D_d(t_j + n.dt)$.

  Comme $x_d^\delta(t_j + n.dt) = x_d(t_j + n.dt) = h_d$, alors $u_d^\delta(t_j + n.dt) = D_d(t_j + n.dt) \ \forall\ h_d > 1$.

  - *Cas (2.c)* : $u_d(t_j + n.dt) = u_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$ si $\alpha(t) = 0$ (PM et SS).

  Par conséquent, nous avons bien $u_d^\delta(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt)$ et $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

- ***Cas 3 :*** A $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est PM, avec $t \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$ et $t + dt \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$ Donc $\alpha(t_j + n.dt) = 0$ et par conséquent $u_d^\delta(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt) = 0$.

  Alors, nous avons bien $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

- ***Cas 4 et 5*** : A $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est RM ou UM, avec $t \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$ et $t + dt \in [t_j, t_{ss(j+1)}^\delta[$.

Nous avons $\alpha(t_j + n.dt) = 1$.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_j + n.dt)$ et $u_d(t_j + n.dt)$ données par l'équation (4.10). Dans les cas où $\alpha(t_j + n.dt) = 1$. Comme le premier événement considéré est RM ou UM, nous n'avons pas SS et SV sur la trajectoire nominale. Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir ces événements sur la trajectoire perturbée.

Nous ne pouvons pas avoir l'événement SS sur la trajectoire perturbée, car $t = t_j + n.dt \notin \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$

Si nous avons SV sur la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$), or $x_d(t_j + n.dt) = x_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$, ce qui est impossible car à $t = t_j + n.dt$ on a pas d'événement SV sur la trajectoire nominale.

Puisque $h > 1$ alors $u_d^\delta(t_j + n.dt) = u_d(t_j + n.dt) = U = 1$.

Nous avons bien $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

- ***Cas 6 :*** A l'instant $t = t_j + n.dt$, le premier événement considéré sur la trajectoire nominale est DE, avec $t \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$ et $t + dt \in \left[t_j, t_{ss(j+1)}^\delta\right[$.

Pour appliquer le *lemme 3.2* dans ce cas, on doit montrer que si nous avons sur la trajectoire nominale l'événement DE, alors nous n'avons pas l'événement SV sur la trajectoire perturbée.

Si nous avons SV sur la trajectoire perturbée (i.e. $x_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$), or $x_d(t_j + n.dt) = x_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$, ce qui est impossible car à $t = t_j + n.dt$ on a l'événement DE sur la trajectoire nominale.

Etudions les différentes valeurs possibles de $u_d^\delta(t_j + n.dt)$ et $u_d(t_j + n.dt)$.

L'événement sur la trajectoire nominale est DE, ce qui signifie qu'à $t = t_j + n.dt$ par conséquent, les événements SS, SV, UM, PM et RM ne sont pas possibles sur la trajectoire nominale, alors $\alpha(t_j + n.dt) = 0$, Nous avons $u_d(t_j + n.dt) = u_d^\delta(t_j + n.dt) = 0$.

Alors nous avons bien $x_d^\delta(t_j + (n+1).dt) = x_d(t_j + (n+1).dt)$.

CQFD