



HAL
open science

Contribution en optimisation de formes et applications

Arian Novruzi

► **To cite this version:**

Arian Novruzi. Contribution en optimisation de formes et applications. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1997. Français. NNT: 1997NAN10224 . tel-01753690

HAL Id: tel-01753690

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01753690v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Henri Poincaré Nancy 1
Option Mathématiques et Applications

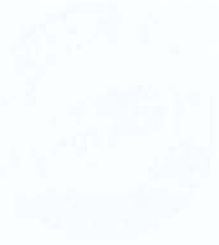
par

Arian NOVRUZI

Contribution en Optimisation de Formes et Applications

soutenue publiquement le 23 septembre 1997 devant le jury composé de :

Martin COSTABEL	Rapporteur	Professeur, Université de Rennes 1
Antoine HENROT	Rapporteur	Professeur, Université de Franche-Comté
Bernard ROUSSELET	Rapporteur (président)	Professeur, Université de Nice Sophia Antipolis
Patrick Le TALLEC	Examineur	Professeur, Université Parix IX Dauphine
Jean-R. ROCHE	Examineur	Maître de Conférences, Université H. Poincaré
Jan SOKOLOWSKI	Examineur	Professeur, Université Henri Poincaré Nancy 1
Michel PIERRE	Directeur de thèse	Professeur, ENS Cachan, Antenne de Bretagne



*A mes parents
Chiko et Milo*

*Contribution en Optique
de l'homme et de l'appareil*

*Le présent ouvrage est le fruit de
travaux effectués pendant
mon séjour à l'Institut de
Physique de l'Université de
Paris, sous la direction de
M. L. Brillouin, et de
collaboration avec M. G. L. Lemaître
et M. J. Vanier.*



REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Michel Pierre qui, dès le début, a répondu favorablement à ma demande d'une thèse sous sa direction. Grâce à ses qualités, je me suis initié à la recherche. Au cours de ce travail, la qualité de sa direction, ses conseils et les discussions communes m'ont été profondément utiles et ont été essentiels pour mener à terme ce travail.

Je suis particulièrement flatté que Martin COSTABEL, Antoine HENROT et Bernard ROUSSELET aient accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse, ainsi que de leurs remarques et suggestions intéressantes.

Je remercie, également, Patrick LE TALLEC, Jean-Rodolphe ROCHE et Jan SOKOLOWSKI d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier tous les membres de l'Institut Elie Cartan, enseignants, chercheurs, secrétaires et bibliothécaires, qui m'ont entouré si amicalement tout au long de ma thèse. Tout particulièrement, je remercie l'équipe du projet NUMATH pour ses encouragements, pour son milieu chaleureux, ainsi que pour le soutien qu'elle m'a offert pour surmonter les difficultés au cours de ce travail.

Je remercie du fond de mon cœur mes très gentils amis Christine BERNIER-CHAZANTSEV, Nassima BOUDIBA, Laurence DAVAL, Véronique HÉDOU, Evguenie KAZANTSEV, Olivier MONTIGNY, Fabienne PERANNI et surtout Mohammed HAYOUNI et Abdelkerim MIFDAL de leur aide si précieuse.

Tout au long de cette thèse, j'ai partagé mon bureau avec Didier SCHMITT, dont la qualité scientifique et la gentillesse m'ont aidé à mener à bien cette thèse.

J'ai une pensée particulière pour mes amis de ma chère Albanie, pour mon professeur de mathématiques, Sofokli GARO, pour mon professeur Ana KOVAÇI, pour les chercheurs de l'INIMA à Tirana, ainsi que pour l'ensemble des enseignants de la Faculté des Sciences de Tirana qui ont accompagné mon parcours universitaire.

Je dédie ce travail à mes très chers parents Xhiko et Milo.

Arian NOVRUZI
Nancy, le 23/09/1997



Table des matières

Introduction.	1
1 Les dérivées par rapport à la forme. Les relations et la structure des dérivées. La méthode de Newton.	7
1.1 Les dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet. Notations. Quelques propriétés.	8
1.2 Les dérivées au sens des vitesses.	12
1.3 Les relations des dérivées au sens de Fréchet avec les dérivées au sens des vitesses.	15
1.4 La structure des dérivées par rapport à la forme.	19
1.5 Les minima avec contrainte en optimisation de formes. La stabilité des minima. La méthode de Newton.	29
1.5.1 L'optimisation avec contrainte en optimisation de formes.	29
1.5.2 La stabilité des minima avec contrainte en optimisation de formes.	32
1.6 La méthode de Newton en optimisation de formes.	33
1.7 L'exemple de la minimisation du périmètre à surface donnée.	35
1.7.1 Le calcul des dérivées par rapport à la forme. L'analyse de la méthode de Newton.	36
1.7.2 La discrétisation. La convergence du problème discret.	39
1.7.3 L'interprétation des résultats numériques.	41
2 Un problème d'optimisation de formes en dimension deux.	45
2.1 La position du problème.	46
2.2 La dérivabilité par rapport à la forme.	47
2.3 La méthode numérique.	58
2.3.1 La discrétisation.	58
2.3.2 L'approximation au bord du gradient de la solution du problème de Poisson à l'extérieur.	59
2.3.3 La solution numérique. L'algorithme.	62
2.3.4 L'analyse de complexité. Résultats numériques.	63
2.3.5 L'étude numérique de la stabilité.	69

3	Un problème d'optimisation de formes en dimension trois.	73
3.1	La position du problème.	74
3.2	La dérivabilité par rapport à la forme.	76
3.2.1	La dérivée par rapport à la forme de la solution du problème de Neumann à l'extérieur.	77
3.2.2	La dérivée première et seconde de L . La symétrie de la dérivée seconde.	81
3.3	La méthode numérique.	89
3.3.1	La discrétisation. Quelques résultats préliminaires.	90
3.3.2	L'analyse de l'erreur de l'approximation au bord, du gradient de la solution d'un problème de Neumann à l'extérieur en \mathbb{R}^3	92
3.3.3	La solution numérique. L'analyse de complexité. L'analyse des résultats numériques.	101
3.3.4	Annexe.	108
4	Estimation C^α au bord du gradient de la dérivée par rapport à la forme, de la solution d'un problème de Neumann en \mathbb{R}^3.	111
4.1	Introduction. Le résultat principal.	111
4.2	Des résultats préliminaires.	115
4.3	L'estimation de $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $m = 1, 2, 3, 4$	118
4.3.1	L'estimation de $K \frac{\partial u}{\partial \nu}$	119
4.3.2	L'estimation de $K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}$	122
4.3.3	L'estimation de $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $m = 3, 4$	126
4.4	L'estimation de $ Du _{C^\alpha}$	127
4.5	Des résultats numériques.	132
5	La parallélisation de la méthode de Newton en optimisation de formes en dimension trois.	135
5.1	La position du problème.	136
5.2	La parallélisation de la dérivée première.	138
5.3	La parallélisation de la dérivée seconde.	145
5.4	Conclusions.	148
	Bibliographie	150
	Notations	157



Introduction.

Ce travail¹ est une contribution dans le domaine de l'optimisation de formes et dans ses applications.

La motivation initiale de ce travail est l'étude des méthodes numériques pour la résolution des minima avec ou sans contrainte en optimisation de formes. La bonne compréhension de ces méthodes a nécessité, en particulier, l'analyse de problèmes comme la dérivation par rapport à la forme et la structure de ces dérivées, l'étude des conditions nécessaires ou suffisantes des minima avec ou sans contrainte en optimisation de formes, la solution de certains problèmes au bord à l'extérieur, l'estimation au bord du gradient des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, ainsi que l'étude de l'erreur de l'approximation au bord du gradient de la solution de ces équations aux dérivées partielles.

Une des contributions a été aussi de bien définir la méthode de Newton pour un problème d'optimisation de formes, de construire et d'analyser des algorithmes pour résoudre numériquement les minima locaux. Enfin, nous nous sommes aussi penché sur la parallélisation de ces algorithmes.

L'organisation de ce travail suit le cheminement de cette introduction. Ainsi, dans le chapitre 1 nous étudions les dérivées par rapport à la forme et la minimisation avec contrainte en optimisation de formes. Dans les chapitres 2, resp. 3, on étudie un problème modèle en optimisation de formes qui fait intervenir la solution d'un problème à l'extérieur de Poisson en dimension deux (resp. Neumann en dimension trois) et le périmètre du domaine. Dans le chapitre 4 on établit une estimation au bord du gradient de la dérivée par rapport à la forme, de la solution d'un problème de Neumann extérieur en dimension trois (principe de Saint Venant). Cette estimation permet de réduire considérablement la complexité du calcul de l'approximation des minima en optimisation de formes. Dans le chapitre 5 on développe une méthode qui permet de résoudre par des algorithmes parallèles le problème de minimisation posé dans le chapitre 3. Ce travail termine avec une bibliographie et une table de notations. Dans la suite de cette introduction, nous allons présenter plus en détail les problèmes cités ci-dessus.

De façon générale, le problème qu'on a à résoudre est de trouver et calculer

1. Ce travail est fait dans le cadre d'une thèse financée par le Centre Charles Hermite, Inria Lorraine, que l'auteur remercie vivement.

numériquement :

$$\Omega^* = \operatorname{argmin}_{\text{loc}} \{ E(\Omega), \Omega \in \mathcal{O} \}, \quad (1)$$

un minimum local de E dans \mathcal{O} , où \mathcal{O} est une famille de domaines admissibles et E est une fonctionnelle $E : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$.

Le fait que l'ensemble \mathcal{O} , en général, est dépourvu d'une structure topologique particulière, rend difficile l'étude du problème (1). Sous certaines hypothèses de régularité sur l'ensemble \mathcal{O} , on représente \mathcal{O} à l'aide d'un sous-ensemble de l'espace de Banach $\Theta = C^k(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$, où $Q \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert régulier de référence. Ainsi, l'étude du problème (1) devient, essentiellement, équivalent à l'étude du problème suivant :

$$\theta^* = \operatorname{argmin}_{\text{loc}} \{ E(\theta), \theta \in \Theta \}, \quad (2)$$

où $E : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur Θ . □

Dans le chapitre 1 nous avons étudié en détail les dérivées au sens de Fréchet E' , E'' de E . (voir, par exemple [36], [37], [38]). L'approche des dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet, permet d'utiliser les outils classiques développés dans les espaces de Banach. Du fait qu'il existe plusieurs méthodes de dérivation par rapport à la forme, on a établi le lien entre E' , E'' et dE , d^2E , les dérivées par rapport à la forme au sens des vitesses de E (voir, par exemple, [16], [53] etc.). Le caractère symétrique de la dérivée seconde au sens de Fréchet facilite l'étude, en particulier celle numérique, ce qui nous a poussé à développer l'approche (2).

Le fait que la fonctionnelle E est construite à partir de E , une fonctionnelle qui dépend du domaine, se représente par une structure particulière des dérivées par rapport à la forme de E . En effet, la dérivée seconde E'' est une forme bilinéaire symétrique sur $C^{k+1}(\partial Q)$, qui dépend uniquement des composantes normales, et des dérivées tangentielles des directions de la dérivation. Ce résultat est prouvé ici de façon originale, à l'aide d'une relation établie en utilisant le théorème des fonctions implicites. Cette relation montre que, modulo un glissement sur le bord ∂Q , la restriction sur ∂Q de tout $\theta \in \Theta$ voisin de l'identité I_N , se représente sous la forme $I_N + \psi\nu$, avec ψ une fonction scalaire et ν la normale à ∂Q . Pour des résultats analogues dans des divers cadres, voir [16], [36], [37] etc.

Sous certaines conditions de régularité, on retrouve la condition nécessaire bien connue de Kuhn-Tucker pour l'existence d'un minimum local avec contrainte en optimisation de formes :

$$E'(\theta^*) + \Lambda^* M'(\theta^*) = 0, \quad \Lambda^* \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

où M est la contrainte. On donne aussi une condition suffisante classique en termes des dérivées secondes, pour que le problème (2) ait une solution.

Dans le cadre de l'étude de stabilité des minima locaux avec contrainte de \mathbf{E} , *i.e.* l'existence d'un minimum local strict, on présente et on analyse numériquement un résultat montré dans [25]. Ceci nous conduit à vérifier numériquement le signe d'une certaine forme quadratique, évaluée en le vecteur orthogonal à l'hyperplan $M'(\theta^*) = 0$.

Alors, résoudre numériquement (2) consiste, essentiellement, en l'approximation d'une solution de l'équation (3), et en la vérification d'un critère suffisant de minimum local donné par (1.68). Nous avons appliqué cette méthode au problème du formage électromagnétique en dimension deux (chapitre 2) et trois (chapitre 3).

Numériquement, la résolution de l'équation de Kuhn-Tucker est faite en utilisant la méthode classique de Newton, qu'on a introduite dans un cadre fonctionnel. En fait, il existe plusieurs méthodes de type Newton, comme celle à déplacement selon la normale, présentée par exemple dans [22]. Pour mettre en évidence les performances de la méthode de Newton et pour comparer cette méthode avec la méthode à déplacement selon la normale, on a étudié un problème très simple : la minimisation du périmètre avec comme contrainte la mesure du domaine fixe. A cause de l'invariance du périmètre par rapport aux translations, la dérivée seconde associée à la fonctionnelle correspondante à ce problème ne définit pas un isomorphisme. Par conséquent, la méthode de Newton appliquée à ce problème est mal posée. On a donc, "régularisé" ce problème en ajoutant un terme (énergie virtuelle), et on a montré que la méthode de Newton appliquée à ce problème est bien posée. On présente aussi des résultats numériques obtenus avec ces deux méthodes. Avec celle qu'on a introduite on obtient une convergence quadratique, tandis qu'avec la méthode à déplacement selon la normale on obtient une convergence super linéaire, ce qui montre que notre méthode est une "vraie" méthode de Newton. \square

Dans le chapitre 2 on a étudié les minima locaux avec la contrainte de la mesure fixe d'une fonctionnelle \mathbf{E} , qui demande en particulier, l'étude des dérivées par rapport à la forme \mathbf{E}' et \mathbf{E}'' . Ici :

$$\mathbf{E}(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\epsilon\Omega(\theta)} |D\mathbf{u}(\theta)|^2 dx + \sigma P(\Omega(\theta)), \quad \sigma > 0, \quad (4)$$

où $\Omega(\theta)$ est un ouvert dans \mathbb{R}^2 qui dépend de θ et $P(\Omega(\theta))$ est le périmètre de $\Omega(\theta)$. La fonction $\mathbf{u}(\theta)$ est la solution d'un problème de Poisson dans $\epsilon\Omega(\theta)$, l'extérieur de $\Omega(\theta)$, et qui dépend d'une certaine fonction $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ce problème est le modèle du formage électromagnétique extérieur en dimension deux, quand on suppose que la fréquence des courants électriques est très grande (voir, par exemple [4], [42], [43]).

Du fait que $\mathbf{u}(\theta)$ est définie à l'extérieur de $\Omega(\theta)$, la difficulté pour établir la dérivabilité de $\mathbf{u}(\theta)$ est de définir un "bon espace" où vit $\mathbf{u}(\theta)$. En utilisant la transformation de Kelvin on a identifié ce "bon espace" avec un espace de Sobolev sur un ouvert borné, puis on a montré la dérivabilité de $\mathbf{u}(\theta)$ en

utilisant des résultats classiques de dérivation par rapport à la forme (voir, par exemple [37], [51], [52]). On remarque l'utilité que présente la transformation de Kelvin (voir, par exemple [15]) pour transformer les problèmes à l'extérieur en problèmes à l'intérieur, ce qui permet en particulier, de traiter des problèmes à l'extérieur sans faire appel aux espaces avec des poids à l'infini (voir, par exemple [39]).

A la fin du chapitre, on analyse les résultats numériques obtenus et on étudie numériquement la stabilité de la solution numérique. \square

Dans le chapitre 3 on étudie les dérivées par rapport à la forme de \mathbf{E} , l'erreur au bord du gradient de la solution d'un problème de Neumann \mathbf{u} , et on calcule numériquement des minima locaux de \mathbf{E} avec la contrainte de la mesure fixe. La fonctionnelle \mathbf{E} est donnée par :

$$\mathbf{E}(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon\Omega(\theta)} |\mathbf{B}(\theta)|^2 dx + \sigma P(\Omega(\theta)) + \rho \int_{\Omega(\theta)} x_3 dx, \quad \sigma > 0, \quad \rho \geq 0, \quad (5)$$

où $\Omega(\theta)$ est un ouvert dans \mathbb{R}^3 et $\mathbf{B}(\theta)$ est une fonction qui dépend de $\mathbf{u}(\theta)$. Comme dans le cas de la dimension deux, en utilisant la transformation de Kelvin on prouve la dérivabilité de $\mathbf{u}(\theta)$, et on établit les dérivées par rapport à la forme $\mathbf{E}'(\theta)$ et $\mathbf{E}''(\theta)$. Remarquons que l'expression de $\mathbf{E}''(\theta)$ obtenue par des formules classiques de dérivation, n'est pas convenable pour des études numériques. On présente une autre expression de $\mathbf{E}''(\theta)$ plus commode, obtenue par une série d'intégrations par parties sur le bord. Cette forme montre en particulier la nature symétrique de la dérivée seconde.

Nous avons analysé l'erreur de l'approximation de $\mathbf{u}(\theta)$ et $D\mathbf{u}(\theta)$ au bord, en utilisant une représentation intégrale de $\mathbf{u}(\theta)$ (voir, par exemple [10], [39]). On a fait une discrétisation classique linéaire par morceaux, ce qui permet de construire un algorithme numérique simple. Mais, d'autre part ceci rend l'approximation de $D\mathbf{u}(\theta)$ assez délicate, parce que le noyau intégral est singulier (l'intégrale dans l'expression de $D\mathbf{u}(\theta)$ est comprise au sens de Cauchy). L'étude de l'erreur nous a conduit donc, à l'étude de l'erreur d'une équation intégrale à noyau singulier, dont la difficulté repose sur l'estimation de l'erreur due à l'approximation du bord (l'erreur géométrique). On a prouvé que l'équation intégrale approchée admet une solution unique dont l'erreur de l'approximation pour la norme C^0 , est de l'ordre $h^{1-\alpha}$, où $\alpha \in]0, 1[$ et h un paramètre de discrétisation.

On a construit l'opérateur $\theta \rightarrow \mathbf{u}_h(\theta)$, resp. $\theta \rightarrow D_h\mathbf{u}(\theta)$, qui approche $\mathbf{u}(\theta)$, resp. $D\mathbf{u}(\theta)$ sur le bord, et on a prouvé que l'erreur, pour la norme C^α , de l'approximation au bord de $\mathbf{u}(\theta)$ et $D\mathbf{u}(\theta)$ est de l'ordre $h^{1-\alpha}$, où $\alpha \in]0, 1[$. \square

Dans le chapitre 4 on a cherché une estimation qui permet de réduire le coût de calcul avec la méthode de Newton qu'on se propose d'utiliser. Ce problème est lié essentiellement à l'estimation fine au bord, du gradient de la

solution d'un problème de Neumann à l'extérieur, ou de Dirichlet en dimension deux (autrement dit, il s'agit de principe de Saint Venant pour le gradient d'un problème elliptique, voir par exemple [34], [41], [56]).

En effet, de l'analyse de la complexité il résulte que la partie la plus importante du calcul avec cette méthode est l'approximation au bord du gradient de n problèmes de Neumann (avec n le nombre des noeuds), qui sont les dérivées par rapport à la forme de $\mathbf{u}(\theta)$, selon certaines directions. Les données au bord qui correspondent à ces problèmes sont assez particulières, ce qui nous a conduit à étudier le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } {}^e\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f\delta_i\eta + g\zeta, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

où ${}^e\Omega$, l'extérieur de Ω , $i \in \{1, 2, 3\}$, $f, \eta \in C^1(\Gamma)$, $g, \zeta \in C^0(\Gamma)$ avec $\eta(0) = \zeta(0) = 1$ et $\text{supp}(\eta), \text{supp}(\zeta) \subset \Gamma_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap B(0, h)$ et δ_i , la $i^{\text{ème}}$ composante du gradient tangentiel.

Le fait que le support de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est inclus dans Γ_h nous a suggéré de nous intéresser au comportement de Du au bord, "loin" de Γ_h , quand $h \rightarrow 0$.

Nous avons donné une réponse à cette question en utilisant une représentation intégrale pour u . L'essentiel de la preuve passe par plusieurs estimations d'intégrales faiblement singulières sur le bord et en utilisant des résultats classiques de régularité pour les équations intégrales (voir, par exemple [10], [32]).

L'estimation obtenue permet de réduire considérablement le coût du calcul, parce que la complexité de l'approximation au bord du gradient de n problèmes de Neumann devient, au pire, $O(1)n^{2+2/3}$ au lieu de $O(1)n^3$, avec $O(1)$ assez grand qu'on a a priori. Donc, l'ordre de calcul est diminué. On remarque qu'on observe un gain bien meilleur dans les calculs effectifs. \square

Dans le chapitre 5, dans la suite de la résolution numérique du problème de minimisation de \mathbf{E} en dimension trois, on a étudié la parallélisation de la méthode de Newton qu'on a utilisée.

Dans l'algorithme parallèle qu'on a construit, la stratégie de la distribution des données suit un schéma classique de répartition 1-cyclique selon les colonnes.

On a traité en particulier les deux grandes parties de l'algorithme de Newton appliqué à l'équation de Kuhn-Tucker : l'approximation de la dérivée première et seconde par rapport à la forme. On a fait une analyse de l'algorithme parallèle, qui est construit en utilisant le langage M.P.I. (Message Passing Interface). Au cours de cette analyse on présente des résultats numériques qui permettent d'évaluer les performances de l'algorithme parallèle.

Il est intéressant de remarquer la parallélisation de la construction de la matrice issue de l'assemblage dans la méthode des éléments finis frontière

pour l'équation intégrale décrite dans le chapitre 3. En fait, à cause du couplage entre les boucles selon les indices des éléments finis et des noeuds, la parallélisation de la construction de cette matrice est difficile. Nous proposons une méthode de calcul de cette matrice, bien adaptée aux machines du type M.I.M.D. (Multiple Instructions, Multiple Data).

Finalement, on remarque que la méthode de Newton en optimisation de formes nous permet d'utiliser de façon optimale les ressources d'une machine parallèle du type M.I.M.D., grâce à la structure très séparée de la dérivée seconde par rapport à la forme. Son coût fortement réduit est dû à l'estimation au bord du gradient de la dérivée par rapport à la forme de la solution du problème de Neumann. Nous pensons que cette propriété n'est pas spécifique au problème étudié. Elle doit caractériser une classe large de problèmes d'optimisation de formes liés à certaines équations aux dérivées partielles.

Chapitre 1

Les dérivées par rapport à la forme. Les relations et la structure des dérivées. La méthode de Newton.

Ce chapitre commence avec l'étude des dérivées par rapport à la forme d'une fonctionnelle qui dépend du domaine. En fait, il existe plusieurs approches de dérivées par rapport à la forme : les dérivées au sens des vitesses, de perturbation de l'identité, les dérivées matérielles (voir, par exemple [8], [16], [36], [37], [53]) etc. Nous avons choisi de traiter en particulier, les dérivées par rapport à la forme au sens usuel (de Fréchet) et au sens des vitesses.

Dans le début de ce chapitre, après l'introduction de quelques notations et la présentation de quelques propriétés liées aux difféomorphismes, on introduit les dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet.

Afin de pouvoir établir le lien entre les dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet et celles au sens des vitesses, dans la deuxième section on fait une présentation des dérivées au sens des vitesses, en suivant l'approche exposée dans [16].

On prouve aussi que la dérivée seconde par rapport à la forme a une structure particulière, qui est une conséquence de la dépendance de la fonctionnelle du domaine. En effet, la dérivée seconde est une forme bilinéaire symétrique à support sur le bord du domaine, et qui dépend uniquement des composantes normales et des dérivées tangentielles au bord, des directions de la dérivation. L'outil principal utilisé est une relation qui exprime de façon analytique le fait que, toute perturbation régulière, suffisamment petite d'un domaine régulier, modulo un glissement sur le bord peut se présenter à l'aide d'un déplacement selon la normale.

L'approche des dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet permet d'utiliser les outils classiques développés dans les espaces de Banach. Dans ce

cadre on étudie la minimisation avec contrainte en optimisation de formes. On retrouve la condition nécessaire bien connue, dite de Kuhn-Tucker, de l'existence d'un minimum local avec contrainte. On donne aussi une condition suffisante d'un minimum local strict avec contrainte.

On présente un résultat concernant la stabilité d'un minimum local avec contrainte, montré dans [25]. Ce résultat est très pratique pour vérifier numériquement si une solution de l'équation de Kuhn-Tucker est un minimum local strict. En effet, il consiste en l'évaluation du signe d'une forme quadratique appliquée à un certain vecteur.

Dans le cadre classique d'un espace de Banach on expose la méthode de Newton en optimisation de formes. On étudie cette méthode pour un problème très simple, mais significatif : la minimisation du périmètre avec la contrainte de la mesure fixe. On démontre d'abord que cette méthode ne peut pas s'appliquer à ce problème parce que la dérivée seconde par rapport à la forme n'est pas inversible. Après la "régularisation" (en ajoutant un terme) on prouve que la méthode de Newton associée à ce nouveau problème est bien posée, ainsi que celle associée au problème discret correspondant. On présente des résultats numériques et on fait aussi des comparaisons avec des résultats obtenus en utilisant une autre méthode de type Newton (voir, par exemple [22]). Avec la méthode qu'on a introduite on obtient une convergence quadratique, tandis que avec l'autre méthode on obtient une convergence super linéaire, ce qui prouve que la méthode qu'on se propose d'utiliser est une vraie méthode de Newton.

1.1 Les dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet. Notations. Quelques propriétés.

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier qui désignera toujours la dimension de l'espace, $k \in \mathbb{N}$ et $Q \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^∞ , localement d'un côté de ∂Q (voir, par exemple [19]). Avec Θ on note :

$$\Theta = C^k(\bar{Q}; \mathbb{R}^N), \quad (1.1)$$

l'espace des fonctions vectorielles avec des dérivées continues jusqu'à l'ordre k , qui muni de $\|\cdot\|_\Theta$, la norme C^k usuelle, est un espace de Banach.

Sur Θ , on définit les fonctions Ω et Γ comme ci-dessous :

$$\Omega : \begin{cases} \Theta & \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \\ \theta & \rightarrow \Omega(\theta) = \{ \theta(x), x \in Q \}, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\Gamma : \begin{cases} \Theta & \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \\ \theta & \rightarrow \Gamma(\theta) = \{ \theta(x), x \in \partial Q \}. \end{cases} \quad (1.3)$$

D'autre part, soit \mathcal{O} la famille des ouverts de \mathbb{R}^N :

$$\mathcal{O} = \{ \Omega \subset \mathbb{R}^N, \exists \theta \in \Theta^{-1}, \theta(Q) = \Omega \}, \quad (1.4)$$

où \mathcal{O}^{-1} est un sous-ensemble de Θ donné par :

$$\mathcal{O}^{-1} = \{ \theta \in \Theta, \text{difféomorphisme de classe } C^k \text{ de } \overline{Q} \text{ sur son image} \}. \quad (1.5)$$

Il est clair que \mathcal{O} et \mathcal{O}^{-1} ne sont pas vides parce que le difféomorphisme identité $I_N(x) = x, x \in \overline{Q}$ est dans \mathcal{O}^{-1} et $I_N(Q) = Q \in \mathcal{O}$. Le résultat du lemme suivant est assez classique, voir par exemple, [36]. Pour compléter la présentation on donne aussi la démonstration.

Lemme 1.1 *L'ensemble \mathcal{O}^{-1} est un ouvert dans Θ .*

Démonstration. Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}, \xi \in \Theta$. On a $\theta + \xi = (I_N + \xi \circ \theta^{-1}) \circ \theta$. Alors, il suffit de prouver que $I_N + \xi \circ \theta^{-1} : \overline{\Omega(\theta)} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^k , inversible de $\overline{\Omega(\theta)}$ dans son image et d'inverse de classe C^k .

(i) On a que $\xi \circ \theta^{-1} \in C^k(\overline{\Omega(\theta)}; \mathbb{R}^N)$, comme une composition de fonctions de classe C^k , donc $I_N + \xi \circ \theta^{-1}$ est de classe C^k .

(ii) L'inversibilité de $I_N + \xi \circ \theta^{-1}$. On considère $(\hat{\cdot})$, un opérateur de prolongement (continu) de $C^k(\overline{\Omega(\theta)}; \mathbb{R}^N)$ dans $C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, donné par exemple, par le lemme 6.37, [19]. Si $\hat{\xi}$, est le prolongement de $\xi \circ \theta^{-1}$, on a :

$$\|\hat{\xi}\|_{C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|\xi \circ \theta^{-1}\| \leq C_2 \|\theta^{-1}\| \|\xi\|_{\Theta},$$

où avec $\|\cdot\|$ on a noté la norme usuelle de $C^k(\overline{\Omega(\theta)}; \mathbb{R}^N)$. Remarquons que les constantes C_1 et C_2 ne dépendent que de k, N et du domaine.

Soit $r = \epsilon / [C_2 \|\theta^{-1}\|]$ avec $\epsilon = 1/(2N+1)$ et considérons la boule $B(0, r) \subset \Theta$. Pour $\xi \in B(0, r)$, on a $\|\hat{\xi}\| \leq 1/(2N+1)$, donc $\hat{\xi}$ est une contraction stricte de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N . Soit $y : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, x \rightarrow y(x)$, où $y(x)$ est l'unique solution de $(I_N + \hat{\xi})y = x$, i.e. $(I_N + \hat{\xi}) \circ y(x) = x$. Donc, y est l'inverse à droite de $I_N + \hat{\xi}$. D'autre part :

$$y \circ (I_N + \hat{\xi})(x) = x + \hat{\xi}(x) - \hat{\xi} \circ y \circ (I_N + \hat{\xi})(x) \Rightarrow y \circ (I_N + \hat{\xi})(x) = x,$$

parce que $\hat{\xi}$ est une contraction stricte. Donc, $y = (I_N + \hat{\xi})^{-1}$.

(ii) Prouvons que $(I_N + \hat{\xi})^{-1}$ est de classe C^k . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N, y_0 = y(x_0)$ et :

$$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, (x, z) \rightarrow f(x, z) := (I_N + \hat{\xi})(z) - x.$$

On a $f \in C^k(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et $f(x_0, y_0) = 0$. D'autre part, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = |D(I_N + \hat{\xi})| \geq (1 - \epsilon)^N - (1 + \epsilon)\epsilon^{N-1}(N! - 1) \geq \frac{(2^N - 4 \frac{N!-1}{N!})N^N}{(2N+1)^N} > 0.$$

Alors, du théorème des fonctions implicites il existe un voisinage U de x_0 et une unique fonction $z : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^k , satisfaisant $(I_N + \hat{\xi}) \circ z(x) = x$. De l'unicité de la fonction z il découle que $y(x) = z(x), x \in U$. Donc, $(I_N + \hat{\xi})^{-1}$ est de classe C^k . Par conséquent, $I_N + \xi$, la restriction sur $\overline{\Omega(\theta)}$ de $I_N + \hat{\xi}$ est aussi inversible, d'inverse de classe C^k . Ceci montre que $\theta + \xi \in \mathcal{O}^{-1}$ pour tout

$\xi \in B(0, r)$, ce qui prouve le lemme. \square

Concernant l'ensemble $\Omega(\theta)$ on a :

Lemme 1.2 Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors, $\Omega(\theta)$ est un ouvert et $\Gamma(\theta) = \partial\Omega(\theta)$.

Démonstration. Soit $y \in \Omega(\theta)$. Alors, il existe $x \in Q$ avec $\theta(x) = y$. Or, $|D\theta(x)| \neq 0$ parce que θ est dans \mathcal{O}^{-1} . Par conséquent, du théorème de l'inversion locale il existe deux boules $B(x, r_x) \subset Q$ et $B(y, r_y) \subset \mathbb{R}^N$, telles que $\theta(B(x, r_x)) \subset B(y, r_y)$, ce qui prouve que $\Omega(\theta)$ est un ouvert.

Montrons que $\Gamma(\theta) = \partial\Omega(\theta)$.

L'ensemble $\theta(\overline{Q})$ est fermé parce que $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$. D'autre part on a que $\theta(\overline{Q}) = \Omega(\theta) \cup \Gamma(\theta)$ et $\Omega(\theta) \cap \Gamma(\theta) = \emptyset$, parce que θ est inversible sur \overline{Q} . Donc, $\Gamma(\theta) = \theta(\overline{Q}) \setminus \Omega(\theta)$. Or, Q est dense dans \overline{Q} , donc $\Omega(\theta) = \theta(Q)$ est dense dans $\theta(\overline{Q})$, parce que θ est de classe C^k sur \overline{Q} . Par conséquent, $\overline{\Omega(\theta)} = \theta(\overline{Q})$. Ceci implique $\Gamma(\theta) = \overline{\Omega(\theta)} \setminus \Omega(\theta)$ et prouve le lemme. \square

Lemme 1.3 Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors, $\Gamma(\theta)$ est de classe C^k et $\Omega(\theta)$ est localement d'un seul côté de $\Gamma(\theta)$.

Démonstration. En effet, soit $y \in \Gamma(\theta)$, $x \in \partial Q$ tel que $\theta(x) = y$ et $\hat{\theta}$ un prolongement de classe C^k de θ sur un voisinage de \overline{Q} (voir, par exemple [19], lemme 6.37). Comme $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$, on a $|D\theta(x)| = |D\hat{\theta}(x)| \neq 0$. Alors, du théorème de l'inversion locale il existe un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^N , disons U , tel que la fonction $\hat{\theta}$ est inversible dans U , et $\hat{\theta}(U)$ est un ouvert qui contient y .

Prouvons que $\Gamma(\theta)$ est de classe C^k et que $\Omega(\theta)$ est localement d'un seul côté de son bord. En effet, du fait que Q est de classe C^∞ , localement d'un seul côté de ∂Q , pour tout $x \in \partial Q$ il existe r_x et $u : B(x, r_x) \rightarrow \mathbb{R}^N$ (voir, par exemple [19]), difféomorphisme de classe C^∞ de $B(x, r_x)$ dans son image, tel que :

$$u(Q \cap B(x, r_x)) \subset \mathbb{R}_+^N, \quad u(\partial Q \cap B(x, r_x)) \subset \partial\mathbb{R}_+^N,$$

où $\mathbb{R}_+^N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, x_N > 0\}$. Soit alors, v la fonction :

$$v : B(y, r_y) \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad v(y) = u \circ \hat{\theta}^{-1},$$

avec r_y assez petit tel que $\hat{\theta}^{-1}(B(y, r_y)) \subset U \cap B(x, r_x)$. La fonction v est inversible de $B(y, r_y)$ dans son image, v et v^{-1} sont de classe C^k , et :

$$v(\Omega(\theta) \cap B(y, r_y)) \subset \mathbb{R}_+^N, \quad v(\Gamma(\theta) \cap B(y, r_y)) \subset \partial\mathbb{R}_+^N,$$

ce qui prouve le lemme. \square

Considérons E , une fonctionnelle définie dans \mathcal{O} :

$$E : \begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega & \rightarrow E(\Omega), \end{cases} \quad (1.6)$$

et construisons la fonction composition $\mathbf{E} = E \circ \Omega$:

$$\mathbf{E}(\theta) = \begin{cases} \mathcal{O}^{-1} \subset \Theta & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \theta & \rightarrow E(\Omega(\theta)). \end{cases} \quad (1.7)$$

Au lieu d'étudier E on va étudier \mathbf{E} , ce qui en général, est plus facile et plus classique, parce que \mathbf{E} est définie sur un espace de Banach. On peut parler alors, des dérivées de \mathbf{E} au sens usuel, que parfois, on va les appeler dérivées par rapport à la forme au sens de Fréchet.

Pour $\theta, \xi \in \Theta$ on note $\mathbf{E}'(\theta)$ la dérivée de \mathbf{E} en θ et $\mathbf{E}'(\theta)(\xi)$, sa dérivée en θ dans la direction ξ .

Le lemme suivant est une conséquence du fait que \mathbf{E} est construite à partir de E , une fonctionnelle définie sur un ensemble de domaines.

Lemme 1.4 *Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et supposons que $\mathbf{E}'(\theta)$ existe. Si $\tilde{\theta} \in \mathcal{O}^{-1}$ est tel que $\Omega(\theta) = \Omega(\tilde{\theta})$, alors $\mathbf{E}'(\tilde{\theta})$ existe aussi et on a :*

$$\mathbf{E}'(\tilde{\theta})(\xi) = \mathbf{E}'(\theta)(\xi \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta), \quad \forall \xi \in \Theta. \quad (1.8)$$

Démonstration. Soit $\xi \in \Theta$. Pour $x \in \mathcal{Q}$, en faisant le changement du variable $x = \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta(y)$, on a :

$$\tilde{\theta}(x) + \xi(x) = \theta(y) + \xi \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta(y),$$

ce qui implique : $\Omega(\tilde{\theta} + \xi) = \Omega(\theta + \xi \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta)$. Donc :

$$\mathbf{E}(\tilde{\theta} + \xi) = \mathbf{E}(\theta + \xi \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta).$$

Du fait que $\xi \in \Theta \rightarrow \xi \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta \in \Theta$ est linéaire continu (parce que pour $k \geq 1$, Θ est invariant pour la composition, voir [19], chapitre 4), il découle que \mathbf{E} est dérivable en $\tilde{\theta}$ (comme composition de deux fonctions dérivables) et de façon évidente on a l'égalité (1.8). \square

Quand la dérivée seconde de \mathbf{E} en θ existe, on la note $\mathbf{E}''(\theta)$ et parfois on l'appelle dérivée seconde par rapport à la forme au sens de Fréchet. Pour $\xi, \eta \in \Theta$, on note $\mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta)$ la valeur de $\mathbf{E}''(\theta)$ en (ξ, η) .

Comme pour \mathbf{E}' (le lemme 1.4), il est facile de prouver que si $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{O}^{-1}$, $\Omega(\theta) = \Omega(\tilde{\theta})$ et $\mathbf{E}''(\theta)$ existe, alors $\mathbf{E}''(\tilde{\theta})$ existe aussi et :

$$\mathbf{E}''(\tilde{\theta})(\xi, \eta) = \mathbf{E}''(\theta)(\xi \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta, \eta \circ \tilde{\theta}^{-1} \circ \theta). \quad (1.9)$$

1.2 Les dérivées au sens des vitesses.

Dans cette section, on présente les dérivées par rapport à la forme au sens des vitesses, en suivant l'approche dans [16]. On remarque que dans la preuve des relations entre les dérivées par rapport à la forme au sens des Fréchet et celle au sens des vitesses qu'on va présenter dans la suite de cette section, on utilise essentiellement le théorème 1.5, et les définitions 1.8 et 1.10.

Soit $\tau > 0$ un réel positif et \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \{ V : [-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \}, \quad (1.10)$$

la famille des champs des vitesses, telle que pour tout $V \in \mathcal{V}$, la fonction $X \in \mathbb{R}^N \rightarrow V(\cdot, X) \in C^0([-\tau, \tau]; \mathbb{R}^N)$ est uniformément lipschitzienne.

A chaque $V \in \mathcal{V}$, on associe $\{(X, T_V(\cdot, X)), X \in \mathbb{R}^N\}$ avec :

$$\begin{cases} T_V(\cdot, X) : [-\tau, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \frac{dT_V(t, X)}{dt} = V(t, T_V(t, X)), t \in [-\tau, \tau], \quad T_V(0, X) = X. \end{cases} \quad (1.11)$$

Le théorème suivant (pour la démonstration voir [16]) montre que se donner la famille des champs de vitesses \mathcal{V} , est équivalent à se donner une famille de transformations \mathcal{T} , dans le sens que si on part d'un $V \in \mathcal{V}$, on trouve un $T \in \mathcal{T}$ et inversement.

Théorème 1.5 Soit $V \in \mathcal{V}$, donné par (1.10) et T_V défini par (1.11). Alors on a les assertions suivantes :

(i) T_V satisfait :

$$\begin{cases} X \in \mathbb{R}^N \rightarrow \{t \rightarrow T_V(t, X)\} \in C^1([-\tau, \tau]; \mathbb{R}^N) \text{ est lipschitzienne,} \\ \forall t \in [-\tau, \tau], X \rightarrow T_V(t, X) \text{ est bijective, d'inverse } (T_V(t))^{-1}, \\ x \in \mathbb{R}^N \rightarrow \{t \rightarrow (T_V(t))^{-1}(x)\} \in C^0([-\tau, \tau]; \mathbb{R}^N) \text{ est lipschitzienne.} \end{cases} \quad (1.12)$$

(ii) Soit \mathcal{T} la famille des transformations :

$$\mathcal{T} = \{T : [-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N\}, \quad (1.13)$$

tel que pour tout $T \in \mathcal{T}$, $T_V := T$ satisfait (1.12). Si V est le champ $V : [-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ défini par :

$$(t, x) \rightarrow V(t, x) = \frac{\partial T_V}{\partial t} \left(t, (T_V(t))^{-1}(x) \right), \quad (1.14)$$

alors $V \in \mathcal{V}$. □

Remarque 1.6 Considérons les transformations de \mathbb{R}^N données par :

$$T(t, X) = X + tU(X) + \frac{t^2}{2}A(X), \quad (1.15)$$

avec U et A , deux transformations uniformément lipschitziennes.

Alors, il est facile de vérifier que $T \in \mathcal{T}$, où \mathcal{T} est donné par (1.13). La vitesse V correspondante donnée par (1.14), satisfait en plus :

$$V(0) = U, \quad V_t(0) = A - DU \cdot U, \quad \text{avec} \quad V_t(0)(x) = \frac{\partial V}{\partial t}(0, x), \quad (1.16)$$

et DU est la matrice jacobienne de U . \square

Passons maintenant à la définition de la dérivabilité par rapport à la forme au sens des vitesses.

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des parties de \mathbb{R}^N et $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Pour chaque $V \in \mathcal{V}$ et pour tout $\Omega \in \mathcal{O}$, on peut considérer l'image par $T_V(t, \cdot)$ de Ω :

$$T_V^t(\Omega) = \{ T_V(t, x), x \in \Omega \}. \quad (1.17)$$

Soit E la fonctionnelle donnée par (1.6).

Pour $V \in \mathcal{V}$ et $\Omega \in \mathcal{O}$, on s'intéresse à la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (E(T_V^t(\Omega)) - E(\Omega)). \quad (1.18)$$

Lorsque cette limite existe, on la note $dE(\Omega; V)$ et parfois on l'appelle dérivée eulérienne dans la direction V de E en Ω . \square

Soit $V \in \mathcal{V}$ et on suppose que $dE(\Omega; V)$ et $dE(\Omega; V(0))$ existent. Une question naturelle qui se pose est "est-ce-que $dE(\Omega; V) = dE(\Omega; V(0))$?"

Pour répondre à cette question, il faut munir l'ensemble \mathcal{V} d'une topologie convenable. Plus précisément, on note :

$$\mathcal{V}_K^{m,k} = C^m([- \tau, \tau]; \mathcal{D}^k(K, \mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{V}, \quad \forall m, k \in \mathbb{N}, \quad \forall K \subset \mathbb{R}^N, \quad (1.19)$$

où $\mathcal{D}^k(K, \mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions de \mathbb{R}^N dans lui-même, k fois dérivable et à support compact dans K . On introduit aussi l'espace :

$$\vec{\mathcal{V}}^{m,k} := \varinjlim \{ \mathcal{V}_K^{m,k}, \forall K \subset \mathbb{R}^N \text{ compact} \}, \quad (1.20)$$

où \varinjlim signifie la limite inductive munie de sa topologie limite inductive usuelle (voir, par exemple [50]).

On a le théorème suivant (pour la démonstration, voir [16]) :

Théorème 1.7. Soit $\Omega \in \mathcal{O}$ et $m, k \in \mathbb{N}$. Supposons que $dE(\Omega; V)$ existe pour tout $V \in \vec{\mathcal{V}}^{m,k}$ et que l'application :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{V}}^{m,k} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ V & \rightarrow dE(\Omega; V) \end{cases} \quad (1.21)$$

est continue. Alors :

$$\forall V \in \vec{\mathcal{V}}^{m,k}, \quad dE(\Omega; V) = dE(\Omega; V(0)). \quad (1.22)$$

Définition 1.8 Soit $\Omega \in \mathcal{O}$.

1. On dit que la fonctionnelle E est dérivable par rapport à la forme au sens des vitesses en Ω , si $dE(\Omega; V)$ existe pour tout $V \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et si l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ V & \rightarrow dE(\Omega; V), \end{cases} \quad (1.23)$$

est linéaire et continue dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

2. La distribution $dE(\Omega)$ définie par l'application (1.23) est appelée dérivée par rapport à la forme au sens des vitesses (ou gradient) de E en Ω .

3. On dit que $dE(\Omega)$ est d'ordre fini $k \in \mathbb{N}$, si $dE(\Omega)$ est continue pour la topologie de $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. \square

Pour $t \in [-\tau, \tau]$ on note $e(t) = E(T_V^t(\Omega))$. On a : $\dot{d}E(\Omega; V(0)) = e'(0)$, où :

$$\forall t \in [-\tau, \tau], \quad e'(t) = dE(T_V^t(\Omega); V(t)).$$

Pour $V, W \in \mathcal{V}$, ceci suggère de considérer la limite suivante pour la dérivée seconde :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(dE(T_W^t(\Omega); V(t)) - dE(\Omega; V(0)) \right). \quad (1.24)$$

Lorsque cette limite existe, on la note $d^2E(\Omega; V, W)$ et parfois on l'appelle dérivée eulérienne de second ordre de E en Ω , dans la direction (V, W) . \square

Le théorème suivant donne le lien entre la dérivée eulérienne de E en Ω selon des directions non autonomes avec celle, selon des directions autonomes (pour une démonstration voir [16]).

Théorème 1.9 Soit $\Omega \in \mathcal{O}$ et $m, k \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- (i) $\forall V \in \vec{\mathcal{V}}^{m+1, k}, \forall W \in \vec{\mathcal{V}}^{m, k}, d^2E(\Omega; V, W)$ existe.
- (ii) $\forall W \in \vec{\mathcal{V}}^{m, k}, \forall t \in [-\tau, \tau], E$ admet une dérivée par rapport à la forme au sens des vitesses en $T_W^t(\Omega)$, d'ordre k .
- (iii) $\forall V \in \vec{\mathcal{V}}^{m, k}$, l'application :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{V}}^{m, k} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ W & \rightarrow -d^2E(\Omega; V, W), \end{cases} \quad (1.25)$$

est continue.

Alors, pour $V \in \vec{\mathcal{V}}^{m+1, k}$ et $W \in \vec{\mathcal{V}}^{m, k}$ on a :

$$d^2E(\Omega; V, W) = d^2E(\Omega; V(0), W(0)) + dE(\Omega; V_t(0)), \quad (1.26)$$

où $V_t(0)$ est défini dans (1.16). \square

Définition 1.10 Soit $\Omega \in \mathcal{O}$.

(i) On dit que la fonction E est deux fois dérivable par rapport à la forme au sens des vitesses en Ω , si :

$$\forall V, W \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \quad d^2E(\Omega; V, W) \text{ existe,} \quad (1.27)$$

et l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (V, W) & \rightarrow d^2E(\Omega; V, W), \end{cases} \quad (1.28)$$

est bilinéaire est continue.

(ii) On appelle dérivée seconde par rapport à la forme au sens des vitesses (ou hessien) de E en Ω , notée $d^2E(\Omega)$, la forme bilinéaire et continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans \mathbb{R} , dont l'existence est assurée par le théorème des noyaux de Schwartz (voir [49], théorème 4.2), et qui est donnée par :

$$d^2E(\Omega; V, W) = \langle d^2E(\Omega), V \otimes W \rangle. \quad (1.29)$$

Ici, $V \otimes W = \{ V_i W_j, i, j \in \{1, \dots, N\} \}$ avec V_i et W_j les composantes de V et W .

(iii) On dit que la dérivée seconde par rapport à la forme au sens des vitesses est d'ordre fini $k \in \mathbb{N}$, si la distribution $d^2E(\Omega)$ est continue dans $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

1.3 Les relations des dérivées au sens de Fréchet avec les dérivées au sens des vitesses.

Pour tout $\xi \in \Theta$ on considère $\Omega(\theta + t\xi)$, une "perturbation" de $\Omega(\theta)$, avec $t \in [-\tau, \tau]$. On note :

$$T_V : \begin{cases} [-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^N & \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ (t, X) & \rightarrow (I_N + t\hat{\xi})(X), \end{cases} \quad (1.30)$$

où $\hat{\xi}$ est un C^k prolongement de $\xi \circ \theta^{-1}$ (voir, par exemple [1], ou [19], lemme 6.37). Il est facile de vérifier (ou bien du remarque 1.6) que T_V satisfait (1.12), donc du théorème 1.5, il existe $V \in \mathcal{V}$:

$$V(t, x) = \hat{\xi} \circ (I_N + t\hat{\xi})^{-1}(x), \quad (1.31)$$

de façon à ce que $T_V^t(\Omega(\theta)) = \Omega(\theta + t\xi)$, avec T_V^t comme dans (1.17). Noter que lorsque $\theta = I_N$, on a simplement $V(t, x) = \hat{\xi} \circ (I_N + t\hat{\xi})^{-1}(x)$. \square

La proposition suivante, donne le lien entre la dérivée de \mathbf{E} et la dérivée par rapport à la forme au sens des vitesses de E .

Proposition 1.11 Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et $\Omega = \Omega(\theta)$. Si \mathbf{E}' existe et est continue dans un voisinage de θ , alors E est dérivable par rapport à la forme au sens des vitesses en Ω et :

$$\forall \xi \in \Theta, \mathbf{E}'(\theta)(\xi) = dE(\Omega; V), \quad (1.32)$$

avec V donné par (1.31). En plus, $dE(\Omega)$ est d'ordre k et :

$$\forall \mathbb{V} \in \vec{\mathcal{V}}^{m,k}, dE(\Omega; \mathbb{V}) = \mathbf{E}'(\theta)(\mathbb{V}(0) \circ \theta) \quad (m \in \mathbb{N}). \quad (1.33)$$

Démonstration. On remarque d'abord, que la relation (1.33) implique (1.32) (il suffit de prendre $\mathbb{V} = V$, où V est donné par (1.31)).

(i) Prouvons d'abord (1.33). Soit $\mathbb{V} \in \vec{\mathcal{V}}^{m,k}$, un champ de vitesses non autonome et considérons $T_{\mathbb{V}}$ donné par (1.11) pour $V = \mathbb{V}$.

Alors, pour $X \in \Omega$ on a :

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{V}}(t, X) &= X + \int_0^t \mathbb{V}(s, T_{\mathbb{V}}(s, X)) ds \\ &= X + t\mathbb{V}(0, X) + \int_0^t (\mathbb{V}(s, T_{\mathbb{V}}(s, X)) - \mathbb{V}(0, X)) ds \\ &= \theta(z) + t\xi(z) + \xi_t(z), \end{aligned}$$

où $X = \theta(z)$ ($z \in Q$) et :

$$\xi(z) = \mathbb{V}(0) \circ \theta(z), \quad \xi_t(z) = \int_0^t (\mathbb{V}(s, T_{\mathbb{V}}(s, \theta(z))) - \mathbb{V}(0, \theta(z))) ds. \quad (1.34)$$

Or, de [6], théorème 3.4.2, la fonction $s \in [-\tau, \tau] \rightarrow \mathbb{V}(s, T_{\mathbb{V}}(s, \theta(\cdot))) \in \Theta$ est continue. Donc, pour t assez petit $\theta + t\xi + \xi_t$ est inversible (voir le lemme 1.1), ce qui donne $T_{\mathbb{V}}^t(\Omega) = \Omega(\theta + t\xi + \xi_t)$, avec $T_{\mathbb{V}}^t(\Omega)$ donné par (1.17) pour $V = \mathbb{V}$. D'où :

$$E(T_{\mathbb{V}}^t(\Omega)) = \mathbf{E}(\theta + t\xi + \xi_t). \quad (1.35)$$

De la continuité de $s \rightarrow \mathbb{V}(s, T_{\mathbb{V}}(s, \theta(\cdot)))$, il résulte que $t \in [-\tau, \tau] \rightarrow \xi_t \in \Theta$ est dérivable autour de $t = 0$ avec :

$$\frac{d\xi_t}{dt}(0) = 0, \quad (1.36)$$

Pour $E(T_{\mathbb{V}}^t(\Omega))$, comme une composition de deux fonctions dérivables, on obtient que :

$$dE(\Omega; \mathbb{V}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(T_{\mathbb{V}}^t(\Omega)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{E}(\theta + t\xi + \xi_t) = \mathbf{E}'(\theta)(\xi).$$

Cette équation avec (1.34) prouve (1.33).

(ii) Prouvons la dérivabilité par rapport à la forme au sens des vitesses de

E en Ω . Soit $V \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et prenons $\xi = V \circ \theta$. L'égalité (1.33) montre d'abord que $dE(\Omega; V)$ existe et de la linéarité et continuité de $\mathbf{E}'(\theta)$, on déduit les mêmes propriétés pour $V \rightarrow dE(\Omega; V)$, d'où la dérivabilité par rapport à la forme au sens des vitesses de E en Ω .

Du fait que $\mathbf{E}'(\theta)$ est continue dans Θ , la relation (1.33) montre à la fois que $dE(\Omega)$ est d'ordre fini k . \square

Comme une conséquence de la proposition 1.11 et du théorème 1.7 on a :

Corollaire 1.12 *Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et on note $\Omega = \Omega(\theta)$. Si \mathbf{E}' existe et est continue autour de θ , alors :*

$$\forall \mathbb{V} \in \vec{\mathcal{V}}^{m,k}, \quad dE(\Omega; \mathbb{V}) = dE(\Omega; \mathbb{V}(0)). \quad (1.37)$$

De la même façon que T_V et V dans (1.30) et (1.31), pour $\eta \in \Theta$, on note $\hat{\eta}$ le prolongement de classe C^k de $\eta \circ \theta^{-1}$ (comme $\hat{\xi}$), et on définit :

$$T_W : \begin{cases} [-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^N & \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ (t, X) & \rightarrow (I_N + t\hat{\eta})(X), \end{cases} \quad (1.38)$$

$$W(t, x) = \hat{\eta} \circ (I_N + t\hat{\eta})^{-1}(x). \quad (1.39)$$

La proposition suivante donne la relation entre la dérivée seconde \mathbf{E}'' et les dérivées par rapport à la forme au sens des vitesses de E .

Proposition 1.13 *Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et supposons que \mathbf{E}'' existe et est continue dans un voisinage de θ . Alors E est deux fois dérivable par rapport à la forme au sens des vitesses en $\Omega = \Omega(\theta)$ et on a :*

$$\begin{cases} \forall (\xi, \eta) \in (\Theta, \Theta) \text{ tel que } V \in \vec{\mathcal{V}}^{m+1,k+1}, \\ \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) = d^2E(\Omega; V, W) - dE(\Omega; V_t(0)) - dE(\Omega; DV(0) \cdot W(0)), \\ \text{avec } V, W \text{ donné par (1.31), (1.39),} \end{cases} \quad (1.40)$$

De plus, $d^2E(\Omega)$ est d'ordre $k+1$ et on a :

$$\begin{cases} \forall (\mathbb{V}, \mathbb{W}) \in (\vec{\mathcal{V}}^{m+1,k+1}, \vec{\mathcal{V}}^{m,k}), \\ d^2E(\Omega; \mathbb{V}, \mathbb{W}) = \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) + dE(\Omega; \mathbb{V}_t(0)) + dE(\Omega; D\mathbb{V}(0) \cdot \mathbb{W}(0)), \\ \text{avec } \xi = \mathbb{V}(0) \circ \theta, \quad \eta = \mathbb{W}(0) \circ \theta, \end{cases} \quad (1.41)$$

où $\mathbb{V}_t(0)$ est donné par (1.16) pour $V = \mathbb{V}$ et $DV(0)$, respectivement $D\mathbb{V}(0)$, est la matrice jacobienne de $V(0)$, respectivement de $\mathbb{V}(0)$.

Démonstration. On remarque facilement que la relation (1.41) implique (1.40) (il suffit de prendre $\mathbb{V} = V$, $\mathbb{W} = W$ avec V, W donnés respectivement par (1.31), (1.39)).

(i). Prouvons la relation (1.41). Soit \mathbb{V} et \mathbb{W} comme dans la proposition. On

note $T_{\mathbb{W}}$ la transformation donnée par (1.11) pour $V = \mathbb{W}$. Par définition, on a :

$$d^2E(\Omega; \mathbb{V}, \mathbb{W}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dE(T_{\mathbb{W}}^t(\Omega); \mathbb{V}(t)), \quad (1.42)$$

où $T_{\mathbb{W}}^t(\Omega)$ est donné par (1.17) pour $V = \mathbb{W}$. De la même façon que dans la proposition 1.11, on a :

$$T_{\mathbb{W}}^t(\Omega) = \Omega(\theta + t\eta + \eta_t), \quad (1.43)$$

où η , η_t sont comme ξ et ξ_t dans (1.34), pour $\mathbb{V} = \mathbb{W}$.

Il est clair que $t \in [-\tau, \tau] \rightarrow \eta_t \in \Theta$ est dérivable en $t = 0$ et :

$$\left. \frac{d\eta_t}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

D'autre part, en appliquant la proposition 1.11 et (1.43), on a :

$$dE(T_{\mathbb{W}}^t(\Omega); \mathbb{V}(t)) = \mathbf{E}'(\theta + t\eta + \eta_t)(\mathbb{V}(t) \circ (\theta + t\eta + \eta_t)).$$

Alors, en substituant dans (1.42), on obtient :

$$\begin{aligned} d^2E(\Omega; \mathbb{V}; \mathbb{W}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{E}'(\theta + t\eta + \eta_t)(\mathbb{V}(t) \circ (\theta + t\eta + \eta_t)) \\ &= \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) + \mathbf{E}'(\theta) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{V}(t) \circ (\theta + t\eta + \eta_t) \right) \\ &= \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) + \mathbf{E}'(\theta)(\mathbb{V}_t(0) \circ \theta) + \mathbf{E}'(\theta)(D\mathbb{V}(0) \cdot \eta) \\ &= \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) + dE(\Omega; \mathbb{V}_t(0)) + dE(\Omega; D\mathbb{V}(0) \cdot \mathbb{W}(0)), \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé la proposition 1.11. Donc, (1.41) est prouvé.

