



HAL
open science

Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique : études modale et non modale

Nadjiba Kabouya

► **To cite this version:**

Nadjiba Kabouya. Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique : études modale et non modale. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2005. Français. NNT : 2005NAN10025 . tel-01754348

HAL Id: tel-01754348

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754348>

Submitted on 30 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR STMP
Ecole Doctorale EMMA

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, – Nancy 1

Spécialité : Mécanique et Energétique
par

Nadjiba Kabouya

**Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de
L'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique :
Etudes modale et non modale.**

Soutenue publiquement le 04 Mars 2005 devant la commission d'examen :

<i>Rapporteurs</i>	Alessandro BOTTARO	Professeur, Université de Gênes
	Jan DUŠEK	Professeur, Université de Strasbourg
<i>Président</i>	Michel LÉBOUCHÉ	Professeur, Université de Nancy
<i>Examineurs</i>	Jack LEGRAND	Professeur, Université de Nantes
	Chérif NOUAR	Chargé de recherche CNRS (HDR) Nancy, (Directeur de thèse)
	Hassan PEERHOSSAINI	Professeur, Université de Nantes

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée UMR CNRS 7563

*A mes parents
A ma belle maman
A Jean-François*

Table des matières

Introduction	1
1 Travaux sur la stabilité des écoulements de fluides à seuil	6
1.1 Aspects théoriques	6
1.2 Critères phénoménologiques	7
1.2.1 Critère de Hedström	8
1.2.2 Critère de Metzner et Reed	8
1.2.3 Critère de Ryan et Johnson	9
1.2.4 Critère de Hanks	9
1.2.5 Critère de Mishra et Tripathi	10
1.2.6 Critère de Slatter	10
1.3 Etudes expérimentales	11
1.4 Synthèse de l'étude bibliographique	15
1.5 Motivations de la présente étude	18
2 Analyse linéaire de stabilité : approche modale	19
2.1 Introduction	19
2.2 Equations gouvernant l'écoulement de base	19
2.2.1 Equations adimensionnelles	22
2.3 Formulation du problème de stabilité linéaire	26
2.3.1 Conditions aux limites	27

2.3.2	Problème aux valeurs initiales	29
2.3.3	Problème aux valeurs propres	32
2.4	Résolution numérique	33
2.4.1	Changement de variables	36
2.5	Analyse des résultats et discussion	37
2.5.1	Perturbation bidimensionnelle $\tilde{\beta} = 0$	37
2.5.1.1	Modes d'Orr-Sommerfeld	37
2.5.1.2	Modes de Squire	45
2.5.2	Perturbation tridimensionnelle $\tilde{\beta} \neq 0$	45
2.6	Conclusion : Résultats les plus significatifs	50
3	Analyse non modale	51
3.1	Motivations	51
3.2	Pseudospectre	53
3.3	Procédure de calcul de la croissance transitoire	54
3.4	Analyse des perturbations optimales	58
3.4.1	Perturbations bidimensionnelles	59
3.4.1.1	Effet des conditions aux limites	59
3.4.1.2	Effet de la dissipation visqueuse	59
3.4.2	Perturbations tridimensionnelles	64
3.4.2.1	Effet des conditions aux limites	64
3.4.2.2	Effet de la dissipation visqueuse et de la rhéofluidification	70
3.5	Condition de non croissance de l'énergie	86
3.5.1	Conclusion	92
	Conclusion générale	94
A	Bref historique sur les fluides à seuil	97

TABLE DES MATIÈRES	iii
B Conditions aux limites à l'interface	99
C Publication	101
Bibliographie	102

Introduction

Le forage d'un puits de pétrole est suivi d'une procédure dite de cimentation. A l'intérieur du forage, des tubes en acier assemblés, nommés "casing" sont fixés sur toute la longueur (le pétrole remonte alors du réservoir à la surface par le tube). Il est ensuite nécessaire de consolider la paroi du forage et d'isoler les différentes formations environnantes. Pour cela, l'espace annulaire compris entre le tube en acier et la paroi rocheuse doit être cimenté. Du ciment est alors injecté par l'intermédiaire du tube depuis la surface jusqu'au fond du puits. Le ciment remonte par l'espace annulaire, déplaçant ainsi hors du puits les boues en circulation qui ressortent par le haut. La procédure est décrite par le schéma suivant (cf. figure 1). La qualité de la cimentation, dépend de l'efficacité du déplacement des boues de forage. Les différents fluides considérés, boues de forage, ciment, sont en fait des fluides complexes, ils sont rhéofluidifiants, et ils possèdent une contrainte seuil d'écoulement. Ils ne s'écoulent en effet qu'au delà d'une contrainte seuil : on les appelle pour cette raison des fluides à seuil ou fluides viscoplastiques. Le succès de l'opération de cimentation passe par une maîtrise du procédé de déplacement d'un fluide viscoplastique par un autre fluide viscoplastique, et le nettoyage des puits de forage est meilleur pour un écoulement turbulent. Or, si l'écoulement laminaire est en général bien connu, les conditions de transition laminaire-turbulent sont en revanche moins bien maîtrisées. A titre d'exemple, les pétroliers utilisent des critères phénoménologiques pour prédire la transition. Des critères de transition qui reposent sur une expression du nombre de Reynolds critique, à partir duquel l'écoulement devient instable ont été formulés par divers auteurs. L'étude bibliographique qui suivra montrera cependant une divergence notable selon les critères. La formulation de critères de transition est un problème complexe, de par la multitude des paramètres rhéologiques, dynamiques et géométriques qui interviennent. Il nous paraît utile dans un premier temps, de rappeler les caractéristiques rhéologiques d'un fluide à seuil.

Globalement, il s'agit de fluides présentant un seuil de contrainte τ_0 : le fluide se comporte alors comme un fluide visqueux lorsque la contrainte appliquée $\tau > \tau_0$ et comme un solide lorsque $\tau \leq \tau_0$. Bird et Dai ([4],1983) ont donné une liste de fluides allant des boues de forage au sang en passant par les produits cosmétiques et les produits agroalimentaires, dont le comportement rhéologique présenterait une contrainte seuil.

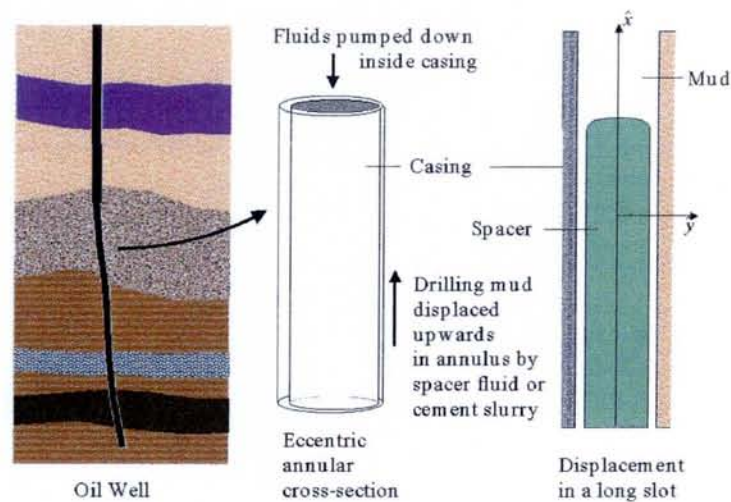


FIG. 1: *Cimentation d'un puits d'après Allouche et al. [1]*

L'origine physique de la contrainte seuil s'explique par l'existence au niveau de la micro-structure, d'un réseau de liaisons entre les éléments constitutifs du milieu. Ces liaisons peuvent être dues à un enchevêtrement de chaînes de polymères, tel que les solutions de Carbopol 940, ou à des forces d'interaction colloïdale entre des particules chargées en suspension, les suspensions de particules d'argile en sont un exemple classique.

A l'état de repos, le matériau se présente comme un gel. Les essais de fluage effectués à l'aide d'un rhéomètre fonctionnant à couple imposé mettent en évidence différents comportements selon la valeur de la contrainte appliquée. La Figure (2) montre un exemple de résultats obtenus pour une suspension de Bentonite à 6% en masse, après un temps de repos de 6 heures. Si la contrainte appliquée, τ , est suffisamment faible, le milieu se déforme sans que la structure interne du réseau soit modifiée : il s'agit d'une déformation élastique. Pour une valeur de contrainte supérieure à la limite élastique τ_e ($\tau > \tau_e$), différentes étapes sont observées : le matériau subit d'abord une déformation élastique (OA), suivie d'une déformation plastique (AB), ensuite un fluage visqueux (BC), puis la phase de pré-rupture (CR), et enfin la rupture au point R. Certains auteurs définissent alors deux contraintes seuil, l'une correspondant à la déformation élastique limite, et l'autre à la rupture. Dans un écoulement en cisaillement non homogène, ces différentes phases peuvent exister simultanément. Qui plus est, dans certaines situations, les cinétiques de déstructuration et de restructuration ne sont plus négligeables devant le temps d'écoulement, ce qui nécessite d'en tenir compte lors de la modélisation. Dans certaines situations telles que celles correspondantes aux écoulements établis, il est suffisant de connaître la loi de comportement à l'équilibre. La figure 3 donne un schéma de l'évolution de la contrainte en fonction du gradient de vitesse en écoulement de cisaillement simple obtenu à partir d'essais rhéométriques. Des

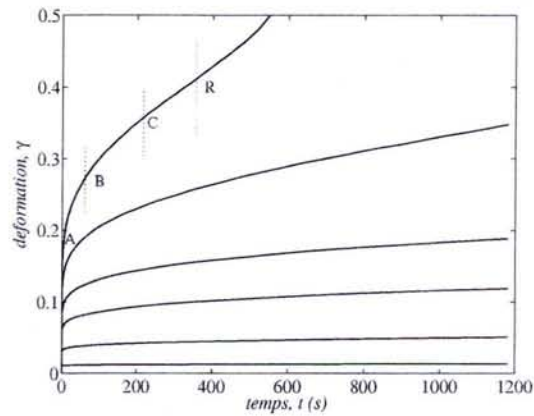


FIG. 2: Essai de fluage pour une suspension de Bentonite.

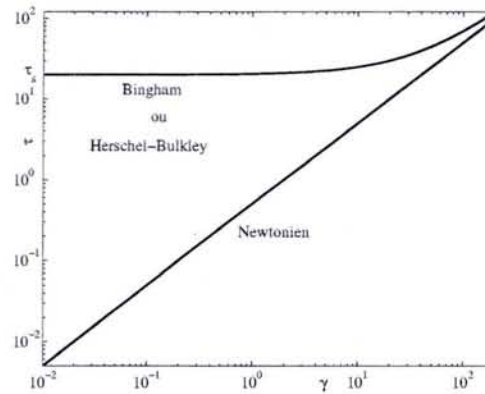


FIG. 3: τ en fonction de $\dot{\gamma}$ à l'équilibre et en écoulement de cisaillement simple

relations empiriques sont proposées dans la littérature pour décrire l'évolution $\tau(\dot{\gamma})$. Trois modèles sont particulièrement utilisés : les Modèles de Bingham, de Herschel-Bulkley (ou Bingham généralisé) et de Casson. En utilisant le critère de Von Mises, les équations rhéologiques de ces modèles sont données par :

– modèle de Bingham :

$$\dot{\gamma} = 0 \quad ; \quad \tau \leq \tau_0 \quad (1)$$

$$\tau = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p \right) \dot{\gamma} \quad ; \quad \tau > \tau_0 \quad (2)$$

– modèle de Herschel-Bulkley :

$$\dot{\gamma} = \mathbf{0} \quad ; \quad \tau \leq \tau_0 \quad (3)$$

$$\tau = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K (\dot{\gamma})^{\frac{n-1}{2}} \right) \dot{\gamma} \quad ; \quad \tau > \tau_0 \quad (4)$$

– modèle de Casson :

$$\dot{\gamma} = \mathbf{0} \quad ; \quad \tau \leq \tau_0 \quad (5)$$

$$\tau = 2 \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K_C + \left(\frac{K_C \tau_0}{\dot{\gamma}} \right)^{1/2} \right) \dot{\gamma} \quad ; \quad \tau > \tau_0 \quad (6)$$

où μ_p est la viscosité plastique dans le modèle de Bingham, K et n sont respectivement la consistance et l'indice de structure dans le modèle de Herschel-Bulkley, K_C est la consistance dans le modèle de Casson. $\dot{\gamma}$ est le tenseur des taux de déformations, τ le déviateur du tenseur des contraintes. Les scalaires $\dot{\gamma}$ et τ sont les seconds invariants des tenseurs $\dot{\gamma}$ et τ , respectivement. Dans ces modèles : (i) le matériau est supposé se comporter comme un solide indéformable lorsque $\tau \leq \tau_0$, (ii) la viscosité apparente tend vers l'infini lorsque le cisaillement tend vers zéro, c'est à dire au voisinage de l'interface. En fait, l'utilisation des modèles précédents est compliquée dans la mesure où elle nécessite la connaissance a priori de la position de l'interface.

Pour contourner ces difficultés numériques, des modèles régularisants sont introduits, qui consistent globalement à remplacer le comportement solide indéformable par un comportement Newtonien avec une très grande viscosité. A titre d'exemple, on cite le modèle de Papanastasiou [49] :

$$\tau = \left(K + \frac{\tau_0 (1 - \exp(-n\dot{\gamma}))}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma} \quad (7)$$

où n est un paramètre qui prend des valeurs très élevées permettant de se rapprocher le plus possible du modèle de Bingham.

D'autres modèles plus réalistes existent dans la littérature : (i) Modèle d'Oldroyd ([46], 1947), où le comportement de la phase gel est décrit par la loi de Hooke (élasticité linéaire). Ce modèle n'a jamais été repris ultérieurement, probablement à cause de la complexité introduite par l'interaction entre un fluide visqueux et un solide élastique ; (ii) Modèles phénoménologiques qui cherchent à relier la loi de comportement aux évolutions des interactions au niveau de la microstructure (voir par exemple modèle de Dorémus ([16], 1989), ensuite Coussot *et al.* ([12], 1993). Ces modèles sont assez complexes, font intervenir plusieurs paramètres, c'est pourquoi, ils n'ont été utilisés que dans des situations de cisaillement simple.

Une analyse bibliographique des faits les plus marquants dans l'histoire des fluides à

seuil, est donnée en annexe A. On constate que très peu de travaux ont été effectués sur la transition laminaire-turbulents des fluides à seuil.

Dans ce qui suit, une revue bibliographique des principaux travaux sur la transition laminaire-turbulent des écoulements de fluides à seuil est présentée. A partir de cette analyse, on dégage les problèmes les plus pertinents pour ensuite préciser la problématique scientifique de ce travail.

Chapitre 1

Travaux sur la stabilité des écoulements de fluides à seuil

L'analyse de la stabilité pour un fluide à seuil n'a reçu que peu d'intérêt à ce jour. Dans ce qui suit, on passe en revue les principaux travaux antérieurs réalisés, tant expérimentaux que théoriques sur la transition vers la turbulence pour des fluides à seuil.

1.1 Aspects théoriques

Une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham vis à vis d'une perturbation infinitésimale bidimensionnelle, a été effectuée par Frigaard et *al.* [21]. Dans le cadre de cette analyse, il est montré que (i) l'interface ne subit que des perturbations infinitésimales, (ii) la zone bouchon reste intacte, et (iii) son mouvement n'est pas perturbé. De manière classique, la recherche des solutions en modes normaux, conduit à une équation d'Orr-Sommerfeld similaire à celle obtenue pour un fluide Newtonien, avec des termes de Bingham supplémentaires. Le problème aux valeurs propres est résolu numériquement par la méthode de Riccati, en modifiant les conditions aux limites à l'interface, pour rester consistant avec un fluide Newtonien, c'est à dire que les conditions critiques de transition lorsque le nombre de Bingham rapport $B \rightarrow 0$ doivent tendre vers le nombre de Reynolds critique pour un fluide Newtonien. Les résultats numériques montrent que le nombre de Reynolds critique basé sur la viscosité plastique augmente avec B , et que pour $B \gg 1$ Re_c évolue pratiquement linéairement avec B .

Gupta [27] a étendu l'analyse de stabilité linéaire pour les fluides d'Herschel-Bulkley en retenant les mêmes modifications des conditions aux limites à l'interface que celles de Frigaard et *al.* [21]. L'équation d'Orr Sommerfeld est traitée numériquement par les

méthodes de Galerkin et de différences finies. Les auteurs constatent que la contrainte seuil a un effet stabilisant et que la rhéofluidification a un effet déstabilisant.

Récemment, Kabouya et Nouar [33] ont effectué une relecture critique des conditions de stabilité, en analysant la stabilité linéaire d'un fluide de Bingham dans une conduite annulaire. Ce travail est présenté dans un article situé en Annexe C de ce mémoire.

Comme il n'existe pas d'équivalent du théorème de Squire pour les fluides de Bingham, une étude tridimensionnelle est nécessaire. Frigaard et Nouar [22] ont déterminé pour une perturbation infinitésimale tridimensionnelle, les conditions de non augmentation de l'énergie cinétique. La procédure utilisée est une extension de celle proposée par Synge [61] et reprise ensuite par Joseph [34]. Dans cette étude, les auteurs se sont attaché à examiner l'influence du nombre de Bingham B sur le nombre de Reynolds maximum Re_E , au dessous duquel il n'y a pas d'augmentation d'énergie, plutôt qu'à déterminer une valeur précise de Re_E . Un ensemble d'approximations est mis en oeuvre qui repose sur des inégalités fonctionnelles classiques. Parmi les résultats obtenus, ils trouvent $Re_E \propto B^{3/4}$, lorsque $B \gg 1$.

En général, pour un fluide Newtonien, une analyse linéaire de stabilité est suivie par une analyse faiblement non linéaire. Ce développement peut être très complexe dans le cas d'un fluide à seuil, car le comportement de la zone bouchon vis à vis d'une perturbation d'amplitude finie reste inconnu : ceci est dû à l'indétermination des contraintes dans la zone bouchon. Pour contourner cette difficulté, on a recours à des méthodes variationnelles qui ignorent la position de l'interface. Il s'agit de la méthode des énergies, établie par Orr (1907)[47] et développée dans les années 60 par Joseph et Carmi(1969) [35], et Busse (1969) [8]. Nouar et Frigaard [44] ont étendu cette méthode à l'écoulement de Hagen Poiseuille d'un fluide de Bingham dans le cas d'une perturbation d'amplitude finie. L'équation de Reynolds-Orr obtenue est traitée par une succession d'approximations basées essentiellement sur les inégalités de Cauchy- Schwartz et de Poincaré. Le nombre de Reynolds maximal Re_E , assurant la stabilité globale augmente avec le nombre de Bingham. Les auteurs montrent, en particulier, que lorsque $B \gg 1$, $Re_E = O(B^{1/2})$. Il est important de noter que dans cette étude, l'effet de la contrainte seuil a été réduit uniquement à la modification de la géométrie de la zone où l'écoulement est cisailé, et du gradient de vitesse au voisinage de la paroi.

En résumé, la revue bibliographique des études théoriques, révèle qu'on ne dispose d'aucun résultat précis ou fiable dans certains cas. Seules des tendances sont présentées pour des nombres de Bingham très supérieurs à l'unité.

1.2 Critères phénoménologiques

Ils sont apparus vers les années 50 et de nouveaux critères sont proposés régulièrement, notamment dans le Journal of Petroleum Sciences and Engineering. Ces critères sont en

effet particulièrement utilisés dans l'industrie pétrolière. L'approche générale consiste à caractériser la stabilité de l'écoulement par l'intermédiaire d'un rapport entre deux grandeurs physiques : l'une favorisant et l'autre freinant le développement des instabilités. La valeur critique du paramètre adimensionnel formé, à partir duquel l'écoulement d'un fluide Newtonien devient instable, est connue ou peut être calculée. Il est ensuite admis que la même valeur gouverne la stabilité de l'écoulement de Poiseuille pour des fluides non-newtoniens.

Dans ce qui suit, on décrit brièvement cinq critères souvent utilisés dans le domaine pétrolier.

1.2.1 Critère de Hedström

D'après Hedström [32], pour un nombre de Hedström, $He = Re B$ donné, la transition a lieu à l'intersection des courbes du coefficient de frottement $C_f(Re)$ laminaire et turbulente. En fait, Hedström suppose que pour de grands nombres de Reynolds, la contribution de la contrainte seuil par rapport à la viscosité effective peut être négligée, et utilise par conséquent, la relation de Nikuradsé pour le coefficient de frottement en régime turbulent.

1.2.2 Critère de Metzner et Reed

Metzner et Reed (1955) [42], ont effectué des essais expérimentaux en conduite cylindrique pour plusieurs fluides visqueux non-Newtonien. Ils représentent le coefficient de frottement $C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_d^2}$ en fonction d'un nombre de Reynolds dit nombre de Reynolds de Metzner et noté Re' , tel qu'en régime laminaire, ils retrouvent la même valeur que pour un fluide Newtonien, $C_f = 16/Re'$. Les auteurs constatent que la transition apparaît lorsque $C_f \approx 0.008$, ce qui correspond à $Re' = 2000$. Dans le cas d'un fluide de Bingham, ce critère peut être exprimé en termes du nombre de Reynolds basé sur la viscosité plastique. On obtient :

$$Re_c = \frac{262.5 * B}{\hat{r}_0}, \quad (1.1)$$

dans le cas d'une conduite cylindrique. L'expression homologue pour l'écoulement de Poiseuille plan est

$$Re_c = \frac{262.5 * B}{\hat{y}_0}. \quad (1.2)$$

où \hat{r}_0 est le rayon de la zone non cisailée et \hat{y}_0 est l'épaisseur de la zone non cisailée.

1.2.3 Critère de Ryan et Johnson

Ryan et Johnson (1959)[56] suggèrent d'utiliser un critère de transition basé sur le rapport E entre l'énergie transférée par l'écoulement de base vers la perturbation par les contraintes de Reynolds et l'énergie dissipée par frottement. D'après les auteurs, les instabilités apparaissent d'abord à la position radiale où E est maximal. Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, E est donné par

$$E = \frac{\rho L \hat{U}}{\hat{\tau}_p} \frac{d\hat{U}}{d\hat{y}}, \quad (1.3)$$

dans le cas de l'écoulement de poiseuille plan, et

$$E = \frac{\rho R \hat{U}}{\hat{\tau}_p} \frac{d\hat{U}}{d\hat{r}}, \quad (1.4)$$

pour un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique. Ce critère est supposé applicable pour tous les fluides visqueux. Comme pour un fluide Newtonien, la transition se produit à $Re_c = 2100$, ce qui conduit à $E_{max} = 808$. Finalement, le critère de transition pour les fluides visqueux est $E_{max} = 808$, et le nombre de Reynolds critique est donné par

$$Re_c = \frac{4200 \hat{r}_0}{B(1 - \hat{r}_0)^3}, \quad (1.5)$$

pour l'écoulement en conduite cylindrique et

$$Re_c = \frac{2100 \hat{y}_0}{B(1 - \hat{y}_0)^3} \quad (1.6)$$

pour l'écoulement entre deux plaques planes.

1.2.4 Critère de Hanks

D'après Hanks (1963,1969)([29] et [30]), le mécanisme responsable de la transition provient du transfert de la quantité de mouvement angulaire. L'auteur suggère alors de considérer le rapport entre le taux de variation de quantité de mouvement angulaire et le taux de dissipation de quantité de mouvement par frottement. Tout calcul fait, le critère de Hanks conduit à considérer le rapport E_H

$$E_H = \frac{1}{2} \frac{\rho}{dp/dz} \frac{\partial}{\partial r} (u^2). \quad (1.7)$$

La quantité E_H est évaluée à la position radiale où elle est maximale. Pour un fluide Newtonien, $E_H = 404$ à la transition laminaire-turbulent. Comme

précédemment, il est supposé que cette valeur critique est la même pour tout les fluides visqueux. En fait, on montre que ce critère est identique au critère de Ryan et Johnson à un coefficient $\left(\frac{1}{2}\right)$ près, et conduit exactement aux mêmes nombres de Reynolds critiques.

1.2.5 Critère de Mishra et Tripathi

Le critère de stabilité intégrale ou globale a été introduit par Mishra et Tripathi (1971) [43] et ensuite repris par Turian *et al.* [66]. Il est basé sur le rapport de l'énergie cinétique moyenne E_m à la contrainte pariétale τ_p , soit :

$$\chi = \frac{1}{(\pi R^2 U_d) \tau_p} \int_0^R \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) \pi r u dr = \frac{E_m}{\tau_p} = \frac{\rho U_d^2 C}{\tau_p} \quad (1.8)$$

où C est donné par :

$$C = \int_0^1 \left(\frac{u}{U_d} \right)^3 \left(\frac{r}{R} \right) d \left(\frac{r}{R} \right) \quad (1.9)$$

La contrainte pariétale est reliée au coefficient de frottement f par la relation : $\tau_p = (1/2) C_f \rho U_d^2$. Comme $C_f = 16/Re'$, on déduit alors : $\chi = C Re'/8$. Pour un fluide Newtonien, $C = 1$ et $Re'_c = 2100$, soit $\chi_c = 262.5$. Il est ensuite supposé ci-dessus, que la valeur critique χ est indépendante du comportement rhéologique. On montre alors facilement que $Re' = 2100/C$. Le comportement rhéologique du fluide intervient via le facteur C . Les nombres de Reynolds critiques pour un fluide de Bingham basé sur la viscosité plastique pour l'écoulement en conduite cylindrique et en canal plan s'expriment respectivement par :

$$Re_c = \frac{262.5B}{\hat{r}_0 C}; \quad Re_c = \frac{405.5B}{\hat{y}_0 C} \quad (1.10)$$

1.2.6 Critère de Slatter

Slatter (1999) [60], suggère de ne prendre en compte que la zone cisailée dans la détermination du nombre de Reynolds de transition dans une conduite cylindrique. La zone bouchon est considérée comme un solide indéformable. Tout se passe comme s'il s'agissait d'un écoulement en conduite annulaire. Il définit un nombre de Reynolds, Re_{sl} , basé sur la viscosité effective de l'écoulement annulaire, en utilisant le diamètre hydraulique D_{ann} et un taux de cisaillement effectif. Re_{sl} est donné par :

$$Re_{sl} = \frac{262.5(B + 8V_{ann}/D_{ann})}{V_{ann}^2} \quad (1.11)$$

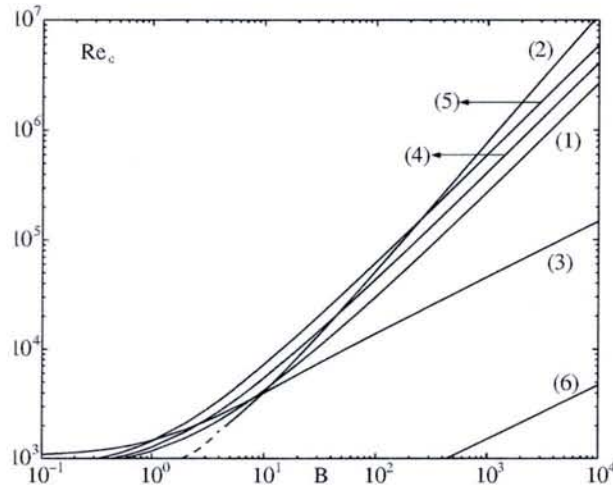


FIG. 1.1: Nombres de Reynolds critiques en fonction du nombre de Bingham dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan : [44], comparaison des différents critères (1)critère de Metzner et Reed, (2)critère de Herdström, (3)critère de Hanks, (5)critère de Slatter.

L'expression homologue pour l'écoulement entre deux plaques planes est

$$Re_{sl} = \frac{262.5(B + 12V_{ann}/D_{ann})}{V_{ann}^2} \quad (1.12)$$

Les résultats pour les différents critères, sont comparés entre eux et présentés sur la figure 1.1. Sur cette figure, on montre les variations du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour un canal plan et une conduite cylindrique. Les cinq critères montrent que le nombre de Reynolds critique augmente avec le nombre de Bingham. Ce qui nous semble important est le fait que les critères divergent lorsqu'on s'écarte suffisamment du comportement Newtonien. Pour le moment, il n'existe aucune étude théorique qui justifie le choix d'un critère plutôt qu'un autre.

1.3 Etudes expérimentales

Deux difficultés fondamentales sont rencontrées dans les études expérimentales de la transition laminaire turbulent pour un fluide à seuil. La première difficulté est liée au choix d'un fluide modèle approprié aux mesures expérimentales dans un laboratoire. Le fluide doit être : (i) non toxique, (ii) stable au cours du temps et vis à vis de dégradation induites, par exemple par une pompe et (iii) éventuellement translucide pour la mise

en œuvre de la vélocimétrie laser. La seconde difficulté vient du fait que les fluides à seuil utilisés présentent en général un caractère viscoélastique non négligeable pour des cisaillements élevés, tel que c'est le cas lors de la transition laminaire-turbulent. D'après Barnes *et al.* [3], le caractère viscoélastique doit être pris en compte lorsque la première différence de contraintes normales, N_1 , est supérieure à la contrainte de cisaillement τ_{12} . Cette différence de contraintes normales provient de l'anisotropie de la structure interne. En effet, la structure interne (la macromolécule) est étirée dans le sens de l'écoulement moyen. La force de rappel élastique est alors plus importante suivant cette direction. Les mesures expérimentales effectuées par Peixhino [51] indiquent que $N_1 > |\tau_{12}|$ à partir d'un cisaillement de l'ordre de $900s^{-1}$. C'est justement cet ordre de grandeur qui est obtenu au voisinage de la paroi et au début de la transition. Finalement les conditions de transition observées sont les résultats des effets combinés de la contrainte seuil et des caractères viscoélastiques et rhéofluidifiant du fluide. Il est difficile de pouvoir distinguer l'effet de l'un par rapport à l'autre. Malheureusement, dans la littérature correspondants aux études expérimentales, très peu d'auteurs fournissent une étude rhéologique complète sur les fluides à seuil. La majorité donnent des courbes d'écoulement sans fournir d'informations sur le caractère viscoélastique (module de stockage, module de perte, première différence de contrainte normale). Dans ce qui suit, on fait une synthèse des résultats trouvés dans la littérature.

Les premières études relatives à la transition laminaire-turbulent pour un fluide à seuil, ont été effectuées par Herdström[32], [42] et Hanks[31]. Elles consistent à mesurer les pertes de charges pour un fluide à seuil (généralement une suspension de particules), en écoulement dans une conduite cylindrique pour différents débits. Le nombre de Reynolds à partir duquel les mesures expérimentales commencent à s'écarter de la solution théorique laminaire est déterminé. Les auteurs indiquent que la contrainte seuil retarde la transition.

D'autres études expérimentales similaires (perte de charge) ont été effectuées dans les années 60 et 70 et arrivent aux mêmes conclusions. Park *et al* [50] ont été les premiers à étudier expérimentalement la transition laminaire turbulent pour un fluide à seuil en utilisant la vélocimétrie Laser.

Ils ont déterminé les conditions critiques de transition pour une suspension transparente (particules de silice dans une huile minérale) dont le comportement rhéologique est décrit par le modèle d'Herschel-Bulkley :

$$\tau = 10 + 0.167\dot{\gamma}^{0.63}. \quad (1.13)$$

La zone d'essais est une conduite cylindrique de diamètre de $52mm$ et de $14.5m$ de long, soit 250 diamètres. Les mesures sont effectuées dans la zone où l'écoulement est supposé établi. A partir des mesures de perte de charge, les auteurs constatent que les mesures expérimentales s'écarterent de la solution théorique laminaire à partir de $8U_d/D = 480s^{-1}$. Cette condition critique a été confirmée à partir des mesures sur l'axe de la conduite de la composante axiale de la vitesse et des taux de fluctuation

associés.

Pour $8U_d/D = 480s^{-1}$, le nombre de Herschel-Bulkley, Hb est de 2.93, le rayon de la zone non cisailée est de $12.22mm$, les nombres de Reynolds de Metzner et Reed, Re' et de paroi Re_p sont 3050 et 5050 respectivement. A partir de ces conditions critiques, le taux de fluctuation de la composante axiale de la vitesse $\frac{\sqrt{u^2}}{U(r=0)}$, passe brutalement de 1% à 5%, ensuite décroît et se stabilise à 3.5% en régime turbulent établi.

Escudier et Presti (1996)[20] ont considéré le cas d'une suspension aqueuse de Laponite (grade R.D) à 1.5% en masse, en écoulement dans une conduite de diamètre $D = 100mm$ et de longueur $L = 13.35$, soit $L/D \approx 133$. Le comportement rhéologique du fluide à l'équilibre est décrit par le modèle de Herschel-Bulkley :

$$\tau = 4.4 + 0.24\dot{\gamma}^{0.535} \quad (1.14)$$

Les auteurs ont mesuré des profils de vitesse axiale pour différents débits, du régime laminaire jusqu'au régime turbulent établi. Le résultat est représenté sur la figure 1.2 aimablement transmise par Escudier. Pour un nombre de Reynolds, Re_p , le régime est laminaire et le profil de vitesse axiale est symétrique et très bien décrit par la solution théorique. Pour $1275 \leq Re_p \leq 2900$, une asymétrie croissante des profils de vitesse est observée, avec une zone non cisailée bien définie. A $Re_p = 3400$, le profil de vitesse axial ne présente plus de zone non cisailée. Finalement, à $Re_p = 25300$, le régime est turbulent et le profil de vitesse axiale redevient symétrique.

Remarque : à $Re_p = 3400$, le taux de fluctuation de la vitesse axiale rapporté à la vitesse débitante et mesuré à $r/R = 0.8$ est maximal : $\sqrt{u^2}/U_d \approx 14\%$. Cette dissymétrie des profils de vitesse est complètement différente de celle observée par Draad et Nieuwstadt [17] pour un fluide Newtonien (eau) qui serait due aux forces de Coriolis du fait de la rotation de la terre.

Récemment, Peixhino [51] a mené une étude expérimentale sur la transition laminaire-turbulent dans une conduite cylindrique de $30mm$ de diamètre et de $5.5m$ de long. Le fluide utilisé est une solution aqueuse de Carbopol 940 à 0.2% masse, dont le comportement rhéologique est décrit par le modèle de Herschel-Bulkley. Les paramètres rhéologiques sont contrôlés régulièrement du fait d'une dégradation mécanique lente du fluide, dans la mesure où il est soumis à des cisaillements très élevés.

Des profils de vitesse axiale ont été mesurés dans la zone où l'écoulement est établi par une très large gamme de débits allant du laminaire au turbulent. Les résultats sont représentés sur la figure 1.3. On retrouve les mêmes tendances décrites par Escudier et Presti.

En régime laminaire, $Re_p = 681$, le profil de vitesse axiale est symétrique et très bien décrit par la solution théorique. A partir de $Re_p = 2700$, une asymétrie progressive des profils de vitesse axiale est observée. On pourrait aussi distinguer une "petite" zone non cisailée. Pour $Re_p \geq 5000$, le profil de vitesse axiale redevient symétrique.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cedex

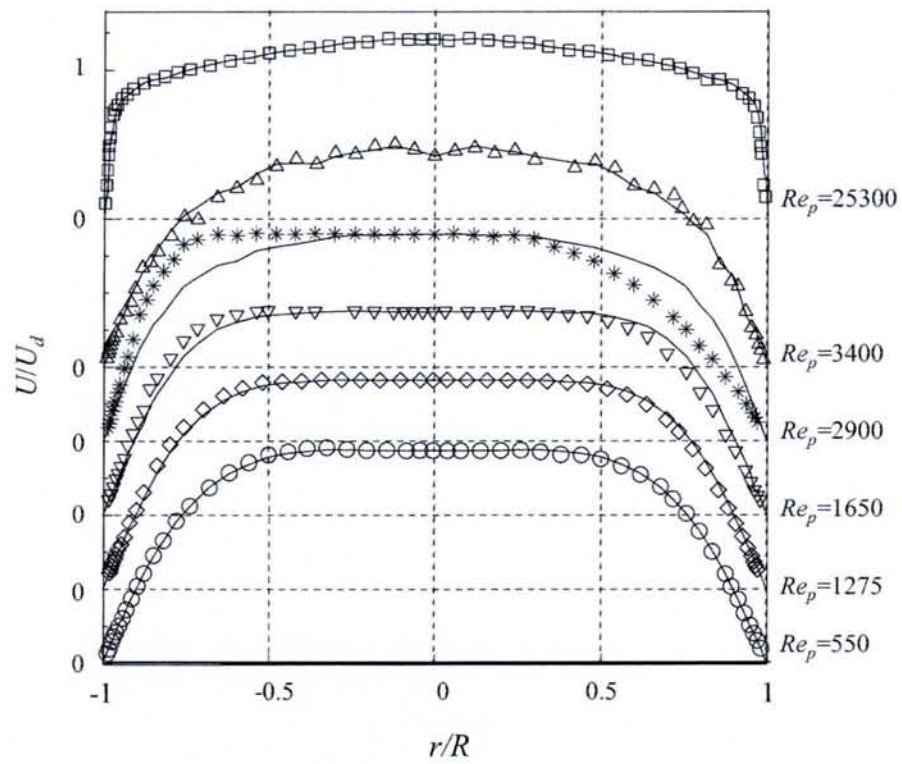


FIG. 1.2: Profils de la vitesse axiale à différents nombres de Reynolds), Escudier(1996)

L'analyse des taux de fluctuation $\sqrt{u'^2}$ rapportée à la vitesse débitante et mesurée à $r/R = 0.8$, montre que $\sqrt{u'^2}/U_d$ commence à augmenter en même temps que l'apparition de l'asymétrie des profils de vitesse et lorsqu'il est maximal (10%) à $Re_p = 5200$, le profil redevient symétrique.

A côté de cela, Peixhino a déterminé et comparé les conditions critiques de transition en utilisant trois critères expérimentaux : (i) le nombre de Reynolds Re_1 à partir duquel C_f expérimental s'écarte de C_f théorique, (ii) le nombre de Reynolds Re_2 à partir duquel $U_c(r=0)$ expérimental s'écarte de U théorique, et (iii) le nombre de Reynolds Re_3 à partir duquel $\sqrt{u'^2}/U_c$ commence à augmenter. L'auteur constate que Re_3 est beaucoup plus important que Re_2 ($(Re_3 - Re_2)/Re_2 \approx 0.3$) et $Re_2 \approx Re_1$.

