Étude d'ondes non linéaires hydrodynamiques : approches théorique et expérimentale

Yannick Lebranchu

▶ **To cite this version:**

Yannick Lebranchu. Étude d'ondes non linéaires hydrodynamiques : approches théorique et expérimentale. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008. Français. NNT : 2008INPL005N . tel-01753039

HAL Id: tel-01753039
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01753039

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Années universitaires 2004-2007

Institut National Polytechnique de Lorraine

École doctorale EMMA
Formation Mécanique - Énergétique
LEMTA - UMR 7563 CNRS, Nancy - Université

Thèse de doctorat

en ***Mécanique - Énergétique***

présentée par

Yannick LEBRANCHU

Étude d'ondes non linéaires hydrodynamiques : approches théorique et expérimentale

Directeurs de thèse : Jean-Pierre BRANCHER & Emmanuel PLAUT

Soutenance publique prévue le 29 janvier 2008

Jury de thèse :

Rapporteurs :	Philippe	CARDIN	Directeur de recherche CNRS, LGIT, Grenoble
	François	CHARRU	Professeur, IMFT, Toulouse
Examinateurs :	Éric	SERRE	Chargé de recherche CNRS, LMSNMGP, Marseille
	Jean-Pierre	BRANCHER	Professeur, LEMTA, Vandœuvre-lès-Nancy
	Chérif	NOUAR	Directeur de recherche CNRS, LEMTA, Vandœuvre-lès-Nancy
	Emmanuel	PLAUT	Maître de conférence, LEMTA, Vandœuvre-lès-Nancy

Président du Jury : Chérif NOUAR

Nancy-Université INPL

Vandœuvre-lès-Nancy, le 22 février 2008

Table des matières

Introduction générale - Motivations **9**

I Partie théorique **15**

1 Introduction : des ondes de Rossby thermiques **19**
1.1 Contexte planétologique - Difficultés . . . 19
1.2 Les ondes de Rossby thermiques . . . 21
1.3 Modèles Boussinesq tridimensionnels . . . 21
1.4 Modèles Boussinesq bidimensionnels . . . 25
1.5 Approche expérimentale . . . 25
1.6 Plan . . . 26

Nomenclature de la partie théorique **29**

2 Modèles de thermoconvection **31**
2.1 Équations modèles tridimensionnelles . . . 31
2.2 Équilibre géostrophique - Contrainte de Proudman-Taylor . . . 33
2.3 Adimensionnement des équations . . . 34
2.4 Modèle géostrophique . . . 35
2.5 Modèles quasi géostrophiques bidimensionnels . . . 36
2.5.1 Modèles de vitesse verticale . . . 37
2.5.2 Modèle de perturbation en température . . . 38
2.5.3 Équations des modèles quasi géostrophiques . . . 38
- Équation de la vorticité . . . 38
- Moyenne axiale de la composante azimutale de l'équation de Navier-Stokes 38
- Équation de la chaleur . . . 41
2.6 Conditions limites . . . 43
2.6.1 Conditions limites pour la perturbation en température . . . 43
2.6.2 Conditions limites pour la fonction courant . . . 43
2.7 Régularité du modèle . . . 44

3 Analyse linéaire **47**
3.1 Principes de l'analyse linéaire . . . 47
3.2 Théories asymptotiques . . . 49
3.2.1 Théories asymptotiques locales . . . 49
3.2.2 Théories asymptotiques globales . . . 52
3.2.3 Structure spiralée des ondes . . . 55
3.3 Résultats de l'analyse de stabilité numérique . . . 56
3.3.1 Nombre de Prandtl unitaire . . . 56
3.3.2 $P = 0,1$ et $P = 10$ . . . 59

3.4 Comparaison aux théories asymptotiques . . . 61
3.4.1 Théorie asymptotique locale . . . 61
3.4.2 Théorie asymptotique globale . . . 61

4 Analyse faiblement non linéaire 73
4.1 Structure de la solution faiblement non linéaire . . . 73
4.2 Modes 0 calculés par élimination quasi statique . . . 74
4.2.1 Mode 0 de vitesse : écoulement zonal . . . 74
4.2.2 Mode 0 de température . . . 76
4.3 Modes 2 calculés par élimination quasi statique . . . 76
4.4 Rétroaction sur le mode 1 : équation d'amplitude . . . 77
4.4.1 Principe de calcul . . . 77
4.5 Résultats non linéaires . . . 79
4.5.1 Résultats en chauffage interne . . . 79
4.5.2 Résultats en chauffage différentiel . . . 83
4.5.3 Bifurcation sous-critique - analyse des mécanismes . . . 83
4.5.4 Comparaison des modèles 2D et 3D sur le mode 0 de vitesse . . . 86
4.5.5 Comparaison des modèles avec et sans pompage d'Ekman sur le mode 0 de vitesse . . . 87

5 Conclusion-Perspectives 97

II Partie expérimentale 101

6 Introduction à la partie expérimentale 105
6.1 Contexte et motivations de l'étude . . . 105
6.2 Bibliographie : écoulements modèles entre plans infinis . . . 107
6.3 Bibliographie : écoulements au-dessus d'un disque . . . 110
6.4 Bibliographie : écoulements entre deux disques . . . 111
6.4.1 Écoulements de base . . . 111
6.4.2 Premières instabilités . . . 113
6.5 Bibliographie : cas de la configuration annulaire . . . 114
6.6 Plan de cette partie . . . 115

Nomenclature 119

7 Mise au point de l'expérience 121
7.1 Principe et dimensionnement de cette expérience hydrodynamique . . . 121
7.2 Choix des moteurs . . . 124
7.3 Système de commande et de régulation des moteurs . . . 125
7.4 Mesures des vitesses de rotation par compteurs - tests . . . 128
7.4.1 Étalonnage des codeurs . . . 129
7.4.2 Étalonnage tension-vitesse des codeurs . . . 130
7.5 Circuit permettant de commander une contra-rotation . . . 130
7.6 Traceur pour la visualisation . . . 131
7.7 Imagerie . . . 132
7.7.1 Traitement des images . . . 134
7.8 Mesure de la température par thermocouple . . . 135
7.9 Vélocimétrie Laser Doppler . . . 137
7.9.1 Principe de fonctionnement . . . 137

7.9.2 Analyse spectrale des signaux de vélocimétrie Laser Doppler 140
7.9.3 Platines de translation 140

8 Résultats **143**
8.1 Écoulements de base axisymétriques 143
8.1.1 Cas du cisaillement pur 143
8.1.2 Cas de la corotation rapide 144
8.1.3 Cas de la contrarotation pure 146
8.2 Instabilité primaire : résultats expérimentaux et éléments d'interprétation 146
8.3 Instabilité primaire : résultats expérimentaux 146
8.3.1 Cas du cisaillement pur 148
8.3.2 Cas de la corotation rapide 150
8.3.3 Contrarotation pure 151
8.4 Comparaison expérimental-numérique 153

9 Conclusion-Perspectives **157**

A Méthode numérique spectrale **159**
A.1 Bases de fonctions 160
A.1.1 Base pour la perturbation en température 160
A.1.2 Base pour la fonction courant 161
A.2 Analyse linéaire numérique 161
A.3 Analyse faiblement non linéaire numérique 162

B Calcul des opérateurs linéaires adjoints **163**

C Spirales logarithmiques **167**

Bibliographie **169**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier tout le personnel du ***LEMTA*** auquel j'ai pu avoir affaire tout au long de ces années de thèse. C'est grâce à eux que mon travail fut agréable et surtout enrichissant.

Cette thèse n'aurait vu le jour sans la confiance, la patience et la générosité de mes directeurs de recherche ***Jean-Pierre Brancher*** et ***Emmanuel Plaut*** que je veux vivement remercier.

Je remercie ***Philippe Cardin*** du LGIT et ***François Charru*** de l'IMFT qui ont accepté de juger mon travail et d'en être les rapporteurs. Je suis sensible à la présence dans ce jury de ***Chérif Nouar*** du LEMTA qui a eu la gentillesse de me prêter plusieurs fois la VLD indispensable à mes mesures expérimentales de vitesse. J'adresse également mes remerciements à ***Salaheddine Skali-Lami*** du LEMTA pour m'avoir confié une caméra vidéo, et à son doctorant ***Tony Paris*** pour son aide pour l'acquisition des images sous Matlab. Un grand merci également à ***Éric Serre*** du LM-SNMGP pour sa présence dans mon jury et pour ses calculs numériques sur la partie expérimentale. Je suis aussi reconnaissant à ***Friedrich Busse*** de l'Institut de Physique de Bayreuth et ***Radostin Simitev*** du département de mathématiques de Glasgow pour leurs calculs numériques sur la partie théorique. Mes remerciements à ***Jean-Régis Angilella*** du LAEGO pour son financement par le PPF Chaos.

Un grand merci à l'ingénieur ***Jean-Yves Morel*** et aux techniciens ***Éric Blaise, Christophe Gigant, Denis Lallement*** de l'*atelier mécanique ENSEM* qui ont conçu ma manipulation, ainsi qu'aux techniciens ***Jean-Pierre Boutrout et Daniel Sand*** pour son aménagement. Mes remerciements vont tout particulièrement à l'ingénieur ***Alain Delconte*** et les techniciens ***Bruno Simonigh*** et ***Bruno Chenu***, sans qui ma manipulation ne tournerait pas... Mon enrichissement personnel provient aussi de leur aide que ce soit sur l'aspect connectique de la manipulation ou le rapide apprentissage de programmation sous *Delphi* qui m'ont permis de passer une thèse instructive dans de bonnes conditions. En espérant avoir la chance de collaborer avec des gens comme eux pour mon futur travail...

Toute mon amitié à tous mes collègues du laboratoire et amis de longue date qui se reconnaitront ici. Mes plus chaleureux remerciements s'adressent à ma famille et plus proches amis pour leur soutien moral qu'ils m'auront fournis tout au long de la réalisation de ces travaux.

Enfin, un petit clin d'oeil aux ingénieurs informaticiens ***Bernard Antoine*** et ***Ludovic Buhler*** pour leur aide (quotidienne ?) sur le fonctionnement de *Linux et Latex*...

Introduction générale - Motivations

Le mouvement des fluides suscite depuis longtemps une attention particulière de par la multiplicité des régimes possibles et la possibilité de structuration ou déstructuration « spontanée » (transition vers la turbulence) des écoulements. Ainsi, à la suite d'une ***instabilité primaire structurante***, des ***structures périodiques spatialement***, c'est-à-dire des ***ondes*** au sens large, apparaissent dans de nombreux systèmes : rouleaux de Rayleigh-Bénard (figure 1a), ondes de bord (figure 1b), ondes interfaciales (figure 1c), vortex de Taylor (figure 2a). Conceptuellement, les situations les plus « simples » sont celles où l'on peut identifier une seule direction de propagation x des ondes alors que les directions transverses sont « inactives » ; on est alors dans un cas « quasi-unidimensionnel ». Par ***analyse linéaire de stabilité***, on détecte le seuil de stabilité en obtenant la valeur critique R_c du paramètre de contrôle principal R à partir de laquelle l'instabilité se développe sous l'effet de petites perturbations de la configuration de base ; un tel phénomène correspond à une ***bifurcation***. On voit donc prédominer une onde de nombre d'onde critique et de fréquence critique donnés. Cependant, cette nouvelle structure de type onde peut elle-même devenir instable suite à nouveau à de petites perturbations ou à des bruits : cette nouvelle instabilité est dite ***instabilité secondaire***. Un exemple est la modulation des vortex de Taylor (figure 2b). Par une cascade de telles instabilités successives, on peut arriver à la turbulence...

Revenant à l'instabilité primaire, une ***analyse faiblement non linéaire***, où l'on suppose que le mode critique domine la perturbation près du seuil, nous permet d'obtenir une ***équation d'amplitude*** ou ***équation de Landau***

$$\boxed{\tau_0 \frac{dA}{dt} \;=\; (1+ic_0)\,\epsilon A \;-\; g\,(1+ic_1)\,|A|^2 A} \,, \tag{1}$$

avec τ_0 le ***temps caractéristique*** de l'instabilité, A l'***amplitude*** de l'onde critique, c_0 un coefficient de ***décalage fréquentiel linéaire***, $\epsilon = R/R_c - 1$ l'***écart au seuil réduit***, g le ***coefficient de saturation*** et c_1 le ***coefficient de décalage fréquentiel non linéaire***. Le système doit être étudié près du seuil, et posséder une dynamique lente permettant d'écrire une loi de séparation des échelles temporelles, avec de faibles amplitudes. En général, plusieurs modes sont actifs si on injecte dans le système suffisamment d'énergie : on peut donc observer des champs physiques de nombre d'onde différent du nombre d'onde critique, voire plusieurs ondes de longueurs d'onde différentes formant des ondes modulées (figure 1c). Une hypothèse à respecter est la domination du ou des modes actifs sur tous les autres modes, i.e. en ayant des amplitudes plus importantes. Seules les ***équations d'enveloppe*** permettent de discuter de la compétition entre tous ces modes. Le modèle d'évolution de l'enveloppe $A(x)$, modulant la porteuse donnée par l'onde critique, le plus simple et le plus « universel » en régime faiblement non linéaire pour une instabilité structurante oscillante est donné par ***l'équation de Ginzburg-Landau d'ordre cubique***,

$$\boxed{\tau_0 \left(\partial_t A(x) + v_g \partial_x A(x)\right) \;=\; (1+ic_0)\epsilon A(x) + \;\xi^2 \left(1+ic_0'\right) \partial_x^2 A(x) \;-\; g(1+ic_1)|A(x)|^2 A(x)} \,, \tag{2}$$

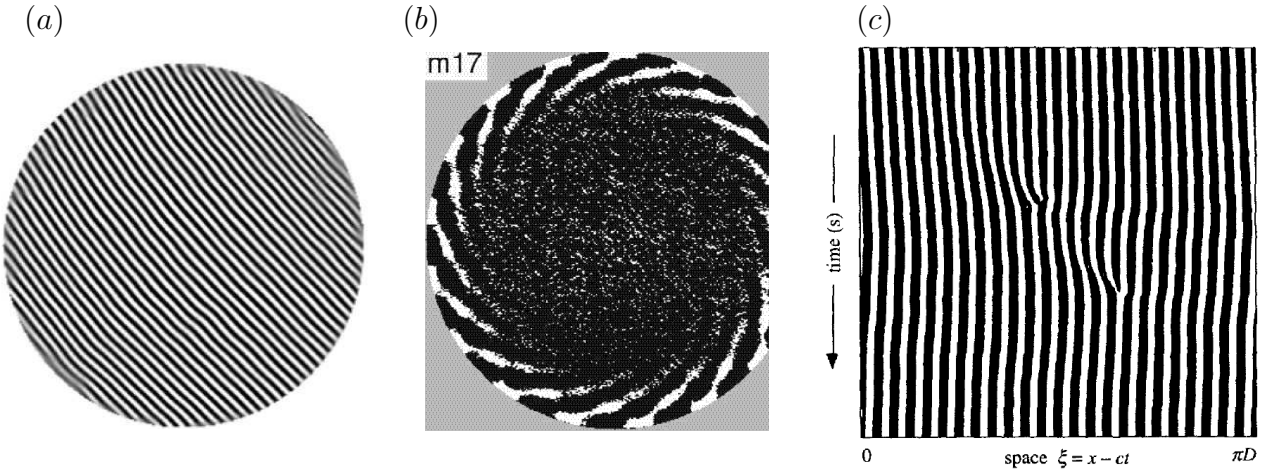


Fig. 1 – Trois exemples expérimentaux d'***ondes non linéaires***. (a) : ombroscopie montrant le champ de température dans une boîte cylindrique chauffée par le dessous ; les rouleaux de convection correspondants sont des ondes « dégénérées » puisque de fréquence nulle (Bajaj *et al.*, 1999). (b) : ombroscopie montrant le champ de température dans une boîte cylindrique en rotation chauffée par le dessous ; les ondes de bord ainsi visibles se propagent dans la direction rétrograde (Liu & Ecke, 1999). (c) : diagramme spatio temporel « déplié » montrant des ondes modulées à l'interface de deux fluides non miscibles placés dans un canal annulaire cisaillé par un couvercle (Charru & Barthelet, 1999). En blanc sont représentées les crêtes et en noir les creux de l'interface. Ce diagramme présente deux défauts points correspondant à une modification du nombre d'onde.

avec v_g la ***vitesse de groupe*** des ondes, ξ la ***longueur de cohérence*** de l'instabilité, et c_0' un ***coefficient de dispersion***. Ce modèle date des années 1970, et a été utilisé avec succès pour analyser de nombreuses expériences, le calcul théorique des coefficients de Ginzburg-Landau n'étant pas souvent fait systématiquement (Aranson & Kramer, 2002). En effet, une des rares comparaisons systématiques existantes concerne des ondes de bord en *convection de Rayleigh-Bénard tournante* (figure 1b). Liu & Ecke (1999) ont effectivement fait des travaux sur les instabilités secondaires sur une expérience de thermoconvection tournante dans un cylindre. Kuo & Cross (1993) ainsi que Plaut (2003) ont proposé des modèles de ce sytème et comparé leurs résultats. L'équation (2) peut décrire entre autres les ***instabilités secondaires d'Eckhaus***, qui apparaissent dans de nombreux domaines tels que la convection, les fluides en rotation ou encore les fluides cisaillés (figure 1c) (Barthelet *et al.*, 1995).

Il ne faut pas confondre les deux notions suivantes : celle de ***stabilité globale « non linéaire »*** au sens où toutes les perturbations, quelque soit leur amplitude, sont amorties (Joseph & Carmi, 1969) et celle de ***stabilité globale « spatiale »*** au sens où toutes les perturbations d'amplitude infinitésimale considérées à l'échelle globale du système (dans toute son extension spatiale) sont amorties. Cette dernière notion est donc un concept linéaire (Jones *et al.*, 2000). Historiquement, la notion de stabilité globale non linéaire a été introduite par Joseph & Carmi (1969), dans le contexte de l'étude de la transition vers la turbulence. Au contraire, une approche locale au sens spatial consiste à ne considérer que des perturbations d'échelle spatiale très petite devant l'échelle des gradients de l'état de base (gradients de vitesse, gradients thermiques, gradients géométriques), qui est en conséquence considéré comme « homogène ». Ceci permet souvent des calculs analytiques. *Dans cette thèse, nous considèrerons uniquement les notions de stabilité locale et globale au sens spatial du terme.* Grâce à une analyse linéaire de stabilité par méthode perturbative, une approche ***locale*** nous donne donc un paramètre de contrôle critique local R_c^l définissant le seuil d'instabilité alors qu'une approche ***globale*** nous fournit le paramètre de contrôle critique global R_c^g.

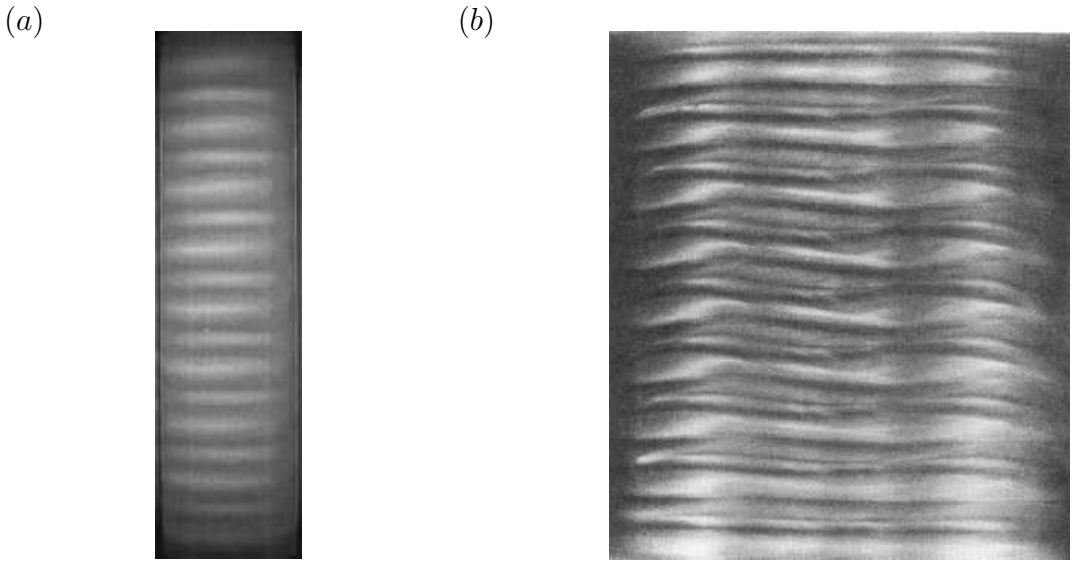


Fig. 2 – Photographies expérimentales en écoulement de Taylor-Couette entre un cylindre extérieur fixe et un cylindre intérieur tournant. (a) : vortex de Taylor près du seuil de l'instabilité primaire ; cette ***structure stationnaire*** est une onde dégénérée (Prigent & Dauchot, 2000). (b) : une instabilité secondaire mène des vortex aux vortex ondulés (Edwards *et al.*, 1991) ; les ondulations se propagent dans la direction azimutale et peuvent être considérées comme une ***onde***.

L'approche faiblement non linéaire présentée ci-dessus, qui aboutit aux équation de Landau ou de Ginzburg-Landau, n'est pertinente que dans le cas de systèmes où la première bifurcation est ***sur-critique*** ($g > 0$) ou ***faiblement sous-critique*** ($g < 0$ mais pas trop « grand »). Il existe aussi des cas « fortement sous-critiques » sans bifurcation. C'est la cas de l'écoulement de Couette plan et de l'écoulement en conduite cylindrique : la transition vers la turbulence est alors « brutale ». Une analyse ***fortement non linéaire*** est nécessaire. D'un point de vue conceptuel cependant, les ondes non linéaires gardent même dans ce cas une petite pertinence, puisqu'il a été montré récemment (sur la base d'une approche numérique) que de telles ondes apparaissent par bifurcation nœud-col comme des signes « précurseurs » de la transition vers la turbulence. Par exemple, en Couette plan, des ondes non linéaires apparaissent pour un nombre de Reynolds d'environ 510 (Waleffe, 2003), et la transition vers la turbulence a lieu vers $Re \simeq 1300$ (Malerud *et al.*, 1995), tandis qu'en écoulement en conduite cylindrique, les premières ondes non linéaires apparaitraient vers $Re \simeq 770$ (Pringle & Kerswell, 2007), alors que la transition vers la turbulence a lieu vers $Re \simeq 2000$. Ces ondes, quoique instables, seraient de plus pertinentes « transitoirement » en régime turbulent à nombre de Reynolds pas trop élevé, où certaines structures cohérentes observées transitoirement leur ressemblent (Hof *et al.*, 2004). Un exemple d'onde non linéaire calculée en écoulement de Couette plan est donné sur la figure 3.

Les écoulements introduits ci-dessus se rencontrent dans des géométries différentes. On peut classer les écoulements selon qu'ils sont ***ouverts*** ou ***fermés***. La première classe qui contient celle des écoulements en conduite, est plus souvent rencontrée que la seconde dans l'industrie. Toutefois, il paraît plus aisé d'étudier des systèmes fermés, tels que les systèmes cylindriques ou annulaires. De par leur invariance par rotation, l'écoulement de base associé est plus simple. De plus, expérimentalement, il est plus difficile d'obtenir à l'entrée d'un système ouvert un écoulement « propre », sans bruit extérieur lié aux vibrations d'une pompe ou d'un moteur par exemple.

Cette thèse est dédiée à l'étude de deux systèmes (thermo)hydrodynamiques fermés présentant des ondes non linéaires. Une première partie théorique sera consacrée à l'étude de la ***thermocon-***

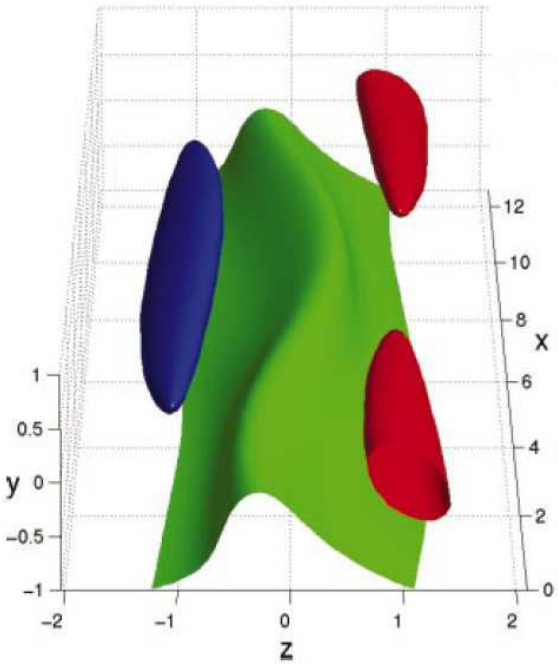


Fig. 3 – Exemple de solution numérique ***onde non linéaire*** calculée en écoulement de Couette plan par Waleffe (2003), pour un nombre de Reynolds égal à 600. L'isosurface verte correspond à u_x (vitesse principale) donnée, les isosurfaces rouge et bleue à deux isosurfaces de vorticité ω_x, de valeurs opposées. On a donc deux vortex modulés qui créent un « jet » rapide.

vection dans un noyau liquide planétaire. Des ***ondes de Rossby thermiques*** y apparaissent par instabilité thermoconvective. Ces écoulements de convection dans une coquille sphérique jouent un rôle important en géophysique, car ils sont probablement à l'origine de l'effet dynamo dans le cas du noyau terrestre. La bidimensionnalisation de l'écoulement selon le théorème de Proudman-Taylor amène à utiliser des modèles simplifiés tels que les ***modèles quasi géostrophiques bidimensionnels***. Reposant sur une intégration par rapport à la coordonnée axiale, ces modèles reposent sur des équations aux dérivées partielles posées dans le plan équatorial seulement. Ils permettent donc une étude plus systématique de l'influence des nombreux paramètres de contrôle du système, et de distinguer dans la dynamique ce qui est « quasi bidimensionnel » de ce qui est réellement tridimensionnel. La plupart des travaux existants valident les modèles quasi géostrophiques bidimensionnels par rapport à des modèles tridimensionnels uniquement en régime linéaire[1]. Cette thèse va tenter d'établir la première validation de modèles quasi géostrophiques par comparaisons systématiques à des modèles tridimensionnels en régime faiblement non linéaire en calculant les coefficients de l'équation de Landau. Nos travaux pourraient aider au développement de modèles dynamo quasi géostrophiques « $2D\ ^1/_2$ » du type de ceux de Schaeffer & Cardin (2006).

La seconde partie sera vouée à l'étude d'écoulements dans un canal annulaire éventuellement tournant, cisaillé par un couvercle tournant. Nous avons choisi une telle manipulation isotherme parce qu'elle est moins délicate à mettre au point qu'une manipulation de thermoconvection tournante, qui aurait été plus proche de notre partie théorique ! La stabilité interfaciale entre deux fluides non miscibles (Barthelet *et al.*, 1995; Barthelet & Charru, 1998; Charru & Barthelet, 1999)

[1] Une exception notable est donnée par la publication très récente de Rotvig (2007). Notre travail peut être considéré comme complémentaire de celui-ci, puisque Rotvig a étudié des régimes fortement non linéaires où $\epsilon = Ra/Ra_c - 1$ est supérieur à 20 (Ra est un nombre de Rayleigh).

ou les phénomènes d'érosion et de dépôt de particules (Charru *et al.*, 2004) dans une configuration annulaire ont déjà été étudiés. Ces travaux ont été effectués à des nombres de Reynolds faibles. Nous allons étudier la stabilité d'un seul fluide à des nombres de Reynolds plus grands. L'originalité de notre manipulation réside entre autres dans le fait que nous pouvons faire tourner le canal indépendamment du couvercle qui le cisaille. L'idée conductrice qui a motivé la construction de cette expérience au LEMTA était l'étude d'éventuels effets non locaux, liés à la topologie annulaire, sur la dynamique d'ondes faiblement non linéaires (Plaut, 2003). Cependant, faute de temps, je me suis avant tout consacré, une fois que la manipulation a été (enfin) prête, à la caractérisation des écoulements de base (dont on verra qu'ils sont du type « Ekman-Couette confiné incurvé ») et de leur première instabilité. Nous verrons que cette instabilité structurante conduit bien à des ***ondes hydrodynamiques non linéaires***.

Des points communs existent entre les modèles théoriques étudiés et notre manipulation. La ***topologie annulaire*** est identique. Des ondes (thermo)hydrodynamiques non linéaires apparaissent dans les deux cas, se propageant dans la direction azimutale. Dans un premier temps, on recherche à chaque fois à caractériser l'instabilité primaire. Dans la partie théorique, on essayera de comprendre les mécanismes de saturation/antisaturation du mode critique par une analyse faiblement non linéaire. Dans la partie expérimentale, on essayera d'identifier les mécanismes déclenchant l'instabilité. De plus, il existe d'autres points communs. La ***force de Coriolis***, potentiellement présente dans les deux cas, peut jouer un rôle important dans les mécanismes. On verra aussi que les ondes au seuil de l'instabilité primaire spiralent de la même façon. Enfin, les effets de viscosité près des parois sont présents dans les fluides visqueux en rotation, pouvant contrôler une grande partie de la dynamique des écoulements. L'expérience de la tasse de thé illustre ce phénomène. Si on place des feuilles de thé dans un verre et qu'on touille à l'aide d'une cuillère, les feuilles de thé situées dans le volume du verre vont être expulsées vers l'extérieur sous l'effet de la force centrifuge. Mais les feuilles situées au fond du verre vont se regrouper au centre. Ce phénomène est lié ***pompage d'Ekman*** que nous rencontrerons dans les deux parties de cette thèse.

Chaque partie de cette thèse s'appuie sur des coopérations : Friedrich Busse (de l'université de Bayreuth) et Radostin Simitev (de l'université de Glasgow) nous ont fourni les résultats de leur code tridimensionnel de thermoconvection que nous avons comparés à ceux de nos modèles bidimensionnels. Éric Serre (de Marseille) nous a fourni les résultats de son code tridimensionnel hydrodynamique dans un canal annulaire éventuellement tournant, cisaillé, résultats que nous avons comparé avec nos résultats expérimentaux.

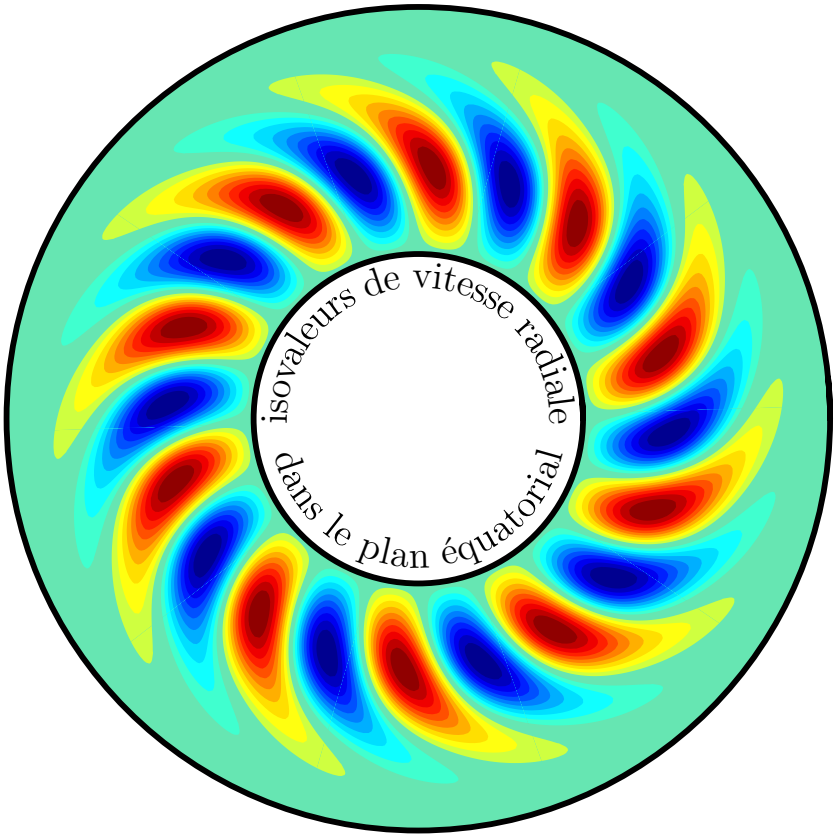
Ce mémoire de thèse est disponible au format PDF sur Internet :

http ://www.ensem.inpl-nancy.fr/Yannick.Lebranchu/these.htm

Première partie

Première partie

Approche théorique



Ondes de Rossby thermiques

en géométrie sphérique en rotation rapide

Chapitre 1

Introduction : des ondes de Rossby thermiques

1.1 Contexte planétologique - Difficultés

De nombreuses planètes présentent un ***noyau liquide*** (cas de la Terre) et/ou une enveloppe fluide (cas de Jupiter) de grandes dimensions, dans lesquels des ***écoulements de convection*** ont lieu. C'est le cas de la Terre. Donnons d'abord un aperçu de sa structure. La Terre est composée en première approximation de plusieurs couches organisées en coquilles sphériques concentriques (figure 1.1). Le centre est le noyau solide (ou graine) qui est principalement constitué de fer et son rayon est d'environ $r_i = 1220$ km. La couche supérieure est celle qui nous intéresse, le noyau externe liquide, d'épaisseur environ $d = 2260$ km (soit un rayon extérieur du noyau liquide $r_e = 3485 \pm 10$ km). Il est essentiellement constituée de fer liquide auquel s'ajoutent des éléments plus légers tels que le soufre ou le silicium. Enfin, la dernière couche est constitué du manteau (puis la croûte) ayant une épaisseur de 2890 km.

Une première difficulté dans l'étude théorique des écoulements présents dans le noyau liquide réside en les différents mécanismes d'écoulement présents :

- la ***convection thermique*** due à la chaleur primordiale stockée dans la graine et le noyau et aussi, éventuellement, à des désintégrations radioactives : le fluide chaud, moins dense est situé plus profondément que le fluide froid ; cette configuration est instable, le fluide chaud va monter sous l'action de la force d'Archimède,
- la ***convection compositionnelle*** : le fer liquide se solidifie pour former la graine, mais les éléments légers sont en grande partie rejetés dans le liquide.

Une autre difficulté importante est la ***turbulence*** : dans le noyau liquide de la Terre, le nombre de Reynolds peut être déduit de l'estimation de la vitesse d'écoulement dans le noyau, valeur estimée à partir des variations séculaires du champ magnétique (Nataf & Sommeria, 2000) :

$$u \;=\; 10^{-4}\ \mathrm{m\ s^{-1}},$$

ainsi que de celle de la viscosité du fer au point de fusion (Cardin, 1992; Nataf & Sommeria, 2000)

$$\nu \;=\; 10^{-6}\ \mathrm{m^2\ s^{-1}}\ , \tag{1.1}$$

soit

$$Re \;=\; \frac{ud}{\nu} \;=\; \frac{10^{-4}\ 2{,}3\ 10^{6}}{10^{-6}} \;\sim\; 2\ 10^{8} \;\gg\; 1\ .$$

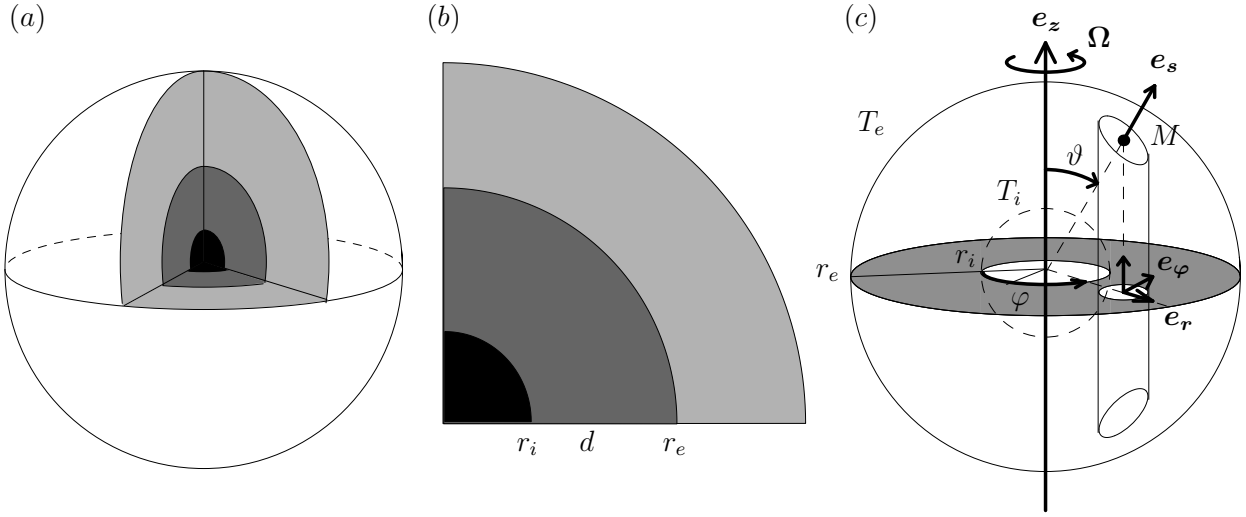


Fig. 1.1 – (a), (b) : vue en coupe d'une planète tellurique. En noir, la graine solide de rayon r_i ; en gris foncé, le ***noyau liquide*** qui nous intéresse d'épaisseur $d = r_e - r_i$ et en gris clair, le manteau délimité par la croûte. (c) : en gris foncé, le plan équatorial du noyau liquide, en pointillé, la graine solide. La planète est en rotation diurne à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe Oz. On montre également une colonne de fluide de hauteur $2H$ sur laquelle les coordonnées sphériques et cylindriques sont représentées, de sorte que $\boldsymbol{OM} = s\boldsymbol{e_s} = r\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}$.

Nous allons étudier le comportement du fer liquide soumis à un écart de température entre ses couches interne et externe et/ou chauffé par une source interne d'énergie dégagée par des éléments radioactifs. Pour cela, nous allons modéliser les écoulements liés à la convection thermique dans un noyau planétaire en utilisant les approximations de Boussinesq. Pour simplifier, nous considèrerons des planètes moins chaudes que la Terre possédant un noyau plus petit, donc des écoulements (près du seuil de convection) « laminaires » ou alors des écoulements turbulents mais avec les modèles les plus simples de transport turbulent, à savoir ceux utilisant des diffusivités turbulentes scalaires. Nous adoptons dans nos simulations une géométrie simplifiée du noyau liquide. On l'approxime en effet par une ***coquille sphérique*** d'épaisseur $d = r_e - r_i$ supposée constante. On néglige ainsi

- l'ellipticité des frontières noyau-manteau et noyau interne - noyau externe,
- les irrégularités de petites échelles au niveau de ces frontières,
- le rayon interne qui se « déplace » par cristallisation de la graine solide.

Nous allons considérer des planètes en ***rotation*** diurne rapide autour d'un axe Sud-Nord réputé immobile[1], ainsi la force de Coriolis va jouer un rôle primordial. Ces écoulements de convection, dans le cas de la Terre, ont une conséquence importante, à savoir la génération du champ magnétique par effets magnétohydrodynamiques. À cause d'effets non linéaires, il apparaît en effet en convection une composante azimutale du champ de vitesse indépendante de l'angle d'azimut. Ces écoulements « zonaux » (visibles sur les moitiés droites de la figure 1.3 dans le cas d'ondes pures) introduiraient une rotation différentielle dans le noyau qui jouerait probablement un rôle important dans la dynamo par effet Ω. Ainsi, selon Kageyama & Sato (1997); Nataf & Sommeria (2000), le cisaillement de l'écoulement zonal pourrait convertit le champ magnétique poloïdal[2]

[1] On néglige donc les effets de précession, qui pourraient étre importants en géophysique.

[2] Dont les lignes de champ sont inclues dans les plans méridiens, i.e. dans les plans contenant l'axe de rotation.

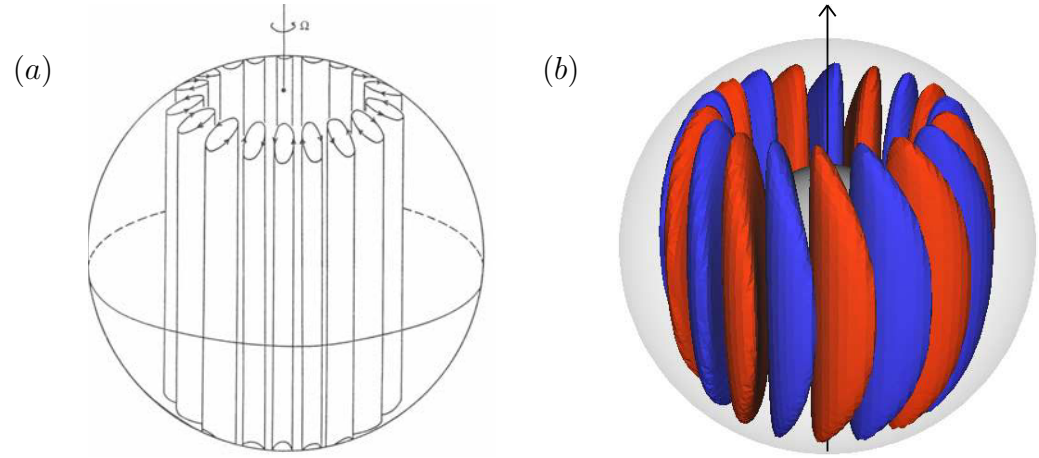


Fig. 1.2 – Gauche : schéma historique de Busse (1970) représentant des ***ondes de Rossby thermiques*** au seuil. Droite : isosurfaces de vitesse radiale d'une solution onde de Rossby thermique tridimensionnelle calculée par R. Simitev. Le modèle utilisé est un modèle de Boussinesq en ***chauffage interne***, pour $\eta = 0{,}4$, $P = 1$ et $E = 2\ 10^{-4}$.

en champ magnétique toroïdal[3]. ***Cette thèse ne tiendra pas compte de ces effets magnétohydrodynamiques***, ce qui implique que les modèles étudiés ici ne pourront s'appliquer à la Terre.

1.2 Les ondes de Rossby thermiques : un exemple « simple » d'écoulements dans un noyau

D'un point de vue fondamental, il semble intéressant d'étudier les écoulements de thermoconvection les plus simples, c'est-à-dire ceux qui se développent spontanément dans une planète juste assez chaude pour convecter. Ces écoulements prennent la forme d'« ***ondes de Rossby thermiques*** » se propageant dans la direction prograde. Ce nom, qui vient de Busse & Or (1986), s'explique par le fait que le mécanisme de propagation de ces ondes d'origine « topographique », présente des similarités avec celui qui agit sur les ondes de Rossby atmosphériques. Cette thèse propose justement une étude « systématique » de la dynamique des ondes de Rossby thermiques pures, représentées sur la figure 1.2, en régime faiblement non linéaire.

1.3 Modèles Boussinesq tridimensionnels

Malgré de nombreuses approximations de type Boussinesq (que nous passerons en revue dans notre chapitre 2), les modèles tridimensionnels les plus « simples » (Simitev & Busse, 2003) présentent cinq paramètres de contrôle. Le premier est un paramètre géométrique : le rapport des rayons

$$\eta = \frac{r_i}{r_e} \tag{1.2}$$

qui sera variable selon nos comparaisons avec d'autres travaux. Il sera fixé à $\eta = 0{,}35$ ou $0{,}4$. En prenant $\eta = 0{,}35$, nous nous plaçons dans les proportions des différentes couches de la Terre. Mais afin de pouvoir comparer nos calculs à d'autres travaux, on prendra également $\eta = 0{,}4$ comme Simitev & Busse (2003). Le second est le ***nombre de Prandtl***

$$P = \frac{\nu}{\kappa} \tag{1.3}$$

[3]Dont les lignes de champ sont des cercles autour de l'axe de rotation.

avec ν la viscosité cinématique du fluide, κ sa diffusivité thermique. Ce nombre serait de l'ordre de 0,1 dans le cas de la Terre (voir nomenclature de la page 29). Un troisième paramètre est le ***nombre d'Ekman***

$$E = \frac{\nu}{\Omega d^2} \ , \tag{1.4}$$

qui donne le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis. Ce nombre serait très petit dans une planète, à cause de la grandeur de l'échelle caractéristique d. Enfin interviennent à priori deux ***nombres de Rayleigh***,

$$Ra_i = \frac{\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma} S d^6}{3\lambda\kappa\nu} \quad \text{et} \quad Ra_d = \frac{\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\delta T d^4}{\kappa\nu} \tag{1.5}$$

mesurant l'intensité des ***chauffages interne et différentiel*** (Simitev & Busse, 2003). Nous expliquerons ces formules dans la section 2.3 (voir aussi la nomenclature). Le chauffage interne résulte de la désintégration d'éléments radioactifs dans le noyau, qui fournit une source d'énergie interne, et le chauffage différentiel de l'absence de tels éléments : seules les frontières interne et externe, l'interne étant plus chaude que l'externe, influencent la température. Un modèle mixte serait pertinent pour le noyau terrestre d'après Lee *et al.* (2004) mais à l'heure actuelle on ne sait pas bien estimer le rapport des deux nombres de Rayleigh Ra_i/Ra_d dans le cas de la Terre. C'est pourquoi l'approche « fondamentale » adoptée dans la communauté scientifique consiste à étudier deux cas extrêmes seulement, à savoir celui du « chauffage interne pur » $Ra_i > 0$, $Ra_d = 0$ et celui du « chauffage différentiel pur » $Ra_i = 0$, $Ra_d > 0$.

Près du seuil, quelque soit le mode de chauffage considéré, la convection est confinée près du rayon intérieur pour des faibles nombres d'Ekman selon les théories asymptotiques. Pour la Terre, une estimation du nombre d'Ekman basé sur la viscosité microscopique donne

$$E \ = \ \frac{\nu}{\Omega d^2} \ = \ \frac{10^{-6}}{(7{,}27\ 10^{-5}\ 2{,}26\ 10^{6})^2} \simeq 3\ 10^{-15} \ . \tag{1.6}$$

En chauffage différentiel, pour un nombre de Prandtl pas trop petit, la convection est localisée dans une région d'épaisseur $\mathcal{O}\left(E^{2/9} r_e\right)$ dans la direction radiale, alors que cette épaisseur est $\mathcal{O}\left(E^{1/6} r_e\right)$ en chauffage interne (Dormy *et al.*, 2004). Cette localisation a lieu autour d'un rayon cylindrique critique ; en chauffage interne la loi $l = \mathcal{O}\left(E^{1/6} r_e\right)$ est valable si le rayon de la graine est inférieur à ce rayon critique, sinon on retrouve une localisation près du rayon intérieur, avec $l = \mathcal{O}\left(E^{2/9} r_e\right)$, comme en chauffage différentiel. Ces échelles ne sont pas pertinentes dans le cas de la Terre. On trouverait en effet à partir de la valeur (1.6) dans le cas de la Terre des échelles caractéristiques de l'ordre de

$$l \ \sim \ 6\ 10^{-4} r_e \quad \text{en chauffage différentiel,} \tag{1.7}$$

$$l \ \sim \ 4\ 10^{-3} r_e \quad \text{en chauffage interne.} \tag{1.8}$$

Ceci signifie que la convection serait localisée sur moins de 1% de l'épaisseur du noyau, ce qui n'est pas observé : dans la Terre, on est en convection turbulente très loin du seuil, sans parler des effets magnétohydrodynamiques. revenant à des planètes plus « froides », près du seuil de convection pure, on peut voir ces effets de localisation quand $E \to 0$ sur les figures 1.3. Dans tous les cas, la hauteur d'une demi colonne de fluide H est telle que $H \ll l$.

Historiquement, le premier modèle tridimensionnel de thermoconvection en chauffage interne pur dans un noyau sphérique sans graine solide remonte à Busse (1970). En fait dans ce cas le chauffage interne est le seul mode de chauffage possible (la constante d'intégration a est forcément nulle dans le profil de température statique 2.8 qui sera calculé dans la section 2.1). Busse détermine par une analyse asymptotique locale pour $E \to 0$ le seuil de convection Ra_{ic} et établit la structure

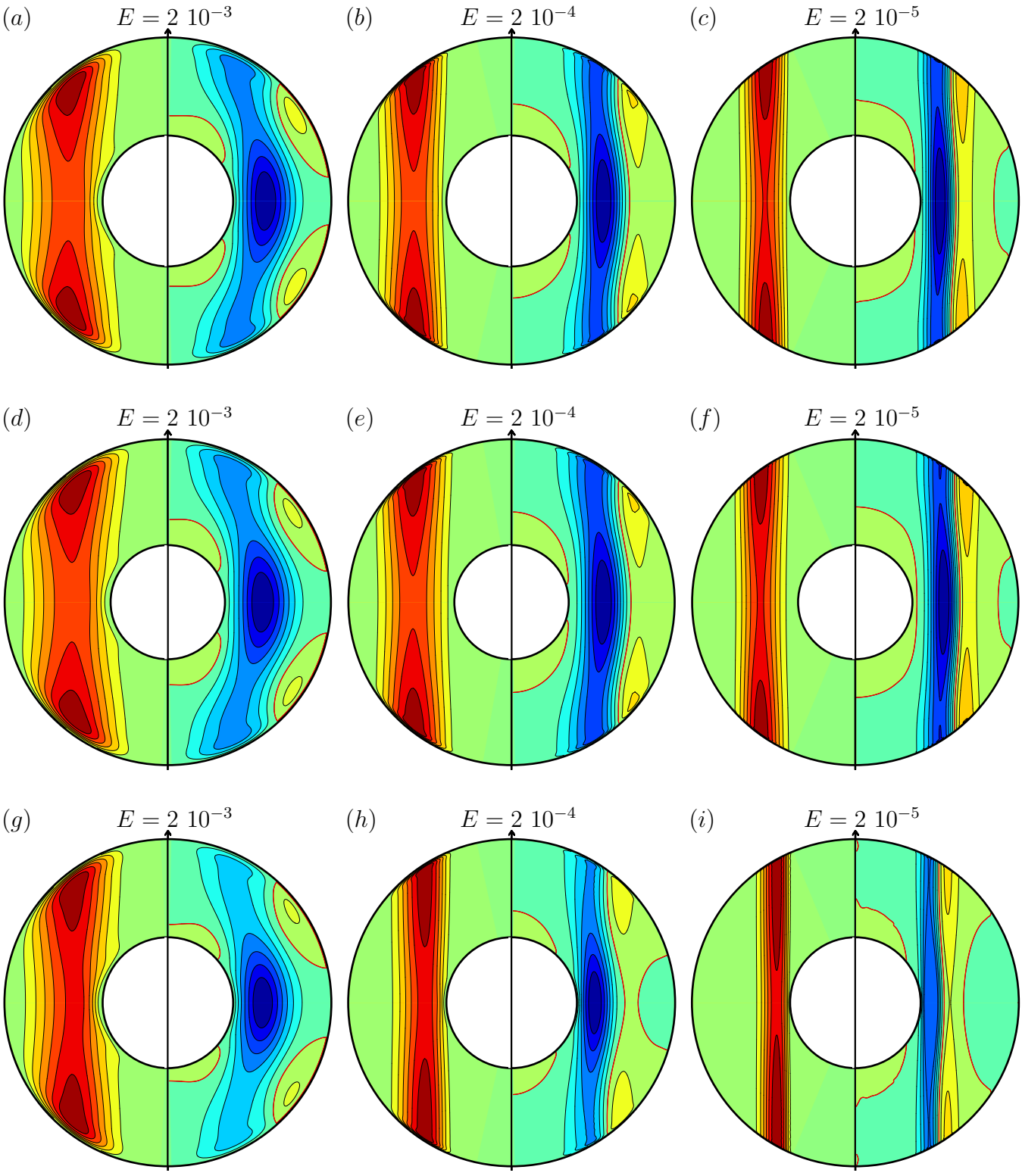


Fig. 1.3 – Exemples d'***ondes de Rossby thermiques non linéaires*** calculées numériquement par R. Simitev pour un nombre de Prandtl unité et à un écart au seuil $\epsilon = Ra/Ra_c - 1 \simeq 1\%$, sauf (a) à 5%, et (g) à 7,6 % du seuil. Sur la moitié gauche, dans un plan méridien, valeurs maximales de vitesse radiale max v_r qui représentent l'amplitude de convection de $\boldsymbol{V_1}$ (équation 1.9), soit $2\,|U_1\,(r,z)|$, avec U_1 la composante radiale de $\boldsymbol{V_1}$. Sur la moitié droite, dans un plan méridien, écoulement moyenné sur un tour V généré par $\boldsymbol{V_1}$ (équation 1.10), où les lignes épaisses correspondent aux valeurs nulles. (a), (b), (c), (d), (e), (f) : ***chauffage interne*** ; (g), (h), (i) : ***chauffage différentiel***. (a), (b), (c), (g), (h), (i) : $\eta = 0{,}4$; (d), (e), (f) : $\eta = 0{,}35$. Les niveaux de gauche ont été choisis espacés de max $v_r/6$, et ceux de droite de $|\min V/7|$.

colonnaire locale de la convection au seuil (figure 1.2). Quelques années plus tard, Soward (1977) montre que si on prend en compte l'inhomogénéité géométrique du système, le seuil estimé par Busse (1970) n'est pas vraiment pertinent au sens où des ondes linéaires ne peuvent subsister aux temps longs lorsque Ra_i est très proche de Ra_{ic}. Soward a par contre obtenu des solutions non linéaires pour $Ra_i - Ra_{ic}$ de l'ordre de $E^{2/9}$. Le problème posé par Soward (1977) n'a été vraiment résolu que par Jones *et al.* (2000). Ces auteurs font une analyse globale dans une sphère pleine en chauffage interne et déterminent ainsi correctement les paramètres critiques. Un bon accord avec les résultats numériques tridimensionnels est observé pour $P \gtrsim 1$ et $E \leq 10^{-4}$. Par contre, un désaccord apparaît pour $P \lesssim 0{,}1$. Jones *et al.* (2000) confirment que pour E petit, l'instabilité se caractérise par une onde de Rossby thermique colonnaire localisée au niveau d'un rayon critique. Ils montrent également que ces ondes sont spiralées, en accord avec les solutions calculées à E fini par Zhang (1992*b*). Une contribution importante de Zhang (1994) a été de montrer que les mouvements convectifs sont quasi inertiels pour $E \ll 1$ et $P/E \lesssim 1$; on obtient alors des ondes peu spiralées et localisées près de l'équateur extérieur. Zhang & Busse (1987) ont montré la transition entre ces deux modes (quasi inertiel et colonnaire) en fonction du nombre d'Ekman et Ardes *et al.* (1997) nous donne sur la figure 1.4 le mode de convection privilégié. La structure colonnaire est donc préférée (figure 1.2) selon la contrainte de Proudman-Taylor sauf à petit nombre de Prandtl (Zhang *et al.*, 2007) à cause des modes inertiels très rapides. L'analyse de Jones *et al.* (2000) a été reprise dans une coquille sphérique, ce qui introduit la possibilité du chauffage différentiel, par Dormy *et al.* (2004). Ces auteurs ont montré qu'en chauffage différentiel les ondes sont localisées près du rayon cylindrique intérieur $r = r_i$. Les ondes de Rossby thermiques sont en général instables assez près du seuil : cette instabilité donne lieu à des vacillations (Zhang, 1992*a*). La transition aux ondes de Rossby thermiques est en général sur-critique (Tilgner & Busse, 1997), mais la possibilité d'une bifurcation sous-critique à bas nombre d'Ekman est suggérée par les travaux de Soward (1977), cf. Proctor (1994).

L'équipe de Busse à Bayreuth a développé un code de calcul tridimensionnel de thermoconvection dans une coquille sphérique tournante pour les deux types de chauffage (interne et différentiel). Il s'agit d'un code pseudo spectral avec un développement en harmoniques sphériques pour les dépendances angulaires et en polynômes de Chebychev pour la dépendance radiale. L'onde de Rossby thermique apparaissant au seuil de convection possède un champ de vitesse dominant de la forme (figure 1.2)

$$\boldsymbol{u} \;=\; \boldsymbol{V_1}\,(r,z)\;\exp\left[i\,(m\varphi - \omega t)\right] \;+\; c.c.\;, \tag{1.9}$$

avec (r,φ,z) le système de coordonnées cylindriques, m le nombre d'onde azimutal, et ω la fréquence angulaire. Par des effets non linéaires, une onde de la forme (1.9) génère des harmoniques de nombre d'onde $\pm 2m$, $\pm 3m$... mais aussi un écoulement zonal de nombre d'onde nul de la forme

$$\boldsymbol{V_2} = V_2(r,z)\boldsymbol{e_\varphi}\;. \tag{1.10}$$

Il existe aussi un champ de vitesses radiale et axiale de nombre d'onde nul (écoulements « méridiens »), mais en moyenne axiale ce champ est nul. Au contraire le champ (1.10) n'est pas nul en moyenne axiale. On l'appelle donc « ***écoulement zonal principal*** ».

Des exemples représentatifs de solutions tridimensionnelles obtenues par R. Simitev en conditions limites d'adhérence sont représentées figure 1.3. Les calculs nécessaires pour obtenir toutes ces solutions faiblement non linéaires sont très longs (de l'ordre de six mois de temps CPU sur un « petit » cluster) ce qui justifie l'idée d'approches simplifiées bidimensionnelles, rendues possibles par la structuration colonnaire des ondes.

1.4 Modèles Boussinesq bidimensionnels

La structure colonnaire des ondes de Rossby thermiques est due à la rotation diurne de la planète qui créé des forces de Coriolis tendant à bidimensionaliser l'écoulement. En effet, en première approximation, pour de très petits nombres d'Ekman, la force de Coriolis équilibre le gradient de pression. Cet ***équilibre géostrophique*** est la base de la ***contrainte de Proudman-Taylor*** qui affirme que le champ de vitesse d'un écoulement géostrophique est invariant dans la direction parallèle à l'axe de rotation. Ceci implique que l'écoulement près du seuil de convection doit être essentiellement bidimensionnel, ce que confirme la figure 1.3. Busse (1970) a ainsi proposé de développer des modèles plus légers que les modèles 3D, à savoir des ***modèles quasi géostrophiques 2D*** reposant sur une intégration par rapport à la coordonnée axiale. Cette faible dépendance en la coordonnée axiale n'est pas très rigoureuse en géométrie sphérique. Elle ne l'est que dans la limite des pentes faibles, comme dans les modèles annulaires présentés sur la figure 1.5. Les modèles quasi géostrophiques ne sont justifiables dans aucune limite asymptotique. Ils représentent cependant une bonne approximation et ont un comportement qualitativement corrects. Ces modèles furent posés dans une géométrie si simplifiée, avec notamment une approximation de petit inter-rayon, que tous les modes de chauffage se confondaient. Ces géométries simplifiées furent proposées par Busse (1970), puis réutilisés par Busse & Carrigan (1974); Busse & Hood (1982); Busse & Or (1986); Or & Busse (1987); Plaut & Busse (2002, 2005). Ces modèles sont déjà assez riches puisque l'on peut y retrouver le phénomène de création d'écoulements zonaux, celui des instabilités secondaires menant à des vacillations (Or & Busse, 1987), ou encore des modes quasi inertiels (Plaut & Busse, 2005). Cardin & Olson (1994) furent les premiers à considérer un modèle avec un inter-rayon fini et des frontières sphériques ; Pino *et al.* (2000) ont un modèle intermédiaire avec un inter-rayon fini mais des couvercles plats. Des modèles de ce type ont été repris par Aubert *et al.* (2003); Cole (2004); Morin & Dormy (2004, 2006); Gillet & Jones (2006); Gillet *et al.* (2007*a*). Ces modèles présentent bien les phénomènes de vacillations par exemple (Morin & Dormy, 2004). Cole (2004); Morin & Dormy (2004, 2006) ne considèrent que le chauffage interne, alors que Aubert *et al.* (2003); Gillet & Jones (2006) considèrent seulement le chauffage différentiel. Enfin, Rotvig (2007) a très récemment fait une comparaison des écoulements zonaux entre un modèle tridimensionnel et un modèle quasi géostrophique bidimensionnel, mais en régime fortement non linéaire (et en chauffage différentiel).

1.5 Approche expérimentale

Des réalisations expérimentales de systèmes tels que nous le montre la figure 1.5 sont possibles en faisant jouer à la force centrifuge le rôle de la gravité, et en inversant le gradient thermique appliqué. Les pionniers tels que Busse & Carrigan (1974) étudièrent les colonnes de convection et cherchèrent la formation d'écoulements zonaux. L'expérience de Cardin & Olson (1994) s'inscrit dans la continuité des expériences de convection thermique dans une sphère en rotation rapide : ils ont montré que l'écoulement demeurait bidimensionnel. Plus récemment, l'équipe Géodynamo du LGIT (Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique), a mis au point deux manipulations pour quantifier les écoulements générés par convection thermique en présence d'un champ magnétique (magnéto-convection) dans le noyau liquide terrestre. La première expérience permet d'étudier un écoulement d'eau en convection thermique pure (figure 1.6a). Aubert *et al.* (2001); Gillet *et al.* (2007*b*) trouvent également des structures verticales dans la secone expérience qui est une sphère en rotation rapide remplie d'eau (par leurs techniques de visualisation) ou de gallium liquide soumis à un champ magnétique (par vélocimétrie Doppler à ultrasons) (figure 1.6b). Les structures colonnaires observées expérimentalement dans tous ces travaux motivent à développer des modèles quasi géostrophiques bidimensionnels.

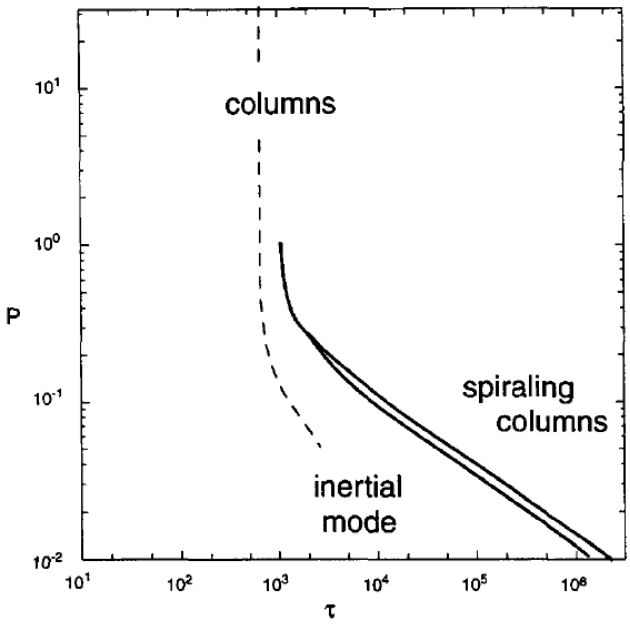


Fig. 1.4 – Nature du mode critique de convection en fonction du nombre de Prandtl P et du nombre de Coriolis $\tau = 2E^{-1}$ obtenu par le modèle tridimensionnel en ***chauffage interne*** dans une coquille sphérique de rapport de rayons $\eta = 0{,}4$ de Ardes *et al.* (1997).

1.6 Motivations - Objet de cette étude

Nous allons présenter dans cette thèse ***deux nouveaux modèles quasi géostrophiques de thermoconvection, en chauffage interne et différentiel***, en condition limite d'adhérence, ainsi que leur ***résolution numérique en régimes linéaire et faiblement non linéaire***. L'analyse faiblement non linéaire nous permettra de quantifier l'amplitude saturée des différents champs de l'onde, par exemple le champ de vitesse « primaire » en $\exp\left[i\left(m\varphi - \omega t\right)\right]$ et aussi l'écoulement zonal/moyen cisaillé associé (cf. les équations 1.9 et 1.10). Nous présenterons une comparaison systématique aux résultats tri dimensionnels du code de thermoconvection de Simitev & Busse (2003), y compris en régime faiblement non linéaire. Ceci représente une avancée par rapport à Aubert *et al.* (2003); Gillet *et al.* (2007*a*), qui n'ont présenté de telles comparaisons 2D/3D qu'en régime linéaire. Nous ferons également une comparaison de nos résultats aux théories asymptotiques locales. Nous verrons que, pour certains jeux de paramètres de contrôle, la bifurcation peut devenir sous-critique et nous tenterons d'expliquer ce changement de comportement par une analyse des mécanismes mis en jeu.

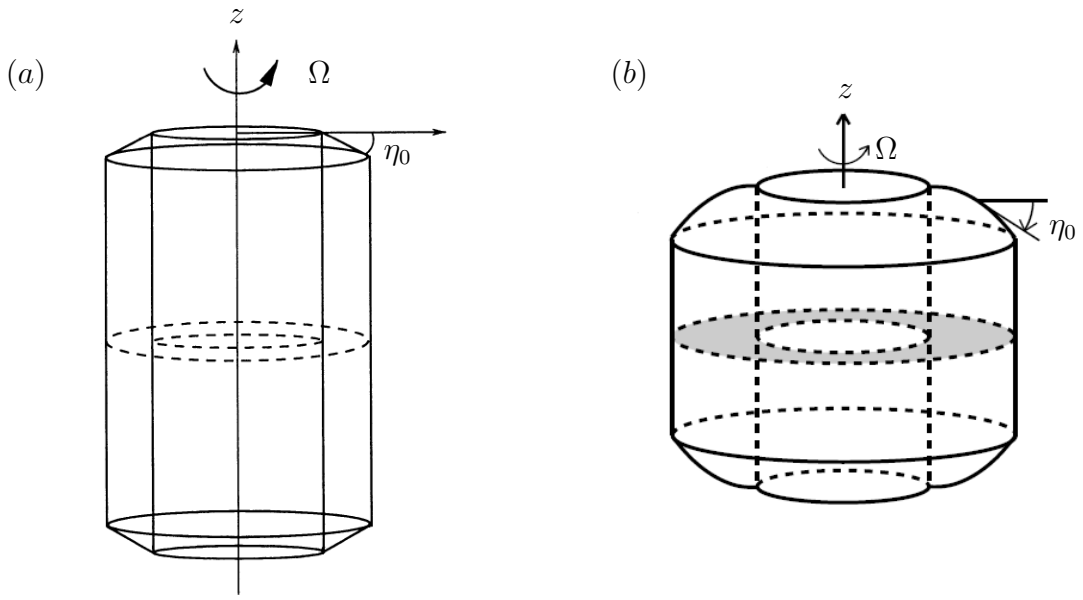


Fig. 1.5 – Modèles simplifiés des « anneaux cylindriques tournants ». (a) : Géométrie de Busse (1970), reprise entre autres par Plaut & Busse (2002) : cylindre annulaire avec des couvercles coniques de pente η_0 « faible ». (b) : géométrie amélioré de Busse & Or (1986), reprise entre autres par Plaut & Busse (2005) : les couvercles sont maintenant incurvés.

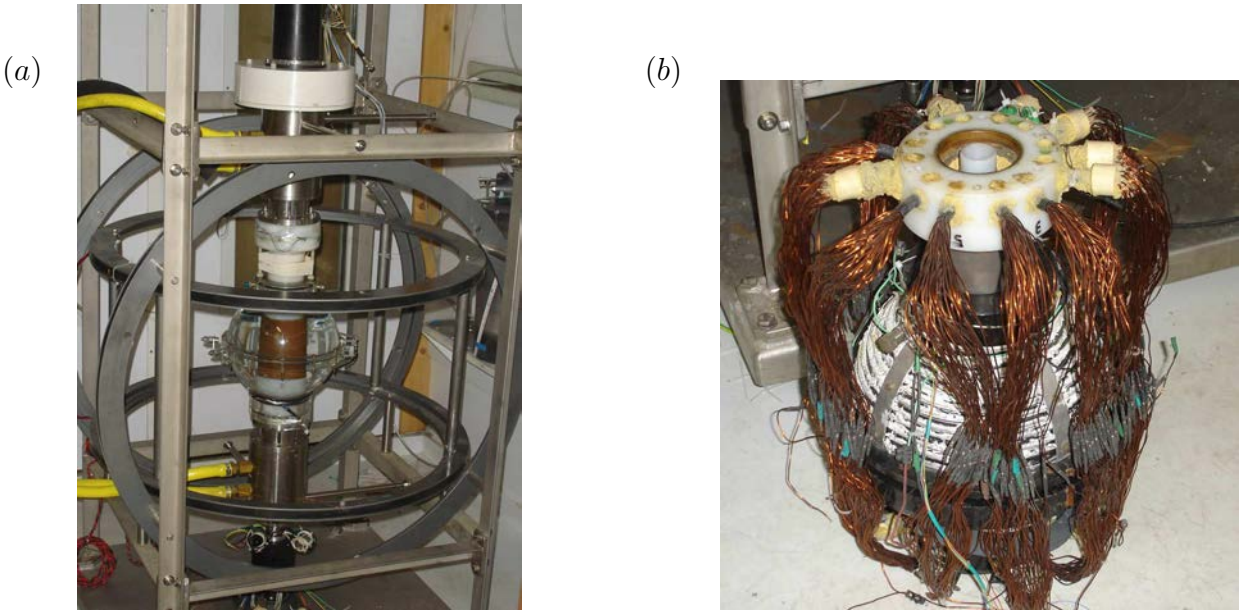


Fig. 1.6 – Expériences du LGIT. (a) : photo de l'expérience de convection thermique tournante avec une coquille sphérique d'eau. (b) : deuxième coquille entourée d'une bobine pour la même expérience avec du gallium liquide et en présence d'un champ magnétique.

Nomenclature de la partie théorique

Notation	Nom	Relation	Valeur typique pour	
			la Terre	nos études
A	amplitude faiblement non linéaire	$A = \sqrt{\epsilon / (\tau_0 g)}$		
Bu	nombre de Busse	$Bu = \widetilde{\alpha} g \theta / (\Omega v)$		
c	capacité calorifique massique		800 J.kg^{-1}.K^{-1}	
c_0	décalage fréquentiel linéaire			
c_1	décalage fréquentiel non linéaire			
d	inter rayon	$d = r_e - r_i$	2260 km	
E	nombre d'Ekman	$E = \nu / (\Omega d^2)$	3 10^{-15}	$10^{-7} \leq E \leq 10^{-3}$
g	coefficient de saturation ou antisaturation	$g > 0$ $g < 0$		
$\boldsymbol{g}$	champ de gravité			
H	hauteur d'une demi-colonne de fluide	$H(r) = \sqrt{r_e^2 - r^2}$		
m	nombre d'onde			
m_c	nombre d'onde critique			
$\boldsymbol{n}$	vecteur normal à la coque externe			
P	nombre de Prandtl	$P = \nu / \kappa$	$\simeq$ 0,1	$0{,}1 \leq P \leq 10$
r	distance à l'axe de rotation			
r_c	rayon critique			
r_i	rayon intérieur		1220 km	
r_e	rayon extérieur		3480 km	
Ra_i	nombre de Rayleigh mesurant le chauffage interne	$Ra_i = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma} S d^6 / (3\lambda\kappa\nu)$		
Ra_{ic}	nombre de Rayleigh interne critique			
Ra_d	nombre de Rayleigh mesurant le chauffage différentiel	$Ra_d = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\delta T d^4 / (\kappa\nu)$		
Ra_{dc}	nombre de Rayleigh différentiel critique			
Ro	nombre de Rossby	$R_0 = u / (\Omega d)$		
$\boldsymbol{s}$	vecteur position	$\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{e_s} = r\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}$		
s	rayon sphérique	$s = \lvert\boldsymbol{s}\rvert$		
S	taux de production volumique de chaleur			
t	temps			

Notation	Nom	Relation	Valeur typique pour	
			la Terre	nos études
T	température	$T = T_s + \theta$		
T_s	température statique en conduction pure	$T_s = T - \theta$		
$\boldsymbol{u}$	vecteur vitesse	$\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e_r} + u_\varphi \boldsymbol{e_\varphi} + u_z \boldsymbol{e_z}$	10^{-4} m.s^{-1}	
z	coordonnée axiale			
$\widetilde{\alpha}$	coefficient de dilatation thermique		10^{-5} K^{-1}	
α	angle d'inclinaison d'une onde			
δT	différence de température entre r_i et r_e en chauffage différentiel	$\delta T = T_s(r_i) - T_s(r_e)$		
ϵ	écart au seuil réduit	$\epsilon = \frac{Ra}{Ra_c} - 1$		
ζ	vorticité axiale	$\zeta = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e_z}$		
φ	angle d'azimut			
η	rapport des rayons	$\eta = \frac{r_i}{r_e}$	0,35	0,35 ou 0,4
θ	perturbation de température	$\theta = T - T_s$		
κ	diffusivité thermique	$\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 c}$	4 10^{-6} m^2.s^{-1}	
λ	conductivité thermique	$\lambda = \kappa \rho_0 c$	$\simeq 30$ W.m^{-1}.K^{-1}	
μ	viscosité dynamique	$\mu = \rho_0 \nu$		
ν	viscosité cinématique		10^{-6} m^2.s^{-1}	
ρ	masse volumique	$\rho = \rho_0 [1 - \widetilde{\alpha}(T - T_0)]$	$\simeq 10^4$ kg.m^{-3}	
ρ_0	masse volumique de référence			
σ	tenseur des contraintes de Reynolds	$\sigma_{ij} = \langle -u_i u_j \rangle_\varphi$		
τ_0	temps caractéristique de l'instabilité			
ψ	fonction courant quasi géostrophique	$u_r = r^{-1} \partial_\varphi \psi$, $u_\varphi = -\partial_r \psi$		
$\boldsymbol{\omega}$	vecteur vorticité	$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{u}$		
ω	fréquence angulaire			
ω_c	fréquence angulaire critique			
Ω	vitesse angulaire		7,27 10^{-5} rad.s^{-1}	
γ	décalage fréquentiel total	$\gamma = (c_0 - c_1) / (\tau_0 \omega_c)$		
$\tilde{\gamma}$	constante de gravitation	$\tilde{\gamma} = \lvert g \rvert / s$	1,54 10^{-6} s^{-2}	
∂	dérivée partielle	ex : $\partial_t = \partial / \partial_t$		
$\boldsymbol{\nabla}$	gradient			

Les valeurs de c, E, P, u, $\widetilde{\alpha}$, κ, λ, ν, ρ données dans le cas de la Terre sont très approximatives, et tirées pour la plupart de Nataf & Sommeria (2000).

Chapitre 2

Modèles de la thermoconvection dans un noyau planétaire

Nous allons présenter dans ce chapitre les équations modèles que nous allons simplifier grâce à la contrainte de Proudman-Taylor pour obtenir, après adimensionnement, nos modèles quasi géostrophiques bidimensionnels. Nous évoquerons également les conditions limites associées et la régularité de ces modèles.

2.1 Équations modèles tridimensionnelles

Dans ce qui suit, nous allons « jongler » entre deux systèmes de coordonnées (figure 1.1) :
- le système des ***coordonnées sphériques*** (s,ϑ,φ) qui est un choix judicieux étant donnée la géométrie de notre système,
- le système des ***coordonnées cylindriques*** (r,φ,z), choix judicieux au vu de la quasi invariance selon l'axe de rotation imposée par la contrainte de Proudman-Taylor (cf. plus loin).

