



Algèbre galactique, un procédé de calcul formel, relatif aux semi-fonctions, à l'inclusion et à l'égalité

Aristide Mégreli

► To cite this version:

Aristide Mégreli. Algèbre galactique, un procédé de calcul formel, relatif aux semi-fonctions, à l'inclusion et à l'égalité. Matière Condensée [cond-mat]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1990. Français. NNT : 1990NAN10396 . tel-01754373

HAL Id: tel-01754373

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754373>

Submitted on 30 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

CRIN

INRIA

Université *Nancy I*

U.F.R. S.T.M.I.A.

Informatique

THÈSE

(doctorat d'université)

présentée par Aristide Mégreis

Algèbre galactique — Un procédé de calcul formel,
relatif aux semi-fonctions, à l'inclusion et à l'égalité

Thèse soutenue mardi 11 septembre 1990 devant la commission d'examen

JURY

Jean-Pierre Jouannaud, rapporteur et président
Claude Kirchner, directeur de thèse
Jean-Louis Krivine
Pierre Lescanne
Pierre Marchand, rapporteur
René Schott

ALGÈBRE GALACTIQUE

—

Un procédé de calcul formel,
relatif aux semi-fonctions,
à l'inclusion et à l'égalité

Dimanche 7 octobre 1990

Copyright © 1990. Copie autorisée sans autre avis si mention complète de l'organisme et de l'auteur, et si à but non lucratif.

Adresse de l'auteur : Centre de recherche en informatique de Nancy / B.P. 239 / F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX / France. *Numéro de téléphone* : 83-59-30-00. *Numéro de télécopie* : 83-27-83-19. *Adresse électronique* : "megrelis@loria.crin.fr".

Mots-clefs

Algèbre universelle, algèbre partielle, algèbre ordosortée, algèbre galactique, logique mathématique, logique symbolique, logique du premier ordre, logique équationnelle, logique de l'égalité, logique ordosortée, règles d'inférence, calcul symbolique, égalité, identité remarquable, semi-fonction, fonction partielle, sous-sort, type, type de données.

Résumé

L'algèbre universelle est l'un des fondements théoriques de l'informatique. Mais c'est un calcul insuffisant et trop simple pour au moins deux raisons :

- on ne distingue aucun sous-ensemble du support ; il est donc impossible de raisonner sur telle partie du support à laquelle on s'intéresse ;
- on ne considère que des fonctions, confondant ainsi domaine d'une fonction et support de l'algèbre.

Aussi l'algèbre universelle *stricto sensu* est-elle inapplicable à l'étude de certains objets mathématiques (les corps par exemple) et à la modélisation de logiciel (à cause des exceptions).

On est donc conduit à s'intéresser à des théories plus générales.

- Pour raisonner sur l'inclusion on dispose de l'algèbre ordosortée (order-sorted algebra).
- Pour raisonner sur les semi-fonctions (" fonctions partielles ") on dispose de l'algèbre partielle.

Malheureusement de nombreux auteurs ne jugent pas la première satisfaisante. Et la seconde ne connaît pas véritablement le succès.

J'ai donc repris l'étude à la source, pour mettre à jour au bout du compte *un procédé de calcul unique et uniforme, applicable et aux semi-fonctions* (algèbre partielle) *et à l'inclusion* (algèbre ordosortée) *et à l'égalité* (algèbre universelle). Ce procédé est une logique formelle.

Les caractéristiques originales et importantes de l'approche sont celles-ci...

- *On interprète tous les termes sans exception.* Tout terme dénote un objet. Par exemple, le terme $[1 / 0]$ a un sens ! (dénote un objet).
- *Toute propriété relative aux objets qu'on désigne par des symboles, on l'exprime par une formule.* On s'abstient de coder certaines informations par des *déclarations*. Par exemple, $[\text{Nat} =< \text{Int} .]$ est une formule (tout entier naturel est un entier relatif).
- *Sorter (typer), c'est prouver.* Le typage n'est pas une opération statique ou grammaticale ; qu'un terme soit de tel type est un axiome ou un théorème.

La logique proposée a toutes les propriétés souhaitées :

- elle est robuste ; on ne peut lui opposer aucun des paradoxes connus ;
- elle est *complète* ;
- elle est une *généralisation exacte de la logique de l'égalité de l'algèbre universelle* ;
- enfin, chaque classe de modèles comprend un magma libre et, sous une condition mineure, un magma initial ; ceci est une propriété intéressante pour la spécification algébrique.

Digest

Universal algebra is one of the theoretical foundations of computer science, especially with regard to algebraic specification [18,19,21]. But it is an insufficient calculus for at least two reasons:

- one does not distinguish any *subset* of the carrier; the only set it is possible to reason about is therefore the carrier itself;
- one considers only (total) functions; so, whatever the function, its *domain* is the carrier.

For these reasons, it is not possible to apply universal algebra *stricto sensu* either to certain mathematical objects (such as fields) or to many programs (because of exceptions). One has to look for more general theories, notably these:

- order-sorted algebra [25], to deal with subsets and inclusion;
- partial algebra [14,16,17], to deal with semi-functions (“partial functions”).

Unfortunately, order-sorted algebra is a subject of debate [26,28,29,40,31]. And partial algebra has yet to be widely adopted.

Where can we go from here? Considering that partial algebra lacks the concept of subset, and order-sorted algebra that of semi-function, I have looked for and eventually discovered a *unique and uniform calculus*, applicable at the same time to equality (universal algebra), to semi-functions (partial algebra), and to subsets and inclusion (order-sorted algebra). This calculus, called “G algebra”, is a formal logic.

The original and important characteristics of the approach are these...

- *Symbols are not overloaded*: one symbol, one object; denotation is functional.
- *Each term is interpreted unconditionally*, i.e. each term denotes an object. For instance, $[x / y]$ denotes the semi-function

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \{(\xi, \eta) \mid \eta \neq 0\} \ni (\xi, \eta) & \longmapsto & \xi/\eta \end{array}$$

And $[1 / 0]$ denotes the empty semi-function $\mathbf{R}^0 \rightarrow \mathbf{R}$ (semi-function whose graph is the empty set). Therefore $[1 / 0]$ has a meaning! (denotes an object).

- *Each item of information is coded as a formula*; not as a declaration to be used at parsing-time. For example, $[\text{Nat} =< \text{Int} .]$, $[* : \text{Nat Nat} \gg \text{Nat} .]$ and $[s\ 0 : \text{Nat} .]$ are formulae (any natural is an integer; a product of naturals is a natural; the successor of zero is a natural). The notion of signature disappears: a specification is nothing but a set of *axioms*.

Because each item of information is coded as a formula, there is only one computing process: symbolic deduction (controlled by inference rules). This process is uniform, i.e. identity-formulae are not privileged; the logic is more than a logic of equality.

- *Typing is proving*. To discover that a term is of a certain type is either *to read an axiom* or *to formally prove a theorem*. Typing is not static, i.e. not connected to parsing.

As a corollary, the static notion of a well-typed term disappears: the relation between a term and a type is a predicate; a term may have zero, one or several types.

- Any set of formulae is acceptable. For example, this text is a legal specification:

```
0 : Re .
0i : Im .
0 = 0i .
```

(0 is a real number; 0i is a pure imaginary; “0” et “0i” are synonyms).

The proposed calculus has all the desired properties:

- the logic is robust, i.e. not subject to known paradoxes [28,40];
- the logic is complete (completeness theorem);
- G algebra is a superset of universal algebra;
- and each class of models contains a free algebra and an initial algebra; G algebra is therefore applicable to algebraic specification (“initial” semantics).

Table des matières

Introduction	xiii
Bibliographie	xxv
Liminaire	1
1 Semi-fonction	3
1.1 Graphe fonctionnel	3
1.2 Semi-fonction	4
1.3 Fonction	5
1.4 À un même graphe correspondent de nombreuses semi-fonctions . .	6
1.5 Semi-fonction dont la base est un produit cartésien	8
1.6 Semi-constante	8
1.7 Terminologie	9
I Magma	11
2 Vocabulaire	14
2.1 Qu'est-ce qu'un symbole ?	14
2.2 Ce qu'on considérera comme un symbole (les symboles-objets) . .	16
2.3 Écrire un symbole, écrire un symbole, écrire etc.	17
2.4 Les huit symboles réservés	17
2.5 Vocabulaire	17
2.6 Grand-vocabulaire	19
3 Magma	20
3.1 Magma	21
3.2 Exemples	22
4 Terme — I	24
4.1 Terme	25
4.2 Analyser un terme	27
4.3 Interpréter un terme	31
4.3.1 Interpréter un terme sans variable	32

4.3.2	Interpréter un terme dans lequel apparaît au moins une variable	33
4.3.3	Bilan — Un procédé uniforme d'interprétation	35
4.3.4	L'ordre d'énumération des variables importe peu	36
4.3.5	Le choix des variables importe peu	37
5	Terme — II — Théorèmes fondamentaux	39
5.1	Λ , un remarquable magma de termes	40
5.2	Interpréter un substituat	42
5.3	Interpréter un sous-terme	48
5.4	Interpréter un remplaçat	49
6	La classe des $\mathcal{V}$-magmas — I	53
6.1	Homomorphisme	53
6.2	Homomorphisme et semi-fonctions τ	55
6.3	Sous-magma	57
6.4	Sous-magma et semi-fonctions τ	60
6.5	Isomorphisme	61
6.6	L'empreinte d'un homomorphisme est le support d'un magma . . .	62
6.6.1	Le magma Emp α	63
6.6.2	Propriétés	63
6.7	Épimorphisme, image $\mathcal{V}$ -homomorphe	64
6.8	Magma-produit	66
6.8.1	Magma-produit-binaire	67
6.8.2	Magma-produit et semi-fonctions τ	68
7	La classe des $\mathcal{V}$-magmas — II — Congruence et magma-quotient	69
7.1	Congruence	69
7.2	Congruence et semi-fonctions τ	70
7.3	Magma-quotient	72
7.3.1	Magma-quotient	72
7.3.2	Propriétés	73
7.4	Magma-quotient et semi-fonctions τ	74
7.5	Tout homomorphisme est la composée de trois homomorphismes remarquables	77
7.5.1	La congruence liée à l'homomorphisme	78
7.5.2	À tout homomorphisme correspond un isomorphisme — L'isomorphisme $\bar{\alpha}$	78
7.6	Super-congruence	82
II	Logique	87
8	Formule	89
8.1	Formule-confinement	90
8.2	Formule germinale dans laquelle apparaît au moins un terme . . .	90
8.2.1	Formule-existence	90

8.2.2	Formule-appartenance	91
8.2.3	Formule-identité	92
8.3	Formule germinale sans terme	93
8.3.1	Formule-inclusion	93
8.3.2	Formule-conduit	93
9	Le sens des formules	95
9.1	Le sens d'une formule-existence	96
9.2	Le sens d'une formule-appartenance, le sens d'une formule-identité	98
9.2.1	Formule-appartenance	98
9.2.2	Formule-identité	99
9.3	Le sens d'une formule sans terme	100
9.3.1	Formule-inclusion	100
9.3.2	Formule-conduit	100
9.3.3	Équivalence	101
9.4	Propriétés fondamentales	102
10	Exposition	107
10.1	Exposition	108
10.2	Confinement, garniture	109
10.3	Coder une formule germinale sans terme	109
11	Modèle	111
11.1	Définition	111
11.2	La classe des modèles	112
12	Les règles d'inférence	114
12.1	Hypothèses générales	115
12.2	Les six règles simples	115
12.3	Substituer des termes aux variables	116
12.4	Remplacer à l'identique	117
12.5	Coder et décoder une formule-inclusion, une formule-conduit (for- mule sans terme)	117
13	Déduction symbolique	119
13.1	Théorème	119
13.2	Déductions faciles — Exemples	120
13.3	Règles d'inférence déduites	121
14	Exposition, et déduction symbolique — Exemples	126
14.1	Exposition minimale	126
14.2	Expositions dont on devine le sens	127
14.2.1	Les listes de bits	127
14.2.2	Les entiers naturels	127
14.2.3	Les listes d'entiers naturels	128
14.2.4	Les booléens	129
14.2.5	Deux semi-groupes liés par un homomorphisme	130

14.3	Les “ paradoxes ” de G. Smolka	131
14.3.1	Premier “ paradoxe ”	131
14.3.2	Deuxième “ paradoxe ”	132
14.4	Expositions “ sauvages ”	132
14.4.1	Exemple A	132
14.4.2	Exemple B	133
14.4.3	Exemple C	133
14.4.4	Exemple D	134
14.4.5	Exemple E	135
15	Le théorème de correction	136
15.1	Deux lemmes	136
15.1.1	Formule-existence vraie et substitution “ sortée ”	136
15.1.2	Formule-existence vraie et remplacement à l’identique	138
15.2	Le théorème de correction	139
15.3	Remarquer	148
16	Le magma des termes significatifs	149
16.1	Le magma des termes significatifs, ${}^{\$}\Theta$	149
16.1.1	Le support — Les termes significatifs	149
16.1.2	Les sous-ensembles	149
16.1.3	Les semi-constantes	150
16.1.4	Les autres semi-fonctions	150
16.2	Interpréter un terme	150
16.2.1	Interpréter un terme sans variable	150
16.2.2	Interpréter un terme dans lequel apparaît au moins une variable	151
16.3	Le sens d’une formule-existence	154
16.4	La super-congruence remarquable, $\equiv$	157
16.5	Un $\mathcal{E}$ -modèle remarquable, ${}^{\$}\Theta/\equiv$	158
17	Le théorème de complétude	163
III	Exploration	169
18	Premiers constats	171
18.1	L’algèbre universelle toute entière est comprise dans l’algèbre G	171
18.1.1	Coder une théorie égalitaire (algèbre universelle)	171
18.1.2	Un constat inattendu : trois règles suffisent	173
18.2	Quelques traits de la logique présentée	174
18.2.1	Qu’est-ce qu’un système formel ?	174
18.2.2	Toute exposition est sémantiquement cohérente	175
18.2.3	Toute exposition est formellement cohérente	175
18.2.4	Les expositions totalitaires sont exceptionnelles	175
18.2.5	Il y a des expositions non solubles	176

19 Un magma libre dans la classe des modèles	178
19.1 Υ -magma-libre d'une classe de $\mathcal{V}$ -magmas	178
19.2 Un magma libre dans la classe des $\mathcal{E}$ -modèles	180
20 Un magma initial dans la classe des modèles	190
20.1 Toute bonne tranche d'un magma est le support d'un sous-magma remarquable	190
20.1.1 Bonne tranche	190
20.1.2 Le sous-magma remarquable	191
20.2 Le magma des termes significatifs sans variable, ${}^{\Delta}\Theta$	197
20.3 Un $\mathcal{E}$ -modèle remarquable, ${}^{\Delta}\Theta/\triangle$	199
20.4 Un magma initial dans la classe des $\mathcal{E}$ -modèles	203
 IV Finale	 209
21 Conclusion, discussion, prospective	211
 V Annexe	 215
A Notation	217
A.1 Préliminaires — Ensembles d'indices	217
A.2 Notation générale	217
A.2.1 Produit d'ensembles	217
A.2.2 Ensemble d'éléments désignés	218
A.2.3 Multiplet	218
A.2.4 Argument et résultat	218
A.2.5 Divers	218
A.3 Désigner des symboles et des séquences symboliques	219
A.3.1 Variable syntaxique	219
A.3.2 Variables apparaissant dans un terme ou une formule — Notation amplifiée	220
A.3.3 Concaténation de séquences symboliques	220
 B Lexique — Mots anglais proposés	 221
C Index — Symboles mathématiques	222
D Index — Mots	228

*La vie est courte, l'art est long, l'occasion fugitive,
l'expérience trompeuse, le jugement difficile.*

HIPPOCRATE
(*Aphorismes*, I, I)
IV^e s. av. J.-C.

Remerciements

Je remercie ceux qui m'ont fortement encouragé à étudier ce sujet et à formuler cette thèse, et qui m'ont aidé : Claude Kirchner, Pierre Marchand.

Je remercie ceux avec qui j'ai discuté et qui ont influencé certains choix : Jean-Luc Rémy, Hélène Kirchner, Pierre Lescanne, J. Hsiang, M. Okada, Gert Smolka.

Je remercie les membres du jury, en particulier les deux rapporteurs.

Je remercie les membres du CRIN ou de l'INRIA qui m'ont rendu service : Agnès Valdenaire, Jean-Pierre Finance, Nadine Beurné-Gautier, Jean-Claude Giese.

Je remercie ceux qui m'ont hébergé à Nancy : Marika et Éric Blondel, Martine et François Schwaab, Brigitte et Jacques Jaray, Maryse et Alain Quéré.

Je remercie mes amis et ma mère.

Introduction

- Motivation — Le problème à résoudre
- La solution proposée
- D'autres recherches, passées et présentes
- Guide de lecture
- Bibliographie

Motivation — Le problème à résoudre

Les informaticiens ont compris depuis longtemps l'intérêt de l'algèbre universelle et de l'algèbre hétérogène (many-sorted algebra), en particulier pour spécifier les types de données [18,19,21].

De cette manière, on décrit très bien les nombres complexes par exemple.

Exemple — Complexe

On considère l'ensemble des réels, qu'on appelle “ Reel ”, et l'ensemble des complexes, qu'on appelle “ Complexe ”.

On peut désigner un complexe comme un couple de réels ($z = x + iy$), c'est-à-dire désigner sa partie réelle, et désigner sa partie imaginaire. On révèle ainsi trois *fonctions* :

```
co : Reel Reel -> Complexe .
re : Complexe -> Reel .
im : Complexe -> Reel .
```

Et on remarque immédiatement ces identités remarquables (lire la première ligne ainsi : “ quel que soit x un réel, quel que soit y un réel, quel que soit z un complexe ”) :

```
x :: Reel . y :: Reel . z :: Complexe .
re ( co x y ) = x .
im ( co x y ) = y .
co ( re z ) ( im z ) = z .
```

(les parenthèses sont facultatives et n'apparaissent ici que pour la lisibilité ; la notation est “ préfixée ”).

On peut ensuite, par référence à des opérations relatives aux nombres réels, présenter l'addition des complexes, la multiplication etc.

Il se trouve que cette description algébrique est complète et surtout abstraite : rien d'important n'est omis, la description n'est pas ambiguë ; et on n'a rien dit du codage informatique des réels et des complexes. □

Malheureusement l'algèbre universelle et l'algèbre hétérogène *stricto sensu* ne suffisent pas dans bien des cas, car rares sont les opérations pour lesquelles on ne fait pas certaines hypothèses sur les arguments. L'exemple traditionnel est le type pile : on peut dépiler... *sauf si la pile est vide !* (alors qu'on peut extraire la partie réelle de tout complexe, on ne peut dépiler toute pile).

Pour cette raison on est amené à considérer des *sous-ensembles d'arguments convenables*, et à introduire la notion de *sous-sort*e [25] qui paraît naturelle et qu'on n'a aucun mal à accepter. Mais elle ne suffit pas, car on trébuche encore sur le problème du sens des termes.

✕ *Exemple — Les entiers naturels et les entiers relatifs*

Encore adolescent, on apprend à plonger l'ensemble des nombres entiers naturels dans celui des entiers relatifs, de manière à pouvoir toujours soustraire tout nombre à tout nombre :

```
Nat =< Int .
- : Int Int -> Int .
```

On étend alors de nombreuses opérations aux entiers relatifs (addition, multiplication etc.). Certaines restent toutefois attachées aux naturels, par exemple la factorielle :

```
fact : Nat -> Nat .
```

(la factorielle de 0 est 1 ; la factorielle de $n + 1$ est $n + 1$ fois la factorielle de n).

Considérons alors ces deux nombres :

```
0 : Nat . 1 : Nat .
```

et tentons d'analyser le terme

```
fact ( 0 - 1 )
```

0 et 1 sont de sorte `Nat`, donc de sorte `Int` ; ils sont donc des arguments convenables de la soustraction, et `( 0 - 1 )` est de sorte `Int`.

Or un entier relatif n'est pas un argument convenable de `fact` ! Le terme `[fact ( 0 - 1 )]` n'est donc pas “ sortable ” ; il est “ mal formé ”. Le garde-fou a bien fonctionné et on est heureux de ne pas se lancer dans le calcul de la factorielle de -1 .

Analysons maintenant le terme

```
fact ( 1 - 0 )
```

On raisonne de la même façon pour découvrir que ce terme aussi n'est pas “ sortable ”, qu'il est “ mal formé ”. Pourtant chacun sait que 1 est un argument convenable de la factorielle. □

Ce mécanisme de discrimination n'est donc pas fin ; on rejette plus qu'il faut. Pour le mettre en œuvre, il a d'ailleurs fallu imaginer des aménagements opérationnels qui ne sont pas simples (le “ retract ” [46] par exemple).

Le *retract* est cet arrangement *opérationnel* : puisqu'on doit conserver certains termes qui sont significatifs bien que mal formés eu égard aux sortes (*fact* (1 - 0)), on adopte la règle *de ne rien rejeter à l'analyse grammaticale*, mais simplement de marquer les termes problématiques pour un traitement différé (on les accepte au bénéfice du doute jusqu'à en savoir plus).

Je ne trouve pas ce mécanisme très élégant pour au moins deux raisons.

1 — C'est un mécanisme *d'exception*. On renonce à un traitement *systématique*, uniforme, dont les qualités bien connues sont la simplicité et la solidité.

2 — Cette solution est *hétérogène*. On greffe un appendice dynamique sur un tronc statique avec l'espoir de conserver tout ce qu'on peut du typage grammatical, lequel m'apparaît ici comme une solution rapportée voire forcée.

Qu'on partage ou non ce sentiment, on admettra toutefois qu'avant d'adopter le *procédé* il faut prouver qu'il est correct. On ne peut le faire que par référence à un fondement mathématique (une sémantique) où le *retract* n'apparaît pas. L'algèbre G est un candidat bien adapté à cet usage.

Que peut-on conclure ? Le seul concept de sous-sortes ne suffit pas. *Il faut oser remettre en cause le typage traditionnel*, car il est une opération statique, grammaticale, et sans lien avec cette autre opération importante qu'est la déduction.

La solution proposée

Ce besoin des sous-sortes n'est semble-t-il qu'un symptôme : c'est le concept de fonction, hérité de l'algèbre universelle, qui ne suffit pas ; car on n'accepte plus de confondre support de l'algèbre et *domaine de définition d'une opération*. L'introduction du concept de sous-sortes va donc de pair avec l'élargissement du concept de fonction ; ces quasi-fonctions, je les appelle “ *semi-fonctions* ” (on dit couramment “ fonction partielle ” ; voir p. 9).

On généralise alors l'algèbre universelle pour tenir compte *et des semi-fonctions et des sous-ensembles* ; on étend en particulier la logique de l'égalité [9] et l'algèbre partielle [14,16,17]. Ce procédé élargi de calcul, je l'ai appelé “ algèbre G ” (“ G ” est l'abréviation de “ galactique ” ; “ algèbre galactique ” ressemble à “ algèbre universelle ”).

Quels en sont les ingrédients ? L'algèbre G a plusieurs caractéristiques importantes et originales, qu'on saisira bien si on la compare à des théories voisines (section *D'autres recherches, passées et présentes* ; voir *infra*).

- On applique soigneusement un calcul formel (manipulation mécanique des symboles), qu'on ne confond en aucun cas avec le raisonnement mathématique traditionnel. On procède ainsi comme un logicien [6,7].

Un symbole est le nom d'un seul objet (il n'y a pas de surcharge) : *la désignation est fonctionnelle* (à chaque symbole correspond un seul objet).

- On trouve et on adopte *une interprétation inconditionnelle des termes* : tout terme dénote un objet ! C'est possible et cela sera expliqué en détail. Voici l'idée.

Pour interpréter un terme, on peut penser à cette solution : on considère une certaine valuation des variables, puis, par référence à cette valuation, à

chaque terme on associe *si c'est possible* un élément du support (on peut interpréter ainsi $[x / 1]$; mais pas $[x / 0]$).

La solution proposée est toute autre. *À chaque terme on associe une fois pour toutes une semi-fonction, éventuellement vide* (on n'a pas besoin des valuations de variables et on les ignore). Par exemple, le terme $[x / y]$ dénote cette semi-fonction (division) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \{(x, y) \mid y \neq 0\} \ni (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

Et $[1 / 0]$ dénote la semi-fonction *vide* $\mathbf{R}^0 \rightarrow \mathbf{R}$ (semi-fonction dont le graphe est l'ensemble vide) ; donc $[1 / 0]$ a un sens !

- Toute propriété relative aux objets qu'on désigne par des symboles, toute information, *on l'exprime par une formule et pas autrement*. En particulier, on s'abstient de coder certaines informations par des *déclarations* qu'on exploiterait grammaticalement. On adopte ainsi un *procédé unique et uniforme de calcul*, la déduction symbolique (déduction par règles d'inférence).

Par exemple, $[\text{Nat} = < \text{Int} .]$ et $[- : \text{Int Int} >> \text{Int} .]$ *sont des formules* (pas des déclarations). Toutes les formules sont traitées à égalité.

- On abandonne la notion de terme “ bien typé ”. *La relation entre un terme et un type est un prédicat, ce lien n'étant ni fonctionnel, ni grammatical* : un terme peut avoir zéro, un ou plusieurs types ; et on sait qu'un terme est d'un certain type, soit parce qu'on lit un *axiome*, soit parce qu'on a su prouver formellement un *théorème*. Typier, c'est donc prouver ; c'est beaucoup plus qu'analyser grammaticalement.

On note qu'un terme est d'un certain type par une formule, et non par une annotation du terme. Par exemple, $[0 : \text{Nat} .]$ et $[s\ 0 : \text{Nat} .]$ sont des formules (0 est un naturel ; son successeur est un naturel).

- Le fait fondamental est le typage des variables (tout le monde est d'accord sur ce sujet) : une variable est le nom d'un élément quelconque *d'un certain sous-ensemble, qu'on désigne*. On écrit par exemple, une fois pour toutes,

$i :: \text{Nat} .$

Lire : “ Soit i n'importe quel entier naturel. ” ou “ Quel que soit i un entier naturel. ” Cette formule correspond à une quantification ($\forall i \in \mathbf{N}$).

Mais ce typage est tout à fait particulier, et on doit bien le comprendre. Par exemple, de $[i :: \text{Nat} .]$ et $[\text{Nat} = < \text{Int} .]$ on peut déduire $[i : \text{Int} .]$ (tout naturel est un relatif). *Mais en aucun cas $[i :: \text{Int} .]$!* (un naturel n'est pas un relatif quelconque).

- On peut écrire toute identité sans restriction. Par exemple, ceci est un texte tout à fait correct :

$0 : \text{Reel} .$
 $0i : \text{Im} .$
 $0 = 0i .$

(0 est un réel ; 0i est un imaginaire pur ; 0 et 0i sont synonymes).

Développant la théorie selon ces principes, et ayant résolu le problème du sens des termes (chapitre 4), on parvient à dégager un calcul formel (une logique) qui a les propriétés souhaitées : on énonce un ensemble de règles d'inférence (chap. 12), et on prouve que le calcul est correct (chap. 15), puis complet (chap. 17). On vérifie ensuite que la classe des modèles est organisée comme on le souhaite : on trouve un modèle libre (chap. 19) et un modèle initial (chap. 20).

Le problème de la spécification équationnelle des types de données par “sémantique initiale” est donc totalement résolu. Ainsi équipé, on parvient assez joliment à spécifier les types abstraits rebelles. On peut en juger sur un exemple ; plutôt que de décrire une nouvelle fois la pile, je propose que nous nous intéressions au type *dictionnaire*.

Exemple — Dictionnaire



Un dictionnaire est une collection d'articles, chaque article étant repéré par un identifieur (clef d'accès). Pour prendre connaissance d'un article, il suffit de désigner au système l'identifieur associé ; bien sûr, la demande n'est satisfaite que si l'article est présent.

On appelle “Di” l'ensemble des dictionnaires, “Ar” l'ensemble des articles, et “Id” l'ensemble des identifieurs. Il y a le dictionnaire vide :

`nil : Di .`

Et à tout dictionnaire, on peut ajouter un article :

`ajo : Ar Di >> Di .`

(à tout article et à tout dictionnaire correspond le dictionnaire augmenté ; on écrit “>>” parce qu'on considère maintenant des semi-fonctions et non des fonctions ; la classe des semi-fonctions est plus large).

On est libre d'ajouter un article dans l'ordre qu'on veut :

`x1 :: Ar . x2 :: Ar . y :: Di .
ajo x1 (ajo x2 y) = ajo x2 (ajo x1 y) .`

et il ne sert à rien d'ajouter deux fois le même article :

`ajo x1 ( ajo x1 y ) = ajo x1 y .`

Comment consulter un dictionnaire ? À tout article est attaché un identifieur :

`id : Ar >> Id .`

Et composer une requête, c'est désigner un identifieur et un dictionnaire :

`req : Id Di >> Req .`

(on appelle “Req” l'ensemble des requêtes). Puis on passe cette requête au système, qui répond en communiquant l'article *si la requête est valide* (c'est-à-dire s'il y a dans le dictionnaire un article dont l'identifieur est l'identifieur désigné) :

```
Req* =< Req .
cosu : Req* >> Ar .
```

(on appelle “ Req* ” le sous-ensemble des requêtes valides ; “ cosu ” est l’abréviation de “ consulter ”).

Comment caractériser les requêtes valides ? Il faut et il suffit que l’identifieur désigné soit l’identifieur d’un article du dictionnaire désigné :

```
x1 :: Ar . y :: Di .
req ( id x1 ) ( ajo x1 y ) : Req* .
```

Dans ce cas, l’article communiqué est bien celui qu’on attend :

```
cosu req ( id x1 ) ( ajo x1 y ) = x1 .
```

On a fini de spécifier le dictionnaire. Voici le texte complet :

```
x1 :: Ar . x2 :: Ar . y :: Di .

nil : Di .
ajo : Ar Di >> Di .
ajo x1 ( ajo x2 y ) = ajo x2 ( ajo x1 y ) .
ajo x1 ( ajo x1 y ) = ajo x1 y .

id : Ar >> Id .
req : Id Di >> Req .
Req* =< Req .
cosu : Req* >> Ar .
req ( id x1 ) ( ajo x1 y ) : Req* .
cosu req ( id x1 ) ( ajo x1 y ) = x1 .
```

On peut maintenant calculer. Soient deux articles et leurs deux identifieurs (des constantes) :

```
a1 : Ar . a2 : Ar .
i1 : Id . i2 : Id .
id a1 = i1 . id a2 = i2 .
```

On peut montrer que

```
req i1 ( ajo a2 ajo a1 nil ) : Req* .
```

(req i1 (ajo a2 ajo a1 nil) est une requête bien formée) ; et que

```
cosu ( req i1 ( ajo a2 ajo a1 nil ) ) = a1 .
```

Pour cela, on met en œuvre une technique de preuve formelle (logique généralisée de l’égalité). On prouve d’abord deux lemmes.

Lemme 1

$$\frac{\text{ajo} : \text{Ar Di} \gg \text{Di} . \text{a2} : \text{Ar} . \text{nil} : \text{Di} .}{\text{ajo a2 nil} : \text{Di} .} \text{CAPA}$$

Qu'a-t-on vérifié ? Le couple (a2,nil) est un élément du domaine de définition de la semi-fonction ajo ; le résultat ajo a2 nil est donc un dictionnaire (" CAPA " signifie " lire une formule-conduit et des formules-appartenance, écrire une formule-appartenance "). ■

Lemme 2

$$\text{SID} \frac{\text{ajo x1 (ajo x2 y)} = \text{ajo x2 (ajo x1 y)} . \text{x1} :: \text{Ar} . \text{x2} :: \text{Ar} . \text{y} :: \text{Di} . \text{a1} : \text{Ar} . \text{a2} : \text{Ar} . \text{nil} : \text{Di} .}{\text{ajo a1 (ajo a2 nil)} = \text{ajo a2 (ajo a1 nil)} .}$$

On a instancié une identité générale en respectant la sorte des variables (substitution sortée ; " SID " signifie " substituer dans une formule-identité "). ■

Tenant compte des axiomes et des deux lemmes, on est maintenant en mesure de vérifier ce qu'on voulait.

Preuve 1

$$\begin{array}{l} \text{SAP} \frac{\text{req (id x1) (ajo x1 y)} : \text{Req*} . \text{x1} :: \text{Ar} . \text{y} :: \text{Di} . \text{a1} : \text{Ar} . \text{ajo a2 nil} : \text{Di} .}{\text{req (id a1) (ajo a1 ajo a2 nil)} : \text{Req*} .} \\ \text{RAP} \frac{\text{req (id a1) (ajo a1 ajo a2 nil)} : \text{Req*} . \quad \text{id a1} = \text{id} .}{\text{req id (ajo a1 ajo a2 nil)} : \text{Req*} .} \\ \dots \\ \text{RAP} \frac{\text{req id (ajo a1 ajo a2 nil)} : \text{Req*} . \quad \text{ajo a1 ajo a2 nil} = \text{ajo a2 ajo a1 nil} .}{\text{req id (ajo a2 ajo a1 nil)} : \text{Req*} .} \end{array}$$

On a d'abord instancié une formule-appartenance (" SAP " signifie " substituer dans une formule-appartenance ") ; puis on procède en remplaçant un égal par un égal, deux fois (" RAP " signifie " remplacer à l'identique dans une formule-appartenance "). ■

On vérifie la deuxième propriété de manière similaire.

Preuve 2

$$\begin{array}{l} \text{SID} \frac{\text{cosu req (id x1) (ajo x1 y)} = \text{x1} . \text{x1} :: \text{Ar} . \text{y} :: \text{Di} . \text{a1} : \text{Ar} . \text{ajo a2 nil} : \text{Di} .}{\text{cosu req (id a1) (ajo a1 ajo a2 nil)} = \text{a1} .} \\ \text{RIGA} \frac{\text{cosu req (id a1) (ajo a1 ajo a2 nil)} = \text{a1} . \quad \text{id a1} = \text{id} .}{\text{cosu (req id (ajo a1 ajo a2 nil))} = \text{a1} .} \\ \dots \\ \text{RIGA} \frac{\text{cosu (req id (ajo a1 ajo a2 nil))} = \text{a1} . \quad \text{ajo a1 ajo a2 nil} = \text{ajo a2 ajo a1 nil} .}{\text{cosu (req id (ajo a2 ajo a1 nil))} = \text{a1} .} \end{array}$$

On a d'abord instancié une identité ; puis on procède en remplaçant un égal par un égal, deux fois (" RIGA " signifie " remplacer à l'identique dans une formule-identité, à gauche "). ■

Pour terminer, on peut déduire cette propriété remarquable : id est *injective*, c'est-à-dire il n'y a pas deux articles qui partagent le même nom.

Cette propriété, on ne s'est pas soucié de l'exprimer lors de la spécification et on trouvera peut-être surprenant qu'on sache la déduire. En réalité, on ne fait que révéler une information cachée ; cette déduction est un joli exemple de déduction qui, *du point de vue du sens, n'est pas tautologique*.

À cet effet, vérifions ceci : si $[i1 = i2 .]$, alors $[a1 = a2 .]$.

Preuve

i — On vient de prouver que

$$\text{cosu} (\text{req } i1 (\text{ajo } a2 \text{ ajo } a1 \text{ nil })) = a1 .$$

On prouverait de la même façon que

$$\text{cosu} (\text{req } i2 (\text{ajo } a2 \text{ ajo } a1 \text{ nil })) = a2 . \quad (0.1)$$

ii — À partir de $[i1 = i2 .]$, on peut déduire ainsi :

$$\text{RIGA} \frac{\text{cosu} (\text{req } i1 (\text{ajo } a2 \text{ ajo } a1 \text{ nil })) = a1 . \quad i1 = i2 .}{\text{cosu} (\text{req } i2 (\text{ajo } a2 \text{ ajo } a1 \text{ nil })) = a1 .} \quad (0.2)$$

(on a remplacé “ $i1$ ” par son égal “ $i2$ ”).

iii — Pour finir, de ces deux formules :

$$\begin{aligned} \text{cosu} (\text{req } i2 (\text{ajo } a2 \text{ ajo } a1 \text{ nil })) &= a2 . \\ \text{cosu} (\text{req } i2 (\text{ajo } a2 \text{ ajo } a1 \text{ nil })) &= a1 . \end{aligned}$$

(0.1 et 0.2), on déduit

$$a1 = a2 .$$

par transitivité. L'article $a1$ est l'article $a2$. ■ □

Qu'a-t-on fait ? On a substitué à un raisonnement direct sur des semi-fonctions et des sous-ensembles, qui est intrinsèquement difficile et délicat voire impraticable, un calcul portant sur des symboles et des formules. À quoi il correspond fondamentalement et pourquoi il est juste, c'est tout ce que je veux expliquer en exposant cette thèse. On verra aussi qu'un tel calcul, parce que n'étant rien d'autre qu'un enchaînement d'opérations *symboliques*, est automatisable en tout ou partie grâce à l'ordinateur (techniques de démonstration automatique de théorème).

D'autres recherches, passées et présentes

Selon Schmidt-Schauß [26], Oberschelp est le premier à avoir introduit l'algèbre ordosortée [23]. Mais l'intérêt du sujet n'est devenu évident qu'après que Goguen puis Meseguer s'y furent intéressés [24,25], à la fois pour spécifier des types de données et pour programmer [44,45]. Ils considèrent un ensemble ordonné de symboles de sorte,

$$E \leq F$$

signifiant que le symbole E dénote un sous-ensemble du dénoté de F . Une telle information est codée comme une *déclaration grammaticale*, à exploiter lors de l'analyse grammaticale pour typer, *et non comme un axiome*.

Les symboles de fonction sont surchargés, un même symbole f signifiant autant de fonctions qu'il y a de *déclarations*

$$f : E_1 \dots E_n \rightarrow F$$

On est donc obligé d'interpréter chaque symbole f en fonction du contexte, l'idée étant que le dénoté du symbole est le morceau d'une grande fonction jamais explicitée. Bien sûr, il faut plusieurs conditions syntaxiques désagréables pour que cette interprétation contextuelle fonctionne et pour recoller convenablement les morceaux. Ces déclarations de fonction, comme les déclarations de sous-sortes, *sont des déclarations grammaticales et non des axiomes*. Chaque terme bien sorté doit avoir une plus petite sorte (least sort) qu'on détermine statiquement et qui est immuable ; à nouveau, pour qu'on puisse le faire, il faut une condition syntaxique (régularité).

La théorie apparaît comme un aménagement de l'algèbre hétérogène (many-sorted algebra) et semble limitée à cause de cela ; apparaissent en particulier des difficultés liées à la surcharge de symbole, aux " retracts " et à la congruence, qu'ont très bien montrées plusieurs auteurs [40,31]. Enfin on souffre un peu de l'absence de calcul symbolique *stricto sensu*, car il y a un mélange permanent entre opération formelle (manipulation mécanique de symboles) et raisonnement mathématique traditionnel, sans qu'on puisse bien distinguer les deux niveaux.

Schmidt-Schauß conserve ce schéma original en corrigeant deux faiblesses : un symbole de fonction dénote *un seul objet* ; et un homomorphisme est une seule fonction (et non un faisceau de fonctions). Il introduit la notion de " term declaration "

$$a : E$$

(ce que dénote le terme a est élément de l'ensemble dénoté par E) qui ressemble à une formule-appartenance (cette thèse) ; *mais une telle déclaration n'est pas traitée comme un axiome*. La sorte (d'un symbole, d'un terme) est une *simple annotation*, le cadre traditionnel de l'algèbre universelle étant conservé presque sans changement (la logique de l'égalité est décrite en trois pages !). En fait, l'intérêt semble porter sur le calcul automatique (computation), les algorithmes non sortés connus étant adaptés pour tenir compte des capacités discriminantes de l'annotation de sorte. Les définitions de " algèbre " et de " congruence " sont très voisines des miennes (j'appelle " magma " ce qu'il appelle " algebra ").

Smolka [28] tente de comprendre, généraliser et simplifier le schéma de Goguen et Meseguer. Il fait les mêmes corrections que Schmidt-Schauß, abandonne l'idée que l'algèbre ordosortée est une généralisation de l'algèbre hétérogène, présente plusieurs paradoxes intéressants (cette thèse ; voir p. 131), et s'intéresse de près aux algorithmes de réécriture et d'unification. On retrouve encore la distinction déclaration-formule : l'inclusion des sortes et les profils des

fonctions sont des *déclarations*, qu'on traite grammaticalement ; les égalités sont des *formules*, qu'on traite par un mécanisme de déduction formelle.

Poigné [29] s'écarte davantage du schéma de Goguen et Meseguer, et commence à mettre la logique (la déduction formelle) à l'honneur. Il hésite à s'engager totalement dans le sens de l'algèbre partielle (il reprend la théorie de la partialité de D. S. Scott) et adopte le paradigme " a un sens ce qui est typé ", en reconnaissant toutefois que le typage est un calcul dynamique et non une opération grammaticale. Cependant, parce qu'il ne se donne pas un calcul uniforme de l'inclusion, de l'appartenance et de l'égalité, il n'a pas l'idée de réduire le typage à *une preuve ordinaire* (on retrouve encore la distinction déclaration-axiome). En revanche, il propose plusieurs extensions importantes, notamment les déclarations conditionnelles, la paramétrisation, les types polymorphiques et les types dépendants. Il fait quelques considérations catégoriques et montre un intérêt pour le traitement d'erreur : "*Erroneous terms are the most precise error messages.*"

Manca, Salibra et Scolo [30] exploitent aussi la veine logique et le paradigme " est défini ce qui est typé ". Ils abandonnent la distinction déclaration-axiome et proposent un calcul formel uniforme qui porte indifféremment sur des formules-appartenance et des formules-identités. À cause de la difficulté, ils renoncent à s'engager sur le terrain de l'algèbre partielle, et sont ainsi amenés à interpréter les types comme des éléments primitifs *et non comme des sous-ensembles* (ils introduisent une relation binaire pour coder le lien entre un élément-élément et un élément-type). Ils ne considèrent pas explicitement la relation est-un-sous-type-de, mais il semble qu'on puisse la coder simplement. Ils annoncent enfin un résultat technique surprenant : une image homomorphe d'un modèle n'est pas un modèle en général.

À côté de ces contributions majeures, il y a quelques travaux plus qu'intéressants. Isakowitz et Gallier [40] restent très proches de Goguen et Meseguer, mais démontrent qu'on complique beaucoup la théorie en surchargeant les symboles de fonction. Ils proposent un algorithme de clôture par congruence (découvrir si deux termes sans variables sont égaux).

Waldmann [31] examine attentivement et soigneusement le schéma de Goguen et Meseguer, et le compare à une option sans surcharge de symbole de fonction. Il montre avec précision le pourquoi des restrictions initiales (signature régulière, cohérente, consistante etc.), et présente une solide argumentation *contre la surcharge*.

Mosses [32] enfin propose une idée originale et semble-t-il riche : *ignorer les éléments du support et ne considérer que des sous-ensembles*, éventuellement des singletons. On peut de cette façon faire l'économie de toute une catégorie d'objets, les éléments du support, sans diminuer le pouvoir expressif du langage semble-t-il. En explorant cette voie, on trouvera peut-être moyen de simplifier l'algèbre G.

Malgré les incertitudes de l'algèbre ordosortée un important travail d'automatisation a aussi été accompli (réécriture, complétion, unification,

programmation etc. ordosortées). Cet effort est tout à fait intéressant, car révélateur des difficultés mais aussi des richesses du domaine (bibliographie, section *Automatiser le raisonnement ordosorté* ; voir p. xxviii).

S'il veut en savoir plus ou connaître un autre point de vue, le lecteur aura plaisir à lire la section *Related work* du texte de Schmidt-Schauß [26, p. 4].

Guide de lecture

Plan

Le texte est très structuré. Chaque notion importante fait l'objet d'un chapitre, de telle manière qu'on n'a qu'à consulter la table des matières pour s'y retrouver. Bien sûr, à cause de cette organisation par sujet certains résultats sont présentés bien avant d'être exploités. Par exemple, il n'est utile de lire le chapitre *Terme — II* (chap. 5) que pour lire le chapitre *Le théorème de correction* (chap. 15).

Hors le premier chapitre relatif aux semi-fonctions, qui est une brique de base, le texte est divisé en trois parties.

- *Magma* — On prend connaissance des objets sur lesquels portera le raisonnement. En dehors du développement relatif aux termes, il n'y a aucune préoccupation logique. On se convaincra sans doute que le raisonnement direct sur ce sujet est délicat, difficile, voire impraticable.
- *Logique* — Au raisonnement direct on substitue un raisonnement formel (une logique), qu'il s'agit de construire. Cette partie culmine avec l'énoncé et la preuve du théorème de complétude.
- *Exploration* — Après avoir montré la complétude du calcul, qui est une qualité primordiale, on explore d'autres parties du sujet. Les deux résultats fondamentaux sont ceux-ci : le magma-quotient des termes significatifs (chap. 16) est le magma libre de la classe des modèles ; et le magma-quotient des termes significatifs sans variable est le magma initial de la classe des modèles (on ajoute s'il le faut des symboles de constante).

On trouve enfin un chapitre *Conclusion, discussion, prospective* et un index des termes et des symboles.

Comment lire aussi peu de ce texte qu'il est possible ?

Le texte est complet et sans prérequis. Pour cela, j'ai inclus la section *Analyser un terme* (chap. 4), qui est la seule partie non originale de cette thèse. Malgré cela, le pourquoi des choses peut échapper à un lecteur non familier avec la logique mathématique (dans ce cas, je lui conseille de lire les premiers chapitres du texte plaisant et passionnant de Hofstadter [12]).

Pour une première lecture, je propose de procéder ainsi.

- Ne pas s'intéresser à la troisième partie dans un premier temps.
- Relire l'introduction en s'intéressant de très près aux exemples. Noter les points obscurs pour s'interroger plus tard à leur sujet.

- Adopter pour la suite cet ordre de parcours :
 - . chap. 1, 2, 3, 4, 6 (découverte des magmas) ;
 - . 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (description de la logique) ;
 - . 5, 15 (vers le théorème de correction) ;
 - . 7, 16 et 17 (vers le théorème de complétude).
- Lire les débuts de chapitre.
- Lire autant qu'il est possible le chapitre *Exposition, et déduction symbolique* — *Exemples* (chap. 14), en consultant s'il le faut les chapitres *Les règles d'inférence* et *Déduction symbolique* (chap. 12 et 13), et en s'aidant de l'aide-mémoire *Inference rules*.
- Lire attentivement les parties formelles (définitions, propositions etc.) *et les exemples* ; ne pas lire les preuves.
- Lire l'ensemble des parties I et II.

N.B. — Les chap. 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14 sont avant tout des descriptions. On réservera donc son effort de lecture pour les chap. 6 ; 5, 15 ; et 7, 16 et 17.

Style et notation

Le style est concis et dépouillé, voire austère. J'ai rédigé de cette façon, parce que je me suis d'abord soucié d'éviter toute erreur, et de consigner précisément les résultats au fur et à mesure que je les établissais. J'admets que j'ai de la sorte négligé le plaisir du lecteur et je le prie de m'en excuser. Malgré cela, il appréciera le grand nombre d'exemples proposés, chacun d'eux étant pour l'intuition un aliment plus nourrissant que bien des commentaires.

La notation proposée est une contribution à part entière de cette thèse ; elle a fait de ma part l'objet d'une véritable étude. Je l'ai conçue pour prévenir les erreurs et les absurdités, si faciles à commettre dans ce domaine, et comme l'outil sûr dont j'avais besoin pour franchir certains obstacles vertigineux. On en trouvera une synthèse en annexe (appendice *Notation*).

Some half dozen persons have written technically on combinatory logic, and most of these, including ourselves, have published something erroneous. Since some of our fellow sinners are among the most careful and competent logicians on the contemporary scene, we regard this as evidence that the subject is refractory. Thus fullness of exposition is necessary for accuracy ; and excessive condensation would be false economy here, even more than it is ordinarily.

Haskell B. Curry & Robert Feys (*Combinatory logic*, préface, 1956)

Bibliographie

Cette bibliographie est présentée d'une manière conforme à la norme ANSI Z39.29-1977 (American national standard for bibliographic references).

Mathématiques — Base

- [1] Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*. Paris : Hermann ; 1977.
- [2] Halmos, Paul R. *Naïve set theory*. New-York : Springer-Verlag ; 1974. (Undergraduate texts in mathematics).
- [3] Ramis, E. ; Deschamps, C. ; Odoux, J. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1 — Algèbre*. Paris : Masson et C^{ie} ; 1974.
- [4] Mac Lane, Saunders ; Birkhoff, Garrett. *Algèbre*. Tome 1 — Structures fondamentales. Paris : Gauthier-Villars ; 1971. (Cahiers scientifiques ; XXXV).
- [5] Krivine, Jean-Louis. *Théorie axiomatique des ensembles*. Paris : Presses universitaires de France ; 1972. (Le mathématicien).

Logique mathématique

- [6] Kleene, Stephen Cole. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam : North-Holland ; 6th reprint ; 1971. (Bibliotheca mathematica ; I).
- [7] Shoenfield, Joseph R. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley ; 1967. (Series in logic).
- [8] Church, Alonzo. *Introduction to mathematical logic — Vol. 1*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press ; 1956.
- [9] Henkin, L. *The logic of equality*. Mathematical monthly. 1977 : pp. 597–612.
- [10] Gallier, J. H. *Logic for computer science — Foundations of automatic theorem proving*. New York City : Harper & Row ; 1986. (Computer science and technology series ; 5).

- [11] Delong, Howard. *A profile of mathematical logic*. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley ; 1970. (Series in mathematics).
- [12] Hofstadter, Douglas R. *Gödel, Escher, Bach : an eternal golden braid*. New York City : Basic Books ; 1979.

Algèbre universelle, alg. partielle

- [13] Burris, Stanley ; Sankappanavar, H. P. *A course in universal algebra*. New York : Springer-Verlag ; 1981. (Graduate texts in mathematics ; 78).
- [14] Grätzer, George. *Universal algebra*. D. van Nostrand ; 1968. (The university series in higher mathematics).
- [15] Cohn, Paul M. *Universal algebra*. Revised edition. Dordrecht, Holland : D. Reidel ; 1981. (Mathematics and its applications ; 6).
- [16] Reichel, Horst. *Initial computability, algebraic specifications, and partial algebras*. Berlin : Akademie-Verlag ; 1987. (The international series of monographs on computer science ; 2). Also published by Oxford University Press.
- [17] Burmeister, P. *A model-theoretic oriented approach to partial algebras*. Berlin : Akademie-Verlag ; 1986. (Mathematical research ; 31).

Types abstraits de données

- [18] Guttag, J. V. ; Horowitz, E. ; Musser, D. R. *Abstract data types and software validation*. Communications of the A.C.M. 21(12) ; 1978, December.
- [19] Burstall, R. M. ; Goguen, J. A. *Algebras, theories and freeness — An introduction for computer scientists*. Theoretical foundation of programming methodology — Lecture notes of an international summer school. Dordrecht, Holland : D. Reidel ; 1982. (NATO Advanced Study Institutes series).
- [20] Meseguer, J. ; Goguen, J. A. *Initiality, induction and computability*. Nivat, M. ; Reynolds, J. ; eds. Algebraic methods in semantics. Cambridge University Press ; 1985.
- [21] Ehrig, Hartmut ; Mahr, Bernd. *Fundamentals of algebraic specifications — I — Equations and initial semantics*. Springer-Verlag ; 1985. (E.A.T.C.S. monographs on theoretical computer science ; 6).

- [22] Gogolla, M. *Algebraic specifications with partially ordered sorts and declarations*. Universität Dortmund, Abteilung Informatik ; interner Bericht FB-169 ; 1983.

Algèbre ordosortée

- [23] Oberschelp, A. *Untersuchungen zur mehrsortigen Quantorenlogik*. Mathematische Annalen. 1962 ; 145 : 297–333.
- [24] Goguen, Joseph A. *Order-sorted algebra — Exceptions and error sorts, coercions and overloaded operators*. UCLA, Computer Science Department ; report 14 ; 1978, December.
- [25] Goguen, Joseph A. ; Meseguer, José. *Order-sorted algebra — I — Partial and overloaded operators, errors and inheritance*. Menlo Park, California : SRI International ; technical report ; draft ; 1986, March 25.
- [26] Schmidt-Schauß, Manfred. *Computational aspects of an order-sorted logic with term declarations*. Springer-Verlag ; 1989. (Lecture notes in artificial intelligence ; 395).
- [27] Smolka, Gert. *Order-sorted Horn logic — Semantics and deduction*. Universität Kaiserslautern ; technical report SEKI SR-86-17 ; draft ; 1986, September 12.
- [28] Smolka, Gert ; Nutt, Werner ; Goguen, Joseph A. ; Meseguer José. *Order-sorted equational computation*. Universität Kaiserslautern ; technical report SEKI SR-87-14 ; draft ; 1987, November 11. Also in: Ait-Kaci, H. ; Nivat, M. ; eds. *Resolution of equations in algebraic structures*. Vol. 2 — *Rewriting techniques*. Academic Press ; 1989.
- [29] Poigné, Axel. *Partial algebras, subsorting, and dependent types — Prerequisites of error handling in algebraic specifications*. St. Augustin, Deutschland : GMD F2G2 ; report ; 1989.
- [30] Manca, V. ; Salibra, A. ; Scollo, G. *Equational type logic*. Enschede, the Netherlands : Universiteit Twente, faculteit der informatica ; memoranda informatica 89-43 [report] ; 1989, July. To appear in *Theoretical computer science* (special issue devoted to AMAST'89).
- [31] Waldmann, Uwe. *Semantics of order-sorted specifications*. Universität Dortmund, Abteilung Informatik ; Forschungsbericht Nr. 297 [research report] ; 1989.
- [32] Mosses, Peter D. *Unified algebras and modules*. Aarhus, Denmark : Aarhus University, Computer Science Department ; report DAIMI-PB-266 ; 1988.

- [33] Dahl, Ole-Johan ; Owe, Olaf. *Generator induction in order-sorted algebras*. University of Oslo, Department of informatics ; research report no 122 ; 1989, February.
- [34] Qian, Zhenyu. *Higher-order polymorphic equational deduction with function constraints*. University of Bremen, Department of computer science ; report ; 1989, August.

Automatiser le raisonnement ordosorté

- [35] Comon, Hubert. *Equational formulas in order-sorted algebras*. Proceedings of the international colloquium on automata, languages and programming (ICALP). 1990.
- [36] Cunningham, R. J. ; Dick, A. J. J. *Rewrite systems on a lattice of types*. London, U.K. : Imperial College, Departement of computing ; technical report ; 1983.
- [37] Gallier, Jean H. ; Isakowitz, Tomás. *Rewriting in order-sorted equational logic*. Kowalski, Robert A. ; Bowen, Kenneth A. ; eds. Logic programming — Proceedings of the fifth international conference and symposium ; 1988, August 15–19 ; Seattle, Washington, U.S.A. Cambridge, Massachusetts, U.S.A. : The MIT Press ; 1988 : pp. 280–294. (MIT Press series in logic programming).
- [38] Ganziger, H. *Order-sorted completion, the many-sorted way*. Proceedings of the international joint conference on theory and practice of software development — Colloquium on software engineering. Springer-Verlag ; 1989.
- [39] Gnaedig, I. ; Kirchner, C. ; Kirchner, H. *Equational completion in order-sorted algebras*. Dauchet, M. ; Nivat, M. ; eds. Proceedings of the 13th colloquium on trees in algebra and programming (CAAP) ; Nancy, France. Springer-Verlag ; 1988.
- [40] Isakowitz, Tomás ; Gallier, Jean H. *Congruence closure in order-sorted algebra*. Philadelphia, Pennsylvania : University of Pennsylvania ; technical report ; 1988, June 24.
- [41] Kirchner, C. *Order-sorted equational unification*. Kowalski, R. ; Bowen, K. ; eds. Fifth international conference on logic programming ; Seattle, Washington, U.S.A. M.I.T. Press ; 1988.
- [42] Meseguer, J. ; Goguen, J. A. ; Smolka, G. *Order-sorted unification*. Proceedings of the colloquium on resolution of equations in algebraic structures ; 1987, May ; Austin, Texas.

- [43] Watson, P. ; Dick, J. *Least sorts in order-sorted term rewriting*. University of London, Department of computer science ; technical report CSD-TR-606 ; 1989, January.

Programmation ordosortée

- [44] Futatsugi, Kokichi ; Goguen, Joseph A. ; Jouannaud, Jean-Pierre ; Meseguer, José. *Principles of OBJ 2*. Reid, Brian K., ed. Principles of programming languages (POPL) — Twelfth symposium [proceedings]. A.C.M. ; 1985.
- [45] Goguen, J. ; Kirchner, C. ; Kirchner, H. ; Mégrelis, A. ; Meseguer, J. ; Winkler, T. *An introduction to OBJ 3*. Jouannaud, J.-P. ; Kaplan, S. ; eds. Proceedings of the first international workshop on conditional term-rewriting systems ; 1987, July 8–10 ; Orsay, France. Springer-Verlag ; 1988. (Lecture notes in computer science ; 308).
- [46] Goguen, J. A. ; Jouannaud, J.-P. ; Meseguer, J. *Operational semantics of order-sorted algebra*. Proceedings of the 12th international colloquium on automata, languages and programming (ICALP). Springer-Verlag ; 1985. (Lecture notes in computer science ; 194).
- [47] Kirchner, C. ; Kirchner, H. ; Meseguer, J. *Operational semantics of OBJ 3*. Proceedings of the 15th international colloquium on automata, languages and programming (ICALP). Springer-Verlag ; 1988.
- [48] Smolka, Gert. *TEL* (version 0.9). Universität Kaiserslautern ; technical report SEKI SR-87-11 ; 1988, February.
- [49] Hanus, Michael. *Horn clause programs with polymorphic types*. Universität Dortmund, Fachbereich Informatik ; Forschungsbericht ; 1988, January.

N.B. — Sur le sujet de l'automatisation du raisonnement ordosorté, on aura plaisir à consulter la bibliographie abondante présentée par Schmidt-Schauß [26].

Common hypotheses

Let $\mathcal{E}$ be an exhibition; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i \in L}$.

- $a, b, d \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.
- c is a subterm of a ; $a = a\langle c \rangle$.
- $E, F, K \in \mathcal{S}$.
- $y \in \mathcal{X}$.
- $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$); $I = \{1, \dots, n\}$.
- $\forall i \in I, E_i \in \mathcal{S}$.

1 The six simple rules

$$\text{XIXI} \frac{\$ a\langle c \rangle .}{\$ c .}$$

$$\text{APEX} \frac{a : E .}{\$ a .}$$

$$\text{IDEX} \frac{a = b .}{\$ a . \$ b .}$$

$$\text{CONFA} \frac{y :: K .}{y : K .}$$

$$\text{EXID} \frac{\$ a .}{a = a .}$$

$$\text{EXAP} \frac{\$ a .}{a : *** .}$$

2 To substitute terms to variables

- $\text{Var } a = \{x_j\}_{j \in J}$ ($J \subseteq L$); $\text{Var } b = \{x_j\}_{j \in U}$ ($U \subseteq L$).
- $\forall j \in J \cup U, K_j \in \mathcal{S}$.
- $\forall j \in J \cup U, d_j \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

$$\text{SEXI} \frac{\$ a . [x_j :: K_j .]^{j \in J} [d_j : K_j .]^{j \in J}}{\$ a\{d_j @ x_j\}_{j \in J} .}$$

$$\text{SAP} \frac{a : E . [x_j :: K_j .]^{j \in J} [d_j : K_j .]^{j \in J}}{a\{d_j @ x_j\}_{j \in J} : E .}$$

$$\text{SID} \frac{a = b . [x_j :: K_j .]^{j \in J \cup U} [d_j : K_j .]^{j \in J \cup U}}{a\{d_j @ x_j\}_{j \in J} = b\{d_j @ x_j\}_{j \in U} .}$$

3 To replace identically

Replacing in $a\langle c \rangle$ a *certain* occurrence of c with d , one gets the term a' .

$$\text{REXI} \frac{\$ a\langle c \rangle . c = d .}{\$ a' .}$$

$$\text{RAP} \frac{a\langle c \rangle : E . c = d .}{a' : E .}$$

$$\text{RIGA} \frac{a\langle c \rangle = b . c = d .}{a' = b .}$$

4 To code and to decode an inclusion-formula, a duct-formula

- $[\forall i \in I, y_i \in \mathcal{X}]$ and $[\forall i, i' [i, i' \in I, i \neq i'], y_i \neq y_{i'}]$ (the variables y_i ($i \in I$) are *pairwise-different!*).

$$\text{INAP} \frac{E =< F . y :: E .}{y : F .}$$

$$\text{IN} \frac{y :: E . y : F .}{E =< F .}$$

$$\text{CONDA} \frac{f : E_I >> F . [y_i :: E_i .]^{i \in I}}{f y_I : F .}$$

$$\text{CO} \frac{[y_i :: E_i .]^{i \in I} f y_I : F .}{f : E_I >> F .}$$

Additional hypotheses

- $F', G \in \mathcal{S}$.
- $\forall i \in I, E'_i \in \mathcal{S}$.
- $\forall i \in I, a_i, b_i \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

5 Some derived rules

$$\text{XIVA} \frac{}{\$ y .}$$

$$\text{ISY} \frac{a = b .}{b = a .}$$

$$\text{IDET} \frac{a = b . b = d .}{a = d .}$$

$$\text{RIDRO} \frac{b = a\langle c \rangle . c = d .}{b = a' .}$$

$$\text{RERISO} \frac{\$ f a_I . [a_i = b_i .]^{i \in I}}{f a_I = f b_I .}$$

$$\text{REC} \frac{\$ a\langle c \rangle . c = d .}{a = a' .}$$

$$\text{INU} \frac{}{E =< *** .}$$

$$\text{INRE} \frac{}{E =< E .}$$

$$\text{INTRA} \frac{E =< F . F =< G .}{E =< G .}$$

$$\text{APINA} \frac{a : E . E =< F .}{a : F .}$$

$$\text{CAPA} \frac{f : E_I >> F . [a_i : E_i .]^{i \in I}}{f a_I : F .}$$

$$\text{CACO} \frac{f : E_I >> F . [E'_i =< E_i .]^{i \in I} F =< F' .}{f : E'_I >> F' .}$$

Règles premières

APEX — Lire une formule-appartenance, écrire une formule-existence

CO — Écrire une formule-conduit

CONDA — Lire une formule-conduit, écrire une formule-appartenance

CONFA — Lire une formule-confinement, écrire une formule-appartenance

EXAP — Lire une formule-existence, écrire une formule-appartenance universelle

EXID — Lire une formule-existence, écrire une formule-identité

IDEX — Lire une formule-identité, écrire deux formules-existence

IN — Écrire une formule-inclusion

INAP — Lire une formule-inclusion, écrire une formule-appartenance

RAP — Remplacer à l'identique dans une formule-appartenance

REXI — Remplacer à l'identique dans une formule-existence

RIGA — Remplacer à l'identique dans une formule-identité, à gauche

SAP — Substituer dans une formule-appartenance

SEXI — Substituer dans une formule-existence

SID — Substituer dans une formule-identité

XIXI — Lire une formule-existence, écrire une formule-existence

Règles déduites

APINA — Lire une formule-appartenance et une formule-inclusion, écrire une formule-appartenance

CACO — Lire une formule-conduit et des formules-appartenance, écrire une formule-conduit

CAPA — Lire une formule-conduit et des formules-appartenance, écrire une formule-appartenance

IDET — Écrire une formule-identité par transitivité

INRE — Écrire une formule-inclusion par réflexivité

INTRA — Écrire une formule-inclusion par transitivité

INU — Écrire une formule-inclusion universelle

ISY — Écrire une formule-identité par symétrie

REC — Récrire

RERISO — Récrire en remplaçant à l'identique les sous-termes du premier niveau

RIDRO — Remplacer à l'identique dans une formule-identité, à droite

XIVA — Écrire une formule-existence relative à une variable

Liminaire

Chapitre 1

Semi-fonction

Les concepts de fonction et de semi-fonction sont fondamentaux. Les définitions de ce chapitre sont compatibles avec celles de N. Bourbaki [1].

1.1 Graphe fonctionnel

Un graphe fonctionnel est un ensemble qualifié de couples.

Définition 1 (Graphe fonctionnel) — On appelle “graphe fonctionnel” tout sous-ensemble G d'un produit cartésien $U_1 \times U_2$ qui a cette qualité :

$$\forall (x_1, y_1) \in G, \forall (x_2, y_2) \in G, \quad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

(si un couple (x, y) est élément de G , alors il est le seul couple de G dont la première coordonnée est x).

Exemple — $\emptyset$ est un graphe fonctionnel ; c'est le graphe fonctionnel vide. □ ✕

Le domaine d'un graphe fonctionnel est l'ensemble des premières coordonnées des couples du graphe...

Définition 2 (Domaine) — Soit G un graphe fonctionnel ; $G \subseteq U_1 \times U_2$. Son domaine est l'ensemble $\{x \in U_1 \mid \exists (x, y) \in G\}$.

Notation — $\text{Dom } G$ est le domaine du graphe G .

L'empreinte d'un graphe fonctionnel est l'ensemble des secondes coordonnées des couples du graphe...

Définition 3 (Empreinte) — Soit G un graphe fonctionnel ; $G \subseteq U_1 \times U_2$. Son empreinte est l'ensemble $\{y \in U_2 \mid \exists (x, y) \in G\}$.

Notation — $\text{Emp } G$ est l'empreinte du graphe G .

Exemple — $\text{Dom } \emptyset = \emptyset$; $\text{Emp } \emptyset = \emptyset$. □ ✕

1.2 Semi-fonction

Le concept de semi-fonction est plus riche que celui de graphe fonctionnel.

Définition 4 (Semi-fonction)

On appelle "semi-fonction" tout triplet (G, E, F) ,

- G étant un graphe fonctionnel,
- E et F étant des ensembles,
- $G \subseteq E \times F$.

Terminologie — Soit f un semi-fonction ; $f = (G, E, F)$. La *base* de f est E , sa *cible* F . Son *graphe* est G .



Se mettre en garde — On veillera à ne pas confondre les concepts *graphe fonctionnel* et *semi-fonction*. Une semi-fonction (G_1, E_1, F_1) est identique à (G_2, E_2, F_2) si $G_1 = G_2$, si $E_1 = E_2$ et si $F_1 = F_2$ (même base, même cible et même graphe !).

Notation

- 1 — Graph f est le graphe de la semi-fonction f .
- 2 — Pour noter que la base d'une semi-fonction f est un ensemble E et que sa cible est un ensemble F , on peut écrire :

$$f : E \rightarrow F$$

(f est élément de la classe des semi-fonctions base- E -cible- F).

Terminologie et notation — Soit f un semi-fonction ; $f = (G, E, F)$. $\forall x \in E$, il y a au plus un couple $(x, y) \in G$. Si $(x, y) \in G$, on dit qu'à l'argument x correspond le résultat $y \in F$; cet y est aussi appelé " $f(x)$ ".

Si la semi-fonction f est définie en x , appliquant f à x on obtient $f(x)$.

Définition 5 (Semi-fonction vide) — On appelle "semi-fonction vide" toute semi-fonction dont le graphe est l'ensemble vide.



Exemple — Soit E un ensemble ; soit F un ensemble ; le triplet $(\emptyset, E, F)$ est une semi-fonction vide. Il y a donc une infinité de semi-fonctions vides. Le triplet $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ est une semi-fonction vide remarquable. □

Définition 6 (Domaine et empreinte d'une semi-fonction) — Le domaine d'une semi-fonction est le domaine de son graphe. L'empreinte d'une semi-fonction est l'empreinte de son graphe.

Notation — $\text{Dom } f$ est le domaine de la semi-fonction f , $\text{Emp } f$ son empreinte.

Une semi-fonction $f : E \rightarrow F$ est applicable à tout élément x de son domaine ; le résultat $f(x)$ appartient alors à son empreinte.

Attention ! deux semi-fonctions *distinctes* peuvent avoir même graphe.

Assertion 1 — Soit $f = (G, E, F)$ une semi-fonction. Soient E' et F' deux ensembles, $E \subseteq E'$ et $F \subseteq F'$.

Le triplet $f' = (G, E', F')$ est une semi-fonction ; $\text{Graph } f' = G = \text{Graph } f$.

Il y a donc une infinité de semi-fonctions de même graphe G .

1.3 Fonction

Le domaine d'une semi-fonction peut être inclus dans sa base *stricto sensu*.