Pour expliquer l'écart entre les nombres de Reynolds mesurés par les trois critères cités, l'auteur effectue des mesures de profils de taux de fluctuations de la vitesse axiale, pour différents nombres de Reynolds, reproduits figure 1.4. Pour les paramètres rhéologiques donnés, le profil obtenu pour $Re' = 500$, représente le régime laminaire. Pour $Re' = 3200$, au coeur de l'écoulement, le taux de fluctuation reste au même niveau qu'en régime laminaire, tandis qu'il augmente en dehors de cette zone. Pour le troisième profil mesuré pour $Re' = 3200$, le taux de fluctuation augmente dans toute la section. Le profil du taux des fluctuations de la vitesse axiale mesuré pour $Re' = 5800$, suggère que l'écoulement peut être instable en présence d'une zone "bouchon". Ce résultat original est souligné pour la première fois par l'auteur dans la littérature. Il serait cependant important d'ajouter, qu'au début de la transition, la zone "bouchon" a un rayon de 0.6mm , tandis que la taille du volume de mesure pour la vitesse par le système optique utilisé est de 0.5mm . Ceci souligne qu'il est difficile de suivre l'évolution de la zone bouchon pendant la transition.

L'analyse des fluctuations de la vitesse axiale en un point se trouvant dans une zone intermédiaire entre la zone bouchon et la paroi, au début de la transition, indique un signal particulier caractérisé par l'auteur comme un "régime à basse fréquence" de l'ordre du Hertz.

1.4 Synthèse de l'étude bibliographique

Les principaux problèmes dégagés de cette étude bibliographique sont :

- les critères phénoménologique divergent lorsqu'on s'écarte suffisamment du comportement Newtonien et il n'existe aucune étude théorique rigoureuse qui permette de choisir un critère plutôt qu'un autre.
- d'un point de vue théorique, Frigaard *et al.*[21] dans ses travaux n'a pas utilisé les conditions aux limites appropriées. En outre, Nouar et Frigaard [44] et Frigaard et Nouar [22] ont déterminé le comportement des conditions de stabilité en fonction du nombre de Bingham (contrainte seuil adimensionnée).

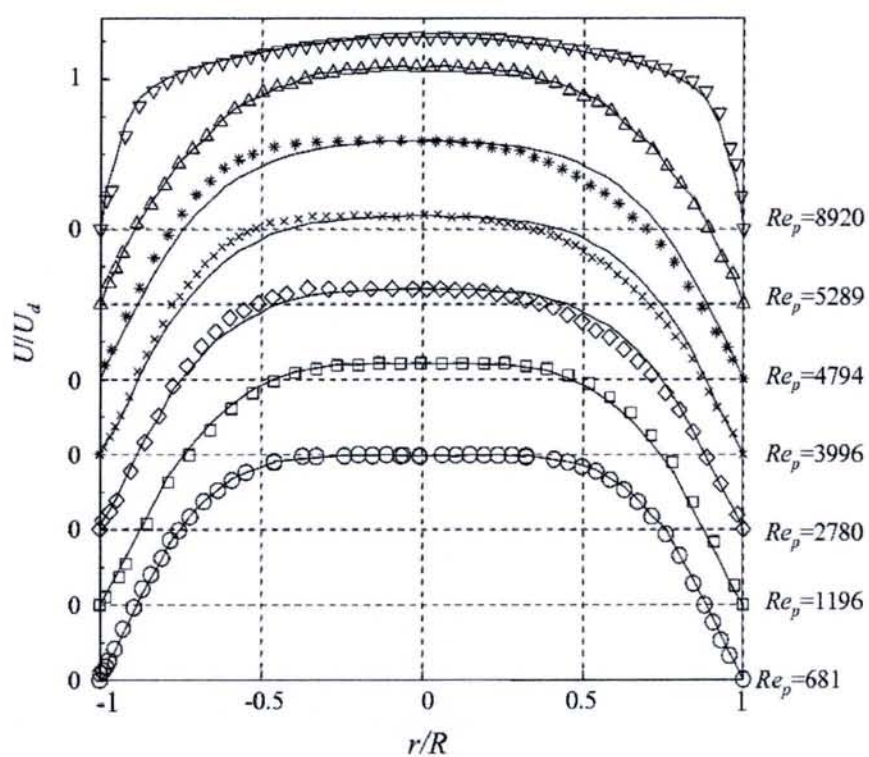


FIG. 1.3: Profils de la vitesse axiale à différents nombres de Reynolds), Peixhino(2004)

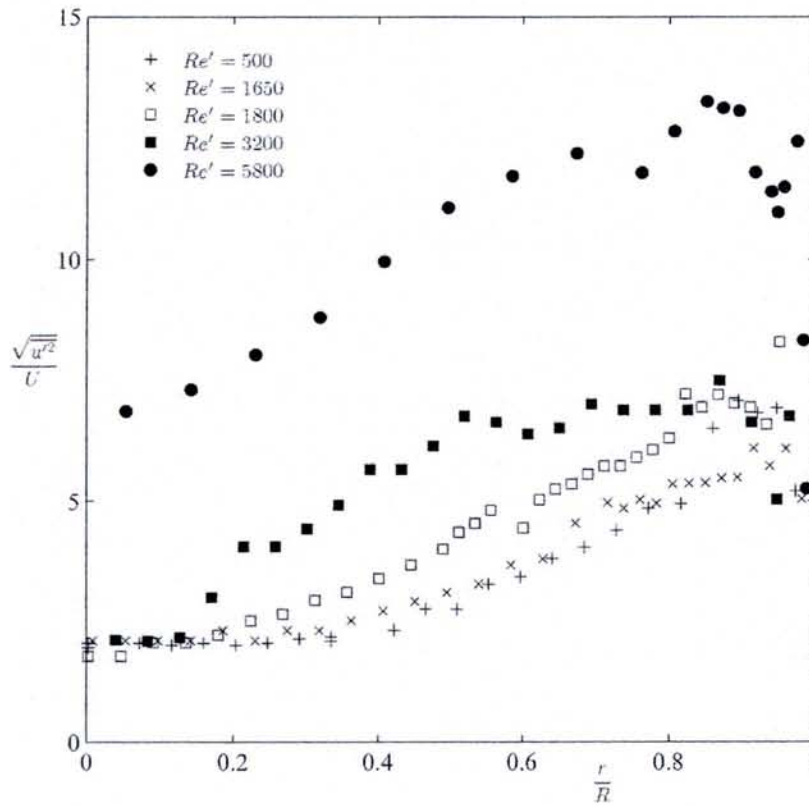


FIG. 1.4: Profils de la fluctuation de la vitesse axiale (normalisée par la vitesse débitante) pour une solution de Carbopol à 0,2% ($\tau_0 = 8 \text{ Pa}$, $K = 2.6 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-n}$ et $n = 0.49$)

- d'un point de vue expérimental, on note : (i) l'asymétrie du profil du profil de vitesse axiale lors de la transition, (ii) l'augmentation des taux de fluctuations au voisinage de la paroi, alors qu'une zone beaucoup plus importante que la zone bouchon reste au niveau laminaire. Dans ce régime particulier, le signal de la composante axiale présente des fluctuations de basses fréquences de l'ordre du Hertz.

1.5 Motivations de la présente étude

Au vu des différents points exposés précédemment, il nous paraît nécessaire d'établir une base de résultats théoriques qui permettra de comprendre comment se manifeste l'effet de la contrainte seuil sur les conditions de stabilité. Trefethen *et al.* [64], Butler et Farrell [24], Corbett et Bottaro [7] etc....., sont unanimes sur l'importance de l'analyse linéaire de stabilité, particulièrement par une approche non modale.

Notre travail a pour but de déterminer et de comprendre l'effet du nombre de Bingham sur les conditions de stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide à seuil vis à vis d'une perturbation infinitésimale par des approches modale et non modale.

Le document est structuré comme suit : Le chapitre 3 présente une étude modale de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham. On rappellera les caractéristiques de l'écoulement de Poiseuille en régime laminaire d'un fluide De Bingham. Une perturbation infinitésimale est introduite, les équations sont linéarisées et les conditions aux limites sont établies, conduisant à une formulation adaptée. Le problème aux valeurs propres obtenu est résolu par une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Tchebychev. Le programme établi est basé sur celui proposé par Reddy. L'effet des conditions aux limites et du nombre de Bingham sur le comportement asymptotique des perturbations est exploré en comparant les résultats obtenus au cas bien connu du fluide Newtonien.

La non-normalité de l'opérateur linéaire d'évolution sera vérifiée dans le chapitre 4 où l'analyse non modale sera effectuée. L'influence du nombre de Bingham et des conditions aux limites sur le comportement transitoire de la perturbation sera étudié. Les caractéristiques des perturbations optimales ainsi que les conditions de non augmentation de l'énergie seront déterminées en faisant ressortir dans la mesure du possible l'effet des conditions aux limites, celui de la dissipation visqueuse et de la rhéofluidification séparément.

Enfin, les principaux résultats de ce travail sont synthétisés dans la conclusion.

Chapitre 2

Analyse linéaire de stabilité : approche modale

2.1 Introduction

La première étape dans l'étude de la stabilité d'un écoulement interne ou externe consiste à examiner le comportement de ce dernier vis à vis d'une perturbation infinitésimale en adoptant l'approche modale classique : c'est l'objet de ce chapitre.

Ce chapitre est organisé comme suit : le paragraphe 2 est consacré à l'écoulement de base. Le paragraphe 3 présente les équations linéarisées, exprimées selon trois formulations (u, v, w, p) , (u, v) ou (v, w) , selon que l'on retienne les trois composantes de la vitesse ou uniquement deux composantes. Il ne nous a pas été possible de formuler le problème en terme de la composante normale de la vitesse et de la vorticité comme pour un fluide Newtonien. En adoptant une approche modale, un problème aux valeurs propres est obtenu. La résolution numérique de ce dernier fait l'objet du quatrième paragraphe. Le spectre des valeurs propres, et le suivi des six premières valeurs propres en situation 2D et 3D sont donnés dans le paragraphe 5. Enfin, on termine par le paragraphe 6 où on rappelle les résultats les plus significatifs.

2.2 Equations gouvernant l'écoulement de base

On considère l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide à seuil dont le comportement rhéologique peut être décrit par le modèle de Bingham. De façon classique, les équations gouvernant le problème sont les équations de conservation de la masse et de la quantité

de mouvement, soit

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{U}} \right) = \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{P}, \hat{\mathbf{U}}) \quad (2.2)$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\hat{P}\hat{\boldsymbol{\delta}} + \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.3)$$

où $\hat{\mathbf{U}} = \hat{U}\mathbf{e}_x + \hat{V}\mathbf{e}_y + \hat{W}\mathbf{e}_z$ est le champ de vitesses, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sont les vecteurs unitaires des directions axiale, normale et transversale respectivement. \hat{P} est la pression, et $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ le déviateur du tenseur des contraintes. La notation (\cdot) désigne une variable écrite sous forme dimensionnelle.

Les équations constitutives pour un fluide de Bingham basées sur le critère de Von-Mises on été formulées par Oldroyd [46] :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mu_p + \frac{\tau_0}{\hat{\gamma}} \right) \hat{\boldsymbol{\gamma}} \iff \hat{\boldsymbol{\tau}} > \tau_0 \quad (2.4)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = E\hat{\boldsymbol{\gamma}} \iff \hat{\boldsymbol{\tau}} \leq \tau_0 \quad (2.5)$$

avec μ_p la viscosité plastique, E le module de Young, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ le tenseur des déformations et $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ le tenseur des taux de déformation défini par les composantes $\hat{\gamma}_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})$. Les seconds invariants de $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ et $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ qui interviennent dans les équations 2.4 et 2.5 sont définis respectivement par

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

$$\hat{\tau} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \hat{\tau}_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

De façon simplifiée, ce modèle suppose que le matériau se comporte comme un solide élastique lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte seuil et comme un fluide visqueux dans le cas contraire. Expérimentalement, le module de Young (ou l'élasticité) peut être mesuré à partir d'essais de fluage effectués à l'aide d'un rhéomètre. À titre d'exemple, pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse, Peixhino [51] trouve $E \approx 2000Pa$ et une déformation élastique limite $\gamma_e \approx 2.10^{-3}$. Pour une suspension aqueuse de Bentonite à 6% en masse complètement structurée, Nouar *et al.*[45] trouvent $E \approx 60Pa$ et $\gamma_e \approx 6.5.10^{-2}$.

À notre connaissance, le comportement élastique n'a jamais été pris en compte, ceci est probablement lié au fait que la déformation élastique limite est faible. Finalement,

les équations constitutives se réduisent à :

$$\hat{\tau} = \left(\mu_p + \frac{\tau_0}{\hat{\gamma}} \right) \hat{\gamma} \iff \hat{\tau} > \tau_0 \quad (2.8)$$

$$\hat{\gamma} = 0 \iff \hat{\tau} \leq \tau_0 \quad (2.9)$$

En fait, il a été démontré par Huilgol(1998) [39], que l'on peut prolonger la relation constitutive 2.8 en $\hat{\tau} = \tau_0$, jusqu'à $\hat{\gamma} = 0$.

La relation 2.9 suppose que la phase "gel" où $\hat{\tau} \leq \tau_0$ se comporte d'un point de vue cinématique comme un solide indéformable. Le fluide contenu dans la zone non cisailée (où $\hat{\tau} < \tau_0$) est contraint à se déplacer en bloc comme un corps rigide. Le mouvement de chaque point dans cette zone est la résultante d'un mouvement de translation et de rotation autour d'un axe. A l'intérieur de cette zone les contraintes sont en général indéterminées. Dans des situations simples, telle qu'un écoulement de Poiseuille plan, le champ de contraintes peut être déterminé à l'intérieur de la zone non cisailée.

Le domaine d'écoulement où $\hat{\tau} > \tau_0$ et la zone rigide où $\hat{\tau} \leq \tau_0$ sont séparés par la surface non matérielle ou $\hat{\tau} = \hat{\tau}_0$. Par la suite, cette surface sera appelée interface.

Remarques : Les propriétés suivantes de l'interface et de la zone non cisailée peuvent être notées.

- L'interface n'est pas une surface matérielle. Sa vitesse peut être différente de celle des particules fluides au niveau de cette interface. Ceci est une différence fondamentale par rapport à l'interface séparant deux fluides non miscibles. en effet dans ce dernier cas, la vitesse de l'interface est égale à celle des particules fluides.
- Le mouvement de l'interface est contrôlé par l'état des contraintes dans la phase liquide.
- Les contraintes σ_{ij} sont continues à travers l'interface.
- Les composantes U, V, W du vecteur vitesse sont continues à travers l'interface.
- Le volume du domaine occupé par la phase non cisailée peut varier au cours du temps, contrairement au cas d'un solide.

Soit Ω_s le domaine occupé par la phase "gel". L'intégration de l'équation (2.2) dans Ω_s conduit à :

$$\oint_{\partial\Omega_s} \hat{\sigma}_{ij} n_j ds = \int_{\Omega_s} \rho \frac{d}{dt} [\hat{u}_i] d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

où $\partial\Omega_s$ est la frontière de Ω_s et les $\hat{\sigma}_{ij}$ sont déterminés du côté "liquide" puisque les $\hat{\sigma}_{ij}$ sont continus à travers l'interface. Dans le cas d'un écoulement en géométrie cylindrique, la zone non cisailée peut avoir un mouvement de rotation autour de l'axe de la conduite. Une équation supplémentaire relative à la conservation du moment angulaire est rajoutée :

$$\oint_{\partial\Omega_s} \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} ds = \int_{\Omega_s} \hat{\mathbf{r}} \wedge \rho \frac{d}{dt} [\hat{\mathbf{u}}] d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan établi et stationnaire, le profil de vitesse est de la forme $\hat{\mathbf{U}} = \hat{U}(y)\mathbf{e}_x$, et seulement une composante $\hat{\tau}_{yx}$ de $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ est non nulle. Les équations de conservation de quantité de mouvement se réduisent à :

$$0 = -\frac{d\hat{P}}{d\hat{x}} + \frac{d}{d\hat{y}}(\hat{\tau}_{yx}) \quad (2.12)$$

Par raison de symétrie, la contrainte $\hat{\tau}_{yx}$ est nulle sur l'axe entre les deux plans soit $\hat{\tau}_{yx} = -\hat{P}_0\hat{y}$, où $\hat{P}_0 = \frac{-d\hat{P}}{d\hat{x}}$.

A la paroi, $\hat{\tau}_{yx} = -P_0L$. Pour qu'il y'ait écoulement, la condition $\hat{P}_0L > \hat{\tau}_0$ doit être satisfaite. Dans ce cas, le fluide subit un cisaillement dans la zone où $|\hat{y}| > \hat{y}_0$ (\hat{y}_0 est la demi épaisseur de la zone non cisailée), appelée aussi zone bouchon.

Dans la zone où $|\hat{y}| > \hat{y}_0$, la vitesse $\hat{U}(\hat{y})$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d^2\hat{U}}{d\hat{y}^2} = -\frac{P_0}{\mu_0}, \quad (2.13)$$

Dans la zone où $|\hat{y}| \leq \hat{y}_0$; on a $\frac{d\hat{U}}{d\hat{y}} = 0$.

A cela, il faut ajouter les conditions d'adhérence du fluide aux parois, soit

$$\hat{U}(\pm L) = 0 \quad (2.14)$$

Tout calcul fait, le profil de vitesse $\hat{U}(\hat{y})$ est donné par

$$\hat{U}(y) = \begin{cases} \frac{L^2\tau_0}{2\mu_0\hat{y}_0} \left(1 - \frac{\hat{y}_0}{L}\right)^2, & 0 \leq |\hat{y}| < \hat{y}_0, \\ \frac{L^2\tau_0}{2\mu_0\hat{y}_0} \left[\left(1 - \frac{\hat{y}_0}{L}\right)^2 - \left(\frac{|\hat{y}|}{L} - \frac{\hat{y}_0}{L}\right)^2 \right], & \hat{y}_0 \leq |\hat{y}| \leq L, \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2.1 Equations adimensionnelles

Le problème précédent peut être mis sous forme adimensionnelle, en utilisant L , la demi-distance entre les deux plaques comme échelle de longueur, \hat{U}_{max} la vitesse maximale de l'écoulement de base comme échelle de vitesse et $\rho\hat{U}_{max}^2$ pour la contrainte τ_{ij} et la pression. Cet adimensionnement permet de réécrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}). \quad (2.17)$$

L'intégration de l'équation 2.17 dans Ω_s donne :

$$\oint_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} n_j ds = \int_{\Omega_s} \frac{d}{dt} [u_i] d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

ainsi que la loi de comportement du fluide de Bingham

$$\tau = \mu_a \dot{\gamma} = \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{B}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma} \iff \tau > \frac{B}{Re} \quad (2.19)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \iff \tau \leq \frac{B}{Re} \quad (2.20)$$

où μ_a est la viscosité effective. Les quantités adimensionnelles Re et B désignent respectivement le nombre de Reynolds et le nombre de Bingham, définis par :

$$Re = \frac{\rho \hat{U}_{max} L}{\mu_p} \quad (2.21)$$

et

$$B = \frac{\tau_0 L}{\mu_p \hat{U}_{max}} \quad (2.22)$$

L'expression de la vitesse maximale est donnée par

$$\hat{U}_{max} = \frac{L^2 \tau_0}{2\mu_p \hat{y}_0} \left(1 - \frac{\hat{y}_0}{L} \right)^2. \quad (2.23)$$

Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel, la loi de comportement se réduit à

$$\tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{B}{|DU|} \right) DU \iff \tau > \frac{B}{Re} \quad (2.24)$$

$$DU = 0 \iff \tau \leq \frac{B}{Re} \quad (2.25)$$

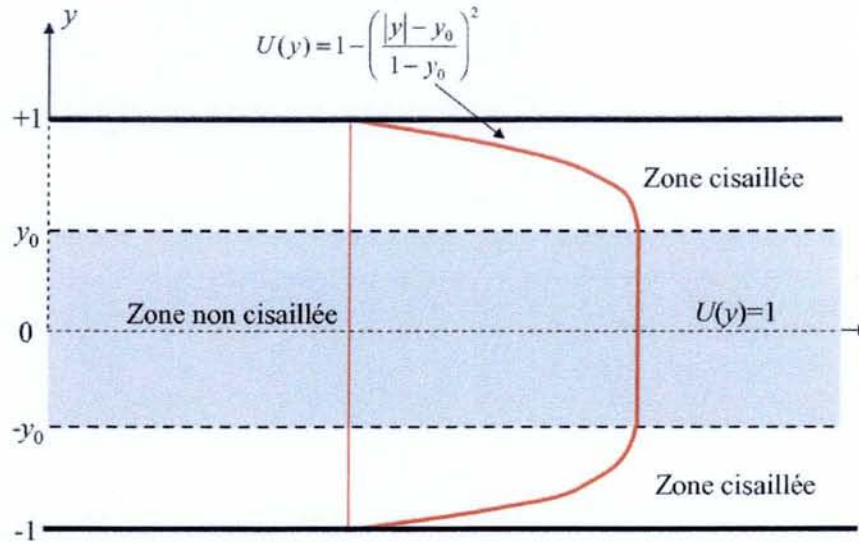
où $DU \equiv \frac{dU}{dy}$.

Finalement, l'expression de la vitesse axiale adimensionnée $U(y)$, est donnée par :

$$U(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |y| < y_0 \\ 1 - \left(\frac{|y| - y_0}{1 - y_0} \right)^2, & y_0 \leq |y| \leq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

Ce profil est illustré par la figure 2.1.

La détermination de la position y_0 de l'interface en fonction de B , peut être obtenue

FIG. 2.1: *Écoulement de Poiseuille pour un fluide de Bingham*

en utilisant l'expression (2.23). Il est montré que la position y_0 de la frontière de la couche non cisailée est solution de l'équation

$$B(1 - y_0)^2 - 2y_0 = 0. \quad (2.27)$$

On en déduit les comportements asymptotiques pour de petits et grands nombres de Bingham :

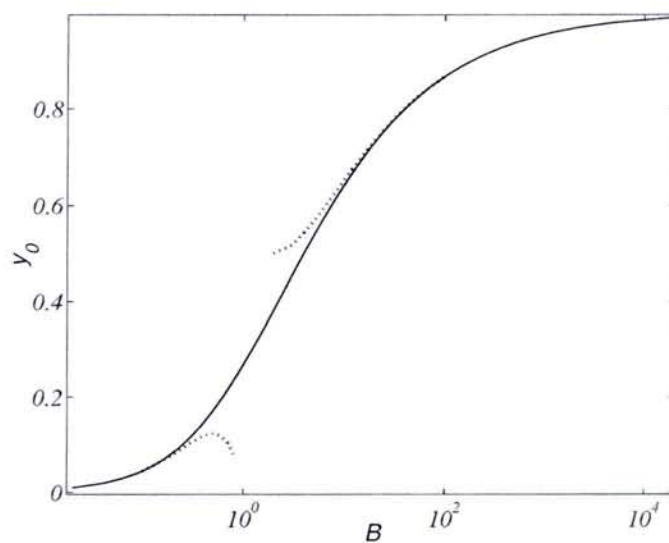
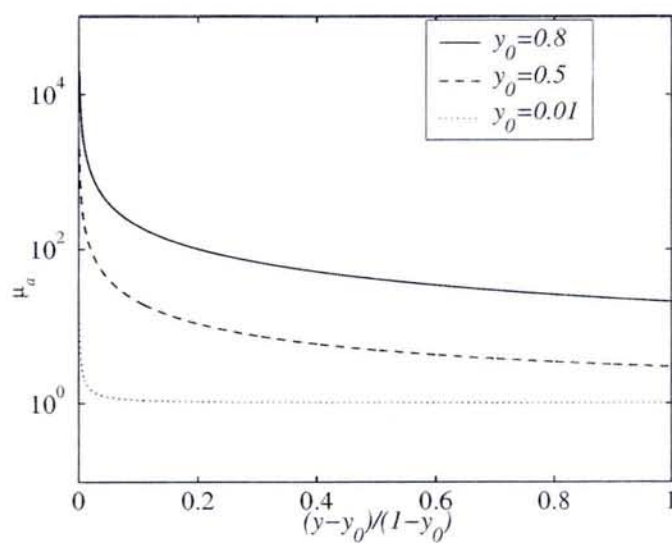
$$y_0 \sim \frac{B}{2} - \frac{B^2}{2} \quad \text{pour } B \rightarrow 0, \quad (2.28)$$

$$y_0 \sim 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{B}} + \frac{1}{B} \quad \text{pour } B \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

La figure 2.2 montre l'évolution de y_0 en fonction de B en trait continu, ainsi que les comportements asymptotiques en pointillés. Ces tendances asymptotiques sont respectées avec une précision de l'ordre de 1% pour $B < 0.2$ (2.28) et $B > 20$ (2.29).

La variation de la viscosité effective μ_a , définie par $\mu_a = \left(1 + \frac{B}{\dot{\gamma}}\right)$ en fonction de $(y - y_0)/(1 - y_0)$ est représentée par la figure 2.3 pour trois valeurs de y_0 , 0.01, 0.5 et 0.8. On peut noter que :

- Pour de très faibles valeurs de y_0 , la variation de la viscosité effective est confinée essentiellement dans une très fine couche de fluide au niveau de l'interface.
- En augmentant y_0 , la viscosité plastique $B/\dot{\gamma}$ devient plus importante et le caractère

FIG. 2.2: Evolution de y_0 en fonction du nombre de Bingham B FIG. 2.3: Variation de la viscosité effective en fonction de $(y - y_0)/(1 - y_0)$ pour les valeurs de $y_0 = 0.01, 0.5, 0.8$

rhéofluidifiant devient plus marqué.

Finalement, sous forme adimensionnelle, l'écoulement de base est contrôlé par un seul paramètre à savoir le nombre de Bingham. Dans ce qui suit, on étudie l'influence de ce dernier sur la stabilité de cet écoulement vis à vis d'une perturbation infinitésimale. En réalité, l'influence de B se manifeste par cinq effets :

- la modification de l'épaisseur de la zone cisailée $(1 - y_0)$, où a lieu l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation,
- la modification du gradient de vitesse DU ,
- les conditions aux limites aux interfaces qui se traduisent par $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') = 0$, où \mathbf{u}' désigne la vitesse de la perturbation,
- l'augmentation de la viscosité,
- la rhéofluidification

2.3 Formulation du problème de stabilité linéaire

De manière classique, à l'écoulement de base on superpose une perturbation infinitésimale :

$$(\epsilon \mathbf{u}', \epsilon p') = (\epsilon u'(x, y, z, t), \epsilon v'(x, y, z, t), \epsilon w'(x, y, z, t), \epsilon p'(x, y, z, t)) \quad (2.30)$$

où $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre sans dimension. L'écoulement perturbé est alors décrit par $(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}', P + \epsilon p')$, avec $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$.

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données par :

$$\nabla \cdot [\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}'] = 0, \quad (2.31)$$

$$\epsilon \mathbf{u}'_t + [(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') \cdot \nabla][\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}'] = -\nabla(P + \epsilon p') + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}'). \quad (2.32)$$

En soustrayant les équations (??) et (??) de (2.31) et (2.32), et en ne retenant que les termes d'ordre 1 en ϵ , on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.33)$$

$$\epsilon (\mathbf{u}'_t + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}') = -\epsilon \nabla p' + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U})) \quad (2.34)$$

Dans la zone où $\tau > \tau_0$, on a

$$\tau_{ij}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \tau_{ij}(\mathbf{U}) = \mu_a(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \mu_a(\mathbf{U}) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}) \quad (2.35)$$

et

$$\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') = \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}) + \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') \quad (2.36)$$

Pour ce qui est de la viscosité $\mu_a(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}')$, on utilise l'équation (2.19) qui après un développement en série de Taylor à l'ordre 1, donne

$$\mu_a(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') = 1 + \frac{B}{|DU|} - \epsilon \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \frac{B}{|DU|DU} + O(\epsilon^2) \quad (2.37)$$

où $D \equiv d/dy$. En remplaçant (2.37) et (2.36) dans (2.35), il est aisé de vérifier que l'on a

$$|\tau_{ij}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \tau_{ij}(\mathbf{U})| = O(\epsilon). \quad (2.38)$$

et donc de la même façon

$$|\tau(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \tau(\mathbf{U})| = O(\epsilon). \quad (2.39)$$

Etant donné que la position de l'interface est contrôlée par τ , on peut admettre que celle-ci ne subit qu'une perturbation infinitésimale, que l'on notera ϵh (on notera dans ce qui suit ϵh^+ et ϵh^- les perturbations respectives des interfaces situées en $+y_0$ et $-y_0$). La position de l'interface perturbée y_i est donc donnée par

$$y_i^\pm(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') = \pm y_0 \pm \epsilon h^\pm(x, z, t) \quad (2.40)$$

En remplaçant les développements (2.36-2.37) dans (2.34), on déduit les équations aux perturbations linéarisées, soit :

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0 \quad (2.41)$$

$$u'_t = -Uu'_x - v'U_y - p'_x + \frac{1}{Re} \nabla^2 u' + \frac{B}{Re} \left[\frac{u'_{xx} + u'_{zz} - v'_{yx}}{|DU|} \right], \quad (2.42)$$

$$v'_t = -Uv'_x - p'_y + \frac{1}{Re} \nabla^2 v' + \frac{B}{Re} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{2v'_y}{|DU|} \right) + \frac{v'_{zz} + w'_{yz}}{|DU|} \right], \quad (2.43)$$

$$w'_t = -Uw'_x - p'_z + \frac{1}{Re} \nabla^2 w' + \frac{B}{Re} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{v'_z + w'_y}{|DU|} \right) + \frac{w'_{xx} + u'_{zx} + 2w'_{zz}}{|DU|} \right]. \quad (2.44)$$

On introduit la convention de notation de dérivée partielle d'une grandeur f relativement à la variable x , selon $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$. Les équations (2.41-2.44) décrivent l'évolution de la perturbation de la vitesse et de la pression dans les deux régions cisailées $[-y_0, -1] \cup [y_0, 1]$.

On complète la formulation du problème par les conditions aux limites dans ce qui suit.

2.3.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour la perturbation sont obtenues à partir des considérations suivantes :

- sur les parois, les conditions d'adhérence du fluide donnent :

$$\mathbf{u}'(x, \pm 1, z) = 0 \quad (2.45)$$

- à l'interface $y = y_i^\pm = \pm y_0 \pm \epsilon h^\pm(x, z, t)$, où $\tau = \tau_0$ on a :

$$\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.46)$$

Les indices 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux directions x , y et z .

Un développement de Taylor à l'ordre 1 combiné avec la condition $\hat{\gamma}_{ij}(U) = 0$ en $y = y_0$ conduit à

$$u'_x(x, \pm y_0, z, t) = v'_y(x, \pm y_0, z, t) = w'_z(x, \pm y_0, z, t) = 0, \quad (2.47)$$

$$u'_z(x, \pm y_0, z, t) + w'_x(x, \pm y_0, z, t) = 0, \quad (2.48)$$

$$w'_y(x, \pm y_0, z, t) + v'_z(x, \pm y_0, z, t) = 0, \quad (2.49)$$

$$v'_x(x, \pm y_0, z, t) + u'_y(x, \pm y_0, z, t) = \frac{\pm 2h^\pm(x, z, t)}{(1 - y_0)^2}, \quad (2.50)$$

A cela, il faut ajouter les trois conditions aux limites déduites de l'équation de mouvement de la zone bouchon (2.18) combinée avec la continuité des vitesses à la traversée de l'interface :

$$u_t(x, \pm y_0, t) = \frac{B}{Re y_0^2} \frac{1}{8XZ} \int_{-X}^X \int_{-Z}^Z [h^+(x, z, t) + h^-(x, z, t)] dx dz, \quad (2.51)$$

$$v_t(x, \pm y_0, t) = \frac{1}{y_0} \frac{1}{8XZ} \int_{-X}^X \int_{-Z}^Z [p(x, -y_0, z, t) - p(x, y_0, z, t)] dx dz, \quad (2.52)$$

$$w_t(x, \pm y_0, t) = 0. \quad (2.53)$$

Ces expressions résultent de la linéarisation de l'équation (2.18), et sont établies dans l'Annexe B. La perturbation $(\epsilon \mathbf{u}', \epsilon p')$ est supposée périodique dans les directions x et z , de périodes respectives $2X$ et $2Z$.

En fait, la zone bouchon ne peut avoir qu'un mouvement de translation et la condition $\hat{\gamma}_{ij} = 0$ à l'intérieur de celle ci signifie que les composantes de $(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}')$ sont indépendantes des coordonnées spatiales. En particulier, en utilisant la continuité des vitesses à travers l'interface (côté liquide), on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') = \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') = 0 \quad \text{à} \quad y = y_i^\pm \quad (2.54)$$

En combinant les équations (2.47)-(2.50) et (2.54), les conditions aux limites à l'interface s'écrivent finalement :

$$u'_x(x, \pm y_0, z, t) = u'_z(x, \pm y_0, z, t) = 0, \quad (2.55)$$

$$v'_x(x, \pm y_0, z, t) = v'_y(x, \pm y_0, z, t) = v'_z(x, \pm y_0, z, t) = 0, \quad (2.56)$$

$$w'_x(x, \pm y_0, z, t) = w'_y(x, \pm y_0, z, t) = w'_z(x, \pm y_0, z, t) = 0, \quad (2.57)$$

$$u'_y = \frac{\pm 2 h^\pm}{(1 - y_0)^2}. \quad (2.58)$$

Les équations (2.41)- (2.44) associées aux conditions aux limites aux parois et sur les surfaces seuil, décrivent complètement l'évolution temporelle et spatiale d'une perturbation arbitraire infinitésimale dans les deux régions cisillées $[-1, -y_0]$ et $[y_0, 1]$.

2.3.2 Problème aux valeurs initiales

Les équations aux perturbations linéarisées (2.41-2.44) étant invariantes dans les directions x et z , il s'en suit que toute solution peut être écrite sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes

$$(u', v', w', p', h^\pm) = (u(y, t), v(y, t), w(y, t), p(y, t), h^\pm(t)) e^{i(\alpha x + \beta z)}, \quad (2.59)$$

avec u, v, w et p des amplitudes complexes, α et β sont les nombres d'onde dans les directions axiale et transversale. Ces derniers sont réels lorsqu'il s'agit de la stabilité temporelle et complexe dans le cas de la stabilité spatiale.

En remplaçant (2.59) dans (2.41-2.44), les équations de l'évolution linéaire de la perturbation peuvent alors s'écrire sous la forme du problème aux valeurs initiales suivant :

$$i[\alpha u + \beta w] + Dv = 0, \quad (2.60)$$

$$u_t = -i\alpha U u - vDU - i\alpha p + \frac{1}{Re} \mathcal{F}u + \frac{B}{Re} \left[\frac{-(\alpha^2 + \beta^2)u - i\alpha Dv}{|DU|} \right], \quad (2.61)$$

$$v_t = -i\alpha U v - Dp + \frac{1}{Re} \mathcal{F}v + \frac{B}{Re} \left[D \left(\frac{2Dv}{|DU|} \right) + \frac{-\beta^2 v + i\beta Dw}{|DU|} \right], \quad (2.62)$$

$$w_t = -i\alpha U w - i\beta p + \frac{1}{Re} \mathcal{F}w + \frac{B}{Re} \left[D \left(\frac{i\beta v + Dw}{|DU|} \right) - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)w + i\beta Dv}{|DU|} \right] \quad (2.63)$$

avec $\mathcal{F} \equiv D^2 - k^2$, et $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Les conditions aux parois (2.45) et aux interfaces ((2.55)-(2.58)) combinées avec (2.59)

pour α ou $\beta \neq 0$, conduisent à

$$u(\pm 1) = v(\pm 1) = w(\pm 1) = 0, \quad (2.64)$$

$$u(\pm y_0) = v(\pm y_0) = w(\pm y_0) = 0, \quad (2.65)$$

$$Dv(\pm y_0) = Dw(\pm y_0) = 0, \quad Du(\pm y_0) = -h^\pm D^2U(\pm y_0), \quad (2.66)$$

associées aux conditions initiales :

$$u(y, t = 0) = u_0(y) \quad (2.67)$$

$$v(y, t = 0) = v_0(y), \quad (2.68)$$

$$w(y, t = 0) = w_0(y). \quad (2.69)$$

On se retrouve avec six conditions aux limites aux interfaces. Les trois conditions aux limites de type Dirichlet $u = v = w = 0$, proviennent de l'équation du mouvement de la zone bouchon. Les deux conditions de type Neumann, $Dv = Dw = 0$, sont nécessaires pour palier la singularité $DU = 0$ au dénominateur dans les équations (2.61-2.63). La dernière condition $Du(\pm y_0) = -h^\pm D^2U(\pm y_0)$, est en fait une condition sur h et non sur u . Ainsi, le problème est bien posé.

Il est intéressant de noter que la zone bouchon n'est pas accélérée par une perturbation infinitésimale du fait de la condition (2.65). Par conséquent, les deux régions $[-1, -y_0]$ et $[y_0, 1]$ où le fluide est cisailé sont séparées par la zone bouchon dont le mouvement n'est pas perturbé. Les deux régions $[-1, -y_0]$ et $[y_0, 1]$ sont donc équivalentes et il est suffisant, pour examiner le problème de stabilité, de ne considérer que le domaine $[y_0, 1]$.

Le système (2.60-2.63) peut être réduit à deux équations qui peuvent s'exprimer en terme de u et v si $\beta \neq 0$ ou v et w si $\alpha \neq 0$. En revanche, le système homologue pour un fluide Newtonien est formulé en fonction de la composante normale de la vitesse v et de la vorticité normale η , définie par $\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$, quel que soit (α, β) . Il n'a pas été possible dans le cas présent d'utiliser cette formulation à cause des termes en Bingham.