(ii) Prouvons maintenant que E est deux fois dérivable par rapport à la forme au sens des vitesses en Ω . En effet, si \mathbb{V}, \mathbb{W} sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, (1.41) montre à la fois l'existence de $d^2E(\Omega; \mathbb{V}, \mathbb{W})$ et sa linéarité par rapport à \mathbb{V} et \mathbb{W} .

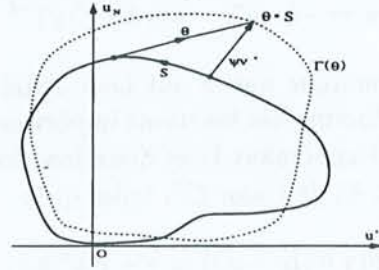
La continuité de $d^2E(\Omega; \mathbb{V}, \mathbb{W})$ pour la topologie de $\mathcal{D}^{k+1} \times \mathcal{D}^{k+1}$, découle de la continuité de $\mathbf{E}'(\theta)$ et $\mathbf{E}''(\theta)$ dans Θ et de la relation (1.41). \square

Remarque 1.14 La proposition 1.13 permet de retrouver que $d^2E(\Omega; V, W)$, en général, n'est pas symétrique par rapport à V et W . En effet, si $\mathbf{E}''(\theta)$ existe dans un voisinage ouvert de $\theta \in \Theta$, alors $\mathbf{E}''(\theta)$ est une forme bilinéaire symétrique (voir, par exemple [7], théorème 2.1). Alors, la proposition 1.13 montre que la partie non symétrique de la dérivée seconde $d^2E(\Omega; V, W)$, est donnée par $dE(\Omega; V_t(0)) + dE(\Omega; DV(0) \cdot W(0))$.

1.4 La structure des dérivées par rapport à la forme.

Dans cette sous-section on étudie la structure des dérivées par rapport à la forme. L'outil principal qu'on va utiliser, est que quitte à faire un glissement S sur ∂Q , la restriction sur ∂Q de tout $\theta \in \Theta$ "proche" de $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$ peut se présenter sous la forme $\theta^* + \psi \nu^* \circ \theta^*$, où ψ est une fonction scalaire sur ∂Q , c'est-à-dire par un déplacement "normal". Dans la suite on montrera que $\psi = \Psi(\theta)$, où Ψ est une fonction définie dans un voisinage de θ^* .

On verra que pour tout $\theta \in \Psi^{-1}(\psi)$ le domaine $\Omega(\theta)$ est invariant. Ceci assure que l'application $\mathcal{E} : \psi \rightarrow \mathbf{E} \circ \Psi^{-1}(\psi)$ est bien définie (voir (1.7) pour la définition de \mathbf{E}). Il suffit alors, de remarquer que $\mathbf{E}(\theta) = \mathcal{E} \circ \Psi(\theta)$ pour trouver la structure des dérivées de \mathbf{E} dans le théorème 1.23. \square



Dans le cas particulier $N = 2, k = 1$ et ∂Q une courbe de Jordan, on a :

Proposition 1.15 *On suppose que Q est un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 tel que ∂Q est une courbe de Jordan de classe C^1 . Soit $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors*

$$\exists \mathcal{U} \subset \Theta, \mathcal{U} \ni \theta^* \text{ ouvert}, \exists \Psi : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\partial Q), \quad G : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\partial Q; \partial Q),$$

$$\theta \circ S = \theta^* + \psi \nu^* \circ \theta^*, \text{ sur } \partial Q,$$

où $\psi = \Psi(\theta), S = G(\theta)$ inversible, et Ψ, G sont de classe C^1 .

Remarque 1.16 *Ainsi, modulo le glissement S de la courbe ∂Q sur elle-même, le bord $\Gamma(\theta)$ pour tout θ voisin de θ^* pour la norme C^1 , se présente à l'aide de déplacements normaux à $\Gamma(\theta^*)$ de $\Gamma(\theta^*)$.*

Démonstration. On remarque que par un changement de variable on peut supposer que $\theta^* = I_2$, où I_2 est l'identité dans \mathbb{R}^2 , donc $\Omega(\theta^*) = Q$.

On note $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, resp. $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, les fonctions 2π -périodiques de classe C^0 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , resp. \mathbb{R}^2 . Il existe $\gamma \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ tel que $\gamma(\mathbb{R}) = \partial Q$ et $|\gamma'| \neq 0$. Considérons la fonction :

$$f : \begin{cases} \Theta \times C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) & \rightarrow C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2), \\ (\theta, v, \mathcal{J}) & \rightarrow \theta(\gamma \circ (I_1 + \mathcal{J})) - \gamma - v \nu^* \circ \gamma, \end{cases}$$

où I_1 est l'identité dans \mathbb{R} .

La fonction f est de classe C^1 . En effet, d'abord $f(\theta, v, \mathcal{J})$ est dans $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$. Par rapport à θ et v, \mathcal{J} est linéaire continue, donc de classe C^∞ . La dérivée de f par rapport à \mathcal{J} est :

$$f'_{\mathcal{J}}(\theta, v, \mathcal{J})(z) = (D\theta(\gamma \circ (I_1 + \mathcal{J})) \cdot \gamma') z \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2), \quad \forall z \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

De plus, pour $(w, \varepsilon) \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ on a :

$$\begin{cases} f(I_2, 0, 0) = 0, \\ f'_{v, \mathcal{J}}(I_2, 0, 0)(w, \varepsilon) = \varepsilon \gamma' - w \nu^* \circ \gamma \quad (= : f'_{v, \mathcal{J}}). \end{cases}$$

Or, $f'_{v, \mathcal{J}}$ est un isomorphisme de $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dans $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ parce que pour $h \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, la solution (w, ε) de $f'_{v, \mathcal{J}} = h$ est donnée par :

$$w = -h \cdot \nu^*, \quad \varepsilon = h \cdot \gamma' |\gamma'|^{-2} \quad \text{parce que } \gamma' \cdot \nu^* \circ \theta^* = 0.$$

On remarque que ε est bien défini parce que $|\gamma'| \neq 0$. Donc, les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites. Alors, il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \Theta$ contenant I_2 et deux fonctions $\theta \in \mathcal{U} \rightarrow v \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\theta \in \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{J} \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ de classe C^1 , telles que :

$$\theta(\gamma \circ (I_1 + \mathcal{J})) = \gamma + v \nu^* \circ \gamma.$$

On définit $\psi \in C^0(\partial Q)$ et $\mathcal{S} \in C^0(\partial Q; \partial Q)$ par :

$$\psi \circ \gamma(t) := v(t), \quad \mathcal{S} \circ \gamma(t) := \gamma \circ (I_1 + \mathcal{J})(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La périodicité de γ , v et \mathcal{J} montre que ψ et \mathcal{S} sont bien définies.

On vérifie que les fonctions :

$$\Psi : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\partial Q), \quad \Psi(\theta) = \psi \quad \text{et} \quad G : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\partial Q; \partial Q), \quad G(\theta) = \mathcal{S}$$

sont de classe C^1 parce que $\theta \rightarrow v$ et $\theta \rightarrow \mathcal{J}$ sont de classe C^1 .

Finalement, du fait que G est de classe C^1 et que $G(\theta^*) = I_2$ (parce que $\theta^* \rightarrow \mathcal{J} \equiv 0$), quitte à réduire \mathcal{U} , $\mathcal{S} = G(\theta)$ est inversible, comme une perturbation petite de classe C^0 de l'identité. \square

La technique utilisée ci-dessus ne peut pas être appliquée dans le cas général où ∂Q est une variété qui ne peut pas être représentée globalement comme le graphe d'une fonction. Donc, il faut considérer des cartes de ∂Q .

Pour $l = 1, \dots, k$ on note ψ, φ, ϕ les éléments de $C^{k-l}(\partial Q)$ et on introduit le groupe (pour la composition) :

$$G_{\partial Q}^{k-l} = \{ S : \partial Q \rightarrow \partial Q; \cdot S \text{ inversible de classe } C^{k-l} \}.$$

Lemme 1.17 Avec les notations ci-dessus on a :

(i) Il existe \mathcal{U} , un voisinage ouvert de θ^* dans Θ , et deux uniques fonctions de classe C^l :

$$\begin{cases} \Psi : \mathcal{U} \rightarrow C^{k-l}(\partial Q), & \theta \rightarrow \psi = \Psi(\theta), \\ G : \mathcal{U} \rightarrow G_{\partial Q}^{k-l}, & \theta \rightarrow S = G(\theta), \end{cases}$$

telles que pour tout $\theta \in \mathcal{U}$:

$$\theta \circ S = \theta^* + \psi \nu^* \circ \theta^*, \quad \text{sur } \partial Q. \quad (1.44)$$

(ii) De plus, si $l \geq 1$, resp. $l \geq 2$, pour tout $\xi, \eta \in \Theta$ on a :

$$\begin{cases} \Psi'(\theta^*)(\xi) &= (V \cdot \nu^*) \circ \theta^*, \quad \text{resp.} \\ \Psi''(\theta^*)(\xi, \eta) &= -(V_\tau \cdot \delta \nu^* \cdot W_\tau) \circ \theta^* \\ &\quad - (\nu^* \cdot \delta V \cdot W_\tau) \circ \theta^* - (\nu^* \cdot \delta W \cdot V_\tau) \circ \theta^*, \end{cases} \quad (1.45)$$

où V_τ , resp. W_τ , est la composante tangentielle de $V = \xi \circ \theta^{*-1}$, resp. $W = \eta \circ \theta^{*-1}$ et δ est l'opérateur du gradient tangentiel sur $\Gamma(\theta^*)$.

Démonstration. Quitte à faire un changement de variable $\tau = \theta \circ \theta^{*-1}$, on suppose que $\theta^* = I_N$, où I_N est la transformation identité dans \overline{Q} .

(i) On montre d'abord l'existence des fonctions Ψ et G , et l'équation (1.44).

Du fait que $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$, on peut considérer que ∂Q est de classe C^k . Soit $x \in \partial Q$ et $(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) = (x', x_N)$ le système principal des coordonnées lié au point x , dans lequel le vecteur unitaire normal à ∂Q en x , a la forme : $\nu^*(x) = (0, \dots, 0, 1)$. Il existe une fonction $u \in C^k(B'_x(r_0); \mathbb{R})$, où $B'_x(r_0)$ est la boule de centre 0 et de rayon r_0 dans le plan tangent à x , telle qu'autour de x le bord ∂Q est le graphe de la fonction u .

On choisit r_0 assez petit tel que :

$$\begin{cases} \forall x' \in B'_x(r_0), \quad \nu_N^*(x', u(x')) - Du \cdot [\nu^*(x', u(x'))]_{N-1} \neq 0, \\ \|Du\|_{C^0(B'_x(r_0))} \leq 1/4, \end{cases} \quad (1.46)$$

où $[\nu^*]_{N-1}$ est le vecteur composé de $N - 1$ premières composantes de ν^* et ν_N^* est la $N^{\text{ème}}$ composante de ν^* . Ce choix de r_0 est toujours possible parce que $\nu^*(0) = (0, \dots, 0, 1)$ et $Du(0) = (0, \dots, 0)$.

Afin de contrôler "les glissements" sur ∂Q par des compositions de $(x', u(x'))$ avec des "glissements" sur le plan x' , on choisit $r_1 = r_0/2$.

On note $\partial Q_x = \{(x', u(x')), x' \in B'_x(r_1)\}$, I_{N-1} l'identité dans \mathbb{R}^{N-1} et on construit l'application :

$$f : \begin{cases} D(f) \subset \Theta \times C^{k-l}(\partial Q_x) \times \mathcal{S} \rightarrow H, \\ (\theta, \psi, \mathcal{J}) \rightarrow \theta(\mathcal{J}, u \circ \mathcal{J}) - I_{N-1}(\cdot, u(\cdot)) - \psi(\cdot, u(\cdot)) \nu^*(\cdot, u(\cdot)), \end{cases}$$

où $\mathcal{S} := C^{k-l}(B'_x(r_1); \mathbb{R}^{N-1})$, $H := C^{k-l}(B'_x(r_1); \mathbb{R}^N)$ et $D(f) = \Theta \times C^{k-l}(\partial Q_x) \times (\mathcal{S} \cap \{\|\mathcal{J}\|_{C^0(B'_x(r_1))} < 1/2\})$ est un voisinage de $(I_N, 0, I_{N-1})$.

Il est clair que la fonction f est bien définie dans $D(f)$. De plus, la fonction f est de classe C^l . En effet, on remarque d'abord que par rapport à θ et ψ la fonction f est même de classe C^∞ , parce que f est linéaire continue en θ et ψ .

La dérivée première de f par rapport à \mathcal{J} est :

$$f'_{\mathcal{J}}(\theta, \psi, \mathcal{J})(z) = D\theta(\mathcal{J}, u(\mathcal{J})) \cdot \begin{pmatrix} z \\ Du(\mathcal{J}) \cdot z \end{pmatrix} \in C^{k-l}(B'_x(r_1); \mathbb{R}^N).$$

Par récurrence on montre que la dérivée $l^{\text{ème}}$ de f par rapport à \mathcal{J} dépend linéairement en termes du type $D^\alpha \theta(\mathcal{J}, u(\mathcal{J}))$ et $D^\beta u(\mathcal{J})$ avec $|\alpha|, |\beta| \leq l$. Donc, cette dérivée est continue de \mathcal{S} dans $C^{k-l}(B'_x(r_1); \mathbb{R}^N)$.

De plus, pour $(\varphi, z) \in C^{k-l}(\partial Q_x) \times \mathcal{S}$, on a :

$$\begin{cases} f(I_N, 0, I_{N-1}) = 0, \\ f'_{\psi, \mathcal{J}}(I_N, 0, I_{N-1})(\varphi, z) = \begin{pmatrix} z \\ Du(\mathcal{J}) \cdot z \end{pmatrix} - \varphi(\cdot, u(\cdot)) \nu^*(\cdot, u(\cdot)) \quad (= f'_{\psi, \mathcal{J}}). \end{cases}$$

Or, $f'_{\psi, \mathcal{J}}$ est un isomorphisme de $C^{k-l}(\partial Q_x) \times \mathcal{S}$ dans H parce que pour $h \in H$, la solution (φ, z) de $f'_{\psi, \mathcal{J}} = h$ est donnée par :

$$\begin{cases} \varphi(\cdot, u(\cdot)) = -\frac{h_N - Du \cdot [h]_{N-1}}{\nu_N^*(\cdot, u(\cdot)) - Du \cdot [\nu^*(\cdot, u(\cdot))]_{N-1}}, \\ z = [h + \varphi(\cdot, u(\cdot)) \nu^*(\cdot, u(\cdot))]_{N-1}. \end{cases}$$

On remarque que φ et z sont bien définis parce que d'une part on a (1.46), et d'autre part $(\cdot, u(\cdot))$ est inversible de $B'_x(r_1)$ dans ∂Q_x .

Donc, les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x \subset \Theta$ de θ^* et deux fonctions Ψ_x , resp. \mathcal{S}_x , de \mathcal{U}_x dans $C^{k-l}(\partial Q_x)$, resp. \mathcal{S} , telles que pour $\theta \in \mathcal{U}_x$, si on pose $\psi_x = \Psi_x(\theta)$ et $\mathcal{A}_x = \mathcal{S}_x(\theta)$, on a :

$$\theta(\mathcal{A}_x, u \circ \mathcal{A}_x) = I_N(\cdot, u(\cdot)) + \psi_x(\cdot, u(\cdot)) \nu^*(\cdot, u(\cdot)), \quad \text{dans } B'_x(r_1). \quad (1.47)$$

On note $S_x : \partial Q_x \rightarrow \partial Q$ avec $S_x(x', u(x')) = (\mathcal{A}_x(x'), u \circ \mathcal{A}_x(x'))$ pour tout $x' \in B'_x(r_1)$, et $G_x : \theta \rightarrow S_x$. On obtient que ψ_x et S_x satisfont :

$$\theta \circ S_x = I_N + \psi_x \nu^*, \quad \text{sur } \partial Q_x. \quad (1.48)$$

La famille $\{\partial Q_x, x \in \partial Q\}$ est un recouvrement d'ouverts de ∂Q . Du fait que ∂Q est compact, il existe $x_i \in \partial Q$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que la famille $\{\partial Q_{x_i}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ couvre ∂Q .

Comme pour x , on a donc $B'_{x_i}(r_1)$, Ψ_{x_i} , \mathcal{S}_{x_i} , ψ_{x_i} , et S_{x_i} . Donc, pour $i = 1, \dots, n$ on a :

$$\theta \circ S_{x_i} = I_N + \psi_{x_i} \nu^*, \quad \text{sur } \partial Q_{x_i}. \quad (1.49)$$

On s'intéresse maintenant du recollement de ces constructions. Du fait que $G_{x_i} : \mathcal{U}_{x_i} \rightarrow C^{k-l}(\partial Q_{x_i}; \partial Q)$ est de classe C^l , on peut choisir $\tilde{\mathcal{U}}_{x_i} \subset \mathcal{U}_{x_i}$, un

ouvert dans Θ , tel que pour $\theta \in \tilde{\mathcal{U}}_{x_i}$ on ait $\|G_{x_i}(\theta) - I_N\|_{C^l(\partial Q_{x_i}; \partial Q)} < 1/2$. On pose $\mathcal{U} = \{\|\theta - I_N\|_{\Theta} < 1/4\} \cap_{i=1}^n \tilde{\mathcal{U}}_{x_i}$.

Soit $\partial Q_{ij} := \partial Q_{x_i} \cap \partial Q_{x_j} \neq \emptyset$, et montrons que pour $\theta \in \mathcal{U}$, $\psi_{x_i} = \psi_{x_j}$ et $S_{x_i} = S_{x_j}$ sur ∂Q_{ij} .

En effet, remarquons d'abord que pour tout i on a $\psi_{x_i} = (\theta \circ S_{x_i} - I_N) \cdot \nu^*$ sur ∂Q_{x_i} . Alors, il suffit de montrer que pour $y \in \partial Q_{ij}$ l'équation en z :

$$\theta(z) = y + [(\theta(z) - y) \cdot \nu^*(y)] \nu^*(y), \quad (1.50)$$

admet une solution unique (l'existence est assurée, $z = S_{x_i}(y)$). En effet, si on décompose $\theta = I_N + \xi$ avec $\xi \in \Theta$, l'équation précédente s'écrit:

$$z = y + [z + \xi(z) - y] \cdot \nu^*(y) \nu^*(y) - \xi(z), \quad y \in \partial Q_{ij}.$$

Si $z_1 \neq z_2$ sont deux de ses solutions, par rapport au système principal de coordonnées lié au point x_i on a:

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| &\leq 2|\xi(z_2) - \xi(z_1)| + |(z_2 - z_1) \cdot \nu^*(y)| \\ &\leq 2\|\xi\|_{\Theta} |z_2 - z_1| + \left| \begin{pmatrix} z'_2 - z'_1 \\ u(z'_2) - u(z'_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\nu^*(y)]_{N-1} \\ \nu^*(y)_N \end{pmatrix} \right| \\ &\leq 2(\|\xi\|_{\Theta} |z_2 - z_1| + \|Du\|_{C^0(B'_{x_i}(r_1))} |z'_2 - z'_1|) \\ &< 2(1/4 + 1/4) |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|, \end{aligned}$$

parce que $[\nu^*]_{N-1} = -Du/(1 + |Du|^2)^{1/2}$. Ceci prouve l'unicité des solutions de (1.50). On construit alors, les fonctions $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow C^{k-l}(\partial Q)$, $G : \mathcal{U} \rightarrow G_{\partial Q}^{k-l}$ définies par:

$$\Psi(\theta) = \Psi_{x_i}(\theta), \quad G(\theta) = G_{x_i}(\theta), \quad \text{sur } \partial Q_{x_i}.$$

L'inversibilité de $G(\theta)$ découle du fait que $G(\theta^*) = I_N$ sur ∂Q . Donc, quitte à réduire une dernière fois \mathcal{U} , pour tout θ dans \mathcal{U} , $G(\theta)$ est, pour la norme $C^{k-l}(\partial Q; \partial Q)$, une perturbation petite de I_N (parce que G est de classe C^l). Donc $G(\theta)$ est inversible.

(ii) Passons maintenant à la preuve de (1.45). On dérive (1.47) par rapport à θ dans la direction ξ . On obtient:

$$\begin{aligned} \Psi'_x(\theta)(\xi) \circ (\cdot, u(\cdot)) \nu^*(\cdot, u(\cdot)) &= D\theta \circ (\mathcal{L}_x(\theta), u \circ \mathcal{L}_x(\theta)) \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{L}'_x(\theta)(\xi) \\ Du \circ \mathcal{L}_x(\theta) \cdot \mathcal{L}'_x(\theta)(\xi) \end{pmatrix} \\ &+ \xi(\mathcal{L}_x(\theta), u \circ \mathcal{L}_x(\theta)). \end{aligned} \quad (1.51)$$

D'autre part, on a ($\theta^* = I_N$):

$$\nu^*(\cdot, u(\cdot)) = \frac{(-Du, 1)}{(1 + |Du|^2)^{1/2}}. \quad (1.52)$$

Alors, si on multiplie (1.51) par $\nu^*(\cdot, u(\cdot))$, pour $\theta = I_N$ on obtient :

$$\begin{aligned}\Psi'_x(I_N)(\xi) \circ (\cdot, u(\cdot)) &= \left[\left(\begin{array}{c} \mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) \\ Du \circ \mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) \end{array} \right) + \xi(\cdot, u(\cdot)) \right] \cdot \nu^*(\cdot, u(\cdot)) \\ &= \xi(\cdot, u(\cdot)) \cdot \nu^*(\cdot, u(\cdot)),\end{aligned}$$

ce qui prouve la première équation de (1.45).

A la fois, en utilisant (1.51) et la dernière équation, pour $\theta = I_N$ on obtient :

$$\mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) = [(\xi \cdot \nu^*)\nu^* - \xi]_{N-1} \circ (\cdot, u(\cdot)). \quad (1.53)$$

Maintenant, on dérive (1.51) en $\theta = I_N$ dans la direction η . Dans un point $(\cdot, u(\cdot))$ de ∂Q , la relation obtenue s'écrit :

$$\begin{aligned}\Psi''_x(I_N)(\xi, \eta) \nu^* &= D\eta \cdot \left(\begin{array}{c} \mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) \\ Du \cdot \mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) \end{array} \right) + D\xi \cdot \left(\begin{array}{c} \mathcal{S}'_x(I_N)(\eta) \\ Du \cdot \mathcal{S}'_x(I_N)(\eta) \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{c} \mathcal{S}''_x(I_N)(\xi, \eta) \\ Du \cdot \mathcal{S}''_x(I_N)(\xi, \eta) \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) \cdot D^2u \cdot \mathcal{S}'_x(I_N)(\eta) \end{array} \right).\end{aligned} \quad (1.54)$$

En utilisant (1.52), (1.53), on remarque que :

$$\begin{aligned}Du \cdot \mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) &= (Du \cdot [\nu^*]_{N-1})(\xi \cdot \nu^*) - Du \cdot [\xi]_{N-1} \\ &= -\left([\nu^*]_{N-1}^2(\xi \cdot \nu^*) - [\nu^*]_{N-1} \cdot [\xi]_{N-1} \right) / \nu^*_N \\ &= -\left((1 - \nu^{*2}_N)(\xi \cdot \nu^*) - (\xi \cdot \nu^* - \nu^*_N \xi_N) \right) / \nu^*_N \\ &= -\left(\xi - (\xi \cdot \nu^*)\nu^* \right)_N \circ (\cdot, u(\cdot)), \\ Du \cdot \mathcal{S}'_x(I_N)(\eta) &= -\left(\eta - (\eta \cdot \nu^*)\nu^* \right)_N \circ (\cdot, u(\cdot)),\end{aligned}$$

où dans les passages ci-dessus on a noté, pour simplifier les notations, ν^* , ξ et η au lieu de $\nu^* \circ (\cdot, u(\cdot))$, $\xi \circ (\cdot, u(\cdot))$ et $\eta \circ (\cdot, u(\cdot))$.

Alors, en multipliant (1.54) par ν^* , en utilisant l'expression de $\mathcal{S}'_x(I_N)$ et les deux relations ci-dessus, et le fait que :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_x(I_N)(\xi) \cdot D^2u \circ \mathcal{S}'_x(I_N) \cdot \mathcal{S}'_x(I_N)(\eta) \nu^*_N &= [\xi_\tau]_i \cdot \frac{D^2_{ij}u}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \cdot [\eta_\tau]_j \\ &= [\xi_\tau]_i \cdot D_i \frac{D_j u}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \cdot [\eta_\tau]_j - [\xi_\tau]_i D_i \frac{1}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} D_j u \cdot [\eta_\tau]_j \\ &= [\xi_\tau]_i \cdot D_i \frac{D_j u}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \cdot [\eta_\tau]_j - [\xi_\tau]_i D_i \frac{1}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} [\eta_\tau]_N \\ &= -\xi_\tau \cdot D\nu^* \cdot \eta_\tau = -\xi_\tau \cdot \delta\nu^* \cdot \eta_\tau,\end{aligned}$$

on obtient :

$$\Psi''_x(I_N)(\xi, \eta) = -\nu^* \cdot D\xi \cdot \eta_\tau - \nu^* \cdot D\eta \cdot \xi_\tau - \xi_\tau \cdot \delta\nu^* \cdot \eta_\tau,$$

ce qui prouve le lemme. \square

Soit $\psi \in C^{k-l}(\partial Q)$ dans $\Psi(\mathcal{U})$. Du lemme 1.17, $\Psi^{-1}(\psi)$ est un ensemble de $\theta \in \mathcal{U}$ tel que sur ∂Q , $\theta \circ S = \theta^* + \psi\nu^*$, pour un certain $S \in G_{\partial Q}^{k-l}$. Mais cette relation signifie que le bord $\Gamma(\theta)$ est invariant pour $\theta \in \Psi^{-1}(\psi)$. Du fait que les $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ "ne changent pas la topologie", la relation ci-dessus laisse espérer (on montrera dans la suite) que $\Omega(\theta)$ est invariant pour $\theta \in \Psi^{-1}(\psi)$. Ceci incite à considérer la composition $E \circ \Psi^{-1}$. Soit alors $D(\mathcal{E}) = \Psi(\mathcal{U})$ et \mathcal{E} , la fonction définie par :

$$\mathcal{E} : \begin{cases} D(\mathcal{E}) \subset C^{k-l}(\partial Q) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \psi & \rightarrow E(\theta), \theta \text{ quelconque dans } \Psi^{-1}(\psi). \end{cases} \quad (1.55)$$

Nous montrerons que la fonction \mathcal{E} ne dépend pas du choix du θ dans $\Psi^{-1}(\psi)$. Pour cela on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 1.18 Soit $A, B \subset \mathbb{R}^N$ deux ouverts bornés de classe C^k , $k \geq 1$, chacun situé localement d'un seul côté (*) de son bord. Si $A \subset B$ et $\partial A = \partial B$, alors $A = B$.

Remarque 1.19 L'hypothèse (*) est essentielle. En effet, si $A = \{r_1 < |x| < r_2\}$ et $B = \{|x| < r_1\} \cup \{r_1 < |x| < r_2\}$, on a $\partial A = \partial B$, mais $A \neq B$.

Démonstration. Soit $C = B \setminus A$. On a deux cas :

(i) $C = \emptyset$, donc $A = B$.

(ii) $C \neq \emptyset$. Dans ce cas, on a que $C = B \cap {}^c A = B \cap {}^c(A \cup \partial A) = B \cap {}^c \bar{A}$, parce que $\partial A \cap B = \emptyset$. Donc, C est un ouvert et $B = A \cup C$ avec $A \cap C = \emptyset$.

Il en découle que $\partial C \neq \emptyset$. En effet, si $\partial C = \emptyset$, alors $\bar{C} = C \cup \partial C = C$; donc C est à la fois ouvert et fermé dans \mathbb{R}^N . Par conséquent, soit $C = \emptyset$, soit $C = \mathbb{R}^N$. Du fait que $C = B \setminus A$ est borné, on obtient $C = \emptyset$ (!)

Forcément $\partial C \subset \partial A$ parce sinon, du fait que $\partial B = \bar{B} \setminus B = (\bar{A} \cup \bar{C}) \setminus (A \cup C) = \partial A \cup \partial C$ on aurait $\partial B \neq \partial A$ (!)

Par conséquent, il existe $x \in \partial A \cap \partial C$ non vide. Or, B est localement d'un seul côté de son bord (voir le lemme 1.2). Donc, pour x en particulier, $\exists r_x > 0$, $U \subset \mathbb{R}^N$ ouvert contenant zéro et $u : B(x, r_x) \rightarrow U$, avec $u \in C^k(B(x, r_x); \mathbb{R}^N)$, $u^{-1} \in C^k(U; \mathbb{R}^N)$ tels que :

$$u(B \cap B(x, r_x)) \subset \mathbb{R}_+^N, \quad u(\partial B \cap B(x, r_x)) \subset \partial \mathbb{R}_+^N.$$

Enfin, soit $B(0, r_0) \subset U$, $\tilde{U} = u^{-1}(B(0, r_0))$ et $\tilde{U}_+ = u^{-1}(\mathbb{R}_+^N \cap B(0, r_0))$. On remarque que \tilde{U} est un ouvert contenant x . Alors, du fait que $B \cap \tilde{U} = (A \cap \tilde{U}) \cup (C \cap \tilde{U})$, on a soit $\tilde{U}_+ \subset A \cap \tilde{U}$, soit $\tilde{U}_+ \subset C \cap \tilde{U}$, parce que \tilde{U}_+ est

connexe. Disons que $\tilde{U}_+ \subset A \cap \tilde{U}$. Alors, $u(C \cap \tilde{U}) \subset {}^c(\mathbb{R}_+^N \cap B(0, r_0))$ alors que $u(C \cap \tilde{U}) \subset u(B \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}_+^N \cap B(0, r_0)$.

La contradiction obtenue prouve que (ii) ne peut pas avoir lieu. Donc, il ne reste que (i), ce qui prouve le lemme. \square

Lemme 1.20 Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{O}^{-1}$ avec $\Gamma(\theta_1) = \Gamma(\theta_2)$. Alors, $\Omega(\theta_1) = \Omega(\theta_2)$.

Démonstration. On distingue trois cas :

(i) $\Omega(\theta_1) \subset \Omega(\theta_2)$. Alors, il suffit d'appliquer le lemme 1.18 avec $A = \Omega(\theta_1)$ et $B = \Omega(\theta_2)$, ce qui donne $\Omega(\theta_1) = \Omega(\theta_2)$.

(ii) $\Omega(\theta_1) \cap \Omega(\theta_2) = \phi$. Soit $B(0, r)$ une boule de rayon r assez grand telle que $\Omega(\theta_1), \Omega(\theta_2) \subset \subset B(0, r)$ et on note $A = B(0, r) \setminus \overline{\Omega(\theta_1)}$, $B = A \cup \Omega(\theta_1)$. On a $A \subset B$ et $\partial A = \partial B = \partial B(0, r) \cup \Gamma(\theta_1)$. On applique à nouveau le lemme 1.18 et on obtient $A = B$, donc $\Omega(\theta_1) = \phi$! La contradiction obtenue prouve que ce cas ne peut pas se produire.

(iii) $C = \Omega(\theta_1) \cap \Omega(\theta_2) \neq \phi$ avec $C \neq \Omega(\theta_i)$, $i = 1, 2$. Il est clair qu'on a $\partial C \subset \Gamma(\theta_i)$ et donc $\partial C \cap \Omega(\theta_i) = \phi$. Par conséquent, $\Omega(\theta_i) = C \cup C_i$, avec $C_i = \Omega(\theta_i) \setminus C$, $C \cap C_i = \phi$ et C_1, C_2 des ouverts. Comme $\Omega(\theta_i)$ est d'un seul côté de son bord, on a $\text{dist}(C, C_i) > 0$. Donc, on obtient :

$$\Gamma(\theta_i) = \partial C \cup \partial C_i, \quad \Gamma(\theta_2) = \partial C \cup \partial C_2, \quad \partial C \cap \partial C_i = \phi.$$

Comme $\Gamma(\theta_1) = \Gamma(\theta_2)$, on obtient que $\partial C_1 = \partial C_2$. Alors, on applique (ii) avec $A = C_1$ et $B = C_2$, pour conclure que ce cas ne peut pas se produire, ce qui finit la démonstration. \square

Corollaire 1.21 La fonction \mathcal{E} est univoque, i.e. pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \Psi^{-1}(\psi)$, $\mathbf{E}(\theta_1) = \mathbf{E}(\theta_2)$.

Démonstration. Soit \mathcal{U} donné par le lemme 1.17 et $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{U}$ tels que $\Psi(\theta_1) = \Psi(\theta_2)$. D'après le lemme 1.17 il existe $S_1, S_2 \in G_{\partial Q}^{k-l}$ tels que :

$$\theta_1 \circ S_1 = \theta^* + \psi\nu^*, \quad \theta_2 \circ S_2 = \theta^* + \psi\nu^*, \quad \text{sur } \partial Q.$$

Donc, sur ∂Q , $\theta_1 \circ S_1 = \theta_2 \circ S_2$, ce qui implique $\Gamma(\theta_1) = \Gamma(\theta_2)$, et du lemme 1.20 on obtient $\Omega(\theta_1) = \Omega(\theta_2)$. D'où, $\mathbf{E}(\theta_1) = \mathbf{E}(\theta_2)$. \square

On remarque que la dérivée en θ^* de Ψ n'est pas un isomorphisme de Θ dans $C^{k-l}(\partial Q)$. Donc, en général, $\Psi(\mathcal{U})$ n'est pas un ouvert de $C^{k-l}(\partial Q)$. Pourtant, dans la suite on va montrer que $\Psi(\mathcal{U})$ contient un ouvert de $C^k(\partial Q)$. Plus exactement, on a la proposition suivante qui donne le lien entre \mathbf{E} et \mathcal{E} .

Proposition 1.22 Soit $\theta^* \in \Theta$ de classe C^{k+1} . Alors, pour $\theta \in \mathcal{U}$, avec \mathcal{U} donné par le lemme 1.17, on a :

$$\mathbf{E}(\theta) = \mathcal{E} \circ \Psi(\theta). \quad (1.56)$$

Réciproquement, il existe $\mathcal{W} \subset C^k(\partial Q)$, un voisinage de zéro, tel que :

$$\forall \psi \in \mathcal{W}, \quad \mathcal{E}(\psi) = \mathbf{E}(\theta^* + \hat{\psi}\nu^*), \quad (1.57)$$

où (\cdot) est un prolongement (le relèvement) de classe C^k de (\cdot) , par exemple, donné par le lemme 6.38, [19].

De plus, si \mathbf{E} est de classe C^l dans \mathcal{U} , alors \mathcal{E} , restreinte dans \mathcal{W} , est de classe C^l de $C^k(\partial Q)$ dans \mathbb{R} , $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$.

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente. En effet, pour $\theta \in \mathcal{U}$, on note $\psi = \Psi(\theta)$. Alors, de la définition de \mathcal{E} , on a $\mathcal{E}(\psi) = \mathbf{E}(\theta)$. D'où, $\mathbf{E}(\theta) = \mathcal{E} \circ \Psi(\theta)$.

Réciproquement, pour $\psi \in C^k(\partial Q)$, soit $\theta_1 = \theta^* + \hat{\psi}\nu^*$. Remarquons que, du fait que la fonction relèvement est linéaire continue, il existe $\mathcal{W} \subset C^k(\partial Q)$, un voisinage assez petit de zéro, tel que pour $\psi \in \mathcal{W}$, θ_1 est inversible sur \bar{Q} (voir, le lemme 1.1). Si $\theta_2 \in \Theta$ est un autre élément dans $\Psi^{-1}(\psi)$, alors il existe $S_2 \in G_{\partial Q}^{k-l}$ tel que $\theta_2 \circ S_2 = \theta^* + \psi\nu^*$. Ceci implique que sur ∂Q on a $\theta_1 = \theta_2 \circ S_2$, donc $\Gamma(\theta_1) = \Gamma(\theta_2)$. Alors, du lemme 1.20 on obtient $\Omega(\theta_1) = \Omega(\theta_2)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\psi) &= \mathbf{E}(\Psi^{-1}(\psi)) = \mathbf{E}(\theta_2) = E(\Omega(\theta_2)) = E(\Omega(\theta_1)) \\ &= \mathbf{E}(\theta_1) = \mathbf{E}(\theta^* + \hat{\psi}\nu^*). \end{aligned}$$

Cette relation avec la linéarité et continuité de $\psi \in C^k(\partial Q) \rightarrow \theta^* + \hat{\psi}\nu^* \in \Theta$, implique que si \mathbf{E} est de classe C^l , \mathcal{E} est aussi de classe C^l . \square

La proposition 1.22 est très importante. En effet, de l'équation (1.56), on va obtenir la structure des dérivées par rapport à la forme, tandis que la relation (1.57) sera très pratique dans les applications, parce que l'étude de \mathbf{E} définie sur Θ , se réduit à l'étude de \mathcal{E} sur $C^k(\partial Q)$.

Le théorème suivant donne la structure des dérivées par rapport à la forme.

Théorème 1.23 Soit $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$. On a :

(i) Si θ^* est de classe C^{k+1} et \mathbf{E} est de classe C^1 autour de θ^* , alors il existe f_1 , une forme linéaire continue sur $C^k(\partial Q)$, telle que :

$$\forall \xi \in \Theta, \quad \mathbf{E}'(\theta^*)(\xi) = f_1((V \cdot \nu^*) \circ \theta^*). \quad (1.58)$$

(ii) Si θ^* est de classe C^{k+2} et \mathbf{E} est de classe C^2 autour de θ^* , alors il existe f_2 , une forme bilinéaire-symétrique-continue sur $C^k(\partial Q)$, telle que pour tout $\xi, \eta \in C^{k+1}(\bar{Q}; \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}''(\theta^*)(\xi, \eta) &= f_2((V \cdot \nu^*) \circ \theta^*, (W \cdot \nu^*) \circ \theta^*) \\ &\quad - f_1((V_\tau \cdot \delta\nu^* \cdot W_\tau) \circ \theta^* + \\ &\quad (\nu^* \cdot \delta V \cdot W_\tau) \circ \theta^* + (\nu^* \cdot \delta W \cdot V_\tau) \circ \theta^*), \end{aligned} \quad (1.59)$$

où ν^* est la normale à $\Gamma(\theta^*)$, $V = \xi \circ (\theta^*)^{-1}$, $W = \eta \circ (\theta^*)^{-1}$ et $(\cdot)_\tau$ est la composante tangentielle de (\cdot) .

Démonstration. Remarquons que de la proposition 1.22, $\mathbf{E}(\theta) = \mathcal{E} \circ \Psi(\theta)$.

(i) En utilisant le lemme 1.17 pour $k+1$ au lieu de k et $l=1$, on obtient que $\Psi : \mathcal{U} \subset C^{k+1}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N) \rightarrow C^k(\partial Q)$ est de classe C^1 . Alors, la composition $\mathbf{E}(\theta) = \mathcal{E} \circ \Psi(\theta)$ est de classe C^1 de $C^{k+1}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$ dans \mathbb{R} autour de θ^* . Ceci, grâce à la proposition 1.22, qui assure la différentiabilité de la fonction $\mathcal{E} : \mathcal{W} \subset C^k(\partial Q) \rightarrow \mathbb{R}$, et au lemme 1.17 qui assure la dérivabilité de Ψ .

En dérivant \mathbf{E} en θ^* dans la direction $\xi \in C^{k+1}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$, on a :

$$\mathbf{E}'(\theta^*)(\xi) = \mathcal{E}'(0)\left(\Psi'(\theta^*)(\xi)\right) = \mathcal{E}'(0)\left((V \cdot \nu^*) \circ \theta^*\right).$$

Du fait que $C^{k+1}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$ est dense dans Θ et que $\mathcal{E}'(0)(\cdot)$ est une forme linéaire continue dans $C^k(\partial Q)$, on obtient (1.58) et (i) avec $f_1 = \mathcal{E}'(0)$.

(ii) En utilisant le lemme 1.17 pour $k+2$, au lieu de k et $l=2$, on obtient que $\Psi : \mathcal{U} \subset C^{k+2}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N) \rightarrow C^k(\partial Q)$ est de classe C^2 , donc la composition $\mathbf{E} = \mathcal{E} \circ \Psi$ est de classe C^2 de $C^{k+2}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$ dans \mathbb{R} autour de θ^* (le même raisonnement comme dans (i) ci-dessus). Alors, en dérivant deux fois la fonction \mathbf{E} en θ^* , pour $\xi, \eta \in C^{k+2}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}''(\theta^*)(\xi, \eta) &= \mathcal{E}''(0)\left(\Psi'(\theta^*)(\xi), \Psi'(\theta^*)(\eta)\right) + \mathcal{E}'(0)\left(\Psi''(\theta^*)(\xi, \eta)\right) \\ &= \mathcal{E}''(0)\left((V \cdot \nu^*) \circ \theta^*, (W \cdot \nu^*) \circ \theta^*\right) \\ &\quad - \mathcal{E}'(0)\left((V_\tau \cdot \delta\nu^* \cdot W_\tau) \circ \theta^* + \right. \\ &\quad \left. (\nu^* \cdot \delta V \cdot W_\tau) \circ \theta^* + (\nu^* \cdot \delta W \cdot V_\tau) \circ \theta^*\right). \end{aligned}$$

Or, $C^{k+2}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$ est dense dans $C^{k+1}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{E}'(0)(\cdot)$, resp. $\mathcal{E}''(0)(\cdot, \cdot)$, est une forme linéaire, resp. bilinéaire, continue dans $C^k(\partial Q)$. Alors, la dernière égalité prouve (1.59) et (ii) avec $f_2 = \mathcal{E}''(0)$. \square

Remarque 1.24 *Le théorème 1.23 et les propositions 1.11, 1.13 permettent :*

- *d'obtenir la structure des dérivées par rapport à la forme au sens des vitesses. Pour cela, il suffit d'utiliser les relations (1.32), (1.40), (1.58) et (1.59). Il en résulte, que la dérivée première, resp. seconde, au sens des vitesses est une formes linéaire sur $C^k(\partial\Omega)$, resp. bilinéaire sur $C^{k+1}(\partial\Omega)$,*
- *et d'obtenir aussi, la structure des dérivées par rapport à la forme d'ordre supérieur à deux. Pour cela il suffit de trouver, comme dans la partie (ii) du lemme 1.17, l'expression des dérivées d'ordre supérieur à deux de la fonction Ψ , et puis de suivre le même raisonnement que dans le théorème 1.23.*

1.5 Les minima avec contrainte en optimisation de formes. La stabilité des minima. La méthode de Newton.

Dans cette section, on va discuter la minimisation avec contrainte de la fonctionnelle E . On donne des conditions nécessaires bien connues (comme celle de Kuhn-Tucker) pour un minimum local avec contrainte, ainsi que des conditions suffisantes.

L'étude de la stabilité est faite en reprenant la présentation dans [25].

Pour terminer, on présente la méthode de Newton en optimisation de formes. La proposition 1.22 est très importante pour utiliser cette méthode dans les applications numériques.

1.5.1 L'optimisation avec contrainte en optimisation de formes.

Soit $M : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (la contrainte) définie sur \mathcal{O} . En utilisant la fonction Ω de (1.2), on construit :

$$M : \begin{cases} \mathcal{O}^{-1} \subset \Theta & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \theta & \rightarrow M \circ \Omega(\theta). \end{cases} \quad (1.60)$$

On introduit la définition classique suivante :

Définition 1.25 *On dit que $\theta^* \in \Theta$ est un minimum local de E avec la contrainte $M = 0$, si $M(\theta^*) = 0$ et s'il existe un ouvert \mathcal{U} dans Θ , avec $\theta^* \in \mathcal{U}$, tel que :*

$$\forall \theta \in \mathcal{U}, \theta \neq \theta^*, \quad M(\theta) = 0, \quad E(\theta^*) \leq E(\theta). \quad (1.61)$$

L'élément θ^ est appelé minimum local strict (ou bien minimum local stable), si l'inégalité ci-dessus est stricte. \square*

La proposition suivante donne des conditions nécessaires en termes des dérivées premières et secondes pour un minimum local avec contrainte de E (voir, par exemple [9]).

Proposition 1.26 *Soit $\theta^* \in \Theta$ un minimum local de E avec la contrainte $M = 0$ et supposons que $M'(\theta^*) \neq 0$. On a :*

(i) *Si E est dérivable en θ^* , alors il existe une unique $\Lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$E'(\theta^*) + \Lambda^* M'(\theta^*) = 0. \quad (1.62)$$

(ii) *Si de plus, E et M sont de classe C^2 autour de θ^* , alors :*

$$\left(E''(\theta^*) + \Lambda^* M''(\theta^*) \right) (\xi, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \text{Ker}(M'(\theta^*)). \quad (1.63)$$

Démonstration. Bien que cette proposition soit classique, on donne une démonstration pour compléter la présentation.

(i) Du lemme 1.28 (à la fin de la sous-section), il existe $\mathcal{U} \in \Theta$, un voisinage de θ^* , tel que tout $\theta \in \mathcal{U}$ satisfaisant $\mathbf{M}(\theta) = 0$, est de la forme $\theta = \theta^* + \alpha(\xi)$, avec $\xi \in U$ (U , un voisinage ouvert de zéro dans $\text{Ker}(\mathbf{M}'(\theta^*))$), et $\alpha : U \rightarrow \Theta$ sont donnés par le lemme 1.28).

Donc, la fonction $f(\cdot) = \mathbf{E}(\theta^* + \alpha(\cdot)) : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet en zéro un minimum local. Sa dérivée est donnée par :

$$f'(\cdot)(\xi) = \mathbf{E}'(\theta^* + \alpha(\cdot))(\alpha'(\cdot)(\xi)), \quad \xi \in \text{Ker}(\mathbf{M}'(\theta^*)),$$

qui pour $(\cdot) = 0$, grâce à (1.65), donne $\mathbf{E}'(\theta^*)(\xi) = 0$.

Or, ceci implique : $\text{Ker}(\mathbf{M}'(\theta^*)) \subset \text{Ker}(\mathbf{E}'(\theta^*))$. D'où l'existence de Λ^* satisfaisant (1.62).

(ii) Si on dérive deux fois la fonction f , pour tout $\xi \in \text{Ker}(\mathbf{M}'(\theta^*))$ on a :

$$\begin{aligned} f''(\cdot)(\xi, \xi) &= (\mathbf{E}(\theta^* + \alpha(\cdot)))''(\xi, \xi) \\ &= \mathbf{E}''(\theta^* + \alpha(\cdot))(\alpha'(\cdot)(\xi), \alpha'(\cdot)(\xi)) + \mathbf{E}'(\theta^* + \alpha'(\cdot))(\alpha''(\cdot)(\xi, \xi)). \end{aligned}$$

En prenant dans l'équation ci-dessus $(\cdot) = 0$, en utilisant les égalités (1.62) et (1.66), pour $\xi \in \text{Ker}(\mathbf{M}'(\theta^*))$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(0)''(\xi, \xi) &= \mathbf{E}''(\theta^*)(\xi, \xi) + \mathbf{E}'(\theta^*)(\alpha''(0)(\xi, \xi)) \\ &= \mathbf{E}''(\theta^*)(\xi, \xi) - \Lambda^* \mathbf{M}'(\alpha''(0)(\xi, \xi)) \\ &= \mathbf{E}''(\theta^*)(\xi, \xi) + \Lambda^* \mathbf{M}''(\theta^*)(\xi, \xi). \end{aligned}$$

Comme $f(0)''$ est non-négatif (parce que f admet un minimum en zéro), la dernière égalité prouve (1.63). \square

La proposition suivante donne une condition suffisante (bien connue) pour un minimum local avec contrainte.

Proposition 1.27 Soit $\theta^* \in \Theta$ et $\Lambda^* \in \mathbb{R}$ satisfaisant (1.62). Si :

$$\exists \beta > 0, \forall \xi \in \text{Ker}(\mathbf{M}'(\theta^*)), \left(\mathbf{E}''(\theta^*) + \Lambda^* \mathbf{M}''(\theta^*) \right)(\xi, \xi) \geq \beta \|\xi\|_{\Theta}^2, \quad (1.64)$$

alors θ^* est un minimum local strict de \mathbf{E} avec la contrainte $\mathbf{M} = 0$.

Démonstration. En raisonnant comme dans la proposition 1.26, il suffit de démontrer que $f(\xi) = \mathbf{E}(\theta^* + \alpha(\xi))$ admet un minimum local strict en $\xi = 0$. Or, en tenant compte de (1.62) on a :

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(0) &= f'(0)(\xi) + f''(0)(\xi, \xi) + \epsilon(\xi) \|\xi\|_{\Theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}''(\theta^*) + \Lambda^* \mathbf{M}''(\theta^*) \right)(\xi, \xi) + \epsilon(\xi) \|\xi\|_{\Theta}^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que pour ξ assez petit, il existe une constante $\beta' > 0$ tel que $f(\xi) - f(0) \geq \beta' \|\xi\|^2$, qui prouve aussi la proposition. \square

Ci-dessous on prouve le lemme dont on a fait appel dans les propositions 1.26 et 1.27.

Lemme 1.28 Soit $M : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\theta \in \Theta$. On suppose que $M'(\theta) \neq 0$, Alors, il existe un voisinage ouvert $U \ni 0$ dans $\text{Ker}(M'(\theta))$ et $\alpha : U \rightarrow \Theta$ de classe C^1 , tels que :

$$\begin{cases} M(\theta + \alpha(\xi)) = 0, & \text{et} \\ \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0)(\xi) = \xi & \forall \xi \in U. \end{cases} \quad (1.65)$$

Si de plus, M est de classe C^2 autour de θ^* , alors la fonction α satisfait :

$$M'(\theta)(\alpha''(0)(\xi, \eta)) = -M''(\theta)(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \text{Ker}(M'(\theta)). \quad (1.66)$$

Démonstration. Comme $M'(\theta) \neq 0$, il existe $u \in \Theta$ tel que $M'(\theta)(u) \neq 0$. Soit f la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} D(f) \subset \text{Ker}(M'(\theta)) \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, t) & \rightarrow M(\theta + ut + v), \end{cases}$$

avec $D(f)$ un voisinage assez petit de $(0, 0)$. On a que $f(0, 0) = 0$ et $f'_t(0, 0) = M'(\theta)(u) \neq 0$. Du théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert U dans $\text{Ker}(M'(\theta))$ avec $0 \in U$, et $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $t(0) = 0$ et :

$$M(\theta + ut(v) + v) = 0, \quad \forall v \in U. \quad (1.67)$$

Par dérivation de (1.67), pour tout $\xi \in \text{Ker}(M'(\theta))$, on obtient :

$$M'(\theta + ut(v) + v)(ut'(v)(\xi) + \xi) = 0$$

Donc, pour $v = 0$:

$$M'(\theta)(ut'(0)(\xi) + \xi) = M'(\theta)(ut'(0)(\xi)) = 0.$$

Comme $M'(\theta)(u) \neq 0$ on obtient $t'(0)(\xi) = 0$, donc $t'(0) = 0$.

Si M est de classe C^2 , alors du théorème des fonctions implicites α est de classe C^2 et en dérivant deux fois (1.67) on obtient :

$$\begin{aligned} & M''(\theta + ut(v) + v)(ut'(v)(\xi) + \xi, ut'(v)(\eta) + \eta) + \\ & M'(\theta + ut(v) + v)(ut''(v)(\xi, \eta)) = 0, \quad \forall \xi, \eta \in \text{Ker}(M'(\theta)), \end{aligned}$$

ce qui en $v = 0$, entraîne : $M''(\theta)(\xi, \eta) + M'(\theta)(ut''(0)(\xi, \eta)) = 0$.

D'où, le lemme en prenant $\alpha(v) := ut(v) + v$.

1.5.2 La stabilité des minima avec contrainte en optimisation de formes.

Dans cette sous-section on étudie la stabilité des minima avec contrainte en optimisation de formes. On présente un résultat de stabilité montré dans [25]. Ce résultat donne un critère pratique pour vérifier la stabilité des minima avec contraintes.

En général, les minima avec contrainte sont tels que selon les directions appartenant au hyperplan $M' = 0$, la fonction $E + \Lambda^*M$ est croissante, tandis que selon les directions complémentaires cette fonction est décroissante. Donc, il est justifié d'introduire les notations suivantes :

Soit H un espace de Hilbert avec (\cdot, \cdot) son produit scalaire. Avec B on note une forme bilinéaire, continue, symétrique, et $Q : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ soit la forme quadratique associée, $Q(h) = B(h, h)$.

Définition 1.29 On dit que Q est de type $(-1, \infty)$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (h₁) $\exists h \in H, Q(h) < 0,$
 (h₂) $\forall (h_1, h_2) \in H \setminus \{0\} \times H \setminus \{0\}, B(h_1, h_2) = 0, Q(h_1) \leq 0, Q(h_2) \leq 0.$

Le théorème suivant est prouvé dans [25]. Pour compléter la présentation, on donne aussi la démonstration.

Théorème 1.30 Soit $A : H \rightarrow H'$ (H' , le dual de H) une application linéaire, continue, symétrique, inversible. On suppose que la forme Q associée à $B, B(\cdot, \cdot) := \langle A \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ est de type $(-1, \infty)$. Alors :

$$\forall h' \in h^\perp \setminus \{0\}, Q(h') > 0 \iff Q \circ A^{-1} \circ R(h) \leq 0, \quad (1.68)$$

où R est l'isomorphisme de Riesz.

Démonstration. \Leftarrow Soit $h_1 = A^{-1} \circ R(h)$ et $Q(h_1) \leq 0$. Supposons par contradiction qu'il existe $h_2 \in H$ tel que :

$$(h, h_2) = 0, \quad Q(h_2) \leq 0.$$

Or, $h = R^{-1} \circ A(h_1)$ et :

$$0 = (h, h_2) = (R^{-1} \circ A(h_1), h_2) = \langle A(h_1), h_2 \rangle_{H' \times H} = B(h_1, h_2),$$

ce qui contredit le fait que Q est de type $(-1, \infty)$.

\Rightarrow Supposons que $\forall h' \in h^\perp, Q(h') > 0$ et pourtant $Q \circ A^{-1} \circ R(h) > 0$. Donc, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $Q(h_1) > 0$. Introduisons :

$$\begin{aligned} H_2 &= \{ h_2 \in H, 0 = B(h_1, h_2) = \langle A(h_1), h_2 \rangle_{H' \times H} \\ &= (R^{-1} \circ A(h_1), h_2) = (h, h_2) \}. \end{aligned}$$

On a alors, $H_2 = h_1^\perp$. Donc $H = \{h_1\} \oplus H_2$ parce que $h_1 \notin H_2$ (du fait que $\langle \mathbf{A}(h_1), h_1 \rangle_{H' \times H} = \mathbf{Q}(h_1) > 0$). Alors :

$$\forall k \in H, \exists (\lambda, h_2) \in (\mathbb{R}, H_2), \quad k = \lambda h_1 + h_2,$$

ce qui donne aussi: $\mathbf{Q}(k) = \lambda^2 \mathbf{Q}(h_1) + \mathbf{Q}(h_2)$. Par conséquent, grâce aux hypothèses (h_1) et (h_2) , on aura :

$$\forall k \in H, \quad k = \lambda h_1 + h_2, \quad \mathbf{Q}(k) \geq \lambda^2 \mathbf{Q}(h_1) > 0, \quad \text{si } \lambda \neq 0,$$

ce qui contredit le fait de \mathbf{Q} est de type $(-1, \infty)$ et prouve le théorème. \square

Dans le cadre d'un espace de Hilbert, le théorème 1.30 donne une condition nécessaire d'un minimum local strict. Dans le cadre de l'espace Θ , nous reviendrons sur cette question, ainsi que sur les aspects pratiques liés, dans le chapitre 2, la sous-section 2.3.5.

1.6 La méthode de Newton en optimisation de formes.

Soit $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$ une solution de l'équation (1.62). Comme pour la construction de la fonction \mathcal{E} , donnée par (1.57), on introduit pour toute la suite la fonction \mathcal{M} (voir la proposition 1.22 pour la définition de \mathcal{W}) :

$$\mathcal{M}(\psi) : \begin{cases} \mathcal{W} \subset C^k(\partial Q) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \psi & \rightarrow \mathcal{M}(\psi) = \mathbf{M}(\theta^* + \hat{\psi} \hat{\nu}^*). \end{cases} \quad (1.69)$$

Le théorème 1.23 montre que si θ^* est une solution de (1.62), alors $\psi^* = 0$ et Λ^* satisfont le système suivant, équivalent au (1.62) :

$$\begin{cases} \mathcal{E}'(\psi^*) + \Lambda^* \mathcal{M}'(\psi^*) = 0, \\ \mathcal{M}(\psi^*) = 0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Dans les applications numériques, on résout le système (1.70) au lieu de (1.62). Numériquement, le gain est très important, parce qu'au lieu de résoudre un problème par rapport à θ , qui est une fonction vectorielle définie sur Q entier, on résout un autre problème en ψ , qui est une fonction scalaire définie sur ∂Q . Ce nouveau problème, modulo les transformations qui laissent $\Omega(\theta)$ invariant, est équivalent au premier,

Pour résoudre le système (1.70), on utilise la méthode de Newton.

Or, en général, θ^* est inconnue. En pratique, on construit \mathcal{E} et \mathcal{M} donnés respectivement par (1.57) et (1.69) avec θ_0 et ν_0 , la normale à $\Gamma(\theta_0)$, au lieu de θ^* et ν^* . Concernant θ_0 on suppose qu'il est assez proche de θ^* de telle façon à ce qu'il existe $\psi^* \in C^k(\partial Q)$ satisfaisant $\Omega(\theta^*) = \Omega(\theta_0 + \hat{\psi}_0 \hat{\nu}_0)$. Pour simplifier les notations, il est plus commode de prendre $\theta_0 = \mathbf{I}_N$, c'est-à-dire, prendre Q assez proche de $\Omega(\theta^*)$. C'est ce que nous allons faire dans la suite, quand il s'agit des applications numériques.