Définition 7 (Fonction) — On appelle “ fonction ” toute semi-fonction dont le domaine est identique à la base.

Une fonction est une semi-fonction (G, E, F) , $\text{Dom } G = E$.

Notation

1 — Pour noter que la base d'une fonction f est un ensemble E et que sa cible est un ensemble F , on peut écrire :

$$f : E \rightarrow F$$

2 — Soit f une fonction ; $f = (G, E, F)$. $\forall x \in E$, il y a un *unique* couple $(x, y) \in G$; l'élément y qui correspond à x est appelé “ $f(x)$ ”. On peut donc écrire : $y = f(x)$.

3 — Pour noter que le couple $(x, y) \in \text{Graph } f$, on peut écrire :

$$f : x \mapsto y$$

On désigne parfaitement une fonction en désignant sa base, sa cible et son graphe fonctionnel.

Exemple — Cette fonction est bien connue :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



Se mettre en garde — Une fonction *n'est pas* un ensemble de couples. Quand on annonce une fonction f sans autre précision, on sous-entend un triplet, en particulier deux ensembles : la base de f et la cible de f .



Des fonctions *distinctes* peuvent avoir même graphe.

Assertion 2 — Soit $f = (G, E, F)$ une fonction. Soit F' un ensemble, $F \subseteq F'$. Le triplet $f' = (G, E, F')$ est une fonction ; $\text{Graph } f' = G = \text{Graph } f$.

Il y a donc une infinité de fonctions de même graphe G .

Définition 8 (Surjection) — On appelle “ surjection ” toute fonction dont l’empreinte est identique à la cible.

Soit $f = (G, E, F)$ une fonction surjective ; $\text{Dom } f = E$ et $\text{Emp } f = F$.
L’expression “ fonction surjective ” est synonyme de “ surjection ”.

Proposition 1 — Soit G un graphe fonctionnel. Il n’y a qu’une surjection dont le graphe est G .

Preuve — La semi-fonction $\text{Sj}_G = (G, \text{Dom } G, \text{Emp } G)$ est l’unique fonction surjective dont le graphe est G . ■

On observe que le lien entre graphe fonctionnel et fonction surjective est biunivoque. Autrement dit, on pourrait confondre la classe des graphes fonctionnels et la classe des surjections.

1.4 À un même graphe correspondent de nombreuses semi-fonctions

Soit G un graphe fonctionnel. Quelles sont toutes les semi-fonctions dont les graphes sont G ? quelles sont toutes les fonctions dont les graphes sont G ?
quelles sont toutes les surjections dont les graphes sont G ?

Assertion 3 — Soit G un graphe fonctionnel. La semi-fonction

$$\text{Sj}_G = (G, \text{Dom } G, \text{Emp } G)$$

est une surjection. Elle est l’élément “ minimal ” de l’ensemble des semi-fonctions dont le graphe est G :

- toute semi-fonction dont le graphe est G est un triplet (G, E, F) , $\text{Dom } G \subseteq E$ et $\text{Emp } G \subseteq F$;
- toute fonction dont le graphe est G est un triplet $(G, \text{Dom } G, F)$, $\text{Emp } G \subseteq F$;
- Sj_G est l’unique surjection dont le graphe est G .

⊗

Exemple — $\text{Sj}_\emptyset = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$. □

Définition 9 (Injection et éjection) — Soit A un ensemble, soit B un ensemble, $A \subseteq B$.

L’injection base- A -cible- B est cette fonction :

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

(on dit aussi “ injection canonique ”).

L’éjection base- B -cible- A est cette semi-fonction :

$$\begin{array}{ccc} B & \rightarrow & A \\ A \ni x & \mapsto & x \end{array}$$

Notation — $\text{In}_{A,B}$ est l'injection base- A -cible- B . $\text{Ej}_{B,A}$ est l'éjection base- B -cible- A .

Notation — Soit f une semi-fonction $E \rightarrow F$; soit g une semi-fonction $F \rightarrow H$. L'objet $g \circ f$ est cette semi-fonction $E \rightarrow H$:

- $\text{Dom } g \circ f = \{x \in E \mid x \in \text{Dom } f \text{ et } f(x) \in \text{Dom } g\}$;
- $\forall x \in \text{Dom } g \circ f, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Théorème 1 (de décomposition) — Soit $f = (\text{Graph } f, E, F)$ une semi-fonction. “ Ce diagramme commute... ”

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & F \\
 \text{Ej}_{E, \text{Dom } f} \downarrow & & \uparrow \text{In}_{\text{Emp } f, F} \\
 \text{Dom } f & \xrightarrow{\text{Sj}_{\text{Graph } f}} & \text{Emp } f
 \end{array}$$

Preuve

$\forall x \in \text{Dom } f, f(x) \in \text{Emp } f \subseteq F$; donc

$$f(x) = \text{In}_{\text{Emp } f, F} \circ \text{Sj}_{\text{Graph } f} \circ \text{Ej}_{E, \text{Dom } f}(x)$$

On vérifie en outre que

$$\text{Dom}(\text{In}_{\text{Emp } f, F} \circ \text{Sj}_{\text{Graph } f} \circ \text{Ej}_{E, \text{Dom } f}) = \text{Dom } f$$

et que

$$\text{Emp}(\text{In}_{\text{Emp } f, F} \circ \text{Sj}_{\text{Graph } f} \circ \text{Ej}_{E, \text{Dom } f}) = \text{Emp } f$$

Le graphe de f et celui de $\text{In}_{\text{Emp } f, F} \circ \text{Sj}_{\text{Graph } f} \circ \text{Ej}_{E, \text{Dom } f}$ sont donc identiques. Les semi-fonctions f et $\text{In}_{\text{Emp } f, F} \circ \text{Sj}_{\text{Graph } f} \circ \text{Ej}_{E, \text{Dom } f}$ sont donc identiques (même graphe, même base, même cible). ■

On peut être tenté de réduire l'étude des graphes fonctionnels à celle des fonctions surjectives ; on ignorerait ainsi les concepts de semi-fonction et de fonction non surjective. En pratique, on ne le fait pas ; dans bien des cas, le calcul des domaines et des empreintes est fastidieux et on n'obtient pas des expressions simples ; on préfère alors une forme non réduite mais lisible.

1.5 Semi-fonction dont la base est un produit cartésien

Une semi-fonction “ de plusieurs variables ” est une semi-fonction dont la base est un produit cartésien d'ensembles :

$$g : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $E_1, \dots, E_n$ et F étant $n + 1$ ensembles.

Notation — Tout élément $x \in E_1 \times \dots \times E_n$ est un multiplet $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in E_i$ ($1 \leq i \leq n$). Si $x \in \text{Dom } g$,

$$g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$$

(on écrit “ $g(x_1, \dots, x_n)$ ” plutôt que “ $g((x_1, \dots, x_n))$ ”).

Définition 10 (Arité) — Soit E un ensemble. Soit g une semi-fonction dont la base est un produit cartésien E^n ($n \in \mathbb{N}^*$). L' E -arité de g est n .



Exemple

g est cette fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^4 &\rightarrow \mathbb{N} \\ (i, j, k, l) &\mapsto il + jk \end{aligned}$$

F est le produit cartésien $\mathbb{N}^4$. — La $\mathbb{N}$ -arité de g est 4 ; sa F -arité est 1. □

1.6 Semi-constante

Notation — Soit $\diamond$ est un certain élément de l'univers (par exemple l'étoile Arcturus). Quel que soit S un ensemble, $S^0 = \{\diamond\}$.

Définition 11 (Semi-constante) — Soit E un ensemble. On appelle “ E -semi-constante ” (*semi-constante de E*) toute semi-fonction $E^0 \rightarrow E$.

Soit E un ensemble. Soit e une E -semi-constante ;
 $\text{Graph } e \subseteq E^0 \times E = \{\diamond\} \times E$.

Ou $\text{Dom } e = \emptyset$; on dit que e est une *semi-constante vide* (c'est une semi-fonction vide).

Ou $\text{Dom } e = \{\diamond\}$; à l'argument $\diamond$ correspond le résultat $e \diamond \in E$ (une constante).

Ce qu'il est donc important de savoir, c'est si une semi-constante est vide : vide, elle est un objet peu intéressant ; non vide, elle est une constante.

La E -arité d'une E -semi-constante est, *par définition*, zéro.

✂ *Exemple* — *Y a-t-il des $\emptyset$ -semi-constantes ?*

S'il existait e une telle semi-constante, on vérifierait que

$$\text{Graph } e \subseteq \emptyset^0 \times \emptyset = \{\diamond\} \times \emptyset = \emptyset$$

donc que $\text{Graph } e = \emptyset$.

Sachant cela, on peut maintenant répondre à la question : il y a une unique $\emptyset$ -semi-constante, c'est la semi-constante vide $(\emptyset, \{\diamond\}, \emptyset)$. $\square$

1.7 Terminologie

La terminologie que j'ai adoptée est un compromis entre diverses terminologies contradictoires.

Semi-fonction (semi-function)

Un terme traditionnel est “ fonction partielle ”. C'est une mauvaise appellation pour au moins deux raisons.

1 — Un stylo bleu est un stylo qui est bleu. Mais une “ fonction partielle ” n'est pas une fonction qui serait partielle... ce n'est pas une fonction du tout ! C'est le contraire qui est vrai : une fonction est une semi-fonction qualifiée.

2 — Bourbaki [1, p. E II.21] appelle “ fonction partielle ” les fonctions de n variables obtenues à partir de fonctions de m variables ($n < m$) quand on fixe la valeur de certaines d'entre elles. Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

est une fonction partielle de

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

(remarquer qu'une fonction Bourbaki-partielle *est une fonction*). On retrouve cet emploi de “ partiel ” dans l'expression “ dérivée partielle ”.

Le choix du préfixe “ semi ” n'est pas hérétique (considérer “ semi-groupe ”, “ semi-linéaire ” etc.).

Base

N. Bourbaki [1] dit “ ensemble de départ ”.

Cible (target)

N. Bourbaki [1] dit “ ensemble d'arrivée ”. S. Mac Lane et G. Birkhoff [4] disent “ codomaine ”. P. M. Cohn [15] dit “ target ”.

Fonction (function)

D'autres appellations courantes sont " application ", " opération " [13], " transformation ", et " mapping ". Le terme " fonction " me semble le plus répandu et le plus simple. J'évite le subtil distinguo qui consiste à employer *tous* ces termes avec des nuances différentes.

Quelques auteurs ne font pas une différence franche entre fonction et graphe fonctionnel, ou bien rapprochent dangereusement les deux notions. Par exemple, P. M. Cohn [15] dit " mapping " pour "*fonction* " et " fonction " pour "*graphe fonctionnel* ". J. A. Goguen et J. Meseguer [25] confondent les deux.

Domaine (domain)

N. Bourbaki [1] dit " ensemble de définition " ou " première projection du graphe ". P. M. Cohn [15] dit " source ". S. Mac Lane et G. Birkhoff [4], P. R. Halmos [2] disent " domaine ".

Empreinte (range)

N. Bourbaki [1] dit " ensemble des valeurs " ou " seconde projection du graphe ". La majorité des auteurs anglo-saxons dit " range ".

Arité (arity)

On francise le mot anglais "*arity* ", d'usage courant. On trouve également " rank " [13].

Partie I

Magma

Les objets auxquels on s'intéresse, et sur lesquels on veut raisonner, sont les *magmas* (la galaxie des magmas est le sujet de l'étude).

Un magma ressemble beaucoup à une algèbre (au sens de l'algèbre universelle). Il n'y a que deux différences : on accepte de considérer non seulement toute fonction *mais aussi toute semi-fonction*, ce qui est plus général ; et on accepte de considérer des sous-ensembles du support, ce qui est nouveau.

Aussi ne s'étonnera-t-on pas de découvrir une parenté entre certains des concepts fondamentaux de cette étude et les concepts fondamentaux de l'algèbre universelle : terme, magma de termes ; homomorphisme, sous-algèbre, congruence, magma-quotient ; identité, inférence formelle ; magma libre, magma initial.

Pour le confort du lecteur, j'ai fait apparaître cette parenté autant que possible. Mais parenté n'est pas identité : certains concepts simples de l'algèbre universelle correspondent à des concepts compliqués de l'algèbre G. Par exemple, le magma des $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -termes *significatifs* (chap. 16) est un objet qui n'est pas du tout élémentaire ; or c'est lui (et non Λ) qu'il faut mettre en correspondance avec l'algèbre des termes de l'algèbre universelle.

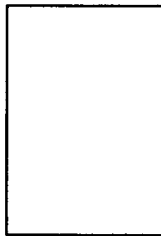
Chapitre 2

Vocabulaire

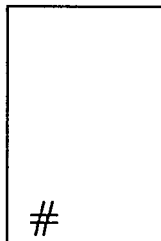
Puisque la logique proposée est symbolique, pour calculer on aura besoin d'écrire et de lire des symboles. Il faut donc savoir les reconnaître et en choisir quelques-uns.

Un vocabulaire est un ensemble fini de symboles : chaque symbole est soit un symbole de sous-ensemble, soit un symbole de semi-fonction, soit une variable.

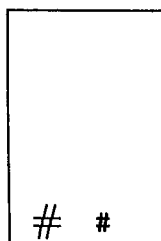
2.1 Qu'est-ce qu'un symbole ?



Noircir avec un peu d'encre et d'une certaine façon une partie d'une feuille vierge de papier blanc, c'est écrire un symbole (ou peut-être plusieurs). Par exemple j'écris ceci :



Puisqu'il reste assez de surface blanche, je peux écrire le même symbole une deuxième fois :



Combien de symboles apparaissent maintenant sur la feuille ? Il n'apparaît qu'un seul symbole, mais ce symbole apparaît à deux endroits.

À celui qui doute, on peut proposer cette analogie. Je prends deux photographies d'une même personne, puis je les colle sur une feuille de papier. Combien de personnes apparaissent sur la feuille ?

Il semble donc qu'un symbole soit un objet plus subtil qu'un peu d'encre déposée sur une feuille.

Qu'est-ce qu'un symbole ? Pour tenter de répondre à la question, on peut faire une petite expérience et raisonner ainsi. On dispose de feuilles vierges de papier blanc, d'encre noire et de divers outils pour appliquer celle-ci sur celles-là (stylo-plume, machine à écrire, photocopieuse, imprimante, etc.). On prend une feuille et, à l'aide de l'un des outils, on y écrit une fois un symbole.



La feuille de papier — C'est un objet tangible, physique. On la reproduit (photocopie), puis on la range à un certain endroit de manière à ne jamais la confondre avec aucune autre feuille au monde. L'original et la copie ne sont pas un même objet-feuille : *l'original et la copie sont donc distincts*.

Le dessin — Sur la feuille apparaît un " dessin ". Sur toute copie conforme c'est le même dessin qui apparaît. Ce dessin est un donc objet abstrait, intangible (" idéal " aurait dit Platon).

La classe des dessins semblables — On peut produire une photocopie réduite ou agrandie de la feuille. Le dessin original, son réduit, son agrandi sont des dessins distincts, mais on reconnaît toujours le même symbole : aussi les jugera-t-on *semblables*. On peut aussi recopier à la main le dessin original ; ce nouveau dessin lui est encore semblable (si l'on sait écrire). Tous ces dessins correspondent à un unique symbole.

Que conclure ? Un symbole serait une classe d'équivalence (un *symbole* serait la classe des dessins semblables), et même une classe d'équivalence de classes d'équivalence (un *dessin* serait la classe des feuilles qui sont mutuellement copies conformes l'une de l'autre). Si l'on en doute, du moins admettra-t-on qu'un symbole est un objet particulièrement abstrait et qu'il faut être prudent.

On retiendra aussi cette propriété simple mais fondamentale. Pour désigner un symbole, au lieu de le nommer et d'écrire ce nom, on peut toujours écrire le symbole lui-même. Ainsi je désigne ma sœur en écrivant " Marika " (et certainement pas en la faisant apparaître en personne sur le papier) ; mais je désigne le symbole " # " en écrivant directement " # ". C'est très commode.

2.2 Ce qu'on considérera comme un symbole (les symboles-objets)

Pour pouvoir communiquer aisément et sans erreur, avec un humain ou avec un ordinateur, je n'écrirai pas n'importe quel symbole (hiéroglyphes, idéogrammes, pictogrammes, etc.), *mais seulement des symboles-identificateurs* : est considéré comme symbole tout *mot* qu'on peut écrire en écrivant de gauche à droite *des caractères* de cet alphabet :

```

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
! " # $ % & ' ( ) * + , - . /
: ; < = > ? @
[ \ ] ^ _ `
{ | } ~

```

(cet alphabet est le sous-ensemble des quatre-vingt-quatorze caractères imprimables de l'alphabet ASCII¹).



Exemple — Voici un symbole :

`4a+=truc23`



Malgré l'apparence cette convention n'est pas contraignante : on dispose d'une infinité dénombrable de symboles (voir *infra*), ce qui est suffisant.

Beaucoup de symboles ne sont pas atomiques, mais cela est sans importance (les symboles atomiques sont les caractères de l'alphabet). La longueur d'un symbole (nombre de fois qu'on a écrit un caractère) est finie et non nulle : elle est finie, sinon on ne finirait jamais d'écrire le symbole ; elle est non nulle car on a écrit quelque chose.

Notation

1 — Je dessinerai toujours les symboles de la même façon, comme je le ferai avec une machine à écrire (juger si deux dessins sont semblables ne sera donc pas affaire d'expert).

2 — $\mathcal{Z}$ est l'ensemble de tous les symboles (de tous les identificateurs qu'on peut écrire).

Assertion 4 — $\mathcal{Z}$ est infini dénombrable.

Choissant un ordre (l'ordre lexicographique par exemple), on numérote les éléments de $\mathcal{Z}$ *une fois pour toutes* :

$$\mathcal{Z} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

¹American standard code for information interchange

Exemple — $x_1 = \text{“ a ”}$; $x_{26} = \text{“ z ”}$; $x_{27} = \text{“ A ”}$; $x_{95} = \text{“ aa ”}$. Etc.

□ ✕

2.3 Écrire un symbole, écrire un symbole, écrire etc.

Pourquoi écrire un symbole, puis à nouveau ce symbole ou un autre, etc. ? Pour écrire des *termes* (chapitre 4) et des *formules* (des “ phrases ” ; chapitre 8).

Comment écrire un symbole, puis à nouveau ce symbole ou un autre, etc. sur une même surface ? Adoptant la règle européenne, on écrit la première fois en haut à gauche ; puis on écrit à une petite distance à droite de l'endroit où on a déjà écrit (on fait apparaître un *espace*) ou à la ligne suivante ; etc. On écrit ainsi quatre fois le symbole “ x ” :

x x x x

et une fois le symbole “ xxxx ” :

xxxx

2.4 Les huit symboles réservés

On réserve ces huit symboles à un usage particulier et invariable :

***	.	::	\$	:	=	=<	>>
-----	---	----	----	---	---	----	----

Le symbole “ *** ” dénote l'univers considéré (le support du magma considéré). Le point “ . ” est le symbole qu'on écrit en dernier quand on écrit un formule (terminateur). On écrit “ :: ” quand on annonce un élément quelconque d'un certain ensemble (variable). On écrit “ \$ ” pour exprimer qu'un terme est *significatif* (les arguments appartiennent aux domaines des semi-fonctions). Le symbole “ : ” correspond au signe “ $\in$ ” (appartenance). Le symbole “ = ” correspond au signe égale. Le symbole “ =< ” correspond au signe “ $\subseteq$ ” (inclusion ensembliste). On écrit “ >> ” pour décrire une semi-fonction.

Notation — $\mathcal{R}$ est l'ensemble des huit symboles réservés.

2.5 Vocabulaire

Un vocabulaire est un ensemble fini de symboles, divisé en deux classes. On trouve des symboles de sous-ensemble et des symboles de semi-fonction.

Définition 12 (Vocabulaire) — On appelle “vocabulaire” tout triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$ qui a ces qualités :

- $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de symboles ;
- $\mathcal{F}$ est un ensemble fini de symboles ;
- a est une fonction $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{N}$;
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{R} = \{***\}$; $\mathcal{F} \cap \mathcal{R} = \emptyset$; $\mathcal{S} \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Notation — $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$.

Terminologie — On appelle “symbole de sous-ensemble” tout symbole de $\mathcal{S}$; on appelle “symbole de semi-fonction” tout symbole de $\mathcal{F}$. $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}$, l’arité de $\mathbf{f}$ est l’entier naturel $n = a(\mathbf{f})$; on dit que $\mathbf{f}$ est n -aire (nullaire, unaire, binaire, etc.).

Notation — Soit $n \in \mathbf{N}$. $\mathcal{F}_n$ est le sous-ensemble des symboles n -aires de $\mathcal{F}$.

Au lieu de “vocabulaire” on pourrait dire “signature”. Le vocabulaire (la signature) est en effet toute l’information dont a besoin l’analyseur grammatical.

Proposition 2 — Quel que soit $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$ un vocabulaire, $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Preuve — $*** \in \mathcal{S}$. ■

✂ **Exemple — Vocabulaire minimal**

Voici ${}_0\mathcal{V}$, le plus petit vocabulaire :

- ♣ ${}_0\mathcal{V} = ({}_0\mathcal{S}, {}_0\mathcal{F}, a)$;
- ${}_0\mathcal{S} = \{***\}$;
- ${}_0\mathcal{F} = \emptyset$;
- a est la fonction $(\emptyset, \emptyset, \mathbf{N})$ (fonction vide).

N.B. — Par économie j’ai écrit ceci :

$${}_0\mathcal{S} = \{***\}$$

plutôt que ceci (forme correcte) :

$${}_0\mathcal{S} = \{“ *** ”\}$$

En principe il n’y a pas d’ambiguïté à craindre, car les seuls symboles que je dessine à la machine à écrire sont les symboles de $\mathcal{Z}$ (les symboles-objets). □

✂ **Exemple — Vocabulaire ${}_1\mathcal{V}$**

- ♣ ${}_1\mathcal{V} = ({}_1\mathcal{S}, {}_1\mathcal{F}, a)$;
- ${}_1\mathcal{S} = \{***, \text{Nat}*, \text{Carre}, \text{Prem}\}$;
- ${}_1\mathcal{F}_0 = \{0\}$;
- ${}_1\mathcal{F}_1 = \{\text{s}, \text{p}, \text{rac}\}$;
- ${}_1\mathcal{F}_2 = \{+, -, *, \text{div}\}$;
- les autres ${}_1\mathcal{F}_i$ ($i \in \mathbf{N} - \{0, 1, 2\}$) sont vides.

${}_1\mathcal{V}$ est un vocabulaire (vérification triviale). □

2.6 Grand-vocabulaire

Un grand-vocabulaire est un ensemble fini de symboles, divisé en trois classes. On trouve à nouveau des symboles de sous-ensemble et des symboles de semi-fonction. La troisième classe est celle des *variables*. On a besoin d'écrire des variables pour écrire des *termes* (chapitre 4).

Définition 13 (Grand-vocabulaire) — On appelle “ grand-vocabulaire ” tout couple $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ qui a ces qualités :

- $\mathcal{V}$ est un vocabulaire $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$;
- $\mathcal{X}$ est un ensemble fini de symboles ;
- $\mathcal{X} \cap \mathcal{R} = \mathcal{X} \cap \mathcal{S} = \mathcal{X} \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Que $\mathcal{X}$ soit fini n'est pas une caractéristique essentielle. J'ai voulu signaler simplement qu'un $\mathcal{X}$ fini suffit (dans toute sa vie un mathématicien ne rencontre qu'un nombre fini de variables) et qu'il était intéressant de connaître *a priori* toutes les variables du raisonnement.

On peut d'ailleurs toujours remplacer un vocabulaire $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ par un vocabulaire plus large $(\mathcal{V}, \mathcal{X} \cup \mathcal{X}')$. La seule caractéristique importante est celle-ci : le classement des symboles est exclusif ; *tout symbole* (autre que “ *** ”) est ou réservé ou *symbole de sous-ensemble* ou *symbole de semi-fonction* ou *variable*.

Remarquer — Quel que soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire, $(\mathcal{V}, \emptyset)$ est un grand-vocabulaire.

Exemple — Grand-vocabulaire $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$

On connaît le vocabulaire ${}_1\mathcal{V}$ (voir *supra*). ${}_1\mathcal{X} = \{z, n, n^*, i, j\}$. — $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ est un grand-vocabulaire (vérification triviale). □

Terminologie — On appelle “ *variable* ” tout symbole de $\mathcal{X}$. Si l'expression abrégée n'est pas ambiguë, on peut dire “ vocabulaire ” au lieu de “ grand-vocabulaire ”.

Convention — Numérotation des variables

Une fois $\mathcal{X}$ choisi, pour raisonner commodément on a avantage à numéroter ses éléments, les variables, *une fois pour toutes*. Comme il se trouve qu'on a déjà numéroté tous les symboles ($\mathcal{Z} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$; voir p. 16), on peut simplement attribuer à chaque variable son numéro de symbole. Cette numérotation n'est pas continue (il y a des entiers naturels qui ne sont pas des numéros de variable), mais cela n'a aucune importance.

$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$. J'appelle “ L ” le sous-ensemble $\{n \in \mathbf{N}^* \mid \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}\}$ (L est l'ensemble des numéros de variables). On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$$

Remarquer — Si $\mathcal{X} = \emptyset$, $L = \emptyset$.

Chapitre 3

Magma

Un *magma* ressemble à ce que Grätzer appelle “ a partial algebra ” [14] : de la même façon, on désigne un ensemble (le support du magma) et certaines semi-fonctions relatives à cet ensemble. Mais on désigne en outre *certaines sous-ensembles du support*.

Pourquoi distinguer ces sous-ensembles ? Si l'on s'intéresse à des semi-fonctions, on est amené à s'intéresser à leurs composées (un *terme* dénote une composée de semi-fonctions ; voir *infra*). Or les domaines de ces composées ne sont en général pas évidents, ce dont on s'aperçoit déjà en considérant cette simple composée :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{\text{Log } x}{x-3}} \end{array}$$

Comment vérifier que $\frac{1}{2}$ est un élément de son domaine ? que $\frac{3}{2}$ n'est pas élément de son domaine ? Quel est le domaine ?

Si l'on veut raisonner sûrement et commodément à ce sujet — et non d'une manière *ad hoc* — on cherche alors un procédé de calcul. On s'aperçoit bientôt qu'on a intérêt à distinguer et à nommer certains sous-ensembles.

Terminologie — Au sujet de “ magma ”

Le nom qu'on entend et qu'on lit le plus souvent est “ algèbre ” (algebra). Je préfère “ magma ”, nom choisi par N. Bourbaki [3], pour au moins deux raisons.

1 — Le nom “ algèbre ” est surchargé. Désigne-t-on un procédé de calcul (résoudre un problème de géométrie par l'algèbre), une partie des mathématiques (ce qu'on sait des groupes, anneaux, corps etc.) ou un module-anneau (algèbre de polynômes, alg. d'endomorphismes) ?

2 — Les significations usuelles de “ magma ” conviennent : masse épaisse de consistance pâteuse ; mélange confus (*Micro-Robert*).

3.1 Magma

Se rappeler (notation) — Soit Ω un ensemble. $\Omega^0 = \{\diamond\}$ (voir p. 8).

Définition 14 (Magma) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On appelle “ $\mathcal{V}$ -magma ” tout triplet (Ω, Σ, Φ) ,

- Ω étant un ensemble,
 - Σ étant une famille indexée d'ensembles, $\Sigma = \{\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}}$,
 - Φ étant une famille indexée de semi-fonctions, $\Phi = \{\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$,
- qui a ces qualités :

i — $\Omega \neq \emptyset$;

ii-a — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset$ et $\sigma_{\mathbf{S}} \subseteq \Omega$ (sous-ensemble non vide de Ω) ;

ii-b — $\sigma_{***} = \Omega$;

iii — $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \phi_{\mathbf{f}}$ est une semi-fonction $\Omega^{a(\mathbf{f})} \rightarrow \Omega$.

Notation — $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.

Que, $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \sigma_{\mathbf{S}}$ soit non vide est une caractéristique essentielle. On s'abstient de nommer l'ensemble vide, de sorte qu'on n'y quantifiera jamais aucune variable (on n'envisagera jamais un $\forall x \in \emptyset$). On évite ainsi une difficulté colossale. En effet, si l'on ne prend pas cette précaution, l'égalité n'est plus transitive, donc n'est plus une relation d'équivalence ; et on ne sait plus quel ensemble-quotient puis quel magma-quotient considérer (section *Être affirmatif ou spéculatif* ; voir p. 213).

Terminologie — Le support du magma Ω est l'ensemble Ω . Les opérations fondamentales de Ω sont les $\phi_{\mathbf{f}}$ ($\mathbf{f} \in \mathcal{F}$).

Remarquer — $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, la semi-fonction $\phi_{\mathbf{e}}$ est une Ω -semi-constante ; si $\phi_{\mathbf{e}}$ n'est pas vide, $\phi_{\mathbf{e}\diamond}$ est un élément de Ω .

Indexer et *nommer* sont deux opérations équivalentes. Si par exemple “**Nombres**” est un symbole de sous-ensemble, on peut considérer qu'il est le nom de l'ensemble σ_{Nombres} . Ainsi, chaque symbole de $\mathcal{S}$ est le nom d'un sous-ensemble, chaque symbole de $\mathcal{F}$ le nom d'une semi-fonction.

Un magma est une collection d'objets rangés d'une certaine façon. Il n'y a par définition que peu de relations entre ces objets : par exemple, tout $\sigma_{\mathbf{S}}$ est un sous-ensemble de Ω . Mais il y a beaucoup d'autres relations possibles, on l'imagine aisément : l'empreinte de telle semi-fonction $\phi_{\mathbf{f}}$ est-elle incluse dans tel sous-ensemble $\sigma_{\mathbf{S}}$? ce sous-ensemble $\sigma_{\mathbf{E}}$ est-il inclus dans $\sigma_{\mathbf{F}}$? $\sigma_{\mathbf{E}}$ est-il inclus dans le domaine de telle semi-fonction unaire $\phi_{\mathbf{g}}$? etc. De telles relations, qu'on notera en écrivant des symboles, seront examinées plus tard. On pourra alors ne considérer que certains magmas, ceux ayant certaines propriétés (*axiomes*), et donc raisonner plus finement.

3.2 Exemples



Magma ${}_1\Omega$

Notation — $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ le sous-ensemble des naturels non nuls.

On connaît le vocabulaire ${}_1\mathcal{V}$ (voir p. 18). Voici ${}_1\Omega$:

- $\clubsuit {}_1\Omega = ({}_1\Omega, {}_1\Sigma, {}_1\Phi)$; ${}_1\Sigma = \{{}_1\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in {}_1\mathcal{S}}$; ${}_1\Phi = \{{}_1\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in {}_1\mathcal{F}}$;
- ${}_1\Omega = \mathbf{N}$;
- ${}_1\sigma_{\mathbf{Nat}^*} = \mathbf{N}^*$;
- ${}_1\sigma_{\mathbf{Carre}} = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$ (les carrés) ;
- ${}_1\sigma_{\mathbf{Prem}} = \{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ est premier}\}$;
- ${}_1\phi_0$ est cette $\mathbf{N}$ -semi-constante non vide : ${}_1\phi_0 \diamond = 0$;
- ${}_1\phi_{\mathbf{s}}$ est cette fonction (successeur) :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

- ${}_1\phi_{\mathbf{p}}$ est cette semi-fonction (prédécesseur) :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^* \ni n &\mapsto n - 1 \end{aligned}$$

- ${}_1\phi_{\mathbf{rac}}$ est cette semi-fonction (racine) :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ {}_1\sigma_{\mathbf{Carre}} \ni n &\mapsto \sqrt{n} \end{aligned}$$

- ${}_1\phi_{+}$ est cette fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2 &\rightarrow \mathbf{N} \\ (n, m) &\mapsto n + m \end{aligned}$$

- ${}_1\phi_{-}$ est cette semi-fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2 &\rightarrow \mathbf{N} \\ \{(n, m) \mid n \geq m\} \ni (n, m) &\mapsto n - m \end{aligned}$$

- ${}_1\phi_{*}$ est cette fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2 &\rightarrow \mathbf{N} \\ (n, m) &\mapsto n \times m \end{aligned}$$

- ${}_1\phi_{\mathbf{div}}$ est cette semi-fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2 &\rightarrow \mathbf{N} \\ \{(n, m) \mid m \neq 0 \text{ et } n \text{ est divisible par } m\} \ni (n, m) &\mapsto n/m \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que ${}_1\Omega$ est un ${}_1\mathcal{V}$ -magma. □

Magma ${}_{2,1}\Omega$

Notation — $\mathbf{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

${}_2\mathcal{V}$ est ce vocabulaire :

- ♣ ${}_2\mathcal{V} = ({}_2\mathcal{S}, {}_2\mathcal{F}, a)$;
- ${}_2\mathcal{S} = \{***, E, F\}$;
- ${}_2\mathcal{F}_0 = \{\text{zero}, \text{un}, \text{euler}\}$;
- ${}_2\mathcal{F}_2 = \{\text{frac}\}$;
- les autres ${}_2\mathcal{F}_i$ ($i \in \mathbf{N} - \{0, 2\}$) sont vides.

Voici ${}_{2,1}\Omega$, un ${}_2\mathcal{V}$ -magma :

- ♣ ${}_{2,1}\Omega = ({}_{2,1}\Omega, {}_{2,1}\Sigma, {}_{2,1}\Phi)$; ${}_{2,1}\Sigma = \{{}_{2,1}\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in {}_2\mathcal{S}}$; ${}_{2,1}\Phi = \{{}_{2,1}\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in {}_2\mathcal{F}}$;
- ${}_{2,1}\Omega = \mathbf{Q}$;
- ${}_{2,1}\sigma_{\mathbf{E}} = \mathbf{Q}$;
- ${}_{2,1}\sigma_{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}^*$;
- ${}_{2,1}\phi_{\text{zero}}$ n'est pas vide, ${}_{2,1}\phi_{\text{zero}} \diamond = 0$;
- ${}_{2,1}\phi_{\text{un}}$ n'est pas vide, ${}_{2,1}\phi_{\text{un}} \diamond = 1$;
- ${}_{2,1}\phi_{\text{euler}}$ est vide ;
- ${}_{2,1}\phi_{\text{frac}}$ est cette semi-fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^2 & \rightarrow & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^* \ni (\xi, \eta) & \mapsto & \xi/\eta^2 \end{array}$$

□

Magma ${}_{2,2}\Omega$

⊗

Notation — $\mathbf{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Voici ${}_{2,2}\Omega$, un autre ${}_2\mathcal{V}$ -magma :

- ♣ ${}_{2,2}\Omega = ({}_{2,2}\Omega, {}_{2,2}\Sigma, {}_{2,2}\Phi)$; ${}_{2,2}\Sigma = \{{}_{2,2}\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in {}_2\mathcal{S}}$; ${}_{2,2}\Phi = \{{}_{2,2}\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in {}_2\mathcal{F}}$;
- ${}_{2,2}\Omega = \mathbf{R}$;
- ${}_{2,2}\sigma_{\mathbf{E}} = \mathbf{R}$;
- ${}_{2,2}\sigma_{\mathbf{F}} = \mathbf{R}_+^*$;
- ${}_{2,2}\phi_{\text{zero}}$ n'est pas vide, ${}_{2,2}\phi_{\text{zero}} \diamond = 0$;
- ${}_{2,2}\phi_{\text{un}}$ n'est pas vide, ${}_{2,2}\phi_{\text{un}} \diamond = 1$;
- ${}_{2,2}\phi_{\text{euler}}$ n'est pas vide, ${}_{2,2}\phi_{\text{euler}} \diamond = e$ ($e = \exp 1$) ;
- ${}_{2,2}\phi_{\text{frac}}$ est cette semi-fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \ni (\xi, \eta) & \mapsto & \xi + \text{Log } \eta \end{array}$$

Comme on examinera cet exemple à nouveau, il est commode d'appeler simplement “ ϕ ” la semi-fonction ${}_{2,2}\phi_{\text{frac}}$ et de choisir dès maintenant un ensemble de variables :

$${}_2\mathcal{X} = \{u, v, x, y, z\}$$

On numérote les variables ainsi : ${}_2\mathcal{X} = \{x_l\}_{l \in L}$,

- $L = \{21, 22, 24, 25, 26\}$, et
 - $x_{21} = u$, $x_{22} = v$, $x_{24} = x$, $x_{25} = y$, $x_{26} = z$.
- $({}_2\mathcal{V}, {}_2\mathcal{X})$ est un grand-vocabulaire (vérification triviale).

□

Chapitre 4

Terme — I

On vient d'examiner le magma ${}_{2,2}\Omega$ (voir p. 23), dont on a distingué les éléments 0, 1, e , et cette semi-fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \ni (\xi, \eta) &\mapsto \xi + \text{Log } \eta \end{aligned}$$

Sans faire référence à autre chose, on peut désigner d'autres éléments, par exemple ceux-ci : (se rappeler que $\phi = {}_{2,2}\phi_{\text{frac}}$)

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + \text{Log } e = \phi(1, e) \\ 3 &= 2 + \text{Log } e = (1 + \text{Log } e) + \text{Log } e = \phi(\phi(1, e), e) \\ \text{Log } 2 &= 0 + \text{Log } 2 = 0 + \text{Log } (1 + \text{Log } e) = \phi(0, \phi(1, e)) \end{aligned}$$

et d'autres semi-fonctions, par exemple celle-ci :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (\xi, \eta, \zeta) &\mapsto \xi + \text{Log } (\eta + \text{Log } \zeta) = \phi(\xi, \phi(\eta, \zeta)) \end{aligned}$$

Comment noter ces autres éléments et ces autres semi-fonctions ? En écrivant des $({}_2\mathcal{V}, {}_2\mathcal{X})$ -termes, par exemple ceux-ci (un par ligne) :

```
frac un euler
frac frac un euler euler
frac zero frac un euler
frac x frac y z
```

Et si par hasard ou par malice on écrivait celui-ci qui paraît aussi normal que les autres :

```
frac un zero
```

A-t-il un sens ? Peut-on l'interpréter ? N'y a-t-il pas là une difficulté ?

En fait, on peut trouver un procédé d'interprétation uniforme, de telle sorte qu'on ne s'embarrassera pas à juger certains termes “ bons ” et d'autres “ mauvais ”. Bons, ils le sont tous...

4.1 Terme

On écrit un terme en écrivant des symboles de gauche à droite d'une manière conforme à une certaine règle (définition 15 ; voir *infra*). On fait ainsi apparaître une *séquence symbolique*.

La *longueur* de cette séquence est le nombre de fois qu'on a écrit un symbole (on a pu écrire plusieurs fois un même symbole).

Notation — $\lg l$ est la longueur de la séquence l .

Exemple

$$\lg [f1 \ x \ x] = 3$$

$$\lg [y] = 1$$

⊗

□

Notation — Soit $n \in \mathbb{N}^*$; j'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. $\forall i \in I$, soit l_i une séquence symbolique.

l_I est la séquence $[l_1 \ \dots \ l_n]$ (pour écrire l_I , on écrit l_1 , puis l_2 etc.).

Exemple — $I = \{1, 2\}$, $l_1 = [f1 \ x \ x]$, $l_2 = [y]$. — $l_I = [f1 \ x \ x \ y]$.

□

⊗

Un *terme* est une séquence symbolique qualifiée.

Définition 15 (Terme) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$.

On appelle “ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ”

- toute séquence $[e]$, $e \in \mathcal{F}_0$;
- toute séquence $[x]$, $x \in \mathcal{X}$;
- toute séquence $[f \ a_I]$, $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $\forall i \in I$, a_i étant un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme].

Syntaxe B.N.F.

$$\begin{aligned} \langle \text{Terme} \rangle &::= \langle \text{Symbole nullaire de semi-fonction} \rangle \\ &::= \langle \text{Variable} \rangle \\ &::= \langle \text{Symbole } n\text{-aire de semi-fonction} \rangle \underbrace{\langle \text{Terme} \rangle \ \dots \ \langle \text{Terme} \rangle}_n \end{aligned}$$

Notation — ${}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ est l'ensemble des $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -termes. Si l'expression abrégée n'est pas ambiguë, on peut dire “ terme ” au lieu de “ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ” ; et on peut écrire “ ${}^{\wedge}\mathcal{T}$ ” au lieu de “ ${}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ ”.

Remarquer

- 1 — La définition de “ terme ” est *réursive*.
- 2 — Pour écrire une séquence symbolique qui soit un terme, il n'y a qu'une seule règle grammaticale à respecter. En outre, celle-ci n'est guère contraignante : on doit simplement faire attention à l'arité des symboles de semi-fonction.
- 3 — La longueur d'un terme est *finie et non nulle* : elle est finie, sinon on ne finirait jamais d'écrire le terme (on n'écrit qu'un symbole à la fois) ; elle est non nulle car on a écrit au moins un symbole (quel que soit a un terme, $\lg a \geq 1$).
- 4 — La syntaxe est “ préfixée ”.

La syntaxe préfixée suffit pour exposer la *théorie*. En outre, parce qu'elle est rudimentaire, on peut vider bien des démonstrations de considération grammaticale.

Toutefois, il est entendu qu'un langage *informatique* doit être plus riche. Pour programmer aisément, on doit pouvoir écrire des termes de manière préfixée, postfixée, infixée, distribuée, voire graphique.



Exemple

On connaît le grand-vocabulaire $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ (voir p. 19). Voici quelques $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ -termes (un par ligne) :

```
0
z
s 0
s s i
div n* 0
rac - 0 s 0
+ s 0 s s j
s + 0 s 0
```

□

On est libre d'écrire des parenthèses pour que le texte soit plus lisible :

```
rac ( - 0 ( s 0 ) )
+ ( s 0 ) ( s s j )
```

Ces parenthèses sont un simple ornement.

Assertion 5 — ${}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Définition 16 (Terme atomique) — On appelle “terme atomique” tout terme dont la longueur est 1.

Le seul symbole d'un terme atomique est un symbole de semi-constante ou une variable. L'ensemble des termes atomiques est ${}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{F}_0, \mathcal{X})$.

Définition 17 (Sous-terme, sur-terme) — Soit $\mathbf{a}$ un terme. On appelle “sous-terme de $\mathbf{a}$ ” toute sous-séquence de $\mathbf{a}$ qui est un terme. On appelle “sur-terme de $\mathbf{a}$ ” tout terme dont $\mathbf{a}$ est une sous-séquence.

Remarquer — Tout terme $\mathbf{a}$ est un sous-terme de $\mathbf{a}$.

Assertion 6 — Un terme atomique n'a qu'un seul sous-terme, lui-même. Un terme non atomique a au moins un sous-terme autre que lui-même ; et a au moins un sur-terme autre que lui-même.

Cas particulier — Terme sans variable

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $(\mathcal{V}, \emptyset)$ est un grand-vocabulaire. On peut donc considérer $^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \emptyset)$.

Notation et terminologie — $^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V}) = ^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \emptyset)$. On appelle “ $\mathcal{V}$ -terme ” tout élément de $^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V})$.

Dans un $\mathcal{V}$ -terme n'apparaissent que des symboles de $\mathcal{F}$.

Assertion 7 — $^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

4.2 Analyser un terme

J'ai voulu cette section, inspirée du livre de Shoenfield [7], pour que le texte soit sans prérequis. Le lecteur avisé ne s'y attardera pas (sauf s'il veut mieux comprendre quelques unes de mes intentions ultimes ; comparer alors mon exposé à l'original).

Ce que j'appelle “ terme ” est une séquence symbolique (qualifiée). Je n'introduis pas le concept d'arbre, car on n'a pas besoin ici de cette deuxième représentation (ce non-besoin du concept d'arbre est courant [6,7,9,13,14, etc.]). Bien sûr, à chaque terme-séquence-symbolique correspond un et un seul terme-arbre [10].

Pourquoi adopter une syntaxe “ préfixée ” ? Parce que l'analyse grammaticale correspondante est simple. Je rappelle quelques propriétés bien connues [7].

Terminologie — Soit l une séquence symbolique non vide ; $\lg l \in \mathbb{N}^*$. J'appelle “ R ” l'ensemble $\{1, \dots, \lg l\}$. Soit $r \in R$.

1 — Écrire l , c'est écrire $\lg l$ fois un symbole (on écrit de gauche à droite). La r^{e} fois on écrit donc un certain symbole. Ce symbole, on dit qu'il *apparaît dans l à la place numéro r* (à la r^{e} place).

2 — Soit l_1 une séquence symbolique. On dit que l_1 *apparaît dans l à la place numéro r* pour exprimer ceci : (a) $r + \lg l_1 - 1 \leq \lg l$; (b) écrire le symbole qui dans l apparaît à la place numéro r , puis, si $\lg l_1 \geq 2$, celui qui apparaît à la place numéro $r + 1$, etc., c'est écrire l_1 (on écrit $\lg l_1$ fois un symbole ; donc la dernière fois on écrit le symbole qui apparaît à la place numéro $r + \lg l_1 - 1$). On dit aussi que l_1 *apparaît dans l à la zone $[r, r + \lg l_1 - 1]$* . Si l_1 apparaît dans l , l_1 est une sous-séquence de l .

Exemple — $[x \ y]$ est une sous-séquence de $[x \ y \ z \ x \ y]$. Elle y apparaît à la première place ; elle y apparaît aussi à la 4^e place. □

Définition 18 (Préfixe) — Soit l une séquence symbolique. On appelle “ préfixe de l ” toute sous-séquence qui dans l apparaît à la première place.

Notation — Pour noter que l_0 est un préfixe de l , on peut écrire : $l_0 \triangleleft l$.

Exemple ✕

$$\begin{aligned} [u \ \$ \ A] \triangleleft [u \ \$ \ A \ \text{***} \ rc] \\ [x \ y] \triangleleft [x \ y \ z \ x \ y] \\ [x] \triangleleft [x] \end{aligned}$$

□

Lemme 1 — Soit $\mathbf{a}$ un terme. $\forall r \in \{1, \dots, \lg \mathbf{a}\}$, dans $\mathbf{a}$ à la place numéro r apparaît au moins un terme (qui est donc un sous-terme de $\mathbf{a}$).

✕ *Exemple* — On connaît le vocabulaire ${}_1\mathcal{V}$ (voir p. 18). La séquence $[+ \mathbf{s} \mathbf{s} 0 \mathbf{s} 0]$ est un ${}_1\mathcal{V}$ -terme. À la 2^e place apparaît le terme $[\mathbf{s} \mathbf{s} 0]$; à la 4^e $[0]$; à la 5^e $[\mathbf{s} 0]$. $\square$

Preuve du lemme

On raisonne par récurrence.

1 — $\mathbf{a}$ est atomique

$\lg \mathbf{a} = 1$. Dans $\mathbf{a}$ à la première place apparaît $\mathbf{a}$ lui-même.

2 — $\mathbf{a}$ n'est pas atomique

$\mathbf{a}$ est une séquence $[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \text{ étant un terme}]$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I, \forall s \in \{1, \dots, \lg \mathbf{a}_i\}$, dans $\mathbf{a}_i$ à la place numéro s apparaît un terme (un sous-terme de $\mathbf{a}_i$).

$\lg [\mathbf{f} \mathbf{a}_I] \geq 2$. Dans $[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]$ à la première place apparaît $\mathbf{f}$; à la place numéro $r_1 = 2$ apparaît $\mathbf{a}_1$; à la place numéro $r_2 = 2 + \lg \mathbf{a}_1$ apparaît $\mathbf{a}_2$ (si $2 \in I$) ; etc. ; à la place numéro $r_{i+1} = r_i + \lg \mathbf{a}_i$ apparaît $\mathbf{a}_{i+1}$ (si $i, i+1 \in I$) ; etc.

Soit $r \in \{1, \dots, \lg [\mathbf{f} \mathbf{a}_I]\}$. Ou $r = 1$, ou $r \geq 2$.

- $r = 1$ — Dans $[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]$ à la première place apparaît $[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]$ lui-même.
- $r \geq 2$ — Puisque $r \in \{2, \dots, \lg [\mathbf{f} \mathbf{a}_I]\}$, $\exists i_0 \in I$,

$$r_{i_0} \leq r \leq r_{i_0} + \lg \mathbf{a}_{i_0} - 1$$

$r - r_{i_0} + 1 \in \{1, \dots, \lg \mathbf{a}_{i_0}\}$; donc dans $\mathbf{a}_{i_0}$ à la place numéro $r - r_{i_0} + 1$ apparaît un terme (hypothèse de récurrence). Ce terme apparaît dans $[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]$ à la place numéro r . $\blacksquare$

Lemme 2 — Quel que soit $\mathbf{a}$ un terme, quel que soit $\mathbf{b}$ un terme,

$$\mathbf{a} \angle \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Preuve

On raisonne par récurrence.

1 — $\lg \mathbf{a} = 1$

Ou $\mathbf{a} = [\mathbf{e}]$, $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$; ou $\mathbf{a} = [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

- $[\mathbf{e}] \angle \mathbf{b}$ — Puisque $\mathbf{b}$ est un terme, $\mathbf{b} = [\mathbf{e}] = \mathbf{a}$.
- $[\mathbf{x}] \angle \mathbf{b}$ — Puisque $\mathbf{b}$ est un terme, $\mathbf{b} = [\mathbf{x}] = \mathbf{a}$.

2 — $\lg \mathbf{a} = l \geq 2$

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — Quel que soit $\mathbf{c}$ un terme, quel que soit $\mathbf{d}$ un terme, si $\lg \mathbf{c} < l$ et si $\mathbf{c} \angle \mathbf{d}$, alors $\mathbf{c} = \mathbf{d}$.

Puisque $\mathbf{a}$ est un terme non atomique, $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \text{ étant un terme}]$. Puisque $\mathbf{b}$ est un terme et que $\mathbf{a} \angle \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = [\mathbf{f} \ \mathbf{b}_I]$, $[\forall i \in I, \mathbf{b}_i \text{ étant un terme}]$.

Donc $\mathbf{a}_1 \angle \mathbf{b}_I$: ou $\mathbf{a}_1 \angle \mathbf{b}_1$, ou $\mathbf{b}_1 \angle \mathbf{a}_1$. Dans les deux cas, puisque $\lg \mathbf{a}_1 < \lg \mathbf{a} = l$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$ (hypothèse de récurrence).

Donc $\mathbf{a}_2 \angle [\mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n]$: on vérifie de la même façon que $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$. De proche en proche, on vérifie que $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ ($i \in I$). Donc $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. ■

Proposition 3 — *Soit $\mathbf{a}$ un terme. $\forall r \in \{1, \dots, \lg \mathbf{a}\}$, dans $\mathbf{a}$ à la place numéro r apparaît un unique terme (un sous-terme de $\mathbf{a}$).*

Preuve — Dans $\mathbf{a}$ à la place numéro r apparaît au moins un terme (lemme 1). Si à cette place apparaît un sous-terme $\mathbf{b}_1$ et si à la même place apparaît un sous-terme $\mathbf{b}_2$, alors ou $\mathbf{b}_1 \angle \mathbf{b}_2$ ou $\mathbf{b}_2 \angle \mathbf{b}_1$. Dans les deux cas, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ (lemme 2). ■

Théorème 2 (Analyse grammaticale des termes) — *On ne peut produire deux analyses différentes d'un même terme (un terme n'est jamais ambigu) : sans jamais avoir à choisir, on reconnaît*

soit une séquence $[\mathbf{e}]$, $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$;

soit une séquence $[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$;

soit une séquence $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\wedge T]$.*

Preuve — On veut vérifier que, si $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] = [\mathbf{f} \ \mathbf{b}_I]$, alors $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i]$.

Soit $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ un terme, soit $[\mathbf{f} \ \mathbf{b}_I]$ un terme, $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] = [\mathbf{f} \ \mathbf{b}_I]$. Ou $\mathbf{a}_1 \angle \mathbf{b}_1$ ou $\mathbf{b}_1 \angle \mathbf{a}_1$. Donc $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$ (lemme 2) ; et ou $\mathbf{a}_2 \angle \mathbf{b}_2$ ou $\mathbf{b}_2 \angle \mathbf{a}_2$. Donc $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$. Etc. ■

Proposition 4 (Emboîtement) — *Soit $\mathbf{a}$ un terme ; j'appelle " R " l'ensemble $\{1, \dots, \lg \mathbf{a}\}$. Soit $r \in R$; soit $r' \in R$, $r \leq r'$. À la place numéro r apparaît un certain sous-terme $\mathbf{b}$; à la place numéro r' apparaît un certain sous-terme $\mathbf{c}$ (proposition 3).*

Ou $r + \lg \mathbf{b} - 1 < r'$ (les deux zones sont disjointes).

Ou $r' + \lg \mathbf{c} - 1 \leq r + \lg \mathbf{b} - 1$ (la deuxième zone est incluse dans la première et $\mathbf{c}$ est donc un sous-terme de $\mathbf{b}$).

Se mettre en garde — Exemple

On considère ce ${}_1\mathcal{V}$ -terme :

$$\mathbf{a} = [+ \ s \ s \ 0 \ s \ 0]$$

À la 2^e place apparaît $\mathbf{b} = [s \ s \ 0]$, à la 5^e $\mathbf{c} = [s \ 0]$. Les deux zones $[2, 4]$ et $[5, 6]$ sont disjointes, mais $\mathbf{c}$ est un sous-terme de $\mathbf{b}$! En effet, $\mathbf{c}$ apparaît dans $\mathbf{a}$ à deux endroits : à la zone $[3, 4]$ et à la zone $[5, 6]$. □

Preuve de la proposition

On suppose que les deux zones $[r, r + \lg \mathbf{b} - 1]$ et $[r', r' + \lg \mathbf{c} - 1]$ ne sont pas disjointes ;

$$r \leq r' \leq r + \lg \mathbf{b} - 1$$



Dans $\mathbf{b}$ à la place numéro $r' - r + 1$ apparaît un certain sous-terme $\mathbf{b}'$ de $\mathbf{b}$ (proposition 3 ; voir p. 29). Ce $\mathbf{b}'$ apparaît dans $\mathbf{a}$ à la place numéro r' . Donc dans $\mathbf{a}$, la zone $[r', r' + \lg \mathbf{b}' - 1]$ où apparaît $\mathbf{b}'$ est une partie de la zone $[r, r + \lg \mathbf{b} - 1]$ où apparaît $\mathbf{b}$; en particulier,

$$r' + \lg \mathbf{b}' - 1 \leq r + \lg \mathbf{b} - 1$$

Dans $\mathbf{a}$ à la place numéro r' apparaît aussi $\mathbf{c}$. Donc $\mathbf{b}' = \mathbf{c}$ (proposition 3) ;
et

$$r' + \lg \mathbf{c} - 1 \leq r + \lg \mathbf{b} - 1$$

■

⊗ *Exemple* — Soit $\mathbf{a}$ un terme ; $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ est un sous-terme de $\mathbf{a}$; $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ est un sous-terme de $\mathbf{a}$. — On vérifie que $\mathbf{b}$ est un sous-terme de $\mathbf{c}$ (vérification triviale). □

Théorème 3 (On peut analyser récursivement) — Soit $\mathbf{a}$ un terme non atomique ; $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in \wedge \mathcal{T}]$.

Dans $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ à la première place apparaît $\mathbf{f}$; à la place numéro $r_1 = 2$ apparaît $\mathbf{a}_1$; à la place numéro $r_2 = 2 + \lg \mathbf{a}_1$ apparaît $\mathbf{a}_2$ (si $2 \in I$) ; etc. ; à la place numéro $r_{i+1} = r_i + \lg \mathbf{a}_i$ apparaît $\mathbf{a}_{i+1}$ (si $i, i+1 \in I$) ; etc.

Soit $r' \in \{1, \dots, \lg [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\}$. À la place numéro r' apparaît un certain sous-terme $\mathbf{c}$ (proposition 3).

Ou $r' = 1$ et $\mathbf{c} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$: la zone $[r', r' + \lg \mathbf{c} - 1]$ coïncide avec la zone $[1, \lg [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]]$.

Ou $\exists i_0 \in I, r_{i_0} \leq r'$ et $r' + \lg \mathbf{c} - 1 \leq r_{i_0} + \lg \mathbf{a}_{i_0} - 1$: la zone $[r', r' + \lg \mathbf{c} - 1]$ est une partie de la zone $[r_{i_0}, r_{i_0} + \lg \mathbf{a}_{i_0} - 1]$; en particulier, $\mathbf{c}$ est un sous-terme de $\mathbf{a}_{i_0}$.

Preuve

$$\lg [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] = r_n + \lg \mathbf{a}_n - 1. \text{ Donc si } 2 \leq r' (\leq \lg [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]),$$

$$\exists i_0 \in I, r_{i_0} \leq r' \leq r_{i_0} + \lg \mathbf{a}_{i_0} - 1$$

on se rappelle alors que $r' + \lg \mathbf{c} - 1 \leq r_{i_0} + \lg \mathbf{a}_{i_0} - 1$ (proposition 4). ■

Corollaire 1 — Tout sous-terme de $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ est $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ lui-même ou un sous-terme de l'un des $\mathbf{a}_i$ ($i \in I$).

Remarquer — Soit $i_0 \in I$. On vérifie que $\mathbf{a}_{i_0}$, sous-terme de $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, est bien un sous-terme de l'un des $\mathbf{a}_i$ (il est au moins sous-terme de lui-même).

⊗ *Exemple*

On a déjà vu le ${}_1\mathcal{V}$ -terme $\mathbf{a} = [+ \ \mathbf{s} \ \mathbf{s} \ 0 \ \mathbf{s} \ 0]$; $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$,

- $\mathbf{f} = + \in {}_1\mathcal{F}_2$,
- $I = \{1, 2\}$,
- $\mathbf{a}_1 = [\mathbf{s} \ \mathbf{s} \ 0]$, et
- $\mathbf{a}_2 = [\mathbf{s} \ 0]$.

$[\mathbf{s} \ 0]$ est un sous-terme de $\mathbf{a}_1$; c'est aussi un sous-terme de $\mathbf{a}_2$! □

4.3 Interpréter un terme

On a voulu considérer non seulement les opérations fondamentales d'un certain magma, mais aussi leurs composées. Aussi, pour désigner celles-ci a-t-on été amené à écrire des termes.

Un terme est donc le nom d'une certaine composée. Laquelle ? Pour savoir, il faut interpréter le terme.

N.B. — On interprète un terme *par référence à un certain magma*.

Préliminaires — Notation et convention

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$ (il y a au moins un terme) ; $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19).

Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme.

Notation — $\text{Var } \mathbf{a}$ est l'ensemble des variables qui apparaissent dans le terme $\mathbf{a}$.

J'appelle “ J ” le sous-ensemble $\{j \in L \mid \mathbf{x}_j \in \text{Var } \mathbf{a}\}$; on peut alors écrire

$$\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$$

J'appelle “ m ” le cardinal de J .

Si $\mathbf{a}$ est sans variable, $J = \emptyset$ et $m = 0$. Sinon, J est un certain sous-ensemble non vide de L :

$$J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m$$

Notation

- Si $J = \emptyset$, $\mathbf{x}_J = \mathbf{x}_\emptyset = \square$ (la séquence symbolique vide).
- Sinon, $\mathbf{x}_J = [\mathbf{x}_{j_1} \dots \mathbf{x}_{j_m}]$ (on écrit une fois chaque variable de $\mathbf{a}$, dans un certain ordre).

Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comporte ces symboles :

- $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_3$;
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}\}$.

On numérote les variables ainsi : $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$,

- $L = \{21, 22, 24, 25, 26\}$, et
- $\mathbf{x}_{21} = \mathbf{u}$, $\mathbf{x}_{22} = \mathbf{v}$, $\mathbf{x}_{24} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_{25} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_{26} = \mathbf{z}$.

On vérifie très facilement que la séquence $[\mathbf{f} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z} \ \mathbf{u}]$ est un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme. Voici l'ensemble de ses variables :

$$\text{Var } [\mathbf{f} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z} \ \mathbf{u}] = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}, \quad J = \{21, 24, 26\}$$

En procédant ainsi, on a classé $\mathbf{u}$ première variable du terme ($\mathbf{u}$ a le plus petit numéro), $\mathbf{x}$ deuxième, etc. Pour se rappeler ce classement, il suffit de lire la séquence $\mathbf{x}_J = [\mathbf{u} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z}]$. □



4.3.1 Interpréter un terme sans variable

Interpréter un terme sans variable, c'est lui associer une certaine semi-constante, qui est une composée d'opérations fondamentales.

Soit $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$ un vocabulaire, $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ (il existe au moins un $\mathcal{V}$ -terme).
Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma.

À tout terme $a \in {}^\Delta\mathcal{T}(\mathcal{V})$, on associe une certaine Ω -semi-constante

$$\tau_a : \Omega^0 \rightarrow \Omega$$

De quelle façon ? On procède par récurrence.

1^{er} cas — a est atomique

Le terme a est une séquence $[e]$, $e \in \mathcal{F}_0$. On lui associe l' Ω -semi-constante $\tau_e = \phi_e$.

2^e cas — a n'est pas atomique

Le terme a est une séquence $[f \ a_I]$, $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, a_i \in {}^\Delta\mathcal{T}(\mathcal{V})]$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I$, au terme a_i on a associé une Ω -semi-constante τ_{a_i} .

Au terme $[f \ a_I]$, on associe cette Ω -semi-constante $\tau_{[f \ a_I]}$:

si $[\exists i \in I, \text{Dom } \tau_{a_i} = \emptyset]$,

alors $\tau_{[f \ a_I]} = (\emptyset, \Omega^0, \Omega)$ (semi-constante vide) ;

sinon

si le multiplet $(\tau_{a_i} \diamond)_{i \in I} \notin \text{Dom } \phi_f$,

alors $\tau_{[f \ a_I]} = (\emptyset, \Omega^0, \Omega)$,

sinon $\text{Dom } \tau_{[f \ a_I]} = \Omega^0$ et $\tau_{[f \ a_I]} \diamond = \phi_f(\tau_{a_i} \diamond)_{i \in I}$.

N.B. — Il suffit qu'un seul sous-terme dénote une semi-constante vide pour que le terme lui-même dénote une semi-constante vide ("strictitude", monotonie).



Exemple 1

On connaît le ${}_1\mathcal{V}$ -magma ${}_1\Omega$ (voir p. 22). La séquence

$$* \ 0 \ \text{div} \ 1 \ 0$$

$(0 \times \frac{1}{0})$ est un ${}_1\mathcal{V}$ -terme ; $[\text{div} \ 1 \ 0]$ est l'un de ses sous-termes.

On vérifie facilement que $\tau_{[\text{div} \ 1 \ 0]}$ est la $\mathbf{N}$ -semi-constante vide. Donc $\tau_{[* \ 0 \ \text{div} \ 1 \ 0]}$ est aussi la $\mathbf{N}$ -semi-constante vide. □

Morale ? Bien que $[\forall n \in \mathbf{N}, 0 \times n = 0]$, on s'abstiendra d'écrire " $0 \times \frac{1}{0} = 0$ ".

Exemple 2

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire qui comporte ces symboles :

- $f \in \mathcal{F}_3$;
- $k_3, k_2, k_1 \in \mathcal{F}_0$.

La séquence $[f \ k_3 \ k_2 \ k_1]$ est un $\mathcal{V}$ -terme. L'interpréter (par référence au magma Ω) c'est lui associer l' Ω -semi-constante

$$\tau_{[f \ k_3 \ k_2 \ k_1]}$$

qu'on peut désigner exactement :

si $\text{Dom } \phi_{k_3} = \emptyset$ ou si $\text{Dom } \phi_{k_2} = \emptyset$ ou si $\text{Dom } \phi_{k_1} = \emptyset$,

alors $\tau_{[f \ k_3 \ k_2 \ k_1]}$ est l' Ω -semi-constante vide ;

sinon

si $(\phi_{k_3} \diamond, \phi_{k_2} \diamond, \phi_{k_1} \diamond) \notin \text{Dom } \phi_f$,

alors $\tau_{[f \ k_3 \ k_2 \ k_1]}$ est l' Ω -semi-constante vide,

sinon $\text{Dom } \tau_{[f \ k_3 \ k_2 \ k_1]} = \Omega^0$ et $\tau_{[f \ k_3 \ k_2 \ k_1]} \diamond = \phi_f(\phi_{k_3} \diamond, \phi_{k_2} \diamond, \phi_{k_1} \diamond)$.

□

4.3.2 Interpréter un terme dans lequel apparaît au moins une variable

Interpréter un terme dans lequel apparaît au moins une variable, c'est lui associer une certaine semi-fonction, qui est une composée d'opérations fondamentales ; son arité, c'est le nombre de variables qui apparaissent dans le terme.

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{X} \neq \emptyset$ (il existe au moins un terme dans lequel apparaît au moins une variable). Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma.

Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{x_j\}_{j \in J}$, $\text{Card } J = m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Au terme $\mathbf{a}$, on associe une certaine semi-fonction

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$$

De quelle façon ? On procède par récurrence ; la seule difficulté, c'est de décrire précisément $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (voir *infra*).

N.B. — Il y a une analogie entre “ $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ ” et “ $\lambda \mathbf{x}_J. \mathbf{a}$ ” (lambda-calcul). On la percevra bientôt.

Notation

Soit $(\xi_j)_J \in \Omega^m$.

1 — $(\xi_j)_{j \in \emptyset} = \diamond$.

2 — Soit e une Ω -semi-constante non vide. $e(\xi_j)_{j \in \emptyset} = e \diamond (\in \Omega)$.

3 — Soit $\mathbf{b}$ un terme sans variable. $\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_\emptyset} = \tau_{\mathbf{b}}$. Si l' Ω -semi-constante $\tau_{\mathbf{b}}$ n'est pas vide, $\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_\emptyset}(\xi_j)_{j \in \emptyset} = \tau_{\mathbf{b}} \diamond$.

1^{er} cas — a est atomique

Le terme a est une séquence $[x]$, $x \in \mathcal{X}$. On lui associe la fonction $\tau_x^x = \text{Id}_\Omega$ (fonction identitaire de Ω).

2^e cas — a n'est pas atomique

Le terme a est une séquence $[f \ a_I]$, $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, a_i \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})]$.

$\forall i \in I$, j'appelle " J_i " le sous-ensemble $\{j \in J \mid x_j \in \text{Var } a_i\}$;
 $\text{Var } a_i = \{x_j\}_{j \in J_i}$; on vérifie sans peine que $J = \bigcup_{i \in I} J_i$. J'appelle " m_i " le cardinal de J_i .

J'appelle " I_s " le sous-ensemble $\{i \in I \mid \text{Var } a_i = \emptyset\}$ (ensemble des indices i , a_i étant *sans* variable). Puisqu'au moins une variable apparaît dans $[f \ a_I]$, $I - I_s \neq \emptyset$.

$\forall i \in I_s$, au sous-terme *sans* variable a_i on a associé une Ω -semi-constante τ_{a_i} (voir p. 32).

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s$, au sous-terme a_i on a associé une semi-fonction $\tau_{a_i}^{x_{J_i}} : \Omega^{m_i} \rightarrow \Omega$.

Au terme $[f \ a_I]$, on associe cette semi-fonction $\tau_{[f \ a_I]}^{x_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$:

$$(i) \quad \text{Dom } \tau_{[f \ a_I]}^{x_J} = \left\{ \begin{array}{l} (\xi_j)_J \in \Omega^m \\ \mid \\ [\forall i \in I, (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{a_i}^{x_{J_i}}] \\ \text{et } (\tau_{a_i}^{x_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_f \end{array} \right\} ;$$

$$(ii) \quad \forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{[f \ a_I]}^{x_J}, \quad \tau_{[f \ a_I]}^{x_J}(\xi_j)_J = \phi_f(\tau_{a_i}^{x_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I}.$$

N.B. — Si $\exists i \in I$, $\text{Dom } \tau_{a_i}^{x_{J_i}} = \emptyset$, alors $\tau_{[f \ a_I]}^{x_J} = (\emptyset, \Omega^m, \Omega)$; il suffit qu'un seul sous-terme dénote une semi-fonction vide pour que le terme lui-même dénote une semi-fonction vide ("strictitude", monotonie).

Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un vocabulaire qui comporte ces symboles :

- $f \in \mathcal{F}_3$;
- $e \in \mathcal{F}_0$;
- $x, y \in \mathcal{X}$.

On numérote les variables ainsi : $x_{24} = x$, $x_{25} = y$.