Nous présentons dans ce qui suit les deux formulations, appelées (v, w) et (u, v) :

Formulation (v, w)

En supposant que $\alpha \neq 0$, on élimine u de l'équation (2.60), et la pression résultant de (2.61) est remplacée dans (2.62) et (2.63). Ces manipulations conduisent aux équations suivantes formulées seulement en v et w :

$$-i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1vw} & \mathcal{L}_{2vw} \\ \mathcal{L}_{3vw} & \mathcal{L}_{4vw} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -iRe(D^2 - \alpha^2) & \beta Re D \\ -i\beta Re D & Re k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

que l'on peut écrire symboliquement

$$i\mathcal{L}_{vw}(v, w)^T + \frac{d}{dt} \mathcal{M}_{vw}(v, w)^T = 0 \quad (2.71)$$

avec les termes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1vw} = & \mathcal{F}^2 + \beta^2 \mathcal{F} - i\alpha \operatorname{Re} U (D^2 - \alpha^2) + i\alpha \operatorname{Re} (D^2 U) + \\ & B \left[\frac{\alpha^2 \beta^2}{|DU|} - (4\alpha^2 + \beta^2) D \left(\frac{D}{|DU|} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\mathcal{L}_{2vw} = i\beta D\mathcal{F} + \alpha\beta \operatorname{Re} (UD + DU) - i\beta B \left[k^2 D \left(\frac{1}{|DU|} \right) + \frac{(k^2 + \alpha^2)D}{|DU|} \right] \quad (2.73)$$

$$\mathcal{L}_{3vw} = \beta D\mathcal{F} - i\alpha\beta \operatorname{Re} (UD - DU) - B\beta \left[\frac{(k^2 + \alpha^2) D}{|DU|} + \alpha^2 D \left(\frac{1}{|DU|} \right) \right] \quad (2.74)$$

$$\mathcal{L}_{4vw} = ik^2 \mathcal{F} + \alpha \operatorname{Re} U k^2 + iB \left[\frac{\alpha^2 D^2 - k^4}{|DU|} + \alpha^2 D \left(\frac{1}{|DU|} \right) D \right] \quad (2.75)$$

On peut noter que lorsque $\beta = 0$, il n'y a pas de couplage entre les composantes v et w .

Formulation (u, v)

De la même manière, le problème peut être écrit en u et v , en éliminant w et p dans les équations (2.60-2.63), avec l'hypothèse que $\beta \neq 0$:

$$-i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1uv} & \mathcal{L}_{2uv} \\ \mathcal{L}_{3uv} & \mathcal{L}_{4uv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} k^2 \operatorname{Re} & -i\alpha \operatorname{Re} D \\ \alpha \operatorname{Re} D & -i \operatorname{Re} (D^2 - \beta^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

système qui peut encore être mis sous la forme :

$$i\mathcal{L}_{uv}(u, v)^T + \frac{d}{dt} \mathcal{M}_{uv}(u, v)^T = 0 \quad (2.77)$$

où,

$$\mathcal{L}_{1uv} = ik^2 \mathcal{F} + \alpha ReUk^2 + iB \left[\alpha^2 D \left(\frac{D}{|DU|} \right) - \frac{k^4}{|DU|} \right], \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2uv} = & \alpha D \mathcal{F} - i Re \alpha^2 UD - i\beta^2 ReDU + \\ & \alpha B \left[\frac{D^3 - \alpha^2 D}{|DU|} + D \left(\frac{1}{|DU|} \right) (\beta^2 + D^2) \right], \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3uv} = & i\alpha D \mathcal{F} + \alpha^2 Re(UD + DU) + \\ & i\alpha B \left[\frac{D^3 - \alpha^2 D}{|DU|} + D \left(\frac{1}{|DU|} \right) \mathcal{F} + D \left(D \left(\frac{1}{|DU|} \right) D \right) \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4uv} = & \mathcal{F} (D^2 - \beta^2) - i\alpha ReU (D^2 - \beta^2) - i\alpha ReDU D + \\ & + B D^2 \left(\frac{1}{|DU|} \right) [D^2 + \beta^2] + B D \left(\frac{1}{|DU|} \right) [2D^3 - k^2 D - \beta^2 D] + \\ & \frac{B}{|DU|} [(D^2 - \beta^2)^2 - \alpha^2 D^2]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

2.3.3 Problème aux valeurs propres

Les équations et les conditions aux limites associées décrivent complètement l'évolution d'une perturbation arbitraire infinitésimale dans le temps et l'espace. L'approche classique pour la résolution de tels problèmes de stabilité est l'approche modale. Elle consiste à réduire un problème aux valeurs initiales en un problème aux valeurs propres. Une solution du problème aux valeurs initiales (2.71) ou (2.77) s'écrit sous la forme

$$q = \hat{q} \exp(-i C t), \quad (2.82)$$

où le vecteur \hat{q} représente le vecteur $(\hat{u}, \hat{v})^T$ ou $(\hat{v}, \hat{w})^T$, qui sont les amplitudes complexes de la perturbation. Nous supposons que la perturbation se développe dans le temps, et donc la fréquence de l'onde $C = C_r + iC_i$ est complexe et les nombres d'ondes α et β sont réels. La valeur de C_i est le taux d'amplification ou d'amortissement de l'onde et $\frac{C_r}{(\alpha^2 + \beta^2)}$ est sa vitesse de phase. L'angle entre la direction de propagation de l'onde et la direction axiale x est $\phi = \arctan(\beta/\alpha)$.

En remplaçant (2.82) dans (2.77) et (2.71), les problèmes aux valeurs propres suivants sont obtenus :

$$\mathcal{L}_{vw}(\hat{v}, \hat{w})^T = C \mathcal{M}_{vw}(\hat{v}, \hat{w})^T, \quad (2.83)$$

$$\mathcal{L}_{uv}(\hat{u}, \hat{v})^T = C \mathcal{M}_{uv}(\hat{u}, \hat{v})^T, \quad (2.84)$$

Le concept de la stabilité temporelle dans l'espace spectral est défini comme suit : s'il existe des valeurs propres complexes $C = C_r + i C_i$ de l'équation (2.83) ou (2.84) telles que $C_i > 0$, pour α et β réels donnés, l'écoulement de base est linéairement instable. Si $C_i < 0$, l'écoulement est dit stable pour de petites perturbations. Et finalement, si $C_i = 0$, on dit que le système est neutre.

2.4 Résolution numérique

Pour la résolution numérique du problème aux valeurs propres, il existe deux concepts généraux. La première méthode est une méthode locale. Elle consiste à injecter une valeur propre approximative dans le problème aux valeurs propres et à résoudre ce dernier comme un problème aux valeurs initiales. La solution exacte de la valeur propre est ajustée par une méthode itérative de manière à satisfaire les conditions aux limites. La procédure d'itération utilisée peut être accélérée par des méthodes d'approximation successives usuelles. Cette méthode présente l'avantage d'être dotée d'une grande précision, mais elle ne permet de calculer qu'une seule valeur propre à la fois.

La deuxième méthode est une méthode globale. Elle utilise l'opérateur discrétisé qui est injecté dans un solveur de valeurs propres. Il en résulte un spectre constitué de l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur d'évolution. Les méthodes des différences finies sont parmi les premières à être mises en oeuvre pour la discrétisation du problème aux valeurs propres. Thomas[63] fut le premier à résoudre numériquement l'équation d'Orr-Sommerfeld en utilisant la méthode des différences finies du quatrième ordre. La résolution des équations matricielles obtenues a été effectuée par la méthode d'élimination de Gauss. Bien que les résultats soient satisfaisants comparés aux résultats analytiques de Lin [37], ces méthodes se sont révélées limitées dans leur utilisation, et des méthodes plus avancées telles que les éléments finis et des méthodes spectrales ont été proposées. Il s'agit de développer la solution approchée ϕ_k de la solution exacte ϕ en séries tronquées dans une base appropriée de fonctions connues N_i , c'est à dire

$$\phi_k = \sum_{i=1}^k a_i N_i. \quad (2.85)$$

La substitution du développement 2.85 dans le problème aux valeurs propres, conduit à une matrice d'un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$Ax = \lambda Bx. \quad (2.86)$$

Selon le choix de la base des fonctions N_i , différents schémas de discrétisation sont obtenus : le choix d'une base globale de fonctions N_i infiniment différentiables, conduit aux méthodes spectrales, tandis que la définition d'une base de fonctions N_i locales, est une caractéristique des méthodes d'éléments finis. Gottlieb et Orszag [23] ont passé en

revue les différents aspects de la théorie et applications des méthodes spectrales. Parmi les méthodes spectrales, trois formulations sont couramment utilisées selon le choix des fonctions test (les fonctions test sont choisies en fonction de la nature de l'opérateur) : la méthode de Galerkin, la méthode de collocation et la méthode Tau. Orszag [48] utilise le développement en polynômes de Tchebychev et la méthode Tau, pour transformer l'équation d'Orr-Sommerfeld sous la forme matricielle (2.86), cette dernière est résolue ensuite par l'algorithme Q-R. Ses résultats sont d'une grande précision ; depuis, cette procédure a été souvent appliquée. En particulier, depuis le développement de la mise en oeuvre de méthodes de transformations rapides, des méthodes spectrales basées sur les polynômes de Tchebychev sont devenues l'outil favori pour la résolution des problèmes d'instabilité en mécanique des fluides.

Aussi bien la méthode aux différences finies que la méthode spectrale basée sur les polynômes de Tchebychev ont été appliquées dans notre situation. L'algorithme basé sur la méthode des différences finies du quatrième ordre de Kurtz et Crandall [36] a déjà été utilisée récemment par Kabouya et Nouar [33] dans le cas de la résolution de l'équation d'Orr Sommerfeld d'un écoulement de Poiseuille en conduite annulaire pour un fluide de Bingham. Les résultats donnent un accord satisfaisant en comparaison avec ceux obtenus par les méthodes spectrales pour le cas d'un fluide Newtonien.

Dans ce qui suit, nous allons décrire l'algorithme de la méthode qui se révèle être la plus efficace pour la détermination des valeurs propres dans les problèmes de stabilité hydrodynamique. Il s'agit de la méthode de collocation utilisant les polynômes de Chebychev. Actuellement, cette méthode constitue l'approche standard pour la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld en raison de sa rapidité, de sa précision et de la simplicité de sa mise en oeuvre. Les polynômes de Chebychev sont définis dans l'intervalle $[-1, 1]$ par

$$T_n(\xi) = \cos(ncos^{-1}(\xi)) \quad (2.87)$$

Si

$$\xi = \cos\phi, \quad (2.88)$$

alors (2.87) s'écrit aussi

$$T_n(\xi) = \cos n\phi \quad (2.89)$$

Les points de collocation ξ_j sont déterminés par les extrema du Nième polynôme de Chebychev retenu de la série tronquée, et sont définis par

$$\xi_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (2.90)$$

où la paroi et l'interface correspondent aux valeurs de j 0 et N respectivement. Un polynôme d'interpolation est construit en termes de valeurs des variables de l'écoulement aux points de collocation, en utilisant les séries tronquées de Chebychev.

Nous allons montrer un exemple de l'application de cette méthode : si la variable u est représentée par :

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\xi). \quad (2.91)$$

la dérivée première de u s'écrit alors

$$\frac{du}{d\xi} \Big|_j = \sum_{n=0}^N A_{jn} u_n(\xi) \quad (2.92)$$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} \Big|_j = \sum_{n=0}^N B_{jn} u_n(\xi) \quad (2.93)$$

$j = 0, \dots, N$, où A_{jk} et B_{jk} sont les éléments de la matrice dérivée et sont donnés dans [?] par

$$A_{jk} = \frac{\bar{C}_j (-1)^{k+j}}{\bar{C}_k \xi_n - \xi_k} \quad (n \neq k) \quad (2.94)$$

$$A_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} = -A_{NN} \quad (2.95)$$

avec

$$\bar{C}_0 = \bar{C}_N = 2, \quad \bar{C}_j = 1, \quad (1 \leq j \leq N-1), \quad (2.96)$$

et

$$B_{jn} = A_{jm} A_{mk}. \quad (2.97)$$

En utilisant la relation (2.97), les dérivées d'ordre supérieur sont obtenues.

En écrivant les équations (2.83) ou (2.84) ou (2.64-2.69) en terme de variable de Chebyshev évalués aux points de collocation, on aboutit à un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{X}. \quad (2.98)$$

Le vecteur \mathbf{X} est constitué des composantes de $(u, v)^T$, $(v, w)^T$ ou $(u, v, w, p)^T$ (selon la formulation) sur une base de polynômes de Tchebychev. Les matrices A et B sont des matrices carrées de dimensions $2(N+1)$ pour les formulations (u, v) et (v, w) , et $4(N+1)$ pour la formulation primitive (u, v, w, p) . Les conditions aux limites sont contenues dans les premières et dernières lignes de la matrice B . Du fait que les conditions aux limites ne contiennent pas la valeur propre C alors les mêmes lignes dans la matrice A sont choisies en termes de multiple complexe des lignes de B correspondantes. En choisissant correctement le multiple complexe, les valeurs propres aberrantes associées pourront être facilement localisées dans le plan complexe.

Il est cependant important de noter que pour la formulation (u, v, w, p) , la matrice B est singulière. Une alternative permettant de contourner cette singularité est d'introduire un terme $\gamma C p_j$ dans l'équation de continuité (2.60) (Malik et Poll [41]). Ce terme

supplémentaire rajouté artificiellement transforme entièrement le problème (2.60-2.69) en problème aux valeurs propres. La valeur attribuée au paramètre γ est extrêmement petite, par conséquent cela génère de grandes valeurs pour certaines valeurs propres de la matrice $B^{-1}A$. Des tests effectués avec différentes valeurs de γ ont montré que son effet est négligeable sur les valeurs propres.

Enfin, le problème aux valeurs propres généralisé résultant est résolu par des sous-routines standards de Matlab. Le code de calcul écrit par S. Reddy est utilisé ici après quelques légères modifications pour l'adapter à notre problème.

2.4.1 Changement de variables

Le domaine physique dans notre problème étant compris entre y_0 et 1, des changements de variables sont nécessaires afin de pouvoir appliquer la méthode de résolution numérique. La première étape consiste à transformer le domaine $[y_0, 1]$ en $[0, 1]$. En effet, du fait de la condition (2.65), les deux régions cisaillées sont découplées ; de plus, du fait que la région y_0 ne dépend que du nombre de Bingham B , il est pertinent de transformer le domaine $[y_0, 1]$ en $[0, 1]$. Les nouveaux paramètres du problème sont, par conséquent réduits à :

$$x = \tilde{x}(1 - y_0), \quad y = \tilde{y}(1 - y_0) + y_0, \quad z = \tilde{z}(1 - y_0), \quad t = \tilde{t}(1 - y_0), \quad (2.99)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha (1 - y_0), \quad \tilde{\beta} = \beta (1 - y_0), \quad \tilde{C} = C (1 - y_0), \quad (2.100)$$

$$\tilde{Re} = Re (1 - y_0), \quad \tilde{B} = B (1 - y_0) \quad . \quad (2.101)$$

L'introduction des variables ($\tilde{\cdot}$) ne modifie pas la formulation du problème, mais seulement le profil de vitesse de base, qui s'écrira maintenant $U = 1 - (\tilde{y})^2$, avec $\tilde{y} \in [0, 1]$. La deuxième étape consiste en une simple transformation de la variable \tilde{y} en la variable Chebychev ξ via

$$\xi = 1 - 2\tilde{y} \quad (2.102)$$

Le programme écrit sous matlab est celui de Reddy, donné dans [59]. Il a été adapté aux formulations utilisées, à savoir (u, v, w, p) , (u, v) et (v, w) et validé dans un premier temps pour le cas de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide Newtonien. Les calculs sont effectués pour $\tilde{Re} \leq 4 \times 10^4$, $0.02 \leq \tilde{B} \leq 40$, $\tilde{\alpha} \leq 10$, $\tilde{\beta} \leq 10$. Notons que les solutions aberrantes correspondantes aux conditions aux limites sont certainement identifiées et par conséquent éliminées. Le nombre de points de collocation utilisé est suffisant pour obtenir des précisions de 10^{-6} sur les valeurs de C , et typiquement $N = 75$ est un nombre suffisant pour obtenir la convergence pour $\tilde{Re} = 10^4$, $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 1$ et $\tilde{B} = 0.02$; cependant le nombre de polynômes augmente pour de plus grandes valeurs de \tilde{B} et de \tilde{Re} .

2.5 Analyse des résultats et discussion

La forme de la solution du problème aux valeurs propres, indique que quatre types de solutions sont possibles selon les valeurs que peuvent prendre les nombres d'onde α et β :

- i. Cas bidimensionnel : $\alpha \neq 0, \beta = 0$
- ii. Cas tridimensionnel : $\alpha = 0, \beta \neq 0$ et $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

2.5.1 Perturbation bidimensionnelle $\tilde{\beta} = 0$

Une formulation appropriée pour le cas bidimensionnel $\tilde{\beta} = 0$, est (v, w) . D'après (2.73) et (2.74), les opérateurs \mathcal{L}_{c1} et \mathcal{L}_{c2} sont nuls et par conséquent, les opérateurs \mathcal{L}_{os} et \mathcal{L}_{sq} sont découplés. Les deux classes de valeurs propres d'Orr-Sommerfeld et de Squire sont dissociées, avec

$$\mathcal{L}_{os} v = C(-iRe(D^2 - \alpha^2)v) \quad (2.103)$$

$$\mathcal{L}_{sq} w = CRe\alpha^2 w \quad (2.104)$$

Les caractéristiques des valeurs propres d'Orr-Sommerfeld et de Squire seront décrites pour différentes valeurs de \tilde{B} dans ce paragraphe.

2.5.1.1 Modes d'Orr-Sommerfeld

La figure (2.4) montre les valeurs propres d'Orr-Sommerfeld, pour $\tilde{\alpha} = 1, \tilde{\beta} = 0, \tilde{Re} = 10^4$ et $\tilde{B} = 2, y_0 = 0.5$; le nombre de polynômes utilisés est $N = 75$. Trois familles de modes propres peuvent être distinguées dans le spectre. En adoptant la notation proposée par Mack [40], ces familles sont notées A, P et S . La famille A est la famille des modes dits pariétaux, ils sont associés aux petites vitesses de phase ($\tilde{C}_r \approx 0$), rencontrés au voisinage de la paroi. Les valeurs propres de cette famille sont distribuées le long de deux branches, supérieure et inférieure.

La famille P , correspond à la vitesse de phase ($\tilde{C}_r \approx 1$). Ils sont rencontrés au voisinage de l'interface et seront appelés par la suite modes d'interface. Comme pour la famille A , ils sont distribués le long de deux branches, inférieure et supérieure.

Enfin, la famille S est caractérisée par une vitesse de phase ($\tilde{C}_r = 2/3$). Elle représente les modes transportés par l'écoulement moyen. Le mode le moins stable est un mode pariétal appartenant à la branche supérieure de la famille A , et il est donné par $\tilde{C} = 0.2769 - 0.0510i$.

Contrairement à l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham, les modes

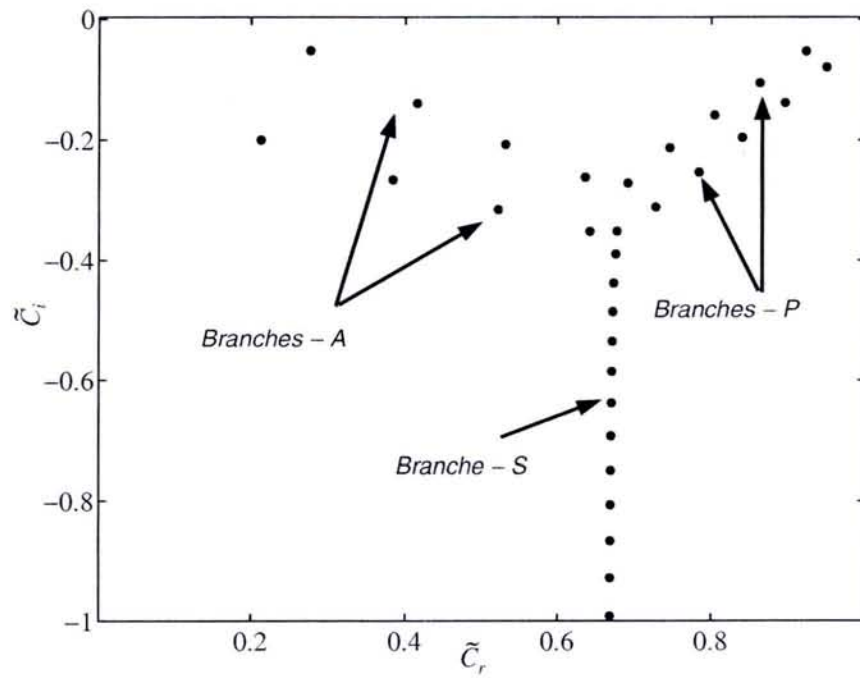


FIG. 2.4: Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham, $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 0$, $\tilde{Re} = 10^4$, $\tilde{B} = 2$

propres de la famille P sont distribués sur une seule branche pour un fluide Newtonien. En fait, l'apparition d'une seconde branche est une conséquence des conditions aux limites imposées sur v , à savoir $v = 0$. En effet, en maintenant les conditions aux limites associées à un fluide de Bingham et en annulant artificiellement \tilde{B} dans l'opérateur d'Orr-Sommerfeld, le même spectre est obtenu.

Les formes typiques des fonctions propres issues des modes de chaque branche A , P , S , sont données par la figure (2.5). Nous avons représenté les parties réelles et imaginaires ainsi que leurs modules. Comme on pouvait s'y attendre, les fonctions propres de la famille A , présentent un maximum au voisinage de paroi $\tilde{y} = 1$, et s'atténuent vers l'interface. La famille P , présente un maximum au voisinage de l'interface $\tilde{y} = 0$ et décroît vers la paroi.

Les variations de taux d'amplification temporelle \tilde{C}_i et de la vitesse de phase \tilde{C}_r des six premières valeurs propres, sont représentées en fonction du nombre de Reynolds sur la figure (2.6), pour $\tilde{B} = 2$ et $\tilde{\alpha} = 1$.

La méthode utilisée pour le suivi des valeurs propres est la suivante : à des nombres de Reynolds suffisamment grands, les modes se divisent en deux groupes : soit des modes rapides A , soit des modes lents P . La distinction entre les deux groupes est bien évidente par leur vitesse de phase. Chaque mode est alors suivi par sa vitesse d'onde $(\tilde{C}_r, \tilde{C}_i)$, au fur et à mesure que \tilde{Re} diminue en préservant bien l'identité de chaque mode lorsque un mode croise un autre.

On retrouve pour de grands nombres de Reynolds, les évolutions en $\tilde{Re}^{-1/3}$ des modes pariétaux A , et en $\tilde{Re}^{-1/2}$ pour les modes d'interface P , et pour de faibles nombres de Reynolds des évolutions en \tilde{Re}^{-1} . Ces mêmes évolutions sont aussi obtenues dans le cas du Poiseuille plan Newtonien.

Pour les paramètres utilisés, le mode le moins stable est un mode pariétal A (voir courbes (2) de la figure (2.6a et b)) pour $\tilde{Re} < 11060$, qui devient un mode interfacial P pour $\tilde{Re} > 11060$ (voir courbes (1) de la figure (2.6)).

Le nombre de Reynolds pour lequel s'effectue cet échange du mode le moins stable varie en fonction du nombre de Bingham. En effet, des calculs effectués pour différentes valeurs de \tilde{B} , indiquent que pour de faibles valeurs de \tilde{Re} , le mode le moins stable est pariétal, et que pour des \tilde{Re} suffisamment grands, le mode le moins stable est interfacial. Le nombre de Reynolds pour lequel s'effectue l'échange augmente lorsque le nombre de Bingham augmente également.

Afin d'observer l'effet du nombre de Bingham sur la distribution des valeurs propres, nous avons effectué des calculs pour $\tilde{B} = 2, 20, 40$, (fig 2.7). On note une diminution importante des valeurs propres des modes P , tandis que les modes A sont légèrement sensibles. Ceci n'est pas surprenant, étant donné que la viscosité de l'écoulement de base est plus sensible à \tilde{B} à proximité de l'interface qu'à la paroi.

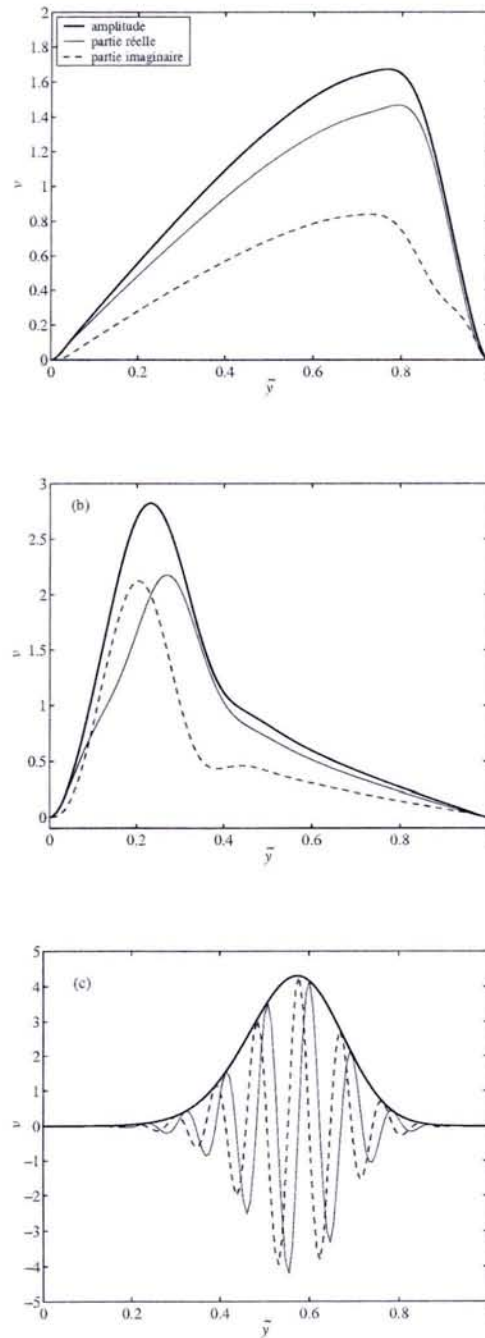


FIG. 2.5: Fonctions propres $\tilde{B} = 2$, $\tilde{Re} = 10^4$, $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 0$ de chacun des premiers modes Orr-Sommerfeld des familles A, P et S. (a) Famille A, (b) famille P, (c) famille S.

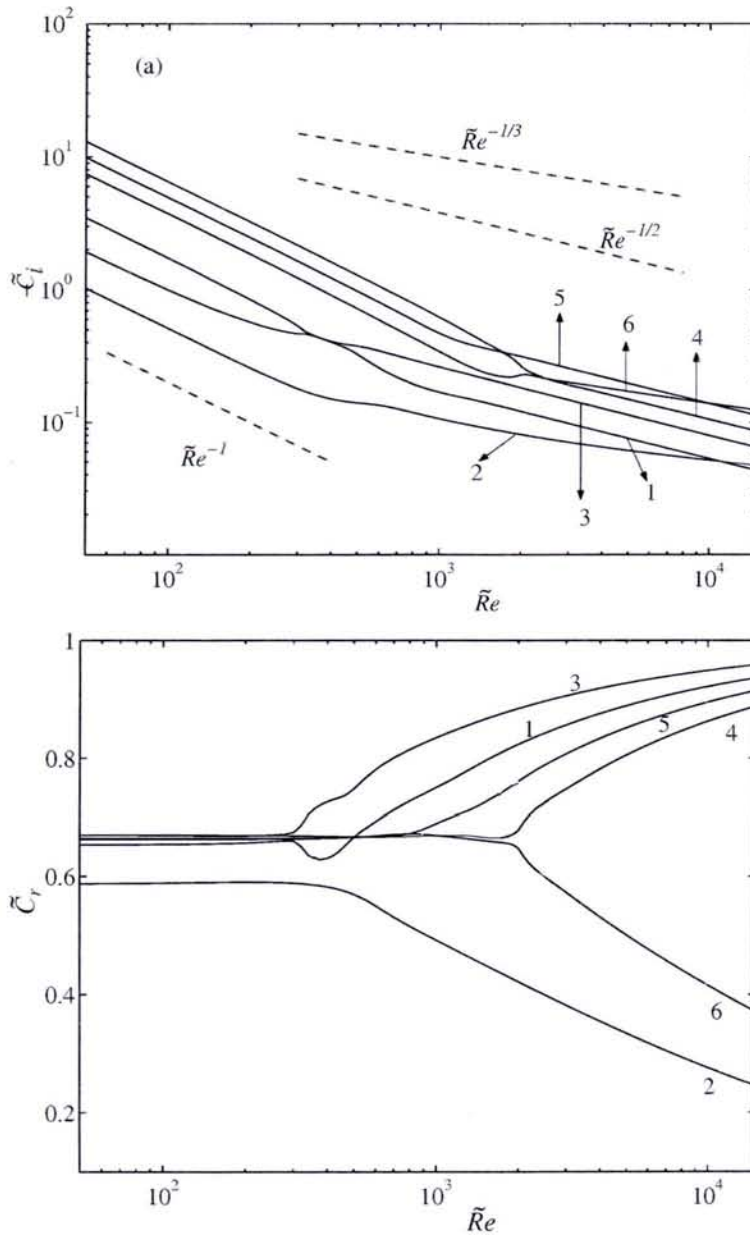


FIG. 2.6: a) Variation du taux d'amortissement et b) vitesse de phase en fonction du nombre de Reynolds, pour $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 0$ et $\tilde{B} = 2$. Les lignes pointillées montrent les variations des grandeurs \tilde{Re}^{-1} , $\tilde{Re}^{-1/2}$ et $\tilde{Re}^{-1/3}$.

Les résultats observés précédemment peuvent être illustrés par la figure (2.8), où l'on représente dans un plan (\tilde{Re}, \tilde{B}) les contours \tilde{C}_i . Pour chaque contour, \tilde{Re} augmente

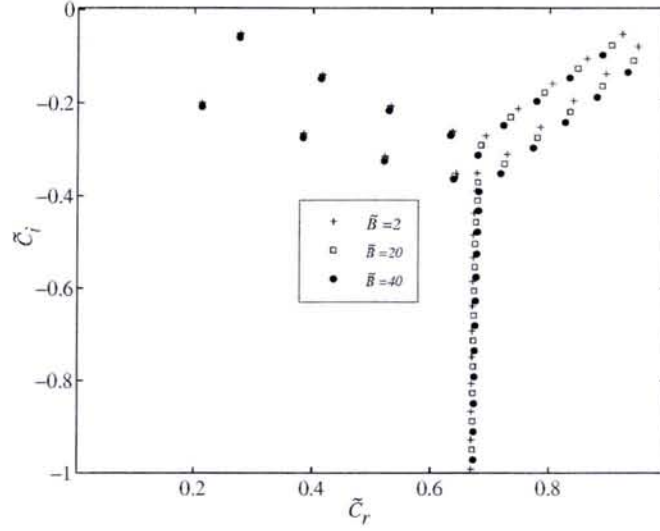


FIG. 2.7: Spectre des valeurs propres OS pour $\alpha = 1, \beta = 0, Re = 10^4, B = 2, 20, 40$

avec \tilde{B} . Ce résultat confirme l'effet stabilisant du nombre de Bingham. La modification des pentes observée sur certains contours isovaleurs de \tilde{C}_i correspond au passage du mode le moins stable de la famille A à la famille P . Par exemple, pour $\tilde{B} = 2$, le mode le moins stable est un mode pariétal pour $\tilde{Re} < 11060$ et un mode interfacial pour $\tilde{Re} > 11060$.

Finalement, pour les paramètres donnés précédemment, à savoir $\tilde{Re} \leq 4 \times 10^4, 0.02 \leq \tilde{B} \leq 40, \tilde{\alpha} \leq 10, \tilde{\beta} \leq 10$, aucune instabilité n'a été trouvée. Notons cependant que même pour de très faibles valeurs de \tilde{B} i.e. $\tilde{B} \ll 1$, l'écoulement reste linéairement stable, alors que pour un écoulement plan de Poiseuille d'un fluide Newtonien $B = 0$, un mode pariétal quitte le demi plan $C_i < 0$, et l'écoulement devient instable pour $Re_c = 5772.2, \alpha = 1.02$ (Orszag)[48]. Ce comportement singulier, ou cette discontinuité à la limite $B = 0$, peut s'interpréter par le fait que dans le cadre de la stabilité linéaire, il est supposé implicitement que la perturbation est infinitésimale par rapport à toutes les échelles de l'écoulement, en particulier $\epsilon = o(\tilde{B})$. Comme $y_0 = O(\tilde{B})$ d'après (2.28), on en déduit alors $\epsilon = o(y_0)$. Par conséquent, l'interface est linéairement perturbée et la zone isovitesse demeure intacte.

En fait, dans le domaine $[0, 1]$, l'écoulement peut être considéré comme la superposition des écoulements de Couette et de Poiseuille : comme la perturbation est nulle à l'interface, tout se passe comme si l'interface était rigide et se déplaçait à vitesse constante $U_c = 1$. Ce point de vue nous amène à considérer l'écoulement du fluide de

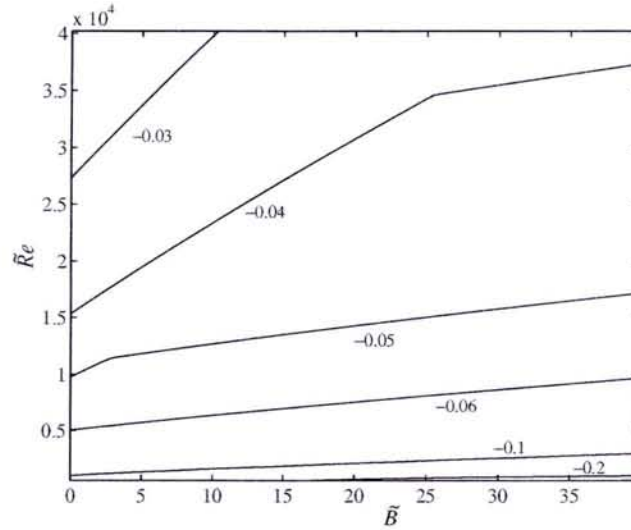


FIG. 2.8: Contours iso- \tilde{C}_i , pour $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 0$ dans un plan (\tilde{B}, \tilde{Re})

Bingham entre l'interface et la paroi comme celui d'un écoulement composé Couette Poiseuille voir figure (2.9), $1 - y^2 = U_c(1 - y) + 4U_p(y - y^2)$ avec $U_c = 1$ et $U_p = 1/4$, soit un rapport $U_c/U_p = 4$. Il est connu que l'écoulement de Poiseuille est linéairement instable au-delà d'un nombre de Reynolds $Re_c = 5772$, tandis que l'écoulement de Couette est linéairement stable et le nombre de Reynolds critique est infini. La combinaison des deux écoulements est de plus en plus stable, au fur et à mesure que la composante couette U_c augmente depuis la valeur nulle. Potter [52] a étudié la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette Poiseuille d'un fluide Newtonien dans le cas d'une perturbation bidimensionnelle. Il a obtenu l'équation d'Orr-Sommerfeld associée aux conditions aux limites suivantes pour la composante normale de la vitesse $y = 0$, $v = Dv = 0$ et en $y = 1$, $v = Dv = 0$. Il a montré que la superposition de l'écoulement de Couette et de Poiseuille a un effet stabilisant, gouverné par le rapport U_c/U_p : cet effet est d'autant plus prononcé que le rapport U_c/U_p est grand. En particulier, lorsque $U_c/U_p > 0.7$, l'écoulement est linéairement stable. On note l'analogie avec l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham dans la zone cisailée $[0, 1]$, dont le profil de vitesse de base coïncide avec l'écoulement composé dans le cas particulier $U_c/U_p = 4$. Les conditions aux limites sur la perturbation étant identiques, les conditions de stabilité sont également les mêmes.

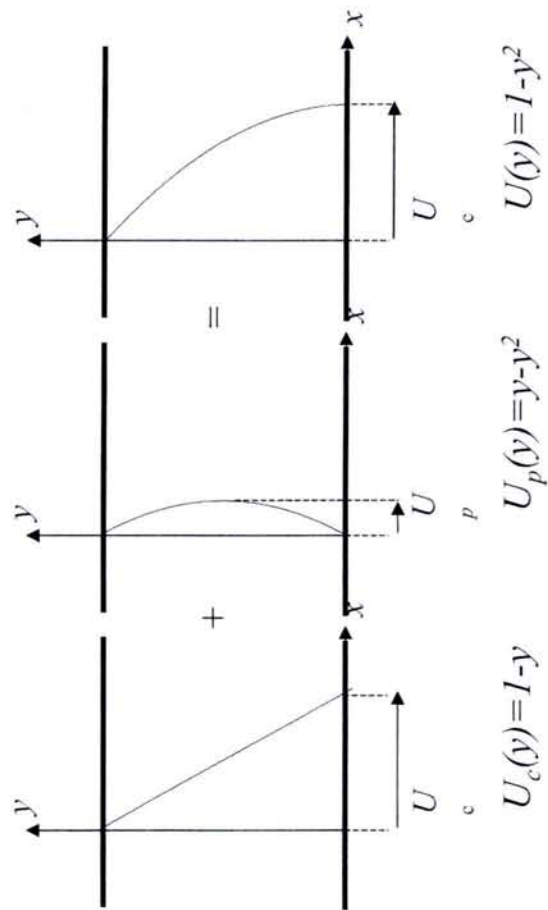


FIG. 2.9: *Ecoulement composé Couette Poiseuille pour un fluide Newtonien*

2.5.1.2 Modes de Squire

Les modes de Squire sont calculés à partir de l'équation (2.75) et présentés par la figure (2.10) pour différents nombres de Bingham, $\tilde{B} = 0.2, 2, 20, 40$. L'allure du spectre est classique, c'est à dire qualitativement similaire à celle de l'écoulement de Poiseuille plan pour un fluide Newtonien. Cependant, le nombre de modes diminue au fur et à mesure que le nombre de Bingham augmente. Par exemple, pour $\tilde{B} = 2$, nous obtenons par le calcul cinq modes sur la branche droite tandis que pour $\tilde{B} = 40$ nous obtenons un seul mode. On remarque aussi le déplacement vers l'axe $\tilde{C}_r = 0$ du tronç (dénomination réservée à la branche verticale du spectre des modes de Squire), lorsque \tilde{B} augmente. En utilisant une formulation variationnelle similaire à celle de Schmid et Henningson [59], on montre que les modes de Squire sont toujours amortis. En multipliant l'équation (2.75) par le complexe conjugué de la composante longitudinale de la vitesse de perturbation w^* , et en intégrant ensuite dans un domaine $[0, 1]$, on montre que

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i \int_0^1 w w^* d\tilde{y} &= -\frac{1}{\tilde{Re}} \int_0^1 \tilde{D}w \tilde{D}w^* d\tilde{y} - \frac{k^2}{\tilde{Re}} \int_0^1 w w^* d\tilde{y} \\ &\quad - \frac{\tilde{B}}{\tilde{k}^2 \tilde{Re}} \int_0^1 \frac{\tilde{D}w \tilde{D}w^* + w w^*}{|\tilde{D}U|} d\tilde{y} < 0, \end{aligned} \quad (2.105)$$

et

$$\tilde{C}_r \int_0^1 w w^* d\tilde{y} = \tilde{\alpha} \int_0^1 \tilde{U} w w^* d\tilde{y}. \quad (2.106)$$

D'après l'équation (2.105) on déduit que la partie imaginaire des modes de Squire est toujours négative et que \tilde{B} a un effet de plus en plus stabilisant.