Si on note $\mathcal{F} : C^k(\partial Q) \times \mathbb{R} \rightarrow (C^k(\partial Q))' \times \mathbb{R}$, avec :

$$\mathcal{F}(\psi, \Lambda) = \left(\mathcal{E}'(\psi)(\cdot) + \Lambda \mathcal{M}'(\psi)(\cdot), \mathcal{M}(\psi) \right), \quad (1.71)$$

l'équation (1.70) est équivalente à :

$$(\psi^*, \Lambda^*) \in C^k(\partial Q) \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\psi^*, \Lambda^*) = 0. \quad (1.72)$$

L'algorithme de Newton pour résoudre (1.72), aurait la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0. \quad l = 0; (\psi_l, \Lambda_l) \in (C^k(\partial Q), \mathbb{R}) \text{ donné.} \\ 1. \quad \text{Trouver } (\phi_l, \lambda_l) \in (C^k(\partial Q), \mathbb{R}), \text{ solution de :} \\ \quad \mathcal{F}'(\psi_l, \Lambda_l)(\phi_l, \lambda_l) + \mathcal{F}(\psi_l, \Lambda_l) = 0. \\ 2. \quad (\psi_{l+1}, \Lambda_{l+1}) = (\psi_l, \Lambda_l) + (\phi_l, \lambda_l). \\ 3. \quad l = l + 1; \text{ Recommencer 1.} \end{array} \right. \quad (1.73)$$

Si $(\cdot) \in C^k(\partial Q)$, $\mathcal{F}'(\psi_l, \Lambda_l)(\phi_l, \lambda_l)$ est donné par :

$$\mathcal{F}'(\psi_l, \Lambda_l)(\phi_l, \lambda_l) = \left(\begin{array}{l} \left(\mathcal{E}''(\psi_l) + \Lambda_l \mathcal{M}''(\psi_l) \right) (\cdot, \phi_l) + \lambda_l \mathcal{M}'(\psi_l)(\cdot) \\ \mathcal{M}'(\psi_l)(\phi_l) \end{array} \right). \quad (1.74)$$

Bien qu'il soit très classique, on donne le théorème suivant qui donne des conditions suffisantes pour trouver les zéros d'une fonction, en utilisant la méthode de Newton (voir, par exemple [7], [9], [17]).

Théorème 1.31 Soit X et Y deux espaces de Banach, $U \subset X$ un ouvert et $\mathcal{F} : U \rightarrow Y$ une fonction deux fois dérivable en U . Soit $x^* \in U$ tel que $\mathcal{F}(x^*) = 0$ et supposons qu'il existe r, C_1 et C_2 tels que :

- (i) $B(x^*, r) \subset U$,
- (ii) $\|(\mathcal{F}')^{-1}(x)\| \leq C_1, \quad \forall x \in B(x^*, r)$,
- (iii) $\|\mathcal{F}''(x)\| \leq C_2, \quad \forall x \in B(x^*, r)$,

où $(\mathcal{F}')^{-1}(x) : Y \rightarrow X$ est l'application inverse de $y \in X \rightarrow \mathcal{F}'(x)(y) \in Y$.

Alors, il existe $r^* > 0$, tel que pour tout $x_0 \in B(x^*, r^*)$ la suite (x_l) donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{l+1} = x_l + y_l, \\ \mathcal{F}(x_l) + \mathcal{F}'(x_l)(y_l) = 0, \end{array} \quad l \in \{0, 1, \dots\}, \right.$$

est bien définie et converge vers x^* . De plus, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|x_{l+1} - x^*\|_X \leq C \|x_l - x^*\|_X^2. \quad (1.75)$$

Remarque 1.32 Dans [9] il est montré que, essentiellement, si au lieu de $\mathcal{F}'(x_l)$ du théorème 1.31 on prend $\mathcal{F}'_h(x_l)$, $l = 0, 1, \dots$ satisfaisant :

$$\sup_{l \geq 0} \|\mathcal{F}'(x_l) - \mathcal{F}'_h(x_l)\| \leq \frac{\beta}{\|(\mathcal{F}')^{-1}\|}, \quad \beta \in]0, 1/2[,$$

alors la convergence de la suite x_l est, en général, linéaire, i.e.

$$\|x_{l+1} - x_l\|_X \leq \beta(1 - \beta)^{-1} \|x_l - x^*\|_X.$$

1.7 L'exemple de la minimisation du périmètre à surface donnée.

Dans cette section on étudie le problème bien connu (et extrêmement simple, mais assez instructif) de minimisation du périmètre avec la contrainte de la mesure fixe.

D'abord, on va trouver les dérivées de \mathbf{E} et \mathbf{M} . On remarque qu'à cause de l'invariance du périmètre par rapport aux translations, \mathcal{F}' correspondant à ce problème, ne définit pas un isomorphisme. Par conséquence, le théorème 1.31, en général, ne peut pas être appliqué. En ajoutant à la fonctionnelle issue de ce problème de minimisation avec contrainte un terme convenable, on obtient un problème dont le minimum est celui du problème initial. La méthode de Newton associée au nouveau problème obtenu est bien posée, ainsi que celle associée au problème discret correspondant.

On fait aussi des comparaisons avec une autre méthode de type Newton, qui calcule les dérivées selon la normale du domaine obtenu à chaque itération. Cette comparaison montre que la suite donnée par la deuxième méthode, en général, a une convergence super linéaire.

Soit donc, $E(\Omega) := P(\Omega)$, le périmètre de Ω et $M(\Omega) := m(\Omega) - m_0$, où $m_0 > 0$ fixe, et $m(\Omega)$ est la mesure de Ω . On considère $\mathbf{E} := E \circ \Omega$ et $\mathbf{M} := M \circ \Omega$ et on pose le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta^* \in \Theta \text{ tel que :} \\ \mathbf{E}(\theta^*) = \min_{\text{loc}} \{ \mathbf{E}(\theta), \theta \in \Theta, \mathbf{M}(\theta) = 0 \}. \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Il est bien connu que ce problème admet des solutions θ^* tels que $\Omega(\theta^*)$ sont des boules de rayon $r^* = (m_0/\pi)^{1/2}$.

On fixe $Q = B(0, r^*)$ et $\theta^* = I_N$. Choisissons sur ∂Q une orientation anti-horaire et notons τ et ν la tangente et la normale extérieure à ∂Q de façon à ce que le couple (τ, ν) soit droit. Avec $d\gamma$ on note l'élément de longueur de ∂Q .

Pour $\theta \in \Theta$, comme pour ∂Q , on note $\tau(\theta)$, $\nu(\theta)$ et $d\gamma(\theta)$ respectivement la tangente, la normale et l'élément de longueur de $\Gamma(\theta)$.

1.7.1 Le calcul des dérivées par rapport à la forme. L'analyse de la méthode de Newton.

Le lemme suivant donne les dérivées de \mathbf{E} et \mathbf{M} .

Lemme 1.33 Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et $\xi, \eta \in \Theta$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta) &= \int_{\partial Q} |\theta'| d\gamma, & \mathbf{E}'(\theta)(\xi) &= \int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H}(\theta)(V \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \\ \mathbf{M}(\theta) &= \frac{1}{2} \int_{\partial Q} \theta \wedge \theta' d\gamma - m_0, & \mathbf{M}'(\theta)(\xi) &= \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\Gamma(\theta)} (V' \cdot \nu(\theta))(W' \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \\ \mathbf{M}''(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\Gamma(\theta)} (V \wedge W') d\gamma(\theta), \end{aligned} \quad (1.78)$$

où $|\cdot|$ est le module de \cdot , $x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1$ est le produit vectoriel ($x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$), $V = \xi \circ \theta^{-1}$, $W = \eta \circ \theta^{-1}$ et :

$$\mathcal{H}(\theta) = \tau(\theta)' \cdot \nu(\theta) = -\tau(\theta) \cdot \nu'(\theta), \quad (1.79)$$

est la courbure de $\Gamma(\theta)$.

Démonstration. Montrons d'abord les formules pour $\mathbf{E}(\theta)$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta) &= \int_{\Gamma(\theta)} d\gamma(\theta) = \int_{\partial Q} |\theta'| d\gamma, \\ \mathbf{E}'(\theta)(\xi) &= \int_{\partial Q} \frac{\theta' \cdot \xi'}{|\theta'|} d\gamma = \int_{\Gamma(\theta)} V' \cdot \tau(\theta) d\gamma(\theta) = - \int_{\Gamma(\theta)} V \cdot \tau'(\theta) d\gamma(\theta) \\ &= - \int_{\Gamma(\theta)} (\tau'(\theta) \cdot \nu(\theta))(V \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H}(\theta)(V \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \\ \mathbf{E}''(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\partial Q} \left(\frac{\xi' \cdot \eta'}{|\theta'|} - \frac{(\theta' \cdot \xi')(\theta' \cdot \eta')}{|\theta'|^3} \right) d\gamma \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} \left(V' \cdot W' - (V' \cdot \tau(\theta))(W' \cdot \tau(\theta)) \right) d\gamma(\theta) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} (V' \cdot \nu(\theta))(W' \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \end{aligned}$$

où on a intégré par parties et on a utilisé (1.79).

Pour \mathbf{M} on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\theta) + m_0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega(\theta)} (D_{x_1} x_1 + D_{x_2} x_2) dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} x \cdot \nu(\theta) d\gamma(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial Q} (\theta_1 \theta'_2 - \theta_2 \theta'_1) d\gamma = \frac{1}{2} \int_{\partial Q} \theta \wedge \theta' d\gamma, \\ \mathbf{M}'(\theta)(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{\partial Q} (\xi \wedge \theta' + \theta \wedge \xi') d\gamma = \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \\ \mathbf{M}''(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\partial Q} \xi \wedge \eta' d\gamma = \int_{\Gamma(\theta)} (V \wedge W') d\gamma(\theta). \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant donne les dérivées de \mathcal{E} et \mathcal{M} données par (1.57) et (1.69).

Lemme 1.34 Pour $\psi^* = 0$ et tout $\varphi, \phi \in C^k(\partial Q)$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(\psi^*)(\varphi) &= \int_{\partial Q} \mathcal{H}\varphi d\gamma, & \mathcal{E}''(\psi^*)(\varphi, \phi) &= \int_{\partial Q} \varphi' \phi' d\gamma, \\ \mathcal{M}'(\psi^*)(\varphi) &= \int_{\partial Q} \varphi d\gamma, & \mathcal{M}''(\psi^*)(\varphi, \phi) &= \int_{\partial Q} \mathcal{H}\varphi \phi d\gamma. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Démonstration. C'est une simple application du lemme précédent en prenant $\theta = I_N + \hat{\psi}\hat{\nu}$ et en dérivant par rapport à ψ , où $(\hat{\cdot})$ est comme dans la proposition 1.22. □

Soit \mathcal{F} l'application construite dans (1.71) avec \mathbf{E} et \mathbf{M} donnés par (1.77) pour $k = 2$, i.e. :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} C^2(\partial Q) \times \mathbb{R} \rightarrow C^0(\partial Q) \times \mathbb{R}, \\ (\psi, \Lambda) \rightarrow \left(\int_{\Gamma(\theta)} (\mathcal{H}(\theta) + \Lambda)(V \cdot \nu(\theta)), \int_{\Omega(\theta)} dx - m_0 \right), \end{cases} \quad (1.81)$$

où $\theta = I_N + \hat{\psi}\hat{\nu}$, $V = (\varphi\nu) \circ \theta^{-1}$ avec $\varphi \in C^2(\partial Q)$.

Le lemme suivant montre que le théorème 1.31 ne peut pas s'appliquer à (1.81) dans (ψ^*, Λ^*) , une racine de $\mathcal{F} = 0$.

Lemme 1.35 L'application $(\phi, \lambda) \rightarrow \mathcal{F}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda)$ n'est pas un isomorphisme. Donc, la méthode de Newton appliquée à $\mathcal{F} = 0$ est mal posée.

Démonstration. En effet, pour $\psi^* = 0$ la condition nécessaire de Kuhn-Tucker (1.72) pour \mathcal{F} donné par (1.81) :

$$\int_{\partial Q} (\mathcal{H} + \Lambda^*)(\cdot) d\gamma = 0, \quad (\cdot) \in C^2(\partial Q),$$

permet d'identifier $\Lambda^* = -\mathcal{H} = -1/r^*$. Encore du lemme précédent on a :

$$\mathcal{F}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda) = \left(- \int_{\partial Q} (\phi'' + (\Lambda^*)^2 \phi)(\cdot) d\gamma + \lambda \int_{\partial Q} (\cdot) d\gamma, \int_{\partial Q} \phi d\gamma \right).$$

Or, $\phi'' + (\Lambda^*)^2 \phi = 0$ admet des solutions non nulles dans $C^2(\partial Q)$, par exemple :

$$\phi_1(s) = \sin(\Lambda^* s), \quad \phi_2(s) = \cos(\Lambda^* s), \quad s \in [0, 2\pi r^*],$$

ce qui prouve que : $\mathcal{F}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi_1, 0) = \mathcal{F}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi_2, 0) = 0$, et qui finit la démonstration. \square

Soit $\tilde{\mathbf{E}}(\theta) = \int_{\Omega(\theta)} x^2 dx$. Il est facile à montrer que le minimum de $\tilde{\mathbf{E}}(\theta)$, avec la contrainte $\mathbf{M} = 0$, est $\theta^* = I_N$ (modulo les θ qui laissent $B(0, r^*)$ invariant). Par conséquent, le problème suivant est équivalent à (1.76) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta^* \in \Theta \text{ tel que :} \\ \mathbf{E}(\theta^*) + \mu \tilde{\mathbf{E}}(\theta^*) = \min_{\text{loc}} \{ \mathbf{E}(\theta) + \mu \tilde{\mathbf{E}}(\theta), \theta \in \Theta, \mathbf{M}(\theta) = 0 \}, \end{array} \right. \quad (1.82)$$

Comme dans le lemme 1.33 on peut montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}'(\theta)(\xi) = \int_{\Gamma(\theta)} x^2 (V \cdot \nu(\theta)) d\gamma(\theta), \\ \tilde{\mathbf{E}}''(\theta)(\xi, \eta) = \int_{\Gamma(\theta)} 2(V \cdot \nu(\theta))(W \cdot x) + x^2 (V \wedge W') d\gamma(\theta). \end{array} \right. \quad (1.83)$$

On remarque que $\theta^* = I_N$ et $\Lambda^* = -(1 + (r^*)^3)/r^*$ satisfont la condition nécessaire (1.62) associée au (1.82).

On construit $\tilde{\mathcal{F}}$ avec $\mathcal{E} + \mu \tilde{\mathcal{E}}$ au lieu de \mathcal{E} , où $\tilde{\mathcal{E}}$ est la fonction associée à $\tilde{\mathbf{E}}$. De la proposition 1.22 il découle que (ψ^*, Λ^*) avec $\psi^* = 0$ est une solution de (1.72). On a :

Proposition 1.36 *Pour $\mu \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, la méthode de Newton appliquée à $\tilde{\mathcal{F}} = 0$ autour de (ψ^*, Λ^*) est bien posée, donc la suite donnée par le théorème 1.31, avec $\tilde{\mathcal{F}}$ au lieu de \mathcal{F} , converge quadratiquement.*

Démonstration. En effet, comme dans le lemme 1.34 on peut montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{E}}'(\psi^*)(\varphi) = \int_{\partial Q} (r^*) \varphi d\gamma, \\ \tilde{\mathcal{E}}''(\psi^*)(\varphi, \phi) = \int_{\partial Q} 3r^* \varphi \phi d\gamma. \end{array} \right. \quad (1.84)$$

Alors, $(\phi, \lambda) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda)$ est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{F}}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda) = \left(\int_{\partial Q} \left[-\phi'' + \frac{(3\mu - 1)(r^*)^3 - 1}{(r^*)^2} \phi + \lambda \right] (\cdot) d\gamma, \int_{\partial Q} \phi d\gamma \right).$$

Vue dans $H^1(\partial Q)$, pour μ tels que $(3\mu-1)(r^*)^3-1 > 0$, la première composante de $\tilde{\mathcal{F}}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda)$ est une forme bilinéaire continue, elliptique. De ce fait, et de l'inclusion continue $H^1(\partial Q) \subset C^0(\partial Q)$ (voir par exemple, [1], [5]), il n'est pas difficile de montrer que l'application :

$$(\phi, \lambda) \in C^2(\partial Q) \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda) \in C^0(\partial Q) \times \mathbb{R},$$

définit un isomorphisme d'inverse borné. Or, d'autre part l'application :

$$\tilde{\mathcal{F}}' : C^2(\partial Q) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(C^2(\partial Q) \times \mathbb{R}; C^0(\partial Q) \times \mathbb{R}) =: \mathcal{L}(X; Y),$$

est continue autour de (ψ^*, Λ^*) , où avec $\mathcal{L}(X; Y)$ on a noté les formes linéaires continues de X dans Y . Par continuité, (voir, par exemple [19], théorème 5.2) ceci implique que dans un voisinage de (ψ^*, Λ^*) dans X , $\tilde{\mathcal{F}}'$ définit un isomorphisme d'inverse uniformément borné dans ce voisinage. Donc, la condition (ii) dans le théorème 1.31 est satisfaite.

Comme les fonctions \mathbf{E} , $\tilde{\mathbf{E}}$ et \mathbf{M} sont C^∞ par rapport à θ , la condition (iii) du théorème 1.31 est aussi satisfaite. Quant à (i), elle est aussi vraie pour r suffisamment petit. Donc, la fonction $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfait, autour de (ψ^*, Λ^*) , les conditions du théorème 1.31, ce qui prouve la proposition.

1.7.2 La discrétisation. La convergence du problème discret.

Dans cette sous-section on considère une discrétisation de la solution du problème $\tilde{\mathcal{F}}(\psi^*, \Lambda^*) = 0$. Soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation, Q_1, \dots, Q_n quelques points sur ∂Q , $n \in \mathbb{N}$, et $\partial Q_h = \bigcup_{i=1}^n [Q_i, Q_{i+1}]$, $Q_{n+1} = Q_1$. On note $Z_i = \nu(Q_i)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $x_i(u) = Q_i + u_i Z_i$ et $\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^n [x_{i+1}(u), x_i(u)]$. On considère h assez petit de façon à ce que Γ_h n'ait pas des points doubles. Dans ce cas, on note Ω_h le domaine (l'intérieur) défini par Γ_h et on construit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{E}_h, \tilde{\mathcal{E}}_h, \mathcal{M}_h : & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{E}_h : & u \rightarrow \mathcal{E}_h(u) = \sum_{i=1}^n |x_{i+1}(u) - x_i(u)|, \\ \tilde{\mathcal{E}}_h(u) : & u \rightarrow \int_{\Omega_h} x^2 dx, \\ \mathcal{M}_h : & u \rightarrow \mathcal{M}_h(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i(u) \wedge x_{i+1}(u) - m_0. \end{array} \right.$$

On remarque que $\mathcal{E}_h(u)$ est le périmètre de Γ_h et $\mathcal{M}_h(u) = m(\Omega_h) - m_0$.

Le lemme suivant donne les dérivées premières et secondes des fonctions

construites ci-dessus :

Lemme 1.37 Pour $i = 1, \dots, n$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_h}{\partial u_i} &= \frac{(Z_i, x_i - x_{i-1})}{|x_i - x_{i-1}|} - \frac{(Z_i, x_{i+1} - x_i)}{|x_{i+1} - x_i|}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_h}{\partial u_{i-1} \partial u_i} &= \frac{(Z_i, x_i - x_{i-1})(Z_{i-1}, x_i - x_{i-1})}{|x_i - x_{i-1}|^3} - \frac{(Z_i, Z_{i-1})}{|x_i - x_{i-1}|}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_h}{\partial u_i \partial u_i} &= \sum_{j=i}^{i+1} \left[\frac{1}{|x_j - x_{j-1}|} - \frac{(Z_i, x_j - x_{j-1})^2}{|x_j - x_{j-1}|^3} \right], \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_h}{\partial u_i \partial u_{i+1}} &= \frac{(Z_i, x_{i+1} - x_i)(Z_{i+1}, x_{i+1} - x_i)}{|x_{i+1} - x_i|^3} - \frac{(Z_i, Z_{i+1})}{|x_{i+1} - x_i|}, \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_h}{\partial u_i} &= \left[Z_i \wedge (x_i - x_j) \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{(x_i, x_j)}{6} + \frac{x_j^2}{12} \right) \right]_{j=i+1}^{j=i-1}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_h}{\partial u_{i-1} \partial u_i} &= \frac{1}{6} Z_i \wedge (x_i - x_{i-1})(Z_{i-1}, x_i + x_{i-1}) \\ &\quad - Z_i \wedge Z_{i-1} \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{(x_i, x_{i-1})}{6} + \frac{x_{i-1}^2}{12} \right), \\ \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_h}{\partial u_i \partial u_i} &= \left[Z_i \wedge (x_i - x_j) \left(\frac{(Z_i, x_i)}{2} + \frac{(Z_i, x_j)}{6} \right) \right]_{j=i+1}^{j=i-1}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_h}{\partial u_i \partial u_{i+1}} &= -\frac{1}{6} Z_i \wedge (x_i - x_{i+1})(Z_{i+1}, x_i + x_{i+1}) \\ &\quad + Z_i \wedge Z_{i+1} \left(\frac{x_i^2}{4} + \frac{(x_i, x_{i+1})}{6} + \frac{x_{i+1}^2}{12} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{M}_h}{\partial u_i} &= \frac{1}{2} (x_{i-1} \wedge Z_i + Z_i \wedge x_{i+1}), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{M}_h}{\partial u_{i-1} \partial u_i} &= \frac{1}{2} Z_{i-1} \wedge Z_i, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{M}_h}{\partial u_i \partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{M}_h}{\partial u_i \partial u_{i+1}} = \frac{1}{2} Z_i \wedge Z_{i+1}. \end{aligned}$$

Démonstration. On prouve le lemme soit par un calcul direct, soit en utilisant les formules de dérivation pour le cas continu (le lemme 1.33 et la relation (1.83) ont bien un sens, même pour V et W linéaires par morceaux, puisque que V' , W' , ν et τ interviennent). \square

Proposition 1.38 Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $(3\mu - 1)(r^*)^2 - 1 > 0$ et $u_h^* \in \mathbb{R}^n$ avec $u_h^* = (0, \dots, 0)$, $\Lambda_h^* \in \mathbb{R}$ une solution de :

$$\tilde{\mathcal{F}}_h(u_h^*, \Lambda_h^*) : = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_h(u_h^*) + \mu \tilde{\mathcal{E}}'_h(u_h^*) + \Lambda_h^* \mathcal{M}'_h(u_h^*), \\ \mathcal{M}_h(u_h^*) \end{pmatrix} = 0. \quad (1.85)$$

Alors, pour h suffisamment petit, la méthode de Newton appliquée à l'équation ci-dessus est bien définie pour tout $u_{0h}, \Lambda_{0h} \in U_h$, où U_h est un voisinage ouvert assez petit de (u_h^*, Λ_h^*) .

Démonstration. Comme on est en dimension finie, quitte à identifier le voisinage U_h , les conditions du théorème 1.31 se réduisent à l'inversibilité de la matrice :

$$\tilde{\mathcal{F}}'_h(u_h^*, \Lambda_h^*) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}''_h(u_h^*) + \mu \tilde{\mathcal{E}}''_h(u_h^*) + \Lambda_h^* \mathcal{M}''_h(u_h^*), & \mathcal{M}'_h(u_h^*) \\ \mathcal{M}'_h(u_h^*), & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, cette matrice approche l'application $(\phi, \lambda) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}'(\psi^*, \Lambda^*)(\phi, \lambda)$, qui pour sa part est, vue de $H^1(\partial Q) \times \mathbb{R}$ dans $H^{-1}(\partial Q) \times \mathbb{R}$, continue inversible, d'inverse continue. Alors, pour h assez petit, (voir, par exemple [2], théorème 12) il découle que la matrice ci-dessus est aussi inversible, ce qui finit la preuve.

1.7.3 L'interprétation des résultats numériques.

Dans cette sous-section, on va présenter trois exemples d'utilisation de l'algorithme (1.73) pour résoudre (1.85). Pour mettre en évidence les performances de cet algorithme, nous avons résolu (numériquement) le problème (1.85) en utilisant un autre algorithme de type Newton, présenté dans [22]. Cet algorithme dérive d'une méthode de résolution de l'équation de Kuhn-Tucker qui calcule les dérivées par rapport à la forme selon les directions normales au bord qu'on obtient à chaque itération. On appelle cette méthode, la méthode (de Newton) à déplacement selon la normale.

Les simulations numériques avec les deux méthodes sont faites avec les mêmes données initiales.

Dans l'exemple 1, on présente seulement les résultats obtenus avec la méthode de Newton, parce que la méthode à déplacement selon la normale ne converge pas (liée à une approximation plus "grossière" de la dérivée seconde, voir 3, remarque 1.39).

Dans les deux autres exemples, on a pris des données initiales qui sont plus proche de la solution. Par conséquent, les deux méthodes convergent. Dans les tableaux correspondant à ces deux exemples, la partie à gauche contient les résultats obtenus avec la méthode de Newton, et la partie à droite les résultats obtenus avec la méthode à déplacement selon la normale.

Quant aux quantités qu'on présente, l indique le nombre de l'itération, $|\tilde{\mathcal{F}}_h|_2$ est la norme $|\cdot|_2$ de la fonction (1.85) dont on cherche les zéros, tandis que $|u_{l,h} - u_h^*|_2$ présente l'erreur (aussi pour la norme $|\cdot|_2$) de la solution. Ici, u_h^* est la solution obtenue après un grand nombre d'itérations.

Exemple 1. Dans la figure FIG. 1.1. on présente la courbe initiale, et la courbe finale obtenues en utilisant la méthode de Newton que nous proposons. Dans le tableau TAB. 1.1. on présente l'évaluation de la norme euclidienne de $\tilde{\mathcal{F}}_h$ et

de $u_{l,h} - u_h^*$.

l	$ \tilde{\mathcal{F}}_h _2$	$ u_{l,h} - u_h^* _2$
0	0.5956E+01	0.1797E+00
1	0.1375E+01	0.4458E-01
2	0.8922E+00	0.1348E-01
3	0.4333E+00	0.4947E-02
4	0.6206E-01	0.7236E-03
5	0.2714E-03	0.6437E-05
6	0.8795E-08	0.1451E-09
7	0.2196E-14	0.2483E-15

TAB. 1.1.

Les résultats de la figure FIG. 1.1.

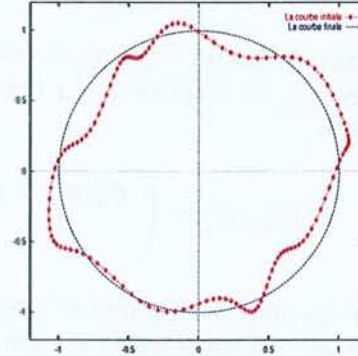


FIG. 1.1.
La courbe initiale et
la courbe finale.

Nous avons effectué aussi des simulations numériques avec la méthode à déplacement selon la normale. Mais, pour la courbe initiale dans la FIG. 1.1 cette méthode ne converge pas. Pour cette raison, dans les deux exemples qui suivent nous prenons une courbe initiale qui est plus "proche" de la solution.

Exemple 2. Pour cet exemple, la courbe initiale et la courbe finale (qui sont les mêmes pour les deux méthodes) sont présentées dans la FIG. 1.2.

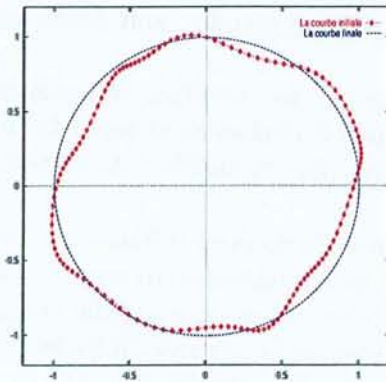


FIG. 1.2.

La courbe initiale et
la courbe finale.

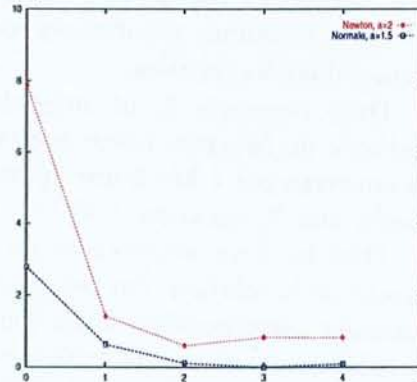


FIG. 1.3.

L'évaluation de $C = \frac{|u_{l+1,h} - u_h^*|_2}{|u_{h,l} - u_h^*|_2^\alpha}$.
newton : $\alpha = 2$, normale : $\alpha = 1.5$.

Dans la FIG. 1.3. on présente l'évaluation de la constante C avec $\alpha = 2$ (resp. $\alpha = 1.5$) pour la méthode de Newton (resp. pour la méthode à déplacement selon la normale), tandis que dans le tableau TAB. 1.2. à gauche (resp. à droite) on présente les résultats obtenus avec la méthode de Newton (resp. à déplacement selon la normale). Les valeurs de α sont choisies de façon que

la constante C ait des variations minimales.

l	$ \tilde{\mathcal{F}}_h _2$	$ u_{l,h} - u_h^* _2$	l	$ \tilde{\mathcal{F}}_h _2$	$ u_{l,h} - u_h^* _2$
0	0.5427E+01	0.1265E+00	0	0.5550E+01	0.1265E+00
1	0.2215E+00	0.2313E-01	1	0.3258E+00	0.2930E-01
2	0.2887E-02	0.3370E-03	2	0.6010E-02	0.6750E-03
3	0.6339E-06	0.9716E-07	3	0.2803E-05	0.2963E-06
4	0.4815E-13	0.8016E-14	4	0.1431E-09	0.1723E-10
			5	0.2426E-13	0.1774E-14

TAB 1.2. Les résultats de FIG. 1.2.
avec la méthode de Newton, et à déplac. selon la normale.

Exemple 3. La courbe initiale et la courbe finale de cet exemple sont celle de la figure FIG. 1.4.. Comme dans l'exemple ci-dessus, dans le tableau TAB. 1.3. à gauche (resp. à droite) on présente les résultats obtenus avec la méthode de Newton (resp. à déplacement selon la normale).

l	$ \tilde{\mathcal{F}}_h _2$	$ u_{l,h} - u_h^* _2$	l	$ \tilde{\mathcal{F}}_h _2$	$ u_{l,h} - u_h^* _2$
0	0.5450E+01	0.1235E+00	0	0.5616E+01	0.1237E+00
1	0.2173E+00	0.1736E-01	1	0.3992E+00	0.3080E-01
2	0.1700E-02	0.2023E-03	2	0.1425E-01	0.9718E-03
3	0.2077E-06	0.3975E-07	3	0.1113E-04	0.5892E-06
4	0.2262E-13	0.1794E-14	4	0.3499E-09	0.1821E-10
			5	0.3345E-13	0.3813E-14

TAB 1.3. Les résultats de FIG. 1.4.
avec la méthode de Newton, et à déplac. selon la normale.

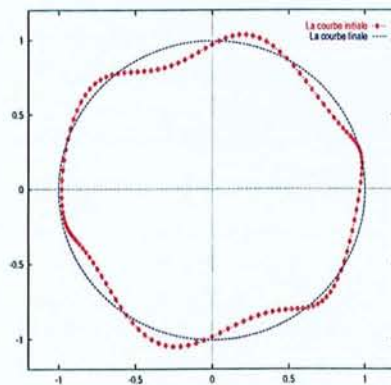


FIG. 1.4.

La courbe initiale et
la courbe finale.

Dans ces exemples on voit que pour la méthode de Newton, la convergence est quadratique, alors que pour la méthode à déplacement selon la normale, la convergence est super linéaire.

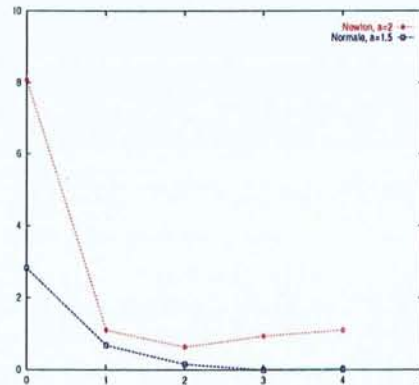


FIG. 1.5.

L'évaluation de $C = \frac{|u_{l+1,h} - u_h^*|_2}{|u_{h,l} - u_h^*|_2^\alpha}$.
newton : $\alpha = 2$, normales : $\alpha = 1.5$.

Remarque 1.39 *Les résultats obtenus sont assez significatifs.*

1. *En effet, l'exemple 1 montre qu'il se trouve des données initiales telles que la méthode de Newton converge, alors que la méthode à déplacement selon la normale ne converge pas. Certes, pour les problèmes non linéaires même une bonne méthode ne converge que si la donnée initiale est bien choisie (ce qui, en général, signifie "assez près" de la solution). Dans la pratique, la donnée initiale "assez près" de la solution est obtenue à partir d'une donnée, a priori quelconque, en utilisant des algorithmes type descente, à convergence, en général, lente. D'où, un intérêt de la méthode de Newton par rapport à la méthode à déplacement selon la normale.*
2. *Quand les données initiales sont telles que les deux méthodes convergent, comme dans les exemples 2 et 3, avec la méthode de Newton on obtient une convergence quadratique et avec la méthode à déplacement selon la normale on obtient une convergence super linéaire.*
3. *Dans le problème du périmètre, la dérivée seconde discrétisée \mathcal{E}_h'' n'est pas simplement une approximation de la dérivée seconde continue \mathcal{E}'' . Elle est exactement la dérivée seconde de la fonction énergie discrétisée \mathcal{E}_h . C'est ce fait qui explique la convergence rapide des deux méthodes utilisées, et en particulier la convergence quadratique de la méthode de Newton.*
4. *Nous pensons que l'écart de vitesse de convergence entre ces deux méthodes est dû, aussi, au fait qu'avec la méthode de Newton on se place dans un espace fixe, défini par la normale au bord d'un domaine fixe, alors qu'avec la méthode à déplacement selon la normale, l'espace est lié à la normale au bord du domaine de l'itération courante.*

Ceci montre que notre approche d'optimisation de formes dans le cadre d'un espace de Banach, conduit à une "vraie" méthode de Newton.

Chapitre 2

Un problème d'optimisation de formes en dimension deux.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux minima locaux avec la contrainte de la mesure fixe, d'un problème modèle en optimisation de formes. L'énergie associée à ce problème dépend de la solution d'un problème de Poisson à l'extérieur et du périmètre du domaine. C'est le modèle du formage électromagnétique extérieur en dimension deux, quand on suppose que la fréquence des courants électriques est assez grande. Pour une vue physique complète du problème, voir par exemple [4].

Du point de vue théorique et numérique ce problème a été étudié par de nombreux auteurs. Nous remarquons que le problème de l'existence d'un minimum local pour ce problème reste encore ouvert.

Dans [27], on trouve des conditions nécessaires d'un minimum local et dans [28], en l'absence du périmètre, on a des résultats de non existence.

L'existence du problème inverse est résolue dans [26], où en utilisant des résultats de l'analyse complexe il est prouvé aussi que si la solution est une courbe de Jordan de classe C^2 , elle est analytique.

On trouve des études de stabilité dans [18] et [25], tandis que des études numériques sont faites, entre autres, dans [4], [14], [40] et [42].

Dans la suite de ce chapitre, après la position du problème on étudie la dérivabilité par rapport à la forme de la fonctionnelle énergie et on établit ses dérivées premières et secondes par rapport à la forme (section 2.2). La dérivabilité par rapport à la forme de cette fonctionnelle demande la dérivabilité par rapport à la forme de la solution d'un problème de Poisson à l'extérieur d'un compact. La difficulté de ce problème est dans la définition d'un "bon espace" où on pose ce problème de Poisson. En utilisant la transformation de Kelvin on a identifié ce "bon espace" avec un espace de Sobolev sur un ouvert borné, où on utilise des résultats classiques de dérivation par rapport à la forme, voir [36], [37], [51] etc..

Dans la section 2.3 on étudie le problème discret. Après une discrétisation

classique linéaire par morceaux, on présente l'approximation du gradient au bord de la solution du problème de Poisson à l'extérieur (la sous-section 2.3.2). Une étude de la méthode numérique est présentée dans la sous-section 2.3.3. On fait une analyse de la complexité et des résultats numériques. Pour mesurer l'efficacité de l'algorithme, des comparaisons sont faites avec les résultats obtenus dans [42], en utilisant la méthode de Quasi-Newton.

A la fin, dans la sous-section 2.3.5, on donne une étude numérique de la stabilité. Les résultats obtenus confirment l'analyse théorique de la stabilité, présentée dans [25].

2.1 La position du problème.

Dans toute la suite de ce chapitre on considère $N = 2$ (au cas contraire N sera précisé explicitement), $k, m \in \mathbb{N}$ deux entiers avec $k \geq m \geq 2$ et $m_0 > 0$. Avec \mathcal{O} , on note un ouvert de classe C^∞ localement d'un seul côté de son bord et \mathcal{O} , la famille des ouverts donnée par (1.4). Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}$, on note ${}^e\Omega$ l'ouvert à l'extérieur de Ω , i.e. ${}^e\Omega = {}^c(\overline{\Omega})$, Γ son bord, ν le vecteur unitaire normal à Γ et orienté vers ${}^e\Omega$, et $m(\Omega)$ la mesure de Lebesgue de Ω .

Avec $H^m(\cdot)$ on note $W^{m,2}(\cdot)$, où $W^{m,2}(\cdot)$ est l'espace classique de Sobolev dans (\cdot) , voir, par exemple [1], [5].

Soit $j \in H^{m-2}(\mathbb{R}^N)$ à support compact et E , la fonctionnelle :

$$E : \begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega & \rightarrow -\frac{1}{2} \int_{{}^e\Omega} |Du_\Omega|^2 dx + \sigma P(\Omega), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\sigma > 0$, $P(\Omega)$ est le périmètre de Ω et u_Ω est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = j, & \text{dans } {}^e\Omega, \\ u_\Omega = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_\Omega = O(1), & \text{à l'infini.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Noter qu'ici il s'agit d'un problème de Dirichlet extérieur, posé dans ${}^e\Omega$.

Dans [28] (le théorème 3.1) il est montré :

Proposition 2.1 Soit $\mu(\sigma)$ donné par :

$$\mu(\sigma) = \min \{ E(\Omega), \Omega \in \mathcal{O} \}.$$

On a :

(i) Si $\int_{\mathbb{R}^N} j(x) dx = 0$, alors $\mu(\sigma) < E(\Omega)$, $\forall \Omega \in \mathcal{O}$.

(ii) Si $\int_{\mathbb{R}^N} j(x) dx \neq 0$, alors $\mu(\sigma) = -\infty$. □

Cette proposition montre que le problème de la recherche d'un minimum global de E est mal posé; il s'agit donc de s'intéresser aux minima locaux de E .

Dans toute la suite nous allons reprendre les notations et les définitions introduites dans la section 1.1. Donc, en particulier Θ est donné par (1.1) et Ω, Γ sont donnés par (1.2), (1.3).

Avec E et M , on note les fonctions :

$$E = E \circ \Omega \quad : \quad \mathcal{O}^{-1} \subset \Theta \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \rightarrow E \circ \Omega(\theta), \quad (2.3)$$

$$M = m \circ \Omega - m_0 : \mathcal{O}^{-1} \subset \Theta \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \rightarrow m \circ \Omega(\theta) - m_0. \quad (2.4)$$

Le problème qu'on va étudier est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \theta^* \in \Theta, M(\theta^*) = 0, \exists \mathcal{U} \subset \Theta, \text{ ouvert, } \theta^* \in \mathcal{U} : \\ \forall \theta \in \mathcal{U}, \text{ avec } M(\theta) = 0, E(\theta^*) \leq E(\theta). \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 La dérivabilité par rapport à la forme.

Le résultat principal de cette section sera la dérivabilité par rapport à la forme de u_Ω donné par (2.2), et de E et M donnés par (2.3), (2.4).

La fonction u_Ω est définie à l'extérieur d'un compact et la difficulté pour obtenir sa dérivabilité par rapport à la forme, reste dans la définition d'une *espace convenable où vit* u_Ω . On va construire cet espace en utilisant la transformation de Kelvin.

Soit $\Omega \in \mathcal{O}$ et $x_0 \in \Omega, r_0 > 0$ tels que $B(x_0, r_0) \subset \Omega$. Donc, Ω est d'intérieur non vide, ce qui est fondamental dans la suite.

Pour $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$, on note $I(x_0, r_0)$ la transformation de Kelvin :

$$I(x_0, r_0) : \begin{cases} \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\} & \rightarrow \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}, \quad N \in \mathbb{N}, N \geq 2, \\ x & \rightarrow x_0 + \frac{r_0^2}{|x - x_0|^2} (x - x_0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Rappelons (voir, par exemple [15]) que pour $N = 2$, $I(x_0, r_0)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$, parce que pour $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$:

$$\Delta I(x_0, r_0)(x) = \frac{2(N-2)r_0}{|x - x_0|^4} (x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}. \quad (2.7)$$

La matrice dérivée de $I(x_0, r_0)$ est donnée par :

$$DI(x_0, r_0)(x) = \frac{r_0^2}{|x - x_0|^2} O(x - x_0), \quad O(x) := \left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2} \right), \quad (2.8)$$

avec $O(x)$ une matrice orthogonale.

Soit $\omega = I(x_0, r_0)({}^e\Omega) \cup \{x_0\}$, donc $\omega \subset B(x_0, r_0)$ est un ouvert borné. Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et $m \geq 1$ on construit l'espace suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}^m({}^e\Omega) = \{ u : {}^e\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \exists \tilde{u} \in H^m(\omega), \\ u(x) = \frac{r_0^{N-2}}{|x-x_0|^{N-2}} \tilde{u}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \circ I(x_0, r_0)(x), \\ \|u\|_{\mathbb{H}^m({}^e\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{H^m(\omega)}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Le lemme suivant montre qu'en général $\mathbb{H}^m({}^e\Omega) \not\subset H^m({}^e\Omega)$. Noter que dans le lemme qui suit, pour $N = 2, 3$, il suffit de prendre $m \geq 2$.

Lemme 2.2 *Considérons $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Soit $u \in \mathbb{H}^m({}^e\Omega)$. Considérons $B_1 = B(x_0, r_1)$ tel que $\Omega \subset B_1$ et $B_2 = I(x_0, r_0)(B_1) = B(x_0, r_0^2/r_1)$. Si $m > N/2$, alors on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2({}^e\Omega \cap B_1)} &\leq C(r_0, r_1) \|u\|_{L^2(\omega \cap B_2)} \\ \|D^\alpha u\|_{L^2({}^e\Omega)} &\leq C(r_0, N) \|u\|_{\mathbb{H}^m({}^e\Omega)}, \quad \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N, \quad 1 \leq |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord, que pour m et N comme dans le lemme on a $H^m(\omega) \subset L^\infty(\omega)$, avec l'injection continue.

Pour $x \in {}^e\Omega$, soit $\tilde{x} \in \omega$ tel que $x = I(x_0, r_0)(\tilde{x})$. On remarque qu'on a $u(x) = r_0^{2-N} |\tilde{x} - x_0|^{N-2} \tilde{u}(\tilde{x})$. Alors :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2({}^e\Omega \cap B_1)}^2 &= \int_{\omega \cap B_2} \frac{|\tilde{x} - x_0|^{2(N-2)}}{r_0^{2(N-2)}} |\tilde{u}(\tilde{x})|^2 |DI(x_0, r_0)(\tilde{x})| d\tilde{x} \\ &= \int_{\omega \cap B_2} \frac{|\tilde{x} - x_0|^{2(N-2)}}{r_0^{2(N-2)}} \frac{r_0^{2N}}{|\tilde{x} - x_0|^{2N}} |\tilde{u}(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} \\ &= \int_{\omega \cap B_2} \frac{r_0^4}{|\tilde{x} - x_0|^4} |\tilde{u}(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} \leq \frac{r_1^4}{r_0^4} \|\tilde{u}\|_{L^2(\omega \cap B_2)}, \\ \|Du\|_{L^2({}^e\Omega)}^2 &= \int_{\omega} \left| DI(x_0, r_0)(x) \cdot D \left(\frac{|\tilde{x} - x_0|^{N-2}}{r_0^{N-2}} \tilde{u}(\tilde{x}) \right) \right|^2 |DI(x_0, r_0)(\tilde{x})| d\tilde{x} \\ &= \int_{\omega} \frac{1}{r_0^{2(N-2)}} \frac{r_0^4}{|x - x_0|^4} \frac{r_0^{2N}}{|\tilde{x} - x_0|^{2N}} |D(|\tilde{x} - x_0|^{N-2} \tilde{u}(\tilde{x}))|^2 d\tilde{x} \\ &= \int_{\omega} \frac{1}{|\tilde{x} - x_0|^{2(N-2)}} \left((N-2) |\tilde{x} - x_0|^{N-4} (\tilde{x} - x_0) \tilde{u}(\tilde{x}) + \right. \\ &\quad \left. \dots \dots \dots |\tilde{x} - x_0|^{N-2} D\tilde{u}(\tilde{x}) \right)^2 d\tilde{x} \\ &= \int_{\omega} \left[(N-2)^2 |\tilde{x} - x_0|^{2(N-3)} |\tilde{u}(\tilde{x})|^2 + \right. \\ &\quad \left. |\tilde{x} - x_0|^{2(N-2)} |D\tilde{u}(\tilde{x})|^2 + \right. \\ &\quad \left. 2(N-2) |\tilde{x} - x_0|^{2(N-3)} \tilde{u}(\tilde{x}) (\tilde{x} - x_0) \cdot D\tilde{u}(\tilde{x}) \right] \frac{d\tilde{x}}{|\tilde{x} - x_0|^{2(N-2)}} \end{aligned}$$

Si $N = 2$ on a $\|Du\|_{L^2(\varepsilon\Omega)}^2 = \|D\tilde{u}\|_{L^2(\omega)}^2$, et si $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} \|Du\|_{L^2(\varepsilon\Omega)}^2 &\leq C(r_0, N) \left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\omega)}^2 \int_{\omega} \frac{d\tilde{x}}{|\tilde{x} - x_0|^2} + \|D\tilde{u}\|_{L^2(\omega)}^2 + \right. \\ &\quad \left. \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\omega)} \int_{\omega} \frac{|D\tilde{u}(\tilde{x})|}{|\tilde{x} - x_0|} d\tilde{x} \right) \\ &\leq C(r_0, N) \left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\omega)}^2 + \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\omega)} \cdot \|D\tilde{u}\|_{L^2(\omega)} + \|D\tilde{u}\|_{L^2(\omega)}^2 \right) \\ &\leq C(r_0, N) \|\tilde{u}\|_{H^m(\omega)}^2 = C(r_0, N) \|u\|_{H^m(\varepsilon\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Les inégalités concernant $\|D^\alpha u\|_{L^2(\varepsilon\Omega)}$, pour des multi-indices α , $|\alpha| > 1$, se montrent par récurrence, en suivant la même technique que celle ci-dessus et l'estimation liée aux dérivées de $|x - x_0|^{2-N}$, voir [19]. \square

Le lemme suivant montre que $\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)$ est un espace de Banach. Dans le cas $N = 2$, on peut montrer facilement que cet espace ne dépend pas de la boule $B(x_0, r_0)$ choisie dans Ω .

Lemme 2.3 *Considérons $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Alors, $(\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega), \|\cdot\|_{\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)})$ est un espace de Banach. Pour $N = 2$ cet espace ne dépend pas du choix de la boule $B(x_0, r_0)$ dans (2.9).*

Démonstration. Il est évident que $\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)$ est un espace linéaire. Montrons qu'il est complet. En effet, soit u_n une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)$. Alors, il existe une suite $\tilde{u}_n \in H^m(\omega)$ telle que $u_n(x) = r_0^{N-2}|x - x_0|^{2-N}\tilde{u}_n(\tilde{x})$, avec $\tilde{x} = I(x_0, r_0)(x)$.

Par la définition de $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)}$, la suite \tilde{u}_n est de Cauchy dans $H^m(\omega)$, donc elle converge vers $\tilde{u} \in H^m(\omega)$. Par conséquent, la suite u_n converge vers $u(x) = r_0^{N-2}|x - x_0|^{2-N}\tilde{u}(\tilde{x})$ dans $\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)$.

Soit maintenant $N = 2$ et montrons que $\mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)$ ne dépend pas du choix de la boule $B(x_0, r_0)$ dans Ω . Soit $u \in \mathbb{H}^m(\varepsilon\Omega)$, donc il existe $u_0 \in H^m(\omega_0)$, où $\omega_0 = I(x_0, r_0)(\varepsilon\Omega) \cup \{x_0\}$, tel que $u(x) = u_0(\tilde{x}_0)$, avec $\tilde{x}_0 = I(x_0, r_0)(x)$.

Si $B(x_1, r_1)$ est une autre boule dans Ω , on note $\omega_1 = I(x_1, r_1)(\varepsilon\Omega) \cup \{x_1\}$ et $u_1 : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $u(x) = u_1(\tilde{x}_1)$, avec $\tilde{x}_1 = I(x_1, r_1)(x)$. Alors, il suffit de prouver que u_1 est dans $H^m(\omega_1)$. Or, pour $\tilde{x}_1 \in \omega_1$ on a $u_1(\tilde{x}_1) = u_0 \circ I(x_0, r_0) \circ I(x_1, r_1)(\tilde{x}_1)$. Prouvons que l'application $T : \omega_1 \rightarrow \omega_0$:

$$T : \begin{cases} \tilde{x}_1 \neq x_1 & \rightarrow I(x_0, r_0) \circ I(x_1, r_1)(\tilde{x}_1), \\ x_1 & \rightarrow x_0, \end{cases}$$

est harmonique inversible, ce qui finit la preuve.

En effet, l'inversibilité de T est évidente parce que $(I(x_0, r_0))^{-1} = I(x_0, r_0)$. D'autre part, soit $i \in \{1, \dots, N\}$ fixe. Si on note par T_i , la $i^{\text{ème}}$ composante de T , de (2.7) et (2.8), on obtient que dans $\omega_1 \setminus \{x_1\}$ on a :

$$\Delta T_i = 0, \quad T_i \text{ borné.}$$

Alors, en utilisant la proposition 16, [15], on conclut que T_i se prolonge par continuité en une fonction harmonique dans ω_i , ce qui termine la preuve \square

La proposition ci-dessous montre que dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega)$, le problème (2.2) admet une solution unique.

Proposition 2.4 *Soit $\Omega \in \mathcal{O}$. Alors, le problème (2.2) admet une solution unique dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega)$.*

Démonstration. Supposons d'abord, que le problème (2.2) admet une solution u_Ω . On note avec u_ω la fonction définie sur $\omega = I(x_0, r_0)({}^e\Omega) \cup \{x_0\}$:

$$u_\omega(\tilde{x}) = \frac{r_0^{N-2}}{|\tilde{x} - x_0|^{N-2}} u_\Omega(x), \quad x = I(x_0, r_0)(\tilde{x}). \quad (2.10)$$

De la proposition 19, [15], on a que :

$$\Delta u_\omega(\tilde{x}) = \frac{r_0^N}{|\tilde{x} - x_0|^N} \Delta u_\Omega(x). \quad (\text{même pour tout } N \geq 2). \quad (2.11)$$

Mais alors, le problème (2.2) est transformé en :

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega = f, & \text{dans } \omega, & f(\tilde{x}) = \frac{r_0^2}{|\tilde{x} - x_0|^2} j(x), \\ u_\omega = 0, & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

où f est une fonction dans $H^{m-2}(\omega)$ (parce que j est à support compact).

Or, le problème (2.12) admet une solution unique dans $H^m(\omega)$ (voir, par exemple [5], [19]). Par conséquent, u_Ω donné par :

$$u_\Omega(x) = u_\omega(\tilde{x}), \quad (2.13)$$

est la seule fonction dans $\mathbb{H}({}^e\Omega)$ satisfaisant deux premières équations de (2.2).

Quant au comportement à l'infini de u_Ω , du fait que pour $\Delta u_\omega = 0$ dans ω , de la proposition 20, [15] on trouve que $u_\Omega(x) = u_\omega(x_0) + o(1)$ quand $x \rightarrow \infty$. \square

Dans la suite de cette section on s'intéresse à la dérivabilité par rapport à la forme de u_Ω .

On construit la fonction \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} : \begin{cases} \mathcal{O}^{-1} & \rightarrow \bigcup_{\theta \in \mathcal{O}^{-1}} \mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta)), \\ \theta & \rightarrow u_{\Omega(\theta)} \text{ solution de (2.2) pour } \Omega = \Omega(\theta). \end{cases} \quad (2.14)$$

Introduisons la définition de la dérivabilité locale de \mathbf{u} (voir, par exemple [37], [51]). On remarque que cette définition a un sens pour tout autre espace que $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$.

Définition 2.5 On dit que la fonction $\theta \rightarrow \mathbf{u}(\theta)$ est localement dérivable (ou dérivable) de Θ dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$, si pour tout ouvert $U \supset \supset \Omega(\theta)$, la fonction $\mathbf{u}|_{{}^eU}(\theta)$ est dérivable de Θ dans $\mathbb{H}^m({}^eU)$.

Alors $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$, la dérivée locale (ou la dérivée) de \mathbf{u} en θ dans la direction ξ est définie par :

$$\mathbf{u}'(\theta)(\xi) : = \mathbf{u}'|_{{}^eU}(\theta)(\xi) \text{ dans } {}^eU, \forall U \supset \supset \Omega(\theta). \quad (2.15)$$

Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et $\tau \in \Theta$. Avec $\hat{\tau}$ on note un prolongement (à support compact, indépendant de τ) de classe C^k de $\tau \circ \theta^{-1}$, donné par exemple par le lemme 6.37, [19]. Bien que les lemmes suivants soient classiques, voir [36], [37], on donne aussi les démonstrations respectives.

Montrons d'abord le lemme suivant qui sera utile dans la preuve de la dérivabilité de \mathbf{u} .

Lemme 2.6 Considérons $N \geq 2$. Soit $C_b^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ l'espace de Banach :

$$C_b^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, D^\alpha f \text{ continue, bornée, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k\},$$

et on considère la transformation suivante :

$$\mathbf{V} : \Theta \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \quad \mathbf{V}(\tau) = \mathbf{I}(x_0, r_0) \circ (\mathbf{I}_N + \hat{\tau}) \circ \mathbf{I}(x_0, r_0) - \mathbf{I}_N.$$

Alors, la fonction $\tau \rightarrow \mathbf{V}(\tau)$ de Θ dans $C_b^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ est de classe C^1 .

Démonstration. Soit $\tau, \xi \in \Theta$, et on note $\hat{\xi}$ le prolongement de classe C^k de $\xi \circ \theta^{-1}$ (comme pour $\hat{\tau}$ ci-dessus). On a :

$$\mathbf{V}(\tau + \xi) - \mathbf{V}(\tau) = \left(\int_0^1 \hat{\xi} \cdot D\mathbf{I}(x_0, r_0) \circ (\mathbf{I}_N + \hat{\tau} + t\hat{\xi}) dt \right) \circ \mathbf{I}(x_0, r_0).$$

Prouvons que :

$$\mathbf{V}'(\tau)(\xi) = \left(\hat{\xi} \cdot D\mathbf{I}(x_0, r_0) \circ (\mathbf{I}_N + \hat{\tau}) \right) \circ \mathbf{I}(x_0, r_0). \quad (2.16)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\tau + \xi) - \mathbf{V}(\tau) - \mathbf{V}'(\tau)(\xi) &= \int_0^1 \hat{\xi} \cdot \left(D\mathbf{I}(x_0, r_0) \circ (\mathbf{I}_N + \hat{\tau} + t\hat{\xi}) - \right. \\ &\quad \left. D\mathbf{I}(x_0, r_0) \circ (\mathbf{I}_N + \hat{\tau}) \right) \circ \mathbf{I}(x_0, r_0) dt. \end{aligned}$$

Il est facile à montrer que toute dérivée de l'ordre plus petit ou égal à k de la partie à droite est un $o(\|\hat{\xi}\|_{C^k})$ (grâce au fait que $\mathbf{I}(x_0, r_0)$ est de classe C^∞). Mais de la continuité de l'opérateur de prolongement $\hat{\cdot}$ on a $o(\|\hat{\xi}\|_{C^k}) = o(\|\xi\|_\Theta)$, ce qui finit la démonstration. \square

Quant à \mathbf{V} , on a $\mathbf{V}(0) = 0$. Alors, du lemme ci-dessus il découle que $\tau \rightarrow \mathbf{V}(\tau)$ est continue. Alors, comme dans le lemme 1.1 on peut prouver que pour $\tau \in \Theta$ assez petit, $I_N + \mathbf{V}(\tau)$ est inversible et de classe C^k .

Lemme 2.7 *Considérons $N \geq 2$. Alors, $\tau \rightarrow (I_N + \mathbf{V}(\tau))^{-1} - I_N$ de Θ dans $C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ est de classe C^1 autour de $\tau = 0$.*

Démonstration. On considère la fonction :

$$F : \begin{cases} \Theta \times C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) & \rightarrow C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \\ (\tau, W) & \rightarrow (I_N + \mathbf{V}(\tau)) \circ (I_N + W) - I_N. \end{cases}$$

Il est clair que $F(\tau, W) \in C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ parce que $\mathbf{V}(\tau)$ est à support compact, donc "à l'infini" on a $F(\tau, W) = W$.

Par rapport à τ , F est de classe C^1 , grâce au lemme 2.6. Pour \tilde{W} dans $C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, la dérivée de F par rapport à W est :

$$F'_W(\tau, W)(\tilde{W}) = (D(I_N + \mathbf{V}(\tau))) \circ (I_N + W) \cdot \tilde{W} \in C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

parce que $\mathbf{V}(\tau)$ est de classe C^k , à support compact. En plus :

$$F(0, 0) = 0, \quad F'_W(0, 0)(\tilde{W}) = \tilde{W}.$$

Donc, les conditions du théorème des fonctions implicites sont satisfaites. Alors, il existe une unique fonction $\tau \rightarrow W(\tau)$ définie dans un voisinage de $\tau = 0$ dans Θ et à valeurs dans $C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, de classe C^1 et satisfaisant $F(\tau, W(\tau)) = 0$. D'autre part, $(I_N + \mathbf{V}(\tau))^{-1} - I_N \in C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et $F(\tau, (I_N + \mathbf{V}(\tau))^{-1} - I_N) = 0$. Alors, par unicité de $W(\tau)$ on obtient $(I_N + \mathbf{V}(\tau))^{-1} - I_N = W(\tau)$ est de classe C^1 autour de $\tau = 0$. \square

Lemme 2.8 *Considérons $N \geq 2$. Pour $\tau \in \Theta$ on note $D(I_N + \mathbf{V}(\tau))$ la matrice dont le terme général (i, j) est $D_j(I_N + \mathbf{V}(\tau))_i$.*

Alors, l'application $\tau \in \Theta \rightarrow [D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1} \in C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N^2})$ est de classe C^1 autour de $\tau = 0$.