$I = [f \ y \ x \ y]$ est un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme. L'interpréter (par référence au magma Ω) c'est lui associer la semi-fonction

$$\tau_{[f \ y \ x \ y]}^{[x \ y]} : \Omega^2 \rightarrow \Omega$$

qu'on peut désigner exactement :

(j'appelle “ D ” l'ensemble $\{(\xi, \eta) \in \Omega^2 \mid (\eta, \xi, \eta) \in \text{Dom } \phi_f\}$)

si $D = \emptyset$,

alors $\tau_{[f \ y \ x \ y]}^{[x \ y]} = (\emptyset, \Omega^2, \Omega)$ (semi-fonction vide) ;

sinon $\text{Dom } \tau_{[f \ y \ x \ y]}^{[x \ y]} = D$, et

$$\forall (\xi, \eta) \in D, \quad \tau_{[f \ y \ x \ y]}^{[x \ y]}(\xi, \eta) = \phi_f(\eta, \xi, \eta)$$

II — $[f \ y \ x \ e]$ est un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme. L'interpréter (par référence au magma Ω), c'est lui associer la semi-fonction

$$\tau_{[f \ y \ x \ e]}^{[x \ y]} : \Omega^2 \rightarrow \Omega$$

qu'on peut désigner exactement :

si $\text{Dom } \phi_e = \emptyset$,

alors $\tau_{[f \ y \ x \ e]}^{[x \ y]} = (\emptyset, \Omega^2, \Omega)$;

sinon (j'appelle “ D ” l'ensemble $\{(\xi, \eta) \in \Omega^2 \mid (\eta, \xi, \phi_e \diamond) \in \text{Dom } \phi_f\}$)

si $D = \emptyset$,

alors $\tau_{[f \ y \ x \ e]}^{[x \ y]} = (\emptyset, \Omega^2, \Omega)$;

sinon $\text{Dom } \tau_{[f \ y \ x \ e]}^{[x \ y]} = D$, et

$$\forall (\xi, \eta) \in D, \quad \tau_{[f \ y \ x \ e]}^{[x \ y]}(\xi, \eta) = \phi_f(\eta, \xi, \phi_e \diamond)$$

□

4.3.3 Bilan — Un procédé uniforme d'interprétation

On peut croire qu'il y a deux procédés d'interprétation : l'un pour les termes sans variable, l'autre pour les termes où apparaît au moins une variable. En fait, compte tenu de la notation adoptée, il n'en est rien.

1 — Soit a un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ;

$\text{Var } a = \{x_j\}_{j \in J}$, $\text{Card } J = m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). $\tau_a^{x_J}$ est une semi-fonction $\Omega^m \rightarrow \Omega$. À un multiplet $(\xi_j)_J$ élément de son domaine correspond le résultat $\tau_a^{x_J}(\xi_j)_J$.

2 — Soit a un $\mathcal{V}$ -terme. τ_a est une Ω -semi-constante. Ou son domaine est vide, ou c'est le singleton $\Omega^0 = \{\diamond\}$. Si $\diamond \in \text{Dom } \tau_a$, il lui correspond le résultat $\tau_a \diamond$.

Or on sait que

$$\tau_a^{x_\emptyset}(\xi_j)_{j \in \emptyset} = \tau_a \diamond$$

(notation).

On peut donc raisonner sur un terme a d'une seule façon, que $\text{Var } a$ soit vide ou non ; on n'est pas obligé d'envisager deux cas. Toutefois, en le faisant on expose plus aisément et on vérifie plus sûrement (le texte n'est pas “ multiplexé ”).

4.3.4 L'ordre d'énumération des variables importe peu

Pour interpréter un terme on a besoin de connaître les numéros des variables (on a numéroté les symboles de $\mathcal{X}$ une fois pour toutes ; voir p. 19). En effet, si dans le terme apparaissent au moins deux variables, on doit savoir laquelle est première (celle dont le numéro est le plus petit ; elle représente la première composante du multiplet-argument), laquelle est deuxième (deuxième composante), etc.

Le procédé d'interprétation est donc fonction de cette numérotation arbitraire. Est-il lui-même arbitraire ? En fait, non ; ce dont on se convainc déjà en considérant cet exemple.

Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un vocabulaire qui comporte ces symboles :

- $f \in \mathcal{F}_3$;
 - $\mathcal{X} = \{v, u, z, y, x\}$.
- On numérote les variables ainsi : $\mathcal{X} = \{x_l\}_{l \in L}$,
- $L = \{21, 22, 24, 25, 26\}$, et
 - $x_{21} = u, \quad x_{22} = v, \quad x_{24} = x, \quad x_{25} = y, \quad x_{26} = z$.

$[f \ x \ z \ u]$ est un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme, dont l'ensemble des variables est $\{x_j\}_J, J = \{21, 24, 26\}$. Interpréter ce terme c'est lui associer la semi-fonction $\tau_f^u \ x \ z \ u$.

Et pourquoi ne pas lui associer $\tau_f^z \ x \ z \ u$? Quel est le lien entre ces deux semi-fonctions ? En fait, l'une n'est guère différente de l'autre. On vérifie facilement ceci :

- $\text{Dom } \tau_f^z \ x \ z \ u = \{(\xi_{26}, \xi_{24}, \xi_{21}) \in \Omega^3 \mid (\xi_{21}, \xi_{24}, \xi_{26}) \in \text{Dom } \tau_f^u \ x \ z \ u\}$; donc si l'une est vide, l'autre aussi ;
- et (à supposer qu'elles ne soient pas vides)
 $\forall (\xi_{21}, \xi_{24}, \xi_{26}) \in \text{Dom } \tau_f^u \ x \ z \ u, \quad \tau_f^z \ x \ z \ u(\xi_{26}, \xi_{24}, \xi_{21}) = \tau_f^u \ x \ z \ u(\xi_{21}, \xi_{24}, \xi_{26}).$ □

On considère maintenant le cas général.

Notation

Soit J un sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}^*$; $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$,
 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m$.

$\forall j \in J$, soit x_j un objet et soit l_j une séquence symbolique. Soit p une permutation $J \leftrightarrow J$.

1 — $(x_{p(j)})_{j \in J}$ est le multiplet $(x_{p(j_1)}, \dots, x_{p(j_m)})$.

2 — $[l_{p(j)}]_{j \in J}$ est la séquence symbolique $[l_{p(j_1)} \ \dots \ l_{p(j_m)}]$

Exemple (suite)

p est cette permutation $J \leftrightarrow J$ ($J = \{21, 24, 26\}$) :

$$p(21) = 26, \quad p(24) = 24, \quad p(26) = 21$$

On sait que $[\mathbf{x}_{p(j)}]^{j \in J}$ est la séquence

$$[\mathbf{x}_{p(21)} \ \mathbf{x}_{p(24)} \ \mathbf{x}_{p(26)}] = [\mathbf{x}_{26} \ \mathbf{x}_{24} \ \mathbf{x}_{21}] = [\mathbf{z} \ \mathbf{x} \ \mathbf{u}]$$

(notation). Donc (j'appelle “ $\mathbf{a}$ ” le terme $[\mathbf{f} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z} \ \mathbf{u}]$)

$$\tau_{\mathbf{a}}^{[\mathbf{x}_{p(j)}]^{j \in J}} = \tau_{\mathbf{f} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z} \ \mathbf{u}}^{\mathbf{z} \ \mathbf{x} \ \mathbf{u}}$$

□

Proposition 5 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\text{Card } \mathcal{X} \geq 2$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaissent au moins deux variables ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$ ($m \geq 2$). Soit p une permutation $J \leftrightarrow J$.

Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma.

$$\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{[\mathbf{x}_{p(j)}]^{j \in J}} = \{(\xi_{p(j)})_{j \in J} \in \Omega^m \mid (\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}\}$$

et

$$\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}, \tau_{\mathbf{a}}^{[\mathbf{x}_{p(j)}]^{j \in J}} (\xi_{p(j)})_{j \in J} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\xi_j)_J$$

4.3.5 Le choix des variables importe peu

Un terme est le *nom* d'une composée d'opérations fondamentales du magma. Pourtant, alors qu'on note ces opérations fondamentales sans avoir besoin d'écrire aucune variable (on n'écrit que des symboles de semi-fonction), pour pouvoir noter les composées on a d'abord besoin de choisir un ensemble de variables.

Quelle est l'importance de ce choix ? Raisonne-t-on sur les termes d'une manière arbitraire ?

En examinant un exemple, on se convainc bientôt que le seul caractère significatif d'un ensemble de variables est son cardinal.

Exemple

⊗

Soient $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ deux grand-vocabulaires,

- $\text{bin} \in \mathcal{F}_2$,
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{t}\}$, et
- $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$.

Examinant le $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme $[\text{bin} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z}]$, le $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ -terme $[\text{bin} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}]$, et comparant les semi-fonctions $\tau_{\text{bin} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z}}^{\mathbf{x} \ \mathbf{z}}$ et $\tau_{\text{bin} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}}^{\mathbf{y} \ \mathbf{z}}$, on est tenté de vérifier que

$$\tau_{\text{bin} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z}}^{\mathbf{x} \ \mathbf{z}} = \tau_{\text{bin} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}}^{\mathbf{y} \ \mathbf{z}}$$

Ce n'est pas très difficile : $\tau_{\text{bin} \ \mathbf{x} \ \mathbf{z}}^{\mathbf{x} \ \mathbf{z}} = \phi_{\text{bin}} = \tau_{\text{bin} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}}^{\mathbf{y} \ \mathbf{z}}$. La variable $\mathbf{x}$ est “ muette ”.

□

Voici l'énoncé général...

Proposition 6 — *Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbf{N}^*$.*

Soit $\mathcal{Y}$ un ensemble de symboles qui a cette qualité ($\mathcal{Y}$ est un deuxième ensemble de variables) :

- $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ est un grand-vocabulaire ;
- $\text{Card } \mathcal{Y} \geq m$ ($\mathcal{Y}$ est assez nombreux).

$\forall j \in J$, soit $\mathbf{y}_j \in \mathcal{Y}$, les $\mathbf{y}_j$ étant distinctes deux à deux (on associe $\mathbf{y}_j$ à $\mathbf{x}_j$).

Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma. On considère le terme $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, le terme $\mathbf{a}\{\mathbf{y}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ (c'est un terme obtenu par substitution ; voir p. 40), la semi-fonction $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$ et la semi-fonction $\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{y}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{y}_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$.

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{y}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{y}_J}$$

Chapitre 5

Terme — II — Théorèmes fondamentaux

Les termes sont des objets de même nature que les symboles. On peut les écrire sur du papier ; et on peut lire ceux qui sont écrits sur la feuille qu'on tient devant soi.

On est alors tenté d'écrire " mécaniquement " certains termes qui leurs sont apparentés :

- (substituer) associer un terme à chaque variable qui apparaît dans le terme original ; puis recopier le terme mais sans recopier aucune variable ; au lieu de recopier telle variable, écrire à la place le terme qui lui est associé ;
- (extraire) écrire un sous-terme du terme ;
- (remplacer) repérer une zone du terme original où apparaît un sous-terme ; puis recopier le terme mais sans recopier ce qui apparaît à cette zone ; au lieu de recopier ce qui apparaît à cette zone, écrire un certain terme.

Par exemple (voir p. 23), sont apparentés au terme $\text{frac frac } x \ x \ y$ ces termes-ci :

- $\text{frac frac zero zero un}$ (au lieu de recopier " x " écrire chaque fois " zero ", au lieu de recopier " y " écrire " un ") ;
- $\text{frac } x \ x$ (sous-terme) ;
- $\text{frac euler } y$ (au lieu de recopier " $\text{frac } x \ x$ " écrire " euler ").

On choisit maintenant un certain magma ; interprétant ces termes, à chacun d'eux on associe une certaine semi-fonction composée (à $\text{frac frac zero zero un}$ on associe $\tau_{\text{frac frac zero zero un}}$).

Ces composées sont-elles aussi apparentées ? Comment le sont-elles ? Quelle parenté mathématique correspond à quelle parenté symbolique ?

Il sera crucial de savoir répondre à ces questions quand on voudra vérifier qu'une certaine logique est complète (chapitre 15).

5.1 Λ , un remarquable magma de termes

Pour commencer, il est intéressant de découvrir que l'ensemble des termes est le support d'au moins un magma. En examinant celui-ci, on conçoit spontanément l'opération *substituer*.

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$ (il existe au moins un terme). L'ensemble *non vide* ${}^{\wedge}\mathcal{T} = {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ est le support du $\mathcal{V}$ -magma $\Lambda = ({}^{\wedge}\mathcal{T}, \Sigma, \Phi)$; $\Sigma = \{\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}}$, $\Phi = \{\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$.

Les sous-ensembles — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, $\sigma_{\mathbf{S}} = {}^{\wedge}\mathcal{T}$.

Les semi-constantes — $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, $\phi_{\mathbf{e}}$ est cette ${}^{\wedge}\mathcal{T}$ -semi-constante :

(i) $\text{Dom } \phi_{\mathbf{e}} = ({}^{\wedge}\mathcal{T})^0 (= \{\diamond\})$;

(ii) $\phi_{\mathbf{e}}\diamond = [\mathbf{e}]$.

Les autres semi-fonctions — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, $\phi_{\mathbf{f}}$ est cette semi-fonction $({}^{\wedge}\mathcal{T})^n \rightarrow {}^{\wedge}\mathcal{T}$: (j'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$)

(i) $\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} = ({}^{\wedge}\mathcal{T})^n$;

(ii) $\forall (\mathbf{a}_i)_I \in ({}^{\wedge}\mathcal{T})^n$, $\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$.

Chaque sous-ensemble $\sigma_{\mathbf{S}}$ est identique au support, et chaque semi-fonction $\phi_{\mathbf{f}}$ est une fonction. Si on “ oublie ” les sous-ensembles, ce magma est *le magma des termes* de l'algèbre universelle. Il ressemble beaucoup à un *autre* magma de termes, le magma ${}^{\S}\Theta$, qui a des propriétés fort intéressantes (chapitre 16).

Comment, par référence à Λ , interpréter les termes ?

Soit $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$. On lui associe une certaine semi-fonction

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}^{\wedge}\mathcal{T})^m \rightarrow {}^{\wedge}\mathcal{T}$$

Cette semi-fonction, on aimerait la décrire concrètement (prendre garde qu'un terme est équivoque : $\mathbf{a}$ est un objet, élément de ${}^{\wedge}\mathcal{T}$; $\mathbf{a}$ est aussi le nom de $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, semi-fonction *relative à ces mêmes objets-termes* !).

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

On vérifie sans peine que $\tau_{\mathbf{a}}$ est une ${}^{\wedge}\mathcal{T}$ -semi-constante non vide, et que

$$\tau_{\mathbf{a}}\diamond = [\mathbf{a}]$$

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ ($J \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{N}^*$)

Notation — $\forall j \in J$, soit $\mathbf{d}_j \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

$\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$ est le terme qu'on écrit quand on recopie $\mathbf{a}$ *mais sans recopier aucune* $\mathbf{x}_j$ ($j \in J$) ! au lieu de recopier $\mathbf{x}_j$, à la place on écrit le terme $\mathbf{d}_j$ ($\forall j \in J$, dans $\mathbf{a}$ on a “ substitué ” un $\mathbf{d}_j$ à chaque $\mathbf{x}_j$).

N.B. — On peut aussi définir “ $\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$ ” récursivement.

Remarquer — Il n'y a pas de notation standardisée. On trouve aussi ceci :

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{d}] \quad \mathbf{a}[\mathbf{d}/\mathbf{x}] \quad \mathbf{a}[\mathbf{x} \mapsto \mathbf{d}]$$

En l'occurrence, j'écrirais " $\mathbf{a}[\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}]$ " qui est cousin de " $\mathbf{a}[\mathbf{d}/\mathbf{x}]$ " (j'écris " $[$ " et " $]$ " parce que je ne sais pas si $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}\}$).

Terminologie (néologismes) — Pour exposer commodément, j'appelle $\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$ "le *substituât*" (c'est le produit d'une substitution ; cf. filtrat, précipitat, agglomérat, résultat) et $\mathbf{d}_j$ "un *substituande*" (cf. opérande, multiplicande ; on peut aussi dire "un substitué" car $\mathbf{d}_j$ est ce qui est substitué à $\mathbf{x}_j$).

Proposition 7 — $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ est cette fonction :

$$\begin{aligned} (^{\wedge}\mathcal{T})^m &\rightarrow {}^{\wedge}\mathcal{T} \\ (\mathbf{d}_j)_J &\mapsto \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \end{aligned}$$

Preuve

Cette preuve est facile. En la lisant et en la comprenant on saisira à bon marché l'esprit de l'étude.

On raisonne par récurrence.

1 — $\mathbf{a}$ est atomique

$\mathbf{a} = [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Par définition, $\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{(^{\wedge}\mathcal{T})}$; donc

$$\forall \mathbf{d} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}, \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{d}) = \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{d}) = \mathbf{d} = \mathbf{x}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\} = \mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\}$$

2 — $\mathbf{a}$ n'est pas atomique

$\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et, $\forall i \in I$, $\mathbf{a}_i \in {}^{\wedge}\mathcal{T}$. L'ensemble des variables du sous-terme $\mathbf{a}_i$ est $\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$; $\text{Card } J_i = m_i$. On vérifie que $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $J = \bigcup_{i \in I} J_i$.

On considère l'ensemble $I_s = \{i \in I \mid J_i = \emptyset\}$ (ensemble des indices i , $\mathbf{a}_i$ étant sans variable). Sachant que $\mathbf{a}$ contient au moins une variable, on vérifie que $I - I_s \neq \emptyset$.

$\forall i \in I_s$, $\tau_{\mathbf{a}_i}$ est une ${}^{\wedge}\mathcal{T}$ -semi-constante non vide et $\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i$ (voir *supra*) ; puisque $\text{Var } \mathbf{a}_i = \emptyset$ ($J_i = \emptyset$), on peut écrire (appendice *Notation* ; voir p. 218) :

$$\forall (\mathbf{d}_j)_J \in (^{\wedge}\mathcal{T})^m, \tau_{\mathbf{a}_i}(\mathbf{d}_j)_{j \in \emptyset} = \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in \emptyset}$$

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s$, $\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$ est cette fonction :

$$\begin{aligned} (^{\wedge}\mathcal{T})^{m_i} &\rightarrow {}^{\wedge}\mathcal{T} \\ (\mathbf{d}_j)_{J_i} &\mapsto \mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i} \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que, $\forall (\mathbf{d}_j)_J \in (^{\wedge}\mathcal{T})^m$,

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J &= \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i})_{i \in I} = \phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i})_{i \in I} \\ &= [\mathbf{f} \ [\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}]_{i \in I}] = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \end{aligned}$$

■

5.2 Interpréter un substituat

Sont liés au terme $\left[\frac{x}{y}\right]$ le terme $\left[\frac{\text{zero}}{\text{un}}\right]$ (substituer zero à x , et un à y), et le terme $\left[\frac{u}{u}\right]$ (substituer u à x , et u à y).

On vérifie sans trop de peine que la $\mathbf{R}$ -semi-constante $\tau_{\left[\frac{\text{zero}}{\text{un}}\right]}$ n'est pas vide et que

$$\tau_{\left[\frac{\text{zero}}{\text{un}}\right]} \diamond = \phi(0, 1) = \tau_{\left[\frac{x}{y}\right]}(\tau_{\text{zero}} \diamond, \tau_{\text{un}} \diamond)$$

On peut aussi vérifier que, si l'argument ξ convient,

$$\tau_{\left[\frac{u}{u}\right]}^u(\xi) = \phi(\xi, \xi) = \tau_{\left[\frac{x}{y}\right]}(\tau_u^u(\xi), \tau_u^u(\xi))$$

On a peut-être déjà deviné de quelle manière le τ d'un terme obtenu par substitution est lié au τ du terme original et aux τ des termes substitués aux variables. Voici l'énoncé général.

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{X} \neq \emptyset$; $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19).

Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme *dans lequel apparaît au moins une variable* ;

$\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$, $J \neq \emptyset$, $J \subseteq L$.

$\forall j \in J$, soit $\mathbf{d}_j \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$. J'appelle " K_j " le sous-ensemble des indices $k \in L$, $\mathbf{x}_k$ apparaissant dans $\mathbf{d}_j$; $\text{Var } \mathbf{d}_j = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K_j}$.

Remarquer — Si aucune variable n'apparaît dans $\mathbf{d}_j$, $K_j = \emptyset$.

J'appelle " K " l'union $\bigcup_{j \in J} K_j$; j'appelle " q " le cardinal de K . On vérifie sans peine que

$$\text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K}$$

Remarquer — Si $[\forall j \in J, K_j = \emptyset]$, alors $K = \emptyset$ (c'est-à-dire $\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$ est sans variable).

Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma. On considère les semi-fonctions $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, $\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}$ ($j \in J$) et

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} : \Omega^q \rightarrow \Omega$$

On distingue deux cas.

Théorème 4

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \emptyset$ ($\forall j \in J$, $\mathbf{d}_j$ est sans variable ; $q = 0$)

Si $\exists j \in J$, $\text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j} = \emptyset$,

alors $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}} = \emptyset$;

sinon

si $(\tau_{\mathbf{d}_j} \diamond)_{j \in J} \notin \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$,

alors $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}} = \emptyset$,

sinon $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}} = \Omega^0$ et

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J}} \diamond = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\tau_{\mathbf{d}_j} \diamond)_{j \in J}$$

(le dénoté du substituat est la composée du dénoté du terme original et des dénotés des substituanes).

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$ ($q \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} = \left\{ \begin{array}{l} (\xi_k)_K \in \Omega^q \\ \mid \quad \forall j \in J, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} \\ \text{et } (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \end{array} \right\}$$

et

$$\forall (\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K}, \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J}$$

(même remarque).

Preuve

Il n'est pas difficile de vérifier que $\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K}$ est une certaine composée d'autres fonctions τ . Ce qui est difficile, c'est de présenter son domaine. Pourquoi ? Il y a au moins deux raisons à cela : le domaine étriqué d'une semi-fonction est un caractère essentiel mais difficile à saisir ; et, parce qu'on ne les connaît que de manière récursive, on ne parvient jamais à contempler les semi-fonctions τ d'un seul coup d'œil.

Cette preuve est très technique. Elle a été pénible à écrire et est probablement pénible à lire, car on navigue à travers un raisonnement doublement récurrent (compréhension récurrente de la fonction tau et vérification récurrente du résultat annoncé). Ne pas la lire avant d'être bien familier avec la notation et le contexte.

Grâce à la notation qu'on a adoptée, on peut confondre les deux cas. On raisonne par récurrence.

I — $\mathbf{a}$ est atomique

$$\mathbf{a} = [\mathbf{x}], \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} = \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{\Omega}. \text{ Soit } \mathbf{d} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X}) ; \text{Var } \mathbf{d} = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K} ; \text{Card } K = q.$$

$$\mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\} = \mathbf{x}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\} = \mathbf{d} ; \text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\} = \text{Var } \mathbf{d} = \{\mathbf{x}_k\}_K ; \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\}}^{\mathbf{x}_K} = \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K}.$$

On vérifie sans peine que

$$\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\}}^{\mathbf{x}_K} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K} = \left\{ \begin{array}{l} (\xi_k)_K \in \Omega^q \\ \mid \quad (\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K} \\ \text{et } \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} = \Omega^0 \end{array} \right\}$$

$$\text{et que, } \forall (\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\}}^{\mathbf{x}_K} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K},$$

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d} \otimes \mathbf{x}\}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K = \text{Id}_{\Omega} \circ \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}}(\tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K)$$

II — $\mathbf{a}$ n'est pas atomique

$$\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I], \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N}^*), I = \{1, \dots, n\} \text{ et } [\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})].$$

$$\forall i \in I, \text{ j'appelle " } J_i \text{ " le sous-ensemble } \{j \in J \mid \mathbf{x}_j \in \text{Var } \mathbf{a}_i\} ;$$

$$\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}.$$

On vérifie sans peine que

$$[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_J = [\mathbf{f} \ [\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}]^{i \in I}]$$

J'appelle “ $K(i)$ ” l'union $\bigcup_{j \in J_i} K_j$;

$$\text{Var } \mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i} = \{ \mathbf{x}_k \}_{k \in K(i)}$$

J'appelle “ $q(i)$ ” le cardinal de $K(i)$.

On sait que

$$\begin{aligned} \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K} = \{ & (\xi_k)_K \in \Omega^q \\ & | \quad \forall i \in I, (\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} \\ & \text{et } (\tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} (\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \\ & \} ; \end{aligned} \quad (5.1)$$

et que

$$\begin{aligned} \forall (\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K}, \\ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K} (\xi_k)_K = \phi_{\mathbf{f}} (\tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} (\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I} \end{aligned} \quad (5.2)$$

(voir pp. 32 et 34).

J'appelle “ I_s ” le sous-ensemble $\{i \in I \mid \text{Var } \mathbf{a}_i = \emptyset\}$. Puisqu'au moins une variable apparaît dans $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $I - I_s \neq \emptyset$.

$\forall i \in I_s$ ($\mathbf{a}_i$ est sans variable), $\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i} = \mathbf{a}_i$; $K(i) = \emptyset$ et $q(i) = 0$;
donc $\tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} = \tau_{\mathbf{a}_i}$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s$,

$$\begin{aligned} \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} = \{ & (\xi_k)_{k \in K(i)} \in \Omega^{q(i)} \\ & | \quad \forall j \in J_i, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} \\ & \text{et } (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \\ & \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall (\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}, \\ \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} (\xi_k)_{k \in K(i)} = \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \end{aligned}$$

II-1 — $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K}$

J'appelle “ D_1 ” l'ensemble

$$\begin{aligned} \{ & (\xi_k)_K \in \Omega^q \\ & | \quad \forall j \in J, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} \\ & \text{et } (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \\ & \} \end{aligned}$$

On veut vérifier que

$$\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K} = D_1$$

II-1-1 — $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K} \subseteq D_1$?

Si $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_J}^{\mathbf{x}_K}$;

$$\forall i \in I, (\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} \quad (5.3)$$

et

$$(\tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} (\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \quad (5.4)$$

(5.1).

Soit $j_0 \in J$. $\mathbf{x}_{j_0}$ apparaît dans un certain $\mathbf{a}_{i_0}$, $i_0 \in I - I_s$; $j_0 \in J_{i_0}$; $K_{j_0} \subseteq K(i_0)$.

Donc

$$(\xi_k)_{k \in K(i_0)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_{i_0} \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_{j \in J_{i_0}}}^{\mathbf{x}_{K(i_0)}}$$

(5.3). Donc

$$(\xi_k)_{k \in K_{j_0}} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_{j_0}}^{\mathbf{x}_{K_{j_0}}}$$

(hypothèse de récurrence).

On vient de vérifier que

$$\forall j \in J, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}$$

Pour vérifier que $(\xi_k)_K \in D_1$, il reste donc à vérifier que

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in I, (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

et

$$(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

(voir p. 34).

• $\forall i \in I_s$ ($J_i = \emptyset, K(i) = \emptyset$), on sait que $\diamond \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}$ (5.3) ; c'est-à-dire

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

en outre,

$$\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} = \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}} \diamond = \tau_{\mathbf{a}_i \{ \mathbf{d}_j \ @ \ \mathbf{x}_j \}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}} (\xi_k)_{k \in K(i)}$$

(raisonnement trivial).

- $\forall i \in I - I_s,$

$$(\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}$$

(5.3) ; donc

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

et

$$\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} = \tau_{\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)}$$

(hypothèse de récurrence).

Ainsi (considérer les deux cas à la fois)

$$\forall i \in I, (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

et

$$(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i})_{i \in I} = (\tau_{\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \quad (5.5)$$

(5.4).

On a fini de vérifier que $(\xi_k)_K \in D_1$.

II-1-2 — $D_1 \subseteq \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}$?

Si $D_1 = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\xi_k)_K \in D_1$.

$$\forall j \in J, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} \quad (5.6)$$

donc aucune des $\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}$ ($j \in J$) n'est vide.

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

donc

$$\forall i \in I, (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \quad (5.7)$$

et

$$(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \quad (5.8)$$

(voir p. 34).

- $\forall i \in I_s$ ($J_i = \emptyset, K(i) = \emptyset$), on sait que $\diamond \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}$ (5.7) ; c'est-à-dire

$$(\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}$$

En outre

$$\tau_{\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)} = \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i}$$

(raisonnement trivial).

- $\forall i \in I - I_s,$

$$\forall j \in J_i \subseteq J, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}$$

(5.6) et

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

(5.7). Donc

$$(\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}$$

et

$$\tau_{\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)} = \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i}$$

(hypothèse de récurrence).

Ainsi (considérer les deux cas)

$$\forall i \in I, (\xi_k)_{k \in K(i)} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}$$

et

$$(\tau_{\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I} = (\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

(5.8).

On vient de vérifier que

$$(\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}$$

(5.1).

II-2 — $\forall (\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}$,

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K = \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} ?$$

Si $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}$. On sait que

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} = \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i})_{i \in I}$$

(voir p. 34). On sait que

$$\phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J_i})_{i \in I} = \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I}$$

(5.5). On sait enfin que

$$\phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}}^{\mathbf{x}_{K(i)}}(\xi_k)_{k \in K(i)})_{i \in I} = \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K$$

(5.2). Donc

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} = \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K$$

Ouf ! ■

5.3 Interpréter un sous-terme

Puisque $[\text{frac } x \ x]$ est un sous-terme de $[\text{frac } \text{frac } x \ x \ y]$, on soupçonne que le domaine de $\tau_{[\text{frac } x \ x]}$ et celui de $\tau_{[\text{frac } \text{frac } x \ x \ y]}$ sont liés. De quelle façon ?

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$; $\mathcal{X} = \{x_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19).

Soit $a \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } a = \{x_j\}_{j \in J}$, $\text{Card } J = m$.

Soit c un sous-terme de a . J'appelle " J_s " (sous-terme) le sous-ensemble d'indices $\{j \in J \mid x_j \in \text{Var } c\}$; $\text{Var } c = \{x_j\}_{j \in J_s}$.

Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma. On considère les semi-fonctions $\tau_a^{x_J}$ et $\tau_c^{x_{J_s}}$.

Théorème 5

1^{er} cas — $\text{Var } a = \emptyset$ — Si $\diamond \in \text{Dom } \tau_a$, alors $\diamond \in \text{Dom } \tau_c$.

2^e cas — $\text{Var } a \neq \emptyset$ ($J \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{N}^*$)

$$\forall (\xi_j)_{j \in J} \in \Omega^m, \quad (\xi_j)_{j \in J} \in \text{Dom } \tau_a^{x_J} \quad \Rightarrow \quad (\xi_j)_{j \in J_s} \in \text{Dom } \tau_c^{x_{J_s}}$$

Se rappeler — $J_s \subseteq J$.

Preuve

Preuve simple et représentative.

Grâce à la notation qu'on a adoptée, on peut confondre les deux cas.

Si $\text{Dom } \tau_a^{x_J} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

$\text{Dom } \tau_a^{x_J} \neq \emptyset$. Soit $(\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_a^{x_J}$. On veut vérifier que $(\xi_j)_{j \in J_s} \in \text{Dom } \tau_c^{x_{J_s}}$. On raisonne par récurrence.

1 — a est atomique

Il n'y a qu'un seul sous-terme de a , a lui-même ; donc $c = a$.

2 — a n'est pas atomique

$a = [f \ a_I]$, $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, a_i \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})]$.

On sait que ou $c = a$ ou c est un sous-terme de l'un des a_i ($i \in I$) (corollaire 1 ; voir p. 30).

Si $c = a$, on a fini.

Si c est un sous-terme de a_{i_0} ($i_0 \in I$), on procède ainsi.

J'appelle " J_{i_0} " le sous-ensemble des indices $j \in J$, x_j apparaissant dans a_{i_0} ; $\text{Var } a_{i_0} = \{x_j\}_{j \in J_{i_0}}$. J'appelle " m_{i_0} " le cardinal de J_{i_0} .

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall (\eta_j)_{j \in J_{i_0}} \in \Omega^{m_{i_0}}$,

$$(\eta_j)_{j \in J_{i_0}} \in \text{Dom } \tau_{a_{i_0}}^{x_{J_{i_0}}} \quad \Rightarrow \quad (\eta_j)_{j \in J_s} \in \text{Dom } \tau_c^{x_{J_s}}$$

$(\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{[f \ a_I]}^{x_J}$; donc $(\xi_j)_{j \in J_{i_0}} \in \text{Dom } \tau_{a_{i_0}}^{x_{J_{i_0}}}$ (voir p. 34) ; donc $(\xi_j)_{j \in J_s} \in \text{Dom } \tau_c^{x_{J_s}}$ (hypothèse de récurrence). ■

5.4 Interpréter un remplaçat

On sait que $0 + \text{Log } 1 = 0$. Donc les deux noms $\left[\frac{0}{1}\right]$ et $[0]$ sont synonymes ($\text{magma}_{2,2}\Omega$; voir p. 23). On est alors tenté d'associer au terme $\left[\frac{\frac{0}{1}}{x}\right]$ le terme $\left[\frac{0}{x}\right]$ (on l'écrit en remplaçant $\left[\frac{0}{1}\right]$ par $[0]$ dans $\left[\frac{\frac{0}{1}}{x}\right]$). Et on aimerait vérifier que ces deux associés sont eux-mêmes synonymes, c'est-à-dire vérifier que $\tau_{\left[\frac{\frac{0}{1}}{x}\right]}^x = \tau_{\left[\frac{0}{x}\right]}^x$. On peut aussi considérer la situation la plus générale.

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$; $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19).

Soit $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$. Dans $\mathbf{a}$ on repère une zone où apparaît un sous-terme, sous-terme que j'appelle “ $\mathbf{c}$ ”. Soit $\mathbf{d} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

J'appelle “ $\mathbf{a}'$ ” le terme qu'on écrit en recopiant $\mathbf{a}$ *mais sans recopier ce qui apparaît à la zone repérée !* au lieu de recopier ce qui apparaît à la zone repérée, on écrit $\mathbf{d}$ (dans $\mathbf{a}$ on a “ remplacé un $\mathbf{c}$ par $\mathbf{d}$ ”).

Terminologie (néologismes) — $\mathbf{a}'$ est le *remplaçat*, $\mathbf{d}$ le *remplaçande* ; $\mathbf{c}$ est le *remplacé* (voir p. 41).

J'appelle “ J_s ” (*sous-terme*) le sous-ensemble d'indices $\{j \in L \mid \mathbf{x}_j \in \text{Var } \mathbf{c}\}$; $\text{Var } \mathbf{c} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s}$.

J'appelle “ J_r ” (*reste*) le sous-ensemble des indices $j \in L$, $\mathbf{x}_j$ apparaissant dans $\mathbf{a}$ *hors de la zone repérée*. On vérifie sans peine que

$$\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s \cup J_r}$$

Remarquer — Si $\mathbf{c}$ apparaît deux fois dans $\mathbf{a}$, $J_s \subseteq J_r$, donc $J_s \cap J_r = J_s$.

J'appelle “ J'_s ” le sous-ensemble des indices $j \in L$, $\mathbf{x}_j$ apparaissant dans $\mathbf{d}$; $\text{Var } \mathbf{d} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J'_s}$. On vérifie sans peine que

$$\text{Var } \mathbf{a}' = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J'_s \cup J_r}$$

J'appelle “ m_+ ” le cardinal de $J_s \cup J'_s \cup J_r$.

Soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma. On considère les semi-fonctions $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}$, $\tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}$, $\tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_{J'_s}}$ et $\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}$.

Théorème 6**1^{er} cas** — $m_+ = 0$ **Si** $\diamond \in \text{Dom } \tau_a$,**si** $\diamond \in \text{Dom } \tau_d$ *et***si** $\tau_c \diamond = \tau_d \diamond$,**alors** $\diamond \in \text{Dom } \tau_{a'}$ *et*

$$\tau_{a'} \diamond = \tau_a \diamond$$

(si le dénoté du remplaçande coïncide avec le dénoté du remplacé, le dénoté du remplaçant coïncide alors avec le dénoté du terme original).

2^e cas — $m_+ \in \mathbb{N}^*$

$$\forall (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \Omega^{m_+},$$

si $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_a^{x_{J_s \cup J_r}}$,**si** $(\xi_j)_{j \in J'_s} \in \text{Dom } \tau_d^{x_{J'_s}}$, *et***si** $\tau_c^{x_{J_s}}(\xi_j)_{j \in J_s} = \tau_d^{x_{J'_s}}(\xi_j)_{j \in J'_s}$,**alors** $(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_{a'}^{x_{J'_s \cup J_r}}$ *et*

$$\tau_{a'}^{x_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_a^{x_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$$

(même remarque).

Remarquer — Si $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_a^{x_{J_s \cup J_r}}$, alors $(\xi_j)_{j \in J_s} \in \text{Dom } \tau_c^{x_{J_s}}$ (théorème 5 ; voir p. 48).

Preuve

Preuve technique, dans le style de la preuve du théorème 4, mais moins complexe.

Grâce à la notation adoptée, on peut confondre les deux cas.

S'il n'y a pas de multiplet $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \Omega^{m_+}$ qui ait cette qualité :

- $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_a^{x_{J_s \cup J_r}}$,
- $(\xi_j)_{j \in J'_s} \in \text{Dom } \tau_d^{x_{J'_s}}$ *et*
- $\tau_c^{x_{J_s}}(\xi_j)_{j \in J_s} = \tau_d^{x_{J'_s}}(\xi_j)_{j \in J'_s}$,

on a fini.

Sinon, soit $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r}$ un tel multiplet. On raisonne par récurrence.

I — a est atomique

Il n'y a qu'un seul sous-terme de **a**, **a** lui-même. Donc **c** = **a** et **a'** = **d** ($J_r = \emptyset$).

II — a n'est pas atomique

$$\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I], \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N}^*), I = \{1, \dots, n\} \text{ et } [\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})].$$

On sait ceci : ou $c = [f \ a_I]$; ou $\exists i_0 \in I$, la zone repérée étant une partie de la zone $[r_{i_0}, r_{i_0} + \lg a_{i_0} - 1]$, où apparaît a_{i_0} , et c étant un sous-terme de a_{i_0} (théorème 3 ; voir p. 30).

Si $c = [f \ a_I]$, on a fini ($a = c$ et $a' = d$).

Si non on procède ainsi.

J'appelle " a'_{i_0} " le terme qu'on écrit en recopiant ce qui apparaît à la zone $[r_{i_0}, r_{i_0} + \lg a_{i_0} - 1]$ *mais sans recopier ce qui apparaît à la zone repérée !* au lieu de recopier ce qui apparaît à la zone repérée, on écrit d (dans a_{i_0} on a remplacé un c par d).

J'appelle " I_b " le sous-ensemble $\{i \in I \mid 1 \leq i < i_0\}$, $I_\#$ le sous-ensemble $\{i \in I \mid i_0 < i \leq n\}$.

On vérifie immédiatement que

$$a = [f \ a_{I_b} \ a_{i_0} \ a_{I_\#}]$$

et que

$$a' = [f \ a_{I_b} \ a'_{i_0} \ a_{I_\#}]$$

$\forall i [i \in I, i \neq i_0]$, j'appelle " J_i " le sous-ensemble des indices $j \in J_r$, x_j apparaissant dans a_i ; $\text{Var } a_i = \{x_j\}_{j \in J_i}$.

J'appelle " J_{r,i_0} " le sous-ensemble des indices $j \in J_r$, x_j apparaissant dans la zone $[r_{i_0}, r_{i_0} + \lg a_{i_0} - 1]$ *hors la zone repérée*. On vérifie sans peine que

$$\text{Var } a_{i_0} = \{x_j\}_{j \in J_s \cup J_{r,i_0}}$$

que

$$\text{Var } a'_{i_0} = \{x_j\}_{j \in J'_s \cup J_{r,i_0}}$$

et que

$$J_r = \left(\bigcup_{i_b \in I_b} J_{i_b} \right) \cup J_{r,i_0} \cup \left(\bigcup_{i_\# \in I_\#} J_{i_\#} \right)$$

J'appelle " m_{+,i_0} " le cardinal de $J_s \cup J'_s \cup J_{r,i_0}$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall (\eta_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_{r,i_0}} \in \Omega^{m_{+,i_0}}$,

si $(\eta_j)_{j \in J_s \cup J_{r,i_0}} \in \text{Dom } \tau_{a_{i_0}}^{x_{J_s \cup J_{r,i_0}}}$,

si $(\eta_j)_{j \in J'_s} \in \text{Dom } \tau_d^{x_{J'_s}}$, et

si $\tau_c^{x_{J_s}}(\eta_j)_{j \in J_s} = \tau_d^{x_{J'_s}}(\eta_j)_{j \in J'_s}$,

alors $(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_{r,i_0}} \in \text{Dom } \tau_{a'_{i_0}}^{x_{J'_s \cup J_{r,i_0}}}$ et

$$\tau_{a'_{i_0}}^{x_{J'_s \cup J_{r,i_0}}}(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_{r,i_0}} = \tau_{a_{i_0}}^{x_{J_s \cup J_{r,i_0}}}(\eta_j)_{j \in J_s \cup J_{r,i_0}}$$

$(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}$. Donc

- $\forall i[i \in I, i \neq i_0], (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$;
- $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r, i_0} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r, i_0}}$;
- $(\tau_{\mathbf{a}_{i_b}}^{\mathbf{x}_{J_{i_b}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_b}}, \tau_{\mathbf{a}_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r, i_0}, \tau_{\mathbf{a}_{i_\#}}^{\mathbf{x}_{J_{i_\#}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_\#}})_{i_b \in I_b, i_\# \in I_\#} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$;
- $\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$
 $= \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_{i_b}}^{\mathbf{x}_{J_{i_b}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_b}}, \tau_{\mathbf{a}_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r, i_0}, \tau_{\mathbf{a}_{i_\#}}^{\mathbf{x}_{J_{i_\#}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_\#}})_{i_b \in I_b, i_\# \in I_\#}$

(voir p. 34).

On déduit que

$$(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r, i_0} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r, i_0}}$$

et que

$$\tau_{\mathbf{a}'_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r, i_0} = \tau_{\mathbf{a}_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r, i_0}$$

(hypothèse de récurrence).

On sait maintenant ceci :

- $\forall i[i \in I, i \neq i_0], (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$;
- $(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r, i_0} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r, i_0}}$;
- $(\tau_{\mathbf{a}_{i_b}}^{\mathbf{x}_{J_{i_b}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_b}}, \tau_{\mathbf{a}'_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r, i_0}, \tau_{\mathbf{a}_{i_\#}}^{\mathbf{x}_{J_{i_\#}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_\#}})_{i_b \in I_b, i_\# \in I_\#}$
 $= (\tau_{\mathbf{a}_{i_b}}^{\mathbf{x}_{J_{i_b}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_b}}, \tau_{\mathbf{a}_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r, i_0}, \tau_{\mathbf{a}_{i_\#}}^{\mathbf{x}_{J_{i_\#}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_\#}})_{i_b \in I_b, i_\# \in I_\#}$
 $\in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$.

C'est-à-dire

$$(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}$$

(voir p. 34). Donc

$$\begin{aligned} & \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \\ &= \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_{i_b}}^{\mathbf{x}_{J_{i_b}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_b}}, \tau_{\mathbf{a}'_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r, i_0}, \tau_{\mathbf{a}_{i_\#}}^{\mathbf{x}_{J_{i_\#}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_\#}})_{i_b \in I_b, i_\# \in I_\#} \\ &= \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_{i_b}}^{\mathbf{x}_{J_{i_b}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_b}}, \tau_{\mathbf{a}_{i_0}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r, i_0}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r, i_0}, \tau_{\mathbf{a}_{i_\#}}^{\mathbf{x}_{J_{i_\#}}}(\xi_j)_{j \in J_{i_\#}})_{i_b \in I_b, i_\# \in I_\#} \\ &= \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \end{aligned}$$

■

Chapitre 6

La classe des $\mathcal{V}$ -magmas — I

Après qu'on a choisi un vocabulaire $\mathcal{V}$, on peut s'intéresser à la classe des $\mathcal{V}$ -magmas et aux relations entre eux. On est ainsi amené à considérer les $\mathcal{V}$ -magmas qui sont sous-magmas d'un $\mathcal{V}$ -magma, les $\mathcal{V}$ -magmas qui sont isomorphes à un $\mathcal{V}$ -magma etc. Le concept principal est celui d'homomorphisme.

6.1 Homomorphisme

Notation

Soit ${}_b\Omega$ un ensemble (base) ; soit ${}_c\Omega$ un ensemble (cible). Soit α une fonction ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $I = \{1, \dots, n\}$.

- ${}^n\alpha$ est cette fonction :

$$\begin{aligned} ({}_b\Omega)^n &\rightarrow ({}_c\Omega)^n \\ (\xi_i)_I &\mapsto (\alpha(\xi_i))_I \end{aligned}$$

- ${}^0\alpha$ est la fonction identitaire de $\{\diamond\} = ({}_b\Omega)^0 = ({}_c\Omega)^0$:

$$\begin{aligned} ({}_b\Omega)^0 &\rightarrow ({}_c\Omega)^0 \\ \diamond &\mapsto \diamond \end{aligned}$$

Proposition 8 — Soit ${}_b\Omega$ un ensemble ; soit ${}_c\Omega$ un ensemble. Soit α une fonction ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Emp } {}^n\alpha = {}^n\alpha(({}_b\Omega)^n) = (\text{Emp } \alpha)^n$$

Preuve

$$\text{Emp } {}^n\alpha = \{ (\alpha(\xi))_I \mid (\xi)_I \in ({}_b\Omega)^n \} \subseteq (\text{Emp } \alpha)^n.$$

Réciproque — Soit $(\eta_i)_I \in (\text{Emp } \alpha)^n$. $\forall i \in I, \exists \xi \in {}_b\Omega, \eta_i = \alpha(\xi)$. Donc $(\eta_i)_I = (\alpha(\xi))_I = {}^n\alpha(\xi)_I \in \text{Emp } {}^n\alpha$. On vient de vérifier que $(\text{Emp } \alpha)^n \subseteq \text{Emp } {}^n\alpha$. ■

Un $\mathcal{V}$ -homomorphisme est une fonction dont la base est le support d'un magma, dont la cible est le support d'un magma, et qui est compatible avec ces magmas...

Définition 19 (Homomorphisme) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma (base) ; ${}_b\Omega = ({}_b\Omega, {}_b\Sigma, {}_b\Phi)$. Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma (cible) ; ${}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi)$.

On appelle “ $\mathcal{V}$ -homomorphisme base- ${}_b\Omega$ -cible- ${}_c\Omega$ ” toute fonction $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ qui a ces qualités : (${}_b\Sigma = \{{}_b\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$; etc.)

i — $\forall S \in \mathcal{S}, \alpha({}_b\sigma_S) \subseteq {}_c\sigma_S$;

ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0, \text{Dom } {}_b\phi_e \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_e$; si $\text{Dom } {}_b\phi_e \neq \emptyset$, alors

$$\alpha({}_b\phi_e \diamond) = {}_c\phi_e \diamond$$

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n, {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_f$; et ($I = \{1, \dots, n\}$)

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f, \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_c\phi_f(\alpha(\xi_i)_I)$$

Notation — $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

Remarquer — Soit α un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. Soit $e \in \mathcal{F}_0$. Si ${}_b\phi_e$ est une semi-constante non vide, alors ${}_c\phi_e$ elle-même est non vide.

Une composée d’homomorphismes est un homomorphisme...

Proposition 9 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soient ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_3\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, α un homomorphisme ${}_1\Omega \rightarrow {}_2\Omega$ et β un homomorphisme ${}_2\Omega \rightarrow {}_3\Omega$; ${}_1\Omega = ({}_1\Omega, {}_1\Sigma, {}_1\Phi)$, ${}_2\Omega = ({}_2\Omega, {}_2\Sigma, {}_2\Phi)$, ${}_3\Omega = ({}_3\Omega, {}_3\Sigma, {}_3\Phi)$.

La fonction $\beta \circ \alpha : {}_1\Omega \rightarrow {}_3\Omega$ est un homomorphisme ${}_1\Omega \rightarrow {}_3\Omega$.

Preuve

On procède ainsi (définition 19 ; voir p. 19). $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$.

i — $\forall S \in \mathcal{S}, \beta \circ \alpha({}_1\sigma_S) \subseteq \beta({}_2\sigma_S) \subseteq {}_3\sigma_S$.

ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0$,

$$\text{Dom } {}_1\phi_e \subseteq \text{Dom } {}_2\phi_e \subseteq \text{Dom } {}_3\phi_e$$

si $\text{Dom } {}_1\phi_e \neq \emptyset$,

$$\beta \circ \alpha({}_1\phi_e \diamond) = \beta({}_2\phi_e \diamond) = {}_3\phi_e \diamond$$

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n$,

$${}^n(\beta \circ \alpha)(\text{Dom } {}_1\phi_f) = {}^n\beta \circ {}^n\alpha(\text{Dom } {}_1\phi_f) \subseteq {}^n\beta(\text{Dom } {}_2\phi_f) \subseteq \text{Dom } {}_3\phi_f$$

et ($I = \{1, \dots, n\}$) $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_1\phi_f$,

$$\beta \circ \alpha \circ {}_1\phi_f(\xi_i)_I = \beta({}_2\phi_f(\alpha(\xi_i)_I)) = {}_3\phi_f(\beta \circ \alpha(\xi_i)_I)$$

■

Définition 20 (Endomorphisme) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. On appelle “ $\mathcal{V}$ -endomorphisme de Ω ” tout $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\Omega \rightarrow \Omega$.

⊗

Exemple — Quel que soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma, Id_Ω est un $\mathcal{V}$ -endomorphisme $\Omega \rightarrow \Omega$.

□

6.2 Homomorphisme et semi-fonctions τ

Soit $\mathbf{a}$ un terme ; soit Ω un magma. Le terme $\mathbf{a}$ (interprété par référence à Ω) dénote la semi-fonction $\tau_{\mathbf{a}}$. Parce que $\tau_{\mathbf{a}}$ est une composée d'opérations fondamentales (une composée de ϕ), on doit se demander si $\tau_{\mathbf{a}}$ ressemble aux semi-fonctions ϕ , et par quelles propriétés. Considérons celle-ci...

Soit α un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. Entre chaque opération fondamentale de ${}_b\Omega$ (${}_b\phi_f$) et celle correspondante de ${}_c\Omega$ (${}_c\phi_f$) il y a ce lien :

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f, \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_c\phi_f(\alpha(\xi_i))_I$$

(définition 19). Y a-t-il un lien semblable entre les composées ${}_b\tau_{\mathbf{a}}$ et ${}_c\tau_{\mathbf{a}}$?

Théorème 7 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$ (il y a au moins un terme). Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$.

Soient ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, α un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

On considère les semi-fonctions ${}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}_b\Omega)^m \rightarrow {}_b\Omega$ et ${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}_c\Omega)^m \rightarrow {}_c\Omega$.

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$ — $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}$. Si $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$, alors $\alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}}\diamond) = {}_c\tau_{\mathbf{a}}\diamond$.

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ ($m \in \mathbb{N}^*$) — ${}^m\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}) \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$; et

$$\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}, \alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\alpha(\xi_j))_{j \in J}$$

Preuve

Preuve représentative. On peut voir le premier cas (terme sans variable) comme une variante simplifiée du second. Aussi suffit-il de lire la première partie (I) qui est facile pour saisir l'idée. Cette remarque est générale et applicable à beaucoup d'autres preuves qu'on lira plus loin.

On raisonne par récurrence.

I — *Premier cas* — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

I-1 — $\mathbf{a} = [\mathbf{e}]$, $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$

${}_b\tau_{\mathbf{e}} = {}_b\phi_{\mathbf{e}}$, et ${}_c\tau_{\mathbf{e}} = {}_c\phi_{\mathbf{e}}$ (définition). Puisque α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$,

$$\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{e}} \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{e}}$$

si $\diamond \in \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{e}}$, alors

$$\alpha({}_b\tau_{\mathbf{e}}\diamond) = \alpha({}_b\phi_{\mathbf{e}}\diamond) = {}_c\phi_{\mathbf{e}}\diamond = {}_c\tau_{\mathbf{e}}\diamond$$

I-2 — $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\Delta\mathcal{T}(\mathcal{V})]$

Si $\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

$\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} \neq \emptyset$; c'est-à-dire $[\forall i \in I, \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i} = {}_b\Omega^0 (= \{\diamond\})]$, le multiplet $({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}$, et ${}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}\diamond = {}_b\phi_{\mathbf{f}}({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I$ (définition).

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I, \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i} = \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i} = \{\diamond\}$ et $\alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond) = {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond$.

Donc

$$({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I = (\alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond))_I = {}^n\alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I \in {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}})$$

Puisque α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$; et

$$({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

Donc $\text{Dom } {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} \neq \emptyset$ (définition), et

$${}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}\diamond = {}_c\phi_{\mathbf{f}}({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond))_I = \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond)_I = \alpha({}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}\diamond)$$

II — Deuxième cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

II-1 — $\mathbf{a} = [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

${}_b\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{{}_b\Omega}$, et ${}_c\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{{}_c\Omega}$ (définition). Donc

$$\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}) = \alpha({}_b\Omega) \subseteq {}_c\Omega = \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}$$

et

$$\forall \xi \in {}_b\Omega, \alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\xi) = \alpha(\xi) = {}_c\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} \circ \alpha(\xi)$$

II-2 — $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\wedge\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})]$

L'ensemble des variables du sous-terme $\mathbf{a}_i$ est $\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$;

$\text{Card } J_i = m_i$. On vérifie que $\text{Var } [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $J = \bigcup_{i \in I} J_i$; $\text{Card } J = m \geq 1$.

On considère l'ensemble $I_s = \{i \in I \mid J_i = \emptyset\}$ (ensemble des indices i , $\mathbf{a}_i$ étant sans variable). Puisque $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ comprend au moins une variable, $I - I_s \neq \emptyset$.

Si $\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$, on vérifie trivialement la propriété indiquée. On suppose maintenant que $\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \neq \emptyset$. Donc (définition ; voir p. 34)

• $\forall i \in I, \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \neq \emptyset$;

• $\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$
 $= \{ (\xi_j)_J \in ({}_b\Omega)^m$
 $\mid [\forall i \in I, (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}] \text{ et } ({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}\}$
 $\} \neq \emptyset$;

• $\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$, ${}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = {}_b\phi_{\mathbf{f}}({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{J_i})_{i \in I}$.

$\forall i \in I_s$, on se rappelle que $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}$ ($\mathbf{a}_i$ est sans variable — voir *supra*) ; on déduit alors que

$$\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i} = \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i} = \{\diamond\} \quad \wedge \quad \alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond) = {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}\diamond$$

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s$, ${}^{m_i}\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$, et $\forall (\xi_j)_{J_i} \in \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$, $\alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{J_i} = {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \circ {}^{m_i}\alpha(\xi_j)_{J_i}$.

$\forall i \in I$, $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \neq \emptyset$; donc

$$\forall i \in I, \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \neq \emptyset$$

(si $i \in I_s$, on le sait déjà ; sinon on fait l'hypothèse de récurrence).

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} & {}^m\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}) \\ \subseteq & \{ (\eta_j)_J \in ({}_c\Omega)^m \\ & \mid [\forall i \in I - I_s, (\eta_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}] \text{ et } ({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}] \\ & \} = \text{Dom } {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \end{aligned}$$

On procède ainsi. Soit $(\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$; ${}^m\alpha(\xi_j)_J = (\alpha(\xi_j))_J$ est-il élément de $\text{Dom } {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$?

On observe d'abord que ${}^m\alpha(\xi_j)_J \in {}_c\Omega^m$. Puisque, $\forall i \in I - I_s$, ${}^{m_i}\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$ (hypothèse de récurrence),

$$\forall i \in I - I_s, (\alpha(\xi_j))_{J_i} \in \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

Enfin, puisque $\forall i \in I$, $\alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{J_i} = {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\alpha(\xi_j))_{J_i}$ (si $i \in I_s$, on le sait déjà ; sinon on fait l'hypothèse de récurrence), et puisque ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$ (α est un homomorphisme), le multiplé

$$({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\alpha(\xi_j))_{J_i})_{i \in I} = (\alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{J_i})_{i \in I} \in {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

Donc $(\alpha(\xi_j))_J \in \text{Dom } {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$. On vient de vérifier que

$${}^m\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}) \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

On conclut alors que, $\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$,

$$\begin{aligned} & \alpha \circ {}_b\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J \\ = & \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}({}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \\ = & {}_c\phi_{\mathbf{f}}({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\alpha(\xi_j))_{j \in J_i})_{i \in I} = {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\alpha(\xi_j))_J \end{aligned}$$

■

6.3 Sous-magma

Un sous-magma de Ω est un magma dont le support est un sous-ensemble du support de Ω , et qui est compatible avec Ω . Grätzer dit “ *weak subalgebra* ” [14].

Définition 21 (Sous-magma) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.

On appelle “ $\mathcal{V}$ -sous-magma de Ω ” tout $\mathcal{V}$ -magma $({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$ qui a ces qualités : $({}_s\Sigma = \{{}_s\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} ; {}_s\Phi = \{{}_s\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}})$

i — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, {}_s\sigma_{\mathbf{S}} \subseteq \sigma_{\mathbf{S}} ;$

ii — $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}} \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} ;$

ii-a — $\forall \mathbf{e} [\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0, \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{e}} \neq \emptyset], {}_s\phi_{\mathbf{e}} \diamond = \phi_{\mathbf{e}} \diamond ;$

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}}, {}_s\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I = \phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I$$

Notation

1 — ${}_s\Omega = ({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$.

2 — Pour noter que ${}_s\Omega$ est un sous-magma de Ω , on peut écrire :

$${}_s\Omega \subseteq \Omega$$

3 — Pour noter que ${}_s\Omega \subseteq \Omega$ et que ${}_s\Omega \neq \Omega$, on peut écrire :

$${}_s\Omega \subset \Omega$$

(${}_s\Omega$ est un sous-magma *stricto sensu* de Ω).

Proposition 10 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$. Soit ${}_s\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_s\Omega = ({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$.

$${}_s\Omega \subseteq \Omega \quad \Rightarrow \quad {}_s\Omega \subseteq \Omega$$

Preuve — ${}_s\Omega = {}_s\sigma^{***} \subseteq \sigma^{***} = \Omega$. ■



Exemple

Notation — $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

On considère le vocabulaire ${}_3\mathcal{V}$:

- ♣ ${}_3\mathcal{V} = ({}_3\mathcal{S}, {}_3\mathcal{F}, a) ;$
- ${}_3\mathcal{S} = \{***, \text{Nombres}\} ;$
- ${}_3\mathcal{F}_2 = \{\text{moins}\} ;$
- les autres ${}_3\mathcal{F}_i (i \in \mathbb{N} - \{2\})$ sont vides.

Puis on considère les ${}_3\mathcal{V}$ -magmas ${}_{3,1}\Omega$ et ${}_{3,2}\Omega$:

- ♣ ${}_{3,1}\Omega = ({}_{3,1}\Omega, {}_{3,1}\Sigma, {}_{3,1}\Phi) ; {}_{3,1}\Sigma = \{{}_{3,1}\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in {}_3\mathcal{S}} ; {}_{3,1}\Phi = \{{}_{3,1}\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in {}_3\mathcal{F}} ;$
- ${}_{3,1}\Omega = \mathbb{Z} ;$
- ${}_{3,1}\sigma_{\text{Nombres}} = \mathbb{N} ;$
- ${}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$ est cette semi-fonction (soustraction relative aux entiers naturels) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geq m\} \ni (n, m) & \mapsto & n - m \end{array}$$

- ♣ ${}_{3,2}\Omega = ({}_{3,2}\Omega, {}_{3,2}\Sigma, {}_{3,2}\Phi)$; ${}_{3,2}\Sigma = \{{}_{3,2}\sigma_S\}_{S \in {}_3\mathcal{S}}$; ${}_{3,2}\Phi = \{{}_{3,2}\phi_f\}_{f \in {}_3\mathcal{F}}$;
- ${}_{3,2}\Omega = \mathbf{Z}$;
- ${}_{3,2}\sigma_{\text{Nombres}} = \mathbf{Z}$;
- ${}_{3,2}\phi_{\text{moins}}$ est cette fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^2 &\rightarrow \mathbf{Z} \\ (n, m) &\mapsto n - m \end{aligned}$$

On vérifie facilement que ${}_{3,1}\Omega$ et ${}_{3,2}\Omega$ sont distincts ; et que ${}_{3,1}\Omega$ est un ${}_3\mathcal{V}$ -sous-magma de ${}_{3,2}\Omega$. On a ainsi vérifié que

$${}_{3,1}\Omega \subset {}_{3,2}\Omega$$

Se mettre en garde — ${}_{3,1}\Omega = {}_{3,2}\Omega = \mathbf{Z}$; mais ${}_{3,1}\Omega \neq {}_{3,2}\Omega$! On aurait tort de confondre un magma et son support. □



La relation “ est un $\mathcal{V}$ -sous-magma de ” est une relation d'ordre...

Proposition 11 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; soit ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; soit ${}_3\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma.

$$({}_1\Omega \subseteq {}_2\Omega \quad \wedge \quad {}_2\Omega \subseteq {}_3\Omega) \Rightarrow {}_1\Omega \subseteq {}_3\Omega$$

Preuve

$$\begin{aligned} {}_1\Omega &= ({}_1\Omega, {}_1\Sigma, {}_1\Phi) ; {}_1\Sigma = \{{}_1\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}, {}_1\Phi = \{{}_1\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}. {}_2\Omega = ({}_2\Omega, {}_2\Sigma, {}_2\Phi) ; \\ {}_2\Sigma &= \{{}_2\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}, {}_2\Phi = \{{}_2\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}. {}_3\Omega = ({}_3\Omega, {}_3\Sigma, {}_3\Phi) ; {}_3\Sigma = \{{}_3\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}, \\ {}_3\Phi &= \{{}_3\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}. \end{aligned}$$

$\forall S \in \mathcal{S}, {}_1\sigma_S \subseteq {}_2\sigma_S \subseteq {}_3\sigma_S$. Et $\forall n \in \mathbf{N}, \forall f \in \mathcal{F}_n$,
 $\text{Dom } {}_1\phi_f \subseteq \text{Dom } {}_2\phi_f \subseteq \text{Dom } {}_3\phi_f$.

Donc, $\forall e \in \mathcal{F}_0$, si $\text{Dom } {}_1\phi_e \neq \emptyset$, alors $\text{Dom } {}_2\phi_e \neq \emptyset$ et $\text{Dom } {}_3\phi_e \neq \emptyset$; dans ce cas ${}_1\phi_e \diamond = {}_2\phi_e \diamond = {}_3\phi_e \diamond$ (définition).

On vérifie de la même façon que, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$ si le multiplète $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_1\phi_f$, alors il est élément de $\text{Dom } {}_2\phi_f$ et de $\text{Dom } {}_3\phi_f$; dans ce cas, ${}_1\phi_f(\xi_i)_I = {}_2\phi_f(\xi_i)_I = {}_3\phi_f(\xi_i)_I$ (définition).

${}_1\Omega$ est un sous-magma de ${}_3\Omega$. ■

Proposition 12 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; soit ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma.

$$({}_1\Omega \subseteq {}_2\Omega \quad \wedge \quad {}_2\Omega \subseteq {}_1\Omega) \Rightarrow {}_1\Omega = {}_2\Omega$$

Preuve

$$\begin{aligned} {}_1\Omega &= ({}_1\Omega, {}_1\Sigma, {}_1\Phi) ; {}_1\Sigma = \{{}_1\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}, {}_1\Phi = \{{}_1\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}. {}_2\Omega = ({}_2\Omega, {}_2\Sigma, {}_2\Phi) ; \\ {}_2\Sigma &= \{{}_2\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}, {}_2\Phi = \{{}_2\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que $\forall S \in \mathcal{S}, {}_1\sigma_S = {}_2\sigma_S$; en particulier que ${}_1\Omega = {}_2\Omega$ (proposition 10). Donc ${}_1\Sigma = {}_2\Sigma$.

De la même façon, on vérifie que $\forall e \in \mathcal{F}_0, {}_1\phi_e = {}_2\phi_e$ (les semi-constantes ${}_1\phi_e$ et ${}_2\phi_e$ ont même base, même cible et même graphe), et que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n, {}_1\phi_f = {}_2\phi_f$ (même raisonnement). Donc ${}_1\Phi = {}_2\Phi$.

Les sous-magmas ${}_1\Omega$ et ${}_2\Omega$ sont identiques. ■

6.4 Sous-magma et semi-fonctions τ

Le concept d'homomorphisme et celui de sous-magma se correspondent.

Théorème 8 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$. Soit ${}_s\Omega$ un sous-ensemble de Ω (un sous-ensemble du support). Soit ${}_s\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma dont le support est ${}_s\Omega$.

${}_s\Omega \subseteq \Omega$ si et seulement si l'injection canonique $\text{In}_{s\Omega, \Omega} : {}_s\Omega \rightarrow \Omega$ est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_s\Omega \rightarrow \Omega$.

Preuve

La preuve est élémentaire. $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. $\Sigma = \{\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, $\Phi = \{\phi_F\}_{F \in \mathcal{F}}$. ${}_s\Omega = ({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$; ${}_s\Sigma = \{{}_s\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, ${}_s\Phi = \{{}_s\phi_F\}_{F \in \mathcal{F}}$.

I — ${}_s\Omega \subseteq \Omega$. On vérifie que $\text{In}_{s\Omega, \Omega}$ est un homomorphisme ${}_s\Omega \rightarrow \Omega$ (définition 19 ; voir p. 54)...

i — $\forall S \in \mathcal{S}$, ${}_s\sigma_S \subseteq \sigma_S$; donc

$$\text{In}_{s\Omega, \Omega}({}_s\sigma_S) = {}_s\sigma_S \subseteq \sigma_S$$

ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}_s\phi_e \subseteq \text{Dom } \phi_e$. Si $\text{Dom } {}_s\phi_e \neq \emptyset$, ${}_s\phi_e \diamond = \phi_e \diamond$; donc

$$\text{In}_{s\Omega, \Omega}({}_s\phi_e \diamond) = {}_s\phi_e \diamond = \phi_e \diamond$$

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{F}_n$, $\text{Dom } {}_s\phi_f \subseteq \text{Dom } \phi_f$; donc

$${}^n(\text{In}_{s\Omega, \Omega})(\text{Dom } {}_s\phi_f) = \text{Dom } {}_s\phi_f \subseteq \text{Dom } \phi_f$$

Si $\text{Dom } {}_s\phi_f \neq \emptyset$, $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_s\phi_f$, ${}_s\phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\xi_i)_I$; donc

$$\text{In}_{s\Omega, \Omega} \circ {}_s\phi_f(\xi_i)_I = {}_s\phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\text{In}_{s\Omega, \Omega}(\xi_i))_I$$

II — $\text{In}_{s\Omega, \Omega} : {}_s\Omega \rightarrow \Omega$ est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_s\Omega \rightarrow \Omega$. On vérifie que ${}_s\Omega \subseteq \Omega$ (définition 21 ; voir p. 58)...

i — $\forall S \in \mathcal{S}$, ${}_s\sigma_S = \text{In}_{s\Omega, \Omega}({}_s\sigma_S) \subseteq \sigma_S$.

ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}_s\phi_e \subseteq \text{Dom } \phi_e$. Si $\text{Dom } {}_s\phi_e \neq \emptyset$, ${}_s\phi_e \diamond = \text{In}_{s\Omega, \Omega}({}_s\phi_e \diamond) = \phi_e \diamond$.

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{F}_n$,

$$\text{Dom } {}_s\phi_f = {}^n(\text{In}_{s\Omega, \Omega})(\text{Dom } {}_s\phi_f) \subseteq \text{Dom } \phi_f$$

Si $\text{Dom } {}_s\phi_f \neq \emptyset$, $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_s\phi_f$,

$${}_s\phi_f(\xi_i)_I = \text{In}_{s\Omega, \Omega} \circ {}_s\phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\text{In}_{s\Omega, \Omega}(\xi_i))_I = \phi_f(\xi_i)_I$$

■

Soit $\mathbf{a}$ un terme. On l'interprète par référence à un certain magma Ω : on révèle ainsi une semi-fonction $\tau_{\mathbf{a}}$. On l'interprète à nouveau, cette fois par référence à ${}_s\Omega$, un sous-magma de Ω : on révèle une semi-fonction ${}_s\tau_{\mathbf{a}}$.

On se doute que $\tau_{\mathbf{a}}$ et ${}_s\tau_{\mathbf{a}}$ sont parentes. Quelle est la relation ?

Théorème 9 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$ (il y a au moins un terme). Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit ${}_s\Omega$ un $\mathcal{V}$ -sous-magma de Ω . On considère les semi-fonctions $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$ et ${}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}_s\Omega)^m \rightarrow {}_s\Omega$.

i — $\text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$.

ii — 1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$ — Si $\text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$, alors ${}_s\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \tau_{\mathbf{a}} \diamond$.

ii — 2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ — $\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, ${}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J$.