2.5.2 Perturbation tridimensionnelle $\tilde{\beta} \neq 0$

On rappelle que le théorème de Squire ne peut pas être appliqué dans le cas d'un fluide de Bingham, du fait de la présence des termes en Bingham. On présentera dans un premier temps les résultats obtenus pour $\alpha = 0$, ensuite pour $\alpha \neq 0$.

Cas $\alpha = 0$

La formulation (u, v) sera appropriée dans le cas $\alpha = 0$; elle se réduit à :

$$(D^2 - \beta^2) u - Re DU v = -iReCu + \frac{B}{|DU|} \beta^2 u \quad (2.107)$$

$$(D^2 - \beta^2)^2 v = iCRe (D^2 - \beta^2) v + B \left[\frac{(D^2 - \beta^2)^2}{|DU|} \right] v. \quad (2.108)$$

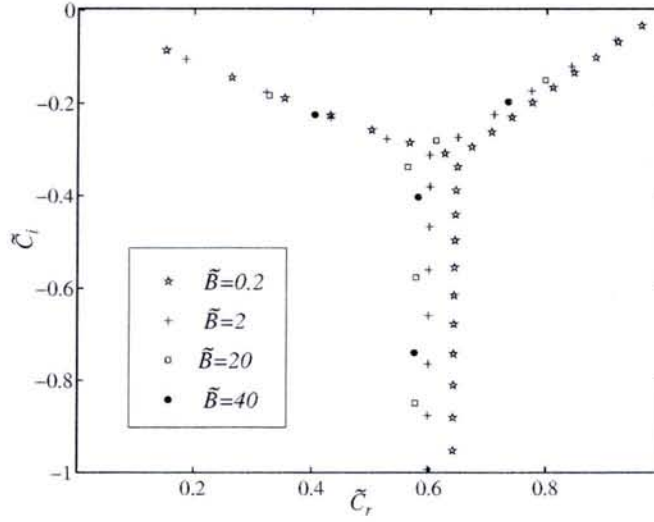


FIG. 2.10: Spectre des valeurs propres SQ pour $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 0$, $\tilde{Re} = 10^4$, $\tilde{B} = 0.2, 2, 20, 40$

Les modes propres solutions du système sont couplés par le terme $(-ReDU)$, ce qui implique que la solution de (2.107) dépend de la solution de (2.108), sauf si $v = 0$.

Comme pour un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide Newtonien, la forme du spectre consiste en une branche émanant de l'origine, comme le montre l'exemple de la figure (2.11) pour $\beta = 1$, $\tilde{B} = 2$ et $\tilde{Re} = 10000$. En suivant la même méthode que pour des perturbations axiales, on peut montrer que les solutions des équations (2.107) et (2.108) sont imaginaires et sont toujours négatives et constituent donc des modes amortis. Une solution asymptotique peut être obtenue pour des grands nombres de Reynolds \tilde{Re} et des faibles \tilde{B} :

pour les modes de Squire :

$$C = -i \frac{n^2 \pi^2 + \beta^2}{Re} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.109)$$

Pour l'équation (2.108) :

$$C = -\frac{i}{Re} (\omega^2 + \beta^2) \quad , \quad (2.110)$$

où ω est la solution de l'équation transcendante :

$$\omega \tan \omega - \beta \tanh \beta = 0 \quad , \quad (2.111)$$

$$\omega \cot \omega - \beta \coth \beta = 0 \quad . \quad (2.112)$$

Cas ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$)

Dans cette situation, les deux formulations sont valables, aussi bien (u, v) que (v, w)

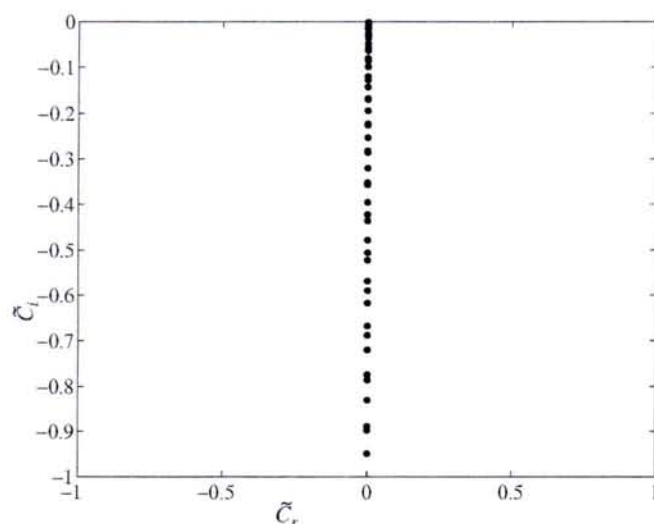


FIG. 2.11: *Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Poiseuille $\tilde{Re} = 10^4$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = 1$*

et on opte pour la formulation (v, w) dans la suite. Les fonctions propres v et w sont couplées via les termes de Bingham impliqués dans les Eqs (2.70) et (2.76).

Les figures (2.12) et (2.13) montrent un spectre de valeurs propres obtenu respectivement pour $\tilde{B} = 0.02$ et $\tilde{B} = 2$, et les paramètres suivants $\tilde{Re} = 10000$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$. Comme pour le cas bidimensionnel, le mode le moins stable pour des valeurs suffisamment grandes de \tilde{Re} est un mode rapide.

Le suivi des valeurs propres est aussi représenté sur la figure (2.14). Cette fois ci on n'observe pas d'échange entre les deux premiers modes les moins stables mais entre le second et troisième mode. Les modes propres Squire et OS sont couplés, par conséquent il est difficile de les distinguer. Néanmoins, comme pour la situation bidimensionnelle, nous n'avons pas trouvé d'instabilité.

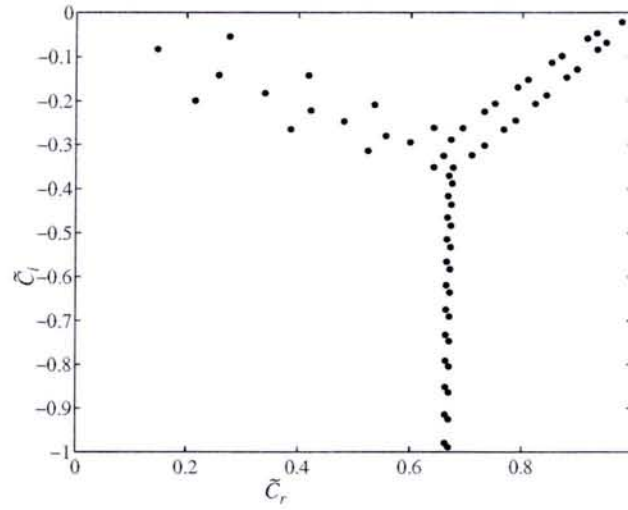


FIG. 2.12: *Spectre des valeurs propres pour $\bar{B} = 0.02, \tilde{Re} = 10^4, \tilde{\alpha} = 1, \tilde{\beta} = 1$*

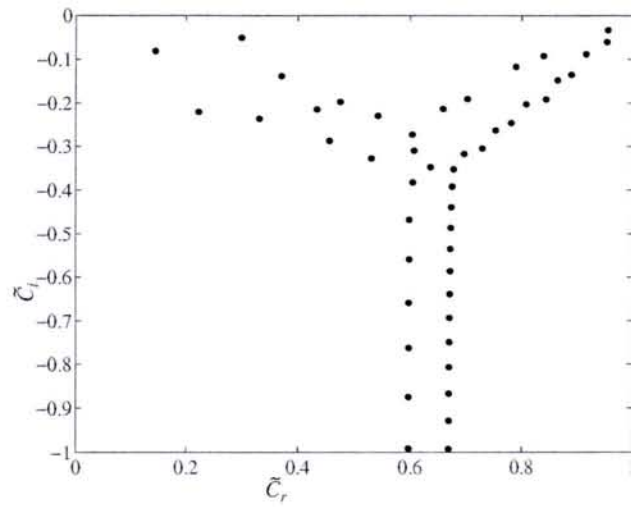


FIG. 2.13: *Spectre des valeurs propres pour $\bar{B} = 2, \tilde{Re} = 10^4, \tilde{\alpha} = 1, \tilde{\beta} = 1$*

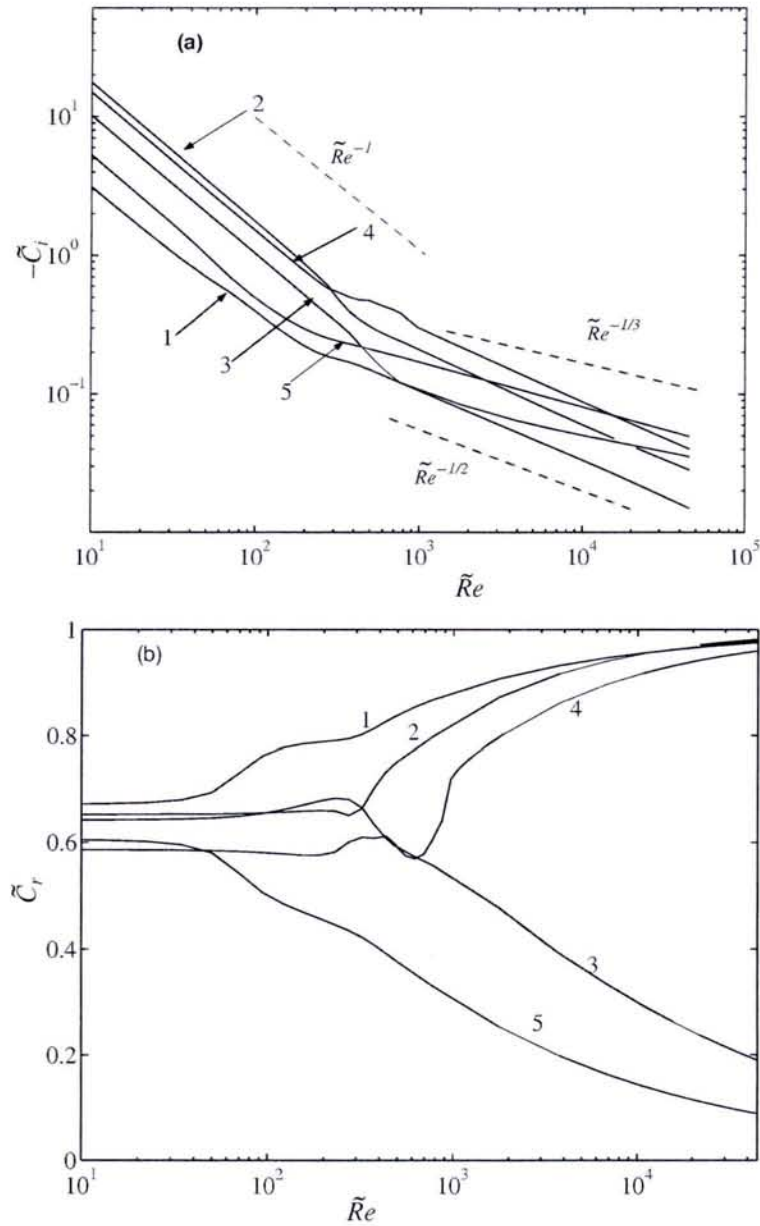


FIG. 2.14: a) Variation du taux d'amortissement et b) vitesse de phase en fonction du nombre de Reynolds, pour $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 1$ et $\tilde{B} = 2$. Les lignes pointillées montrent les variations des grandeurs \tilde{Re}^{-1} , $\tilde{Re}^{-1/2}$ et $\tilde{Re}^{-1/3}$.

2.6 Conclusion : Résultats les plus significatifs

L'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham est linéairement stable. Ce résultat de stabilité peut être généralisé au cas de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham dans des conduites circulaires ou annulaires. Il peut être aussi étendu aux modèles d'Herschel-Bulkley ou de Casson. En fait, ce résultat est une conséquence des conditions aux limites à l'interface où la perturbation s'annule. L'augmentation du nombre de Bingham contribue davantage à la stabilité. Le dédoublement de la branche S du spectre est probablement dû à l'effet de la rhéofluidification. Le comportement singulier à la limite $B = 0$ est une conséquence des hypothèses de stabilité linéaire.

Chapitre 3

Analyse non modale

3.1 Motivations

Lorsqu'on analyse dans le cas d'une perturbation approximativement linéaire, la réponse d'un écoulement à une perturbation donnée, il faut considérer deux cas : soit on étudie la réponse asymptotique à cette perturbation, auquel cas la nature de la perturbation initiale est secondaire. Il est alors loisible de ne prendre en compte que le mode le moins stable puisqu'il domine la dynamique asymptotique. Soit on étudie le régime transitoire, et dans ce cas la nature de la perturbation initiale est importante ; la représentation avec un seul mode fût-il le moins stable n'est plus représentative de l'évolution temporelle de la perturbation. En effet, si l'on désire perturber de manière optimale l'écoulement, il est préférable de choisir une perturbation initiale qui contienne les autres modes du spectre plutôt que de concentrer l'énergie initiale dans un seul mode. De telles perturbations peuvent augmenter de manière significative pendant un temps fini, même pour des écoulements linéairement stables. Par exemple, dans le cas de l'écoulement de Hagen Poiseuille qui est linéairement stable, Schmid et Henningson [58] obtiennent une amplification de l'énergie cinétique de la perturbation d'un facteur de 630 pour un nombre de Reynolds de 3000. Cette amplification d'énergie a été obtenue pour des nombres d'onde axial et transversal respectifs $\alpha = 0$ et $\beta = 2.04$, et une durée égale à 228. Si cette amplification est importante, des ondes non linéaires apparaissent dans l'écoulement. De plus, de telles amplifications peuvent être à l'origine de la transition laminaire turbulent. La croissance transitoire de l'énergie peut être expliquée en considérant le cas d'une perturbation bidimensionnelle. Dans cette situation, une perturbation initiale de longueur d'onde $2\pi/\alpha$ peut être décomposée sur une base de fonctions propres \hat{v}_i de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld

$$v = \mathcal{R}e \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j [\hat{v}_j(y) e^{-iC_j t}] e^{i\alpha x} \right] \quad (3.1)$$

L'équation de continuité permet d'écrire

$$u = \mathcal{R}e \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{\alpha} a_j [D\hat{v}_j(y)e^{-iC_j t}] e^{i\alpha x} \right] \quad (3.2)$$

En pratique, on considère uniquement les N premiers modes rangés dans le sens de plus grande stabilité. L'amplitude de la perturbation est évaluée par son énergie cinétique moyenne E sur le volume $[y_0, 1] \times [0, 2\pi/\alpha] \times 1$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\alpha} \left[\int_{y_0}^1 [u^2 + v^2] dy \right] dx \quad (3.3)$$

En utilisant les expressions (3.1) et (3.2), on obtient

$$E = \frac{1}{4(1-y_0)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k^* e^{-i(C_j - C_k^*)t} \left[\hat{v}_j(y) \hat{v}_k^*(y) + \frac{1}{\alpha^2} D\hat{v}_j(y) * D\hat{v}_k^*(y) \right] dy \quad (3.4)$$

On introduit le vecteur $\psi = (\hat{u}, \hat{v})^T$ et $\psi_j = (\hat{u}_j, \hat{v}_j)^T$ et on définit le produit scalaire

$$(\psi_j, \psi_k)_E = \int_{y_0}^1 \left(\hat{v}_j(y) \hat{v}_k^*(y) + \frac{1}{\alpha^2} D\hat{v}_j^* D\hat{v}_k \right) dy. \quad (3.5)$$

Ainsi l'équation (3.4) de l'énergie devient

$$E = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k^* e^{-i(\tilde{C}_j - \tilde{C}_k^*)t} (\psi_k, \psi_j). \quad (3.6)$$

Lorsque les modes normaux sont orthogonaux, les produits scalaires (ψ_k, ψ_j) sont nuls pour $k \neq j$ et l'énergie cinétique de la perturbation se réduit à la somme des énergies pour chaque mode. Par contre, lorsque les modes ne sont pas orthogonaux, des interférences positives dues à la différence de phase des perturbations peuvent se produire, conduisant à une augmentation transitoire de l'énergie. Cet accroissement de l'énergie de la perturbation doit bien sûr être prélevé à l'écoulement de base, ce dernier étant maintenu grâce à un gradient de pression imposé. Une illustration géométrique de l'augmentation transitoire d'amplitude de la perturbation est donnée par la figure (3.1). Elle montre clairement que la somme de deux vecteurs non orthogonaux dont le module de chacun décroît exponentiellement dans le temps peut avoir un module qui augmente aux temps courts.

Dans ce chapitre, on se propose de caractériser l'effet du nombre de Bingham sur l'amplification de l'énergie, caractérisée par le facteur $E(t)/E(0)$. On examine tout d'abord la nature de l'opérateur d'évolution (2.71) ou (2.77), en utilisant la notion de pseudospectre que l'on définira. Ensuite, on présentera la procédure de calcul de la croissance transitoire de l'énergie, puis on évaluera les perturbations optimales susceptibles de fournir une croissance transitoire optimale et enfin on présentera leur formes en fonction du nombre de Bingham.

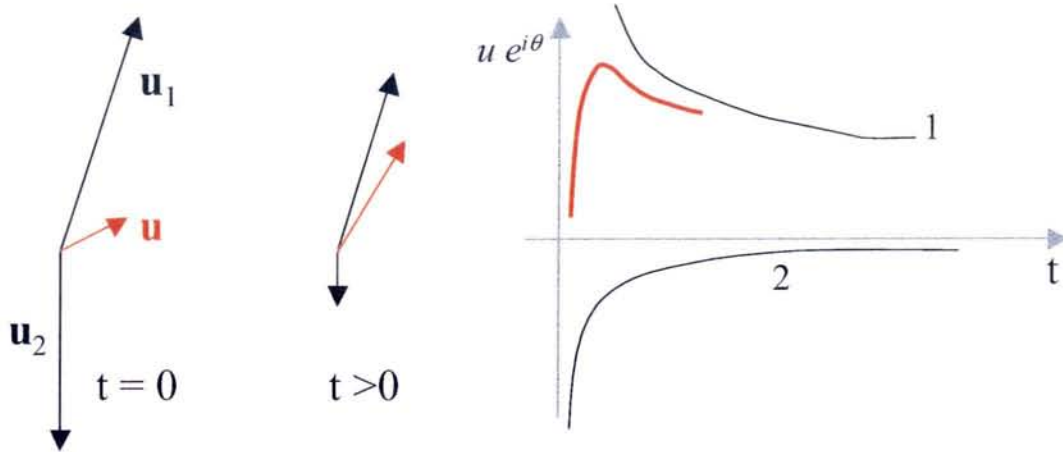


FIG. 3.1: Illustration de l'augmentation de l'énergie transitoire due à la superposition de deux vecteurs (courbe rouge)

3.2 Pseudospectre

Nous allons, à présent, rappeler des détails théoriques relatifs à la non normalité, [64], [65], [55], [58]. Par définition, l'opérateur \mathcal{L} est non-normal s'il est constitué d'une base complète¹ de vecteurs propres non orthogonaux, et s'il satisfait la condition

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{*T} \neq \mathcal{L}^{*T}\mathcal{L}, \quad (3.7)$$

En d'autres termes, \mathcal{L} ne commute pas avec l'opérateur adjoint associé. Un ϵ -pseudospectre de l'opérateur \mathcal{L} est défini comme étant le spectre de tous les opérateurs $(\mathcal{L} + E)$, où $\|E\| \leq \epsilon$, quel que soit $\epsilon \geq 0$ [65].

Définition : Le pseudo spectre, noté $\Lambda_\epsilon(\mathcal{L})$, est l'ensemble des valeurs complexes z (paramétré par ϵ), satisfaisant à l'une ou l'autre des définitions équivalentes suivantes :

Définition I : z est une pseudo valeur propre d'un opérateur A si elle est valeur propre de $\tilde{A} = A + E$, où E est une matrice de perturbation, avec $\|E\| \leq \epsilon$ pour $\epsilon \geq 0$.

Définition II : z est une pseudo valeur propre d'un opérateur A si elle satisfait

$$\|zI - A\|^{-1} \geq \epsilon^{-1} \quad (3.8)$$

¹Pour des domaines bornés, la complétude a été prouvée par Schensted [57] et Diprima et Habetler[14]

L'équivalence des deux définitions précédentes a été démontrée par Reddy (1995)[54]. En fait, la première définition relie le ϵ -pseudospectre au spectre d'une matrice perturbée de manière aléatoire. z est une ϵ -pseudo-valeur propre de A , si elle est une valeur propre exacte de $A + E$, où E est une matrice aléatoire de norme inférieure ou égale à ϵ . La seconde définition utilise la norme du résolvant $R(z) = (zI - A)^{-1}$, qui est défini de manière continue dans le plan complexe à l'exception du spectre de A , car, en ces points, le résolvant tend vers l'infini. Pour des valeurs finies mais grandes de la norme du résolvant, z est définie comme une ϵ -valeur propre de A , telle que $\epsilon = 1/\|R(z)\|$. Si \mathcal{L} est normal, les pseudospectres sont constitués par un ensemble de régions circulaires de rayon ϵ et centrées sur les valeurs propres de \mathcal{L} . Si \mathcal{L} est non-normal, alors des déviations peuvent avoir lieu et, en général, elles sont plus grandes pour un ϵ donné. Finalement, le pseudospectre est un moyen pour analyser la nature de l'opérateur mis en oeuvre.

En utilisant la définition I, nous avons approximé le ϵ -pseudospectre pour $\epsilon = 10^{-6}$, en calculant les valeurs propres d'une centaine de matrices perturbées $\mathcal{L} + E$, où E est une matrice complexe aléatoire, telle que $\|E\|_2 = 10^{-6}$. Le résultat de ces calculs est donné par la figure (3.2), pour $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 1$, $\tilde{Re} = 10^4$ et pour $\tilde{B} = 2$. On remarque que les valeurs propres se trouvant autour de l'intersection des branches A , P et S , sont très sensibles à la perturbation E . En effet, une perturbation d'un facteur 10^{-6} a modifié ces valeurs propres d'un facteur de l'ordre de l'unité $O(1)$. Par contre, les valeurs propres se trouvant loin de l'intersection, et en particulier les modes les moins stables, restent pratiquement insensibles à cette perturbation. Si \mathcal{L} est normal, toutes les valeurs propres de $\mathcal{L} + E$ seraient distantes à moins de 10^{-6} des valeurs propres de \mathcal{L} . Les résultats les plus intéressants que révèle le pseudospectre donné, sont d'une part, que l'opérateur \mathcal{L} est non-normal, et que d'autre part, les fonctions propres associées aux valeurs propres autour de l'intersection des trois branches sont presque linéairement dépendantes.

3.3 Procédure de calcul de la croissance transitoire

L'évolution au cours du temps de la perturbation peut être caractérisée par l'évolution temporelle de son énergie cinétique, définie dans le premier paragraphe. En se basant sur la relation (3.3), on introduit

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \int_{y_0}^1 (u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + w_1^* w_2) dy. \quad (3.9)$$

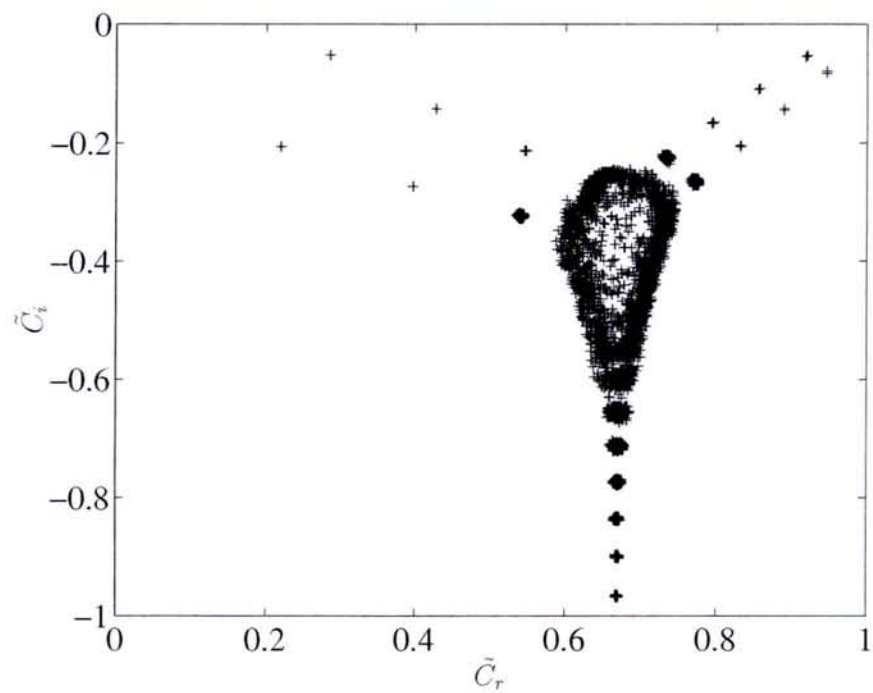


FIG. 3.2: Pseudospectre pour $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 1$, $\tilde{Re} = 10000$. Superposition de 100 spectres de $\mathcal{L} + E$, pour $\|E\|_2 = 10^{-6}$.

Pour la formulation (u, v) , on obtient

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \int_{y_0}^1 \left[\frac{k^2}{\alpha^2} u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + \frac{1}{\beta^2} Dv_1^* Dv_2 + \frac{i\alpha}{\beta^2} (Dv_1^* u_2 - u_1^* Dv_2) \right] dy, \quad (3.10)$$

et pour la formulation (v, w) , en éliminant u , on obtient

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \int_{y_0}^1 \left[v_1^* v_2 + \frac{1}{\alpha^2} Dv_1^* Dv_2 + \frac{k^2}{\alpha^2} w_1^* w_2 + \frac{i\beta}{\alpha^2} (Dv_1^* w_2 - w_1^* Dv_2) \right] dy. \quad (3.11)$$

L'analyse est plus simple en utilisant une approximation discrète : une solution \mathbf{q} du problème aux valeurs initiales linéarisé est projetée sur la base des fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}$ solutions du problème aux valeurs propres. On considère alors l'espace S_M généré par les M premières fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}_i$ correspondant aux M premières valeurs propres $\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ classées dans l'ordre décroissant de C_i , soit

$$S_M = \{\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_M\}$$

Une perturbation admissible \mathbf{q} peut être approximée par une combinaison linéaire des M fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{q}(y, t) = \sum_{j=1}^M \kappa_j(t) \hat{\mathbf{q}}_j(y) \quad (3.12)$$

avec (κ_j) les coefficients (dépendants du temps) du développement de $q(y, t)$ dans la base des fonctions propres. L'évolution temporelle de ces mêmes coefficients est gouvernée par l'équation différentielle

$$\frac{d\kappa}{dt} = -i\Lambda \kappa, \quad (3.13)$$

avec

$$\kappa = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_M\}^T \quad \Lambda = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$$

et Λ représente la matrice associée à l'opérateur d'évolution linéaire \mathcal{L}_1 , projeté sur l'espace S_M . \mathcal{L}_1 est l'opérateur du problème aux valeurs propres généralisé correspondant à (2.83) ou (2.84), i.e.

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}. \quad (3.14)$$

On définit alors \mathcal{L}_{1uv} et \mathcal{L}_{1vw} les opérateurs respectifs pour les formulations (u, v) et (v, w) . La solution de (3.13) est donnée par

$$\kappa(t) = e^{(-i\Lambda t)} \kappa_0, \quad \kappa_0 = \kappa(t=0). \quad (3.15)$$

La norme énergie et le produit scalaire associé se reformulent alors aussi en termes de coefficients de projection κ , en utilisant (3.12). Si $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{S}_M$, on a alors

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \int_{y_0}^1 \mathbf{q}_2^H \mathbf{M} \mathbf{q}_1 dy = \kappa_2^H M \kappa_1, \quad M \in \mathbb{C}^{M \times M} \quad (3.16)$$

M est une matrice Hermitienne définie positive dont les éléments sont calculés à partir de

$$M_{ij} = (\hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{q}}_j)_E = \int_0^1 \hat{\mathbf{q}}_i^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_j dy \quad (3.17)$$

En factorisant M selon $M = F^H F$, (3.16) s'écrit

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \kappa_1^H F^H F \kappa_2 = (\kappa_1, \kappa_2)_E \quad (3.18)$$

et finalement

$$\|\mathbf{q}\|_E = \|F\kappa\|_2 = \|\kappa\|_E \quad \mathbf{q} \in \mathcal{S}_M \quad (3.19)$$

En définitive, la norme énergie prend une forme simple et peut se calculer par rapport à la norme 2 de $(F\kappa)$.

Le facteur d'amplification $E(t)/E(0)$ est donc donné par :

$$g(t) = \frac{\|\mathbf{q}(t)\|_E^2}{\|\mathbf{q}_0\|_E^2}, \quad (3.20)$$

Pour des nombres d'onde α et β donnés parmi toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions propres, il existe une perturbation qui fournit le maximum d'amplification $G(t)$ à un instant t fixé, tel que

$$G(t) \equiv G(\alpha, \beta, Re, B, t) = \max_{\mathbf{q}(0) \neq 0} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|_E}{\|\mathbf{q}(0)\|_E} = \max_{\kappa(0) \neq 0} \frac{\|\kappa(t)\|_E}{\|\kappa(0)\|_E} \quad (3.21)$$

et

$$\max_{\kappa(0) \neq 0} \frac{\|\kappa(t)\|_E}{\|\kappa(0)\|_E} = \|\exp(-it\Lambda)\|_E = \|F \exp(-it\Lambda) F^{-1}\|_2. \quad (3.22)$$

On notera G^{max} la fonction telle que

$$G^{max}(\alpha, \beta, Re, B) = \max_{t \geq 0} G(\alpha, \beta, Re, B, t), \quad (3.23)$$

G^{max} correspond à la perturbation initiale qui, pour α et β donnés, fournit le maximum d'amplification pour tous les temps t , le temps t pour lequel ce maximum est atteint est noté t_{max} .

La norme 2 (euclidienne) d'une matrice peut être évaluée en utilisant la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice ($F \exp(-it\Lambda) F^{-1}$). Toute matrice A peut être décomposée selon

$$AV = UW,$$

où V et U sont des matrices unitaires et W est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs singulières $W = (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$, ordonnées dans le sens croissant. Le scalaire σ_1 représente la norme 2 de la matrice A , à laquelle on associe respectivement les deux premières colonnes u_1 et v_1 des matrices U et V , telles que

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$

où v_1 décrit la condition initiale, qui est amplifiée par un facteur σ_1 . Suivant cette méthodologie [58], les coefficients

$$\kappa(0) = (\kappa_1(0), \dots, \kappa_M(0))^t$$

de la projection de la perturbation initiale qui permettent de déterminer les perturbations optimales associées à une amplification particulière $G(t)$ à un instant t donné sont exprimés par

$$\kappa(0) = Fv_1$$

3.4 Analyse des perturbations optimales

Les perturbations optimales sont les perturbations initiales capables d'exciter de manière optimale la croissance transitoire pour des nombres de Bingham et Reynolds donnés, dans tout l'espace (α, β, t) . En d'autres termes

$$G^{opt}(Re, B) = \max_{\alpha, \beta} G(\alpha, \beta, Re, B) \text{ à } t = t^{opt}, \quad (3.24)$$

où t^{opt} est le temps nécessaire pour atteindre le maximum de la croissance transitoire G^{opt} .

Dans cette section, nous allons donc procéder à la recherche des perturbations optimales bidimensionnelles et tridimensionnelles et analyser leur formes en fonction du nombre de Bingham.

3.4.1 Perturbations bidimensionnelles

L'analyse portera dans un premier temps sur l'effet des conditions aux limites à l'interface, puis sur l'influence du nombre de Bingham pour une perturbation bidimensionnelle pour $\beta = 0$.

3.4.1.1 Effet des conditions aux limites

La figure (3.3) compare l'amplification transitoire optimale obtenue pour un fluide de Bingham avec $\tilde{B} = 0.02$, avec celle obtenue pour un fluide Newtonien ($B = 0$), pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5000$. Pour $\tilde{B} = 0.02$, la perturbation optimale est obtenue pour $\tilde{\alpha} = 2.23$ ($\alpha = 2.25$), et l'amplification optimale $G^{opt} = 17$ est atteinte à l'instant $t^{opt} = 8.91$. Pour le fluide Newtonien $B = 0$, la perturbation optimale est obtenue pour $\alpha = 1.48$, $G^{opt} = 45.6$ et $t^{opt} = 13.75$. La courbe d'amplification transitoire pour la perturbation optimale dans le cas de l'écoulement composé Couette Poiseuille d'un fluide Newtonien est presque confondue avec celle correspondant à $\tilde{B} = 0.02$. Elle n'a donc pas été représentée. On peut noter que l'annulation de la perturbation à l'interface (effet des conditions aux limites) se traduit par une réduction de 62% de l'énergie par rapport au cas Newtonien. Néanmoins, il est intéressant de remarquer qu'aux temps courts les deux courbes sont confondues, ce qui indique que le mécanisme d'amplification de l'énergie est le même, qu'il s'agisse d'un écoulement de Poiseuille plan ou d'un fluide à seuil avec $B \ll 1$.

3.4.1.2 Effet de la dissipation visqueuse

En augmentant le nombre de Bingham, on augmente la dissipation visqueuse, ce qui se traduit par une réduction de G^{opt} . Ceci est illustré par les figures (3.4) et (3.5), où G est représenté en fonction du temps \tilde{t} et t respectivement, pour quatre valeurs de \tilde{B} : 0.02, 2, 8 et 18. Les caractéristiques des perturbations optimales associées sont synthétisées dans le tableau (3.1). La décroissance G avec \tilde{t} est essentiellement gouvernée par le mode le moins stable \tilde{C}_{imax} , ce qui explique le faible écart observé entre les courbes pour $\tilde{B} = 0.02$ et $\tilde{B} = 8$ pendant leur phase de décroissance (cf figure (3.4)).

La figure (3.5) met clairement en évidence que G^{opt} et le temps requis t^{opt} diminuent avec la valeur de \tilde{B} . Ce résultat était prévisible dans la mesure où l'augmentation de la dissipation visqueuse et donc de la vitesse de diffusion expliquent la décroissance de t^{opt} et de G^{opt} . On remarque aussi que la longueur d'onde axiale $2\pi/\alpha$ est de plus en plus courte.

L'évolution de la structure de la perturbation optimale au cours du temps est illustrée par la figure 3.6 pour $\tilde{B} = 0.02$. Nous avons représenté dans le plan (\tilde{x}, \tilde{y}) et sur une longueur d'onde adimensionnelle de la perturbation $0 \leq \tilde{x} \leq 2\pi/\tilde{\alpha}$, les contours des

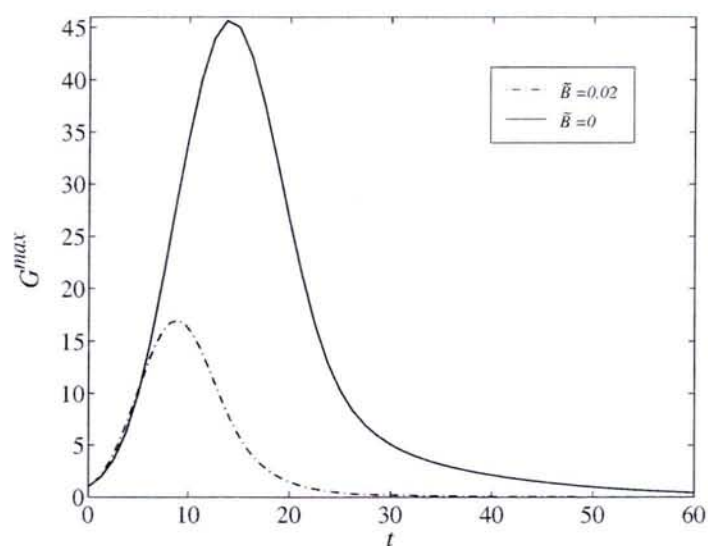


FIG. 3.3: Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale, pour $\tilde{Re} = 5000$. (Courbe en trait continu) $\tilde{B} = 0$; (courbe en trait discontinu) $\tilde{B} = 0.02$.