Démonstration. Du lemme 2.6 la fonction \mathbf{V} est continue par rapport à τ , donc pour τ assez petit la matrice $D(I_N + \mathbf{V}(\tau))$ est inversible. Alors, des formules de Cramer on a que les éléments de la matrice $[D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1}$ sont des fonctions rationnelles en les coordonnées de $\mathbf{V}(\tau)$. Du lemme 2.6, \mathbf{V} est de classe C^1 par rapport à τ . Donc, $\tau \rightarrow [D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1}$ est de classe C^1 autour de $\tau = 0$, de Θ dans $C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N^2})$. \square

La proposition suivante donne la dérivée de $\mathbf{u}(\theta)$. La preuve se fait en passant dans un domaine borné par utilisation de la transformation de Kelvin. Après, sur ce domaine borné on utilise des résultats connus de la dérivation. A noter que $\hat{\tau}$ est le prolongement à support compact de classe C^k de $\tau \circ \theta^{-1}$.

Proposition 2.9 Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors, $\tau \rightarrow \mathbf{u}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau})$ de Θ dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ est de classe C^1 autour de $\tau = 0$. La fonction \mathbf{u} est localement dérivable en θ de Θ dans $\mathbb{H}^{m-1}({}^e\Omega(\theta))$. Sa dérivée dans la direction $\xi \in \Theta$ est donnée par :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}'(\theta)(\xi) = & 0, & \text{dans } & {}^e\Omega(\theta), \\ \mathbf{u}'(\theta)(\xi) = & -V \cdot D\mathbf{u}(\theta), & \text{sur } & \Gamma(\theta), \\ \mathbf{u}'(\theta)(\xi) = & O(1), & \text{à l'infini,} & \end{cases} \quad (2.17)$$

où $V = \xi \circ \theta^{-1}$.

Démonstration. Il existe $x_0 \in \Omega(\theta)$ et $r_0 > 0$ tels que $B(x_0, r_0) \subset \Omega(\theta + \tau)$ pour tout $\tau \in \Theta$ assez petit. Soit $\mathbf{u}(\theta + \tau)$ la solution de (2.2) obtenue pour $\Omega = \Omega(\theta + \tau)$ et on note $\tilde{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{u}(\theta + \tau) \circ I(x_0, r_0)$.

De la façon dont on a construit $\mathbf{u}(\theta + \tau)$ (la relation (2.14) et la proposition 2.4), l'étude de la dérivabilité de \mathbf{u} en θ est équivalente à l'étude de la dérivabilité de $\tilde{\mathbf{u}}$ en $\tau = 0$. Or, $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)$ satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}}(\tau) = & f, & \text{dans } & \omega(\tau) := I(x_0, r_0)({}^e\Omega(\theta + \tau)), \\ \tilde{\mathbf{u}}(\tau) = & 0, & \text{sur } & \gamma(\tau) := \partial\omega(\tau), \end{cases} \quad (2.18)$$

où f est donné par (2.12).

On considère la transformation $\mathbf{V}(\tau)$ du lemme 2.6. On a que :

$$(I_N + \mathbf{V}(\tau))(\omega(0)) = \omega(\tau).$$

D'autre part, soit F la fonction :

$$F : \begin{cases} D(F) \subset \Theta \times H^m(\omega(0)) \cap H_0^1(\omega(0)) & \rightarrow & H^{m-2}(\omega(0)), \\ (\tau, \tilde{v}) & \rightarrow & \text{tr}({}^t[D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1} \cdot D({}^t[D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1} \cdot D\tilde{v})) + \\ & & f \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau)), \end{cases}$$

avec $D(F)$ un voisinage assez petit de $(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))$. La fonction F est linéaire continue en \tilde{v} et de classe C^1 en τ , grâce au lemme 2.8. De plus, on a :

$$F(0, \tilde{\mathbf{u}}(0)) = 0, \quad F'_v(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))(\tilde{w}) = \Delta \tilde{w}, \quad \forall \tilde{w} \in H^m(\omega(0)).$$

Or, $F'_v(0, \tilde{\mathbf{u}}(0)) = \Delta$ définit un isomorphisme de $H^m(\omega(0)) \cap H_0^1(\omega(0))$ dans $H^{m-2}(\omega(0))$, voir par exemple [5].

Alors, du théorème des fonctions implicites il existe une unique fonction $\tau \rightarrow \tilde{v}(\tau)$, définie dans un voisinage dans Θ de $\tau = 0$ à valeurs dans $H^m(\omega(0)) \cap H_0^1(\omega(0))$, de classe C^1 et satisfaisant $F(\tau, \tilde{v}(\tau)) = (0, 0)$. De (2.18), par un changement de variable du type $x = (I_N + \mathbf{V}(\tau))(y)$, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau)) \in H^m(\omega(0)), \quad F(\tau, \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau))) = 0.$$

L'unicité de $\tilde{v}(\tau)$ implique $\tilde{u}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau)) = \tilde{v}(\tau)$, ce qui prouve que $\tilde{u}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau))$ est dérivable autour de $\tau = 0$ de Θ dans $H^m(\omega(0))$.

Alors, par une preuve analogue à celle utilisée dans [36], [37] pour prouver la dérivabilité locale de \tilde{u} quand $\tilde{u}(\theta + \tau) \circ (I_N + \tau)$ es dérivable, on montre que \tilde{u} est localement dérivable en $\tau = 0$, de Θ dans $H^{m-1}(\omega(0))$, et $\tilde{u}'(0)(\xi)$, sa dérivée locale dans la direction ξ satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}'(0)(\xi) = 0, & \text{dans } \omega(0), \\ \tilde{u}'(0)(\xi) = -\mathbf{V}'(0)(\xi) \cdot D\tilde{u}(0), & \text{sur } \gamma(0). \end{cases} \quad (2.19)$$

Or, on a que

$$\mathbf{u}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau}) = \tilde{u}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau)) \circ I(x_0, r_0),$$

ce qui implique que $\mathbf{u}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau})$ est de classe C^1 autour de $\tau = 0$ de Θ dans $H^m({}^e\Omega(\theta))$. D'autre part, on a aussi

$$\mathbf{u}(\theta + \tau) = \tilde{u}(\tau) \circ I(x_0, r_0).$$

Il en découle que \mathbf{u} est localement dérivable en θ de Θ dans $H^{m-1}({}^e\Omega(\theta))$, et que $\mathbf{u}'(\theta)(\xi) = \tilde{u}'(0)(\xi)$. Pour définir $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$, par un changement de variable dans (2.19) du type $x = I(x_0, r_0)(\tilde{x})$ on obtient :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}'(\theta)(\xi) &= -\Delta(\tilde{u}'(0)(\xi) \circ I(x_0, r_0)) = 0, & \text{dans } {}^e\Omega(\theta), \\ \mathbf{u}'(\theta)(\xi) &= \tilde{u}'(0)(\xi) \circ I(x_0, r_0) \\ &= -(\hat{\xi} \cdot DI(x_0, r_0)) \cdot (DI^{-1}(x_0, r_0) \cdot D\mathbf{u}(\theta)) \\ &= -V \cdot D\mathbf{u}(\theta), & \text{sur } \Gamma(\theta), \\ \mathbf{u}'(\theta)(\xi) &= \tilde{u}'(0)(\xi)(0) \in \mathbb{R}, & \text{à l'infini,} \end{aligned}$$

où on a utilisé (2.8), (2.11). Donc, la proposition est prouvée. \square

Dans la suite de cette section, on étudie la dérivabilité par rapport à θ du lagrangien $\mathbf{L} : \mathcal{O}^{-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donné par :

$$\mathbf{L}(\theta, \Lambda) = \mathbf{E}(\theta) + \Lambda \mathbf{M}(\theta), \quad \Lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

La proposition suivante est prouvée dans [42]. Ici, on présente une autre démonstration.

Proposition 2.10 *Supposons que $j \in H^{m-2}(\mathbb{R}^N)$ est à support compact et soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ tel que $\overline{\Omega(\theta)} \cap \text{supp}(j) = \emptyset$. Alors, la fonction \mathbf{L} est dérivable par rapport à θ de Θ dans \mathbb{R} et pour tout $\xi \in \Theta$, sa dérivée par rapport au θ dans la direction ξ , notée $\mathbf{L}(\theta, \Lambda)'(\xi)$, est donnée par :*

$$\mathbf{L}'(\theta, \Lambda)(\xi) = \int_{\Gamma(\theta)} \left(\frac{1}{2} |D\mathbf{u}(\theta)|^2 + \sigma \mathcal{H}(\theta) + \Lambda \right) (V \cdot \nu(\theta)) d\Gamma(\theta), \quad (2.21)$$

où $V = \xi \circ \theta^{-1}$, $\nu(\theta)$ est la normale extérieure à $\Gamma(\theta)$ et $\mathcal{H}(\theta)$ est la courbure moyenné de $\Gamma(\theta)$.

Démonstration. On note $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1(\theta) &= -\frac{1}{2} \int_{\epsilon\Omega(\theta)} |D\mathbf{u}(\theta)|^2, \\ \mathbf{L}_2(\theta) &= \sigma P(\Omega(\theta)) + \Lambda m(\Omega(\theta)).\end{aligned}$$

Remarquons d'abord que grâce à (2.2) on a :

$$\mathbf{L}_1(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\text{supp}(j)} j \mathbf{u}(\theta) dx. \quad (2.22)$$

Dans le lemme 1.33 on a prouvé que la fonction \mathbf{L}_2 est deux fois dérivable par rapport à θ , et on a trouvé aussi l'expression de ces dérivées.

Dans la proposition 2.9, on a prouvé que \mathbf{u} est localement dérivable de Θ dans $\mathbb{H}^{m-1}(\epsilon\Omega(\theta))$. De (i), lemme 2.2, il découle que \mathbf{u} est aussi localement dérivable en θ de Θ dans $L^2(\text{supp}(j))$. Donc, la fonction \mathbf{L}_1 est aussi dérivable en θ .

Quant à l'expression de $\mathbf{L}'_1(\theta)(\xi)$, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}'_1(\theta)(\xi) &= - \int_{\text{supp}(j)} j \mathbf{u}'(\theta)(\xi) dx = - \int_{\epsilon\Omega(\theta)} j \mathbf{u}'(\theta)(\xi) dx \\ &= \int_{\epsilon\Omega(\theta)} \mathbf{u}'(\theta)(\xi) \Delta \mathbf{u}(\theta) dx = - \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{u}'(\theta)(\xi) \frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu(\theta)} d\Gamma(\theta) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} |D\mathbf{u}(\theta)|^2 (V \cdot \nu(\theta)) d\Gamma(\theta),\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de la proposition. \square

La dérivée seconde par rapport au θ de \mathbf{L} est donnée par :

Proposition 2.11 Soit $m \geq 2$. Supposons que $j \in H^{m-2}(\mathbb{R}^N)$ est à support compact et soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ tel que $\overline{\Omega(\theta)} \cap \text{supp}(j) = \emptyset$.

Alors, \mathbf{L} est deux fois dérivable (au sens de Gateaux) par rapport à θ de Θ dans \mathbb{R} , et sa dérivée dans la direction $(\xi, \eta) \in \Theta^2$, notée $\mathbf{L}''(\theta, \Lambda)(\xi, \eta)$, est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}''(\theta, \Lambda)(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathcal{H}(V \cdot \nu)(W \cdot \nu) + V \cdot \delta \nu \cdot W + \right. \\ &\quad \left. \nu \cdot \delta V \cdot W + \nu \cdot \delta W \cdot V \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left((V \cdot \nu) \frac{\partial \mathbf{u}'(\theta)(\eta)}{\partial \nu(\theta)} + (W \cdot \nu) \frac{\partial \mathbf{u}'(\theta)(\xi)}{\partial \nu(\theta)} \right) \frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu(\theta)} \\ &\quad + \sigma \int_{\Gamma(\theta)} (V' \cdot \nu(\theta)) (W' \cdot \nu(\theta)) d\Gamma(\theta) \\ &\quad + \Lambda \int_{\Gamma(\theta)} V \wedge W' d\Gamma(\theta),\end{aligned} \quad (2.23)$$

où $(\cdot)' = d(\cdot)/d\Gamma(\theta)$, $\nu = \nu(\theta)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\theta)$, $V = \xi \circ \theta^{-1}$, $W = \eta \circ \theta^{-1}$, δ l'opérateur du gradient tangentiel et \wedge le produit vectoriel.

Remarque 2.12 Il est facile de retrouver la structure de la dérivée seconde donnée par le théorème 1.23. En fait, ceci est évident pour le terme correspondant au $|Du|^2$. Pour les deux autres terme il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} V \cdot \delta\nu \cdot W &= \mathcal{H}(V \cdot \tau)(W \cdot \tau), \\ \int_{\Gamma(\theta)} (V' \cdot \nu)(W' \cdot \nu) &= \int_{\Gamma(\theta)} ((V \cdot \nu)' - V \cdot \nu')((W \cdot \nu)' - W \cdot \nu') \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} (D(V \cdot \nu) \cdot \tau)(D(W \cdot \nu) \cdot \tau) \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H}(\mathcal{H}(V \cdot \tau)(W \cdot \tau) + \nu \cdot \delta V \cdot W + \nu \cdot \delta W \cdot V), \\ \int_{\Gamma(\theta)} V \wedge W' &= \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu)(\tau \cdot W') - (V \cdot \tau)(\nu \cdot W') = \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu)'(W \cdot \tau) + (V \cdot \nu)(W \cdot \tau') + (V \cdot \tau)(\nu \cdot DW \cdot \tau) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H}(V \cdot \nu)(W \cdot \nu) \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} (\mathcal{H}(V \cdot \tau)(W \cdot \tau) + \nu \cdot \delta V \cdot W + \nu \cdot \delta W \cdot V), \end{aligned}$$

où pour le terme correspondant à la mesure on a fait une intégration par partie sur le bord.

Démonstration. Comme $L = L_1 + L_2$, on remarque d'abord que la fonction L_2 est deux fois dérivable par rapport à θ grâce au lemme 1.33, qui donne aussi l'expression de $L_2''(\theta)(\xi, \eta)$.

Pour τ assez petit on a $\theta + \tau \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors, de la proposition 2.9 on a :

$$L_1'(\theta + \tau)(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta + \tau)} |D\mathbf{u}(\theta + \tau)|^2 (V(\tau) \cdot \nu(\theta + \tau)) d\Gamma(\theta + \tau),$$

où $V(\tau)$ est un prolongement de classe C^k de $\xi \circ (\theta + \tau)^{-1}$, par exemple donné par le lemme 6.37, [19]. On considère $\hat{\nu} : \tau \in \Theta \rightarrow \hat{\nu}(\tau) \in C_b^{k-2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, où $\hat{\nu}(\tau)$ est le prolongement intrinsèque de $\nu(\theta + \tau)$, voir par exemple [52]. On a que $\hat{\nu}(\tau)$ est localement dérivable en $\tau = 0$ et :

$$\hat{\nu}'(0)(\eta) = -\delta(W \cdot \nu), \quad \frac{\partial \hat{\nu}(0)}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma(\theta).$$

La proposition 2.10 nous permet d'affirmer que $L_1'(\theta + \tau)(\xi)$, comme une fonction de τ , satisfait aux conditions du théorème 5.1, [51] (concernant la

dérivabilité d'une intégrale portant sur le bord d'un domaine). Alors, en appliquant ce théorème, on obtient que :

$$\begin{aligned}
L_1''(\theta)(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} (\cdot)'(0)(\eta) + \left(\mathcal{H}(\cdot) + \frac{\partial(\cdot)(0)}{\partial\nu(\theta)} \right) (W \cdot \nu(\theta)) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} 2D\mathbf{u}(\theta) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta)(V \cdot \nu) + \\
&\quad |D\mathbf{u}(\theta)|^2 \left(V'(0)(\eta) \cdot \nu - V \cdot \delta(W \cdot \nu) \right) d\Gamma(\theta) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathcal{H} |D\mathbf{u}(\theta)|^2 (V \cdot \nu) + 2D\mathbf{u}(\theta) \cdot \frac{\partial D\mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu} (V \cdot \nu) + \right. \\
&\quad \left. |D\mathbf{u}(\theta)|^2 \left(\frac{\partial V}{\partial\nu} \cdot \nu \right) \right) (W \cdot \nu) d\Gamma(\theta). \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Soit $V = (V_1, \dots, V_N)$ et on note DV et δV les matrices $DV = [D_j V_i]$ et $\delta V = [\delta_j V_i]$. Alors, sur $\Gamma(\theta)$ on a :

$$\begin{aligned}
V'(0)(\eta) \cdot \nu &= -(DV \cdot W) \cdot \nu = -\nu_i D V_i \cdot W = -\nu_i \left(\delta V_i + \frac{\partial V_i}{\partial\nu} \nu \right) \cdot W \\
&= -(\delta V \cdot W) \cdot \nu - \left(\frac{\partial V}{\partial\nu} \cdot \nu \right) (W \cdot \nu). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

D'autre part, du fait que la matrice $\delta\nu = [\delta_j \nu_i]$ est symétrique (voir, par exemple [20]), on trouve que :

$$\begin{aligned}
V \cdot \delta(W \cdot \nu) &= V \cdot (\nu_i \delta W_i + W_i \delta \nu_i) = \nu_i (\delta W_i \cdot V) + (V \cdot \delta \nu_i) W_i \\
&= (\delta W \cdot V) \cdot \nu + V \cdot \delta \nu \cdot W. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

De (2.24), (2.25), (2.26) et du fait que (voir [18]) :

$$D\mathbf{u}(\theta) \cdot \frac{\partial D\mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu} = \frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu^2} = -\mathcal{H}(\theta) \frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu}, \quad \text{sur } \Gamma(\theta),$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}
L_1''(\theta)(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathcal{H}(V \cdot \nu)(W \cdot \nu) + V \cdot \delta\nu \cdot W + \right. \\
&\quad \left. \nu \cdot \delta V \cdot W + \nu \cdot \delta W \cdot V \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu} \right)^2 \\
&+ \int_{\Gamma(\theta)} D\mathbf{u}(\theta) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta)(V \cdot \nu).
\end{aligned}$$

Or, d'autre part on a que :

$$\int_{\Gamma(\theta)} D\mathbf{u}(\theta) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta)(V \cdot \nu) = \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) \frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial\nu} \frac{\partial \mathbf{u}'(\theta)(\eta)}{\partial\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\epsilon\Omega(\theta)} D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta) \\
&= \int_{\Gamma(\theta)} (W \cdot \nu) \frac{\partial \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu} \frac{\partial \mathbf{u}'(\theta)(\xi)}{\partial \nu},
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'expression (2.23) de $L''(\theta)(\xi, \eta)$.

2.3 La méthode numérique.

Dans cette section on reprend les notations de la section 1.6. On va discuter la solution numérique du problème (2.5) en supposant que ce problème admet une solution $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$.

D'après la proposition 2.10, la fonctionnelle L donnée par (2.20) est dérivable en θ^* de Θ dans \mathbb{R} . Par conséquent, de la proposition 1.26 il existe $\Lambda^* \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\begin{cases} L'(\theta^*, \Lambda^*)(\xi) = 0, & \forall \xi \in \Theta, \\ M(\theta^*) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Si \mathcal{F} est la fonction introduite comme dans la section 1.6, alors résoudre l'équation (2.27) est équivalent à trouver :

$$(\psi^*, \Lambda^*) \in C^k(\partial Q) \times \mathbb{R} \quad : \quad \mathcal{F}(\psi^*, \Lambda^*) = 0. \quad (2.28)$$

Pour trouver une solution de l'équation (2.28), on va utiliser l'algorithme de Newton donnée par (1.73).

Remarquons que θ^* de (2.27) n'est pas forcément une solution de (2.5). Une condition suffisante pour qu'un tel θ^* soit solution de (2.5) est donnée par la proposition 1.27.

2.3.1 La discrétisation.

Dans cette sous-section on va faire une discrétisation classique en utilisant des fonctions linéaires par morceaux.

Pour $\psi \in C^k(\partial Q)$ on note $\theta = I_N + \hat{\psi}\hat{\nu}_0$ et on considère $\Gamma(\theta)$ et $\nu(\theta)$, où $\nu(\theta)$ est la normale à $\Gamma(\theta)$.

Soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation et Q_1, \dots, Q_n quelques points dans ∂Q ($n \in \mathbb{N}$). On note :

$$\Gamma_{0,h} = \bigcup_{i=1}^n [Q_i, Q_{i+1}], \quad Q_{n+1} = Q_1, \quad (2.29)$$

et sur $\Gamma_{0,h}$ on considère une base de fonctions linéaires par morceaux :

$$\begin{cases} \psi_i : \Gamma_{0,h} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \psi_i(Q_j) = \delta_{ij}, \quad \psi_i, \text{ linéaire sur } [Q_i, Q_{i+1}], \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.30)$$

Notons avec ψ_h , respectivement $\nu_{0,h}$, l'approximation linéaire par morceaux de ψ , respectivement ν_0 (la normale à ∂Q) :

$$\begin{cases} \psi_h : \Gamma_{0,h} \rightarrow \mathbb{R}, & \psi_h = \sum_{i=1}^n \psi(Q_i) \psi_i, \\ \nu_{0,h} : \Gamma_{0,h} \rightarrow \mathbb{R}^N, & \nu_{0,h} = \sum_{i=1}^n \nu_0(Q_i) \psi_i. \end{cases} \quad (2.31)$$

On approche le bord $\Gamma(\theta)$ par :

$$\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}], \quad x_i = Q_i + \psi(Q_i) \nu_0(Q_i), \quad (2.32)$$

et soit e_i , une base de fonctions linéaires par morceaux sur Γ_h :

$$\begin{cases} e_i : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ e_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad e_i, \text{ linéaire sur } [x_i, x_{i+1}], \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.33)$$

Avec ν_h , on note une approximation de $\nu(\theta)$:

$$\nu_h : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \nu_h = \sum_{i=1}^n \nu(\theta)(x_i) e_i. \quad (2.34)$$

2.3.2 L'approximation au bord du gradient de la solution du problème de Poisson à l'extérieur.

Dans cette sous-section on trouve une approximation au bord pour le gradient de \mathbf{u} et \mathbf{u}' donnés par (2.14) et (2.17).

En fait, on n'utilise que les valeurs de $D\mathbf{u}$ et $D\mathbf{u}'$ au bord, donc on cherche \mathbf{u} et \mathbf{u}' sous une forme intégrale. L'équation intégrale correspondante est résolue, de façon approchée, en utilisant la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre on ne fait pas une analyse de l'erreur de cette approximation. On présente une telle analyse dans le chapitre suivant (pour le gradient au bord de la solution d'un problème de Neumann).

Remarquons d'abord que pour trouver $\mathbf{u}(\theta)$ ou $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$, il suffit de résoudre un problème de type (2.17).

En effet, pour $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ soit $X \in \Omega(\theta)$ quelconque et on note j^* :

$$j^*(x) = - \int_{\mathbb{R}^N} (\Phi(x, y) - \Phi(x, X)) j(y) dy, \quad x \in {}^e\Omega(\theta), \quad (2.35)$$

où $\Phi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est la solution élémentaire du laplacien :

$$\Phi(x, y) = - \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & N = 2, \\ \frac{|x - y|^{2-N}}{N(2-N)|B(0, 1)|}, & N \geq 3, \end{cases} \quad (2.36)$$

avec $|B(0, 1)|$ le volume de la boule unité en \mathbb{R}^N . De [19] on a :

Lemme 2.13 *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, la fonction Φ satisfait :*

$$\begin{aligned} -\Delta j^* &= j, \text{ dans } \mathbb{R}^N - \{X\}; \quad j^* = o(1), \text{ à l'infini,} \\ |D^\alpha \Phi(x, y)| &\leq C(N, |\alpha|) |x - y|^{2-N-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Alors, si $\mathbf{v}(\theta) \in \mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v}(\theta) = 0, & \text{dans } {}^e\Omega(\theta), \\ \mathbf{v}(\theta) = g, & \text{sur } \Gamma(\theta), \\ \mathbf{v}(\theta) = O(1), & \text{à l'infini,} \end{cases} \quad (2.38)$$

il suffit de prendre $g = -j^*$, et alors :

$$\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{v}(\theta) + j^*, \quad (2.39)$$

est la seule solution dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ de (2.2), avec $\Omega = \Omega(\theta)$.

La proposition suivante donne l'existence d'une représentation intégrale de $\mathbf{v}(\theta)$ (voir, par exemple [32], [39], [42]).

Proposition 2.14 *Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et $g \in H^{m-1/2}(\Gamma(\theta))$. Alors, il existe un unique $q \in H^{m-3/2}(\Gamma(\theta))$ et un unique $C \in \mathbb{R}$, tels que :*

$$\mathbf{v}(\theta)(x) = \int_{\Gamma(\theta)} q(y) \Phi(x, y) dy + C, \quad x \in {}^e\Omega(\theta), \quad (2.40)$$

soit la seule solution dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ du problème (2.38).

La fonction q et la constante C sont définis par :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma(\theta)} q(x) \Phi(x, y) dy + C = g(x), & x \in \Gamma(\theta), \\ \int_{\Gamma(\theta)} q(x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

D'après, par exemple le théorème 6.13, [32], le gradient de $\mathbf{v}(\theta)$ sur le bord $\Gamma(\theta)$ est donné par :

Proposition 2.15 *Si la fonction q est dans $C^0(\Gamma(\theta))$, on a :*

$$D\mathbf{v}(\theta)(x) = -\frac{1}{2}q(x)\nu(\theta)(x) + \int_{\Gamma(\theta)} q(y) D_x \Phi(x, y) dy, \quad x \in \Gamma(\theta), \quad (2.42)$$

avec $\nu(\theta)$ le vecteur normal unitaire à $\Gamma(\theta)$ orienté vers l'extérieur. \square

Cette proposition permet de calculer le gradient de $\mathbf{u}(\theta)$ au bord :

$$D\mathbf{u}(\theta)(x) = Dj^*(x) + D\mathbf{v}(\theta)(x), \quad x \in \Gamma(\theta). \quad (2.43)$$

Maintenant, l'approximation numérique de $D\mathbf{u}(\theta)$ et $D\mathbf{u}'(\theta)$ sur $\Gamma(\theta)$ est donnée par :

(i) **Le calcul de $D_h\mathbf{u}$, une approximation sur $\Gamma(\theta)$ de $D\mathbf{u}(\theta)$.**

(i.1) On trouve $q_h = \sum_{j=1}^n q_j \mathbf{e}_j$ ($q_j \in \mathbb{R}$) et C , une approximation de q et C de la proposition 2.14, par une méthode classique d'éléments finis. Donc, q_h et C satisfont :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_h \times \Gamma_h} \mathbf{e}_i(x) \mathbf{e}_j(y) \Phi(x, y) dx dy + C \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i(x) dx = \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i(x) g(x) dx, \\ \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_j(x) dx = 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

avec $g = -j^*$ et $i = 1, \dots, n$.

(i.2) On calcule $D_h\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n D_h\mathbf{v}(x_j) \mathbf{e}_j$, une approximation de $D\mathbf{v}(\theta)$, où selon (2.42) :

$$\begin{aligned} D_h\mathbf{v}(x_j) &= -\frac{1}{2} q_h(x_j) \nu_h(x_j) - \left[q_h(y_i) \Phi(x_j, y_i) \tau_h(y_i) \right]_{i=j-1}^{i=j+1} \\ &\quad + \sum_{i \neq j, j+1} \int_{[x_{i-1}, x_i]} q_h(y) D\Phi(x_j, y) dy, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.45)$$

avec $\nu_h = ((\nu_h)_1, (\nu_h)_2)$, une approximation linéaire par morceaux de $\nu(\theta)$ définie par (2.34) et $\tau_h = ((\nu_h)_2, -(\nu_h)_1)$.

(i.3) On trouve $D_h\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n D_h\mathbf{u}(x_j) \mathbf{e}_j$, une approximation de $D\mathbf{u}(\theta)$, où selon (2.43) :

$$D_h\mathbf{u}(x_j) = Dj^*(x_j) + D_h\mathbf{v}(x_j). \quad (2.46)$$

(ii) **Le calcul de $D_h\mathbf{u}^i$, une approximation sur $\Gamma(\theta)$ de $D\mathbf{u}'(\theta)(\psi_i \nu_0)$.**

(ii.1) Pour $i = 1, \dots, n$ on effectue (ii.2) et (ii.3).

(ii.2) On résout (2.44), en prenant $g = -\psi_i \circ \theta_h^{-1} \nu_{0,h} \cdot D_h\mathbf{u} = -\mathbf{e}_i \nu_{0,h} \cdot D_h\mathbf{u}$. On remarque que cette forme de g correspond à l'expression de $V = -\xi \circ \theta^{-1} \cdot D\mathbf{u}(\theta)$ dans (2.17), pour $\xi = \psi_i \nu_0$.

(ii.3) On calcule $D_h \mathbf{v}$ par (2.45) et on prend $D_h \mathbf{u}^i = D_h \mathbf{v}$. \square

• On remarque que le calcul numérique du gradient $D_h \mathbf{v}(x_j)$ dans (2.45), demande une analyse de la singularité en x_j du noyau Φ .

On présente une analyse détaillée de la singularité dans l'expression du gradient $D\mathbf{u}$, dans le cas de dimension trois, dans le chapitre 3.

• Quand il s'agit de l'analyse d'algorithmes numériques, pour toutes les intégrales ci-dessus et aussi pour celles de la suite, on suppose qu'on peut calculer de façon exacte leurs valeurs. En pratique, quand ceci n'est pas possible, on fait une intégration numérique en utilisant une formule d'intégration de Gauss.

2.3.3 La solution numérique. L'algorithme.

Pour trouver une solution approchée (ψ_h^*, Λ_h^*) de (2.28), on va considérer une discrétisation de l'algorithme de Newton continu, donné par (1.73).

Une itération de (1.73), consiste à calculer $\mathcal{F}(\psi_l, \Lambda_l)$, $\mathcal{F}'(\psi_l, \Lambda_l)$ et résoudre l'équation 2. dans (1.73). Numériquement, on calcule leurs approximations, notées $\mathcal{F}_h \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathcal{F}'_h \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+1)}$ et on résout l'équation $\mathcal{F}_h + \mathcal{F}'_h \cdot x = 0$.

Le vecteur \mathcal{F}_h est construit à partir de \mathcal{F} en approchant $\Gamma(\theta)$ par Γ_h et en prenant $\varphi = \psi_i$, $i = 1, \dots, n$. La matrice \mathcal{F}'_h est construite à partir de \mathcal{F}' en prenant $\varphi = \psi_i$ et $\phi = \psi_j$, $i, j = 1, \dots, n$.

(i) **Le calcul de $\mathcal{F}_h \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'approximation de $\mathcal{F}(\psi, \Lambda)$.**

Pour trouver \mathcal{F}_h on utilise l'expression (2.21), où la seule difficulté est l'approximation de la courbure. Or, du fait que (voir le lemme 1.33) :

$$\int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H}(\theta)(V \cdot \nu(\theta)) = - \int_{\Gamma(\theta)} V \cdot \tau'(\theta) = \int_{\Gamma(\theta)} V' \wedge \nu(\theta),$$

en approchant V par $\mathbf{e}_i \nu_{0,h}$, on obtient :

(i.1) Pour $i = 1, \dots, n$, on calcule :

$$\mathcal{F}_h(i) = \int_{\Gamma_h} \left[\left(\frac{1}{2} |D_h \mathbf{u}|^2 + \Lambda \right) (\mathbf{e}_i \nu_{0,h} \cdot \nu_h) + (\mathbf{e}_i \nu_{0,h})' \wedge \nu_h \right] ds \quad (2.47)$$

(i.2) $\mathcal{F}_h(n+1) = m(\Omega_h) - m_0$, avec Ω_h le domaine défini par Γ_h . \square

(ii) **Le calcul de $\mathcal{F}'_h \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+1)}$, l'approximation de $\mathcal{F}'(\psi, \Lambda)$.**

(ii.1) En prenant $V = \mathbf{e}_i \nu_{0,h}$ et $W = \mathbf{e}_j \nu_{0,h}$ pour $i, j = 1, \dots, n$ on calcule

(voir (2.23)):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'_h(i, j) = & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \left\{ \left(\mathcal{H}_h(\nu_h \cdot \nu_{0,h})^2 + \nu_{0,h} \cdot \delta \nu_h \cdot \nu_{0,h} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right. \\
& \left. \left(\nu_h \cdot \delta(\mathbf{e}_i \nu_{0,h}) \nu_{0,h} \mathbf{e}_j + \nu_h \cdot \delta(\mathbf{e}_j \nu_{0,h}) \nu_{0,h} \mathbf{e}_i \right) \right. \\
& \left. \right\} \left(D_h \mathbf{u} \cdot \nu_h \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \left\{ \mathbf{e}_i (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) (D_h \mathbf{u}^j \cdot \nu_h) + \right. \\
& \left. \mathbf{e}_j (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) (D_h \mathbf{u}^i \cdot \nu_h) \right\} \left(D_h \mathbf{u} \cdot \nu_h \right) \\
& + \sigma \int_{\Gamma_h} (\mathbf{e}_i \nu_{0,h})' \cdot \nu_h (\mathbf{e}_j \nu_{0,h})' \cdot \nu_h \\
& + \Lambda \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i \nu_{0,h} \wedge (\mathbf{e}_j \nu_{0,h})'. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

(ii.2) Pour $j = 1, \dots, n$ on calcule :

$$\mathcal{F}'_h(n+1, j) = \mathcal{F}'_h(j, n+1) = \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_j (\nu_{0,h} \cdot \nu_h). \tag{2.49}$$

Avec \mathcal{H}_h on a noté une approximation de $\mathcal{H}(\theta)$ donnée par :

$$\mathcal{H}_h = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_i \mathbf{e}_i, \tag{2.50}$$

où \mathcal{H}_i est la courbure en x_i de la parabole passant par x_{i-1}, x_i et x_{i+1} . \square

Maintenant, on peut effectuer l'algorithme de Newton discrétisé de (1.73) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
0. \quad l = 0; (\psi_{l,h}, \Lambda_l) \text{ donné.} \\
1. \quad \theta_h = I_N + \psi_{l,h} \nu_{0,h}; \quad \Gamma_h \text{ donné par (2.32).} \\
2. \quad \text{Calcul de } \mathcal{F}_h, \mathcal{F}'_h. \\
3. \quad \text{Calcul de } x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}): \quad \mathcal{F}_h + \mathcal{F}'_h \cdot x = 0. \\
4. \quad \psi_{l+1,h} = \psi_{l,h} + \sum_{j=1}^n x_j \psi_j, \quad \Lambda_{l+1} = \Lambda_l + x_{n+1}. \\
5. \quad \text{Si } \|\mathcal{F}_h\|_2 \leq \epsilon, \text{ alors fin. Sinon, on recommence 1.}
\end{array} \right. \tag{2.51}$$

2.3.4 L'analyse de complexité. Résultats numériques.

Dans cette sous-section, après une analyse de complexité de l'algorithme (2.51), on va présenter des résultats numériques qu'on a obtenus en appliquant cet algorithme. Aussi, on va comparer les résultats obtenus avec la méthode de Newton, avec ceux (voir [42]) obtenus en utilisant la méthode de Quasi-Newton.

2.3.4.1 L'analyse de la complexité.

Dans ce paragraphe on donne la complexité des différentes quantités nécessaires pour l'algorithme (2.51) et on fait une comparaison avec la complexité de la méthode du gradient.

D'habitude, la complexité s'exprime en flops :

$$1 \text{ flop} = 1 \text{ multiplication} + 1 \text{ addition.}$$

a. La complexité du calcul de \mathcal{F}_h .

a.1 Le calcul de $D_h \mathbf{u}$.

a.1.1 On calcule la matrice de (2.44).

On a une matrice $(n+1) \times (n+1)$ et chaque élément de la matrice demande $O_A(1)$ flops. Donc, la complexité est : $O_A(1)n^2$ flops.

a.1.2 On résout le système (2.44).

D'abord, on fait une factorisation LDL^T de la matrice (symétrique).

La complexité de cette factorisation (voir [9], [21]) est $\frac{1}{6}n^3$.

Puis, on on résout deux systèmes triangulaires, qui ensemble ont (voir [9], [21]) une complexité n^2 . Au total : $\frac{1}{6}n^3 + n^2$ flops.

a.1.3 Le calcul de $D_h \mathbf{u}$, donné par (2.46).

Pour chaque point x_j , $D_h \mathbf{u}(x_j)$ est une intégrale sur Γ_h , donc la complexité de $D_h \mathbf{u}(x_j)$ est $O_u(1)n$ flops, ce qui implique que la complexité de $D_h \mathbf{u}$ est $O_u(1)n^2$ flops.

a.2 Le calcul de \mathcal{H}_h .

La quantité \mathcal{H}_h donné (2.50), est une somme pour $i = 1, \dots, n$, donc sa complexité est $O_{\mathcal{H}}(1)n$ flops.

a.3 Le calcul de \mathcal{F}_h donné par (2.47).

Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{F}_h(i)$ est une intégrale sur $\Gamma_h \cap \text{supp}(\mathbf{e}_i)$, donc la complexité de $\mathcal{F}_h(i)$ est $O_{\mathcal{F}}(1)$. Il découle alors, que la complexité de \mathcal{F}_h est $O_{\mathcal{F}}(1)n$ flops.

b. La complexité du calcul de \mathcal{F}'_h :

b.1 La complexité du calcul de $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$:

b.1.1 Le calcul de la matrice (2.44).

Pour tout i , cette matrice est celle dans a.1.1, donc on ne la calcule pas.

b.1.2 Pour $i = 1, \dots, n$, on résout le système (2.44), avec g donné par (ii.2), sous-section 2.3.2. La factorisation de la matrice, on l'a déjà fait dans

a.1.2. Alors, pour chaque i , on fait la résolution de deux systèmes triangulaires. Donc la complexité est $n \cdot n^2$ flops. Noter qu'il est *très important que les systèmes (2.44) ont la mêmes matrice*. Sinon, résoudre ces systèmes nécessiterait n factorisations, d'où le coût de l'ordre n^4 !

b.1.3 Le calcul de $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$ donné par (2.45). D'après la remarque ci-dessous, ce calcul a une complexité d'ordre $O_{\mathbf{u}'}(1)n^{2+2/3}$ flops, ce qui signifie que le coût de ce calcul est réduit $n^{1/3}$ fois.

b.2 Le calcul de \mathcal{F}'_h donné par (2.48). Pour tout $i, j = 1, \dots, n$, $\mathcal{F}_h(i, j)$ est une intégrale sur $\Gamma_h \cap \text{supp}(\mathbf{e}_i) \times \Gamma_h \cap \text{supp}(\mathbf{e}_j)$. Donc, la complexité de $\mathcal{F}_h(i, j)$ est $O_{\mathcal{F}'}(1)$, d'où la complexité de \mathcal{F}'_h est $O_{\mathcal{F}'}(1)n^2$ flops.

c. La complexité de la résolution de $\mathcal{F}_h + \mathcal{F}'_h \cdot x = 0$.

La matrice \mathcal{F}'_h est symétrique. Alors, on fait une factorisation LDL^T et on résout deux systèmes triangulaires. Donc, la complexité est $n^3/6 + n^2$ flops.

d. La complexité globale.

De a., b. et c., il découle que la complexité globale de l'algorithme (2.51), en négligeant les termes en n de l'ordre inférieur à n^2 , est :

$$\frac{4}{3}n^3 + \left(2 + O_A(1) + O_{\mathbf{u}}(1) + O_{\mathcal{F}'}(1) + O_{\mathbf{u}'}(1)n^{2/3}\right)n^2 \text{ flops.} \quad (2.52)$$

Remarque 2.16 *L'analyse de complexité de la méthode de Newton permet d'estimer aussi la complexité de la méthode du gradient. En effet, une itération de la méthode du gradient ne demande que le calcul de \mathcal{F}_h , dont la complexité on vient d'estimer. Donc, le coût de la méthode du gradient est (de a.1, a.2, a.3 ci-dessus) :*

$$\frac{1}{6}n^3 + \left(1 + O_A(1) + O_{\mathbf{u}}(1)\right)n^2 \text{ flops.} \quad (2.53)$$

La remarque suivante, donne une explication au fait que le calcul de $D_h \mathbf{u}^i$, qui approche $D\mathbf{u}(\theta)(\psi_i \nu_0)$, a une complexité d'ordre $O_{\mathbf{u}'}(1)n^{2+2/3}$.

A priori, même en considérant que la complexité de $D_h \mathbf{u}^i$ est en n^3 (donc, sans réduction de complexité), il résulte que la méthode de Newton a une complexité de l'ordre $O(1)n^3$, avec $O(1) = 4/3 + O_{\mathbf{u}'}(1)$. Or, $O_{\mathbf{u}'}(1)$ est très grand par rapport à $4/3$, d'où l'intérêt à réduire la complexité du calcul de $D_h \mathbf{u}^i$.

Remarque 2.17 *Le calcul de $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$ dans b.1.3 ci-dessus, a priori, a une complexité de l'ordre $O_{\mathbf{u}'}(1)n^3$ flops. En effet, d'après (2.45), $D_h \mathbf{u}^i(x_j)$ est une intégrale sur Γ_h , donc sa complexité est $O(1)n$ flops. D'où, la complexité de $D_h \mathbf{u}^i(x_j)$, $i, j = 1, \dots, n$ est $O_{\mathbf{u}'}(1)n^3$ flops.*

Or, pour tout $i = 1, \dots, n$, $D_h \mathbf{u}^i$ approche $D\mathbf{u}'(\theta)(\psi_i \nu_0)$ avec ψ_i à support dans $\partial Q \cap B(Q_i, h)$. Donc $\mathbf{u}'(\theta)(\psi_i \nu_0)$ est la solution d'un problème de Dirichlet avec une donnée à support dans $\Gamma(\theta) \cap \text{supp}(e_i)$ (de diamètre de l'ordre h). Ceci laisse penser que $D\mathbf{u}(\theta)(\psi_i \nu_0)(x)$ décroît "assez" vite, et donc devient "petit" pour x "assez" loin de $\Gamma(\theta) \cap \text{supp}(e_i)$ (principe de Saint Venant pour le gradient d'un problème de Dirichlet, voir par exemple [34], [41], [56]).

Donc, si on considère la boule $B(x_i, \delta)$, $x_i \in \Gamma(\theta)$, quitte à se contenter avec une erreur de l'ordre $\max\{ |D\mathbf{u}(\theta)(\psi_i \nu_0)(x)|, x \in \Gamma(\theta) \cap B^c(x_i, \delta) \}$, alors il suffit de calculer les valeurs de $D\mathbf{u}(\theta)(\psi_i \nu_0)(x)$ pour $x \in \Gamma(\theta) \cap B(x_i, \delta)$.

On a étudié ce problème (chapitre 4) dans le cas de dimension trois, en donnant une estimation du gradient $D\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$ au bord. Il en résulte que pour $\delta = h^{1/3}$, en prenant $D\mathbf{u}(\theta)(\psi_i \nu_0)(x) = 0$ pour x dans $\Gamma(\theta) \cap B^c(x_i, \delta)$, l'erreur pour la norme C^α commise est plus petite que $h^{1-\alpha}$.

Finalement, on précise que dans les calculs qu'on a fait en dimension deux, on a évalué $D_h \mathbf{u}^i$ dans $\Gamma(\theta) \cap B^c(x_i, \delta)$, avec δ celui du chapitre 3. Nous pensons qu'en dimension deux, où on a un problème de Dirichlet (au lieu d'un problème de Neumann en dimension trois), le domaine d'évaluation du gradient doit être plus petit, donc le gain plus important. \square

Les relations (2.52) et (2.53) permettent de comparer les complexités des méthodes de Newton et de gradient. Il en découle que pour n grand (i.e. on compte que les termes en n^3), la complexité de la méthode de Newton est huit fois plus grande que la complexité de la méthode du gradient. Donc, ces méthodes deviennent comparables, tout en étant des méthodes à l'ordre de convergence différent.

2.3.4.2 Des résultats numériques.

On a fait des simulations numériques, pour j de la forme :

$$j = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_i \delta(M_i), \quad M_i \in \mathbb{R}^N, \quad (2.54)$$

où $\delta(M_i)$ est la masse de Dirac dans le point M_i . On remarque, qu'avec la condition $\Omega(\theta) \cap \text{supp}(j) = \emptyset$, on a que

$$-\int_{e\Omega(\theta)} |D\mathbf{u}(\theta)|^2 = \int_{e\Omega(\theta)} |D\mathbf{v}(\theta)|^2 - \int_{e\Omega(\theta)} |Dj^*|^2,$$

donc l'équation (2.27) a toujours un sens.

Pour l'étude de la stabilité (dans la sous-section suivante), on va considérer une fonction de courant j , dépendant d'un paramètre. \square

1. Le premier exemple est avec un nombre de noeuds $n = 128$, $n_j = 4$, $\sigma = 0.003$ et la contrainte $M(\theta) = m(\Omega(\theta)) - \pi$.

La fonction j est égale à $\delta(M_1) - \delta(M_2) + \delta(M_3) - \delta(M_4)$, où $\delta(M_i)$ est la masse de Dirac en M_i avec :

$$M_1 = (1, 0), \quad M_2 = (0, 1), \quad M_3 = (-1, 0), \quad M_4 = (0, -1). \quad (2.55)$$

Dans le tableau TAB. 2.1 (FIG. 2.1) on présente les valeurs de $|\psi_{l,h} - \psi_h^*|_2$ (pour la norme 2), $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2 := |\mathcal{F}_h(1, \dots, n)|_2$ (les n premières coordonnées de \mathcal{F}_h) et $|\mathcal{M}_h|$. Avec ψ_h^* on a noté la solution numérique qu'on obtient pour l très grand.

l	$ \psi_{l,h} - \psi_h^* _2$	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $
1	0.24E+00	0.14E-02	0.31E-14
2	0.52E-01	0.43E-01	0.44E-01
3	0.55E-02	0.33E-02	0.33E-02
4	0.15E-03	0.17E-04	0.16E-04
5	0.20E-05	0.51E-07	0.90E-08
6	0.80E-07	0.13E-08	0.36E-11
7	0.27E-08	0.44E-10	0.17E-13
8	0.90E-10	0.15E-11	0.31E-14
9	0.29E-11	0.57E-13	0.31E-14
10	0.10E-12	0.25E-14	0.31E-14

TAB. 2.1.

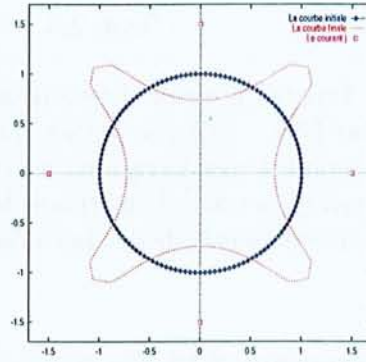


FIG. 2.1.
Courbe initiale et la courbe finale.

1'. Dans cet exemple on commence avec les mêmes données que dans l'exemple 1. et puis on fait évaluer σ .

Dans le tableau qui suit (TAB. 2.2.), on présente le nombre des itérations nécessitées pour la convergence, en utilisant la méthode de Newton, à gauche, et en utilisant une méthode de type Quasi-Newton (B.F.G.S), à droite. Avec la méthode de Quasi-Newton, l'approximation de la dérivée seconde à l'itération l est obtenue à partir des approximations des dérivées premières aux itérations $\{l - p_l, l\}$, où p_l sont des entiers convenablement choisis. Pour plus de détails concernant cette méthode, voir [42] et les références qui y sont citées.

Dans cet exemple σ évolue de 0.003 à 0.001. Noter que toutes les données initiales sont les mêmes pour les deux méthodes.

σ	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h _2$	Newton	Q-Newton
0.003	6.245D-10	0.94E-07	4	153
0.002	7.997D-08	0.14E-07	7	167
0.001	1.121D-11	0.94E-07	14	201

TAB. 2.2.

2. Le deuxième exemple (FIG. 2.2.) est avec $n = 128$, $n_j = 12$, σ évoluant de 0.05 à 0.005 et la contrainte $M(\theta) = m(\Omega(\theta)) - 4$.

σ	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $	N.	Q-N.
0.05	0.13E-06	0.13E-06	5	56
0.03	0.64E-05	0.64E-05	7	73
0.01	0.71E-08	0.61E-08	10	102
0.0075	0.74E-07	0.69E-07	12	132
0.005	0.54E-11	0.32E-13	16	148

TAB. 2.3.

Dans le tableau ci-dessus on présente l'erreur $|\psi_{l,h} - \psi_h^*|_2$, la norme $|\mathcal{F}_h|_2$ et $|\mathcal{M}_h|$, et le nombre des itérations nécessitées pour la convergence avec la méthode de Newton (N.) et avec la méthode de Quasi-Newton (Q-N.).

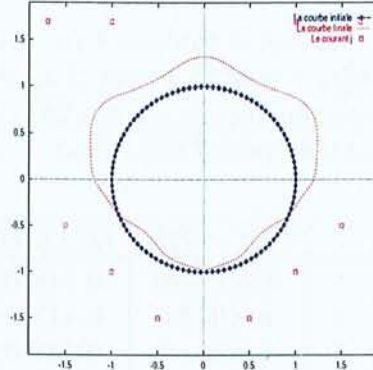


FIG. 2.2.
Courbe initiale et la courbe finale.

Remarque 2.18 Les résultats obtenus dans ces exemples permettent d'analyser la vitesse de convergence de la méthode de Newton en optimisation de formes. Dans le tableau TAB. 2.4. on présente l'évaluation de la constante C (donnée au titre du tableau 2.4), avec α différents, pour les données du tableau TAB. 2.1. On voit que la méthode de Newton qu'on utilise possède une convergence linéaire. Nous pensons que cet écart de la convergence quadratique est dû aux différentes approximations de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , voir la remarque 1.32.

l	$\alpha = 1.00$	$\alpha = 1.05$	$\alpha = 1.10$	$\alpha = 1.15$
1	1.0000	1.0740	1.1534	1.2387
2	0.2167	0.2327	0.2499	0.2684
3	0.1058	0.1226	0.1422	0.1648
4	0.0273	0.0354	0.0459	0.0595
5	0.0133	0.0207	0.0322	0.0499
6	0.0400	0.0771	0.1486	0.2864
7	0.0338	0.0764	0.1730	0.3916
8	0.0333	0.0894	0.2397	0.6429
9	0.0322	0.1024	0.3256	1.0352
10	0.0345	0.1302	0.4913	1.8546

TAB. 2.4. L'évaluation de $C = \frac{|\psi_{l+1,h} - \psi_h^*|_2}{|\psi_{l,h} - \psi_h^*|_2^\alpha}$.

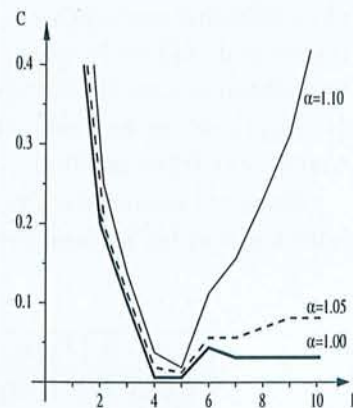


FIG. 2.3.

2.3.5 L'étude numérique de la stabilité.

La proposition 1.22 montre que prouver que θ^* est un minimum local strict de \mathbf{E} avec la contrainte $\mathbf{M} = 0$, est équivalent à prouver que ψ^* est un minimum local strict de \mathcal{E} , avec la contrainte $\mathcal{M} = 0$.

Or, si θ^* , Λ^* satisfont (2.27), la proposition 1.27 donne une condition suffisante d'un minimum local strict de \mathbf{E} , avec contrainte $\mathbf{M} = 0$. Grâce au théorème 1.23 cette condition est équivalente à :

$$\exists \beta > 0, \forall \phi \in \mathcal{M}'(\psi^*), \left(\mathcal{E}''(\psi^*) + \Lambda^* \mathcal{M}''(\psi^*) \right) (\phi, \phi) \geq \beta \|\phi\|_{C^k(\partial Q)}. \quad (2.56)$$

Pour vérifier (2.56), il est plus commode de se placer dans un espace de Hilbert. Pour $m \in \mathbb{N}$, introduisons $H^m(\partial Q)$, l'espace classique de Hilbert sur ∂Q , muni de son produit scalaire (\cdot, \cdot) (voir, par exemple [1]).

On reprend les notations de la sous-section 1.5.2 et on note :

$$B(u, v) := \left(\mathcal{E}''(\psi^*) + \Lambda^* \mathcal{M}''(\psi^*) \right) (u, v), \quad (u, v) \in H^m(\partial Q) \times H^m(\partial Q),$$

et \mathbf{Q} la forme quadratique associé à B .

Pour m assez grand (par exemple $m \geq k + 1$), on a que l'injection $H^m(\partial Q) \subset C^k(\partial Q)$ est continue, et par conséquent B est une forme bilinéaire, symétrique et continue sur $H^m(\partial Q)$.

Si on suppose que B (en fait l'opérateur défini par B) est compact, alors $H^m(\partial Q)$ admet une base dénombrable composée des vecteurs propres de B . Si μ_1, μ_2, \dots sont les valeurs propres de B , alors il est clair que la condition (2.56) peut s'écrire en termes de \mathbf{Q} sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ On trouve } \mu_i, \mathbf{e}_i \text{ tels que } \mathbf{Q}(\mathbf{e}_i) = \mu_i \mathbf{e}_i, \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \\ 2. \text{ On vérifie que } \exists \beta > 0, \mu_i \geq \beta, i = 2, 3, \dots \\ 3. \text{ On vérifie que } \mathcal{M}'(\psi^*) = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

En une version discrétisée, grâce au théorème 1.30, (2.57) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Trouver } \mu_1, \dots, \mu_n, \text{ les valeurs propres de } \mathbf{Q}_h := [\mathcal{F}'_h]_{n \times n}, \\ \text{avec } \mathcal{F}'_h \text{ donné par (2.48) .} \\ 2. \text{ Vérifier que } \exists \beta > 0, \forall h, \beta \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n. \\ 3. \text{ Trouver } v_H \text{ tel que } v_H = \{ \mathcal{M}'_h(\psi_h^*) = 0 \}. \\ 4. \text{ Vérifier que si } \mu_1 < 0 \text{ alors } \mathbf{Q}_h^{-1}(v_H) := v_H \cdot \mathbf{Q}_h \cdot v_H \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.58)$$

On finit ce chapitre par une étude numérique de (2.58), c'est-à-dire de stabilité. Nous avons effectué des tests numériques avec un σ assez grand, et j égale à une somme de mesures de Dirac, comme dans (2.54), donné par :

$$j(s) = \delta \begin{pmatrix} 1-s \\ 1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} -1+s \\ +1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1+s \\ -1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} +1-s \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$j(0) = \delta(1, 1) - \delta(-1, 1) + \delta(-1, -1) - \delta(1, -1).$$

Une analyse théorique de stabilité faite dans [25], montre que pour s proche de 0, le minimum de (2.5) est stable. Ce minimum n'est plus stable quand s devient assez proche de 1.

On a fait des simulations numériques avec ces données initiales : $n = 128$, $\sigma = 1.0$ et $j = j(0)$. Puis on a varié j en prenant $j = j(s)$ pour s variant dans $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau TAB. 2.5.

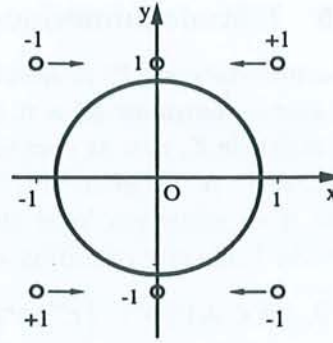


FIG. 2.4. La fonction $j(0)$.

s	μ_1	μ_2	$\mu_3 \dots$	$Q_h^{-1}(v_H)$
0.1	-0.061174	0.000204	0.000204	-2092.3841
0.2	-0.061132	0.000209	0.000283	-2093.8198
0.3	-0.061076	0.000201	0.000402	-2095.7351
0.4	-0.060999	0.000176	0.000582	-2098.3882
0.5	-0.060890	0.000131	0.000847	-2102.1398
0.6	-0.060738	0.000063	0.001222	-2107.3934
0.7	-0.060537	-0.000024	0.001715	-2114.3274
0.8	-0.060317	-0.000110	0.002247	-2121.9625
0.9	-0.060227	-0.000143	0.002464	-2125.1223

TAB. 2.5. $\sigma = 1.0$, $m_0 = \pi \cdot 0.8^2$, $s^*(\sigma) = 0.7$.

Cet exemple montre qu'il existe une valeur critique $s^*(\sigma)$, telle que le minimum local change nature quand s devient plus grand que $s^*(\sigma)$. En effet, dans le tableau TAB. 2.5. on voit que $s^*(\sigma) = 0.7$. Pour $s < s^*(\sigma)$, ψ_h^* approche un minimum local de \mathbf{E} avec la contrainte de la mesure fixe, et ce minimum local est stable. Pour $s \geq s^*(\sigma)$ on n'a plus de minimum local parce que $\mu_1, \mu_2 < 0$.

Ces résultats numériques confirment l'analyse théorique faite dans [25]. \square

Pour établir le lien entre σ et $s^*(\sigma)$ on présente d'autres résultats pour des valeurs différentes de σ .

s	μ_1	μ_2	$\mu_3 \dots$	$Q_h^{-1}(v_H)$
0.1	-0.005969	0.000169	0.000169	-21444.5033
0.2	-0.005928	0.000173	0.000247	-21591.9478
0.3	-0.005874	0.000164	0.000365	-21787.3825
0.4	-0.005803	0.000137	0.000539	-22053.4131
0.5	-0.005706	0.000088	0.000792	-22417.7100
0.6	-0.005581	0.000017	0.001136	-22901.3859
0.7	-0.005433	-0.000068	0.001558	-23489.4720
0.8	-0.005292	-0.000144	0.001963	-24065.0559
0.9	-0.005253	-0.000165	0.002076	-24233.3925

TAB. 2.6. $\sigma = 0.1$, $m_0 = \pi \cdot 0.8^2$, $s^*(\sigma) = 0.7$.

s	μ_1	μ_2	$\mu_3 \dots$	$Q_h^{-1}(v_H)$
0.1	-0.000460	0.000155	0.000155	-278139.0754
0.2	-0.000428	0.000152	0.000224	-298575.1458
0.3	-0.000394	0.000130	0.000325	-323233.8330
0.4	-0.000362	0.000086	0.000463	-347508.9873
0.5	-0.000341	0.000022	0.000634	-360568.6209
0.6	-0.000336	-0.000048	0.000813	-355052.4372
0.7	-0.000341	-0.000106	0.000952	-340463.0996
0.8	-0.000346	-0.000133	0.001004	-332686.5119
0.9	-0.000347	-0.000120	0.000937	-335568.1009

TAB. 2.7. $\sigma = 0.01$, $m_0 = \pi \cdot 0.8^2$, $s^*(\sigma) = 0.6$.

s	μ_1	μ_2	$\mu_3 \dots$	$Q_h^{-1}(v_H)$
0.1	0.000040	0.000107	0.000107	3071454.2846
0.2	0.000041	0.000080	0.000148	2932333.3925
0.3	0.000009	0.000021	0.000199	11854844.8650
0.4	-0.000057	-0.000055	0.000246	-1420132.8221
0.5	-0.000118	-0.000111	0.000274	-540943.7567
0.6	-0.000140	-0.000131	0.000279	-414494.3117
0.7	-0.000129	-0.000122	0.000263	-485194.4248
0.8	-0.000101	-0.000096	0.000233	-719613.0691
0.9	-0.000067	-0.000066	0.000196	-1240088.9288

TAB. 2.8. $\sigma = 0.001$, $m_0 = \pi \cdot 0.8^2$, $s^*(\sigma) = 0.4$.