L'***équation de Navier-Stokes*** s'écrit dans le référentiel tournant lié à la planète

$$\rho\left[\partial_t \boldsymbol{u} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla}\Pi + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \rho\left[\boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{s})\right] \ , \tag{2.1}$$

avec ρ la masse volumique du fluide, t le temps, $\boldsymbol{u}$ le vecteur ***vitesse***, Π la pression, μ la viscosité dynamique, $\boldsymbol{g}$ le champ de gravité et $\boldsymbol{s} = s\,\boldsymbol{e_s}$ le vecteur position. On suppose que le vecteur vitesse de rotation diurne $\boldsymbol{\Omega}$ de la planète est constant, i.e. on ne considère aucun mouvement de précession. On fait ainsi apparaître les deux forces d'inertie liées au mouvement de rotation de la planète : la force de ***Coriolis*** $-2\rho\ \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}$ et la force d'***inertie d'entraînement*** $-\rho\,\boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{s}) \ = \ \rho\,\Omega^2 r\boldsymbol{e_r}$, avec r la distance du point considéré à l'axe de rotation, $\boldsymbol{e_r}$ le vecteur de la base locale des coordonnées cylindriques (figure 1.1).

Il est important de connaître la loi d'évolution de l'accélération de la pesanteur $|\boldsymbol{g}|$ en fonction du rayon sphérique de cette planète auto-gravitante pour simplifier (2.1). En première approximation, la planète est considérée comme isodensité. Donc, selon les lois de la gravitation, la gravité dépend linéairement du rayon sphérique s,

$$\boxed{\boldsymbol{g} \ = \ -\tilde{\gamma} s\boldsymbol{e_s}} \ . \tag{2.2}$$

On sait que dans la Terre, $|\boldsymbol{g}| = 9{,}81\text{m.s}^{-2}$ quand $s = 6370$ km, donc

$$\tilde{\gamma} = 9{,}81/\left(6370\ 10^3\right) = 1{,}54\ 10^{-6}\ \text{s}^{-2} \gg \Omega^2 = \left(7{,}3\ 10^{-5}\right)^2 = 5{,}3\ 10^{-9}\ \text{s}^{-2} \ .$$

Ainsi, nous supposerons que la force d'inertie d'entraînement est négligeable devant la gravité.

L'une des ***approximations de Boussinesq*** consiste à ne prendre en compte les variations de densité que dans le terme de pesanteur qui correspond à la force d'Archimède. L'équation d'état adoptée est une équation simplifiée, puisque l'on tient compte des seules variations de densité dues à la température. Ainsi, on linéarise la masse volumique autour d'un état de référence de masse volumique uniforme ρ_0 et de température de référence T_0, ce qui correspond à un développement au premier ordre

$$\rho \;=\; \rho_0 \left[1 - \widetilde{\alpha}\,(T - T_0)\right] \;, \tag{2.3}$$

avec $\widetilde{\alpha}$ le coefficient de dilatation thermique du fluide. Le terme de gravité $\rho \boldsymbol{g}$ contient ainsi un terme principal $\rho_0 \boldsymbol{g}$ et le terme de poussée d'Archimède $-\widetilde{\alpha}\rho_0\,(T - T_0)\,\boldsymbol{g}$.

Avec les approximations de Boussinesq, on écrit finalement les équations de Navier-Stokes, d'***incompressibilité*** et de la ***chaleur*** sous la forme

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \;=\; -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\Pi + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u} \;, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) \;=\; 0 \;, \tag{2.5}$$

$$\partial_t T + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla}T \;=\; \frac{\lambda}{\rho_0 c}\Delta T + \frac{S}{\rho_0 c} \;, \tag{2.6}$$

avec T la température du fluide, $\nu = \mu/\rho_0$ la viscosité cinématique, λ la conductivité thermique, c la capacité calorifique massique, S le taux de production volumique de chaleur créée dans le noyau par ses éléments radioactifs. On peut introduire, pour alléger les calculs, la diffusivité thermique du fluide

$$\kappa \;=\; \frac{\lambda}{\rho_0 c} \;.$$

La configuration statique de ***conduction pure*** de ce système correspond à une solution $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $T = T_s(s)$ de (2.4), (2.5), et (2.6). Ainsi, la fonction $T_s(s)$ doit vérifier

$$\Delta T_s \;=\; -\frac{S}{\lambda} \;, \tag{2.7}$$

$$\text{soit, en coordonnées sphériques,} \qquad \frac{1}{s^2}\,\partial_s\left(s^2 \partial_s T_s(s)\right) \;=\; -\frac{S}{\lambda} \;,$$

$$\text{soit} \quad \boxed{T_s(s) \;=\; -\frac{S s^2}{6\lambda} + \frac{a}{s} + b} \;, \tag{2.8}$$

A et B étant les constantes d'intégration. En ***chauffage différentiel*** pur, on suppose $S = 0$, d'où les conditions limites

$$T_s(s = r_i) \;=\; T_i \;=\; b + \frac{a}{r_i} \quad \text{et} \quad T_s(s = r_e) \;=\; T_e \;=\; b + \frac{a}{r_e} \tag{2.9}$$

$$\text{qui donnent} \quad T_i - T_e \;=\; \delta T \;=\; a\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right) \;=\; a\frac{r_e - r_i}{r_e r_i} \;, \quad \text{soit} \quad a \;=\; \frac{r_e r_i \delta T}{d} \;.$$

De plus, la constante d'intégration b peut être supposée égale à la température constante de référence T_0[1]. Par analogie, on note la solution générale de (2.8) sous la forme

$$\boxed{T_s(s) \;=\; T_0 - \frac{S\ s^2}{6\lambda} + \frac{r_i r_e \delta T}{d s}} \;, \tag{2.10}$$

[1]La température de référence T_0 peut être prise égale à la température moyenne des frontières $(T_i + T_e)/2$.

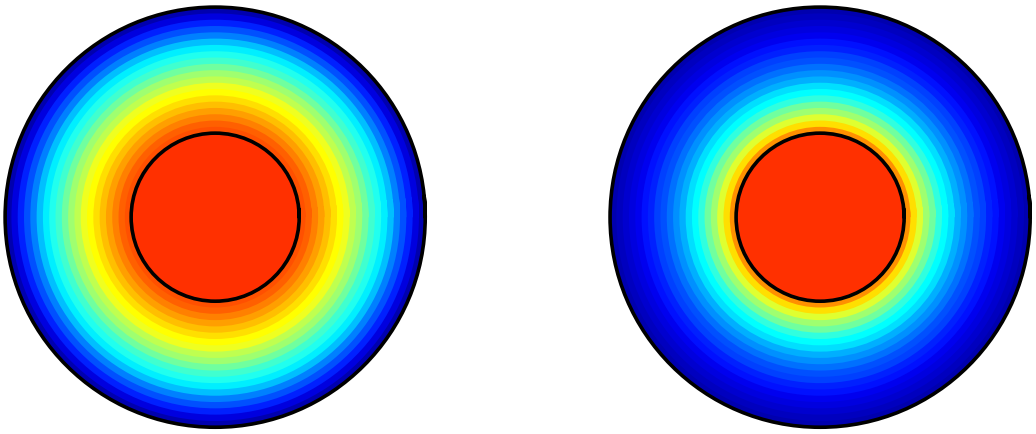


Fig. 2.1 – Niveaux de couleur de la température de la configuration de base en ***chauffage interne*** à gauche et ***différentiel*** à droite. En chauffage interne, la configuration de base $T_s \propto -s^2$ est plus « douce » qu'en chauffage différentiel où $T_s \propto s^{-1}$.

où il faut cependant signaler que δT n'est égal à $T_i - T_e$ que si $S = 0$. On ne considèrera dans ce qui suit que ce cas ou, au contraire, celui du ***chauffage interne*** pur, où $S > 0$, $\delta T = 0$. L'équation (2.10) est bien une forme dimensionnelle de l'équation donnée au début du paragraphe 2 de Simitev & Busse (2003)[2]. Par dérivation de (2.10), on obtient

$$\nabla T_s \;=\; -\left(\frac{Ss}{3\lambda} + \frac{r_i r_e \delta T}{d s^2}\right) \boldsymbol{e_s} \;, \tag{2.11}$$

qui montre que la température varie de façon plus douce en chauffage interne ($S > 0$, $\delta T = 0$) qu'en chauffage différentiel ($S = 0$, $\delta T > 0$) ; on verra à ce sujet la figure 2.1.

En présence de convection, on écrit que $T = T_s + \theta$, avec θ la ***perturbation de température***, et les équations de la dynamique deviennent

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \;=\; -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\Pi' + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\theta s \boldsymbol{e_s} - 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u} \;, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} \;=\; 0 \;, \tag{2.13}$$

$$\partial_t\theta + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta \;=\; \frac{\lambda}{\rho_0 c}\Delta\theta + \left(\frac{Ss}{3\lambda} + \frac{r_i r_e \delta T}{d s^2}\right)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_s} \;. \tag{2.14}$$

2.2 Équilibre géostrophique - Contrainte de Proudman-Taylor

Il faut être capable d'évaluer l'importance relative des différents termes de l'équation (2.12). En première approximation, on peut considérer que le système est en rotation rapide, c'est-à-dire que la force de Coriolis domine les forces d'inertie, les forces de viscosité, les forces d'Archimède et l'accélération, ce qui se traduit par :

$$\left|\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\right| \;\ll\; |\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}| \;,\qquad |\nu\Delta\boldsymbol{u}| \ll |\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}| \;,\qquad |\widetilde{\alpha}\boldsymbol{g}\theta| \ll |\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}| \;,\qquad \left|\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right| \ll |\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}| \tag{2.15}$$

On introduit pour quantifier cela trois nombres sans dimension : le nombre de ***Rossby*** *Ro* qui est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de Coriolis, le nombre d'***Ekman*** *E* qui est le rapport entre les forces visqueuses et les forces de Coriolis, et le nombre de ***Busse*** *Bu* qui est le rapport

[2] Ces auteurs notent $\beta = S/(3\lambda)$; observer aussi que $r_i r_e/d = \eta d/(1-\eta)^2$.

entre les forces d'Archimède et les forces de Coriolis :

$$\boxed{Ro = \frac{u}{\Omega d} \quad , \quad E = \frac{\nu}{\Omega d^2} \quad , \text{ et } \quad Bu = \frac{\widetilde{\alpha}\,|\boldsymbol{g}|\,\theta}{\Omega u}} \tag{2.16}$$

Si nous faisons une application à la Terre, en prenant pour grandeurs caractéristiques celles données par la nomenclature de la page 29, on trouve :

$$\boxed{Ro \simeq 10^{-6} \quad \text{et} \quad E \simeq 10^{-14}} \ .$$

Le calcul du nombre de Busse est plus délicat. On connait déjà mal le coefficient de dilatation thermique $\widetilde{\alpha} \sim 10^{-5}\mathrm{K}^{-1}$, selon Cardin (1992); Nataf & Sommeria (2000). On a alors $Bu \simeq 10^4\ \theta$, le nombre de Busse est petit si la perturbation en température est plus petite que 10^{-5}K, ce qui n'est à priori valable que très près du seuil de convection.

Nous verrons de surcroît que les ondes de Rossby thermiques ont des fréquences angulaires faibles au sens où

$$\omega \ \ll \ \Omega \ . \tag{2.17}$$

Il faut aussi noter que l'inégalité $|\nu\Delta\boldsymbol{u}| \ll |\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u}|$ est à priori valable seulement dans le cœur du fluide, et violée dans les couches limites près des parois. L'équation du mouvement dans le cœur du fluide devient alors en première approximation

$$2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_0}\,\boldsymbol{\nabla}\Pi' \ . \tag{2.18}$$

La force de Coriolis équilibre le gradient de pression : c'est l'***équilibre géostrophique***. Si on prend le rotationnel de l'équation d'équilibre géostrophique (2.18), on obtient :

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{e_z}\wedge\boldsymbol{u}) \ = \ -(\boldsymbol{e_z}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} \ = \ -\partial_z\boldsymbol{u} \ = \ 0 \tag{2.19}$$

compte tenu de l'incompressibilité supposée du fluide. C'est la ***contrainte de Proudman-Taylor*** : dans un écoulement géostrophique, le champ de vitesse est invariant dans la direction parallèle à l'axe de rotation. Cet équilibre est donc le principe sur lequel est fondé la bidimensionnalisation de l'écoulement.

2.3 Adimensionnement des équations

Nous ***adimensionnons*** les équations de la même manière que Simitev & Busse (2003), en utilisant pour unité de temps le temps caractéristique de diffusion visqueuse $\frac{d^2}{\nu}$, pour unité de longueur l'inter-rayon d, pour unité de température le quotient $\frac{\nu^2}{\widetilde{\gamma}\widetilde{\alpha}d^4}$, pour unité de pression le quotient $\Pi_0 = \frac{\rho_0\nu^2}{d^2}$. L'équation de Navier-Stokes (2.12) devient :

$$\partial'_t\boldsymbol{u'} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla'}}}\left(\boldsymbol{u'}\right)\cdot\boldsymbol{u'} + \frac{2}{E}\boldsymbol{e_z}\wedge\boldsymbol{u'} = -\boldsymbol{\nabla'}\Pi'' + \Delta'\boldsymbol{u'} + \theta' s'\boldsymbol{e_s} \ . \tag{2.20}$$

Par adimensionnement de l'équation de la chaleur (2.14), on obtient :

$$P\left(\partial_t'\theta' + \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla}'\,\theta'\right) = \left(Ra_i + Ra_d\frac{r_i' r_e'}{s'^3}\right)\boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{v}' + \Delta'\theta' \ , \tag{2.21}$$

avec $\boxed{Ra_i = \dfrac{\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}Sd^6}{3\lambda\kappa\nu}}$ ***le nombre de Rayleigh de chauffage interne*** , (2.22)

et $\boxed{Ra_d = \dfrac{\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\delta T d^4}{\kappa\nu}}$ ***le nombre de Rayleigh de chauffage différentiel.*** (2.23)

Les nombres de Rayleigh sont le rapport entre le forçage thermique et les dissipations dans le volume (visqueuse et thermique). On rappelle aussi que $P = \nu/\kappa$ est le nombre de Prandtl. Par abus de notation, nous omettrons maintenant les $'$ pour les variables adimensionnelles. D'autre part les rayons r_i et r_e correspondent dorénavant aux rayons adimensionnels. Le système est donc régi par les équations :

$$\begin{aligned}
\partial_t\boldsymbol{u} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u} + \frac{2}{E}\,\boldsymbol{e_z}\wedge\boldsymbol{u} &= -\boldsymbol{\nabla}\Pi + \Delta\boldsymbol{u} + \theta\boldsymbol{s} && (2.24)\\
\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u} &= 0 && (2.25)\\
P\left(\partial_t\theta + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\right) &= \Delta\theta + \left(Ra_i + Ra_d\frac{r_i r_e}{s^3}\right)\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u} && (2.26)
\end{aligned}$$

qui correspondent bien à l'équation (1) de Simitev & Busse (2003).

2.4 Modèle géostrophique

On cherche les écoulements géostrophiques vérifiant (2.19) qui peuvent prendre place dans une coquille sphérique à l'extérieur du cylindre tangent à la graine, i.e. pour $r > r_i$. On pose alors

$$\boldsymbol{u}(r,\varphi) \ = \ u_r(r,\varphi)\boldsymbol{e_r} + u_\varphi(r,\varphi)\boldsymbol{e_\varphi} + u_z(r,\varphi)\boldsymbol{e_z} \ = \ \boldsymbol{u_e}(r,\varphi) + \boldsymbol{u_z}(r,\varphi) \ , \tag{2.27}$$

où $\boldsymbol{u_e}$ et $\boldsymbol{u_z}$ désignent respectivement les vitesses équatoriale et axiale. En négligeant les effets de pompage d'Ekman dans les couches limites bordant le cœur (Greenspan, 1968), on doit vérifier au bord du cœur, en $z = \pm H$, la ***condition de non-pénétration***

$$\boldsymbol{u}\left(z = \pm H\right).\boldsymbol{n_{\pm H}} = 0, \tag{2.28}$$

avec $\boldsymbol{n_{\pm H}}$ la normale sortante et H la demi-hauteur d'une colonne de fluide. Comme $\boldsymbol{n_{\pm H}} = \frac{r\boldsymbol{e_r} \pm H\boldsymbol{e_z}}{r_e}$, il vient

$$ru_r\left(r,\varphi\right) \pm Hu_z\left(r,\varphi\right) = 0 \ , \tag{2.29}$$

d'où $u_r = u_z = 0$. Les seuls mouvements géostrophiques possibles sont donc des ***écoulements purement azimutaux***

$$\boldsymbol{u} \ = \ u_\varphi(r,\varphi)\boldsymbol{e_\varphi}.$$

Par ailleurs, l'équation de continuité s'écrit

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) \ = \ \frac{1}{r}\,\partial_\varphi u_\varphi \ = \ 0 \quad \text{soit} \quad \partial_\varphi u_\varphi \ = \ 0 \ .$$

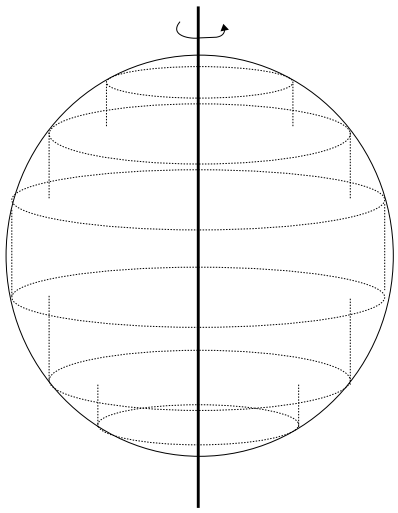


Fig. 2.2 – Cylindres géostrophiques dans lesquels on trouve des écoulements du type de (2.30).

Ainsi, les seuls mouvements géostrophiques permis sont des ***écoulements zonaux***

$$\boldsymbol{u} \;=\; u_\varphi(r)\;\boldsymbol{e_\varphi}\;. \tag{2.30}$$

Ces mouvements se créent le long de cylindres inclus dans la coquille, à un rayon $r > r_i$, appelés ***cylindres géostrophiques*** (figure 2.2). De tels mouvements ne sont possibles au sens strict qu'en condition de glissement sans frottement ou alors en rotation rapide, en dehors des couches limites.

Si on se place dans le cylindre tangent à la graine, i.e. pour $r < r_i$, on aboutit au même type de résultat par le même type de raisonnement. En condition d'adhérence aux parois, qui seront celles que nous allons utiliser, il est clair qu'aucun écoulement géostrophique n'est possible. On aura seulement la possibilité d'écoulements quasi géostrophique, dépendants peu de z en dehors de fines couches limites. Il est clair alors que les conditions limies aux parois en z =cste jouent un rôle de « frustration » par rapport à la condition d'invariance (2.19) qu'elles « brisent ». Les écoulements auront donc lieu de préférence dans une région la plus étendue possible dans la direction z (dans laquelle les parois sont les plus « loins » possibles), c'est-à-dire en dehors du cylindre tangent, et à rayon pas trop éloigné de r_i.

2.5 Modèles quasi géostrophiques bidimensionnels

Ainsi que nous l'avons dit, et comme nous le montre la figure 1.3, la convection pour un nombre d'Ekman petit a lieu pour $r > r_i$, c'est-à-dire en dehors du cylindre tangent, sous la forme de colonnes avec une faible dépendance axiale dans le cœur du fluide (en dehors des couches limites). Cette quasi-invariance des colonnes de convection suivant la direction z est une caractéristique robuste de l'écoulement quand le nombre d'Ekman E est petit. Cette invariance est relativement bien vérifiée expérimentalement par Carrigan & Busse (1983) : l'eau contenue dans une coquille sphérique en rotation présente des colonnes de convection orientées parallèlement à l'axe de rotation. Gillet & Jones (2006) ont validé les modèles quasi géostrophique en montrant sur leur figure 1 que dans les solutions tridimensionnelles obtenues par méthode asymptotique la vorticité axiale est quasi indépendante de z et la vitesse axiale quasi linéaire en z. Ceci suggère de développer un modèle dans lequel les mouvements horizontaux sont géostrophiques, et pas les mouvements verticaux. Ce modèle, appelé ***modèle quasi géostrophique***, développé par Busse (1970), donne un champ de vitesse de la forme suivante (dans le cœur du fluide) :

$$\boldsymbol{u}(r,\varphi,z) \;=\; u_r(r,\varphi)\boldsymbol{e_r} + u_\varphi(r,\varphi)\boldsymbol{e_\varphi} + u_z(r,\varphi,z)\boldsymbol{e_z} \;=\; \boldsymbol{u_e}(r,\varphi) + \boldsymbol{u_z}(r,\varphi,z)\;. \tag{2.31}$$

On peut vérifier la quasi-invariance de u_r et u_φ par rapport à z sur la figure 1.3 : la contrainte de Proudman-Taylor est de plus en plus opérante lorsque le nombre d'Ekman diminue. En même temps, on remarque également la localisation croissante de la convection.

2.5.1 Modèles de vitesse verticale

Nous allons considérer comme entre autres Schaeffer & Cardin (2005); Gillet & Jones (2006) une dépendance linéaire en z pour u_z. Inspiré par la condition de non pénétration du fluide (2.29), que nous rappelons ici

$$r u_r\left(r,\varphi\right) \pm H u_z\left(r,\varphi\right) = 0 \ , \tag{2.32}$$

il vient

$$u_z(r,\varphi,z) = -\frac{r\ z\ u_r(r,\varphi)}{H^2} \ . \tag{2.33}$$

L'équation locale de la conservation de la masse s'écrit

$$\begin{aligned} \text{div } \boldsymbol{u} \ &= \ \frac{1}{r}\partial_r\left(r u_r\right) + \frac{1}{r}\partial_\varphi u_\varphi \ - \ r u_r H^{-2} = \ 0 \ , \\ &\text{soit} \ \ \partial_r\left(r u_r\right) + \partial_\varphi u_\varphi \ = \ r^2 H^{-2} u_r \ . \end{aligned} \tag{2.34}$$

On peut donc introduire la fonction courant $\psi(r,\varphi)$ telle que (Schaeffer & Cardin, 2005)

$$u_r \ = \ \frac{1}{r}\ \partial_\varphi\psi \ \ , \ \ u_\varphi \ = \ -\ \partial_r\psi + r H^{-2}\psi \ . \tag{2.35}$$

En général, $r H^{-2}\psi \ll \partial_r\psi$ à cause de l'existence de petites échelles radiales. Nous avons utilisé nos modèles en incluant ou pas ce terme, et les résultats diffèrent très peu, comme Gillet & Jones (2006). Pour simplifier, nous présenterons plutôt dans ce qui suit un modèle sans ce terme, le champ de vitesse est donc donné par :

$$\boxed{u_r \ = \ \frac{1}{r}\ \partial_\varphi\psi \ \ , \ \ u_\varphi \ = \ -\ \partial_r\psi \ , \ \ u_z \ = \ -z H^{-2}\partial_\varphi\psi} \ . \tag{2.36}$$

On peut noter que le facteur H^{-2} diverge quand $r \to r_e^-$, c'est-à-dire au voisinage de l'équateur. Cette divergence sera cependant absorbée, dans notre modèle, par le fait que la fonction courant ψ s'annule au bord extérieur en $r = r_e$ (voir la section 2.6.2). Le champ de vorticité associé à ce champ de vitesse est

$$\boldsymbol{\omega} \ = \ \textbf{rot } \boldsymbol{u} \ = \ \left|\begin{array}{c} \omega_r \\ \omega_\varphi \\ \zeta \end{array}\right| \ = \ \left|\begin{array}{rcl} \frac{1}{r}\partial_\varphi u_z & - & \partial_z u_\varphi \\ \partial_z u_r & - & \partial_r u_z \\ \frac{1}{r}\partial_r\left(r u_\varphi\right) & - & \frac{1}{r}\partial_\varphi u_r \end{array}\right| \ = \ \left|\begin{array}{l} -\frac{z}{r H^2}\ \partial_\varphi^2\psi \\ z\ \partial_r\left(\frac{\partial_\varphi\psi}{H^2}\right) \\ -\Delta_e\psi \end{array}\right| \tag{2.37}$$

avec

$$\Delta_e \ = \ \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2 \tag{2.38}$$

le laplacien dans le plan équatorial et

$$\boxed{\zeta \ = \ -\Delta_e\psi} \tag{2.39}$$

la ***vorticité axiale***.

2.5.2 Modèle de perturbation en température

Comme Schaeffer & Cardin (2005); Gillet & Jones (2006), on considère une perturbation de vitesse quasi géostrophique et une perturbation en température z-invariante

$$\boxed{\theta \;=\; \theta(r,\varphi)} \;. \tag{2.40}$$

2.5.3 Équations des modèles quasi géostrophiques

• Équation de la vorticité

Afin d'éliminer le champ de pression de ce système, on prend le rotationnel de l'équation (2.24). D'après (2.36), (2.37) et (2.40), on obtient

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{u} - \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\omega} - 2E^{-1}\partial_z \boldsymbol{u} \;=\; \Delta\boldsymbol{\omega} + \frac{z}{r}\,\partial_\varphi\theta\;\boldsymbol{e_r} - z\partial_r\theta\;\boldsymbol{e_\varphi} - \partial_\varphi\theta\boldsymbol{e_z}\;.$$

soit, pour la composante z,

$$\partial_t\zeta + \boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\zeta - \omega_r\partial_r u_z - \frac{\omega_\varphi}{r}\,\partial_\varphi u_z - \left(\zeta + 2E^{-1}\right)\partial_z u_z \;= -\partial_\varphi\theta + \Delta_e\zeta\;,$$

avec

$$\boldsymbol{\nabla}_e \;=\; \boldsymbol{e_r}\partial_r + \boldsymbol{e_\varphi}\frac{\partial_\varphi}{r} \;=\; \boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{e_z}\partial_z \tag{2.41}$$

le gradient dans le plan équatorial.

D'après (2.37), $\quad \omega_r\;\partial_r u_z + \dfrac{\omega_\varphi}{r}\;\partial_\varphi u_z \;=\; (\partial_r u_z)\left(\dfrac{1}{r}\partial_\varphi u_z\right) + \dfrac{1}{r}\,(\partial_\varphi u_z)\,(-\partial_r u_z) \;=\; 0.$

Or, dans le régime faiblement non linéaire qui nous intéresse, la vorticité axiale est négligeable devant le nombre d'Ekman inverse : $\zeta \ll 2E^{-1}$. Ainsi, l'équation de la vorticité axiale se réduit à

$$\partial_t\zeta + \boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\zeta - 2E^{-1}\partial_z u_z \;=\; -\partial_\varphi\theta + \Delta_e\zeta. \tag{2.42}$$

D'après (2.33), on a donc

$$\boxed{\partial_t\zeta + \mathbf{u_e}.\nabla_e\zeta + 2rE^{-1}H^{-2}\;u_r = -\partial_\varphi\theta + \Delta_e\zeta} \tag{2.43}$$

On peut récrire cette équation en y introduisant la fonction courant ψ définie par (2.36) :

$$\partial_t\Delta_e\psi + \boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\Delta_e\psi \;=\; \frac{2E^{-1}}{H^2}\;\partial_\varphi\psi \;+\; \partial_\varphi\theta + \Delta_e\Delta_e\psi\;, \tag{2.44}$$

qui correspond, aux changements de variables près, à l'équation (32) de Cardin & Olson (1994) ou à la première équation du système (7) de Morin & Dormy (2004).

• Moyenne axiale de la composante azimutale de l'équation de Navier-Stokes

Pour éliminer le champ de pression Π de l'équation de Navier-Stokes (2.24), nous voulons résoudre l'équation de la vorticité au lieu de celle de Navier-Stokes. Mais il faut faire attention au fait que la coquille sphérique (3D) est simplement connexe alors que l'anneau (2D) ne l'est pas. L'équation de Navier-Stokes

$$\boldsymbol{S} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\Pi$$

est équivalente à

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{S} \;=\; \boldsymbol{0} \quad \text{et} \quad \oint_{\text{un tour}} S_\varphi \; r d\varphi \;=\; 0 \;,$$

cette dernière condition assurant l'existence d'un champ de pression, périodique en azimut (Plaut & Busse, 2002; Plaut, 2003). On doit donc rajouter à l'équation de la vorticité (2.44) l'équation ***intégrale*** :

$$\langle -\boldsymbol{\nabla}\Pi.\boldsymbol{e_\varphi} \rangle_\varphi \;=\; \left\langle \partial_t u_\varphi + \left[\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \right]_\varphi + 2E^{-1} u_r - \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e_\varphi} \right\rangle_\varphi \;=\; 0 \;, \tag{2.45}$$

avec

$$\langle f_\varphi(r,\varphi,z) \rangle_\varphi \;=\; \frac{1}{2\pi r} \oint f_\varphi(r,\varphi,z) r d\varphi \tag{2.46}$$

la moyenne sur un tour de la fonction choisie. Nous allons simplifier cette équation. Pour cela, il est pratique d'utiliser une récriture classique du terme non linéaire

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}\,(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \right]_\varphi \;=\; \left[\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) \right]_\varphi \;=\; \partial_r \left(u_\varphi u_r \right) + \frac{1}{r} \partial_\varphi \left(u_\varphi u_\varphi \right) + \partial_z \left(u_\varphi u_z \right) + \frac{2}{r} u_r u_\varphi$$

en modèle quasi géostrophique. Nous avons réalisé récemment que l'on pourrait facilement garder le troisième terme en l'estimant comme

$$\partial_z \left(u_\varphi u_z \right) \;=\; -r H^{-2} u_r u_\varphi \;, \tag{2.47}$$

mais faute de temps nous n'avons pas inclu ce terme dans nos modèles. Donc nous prendrons simplement

$$\left\langle \left[\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) \right]_\varphi \right\rangle_\varphi \;=\; -\partial_r \sigma_{r\varphi} - \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi}$$

avec $\sigma_{r\varphi}$ la ***contrainte de Reynolds***

$$\boxed{\sigma_{r\varphi} \;=\; -\left\langle u_r u_\varphi \right\rangle_\varphi} \;.$$

Le terme visqueux dans (2.45) s'écrit

$$\Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e_\varphi} \;=\; \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2}\, \partial_\varphi u_r - \frac{u_\varphi}{r^2} \;=\; \frac{1}{r}\, \partial_r \left(r\, \partial_r u_\varphi \right) + \frac{1}{r^2}\, \partial_\varphi^2 u_\varphi + \frac{2}{r^2}\, \partial_\varphi u_r - \frac{u_\varphi}{r^2}.$$

La vitesse azimutale moyennée sur un tour

$$\boxed{V \;=\; \langle u_\varphi \rangle_\varphi} \;,$$

définit l'***écoulement zonal***. L'équation moyennée (2.45) donne alors

$$\partial_t V - \partial_r \left(\sigma_{r\varphi} \right) - \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \left\langle 2E^{-1} u_r \right\rangle_\varphi - \frac{1}{r}\, \partial_r \left(r\, \partial_r V \right) + \frac{V}{r^2} \;=\; 0 \;. \tag{2.48}$$

Certains termes s'annulent du fait de la périodicité des composantes u_r, u_φ de la vitesse, de ses dérivées spatiales selon l'angle φ et de la fonction courant ψ sur un tour. À l'ordre dominant en E, pour la même raison que celle énoncée ci-dessus, le terme de Coriolis $2E^{-1}u_r$ est nul du fait de la structure quasi géostrophique du champ de vitesse :

$$\langle u_r \rangle_\varphi \;=\; \left\langle \frac{1}{r}\, \partial_\varphi \psi \right\rangle_\varphi \;=\; 0.$$

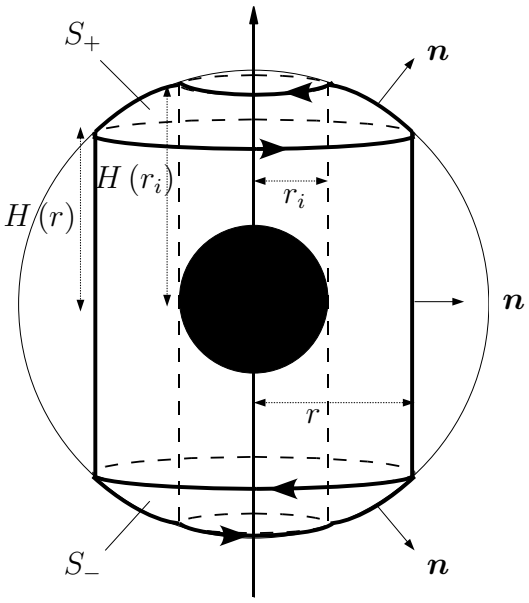


Fig. 2.3 – Dans le noyau liquide en gris foncé, volume de contrôle S, constitué de deux surfaces latérales « cylindriques » coaxiales et de deux calottes sphériques « trouées » supérieure S_+ et inférieure S_-. La surface latérale interne en $r = r_i$ touche la graine solide en noir et a pour hauteur $2H\,(r_i) = 2\sqrt{r_e^2 - r_i^2}$; la surface latérale externe a un rayon r a pour hauteur $H\,(r) = \sqrt{r_e^2 - r^2}$. Les vecteurs normaux sortants $\boldsymbol{n}$ sont indiqués, ainsi que les orientations directes de ∂S_+ et ∂S_-.

Au niveau des parois, les forces visqueuses reprennent de l'importance et génèrent une recirculation du fluide ou « ***pompage d'Ekman*** ». Ceci peut créer une contribution d'ordre $E^{-1/2}$ dans $\langle u_r \rangle_\varphi$ qui n'est pas toujours « négligeable » : l'un des premiers à noter l'importance des effets de pompage d'Ekman sur l'écoulement zonal est Soward (1977). Il faut se rappeler que nous traitons ici les mouvements zonaux, i.e. axisymétriques. Pour les mouvements présentant une composante radiale, la paroi convertissait cette composante en une composante verticale (2.28). Pour les mouvements zonaux, qui ne présentent pas de composante radiale, la paroi ne joue plus ce rôle. Elle va cependant freiner les mouvements zonaux par ce pompage d'Ekman. Nous cherchons donc à obtenir une équation pour la vitesse zonale $V = \langle u_\varphi \rangle_\varphi$ prenant en compte le frottement d'Ekman. Pour cela, nous suivons le raisonnement présenté par exemple dans la section 1.4.3 d'Aubert (2001)[3]. On part de l'incompressibilité, qui entraîne la nullité du flux :

$$\iint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{d^2 S} \;=\; 0 \;,$$

avec S la surface de contrôle formée du cylindre de rayon r et de hauteur $2H(r) = 2\sqrt{r_e^2 - r^2}$, du cylindre de rayon r_i et de hauteur $2H\,(r_i)$ et de deux calottes sphériques au niveau de la frontière extérieure, trouées, refermant l'espace entre les deux cylindres (figure 2.3). Considérant qu'il n'y a pas de convection à l'intérieur du cylindre tangent à la graine, on néglige la contribution de la surface située en $r = r_i$:

$$2\pi r 2H \,\langle u_r \rangle_\varphi \;+\; \iint_{S_+} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}\; d^2S + \iint_{S_-} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}\; d^2S \;=\; 0 \;, \tag{2.49}$$

Le vecteur unitaire $\boldsymbol{n} = (r/r_e)\,\boldsymbol{e_r} \pm (H/r_e)\,\boldsymbol{e_z}$ est la normale sortante à $S_\pm$. La vitesse $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$ est la vitesse normale à la paroi engendrée par le pompage d'Ekman, dont on connaît l'expression

[3]La présentation dans cette thèse est très concise, et contient même une petite coquille quand il est écrit page 47 que $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e_\varphi}$ est identiquement nul. Nous avons donc jugé utile de détailler ce calcul.

(Greenspan 1968) :

$$[\boldsymbol{n.u}]_{\pm H} \;=\; -\frac{\sqrt{E}}{2}\boldsymbol{n.\nabla}\wedge\left[\frac{\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u}+\mathrm{sg}\,(\boldsymbol{n.e_z})\;\boldsymbol{u}}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}\right]\;,$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\iint_{S_\pm}\boldsymbol{n.u}\;dS &= -\frac{\sqrt{E}}{2}\left[\iint_{S_+}\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u}}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}\right)\cdot\boldsymbol{dS}-\iint_{S_-}\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u}}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}\right)\cdot\boldsymbol{dS}\right]\\ &= -\frac{\sqrt{E}}{2}\left[\int_{\partial S_+}\frac{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{dl}}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}-\int_{\partial S_-}\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{dl}}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}\right]\end{aligned}$$

par la formule de Stokes, avec $\boldsymbol{dl} = rd\varphi\;\boldsymbol{e_\varphi}$ l'élément de longueur le long de ∂S_+ et ∂S_- et $(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e_\varphi} = n_z u_r - n_r u_z$.

Les termes en $n_r u_z$ se compensent entre S_+ et S_-. Le terme en $n_z\langle u_r\rangle_\varphi = \mathcal{O}\left(\sqrt{E}\right)$ est négligeable en regardant la définition de la fonction courant ψ. Ainsi

$$\begin{aligned}\iint_{S_\pm}\boldsymbol{n.u}\;dS &= -\frac{\sqrt{E}}{2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{u_\varphi}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}\,rd\varphi-\int_{2\pi}^{0}\frac{u_\varphi}{\sqrt{|\boldsymbol{n.e_z}|}}\,rd\varphi\right]\\ &= -\sqrt{E}\;2\pi r\frac{\langle u_\varphi\rangle_\varphi}{(H/r_e)^{1/2}}\quad(\textbf{??}).\end{aligned}$$

Au bilan, d'après l'équation (2.49), on obtient

$$\langle u_r\rangle_\varphi \;=\; \frac{1}{2}E^{1/2}r_e^{1/2}H^{-3/2}\langle u_\varphi\rangle_\varphi$$

La moyenne de l'équation (2.48) par rapport à z nous donne, en utilisant l'équation ci-dessus, les autres termes étant indépendant de z, l'équation de Navier-Stokes moyennée selon z et φ

$$\boxed{\partial_t V \;=\; \partial_r\left(\sigma_{r\varphi}\right)+\;\frac{2\sigma_{r\varphi}}{r}+\frac{1}{r}\;\partial_r\left(r\;\partial_r V\right)-\frac{V}{r^2}-f_E V}\;, \tag{2.50}$$

$$\text{avec}\qquad f_E \;=\; E^{-1/2}r_e^{1/2}H^{-3/2}\;. \tag{2.51}$$

Le pompage d'Ekman résulte donc en un ***frottement d'Ekman*** (correspondant au terme $-f_E V$). En tenant compte du pompage d'Ekman, notre modèle est original par rapport à Cole (2004); Morin & Dormy (2004). Ce modèle ressemble à celui de Morin & Dormy (2006)[4]. Remarquons que le terme dissipatif de pompage d'Ekman affecte de façon égale toutes les échelles et que son amplitude n'est contrôlée que par le nombre d'Ekman et l'amplitude de la vitesse.

• Équation de la chaleur

La démarche pour obtenir l'équation de température de notre modèle quasi géostrophique diffère de celle de Aubert *et al.* (2003); Gillet & Jones (2006) dans le cas du chauffage différentiel. Nous ne calculons pas T_s à partir de l'équation de la chaleur considérée en 2 dimensions, i.e. $\Delta_{2D}T_{s2D} = 0$, mais travaillons sur l'équation de l'évolution de la perturbation de température θ écrite en $3D$ après résolution de $\Delta_{3D}T_{s3D} = 0$. Ceci permet de s'affranchir des opérations d'ajustement entre T_{s2D} et

[4]Une petite coquille se trouve dans le terme de pompage d'Ekman dans leur équation (1.c) : ce terme est trop petit d'un facteur $\sqrt{2}$.

T_{s3D} dépendant de l'inter-rayon, présentées dans le paragraphe 15 de Aubert *et al.* (2003) ou la section 3.4 de Gillet *et al.* (2007*a*). L'équation de la chaleur (2.26) s'écrit :

$$P\left(\partial_t\theta + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla}\theta\right) \;=\; \Delta\theta + \left(Ra_i + Ra_d\frac{r_i r_e}{s^3}\right)\boldsymbol{s}.\boldsymbol{u}\;.$$

Nous allons d'abord calculer la moyenne axiale de chaque terme en utilisant

$$\langle\;\rangle_z \;=\; \frac{1}{2H}\int_{-H}^{H} dz\;,\quad \text{avec}\quad H \;=\; \sqrt{r_e^2 - r^2}\;. \tag{2.52}$$

On obtient, compte tenu de (2.36) et (2.40)

$$\begin{aligned}\langle\partial_t\theta\rangle_z \;&=\; \partial_t\theta\;,\quad \langle\Delta\theta\rangle_z \;=\; \Delta\theta\;,\quad \langle\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla}\theta\rangle_z \;=\; \left(\boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\right)\theta\\ \langle\boldsymbol{s}.\boldsymbol{u}\rangle_z \;&=\; \langle r\;u_r + z\;u_z\rangle_z \;=\; r\;u_r + \frac{1}{2H}\int_{-H}^{H} z\;u_z\;dz \;=\; \frac{2}{3}\;r\;u_r\;.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\boldsymbol{s}.\boldsymbol{u}}{s^3}\right\rangle_z \;&=\; \left\langle\frac{r\;u_r + z\;u_z}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\rangle_z \;=\; r\;u_r\left\langle\frac{1}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\rangle_z - rH^{-2}u_r\left\langle\frac{z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\rangle_z\\ &=\; \frac{r\;u_r}{2H}\int_{-H}^{H}\frac{1}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz - \frac{ru_r}{2H^3}\int_{-H}^{H}\frac{z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz\\ &=\; \frac{ru_r}{2H}\frac{2H}{r_e r^2} - \frac{ru_r}{2H^3}\left(-\frac{2H}{r_e} + \ln\left(\frac{r_e+H}{r_e-H}\right)\right) \;=\; u_r\left(\frac{r_e}{rH^2} - \frac{r}{2H^3}\ln\left(\frac{r_e+H}{r_e-H}\right)\right)\;.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Or,

$$\ln\left(\frac{r_e+H}{r_e-H}\right) \;=\; \ln\left(\frac{\left(r_e+H\right)^2}{r_e^2-H^2}\right) \;=\; 2\ln\left(\frac{r_e+H}{r}\right)\;.$$

D'où

$$\left\langle\frac{\boldsymbol{s}.\boldsymbol{u}}{s^3}\right\rangle_z \;=\; \frac{u_r}{rH^3}\left(r_eH - r^2\ln\left(\frac{r_e+H}{r}\right)\right)\;.$$

On trouve finalement :

$$P\left[\partial_t\theta + \left(\boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\right)\theta\right] \;=\; \Delta\theta + \frac{2}{3}\;Ra_i r u_r + Ra_d\frac{r_i r_e u_r}{rH^3}\left(r_eH - r^2\;\ln\left(\frac{H+r_e}{r}\right)\right) \tag{2.55}$$

L'équation (2.55) devient, en y introduisant ψ définie par (2.36),

$$\boxed{P\left[\partial_t\theta + \left(\boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\right)\theta\right] \;=\; \Delta\theta + Ra_i\;q_i(r)\;\partial_\varphi\psi + Ra_d\;q_d(r)\;\partial_\varphi\psi} \tag{2.56}$$

avec

$$q_i(r) = \frac{2}{3}\quad\text{et}\quad q_d(r) = \frac{r_i r_e}{r^2H^3}\left(r_eH - r^2\;\ln\left(\frac{H+r_e}{r}\right)\right)\;. \tag{2.57}$$

La fonction $q_d(r)$ est représentée sur la figure 2.4. La forte décroissance de $q_d(r)$ traduit le fait que la convection est plus efficace près de la graine.

Si on néglige la vitesse verticale dans l'équation (2.53), $\langle\boldsymbol{s}.\boldsymbol{u}\rangle_z \;=\; r\;u_r$, ainsi que dans (2.54) $\left\langle\frac{\boldsymbol{s}.\boldsymbol{u}}{s^3}\right\rangle_z \;=\; u_r/\left(rr_e\right)$, et on obtient l'équation :

$$P\left[\partial_t\theta + \left(\boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e\right)\theta\right] \;=\; \Delta\theta + \;Ra_i r u_r + Ra_d\frac{u_r}{rr_e} \tag{2.58}$$

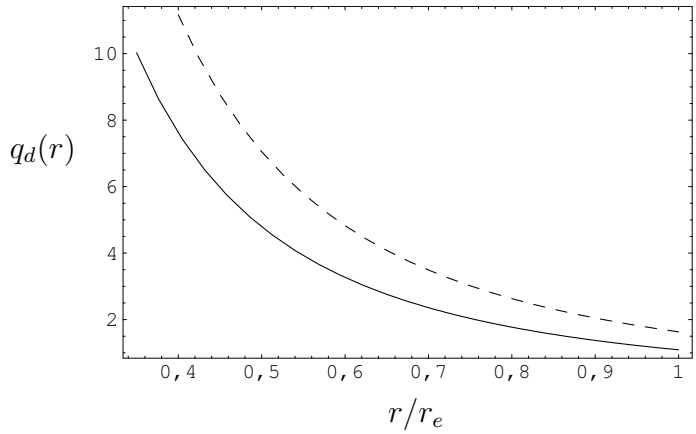


Fig. 2.4 – Profil du facteur $q_d(r)$ du terme de convection dans l'équation de la chaleur (2.56) en ***chauffage différentiel*** pour $\eta = 0{,}35$ (trait continu) et $\eta = 0{,}4$ (trait pointillé).

où le « 2/3 » disparaît. Si on considère de surcroît un modèle de chauffage purement interne (i.e. $Ra_d = 0$), on retrouve, aux changements de variables près, la seconde équation du système (7) de Morin & Dormy (2004) ou l'équation $(1a)$ de Morin & Dormy (2006) :

$$P\left[\partial_t\theta + (\boldsymbol{u_e}.\boldsymbol{\nabla}_e)\,\theta\right] \;=\; \Delta\theta + \;Ra_i r u_r \;. \tag{2.59}$$

Notre modèle est similaire à ceux développés par Aubert *et al.* (2003); Cole (2004); Gillet & Jones (2006); Gillet *et al.* (2007*a*,*b*), mais diffère de celui de Morin & Dormy (2004) par la prise en compte de la vitesse verticale dans l'équation de la chaleur. Cole (2004); Morin & Dormy (2004, 2006) ne considèrent que le chauffage interne, alors que Aubert *et al.* (2003); Gillet & Jones (2006); Gillet *et al.* (2007*a*,*b*) considèrent seulement le chauffage différentiel.

2.6 Conditions limites

2.6.1 Conditions limites pour la perturbation en température

Pour la perturbation en température, nous choisissons, en cohérence avec les choix effectués dans les modèles tridimensionnels (Simitev & Busse, 2003), des conditions limites ***isothermes***

$$\boxed{\theta(r = r_i) \;=\; \theta(r = r_e) \;=\; 0} \;. \tag{2.60}$$

2.6.2 Conditions limites pour la fonction courant

Il existe de nombreux modèles en conditions limites de glissement sans frottement (« bords libres ») (Simitev & Busse, 2003; Tilgner & Busse, 1997). Nous avons choisi des conditions limites d'***adhérence*** pour la vitesse, qui sont plus réalistes pour les noyaux de planètes telluriques[5]. Ce type de condition limite entraîne le développement des couches d'Ekman dans les modèles tridimensionnels pouvant contrôler le fluide loin des parois. La résolution numérique de telles couches est très coûteuse en terme de résolution et temps de calcul. L'avantage des conditions limites d'adhérence est que l'écoulement moyen (qui sera défini au chapitre 4) est complètement déterminé par les équations de Navier-Stokes, alors qu'en conditions de bords libres, il n'est défini, pour une onde pure, qu'à une rotation rigide près. Une autre équation est nécessaire pour le déterminer complètement (typiquement la conservation du moment cinétique). Pour nos modèles quasi géostrophiques

[5]Pour des planètes gazeuses comme Jupiter, des conditions de bords libres à l'extérieur sont pertinentes.

bidimensionnels, les conditions limites d'adhérence s'écrivent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \mathbf{0}\,, \\ \text{soit} \quad u_r &= -\frac{1}{r}\,\partial_\varphi\psi = 0 \quad \text{et} \quad u_\varphi = -\partial_r\psi = 0 \end{aligned}$$

On peut donc écrire, pour tout mode de vitesse de nombre d'onde azimutal non nul, les conditions limites sous la forme

$$\boxed{\psi(r=r_i) = \psi(r=r_e) = \partial_r\psi(r=r_i) = \partial_r\psi(r=r_e) = 0} \tag{2.61}$$

Pour ce qui est du mode de nombre d'onde nul, il se réduit à l'écoulement zonal V, qui doit donc vérifier

$$\boxed{V(r=r_i) = V(r=r_e) = 0}\,. \tag{2.62}$$

Nous avons également développé d'autres modèles où on a considéré des conditions limites de glissement sans frottement au bord intérieur : la composante normale de la vitesse s'annule à la paroi ainsi que

$$\frac{1}{2}\left[\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\boldsymbol{u}\right)_{r\varphi} + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\boldsymbol{u}\right)_{\varphi r}\right]\,.$$

Ce choix se comprend en regardant l'écoulement zonal moyenné axiallement provenant des calculs 3D de Simitev : il est non nul au niveau de la graine. Pour des raisons de concision, nous avons choisi de ne pas présenter les résultats de ces modèles, sachant qu'ils donnent au final des résultats assez proches des modèles en condition d'adhérence.

Au final, nous avons un modèle similaire à Cole (2004) pour notre modèle en chauffage interne, excepté pour le choix des conditions limites (bords libres chez Cole, adhérence chez nous) et le fait qu'il ne tienne pas compte du pompage d'Ekman sur l'onde primaire[6] et sur l'écoulement moyen. Le modèle en chauffage interne de Morin & Dormy (2004) considère de plus des conditions limites d'adhérence, et Morin & Dormy (2006) inclurent le pompage d'Ekman sur l'écoulement moyen de vitesse.

2.7 Régularité du modèle

Dans les équations (2.44), (2.50), et (2.56), on remarque que certains facteurs divergent lorsque $r \to r_e^-$ et donc $H \to 0^+$. Ces facteurs se trouvent dans les termes suivants :

- le terme de Coriolis dans (2.44) en $H^{-2}\psi$,
- le terme de pompage d'Ekman dans (2.50) en $H^{-3/2}V$,
- le terme de convection en $q_d\psi$ dans (2.56) qui possède deux termes dangereux, l'un en $H^{-2}\psi$ et l'autre en $H^{-3}\ln\left[\left(H+r_e\right)/r\right]\psi$.

Un développement limité de $H(r)$ nous donne cependant :

$$H(r) = \left(r_e^2 - r^2\right)^{1/2} = (r_e+r)^{1/2}\,(r_e-r)^{1/2} \sim (2r_e)^{1/2}\,(r_e-r)^{1/2} \tag{2.63}$$

quand $r \to r_e^-$. Celui de ψ et V grâce aux conditions limites (2.61), (2.62), s'écrit :

$$\psi(r) \sim 1/2\,(r-r_e)^2\;\psi''(r_e) \tag{2.64}$$

$$V(r) \sim (r-r_e)\;V'(r_e) \tag{2.65}$$

[6] Nous tenons compte des effets de pompage d'Ekman sur l'onde primaire dans l'article en fin de mémoire.

quand $r \to r_e^-$. On obtient donc, quand $r \to r_e^-$, les développements suivants des termes dangereux recensés plus haut :

$$\begin{aligned} H^{-2}(r)\ \psi(r) &\sim (2r_e)^{-1}\ (r_e - r)^{-1}\ 1/2\,(r - r_e)^2\ \psi''(r_e) \\ &\sim 4^{-1} r_e^{-1} \psi''(r_e)\,(r_e - r)\ , \qquad (2.66) \\ H^{-3} \ln\left[(H + r_e)/r\right] \psi(r) &\sim (2r_e)^{-3/2}\,(r_e - r)^{-3/2}\ 2^{1/2}\,(1 - r/r_e)^{1/2}\ 1/2\,(r - r_e)^2\ \psi''(r_e) \\ &\sim 4^{-1}\,(r_e)^{-3/2}\,(r_e - r)^{-3/2}\,(1 - r/r_e)^{1/2}\ (r - r_e)^2\ \psi''(r_e) \\ &\sim 4^{-1} r_e^{-2} \psi''(r_e)\,(r_e - r)\ , \qquad (2.67) \\ H^{-3/2} V(r) &\sim (2r_e)^{-3/4}\ (r_e - r)^{-3/4}\ (r - r_e)\ V'(r_e) \\ &\sim -\,(2r_e)^{-3/4}\ (r_e - r)^{1/4}\ V'(r_e)\ . \qquad (2.68) \end{aligned}$$

Tous ces termes tendent donc vers 0 quand $r \to r_e^-$: le modèle utilisé est donc régulier.

Chapitre 3

Analyse linéaire

3.1 Principes de l'analyse linéaire

Nous présentons ici l'analyse linéaire des deux modèles quasi géostrophiques, en chauffage interne et différentiel introduits au chapitre 2, ainsi qu'une comparaison systématique à de nouveaux résultats 3D du code de thermoconvection de Simitev & Busse (2003).

On fait une analyse linéaire de stabilité ***numérique*** à E fini, sans chercher à utiliser une théorie locale (Busse, 1970). On développe donc un calcul ***global*** prenant en compte les dépendances radiales ($r \in [r_i,r_o]$) des coefficients de nos équations modèles (2.43) et (2.56). La perturbation est supposée étendue dans tout le système : l'instabilité apparait simultanément dans tout l'écoulement. On étudie uniquement l'évolution ***temporelle*** d'une perturbation infinitésimale (i.e. avec un nombre d'onde réel), qui peut simuler, par exemple, le bruit inhérent aux situations réelles. Si cette perturbation s'amplifie asymptotiquement dans le temps, la solution de conduction est dite ***instable***, dans le cas contraire, elle est dite ***stable***. Dans le cas particulier où elle n'est ni amplifiée, ni atténuée, on parle alors de ***stabilité marginale***. L'analyse linéaire qui correspond à l'étude de l'évolution d'une perturbation infinitésimale donne une ***condition nécessaire d'instabilité***, l'état étudié est ***linéairement stable*** ou ***instable***. En effet, même si cet état peut être stable vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale, il ne l'est peut-être pas vis-à-vis d'une perturbation d'amplitude finie. Pour répondre à cette question, il faudrait mener une analyse non linéaire. Néanmoins, cette approche temporelle de stabilité est utile pour déterminer les modes les plus déstabilisants ainsi que les conditions critiques de leur émergence : en effet, cette analyse linéaire permet d'obtenir le seuil d'apparition de l'instabilité primaire, à savoir un motif spatio-temporel de type onde.

Nous considérons des modes normaux ayant une dépendance en $\exp(im\varphi)$ étant donné la symétrie de rotation du problème. En supposant de surcroît que la dépendance en temps est simple, en $\exp(\sigma t)$, donc $\partial_t = \sigma$, les équations de la dynamique du système (2.44) et (2.56) peuvent se mettre sous la forme d'équations différentielles ordinaires formant le ***problème aux valeurs propres***

généralisé

$$\sigma D \cdot \boldsymbol{V_1} = L_R \cdot \boldsymbol{V_1} \tag{3.1}$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur d'état} \ , \tag{3.2}$$

$$\text{avec} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1(r) \exp(im\varphi + \sigma t) \\ \Theta_1(r) \exp(im\varphi + \sigma t) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$D \cdot \boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} -\Delta\psi_1 \\ P\ \theta_1 \end{pmatrix} , \tag{3.4}$$

$$L_R \cdot \boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} -\left(2H^{-2}E^{-1}\ \partial_\varphi\ \psi_1 \ + \ \partial_\varphi\ \theta_1 \ + \ \Delta\Delta\ \psi_1\right) \\ \Delta\theta_1 + \ Ra_i q_i \partial_\varphi \psi_1 + Ra_d\ q_d\ \partial_\varphi \psi_1 \end{pmatrix} . \tag{3.5}$$

On rappelle que l'on considèrera seulement deux cas : le chauffage interne, où le paramètre de contrôle principal est $Ra = Ra_i$ (tandis que $Ra_d = 0$), ou au contraire le chauffage différentiel, où le paramêtre de contrôle principal est $Ra = Ra_d$ (tandis que $Ra_i = 0$). En conséquence les valeurs propres sont de la forme $\sigma = \sigma\,(m,Ra) = \sigma_r - i\omega$, σ_r étant le taux de (dé)croissance qui est nul au seuil et ω la fréquence angulaire. Les phénomènes convectifs dans une sphère en rotation ne sont pas observés lorsque la quantité de chaleur apportée au fluide n'est pas suffisante, i.e. pour des faibles valeurs de Ra. Le fluide est effectivement capable d'évacuer la chaleur qui lui est fournie par diffusion thermique. Une instabilité convective apparaît lorsque le transport de chaleur par diffusion seule n'est plus suffisant. Ceci arrive quand la chaleur apportée dépasse un certain seuil. Étant donné le paramètre de contrôle Ra, on peut déterminer la courbe marginale ou courbe neutre $Ra_0(m)$ correspondant à un taux de croissance nul, au-delà de laquelle le mode de nombre d'onde m est amplifié. Autrement dit, $Ra_0(m)$ est la plus petite valeur de Ra pour laquelle le taux de croissance est positif strictement : $\sigma_r(m,Ra) > 0$. On a alors

$$\sigma\,(m,Ra_0(m)) = -i\omega_0(m).$$

On définit le paramètre de contrôle critique Ra_c par la plus petite valeur de $Ra_0(m)$. On détermine ainsi le ***nombre d'onde critique*** m_c et la ***fréquence angulaire critique*** $\omega_c = \omega_0(m_c)$ de l'***onde critique***, associés à ce nombre de Rayleigh critique $Ra_c = Ra_0(m_c)$. Le seuil est donc mesuré respectivement par le ***nombre de Rayleigh interne critique*** Ra_{ic} en chauffage interne et par le ***nombre de Rayleigh différentiel critique*** Ra_{dc} en chauffage différentiel.

On effectue ensuite un développement limité de la valeur propre σ au voisinage du seuil de l'instabilité

$$\sigma \ = \ -i\omega_c + \frac{1 + ic_0}{\tau_0}\ \epsilon + O\left(\epsilon^2\right) \tag{3.6}$$

avec $\epsilon = Ra/Ra_c - 1$ l'écart au seuil réduit, τ_0 le temps caractéristique de l'instabilité et c_0 un coefficient de décalage fréquentiel linéaire. Les résultats sur les coefficients τ_0 et c_0 sont reportés dans le chapitre suivant.

L'onde de Rossby thermique critique brise l'invariance par rotation de l'écoulement de base, puisqu'il lui correspond physiquement des champs de vitesse et de perturbation de température de la forme

$$\begin{array}{rclcrcl} \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{v} & = & A\ \boldsymbol{v_1} \ + \ c.c. & \text{avec} & \boldsymbol{v_1} = r^{-1}\left(\partial_\varphi \psi_1\right) \boldsymbol{e_r} - \left(\partial_r \psi_1\right) \boldsymbol{e_\varphi} \\ & & & & & \text{et} & \psi_1 = \Psi_1(r)\ \exp\left[i\left(m_c\varphi - \omega_c t\right)\right] \\ \theta & = & T - T_s & = & A\ \theta_1 \ + \ c.c. & \text{avec} & \theta_1 = \Theta_1(r)\ \exp\left[i\left(m_c\varphi - \omega_c t\right)\right] \end{array} \tag{3.7}$$

avec A l'amplitude de l'onde.

Les théories asymptotiques locales permettent de déterminer les lois d'échelle des paramètres critiques dans la limite $E \to 0$, et peuvent être utiles pour estimer les paramètres critiques à E fini. C'est pour cette raison que nous allons les présenter dès maintenant. Il faut cependant noter que, dans le cas tridimensionnel, il n'y a pas de théorie analytique générale. La nécessité de calculs numériques, même en étude asymptotique, motive l'usage des modèles bidimensionnels qui peuvent être résolus à moindre coût.

3.2 Théories asymptotiques

3.2.1 Théories asymptotiques locales

Lois de Busse (1970)

L'étude analytique locale au seuil dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman a été réalisée par Busse (1970) dans le cas du chauffage interne. Busse a obtenu les lois suivantes :

$$\boxed{m_c \sim M_c\ E^{-1/3}\ ,\ Ra_{ic} \sim R_{ic}\ E^{-4/3}\ ,\ \omega_c \sim \Omega_c\ E^{-2/3}}\ . \tag{3.8}$$

Les résultats peuvent s'interpréter ainsi. Le nombre de Rayleigh critique doit augmenter avec le nombre d'Ekman inverse. En effet, la force de Coriolis devenant de plus en plus importante, tend à rendre l'écoulement $2D$. Les conditions limites étant $3D$, une frustration apparaît et il faut davantage d'énergie pour briser la contrainte géostrophique. Le nombre d'onde critique doit également augmenter avec le nombre d'Ekman inverse : il faut effectivement plus de rouleaux, donc des gradients plus forts pour évacuer l'énergie. Enfin, la vitesse de rotation croissante conjuguée à cette augmentation des gradients induit des fréquences angulaires plus importantes. Ces lois d'échelle déduites de la théorie locale de Busse (1970), sont aussi valables en théorie globale, mais avec des préfacteurs différents (Jones *et al.*, 2000; Dormy *et al.*, 2004).

Théories locales en modèles bidimensionnels quasi géostrophique

Nous allons redémontrer les lois asymptotiques (3.8) avec des modèles quasi géostrophiques bidimensionnels en chauffage interne et donner l'équivalent en chauffage différentiel, ce qui est à notre connaissance nouveau. Nous utilisons des notations similaires à celles de Dormy *et al.* (2004) : nous fixons r dans les facteurs géométriques des équations (3.1) et nous appliquons à la fonction courant et à la perturbation en température une mise à l'échelle selon les lois de Busse

$$\begin{array}{rclcrcl} \partial_t & = & -i\omega & \text{avec} & \omega & = & E^{-2/3}\Omega\ , \\ \partial_\varphi & = & im & \text{avec} & m & = & E^{-1/3}M\ , \\ \partial_r & = & ik & \text{avec} & k & = & E^{-1/3}K\ . \end{array} \tag{3.9}$$

On peut écrire l'équation de la chaleur de (3.1) sous la forme

$$P\partial_t\Theta_1 \quad = \quad \Delta\Theta_1 + Ra\ q(r)\ \partial_\varphi\Psi_1 \tag{3.10}$$

avec $(Ra,q) = (Ra_i,q_i)$ ou (Ra_d,q_d) selon que l'on étudie le chauffage interne ou le chauffage différentiel (voir l'équation (2.57)). Le laplacien devient

$$\Delta \quad = \quad \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2 \ = \ -k^2 + r^{-1}ik - r^{-2}m^2 \ = \ -E^{-2/3}a^2 + t.o.s. \tag{3.11}$$

$$\text{avec}\ \ a^2 \quad = \quad K^2 + M^2/r^2 \tag{3.12}$$

où les termes d'ordre supérieur seront négligés dans cette analyse asymptotique. Enfin, le nombre de Rayleigh s'écrit

$$Ra = E^{-4/3}R \tag{3.13}$$

L'équation (3.10) nous donne

$$-iPE^{-2/3}\Omega\Theta_1 \;=\; -E^{-2/3}a^2\Theta_1 \;+\; E^{-4/3}Rq(r)iE^{-1/3}M\Psi_1 \;+\; t.o.s.\,, \tag{3.14}$$

où tous les termes explicités sont du même ordre si

$$\Psi_1 \;=\; E\Psi \quad \text{avec} \quad \Psi = \mathcal{O}(1)\,. \tag{3.15}$$

Cette échelle incluse dans l'équation (3.14) nous donne

$$\Theta_1 \;=\; Rq(r)iM\Psi/\left(a^2 - iP\Omega\right)\;, \tag{3.16}$$

qui est analogue à la relation (3.10*a*) de Dormy *et al.* (2004). De la relation (3.11) et de la loi d'échelle sur Ψ, nous obtenons pour la vorticité axiale

$$\zeta \;=\; E^{1/3}a^2\Psi \;+\; t.o.s.\,.$$

L'équation de la vorticité (3.1) devient

$$-iE^{-2/3}\Omega E^{1/3}a^2\Psi \;+\; 2E^{-1}H^{-2}iE^{-1/3}ME\Psi \;=\; -E^{-2/3}a^2E^{1/3}a^2\Psi \;-\; iE^{-1/3}M\Theta_1 \;+\; t.o.s.$$

En égalisant les termes dominants d'ordre $E^{-1/3}$ et en faisant usage de (3.16), on obtient

$$-ia^2\Omega \;+\; 2H^{-2}iM \;=\; -a^4 \;+\; Rq(r)M^2/\left(a^2 - iP\Omega\right)\;.$$

En multipliant par $\left(a^2 - iP\Omega\right)$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires pour des ***ondes neutres***, de sorte que Ω soit réelle, nous obtenons la ***relation de dispersion*** (provenant de la partie imaginaire de l'équation)

$$\Omega \;=\; \Omega_0\,(r,K,M) \;=\; 2M/\left[(1+P)\,a^2H^2\right] \;>\; 0 \tag{3.17}$$

et le ***nombre de Rayleigh marginal*** (provenant de la partie réelle de l'équation)

$$R \;=\; R_0\,(r,K,M) \;=\; [q(r)]^{-1}\left[a^6/M^2 \;+\; 4p^2/\left(a^2L^4\right)\right] \tag{3.18}$$

avec

$$p = P/\,(1+P)\;. \tag{3.19}$$

On peut remarquer que, comme a et H sont des fonctions strictement décroissantes de r, Ω_0 croît avec r. La propagation est donc prograde et une « accélération » s'opère lorsque le rayon r augmente. On admet que le minimum de R_0 en fonction de K est atteint pour $K = 0$. Dans ce cas, $a = M/r$ et

$$R_0\,(r,0,M) \;=\; [q(r)]^{-1}\left[M^4/r^6 \;+\; 4p^2r^2/\left(H^4M^2\right)\right]$$

Le minimum en fonction de $M \in \mathbb{R}^+$,

$$R_{opt}(r) \;=\; 3\;2^{2/3}\;p^{4/3}\;\;[q(r)]^{-1}\;\;r^{-2/3}\;\;H^{-8/3}$$

est atteint pour

$$M_{opt} \;=\; 2^{1/6}\;p^{1/3}\;r^{4/3}\;\;H^{-2/3}\;.$$

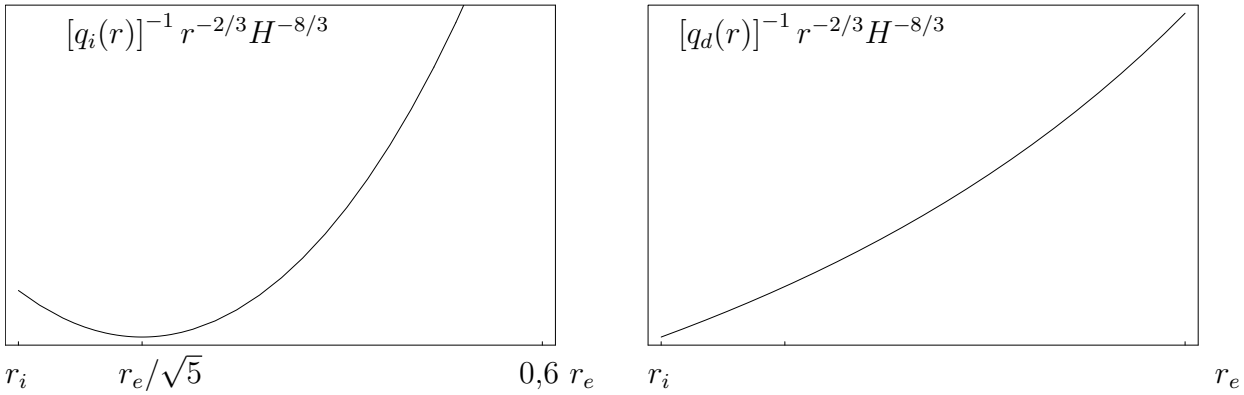


Fig. 3.1 – Profil de $R_{opt}(r)$ (à un coefficient strictement positif près) en fonction de r en chauffage interne à gauche et différentiel à droite. En chauffage interne $R_{opt}(r)$ possède un minimum dans $]r_i,r_e[$ tant que $r_e/\sqrt{5} \in [r_i,r_e]$, i.e. tant que $\eta < 1/\sqrt{5} \simeq 0{,}44$. Dans le cas contraire, cette fonction sera strictement croissante comme pour le chauffage différentiel.

Résultats en chauffage interne

En chauffage interne, dès que $\eta < 1/\sqrt{5}$, R_{opt} possède un minimum en $r = r_e/\sqrt{5}$ (figure 3.1). Les paramètres critiques sont alors (Busse, 1970)

$$\begin{array}{rcrcl} R_c^{2D} & = & R_{opt}(r_e/\sqrt{5}) & = & 3^2\ 2^{-3}\ 5^{5/3}\ p^{4/3}\ (1-\eta)^{10/3}\ , \\ M_c^{2D} & = & M_{opt}(r_e/\sqrt{5}) & = & 2^{-1/2}\ 5^{-1/3}\ (1-\eta)^{-2/3}\ p^{1/3}\ , \\ \Omega_c^{2D} & = & \Omega_0\left(r_e/\sqrt{5},0,M_c\right) & = & 2^{-1/2}\ 5^{1/3}\ (1-\eta)^{2/3}\ P^{-1/3}\ (1+P)^{-2/3}\ . \end{array} \tag{3.20}$$

Dès que $\eta > 1/\sqrt{5}$, R_{opt} le minimum se produit en $r = r_i$ et on a

$$\begin{array}{rcrcl} R_c^{2D} & = & R_{opt}(r_i) & = & 3^2\ 2^{-1/3}\ p^{4/3}\ \eta^{-2/3}\ (1-\eta)^2\ (1+\eta)^{-4/3}\ , \\ M_c^{2D} & = & M_{opt}(r_i) & = & 2^{1/6}\ \eta^{4/3}\ (1-\eta)^{-1}\ (1+\eta)^{-1/3}\ p^{1/3}\ , \\ \Omega_c^{2D} & = & \Omega_0\left(r_i,0,M_c\right) & = & 2^{5/6}\ \eta^{2/3}\ (1+\eta)^{-2/3}\ P^{-1/3}\ (1+P)^{-2/3}\ . \end{array} \tag{3.21}$$

On ne considèrera que le premier cas $\eta < 1/\sqrt{5}$.

Cas $P = 1$ Pour $\eta = 0{,}35$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}4374\ E^{-1/3}\ ,\quad Ra_c^{2D} = 1{,}5528\ E^{-4/3}\ ,\quad \omega_c^{2D} = 0{,}5716\ E^{-2/3}. \tag{3.22}$$

Pour $\eta = 0{,}40$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}4614\ E^{-1/3}\ ,\quad Ra_c^{2D} = 1{,}1891\ E^{-4/3}\ ,\quad \omega_c^{2D} = 0{,}5419\ E^{-2/3}. \tag{3.23}$$

Cas $P = 10$ Pour $\eta = 0{,}35$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}5339\ E^{-1/3}\ ,\quad Ra_c^{2D} = 3{,}4458\ E^{-4/3}\ ,\quad \omega_c^{2D} = 0{,}0851\ E^{-2/3}. \tag{3.24}$$

Cas $P = 0{,}1$ Pour $\eta = 0{,}35$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}2478\ E^{-1/3}\ ,\quad Ra_c^{2D} = 0{,}1599\ E^{-4/3}\ ,\quad \omega_c^{2D} = 1{,}8344\ E^{-2/3}. \tag{3.25}$$

Résultats en chauffage différentiel

Nous remarquons sur la figure 3.1 que R_{opt} est une fonction strictement croissante de r en chauffage différentiel, donc le nombre de Rayleigh critique est atteint pour $r = r_i$ et nous en déduisons les paramètres critiques

$$\begin{array}{rcrcl} R_c^{2D} & = & R_{opt}(r_i) & = & 3\ 2^{2/3}\ [q_d(r_i)]^{-1}\ \eta^{-2/3}\ (1+\eta)^{-4/3}\ (1-\eta)^2\ p^{4/3}, \\ M_c^{2D} & = & M_{opt}(r_i) & = & 2^{1/6}\ \eta^{4/3}\ (1+\eta)^{-1/3}\ (1-\eta)^{-1}\ p^{1/3}\ , \\ \Omega_c^{2D} & = & \Omega_0\,(r_i,0,M_c) & = & 2^{5/6}\ \eta^{2/3}\ (1+\eta)^{-2/3}\ \ P^{-1/3}\ (1+P)^{-2/3}\ . \end{array} \tag{3.26}$$

Cas $P = 1$ Pour $\eta = 0{,}35$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}3059\ E^{-1/3}\ ,\ \ Ra_c^{2D} = 0{,}6559\ E^{-4/3}\ ,\ \ \omega_c^{2D} = 0{,}4564\ E^{-2/3}. \tag{3.27}$$

Pour $\eta = 0{,}40$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}3912\ E^{-1/3}\ ,\ \ Ra_c^{2D} = 0{,}6168\ E^{-4/3}\ ,\ \ \omega_c^{2D} = 0{,}4869\ E^{-2/3}. \tag{3.28}$$

Cas $P = 10$ Pour $\eta = 0{,}35$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}3733\ E^{-1/3}\ ,\ \ Ra_c^{2D} = 1{,}4555\ E^{-4/3}\ ,\ \ \omega_c^{2D} = 0{,}06799\ E^{-2/3}. \tag{3.29}$$

Cas $P = 0{,}1$ Pour $\eta = 0{,}35$, les formules (3.26) donnent

$$m_c^{2D} = 0{,}1733\ E^{-1/3}\ ,\ \ Ra_c^{2D} = 0{,}06756\ E^{-4/3}\ ,\ \ \omega_c^{2D} = 1{,}4647\ E^{-2/3}. \tag{3.30}$$

Les paramètres critiques des théories locales et globales sont confondus en chauffage différentiel (que ce soit en modèles bi et tri-dimensionnels), car la convection est attachée à la graine. Par contre, la théorie locale en chauffage interne est trop « simpliste », seules les lois d'échelle sont valables, le préfacteur des nombres de Rayleigh étant sous-estimé ; d'où la nécessité de développer des modèles globaux. De toute façon, pour arriver à un modèle précis de solution critique, il faut dans tous les cas dériver une théorie « globale ».