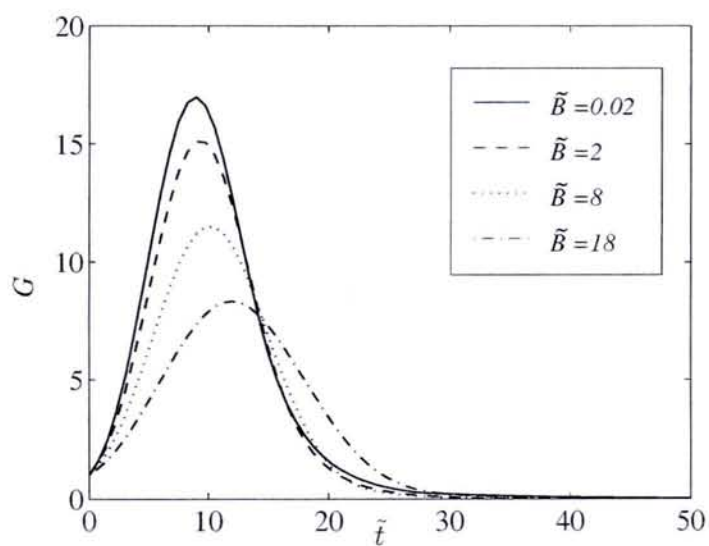


FIG. 3.4: Amplification transitoire de l'énergie au cours du temps \tilde{t} pour la perturbation optimale $\tilde{Re} = 5000$

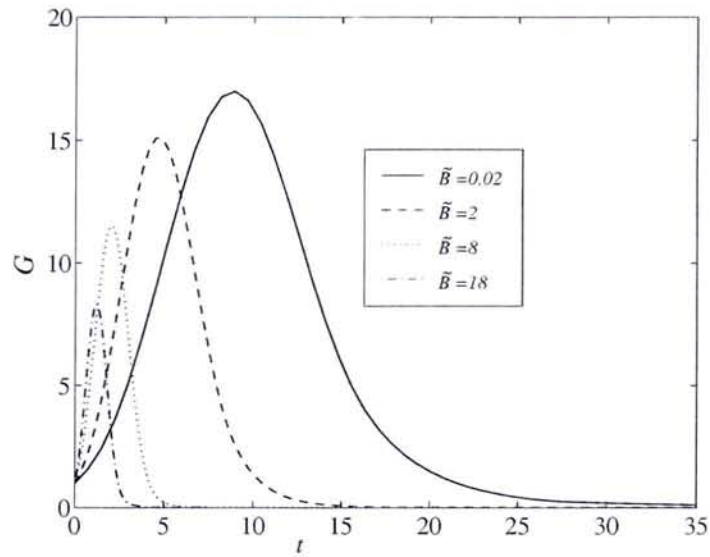


FIG. 3.5: Amplification transitoire de l'énergie au cours du temps t pour la perturbation optimale à $\tilde{Re} = 5000$

y_0	\tilde{B}	α	G^{opt}	t^{opt}
0.	0.	1.48	45.6	13.75
0.01	0.02	2.25	17	8.9
0.5	2	4.06	15.1	4.5
0.8	8	8.45	11.5	2
0.9	18	12.7	8.3	1.2

TAB. 3.1: Caractéristiques des perturbations optimales pour différentes valeurs du nombre de Bingham

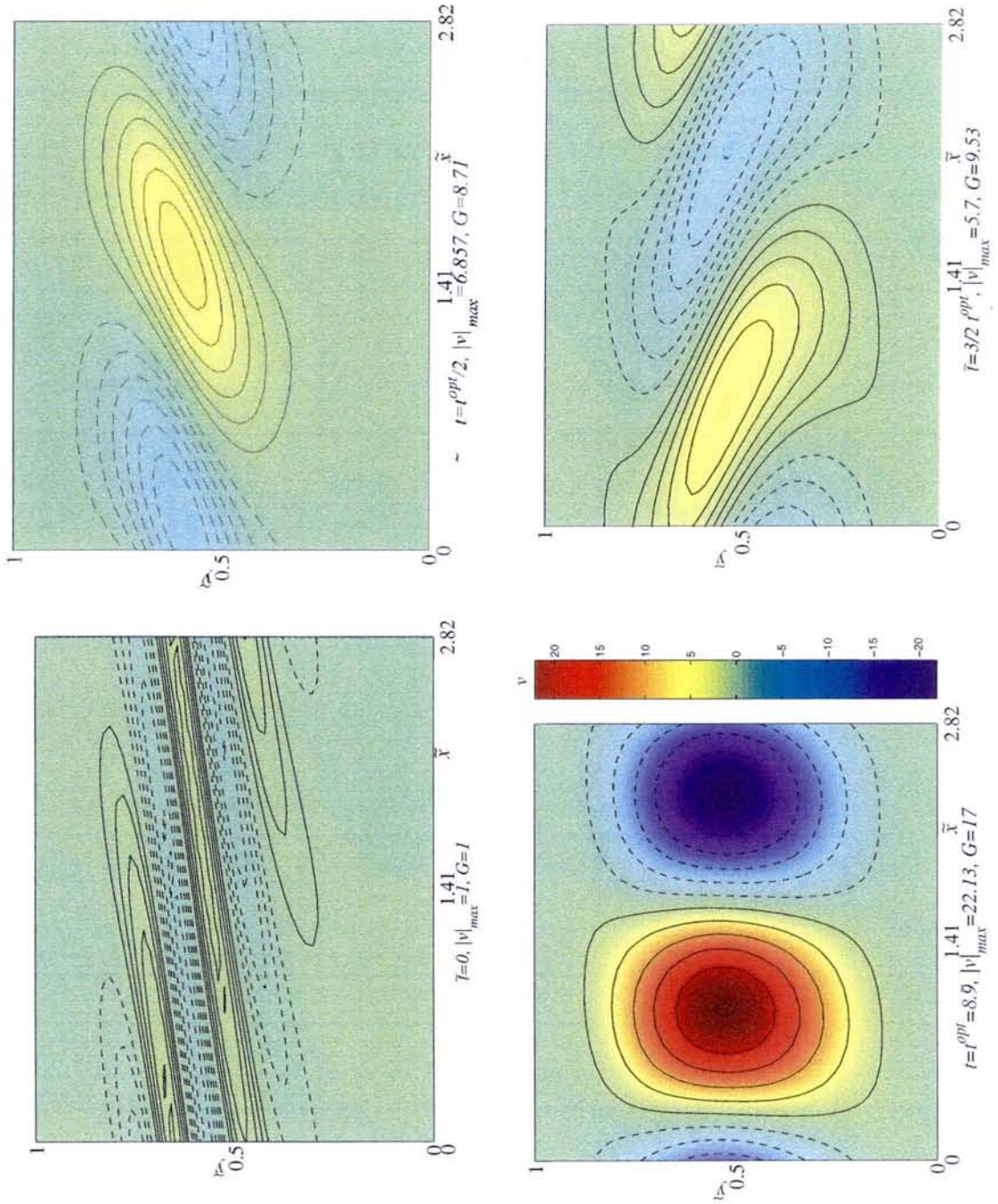


FIG. 3.6: Développement de la perturbation optimale pour $\tilde{Re} = 5000, \tilde{B} = 0.02, \tilde{\alpha} = 2.23, \tilde{\beta} = 0$

isovaleurs de la composante normale v de la vitesse. Initialement, la perturbation est orientée dans le sens opposé au gradient de vitesse de l'écoulement de base. Comme il sera expliqué ci-dessous, cette orientation permet à la perturbation d'extraire de l'énergie à l'écoulement moyen. Entre les instants $t = 0$ et $t = t^{opt}$, l'angle d'orientation de la perturbation diminue jusqu'à obtenir des rouleaux contrarotatifs droits d'axe transverse z . A partir de l'instant $t = t^{opt}$, la perturbation est orientée dans le sens du gradient de vitesse de l'écoulement de base. En se basant sur les travaux de Butler et Farrell [9], l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation peut être expliqué en utilisant l'équation de Reynolds-Orr écrite en fluide parfait

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_{y_0}^1 U_y \overline{u'v'} dy, \quad (3.25)$$

où E est l'énergie cinétique moyenne de la perturbation et $\overline{u'v'}$ la moyenne de $u'v'$ sur une période $2\pi/\bar{\alpha}$. L'échange d'énergie entre la perturbation et l'écoulement de base est contrôlé par le produit entre le gradient de vitesse de l'écoulement de base et les contraintes de Reynolds $-\overline{u'v'}$. Si on introduit la fonction ψ définissant la fonction de courant, donnée par $u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, l'énergie E augmente si l'intégrale de la quantité

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} U_y = - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_\psi^2 U_y \quad (3.26)$$

est positive. Par la suite dans le texte, lorsque $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_\psi U_y < 0$, on dira que la perturbation est orientée dans la direction opposée au gradient de vitesse de l'écoulement de base; dans le cas contraire on dira qu'elle est orientée dans la direction du gradient de vitesse. Afin de mieux visualiser ce mécanisme, on considère l'exemple donné par la figure (3.7) de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham. Initialement ($t = 0$), les lignes de courant repérées par le contour $C(0)$ sont orientées dans la direction opposée au gradient de vitesse de l'écoulement de base. Ceci conduit à un transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation via la contrainte de Reynolds. Tout en étant advectée de manière continue par l'écoulement de base, la perturbation s'oriente dans le sens du gradient de vitesse de celui-ci. A partir de l'instant t , la quantité $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_\psi U_y > 0$, et la perturbation restitue l'énergie vers l'écoulement de base.

Néanmoins, ce mécanisme $2D$ est responsable des croissances transitoires de l'énergie à courtes durées, mais il ne procure qu'une énergie minimale, comparée à celle d'une perturbation tridimensionnelle, comme il a été montré notamment par Butler et Farrell (1992), [24], Reddy et Henningson (1993)[55].

Il est aussi important de signaler que lorsque $\tilde{B} = O(1)$, le mécanisme responsable de l'amplification transitoire de l'énergie pour une perturbation bidimensionnelle est le même que pour $\tilde{B} \ll 1$; par conséquent, l'évolution de la structure de la perturbation optimale est similaire lorsque \tilde{B} augmente.

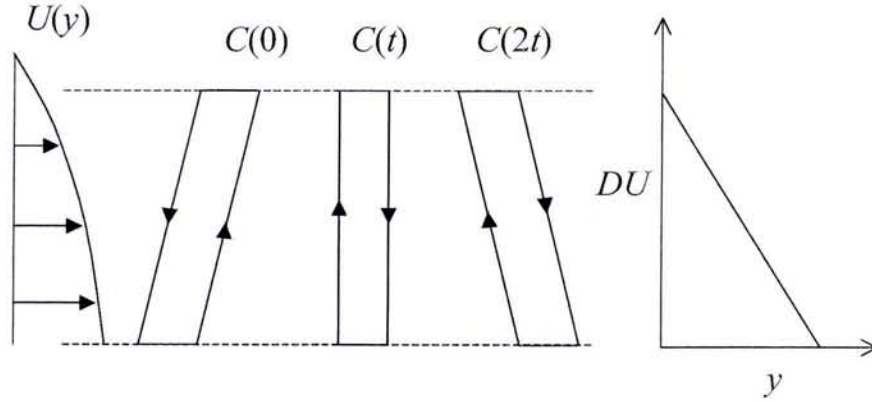


FIG. 3.7: Illustration du mécanisme Orr, Case(1960)[11]

3.4.2 Perturbations tridimensionnelles

Cette section se propose d'analyser l'amplification de l'énergie de la perturbation en situation tridimensionnelle, ainsi que les caractéristiques de la perturbation optimale : α^{opt} , β^{opt} , G^{opt} , t^{opt} , et les champs de vitesse. Comme en $2D$, on commencera par identifier ce qu'on a appelé l'effet des conditions aux limites. Ensuite, l'effet de l'augmentation de la dissipation visqueuse sera analysé, et dans la mesure du possible l'effet de la rhéofluidification.

3.4.2.1 Effet des conditions aux limites

A titre d'exemple, la figure (3.8) représente la croissance transitoire de l'énergie pour $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$, $\tilde{Re} = 1000$ dans le cas des écoulements de Poiseuille plan d'un fluide Newtonien, et d'un fluide de Bingham avec $\tilde{B} = 0.02$. La courbe correspondant à l'écoulement de Couette Poiseuille d'un fluide Newtonien n'a pas été représentée car elle est presque confondue avec $\tilde{B} = 0.02$: en effet l'écart entre G^{max} est inférieur à 2%. On note en particulier que l'effet des conditions aux limites se traduit ici par une forte réduction de G^{max} . Ce résultat est vérifié pour tous les couples $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, comme l'illustrent les figures (3.9-3.11). Elles donnent dans un plan $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ les contours d'isovaleurs G^{max} pour $\tilde{Re} = 1000$ pour un écoulement de Poiseuille plan et un écoulement de Couette Poiseuille d'un fluide newtonien et EPP d'un fluide de Bingham avec $\tilde{B} = 0.02$ respectivement. Les calculs ont été effectués en faisant varier $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ par pas de 0.01. On a représenté en trait gras le contour pour lequel $G^{max} = G^{opt}$, dans une situation $2D$. A partir de cette valeur particulière, les contours des iso- G^{max} sont constituées de deux courbes disjointes. Les caractéristiques des perturbations optimales peuvent être

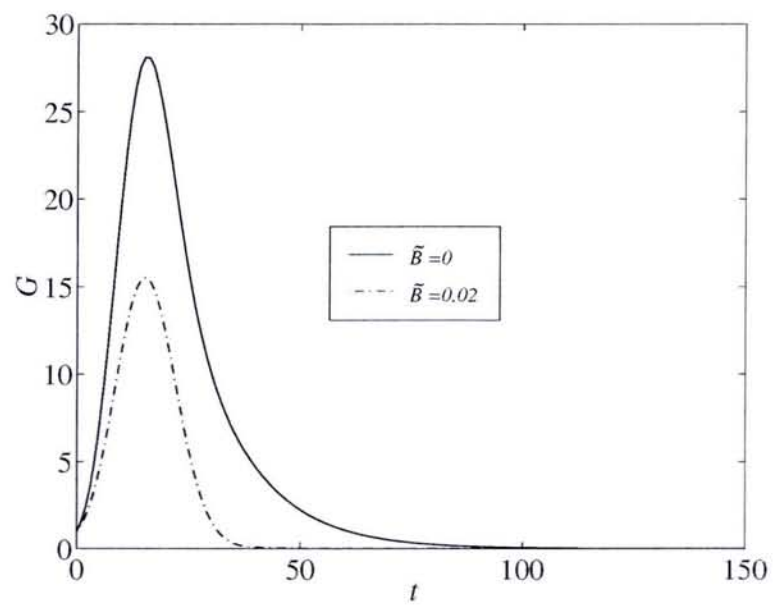


FIG. 3.8: Croissance transitoire en fonction du temps, $\tilde{Re} = 1000$, pour $B = 0$, $\tilde{B} = 0.02$, $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = 1$

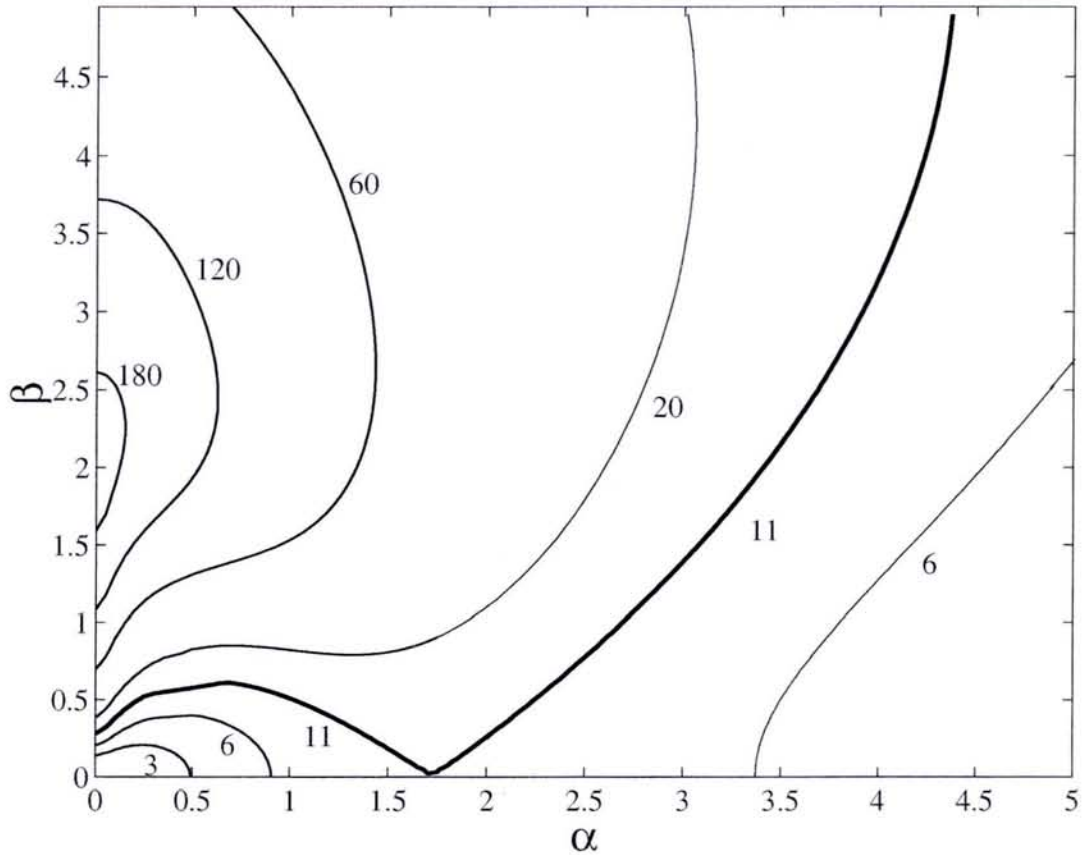


FIG. 3.9: Contours de G^{max} pour un écoulement de Poiseuille avec $Re=1000$ pour un fluide Newtonien, $B = 0$.

identifiées par les figures précédentes, on trouve :

- EPP Newtonien $B = 0$: $G^{opt} = 200$, $\alpha^{opt} = 0$, $\beta^{opt} = 2.04$. (en accord avec la littérature [59])

-ECP $B = 0$: $G^{opt} = 77$, $\alpha^{opt} = 0$, $\beta^{opt} = 3.40$.

-EPP $\tilde{B} = 0.02$: $G^{opt} = 71$, $\alpha^{opt} = 0$, $\beta^{opt} = 3.40$.

On remarque que le rapport $G^{opt}(ECP)/G^{opt}(EPP)$ en 3D est pratiquement le même qu'en 2D, soit approximativement 38%.

La croissance transitoire de l'énergie $G(t)$ pour la perturbation optimale est donnée par la figure (3.12) pour les écoulements de Poiseuille plan ($B = 0$) et ($\tilde{B} = 0.02$) avec $\tilde{Re} = 5000$; on constate que jusqu'à des temps relativement longs -ici $t = 77$ - les deux courbes sont confondues. Dans cette première phase, le même mécanisme gouverne l'évolution de G pour les deux courbes; il s'en suit une décroissance exponentielle par le mode le moins stable. On note $t^{opt}(\tilde{B} = 0.02) = 0.41 \times t^{opt}(B = 0)$. La

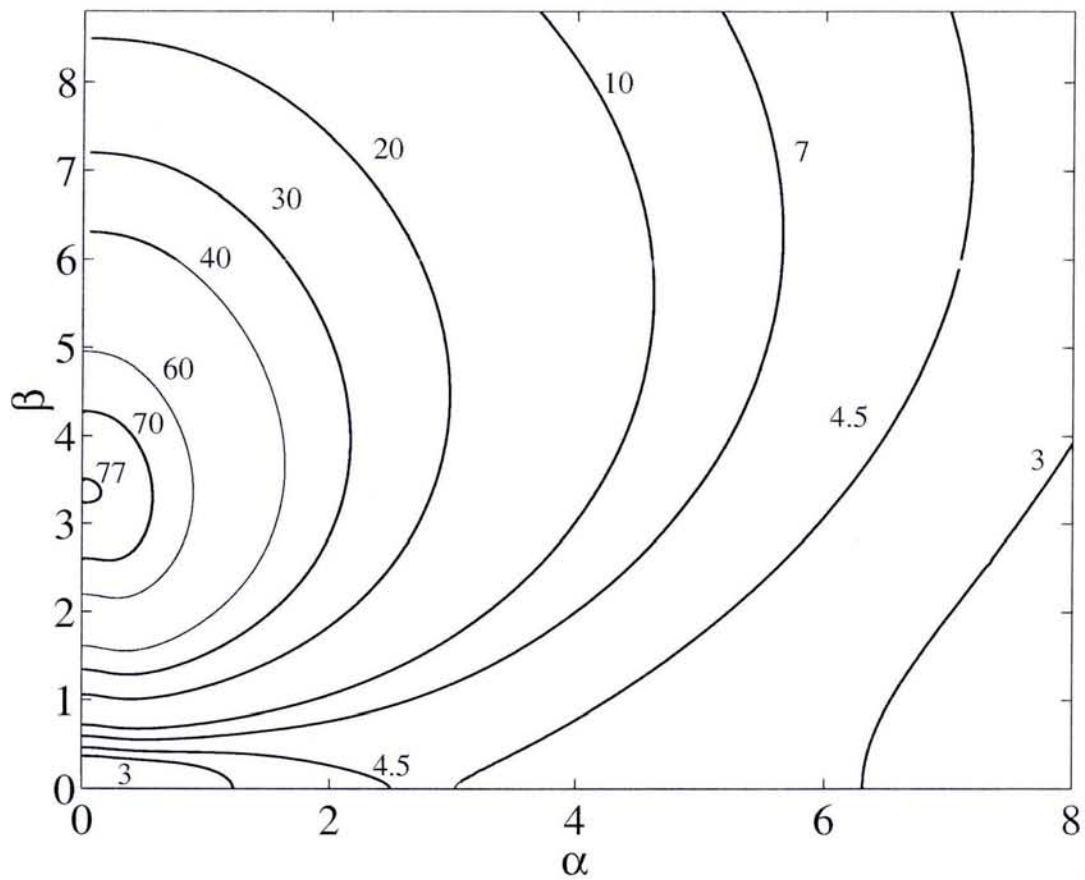


FIG. 3.10: Contours de G^{\max} pour un écoulement de Couette Poiseuille avec $Re=1000$ pour un fluide Newtonien

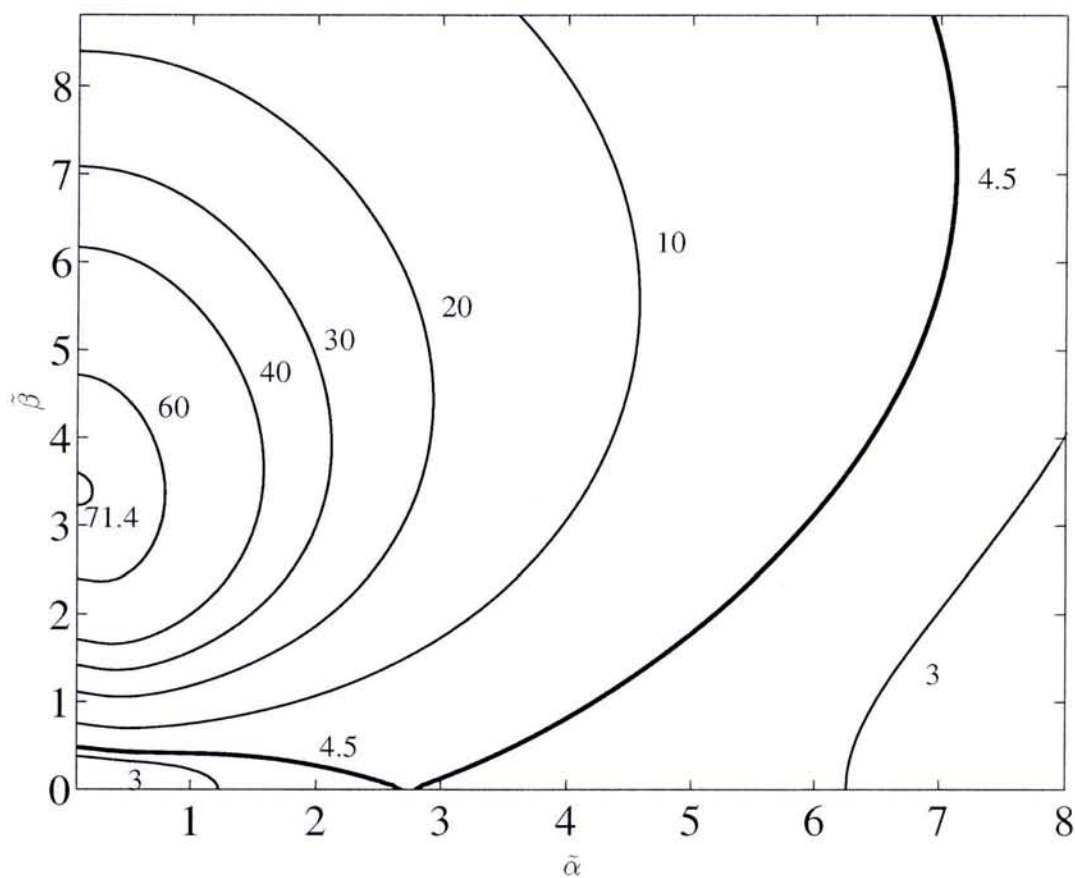


FIG. 3.11: Contours de G^{max} pour un écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham $\tilde{B} = 0.02$ et $Re = 1000$

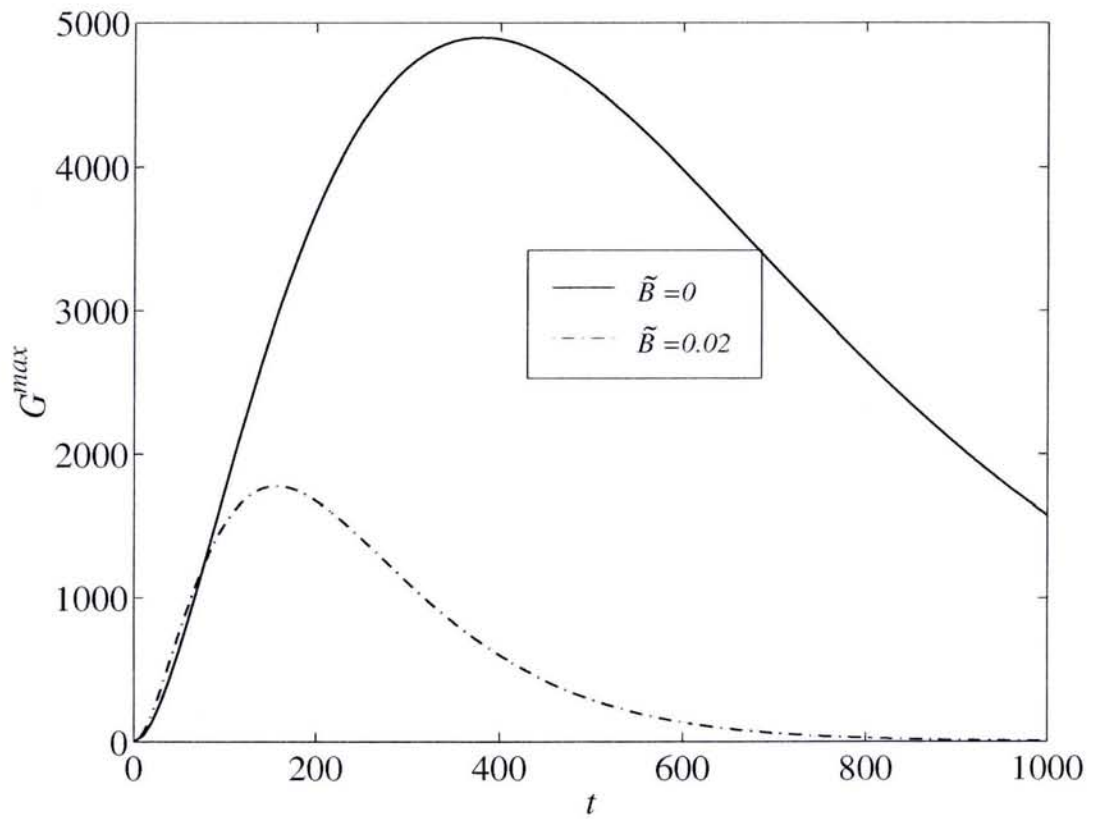


FIG. 3.12: Croissance transitoire en fonction du temps pour la perturbation optimale, $\tilde{Re} = 5000$, pour $B = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2.044$, $\tilde{B} = 0.02$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = 3.4$

dépendance de $G(t)$ par rapport au nombre de Reynolds est mise en exergue par la figure (3.13) qui montre clairement qu'en rapportant $G(t)$ à \tilde{Re}^2 et t à \tilde{Re} , les courbes de croissance transitoire pour différents \tilde{Re} sont parfaitement confondues. Ceci est en parfait accord avec la littérature, Gustavson [28] et Reddy et Henningson [55] ayant montré effectivement pour les écoulements cisailés, dans le cas d'une perturbation optimale ayant un faible nombre axial, que $G^{opt} \propto Re^2$ et $t^{opt} \propto Re$.

Pour $B = 0.02$, on trouve en particulier :

$$G^{opt} = 0.71 \cdot 10^{-4} \tilde{Re}^2 \quad \text{et} \quad t^{opt} = 31.5 \tilde{Re}.$$

Enfin, on peut remarquer que la variation du mode le moins stable en $1/\tilde{Re}$ pour $\alpha = 0$ (voir eqt (2.109-2.110)), est cohérente avec l'évolution en t/\tilde{Re} au moins pour la phase décroissante de l'énergie.

La structure de la perturbation optimale est illustrée par la figure (3.14), où l'on a représenté le vecteur vitesse (v, w) ainsi que les contours d'iso valeurs de u dans le plan (\tilde{y}, \tilde{z}) , aux instants $\tilde{t} = 0$ et $\tilde{t} = \tilde{t}^{opt}$. Globalement, il s'agit de tourbillons contrarotatifs dont l'intensité qui pourrait être caractérisée par le module de $|v|_{max}$, décroît au cours du temps. Par conséquent ce résultat indique que l'amplification de l'énergie de la perturbation est contenue uniquement dans la composante axiale u , comme le montre d'ailleurs la figure (3.15) où l'on a représenté $|u|_{max}$ en fonction de t . Finalement, pour des nombres de Bingham très petits, le mécanisme responsable de l'augmentation de l'énergie dans le cas optimal, est connu dans la littérature sous le nom de "lift-up". Des particules fluides sont déplacées des régions de faibles vitesses vers des régions de grandes vitesses et vice versa, comme cela est schématisé (3.17). Ceci conduit à la formation de "streak" dont l'amplitude est caractérisée par $|u|_{max}$. L'évolution temporelle de la composante axiale de la perturbation u aux temps courts peut être expliquée en considérant les équations aux perturbations linéarisées à l'ordre principal. Dans ce cas, et pour une perturbation indépendante de la direction axiale, l'équation du mouvement axial se réduit à

$$u_t + vU_y = 0 \tag{3.27}$$

On peut montrer que dans ce cas, la composante de la vitesse normale v est constante (Ellingsen et Palm [19]), et par conséquent u augmente linéairement avec le temps, puis est atténuée par les effets visqueux.

3.4.2.2 Effet de la dissipation visqueuse et de la rhéofluidification

Dans cette section on examine l'effet de l'augmentation du nombre de Bingham sur la croissance transitoire de l'énergie. A chaque fois que cela sera possible, on distinguera l'effet de la dissipation visqueuse de l'effet de la rhéofluidification. La figure (3.18)

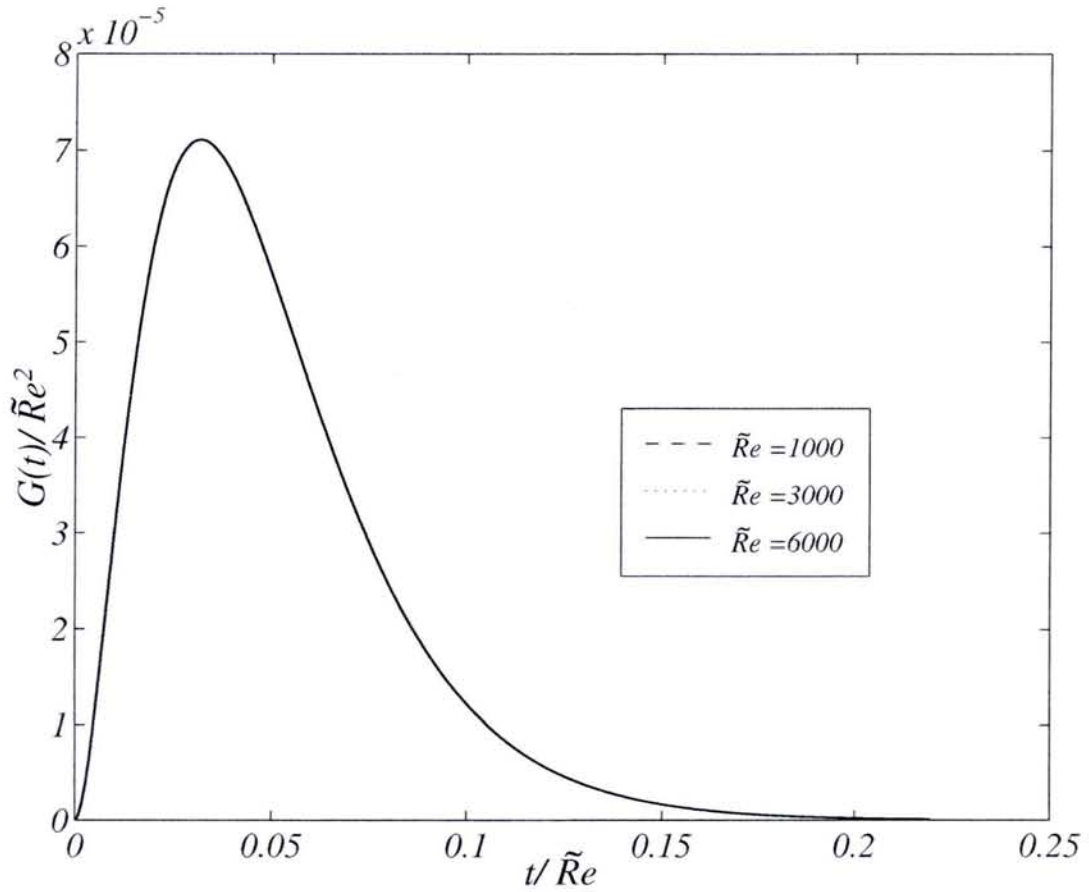


FIG. 3.13: Amplification normalisée pour différentes valeurs de \tilde{Re} pour $\tilde{B} = 0.02$, $\tilde{\beta} = 3.4$

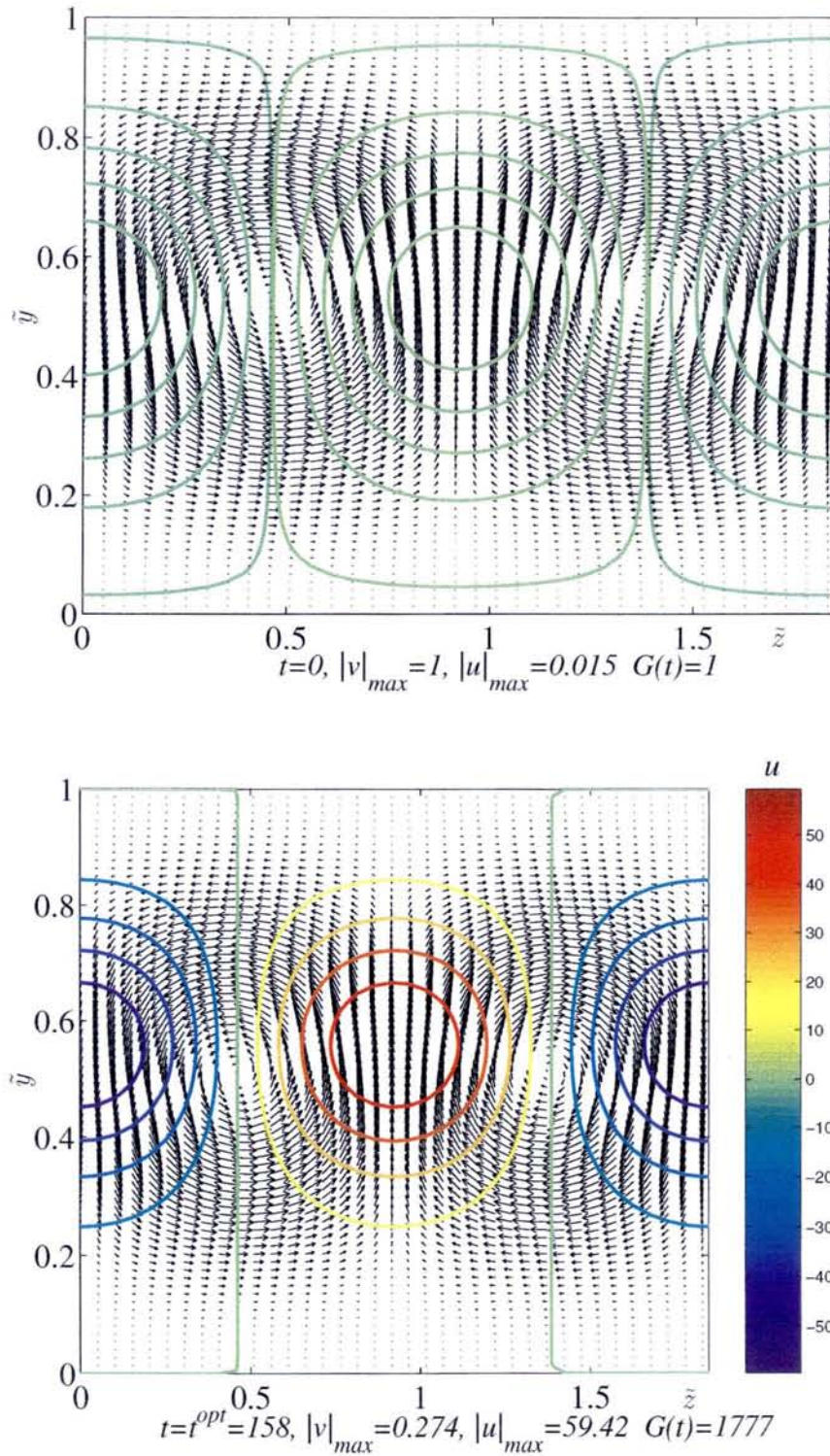


FIG. 3.14: Développement de la vitesse normale de la perturbation optimale dans un plan (\tilde{y}, \tilde{z}) à $\tilde{x} = 0$ pour $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = 3.4$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{B} = 0.02$, (a) $\tilde{t} = 0$, (b) $\tilde{t} = \tilde{t}^{\text{opt}}$.