Ces résultats montrent que quand σ devient petit, la valeur critique $s^*(\sigma)$ devient petit. C'est-à-dire, pour σ petit, on a minimum local si la configuration du support de j est plus "proche" de la configuration symétrique, correspondant à $s = 0$.

De plus, le tableau TAB. 2.8. montre, numériquement, que le minimum local avec contrainte est aussi minimum local sans contrainte. Nous pensons que ceci est dû à la valeur petite de σ , donc le minimum est essentiellement dû au premier terme de \mathbf{E} .

Year	1990	1991	1992	1993
1990	1.00	1.00	1.00	1.00
1991	1.00	1.00	1.00	1.00
1992	1.00	1.00	1.00	1.00
1993	1.00	1.00	1.00	1.00
1994	1.00	1.00	1.00	1.00
1995	1.00	1.00	1.00	1.00
1996	1.00	1.00	1.00	1.00
1997	1.00	1.00	1.00	1.00
1998	1.00	1.00	1.00	1.00
1999	1.00	1.00	1.00	1.00
2000	1.00	1.00	1.00	1.00

Table 1: Data for the first part of the exercise.

Year	1990	1991	1992	1993
1990	1.00	1.00	1.00	1.00
1991	1.00	1.00	1.00	1.00
1992	1.00	1.00	1.00	1.00
1993	1.00	1.00	1.00	1.00
1994	1.00	1.00	1.00	1.00
1995	1.00	1.00	1.00	1.00
1996	1.00	1.00	1.00	1.00
1997	1.00	1.00	1.00	1.00
1998	1.00	1.00	1.00	1.00
1999	1.00	1.00	1.00	1.00
2000	1.00	1.00	1.00	1.00

Table 2: Data for the second part of the exercise.

The following table shows the results of the regression analysis. The first column represents the year, and the second column represents the estimated coefficient. The third column represents the standard error of the coefficient. The fourth column represents the t-statistic, and the fifth column represents the p-value.

The results show that the coefficient is significantly positive, indicating a positive relationship between the variables. The t-statistic is greater than the critical value, and the p-value is less than the significance level.

Chapitre 3

Un problème d'optimisation de formes en dimension trois.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux minima locaux, avec comme contrainte la mesure du domaine fixe, d'une fonctionnelle E . Aussi, au calcul numérique de ces minima. La fonctionnelle E dépend du gradient de la solution d'un problème de Neumann à l'extérieur d'un domaine dans \mathbb{R}^3 , du périmètre du domaine et d'un autre terme, dit de gravitation. Le problème est un modèle pour le formage électromagnétique en dimension trois, quand la fréquence des courants électriques est très grande (voir, [4], [43]).

Dans la section 3.1, on pose le problème et on introduit les notations nécessaires. Dans la section 3.2 on étudie la dérivabilité par rapport à la forme de la solution du problème de Neumann à l'extérieur. Le résultat est obtenu en passant en un problème à l'intérieur par utilisation de la transformation de Kelvin et en utilisant des résultats classiques de dérivabilité par rapport à la forme, par exemple dans [51], [52]. On établit aussi l'expression de la dérivée première et seconde de la fonctionnelle énergie E . Une difficulté qui se pose est de retrouver la symétrie de la dérivée seconde, ce que nous faisons à l'aide de quelques intégrations par parties adéquates sur le bord. Il est intéressant de remarquer que les formules classiques de dérivation par rapport à la forme des fonctionnelles sous la forme d'une intégrale sur le bord, donnent des expressions qui sont difficiles à utiliser dans les calculs numériques. Pour cette raison, on donne une autre expression, pratique à calculer, de la dérivée seconde de la fonctionnelle énergie, en faisant une série d'intégrations par parties sur le bord.

La section 3.3 est consacrée à la méthode numérique. On fait une discrétisation classique avec des fonctions linéaires par morceaux sur le bord. Ceci permet de construire un algorithme numérique simple, mais en revanche, l'approximation du gradient du problème de Neumann devient plus délicate. En effet, seulement les valeurs au bord interviennent. Alors, le problème de Neumann est résolu en utilisant une représentation intégrale, dont le noyau est

faiblement singulier. Mais, dans le modèle de l'approximation linéaire par morceaux ce noyau devient singulier. Dans la sous-section 3.3.2 on présente l'approximation au bord de la solution, et de son gradient, de ce problème de Neumann à l'extérieur. On a montré l'existence de la solution du problème approché, et on a prouvé que l'erreur pour la norme C^0 de l'approximation au bord de la solution du problème de Neumann, et de son gradient, est de l'ordre de $h^{1-\epsilon}$, $\epsilon \in]0, 1[$, où h est un paramètre de discrétisation.

Dans la sous-section 3.3.3, on présente la résolution numérique du problème de minimisation qu'on se propose de résoudre. On fait aussi une analyse de la complexité de la méthode de Newton en dimension trois. On prouve que la complexité de cette méthode est au plus, 4.5 fois plus grande que la complexité de la méthode du gradient. Le chapitre finit avec une analyse des résultats numériques.

3.1 La position du problème.

Soit \mathcal{O} la famille des ouverts définie dans (1.4), $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq m \geq 2$, $N = 3$ et $\Omega \in \mathcal{O}$ (Ω est le volume d'espace occupé par le métal liquide).

On note j la fonction *densité des courants*:

$$j \in (H^{m-1}(\mathbb{R}^3))^3 \text{ à support compact, } \operatorname{div} j = 0 \text{ dans } H^{m-2}(\mathbb{R}^3). \quad (3.1)$$

Avec B on note la fonction champ magnétique $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, créée par les courants électriques de densité j .

Alors, sur Ω il y a trois forces qui agissent : les forces magnétiques, les forces de tension superficielle et les forces de gravitation. Si $\Omega \in \mathcal{O}$ est le domaine pour lequel ces trois forces sont en équilibre, on a :

$$\operatorname{rot} B = j, \text{ dans } {}^e\Omega, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \text{ dans } {}^e\Omega, \quad (3.3)$$

$$B \cdot \nu = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.4)$$

$$\frac{|B|^2}{2} + \sigma \mathcal{H} + \rho x_3 + \Lambda = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.5)$$

où σ et ρ sont deux constantes, x_3 est la troisième coordonnée d'un point dans \mathbb{R}^3 , \mathcal{H} est la courbure moyenne de $\partial\Omega$, ν le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et orienté vers ${}^e\Omega = {}^c(\overline{\Omega})$, l'extérieur de Ω , et Λ est une constante inconnue du problème.

L'énergie totale de ce système est donnée par la fonctionnelle E (voir, par exemple [43]) :

$$E : \begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega & \rightarrow E(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{{}^e\Omega} |B|^2 dx + \sigma P(\Omega) + \rho \int_{\Omega} x_3 dx, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $P(\Omega)$ est le périmètre de Ω .

Alors, du point de vue variationnel, le domaine Ω est un minimum local de E dans \mathcal{O} , avec la contrainte que sa mesure est fixée, ou tout au moins un point critique de E , i.e. qui annule la dérivée première de E par rapport au domaine (voir (3.26) plus loin). \square

Dans la suite on reprend les notations de la section 2.1. En particulier, $\mathbb{H}^m({}^e\Omega)$ est donné par (2.9). Maintenant, pour construire le champ B , en suivant [43] on a la proposition :

Proposition 3.1 *Soit $\Omega \in \mathcal{O}$. Il existe un unique champ $B \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$ satisfaisant (3.2), (3.3) et (3.4). En plus, si on note :*

$$B^1(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} j(y) \wedge D_x \Phi(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (3.7)$$

où \wedge est le produit vectoriel et Φ donné par (2.36), alors

$$B = B^1 + Du_\Omega \quad \text{dans } {}^e\Omega, \quad (3.8)$$

avec $B^1 \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$ et u_Ω l'unique solution dans $\mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega)$ (voir la proposition 3.2 qui suit) du problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = 0, & \text{dans } {}^e\Omega, \\ Du_\Omega \cdot \nu = -B^1 \cdot \nu, & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_\Omega = o(1), & \text{à l'infini.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Démonstration. Grâce au lemme 2.1, [43], où cette proposition est montrée pour $m = 1$, il suffit de montrer que B est dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega)$ ce qui est équivalent à montrer que B^1 est dans $(\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$.

En effet, si $B^1 \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$, les conditions de la proposition 3.2 sont satisfaites pour $m + 1$ au lieu de m , donc de cette proposition on a $u \in \mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega)$, ce qui implique (comme pour v ci-dessous) que $Du \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$.

Prouvons que $B^1 \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$. Soit $B(x_0, r_0) \subset \Omega$, $I(x_0, r_0)$ la transformation Kelvin, et on note $\omega = I(x_0, r_0)({}^e\Omega) \cup \{x_0\}$. Soit $v = j * \Phi$, avec $*$ l'opérateur de la convolution. Il est clair que les composantes de B^1 sont des combinaisons linéaires des éléments de la matrice Dv . Or, si $v \in (\mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega))^3$, en notant $\tilde{v} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $v(x) = \frac{r_0}{|x - x_0|} \tilde{v}(\tilde{x})$, $\tilde{x} = I(x_0, r_0)(x)$, grâce à l'égalité suivante :

$$Dv(x) = \frac{r_0}{|x - x_0|} \left[\frac{|\tilde{x} - x_0| \delta_{ij} - 2(\tilde{x} - x_0)_i (\tilde{x} - x_0)_j}{r_0^2} D\tilde{v}(x) - \frac{\tilde{x} - x_0}{r_0^2} \tilde{v}(x) \right],$$

on a $Dv \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^9$ et par conséquent $B^1 \in (\mathbb{H}^m({}^e\Omega))^3$.

Donc, il ne reste qu'à prouver que $v \in (\mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega))^3$. De (2.11), \tilde{v} satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v} = \frac{r_0^3}{|x - x_0|^3} j \circ I(x_0, r_0) =: f, & \text{dans } \omega, \\ \tilde{v} = v \circ I(x_0, r_0), & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (3.10)$$

Du fait que j est à support compact, on a $f \in (H^{m-1}(\omega))^3$. D'autre part, par des résultats classiques concernant la convolution (voir, par exemple [5], [19], [35]), on a $v \in (H^{m+1}(\mathbb{R}^3))^3$, donc $v \circ I(x_0, r_0)|_{\partial\omega} \in (H^{m+1/2}(\partial\omega))^3$. Alors, de (3.10) on déduit (voir, par exemple [5], [19]) que $\tilde{v} \in (H^{m+1}(\omega))^3$, ce qui prouve que $v \in (\mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega))^3$ et finit la démonstration. \square

Soit Θ donné par (1.1), Ω , resp. Γ , la fonction définie par (1.2), resp. (1.3), et construisons les fonctions \mathbf{u} et \mathbf{B} :

$$\mathbf{u} : \begin{cases} \mathcal{O}^{-1} & \rightarrow \bigcup_{\theta \in \mathcal{O}^{-1}} \mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega(\theta)), \\ \theta & \rightarrow u_{\Omega(\theta)}, \text{ donné par (3.9) pour } \Omega = \Omega(\theta), \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B} : \begin{cases} \mathcal{O}^{-1} & \rightarrow \bigcup_{\theta \in \mathcal{O}^{-1}} \mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta)), \\ \theta & \rightarrow \mathbf{B}(\theta) = B^1 + D\mathbf{u}(\theta). \end{cases} \quad (3.12)$$

Comme dans le chapitre précédent, on construit les fonctions \mathbf{E} et \mathbf{M} :

$$\mathbf{E}, \mathbf{M} : \mathcal{O}^{-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{E} = E \circ \Omega, \quad \mathbf{M} = m \circ \Omega - m_0, \quad (3.13)$$

et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \theta^* \in \Theta, \mathbf{M}(\theta^*) = 0, \exists \mathcal{U} \subset \Theta \text{ ouvert, } \theta^* \in \mathcal{U} : \\ \forall \theta \in \mathcal{U}, \mathbf{M}(\theta) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}(\theta^*) \leq \mathbf{E}(\theta). \end{cases} \quad (3.14)$$

Le problème d'existence et de régularité du problème (3.14) est toujours ouvert. Nous supposons que le problème (3.14) admet une solution $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$ et on s'intéresse à trouver numériquement un θ_h^* qui approche θ^* .

Si on note \mathbf{L} le lagrangien :

$$\mathbf{L} : \mathcal{O}^{-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta, \Lambda) \rightarrow \mathbf{L}(\theta, \Lambda) = \mathbf{E}(\theta) + \Lambda \mathbf{M}(\theta), \quad (3.15)$$

sous condition de dérivabilité de \mathbf{L} en θ^* , de (1.62) on a la condition nécessaire pour θ^* :

$$\mathbf{L}'(\theta^*) : = \mathbf{E}'(\theta^*) + \Lambda^* \mathbf{M}'(\theta^*) = 0, \quad \mathbf{M}(\theta^*) = 0. \quad (3.16)$$

La méthode numérique qu'on va utiliser pour résoudre (3.16) est la méthode de Newton, donc il est nécessaire de calculer la dérivée première et seconde de \mathbf{L} .

3.2 La dérivabilité par rapport à la forme.

Dans cette section, on va étudier la dérivée par rapport à la forme de $\mathbf{u}(\theta)$, resp. $\mathbf{L}(\theta, \Lambda)$, donné par (3.11), resp. (3.15).

3.2.1 La dérivée par rapport à la forme de la solution du problème de Neumann à l'extérieur.

Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$ et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}(\theta) = 0, & \text{dans } {}^e\Omega(\theta), \\ D\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu(\theta) = g, & \text{sur } \Gamma(\theta), \\ \mathbf{u}(\theta) = o(1), & \text{à l'infini.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Les résultats de la proposition suivante sont classiques. Ils donnent une représentation intégrale de $\mathbf{u}(\theta)$ et $D\mathbf{u}(\theta)$.

Proposition 3.2 Soit $g \in H^{m-3/2}(\Gamma(\theta))$. Alors, il existe une unique fonction $q \in H^{m-3/2}(\Gamma(\theta))$ tel que :

$$\mathbf{u}(\theta)(x) = \int_{\Gamma(\theta)} q(y) \Phi(x, y) dy, \quad x \in {}^e\Omega(\theta), \quad (3.18)$$

est l'unique solution dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ de (3.17). La fonction q est l'unique solution dans $H^{m-3/2}(\Gamma(\theta))$ de :

$$q(x) - 2 \int_{\Gamma(\theta)} q(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(\theta)(x)} dy = -2g(x), \quad x \in \Gamma(\theta). \quad (3.19)$$

Si $q \in C^\alpha(\Gamma(\theta))$, $\alpha \in]0, 1[$, alors $D\mathbf{u}(\theta) \in (C^\alpha(\Gamma(\theta)))^3$ et :

$$D\mathbf{u}(\theta)(x) = -\frac{1}{2}q(x)\nu(\theta)(x) + \int_{\Gamma(\theta)} q(y) D_x \Phi(x, y) dy, \quad (3.20)$$

où l'intégrale est comprise au sens de la valeur principale de Cauchy.

Démonstration. Pour $m = 1$, la résolution de (3.17) avec une représentation intégrale de simple couche est donnée dans [39], où il est montré aussi que q est la solution de (3.19).

L'expression du $D\mathbf{u}(\theta)$ au bord est montrée, par exemple dans [10], [39].

Donc, il reste à montrer que, $\mathbf{u}(\theta) \in \mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ pour $m > 1$.

En effet, de (3.17) et des résultats classiques de régularité, voir par exemple [5], [19], il découle que la fonction $\mathbf{u}(\theta)$ est dans $H_{loc}^m({}^e\Omega(\theta))$ (jusqu'au bord $\Gamma(\theta)$), donc $\mathbf{u}(\theta)|_{\Gamma(\theta)} \in H^{m-1/2}(\Gamma(\theta))$.

On note $\omega = I(x_0, r_0)({}^e\Omega(\theta)) \cup \{x_0\}$ et soit $\tilde{\mathbf{u}} : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que $\mathbf{u}(\theta)(x) = \frac{r_0}{|x - x_0|} \tilde{\mathbf{u}}(\theta)(\tilde{x})$, $\tilde{x} = I(x_0, r_0)(x)$. Alors, de (2.11) :

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}(\theta) = 0, \quad \text{dans } \omega \setminus \{x_0\}.$$

D'autre part, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| \tilde{\mathbf{u}}(\theta)(x) = r_0 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{u}(\theta) \circ I(x_0, r_0)(x) = 0$. Alors, de la proposition 16, [15] on obtient :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\theta) = 0, & \text{dans } \omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}(\theta) = \mathbf{u}(\theta) \circ I(x_0, r_0), & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Comme $\mathbf{u}(\theta) \in H^{m-1/2}(\Gamma(\theta))$, il est clair que $\tilde{\mathbf{u}}(\theta)|_{\partial\omega} \in H^{m-1/2}(\partial\omega)$. Donc, par des résultats classiques de régularité (voir, par exemple [5], [19]), il découle que $\tilde{\mathbf{u}}(\theta) \in H^m(\omega)$, ce qui prouve que $\mathbf{u}(\theta) \in \mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$. \square

La dérivabilité de la solution du problème de Neumann à l'intérieur est étudiée, par exemple dans [37] et [52]. La proposition suivante donne la dérivabilité de la solution du problème de Neumann à l'extérieur. Elle se montre en utilisant la même technique que celle utilisée dans la démonstration de la proposition 2.9. Donc, par l'utilisation de la transformation de Kelvin on se ramène à un domaine "intérieur" borné. Remarquons que le problème de Neumann à l'extérieur se transforme en un problème à l'intérieur du type $-\Delta(\cdot) = 0$ avec condition au bord du type Robin (Neumann plus Dirichlet). Alors, la première partie de la proposition qui suit se démontre en utilisant le théorème des fonctions implicites, tandis que l'autre partie se prouve en utilisant le lemme 2.1, [51] et le théorème 3.1, [52].

On rappelle que $\hat{\tau}$ est le prolongement de classe C^k à support compact de $\tau \circ \theta^{-1}$ donné, par exemple, par le lemme 6.37, [19].

Proposition 3.3 *La fonction $\tau \rightarrow \mathbf{u}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau})$ est dérivable en zéro de Θ dans $\mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega(\theta))$, où $\hat{\tau}$ est comme dans la proposition 2.9.*

De plus, la fonction \mathbf{u} est localement dérivable en θ (au sens de la définition 2.5), de Θ dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$ et $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$, sa dérivée en θ dans la direction ξ , est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{u}'(\theta)(\xi) = 0, & \text{dans } {}^e\Omega(\theta), \\ D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot \nu = DB(\theta) \cdot \delta(V \cdot \nu) \\ \quad - (V \cdot \nu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu^2} + \frac{\partial B^1}{\partial \nu} \cdot \nu \right), & \text{sur } \Gamma(\theta), \\ \mathbf{u}'(\theta)(\xi) = o(1), & \text{à l'infini,} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

où $V = \xi \circ \theta^{-1}$, $\nu = \nu(\theta)$ et δ est l'opérateur gradient tangentiel :

$$\delta\varphi = D\varphi - \left(D\varphi \cdot \nu(\theta) \right) \nu(\theta), \quad \forall \varphi \in C^1(\Gamma(\theta)). \quad (3.22)$$

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle déjà faite pour le problème bidimensionnel (voir la proposition 2.9 dans le chapitre 2).

Donc, il existe $x_0 \in \Omega(\theta + \tau)$ et $r_0 > 0$ tels que pour tout $\tau \in \Theta$ assez petit, $B(x_0, r_0) \subset \Omega(\theta + \tau)$. Soit $\mathbf{u}(\theta + \tau)$ la solution de (3.9) pour $\Omega = \Omega(\theta + \tau)$, et $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)(\tilde{x}) = \frac{r_0}{|\tilde{x} - x_0|} \mathbf{u}(\theta + \tau)(x)$, $x = I(x_0, r_0)(\tilde{x})$. Donc, on a $\lim_{\tilde{x} \rightarrow x_0} |\tilde{x} - x_0| \tilde{\mathbf{u}}(\tau) = 0$. Alors, de la proposition 16, [15], on a :

$$-\Delta \tilde{\mathbf{u}}(\tau) = 0, \quad \text{dans } \omega(\tau) := I(x_0, r_0)({}^e\Omega(\theta + \tau)). \quad (3.23)$$

Quant à la condition au bord pour $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)$, on note $\tilde{\nu}(\tau)$ la normale unitaire au bord $\gamma(\tau) := \partial\omega(\tau)$, orientée vers l'intérieur de $\omega(\tau)$. Il est facile à vérifier que :

$$\tilde{\nu}(\tau)(\tilde{x}) = O(\tilde{x}) \cdot \nu(\theta + \tau)(x), \quad x = I(x_0, r_0)(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \gamma(\tau),$$

où O est une matrice orthogonale, donnée par (2.8). Ceci permet d'obtenir la condition sur $\gamma(\tau)$ pour $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)$:

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \tilde{\nu}(\tau) &= D_{\tilde{x}} \left(\frac{r_0}{|\tilde{x} - x_0|} \mathbf{u}(\theta + \tau)(x) \right) \cdot \tilde{\nu}(\tau) \\ &= - \frac{(\tilde{x} - x_0) \cdot \tilde{\nu}(\tau)}{|\tilde{x} - x_0|^2} \tilde{\mathbf{u}}(\tau) - \frac{r_0^3}{|\tilde{x} - x_0|^3} \left(B^1 \cdot \nu(\theta + \tau) \right) \circ I(x_0, r_0). \end{aligned}$$

Donc, sur $\gamma(\tau)$ la fonction $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)$ satisfait une condition du type Robin :

$$\begin{aligned} C_R^1(\tau, \tilde{\mathbf{u}}(\tau)) + C_R^2(\tau, D\tilde{\mathbf{u}}(\tau)) + C_R^3(\tau) &= \frac{(\tilde{x} - x_0) \cdot \tilde{\nu}(\tau)}{|\tilde{x} - x_0|^2} \tilde{\mathbf{u}}(\tau) + D\tilde{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \tilde{\nu}(\tau) \\ &\quad + \frac{r_0^3}{|\tilde{x} - x_0|^3} \left(B^1 \cdot \nu(\theta + \tau) \right) \circ I(x_0, r_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comme dans la proposition 2.17, on considère la transformation :

$$I(x_0, r_0) \circ (I_N + \hat{\tau}) \circ I(x_0, r_0) =: I_N + \mathbf{V}(\tau),$$

et soit F la fonction définie autour de $(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))$:

$$F : \begin{cases} D(F) \subset \Theta \times H^{m+1}(\omega(0)) & \rightarrow & H^{m-1}(\omega(0)) \times H^{m-1/2}(\gamma(0)), \\ (\tau, \tilde{\mathbf{v}}) & \rightarrow & \left(-\operatorname{tr} \left({}^t[D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1} \cdot D({}^t[D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1} \cdot D\tilde{\mathbf{v}}) \right), \right. \\ & & \left. C_R^1(\tau, \tilde{\mathbf{v}}) + C_R^2(\tau, {}^t[D(I_N + \mathbf{V}(\tau))]^{-1} \cdot D\tilde{\mathbf{v}}) + C_R^3(\tau) \right). \end{cases}$$

Comme dans la proposition 2.9 on a que F est de classe C^1 autour de $(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))$ et que pour $\tilde{w} \in H^{m+1}(\omega(0))$:

$$F(0, \tilde{\mathbf{u}}(0)) = (0, 0), \quad F'_v(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))(\tilde{w}) = \left(-\Delta\tilde{w}, C_R^1(0, \tilde{w}) + C_R^2(0, D\tilde{w}) \right).$$

Or, on peut montrer que $F'_v(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))$ définit un isomorphisme de $H^{m+1}(\omega(0))$ dans $H^{m-1}(\omega(0)) \times H^{m-1/2}(\gamma(0))$. En effet, prouvons d'abord l'injectivité. Soit alors, $\tilde{w} \in H^{m+1}(\omega(0))$ telle que :

$$-\Delta\tilde{w} = 0, \quad \text{dans } \omega(0), \quad \text{et } C_R^1(0, \tilde{w}) + C_R^2(0, D\tilde{w}) = 0, \quad \text{sur } \gamma(0).$$

Or, $H^{m+1}(\omega(0)) \subset C^{1,1/2}(\omega(0))$. Alors, si $w(x) = \frac{r_0}{|x - x_0|} \tilde{w} \circ I(x_0, r_0)(x)$:

$$\begin{cases} -\Delta w & = 0, \quad \text{dans } {}^e\Omega(\theta), \\ Dw \cdot \nu(\theta) & = 0, \quad \text{sur } \Gamma(\theta), \quad w = o(1), \quad \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Grâce à la proposition 3.2, $w = 0$, donc $\tilde{w} = 0$.

Prouvons la surjectivité de $\tilde{w} \rightarrow F_{\tilde{v}}(0, \tilde{\mathbf{u}}(0))(\tilde{w})$.

Soit $(g, h) \in H^{m-1}(\omega(0)) \times H^{m-1/2}(\gamma(0))$. Il suffit de trouver une fonction $\tilde{w} \in H^{m+1}(\omega(0))$ satisfaisant :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w} & = 0, & \text{dans } \omega(0), \\ C_R^1(0, \tilde{w}) + C_R^2(0, D\tilde{w}) & = h - C_R^1(0, g * \Phi) \\ & - C_R^2(0, D(g * \Phi)), & \text{sur } \gamma(0), \end{cases}$$

où Φ est la solution élémentaire du laplacien, donnée par (2.36). Si on pose à nouveau $w(x) = \frac{r_0}{|x - x_0|} \tilde{w} \circ I(x_0, r_0)(x)$, on trouve que w satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta w & = 0, & \text{dans } {}^e\Omega(\theta), \\ Dw \cdot \nu(\theta) & = \frac{r_0^3}{|x - x_0|^3} \left(h - C_R^1(0, g * \Phi) \right. \\ & \left. - C_R^2(0, D(g * \Phi)) \right) \circ I(x_0, r_0), & \text{sur } \Gamma(\theta), \\ w & = o(1), & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Il est clair que la donnée (ci-dessus) au bord est dans $H^{m-1/2}(\Gamma(\theta))$. De la proposition 3.2 il découle l'existence de $w \in \mathbb{H}^{m+1}({}^e\Omega(\theta))$, solution du système ci-dessus, donc $\tilde{w} \in H^{m+1}(\omega(0))$.

Alors, du théorème des fonctions implicites il existe une unique fonction $\tau \rightarrow \tilde{v}(\tau)$, définie dans un voisinage de $\tau = 0$ dans $H^{m+1}(\omega(0))$, de classe C^1 et satisfaisant $F(\tau, \tilde{v}(\tau)) = (0, 0)$. Du fait que $F(\tau, \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau))) = 0$ et de l'unicité de la fonction $\tilde{v}(\tau)$, on obtient $\tilde{v}(\tau) = \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau))$.

D'autre part, grâce à la relation :

$$\mathbf{u}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau}) = \frac{r_0}{|x - x_0|} \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau)) \circ I(x_0, r_0),$$

il découle la première partie de la proposition.

De la dérivabilité en $\tau = 0$ de $\tau \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \circ (I_N + \mathbf{V}(\tau))$ de Θ dans $H^{m+1}(\omega(0))$, comme dans le lemme 2.1, [51], on peut montrer la dérivabilité locale de $\tilde{\mathbf{u}}$ en 0, de Θ dans $H^m(\omega(0))$. Ceci montre alors, la dérivabilité locale de \mathbf{u} en θ , de Θ dans $\mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta))$.

Pour obtenir les conditions pour $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$, on remarque qu'on a :

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(\theta)(\xi)(\cdot) = \frac{r_0}{|\cdot - x_0|} \tilde{\mathbf{u}}(0)'(\xi) \circ I(x_0, r_0)(\cdot) & \text{dans } {}^e\Omega(\theta) \quad \text{et} \\ \Delta \tilde{\mathbf{u}}'(0)(\xi) = 0, & \text{dans } \omega(0). \end{cases}$$

Alors, la condition $\Delta \mathbf{u}'(\theta)(\xi) = 0$ découle de la deuxième équation ci-dessus et de (2.11).

Quant au comportement de $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$ à l'infini, il suffit d'utiliser la première équation ci-dessus et le fait que $\tilde{\mathbf{u}}'(0)(\xi)$ est de classe C^∞ dans $\omega(0)$.

Enfin, du lemme 2.2 et de la dérivabilité de $\mathbf{u}(\theta+\tau) \circ (I_N + \hat{\tau})$ en $\tau = 0$, de Θ dans $\mathbb{H}^{m+1}(\Omega(\theta))$ nous permettent d'affirmer que les conditions du théorème 3.2, [51] sont satisfaites. Ce théorème donne alors la condition de $\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$ sur $\Gamma(\theta)$ (en utilisant des résultats de dérivation par rapport à la forme de l'extension intrinsèque de la normale, donnés par exemple dans le théorème 1.1, [52]).

3.2.2 La dérivée première et seconde de L . La symétrie de la dérivée seconde.

On écrit la fonctionnelle L sous la forme :

$$L(\theta, \Lambda) = \frac{1}{2}L_1(\theta) + \sigma L_2(\theta) + \rho L_3(\theta) + \Lambda L_4(\theta), \quad (3.25)$$

avec :

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= - \int_{\epsilon\Omega(\theta)} \mathbf{B}^2(\theta) dx, & L_2(\theta) &= P(\Omega(\theta)), \\ L_3(\theta) &= \int_{\Omega(\theta)} x_3 dx, & L_4(\theta) &= \int_{\Omega(\theta)} dx - m_0. \end{aligned}$$

Les deux propositions à suivre donnent la dérivée première et seconde de L . La proposition 3.4 est prouvée aussi dans [43].

Proposition 3.4 *Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors, la fonctionnelle L est dérivable en θ de Θ dans \mathbb{R} et pour $\xi \in \Theta$, $L'(\theta)(\xi)$, la dérivée de L en θ dans la direction ξ , est donnée par :*

$$L'(\theta, \Lambda)(\xi) = \int_{\Gamma(\theta)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2(\theta) + \sigma \mathcal{H}(\theta) + \rho x_3 + \Lambda \right) (V \cdot \nu(\theta)) d\Gamma(\theta), \quad (3.26)$$

où $V = \xi \circ \theta^{-1}$, $\nu(\theta)$ est la normale extérieure à $\Gamma(\theta)$ et $\mathcal{H}(\theta)$ est la courbure moyenne de $\Gamma(\theta)$ donnée par :

$$\mathcal{H}(\theta) = \sum_{i=1}^N \delta_i \nu_i(\theta), \quad (\text{ la divergence tangentielle de } \nu(\theta)). \quad (3.27)$$

Remarque 3.5 *On retrouve à l'aide de (3.26) que l'annulation de la dérivée première donne bien la condition d'équilibre (3.5).*

Démonstration. On va dériver séparément les termes de L .

(i) Soit $\tau \in \Theta$ et $\hat{\tau}$ le prolongement de classe C^k de $\tau \circ \theta^{-1}$, comme dans le lemme 2.6. Si $\tau \in \Theta$ est assez petit on a :

$$L_1(\theta + \tau) = - \int_{\epsilon\Omega(\theta+\tau)} \mathbf{B}^2(\theta + \tau) dx = - \int_{\epsilon\Omega(\theta)} \mathbf{B}^2(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau}) |D(I_N + \hat{\tau})| dx.$$

Grâce à la proposition 3.3, on a que $\tau \rightarrow \mathbf{B}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau})$ est dérivable en $\tau = 0$ de Θ dans $H^m({}^e\Omega(\theta))$. En tenant compte du lemme 2.2, il découle que $\mathbf{B}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau})$ est dérivable en $\tau = 0$ de Θ dans $H^{m-1}({}^e\Omega(\theta))$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_1(\theta)(\xi) &= -2 \int_{{}^e\Omega(\theta)} \mathbf{B}(\theta) \cdot \left(\mathbf{B}(\theta + \tau) \circ (I_N + \hat{\tau}) \right)'(0)(\xi) dx \\ &\quad - \int_{{}^e\Omega(\theta)} \mathbf{B}^2(\theta) \text{tr}(D\hat{\xi}) dx. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Or, d'après le lemme 2.1, [51], on a aussi que $\mathbf{B}(\theta + \tau)$ est localement dérivable en $\tau = 0$ de Θ dans $H^{m-2}({}^e\Omega(\theta))$ et que :

$$\left(\mathbf{B}(\theta + \tau) \circ (I + \hat{\tau}) \right)'(0)(\xi) = \mathbf{B}'(\theta)(\xi) + D\mathbf{B}(\theta) \cdot \hat{\xi}.$$

En tenant compte de la décroissance à l'infini de $\mathbf{B}'(\theta)(\xi)$ et V , et puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_1(\theta)(\xi) &= -2 \int_{{}^e\Omega(\theta)} \mathbf{B}(\theta) \cdot \mathbf{B}'(\theta)(\xi) dx \\ &\quad - \int_{{}^e\Omega(\theta)} D\mathbf{B}^2(\theta) \cdot \hat{\xi} dx - \int_{{}^e\Omega(\theta)} \mathbf{B}^2(\theta) \text{tr}(D\hat{\xi}) dx \\ &= - \int_{{}^e\Omega(\theta)} \text{div}(\mathbf{B}^2(\theta)\hat{\xi}) dx = \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{B}^2(\theta) (V \cdot \nu(\theta)) dx, \end{aligned} \quad (3.29)$$

parce que en tenant compte de (3.12), (3.3) et (3.4) on a :

$$\begin{aligned} \int_{{}^e\Omega(\theta)} \mathbf{B}(\theta) \cdot \mathbf{B}'(\theta)(\xi) dx &= \int_{{}^e\Omega(\theta)} \mathbf{B}(\theta) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) dx \\ &= \int_{{}^e\Omega(\theta)} \text{div}(D\mathbf{B}(\theta))\mathbf{u}'(\theta)(\xi) dx + \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathbf{B}(\theta) \cdot \nu(\theta) \right) \mathbf{u}'(\theta)(\xi) dx = 0. \end{aligned}$$

(ii) Pour le terme \mathbf{L}_2 , dans [20] il est prouvé que :

$$\mathbf{L}'_2(\theta)(\xi) = \int_{\Gamma(\theta)} \delta_i V_i dx = \int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H}(\theta) (V \cdot \nu(\theta)) dx, \quad (3.30)$$

où δ_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du gradient tangentiel, et $\delta_i V_i = \sum_{i=1}^3 \delta_i V_i$.

(iii) Pour le terme \mathbf{L}_3 , si $\tau \in \Theta$, on remarque d'abord que :

$$\mathbf{L}_3(\theta + \tau) = \int_{\Omega(\theta)} (x_3 + \hat{\tau}_3) \det[D(I_N + \hat{\tau})] dx \quad (3.31)$$

$$= \int_{\Omega(\theta)} (x_3 + \hat{\tau}_3) a(\tau) dx, \quad (3.32)$$

où I_N est la transformation identité et $a(\tau) = \det[D(I_N + \hat{\tau})]$. Il est clair que $a(\tau)$ est dérivable, de Θ dans $C_b^{k-1}(\mathbb{R}^N)$, parce que $a(\tau)$ est polynôme en les

composantes de $D\hat{\tau}$. Donc, il suffit de trouver les dérivées de la fonction a . D'une part, on a (voir, par exemple [37], [51], [52]) :

$$(\det[D(I_N + \hat{\tau})])'(0)(\xi) = \text{tr}(D\hat{\xi}), \quad ([D(I_N + \hat{\tau})^{-1}]'(0)(\xi) = -[D\hat{\xi}],$$

où "tr" est la fonction trace. D'autre part si $\xi, \eta \in \Theta$ et $\hat{\xi}$, resp. $\hat{\eta}$ est le prolongement de classe C^k de $\xi \circ \theta^{-1}$, resp. $\eta \circ \theta^{-1}$ (le même prolongement que celui de $\tau \circ \theta^{-1}$) :

$$\begin{aligned} a(\tau + \xi) &= \det[D(I_N + \hat{\tau} + \hat{\xi})] = \\ &= \det[D(I_N + \hat{\tau})] \det([DI_N] + D\hat{\xi} \cdot [D(I_N + \hat{\tau})]^{-1}). \end{aligned}$$

Donc, on obtient que :

$$\begin{aligned} a'(\tau)(\xi) &= \det[D(I_N + \hat{\tau})] \text{tr}([D(I_N + \hat{\tau})]^{-1} \cdot [D\hat{\xi}]), \\ a'(0)(\xi) &= \text{tr}[D\hat{\xi}], \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$a''(0)(\xi, \eta) = \text{tr}[D\hat{\xi}] \text{tr}[D\hat{\eta}] - \text{tr}([D\hat{\xi}] \cdot [D\hat{\eta}]). \tag{3.34}$$

Donc, la dérivée de \mathbf{L}_3 par rapport à θ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_3(\theta)(\xi) &= \int_{\Omega(\theta)} \left(\hat{\xi}_3 a(0) + x_3 a'(0)(\xi) \right) dx \\ &= \int_{\Omega(\theta)} \left(V_3 + x_3 \text{tr}(DV) \right) dx = \int_{\Gamma(\theta)} x_3 \left(V \cdot \nu(\theta) \right), \end{aligned} \tag{3.35}$$

après avoir fait une intégration par parties.

(iv) Finalement, pour le terme \mathbf{L}_4 , du fait que :

$$\mathbf{L}_4(\theta + \tau) = \int_{\Omega(\theta)} a(\tau) dx, \tag{3.36}$$

de (3.33), on aura :

$$\mathbf{L}'_4(\theta)(\xi) = \int_{\Omega(\theta)} \text{tr}(DV) dx = \int_{\Gamma(\theta)} \left(V \cdot \nu(\theta) \right) d\Gamma(\theta), \tag{3.37}$$

ce qui avec (3.29), (3.30) et (3.35) prouve la proposition. \square

Le théorème suivant donne la dérivée seconde par rapport à θ de \mathbf{L} .

Théorème 3.6 *Soit $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$. Alors, \mathbf{L} est par rapport à θ deux fois dérivable (au sens de Gateaux) de Θ dans \mathbb{R} et $\mathbf{L}''(\theta, \Lambda)(\xi, \eta)$, sa dérivée en θ dans la*

direction (ξ, η) , est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}''(\theta, \Lambda)(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathcal{H}\mathbf{B}^2 + \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \nu} \right) (V \cdot \nu)(W \cdot \nu) \\
&- \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left(\nu \cdot \delta V \cdot W + \nu \cdot \delta W \cdot V + V \cdot \delta \nu \cdot W \right) \mathbf{B}^2 \\
&- \int_{\varepsilon \Omega(\theta)} D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta) \\
&+ \sigma \int_{\Gamma(\theta)} (\delta_i V_i)(\delta_i W_i) - \delta_i V_j \delta_j W_i + (\nu \cdot \delta_j V)(\nu \cdot \delta_j W) \\
&+ \rho \int_{\Omega(\theta)} V_3 \text{tr}(DW) + W_3 \text{tr}(DV) \\
&+ \int_{\Omega(\theta)} (\rho x_3 + \Lambda) \left(\text{tr}(DV) \text{tr}(DW) - \text{tr}(DV \cdot DW) \right), \quad (3.38)
\end{aligned}$$

où $\nu = \nu(\theta)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\theta)$ et $V = \xi \circ \theta^{-1}$, $W = \eta \circ \theta^{-1}$.

Démonstration. On va trouver séparément les dérivées de $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$.

(i) Soit $\tau \in \Theta$. Comme $\theta + \tau \in \mathcal{O}^{-1}$ (pour $\|\tau\|_\Theta$ suffisamment petit), de la proposition 3.4 on a que la dérivée première de \mathbf{L}_1 en $\theta + \tau$ dans la direction ξ , est une intégrale sur $\Gamma(\theta + \tau)$:

$$\mathbf{L}'_1(\theta + \tau)(\xi) = \int_{\Gamma(\theta + \tau)} \mathbf{B}^2(\theta + \tau) \left(V(\tau) \cdot \nu(\theta + \tau) \right) d\Gamma(\theta + \tau),$$

où $V(\tau)$ un prolongement de classe C^k de $\xi \circ (\theta + \tau)^{-1}$.

La proposition 3.3 nous permet d'affirmer que $\mathbf{L}'_1(\theta + \tau)(\xi)$, comme une fonction de τ , satisfait aux conditions du théorème 5.1, [51] (concernant la dérivabilité d'une intégrale portant sur le bord d'un domaine). Alors, en appliquant ce théorème, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}''_1(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\Gamma(\theta)} (\cdot)'(0)(\eta) + \left(\mathcal{H}(\cdot) + \frac{\partial(\cdot)(0)}{\partial \nu(\theta)} \right) (W \cdot \nu(\theta)) \\
&= \int_{\Gamma(\theta)} 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}'(\theta)(\eta)(V \cdot \nu) \\
&+ \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{B}^2 \left(V'(0)(\eta) \cdot \nu - V \cdot \delta(W \cdot \nu) \right) d\Gamma(\theta) \\
&+ \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathcal{H}\mathbf{B}^2(V \cdot \nu) + \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \nu}(V \cdot \nu) + \mathbf{B}^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \nu} \cdot \nu \right) \right) \\
&\quad (W \cdot \nu) d\Gamma(\theta), \quad (3.39)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que (voir, par exemple [52]) :

$$\dot{\nu}'(0)(\eta) = -\delta(W \cdot \nu), \quad \frac{\partial \dot{\nu}(0)}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma(\theta).$$

(avec $\hat{\nu}(\tau)$ le prolongement intrinsèque de $\nu(\theta + \tau)$, voir, par exemple [52]).

Avec $\mathbf{L}_1''(\theta)$ écrit sous cette forme, on ne peut pas déterminer si $\mathbf{L}_1''(\theta)$ est symétrique. Pour cela, on va faire une série de transformations qui reposent sur l'intégration par parties sur le bord $\Gamma(\theta)$ (voir, par exemple [19], [20]).

Soit $V = (V_1, \dots, V_N)$ et on note DV et δV les matrices $DV = [D_j V_i]$ et $\delta V = [\delta_j V_i]$. Alors, sur $\Gamma(\theta)$ on a :

$$\begin{aligned} V'(0)(\eta) \cdot \nu &= -(DV \cdot W) \cdot \nu = -\nu_i D V_i \cdot W = -\nu_i (\delta V_i + \frac{\partial V_i}{\partial \nu} \nu) \cdot W \\ &= -(\delta V \cdot W) \cdot \nu - (\frac{\partial V}{\partial \nu} \cdot \nu)(W \cdot \nu). \end{aligned} \quad (3.40)$$

D'autre part, du fait que la matrice $\delta \nu = [\delta_j \nu_i]$ est symétrique (voir, par exemple [20]), on trouve que :

$$\begin{aligned} V \cdot \delta(W \cdot \nu) &= V \cdot (\nu_i \delta W_i + W_i \delta \nu_i) = \nu_i (\delta W_i \cdot V) + (V \cdot \delta \nu_i) W_i \\ &= (\delta W \cdot V) \cdot \nu + V \cdot \delta \nu \cdot W. \end{aligned} \quad (3.41)$$

En comparant les trois dernières équations (3.39), (3.40) et (3.41), il résulte que pour prouver la symétrie de $\mathbf{L}_1''(\theta)$, il suffit de démontrer que le premier terme dans (3.39) est symétrique par rapport à V et W (ce qui est équivalent à la symétrie par rapport à ξ et η).

Si on note ce terme t_1 , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{B}(\theta) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta)(V \cdot \nu) = \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{B}(\theta) \cdot \delta\mathbf{u}'(\theta)(\eta)(V \cdot \nu) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} \delta_i \left(\mathbf{u}'(\theta)(\eta) \mathbf{B}_i(\theta)(V \cdot \nu) \right) \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{u}'(\theta)(\eta) \left(\mathbf{B}_i(\theta) \delta_i (V \cdot \nu) + (V \cdot \nu) \delta_i \mathbf{B}_i(\theta) \right) \\ &= - \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{u}'(\theta)(\eta) \left(\mathbf{B} \cdot \delta(V \cdot \nu) + (V \cdot \nu) (\delta_i B_i^1 + \delta_i D_i \mathbf{u}(\theta)) \right), \end{aligned}$$

où ci-dessus on a fait une intégration par parties sur $\Gamma(\theta)$ et on a utilisé (3.4).

Or, on a aussi les égalités :

$$\begin{aligned} \delta_i D_i \mathbf{u} &= D_{ii} \mathbf{u} - \nu_i \nu_j D_j \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \nu^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \nu^2}, \\ \delta_i B_i^1 &= D_i B_i^1 - \nu_i \nu_j D_j B_i^1 = D \cdot B^1 - \frac{\partial B^1}{\partial \nu} \nu = -\frac{\partial B^1}{\partial \nu} \nu. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant (3.21), on obtient que :

$$\begin{aligned} t_1 &= - \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{u}'(\eta) \left(\mathbf{B}(\theta) \cdot \delta(V \cdot \nu) - (V \cdot \nu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \nu^2} + \frac{\partial B^1}{\partial \nu} \nu \right) \right) \\ &= - \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{u}'(\theta)(\eta) \frac{\partial \mathbf{u}'(\theta)(\xi)}{\partial \nu} = - \int_{\Omega(\theta)} D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta). \end{aligned}$$

Finalement, de l'expression de t_1 , de (3.39), (3.40) et (3.41) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1''(\theta)(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} \left(\mathcal{H}\mathbf{B}^2 + \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \nu} \right) (V \cdot \nu)(W \cdot \nu) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} (\nu \cdot \delta V \cdot W + \nu \cdot \delta W \cdot V + V \cdot \delta \nu \cdot W) \mathbf{B}^2 \\ &\quad - \int_{\varepsilon \Omega(\theta)} D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta), \end{aligned} \quad (3.42)$$

ce qui donne une expression de \mathbf{L}_1'' symétrique en ξ et η .

(ii) Pour trouver $\mathbf{L}_2''(\theta)$, on fait référence à [20]. Pour tout $\xi \in \Theta$ on a :

$$\mathbf{L}_2''(\theta)(\xi, \xi) = \int_{\Gamma(\theta)} (\delta_i V_i)^2 - \delta_i V_j \delta_j V_i + (\nu \cdot \delta_j V)(\nu \cdot \delta_j V).$$

Donc, pour $\xi, \eta \in \Theta$ on obtient :

$$\mathbf{L}_2''(\theta)(\xi, \eta) = \int_{\Gamma(\theta)} (\delta_i V_i)(\delta_i W_i) - \delta_i V_j \delta_j W_i + (\nu \cdot \delta_j V)(\nu \cdot \delta_j W), \quad (3.43)$$

où selon i, j , on a la somme de 1 à 3.

(iii) Quand aux dérivées secondes de \mathbf{L}_3 et \mathbf{L}_4 , on reprend les formules trouvées dans la démonstration de la proposition 3.4, plus précisément les relations (3.32) et (3.36).

En tenant compte de (3.32), (3.33) et (3.34) on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_3''(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\Omega(\theta)} \left(\hat{\xi}_3 a'(0)(\eta) + \hat{\eta}_3 a'(0)(\xi) + x_3 a''(0)(\xi, \eta) \right) \\ &= \int_{\Omega(\theta)} V_3 \text{tr}(DW) + W_3 \text{tr}(DV) + \\ &\quad x_3 \left(\text{tr}(DV) \text{tr}(DW) - \text{tr}(DV \cdot DW) \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

De l'équation (3.36), en procédant de la même façon que ci-dessus, on aura :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_4''(\theta)(\xi, \eta) &= \int_{\Omega(\theta)} a''(0)(\xi, \eta) \\ &= \int_{\Omega(\theta)} \left(\text{tr}(DV) \text{tr}(DW) - \text{tr}(DV \cdot DW) \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

ce qui avec (3.42), (3.43), (3.44) prouve le théorème. \square

Remarque 3.7 Dans (3.21), qui donne $D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot \nu(\theta)$, le membre à droite de la deuxième équation contient, a priori, la dérivée seconde selon la normale de $\mathbf{u}(\theta)$. En fait, on n'utilise qu'une forme variationnelle et donc faible.

Il se trouve qu'après quelques intégrations par parties sur le bord $\Gamma(\theta)$, la forme faible du $D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot \nu(\theta)$ ne dépend plus explicitement de la dérivée seconde selon la normale de $\mathbf{u}(\theta)$.

Aussi, dans l'expression de $\mathbf{L}''(\theta)$, il y a des intégrales portant sur ${}^e\Omega(\theta)$ ou sur $\Omega(\theta)$, ainsi que le terme $\int_{\Gamma(\theta)} \frac{\partial \mathbf{B}^2(\theta)}{\partial \nu(\theta)}$ qui fait intervenir la dérivée seconde selon la normale de $\mathbf{u}(\theta)$. Sous cette forme, on retrouve la propriété de la symétrie de la dérivée seconde, mais d'autre part cette forme n'est pas convenable pour des calculs numériques. Pour pouvoir utiliser \mathbf{L}'' dans des applications, en faisant quelques intégrations par parties convenables on transforme ces termes en des intégrales sur $\Gamma(\theta)$.

(i) Pour $D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot \nu(\theta)$ de (3.21), si $\varphi \in C^1(\Gamma(\theta))$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(\theta)} \varphi D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot \nu &= \int_{\Gamma(\theta)} \varphi (B^1 + D\mathbf{u}(\theta)) \cdot \delta(V \cdot \nu) \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} \varphi (V \cdot \nu) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu^2} + (DB^1 \cdot \nu) \cdot \nu \right) = I_1 - I_2, \end{aligned}$$

où $\nu = \nu(\theta)$. La première intégrale I_1 , s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma(\theta)} \varphi (B_i^1 + D_i \mathbf{u}(\theta)) \cdot \delta_i (V \cdot \nu) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} \delta_i \left(\varphi (V \cdot \nu) (B_i^1 + D_i \mathbf{u}(\theta)) \right) \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) (B_i^1 + D_i \mathbf{u}(\theta)) \cdot \delta_i \varphi - \int_{\Gamma(\theta)} \varphi (V \cdot \nu) \delta_i (B_i^1 + D_i \mathbf{u}(\theta)) \\ &= - \int_{\Gamma(\theta)} \mathcal{H} \varphi (V \cdot \nu) (B_i^1 + D_i \mathbf{u}(\theta)) \nu_i - \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) (B^1 + D\mathbf{u}(\theta)) \cdot \delta \varphi \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} \varphi (V \cdot \nu) \left(D_{ii} \mathbf{u}(\theta) - (DD_i \mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_i + D_i B_i^1 - (DB_i^1 \cdot \nu) \nu_i \right) \\ &= - \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) (B^1 + D\mathbf{u}) \cdot \delta \varphi \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta)} \varphi \left(\Delta \mathbf{u}(\theta) - \nu \cdot D^2 \mathbf{u} \cdot \nu + D \cdot B^1 - (DB^1 \cdot \nu) \cdot \nu \right) \\ &= - \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) (B^1 + D\mathbf{u}) \cdot \delta \varphi \\ &\quad + \int_{\Gamma(\theta)} \varphi(x) (V \cdot \nu) \left(\nu \cdot D^2 \mathbf{u} \cdot \nu + (DB^1 \cdot \nu) \cdot \nu \right), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\int_{\Gamma(\theta)} \varphi D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot \nu(\theta) = - \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) \mathbf{B}(\theta) \cdot \delta \varphi \quad (3.46)$$

C'est cette forme qu'on utilise pour le calcul de $D\mathbf{u}'(\theta)(\xi)$, qui ne demande que $D\mathbf{u}(\theta)$.

(ii) En utilisant la formule (3.46) :

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon\Omega(\theta)} D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \cdot D\mathbf{u}'(\theta)(\eta) &= \int_{\Gamma(\theta)} \mathbf{u}'(\theta)(\eta) D\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} (W \cdot \nu) \mathbf{B}(\theta) \cdot \delta\mathbf{u}'(\theta)(\xi) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} (V \cdot \nu) \mathbf{B}(\theta) \cdot \delta\mathbf{u}'(\theta)(\eta). \end{aligned}$$

(iii) Pour le terme $\int_{\Gamma(\theta)} \frac{\partial \mathbf{B}^2(\theta)}{\partial \nu(\theta)}$, on remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}^2(\theta)}{\partial \nu(\theta)} &= 2\mathbf{B}(\theta) \cdot D\mathbf{B}(\theta) \cdot \nu \\ &= 2\left(B^1 + D\mathbf{u}(\theta)\right) \cdot \left(DB^1 \cdot \nu + D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu\right). \end{aligned}$$

Pour la $i^{\text{ème}}$ composante de $(D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu)$ on a :

$$\begin{aligned} (D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu)_i &= D_i D_j \mathbf{u}(\theta) \nu_j = \left(\delta_i D_j \mathbf{u}(\theta) + (DD_j \mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_i\right) \nu_j \\ &= \delta_i \delta_j \mathbf{u}(\theta) \nu_j + \delta_i \left((D\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_j\right) \nu_j + (\nu \cdot D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_i \\ &= \delta(\delta_i \mathbf{u}(\theta)) \cdot \nu + \delta_i (D\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_j^2 + \\ &\quad (D\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_j \delta_i \nu_j + (\nu \cdot D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_i \\ &= \delta_i (D\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) + (D\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \frac{1}{2} \delta_i (\nu_j^2) + (\nu \cdot D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_i \\ &= -\delta_i (B^1 \cdot \nu) + (\nu \cdot D^2\mathbf{u}(\theta) \cdot \nu) \nu_i. \end{aligned}$$

Donc, on aura :

$$\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \nu} = 2(B^1 + D\mathbf{u}(\theta)) \cdot (DB^1 \cdot \nu - \delta(B^1 \cdot \nu)).$$

On peut écrire aussi, que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \nu} &= 2(B^1 + D\mathbf{u}(\theta)) \cdot (DB^1 \cdot \nu - D(B^1 \cdot \nu) + D(B^1 \cdot \nu) \nu) \\ &= 2(B^1 + D\mathbf{u}(\theta)) \cdot (DB^1 \cdot \nu - D(B^1 \cdot \nu)) \\ &= 2(B^1 + D\mathbf{u}(\theta)) \cdot (DB^1 \cdot \nu - DB_j^1 \nu_j - B_j^1 D\nu_j). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Or, du fait que $D \wedge B^1 = j$ (voir, par exemple [43]), on aura :

$$\begin{aligned} \{(DB^1 \cdot \nu - DB_j^1 \nu_j)\} &= \begin{pmatrix} (D_2 B_1^1 - D_1 B_2^1) \nu_2 + (D_3 B_1^1 - D_1 B_3^1) \nu_3 \\ (D_1 B_2^1 - D_2 B_1^1) \nu_1 + (D_3 B_2^1 - D_2 B_3^1) \nu_3 \\ (D_1 B_3^1 - D_3 B_1^1) \nu_1 + (D_2 B_3^1 - D_3 B_2^1) \nu_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_2 \nu_3 - j_3 \nu_2 \\ j_3 \nu_1 - j_1 \nu_3 \\ j_1 \nu_2 - j_2 \nu_1 \end{pmatrix} \\ &= \vec{j} \wedge \nu. \end{aligned}$$

Comme on s'intéresse aux valeurs au bord $\Gamma(\theta)$, si on suppose qu'on a $\text{supp}(j) \cap \overline{\Omega(\theta)} = \emptyset$, de (3.47) on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial \nu} = -2B^1 \cdot \delta \nu \cdot \mathbf{B}(\theta), \quad \text{sur } \Gamma(\theta). \quad (3.48)$$

(iv) Pour le deuxième terme de $\mathbf{L}_3''(\theta)$, en faisant quelques intégrations par parties, on aura :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\theta)} x_3 (D_i V_i D_j W_j - D_j V_i D_i W_j) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} x_3 V_i (D_j W_j \nu_i - D_i W_j \nu_j) - \int_{\Omega(\theta)} V_i (D_j W_j D_i x_3 - D_i W_j D_j x_3) \\ &= \int_{\Gamma(\theta)} x_3 V_i (\delta_j W_j \nu_i - \delta_i W_j \nu_j) + W_3 (V \cdot \nu) \\ &\quad - \int_{\Omega(\theta)} V_3 \text{tr}(DW) + W_3 \text{tr}(DV) \end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\mathbf{L}_3''(\theta)(\xi, \eta) = \int_{\Gamma(\theta)} x_3 V_i (\delta_j W_j \nu_i - \delta_i W_j \nu_j) + W_3 (V \cdot \nu). \quad (3.49)$$

(v) Pour $\mathbf{L}_4''(\theta)$, en faisant la même manipulation que pour $\mathbf{L}_3''(\theta)$, on aura :

$$\mathbf{L}_3''(\theta)(\xi, \eta) = \int_{\Gamma(\theta)} V_i (\delta_j W_j \nu_i - \delta_i W_j \nu_j). \quad (3.50)$$

3.3 La méthode numérique.

Comme dans la section 2.3, si $\theta^* \in \mathcal{O}^{-1}$ est une solution du problème (3.14), de la proposition 1.26 il existe $\Lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que (θ^*, Λ^*) satisfait l'équation (2.27). D'après le théorème 1.23, on déduit que résoudre (2.27) est équivalent à résoudre (2.28).

Pour résoudre numériquement (2.28), on va utiliser la méthode de Newton avec l'algorithme donné par (1.73). Pour obtenir une approximation (ψ_h^*, Λ_h^*) de (ψ^*, Λ^*) , solution de (2.28), on va appliquer l'algorithme (2.51), donc on a besoin de calculer \mathcal{F}_h et \mathcal{F}'_h , des approximations de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , où \mathcal{F} est comme dans (1.71).