Preuve

Ω est un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_s\Omega$ est un $\mathcal{V}$ -magma ; et $\text{In}_{, \Omega, \Omega}$ est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_s\Omega \rightarrow \Omega$ (théorème 8).

Ce qu'on cherche à vérifier, on le sait déjà : théorème 7 (${}_b\Omega = {}_s\Omega$, ${}_c\Omega = \Omega$, $\alpha = \text{In}_{, \Omega, \Omega}$) ; voir p. 55. ■

6.5 Isomorphisme

Un isomorphisme est un homomorphisme qualifié.

Définition 22 (Isomorphisme) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_b\Omega = ({}_b\Omega, {}_b\Sigma, {}_b\Phi)$. Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi)$.

On appelle “ $\mathcal{V}$ -isomorphisme base- ${}_b\Omega$ -cible- ${}_c\Omega$ ” toute fonction $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ qui a ces qualités :

- α est bijective ;
- α est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$;
- α^{-1} est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_c\Omega \rightarrow {}_b\Omega$.

Notation — $\alpha : {}_b\Omega \leftrightarrow {}_c\Omega$.

Théorème 10 (Caractérisation équivalente) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_b\Omega = ({}_b\Omega, {}_b\Sigma, {}_b\Phi)$. Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi)$.

Une bijection $\alpha : {}_b\Omega \leftrightarrow {}_c\Omega$ est un $\mathcal{V}$ -isomorphisme ${}_b\Omega \leftrightarrow {}_c\Omega$ si et seulement si elle a ces qualités :

i — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, $\alpha({}_b\sigma_{\mathbf{S}}) = {}_c\sigma_{\mathbf{S}}$.

ii-a — $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{e}}$. Si $\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$, alors $\alpha({}_b\phi_{\mathbf{e}} \diamond) = {}_c\phi_{\mathbf{e}} \diamond$.

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, ${}_n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}) = \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$ et $(I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}, \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha(\xi_i))_I$$

Preuve

Preuve élémentaire d'équivalence de définitions.

On observe d'abord que, si α est une bijection ${}_b\Omega \leftrightarrow {}_c\Omega$, alors ${}^n\alpha$ est une bijection ${}_b\Omega^n \leftrightarrow {}_c\Omega^n$ et $({}^n\alpha)^{-1} = {}^n(\alpha^{-1})$.

I — Soit α une bijection qui est un $\mathcal{V}$ -isomorphisme. A-t-elle les qualités décrites ?

i — Parce que α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, $\forall S \in \mathcal{S}$, $\alpha({}_b\sigma_S) \subseteq {}_c\sigma_S$. Parce que α^{-1} est un homomorphisme ${}_c\Omega \rightarrow {}_b\Omega$, $\forall S \in \mathcal{S}$, $\alpha({}_c\sigma_S) \subseteq {}_b\sigma_S$. Donc $\forall S \in \mathcal{S}$, $\alpha({}_b\sigma_S) = {}_c\sigma_S$.

ii-a — On raisonne de la même façon : $\forall e \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}_b\phi_e \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_e$ et $\text{Dom } {}_c\phi_e \subseteq \text{Dom } {}_b\phi_e$, donc $\text{Dom } {}_b\phi_e = \text{Dom } {}_c\phi_e$.

ii-b — Soit $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$. Parce que α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_f$. Parce que α^{-1} est un homomorphisme ${}_c\Omega \rightarrow {}_b\Omega$, ${}^n(\alpha^{-1})(\text{Dom } {}_c\phi_f) \subseteq \text{Dom } {}_b\phi_f$, donc $\text{Dom } {}_c\phi_f = {}^n\alpha \circ {}^n(\alpha^{-1})(\text{Dom } {}_c\phi_f) \subseteq {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$. Donc ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \text{Dom } {}_c\phi_f$.

II — On suppose que la bijection $\alpha : {}_b\Omega \leftrightarrow {}_c\Omega$ a la qualité décrite. On observe immédiatement que α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. Il reste à vérifier que α^{-1} est un homomorphisme ${}_c\Omega \rightarrow {}_b\Omega$.

i — Soit $S \in \mathcal{S}$. Puisque ${}_c\sigma_S = \alpha({}_b\sigma_S)$ (hypothèse), $\alpha^{-1}({}_c\sigma_S) = {}_b\sigma_S$.

ii-a — Soit $e \in \mathcal{F}_0$. Si $\text{Dom } {}_c\phi_e = \text{Dom } {}_b\phi_e \neq \emptyset$, alors ${}_c\phi_e \diamond = \alpha({}_b\phi_e \diamond)$ (hypothèse), donc $\alpha^{-1}({}_c\phi_e \diamond) = {}_b\phi_e \diamond$.

ii-b — Soit $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$. Puisque $\text{Dom } {}_c\phi_f = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$, (hypothèse), ${}^n(\alpha^{-1})(\text{Dom } {}_c\phi_f) = \text{Dom } ({}_b\phi_f)$.

Enfin, $\forall (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_c\phi_f = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$, il existe $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f$, $(\eta_i)_I = (\alpha(\xi_i))_{i \in I}$; donc

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \circ {}_c\phi_f(\eta_i)_I &= \alpha^{-1} \circ {}_c\phi_f(\alpha(\xi_i))_I = \alpha^{-1} \circ \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I \\ &= {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_b\phi_f(\alpha^{-1}(\eta_i))_I \end{aligned}$$

■

Définition 23 (Automorphisme) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. On appelle “ $\mathcal{V}$ -automorphisme de Ω ” tout $\mathcal{V}$ -isomorphisme $\Omega \leftrightarrow \Omega$.

✂ **Exemple** — Quel que soit $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$ un $\mathcal{V}$ -magma, Id_Ω est un $\mathcal{V}$ -automorphisme $\Omega \leftrightarrow \Omega$. □

6.6 L’empreinte d’un homomorphisme est le support d’un magma

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soient ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma (base), ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma (cible), et α un $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

$\text{Emp } \alpha$ est le support du $\mathcal{V}$ -magma $\mathbf{Emp } \alpha$, qui est remarquable ;
 $\mathbf{Emp } \alpha = (\text{Emp } \alpha, {}_e\Sigma, {}_e\Phi)$, ${}_e\Sigma = \{{}_e\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}}$, ${}_e\Phi = \{{}_e\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$.

6.6.1 Le magma $\mathbf{Emp } \alpha$

$${}_b\Omega = ({}_b\Omega, {}_b\Sigma, {}_b\Phi) ; {}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi).$$

Le support — $\text{Emp } \alpha = \alpha({}_b\Omega)$.

Puisque ${}_b\Omega \neq \emptyset$ (${}_b\Omega$ est un magma), $\text{Emp } \alpha \neq \emptyset$.

Les sous-ensembles — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, ${}_e\sigma_{\mathbf{S}} = \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{S}})$.

On vérifie ceci sans peine.

- $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, ${}_e\sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset$ (car ${}_b\sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset$).
- $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, ${}_e\sigma_{\mathbf{S}} \subseteq \text{Emp } \alpha$.
- ${}_e\sigma^{***} = \alpha({}_b\sigma^{***}) = \alpha({}_b\Omega) = \text{Emp } \alpha$.

Les semi-constantes

$\forall e \in \mathcal{F}_0$, ${}_e\phi_e$ est cette $\text{Emp } \alpha$ -semi-constante :

- (i) $\text{Dom } {}_e\phi_e = \text{Dom } {}_b\phi_e$;
- (ii) si $\text{Dom } {}_e\phi_e \neq \emptyset$, ${}_e\phi_e \diamond = \alpha({}_b\phi_e \diamond) (\in \text{Emp } \alpha)$.

Les autres semi-fonctions

$\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, ${}_e\phi_{\mathbf{f}}$ est cette semi-fonction $(\text{Emp } \alpha)^n \rightarrow \text{Emp } \alpha$:
 $(I = \{1, \dots, n\})$

i — $\text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}} = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}})$.

On vérifie sans peine que $\text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}} \subseteq \text{Emp}({}^n\alpha) = (\text{Emp } \alpha)^n$. Puisque α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$,

$$\text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}} \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

(définition 19 ; voir p. 54).

ii — $\forall (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}}$, ${}_e\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I$.

On veut vérifier que

$$\forall (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}}, {}_e\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I \in \text{Emp } \alpha$$

En effet, $\forall (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}} = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}})$, $\exists (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}$, $\forall i \in I$, $\eta_i = \alpha(\xi_i)$;
donc

$${}_e\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha(\xi_i))_I = \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I \in \text{Emp } \alpha$$

6.6.2 Propriétés

Proposition 13 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soient ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, α un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

$$\mathbf{Emp } \alpha \subseteq {}_c\Omega$$

Preuve

i — $\forall S \in \mathcal{S}, {}_e\sigma_S = \alpha({}_b\sigma_S) \subseteq {}_c\sigma_S$.

ii-a — Soit $e \in \mathcal{F}_0$. $\text{Dom } {}_e\phi_e = \text{Dom } {}_b\phi_e \subseteq {}_c\phi_e$. Si $\text{Dom } {}_e\phi_e \neq \emptyset$,
 ${}_e\phi_e \diamond = \alpha({}_b\phi_e \diamond = {}_c\phi_e \diamond$.

ii-b — Soit $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$. $\text{Dom } {}_e\phi_f = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_f$. Enfin,
 $\forall (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_e\phi_f, {}_e\phi_f(\eta_i)_I = {}_c\phi_f(\eta_i)_I$ (définition). ■

Corollaire 2 — *L'injection canonique $\text{In}_{\text{Emp } \alpha, {}_c\Omega} : \text{Emp } \alpha \rightarrow {}_c\Omega$ est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\text{Emp } \alpha \rightarrow {}_c\Omega$.*

Preuve — $\text{Emp } \alpha \subseteq {}_c\Omega$ (théorème 8 ; voir p. 60). ■

6.7 Épimorphisme, image $\mathcal{V}$ -homomorphe

Un épimorphisme ressemble à un homomorphisme surjectif. À chaque épimorphisme correspond une image homomorphe et *vice versa*.

Définition 24 (Épimorphisme) — *Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma. Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma.*

On appelle “ $\mathcal{V}$ -épimorphisme base- ${}_b\Omega$ -cible- ${}_c\Omega$ ” tout $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ qui a cette qualité :

$$\text{Emp } \alpha = {}_c\Omega$$

Un épimorphisme est donc une fonction surjective (mais il existe des homomorphismes surjectifs qui ne sont pas des épimorphismes ; voir *infra*).

Définition 25 (Image homomorphe) — *Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma.*

On appelle “image $\mathcal{V}$ -homomorphe de ${}_b\Omega$ ” tout $\mathcal{V}$ -magma ${}_c\Omega$ qui a cette qualité : il existe un $\mathcal{V}$ -épimorphisme $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

Voici des premiers exemples...

Proposition 14 — *Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soient ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, α un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.*

$\text{Emp } \alpha$ est une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de ${}_b\Omega$.

Preuve

On veut vérifier qu'il existe un $\mathcal{V}$ -épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow \text{Emp } \alpha$. Voici un candidat : la fonction $\alpha' : {}_b\Omega \rightarrow \text{Emp } \alpha$ dont le graphe coïncide avec celui de α .

α' est-elle un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow \text{Emp } \alpha$? Pour le savoir, on procède ainsi (définition 19 ; voir p. 54).

- Soit $S \in \mathcal{S}$; $\alpha'({}_b\sigma_S) = \alpha({}_b\sigma_S)$; et, par définition, $\alpha({}_b\sigma_S) = {}_e\sigma_S$ (voir p. 63).
- Soit $e \in \mathcal{F}_0$. Par définition, $\text{Dom } {}_b\phi_e = \text{Dom } {}_e\phi_e$ (voir p. 63). Si $\text{Dom } {}_b\phi_e \neq \emptyset$, $\alpha'({}_b\phi_e \diamond) = \alpha({}_b\phi_e \diamond)$; et, par définition, $\alpha({}_b\phi_e \diamond) = {}_e\phi_e \diamond$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $f \in \mathcal{F}_n$. ${}^n(\alpha')(\text{Dom } {}_b\phi_f) = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$; et, par définition, ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \text{Dom } {}_e\phi_f$ (voir p. 63). Soit $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f$; $\alpha' \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I$; parce que α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, $\alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_c\phi_f(\xi_i)_I$; et, par définition, ${}_c\phi_f(\xi_i)_I = {}_e\phi_f(\xi_i)_I$.

On vérifie sans peine que $\text{Emp } \alpha' = \text{Emp } \alpha$, et que $\mathbf{Emp } \alpha' = \mathbf{Emp } \alpha$.

L'homomorphisme α' est donc un épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow \mathbf{Emp } \alpha$. ■

Théorème 11 (Caractérisation équivalente d'un épimorphisme) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_b\Omega = ({}_b\Omega, {}_b\Sigma, {}_b\Phi)$. Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi)$.

Une surjection $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ est un $\mathcal{V}$ -épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ si et seulement si elle a ces qualités :

- i — $\forall S \in \mathcal{S}, \alpha({}_b\sigma_S) = {}_c\sigma_S$.
- ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0, \text{Dom } {}_b\phi_e = \text{Dom } {}_c\phi_e$. Si $\text{Dom } {}_b\phi_e \neq \emptyset$, alors $\alpha({}_b\phi_e \diamond) = {}_c\phi_e \diamond$.
- ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n, {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \text{Dom } {}_c\phi_f$ et $(I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f, \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_c\phi_f(\alpha(\xi_i))_I$$

Preuve

Preuve ordinaire d'équivalence de définitions.

I — Si α est un épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, c'est-à-dire si $\mathbf{Emp } \alpha = {}_c\Omega$, alors α a les qualités décrites. Pour le vérifier, on procède ainsi.

- i — $\forall S \in \mathcal{S}, \alpha({}_b\sigma_S) = {}_e\sigma_S = {}_c\sigma_S$.
- ii-a — Soit $e \in \mathcal{F}_0$. ${}_e\phi_e = {}_c\phi_e$ (hypothèse), donc $\text{Dom } {}_b\phi_e = \text{Dom } {}_e\phi_e = \text{Dom } {}_c\phi_e$. On sait déjà que, si $\text{Dom } {}_b\phi_e \neq \emptyset$, alors $\alpha({}_b\phi_e \diamond) = {}_c\phi_e \diamond$ (α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$).
- ii-b — Soit $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$. ${}_e\phi_f = {}_c\phi_f$ (hypothèse), donc ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \text{Dom } {}_e\phi_f = \text{Dom } {}_c\phi_f$. On sait déjà que, $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f, \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_c\phi_f(\alpha(\xi_i))_I$ (α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$).

II — On suppose que la surjection $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ a la qualité décrite ; alors α est épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. On vérifie *immédiatement* que α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$. Il reste à vérifier que $\mathbf{Emp } \alpha = {}_c\Omega$. On procède ainsi.

Le support — α est surjective, donc $\mathbf{Emp } \alpha = {}_c\Omega$.

Les sous-ensembles — $\forall S \in \mathcal{S}, {}_e\sigma_S = \alpha({}_b\sigma_S) = {}_c\sigma_S$.

Les semi-constantes — Soit $e \in \mathcal{F}_0$ $\text{Dom } {}_e\phi_e = \text{Dom } {}_b\phi_e = \text{Dom } {}_c\phi_e$. On sait déjà que, si $\text{Dom } {}_b\phi_e \neq \emptyset$, alors $\alpha({}_b\phi_e \diamond) = {}_c\phi_e \diamond$ (α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$). Donc les deux semi-constantes ${}_e\phi_e$ et ${}_c\phi_e$ sont égales (même base, même cible, même graphe).

Les autres semi-fonctions — Soit $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$.

$\text{Dom } {}_e\phi_f = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \text{Dom } {}_c\phi_f$. On sait déjà que, $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f$, $\alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_c\phi_f(\alpha(\xi_i)_I)$ (α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$). Donc les deux semi-fonctions ${}_e\phi_f$ et ${}_c\phi_f$ sont égales (même base, même cible, même graphe). ■

△ *Contre-exemple* — On trouve un homomorphisme surjectif qui n'est pas un épimorphisme !

On connaît les magmas ${}_{3,1}\Omega$ et ${}_{3,2}\Omega$ (voir pp. 58 et suivantes). On se rappelle que ${}_{3,1}\Omega \subset {}_{3,2}\Omega$, bien que ${}_{3,1}\Omega = {}_{3,2}\Omega$.

La fonction identitaire

$$\text{Id}_{3,1}\Omega : {}_{3,1}\Omega \rightarrow {}_{3,1}\Omega$$

est surjective (vérification triviale). Parce que ${}_{3,1}\Omega = {}_{3,2}\Omega$, cette fonction est identique à l'injection canonique

$$\text{In}_{3,1}\Omega, {}_{3,2}\Omega : {}_{3,1}\Omega \rightarrow {}_{3,2}\Omega$$

(même base, même cible, même graphe). Or $\text{In}_{3,1}\Omega, {}_{3,2}\Omega$ est un homomorphisme ${}_{3,1}\Omega \rightarrow {}_{3,2}\Omega$, puisque ${}_{3,1}\Omega$ est un sous-magma de ${}_{3,2}\Omega$ (théorème 8 ; voir p. 60).

La fonction $\text{Id}_{3,1}\Omega$ est donc à la fois une surjection et un homomorphisme ${}_{3,1}\Omega \rightarrow {}_{3,2}\Omega$. Ce n'est pas un épimorphisme ${}_{3,1}\Omega \rightarrow {}_{3,2}\Omega$! En effet,

$$\text{Emp Id}_{3,1}\Omega = {}_{3,1}\Omega$$

(vérification facile), donc est un sous-magma *stricto sensu* de ${}_{3,2}\Omega$. □

Proposition 15 — Un $\mathcal{V}$ -isomorphisme est un $\mathcal{V}$ -épimorphisme.

Preuve — On le vérifie immédiatement (théorème 10 et 11 ; voir pp. 61 et 65). ■

Un $\mathcal{V}$ -magma ${}_c\Omega$ isomorphe à un $\mathcal{V}$ -magma Ω en est donc une image $\mathcal{V}$ -homomorphe.

6.8 Magma-produit

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit $m \in \mathbb{N}^*$; $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, soit ${}_i\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; ${}_i\Omega = ({}_i\Omega, {}_i\Sigma, {}_i\Phi)$.

Le produit cartésien $\prod_{i=1}^m {}_i\Omega$ est le support d'un magma remarquable, le

$$\text{magma-produit } {}_1\Omega \times {}_2\Omega \times \dots \times {}_m\Omega = \prod_{i=1}^m {}_i\Omega.$$

Je ne présente que le concept *magma-produit-binaire*. Le lecteur généralisera sans difficulté.

6.8.1 Magma-produit-binaire

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ;
 ${}_1\Omega = ({}_1\Omega, {}_1\Sigma, {}_1\Phi)$, ${}_1\Sigma = \{{}_1\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, ${}_1\Phi = \{{}_1\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}$. Soit ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ;
 ${}_2\Omega = ({}_2\Omega, {}_2\Sigma, {}_2\Phi)$, ${}_2\Sigma = \{{}_2\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, ${}_2\Phi = \{{}_2\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}$.

${}_1\Omega \times {}_2\Omega$ est le support du $\mathcal{V}$ -magma ${}_1\Omega \times {}_2\Omega$:

$${}_1\Omega \times {}_2\Omega = ({}_1\Omega \times {}_2\Omega, \Sigma, \Phi) ; \Sigma = \{\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}, \Phi = \{\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}.$$

Le support

Puisque ${}_1\Omega \neq \emptyset$ et ${}_2\Omega \neq \emptyset$, ${}_1\Omega \times {}_2\Omega \neq \emptyset$; le support n'est pas vide.

Les sous-ensembles

$$\forall S \in \mathcal{S},$$

$$\sigma_S = {}_1\sigma_S \times {}_2\sigma_S$$

On vérifie facilement ceci...

- $\forall S \in \mathcal{S}, \sigma_S \neq \emptyset$ (car ${}_1\sigma_S \neq \emptyset$ et ${}_2\sigma_S \neq \emptyset$).
- $\forall S \in \mathcal{S}, \sigma_S \subseteq {}_1\Omega \times {}_2\Omega$.
- $\sigma_{***} = {}_1\sigma_{***} \times {}_2\sigma_{***} = {}_1\Omega \times {}_2\Omega$.

Les semi-constantes

$\forall e \in \mathcal{F}_0$, ϕ_e est cette ${}_1\Omega \times {}_2\Omega$ -semi-constante :

- (i) $\text{Dom } \phi_e = \text{Dom } {}_1\phi_e \cap \text{Dom } {}_2\phi_e$;
- (ii) si $\text{Dom } \phi_e \neq \emptyset$, $\phi_e \diamond = ({}_1\phi_e \diamond, {}_2\phi_e \diamond) (\in {}_1\Omega \times {}_2\Omega)$.

Les autres semi-fonctions

$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n$, ϕ_f est cette semi-fonction $({}_1\Omega \times {}_2\Omega)^n \rightarrow {}_1\Omega \times {}_2\Omega$:
 $(I = \{1, \dots, n\})$

- (i) $\text{Dom } \phi_f = \{((\xi_i, \eta_i))_I \in ({}_1\Omega \times {}_2\Omega)^n \mid (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_1\phi_f \text{ et } (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_2\phi_f\}$;
- (ii) $\forall ((\xi_i, \eta_i))_I \in \text{Dom } \phi_f, \quad \phi_f((\xi_i, \eta_i))_I = ({}_1\phi_f(\xi_i)_I, {}_2\phi_f(\eta_i)_I) (\in {}_1\Omega \times {}_2\Omega)$.

Remarque — Un magma-produit est la solution d'un problème universel...

Conjecture — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; soit ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; soit ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma. Quel que soit ${}_1\alpha$ un $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\Omega \rightarrow {}_1\Omega$, quel que soit ${}_2\alpha$ un $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\Omega \rightarrow {}_2\Omega$, il existe un unique homomorphisme

$${}_1\alpha \times {}_2\alpha : \Omega \rightarrow {}_1\Omega \times {}_2\Omega$$

qui a cette propriété : “ ce diagramme commute ” (${}_1\Pi$ est la projection ${}_1\Omega \times {}_2\Omega \rightarrow {}_1\Omega$)...

$$\begin{array}{ccc}
 & & {}_1\Omega \\
 & \nearrow {}_1\alpha & \uparrow {}_1\Pi \\
 \Omega & \xrightarrow{{}_1\alpha \times {}_2\alpha} & {}_1\Omega \times {}_2\Omega \\
 & \searrow {}_2\alpha & \downarrow {}_2\Pi \\
 & & {}_2\Omega
 \end{array}$$

6.8.2 Magma-produit et semi-fonctions τ

Théorème 12 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$ (il y a au moins un terme). Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$.

Soit ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma ; soit ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma. On considère le magma-produit $\Omega = {}_1\Omega \times {}_2\Omega$ et les semi-fonctions ${}_1\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}_1\Omega)^m \rightarrow {}_1\Omega$, ${}_2\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}_2\Omega)^m \rightarrow {}_2\Omega$ et $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}_1\Omega \times {}_2\Omega)^m \rightarrow {}_1\Omega \times {}_2\Omega$.

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$ — $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } {}_1\tau_{\mathbf{a}} \cap \text{Dom } {}_2\tau_{\mathbf{a}}$. Si $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$, alors

$$\tau_{\mathbf{a}} \diamond = ({}_1\tau_{\mathbf{a}} \diamond, {}_2\tau_{\mathbf{a}} \diamond)$$

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

$\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \{ ((\xi_j, \eta_j))_{j \in J} \in ({}_1\Omega \times {}_2\Omega)^m \mid (\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_1\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \text{ et } (\eta_j)_J \in \text{Dom } {}_2\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \}$
et

$$\forall ((\xi_j, \eta_j))_{j \in J} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}, \quad \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}((\xi_j, \eta_j))_{j \in J} = ({}_1\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J, {}_2\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J)$$

Chapitre 7

La classe des $\mathcal{V}$ -magmas — II — Congruence et magma-quotient

Les magmas les plus importants qu'on sera amené à considérer sont des *magmas-quotients* ; aussi ce concept est-il fondamental. Il est directement lié à celui de *congruence*. On s'intéresse aussi aux *super-congruences* ; une super-congruence est une congruence qualifiée.

7.1 Congruence

Une congruence est une relation d'équivalence entre éléments du support d'un magma qui est compatible avec ses opérations fondamentales.

Définition 26 (Congruence) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.

On appelle “ Ω -congruence ” toute Ω -relation binaire $\cong$ qui a ces qualités :

- $\cong$ est une relation d'équivalence ($\cong$ est réflexive, symétrique et transitive) ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$

$$\begin{aligned} \forall (\xi_i)_I, (\eta_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}, \\ (\forall i \in I, \xi_i \cong \eta_i) \Rightarrow \phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I \cong \phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I \end{aligned}$$

Exemple 1 — Congruence grossière

⊠

Une relation grossière est une relation binaire par laquelle tout élément est lié à tout élément. Soit Ω un magma. La relation $\top$:

$$\forall \xi \in \Omega, \forall \eta \in \Omega, \xi \top \eta$$

est une Ω -congruence (vérification triviale) ; c'est l' Ω -congruence grossière. □

✂ **Se mettre en garde — Exemple 2**

On connaît le ${}_3\mathcal{V}$ -magma ${}_{3,1}\Omega$, dont le support est $\mathbf{Z}$ (voir p. 58) ; $\wp$ est cette $\mathbf{Z}$ -relation binaire :

$$z \wp z' \Leftrightarrow \exists q \in \mathbf{Z}, z - z' = 2 \times q$$

($z - z'$ est un entier relatif pair). On vérifie facilement que $\wp$ est une relation d'équivalence ; il n'y a que deux classes d'équivalences, $2\mathbf{Z}$ et $2\mathbf{Z} + 1$.

$\wp$ est une ${}_{3,1}\Omega$ -congruence. En effet, si $(n, m) \in \text{Dom } {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$, si $(n', m') \in \text{Dom } {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$, si $n \wp n'$, et si $m \wp m'$, alors

$$\begin{aligned} & {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}(n, m) - {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}(n', m') \\ &= (n - m) - (n' - m') = (n - n') - (m - m') \\ &\in 2\mathbf{Z} \end{aligned}$$

c'est-à-dire ${}_{3,1}\phi_{\text{moins}}(n, m) \wp {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}(n', m')$.



On prendra garde toutefois à ne pas surestimer une congruence ! En effet, $(4, 3) \in \text{Dom } {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$, $4 \wp 2$ et $3 \wp 5$; mais $(2, 5) \notin \text{Dom } {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$. On vient de trouver deux couples *congrus*, l'un élément d'un domaine de semi-fonction mais l'autre pas.

N.B. — On vient en fait de vérifier que $\wp$ n'est pas une *super-congruence* (définition 27 ; voir p. 82). □

Notation — Soit $\xi \in \Omega$. $\bar{\xi}$ est la classe d'équivalence de ξ . $\Omega/\cong$ est l'ensemble des classes d'équivalence.

Une classe d'équivalence est la classe d'équivalence d'au moins un élément :

$$\gamma \in \Omega/\cong \Rightarrow \exists \xi \in \Omega, \gamma = \bar{\xi}$$

elle n'est donc pas vide.

Soit $\gamma \in \Omega/\cong$. Tout élément de γ est solution de l'équation

$$\gamma = \bar{\xi}$$

(trouver un ξ dont la classe est une certaine classe d'équivalence γ). Annoncer γ comme $\bar{\xi}_0$ (la classe de ξ_0), c'est *choisir un certain élément ξ_0 comme représentant de la classe γ* .

7.2 Congruence et semi-fonctions τ

Toute congruence est compatible avec les opérations fondamentales (les semi-fonctions ϕ). On se doute qu'elle est aussi compatible avec les semi-fonctions τ (une τ est une composée de ϕ).

Théorème 13 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J \neq \emptyset$.
Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -congruence.

$$\begin{aligned} \forall (\xi_j)_J, (\eta_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}, \\ (\forall j \in J, \xi_j \cong \eta_j) \Rightarrow \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J \cong \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J \end{aligned}$$

Preuve

On raisonne par récurrence.

I — $\mathbf{a} = [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{\Omega}$ (définition). Donc, $\forall \xi, \eta \in \Omega$, si $\xi \cong \eta$, alors

$$\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\xi) = \xi \cong \eta = \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\eta)$$

II — $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\wedge \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})]$

L'ensemble des variables du sous-terme $\mathbf{a}_i$ est $\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$;

$\text{Card } J_i = m_i$. On vérifie que $\text{Var } [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $J = \bigcup_{i \in I} J_i$; $\text{Card } J = m \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'ensemble $I_s = \{i \in I \mid J_i = \emptyset\}$ (ensemble des indices i , $\mathbf{a}_i$ étant sans variable). Puisque $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ comprend au moins une variable, $I - I_s \neq \emptyset$.

Si $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$, on vérifie trivialement la propriété indiquée. On suppose maintenant que $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \neq \emptyset$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s$, $\forall (\xi_j)_{J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$,

$\forall (\eta_j)_{J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$,

si $[\forall j \in J_i, \xi_j \cong \eta_j]$, alors $\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{J_i} \cong \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{J_i}$.

Soient $(\xi_j)_J, (\eta_j)_J \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$, cette paire de multiplats ayant cette propriété : $\forall j \in J$, $\xi_j \cong \eta_j$. Par définition, les multiplats $(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I}$ et $(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i})_{i \in I}$ sont des éléments de $\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$, et

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \quad \wedge \quad \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J = \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i})_{i \in I}$$

On compare deux à deux chaque composante des multiplats arguments.

Si $i \in I_s$, $\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i} = \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} = \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i}$ donc

$$\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i} \cong \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i}$$

(la relation $\cong$ est réflexive). Si $i \in I - I_s$,

$$\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i} \cong \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i}$$

(hypothèse de récurrence). Donc

$$\phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \cong \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\eta_j)_{j \in J_i})_{i \in I}$$

(définition 26 ; voir p. 69) ; c'est-à-dire $\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J \cong \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J$. ■

7.3 Magma-quotient

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$. Soit $\cong$ une Ω -congruence.

L'ensemble des classes d'équivalence $\Omega/\cong$ est le support d'un $\mathcal{V}$ -magma remarquable, qu'on appelle "*le magma-quotient $\Omega/\cong$* ". Ce magma, quel est-il ? $\Omega/\cong = (\Omega/\cong, \bar{\Sigma}, \bar{\Phi})$; $\bar{\Sigma} = \{\bar{\sigma}_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, $\bar{\Phi} = \{\bar{\phi}_f\}_{f \in \mathcal{F}}$.

7.3.1 Magma-quotient

Le support $\Omega/\cong$ n'est pas vide

En effet, $\exists \xi \in \Omega$ ($\neq \emptyset$) ; donc $\exists \gamma \in \Omega/\cong$ (considérer $\gamma = \bar{\xi}$).

Les sous-ensembles

$$\forall S \in \mathcal{S},$$

$$\bar{\sigma}_S = \{\gamma \in \Omega/\cong \mid \gamma \cap \sigma_S \neq \emptyset\}$$

La propriété caractéristique de $\bar{\sigma}_S$ est celle-ci : $\forall \gamma \in \bar{\sigma}_S$, on peut trouver au moins un représentant de γ qui soit élément de σ_S .

Assertion 8 — $\xi \in \sigma_S \Rightarrow \bar{\xi} \in \bar{\sigma}_S$.

Pourquoi s'intéresser à $\{\gamma \in \Omega/\cong \mid \gamma \cap \sigma_S \neq \emptyset\}$ et pas à $\{\gamma \in \Omega/\cong \mid \gamma \subseteq \sigma_S\}$ par exemple ? Il y a au moins trois raisons ($Sj_\cong$ est la projection

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \Omega/\cong \\ \xi & \mapsto & \bar{\xi} \end{array}$$

voir p. 74).

1 — $\{\gamma \in \Omega/\cong \mid \gamma \cap \sigma_S \neq \emptyset\} = \{\bar{\xi} \mid \xi \in \sigma_S\}$ (le saturé).

2 — $Sj_\cong(\sigma_S) \subseteq \bar{\sigma}_S$. Or une qualité de tout homomorphisme $\alpha : \Omega \rightarrow \Omega/\cong$ est que $\alpha(\sigma_S) \subseteq \bar{\sigma}_S$; on espère bien que $Sj_\cong$ sera un tel homomorphisme.

3 — Si $\sigma_E \subseteq \text{Dom } \phi_f$, alors $\bar{\sigma}_E \subseteq \text{Dom } \bar{\phi}_f$ (conservation).

On vérifie aussi ceci :

- $\forall S \in \mathcal{S}, \bar{\sigma}_S \neq \emptyset$. En effet, $\sigma_S \neq \emptyset$; il y a donc un objet ξ élément de σ_S ; sa classe d'équivalence $\bar{\xi}$ est élément de $\bar{\sigma}_S$; donc $\bar{\sigma}_S \neq \emptyset$.
- $\forall S \in \mathcal{S}, \bar{\sigma}_S \subseteq \Omega/\cong$.
- $\bar{\sigma}_{***} = \{\gamma \in \Omega/\cong \mid \gamma \cap \Omega \neq \emptyset\} = \Omega/\cong$.

On vérifie sans peine que

$$\sigma_S \subseteq \bigcup_{\xi \in \sigma_S} \bar{\xi}$$

Remarquer — Si $\cong$ est la congruence grossière, $\bigcup_{\xi \in \sigma_S} \bar{\xi} = \Omega$.

Les semi-constantes

$\forall e \in \mathcal{F}_0$, $\overline{\phi}_e$ est cette $\Omega/\cong$ -semi-constante :

- (i) $\text{Dom } \overline{\phi}_e = \text{Dom } \phi_e$;
- (ii) si $\text{Dom } \overline{\phi}_e \neq \emptyset$, $\overline{\phi}_e \diamond = \overline{\phi_e \diamond} (\in \Omega/\cong)$.

Les autres semi-fonctions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$. Puisque $\cong$ est une congruence, $(I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}, \forall (\eta_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \overline{\xi_i}, \quad \phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I \cong \phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I$$

Donc, si le multiplet de classes $(\gamma_i)_I \in (\Omega/\cong)^n$ a cette propriété :

$$\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \gamma_i \neq \emptyset$$

alors, quel que soit le multiplet $(\eta_i)_I$ élément de cette intersection (η_i est un représentant de la classe γ_i), le résultat $\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I$ appartient à une classe d'équivalence unique, qu'on peut nommer :

$$\overline{\phi_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I}$$

On vient de révéler cette semi-fonction $\overline{\phi}_{\mathbf{f}} : (\Omega/\cong)^n \rightarrow \Omega/\cong$:

- (i) $\text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}} = \{(\gamma_i)_I \in (\Omega/\cong)^n \mid \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \gamma_i \neq \emptyset\}$;
- (ii) $\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}}, \overline{\phi}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I = \overline{\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I} (\in \Omega/\cong)$, $(\xi_i)_I$ étant n'importe lequel des multiplets de l'intersection $\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \gamma_i$.

On vérifie que l'arité de $\overline{\phi}_{\mathbf{f}}$ est bien $n = a(\mathbf{f})$.

Assertion 9 — $\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}}$, on peut choisir un représentant $\xi_i \in \gamma_i$ ($i \in I$) de telle sorte que

$$(\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

7.3.2 Propriétés

Proposition 16 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -congruence. On considère le magma-quotient $\Omega/\cong$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}, (\overline{\xi_i})_I \in \text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}} \text{ et } \overline{\phi_{\mathbf{f}}(\overline{\xi_i})_I} = \overline{\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I}$$

Preuve

On suppose que $\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \neq \emptyset$. Soit $(\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$. Par définition $(\xi_i)_I \in \prod_{i \in I} \overline{\xi_i}$, donc $\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \overline{\xi_i} \neq \emptyset$, c'est-à-dire $(\overline{\xi_i})_I \in \text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}}$.

Puisque $(\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_f \cap \prod_{i \in I} \bar{\xi}_i \neq \emptyset$, par définition $\bar{\phi}_f(\bar{\xi}_i)_I = \overline{\phi_f(\xi_i)_I}$. ■

Se mettre en garde — Exemple

On connaît le ${}_3\mathcal{V}$ -magma ${}_{3,1}\Omega$ et la ${}_{3,1}\Omega$ -congruence φ (voir p. 70). On se rappelle que ${}_{3,1}\Omega/\varphi = \mathbf{Z}/\varphi = \{\mathbf{Z}, \mathbf{Z} + 1\}$ (il n'y a que deux classes d'équivalence).

Les couples

$$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1) \in \text{Dom } {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$$

(vérification triviale) ; $(\bar{0}, \bar{0}) = (2\mathbf{Z}, 2\mathbf{Z})$, $(\bar{1}, \bar{0}) = (2\mathbf{Z} + 1, 2\mathbf{Z})$,
 $(\bar{1}, \bar{1}) = (2\mathbf{Z} + 1, 2\mathbf{Z} + 1)$, et $(\bar{2}, \bar{1}) = (2\mathbf{Z}, 2\mathbf{Z} + 1)$; donc

$$\text{Dom } {}_{3,1}\bar{\phi}_{\text{moins}} = \mathbf{Z}/\varphi \times \mathbf{Z}/\varphi$$

c'est-à-dire ${}_{3,1}\bar{\phi}_{\text{moins}}$ est une fonction.

En particulier, $(\bar{0}, \bar{1}) = (2\mathbf{Z}, 2\mathbf{Z} + 1) \in \text{Dom } {}_{3,1}\bar{\phi}_{\text{moins}}$. Pourtant $(0, 1) \notin \text{Dom } {}_{3,1}\phi_{\text{moins}}$! On vient de trouver un multiplet $(\xi_i)_I$,

$$(\bar{\xi}_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_f \quad \text{mais} \quad (\xi_i)_I \notin \text{Dom } \phi_f$$

□

7.4 Magma-quotient et semi-fonctions τ

Le quotient d'un magma en est une image homomorphe.

Théorème 14 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.
 Soit $\cong$ une Ω -congruence. La fonction $\text{Sj}_{\cong}$:

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \Omega/\cong \\ \xi &\mapsto \bar{\xi} \end{aligned}$$

est un $\mathcal{V}$ -épimorphisme $\Omega \rightarrow \Omega/\cong$; le magma-quotient $\Omega/\cong$ est une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de Ω .

Preuve

Toute classe d'équivalence est la classe d'au moins un élément, donc $\text{Sj}_{\cong}$ est surjective.

$$\text{i} \text{ — } \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \text{Sj}_{\cong}(\sigma_{\mathbf{S}}) = \{ \bar{\xi} \}_{\xi \in \sigma_{\mathbf{S}}} = \{ \gamma \in \Omega/\cong \mid \gamma \cap \sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset \} = \bar{\sigma}_{\mathbf{S}}.$$

ii-a — $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, on sait déjà que $\text{Dom } \phi_{\mathbf{e}} = \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{e}}$, et que si $\text{Dom } \phi_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$, alors $\overline{\phi_{\mathbf{e}} \diamond} = \bar{\phi}_{\mathbf{e}} \diamond$ (définition ; voir p. par:alquo:semico).

ii-b — $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, ${}^n(\text{Sj}_{\cong})(\text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}) = \{ (\bar{\xi}_i)_I \mid (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \} = \{ (\gamma_i)_I \in (\Omega/\cong)^n \mid \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \gamma_i \neq \emptyset \} = \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}$. On sait déjà que

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}, \quad \overline{\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I} = \bar{\phi}_{\mathbf{f}}(\bar{\xi}_i)_I.$$

Donc $\text{Sj}_{\underline{\alpha}}$ est un épimorphisme (théorème 11 ; voir p. 65). ■

Soit $\mathbf{a}$ un terme. On l'interprète par référence à un magma ; on révèle une semi-fonction $\tau_{\mathbf{a}}$. On interprète ce même terme par référence à un quotient de ce magma ; on révèle une semi-fonction $\bar{\tau}_{\mathbf{a}}$.

Comment sont liés $\tau_{\mathbf{a}}$ et $\bar{\tau}_{\mathbf{a}}$? Ce lien ressemble-t-il à celui entre $\phi_{\mathbf{f}}$ et $\bar{\phi}_{\mathbf{f}}$?

Théorème 15 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -congruence. On considère le magma-quotient $\Omega/\cong$, et les semi-fonctions $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$ et $\bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : (\Omega/\cong)^m \rightarrow \Omega/\cong$.

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$ — $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} \subseteq \text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}$. Si $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$, alors

$$\overline{(\tau_{\mathbf{a}} \diamond)} = \bar{\tau}_{\mathbf{a}} \diamond$$

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ — $\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$,

$$(\bar{\xi}_j)_J \in \text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \quad \text{et} \quad \overline{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J} = \bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\bar{\xi}_j)_J$$

Preuve

Ω et $\Omega/\cong$ sont deux $\mathcal{V}$ -magmas ; et $\text{Sj}_{\underline{\alpha}}$ est un $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\Omega \rightarrow \Omega/\cong$ (théorème 14).

Ce qu'on cherche à vérifier, on le sait déjà : théorème 7 (${}_b\Omega = \Omega$, ${}_c\Omega = \Omega/\cong$, $\alpha = \text{Sj}_{\underline{\alpha}}$) ; voir p. 55. ■

Exemple ⊗

$\mathcal{V}$ est ce vocabulaire :

- ♣ $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$;
- $\mathcal{S} = \{***\}$;
- $\mathcal{F}_0 = \{\text{un}, \text{deux}\}$;
- $\mathcal{F}_1 = \{\text{rac}\}$;
- les autres $\mathcal{F}_i$ ($i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$) sont vides.

Ω est ce $\mathcal{V}$ -magma :

- ♣ $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$; $\Sigma = \{\sigma_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}}$; $\Phi = \{\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$;
- $\Omega = \{1, 2\}$;
- ϕ_{un} n'est pas vide, $\phi_{\text{un}} \diamond = 1$;
- ϕ_{deux} n'est pas vide, $\phi_{\text{deux}} \diamond = 2$;
- ϕ_{rac} est cette semi-fonction (racine carrée) :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \Omega \\ \{1\} \ni \xi & \mapsto & \sqrt{\xi} \end{array}$$

On vérifie facilement que $\text{Dom } \tau_{[\text{rac} \text{ deux}]} = \emptyset$ (semi-constante vide).

On considère maintenant l' Ω -congruence grossière $\top$ (voir p. 69). Il n'y a qu'une seule classe d'équivalence, l'ensemble Ω lui-même ; c'est-à-dire

$$\Omega/\top = \{\Omega\}$$

(l'ensemble-quotient est un singleton).

On considère ensuite le magma-quotient $\Omega/\top$. Puisque $1 \in \text{Dom } \phi_{\text{rac}}$, $\Omega = \bar{1} \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\text{rac}}$ et

$$\bar{\phi}_{\text{rac}}(\Omega) = \bar{\phi}_{\text{rac}}(\bar{1}) = \overline{\phi_{\text{rac}}(1)} = \bar{1} = \Omega$$

(voir p. 73) ; $\bar{\phi}_{\text{rac}}$ est donc la fonction identitaire de $\{\Omega\}$.

On sait par ailleurs que $\bar{\phi}_{\text{deux}}$ n'est pas vide et que $\bar{\phi}_{\text{deux}} \diamond = \overline{\phi_{\text{deux}} \diamond} = \bar{2} = \Omega$ (définition).

On vérifie alors facilement que $\text{Dom } \bar{\tau}_{[\text{rac deux}]} \neq \emptyset$, et que

$$\bar{\tau}_{[\text{rac deux}]} \diamond = \bar{\phi}_{\text{rac}}(\bar{\phi}_{\text{deux}} \diamond) = \bar{\phi}_{\text{rac}}(\Omega) = \Omega$$

Qu'a-t-on fait ? On a trouvé un terme $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} = [\text{rac deux}]$),

- $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} = \emptyset$,
- mais $\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$.

□



Se mettre en garde

Soit $\mathbf{a}$ un terme dans lequel apparaît au moins une variable. On vérifie que

$$\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \supseteq \{(\gamma_j)_J \in (\Omega/\cong)^m \mid \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \cap \prod_{j \in J} \gamma_j \neq \emptyset\}$$

(le saturé d'un multiplet élément d'un domaine de semi-fonction τ est élément du domaine de la semi-fonction $\bar{\tau}$ correspondante ; théorème 15).

Il ne faut pas espérer plus : il n'y a pas identité. Voici un contre-exemple.



Contre-exemple

$(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ est ce grand-vocabulaire :

- ♣ $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$;
- $\mathcal{S} = \{***\}$;
- $\mathcal{F}_1 = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$;
- $\mathcal{F}_2 = \{\mathbf{h}\}$;
- les autres $\mathcal{F}_i$ ($i \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$) sont vides ;
- ♣ $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}\}$.

Ω est ce $\mathcal{V}$ -magma :

- ♣ $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$; $\Sigma = \{\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}}$; $\Phi = \{\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$;
- $\Omega = \mathbb{N}$;
- $\phi_{\mathbf{f}}$ est cette semi-fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ \{2\} \ni \xi & \mapsto & \xi \end{array}$$

- ϕ_g est cette semi-fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{N} \\ \{3\} \ni \xi & \mapsto & \xi \end{array}$$

- ϕ_h est cette fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \rightarrow & \mathbf{N} \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto & \xi_1 \times \xi_2 \end{array}$$

On vérifie facilement que $\tau_{[f \ x]}^x = \phi_f$, que $\tau_{[g \ x]}^x = \phi_g$, et que $\tau_{[h \ f \ x \ g \ x]}^x$ est vide.

I — On considère maintenant l' Ω -congruence grossière $\top$. Il n'y a qu'une classe d'équivalence ; c'est-à-dire

$$\mathbf{N}/\top = \{\mathbf{N}\}$$

On considère ensuite le magma-quotient $\Omega/\top$. On vérifie facilement ceci...

- $\bar{\phi}_f = \text{Id}_{\{\mathbf{N}\}}$ ($\bar{\phi}_f$ est la fonction identitaire du singleton $\{\mathbf{N}\}$).
- $\bar{\phi}_g = \text{Id}_{\{\mathbf{N}\}}$.
- $\bar{\phi}_h$ est cette fonction :

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{N}\} \times \{\mathbf{N}\} & \rightarrow & \{\mathbf{N}\} \\ (\mathbf{N}, \mathbf{N}) & \mapsto & \mathbf{N} \end{array}$$

II — On s'intéresse alors au terme $[h \ f \ x \ g \ x]$, qu'on interprète par référence à $\Omega/\top$. On procède par étapes :

- $\bar{\tau}_{[f \ x]}^x = \bar{\phi}_f = \text{Id}_{\{\mathbf{N}\}}$;
- $\bar{\tau}_{[g \ x]}^x = \bar{\phi}_g = \text{Id}_{\{\mathbf{N}\}}$;
- donc $\text{Dom } \bar{\tau}_{[h \ f \ x \ g \ x]}^x = \{\mathbf{N}\}$; et $\bar{\tau}_{[h \ f \ x \ g \ x]}^x(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$.

C'est terminé. On est maintenant capable d'observer ceci :

$$\{\mathbf{N}\} = \text{Dom } \bar{\tau}_{[h \ f \ x \ g \ x]}^x \supset \{\gamma \in \{\mathbf{N}\} \mid \text{Dom } \tau_{[h \ f \ x \ g \ x]}^x \cap \gamma \neq \emptyset\} = \emptyset$$

$\{\mathbf{N}\}$ et $\emptyset$ ne sont pas identiques !

□

7.5 Tout homomorphisme est la composée de trois homomorphismes remarquables

Plusieurs théorèmes fondamentaux de l'algèbre élémentaire sont relatifs à ce même sujet : en révélant la structure-quotient adéquate, trouver que tout morphisme est une composée de morphismes élémentaires (par exemple, théorème fondamental sur les groupes-quotients [4, p. 124]).

On peut vérifier que les objets qu'on a nommés "homomorphisme" (les morphismes de l'algèbre G) ont une propriété du même genre.

7.5.1 La congruence liée à l'homomorphisme

Proposition 17 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soient ${}_b\Omega$ un magma, ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, α un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

Cette ${}_b\Omega$ -relation binaire $\cong_\alpha$:

$$\xi \cong_\alpha \eta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\xi) = \alpha(\eta)$$

est une ${}_b\Omega$ -congruence.

Preuve

On vérifie trivialement que $\cong_\alpha$ est une relation d'équivalence. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}} \neq \emptyset$. Soient $(\xi_i)_I, (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}$. On suppose que, $\forall i \in I$, $\xi_i \cong_\alpha \eta_i$, c'est-à-dire $\alpha(\xi_i) = \alpha(\eta_i)$.

On veut vérifier que ${}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I \cong_\alpha {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I$, c'est-à-dire

$$\alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I = \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I$$

Or α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, donc $(\alpha(\xi_i))_I$ et $(\alpha(\eta_i))_I$ sont des éléments de $\text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$, et

$$\alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha(\xi_i))_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha(\eta_i))_I = \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I$$

■

7.5.2 À tout homomorphisme correspond un isomorphisme — L'isomorphisme $\bar{\alpha}$

Soit γ une classe de ${}_b\Omega/\cong_\alpha$ ($\gamma \subseteq {}_b\Omega$). Par définition, $\forall \xi, \eta \in \gamma$, $\alpha(\xi) = \alpha(\eta)$; $\forall \mathbf{x}i \in \gamma$, le résultat $\alpha(\xi)$ est un élément unique, qu'on peut appeler

$$\bar{\alpha}(\gamma)$$

On vient de révéler la fonction $\bar{\alpha} : {}_b\Omega/\cong_\alpha \rightarrow \text{Emp } \alpha$, qui a cette propriété remarquable :

$$\forall \gamma \in {}_b\Omega/\cong_\alpha, \forall \xi \in \gamma, \bar{\alpha}(\gamma) = \alpha(\xi)$$

Donc $\forall \xi \in {}_b\Omega$, $\bar{\alpha}(\bar{\xi}) = \alpha(\xi)$ (raisonnement trivial).

Lemme 3

i — $\bar{\alpha}$, fonction ${}_b\Omega/\cong_\alpha \rightarrow \text{Emp } \alpha$, est une bijection.

ii — “ Ce diagramme commute... ”

$$\begin{array}{ccc} {}_b\Omega & \xrightarrow{\alpha} & {}_c\Omega \\ \text{Sj}_{\cong_\alpha} \downarrow & & \uparrow \text{In}_{\text{Emp } \alpha, {}_c\Omega} \\ {}_b\Omega/\cong_\alpha & \xleftrightarrow{\bar{\alpha}} & \text{Emp } \alpha \end{array}$$

Preuve

i-a — $\bar{\alpha}$ est surjective

$\forall \eta \in \text{Emp } \alpha, \exists \xi \in {}_b\Omega, \eta = \alpha(\xi)$. Donc $\eta = \bar{\alpha}(\bar{\xi}), \bar{\xi} \in {}_b\Omega / \cong_\alpha$.

i-b — $\bar{\alpha}$ est injective

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in {}_b\Omega / \cong_\alpha, \bar{\alpha}(\gamma_1) = \bar{\alpha}(\gamma_2)$. On choisit un représentant de chaque classe : $\xi_1 \in \gamma_1$ et $\xi_2 \in \gamma_2$. Par définition, $\bar{\alpha}(\gamma_1) = \alpha(\xi_1)$ et $\bar{\alpha}(\gamma_2) = \alpha(\xi_2)$, donc $\alpha(\xi_1) = \alpha(\xi_2)$, $\xi_1 \cong_\alpha \xi_2$, et $\gamma_1 = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \gamma_2$.

ii — “ Le diagramme commute ”

On vérifie trivialement que $\forall \xi \in {}_b\Omega, \alpha(\xi) = \text{In}_{\text{Emp } \alpha, {}_c\Omega} \circ \bar{\alpha}(\bar{\xi})$. ■

Théorème 16 (Décomposition canonique) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soient ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, α un $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

On considère l' ${}_b\Omega$ -congruence $\cong_\alpha$ et la fonction $\bar{\alpha}$ (voir supra).

I — $\bar{\alpha}$, fonction ${}_b\Omega / \cong_\alpha \rightarrow \text{Emp } \alpha$, est un isomorphisme ${}_b\Omega / \cong_\alpha \leftrightarrow \text{Emp } \alpha$.

II — “ Ce diagramme commute... ”

$$\begin{array}{ccc}
 {}_b\Omega & \xrightarrow{\alpha} & {}_c\Omega \\
 \text{Sj}_{\cong_\alpha} \downarrow & & \uparrow \text{In}_{\text{Emp } \alpha, {}_c\Omega} \\
 {}_b\Omega / \cong_\alpha & \xleftrightarrow{\bar{\alpha}} & \text{Emp } \alpha
 \end{array}$$

Preuve

Cette preuve est un assemblage de sous-preuves indépendantes. On est guidé par la caractérisation équivalente des isomorphismes.

I — La fonction $\bar{\alpha}$ est une bijection ${}_b\Omega / \cong_\alpha \leftrightarrow \text{Emp } \alpha$ (lemme 3). Est-ce un isomorphisme ${}_b\Omega / \cong_\alpha \leftrightarrow \text{Emp } \alpha$? Oui. Pour le vérifier, on procède ainsi (théorème 10 ; voir p. 61).

i — On veut d'abord vérifier que, $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$,

$$\bar{\alpha}(\bar{\sigma}_{\mathbf{S}}) = {}_e\sigma_{\mathbf{S}}$$

Or

$$\bar{\alpha}(\bar{\sigma}_{\mathbf{S}}) = \{\bar{\alpha}(\gamma) \mid \gamma \in \bar{\sigma}_{\mathbf{S}}\}$$

et

$${}_e\sigma_{\mathbf{S}} = \alpha(\sigma_{\mathbf{S}}) = \{\alpha(\xi) \mid \xi \in \sigma_{\mathbf{S}}\}$$

Il reste à vérifier que

$$\{\bar{\alpha}(\gamma) \mid \gamma \in \bar{\sigma}_{\mathbf{S}}\} = \{\alpha(\xi) \mid \xi \in \sigma_{\mathbf{S}}\}$$

Soit $\gamma \in \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$. Par définition, il existe $\xi \in \sigma_{\mathbf{S}}$, $\gamma = \overline{\xi}$; donc $\overline{\alpha}(\gamma) = \alpha(\xi)$. On vient de vérifier que

$$\{\overline{\alpha}(\gamma) \mid \gamma \in \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}\} \subseteq \{\alpha(\xi) \mid \xi \in \sigma_{\mathbf{S}}\}$$

Réciproque — Soit $\xi \in \sigma_{\mathbf{S}}$. Par définition, $\overline{\xi} \in \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$, et $\alpha(\xi) = \overline{\alpha}(\overline{\xi})$. Donc

$$\{\alpha(\xi) \mid \xi \in \sigma_{\mathbf{S}}\} \subseteq \{\overline{\alpha}(\gamma) \mid \gamma \in \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}\}$$

ii-a — On veut vérifier que, $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$,

$$\text{Dom } {}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{e}}$$

et que, si $\text{Dom } {}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$, alors

$$\overline{\alpha}({}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}}\diamond) = {}_e\phi_{\mathbf{e}}\diamond$$

Or

$$\text{Dom } {}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{e}}$$

(définition ; voir pp. 73 et 63). Si $\text{Dom } {}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$, alors

$$\overline{{}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}}\diamond} = \overline{{}_b\phi_{\mathbf{e}}}$$

et

$${}_e\phi_{\mathbf{e}}\diamond = \alpha({}_b\phi_{\mathbf{e}}\diamond)$$

Donc

$$\overline{\alpha}({}_b\overline{\phi}_{\mathbf{e}}\diamond) = \overline{\alpha}(\overline{{}_b\phi_{\mathbf{e}}}) = \alpha({}_b\phi_{\mathbf{e}}\diamond) = {}_e\phi_{\mathbf{e}}\diamond$$

ii-b — Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$.

• On veut vérifier que

$${}^n(\overline{\alpha})(\text{Dom } {}_b\overline{\phi}_{\mathbf{f}}) = \text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}}$$

Par définition,

$$\text{Dom } {}_e\phi_{\mathbf{f}} = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}})$$

(voir p. 63). Il reste à vérifier que

$${}^n(\overline{\alpha})(\text{Dom } {}_b\overline{\phi}_{\mathbf{f}}) = {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}})$$

On sait que

$$\text{Dom } \overline{b\phi_f} = \{(\gamma_i)_I \in ({}_b\Omega / \cong_\alpha)^n \mid \text{Dom } {}_b\phi_f \cap \prod_{i \in I} \gamma_i \neq \emptyset\}$$

(définition ; voir p. 73). On *suppose* d'abord que $\text{Dom } \overline{b\phi_f} \neq \emptyset$. Soit $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } \overline{b\phi_f}$; soit $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f \cap \prod_{i \in I} \gamma_i$ (intersection non vide — ξ_i est un représentant de la classe γ_i). On observe que

$${}^n(\overline{\alpha})(\gamma_i)_I = (\overline{\alpha}(\gamma_i))_I = (\alpha(\xi_i))_I = {}^n\alpha(\xi_i)_I \in {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$$

On vient ainsi de vérifier que

$${}^n(\overline{\alpha})(\text{Dom } \overline{b\phi_f}) \subseteq {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$$

(si $\text{Dom } \overline{b\phi_f} = \emptyset$, on le vérifie immédiatement).

Réciproque — On *suppose* d'abord que ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) \neq \emptyset$. Soit $\eta \in {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f)$; il existe un multiplet $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f$, $\eta = {}^n\alpha(\xi_i)_I$. On sait que $(\overline{\xi_i})_I \in \text{Dom } \overline{b\phi_f}$ (proposition 16 ; voir p. 73). Donc :

$$\eta = (\alpha(\xi_i))_I = (\overline{\alpha}(\overline{\xi_i}))_I = {}^n(\overline{\alpha})(\overline{\xi_i})_I \in {}^n(\overline{\alpha})(\text{Dom } \overline{b\phi_f})$$

On vient de vérifier que

$${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) \subseteq {}^n(\overline{\alpha})(\text{Dom } \overline{b\phi_f})$$

(si ${}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \emptyset$, on le vérifie immédiatement).

• J'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On veut vérifier que

$$\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } \overline{b\phi_f}, \overline{\alpha} \circ \overline{b\phi_f}(\gamma_i)_I = {}_e\phi_f(\overline{\alpha}(\gamma_i))_I$$

Soit $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } \overline{b\phi_f}$. Par définition, il existe un multiplet $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_f$,

$$\overline{b\phi_f}(\gamma_i)_I = \overline{{}_b\phi_f(\xi_i)_I}$$

(ξ_i est un représentant de la classe γ_i , i.e. $\overline{\xi_i} = \gamma_i$; voir p. 73).

On vérifie alors que

$$\overline{\alpha} \circ \overline{b\phi_f}(\gamma_i)_I = \overline{\alpha}(\overline{{}_b\phi_f(\xi_i)_I}) = \alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I$$

La fonction α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_e\Omega$, donc le multiplet $(\alpha(\xi_i))_I \in \text{Dom } {}_e\phi_f$, et

$$\alpha \circ {}_b\phi_f(\xi_i)_I = {}_e\phi_f(\alpha(\xi_i))_I$$

Parce que le multiplet $(\alpha(\xi_i))_I \in {}^n\alpha(\text{Dom } {}_b\phi_f) = \text{Dom } {}_e\phi_f$,

$${}_e\phi_f(\alpha(\xi_i))_I = {}_e\phi_f(\overline{\alpha}(\gamma_i))_I$$

(définition ; voir p. 63). On vérifie enfin que

$${}_e\phi_{\mathbf{f}}(\alpha(\xi_i))_I = {}_e\phi_{\mathbf{f}}(\overline{\alpha}(\overline{\xi_i}))_I = {}_e\phi_{\mathbf{f}}(\overline{\alpha}(\gamma_i))_I$$

II — $\text{Sj}_{\cong_\alpha}$ est un épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_b\Omega/\cong_\alpha$ (théorème 14 ; voir p. 74).

$\text{In}_{\text{Emp } \alpha, {}_c\Omega}$ est un homomorphisme $\mathbf{Emp } \alpha \rightarrow {}_c\Omega$ (proposition 13 et théorème 8 ; voir pp. 63 et 60).

“ Le diagramme commute ” (lemme 3 ; voir p. 78). ■

7.6 Super-congruence

Une super-congruence est une congruence qualifiée. Grätzer dit “ *strong congruence* ” [14].

Définition 27 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.

On appelle “ Ω -super-congruence ” toute Ω -relation binaire $\cong$ qui a ces qualités :

- $\cong$ est une relation d'équivalence ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$

$$\begin{aligned} & \forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}, \quad \forall (\eta_i)_I \in \Omega^n, \\ & (\forall i \in I, \xi_i \cong \eta_i) \Rightarrow \begin{cases} (\eta_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \\ \text{et} \\ \phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I \cong \phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I \end{cases} \end{aligned}$$

⊗ **Exemple** — *Super-congruence identitaire*

Une relation identitaire est une relation par laquelle tout élément n'est lié qu'à lui-même. Soit Ω un magma. La relation $\perp$:

$$\forall \xi, \eta \in \Omega, \quad \xi \perp \eta \Leftrightarrow \xi = \eta$$

($\perp$ est identique à $=$) est une Ω -super-congruence (vérification triviale) ; c'est l' Ω -super-congruence identitaire. □

⊗ **Contre-exemple**

Si le magma Ω comprend au moins une semi-fonction ϕ qui n'est pas une fonction, la relation $\top$ (relation grossière ; voir p. 69), bien qu'étant une congruence, n'est pas une super-congruence. □

Assertion 10 — Une super-congruence est une congruence.

On peut donc considérer le magma-quotient $\Omega/\cong$ (voir p. 72)...

On sait que, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, si $\text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}} \neq \emptyset$, alors

$$\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}, \quad \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \gamma_i \neq \emptyset$$

(voir p. 73). En fait, il y a plus.

Proposition 18 — *Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -super-congruence.*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$$

$$\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}, \quad \prod_{i \in I} \gamma_i \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

Preuve

Soit $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}$. Par définition, il existe un certain multiplet $(\xi_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}} \cap \prod_{i \in I} \gamma_i$.

Soit $(\eta_i)_I \in \prod_{i \in I} \gamma_i$. $\forall i \in I$, $\xi_i \in \gamma_i$ et $\eta_i \in \gamma_i$; donc $\xi_i \cong \eta_i$. Puisque $(\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$, $(\eta_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$ (définition 27). On vient de vérifier que $\prod_{i \in I} \gamma_i \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$. ■

Corollaire 3 — *Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -super-congruence.*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$$

$$\begin{aligned} \forall (\xi_i)_I \in \Omega^n, \\ (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{\xi}_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

Preuve

On sait déjà que $(\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \Rightarrow (\bar{\xi}_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}$ (proposition 16 ; voir p. 73).

Réciproque — Si $(\bar{\xi}_i)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}$, alors $\prod_I \bar{\xi}_i \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$ (proposition 18). Or $(\xi_i)_I \in \prod_I \bar{\xi}_i$ ($\xi_i \in \bar{\xi}_i$!); donc $(\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$. ■

On peut maintenant vérifier que, si la congruence est une super-congruence, le lien entre $\tau_{\mathbf{a}}$ et $\bar{\tau}_{\mathbf{a}}$ est juste ce que l'on souhaite (comparer les théorèmes 15 et 17).

Théorème 17 — *Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$.*

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -super-congruence.

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$ — $\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}$.

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ — $\forall (\xi_j)_J \in \Omega^m$,

$$(\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{\xi}_j)_J \in \text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

Preuve

Preuve représentative. On saisira l'idée en lisant la première partie (I), courte et facile.

On raisonne par récurrence.

I — Premier cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

I-1 — $\mathbf{a} = [\mathbf{e}]$, $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$

Par définition, $\tau_{\mathbf{e}} = \phi_{\mathbf{e}}$, et $\bar{\tau}_{\mathbf{e}} = \bar{\phi}_{\mathbf{e}}$. On sait déjà que $\text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{e}} = \text{Dom } \phi_{\mathbf{e}}$ (définition ; voir p. 73).

I-2 — $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$, et $\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V})$

On sait déjà que $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} \subseteq \text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}$ (théorème 15 ; voir p. 75). Si $\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}} = \emptyset$, on vérifie trivialement la propriété annoncée.

On suppose maintenant que $\text{Dom } \bar{\tau}_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} = (\Omega/\cong)^0 (= \{\diamond\})$; c'est-à-dire $\forall i \in I$, $\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} = (\Omega/\cong)^0$, et le multiplet $(\bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I$, $\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}$.

Donc $[\forall i \in I, \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i} = \Omega^0 (= \{\diamond\})]$; et $[\forall i \in I, \bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} \diamond = \bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} \diamond]$ (théorème 15 ; voir p. 75).

On considère le multiplet $(\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I$. Puisque $(\bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I = (\bar{\tau}_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I \in \text{Dom } \bar{\phi}_{\mathbf{f}}$,

$$(\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

(corollaire 3). Donc $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} = \Omega^0 (= \{\diamond\})$ (voir p. 32).

II — Deuxième cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

II-1 — $\mathbf{a} = [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$\tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{\Omega}$, et $\bar{\tau}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{\Omega/\cong}$ (définition). On vérifie trivialement que, $\forall \xi \in \Omega$, $\xi \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}$, et $\bar{\xi} \in \text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}$.

II-2 — $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})]$

L'ensemble des variables du sous-terme $\mathbf{a}_i$ est $\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$;
Card $J_i = m_i$. On vérifie que $\text{Var } [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $J = \bigcup_{i \in I} J_i$; Card $J = m \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'ensemble $I_s = \{i \in I \mid \text{Var } \mathbf{a}_i = \emptyset\}$ (ensemble des indices i , $\mathbf{a}_i$ étant sans variable). Puisque $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ comprend au moins une variable, $I - I_s \neq \emptyset$.

On sait déjà que $\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, $(\bar{\xi}_j)_J \in \text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (théorème 15 ; voir p. 75). Donc, si $\text{Dom } \bar{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$, alors $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$: on vérifie trivialement la propriété annoncée.

On suppose maintenant que $\text{Dom } \bar{\tau}_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \neq \emptyset$. Soit $(\zeta_j)_J \in \Omega^m$,

$$(\bar{\zeta}_j)_J \in \text{Dom } \bar{\tau}_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

Il reste à vérifier que $(\zeta_j)_J \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$

Puisque $(\overline{\zeta_j})_J \in \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{x}_J}_{\mathbf{a}_I}$,

$$\forall i \in I - I_s, (\overline{\zeta_j})_{J_i} \in \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

et

$$\forall i \in I_s, \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}_i} = (\Omega/\cong)^0 \quad (= \{\diamond\})$$

et

$$(\overline{\tau}_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\overline{\zeta_j})_{J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}}$$

(voir p. 34). On sait déjà que $\forall i \in I_s, \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i} = \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}_i}$ (ce théorème, premier cas) ; donc

$$\forall i \in I_s, \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i} = \Omega^0 \quad (= \{\diamond\})$$

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s, \forall (\xi_j)_{J_i} \in \Omega^{m_i}$,

$$(\overline{\xi_j})_{J_i} \in \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \Leftrightarrow (\xi_j)_{J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

Donc $\forall i \in I - I_s, (\zeta_j)_{J_i} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$. On considère maintenant les multiplets $(\overline{\tau}_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\zeta_j)_{J_i})_{i \in I}$ et $(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\zeta_j)_{J_i})_{i \in I}$, et leurs composantes. Si $i \in I_s$,

$$\overline{\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\zeta_j)_{J_i}} = \overline{\tau_{\mathbf{a}_i}} \diamond = \overline{\tau_{\mathbf{a}_i}}$$

(théorème 15 ; voir p. 75). Si $i \in I - I_s$,

$$\overline{\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\zeta_j)_{J_i}} = \overline{\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}}(\overline{\zeta_j})_{J_i}$$

(théorème 15 ; voir p. 75). Donc

$$(\overline{\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\zeta_j)_{J_i}})_{i \in I} = (\overline{\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}}(\overline{\zeta_j})_{J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \overline{\phi}_{\mathbf{f}}$$

On déduit que le multiplet $(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\zeta_j)_{J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$ (corollaire 3 ; voir p. 83).