3.2.2 Théories asymptotiques globales

Théorie tridimensionnelle en chauffage interne

La ***théorie asymptotique tridimensionnelle globale en chauffage interne*** de Jones *et al.* (2000) utilise des adimensionnements différents des nôtres ; je met un « ˜ » sur les variables de Jones. En effet, l'unité de temps est différente :

$$t = \frac{d^2}{\nu}\ ,\ \ \widetilde{t} = \frac{r_e^2}{\nu}\ . \tag{3.31}$$

On utilise quasiment la même définition pour les nombre d'Ekman E et de Rayleigh Ra_i (comme Simitev & Busse (2003)), à l'unité de longueur près :

$$\begin{array}{rcrcl} E & = & \frac{\nu}{\Omega d^2} & , & \widetilde{E} = \frac{\nu}{2\Omega r_e^2} \\ Ra_i & = & \tilde{\alpha}\tilde{\gamma} S d^6/\left(3\lambda\kappa\nu\right) & , & \widetilde{Ra}_i = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma} S r_e^6/\left(3\lambda\kappa\nu\right)\ . \end{array} \tag{3.32}$$

Pour un rapport de rayons η, on a

$$\begin{array}{rcrcl} E & = & 2\,(r_e/d)^2\,\widetilde{E} & = & 2\,(1-\eta)^{-2}\,\widetilde{E} \\ \omega/\widetilde{\omega} & = & (t\omega^*)\,/\,\left(\widetilde{t}\omega^*\right) & = & t/\widetilde{t} \qquad = \quad (d/r_e)^2 \quad = \quad (1-\eta)^2 \\ Ra_i & = & (d/r_e)^6\,\widetilde{Ra}_i & = & (1-\eta)^6\,\widetilde{Ra}_i \end{array} \tag{3.33}$$

avec une « * » en exposant pour les quantités dimensionnelles. On obtient donc

$$\begin{array}{rccccccc} & m_c & = & M_c\,E^{-1/3} & = & \widetilde{m_c} & = & \widetilde{M}_c\widetilde{E}^{-1/3} \\ \Rightarrow & M_c & = & \widetilde{M}_c\left(E/\widetilde{E}\right)^{1/3} & = & \widetilde{M}_c\,2^{1/3}\,(1-\eta)^{-2/3} & & \\ & Ra_{ic} & = & R_c\,E^{-4/3} & = & (1-\eta)^6\,\widetilde{Ra}_{ic} & = & (1-\eta)^6\,\widetilde{R}_c\widetilde{E}^{-4/3} \\ \Rightarrow & R_c & = & (1-\eta)^6\,\widetilde{R}_c\left(E/\widetilde{E}\right)^{4/3} & = & 2^{4/3}\,(1-\eta)^{10/3}\,\widetilde{R}_c & & \\ & \omega_{ic} & = & \Omega_c\,E^{-2/3} & = & (1-\eta)^2\,\widetilde{\omega}_c & = & (1-\eta)^2\,\widetilde{\Omega}_c\widetilde{E}^{-2/3} \\ \Rightarrow & \Omega_c & = & (1-\eta)^2\,\widetilde{\Omega}_c\left(E/\widetilde{E}\right)^{2/3} & = & 2^{2/3}\,(1-\eta)^{2/3}\,\widetilde{\Omega}_c & & \end{array} \tag{3.34}$$

Les résultats asymptotiques de Jones sont déduits de son équation (3.4) et de sa table 2, d'où, grâce aux formules (3.34) :

	$\eta = 0{,}35$			$\eta = 0{,}4$		
P	M_c^{3D}	R_c^{3D}	Ω_c^{3D}	M_c^{3D}	R_c^{3D}	Ω_c^{3D}
0,1	0,2972	0,6771	1,4753	0,3135	0,5185	1,3987
1	0,5086	2,4681	0,5616	0,5365	1,89012	0,5324
10	0,8140	4.8238	0,07907	0,8586	3,6941	0,07496

TAB. 3.1 – Préfacteurs dans (3.8) prédits par la théorie asymptotique tridimensionnelle de Jones *et al.* (2000) en ***chauffage interne***.

Théorie bidimensionnelle en chauffage interne

La ***théorie asymptotique bidimensionnelle globale en chauffage interne*** de Cole (2004) utilise les mêmes adimensionnements que Jones *et al.* (2000). Cependant, Cole sous estime le nombre de Rayleigh, car il ne prend pas en compte de l'effet de la vitesse axiale dans l'équation moyennée de chaleur qui fait apparaître un facteur 2/3 (équation 2.53). Pour corriger cette « erreur », nous considèrerons que

$$\frac{Ra_i}{\widetilde{Ra}_i^{2D}} = 3/2\,(1-\eta)^6\,. \tag{3.35}$$

On obtient donc les mêmes rapports $M_c/\widetilde{M}_c$ qu'en (3.34), et Cole (2004) n'utilise pas la même unité de temps que Jones *et al.* (2000)

$$\widetilde{t} = \frac{r_e^2}{\kappa}\ , \tag{3.36}$$

donc on a

$$R_c/\widetilde{R}_c = 3\,2^{1/3}\,(1-\eta)^{10/3} \tag{3.37}$$

$$\Omega_c/\widetilde{\Omega}_c = 2^{2/3}\,(1-\eta)^{2/3}\,P^{-1} \tag{3.38}$$

Les résultats asymptotiques de Cole se déduisent de son équation (3.3) et de sa table 3.2 Avec nos formules de changements d'unités (3.34) et (3.37), on en déduit :

	$\eta = 0{,}35$			$\eta = 0{,}4$		
P	M_c^{2D}	R_c^{2D}	Ω_c^{2D}	M_c^{2D}	R_c^{2D}	Ω_c^{2D}
0,1	0,2376	0,5728	1,451	0,2507	0,4387	1,376
1	0,4328	1,9201	0,6301	0,4565	1,4705	0,5974
10	0,6154	4.4302	0,13287	0,6492	3,3927	0,12596

TAB. 3.2 – Préfacteurs dans (3.8) prédits par la théorie asymptotique bidimensionnelle de Cole (2004) en ***chauffage interne***.

Cole a de plus montré la localisation de la solution critique autour d'un rayon

$$r_c = 0{,}7094\ r_e \quad \text{pour} \quad P = 0{,}1, \quad r_c = 0{,}5542\ r_e \quad \text{pour} \quad P = 1, \quad r_c = 0{,}5871\ r_e \quad \text{pour} \quad P = 10. \tag{3.39}$$

cf. sa table 3.5. Il a aussi donné une expression analytique pour la fonction de courant critique, cf. son équation (3.56),

$$\Psi_1(r) = \exp\left[ik_M\,(r - r_c)\,/E^{1/3} + ik'_M/2\,(r - r_c)^2\,/E^{1/3}\right]. \tag{3.40}$$

Les valeurs de k_M et k'_M sont donnés dans la table 3.5 de Cole (2004), et doivent être remises à l'échelle

$$\begin{array}{rclcl} k_M &=& \widetilde{k}_M \left(E/\widetilde{E}\right)^{1/3} d/r_e &=& \widetilde{k}_M 2^{1/3}\,(1-\eta)^{1/3}\ , \\ k'_M &=& \widetilde{k'}_M \left(E/\widetilde{E}\right)^{1/3} (d/r_e)^2 &=& \widetilde{k'}_M 2^{1/3}\,(1-\eta)^{4/3}\,, \end{array} \tag{3.41}$$

d'où

	$\eta = 0{,}35$					$\eta = 0{,}4$				
P	k_M	$k'_M =$	k'_{Mr}	$+$	$i\ k'_{Mi}$	k_M	$k'_M =$	k'_{Mr}	$+$	$i\ k'_{Mi}$
0,1	$-0{,}4536$		$-0{,}6263$	$+$	$i\ 0{,}2729$	$-0{,}4416$		$-0{,}5629$	$+$	$i\ 0{,}2453$
1	$-0{,}4015$		$-1{,}0760$	$+$	$i\ 0{,}8951$	$-0{,}3910$		$-0{,}9670$	$+$	$i\ 0{,}8045$
10	$-0{,}2806$		$-1{,}0895$	$+$	$i\ 2{,}0955$	$-0{,}2732$		$-0{,}9792$	$+$	$i\ 1{,}8834$

TAB. 3.3 – Caractéristiques de la solution asymptotique (3.40) de Cole (2004) en ***chauffage interne*** (modèle quasi géostrophique bidimensionnel).

On verra sur la figure 3.10 une comparaison systématique entre le module de la fonction courant prédit par Cole, caractéristique d'un ***mode « intérieur »***,

$$|\Psi_1(r)| = \exp\left[-k'_{Mi}/2\,(r - r_c)^2\,/E^{1/3}\right], \tag{3.42}$$

et nos résultats numériques. Des comparaisons portant sur la fonction courant complexe seront aussi montrées figure 3.11.

Théorie tridimensionnelle en chauffage différentiel

La ***théorie asymptotique tridimensionnelle globale*** en chauffage différentielle a été développée par Dormy *et al.* (2004) pour un rapport d'aspect $\eta = 0{,}35$ et un nombre de Prandtl $P = 1$. Les adimensionnements sont les mêmes que Jones *et al.* (2000) et Cole (2004) sauf pour le nombre de Rayleigh différentiel

$$Ra_d = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\delta T d^4/\left(\kappa\nu\right)\ , \quad \widetilde{Ra}_d \;=\; \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\delta T r_e^4\eta/\left[\kappa\nu\,(1-\eta)\right]. \tag{3.43}$$

Pour la définition de son nombre de Rayleigh, voir équations (1.6.b), (2.1), et (2.2.b) de Dormy *et al.* (2004). Pour un rapport de rayons $\eta = 0{,}35$ (équation 1.2), on a

$$Ra_d = (d/r_e)^4 \, \frac{1-\eta}{\eta} \widetilde{Ra}_d = \frac{(1-\eta)^5}{\eta} \widetilde{Ra}_d \ . \tag{3.44}$$

Les résultats asymptotiques de Dormy *et al.* (2004) sont déduits de son équation (5.1) :

$$\widetilde{M}_c \ = \ 0{,}179715 \ , \ \widetilde{R}_c \ = \ 0{,}285933 \ , \ \widetilde{\Omega}_c \ = \ 0{,}33701 \ . \tag{3.45}$$

On obtient donc avec les formules de passage (3.34) pour M_c et Ω_c et (3.44) pour R_c

$$\begin{array}{rcll} M_c & = & \widetilde{M}_c \, 2^{1/3} \, (1-\eta)^{-2/3} & = \ 0{,}3018, \\ R_c & = & \widetilde{R}_c \, 2^{4/3} \, \frac{(1-\eta)^{7/3}}{\eta} & = \ 0{,}7534, \\ \Omega_c & = & \widetilde{\Omega}_c \, 2^{2/3} \, (1-\eta)^{2/3} & = \ 0{,}4014. \end{array} \tag{3.46}$$

D'un point de vue structurel, la solution critique est un ***mode* « *de bord* »**, de fonction courant de la forme

$$\Psi_1(r) \ = \ A_i \left[\lambda_1 E^{-2/9} \, (r - r_i) + \lambda_0 \right] , \tag{3.47}$$

avec λ_1 complexe de partie réelle négative, cf. l'équation (4.12) de Dormy *et al.* (2004).

3.2.3 Structure spiralée des ondes

Toutes les théories globales montrent que les ondes ont une phase

$$\arg\left[\Psi_1(r)\right] \ = \ k_M \, (r - r_c) \, E^{-1/3} + k'_{Mr} \, (r - r_c)^2 \, E^{-1/3}/2 \tag{3.48}$$

(déduite de (3.40)) qui varie beaucoup avec r. Ceci correspond à un effet de ***spiralisation*** que l'on peut quantifier. On calcule pour cela des ***angles d'orientation*** ε et ***d'inclinaison*** α comme cela est montré sur la figure 3.5. On suit aussi ici la démarche de Zhang (1992*b*). En s'inspirant des modèles quasi géostrophiques, il applique une moyenne axiale au champ 3D de vitesse d'une onde de Rossby thermique pure. Il existe alors une fonction courant ψ telle que

$$\langle \boldsymbol{u} \rangle_z \ = \ r^{-1} \, (\partial_\varphi \psi) \ \boldsymbol{e_r} - (\partial_r \psi) \ \boldsymbol{e_\varphi} \tag{3.49}$$

$$\text{où} \qquad \psi \ = \ 2 \ |A \ \Psi_1(r)| \ \cos\left[m \, (\varphi - \Phi(r)) - \omega t + \arg(A)\right] \tag{3.50}$$

$$\text{avec} \qquad \Phi(r) \ = \ -\frac{1}{m} \arg\left[\Psi_1(r)\right] \tag{3.51}$$

la ***fonction de phase***. Elle permet de déterminer la forme des ***séparatrices*** $\psi = 0$ données par

$$\varphi \ = \ \varphi_s(r) \ = \ \Phi(r) + \Lambda/4 + n\Lambda/2 + Ct - m^{-1} \arg(A)$$

avec $n \in \mathbb{Z}$, $\Lambda = 2\pi/m$ la longueur d'onde angulaire, $C = \omega/m$ la vitesse de phase angulaire. L'angle d'inclinaison α^{2D}, mesuré au ***rayon critique*** r_c où u_r est maximale, est déterminé par

$$\alpha^{2D} \ = \ \arctan\left[r_c \varphi'_s(r_c)\right] \ = \ \arctan\left[r_c \Phi'(r_c)\right] \ .$$

Le signe des structures spirales est déterminé grâce au signe de l'angle $\varepsilon = (\boldsymbol{e_\varphi}, \mathbf{dM})$ par rapport au sens de rotation du référentiel (figure 3.2). Nous avons affaire à des spirales négatives, comme nous le montre la théorie asymptotique de Cole par exemple, qui donne une fonction de phase

$$\Phi(r) \ = \ -\left(1/\widetilde{m}^a\right) \arg\left[\Psi_1(r)\right] \ = \ -\left(k_M/M_c\right)(r - r_c) - \left(k'_{Mr}/M_c\right)(r - r_c)^2/2 \tag{3.52}$$

qui est en accord avec celle que l'on obtient par notre modèle quasi géostrophique en chauffage interne (figure 3.11). La pente correspondante est

$$r\Phi'(r) \ = \ -r k_M/M_c - r \left(k'_{Mr}/M_c\right)(r - r_c) \tag{3.53}$$

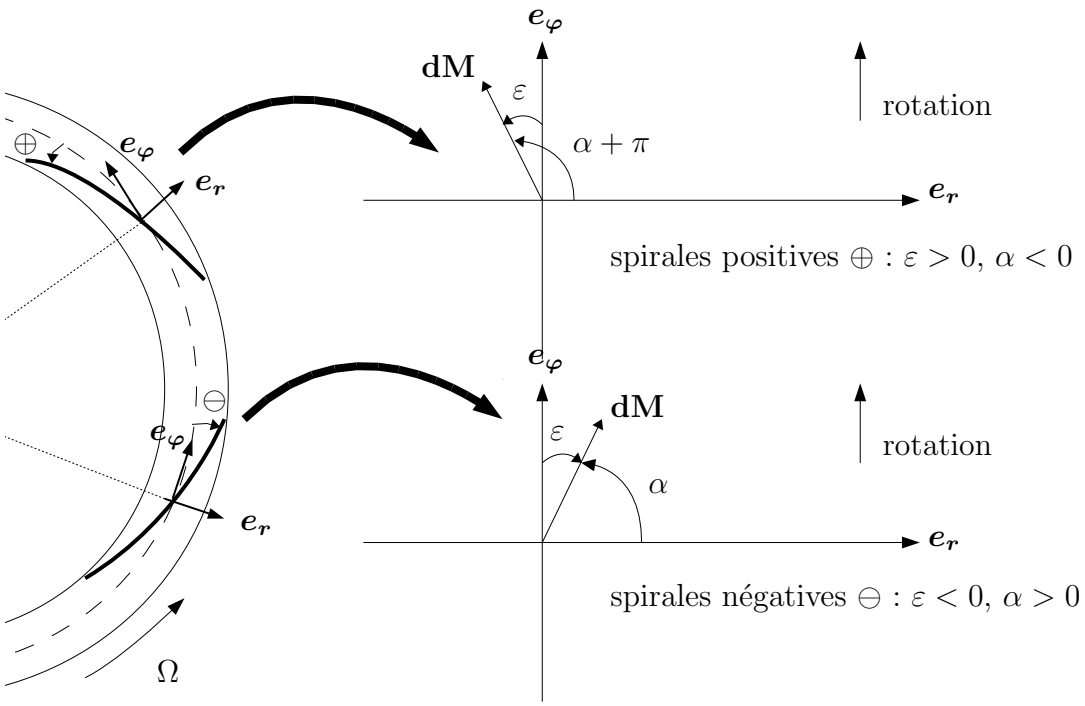


Fig. 3.2 – Définition du signe de ***structures spirales*** en système tournant de vecteur de rotation Ω. Suivant la convention rappelée par exemple dans Schouveiler *et al.* (2001), l'***angle d'orientation*** ε est compté positivement quand la spirale s'enroule vers l'axe de rotation dans le sens de rotation du référentiel. Les courbes noires à gauche correspondent à des iso-lignes de la struture fluide, par exemple des iso-fonction courant (3.7). À droite, **dM** est un vecteur déplacement sur une telle isoligne. L'angle α est ***l'angle d'inclinaison***.

qui a pour valeur, en $r = r_c$,

$$r_c\Phi'(r_c) \;=\; -r_c k_M/M_c\ , \quad \text{soit un } \textbf{\textit{angle d'inclinaison}} \quad \widetilde{\alpha}^{2D} = \arctan\big(r_c\Phi'(r_c)\big) \tag{3.54}$$

	$\eta = 0{,}35$	$\eta = 0{,}4$	
P	$\widetilde{\alpha}^{2D}$		r_c/r_e
0,1	64,36	62,52	0,7094
1	38,35	36,14	0,5542
10	22,38	20,81	0,5871

TAB. 3.4 – Angle d'inclinaison $\widetilde{\alpha}^{2D}$ en degré en fonction de P et η et rayon critique r_c en fonction de P prédits par la théorie asymptotique de Cole (2004) en ***chauffage interne*** (modèle bidimensionnel).

3.3 Résultats de l'analyse de stabilité numérique

À l'aide de la méthode numérique décrite dans l'annexe A, on obtient les résultats suivants.

3.3.1 Nombre de Prandtl unitaire

On va montrer les résultats obtenus pour chacun des modèles et observer leur évolution en fonction du nombre d'Ekman inverse.

$E/2$	$E^{4/3}Ra_{ic}^{3D}$	$E^{4/3}Ra_{ic}^{2D}$	$Ra_{ic}^{2D}/Ra_{ic}^{3D}$	$E^{1/3}m_c^{3D}$	$E^{1/3}m_c^{2D}$	m_c^{2D}/m_c^{3D}	$E^{2/3}\omega_c^{3D}$	$E^{2/3}\omega_c^{2D}$	$\omega_c^{2D}/\omega_c^{3D}$
10^{-3}	3,981	3,146	0,79	0,5040	0,6300	1,25	0,2317	0,7534	3,25
10^{-4}	2,860	2,311	0,81	0,5263	0,5263	1,00	0,3688	0,6851	1,86
10^{-5}	2,621	2,047	0,78	0,4886	0,4343	0,89	0,4305	0,6281	1,46
10^{-6}		1,983			0,4409			0,6325	
10^{-7}		1,948			0,4328			0,6286	
$10^{-\infty}$	2,468	1,920	0,78	0,5086	0,4328	0,85	0,5616	0,6301	1,12

TAB. 3.5 – Propriétés critiques linéaires provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$ en ***chauffage interne*** pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 1$. Les lois d'échelle et les résultats asymptotiques ($E = 10^{-\infty}$) correspondent aux prédictions de Jones *et al.* (2000) et Cole (2004) valides dans la limite $E \to 0$.

$E/2$	$E^{4/3}Ra_{ic}^{2D}$	$E^{1/3}m_c^{2D}$	$E^{2/3}\omega_c^{2D}$
10^{-3}	4,63	0,50	0,56
10^{-4}	2,23	0,41	0,51
10^{-5}	1,42	0,38	0,50
10^{-6}	1,07	0,35	0,48
10^{-7}	0,89	0,33	0,47

TAB. 3.6 – Propriétés critiques linéaires provenant du modèle quasi géostrophique $2D$ en ***chauffage différentiel*** pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 1$.

La résolution numérique donne les paramètres critiques de la convection 2D au seuil pour $\eta = 0{,}35$. Ils sont reportés dans les tables 3.5, 3.6 et 3.7 pour les modèles en chauffage interne et différentiel. Un point important est que l'on retrouve de façon semi quantitative les résultats 3D.

Les fonctions $|\Psi_1(r)|$ et $|\Theta_1(r)|$ correspondant aux modes critiques sont tracées sur les figures 3.3 et 3.4. Elles sont normalisées de sorte que

$$\max_r \frac{|\Psi_1(r)|}{r} = 1 \ . \tag{3.55}$$

On remarque que la perturbation de température ainsi que la fonction courant deviennent de plus en plus localisées lorsque E diminue et ce pour tous les cas (figure 3.3). Le fait que nous normalisons Ψ_1 entraîne que $E\Theta_1$ reste du même ordre de grandeur, en accord avec les lois (3.15) et (3.16) de la théorie asymtotique locale. En chauffage différentiel, pour les deux rapports d'aspect, le rayon critique auquel $|\Theta_1(r)|$ et $|\Psi_1(r)|$ sont maximales tend vers r_i (on a donc bien affaire à des modes de bord) alors qu'en chauffage interne, ce rayon critique semble converger vers une constante (environ $0{,}55r_e$, confirmant la prédiction de Cole (2004)) pour $\eta = 0{,}35$ (on a donc bien affaire à des modes intérieurs) alors que ce dernier tend vers une constante plus faible (voire r_i) pour $\eta = 0{,}4$. Ceci s'explique sans doute par l'influence de la graine.

Les valeurs du temps caractéristique τ_0 et du coefficient de décalage fréquentiel c_0 seront donnés dans les tables 4.2, 4.4, 4.7 et 4.8 en chauffage interne, et dans les tables 4.11, 4.13 , 4.15 et 4.16 en chauffage différentiel, et ce dans le chapitre suivant.

Si on compare les résultats des modèles en chauffage interne et différentiel, le modèle en chauffage interne donne des ondes davantage spiralées, dans les deux cas ***négatives*** (figure 3.2), et possédant une plus grande déviation radiale vers le rayon extérieur pour les mêmes paramètres (figure 3.5). De plus, nous observons un rayon critique r_c plus grand en chauffage interne qu'en chauffage différentiel (figure 3.5).

Les ondes spiralées sont caractérisées par le rayon r_c de plus forte vitesse radiale (dans le cas 3D, cette quantité est mesurée dans le plan équatorial) et l'angle d'inclinaison α (équation 3.2.3 et figures 3.2 et 3.5) en ce rayon (tables 3.8 et 3.10). Ces tables montrent que l'angle d'inclinaison des

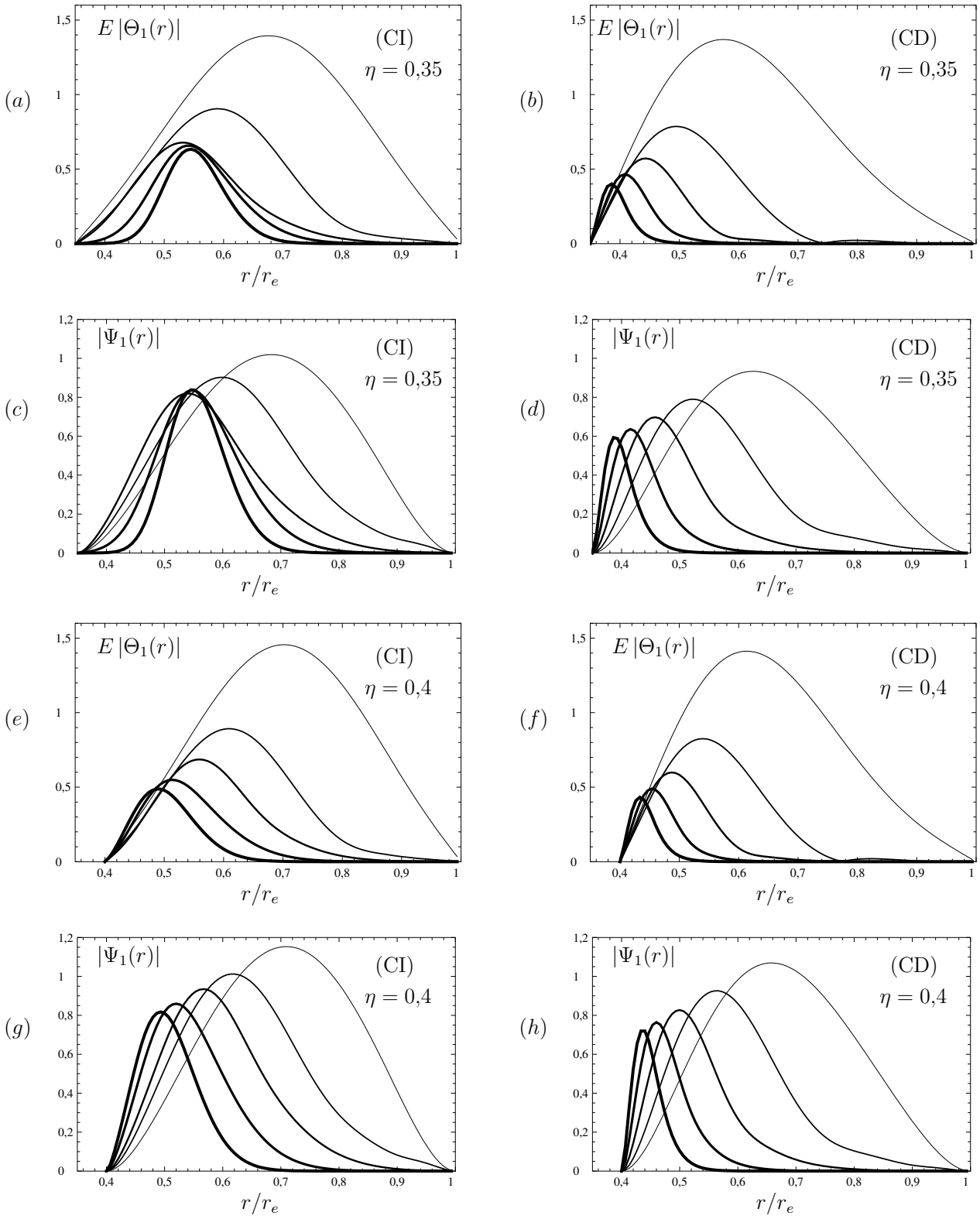


Fig. 3.3 – $E\,|\Theta_1(r)|$ et $|\Psi_1(r)|$ en fonction de r en ***chauffage interne*** (CI) à gauche et en ***chauffage différentiel*** (CD) à droite pour deux rapports d'aspects différents et $P = 1$. Les cinq traits d'épaisseur croissante correspondent respectivement à $E/2 = 10^{-3}$, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}.

chauffage interne									
$E/2$	$E^{4/3}Ra_{ic}^{3D}$	$E^{4/3}Ra_{ic}^{2D}$	$Ra_{ic}^{2D}/Ra_{ic}^{3D}$	$E^{1/3}m_c^{3D}$	$E^{1/3}m_c^{2D}$	m_c^{2D}/m_c^{3D}	$E^{2/3}\omega_c^{3D}$	$E^{2/3}\omega_c^{2D}$	$\omega_c^{2D}/\omega_c^{3D}$
10^{-3}	3,119	2,537	0,813	0,504	0,756	1,5	0,234	0,773	3,307
10^{-4}	2,2	1,815	0,825	0,526	0,585	1,111	0,357	0,683	1,913
10^{-5}	2,014	1,571	0,780	0,462	0,516	1,118	0,402	0,636	1,581
10^{-6}		1,465			0,441			0,585	
10^{-7}		1,384			0,421			0,547	
chauffage différentiel									
$E/2$	$E^{4/3}Ra_{dc}^{3D}$	$E^{4/3}Ra_{dc}^{2D}$	$Ra_{dc}^{2D}/Ra_{dc}^{3D}$	$E^{1/3}m_c^{3D}$	$E^{1/3}m_c^{2D}$	m_c^{2D}/m_c^{3D}	$E^{2/3}\omega_c^{3D}$	$E^{2/3}\omega_c^{2D}$	$\omega_c^{2D}/\omega_c^{3D}$
10^{-3}	3,888	3,889	1,000	0,504	0,630	1,25	0,209	0,597	2,859
10^{-4}	2,076	1,912	0,921	0,468	0,526	1,125	0,293	0,547	1,868
10^{-5}	1,427	1,252	0,877	0,407	0,462	1,133	0,337	0,522	1,551
10^{-6}		0,960			0,428			0,508	
10^{-7}		0,811			0,415			0,498	

TAB. 3.7 – Propriétés critiques linéaires provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$ en ***chauffage interne*** et ***différentiel*** pour $\eta = 0{,}4$ et $P = 1$.

$E/2$	r_c^{3D}/r_e	r_c^{2D}/r_e	r_c^{2D}/r_c^{3D}	α^{3D}	α^{2D}	α^{2D}/α^{3D}
10^{-3}	0,577	0,641	1,11	17,2°	17,6°	1,02
10^{-4}	0,601	0,575	0,955	19,5°	21,6°	1,11
10^{-5}	0,578	0,526	0,91	23°	27,2°	1,18
10^{-6}		0,54			32,6°	
10^{-7}		0,544			35,6°	
$10^{-\infty}$	0,5915	0,5542	0,94	34.2	38,3	1,12

TAB. 3.8 – Comparaison au seuil entre le rayon critique et l'angle d'inclinaison correspondant prédits par le modèle 3D et le modèle 2D quasi géostrophique en ***chauffage interne*** pour un rapport d'aspect $\eta = 0{,}35$ et $P = 1$. Les valeurs pour $E = 10^{-\infty}$ proviennent des modèles asymptotiques de Cole (2004) pour les résultats bidimensionnels et Jones *et al.* (2000) pour les résultats tridimensionnels.

modèles tridimensionnel et quasi géostrophique bidimensionnel sont proches, ce qui apparait sur la figure 3.6 qui les compare.

3.3.2 $P = 0{,}1$ et $P = 10$

Les résultats linéaires pour un nombre de Prandtl de 0,1 et 10 sont résumés dans les tables 3.11. On y a aussi reporté les valeurs du temps caractéristique τ_0 et du coefficient de décalage fréquentiel c_0 définis par (3.6). L'effet de localisation de la convection remarqué pour $P = 1$ se fait aussi ressentir pour tous ces modèles quand le nombre de Prandtl varie (figure 3.4). Quand le nombre de Prandtl diminue, les ondes possèdent le même comportement que pour $P = 1$, à savoir les ondes sont davantage spiralées, que ce soit en chauffage interne (figure 3.5) ou différentiel.

$E/2$	r_c/r_e	α	r_c/r_e	α	r_c/r_e	α
	$P = 0{,}1$		$P = 1$		$P = 10$	
$10^{-3}10^{-3}$	0.635643	18.4297	0.587377	16.4237		
10^{-4}	0.504543	15.6824				
10^{-5}	0.449161	15.7483				
10^{-6}	0.411874	15.4953				
10^{-7}	0.351405	73.2554				

TAB. 3.9 – Rayon critique r_c et angle de spiralisation α provenant du modèle quasi géostrophique 2D pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 1$ en ***chauffage différentiel***.

$E/2$	r_c^{3D}/r_e	r_c^{2D}/r_e	r_c^{2D}/r_c^{3D}	α^{3D}	α^{2D}	α^{2D}/α^{3D}
	chauffage interne					
10^{-3}	0,567	0,674	1,19	18,9°	18,0°	0,95
10^{-4}	0,567	0,598	1,06	19,3°	21,6°	1,12
10^{-5}	0,522	0,555	1,06	22,4°	26,0°	1,16
	chauffage différentiel					
10^{-3}	0,535	0,626	1,17	18,5°	16,6°	0,90
10^{-4}	0,501	0,548	1,09	16,6°	15,7°	0,95
10^{-5}	0,457	0,493	1,08	16,1°	16,1°	1,002

TAB. 3.10 – Comparaison du rayon critique r_c et de l'angle de spiralisation α provenant du modèle 3D de Simitev et du modèle quasi géostrophique 2D pour $\eta = 0{,}4$ et $P = 1$.

	$P = 0{,}1$			$P = 10$		
chauffage interne						
$E/2$	$E^{4/3}Ra_c$	$E^{1/3}m_c$	$E^{2/3}\omega_c$	$E^{4/3}Ra_c$	$E^{1/3}m_c$	$E^{2/3}\omega_c$
10^{-3}	1,063	0,378	1,668	5,719	0,630	0,118
10^{-4}	0,733	0,351	1,901	4,803	0,643	0,127
10^{-5}	0,607	0,271	1,588	4,563	0,597	0,127
10^{-6}	0,542	0,239	1,403	4,491	0,605	0,130
10^{-7}	0,452	0,222	1,305	4,458	0,608	0,131
chauffage différentiel						
10^{-3}	1,853	0,378	1,585	6,937	0,504	0,078
10^{-4}	0,939	0,351	1,377	3,883	0,468	0,0825
10^{-5}	0,480	0,271	1,300	2,715	0,434	0,0811
10^{-6}	0,310	0,239	1,246	2,157	0,403	0,0784
10^{-7}	0,223	0,222	1,222	1,860	0,392	0,076

TAB. 3.11 – Paramètres critiques linéaires provenant du modèle quasi géostrophique 2D pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 0{,}1$ et $P = 10$ en ***chauffage interne*** et ***différentiel***.

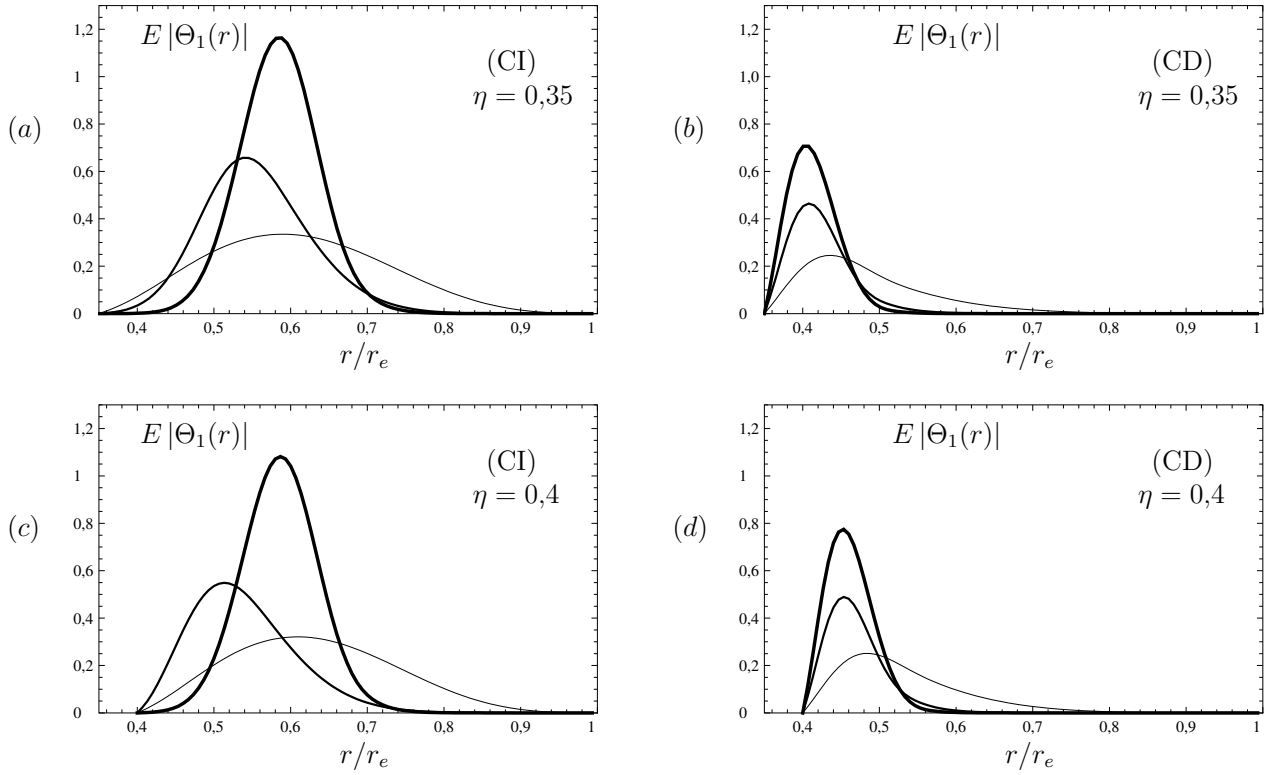


Fig. 3.4 – $E\,|\Theta_1(r)|$ en fonction de r en ***chauffage interne*** (CI) et en ***chauffage différentiel*** (CD) pour deux rapports d'aspects différents, à $E = 2\ 10^{-6}$. Les trois traits d'épaisseur croissante correspondent respectivement à $P = 0{,}1$, 1 et 10.

3.4 Comparaison aux théories asymptotiques

3.4.1 Théorie asymptotique locale

En chauffage interne, la convergence des résultats numérique bi et tri-dimensionnels vers ces lois asymptotiques est relativement bien réalisée à l'exception des fréquences pour $P = 1$ (figure3.8). La convergence est meilleure pour $\eta = 0{,}35$. Par contre, ces lois asymptotiques sont inutiles pour prédire les valeurs des paramètres critiques en régime asymptotique pour $P = 0{,}1$ et 10 (figure 3.8). En chauffage différentiel, les modèles 2D et 3D sont en meilleur accord que pour le chauffage interne (figure 3.9). Cependant, dans tous les cas, les préfacteurs des lois asymptotiques sont mal décrits par les lois asymptotiques locales en chauffage interne, alors qu'il y a un bon accord entre les résultats numériques et les prédictions des théories asymptotiques locales en chauffage différentiel.

3.4.2 Théorie asymptotique globale

On a tracé nos paramètres critiques provenant de notre modèle quasi géostrophique et du modèle tridimensionnel de R. Simitev en chauffage interne (mis à l'échelle par une puissance de E) en fonction du nombre d'Ekman E pour un nombre de Prandtl unité (figure 3.8).

L'accord entre les résultats tridimensionnels de Simitev et de Jones n'est que semi-quantitatif : les fréquences angulaires ne semblent pas converger vers la valeur asymptotique quand E diminue, sauf pour $P = 1$. De plus, l'accord est meilleur pour $\eta = 0{,}35$ (surtout le nombre d'onde critique m_c^{3D}), donc pour une graine moins volumineuse. Ceci est en accord avec le fait que la théorie de

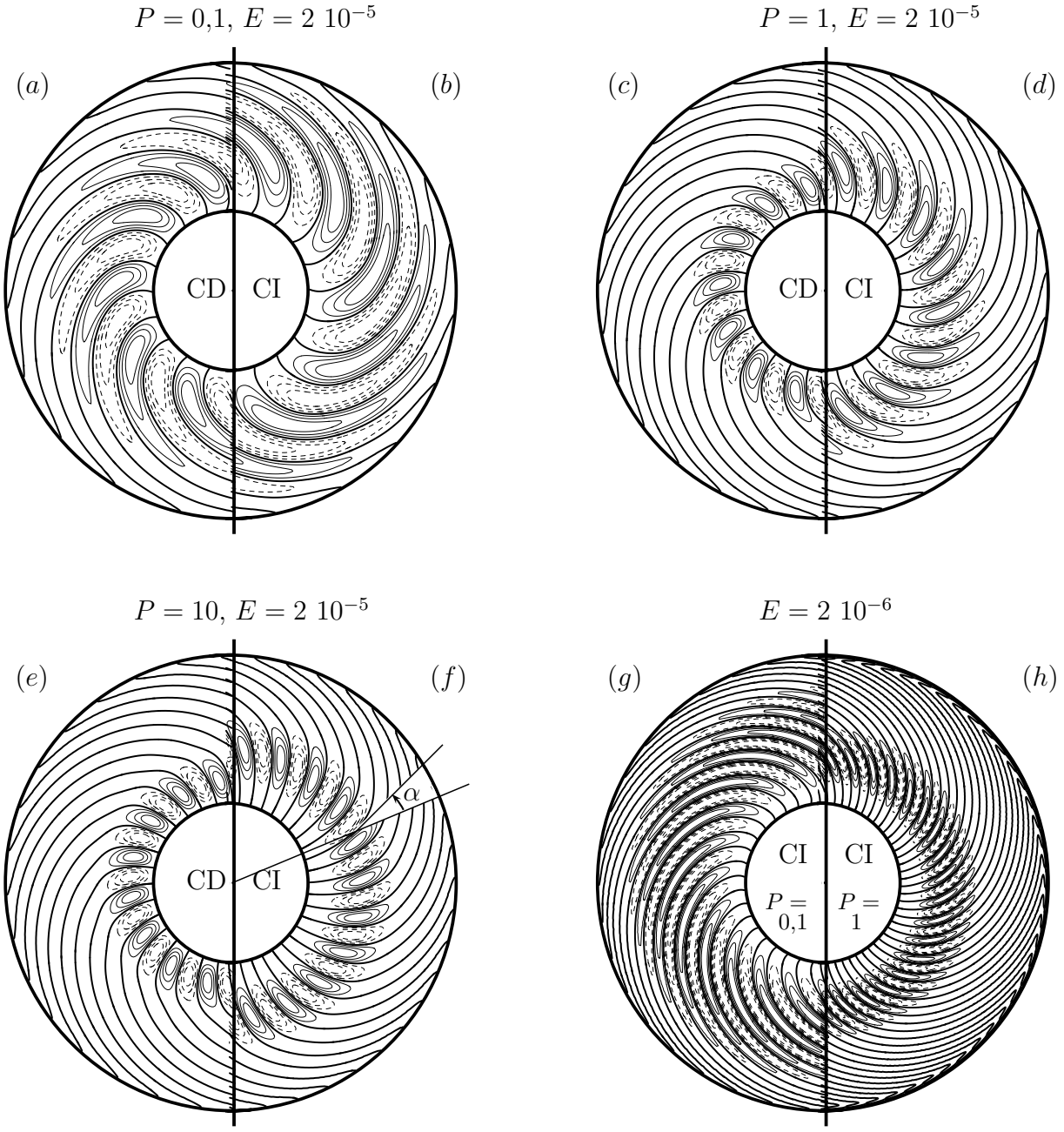


Fig. 3.5 – Isovaleurs de la fonction courant des modèles quasi géostrophique en ***chauffage interne*** (CI) et ***différentiel*** (CD) pour différentes valeurs du nombre de Prandtl et pour $\eta = 0{,}35$. On a également représenté sur le graphe (f) l'angle d'inclinaison α.

Jones *et al.* (2000) est pour une sphère pleine. De même, on remarque que notre modèle quasi géostrophique rejoint assez bien les valeurs asymptotiques de Cole quand E diminue, surtout pour $\eta = 0{,}35$. En effet, pour $\eta = 0{,}35$, $P = 1$ et $E = 2\ 10^{-6}$, on a

$$m_c/m_c^{a\ 2D} - 1 = 1{,}9\ \% \ , \tag{3.56}$$
$$Ra_{ic}/Ra_{ic}^{a\ 2D} - 1 = 3{,}2\ \% \ , \tag{3.57}$$
$$\omega_c/\omega_c^{a\ 2D} - 1 = 0{,}38\ \% \ , \tag{3.58}$$

et pour $E = 2\ 10^{-7}$, on a

$$m_c/m_c^{a\ 2D} - 1 = 0{,}0057\ \% \ , \tag{3.59}$$
$$Ra_{ic}/Ra_{ic}^{a\ 2D} - 1 = 1{,}5\ \% \ , \tag{3.60}$$
$$\omega_c/\omega_c^{a\ 2D} - 1 = 0{,}24\ \% \ . \tag{3.61}$$

Jones *et al.* (2000) et Cole (2004) ont développé des prédictions théoriques asymptotiques, respectivement $3D$ et $2D$ donnant l'angle critique et l'angle d'inclinaison. Le modèle tridimensionnel a un accord semi-quantitatif avec le régime asymptotique pour $E = 2\ 10^{-5}$, valeur limite que l'on peut obtenir du fait de la lourdeur des calculs, avec un désaccord des quantités critiques $(Ra_{ic}, m_c, \omega_c) = (6{,}4{,}31)\ \%$. Le modèle quasi géostrophique n'est validé que de façon semi-quantitative avec un désacord de l'ordre de 22% par rapport au modèle tridimensionnel. Par contre, le régime asymptotique est mieux atteint pour le modèle bidimensionnel avec un désaccord pour les paramètres critiques $(7{,}4{,}17)\ \%$.

On a regardé également l'influence du nombre de Prandtl sur ces résultats. Pour cela, nous avons tracé nos paramètres critiques provenant de notre modèle quasi géostrophique en chauffage interne pour $P = 0{,}1$ et 10 (figure 3.8). L'accord est très bon pour $P = 10$ et $\eta = 0{,}35$. Par contre, pour $P = 10$ et $\eta = 0{,}4$, la convergence semble identique que pour le cas précédent mais les paramètres critiques s'écartent des valeurs asymptotiques de Cole pour $E = 2\ 10^{-7}$. Pour $P = 0{,}1$, l'accord est plutôt mauvais.

On peut également noter qu'à un rapport d'aspect plus grand ($\eta = 0{,}4$), nos résultats suivent moins bien les résultats asymptotiques. En effet, la graine affecte la convection comme le souligne Dormy (figure 3.9 et 1.3).

On remarque que la théorie de Cole décrit mal le seuil de convection à bas nombre de Prandtl et pour une graine trop volumineuse (figure 3.10). On peut expliquer semi-quantitativement ce résultat comme suit : la région convective est donnée asymptotiquement par l'intervalle qui donne (par exemple) un argument de l'exponentielle de (3.42) supérieur à -5, i.e.

$$r_c - \delta \leq r \leq r_c + \delta \ , \quad \text{avec} \quad \delta = E^{1/6} \left(10/k'_{Mi}\right)^{1/2} \ . \tag{3.62}$$

La théorie asymptotique est donc valable si cette région convective ne touche pas la graine ni le manteau, i.e.

$$\begin{array}{rccccccc} & r_i & \leq & r_c - \delta & \text{et} & r_c + \delta & \leq & r_e \\ \Longleftrightarrow & \delta & \leq & r_c - r_i & \text{et} & \delta & \leq & r_e - r_c, \end{array} \tag{3.63}$$

Au bilan,

$$E \leq E_a \ = \ \min\left[(r_c - r_i)^6 \, , (r_e - r_c)^6\right] \left(k'_{Mi}/10\right)^3 \tag{3.64}$$

Pour $P = 1$ et $\eta = 0{,}35$, on trouve, à partir des valeurs données dans les tables 3.2.2 et 3.2.3, $E_a = 6{,}9\ 10^{-7}$ qui est une valeur acceptable, vu que les résultats sont relativement bien convergés

η	0,35			0,4		
P	0,1	1	10	0,1	1	10
E_a	$1{,}6\ 10^{-7}$	$6{,}9\ 10^{-7}$	$2{,}2\ 10^{-5}$	$1{,}9\ 10^{-7}$	$1{,}5\ 10^{-7}$	$6{,}1\ 10^{-6}$

TAB. 3.12 – En ***chauffage interne***, valeur du nombre d'Ekman E_a en-dessous de laquelle on peut considérer que le régime est asymptotique, d'après le critère (3.64) et en utilisant la théorie de Cole (2004).

pour $E = 2\ 10^{-6}$. Par contre, pour $\eta = 0{,}4$ et $P = 1$, $E_a = 1{,}5\ 10^{-7}$: le régime asymptotique sera peut être atteint, mais pour des valeurs encore plus faibles de E. Il en est de même pour les autres valeurs de P : le régime asymptotique est atteint pour un nombre d'Ekman plus grand pour $\eta = 0{,}35$ (voir la table 3.12).

Les fonctions courant des modèles numériques et asymptotiques sont proches, comme nous le montre la figure 3.11.

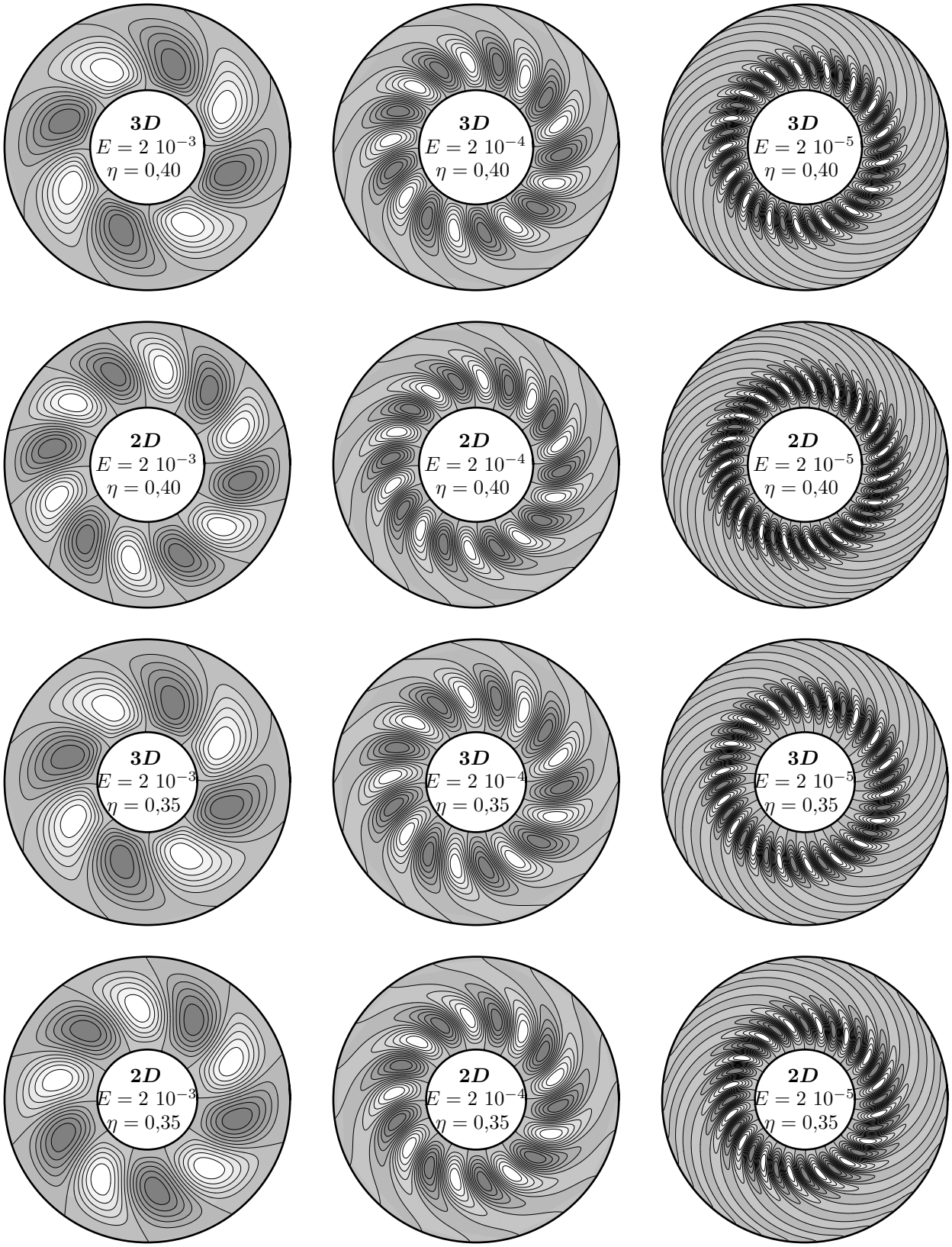


Fig. 3.6 – Isovaleurs de vitesse radiale en ***chauffage interne*** obtenues par le modèle 3D de Simitev et par le modèle quasi géostrophique bidimensionnel, pour $P = 1$. On observe un bon accord sur la forme des ondes.

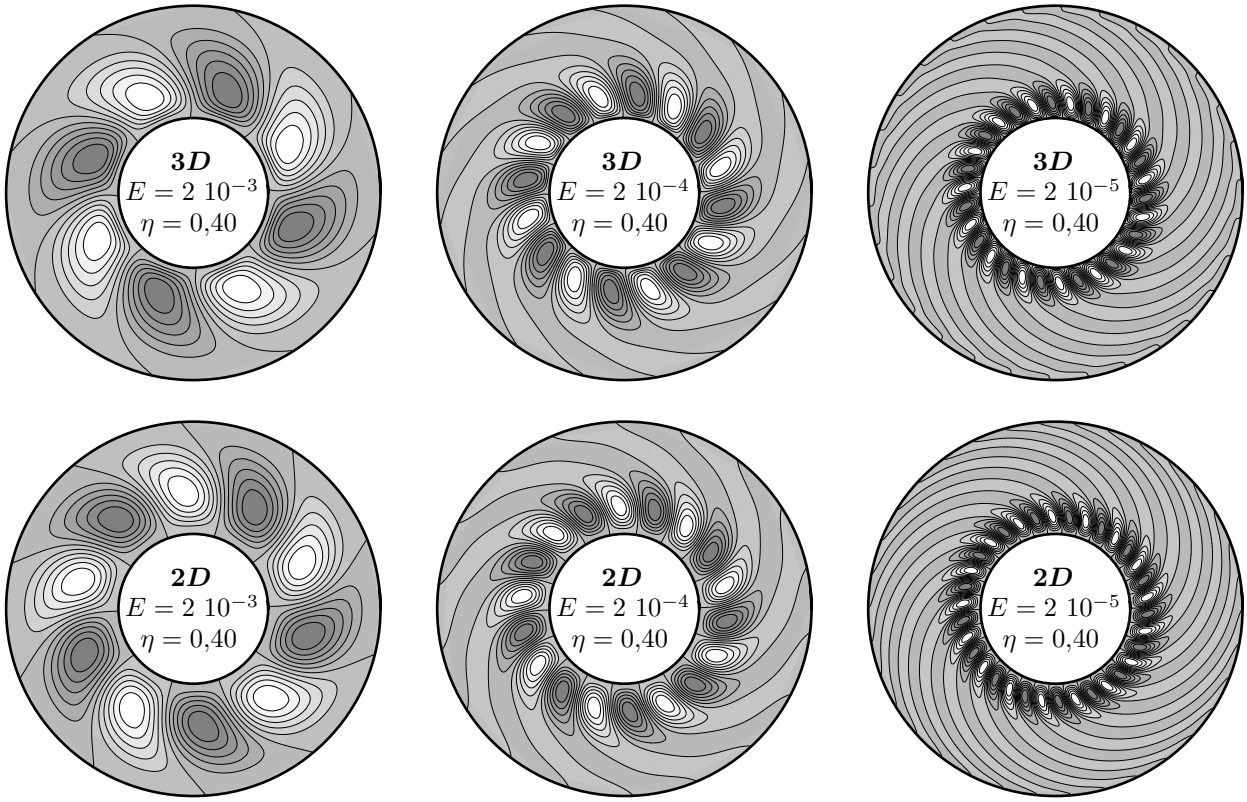


Fig. 3.7 – Isovaleurs de vitesse radiale en ***chauffage différentiel*** obtenues par le modèle 3D de Simitev et par le modèle quasi géostrophique bidimensionnel, pour $P = 1$ et $\eta = 0{,}4$. Là encore on observe un accord entre les deux modèles sur la forme des ondes.

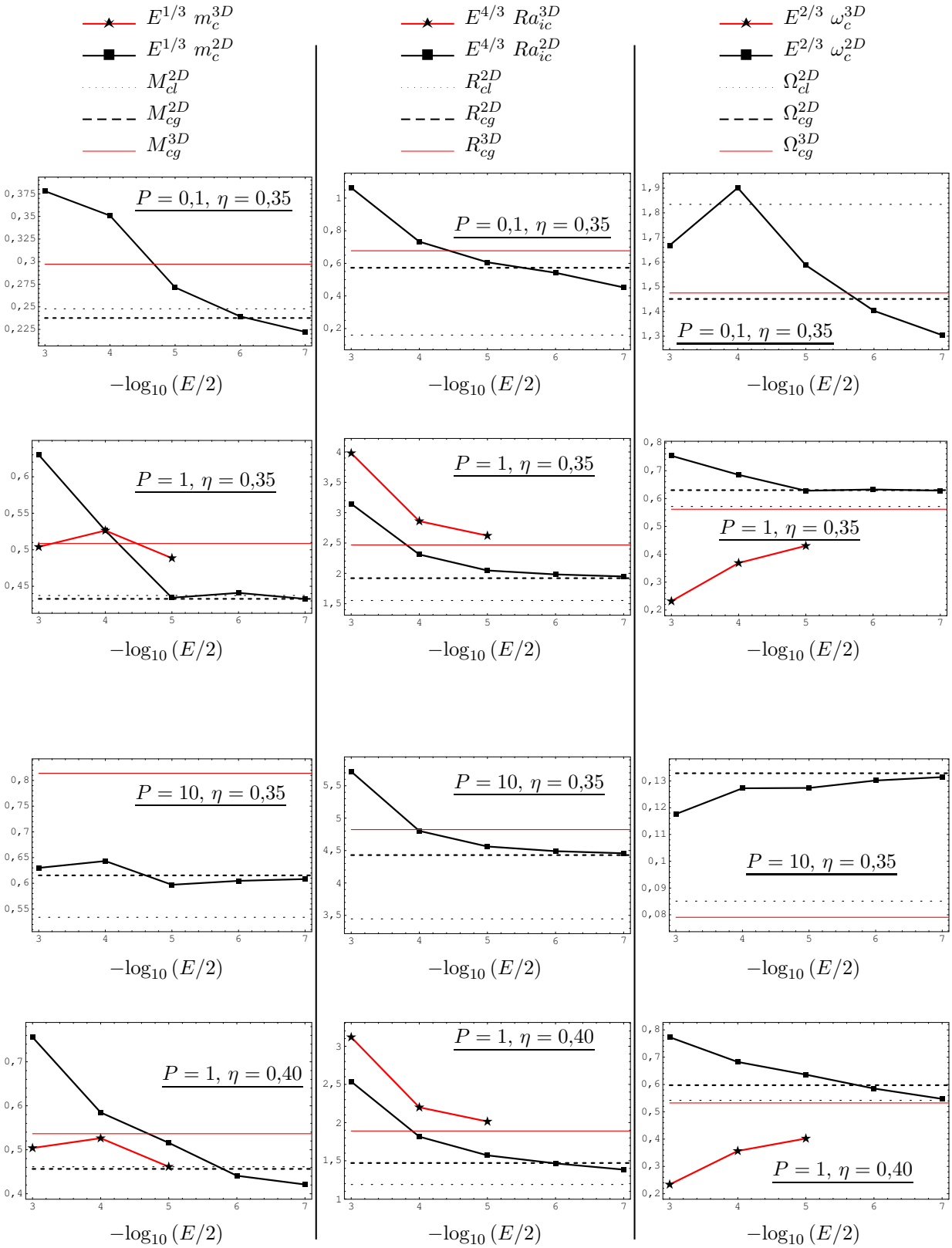


Fig. 3.8 – Paramètres critiques mis à l'échelle : en pointillés courts, la prédiction asymptotique locale de Busse (1970), en pointillés épais, la prédiction asymptotique globale de Cole (2004), en trait rouge fin, celle de Jones *et al.* (2000) ; les traits noirs épais correspondent à notre modèle en ***chauffage interne*** et ceux rouges aux modèles tridimensionnels de Simitev.

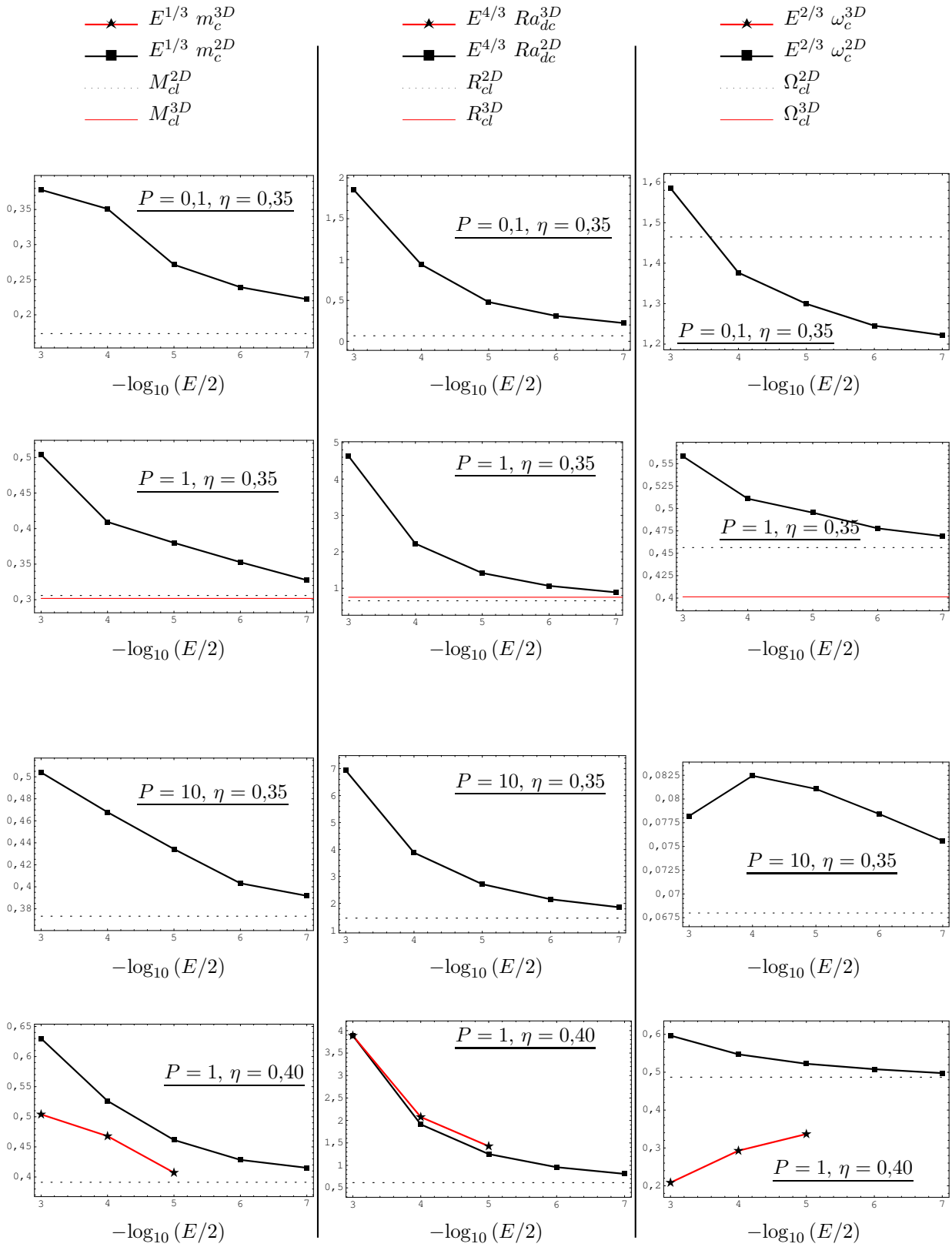


Fig. 3.9 – Paramètres critiques mis à l'échelle : en pointillés courts, notre prédiction asymptotique locale, en trait rouge, la prédiction asymptotique locale de Dormy *et al.* (2004) (qui n'est disponible que dans un seul cas, $P = 1$, $\eta = 0{,}35$) ; les traits épais correspondent à notre modèle en ***chauffage différentiel***, et ceux en rouge au modèle tridimensionnel de Simitev en ***chauffage différentiel***.

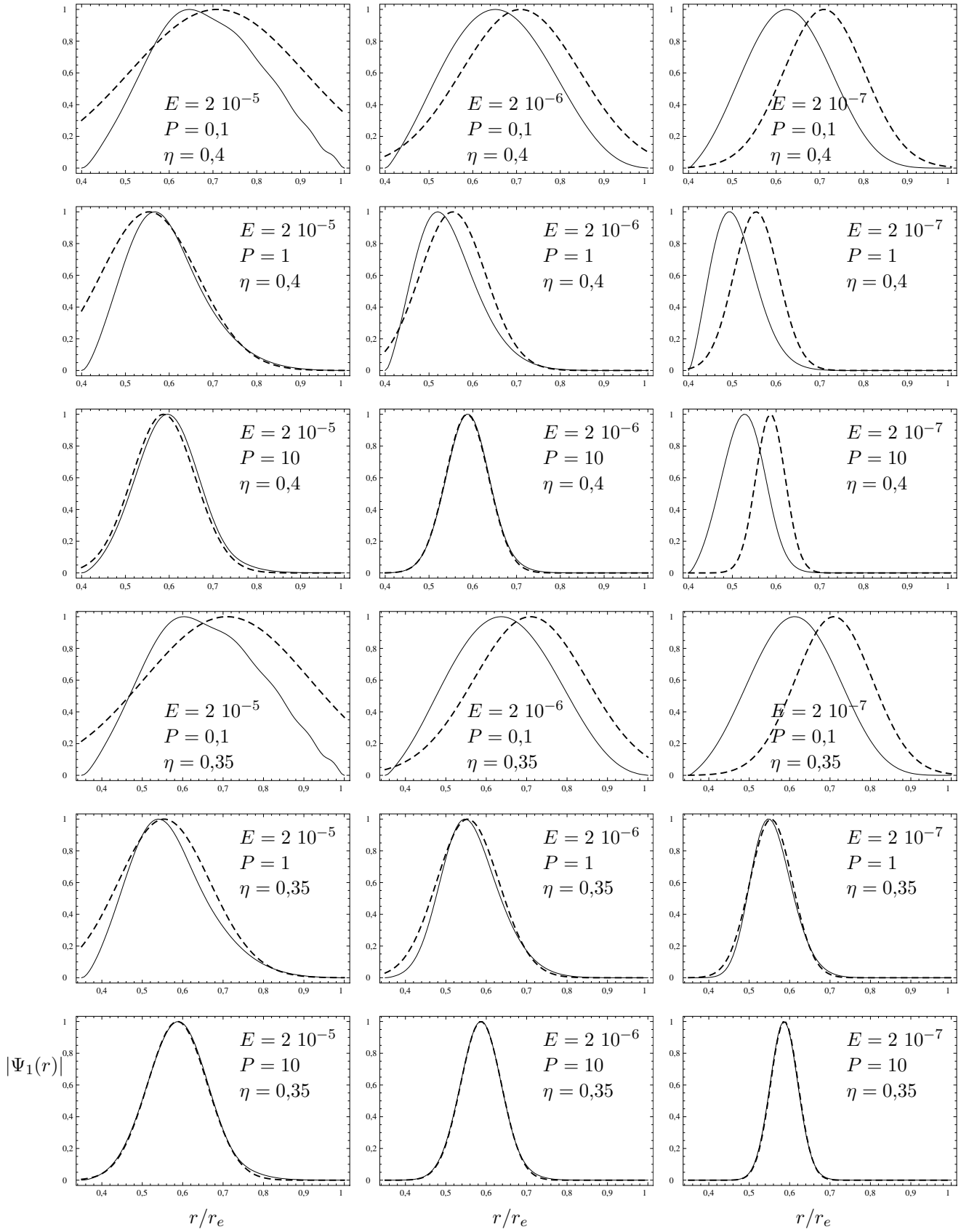


Fig. 3.10 – Module de la fonction courant en ***chauffage interne***. En pointillé, la prédiction asymptotique de Cole ; en trait fin, résultat de notre modèle. Pour cette figure, $\max|\Psi_1(r)|$ a été renormalisé à 1.

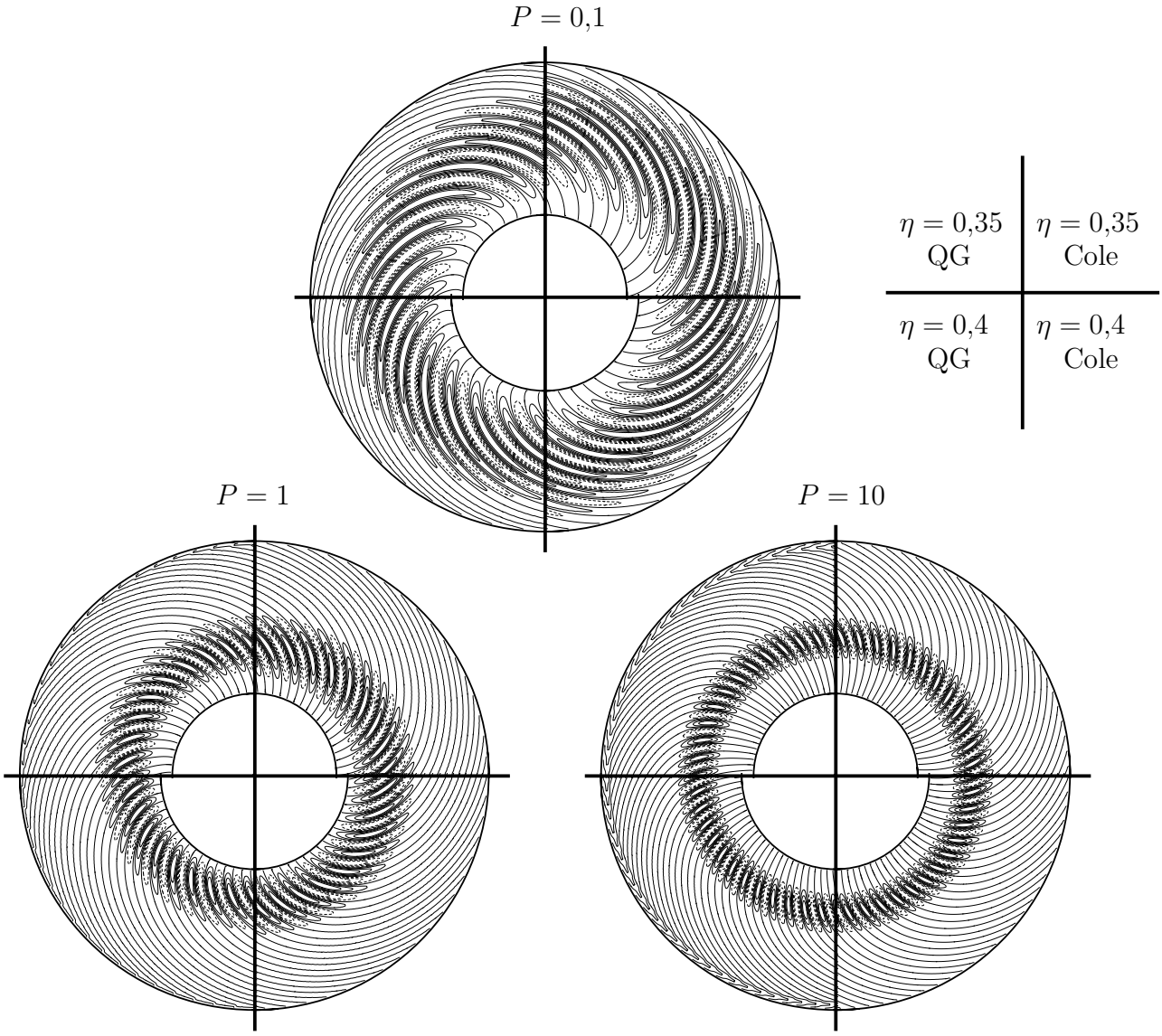


Fig. 3.11 – Pour $E = 2\ 10^{-6}$, isovaleurs de la fonction courant des modèles quasi géostrophiques (QG) en ***chauffage interne*** sur les deux quarts de gauche et de Cole (2004) sur les deux quarts de droite pour $\eta = 0{,}35$ sur les deux quarts supérieurs et 0,4 sur les deux quarts inférieurs. La théorie de Cole est une théorie asymptotique globale.

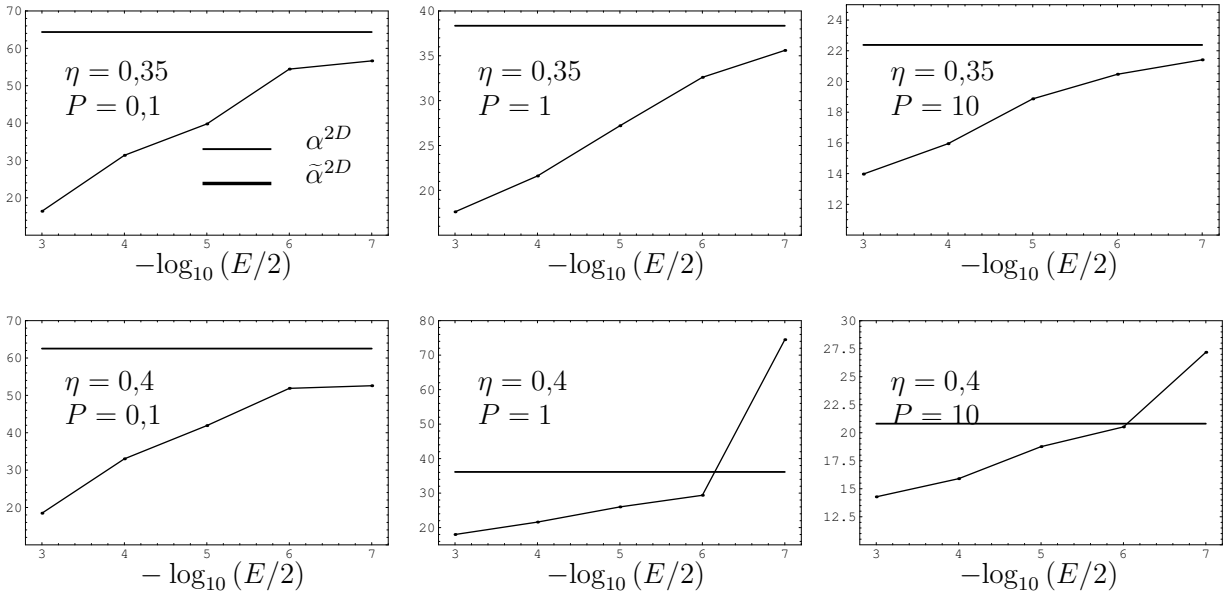


Fig. 3.12 – Pour les modèles quasi géostrophiques en ***chauffage interne***, angle d'inclinaison α^{2D} en fonction du nombre d'Ekman. Ce dernnier converge vers la valeur $\widetilde{\alpha}^{2D}$ obtenue par Cole (2004) pour $\eta = 0{,}35$.

Chapitre 4

Analyse faiblement non linéaire

Nous présentons ici l'analyse faiblement non linéaire de nos deux modèles quasi géostrophiques, en chauffage interne et différentiel, ainsi qu'une comparaison systématique à de nouveaux résultats 3D du code de thermoconvection de Simitev & Busse (2003). Cette étude présente la première analyse faiblement non linéaire ***systématique*** de modèles quasi géostrophiques avec effets de courbure et un inter-rayon fini. La seule analyse faiblement non linéaire existante est celle faite en chauffage différentielle dans le cas $P \to +\infty$ par Gillet & Jones (2006) dans leur troisième section.