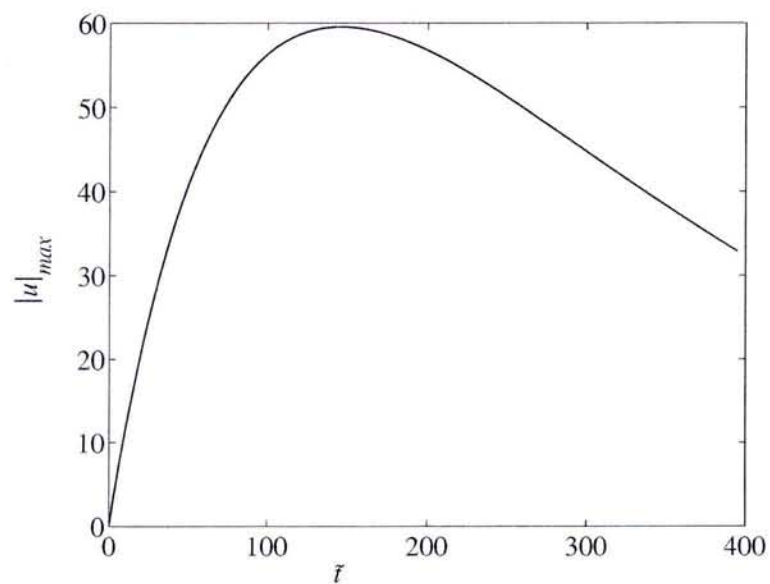


FIG. 3.15: Evolution temporelle de la composante axiale $|u|_{max}$ de la vitesse de la perturbation pour $\tilde{B} = 0.02$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = 3.4$, $\tilde{Re} = 5000$.

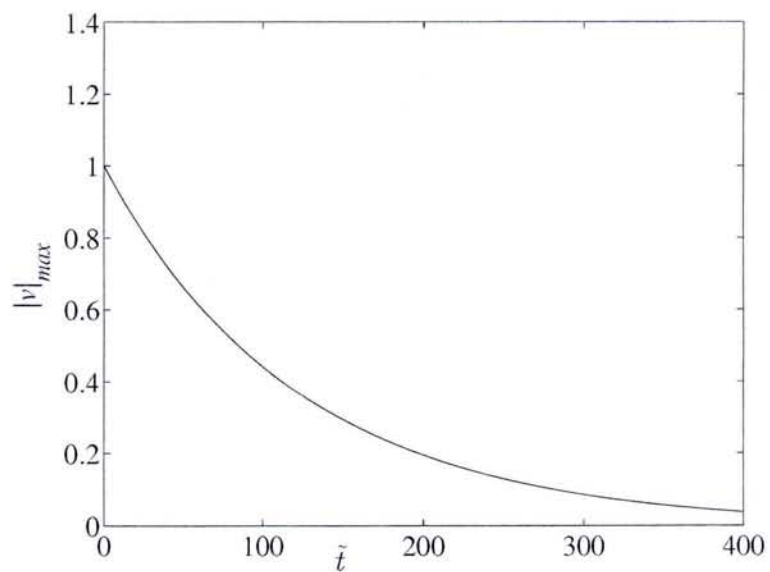


FIG. 3.16: Evolution temporelle de la composante axiale $|v|_{max}$ de la vitesse de la perturbation pour $\tilde{B} = 0.02$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = 3.4$, $\tilde{Re} = 5000$.

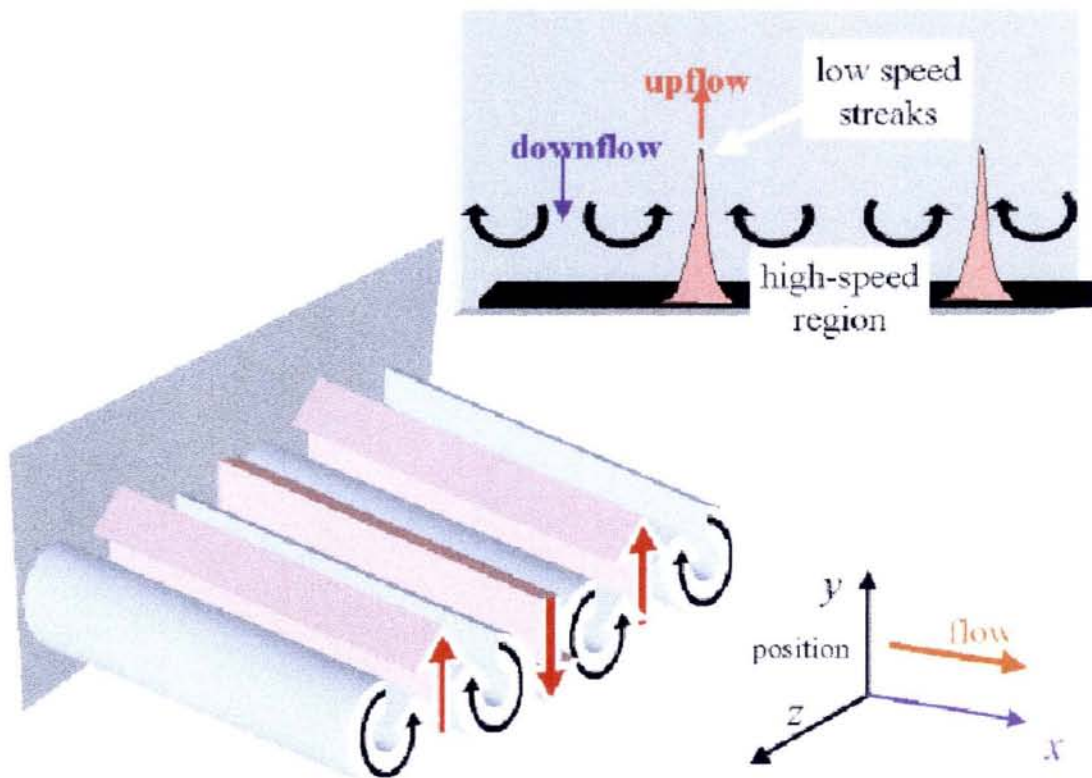


FIG. 3.17: Illustration du mécanisme "lift-up".

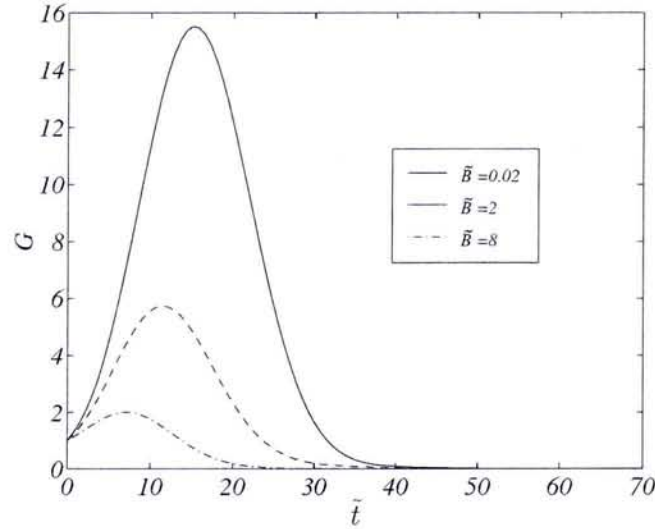


FIG. 3.18: Amplification transitoire de l'énergie pour $\tilde{Re} = 1000$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$ et $\tilde{B} = 0.02, 2, 8$

y_0	\tilde{B}	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	G^{opt}
0.01	0.02	0	3.40	77
0.5	2	1.1	3.1	10.61

TAB. 3.2: Caractéristiques des perturbations optimales tridimensionnelles pour $\tilde{Re} = 1000$

montre l'effet de B sur la croissance transitoire. On a représenté pour $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$ et $\tilde{Re} = 1000$, l'évolution de $G(t)$ pour $\tilde{B} = 0.02, 2$ et 8 : on observe une forte réduction de l'amplification de l'énergie du fait de l'accroissement de la dissipation visqueuse. La dépendance de G^{max} en fonction de α et β peut être appréciée sur la figure (3.19), où l'on a représenté les contours iso- G^{max} dans le plan (α, β) pour $\tilde{Re} = 1000$ et $\tilde{B} = 2$. On pourra encore une fois noter une très forte réduction de G lorsque \tilde{B} augmente. Par contre, il est important de remarquer que la perturbation optimale est oblique. Les résultats numériques sont synthétisés dans le tableau (3.2). Des calculs ont été effectués pour $0.02 < \tilde{B} < 38$ et $\tilde{Re} = 3000$, les résultats sont donnés par les figures (3.20) et (3.21), où l'on a représenté $G^{opt}(\tilde{B})$ et l'angle $\phi = \arctg(\tilde{\beta}/\tilde{\alpha})(\tilde{B})$ respectivement. En augmentant \tilde{B} , l'angle entre les vecteurs d'onde axial et transverse décroît à partir de $\pi/2$. On s'écarte de plus en plus de la structure rouleaux longitudinaux obtenue pour des nombres de Bingham $B \ll 1$. Cette inclinaison est une conséquence de la rhéofluidification du fluide, qui se traduit ici par une décroissance de la viscosité effective de l'interface à la paroi (voir figure (2.3)). Afin d'avoir une idée globale sur

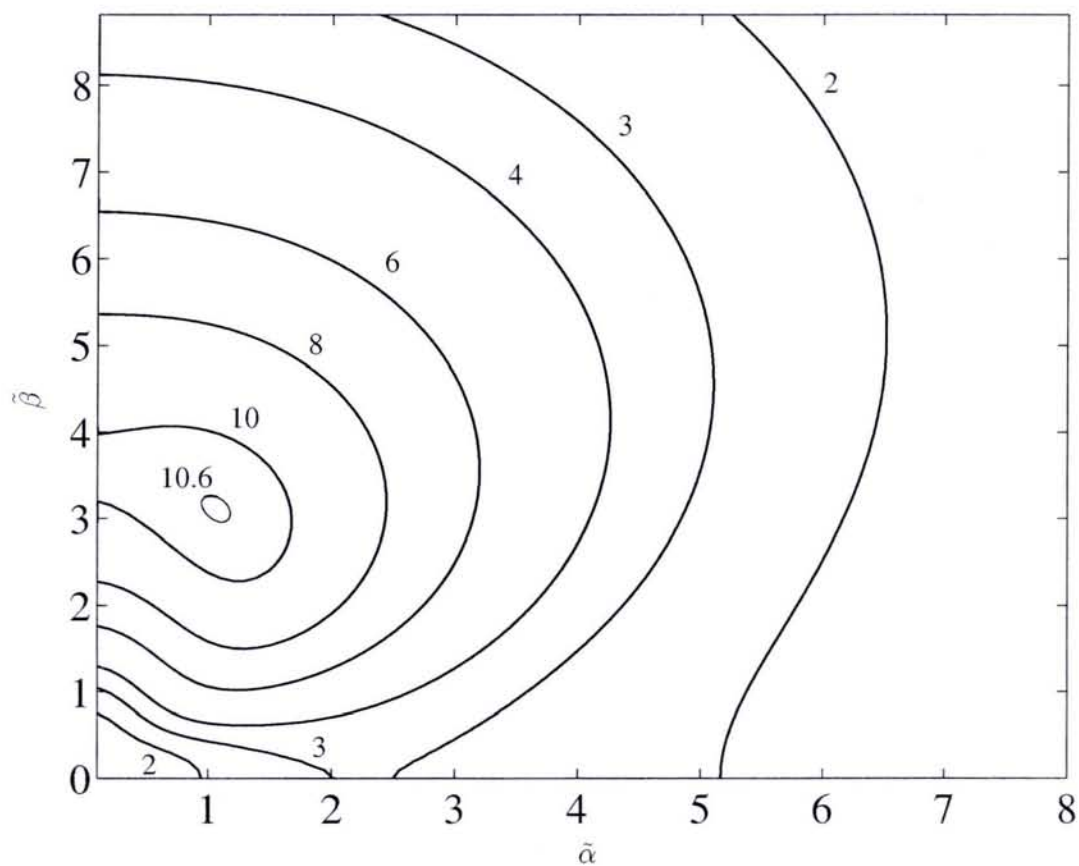


FIG. 3.19: Contours de G^{\max} pour un écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham $\tilde{B} = 2$ et $Re = 1000$

l'évolution au cours du temps de la structure tridimensionnelle de la perturbation optimale, les champs de vitesses dans les plans (\tilde{y}, \tilde{z}) et (\tilde{x}, \tilde{y}) ont été représentés. Dans ce qui suit, les résultats sont donnés pour les paramètres $\tilde{B} = 2$, $\tilde{Re} = 3000$, $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.48$ et $\tilde{\beta}^{opt} = 3.34$. Les variations des caractéristiques de la perturbation optimale avec \tilde{Re} seront discutées ultérieurement. La figure 4.22 montre le champ de vitesses (v, w) ainsi que les contours iso- u , dans les plans (\tilde{y}, \tilde{z}) à $x = 0$, à quatre instants différents : $t = 0$, $t = t^{opt}/2$, $t = t^{opt}$ et $t = t^{opt}3/2$. La figure 4.23 montre les contours iso- v dans un plan (\tilde{x}, \tilde{y}) à $z = 0$ aux mêmes instants. Initialement, la structure est orientée dans la direction opposée au gradient de la vitesse de l'écoulement base (voir fig (4.23) à $t = 0$). Cette orientation initiale permet à la structure de récupérer de l'énergie de l'écoulement de base par l'intermédiaire de la contrainte de Reynolds $-\overline{u'v'}$ (décrit au paragraphe (3.4.1)). Elle tend ensuite à s'orienter dans la direction du gradient de vitesse de l'écoulement de base. Simultanément, l'augmentation transitoire de u à partir de $t = 0$ (cf figure (4.22)) suggère que la structure optimale reçoit aussi de l'énergie par l'effet "lift-up". Les calculs effectués par Ellingsen et Palm [19] sont étendus au cas $\alpha \neq 0$ dans le travail de Schmid et Henningson [59]). Pour cela, le système d'axe (x, z) subit une rotation d'un angle égal à $\arctg(\beta/\alpha)$. Le nouvel axe x_1 est suivant la direction du vecteur d'onde de la perturbation. On peut montrer que la composante de la perturbation selon x_1 augmente linéairement en fonction du temps. En fait, la majeure partie de l'énergie provient de l'effet "lift-up" et le temps caractéristique de la croissance transitoire est plus important qu'en présence du mécanisme "Orr" seul. Ceci est confirmé par l'évolution transitoire de $|u|_{max}$ (voir figure (3.24)) et $|v|_{max}$ (figure (3.25)). Le temps caractéristique associé de la croissance transitoire par le mécanisme d'"Orr" peut être estimé à partir de l'extremum de $|v|_{max}$.

Dans la gamme des nombres de Reynolds examinés, les résultats numériques des figures (3.26) et (3.27), représentant (G/\tilde{Re}^2) et t/\tilde{Re} en fonction de \tilde{B} , montrent que les dépendances en \tilde{Re}^2 de G^{opt} et de \tilde{Re} en t , sont conservées pour des nombres de Bingham $\tilde{B} = 0(1)$. Les caractéristiques de la perturbations optimale pour $\tilde{B} = 2$ et $\tilde{B} = 18$ pour trois nombres de Reynolds sont résumées dans le tableau ci dessous. On a aussi reporté à titre de comparaison les résultats obtenus pour $\tilde{B} = 0.02$.

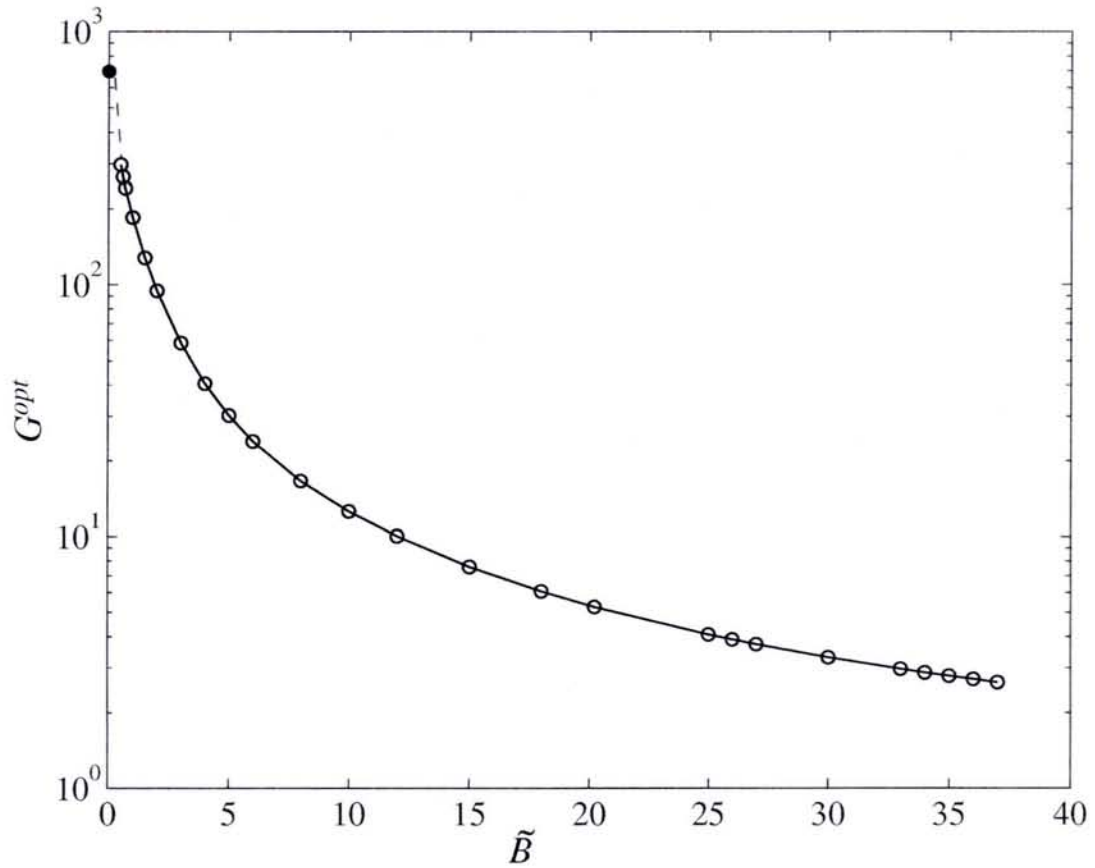


FIG. 3.20: G^{opt} en fonction de \tilde{B} pour $\tilde{Re} = 3000$, les points pleins correspondent à G^{opt} pour l'écoulement de Couette Poiseuille pour les mêmes nombres de Reynolds.

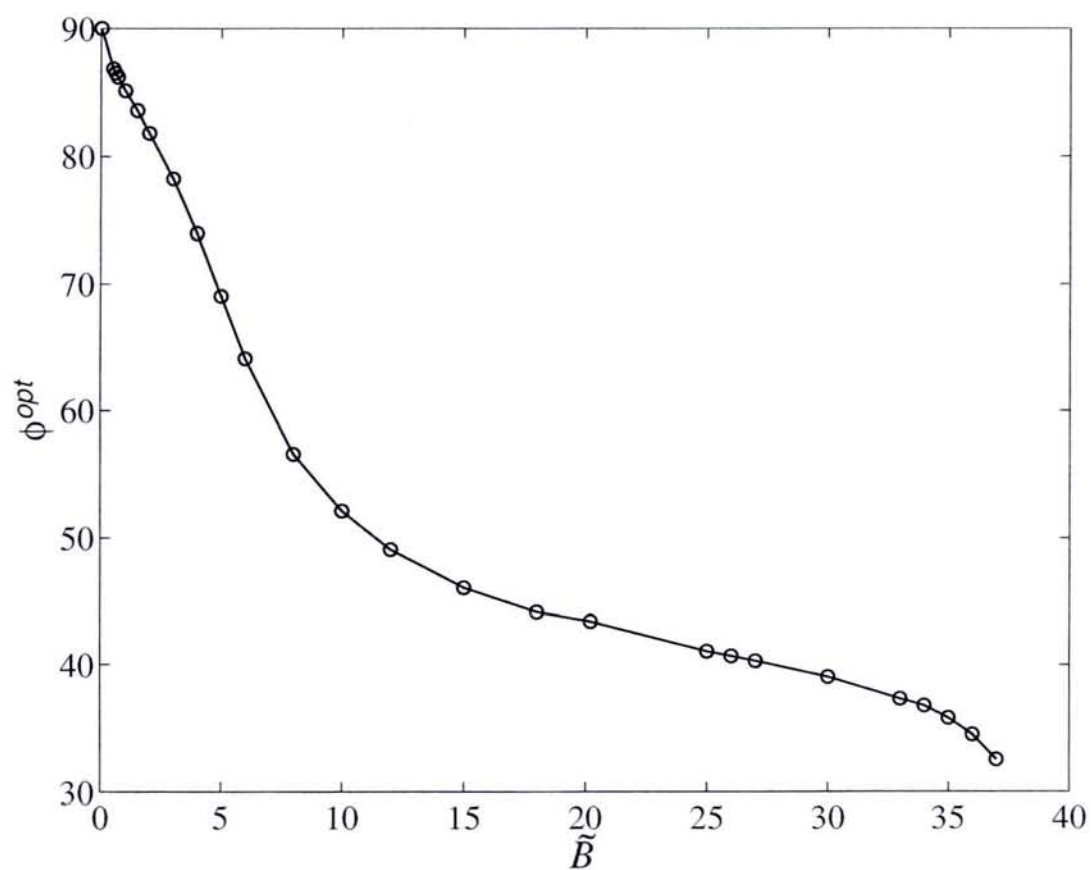


FIG. 3.21: Angle de la perturbation $\phi = \arctan(\tilde{\beta}/\tilde{\alpha})$ en fonction de \tilde{B} pour $\tilde{Re} = 3000$.

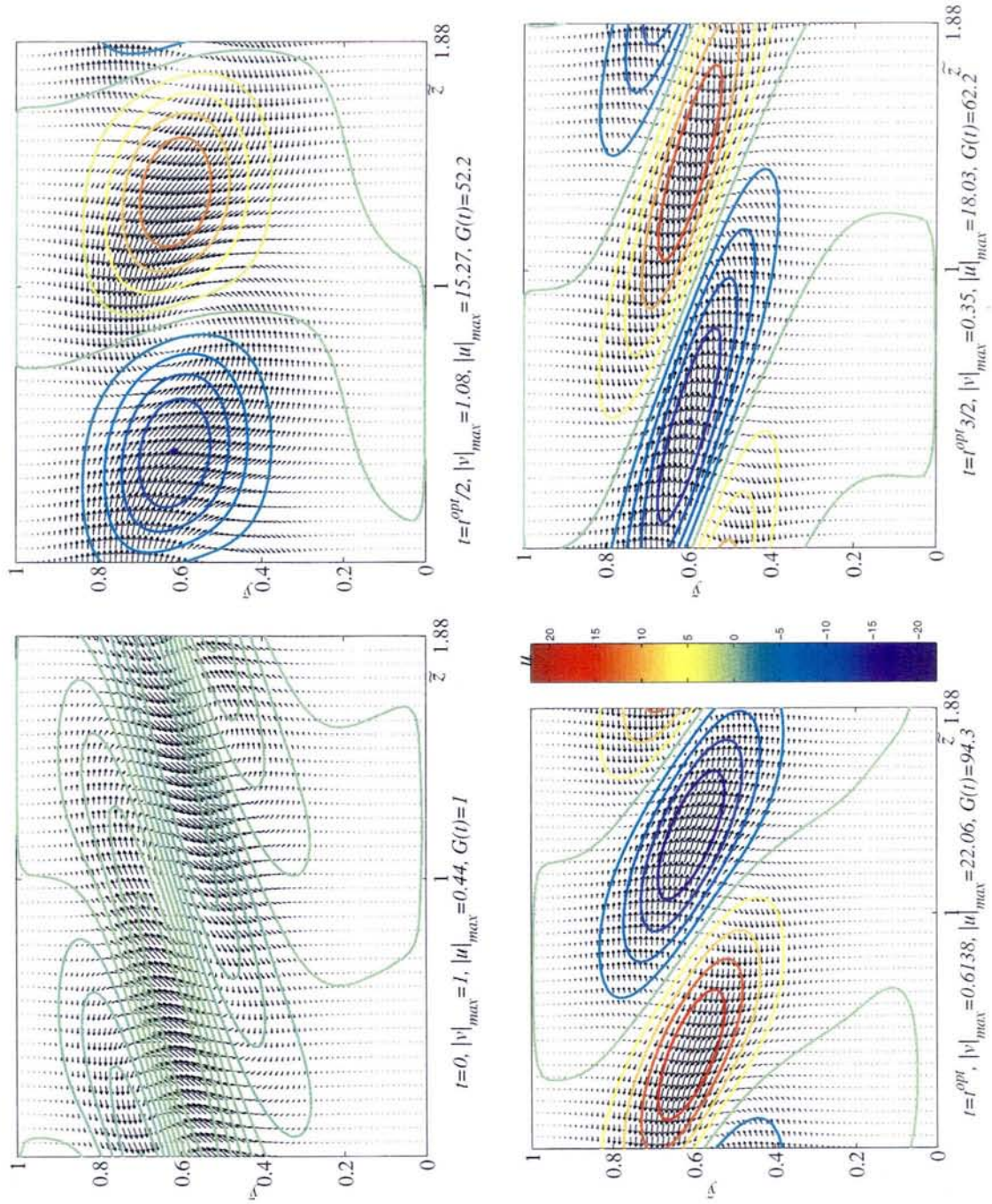


FIG. 3.22: Développement des vitesses de la perturbation optimale dans un plan (\tilde{y}, \tilde{z}) à $x = 0$ pour $\tilde{\alpha} = 0.48, \tilde{\beta} = 3.34, \tilde{Re} = 3000, \tilde{B} = 2$

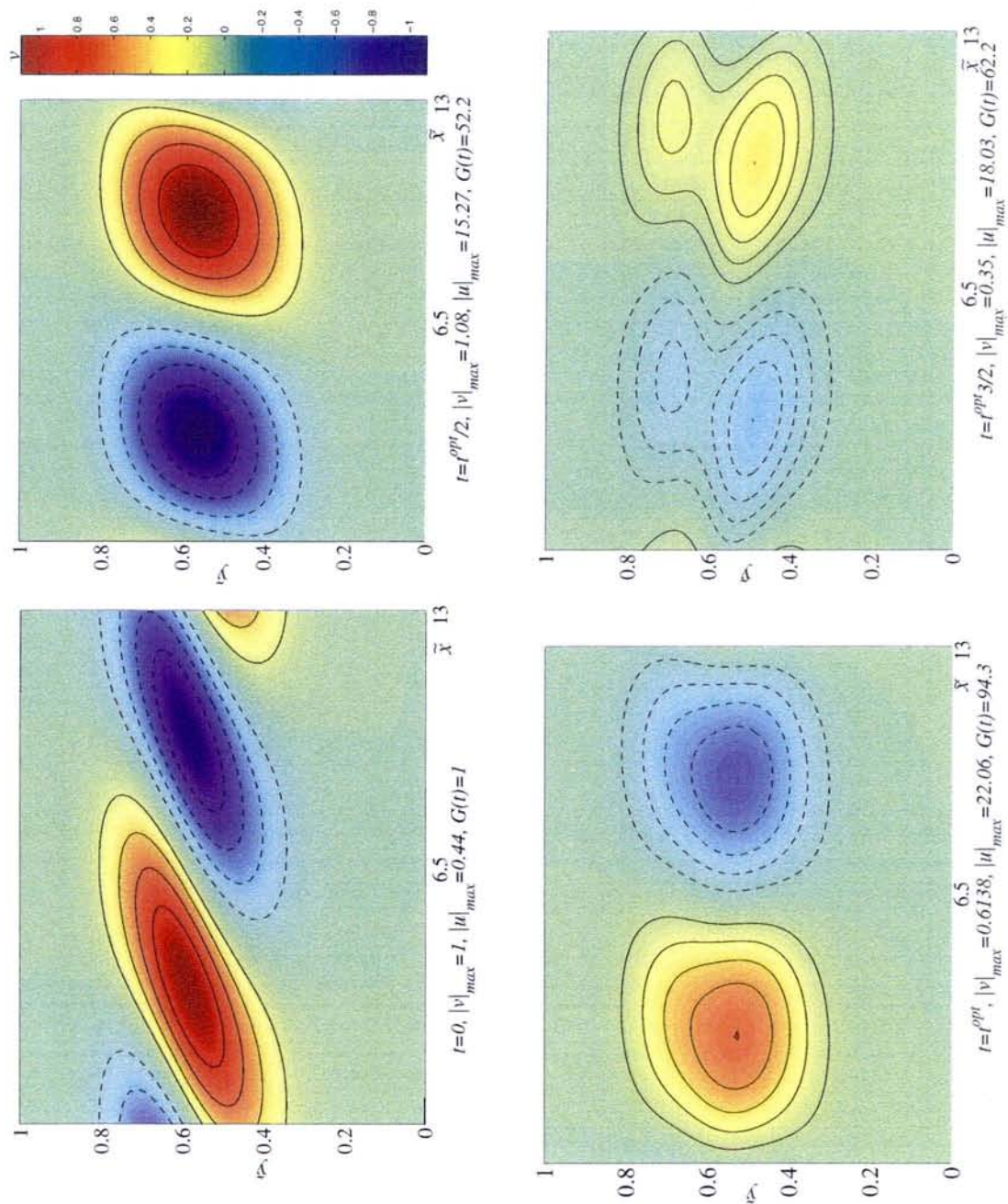


FIG. 3.23: Développement des vitesses de la perturbation optimale dans un plan (\tilde{y}, \tilde{x}) à $z = 0$ pour $\tilde{\alpha} = 0.48$, $\tilde{\beta} = 3.34$, $\tilde{Re} = 3000$, $\tilde{B} = 2$

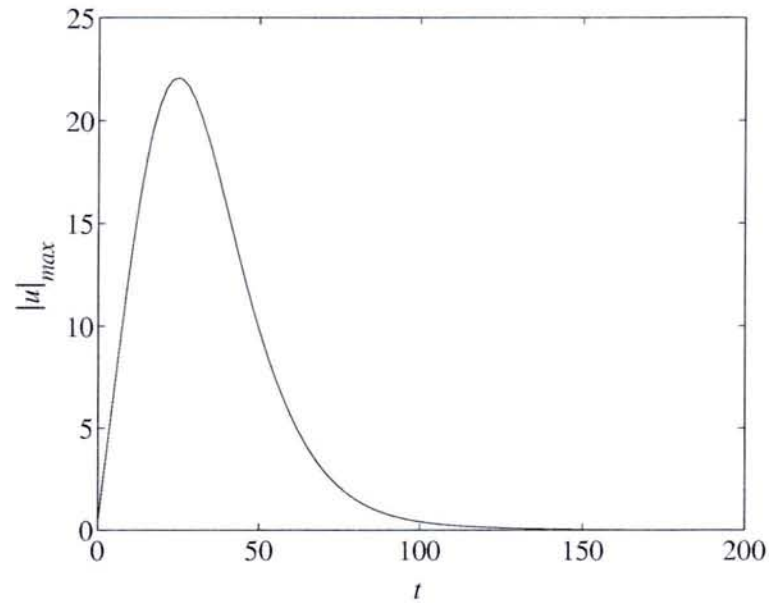


FIG. 3.24: Evolution temporelle de la vitesse $|u|_{max}$ de la perturbation optimale pour $\tilde{B} = 2$, $\tilde{Re} = 3000$, $\tilde{\alpha} = 0.48$, $\tilde{\beta} = 3.34$.

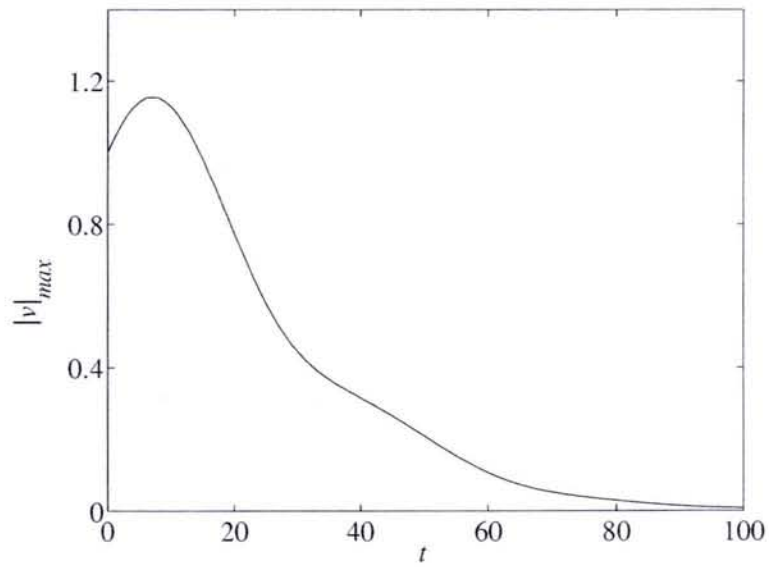


FIG. 3.25: Evolution temporelle de la vitesse $|v|_{max}$ de la perturbation optimale pour $\tilde{B} = 2$, $\tilde{Re} = 3000$, $\tilde{\alpha} = 0.48$, $\tilde{\beta} = 3.34$.

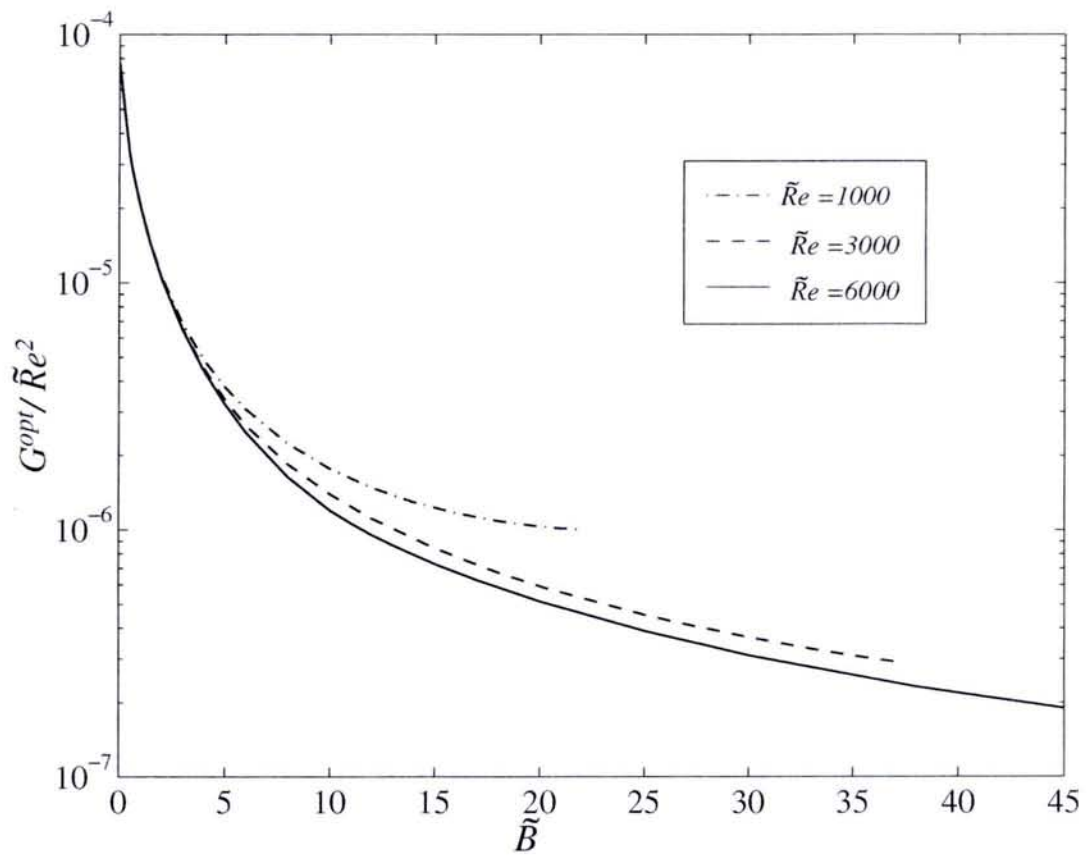


FIG. 3.26: G^{opt}/\tilde{Re}^2 en fonction de \tilde{B} pour $\tilde{Re} = 1000, 3000, 6000$.

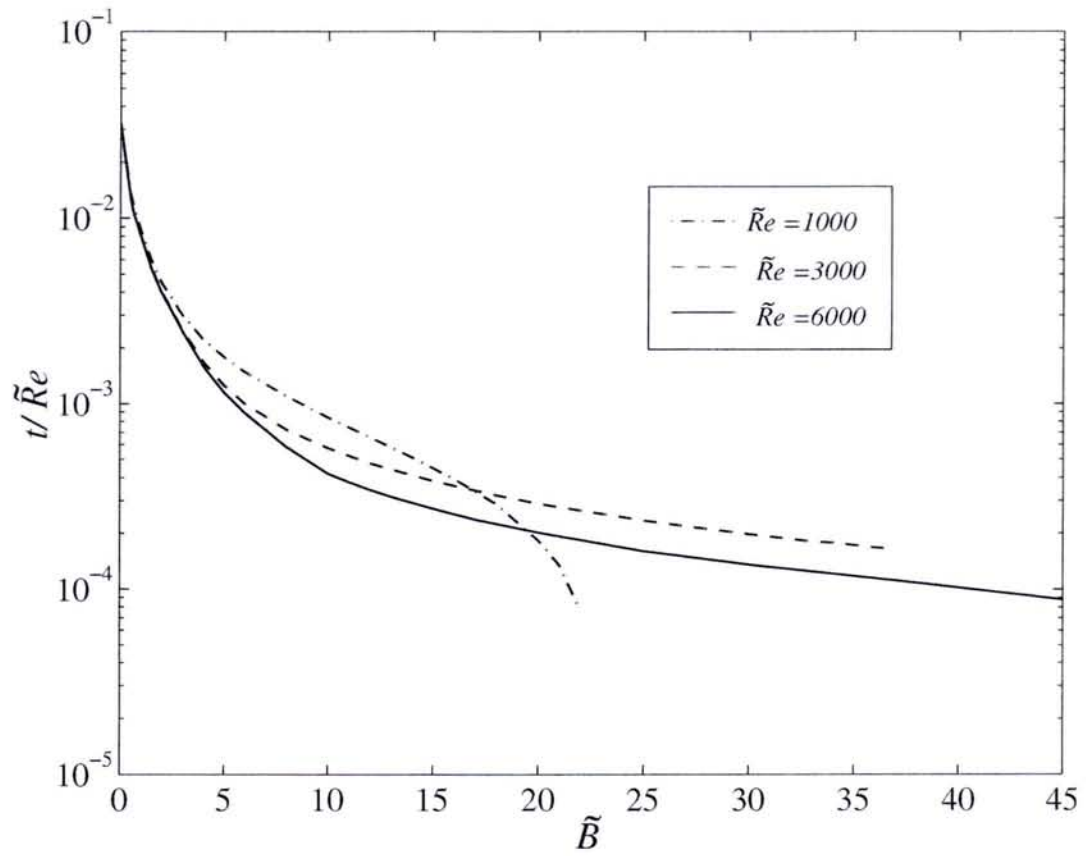


FIG. 3.27: t^{opt}/\tilde{Re} en fonction de \tilde{B} pour $\tilde{Re} = 1000, 3000, 6000$.