On a fini de vérifier que $(\zeta_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{f}}^{\mathbf{x}_J}_{\mathbf{a}_I}$ (voir p. 34). ■

Corollaire 4 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit $\cong$ une Ω -super-congruence. Soit $\mathbf{a}$ un terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset \Leftrightarrow \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$$

Preuve — Une classe d'équivalence est la classe d'au moins un élément. ■

Corollaire 5 — (Mêmes hypothèses) $\forall (\xi_j)_J \in \Omega^m$,

si $(\overline{\xi_j})_J \in \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$,

alors $(\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ et

$$\overline{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J} = \overline{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}}(\overline{\xi_j})_J$$

Preuve

Si $(\overline{\xi_j})_J \in \text{Dom } \overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, alors $(\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (théorème 17). On sait déjà que, si $(\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, alors $\overline{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J} = \overline{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}}(\overline{\xi_j})_J$ (théorème 15 ; voir p. 75). ■

Partie II

Logique

Chapitre 8

Formule

On ne se contente pas d'écrire des termes ; on a aussi besoin d'écrire des *formules*. De cette façon, on peut noter sur le papier certaines caractéristiques de tel magma auquel on s'intéresse, pour se les rappeler et pour raisonner (raisonnement *formel*).

Comment écrire une formule ? En écrivant des symboles d'une manière conforme à certaines règles, chaque règle correspondant à un type de formule. Voici la classification :

- FORMULE-CONFINEMENT
- Formule *germinale*
 - Formule *germinale dans laquelle apparaît au moins un terme*
 - . FORMULE-EXISTENCE
 - . FORMULE-APPARTENANCE
 - . FORMULE-IDENTITÉ
 - Formule *germinale sans terme*
 - . FORMULE-INCLUSION
 - . FORMULE-CONDUIT

On classe les formules-confinement à part (elles ne sont pas *germinales*), car on interprète chacune d'elles non comme une propriété d'un magma (une affirmation) mais comme une convention sémantique (une déclaration) : écrire une formule-confinement, c'est choisir le sens d'une variable (on convient que la variable est le nom d'un objet quelconque *d'un certain sous-ensemble* ; chapitre 9).

8.1 Formule-confinement

Définition 28 (Formule-confinement) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On appelle “ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-confinement ” toute séquence

$$\mathbf{x} :: \mathbf{S} .$$

$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

Syntaxe B.N.F.

$$\langle \text{Formule-confinement} \rangle ::= \langle \text{Variable} \rangle :: \langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle .$$

Remarquer

- 1 — Dans une formule-confinement apparaissent les symboles réservés “ :: ” et “ . ”.
- 2 — La longueur d’une formule-confinement est 4 (quatre symboles).



Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $E1, F2 \in \mathcal{S}$;
- $x1, y2 \in \mathcal{X}$.

Voici deux $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules-confinement :

$$\begin{aligned} x1 &:: E1 . \\ y2 &:: F2 . \end{aligned}$$

(lire : “ Soit $x1$ n’importe quel élément de $E1$. Soit $y2$ n’importe quel élément de $F2$. ”). □

Toute formule qui n’est pas une formule-confinement est une formule *germinale*.

8.2 Formule germinale dans laquelle apparaît au moins un terme

Une formule germinale dans laquelle apparaît au moins un terme est
soit une formule-existence,
soit une formule-appartenance,
soit une formule-identité.

8.2.1 Formule-existence

Définition 29 (Formule-existence) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire. On appelle “ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-existence ” toute séquence

$$\$ \mathbf{a} .$$

$\mathbf{a} \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

Syntaxe B.N.F.

$$\langle \text{Formule-existence} \rangle ::= \$ \langle \text{Terme} \rangle .$$

Remarquer — Dans une formule-existence apparaissent les symboles réservés “ \$ ” et “ . ”.

Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $0 \in \mathcal{F}_0$;
- $s \in \mathcal{F}_1$;
- $xx \in \mathcal{X}$.

Voici quatre $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules-existence :

\$ 0 .
 \$ s 0 .
 \$ xx .
 \$ s xx .

(lire : “ 0 existe. s 0 existe. ” ; etc.).

□

8.2.2 Formule-appartenance

Définition 30 (Formule-appartenance) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On appelle “ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-appartenance ” toute séquence

$$a : S .$$

$a \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ et $S \in \mathcal{S}$.

Syntaxe B.N.F.

$$\langle \text{Formule-appartenance} \rangle ::= \langle \text{Terme} \rangle : \langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle .$$

Remarquer — Dans une formule-appartenance apparaissent les symboles réservés “ : ” et “ . ”.

Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $E1, E2 \in \mathcal{S}$;
- $0 \in \mathcal{F}_0$;
- $s \in \mathcal{F}_1$;
- $+$ $\in \mathcal{F}_2$;
- $x, y \in \mathcal{X}$.

Voici quatre $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules-appartenance :

0 : E1 .
 y : E2 .
 + s 0 s s x : E2 .
 s + 0 s 0 : E1 .

(lire : “ 0 est élément de E1. y est élément de E2. ” ; etc.). □

Se mettre en garde — Exemple △

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $F \in \mathcal{S}$;
- $x \in \mathcal{X}$.

Malgré la ressemblance, il ne faut pas confondre ces deux formules :

$x :: F$.
 $x : F$.

(lire : “ Soit x n’importe quel élément de F . [Cet] x est élément de F . ”).

L’une est une formule-confinement et l’autre une formule-appartenance ; elles n’ont pas le même sens (voir p. 99). □

8.2.3 Formule-identité

On gagne à distinguer “ égalité ” et “ identité ”. Pourquoi ne pas être précis ? On dira ainsi : “ *Le nombre + s 0 s 0 est identique à s s 0.* ” (1 + 1 est identique à 2). Mais on dira : “ *Les termes [+ s 0 s 0] et [s s 0] sont égaux.* ” (les deux noms sont synonymes). On dira enfin : “ *Le terme [s 0] est identique à [s 0].* ” *L’égalité des termes est donc leur synonymie.*

En préférant l’appellation “ formule-identité ” à “ formule-égalité ”, j’exprime simplement que je m’intéresse plus aux dénotés des noms qu’aux noms eux-mêmes (les noms ne sont que des accessoires du raisonnement, me semble-t-il).

Définition 31 (Formule-identité) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire. On appelle “ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-identité ” toute séquence

$$a = b .$$

$a, b \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

Syntaxe B.N.F.

$$\langle \text{Formule-identité} \rangle ::= \langle \text{Terme} \rangle = \langle \text{Terme} \rangle .$$

Remarquer — Dans une formule-identité apparaissent les symboles réservés “ = ” et “ . ”.



Exemple

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $0 \in \mathcal{F}_0$;
- $s \in \mathcal{F}_1$;
- $+$ $\in \mathcal{F}_2$;
- $x, y \in \mathcal{X}$.

Voici deux $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules-identité :

$+ x 0 = x$.
 $+ x s y = s + x y$.

□

8.3 Formule germinale sans terme

On ne gagne aucun pouvoir expressif à écrire des formules germinales sans terme (voir pp. 101 et 109). Il est toutefois commode de le faire : elles sont brèves et plus lisibles.

Une formule germinale sans terme est
soit une formule-inclusion,
soit une formule-conduit.

8.3.1 Formule-inclusion

Définition 32 (Formule-inclusion) — Soit $\mathcal{V}$ un grand-vocabulaire ;
 $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On appelle “ $\mathcal{V}$ -formule-inclusion ” toute séquence

$$\mathbf{E} = < \mathbf{F} .$$

$$\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}.$$

Syntaxe B.N.F.

$$\langle \text{Formule-inclusion} \rangle ::= \langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle = < \langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle .$$

Remarquer

- 1 — Dans une formule-inclusion apparaissent les symboles réservés “ = < ” et “ . ”.
- 2 — La longueur d'une formule-inclusion est 4.

Exemple

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{S}$.

Voici deux $\mathcal{V}$ -formules-inclusion :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= < \mathbf{F} . \\ \mathbf{E} &= < \mathbf{G} . \end{aligned}$$

(lire : “ $\mathbf{E}$ est inclus dans $\mathbf{F}$. ” ; etc.).

⊗

□

8.3.2 Formule-conduit

Définition 33 (Formule-conduit) — Soit $\mathcal{V}$ un grand-vocabulaire ;
 $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On appelle “ $\mathcal{V}$ -formule-conduit ” toute séquence

$$\mathbf{f} : \mathbf{E}_I >> \mathbf{F} .$$

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n \ (n \in \mathbb{N}^*), \ I = \{1, \dots, n\}, \ [\forall i \in I, \ \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}] \text{ et } \mathbf{F} \in \mathcal{S}.$$

Syntaxe B.N.F.

$$\begin{aligned} \langle \text{Formule-conduit} \rangle &::= \\ \langle \text{Symbole } n\text{-aire de semi-fonction} \rangle &: \underbrace{\langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle \dots \langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle}_n >> \langle \text{Symbole d'ensemble} \rangle . \end{aligned}$$

Remarquer — Dans une formule-conduit apparaissent les symboles réservés “ : ”, “ >> ” et “ . ”.



Exemple

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire qui comprend ces symboles :

- $E, E_p, F, F_p, E_a, E_b, E_c, G \in \mathcal{S}$;
- $f \in \mathcal{F}_1$;
- $g \in \mathcal{F}_3$.

Voici trois $\mathcal{V}$ -formules-conduit :

$f : E >> F .$

$f : E_p >> F_p .$

$g : E_a E_b E_c >> G .$

(lire : “ E est inclus dans le domaine de f , et l’image $f (E)$ est incluse dans F . ” ; etc.). □

Chapitre 9

Le sens des formules

Comment déchiffrer une formule ? comment la comprendre ? Ce n'est pas bien difficile, peut-être a-t-on déjà deviné. Comme d'habitude, on procède de manière systématique.

Exemple



On connaît le vocabulaire ${}_1\mathcal{V}$ (voir p. 18) ; et le grand-vocabulaire $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ (voir p. 19). On connaît le ${}_1\mathcal{V}$ -magma ${}_1\Omega$, dont le support est l'ensemble des nombres entiers naturels (voir p. 22).

Ce magma a des propriétés bien connues (arithmétique élémentaire), qu'on peut noter en écrivant des $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ -formules. En voici quelques-unes : (j'écris chaque fois une séquence symbolique qui signifie la propriété annoncée ; chaque séquence est soit une formule soit une séquence de deux ou plusieurs formules ; se rappeler que “ *** ” dénote le support du magma, N en l'occurrence)

(1-a) L'addition est une loi interne.

$n :: *** . \quad z :: *** . \quad \$ + n z .$

(1-b) Il existe un prédécesseur de tout entier naturel non nul ($n \mapsto n - 1$).

$n* :: \text{Nat}* . \quad \$ p n* .$

(2-a) Le successeur d'un nombre n'est pas nul.

$n :: *** . \quad s n : \text{Nat}* .$

(2-b) Quatre est un carré.

$s s s s 0 : \text{Carre} .$

(3-a) L'addition est commutative.

$n :: *** . \quad z :: *** . \quad + n z = + z n .$

(3-b) La racine carrée du carré d'un nombre est ce nombre.

$n :: *** . \quad \text{rac} * n n = n .$

(4) Un nombre premier n'est pas nul.

$\text{Prem} =< \text{Nat}* .$

(5) Un produit de nombres non nuls n'est pas nul.

$* : \text{Nat}* \text{Nat}* >> \text{Nat}* .$

Remarquer — *Considérée hors de tout contexte*, une formule dans laquelle apparaît une variable n'a pas de sens. Par exemple, la formule $[\$ p n* .]$,

parce qu'il y apparaît la variable " n^* ", n'a pas de sens. Par contre on saura bientôt interpréter la longue séquence $[n^* :: \text{Nat}^* . \$ p n^* .]$ et vérifier qu'elle a le sens annoncé (1-b). $\square$

Cette remarque est mineure et correspond à un choix de vocabulaire. J'appelle en effet "formule" ce que d'autres appelleraient "sous-formule". Le seul intérêt, comme on le comprendra bientôt, *c'est qu'en faisant apparaître des formules-confinement on s'oblige à choisir le sens de chaque variable une fois pour toutes* (le sens d'une variable est sa quantification). De la sorte, on évite les collisions de sens et donc le renommage (les changements de variable). Cette pratique est courante en programmation.

Notation — Pour noter qu'une séquence symbolique A signifie une propriété de Ω , on peut écrire :

$$\Omega \models A$$

$\boxtimes$ *Exemple* — ${}_1\Omega \models [n^* :: \text{Nat}^* . \$ p n^* .]$. $\square$

9.1 Le sens d'une formule-existence

Se rappeler — Quel que soit $(S, \mathcal{F}, a)$ un vocabulaire, $S \neq \emptyset$ (voir p. 18).

Définition 34 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (S, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$ (il y a au moins un terme). Soit a un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.

1^{er} cas — $\text{Var } a = \emptyset$

On dit que la formule

$$\$ a .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer que

$$\text{Dom } \tau_a = \Omega^0 \quad (= \{\diamond\})$$

(τ_a est une Ω -semi-constante ; voir p. 32).

2^e cas — $\text{Var } a \neq \emptyset$ — $\text{Var } a = \{x_j\}_{j \in J}$; $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbb{N}^*$; $\forall j \in J$, soit $K_j \in \mathcal{S}$.

On dit que la séquence

$$[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer que

$$\prod_{j \in J} \sigma_{K_j} \subseteq \text{Dom } \tau_a^{x_J}$$

($\tau_a^{x_J}$ est une semi-fonction $\Omega^m \rightarrow \Omega$; voir p. 34).

Exemple 1

- $e_1, e_2 \in \mathcal{F}_0$,
- $\text{div} \in \mathcal{F}_2$.

$\Omega \models [\$ \text{div } e_1 \ e_2 \ .]$ si et seulement si ϕ_{e_1} est une semi-constante non vide, ϕ_{e_2} est une semi-constante non vide, et le couple $(\phi_{e_1} \diamond, \phi_{e_2} \diamond) \in \text{Dom } \phi_{\text{div}}$.

Dans ce cas, $\tau_{[\text{div } e_1 \ e_2] \diamond} = \phi_{\text{div}}(\phi_{e_1} \diamond, \phi_{e_2} \diamond)$. $\square$

Exemple 2

- $E, F \in \mathcal{S}$,
- $e \in \mathcal{F}_0$,
- $f \in \mathcal{F}_3$,
- $x, y \in \mathcal{X}$.

$\Omega \models [x :: E \ . \ y :: F \ . \ \$ f \ y \ x \ e \ .]$ si et seulement si ϕ_e est une semi-constante non vide et

$$\forall (\xi, \eta) \in \sigma_E \times \sigma_F, (\eta, \xi, \phi_e \diamond) \in \text{Dom } \phi_f$$

Dans ce cas, $\forall (\xi, \eta) \in \sigma_E \times \sigma_F, \tau_{[f \ y \ x \ e]}^{[x \ y]}(\xi, \eta) = \phi_f(\eta, \xi, \phi_e \diamond)$. $\square$

L'ordre d'énumération des variables importe peu*Exemple*

- $E, F \in \mathcal{S}$,
- $f \in \mathcal{F}_2$,
- $x, y \in \mathcal{X}$.

Si

$$\Omega \models [x :: E \ . \ y :: F \ . \ \$ f \ x \ y \ .]$$

on se doute que

$$\Omega \models [y :: F \ . \ x :: E \ . \ \$ f \ x \ y \ .]$$

et que

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \sigma_E \times \sigma_F, \tau_{[f \ x \ y]}^{[x \ y]}(\xi_1, \xi_2) = \tau_{[f \ x \ y]}^{[y \ x]}(\xi_2, \xi_1)$$

$\square$

Proposition 19 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\text{Card } \mathcal{X} \geq 2$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaissent au moins deux variables ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{x_j\}_J$. Soit p une permutation $J \leftrightarrow J$. $\forall j \in J$, soit $K_j \in \mathcal{S}$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.

$$\Omega \models [[x_j :: K_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .] \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \models [[x_{p(j)} :: K_{p(j)} \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$$

Si l'une ou l'autre de ces deux séquences signifie une propriété de Ω ,

$$\forall (\xi_j)_J \in \prod_{j \in J} \sigma_{K_j}, \tau_{\mathbf{a}}^{x_J}(\xi_j)_J = \tau_{\mathbf{a}}^{[x_{p(j)}]^{j \in J}}(\xi_{p(j)})_{j \in J}$$

Le choix des variables importe peu

Exemple

✕

- $E \in \mathcal{S}$,
- $f \in \mathcal{F}_1$,
- $x, y \in \mathcal{X}$.

Si $\Omega \models [x :: E . \$ f x .]$, on se doute que $\Omega \models [y :: E . \$ f y .]$.
En effet... $\square$

Proposition 20 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$.

Soit a un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ;

$\text{Var } a = \{x_j\}_J$, $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbb{N}^*$. $\forall j \in J$, soit $K_j \in \mathcal{S}$.

Soit $\mathcal{Y}$ un ensemble de symboles qui a cette qualité ($\mathcal{Y}$ est un deuxième ensemble de variables) :

- $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ est un grand-vocabulaire ;
- $\text{Card } \mathcal{Y} \geq m$.

$\forall j \in J$, soit $y_j \in \mathcal{Y}$, les y_j étant distinctes deux à deux.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.

$$\begin{aligned} \Omega &\models [[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .] \\ \Leftrightarrow \Omega &\models [[y_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a\{y_j \otimes x_j\}_{j \in J} .] \end{aligned}$$

Remarquer — $a\{y_j \otimes x_j\}_{j \in J} \in {}^\wedge \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$.

9.2 Le sens d'une formule-appartenance, le sens d'une formule-identité

9.2.1 Formule-appartenance

Définition 35 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Soit a un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme. Soit $E \in \mathcal{S}$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.

1^{er} cas — $\text{Var } a = \emptyset$

On dit que la formule

$$a : E .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer ceci :

$$\Omega \models [\$ a .] \quad \text{et} \quad \tau_a \diamond \in \sigma_E$$

2^e cas — $\text{Var } a \neq \emptyset$ — $\text{Var } a = \{x_j\}_{j \in J}$; $\forall j \in J$, soit $K_j \in \mathcal{S}$.

On dit que la séquence

$$[x_j :: K_j .]^{j \in J} a : E .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer ceci :

$$\Omega \models [[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .] \quad \text{et} \quad \tau_a^{x_J} \left(\prod_{j \in J} \sigma_{K_j} \right) \subseteq \sigma_E$$

Se mettre en garde — *Exemple*

- $E, F \in \mathcal{S}$,
- $x \in \mathcal{X}$.

On se gardera de confondre ces deux formules, l'une formule-confinement et l'autre formule-appartenance :

$$\begin{aligned} x &:: F . \\ x &: F . \end{aligned}$$

car le sens de l'une n'est pas le sens de l'autre, ce qu'il est facile de percevoir...

On considère par exemple la séquence $[x :: E . x : F .]$ (une formule-confinement à gauche, une formule-appartenance à droite).

$$\Omega \models [x :: E . x : F .]$$

si et seulement si

$$\forall \xi \in \sigma_E, \xi \in \sigma_F$$

(définition). On vient d'exprimer qu'un élément *quelconque* de σ_E est un élément de σ_F (donc que $\sigma_E \subseteq \sigma_F$).

Dire qu'un élément *quelconque* de σ_E est un élément *quelconque* de σ_F , ce n'est pas du tout pareil ! (supposer que $\sigma_E \subset \sigma_F$). $\square$

9.2.2 Formule-identité

Définition 36 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$. Soit a un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; soit b un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.

1^{er} cas — $\text{Var } a \cup \text{Var } b = \emptyset$

On dit que la séquence

$$a = b .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer ceci :

$$\Omega \models [\$ a .], \quad \Omega \models [\$ b .]$$

et

$$\tau_a \diamond = \tau_b \diamond$$

2^e cas — $\text{Var } a \cup \text{Var } b \neq \emptyset$ — $\text{Var } a = \{x_j\}_{j \in J}$; $\text{Var } b = \{x_j\}_{j \in U}$; $\forall j \in J \cup U$, soit $K_j \in \mathcal{S}$.

On dit que la séquence

$$[x_j :: K_j .]^{j \in J \cup U} a = b .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer ceci :

$$\Omega \models [[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .], \quad \Omega \models [[x_j :: K_j .]^{j \in U} \$ b .]$$

et

$$\forall (\xi_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J \cup U} \sigma_{K_j}, \quad \tau_a^{x_J}(\xi_j)_{j \in J} = \tau_b^{x_U}(\xi_j)_{j \in U}.$$

Exemple 1

- $E \in \mathcal{S}$,
- $e \in \mathcal{F}_0$,
- $f, s \in \mathcal{F}_1$,
- $x \in \mathcal{X}$.

$\Omega \models [x :: E . f x = s e .]$ si et seulement si

- $\sigma_E \subseteq \text{Dom } \phi_f$,
- ϕ_e est une semi-constante non vide,
- $\phi_e \diamond \in \text{Dom } \phi_s$, et
- $\forall \xi \in \sigma_E, \phi_f(\xi) = \phi_s(\phi_e \diamond)$.

□

*Exemple 2 — Se mettre en garde*

On connaît le ${}_1\mathcal{V}$ -magma ${}_1\Omega$ (voir p. 22). La formule

$$\text{div } 1 \ 0 = \text{div } 1 \ 0 .$$

$(1/0 = 1/0)$ ne signifie pas une propriété de ${}_1\Omega$! En effet, $\tau_{[\text{div } 1 \ 0]}$ est une semi-constante vide.

□

Remarquer — $\Omega \models [[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .]$ si et seulement si $\Omega \models [[x_j :: K_j .]^{j \in J} a = a .]$.

9.3 Le sens d'une formule sans terme

Se rappeler — Quel que soit $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$ un vocabulaire, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ (voir p. 18).

9.3.1 Formule-inclusion

Définition 37 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit $E \in \mathcal{S}$; soit $F \in \mathcal{S}$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.

On dit que la formule

$$E = < F .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer que $\sigma_E \subseteq \sigma_F$.

9.3.2 Formule-conduit

Définition 38 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Soit $f \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$; $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). J'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$; $\forall i \in I$, soit $E_i \in \mathcal{S}$. Soit $F \in \mathcal{S}$.

On dit que la formule

$$f : E_I \gg F .$$

signifie une propriété de Ω pour exprimer ceci :

$$\prod_{i \in I} \sigma_{E_i} \subseteq \text{Dom } \phi_f \quad \text{et} \quad \phi_f(\prod_{i \in I} \sigma_{E_i}) \subseteq \sigma_F$$

On exprime ceci : tout multiplet $\vec{\xi}$ élément de $\sigma_{\mathbf{E}_1} \times \dots \times \sigma_{\mathbf{E}_n}$ est un argument convenable de la semi-fonction $\phi_{\mathbf{f}} : \Omega^n \rightarrow \Omega$; et le résultat $\phi_{\mathbf{f}} \vec{\xi}$ est un élément de $\sigma_{\mathbf{F}}$.

9.3.3 Équivalence

S'il y a assez de variables, on ne gagne aucun pouvoir expressif en écrivant une formule-inclusion ou une formule-conduit.

Proposition 21 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (S, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}$. Soit $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\Omega \models [\mathbf{E} = < \mathbf{F} \ .] \Leftrightarrow \Omega \models [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ . \ \mathbf{y} : \mathbf{F} \ .]$$

Preuve

Preuve gentille.

$\Omega \models [\mathbf{E} = < \mathbf{F} \ .]$ si et seulement si $\sigma_{\mathbf{E}} \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$ (définition).
 $\Omega \models [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ . \ \mathbf{y} : \mathbf{F} \ .]$ si et seulement si $[\forall \xi \in \sigma_{\mathbf{E}}, \xi \in \sigma_{\mathbf{F}}]$ (définition ; se rappeler que $\tau_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}} = \text{Id}_{\Omega}$). ■

Exemple

On connaît le vocabulaire $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ (voir p. 19) et le ${}_1\mathcal{V}$ -magma ${}_1\Omega$ (voir p. 22). On sait que

$${}_1\Omega \models [\text{Prem} = < \text{Nat}^* \ .]$$

(début de ce chapitre ; un nombre premier n'est pas nul).

Cette propriété de ${}_1\Omega$ est aussi signifiée par la séquence

$$\mathbf{i} :: \text{Prem} \ . \ \mathbf{i} : \text{Nat}^* \ .$$

□

Proposition 22 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (S, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$; $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). J'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. $\forall i \in I$, soit $\mathbf{E}_i \in \mathcal{S}$. Soit $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

On suppose que $\text{Card } \mathcal{X} \geq n$ (il y a au moins n variables). $\forall i \in I$, soit $\mathbf{y}_i \in \mathcal{X}$, les $\mathbf{y}_i$ étant distinctes deux à deux.

Quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\Omega \models [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} \ .] \Leftrightarrow \Omega \models [[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]^{i \in I} \mathbf{f} \ \mathbf{y}_I : \mathbf{F} \ .]$$

Preuve

Attention ! les $\mathbf{E}_i$ ($i \in I$) peuvent ne pas être distinctes deux à deux !

$\Omega \models [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} \ .]$ si et seulement si $\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i} \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$ et

$\phi_{\mathbf{f}}(\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i}) \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$ (définition). $\Omega \models [[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]^{i \in I} \mathbf{f} \ \mathbf{y}_I : \mathbf{F} \ .]$ si et

seulement si $\prod_{i \in I} \sigma_{E_i} \subseteq \text{Dom } \phi_f$ et $\forall (\xi)_I \in \prod_{i \in I} \sigma_{E_i}, \phi_f(\xi)_I \in \sigma_F$; en effet,
 $\tau_{[f \ y_I]}^{y_I} = \phi_f.$ ■



Exemple

On connaît le vocabulaire $({}_1\mathcal{V}, {}_1\mathcal{X})$ (voir p. 19) et le ${}_1\mathcal{V}$ -magma ${}_1\Omega$ (voir p. 22). On sait que

$${}_1\Omega \models [* : \text{Nat}^* \text{Nat}^* \gg \text{Nat}^* .]$$

(début de ce chapitre ; un produit de naturels non nul est un naturel non nul).

Cette propriété de ${}_1\Omega$ est aussi signifiée par la séquence

$$i :: \text{Nat}^* . j :: \text{Nat}^* . * i j : \text{Nat}^* .$$

□

9.4 Propriétés fondamentales

Si A signifie une propriété de Ω , alors A signifie une propriété de toute image homomorphe de Ω (conservation).

Théorème 18 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit A une séquence symbolique qui est

soit $[[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .],$
 $a \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X}), \text{Var } a = \{x_j\}_J$ et $[\forall j \in J, K_j \in \mathcal{S}]$;

soit $[[x_j :: K_j .]^{j \in J} a : E .],$
 $a \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X}), \text{Var } a = \{x_j\}_J, [\forall j \in J, K_j \in \mathcal{S}]$ et $E \in \mathcal{S}$;

soit $[[x_j :: K_j .]^{j \in J \cup U} a = b .],$
 $a, b \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X}), \text{Var } a = \{x_j\}_J, \text{Var } b = \{x_j\}_{j \in U}$ et $[\forall j \in J \cup U, K_j \in \mathcal{S}]$;

soit $[E =_< F .],$
 $E, F \in \mathcal{S}$;

soit $[f : E_I \gg F .],$
 $f \in \mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N}^*), I = \{1, \dots, n\}, [\forall i \in I, E_i \in \mathcal{S}]$ et $F \in \mathcal{S}.$

Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma. Quelle que soit ${}_c\Omega$ une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de ${}_b\Omega$,

$${}_b\Omega \models A \Rightarrow {}_c\Omega \models A$$

Preuve

Analyse par cas, sans surprise. Pour saisir l'idée, s'intéresser à $A = [E =_< F .]$ (raisonnement très simple), puis à $A = [[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .]$ (raisonnement représentatif).

Puisque ${}_c\Omega$ une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de ${}_b\Omega$, il existe un $\mathcal{V}$ -épimorphisme $\alpha : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega.$

On suppose que ${}_b\Omega \models A.$ On veut vérifier que ${}_c\Omega \models A.$

$$\bullet \mathbf{A} = \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ . \rrbracket$$

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

Par hypothèse, ${}_b\Omega \models \llbracket \$ \ \mathbf{a} \ . \rrbracket$, c'est-à-dire $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}} = ({}_b\Omega)^0 (= \{\diamond\})$.

Puisque α est un homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$, $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}$ (théorème 7 ; voir p. 55) ; donc $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}} = \{\diamond\} = ({}_c\Omega)^0$, c'est-à-dire ${}_c\Omega \models \llbracket \$ \ \mathbf{a} \ . \rrbracket$.

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ ($J \neq \emptyset$)

Par hypothèse, $\prod_{j \in J} {}_b\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$. On veut vérifier que

$$\prod_{j \in J} {}_c\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

Soit $(\eta_j)_J \in \prod_{j \in J} {}_c\sigma_{\mathbf{K}_j}$. Puisque α est un épimorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$,

$\forall j \in J, {}_c\sigma_{\mathbf{K}_j} = \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{K}_j})$ (théorème 11 ; voir p. 65) ; donc

$\forall j \in J, \exists \xi_j \in {}_b\sigma_{\mathbf{K}_j}, \eta_j = \alpha(\xi_j)$. J'appelle “ m ” le cardinal de J ($\text{Card } J = m \in \mathbf{N}^*$). On vérifie alors que

$$(\eta_j)_J = {}^m\alpha(\xi_j)_J \in {}^m\alpha(\prod_{j \in J} {}_b\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq {}^m\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J})$$

Puisque α est un homomorphisme,

$${}^m\alpha(\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}) \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

(théorème 7 ; voir p. 55). On vient de vérifier que $(\eta_j)_J \in \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$.

$$\bullet \mathbf{A} = \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \mathbf{a} : \mathbf{E} \ . \rrbracket$$

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

Par hypothèse, $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}} = ({}_b\Omega)^0$ et ${}_b\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in {}_b\sigma_{\mathbf{E}}$. Supposant cela, on a déjà vérifié que $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}} = ({}_c\Omega)^0$ (cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$${}_c\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in {}_c\sigma_{\mathbf{E}}$$

Puisque α est un homomorphisme, ${}_c\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \alpha({}_b\tau_{\mathbf{a}} \diamond)$ (théorème 7 ; voir p. 55) ; donc ${}_c\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}})$. Puisque α est un épimorphisme, $\alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}}) = {}_c\sigma_{\mathbf{E}}$ (théorème 11 ; voir p. 65). On vient de vérifier que ${}_c\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in {}_c\sigma_{\mathbf{E}}$.

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

Par hypothèse, $\prod_{j \in J} {}_b\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, et ${}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} {}_b\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq {}_b\sigma_{\mathbf{E}}$. Supposant cela, on a déjà vérifié que $\prod_{j \in J} {}_c\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (cette preuve ; voir *supra*). Il

reste à vérifier que

$${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} {}_c\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq {}_c\sigma_{\mathbf{E}}$$

Soit $(\eta_j)_J \in \prod_{j \in J} {}_c\sigma_{K_j}$. Puisque α est un épimorphisme,
 $\forall j \in J, {}_c\sigma_{K_j} = \alpha({}_b\sigma_{K_j})$ (théorème 11 ; voir p. 65) ; donc (j'appelle " m " le cardinal de J)

$$\exists (\xi_j)_J \in \prod_{j \in J} {}_b\sigma_{K_j}, (\eta_j)_J = {}^m\alpha(\xi_j)_J$$

Puisque α est un homomorphisme,

$${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J = {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\alpha(\xi_j)_J) = \alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J$$

(théorème 7 ; voir p. 55) ; donc ${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J \in \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}})$. Puisque α est un épimorphisme, $\alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}}) = {}_c\sigma_{\mathbf{E}}$. On vient de vérifier que ${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J \in {}_c\sigma_{\mathbf{E}}$.

• $\mathbf{A} = \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \rrbracket^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \rrbracket$

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} = \emptyset$

Par hypothèse, $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}} = ({}_b\Omega)^0$, $\text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{b}} = ({}_b\Omega)^0$, et ${}_b\tau_{\mathbf{a} \diamond} = {}_b\tau_{\mathbf{b} \diamond}$.
 Supposant cela, on a déjà vérifié que $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}} = ({}_c\Omega)^0$ et $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{b}} = ({}_c\Omega)^0$ (cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$${}_c\tau_{\mathbf{a} \diamond} = {}_c\tau_{\mathbf{b} \diamond}$$

Or α est un homomorphisme, donc

$${}_c\tau_{\mathbf{a} \diamond} = \alpha({}_b\tau_{\mathbf{a} \diamond}) = \alpha({}_b\tau_{\mathbf{b} \diamond}) = {}_c\tau_{\mathbf{b} \diamond}$$

(théorème 7 ; voir p. 55).

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} \neq \emptyset$ ($J \cup U \neq \emptyset$)

Par hypothèse, $\prod_{j \in J} {}_b\sigma_{K_j} \subseteq \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, $\prod_{j \in U} {}_b\sigma_{K_j} \subseteq \text{Dom } {}_b\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$, et

$$\forall (\xi_j)_{J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} {}_b\sigma_{K_j}, {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = {}_b\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_U$$

Supposant cela, on a déjà vérifié que $\prod_{j \in J} {}_c\sigma_{K_j} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ et

$\prod_{j \in U} {}_c\sigma_{K_j} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$ (cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$$\forall (\eta_j)_{J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} {}_c\sigma_{K_j}, {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J = {}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\eta_j)_U$$

Soit $(\eta_j)_{J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} {}_c\sigma_{K_j}$. Puisque α est un épimorphisme,

$\forall j \in J \cup U, {}_c\sigma_{K_j} = \alpha({}_b\sigma_{K_j})$ (théorème 11 ; voir p. 65) ; donc (j'appelle " m " le cardinal de $J \cup U$)

$$\exists (\xi_j)_{J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} {}_b\sigma_{K_j}, (\eta_j)_{J \cup U} = {}^m\alpha(\xi_j)_{J \cup U}$$

Puisque α est un homomorphisme,

$$\begin{aligned} & {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\eta_j)_J \\ &= {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\alpha(\xi_j))_J = \alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \alpha \circ {}_b\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_U = {}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\alpha(\xi_j))_U \\ &= {}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\eta_j)_U \end{aligned}$$

- $\mathbf{A} = [\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{F}]$

Par hypothèse, ${}_b\sigma_{\mathbf{E}} \subseteq {}_b\sigma_{\mathbf{F}}$. Puisque α est un épimorphisme, ${}_c\sigma_{\mathbf{E}} = \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}})$ et ${}_c\sigma_{\mathbf{F}} = \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{F}})$ (théorème 11 ; voir p. 65) ; donc

$${}_c\sigma_{\mathbf{E}} = \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}}) \subseteq \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{F}}) = {}_c\sigma_{\mathbf{F}}$$

- $\mathbf{A} = [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F}]$

Par hypothèse, $\prod_{i \in I} {}_b\sigma_{\mathbf{E}_i} \subseteq \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}$ et ${}_b\phi_{\mathbf{f}}(\prod_{i \in I} {}_b\sigma_{\mathbf{E}_i}) \subseteq {}_b\sigma_{\mathbf{F}}$. Soit

$(\eta_i)_I \in \prod_{i \in I} {}_c\sigma_{\mathbf{E}_i}$. On veut vérifier que

$$(\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

et que

$${}_c\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I \in {}_c\sigma_{\mathbf{F}}$$

Parce que α est un épimorphisme, $\forall i \in I$, ${}_c\sigma_{\mathbf{E}_i} = \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{E}_i})$ (théorème 11 ; voir p. 65) ; donc il existe un certain multiplet

$$(\xi_i)_I \in \prod_{i \in I} {}_b\sigma_{\mathbf{E}_i}, \quad (\eta_i)_I = {}^n\alpha(\xi_i)_I$$

On observe immédiatement que $(\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_b\phi_{\mathbf{f}}$ et que ${}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I \in {}_b\sigma_{\mathbf{F}}$ (hypothèse). Parce que α est un homomorphisme, ${}^n\alpha(\xi_i)_I = (\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$ et $\alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\alpha(\xi_i))_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I$ (définition 19 ; voir p. 54) ; donc

$${}_c\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I = \alpha \circ {}_b\phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I \in \alpha({}_b\sigma_{\mathbf{F}})$$

Parce que α est un épimorphisme, $\alpha({}_b\sigma_{\mathbf{F}}) = {}_c\sigma_{\mathbf{F}}$. On vient de vérifier que $(\eta_i)_I \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$ et que ${}_c\phi_{\mathbf{f}}(\eta_i)_I \in {}_c\sigma_{\mathbf{F}}$. ■

Corollaire 6 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire. Soit $\mathbf{A}$ une séquence symbolique qui est

soit $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j]^{j \in J} \$ \mathbf{a}]$,
 $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$ et $[\forall j \in J, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}]$;

soit $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j]^{j \in J} \mathbf{a} : \mathbf{E}]$,
 $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $[\forall j \in J, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}]$ et $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$;

soit $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J \cup U} \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$,
 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in {}^\wedge \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$ et $[\forall j \in J \cup U, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}]$;

soit $[\mathbf{E} =_< \mathbf{F} \ .]$,
 $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}$;

soit $[\mathbf{f} : \mathbf{E}_I >> \mathbf{F} \ .]$,
 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$, $[\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}]$ et $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Quelle que soit $\cong$ une Ω -congruence,

$$\Omega \models \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \Omega/\cong \models \mathbf{A}$$

Preuve — $\Omega/\cong$ est une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de Ω (théorème 14 ; voir p. 74). ■

Chapitre 10

Exposition

Depuis longtemps on a compris l'intérêt de distinguer certains ensembles remarquables de propriétés, et les sous-classes de magmas correspondantes (groupes, groupes commutatifs, anneaux, types abstraits de données etc.). Pour noter toutes ces propriétés on pense aussitôt à écrire un texte formel, qu'on interprète comme un ensemble d'axiomes : on écrit ainsi une séquence de $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules.

Parce que c'est commode, on limite un peu la variété des textes possibles et on adopte cette règle : *n'écrire qu'une seule formule-confinement par variable.*

Par exemple, ce texte n'est pas convenable (n'est pas " poli ") :

```
n :: Nat . $ s n .  
n :: Nat* . $ p n .
```

car " n " n'a pas le même sens d'une ligne à l'autre. On évite ce désagrément en écrivant par exemple : (l'ordre d'écriture des formules est sans importance)

```
n :: Nat . n* :: Nat* .  
$ s n .  
$ p n* .
```

Ce procédé est simple, gratuit et applicable sans restriction.

À toute variable qui apparaît au sein d'un texte, on n'attache donc *qu'un seul sens* ; ce sens n'est pas fonction du contexte. Parce qu'on prend cette précaution, on n'aura jamais besoin de renommer !

10.1 Exposition

Notation — $\hat{a}$

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On se rappelle que $\mathcal{F}$ est un ensemble *fini* (définition).

Si $\mathcal{F} = \emptyset$, $\hat{a} = -1$;

sinon ($\mathcal{F} \neq \emptyset$), $\hat{a} = \max \{a(\mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathcal{F}\}$ ($\hat{a}$ est la plus grande arité d'un symbole de semi-fonction).

Définition 39 (Exposition)

On appelle “exposition” tout triplet $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$,

- $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ étant un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, et
 - $\mathcal{P}$ étant un ensemble de $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules,
- qui a ces qualités :

i — $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \exists ! \mathbf{S} \in \mathcal{S}, [\mathbf{x} :: \mathbf{S} \ .] \in \mathcal{P}$ (chaque variable est associée, “confinée”, à un unique symbole d'ensemble) ;

ii — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$,

$$\text{Card} \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid [\mathbf{x} :: \mathbf{S} \ .] \in \mathcal{P} \} \geq \max \{1, \hat{a}\}$$

(quel que soit $\mathbf{S}$ un symbole d'ensemble, le nombre des variables qui y sont “confinées” est assez grand).

Notation et terminologie

Par commodité, j'appellerai “ $\mathcal{E}$ ” toute exposition que je considérerai :

$$\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ de formules est appelé “poème”.

Les seules qualités remarquables d'une exposition sont celles-ci : chaque variable n'est associée qu'à un seul symbole de sous-ensemble (confinement) ; et l'ensemble des variables est assez nombreux. Malgré l'apparence, ceci n'est pas une limitation ; car on est libre de choisir un ensemble $\mathcal{X}$ de variables aussi grand qu'on veut.

Proposition 23 — *Quelle que soit $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition, $\mathcal{X} \neq \emptyset$.*

Preuve — Le symbole $*** \in \mathcal{S}$, donc $\exists \mathbf{y} \in \mathcal{X}, [\mathbf{y} :: *** \ .] \in \mathcal{P}$ (il y a au moins une variable associée au symbole $***$). ■

Corollaire 7 — *Quelle que soit $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition, ${}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X}) \neq \emptyset$.*

Preuve — $\mathcal{X} \neq \emptyset$; donc ${}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X}) \neq \emptyset$ (assertion 5 ; voir p. 26). ■



Exemples — Voir pp. 126 et suivantes (chapitre 14). □

10.2 Confinement, garniture

Je définis ces deux mots pour exposer plus aisément.

Définition 40 ($\mathcal{P}$ -confinement d'une variable) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ (une variable).

Le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}$ est l'unique formule-confinement de $\mathcal{P}$ dans laquelle $\mathbf{x}$ apparaît (c'est donc une formule $[\mathbf{x} :: \mathbf{S} \ .] \in \mathcal{P}$).

N.B. — $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$; et $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19). Le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_l$ est une certaine formule

$$[\mathbf{x}_l :: \mathbf{H}_l \ .]$$

On révèle ainsi une suite $l \mapsto \mathbf{H}_l$ ($l \in L$) de symboles de $\mathcal{S}$; cette suite est fonction de $\mathcal{P}$.

Définition 41 ($\mathcal{P}$ -garniture d'une formule germinale) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition. Soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale.

La $\mathcal{P}$ -garniture de $\mathbf{A}$ est la séquence

$$[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J}$$

$\{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$ étant l'ensemble des variables qui apparaissent dans $\mathbf{A}$, et $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ étant le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ ($j \in J$).

Notation — $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ est la $\mathcal{P}$ -garniture de $\mathbf{A}$.

La séquence $[\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$ est la clôture universelle de $\mathbf{A}$.

Exemple — On connaît une exposition $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ relative aux listes de bits (voir p. 127). La $\mathcal{P}$ -garniture de la $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-appartenance $[\text{cons } \text{b1 } \text{11} : \text{LiBit} \ .]$ est la séquence $[\text{b1} :: \text{Bit} \ . \ \text{11} :: \text{LiBit} \ .]$. ⊗

Remarquer

- 1 — La $\mathcal{P}$ -garniture d'un formule germinale sans variable est la séquence vide $[]$.
- 2 — On a numéroté les variables de $\mathcal{X}$ (voir p. 19) : $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$. La garniture $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ est donc fonction de cette numérotation (choix de l'ordre d'écriture des formules-confinements).

10.3 Coder une formule germinale sans terme

Une exposition comporte un ensemble suffisant de *variables*, de sorte qu'on peut, si on le souhaite, coder toute formule-inclusion ou toute formule-conduit en une formule-appartenance. Pour effectuer un calcul logique *minimal*, on ignorera la notion de formule-inclusion et celle de formule-conduit, qui sont de simples commodités.

Je ne le fais pas pour être plus démonstratif. Les théoriciens des types de données ont en effet spontanément introduit et valorisé ces notions de formule-inclusion et de formule-conduit (ou des notions semblables) [25].

Proposition 24 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Quelle que soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-inclusion ou une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-conduit, il existe une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-appartenance $\mathbf{B}$ qui a cette qualité :
quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma, (j'appelle “ $\mathbf{X}_\mathbf{B}$ ” la $\mathcal{P}$ -garniture de $\mathbf{B}$)

$$\Omega \models \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \models [\mathbf{X}_\mathbf{B} \ \mathbf{B}]$$

Preuve

Preuve gentille.

I — $\mathbf{A} = [\mathbf{E} \leq \mathbf{F} \ .]$, $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}$

Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, il existe au moins une variable $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$,

$[\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .] \in \mathcal{P}$.

On considère alors la $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule $[\mathbf{y} : \mathbf{F} \ .]$; sa $\mathcal{P}$ -garniture est $[\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .]$. On sait que

$$\Omega \models [\mathbf{E} \leq \mathbf{F} \ .] \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \models [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ . \ \mathbf{y} : \mathbf{F} \ .]$$

(théorème 21 ; voir p. 101).

II — $\mathbf{A} = [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} \ .]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, $1 \leq n \leq \hat{a}$, $I = \{1, \dots, n\}$,
 $[\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}], \mathbf{F} \in \mathcal{S}$

Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, on peut trouver une suite de variables $i \mapsto \mathbf{y}_i \in \mathcal{X}$ ($i \in I$) ayant cette qualité :

- les $\mathbf{y}_i$ sont *distinctes deux à deux* ;
- $\forall i \in I, [\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .] \in \mathcal{P}$.

Attention ! les $\mathbf{E}_i$ ($i \in I$) peuvent ne pas être distinctes deux à deux !

On considère alors la $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule $[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I : \mathbf{F} \ .]$; sa $\mathcal{P}$ -garniture est $[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]^{i \in I}$. On sait que

$$\Omega \models [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} \ .] \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \models [[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]^{i \in I} \ \mathbf{f} \ \mathbf{y}_I : \mathbf{F} \ .]$$

(théorème 22 ; voir p. 101). ■



Exemple

On connaît une exposition $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ relative aux nombres entiers naturels (voir p. 127). La $\mathcal{V}$ -formule-inclusion $[\mathbf{Nat}^* \leq \mathbf{Nat} \ .]$ est traduisible en la séquence $[\mathbf{n}^* :: \mathbf{Nat}^* \ . \ \mathbf{n}^* : \mathbf{Nat} \ .]$.

En effet, $[\mathbf{n}^* : \mathbf{Nat} \ .]$ est une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule ; sa $\mathcal{P}$ -garniture est $[\mathbf{n}^* :: \mathbf{Nat}^* \ .]$; et, quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\Omega \models [\mathbf{Nat}^* \leq \mathbf{Nat} \ .] \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \models [\mathbf{n}^* :: \mathbf{Nat}^* \ . \ \mathbf{n}^* : \mathbf{Nat} \ .]$$

□

Chapitre 11

Modèle

À tout vocabulaire $\mathcal{V}$ (chapitre 2) correspond la classe des $\mathcal{V}$ -magmas (chapitre 3). À toute exposition $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ (chapitre 10) correspond une sous-classe de la classe des $\mathcal{V}$ -magmas, la classe des $\mathcal{E}$ -modèles.

11.1 Définition

Un modèle est un magma qualifié : il a certaines propriétés signifiées par des formules (les axiomes).

Définition 42 (Modèle) — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. On appelle “ $\mathcal{E}$ -modèle ” tout $\mathcal{V}$ -magma Ω qui a cette qualité :
quelle que soit $\mathbf{A}$ une formule germinale de $\mathcal{P}$,

$$\Omega \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

($\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ est la $\mathcal{P}$ -garniture de $\mathbf{A}$).

Exemple 1

$\mathcal{E}$ est cette exposition :

- ♣ $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$;
- $\mathcal{S} = \{***, \mathbf{H}\}$;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{e}\}$; $\mathcal{F}_1 = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$; $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$; on vérifie que $\hat{a} = 1$;
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}\}$;
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces quatre formules :

$\mathbf{x} :: \mathbf{H} \ .$
 $\mathbf{f} \ \mathbf{e} = \mathbf{e} \ .$
 $\mathbf{f} \ \mathbf{x} = \mathbf{x} \ .$
 $\mathbf{g} \ \mathbf{x} = \mathbf{e} \ .$

Un $\mathcal{E}$ -modèle est un $\mathcal{V}$ -magma qui a les propriétés signifiées par ces trois séquences :



$f\ e = e$.
 $x :: H . f\ x = x$.
 $x :: H . g\ x = e$.

Un $\mathcal{E}$ -modèle a donc ces trois propriétés :

- (1) ϕ_e est une semi-constante non vide ; $\phi_e \diamond \in \text{Dom } \phi_f$; et $\phi_f(\phi_e \diamond) = \phi_e \diamond$;
- (2) $\sigma_H \subseteq \text{Dom } \phi_f$; et $[\forall \xi \in \sigma_H, \phi_f(\xi) = \xi]$;
- (3) $\sigma_H \subseteq \text{Dom } \phi_g$; et $[\forall \xi \in \sigma_H, \phi_g(\xi) = \phi_e \diamond]$.

□

✕

Exemple 2

On connaît une exposition $\mathcal{E}$ relative aux nombres entiers naturels (voir p. 127). Un $\mathcal{E}$ -modèle est un $\mathcal{V}$ -magma qui a les propriétés signifiées par ces six séquences (une séquence par ligne) :

$\text{Nat}^* = < \text{Nat}$.
 $0 : \text{Nat}$.
 $s : \text{Nat} \gg \text{Nat}^*$.
 $p : \text{Nat}^* \gg \text{Nat}$.
 $n :: \text{Nat} . p\ s\ n = n$.
 $n^* :: \text{Nat}^* . s\ p\ n^* = n^*$.

□

11.2 La classe des modèles

La classe des modèles est “ disciplinée ” :

- toute image homomorphe d'un élément de la classe est dans la classe ;
- tout produit cartésien fini d'éléments de la classe est dans la classe.

Théorème 19 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma. Quelle que soit ${}_c\Omega$ une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de ${}_b\Omega$, si ${}_b\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle, alors ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle.

Preuve — On sait déjà que, quelle que soit $\mathbf{A}$ une formule *germinale* (j'appelle “ $\mathbf{X}_\mathbf{A}$ ” sa $\mathcal{P}$ -garniture), si ${}_b\Omega \models [\mathbf{X}_\mathbf{A} \ \mathbf{A}]$ alors ${}_c\Omega \models [\mathbf{X}_\mathbf{A} \ \mathbf{A}]$ (théorème 18 ; voir p. 102).

Donc, si ${}_b\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle, alors ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle. ■

Corollaire 8 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Quel que soit ${}_b\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, quel que soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma $\mathcal{V}$ -isomorphe à ${}_b\Omega$, ${}_b\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle si et seulement si ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle.

Preuve — Un isomorphisme est un épimorphisme (proposition 15 ; voir p. 66). ■

Corollaire 9 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma.
 Quelle que soit $\cong$ une Ω -congruence,
 si Ω est un $\mathcal{E}$ -modèle,
 alors $\Omega/\cong$ est un $\mathcal{E}$ -modèle.

Preuve — $\Omega/\cong$ est une image $\mathcal{V}$ -homomorphe de Ω (théorème 14 ; voir p. 74). ■

Théorème 20 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Quel que soit ${}_1\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma, quel que soit ${}_2\Omega$ un $\mathcal{V}$ -magma,
 si ${}_1\Omega$ et ${}_2\Omega$ sont des $\mathcal{E}$ -modèles,
 alors ${}_1\Omega \times {}_2\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle.

Preuve non exposée. On n'a pas besoin de ce résultat pour la suite.

Remarquer — Si Ω un $\mathcal{E}$ -modèle, alors $\Omega \times \Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle.

Chapitre 12

Les règles d'inférence

On sait mettre en correspondance exacte des objets mathématiques (les magmas et leurs propriétés) avec des signes tracés sur le papier (les formules et les poèmes). Pour quoi faire ?

D'abord pour se souvenir et pour communiquer.

Mais surtout pour raisonner “ mécaniquement ”, c'est-à-dire non pas en contemplant et en associant des idées comme à l'habitude, mais en jouant avec des *formes* (des symboles). On parvient de cette façon à être très rigoureux. En outre, tout est prêt pour qu'on puisse déléguer une partie du travail à l'ordinateur. Car jouer avec des formes, n'est-ce pas ce qu'il fait par excellence, en virtuose ?

L'une des opérations cruciales, c'est déduire. Au départ, il y a devant soi une feuille de papier (ou un écran) où apparaissent diverses formules. Les observant, on recopie certains symboles conformément à certaines règles de jeu, les *règles d'inférence* ; on écrit ainsi une nouvelle formule. On dit *qu'on l'a déduite par symboles*. On répète à loisir.

Pendant tout ce temps, *on a ignoré le sens des symboles* ; on a procédé comme si l'on agissait sur des choses concrètes (comme si l'on manipulait des petits cailloux ; à ce propos, un *calcul* n'est-il pas un petit caillou ?).

Il y a quatre classes de règles. Trois correspondent à un type d'opération :

- récrire une formule en substituant des termes aux variables ;
 - récrire une formule en remplaçant un terme par un terme égal ;
 - coder et de décoder une formules sans terme.
- Et la quatrième est la classe des autres (section *Les six règles simples*).

12.1 Hypothèses générales

Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19).

- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d} \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.
- $\mathbf{c}$ est un sous-terme de $\mathbf{a}$; $\mathbf{a} = \mathbf{a}\langle \mathbf{c} \rangle$ (en écrivant “ $\mathbf{a}\langle \mathbf{c} \rangle$ ” plutôt que “ $\mathbf{a}$ ” on signale que $\mathbf{c}$ apparaît dans $\mathbf{a}$).
- $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{K} \in \mathcal{S}$.
- $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.
- $\mathbf{f}$ est un symbole n -aire de semi-fonction ; $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $I = \{1, \dots, n\}$.
- $\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}$.

12.2 Les six règles simples

XIXI — Lire une formule-existence, écrire une formule-existence

$$\frac{\$ \mathbf{a}\langle \mathbf{c} \rangle .}{\$ \mathbf{c} .}$$

Si un terme dénote une semi-fonction non vide, alors chacun de ses sous-termes dénote aussi une semi-fonction non vide.

APEX — Lire une formule-appartenance, écrire une formule-existence

$$\frac{\mathbf{a} : \mathbf{E} .}{\$ \mathbf{a} .}$$

Si un terme apparaît dans une formule, alors il dénote une semi-fonction non vide.

IDEX — Lire une formule-identité, écrire deux formules-existence

$$\frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} .}{\$ \mathbf{a} . \ \$ \mathbf{b} .}$$

CONFA — Lire une formule-confinement, écrire une formule-appartenance

$$\frac{\mathbf{y} :: \mathbf{K} .}{\mathbf{y} : \mathbf{K} .}$$

C'est la règle $\frac{\forall \mathbf{y} \in \mathbf{K}}{\mathbf{y} \in \mathbf{K}}$ (autre forme).

EXID — Lire une formule-existence, écrire une formule-identité

$$\frac{\$ \mathbf{a} .}{\mathbf{a} = \mathbf{a} .}$$

Si un terme dénote une semi-fonction non vide, alors il est égal à lui-même.

EXAP — Lire une formule-existence, écrire une formule-appartenance universelle

$$\frac{\$ \mathbf{a} .}{\mathbf{a} : *** .}$$

Tout élément qu'on considère est élément du support du magma.

12.3 Substituer des termes aux variables

Ces trois règles sont trois versions d'un modèle unique (je présente trois règles, et non une seule, pour exposer plus aisément).

Hypothèses

- $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J} (J \subseteq L)$; $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U} (U \subseteq L)$.
- $\forall j \in J \cup U, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}$.
- $\forall j \in J \cup U, \mathbf{d}_j \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

SEXI — Substituer dans une formule-existence

$$\frac{\$ \mathbf{a} . [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j .]^{j \in J} [\mathbf{d}_j : \mathbf{K}_j .]^{j \in J}}{\$ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} .}$$

Si la substitution est convenable (les substituandes ne sont pas n'importe quoi ; on doit tenir compte des "types" des variables du terme original), et si le terme original dénote une semi-fonction non vide, alors le substituat dénote aussi une semi-fonction non vide.

Remarquer — La règle SEXI n'est pas intéressante si $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset (J = \emptyset)$.

SAP — Substituer dans une formule-appartenance

$$\frac{\mathbf{a} : \mathbf{E} . [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j .]^{j \in J} [\mathbf{d}_j : \mathbf{K}_j .]^{j \in J}}{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} : \mathbf{E} .}$$

SID — Substituer dans une formule-identité

$$\frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} . [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j .]^{j \in J \cup U} [\mathbf{d}_j : \mathbf{K}_j .]^{j \in J \cup U}}{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U} .}$$

Remarquer — La règle SID n'est pas intéressante si $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} = \emptyset (J \cup U = \emptyset)$.

12.4 Remplacer à l'identique

Remplacer à l'identique, c'est lire un terme, puis écrire un terme qui lui ressemble *et qui est un synonyme* (voir p. 49). Ces trois règles sont trois versions d'un modèle unique.

Hypothèse — c est un sous-terme de a . a' est le terme qu'on a écrit en “remplaçant” dans a un c par d .

REXI — *Remplacer à l'identique dans une formule-existence*

$$\frac{\$ a\langle c \rangle . c = d .}{\$ a' .}$$

Si le remplacé est égal au remplaçande, alors le remplaçant hérite des qualités du terme original.

Remarquer — La règle REXI n'est pas intéressante si $c = a$.

RAP — *Remplacer à l'identique dans un formule-appartenance*

$$\frac{a\langle c \rangle : E . c = d .}{a' : E .}$$

RIGA — *Remplacer à l'identique dans une formule-identité, à gauche*

$$\frac{a\langle c \rangle = b . c = d .}{a' = b .}$$

12.5 Coder et décoder une formule-inclusion, une formule-conduit (formule sans terme)

Hypothèses

- $\forall i \in I, y_i \in \mathcal{X}$.
- $\forall i, i' [i, i' \in I, i \neq i'], y_i \neq y_{i'}$ (la suite $I \ni i \mapsto y_i \in \mathcal{X}$ est injective).

INAP — *Lire une formule-inclusion, écrire une formule-appartenance*

$$\frac{E =< F . y :: E .}{y : F .}$$

IN — *Écrire une formule-inclusion*

$$\frac{y :: E . y : F .}{E =< F .}$$

CONDA — Lire une formule-conduit, écrire une formule-appartenance

$$\frac{\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} . \quad [\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i .]^{i \in I}}{\mathbf{f} \mathbf{y}_I : \mathbf{F} .}$$

CO — Écrire une formule-conduit

$$\frac{[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i .]^{i \in I} \quad \mathbf{f} \mathbf{y}_I : \mathbf{F} .}{\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} .}$$

Chapitre 13

Déduction symbolique

On connaît les règles du jeu (les règles d'inférence ; chapitre 12) ; on peut donc commencer à jouer (déduire), c'est-à-dire à mettre en œuvre la procédure de *déduction symbolique*.

13.1 Théorème

Un *théorème* est une formule originale ou une formule qu'on a déduite.

Définition 43 (Conséquence symbolique) — On appelle “conséquence symbolique” des formules P_i ($i \in I$)

- toute formule qu'on peut écrire conformément à une règle d'inférence en ne regardant que les P_i ;
- toute formule qu'on peut écrire conformément à une règle d'inférence en ne regardant que les P_i et des conséquences symboliques des P_i .

Définition 44 (Théorème) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition. On appelle “ $\mathcal{P}$ -théorème” toute conséquence symbolique de formules de $\mathcal{P}$.

Notation — Pour noter que la formule A est un $\mathcal{P}$ -théorème, on peut écrire :

$$\mathcal{P} \vdash A$$

Terminologie — On appelle “*axiome intentionnel*” toute formule de $\mathcal{P}$; on dit aussi “*formule initiale*” et “*hypothèse*”. Un *axiome intentionnel* est un *théorème*.

Si l'on respecte les règles d'inférence, on n'écrit (on ne “produit”) que des formules *germinales*...

Proposition 25 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Toute $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-confinement qui est un $\mathcal{P}$ -théorème est un *axiome intentionnel*.

Preuve — On considère l'ensemble des règles d'inférence et on vérifie qu'il n'y a aucune conséquence symbolique qui soit une formule-confinement. ■

13.2 Dédutions faciles — Exemples

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire qui comprend ces symboles :
 $(\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a))$

- $E \in \mathcal{S}$,
- $e1, e2 \in \mathcal{F}_0$,
- $f, g \in \mathcal{F}_1$,
- $x \in \mathcal{X}$.

Exemple A

$\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$\$ f e1 .$
 $e1 = e2 .$

La formule $[\$ f e2 .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème.

Preuve

$$\text{REXI} \frac{\$ f e1 . \quad e1 = e2 .}{\$ f e2 .}$$

Un synonyme d'un terme significatif est significatif.

Exemple B

$\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$e1 : E .$
 $e1 = e2 .$

La formule $[e2 : E .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème.

Preuve

$$\text{RAP} \frac{e1 : E . \quad e1 = e2 .}{e2 : E .}$$

Qu'un objet soit élément d'un ensemble, voilà une relation qui n'est pas fonction du nom de l'objet : *qu'on l'appelle "e1" ou "e2", cet objet est élément de E !*

Remarquer — On n'avait pas prévu le "sortage" $[e2 : E .]$.

Exemple C

$\mathcal{P}$ est l'ensemble de cette seule formule :

$e1 = e2 .$

La formule $[e2 = e1 .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème.

Preuve

$$\begin{array}{c}
 \text{INDEX} \frac{e1 = e2 .}{\$ e1 .} \\
 \text{EXID} \frac{\$ e1 .}{e1 = e1 .} \\
 \text{RIGA} \frac{e1 = e1 . \quad e1 = e2 .}{e2 = e1 .}
 \end{array}$$

Cette symétrie est tout à fait générale. On le vérifiera bientôt (règle ISY ; voir *infra*).

Exemple D



$\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces quatre formules :

$x :: E . f x = g x .$
 $e1 : E .$
 $e1 = e2 .$

La formule $[f e1 = g e2 .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème.

Preuve

$$\begin{array}{c}
 \text{SID} \frac{f x = g x . \quad x :: E . \quad e1 : E .}{f e1 = g e1 .} \\
 \text{RIGA} \frac{f e1 = g e1 . \quad e1 = e2 .}{f e2 = g e1 .}
 \end{array}$$

13.3 Règles d'inférence déduites

Une *règle d'inférence déduite* correspond à une famille de preuves (un schéma de preuve) dont on vérifie la justesse une fois pour toutes.

Théorème 21 — *Ces règles d'inférence (voir infra) sont déduites.*

Hypothèses — Les hypothèses sont celles que j'ai déjà présentées (chap. 12 ; voir p. 115), et aussi celles-ci :

- $F', G \in \mathcal{S}$.
- $\forall i \in I, E'_i \in \mathcal{S}$.
- $\forall i \in I, a_i, b_i \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

XIVA — *Écrire une formule-existence relative à une variable*

Se rappeler — y est n'importe laquelle des variables de $\mathcal{X}$.

$$\frac{}{\$ y .}$$

ISY — *Écrire une formule-identité par symétrie*

$$\frac{a = b .}{b = a .}$$

IDET — *Écrire une formule-identité par transitivité*

$$\frac{a = b . \quad b = d .}{a = d .}$$

RIDRO — *Remplacer à l'identique dans une formule-identité, à droite*

$$\frac{b = a\langle c \rangle . \quad c = d .}{b = a' .}$$

RERISO — *Récrire en remplaçant à l'identique les sous-termes du premier niveau*

$$\frac{\$ f \ a_I . \ [a_i = b_i .]^{i \in I}}{f \ a_I = f \ b_I .}$$

REC — *Récrire*

$$\frac{\$ a\langle c \rangle . \quad c = d .}{a = a' .}$$

INU — *Écrire une formule-inclusion universelle*

Se rappeler — **E** est n'importe lequel des symboles de $\mathcal{S}$.

$$\overline{E =< *** .}$$

INRE — *Écrire une formule-inclusion par réflexivité*

$$\overline{E =< E .}$$

INTRA — *Écrire une formule-inclusion par transitivité*

$$\frac{E =< F . \quad F =< G .}{E =< G .}$$

APINA — *Lire une formule-appartenance et une formule-inclusion, écrire une formule-appartenance*

$$\frac{a : E . \quad E =< F .}{a : F .}$$

CAPA — Lire une formule-conduit et des formules-appartenance, écrire une formule-appartenance

$$\frac{\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} . [\mathbf{a}_i : \mathbf{E}_i .]^{i \in I}}{\mathbf{f} \mathbf{a}_I : \mathbf{F} .}$$

CACO — Lire une formule-conduit et des formules-appartenance, écrire une formule-conduit

$$\frac{\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} . [\mathbf{E}'_i = < \mathbf{E}_i .]^{i \in I} \mathbf{F} = < \mathbf{F}' .}{\mathbf{f} : \mathbf{E}'_I \gg \mathbf{F}' .}$$

Preuve

Cette preuve simple est un excellent exercice de raisonnement symbolique.

On vérifie que les règles XIVA, ISY, RIDRO, IDET, REC, RERISO, INU, INRE, APINA, INTRA, CAPA, CACO sont déduites (à cause de liens de dépendance, on considère RIDRO avant IDET, REC avant RERISO, APINA avant INTRA).

XIVA

$\mathcal{E}$ est une exposition ; donc $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{X}, \exists ! \mathbf{E} \in \mathcal{S}, [\mathbf{y} :: \mathbf{E} .] \in \mathcal{P}$ (définition 39 ; voir p. 108).

$$\frac{\text{CONFA} \frac{\mathbf{y} :: \mathbf{E} .}{\mathbf{y} : \mathbf{E} .}}{\text{APEX} \frac{\mathbf{y} : \mathbf{E} .}{\$ \mathbf{y} .}}$$

ISY

$$\frac{\text{IDEX} \frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} .}{\$ \mathbf{a} .}}{\text{EXID} \frac{\$ \mathbf{a} .}{\mathbf{a} = \mathbf{a} .}} \quad \frac{\mathbf{a} = \mathbf{a} . \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} .}{\text{RIGA} \frac{\mathbf{a} = \mathbf{a} . \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} .}{\mathbf{b} = \mathbf{a} .}}$$

RIDRO

$$\frac{\text{ISY} \frac{\mathbf{b} = \mathbf{a} .}{\mathbf{a} = \mathbf{b} .} \quad \mathbf{c} = \mathbf{d} .}{\text{RIGA} \frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} . \quad \mathbf{c} = \mathbf{d} .}{\mathbf{a}' = \mathbf{b} .}} \quad \frac{\mathbf{a}' = \mathbf{b} .}{\text{ISY} \frac{\mathbf{a}' = \mathbf{b} .}{\mathbf{b} = \mathbf{a}' .}}$$

IDET

C'est une variante " bridée " de la règle RIDRO.

REC

$$\text{RIDRO} \frac{\text{EXID} \frac{\$ a .}{a = a .} \quad c = d .}{a = a' .}$$

RERISO

$$I = \{1, \dots, n\}, n \geq 1.$$

$$\begin{array}{c} \text{EXID} \frac{\$ f a_I .}{f a_I = a_I .} \\ \text{REC} \frac{f a_I = a_I . \quad a_1 = b_1 .}{f a_I = f b_1 a_2 \dots a_n .} \\ \text{REC} \frac{f a_I = f b_1 a_2 \dots a_n . \quad a_2 = b_2 .}{f a_I = f b_1 b_2 a_3 \dots a_n .} \quad \dots \\ \text{REC} \frac{f a_I = f b_1 b_2 a_3 \dots a_n . \quad \dots}{f a_I = f b_I .} \end{array}$$

INU

Puique $\mathcal{E}$ est une exposition, $\forall E \in \mathcal{S}$, il y a au moins une variable $y \in \mathcal{X}$, $[y :: E .] \in \mathcal{P}$ (il y en a au total $\max \{1, \hat{a}\}$).

$$\text{IN} \frac{\text{CONFA} \frac{y :: E .}{y : E .} \quad \text{APEX} \frac{\$ y .}{y : *** .}}{E =< *** .}$$

INRE

Puique $\mathcal{E}$ est une exposition, $\forall E \in \mathcal{S}$, il y a au moins une variable $y \in \mathcal{X}$, $[y :: E .] \in \mathcal{P}$.

$$\text{IN} \frac{\text{CONFA} \frac{y :: E .}{y : E .} \quad y :: E .}{E =< E .}$$

APINA

Puique $\mathcal{E}$ est une exposition, $\forall E \in \mathcal{S}$, il y a au moins une variable $y \in \mathcal{X}$, $[y :: E .] \in \mathcal{P}$.

$$\text{SAP} \frac{\text{INAP} \frac{E =< F . \quad y :: E .}{y : F .} \quad y :: E . \quad a : E .}{a : F .}$$

INTRA

Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, $\forall \mathbf{E} \in \mathcal{S}$, il y a au moins une variable $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$, $[\mathbf{y} :: \mathbf{E} .] \in \mathcal{P}$.

$$\text{IN} \frac{\text{APINA} \frac{\text{INAP} \frac{\mathbf{E} = < \mathbf{F} . \mathbf{y} :: \mathbf{E} .}{\mathbf{y} : \mathbf{F} .}}{\mathbf{y} : \mathbf{G} .}}{\mathbf{E} = < \mathbf{G} .}}$$

CAPA

On suppose ceci : $[\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} .] \in \mathcal{P}$ ($I = \{1, \dots, n\}$) ; donc $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, $1 \leq n \leq \hat{a}$, $[\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}]$, et $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, on peut trouver une suite de variables

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathcal{X} \\ i &\mapsto \mathbf{y}_i \end{aligned}$$

ayant ces qualités :

- les $\mathbf{y}_i$ sont distinctes deux à deux (la suite est injective) ;
- $\forall i \in I$, $[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i .] \in \mathcal{P}$.