3.3.1 La discrétisation. Quelques résultats préliminaires.

On va approcher le bord $\Gamma_0 := \partial Q$ et $\Gamma(\theta)$, par une surface linéaires par morceaux (voir, par exemple [39]). Soit Q_1, \dots, Q_n , $n \in \mathbb{N}$, des points sur Γ_0 et :

$$\Gamma_{0,h} = \bigcup_{j=1}^p \Delta(Q_{j_1}, Q_{j_2}, Q_{j_3}),$$

où $\Delta(Q_{j_1}, Q_{j_2}, Q_{j_3})$ est le triangle de sommets Q_{j_1} , Q_{j_2} et Q_{j_3} . Une telle construction de $\Gamma_{0,h}$ est donnée, par exemple, dans [39].

Concernant cette discrétisation $\Gamma_{0,h}$ de Γ_0 , on suppose que :

$$\frac{h}{\rho_j} \leq C, \quad \text{où } h := \max\{\text{diam}(\Delta(Q_{j_1}, Q_{j_2}, Q_{j_3}), j = 1, \dots, p\}, \quad (3.51)$$

où ρ_j est le diamètre du plus grand cercle inscrit dans $\Delta(Q_{j_1}, Q_{j_2}, Q_{j_3})$ et C , une constante indépendante de h et j (voir, par exemple [39]).

Sur $\Gamma_{0,h}$, on construit la base ψ_i , $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \psi_i : \Gamma_{0,h} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ linéaire sur tout } \Delta(Q_{j_1}, Q_{j_2}, Q_{j_3}), \\ \psi_i(Q_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.52)$$

Avec $\nu_{0,h}$, on note une approximation linéaire par morceaux de ν_0 , la normale unitaire à Γ_0 :

$$\nu_{0,h} = \sum_{j=1}^n \nu_0(Q_j) \psi_j. \quad (3.53)$$

Pour $\psi \in C^k(\Gamma_0)$, on note $\theta = I_N + \psi \nu_0$. Soit Γ_h l'approximation de $\Gamma(\theta)$:

$$\begin{cases} x_i = Q_i + \psi(Q_i) \nu_0(Q_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \Gamma_h = \bigcup_{j=1}^p \Delta(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}). \end{cases} \quad (3.54)$$

Avec T_h , on note les triangles de Γ_h .

Sur Γ_h on introduit une base de fonctions linéaires par morceaux :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, n, \text{ linéaire sur tout } T_h, \\ V_h = \text{span}\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Le vecteur $\nu(\theta)$ est approché par ν_h :

$$\nu_h = \sum_{j=1}^n \nu(\theta)(x_j) e_j. \quad (3.56)$$

Finalement, on note ϕ la fonction de classe C^k , définie dans $\mathcal{U}_{\Gamma(\theta)}$, voisinage assez petit de $\Gamma(\theta)$ (voir, par exemple [19], [39]) :

$$\phi : \mathcal{U}_{\Gamma(\theta)} \rightarrow \Gamma(\theta), \quad \phi(x) = \text{proj}_{\Gamma(\theta)}(x), \quad (3.57)$$

et avec ϕ_h on note la restriction de ϕ à Γ_h , qui est une fonction inversible. Concernant la fonction ϕ et ϕ_h , on donne sans démonstration les deux lemmes suivants, prouvés dans [39] (la proposition 4.4 et le lemme 4.6).

Lemme 3.8 *On suppose que (3.51) est vérifié et que $\Gamma(\theta)$ est de classe C^2 . Alors :*

$$\begin{aligned} \sup\{ \|D^\alpha \phi - D^\alpha I_N\|_{C^0(T_h)}, T_h \} &\leq Ch^{2-|\alpha|} \|D^2 \phi\|_{C^0}, \\ \sup\{ \|\text{Jac}_\Gamma(\phi_h^{-1}) - 1\|_{C^0(T)}, T \} &\leq Ch^2 \|D^2 \phi\|_{C^0}, \end{aligned}$$

où $I_N(x) = x$, $T = \phi(T_h)$, $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $|\alpha| \leq 1$ et $\text{Jac}_\Gamma(\cdot)$ est le jacobien tangentiel (voir, par exemple [51]) donné par :

$$\text{Jac}_\Gamma(\cdot) = {}^t[D(\cdot)]^{-1} \cdot \nu(\theta) | \text{Jac}(\cdot),$$

avec (\cdot) un prolongement de classe C^k quelconque de (\cdot) .

Lemme 3.9 *Soit x_h, y_h dans Γ_h et $x = \phi(x_h)$, $y = \phi(y_h)$. Alors :*

$$\begin{aligned} C_1 |x_h - y_h| &\leq |x - y| \leq C_2 |x_h - y_h|, \\ \|x_h - y_h\|^2 - |x - y|^2 &\leq Ch^2 |x_h - y_h|^2, \end{aligned}$$

où C, C_1 et C_2 , sont des constantes qui ne dépendent que de $\Gamma(\theta)$.

Pour la preuve du lemme suivant, voir par exemple [10], [32].

Lemme 3.10 *Soit $\Gamma(\theta)$ un bord de classe C^2 . Alors, il existe une constante $C_1 = C_1(\Gamma(\theta))$, telle que pour tout $x, y \in \Gamma(\theta)$:*

$$|\nu(\theta)(x) \cdot (x - y)| \leq C_1 |x - y|^2. \quad (3.58)$$

Corollaire 3.11 *Soit Φ la solution fondamentale du laplacien donnée par (2.36). Pour $x, y \in \Gamma(\theta)$ on note $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(\theta)(x)} = D_x \Phi(x, y) \cdot \nu(\theta)(x)$. Alors :*

$$\left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(\theta)(x)} \right| \leq \frac{C_1}{|x - y|}. \quad (3.59)$$

On remarque que le lemme suivant, en une forme plus complète, est prouvé dans le chapitre 4 (voir lemme 4.2).

Lemme 3.12 Soit $\Gamma(\theta)$ un bord de classe C^2 , x_i un noeud de triangulation de Γ_h , $S_i = \phi(S_{ih})$ avec $S_{ih} = \{T_h, T_h \ni x_i\}$ et T_h un triangle de Γ_h . Alors, pour h assez petit, il existe une constante $C_2 = C_2(\Gamma(\theta))$, telle que :

$$\int_{S_i} \frac{dy}{|x_i - y|} \leq C_2 h. \quad (3.60)$$

Démonstration. Soit $(y_1, y_2, y_3) = (y', y_3)$ le système principal des coordonnées lié au point $x_i \in \Gamma(\theta)$, comme dans le lemme 1.17. Comme $\Gamma(\theta)$ est de classe C^2 , il existe une boule $B'_{x_i}(r_i) \subset \mathbb{R}^2$ et $u \in C^2(B'_{x_i}(r_i))$ telles que S_i est présentée comme le graphe de u .

On note $S'_i = \{y' \in B'_{x_i}(r_i), (y', u(y')) \in S_i\}$. Il est clair que $|y' - x'_i| \leq |y - x_i| \leq h$, pour tout $y' \in S'_i$. Alors, si $h \leq r_i$:

$$\begin{aligned} \int_{S_i} \frac{dy}{|x - y|} &\leq \int_{S'_i} (1 + |Du(y')|^2)^{1/2} \frac{dy'}{|y' - x'_i|} \\ &\leq (1 + \|Du\|_{C^0}^2)^{1/2} \int_{B'_{x_i}(h)} \frac{dy'}{|x'_i - y'|} = 2\pi(1 + \|Du\|_{C^0}^2)^{1/2} h, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

3.3.2 L'analyse de l'erreur de l'approximation au bord, du gradient de la solution d'un problème de Neumann à l'extérieur en \mathbb{R}^3 .

Dans cette sous-section on va étudier l'approximation au bord $\Gamma(\theta)$ de $\mathbf{u}(\theta)$ et $D\mathbf{u}(\theta)$, donné par (3.18) et (3.20).

L'erreur de l'approximation des équations intégrales avec la méthode des éléments finis est étudiée, par exemple, dans [12], [13], [30], [39], [44], [45], [57] etc.

La particularité de (3.19), d'une part est que l'opérateur intégral correspondant n'est pas symétrique. D'autre part, (et surtout) ici on ne discrétise pas seulement l'espace où est posé l'équation intégrale, mais on discrétise aussi le support de cet espace (l'erreur géométrique), c'est-à-dire le bord $\Gamma(\theta)$.

Soit alors $\theta \in \mathcal{O}^{-1}$, $V := C^0(\Gamma(\theta))$ et on note :

$$\begin{cases} A : V \rightarrow V, \\ Aq = (I - K)q, \quad Kq(x) = 2 \int_{\Gamma(\theta)} q(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(\theta)(x)} dy. \end{cases} \quad (3.61)$$

Soit V_h donné par (3.55) et $A_h : V_h \rightarrow V_h$ avec $A_h = I - K_h$, où :

$$\begin{cases} K_h q_h(x_i) = 2 \int_{\Gamma_h \setminus S_{i,h}} q_h(y) \frac{\partial \Phi(x_i, y)}{\partial \nu_h(x_i)} dy, & x_i \text{ noeud de } \Gamma_h, \\ K_h q_h = \sum_{i=1}^n K_h q_h(x_i) \mathbf{e}_i. \end{cases} \quad (3.62)$$

L'introduction des opérateurs K_h et A_h est exigée du fait que sur Γ_h , le noyau de l'opérateur K n'est pas intégrable.

Alors, pour $g \in V$, on cherche à trouver $q_h \in V_h$, solution du problème :

$$A_h q_h = -2g_h, \quad g_h = \sum_{i=1}^n g(x_i) \mathbf{e}_i. \quad (3.63)$$

Comme V_h est de dimension finie, résoudre (3.63) est équivalent à résoudre :

$$\int_{\Gamma_h} A_h q_h(x) \mathbf{e}_i(x) = -2 \int_{\Gamma_h} g_h(x) \mathbf{e}_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.64)$$

Pour montrer l'existence de q_h , on utilise l'équation (3.63), tandis que dans les applications, on résout (3.64) en utilisant une méthode d'éléments finis. Ce choix est dû au fait que pour résoudre (3.21) on a intérêt d'utiliser une forme faible (voir la remarque 3.7).

Quant à l'erreur $\|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}$, on a la proposition suivante :

Proposition 3.13 Pour h assez petit, l'équation (3.63) admet une solution unique dans V_h .

En plus, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe deux constantes $C_1 = C(\epsilon, \Gamma(\theta))$, $C_2 = C_2(\Gamma(\theta))$ telles que :

$$\begin{aligned} \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0(\Gamma(\theta))} &\leq C_1 h^{1-\epsilon} \|q\|_{C^0(\Gamma(\theta))} \\ &+ C_2 \|g - g_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0(\Gamma(\theta))}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La démonstration de la proposition se fera plus tard.

Quant à $\mathbf{u}(\theta)$, on l'approche par $\mathbf{u}_h : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$ donné par :

$$\mathbf{u}_h(x_h) = \int_{\Gamma_h} q_h(y) \Phi(x_h, y) dy, \quad x_h \in \Gamma_h. \quad (3.66)$$

Pour trouver une approximation de $D\mathbf{u}(\theta)$, soit $x = x_i$ un noeud de discrétisation, τ la tangente à ∂S_i et $\nu^\tau = \nu \wedge \tau$. Puis, on sépare l'intégrale de $D\mathbf{u}(\theta)(x_i)$ en une intégrale sur $\Gamma(\theta) \setminus S_i$ et en une autre intégrale portant sur

S_i . En faisant une intégration par parties pour la deuxième intégrale (voir, par exemple [10]), on obtient :

$$\begin{aligned} D\mathbf{u}(\theta)(x_i) &= -\frac{1}{2}q(x_i)\nu(x_i) - \int_{\Gamma(\theta)\setminus S_i} q(y)D_y\Phi(x_i, y)dy \\ &\quad + \int_{S_i} \left(\mathcal{H}(y)\nu(y)q(y) - \delta q(y) \right) \Phi(x_i, y)dy \\ &\quad - \int_{\partial S_i} \nu^\tau(y)q(y)\Phi(x_i, y)dy - \int_{S_i} q(y)\nu(y) \frac{\partial\Phi(x_i, y)}{\partial\nu(y)} dy. \end{aligned}$$

On remarque, par exemple en utilisant les lemmes 3.10 et 3.12 au début de cette section, que les intégrales sur S_i sont de l'ordre h . Alors cette forme de $D\mathbf{u}(\theta)$ suggère de définir :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_h\mathbf{u}(x_i) = -\frac{1}{2}q_h(x_i)\nu_h(x_i) - \int_{\Gamma_h\setminus S_{ih}} q_h(y_h)D_y\Phi(x_i, y_h)dy_h \\ \quad - \int_{\partial S_{ih}} \nu_h^\tau(y_h)q_h(y_h)\Phi(x_i, y_h)dy_h, \quad x_i \text{ noeud de } \Gamma_h, \\ D_h\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n D_h\mathbf{u}(x_i)\mathbf{e}_i, \end{array} \right. \quad (3.67)$$

avec $\nu_h^\tau = \nu_h \wedge \tau_h$, où τ_h est un vecteur qui approche τ :

$$\tau_h = \sum_{x_j \in \partial S_{ih}} \tau(x_j)\mathbf{e}_j, \quad \text{sur } \partial S_{ih}. \quad (3.68)$$

Le théorème suivant donne l'erreur de l'approximation de $\mathbf{u}(\theta)$ et $D\mathbf{u}(\theta)$:

Théorème 3.14 *On suppose que $q \in C^1(\Gamma(\theta))$. Alors pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $C_1 = C(\epsilon, \Gamma(\theta))$ et $C_2 = C(\Gamma(\theta))$, telles que pour h assez petit, \mathbf{u}_h et $D_h\mathbf{u}$ donnés respectivement par (3.66) et (3.67) satisfont :*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}(\theta) - \mathbf{u}_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0(\Gamma(\theta))} + \|D\mathbf{u}(\theta) - D_h\mathbf{u} \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0(\Gamma(\theta))} \\ &\leq C_1 h^{1-\epsilon} \|q\|_{C^1(\Gamma(\theta))} + C_2 |\ln h| \|g - g_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0(\Gamma(\theta))}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.3.2.1 Démonstration de la proposition 3.13.

On construit l'opérateur \tilde{A}_h de V sur lui-même :

$$\tilde{A}_h : q \in V \rightarrow \tilde{A}_h q := A_h(q \circ \phi_h) \circ \phi_h^{-1} \in V, \quad (3.70)$$

et admettons d'abord qu'on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A - \tilde{A}_h\|_V = 0. \quad (3.71)$$

Alors, il est clair que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A^{-1}(A - \tilde{A}_h)\|_V = 0.$$

Par conséquence, pour h suffisamment petit $I - A^{-1}(A - \tilde{A}_h)$ est inversible, avec I l'opérateur identité. D'où :

$$\tilde{A}_h = A(I - A^{-1}(A - \tilde{A}_h)),$$

est inversible (comme une composition de deux applications inversibles).
Donc :

$$\exists ! q \in V, \quad \tilde{A}_h q = -2g_h \circ \phi_h^{-1},$$

ou bien $A_h q_h = -2g_h$, avec $q_h = q \circ \phi_h$, ce qui prouve l'existence et l'unicité des solutions de (3.63).

(i) Maintenant on va prouver (3.71). Pour cela, l'idée principale est de faire un changement de variable pour transformer $\tilde{A}_h q$ en une intégrale sur $\Gamma(\theta)$.

On va distinguer deux cas :

(i.1) Soit $x \in \Gamma(\theta)$ noeud de triangulation ($x = x_i$). Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} (A - \tilde{A}_h)q(x) &= 2 \int_{S_i} q(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy \\ &+ 2 \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} q(y) \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi(x, y_h)}{\partial \nu_h(x)} \right) dy \\ &+ 2 \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} q(y) \frac{\partial \Phi(x, y_h)}{\partial \nu_h(x)} \left(1 - \text{Jac}_\Gamma(\phi_h^{-1}(y)) \right) dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où $S_i = \phi_h(S_{ih})$ et $y_h = \phi_h^{-1}(y)$.

En général, pour estimer les intégrales du type $(\cdot) - (\cdot)_h$, on utilise les lemmes 3.8 et 3.9 (technique utilisée, par exemple, dans [39]). Puis, par un changement de variable, on passe sur un intégrale dans un domaine du plan tangent à $\Gamma(\theta)$ en x , comme dans le lemme 3.12.

Alors, pour I_1 , en utilisant le corollaire 3.11 et le lemme 3.12, on a :

$$|I_1| \leq Ch \|q\|_V. \quad (3.72)$$

Pour I_3 , en utilisant le corollaire 3.11 on remarque que $\int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} |x - y|^{-1} dy \leq C$ (en utilisant la même technique que celle dans le lemme 3.12). Puis en utilisant le lemme 3.8, on obtient :

$$|I_3| \leq Ch^2 \|q\|_V. \quad (3.73)$$

Le terme I_2 , s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I_2 &= C \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} q(y) \frac{\nu(x) \cdot (x-y)|x-y_h|^3 - \nu_h(x) \cdot (x-y_h)|x-y|^3}{|x-y|^3|x-y_h|^3} dy \\ &= C \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} q(y) \frac{\nu(x) \cdot (y_h-y)|x-y|^3}{|x-y|^3} dy \\ &\quad + C \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} q(y) \frac{\nu(x) \cdot (x-y_h)(|x-y_h|^3 - |x-y|^3)}{|x-y|^3|x-y_h|^3} dy, \end{aligned}$$

parce que pour $x = x_i$ on a $\nu(x) = \nu_h(x)$.

En utilisant les lemmes 3.9 et 3.10, et en projetant sur le plan tangent, comme dans le lemme 3.12, on obtient :

$$|I_2| \leq Ch^2 \|q\|_V \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} \frac{dy}{|x-y|^3} \leq Ch \|q\|_V. \quad (3.74)$$

Donc, de (3.72), (3.73) et (3.74), pour x noeud de triangulation, on a :

$$|(A - \tilde{A}_h)q(x)| \leq Ch \|q\|_V. \quad (3.75)$$

(i.2) Soit maintenant $x \in \Gamma(\theta)$. On va prouver que pour un tel x , on a une estimation comme dans (3.75). On note $x_h = \phi_h^{-1}(x) \in \Gamma_h$ et soit T_h le triangle qui contient x_h . Avec x_j on note les noeuds de T_h .

Du fait que $\tilde{K}_h q := K_h(q \circ \phi_h)$ est linéaire sur T_h , on a :

$$\tilde{K}_h q(x) = K_h(q \circ \phi_h)(x_h) = \sum_j c_j K_h(q \circ \phi_h)(x_j), \quad \text{avec} \quad \sum_j c_j = 1.$$

Alors en utilisant (3.75) et le fait que pour $q \in V$, $Kq \in C^{1-\epsilon}$, avec (voir, par exemple [10]) :

$$\|Kq\|_{C^{1-\epsilon}(\Gamma(\theta))} \leq C(\epsilon) \|q\|_{C^0(\Gamma(\theta))}, \quad \epsilon \in]0, 1[,$$

on obtient que :

$$\begin{aligned} |(A - \tilde{A}_h)q(x)| &= |(K - \tilde{K}_h)q(x)| \\ &\leq \left| \sum_j c_j (Kq(x) - Kq(x_j)) \right| + \left| \sum_j c_j (Kq - \tilde{K}_h q)(x_j) \right| \\ &\leq C(\epsilon) h^{1-\epsilon} \|q\|_V + C |(Aq - \tilde{A}_h q)(x_j)| \\ &\leq C(\epsilon) h^{1-\epsilon} \|q\|_V, \end{aligned} \quad (3.76)$$

ce qui avec (3.75) prouve que :

$$\|A - \tilde{A}_h\|_V \leq C(\epsilon) h^{1-\epsilon}, \quad \epsilon \in]0, 1[. \quad (3.77)$$

Donc, (3.71) est prouvé.

(ii) Maintenant, on passe à la démonstration de (3.65).

Soit q la solution dans V de $Aq = -2g$. De cette équation on soustrait l'équation (3.63) et on obtient :

$$A(q - q_h \circ \phi_h^{-1}) = -2(g - g_h \circ \phi_h^{-1}) - (A - \tilde{A}_h)(q_h \circ \phi_h^{-1}).$$

Or, l'opérateur A est linéaire inversible dans V , voir, par exemple [10]. En plus, grâce aux théorèmes 3.4 et 6.16, [32], l'opérateur A^{-1} est borné. Donc :

$$\begin{aligned} \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_V &\leq \|A^{-1}\|_V \left(\|g - g_h \circ \phi_h^{-1}\|_V + \|(A - \tilde{A}_h)q_h \circ \phi_h^{-1}\|_V \right) \\ &\leq C\|g - g_h \circ \phi_h^{-1}\|_V + C(\epsilon)h^{1-\epsilon}\|q_h \circ \phi_h^{-1}\|_V \\ &\leq C\|g - g_h \circ \phi_h^{-1}\|_V + \\ &\quad C(\epsilon)h^{1-\epsilon}\|q\|_V + C(\epsilon)h^{1-\epsilon}\|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_V, \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.65). □

3.3.2.2 Démonstration du théorème 3.14.

On va estimer d'abord :

(i) la différence $\mathbf{u}(\theta) - \mathbf{u}_h \circ \phi_h^{-1}$.

Pour $x, y \in \Gamma(\theta)$, on note $x_h = \phi_h^{-1}(x)$ et $y_h = \phi_h^{-1}(y)$. Dans l'expression de $\mathbf{u}_h(x_h)$, on fait le changement de variable, en utilisant la fonction ϕ_h , et on passe en une intégrale sur $\Gamma(\theta)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\theta)(x) - \mathbf{u}_h(x_h) &= 2 \int_{\Gamma(\theta)} \left(q(y) - q_h(y_h) \right) \frac{dy}{|x - y|} \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma(\theta)} q_h(y_h) \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x_h - y_h|} \right) dy \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma(\theta)} q_h(y_h) \left(1 - \text{Jac}_{\Gamma}(\phi_h^{-1}(y)) \right) \frac{dy}{|x_h - y_h|} \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Le terme I_1 est le potentiel de simple couche de densité $q - q_h \circ \phi_h^{-1}$, donc (voir, par exemple [10], théorème 2.12) il se majore :

$$|I_1| \leq C\|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}.$$

Pour l'intégrale I_2 , en utilisant le lemme 3.9, le théorème 2.12, [10] (pour majorer l'intégrale sur $\Gamma(\theta)$ de $|x - y|^{-1}$), on obtient :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \|q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} \int_{\Gamma(\theta)} \frac{\|x - y| - |x_h - y_h||}{|x - y||x_h - y_h|} dy \\ &\leq h^2 \|q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} \int_{\Gamma(\theta)} \frac{dy}{|x - y|} \leq Ch^2 \|q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Enfin, pour l'intégrale I_3 , il suffit d'utiliser le lemme 3.8 et la majoration pour le potentiel de simple couche, comme pour I_1 et I_2 . Donc :

$$|I_3| \leq Ch^2 \|q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} \leq Ch^2 (\|q\|_{C^0} + \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}).$$

Alors, en réunissant les estimations obtenues pour I_1 , I_2 et I_3 , on obtient :

$$\|\mathbf{u}(\theta) - \mathbf{u}_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} \leq C \left(\|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} + h^2 \|q\|_{C^0} \right). \quad (3.78)$$

(ii) Maintenant on passe dans l'estimation de $D\mathbf{u}(\theta) - D_h \mathbf{u} \circ \phi_h^{-1}$.

(ii.1) $x = x_i$ est un noeud de Γ_h .

On fait le changement du variable $y_h = \phi_h^{-1}(y)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} D\mathbf{u}(\theta)(x) - D_h \mathbf{u}(x) &= -\frac{1}{2} \left(q(x) - q_h(x) \right) \nu(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} \left(q(y) D_y \Phi(x, y) - q_h(y_h) D_y \Phi(x, y_h) \text{Jac}_\Gamma(\phi_h^{-1}(y)) \right) dy \\ &\quad - \left(\int_{\partial S_i} \nu^\tau(y) q(y) \Phi(x, y) dy - \int_{\partial S_{ih}} \nu_h^\tau(y_h) q_h(y_h) \Phi(x, y_h) dy_h \right) \\ &\quad + \int_{S_i} \left(\mathcal{H}(y) \nu(y) q(y) - \delta q(y) \right) \Phi(x, y) dy \\ &\quad - \int_{S_i} q(y) \nu(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} dy \\ &= -(I_1 + I_2 + I_3) + I_4 - I_5. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Pour l'intégrale I_1 , de façon évidente on a :

$$|I_1| \leq C \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}. \quad (3.80)$$

Pour les intégrales I_4 et I_5 , en appliquant le corollaire 3.11 et le lemme 3.12, on obtient :

$$|I_4| + |I_5| \leq C \|q\|_{C^1} \int_{S_i} \frac{dy}{|x - y|} \leq Ch \|q\|_{C^1}. \quad (3.81)$$

Donc, il reste à estimer les intégrales I_2 et I_3 . On sépare l'intégrale I_2 en quelques termes dans lesquels il apparaît la différence $(\cdot) - (\cdot)_h$ et la différence des éléments des surfaces :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} \left(q(y) - q_h(y_h) \right) D_y \Phi(x, y) dy + \\ &\quad q_h(y_h) \left(D_y \Phi(x, y) - D_y \Phi(x, y_h) \right) + \\ &\quad q_h(y_h) D_y \Phi(x, y_h) \left(1 - \text{Jac}_\Gamma(\phi_h^{-1}(y)) \right) dy = I_{21} + I_{22} + I_{23}. \end{aligned}$$

De (2.37) on a $\int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} |D_y \Phi(x, y)| dy \leq C \int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} |x - y|^{-2} dy$. Alors, en projetant dans le plan tangent à $\Gamma(\theta)$ en x , comme dans le lemme 3.12, on obtient : $\int_{\Gamma(\theta) \setminus S_i} |D_y \Phi(x, y)| dy \leq C |\ln h|$. D'où :

$$|I_{21}| \leq C |\ln h| \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}. \quad (3.82)$$

Pour le terme I_{22} , en utilisant le lemme 3.9 on a :

$$\begin{aligned} D_y \Phi(x, y) - D_y \Phi(x, y_h) &= \frac{1}{4\pi} \frac{y_h - y}{|x - y|^3} - \\ &\quad \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|^3} - \frac{1}{|x - y_h|^3} \right) (x - y_h) \\ &= h^2 \frac{O(1)}{|x - y|^3}, \end{aligned}$$

d'où, en intégrant sur $\Gamma(\theta) \setminus S_i$, comme dans le lemme 3.12, on obtient :

$$|I_{22}| \leq Ch \|q_h\|_{C^0}. \quad (3.83)$$

Pour l'intégrale I_{23} , du lemme 3.8 il découle que :

$$|I_{23}| \leq Ch^2 |\ln h| \|q_h\|_{C^0}, \quad (3.84)$$

et par conséquence de (3.82), (3.83) et (3.84) on obtient :

$$|I_2| \leq C (|\ln h| \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} + h \|q\|_{C^0}). \quad (3.85)$$

Il reste à estimer le terme I_3 . Comme ∂S_{ih} est une courbe linéaire par morceaux, soit $z_h = z_h(t)$, $t \in]0, 1[$ son équation ($|z'_h| \leq Ch$). Donc, on a :

$$\partial S_{ih} = \{ z_h(t), t \in [0, 1[\}, \quad \partial S_i = \{ z = \phi_h \circ z_h(t), t \in [0, 1[\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \left(\nu^\tau(y) \frac{q(y)}{|x - y|} |z'| - \nu_h^\tau(y_h) \frac{q_h(y_h)}{|x - y_h|} |z'_h| \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\nu^\tau(y) - \nu_h^\tau(y_h) \right) \frac{q(y)}{|x - y|} |z'| + \nu_h^\tau(y_h) \frac{(q(y) - q_h(y_h))}{|x - y|} |z'| \\ &\quad + \nu_h^\tau(y_h) q_h(y_h) \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - y_h|} \right) |z'| + \\ &\quad + \nu_h^\tau(y_h) \frac{q_h(y_h)}{|x - y_h|} (|z'| - |z'_h|) dt \\ &= I_{31} + I_{32} + I_{33} + I_{34}, \quad \text{où } y_h = z_h(t), y = \phi_h(y_h). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Du lemme 3.8, on a :

$$|\nu^\tau - \nu_h^\tau| \leq |\nu \wedge \tau - \nu_h \wedge \tau_h| \leq C(|\nu - \nu_h| + |\tau - \tau_h|) \leq Ch,$$

ce qui donne :

$$|I_{31}| \leq Ch \|q\|_{C^0} \int_0^1 \frac{|z'|}{|x-y|} dt = Ch \|q\|_{C^0}. \quad (3.87)$$

De façon triviale, (en utilisant le lemme 3.9) pour I_{32} et I_{33} on a :

$$|I_{32}| + |I_{33}| \leq C(\|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} + h^2 \|q_h\|_{C^0}). \quad (3.88)$$

Pour estimer I_{34} , il suffit d'appliquer le lemme 3.8 :

$$\begin{aligned} \|z' - z'_h\| &\leq \|z' - z'_h\| \leq \|(\phi_h \circ z_h)' - z'_h\| \leq C|D\phi_h \cdot z'_h - z'_h| \\ &\leq C|D\phi_h - I| \|z'_h\| \leq Ch^2, \end{aligned}$$

(avec I la matrice identité) ce qui donne :

$$|I_{34}| \leq Ch (\|q\|_{C^0} + \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}). \quad (3.89)$$

Donc, de (3.86), (3.87), (3.88), (3.89), on obtient :

$$|I_3| \leq C(h \|q\|_{C^0} + \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}). \quad (3.90)$$

Finalement, pour x noeud de Γ_h , de (3.80), (3.81), (3.85) et (3.90) on obtient :

$$|D\mathbf{u}(\theta)(x) - D_h \mathbf{u}(x)| \leq C(h \|q\|_{C^1} + |\ln h| \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}). \quad (3.91)$$

(ii.2) Soit maintenant $x \in \Gamma(\theta)$. On raisonne comme dans la démonstration de la proposition 3.13. On note $x_h = \phi_h^{-1}(x)$ et soit T_h , le triangle dans Γ_h contenant x_h . Avec x_j , on note les noeuds de T_h .

Du fait que $D_h \mathbf{u}$ est linéaire dans T_h , il existe $c_j \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_j c_j = 1$ et $D_h \mathbf{u}(x_h) = \sum_j c_j D_h \mathbf{u}(x_j)$. Alors :

$$\begin{aligned} |D\mathbf{u}(\theta)(x) - D_h \mathbf{u}(x_h)| &\leq \left| \sum_j c_j (D\mathbf{u}(\theta)(x) - D\mathbf{u}(\theta)(x_j)) \right| \\ &+ \left| \sum_j c_j (D\mathbf{u}(\theta)(x_j) - D_h \mathbf{u}(x_j)) \right| \\ &\leq C(\epsilon) h^{1-\epsilon} \|q\|_{C^{1-\epsilon}} + C|(D\mathbf{u}(\theta)(x_j) - D_h \mathbf{u}(x_j))|, \end{aligned}$$

parce que de [10], pour $q \in C^1(\Gamma(\theta))$, $D\mathbf{u}(\theta)$ est dans $C^{1-\epsilon}(\Gamma(\theta))$ et on a la majoration :

$$\|D\mathbf{u}(\theta)\|_{C^{1-\epsilon}(\Gamma(\theta))} \leq C(\epsilon) \|q\|_{C^{1-\epsilon}(\Gamma(\theta))},$$

pour tout $\epsilon \in]0, 1[$. La dernière estimation avec (3.91) donne :

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u}(\theta) - D_h \mathbf{u} \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0} &\leq C(\epsilon) h^{1-\epsilon} \|q\|_{C^{1-\epsilon}} \\ &+ C|\ln h| \|q - q_h \circ \phi_h^{-1}\|_{C^0}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

ce qui avec (3.78) et la proposition 3.13, finit la preuve du théorème.

3.3.2.3 L'approximation de $Du(\theta)$ et $Du'(\theta)(\xi)$ au bord.

On a ces deux algorithmes pratiques.

1. L'algorithme pour approcher $Du(\theta)$ au bord, est :

1.1. On trouve $q_h = \sum_{j=1}^n q_j e_j$, solution de (3.64) avec $g = -B^1 \cdot \nu(\theta)$.

2.1. On calcule $D_h u$ donné par (3.67). \square

2. L'algorithme pour approcher $Du'(\theta)(\psi_i \nu_0)$ au bord, est :

1.2. Pour $i = 1, \dots, n$:

2.2. Faire 1.1 et 2.1 avec $g = -Du'(\theta)(\psi_i \nu_0) \cdot \nu(\theta)$ (voir (i), la remarque 3.7).

3.2. $D_h u^i = D_h u$.

3.3.3 La solution numérique. L'analyse de complexité. L'analyse des résultats numériques.

Pour appliquer l'algorithme (1.73), il reste qu'à trouver \mathcal{F}_h , respectivement \mathcal{F}'_h , approximation de \mathcal{F} donné par (1.71), respectivement \mathcal{F}' . On remarque que la fonction \mathcal{F} est construite à partir des fonctions \mathbf{E} et \mathbf{M} données par (3.13).

3.3.3.1 Le calcul de \mathcal{F}_h , approximation de \mathcal{F} .

On calcule \mathcal{F}_h par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } i = 1, \dots, n : \\ \mathcal{F}_h(i) = \int_{\Gamma_h} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}_h^2 + \sigma \mathcal{H}_h + \rho x_3 + \Lambda \right) (\mathbf{e}_i \nu_{0,h} \cdot \nu_h) d\Gamma_h, \\ \mathcal{F}_h(n+1) = m(\Omega_h) - m_0, \end{array} \right. \quad (3.93)$$

où \mathcal{H}_h est une approximation de la courbure $\mathcal{H}(\theta)$ de $\Gamma(\theta)$:

$$\mathcal{H}_h = \sum_{j=1}^3 \delta_j (\nu_h)_j, \quad \text{où } \nu_h = ((\nu_h)_1, (\nu_h)_2, (\nu_h)_3). \quad (3.94)$$

3.3.3.2 Le calcul de \mathcal{F}'_h , approximation de \mathcal{F}' .

En tenant compte de (ii),(iii),(iv) et (v) de la remarque 3.7, pour calculer

\mathcal{F}'_h on a la formule suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Pour } i, j = 1, \dots, n : \\
 \mathcal{F}'_h(i, j) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \left(\mathcal{H}_h \mathbf{B}_h^2 - 2B^1 \cdot \delta \nu_h \cdot \mathbf{B}_h \right) (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) \\
 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \left(\mathbf{e}_j (\nu_h \cdot \delta(\mathbf{e}_i \nu_{0,h}) \cdot \nu_{0,h}) + \mathbf{e}_i (\nu_h \cdot \delta(\mathbf{e}_j \nu_{0,h}) \cdot \nu_{0,h}) + \right. \\
 \quad \left. \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j (\nu_{0,h} \cdot \delta \nu_h \cdot \nu_{0,h}) \right) \mathbf{B}_h^2 \\
 - \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) (\mathbf{B}_h \cdot D_h \mathbf{u}^j) \\
 + \sigma \int_{\Gamma_h} \left(\delta_p(\mathbf{e}_i \nu_{0,h}) \delta_p(\mathbf{e}_j \nu_{0,h}) - \delta_p(\mathbf{e}_i \nu_{0,h}) \delta_q(\mathbf{e}_j \nu_{0,h}) + \right. \\
 \quad \left. (\nu_h \cdot \delta_q(\mathbf{e}_i \nu_{0,h})) (\nu_h \cdot \delta_q(\mathbf{e}_j \nu_{0,h})) \right) \\
 + \rho \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j (\nu_{0,h})_3 (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) \\
 + \int_{\Gamma_h} (\Lambda + \rho x_3) \mathbf{e}_i (\nu_{0,h})_p \left((\nu_h)_p \delta_q(\mathbf{e}_j \nu_{0,h}) - (\nu_h)_q \delta_p(\mathbf{e}_j \nu_{0,h}) \right). \\
 \text{Pour } i = 1, \dots, n : \\
 \mathcal{F}'_h(i, n+1) = \mathcal{F}'_h(n+1, i) = \int_{\Gamma_h} \mathbf{e}_i (\nu_{0,h} \cdot \nu_h), \\
 \mathcal{F}'_h(n+1, n+1) = 0,
 \end{array} \right. \quad (3.95)$$

où la somme selon $p, q = 1, 2, 3$ est sous-entendue.

Une fois \mathcal{F}_h et \mathcal{F}'_h calculés, on peut utiliser l'algorithme (2.51) pour chercher une solution approchée de (1.72). \square

3.3.3.3 L'analyse de complexité et de résultats numériques.

Dans le chapitre 2, on a fait une analyse complète de l'algorithme de Newton (2.51). Dans le cas de la dimension trois, l'analyse de la complexité est la même, sauf que pour le calcul de $D_h \mathbf{u}$, la matrice (3.64) n'est plus symétrique. Par conséquent (voir, par exemple [9], [21]), la complexité de la solution de (3.64) est $\frac{1}{3}n^3$. Alors, la complexité globale d'une itération de Newton en dimension trois (en tenant compte de (2.52)) est :

$$3/2 n^3 + \left(2 + O_A(1) + O_u(1) + O_{\mathcal{F}'}(1) + O_{\mathbf{u}'}(1) n^{2/3} \right) n^2 \text{ flops}, \quad (3.96)$$

alors que la méthode du gradient (remarque 2.16) est de complexité :

$$1/3 n^3 + \left(1 + O_A(1) + O_u(1) \right) n^2 \text{ flops}, \quad (3.97)$$

ce qui montre que pour n grand, ces deux méthodes deviennent (pour le coût) comparables, tout en ayant l'ordre de convergence différent. \square

Dans les exemples qu'on va présenter, la fonction densité du courant j est une somme des mesures de Dirac portées par des courbes de dimension un.

1. Dans ce premier exemple, (les figures FIG. 3.1.-FIG. 3.5. et le tableau TAB. 3.1.), on a pris ces données initiales: $n = 466$ pour la partie à gauche ($n = 722$, à droite), $m_0 = 5$, $\sigma = 1.0$, $\rho = 1.5$ et $\Lambda_0 = -0.5$.

On rappelle que n , resp. n_T , est le nombre des noeuds, resp. des triangles, de la surface Γ_h et l est l'itération courante.

Dans le tableau ci-dessous, comme dans le cas deux dimensionnel, on présente les valeurs de $|\psi_{l,h} - \psi_h^*|_2$, $|\mathcal{L}'_h|_2 = |\mathcal{F}_h(1, \dots, n)|_2$ (les n premières coordonnées de \mathcal{F}_h) et $|\mathcal{M}_h|$.

Les couleurs, de bleu à rouge, montrent l'évolution du module du champ magnétique au carré, $|\mathbf{B}|^2$.

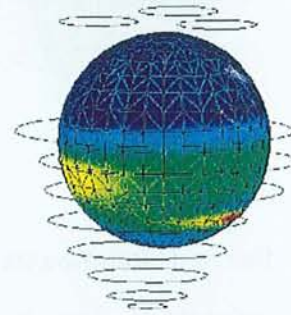


FIG. 3.1. La forme initiale. La fonction j est supportée par les cercles horizontaux.

l	$ \psi_{l,h} - \psi_h^* _2$	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $	l	$ \psi_{l,h} - \psi_h^* _2$	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $
1	0.28160745	0.538742	0.000015	1	0.25110406	0.372630	0.000002
2	0.18938252	0.063276	0.067681	2	0.16177495	0.042990	0.068132
3	0.06923706	0.042613	0.095329	3	0.07439711	0.011917	0.056972
4	0.04567913	0.010282	0.002560	4	0.04414708	0.004039	0.002251
5	0.03178702	0.007892	0.000690	5	0.02783905	0.003162	0.000682
6	0.02448614	0.006620	0.000131	6	0.02026516	0.002739	0.000240
7	0.02172659	0.006003	0.000040	7	0.01508798	0.002484	0.000101
8	0.01944490	0.005557	0.000011	8	0.01145004	0.002307	0.000040
9	0.01717505	0.005230	0.000003	9	0.00881417	0.002172	0.000021
10	0.01495014	0.004965	0.000007	10	0.00684190	0.002062	0.000010

TAB. 3.1. $n = 466$, $n_T = 928$;

$n = 722$, $n_T = 1400$.

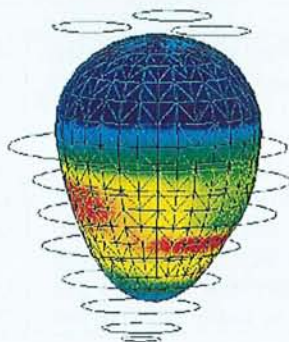


FIG. 3.2. Itération 01.

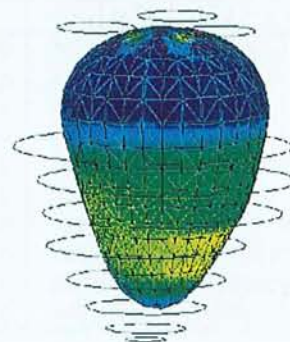


FIG. 3.3. Itération 02.

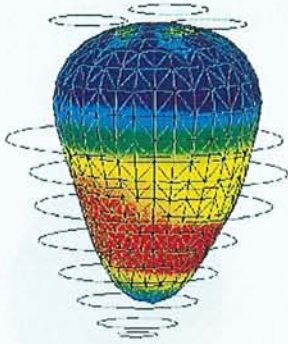


FIG. 3.4. Itération 03.

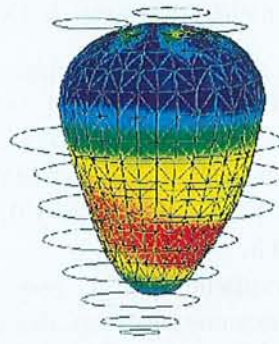


FIG. 3.5. Itération 15.

Dans le tableau TAB. 3.1. on remarque que l'erreur $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$ correspondante à $n = 722$, est presque 2 fois plus petite que l'erreur correspondante à $n = 466$. D'autre part, cette erreur devient presque constante à partir de la 8^{ème} itération, ce qui prouve que l'algorithme a pratiquement convergé à partir de la 8^{ème} itération.

2. Dans cet exemple, les FIG. 3.6.-FIG. 3.10. et le TAB. 3.2., on a fait des simulations numériques en absence de la gravitation. Les données initiales sont: $n = 466$ (et $n = 722$), $m_0 = 4/3\pi$, $\sigma = 1.0$, $\rho = 0$ et $\Lambda_0 = -0.5$.

La fonction j est supportée par les cercles horizontaux et les couleurs, de bleu à rouge (comme dans l'exemple 1), présentent l'évaluation du champ magnétique \mathbf{B}^2 .

Dans le tableau TAB. 3.2 (dans le tableau TAB. 3.1. aussi) on observe la diminution de l'erreur, quand le nombre des noeuds n augmente.

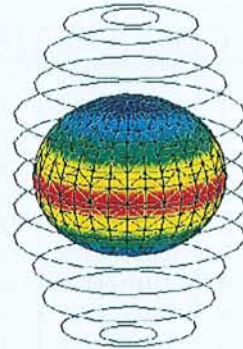


FIG. 3.6. La donnée initiale.

l	$ \psi_{l,h} - \psi_h^* _2$	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $	l	$ \psi_{l,h} - \psi_h^* _2$	$ \mathcal{F}_h(1, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $
1	0.72464585	0.506796	0.000013	1	0.79813778	0.349310	0.000009
2	0.39700067	0.068806	0.164546	2	0.46379471	0.052956	0.158894
3	0.11678660	0.020280	0.127760	3	0.14462113	0.021486	0.146246
4	0.06837911	0.009383	0.005774	4	0.07486272	0.008213	0.010342
5	0.04069978	0.005969	0.001559	5	0.03381169	0.003964	0.002706
6	0.02568707	0.003841	0.000529	6	0.01478958	0.002432	0.000614
7	0.01691918	0.002684	0.000235	7	0.00651443	0.001780	0.000177
8	0.01156871	0.002033	0.000115	8	0.00292313	0.001450	0.000057
9	0.00815278	0.001638	0.000052	9	0.00251385	0.001242	0.000026
10	0.00586782	0.001378	0.000032	10	0.00212407	0.001090	0.000010

TAB. 3.2. $n = 466$, $n_T = 928$; $n = 722$, $n_T = 1400$.

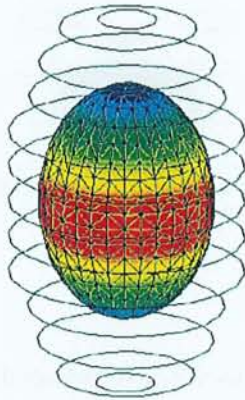


FIG. 3.7. Itération 01.

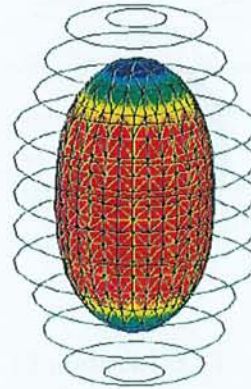


FIG. 3.8. Itération 02.

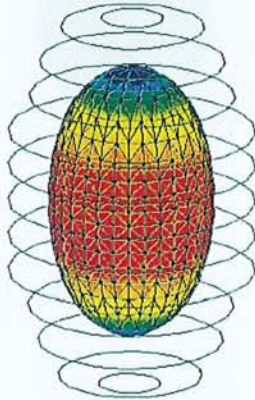


FIG. 3.9. Itération 03.

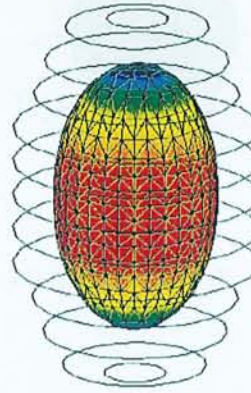


FIG. 3.10. Itération 15.

3. Les données initiales pour cet exemple, FIG. 3.11.-FIG. 3.15. et TAB. 3.3., sont : $n = 466$, $m_0 = 4/3\pi$, $\sigma = 0.5$, $\rho = 1$ et $\Lambda_0 = -0.5$. La forme initiale est une boule, comme dans FIG. 3.1.

l	$ \psi_{l,h} - \psi_h^* _2$	$ \mathcal{F}_h(l, n) _2$	$ \mathcal{M}_h $
1	0.550346136093	0.18274675	0.00000858
2	0.363416433334	0.03846094	0.14281559
3	0.234483063221	0.01779965	0.14949131
4	0.166946530342	0.00816778	0.02791786
5	0.099322676659	0.00461759	0.01086760
6	0.047078490257	0.00309315	0.00307322
7	0.020525963977	0.00248215	0.00065947
8	0.014611248858	0.00217972	0.00006342
9	0.011999816634	0.00199168	0.00003862
10	0.009782091714	0.00185390	0.00002670

TAB. 3.3. $n = 722$; $n_T = 1440$.

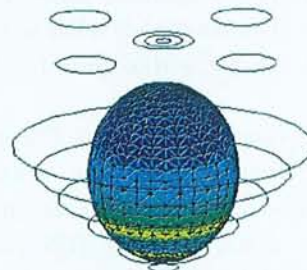


FIG. 3.11. La forme initiale.

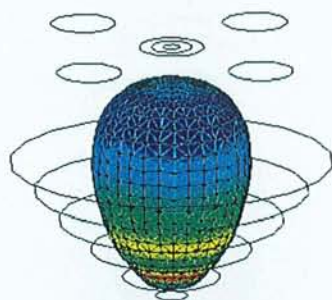


FIG. 3.12. Itération 01.

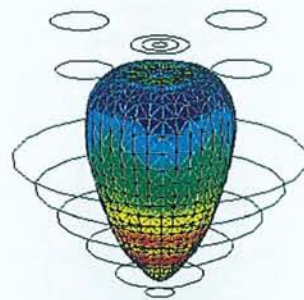


FIG. 3.13. Itération 02.

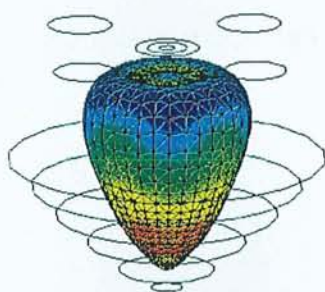


FIG. 3.14. Itération 03.

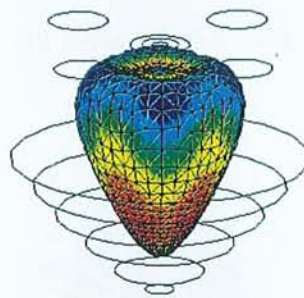


FIG. 3.15. Itération 15.

Remarque 3.15 On finit ce chapitre par quelques remarques concernant les résultats numériques ci-dessus.

1. En général, la méthode de Newton se caractérise par une convergence quadratique. Pourtant, dans les résultats numériques présentés ci-dessus on voit que la convergence n'est pas quadratique. Cette convergence est linéaire, comme elle est présentée dans les figures FIG. 3.16. et FIG. 3.17.

Nous pensons que l'écart de la convergence quadratique est dû au fait que \mathcal{F}_h , resp \mathcal{F}'_h , est une approximation de \mathcal{F} , resp. \mathcal{F}' . En fait, on observe le même comportement de convergence que celui dans le chapitre 2, en dimension deux. La seule différence est que la constante C des figures FIG. 3.16. et FIG. 3.17. est plus grande que celle de la figure FIG. 2.3. en dimension deux. Ceci est lié, pensons nous, au fait qu'en dimension deux l'ordre de l'approximation ($\approx h^2$) est supérieur à celui de la dimension trois ($\approx h^{1-\epsilon}$).

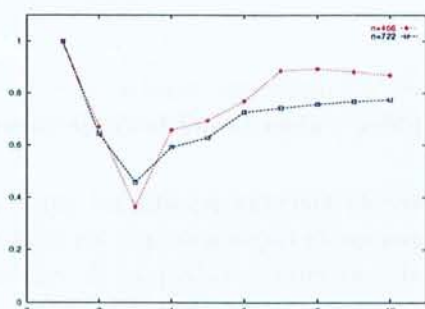


FIG. 3.16. L'évaluation de $C = |\psi_{l+1,h} - \psi_h^*| / |\psi_{l,h} - \psi_h^*|$ pour les données du TAB. 3.1.

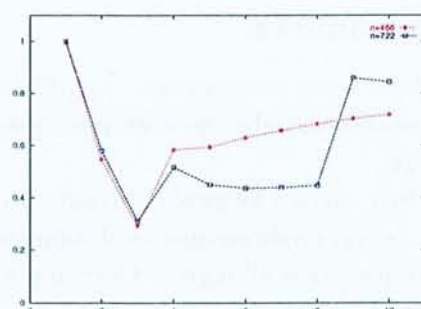


FIG. 3.17. L'évaluation de $C = |\psi_{l+1,h} - \psi_h^*| / |\psi_{l,h} - \psi_h^*|$ pour les données du TAB. 3.2.

2. D'autre part, due à l'approximation du problème de Neumann, en général, \mathcal{F}'_h n'est pas la dérivée par rapport à la forme de \mathcal{F}_h , donc au meilleur cas \mathcal{F}'_h approche la dérivée par rapport à la forme de \mathcal{F}_h . Or, dans ce cas on n'obtient, en général, qu'une convergence linéaire, voir la remarque 1.32.

On remarque que dans l'exemple de la minimisation du périmètre dans le chapitre 1, \mathcal{F}'_h est exactement la dérivée par rapport à la forme de \mathcal{F}_h . Dans ce cas, on obtient une convergence quadratique.

3. Une question liée à ces simulations numériques est: "quelle est l'erreur de l'approximation du domaine?"

Certes, qu'il est classique de montrer que si $L''(\theta^*)$ satisfait la condition de la proposition 1.27, alors l'erreur de l'approximation du domaine $\Omega(\theta^*)$ est de l'ordre $h^{1-\epsilon}$ (l'erreur de l'approximation du gradient). Numériquement, dans les TAB. 3.1. et TAB. 3.2. on observe d'une part que l'erreur $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$ est de l'ordre h et d'autre part, si h se diminue alors l'erreur $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$ se diminue avec le même rapport que h .

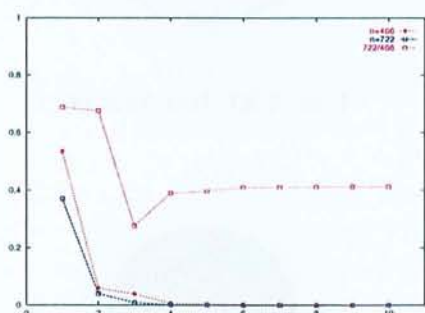


FIG. 3.18. L'évaluation de $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$ du TAB. 3.1.

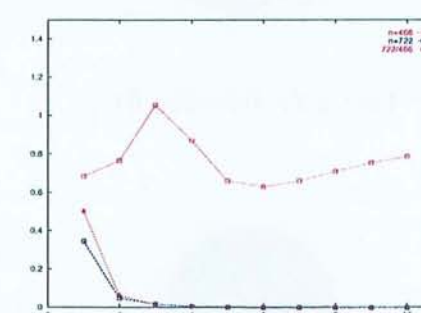


FIG. 3.19. L'évaluation de $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$ du TAB. 3.2.

Dans les deux figures FIG. 3.18. et FIG. 3.19. on présente donc l'évaluation de l'erreur $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$, et le rapport de $|\mathcal{F}_h(1, n)|_2$ à droite ($n=722$) avec ce à gauche ($n=466$) des tableaux TAB. 3.1 et TAB. 3.2.

3.3.4 Annexe.

Dans cette sous-section on présente un exemple qui montre que, quand les données initiales ne sont pas “convenables”, alors la méthode de Newton diverge.

Ainsi, dans l'exemple suivant, les courants électromagnétiques sont trop forts, ce qui implique une évolution du domaine de façon à ce que les triangles deviennent très allongées. Ceci implique des erreurs numériques de calcul et l'algorithme diverge.

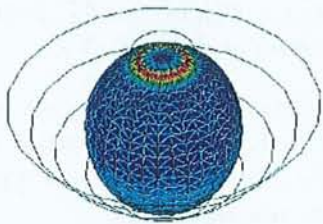


FIG. 3.20. La forme initiale.

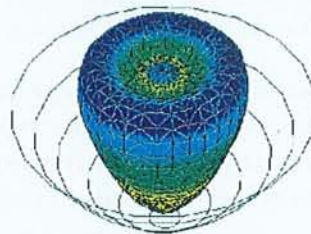


FIG. 3.21. Itération 02.

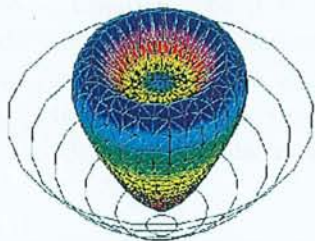


FIG. 3.22. Itération 04.

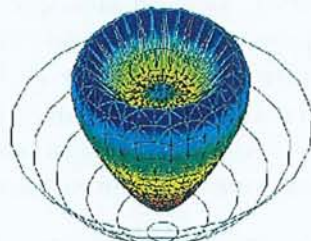


FIG. 3.23. Itération 06.

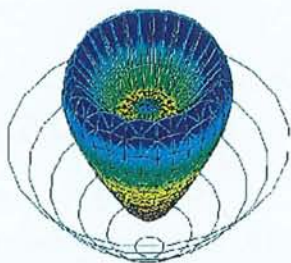


FIG. 3.24. Itération 08.

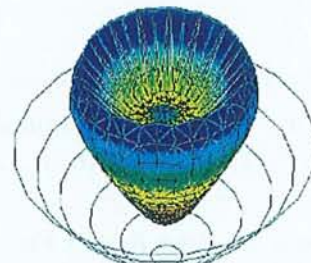


FIG. 3.25. Itération 10.

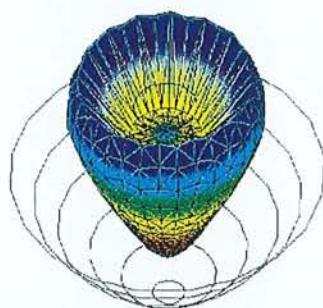


FIG. 3.26. Itération 12.

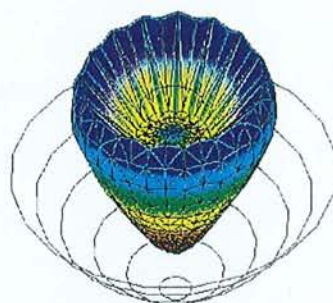


FIG. 3.27. Itération 14.

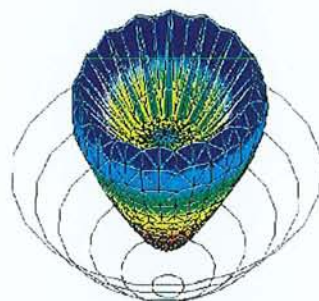


FIG. 3.28. Itération 15.

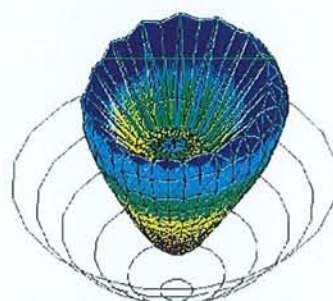


FIG. 3.29. Itération 16.

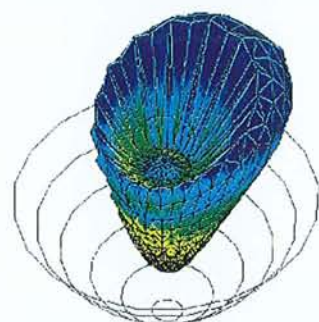


FIG. 3.30. Itération 17.



Figure 3.1 (a)



Figure 3.1 (b)



Figure 3.1 (c)



Figure 3.1 (d)



Figure 3.1 (e)

Chapitre 4

Estimation C^α au bord du gradient de la dérivée par rapport à la forme, de la solution d'un problème de Neumann en \mathbb{R}^3 .

4.1 Introduction. Le résultat principal.

Ce chapitre est consacré à l'étude de $Du'(\theta)$, le gradient au bord de la dérivée par rapport à la forme de la solution du problème de Neumann en dimension trois, avec $\mathbf{u}(\theta)$ donné par (3.21). On remarque qu'il s'agit du principe de Saint Venant pour le gradient d'un problème de Neumann (voir, par exemple [34], [41], [56]).

L'estimation qu'on va établir justifie la façon selon laquelle on calcule ce gradient en dimension deux ou trois, et qui permet de réduire considérablement le coût du calcul.

Théoriquement, le coût du calcul d'une approximation de $Du'(\theta)$ est donné dans b.1.3, la sous-section 2.3.3 pour le cas de la dimension deux et dans la sous-section 3.3.3 pour le cas de la dimension trois. Il est de l'ordre de n^3 flops, avec n le nombre de noeuds. Avec l'estimation qu'on va obtenir, il devient de l'ordre de $n^{2+2/3}$ (voir la remarque 4.19).