L'analyse de stabilité menée au chapitre précédent a permis de déterminer le seuil d'apparition des structures convectives ainsi que le nombre d'onde et la fréquence associés. Au-delà de ce seuil où se produit la première bifurcation, certaines perturbations se développent de manière exponentielle et l'hypothèse de petites perturbation n'est plus valable. Il est évident qu'il doit exister un mécanisme de saturation, car cette augmentation exponentielle ne peut durer indéfiniment. Cette saturation est assurée par des effets non linéaires, que nous désirons étudier dans ce chapitre. Pour cela nous utilisons une méthode faiblement non linéaire « standard ». Nous allons décrire ci-dessous le principe de cette méthode, puis les résultats obtenus grâce à elle. Les aspects techniques des calculs numériques associés sont donnés dans l'annexe A.

4.1 Structure de la solution faiblement non linéaire

Pour simplifier, on note dorénavant $m = m_c$ et $\omega = \omega_c$. On rappelle qu'une onde de Rossby thermique linéaire est caractérisée par des perturbations de la forme

$$\begin{array}{rcccccccl} \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{v} & = & A\,\boldsymbol{v_1} + c.c. & \text{avec} & \boldsymbol{v_1} & = & r^{-1}\left(\partial_\varphi \psi_1\right)\boldsymbol{e_r} - \left(\partial_r \psi_1\right)\boldsymbol{e_\varphi} \\ & & & & & \text{et} & \psi_1 & = & \Psi_1(r)\,\exp\left[i\left(m\varphi - \omega t\right)\right] \\ \theta & = & T - T_s & = & A\,\theta_1 + c.c. & \text{avec} & \theta_1 & = & \Theta_1(r)\,\exp\left[i\left(m\varphi - \omega t\right)\right]\ . \end{array} \tag{4.1}$$

On définit le champ de vorticité axiale associée comme

$$\zeta_1 \;=\; -\Delta\psi_1 \;=\; \left(-\Psi_1'' - r^{-1}\Psi_1' + m^2 r^{-2}\Psi_1\right)\exp\left[i\left(m\varphi - \omega t\right)\right] \tag{4.2}$$

avec les $'$ indiquant les dérivations par rapport à r.

On va chercher une solution ***faiblement non linéaire*** des équations de la dynamique sous la forme d'un champ de vitesse, donné par le fondamental (3.7) plus des modes produits par effets non linéaires

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u} & = & \left(A\,\boldsymbol{v_1} + c.c.\right) + |A|^2\,\boldsymbol{V_2} + \left(A^2\boldsymbol{v_2} + c.c.\right) \\ \boldsymbol{V_2} & = & V_2(r)\boldsymbol{e_\varphi} \\ \boldsymbol{v_2} & = & r^{-1}\left(\partial_\varphi\psi_2\right)\boldsymbol{e_r} - \left(\partial_r\psi_2\right)\boldsymbol{e_\varphi} \quad \text{avec} \quad \psi_2 = \Psi_2(r)\exp\left[2i\left(m\varphi - \omega t\right)\right]\ . \end{array} \tag{4.3}$$

Dans cette équation, A est une amplitude lentement variable, $\boldsymbol{V_2}(r)$ est l'écoulement zonal et $\boldsymbol{v_2}$ est l'harmonique 2. Le champ de température associé est de la forme

$$\begin{array}{rclcrcl} \theta & = & (A\,\theta_1 \,+\, c.c.) & + & |A|^2\,\Theta_2 & + & \left(A^2\theta_2 \,+\, c.c.\right) \\ \Theta_2 & = & \Theta_2(r) & \text{et} & \theta_2 & = & \widetilde{\Theta_2}(r)\exp\left[2i\left(m\varphi-\omega t\right)\right] \end{array} \tag{4.4}$$

Parmi les modes produits par effets non linéaires, on distingue le mode 0 de vitesse $\boldsymbol{V_2}$ et de température Θ_2, de nombre d'onde azimutal nul, du mode 2 de vitesse $\boldsymbol{v_2}$, et de température θ_2, de nombre d'onde azimutal $2m$. Ces quatre modes sont engendrés par effet non linéaire par l'onde fondamentale en $\exp\left[\pm i(m\phi-\omega t)\right]$. Ces modes sont calculés par élimination quasi statique, grâce à l'hypothèse de variations lentes de A. Les contributions non linéaires harmoniques $A^2\ \boldsymbol{v_2}\ +\ c.c.$ décrivent le début de la cascade d'énergie vers des échelles de plus en plus petites (ici la moitié de celle du mode linéaire) alors que les contributions non linéaires homogènes (en φ) $|A|^2\ \boldsymbol{V_2}$ décrivent la cascade d'énergie inverse vers de grandes échelles (échelles infinies[1]). Cette dernière contribution va modifier l'écoulement de base.

4.2 Modes 0 calculés par élimination quasi statique

4.2.1 Mode 0 de vitesse : écoulement zonal

L'écoulement zonal V_2 est calculé en résolvant l'équation (2.50) à l'ordre $|A|^2$ de manière quasi statique (puisque A varie lentement)

$$\Delta V_2 - r^{-2}V_2 - f_E V_2 + \partial_r\sigma_{r\varphi} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = 0 \tag{4.5}$$

avec la ***contrainte de Reynolds***

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{r\varphi} & = & \left\langle\left[r^{-1}im\Psi_1\exp\left(im\varphi\right)+c.c.\right]\left[\Psi_1'\exp\left(im\varphi\right)+c.c.\right]\right\rangle_\varphi \\ & = & r^{-1}im\Psi_1\Psi_1'^{*}+c.c. \\ & = & 2mr^{-1}\mathrm{Im}\left(\Psi_1^*\Psi_1'\right)\ , \end{array} \tag{4.6}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \partial_r\sigma_{r\varphi}+\dfrac{2}{r}\sigma_{r\varphi} & = & -2mr^{-2}\mathrm{Im}\left(\Psi_1^*\Psi_1'\right)+2mr^{-1}\mathrm{Im}\left(\Psi_1^*\Psi_1''\right)+4mr^{-2}\mathrm{Im}\left(\Psi_1^*\Psi_1'\right) \\ & = & 2mr^{-2}\mathrm{Im}\left(\Psi_1^*\Psi_1'\right)+2mr^{-1}\mathrm{Im}\left(\Psi_1^*\Psi_1''\right)\ . \end{array} \tag{4.7}$$

De façon très approximative, on peut équilibrer dans (4.5) seulement le terme de pompage d'Ekman et le terme de dérivée de la contrainte de Reynolds, d'où

$$V_2 \simeq f_E^{-1}\partial_r\sigma_{r\varphi}. \tag{4.8}$$

On peut comprendre la forme de cette contrainte $\sigma_{r\varphi}$ grâce à l'analyse ***énergético-géométrique*** développée par Emmanuel Plaut. Elle lie cette contrainte à la pente des séparatrices $\tan(\alpha)$ (voir figures 6 et 7 de notre article à la fin du mémoire). Comme cette contrainte décroît vers la partie intérieure de l'anneau et croît dans la partie extérieure, on s'attend à obtenir un écoulement zonal rétrograde (respectivement prograde) vers l'intérieur (respectivement extérieur) de l'anneau. Il engendre donc une rotation différentielle, cisaillant les colonnes de convection (figure 4.1).

On peut regarder l'influence du terme de pompage d'Ekman (en $f_E V_2$) sur le mode 0 de vitesse en comparant les résultats avec et sans pompage d'Ekman (figure 4.2 a,b,c,d et e). Si on regarde

[1] Notre système, de topologie annulaire, est donc périodique dans la direction azimutale, i.e. infini dans cette direction.

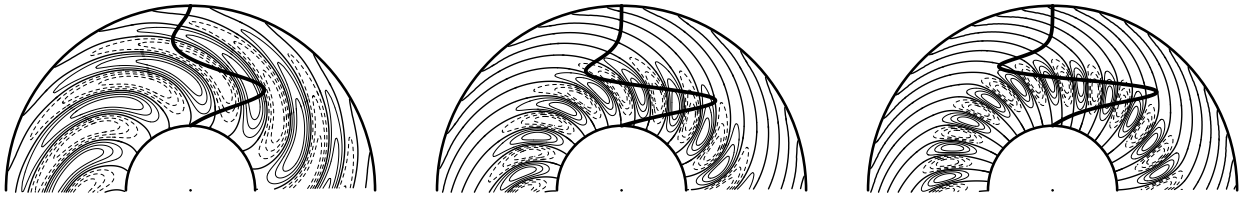


Fig. 4.1 – En modèle quasi géostrophique pour le ***chauffage interne***, pour $\eta = 0{,}35$, et pour $P = 0{,}1$, 1 et 10 (respectivement de gauche à droite), lignes de courant de $\boldsymbol{v_1}$ et forme de l'écoulement zonal V_2.

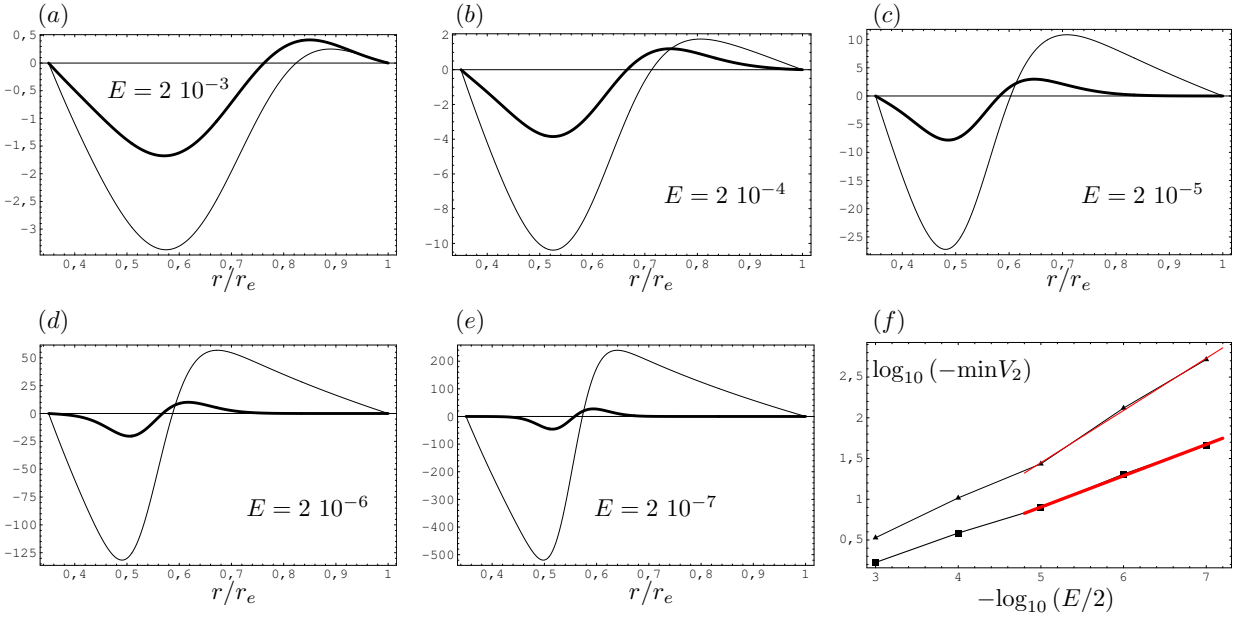


Fig. 4.2 – (a), (b), (c), (d), (e) : écoulements zonaux avec (trait épais) et sans (trait fin) pompage d'Ekman provenant du modèle quasi géostrophique en ***chauffage interne*** pour différents nombre d'Ekman, $P = 1$ et $\eta = 0{,}35$. (f) : $|\min V_2|$ en fonction du nombre d'Ekman en échelle logarithmique avec la même convention d'épaisseur de trait, qui montre, pour $E \leq 2\ 10^{-5}$, les lois d'échelle en E^{-e} (en traits rouges).

uniquement les écoulements zonaux à l'ordre A^2, non normalisés par $|A|^2$, le mode fondamental étant normalisé avec la convention (3.55), ils ne convergent pas vers la même limite quand $E \to 0$ (figure 4.2 a,b,c,d et e). Le pompage d'Ekman influence la forme de l'écoulement zonal. Inversement, on pourrait tracer l'écoulement zonal en tenant compte uniquement du pompage d'Ekman et observer que les autres termes ont également leur importance.

De plus, si on trace les minimas de V_2 notés $\min V_2$, ces derniers suivent une loi d'échelle

$$\min V_2 \ = \ M_i \ E^{-e}, \tag{4.9}$$

avec e la pente déduite d'un ajustement linéaire sur les trois derniers points (i.e. pour $E/2 = 10^{-5}$, 10^{-6}, et 10^{-7}) que l'on peut voir pour un exemple sur la figure 4.2f et dans la table 4.1. On observe également ce même type de loi d'échelle si on s'intéresse à son maximum $\max(V_2)$

$$\max V_2 \ = \ M_a \ E^{-e'}. \tag{4.10}$$

chauffage	interne				différentiel			
η	0,35			0,4	0,35			0,4
P	0,1	1	10	1	0,1	1	10	1
	min (V_2)							
e	0,245	0,38 (0,64)	0,39	0,293	0,267	0,305	0,28	0,317
	max (V_2)							
e'	0,39	0,48 (0.67)	0,47	0,35	0,34	0,38	0,37	0,38

TAB. 4.1 – Coefficients les plus importants des lois d'échelle (4.9), (4.10) en fonction des valeurs de P et η. Les valeurs entre parenthèses proviennent du modèle sans pompage d'Ekman sur le mode moyen de vitesse. Nous avons pris les trois derniers points pour l'ajustement, comme sur la figure 4.2f.

Comme cela est visible sur la figure 4.3, le rayon auquel s'annule l'écoulement moyen $r_{\text{zéro}}(V_2)$ suivrait peut être une loi d'échelle

$$r_{\text{zéro}}(V_2) \;=\; r_0 + Z\; E^{e''}, \tag{4.11}$$

qui serait bien respectée en chauffage différentiel, et moins bien en chauffage interne, à l'exception du cas sans pompage d'Ekman sur le mode 0 de vitesse. On aurait $r_0 = r_c = r_i$ en chauffage différentiel et $r_0 \geq r_c > r_i$ en chauffage interne.

4.2.2 Mode 0 de température

Pour le mode 0 de température, il faut résoudre (2.56) à l'ordre $|A|^2$, soit

$$\begin{aligned}
\Theta_2'' &= P\left(\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1^* + c.c.\right)\\
&= P\left(r^{-1}im\Psi_1\Theta_1'^* + \Psi_1' r^{-1} im\Theta_1^* + c.c.\right)\\
&= -2Pmr^{-1}\mathrm{Im}\left(\Psi_1\Theta_1'^* + \Psi_1'\Theta_1^*\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

On peut noter que les modes 0 de vitesse et de température sont découplés.

4.3 Modes 2 calculés par élimination quasi statique

Les champs correspondants $\boldsymbol{v_2}$ et θ_2 sont calculés par les équations (2.44) et (2.56) à l'ordre A^2, en identifiant les termes en $\exp\left[2i\left(m\varphi - \omega t\right)\right]$.

En notant

$$\zeta_2 = -\Delta\psi_2\ , \tag{4.13}$$

l'équation de la vorticité (2.44) pour le mode 2 de vitesse s'écrit

$$\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta_1 = 2i\omega\zeta_2 - 4imE^{-1}H^{-2}\psi_2 - 2im\theta_2 + \Delta\zeta_2 \tag{4.14}$$

avec

$$\begin{aligned}
\exp\left[-2i\left(m\varphi-\omega t\right)\right]\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta_1 &= imr^{-1}\Psi_1\left(-\Psi_1''' + r^{-2}\Psi_1' - r^{-1}\Psi_1'' - 2m^2r^{-3}\Psi_1 + \right.\\
&\quad \left. m^2r^{-2}\Psi_1\right) + \Psi_1'\left(\Psi_1'' + r^{-1}\Psi_1' - m^2r^{-2}\Psi_1\right)\\
&= imr^{-1}\left[-\Psi_1'''\Psi_1 + \Psi_1''\left(\Psi_1' - r^{-1}\Psi_1\right) + \right.\\
&\quad \left.\Psi_1'\left(r^{-1}\Psi_1' + r^{-2}\Psi_1\right) - 2m^2r^{-3}\Psi_1^2\right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

L'équation de la chaleur (2.56) pour le mode 2 de température s'écrit

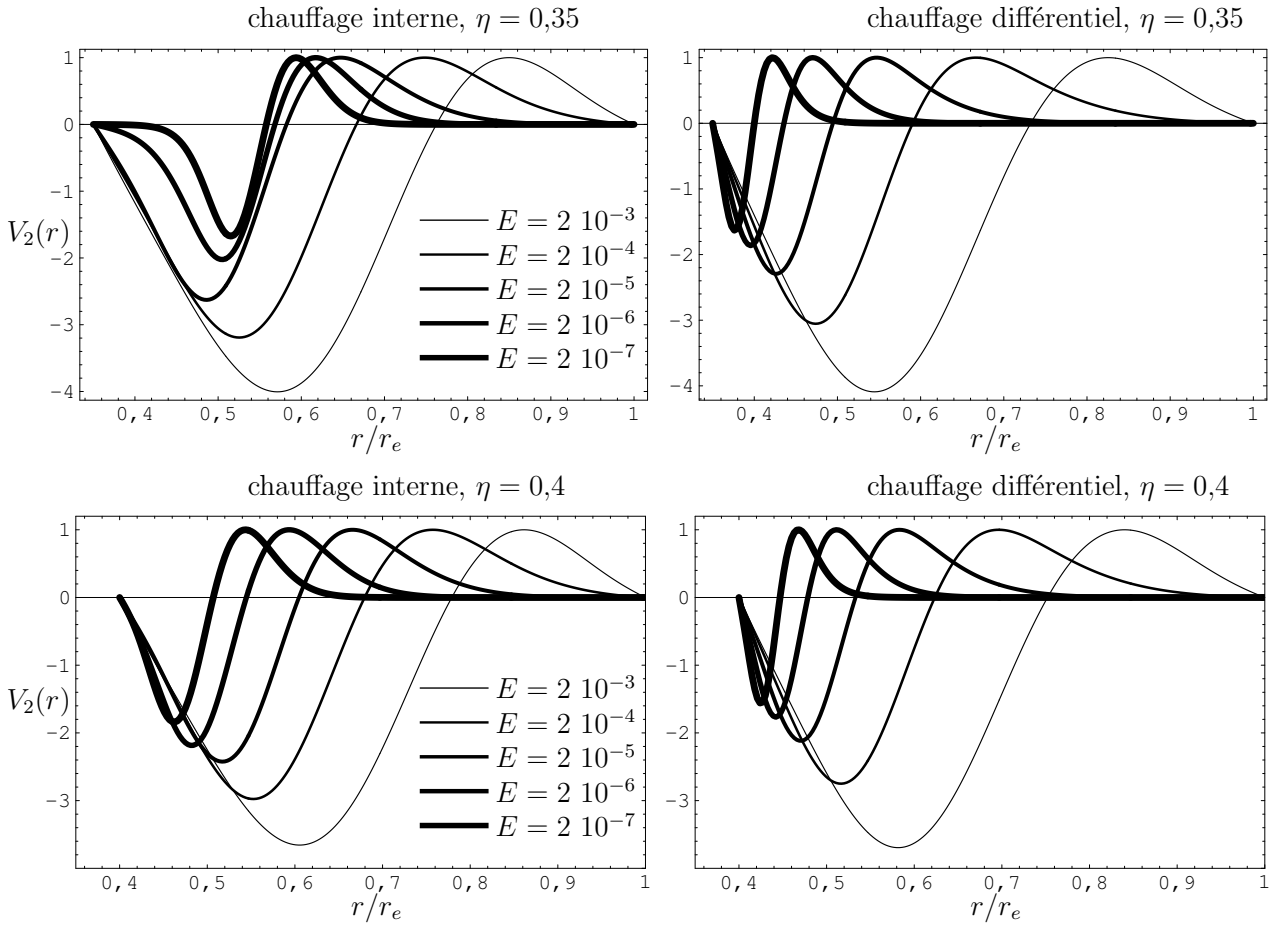


Fig. 4.3 – Pour $P = 1$, en ***chauffages interne et différentiel***, écoulements zonaux $V_2(r)$ avec un maximum normalisé à 1.

$$\begin{aligned}\Delta\theta_2 + 2im\psi_2\left(Ra_i q_i + Ra_d q_d\right) &= P\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1 \\ &= P\left(r^{-1}im\Psi_1\Theta_1' - \Psi_1' r^{-1}im\Theta_1\right)\exp\left[2i\left(m\varphi-\omega t\right)\right] \\ &= Pr^{-1}im\left(\Psi_1\Theta_1' - \Psi_1'\Theta_1\right)\exp\left[2i\left(m\varphi-\omega t\right)\right] \qquad (4.16)\end{aligned}$$

4.4 Rétroaction sur le mode 1 : équation d'amplitude

4.4.1 Principe de calcul

On introduit un produit scalaire naturel et des valeurs propres adjointes comme cela est expliqué dans l'annexe B. On définit alors le ***mode adjoint critique*** de la forme

$$\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix}\psi_a \\ \theta_a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_a(r)\exp\left[i\left(m\varphi-\omega t\right)\right] \\ \Theta_a(r)\exp\left[i\left(m\varphi-\omega t\right)\right]\end{pmatrix}, \qquad (4.17)$$

tel que[2]

$$i\omega D^\dagger\cdot\boldsymbol{U_1} = L_R^\dagger\cdot\boldsymbol{U_1}.$$

[2]On rappelle que $m = m_c$ et $\omega = \omega_c$.

On le normalise en imposant que

$$\langle D\cdot \boldsymbol{V_1},\boldsymbol{U_1}\rangle_{r\varphi} = \langle r\left[\zeta\left(\boldsymbol{v_1}\right)\psi_a^* + \theta_1\theta_a^*\right]\rangle_{r\varphi} \;=\; \tau_0\ ,$$

ce qui permettra, par projection des équations de la dynamique sur $\boldsymbol{U_1}$, d'obtenir un terme temporel de la forme $\tau_0 dA/dt$.

On rappelle que l'***écart au seuil réduit*** est défini par

$$\epsilon \;=\; \frac{Ra_i}{Ra_{ic}} - 1 \quad \text{en chauffage interne,} \tag{4.18}$$

$$\epsilon \;=\; \frac{Ra_d}{Ra_{dc}} - 1 \quad \text{en chauffage différentiel.} \tag{4.19}$$

L'amplitude A de l'onde critique peut être calculée en continuant l'analyse faiblement non linéaire à l'ordre A^3. En projettant les termes non linéaires résonants des équations (2.44) et (2.56) sur le mode adjoint, on obtient à l'ordre le plus bas l'***équation d'amplitude*** (ou « *équation de Landau* »)

$$\tau_0\frac{dA}{dt} \;=\; \left(1+ic_0\right)\ \epsilon A - g\left(1+ic_1\right)|A|^2\,A\ , \tag{4.20}$$

avec c_0 le coefficient de ***décalage fréquentiel linéaire*** et g le ***coefficient de saturation*** (ou ***anti***saturation selon son signe) et c_1 le coefficient de ***décalage fréquenciel non linéaire***. En faisant le bilan des termes résonants des équations (2.44) et (2.56), on obtient

$$\boxed{g \;=\; \mathrm{Re}\left(G_{12}^v + G_{21}^v + G_{12}^t + G_{21}^t + g_{12}^v + g_{21}^v + g_{12}^t + g_{21}^t\right)} \tag{4.21}$$

et

$$\boxed{c_1 \;=\; \frac{\mathrm{Im}\left(G_{12}^v + G_{21}^v + G_{12}^t + G_{21}^t + g_{12}^v + g_{21}^v + g_{12}^t + g_{21}^t\right)}{g}} \tag{4.22}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl}
G_{12}^v &=& \langle r\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta\left(\boldsymbol{V_2}\right)\ \psi_a^*\rangle_{r\varphi} &,& G_{12}^t &=& P\,\langle r\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\Theta_2\right)\ \theta_a^*\rangle_{r\varphi}\ ,\\
G_{21}^v &=& \langle r\boldsymbol{V_2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta\left(\boldsymbol{v_1}\right)\ \psi_a^*\rangle_{r\varphi} &,& G_{21}^t &=& P\,\langle r\boldsymbol{V_2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\theta_1\right)\ \theta_a^*\rangle_{r\varphi}\ ,\\
g_{12}^v &=& \langle r\boldsymbol{v_1}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta\left(\boldsymbol{v_2}\right)\psi_a^*\rangle_{r\varphi} &,& g_{12}^t &=& P\,\langle r\boldsymbol{v_1}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\theta_2\right)\ \theta_a^*\rangle_{r\varphi}\ ,\\
g_{21}^v &=& \langle r\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta\left(\boldsymbol{v_1}^*\right)\ \psi_a^*\rangle_{r\varphi} &,& g_{21}^t &=& P\,\langle r\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\theta_1^*\right)\ \theta_a^*\rangle_{r\varphi}\ .
\end{array}\right. \tag{4.23}$$

$$\left\{\begin{array}{rcc}
G_{12}^v &=& \left\langle im\ \Psi_1\ \partial_r\left(\frac{V_2}{r}+\partial_r V_2\right)\Psi_a^*\right\rangle_r\\
G_{21}^v &=& \langle -im\ V_2\ \Delta\Psi_1\ \Psi_a^*\rangle_r\\
G_{12}^t &=& \langle iPm\ \Psi_1\ \partial_r\Theta_2\ \Theta_a^*\rangle_r\\
G_{21}^t &=& \langle iPm\ V_2\ \Theta_1\ \Theta_a^*\rangle_r\\
g_{12}^v &=& \langle im\left[\Psi_1^*\ \partial_r\Delta\Psi_2 + 2\partial_r\Psi_1^*\ \Delta\Psi_2\right]\Psi_a^*\rangle_r\\
g_{21}^v &=& \langle -im\left[\partial_r\Psi_2\ \Delta\Psi_1^* + 2\Psi_2\ \partial_r\Delta\Psi_1^*\right]\Psi_a^*\rangle_r\\
g_{12}^t &=& \left\langle -iPm\left[\Psi_1^*\ \partial_r\widetilde{\Theta_2} + 2\partial_r\Psi_1^*\ \widetilde{\Theta_2}\right]\Theta_a^*\right\rangle_r\\
g_{21}^t &=& \langle iPm\left[2\Psi_2\ \partial_r\Theta_1^* + \partial_r\Psi_2\ \Theta_1^*\right]\Theta_a^*\rangle_r
\end{array}\right. \tag{4.24}$$

Le coefficient de saturation g possède donc 8 contributions.

Les valeurs des coefficients linéaires de l'équation de Landau τ_0 et c_0 et non linéaires g et c_1 sont donnés dans les tables 4.2, 4.4, 4.7, 4.8, 4.11, 4.13 et 4.15, 4.16. La valeur ***physique*** de l'amplitude A de l'onde saturée est donnée par

$$|A| \;=\; \sqrt{\frac{\epsilon}{g}} \tag{4.25}$$

On peut en déduire l'amplitude de la convection en régime faiblement non linéaire, en se souvenant de la condition de normalisation de Ψ_1 (3.55) :

$$\max u_r^{2D} \;=\; 2m\,|A| \;=\; 2m\sqrt{\frac{\epsilon}{g}}\;.$$

Les tables 4.3 et 4.5 montrent une comparaison de ces amplitudes à celles obtenues dans les modèles tridimensionnels numériques, de deux façcons différentes, soit dans le plan équatorial seulement ($\max_{\rm EA}$), soit dans toute la coquille (max). Les modèles quasi géostrophiques surestiment la force de l'écoulement radial dans le plan équatorial à un nombre d'Ekman relativement grand en chauffage interne. Par contre, les deux valeurs sont très proches en chauffage différentiel (voir la table 4.12). Cependant, $\max u_r^{2D}$ se rapproche de $\max u_r^{3D}$, mais pas de $\max_{\rm EA} u_r^{3D}$ quand le nombre d'Ekman diminue dans tous les cas.

La fréquence angulaire d'ondes non linéaires dans le modèle tridimensionnel est de la forme

$$\omega \;=\; \omega_c\left[1-\gamma\epsilon+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\right]$$

où γ est le coefficient de décalage fréquentiel total d'ordre 1 (voir les mêmes tables que pour $\max u_r$). Les ondes faiblement non linéaires ont un coefficient de décalage fréquentiel de la forme

$$\gamma^{2D} \;=\; \left(c_o-c_1\right)/\left(\tau_0\omega_c\right)\;,$$

qui décrit une compétition entre les effets linéaires d'accélération des ondes dès que $c_0<0$ et les effets non linéaires ralentissant ces ondes dès que $c_1<0$ (pour des nombres d'Ekman pas trop petits).

4.5 Résultats non linéaires

4.5.1 Résultats en chauffage interne

Nous allons présenter quatre cas :
- $P=1$, $\eta=0{,}35$,
- $P=1$, $\eta=0{,}4$,
- $P=0{,}1$, $\eta=0{,}35$,
- $P=10$, $\eta=0{,}35$.

Les résultats pour $P=1$ et $\eta=0{,}35$ se trouvent dans les tables 4.3 et 4.2. Les résultats pour $P=1$ et $\eta=0{,}4$ se trouvent dans les tables 4.5 et 4.4. Les résultats pour $P=0{,}1$ et $\eta=0{,}35$ et pour $P=10$ et $\eta=0{,}35$ se trouvent dans les tables 4.6, 4.7 et 4.8. La valeur de $E^{-2/3}\tau_0$ converge dans tous les cas vers une constante sauf pour $P=0{,}1$. Le coefficient de décalage fréquentiel linéaire c_0 est négatif sauf pour $P=0{,}1$ où il change de signe lorsque le nombre d'Ekman diminue. Le coefficient de saturation g devient négatif à bas Ekman, la bifurcation devient sous critique. Le coefficient de décalage fréquentiel γ^{2D} devient positif à bas nombre d'Ekman sauf pour $P=0{,}1$, ayant ainsi le même signe que γ^{3D}. Nous avons mis dans la table 4.9 et tracé sur la figure 4.4 le nombre d'Ekman E_2 pour lequel le coefficient de saturation s'annule.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	1.256	-0.461074	0.2262	-0.1008	-0.4456			
10^{-4}	1.685	-0.489668	0.3609	-0.1683	-0.4663			
10^{-5}	1.975	-0.529519	0.4278	-0.4294	-1.004			
10^{-6}	2.058	-0.58132	-0.1087	-1.952	17.96			
10^{-7}	2.099	-0.58756	-5.331	3.421	-0.6417			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0143$	-0.0340	$+0.195$	$+0.0543$	$+0.00768$	-0.00563	-0.00694	$+0.00193$
10^{-4}	$+0.0253$	-0.0611	$+0.265$	$+0.130$	$+0.0106$	-0.00665	-0.00675	$+0.00408$
10^{-5}	$+0.0481$	-0.124	$+0.272$	$+0.227$	$+0.00970$	-0.00534	-0.00362	$+0.00408$
10^{-6}	$+0.133$	-0.538	-0.0341	$+0.303$	$+0.0196$	-0.00738	$+0.0073$	$+0.00780$
10^{-7}	-0.489	$+0.746$	-2.25	-3.33	-0.0180	$+0.00896$	$+0.00412$	-0.00743
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0313$	-0.0446	-0.0528	-0.0549	$+0.0215$	-0.0151	$+0.00817$	$+0.00549$
10^{-4}	$+0.0395$	-0.0895	-0.0667	-0.0786	$+0.0195$	-0.00950	$+0.0101$	$+0.00690$
10^{-5}	$+0.0301$	-0.124	-0.207	-0.150	$+0.0127$	-0.00467	$+0.00801$	$+0.00493$
10^{-6}	-0.0755	-0.0410	-0.967	-0.877	-0.00196	$+0.0029$	$+0.0091$	-0.00105
10^{-7}	-0.160	$+1.72$	$+1.53$	$+0.359$	-0.0204	$+0.0053$	-0.016	-0.0079

TAB. 4.2 – En ***chauffage interne*** pour notre modèle quasi géostrophique, avec $P = 1$ et $\eta = 0{,}35$, coefficients de l'équation de Landau (4.20). La mise à l'échelle de τ_0 est inspirée de la mise à l'échelle de ω_c dans la théorie linéaire de Cole (2004). On a également détaillé les contributions au coefficient de Landau $g\,(1 + ic_1)$, cf. (4.21) et (4.22).

$E/2$	$\mathrm{max}u_r^{3D}$	$\mathrm{max}_{\mathrm{EA}}u_r^{3D}$	$\mathrm{max}u_r^{2D}$	$\mathrm{max}u_r^{2D}/\mathrm{max}u_r^{3D}$
10^{-3}	2,042	1,410	2,103	1,030
10^{-4}	3,64	2,54	3,0	0,824
10^{-5}	5,52	4,02	4,90	0,886
$E/2$	$\mathrm{min}V^{3D}$	$\mathrm{min}_{\mathrm{EA}}V^{3D}$	$\mathrm{min}V^{2D}$	$\mathrm{min}V^{2D}/\mathrm{min}V^{3D}$
10^{-3}	$-0{,}05913$	$-0{,}05911$	$-0{,}071$	1,25
10^{-4}	$-0{,}1051$	$-0{,}1053$	$-0{,}107$	1,014
10^{-5}	$-0{,}1506$	$-0{,}1514$	$-0{,}183$	1,21
$E/2$	γ^{3D}		γ^{2D}	γ^{2D}/γ^{3D}
10^{-3}	1,155		$-0{,}0163$	$-0{,}0141$
10^{-4}	0,469		$-0{,}020$	$-0{,}043$
10^{-5}	0,305		0,382	1,25

TAB. 4.3 – En ***chauffage interne*** pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 1$, propriétés provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$. La notation $_{EA}$ signifie que les champs critiques sont considérés dans le plan équatorial (« *equatorial annulus* ») contrairement aux valeurs données pour les mêmes champs moyennés axialement.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	1.23	-0.425	0.327	-0.138	-0.421			
10^{-4}	1.65	-0.485	0.433	-0.203	-0.468			
10^{-5}	1.89	-0.473	0.564	-0.564	-1.0			
10^{-6}	2.01	-0.394	-0.00198	-0.840	424.7			
10^{-7}	2.02	-0.246	-0.397	-0.275	0.693			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0154$	-0.0444	$+0.277$	$+0.0798$	$+0.00988$	-0.0068	-0.0069	$+0.00246$
10^{-4}	$+0.0327$	-0.0776	$+0.321$	$+0.157$	$+0.0111$	-0.00693	-0.00811	$+0.00416$
10^{-5}	$+0.0585$	-0.1642	$+0.366$	$+0.297$	$+0.0104$	-0.00536	-0.00286	$+0.00409$
10^{-6}	$+0.0511$	-0.276	$+0.0459$	$+0.169$	$+0.00609$	-0.00232	$+0.00117$	$+0.00231$
10^{-7}	-0.00165	-0.140	-0.168	-0.0889	$+0.000496$	-0.000116	$+0.000341$	$+0.000155$
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.046$	-0.0699	-0.0657	-0.0753	$+0.0266$	-0.0174	$+0.0113$	$+0.00671$
10^{-4}	$+0.049$	-0.106	-0.0823	-0.095	$+0.0232$	-0.0113	$+0.011$	$+0.00820$
10^{-5}	$+0.0422$	-0.171	-0.266	-0.191	$+0.0135$	-0.0048	$+0.00873$	$+0.00498$
10^{-6}	-0.0182	-0.0429	-0.397	-0.388	$+0.00186$	-0.0000983	$+0.00327$	$+0.000597$
10^{-7}	-0.0171	$+0.0944$	-0.139	-0.213	-0.000364	$+0.000146$	$+0.0000206$	-0.000131

TAB. 4.4 – Coefficients de Landau en ***chauffage interne*** pour notre modèle quasi géostrophique, avec $P = 1$ et $\eta = 0{,}4$.

$E/2$	$\mathrm{max}u_r^{3D}$	$\mathrm{max}_{\mathrm{EA}}u_r^{3D}$	$\mathrm{max}u_r^{2D}$	$\mathrm{max}u_r^{2D}/\mathrm{max}u_r^{3D}$
10^{-3}	1,97	1,37	2,10	1,07
10^{-4}	3,68	2,55	3,04	0,83
10^{-5}	5,77	4,22	5,06	0,88
$E/2$	$\mathrm{min}V^{3D}$	$\mathrm{min}_{\mathrm{EA}}V^{3D}$	$\mathrm{min}V^{2D}$	$\mathrm{min}V^{2D}/\mathrm{min}V^{3D}$
10^{-3}	$-0{,}0600$	$-0{,}0595$	$-0{,}073$	1,21
10^{-4}	$-0{,}1135$	$-0{,}1138$	$-0{,}109$	0,96
10^{-5}	$-0{,}1847$	$-0{,}1854$	$-0{,}186$	1,006
$E/2$	γ^{3D}		γ^{2D}	γ^{2D}/γ^{3D}
10^{-3}	0,998		$-0{,}00374$	$-0{,}00375$
10^{-4}	0,368		$-0{,}0151$	$-0{,}0410$
10^{-5}	0,317		0,438	1,38

TAB. 4.5 – En ***chauffage interne*** pour $\eta = 0{,}4$ et $P = 1$, propriétés provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$.

	$P = 0{,}1$			$P = 10$		
$E/2$	$\mathrm{max}u_r^{2D}$	$\mathrm{min}V^{2D}$	γ^{2D}	$\mathrm{max}u_r^{2D}$	$\mathrm{min}V^{2D}$	γ^{2D}
10^{-3}	7.41	-1.03	0.27174	0.27720	-0.001003	-0.310
10^{-4}	7.30	-0.895	0.429	0.484	-0.00185	-0.349
10^{-5}	11.6	-1.66	0.843	0.889	-0.00355	-0.231
10^{-6}	19.7	-2.54	-0.200	1.818	-0.00768	0.439

TAB. 4.6 – En ***chauffage interne*** pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 0{,}1$ et 10, propriétés provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	1.24	0.270	0.00655	−0.00191	−0.291			
10^{-4}	1.05	0.359	0.027	−0.0133	−0.493			
10^{-5}	1.32	0.178	0.0297	−0.0472	−1.59			
10^{-6}	1.73	−0.0908	−0.0371	−0.0146	0.395			
10^{-7}	2.06	0.0644	−0.0071	0.000101	−0.0143			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	−0.00683	+0.00589	+0.00222	+0.0039	−0.00278	+0.00409	+0.0000536	−0.0000591
10^{-4}	−0.00588	+0.0130	+0.00349	+0.0166	−0.00122	+0.00101	+0.000108	−0.0000733
10^{-5}	+0.0111	−0.00718	+0.00443	+0.0224	−0.00119	+0.000337	−0.0000674	−0.000178
10^{-6}	−0.00102	−0.0212	−0.00379	−0.0112	+0.000161	−0.0000867	+0.0000243	+0.0000241
10^{-7}	−0.000532	−0.00260	−0.00276	−0.00116	$+4.05e-6$	$-2.87e-6$	$+9.64e-7$	$+4.38e-7$
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	+0.0205	−0.0196	+0.000825	−0.00324	−0.00301	+0.00289	−0.000189	−0.000108
10^{-4}	+0.0231	−0.0344	+0.00188	−0.00210	−0.00211	+0.000488	+0.0000448	−0.000217
10^{-5}	+0.0156	−0.0457	−0.00119	−0.0157	+0.000480	−0.000812	+0.0000650	+0.0000318
10^{-6}	−0.00577	+0.00251	−0.00233	−0.00917	+0.0000938	$+3.77e-6$	$-7.42e-6$	+0.0000141
10^{-7}	−0.000249	+0.00157	−0.00074	−0.000485	$-4.25e-7$	$+3.99e-6$	$+1.03e-7$	$-6.06e-8$

TAB. 4.7 – Coefficients de Landau en ***chauffage interne*** pour notre modèle quasi géostrophique 2D pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 0{,}1$.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	15.8	−1.823	13.01	−16.28	−1.25			
10^{-4}	15.5	−1.84	20.7	−23.9	−1.15			
10^{-5}	17.3	−2.05	24.5	−37.7	−1.54			
10^{-6}	17.4	−2.09	27.9	−86.1	−3.09			
10^{-7}	17.4	−2.12	−83.4	−294.6	3.53			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	+0.0362	−0.0661	+12.4	+0.226	+0.112	−0.0806	+0.138	+0.271
10^{-4}	+0.0452	−0.143	+19.4	+0.926	+0.0826	−0.0368	+0.118	+0.240
10^{-5}	+0.0624	−0.241	+22.1	+2.25	+0.0575	−0.0211	+0.0783	+0.170
10^{-6}	+0.123	−0.620	+22.1	+5.92	+0.0442	−0.0142	+0.159	+0.126
10^{-7}	+0.344	−2.68	−96.0	+14.4	+0.0316	−0.00798	+0.475	+0.0809
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	+0.00717	+0.00195	−16.2	−0.775	−0.0415	+0.0177	+0.777	−0.0857
10^{-4}	+0.0152	−0.0233	−23.1	−1.24	−0.0235	+0.00852	+0.559	−0.0811
10^{-5}	+0.0162	−0.0701	−36.3	−1.70	−0.0165	+0.00677	+0.389	−0.0597
10^{-6}	−0.00184	−0.136	−81.5	−4.63	−0.0259	+0.00983	+0.310	−0.0835
10^{-7}	−0.268	+0.745	−264.4	−30.7	−0.0703	+0.0236	+0.239	−0.209

TAB. 4.8 – Coefficients de Landau en ***chauffage interne*** pour notre modèle quasi géostrophique 2D pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 10$.

P	0,1	1	10
E_2	$7{,}19\ 10^{-6} \pm 8{,}5\ 10^{-7}$	$2{,}78\ 10^{-6} \pm 3{,}6\ 10^{-7}$ ($1{,}26\ 10^{-6} \pm 1{,}7\ 10^{-7}$)	$1{,}12\ 10^{-6} \pm 1{,}5\ 10^{-7}$

TAB. 4.9 – En ***chauffage interne*** de notre modèle quasi géostrophique 2D pour $\eta = 0{,}35$, nombre d'Ekman E_2 pour lequel le coefficient de saturation g s'annule. La valeur entre parenthèse est celle pour le modèle sans pompage d'Ekman sur le mode 0 de vitesse.

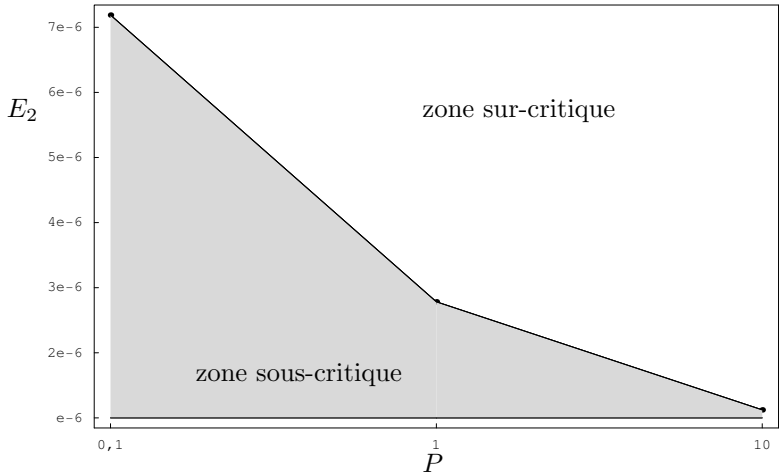


Fig. 4.4 – En ***chauffage interne*** pour notre modèle quasi géostrophique 2D avec $\eta = 0{,}35$, nombre d'Ekman E_2 en fonction de P.

$E/2$	$\max u_r^{2D}$	$\min V^{2D}$	γ^{2D}
10^{-3}	1.89	-0.0623	-0.182
10^{-4}	3.17	-0.0899	-0.090
10^{-5}	5.82	-0.155	0.0198
10^{-6}	11.1	-0.285	0.140
10^{-7}	22.4	-0.583	0.287

TAB. 4.10 – En ***chauffage différentiel*** pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 1$, propriétés provenant du modèle quasi géostrophique $2D$.

4.5.2 Résultats en chauffage différentiel

Nous allons présenter quatre cas :
- $P = 1$, $\eta = 0{,}35$,
- $P = 1$, $\eta = 0{,}4$,
- $P = 0{,}1$, $\eta = 0{,}35$,
- $P = 10$, $\eta = 0{,}35$.

Les résultats pour $P = 1$ et $\eta = 0{,}35$ se trouvent dans les tables 4.10 et 4.11. Les résultats pour $P = 1$ et $\eta = 0{,}4$ se trouvent dans les tables 4.12 et 4.13. Les résultats pour $P = 0{,}1$ et $\eta = 0{,}35$ et pour $P = 10$ et $\eta = 0{,}35$ se trouvent dans les tables 4.14, 4.15 et (4.16). Les remarques faites sur les coefficients $E^{-2/3}\tau_0$ et c_0 sont encore valables en chauffage différentiel. Par contre, le coefficient de décalage fréquentiel γ^{2D} devient positif à bas nombre d'Ekman pour $P = 1$, négatif pour $P = 0{,}1$ et positif pour $P = 10$. De plus, le modèle quasi géostrophique décrit mal ce coefficient par rapport au résultat du modèle tridimensionnel, excepté le fait qu'il ait le même signe (voir la figure 4.14). Les ondes non linéaires « accélèrent », en accord avec le coefficient $K_2 > 0$ dans l'équation (3.16) de Gillet & Jones (2006). Le coefficient de saturation g reste positif pour $P = 1$ et 10 et devient négatif à bas nombre d'Ekman pour $P = 0{,}1$. Il existe donc une différence de comportement entre les deux modèles quasi géostrophiques. Le coefficient de saturation g ne devient négatif que dans le cas $P = 0{,}1$; le nombre d'Ekman E_2 pour lequel g s'annule vaut alors

$$E_2 \;=\; 1{,}53\ 10^{-6} \pm 2{,}1\ 10^{-7}. \tag{4.26}$$

Cette différence de comportement est aussi visible sur la figure 4.5.

4.5.3 Bifurcation sous-critique - analyse des mécanismes

Nous avons tracé les huit contributions de g pour $P = 1$ en chauffage interne et différentiel et pour les deux rapports de rayons (figure 4.6). Les contributions provenant du mode 2 (g_{12}^v,g_{21}^v,g_{12}^t

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	1.71	-0.530	0.180	-0.064	-0.356			
10^{-4}	1.97	-0.433	0.195	-0.0669	-0.344			
10^{-5}	2.06	-0.330	0.231	-0.081	-0.35			
10^{-6}	2.13	-0.258	0.254	-0.102	-0.40			
10^{-7}	2.12	-0.211	0.251	-0.125	-0.50			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0211$	-0.0283	$+0.167$	$+0.0332$	$+0.0245$	-0.0165	-0.0176	-0.00344
10^{-4}	$+0.0164$	-0.0289	$+0.173$	$+0.0410$	$+0.00830$	-0.00389	-0.0107	-0.0000832
10^{-5}	$+0.0118$	-0.0320	$+0.197$	$+0.0572$	$+0.00254$	-0.000830	-0.00465	$+0.000164$
10^{-6}	$+0.00851$	-0.0347	$+0.210$	$+0.0719$	$+0.000947$	-0.000300	-0.00199	$+0.000111$
10^{-7}	$+0.00710$	-0.0412	$+0.203$	$+0.0828$	$+0.000295$	-0.0000967	-0.000925	$+0.0000350$
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0250$	-0.0278	-0.0446	-0.0634	$+0.041$	-0.0301	$+0.0248$	$+0.0113$
10^{-4}	$+0.0195$	-0.0288	-0.0372	-0.0472	$+0.0227$	-0.0128	$+0.0107$	$+0.00620$
10^{-5}	$+0.0197$	-0.0426	-0.0321	-0.0405	$+0.0110$	-0.00460	$+0.00513$	$+0.00305$
10^{-6}	$+0.0173$	-0.0552	-0.0366	-0.0344	$+0.00501$	-0.00173	$+0.00253$	$+0.00137$
10^{-7}	$+0.0139$	-0.0630	-0.0471	-0.0316	$+0.00230$	-0.000717	$+0.00114$	$+0.000628$

TAB. 4.11 – Coefficients de Landau en ***chauffage différentiel*** pour notre modèle quasi géostrophique, avec $P = 1$ et $\eta = 0{,}35$.

$E/2$	$\max u_r^{3D}$	$\max_{\mathrm{EA}} u_r^{3D}$	$\max u_r^{2D}$	$\max u_r^{2D}/\max u_r^{3D}$
10^{-3}	1,84	1,43	1,89	1,02
10^{-4}	3,41	2,60	3,20	0,94
10^{-5}	5,93	4,87	5,89	0,99
$E/2$	$\min V^{3D}$	$\min_{\mathrm{EA}} V^{3D}$	$\min V^{2D}$	$\min V^{2D}/\min V^{3D}$
10^{-3}	$-0{,}0692$	$-0{,}0683$	$-0{,}0603$	0,87
10^{-4}	$-0{,}112$	$-0{,}103$	$-0{,}088$	0,79
10^{-5}	$-0{,}1858$	$-0{,}1856$	$-0{,}158$	0,85
$E/2$	γ^{3D}		γ^{2D}	γ^{2D}/γ^{3D}
10^{-3}	1,68		$-0{,}142$	$-0{,}085$
10^{-4}	0,511		$-0{,}0458$	$-0{,}090$
10^{-5}	0,255		0,036	0,14

TAB. 4.12 – En ***chauffage différentiel*** pour $\eta = 0{,}4$ et $P = 1$, propriétés provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	1.59	-0.474	0.281	-0.0955	-0.339			
10^{-4}	1.83	-0.376	0.316	-0.104	-0.330			
10^{-5}	1.95	-0.326	0.333	-0.121	-0.362			
10^{-6}	1.98	-0.263	0.357	-0.151	-0.424			
10^{-7}	1.99	-0.192	0.385	-0.196	-0.510			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0272$	-0.0418	$+0.250$	$+0.0541$	$+0.0290$	-0.0175	-0.0176	-0.00154
10^{-4}	$+0.0211$	-0.0438	$+0.274$	$+0.0691$	$+0.00993$	-0.00418	-0.0107	$+0.000487$
10^{-5}	$+0.0168$	-0.0471	$+0.281$	$+0.0860$	$+0.00281$	-0.000900	-0.00567	$+0.000185$
10^{-6}	$+0.0131$	-0.0536	$+0.292$	$+0.107$	$+0.000866$	-0.000271	-0.00261	$+0.0000636$
10^{-7}	$+0.00961$	-0.0628	$+0.310$	$+0.130$	$+0.000298$	-0.0000973	-0.00108	$+0.000032$
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0398$	-0.0485	-0.0539	-0.0910	$+0.0477$	-0.0325	$+0.0230$	$+0.0129$
10^{-4}	$+0.0319$	-0.0534	-0.0467	-0.0696	$+0.0263$	-0.0134	$+0.0136$	$+0.00702$
10^{-5}	$+0.0286$	-0.0635	-0.0483	-0.0558	$+0.0137$	-0.00556	$+0.00630$	$+0.00381$
10^{-6}	$+0.0250$	-0.0798	-0.0571	-0.0482	$+0.00641$	-0.00220	$+0.00300$	$+0.00177$
10^{-7}	$+0.0201$	-0.101	-0.0737	-0.0460	$+0.00274$	-0.000836	$+0.00137$	$+0.000742$

TAB. 4.13 – Coefficients de Landau en ***chauffage différentiel*** pour notre modèle quasi géostrophique, avec $P = 1$ et $\eta = 0{,}4$.

	$P = 0{,}1$			$P = 10$		
$E/2$	$\max u_r^{2D}$	$\min V^{2D}$	γ^{2D}	$\max u_r^{2D}$	$\min V^{2D}$	γ^{2D}
10^{-3}	7.72	-1.24	0.446	0.223	-0.000660	-0.452
10^{-4}	8.73	-1.46	1.15	0.421	-0.00108	-0.323
10^{-5}	14.9	-2.26	1.22	0.811	-0.00191	-0.275
10^{-6}	64.6	-21.9	8.10	1.61	-0.00358	-0.235

TAB. 4.14 – En ***chauffage différentiel*** pour $\eta = 0{,}35$ et $P = 0{,}1$ et 10, propriétés provenant des calculs $3D$ de Simitev et du modèle quasi géostrophique $2D$.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	1.16	0.307	0.00604	-0.00308	-0.510			
10^{-4}	1.29	-0.267	0.0189	-0.0438	-2.32			
10^{-5}	1.51	-0.00952	0.0180	-0.0435	-2.41			
10^{-6}	1.75	0.0712	0.00350	-0.0610	-17.6			
10^{-7}	2.08	0.184	-0.0239	-0.0557	2.33			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	-0.00995	$+0.00804$	$+0.00218$	$+0.00476$	-0.00542	$+0.00654$	-0.0000853	-0.0000239
10^{-4}	$+0.00943$	-0.000867	$+0.00470$	$+0.00945$	-0.00413	$+0.000761$	-0.000171	-0.000276
10^{-5}	$+0.00513$	-0.00303	$+0.00414$	$+0.0135$	-0.00226	$+0.000773$	-0.0000335	-0.000169
10^{-6}	$+0.00926$	-0.0210	$+0.00345$	$+0.0124$	-0.000905	$+0.000259$	$+0.0000269$	-0.0000715
10^{-7}	$+0.00754$	-0.0386	$+0.00150$	$+0.00586$	-0.000229	$+0.0000529$	$+0.0000181$	-0.0000174
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0231$	-0.0216	$+0.000853$	-0.00416	-0.00323	$+0.00232$	-0.000175	-0.000187
10^{-4}	$+0.0453$	-0.0687	-0.000686	-0.0217	$+0.00633$	-0.00510	$+0.000391$	$+0.000310$
10^{-5}	$+0.0255$	-0.0527	-0.000354	-0.0164	$+0.00147$	-0.00120	$+0.000175$	$+0.0000772$
10^{-6}	$+0.0149$	-0.0552	-0.00153	-0.0196	$+0.000701$	-0.000408	$+0.0000975$	$+0.0000408$
10^{-7}	$+0.00348$	-0.0394	-0.0021	-0.0179	$+0.000230$	-0.0000987	$+0.0000297$	$+0.0000133$

TAB. 4.15 – Coefficients de Landau en ***chauffage différentiel*** pour notre modèle quasi géostrophique avec $\eta = 0{,}35$ et $P = 0{,}1$.

$E/2$	$E^{-2/3}\tau_0$	c_0	g	gc_1	c_1			
10^{-3}	18.5	-1.38	12.9	-9.31	-0.724			
10^{-4}	18.6	-1.42	14.5	-13.4	-0.926			
10^{-5}	18.8	-1.40	15.6	-15.3	-0.98			
10^{-6}	19.2	-1.39	15.8	-16.4	-1.04			
$E/2$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Re}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.0292$	-0.0381	$+12.9$	$+0.0732$	$+0.332$	-0.223	-0.435	$+0.179$
10^{-4}	$+0.0243$	-0.0473	$+14.4$	$+0.175$	$+0.125$	-0.0551	-0.315	$+0.181$
10^{-5}	$+0.0177$	-0.0511	$+15.3$	$+0.274$	$+0.0475$	-0.0162	-0.13	$+0.089$
10^{-6}	$+0.0123$	-0.0515	$+15.5$	$+0.360$	$+0.0189$	-0.00568	-0.0505	$+0.0399$
$E/2$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(G^t_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^v_{21})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{12})$	$\mathrm{Im}\,(g^t_{21})$
10^{-3}	$+0.00628$	-0.00330	-12.1	-0.640	$+0.0853$	-0.0918	$+2.47$	$+0.915$
10^{-4}	$+0.00649$	-0.00428	-14.1	-0.572	$+0.0559$	-0.0385	$+0.963$	$+0.259$
10^{-5}	$+0.00733$	-0.0108	-15.3	-0.490	$+0.0251$	-0.0123	$+0.41$	$+0.086$
10^{-6}	$+0.00659$	-0.0175	-16.2	-0.415	$+0.0104$	-0.00407	$+0.177$	$+0.031$

TAB. 4.16 – Coefficients de Landau en ***chauffage différentiel*** pour notre modèle quasi géostrophique avec $\eta = 0{,}35$ et $P = 10$.

et g^t_{21}) sont négligeables devant celles du mode 0 (G^v_{12},G^v_{21},G^t_{12} et G^t_{21}).

Trois contributions principales à g rendent la bifurcation sous critique à bas nombre d'Ekman en chauffage interne et de surcroît à bas nombre de Prandtl en chauffage différentiel. Il s'agit de $\mathrm{Re}\,(G^v_{12})$, $\mathrm{Re}\,(G^v_{21})$ et $\mathrm{Re}\left(G^t_{21}\right)$. Nous avons tracé sur le graphe 4.7 pour un nombre de Prandtl unitaire l'intégrande de ces contributions que l'on note $\mathrm{Int}\,(G^v_{12})$, $\mathrm{Int}\,(G^v_{21})$ et $\mathrm{Int}\left(G^t_{21}\right)$. La contribution qui semble avoir un comportement différent selon le mode de chauffage est le terme $\mathrm{Int}\left(G^t_{21}\right)$: il oscille davantage en chauffage interne. On va se limiter à l'étude d'un seul mécanisme : celui de $\mathrm{Re}\left(G^t_{21}\right)$. Pour cela, on va regarder de plus près chaque contribution de l'intégrande de ce terme

$$\mathrm{Re}\left(G^t_{21}\right) = \mathrm{Re}\,\langle iPm_cV_2\theta_1\theta^*_a\rangle_{r\varphi} \tag{4.27}$$

$$\mathrm{Re}\left(G^t_{21}\right) = Pm_c\,\langle V_2(r)\,[\Theta_{1r}(r)\Theta_{ai}(r) - \Theta_{1i}(r)\Theta_{ar}(r)]\rangle_r \tag{4.28}$$

Si on trace pour les deux modèles $V_2(r)$, on remarque que l'écoulement moyen se localise davantage vers r_i en chauffage différentiel (figure 4.3). On trace également les quatre fonctions thermiques intervenant dans $\mathrm{Int}\left(G^t_{21}\right)$ sur les graphes (4.8) pour $\eta = 0{,}4$. Les parties réelles et imaginaires de Θ_1 et son adjoint Θ_a oscillent davantage en chauffage interne. Comme $\mathrm{Int}\left(G^t_{21}\right)$ est le produit de $\Theta_{1r}\Theta_{ai} - \Theta_{1i}\Theta_{ar}$ par $V_2(r)$ (au facteur Pm_c près), les graphes 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12 nous montrent la localisation plus faible de $V_2(r)$ en chauffage interne. La fonction thermique oscillant davantage en chauffage interne, le produit devient négatif plus souvent. C'est le cas pour P assez grand et $E < 2\ 10^{-5}$. De plus, la fonction thermique est en phase avec l'écoulement zonal en chauffage différentiel sauf à bas P, le produit est donc souvent positif.

4.5.4 Comparaison des modèles 2D et 3D sur le mode 0 de vitesse

On compare les écoulements zonaux résultant des modèles quasi géostrophiques bidimensionnels avec ceux des modèles tridimensionnels de Simitev évalués dans le plan équatorial (figures 4.13). L'accord est semi-quantitatif : les valeurs minimales et maximales des modèles quasi géostrophiques ne convergent pas bien vers celles du modèle tridimensionnel quand le nombre d'Ekman tend vers zéro. Cependant, l'accord est meilleur en chauffage interne pour $\eta = 0{,}4$ que pour $\eta = 0{,}35$.

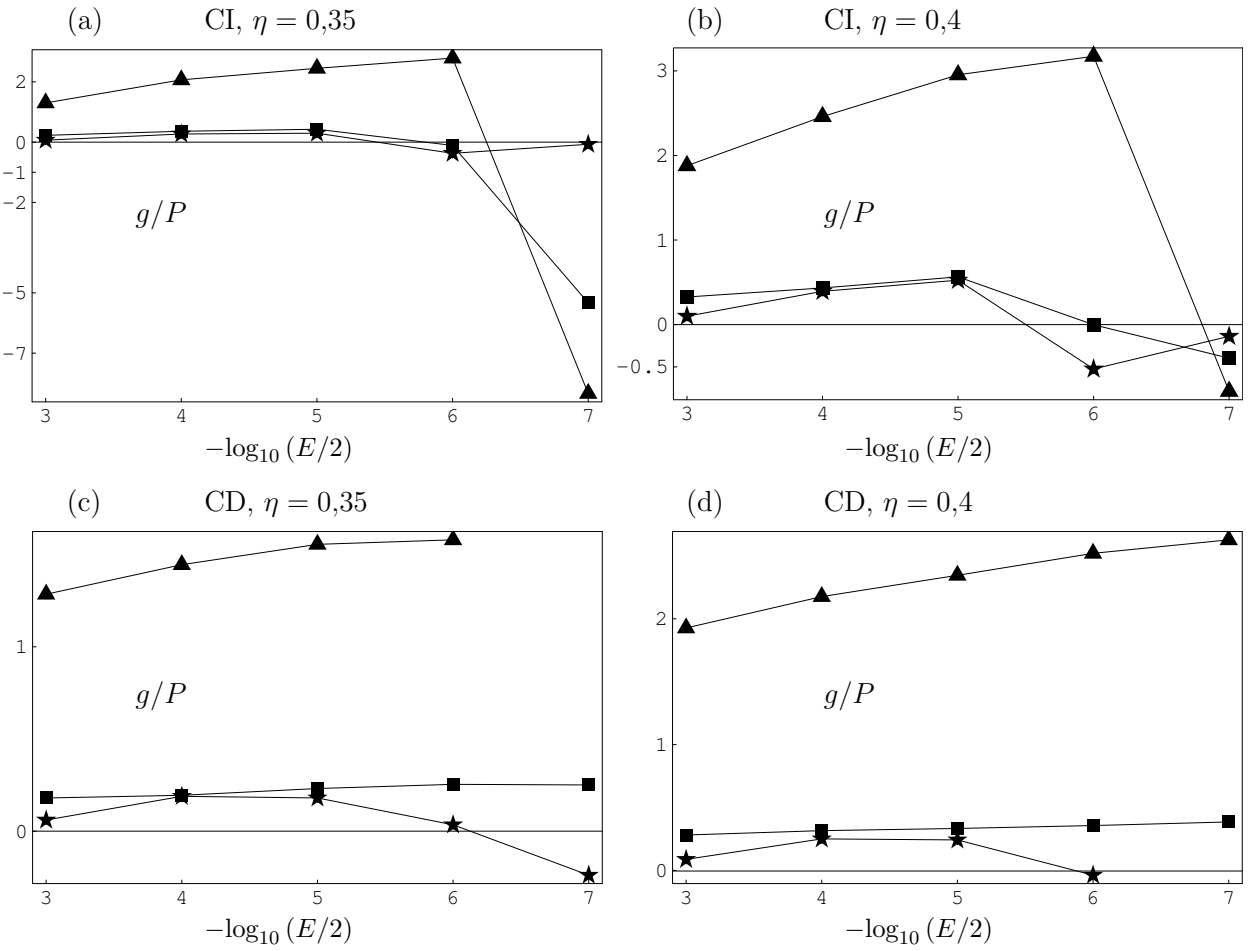


Fig. 4.5 – Pour nos modèle quasi-géostrophique en ***chauffage interne*** (CI) et ***différentiel*** (CD), coefficients de saturation g/P pour différentes valeurs de nombre de Prandtl pour un rapport de rayons $\eta = 0{,}35$ ((a) et ((c)) et $\eta = 0{,}40$ ((b) et (d)). La division par le nombre de Prandtl permet de voir les 3 courbes à la même échelle. $\star$: $P = 0{,}1$; $\blacksquare$: $P = 1$; Δ : $P = 10$.

4.5.5 Comparaison des modèles avec et sans pompage d'Ekman sur le mode 0 de vitesse

Nous avons regardé l'importance du pompage d'Ekman sur le mode homogène de vitesse. Pour cela, nous avons tracé l'écoulement zonal calculé avec ou sans pompage d'Ekman (figures 4.13). Tenir compte du pompage d'Ekman sur le mode homogène de vitesse influence l'écoulement zonal. Si on le néglige, on suretime la force de l'écoulement zonal.

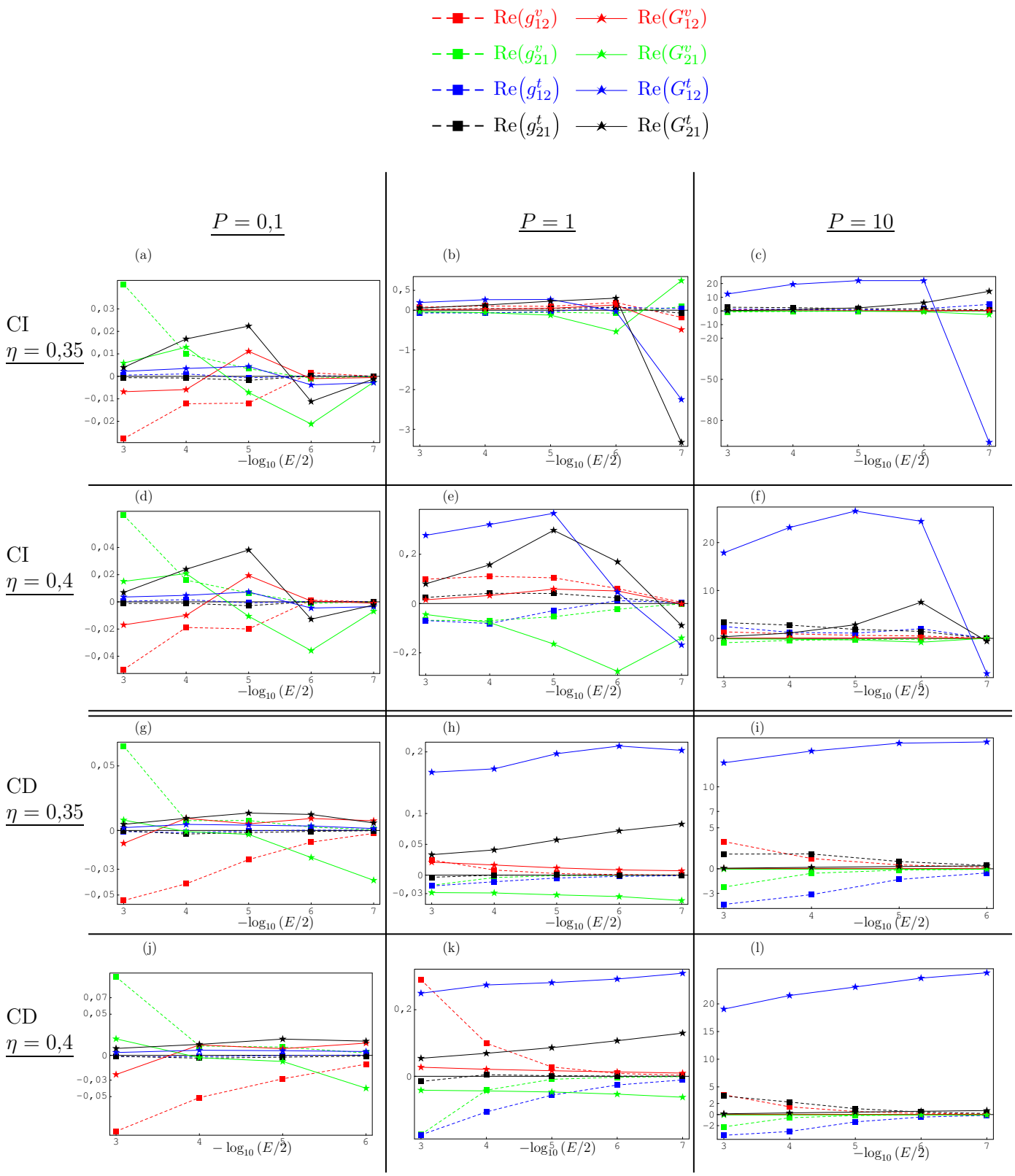


Fig. 4.6 – Contributions à g en fonction de E pour $P = 0{,}1$, 1 et 10 en ***chauffage interne*** (CI) et ***différentiel*** (CD) pour $\eta = 0{,}35$ et 0,4.

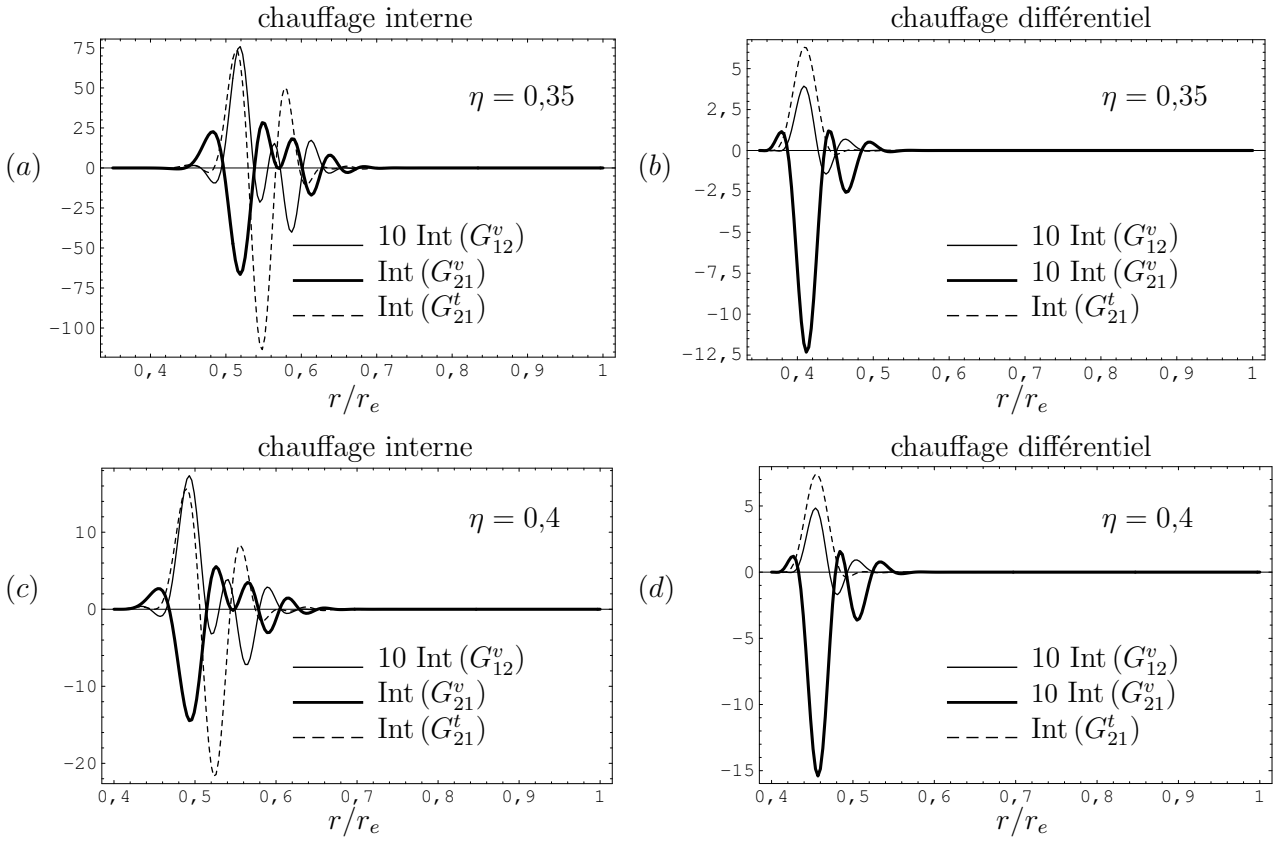


Fig. 4.7 – Intégrandes des 3 contributions principales du coefficient de saturation g en ***chauffages interne*** et ***différentiel*** pour $E = 2\ 10^{-6}$ et $P = 1$.

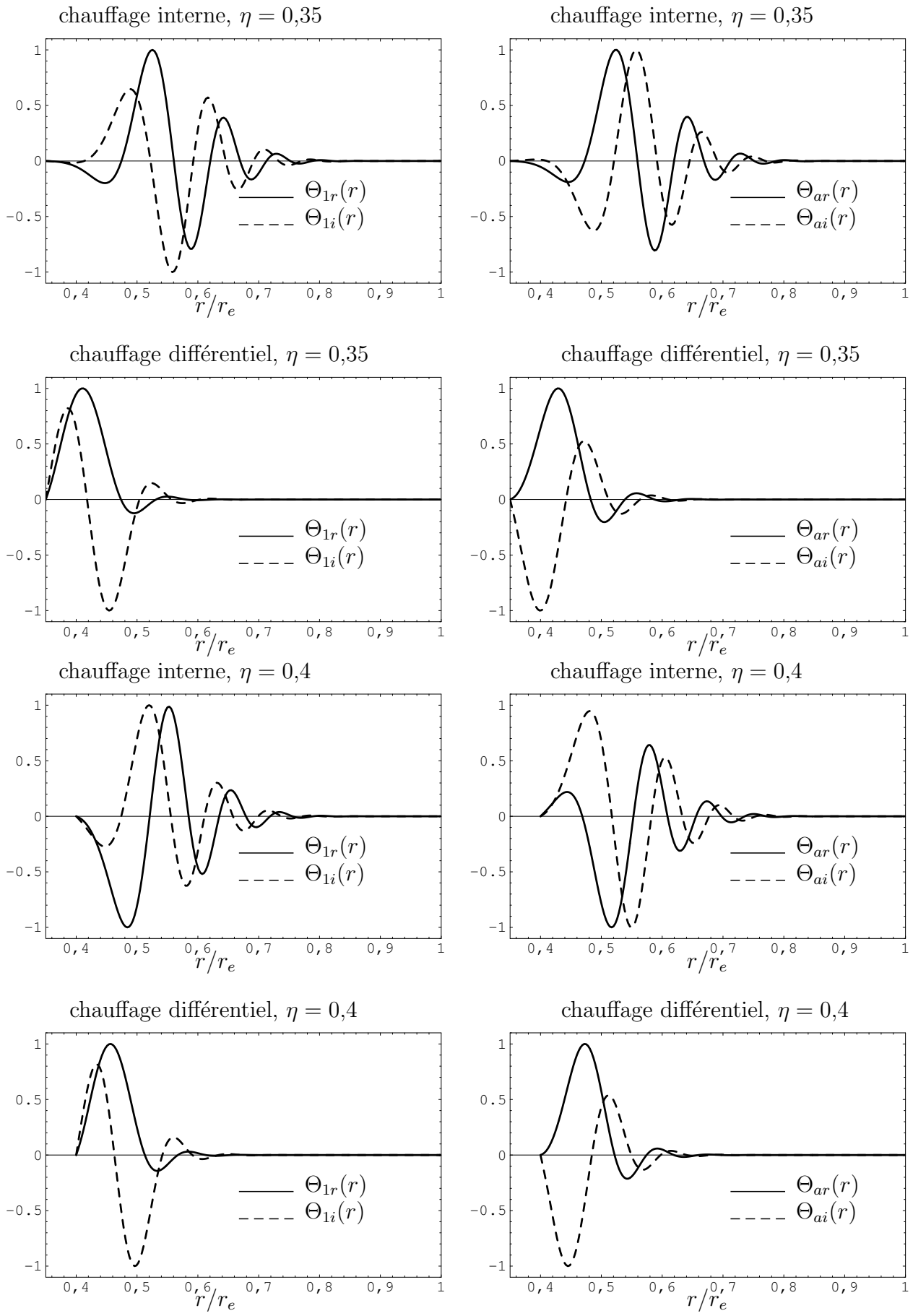


Fig. 4.8 – En ***chauffages interne*** et ***différentiel***, parties réelle et imaginaire de la perturbation en température critique et de son adjoint en fonction de r, normalisés à un en valeur absolue maximale, pour $E = 2\ 10^{-6}$ et $P = 1$.