Note — La situation la plus défavorable est celle-ci : $\forall i, i' \in I$, $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i'}$ (tous les $\mathbf{E}_i$ sont identiques).

$$\text{CONDA} \frac{\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} . \quad [\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i .]^{i \in I}}{\text{SAP} \frac{\mathbf{f} \mathbf{y}_I : \mathbf{F} . \quad [\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i .]^{i \in I} \quad [\mathbf{a}_i : \mathbf{E}_i .]^{i \in I}}{\mathbf{f} \mathbf{a}_I : \mathbf{F} .}}$$

CACO

On raisonne de la même façon. On suppose que ces formules sont éléments de $\mathcal{P}$:

- $[\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} .] \in \mathcal{P}$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$, $1 \leq n \leq \hat{a}$, $I = \{1, \dots, n\}$, $[\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}]$, et $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$;
- $\forall i \in I$, $[\mathbf{E}'_i = < \mathbf{E}_i .] \in \mathcal{P}$.

Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, on peut trouver une suite de variables

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathcal{X} \\ i &\mapsto \mathbf{y}'_i \end{aligned}$$

ayant ces qualités :

- les $\mathbf{y}'_i$ sont distinctes deux à deux ;
- $\forall i \in I$, $[\mathbf{y}'_i :: \mathbf{E}'_i .] \in \mathcal{P}$.

$$\text{CO} \frac{\text{CAPA} \frac{\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} . \quad \frac{[\mathbf{E}'_i = < \mathbf{E}_i .]^{i \in I} \quad [\mathbf{y}'_i :: \mathbf{E}'_i .]^{i \in I}}{[\mathbf{y}'_i : \mathbf{E}_i .]^{i \in I}} \text{INAP}}{\mathbf{f} \mathbf{y}'_I : \mathbf{F} .} \quad \mathbf{F} = < \mathbf{F}' . \text{APINA}}{\mathbf{f} : \mathbf{E}'_I \gg \mathbf{F}' .}$$

■

Chapitre 14

Exposition, et déduction symbolique — Exemples

Relire ce chapitre : un seul exemple vaut mille explications.

14.1 Exposition minimale

Quelle est la plus simple exposition qu'on puisse trouver ? À quoi correspond-elle ?

♣ ${}_0\mathcal{E} = ({}_0\mathcal{V}, {}_0\mathcal{X}, {}_0\mathcal{P})$; ${}_0\mathcal{V} = ({}_0\mathcal{S}, {}_0\mathcal{F}, a)$.

- ${}_0\mathcal{S} = \{***\}$.
- ${}_0\mathcal{F} = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = -1$.
- ${}_0\mathcal{X} = \{\mathbf{x}\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de cette seule formule :

$\mathbf{x} :: ***$.

Quelles sont toutes les $({}_0\mathcal{V}, {}_0\mathcal{X})$ -formules qu'on peut écrire ? Les voici :

$\mathbf{x} :: ***$.

$\$ \mathbf{x}$.

$\mathbf{x} : ***$.

$\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

$*** =_< ***$.

Remarquer — On ne peut écrire aucune formule-conduit.

Assertion 11 — *Tout ensemble non vide est le support d'un ${}_0\mathcal{V}$ -magma (raisonnement trivial).*

Assertion 12 — *Tout ${}_0\mathcal{V}$ -magma est un ${}_0\mathcal{E}$ -modèle.*

Proposition 26 — *Toute $({}_0\mathcal{V}, {}_0\mathcal{X})$ -formule est un ${}_0\mathcal{P}$ -théorème.*

Preuve — Considérer les règles XIVA, CONFA, EXID et INU. ■

14.2 Expositions dont on devine le sens

14.2.1 Les listes de bits

- $\mathcal{S} = \{***, \text{Bit}, \text{LiBit}\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{0, 1, \text{nil}\}$; $\mathcal{F}_2 = \{\text{cons}\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \neq 0, n \neq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 2$.
- $\mathcal{X} = \{t1, t2, b1, b2, l1, l2\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

0 : Bit . 1 : Bit .
 nil : LiBit .
 cons : Bit LiBit >> LiBit .

t1 :: *** . t2 :: *** .
 b1 :: Bit . b2 :: Bit .
 l1 :: LiBit . l2 :: LiBit .

On peut déduire la formule $[\text{cons } 1 \text{ nil} : \text{LiBit} .]$.

Preuve

$$\frac{\text{cons : Bit LiBit >> LiBit . } 1 : \text{Bit} . \text{nil} : \text{LiBit} .}{\text{cons } 1 \text{ nil} : \text{LiBit} .} \text{CAPA}$$

14.2.2 Les entiers naturels

J'ai trouvé cet exemple par analogie, en considérant un exemple présenté par A. Poigné [29]. On a ainsi le moyen de comparer les deux approches.

- $\mathcal{S} = \{***, \text{Nat}, \text{Nat}^*\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{0\}$; $\mathcal{F}_1 = \{s, p\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 1$.
- $\mathcal{X} = \{z, n, n^*\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

Nat* =< Nat .
 0 : Nat .
 s : Nat >> Nat* .
 p : Nat* >> Nat .

n :: Nat . n* :: Nat* .
 p s n = n .
 s p n* = n* .

z :: *** .

On peut déduire les formules $[\$ p p s s 0 .]$ et $[p p s s 0 = 0 .]$.

Lemme 1

$$\frac{s : \text{Nat} \gg \text{Nat}^* . 0 : \text{Nat} .}{s\ 0 : \text{Nat}^* .} \text{CAPA}$$

Lemme 2

$$\frac{\frac{p\ s\ n = n . n :: \text{Nat} . \quad \frac{s\ 0 : \text{Nat}^* . \text{Nat}^* =< \text{Nat} .}{s\ 0 : \text{Nat} .} \text{APINA}}{p\ s\ s\ 0 = s\ 0 .} \text{SID}}$$

Preuve 1

$$\frac{\frac{\frac{p\ s\ s\ 0 = s\ 0 .}{s\ 0 : \text{Nat}^* . s\ 0 = p\ s\ s\ 0 .} \text{ISY}}{p : \text{Nat}^* \gg \text{Nat} . \quad p\ s\ s\ 0 : \text{Nat}^* .} \text{RAP}}{\frac{p\ p\ s\ s\ 0 : \text{Nat} .}{\$ p\ p\ s\ s\ 0 .} \text{CAPA}} \text{APEX}$$

Preuve 2

$$\frac{\text{REC} \quad \frac{\$ p\ p\ s\ s\ 0 . p\ s\ s\ 0 = s\ 0 . \quad p\ s\ n = n . n :: \text{Nat} . 0 : \text{Nat} .}{p\ p\ s\ s\ 0 = p\ s\ 0 .} \text{SID}}{p\ p\ s\ s\ 0 = 0 .} \text{RIDRO}$$

14.2.3 Les listes d'entiers naturels

- $\mathcal{S} = \{***, \text{Nat}, \text{LiNat}\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{0, \text{nil}\}$; $\mathcal{F}_1 = \{\text{s}, \text{lg}\}$; $\mathcal{F}_2 = \{+, \text{cons}\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 3], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 2$.
- $\mathcal{X} = \{i, j, l, z1, z2, l2\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$0 : \text{Nat} .$
 $s : \text{Nat} \gg \text{Nat} .$

 $+$: $\text{Nat Nat} \gg \text{Nat} .$
 $i :: \text{Nat} . j :: \text{Nat} .$
 $+ i\ 0 = i .$
 $+ i\ s\ j = s + i\ j .$

 $\text{nil} : \text{LiNat} .$
 $\text{cons} : \text{Nat LiNat} \gg \text{LiNat} .$

$\text{lg} : \text{LiNat} \gg \text{Nat} .$
 $\text{lg nil} = 0 .$
 $l :: \text{LiNat} .$

$\text{lg cons } i \ 1 = s \ \text{lg } 1 \ .$

$z1 :: *** \ . \ z2 :: *** \ .$
 $l2 :: \text{LiNat} \ .$

On peut déduire les formules $[+ \ s \ 0 \ s \ 0 = s \ s \ 0 \ .]$ et $[\text{lg cons } 0 \ \text{cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ s \ 0 \ .]$.

Lemme 1

$$\frac{s : \text{Nat} \gg \text{Nat} \ . \ 0 : \text{Nat} \ .}{s \ 0 : \text{Nat} \ .} \text{CAPA}$$

Lemme 2

$$\frac{s : \text{Nat} \gg \text{Nat} \ . \ s \ 0 : \text{Nat} \ .}{s \ s \ 0 : \text{Nat} \ .} \text{CAPA}$$

Preuve 1

$$\text{SID} \frac{\frac{+ \ i \ s \ j = s + i \ j \ . \ i :: \text{Nat} \ . \ j :: \text{Nat} \ . \ s \ 0 : \text{Nat} \ . \ 0 : \text{Nat} \ .}{+ \ s \ 0 \ s \ 0 = s + s \ 0 \ 0 \ .} \quad \frac{+ \ i \ 0 = i \ . \ i :: \text{Nat} \ . \ s \ 0 : \text{Nat} \ .}{+ \ s \ 0 \ 0 = s \ 0 \ .} \text{SID}}{+ \ s \ 0 \ s \ 0 = s \ s \ 0 \ .} \text{RIDRO}$$

Lemme 3

$$\frac{\text{lg cons } i \ 1 = s \ \text{lg } 1 \ . \ i :: \text{Nat} \ . \ l :: \text{LiNat} \ . \ 0 : \text{Nat} \ .}{\text{lg cons } 0 \ \text{cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ \text{lg cons } s \ 0 \ \text{nil} \ .} \frac{\frac{\text{cons} : \text{Nat LiNat} \gg \text{LiNat} \ . \ s \ 0 : \text{Nat} \ . \ \text{nil} : \text{LiNat} \ .}{\text{cons } s \ 0 \ \text{nil} : \text{LiNat} \ .} \text{CAPA}}{\text{SID}}$$

Lemme 4

$$\frac{\text{lg cons } i \ 1 = s \ \text{lg } 1 \ . \ i :: \text{Nat} \ . \ l :: \text{LiNat} \ . \ s \ 0 : \text{Nat} \ . \ \text{nil} : \text{LiNat} \ .}{\text{lg cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ \text{lg nil} \ .} \text{SID}$$

Preuve 2

$$\text{RIDRO} \frac{\frac{\text{lg cons } 0 \ \text{cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ \text{lg cons } s \ 0 \ \text{nil} \ . \ \text{lg cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ \text{lg nil} \ .}{\text{lg cons } 0 \ \text{cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ s \ \text{lg nil} \ .} \quad \text{lg nil} = 0 \ .}{\text{lg cons } 0 \ \text{cons } s \ 0 \ \text{nil} = s \ s \ 0 \ .} \text{RIDRO}$$

14.2.4 Les booléens

- $S = \{***, \text{Bool}\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$; $\mathcal{F}_1 = \{\text{non}\}$; $\mathcal{F}_2 = \{\text{et}, \text{ou}, \text{implique}\}$.
 $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 3], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 2$.
- $\mathcal{X} = \{b, b', z1, z2\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

```

vrai : Bool . faux : Bool .
non  : Bool >> Bool .
et   : Bool Bool >> Bool .
ou   : Bool Bool >> Bool .
implique : Bool Bool >> Bool .

```

```

b :: Bool . b' :: Bool .
non vrai = faux .
non faux = vrai .
et b faux = faux .
et b vrai = b .
ou b faux = b .
ou b vrai = vrai .
implique b b' = ou non b b' .

```

```

z1 :: *** . z2 :: *** .

```

On peut déduire la formule $[\text{implique vrai faux} = \text{faux}]$.

Lemme 1

SID implique b b' = ou non b b' . b :: Bool . b' :: Bool . vrai : Bool . faux : Bool . RIDRO implique vrai faux = ou non vrai faux .	non vrai = faux . SID
implique vrai faux = ou faux faux .	

Lemme 2

ou b faux = b . b :: Bool . faux : Bool . SID
ou faux faux = faux .

Preuve

RIDRO implique vrai faux = ou faux faux . ou faux faux = faux .
implique vrai faux = faux .

14.2.5 Deux semi-groupes liés par un homomorphisme

- $S = \{***, G1, G2\}$.
- $\mathcal{F}_1 = \{h\}$, $\mathcal{F}_2 = \{*1, *2\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \neq 1, n \neq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 2$.
- $\mathcal{X} = \{x1, y1, z1, x2, y2, z2, t1, t2\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

```

*1 : G1 G1 >> G1 .
x1 :: G1 . y1 :: G1 . z1 :: G1 .
*1 x1 *1 y1 z1 = *1 *1 x1 y1 z1 .

*2 : G2 G2 >> G2 .

```

```

x2 :: G2 . y2 :: G2 . z2 :: G2 .
*2 x2 *2 y2 z2 = *2 *2 x2 y2 z2 .

h : G1 >> G2 .
h *1 x1 y1 = *2 h x1 h y1 .

t1 :: *** . t2 :: *** .

```

14.3 Les “ paradoxes ” de G. Smolka

14.3.1 Premier “ paradoxe ”

Gert Smolka [28] a présenté cet exemple pour signaler un défaut de la théorie proposée par Goguen et Meseguer [25] (si on ne raisonne *que grammaticalement* sur le terme $[f \text{ ec}]$, on peut le croire *mal formé* ; car on sait que E2 est inclus dans le domaine de f , mais on ne sait si ec est de type E2).

- $\mathcal{S} = \{***, E1, E2\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{ea, eb, ec\}$; $\mathcal{F}_1 = \{f\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 1$.
- $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

```

E2 =< E1 .
ec : E1 .
ea : E2 . eb : E2 .
f : E2 >> E2 .

```

```

ea = ec .
ec = eb .

```

```

x :: E1 . y :: E2 . z :: *** .

```

On *peut* déduire la formule $[f \text{ ea} = f \text{ eb} .]$.

Preuve

CAPA	f : E2 >> E2 . ea : E2 .	
	f ea : E2 .	
APEX		
	\$ f ea .	
EXID		
	f ea = f ea .	ea = ec .
RIDRO		
	f ea = f ec .	ec = eb .
		RIDRO
	f ea = f eb .	

14.3.2 Deuxième “ paradoxe ”

Gert Smolka [28] a présenté une variante de cet exemple pour signaler qu'on ne doit pas raisonner sans précaution si l'un des ensembles qu'on considère est vide...

Soient e_a et e_b deux éléments ($e_a \neq e_b$) ; $\forall y \in \emptyset$,

$$e_a = y \quad \text{et} \quad y = e_b$$

Peut-on en déduire que $e_a = e_b$? Certes non (hypothèse). *L'égalité, en l'occurrence, n'est donc pas transitive.*

J'ai contourné l'écueil en m'interdisant de renommer l'ensemble vide : $[\forall S \in \mathcal{S}, \sigma_S \neq \emptyset]$ (définition 14 ; voir p. 21). Prendre une précaution de ce genre est une tradition de logicien (le support d'une structure n'est pas vide [7, p. 18]).

- $\mathcal{S} = \{***, E, F\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{ea, eb\}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 0$.
- $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$$x :: E \quad . \quad y :: F \quad . \quad z :: *** \quad .$$

$$\begin{aligned} ea : E \quad . \quad eb : E \quad . \\ ea = y \quad . \quad y = eb \quad . \end{aligned}$$

On peut déduire la formule $[ea = eb \quad .]$.

Preuve

$$\text{IDET} \frac{ea = x \quad . \quad x = eb \quad .}{ea = eb \quad .}$$

14.4 Expositions “ sauvages ”

Ces expositions, parce qu'elles n'ont pas certaines qualités grammaticales (régularité, corégularité, décroissance de sorte, cohérence etc.), ne sont pas prises en considération par Goguen et Meseguer [25]. En effet, de chacune d'elles on ne parvient à déduire *toutes* les formules intéressantes que *par inférence non triviale de type*, ce que ces auteurs n'ont pas proposé.

C'est la seule raison de l'appellation “ sauvage ”.

14.4.1 Exemple A

- $\mathcal{S} = \{***, E1, E2\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{e1, e2\}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 0$.
- $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$e1 : E1 . e2 : E2 .$
 $e1 = e2 .$

$x :: E1 . y :: E2 . z :: *** .$

On peut déduire la formule $[e1 : E2 .]$.

Preuve

$$\frac{\frac{e1 = e2 .}{e2 : E2 . \quad e2 = e1 .} \text{ISY}}{e1 : E2 .} \text{RAP}$$

14.4.2 Exemple B

- $S = \{***, E1, E2\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{e1, e2\}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 0$.
- $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$e1 : E1 . e2 : E2 .$
 $x :: E1 . x = e2 .$

$y :: E2 . z :: *** .$

On peut déduire les formules $[e1 : E2 .]$ et $[E1 =< E2 .]$.

Preuve 1

$$\frac{\frac{\frac{x = e2 . \quad x :: E1 . \quad e1 : E1 .}{e1 = e2 .} \text{SID}}{e2 : E2 . \quad e2 = e1 .} \text{ISY}}{e1 : E2 .} \text{RAP}$$

Preuve 2

$$\frac{x :: E1 . \quad \frac{\frac{x = e2 .}{e2 : E2 . \quad e2 = x .} \text{ISY}}{x : E2 .} \text{RAP}}{E1 =< E2 .} \text{IN}$$

14.4.3 Exemple C

- $S = \{***, E1, E2\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{e1, e2\}$; $\mathcal{F}_1 = \{f\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 1$.
- $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$E1 =< E2 .$
 $e1 : E1 . e2 : E2 .$
 $f : E2 >> E2 .$
 $f : E1 >> E1 .$

 $y :: E2 . f y = f e2 .$

 $x :: E1 . z :: *** .$

On peut déduire les formules $[f e1 = f e2 .]$ et $[f : E2 >> E1 .]$.

Preuve 1

$$\frac{\frac{f x = f eb . x :: E2 .}{f ea = f eb .} \quad \frac{ea : E1 . E1 =< E2 .}{ea : E2 .} \text{APINA}}{\text{SID}}$$

Preuve 2

$$\frac{\frac{\frac{f : E1 >> E1 . ea : E1 .}{f ea : E1 .} \text{CAPA} \quad \frac{f ea = f eb .}{f eb : E1 .} \text{RAP} \quad \frac{f x = f eb .}{f eb = f x .} \text{ISY}}{\frac{x :: E2 .}{f : E2 >> E1 .} \text{CO}}$$

14.4.4 Exemple D

Cet exemple a été trouvé par Claude Kirchner. On considère deux ensembles, l'un sous-ensemble de l'autre, et une *loi interne commutative* liée au plus grand, dont la restriction au plus petit est une *loi interne, associative, et commutative* (bien entendu).

- $S = \{***, E1, E2\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{e1, e2\}$; $\mathcal{F}_2 = \{+\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \neq 0, n \neq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 2$.
- $\mathcal{X} = \{x1, y1, z1, x2, y2, t1, t2\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$E1 =< E2 .$
 $e1 : E1 . e2 : E2 .$

 $+ : E2 E2 >> E2 .$
 $+ : E1 E1 >> E1 .$

 $x2 :: E2 . y2 :: E2 . + x2 y2 = + y2 x2 .$

$x1 :: E1 \ . \ y1 :: E1 \ . \ z1 :: E1 \ . \ + \ + \ x1 \ y1 \ z1 = + \ x1 + \ y1 \ z1 \ .$

$t1 :: *** \ . \ t2 :: *** \ .$

14.4.5 Exemple E

- $\mathcal{S} = \{***, E1, E2\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \{ea, eb, ec\}$; $\mathcal{F}_1 = \{f\}$. $\forall n [n \in \mathbb{N}, n \geq 2], \mathcal{F}_n = \emptyset$. On vérifie que $\hat{a} = 1$.
- $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$ea : E1 \ . \ eb : E2 \ .$

$ec : E1 \ . \ ec : E2 \ .$

$f : E1 \gg E1 \ .$

$f : E2 \gg E2 \ .$

$x :: E1 \ . \ f \ x = ea \ .$

$y :: E2 \ . \ f \ y = eb \ .$

$z :: *** \ .$

On peut déduire la formule $[ea = eb \ .]$.

Preuve

$$\begin{array}{c}
 \text{SID} \frac{ea = f \ x \ . \ x :: E1 \ . \ ec : E1 \ . \quad f \ y = eb \ . \ y :: E2 \ . \ ec : E2 \ .}{\frac{ea = f \ ec \ . \quad f \ ec = eb \ .}{ea = eb \ .}} \text{SID} \\
 \text{IDET}
 \end{array}$$

Chapitre 15

Le théorème de correction

En procédant par symboles et règles d'inférence (on procède sans se soucier du sens, “ mécaniquement ”), déduit-on n'importe quoi, ou ne déduit-on que des formules vraies ? En fait, on peut examiner chaque règle et vérifier que d'un ensemble de formules vraies on ne déduit jamais de formule fausse. On prouve ainsi le théorème de correction (on dit aussi “ théorème de validité ”).

Et on achève de réaliser cette première partie du programme : le procédé concret auquel on a réduit le raisonnement relatif aux $\mathcal{V}$ -magmas *est fiable* ; celui qui l'applique comme il faut ne commettra jamais d'erreur.

On vérifiera plus tard que ce procédé a cette autre qualité importante : *il est suffisant* ; tout ce qu'il est souhaitable de déduire, on peut le déduire (théorème de recouvrement ; chapitre 17).

15.1 Deux lemmes

Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19) ; $\forall l \in L$, le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_l$ est $\lceil \mathbf{x}_l :: \mathbf{H}_l \cdot \rceil$ ($\mathbf{H}_l \in \mathcal{S}$) (voir p. 109).

15.1.1 Formule-existence vraie et substitution “ sortée ”

Dans une formule-existence vraie, on substitue des termes aux variables *en respectant la “ sorte ” des variables*. La formule-existence obtenue, elle aussi, est vraie...

Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ;
 $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$, $J \neq \emptyset$, $J \subseteq L$.
 $\forall j \in J$, soit $\mathbf{d}_j \in {}^\wedge \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{d}_j = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K_j}$. J'appelle “ K ” l'union
 $\bigcup_{j \in J} K_j$;

$$\text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K}$$

Lemme 4 — *Quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,*

si $\Omega \models \lceil \lceil \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \cdot \rceil^J \$ \mathbf{a} \cdot \rceil$, et

si $\lceil \forall j \in J, \Omega \models \lceil \lceil \mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \cdot \rceil^{k \in K_j} \mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \cdot \rceil \rceil$,

alors

- $\Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .] \^K \$ \mathbf{a} \{ \mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j \}_J \ . \rrbracket$, et
- $\forall (\xi_k)_K \in \prod_{k \in K} \sigma_{\mathbf{H}_k}$,

$$\tau_{\mathbf{a} \{ \mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j \}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} (\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J}$$

Preuve

Preuve plus simple qu'elle paraît. On rappelle surtout des souvenirs.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .] \^J \$ \mathbf{a} \ . \rrbracket \quad (15.1)$$

et

$$\forall j \in J, \Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .] \^{k \in K_j} \mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ . \rrbracket \quad (15.2)$$

(on suppose qu'il existe un tel magma).

On veut vérifier ceci :

$$\prod_{k \in K} \sigma_{\mathbf{H}_k} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a} \{ \mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j \}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K}$$

et

$$\forall (\xi_k)_K \in \prod_{k \in K} \sigma_{\mathbf{H}_k}, \tau_{\mathbf{a} \{ \mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j \}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} (\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J}$$

Soit $(\xi_k)_K \in \prod_{k \in K} \sigma_{\mathbf{H}_k}$ (ce produit est un ensemble non vide). $\forall j \in J$,

$$(\xi_k)_{k \in K_j} \in \prod_{k \in K_j} \sigma_{\mathbf{H}_k} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}$$

et

$$\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j} \in \sigma_{\mathbf{H}_j}$$

(15.2). Donc

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

(15.1). On se rappelle alors que

$$(\xi_k)_K \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a} \{ \mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j \}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K}$$

et que

$$\tau_{\mathbf{a} \{ \mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j \}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} (\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J}$$

(théorème 4 ; voir p. 42). ■

15.1.2 Formule-existence vraie et remplacement à l'identique

Dans une formule-existence vraie, on remplace un sous-terme par un terme identique. La formule-existence obtenue, elle aussi, est vraie...

Soit $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$. Soit $\mathbf{c}$ un sous-terme de $\mathbf{a}$. Dans $\mathbf{a}$ on repère une zone où $\mathbf{c}$ apparaît (si $\mathbf{c}$ apparaît plusieurs fois, on choisit). Soit $\mathbf{d} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$.

$\mathbf{a}'$ est le terme qu'on écrit en "remplaçant dans $\mathbf{a}$ ce $\mathbf{c}$ par $\mathbf{d}$ " (voir p. 49).

$\text{Var } \mathbf{c} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s}$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s \cup J_r}$; $\text{Var } \mathbf{d} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J'_s}$;
 $\text{Var } \mathbf{a}' = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J'_s \cup J_r}$ (voir p. 49).

Lemme 5 — *Quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,*

si $\Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J_r} \$ \mathbf{a} \ . \rrbracket$, et

si $\Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J'_s} \mathbf{c} = \mathbf{d} \ . \rrbracket$,

alors

• $\Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J'_s \cup J_r} \$ \mathbf{a}' \ . \rrbracket$, et

• $\forall (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j},$

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$$

Preuve

Preuve plus simple qu'elle paraît. On rappelle surtout des souvenirs.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma qui a cette qualité (on suppose qu'il existe un tel magma) :

• $\prod_{j \in J_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}$;

• $\prod_{j \in J_s} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}$ et

• $\prod_{j \in J'_s} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_{J'_s}}$; et

• $\forall (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s} \sigma_{\mathbf{H}_j},$

$$\tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}(\xi_j)_{j \in J_s} = \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_{J'_s}}(\xi_j)_{j \in J'_s} \quad (15.3)$$

On veut vérifier ceci :

(I) $\prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}$ et

(II) $\forall (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j},$

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$$

I — Soit $(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{H_j}$ (ensemble non vide). Puisque $[\forall S \in \mathcal{S}, \sigma_S \neq \emptyset]$,

$$\exists (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \sigma_{H_j}, \quad (\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r}$$

(si $J'_s \cup J_r = J_s \cup J'_s \cup J_r$, le raisonnement est trivial ; sinon, c'est-à-dire si $J'_s \cup J_r \subset J_s \cup J'_s \cup J_r$, $\forall j \in (J_s \cup J'_s \cup J_r) - (J'_s \cup J_r)$ on choisit un élément ξ_j de σ_{H_j}).

- $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J_r} \sigma_{H_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}$;
- $(\xi_j)_{j \in J'_s} \in \prod_{j \in J'_s} \sigma_{H_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_{J'_s}}$;
- $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s} \sigma_{H_j}$; donc

$$\tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}(\xi_j)_{j \in J_s} = \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{x}_{J'_s}}(\xi_j)_{j \in J'_s}$$

(15.3).

On se rappelle alors que

$$(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = (\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}$$

(théorème 6 ; voir p. 50) : tout élément $(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r}$ de $\prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{H_j}$ est élément de $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}$... On vient de vérifier que

$$\prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{H_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}$$

II — Soit $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \sigma_{H_j}$ (le multiplet est quelconque). On raisonne de la même façon pour observer cette fois que

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$$

(théorème 6 ; voir p. 50). ■

15.2 Le théorème de correction

Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Tout $\mathcal{P}$ -théorème signifie une propriété de tout $\mathcal{E}$ -modèle.

Théorème 22 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale.

Quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle, (j'appelle " $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ " la $\mathcal{P}$ -garniture de $\mathbf{A}$)

$$\mathcal{P} \vdash \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \Omega \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \mathbf{A}]$$

Preuve

Preuve classique, qui est une série de sous-preuves indépendantes et courtes. Lire trois paragraphes (par exemple XIXI, SEXI et REXI) pour saisir l'idée. Tenir la fiche *Inference rules* à portée de main.

I — Principe de la démonstration

1 — On sait que, quelle que soit **A** une formule *germinale* de $\mathcal{P}$ (un axiome),

$$\Omega \models [\mathbf{X_A} \ A]$$

(Ω est un $\mathcal{E}$ -modèle ; définition 42, voir p. 111).

2 — La définition de “ $\mathcal{P}$ -théorème ” est récursive ; aussi pense-t-on à raisonner par récurrence.

On considère une règle d'inférence à la fois. On veut vérifier que **si** chaque formule lue (*prémisse symbolique*) est un $\mathcal{P}$ -théorème, et **si** chaque formule lue *qui est germinale* a en outre cette qualité : (j'appelle “ **B** ” un telle formule, $\mathbf{X_B}$ sa $\mathcal{P}$ -garniture)

$$\Omega \models [\mathbf{X_B} \ B]$$

alors la formule écrite (*conséquence symbolique*) a cette qualité : (j'appelle “ **A** ” la formule écrite)

$$\Omega \models [\mathbf{X_A} \ A]$$

II — Remarques préalables

- $\forall l \in L, [\mathbf{x}_l :: \mathbf{H}_l \ .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_l$ (voir p. 109).
- Quel que soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\prod_{l \in \emptyset} \sigma_{\mathbf{H}_l} = \{\diamond\} = \Omega^0$$

et

$$(\xi_l)_{l \in \emptyset} = \diamond$$

(notation ; voir p. 218) ; on vérifie que $(\xi_l)_{l \in \emptyset} \in \prod_{l \in \emptyset} \sigma_{\mathbf{H}_l}$.

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$ ($J \subseteq L$) ; $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$ ($U \subseteq L$).

III — Les six règles simples**XIXI**

$\text{Var } \mathbf{c} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s}$. On veut vérifier que *si* $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .]$, c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \quad (15.4)$$

alors $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s} \ \$ \ \mathbf{c} \ .]$, c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J_s} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}$$

Soit $(\xi_j)_{j \in J_s} \in \prod_{j \in J_s} \sigma_{\mathbf{H}_j}$ (ensemble non vide). Puisque $[\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset]$,

$$\exists (\eta_j)_J \in \prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j}, (\eta_j)_{j \in J_s} = (\xi_j)_{j \in J_s}$$

(si $J_s = J$, le raisonnement est trivial ; sinon, c'est-à-dire si $J_s \subset J, \forall j \in J - J_s$ on choisit un élément η_j de $\sigma_{\mathbf{H}_j}$).

$(\eta_j)_J \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (15.4) ; donc

$$(\xi_j)_{j \in J_s} = (\eta_j)_{j \in J_s} \in \text{Dom } \tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}$$

(théorème 5 ; voir p. 48). On vient de vérifier que $\prod_{j \in J_s} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}_{J_s}}$.

APEX — Si $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^J \mathbf{a} : \mathbf{E} .]$, alors
 $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^{j \in J} \$ \mathbf{a} .]$ (définition 35 ; voir p. 98).

IDEX — Si $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} .]$, alors
 $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^J \$ \mathbf{a} .]$ et $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^{j \in U} \$ \mathbf{b} .]$
 (définition 36 ; voir p. 99).

CONFA — Soit $[\mathbf{y} :: \mathbf{E} .]$ une formule-confinement, $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{y} :: \mathbf{E} .]$.
 Cette formule est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{y}$ (proposition 25 ; voir p. 119).

$\tau_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(\sigma_{\mathbf{E}}) = \text{Id}_{\Omega}(\sigma_{\mathbf{E}}) = \sigma_{\mathbf{E}} \subseteq \sigma_{\mathbf{E}}$ (raisonnement trivial) ; donc
 $\Omega \models [\mathbf{y} :: \mathbf{E} . \mathbf{y} : \mathbf{E} .]$.

EXID

$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^J \$ \mathbf{a} .]$ (hypothèse) ; c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

$\forall (\xi_j)_J \in \prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j}, \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J$ (raisonnement trivial). On vient de vérifier que $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^J \mathbf{a} = \mathbf{a} .]$.

EXAP

$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^J \$ \mathbf{a} .]$ (hypothèse) ; c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j}) \subseteq \Omega = \sigma_{***}$ (raisonnement trivial). On vient de vérifier que

$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .] ^J \mathbf{a} : *** .]$.

IV — Substituer

Remarques préalables

- $\forall j \in J \cup U, \text{Var } \mathbf{d}_j = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K_j}$.
- $\text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K} \quad (K = \bigcup_{j \in J} K_j)$.
- Si $\mathbf{a}$ est sans variable ($J = \emptyset$), $\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in \emptyset} = \mathbf{a}$.

SEXI

$\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .] \text{ (hypothèse) ; donc } [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .] \text{ est le } \mathcal{P}\text{-confinement de } \mathbf{x}_j \text{ (proposition 25 ; voir p. 119) et } \mathbf{K}_j = \mathbf{H}_j \text{ (voir p. 109).}$

Si $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^J \ \$ \ \mathbf{a} \ .]$ et si $[\forall j \in J, \Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .]^{k \in K_j} \ \mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ .]]$, alors

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .]^K \ \$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J \ .]$$

(lemme 4).

SAP

$\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .] \text{ (hypothèse) ; donc } [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .] \text{ est le } \mathcal{P}\text{-confinement de } \mathbf{x}_j \text{ (proposition 25 ; voir p. 119) et } \mathbf{K}_j = \mathbf{H}_j \text{ (voir p. 109).}$

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^J \ \mathbf{a} : \mathbf{E} \ .] \quad (15.5)$$

et

$$\forall j \in J, \Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .]^{k \in K_j} \ \mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ .] \quad (15.6)$$

On veut vérifier que

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .]^K \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J : \mathbf{E} \ .]$$

$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^J \ \$ \ \mathbf{a} \ .] \text{ (définition 35 ; voir p. 98) ; donc}$

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \ .]^K \ \$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J \ .]$$

(lemme 4).

Il reste à vérifier que

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} \left(\prod_{k \in K} \sigma_{\mathbf{H}_k} \right) \subseteq \sigma_{\mathbf{E}}$$

Soit $(\xi_k)_K \in \prod_{k \in K} \sigma_{\mathbf{H}_k}$ (ensemble non vide). On sait que

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K} (\xi_k)_K = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \left(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j} \right)_{j \in J}$$

(lemme 4).

$\forall j \in J, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \prod_{k \in K_j} \sigma_{\mathbf{H}_k}$ (raisonnement trivial) ; donc

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{H}_j}$$

(15.6) ; donc

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}}(\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} \in \sigma_{\mathbf{E}}$$

(15.5). On vient de vérifier que

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_K}(\xi_k)_K \in \sigma_{\mathbf{E}}$$

SID

$\forall j \in J \cup U, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \cdot]$ (hypothèse) ; donc $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \cdot]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ (proposition 25 ; voir p. 119) et $\mathbf{K}_j = \mathbf{H}_j$ (voir p. 109).

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma,

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \cdot]^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot] \quad (15.7)$$

et

$$\forall j \in J \cup U, \Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \cdot]^{k \in K_j} \mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \cdot] \quad (15.8)$$

J'appelle “ K_J ” l'union $\bigcup_{j \in J} K_j$. On vérifie sans peine que

$$\text{Var } \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K_J}$$

J'appelle “ K_U ” l'union $\bigcup_{j \in U} K_j$. On vérifie sans peine que

$$\text{Var } \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U} = \{\mathbf{x}_k\}_{k \in K_U}$$

On veut vérifier que

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \cdot]^{k \in K_J \cup K_U} \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U} \cdot]$$

$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \cdot]^J \$ \mathbf{a} \cdot]$ et $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \cdot]^{j \in U} \$ \mathbf{b} \cdot]$ (définition 36 ; voir p. 99) ; donc

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \cdot]^{k \in K_J} \$ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J \cdot]$$

et

$$\Omega \models [[\mathbf{x}_k :: \mathbf{H}_k \cdot]^{k \in K_U} \$ \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U} \cdot]$$

(lemme 4).

Il reste à vérifier que $\forall (\xi_k)_{k \in K_J \cup K_U} \in \prod_{k \in K_J \cup K_U} \sigma_{\mathbf{H}_k}$,

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_{K_J}}(\xi_k)_{k \in K_J} = \tau_{\mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U}}^{\mathbf{x}_{K_U}}(\xi_k)_{k \in K_U}$$

Soit $(\xi_k)_{k \in K_J \cup K_U} \in \prod_{k \in K_J \cup K_U} \sigma_{\mathbf{H}_k}$ (ensemble non vide). $(\xi_k)_{k \in K_J} \in \prod_{k \in K_J} \sigma_{\mathbf{H}_k}$ et $(\xi_k)_{k \in K_U} \in \prod_{k \in K_U} \sigma_{\mathbf{H}_k}$; donc

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_{K_J}} (\xi_k)_{k \in K_J} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J}$$

et

$$\tau_{\mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U}}^{\mathbf{x}_{K_U}} (\xi_k)_{k \in K_U} = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in U}$$

(lemme 4).

$\forall j \in J \cup U, (\xi_k)_{k \in K_j} \in \prod_{k \in K_j} \sigma_{\mathbf{H}_k}$; donc

$$(\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \sigma_{\mathbf{H}_j}$$

(15.8) ; donc

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in J} = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\tau_{\mathbf{d}_j}^{\mathbf{x}_{K_j}} (\xi_k)_{k \in K_j})_{j \in U}$$

(15.7). On vient de vérifier que

$$\tau_{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}}^{\mathbf{x}_{K_J}} (\xi_k)_{k \in K_J} = \tau_{\mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U}}^{\mathbf{x}_{K_U}} (\xi_k)_{k \in K_U}$$

V — Remplacer

Remarques préalables

- $\text{Var } \mathbf{c} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s}$; $\text{Var } \mathbf{d} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J'_s}$.
- $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_s \cup J_r}$.
- $\text{Var } \mathbf{a}' = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J'_s \cup J_r}$.

REXI — Si $\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J_r} \$ \mathbf{a} \ .]$, et si

$\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J'_s} \mathbf{c} = \mathbf{d} \ .]$, alors

$\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J'_s \cup J_r} \$ \mathbf{a}' \ .]$ (lemme 5).

RAP

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma qui a cette qualité :

- $\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J_r} \mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$;
- $\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J'_s} \mathbf{c} = \mathbf{d} \ .]$.

On veut vérifier que

$$\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J'_s \cup J_r} \mathbf{a}' : \mathbf{E} \ .]$$

$\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J_s \cup J_r} \$ \mathbf{a} \rrbracket$ (définition 35 ; voir p. 98) ; donc

$$\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J'_s \cup J_r} \$ \mathbf{a}' \rrbracket$$

(lemme 5). Il reste à vérifier que

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}} \left(\prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j} \right) \subseteq \sigma_{\mathbf{E}}$$

Soit $(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j}$ (ensemble non vide). Puisque $[\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset]$,

$$\exists (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j}, (\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r}$$

On sait que

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}} (\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}} (\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$$

(lemme 5). Le multiplet $(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j}$; donc

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}} (\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \in \sigma_{\mathbf{E}}$$

($\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J_s \cup J_r} \mathbf{a} : \mathbf{E} \rrbracket$). On déduit alors que

$$\begin{aligned} & \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}} (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} \\ &= \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}} (\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}} (\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} \\ &\in \sigma_{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

On vient de vérifier que

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}} \left(\prod_{j \in J'_s \cup J_r} \sigma_{\mathbf{H}_j} \right) \subseteq \sigma_{\mathbf{E}}$$

RIGA

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma qui a cette qualité :

- $\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J_s \cup J_r \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \rrbracket$;
- $\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J_s \cup J'_s} \mathbf{c} = \mathbf{d} \rrbracket$.

On veut vérifier que

$$\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \mathbf{a}' = \mathbf{b} \rrbracket$$

$\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J_s \cup J_r} \$ \mathbf{a} \rrbracket$ (définition 35 ; voir p. 98) ; donc

$$\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \rrbracket^{j \in J'_s \cup J_r} \$ \mathbf{a}' \rrbracket$$

(lemme 5). Il reste à vérifier que, $\forall (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \in \prod_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \sigma_{H_j}$,

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\eta_j)_{j \in U}$$

Soit $(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \in \prod_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \sigma_{H_j}$ (ensemble non vide). Puisque $[\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \sigma_{\mathbf{S}} \neq \emptyset]$,

$$\exists (\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r \cup U} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r \cup U} \sigma_{H_j}, (\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} = (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r \cup U}$$

$(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r}$ (raisonnement trivial) ; donc

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r}$$

$(\xi_j)_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \in \prod_{j \in J_s \cup J'_s \cup J_r} \sigma_{H_j}$ (raisonnement trivial) ; donc

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r}$$

(lemme 5).

$(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r \cup U} \in \prod_{j \in J_s \cup J_r \cup U} \sigma_{H_j}$ (raisonnement trivial) ; donc

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_{J_s \cup J_r}}(\xi_j)_{j \in J_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_{j \in U}$$

$(\Omega \models [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J_s \cup J_r \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$).

$(\xi_j)_{j \in U} = (\eta_j)_{j \in U}$ (raisonnement trivial) ; donc

$$\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_{j \in U} = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\eta_j)_{j \in U}$$

On vient de vérifier que, $\forall (\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \in \prod_{j \in J'_s \cup J_r \cup U} \sigma_{H_j}$,

$$\tau_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}_{J'_s \cup J_r}}(\eta_j)_{j \in J'_s \cup J_r} = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\eta_j)_{j \in U}$$

VI — Coder et décoder les formules-inclusion et les formules-conduit

INAP — $\Omega \models [\mathbf{E} = < \mathbf{F} \ .]$ (hypothèse), c'est-à-dire $\sigma_{\mathbf{E}} \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$.

$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .]$ (hypothèse) ; donc $[\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{y}$ (proposition 25 ; voir p. 119).

$\tau_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(\sigma_{\mathbf{E}}) = \text{Id}_{\Omega}(\sigma_{\mathbf{E}}) = \sigma_{\mathbf{E}} \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$ (raisonnement trivial) ; donc

$$\Omega \models [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ . \ \mathbf{y} : \mathbf{F} \ .]$$

IN — $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .]$ (hypothèse) ; donc $[\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{y}$ (proposition 25 ; voir p. 119).

$\Omega \models [\mathbf{y} :: \mathbf{E} \ . \ \mathbf{y} : \mathbf{F} \ .]$ (hypothèse) ; donc $\sigma_{\mathbf{F}} \supseteq \tau_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(\sigma_{\mathbf{E}}) = \sigma_{\mathbf{E}}$. On vient de vérifier que $\Omega \models [\mathbf{E} =_{<} \mathbf{F} \ .]$.

CONDA

$\Omega \models [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} \ .]$ (hypothèse) ; c'est-à-dire

$$\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i} \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} \quad (15.9)$$

et

$$\phi_{\mathbf{f}}(\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i}) \subseteq \sigma_{\mathbf{F}} \quad (15.10)$$

$\forall i \in I, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]$ (hypothèse) ; donc $[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{y}_i$ (proposition 25 ; voir p. 119).

Que sait-on de la semi-fonction $\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I}$? (prendre note que les $\mathbf{y}_i$ ($i \in I$) sont *distinctes deux à deux*). On sait ceci (voir p. 34) :

- $\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I}$ est une semi-fonction $\Omega^n \rightarrow \Omega$;
- $\tau_{\mathbf{y}_i}^{\mathbf{y}_i} = \text{Id}_{\Omega}$;
- $\text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I} = \{(\xi_i)_I \in \Omega^n \mid (\tau_{\mathbf{y}_i}^{\mathbf{y}_i}(\xi_i))_I = (\xi_i)_I \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}\} = \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$;
- $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I},$

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I}(\xi_i)_I = \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{y}_i}^{\mathbf{y}_i}(\xi_i))_{i \in I} = \phi_{\mathbf{f}}(\xi_i)_I$$

Les semi-fonctions $\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I}$ et $\phi_{\mathbf{f}}$ ont même base, même cible et même graphe ; elles sont donc identiques ($\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I} = \phi_{\mathbf{f}}$).

$$\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i} \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} = \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I} \quad (15.9) \text{ et}$$

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I}(\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i}) = \phi_{\mathbf{f}}(\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i}) \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$$

(15.10) ; c'est-à-dire

$$\Omega \models [[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]^I \ \mathbf{f} \ \mathbf{y}_I : \mathbf{F} \ .]$$

CO

$\forall i \in I, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]$ (hypothèse) ; donc $[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{y}_i$ (proposition 25 ; voir p. 119).

$\Omega \models [[\mathbf{y}_i :: \mathbf{E}_i \ .]^I \ \mathbf{f} \ \mathbf{y}_I : \mathbf{F} \ .]$ (hypothèse) ; c'est-à-dire ($\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{y}_I]}^{\mathbf{y}_I} = \phi_{\mathbf{f}}$)

$$\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i} \subseteq \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

et

$$\phi_{\mathbf{f}}(\prod_{i \in I} \sigma_{\mathbf{E}_i}) \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$$

C'est-à-dire $\Omega \models [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I \gg \mathbf{F} \ .]$. ■

15.3 Remarquer

Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Si un terme $\mathbf{a}$ apparaît dans un $\mathcal{P}$ -théorème, alors la formule $[\$ \mathbf{a} .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème (considérer les règles XIXI, APEX et IDEX). Donc, quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle, (j'appelle “ $\mathbf{X}_{\mathbf{a}}$ ” la $\mathcal{P}$ -garniture de $[\$ \mathbf{a} .]$)

$$\Omega \models [\mathbf{X}_{\mathbf{a}} \$ \mathbf{a} .]$$

(théorème de correction).

Que retenir ? Quel que soit le $\mathcal{E}$ -modèle considéré, on interprète tout terme apparaissant dans un $\mathcal{P}$ -théorème *comme un semi-fonction non vide* (pour cette raison un terme comme $[1 / 0]$ ne peut apparaître dans un théorème).

Par le procédé de déduction symbolique on écrit certes du vrai, mais surtout du “ *dense* ” (une formule qui a rapport à une semi-fonction vide paraît plutôt “ *creuse* ”).

Chapitre 16

Le magma des termes significatifs

Quelle que soit $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition, il existe un $\mathcal{E}$ -modèle. On trouve en effet un $\mathcal{E}$ -modèle remarquable, le $\mathcal{V}$ -magma-quotient ${}^{\$}\Theta/\equiv$ (ce chapitre).

Le support ${}^{\$}\Theta$ du magma ${}^{\$}\Theta$ est un ensemble de $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -termes qualifiés, les termes *significatifs*. ${}^{\$}\Theta$ et ${}^{\$}\Theta/\equiv$ sont fonctions de $\mathcal{E}$ (autant d'expositions, autant de magmas des termes significatifs).

Notation — ${}^{\wedge}\mathcal{T} = {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; ${}^{\Delta}\mathcal{T} = {}^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V})$.

16.1 Le magma des termes significatifs, ${}^{\$}\Theta$

Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. ${}^{\$}\Theta = {}^{\$}\Theta(\mathcal{E}) = ({}^{\$}\Theta, {}^{\$}\Sigma, {}^{\$}\Phi)$;
 ${}^{\$}\Sigma = \{{}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}}$, ${}^{\$}\Phi = \{{}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$.

16.1.1 Le support — Les termes significatifs

Le support de ${}^{\$}\Theta$ est l'ensemble des termes *significatifs* (significant, meaningful).

$${}^{\$}\Theta = {}^{\$}\Theta(\mathcal{E}) = \{\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T} \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]\}$$

On veut vérifier que ce support n'est pas vide.

Proposition 27 — *Quelle que soit $\mathcal{E}$ une exposition, ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.*

Preuve — Il existe $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$, $[\mathbf{y} :: *** \ .] \in \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{y} : *** \ .]$ (règle CONFA), et $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{y} \ .]$ (règle APEX). Donc la séquence $[\mathbf{y}] \in {}^{\$}\Theta(\mathcal{E})$. ■

Exemple — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition, $[\mathbf{x} :: \mathbf{H} \ .] \in \mathcal{P}$. Les formules $[\mathbf{x} : \mathbf{H} \ .]$ et $[\$ \mathbf{x} \ .]$ sont des $\mathcal{P}$ -théorèmes (règles CONFA et APEX). Le terme $[\mathbf{x}]$ est donc significatif. □

16.1.2 Les sous-ensembles

$\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$,

$${}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}} = \{\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T} \mid \mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} \ .]\}$$

On vérifie ceci :

- $\forall S \in \mathcal{S}, {}^{\$}\sigma_S \neq \emptyset$. En effet,

$$\forall S \in \mathcal{S}, \exists x \in \mathcal{X}, [x :: S \ .] \in \mathcal{P}$$

Cet x est élément de ${}^{\$}\sigma_S$ (règles CONFA et APEX).

- $\forall S \in \mathcal{S}, {}^{\$}\sigma_S \subseteq {}^{\$}\Theta$ (règle APEX).
- ${}^{\$}\sigma_{***} = {}^{\$}\Theta$ (règle EXAP).

16.1.3 Les semi-constantes

$\forall e \in \mathcal{F}_0$, ${}^{\$}\phi_e$ est cette ${}^{\$}\Theta$ -semi-constante :

si $[\$ e \ .]$ n'est pas un $\mathcal{P}$ -théorème,

alors $\text{Dom } {}^{\$}\phi_e = \emptyset$;

sinon $\text{Dom } {}^{\$}\phi_e = ({}^{\$}\Theta)^0$ et ${}^{\$}\phi_e \diamond = [e] \ (\in {}^{\$}\Theta)$.

16.1.4 Les autres semi-fonctions

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n$, ${}^{\$}\phi_f$ est cette semi-fonction $({}^{\$}\Theta)^n \rightarrow {}^{\$}\Theta$: (j'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$)

(i) $\text{Dom } {}^{\$}\phi_f = \{(a_i)_I \in (\wedge T)^n \mid \mathcal{P} \vdash [\$ f \ a_I \ .]\}$;

(ii) $\forall (a_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_f, {}^{\$}\phi_f(a_i)_I = [f \ a_I] \ (\in {}^{\$}\Theta)$.

On veut vérifier que $\text{Dom } {}^{\$}\phi_f \subseteq ({}^{\$}\Theta)^n$. En effet, si $\mathcal{P} \vdash [\$ f \ a_I \ .]$, alors $[\forall i \in I, \mathcal{P} \vdash [\$ a_i \ .]]$ (règle XIXI) ; c'est-à-dire $[\forall i \in I, a_i \in {}^{\$}\Theta]$.

16.2 Interpréter un terme

Soit a un terme, *significatif ou non*. Que sait-on de la semi-fonction ${}^{\$}\tau_a^{x_J}$?

16.2.1 Interpréter un terme sans variable

Proposition 28 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition, $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ (il y a au moins un $\mathcal{V}$ -terme). Soit $a \in \wedge T(\mathcal{V})$.

${}^{\$}\tau_a$ est cette ${}^{\$}\Theta$ -semi-constante :

si $[\$ a \ .]$ n'est pas un $\mathcal{P}$ -théorème,

alors $\text{Dom } {}^{\$}\tau_a = \emptyset$ (semi-constante vide) ;

sinon $\text{Dom } {}^{\$}\tau_a = ({}^{\$}\Theta)^0$ et ${}^{\$}\tau_a \diamond = a \ (\in {}^{\$}\Theta)$.

Preuve

Preuve représentative.

On procède par récurrence.

- a est atomique

Le $\mathcal{V}$ -terme a est une séquence $[e]$, $e \in \mathcal{F}_0$. On sait que ${}^{\$}\tau_e = {}^{\$}\phi_e$ (voir p. 32).

• **a** n'est pas atomique

Le $\mathcal{V}$ -terme **a** est une séquence $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\Delta\mathcal{T}(\mathcal{V})]$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE

$\forall i \in I$, ${}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i}$ est cette ${}^\$ \Theta$ -semi-constante :

si $[\$ \ \mathbf{a}_i \ .]$ n'est pas un $\mathcal{P}$ -théorème,

alors $\text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} = \emptyset$;

sinon $\text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} = ({}^\$ \Theta)^0$ et ${}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i$.

On suppose d'abord que $[\$ \ \mathbf{f} \ \mathbf{a}_I \ .]$ n'est pas un $\mathcal{P}$ -théorème. Donc $(\mathbf{a}_i)_I \notin \text{Dom } {}^\$ \phi_{\mathbf{f}}$. On considère les semi-constantes ${}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i}$ ($i \in I$).

— Ou l'une d'elles est vide, c'est-à-dire $\exists i \in I$, $\text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} = \emptyset$.

— Ou aucune d'elles n'est vide. On se rappelle alors que, $\forall i \in I$, ${}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i$

(hypothèse de récurrence) ; donc $({}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I = (\mathbf{a}_i)_I \notin \text{Dom } {}^\$ \phi_{\mathbf{f}}$.

Dans l'un ou l'autre cas, ${}^\$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}$ est vide (voir p. 32).

On suppose maintenant que $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{f} \ \mathbf{a}_I \ .]$. Donc $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^\$ \phi_{\mathbf{f}}$. Et, $\forall i \in I$, $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}_i \ .]$ (règle XIXI) ; donc $\forall i \in I$, $\text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} = ({}^\$ \Theta)^0$ et ${}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i$ (hypothèse de récurrence). Le multiplet $({}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I = (\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^\$ \phi_{\mathbf{f}}$. On se rappelle alors que $\text{Dom } {}^\$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} = ({}^\$ \Theta)^0$ et que

$${}^\$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} \diamond = {}^\$ \phi_{\mathbf{f}}({}^\$ \tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_I = {}^\$ \phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$$

(voir p. 32). ■

16.2.2 Interpréter un terme dans lequel apparaît au moins une variable

Proposition 29 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit **a** un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$, $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

${}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ est cette semi-fonction $({}^\$ \Theta)^m \rightarrow {}^\$ \Theta$:

$$\text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \{(\mathbf{d}_j)_J \in ({}^\Delta\mathcal{T})^m \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .]\}$$

et

$$\forall (\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}, \quad {}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$$

Remarquer — L'ensemble $\{(\mathbf{d}_j)_J \in ({}^\Delta\mathcal{T})^m \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .]\}$ est un sous-ensemble de $({}^\$ \Theta)^m$. En effet, si $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .]$, alors $[\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{d}_j \ .]]$ (règle XIXI) ; c'est-à-dire

$$\forall j \in J, \mathbf{d}_j \in {}^\$ \Theta$$

Preuve de la proposition

Pour saisir l'idée, lire la preuve de la proposition 28, qui est une variante plus simple.

On raisonne par récurrence.

I — $\mathbf{a}$ est atomique

$\mathbf{a} = [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. $\$ \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \text{Id}_{(\$ \Theta)}$. On vérifie que

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{d} \in {}^\wedge \mathcal{T} \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{x} \{\mathbf{d} @ \mathbf{x}\} .]\} \\ &= \{\mathbf{d} \in {}^\wedge \mathcal{T} \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{d} .]\} = \$ \Theta = \text{Dom } \$ \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

et que

$$\forall \mathbf{d} \in \text{Dom } \$ \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} = \$ \Theta, \mathbf{x} \{\mathbf{d} @ \mathbf{x}\} = \mathbf{d} = \text{Id}_{(\$ \Theta)}(\mathbf{d}) = \$ \tau_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{d})$$

II — $\mathbf{a}$ n'est pas atomique

$\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^\wedge \mathcal{T}]$.

$\forall i \in I$, j'appelle " J_i " le sous-ensemble $\{j \in J \mid \mathbf{x}_j \in \text{Var } \mathbf{a}_i\}$;

$\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$. J'appelle " m_i " le cardinal de J_i .

J'appelle " I_s " (sans variable) le sous-ensemble $\{i \in I \mid \text{Var } \mathbf{a}_i = \emptyset\}$.

Puisqu'au moins une variable apparaît dans $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $I - I_s \neq \emptyset$.

$\forall i \in I_s$, on connaît les $\$ \tau_{\mathbf{a}_i}$ (proposition 28 ; voir p. 150).

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I - I_s$,

(i) $\text{Dom } \$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} = \{(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} \in ({}^\wedge \mathcal{T})^{m_i} \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i} .]\}$ et

(ii) $\forall (\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}, \$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{J_i} = \mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$.

II-1 — $\text{Dom } \$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$

On sait que

$$\begin{aligned} \text{Dom } \$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = & \{ (\mathbf{d}_j)_J \in (\$ \Theta)^m \\ & \mid \forall i \in I, (\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} \\ & \text{et } (\$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \$ \phi_{\mathbf{f}} \\ & \} \end{aligned}$$

(voir p. 34). On considère l'ensemble

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\mathbf{d}_j)_J \in ({}^\wedge \mathcal{T})^m \mid \mathcal{P} \vdash [\$ [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} .]\} \\ &= \{(\mathbf{d}_j)_J \in ({}^\wedge \mathcal{T})^m \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} [\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}]^{i \in I} .]\} \end{aligned}$$

On veut vérifier que $\text{Dom } \$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = D_1$.

• $\text{Dom } \$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq D_1$?

Si $\text{Dom } \$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } \$ \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$ ($\subseteq (\$ \Theta)^m \subseteq ({}^\wedge \mathcal{T})^m$). $[\forall i \in I, (\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}]$

et

$$(\$ \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \$ \phi_{\mathbf{f}}$$

- $\forall i \in I_s, {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i} \ (J_i = \emptyset)$ (proposition 28).
- $\forall i \in I - I_s, {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} = \mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$ (hypothèse de récurrence).

Donc $(\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$; c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} [\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}]^{i \in I} .]$$

On vient de vérifier que $(\mathbf{d}_j)_J \in D_1$.

- $D_1 \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$?

Si $D_1 = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\mathbf{d}_j)_J \in D_1$.

$$\mathcal{P} \vdash [\$ [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} .] \quad (16.1)$$

$\forall j \in J$, $\mathbf{d}_j$ est un sous-terme de $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$; donc $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{d}_j .]$ (règle XIXI) ; c'est-à-dire $\mathbf{d}_j \in {}^{\$}\Theta$.

— $\forall i \in I_s$, $\mathbf{a}_i$ est un sous-terme de $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$; donc $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a}_i .]$ (règle XIXI) ; on se rappelle alors que $(J_i = \emptyset)$

$$(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} = \diamond \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}$$

et que

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$$

(proposition 28).

— $\forall i \in I - I_s$, $\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$ est un sous-terme de $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$; donc $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i} .]$ (règle XIXI) ; on se rappelle alors que

$$(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

et que

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} = \mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}$$

(hypothèse de récurrence).

Donc

(i) $\forall i \in I$, $(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$ et

(ii) $({}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i})_{i \in I} = (\mathbf{a}_i\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$ (16.1).

On vient de vérifier que

$$(\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

II-2 — $\forall (\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}, {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} ?$

Si $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$. On vérifie que

$${}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J = {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}({}^{\$}\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\mathbf{d}_j)_{j \in J_i})_{i \in I} = {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i})_{i \in I}$$

(proposition 28 et hypothèse de récurrence). Donc

$$\begin{aligned} & {}^{\$}\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J \\ &= {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i})_{i \in I} = [\mathbf{f} \ [\mathbf{a}_i \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J_i}]^{i \in I}] \\ &= [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \end{aligned}$$

■

Corollaire 10 — (*Mêmes hypothèses*)

$$\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta \Leftrightarrow (\mathbf{x}_j)_J \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

Preuve. — $\mathbf{a} \{\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \mathbf{a}$. Donc

$$\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \{\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .] \Leftrightarrow (\mathbf{x}_j)_J \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

■

16.3 Le sens d'une formule-existence

Soit $\mathbf{a} \in {}^{\Delta}\mathcal{T}$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$. À quelle condition

$${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .] \quad ?$$

(à quelle condition le magma ${}^{\$}\Theta$ a-t-il la propriété signifiée par la formule $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .] ?$).

△ *Se mettre en garde* — On ne suppose pas que $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .] \in \mathcal{P}$ (que $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$) ; ou que $[\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .] \in \mathcal{P}$!

Proposition 30 — *Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. $\forall \mathbf{a} \in {}^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V})$,*

$${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$$

Preuve

On sait que $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .]$ (voir p. 149). Si

$${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .]$$

c'est-à-dire si $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} = ({}^{\$}\Theta)^0$ (${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}$ est une semi-constante non vide), alors $[\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème (proposition 28 ; voir p. 150).

Si $[\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .]$ est un $\mathcal{P}$ -théorème, alors $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} = ({}^{\$}\Theta)^0$; *c'est-à-dire* ${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{\$} \ \mathbf{a} \ .]$ (même proposition). ■

Proposition 31 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbf{N}^*$. $\forall j \in J$, soit $\mathbf{K}_j \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} & {}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .] \\ \Leftrightarrow & \prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \\ \Leftrightarrow & \forall (\mathbf{d}_j)_J \in (\wedge \mathcal{T})^m, \\ & (\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{K}_j \ .]) \Rightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .] \end{aligned}$$

Preuve

Preuve représentative, et un bon exercice de navigation à travers les différents niveaux de raisonnement.

On sait que

$${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

(définition 34 ; voir p. 96). On sait aussi que

$$\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \{(\mathbf{d}_j)_J \in (\wedge \mathcal{T})^m \mid \mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .]\}$$

(proposition 29 ; voir p. 151), et que

$${}^{\$}\sigma_{\mathbf{K}_j} = \{\mathbf{d}_j \in \wedge \mathcal{T} \mid \mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{K}_j \ .]\}$$

(voir p. 149). Donc

$$\begin{aligned} & \prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \\ \Leftrightarrow & \forall (\mathbf{d}_j)_J \in (\wedge \mathcal{T})^m, \\ & (\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{K}_j \ .]) \Rightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .] \end{aligned}$$

■

Contre-exemple

$\mathcal{E}$ est cette exposition :

- ♣ $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$;
- $\mathcal{S} = \{***, \text{Carre}\}$;
- $\mathcal{F}_1 = \{\text{rac}\}$; $\forall n \in \mathbf{N} - \{1\}$, $\mathcal{F}_n = \emptyset$; on vérifie que $\hat{a} = 1$;
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{z}, \mathbf{k}\}$;
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

⊠

$z :: *** .$
 $k :: \text{Carre} .$
 $\$ \text{ rac } k .$

I — Avec un peu d'attention, on vérifie que

$${}^{\$}\Theta = \{z, k, [\text{rac } k]\}$$

(les termes $[\text{rac } z]$, $[\text{rac rac } k]$, $[\text{rac rac } z]$ etc. ne sont pas significatifs) ;
que

$${}^{\$}\sigma_{\text{Carre}} = \{k\}$$

et que

$$\text{Dom } {}^{\$}\phi_{\text{rac}} = \{k\}$$

Donc

$${}^{\$}\Theta \models [z :: \text{Carre} . \$ \text{ rac } z .]$$

(définition 34 ; voir p. 96).

II — La formule $[\$ \text{ rac } z .]$ n'est pas un $\mathcal{P}$ -théorème ! Car si elle l'était, tout $\mathcal{E}$ -modèle Ω aurait cette propriété :

$$\Omega \models [z :: *** . \$ \text{ rac } z .]$$

(théorème de correction ; remarquer que le $\mathcal{P}$ -confinement de la variable z est $[z :: *** .]$). Or on trouve un $\mathcal{E}$ -modèle Ω qui ne l'a pas :

- ♣ $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi) ; \Sigma = \{\sigma_s\}_{s \in \mathcal{S}}, \Phi = \{\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}} ;$
- $\Omega = \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) ;
- $\sigma_{\text{Carre}} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} ;$
- ϕ_{rac} est cette semi-fonction (racine carrée) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ \sigma_{\text{Carre}} \ni m & \mapsto & \sqrt{m} \end{array}$$

III — $[z :: \text{Carre} . \$ \text{ rac } z .]$ est donc une séquence $[[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .]$ qui a ces deux qualités :

- ${}^{\$}\Theta \models [[x_j :: K_j .]^{j \in J} \$ a .]$ (elle signifie une propriété de ${}^{\$}\Theta$) ;
- $[\$ a .]$ n'est pas un $\mathcal{P}$ -théorème.

On a aussi constaté que $[z :: \text{Carre} .]$ n'est pas le $\mathcal{P}$ -confinement de z . Ce n'est pas par hasard... □

Corollaire 11 — (Mêmes hypothèses) Si en outre $[x_j :: H_j .]$ est le $\mathcal{P}$ -confinement de la variable x_j ($j \in J$),

$${}^{\$}\Theta \models [[x_j :: H_j .]^{j \in J} \$ a .] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \vdash [\$ a .] \quad \Leftrightarrow \quad a \in {}^{\$}\Theta$$

Preuve

On sait que $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$ (voir p. 149).

i — On suppose que ${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$. Donc

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{d}_j)_J \in (\wedge \mathcal{T})^m, \\ (\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ .]) \Rightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .] \end{aligned}$$

(proposition 31). Le multiplet $(\mathbf{d}_j)_J = (\mathbf{x}_j)_J$ est-il un bon candidat ? Oui : en effet $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ (*hypothèse*), donc $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j : \mathbf{H}_j \ .]$ (règle CONF A).

Donc $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \{\mathbf{x}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .]$, c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]$.

ii — Réciproque

On suppose que $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]$. On vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{d}_j)_J \in (\wedge \mathcal{T})^m, \\ (\forall j \in J, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ .]) \Rightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .] \end{aligned}$$

(règle SEXI — $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ par hypothèse). Donc

${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$ (proposition 31). ■

16.4 La super-congruence remarquable, $\equiv$

La relation binaire $\equiv$ est une ${}^{\$}\Theta$ -super-congruence remarquable.

Définition 45 (Relation $\equiv$) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; soit $\mathbf{b}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme.

On dit que $\mathbf{a}$ est lié à $\mathbf{b}$ par $\equiv$ pour exprimer que

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$$

N.B. — On vérifie que, si $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$ et $\mathbf{b} \in {}^{\$}\Theta$ (règle ID EX).

Théorème 23 — La ${}^{\$}\Theta$ -relation binaire $\equiv$ est une ${}^{\$}\Theta$ -super-congruence.

Preuve

$\equiv, {}^{\$}\Theta$ -relation binaire, est une relation d'équivalence

- Elle est réflexive (règle EXID).
- Elle est symétrique (règle déduite ISY).
- Elle est transitive (règle déduite ID ET).

$\equiv$ est compatible avec les opérations fondamentales de ${}^{\$}\Theta$

On suppose que $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ (sinon on a fini). On suppose qu'il y a un symbole $\mathbf{f} \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}} \neq \emptyset$ (sinon on a fini) ; $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) ; $I = \{1, \dots, n\}$.

Soient $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$. On suppose qu'il y a un multiplet $(\mathbf{b}_i)_I \in ({}^{\$}\Theta)^n$, $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \equiv \mathbf{b}_i]$ (sinon on a fini). On veut vérifier que $(\mathbf{b}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$ et que ${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I \equiv {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I$ (définition 27 ; voir p. 82).

Le multiplet $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$, donc

$$\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} \mathbf{a}_I .]$$

$\forall i \in I, \mathbf{a}_i \equiv \mathbf{b}_i$, donc

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i .]$$

Par conséquent (règle déduite RERISO),

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{f} \mathbf{a}_I = \mathbf{f} \mathbf{b}_I .]$$

donc (règle IDEX)

$$\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} \mathbf{b}_I .]$$

c'est-à-dire $(\mathbf{b}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$, et ${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I \equiv {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I$. ■

On peut maintenant considérer le magma-quotient ${}^{\$}\Theta/\equiv$:

$${}^{\$}\Theta/\equiv = ({}^{\$}\Theta/\equiv, {}^{\$}\overline{\Sigma}, {}^{\$}\overline{\Phi}) ; {}^{\$}\overline{\Sigma} = \{{}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}}, {}^{\$}\overline{\Phi} = \{{}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}.$$

Voici une propriété particulière du couple $({}^{\$}\Theta, {}^{\$}\Theta/\equiv)$ qu'on aura bientôt besoin de connaître.

Proposition 32 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. On considère ${}^{\$}\Theta$ (le $\mathcal{V}$ -magma des termes significatifs), $\equiv$ (la ${}^{\$}\Theta$ -super-congruence remarquable), et ${}^{\$}\Theta/\equiv$.

$$\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \forall \mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta,$$

$$\overline{\mathbf{a}} \in {}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{S}} \Leftrightarrow \mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$$

(${}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$ est saturé pour $\equiv$).