\tilde{B}	\tilde{Re}	α	β	ϕ (degrés)
0.02	1000	0	3.43	90
0.02	3000	0	3.43	90
0.02	6000	0	3.43	90
2	1000	2.2	6.2	70.46
2	3000	0.96	6.68	81.82
2	6000	0.58	6.76	85.1
8	1000	6.8	8.45	51.17
8	3000	7	10.6	56.56
8	6000	4.25	14	73.11

TAB. 3.3: *Caractéristiques des perturbations optimales tridimensionnelles pour $\tilde{Re} = 1000$*

En fixant le nombre de Bingham et en augmentant le nombre de Reynolds, on diminue l'importance du terme en B/Re (dans les équations de perturbation) témoigne du caractère rhéofluidifiant qui est à l'origine des perturbations optimales obliques ; c'est la raison pour laquelle lorsque Re augmente la perturbation optimale tend à se rapprocher de la structure en rouleaux longitudinaux : par exemple pour $\tilde{B} = 2$, à $\tilde{Re} = 1000$, $\phi = 70.46$ et à $\tilde{Re} = 6000$, $\phi = 85.1$.

3.5 Condition de non croissance de l'énergie

Cette section se propose de déterminer le nombre de Reynolds \tilde{Re}_E en dessous duquel l'énergie cinétique de la perturbation décroît de façon monotone dans le temps. En d'autres termes, pour un nombre de Bingham donné, on a $\frac{dE}{dt} \leq 0$ pour $Re \leq Re_E$, et ce quels que soient les nombres d'onde α et β .

L'énergie cinétique moyenne de la perturbation sur un volume $\Omega = [0, \frac{2\pi}{\alpha}] \times [0, \frac{2\pi}{\beta}] \times [y_0, 1]$ est donnée par :

$$E = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta}{4\pi^2} \frac{1}{(1-y_0)} \int_{y_0}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{2\pi/\beta} (u_r'^2 + v_r'^2 + w_r'^2)^2 dy dx dz \quad (3.28)$$

où u_r' est la partie réelle de $[u(y, t) \exp(i\alpha x + i\beta z)]$, de même pour v_r' et w_r' . En utilisant l'équation de continuité, l'énergie cinétique moyenne E peut s'exprimer par exemple en fonction des composantes axiale u et normale v de la vitesse selon

$$E = \frac{1}{4(1-y_0)} \int_{y_0}^1 \left[\frac{k^2}{\beta^2} u^* u + v^* v + \frac{1}{\beta^2} Dv^* Dv + \frac{i\alpha}{\beta^2} (Dv^* u - u^* Dv) \right] dy. \quad (3.29)$$

Modulo le facteur $\frac{1}{4(1-y_0)}$, l'expression (3.29) est la norme énergie définie par l'équation (3.10). Ainsi, l'énergie cinétique moyenne E de la perturbation est monotone décroissante si

$$\frac{d\|\mathbf{q}\|_E^2}{dt} = \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right)_E + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \mathbf{q} \right)_E < 0, \quad (3.30)$$

L'introduction de l'opérateur d'évolution linéaire \mathcal{L}_1 défini par la relation (3.14) permet de réécrire la relation (3.30) sous la forme :

$$\frac{d\|\mathbf{q}\|_E^2}{dt} = (\mathbf{q}, -i\mathcal{L}_1\mathbf{q})_E + (-i\mathcal{L}_1\mathbf{q}, \mathbf{q})_E = 2 \operatorname{Im} (\mathcal{L}_1\mathbf{q}, \mathbf{q})_E.$$

où Im désigne la partie imaginaire. Après quelques manipulations algébriques, on obtient

$$\operatorname{Im} (\mathcal{L}_1\mathbf{q}, \mathbf{q})_E = \mathcal{I}(\mathbf{q}) - \frac{1}{Re} \mathcal{V}(\mathbf{q}) - \frac{1}{Re} \mathcal{B}(\mathbf{q}). \quad (3.31)$$

où les quantités $\mathcal{I}(\mathbf{q})$, $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{q})$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{q}) &= -\langle (u_r v_r + u_i v_i) DU \rangle \\ \mathcal{V}(\mathbf{q}) &= \langle |D\mathbf{q}|^2 + (\alpha^2 + \beta^2) |\mathbf{q}|^2 \rangle \\ \mathcal{B}(\mathbf{q}) &= B \left\langle \frac{3|Dv|^2 + k^2 |u|^2}{|DU|} \right\rangle + B \left\langle \frac{k^2 |\alpha u - iDv|^2 + |\alpha Du - i(D^2v + \beta v)|^2}{\beta^2 |DU|} \right\rangle \end{aligned}$$

avec les notations $|u|^2 = u_r^2 + u_i^2$, $|\mathbf{q}|^2 = |u|^2 + |v|^2 + |-\frac{\alpha}{\beta}u + \frac{i}{\beta}Dv|^2$, et $\langle \cdot \rangle = \int_{y_0}^1 (\cdot) dy$.

Le terme $\mathcal{I}(\mathbf{u})$ représente l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation. Si ce terme est positif, cela signifie que la perturbation peut extraire de l'énergie de l'écoulement de base. Dans le cas contraire, l'énergie est transférée de la perturbation vers l'écoulement de base. Les termes $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{q})$ représentent la dissipation visqueuse de l'énergie dûe d'une part aux termes visqueux purs et d'autre part au terme de Bingham.

L'équation (3.31) a été obtenue par Frigaard et Nouar (2003) [22] en utilisant la même procédure que Synge (1938)[61] et Joseph (1968) [34]. Elle peut aussi être obtenue en appliquant la méthode de l'énergie aux équations de perturbations linéarisées (2.61-2.63). Pour cela, on multiplie chacune des équations par la composante correspondante de la vitesse $(u', v', w')^T$ et on intègre sur le domaine $[-X, X] \times [y_0, 1] \times [-Z, Z]$. La perturbation est supposée périodique à chaque instant suivant les directions x et z et de période $2X$ et $2Z$ respectivement. Les détails de calcul sont donnés dans la référence Drazin(1981)[13].

Il est important de noter que, contrairement au cas d'un fluide Newtonien, il n'est pas possible d'obtenir la même équation (3.31) dans le cas d'une perturbation d'amplitude finie, bien que les termes non linéaires $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}$ soient conservatifs. Le comportement de la zone non cisailée vis à vis d'une perturbation d'amplitude finie reste un problème difficile. Dans l'état actuel des travaux, le terme de dissipation dans l'équation de Reynolds-Orr ne peut pas être écrit sous forme explicite en fonction des composantes de la vitesse ou du gradient de vitesse. Ceci est dû au fait qu'en présence d'une perturbation d'amplitude finie, on ne peut plus supposer que la zone bouchon soit intacte et continue. Nouar et Frigaard (2001)[44] ont identifié quatre situations possibles, représentées sur la figure (3.5). La situation la plus simple correspond à une zone cisailée qui reste dans un état cisailé (région notée sur la figure).

La seconde situation correspond à une zone initialement non cisailée, qui devient cisailée (région notée A).

La région notée B reste dans le même état non cisailé.

La quatrième situation possible notée (C) correspond à la formation d'îlots de zone non cisailée dans un domaine cisailé. C'est cette modification de la géométrie des zones cisailées et non cisailées qui est à l'origine de la différence entre les conditions de non augmentation d'énergie calculées en présence d'une perturbation infinitésimale et celle obtenue en présence d'une perturbation d'amplitude finie.

Dans le cas d'une perturbation infinitésimale, les équations (3.30)-(3.31) indiquent qu'il n'y a pas d'augmentation de l'énergie si le membre de droite de l'expression (3.31) est négatif. Soit Re_1 la plus grande valeur du nombre de Reynolds pour lequel cette condition est satisfaite :

$$\frac{1}{Re_1(\alpha, \beta)} = \sup_{\mathbf{q}} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{q})}{\mathcal{V}(\mathbf{q}) + \mathcal{B}(\mathbf{q})}, \quad (3.32)$$

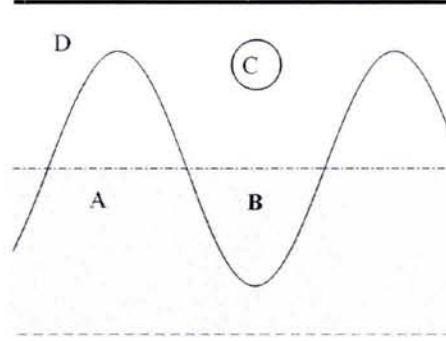


FIG. 3.28: Comportement du fluide de Bingham vis à vis d'une perturbation d'amplitude finie

où \mathbf{u} est le champ de vitesse correspondant à une perturbation admissible qui satisfait l'équation de continuité locale, les conditions aux limites et pour laquelle $\mathcal{I}(\mathbf{u}) > 0$. Le problème d'optimisation (3.32) est résolu par une méthode variationnelle ; les équations d'Euler résultantes forment le problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathcal{F}^2 v + BT(u, v) = -\frac{\lambda}{2} [k^2 u DU + i\alpha D(v DU)], \quad (3.33)$$

$$k^2 \mathcal{F} u - i\alpha D(\mathcal{F} v) - B \left[\frac{k^4 u - i\alpha^3 Dv}{|DU|} + \alpha D \left(\frac{D(iDv - \alpha u)}{|DU|} \right) \right] = \lambda \frac{\beta^2}{2} DU v, \quad (3.34)$$

$$\text{où } T(u, v) = -4k^2 D \left(\frac{Dv}{|DU|} \right) - i(D^2 + k^2) \left[\frac{D(-\alpha u + iDv) + i\beta^2 v}{|DU|} \right]$$

A ces équations s'associent les conditions aux limites suivantes

$$y = y_0; u = v = Dv = 0, \quad (3.35)$$

$$y = 1; u = v = Dv = 0. \quad (3.36)$$

Dans le cas particulier $\beta = 0$, la formulation (v, w) est adoptée. $Re_1(\alpha, 0, B)$ est la plus petite valeur de

$$(D^2 - \alpha^2)^2 v - 4\alpha^2 BD \left(\frac{Dv}{|DU|} \right) = -i\alpha \frac{\lambda}{2} [2 Dv DU + v D^2 U], \quad (3.37)$$

avec les conditions aux limites

$$y = y_0; v = Dv = 0, \quad (3.38)$$

$$y = 1; v = Dv = 0. \quad (3.39)$$

La résolution numérique du problème aux valeurs propres (3.33-3.36) et (3.37-3.39) repose sur la même procédure que celle décrite dans le paragraphe (2.4). Le domaine $[y_0, 1]$ est transformé en $[0, 1]$, et le changement de variable (2.99) est utilisé.

Sur les figures (3.29(a-c)), on a représenté pour trois valeurs du nombre de Bingham; $\bar{B} = 0.02$, $\bar{B} = 8$ et $\bar{B} = 38$ correspondants respectivement à $y_0 = 0.01$; 0.8 et 0.95, les contours des iso- Re_1 qui séparent la région où il y a augmentation d'énergie de celle où il n'y a pas d'augmentation d'énergie. Nous avons aussi représenté en trait épais le contour particulier Re_{1p} à partir duquel la zone où il y a augmentation d'énergie est délimitée par deux frontières (une frontière interne pour de faibles valeurs de $\bar{\alpha}$ et une frontière externe pour de grandes valeurs de $\bar{\alpha}$). On peut aussi noter que pour un nombre de Bingham donné, $Re_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \rightarrow \infty$ lorsque $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0$. Ce résultat peut directement être mis en évidence à partir des expressions de $\mathcal{I}(\mathbf{u})$, $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{u})$. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz, Poincaré ainsi que les inégalités triangulaires, Frigaard et Nouar(2003) ont montré que :

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) \leq \frac{B(1-y_0)^2 k_1 \delta}{2y_0} \int_0^1 |u|^2 + |w|^2 d\xi, \quad (3.40)$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{u}) \geq \frac{\pi^2 + (1-y_0)^2 \delta^2}{Re(1-y_0)} \int_0^1 |u|^2 + |w|^2 d\xi, \quad (3.41)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) \geq \frac{2y_0 \delta^2 k_2}{Re} \int_0^1 |u|^2 + |w|^2 d\xi. \quad (3.42)$$

où $\alpha = k \cos\phi$, $\beta = k \sin\phi$, $\phi \in [0, \pi/2]$, δ_1 et δ_2 sont deux constantes $O(1)$. Ainsi, il n'y a pas d'augmentation d'énergie si

$$F(k) = \frac{B(1-y_0)^2 \delta_1 k}{2y_0} - \frac{\pi^2}{Re(1-y_0)^2} - \frac{k^2}{Re} \left[1 + \frac{2y_0 \delta_2}{1-y_0} \right] \leq 0, \quad (3.43)$$

ce qui conduit à

$$Re \leq \frac{2y_0}{\delta_1 B(1-y_0)^2} \left[\frac{\pi^2}{k(1-y_0)^2} + k \left(1 + \frac{2y_0 \delta_2}{1-y_0} \right) \right] \quad (3.44)$$

D'après la dernière relation, il est clair que $Re_1 \rightarrow \infty$ lorsque $\delta \rightarrow 0$ ou $\delta \rightarrow \infty$. Les résultats numériques montrent que pour de grands nombres de Bingham \bar{B} , le nombre d'onde axial $\bar{\alpha}$ évolue en $\bar{B}^{-0.5}$ et le nombre d'onde longitudinal $\bar{\beta}$ tend vers 0. Le nombre de Reynolds maximum $\bar{Re}_E = \min_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \bar{Re}_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, est donné dans le tableau

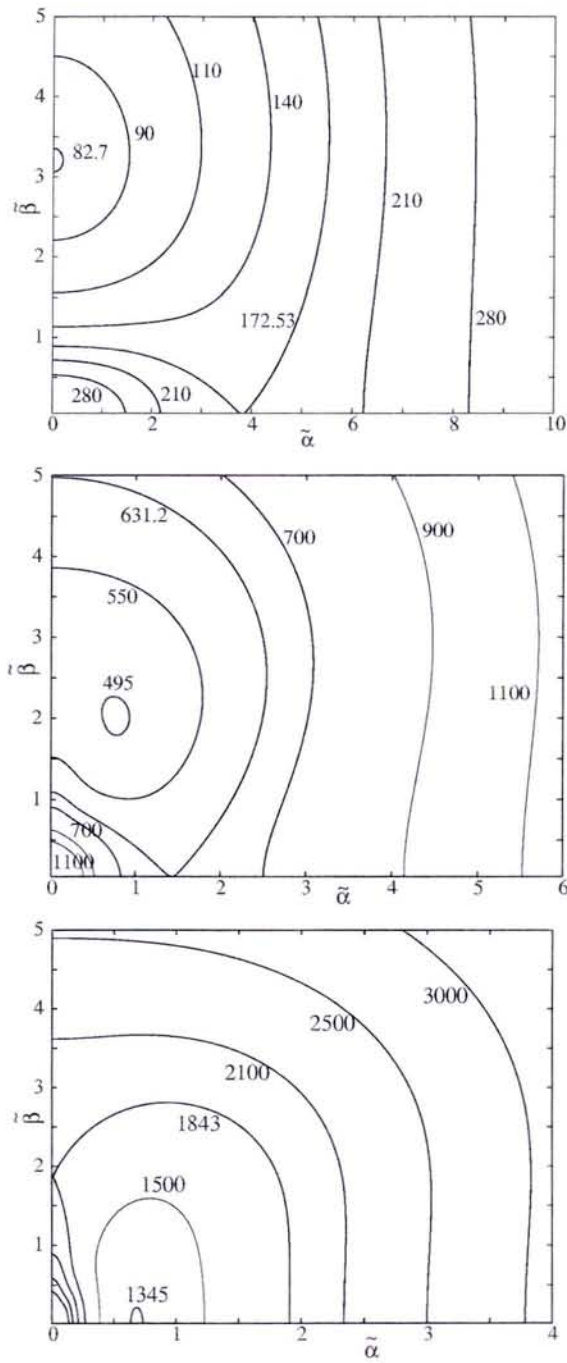


FIG. 3.29: Contours de \tilde{Re}_1 , pour $\tilde{B} = 0.02$, $\tilde{B} = 8$ et $\tilde{B} = 38$

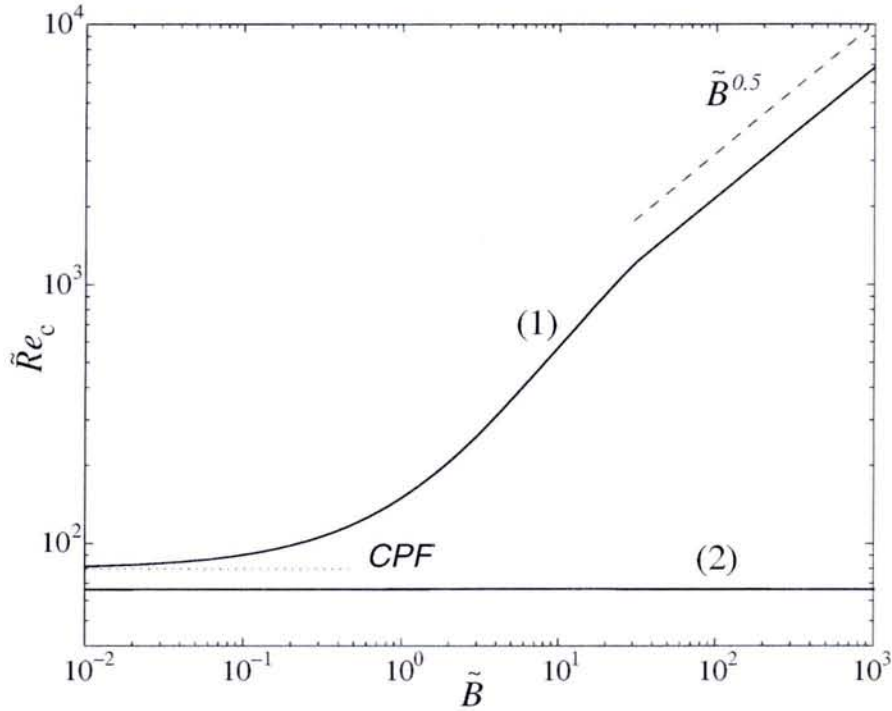


FIG. 3.30: Variation de Re_E en fonction du nombre de Bingham \tilde{B} , la courbe(1) correspond à nos résultats et la courbe (2) [22]

(1) avec les nombres d'onde associés. A titre de comparaison, on a reporté les valeurs de Re_E , α_E et β_E obtenues pour un fluide Newtonien en situation d'écoulement de Poiseuille plan et de Couette Poiseuille avec $U_c/U_p = 4$.

Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide Newtonien, nos résultats sont en très bon accord avec ceux donnés par Busse (1969)[8] et Joseph et Carmi (1969)[35]. Pour $\tilde{B} = 0.02$, nous avons $\tilde{Re}_E = 82.41$ avec $\tilde{\alpha}_E = 0$ et $\tilde{\beta}_E = 3.21$. Ces valeurs sont très proches de celles obtenues pour un fluide Newtonien en écoulement de Couette Poiseuille $U_c/U_p = 4$: $Re_E = 79.8$, $\alpha_E = 0$ et $\beta_E = 3.18$. En augmentant le nombre de Bingham, Re_E augmente du fait de l'accroissement de la dissipation visqueuse. La courbe (1) de la figure (3.30) montre l'évolution de \tilde{Re}_E en fonction de \tilde{B} . Pour des valeurs de \tilde{B} suffisamment élevés ($\tilde{B} > 30$ soit $y_0 > 0.9375$) \tilde{Re}_E augmente en $\tilde{B}^{0.5}$. Ce résultat confirme l'approche adoptée par Frigaard et Nouar (2003). Les auteurs ont déterminé le nombre d'onde $\delta_{F_{max}}$ qui maximise $F(k)$, et tels que $F(\delta_{F_{max}}) = 0$. Ils trouvent $Re_E \propto B^{3/4}$ lorsque $B \rightarrow \infty$, soit en variable ($\tilde{\cdot}$), $\tilde{Re}_E \propto \tilde{B}^{1/2}$. Lorsque les termes de Bingham sont annulés artificiellement, c'est à dire lorsqu'on réduit l'influence

Écoulement	$\tilde{\alpha}_E$	$\tilde{\beta}_E$	ϕ (degrés)	\tilde{Re}_E
EPP($B = 0$)	0	1.56	90	20.66
ECP($B = 0$)	0	3.2	90	79.72
EPP($\tilde{B} = 0.02$)	0	3.4	90	82.41
EPP($\tilde{B} = 8$)	0.77	2.012	69	493.15
EPP($\tilde{B} = 38$)	0.683	0	0	1342.5

TAB. 3.4: Nombre de Reynolds critique Re_E de non augmentation de l'énergie en fonction du nombre de Bingham

de B uniquement à la modification de l'épaisseur de la zone cisailée et qu'on occulte la dissipation visqueuse supplémentaire, le calcul numérique donne $\tilde{Re}_E = 79.72$ avec $\tilde{\alpha}_E = 0$ et $\tilde{\beta}_E = 3.18$. Ces valeurs sont bien celles qu'on obtiendrait pour un fluide Newtonien en écoulement de Couette Poiseuille. La valeur $\tilde{Re}_E = 79.72$ est représentée sur la figure (3.30) en trait discontinu. En termes de variables sans ($\tilde{\cdot}$), $Re_E = 79.72/(1 - y_0)$ et lorsque $B \rightarrow \infty$, on a $Re_E \sim 79.72\sqrt{B/2}$.

La courbe (2) de la figure (3.30) représente le résultat de la stabilité conditionnelle obtenue par Nouar et Frigaard (2001). Dans cette analyse, la perturbation est limitée de telle façon que l'écoulement perturbé comporte une zone bouchon continue intacte; de plus, l'effet du nombre de Bingham est réduit à la modification de la zone cisailée. Il n'est donc pas étonnant de retrouver un résultat de la forme $\tilde{Re}_E = cste$ ou $Re_E \propto B^{1/2}$ lorsque $\tilde{B} \rightarrow \infty$.

3.5.1 Conclusion

Les principaux résultats de ce chapitre sont les suivants :

- Comme pour les écoulements cisailés des fluides visqueux, on observe aussi que l'amplification de l'énergie est plus importante en situation 3D qu'en situation 2D.
- Pour de très faibles nombres de Bingham, le caractère rhéofluidifiant est limité essentiellement dans une très fine couche de fluide au voisinage de l'interface, où $DU = 0$. L'amplification de l'énergie est réduite pratiquement de deux tiers par rapport à l'écoulement de Poiseuille plan pour un fluide Newtonien. Pour ce qui est de la perturbation optimale, celle-ci est constituée de rouleaux longitudinaux qui conduisent par l'effet "lift up" à la formation de "streak". On trouve : $\alpha = 0$, $\tilde{\beta} = 3.40$, $G^{opt} = 71 \times 10^{-4} \tilde{Re}^2$ et $t = 32.56 \tilde{Re}$
- En augmentant le nombre de Bingham, le caractère rhéofluidifiant devient plus important et la dissipation visqueuse augmente. L'amplification de l'énergie diminue, et la perturbation optimale devient oblique. La perturbation optimale reçoit simultanément

de l'énergie par le mécanisme Orr et l'effet "lift up".

- En fixant le nombre de Bingham et en augmentant le nombre de Reynolds, on diminue l'importance du terme en B/Re (dans les équations de perturbation) où apparaît le caractère rheofluidifiant qui est à l'origine des perturbations optimales obliques; c'est la raison pour laquelle lorsque Re augmente, la perturbation optimale tend à se rapprocher de la structure en rouleaux longitudinaux : par exemple pour $\tilde{B} = 2$, à $\tilde{Re} = 1000$, $\phi = 70.46$ et à $\tilde{Re} = 6000$, $\phi = 85.1$.

Conclusion générale

Ce travail présente une étude détaillée de l'analyse linéaire de stabilité d'un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide à seuil, dont le comportement rhéologique est décrit par le modèle de Bingham.

L'influence du nombre de Bingham (rapport de la contrainte seuil et des forces visqueuses nominales) se manifeste par cinq effets :

1. la modification de l'épaisseur de la zone "bouchon",
2. la modification du gradient de vitesse dans la zone cisailée,
3. la modification de la dissipation visqueuse,
4. la rhéofluidification,
5. les conditions aux limites à l'interface.

Le but de ce travail a été de pouvoir identifier comment intervient chacun de ces effets dans les conditions de stabilité.

Il est d'abord montré qu'une perturbation infinitésimale ne peut à elle seule perturber le mouvement de la zone "bouchon", qui se déplace comme un solide rigide : la zone "bouchon" reste en effet intacte et continue. Les deux zones cisailées étant équivalentes et découplées, l'étude peut être restreinte uniquement à une seule zone. Un changement d'échelle approprié permet de rendre compte implicitement de la diminution de la zone cisailée lorsque le nombre de Bingham augmente. L'analyse se réduit à l'identification des trois derniers points précédents. L'effet des conditions aux limites peut être analysé en annulant artificiellement les termes en Bingham dans les équations de perturbations linéarisées. Par contre, il n'a pas été possible de filtrer l'augmentation globale de la viscosité pour n'observer que l'effet de la rhéofluidification, c'est pourquoi, l'influence de ce dernier point n'est décrite que de manière qualitative.

L'analyse linéaire de stabilité se déroule en deux parties : une analyse modale qui consiste à étudier le comportement de la perturbation sur des temps longs est abordée. Elle est suivie par une analyse non modale qui permet d'étudier le comportement de la perturbation sur des temps courts.

L'analyse modale a montré que l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham est linéairement stable. Ce résultat de stabilité peut être généralisé au cas de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham dans des conduites circulaires ou

annulaires. Il peut aussi être étendu aux modèles de Herschel-Bulkley ou de Casson. Cependant, dans le cas particulier $\tilde{B} \ll 1$ correspondant à la situation où l'épaisseur de la zone "bouchon" tend vers 0, un comportement discontinu se manifeste par rapport au cas de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide Newtonien qui est linéairement instable au delà du nombre de Reynolds $Re = 5772$. Ce résultat est une conséquence de l'analyse linéaire de stabilité qui suppose implicitement que la perturbation est infinitésimale par rapport à toutes les échelles caractéristiques de l'écoulement de base. Il est admis que les opérateurs de stabilité linéaire des écoulements cisailés peuvent conduire à des solutions qui présentent une croissance transitoire considérable de l'énergie cinétique de la perturbation, bien que les solutions propres (prises individuellement) de ces mêmes opérateurs soient amorties. Ce phénomène est dû à la non normalité des opérateurs linéaires, résultant en un ensemble de fonctions propres non orthogonales. Les résultats déduits de cette approche non-modale sont les suivants :

- les perturbations nulles à l'interface et l'augmentation de la dissipation visqueuse liée aux termes de Bingham dans l'opérateur d'évolution, réduisent la croissance transitoire de l'énergie par rapport au cas du fluide Newtonien.
- Pour $\tilde{B} \ll 1$, la condition initiale qui croît le plus dans un intervalle de temps fini est caractérisée par des tourbillons contrarotatifs longitudinaux avec $\tilde{\alpha} \approx 0$ et $\tilde{\beta} \approx 3.40$, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ étant les nombres d'onde axial et transversal respectivement. La croissance algébrique de l'énergie cinétique est alors attribuée à l'effet 'lift-up' : Initialement, l'énergie cinétique est contenue essentiellement dans les composantes normale et transverse de la vitesse, au temps optimal t^{opt} , la perturbation optimale donne lieu à des streaks, autrement dit une modulation en vitesse axiale selon la direction transverse. Les lois d'échelle \tilde{Re}^2 pour le taux de croissance optimal G_{opt} et \tilde{Re} pour t^{opt} le temps optimal associé, sont conservées.

Les structures les plus amplifiées initialement longitudinales pour $\tilde{B} \ll 1$, deviennent progressivement inclinées au fur et à mesure que \tilde{B} augmente, ce qui est probablement une conséquence du comportement rhéofluidifiant du fluide. La perturbation optimale extrait d'abord de l'énergie de l'écoulement de base par l'intermédiaire des contraintes de Reynolds, ensuite son énergie est amplifiée par l'effet "lift-up". En fait, la première étape sert de "tremplin" pour la seconde, en effet dans la première étape, la vitesse normale augmente sur un temps court permettant ensuite une amplification plus importante de l'énergie cinétique.

Les conditions de non augmentation de l'énergie sont examinées : le nombre de Reynolds maximum, Re_E , en dessous duquel il n'y a pas de croissance de l'énergie, est déterminé pour une large gamme de nombres de Bingham. Les résultats numériques montrent que $\tilde{B} \ll 1$, $\tilde{Re}_E \approx 79.72$, et la perturbation la plus dangereuse est longitudinale, avec $\tilde{\alpha} = 0$ et $\tilde{\beta} = 3.21$. Pour de grands nombres de Bingham \tilde{B} , la perturbation la plus dangereuse est obtenue pour $\tilde{\beta} = 0$, avec α qui évolue comme $B^{-0.5}$.

L'analyse temporelle effectuée, montre des différences entre les caractéristiques de stabilité linéaire d'un écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham et les écoulements cisailés de fluides Newtoniens. Les différences observées sont à notre avis liées au comportement rhéofluidifiant du fluide et aux conditions d'interfaces.

Nous pensons avoir apporté par cette étude, une contribution à la compréhension des mécanismes de transition vers la turbulence des écoulements de fluides à seuil. Ce travail peut être étendu par une étude spatiale de l'évolution des perturbations infinitésimales se développant sur un profil de vitesse de base de l'écoulement de Hagen Poiseuille pour un fluide d'Hershel-Bulkley. Afin de mieux se rapprocher des conditions expérimentales, les incertitudes inhérentes à l'expérience sont introduites en modifiant le profil de vitesse de base idéal par une déformation axisymétrique invariante (Gavarini *et al* [26]). Le but de cette étude est de rechercher la déformation optimale conduisant à des modes instables.

Par ailleurs, le modèle de Bingham ne permet pas de dissocier l'effet rhéofluidifiant de la dissipation visqueuse. Le modèle de Cross défini par :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu - \mu_0} = \frac{1}{1 + (C\dot{\gamma})^n} \quad (3.45)$$

dans la mesure où il ne prend en compte que la viscosité moyenne, permettrait de mettre en évidence l'effet spécifique de la dissipation visqueuse.

Annexe A

Bref historique sur les fluides à seuil

Nous rappelons ci-dessous les faits les plus marquants dans l'histoire des fluides à seuil.

- **1922** : Bingham [10] publie un livre où il fait part des courbes d'écoulement qu'il a obtenu pour une suspension d'argile. Ses résultats expérimentaux sont interpolés par une droite qui ne passe pas par l'origine : c'est le modèle de Bingham. L'année 1922 correspond aussi à la naissance de la rhéologie. En fait, la notion de contrainte seuil a été introduite par Schwedoff ([62], 1900).
- **1947** : Oldroyd [46] utilise le critère de Von-Mises et généralise le modèle de Bingham.
- **1954** : Prager [53] donne la formulation variationnelle d'un écoulement lent d'un fluide de Bingham. Il établit les principes variationnels du minimum et du maximum dans le cas de l'écoulement rampant d'un fluide de Bingham.
- **1976** : Duvaut et Lions [18], étendent les résultats de Prager en incluant les termes d'inertie, en outre ils introduisent les inégalités variationnelles pour la détermination du champ de vitesses.
- **1980** : Apparition des modèles régularisés, (Bercovier et Engelman [5]), ensuite Donovan et Tanner ([15], 1984) et Papanastasiou ([49], 1987). Ce sont ces modèles qui sont implémentés dans des codes de calcul existant dans le commerce.
- **1984** : Lipscomb et Denn [38] expliquent à l'appui de l'exemple de l'écrasement d'une couche d'un fluide à seuil entre deux disques parallèles, qu'une zone solide indéformable ne peut pas exister dans les écoulements graduellement variés : c'est le paradoxe du modèle de Bingham.
- **1985** : Barnes et Walters [2] remettent en cause l'existence d'une contrainte seuil.
- **1985** : Première étude d'un écoulement complexe d'un fluide de Bingham : Chute d'une bille dans un fluide à seuil, (Beris *et al.* [6])
- **1991** : Walton et Bittleston [67] étudient l'écoulement d'un fluide de Bingham entre deux cylindres excentrés. Ils montrent qu'il existe deux zones bouchon dans le petit et le grand entrefer reliées entre elles par une pseudo-zone bouchon, où la vitesse axiale varie graduellement suivant la position azimuthale mais reste constante suivant la

position radiale. Les résultats obtenus montrent clairement qu'une zone bouchon peut exister dans des écoulements complexes.

- **1994** : Première analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham (Frigaard *et al.*[21])
- **2001** : Première analyse nonlinéaire de stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham, (Nouar et Frigaard [44]).

Annexe B

Conditions aux limites à l'interface

On se propose de démontrer les conditions aux limites à l'interface (2.51-2.53) :

Soit $\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}'$ la vitesse de la zone "bouchon" qui se déplace en bloc comme un solide indéformable. L'équation du mouvement de la zone isovitesse B.1 pour l'écoulement perturbé s'écrit

$$\oint_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} (P + \epsilon p', \mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') n_j ds = \int_{\Omega_s} \frac{d}{dt} [\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}'_i] d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.1})$$

Pour une perturbation périodique, de période $(2X, 2Z)$, on note par Ω_s le volume de la zone "bouchon", delimité par $[-X, X] \times [-y_0 + \epsilon h^-, y_0 + \epsilon h^+]$. L'équation précédente devient :

$$\oint_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} (P + \epsilon p', \mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') n_j ds = \int_{-X}^{+X} \int_{-Z}^{+Z} \int_{-y_0 - \epsilon h^-}^{y_0 + \epsilon h^+} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.2})$$

Le membre de droite de B.2 s'écrit au premier ordre

$$\int_{-X}^{+X} \int_{-Z}^{+Z} \int_{-y_0 - \epsilon h^-}^{y_0 + \epsilon h^+} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i d\Omega = 8XZY_0 \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i (x, \pm y_0, z, t) \quad (\text{B.3})$$

Compte tenu de l'équation d'équilibre pour l'écoulement de base

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} (P, \mathbf{U}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

et du théorème de la divergence, le membre de gauche de B.2 s'écrit

$$\oint_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} (P + \epsilon p', \mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') n_j ds = \oint_{\partial\Omega_s} [-p\delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \tau_{ij}(\mathbf{U})] n_j ds. \quad (\text{B.5})$$

Les intégrales sur les bords homologues $x = \pm X$, et $z = \pm Z$ s'annulent, en raison de la périodicité. Il ne reste que les intégrales sur la surface d'écoulement perturbée en $y = \pm y_0 \pm \epsilon h^\pm$. Par conséquent, le membre de droite de B.5, s'exprime selon :

$$\oint_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij}(P + p, \mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') n_j ds = \int_{-X}^{+X} \int_{-Z}^{+Z} [-p\delta_{i2} + \tau_{i2}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \tau_{i2}(\mathbf{U})]_{y=y_0+\epsilon h^+} - \int_{-X}^{+X} \int_{-Z}^{+Z} [-p\delta_{i2} + \tau_{i2}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}') - \tau_{i2}(\mathbf{U})]_{y=y_0-h^-} \quad (\text{B.6})$$

On évalue ensuite par linéarisation les quantités suivantes :

$\tau_{i2}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}')$ en $y = \pm y_0 \pm \epsilon h^\pm$ et $\tau_{i2}(\mathbf{U})$ en $y = \pm y_0 \pm \epsilon h^\pm$, d'où finalement les conditions (2.51-2.53).

Annexe C

Publication

On the stability of a Bingham fluid flow in an annular channel

C. R. Mecanique, 331, (2003), (149-156). Cette étude a été réalisée au début de ma thèse, et a été à l'origine d'une relecture critique des travaux de Frigaard sur la stabilité linéaire d'un écoulement de Poiseuille plan.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 1
54501 VILLERS-LES-NANCY Cedex



Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Mecanique 331 (2003) 149–156



On the stability of a Bingham fluid flow in an annular channel

Sur la stabilité de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite annulaire

Nadjiba Kabouya, Chérif Nouar

LEMMA UMR 7563 (CNRS-INPL-UHP), INPL, ENSEM, 2, avenue de la Forêt de Haye, BP 160,
54504 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

Received 12 June 2002; accepted after revision 3 December 2002

Presented by Évariste Sanchez-Palencia

Abstract

Linear stability of a fully developed Bingham fluid flow between two coaxial cylinders subject to infinitesimal axisymmetric perturbations is investigated. The analysis leads to two uncoupled Orr–Sommerfeld equations with appropriate boundary conditions. The numerical solution is obtained using fourth order finite difference scheme. The computations were performed for various plug flow dimensions and radii ratios. Within the range of the parameters considered in this paper, the Poiseuille flow of Bingham fluid is found to be linearly stable. *To cite this article:* N. Kabouya, C. Nouar, C. R. Mecanique 331 (2003). © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham dans une conduite annulaire vis à vis de perturbations infinitésimales axisymétriques est effectuée. L'analyse conduit à deux équations d'Orr–Sommerfeld découplées avec des conditions aux limites appropriées. La solution numérique est obtenue en utilisant un schéma aux différences finies d'ordre 4. Les calculs ont été effectués pour plusieurs dimensions de la zone « bouchon » et différents rapports de rayons. Dans la gamme de variation des paramètres considérés, nous n'avons pas trouvé d'instabilité. *Pour citer cet article:* N. Kabouya, C. Nouar, C. R. Mecanique 331 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Keywords: Fluid mechanics; Linear stability; Bingham fluid

Mots-clés: Mécanique des fluides; Stabilité linéaire; Fluide de Bingham

E-mail address: cnouar@ensem.inpl-nancy.fr (C. Nouar).