On reprend les notations du chapitre précédent, plus précisément de la section 3.3. Donc, pour $\psi \in C^k(\partial Q)$, soit $\theta = \theta_0 + \psi \hat{\nu}_0$ et on considère $\mathbf{u}(\theta)$.

Sous certaines hypothèses, la fonction \mathbf{u} est localement dérivable en θ_0 , de Θ dans $\mathbb{H}^{m-1}({}^e\Omega(\theta))$ (voir la proposition 3.3).

Soit $\tilde{\mathbf{u}}$, la fonction donnée par :

$$\tilde{\mathbf{u}} : \psi \in C^k(\partial Q) \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}(\psi) := \mathbf{u}(\theta) \in \mathbb{H}^m({}^e\Omega(\theta)). \quad (4.1)$$

Du fait que \mathbf{u} est localement dérivable en θ_0 , il découle que $\tilde{\mathbf{u}}$ est aussi localement dérivable en $\psi = 0$, et de (3.21), sa dérivée dans la direction η est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{\mathbf{u}}'(0)(\eta) = 0, & \text{dans } {}^e\Omega(\theta_0), \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}'(0)(\eta)}{\partial \nu_0} = D\mathbf{u}(\theta) \cdot \delta\eta & \\ \quad - \eta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu_0^2} - \frac{\partial B^1}{\partial \nu_0} \cdot \nu_0 \right), & \text{sur } \Gamma(\theta_0). \\ \tilde{\mathbf{u}}'(0)(\eta) = o(1), & \text{à l'infini,} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \dots, \delta_N(\cdot))$ est l'opérateur du gradient tangentiel donné par (3.22).

Dans les applications numériques on approche η par une somme de fonctions linéaires par morceaux, comme dans (3.52). Ceci suggère d'étudier le problème modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0, & \text{dans } {}^e\Omega, \quad \Omega \in \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f\delta_i\eta + g\zeta, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \\ u = o(1) & \text{à l'infini.} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où $i \in \{1, 2, 3\}$ et η, ζ sont à supports compacts petits dans Γ .

Il est clair que si on prend $f = D_i \mathbf{u}(\theta)$, $\zeta = -\eta$ et $g = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\theta)}{\partial \nu_0^2} - \frac{\partial B^1}{\partial \nu_0} \cdot \nu_0$, après une sommation pour $i = 1, 2, 3$, on obtient le système (4.2). \square

Pour la suite on fait les hypothèses suivantes : on suppose que le bord Γ est de classe C^2 et on choisit un système de coordonnées tel que Γ soit tangent au plan $\{y_3 = 0\}$ à l'origine, et que $\nu(0) = (0, 0, 1)$, où ν est la normale extérieure à Γ .

Avec $\sigma = \sigma(\Gamma) > 0$ on note une constante telle que $\Gamma_\sigma = \Gamma \cap B(0, \sigma)$ soit inclus dans le graphe d'une fonction $\varphi : \{y' = (y_1, y_2), |y'| < \sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Pour h avec $0 < h < \sigma$, on note $\Gamma_h = \Gamma \cap B(0, h)$. Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ est de classe } C^2 \text{ et } \Gamma_\sigma \subset \{(y', \varphi(y')), |y'| < \sigma\}, \\ \text{supp}(\eta), \text{supp}(\zeta) \subset \Gamma_h, \quad f, \eta \in C^1(\Gamma), \quad g, \zeta \in C^0(\Gamma), \\ \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} = \|\zeta\|_{C^0(\Gamma)} = 1. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

La question qui nous intéresse est : "comment se comporte $Du(x)$ pour x "loin" de Γ_h , quand $h \rightarrow 0$?"

Nous allons répondre à cette question en utilisant une représentation intégrale de la solution u de (4.3). En effet, sous les hypothèses (4.4), il existe une

unique fonction $q \in C^0(\Gamma)$ (la proposition 3.2, chapitre 3), telle que u donnée par :

$$u(x) = \int_{\Gamma} q(y)\Phi(x, y)dy, \quad x \in {}^e\Omega, \quad (4.5)$$

est solution de (4.3) (où Φ est la solution fondamentale du laplacien, donnée par (2.36)). La fonction q est définie par (la proposition 3.2, chapitre 3) :

$$q(x) - 2 \int_{\Gamma} q(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy = -2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \quad \forall x \in \Gamma, \quad (4.6)$$

où $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = D_x \Phi(x, y) \cdot \nu(x)$.

Pour $\alpha \in [0, 1[$, on note K l'opérateur :

$$K : \begin{cases} C^\alpha(\Gamma) & \rightarrow C^\alpha(\Gamma), \\ q & \rightarrow Kq(\cdot) = 2 \int_{\Gamma} q(y) \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(\cdot)} dy, \quad (\cdot) \in \Gamma, \end{cases} \quad (4.7)$$

qui est linéaire continu (voir, par exemple [10], remarque 2.8). Alors, l'équation (4.6) s'écrit :

$$(I - K)q = -2 \frac{\partial u}{\partial \nu}. \quad (4.8)$$

On note que pour $\alpha \in [0, 1[$, K est compact dans $C^\alpha(\Gamma)$ ([10], théorème 2.30) et son spectre, dans $C^\alpha(\Gamma)$, est dans $[-1, 1[$ (voir, par exemple [32], théorème 10.16). Alors, l'opérateur $I - K : C^\alpha(\Gamma) \rightarrow C^\alpha(\Gamma)$ est linéaire continu inversible, d'inverse continu (voir, par exemple [32], théorème 3.4). Alors, en utilisant l'identité :

$$(I - K)^{-1} = I + K + K^2 + \cdots + K^m + (I - K)^{-1}K^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

et en multipliant l'équation (4.8) par $(I - K)^{-1}$, on trouve que :

$$q = -2 \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + K \frac{\partial u}{\partial \nu} + \cdots + K^m \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) - 2(I - K)^{-1}K^{m+1} \frac{\partial u}{\partial \nu}. \quad (4.9)$$

Pour $q \in C^\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in]0, 1[$, le gradient Du sur Γ est donné par (voir, par exemple [10], théorème 2.17) :

$$Du(x) = -\frac{1}{2}q(x)\nu(x) + \int_{\Gamma} q(y)D_x \Phi(x, y)dy, \quad \forall x \in \Gamma, \quad (4.10)$$

où l'intégrale est comprise dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

La formule précédente montre que si on sait contrôler la fonction q , un contrôle de Du est possible. On remarque qu'on a (voir, par exemple [10]) :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall q \in C^\alpha(\Gamma) : \|Du\|_{C^\alpha(\Gamma)} \leq C_1(\alpha, \Gamma)\|q\|_{C^\alpha(\Gamma)}. \quad (4.11)$$

La première idée pour estimer q est la suivante : on inverse (4.8) et on majore brutalement, ce qui donne :

$$\|q\|_{C^\alpha(\Gamma)} \leq C_2(\alpha, \Gamma) \|(I - K)^{-1}\| \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma)}. \quad (4.12)$$

Du fait que $\text{supp}(\eta) \subset \Gamma_h$ et $\|\eta\|_{C^0(\Gamma)} = 1$, on a que $\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma)} \geq Ch^{-\alpha}$, et par conséquent (4.12) et (4.11) donnent, au mieux, $\|Du\|_{C^\alpha(\Gamma)} \leq C(\alpha, \Gamma)h^{-\alpha}$. Cette estimation n'est pas bonne pour $x \in \Gamma$, "loin" de Γ_h .

Alors, on utilise le développement (4.9), ce qui implique l'estimation des termes du type $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu}$. On note $K \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 2(K_1(x) + K_2(x))$, avec :

$$K_1(x) = \int_{\Gamma_h} f(y) \delta_i \eta(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy, \quad K_2(x) = \int_{\Gamma_h} g(y) \zeta(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy.$$

Le terme $K_2(x)$ s'estime facilement, par une majoration du type :

$$|K_2(x)| \leq C \|g\|_{C^0} \int_{\Gamma_h} \frac{dy}{|x - y|},$$

ce qui nécessite ensuite, l'estimation en fonction de x de l'intégrale.

L'estimation du terme $K_1(x)$ présente plus de difficultés. Pour les x qui sont "proche" de Γ_h , on suit la même technique que celle pour $K_2(x)$. Sinon, grâce à la structure différentielle de $f \delta_i \eta$, par des intégrations par parties sur le bord, pour x "loin" de Γ_h :

$$\begin{aligned} K_1(x) &= - \int_{\Gamma_h} \eta(y) \left(\mathcal{H}(y) f(y) \nu_i(y) + \delta_i f(y) \right) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy \\ &\quad - \int_{\Gamma} f(y) \eta(y) \delta_i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy = K_{11}(x) + K_{12}(x), \end{aligned}$$

où \mathcal{H} est la courbure moyenne de Γ .

Le terme $K_{11}(x)$ se majore comme $K_2(x)$, tandis que $K_{12}(x)$ nécessite l'estimation de $\delta_i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)}$, et puis l'estimation en fonction de x de l'intégrale.

Les autres termes de (4.9), du type $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu}$, sont estimés en utilisant d'abord le fait que $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu} = K \left(K^{m-1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$ et puis en suivant des techniques analogues à celles utilisées dans l'estimation de $K_1(x)$ et $K_2(x)$. On remarque que pour avoir des estimations précises, le bord Γ est divisé en trois parties Γ_{kh} , Γ_σ^{kh} et Γ^σ , où :

$$\begin{aligned} \Gamma_{kh} &= \Gamma \cap B(0, kh), \\ \Gamma_\sigma^{kh} &= \Gamma \cap B^c(0, kh) \cap B(0, \sigma), \\ \Gamma^\sigma &= \Gamma \cap B^c(0, \sigma). \end{aligned} \quad (4.13)$$

L'estimation des intégrales sur Γ_σ^{kh} , qui peut se présenter comme un domaine de "transition" par rapport à la singularité de l'opérateur intégral K , est plus délicate.

Après, il se trouve que pour m convenable, $\|K^{m+1}(Du \cdot \nu)\|_{C^0}$ est majoré en fonction de h , ce qui permet d'avoir une estimation du dernier terme dans (4.9), et donc de q . Puis, essentiellement de (4.11) on obtient une estimation pour Du sur $\Gamma^d := \Gamma \cap B^c(0, d)$, pour d comme dans le théorème ci-dessous. \square

Le résultat principal qu'on va démontrer dans ce chapitre est :

Théorème 4.1 *Soit $k > 1$, $h, d > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ avec :*

$$h \leq h(\sigma), \quad 2kh \leq d \leq \sigma,$$

où $h(\sigma)$ est une constante qui dépend uniquement de σ ; on suppose que les hypothèses (4.4) sont vérifiées.

Alors, il existe des constantes $C(\delta\eta, \eta, k)$, $C(\eta, \zeta, k)$ et $C(\alpha)$ telles que :

$$\begin{aligned} \|Du\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} &\leq C(\eta, \zeta, k) h^2 \frac{1}{d^{3+\alpha}} \\ &\quad + C(\alpha)C(\delta\eta, \zeta, k) h^3 \left(\frac{1}{d^{2+\alpha}} + \frac{|\ln h|}{d^\alpha} \right) \\ &\quad + C(\alpha)C(\eta, \zeta, k) h^2 \left(\frac{1}{d^{2+\alpha}} + \frac{|\ln h|}{d^\alpha} \right) |\ln h|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les constantes $C(\eta, \zeta, k)$, $C(\delta\eta, \eta, k)$ dépendent linéairement en les normes $\|\eta\|_{C^0(\Gamma)}$, $\|\delta\eta\|_{C^0(\Gamma)}$ et $\|\zeta\|_{C^0(\Gamma)}$.

Cette estimation répond à la question concernant l'approximation du gradient $Du'(\theta)(\xi)$ (voir la remarque 4.19). Nous vérifions plus loin, sur un exemple explicite, qu'elle est essentiellement optimale.

4.2 Des résultats préliminaires.

On a le lemme suivant :

Lemme 4.2 *Soit $k \geq 1$. Il existe une constante $C_2 = C_2(k, \Gamma)$, telle que :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{kh}} \frac{dy}{|x-y|} \leq C_2 \begin{cases} h, & |x| \leq kh, \\ \frac{h^2}{|x|}, & |x| \geq kh. \end{cases} \quad (4.15)$$

Démonstration. Soit $x \in \Gamma$, $|x| \leq 2kh$. En projetant sur le plan $\{y_3 = 0\}$ on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{kh}} \frac{dy}{|x-y|} &\leq \int_{|y'| \leq kh} \frac{(1 + |D\varphi(y')|^2)^{1/2}}{(|x' - y'|^2 + |\varphi(x') - \varphi(y')|^2)^{1/2}} dy' \\ &\leq (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} \int_{\{|y'| \leq kh\}} \frac{dy'}{|x' - y'|}, \end{aligned}$$

où avec $(\cdot)'$ on note la projection sur $\{y_3 = 0\}$ de (\cdot) . On fait le changement de variable $y' = x' + z'$ et on obtient :

$$\int_{\{|y'| \leq kh\}} \frac{1}{|x' - y'|} dy' = \int_{\{|x'+z'| \leq kh\}} \frac{dz'}{|z'|} \leq \int_{\{|z'| \leq 3kh\}} \frac{dz'}{|z'|} = 6\pi kh.$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{kh}} \frac{dy}{|x - y|} \leq 3k (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} h. \quad (4.16)$$

Maintenant, si $|x| \geq 2kh$, pour $y \in \Gamma_{kh}$ on a $2|x - y| \geq |x|$. Par conséquent :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{kh}} \frac{1}{|x - y|} dy \leq \frac{C}{|x|} \int_{\Gamma_{kh}} dy \leq C (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} \frac{h^2}{|x|},$$

ce qui avec (4.16) prouve le lemme. \square

Lemme 4.3 *Il existe une constante positive $C_3 = C_3(\Gamma)$, telle que :*

$$\int_{\Gamma} \frac{dy}{|x - y|} \leq C_3, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (4.17)$$

Démonstration. L'intégrale ci-dessus est l'intégrale de simple couche avec densité 1. Alors, il existe une constante C_3 qui dépend seulement de Γ (voir, par exemple [10], [32]) qui satisfait le lemme. \square

On note $B_\sigma^{kh} = \{y \in \mathbb{R}^N, kh \leq |y| \leq \sigma\}$, $N \in \mathbb{N}$. Alors, on a :

Lemme 4.4 *Soit $k \geq 1$ tel que $kh \leq \sigma$. Alors, il existe deux constantes positives $C_4 = C_4(N)$ et $h(\sigma)$ telles que pour $h \leq h(\sigma)$, on a :*

$$\int_{B_\sigma^{kh}} \frac{1}{|x - y|^{N/2}} \frac{dy}{|y|^{N/2}} \leq C_4 |\ln h|.$$

Démonstration. Par un changement de variable on peut se ramener toujours dans le cas $x = (x_1, 0, \dots, 0)$, $x_1 \geq 0$.

a) $|x| \leq \frac{kh}{2}$. Alors, pour $y \in B_\sigma^{kh}$ on a $|y| \leq 2|x - y|$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_{B_\sigma^{kh}} \frac{1}{|x - y|^{N/2}} \frac{dy}{|y|^{N/2}} &\leq C \int_{B_\sigma^{kh}} \frac{dy}{|y|^N} = C \ln \frac{\sigma}{h} \\ &\leq C(-\ln h + \ln \sigma) \leq 2C |\ln h|, \end{aligned}$$

si on a $h \leq \frac{1}{\sigma}$.

b) $|x| \geq \frac{kh}{2}$. Dans ce cas, on va estimer l'intégrale du lemme en faisant d'abord un changement de variable, puis on passe à une intégrale dans un domaine dans

le demi-espace positif et à la fin on change encore une fois de variable (voir les points 1.-5. ci-dessous). Donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{\sigma}^{kh}} \frac{1}{|x-y|^{N/2}} \frac{dy}{|y|^{N/2}} &= \int_Z \frac{dz}{|z+\frac{x}{2}|^{N/2} |z-\frac{x}{2}|^{N/2}} \quad (y = z + \frac{x}{2}) \\
 &= \int_{Z \cap \{z_1 \geq 0\}} (\cdot) dz + \int_{Z \cap \{z_1 \leq 0\}} (\cdot) dz \quad (\text{voir 1. - 5.}) \\
 &\leq 2 \int_{Z'} \frac{dz}{|z+\frac{x}{2}|^{N/2} |z-\frac{x}{2}|^{N/2}} \quad (z = w + \frac{x}{2}) \\
 &\leq 2 \int_W \frac{1}{|w+x|^{N/2}} \frac{dw}{|w|^{N/2}} \\
 &= 2 \int_{W \cap B(0, \frac{|x|}{2})} \frac{1}{|w+x|^{N/2}} \frac{dw}{|w|^{N/2}} + \\
 &\quad 2 \int_{W \cap B^c(0, \frac{|x|}{2})} \frac{1}{|w+x|^{N/2}} \frac{dw}{|w|^{N/2}}, \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé :

1. $\left| (z_1, z_2, \dots, z_N) + \frac{x}{2} \right| = \left| (-z_1, z_2, \dots, z_N) - \frac{x}{2} \right|$,
2. $Z = \{z, kh \leq |z + \frac{x}{2}| \leq \sigma\}$,
3. $Z' = \{z, kh \leq |z + \frac{x}{2}| \leq \sigma + |x|, z_1 \geq 0\}$, $Z \cap \{z_1 \geq 0\} \subset Z'$,
4. $(z_1, z_2, \dots, z_N) \in Z \cap \{z_1 \leq 0\} \Rightarrow (-z_1, z_2, \dots, z_N) \in Z'$,
5. $W = \{w, 0 \leq |w| \leq \sigma + \frac{3}{2}|x|, w_1 + \frac{x_1}{2} \geq 0\}$.

Prouvons le point 4. En effet, si $(z_1, z_2, \dots, z_N) \in Z \cap \{z_1 \leq 0\}$, alors :

$$\left| z + \frac{x}{2} \right| \leq \sigma \Rightarrow |z| \leq \sigma + \frac{|x|}{2} = \sigma + \frac{x_1}{2}.$$

D'autre part, pour z comme ci-dessus, on a les inégalités :

$$\begin{aligned}
 (kh)^2 &\leq (z_1 + \frac{x_1}{2})^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 \leq \sigma^2, \\
 (kh)^2 &\leq (-z_1 + \frac{x_1}{2})^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 \leq \sigma^2 - 2z_1 \cdot x_1, \\
 (kh)^2 &\leq (-z_1 + \frac{x_1}{2})^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 \leq (\sigma + |x|)^2,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve le point 4.

Maintenant, on estime séparément les deux dernières intégrales de (4.18).

Pour la première, on remarque que : $|w+x| \geq |x| - |w| \geq \frac{|x|}{2}$ et donc, pour

$h \leq e^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \frac{|x|}{2})} \frac{1}{|w+x|^{N/2} |w|^{N/2}} dw &\leq \left(\frac{2}{|x|}\right)^{N/2} \int_{B(0, \frac{|x|}{2})} \frac{dw}{|w|^{N/2}} \\ &= |\partial B(0, 1)| \left(\frac{2}{|x|}\right)^{N/2} \int_0^{|x|/2} r^{N/2-1} dr \\ &= \frac{2}{N} |\partial B(0, 1)| \leq \frac{2}{N} |\partial B(0, 1)| |\ln h|. \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, en utilisant :

$$|w+x| = \left(w_1^2 + \dots + w_N^2 + 2x_1 \left(w_1 + \frac{x_1}{2}\right)\right)^{1/2} \geq |w|,$$

et du fait que la fonction $s \rightarrow \ln(a + \sigma/s)$, $a > 0$ est décroissante pour $s \geq 0$, pour $h \leq \frac{1}{5\sigma}$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{W \cap B^c(0, \frac{|x|}{2})} \frac{1}{|w+x|^{N/2} |w|^{N/2}} dw &\leq \int_{W \cap B^c(0, \frac{|x|}{2})} \frac{dw}{|w|^N} \\ &\leq |\partial B(0, 1)| \ln \frac{3|x| + 2\sigma}{|x|} \leq |\partial B(0, 1)| \ln \frac{5\sigma}{h} \leq 2|\partial B(0, 1)| |\ln h|, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme avec $h(\sigma) = \min\{1/e, 1/(5\sigma)\}$. \square

Lemme 4.5 Soit $k \geq 1, h > 0$ tels que $kh \leq \sigma$. Alors, il existe une constante $C_5 = C_5(\Gamma)$, telle que pour $h \leq h(\sigma)$ on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{kh}} \frac{1}{|x-y| |y|} dy \leq C_5 |\ln h|. \quad (4.19)$$

Démonstration. En projetant sur le plan $\{y_3 = 0\}$ et en utilisant le lemme précédent avec $N = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{kh}} \frac{1}{|x-y| |y|} dy &\leq (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} \int_{B_{kh/2}^\sigma} \frac{1}{|x'-y'| |y'|} dy' \\ &\leq C_4 (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} |\ln h|, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme avec $C_5 = C_4 (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} / (2\pi)$.

4.3 L'estimation de $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $m = 1, 2, 3, 4$.

Afin de simplifier la présentation, pour toute constante qui va apparaître dans la suite on précise uniquement la dépendance de la constante en fonction des variables η, ζ ou k et on omet la dépendance en fonction des variables f, g et Γ , i.e. $C(\delta\eta, \zeta, k) := C(\delta\eta, \zeta, k, f, g, \Gamma)$ ou $C(\eta, \zeta, k) := C(\eta, \zeta, k, f, g, \Gamma)$.

Remarquons aussi, que la dépendance des constantes sera linéaire par rapport aux normes $C^0(\Gamma)$ de $\eta, \delta\eta, \zeta, f, g$.

4.3.1 L'estimation de $K \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

On a la proposition suivante :

Proposition 4.6 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que $kh \leq \sigma$. Alors, il existe des constantes positives $C(\delta\eta, \zeta, k)$ et $C(\eta, \zeta, k)$ telles que :

$$\left| K \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right| \leq \begin{cases} C(\delta\eta, \zeta, k)h, & |x| \leq kh, \\ C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{|x|^2}, & |x| \geq kh. \end{cases} \quad (4.20)$$

La dépendance de ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ , est linéaire par rapport à leurs normes $C^0(\Gamma)$.

Démonstration. On distingue deux cas :

(i) Pour $x \in \Gamma$, $|x| \leq kh$, en utilisant le corollaire 3.11 et le lemme 4.2, on a :

$$\begin{aligned} \left| K \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right| &\leq C \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right| \left| \frac{(\nu(x), x-y)}{|x-y|^3} \right| dy \\ &\leq C (\|f\|_{C^0(\Gamma)} \|\delta\eta\|_{C^0(\Gamma)} + \|g\|_{C^0(\Gamma)} \|\zeta\|_{C^0(\Gamma)}) \int_{\Gamma_h} \frac{1}{|x-y|} dy \\ &\leq C (\|\delta\eta\|_{C^0(\Gamma)} + \|\zeta\|_{C^0(\Gamma)}) h, \end{aligned}$$

et ainsi on obtient la première inégalité de la proposition.

(ii) Pour $x \in \Gamma$, $|x| \geq kh$, en intégrant par parties sur Γ , on obtient :

$$\begin{aligned} K \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= - \int_{\Gamma_h} \eta(y) [f(y)\nu_i(y)\mathcal{H}(y) + \delta_i f(y)] \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_h} f(y)\eta(y)\delta_i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} g(y)\zeta(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (4.21)$$

où \mathcal{H} est la courbure moyenne de Γ .

Pour l'intégrale I_1 , en utilisant le corollaire 3.11, le lemme 4.2 et le fait qu'il existe $C(k) = (k-1)^{-1}$ telle que $C(k)|x-y| \geq |x|$, on obtient :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \|f\|_{C^1(\Gamma)} \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} \int_{\Gamma_h} \frac{dy}{|x-y|} \leq C(k) \|f\|_{C^1(\Gamma)} \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} \int_{\Gamma_h} \frac{dy}{|x|} \\ &\leq C(k) \|f\|_{C^1(\Gamma)} \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} \frac{h^2}{|x|}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pour l'intégrale I_3 , de la même façon que pour I_1 , on a :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \|g\|_{C^0(\Gamma)} \|\zeta\|_{C^0(\Gamma)} \int_{\Gamma_h} \frac{dy}{|x-y|} \\ &\leq C(k) \|g\|_{C^0(\Gamma)} \|\zeta\|_{C^0(\Gamma)} \frac{h^2}{|x|}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pour l'intégrale I_2 , on a besoin de transformer $\delta_i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{4\pi} \delta_i \frac{\nu(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^3}$.

L'idée est la suivante: sur le bord Γ , $\nu(x) \cdot (x - y)/|x - y|^3$ est de l'ordre $|x - y|^{-1}$. Alors, sa dérivée tangentielle doit être de l'ordre $|x - y|^{-2}$. Plus précisément on a:

$$\begin{aligned} \delta_i \frac{\nu(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^3} &= \frac{\nu_j(x) \delta_i (x - y)_j}{|x - y|^3} + \nu(x) \cdot (x - y) \delta_i \frac{1}{|x - y|^3} \\ &= \frac{\nu_j(x) \delta_i (x - y)_j}{|x - y|^3} - 3\nu(x) \cdot (x - y) \frac{(x - y)_j \delta_i (x - y)_j}{|x - y|^5}, \end{aligned}$$

où dans l'expression ci-dessus la sommation selon j est sous-entendue.

Or, on a aussi:

$$\delta_i (x - y)_j = -\delta_{ij} + \nu_i \nu_j, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \nu_j(x) \delta_i (x - y)_j &= -\nu_j(x) \delta_{ij} + \nu_i \nu_j \nu_j(x) = -\nu_i(x) + \nu_i \nu_j \nu_j(x) \\ &= -\nu_i(x) \nu_j \nu_j + \nu_i \nu_j \nu_j - \nu_i \nu_j \nu_j + \nu_i \nu_j \nu_j(x) \\ &= -(\nu_i(x) - \nu_i(y)) + \nu_i \nu_j (\nu_j(x) - \nu_j(y)), \end{aligned} \quad (4.25)$$

où pour simplifier les notations, on a enlevé la variable y . Donc, on a:

$$|\nu_j(x) \delta_i (x - y)_j| \leq 4 \|\delta \nu\|_{C^0} |x - y|,$$

et par conséquent, on obtient l'estimation suivante:

$$\left| \delta_i \frac{\nu(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^3} \right| \leq 4 \|\delta \nu\|_{C^0(\Gamma)} (1 + 3C_1) \frac{1}{|x - y|^2}. \quad (4.26)$$

Cette estimation nous conduit à:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \|f\|_{C^0(\Gamma)} \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} \int_{\Gamma_h} \left| \delta_i \frac{\nu(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^3} \right| dy \\ &\leq C \|f\|_{C^0(\Gamma)} \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} \int_{\Gamma_h} \frac{dy}{|x - y|^2}. \end{aligned}$$

En utilisant $C(k)|x - y| \geq |x|$ et en intégrant sur Γ_h on aura:

$$\int_{\Gamma_h} \frac{1}{|x - y|^2} dy \leq C(k) (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} \frac{h^2}{|x|^2},$$

Donc, pour $x \in \Gamma$, $|x| \geq kh$:

$$|I_2| \leq C(k) \|f\|_{C^0(\Gamma)} \|\eta\|_{C^0(\Gamma)} \frac{h^2}{|x|^2},$$

ce qui avec (4.22) et (4.23) prouve la deuxième inégalité de (4.20). \square

Proposition 4.7 Soient $k > 1$ et $d > 0$ tels que $2kh \leq d \leq \sigma$ et $\alpha \in]0, 1[$. Alors, il existe une constante positive $C(\eta, \zeta, k)$, telle que :

$$\left\| K \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{d^{2+\alpha}}, \quad (4.27)$$

où $\Gamma^{d/2} = \Gamma \cap B^c(0, d/2)$. La constante $C(\eta, \zeta, k)$ dépend linéairement en les normes $C^0(\Gamma)$ de η et ζ .

Démonstration. De la formule (4.21), on a que :

$$\begin{aligned} \left\| K \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} &\leq \left[\|\eta\|_{C^0} \left(\|f\|_{C^0} \|\delta \nu\|_{C^0} + \|\delta f\|_{C^0} \right) + \|g\|_{C^0} \|\zeta\|_{C^0} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \int_{\Gamma_h} \left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(\cdot)} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} dy + \\ &\quad \|f\|_{C^0} \|\eta\|_{C^0} \int_{\Gamma_h} \left\| \delta_i \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(\cdot)} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} dy, \end{aligned} \quad (4.28)$$

où la $i^{\text{ème}}$ composante du gradient tangentiel δ_i est prise par rapport à y .

On note $F(x, y)$ la fonction donnée par $F(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)}$.

(i) Montrons d'abord qu'il existe $C'(k)$, telle que :

$$\|F(\cdot, y)\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq \frac{C'(k)}{d^{1+\alpha}}, \quad y \in \Gamma_h. \quad (4.29)$$

En effet, d'abord on a que :

$$\begin{aligned} \delta_i^x F(x, y) &= \frac{\delta_i^x [\nu(x) \cdot (x - y)]}{|x - y|^3} + \nu(x) \cdot (x - y) \delta_i^x (|x - y|^{-3}), \\ \delta_i^x [\nu(x) \cdot (x - y)] &= \delta_i^x \nu_j(x) (x - y)_j + \nu_j(x) \delta_i^x (x - y)_j \\ &= \delta_i^x \nu_j(x) (x - y)_j, \end{aligned}$$

parce que $\nu_j(x) \delta_i^x (x - y)_j = \nu_i(x) - \nu_j(x) \nu_j(x) \nu_i(x) = 0$ (on a omis le signe de la somme selon j). Donc, en utilisant le lemme 3.10, on obtient qu'il existe une constante $C = C(\Gamma)$, telle que :

$$|\delta_i^x F(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^2}. \quad (4.30)$$

Soit alors $x', x'' \in \Gamma^{d/2}$ et $y \in \Gamma_h$. On a que :

$$\begin{aligned} |F(x', y) - F(x'', y)| &\leq C |x' - x''| \max\{ |\delta_i^x F(x, y)|, x \in \Gamma^{d/2} \} \\ &\leq C'(k) \frac{|x' - x''|}{d^2}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{|F(x', y) - F(x'', y)|}{|x' - x''|^\alpha} \leq \begin{cases} C'(k) \frac{|x' - x''|^{1-\alpha}}{d^2} \leq \frac{C'(k)}{d^{1+\alpha}}, & |x' - x''| \leq d, \\ \frac{C'(k)}{d^2 |x' - x''|^{-1+\alpha}} \leq \frac{C'(k)}{d^{1+\alpha}}, & |x' - x''| \geq d, \end{cases}$$

et qui prouve (4.29)

(ii) Montrons maintenant qu'il existe $C''(k)$, telle que :

$$\|\delta_i F(\cdot, y)\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq \frac{C''(k)}{d^{2+\alpha}}, \quad y \in \Gamma_h. \quad (4.31)$$

On prouve premièrement que :

$$|\delta_i^x(\delta_i F(x, y))| \leq \frac{C}{|x - y|^3}. \quad (4.32)$$

En effet, on a que :

$$\begin{aligned} \delta_i F(x, y) &= \frac{\nu_j(x) \delta_i(x - y)_j}{|x - y|^3} - 3\nu(x) \cdot (x - y) \frac{(x - y)_j \delta_i(x - y)_j}{|x - y|^5} \\ &= \frac{\nu(x) \cdot \nu(y) \nu_i(y) - \nu_i(x)}{|x - y|^3} + \quad (\text{de (4.24)}) \\ &\quad 3\nu(x) \cdot (x - y) \frac{(x - y)_i - \nu(y) \cdot (x - y) \nu_i(y)}{|x - y|^5} \\ &=: \frac{a(x, y)}{|x - y|^3} + 3F(x, y) \frac{b(x, y)}{|x - y|^2}, \end{aligned}$$

avec $|a(x, y)|, |b(x, y)| \leq C|x - y|$.

D'autre part, de (2.37) on a $\delta_i^x \frac{1}{|x - y|^m} \leq \frac{C}{|x - y|^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$. Alors, en tenant compte de l'expression de $\delta_i^x \delta_i F(x, y)$, du lemme 3.10 et de (4.30), on obtient (4.32).

Quant au (4.31), on raisonne comme dans (i). Alors, la proposition découle de (4.28), (4.29) et (4.31).

4.3.2 L'estimation de $K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

En séparant l'intégrale sur Γ en trois parties, on a :

$$K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \int_{\Gamma} K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy = I_{kh}(x) + I_{\sigma}^{kh}(x) + I^{\sigma}(x),$$

où :

$$\begin{aligned} I_{kh}(x) &= \int_{\Gamma_{kh}} K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy, \quad \Gamma_{kh} = \Gamma \cap B(0, kh), \\ I_{\sigma}^{kh}(x) &= \int_{\Gamma_{\sigma}^{kh}} K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy, \quad \Gamma_{\sigma}^{kh} = \Gamma \cap B^c(0, kh) \cap B(0, \sigma), \\ I^{\sigma}(x) &= \int_{\Gamma^{\sigma}} K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy, \quad \Gamma^{\sigma} = \Gamma \cap B^c(0, \sigma). \end{aligned}$$

Lemme 4.8 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que $kh \leq \sigma$. Alors, il existe une constante positive $C(\delta\eta, \zeta, k)$, telle que pour $\forall x \in \Gamma$ on a :

$$|I_{kh}(x)| \leq C(\delta\eta, \zeta, k) \begin{cases} h^2 & , |x| \leq kh, \\ \frac{h^3}{|x|} & , |x| \geq kh. \end{cases} \quad (4.33)$$

Démonstration. En utilisant le corollaire 3.11, on a que :

$$|I_{kh}(x)| \leq C \left\| K \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^0(\Gamma_{kh})} \int_{\Gamma_{kh}} \frac{dy}{|x-y|}.$$

La preuve découle alors du lemme 4.2 et de la proposition 4.6. \square

Lemme 4.9 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que $kh \leq \sigma$. Alors, il existe une constante positive $C(\eta, \zeta, k)$, telle que :

$$|I^{\sigma}(x)| \leq C(\eta, \zeta, k)h^2, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (4.34)$$

Démonstration. En utilisant le corollaire 3.11, le lemme 4.3 et la proposition 4.6 on a :

$$\begin{aligned} |I^{\sigma}(x)| &\leq \frac{C_1}{4\pi} \int_{\Gamma^{\sigma}} \left| K \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \frac{dy}{|x-y|} \leq C(\eta, \zeta, k)h^2 \int_{\Gamma^{\sigma}} \frac{1}{|y|^2} \frac{dy}{|x-y|} \\ &\leq C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{\sigma^2} \int_{\Gamma^{\sigma}} \frac{dy}{|x-y|} \leq C(\eta, \zeta, k)h^2, \end{aligned}$$

où σ^2 (une constante qui ne dépend que de Γ) est absorbé par la constante $C(\eta, \zeta, k)$, ce qui prouve le lemme. \square

Lemme 4.10 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que $kh \leq \sigma$ et $h \leq h(\sigma)$. Alors, il existe une constante $C(\eta, \zeta, k)$, telle que pour $x \in \Gamma$ on a :

$$|I_{\sigma}^{kh}(x)| \leq C(\eta, \zeta, k) \begin{cases} h|\ln h|, & |x| \leq kh, \\ h^2|\ln h| \frac{1}{|x|}, & |x| \geq kh. \end{cases} \quad (4.35)$$

Démonstration. Soit $x \in \Gamma$, $|x| \leq \frac{kh}{2}$. Comme dans le lemme ci-dessus, en utilisant le corollaire 3.11 et la proposition 4.6, et puis en projetant sur le plan $\{y_3 = 0\}$, on a :

$$\begin{aligned} |I_\sigma^{kh}(x)| &\leq C(\eta, \zeta, k)h^2 \int_{\Gamma_\sigma^{kh}} \frac{1}{|y|^2} \frac{dy}{|x-y|} \\ &\leq C(\eta, \zeta, k)h^2 (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} \int_{B_\sigma^{kh}} \frac{1}{|y'|^2} \frac{dy'}{|x'-y'|} \\ &\leq C(\eta, \zeta, k)h \int_{B_\sigma^{kh}} \frac{dy'}{|y'|^2} \leq C(\eta, \zeta, k)h \int_{kh}^\sigma \frac{dr}{r} \leq C(\eta, \zeta, k)h |\ln h|. \end{aligned}$$

Pour $x \in \Gamma$, $|x| \geq \frac{kh}{2}$, on utilise encore une fois le corollaire 3.11, la proposition 4.6 et on sépare l'intégrale en deux termes :

$$\begin{aligned} |I_\sigma^{kh}(x)| &\leq C(\eta, \zeta, k)h^2 \int_{\Gamma_\sigma^{kh}} \frac{1}{|y|^2} \frac{1}{|x-y|} dy \\ &\leq C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{|x|} \int_{\Gamma_\sigma^{kh}} \left(\frac{1}{|y|^2} + \frac{1}{|y||x-y|} \right) dy. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale dans les parenthèses ci-dessus, en projetant sur le plan $\{y_3 = 0\}$, on a :

$$\int_{\Gamma_\sigma^{kh}} \frac{1}{|y|^2} dy \leq (1 + \|D\varphi\|_{C^0}^2)^{1/2} \int_{B_\sigma^{kh}} \frac{1}{|y'|^2} dy' \leq C |\ln h|,$$

tandis que pour la deuxième intégrale on utilise le lemme 4.5. Alors, pour $x \in \Gamma$, $|x| \geq \frac{kh}{2}$, on a :

$$|I_\sigma^{kh}(x)| \leq C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h| \frac{1}{|x|},$$

ce qui démontre le lemme. \square

Réunissant les lemmes 4.8, 4.9 et 4.10, on a la proposition suivante :

Proposition 4.11 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que :

$$kh \leq \sigma, \quad h \leq h(\sigma).$$

Alors, il existe deux constantes $C(\delta\eta, \zeta, k)$ et $C(\eta, \zeta, k)$, telles que :

$$\left| K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right| \leq \begin{cases} C(\delta\eta, \zeta, k)h^2 + C(\eta, \zeta, k)h |\ln h|, & |x| \leq kh \\ (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h|) \frac{1}{|x|}, & |x| \geq kh. \end{cases}$$

La dépendance des ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ est linéaire en leurs respectives normes $C^0(\Gamma)$. \square

Proposition 4.12 Soient $k > 1$ et $d, h > 0$ tels que :

$$2kh \leq d \leq \sigma, \quad kh \leq \sigma \quad \text{et} \quad \alpha \in]0, 1[.$$

Alors, il existe trois constantes $C(\delta\eta, \zeta, k)$, $C(\eta, \zeta, k)$ et $C(\alpha)$, telles que :

$$\begin{aligned} \left\| K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} &\leq C(\delta\eta, \zeta, k) h^3 \frac{1}{d^{1+\alpha}} \\ &+ C(\eta, \zeta, k) h^2 \left(\frac{|\ln h|}{d^{1+\alpha}} + \frac{C(\alpha)}{d^2} \right). \end{aligned}$$

La dépendance des ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ est linéaire en leurs respectives normes $C^0(\Gamma)$.

Démonstration. Soient d', d'' deux nombres tels que $0 < d' < d'' < d$ et construisons deux fonctions $\chi_1, \chi_2 \in C^2(\Gamma)$, positives et avec $\chi_1 + \chi_2 = 1$:

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq d' \\ 0, & \text{si } |x| \geq d'' \end{cases}, \quad \chi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \leq d', \\ 1, & \text{si } |x| \geq d''. \end{cases} \quad (4.36)$$

On a que :

$$\begin{aligned} K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= \int_{\Gamma} \chi_1(y) K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy + \int_{\Gamma} \chi_2(y) K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} dy \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

On prend $d' = d/4$ et $d'' = 3d/8$.

On a $I_1 \in C^\alpha(\Gamma^{d/2})$ parce que la fonction sous le signe de l'intégrale a support dans $\Gamma_{d''} = \Gamma \cap B(0, d'')$.

De plus, on a :

$$\|I_1\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq \int_{\Gamma_{d''}} \left\| K \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right\| \left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(x)} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} dy.$$

Or, comme dans la proposition 4.7, on peut démontrer que pour $y \in \Gamma_{d''}$:

$$\left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(x)} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq \frac{C}{d^{1+\alpha}}.$$

Alors, on sépare l'intégrale $I_1(x)$ en deux intégrales (une sur Γ_{kh} et l'autre sur $\Gamma_{d''}^{kh} = \Gamma \cap B(0, d'') \cap B^c(0, kh)$) et puis on utilise la proposition 4.6. Donc :

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} &\leq C(\delta\eta, \zeta, k) h \frac{1}{d^{1+\alpha}} \int_{\Gamma_{kh}} dy + C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{d^{1+\alpha}} \int_{\Gamma_{kh}^c} \frac{dy}{|y|^2} \\ &\leq [C(\delta\eta, \zeta, k) h^3 + C(\eta, \zeta, k) h^2 |\ln h|] \frac{1}{d^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour obtenir une estimation C^α pour $I_2(x)$, on rappelle que l'opérateur K est continu de $C^0(\Gamma)$ dans $C^\alpha(\Gamma)$ (voir, par exemple [10]). Alors, en utilisant aussi la proposition 4.6, on a :

$$\|I_2\|_{C^\alpha(\Gamma)} \leq C(\alpha) \left\| \chi_2(\cdot) K \frac{\partial u}{\partial \nu}(\cdot) \right\|_{C^0(\Gamma)} \leq C(\alpha) C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{d^2},$$

ce qui avec l'estimation pour $I_1(x)$ démontre la proposition.

4.3.3 L'estimation de $K^m \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $m = 3, 4$.

On a la proposition suivante :

Proposition 4.13 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que $kh \leq h(\sigma)$. Alors, il existe deux constantes positives $C(\delta\eta, \zeta, k)$ et $C(\eta, \zeta, k)$, telles que :

$$\left\| K^3 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^0(\Gamma)} \leq (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h|) |\ln h|. \quad (4.37)$$

La dépendance des ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ est linéaire en leurs respectives normes $C^0(\Gamma)$.

Démonstration. En utilisant la proposition 4.11, le corollaire 3.11 et le lemme 4.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| K^3 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right| &\leq (C(\delta\eta, \zeta, k)h^2 + C(\eta, \zeta, k)h |\ln h|) \int_{\Gamma_{kh}} \frac{dy}{|x-y|} + \\ &\quad (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h|) \int_{\Gamma_{kh}} \frac{1}{|y|} \frac{dy}{|x-y|} \\ &\leq (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h|) + \\ &\quad (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 |\ln h| + C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h|^2), \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. \square

Proposition 4.14 Soient $k > 1$ et $h, d > 0$ tels que :

$$h \leq h(\sigma), \quad 2kh \leq d \leq \sigma \quad \text{et} \quad \alpha \in]0, 1[.$$

Alors, il existe trois constantes $C(\delta\eta, \zeta, k)$, $C(\eta, \zeta, k)$ et $C(\alpha)$, telles que :

$$\begin{aligned} \left\| K^3 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} &\leq C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 \left(\frac{C(\alpha)}{d} + \frac{1}{d^{1+\alpha}} \right) + \\ &\quad C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h| \left(\frac{C(\alpha)}{d} + \frac{1}{d^{1+\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

La dépendance des ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ est linéaire en leurs respectives normes $C^0(\Gamma)$.

Démonstration. Comme dans la proposition 4.12, on introduit les deux fonctions χ_1 et χ_2 et les deux nombres d' , d'' . Puis, on sépare l'intégrale sur Γ en deux termes : I_1 et I_2 . En suivant la même technique celle que dans la proposition 4.12, pour $x \in \Gamma^{d/2} := \Gamma \cap B^c(0, d/2)$ on a :

$$\begin{aligned} \|I_1(x)\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} &\leq C \int_{\Gamma_{d''}} \left\| K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right\| \left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(x)} \right\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} dy \\ &\leq (C(\delta\eta, \zeta, k)h^2 + C(\eta, \zeta, k)h|\ln h|) \frac{1}{d^{1+\alpha}} \int_{\Gamma_{kh}} dy \\ &\quad + (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2|\ln h|) \frac{1}{d^{1+\alpha}} \int_{\Gamma_{kh}} \frac{dy}{|y|} \\ &\leq (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2|\ln h|) \frac{1}{d^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour l'intégrale I_2 , encore comme dans la proposition 4.12, on a :

$$\begin{aligned} \|I_2(x)\|_{C^\alpha(\Gamma)} &\leq C(\alpha) \left\| \chi_2 K^2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^0(\Gamma)} \\ &\leq C(\alpha) (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2|\ln h|) \frac{1}{d}, \end{aligned}$$

qui avec l'estimation pour I_1 démontre la proposition. \square

Proposition 4.15 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que :

$$h \leq h(\sigma), \quad 2kh \leq \sigma \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, 1[.$$

Alors, il existe trois constantes $C(\delta\eta, \zeta, k)$, $C(\eta, \zeta, k)$ et $C(\alpha)$, telles que :

$$\left\| K^4 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma)} \leq C(\alpha) (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2|\ln h|) |\ln h|. \quad (4.39)$$

La dépendance des ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ est linéaire en leurs respectives normes $C^0(\Gamma)$.

Démonstration. En utilisant le fait que l'opérateur K est continu de $C^0(\Gamma)$ dans $C^\alpha(\Gamma)$ (voir [10]), la proposition découle de la proposition 4.13.

4.4 L'estimation de $|Du|_{C^\alpha}$.

En utilisant les résultats précédents, on est maintenant en mesure de donner une estimation pour $|Du(x)|$, $x \in \Gamma^d := \Gamma \cap B^c(0, d)$.

D'abord, on commence par la proposition suivante, qui permet d'avoir des estimations pour q .

Proposition 4.16 Soient $k > 1$ et $h > 0$ tels que :

$$h \leq h(\sigma), \quad 2kh \leq \sigma \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, 1[.$$

Alors, il existe trois constantes $C(\delta\eta, \zeta, k)$, $C(\eta, \zeta, k)$ et $C(\alpha)$, telles que :

$$\left\| (I - K)^{-1} K^4 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C^\alpha(\Gamma)} \leq C(\alpha) (C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 + C(\eta, \zeta, k)h^2 |\ln h|) |\ln h|.$$

La dépendance des ces constantes en η , $\delta\eta$ et ζ est linéaire en leurs respectives normes $C^0(\Gamma)$.

Démonstration. L'opérateur $I - K : C^\alpha(\Gamma) \rightarrow C^\alpha(\Gamma)$ est continu inversible (voir, par exemple [10]). Donc, pour démontrer la proposition, il suffit d'avoir une estimation C^α de $K^4 \frac{\partial u}{\partial \nu}$. Or, cette estimation est offerte par la proposition 4.15, ce qui finit la démonstration. \square

On décompose la fonction q donnée par (4.9) :

$$q = q_1 + q_2, \quad q_1 = -2 \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad q_2 = q + 2 \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

On a la proposition :

Proposition 4.17 Soient $k > 1$ et $d, h > 0$ tels que :

$$h \leq h(\sigma), \quad 2kh \leq d \leq \sigma, \quad \alpha \in]0, 1[.$$

Alors, il existe trois constantes $C(\delta\eta, \zeta, k)$, $C(\eta, \zeta, k)$ et $C(\alpha)$, telles que :

$$|q_2(x)| \leq \begin{cases} C(\delta\eta, \zeta, k)h + C(\eta, \zeta, k)h |\ln h|, & |x| \leq kh, \\ C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 \left(\frac{1}{|x|} + |\ln h| \right) + \\ C(\eta, \zeta, k)h^2 \left(\frac{1}{|x|^2} + \frac{|\ln h|}{|x|} + |\ln h|^2 \right), & |x| \geq kh, \end{cases}$$

$$\|q\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq C(\alpha)C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 \left(\frac{1}{d^{1+\alpha}} + |\ln h| \right) + C(\alpha)C(\eta, \zeta, k)h^2 \left(\frac{1}{d^{2+\alpha}} + \frac{|\ln h|}{d^{1+\alpha}} + |\ln h|^2 \right).$$

Démonstration. En utilisant l'égalité (4.9) et puis les estimations obtenues dans les propositions 4.6, ..., 4.16, la démonstration de la proposition découle immédiatement. \square

La démonstration du théorème 4.1. Soit $q \in C^\alpha(\Gamma)$. De [10], on a que $Du \in (C^\alpha(\Gamma))^3$. On construit l'application :

$$G : \begin{cases} C^\alpha(\Gamma) & \rightarrow (C^\alpha(\Gamma))^3, \\ q & \rightarrow Gq(x) = -\frac{1}{2}q(x)\nu(x) + \int_\Gamma q(y)D_x\Phi(x, y)dy. \end{cases} \quad (4.40)$$

Soient d' , d'' , χ_1 et χ_2 comme dans la proposition 4.12, avec $d' = d/2$ et $d'' = 3d/4$. Comme l'application G est linéaire :

$$Du(x) = G(q_1)(x) + G(\chi_1 q_2)(x) + G(\chi_2 q_2)(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.41)$$

parce que $\chi_2 q_1 = 0$.

On estime les trois termes de (4.41).

(i) Pour le terme $G(q_1)$ on intègre par parties sur le bord Γ le terme avec $\delta\eta$. Alors, pour $x \in \Gamma^d$:

$$\begin{aligned} G(q_1)(x) &= - \int_{\Gamma_h} (f\delta\eta_i + g\zeta)(y) D_x \Phi(x, y) dy \\ &= - \int_{\Gamma_h} \eta(y) \left(f(y)\nu_i(y)\mathcal{H}(y) + \delta_i f(y) \right) D_x \Phi(x, y) dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_h} \eta(y) f(y) \delta_i D_x \Phi(x, y) dy + \int_{\Gamma_h} \zeta(y) g(y) D_x \Phi(x, y) dy. \end{aligned}$$

Comme $G(q_1)$ est une intégrale sur Γ_h , on a que $G(q_1) \in C^\alpha(\Gamma^d)$. Donc :

$$\begin{aligned} \|G(q_1)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} &\leq \left[\|\eta\|_{C^0} \left(\|f\|_{C^0} \|\delta\nu\|_{C^0} + \|f\|_{C^1} \right) + \|\zeta\|_{C^0} \|g\|_{C^0} \right] \\ &\quad \cdot \int_{\Gamma_h} \|D_x \Phi(\cdot, y)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} dy + \\ &\quad \|\eta\|_{C^0} \|f\|_{C^0} \int_{\Gamma_h} \|\delta_i D_x \Phi(\cdot, y)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} dy \\ &\leq C(\eta, \zeta, k) \frac{h^2}{d^{3+\alpha}}, \end{aligned}$$

où pour la norme $\|D_x \Phi(\cdot, y)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)}$ et $\|\delta_i D_x \Phi(\cdot, y)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)}$ on a utilisé un argument analogue à celui utilisé dans (i) et (ii) de la démonstration de la proposition 4.7.

(ii) Pour le terme $G(\chi_1 q_2)$, du fait que le support de χ_1 est inclus dans $\Gamma^{3d/4}$, $G(\chi_1 q_2)$ est de classe C^α sur Γ^d . Alors, comme pour le terme $G(q_1)$, on a :

$$\|G(\chi_1 q_2)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} \leq \frac{C}{d^{2+\alpha}} \left(\int_{\Gamma_{kh}} |q_2(y)| dy + \int_{\Gamma_d^{kh}} |q_2(y)| dy \right).$$

En utilisant la proposition 4.17, après une intégration sur Γ_h et Γ_d^{kh} :

$$\begin{aligned} \|G(\chi_1 q_2)\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} &\leq C(\alpha) C(\delta\eta, \zeta, k) h^3 \left(\frac{1}{d^{2+\alpha}} + \frac{|\ln h|}{d^\alpha} \right) + \\ &\quad C(\alpha) C(\eta, \zeta, k) h^2 \left(\frac{1}{d^{2+\alpha}} + \frac{|\ln h|}{d^\alpha} \right) |\ln h|. \end{aligned}$$

(iii) Finalement, de $G \in C^0(C^\alpha(\Gamma); (C^\alpha(\Gamma))^3)$ et de la proposition 4.17 :

$$\begin{aligned}
\|G(\chi_2 q_2)\|_{C^\alpha(\Gamma)} &\leq C(\alpha)\|\chi_2 q_2\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \leq C(\alpha)\|q\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})} \\
&\leq C(\alpha)C(\delta\eta, \zeta, k)h^3 \left(\frac{1}{d^{1+\alpha}} + |\ln h| \right) + \\
&\quad C(\alpha)C(\eta, \zeta, k)h^2 \left(\frac{1}{d^{2+\alpha}} + \frac{|\ln h|}{d^{1+\alpha}} + |\ln h|^2 \right).
\end{aligned}$$

Alors, de (i), (ii), (iii) et de l'estimation $\|q\|_{C^\alpha(\Gamma^{d/2})}$ donnée par la proposition 4.17, on obtient l'estimation $\|Du\|_{C^\alpha(\Gamma^d)}$, ce qui finit la démonstration du théorème. \square

Remarque 4.18 *On peut poser la question : "quelle est l'optimalité de l'estimation C^α qu'on a obtenue dans le théorème 4.1 ?"*

Pour répondre à cette question on considère un problème de Neumann particulier, et puis on étudie son gradient.

Soit alors, $\Omega = \{x_3 > 0\}$, $\Gamma = \{x_3 = 0\}$, $\Gamma_h = \Gamma \cap B(0, h)$ et $\nu = (0, 0, 1)$ le vecteur unitaire normal à Γ .

Avec u on note la solution du problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ Du \cdot \nu = D_1\eta + \eta & \text{sur } \Gamma, \quad \eta(x) := \max\{1 - |x|/h, 0\}, \\ u = o(1) & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Il est clair que la solution u est donnée par :

$$u(x) = 2(D_1\eta + \eta) * \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \frac{D_1\eta(y) + \eta(y)}{|x-y|} dy.$$

Quant au gradient de u , pour $x \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_h$, on a que :

$$\begin{aligned}
Du(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} (\eta(y) + D_1\eta(y)) \frac{(x-y)}{|x-y|^3} dy \quad (\text{on intègre par parties}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \eta(y) \left(\frac{(x-y)}{|x-y|^3} - D_1 \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \left(1 - \frac{|y|}{h} \right) \left(\frac{x-y + D_1 y}{|x-y|^3} - 3(x-y) \frac{(x-y) \cdot D_1 y}{|x-y|^5} \right) dy
\end{aligned}$$

Soit $k > 1$ et $d > 0$ tels que $kh \leq d$. Pour $\alpha \in]0, 1[$, par un calcul direct on trouve que :

$$\|Du\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} = C(k) \frac{h^2}{d^{3+\alpha}}. \quad (4.42)$$

Le théorème 4.1 pour le même cas, i.e. pour un problème de Neumann avec $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f\delta_1\eta + g\zeta$ et $\eta = \zeta = \max\{1 - |\cdot|/h, 0\}$, en négligeant les termes en h ,

resp. d , de l'ordre supérieur à h^2 , resp. $d^{-(3+\alpha)}$, donne :

$$\|Du\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} \leq C(\eta, k) \frac{h^2}{d^{3+\alpha}} + C(\alpha)C(\eta, k) \frac{h^2}{d^{2+\alpha}} |\ln h|. \quad (4.43)$$

On peut comparer les deux estimations (4.42) et (4.43) par rapport aux termes principaux en h et d . Il se trouve qu'elles diffèrent de $|\ln h|$ par rapport à h , et elles sont équivalentes par rapport à d . Donc, quitte au terme $|\ln h|$, on peut dire que l'estimation du théorème 4.1 est optimale.

Enfin, on note que si on suppose que Γ_h est contenu dans une partie plane de Γ , disons Γ_σ , alors tout en suivant la méthode de ce chapitre on obtient une estimation identique à (4.42).

Remarque 4.19 L'estimation du gradient Du ainsi obtenue, répond à la discussion qu'on a faite dans les chapitres 2 et 3, concernant le calcul du gradient de la dérivée par rapport à la forme de la solution du problème de Dirichlet (chapitre 2) et du problème de Neumann (chapitre 3).

En effet, d'après la forme des fonction ψ_i (l'équation (3.52)), il existe une constante C telle que :

$$\|\delta\eta\|_{C^0(\Gamma)} \leq Ch^{-1}, \quad \max\{ \|\eta\|_{C^0(\Gamma)}, \|f\|_{C^1(\Gamma)}, \|g\|_{C^0(\Gamma)} \} \leq C.$$

On s'intéresse à d en fonction de h , disons une puissance de h . Alors, le théorème 4.1 donne :

$$\|Du\|_{C^\alpha(\Gamma^d)} \leq C(\alpha) \frac{h^2}{d^{3+\alpha}}. \quad (4.44)$$

Cette estimation est due au premier terme dans l'inégalité du théorème 4.1. Elle montre que l'erreur C^α (donc celle C^0 aussi) de l'approximation triviale de Du sur Γ^d , c'est-à-dire l'approximation par zéro, est de l'ordre $\frac{h^2}{d^{3+\alpha}}$.

D'autre part, dans le chapitre 3 on a estimé l'erreur $C^0(\Gamma)$ de l'approximation de u et Du . Si $\tilde{g} := f\delta\eta + g\zeta$ est de classe C^1 , alors \tilde{g}_h , une approximation linéaire par morceaux de \tilde{g} , satisfait $\|\tilde{g} - \tilde{g}_h\|_{C^0(\Gamma)} \leq Ch\|\tilde{g}\|_{C^1(\Gamma)}$. Donc, si $D_h u$ est l'approximation de Du donnée par le théorème 3.14, de ce théorème on a (pour $\epsilon = \alpha$) :

$$\|Du - D_h u\|_{C^0(\Gamma)} \leq C(\alpha, \Gamma, \|\tilde{g}\|_{C^1(\Gamma)}) \cdot h^{1-\alpha}. \quad (4.45)$$

Les estimations (4.44) et (4.45) suggèrent, de façon assez naturelle, d'approcher Du par $D_d u$, définie par :

$$D_d u(x) = \begin{cases} D_h u(x), & \text{si } |x| \in \Gamma \cap B(0, d), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.46)$$

De (4.44) et (4.45) on obtient que :

$$\|Du - D_d u\|_{C^0(\Gamma)} \leq C(\alpha, \Gamma, \|\tilde{g}\|_{C^1(\Gamma)}) \cdot \left(h^{1-\alpha} + \frac{h^2}{d^{3+\alpha}} \right). \quad (4.47)$$

L'inégalité (4.47) montre que l'erreur $\|Du - D_d u\|_{C^0}$ est en fonction de d et du point de vue numérique, ceci représente beaucoup d'intérêt.