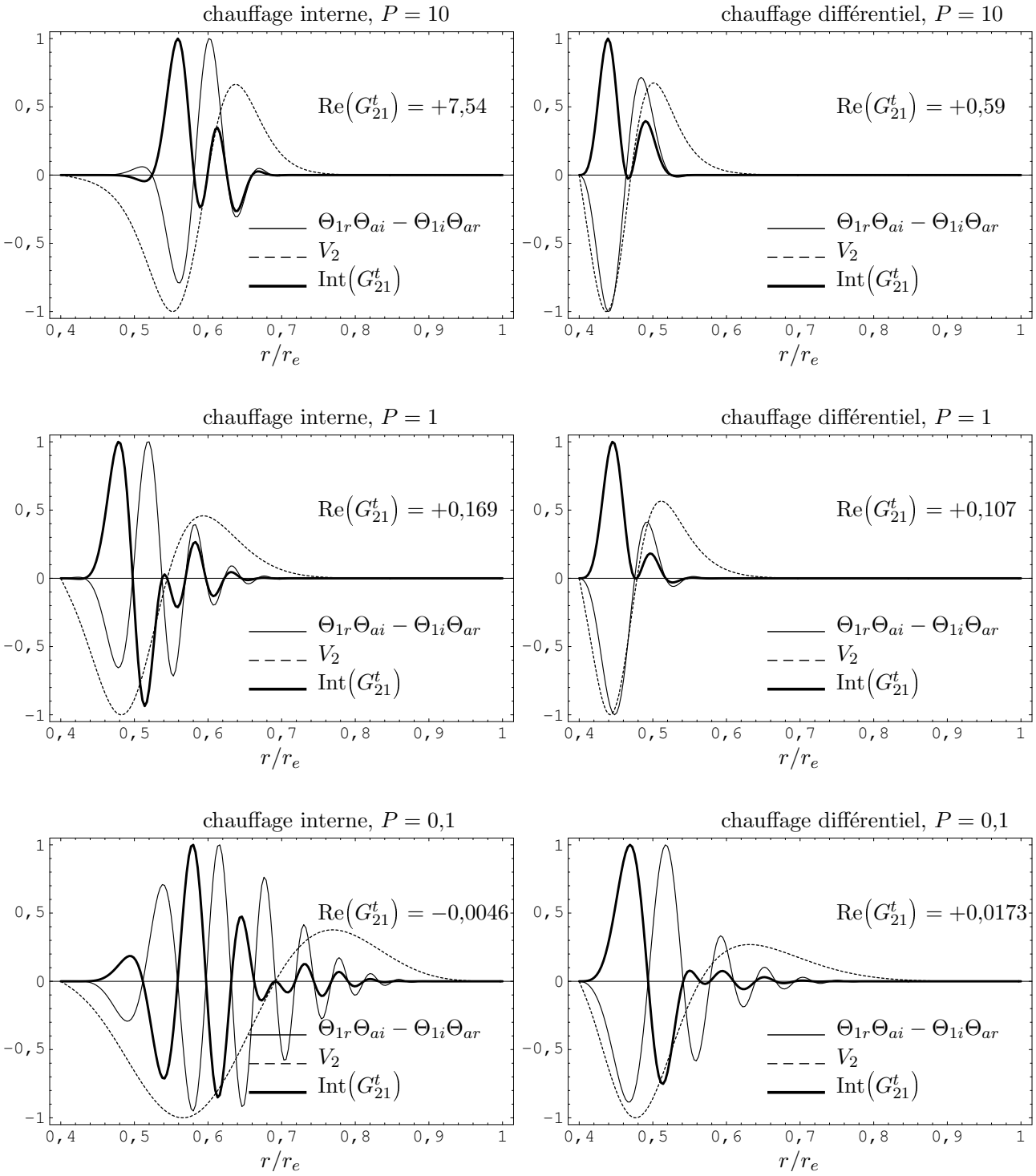


Fig. 4.9 – En trait fin, $(\Theta_{1r}(r)\Theta_{ai}(r) - \Theta_{1i}(r)\Theta_{ar}(r))$ en fonction de r. En trait pointillé, $V_2(r)$ en fonction de r. Le produit qui est l'intégrande de G^t_{21} (à m_c près) de ces deux quantités est en trait épais. À gauche, ***chauffage interne***, à droite, ***chauffage différentiel***, tous deux pour $\eta = 0{,}4$, $E = 2\ 10^{-6}$ et $P = 1$. L'échelle des quantités n'est pas respectée ici, les trois quantités étant normalisées à un en valeur absolue maximale.

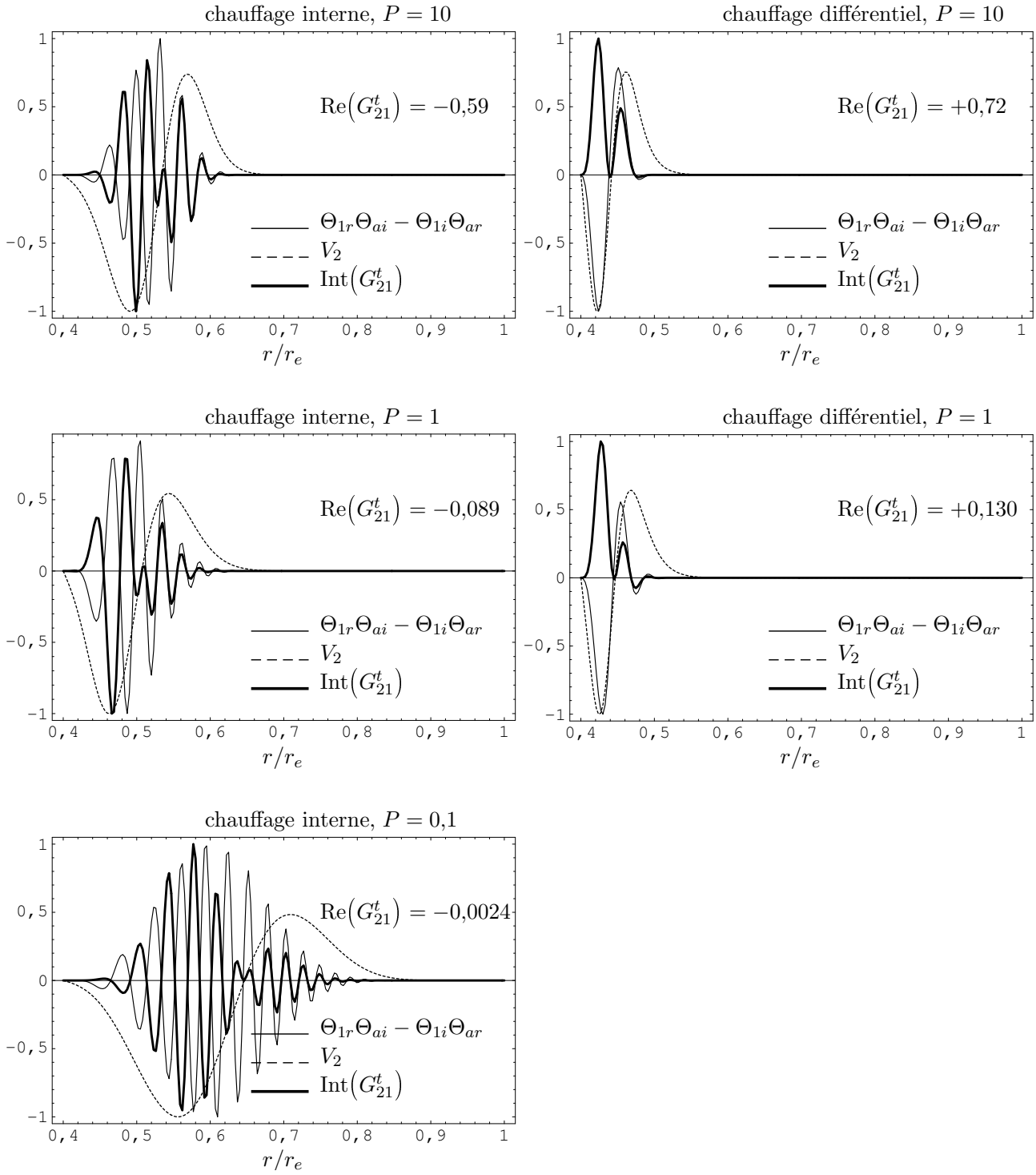


Fig. 4.10 – En trait fin, $(\Theta_{1r}(r)\Theta_{ai}(r) - \Theta_{1i}(r)\Theta_{ar}(r))$ en fonction de r. En trait pointillé, $V_2(r)$ en fonction de r. Le produit qui est l'intégrande de G^t_{21} (à m_c près) de ces deux quantités est en trait épais. À gauche, ***chauffage interne***, à droite, ***chauffage différentiel***, tous deux pour $\eta = 0{,}40$, $E = 2\ 10^{-7}$ et $P = 1$. L'échelle des quantités n'est pas respectée ici, les trois quantités étant normalisées à un en valeur absolue maximale.

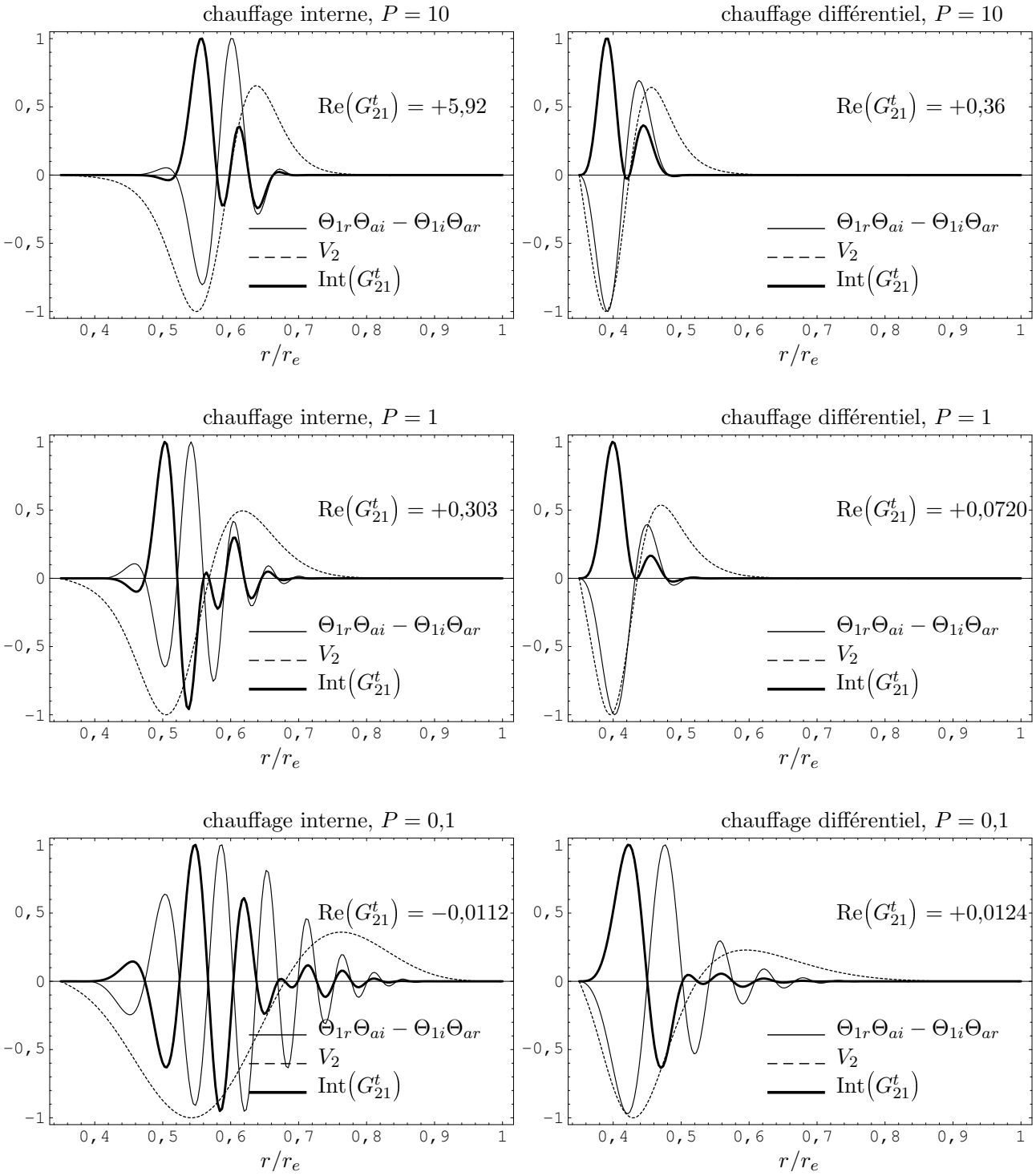


Fig. 4.11 – En trait fin, $(\Theta_{1r}(r)\Theta_{ai}(r) - \Theta_{1i}(r)\Theta_{ar}(r))$ en fonction de r. En trait pointillé, $V_2(r)$ en fonction de r. Le produit qui est l'intégrande de G^t_{21} (à m_c près) de ces deux quantités est en trait épais. À gauche, ***chauffage interne***, à droite, ***chauffage différentiel***, tous deux pour $\eta = 0{,}35$, $E = 2\ 10^{-6}$ et $P = 1$. L'échelle des quantités n'est pas respectée ici, les trois quantités étant normalisées à un en valeur absolue maximale.

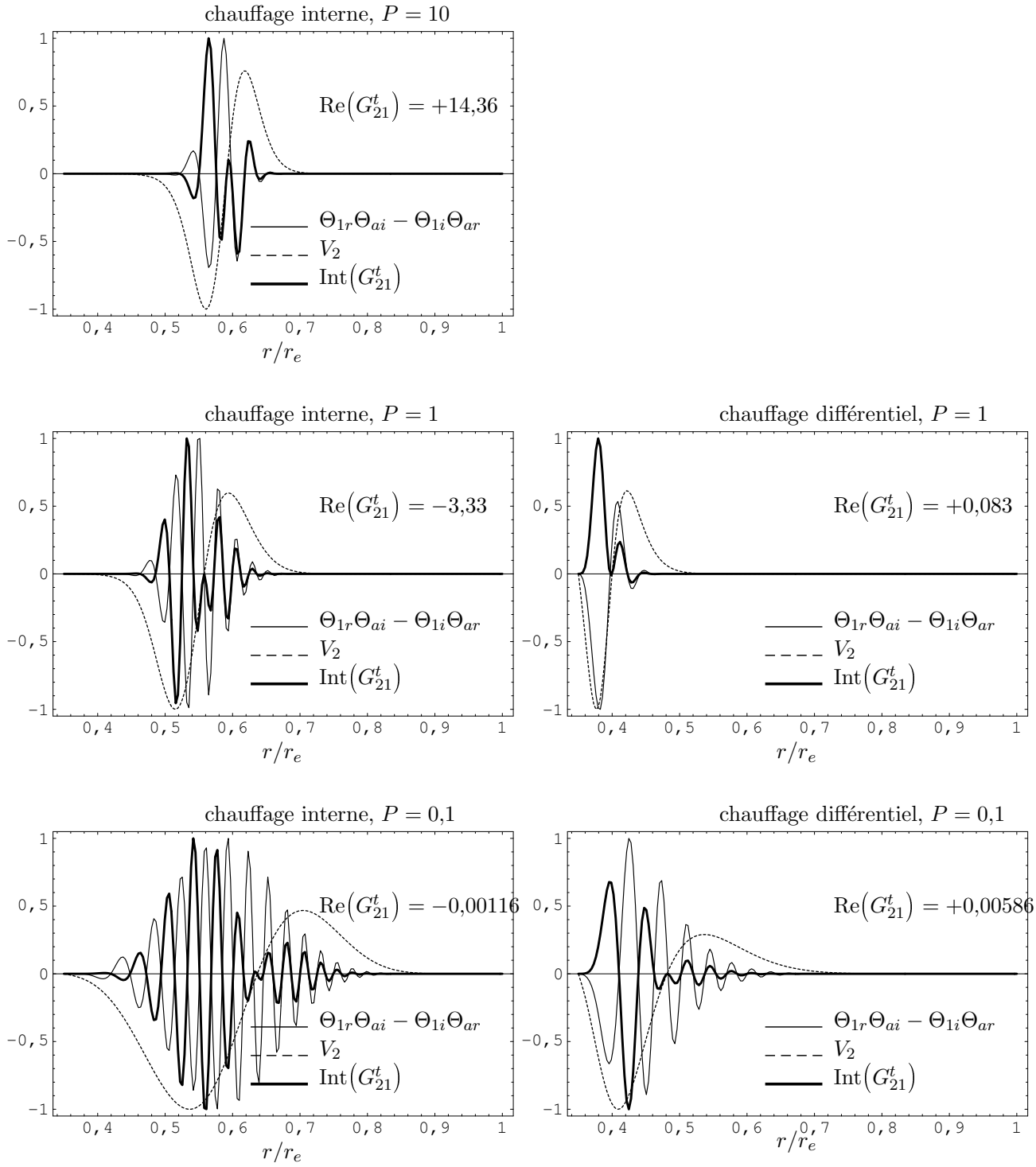


Fig. 4.12 – En trait fin, $(\Theta_{1r}(r)\Theta_{ai}(r) - \Theta_{1i}(r)\Theta_{ar}(r))$ en fonction de r. En trait pointillé, $V_2(r)$ en fonction de r. Le produit qui est l'intégrande de G_{21}^t (à m_c près) de ces deux quantités est en trait épais. À gauche, ***chauffage interne***, à droite, ***chauffage différentiel***, tous deux pour $\eta = 0{,}35$, $E = 2\ 10^{-7}$ et $P = 1$. L'échelle des quantités n'est pas respectée ici, les trois quantités étant normalisées à un en valeur absolue maximale.

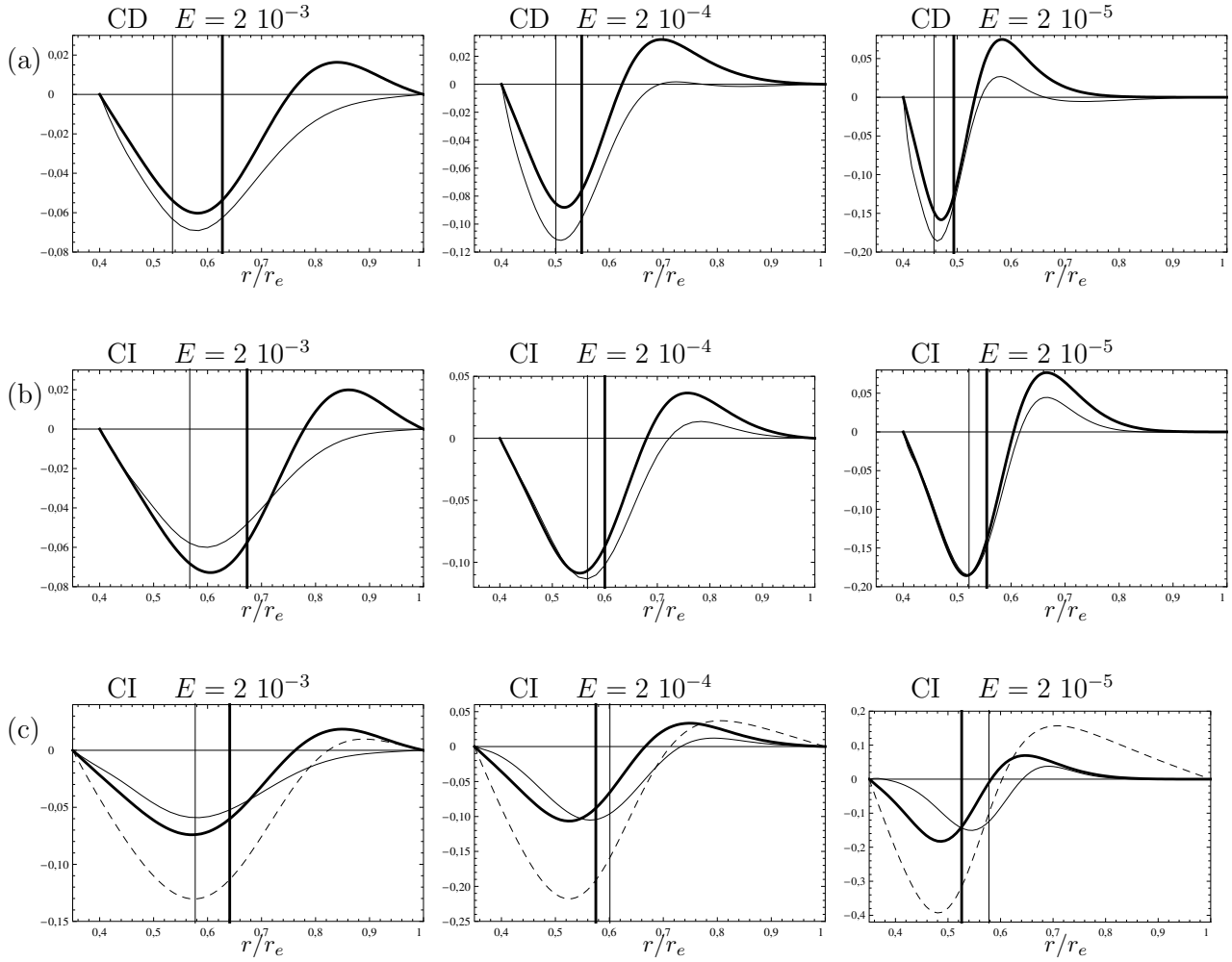


Fig. 4.13 – Écoulements zonaux normalisés physiquement pour $\epsilon = 0{,}01$ pour $P = 1$. (a) : ***chauffage différentiel***, $\eta = 0{,}4$; (b) : ***chauffage interne***, $\eta = 0{,}4$; (c) : ***chauffage interne***, $\eta = 0{,}35$. En trait gras, notre modèle quasi géostrophique bidimensionnel avec pompage d'Ekman sur le mode 0 de vitesse, en trait pointillé, celui sans ce pompage d'Ekman, et trait fin, champ évalué dans le plan équatorial des ***modèles tridimensionnels*** de Simitev. Les traits verticaux montrent la localisation du rayon critique pour les modèles quasi géostrophique (en trait épais) et tridimensionnel (en trait fin).

Chapitre 5

Conclusion-Perspectives

Nous avons présenté dans cette partie une étude de modèles quasi géostrophiques de convection dans une coquille sphérique en rotation rapide. Nous avons ainsi montré la ***première validation semi quantitative de modèles bidimensionnels par rapport à des modèles tridimensionnels en régime faiblement non linéaire***. Dans le cas du chauffage différentiel, notre modèle est original par rapport à ce qui existe dans la littérature, au niveau du traitement de l'équation de la chaleur (cf. la discussion de la page 42). En analyse linéaire, nous avons montré qu'il est nécessaire de descendre à de très faibles valeurs d'Ekman pour que les modèles numériques soient en accord avec les analyses asymptotiques. En analyse non linéaire, nous avons mené le premier calcul systématique de l'équation de Landau pour ces modèles. Une bifurcation sous-critique a été trouvée à bas nombre d'Ekman en chauffage interne, à bas E et P en chauffage différentiel. Ces résultats confirment l'étude de Cole (2004) en chauffage interne. La découverte d'une bifurcation sous-critique en chauffage différentiel est intéressante, car elle contredit quelque peu l'interprétation de Gillet & Jones (2006) la liant à un désaccord entre les nombres de Rayleigh prédits par les théories asymptotiques locale et globale, désaccord n'existant pas en chauffage différentiel. Cependant, une analyse plus fine des mécanismes reste à faire pour mieux comprendre ce changement de nature de la bifurcation.

Les paramètres critiques de nos modèles quasi géostrophiques suivent le régime asymptotique dès lors que $E \leq 2\ 10^{-5}$ pour P assez grand. Un régime asymptotique pour les propriétés non linéaires n'est pas atteint pour $E \geq 2\ 10^{-7}$. Pour preuve, les coefficients $\mathrm{Re}\left(G_{12}^t\right)$, $\mathrm{Re}\left(G_{21}^t\right)$ et $\mathrm{Re}\left(G_{21}^v\right)$ changent violemment de comportement entre $E = 2\ 10^{-6}$ et $2\ 10^{-7}$ et ce uniquement en chauffage interne (voir la figure 4.6 et les tables 4.2, 4.4, 4.7, 4.8, 4.11, 4.13, 4.15 et 4.16). Il faudra considérer des nombres d'Ekman encore plus petits $E \leq 2\ 10^{-7}$ pour peut être atteindre un régime asymptotique en non linéaire. Il est difficile de donner une interprétation physique des propriétés non linéaires de ces modèles de convection tournante, et ce même dans l'analyse faiblement non linéaire quasi géostrophique. La contribution du coefficient de saturation g nous paraissant la plus simple, à savoir $\mathrm{Re}\left(G_{21}^t\right)$ (4.28) implique tout de même les fonctions de phase de Θ_1 et Θ_a (figure 4.8). Ces fonctions varient dans l'anneau du fait de la spiralisation des ondes, et ce davantage en chauffage interne (figures 4.8, 4.10, 4.11 et 4.12).

Pour raffiner ces modèles quasi géostrophiques bidimensionnels, il faudrait inclure les effets de pompage d'Ekman sur les ondes, ce que firent Gillet & Jones (2006) dans l'équation de vorticité dans un modèle quasi géostrophique en chauffage interne. Emmanuel Plaut a réalisé l'inclusion dans les équations de vorticité et de chaleur des effets de pompage d'Ekman dans le cas en chauffage interne, ce qui donne les résultats inclus dans l'article Plaut *et al.* (2008) placé à la fin de ce mémoire, resoumis au *Journal of Fluid Mechanics*. De tels modèles bidimensionnels quasi géostrophiques pourraient aider au développement de ***modèles dynamo quasi géostrophiques*** du type de ceux de Schaeffer & Cardin (2006) mais en thermoconvection. En effet, couplés à l'équation

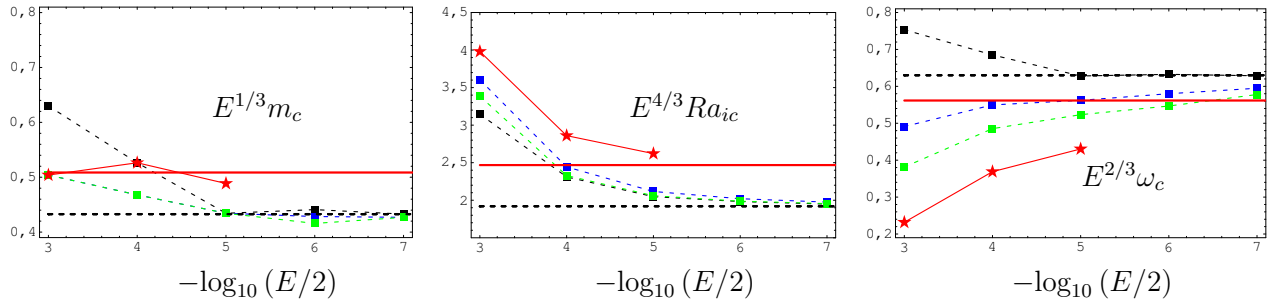


Fig. 5.1 – En ***chauffage interne*** avec $P = 1$ et $\eta = 0{,}35$, paramètres critiques mis à l'échelle : en trait rouge, la prédiction asymptotique de Jones *et al.* (2000), en trait pointillés, celle de Cole (2004) ; les traits noirs correspondent à notre modèle quasi géostrophique sans pompage d'Ekman sur les ondes, les traits bleus à un modèle avec des effets de pompage d'Ekman sur les ondes dans l'équation de la vorticité, les traits verts au modèle de Plaut *et al.* (2008) avec des effets de pompage d'Ekman sur les ondes dans l'équation de la vorticité et de la chaleur. Les étoiles rouges indiquent les résultats tridimensionnels de Simitev qui sont notre référence.

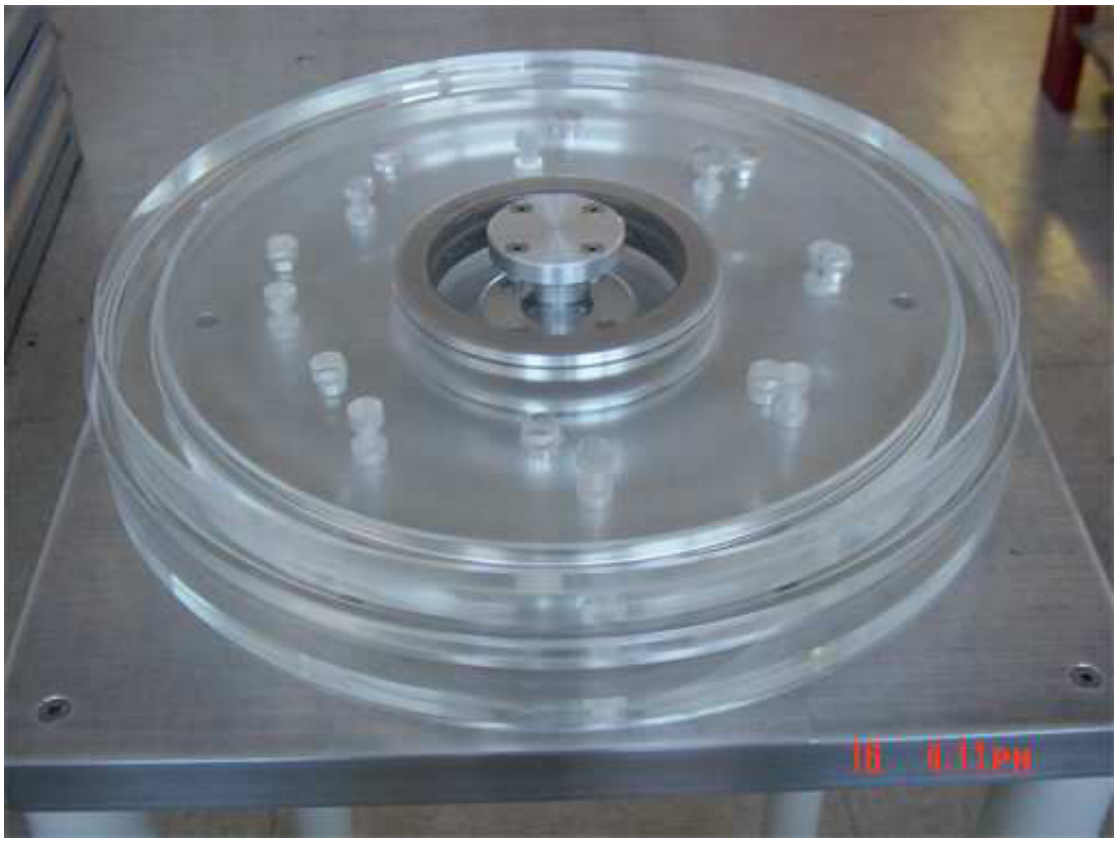
tridimensionnelle de l'induction, ces modèles quasi géostrophiques pourraient donner des résultats pertinents tout en diminuant les efforts numériques. À en croire les tables 4.3,4.5 et 4.12, la comparaison concernant l'amplitude de l'onde et celle de l'écoulement moyen est relativement correct. Le seul point négatif est le coefficient de décalage fréquentiel γ^{2D} mal décrit par nos modèles bidimensionnels, que ce soit l'amplitude ou le signe de ce coefficient. L'ajout des effets de pompage d'Ekman sur le mode 1 améliore notamment la description de la dynamique fréquentielle des ondes. Pour s'en convaincre, nous pouvons regarder les figures 5.1 et comparer la dernière colonne du tableau 3.5 avec la dernière colonne du tableau 2 page 12 de Plaut *et al.* (2008). Il serait intéressant de faire la même chose, i.e. inclure des effets de pompage d'Ekman sur les ondes, en chauffage différentiel.

Une analyse asymptotique (quand $E \to 0$) faiblement non linéaire serait intéressante, mais il serait alors nécessaire de descendre à des nombres d'Ekman extrêmement petits. Une difficulté évidente est l'inexistence de lois d'échelles universelles pour l'amplitude de l'écoulement zonal démontrée par le fait que les exposants donnés dans la table 4.1 page 75 dépendent de P et η. Il faudrait également s'intéresser également à la convection fortement non linéaire sans se restreindre à des solutions de type « ondes ». On pourrait ainsi s'intéresser aux phénomènes complexes de ***vacillations*** (Morin & Dormy, 2004) ou d'écoulements zonaux en ***bandes*** (Morin & Dormy, 2006). Une question intéressante que l'on pourrait également se poser est la suivante : que se passe-t-il en régime sous-critique ? Il reste donc beaucoup de choses à faire...

Deuxième partie

Deuxième partie

Approche expérimentale



Mise au point d'une expérience :
écoulements cisaillés tournants en canal annulaire

Chapitre 6

Introduction à la partie expérimentale

6.1 Contexte et motivations de l'étude

On a vu dans l'introduction globale l'importance des ondes non linéaires en hydrodynamique. De nombreux systèmes dissipatifs exhibent de telles structures spatiallement périodiques, dès lors que le seuil d'une bifurcation structurante est dépassée. Des systèmes simples tels que les systèmes fermés annulaires à faible courbure permettent à priori l'utilisation de modèles de type Ginzburg-Landau pour décrire la dynamique des ondes non linéaires. La coordonnée de structuration x est alors donnée par le produit du rayon moyen $\overline{r}$ autour duquel se développent les ondes par l'angle d'azimut φ : $x = \overline{r}\varphi$. Parmi ces systèmes, on retrouve les modèles d'anneaux cylindriques tournants chauffés tels ceux visibles sur la figure 1.5a. C'est en étudiant ces modèles que Plaut & Busse (2002) ont montré qu'en topologie annulaire l'équation de Ginzburg-Landau (2) doit en général être modifiée pour inclure un terme ***non local***

$$\tau_0(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1+ic_0)\epsilon A + \xi^2(1+ic_0')\partial_x^2 A - g(1+ic_1)|A|^2 A - g_n\,(1+ic_1^n)\left\langle\, |A|^2 \,\right\rangle_x A \tag{6.1}$$

avec

$$\left\langle\, |A|^2 \,\right\rangle_x = \frac{1}{2\pi\overline{r}} \int_0^{2\pi\overline{r}} |A|^2 \, dx$$

la valeur moyennée sur un tour de canal du carré de l'enveloppe $A\,(x,t)$. Le terme non local provient de la condition d'incompressibilité et de la condition qui assure l'existence d'un champ de pression périodique (voir aussi Plaut 2003). La motivation ultime de cette partie de ma thèse était de tenter de mettre en évidence de tels effets dans une expérience annulaire plus simple qu'une manipulation de thermoconvection tournante, compliquée à cause des problèmes de régulation en température. On a donc décidé d'étudier la possibilité de tels effets dans un ***canal annulaire tournant cisaillé par un couvercle tournant***. Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de mener jusqu'au bout cette étude. Il a fallu d'abord mettre au point la manipulation qui n'existait pas avant le début de mon stage de DEA, étudier les écoulements de base produits et l'instabilité primaire...

La nouvelle manipulation mise au point au LEMTA a été construite en s'inspirant des manipulations mises au point à l'IMFT par l'équipe de François Charru, présentées sur la figure 6.1. Barthelet *et al.* (1995); Barthelet & Charru (1998); Charru & Barthelet (1999) étudièrent dans ce système les instabilités d'une interface entre deux fluides non miscibles. La première instabilité

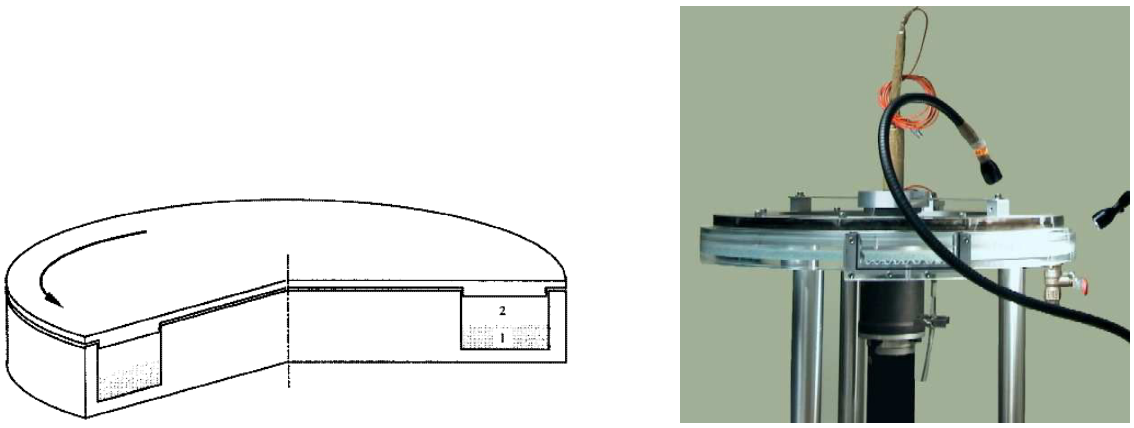


Fig. 6.1 – Manipulation (schématisée à gauche et en photo à droite) de cisaillement de Barthelet *et al.* (1995). Un canal annulaire de section rectangulaire 40 mm x 20 mm est creusé dans un plateau fixe. Le rayon intérieur est 180 mm et le rayon extérieur 220 mm. Ce canal est cisaillé par un couvercle tournant. Les numéros dans le canal montrent la présence de deux fluides non miscibles placés l'un au-dessus de l'autre.

structurante apparaît pour des nombres de Reynolds faibles, inférieurs à 500, définis comme suit :

$$Re = (\Omega \overline{r} H)/\nu, \tag{6.2}$$

avec Ω la vitesse de rotation du plateau, H la hauteur du canal et ν la viscosité cinématique du fluide (voir la nomenclature page 119).
L'intérêt d'un faible nombre de Reynolds est d'obtenir un écoulement simple, quasiment de type Couette plan (figure 6.2), afin d'étudier d'autres effets tels que des problèmes diphasiques ou encore le problème d'érosion et de dépôt de particules en milieu granulaire (Charru *et al.*, 2004). Notre étude se place dans la continuité de ces travaux, qui ont proposé (cf. Barthelet *et al.* 1995 page 29) une première analyse linéaire de stabilité numérique du cas monophasique, qui a montré que l'écoulement de base axisymétrique est stable jusqu'à un nombre de Reynolds de 1000. Nous allons travailler en monophasique à un nombre de Reynolds plus élevé afin de mettre en évidence la première instabilité de l'écoulement de base axisymétrique. Il faut signaler que, comme l'écoulement de Couette plan, l'écoulement dans un canal rectiligne cisaillé par un couvercle est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds (Theofilis *et al.*, 2004). Par contre, nous allons voir que l'écoulement dans un canal ***annulaire*** cisaillé par un couvercle peut être instable vis à vis de petites perturbations. Cette instabilité est sans doute liée à des effets de courbure, et aussi, d'une certaine façon, à des effets de rotation. Pour rajouter un paramètre de contrôle supplémentaire et donner de l'importance à la force de Coriolis pour contrôler les ondes, on laisse d'ailleurs la possibilité au plateau inférieur dans lequel est creusé le canal de tourner. On définit alors les vitesses angulaires de rotation

$$\Omega_h \quad \text{du plateau supérieur,} \tag{6.3}$$

$$\Omega_b \quad \text{du plateau inférieur,} \tag{6.4}$$

$$\text{ainsi que} \quad \overline{\Omega} = (\Omega_h + \Omega_b)/2 \quad \text{la vitesse de rotation moyenne,} \tag{6.5}$$

$$\text{et} \quad \delta\Omega = \Omega_h - \Omega_b \quad \text{la vitesse de rotation différentielle.} \tag{6.6}$$

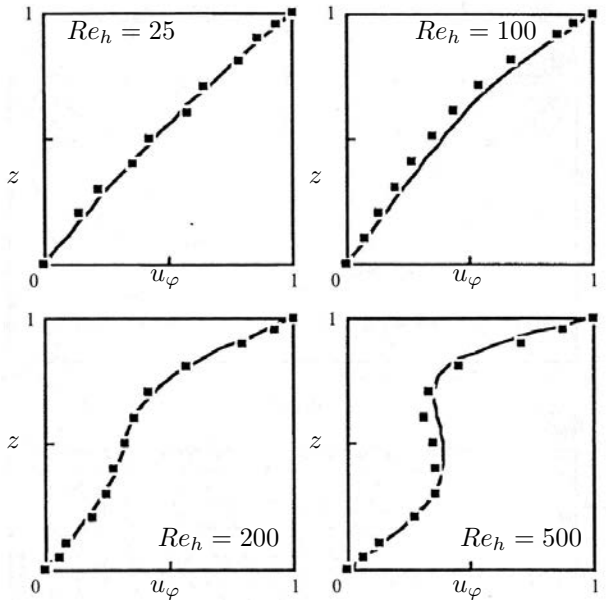


Fig. 6.2 – Mesures par Vélocimétrie Laser Doppler de la vitesse azimutale en fonction de la coordonnée axiale dans la manipulation de Barthelet *et al.* (1995) présentée sur la figure 6.1, mais en monophasique. L'écoulement, quasi linéaire à bas Reynolds, devient de moins en moins monotone à cause d'écoulements transverses engendrés par les forces d'inertie.

On définit également

$$Re_h = (\Omega_h \overline{r} H)/\nu \quad \text{le nombre de Reynolds haut,} \tag{6.7}$$

$$Re_b = (\Omega_b \overline{r} H)/\nu \quad \text{le nombre de Reynolds bas,} \tag{6.8}$$

$$\text{ainsi que } \overline{Re} = (Re_h + Re_b)/2 \quad \text{le } \textbf{\textit{nombre de Reynolds moyen}}, \tag{6.9}$$

$$\text{et } \delta Re = Re_h - Re_b \quad \text{le } \textbf{\textit{nombre de Reynolds différentiel}}. \tag{6.10}$$

6.2 Bibliographie : écoulements modèles entre plans infinis

La géométrie la plus simple, c'est-à-dire plane sans effet de courbure, où la force de Coriolis est importante est l'***écoulement d'Ekman*** au-dessus d'un plan infini fixe. Cet écoulement se trouve dans une fine couche de recollement de la vitesse du fluide en rotation en bloc près de la paroi fixe, dûe à une balance entre les forces visqueuses et la force de Coriolis. Lilly (1966) montre que la couche limite d'Ekman ainsi créée est linéairement instable. Cet écoulement est sujet à deux types d'instabilités : de ***type I*** et de ***type II***, reposant sur la chronologie de leur découverte. Ils seront rebaptisés de type A et B suivant leur ordre d'apparition en fonction du nombre de Reynolds (figure 6.4). L'instabilité de type I (B) est non visqueuse et est due à la présence d'un point d'inflexion dans les profils de vitesse. Cette instabilité est connus sous le nom d'***instabilité non visqueuse, inflexionnelle ou « crossflow »***. L'instabilité de type II (A) se caractérise par l'apparition de cercles concentriques ou de spirales très enroulées sur elles-mêmes. Lilly (1966) montre que cette instabilité est liée aux effets conjugués des forces de Coriolis et de viscosité. Elle est dite de type visqueux et Lilly la désigne sous le nom d'***instabilité parallèle***.

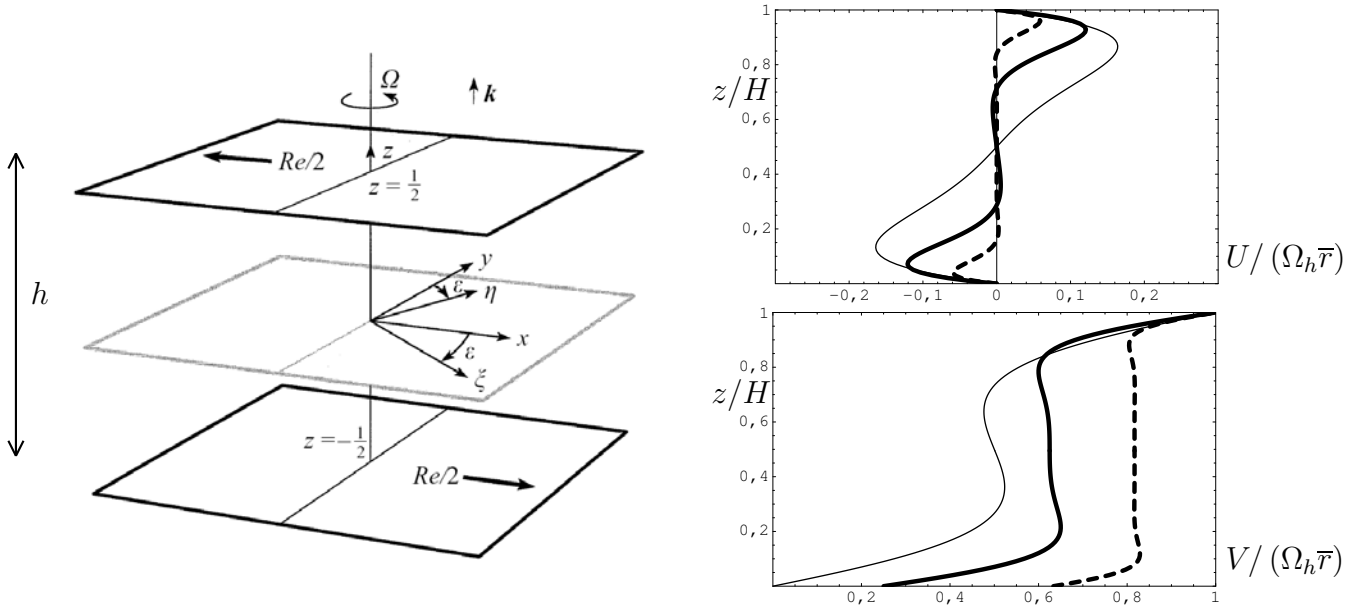


Fig. 6.3 – À gauche, géométrie de l'étude de l'***écoulement d'Ekman-Couette*** par Hoffmann *et al.* (1998). À droite, profils axiaux de vitesse radiale et azimutale établie par les équations (6.11) et (6.12). En trait fin, $\overline{Re} = 375$ et $\delta Re = Re_h - Re_b = 750$, en trait épais, $\overline{Re} = 1250$ et $\delta Re = 1500$, et en traits pointillés, $\overline{Re} = 4106{,}5$ et $\delta Re = 1843$. L'augmentation du nombre de Reynolds moyen $\overline{Re}$ rigidifie l'écoulement et introduit en conséquence un cœur géostrophique en rotation en bloc.

Toujours en géométrie plane sans effets de courbure, un autre écoulement pertinent pour notre étude est ***l'écoulement d'Ekman-Couette***, étudié théoriquement par Hoffmann *et al.* (1998). Il a lieu entre deux plaques en mouvement rectiligne de même direction mais de sens oppposé pour cisailler le fluide et de surcroît en rotation normale aux parois. Nous verrons qu'il est réalisé au milieu du canal lorsque le nombre de Reynolds moyen est élevé (i.e. en corotation rapide), et le nombre de Reynolds différentiel n'est pas trop grand (pour ne pas passer le seuil de la première instabilité). On a alors

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} = U\,(r,z)\,\boldsymbol{e_r} + V\,(r,z)\,\boldsymbol{e_\varphi} + W\,(r,z)\,\boldsymbol{e_z}$$

Les variables x et y de la figure 6.3 sont respectivement nos variables azimutale $\overline{r}\varphi$ et radiale r. En négligeant les effets de courbure et les parois latérales, on considère un écoulement de fluide visqueux entre deux parois parallèles en corotation à la vitesse de rotation moyenne $\overline{\Omega} = (\Omega_h + \Omega_b)/2$, et avec une différence de vitesse

$$\delta V = \delta\Omega\overline{r} = (\Omega_h - \Omega_b)\,\overline{r}$$

dans la direction « azimutale », nous avons pour les vitesses « radiale » et « azimutale », en s'inspirant des calculs de Hoffmann *et al.* (1998),

$$U/U_0 = \sinh(z^*)\sin(\eta - z^*) - \sin(z^*)\sinh(\eta - z^*) \tag{6.11}$$

$$\left(V - \overline{\Omega}\overline{r}\right)/U_0 = \cosh(z^*)\cos(\eta - z^*) - \cos(z^*)\cosh(\eta - z^*) \tag{6.12}$$

avec

$$4U_0 = \delta\Omega\overline{r}/\left[\cos^2(\eta/2)\sinh^2(\eta/2) + \sin^2(\eta/2)\cosh^2(\eta/2)\right] ,$$

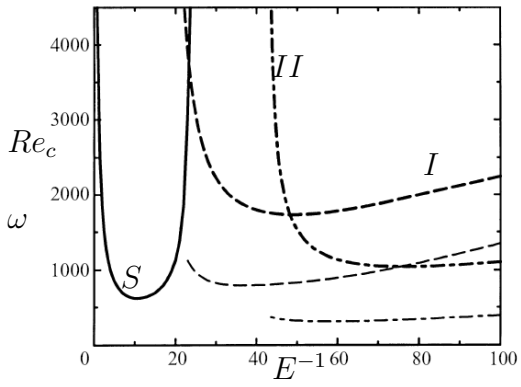


Fig. 6.4 – Nombre de Reynolds critique Re_c (en traits épais) au seuil d'instabilité pour des perturbations de modes stationnaires S (en trait continu), des modes de type I (en pointillés) et de type II (en pointillés de longueur variable) en fonction du nombre inverse d'Ekman $E^{-1} = \Omega H^2/\nu$, avec Ω la vitesse de rotation des parois (Hoffmann *et al.*, 1998). La fréquence ω de ces modes est indiquée en trait fin.

$z^* = \eta z/H$ et $\eta = \sqrt{\overline{Re}/\gamma}$ (voir la nomenclature page 119). La figure (6.3) montre que les expressions analytiques (6.11) et (6.12) décrivent le champ de vitesse avec deux couches limites d'Ekman distinctes lorsque δRe est suffisamment grand ou un écoulement de type « ***Couette-torsion*** » pour δRe suffisamment petit.

Alors que l'écoulement de Couette plan est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds, l'écoulement d'Ekman-Couette est instable à un nombre de Reynolds élevé (figure 6.4), la force de Coriolis et la force centrifuge ont donc déstabilisé l'écoulement. Cependant dans le cas de corotation rapide, i.e. pour des ***nombres d'Ekman***

$$E = \nu/\left(\overline{\Omega} H^2\right) \quad \text{très faibles} \tag{6.13}$$

la force de Coriolis tend à stabiliser l'écoulement selon la contrainte de Proudman-Taylor. Il est intéressant de regarder de plus près les travaux de Hoffmann *et al.* (1998) qui étudie l'écoulement entre deux plans infinis cisaillant le fluide (type Couette plan) et en rotation autour d'un même axe de rotation perpendiculaire aux plans (figure 6.3). On peut calculer analytiquement l'écoulement de base. Par analyse de stabilité de cet écoulement, ils prédisent que pour des faibles rotations, l'instabilité est de type I. Par contre, pour de faibles nombre d'Ekman, l'instabilité est de type II au niveau de la couche limite d'Ekman. Ils remarquent que pour de petits nombres d'Ekman le seuil est bien décrit de façon quantitative par la limite asymptotique d'une couche simple d'Ekman (Lilly, 1966) (voir la table 6.1).

En pratique, de telles géométries entre plans infinis sont impossibles à réaliser, et on travaille donc en géométrie fermée. Ainsi, les écoulements entre disques en rotation différentielle ont été étudiés. Ils trouvent des applications dans des domaines très variés comme l'astronomie, la géophysique et surtout les turbomachines. Les écoulements de type rotor-stator sont essentiellement un modèle de géométrie pour les installations industrielles de type turbomachines. Le refroidissement des aubes de turbines est assuré par un écoulement turbulent de fluide froid amené via une cavité

		Re_c	a	ε	ω	Re_{cL}	a_L	ε_L	c_L/c_{gL}
Hoffmann *et al.* (1998)	type I	2244,6	5,5	−6,88	1346,5	112,2	0,55	6,88	0,0984
	type II	1105,3	3,3	22,9	391,2	55,3	0,33	−22,9	−0,6039
Lilly (1966)	type I					112	0,55	6,8	0,104
	type II					55	0,33	−22,6	−0,600

TAB. 6.1 – Caractérisation des seuils d'instabilités de type I et II pour $E = 10^{-2}$ de Hoffmann *et al.* (1998) par le nombre de Reynolds critique Re_c, le nombre d'onde a, l'angle d'orientation ε (en degré, cf. la figure 3.2 page 56) et la fréquence angulaire ω. Ils comparent avec les résultats de Lilly (1966) (indexés d'un « L ») pour une couche d'Ekman. c est la vitesse de phase et c_g la vitesse de groupe.

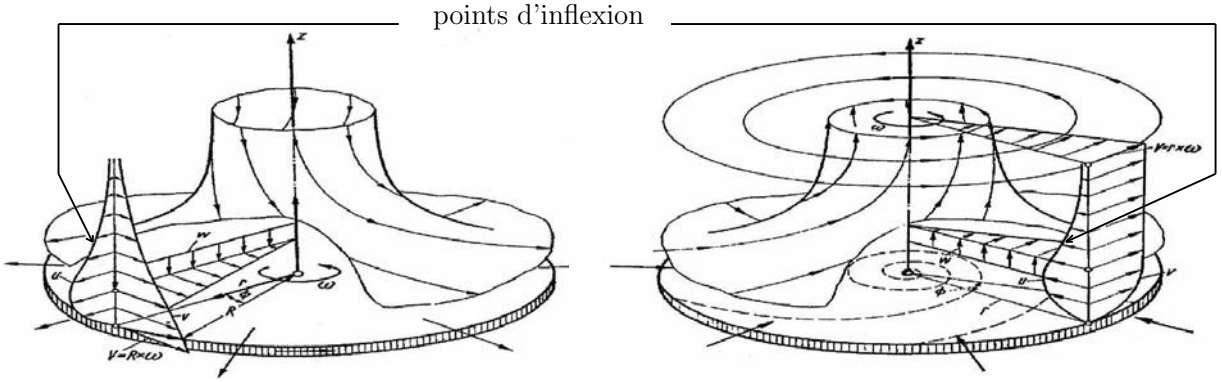


Fig. 6.5 – À gauche, lignes de courant d'un écoulement de fluide initialement au repos sur un disque en rotation. À droite, lignes de courant d'un écoulement de fluide en rotation solide à l'infini sur un disque fixe (Schlichting, 1960).

rotor-stator et centrifugé par les disques. C'est le cas dans la turbo pompe à hydrogène liquide du moteur Vulcain d'Ariane 5 (SNECMA moteurs, Large Liquid Propulsion Groupe). Il est essentiel de pouvoir prédire les efforts axiaux sur les rotors et les flux nécessaires pour refroidir les aubes de turbines. En astrophysique, les disques d'accrétion qui entourent les trous noirs, sont des objets en rotation non uniforme dont le centre est traversé par deux jets de matières de sens opposés. Ces disques sont le siège d'instabilités de cisaillement.

On pourrait penser que le confinement radial de nos écoulements influence peu la dynamique et que les structures que nous allons observer seront similaires à celles obtenues en écoulements entre disques. Nous allons donc retracer un rapide historique des connaissances sur les écoulements entre disques...

6.3 Bibliographie : écoulements au-dessus d'un disque

Théodore Von Kármán (1921) réalise l'étude théorique d'un écoulement laminaire, axisymétrique de fluide initialement au repos au-dessus d'un disque de rayon infini en rotation (figure 6.5). Il simplifie les équations de Navier-Stokes en un système d'équations différentielles qui possèdent une solution exacte. Il montre que l'écoulement est confiné dans une couche limite, qui porte son nom, se développant sur le disque . Bödewadt (1940) étend l'analyse de Von Kármán au cas d'un disque fixe de rayon infini dans un fluide en rotation en bloc à l'infini. La couche limite qui se

développe porte également son nom (figure 6.5).

6.4 Bibliographie : écoulements entre deux disques

Batchelor (1951) décrit qualitativement les différents écoulements symétriques en rotation, généralisant ainsi l'analyse à des rotations quelconques du fluide et du disque.

6.4.1 Écoulements de base

Configuration rotor-stator

Batchelor (1951) étudie aussi le cas d'un écoulement axisymétrique, stationnaire entre deux disques de rayon infinis et montre la formation d'un noyau non visqueux en rotation solide confiné entre les deux couches limites se développant sur chaque disque. Cet écoulement se décompose en trois régions : un écoulement radial centrifuge ($U > 0$) sur le disque en rotation (rotor), un écoulement radial centripète ($U < 0$) sur le disque fixe (stator), un écoulement non visqueux en rotation solide (V indépendant de la coordonnée axiale, $U \simeq 0$) entre les deux couches limites (figure 6.7). Autrement dit, l'écoulement de Batchelor se caractérise par une couche limite centrifuge (de Von Kármán) sur le rotor et une couche limite centripète (de Bödewadt) sur le stator, séparées par un noyau en rotation solide. On peut considérer cet écoulement comme une connexion entre deux écoulements avec un seul disque : un écoulement de type Bödewadt (disque fixe) et un de type Von Kármán (disque tournant)[1].

Les écoulements de type Batchelor se trouvent en général en géométrie fermée alors que ceux de type Stewartson se trouvent dans des écoulements ouverts. Pour caractériser une transition possible entre ces deux types d'écoulements en géométrie finie, il faut un espace interdisque suffisamment grand pour avoir des couches limites séparées. La transition est observée quand on se rapproche du centre de la cavité (de Batchelor vers Stewartson) ou quand on diminue le nombre de Reynolds.

L'écoulement de type Batchelor se réduit aux deux « couches limites jointes »[2] si l'espace interdisque est suffisamment petit. Des études sur cet écoulement purement visqueux, dit de ***Couette torsion***, entre deux disques de rayon infini, en configuration rotor stator ont été menées. L'écoulement de Couette torsion a été récemment étudié expérimentalement par (Schouveiler *et al.*, 1998, 2001; Cros *et al.*, 2003; Cros & LeGal, 2004). Owen & Rogers (1989) ont montré que les écoulements en configuration rotor-stator se divisent en quatre régimes suivant la valeur du paramètre de courbure $\gamma = \overline{r}/h$ qui vaut 10,5 pour notre manipulation et du nombre de Reynolds de la paroi en rotation dont les deux régimes laminaires sont :

- régime I : écoulements laminaires à couches limites jointes (de type Couette torsion),
- régime II : écoulements laminaires à couches limites séparées (de type Batchelor).

Tous ces écoulements sont représentés sur la figure 6.6.

[1] Il faut signaler l'existence possible d'écoulements de base différents, cf. Stewartson (1953). Cependant, ils diffèrent beaucoup de ceux que nous avons rencontrés, donc nous ne les évoquerons pas ici.

[2] On ne peut donc plus parler dans ce cas de couche limite...

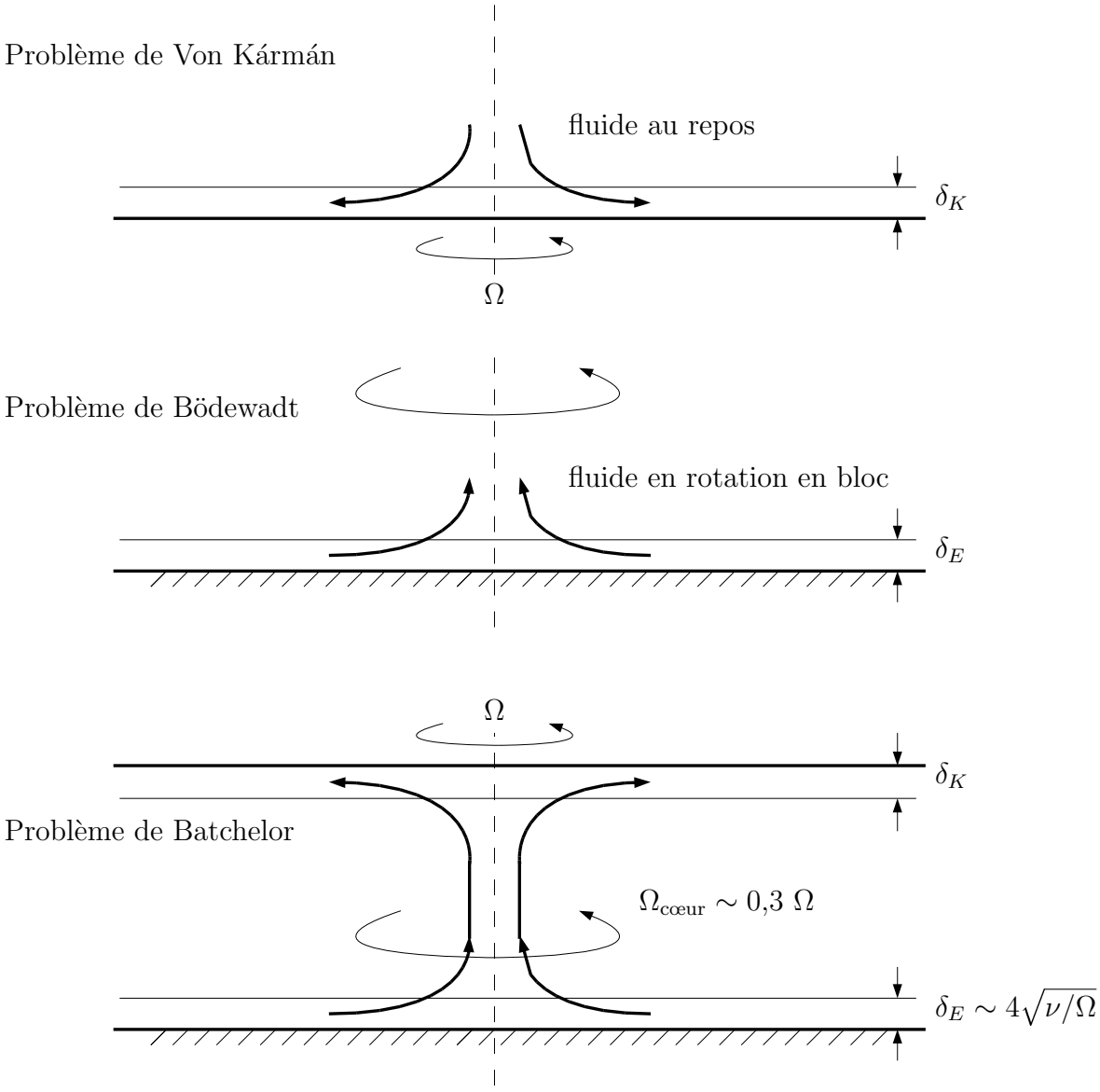


Fig. 6.6 – Lignes de courant d'un écoulement de base dans trois cas « école » : un fluide au repos au-dessus d'un disque tournant (problème de Von Kármán), un fluide en rotation en bloc au -dessus d'un disque fixe (problème de Bödewadt), et un fluide entre deux disques, l'un tournant, l'autre fixe (problème de Batchelor). On voit apparaître deux couches limites : la couche limite d'Ekman d'épaisseur δ_E près d'un disque fixe et la couche limite de Von Kármán près d'un disque en rotation. Dans la première couche limite, le fluide est aspiré vers le centre dû au gradient de pression, donc des forces centrifuges ; dans la seconde couche limite, le fluide est expulsé vers l'extérieur.

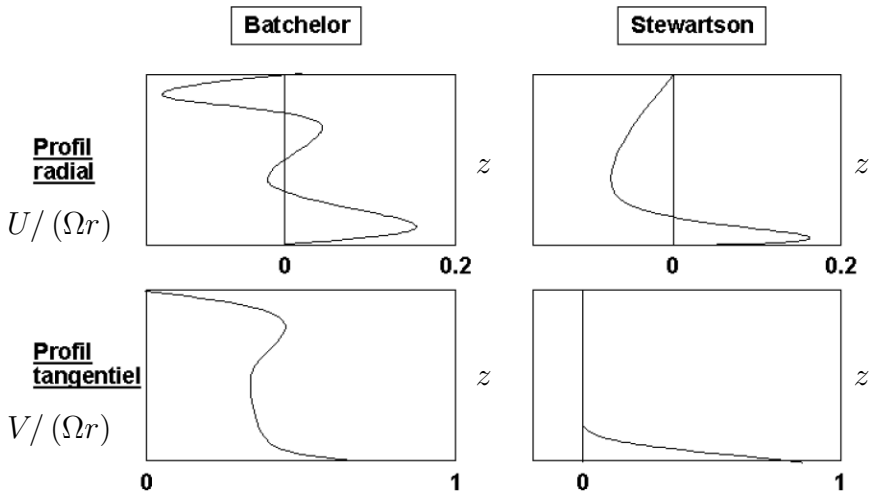


Fig. 6.7 – Profils radiaux et tangentiels d'écoulements de type Batchelor et Stewartson selon Cousin-Rittemard (1996)

Configuration avec co-rotation

Batchelor pense que le disque de plus grande vitesse a un effet centrifuge, alors que l'autre a un effet de suction, confirmé par Stewartson. Il existe beaucoup moins d'études dans ce type de configuration pour confirmer cette théorie. Gauthier *et al.* (2002) ont présenté une manipulation où la paroi supérieure peut tourner indépendamment des trois autres parois solidaires. Ils étudient l'apparition de différentes structures en fonction des deux nombres de Reynolds haut et bas imposés dans un cas général, i.e. en configuration rotor-stator, avec co-rotation et avec contra-rotation. Cela permet d'obtenir une large panoplie de structures. Les résultats en co-rotation sont similaires à ceux trouvés en configuration rotor-stator (figures (6.9) et 6.10).

Configuration en contra-rotation

La contra-rotation désigne le cas où les parois inférieure et supérieure tournent en sens opposé. Batchelor (1951) trouve un écoulement avec deux couches limites, deux régions à vitesse azimutale constante et une région intermédiaire alors que Stewartson annonce un cœur d'écoulement à vitesse azimutale nulle et vitesse radiale négative. Dijkstra & Heijst (1983) ont montré expérimentalement et numériquement la coexistence des écoulements de type Batchelor et de Stewartson en contrarotation.

6.4.2 Premières instabilités

La manipulation de Gauthier *et al.* (2002) permet de produire des écoulements en contra-rotation entre deux disques. La corotation et la contrarotation faible est similaire au simple rotor-stator, que ce soit pour l'écoulement de base (figure 6.8) ou la première instabilité : deux couches limites et l'instabilité sous formes de ***vortex axisymétriques*** puis de ***spirales positives*** (figures 6.9 et 6.10). Ces structures ont déjà été étudiées expérimentalement (Schouveiler *et al.*, 2001; Gauthier *et al.*, 1999) et numériquement (Serre *et al.*, 2001). Un troisième types de structures est

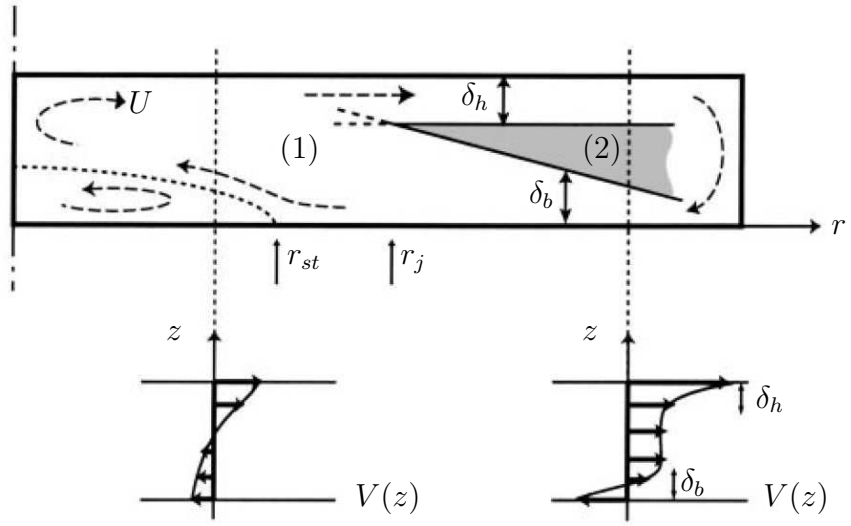


Fig. 6.8 – Structure de l'écoulement dans une coupe méridienne et profils axiaux de vitesse azimutale à deux rayons différents (Gauthier *et al.*, 2002). δ_b et δ_h sont les épaisseurs de couche limite respectivement au niveau des parois inférieure et supérieure. r_{st} est le rayon de stagnation, r_j le rayon en-dessous duquel les couches limites sont jointes. Les flèches en pointillées représentent l'éventuelle recirculation caractérisée par la vitesse radiale U dans les cas de l'existence de deux cellules de recirculation. la zone (1) est caractérisée par un écoulement de type Couette torsion, alors qu'un écoulement de type Batchelor se développe dans la zone (2).

observé : des ***spirales négatives*** (figure 6.9 et 6.10). Les deux premiers types se trouvent en co-rotation et en rotor-stator (Gauthier *et al.*, 1999; Schouveiler *et al.*, 2001; Serre *et al.*, 2001) alors que le troisième type est spécifique à la contrarotation, première fois décrit dans Gauthier *et al.* (2002) que l'on montre figure (6.10).

Nore *et al.* (2006) a étudié le cas de la contrarotation pure entre deux disques en fonction du paramètre de courbure r_e/H, r_e étant le rayon des disques et H la hauteur entre les deux disques. Nous verrons que notre manipulation possède un paramètre de courbure $r_e/H = 198/18 = 11$. Si on néglige les effets de confinement radiaux, on devrait s'attendre d'après la figure 6.11 à obtenir un nombre d'onde critique $m_c = 10$ pour un nombre de Reynolds critique $Re_c = \Omega_h H^2/\nu \simeq 27$, soit avec nos notations $Re_c = \Omega_h H\overline{r}/\nu \simeq 297$.

6.5 Bibliographie : cas de la configuration annulaire

Très peu de travaux expérimentaux ont été menés dans ce cas plus confiné. En cavités, les grands rapports d'aspect favorisent les écoulements de Stewardson, alors que les faible rapports d'aspect favorisent les écoulements de Batchelor. Nous nous attacherons ici aux écoulements de type Batchelor qui sont présents dans notre manipulation.

L'effet de confinement va empêcher les structures en rouleaux annulaires axisymétriques d'apparaître pour des cavités de faible inter-rayon (Liotard & Poncet, 2007). Ces cercles sont observés jusqu'à un rapport rayon extérieur sur rayon intérieur $r_i/r_e \simeq 0.39$. Au-delà, le rayon intérieur du canal est supérieur au rayon critique d'apparition des cercles et ils n'ont plus l'espace radial suffisant pour se développer. Le paramètre de courbure influence peu la transition mis à part la disparition

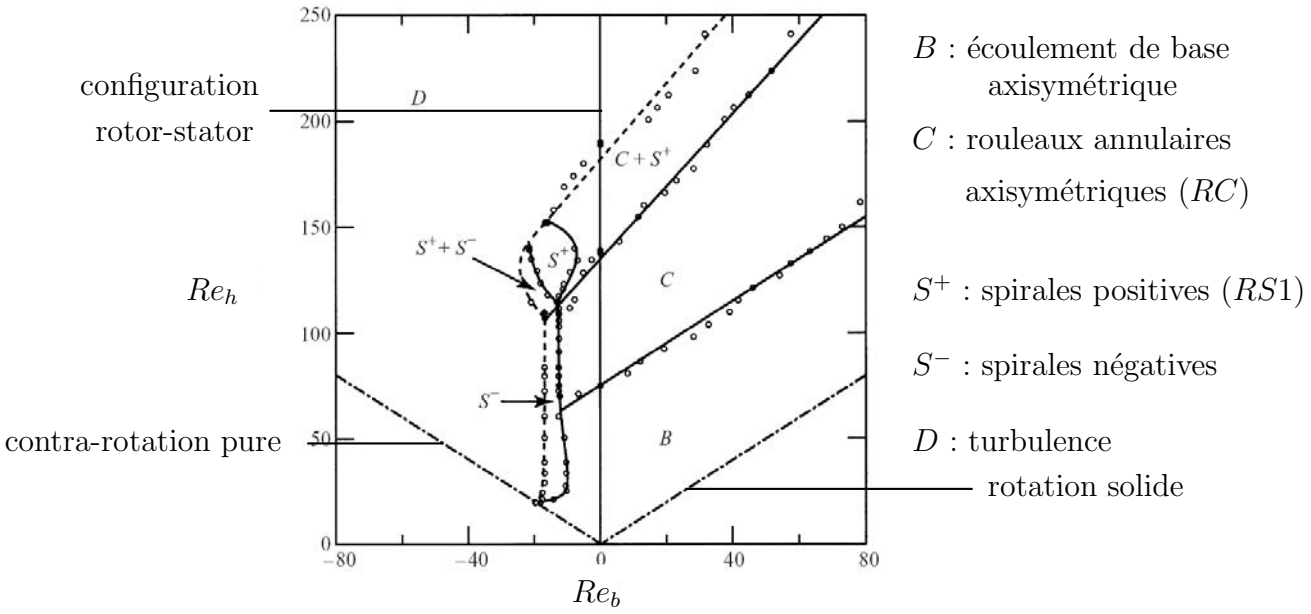


Fig. 6.9 – Diagramme de structures expérimentales en ***écoulement entre disques*** (Gauthier *et al.*, 2002). $Re_b = \Omega_b H^2/\nu$ est le nombre de Reynolds construit sur la vitesse du disque inférieur, $Re_h = \Omega_h H^2/\nu$ le nombre de Reynolds construit sur la vitess du disque supérieur, H étant l'espace inter-disques.

des cercles. Pour notre manipulation, $r_i/r_e \simeq 0.9$: on ne pourra pas observer les strctures en cercles.

En configuration rotor stator, le mode spiral en anneau a un unique nombre d'onde contrairement à Schouveiler *et al.* (1998, 1999) dans un cylindre qui suggère que ce mode spiralé de l'instabilité est limité par l'instabilité secondaire d'Eckhaus, et ce dû à un effet de confinement.