Preuve — Si $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$, alors $\overline{\mathbf{a}} \in {}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$ (voir p. 72).

Réciproque — Soit $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Soit $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$, $\overline{\mathbf{a}} \in {}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$. Il existe $\mathbf{b} \in {}^{\$}\Theta$,

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{b} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$$

(voir p. 72). C'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{b} = \mathbf{a} .] \quad \wedge \quad \mathcal{P} \vdash [\mathbf{b} : \mathbf{S} .]$$

Donc $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} .]$ (règle RAP) ; c'est-à-dire $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$. ■

16.5 Un $\mathcal{E}$ -modèle remarquable, ${}^{\$}\Theta/\equiv$

Théorème 24 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition. Le magma-quotient ${}^{\$}\Theta/\equiv$ (qui est fonction de $\mathcal{E}$) est un $\mathcal{E}$ -modèle.

Pour prouver ce théorème, on prouve d'abord deux lemmes.

Lemme 6 — Soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale qui n'est pas une formule-identité ; sa $\mathcal{P}$ -garniture est une séquence $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$.

$$\mathcal{P} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow {}^{\$}\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \mathbf{A}]$$

Preuve

Analyse par cas, chacun d'eux étant indépendant des autres. Cette preuve est importante ; lire au moins quelques paragraphes pour saisir l'idée.

Soit $\mathbf{A}$ une formule *germinale* qui n'est pas une formule-identité, $\mathcal{P} \vdash \mathbf{A}$. On veut vérifier que ${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$.

I — 1^{er} cas — $\mathbf{A}$ est une formule-existence

$$\mathbf{A} = [\$ \ \mathbf{a} \ .], \ \mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}.$$

I-1 — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

Puisque $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a} \ .]$, ${}^{\$}\Theta \models [\$ \ \mathbf{a} \ .]$ (proposition 30 ; voir p. 154).

I-2 — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

$\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$. $\forall j \in J$, le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ est $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ ($\mathbf{H}_j \in \mathcal{S}$) ; $\mathbf{X}_{\mathbf{A}} = [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J}$.

Puisque $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a} \ .]$, ${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .]$ (corollaire 11 ; voir p. 156).

II — 2^e cas — $\mathbf{A}$ est une formule-appartenance

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .], \ \mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}, \ \mathbf{E} \in \mathcal{S}.$$

II-1 — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

Puisque $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$, $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a} \ .]$ (règle APEX) et $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$.

Donc $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} = ({}^{\$}\Theta)^0$ et ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$ (proposition 28 ; voir p. 150).

C'est-à-dire

$${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$$

II-2 — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

$\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$. $\forall j \in J$, le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ est $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ ($\mathbf{H}_j \in \mathcal{S}$) ; $\mathbf{X}_{\mathbf{A}} = [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J}$.

On veut vérifier que

$${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$$

Puisque $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$, $\mathcal{P} \vdash [\$ \ \mathbf{a} \ .]$ (règle APEX) ; donc

${}^{\$}\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .]$ (cette preuve, I-1). Il reste à vérifier que

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \left(\prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j} \right) \subseteq {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$$

Soit $(\mathbf{d}_j)_J \in \prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j} (\subseteq \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J})$.

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in J}$$

(proposition 29 ; voir p. 151). $\forall j \in J, \mathbf{d}_j \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j}$, c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j .]$; donc $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_J : \mathbf{E} .]$ (règle SAP) ; c'est-à-dire

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{d}_j)_J = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$$

III — 3^e cas — $\mathbf{A}$ est une formule-inclusion

$\mathbf{A} = [\mathbf{E} =< \mathbf{F} .]$, $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

Soit $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$. $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{E} .]$ et $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{E} =< \mathbf{F} .]$; donc

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{F} .]$$

(règle APINA) ; c'est-à-dire $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$.

On vient de vérifier que ${}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}} \subseteq {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$; c'est-à-dire

$${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{E} =< \mathbf{F} .]$$

IV — 4^e cas — $\mathbf{A}$ est une formule-conduit

$\mathbf{A} = [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I >> \mathbf{F} .]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$, $[\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}]$ et $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

Soit $(\mathbf{d}_i)_I \in \prod_{i \in I} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}_i}$. $[\forall i \in I, \mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_i : \mathbf{E}_i .]]$ et $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I >> \mathbf{F} .]$;

donc

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{f} \mathbf{d}_I : \mathbf{F} .]$$

(règle CAPA) ; donc

$$\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} \mathbf{d}_I .]$$

(règle APEX). C'est-à-dire $(\mathbf{d}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$ et ${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_i)_I = [\mathbf{f} \mathbf{d}_I] \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$. On vient de vérifier que

$$\prod_{i \in I} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}_i} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$$

et que

$${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\prod_{i \in I} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}_i}) \subseteq {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$$

c'est-à-dire

$${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{f} : \mathbf{E}_I >> \mathbf{F} .]$$

■

Lemme 7 — Soit $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$. Soit $\mathbf{b} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$. $\forall j \in J \cup U$, le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ est $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]$ (voir p. 109).

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} .] \Rightarrow {}^{\$}\Theta / \equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} .]$$

Preuve

Preuve dans le même esprit que celle du lemme 6, et *excellent exercice de raisonnement sur les classes d'équivalence*.

Soit $\mathbf{a} \in {}^\wedge\mathcal{T}$, soit $\mathbf{b} \in {}^\wedge\mathcal{T}$, $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$. On veut vérifier ceci :

$$(I-a) \ \$\Theta \equiv \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \$\mathbf{a} \ . \rrbracket \text{ et}$$

$$(I-b) \ \$\Theta \equiv \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in U} \ \$\mathbf{b} \ . \rrbracket ;$$

$$(II) \ \forall (\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \$\overline{\sigma}_{\mathbf{H}_j}, \ \$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\gamma_j)_{j \in J} = \$\overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\gamma_j)_{j \in U}.$$

I — $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$; donc $\mathcal{P} \vdash [\ \$\mathbf{a} \ .]$ et $\mathcal{P} \vdash [\ \$\mathbf{b} \ .]$ (règle IDEX). Donc

$$\$ \Theta \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \$\mathbf{a} \ . \rrbracket \quad (16.2)$$

et

$$\$ \Theta \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in U} \ \$\mathbf{b} \ . \rrbracket \quad (16.3)$$

(lemme 6). Donc

$$\$ \Theta / \equiv \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ \$\mathbf{a} \ . \rrbracket \quad (16.4)$$

et

$$\$ \Theta / \equiv \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in U} \ \$\mathbf{b} \ . \rrbracket \quad (16.5)$$

(corollaire 6 ; voir p. 105).

$$\text{II} \text{ — } \forall (\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \$\overline{\sigma}_{\mathbf{H}_j}, \ \$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\gamma_j)_{j \in J} = \$\overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\gamma_j)_{j \in U} ?$$

II-1 — 1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} = \emptyset$

$\diamond \in \text{Dom } \$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}$ (16.4), $\diamond \in \text{Dom } \$\overline{\tau}_{\mathbf{b}}$ (16.5), $\diamond \in \text{Dom } \$\tau_{\mathbf{a}}$ (16.2) et $\diamond \in \text{Dom } \$\tau_{\mathbf{b}}$ (16.3). On veut vérifier que $\$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}\diamond = \$\overline{\tau}_{\mathbf{b}}\diamond$.

On sait que $\overline{(\$ \tau_{\mathbf{a}}\diamond)} = \$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}\diamond$ et que $\overline{(\$ \tau_{\mathbf{b}}\diamond)} = \$\overline{\tau}_{\mathbf{b}}\diamond$ (théorème 15 ; voir p. 75). On sait que $\$\tau_{\mathbf{a}}\diamond = \mathbf{a}$ et que $\$\tau_{\mathbf{b}}\diamond = \mathbf{b}$ (proposition 28 ; voir p. 150). On sait enfin que $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (définition 45 ; voir p. 157) ; c'est-à-dire $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$. Donc

$$\$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}\diamond = \overline{(\$ \tau_{\mathbf{a}}\diamond)} = \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}} = \overline{(\$ \tau_{\mathbf{b}}\diamond)} = \$\overline{\tau}_{\mathbf{b}}\diamond$$

II-2 — 2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} \neq \emptyset$ ($J \cup U \neq \emptyset$)

Soit

$$(\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \$\overline{\sigma}_{\mathbf{H}_j}$$

Il existe $(\mathbf{d}_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \$\sigma_{\mathbf{H}_j}$,

$$(\gamma_j)_{j \in J \cup U} = (\overline{[\mathbf{d}_j]})_{j \in J \cup U}$$

(voir p. 72 ; $\mathbf{d}_j$ est un représentant de la classe γ_j).

$(\gamma_j)_J \in \text{Dom } \$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (16.4), $(\gamma_j)_{j \in U} \in \text{Dom } \$\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$ (16.5), $(\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } \$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (16.2)
et $(\mathbf{d}_j)_{j \in U} \in \text{Dom } \$\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$ (16.3).

On sait que

$$\overline{\$_{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}}(\mathbf{d}_j)_J} = \$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{d}_j]})_J$$

et que

$$\overline{\$_{\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}}(\mathbf{d}_j)_{j \in U}} = \$\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\overline{[\mathbf{d}_j]})_{j \in U}$$

(théorème 15 ; voir p. 75). On sait que

$$\$_{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}}(\mathbf{d}_j)_J = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J$$

et que

$$\$_{\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}}(\mathbf{d}_j)_{j \in U} = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U}$$

(propositions 28 et 29 ; voir pp. 150 et 151).

$\forall j \in J \cup U, \mathbf{d}_j \in \$\sigma_{\mathbf{H}_j}$; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ .]$. Donc

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U} \ .]$$

(règle SID) ; c'est-à-dire $\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J \equiv \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U}$.

Donc

$$\begin{aligned} & \$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\gamma_j)_J \\ &= \$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{d}_j]})_J = \overline{\$_{\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}}(\mathbf{d}_j)_J} = \overline{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J} \\ &= \overline{\mathbf{b}\{\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_{j \in U}} = \overline{\$_{\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}}(\mathbf{d}_j)_{j \in U}} = \$\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\overline{[\mathbf{d}_j]})_{j \in U} \\ &= \$\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\gamma_j)_{j \in U} \end{aligned}$$

■

Preuve du théorème 24

$\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. S'il n'y a pas de $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale élément de $\mathcal{P}$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{A}$ étant une formule germinale. J'appelle “ $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ ” sa $\mathcal{P}$ -garniture.

1 — Si $\mathbf{A}$ n'est pas une formule-identité, on sait que ${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$ (lemme 6).
Donc

$${}^{\$}\Theta / \equiv \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

(corollaire 6 ; voir p. 105).

2 — Si $\mathbf{A}$ est une formule-identité, on sait immédiatement que

$${}^{\$}\Theta / \equiv \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

(lemme 7).

■

Chapitre 17

Le théorème de complétude

Le $\mathcal{E}$ -modèle ${}^{\$}\Theta/\equiv$ est “exemplaire” : toute formule qui signifie une propriété de ${}^{\$}\Theta/\equiv$ est un $\mathcal{P}$ -théorème ! Pour le vérifier, on prouve d’abord deux lemmes.

On prouvera ensuite le *théorème de complétude* comme un simple corollaire : en procédant par symboles et règles d’inférence, on peut déduire tout ce que l’on veut (recouvrement) ; on ne déduit rien d’autre que ce que l’on veut (correction).

C’est d’abord pour prouver le théorème de complétude qu’on a fait l’effort de révéler un modèle “exemplaire”. Cette stratégie est classique [7]. On vérifiera plus tard que ${}^{\$}\Theta/\equiv$ a cette autre qualité : c’est un modèle “libre” (chapitre 19).

Lemme 8 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition, $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ (il y a au moins un $\mathcal{V}$ -terme). Soit $a \in {}^{\Delta}\mathcal{T}(\mathcal{V})$.

On considère ${}^{\$}\Theta$ (le magma des termes significatifs), $\equiv$ (la ${}^{\$}\Theta$ -super-congruence remarquable), et ${}^{\$}\Theta/\equiv$. Et l’on considère ${}^{\$}\tau_a$ (on a interprété a par référence à ${}^{\$}\Theta/\equiv$; ${}^{\$}\tau_a$ est une ${}^{\$}\Theta/\equiv$ -semi-constante).

i — ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\$ a .] \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ a .] \Leftrightarrow a \in {}^{\$}\Theta$.

ii — Si ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\$ a .]$, alors ${}^{\$}\tau_a$ est une semi-constante non vide et ${}^{\$}\tau_{a\Diamond} = \bar{a}$ (classe d’équivalence du terme a).

Preuve

i — On sait que

$$\mathcal{P} \vdash [\$ a .] \Leftrightarrow a \in {}^{\$}\Theta$$

(définition ; voir p. 149). On sait aussi que

$$\mathcal{P} \vdash [\$ a .] \Rightarrow {}^{\$}\Theta/\equiv \models [\$ a .]$$

puisque ${}^{\$}\Theta/\equiv$ est un $\mathcal{E}$ -modèle (théorème 24 et théorème de correction ; voir pp. 158 et 139). Il reste à vérifier que

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\$ a .] \Rightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ a .]$$

Si ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\$ \mathbf{a} \ .]$, $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} = ({}^{\$}\Theta/\equiv)^0 (= \{\diamond\})$ (définition). Or $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\diamond}$ (théorème 17 ; voir p. 83) ; donc $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} = \{\diamond\} = ({}^{\$}\Theta)^0$, c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]$ (proposition 28 ; voir p. 150).

ii — On suppose que ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\$ \mathbf{a} \ .]$. On vient d'observer que ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}$ et ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}$ sont des semi-constantes non vides.

Quel est l'objet ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\diamond}$? On sait que ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\diamond} = \mathbf{a}$ (proposition 28 ; voir p. 150), et que ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\diamond} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\diamond}$ (théorème 15 ; voir p. 75). Donc

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\diamond} = \bar{\mathbf{a}}$$

■

Lemme 9 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme dans lequel apparaît au moins une variable ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

$\forall j \in J$, le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ est $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ (voir p. 109) ; la $\mathcal{P}$ -garniture de la formule $[\$ \mathbf{a} \ .]$ est donc la séquence $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J}$.

On considère ${}^{\$}\Theta/\equiv$ et la semi-fonction ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : ({}^{\$}\Theta/\equiv)^m \rightarrow {}^{\$}\Theta/\equiv$.

i — ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$.

ii — Si ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$, alors le multiplet de classes d'équivalence

$$(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

et ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} = \bar{\mathbf{a}}$.

Preuve

On raisonne de la même façon (preuve du lemme 8 ; voir *supra*).

i — Il suffit de vérifier que

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .] \Leftrightarrow \mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]$$

Si ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$,

$$\prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

(définition). $\forall j \in J$, $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .] \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{x}_j : \mathbf{H}_j \ .]$ (règle CONFA ; voir p. 115), c'est-à-dire $[\mathbf{x}_j] \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j}$ (voir p. 149). Donc $\overline{[\mathbf{x}_j]} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j}$ (définition ; voir p. 72), donc

$$(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

Puque $\equiv$ est une super-congruence, $(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (théorème 17 ; voir p. 83), c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \{\mathbf{x}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \ .]$$

(proposition 29 ; voir p. 151). Il reste à observer que $\mathbf{a}\{\mathbf{x}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \mathbf{a}$.

ii — On suppose que ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} .]$. On vient d'observer que $(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ et que $([\mathbf{x}_j])_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$.

Quel est l'objet ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J}$? On sait que

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}([\mathbf{x}_j])_{j \in J} = \mathbf{a}\{\mathbf{x}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \mathbf{a}$$

(proposition 29 ; voir p. 151) ; et que $\overline{{}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}([\mathbf{x}_j])_{j \in J}} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J}$ (théorème 15 ; voir p. 75). Donc

$${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} = \overline{\mathbf{a}}$$

■

Remarque relative aux lemmes 8 et 9 — Grâce à la notation qu'on a adoptée (chapitre annexe "Notation"), on peut ne pas distinguer les cas $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$ (lemme 8) et $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$ (lemme 9). En effet,

$$(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in \emptyset} = \diamond$$

Théorème 25 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. On considère ${}^{\$}\Theta$ (le magma des termes significatifs), $\equiv$ (la ${}^{\$}\Theta$ -super-congruence remarquable), et ${}^{\$}\Theta/\equiv$.

Soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale ; la $\mathcal{P}$ -garniture de $\mathbf{A}$ est une séquence $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$.

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \mathbf{A}] \Rightarrow \mathcal{P} \vdash \mathbf{A}$$

Preuve

Analyse par cas, chacun d'eux étant indépendant des autres. Cette preuve est une synthèse (il s'agit surtout de rassembler les morceaux).

I — $\mathbf{A}$ est une formule-existence

$\mathbf{A} = [\$ \mathbf{a} .]$, $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$. $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$ ($\text{Var } \mathbf{a}$ peut être vide !).

$\mathbf{X}_{\mathbf{A}} = [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J}$.

Si ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} .]$, alors $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} .]$ (lemmes 8 et 9 ; voir pp. 163 et 164).

II — $\mathbf{A}$ est une formule-appartenance

$\mathbf{A} = [\mathbf{a} : \mathbf{E} .]$, $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$. $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$.

$\mathbf{X}_{\mathbf{A}} = [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J}$.

On suppose que

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J} \mathbf{a} : \mathbf{E} .]$$

c'est-à-dire

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} .] \wedge {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j}) \subseteq {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$$

(définition). Donc $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$, $(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, et $\overline{\mathbf{a}} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$ (lemmes 8 et 9 ; voir pp. 163 et 164). Donc $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$ (proposition 32 ; voir p. 158), c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{E} .]$$

(voir p. 149).

III — $\mathbf{A}$ est une formule-identité

$\mathbf{A} = [\mathbf{a} = \mathbf{b} .]$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in {}^{\wedge}T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$. $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$; $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$.
 $\mathbf{X}_{\mathbf{A}} = [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]_{j \in J \cup U}$.

On suppose que

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]_{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} .]$$

c'est-à-dire

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]_{j \in J} {}^{\$}\mathbf{a} .] \quad \wedge \quad {}^{\$}\Theta/\equiv \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]_{j \in U} {}^{\$}\mathbf{b} .] \quad (17.1)$$

et

$$\forall (\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_j}, \quad {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\gamma_j)_{j \in J} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\gamma_j)_{j \in U} \quad (17.2)$$

On déduit d'abord (17.1) que $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$, $(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, et $\overline{\mathbf{a}} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J}$; et que $\mathbf{b} \in {}^{\$}\Theta$, $(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in U} \in \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$, et $\overline{\mathbf{b}} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in U}$ (lemmes 8 et 9 ; voir pp. 163 et 164). On déduit maintenant (17.2) que

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$$

(choisir $\gamma_j = \overline{[\mathbf{x}_j]}$). Donc $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} .]$$

(définition 45 ; voir p. 157).

IV — $\mathbf{A}$ est une formule-inclusion

$\mathbf{A} = [\mathbf{E} =< \mathbf{F} .]$, $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

Plutôt que de coder la formule-inclusion $\mathbf{A}$ en une formule-appartenance et appliquer ce que l'on sait (proposition 24 ; voir p. 110), je préfère vérifier directement.

On suppose que

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [\mathbf{E} =< \mathbf{F} .]$$

c'est-à-dire ${}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}} \subseteq {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$. Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, on peut trouver une variable $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$, $[\mathbf{y} :: \mathbf{E} .] \in \mathcal{P}$; on sait que $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{y} :: \mathbf{E} .]$ (règle CONFA ; voir p. 115), c'est-à-dire $[\mathbf{y}] \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$ (voir p. 149). Donc $[\mathbf{y}] \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{E}}$; et $[\mathbf{y}] \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$ (définition). On déduit que $[\mathbf{y}] \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{F}}$ (proposition 32 ; voir p. 158), c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{y} : \mathbf{F} .]$. Donc

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{E} =< \mathbf{F} .]$$

(règle IN ; voir p. 117).

$V - A$ est une formule-conduit

$A = [f : E_I \gg F .]$, $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$, $[\forall i \in I, E_i \in \mathcal{S}]$ et $F \in \mathcal{S}$.

On suppose que

$${}^{\$}\Theta/\equiv \models [f : E_I \gg F .]$$

c'est-à-dire

$$\prod_{i \in I} {}^{\$}\sigma_{E_i} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_f \quad \wedge \quad {}^{\$}\bar{\phi}_f(\prod_{i \in I} {}^{\$}\sigma_{E_i}) \subseteq {}^{\$}\sigma_F$$

Puisque $\mathcal{E}$ est une exposition, on peut trouver une suite de variables

$i \mapsto y_i \in \mathcal{X}$ ($i \in I$) ayant cette qualité :

- les y_i sont distinctes deux à deux ;
- $\forall i \in I, [y_i :: E_i .] \in \mathcal{P}$.

On déduit que $\forall i \in I, [y_i] \in {}^{\$}\sigma_{E_i}$ (règle CONFA ; voir p. 115), puis que $\overline{[y_i]} \in {}^{\$}\sigma_{E_i}$ (définition). Donc

$$(\overline{[y_i]})_{i \in I} \in \text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_f \quad \wedge \quad {}^{\$}\bar{\phi}_f(\overline{[y_i]})_{i \in I} \in {}^{\$}\sigma_F$$

Parce que $\equiv$ est une super-congruence, $([y_i])_{i \in I} \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_f$ (proposition 3 ; voir p. 83) ; donc ${}^{\$}\phi_f([y_i])_{i \in I} = [f y_I] \in {}^{\$}\Theta$ (définition ; voir p. 150) ; et

$${}^{\$}\bar{\phi}_f(\overline{[y_i]})_{i \in I} = \overline{{}^{\$}\phi_f([y_i])_{i \in I}} = \overline{[f y_I]}$$

Donc $\overline{[f y_I]} \in {}^{\$}\sigma_F$. Donc $[f y_I] \in {}^{\$}\sigma_F$ (proposition 32 ; voir p. 158) ; c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [f y_I : F .]$$

On se rappelle alors que

$$\mathcal{P} \vdash [f : E_I \gg F .]$$

(règle CO ; voir p. 118). Ouf ! ■

L'ensemble des théorèmes recouvre celui des formules “ vraies ”...

Corollaire 12 (Théorème de recouvrement) — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit A une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale ; sa $\mathcal{P}$ -garniture est une séquence X_A .

Si, quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle,

$$\Omega \models [X_A . A]$$

alors

$$\mathcal{P} \vdash A$$

Preuve — Si, quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle, $\Omega \models [X_A . A]$, alors, puisque ${}^{\$}\Theta/\equiv$ est un $\mathcal{E}$ -modèle (théorème 24 ; voir p. 158), ${}^{\$}\Theta/\equiv \models [X_A . A]$, Donc $\mathcal{P} \vdash A$ (théorème 25). ■

L'ensemble des théorèmes est l'ensemble des formules “ vraies ”...

Corollaire 13 (Théorème de complétude) — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$. Soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale ; sa $\mathcal{P}$ -garniture est une séquence $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$.

$$\mathcal{P} \vdash \mathbf{A}$$

si et seulement si, quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle,

$$\Omega \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

Preuve — Si $\mathcal{P} \vdash \mathbf{A}$, alors, quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle, $\Omega \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$ (théorème de correction ; voir p. 139). Si, quel que soit Ω un $\mathcal{E}$ -modèle, $\Omega \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$, alors $\mathcal{P} \vdash \mathbf{A}$ (théorème de recouvrement). ■

Partie III

Exploration

Chapitre 18

Premiers constats

Être complet, c'est, d'un procédé de calcul formel, une qualité primordiale. Puisque l'algèbre G a cette qualité (chapitre 17), on pressent qu'elle est intéressante et on est tenté d'explorer d'autres parties du sujet.

18.1 L'algèbre universelle toute entière est comprise dans l'algèbre G

L'algèbre universelle toute entière est comprise dans l'algèbre G . En effet, à chaque magma " universel " correspond un unique $\mathcal{V}$ -magma qui a les mêmes propriétés (on peut plonger l'algèbre universelle dans l'algèbre G).

18.1.1 Coder une théorie égalitaire (algèbre universelle)

On peut coder toute théorie " égalitaire " (algèbre universelle) en une exposition.

Exemple

La classe des groupes (théorie des groupes) est une classe fameuse de magmas universels (algèbre universelle). On peut la présenter ainsi...



La classe des groupes est la classe des $\mathcal{F}$ -magmas universels,

♣ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2,$

• $\mathcal{F}_0 = \{e\}, \mathcal{F}_1 = \{\text{inv}\}, \mathcal{F}_2 = \{*\},$

qui ont ces propriétés bien connues [13] : (x, y et z sont trois variables)

$$* x (* y z) = * (* x y) z .$$

$$* x e = x .$$

$$* e x = x .$$

$$* x (\text{inv } x) = e .$$

$$* (\text{inv } x) x = e .$$

Cette même classe des groupes, on peut aussi la présenter ainsi. Elle est la classe des $\mathcal{E}$ -modèles, $\mathcal{E}$ étant cette exposition :

♣ $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P}) ; \mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a) ;$

• $\mathcal{S} = \{***\} ;$

• $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces formules :

$x :: *** . \quad y :: *** . \quad z :: *** .$
 $\$ e .$
 $\$ \text{inv } x .$
 $\$ * x y .$

$* x (* y z) = * (* x y) z .$
 $* x e = x .$
 $* e x = x .$
 $* x (\text{inv } x) = e .$
 $* (\text{inv } x) x = e .$

Outre les (cinq) formules déjà vues, il y a trois formules-confinement et trois formules-existence (premières lignes) : on a précisé le sens de chaque variable ; et on a exprimé que chaque semi-fonction *est une fonction*. $\square$

On pouvait se passer d'écrire $[\$ e .]$ (deuxième ligne), car cette formule est une conséquence de $[* x e = x .]$ (règles IDEX et XIXI).

Pour des raisons du même genre, on pouvait aussi se passer d'écrire $[\$ \text{inv } x .]$ et $[\$ * x y .]$.

L'algorithme de codage est tout à fait simple.

Algorithme de codage

Arguments

- Un ensemble de symboles d'opération et une fonction arité : $(\mathcal{F}, a)$.
- Un ensemble de variables : $\mathcal{X}^*$.
- Un ensemble de $(\mathcal{F}, a, \mathcal{X}^*)$ -identités : $\mathcal{P}^*$.

Résultat

Une exposition $\mathcal{E}$:

♣ $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P}) ; \mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a).$

• $\mathcal{S} = \{***\}.$

• $\mathcal{X}^* \subseteq \mathcal{X}, \text{Card } \mathcal{X} = \hat{a}.$

Si l'ensemble $\mathcal{X}^*$ n'est pas assez nombreux, on choisit quelques variables supplémentaires (se rappeler que $\hat{a}$ est la plus grande arité d'un symbole de $\mathcal{F}$).

• $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* \cup \mathcal{P}'$, $\mathcal{P}'$ étant l'ensemble de ces formules :

- $\forall x \in \mathcal{X}, [x :: *** .] \in \mathcal{P}'.$

On écrit une formule-confinement par variable.

- $\forall e \in \mathcal{F}_0, [\$ e .] \in \mathcal{P}'.$

On écrit une formule-existence par symbole de semi-constante.

- $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N}^*), (I = \{1, \dots, n\})$, il existe une suite *injective*
 $I \ni i \mapsto \mathbf{y}_i \in \mathcal{X}, [\$ \mathbf{f} \mathbf{y}_I \cdot] \in \mathcal{P}'$.

On écrit une formule-existence par symbole de semi-fonction ($\mathcal{X}$ est assez nombreux pour qu'on puisse trouver une suite injective $i \mapsto \mathbf{y}_i$).

18.1.2 Un constat inattendu : trois règles suffisent

Par tradition, on choisit comme règles premières de la logique de l'égalité (algèbre universelle) ces cinq règles d'inférence [13] :

($\mathbf{a}$ est un terme ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$; $\mathbf{b}$ est un terme ; $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$; $\mathbf{d}$ est un terme ; $\forall j \in J \cup U, \mathbf{d}_j$ est un terme ; $\mathbf{c}$ est un sous-terme de $\mathbf{a}$; $\mathbf{a}'$ est un terme qu'on écrit en remplaçant dans $\mathbf{a}$ un $\mathbf{c}$ par $\mathbf{d}$)

REX — *Écrire une identité par réflexivité*

$$\frac{}{\mathbf{a} = \mathbf{a} .}$$

SY — *Écrire une identité par symétrie*

$$\frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} .}{\mathbf{b} = \mathbf{a} .}$$

TRA — *Écrire une identité par transitivité*

$$\frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} . \quad \mathbf{b} = \mathbf{d} .}{\mathbf{a} = \mathbf{d} .}$$

SU — *Substituer dans une identité*

$$\frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} .}{\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U} .}$$

RECR — *Récrire*

$$\frac{\mathbf{c} = \mathbf{d} .}{\mathbf{a} = \mathbf{a}' .}$$

Or, comparant attentivement l'algèbre universelle et l'algèbre G , on découvre que *ces trois règles suffisent* : REX, SU (voir *supra*), et RA.

RA — *Remplacer dans une identité, à gauche*

$$\frac{\mathbf{a} = \mathbf{b} . \quad \mathbf{c} = \mathbf{d} .}{\mathbf{a}' = \mathbf{b} .}$$

Preuve

- SY est une règle dérivée

$$\frac{\text{REX} \frac{}{a = a . \quad a = b .}}{b = a .} \text{RA}$$

- TRA est une règle dérivée

$$\frac{\text{SY} \frac{a = b .}{b = a . \quad b = c .}}{c = a .} \text{RA}$$

$$\frac{}{a = c .} \text{SY}$$

- RECR est une règle dérivée

$$\frac{\text{REX} \frac{}{a = a . \quad c = d .}}{a' = a .} \text{RA}$$

$$\frac{}{a = a' .} \text{SY}$$

■

18.2 Quelques traits de la logique présentée

Quelles sont les propriétés de la logique présentée ? On peut déjà chercher si elle a certaines propriétés désirables [11].

18.2.1 Qu'est-ce qu'un système formel ?

Shoenfield [7] dit “ formal system ” ; on peut aussi dire “ système symbolique ”. Un *système formel* est un triplet $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$,

- $\mathcal{L}$ étant un langage, c'est-à-dire un ensemble de formules (une *formule* est une séquence symbolique qualifiée ; on dit aussi, pour insister, “ formule bien formée ”),
- $\mathcal{P}$ étant un ensemble d'axiomes, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$, et
- $\mathcal{I}$ étant une ensemble de règles d'inférence.

On vérifie immédiatement qu'à chaque exposition $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ correspond un unique système formel, le système $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ est l'ensemble des $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formules ; et $\mathcal{I}$ est l'ensemble des règles d'inférence *qu'on a adoptées une fois pour toutes* (chap. 12).

S'intéressant à l'algèbre G on s'est donc intéressé à une *famille de systèmes formels* (considérer toutes les expositions imaginables). Quelles propriétés chaque système de cette famille a-t-il ? Il y a en a plusieurs, dont une qu'on a déjà découverte : le procédé d'inférence formelle est complet (théorème de complétude).

Une autre famille de systèmes formels, qui est bien connue, est celle des systèmes du premier ordre (logique du premier ordre) ; ces systèmes sont appelés “ théories ” [7].

18.2.2 Toute exposition est sémantiquement cohérente

On dit qu'un système formel est *sémantiquement cohérent* pour exprimer ceci : il y a au moins un objet qui a les propriétés signifiées par les axiomes (il y a au moins un modèle ; l'ensemble d'axiomes n'est pas “ délirant ”).

On a déjà vérifié (sans le dire) que *toute* exposition est sémantiquement cohérente.

Proposition 33 — *Quelle que soit $\mathcal{E}$ une exposition, il y a un $\mathcal{E}$ -modèle.*

Preuve — ${}^{\$}\Theta/\equiv$ est un $\mathcal{E}$ -modèle (théorème 24 ; voir p. 158). ■

18.2.3 Toute exposition est formellement cohérente

On dit qu'un système formel est *formellement cohérent* pour exprimer ceci : on ne peut inférer à la fois qu'un modèle a telle propriété *et* qu'il ne l'a pas (il n'y a pas de formule qui soit un théorème, dont la négation soit aussi un théorème).

Y a-t-il des expositions qui ne soient pas formellement cohérentes ? Il est facile de répondre. Quel que soit le langage $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ adopté, on ne peut exprimer à la fois qu'un magma a telle propriété *et* qu'il ne l'a pas ; en effet, il n'y a aucun moyen de dire que ceci n'appartient pas à cela, que ceci n'est pas identique à cela, etc. (il n'y a pas de négation). *Toute* exposition est donc formellement cohérente.

18.2.4 Les expositions totalitaires sont exceptionnelles

On dit qu'un système formel est *totalitaire* (on peut aussi dire “ complet ” ; se mettre en garde, car il n'y a aucun lien entre cette signification de “ complet ” et le théorème de complétude) pour exprimer ceci : toute formule du langage est soit un théorème soit la négation d'un théorème. △

Si le procédé d'inférence est complet (théorème de complétude), cela est équivalent à ceci : ou toute formule est un théorème ; ou chaque formule *qui n'est pas un théorème* ne signifie la propriété d'aucun modèle.

Y a-t-il des expositions totalitaires ? On en connaît, par exemple l'exposition ${}_0\mathcal{E}$ (voir p. 126), *dont toute formule est un théorème*. Mais ces expositions sont exceptionnelles :

toute exposition dont l'ensemble des théorèmes est inclus stricto sensu dans le langage (il y a au moins une formule qui n'est pas un théorème) n'est pas totalitaire.

En effet, le procédé d'inférence formelle adopté est complet ; et toute formule, théorème ou pas, signifie la propriété d'au moins un modèle...

Proposition 34 — Soit $\mathcal{E}$ une exposition (n'importe quelle exposition) ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$.

Quelle que soit A une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule, il existe un $\mathcal{E}$ -modèle Ω , (X_A est la $\mathcal{P}$ -garniture de A)

$$\Omega \models [X_A \ A]$$

(le modèle Ω a la propriété signifiée par la formule).

Preuve — On considère le triplet $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P} \cup \{A\})$; c'est une exposition $\mathcal{E}_+$ (vérification triviale). ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E}_+)/\cong$ est un $\mathcal{V}$ -magma qui est un $\mathcal{E}_+$ -modèle (théorème 24 ; voir p. 158). C'est-à-dire ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E}_+)/\cong$ est une $\mathcal{E}$ -modèle et

$${}^{\$}\Theta(\mathcal{E}_+)/\cong \models [X_A \ A]$$

■

18.2.5 Il y a des expositions non solubles

On est souvent amené à s'intéresser à une formule qui n'est pas un axiome, et dont on ne connaît pas de preuve. Cette formule est-elle un théorème ? On peut chercher à deviner une preuve, mais c'est parfois un mauvais projet : si la formule n'est pas un théorème, on risque de chercher longtemps et en vain ; si elle l'est, on ne sait rien de l'effort à fournir, ni même si on est capable de trouver (résoudre un problème difficile n'est jamais garanti).

Ce qu'on aimerait, c'est connaître un *procédé* grâce auquel on découvrirait à coup sûr si la formule est un théorème. On dit qu'un système formel pour lequel il existe un tel procédé est *soluble* (on dit aussi “ décidable ”).

Il est d'usage d'admettre la *thèse de Church* : tout *procédé* est équivalent par codage à une fonction $N \rightarrow N$ *générale-réursive*. Si on l'admet, et on a de bonnes raisons de le faire [6], on peut alors montrer que “ soluble ” et “ calculable ” sont synonymes (est *calculable* toute opération qu'on sait réaliser par une machine de Turing ; on peut aussi dire “ procédurable ” et “ algorithmisable ”). J'admets la thèse de Church (le reste de cette section).

Hélas, la plupart des systèmes formels intéressants ne sont pas solubles (logique du premier ordre, logique de l'égalité de l'algèbre universelle). Puisque l'algèbre universelle toute entière est contenue dans l'algèbre G , on ne s'étonnera pas de trouver aussi des expositions non solubles.

Proposition 35 — Il y a des expositions non solubles.

Preuve — Il y a des théories “ égalitaires ” non solubles ; on en choisit une (par exemple la théorie des groupes [13]), qu'on transcode en une *exposition* (début de ce chapitre). Cette *exposition* n'est pas soluble (si cette exposition était soluble, la théorie originale serait soluble ; on peut en effet transcoder toute preuve “ galactique ” d'une formule-identité en une preuve “ égalitaire ” et vice versa ; les formules-existence et les formules-appartenance sont, en l'occurrence, toutes des théorèmes banals et sans intérêt). ■

Remarquer — On vient d'énoncer ceci : il n'y a, en général, pas de procédé pour savoir si $\mathcal{P} \vdash \mathbf{A}$. Pour le montrer, on a trouvé une exposition pour laquelle on est incapable de découvrir à coup sûr si $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} .]$ (réduction à l'algèbre universelle, laquelle n'est pas soluble ; les types ne jouent aucun rôle) ; tout laisse penser qu'il n'y a pas davantage de sous-procédé pour découvrir si $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} .]$ (on ne saurait “ décider ” du type d'un terme).

Chapitre 19

Un magma libre dans la classe des modèles

19.1 Υ -magma-libre d'une classe de $\mathcal{V}$ -magmas

Définition 46 (Ensemble générateur) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ;
 $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit **CLA** une classe non vide de $\mathcal{V}$ -magmas. Soit $\Omega \in \mathbf{CLA}$;
 $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.

On appelle “ **CLA-ensemble-générateur** de Ω ” tout sous-ensemble Υ du support Ω qui a cette qualité :

le seul sous-magma ${}_s\Omega = ({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$ de Ω ,

- ${}_s\Omega \in \mathbf{CLA}$,
- $\Upsilon \subseteq {}_s\Omega$,
- $\forall v \in \Upsilon, \forall S \in \mathcal{S}, v \in \sigma_S \Rightarrow v \in {}_s\sigma_S$
(l' Ω -sortage de v est identique à son ${}_s\Omega$ -sortage),
est ${}_s\Omega = \Omega$.

Définition 47 (Ensemble générateur et libre) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ;
 $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit **CLA** une classe non vide de $\mathcal{V}$ -magmas. Soit ${}_b\Omega \in \mathbf{CLA}$;
 ${}_b\Omega = ({}_b\Omega, {}_b\Sigma, {}_b\Phi)$.

On appelle “ **CLA-ensemble-générateur-libre** de ${}_b\Omega$ ” tout sous-ensemble Υ du support ${}_b\Omega$ qui a ces qualités :

- (i) Υ est un **CLA-ensemble-générateur** de ${}_b\Omega$;
- (ii) $\forall {}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi) \in \mathbf{CLA}$, quelle que soit κ une fonction $\Upsilon \rightarrow {}_c\Omega$,
si $[\forall v \in \Upsilon, \forall S \in \mathcal{S}, v \in {}_b\sigma_S \Rightarrow \kappa(v) \in {}_c\sigma_S]$
(le ${}_b\Omega$ -sortage de v est inclus dans le ${}_c\Omega$ -sortage de $\kappa(v)$),
alors il existe un unique prolongement homomorphique $\text{prol } \kappa : {}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$ de
 $\kappa : \Upsilon \rightarrow {}_c\Omega$.

Remarquer — $\text{prol } \kappa$ est un prolongement de κ ; c'est-à-dire

$$\forall v \in \Upsilon, (\text{prol } \kappa)(v) = \kappa(v)$$

Les concepts *ensemble générateur et libre* et *magma libre* se correspondent...

Définition 48 (Magma libre) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit $\mathbf{CLA}$ une classe non vide de $\mathcal{V}$ -magmas. Soit $\Omega \in \mathbf{CLA}$; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$. Soit $\Upsilon \subseteq \Omega$.

On dit que Ω est un Υ -magma-libre de $\mathbf{CLA}$ pour exprimer que Υ est un $\mathbf{CLA}$ -ensemble-générateur-libre de Ω .

Un magma libre est “ unique à isomorphisme près ”...

Proposition 36 — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit $\mathbf{CLA}$ une classe non vide de $\mathcal{V}$ -magmas. Soit $\Omega \in \mathbf{CLA}$; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$. Soit $\Upsilon \subseteq \Omega$.

Si Ω est un Υ -magma-libre de $\mathbf{CLA}$, alors Id_Ω est l'unique prolongement endomorphique $\Omega \rightarrow \Omega$ de $\text{In}_{\Upsilon, \Omega} : \Upsilon \rightarrow \Omega$.

Preuve

1 — $\text{In}_{\Upsilon, \Omega} : \Upsilon \rightarrow \Omega$ a cette qualité :

$$\forall v \in \Upsilon, \forall S \in \mathcal{S}, v \in \sigma_S \Rightarrow \text{In}_{\Upsilon, \Omega}(v) = v \in \sigma_S$$

Donc il y a un seul prolongement homomorphique $\Omega \rightarrow \Omega$ de $\text{In}_{\Upsilon, \Omega} : \Upsilon \rightarrow \Omega$ (définition 47 ; voir p. 178).

2 — Id_Ω est un prolongement homomorphique de $\text{In}_{\Upsilon, \Omega}$ (raisonnement trivial) ; c'est donc le prolongement cherché. ■

Théorème 26 Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit $\mathbf{CLA}$ une classe non vide de $\mathcal{V}$ -magmas.

Si ${}_1\Omega$ est un ${}_1\Upsilon$ -magma libre de $\mathbf{CLA}$, ${}_1\Omega = ({}_1\Omega, {}_1\Sigma, {}_1\Phi)$,

si ${}_2\Omega$ est un ${}_2\Upsilon$ -magma libre de $\mathbf{CLA}$, ${}_2\Omega = ({}_2\Omega, {}_2\Sigma, {}_2\Phi)$, et

si ${}_1\Upsilon$ et ${}_2\Upsilon$ sont équipotents, l'équipotence $b : {}_1\Upsilon \leftrightarrow {}_2\Upsilon$ ayant cette qualité :

$$\forall {}_1v \in {}_1\Upsilon, \forall S \in \mathcal{S}, {}_1v \in {}_1\sigma_S \Rightarrow b({}_1v) \in {}_2\sigma_S$$

(le ${}_1\Omega$ -sortage de ${}_1v$ est inclus dans le ${}_2\Omega$ -sortage de $b({}_1v)$),

alors ${}_1\Omega$ et ${}_2\Omega$ sont $\mathcal{V}$ -isomorphes.

Preuve

Il existe un unique prolongement homomorphique $K : {}_1\Omega \rightarrow {}_2\Omega$ de $\text{In}_{({}_2\Upsilon, {}_2\Omega)} \circ b : {}_1\Upsilon \rightarrow {}_2\Omega$; et il existe un unique prolongement homomorphique $K' : {}_2\Omega \rightarrow {}_1\Omega$ de $\text{In}_{({}_1\Upsilon, {}_1\Omega)} \circ b^{-1} : {}_2\Upsilon \rightarrow {}_1\Omega$ (définition 47 ; voir p. 178).

On considère $K' \circ K$. Composé d'homomorphismes, $K' \circ K$ est un endomorphisme ${}_1\Omega \rightarrow {}_1\Omega$ (proposition 9 ; voir p. 54). $\forall {}_1v \in {}_1\Upsilon$,

$$K' \circ K({}_1v) = K' \circ b({}_1v)$$

$b({}_1v) \in {}_2\Upsilon$; donc

$$K' \circ b({}_1v) = b^{-1} \circ b({}_1v) = {}_1v$$

On vient de vérifier que $K' \circ K$ est un prolongement endomorphique ${}_1\Omega \rightarrow {}_1\Omega$ de $\text{In}_{({}_1\Upsilon, {}_1\Omega)} : {}_1\Upsilon \rightarrow {}_1\Omega$.

Donc $K' \circ K = \text{Id}_{({}_1\Omega)}$ (proposition 36 ; voir p. 179). On déduit que K est injective et que K' est surjective.

En raisonnant de la même façon, on vérifie que $K \circ K' = \text{Id}_{({}_2\Omega)}$. Donc K et K' sont bijectives, et $K' = K^{-1}$. K est un $\mathcal{V}$ -isomorphisme ${}_1\Omega \leftrightarrow {}_2\Omega$ (définition 22 ; voir p. 61). ■

19.2 Un magma libre dans la classe des $\mathcal{E}$ -modèles

Soit $\mathcal{E}$ une exposition ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_l\}_{l \in L}$ (voir p. 19) ; le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_l$ ($l \in L$) est la formule $[\mathbf{x}_l :: \mathbf{H}_l \ .]$ (voir p. 109).

On considère la classe des $\mathcal{E}$ -modèles. Y a-t-il un $\mathcal{E}$ -modèle qui soit un magma libre de cette classe ?

Notation — $\text{MOD}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des $\mathcal{E}$ -modèles.

On s'intéresse à ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E})/\equiv$ qui est un $\mathcal{E}$ -modèle (chapitre 16). On considère ce sous-ensemble $\Xi \subseteq {}^{\$}\Theta/\equiv$:

$$\Xi = \{\gamma \in {}^{\$}\Theta/\equiv \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{x} \in \gamma\}$$

(de tout $\gamma \in \Xi$ on peut choisir un représentant $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$).

Proposition 37 — $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, (le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}$ est une formule $[\mathbf{x} :: \mathbf{H} \ .]$)

$$\mathbf{x} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}} \subseteq {}^{\$}\Theta \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{x}} \in \Xi$$

Preuve

$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{x} :: \mathbf{H} \ .]$; donc $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{x} : \mathbf{H} \ .]$ (règle CONFA) et $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{x} \ .]$ (règle APEX) ; c'est-à-dire $\mathbf{x} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}} \subseteq {}^{\$}\Theta$.

On vérifie alors que $\bar{\mathbf{x}} \in \Xi$ (raisonnement trivial). ■

Corollaire 14 — *Quelle que soit $\mathcal{E}$ une exposition, $\Xi \neq \emptyset$.*

Preuve — $\mathcal{E}$ est une exposition ; donc $\mathcal{X} \neq \emptyset$ (proposition 23 ; voir p. 108). ■

✕

Exemple — On connaît ${}_0\mathcal{E}$, qui est une exposition minimale (voir p. 126).

${}^{\$}\Theta = {}^{\wedge}\mathcal{T} = \{\mathbf{x}\}$ (il n'y a qu'un seul terme) ; et $\bar{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\}$; il n'y a qu'une seule classe d'équivalence qui est un singleton. $\Xi = \{\bar{\mathbf{x}}\} = {}^{\$}\Theta/\equiv$. □

Théorème 27 — Ξ est un $\text{MOD}(\mathcal{E})$ -ensemble-générateur de ${}^{\$}\Theta/\equiv$.

Preuve

Preuve classique d'unicité : on cherche à vérifier qu'un certain magma n'est autre qu'un magma bien connu. La démarche est guidée par la définition (magma).

Soit ${}_s\Omega = ({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$ un $\mathcal{V}$ -sous-magma de ${}^{\$}\Theta/\equiv$,

- ${}_s\Omega$ étant un $\mathcal{E}$ -modèle,
- $\Xi \subseteq {}_s\Omega$,
- $\forall \gamma \in \Xi, \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \gamma \in {}^{\$}\bar{\sigma}_{\mathbf{S}} \Rightarrow \gamma \in {}_s\sigma_{\mathbf{S}}$.

On veut vérifier que ${}_s\Omega = {}^\$ \Theta / \equiv$.

$\forall l \in L$,

$$\mathbf{x}_l \in {}^\$ \sigma_{\mathbf{H}_l} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{x}_l} \in \Xi$$

(proposition 37 ; voir p. 180). Donc $\overline{\mathbf{x}_l} \in {}^\$ \overline{\sigma}_{\mathbf{H}_l}$ (assertion 8 ; voir p. 72) ; donc

$$\overline{\mathbf{x}_l} \in {}_s\sigma_{\mathbf{H}_l} \tag{19.1}$$

(hypothèse).

Avant de continuer, on prouve un lemme.

Lemme 10 — $\forall \mathbf{a} \in {}^\wedge \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $(\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J)$

$$(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in \text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \Rightarrow {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J = \overline{\mathbf{a}}$$

Preuve

$(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in \text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$; donc $(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in \text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ et

$${}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J = {}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J$$

(théorème 9 ; voir p. 61). Puisque $\equiv$ est une super-congruence, $(\mathbf{x}_j)_J \in \text{Dom } {}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (théorème 17 ; voir p. 83) ; et

$${}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J = \overline{{}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{x}_j)_J}$$

(théorème 15 ; voir p. 75).

On sait que

$${}^\$ \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\mathbf{x}_j)_J = \mathbf{a}\{\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{x}_j\}_J = \mathbf{a}$$

(proposition 29 ; voir p. 151). On vient de vérifier que

$${}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J = \overline{\mathbf{a}}$$

■

Remarquer — Si $(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in \text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$, alors $\mathbf{a} \in {}^\$ \Theta$.

I — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, ${}_s\sigma_{\mathbf{S}} = {}^\$ \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$?

Soit $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. On sait que ${}_s\sigma_{\mathbf{S}} \subseteq {}^\$ \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$ (définition 21 ; voir p. 58). Il reste à vérifier que

$${}^\$ \overline{\sigma}_{\mathbf{S}} \subseteq {}_s\sigma_{\mathbf{S}}$$

Soit $\gamma \in {}^\$ \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$. On peut choisir un représentant $\mathbf{a}$ de γ , $\mathbf{a} \in {}^\$ \sigma_{\mathbf{S}}$ (voir p. 72) ; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} \ .]$. $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$.

${}_s\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle ; donc

$${}_s\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^J \ \mathbf{a} : \mathbf{S} \ .]$$

(théorème de correction). Puisque $(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in \prod_J {}_s\sigma_{\mathbf{H}_j}$ (19.1),

$$(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in \text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

et

$${}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J \in {}_s\sigma_{\mathbf{S}}$$

(définition 35 ; voir p. 98). Or

$${}_s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\overline{\mathbf{x}_j})_J = \overline{\mathbf{a}} = \gamma$$

(lemme 10). On vient de vérifier que $\gamma \in {}_s\sigma_{\mathbf{S}}$; donc que ${}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{S}} \subseteq {}_s\sigma_{\mathbf{S}}$.

II — ${}_s\Omega = {}^{\$}\Theta/\equiv ?$

On vient de vérifier que $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, {}_s\sigma_{\mathbf{S}} = {}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$. Donc
 ${}_s\Omega = {}_s\sigma_{***} = {}^{\$}\overline{\sigma}_{***} = {}^{\$}\Theta/\equiv$.

III — $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, {}_s\phi_{\mathbf{f}} = {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}} ?$

Si $\mathcal{F} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$. On sait que

$$\text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}} \subseteq \text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}$$

et que, si $\vec{\gamma} \in \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}}$,

$${}_s\phi_{\mathbf{f}} \vec{\gamma} = {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}} \vec{\gamma}$$

(définition 21 ; voir p. 58).

Il ne reste à vérifier que ceci :

$$\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}} \subseteq \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}}$$

Si $\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

1^{er} cas — $\mathbf{f} = \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$

$\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$; donc $\text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$ (voir p. 73) ; et $\mathcal{P} \vdash [{}^{\$} \mathbf{e} .]$ (voir p. 150).

Puisque ${}_s\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle,

$${}_s\Omega \models [{}^{\$} \mathbf{e} .]$$

(théorème de correction) ; c'est-à-dire $\text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{e}} = ({}_s\Omega)^0$. On vient de vérifier que

$$\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{e}} = ({}^{\$}\Theta/\equiv)^0 = \{\diamond\} = \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{e}}$$

2^e cas — $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n (n \in \mathbf{N}^*)$

J'appelle “ I ” l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. $\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}} \neq \emptyset$. Soit $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}$.
 $\forall i \in I$, on peut trouver un représentant $\mathbf{a}_i (\in {}^{\$}\Theta)$ de γ_i , $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$ (voir p. 73). $\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J_i} (i \in I)$.

On déduit que

$$\mathcal{P} \vdash [{}^{\$} \mathbf{f} \mathbf{a}_I .]$$

(voir p. 150) ; donc (j'appelle “ J ” l'union $\bigcup_{i \in I} J_i$)

$${}_s\Omega \models \llbracket [\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .] ^J \$ \mathbf{f} \ \mathbf{a}_I \ . \rrbracket$$

(théorème de correction). Puisque $(\overline{[\mathbf{x}_j]})_J \in \prod_J {}_s\sigma_{\mathbf{H}_j}$ (19.1),

$$(\overline{[\mathbf{x}_j]})_J \in \text{Dom } {}_s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

(définition 34 ; voir p. 96) ; c'est-à-dire

$$\forall i \in I, (\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J_i} \in \text{Dom } {}_s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

et

$$({}_s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J_i}) \in \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}}$$

(voir p. 34).

Or

$$\forall i \in I, {}_s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\overline{[\mathbf{x}_j]})_{j \in J_i} = \overline{\mathbf{a}_i} = \gamma_i$$

(lemme 10). On vient de vérifier que $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}}$; donc que

$$\text{Dom } {}_s\overline{\phi}_{\mathbf{f}} \subseteq \text{Dom } {}_s\phi_{\mathbf{f}}$$

■

Se mettre en garde — On trouve des sous-magmas *stricto sensu* de ${}^{\$}\Theta/\equiv$ qui n'ont pas toutes les qualités requises...



Contre-exemple 1



$\mathcal{E}$ est cette exposition :

♣ $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$;

• $\mathcal{S} = \{***, \mathbf{E}\}$;

• $\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{e}\}$; $\forall n \in \mathbf{N}^*, \mathcal{F}_n = \emptyset$;

• $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$;

• $\mathcal{P}$ est l'ensemble de ces trois formules :

$$\mathbf{x} :: *** \ . \ \mathbf{y} :: \mathbf{E} \ .$$

$$\mathbf{e} : \mathbf{E} \ .$$

Puisqu'il n'y pas de formule-identité, la super-congruence $\equiv$ est une relation discrète (chaque élément n'est lié qu'à lui-même). On peut donc confondre ${}^{\$}\Theta/\equiv$ et ${}^{\$}\Theta$.

I — On vérifie facilement ceci...

• ${}^{\$}\Theta = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}\}$.

• ${}^{\$}\sigma_{***} = {}^{\$}\Theta = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}\}$.

- ${}^{\$}\sigma_E = \{y, e\}$.
- ${}^{\$}\phi_e$ n'est pas vide ; ${}^{\$}\phi_e \diamond = [e]$.
- $\Xi = \{x, y\}$.

II — On considère maintenant le $\mathcal{V}$ -magma ${}_s\Omega$:

- $\clubsuit {}_s\Omega = ({}_s\Omega, {}_s\Sigma, {}_s\Phi)$; ${}_s\Sigma = \{{}_s\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, ${}_s\Phi = \{{}_s\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}$;
- ${}_s\Omega = \{x, y\}$;
- ${}_s\sigma_{***} = {}_s\Omega = \{x, y\}$;
- ${}_s\sigma_E = \{y\}$;
- ${}_s\phi_e$ est vide.

Ce magma est un sous-magma *stricto sensu* de ${}^{\$}\Theta$ (raisonnement trivial).

On vérifie bien que

- (i) $\Xi \subseteq {}_s\Omega$; que
- (ii) le ${}_s\Omega$ -sortage de $[x]$ est identique à son ${}^{\$}\Theta$ -sortage ; et que
- (iii) le ${}_s\Omega$ -sortage de $[y]$ est identique à son ${}^{\$}\Theta$ -sortage ($[x]$ et $[y]$ sont les deux éléments de Ξ).

Faut-il s'en étonner ? Non. ${}_s\Omega$ est certes un sous-magma *stricto sensu* de ${}^{\$}\Theta$; mais il n'est pas un $\mathcal{E}$ -modèle ! (${}_s\phi_e$ est vide alors que $\mathcal{P} \vdash [\$ e \ .]$). $\square$



Contre-exemple 2

On considère la même exposition, mais cette fois le $\mathcal{V}$ -sous-magma ${}_2\Omega$:

- $\clubsuit {}_2\Omega = ({}_2\Omega, {}_2\Sigma, {}_2\Phi)$; etc. ;
- ${}_2\Omega = \{x, y, e\}$;
- ${}_2\sigma_{***} = {}_2\Omega = \{x, y, e\}$;
- ${}_2\sigma_E = \{e\}$;
- ${}_2\phi_e$ n'est pas vide ; ${}_2\phi_e \diamond = e$.

On vérifie bien que

- (i) ${}_2\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle ; et que
- (ii) $\Xi \subseteq {}_2\Omega$.

${}_2\Omega$ est certes un sous-magma *stricto sensu* de ${}^{\$}\Theta$; mais le ${}_2\Omega$ -sortage de $[y]$ (élément de Ξ) n'est pas son ${}^{\$}\Theta$ -sortage ! ($[y] \in {}^{\$}\sigma_E$ mais $[y] \notin {}_2\sigma_E$). $\square$

Théorème 28 — ${}^{\$}\Theta/\equiv$ est un Ξ -magma-libre de $\text{MOD}(\mathcal{E})$.

Preuve

Preuve jolie. Lire le préambule et repérer les étapes du raisonnement (titre des paragraphes).

Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{E}$ -modèle. Soit κ une fonction $\Xi \rightarrow {}_c\Omega$ qui a cette qualité :
 $\forall \gamma \in \Xi, \forall S \in \mathcal{S},$

$$\gamma \in {}^{\$}\overline{\sigma}_S \quad \Rightarrow \quad \kappa(\gamma) \in {}_c\sigma_S$$

(κ est une ${}_c\Omega$ -valuation de Ξ).

$\forall l \in L, \mathbf{x}_l \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_l}$ (règle CONFA) ; donc $\overline{[\mathbf{x}_l]} \in {}^{\$}\overline{\sigma}_{\mathbf{H}_l}$ (assertion 8 ; voir p. 72). Donc

$$\forall l \in L, \kappa(\overline{[\mathbf{x}_l]}) \in {}_c\sigma_{\mathbf{H}_l} \quad (19.2)$$

On veut trouver un prolongement

$${}^{\$}\Theta/\equiv \rightarrow {}_c\Omega$$

de $\kappa : \Xi \rightarrow {}_c\Omega$, prolongement qui soit un homomorphisme, et comme tel unique.

I — Un candidat

Soit $\gamma \in {}^{\$}\Theta/\equiv$. On trouve un terme $\mathbf{a} \in \gamma$; $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$, $\overline{\mathbf{a}} = \gamma$ et $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$. $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$, c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \cdot]$. Puisque ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle,

$${}_c\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \cdot]^J \$ \mathbf{a} \cdot]$$

(théorème de correction) ; c'est-à-dire $\prod_J {}_c\sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$.

Or $(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in J} \in \prod_J {}_c\sigma_{\mathbf{H}_j}$ (19.2) ; il y a donc un élément

$${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in J} \in {}_c\Omega$$

Cet élément est-il fonction de $\mathbf{a}$, ou est-il fonction de $\gamma (= \overline{\mathbf{a}})$? Soit $\mathbf{b} \in \gamma$; $\overline{\mathbf{b}} = \gamma (= \overline{\mathbf{a}})$ et $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$. En raisonnant de la même façon, on vérifie que

$$(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in U} \in \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$$

et qu'il y a donc un élément

$${}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in U} \in {}_c\Omega$$

$\mathbf{a} \in \gamma$ et $\mathbf{b} \in \gamma$; donc $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot]$. Puisque ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle,

$${}_c\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \cdot]^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot]$$

(théorème de correction). $(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} {}_c\sigma_{\mathbf{H}_j}$ (19.2) ; donc

$${}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in J} = {}_c\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in U}$$

On vient de révéler cette fonction :

$$\begin{aligned} K : {}^{\$}\Theta/\equiv &\rightarrow {}_c\Omega \\ \gamma &\mapsto {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in J} \end{aligned}$$

$\mathbf{a}$ étant n'importe quel représentant de γ .

On va vérifier que cette fonction est le prolongement cherché.

Remarquer (cas particuliers)

1 — Si le représentant $\mathbf{a}$ de γ est sans variable, $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}} = ({}_c\Omega)^0$; et

$$K(\gamma) = {}_c\tau_{\mathbf{a}}\diamond$$

2 — $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, si $\mathbf{e} \in {}^{\$}\Theta$, $\bar{\mathbf{e}} \in {}^{\$}\Theta/\equiv$; donc

$$\mathbf{e} \in {}^{\$}\Theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{e}} = \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{e}} = ({}_c\Omega)^0 \\ \text{et} \\ K(\bar{\mathbf{e}}) = {}_c\tau_{\mathbf{e}}\diamond = {}_c\phi_{\mathbf{e}}\diamond \end{cases} \quad (19.3)$$

II — K est un prolongement de κ

Soit $\gamma \in \Xi$. On trouve une variable $\mathbf{x} \in \gamma$; $\bar{\mathbf{x}} = \gamma$. Donc

$$K(\gamma) = K(\bar{\mathbf{x}}) = {}_c\tau_{\bar{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}}(\kappa(\bar{\mathbf{x}})) = \text{Id}_{{}_c\Omega} \circ \kappa(\bar{\mathbf{x}}) = \kappa(\bar{\mathbf{x}}) = \kappa(\gamma)$$

III — K est un homomorphisme ${}^{\$}\Theta/\equiv \rightarrow {}_c\Omega$

Pour le vérifier, on procède ainsi (définition 19 ; voir p. 54).

III-i — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$, $K({}^{\$}\bar{\sigma}_{\mathbf{S}}) \subseteq {}_c\sigma_{\mathbf{S}}$?

Soit $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Soit $\gamma \in {}^{\$}\bar{\sigma}_{\mathbf{S}}$. On veut vérifier que $K(\gamma) \in {}_c\sigma_{\mathbf{S}}$.

On trouve un représentant $\mathbf{a}$ de γ , $\mathbf{a} \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$ (voir p. 72) ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$. Par définition de “ ${}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$ ”,

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} .]$$

Donc

$${}_c\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j .]^J \mathbf{a} : \mathbf{S} .]$$

(${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle). Donc

$$K(\gamma) = {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{[\mathbf{x}_j]}))_{j \in J} \in {}_c\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_J {}_c\sigma_{\mathbf{H}_j}) \subseteq {}_c\sigma_{\mathbf{S}}$$

(19.2 ; et définition 35, voir p. 98).

III-ii-a — On veut vérifier ceci : $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{e}}$; et si $\text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$, alors

$$K({}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}}\diamond) = {}_c\phi_{\mathbf{e}}\diamond$$

Si $\mathcal{F}_0 = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi. Soit $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$. Si $\text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

$\text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} = ({}^{\$}\Theta/\equiv)^0$; donc $\text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{e}} = ({}^{\$}\Theta)^0$ et

$${}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}}\diamond = \overline{{}^{\$}\phi_{\mathbf{e}}\diamond}$$

(voir p. 73). $\text{Dom } {}^{\$}\phi_e = ({}^{\$}\Theta)^0$; donc $\mathcal{P} \vdash [{}^{\$} e \ .]$ et

$${}^{\$}\phi_e \diamond = e$$

(voir p. 150). Donc $e \in {}^{\$}\Theta$ et

$${}^{\$}\overline{\phi_e \diamond} = \overline{{}^{\$}\phi_e \diamond} = \bar{e}$$

On se rappelle alors (19.3) que

$$\text{Dom } {}_c\phi_e = ({}_c\Omega)^0 = \{\diamond\} = ({}^{\$}\Theta/\equiv)^0 = \text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi_e}$$

et que

$$K({}^{\$}\overline{\phi_e \diamond}) = K(\bar{e}) = {}_c\phi_e \diamond$$

III-ii-b — On veut vérifier ceci : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n$,

$${}^nK(\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi_f}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_f$$

et ($I = \{1, \dots, n\}$)

$$\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi_f}, K \circ {}^{\$}\overline{\phi_f}(\gamma_i)_I = {}_c\phi_f(K(\gamma_i))_{i \in I}$$

Si $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi. Soit $f \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$;
 $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). Si $\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi_f} = \emptyset$, il n'y a rien à vérifier. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi_f}$. $\forall i \in I$, on trouve un représentant $\mathbf{a}_i$ de γ_i ,
 $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_f$ (voir p. 73) ; $\mathbf{a}_i \in {}^{\$}\Theta$, $\overline{\mathbf{a}_i} = \gamma_i$ et $\text{Var } \mathbf{a}_i = \{\mathbf{x}_j\}_{J_i}$.

Quel est l'élément ${}^nK(\gamma_i)_I$?

$${}^nK(\gamma_i)_I = (K(\gamma_i))_{i \in I} = (K(\overline{\mathbf{a}_i}))_{i \in I} = ({}_{c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i})_{i \in I} \quad (19.4)$$

$(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_f$; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [{}^{\$} f \ \mathbf{a}_I \ .]$ (voir p. 150) ; $[f \ \mathbf{a}_I] \in {}^{\$}\Theta$.
 Puisque ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle, (j'appelle “ J ” l'union $\bigcup_{i \in I} J_i$)

$${}_c\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \ {}^{\$} f \ \mathbf{a}_I \ .]$$

(théorème de correction). Donc

$$(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J} \in \prod_J {}_c\sigma_{\mathbf{H}_j} \subseteq \text{Dom } {}_{c\tau_{[f \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}}$$

(19.2 ; et définition 34, voir p. 96) ; c'est-à-dire

$$\forall i \in I, (\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i} \in \text{Dom } {}_{c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}}$$

et

$$({}_{c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } {}_c\phi_f$$

(voir p. 34).

Donc

$${}^nK(\gamma_i)_I = ({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

(19.4).

On vient de vérifier que

$${}^nK(\text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

Il reste à vérifier que

$$K \circ {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(K(\gamma_i))_{i \in I}$$

$(\overline{\mathbf{a}_i})_I = (\gamma_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}$ et $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$; donc

$${}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}(\overline{\mathbf{a}_i})_I = \overline{{}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I} = \overline{\mathbf{f} \mathbf{a}_I}$$

(proposition 16 ; voir p. 73). Donc

$$K \circ {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I = K \circ {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}(\overline{\mathbf{a}_i})_I = K(\overline{\mathbf{f} \mathbf{a}_I})$$

On sait que

$$K(\overline{\mathbf{f} \mathbf{a}_I}) = {}_c\tau_{[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J}$$

$([\mathbf{f} \mathbf{a}_I] \in {}^{\$}\Theta$; voir p. 185) ; que

$${}_c\tau_{[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J} = {}_c\phi_{\mathbf{f}}({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i})_{i \in I}$$

(voir p. 34) ; et que

$$K(\gamma_i) = K(\overline{\mathbf{a}_i}) = {}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i}$$

(voir p. 185). Donc

$$\begin{aligned} & K \circ {}^{\$}\overline{\phi}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I \\ &= K(\overline{\mathbf{f} \mathbf{a}_I}) = {}_c\tau_{[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J} = {}_c\phi_{\mathbf{f}}({}_c\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\kappa(\overline{\mathbf{x}_j}))_{j \in J_i})_{i \in I} \\ &= {}_c\phi_{\mathbf{f}}(K(\gamma_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

IV — K est unique

Soit K' un homomorphisme ${}^{\$}\Theta/\equiv \rightarrow {}_c\Omega$, qui a cette qualité :

$$\forall \gamma \in \Xi, K'(\gamma) = \kappa(\gamma)$$

Soit $\gamma \in {}^{\$}\Theta/\equiv$. On veut vérifier que $K'(\gamma) = K(\gamma)$.

On trouve un représentant $\mathbf{a}$ de γ ($\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$) et on raisonne par récurrence.

1^{er} cas — $\mathbf{a} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$\gamma = \bar{x} \in \Xi$; donc

$$K'(\gamma) = \kappa(\gamma) = K(\gamma)$$

2^e cas — $\mathbf{a} = \mathbf{e}$, $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$

$\mathbf{e} \in {}^{\$}\Theta$; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{e} \ .] .$ Donc $\text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{e}} = ({}^{\$}\Theta)^0$ et ${}^{\$}\phi_{\mathbf{e}} \diamond = \mathbf{e}$ (voir p. 150). Donc $\text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} = ({}^{\$}\Theta/\equiv)^0$ et ${}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} \diamond = \bar{\phi}_{\mathbf{e}} \diamond = \bar{\mathbf{e}}$ (voir p. 73).

$K'(\gamma) = K'(\bar{\mathbf{e}}) = K'({}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} \diamond)$. Parce que K' est un homomorphisme, $\text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{e}} = ({}_c\Omega)^0$ et

$$K'({}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} \diamond) = {}_c\phi_{\mathbf{e}} \diamond$$

Donc

$$K'(\gamma) = K'({}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{e}} \diamond) = {}_c\phi_{\mathbf{e}} \diamond = K(\bar{\mathbf{e}}) = K(\gamma)$$

(19.3).