En effet, on suppose que sur Γ on a fait un maillage uniforme, donc le nombre de noeuds contenus dans $\Gamma \cap B(0, d)$ est proportionnel à d^2/h^2 , où n est le nombre total des noeuds de Γ (proportionnel à h^{-2}).

Alors, de (4.47) il découle qu'il est inutile d'aller chercher une meilleure précision que $h^{1-\alpha}$ et qu'on peut limiter d en conséquence, ce qui permet de diminuer le coût de l'évaluation du gradient.

D'autre part, choisir d petit, certainement implique une perte de précision. Mais, si la précision ainsi dégradée nous est malgré tout suffisante, cela permet de mieux diminuer le coût. Par exemple, si $d = h^{1/2}$, la précision devient $h^{(1-\alpha)/2}$ et le nombre de noeuds à évaluer est en $n^{1/2}$.

En fait, si on veut que l'erreur théorique tende vers zéro, on ne peut pas descendre au dessous de $d = h^{2/(3+\alpha)}$.

Ici, on choisit d de façon que l'erreur dans (4.47) soit en $h^{1-\alpha}$. Il suffit de prendre $d = h^{1/3}$ et alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on obtient :

$$\|Du - D_d u\|_{C^0(\Gamma)} \leq C(\alpha, \Gamma, \|\tilde{g}\|_{C^1}) (h^{1-\alpha} + h^{1-\alpha/3}) \leq C(\alpha, \Gamma, \|\tilde{g}\|_{C^1}) h^{1-\alpha}.$$

Donc, on approche Du par $D_h u$ dans $\Gamma \cap B(0, d)$ et par zéro dans $\Gamma \cap B(0, d)$, avec une erreur de l'ordre $h^{1-\alpha}$. Ainsi, le nombre de noeuds à évaluer est en $n^{2/3}$.

Alors, si on revient au calcul de $D_h u^i$, $i = 1, \dots, n$ au chapitre 3, la sous-section 3.3.3, le coût de ce calcul devient :

$$n \cdot n \cdot n^{2/3} = n^{2+2/3} \text{ flops,}$$

ce qui représente un gain de $n^{1/3}$ (important!) de calcul.

4.5 Des résultats numériques.

On va présenter quelques résultats numériques qui permettent de confirmer l'estimation du gradient Du obtenue dans le théorème 4.1. On a fait des calculs pour $Du'(\theta)(\xi)$ du problème (3.21) avec $\Omega = B(0, 1)$, $\xi = \psi_1 \nu_0$ avec ψ_1 donné par (3.52) et j , une somme de mesures de Dirac portées par des cercles horizontaux, comme dans l'exemple 1., à la fin de la sous-section 3.3.3.

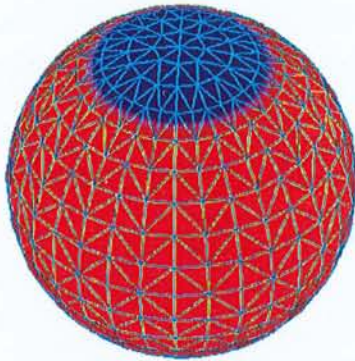


FIG. 4.1. La partie en bleu présente le domaine où on calcule effectivement le gradient.

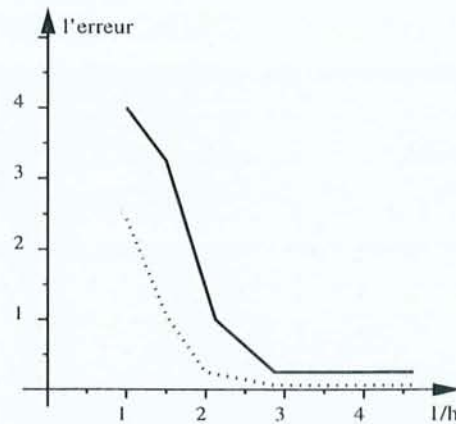


FIG. 4.2. L'évaluation de l'erreur du TAB. 4.1.

Dans la figure FIG. 4.1 la partie en bleu correspond au domaine où on calcule effectivement le gradient. La figure FIG. 4.2. représente graphiquement les résultats du tableau TAB. 4.1.

Dans le tableau TAB. 4.1. présente $|Du'(\theta)(\xi)|_{C^0(\Gamma \cap B^c(0,d))}$ (une approximation), ainsi que son rapport avec h^2 et $h^2 |\ln h|$. On observe que la valeur de ce rapport tend vers une constante quand h se diminue ce qui confirme l'estimation du théorème 4.1.

h	$ Du _{\Gamma \cap B^c(0,d)}$	$ Du _{\Gamma \cap B^c(0,d)}/(h^2 \ln h)$	$ Du _{\Gamma \cap B^c(0,d)}/h^2$
d	0.30813372	2.43487453	4.00119925
$d/1.50$	0.11213724	1.15069759	3.27629781
$d/2.16$	0.01732235	0.24923205	1.04945874
$d/2.83$	0.00232763	0.04488945	0.24206825
$d/3.50$	0.00080547	0.01994313	0.12812576
$d/4.00$	0.00058294	0.01701208	0.12111413
$d/4.66$	0.00036445	0.01291452	0.10276867

TAB. 4.1. Des résultats pour $d = 0.27750735$.



Figure 1: A graph showing a curve that starts at the origin and rises steeply, then levels off towards a horizontal asymptote.

Figure 2: A circular diagram with a central point and several lines radiating outwards to the circumference.

The following table shows the results of the experiment. The data indicates that the rate of change is highest at the beginning and decreases as the process continues. This is consistent with the theoretical model.

Time (min)	Temperature (°C)	Rate of Change (°C/min)
0	20	0
5	35	3.0
10	45	2.0
15	50	1.5
20	52	1.2
25	53	1.0
30	53.5	0.8
35	54	0.7
40	54.5	0.6

Table 1: Experimental data showing temperature and rate of change over time.

Chapitre 5

La parallélisation de la méthode de Newton en optimisation de formes en dimension trois.

Dans ce chapitre, après un rappel de quelques notions de parallélisation, on étudie la parallélisation de l'algorithme d'optimisation de formes introduit dans (1.73), appliqué au problème posé dans le chapitre 3 .

L'algorithme discrétisé de (1.73), donné par (2.51), est composé de deux parties. D'une part, le calcul d'une approximation \mathcal{F}_h de \mathcal{F} donné par (1.71), et d'autre part, le calcul d'une approximation \mathcal{F}'_h de \mathcal{F}' .

Le calcul de \mathcal{F}_h impose le calcul au bord du gradient de la solution d'un problème de Neumann à l'extérieur d'un domaine dans \mathbb{R}^3 . Pour résoudre ce problème nous avons utilisé une méthode intégrale, ce qui nous conduit à construire une matrice \mathbf{N} , dont le coût est assez important. La construction de cette matrice se fait par une procédure standard d'éléments finis. Le couplage entre les boucles selon les indices des éléments et les indices des noeuds, rend difficile une parallélisation efficace de la construction de la matrice \mathbf{N} .

La construction parallèle de la matrice \mathbf{N} est faite en utilisant une distribution classique 1-cyclique selon les colonnes. La matrice \mathbf{N} étant non-symétrique, on a utilisé une factorisation \mathbf{LU} qu'on mémorise. Alors, en négligeant les termes d'ordre inférieur, le coût de calcul de \mathcal{F}_h est dominé par la factorisation \mathbf{LU} de la matrice \mathbf{N} . Donc, son coût est $n^3/3$ (voir, par exemple [9], [21]).

Le calcul de l'approximation \mathcal{F}'_h de la dérivée seconde \mathcal{F}' demande le calcul du gradient au bord pour n problèmes de Neumann extérieurs, ce qui nécessite la résolution de n systèmes linéaires. Or, il se trouve que ces systèmes ont la même matrice que \mathbf{N} , dont la factorisation est déjà trouvée. Alors, il reste à résoudre $2n$ systèmes triangulaires qui sont complètement indépendants.

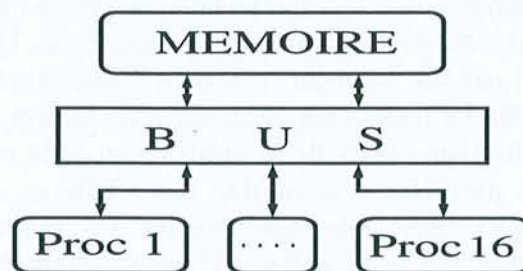
Après, on calcule le gradient au bord de chacun des problèmes de Neumann. Ces calculs sont indépendants parce que chacun de ces gradients ne dépend que de la solution du système linéaire respectif, mentionné ci-dessus. Théoriquement, ce calcul est de l'ordre de $O(1)n^3$, avec $O(1)$ assez grand. L'estimation qu'on a obtenue dans le chapitre 4 nous permet de diminuer l'ordre du coût de ce calcul, plus précisément, ce calcul devient de l'ordre $n^{2+2/3}$.

L'itération de Newton se termine par la résolution d'un système linéaire, à matrice symétrique. Pour sa parallélisation, on utilise la même méthode que celle utilisée dans le calcul de \mathcal{F}_h . Donc, en négligeant les termes d'ordre inférieur, le coût du calcul de l'approximation de la dérivée seconde \mathcal{F}'_h est de l'ordre de $7/6n^3$.

On obtient donc, une méthode de calcul parallèle de \mathcal{F}_h et \mathcal{F}'_h , telle que l'ensemble des calculs (d'ordre $3/2n^3$) est partagé uniformément entre les processeurs, et avec un nombre d'échanges de messages entre les processeurs d'ordre n^2 . Alors, il est classique, voir [11], que pour n assez grand cette méthode de parallélisation s'approche à la méthode idéale, *i.e.* le temps du calcul avec p processeurs est p fois plus petit que le temps du calcul avec un processeur.

Au cours de ce chapitre, on présente des résultats numériques qu'on a obtenus en utilisant une machine Power Challenge Array P.C.A. (de type M.I.M.D, voir, par exemple [23]). C'est une machine à bus, composée de (4+16+16) processeurs R8000 (90MHz), de 8 processeurs R8000 (75 MHz), et d'une mémoire vive 1Go (l'architecture d'un noeud est présentée dans la figure ci-dessous). Dans les simulations que nous avons faites, on a utilisé un noeud de 16 processeurs.

Ce travail est fait dans le cadre de la coopération avec le Centre Charles Hermite, qui regroupe des équipes lorraines de biologie, chimie, informatique et de mathématiques, autour de la modélisation et du calcul à haute performance.



L'architecture d'un noeud de P.C.A.

5.1 La position du problème.

Dans la suite de ce chapitre, avec A on notera un algorithme séquentiel qu'on précisera dans la suite. Étant donnée une machine à p processeurs, on notera $A(p)$ l'algorithme parallèle de A .

Soit t_A , resp. $t_{A(p)}$, le temps de l'exécution de A , resp. $A(p)$. On appelle speed-up de $A(p)$, (resp. efficacité de $A(p)$), le nombre S , (resp. E), défini par :

$$S = \frac{t_A}{t_{A(p)}}, \quad \left(\text{resp. } E = \frac{S}{p} \right).$$

Pour exprimer t_A et $t_{A(p)}$, il est classique d'introduire :

$$\begin{cases} 1 \text{ flop} = 1 \text{ multiplication} + 1 \text{ addition de deux réels,} \\ \epsilon = \text{le temps pour qu'un processeur effectue 1 flop,} \\ \sigma = \text{le temps pour que deux processeurs échangent un nombre réel.} \end{cases}$$

Dans les sections qui suivent, on va présenter une méthode pour paralléliser l'algorithme donné par (2.51), appliqué au problème d'optimisation de formes posé dans (3.14). Donc, si on note cet algorithme séquentiel par A (il est présenté en détail dans la sous-section 3.3.3), on va construire $A(p)$, l'algorithme parallèle de A , qui va se dérouler sur une machine à p processeurs.

Dans la suite on présente une description des algorithmes, en utilisant parfois des abréviations des variables ou des commandes du langage de la programmation parallèle M.P.I. (Message Passing Interface).

Ainsi, p désigne le nombre des processeurs, **my.id** est le nombre d'identification que porte chaque processeur, **World** est l'ensemble des processeurs engagés, **Reduce** désigne la réalisation d'une opération mathématique et **Bcast** désigne l'envoi d'un message à **World** (à tous les processeurs).

Le nombre des noeuds est noté n , tandis que le nombre des éléments finis triangulaires sur Γ_h est noté $n.elems$.

Pour toutes les matrices qu'on va construire dans l'algorithme parallèle $A(p)$, on va utiliser une distribution 1-cyclique (ou une distribution globale), c'est-à-dire, on fournit au processeur **my.id**, $1 \leq \text{my.id} \leq p$, les colonnes **my.id** + $j * p$, $j \in \mathbb{N}$ tel que **my.id** + $j * p \leq n$.

$$N = \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \cdots & N_{1,p} & N_{1,p+1} & \cdots & N_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{n,1} & N_{n,2} & \cdots & N_{n,p} & N_{n,p+1} & \cdots & N_{n,n} \end{pmatrix}$$

proc. 1

proc. 2

...

proc. p

proc. 1

...

.

La stratégie de la parallélisation de l'algorithme (2.51) sera comme ci-dessous :

1. La parallélisation du calcul de F_h .
 - a. La parallélisation du calcul de $D_h \mathbf{u}$ (la parallélisation de la construction de la matrice (3.64), de la solution de (3.64) et de $D_h \mathbf{u}$).

- b. Le calcul de \mathcal{H}_h .
 - c. Le calcul de \mathcal{F}_h .
2. La parallélisation du calcul de \mathcal{F}'_h .
- a. La parallélisation du calcul de $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$ (la parallélisation des solutions de n systèmes du type (3.64) et des calculs de $D_h \mathbf{u}^i$).
 - b. La parallélisation du calcul de \mathcal{F}'_h .
3. La parallélisation de la résolution de $\mathcal{F}_h + \mathcal{F}'_h \cdot x = 0$.

On verra dans la suite, que l'algorithme parallèle $A(p)$ qu'on construira, a un speed-up qui tend vers la valeur optimale, c'est-à-dire p , quand le nombre de noeuds n devient grand.

5.2 La parallélisation de la dérivée première.

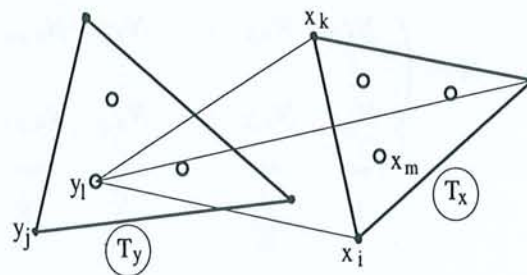
Dans cette sous-section on présente l'algorithme parallèle $A(p)$ de A , où A est l'algorithme séquentiel pour le calcul de \mathcal{F}_h , donné dans 3.3.3. Pour mieux construire l'algorithme parallèle ainsi que pour compléter la présentation, parfois on donne aussi l'algorithme séquentiel correspondant.

5.2.1 Le calcul de $D_h \mathbf{u}$.

Les points plus importants dans cette partie sont la construction de la matrice \mathbf{N} (voir ci-dessous), la factorisation \mathbf{LU} de cette matrice, la résolution des deux systèmes triangulaires et le calcul du gradient au bord.

5.2.1.1 Le calcul de la matrice \mathbf{N} donnée par (3.64).

L'algorithme séquentiel A de calcul de cette matrice est très classique dans la méthode des éléments finis. Avec \mathbf{T}_x , (resp. \mathbf{T}_y), on note l'indice d'un élément triangulaire correspondant à la variable x (resp. y).



```

do  $\mathbf{T}_y = 1, n.elems$ 
  do  $\mathbf{T}_x = 1, n.elems$ 
c   pour j noeud du triangle  $\mathbf{T}_y$  :
c   pour i noeud du triangle  $\mathbf{T}_x$  :
c   on va approcher par  $I_{i,j}^h$  l'intégrale :
```

```

c      
$$I_{i,j} = \int_{\mathbf{T}_x} \int_{\mathbf{T}_y} \mathbf{e}_i(x) \mathbf{e}_j(y) \sum_{x_k \in \mathbf{T}_x} \mathbf{e}_k(x) \frac{\partial \Phi(x_k, y)}{\partial \nu_h(x_k)} dx dy.$$

c      pour  $y_l$ , point de Gauss dans  $\mathbf{T}_y$  :
c      pour  $x_m$ , point de Gauss dans  $\mathbf{T}_x$  :
c      pour  $x_k$  noeud de  $\mathbf{T}_x$ , qui n'est pas noeud de  $\mathbf{T}_y$  :
          
$$I_l^h = \sum_{m,k} \mathbf{e}_i(x_m) \mathbf{e}_k(x_m) \frac{(x_k - y_l) \cdot \nu_h(x_k)}{|x_k - y_l|^3}.$$

c      finpour
c      finpour
          
$$I_{i,j}^h = \frac{|\mathbf{T}_y| |\mathbf{T}_x|}{18\pi} \sum_l \mathbf{e}_j(y_l) I_l^h.$$

c      finpour
          
$$\mathbf{N}(i, j) = \mathbf{N}(i, j) + I_{i,j}^h.$$

c      finpour
c      finpour
    enddo
c      pour  $i, j$  noeud du triangle  $\mathbf{T}_y$ :
          
$$\mathbf{N}(i, j) = \mathbf{N}(i, j) + \frac{|\mathbf{T}_y|}{3} \sum_l \mathbf{e}_i(y_l) \mathbf{e}_j(y_l) dy.$$

    enddo

```

Pour la parallélisation de cet algorithme séquentiel on peut suivre deux stratégies différentes :

- la première consiste à garder la structure de l'algorithme séquentiel, et à commencer par un boucle, à pas p , selon l'indice des colonnes (comme le stockage de \mathbf{N} est 1-cyclique selon les colonnes). Or, dans ce cas sur tout triangle \mathbf{T}_y il y aura au moins deux processeurs qui opèrent. Alors, chacun de ces processeurs va calculer le noyau intégral $N(k, l, \mathbf{T}_y) = (x_k - y_l) / |x_k - y_l|^3$, donc ce calcul ne sera pas partagé (on remarque que les valeurs du noyau N seront nécessaires pendant le calcul de $D_h \mathbf{u}$ et $D_h^i \mathbf{u}$ plus tard, par tous les processeurs). De même, avec cette stratégie le calcul des quantités I_l^h n'est pas partagé entre les processeurs.

- la deuxième stratégie consiste à calculer d'abord le noyau intégral N . Puis, on continue (en conservant la structure de l'algorithme séquentiel) avec le boucle selon \mathbf{T}_y , à pas p . Ceci implique que le calcul est divisé entre les processeurs et chaque processeur *my.id* construit sa propre matrice $\mathbf{N}^{my.id}$, tandis que la matrice \mathbf{N} est égale à la somme de ces matrices $\mathbf{N}^{my.id}$. Donc, on a n^2 échanges complémentaires.

Donc, il est plus avantageux de choisir la deuxième stratégie. L'algorithme parallèle respectif est ci-dessous :

```

do  $\mathbf{T}_y = my.id, n.elems, p$ 
c      le même code que dans l'algorithme ci-dessus, sauf qu'
c      on ne calcule plus les valeurs du noyau intégral, donc

```

```

c     chaque processeur my.id construit sa matrice  $N^{my.id}$ .
      enddo
cc la sommation des matrices  $N^{ip}$ .
  do j = 1, n
c     its.j = le processeur dont appartient la colonne j.
      If ( my.id = its.j ) then
        do ip = 1, p
c         je reçois  $N_j^{ip}$ , la colonne j de  $N^{ip}$ .
c         je calcule  $N_j^{my.id} = N_j^{my.id} + N_j^{ip}$ .
        enddo
      else
c       j'envoie ma colonne  $N_j^{my.id}$  au processeur its.j.
        EndIf
      enddo
  do k = my.id, n, p
    do  $T_y = 1, n.elems$ 
c     pour yl points de Gauss de  $T_y$ , je calcule  $N(k, T_y, l)$ .
    enddo
    Bcast( $N(k, \cdot, \cdot)$ , my.id, World)
  enddo

```

De façon évidente, on a que dans l'algorithme séquentiel A on effectue $O_N(1)n^2$ flops, tandis que dans l'algorithme parallèle tout processeur effectue $O_N(1)n^2/p$ flops et $n^2 + 9n * n.elems$ échanges de réels (la matrice N et le noyau N). Donc :

$$t_A = O_N(1)n^2 \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{O_N(1)}{p} n^2 \cdot \epsilon + (n^2 + 9n * n.elems) \cdot \sigma. \quad (5.1)$$

p	n=466	n=594	n=722	n=850	n=1042
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	1.98783	1.98948	1.99072	1.98987	1.95461
4	3.80512	3.82831	3.83783	3.85917	3.90204
6	5.44122	5.44295	5.54223	5.78762	5.97565
8	6.55296	6.99266	7.06120	7.06016	7.05815
10	7.39028	8.04811	8.16101	8.33616	8.77747
12	7.60246	8.50711	8.65802	9.09605	9.32115
14	7.79171	8.80565	9.25597	9.55448	10.03638
16	7.90512	9.07090	9.32862	9.77081	10.41843

TAB. 5.1. Le speed-up de la construction de la matrice N .

On voit que le speed-up de la parallélisation est presque linéaire pour $1 \leq p \leq 8$, et son écart de la courbe $S = p$ est plus grand pour $p \geq 10$. Il est clair que sur une machine à mémoire partagée, on n'obtient pas le même comportement pour le speed-up, à cause de l'importance des échanges entre les

processeurs. En fait, même sur une machine à mémoire distribuée ces échanges deviennent importants, comme ci-dessus pour $p \geq 10$. Pourtant, du fait que l'échange des colonnes s'effectue par des blocs de taille n , plus le nombre des noeuds n est grand, plus le speed-up s'approche à la courbe $S = p$.

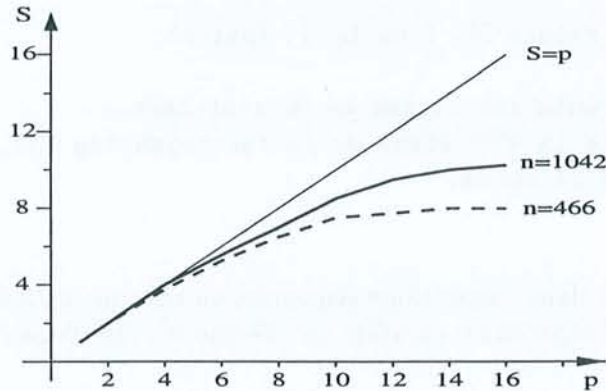


FIG. 5.1. L'évaluation du speed-up de construction de N.

5.2.1.2 La résolution du système (3.64).

D'abord on fait la factorisation classique LU de la matrice N (non symétrique) et puis, on résout deux systèmes triangulaires.

5.2.1.2.a La factorisation LU.

L'algorithme classique séquentiel avec pivot partiel de la factorisation LU de N (voir par exemple, [9], [21]), est comme ci-dessous :

```

do k = 1, n
c   on trouve le pivot de  $N_k$ , la colonne k de N.
c   on permute les lignes de N s'il faut.
c   on fait la kème étape de la factorisation LU.
enddo

```

Pour construire $A(p)$, l'algorithme parallèle de la factorisation LU, à chaque itération k le processeur *its.k* devient "le maître". Il trouve le pivot de sa colonne k et il envoie à **World** sa colonne L_k et l'information concernant la permutation des lignes. Une fois que **World** reçoit ces messages, chaque processeur effectue la factorisation de ces colonnes.

A la fin de la factorisation, chaque processeur possède la matrice L, tandis que la matrice U est distribuée entre les processeurs de manière 1-cyclique. On remarque que dans notre cas, chaque processeur aura besoin de cette factorisation (pour la dérivée seconde). Pour cette raison, on distribue aussi la matrice k de U.

```

do k = 1, n

```

```

c     its.k = le processeur dont appartient la colonne k de N.
      If ( my.id = its.k ) then
c         je trouve le pivot de  $N_k$ , la colonne k de N.
c         je distribue la colonne  $N_k$  ( ou  $L_k$  ) et  $ipvt(k)$ .
      else
c         je reçois  $N_k$  ( ou  $L_k$  ),  $ipvt(k)$ .
      EndIf
c     je permute les lignes de N s'il faut.
c     je fais la kème étape de la factorisation LU, seulement
c     de mes colonnes.
      enddo

```

Dans ce cas, dans l'algorithme séquentiel on effectue $n^3/3$ flops (voir, [9], [21]), et dans l'algorithme parallèle on effectue $n^3/(3p)$ flops et n^2 échanges. Donc :

$$t_A = \frac{1}{3}n^3 \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{1}{3p}n^3 \cdot \epsilon + n^2 \cdot \sigma. \quad (5.2)$$

On remarque que pendant le temps que le processeur "its.k" trouve le pivot de la colonne k , les autres processeurs sont en attente, donc passifs. Ci-dessous, on présente des résultats obtenus pour la factorisation LU.

p	n=466	n=594	n=722	n=850	n=1042
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	1.93150	1.94106	1.95392	1.96312	1.97572
4	3.43266	3.44271	3.50359	3.69606	3.75225
6	4.64791	4.82230	4.93803	5.04520	5.65679
8	5.74141	6.08496	6.57948	6.79638	6.80128
10	6.16542	7.09056	7.32611	7.82189	8.82303
12	6.72576	7.62379	7.95692	8.44793	8.82303
14	6.75193	7.47930	8.18723	8.99532	9.72791
16	7.00880	7.83740	8.43399	9.03662	10.06026

TAB. 5.2. Le speed-up pour la factorisation LU.

Dans le tableau ci-dessus, on remarque que pour p fixé, le speed-up est croissant par rapport à n , tandis que pour n fixé, il est décroissant par rapport à p . En plus, quand le nombre des processeurs augmente, le speed-up s'écarte de plus en plus de la droite $S = p$. Ceci est dû aux échanges entre les processeurs et à la granularité de l'algorithme parallèle de la factorisation LU (voir, par exemple [23]). Le comportement du speed-up que nous avons trouvé pour la factorisation LU, est le même que celui de la factorisation LU, présenté dans [54].

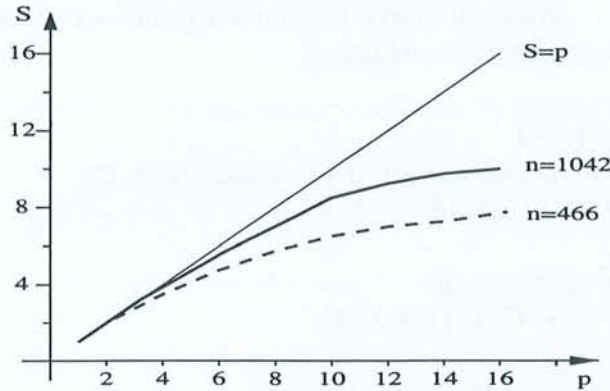


FIG. 5.2. L'évaluation du speed-up pour la factorisation LU. □

5.2.1.2.b La résolution $Ly=b$.

L'algorithme parallèle $A(p)$ pour la résolution du système triangulaire $Ly = b$ utilise le fait que pendant la factorisation, tous les processeurs ont reçu la matrice L . Alors, on sépare le calcul entre les processeurs, selon les lignes, *i.e.* le processeur i trouve les composantes $i + l * p$, $l = 1, 2, \dots$ de la solution. Une fois que le processeur $its.k$ a trouvé la solution $b(k)$, il envoie $b(k)$ aux autres processeurs. Ci-dessous on présente le code parallèle de la factorisation LU.

```

do k = 1, n
c   its.k = le processeur dont appartient  $N_k$ .
c   s'il faut, je permute les éléments de  $b$ .
  my.i = min{ my.id + l * p > k, l ∈ N }.
  do i = my.i, n, p
    b(i) = b(i) + b(k) * L(i,k).
  enddo
  Bcast(b(k), its.k, World)
enddo

```

A la fin, la solution est mise dans le vecteur b . Dans l'algorithme séquentiel on effectue $n^2/2$ flops, voir par exemple [9], [21]. Dans l'algorithme parallèle tout processeur effectue $n^2/(2p)$ flops et n échanges. Donc :

$$t_A = \frac{1}{2}n^2 \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{1}{2p}n^2 \cdot \epsilon + n \cdot \sigma. \quad (5.3)$$

5.2.1.2.c La résolution de $Ux=b$.

Pour compléter la résolution en parallèle du système (3.64), il ne reste qu'à construire l'algorithme parallèle pour $Ux = b$. On présente le cas où la matrice U est distribuée de façon 1-cyclique entre les processeurs. Dans ce cas, chaque processeur $my.j$ va effectuer des sommes de type $U(i, my.j+p*l) * b(my.j+p*l)$

selon $l = 1, 2, \dots$. Après, il envoie la somme calculée au processeur $its.i$, le processeur dont appartient la colonne i .

```

do i = n, 1, -1
c   its.i = le processeur dont appartient  $U_i$ .
   my.j = min{ my.id + l * p > i, l ∈ N }.
   s = 0.
   do j = my.j, n, p
     s = s + U(i,j) * b(j).
   enddo
c   Reduce(s, buff, Sum, its.i).
   If ( my.id = its.i ) then
     b(i) = ( b(i) - buff ) / U(i,i).
   EndIf
   Bcast(b(i), its.i, World).
enddo

```

Pour cet algorithme, essentiellement comme ci-dessus, on a :

$$t_A = \frac{1}{2}n^2 \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{1}{2p}n^2 \cdot \epsilon + 2n \cdot \sigma. \quad (5.4)$$

5.2.1.3 Le calcul de $D_h \mathbf{u}$ donné par (3.67).

On parallélise cet algorithme en faisant une distribution 1-cyclique selon les noeuds, *i.e.* le processeur $my.id$ calcule le gradient dans les noeuds $my.i + j * p$, $j \in \mathbb{N}$ avec $my.id + j * p \leq n$. On remarque que les valeurs du noyau intégral sont déjà calculées dans la construction de la matrice \mathbf{N} . Alors l'algorithme parallèle pour le calcul de $D_h \mathbf{u}$ est :

```

do i = my.id, n, p
c   je calcule  $D_h \mathbf{u}(x_i)$  donné (3.67).
enddo
do i = 1, n
c   its.i = le processeur dont appartient le noeud i.
   Bcast( $D_h \mathbf{u}(x_i)$ , its.i, World).
enddo

```

De façon évidente, pour cet algorithme on a :

$$t_A = O_{\mathbf{u}}(1)n^2 \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{O_{\mathbf{u}}(1)}{p}n^2 \cdot \epsilon + 3n \cdot \sigma. \quad (5.5)$$

5.2.2 Le calcul de \mathcal{F}_h donné par (3.93).

Maintenant, pour le calcul de \mathcal{F}_h il ne reste que la parallélisation du calcul de \mathcal{H}_h , donné par (3.94) et de l'intégrale \mathcal{F}_h , donné par (3.93).

Ces calculs étant de l'ordre n , on ne les parallélise pas. \square

Alors, pour l'algorithme parallèle de \mathcal{F}_h , (qui présente aussi l'algorithme parallèle du gradient, voir par exemple [9]), on a :

$$\begin{cases} t_A &= \left(\frac{n^3}{3} + (1 + O_N(1) + O_{\mathbf{u}}(1))n^2 \right) \cdot \epsilon, \\ t_{A(p)} &= \frac{1}{p} \left(\frac{n^3}{3} + (1 + O_N(1) + O_{\mathbf{u}}(1))n^2 \right) \cdot \epsilon \\ &+ (2n^2 + 9 * n * n.elems + 3n) \cdot \sigma. \end{cases} \quad (5.6)$$

5.3 La parallélisation de la dérivée seconde.

Les parties plus importantes de calcul de \mathcal{F}'_h sont le calcul du gradient au bord des solutions de n problèmes de Neumann, la construction de la matrice \mathcal{F}'_h et la résolution de $\mathcal{F}'_h \cdot x + \mathcal{F}_h = 0$.

5.3.1 Le calcul de $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$.

Ce calcul est composé de deux parties :

5.3.1.1 Le calcul de (3.64) avec $g = -D\mathbf{u}'(\theta)(\psi_i \nu_0) \cdot \nu(\theta)$.

Pour tout i , la matrice de (3.64) est celle construite pendant le calcul de \mathcal{F}_h , donc on ne la calcule pas. Alors, il ne reste que le calcul des termes libres dans le système (3.64).

5.3.1.2 La résolution du système (3.64) pour $i = 1, \dots, n$.

La factorisation de la matrice est déjà faite dans la sous-section du calcul de \mathcal{F}_h . Pour chaque i , on fait la résolution de deux systèmes triangulaires et puis on calcule $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$.

L'algorithme parallèle est donné (voir aussi la remarque 4.19) par :

```
do i = my.id, n, p
c   je résous  $\mathbf{L}y = \mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{U}q_i = y$ .
c   pour  $x_j$  "proche" de  $x_i$ , je calcule  $D_h \mathbf{u}^i(x_j)$ .
enddo
```

Dans cet algorithme parallèle, la partie du calcul est divisée par p , tandis que les processeurs n'échangent pas de messages entre eux, donc :

$$t_A = (n^3 + O_{\mathbf{u}'}(1)n^{2+2/3}) \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{1}{p} (n^3 + O_{\mathbf{u}'}(1)n^{2+2/3}) \cdot \epsilon. \quad (5.7)$$

p	n=466	n=594	n=722	n=850	n=1042
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	1.98297	1.93858	1.91847	1.92977	1.95126
4	3.53976	3.77747	3.83463	3.84370	3.90858
6	5.82465	5.88189	5.90759	5.92632	5.93958
8	7.71086	7.74385	7.89035	7.80378	7.90944
10	8.12373	8.44270	8.55740	8.81541	8.85161
12	10.11758	10.26273	10.39173	10.43375	10.57365
14	12.22317	12.41689	12.49343	12.61714	12.61024
16	15.58983	15.22772	15.01854	15.47880	15.61487

TAB. 5.3. Le speed-up pour $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$.

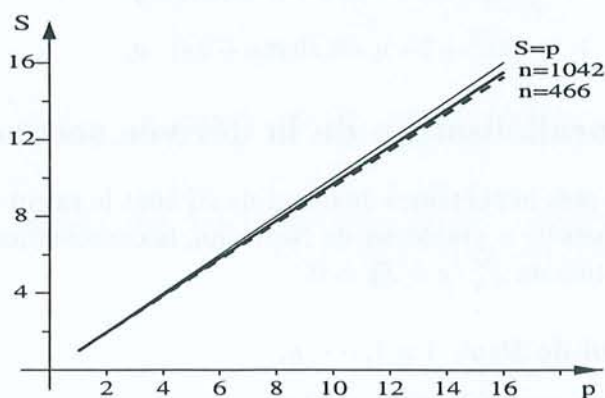


FIG. 5.3. L'évaluation du speed-up pour $D_h \mathbf{u}^i$, $i = 1, \dots, n$.

5.3.2 Le calcul de \mathcal{F}'_h donné par (3.95).

On remarque que la construction de \mathcal{F}'_h est constituée de deux parties qui n'ont pas la même nature.

La première, correspond au terme dans l'expression de $\mathbf{L}''(\theta, \Lambda)$ dans (3.38), qui est une intégrale sur ${}^e\Omega(\theta)$, et la deuxième est le reste. La première donne une matrice pleine, tandis que la deuxième donne une matrice bande "type élément fini".

L'algorithme parallèle $A(p)$ pour la construction de \mathcal{F}'_h est :

```

do j = my.id, n, p
  do  $\mathbf{T}_x = 1, n.elems$ 
c    Pour i noeud de  $\mathbf{T}_x$ , je calcule :
      
$$\mathcal{F}'_h(i, j) = \mathcal{F}'_h(i, j) - \int_{\mathbf{T}_x} (\nu_{0,h} \cdot \nu_h) \mathbf{e}_i(\mathbf{B}_h \cdot D_h \mathbf{u}^j).$$

c    FinPour
  enddo
enddo
do  $\mathbf{T}_x = 1, n.elems$ 

```

```

c   Pour j noeud de  $T_x$ , je fais :
c       Pour i noeud de  $T_x$ , je fais :
c           Si  $i = \text{my.id} + l * p$ , je calcule :
c                $\mathcal{F}'_h(i, j) = \mathcal{F}'_h(i, j) + \dots$ , donné par (3.95).
c           FinPour
c       FinPour
c   enddo

```

Donc, on a fait une construction de la matrice \mathcal{F}'_h avec une distribution 1-cyclique selon les colonnes. Les processeurs n'ont pas échangé de messages et le calcul est divisé par p :

$$t_A = O_{\mathcal{F}'_h}(1)n^2 \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{1}{p} O_{\mathcal{F}'_h}(1)n^2 \cdot \epsilon. \quad (5.8)$$

p	n=466	n=594	n=722	n=850	n=1042
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	1.90282	1.92701	1.93436	1.95838	1.98082
4	3.94531	3.88525	3.82250	3.74859	3.80352
6	5.61480	5.64892	5.72160	5.78702	5.81897
8	7.44656	7.45892	7.80783	7.82879	7.88162
10	9.23626	9.40703	9.57851	9.68769	9.75694
12	11.23433	11.35894	11.69203	11.70891	11.76823
14	13.11867	13.25804	13.49003	13.59776	13.64580
16	15.25746	15.50998	15.75193	15.80548	15.82499

TAB. 5.4. Le speed-up pour \mathcal{F}'_h .

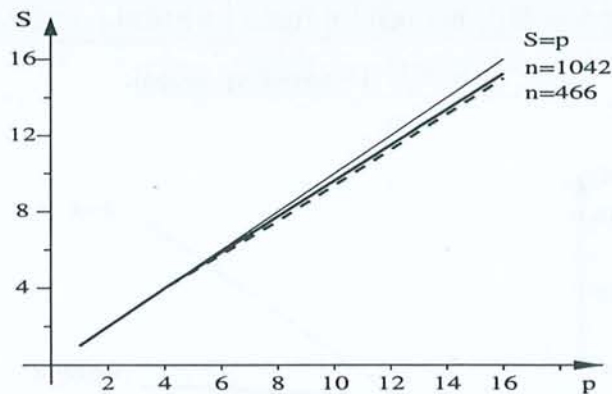


FIG. 5.4. L'évaluation du speed-up pour \mathcal{F}'_h .

5.3.3 La résolution du système $\mathcal{F}_h + \mathcal{F}'_h \cdot x = 0$ (\mathcal{F}'_h symétrique).

On fait la factorisation de \mathcal{F}'_h comme celle de N , tout en utilisant la symétrie de la matrice. Puis, on résout $Ly = -\mathcal{F}_h$ et $Ux = y$ comme dans le

calcul de \mathcal{F}_h dans la sous-section 5.2, et on obtient :

$$t_A = \left(\frac{1}{6}n^3 + n^2\right) \cdot \epsilon, \quad t_{A(p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{6}n^3 + n^2\right) \cdot \epsilon + (n^2 + 2n) \cdot \sigma. \quad (5.9)$$

5.4 Conclusions.

En utilisant les caractéristiques de tous les algorithmes qu'on a présentés dans ce chapitre, et aussi les estimations (5.6), (5.7), (5.8) et (5.9), on obtient que l'algorithme global est caractérisé par :

$$\begin{aligned} t_A &= 3/2n^3 \cdot \epsilon + \left(2 + O_N(1) + O_u(1) + O_{\mathcal{F}'} + O_{u'}(1)n^{1/3}\right) \cdot \epsilon \\ t_{A(p)} &= \frac{3}{2p}n^3 \cdot \epsilon + \frac{1}{p} \left(2 + O_N(1) + O_u(1) + O_{\mathcal{F}'} + O_{u'}(1)n^{1/3}\right) n^2 \cdot \epsilon, \\ &+ (3n^2 + 9n * n.elems + 5n) \cdot \sigma. \end{aligned} \quad (5.10)$$

p	n=466	n=594	n=722	n=850	n=1042
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	1.72525	1.83147	1.92031	1.91667	1.92546
4	3.46590	3.47620	3.58283	3.73094	3.79783
6	5.01098	4.85180	5.35236	5.35504	5.59735
8	5.30509	5.46099	5.69471	5.81109	5.94776
10	5.47969	6.09275	6.09923	6.47946	6.61898
12	5.90780	6.09894	6.47894	6.91451	7.00274
14	5.82695	5.93300	6.39168	6.91054	7.07079
16	5.88731	6.07000	6.76252	6.91620	7.26952

TAB. 5.5. Le speed-up global.

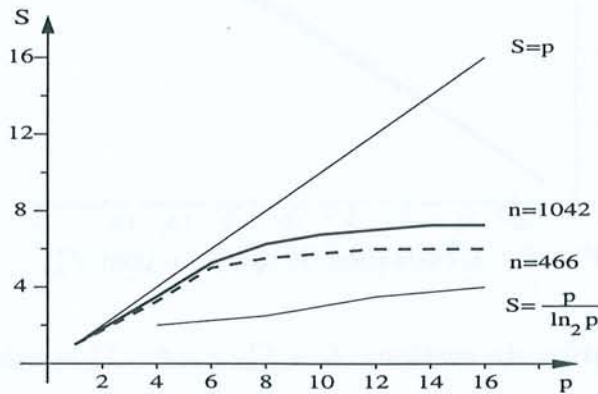


FIG. 5.5. L'évaluation du speed-up global.

Dans FIG. 5.5. on remarque l'évaluation du speed-up global par rapport à la courbe du speed-up idéal de l'équation $S = p$, et celle donnée par la loi de Amdahl, de l'équation $S = p / \ln_2 p$, voir par exemple [11].

Corollaire 5.1 *Pour l'algorithme parallèle $A(p)$ construit ci-dessus (donné dans les sous-sections 5.2 et 5.3), on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = p.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation (5.10). Donc, pour n grand le speed-up de l'algorithme parallèle est proche de p . \square

On termine ce chapitre en remarquant que la méthode de Newton qu'on présente pour l'optimisation de formes se parallélise bien. Les points essentiels de cette méthode sont le calcul de la dérivée première et seconde par rapport à la forme. Son coût fortement réduit est dû à la réduction du coût de l'approximation du gradient, comme il est expliqué dans la remarque 4.19, chapitre 4.

[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]

Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS. *Sobolev Spaces*. Academic Press. New York, 1975.
- [2] J.P. AUBIN. *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems*. Wiley-Interscience.
- [3] J.P. AUBIN and A. CELLINA. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [4] J.P. BRANCHER, J. ETAY, and O. SERO-GUILLAUME. *Formage d'une lame*, volume 2(6). Mécanique Théorique et Appliquée, 1983.
- [5] H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*. Masson, 1987.
- [6] H. CARTAN. *Calcul Différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [7] J. CÉA. *Optimisation. Théorie et Algorithmes*. Dunod, Paris, 1971.
- [8] J. CÉA. *Problems of Shape Optimal Design*, volume I,II. Optimization of Distributed Parameters Structures, 1981.
- [9] P.G. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1982.
- [10] D. COLTON and R. KRESS. *Integral Equation Method in Scattering Theory*. John Wiley & Sons, 1983.
- [11] M. COSNARD and D. TRYSTRAM. *Parallel Algorithms and Architectures*. International Thomson Computer Press, 1995.
- [12] M. COSTABEL. *Principles of Boundary Element Methods*, volume 6. Computers Physics Reports, 1987, North-Holland, Amsterdam.
- [13] M. COSTABEL and E. STEPHAN. *Boundary Integral Equations for Mixed Boundary Value Problems in Polygonal Domains and Galerkin Approximation*, volume 15. Mathematical Models And Methods in Mechanics. Banach Center Publications, 1985.

- [14] O. COULAUD and A. HENROT. *Numerical Approximation of a Free Boundary Problem Arising in Electromagnetic Shaping*, volume 31(4). SIAM J. Numer. Anal., 1994.
- [15] R. DAUTRAY and J.L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, volume 2. Masson, 1984.
- [16] C.M. DELFOUR and J.P. ZOLESIO. *Velocity Method and Lagrangian Formulation for the Computation of the Shape Hessian*, volume 29(6). SIAM Control and Optimization, 1991.
- [17] J.E. DENNIS and R.B. SCHNABEL. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey 07632.
- [18] J. DESCLOUX. *On the Two-Dimensional Magnetic Shaping Problem without Surface tension*, volume 07. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1990.
- [19] D. GILBARG and N.S. TRUDINGER. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [20] E. GIUSTI. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, 1984.
- [21] G.H. GOLUB and C.F. VAN LOAN. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins Press, Baltimore, MD, 1989.
- [22] Y. GOTO and N. FUJII. *Second Order Numerical Method for Domain Optimization Problem*, volume 67. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990.
- [23] W. GROOP, E. LUSK, and A. SKJELUM. *Using MPI, Portable Parallel Programming with the Message Passing Interface*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [24] E. HAUG and B. ROUSSELET. *Design Sensitivity in Structural Mechanics. Effects of Shape Variations*. Journal of Struct. Mech., 10, pp 273-310, 1982-1983.
- [25] A. HENROT and M. PIERRE. Stability of equilibria in electromagnetic shaping.
- [26] A. HENROT and M. PIERRE. Un problème inverse en formage des métaux liquides, 1989.
- [27] A. HENROT and M. PIERRE. About existence of equilibria in electromagnetic casting, 1991.

- [28] A. HENROT and M. PIERRE. *About Critical Points of the Energy in an Electromagnetic Shaping Problem*, volume 178 of *Boundary Control and Boundary Variation*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, J.P. Zolésio (Ed), Sophia Antipolis, 1991.
- [29] G.C. HSIAO and W.L. WENDLAND. *A Finite Element Method for Some Integral Equations of the First Kind*, volume 58. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 1977.
- [30] R.E. KLEINMAN and W.L. WENDLAND. *On Neumann's Method for the Exterior Neumann Problem for the Helmholtz Equation*, volume 57. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1977.
- [31] V.A. KONDRAT'EV and O.A OLEINIK. *Boundary Value Problems For Partial Differential Equations in Non-Smooth Domains*, volume 38:2. *Russian Math. Surveys*, 1983.
- [32] R. KRESS. *Linear Integral Equations*. Springer-Verlag, 1989.
- [33] P. LASCAUX and R. THEODOR. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'Art de l'ingénieur*. Masson. Paris, 1987.
- [34] M. MASMOUDI. *Outils Pour la Conception Optimale de Formes*. Thèse d'État, Université de Nice, 1987.
- [35] S.G. MIKHLIN. *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, volume 83, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics. Pergamon Press, 191965.
- [36] F. MURAT and J. SIMON. *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*. Rapport du L.A. 189, Université Paris VI, 1974.
- [37] F. MURAT and J. SIMON. *Sur le contrôle par un domaine géométrique*. Rapport du L.A. 189, Université Paris VI, 1976.
- [38] F. MURAT and J. SIMON. *Etude de problèmes d'Optimal Design*. Proc. of the 7th IFIP Conf. on Optimization techniques. J. Céra ed., Lecture Notes in Comp. Sci. 41. Springer-Verlag, 1976, pp 54-62.
- [39] J.C. NÉDÉLEC. *Approximation des équations intégrales en Mécanique et en physique*. Rapport interne, Ecole Polytechnique, 1977.
- [40] A. NOVRUZI and J.R. ROCHE. *Second Order Derivatives, Newton Method and Applications to Shape Optimization*. soumis au SIAM, *Journal on Scientific Computing*.
- [41] O.A. OLEINIK, A.S. SHAMAEV, and G.A. YOSIFIAN. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Studies in Mathematics and its Applications, J.L. Lions, G. Papanicolaou, etc. eds, North-Holland, 1992.

- [42] M. PIERRE and J.R. ROCHE. *Computation of Free Surfaces in the Electromagnetic Shaping of Liquid Metals by Optimization Algorithms*, volume 10(5). Eur. J. Mech. B/Fluids, 1991.
- [43] M. PIERRE and J.R. ROCHE. *Numerical Simulation of Tridimensional Electromagnetic Shaping of Liquid Metals*, volume 65. Numer. Math., 1993.
- [44] R. RANNACHER and W.L. WENDLAND. *On the Order of Pointwise Convergence of Some Boundary Element Methods*, volume 19(1). Part I, M^2AN , 1985.
- [45] R. RANNACHER and W.L. WENDLAND. *Pointwise Convergence of Some Boundary Element Methods*, volume 22(2). Part II, M^2AN , 1991.
- [46] B. ROUSSELET. *Shape sensitivity of a membrane*. JOTA, p 595-623, 1983.
- [47] B. ROUSSELET. *Static and Dynamic Loads, Pointwise Constraint in Structural Optimization*. Optimization, Theory and Algorithm, Hiriart-Urruty, Oettli, Stoer eds. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, pp 225-238, 1983.
- [48] B. ROUSSELET. *Etude de la Régularité des Valeurs Propres par Rapport aux Déformations Bilipschitziennes du Domaine*. CRAS 283, série A, p 507, 1976.
- [49] L. SCHWARTZ. *Théorie des Noyaux*, volume 1. Proc. of the International Congress of Mathematicians, 1950.
- [50] L. SCHWARTZ. *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [51] J. SIMON. *Differentiation with Respect to the Domain in Boundary Value Problems*, volume 2(788). Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 1980.
- [52] J. SIMON. *Optimum Design for Neumann Condition and for Related Boundary Value Problems*, volume nr.100. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1988.
- [53] J. SOKOLOWSKI and J.P. ZOLESIO. *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag, 1992.
- [54] J. THORLEY. *LU Factorization. Parallel MPI Version 6*. http://csvax.cs.caltech.edu/~john-t/programming/phd/_programs/lu_factorization/parallel_6/.
- [55] E.F. VAN DE VELDE. *Concurrent Scientific Computing*. Springer-Verlag, New-York, 1994.

-
- [56] N. WECK. *An Explicit Saint Venant's Principle in Three-Dimensional Elasticity*. Lecture Notes in Mathematics, Nr. 564, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [57] W. WENDLAND. *Die Behandlung von Randwertaufgaben im \mathbb{R}^3 mit Hilfe von Einfach- und Doppelschichtpotentialen*, volume 11. Numerische Mathematik, 1968.

1. J. K. Stille, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 1-100.
2. W. W. C. Emswiler, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 101-200.
3. H. W. Turner, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 201-300.
4. J. K. Stille, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 301-400.
5. W. W. C. Emswiler, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 401-500.
6. H. W. Turner, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 501-600.
7. J. K. Stille, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 601-700.
8. W. W. C. Emswiler, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 701-800.
9. H. W. Turner, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 801-900.
10. J. K. Stille, *Handbuch der Organischen Chemie*, 1928, 10, 901-1000.

Notations

$N \in \mathbb{N}$,	la dimension de l'espace.
$x = (x_1, \dots, x_N)$,	un point dans \mathbb{R}^N .
$B(x, r) = \{ y - x < r \}$,	la boule de centre x et de rayon $r > 0$.
$k, l, m, n \in \mathbb{N}$,	des entiers.
$h > 0$,	un paramètre de discrétisation.
\cdot	le produit scalaire.
\wedge	le produit vectoriel.
$\text{rot}(\cdot)$	le rotationnel de (\cdot) .
$\text{div}(\cdot)$	la divergence de (\cdot) .
$\mathcal{V} = \{ V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \}$,	donné par (1.10).
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$,	les parties de \mathbb{R}^N .
$Q \subset \mathbb{R}^N$,	un ouvert de référence, borné, de classe C^∞ , localement d'un côté de ∂Q .
$C_b^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$,	les fonctions de \mathbb{R}^N à valeurs dans \mathbb{R}^M , avec des dérivées continues, bornées, jusqu'à l'ordre k .
$\Theta = C^k(\overline{Q}; \mathbb{R}^N)$,	les fonctions de \overline{Q} à valeurs dans \mathbb{R}^N , avec des dérivées continues jusqu'à l'ordre k .
$C^k(\partial Q)$,	les fonctions de ∂Q dans \mathbb{R} , avec des dérivées continues jusqu'à l'ordre k .
$\mathcal{O} = \{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \}$,	$\exists \theta \in \mathcal{O}^{-1}$, difféomorphisme sur \overline{Q} , $\theta(Q) = \Omega$.
$\mathcal{O}^{-1} = \{ \theta \in \Theta \}$	avec $\theta : \overline{Q} \rightarrow \theta(\overline{Q})$, difféomorphisme sur \overline{Q} .
$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$,	$\int_{\Omega} u ^p < \infty$, $p \geq 1$.
$W^{m,p}(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$,	$\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}} \in L^p(\Omega)$, $i = \sum_{j=1}^N i_j \leq m$.
$H^m(\Omega)$,	$W^{m,2}(\Omega)$.
$\mathcal{D}(\Omega)$,	les fonctions infiniment dérivables, à support compact dans Ω .
$\mathcal{D}^k(\Omega)$,	les fonctions k -fois continûment dérivables, à support compact dans Ω .

$\Gamma, \partial\Omega$

$\Omega : \Theta \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N),$

$\Gamma : \Theta \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N),$

$\nu(\theta),$

$\tau(\theta),$

$D = (D_1, \dots, D_N),$

$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$

$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)$

(chapitre 4),

$\mathcal{H}(\theta) = \sum_{i=1}^N \delta_i \nu_i(\theta),$

$DV = (D_j V_i),$

$\delta V = (\delta_j V_i),$

$V_\tau = V - (V \cdot \nu)\nu,$

$\text{Jac}(V) = |\det(DV)|,$

$\text{Jac}_\Gamma(V) = |{}^t(DV)^{-1} \cdot \nu(\theta)| \text{Jac}(V),$

$I_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, I_N(x) = x,$

$I(x_0, r_0)(x) = x_0 + r_0^2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2},$

${}^e\Omega = {}^c(\bar{\Omega})$

$\omega = I(x_0, r_0)({}^e\Omega)$

$H^m({}^e\Omega) = \{ u : {}^e\Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$

le bord de Ω .

$\Omega(\theta) = \{ \theta(x), x \in Q \}.$

$\Gamma(\theta) = \{ \theta(x), x \in \partial Q \}.$

le vecteur unitaire normal à $\Gamma(\theta)$.

le vecteur unitaire tangent à $\Gamma(\theta)$.

l'opérateur gradient.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}.$

l'opérateur gradient tangentiel,

$\delta_i = D_i - \nu_i(\theta) \sum_{j=1}^N \nu_j(\theta) D_j.$

la courbure de $\Gamma(\theta)$.

la matrice jacobienne de V .

la matrice dérivée tangentielle de V .

la composante tangentielle de V .

le jacobien de V .

le jacobien tangentiel de V .

la transformation identité dans \mathbb{R}^N .

la transformation Kelvin de centre x_0

et de rayon r_0 ; $x_0, x \in \mathbb{R}^N, r_0 > 0$.

l'extérieur de Ω .

avec x_0, r_0 tels que $B(x_0, r_0) \subset \Omega$.

$u(x) = \frac{r_0^{N-2}}{|x - x_0|^{N-2}} \tilde{u} \circ I(x_0, r_0)(x),$

$x \in {}^e\Omega$ et $\tilde{u} \in H^m(\omega)$.

Nom: NOVRUZI

Prénom: Arian



DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I

en MATHEMATIQUES & APPLICATIONS

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le -1 OCT 1997 UHP 71

Le Président de l'Université



Résumé : Ce travail est une contribution en problèmes d'optimisation de formes (P.O.F.) et ses applications. On s'intéresse en particulier à l'analyse et la mise en œuvre de méthodes de Newton pour le calcul de formes. En général, les P.O.F. sont posés sur un ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, a priori dépourvu d'une structure particulière. En identifiant \mathcal{O} à un sous-ensemble d'un espace de Banach Θ , les P.O.F. deviennent des problèmes classiques posés dans un espace de Banach.

On a étudié la structure des dérivées par rapport à la forme (D.R.F.) en utilisant un résultat qui exprime que, modulo un glissement sur le bord, toute perturbation régulière d'un domaine se représente par des déplacements selon la normale. Il en découle une expression précise des D.R.F. La méthode de démonstration de ce résultat permet d'obtenir la structure des D.R.F. d'ordres élevés.

On a étudié un P.O.F. avec contrainte en dimension 2, resp. 3, dépendant de la solution d'un problème de Dirichlet, resp. Neumann à l'extérieur, et du périmètre. On a établi l'erreur de l'approximation au bord du gradient de la solution du problème de Neumann.

Pour diminuer la complexité de la méthode de Newton on a montré une estimation C^α au bord du gradient de la solution d'un problème de Neumann extérieur.

Enfin, on a étudié la parallélisation de la méthode de Newton en P.O.F. Il en résulte que cette méthode permet de construire un algorithme parallèle efficace.

Mots-clé : approximation; dérivées par rapport à la forme et leur structure; équation intégrale singulière; estimation C^α au bord; méthode de Newton; optimisation avec contrainte; problème variationnel, à frontière libre; parallélisation; problème de Dirichlet, Neumann; stabilité; théorie du potentiel; transformation de Kelvin.

Classification A.M.S. par Sujet : 31B, 35B, 35C, 35J, 45E, 49M, 49K, 49Q, 65K, 65N, 65Y.

Abstract : This work is a contribution in optimal shape problems (O.S.H.P.) and their applications. In particular, we take an interest in the analysis and the implementation of Newton's methods in the shape calculus. Generally, the O.S.H.P. are posed in a set $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, a priori without a particular structure. Identifying \mathcal{O} by a subset of a Banach space Θ , the O.S.H.P. become the classical problems posed in a Banach space.

We have studied the structure of shape derivatives (S.H.D.) using a result which shows that modulo a shift on the boundary, any regular perturbation of a set is represented by the normal displacements. It implies a precise expression of S.H.D. The method of the proof of this result allows to obtain the structure of high order S.H.D.

We have studied an O.S.H.P. with constraint in dimension 2, resp. 3, depending on the solution of an exterior Dirichlet, resp. Neumann problem and the perimeter. We have established the approximation error on the boundary of the gradient of the solution of Neumann problem.

To reduce the complexity of the Newton method, we have established a C^α estimation on the boundary of the gradient of the solution of a Neumann exterior problem.

Finally, we have studied the parallelisation of the Newton's method in O.S.H.P. It turns out that this method allows to construct an efficient parallel algorithm.

Key-words : approximation; Dirichlet, Neumann problem; estimation C^α on the boundary; free boundary problem; Kelvin transformation; Newton method; optimisation with constraint; parallelisation; potential theory; shape derivatives and their structure; singular integral equation; stability; variational problem.

A.M.S. Subject Classification : 31B, 35B, 35C, 35J, 45E, 49M, 49K, 49Q, 65K, 65N, 65Y.