6.6 Plan de cette partie

Cette deuxième partie de cette thèse est une étude expérimentale d'écoulements cisaillés tournant en cavité annulaire. Les études sont nombreuses et variées, mais peu d'entre elles considèrent ce type de géométrie. L'originalité de notre manipulation est que les parois latérales sont solidaires de la paroi inférieure, les autres manipulations existantes, que ce soit entre disques ou dans un anneau, ont souvent les parois latérales fixes.

En parallèle de mon étude expérimentale, l'étude numérique a été réalisée par Éric Serre, en collaboration avec mon directeur de thèse Emmanuel Plaut. Les équations de Navier-Stokes, formulées en variables primitives, sont résolues par approche numérique pseudo-spectrale, fondée sur un développement en polynômes de Chebyshev dans les directions axiale et radiale et en série de Fourier dans la direction azimutale, associée à un schéma temporel semi-implicite d'ordre deux. Le couplage vitesse-pression est résolu par une méthode de projection efficace (Serre *et al.*, 2001).

Dans un premier temps, nous allons présenter notre manipulation et son fonctionnement puis nous présenterons nos résultats expérimentaux et les résultats numériques d'Éric Serre et Emma-

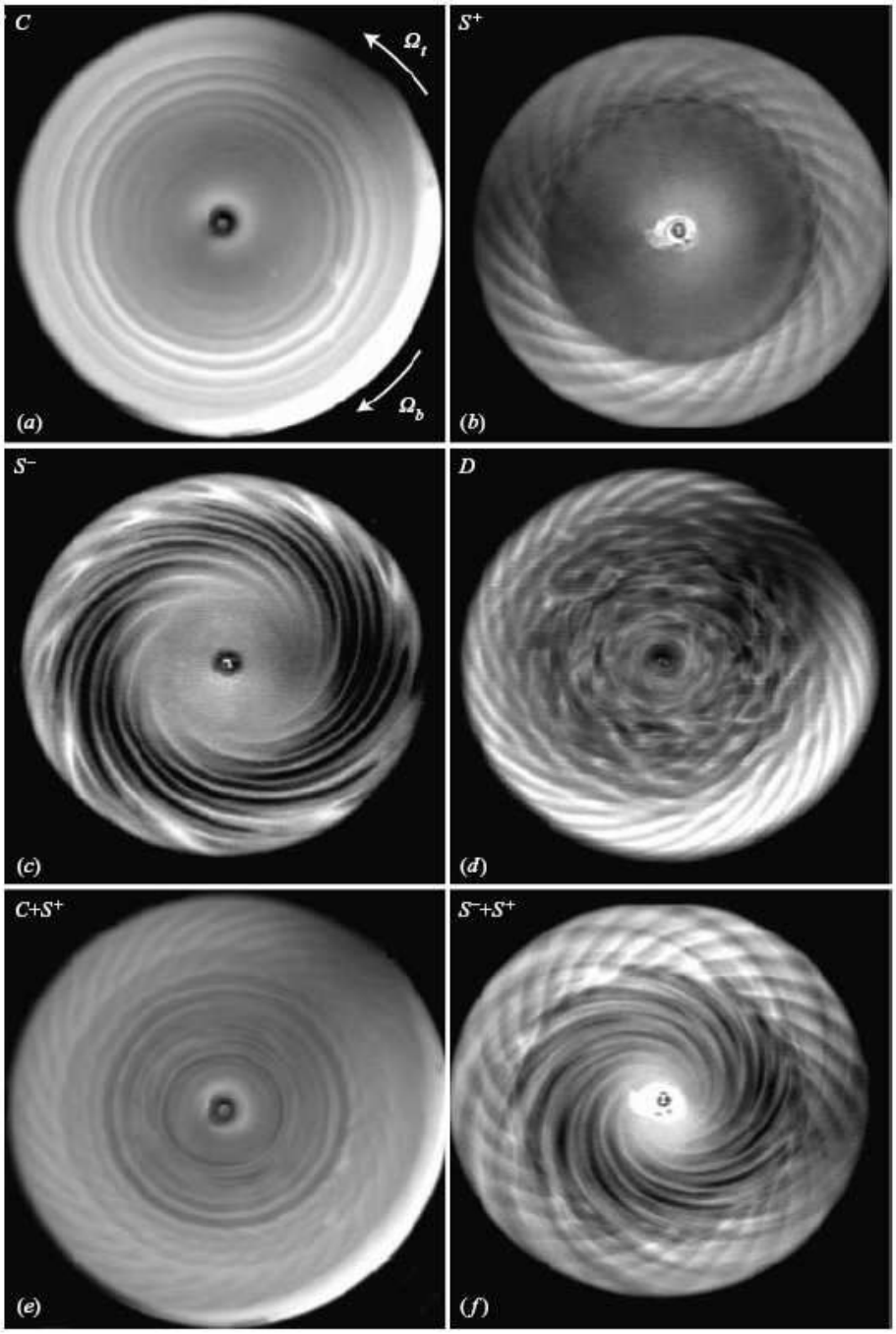


Fig. 6.10 – Différentes structures d'écoulement obtenues en écoulement ***entre disques*** par Gauthier *et al.* (2002), cf. la figure 6.9. (a) : ***rouleaux annulaires axisymétriques*** (C). (b) : ***spirales positives*** (S^+). (c) : ***spirales négatives*** (S^-). (d) : écoulement désordonné. (e) : mélange de rouleaux annulaires axisymétriques et de spirales positives. (f) : mélange de spirales positives et négatives. Le fond tourne dans le sens horaire alors que le couvercle (plus rapide) tourne dans le sens trigonométrique.

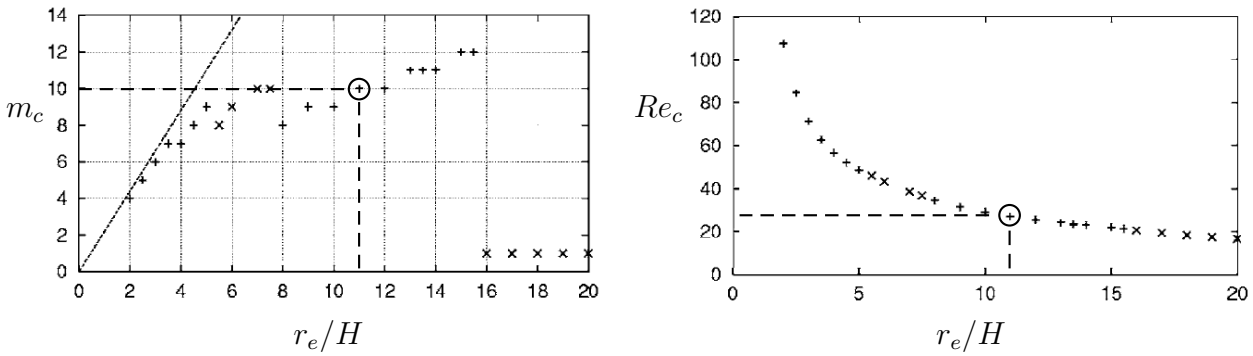


Fig. 6.11 – Nombre d'onde critique m_c et nombre de Reynolds critique Re_c d'un ***écoulement entre disques en contra rotation pure*** en fonction du rapport rayon extérieur sur hauteur r_e/H (Nore *et al.*, 2006).

nuel Plaut : écoulements de base, seuils d'instabilité et nous examinerons dans certains cas ce qui se passe loin du seuil. Nous les montrerons dans les trois cas typiques introduits ci-dessus : en configuration rotor-stator, avec uniquement la paroi supérieure en mouvement, contrairement aux autres manipulations qui cisaillent le fluide en général par le bas, en co et en contra-rotation. Nous confronterons les résultats expériementaux avec ceux prédits numériquement.

Nomenclature

Notation	Nom	Définition	Valeur typique
C	facteur de calibration de l'ALD	$\lambda/(2\sin(\theta/2)) = \lambda L_f/d$	2.637 10^{-6}
f_D	fréquence Doppler		
H	hauteur du canal		18 mm
L_f	distance focale de l'ALD		160 mm
m_c	nombre d'onde critique		
P_m	puissance moteur		144 W
r	rayon cylindrique		
$\overline{r}$	rayon moyen	$\overline{r} = (r_i + r_e)/2$	189 mm
r_i	rayon intérieur		180 mm
r_e	rayon extérieur		198 mm
γ	paramètre de courbure	$\gamma = \overline{r}/H$	10,5
$\overline{Re}$	nombre de Reynolds moyen	$\overline{Re} = (Re_h + Re_b)/2$	
Re_b	nombre de Reynolds du plateau inférieur	$Re_b = (\Omega_b \overline{r} H)/\nu$	1000
Re_h	nombre de Reynolds du plateau supérieur	$Re_h = (\Omega_h \overline{r} H)/\nu$	1000
$\boldsymbol{u}$	vecteur vitesse	$u_r \boldsymbol{e_r} + u_\varphi \boldsymbol{e_\varphi} + u_z \boldsymbol{e_z}$	
v_p	vitesse de phase		
z	distance au fond		
δf	précision de mesure de l'ALD		
δr	inter rayon	$\delta r = r_e - r_i$	18 mm
δR	nombre de Reynolds différentiel	$\delta R = (R_h - R_b)$	
δz	hauteur minimale du réservoir de bord	$\delta z = \Omega^2(r_e^2 - r_i^2)/(2g)$	
$\delta\Omega$	vitesse de rotation différentielle	$\delta\Omega = (\Omega_h - \Omega_b)$	
λ	longueur d'onde pour l'ALD		0.6328 μm
μ	viscosité dynamique de l'eau		1.01 10^{-3} Pa.s
ν	viscosité cinématique de l'eau		
φ	angle d'azimut		
Ω_b	vitesse de rotation du plateau inférieur		
Ω_h	vitesse de rotation du plateau supérieur		
$\overline{\Omega}$	vitesse de rotation moyenne	$\overline{\Omega} = (\Omega_h + \Omega_b)/2$	

Chapitre 7

Mise au point de l'expérience

7.1 Principe et dimensionnement de cette expérience hydrodynamique

Notre système est une manipulation hydrodynamique destinée avant tout à produire des ***ondes non linéaires***. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, voulant obtenir des ondes quasi unidirectionnelle, nous choisissons un inter-rayon faible, mais pas trop afin de pouvoir observer les ondes. Il faut aussi un grand rayon moyen devant l'inter-rayons, mais nous sommes limité par le diamètre du plus grand tour de l'atelier. L'ingénieur Jean-Yves Morel de l'atelier ENSEM nous a limité à un rayon maximum de l'ordre de 20 cm, valeur au-delà de laquelle il ne pouvait plus garantir avec une bonne précision les dimensions de notre manipulation. Nous avons choisi $r_i = 180$ mm pour le rayon intérieur, $r_e = 198$ mm pour le rayon exérieur, soit un ***inter-rayon*** $\delta r \ = \ r_e - r_i \ = \ 18$ mm et un ***rayon moyen*** $\overline{r} = (r_i + r_e)/2 = 189$ mm. La manipulation possède ainsi un ***rapport rayon moyen sur inter-rayons*** :

$$\frac{\overline{r}}{\delta r} \ = \ \frac{r_i + r_e}{2\,\delta r} \ = \ \frac{180 + 198\,\text{mm}}{2\,\text{x}\,18\,\text{mm}} \ = \ 10{,}5\ , \tag{7.1}$$

choix qui implique une ***faible courbure***. D'autre part, nous avons choisi de travailler dans un canal de hauteur H à section carrée, avec donc un ***rapport d'aspect*** :

$$L \ = \ \frac{r_e - r_i}{H} \ = \ \frac{\delta r}{H} \ = \ \frac{18\,\text{mm}}{18\,\text{mm}} \ = \ 1. \tag{7.2}$$

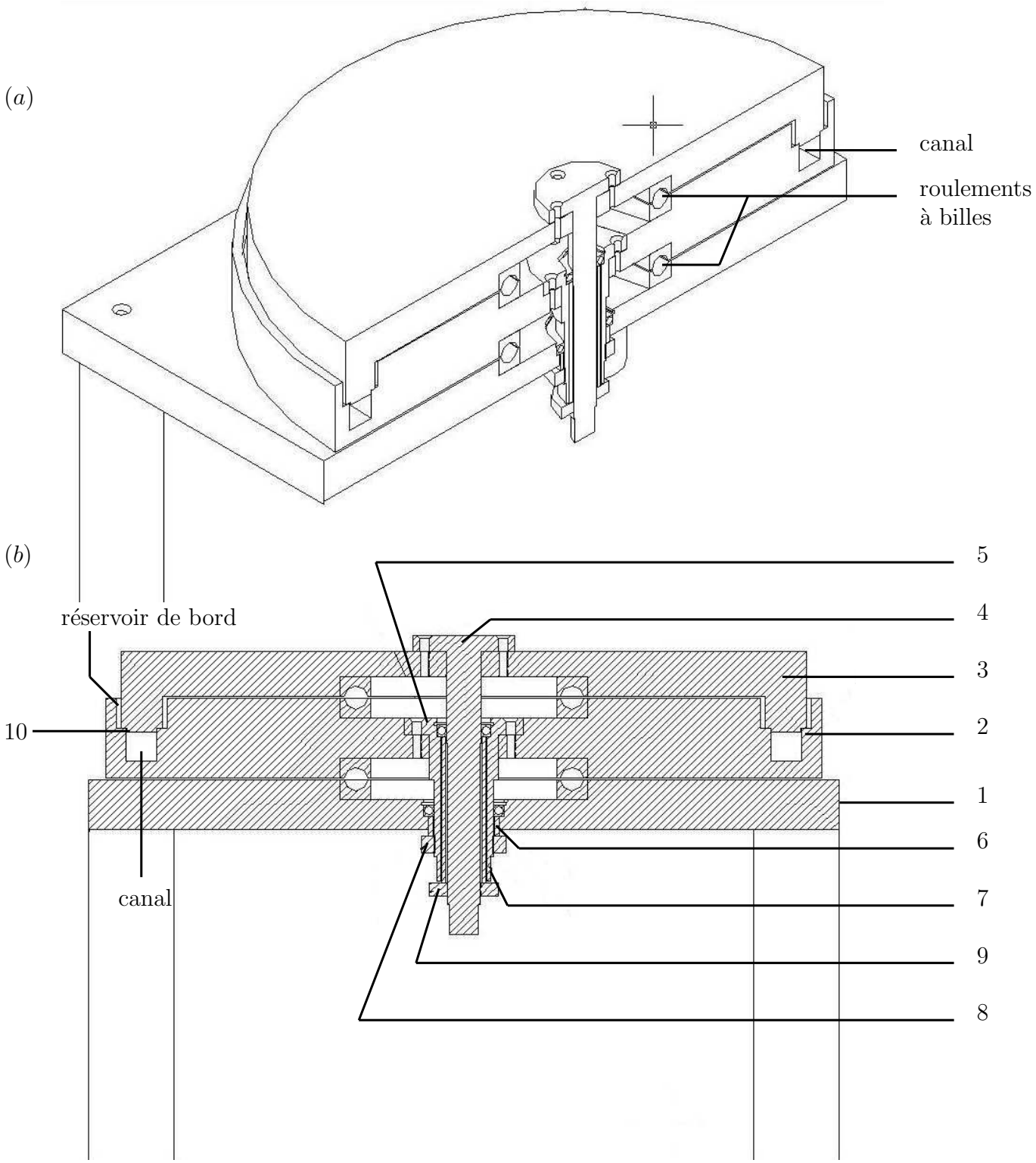


Fig. 7.1 – Plans de notre manipulation réalisés par l'ingénieur Jean-Yves Morel. **(a)** : Vue en trois dimensions. Les deux systèmes de roulements à bille permettent la rotation indépendante des plateaux inférieur et supérieur en plexiglass afn de voir l'écoulement à travers ces derniers. Il existe un petit jeu entre les deux plateaux. **(b)** : Vue en coupe : **1** : support ; **2** et **3** : plateaux inférieur et supérieur ; **4** et **5** : axes des plateaux supérieur et inférieur ; **6** et **7** : petite et grande entretoises permettant le calage des plateaux inférieur et supérieur ; **8** et **9** : écrous de gros et petit diamètres pour maintenir respectivement les plateaux inférieur et supérieur. **10** : il existe un petit jeu de 0,3 mm entre les deux plateaux.

T (℃)	0	10	20	30	40	50
ν (10^{-6} m^2/s)	1,793	1,307	1,002	0,7977	0,6532	0,547

TAB. 7.1 – Viscosité de l'eau en fonction de la température (Lide, 2001).

Une autre particularité de notre expérience réside dans le fait que les deux plateaux coaxiaux peuvent tourner indépendamment et dans les deux sens de rotation. Le socle tourne à la vitesse angulaire Ω_b, le couvercle à la vitesse angulaire Ω_h. Ce mécanisme permet ainsi de cisailler le fluide de différentes façons (figure 7.1). Des configurations de type « *cavité rotor-stator* » correspondent au cas $\Omega_b = 0$, i.e. sans rotation d'ensemble du canal, et sont rencontrées dans certaines machines tournantes. Elles ont été étudiées numériquement par Serre *et al.* (2001), mais dans des systèmes présentant une forte courbure, i.e. avec un rayon moyen du canal $\overline{r}$ du même ordre de grandeur que sa largeur δr.

Dans la littérature, la longueur caractéristique pour construire un nombre de Reynolds est le rayon extérieur (Schouveiler *et al.*, 2001; Lopez, 1998) ou bien sur la hauteur (Cousin-Rittemard *et al.*, 1998; Gauthier *et al.*, 1999) de la géométrie. Il nous paraît plus judicieux de choisir la hauteur permettant de caractériser le type d'écoulement (de type Batchelor à couches limites séparées ou de type Couette torsion) et de laisser l'importance du confinement latéral uniquement sur le rapport d'aspect (équation 7.2). Autrement dit, notre système étant capable de générer des écoulements de type Couette confiné, alors il est préférable de construire les nombres de Reynolds sur la vitesse des plateaux au milieu du canal et sur la hauteur du canal. On introduit alors comme paramètres de contrôle les nombres de Reynolds haut et bas

$$\boxed{Re_h = \frac{\Omega_h\ \overline{r}\ H}{\nu} \quad \text{et} \quad Re_b = \frac{\Omega_b\ \overline{r}\ H}{\nu}}\ , \tag{7.3}$$

où ν est la viscosité cinématique de l'eau qui dépend essentiellement de la température et que l'on évalue grâce au tableau 7.1 provenant de Lide (2001) et à la figure 7.2. Cette courbe de la viscosité en fonction de la température est obtenue par un polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre 5[1] à partir des données du tableau 7.1. La température de l'eau sera de l'ordre de celle de la salle du laboratoire, environ 20 ℃, si on n'éclaire pas la manipulation.

On peut choisir la viscosité de l'eau à 20 ℃, soit $\nu(T = 20\ ℃) = 1{,}002$ mm^2/s, pour définir une valeur nominale des nombres de Reynolds en fonction de la fréquence de rotation f :

$$R = \frac{2\pi f \overline{r} H}{\nu} = 2{,}13\ \ 10^4 f\ . \tag{7.4}$$

Ainsi, il nous faut une résolution de $1/(2{,}13\ 10^4) = 4{,}7\ 10^{-5}$ Hz sur la fréquence de rotation (soit une résolution de $3\ 10^{-4}$ rad/s sur la vitesse de rotation) pour obtenir une résolution de 1 sur le nombre de Reynolds. Cette résolution nous permet de déterminer précisément le premier seuil d'instabilité. Nous tenons bien sûr compte de la température pour calculer ce nombre de Reynolds. Si nous considérons une variation δT de 1 ℃ sur la température, celle-ci engendre une variation relative sur la viscosité de l'ordre de

$$\frac{\delta\nu}{\nu} \sim 2{,}5\ \% \tag{7.5}$$

sur toute la plage de température considérée, i.e. [16 ℃,30 ℃]. Il nous faut donc connaître avec précision la température, en admettant une erreur de l'ordre du dixième de degré. Cela est possible en utilisant un ***thermocouple*** (voir la section 7.8).

Une estimation du paramètre de contrôle critique nous est donnée par Serre & Plaut (2007) quand $Re_b = 0$, i.e. le ***nombre de Reynolds critique*** $R_{hc} = 1269$. On peut alors en déduire la vitesse de rotation critique

$$\Omega_{hc} = \frac{\mathrm{R}_{hc}\ \nu}{\overline{r} H} = 0{,}374\ \text{Hz},$$

[1] La viscosité suit donc une loi de type $\nu(T) = \nu_0 + \nu_1 T + \nu_2 T^2 + \nu_3 T^3 + \nu_4 T^4 + \nu_5 T^5$, avec $\nu_0 = 1{,}793$ mm^2/s, $\nu_1 = -6{,}171\ 10^{-2}$ mm^2/s/K, $\nu_2 = 1{,}570\ 10^{-3}$ mm^2/s/K^2, $\nu_3 = -2{,}907\ 10^{-5}$ mm^2/s/K^3, $\nu_4 = 3{,}308\ 10^{-7}$ mm^2/s/K^4, et $\nu_5 = 1{,}667\ 10^{-9}$ mm^2/s/K^5, que l'on obtient par cet ajustement.

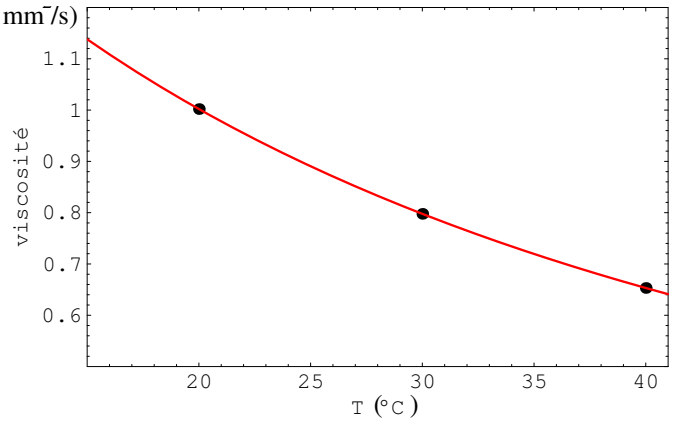


Fig. 7.2 – Viscosité cinématique de l'eau en fonction de la température exprimée en degrés Celsius, variant dans une plage « usuelle ». Courbe obtenue par ajustement avec un polynôme d'ordre 5 passant par les cinq premiers points dont la viscosité est connue dans la table (7.1), dont trois seulement sont visibles.

soit une fréquence $f = 0{,}0595$ Hz qui correspond à $60f = 3{,}57$ tours par minute.

Pour que cette expérience soit suffisamment diversifiée, on veut pouvoir atteindre des régimes de rotation rapide où la force d'inertie de Coriolis domine les forces visqueuses, i.e. le nombre d'***Ekman***

$$E = \frac{\nu}{H^2\Omega} = \frac{\overline{r}R}{H} = 5{,}26/R,$$

doit pouvoir atteindre $E = 5\ 10^{-4}$. Il faut donc pouvoir augmenter le Reynolds jusqu'à 10500, soit $f = 0{,}49$ Hz. On demande donc que le moteur entraînant la rotation du couvercle puisse tourner de 0 à $f_{\max} = 1{,}1$ Hz (pour avoir de la marge), avec une résolution de $4{,}7\ 10^{-5}$ Hz sur toute la gamme, si possible, afin d'obtenir une résolution de 1 sur le nombre de Reynolds. On veut que le moteur, entraînant la rotation du fond et des bords (figure 7.1b), tourne entre $-1{,}1$ Hz et 1,1 Hz avec la même résolution.

Afin d'éviter des ***fuites d'eau*** par le côté extérieur sous l'effet des forces centrifuges, il faut prévoir des bords de réservoir (7.1b) suffisamment haut. On attend une élévation maximale théorique de la surface libre de l'ordre de

$$\delta z \ = \ \frac{\Omega^2(r_e^2 - r_i^2)}{2g} = 16{,}6 \text{ mm}$$

pour une vitesse angulaire maximale de $2\ \pi\ 1{,}1$ Hz. On a donc prévu des bords de réservoir d'au moins 17 mm de haut, comme nous montre la figure 7.1b. Nous atteignons rarement les vitesses maximales. En pratique, nous remplissons davantage le canal, pour éviter la présence de bulles au montage de la manipulation et éviter aussi que des bulles s'introduisent dans le canal après évaporation de l'eau au bout de quelques dizaines d'heures de manipulation.

7.2 Choix des moteurs

Pour choisir judicieusement les moteurs, il faut connaître les ordres de grandeurs des couples. On évalue dans un premier temps, les couples visqueux en partant d'une estimation de la contrainte de cisaillement σ_t lors d'une rotation rapide avec la vitesse de rotation maximale choisie à $\Omega_{max} = 60$ tr.min^{-1} :

$$\sigma_t = \mu\frac{U_{\max}}{H} \quad \text{avec} \quad U\max = \Omega_{\max}\overline{r} = 1{,}31\text{m/s}.$$

Sachant que pour l'eau, la viscosité dynamique $\mu \approx 1{,}01\ 10^{-3}$ Pa s,

$$\sigma_t = \frac{1{,}01\ 10^{-3}\ 1{,}31}{0{,}018} = 0{,}0733 \ \text{ Pa}.$$

On obtient la force de frottement exercée sur le couvercle supérieur par le fluide, en multipliant cette contrainte par la surface de la couronne

$$F_{\text{visq}} = \sigma_t \pi \left(r_e^2 - r_i^2\right) = 0{,}00157 \text{ N}.$$

Cette force est exercée à une distance $\overline{r}$ de l'axe de rotation, le couple correspondant est très faible :

$$C_{\text{visq}} = F_{\text{visq}}\ \overline{r} = 2{,}96\ 10^{-4} \text{ N m}.$$

Les couples maximaux exercés par les moteurs sont donc plutôt estimés en régime transitoire à partir de l'approximation

$$C = \frac{I}{\tau'^2},$$

où I est le moment d'inertie du plateau considéré (inférieur ou supérieur) et τ' un temps caractéristique d'accéleration que nous prenons égal à 0,1 s. On peut approximer le plateau inférieur par un cylindre creux de rayon intérieur $r_a = 40$ mm, de rayon extérieur $r_b = 200$ mm et de hauteur $h = 45$ mm. Cela conduit, en prenant la densité du Plexiglass (PMMA) à $\rho = 1200$ kg/m^3, à

$$m_i = \rho\ \pi \left(r_b^2 - r_a^2\right) h = 6{,}51 \text{ kg} \quad \text{et} \quad I_i = \frac{1}{2} m_i \left(r_a^2 + r_b^2\right) = 0{,}135 \text{ kg m}^2 \implies C_i \simeq 14 \text{ N m}$$

Le plateau supérieur est quant à lui approximé par un cylindre creux de rayon intérieur $r_a = 50$ mm, de rayon extérieur $r_b = 190$ mm et de hauteur $h = 35$ mm. Cela conduit à

$$m_s = \rho\ \pi \left(r_b^2 - r_a^2\right) h = 4{,}43 \text{ kg} \quad \text{et} \quad I_s = \frac{1}{2} m_i \left(r_a^2 + r_b^2\right) = 0{,}09 \text{ kg m}^2 \implies C_s \simeq 9 \text{ N m}.$$

On a vérifié que des calculs plus précis effectués par Jean-Yves Morel à l'aide du logiciel Mechanical Desktop conduisent aux mêmes valeurs de I_i et C_i, mais pas à celles de I_s et C_s. En effet,

$$I_s = 0{,}11 \text{ kg m}^2 \implies C_s \simeq 11 \text{ N m}.$$

Nous avons donc besoin de moteurs lents mais fournissant un couple suffisamment important pour faire tourner les deux plateaux. L'utilisation d'un moteur et d'un réducteur est donc appropriée. Par contre l'emploi d'un moteur et d'un réducteur séparés pose de nombreux problèmes : dimensionnement de l'ensemble, encombrement, compatibilité...Sur les conseils d'Alain Delconte, ingénieur électronicien au LEMTA, nous avons choisi chez le fournisseur MDP[2] (Moteur Diffusion Partner) deux ***motoréducteurs à courant continu*** de référence RE040G/PLG42S tournant, en charge, à 60 tr/min et fournissant un couple de 13 N m. Ces moteurs fonctionnent avec un courant nominal de 6 A sous une tension de 24 V. Le choix de l'alimentation des moteurs et de leur carte d'asservissement est discuté dans la section suivante.

Certains problèmes mécaniques sont apparus lors de nos premières expériences (courant 2004) : les moteurs chauffaient, quelque soit la durée d'utilisation et la vitesse désirées, de manière constante à plus de 60 °C et une des deux cartes d'asservissement fut endommagée. Sachant que les moteurs seraient « enfermés » sous les cylindres pour assurer l'étanchéité afin d'éviter toute intrusion de fluide au niveau du boitier de contrôle, nous avons décidé, avec l'aide du technicien Bruno Chenu, de mettre des ***radiateurs*** sur les moteurs (pour augmenter la surface d'échange avec l'air). Les radiateurs seuls (figure 7.3) font déjà baisser la température de fonctionnement des moteurs à 40 °C et assurent donc une plus faible température de fonctionnement.

7.3 Système de commande et de régulation des moteurs

Il convient bien sûr de contrôler les moteurs et de mettre en place des systèmes permettant d'accéder par informatique aux informations qui nous intéressent : la vitesse moyenne, la vitesse instantanée, l'écart type de la vitesse, les nombres de Reynolds haut et bas...La connectique est résumée sur le schéma (7.4).

Alain Delconte nous a conseillé de choisir les ***cartes d'asservissement*** ADS 50/10 de Maxon motor control, placées dans un boîtier de commande (figure 7.5). Ce sont des variateurs de vitesse pour piloter des

[2] L'adresse du site web de MDP est http ://www.micromotorisation.com

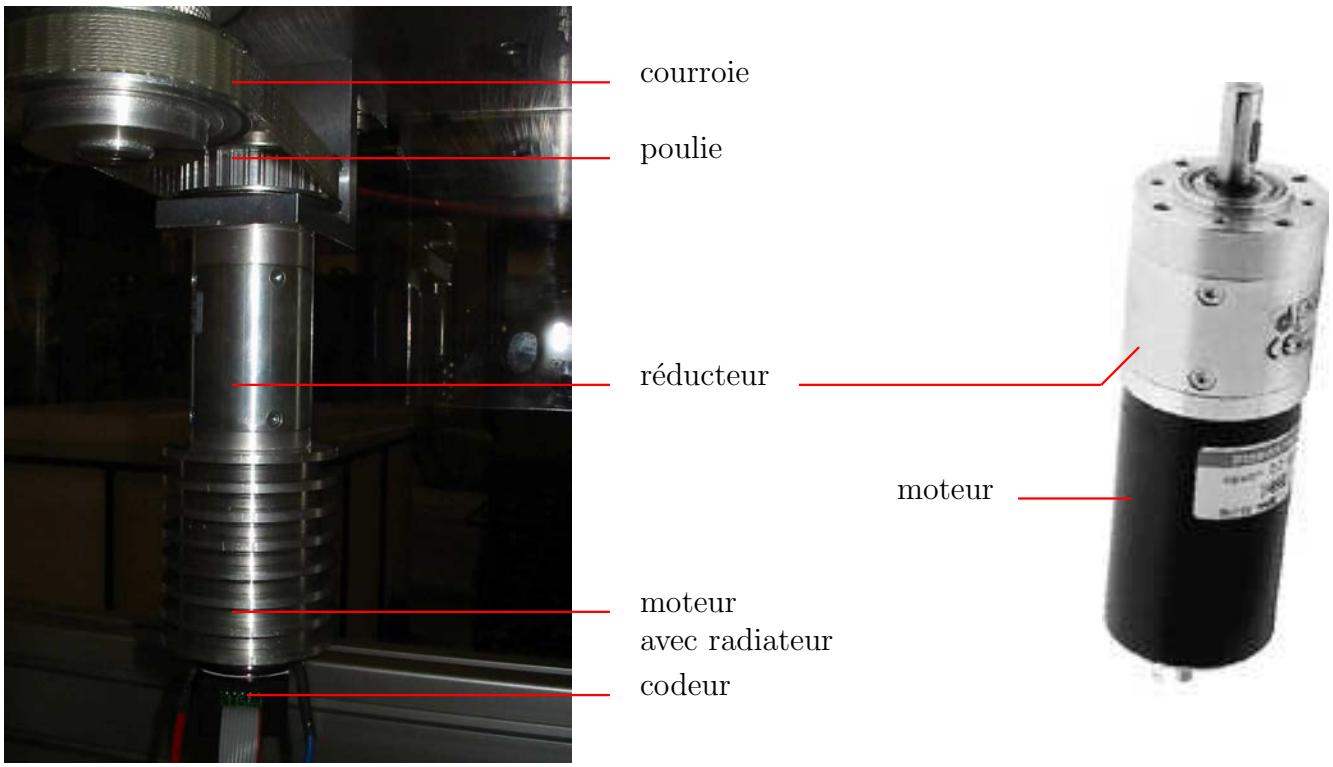


Fig. 7.3 – À droite, un de nos deux motoréducteurs dans son état à l'achat (site internet de MDP). À gauche, un motoréducteur une fois monté. Un codeur a été rajouté au dessous du moteur. Ce codeur est relié au boîtier de commande par la petite nappe de fils. On voit bien le radiateur fixé sur le moteur pour limiter son échauffement.

moteurs à courant continu. L'estimation de vitesse se fait par l'intermédiaire de ***codeurs***[3] : ils génèrent ***500 impulsions électriques par tour***. Il est donc plus intéressant de fixer le codeur sur le moteur et non sur le réducteur pour avoir un maximum d'impulsions par tour de cylindre. Le rapport de réduction du réducteur étant de 100, les codeurs génèrent 50000 impulsions par tour de réducteur. Or, la poulie de chaque axe de plateau possède 35 dents alors que celle de chaque moteur en possède 33, donc le rapport de réduction est de $35/33 \approx 1{,}06$. Au final, on obtient théoriquement

$$50000\ 35/33 \ \simeq\ 53030 \ \text{ impulsions par tour de cylindre.} \tag{7.6}$$

À condition de prendre certaines précautions (graissage des courroies par exemple), on a effectivement mesuré le nombre d'impulsions par tours du cylindre supérieur très proche, égal à 53029 (voir la section 7.4.1). On crée ainsi un signal électrique généré par la rotation de chaque moteur en y connectant un codeur (figure 7.3). Le signal électrique de ces codeurs est envoyé entre autres à la carte d'asservissement. Par le biais de son horloge interne, elle peut compter le nombre d'impulsions par seconde.

Toutes les informations recueillies par les cartes d'asservissement sont transmises au PC par l'intermédiaire d'une ***carte d'acquisition*** située à l'intérieur de celui-ci. Elle doit posséder deux convertisseurs numérique-analogique (CNA) à l'entrée, un pour chaque tension de consigne imposée à chaque carte d'asservissement. Notre choix s'est donc porté sur la carte d'acquisition 12 bits de référence ADL-PCI-9112 de AD Link Technology. Elle possède deux CNA, 16 entrées simples (i.e. référencées avec la même masse) ou 8 entrées différentielles. Ce type d'entrée différentielle est pratique pour y brancher un thermocouple (voir

[3] Un codeur optique est un dispositif électromécanique dont la sortie électrique représente la position angulaire de l'axe d'entrée : c'est un capteur de position angulaire. Lié mécaniquement à l'arbre du réducteur, l'axe du codeur entraîne la rotation du disque. Ce disque comporte une succession de parties opaques et transparentes. Une lumière émise par des diodes émettrices infrarouges traverse les fentes de ce disque en rotation créant sur les récepteurs infrarouges un signal transmis ensuite au système de traitement.

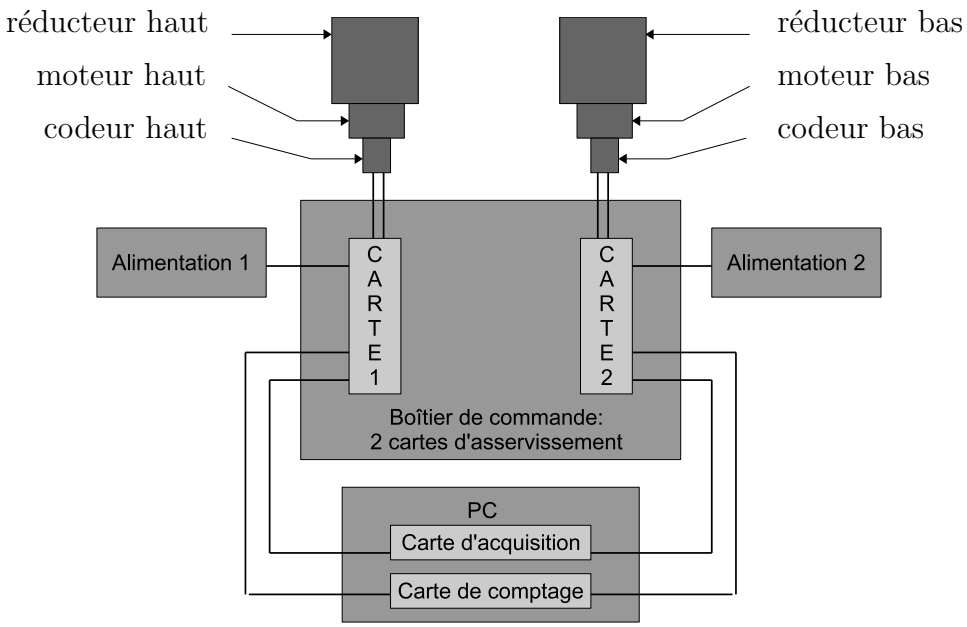


Fig. 7.4 – Schéma de la connectique des moteurs. Chaque codeur est relié à une carte d'asservissement (cartes 1 et 2) par laquelle il est aussi alimenté par la carte d'asservissement. Ces deux cartes sont toutes deux reliées à la carte d'acquisition afin de pouvoir piloter les moteurs sous DELPHI et à la carte de comptage afin d'avoir une bonne précision sur la lecture de la vitesse des moteurs.

section (7.8)), pour éviter de bruiter la masse. Une carte 16 bits aurait été plus précise, mais se trouve dans une autre gamme de prix. Ces informations sont enfin traitées sous Delphi[4], langage de programmation et logiciel, permettant entre autre de fabriquer une interface graphique conviviale.

Enfin, il nous faut deux ***alimentations*** pour les deux cartes d'asservissement et les deux moteurs alimentés par ces cartes. Si on néglige la puissance dépebsée par la carte d'asservissement devant celle dépensée par le moteur, il faut que l'alimentation fournisse une puissance P_{alim} supérieure à celle demandée par le moteur. On a donc choisi deux alimentations de référence PS-24/7,5L*24V/7,5A chez le même fournisseur que les moteurs. Ces alimentations fournissent un courant nominal $I_n = 7{,}5$ A sous une tension $U = 24$ V et ont une puissance $P_{alim} = U\ I_n = 180$ W chacune. Leur rendement étant de 0,7, elles fournissent une puissance P_{utile} de 126 W chacune. Ces alimentations ont donc à priori un léger défaut de puissance, mais en pratique celle-ci est suffisante. Toute la connectique est récapitulée sur la figure 7.4.

La régulation de la vitesse se fait par un PID (Proportionnel Intégrale Dérivée) intégré à la carte d'asservissement. Le PID est une méthode d'asservissement consistant à récupérer une information sur la vitesse du moteur, grâce aux codeurs, puis à s'en servir pour ajuster la tension de la commande. Nous obtenons un schéma en boucle fermée puisque la sortie du système est réinjectée à l'entrée.

En pratique, les cartes d'asservissement envoient une alimentation hachée $V(t)$ à chaque moteur (figure 7.6). Cette commande porte le nom de modulation par largeur d'impulsions[5]. Elle consiste à envoyer très rapidement des impulsions aux moteurs. Ces impulsions ont une amplitude égale, mais une durée variable. Le moteur reçoit ces impulsions et les moyenne. On peut alors définir le ***rapport cyclique*** r_c comme le rapport de la durée δt de l'échelon correspondant à une impulsion sur la période δT du signal correspondant au train d'impulsions. La vitesse du moteur varie linéairement avec ce rapport cyclique, appelé aussi taux de modulation,

$$\Omega = r_c\ \Omega_{\max}\ .$$

Cette méthode de commande présente l'intérêt de maintenir un couple moteur élevé tout en autorisant le réglage de la vitesse en continu.

[4]Ce logiciel est développé par Borland dont le site web est http ://www.borland.com/fr/products/delphi/

[5]MLI, et en anglais PWM (Pulse Width Modulation)

Fig. 7.5 – Boîtîer de commande des moteurs réalisé par l'***atelier électronique du LEMTA***. On dispose de deux tableaux de commande sur la façade, commandant séparément les deux moteurs. Le petit bouton carré blanc (ou noir) permet la mise sous tension du système, validée visuellement par la petite diode de couleur verte. À sa droite, un potentiomètre pour imposer manuellement la vitesse du moteur correspondant. En dessous, un bouton multi-positions pour passer de la commande manuelle (position 1) au pilotage par ordinateur (position 3) par une position intermédiaire neutre 2. À gauche de ce bouton, nous avons la possibilité de lire les tensions de sortie des cartes d'asservissement proportionelles à la vitesse de rotation du plateau correspondant. La fiche en bas à gauche permet de relier le codeur à la carte d'acquisition. Le dernier bouton en bas à droite relie la carte d'asservissement correspondante au PC. Enfin, les deux fiches bleues permettent d'alimenter les moteurs.

Les cartes d'asservissement sont placées dans un boîtier de commande (figure 7.5), mis au point par l'***atelier électronique du LEMTA*** et plus précisément par l'ingénieur Alain Delconte et les techniciens Bruno Simonigh et Bruno Chenu. Les deux moteurs peuvent ainsi être contrôlés séparemment, manuellement ou avec le logiciel DELPHI.

On peut lire une tension à la sortie des cartes d'asservissement (figures 7.6 et 7.4) qui nous donne une mesure de la vitesse réelle à un coefficient de proportionnalité près. Comme la carte d'acquisition est une carte 12 bits, elle donne lieu à une erreur de mesure relative de 1/4096. Sachant que la vitesse maximale de chaque cylindre est $\omega_{max} = 2\ \pi\ 1{,}1$ rad/s, l'erreur commise sur la vitesse est de l'ordre de $1{,}7\ 10^{-3}$ rad/s. Cependant, la précision que nous désirons est de l'ordre de $3\ 10^{-4}$ rad/s pour avoir une résolution de 1 sur le nombre de Reynolds (voir la discussion de l'équation 7.4). Nous avons donc dû utiliser une ***carte de comptage*** (pour les deux moteurs) afin de mesurer plus précisément la vitesse de nos moteurs.

7.4 Mesures des vitesses de rotation par compteurs - tests

Le comptage du nombre d'impulsions par seconde créées par un codeur est rendu possible avec une carte de comptage, de référence ADL-PCI-8554 du même fournisseur que la carte d'acquisition, placée dans le PC (figure 7.4). La carte de comptage choisie possède 10 compteurs dont deux « en cascade ». L'horloge interne possède une fréquence de 8 MHz. On utilise pour chaque moteur trois compteurs, montés en cascade par Alain Delconte pour compter précisément le nombre d'impulsions sur un tour. En pratique, nous avons choisi de compter avec précision sur un temps $\delta t = 200$ ms.

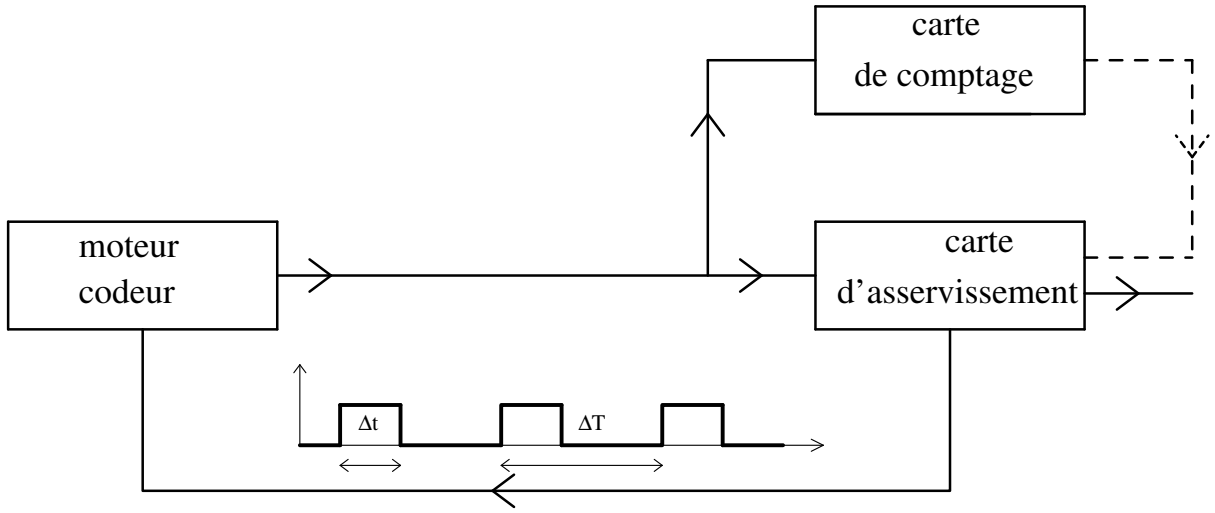


Fig. 7.6 – Schéma de régulation de la vitesse. Le codeur envoie ses impulsions électriques à la fois à la carte d'asservissement et à la carte de comptage. La carte de comptage en déduit ensuite grâce à ses compteurs la vitesse en rad/s que l'on affiche à l'écran sous Delphi. La carte d'asservissement en déduit avec ses compteurs la vitesse et envoie en rétroaction un signal haché en tension au moteur. La carte de comptage pourrait remplacer la carte d'asservissement pour la régulation pour une meilleure précision sur la vitesse (en pointillés).

7.4.1 Étalonnage des codeurs

On peut connaître grâce aux compteurs présentés précédemment le nombre N d'impulsions par seconde. Il suffit maintenant de connaître le nombre K d'impulsions par tour pour chaque cylindre afin de vérifier qu'il s'approche des 53030 impulsions (7.6) par tour théorique. Il faut aussi vérifier que le nombre d'impulsions par tour ne varie pas en fonction de la vitesse imposée à l'un ou l'autre des deux plateaux. On calibre donc les codeurs en comptant le nombre d'impulsions par tour sur une série d'au moins cinquante tours.

Pour cela, on détecte la rotation d'un tour d'un plateau à l'aide d'un petit montage (cette opération ne peut se faire simultanément pour les deux plateaux). On place au niveau du support de la manipulation deux petits interrupteurs (un par plateau) et un petit ergot sur chaque plateau (figure 7.7) de telle sorte que lorsque qu'un ergot rencontre l'interrupteur correspondant, ce dernier se ferme un court instant, engendrant ainsi un signal électronique par le biais d'un circuit imprimé intégré dans un boîtier. Ce signal est tantôt un front montant, tantôt un front descendant. On compte donc le nombre d'impulsions par tour un tour sur deux. Un exemple de courbes d'étalonnage ainsi obtenues est montré sur la figure 7.8.

Cet étalonnage doit être effectué à chaque fois que l'on modifie la tension des courroies. Cependant, nous avons vérifié que le nombre d'impulsions par tour peut être considéré constant, et ce quelque soit la tension imposée. Pour quantifier la précision de notre lecture de vitesse, on calcule la moyenne Moy du nombre d'impulsions n_k sur N tours (une cinquantaine)

$$Moy \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} n_k, \tag{7.7}$$

ainsi que l'écart type e_1 ramené en pourcentage en le divisant par la moyenne

$$e_1 \;=\; \frac{1}{Moy}\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N} n_k\right)^2 - \sum_{k=0}^{N} n_k^2}, \tag{7.8}$$

et enfin l'écart maximum en pourcentage e_2

$$e_2 \;=\; \frac{1}{Moy}\,\max\,\left(M - Moy,\, Moy - m\right), \tag{7.9}$$

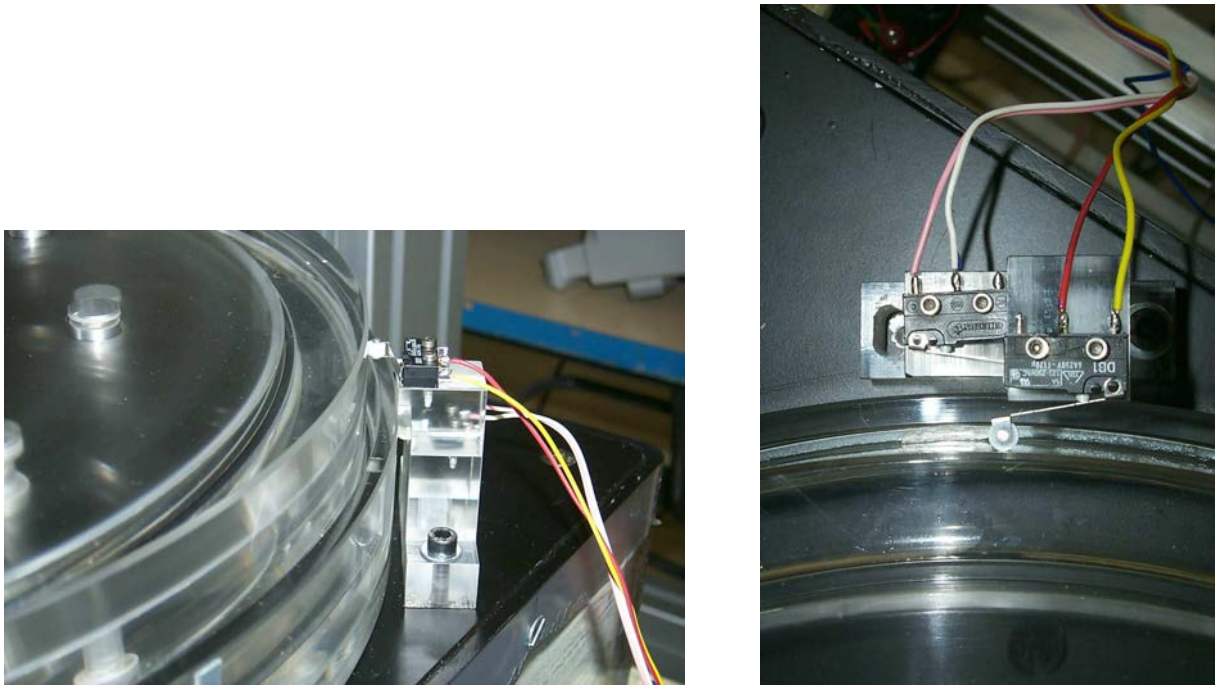


Fig. 7.7 – Système d'étalonnage des mesures de vitesses de rotation. À gauche, vue de côté de la manipulation ; à droite vue de dessus. Nous pouvons observer deux interrupteurs constitués d'une petite roue montée sur un système à ressort. Les deux interrupteurs sont reliés à une carte électronique intégrée dans un boîtier.

où M et m désignent respectivement le maximum et le minimum du nombre d'impulsions par tour. Les résultats de ces tests se trouvent sur la figure 7.8. On constate que pour les deux plateaux $e_1 < 0{,}1\ \% \ll 1\ \%$ et $e_2 < 0{,}3\ \% \ll 1\ \%$: le nombre d'impulsions peut donc être considéré comme constant. Toutefois, on remarque que l'imprécision sur le nombre d'impulsions par tour est supérieure pour le plateau supérieur, et que le nombre d'impulsions moyen « varie » davantage pour ce dernier.

Ces tests ont été faits à plusieurs reprises et donnent des résultats similaires : les tests sont donc reproductibles. D'autres tests ont été effectués pour vérifier que le mouvement d'un plateau ne provoquait pas de perturbation sur le comptage du nombre d'impulsions par tour de l'autre. Les tests sont concluants, il n'y a aucune interaction entre les deux plateaux ; on peut donc étalonner chaque plateau séparément.

7.4.2 Étalonnage tension-vitesse des codeurs

On connaît maintenant la vitesse en fonction du nombre d'impulsions par seconde. Il suffit maintenant de vérifier que la relation entre la tension de consigne et la vitesse mesurée est proportionnelle. Une procédure sous Delphi, créee par Alain Delconte, permet de tracer automatiquement cette courbe d'étalonnage. La méthode utilisée est la suivante : on impose un certain nombre N_p de paliers de tension variant de 0 à 10 Volts, et les moteurs maintiennent cette consigne en tension pendant une durée t que l'on choisit également. En pratique, nous avons choisi 20 paliers de 5 secondes chacun. Le logiciel obtient ainsi N_p points, avec lesquels on peut tracer une droite par régression linéaire avec un coefficient de corrélation supérieur à 0,999 : la loi entre consigne en tension et vitesse en rad.s^{-1} est bien une loi proportionnelle. Ainsi, à chaque consigne en vitesse imposée correspond une tension de consigne.

7.5 Circuit permettant de commander une contra-rotation

Nos cartes d'asservissement étant unipolaires, il nous est impossible de donner une tension de consigne négative, et donc de faire tourner un ou deux plateaux dans l'autre sens de rotation... Pour cela, l'atelier d'électronique et Michel Marchand ont fabriqué un petit circuit imprimé ayant les fonctions soustracteur puis

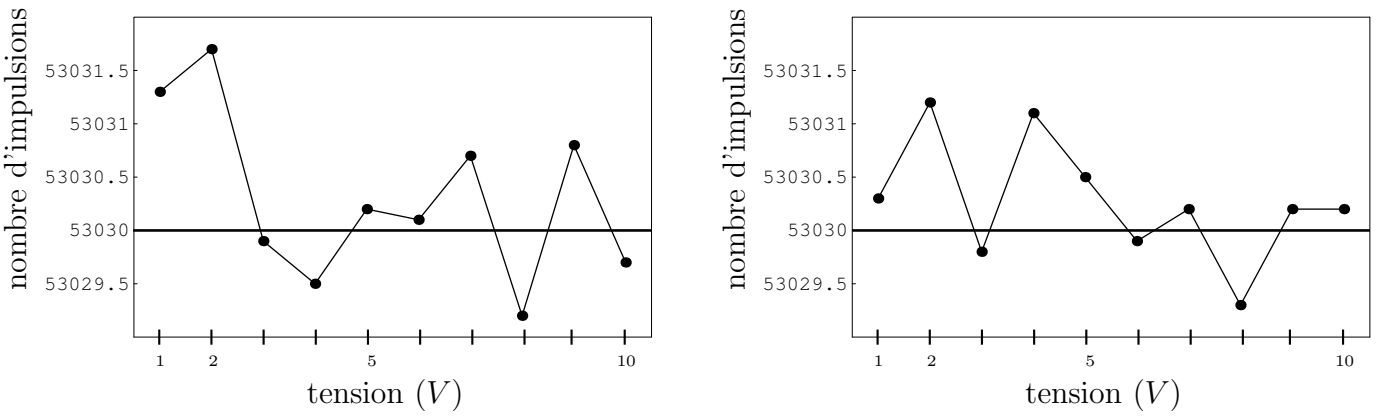


Fig. 7.8 – Exemple d'étalonnage des mesures de vitesses de rotation : nombres moyen d'impulsions comptées par tour de plateau supérieur (à gauche) et inférieur (à droite) en fonction de la vitesse de rotation des plateaux (exprimée en volt).

amplificateur. Ce circuit convertit ainsi une consigne U_{anc} allant de 0 à 10 Volts en une nouvelle consigne U_{nouv} allant de -10V à +10V, d'où la relation

$$U_{nouv} = 2\ (U_{anc} - 5)$$

7.6 Traceur pour la visualisation

Afin de visualiser l'écoulement, on ajoutait en début de thèse 2% du ***Kalliroscope*** AQ-1000, qui est une suspension de $1-2\%$ de paillettes de forme ellipsoïdale réfléchissantes (30 μm x 6 μm x 0,07 μm) selon Matisse & Gorman (1984).

Mais ces paillettes sont relativement lourdes ($\rho \simeq 1{,}6\text{kg/m}^3$ selon Matisse & Gorman (1984)) et sédimentent rapidement au fond du canal ou forment des agglomérats en à peine quelques heures, rendant les manipulations longues ou la reproductibilité de ces dernières impossibles, sans parler du temps perdu à démonter la manipulation pour vider, nettoyer et remplir à nouveau le canal... C'est pour cela que nous avons tenté de trouver un autre produit plus performant. Au final, nous avons adopté, sur les conseils de Christophe Baravian maître de conférence au LEMTA, en tant que traceur le produit Euperlan PK3000 (fabriqué par Cognis), utilisé en quantité infime (environ 0,1 g dans 400 g d'eau). C'est un traceur performant, car il sédimente très lentement grâce une masse volumique proche de celle de l'eau et s'agglomère très peu, ce qui favorise une utilisation pendant plusieurs semaines sans changer le mélange eau-traceur. De plus, il possède la même anisotropie bidimensionnelle que les flocons de Kalliroscope.

Ces « flocons » dispersés dans l'eau ont un fort indice de réfraction (1,85 pour le Kalliroscope), qui les rend facilement visibles, même dans des solutions fortement diluées ($< 0{,}1\%$). De plus, cette semi-transparence permet l'observation à l'intérieur du fluide. Les paillettes s'alignent dans la direction des « surfaces » de courant révélant ainsi la structure de l'écoulement. Quand la « face » d'une paillette est en orientée en direction de l'observateur, la lumière se réfléchit, « colorant » le fluide local. Quand la face d'une paillette est orientée de côté, la lumière ne se réfléchit pas vers l'observateur, et le fluide apparaît sombre. Il faut prendre garde au fait que l'écoulement est « visible » si la paillette a le temps de s'orienter convenablement. L'orientation des particules nous donne accès à l'une des trois composantes du tenseur du gradient de vitesse, on ne peut donc pas reconstruire le champ de vitesse total (Gauthier *et al.*, 1998). La faible concentration en paillettes permet de ne pas affecter l'écoulement. En effet, pour une concentration de 2% ou moins, l'effet des flocons sur la vitesse des ondes dans l'écoulement de vortex dans les systèmes Taylor-Couette est inférieur à 0,1% (Matisse & Gorman, 1984).

Cette technique de visualisation permet une détermination rapide des seuils d'instabilité ainsi qu'une caractérisation qualitative des structures observées. Elle permet simultanément une bonne visualisation vidéo et la mesure de vitesse par vélocimétrie laser doppler. Par contre, elle ne donne aucun accès au champ de vitesse de l'écoulement.

7.7 Imagerie

L'écoulement dans le canal est visualisé à l'aide d'une caméra en niveaux de gris reliée directement sur le PC par le port Firewire. On recueille des images à une certaine vitesse d'acquisition ; il faut donc prévoir quelle vitesse et quelle résolution sont nécessaires à une résolution spatio-temporelle suffisante. En effet, il faut, après avoir uniquement gardé la partie de l'image qui nous intéresse, à savoir tout ou une partie de l'anneau, pouvoir tirer les informations nécessaires des structures observées avec une bonne précision, par exemple le nombre d'onde ou la vitesse de phase. Même si l'instabilité que l'on veut visualiser n'est pas trop rapide, il nous faut être capable de déclencher une photo environ toutes les secondes, avec un temps d'exposition court à cause de la rotation d'ensemble du système. L'objectif de la caméra aussi importe : on doit pouvoir modifier l'ouverture de l'objectif pour éviter tout éblouissement de la caméra supplémentaire. Le second problème est la résolution de la caméra. Une photo globale de l'écoulement est nécessaire pour déterminer le nombre d'onde. Si on prend une telle photo globale, le pourcentage de surface utile de la photo est donnée par le rapport de la surface de la manipulation sur la surface de la zone de l'écoulement, soit

$$\frac{\pi\left(198^2 - 180^2\right)}{400^2} \simeq 13\ \% .$$

Avec une caméra 700x700 pixels par exemple, le nombre de pixels sur une section N_s du canal est de l'ordre de

$$N_s = \frac{r_e - r_i}{2r_e}\, 700 \simeq 32 \text{ pixels} .$$

Il faudra aussi s'assurer que le nombre de points azimutaux N_a soit suffisamment grand pour observer la vingtaine d'oscillations sur un tour. Il nous faut donc une caméra d'une résolution minimale de 700x700 pixels. Une caméra de résolution de 1 Mégapixels sera donc largement suffisante.

Nous avons finalement eu à notre disposition une caméra vidéo 1 mégapixels (1024x1024 pixels) Sony à 7,5 images par secondes maximum. L'acquisition est pilotée sous Matlab et l'enregistrement des images se fait directement à travers un port Firewire. L'objectif associé est un Pentax/Cosmicar CCTV Lenses avec zoom manuel et de focale 12,5-75mm.

L'éclairage de l'écoulement pose également problème. En effet, les structures recherchées sont bien visibles grâce au mélange eau-Euperlan à l'oeil nu, mais ce n'est pas forcément le cas pour une visualisation à l'aide de la caméra. Nous avons donc disposé autour de la manipulation un tube fluorescent de forme annulaire : tube haute tension de référence 154 L à pompage argon-mercure vendu par le magasin spécialisé dans les enseignes lumineuses CHARPENTIER. De couleur blanche, le tube de forme torique possède un petit diamètre de 13 à 14 mm et un grand diamètre de 426 mm. Il est alimenté par un transformateur haute tension (figure 7.10). Ce néon chauffe l'eau qui atteint une température d'environ 28 degrés et le gradient radial de température est faible, il n'y a donc pas de convection thermique.

Pour éviter que la caméra soit « éblouïe » par le néon, un *cache* a été disposé au dessus du néon. Posé sur le support de la manipulation, il est plat, légèrement plus large que le support de la manipulation. Dans ce cache a été creusé un disque de diamètre compris entre celui des plateaux inférieur et supérieur. Ainsi, on minimise l'éblouissement de la caméra sans géner pour autant la visualisation de l'écoulement par cette dernière. Il est en acier, peint en noir, pour ne laisser passer aucun rayonnement jusqu'à la caméra. Un échauffement du cache est peu probable vu l'aération facile de l'air sous ce dernier (figure 7.9).

Le dernier problème à résoudre est le choix d'un appareil capable de mesurer précisément la température du fluide. Une petite boucle est fixée sous le cache afin de pouvoir fixer le capteur de cet appareil.

Notre caméra est fixée à une potence située au-dessus de la manipulation (figure 7.9). Un réglage fin est nécessaire pour que la caméra soit parfaitement verticale et si possible centrée sur la manipulation. Pour faire ces réglages fins, nous avons à notre disposition des niveaux à bulles précis. Mais pour être définitivement sûr du réglage, nous visualisons à l'écran l'image que nous allons acquérir sur laquelle nous superposons une mire, i.e. une croix au centre de l'écran ainsi qu'un cercle centré sur cette croix. Ce dispositif nous permet de vérifier que le centre de la manipulation est au centre de l'écran et que les bords du canal correspondent bien à un cercle à l'écran et non une ellipse.

Pour détecter le centre du canal avec la mire, nous avons peint le disque métallique du centre du plateau supérieur en noir, excepté le « point central » qui est marqué par un petit « disque » blanc. On détecte ainsi

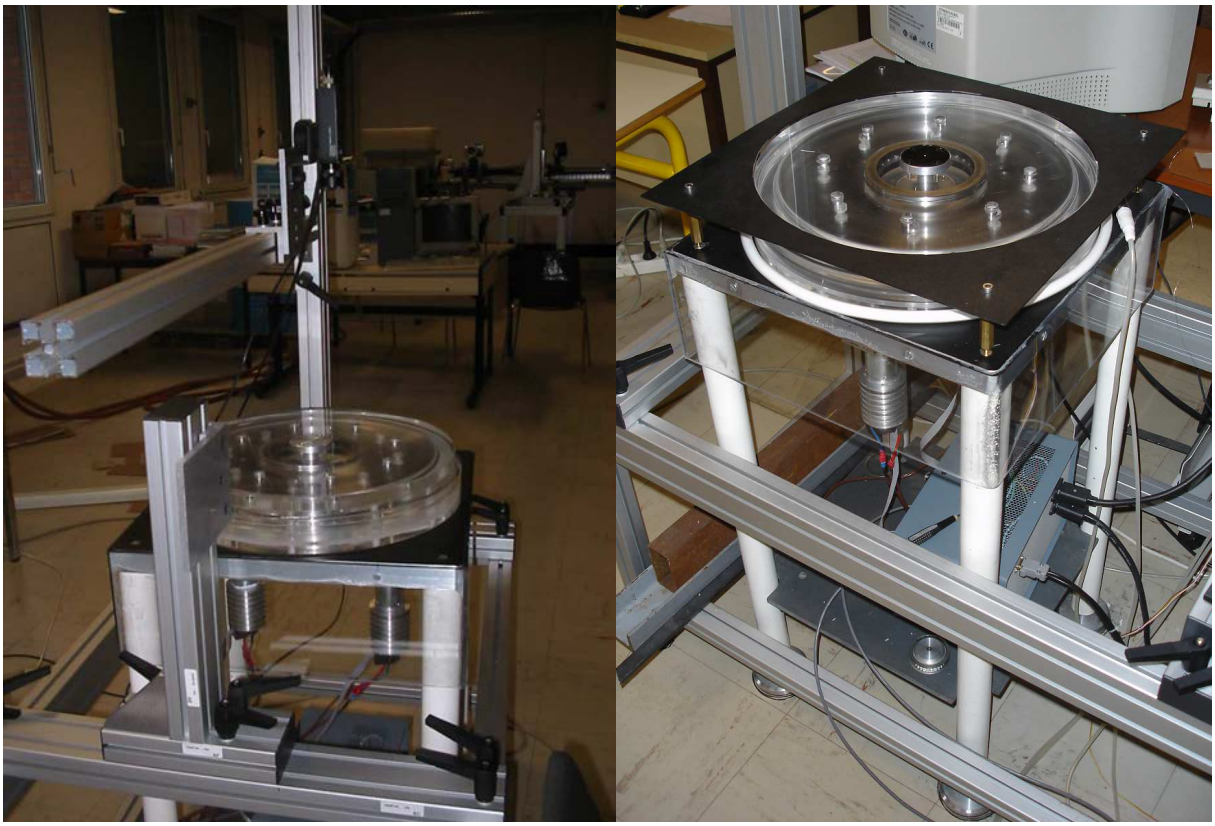


Fig. 7.9 – Manipulation dans sa quasi totalité. On remarque que le support des plateaux a été peint en noir pour une meilleure visualisation des phénomènes dans le canal. La plaque carrée percée d'un trou circulaire, peinte en noir, est le cache pour éviter l'éblouissement de la caméra par le néon.

avec un seuil de contraste tous les pixels blancs dont on prend le barycentre des coordonnées pour déterminer le centre de la manipulation. Cette technique est précise, et nous nous attendons à une erreur de l'ordre de $x'_0 = 2$ à 3 pixels sur la détermination de sa position. Il nous faut également détecter les rayons intérieur et extérieur sur chaque image. Cette détection est plus difficile. Il ne faut pas se fier à ce que l'on voit, les différentes couches de plexiglas peuvent nous induire en erreur. Une méthode astucieuse a été proposée par les deux élèves de Master 1 MEPP (Alexandre Thirion et Jonathan Finot) que nous avons encadrés pendant un projet. Elle consiste à envoyer un faisceau laser quasi radialement dans le canal. Le faisceau vient s'étaler sur la paroi intérieure en diffusant quasi verticalement, laissant apparaître une paroi illuminée de 2 à 3 pixels d'épaisseur, dont le point le plus lumineux se trouve exactement à la paroi intérieure. Par détection de ce seuil de contraste on détecte ce point fortement lumineux. Cette méthode ne fonctionne par pour détecter le rayon extérieur. Par contre, connaissant le rapport d'aspect de la manipulation, on en déduit le rayon extérieur en nombre de pixels.

Nous avons voulu vérifier que la vitesse d'acquisition de la caméra était bien constante et surtout égale à ce que Matlab annonce. Pour cela, on trace un trait fin blanc sur le contour du plateau supérieur et par variation de contraste on détecte la position de ce trait et donc l'angle fait par rapport à un rayon fixe. Si on trace l'angle repéré en fonction du temps, on voit que la vitesse associée oscille légèrement. Ceci est dû à l'erreur commise sur la position du centre de la manipulation, qui peut atteindre $x'_0 = 3$ pixels. Si entre deux images, le plateau tourne d'un angle φ, on voit cet arc de cercle avec un angle φ', comme nous le montre la figure 7.11. On peut se convaincre que l'erreur est maximale quand φ est de l'ordre de $\pi/2$. L'erreur commise est alors

$$\delta\varphi = \varphi' - \varphi = \arctan\left(\frac{x'_0}{\overline{r}}\right) = \arctan\left(\frac{3}{375}\right) = 0{,}008 \text{ rad} , \tag{7.10}$$

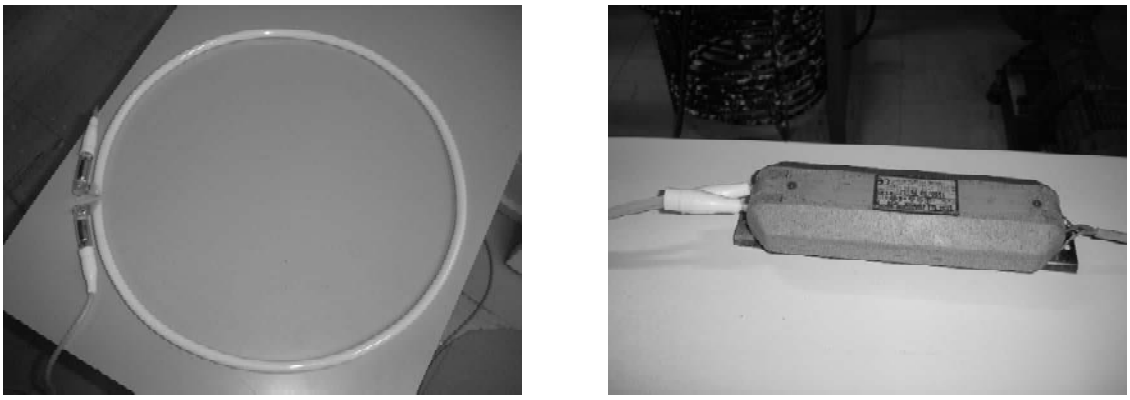


Fig. 7.10 – À gauche, photographie de notre néon. Les deux électrodes sont reliées au transformateur de la photographie de droite lui même alimenté par le secteur.

le nombre de pixels minimum pour $\overline{r}$ étant 375. L'erreur est donc négligeable.

7.7.1 Traitement des images

L'acquisition des images se fait sous Matlab. Chaque image est sous la forme d'une variable Matlab, que l'on convertit en fichier Bitmap (d'extension .bmp), ce format lisible par Mathematica. Chaque image en noir et blanc 1024×1024 pixels est donc une matrice de 1024×1024 coefficients compris entre 0 et 256 représentant un niveau de gris. On ramène ces coefficients entre 0 et 1 car les niveaux de gris sous Mathematica sont compris entre 0 et 1.

Afin de ne pas stocker un grand nombre de pixels inutiles, on veut isoler la zone de l'image correspondant au canal et la « déplier ». Pour déplier le canal, on définit un pas angulaire $d\varphi$ et pas radial dr. On choisit naturellement $dr = 1$ pixel. Pour tout pixel P (x_p, y_p), on calcule ses coordonnées polaires

$$r_p = \sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2} \tag{7.11}$$

$$\varphi_p = \arctan\left(\frac{y_p - y_c}{x_p - x_c}\right) \tag{7.12}$$

avec C (x_c, y_c) le centre du canal. On en déduit la place de ce pixel dans notre canal déplié en calculant

$$N_y = E\left(r_p - r_i\right) \tag{7.13}$$

$$N_x = E\left(\frac{\varphi_p}{d\varphi}\right) + \frac{\pi}{d\varphi}\ , \tag{7.14}$$

avec E la fonction partie entière. Le terme $\frac{\pi}{d_\varphi}$ permettant d'avoir un canal déplié allant de $-\pi$ à π. Le pas angulaire est choisi en faisant un compromis entre un trop faible pas angulaire qui induirait des listes énormes et un pas angulaire trop grand qui induirait un canal déplié avec des pixels vides, i.e. que certaines valeurs de N_x ne seront pas atteintes. Plusieurs pixels initiaux possèdent le même couple (N_x,N_y), c'est pourquoi quelques pixels du canal déplié sont une moyenne de quelques pixels originaux (au plus 3). Après quelques tests, on a choisi $d\varphi = 0{,}004$ rad. Si on prend des photos globales, on se retrouve avec un canal déplié d'inter-rayon 45 pixels environ et 1450 pixels environ sur un tour. On passe ainsi d'un million de pixels à environ 65000 (figure 8.9b).

Les images n'étant pas nécessairement « belles », on les traite en contraste. On détecte les minimum m et maximum M de contraste dans la zone « intéressante » où se trouve le phénomène étudié, on applique un réajustement des niveaux de gris initiaux c_i en définissant de nouvelles valeurs

$$c_f = \frac{c_i - m}{M - m} \tag{7.15}$$

qui parcourent tout l'intervalle [0,1].

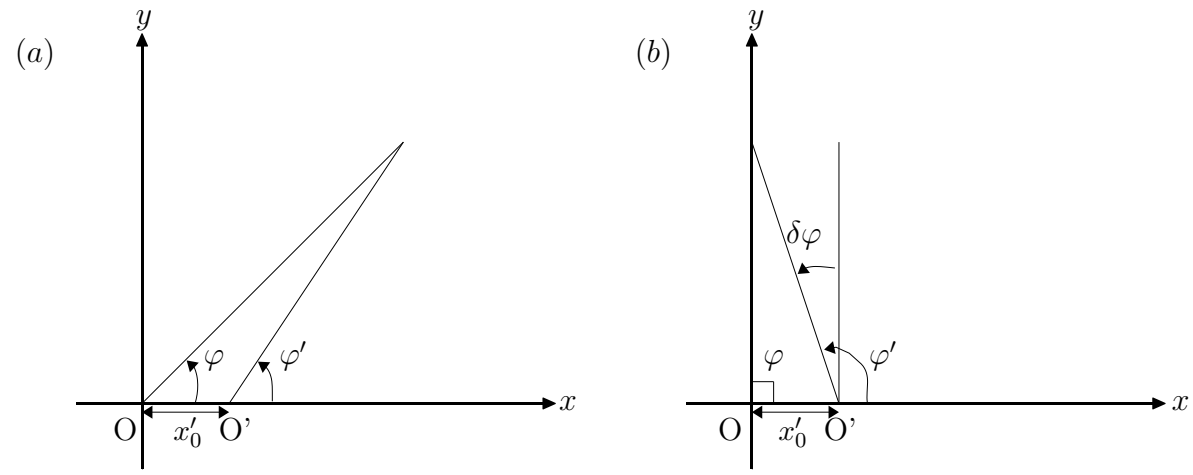


Fig. 7.11 – Schéma de notre canal annulaire. Le point O est le centre de la manipulation et O' le point pris pour le centre. Pour des raisons de symétrie, on peut mettre ces deux points alignés selon un des axes du repère, éloignés de N pixels. Si entre deux images, le plateau tourne d'un angle θ en passant du point M_1 au point M_2, on trouve que le plateau tourne d'un angle θ'. (a) : figure montrant une configuration illustrant notre calcul. (b) et (c) : figures montrant les configurations où l'erreur relative peut être maximale, respectivement pour un angle $\theta_1 = -\theta/2$ et $\theta_1 = \pi - \theta/2$

7.8 Mesure de la température par thermocouple

Le thermocouple est l'un des principaux systèmes de mesure de température. Son intérêt principal est la faible dimension du capteur, pouvant être inférieure à quelques dizaines de micromètres. Étant donné que nous désirons le placer au sein du fluide, il faut qu'il soit déformable et de dimension inférieure à 0,3 mm, qui est le « jeu » entre les deux plateaux (figure 7.1). Sur les conseils de Benjamin Rémy, nous avons choisi le ***thermocouple*** chemisé miniature avec sortie sur câble ***de type K*** (Chromel/Alumel) de référence $406-473$ chez le fournisseur TC.S.A.[6]. L'Alumel est un alliage composé de 95 % de nickel, 2 % d'aluminium, 2 % de manganèse et 1 % de silicium. Le Chromel est un alliage composé de 80 % de nickel et 20 % de Chrome. Il possède une plage de mesure étendue (-100 à 1370 ℃) et une courbe que l'on sait très bien linéariser pour obtenir sur toute l'étendue de mesure des précisions meilleures que 0,2 %. Il posède une gaine métallique (en acier inoxydable AISI 321) semi-rigide et isolée par une poudre minérale très fortement compactée du type Magnésie. Il a un diamètre de 0,25 mm. Le temps de réponse est de l'ordre de 15 ms.