1631-0721/03/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-0721(02)00015-3

Version française abrégée

Introduction

La présente étude est une contribution à l'analyse de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham. Dans un article récent, une analyse non linéaire a été effectuée par Nouar et Frigaard [1]. Les conditions critiques en dessous desquelles l'énergie cinétique d'une perturbation d'amplitude finie décroît en fonction du temps de façon monotone ont été déterminées. Afin de mieux appréhender les mécanismes de transition laminaire-turbulent il est nécessaire d'après Drazin [2], d'examiner le comportement de l'écoulement vis à vis de perturbations infinitésimales. C'est l'objectif de cet article. Il traite la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham dans une conduite annulaire, vis à vis de perturbations infinitésimales. Bien que le théorème de Squire ne s'applique pas à cette étude, seul le cas axisymétrique est considéré. La littérature fournit des résultats dans deux situations limites. D'abord, dans le cas limite d'un fluide Newtonien en géométrie annulaire ; on retient globalement, que le nombre de Reynolds critique Re_c augmente lorsque le rapport des rayons $K = R_1/R_2$ diminue [3]. Ensuite, dans le cas limite de l'écoulement d'un fluide de Bingham entre deux plaques parallèles ; Frigaard et al. [4] ont déterminé les courbes de stabilité neutre et indiquent que le nombre de Reynolds critique augmente lorsque le nombre de Bingham B (rapport de la contrainte seuil à une contrainte visqueuse nominale) croît. Ce deuxième cas limite est réexaminé. On montre que les conditions aux limites utilisées dans [4] ne sont pas appropriées et qu'en fait l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham est linéairement stable. Les résultats obtenus dans le cas d'une conduite annulaire, pour différents rapports de rayons, et pour différentes valeurs de B indiquent que l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham reste stable vis à vis de perturbations infinitésimales axisymétriques.

Analyse linéaire de stabilité

On considère l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite annulaire Fig. 1. Les rayons adimensionnels des cylindres intérieur et extérieur sont notés respectivement R_1 et R_2 . En régime laminaire établi, l'écoulement est caractérisé par la présence d'une zone dite « zone bouchon » où le matériau se déplace en bloc comme un solide rigide (modèle de Bingham). Cette zone est délimitée par les interfaces R^- du côté du cylindre intérieur et R^+ du côté du cylindre extérieur. La dimension relative de la zone bouchon est définie par $ap = (R^+ - R^-)/(R_2 - R_1)$. L'évolution de ap en fonction de B est décrite par la Fig. 2. A l'écoulement de base, on superpose une perturbation infinitésimale axisymétrique, Éq. (6). La linéarisation des équations du mouvement et la décomposition en modes normaux de la perturbation Éq. (13) conduisent à deux problèmes aux valeurs propres découplés : un problème aux valeurs propres dans la zone interne délimitée par R_1 et R^- , et un autre dans la zone externe délimitée par R^+ et R_2 . L'écoulement est dit stable lorsque $C_i = \text{Im}(C) < 0$, où C est la vitesse complexe de l'onde.

Résolution numérique, résultats et discussion

L'équation d'Orr–Sommerfeld (15) munie des conditions aux limites (16), est traitée par un schéma aux différences finies d'ordre 4. Le système aux valeurs propres généralisé obtenu est résolu par la méthode QZ implémentée dans MATLAB V. On s'intéresse particulièrement au mode le moins stable, $C_{i,\max}$. Le code de calcul est d'abord validé dans le cas particulier d'un fluide Newtonien, $ap = 0$. Ensuite, le cas de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Bingham est réexaminé. Il est montré que les fonctions propres u doivent nécessairement satisfaire les conditions $u = Du = 0$ à l'interface liquide-solide, comme indiqué dans la Fig. 3. La représentation Fig. 4 des contours de $C_{i,\max}$ indique que l'écoulement est linéairement stable. Des résultats similaires sont obtenus dans le cas annulaire pour différents rapports de rayons, et pour les zones interne et externe. A titre d'exemple, la Fig. 5 montre pour $K = 0.5$ et $ap = 0.6$, la répartition des contours $C_{i,\max}$ obtenus dans la zone externe. L'augmentation rapide de

l'écart entre les différentes courbes lorsque $C_{i,max}$ croît est caractéristique de la stabilité de l'écoulement. En fait, dans la gamme considérée de variation du nombre d'onde axial, $0 < \hat{\alpha} \leq 5$, du nombre de Reynolds, $\widehat{Re} \leq 10^5$ et pour $0.3 \leq K \leq 0.9$ et $0.1 \leq ap \leq 0.9$, nous n'avons pas trouvé d'instabilité. L'effet de ap sur la stabilité de l'écoulement peut être apprécié à travers la Fig. 6. Des contours de $C_{i,max}$ sont représentés dans le plan (ap, Re) pour $\alpha = 1$. L'allure des courbes montre clairement que l'écoulement est d'autant plus stable que ap est important.

1. Introduction

The present study is a contribution to the stability analysis of the Poiseuille flow of Bingham fluid. Recently, nonlinear analysis was performed for plane channel and Hagen–Poiseuille flows, by Nouar and Frigaard [1], using energy method. The critical Reynolds number below which the kinetic energy of any finite amplitude disturbance decays monotonically in time, was determined. For understanding the mechanisms of laminar-turbulent transition, according to Drazin [2], it is necessary to analyze the flow stability on the basis of infinitesimal perturbations.

The present paper deals with the linear stability of the Poiseuille flow of Bingham fluid in an annular duct subject to infinitesimal perturbations. The plane channel geometry is recovered when the radius ratio $K = R_1/R_2 \rightarrow 1$. The Hagen–Poiseuille flow is not relevant, since the Newtonian flow is linearly stable. Although Squire's transformation cannot be used for our problem, it is nevertheless easier, to start with axisymmetric situation. The literature provides us stability results for two limit situations. The first one concerns the Newtonian fluid flow in an annular channel. Mott and Joseph [3] showed that the critical Reynolds number, Re_c is a monotonic function of the radius ratio K , increasing without bound as $K \rightarrow 0$ (Hagen–Poiseuille flow). The second limit deals with the linear stability of Plane Poiseuille flow of Bingham fluid. Due to inappropriate boundary conditions, Frigaard et al. [4] find that the flow is linearly unstable above a certain Re_c . Neutral stability curves are obtained for various values of Bingham numbers, B (yield stress to nominal viscous shear stress ratio). This second case is revised here by using the correct boundary conditions. Then after, computations were performed for the annular geometry and several values of K and B . The results indicate that the Poiseuille flow of Bingham fluid in plane channel or in annular duct remains linearly stable to axisymmetric infinitesimal perturbations even when the Bingham number tends to zero.

2. Bingham–Poiseuille flow

We consider the flow of an incompressible Bingham fluid with a yield stress τ_s and a plastic viscosity μ_0 in an annular channel. The governing equations in dimensionless form are:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{V}) \tag{2}$$

Here \mathbf{V} is the velocity, p is the pressure and $\boldsymbol{\tau}$ is the deviatoric extra-stress tensor. The velocity vector is of the form $\mathbf{V} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_z$, where u, v, w are the velocity components, and $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ are unit vectors in the radial r , circumferential θ , and axial z directions, respectively. The above equations are rendered dimensionless using half width of the annular space $(R_2^* - R_1^*)/2$ as the length scale, the maximum velocity W_0^* of the basic flow as velocity scale and ρW_0^{*2} for stress and pressure scale.

The constitutive equation (Oldroyd [5]), can be written after scaling as:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{Re} \left[1 + \frac{B}{D_{II}} \right] \mathbf{D} \Leftrightarrow \tau_{II} > \frac{B}{Re} \tag{3}$$

$$D_{II} = 0 \Leftrightarrow \tau_{II} \leq \frac{B}{Re} \tag{4}$$

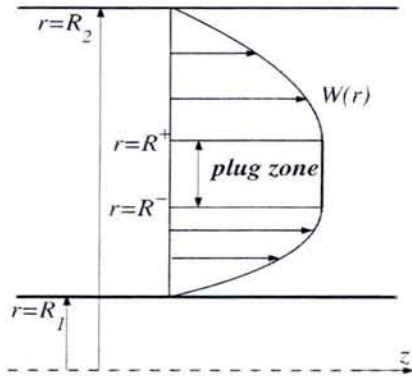


Fig. 1. Axial flow of Bingham fluid between two coaxial cylinders.

Fig. 1. Écoulement axial d'un fluide de Bingham entre deux cylindres coaxiaux.

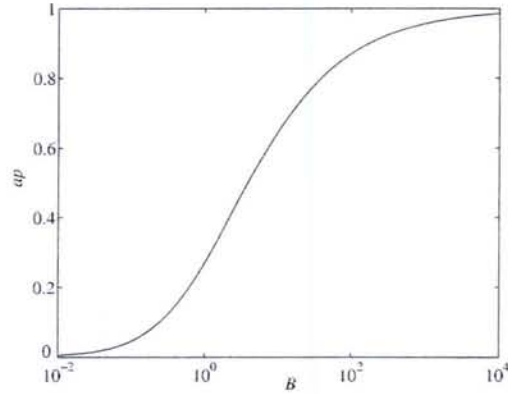


Fig. 2. Dimensionless plug zone width ap as a function of Bingham number: $K = 0.5$.

Fig. 2. Évolution de ap en fonction du nombre de Bingham pour $K = 0.5$.

where D_{II} and τ_{II} are respectively the second invariant of the strain rate \mathbf{D} and of the deviatoric stress tensor $\boldsymbol{\tau}$. The quantity $(1 + B/D_{II})$ is a dimensionless effective viscosity. The dimensionless parameters B and Re are respectively the Bingham and the Reynolds number. They are defined by:

$$B = \frac{\tau_s(R_2^* - R_1^*)}{2\mu_0 W_0^*}, \quad Re = \frac{\rho W_0^*(R_2^* - R_1^*)}{2\mu_0} \tag{5}$$

For one-dimensional shear flow, only the axial component of velocity W is non-zero, depending on the radial coordinate. The analytical expression of the axial velocity profile $W(r)$ as well as the details of the calculations can be found in the paper of Bird et al. [6] and Fordham et al. [7]. An axial velocity profile is illustrated in Fig. 1. The dimensionless radius of the inner and outer cylinders are respectively denoted by R_1 and R_2 . At the interfaces R^- and R^+ , between the liquid-like zone and the solid-like zone: $|\tau_{rz}| = \tau_s$. One has to note that the interface is not a material surface. Fig. 2, shows the evolution of the relative dimension of the plug core defined by $ap = (R^+ - R^-)/(R_2 - R_1)$ as a function of B for $K = 0.5$. Calculations performed for K ranging between 0.1 and 0.9 indicate a very slight effect of K on ap .

3. Linear stability analysis

Following the usual linear stability analysis, an infinitesimal perturbation $(\varepsilon \mathbf{v}', \varepsilon p')$, having an amplitude $(\varepsilon \ll 1)$, is imposed on the basic flow (\mathbf{V}, P) . The perturbed flow is then given by:

$$(\mathbf{V} + \varepsilon \mathbf{v}', p) = (\varepsilon u', \varepsilon v', W + \varepsilon w', P + \varepsilon p') \tag{6}$$

Hereafter, it is assumed that the disturbance is axisymmetric. Wherever the yield stress is exceeded, the effective viscosity of the perturbed flow is expanded about the basic flow:

$$\mu(\mathbf{V} + \varepsilon \mathbf{v}') = 1 + \frac{B}{|DW|} - \varepsilon \left(\frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \frac{B}{DW|DW|} \tag{7}$$

where, $D \equiv d/dr$. It is clear that $|\tau_{ij}(\mathbf{V} + \varepsilon \mathbf{v}') - \tau_{ij}(\mathbf{V})| = O(\varepsilon)$, which means that the perturbed flow can only linearly perturb the yield surface position from their initial position:

$$r^\pm(\mathbf{V} + \varepsilon \mathbf{v}') = R^\pm(\mathbf{V}) + \varepsilon h^\pm(z, t) \tag{8}$$

The linear perturbation equations in the two yielded regions are derived by substitution of (7) into the momentum and continuity equations by retaining only terms of order ε . The boundary conditions, for the perturbation velocity, are obtained from the nonslip and nonpenetration conditions at the walls.

$$u' = v' = w' = 0 \quad \text{at } r = R_1 \text{ and } r = R_2 \tag{9}$$

The continuity of stress at the yield surface requires that $D_{ij}(\mathbf{V} + \varepsilon\mathbf{v}') = 0$. Therefore,

$$D_{ij}(\mathbf{V} + \varepsilon\mathbf{v}') = 0 \quad \text{at } r = r^\pm, \forall i, j \tag{10}$$

Expanding and linearising about R^\pm give:

$$u'_{,r}(R^\pm, z, t) = w'_{,z}(R^\pm, z, t) = u'(R^\pm, z, t) = 0 \tag{11}$$

$$w'_{,r}(R^\pm, z, t) + u'_{,z}(R^\pm, z, t) = h^\pm \frac{d^2W}{dr^2}(r = R^\pm) \tag{12}$$

In the normal modes theory, the solutions are of the following form:

$$(u', v', w', p', h^\pm) = (u(r), v(r), w(r), p(r), h^\pm) \times e^{i\alpha(z-Ct)} \tag{13}$$

Where, α , is the axial wave number, $C = C_r + iC_i$ is the complex wave speed and αC_i is the growth rate of the perturbation. Substituting Eq. (13) into the linearized perturbation equations and eliminating the pressure terms, yields the Orr–Sommerfeld equation for Bingham fluid in each yielded region. With increasing the Bingham number, the width $(1 - ap)$ of the sheared fluid zones decreases. To take into account this geometrical effect, the following reduced parameters are introduced:

$$\hat{\alpha} = \alpha \times (1 - ap), \quad \hat{Re} = Re \times (1 - ap), \quad \hat{B} = B \times (1 - ap), \quad r = \eta \times (1 - ap) \tag{14}$$

This last transformation appears more naturally in the case of plane channel, when the yielded zone is mapped in $[0, 1]$. Finally, the Orr–Sommerfeld equation is obtained as follows:

$$[W - C]Lu + \left(\frac{\hat{D}W}{\eta} - \hat{D}^2W \right)u = -\frac{i}{\hat{\alpha}\hat{Re}}L^2u + 2\frac{i\hat{\alpha}\hat{B}}{\hat{Re}} \left[2\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\hat{D}(\eta u)}{\eta|\hat{D}W|} \right) - \frac{u}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{|\hat{D}W|} \right) \right] \tag{15}$$

where, $\hat{D} \equiv d/d\eta$ and $L \equiv (1/\eta)\hat{D}(\eta\hat{D}) - \alpha^2 - 1/\eta^2$.

The boundary conditions at the walls, $\eta = \eta_1$ and $\eta = \eta_2$, and at the interfaces, $\eta = \eta^-$ and $\eta = \eta^+$, are:

$$u = \hat{D}u = 0 \tag{16}$$

The substitution of Eq. (13) into Eq. (11) indicates also that $w = 0$ at the interfaces. Thus the motion of the unyielded region of fluid is not perturbed at the leading order. Therefore, the stability problems (Eqs. (15) and (16)) in the internal fluid region, $[\eta_1, \eta^-]$, and in the external fluid region, $[\eta^+, 1]$, are completely uncoupled. Thus, they can be analyzed separately.

Remark. Similar Orr–Sommerfeld equation can be derived for plane Poiseuille flow [4]:

$$[W - C]\mathcal{L}u - (D^2W)u = -\frac{i}{\alpha Re}\mathcal{L}^2u + \frac{4i\alpha B}{Re}D \left[\frac{Du}{|DW|} \right] \tag{17}$$

Here, $D \equiv d/dy$ and $\mathcal{L} \equiv D^2 - \alpha^2$. The differential equation (17) is defined in the flow domain \mathcal{D} , delimited by the interfaces at $y = \pm a$ and the channel walls at $y = \pm 1$, i.e., $\mathcal{D} = [-1, -a] \cup [a, 1]$. The boundary conditions are:

$$u(\pm a) = Du(\pm a) = u(\pm 1) = Du(\pm 1) = 0 \tag{18}$$

Eq. (17) is symmetric and the boundary conditions (18) are homogeneous, then the solution may be split up into an odd part u_i and an even part u_p : $u = u_p + u_i$. Hence, if $u(\pm a) = 0$, then: $u_p(\pm a) = 0$ and $u_i(\pm a) = 0$, separately.

Similarly for the first derivative: i.e., $Du_p(\pm a) = 0$ and $Du_i(\pm a) = 0$. It is clear that the two fluid regions are uncoupled and equivalent. Hence, for the Bingham fluid, it is sufficient to consider only one region, $[a, 1]$ say. Following previous studies for Newtonian fluids, Frigaard et al. [4] want to focus only on the even modes. For this, they use the same procedure as for Newtonian fluids by considering $Du_p(a) = D^3u_p(a) = 0$, instead of $u_p(a) = Du_p(a) = 0$. To our best knowledge, the obtained results are not correct for two reasons: (i) the condition $u_p(a) = 0$ is not satisfied; (ii) the condition $D^3u_p(a) = 0$, cannot be used here, since the interface is not a symmetry axis. Actually, the distinction between the odd and even solutions for the Bingham fluid is not useful, since the two fluid regions are uncoupled.

4. Numerical method

Following Mott and Joseph’s [3] method, the eigenvalue problem (15), (16) is solved using finite difference method with a fourth order centered scheme. In the present analysis, C was treated as the eigenvalue for given value of α and Re . The resulting generalized eigenvalue problem was solved using QZ-algorithm implemented in MATLAB V. For a good accuracy, after several tests, it was found that $N = 400$ is the optimal number of subdivisions between the two cylinders.

5. Results and discussion

In order to validate our MATLAB code, calculations are first performed for Newtonian fluid ($B = 0$). The critical Reynolds number is determined for different radii ratio $0.3 \leq K \leq 0.9$. The difference between our results and those obtained by Mott and Joseph [3] is within 0.5%. The case of Plane Poiseuille flow of Bingham fluid is then considered using appropriate boundary conditions. Fig. 3 represents the real and imaginary parts of the eigenfunction u for the least stable mode corresponding to $\hat{\alpha} = 1$, $ap = 0.6$ and $\hat{Re} = 10^4$. The domain $[a, 1]$ is mapped into $[0, 1]$. For comparison, the corresponding results for Newtonian fluid, u_{new} , are plotted in the same figure. It is important to note that $u_{new}(\eta = 0) \neq 0$, however for Bingham fluid $u(\eta = 0) = 0$. In Fig. 4, results are displayed for $ap = 0.6$, in terms of contours of $C_{i,max}$, (least stable mode). For fixed axial wave number, the rapid increase

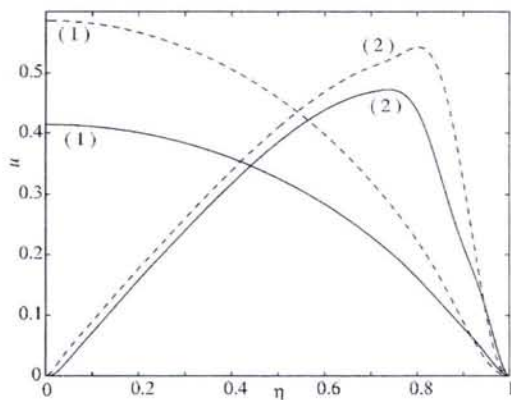


Fig. 3. Real (continuous line) and imaginary (dashed line) parts of the eigenfunction $u(r)$: (1) Newtonian fluid; (2) Bingham fluid.

Fig. 3. Partie réelle (ligne continue) et imaginaire (tirets) de la fonction propre $u(r)$: (1) Fluide Newtonien; (2) Fluide de Bingham.

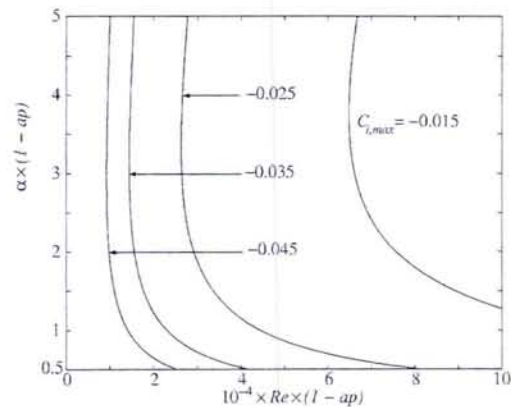


Fig. 4. Contours of $C_{i,max}$ (least stable mode). Case of Plane Poiseuille flow of Bingham fluid with $ap = 0.6$.

Fig. 4. Contours de $C_{i,max}$ (le mode le moins stable) : Cas de l’écoulement de Poiseuille plan d’un fluide de Bingham avec $ap = 0.6$.

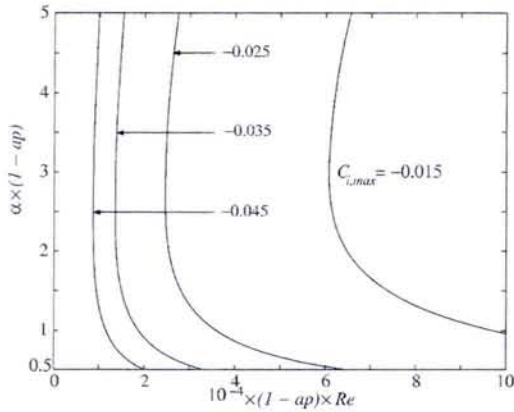


Fig. 5. $C_{i,max}$ contours for $K = 0.5$ and $ap = 0.6$.
 Fig. 5. Contours de $C_{i,max}$ pour $K = 0,5$ et $ap = 0,6$.

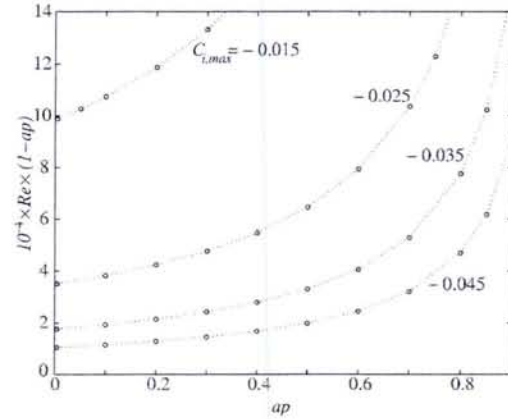


Fig. 6. Effect of the plug zone thickness ap , on the flow stability.
 Fig. 6. Effet de l'épaisseur ap , de la phase «solide» sur la stabilité de l'écoulement.

in the spacing between the curves as $C_{i,max}$ is increased, indicates that the flow is linearly stable. In fact, within the range of parameters considered here ($\hat{\alpha} \leq 5$, $\hat{Re} \leq 10^5$), instabilities do not exist. Similar results are obtained for an annular duct with different radii ratios, in the internal and external fluid regions. As an example, Fig. 5 gives for the external fluid region, contours of $C_{i,max}$, for a radius ratio of 0.5 and $ap = 0.6$. As for plane channel, the characteristic of the flow stability is clearly shown by the spacing between the contours.

The effect of the plug zone thickness on the flow stability for a given perturbation characterized by an axial wave number α can be appreciated through Fig. 6. Contours of $C_{i,max}$ for $\alpha = 1$, are depicted in the plane (ap, \hat{Re}) . For each contour, \hat{Re} increases with increased ap , indicating that the larger ap is, the stronger the stability. Similar variations are observed if one considers others values of α . Let us consider now the case where $ap \rightarrow 0$, i.e., $B \rightarrow 0$. Fig. 6 shows for the lowest value of ap considered here, $ap = 0.005$, that the flow remains linearly stable, contrary to the Newtonian case. We are not surprised by this result, in fact, as long as $ap \neq 0$, there is a plug zone, and the condition $D_{II} = 0$ has to be satisfied at the solid-liquid interface to ensure continuity of stress. This condition leads to $u = 0$ at the interface, while for Newtonian fluid u_{new} is maximum as shown in Fig. 3. Therefore, the eigenfunction (for the least stable mode) for Bingham fluid as $B \ll 1$ is different from that corresponding to Newtonian fluid ($B = 0$).

To draw the conclusion from the present study, it is found that the Poiseuille flow of Bingham fluid is linearly stable to infinitesimal axisymmetric perturbations, and ($B = 0$) is a singularity limit. For future work, linear stability to asymmetric perturbations will be considered.

Acknowledgements

The authors thank J. Dusek for fruitful discussions.

References

[1] C. Nouar, I. Frigaard, Nonlinear stability of Poiseuille flow of a Bingham fluid; theoretical results and comparison with phenomenological criteria, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 100 (2001) 127–149.
 [2] P.G. Drazin, W.H. Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, 1995.
 [3] J.E. Mott, D.D. Joseph, Stability of parallel flow between concentric cylinders, Phys. Fluids A 11 (1968).

- [4] I.A. Frigaard, S.D. Howison, I.J. Sobey, On the stability of Poiseuille flow of a Bingham fluid, *J. Fluid Mech.* 263 (1994) 133–150.
- [5] J.G. Oldroyd, A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham solid, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 43 (1947) 100–105.
- [6] B. Bird, G.C. Dai, B.J. Yarusson, The rheology and flow of viscoplastic material, *Rev. Chem. Engrg.* 1 (1983) 1–101.
- [7] E.J. Fordham, S.H. Bittleston, M.A. Tehrani, Viscoplastic flow in centered annuli, pipes and slots, *Ind. Engrg. Chem. Res.* 39 (1991) 517–524.

Bibliographie

- [1] M. Allouche, I. A. Frigaard, G. Sona, Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel, *J. Fluid Mech.*, 424 (2000) 243-277
- [2] H. A. Barnes, K. Walters, The Yield stress myth, *Rheol. Acta*, **24**, 323-326, (1985).
- [3] H. A. Barnes, J. F. Hutton, K. Walters, *An introduction to rheology*, Elsevier, Amsterdam, (1989).
- [4] R. B. Bird, G. C. Dai, The rheology and flow of viscoplastic materials, *Reviews in Chemical Engineering*, 1(1) (1983) 1-70
- [5] M. Bercovier, M. Engelman A finite element method for incompressible non-Newtonian flows, *Journal of Computational Physics*, **36**, 313-326, (1980).
- [6] A. N. Beris, J. A. Tsamopoulos, R. C. Armstrong, R. A. Brown. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic. *J. Fluid Mech.* 50 225-251, (1985).
- [7] P. Corbett et A. Bottaro, "Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient", *Phys. Fluids*, Vol. 12, 120-130, (2000).
- [8] F. H. Busse, Bounds on the transport of mass and momentum by turbulent flow between parallel plates, *Z. Angew. Math. Phys.* 20, 1 (1969).
- [9] K. M. Butler, B. S. Farrell, Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flows, *Physics of fluids*, A 4, 1637 (1992).
- [10] E.C. Bingham, *Fluidity and plasticity*, McGraw-Hill, 215-218, (1922).
- [11] K. M. Case, Stability of inviscid plane Couette flow, *Physics of fluids*, 3 (2), 143-148.
- [12] P. Coussot, A. I. Leonov, J. M. Piau, Rheology of concentrated dispersed systems in a low molecular weight matrix, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 46 (1993) 179-217
- [13] P. G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University press (1981).
- [14] R. C. DiPrima, G. J. Habetler, A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability. *Arch. Rat. Mech. anal.* 32, 218-227.
- [15] E.J. O'Donovan, R.I. Tanner, Numerical study of the Bingham squeeze film problem *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **15**, 75-83, (1984).

- [16] P. Doremus, Fluides à seuil : Modèles structurels phénoménologiques, Thèse de Doctorat-ès-Sciences, I.N.P. Grenoble, (1989).
- [17] A. A. Draad, F. T. M. Nieuwstadt, The earth's rotation on laminar pipe flow, *J. Fluid. Mech.* 36, 297-308 (1998).
- [18] G. Duvaut, J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1976).
- [19] T. Ellingsen, E. Palm, Stability of linear flow, *Phys. fluids*, 18, 487 (1975).
- [20] M. P. Escudier, F. Presti, Pipe flow of a thixotropic liquid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 62, 291-306, (1996).
- [21] I. A. Frigaard, S. D. Howison, I. J. Sobey, On the stability flow of a Bingham fluid, *J. Fluid Mech.*, 263 (1994) 133-150
- [22] I. A. Frigaard, C. Nouar, On three-dimensional linear stability of Poiseuille flow of Bingham fluids, *Physics of fluids*, 15(10) (2003) 2843-2851
- [23] D. Gottlieb, S. A. Orszag, *Numerical analysis of Spectral methods : Theory and applications*, Soc. Indus. and Appl. Math., Philadelphia (1977).
- [24] K. M. Butler, B. F. Farrell, Three-dimensional optimal perturbations in viscous Shear flow, *Phys. Fluids A* 4 (8), 1637-1650, (1992).
- [25] B. F. Farrell, P. J. Ioannou, Generalized stability theory. II. Nonautonomous operators. *J. Atm. Sci.* 53, 2041-2053 (1999).
- [26] I. Gavarini, A. Bottaro, F.T.M Nieuwstadt, The initial stage of transition in cylindrical pipe flow : Role of optimal base-flow distortions, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 517, 2004, pp. 131-165.
- [27] Gupta, G. K., Hydrodynamic stability of the plane Poiseuille flow of an electro-rheological fluid *International Journal of Non Linear Mechanics*. July 1999 ; 34(4) : 589-602
- [28] L. H. Gustavson, Energy growth of three dimensional disturbances in plane Poiseuille flow, *J. Fluid. Mech*, 224, 241 (1991).
- [29] R. W. Hanks, The laminar-turbulent transition for fluids with a yield stress, *A. I. Ch. E. J.*, 9(1) (1963) 306-309
- [30] R. W. Hanks, A theory of laminar flow stability, *A. I. Ch. E. J.*, 15(1) (1969) 25-28
- [31] R. W. Hanks, J. M. Peterson, Complex transitional flows in concentric annuli, *A. I. Ch. E. J.*, 28(5) (1982) 800-806
- [32] B. O. A. Hedström, Flow of plastics materials in pipes, *Ind. Eng. Chem.*, 44(3) (1952) 651-656
- [33] N. Kabouya, C. Nouar, On the stability of a Bingham fluid flow in an annular channel, *C Comptes-Rendus-de-l'Academie-des-Sciences-Serie-II-b/Mecanique*, 331(2) : 149-56 (2003)

- [34] D. D. Joseph, Eigenvalue Bounds for the Orr Sommerfel equation, *J. Fluid Mech.* **33**, 617-621 (1968).
- [35] D. D. Joseph, S. Carmi, Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli and channels. *Quart. Appl. math.* **26**, 575-599 (1969)
- [36] E. F. Kurtz, S. H. Crandall, Computer-aided Analysis of Hydrodynamic Stability, *Journal Of Mathematics and Physics, Physics of fluids*,(1955).
- [37] C. C. Lin, *The theory Of Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press , *Physics of fluids*, **41**, 264-279(1962).
- [38] G.G. Lipscomb, M.M. Denn, Flow of Bingham fluids in complex geometries, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, **14**, 337-346, (1984).
- [39] R. R. Huilgol, Variational principle and variational inequality for a yield stress fluid in the presence of slip, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, **75**, 231-251 (1998).
- [40] L.M. Mack, A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer, *J. Fluid. Mech.* **73**, 497-520 (1976).
- [41] M. R. malik, D. I. A. Poll, Effect of curvature on three-dimensional boundary-layer stability, *AIAA J.* **23**, 1362-1369,(1985)
- [42] , A. B. Metzner, J. C. Reed, Flow of non -Newtonian fluids correlations of laminar, Transansition and turbulent flow regions, *A. I. Ch. Journal*, **1(A)** 433-435, (1955).
- [43] , P. Mishra, G. Tripathi, Transition from laminar to turbulent flow of purely viscous non-Newtonian fluids in tubes, *Chem. Eng. Science*, **26**, 915-921, (1971).
- [44] C. Nouar, I. A. Frigaard, Nonlinear stability of Poiseuille flow of a Bingham fluid : theoritical results and comparaison with phenomenological criteria, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **100** 127-149 (2001).
- [45] C. Nouar, P. Riha, A. Lefèvre, Propagation of the interface in a fluid suspension after the onset of shear flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **115** 115-124 (2003).
- [46] J. G. Oldroyd, "A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham solid," *Proc. Camb. Phil. soc.* **43**, 100-105 (1947).
- [47] W. M. F. Orr, The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part I : A perfect liquid. Part II : A viscous liquid. *proc. R. Irish Acad. A* **27**, 9-138 (1907).
- [48] S. A. Orszag, Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid. Mech.* **50**, 684-703 (1971)
- [49] T. C. Papanastasiou, Flows of materials with yield, *J. Rheol.* **31(5)** (1987) 385-404
- [50] J. T. Park, R. J. Mannheimer, T. A. Grimley, T. B. Morrow, Pipe flow measurement of transparent non Newtonian slurry, *Journal of fluids. Engineering*, **111**, 331-336 (1989)
- [51] J. Peixhino, Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite, Thèse (UHP),(2004).

- [52] M.C. Potter, Stability of plane Couette-Poiseuille flow, *J. Fluid. Mech.* 24, 609-619 (1966).
- [53] W. Prager, *Studies in Mathematics and Mechanics*, R. Von Mises presentation Volume Academic Press, New York, 208-216, (1954).
- [54] S. C. Reddy, P. J. Schmid, D. S. Henningson, Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator, *SIAM J. Appli. Math.*, 53 (1), 15-57,(1993).
- [55] S. C. Reddy, D. S. Hennigson, Energy growth in viscous channel flows, *J. Fluid Mech.*, 252, 209-238,(1993).
- [56] N. W. Ryan, M. M. Johnson, Transition from laminar to turbulent flow in pipes, *A. I. Ch. E. J.*, 5, 433-435(1959).
- [57] I. V. Schensted, Contribution to the theory of hydrodynamic stability, PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, (1961).
- [58] P. J. Schmid, D. S. Henningson, Optimal energy density growth in Hagen Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 277, 197-225, (1994).
- [59] P. J. Schmid, D. S. Hennigson, *Stability and transition in shear flows*, Springer-Verlag, New york, (2001).
- [60] P. T. Slatter, The laminar- turbulent transition prediction for non-Newtonian slurries, *Proceedings of the International Conference on Problemes in Fluid Mechanics and Hydrology*, Vol. 1, 247-256, Prague (1999).
- [61] J. L. Synge, Hydrodynamic stability, *Pub. Amer. Math. Soc.*, 2, 227-269 (1938).
- [62] T. Schwedoff, *Rapp. Congressb Phys.*, 1, 478, (1900).
- [63] L. H. Thomas, The Stability of Plane Poiseuille Flow, *Physical Review*, 780-783, (1953).
- [64] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, T. A. Driscoll, Hydrodynamic stability without eigenvalues, *science*, 261, 578-584, (1993).
- [65] L. N. Trefethen, Pseudospectra of linear operators, *SIAM Rev.*, 39, 383-406 (1997).
- [66] R. M. Turian, T. W. Ma, F.L.G.Hsu, and D. Sung, Flow of concentrated non Newtonian slurries : Friction losses in laminar, turbulent and transition flow through straight pipe, *Int. J. Multiphase flow* 24, 225-242 (1998).
- [67] I. C. Walton, S.H. Bittleston, The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annuli, *J. Fluid Mech.*, 222, 39-60, (1991).

Mademoiselle KABOUYA Nadjiba

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1

en MECANIQUE & ENERGETIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER N° J051

Nancy, le 11 juillet 2005

Le Président de l'Université



Titre : *Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique : Etudes modale et non modale.*

Résumé La stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Bingham est analysée. L'intérêt de cette étude provient des problèmes rencontrés lors de la cimentation de puits de pétrole ; il est ici nécessaire de connaître la structure de l'écoulement des fluides (ciment, boues de forage). En particulier, les conditions de transition laminaire-turbulent sont importantes. L'écoulement de base est caractérisé essentiellement par la présence dans sa partie centrale d'une zone iso-vitesse, où la contrainte est inférieure à un seuil, qui se déplace comme un solide indéformable. L'analyse modale qui repose sur une perturbation de forme exponentielle montre que l'écoulement est linéairement stable. Le caractère non normal de l'opérateur linéaire montre qu'une croissance transitoire de l'énergie de la perturbation est possible aux temps courts. Les perturbations optimales ainsi que les conditions de non augmentation de l'énergie sont déterminées, en fonction du nombre de Bingham.

Mots clés : *Stabilité linéaire, fluide viscoplastique, fluide de Bingham, écoulement de Poiseuille, perturbations optimales..*

Title : *Influence of the yield stress on the stability of a Poiseuille flow of a viscoplastic fluid : Modal and non modal approaches*

Abstract The linear stability of the Poiseuille flow of a Bingham fluid is analysed. The present study is motivated by the problems encountered during the cementation of oil wells. In such situations, it is mandatory to know the structure of the flow of the different fluids involved (cement, mud of drilling). More specifically, the conditions of the transition from the laminar to the turbulent regime are important. The mean flow is essentially characterized by the presence in its central part of a plug zone, which moves as a rigid solid. The modal analysis relies upon an infinitesimal disturbance of the mean flow of exponential form, and shows that the Poiseuille flow is linearly stable. The non normal character of the linear operator demonstrates that a transient growth of the energy associated to the perturbation is possible, for short times. The optimal disturbances and the conditions of no growth of energy are determined, versus the Bingham number.

Key words : *Linear stability, viscoplastic fluid, Bingham fluid, Poiseuille flow, optimal perturbations.*