Pour faire du thermocouple un instrument de mesure de température absolue et non différentielle, il faut maintenir la jonction de référence ou soudure froide à une température connue. Un appareil répandu appelé ***circuit de compensation de soudure froide*** est incorporé dans les circuits thermocouples ou dans les électroniques de mesure près des bornes de connexion. Fondé sur un circuit sensible (thermistor) qui détecte la température de la jonction de référence, il développe une tension équivalente de compensation u_c à cette température et l'ajoute à la tension lue (figure 7.12). Les circuits de compensation de soudure froide existent sous la forme de module externe, mais le nôtre, comme la plupart d'ailleurs, est équipé de circuit de compensation interne.

Nous avons choisi le transmetteur, l'élément principal du thermocouple, de référence 747-150 chez le même fournisseur que le capteur, dont la plage de fonctionnement est [-25 ℃, 150 ℃]. Il nécessite une alimentation $14-40$ V DC. Nous avons donc choisi l'alimentation chez le même fournisseur de référence 748-200. Elle délivre une tension de boucle de 24 VDC et un courant de sortie de 0,5 A. Le transmetteur étant linéarisé en tension, on connaît bien la relation liant la tension à la température. La dérive de la soudure froide est de 0,05 ℃. L'originalité de notre transmetteur est qu'à sa sortie, la tension à ses bornes est convertie en un courant électrique, moins sensible aux perturbations électromagnétiques. Ce courant correspond à la gamme de température indiquée par le constructeur du transmetteur ; il faut donc rajouter une résistance à la sortie pour modifier la gamme de température selon nos conditions réelles de fonctionnement, pour gagner

[6]Le site web est http ://www.tcsa.fr.

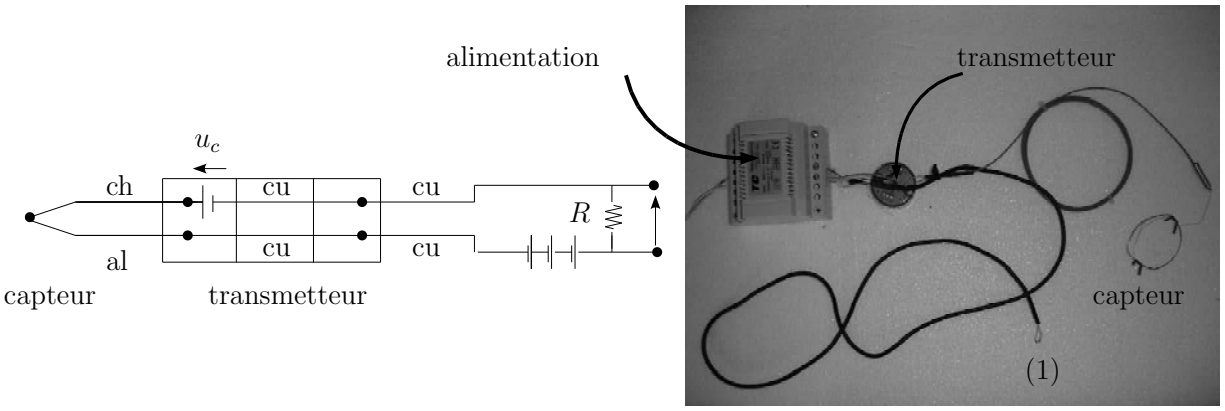


Fig. 7.12 – Gauche : principe de fonctionnement de notre transmetteur. L'isolation galvanique a pour but de supprimer tout lien électrique entre une partie de circuit et une autre. Cette isolation galvanique nécessite la séparation des masses. Droite : photographie de notre système de métrologie thermique. On relie au transmetteur le capteur du thermocouple (fil enroulé à droite) avec une résistance adaptée. On récupère la tension aux bornes de cette résistance par deux fils (1) qui seront reliés à l'entrée de la carte d'acquisition du PC.

en précision. Le transmetteur isolé à deux fils amplifie le signal basse tension en un signal de courant de 4 à 20 mA. La tension détectée dans la chambre de contrôle est $V = I\ R$, où I est le courant de boucle et R la résistance. Si on considère que la variation de température est linéaire avec le courant, sachant que 4 mA correspond à une température de -25 ℃ et 20 mA à 150 ℃, la température est

$$T(I) \ = \ 10{,}9\ I - 68{,}75\ ,$$

avec I en mA. Donc le courant correspondant à une température de 40 ℃ est $I(T = 40\,℃) \simeq$ 10 mA. Pour avoir un maximum de résolution en température, il nous faut un maximum de résolution en tension, donc le courant maximum doit correspondre aux 10 Volts. Il suffit donc de choisir la résistance R telle que

$$R \ = \ \frac{V}{I} \ = \ \frac{10}{10\ 10^{-3}} \ = \ 1\ k\Omega$$

La carte d'acquisition étant sur 12 bits, la résolution en température δT est

$$\delta T \ = \ \frac{40 - (-25)}{2^{12}} \ \simeq \ 1{,}5\ 10^{-2}\ ℃$$

qui est de l'ordre de grandeur nécessaire pour une bonne résolution en nombre de Reynolds.

Le thermocouple pouvant avoir une erreur systématique au pire de l'ordre de 2,5 ° C, il a fallu l'étalonner. Nous savons qu'un type K possède une bonne linéarité sur une faible plage de température, surtout si cette dernière est vers les températures ambiantes. Un bain d'huile thermostaté à 0 ° C nous fournit un point fixe. Le problème est d'en trouver un second dans notre plage de température, i.e. vers au plus 40 ° C. À ma connaissance, seul le point de fusion du gallium de l'ordre de 23 ° C se trouve à la bonne température... Nous avons donc fait confiance à un thermomètre à mercure pour mesurer un bain d'eau chaude en même temps qu'avec notre thermocouple pour l'étalonner. Le résultat de cet étalonnage, montré sur la figure (7.13), est satisfaisant puisque sur toute la plage de température ér=tudiée nos deux thermocouples donnent des températures égales à 0,1 degré près.

Le thermocouple est relié à la même carte d'acquisition que celle reliée aux moteurs et nous donne une tension que l'on peut convertir et lire sous Delphi. On vient lire la température du thermomètre à la même fréquence que la lecture des tensions correspondant à la vitesse des plateaux, à savoir toutes les 230 ms environ, soit une fréquence d'acquisition de 4,3 Hz. Toutefois, nous obtenons un signal très bruité, nous avons donc mis dans le circuit électrique du thermocouple une capacité en parallèle avec la résistance pour filtrer le signal. On choisit arbitrairement une fréquence de coupure de un ou deux Hz. Notre capacité se

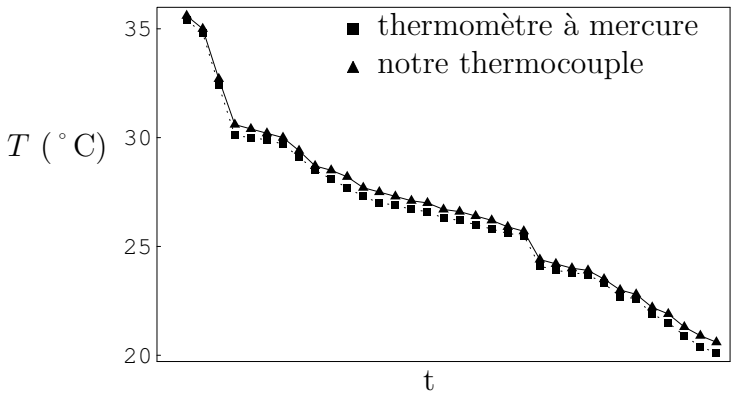


Fig. 7.13 – Comparaison entre notre thermocouple et un thermomètre à mercure, pour la mesure de température d'un bain d'eau initialement chaude.

chargera dans la résistance du thermocouple de $R = 1\text{k}\Omega$ et se déchargera dans celle située à l'entrée de la carte d'acquisition

$$\boxed{R_{carte} = 10\text{M}\Omega} .$$

Il faut donc choisir une capacité comprise entre les deux valeurs de capacité liées aux fréquences de coupure :

$$f_{charge} = \frac{1}{2\,\pi\,R\,C_{charge}} , \quad f_{décharge} = \frac{1}{2\,\pi\,R_{carte}\,C_{décharge}} ,$$

soit une capacité de l'ordre de 0,1 mF pour la charge et une capacité de 10 nF pour la décharge. Nous avons choisi une capacité de 10 μF.

Un dernier point concernant la « thermique » de notre manipulation est à signaler : si l'eau est initiallement à température ambiante, néon éteint, le temps mis par l'eau pour arriver à sa température de fonctionnement de l'ordre de 30℃ après allumage du néon, est d'environ 6 heures[7] !

7.9 Vélocimétrie Laser Doppler

7.9.1 Principe de fonctionnement

Les mesures directes de vitesse se font par ***Vélocimétrie Laser Doppler*** [8]. Cette technique fournit des mesures de vitesses locales et instantanées. Elle n'est pas intrusive et permet l'investigation détaillée et précise d'écoulement complexes. Elle est facilement utilisable pour mesurer des vitesses à proximité d'objets mobiles.

On mesure en fait les vitesses des particules solides (poussières, traceur...) transportées par le fluide, en faisant l'hypothèse que la vitesse de ces particules est égale à celle du fluide.

La mesure est fondée sur le fait, mis en évidence par Doppler, que la fréquence f_d de la lumière diffusée par une particule en mouvement est différente de la fréquence de la lumière incidente f_i sur cette particule d'une quantité f_D appelée ***fréquence de Doppler***. Si l'on a une source de lumière monochromatique et cohérente de longueur d'onde λ, on a :

$$f_D = f_d - f_i = \frac{1}{\lambda}\ \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{e_d}-\boldsymbol{e_i}) = \frac{2u}{\lambda}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) , \tag{7.16}$$

avec $\boldsymbol{u}$ le vecteur vitesse de la particule, $\boldsymbol{e_d}$ et $\boldsymbol{e_i}$ les vecteurs unitaires dans les directions respectivement diffusée et incidente, u la composante du vecteur vitesse dans le plan ($\boldsymbol{e_i}$,$\boldsymbol{e_d}$) portée par la normale à la bissectrice de l'angle formé par les deux vecteurs unitaires (figure 7.14).

[7] Nous avons modélisé ce problème thermique pour confirmer ce résultat expérimental.

[8] Laser Doppler Anemometry en anglais

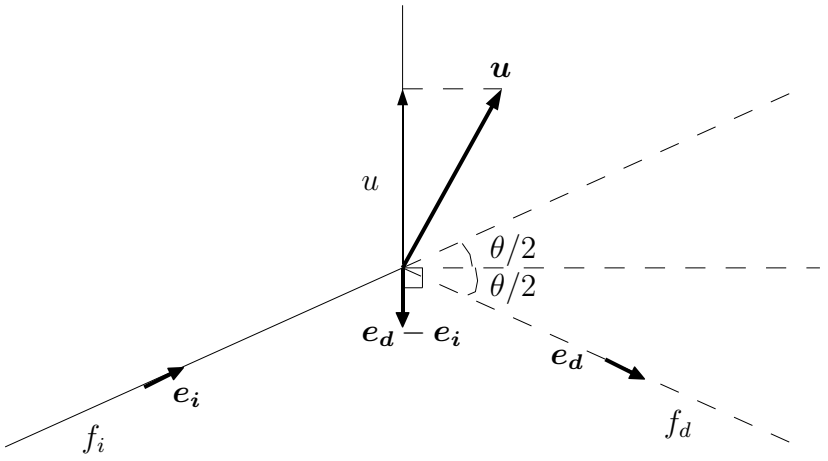


Fig. 7.14 – Principe de l'effet Doppler en diffusion de lumière par une particule. La lumière cohérente arrive selon $\boldsymbol{e_i}$ sur la particule se propageant à la vitesse $\boldsymbol{u}$, et est diffusée dans la direction $\boldsymbol{e_d}$.

Cependant, une application numérique montre que le décalage en fréquence f_D est en pratique de quelques 10^6 Hz, alors que les fréquences optiques telles que celle de l'onde incidente, sont de l'ordre de 10^{14} Hz. Un tel décalage en fréquence est donc impossible à mesurer. On utilise donc une technique plus subtile : le mode ***Doppler différentiel*** (figure 7.15a). Il consiste à faire croiser deux faisceaux laser monochromatiques et cohérents (figure 7.15a). À la croisée de ces faisceaux se crée, dans un volume appelé ***volume de mesure***, un réseau de franges d'interférence. Une particule diffuse une lumière d'intensité variant suivant qu'elle traverse une frange brillante ou sombre de ce réseau. On note δi l'interfrange, c'est-à-dire la distance entre deux franges brillantes. On peut par un calcul direct, partant de la superposition de deux ondes « planes » incidentes, montrer que $\delta i = \lambda / [2 \sin(\theta/2)]$. La fréquence de ***variation de l'intensité diffusée*** par la particule est donc

$$\boxed{f_D = \frac{u}{\delta i} = \frac{2}{\lambda} u \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \tag{7.17}$$

où u est la projection de la vitesse particulaire sur l'axe perpendiculaire aux franges d'interférence (figure 7.15b). On remarque que cette relation ne fait pas intervenir la direction de diffusion de la lumière $\boldsymbol{e_d}$. Le photodétecteur pourra donc être positionné en principe n'importe où pourvu qu'il ne reçoive pas de rayons directs. De plus, cette indépendance vis-à-vis de la direction de diffusion permettra de travailler avec une grande ouverture du photodétecteur (angle solide Ω grand) ce qui facilite les mesures dans les cas de petites particules isolées.

Les expressions des fréquences établies précédemment montrent que deux particules traversant le volume de mesure avec un même module de vitesse, la même trajectoire mais de sens opposés génèrent un signal de même fréquence. Une solution pour lever cette ambiguité consiste à faire défiler les franges d'interférence en décalant légèrement la fréquence de l'un des faisceaux par rapport à l'autre. Ceci est réalisé au moyen d'un modulateur acousto-optique, tel qu'une cellule de Bragg, intercalé sur le chemin optique de l'un des faisceaux. L'ensemble anémométrique à Laser fonctionnant en mode différentiel est doté des éléments constitutifs suivants :

- un laser hélium-néon d'une puissance de 25 mW émettant une lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}6328$ μm,
- un ensemble optique comportant essentiellement :
  - un séparateur du faisceau laser permettant d'obtenir deux faisceaux parallèles distants de $d = 38{,}4$ mm,
  - une cellule de Bragg imposant à l'un des faisceaux un décalage de fréquence $f_0 = 40$ MHz,
  - une lentille convergente de distance focale $L_f = 160$ mm,
  - un photodétecteur ou photomultiplicateur qui, par un processus d'avalanche électronique, multiplie l'énergie reçue sur la partie photosensible et délivre en sortie une intensité de l'ordre de 10 μA,

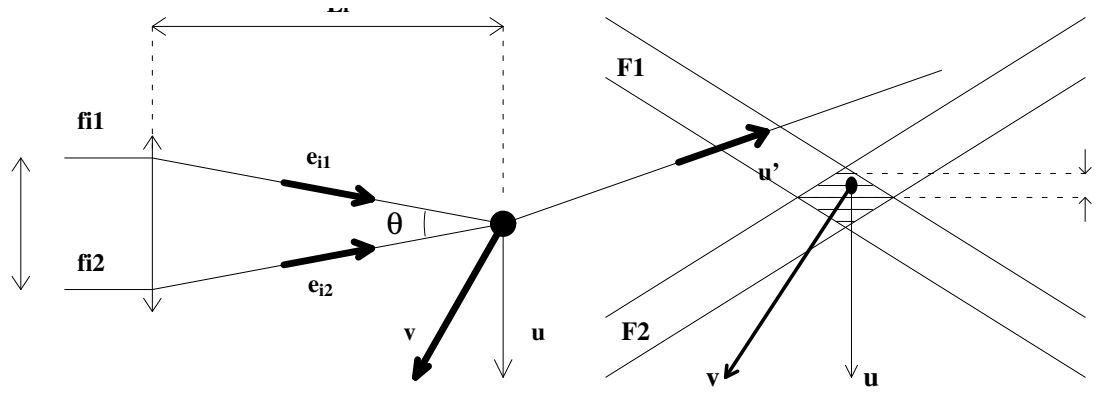


Fig. 7.15 – Principe de l'effet Doppler différentiel. À gauche, schéma de convergence des deux faisceaux lasers. À droite, franges d'interférence dans le volume de mesure.

- un amplificateur trans-impédance qui transforme ce courant en une tension de l'ordre du Volt,
- une chaîne d'acquisition et de traitement du signal Doppler par analyse spectrale en temps réel. Des filtres à large bande passante permettent d'éliminer en partie le bruit et la composante basse tension (piédestal du signal Doppler). Le signal ainsi conditionné doit encore être validé ; c'est le rôle d'un compteur sélecteur qui dénombre les crêtes successives et ne retient, sur une séquence[9] que celles comportant au moins huit crêtes successives. Toute séquence inférieure à huit crêtes est rejetée.

Le montage est conçu pour une utilisation en ***rétrodiffusion***. On choisi l'option de réception du même côté que l'émission. Le compteur fournit les informations suivantes, accessibles grâce à une carte par un logiciel informatique sur un PC dédié :

- le nombre de particules détectées par seconde,
- le taux de validation qui valident ces particules ou non,
- la fréquence moyenne du signal.

L'histogramme de la vitesse montre un amas de points centré sur la moyenne de l'écoulement et dont la largeur représente son écart-type. Une erreur de réglage de quelques décibels sur le gain du photomultiplicateur augmente fortement le diamètre de ce graphe, et une erreur de filtrage peut aussi la tronquer. Le gain et la tension du photomultiplicateur peuvent varier sur une large plage de valeurs, permettant un meilleur réglage de l'électronique de réception. Ainsi, d'un régime d'écoulement à un autre, il est impératif de corriger ces paramètres (i.e. la tension et le gain du photomultiplicateur) au fur et à mesure de l'exploration de l'écoulement pour minimiser l'écart type des mesures et optimiser la fréquence d'acquisition, signes d'une acquisition « propre ». Au final, la fréquence mesurée ne sera plus f_D mais, suivant le sens de l'écoulement, $f_0 \pm f_D$, ce qui permet non seulement de mesurer des vitesses très faibles, mais aussi d'en mesurer le signe.

Le facteur de calibration $C = \frac{\lambda}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\lambda\, L_f}{d} = 2{,}637\ \mu$m de l'équation (7.17) dépend uniquement de la source lumineuse utilisée et de l'optique associée. Même si pour atteindre le point de mesure, les faisceaux doivent traverser différents milieux (air, plexiglass, eau), comme toutes les interfaces sont approchées en incidence quasi normale, le facteur de calibration reste inchangé puisqu'à chaque réfraction, le quotient entre λ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ reste inchangé. En effet, d'après les lois de Snell-Descartes, λ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sont l'un et l'autre inversement proportionnels aux indices de réfraction des milieux observés.

Selon le mode d'emploi livré avec le matériel du laser (A/S, 2002), l'incertitude sur la mesure de fréquence par un compteur est donnée par la formule suivante, où f est exprimée en MHz :

$$\delta f = \mathrm{Max}\left(\frac{f^2}{4000}, \frac{f}{512}\right) \tag{7.18}$$

Lorsque nous travaillons en cisaillement par le cylindre supérieur, la fréquence d'acquisition peut atteindre 6 kHz, soit une erreur d'une dizaine de Hz, alors qu'en corotation, la fréquence mesurée est de l'ordre de 20 kHz, soit une erreur de 40 Hz environ. Dans les deux cas, l'erreur commise est très inférieure à 1%. Il est

[9] Une séquence est une « ***bouffée Doppler*** » correspondant au passage d'une particule dans le volume de mesure.

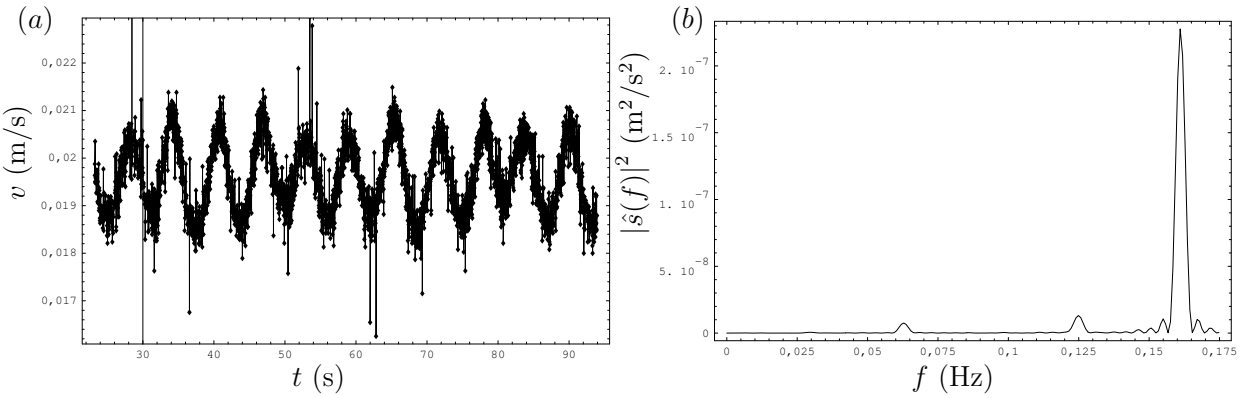


Fig. 7.16 – À gauche, vitesses particulaires azimutales mesurées par vélocimétrie Laser Doppler pour $Re_b = 0$, $Re_h = 1800$, $r = 189$ mm, $z = 9$ mm et $T = 22{,}4\,℃$. On observe 11 oscillations sur environ 68 secondes ce qui donne une période $T = 6{,}18$s et une fréquence $f = 0{,}16$Hz. À droite, spectre de Fourier associé à ce signal de vitesse. Le pic principal à 0,16Hz correspond à la fréquence de l'onde. Les deux autres pics correspondent aux fréquences de rotation du couvercle simple et double.

donc admis que les vitesses moyennes sont mesurées avec une incertitude de 1%. Un point délicat cependant est que l'on ne peut être sûr qu la vitesse des particules est exactement celle du fluide...

7.9.2 Analyse spectrale des signaux de vélocimétrie Laser Doppler

Le signal obtenu par vélocimétrie Laser Doppler est bruité (figure 7.16a). Pour lisser ce signal, on va filtrer les hautes fréquences du spectre de Fourier associé. Ce signal est une liste de N_t points de la forme $(t_n,v(t_n))$, où $v(t_n)$ est la composante azimutale mesurée à la date t_n, à laquelle on applique la transformée de Fourier discrète.

Malheureusement, on ne peut pas utiliser la commande `Fourier` de Mathematica ou `FFT` (Fast Fourier Transform) qui nécessite un pas de temps régulier. En effet, le laser mesure une vitesse lorsqu'une particule passe dans le volume de mesure, l'acquisition des données ne se fait donc pas de façon régulière. Le temps d'aquisition est d'environ 2 min, avec un pas d'échantillonnage moyen de l'ordre de 6 10^{-3}s. On définit la transformée de Fourier discrète de ce signal par le calcul direct de

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N_t}} \sum_{n=1}^{N_t} v(t_n) \exp(i\omega t_n) \tag{7.19}$$

le spectre correspondant est le carré du module de cette fonction (figure 7.16b). On observe ainsi des pics basse fréquence qui nous renseignent sur les fréquences dominantes dans le signal (figure 7.16b).

7.9.3 Platines de translation

Il importe de pouvoir déplacer dans une section du canal le système de vélocimétrie Laser Doppler pour pouvoir cartographier le champ de vitesse azimutale. Pour cela, nous avons besoin d'un rail de déplacement $2D$, couramment nommé XZ, doté de deux vis de déplacement micrométrique. Nous avons choisi une combinaison d'une plateforme élévatrice[10] d'une course de 56 mm avec une résolution de 0,05 mm, pouvant supporter un poids de 25 kg, et d'un rail[11] de translation d'une course de 28 mm muni d'une vis micrométrique[12] d'une course de 25 mm avec une résolution de 10 μm. Le tout est illustré par la figure 7.17. On a quadrillé une section du canal par vélocimétrie Laser Doppler pour confronter ces résultats à ceux obtenus expérimentalement. On s'attendrait à avoir en un point par VLD une vitesse constante au cours du temps,

[10] de référence 9204 chez le fournisseur Laser 2000 (http ://www.newfocus.com)

[11] de référence 9064-X chez le même fournisseur

[12] de référence 9353 également chez le même fournisseur

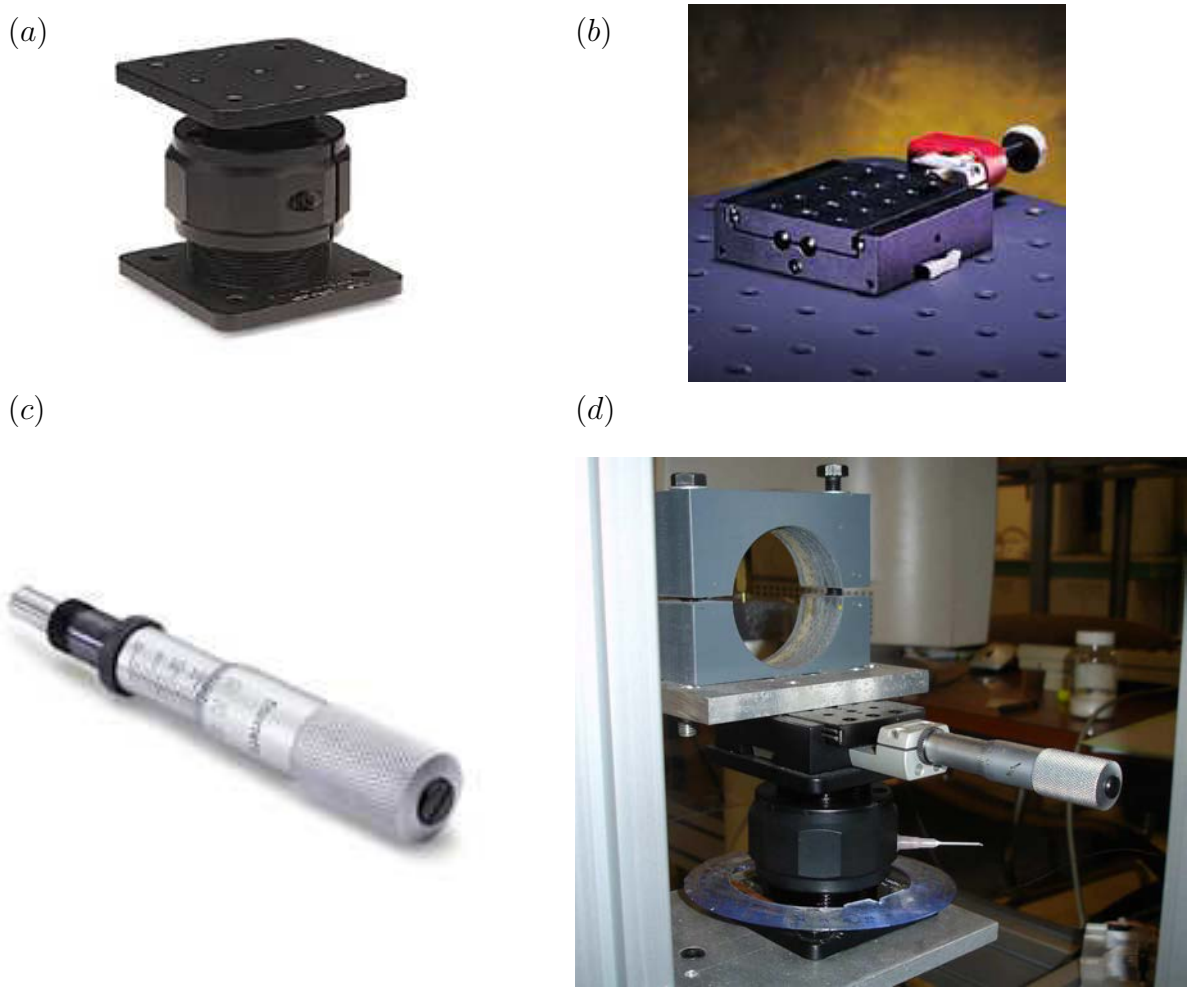


Fig. 7.17 – (a) : la plateforme élévatrice, (b) : le rail de translation, (c) : la vis micrométrique, (d) : photo de ces trois éléments réunis ainsi que la fixation du laser placée sur le rail.

soit un signal plat. Ce n'est pas le cas, le signal reste bruité figure 8.2. Cela provient du bruit intrinsèque à la mesure et également à des possibles défauts géométriques de la manipulation rendant l'écoulement pas parfaitement axisymétrique. Par manque de temps et de moyens, nous n'avons pas mesuré expérimentalement les écoulements transverses (v_r,v_z). Nous aurions pu prendre, de la même manière que pour la vitesse azimutale, la vitesse verticale en quadrilant point par point toute une section. Il suffit de faire tourner le laser d'un demi-tour selon son axe pour les obtenir. Par contre, pour acquérir les vitesses radiales, il aurait fallu prévoir un autre système de fixation du laser au-dessus de la manipulation. De plus, les vitesses transverses étant plus faibles que la vitesse azimutale dans les trois cas (d'à peu près un facteur 10), il aurait été plus difficile d'avoir des mesures fiables et précises par VLD qui est un système mesurant plutôt des vitesses importantes. Un autre moyen de prendre l'écoulement transverse serait des mesures par ***vélocimétrie par image de particules***, mais notre configuration rend la chose hardue. En effet, la nappe laser dans une section par un laser situé au-dessus de la manipulation pose peu de problème, par contre la caméra de la PIV devant se trouver relativement en face de cette nappe aurait dû être face à deux dioptres (air-plexiglass et plexiglass-eau) cylindriques. L'image prise est ainsi déformée, rendant difficile le traitement d'images mesurant le champ de vitesse.

Chapitre 8

Résultats

Nous effectuons des mesures globales par caméra vidéo et des mesures locales par vélocimétrie laser Doppler qui permettent de caractériser les écoulements. Les ondes sont visibles grâce au traceur Euperlan permettant simultanément ces deux types de mesure.

On rappelle ici que les deux paramètres de contrôle sont Re_h et Re_b définis par l'équation (7.3). Il est judicieux de définir deux autres paramètres de contrôle : le nombre de Reynolds moyen $\overline{Re} = \frac{Re_h+Re_b}{2}$ et le nombre de Reynolds différentiel $\delta Re = Re_h - Re_b$. Le premier nous donne une information sur la rotation moyenne, le second sur l'importance du cisaillement. Nous avons également les relations inverses

$$Re_b = \overline{Re} - \frac{1}{2}\delta Re \ , \qquad Re_h = \overline{Re} + \frac{1}{2}\delta Re \tag{8.1}$$

8.1 Écoulements de base axisymétriques

Si le cisaillement imposé au fluide est relativement faible, les écoulements restent à priori laminaires et axisymétriques, de la forme

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} = U\,(r,z)\,\boldsymbol{e_r} + V\,(r,z)\,\boldsymbol{e_\varphi} + W\,(r,z)\,\boldsymbol{e_z} \ , \tag{8.2}$$

ce que nous avons vérifié expérimentalement. En effet, les visualisations montrent bien des écoulements indépendant de l'angle d'azimut φ, tandis que les mesures de vélocimétrie Laser Doppler montrent des signaux fluctuants autour d'une valeur moyenne, avec un faible niveau de fluctuation : écart type inférieur à 5%[1] (figure 8.2). Contrairement au cas d'un canal rectiligne (Theofilis *et al.* (2004), voir aussi la figure 8.1a), notre configuration rend impossible la détermination analytique de ces écoulements de base, puisque des effets de courbures les rendent tri-dimensionnels. Dans ce qui suit, on va donc comparer nos écoulements de base expérimentaux à ceux calculés numériquement par Eric Serre.

Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l'écoulement de base dans trois cas caractéristiques :

- en cisaillement pur, pour $Re_b = 0$: le fond et les bords du canal sont alors immobiles ;
- en corotation rapide, pour $\overline{Re}$ élevé : on s'attend alors à avoir des forces d'inertie importantes ;
- en contrarotation pure, pour $\overline{Re} = 0$: on s'attend à avoir un écoulement moyen azimutal quasi nul.

8.1.1 Cas du cisaillement pur

L'écoulement de base a été calculé numériquement par Serre & Plaut (2007) pour $Re_b = 0$ et $Re_h = 750$. On remarque que la zone de survitesse azimutale la plus épaisse verticalement est située davantage vers l'extérieur. L'écoulement de base, contrairement à l'écoulement de Couette confiné unidirectionnel, n'est pas symétrique par rapport à l'axe $r = \overline{r}$ (figure 8.1). Cette dissymétrie est dûe aux effets de courbure. En effet, la rotation du plateau supérieur génère une force centrifuge qui entraîne le fluide proche de cette paroi vers l'extérieur. Cet écoulement radial centrifuge, par conservation de la quantité de mouvement, crée un rouleau transverse dans une section du canal (figure 8.3a). Cet écoulement transverse va interagir avec l'écoulement

[1] Les défauts mécaniques engendrent entre 2 et 3% d'écart type.

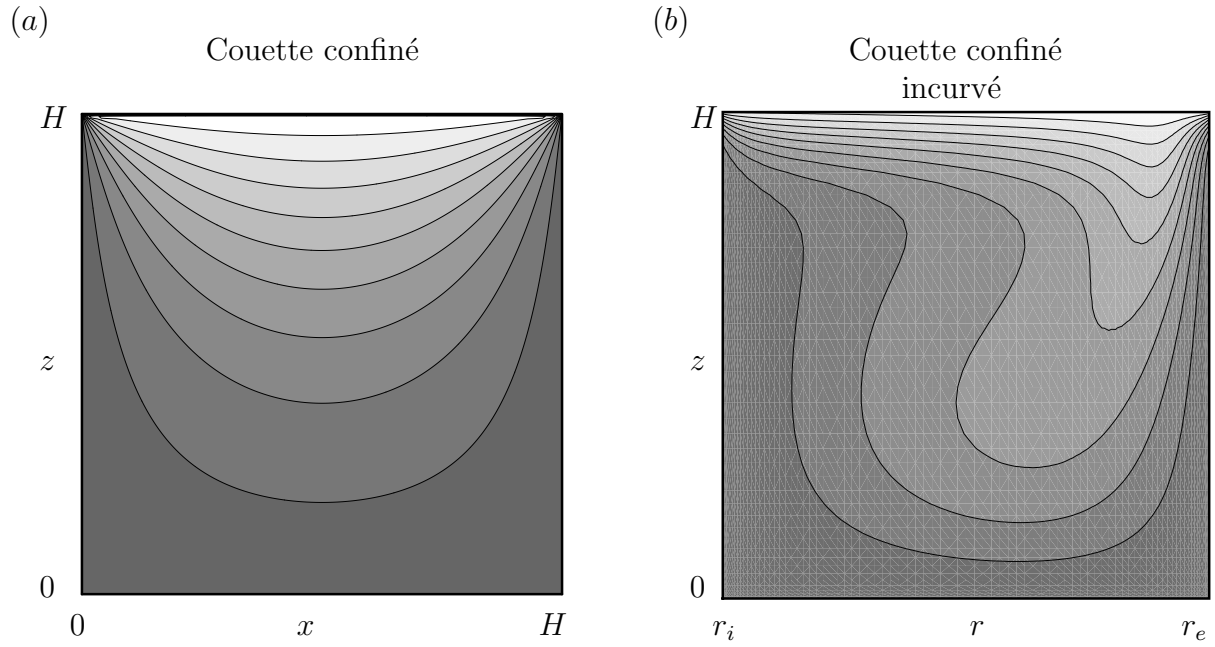


Fig. 8.1 – À gauche, vitesse hors du plan d'un écoulement de Couette confiné dans un canal unidirectionnel, calculé grâce à l'équation 2.5 de Theofilis *et al.* (2004). À droite, vitesse azimutale obtenue numériquement par Eric Serre dans une section de notre canal pour $Re_b = 0$, $Re_h = 750$: le champ perd sa symétrie par rapport au milieu du canal. Le blanc correspond à la vitesse maximale, i.e. la vitesse de la paroi supérieure ($r_e\Omega_h$ au niveau du rayon extérieur pour la figure de droite), le noir à la vitesse minimale nulle des trois autres parois solidaires.

azimutal, déplaçant la zone de survitesse vers l'extérieur du canal. Toutefois, cet écoulement transverse est d'intensité plus faible que l'écoulement azimutal : la vitesse radiale maximale est de $0{,}07\Omega_h\overline{r}$ (Serre *et al.*, 2006). Les niveaux de vitesse azimutale dans une section sont représentés (figure 8.1b, 8.3b et c). On observe bien l'adhérence aux parois, sauf au niveau des couches limites numériques introduites pour régulariser la discontinuité de vitesse aux points singuliers de « contact » entre les bords latéraux et le couvercle. En effet, en $r = r_i,r_e$, on impose comme dans Serre *et al.* (2002) le profil régulier

$$V_{l_r}(r,z) = \left[\Omega_b + (\Omega_h - \Omega_b)\exp\left(\frac{2(z-H)}{l_r H}\right)\right] r \tag{8.3}$$

sur les parois en $r = r_i,r_e$, l'épaisseur de régularisation réduite l_r étant prise égale à 0,06 la plupart du temps. Ce profil de vitesse azimutale linéaire en le rayon fut également utilisé par Cousin-Rittemard *et al.* (1998). Serre *et al.* (2001) montrent que l'on obtient des résultats similaires en gardant la discontinuité. Ce profil linéaire est intéressant d'un point de vue mathématique, car il réduit les sources d'erreur pouvant affecter les solutions numériques.

On a un accord semi-quantitatif, voire quantitatif entre les résultats numériques et expérimentaux (figure 8.3c et d). Pour mieux s'en convaincre, on a comparé les profils de vitesse azimutale en fonction de la hauteur au milieu du canal figure 8.3d. Cette figure montre aussi un bon accord. On peut la voir comme un complément, à vitesse plus élevée, à la figure 5 de Barthelet *et al.* (1995).

Il importe de noter que l'écoulement de base est de type ***Couette-torsion***, et le reste à nombre de Reynolds plus élevé, comme le montrent les résultats numériques de la figure 8.4.

8.1.2 Cas de la corotation rapide

L'écoulement de base a été calculé numériquement par Éric Serre pour $\overline{Re} = 4000$ et $\delta Re = 2018$. Si on trace le profil axial de vitesse azimutale au milieu du canal, on remarque que malgré la même tendance observée, un désaccord en amplitude se manifeste (figure 8.5). Ceci s'explique probablement par un dysfonctionnement temporaire du codeur du moteur entraînant le plateau inférieur, rendant impossible une bonne

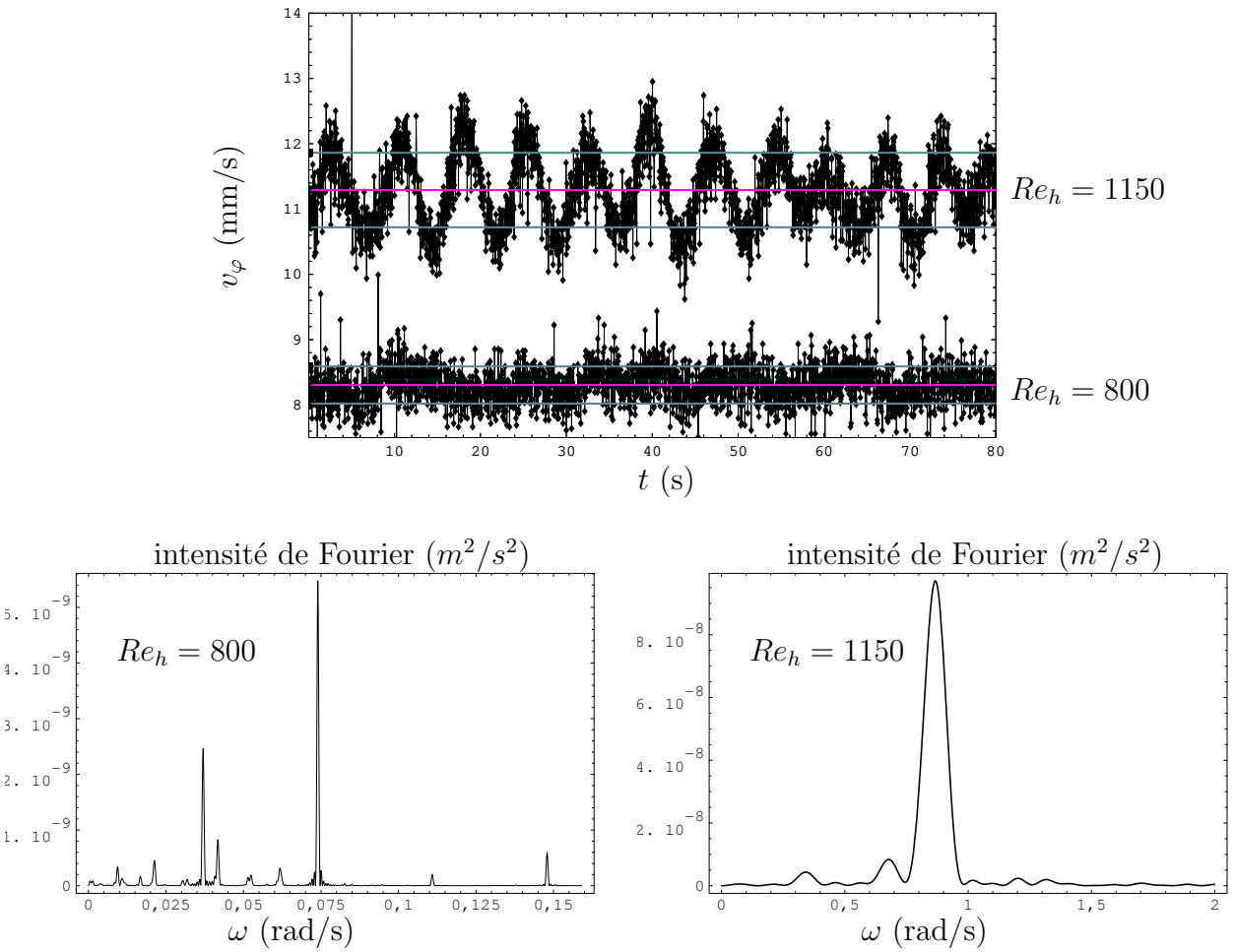


Fig. 8.2 – Signaux temporels de vitesse azimutale et les spectres de Fourier associés en ***cisaillement pur*** pour $Re_b = 0$, $r = 183$ mm, $z = 9$ mm et $T = 21{,}6\,^\circ$C. Le signal du bas, pour $Re_h = 800$, n'est pas parfaitement plat, mais l'écart type est faible, inférieur à 5% de la vitesse moyenne. Le signal supérieur, pour $Re_h = 1150$, possède donc une moyenne supérieure mais aussi un écart type supérieur : on voit une structure périodique dans le temps, signalant une ***instabilité*** de l'écoulement de base.

précision sur la vitesse de ce plateau (on ne recolle pas en bas sur la courbe à la vitesse mimimale). Nous avons alors tenté d'estimer l'erreur commise sur les nombres de Reynolds et considérons finalement que les résultats expérimentaux ont été faits pour

$$Re_b = 3185 \quad \text{et} \quad Re_h = 5028\ .$$

Nous trouvons pour ces paramètres les graphes 8.6.

Comme dans le premier cas, le plateau supérieur génère une force centrifuge. Même si les autres parois sont en mouvement, c'est le plateau supérieur qui tourne le plus vite ($Re_h = 5009$ et $Re_b = 2991$ selon l'équation (8.1)), la force centrifuge générée par ce plateau domine. Le rouleau transverse ainsi crée a un sens de rotation identique (figure 8.6). La vitesse radiale maximale est 0,06 $\Omega_h \overline{r}$, l'écoulement transverse est encore faible devant la vitesse azimutale. Les niveaux de vitesse azimutale dans une section est représentée (figure 8.6). On observe bien l'adhérence aux parois, en dehors des les couches limites numériques. On remarque que la zone de survitesse la plus épaisse verticalement est encore située davantage vers l'extérieur, ceci étant un effet de courbure.

Si on trace le profil vertical de vitesse azimutale au milieu du canal figure 8.6, on a un accord semi-quantitatif entre les résultats numériques et expérimentaux. On remarque une zone en rotation quasi solide au milieu du canal, loin des parois, qui est davantage visible si on regarde le profil numérique vertical de vitesse azimutale figure 8.6. Ceci est dû à la force de Coriolis qui prédomine sur les autes forces, tendant à bidimensionnaliser l'écoulement (ceci correspond à la contrainte de Proudman-Taylor déjà rencontrée dans

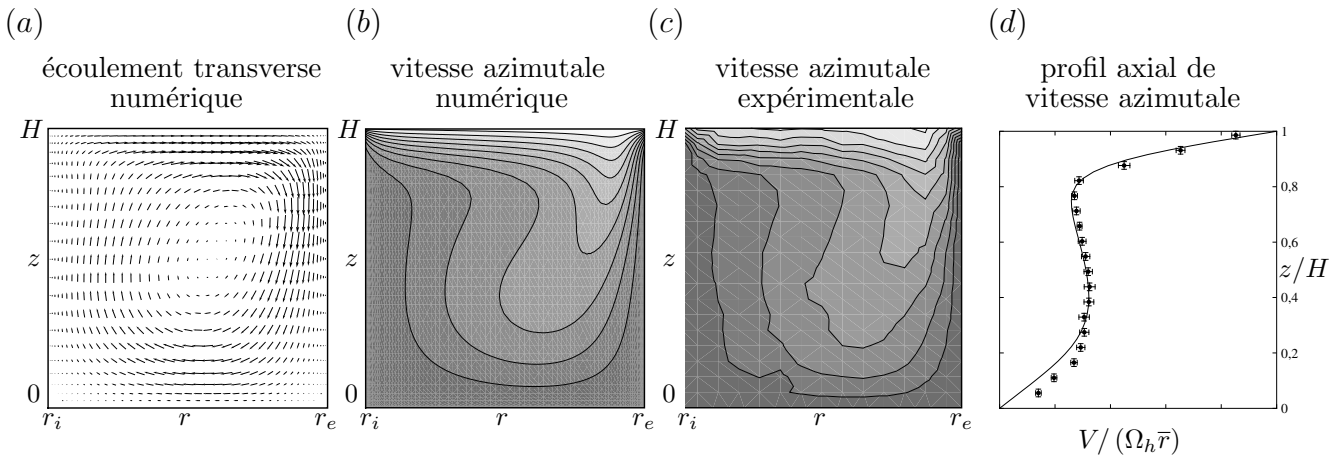


Fig. 8.3 – En ***cisaillement pur***, pour $Re_b = 0$, $Re_h = 750$, les figures (a) et (b) présentent l'écoulement axisymétrique calculé numériquement par Éric Serre. (a) : écoulement transverse. La vitesse radiale maximale est $0{,}078\Omega_h\overline{r} = 0{,}074\Omega_h r_e$. (b) : champ de vitesse azimutale. En (c) figure le champ de vitesse azimutale mesuré par vélocimétrie Laser Doppler en 13x18 points (soit 234 points de mesure). Les figures b et c utilisent exactement les mêmes dix niveaux de gris ($V = 0{,}2$ à 1 par pas de 0,8/9). En (d), le profil axial de vitesse azimutale au milieu du canal. En trait continu, le profil numérique calculé par Éric Serre. Les points expérimentaux suivent de près la courbe numérique.

notre partie théorique section 2.2) : la vitesse est quasi invariante vis-à-vis de la coordonnée axiale.

On retrouve au milieu du canal un écoulement de type ***Ekman-Couette*** calculé analytiquement en négligeant les effets de courbure et le confinement latéral. Les expressions analytiques (6.11) et (6.12) décrivent bien l'écoulement de base dans ce cas à en croire les profils tracés sur la figure 8.7. Le fait que la vitesse de « cœur » soit inférieure à celle estimée par l'écoulement d'Ekman-Couette, $\overline{\Omega r}$, est probablement due à la friction au niveau des parois latérales, qui tournent à la vitesse angulaire $\Omega_b < \overline{\Omega}$.

8.1.3 Cas de la contrarotation pure

L'écoulement de base a été calculé numériquement par Éric Serre pour $\overline{Re} = 0$ et $\delta Re = 1000$. Il y a une compétition entre la force centrifuge créée par la paroi supérieure et celle créée par le paroi inférieure, qui sont maintenant d'intensités égales. La paroi supérieure créée une force centrifuge qui crée le petit rouleau ayant le même sens de rotation que dans les deux cas précédents. La paroi inférieure crée aussi son rouleau, et comme elle est entourée de deux parois solidaires avec elle (les bords verticaux), ce rouleau est plus grand (figure 8.8a). Ces deux rouleaux vont interagir avec l'écoulement de base, amenant la zone de survitesse vers l'intérieur du canal. Les niveaux de vitesse azimutale dans une section sont représentés figures 8.8b et c. Si on trace le profil verical de vitesse azimutale, l'accord est quasi parfait figure 8.8d.

8.2 Instabilité primaire : résultats expérimentaux et éléments d'interprétation

8.3 Instabilité primaire : résultats expérimentaux

La détection du seuil de l'instabilité primaire se fait de deux manières :
- soit visuellement par caméra,
- soit par mesure de vitesse particulaire (orthoradiale) par VLD.

En visualisation directe, on détecte les instabilités en guettant une brisure de l'invariance par rotation azimutale des images obtenues en présence du traceur (section 7.7). Il est cependant nécessaire de valider par vélocimétrie laser Doppler car la visualisation peut être trompeuse et ne révéler la présence d'ondes qu'après

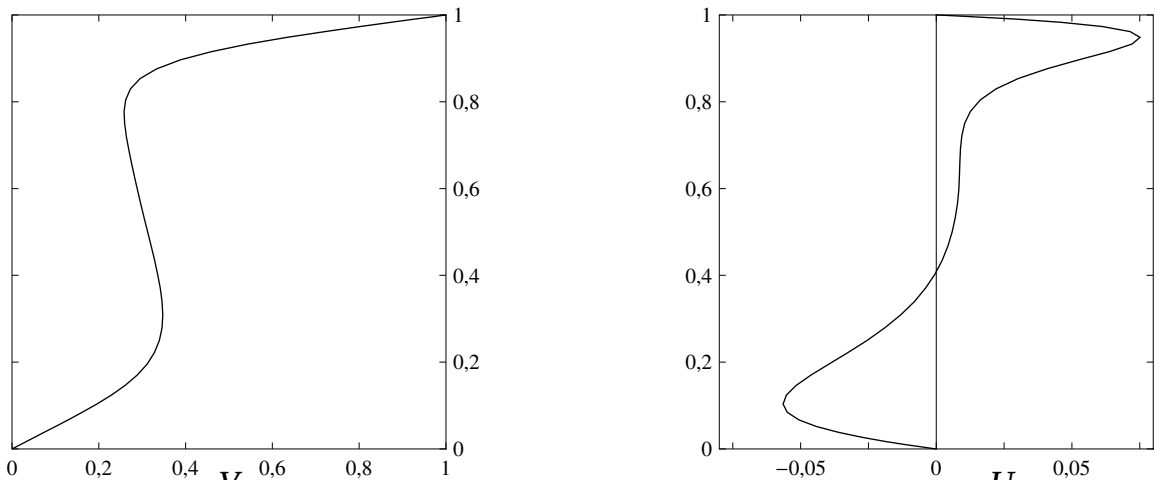


Fig. 8.4 – Vitesses numériques « azimutale » V (6.12) à gauche et « radiale » U (6.11) à droite d'Éric Serre en fonction de z dans le cas de cisaillement pur $Re_b = 0$ et $Re_h = 1260$. Les couches limites dans ce cas sont relativement jointes.

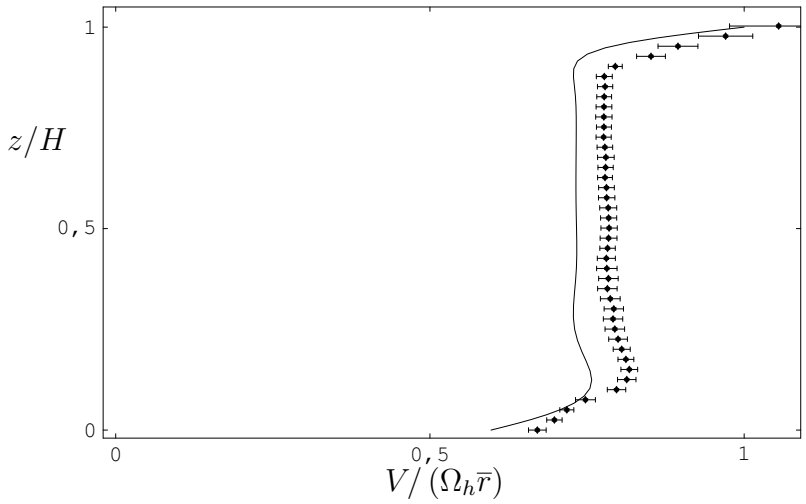


Fig. 8.5 – Profil axial de vitesse azimutale dans le cas de ***corotation rapide*** $\overline{Re} = 4000$ et $\delta Re = 2018$.

le seuil d'instabilité dépassé[2]. Au contraire, les mesures par vélocimétrie laser Doppler sont plus fiables, mais ce à un certain prix. Les ondes n'occupent pas toujours tout le canal, il faut savoir où mesurer exactement la vitesse. Reste enfin à se donner un écart type limite au-delà duquel on considère que l'écoulement laminaire est instable (figure 8.2) : on a choisi 1 mm/s, quelque soit la vitesse moyenne (figure 8.11).

J'ai eu la chance d'encadrer deux étudiants de Master 1 qui ont contribué à détecter le seuil des deux manières simultanément[3].

[2] J'ai eu l'occasion d'essayer plusieurs traceurs différents et certains ne révélaient l'écoulement que lorsque celui-ci était fortement turbulent...

[3] J'entend par simultanément que les 2 techniques détectent le seuil, les 2 PC (un pour la VLD, l'autre pour la caméra) ne sont pas synchronisés.

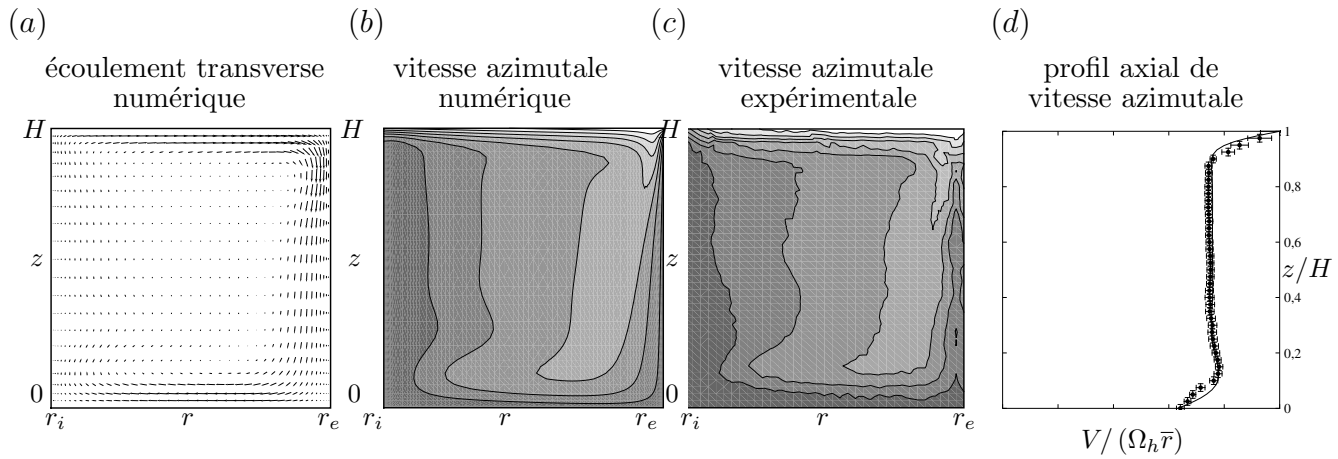


Fig. 8.6 – Écoulement de base dans le cas de ***corotation rapide*** $Re_b = 3185$, $Re_h = 5028$. (a) : écoulement transverse numerique obtenu par Éric Serre. La vitesse radiale maximale est $0.061\Omega_h\overline{r} = 0{,}058\Omega_h r_e$. (b) et (c) : écoulements azimutaux numérique et expérimental ; les contours sont à $(0{,}65,\ 0{,}70,\ \cdots,\ 0{,}95)\Omega_h r_e$. (d) : profils axiaux numérique et expérimental de vitesse azimutale pour un rayon moyen $r = \overline{r}$.

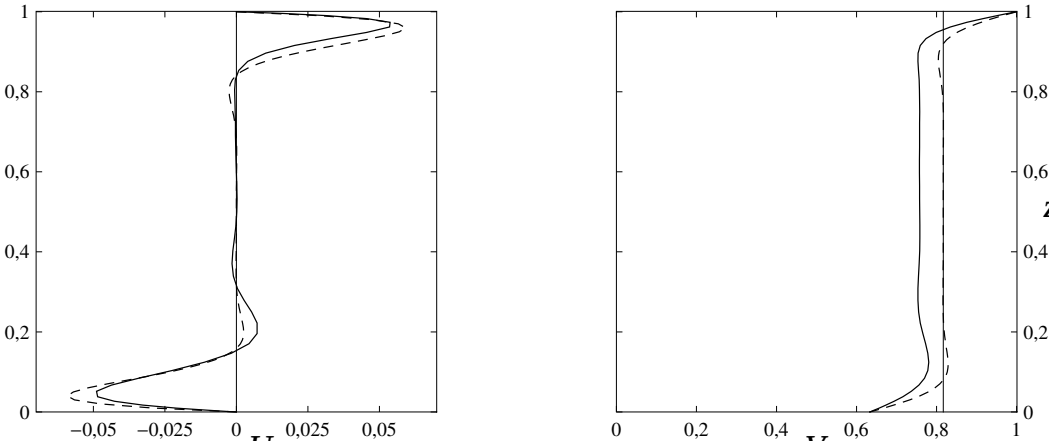


Fig. 8.7 – Vitesses analytiques V (6.11) et (6.12) d'Ekman-Couette (en pointillés) et numériques (en trait continu) « radiale » U et « azimutale » en fonction de z au milieu du canal en corotation rapide pour $\overline{Re} = 4106$ et $\delta Re = 1843$. L'unité de vitesse est $\Omega_h\overline{r}$ et celle de z est H.

8.3.1 Cas du cisaillement pur

Résultats obtenus près du seuil

On se place dans le cas $Re_b = 0$ et on augmente progressivement Re_h, par pas de 100 pour chercher « grossièrement » le nombre de Reynolds critique. Ensuite on recommence plusieurs fois la même expérience en affinant le pas jusqu'à un pas de 25. On attend entre chaque montée en nombre de Reynolds environ cinq minutes, le temps d'établissement de l'instabilité dépassant la minute. Une structure apparaît pour un nombre de Reynolds critique $Re_{hc} = 1250 \pm 75$ avec cependant une grosse barre d'erreur[4]. Un traitement des images en contraste nous permet de mieux visualiser ces structures (figure 8.9a) apparaissant dans le canal que ces images initiales. Ces structures spiralisent négativement (C) comme dans la partie théorique (figure 3.2). En première approximation, ce sont des spirales logarithmiques (voir annexe C). Le dépliement de ces dernières nous donne les canaux dépliés (figure 8.9b). On a affaire à une structure périodique en azimut, de nombre d'onde azimutal $m = 19$. Un empilement d'un même « cercle de pixels » pour toutes les images acquises nous permet d'obtenir le diagramme spatio-temporel figure (8.9c), qui prouve qu'il s'agit d'ondes

[4]Cette barre d'erreur de 75 est dû à un problème de reproductibilité sur trois ans, je n'ai pas de réponse à cela. Peut être une dérive du thermocouple ou le vieillissement des parois...

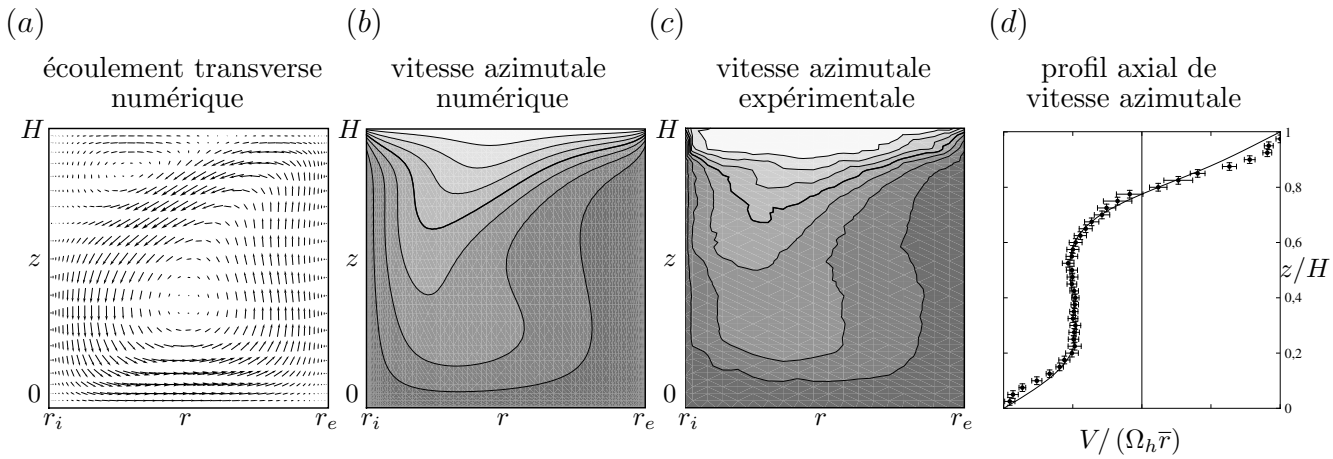


Fig. 8.8 – En ***contrarotation pure***, pour $\overline{Re} = 0$ et $\delta Re = 1000$, les figures (a) et (b) présentent l'écoulement axisymétrique calculé numériquement par Éric Serre. (a) : écoulement transverse. La valeur maximale de la vitesse radiale est $0{,}088\Omega_h\overline{r} = 0{,}084\Omega_h r_e$. (b) : champ de vitesse azimutale. En c figure le champ de vitesse azimutale mesuré par vélocimétrie Laser Doppler en 19x40 points (soit 760 points de mesure). Les figures b et c utilisent exactement les mêmes sept niveaux de gris ($v_\varphi = -1$ à 1 par pas de 1/3). Le gris foncé correspond à la vitesse maximale, i.e. la vitesse de la paroi supérieure au niveau du rayon extérieur $V_{\max} = r_e\Omega_h$, le gris clair à la vitesse minimale $V_{\min} = -r_e\Omega_b$. (d) : profil axial de vitesse azimutale au milieu du canal. On a un accord quasi parfait entre les résultats numériques d'Éric Serre en trait continu et nos points expérimentaux. Les barres d'erreur augmentent lorsque l'on tente de mesurer des vitesses azimutales quasi-nulles.

progressives prograde.

On calcule l'inverse de la pente ω/m des segments correspondants aux ondes sur la figure (8.9c), tous les segments ayant la même pente m/ω. La vitesse de phase est alors $v_p = \omega\overline{r}/m = 6{,}76$ mm/s. On a affaire à des ondes spiralées prograde, car entraînées par le couvercle, de nombre d'onde azimutal $m_c = 19$ et de fréquence réduite $\omega_c/\Omega_h = 2{,}09$ se déplaçant à une vitesse de phase adimensionnée par rapport à la vitesse du couvercle calculée au milieu du canal $v_{p_c} = v_p/(\Omega_h\overline{r}) = 0{,}11$.

Quand on fait des mesures de vélocimétrie laser Doppler, au seuil, on observe sur le spectre de Fourier l'apparition d'un pic nettement dominant tandis que deux pics existent quelque soit le nombre de Reynolds imposé (figure 7.16). Ces deux pics, correspondant à la fréquence simple et double du couvercle, sont liés à un léger défaut du montage.

Résultats obtenus à cisaillement plus fort

Si on continue d'augmenter Re_h, des ondes assez « monochromatiques » continuent d'exister loin du seuil, jusqu'à $Re_h = 3500$, comme nous le montre la figure (8.10). Le nombre d'onde reste égal à $m_c = 19$, tandis que la fréquence augmente linéairement avec Re_h (figure 8.10). Par contre à $Re_h = 4500$ on a signal chaotique, comme lemontre le spectre de la figure (8.10)b. Par ailleurs, on retrouve bien que l'amplitude A des ondes croît comme $\sqrt{Re_h - Re_{hc}}$ (figure 8.11b et c), montrant que la bifurcation est surcritique. La bifurcation semble ***imparfaite***, nous allons donc faire un ajustement de ce type sur l'écart type (qui est homogène à une amplitude A) :

$$\tau_0 \frac{dA}{dt} = 0 = \frac{Re_h - Re_{hc}}{Re_h} A - gA^3 + h \ , \tag{8.4}$$

$$\text{soit} \quad Re_h = Re_{hc}\left(1 + gA - \frac{h}{A^2}\right) \ . \tag{8.5}$$

Cet ajustement nous donne $Re_{hc} = 1036$, valeur relativement proche de la valeur expérimentale 1250 ± 75.

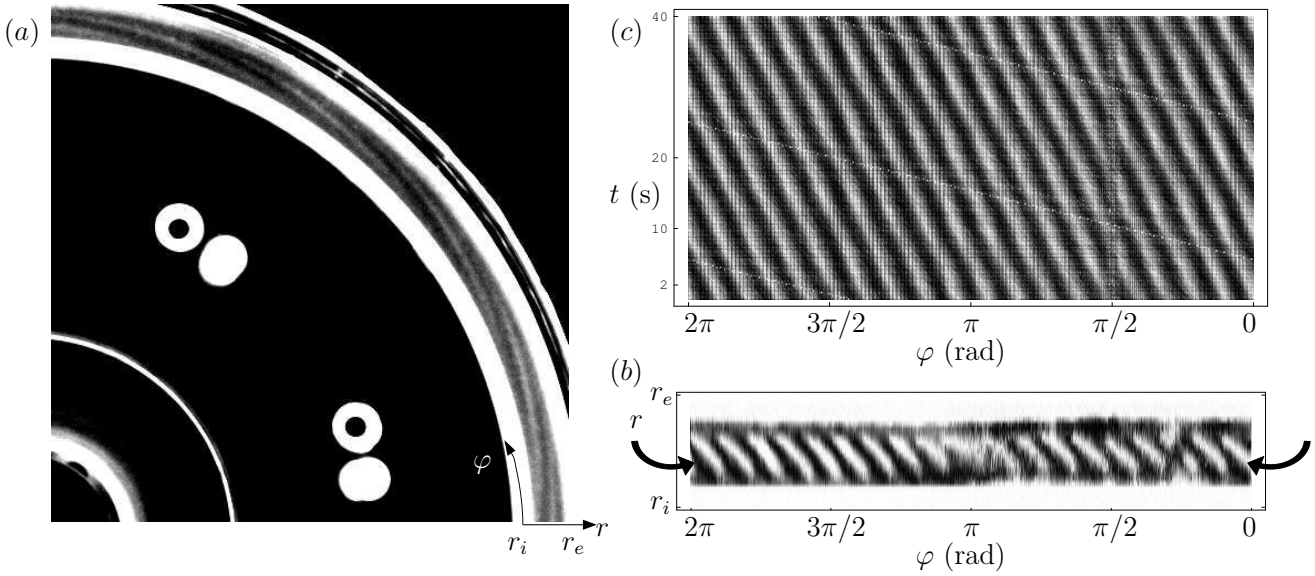


Fig. 8.9 – Structures obtenues près du seuil de l'instabilité dans le cas ***cisaillement pur*** $Re_b = 0$, $Re_h = 1310$ et $T = 27.5$℃. (a) : photo globale du canal traitée en contraste pour mettre en exergue les ondes en clair. On voit accessoirement, à 70% du rayon intérieur, quatre trous, deux dans chaque quart de plateau, qui ont permis leur usinage. (b) : canal déplié sur un tour. (c) : graphe spatio-temporel obtenu en prenant figure b la ligne de pixels entre les deux flèches noires pour 300 images prises à une vitesse d'acquisition de 7,5 images par seconde.

8.3.2 Cas de la corotation rapide

Résultats

On se place à un nombre de Reynolds moyen $\overline{Re} = 2000$ et on augmente progressivement le nombre de Reynolds différentiel δRe. On s'attend à obtenir des ondes, si elles existent, plus rapides que dans le premier cas ($Re_b = 0$), à cause de l'écoulement moyen plus rapide.

Nous obtenons, comme dans le cas précédent, des ondes progressives, mais plus difficilement caractérisables du fait de deux problèmes. Le premier est la vitesse d'acquisition de la caméra limitée à 7,5 images par seconde qui empêche d'avoir une bonne précision sur la vitesse de phase des ondes ; le second est la structure visible de l'écoulement de base dans quasi tout le canal, sous forme de cercles concentriques rendant difficile la détection du seuil. La brisure de la symétrie par rotation de cet écoulement est ainsi plus difficilement détectable (figure 8.12), car les ondes sont davantages spiralées, se confondant ainsi avec l'un de ces cercles épais. L'instabilité se crée pour un nombre de Reynolds différentiel critique $\delta Re_c = 1750 \pm 50$. On obtient ainsi $m_c = 21$ ondes spiralées prograde se déplaçant à une vitesse de phase réduite d'environ $v_{p_c}/(\Omega_h \overline{r}) = 0{,}51$ et de pulsation réduite $\omega_c/\Omega_h = 10{,}71$. Cependant, l'onde ne semble pas très pure et pourrait être déjà légèrement modulée.

Comparaison avec les instabilités d'une seule couche d'Ekman

Étant donné qu'il existe des similarités entre l'écoulement de base au milieu du canal et un écoulement d'Ekman-Couette (6.11) et (6.12), nous sommes tenté de comparer également notre première instabilité à celle prédite pour une couche d'Ekman au-dessus d'un plan infini par Lilly (1966). Selon Hoffmann *et al.* (1998), la théorie de Lilly (1966) est correcte pour un écoulement d'Ekman-Couette dès lors que le nombre d'Ekman inverse $\left(\overline{\Omega} H^2\right)/\nu \geq 100$, i.e. $\overline{Re} \geq 100\gamma = 1050$. Grâce à la symétrie de l'écoulement d'Ekman-Couette, le saut de vitesse dans une couche d'Ekman peut être estimée à $\delta V = 1/2\ \delta\Omega\ \overline{r}$ et la première

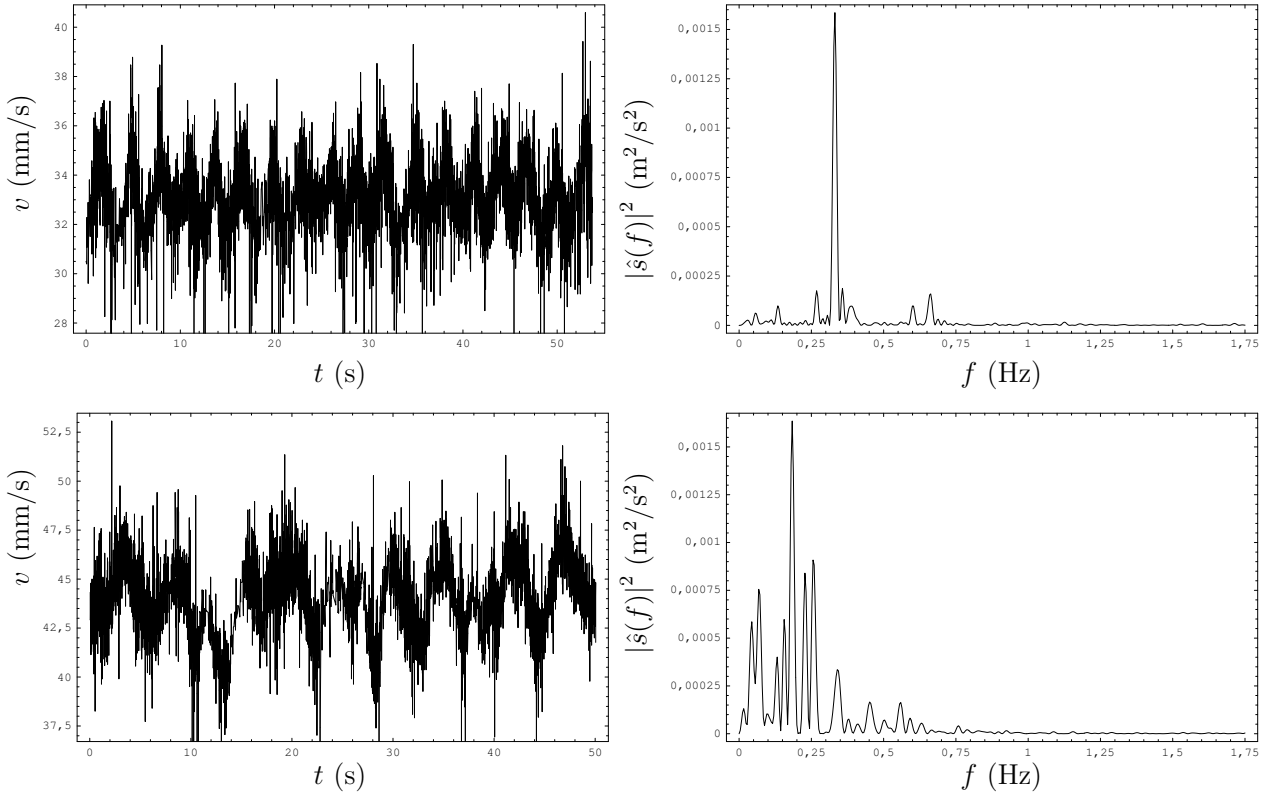


Fig. 8.10 – Spectres de Fourier pour $Re_b = 0$, $r = 187{,}3$ mm, $z = 9{,}5$ mm. En haut, pour $Re_h = 3500$, une fréquence domine. En bas, pour $Re_h = 4500$, un spectre caractéristique de signal « chaotique ».

instabilité s'établit pour un nombre de Reynolds

$$Re_L \;=\; \frac{\delta V}{\sqrt{\nu\overline{\Omega}}} = 55, \;\text{ i.e. }\; \delta Re = 110\,\sqrt{\frac{\overline{Re}}{\gamma}} = 34\sqrt{\overline{Re}}\,. \tag{8.6}$$

Pour $\overline{Re} = 2000$, nous trouvons expérimentalement $\delta Re = 1750 \pm 50$ alors que la prédiction précédente donne $\delta Re = 1520$, soit une erreur de -13%. Pour $\overline{Re} = 4000$, nous trouvons numériquement $\delta Re = 1970$ alors que la prédiction précédente donne $\delta Re = 2150$, soit une erreur de $+9\%$. Nous obtenons donc un accord semi-quantitatif entre nos nombres de Reynolds différentiel critiques en co-rotation et ceux prédits pour une couche d'Ekman en géométrie plane par Lilly (1966). Nous pouvons également comparer nos nombres d'onde avec ceux prédits par Lilly (1966) :

$$\alpha_L \;=\; \frac{m}{r}\sqrt{\frac{\nu}{\overline{\Omega}}} = 0{,}33, \;\text{ ce qui donne }\; m = 0{,}33\sqrt{\gamma\overline{Re}} \;=\; 1{,}07\sqrt{\overline{Re}}\,. \tag{8.7}$$

Les nombres d'onde obtenus ainsi surestiment les nôtres : pour $\overline{Re} = 2000$, la prédiction donne $m_c = 48$ alors que nous trouvons expérimentalement $m_c = 21$, et pour $\overline{Re} = 4000$, la prédiction donne $m_c = 68$ alors que nous trouvons numériquement $m_c = 22$.

8.3.3 Contrarotation pure

Résultats

On se place à $\overline{Re}$ nul et on augmente progressivement δRe, i.e. les deux plateaux tournent à la même vitesse au sens près. Au seuil, $\delta Re_c = 1075 \pm 100$, on détecte des ondes très localisées. On a réussi à les localiser grâce à la vélocimétrie laser Doppler en cherchant la position optimale dans une section du canal

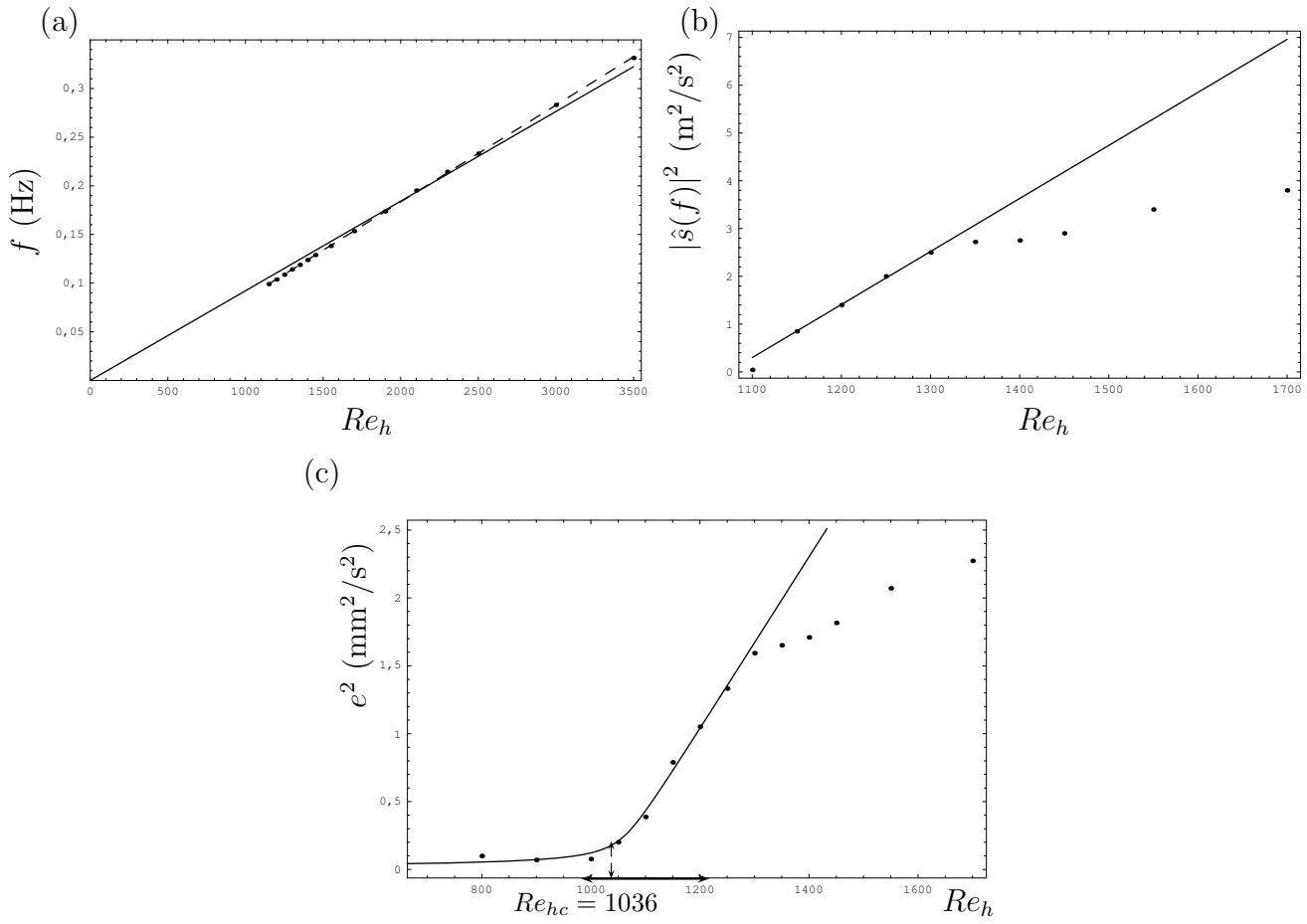


Fig. 8.11 – (a) : Dans le cas du cisaillement pur, $Re_b = 0$, fréquence de l'onde en fonction du nombre de Reynolds haut. En trait continu, un ajustement linéaire, en trait pointillé, un ajustement linéaire : la fréquence n'est pas linéaire en Re_h. (b) et (c) : intensité de Fourier et carré de l'écart type de l'onde en fonction de Re_h. Le graphe (c) montre que la bifurcation est imparfaite, laissant une plage en nombre de Reynolds haut. Le modèle (8.5) nous donne l'estimation en pointillée.

qui fournit le meilleur signal de vitesse (figure 8.13e et f). Elles se trouvent près du rayon intérieur (confirmé également par caméra), à vitesse de phase très faible et aux 2/3 de la hauteur. Elles se déplacent donc dans le sens du plateau supérieur (figure 8.13c et d)[5]. Par contre, ces ondes ont un domaine d'existence limité : à 9,3% du seuil, on voit apparaître des structures localisées dans l'espace-temps, signe peut-être d'intermittence (figures 8.13a et b). Les structures localisées dans l'espace temps se présentent sous formes de petits vortex selon l'axe radial, et confinés par les parois. Ils disparaissent par un mécanisme ressemblant à un déferlement de vague. Ces spots turbulents suivant le sens de rotation du plateau inférieur, cela laisse croire qu'ils sont plutôt localisés dans la partie inférieure du canal (figure 8.13a). Par contre, les ondes lentement progressives suivent le sens de rotation du couvercle et sont très difficiles à détecter que ce soit à la caméra ou avec l'appareil de Vélocimétrie Laser Doppler (figure 8.13c). Les structures localisées apparaissent et disparaissent formant des courbes sur les diagrammes spatio-temporels (figure 8.13b), alors que les ondes se caractérisent encore par des droites sur les diagrammes spatio-temporels (figure 8.13d). Elles se trouvent dans la partie supérieure du canal, près du couvercle (figure 8.13e et f). Dans le cas « ondes », celles-ci sont spiralées prograde de nombre d'onde azimutal $m_c = 16 \pm 1$, de fréquence $\omega_c/\Omega_h = 1{,}20 \pm 20\%$ et de vitesse de phase réduite $v_{p_c} = 0{,}075 \pm 20\%$.

Des photos focalisées sur une partie du canal nous fournissent des mesures plus précises. En zoomant sur un quart de canal, on obtient la figure 8.14. Ce cas est très sensible aux perturbations extérieures, le déclen-

[5]Pour la figure 8.13, nous avons pris $\delta Re = 1240$, donc à 15% du seuil, cas où les ondes sont plus visibles.

chement des structures localisées pouvant arriver pour un nombre de Reynolds différentiel plus faible. La reproductibilité de ce cas (de contra rotation pure) est délicate et mériterai davantage de manipulations...Les structures localisées peuvent apparaître avant les ondes, les conditions extérieures (vibrations plus ou moins forte des plateaux par exemple) doivent probablement influencer ces résultats.

Comparaison avec les instabilités d'écoulements entre disques

Les valeurs du nombre de Reynolds différentiel critique et du nombre d'onde critique diffèrent de celles des travaux de Nore *et al.* (2006) (voir l'introduction), à savoir $\delta Re_c = 594$ et $m_c = 10$; l'erreur commise est respectivement 81% et 60%. Le confinement latéral influence donc fortement l'écoulement.

8.4 Comparaison expérimental-numérique

L'ensemble des résultats expérimentaux et leur comparaison aux calculs numériques pour le canal sont résumés sous forme de graphiques figure 8.15. On remarque que la force de Coriolis est stabilisante : en effet, quand le nombre de Reynolds moyen $\overline{Re}$ augmente, le nombre d'onde critique m_c et le nombre de Reynolds différentiel critique δRe_c augmentent. Les résultats expérimentaux confirment les calculs numériques, prédisant dans les trois cas exposés l'existence de solutions ondes progressives, sauf en contra-rotation où nous n'arrivons pas encore à expliquer ce passage au chaos sans nécessairement une transition structurée de type onde.

En regardant la figure 8.16, nous remarquons que dans nos trois cas typiques présentés, la vitesse de phase des ondes est proche de la vitesse de l'écoulement moyen $\langle V \rangle_{rz}$. On peut donc penser que ces ondes sont advectées par cet écoulement moyen $\langle V \rangle_{rz}$.

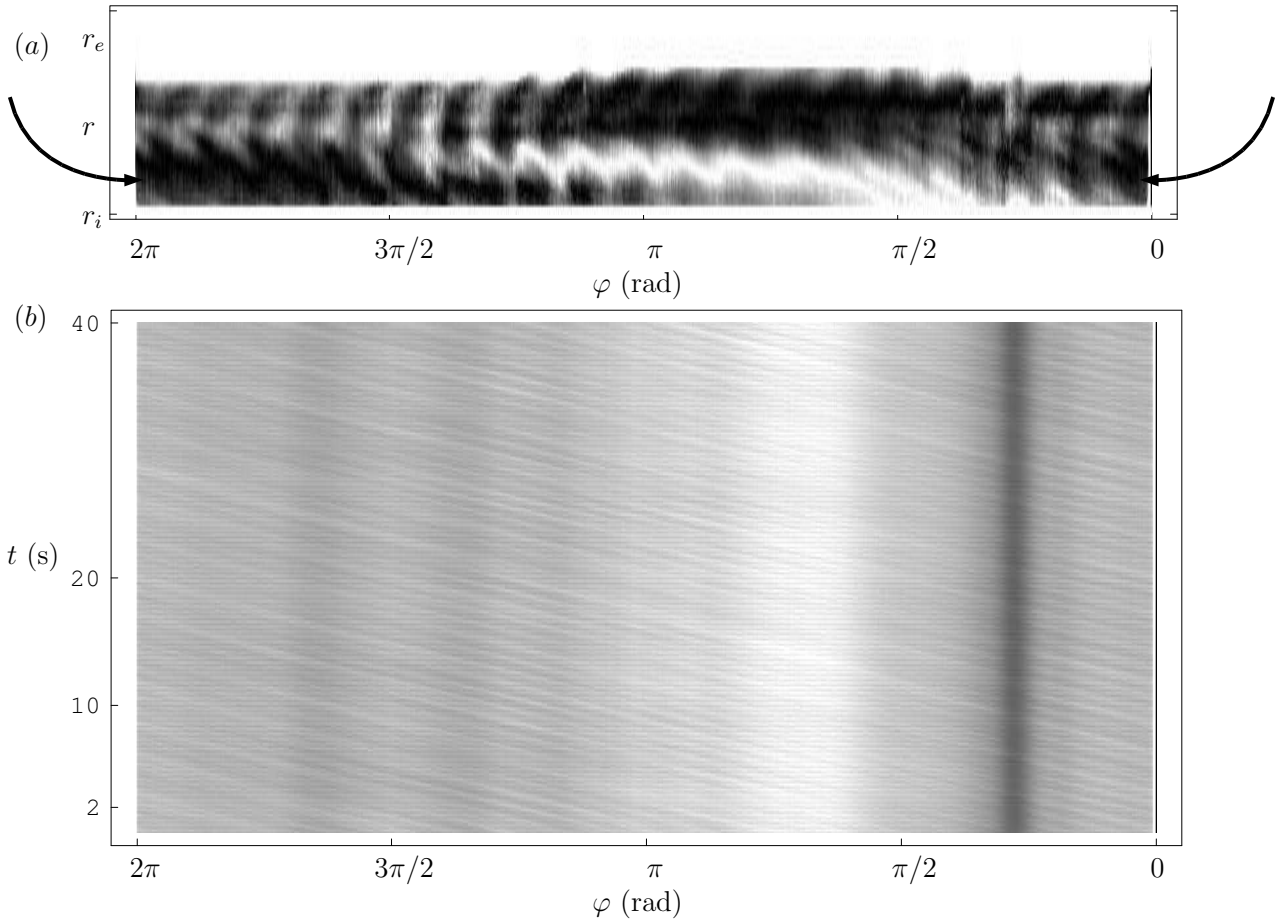


Fig. 8.12 – Figures obtenues comme dans la figure 8.9 mais en ***co-rotation*** pour $\overline{Re} = 2000$, $\delta Re = 1720$. (a) : le canal déplié dont a ôté la partie proche du rayon extérieure où l'écoulement reste non structuré et donc sans intérêt après traitement en contraste ; (b) : le graphe spatio-temporel associé aux 300 images prises à une vitesse d'acquisition de 7,5 images par seconde. La partie sombre provient du « trou » de lumière causé par le néon qui n'est pas parfaitement circulaire. On voit les ondes se propageant vers la gauche à vitesse constante.

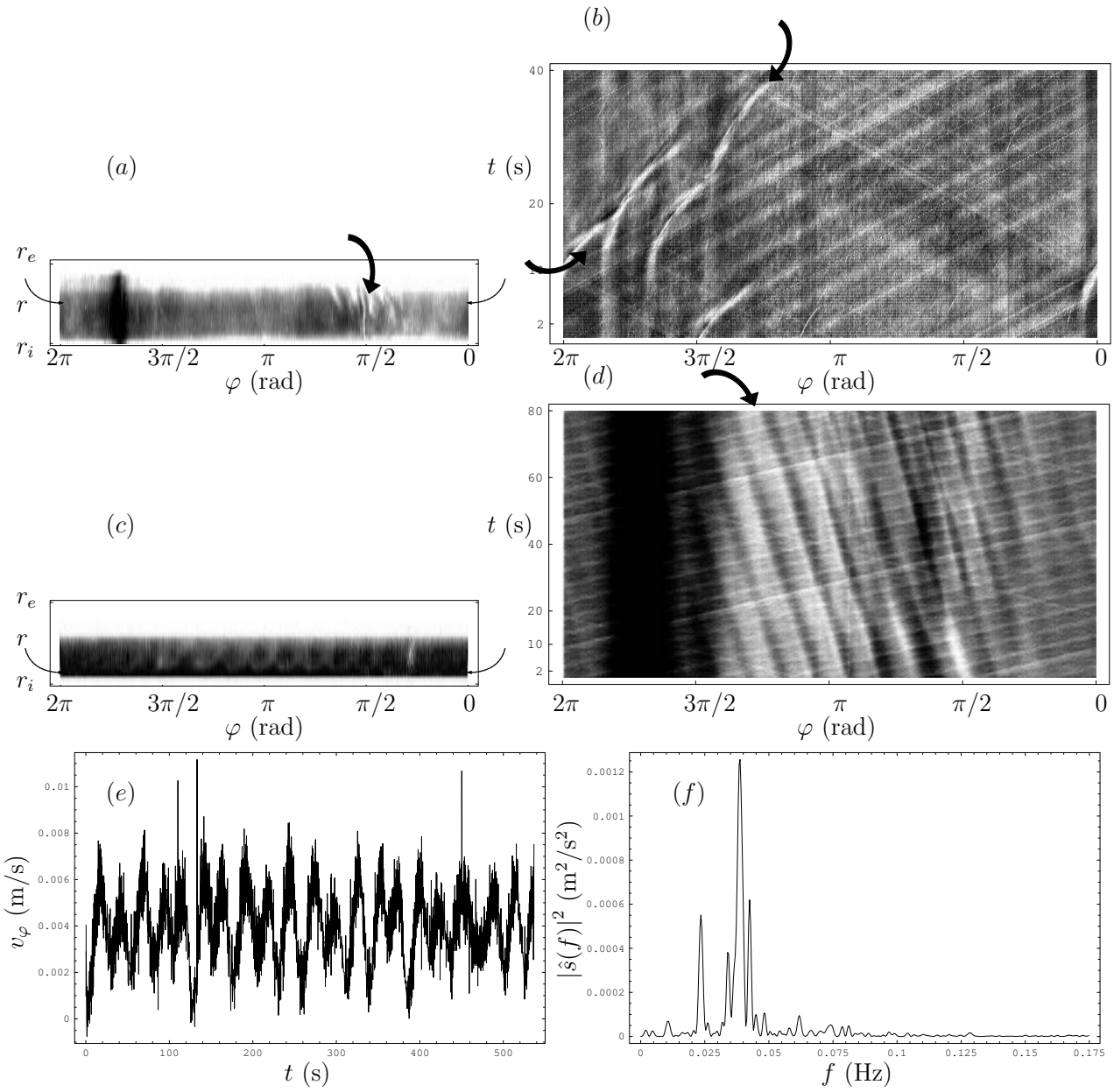


Fig. 8.13 – Dans le cas de la ***contrarotation*** $\overline{Re} = 0$. (a) et (b) : figures obtenues, $\delta Re = 1100$. (a) : structure localisée indiquée par la flèche noire vers $\varphi = \pi/2$. (b) : structures localisées en spatio-temporel (les lignes claires indiquées par les flèches noires). (c) : « ondes » (apparentes sous formes de petites vagues) localisées au niveau du rayon intérieur pour $\delta Re = 1240$. L'image étant traitée en contraste, on perd la moitié supérieure de l'image où se trouvent également les rouleauxs turbulents. (d) : ces ondes se déplacent très lentement dans le même sens que le couvercle. Les huit stries régulières visibles sur les figures b et d sont dues aux reflets des huit trous dans le plexiglass du plateau inférieur (cf. la figure 8.9a). (e) : signal temporel de vitesse azimutale obtenu par vélocimétrie laser Doppler $\delta Re = 1240$, $r = 184{,}7$ mm et $z = 11{,}7$ mm, correspondant aux figures c,d. (f) : spectre de Fourier associé. Le signal de vitesse présente une oscillation modulée correspondant au pic bruité à la fréquence $f = 0{,}038$ Hz, alors que le premier pic ($f = 0{,}024$ Hz) correspond à la fréquence de rotation du couvercle (et donc du socle au signe près) provenant sans doute d'un léger défaut mécanique.

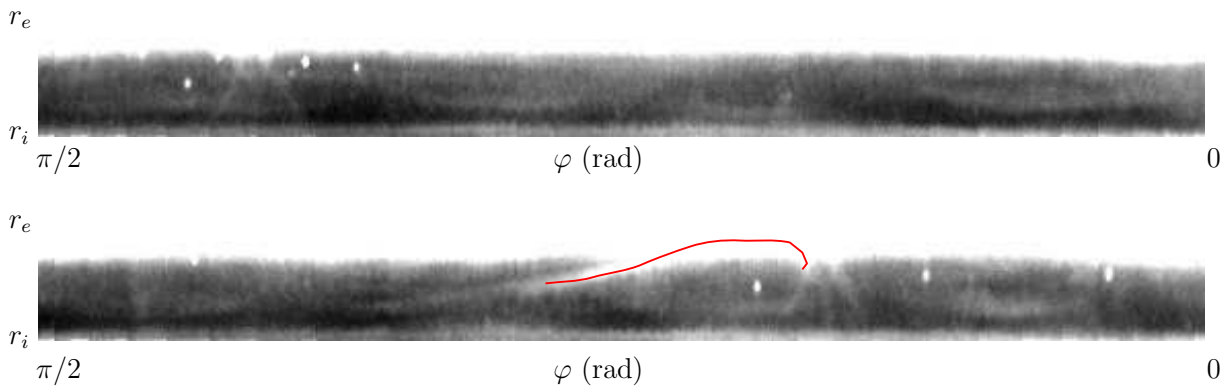


Fig. 8.14 – Quart de canal en ***contrarotation pure*** $\overline{Re} = 0$. En haut, l'écoulement juste au-dessus du seuil pour $\delta Re = \delta Re_c = 1075$. On observe 4 ondes situées au niveau du bord intérieur (bas du canal sur l'image). En bas, l'écoulement au-dessus du seuil pour $\delta Re = 1175$. Les ondes coexistent avec ici un rouleau situé vers l'extérieur du canal (haut du canal sur l'image).

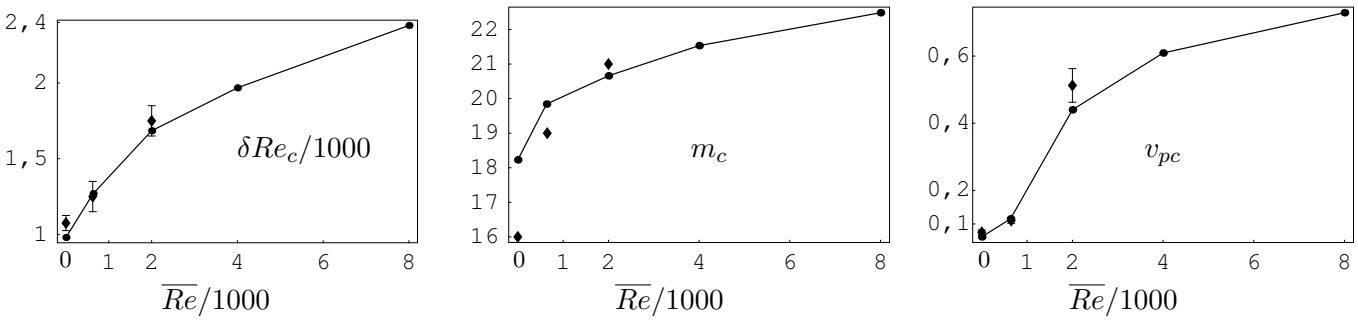


Fig. 8.15 – Valeurs des nombres de Reynolds différentiel critique, nombre d'onde critique et vitesse de phase adimensionnée critique en fonction du nombre de Reynolds moyen. Points et traits continus : résultats numériques d'Éric Serre ; losanges : résultats expérimentaux.

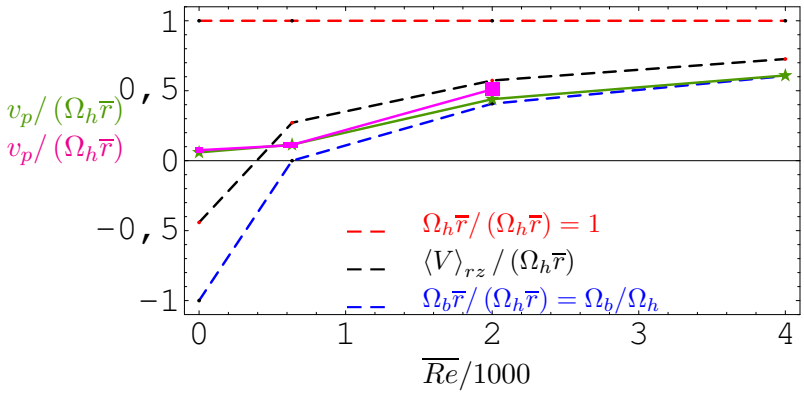


Fig. 8.16 – Vitesses de phase critiques calculées numériquement (en vert) et trouvées expérimentalement (en magenta) en fonction du nombre de Reynolds moyen $\overline{Re}$. On a tracé également la vitesse au milieu du canal des plateaux supérieur (en pointillés rouges) et inférieur (en pointillés bleus), ainsi que la vitesse moyenne de l'écoulement $\langle V\rangle_{rz}$ (en pointillés noirs).

Chapitre 9

Conclusion-Perspectives

L'étude expérimentale présentée ici, complétée par l'étude numérique de Serre&Plaut, permet de mieux comprendre les écoulements dans un anneau dans une géométrie originale inspirée par celle de François Charru, les parois latérales solidaires de la paroi inférieure pouvant également se mouvoir. Des mesures à la fois globales et locales ont permis de caractériser l'écoulement de base expérimental dans trois cas typiques. Dans le cas de corotation rapide, l'écoulement est à couches limites séparées de type Batchelor ou Ekman-Couette avec un cœur central en rotation , alors que dans les deux autres cas, cisaillement pur et contrarotation, l'écoulement est plutôt de type Couette-torsion.

Nous avons aussi étudié les premières instabilités de ces écoulements axisymétriques. En cisaillement pur, la première instabilité a lieu pour $Re_h \simeq 1100$, ce qui est effectivement très supérieur aux nombres de Reynolds utilisés par Charru et ses collaborateurs. Cependant, un problème a été rencontré pour la détection précise du seuil avec un désaccord entre les mesures locales et globales. Il faudrait faire de nouvelles expériences pour résoudre ce désaccord. Contrairement à ce qui se passe en écoulement entre disques (Schouveiler *et al.*, 2001), en cisaillement pur les ondes sont des spirales ***négatives*** et non positives... Même si l'écoulement de base en corotation est similaire à un écoulement d'Ekman-Couette, la première instabilité est mal prédite par la théorie de Lilly (1966) : des effets de courbure et de confinement latéral influencent donc le seuil d'instabilité. Enfin, dans le cas de la contra-rotation pure, les travaux de Nore *et al.* (2006) ne prédisent pas le nombre de Reynolds critique et le nombre d'onde critique observés expérimentalement. Ainsi, malgré l'accord obtenu avec les calculs de Serre (figure 8.15), notre compréhension des mécanismes déclenchant les instabilités est encore faible. Il reste donc du travail à faire de ce côté là.

Le traitement des données expérimentales en corotation rapide à un nombre de Reynolds moyen $\overline{Re} = 3000, 4000$ et 5000 est difficile. On voit à peine les structures si spiralées qu'on croirait voir un réseau de cercles concentriques vers le rayon intérieur. On voit également un anneau vers l'extérieur du canal qui serait peut être une instabilité de type réseau de cercles concentriques également, mais stationnaire. Des mesures par Vélocimétrie Laser Doppler pourraient nous en dire davantage sur cette structure.

Les deux paramètres de contrôle offrent une infinité de configurations et certaines n'ont pas été étudiées ici. Par exemple, la contra-rotation a été étudiée uniquement pour $\overline{Re} = 0$. Il serait intéressant de considérer le protocole de Gauthier *et al.* (2002). On se fixe un nombre de Reynolds bas et on augmente le nombre de Reynolds haut pour étudier des cas de contra-rotation différents. Tous nos résultats sont en « spin up »(montée progressive en cisaillement, donc en Re_h en cisaillement pur ou en δRe dans les autres cas), lorsque nous augmentons le cisaillement. Les phénomènes sont identiques en « spin down » (descente progressive en cisaillement), du moins lorsque l'on reste près du seuil.

On pourrait enfin s'intéresser à la possible instabilité secondaire d'Eckhaus, comme le montre Schouveiler *et al.* (1998) en cavité inter-disque.

L'étude numérique de Serre et Plaut montre que des modèles du type Ginzburg-Landau (6.1) semblent ne pas s'appliquer à ce système, à cause des effets de courbure trop fort. Un problème notamment en cisaillement pur (ou en corotation en numérique) est que les ondes ne montrent pas de correction de fréquence significative en régime non linéaire (figure 8.11), d'où l'impossibilité pratique de mesurer les coefficients de

décalage fréquentiel c_1 (Serre *et al.*, 2006). Nous avons commencé à modifier notre géométrie en rajoutant dans le canal une cale, permettant de diminuer de moitié la hauteur et l'inter-rayon de notre canal. Les effets de courbures sont davantage négligeables. Nous obtenons à nouveau des ondes spiralées en configuration rotor-stator. Mais dans ce petit canal, il est plus difficile d'effectuer des mesures. Dans ce petit canal, la modélisation par une équation de Ginzburg-Landau pourrait mettre en évidence des effets non locaux provenant de la topologie annulaire de la manipulation.

Dans le cas de la contra-rotation, nous avons obtenu un chaos spatio-temporel (figure 8.13a et c et figure 8.14) qui est encore très mal compris. Ce phénomène apparaît également dans le petit canal.

On a publié certains de nos résultats dans des actes de congrés (Serre *et al.*, 2006; Lebranchu *et al.*, 2007). Un article est en cours de rédaction.

Annexe A

Méthode numérique spectrale

On explique ici la méthode numérique utilisée dans la partie théorique. Il s'agit d'une ***méthode spectrale*** de type ***Fourier-Galerkin***. Les fonctions inconnues sont recherchées sous la forme d'une somme finie de fonctions de base bien choisies, dont le support est dans tout le domaine d'écoulement. Par insertion de ce développement dans les équations de la dynamique et projection sur les fonctions de base elles-mêmes, on obtient des équations algébriques en nombre fini. En règle générale, ces méthodes convergent vite lorsque le nmbre de fonctions utilisées augmente. Un inconvénient de cette méthode est que les opérateurs discrétisés sont denses, et donc difficiles à inverser par exemple.

Plus précisément, les équations (2.43), (2.55) et (2.50) sont résolues dans l'anneau équatorial $r \in [r_i,r_e]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. L'intervalle $[r_i,r_e]$ est ramené sur l'intervalle $[-1,1]$ par le changement de variable affine :

$$x \;=\; 2\,r \;+\; \frac{\eta+1}{\eta-1}\;.$$

En analyse linéaire par exemple, on recherche les modes propres du problème (3.1) sous la forme

$$\boldsymbol{V} \;=\; \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \Psi(r)\exp(im\varphi) \\ \Theta(r)\exp(im\varphi) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi(r) &= \sum_{n=1}^{N} a_n p_n(r)\;, \\ \Theta(r) &= \sum_{n=1}^{N} b_n t_n(r)\;, \end{aligned} \tag{A.1}$$

avec p, et t les fonctions de base, et a_n et b_n les coefficients à déterminer. Les conditions limites (2.60) et (2.61) s'expriment simplement par :

$$\Psi = 0 \quad , \quad \Psi' = 0 \quad \text{et } \Theta = 0 \quad \text{aux frontières} \quad r = r_i \quad \text{et} \quad r = r_e. \tag{A.2}$$

Généralement, pour résoudre ce problème d'approximation, on considère pour les fonctions de base les polynômes de Chebychev, de Legendre ou trigonométriques. On choisit les ***polynômes de Tchebychev*** $f_n(x)$, car ils sont adaptés pour décrire des problèmes de couche limite. Ce seront de plus des polynômes de ***Tchebychev modifiés*** $p_n(x)$ et $t_n(x)$ pour respecter les conditions limites (voir la section A.1).

L'intervalle $[r_i,r_e]$ étant ramené sur l'intervalle $[-1,1]$, on notera par la suite pour toute fonction f de r

$$f(r) = \widetilde{f}(x)\;.$$

On cherche donc des modes linéaires de la forme

$$\widetilde{\Psi}(x) \;=\; \sum_{n=1}^{N} a_n \widetilde{p}_n(x), \tag{A.3}$$

$$\widetilde{\Theta}(x) \;=\; \sum_{n=1}^{N} b_n \widetilde{t}_n(x), \tag{A.4}$$

où les fonctions $\widetilde{p}_n$ sont des polynômes formant une base des fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant les conditions limites :

$$\widetilde{\Psi}(\pm 1) = \widetilde{\Psi}'(\pm 1) = 0, \tag{A.5}$$

et les fonctions $\widetilde{t}_n$ sont des polynômes formant une base des fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant les conditions limites :

$$\widetilde{\Theta}(\pm 1) = 0. \tag{A.6}$$

A.1 Bases de fonctions

Nous avons choisi de construire nos bases de fonctions à partir des polynômes de ***Tchebichev***, définis par

$$\widetilde{f}_n(x) \;=\; \cos\left(n \arccos(x)\right) \quad , \; \forall x \;\in\; [-1,1]\,. \tag{A.7}$$

$\widetilde{f}_n$ est un polynôme de degré n qui se calcule par la formule de récurrence :

$$\widetilde{f}_0(x) \;=\; 1\;,\; \widetilde{f}_1(x) \;=\; x\;,\;\; \widetilde{f}_{n+1}(x) \;=\; 2\,x\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_{n-1}(x)\;. \tag{A.8}$$

On a

$$\widetilde{f}_n(\pm 1) \;=\; (\pm 1)^n \tag{A.9}$$

$$\text{et} \quad \widetilde{f}'_n(\pm 1) \;=\; (\pm 1)^{n+1}\, n^2\;. \tag{A.10}$$

La formule (A.9) s'établit directement à partir de (A.7), et la formule (A.10) par récurrence, en faisant usage de (A.9).

A.1.1 Base pour la perturbation en température

Afin de respecter les conditions limites d'isothermalité 2.60, nous allons ajouter un polynôme du premier degré aux polynômes de Tchebichev :

$$t_n(x) \;=\; \widetilde{f}_n(x) + a_0 + a_1 x$$

Les conditions limites s'écrivent

$$t_n(\pm 1) \;=\; (\pm 1)^n + a_0 \pm 1 a_1 \;=\; 0\;.$$

Ce système a pour solution

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & -\,\frac{1+(-1)^n}{2} \\ a_1 & = & -\,\frac{1-(-1)^n}{2} \end{array} \right. . \tag{A.11}$$

Le polynôme de Tchebichev modifié pour la température est donc

$$t_n(x) \;=\; \widetilde{f}_n(x) - \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ x & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

Les deux premiers polynômes étant identiquement nuls, on ne considère que les polynômes pour $n \geq 2$. On les réécrit comme suit (après le changement d'indice $n \to n+1$) :

$$\boxed{t_n(x) \;=\; \widetilde{f}_{n+1}(x) - \left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{f}_0(x) & \text{si } n \text{ est impair} \\ \widetilde{f}_1(x) & \text{si } n \text{ est pair} \end{array} \right.}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

A.1.2 Base pour la fonction courant

Pour Ψ, il y a quatre conditions limites (2.61), on va donc ajouter un polynôme du troisième degré au polynôme de Tchebichev :

$$p_n(x) \;=\; \widetilde{f}_n(x) + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Les conditions limites s'écrivent

$$\begin{array}{rclcrcl} p_n(\pm 1) & = & 0\,, & \text{soit} & (\pm 1)^n + b_0 \pm b_1 + b_2 \pm b_3 & = & 0\,, \\ p_n'(\pm 1) & = & 0\,, & \text{soit} & (\pm 1)^{n+1}/n^2 + b_1 \pm 2b_2 + 3b_3 & = & 0\,. \end{array}$$

La solution générale de ce système est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & \frac{(1+(-1)^n)\left(n^2-2\right)}{4} \\ b_1 & = & \frac{(1-(-1)^n)\left(n^2-3\right)}{4} \\ b_2 & = & -\frac{(1+(-1)^n)n^2}{4} \\ b_3 & = & \frac{(-1+(-1)^n)\left(n^2-1\right)}{4} \end{array} \right. . \tag{A.12}$$

Si n est pair, il vient $b_0 = n^2/2-1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -n^2/2$, et $b_3 = 0$ et si n est impair, $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{n^2-3}{2}$, $b_2 = 0$ et $b_3 = \frac{1-n^2}{2}$. Les quatre premiers polynômes étant identiquement nuls, on ne considère que les polynômes pour $n \geq 4$. Les polynômes de Tchebichev modifiés pour la fonction courant sont alors (après le changement $n \to n+3$) :

$$\boxed{p_n(x) \;=\; \widetilde{f}_{n+3}(x) + \left\{ \begin{array}{rcll} \frac{(n+3)^2-2}{2} & - & \frac{(n+3)^2}{2}\, x^2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(n+3)^2-3}{2}\, x & + & \frac{1-(n+3)^2}{2}\, x^3 & \text{si } n \text{ est pair} \end{array} \right.}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

A.2 Analyse linéaire numérique

On peut noter « matriciellement » l'opérateur (3.5), après le changement de variable $r \to x$, sous la forme

$$L_R \;=\; \left(\begin{array}{cc} -\left(2H^{-2}E^{-1}\,\partial_\varphi + \;\Delta\Delta\right)\bullet & -\partial_\varphi \bullet \\ \left[Ra_i\; q_i(r) + Ra_d\; q_d(r)\right]\partial_\varphi \bullet & \Delta\bullet \end{array} \right) \;=\; \left(\begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right) \tag{A.13}$$

En méthode de Galerkin, cet opérateur va être représenté par une ma matrice carrée $\widetilde{L}$ de dimension $2N$ de terme général

$$\widetilde{L}_{ij} \;=\; \int_{-1}^{1} L_{IJ} \cdot u_j(x)\; ft_i(x)\; dx\,, \tag{A.14}$$

$$I \;=\; \text{Ent}\left[(i-1)/N\right] + 1 \quad \text{et} \quad J \;=\; \text{Ent}\left[(j-1)/N\right] + 1\,, \tag{A.15}$$

avec Ent la fonction partie entière,

$$u_j(x) = \left\{ \begin{array}{rcll} \psi(x) & = & p_j(x) & \text{si} \quad j \in [1,\, N] \\ \theta(x) & = & t_j(x) & \text{si} \quad j \in [N+1,\, 2N] \end{array} \right. \tag{A.16}$$

les fonctions de base et

$$ft_i(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} p_i(x) & \text{si} \quad i \in [1,\, N] \\ t_i(x) & \text{si} \quad i \in [N+1,\, 2N] \end{array} \right. \tag{A.17}$$

les fonctions tests. De même,

$$D \;=\; \left(\begin{array}{cc} \Delta\bullet & 0 \\ 0 & P\bullet \end{array} \right) \;=\; \left(\begin{array}{cc} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{array} \right) \tag{A.18}$$

La matrice carrée $\widetilde{D}$ de dimension $2N$ a pour terme général

$$\widetilde{D}_{ij} = \int_{-1}^{1} D_{IJ} \cdot u_j(x)\ ft_i(x)\ dx \tag{A.19}$$

Le problème aux valeurs propres devient un problème matriciel

$$\sigma\widetilde{D} \cdot \widetilde{V}\ =\ \widetilde{L} \cdot \widetilde{V}\ ,\ \text{avec}\ \widetilde{V}\ =\ (a_1,...,a_N,b_1,...,b_N)^t\ . \tag{A.20}$$

On cherche donc les valeurs propres de $\widetilde{D}^{-1}\widetilde{L}$.

A.3 Analyse faiblement non linéaire numérique

Les conditions limites pour le mode 0 de vitesse étant (2.62), on choisit les mêmes polynômes que pour la température. On résoud les problèmes quasi statiques (4.5), (4.12), (4.14) et (4.16) sous forme de systèmes linéaires inhomogènes de la forme

$$L \cdot X = Y\ . \tag{A.21}$$

Enfin, le calcul des termes de rétroaction à l'ordre A^3 sont calculés explicitement par intégration numérique de (4.23).

Tous les calculs ont été effectués sur le logiciel ***Mathematica***, le plus possible en formel (création des bases de fonctions notamment), puis en numérique. Il faut noter que les calculs à bas nombre d'Ekman ont nécessité des calculs en haute précision (plus de cent chiffres signifivatifs !). Le nombre de modes N nécessaire à une bonne convergence des calculs, i.e. des résidus inférieurs à 0,1% pour les calculs linéaires et inférieurs à 0,5% pour les calculs non linéaires augmente avec E^{-1}. Il faut un nombre de modes similaires quelque soit la valeur du nombre de Prandtl entre 0,1 et 10 et le mode de chauffage. Des valeurs typiques de N sont données dans la table suivante

$E/2$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
N	10	18	30	50	100

Annexe B

Calcul des opérateurs linéaires adjoints

Soit

$$\boldsymbol{V} \;=\; \left(\begin{array}{c}\psi\\ \theta\end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c}\Psi(r)\exp\left[i\left(m\varphi-\omega t\right)\right]\\ \Theta(r)\exp\left[i\left(m\varphi-\omega t\right)\right]\end{array}\right) \tag{B.1}$$

le vecteur d'état local. On définit, sur l'espace des champs satisfaisant les conditions limites (2.61) pour la fonction courant et (2.60) pour la température, le ***produit scalaire hermitien***

$$\langle \boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\rangle \;=\; \langle r\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U}^{*}\rangle_{r\varphi} \;=\; \int_{0}^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U}^{*}r dr\; d\varphi \;=\; \int_{0}^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\left(\psi\psi_a^{*}+\theta\theta_a^{*}\right)\; r dr\; d\varphi\;, \tag{B.2}$$

où l'étoile désigne la conjugaison complexe et

$$\boldsymbol{U} \;=\; \left(\begin{array}{c}\psi_a\\ \theta_a\end{array}\right) \;=\; \left(\begin{array}{c}\Psi_a(r)\exp\left[i\left(m\varphi-\omega t\right)\right]\\ \Theta_a(r)\exp\left[i\left(m\varphi-\omega t\right)\right]\end{array}\right) \tag{B.3}$$

dont les composantes vérifient les mêmes conditions limites que celles de $\boldsymbol{V}$.

On a vu en (3.5) que l'opérateur linéaire est donné par :

$$L_R \;:\; \boldsymbol{V}\longmapsto \left(\begin{array}{c}-\left(2E^{-1}H^{-2}\;\partial_\varphi\;\psi \;+\; \partial_\varphi\;\theta \;+\; \Delta\Delta\;\psi\right)\\ \Delta\;\theta \;+\; \left[\frac{2}{3}\;Ra_i + Ra_d\;q_d(r)\right]\;\partial_\varphi\;\psi\end{array}\right)$$

On calcule séparément les termes du laplacien

$$\Delta\theta \;=\; \partial_r^2\theta \;+\; \frac{\partial_r\theta}{r} \;+\; \frac{\partial_\varphi^2\theta}{r^2}$$

Le premier terme donne, dans $\langle L\cdot\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\rangle$, une contribution à intégrer azimutalement

$$\begin{aligned}\int_{r_i}^{r_e}\left(\partial_r^2\theta\right)\theta_a^{*}r dr \quad &= \quad \left[\left(\partial_r\theta\right)\theta_a^{*}r \;-\; \theta\left(\partial_r\theta_a^{*}\right)r \;-\; \theta\theta_a^{*}\right]_{r_i}^{r_e} \;+\; \int_{r_i}^{r_e}\theta\left(\partial_r^2\theta_a^{*}\right)r dr \;+\; 2\int_{r_i}^{r_e}\frac{\theta\left(\partial_r\theta_a^{*}\right)}{r}\; r dr\\ &= \quad \int_{r_i}^{r_e}\theta\left(\partial_r^2\theta_a^{*}\right)r dr \;+\; 2\int_{r_i}^{r_e}\frac{\theta\left(\partial_r\theta_a^{*}\right)}{r}\; r dr\end{aligned}$$

Le second terme donne une contribution à intégrer azimutalement

$$\int_{r_i}^{r_e}\frac{\left(\partial_r\theta\right)\theta_a^{*}}{r}\; r dr \;=\; \left[\theta\theta_a^{*}\right]_{r_i}^{r_e} \;-\; \int_{r_i}^{r_e}\frac{\theta\partial_r\theta_a^{*}}{r}\; r dr \;=\; -\int_{r_i}^{r_e}\frac{\theta\partial_r\theta_a^{*}}{r}\; r dr$$

Le dernier terme du laplacien donne une contribution à intégrer radialement

$$\int_{0}^{2\pi}\partial_\varphi^2\theta\;\theta_a^{*}d\varphi \quad = \quad \int_{0}^{2\pi}\left(-m^2\theta\right)\;\theta_a^{*}d\varphi \;=\; \int_{0}^{2\pi}\theta\left(-m^2\theta_a^{*}\right)\;d\varphi \;=\; \int_{0}^{2\pi}\theta\partial_\varphi^2\theta_a^{*}d\varphi$$

avec m le nombre d'onde. On constate, ce qui est un résultat classique, que

$$\int_{r_i}^{r_e} (\Delta\theta)\ \theta_a^*\ rdr\ =\ \int_{r_i}^{r_e} \theta\ (\Delta\theta_a^*)\ rdr\ ,$$

i.e. que le laplacien est autoadjoint. Le bilaplacien s'écrit

$$\Delta\Delta\psi\ =\ \partial_r^4\psi\ +\ 2\ \frac{\partial_r^3\psi}{r}\ -\ \left(1+2m^2\right)\frac{\partial_r^2\psi}{r^2}\ +\ \left(1+2m^2\right)\frac{\partial_r\psi}{r^3}\ +\ m^2\left(m^2-4\right)\frac{\psi}{r^4}\ . \tag{B.4}$$

On calcule également les quatre premiers termes dûs au bilaplacien de ψ apparaissant dans $\langle L_R\cdot\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\rangle$. Le premier terme donne une contribution à intégrer azimutalement

$$\begin{aligned}\int_{r_i}^{r_e}\left(\partial_r^4\psi\right)\psi_a^* rdr\ =\ & \left[\left(\partial_r^3\psi\right)\psi_a^* r\ -\ \left(\partial_r^2\psi\right)\left(r\partial_r\psi_a^*+\psi_a^*\right)\ +\ \left(\partial_r\psi\right)\left(r\partial_r^2\psi_a^*+2\partial_r\psi_a^*\right)\ -\right.\\ & \left.\psi\left(r\partial_r^3\psi_a^*+3\partial_r^2\psi_a^*\right)\right]_{r_i}^{r_e}\ +\ \int_{r_i}^{r_e}\psi\left(r\partial_r^4\psi_a^*+4\partial_r^3\psi_a^*\right)dr\end{aligned}$$

grâce à des intégrations par parties répétées. Les termes de bords s'annulent grâce aux conditions limites vérifiées par ψ_a, il ne reste que

$$\int_{r_i}^{r_e}\left(\partial_r^4\psi\right)\psi_a^* rdr\ =\ \int_{r_i}^{r_e}\psi\left(\partial_r^4\psi_a^*\right)rdr\ +\ \int_{r_i}^{r_e}4\frac{\psi\left(\partial_r^3\psi_a^*\right)}{r}\ rdr\ .$$

De même, le second terme, qui apparaît avec un facteur -2 dans $\langle L_R\cdot\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\rangle$, donne une contribution à intégrer azimutalement

$$\begin{aligned}\int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r}\left(\partial_r^3\psi\right)\psi_a^* rdr\ &=\ \left[\left(\partial_r^2\psi\right)\psi_a^*\ -\ \left(\partial_r\psi\right)\left(\partial_r\psi_a^*\right)\ +\ \psi\partial_r^2\psi_a^*\right]_{r_i}^{r_e}\ -\ \int_{r_i}^{r_e}\frac{\psi\left(\partial_r^3\psi_a^*\right)}{r}rdr\\ &=\ -\int_{r_i}^{r_e}\frac{\psi\left(\partial_r^3\psi_a^*\right)}{r}rdr\ .\end{aligned}$$

Le troisième terme, qui apparaît avec un facteur $(1+2m^2)$, donne une contribution à intégrer azimutalement

$$\begin{aligned}\int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r^2}\left(\partial_r^2\psi\right)\psi_a^* rdr\ &=\ \left[\frac{\partial_r\psi\psi_a^*}{r}\ -\ \frac{\psi\partial_r\psi_a^*}{r}\ +\ \frac{\psi\psi_a^*}{r^2}\right]_{r_i}^{r_e}\ +\ \int_{r_i}^{r_e}\left(\frac{\psi\partial_r^2\psi_a^*}{r^2}\ +\ \frac{2\psi}{r^4}\left(\psi_a^*-r\partial_r\psi_a^*\right)\right)rdr\\ &=\ \int_{r_i}^{r_e}\left(\frac{\psi\partial_r^2\psi_a^*}{r^2}+\frac{2\psi}{r^4}\left(\psi_a^*-r\partial_r\psi_a^*\right)\right)\ rdr\end{aligned}$$

Le quatrième terme, qui apparaît avec un facteur $-(1+2m^2)$, donne une contribution à intégrer azimutalement

$$\begin{aligned}\int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r^3}\left(\partial_r\psi\right)\psi_a^* rdr\ &=\ \left[\frac{\psi\psi_a^*}{r^2}\right]_{r_i}^{r_e}\ -\ \int_{r_i}^{r_e}\frac{\psi\partial_r\psi_a^*}{r^2}\ dr\ +\ \int_{r_i}^{r_e}\frac{2\psi\psi_a^*}{r^3}\ dr\\ &=\ -\int_{r_i}^{r_e}\frac{\psi\partial_r\psi_a^*}{r^3}\ rdr\ +\ \int_{r_i}^{r_e}\frac{2\psi\psi_a^*}{r^4}\ rdr\ .\end{aligned}$$

En faisant la somme, on constate que

$$\int_{r_i}^{r_e}(\Delta\Delta\psi)\ \psi_a^*\ rdr\ =\ \int_{r_i}^{r_e}\psi\ (\Delta\psi_a^*)\ rdr\ ,$$

i.e. que le bilaplacien est autoadjoint. Enfin, les trois dérivées azimuthales s'écrivent

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \partial_\varphi\theta\ \psi_a^* d\varphi &= -\int_0^{2\pi} \theta\ \partial_\varphi\psi_a^* d\varphi, \\
\int_0^{2\pi} \partial_\varphi\psi\ \psi_a^* d\varphi &= -\int_0^{2\pi} \psi\ \partial_\varphi\psi_a^* d\varphi \\
\text{et} \quad \int_0^{2\pi} \partial_\varphi\psi\ \theta_a^* d\varphi &= -\int_0^{2\pi} \psi\ \partial_\varphi\theta_a^* d\varphi
\end{aligned}$$

Au final, par identification des coefficients de ψ et θ dans $\left\langle \boldsymbol{V}, L^\dagger \boldsymbol{U} \right\rangle$, on ontient l'opérateur linéaire adjoint

$$L_R^\dagger \ : \ \boldsymbol{U} \longmapsto \begin{pmatrix} -\Delta\Delta\psi_a + 2E^{-1}H^{-2}\partial_\varphi\psi_a - \left[\frac{2}{3}\ Ra_i + Ra_d\ q_d(r)\right]\partial_\varphi\theta_a \\ \Delta\theta_a + \partial_\varphi\psi_a \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

ou encore, en définissant la vorticité adjointe ζ_a

$$\boxed{L_R^\dagger \ : \ \boldsymbol{U} \longmapsto \begin{pmatrix} \Delta\zeta_a + 2E^{-1}H^{-2}\partial_\varphi\psi_a - \left[\frac{2}{3}\ Ra_i + Ra_d\ q_d(r)\right]\partial_\varphi\theta_a \\ \Delta\theta_a + \partial_\varphi\psi_a \end{pmatrix}} \tag{B.6}$$

De même, l'opérateur linéaire D (3.4) est

$$D \ : \ \boldsymbol{V} \longmapsto \begin{pmatrix} -\Delta\psi \\ P\theta \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

L'opérateur adjoint est donc

$$D^\dagger \ : \ \boldsymbol{V} \longmapsto \begin{pmatrix} -\Delta\psi_a \\ P\theta_a \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

soit

$$\boxed{D^\dagger \ : \ \boldsymbol{V} \longmapsto \begin{pmatrix} \zeta_a \\ P\theta_a \end{pmatrix}} \tag{B.9}$$

Annexe C

Spirales logarithmiques

On peut essayer d'approcher ces spirales négatives par des spirales logarithmiques d'équation $r = K\exp(\upsilon\varphi)$, avec K et α les deux constantes à déterminer. Sur une photo, nous déterminons les coordonnées des deux points extrémes d'une spirale pour calculer ces deux coefficients (figure C.1).

Sur une photo zoomée sur un quart de canal, le point A a pour coordonnées (en pixels) $(x_A,y_A) = (428,178)$ et le point B $(x_B,y_B) = (370,293)$. On en déduit les rayons et angles associés

$$r_A = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \tag{C.1}$$

$$r_B = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \tag{C.2}$$

$$\varphi_A = \arctan\left(\frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}\right) \tag{C.3}$$

$$\varphi_B = \arctan\left(\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}\right) \tag{C.4}$$

qui nous permettent de déterminer

$$K = r_A \exp\left[\frac{\varphi_A}{\varphi_B - \theta_A} \ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right)\right] \tag{C.5}$$

$$\upsilon = \frac{1}{\varphi_B - \varphi_A} \ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right) \tag{C.6}$$

On trouve $K = 450$ pixels et $\upsilon = -0{,}073$ à 5% près. Il faut noter que $\upsilon = \mathrm{cotg}\alpha$ avec $\alpha = (\boldsymbol{e_r},\mathbf{dM})$ l'angle tangentiel polaire. L'angle de spiralisation que l'on cherche à déterminer vaut $\varsigma = \alpha - \Pi/2$. On trouve finalement un angle de spiralisation constant de 4,1 °±0,15 °. Le rayon intérieur est de 453 pixels et le rayon extérieur de 494 pixels. La spirale commence au point A de rayon 182 mm ($r_A = 459$ pixels) et se termine au point B de rayon 189 mm ($r_B = 474$ pixels), soit un écart radial de 7 mm, et un écart anglulaire $\varphi_B - \varphi_A = 0{,}42$ radians soit environ 24°.

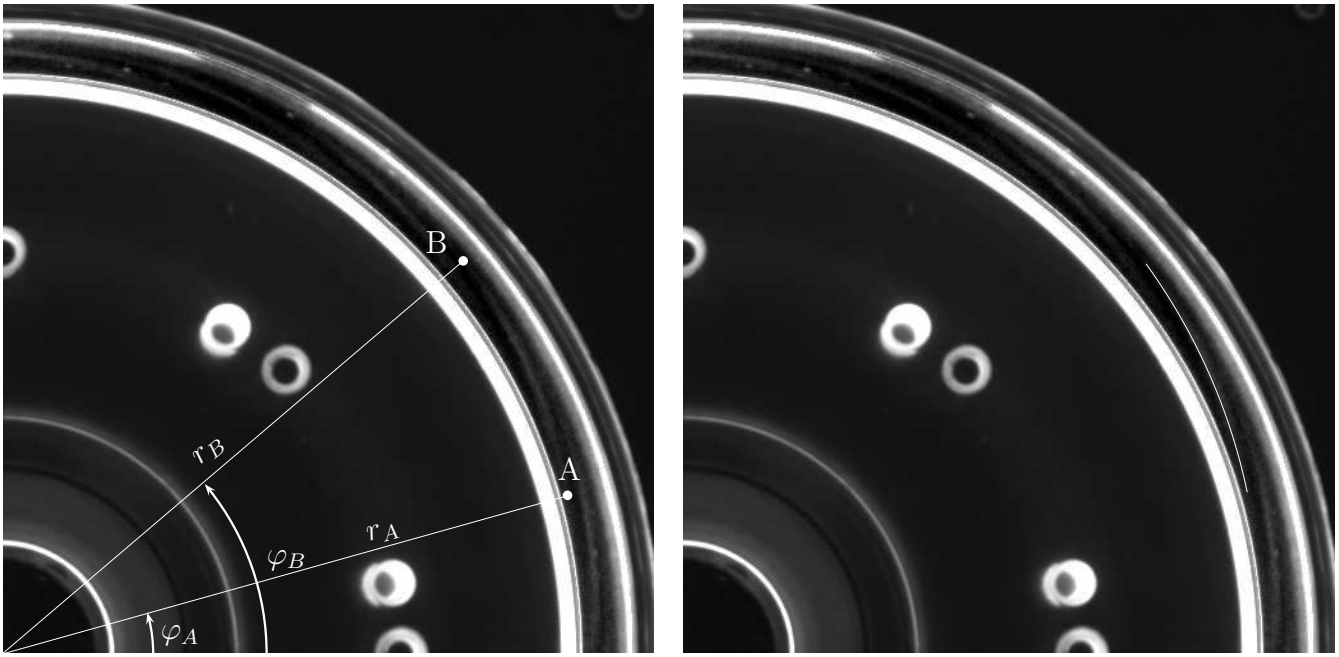


Fig. C.1 – Photographies du dessus d'un quart de canal en cisaillement pur pour $R_h = 1310$ et $R_b = 0$. À gauche, on prend deux points A et B d'une spirale pour calculer l'équation de la spirale logarithmique tracée sur la photo de droite.

Bibliographie

Aranson, I. S. & Kramer, L. 2002 The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Modern Phys.* **74**, 99.

Ardes, M., Busse, F. H. & Wicht, J. 1997 Thermal convection in rotating spherical shells. *Phy. of the Earth and Planet. Int.* **99**, 55–67.

A/S, D. D. 2002 *BSA Flow Software Installation & User's guide (7^{th} édition).*

Aubert, J. 2001 Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau terrestre. PhD thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Aubert, J., Brito, D., Nataf, H.-C., Cardin, P. & Masson, J. P. 2001 A systematic experimental study of spherical shell convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 51.

Aubert, J., Gillet, N. & Cardin, P. 2003 quasi-geostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **1052**, 4.

Bajaj, K., Mukolobwiez, N., N.Currier & Ahlers, G. 1999 Wave Number Selection and Large-Scale-Flow Effects due to a Radial Ramp of the spacing in Rayleigh-Bénard Convection. *Phys. Rev. L.* **83**, 5282–5285.

Barthelet, P. & Charru, F. 1998 Benjamin-Feir and Eckhaus instabilities with galilean invariance :the case of interfacial waves in viscous shear flows. *Eur. J. Mech., B/Fluids* **17**, 1.

Barthelet, P., Charru, F. & Fabre, J. 1995 Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.* **303**, 23.

Batchelor, G. 1951 Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Quat. J. Mech. and Appl. Math.* **4**, 29–41.

Bödewadt, U. 1940 Die Dehströmung uber festem Grunde. *Z. Angew. Math. Mech.* **20**, 241–253.

Busse, F. & Or, A. 1986 Convection in a rotating cylindrical annulus : thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.* **166**, 173.

Busse, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441.

Busse, F. H. & Carrigan, C. R. 1974 Convection induced by a centrigugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **62**, 579–592.

Busse, F. H. & Hood, L. L. 1982 Differential rotation driven by convection rapidly rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21**, 59–74.

Cardin, P. 1992 Aspects de la convection dans la Terre : couplage des manteaux inférieurs et supérieur, convection thermique du noyau liquide. PhD thesis, Université Paris 6.

Cardin, P. & Olson, P. 1994 Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Int.* **82**, 235.

Carrigan, C. & Busse, F. 1983 An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **126**, 287–305.

Charru, F. & Barthelet, P. 1999 Secondary instabilities of interfacial waves due to coupling with a long wave mode in a two-layer Couette flow. *Physica D* **125**, 311–324.

Charru, F., Mouilleron, H. & Eiff, O. 2004 Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **519**, 55.

Cole, S. 2004 Nonlinear rapidly rotating spherical convection. PhD thesis, http ://www.maths.leeds.ac.uk/ cajones/cole.html.

Cousin-Rittemard, N. 1996 Contributions à l'étude des instabilités des écoulements axisymétriques en cavité interdisques de type rotor-stator. PhD thesis, Univ. de Paris VI.

Cousin-Rittemard, N., Daube, O. & Quéré, P. L. 1998 Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II b* **326**, 359–366.

Cros, A., Ali, R., Gal, P. L., Thomas, P., Schouveiler, L., Carpenter, P. & Chauve, M. 2003 Effects of wall compliance on the laminar-turbulent transition of torsional Couette flow. *J. Fluid. Mech.* **481**, 177–186.

Cros, A. & LeGal, P. 2004 Defect turbulence in a spiral wave pattern in the torsional Couette flow. *Phys. Rev. E* **70**, 016309.

Dijkstra, D. & Heijst, G. V. 1983 The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder. *J. Fluid Mech.* **128**, 123–154.

Dormy, E., Soward, A. M., Jones, C. A., Jault, D. & Cardin, P. 2004 The onset of thermal convection in rotating shells. *J. Fluid Mech* **501**, 43.

Edwards, W., Beane, S. & Varma, S. 1991 Onset of wavy vortices in the finite-length Couette-Taylor problem. *Phys. Fluids A* **3**, 1510–1518.

Gauthier, G., Gondret, P., Moisy, F. & Rabaud, M. 2002 Instabilities in the flow between co- and counter-rotating disks. *J. Fluid Mech.* **473**, 1–21.

Gauthier, G., Gondret, P. & Rabaud, M. 1998 Motions of anisotropic particles : Application to visualization of three-dimensional flows. *Phys. of Fluids* **10**, 2147–2154.

Gauthier, G., Gondret, P. & Rabaud, M. 1999 Axisymmetric propagating vortices in the flow between a stationary and a rotating disk enclosed by a cylinder. *J. Fluid Mech.* **386**, 105–126.

Gillet, N., Brito, D., Jault, D. & Nataf, H.-C. 2007*a* Experimental and numerical studies of convection in a rapidly rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **580**, 83–121.

Gillet, N., Brito, D., Jault, D. & Nataf, H.-C. 2007*b* Experimental and numerical studies of magnetoconvection in a rapidly rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **580**, 123–143.

Gillet, N. & Jones, C. A. 2006 The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder. *J. Fluid Mech.* **554**, 343.

Greenspan, H. P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Breuklen Press.

Hof, B., Doorne, C., Westerweel, J., Nieuwstadt, F., Faisst, H., Eckhardt, B., Wedin, H., Kerswell, R. & Waleffe, F. 2004 Experimental Observation of Nonlinear Traveling Waves in Turbulent Pipe Flow. *Science* **305**, 1594–1597.

Hoffmann, N., Busse, F. & Chen, W.-L. 1998 Transitions to complex flows in the Ekman-Couette layer. *J. Fluid Mech.* **366**, 311–331.

Jones, C. A., Soward, A. M. & Mussa, A. I. 2000 The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.* **405**, 157.

Joseph, D. & Carmi, S. 1969 Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli, and channels. *Q. J. Appl. Math.* **26**, 575–599.

Kageyama, A. & Sato, T. 1997 Generation mechanisms of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo. *Phys. Rev. E.* **55**, 4617.

Kármán, T. V. 1921 Uber laminare und turbulente Reibung. *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 233–252.

Kuo, E. Y. & Cross, M. C. 1993 Traveling-wave wall states in rotating Rayleigh-Bénard convection. *Phy. Rev. E* **47**, 2245.

Lebranchu, Y., Plaut, E., Brancher, J. & Serre, E. 2007 Étude d'écoulements annulaires cisaillés tournants : structure et premières instabilités. *Congré Français de Mécanique* .

Lee, K. M., Steinle-Neumann, G. & Jeanloz, R. 2004 Ab-initio high-pressure alloying of iron and potassium : implications for the Earth's core. *Geophys. Res. Lett.* **31**, 11603.

Lide, D. 2001 *Handbook of chemistry and Physics*. Hardcover.

Lilly, D. 1966 On the Instability of Ekman Boundary Flow. *J. Atmos. Sci.* **23**, 481–490.

Liotard, L. & Poncet, S. 2007 Stabilité des écoulements de type Batchelor en cavité rotor-stator fermée : étude expérimentale et numérique. *Stage de deuxième année d'école d'ingénieurs* Téléchargeable sur http ://l3mgp.l3m.univ-mrs.fr/site/SitePersoPoncet/liotard.pdf.

Liu, Y. & Ecke, R. E. 1999 Nonlinear traveling waves in rotating Rayleign-Bénard convection : Stability boundaries and phase diffusion. *Phy. Rev. E* **59**, 4091–4105.

Lopez, J. 1998 Characteristics of endwall and sidewall boundary layers in a rotating cylinder with a differentially rotating endwall. *J. Fluid Mech.* **359**, 49–79.

Malerud, S., Maloy, K. & Goldburg, W. 1995 Measurements of turbulent velocity fluctuations in a planar Couette cell. *Phys. of Fluids* **8**, 1949–1955.

Matisse, P. & Gorman, M. 1984 Neutrally buoyant anisotropic particles for flow visualisation. *Phys. Fluids* **27**, 759.

Morin, V. & Dormy, E. 2004 Time dependent β-convection in rapidly rotating spherical shells. *Physic of fluids* **16**, 1603.

Morin, V. & Dormy, E. 2006 Dissipaion mechanisms for convection in rapidly rotating spheres shells. *Phys. Fluids* **18**, 68014.

Nataf, H. C. & Sommeria, J. 2000 *La physique et la Terre*. Belin.CNRS Édition.

Nore, C., Witkowski, L. M., Foucault, E., Pécheux, J., Daube, O. & LeQuéré, P. 2006 Competition between axisymmetric and three-dimensional patterns between exactly counter-rotating disks. *Phys. of Fluids* **18**, 054102.

Or, A. & Busse, F. 1987 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 2. Transitions to asymmetric and vacillating flow. *J. Fluid Mech.* **174**, 313–316.

Owen, J. & Rogers, R. 1989 *Flow and Heat Transfert in Rotating-Discs Systems : Rotor-Staotr Systems, Volume 1*. Ed. Morris, W.D. John Wiley and Sons Inc.

Pino, D., Mercader, I. & Net, M. 2000 Thermal and inertial modes of convection in a rapidly rotating annulus. *Phys. Rev. E* **61**, 1507–1517.

Plaut, E. 2003 Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : Effects of the boundary conditions and of the topology. *Phy. Rev. E* **67**, 046303.

Plaut, E. & Busse, F. H. 2002 Low-Prandtl-number convection in a rotating cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.* **464**, 345.

Plaut, E. & Busse, F. H. 2005 Multicellular convection in rotating annuli. *J. Fluid Mech.* **528**, 119.

Plaut, E., Lebranchu, Y., Simitev, R. & Busse, F. 2008 On the Reynolds stresses and mean fields generated by pure waves-Applications to shear flows and convection in a rotating shell. *accepté pour publication au J. Fluid Mech.* .

Prigent, A. & Dauchot, O. 2000 Visualization of a Taylor-Couette flow avoiding parasitic reflections. *Phys. of Fluids* **12**, 2688–2690.

Pringle, C. & Kerswell, R. 2007 Asymmetric, Helical, and Mirror-Symmetric Traveling Waves in Pipe Flow. *Phys. Rev. L.* **99**.

Proctor, M. R. E. 1994 Convection and magnetoconvection in a rapidly rotating sphere. *Lectures on solar and planetary dynamos* pp. 97–115.

Rotvig, J. 2007 Multiple zonal jets and drifting : Thermal convection in a rapidly rotating spherical shell compared to a quasigeostrophic model. *Phys. Rev. E.* **76**.

Schaeffer, N. & Cardin, P. 2005 Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers. *Physics of fluids* **17**, 104111.

Schaeffer, N. & Cardin, P. 2006 Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number. *Planet. Sci. Lett.* **245**, 595.

Schlichting, H. 1960 *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill series in mechanical engineering.

Schouveiler, L., Gal, P. L. & Chauve, M. 1998 Stability of a travelling roll system in a rotating disk flow. *Phys. Fluids* **10**, 2695–2697.

Schouveiler, L., Gal, P. L., Chauve, M. & Takeda, Y. 1999 Spiral and circular waves in the flow between a rotating and a stationary disk. *Exp. in Fluids* **26**, 179–187.

Schouveiler, L., Gal, P. L. & Chauve, P. 2001 Instabilities of the flow between a rotating and a stationary disk. *J. Fluid Mec.* **443**, 329–350.

Serre, E., Arco, E. C. D. & Bontoux, P. 2001 Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs. *J. Fluid Mec.* **434**, 65.

Serre, E., Bontoux, P. & Lanuder, B. 2002 Direct numerical simulation of transitional turbulent flow in a closed rotor-stator cavite. *Flow, Turb. Combust.* **69**, 35–50.

Serre, E. & Plaut, E. 2007 Étude numérique des ondes non linéaires créées par instabilités d'écoulements annulaires tournants cisaillés. *Rapport préliminaire* .

Serre, E., Plaut, E. & Lebranchu, Y. 2006 Étude numérique et expérimentale d'ondes non linéaires en écoulements cisaillés annulaires tournants. *CR RNL* p. 225.

Simitev, R. & Busse, F. H. 2003 Patterns of convection in rotating spherical shells. *New Journal of Physics* **5**, 1–20.

Soward, A. 1977 On the finite amplitude thermal instability of a rapidly rotating fluid sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **332**, 359–376.

Stewartson, K. 1953 On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 333–341.

Theofilis, V., Duck, P. & Owen, J. 2004 Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows. *J. Fluid Mech.* **505**, 249–286.

Tilgner, A. & Busse, F. H. 1997 Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **332**, 359–376.

Waleffe, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Phys. of Fluids* **15**, 1517–1534.

Zhang, K. 1992*a* Convection in a rapidly rotating spherical shell at finite Prandtl number : transition to vacillating flows. *Phys. of the Earth and Plan. Int.* **72**, 236–248.

Zhang, K. 1992*b* Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **248**, 211.

Zhang, K. 1994 On coupling between the Poincaré equation and the heat equation. *J. Fluid Mech.* **208**, 211–229.

Zhang, K., Liao, X. & Busse, F. H. 2007 Asymptotic solutions of convection in rapidly rotating non-slip spheres. *J. Fluid Mech.* **578**, 371–380.

Zhang, K.-K. & Busse, F. 1987 On the Onset of Convection in Rotating Spherical Shells. *Geophys. Astro. Fluid Dyn.* **39**, 119–147.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Philippe CARDIN, Directeur de Recherche, LGIT, Grenoble

Monsieur François CHARRU, Professeur, IMFT, Toulouse

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur LEBRANCHU Yannick

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Etude d'ondes non linéaires hydrodynamiques : approches théorique et expérimentale"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et énergétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 14 janvier 2008
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

Titre : Étude d'ondes non linéaires hydrodynamiques : approches théorique et expérimentale
Mots clés : instabilités hydrodynamiques, physique non linéaire
Résumé :

Dans une première partie, je me suis intéressé aux ondes de Rossby apparaissant par instabilités de thermoconvection dans une coquille sphérique en rotation représentant un modèle simplifié de noyau planétaire tellurique, et ce pour deux types de forçage : un chauffage interne correspondant à une activité radioactive du noyau et un chauffage différentiel lié à la différence de température entre les frontières interne et externe. Selon le théorème de Proudman-Taylor, l'écoulement possède une faible dépendance en la coordonnée axiale à cause de la rotation rapide. Cela permet de simplifier les modèles 3D en des modèles quasi géostrophiques 2D reposant sur une intégration axiale. Cette thèse présente la première comparaison systématique entre modèles 2D et 3D (Simitev, U-Glasgow) concernant des ondes de Rossby faiblement non linéaires. En 2D l'équation de Landau régissant l'amplitude de l'onde critique est calculée ; l'amplitude de la convection et celle des écoulements zonaux ainsi prédites se comparent assez bien aux résultats 3D. L'existence d'une bifurcation sous-critique est établie à très bas nombre d'Ekman en chauffage interne et en chauffage différentiel, à condition dans ce dernier cas que le nombre de Prandtl soit petit. La seconde partie est une étude expérimentale de l'écoulement d'eau et de ses premières instabilités dans un canal annulaire creusé dans un plateau éventuellement en rotation surmonté d'un couvercle tournant. Trois cas sont étudiés : le cisaillement pur correspondant à la rotation du couvercle seul, la corotation rapide et la contrarotation pure. Le seuil d'instabilité détecté par mesures globales (visualisations par caméra vidéo) et locales par Vélocimétrie Laser Doppler se caractérise par des ondes spiralées. Dans le cas de la contrarotation pure, des structures localisées dans l'espace-temps peuvent coexister avec les ondes. Une comparaison est effectuée avec des calculs numériques (Serre, CNRS-Marseille). Un accord relativement bon est obtenu pour l'écoulement de base (vitesse azimutale) et la première instabilité (nombre de Reynolds, nombre d'onde et fréquence angulaire critiques).

Title : Study of nonlinear hydrodynamical waves : theory and experiments
Keywords : hydrodynamic instabilities, nonlinear Physics
Abstract :

A first part is devoted to the study of the Rossby waves that appear in a rotating spherical shell representing the core of a terrestrial planet by thermal instabilities for two heating types. Internal heating is driven by radioactive sources and differential heating is driven by a difference of temperature between the internal and external frontiers. According to the Proudman-Taylor theorem, the flow depends only weakly on the axial coordinate because of the high rotation rate. Thus the 3D models can be simplified into quasi-geostrophic 2D models *via* an axial integration. I present the first systematic comparison between 2D and 3D models (Simitev, U-Glasgow) for weakly nonlinear Rossby waves. In 2D the Landau equation that controls the amplitude of the critical wave is calculated. Predicted convection' amplitude and zonal flows agree rather well with the 3D results. The existence of a subcritical bifurcation is established at very low Ekman numbers with internal and differential heating ; in this latter case, the Prandtl number also has to be small for the bifurcation to be subcritical. The second part is an experimental study of water flows and its first instabilities in an annular channel digged in a plate which may rotate, and which is sheared by a rotating lid. Three cases are studied : a pure shear where only the lid turns, a rapid corotation and a pure contrarotation. The onset of instability is studied with global measurements (using a video camera) and local ones (Laser Doppler Anemometry) and is characterized by spiralling waves. In the case of contrarotation, patterns localized in space and time may coexist with the waves. The comparison of these results with numerical ones (Serre, CNRS-Marseille) is done and shows a rather good agreement for the basic azimutal flow and the first instability (critical Reynolds number, wavenumber and angular frequency).