3^e cas — $\mathbf{a} = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \in {}^{\wedge}T]$.

$[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I] \in {}^{\$}\Theta$; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} \ \mathbf{a}_I \ .] .$ Donc $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$ et ${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$. (voir p. 150).

Donc $([\bar{\mathbf{a}}_i])_I \in \text{Dom } {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{f}}$ et ${}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{f}}([\bar{\mathbf{a}}_i])_I = \overline{{}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I} = \overline{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}$ (proposition 16 ; voir p. 73).

$K'(\gamma) = K'(\overline{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}) = K' \circ {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{f}}([\bar{\mathbf{a}}_i])_I$. Parce que K' est un homomorphisme, $(K'([\bar{\mathbf{a}}_i]))_{i \in I} \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$ et

$$K' \circ {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{f}}([\bar{\mathbf{a}}_i])_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(K'([\bar{\mathbf{a}}_i]))_{i \in I}$$

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I, K'([\bar{\mathbf{a}}_i]) = K([\bar{\mathbf{a}}_i])$.

Donc

$$K'(\gamma) = K' \circ {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{f}}([\bar{\mathbf{a}}_i])_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(K([\bar{\mathbf{a}}_i]))_{i \in I}$$

On sait d'autre part (K est aussi un homomorphisme) que

$$K(\gamma) = K \circ {}^{\$}\bar{\phi}_{\mathbf{f}}([\bar{\mathbf{a}}_i])_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(K([\bar{\mathbf{a}}_i]))_{i \in I}$$

Donc $K'(\gamma) = K(\gamma)$. ■

Remarquer — Pour vérifier qu'il y a un prolongement homomorphique de κ , on a plusieurs fois considéré cette propriété :

$$\forall \gamma \in \Xi, \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \quad \gamma \in {}^{\$}\bar{\sigma}_{\mathbf{S}} \quad \Rightarrow \quad \kappa(\gamma) \in {}_c\sigma_{\mathbf{S}}$$

Pour vérifier qu'il n'y a qu'un seul prolongement homomorphique, on ne l'a jamais considérée.

Chapitre 20

Un magma initial dans la classe des modèles

20.1 Toute bonne tranche d'un magma est le support d'un sous-magma remarquable

20.1.1 Bonne tranche

Définition 49 (Bonne tranche) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$.

On appelle “bonne tranche de Ω ” tout sous-ensemble S du support Ω qui a ces qualités :

- i — $\forall S \in \mathcal{S}, S \cap \sigma_S \neq \emptyset$ (S “coupe” tous les σ_S) ;
- ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0, \text{Dom } \phi_e \neq \emptyset, \phi_e \diamond \in S$ (les éléments nommés de Ω sont éléments de S) ;
- ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{F}_n, \phi_f(S^n \cap \text{Dom } \phi_f) \subseteq S$ (S est “stable par chaque ϕ_f ”).

Remarquer

1 — Le support d'un magma en est une bonne tranche (Ω est une bonne tranche de Ω).

2 — Grâce à la notation qu'on adoptée, on peut ne pas distinguer $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) (ii-a et ii-b).

Corollaire 15 — Une bonne tranche n'est pas vide.

Preuve — $S \subseteq \Omega$ et $\Omega = \sigma_{***}$. Donc $S = S \cap \Omega = S \cap \sigma_{***} \neq \emptyset$. ■

Pourquoi s'intéresser aux bonnes tranches ? Parce qu'elles sont les supports de sous-magmas aux propriétés magnifiques ; et parce que le sous-ensemble des *termes significatifs sans variable*, quand il est une bonne tranche de ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E})$, est le support d'un magma dont un quotient est un magma initial de la classe des $\mathcal{E}$ -modèles.

20.1.2 Le sous-magma remarquable

Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma ; $\Omega = (\Omega, \Sigma, \Phi)$. Soit S une bonne tranche de Ω .

S est le support de ${}_S\Omega$, un $\mathcal{V}$ -magma remarquable ; ${}_S\Omega = (S, {}_S\Sigma, {}_S\Phi)$,
 ${}_S\Sigma = \{{}_S\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, ${}_S\Phi = \{{}_S\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}$.

Les sous-ensembles — $\forall S \in \mathcal{S}$, ${}_S\sigma_S = S \cap \sigma_S$.

On vérifie que ${}_S\sigma_S \neq \emptyset$, que ${}_S\sigma_S \subseteq S$ et que ${}_S\sigma_{***} = S \cap \sigma_{***} = S \cap \Omega = S$.

Les semi-constantes — $\forall e \in \mathcal{F}_0$, ${}_S\phi_e$ est cette S -semi-constante :

- (i) $\text{Dom } {}_S\phi_e = \text{Dom } \phi_e$;
- (ii) si $\text{Dom } {}_S\phi_e \neq \emptyset$, ${}_S\phi_e \diamond = \phi_e \diamond$.

On vérifie que, si ${}_S\phi_e$ n'est pas vide, ${}_S\phi_e \diamond = \phi_e \diamond \in S$ (définition 49).

Les autres semi-fonctions — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{F}_n$, ${}_S\phi_f$ est cette semi-fonction
 $S^n \rightarrow S : (I = \{1, \dots, n\})$

- (i) $\text{Dom } {}_S\phi_f = S^n \cap \text{Dom } \phi_f$;
- (ii) $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_S\phi_f$, ${}_S\phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\xi_i)_I$.

On vérifie que, $\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_S\phi_f$, ${}_S\phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\xi_i)_I \in \phi_f(S^n \cap \text{Dom } \phi_f) \subseteq S$ (définition 49).

Corollaire 16 — ${}_S\Omega \subseteq \Omega$.

Preuve

On procède ainsi (définition 21 ; voir p. 58).

i — $\forall S \in \mathcal{S}$, ${}_S\sigma_S = S \cap \sigma_S \subseteq \sigma_S$.

ii — $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in \mathcal{F}_n$,

$$\text{Dom } {}_S\phi_f = S^n \cap \text{Dom } \phi_f \subseteq \text{Dom } \phi_f$$

ii-a — $\forall e \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } {}_S\phi_e \neq \emptyset$, ${}_S\phi_e \diamond = \phi_e \diamond$.

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{F}_n$, $(I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\xi_i)_I \in \text{Dom } {}_S\phi_f, {}_S\phi_f(\xi_i)_I = \phi_f(\xi_i)_I$$

■

Théorème 29 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$, $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Soit $\mathbf{a}$ un $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme ; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Card } J = m$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit S une bonne tranche de Ω . On considère le $\mathcal{V}$ -sous-magma ${}_S\Omega$, les semi-fonctions $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : \Omega^m \rightarrow \Omega$ et ${}_S\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} : S^m \rightarrow S$.

1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

$\text{Dom } {}_S\tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}$. Si $\text{Dom } {}_S\tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$, ${}_S\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \tau_{\mathbf{a}} \diamond$; donc $\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in S$.

2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

$\text{Dom } {}_S\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = S^m \cap \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$. Si $(\xi_i)_J \in \text{Dom } {}_S\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$,

$${}_S\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_i)_J = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_i)_J$$

Donc $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(S^m \cap \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}) \subseteq S$ (S est “ stable par $\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ ”).

Preuve

Preuve dans l'esprit de l'étude. Le raisonnement est plusieurs fois récursif :
réurrences liées aux fonctions tau, et récurrence liée à la propriété annoncée.

Grâce à la notation qu'on a adoptée, on peut confondre les deux cas. On raisonne par récurrence.

I — a est atomique**I-1 — a = e ∈ F₀**

$s\tau_a = s\tau_e = s\phi_e$ et $\tau_a = \tau_e = \phi_e$. On sait que $\text{Dom } s\phi_e = \text{Dom } \phi_e$ et que, si $\text{Dom } s\phi_e \neq \emptyset$, $s\phi_e \diamond = \phi_e \diamond$ (voir p. 191).

Donc $\text{Dom } s\tau_e = \text{Dom } s\phi_e = \text{Dom } \phi_e = \text{Dom } \tau_e$. Et si $\text{Dom } s\tau_e \neq \emptyset$,

$$s\tau_e \diamond = s\phi_e \diamond = \phi_e \diamond = \tau_e \diamond$$

Puisque $s\phi_e \diamond \in S$ ($s\phi_e$ est une S -semi-constante), on déduit que $\tau_e \diamond = s\phi_e \diamond \in S$.

I-2 — a = x ∈ X

$s\tau_a^x = s\tau_x^x = \text{Id}_S$ et $\tau_a^x = \tau_x^x = \text{Id}_\Omega$. On vérifie que

$$\text{Dom } s\tau_x^x = S = S \cap \Omega = S \cap \text{Dom } \tau_x^x$$

et que, si $\xi \in \text{Dom } s\tau_x^x = S (\subseteq \Omega)$,

$$s\tau_x^x(\xi) = \xi = \tau_x^x(\xi)$$

Enfin $\tau_x^x(S \cap \text{Dom } \tau_x^x) = \tau_x^x(S \cap \Omega) = \tau_x^x(S) = S$.

II — a n'est pas atomique

$a = [f \ a_I]$, $f \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$ et $[\forall i \in I, a_i \in {}^\wedge T]$.
 $\forall i \in I$, $\text{Var } a_i = \{x_j\}_{j \in J_i}$; $\text{Card } J_i = m_i$.

On sait que

$$\begin{aligned} \text{Dom } s\tau_{[f \ a_I]}^{x_J} = & \left\{ \begin{array}{l} (\xi_j)_J \in S^m \\ \mid \\ \forall i \in I, (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } s\tau_{a_i}^{x_{J_i}} \\ \text{et } (s\tau_{a_i}^{x_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } s\phi_f \end{array} \right. \quad (20.1) \end{aligned}$$

et que

$$\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } s\tau_{[f \ a_I]}^{x_J}, s\tau_{[f \ a_I]}^{x_J}(\xi_j)_J = s\phi_f(s\tau_{a_i}^{x_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \quad (20.2)$$

(voir p. 34).

On sait que

$$\begin{aligned} \text{Dom } \tau_{[f \ a_I]}^{x_J} = & \left\{ \begin{array}{l} (\xi_j)_J \in \Omega^m \\ \mid \\ \forall i \in I, (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } \tau_{a_i}^{x_{J_i}} \\ \text{et } (\tau_{a_i}^{x_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_f \end{array} \right. \quad (20.3) \end{aligned}$$

et que

$$\forall (\xi_j)_J \in \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}, \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \phi_{\mathbf{f}}(\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \quad (20.4)$$

(voir p. 34).

II-1 — $\text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$?

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE — $\forall i \in I, \text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}} = S^{m_i} \cap \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$.

• $\text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$?

$\text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq S^m$ (raisonnement trivial). Puisque $s\Omega \subseteq \Omega$,

$$\text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

(théorème 9 ; voir p. 61). Donc $\text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$.

• $S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq \text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$?

Si $S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = \emptyset$, on vérifie immédiatement l'inclusion. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\xi_j)_J \in S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$. $\forall i \in I, (\xi_j)_{j \in J_i} \in S^{m_i} \cap \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$ (20.3) ; donc

$$\forall i \in I, (\xi_j)_{j \in J_i} \in \text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$$

(hypothèse de récurrence). On sait que

$$s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i} = \tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i} \quad (\in S)$$

(théorème 9 ; voir p. 61).

On vérifie alors que

$$(s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in S^n$$

($s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}$ est une semi-fonction $S^{m_i} \rightarrow S$) et que

$$(s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} = (\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}}$$

(20.3). Donc

$$(s\tau_{\mathbf{a}_i}^{\mathbf{x}_{J_i}}(\xi_j)_{j \in J_i})_{i \in I} \in S^n \cap \text{Dom } \phi_{\mathbf{f}} = \text{Dom } s\phi_{\mathbf{f}}$$

(voir p. 191). On vient de vérifier que $(\xi_j)_J \in \text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$ (20.1) ; donc que

$$S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} \subseteq \text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

II-2 — On a vérifié que

$$\text{Dom } s\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} = S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$$

On vérifie le reste simplement...

Puisque ${}_S\Omega \subseteq \Omega$, si $(\xi_j)_J \in \text{Dom } {}_S\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J} (\subseteq \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J})$, alors

$${}_S\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J$$

(théorème 9 ; voir p. 61) ; en outre,

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = {}_S\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J \in S$$

(${}_S\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}$ est une semi-fonction $S^m \rightarrow S$). On vient de vérifier que

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\text{Dom } {}_S\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}) \subseteq S$$

donc que

$$\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(S^m \cap \text{Dom } \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}) = \tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}(\text{Dom } {}_S\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]}^{\mathbf{x}_J}) \subseteq S$$

■

Théorème 30 — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ un grand-vocabulaire ; $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$. Soit $\mathbf{A}$ une séquence symbolique qui est

soit $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .]$,
 $\mathbf{a} \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$ et $[\forall j \in J, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}]$;

soit $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$,
 $\mathbf{a} \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $[\forall j \in J, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}]$ et $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$;

soit $[[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J \cup U} \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$,
 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in {}^\wedge T(\mathcal{V}, \mathcal{X})$, $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$, $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_U$ et $[\forall j \in J \cup U, \mathbf{K}_j \in \mathcal{S}]$;

soit $[\mathbf{E} = < \mathbf{F} \ .]$,
 $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{S}$;

soit $[\mathbf{f} : \mathbf{E}_I >> \mathbf{F} \ .]$,
 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $I = \{1, \dots, n\}$, $[\forall i \in I, \mathbf{E}_i \in \mathcal{S}]$ et $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$.

Soit Ω un $\mathcal{V}$ -magma. Soit S une bonne tranche de Ω . On considère le $\mathcal{V}$ -magma ${}_S\Omega$.

$$\Omega \models \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad {}_S\Omega \models \mathbf{A}$$

Preuve

Analyse par cas, sans surprise.

On suppose que $\Omega \models \mathbf{A}$. On veut vérifier que ${}_S\Omega \models \mathbf{A}$.

1^{er} cas — $\mathbf{A} = [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \ \$ \ \mathbf{a} \ .]$

• $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

$\Omega \models [\ \$ \ \mathbf{a} \ .]$; c'est-à-dire $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} = \Omega^0$. Donc

$$\text{Dom } {}_S\tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} = \Omega^0 = \{\diamond\} = S^0$$

(théorème 29) ; c'est-à-dire ${}_S\Omega \models [\ \$ \ \mathbf{a} \ .]$.

- $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

J'appelle “ m ” le cardinal de J . $\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$;
c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

Donc

$$\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j} = \prod_{j \in J} (S \cap \sigma_{\mathbf{K}_j}) = S^m \cap \prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq S^m \cap \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} = \text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

(théorème 29) ; c'est-à-dire $s\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .]$.

2^e cas — $\mathbf{A} = [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$

- $\text{Var } \mathbf{a} = \emptyset$

$\Omega \models [\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$; c'est-à-dire $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} = \Omega^0$ et $\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in \sigma_{\mathbf{E}}$. On a déjà vérifié qu'alors $\text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}} = S^0$ (cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$$s\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in s\sigma_{\mathbf{E}}$$

Or $s\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in S$ ($s\tau_{\mathbf{a}}$ est une S -semi-constante) ; et $s\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \tau_{\mathbf{a}} \diamond \in \sigma_{\mathbf{E}}$. Donc

$$s\tau_{\mathbf{a}} \diamond \in S \cap \sigma_{\mathbf{E}} = s\sigma_{\mathbf{E}}$$

On vient de vérifier que

$$s\Omega \models [\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$$

- $\text{Var } \mathbf{a} \neq \emptyset$

$\Omega \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \ .]^{j \in J} \mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$; c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

et

$$\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq \sigma_{\mathbf{E}}$$

On a déjà vérifié qu'alors

$$\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j} = \text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$$

(cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$$s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq s\sigma_{\mathbf{E}}$$

Or d'une part

$$s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq S$$

($s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ est une semi-fonction $S^m \rightarrow S$) ; et d'autre part

$$s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j}) = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq \sigma_{\mathbf{E}}$$

Donc

$$s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j}) \subseteq S \cap \sigma_{\mathbf{E}} = s\sigma_{\mathbf{E}}$$

3^e cas — $\mathbf{A} = \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \rrbracket^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \rrbracket$

• $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} = \emptyset$

$\Omega \models \llbracket \mathbf{a} = \mathbf{b} \rrbracket$; c'est-à-dire $\text{Dom } \tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } \tau_{\mathbf{b}} = \Omega^0$ et $\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \tau_{\mathbf{b}} \diamond$. On a déjà vérifié qu'alors $\text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}} = S^0$ et $\text{Dom } s\tau_{\mathbf{b}} = S^0$ (cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$$s\tau_{\mathbf{a}} \diamond = s\tau_{\mathbf{b}} \diamond$$

Or $s\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \tau_{\mathbf{a}} \diamond = \tau_{\mathbf{b}} \diamond = s\tau_{\mathbf{b}} \diamond$.

• $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} \neq \emptyset$

$\Omega \models \llbracket \mathbf{x}_j :: \mathbf{K}_j \rrbracket^{j \in J \cup U} \mathbf{a} = \mathbf{b} \rrbracket$; c'est-à-dire

$$\prod_{j \in J} \sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}, \quad \prod_{j \in U} \sigma_{\mathbf{K}_j} \subseteq \text{Dom } \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$$

et

$$\forall (\xi_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \sigma_{\mathbf{K}_j}, \quad \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_{j \in U}$$

On a déjà vérifié qu'alors

$$\prod_{j \in J} s\sigma_{\mathbf{K}_j} = \text{Dom } s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} \quad \text{et} \quad \prod_{j \in U} s\sigma_{\mathbf{K}_j} = \text{Dom } s\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$$

(cette preuve ; voir *supra*). Il reste à vérifier que

$$\forall (\xi_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} s\sigma_{\mathbf{K}_j}, \quad s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = s\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_{j \in U}$$

Or $\forall (\xi_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} s\sigma_{\mathbf{K}_j} (\subseteq \prod_{j \in J \cup U} \sigma_{\mathbf{K}_j})$,

$$s\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\xi_j)_J = \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_{j \in U} = s\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\xi_j)_{j \in U}$$

4^e cas — $\mathbf{A} = \llbracket \mathbf{E} =< \mathbf{F} \rrbracket$

$\Omega \models \llbracket \mathbf{E} =< \mathbf{F} \rrbracket$; c'est-à-dire $\sigma_{\mathbf{E}} \subseteq \sigma_{\mathbf{F}}$; donc

$$s\sigma_{\mathbf{E}} = S \cap \sigma_{\mathbf{E}} \subseteq S \cap \sigma_{\mathbf{F}} = s\sigma_{\mathbf{F}}$$

c'est-à-dire $s\Omega \models \llbracket \mathbf{E} =< \mathbf{F} \rrbracket$.

5^e cas — $A = [f : E_I \gg F .]$

$\Omega \models [f : E_I \gg F .]$; c'est-à-dire

$$\prod_{i \in I} \sigma_{E_i} \subseteq \text{Dom } \phi_f \text{ et } \phi_f(\prod_{i \in I} \sigma_{E_i}) \subseteq \sigma_F$$

On déduit d'abord que

$$\prod_{i \in I} S \sigma_{E_i} = \prod_{i \in I} (S \cap \sigma_{E_i}) = S^n \cap \prod_{i \in I} \sigma_{E_i} \subseteq S^n \cap \text{Dom } \phi_f = \text{Dom } S \phi_f$$

puis que

$$S \phi_f(\prod_{i \in I} S \sigma_{E_i}) = \phi_f(\prod_{i \in I} S \sigma_{E_i}) \subseteq \phi_f(\prod_{i \in I} \sigma_{E_i}) \subseteq \sigma_F$$

Par ailleurs

$$S \phi_f(\prod_{i \in I} S \sigma_{E_i}) \subseteq S$$

($S \phi_f$ est une semi-fonction $S^n \rightarrow S$) ; donc

$$S \phi_f(\prod_{i \in I} S \sigma_{E_i}) \subseteq S \cap \sigma_F = S \sigma_F$$

On vient de vérifier que

$$S \Omega \models [f : E_I \gg F .]$$

■

20.2 Le magma des termes significatifs sans variable, ${}^\Delta\Theta$

À quelle condition le sous-ensemble

$$S = {}^\Delta\mathcal{T} \cap {}^\S\Theta$$

est-il une bonne tranche de ${}^\S\Theta$? (S est le sous-ensemble des termes significatifs *sans variable*).

On trouve en fait des expositions pour lesquelles cet S n'est pas une bonne tranche.

Contre-exemple — On connaît ${}_0\mathcal{E}$, qui est une exposition minimale (voir p. 126). Puisque ${}_0\mathcal{F} = \emptyset$, il n'y a pas de terme sans variable (${}^\Delta\mathcal{T}({}_0\mathcal{V}) = \emptyset$). Par conséquent ${}^\Delta\mathcal{T}({}_0\mathcal{V}) \cap {}^\S\Theta({}_0\mathcal{E}) = \emptyset$; cette intersection n'est donc pas une bonne tranche (une bonne tranche n'est pas vide ; corollaire 15, voir p. 190). □

⊠

On est ainsi amené à s'intéresser à certaines expositions, les expositions comblées.

Définition 50 (Exposition comblée) — Soit $\mathcal{E}$ une exposition ;
 $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$.

On dit que $\mathcal{E}$ est comblée pour exprimer qu'elle a cette qualité :

$$\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \exists \mathbf{a} \in \Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}), \mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} \ .]$$

(chaque ${}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$ comprend au moins un terme sans variable).

Proposition 38 — Si $\mathcal{E}$ est comblée, alors $\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$.

Preuve — Si $\mathcal{E}$ est comblée, $\exists \mathbf{a} \in \Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}), \mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : *** \ .]$. Donc $\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$. ■

Corollaire 17 — Si $\mathcal{E}$ est comblée, alors $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Preuve — Puisque $\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ (assertion 7 ; voir p. 27). ■

Théorème 31 — Quelle que soit $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition comblée,
 $\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \cap {}^{\$}\Theta(\mathcal{E})$ est une bonne tranche de ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E})$.

Preuve

Preuve guidée par une définition. Le raisonnement est simple, mais important à bien comprendre car la propriété est essentielle.

On procède ainsi (définition 49).

i — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \exists \mathbf{a} \in \Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}), \mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} \ .]$ ($\mathcal{E}$ est comblée) ; donc

$$\mathbf{a} \in \Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \cap {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$$

On vient de vérifier que $(\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \cap {}^{\$}\Theta) \cap {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}} = \Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \cap {}^{\$}\sigma_{\mathbf{S}}$ n'est pas vide.

ii-a — $\forall \mathbf{e} [e \in \mathcal{F}_0, \text{Dom } \phi_{\mathbf{e}} \neq \emptyset],$

$${}^{\$}\phi_{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \in \Delta \mathcal{T} \cap {}^{\$}\Theta$$

(voir p. 150).

ii-b — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n,$

$$\forall (\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}, {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$$

(voir p. 150) ; en particulier, si $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \text{ est sans variable}]$, alors ${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I$ est sans variable. On vient de vérifier que

$${}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}((\Delta \mathcal{T})^n \cap \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}) \subseteq \Delta \mathcal{T}$$

■

Si $\mathcal{E}$ est comblée, $\Delta \mathcal{T}(\mathcal{V}) \cap {}^{\$}\Theta(\mathcal{E})$ est une bonne tranche de ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E})$; on peut alors considérer le magma

$$\Delta \mathcal{T} \cap {}^{\$}\Theta$$

C'est le magma des termes significatifs sans variable.

Notation

Soit $\mathcal{E}$ une exposition comblée ; $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, a)$.

$$1 \text{ — } \Delta\Theta = \Delta\mathcal{T} \cap {}^{\$}\Theta.$$

2 — $\Delta\Theta$ est le magma $\Delta\mathcal{T} \cap {}^{\$}\Theta$; $\Delta\Theta = (\Delta\Theta, \Delta\Sigma, \Delta\Phi)$, $\Delta\Sigma = \{\Delta\sigma_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, $\Delta\Phi = \{\Delta\phi_f\}_{f \in \mathcal{F}}$.

Remarquer

- $\forall S \in \mathcal{S}$, $\Delta\sigma_S = \Delta\mathcal{T} \cap {}^{\$}\sigma_S$ (voir p. 191).
- $\forall e \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } \Delta\phi_e = \text{Dom } {}^{\$}\phi_e$ (voir p. 191).
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{F}_n$, $\text{Dom } \Delta\phi_f = (\Delta\mathcal{T})^n \cap \text{Dom } {}^{\$}\phi_f$ (voir p. 191).

20.3 Un $\mathcal{E}$ -modèle remarquable, $\Delta\Theta/\triangleq$

Définition 51 (Relation $\triangleq$) — Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition comblée. Soit $\mathbf{a}$ un $\mathcal{V}$ -terme (terme sans variable) ; soit $\mathbf{b}$ un $\mathcal{V}$ -terme.

On dit que $\mathbf{a}$ est lié à $\mathbf{b}$ par $\triangleq$ pour exprimer que

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ .}]$$

Remarquer — On vérifie que, si $\mathbf{a} \triangleq \mathbf{b}$, alors $\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$ et $\mathbf{b} \in {}^{\$}\Theta$ (règle IDEX) ; donc $\mathbf{a} \in \Delta\Theta (= \Delta\mathcal{T} \cap {}^{\$}\Theta)$ et $\mathbf{b} \in \Delta\Theta$. Par la relation $\triangleq$, on associe des éléments de $\Delta\Theta$.

Assertion 13 — $\mathbf{a} \triangleq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$.

Assertion 14 — Soit $\mathbf{a} \in \Delta\Theta$. Soit $\mathbf{b} \in \Delta\Theta$.

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \triangleq \mathbf{b}$$

Théorème 32 — La $\Delta\Theta$ -relation binaire $\triangleq$ est une $\Delta\Theta$ -super-congruence.

Preuve

• $\triangleq$ est réflexive — Soit $\mathbf{a} \in \Delta\Theta (\subseteq {}^{\$}\Theta)$. $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}$ ($\equiv$ est réflexive ; théorème 23, voir p. 157) ; et $\mathbf{a}$ est sans variable. Donc $\mathbf{a} \triangleq \mathbf{a}$ (assertion 14).

• $\triangleq$ est symétrique et transitive — On raisonne de la même façon.

• $\triangleq$ est compatible avec les opérations fondamentales de $\Delta\Theta$

On veut vérifier que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n, (I = \{1, \dots, n\})$$

$$\forall (\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } \Delta\phi_f, \forall (\mathbf{b}_i)_I \in (\Delta\Theta)^n,$$

$$\text{si } [\forall i \in I, \mathbf{a}_i \triangleq \mathbf{b}_i], \text{ alors } (\mathbf{b}_i)_I \in \text{Dom } \Delta\phi_f \text{ et } \Delta\phi_f(\mathbf{a}_i)_I \triangleq \Delta\phi_f(\mathbf{b}_i)_I$$

(définition 27 ; voir p. 82).

Si $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$; $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Si $\text{Dom } \Delta\phi_f = \emptyset$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } \Delta\phi_{\mathbf{f}}$. Soit $(\mathbf{b}_i)_I \in (\Delta\Theta)^n$, $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \triangleq \mathbf{b}_i]$.

On vérifie immédiatement que $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$, que $(\mathbf{b}_i)_I \in ({}^{\$}\Theta)^n$ et que $[\forall i \in I, \mathbf{a}_i \equiv \mathbf{b}_i]$ (raisonnement trivial).

Puisque $\equiv$ est une ${}^{\$}\Theta$ -super-congruence (théorème 23 ; voir p. 157), on déduit déjà que

$$(\mathbf{b}_i)_I \in \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}} \text{ et } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I \equiv {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I$$

Or $(\mathbf{b}_i)_I \in (\Delta\Theta)^n$ et $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } \Delta\phi_{\mathbf{f}}$; donc

$$(\mathbf{b}_i)_I \in (\Delta\Theta)^n \cap \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}} = \text{Dom } \Delta\phi_{\mathbf{f}}$$

et

$$\Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I \equiv {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I = \Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I$$

Enfin, puisque $\Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I \in \Delta\Theta$ et $\Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I \in \Delta\Theta$,

$$\Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I \triangleq \Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}_i)_I$$

(assertion 14 ; voir p. 199). ■

△

Notation — Soit $\mathbf{a} \in \Delta\Theta$; $\bar{\mathbf{a}}$ est la classe des termes $\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \triangleq \mathbf{a}$. Ne pas confondre $\bar{\mathbf{a}}$ et $\bar{\mathbf{a}}$; $\bar{\mathbf{a}} \subseteq \bar{\mathbf{a}}$!

Si $\mathcal{E}$ est une exposition comblée, on peut alors considérer le magma-quotient

$$\Delta\Theta / \triangleq$$

Notation — $\Delta\Theta / \triangleq = (\Delta\Theta / \triangleq, \Delta\bar{\Sigma}, \Delta\bar{\Phi})$, $\Delta\bar{\Sigma} = \{\Delta\bar{\sigma}_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}}$, $\Delta\bar{\Phi} = \{\Delta\bar{\phi}_{\mathbf{f}}\}_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}}$.

Théorème 33 — *Quelle que soit $\mathcal{E} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{P})$ une exposition comblée, le $\mathcal{V}$ -magma-quotient $\Delta\Theta(\mathcal{E}) / \triangleq$ est un $\mathcal{E}$ -modèle.*

Pour prouver ce théorème, on prouve d'abord deux lemmes.

Lemme 11 — *Soit $\mathbf{A}$ une $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale qui n'est pas une formule-identité ; sa $\mathcal{P}$ -garniture est une séquence $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$.*

$$\mathcal{P} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \Delta\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

Preuve

$$\mathcal{P} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow {}^{\$}\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

(lemme 6 ; voir p. 158). Et

$${}^{\$}\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}] \Rightarrow \Delta\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

($\Delta\Theta$ est une bonne tranche de ${}^{\$}\Theta$; théorème 30, voir p. 194). ■

Lemme 12 — *Soit $\mathbf{a} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_J$. Soit $\mathbf{b} \in {}^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$; $\text{Var } \mathbf{b} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in U}$. $\forall j \in J \cup U$, le $\mathcal{P}$ -confinement de $\mathbf{x}_j$ est $[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]$ (voir p. 109).*

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .] \Rightarrow \Delta\Theta / \triangleq \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J \cup U} \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$$

Preuve

C'est le cœur de l'argumentation. Le magma des termes significatifs *sans variable* ressemble à celui des termes significatifs, et en est un sous-magma ; on particularise donc ce qu'on sait déjà en veillant à la stabilité des propriétés.

Soit $\mathbf{a} \in {}^\wedge\mathcal{T}$, soit $\mathbf{b} \in {}^\wedge\mathcal{T}$, $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$. On veut vérifier ceci.

$$(I-a) \Delta\Theta/\triangle \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .] \text{ et}$$

$$(I-b) \Delta\Theta/\triangle \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in U} \$ \mathbf{b} \ .] ;$$

$$(II) \forall (\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \Delta\overline{\sigma}_{\mathbf{H}_j}, \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\gamma_j)_{j \in J} = \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\gamma_j)_{j \in U}.$$

I — $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$; donc $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} \ .]$ et $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{b} \ .]$ (règle IDEX). Donc

$$\Delta\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .] \quad (20.5)$$

et

$$\Delta\Theta \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in U} \$ \mathbf{b} \ .] \quad (20.6)$$

(lemme 11). Donc

$$\Delta\Theta/\triangle \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in J} \$ \mathbf{a} \ .] \quad (20.7)$$

et

$$\Delta\Theta/\triangle \models [[\mathbf{x}_j :: \mathbf{H}_j \ .]^{j \in U} \$ \mathbf{b} \ .] \quad (20.8)$$

(corollaire 6 ; voir p. 105).

$$\text{II} \text{ — } \forall (\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \Delta\overline{\sigma}_{\mathbf{H}_j}, \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}(\gamma_j)_{j \in J} = \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}(\gamma_j)_{j \in U} ?$$

II-1 — 1^{er} cas — $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} = \emptyset$

$\text{Dom } \Delta\tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{a}} = \{\diamond\}$ (20.5 et 20.7) ; $\text{Dom } \Delta\tau_{\mathbf{b}} = \text{Dom } \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{b}} = \{\diamond\}$ (20.6 et 20.8).

Donc

$$\Delta\overline{\tau}_{\mathbf{a}\diamond} = \overline{\overline{\Delta\tau_{\mathbf{a}\diamond}}} \text{ et } \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{b}\diamond} = \overline{\overline{\Delta\tau_{\mathbf{b}\diamond}}}$$

(théorème 15 ; voir p. 75).

On veut vérifier que

$$\Delta\overline{\tau}_{\mathbf{a}\diamond} = \Delta\overline{\tau}_{\mathbf{b}\diamond}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\Delta\tau_{\mathbf{a}\diamond} \triangleq \Delta\tau_{\mathbf{b}\diamond}$$

(si leurs classes sont égales, c'est qu'ils sont liés par $\triangleq$).

Puisque $\Delta\Theta \subseteq \$\Theta$,

$$\Delta\tau_{\mathbf{a}\diamond} = \$\tau_{\mathbf{a}\diamond} = \mathbf{a} \text{ et } \Delta\tau_{\mathbf{b}\diamond} = \$\tau_{\mathbf{b}\diamond} = \mathbf{b}$$

(proposition 28 ; voir p. 150).

On vérifie directement que $\mathbf{a} \in \Delta\Theta$ et $\mathbf{b} \in \Delta\Theta$; donc, puisque $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$,

$$\mathbf{a} \triangleq \mathbf{b}$$

On vient de vérifier que

$$\Delta_{\tau_{\mathbf{a}}} \diamond \quad (= \mathbf{a}) \quad \triangleq \quad (\mathbf{b} =) \quad \Delta_{\tau_{\mathbf{b}}} \diamond$$

II-2 — 2^e cas — $\text{Var } \mathbf{a} \cup \text{Var } \mathbf{b} \neq \emptyset \ (J \cup U \neq \emptyset)$

Soit

$$(\gamma_j)_{j \in J \cup U} \in \prod_{j \in J \cup U} \Delta \overline{\sigma}_{\mathbf{H}_j}$$

$\forall j \in J \cup U$, on trouve un terme $\mathbf{d}_j \in \Delta \sigma_{\mathbf{H}_j}$, $\mathbf{d}_j \in \gamma_j$ (voir p. 72) ; $\mathbf{d}_j \in \Delta\Theta$,

$$\overline{[\mathbf{d}_j]} = \gamma_j.$$

$(\gamma_j)_J \in \text{Dom } \Delta \overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (20.5), $(\gamma_j)_{j \in U} \in \text{Dom } \Delta \overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$ (20.6), $(\mathbf{d}_j)_J \in \text{Dom } \Delta \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J}$ (20.7) et $(\mathbf{d}_j)_{j \in U} \in \text{Dom } \Delta \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U}$ (20.8).

Donc

$$\Delta \overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\gamma_j)_J = \overline{\overline{\Delta \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\mathbf{d}_j)_J}} \quad \text{et} \quad \Delta \overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\gamma_j)_{j \in U} = \overline{\overline{\Delta \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\mathbf{d}_j)_{j \in U}}}$$

(théorème 15 ; voir p. 75).

On veut vérifier que

$$\Delta \overline{\tau}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\gamma_j)_J = \Delta \overline{\tau}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\gamma_j)_{j \in U}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\Delta \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\mathbf{d}_j)_J \triangleq \Delta \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\mathbf{d}_j)_{j \in U}$$

Puisque $\Delta\Theta \subseteq {}^{\$}\Theta$,

$$\Delta \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\mathbf{d}_j)_J = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\mathbf{d}_j)_J = \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_J$$

et

$$\Delta \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\mathbf{d}_j)_{j \in U} = {}^{\$}\tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\mathbf{d}_j)_{j \in U} = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U}$$

(proposition 29 ; voir p. 151).

$\forall j \in J \cup U$, $\mathbf{d}_j \in \Delta \sigma_{\mathbf{H}_j}$; c'est-à-dire $\mathbf{d}_j$ est sans variable et $\mathcal{P} \vdash [\mathbf{d}_j : \mathbf{H}_j \ .]$. Donc $\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_J$ est sans variable, $\mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U}$ est sans variable, et

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_J = \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U} \ .]$$

(règle SID). C'est-à-dire

$$\mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_J \triangleq \mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U}$$

On vient de vérifier que

$$\Delta \tau_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}_J} (\mathbf{d}_j)_J \quad (= \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_J) \quad \triangleq \quad (\mathbf{b}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in U} =) \quad \Delta \tau_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}_U} (\mathbf{d}_j)_{j \in U}$$

■

Preuve du théorème 33

S'il n'y a pas de $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule germinale élément de $\mathcal{P}$, on a fini. Sinon on procède ainsi.

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{A}$ étant une formule germinale. J'appelle " $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ " sa $\mathcal{P}$ -garniture.

1 — Si $\mathbf{A}$ n'est pas une formule-identité, on sait que ${}^{\Delta}\Theta \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$ (lemme 11). Donc

$${}^{\Delta}\Theta / \triangle \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

(corollaire 6 ; voir p. 105).

2 — Si $\mathbf{A}$ est une formule-identité, on sait immédiatement que

$${}^{\Delta}\Theta / \triangle \models [\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \ \mathbf{A}]$$

(lemme 12). ■

20.4 Un magma initial dans la classe des $\mathcal{E}$ -modèles

Définition 52 (Magma initial) — Soit $\mathcal{V}$ un vocabulaire. Soit $\mathbf{CLA}$ une classe non vide de $\mathcal{V}$ -magmas.

On appelle "magma initial de $\mathbf{CLA}$ " tout magma ${}_b\Omega \in \mathbf{CLA}$ qui a cette qualité :

$\forall {}_c\Omega \in \mathbf{CLA}$, il existe un unique $\mathcal{V}$ -homomorphisme ${}_b\Omega \rightarrow {}_c\Omega$.

Théorème 34 — Quelle que soit $\mathcal{E}$ une exposition comblée, le magma-quotient ${}^{\Delta}\Theta / \triangle$ est un magma initial de $\mathbf{MOD}(\mathcal{E})$.

Preuve

Jolie preuve-feuilleton d'existence et d'unicité. On en saisira l'esprit en lisant le préambule et les titres des paragraphes (les différentes étapes du raisonnement).

Cette preuve ressemble à la preuve du théorème 28 (voir p. 184).

On sait que ${}^{\Delta}\Theta / \triangle$ est un $\mathcal{E}$ -modèle (théorème 33). Soit ${}_c\Omega$ un $\mathcal{E}$ -modèle ; ${}_c\Omega = ({}_c\Omega, {}_c\Sigma, {}_c\Phi)$. On veut trouver un homomorphisme

$${}^{\Delta}\Theta / \triangle \rightarrow {}_c\Omega$$

et vérifier qu'il est unique.

I — Un candidat

Soit $\gamma \in {}^{\Delta}\Theta / \triangle$. Il y a au moins un terme $\mathbf{a} \in \gamma$ (une classe d'équivalence n'est pas vide) ; $\mathbf{a} \in {}^{\Delta}\Theta$, $\bar{\mathbf{a}} = \gamma$.

$\mathbf{a} \in {}^\Delta\Theta$; donc $\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{a} .]$. Puisque ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle,

$${}_c\Omega \models [\$ \mathbf{a} .]$$

(théorème de correction) ; c'est-à-dire

$$\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}} = ({}_c\Omega)^0$$

Il y a donc un élément

$${}_c\tau_{\mathbf{a}}\diamond \in {}_c\Omega$$

Cet élément est-il fonction de $\mathbf{a}$, ou est-il fonction de $\gamma (= \overline{\overline{\mathbf{a}}})$? Soit $\mathbf{b} \in \gamma$; $\overline{\overline{\mathbf{b}}} = \gamma (= \overline{\overline{\mathbf{a}}})$. En raisonnant de la même façon, on vérifie que

$$\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{b}} = ({}_c\Omega)^0$$

et qu'il y a un élément

$${}_c\tau_{\mathbf{b}}\diamond \in {}_c\Omega$$

$\mathbf{a} \in \gamma$ et $\mathbf{b} \in \gamma$; donc $\mathbf{a} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{b}$; c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} = \mathbf{b} .]$$

Puisque ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle,

$${}_c\Omega \models [\mathbf{a} = \mathbf{b} .]$$

(théorème de correction) ; donc

$${}_c\tau_{\mathbf{a}}\diamond = {}_c\tau_{\mathbf{b}}\diamond$$

On vient de révéler cette fonction :

$$\begin{array}{ccc} \pi : {}^\Delta\Theta / \stackrel{\Delta}{=} & \rightarrow & {}_c\Omega \\ \gamma & \mapsto & {}_c\tau_{\mathbf{a}}\diamond \end{array}$$

$\mathbf{a}$ étant n'importe quel représentant de γ .

II — π est un homomorphisme ${}^\Delta\Theta / \stackrel{\Delta}{=} \rightarrow {}_c\Omega$

Pour le vérifier, on procède ainsi (définition 19 ; voir p. 54).

II-i — $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, \pi({}^\Delta\overline{\overline{\mathbf{S}}}) \subseteq {}_c\sigma_{\mathbf{S}}$?

Soit $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Soit $\gamma \in {}^\Delta\overline{\overline{\mathbf{S}}}$. On trouve un représentant $\mathbf{a}$ de γ , $\mathbf{a} \in {}^\Delta\sigma_{\mathbf{S}}$ (voir p. 72).

$$\Delta_{\sigma_S} = (\Delta\mathcal{T} \cap {}^\$ \Theta) \cap {}^\$ \sigma_S = \Delta\mathcal{T} \cap {}^\$ \sigma_S ; \text{ donc}$$

$$\mathcal{P} \vdash [\mathbf{a} : \mathbf{S} .]$$

Puisque ${}_c\Omega$ est un $\mathcal{E}$ -modèle,

$${}_c\Omega \models [\mathbf{a} : \mathbf{S} .]$$

(théorème de correction) ; donc

$$\pi(\gamma) = {}_c\tau_{\mathbf{a}\diamond} \in {}_c\sigma_S$$

On vient de vérifier que

$$\pi(\Delta\overline{\overline{\sigma}}_S) \subseteq {}_c\sigma_S$$

II-ii-a — On veut vérifier ceci : $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$, $\text{Dom } \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}} \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{e}}$; et si $\text{Dom } \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}} \neq \emptyset$, alors

$$\pi(\Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}\diamond}) = {}_c\phi_{\mathbf{e}\diamond}$$

Si $\mathcal{F}_0 = \emptyset$, on vérifie immédiatement la propriété. Sinon on procède ainsi. Soit $\mathbf{e} \in \mathcal{F}_0$. Si $\text{Dom } \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}} = \emptyset$, on vérifie immédiatement la propriété. Sinon on procède ainsi.

$$\text{Dom } \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}} = (\Delta\Theta/\triangle)^0 ; \text{ donc } \text{Dom } \Delta\phi_{\mathbf{e}} = (\Delta\Theta)^0 \text{ et}$$

$$\Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}\diamond} = \overline{\overline{\Delta\phi_{\mathbf{e}\diamond}}}$$

(voir p. 73).

$$\text{Donc } \text{Dom } {}^\$ \phi_{\mathbf{e}} = \text{Dom } \Delta\phi_{\mathbf{e}} \neq \emptyset \text{ et}$$

$$\Delta\phi_{\mathbf{e}\diamond} = {}^\$ \phi_{\mathbf{e}\diamond} \quad (= \mathbf{e})$$

(voir p. 191).

Donc $\mathcal{P} \vdash [{}^\$ \mathbf{e} .]$; et ${}_c\Omega \models [{}^\$ \mathbf{e} .]$ (${}_c\Omega$ est une $\mathcal{E}$ -modèle) ; c'est-à-dire $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{e}} = ({}_c\Omega)^0$. On vient de vérifier que

$$\text{Dom } \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}} = (\Delta\Theta/\triangle)^0 = \{\diamond\} = ({}_c\Omega)^0 = \text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{e}}$$

En outre, puisque

$$\Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}\diamond} = \overline{\overline{\Delta\phi_{\mathbf{e}\diamond}}} = \overline{\overline{{}^\$ \phi_{\mathbf{e}\diamond}}} = \overline{\overline{\mathbf{e}}}$$

$\mathbf{e}$ est un représentant de $\Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}\diamond}$; donc

$$\pi(\Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{e}\diamond}) = {}_c\tau_{\mathbf{e}\diamond} = {}_c\phi_{\mathbf{e}\diamond}$$

II-ii-b — On veut vérifier ceci : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$,

$${}^n\pi(\text{Dom } \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

et $(I = \{1, \dots, n\})$

$$\forall (\gamma_i)_I \in \text{Dom } \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}, \pi \circ \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}(\gamma_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\pi(\gamma_i))_{i \in I}$$

Si $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \emptyset$, on vérifie la propriété immédiatement (raisonnement trivial). Sinon on procède ainsi. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$; $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). Si $\text{Dom } \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}} = \emptyset$, on vérifie la propriété immédiatement (raisonnement trivial). Sinon on procède ainsi.

Soit $(\gamma_i)_I \in \text{Dom } \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}$. $\forall i \in I$, on trouve un représentant $\mathbf{a}_i$ de γ_i , $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } \Delta \phi_{\mathbf{f}}$ (voir p. 73) ; $\mathbf{a}_i \in \Delta \Theta$, $\overline{\overline{\mathbf{a}_i}} = \gamma_i$.
Quel est l'élément ${}^n\pi(\gamma_i)_I$?

$${}^n\pi(\gamma_i)_I = (\pi(\gamma_i))_{i \in I} = ({}_c\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_{i \in I} \quad (20.9)$$

Puisque $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } \Delta \phi_{\mathbf{f}} = (\Delta \mathcal{T})^n \cap \text{Dom } {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}$,

$$\mathcal{P} \vdash [\$ \mathbf{f} \mathbf{a}_I .]$$

(voir p. 150). Donc

$${}_c\Omega \models [\$ \mathbf{f} \mathbf{a}_I .]$$

(théorème de correction) ; c'est-à-dire $\text{Dom } {}_c\tau_{[\mathbf{f} \mathbf{a}_I]} = ({}_c\Omega)^0$. En particulier

$$({}_c\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_{i \in I} \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

(voir p. 32).

On vient de vérifier que

$${}^n\pi(\gamma_i)_I = ({}_c\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_{i \in I} \in \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

donc que

$${}^n\pi(\text{Dom } \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}) \subseteq \text{Dom } {}_c\phi_{\mathbf{f}}$$

Il reste à vérifier que

$$\pi \circ \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}(\gamma_i)_I = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\pi(\gamma_i))_{i \in I}$$

Puisque $(\mathbf{a}_i)_I \in \text{Dom } \Delta \phi_{\mathbf{f}} \cap \prod_I \gamma_i$,

$$\Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}(\gamma_i)_I = \Delta \overline{\overline{\phi_{\mathbf{f}}}}(\overline{\overline{\mathbf{a}_i}})_I = \overline{\overline{\Delta \phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I}}$$

(voir p. 73).

On sait que

$$\Delta\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = {}^{\$}\phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}_i)_I = [\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$$

(voir pp. 191 et 150). Donc $[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]$ (qui est sans variable) est un représentant de $\Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I$; donc

$$\pi \circ \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I = {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} \diamond$$

On sait que

$${}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} \diamond = {}_c\phi_{\mathbf{f}}({}_c\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_{i \in I}$$

(voir p. 32) et que

$$({}_c\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_{i \in I} = (\pi(\gamma_i))_{i \in I}$$

(20.9).

On vient de vérifier que

$$\pi \circ \Delta\overline{\overline{\phi}}_{\mathbf{f}}(\gamma_i)_I = {}_c\tau_{[\mathbf{f} \ \mathbf{a}_I]} \diamond = {}_c\phi_{\mathbf{f}}({}_c\tau_{\mathbf{a}_i} \diamond)_{i \in I} = {}_c\phi_{\mathbf{f}}(\pi(\gamma_i))_{i \in I}$$

III — π est le seul homomorphisme $\Delta\Theta/\trianglelefteq \rightarrow {}_c\Omega$

Soit π' un homomorphisme $\Delta\Theta/\trianglelefteq \rightarrow {}_c\Omega$. Soit $\gamma \in \Delta\Theta/\trianglelefteq$. On veut vérifier que

$$\pi'(\gamma) = \pi(\gamma)$$

Il y a au moins un représentant $\mathbf{a}$ de γ ; $\mathbf{a} \in \Delta\Theta = \Delta\mathcal{T} \cap {}^{\$}\Theta$, $\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \gamma$.

$\mathbf{a} \in {}^{\$}\Theta$; c'est-à-dire $\mathcal{P} \vdash [{}^{\$} \ \mathbf{a} \ .]$. Donc $\text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$ et ${}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \mathbf{a}$

(proposition 28 ; voir p. 150).

Donc $\text{Dom } \Delta\tau_{\mathbf{a}} = \text{Dom } {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$ et $\Delta\tau_{\mathbf{a}} \diamond = {}^{\$}\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \mathbf{a}$ (théorème 29 ; voir p. 191).

Donc $\text{Dom } \Delta\overline{\overline{\tau}}_{\mathbf{a}} \supseteq \text{Dom } \Delta\tau_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$ et $\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \overline{\overline{\Delta\tau_{\mathbf{a}} \diamond}} = \Delta\overline{\overline{\tau}}_{\mathbf{a}} \diamond$ (théorème 15 ; voir p. 75).

On vient de vérifier que

$$\gamma = \overline{\overline{\mathbf{a}}} = \Delta\overline{\overline{\tau}}_{\mathbf{a}} \diamond$$

Puisque π' est un homomorphisme $\Delta\Theta/\trianglelefteq \rightarrow {}_c\Omega$, $\text{Dom } {}_c\tau_{\mathbf{a}} \supseteq \text{Dom } \Delta\overline{\overline{\tau}}_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$ et

$$\pi'(\Delta\overline{\overline{\tau}}_{\mathbf{a}} \diamond) = {}_c\tau_{\mathbf{a}} \diamond$$

(théorème 7 ; voir p. 55).

On vient de vérifier que

$$\pi'(\gamma) = \pi'(\Delta\overline{\overline{\tau}}_{\mathbf{a}} \diamond) = {}_c\tau_{\mathbf{a}} \diamond = \pi(\gamma)$$

donc que $\pi' = \pi$. ■

Partie IV

Finale

Chapitre 21

Conclusion, discussion, prospective

Par cette seule étude je ne crois pas avoir épuisé le sujet, qui paraît vaste et riche. Il subsiste en effet des questions ouvertes, et on imagine aisément la généralisation et l'automatisation de l'algèbre G.

- Résultats non exposés
- Partie du sujet non explorée (questions ouvertes)
- Augmenter la théorie
- Algèbre G et programmation

Résultats non exposés

On peut toujours combler une exposition

On a vérifié que, quelle que soit $\mathcal{E}$ une exposition *comblée*, le magma-quotient $\Delta\Theta(\mathcal{E})/\triangleq$ est le magma initial de la classe des $\mathcal{E}$ -modèles (théorème 34 ; voir p. 203).

Or il y a des expositions non comblées (section *Deux semi-groupes liés par un homomorphisme* ; voir p. 130). On doit donc se poser cette question : que $\mathcal{E}$ soit comblée, est-ce une condition cruciale ou limitative pour qu'il existe un magma initial (dans la classe des $\mathcal{E}$ -modèles) ?

En fait, non. Car on peut toujours combler une exposition par la technique de Henkin [7] : on ajoute des symboles de constante et des formules-appartenance de telle façon que *chaque sorte soit "habitée" par un terme significatif sans variable* ; l'exposition augmentée $\mathcal{E}^+$ est comblée, et l'extension conservative.

Chaque substitution " bien sortée " correspond à un endomorphisme du magma des termes significatifs

On considère une exposition $\mathcal{E}$ et une valuation *bien sortée* des variables, c'est-à-dire une suite

$$\mathcal{X} \ni \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{d}_i \in {}^{\$}\sigma_{\mathbf{H}_i}$$

(à chaque variable on associe un terme qui a la sorte de la variable ; voir pp. 109 et 149).

On peut alors vérifier que la fonction

$$\begin{aligned} {}^{\$}\Theta &\rightarrow {}^{\$}\Theta \\ \mathbf{a} &\mapsto \mathbf{a}\{\mathbf{d}_j @ \mathbf{x}_j\}_{j \in J} \end{aligned}$$

($\text{Var } \mathbf{a} = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in J}$) est un endomorphisme de ${}^{\$}\Theta$.

Partie du sujet non explorée (questions ouvertes)

Peut-on généraliser le grand théorème de Birkhoff ?

Une classe de $\mathcal{E}$ -modèles n'est pas n'importe quelle classe de $\mathcal{V}$ -magmas. Peut-on caractériser une telle classe par ses propriétés, *sans faire aucune référence à $\mathcal{E}$* ?

Procédant par analogie, on cherchera pour commencer à généraliser le grand théorème de Birkhoff, c'est-à-dire à répondre à cette question :

Une classe de $\mathcal{V}$ -magmas qui a ces qualités (une variété) :

- tout sous-magma d'un magma de la classe est dans la classe ;
 - toute image homomorphe d'un magma de la classe est dans la classe ;
 - tout produit de magmas de la classe est dans la classe ;
- est-elle une classe de $\mathcal{E}$ -modèles ($\mathcal{E}$ restant à déterminer) ?

Existence d'un magma libre

Quelle que soit $\mathcal{E}$ une exposition, *il y a toujours un magma libre dans la classe des $\mathcal{E}$ -modèles* ; ${}^{\$}\Theta(\mathcal{E})/\equiv$ est en effet un Ξ -magma-libre de la classe des $\mathcal{E}$ -modèles (théorème 28 ; voir p. 184).

La classe de *tous les $\mathcal{V}$ -magmas*, une sur-classe de la classe des $\mathcal{E}$ -modèles, est-elle aussi bien organisée ? peut-on y trouver un magma libre ? Il semble que non.

Augmenter la théorie

Semi-prédicat

Les seuls prédicats qu'on a considérés sont des prédicats spéciaux :

- l'identité ($[\mathbf{a} = \mathbf{b} \ .]$) ;
- l'appartenance ($[\mathbf{a} : \mathbf{E} \ .]$) ;
- l'existence ($[\$ \mathbf{a} \ .]$).

Pour marier l'algèbre G avec la logique du premier ordre, on pense aussitôt à introduire le concept général de *semi-prédicat* (le domaine d'un semi-prédicat pouvant être inclus *stricto sensu* dans le support du magma), et à développer un langage (formules) et un calcul (règles d'inférence) adéquats. Il y a quelques jalons [26,27].

Opérations relatives aux sortes

On n'a considéré *aucune opération relative aux sortes* : ni l'union, ni l'intersection, ni le complémentaire, ni etc. Or faire apparaître de telles opérations est bien utile. Par exemple, on constate sans peine que *pour décrire le domaine de toute composée de semi-fonctions il suffit de faire référence à ces deux seules opérations* :

- l'intersection de sous-ensembles ($E \cap F$) ;
- la f^{-1} -image d'un sous-ensemble ($f^{-1}(E)$).

Aussi est-on tenté d'enrichir le langage et le calcul à cet effet. Mais il faut auparavant résoudre une difficulté liée à l'ensemble vide (on n'a considéré *que des sortes non vides* ; or si l'on accepte de considérer $E \cap F$, on ne peut exclure que $E \cap F = \emptyset$; voir *infra*).

Être affirmatif ou spéculatif

Le problème des sortes vides est un cas particulier d'un problème plus général, lié à cette opposition :

Doit-on être affirmatif ? — On ne raisonne que sur des objets existants ; tout nom est le nom d'un objet.

Ou peut-on être spéculatif ? — On raisonne avec des noms. *Quand ces noms désignent des objets*, on dit alors quelque chose de correct à leur sujet. Par exemple, quand on écrit

$$\forall x \in \emptyset, x = x$$

“ x ” ne dénote aucun objet, ce n'est qu'un nom.

Si l'on pouvait, on choisirait naturellement d'être toujours affirmatif. Pourtant on constate qu'il n'y a pas une seule preuve mathématique d'une certaine ampleur sans raisonnement spéculatif (ne serait-ce qu'à cause d'ensembles peut-être vides). Est-ce une simple commodité ? Ou y a-t-il une raison fondamentale ? Peut-on formaliser d'une manière complète les raisonnements de ce type ?

C'est un problème fascinant mais périlleux : le logicien traditionnel refuse absolument d'écrire des noms qui ne dénotent rien.

Inclusion et exclusion — Marier l'algèbre G et la théorie des types

La notion originelle de type (λ -calcul typé, théorie des types de Martin-Löf, types du langage de programmation Pascal) correspond à une intention de *classement exclusif* : les ensembles considérés sont deux à deux disjoints (on ne mélange pas les choux et les carottes) ; en particulier aucun d'eux n'est sous-ensemble d'un autre. Chaque objet a ainsi un et un seul type, de sorte que si l'on sait que a a la type A et b le type B , $B \neq A$, alors on peut déduire que $a \neq b$ (on ne confond pas 3 km et 3 kg). Ce classement exclusif est important, car c'est de cette façon qu'on parvient à “ stratifier ” l'univers considéré (individus, fonctions, fonctionnelles, etc.).

Or l'objet de l'algèbre G est exactement contraire. On veut et on sait exprimer l'inclusion (`[Primate =< Mammifere .]` ; une carotte est un légume, est un végétal) ; mais on est incapable cette fois d'exprimer l'exclusion.

Aussi suis-je conduit à imaginer que l'algèbre G et la théorie des types sont deux instances d'une théorie englobante, par laquelle on rendrait compte et de l'exclusion et de l'inclusion. Qu'une telle synthèse soit possible est d'autant plus crédible que de leur côté les théoriciens des types l'envisagent aussi.

Algèbre G et programmation

Une sémantique de la programmation “ objet ”

On peut proposer l'algèbre G comme une sémantique des langages de programmation “ objet ” et notamment de l'héritage. Dire qu'un objet *x* de type automobile est aussi de type véhicule terrestre à moteur (vam), et donc hérite des propriétés de la super-classe, c'est exactement dire

`Automobile =< Vam .`

L'héritage correspond donc à l'inclusion.

Automatiser le calcul

L'algèbre G est livrée toute prête à être automatisée : le calcul proposé est en effet *purement symbolique*, et l'interprétation de ce calcul nette, satisfaisante et sans paradoxe connu. Aussi est-on tenté d'en dériver un outil informatique de validation-démonstration, voire un langage de programmation [44,45,48].

Il faudra pour cela s'inspirer des algorithmes connus de réécriture. Toutefois, parce qu'on passe de l'algèbre universelle à l'algèbre G par un saut qualitatif (la logique présentée est beaucoup plus qu'une logique de l'égalité), j'imagine que la réécriture n'est qu'un fragment du mécanisme voulu.

Partie V

Annexe

Appendice A

Notation

A.1 Préliminaires — Ensembles d'indices

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère cet ensemble d'indices, qui n'est pas vide :

$$I = \{1, \dots, n\}$$

Soit L un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^*$. On considère les ensembles d'indices J et K .

- $J \subseteq L$; Card $J = m$.
Ou $J = \emptyset$.
Ou $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m$.
- $K \subseteq L$; Card $K = q$.
Ou $K = \emptyset$.
Ou $K = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_q$.

A.2 Notation générale

A.2.1 Produit d'ensembles

Soit $\diamond$ un élément de l'univers (par exemple l'étoile Arcturus). Soit Ω un ensemble.

- $\Omega^0 = \{\diamond\}$.
- $\prod_{j \in J} \Omega = \Omega^m$.

On vérifie que $\prod_{j \in \emptyset} \Omega = \Omega^0 = \{\diamond\}$.

On suppose que $L \neq \emptyset$. $\forall l \in L$, soit H_l un ensemble.

- Si $J \neq \emptyset$, $\prod_{j \in J} H_j = H_{j_1} \times \dots \times H_{j_m}$.

- $\prod_{j \in \emptyset} H_j = \{\diamond\}$.

A.2.2 Ensemble d'éléments désignés

On suppose que $L \neq \emptyset$. $\forall l \in L$, soit x_l un certain objet. Soit x un certain objet.

- Si $J \neq \emptyset$, $\{x_j\}_{j \in J} = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}$.
- $\{x_j\}_{j \in \emptyset} = \emptyset$.
- $\{x, x_j\}_{j \in J} = \{x\} \cup \{x_j\}_{j \in J}$.

Si l'expression abrégée n'est pas ambiguë, on peut écrire “ $\{x_j\}_J$ ” au lieu de “ $\{x_j\}_{j \in J}$ ” etc.

A.2.3 Multiplet

On suppose que $L \neq \emptyset$. $\forall l \in L$, soit x_l un certain objet. Soit x un certain objet.

- Si $J \neq \emptyset$, $(x_j)_{j \in J} = (x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$.
- $(x_j)_{j \in \emptyset} = \diamond$.
- Si $J \neq \emptyset$, $(x, x_j)_{j \in J} = (x, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$.
- $(x, x_j)_{j \in \emptyset} = x$.
- Si $J \neq \emptyset$ et si $K \neq \emptyset$, $(x_k, x, x_j)_{k \in K, j \in J} = (x_{k_1}, \dots, x_{k_q}, x, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$.
- Si $J \neq \emptyset$, si p une permutation $J \leftrightarrow J$, $(x_{p(j)})_{j \in J} = (x_{p(j_1)}, \dots, x_{p(j_m)})$.

Si l'expression abrégée n'est pas ambiguë, on peut écrire “ $(x_j)_J$ ” au lieu de “ $(x_j)_{j \in J}$ ” etc.

A.2.4 Argument et résultat

Soient f une semi-fonction, $(y_i)_{i \in I}$ un élément de son domaine.
 $f(y_i)_{i \in I} = f(y_1, \dots, y_n)$. Si l'expression abrégée n'est pas ambiguë, on peut écrire “ $f(y_i)_I$ ” au lieu de “ $f(y_i)_{i \in I}$ ”.

On suppose que $L \neq \emptyset$. $\forall l \in L$, soit x_l un certain objet. Soit x un certain objet.

- Soit e un semi-constante *non vide*. $e(x_j)_{j \in \emptyset} = e\diamond$.
- Soit g une semi-fonction, $(x, x_j)_{j \in J}$ étant élément de son domaine. Si $J \neq \emptyset$, $g(x, x_j)_{j \in J} = g(x, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$; sinon, $g(x, x_j)_{j \in \emptyset} = g(x)$.

A.2.5 Divers

- Pour noter que l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F , on peut écrire : $E \subseteq F$.

- Pour noter que E est inclus dans F et que E et F sont distincts, on peut écrire : $E \subset F$. On ne confond pas les signes " $\subseteq$ " et " $\subset$ " !
- Soit Ω un ensemble. Soit P un prédicat relatif à l'ensemble $\{\diamond\}$. La formule " $\forall \diamond \in \Omega^0, P(\diamond)$ " signifie que $P(\diamond)$ (l'élément $\diamond$ a la propriété P).

A.3 Désigner des symboles et des séquences symboliques

A.3.1 Variable syntaxique

On peut désigner un symbole de deux façons :

- soit le montrer, c'est-à-dire l'écrire ; on écrit par exemple :

Nat

- soit le nommer ; on écrit par exemple :

Soit **E** un symbole d'ensemble etc.

le symbole **E** étant *a priori* quelconque ; en particulier, on peut choisir que **E** soit "**Nat**".

Mais "**E**" est lui-même un symbole... On est donc amené à distinguer deux classes de symboles :

- les *symboles-objets* ; je les dessine à la machine à écrire (**Nat**) ;
- les *variables syntaxiques* ; je les dessine au crayon gras (**E**).

Il n'y a qu'un petit nombre de variables syntaxiques qui apparaissent dans ce texte, et elles ont toujours le même sens :

- **o** est un symbole (quelconque) ;
- **l** est une séquence symbolique (quelconque) ;
- **E, F, G, H** etc. sont des symboles d'ensemble ;
- **e, e₁, e₂** etc. sont des symboles de constante ;
- **f, g, h** etc. sont des symboles de semi-fonction ;
- **x, y, z** etc. sont des variables ;
- **a, b, c, d** etc. sont des termes ;
- **A, B, C, D** etc. sont des formules ;
- **u, v** etc. sont des termes ou des formules.

A.3.2 Variables apparaissant dans un terme ou une formule — Notation amplifiée

Soit u un terme ou une formule. Si on veut renseigner au sujet des variables qui apparaissent dans u , on nomme ce terme ou cette formule ainsi :

($r \in \mathbb{N}^*$; $x_1, \dots, x_r$ sont r variables)

- $u\{x_1, \dots, x_r\}$ est un terme ou une formule dont l'ensemble des variables est $\{x_1, \dots, x_r\}$. $u\{\}$ est un terme ou une formule sans variable.
- $u\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ est un terme ou une formule dans lequel apparaissent les variables $x_1, \dots, x_r$ (mais ne sont peut-être pas les seules).
- $u(x_1, \dots, x_r)$ est un terme ou une formule dont toute variable est élément de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_r\}$. $u()$ est un terme ou une formule sans variable (“ $u()$ ” et “ $u\{\}$ ” sont synonymes).

✕ *Exemple* — On considère un vocabulaire qui comporte ces symboles : “plus” est un symbole binaire de semi-fonction ; “i”, “j” et “k” sont des variables. $[\text{plus } i \ j]$ est donc un terme, qu'on peut appeler au choix : “a”, “ $a\{i, j\}$ ”, “ $a(i)$ ”, “ $a(j)$ ” ou “ $a(i, j, k)$ ”. □

A.3.3 Concaténation de séquences symboliques

$\forall i \in I$, soit l_i une séquence symbolique et soit o_i un symbole.

- l_I est la séquence $[l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$.
- $l_\emptyset$ est la séquence vide $[\]$.
- $[o_i \ l_i]^{i \in I} = [o_1 \ l_1 \ o_2 \ l_2 \ \dots \ o_n \ l_n]$. Si l'expression abrégée n'est pas ambiguë, on peut écrire “ $[o_i \ l_i]^I$ ” au lieu de “ $[o_i \ l_i]^{i \in I}$ ”.
- $[o_i \ l_i]^{i \in \emptyset} = [\]$.

On suppose que $L \neq \emptyset$. $\forall l \in L$, soit l' une séquence symbolique.

- Si $J \neq \emptyset$ (section A.1 ; voir p. 217), $l'_J = [l'_{j_1} \ \dots \ l'_{j_m}]$.
- Si $J \neq \emptyset$, si p une permutation $J \leftrightarrow J$, $[l'_{p(j)}]^{j \in J} = [l'_{p(j_1)} \ \dots \ l'_{p(j_m)}]$.

✕ *Exemple*

I est l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. x_1 est la variable “x”, x_2 la variable “y”, x_3 la variable “z” ; H_1 est le symbole d'ensemble “E”, H_2 le symbole “F” et H_3 le symbole “G”.

- x_I est la séquence $[x \ y \ z]$.
- $[x_i :: H_i \ .]^{i \in I}$ est la séquence $[x :: E \ . \ y :: F \ . \ z :: G \ .]$.

□

Appendice B

Lexique — Mots anglais proposés

arité	arity
base	base
cible	target
domaine	domain
empreinte	range
fonction	function
formule-appartenance	membership-formula
formule-conduit	duct-formula
formule-confinement	confinement-formula
formule-existence	existence-formula
formule-identité	identity-formula
formule-inclusion	inclusion-formula
garniture	trimming (?)
germinale (formule)	germinal
graphe fonctionnel	functional graph
semi-fonction	semi-function
support	carrier, universe
surjection	surjection, surjective function, function onto

Appendice C

Index — Symboles mathématiques

Symboles graphiques

$\circ$	7
$\diamond$	8
$\lceil$	25
$\rfloor$	25
$\prod$	31
$\subset$	58, 219
$\subseteq$	58, 218
$\angle$	27
$\rightarrow$	4
$\rightarrow$	5, 54
$\leftrightarrow$	61
$\mapsto$	5
$\cong$	69, 82
$\cong_\alpha$	78
$\equiv$	157
$\triangleq$	199
$\vdash$	119
$\models$	96

Symboles-objets

***	17
.	17
::	17
\$	17
:	17
=	17

$=<$	17
$>>$	17

Lettres ordinaires — Majuscules

E	4
E^0	8
F	4
G	4
I	217
I_s	34
J	217
J_i	43
J_r	49
J_s	48
J'_s	49
K	42
K_j	42
L	19, 217
S	8
S^0	8
U	99

Lettres ordinaires — Minuscules

a	18
$\hat{a}$	108
e	8
$e(x_j)_{j \in \emptyset}$	218
f	4
$f(x)$	4
$g(x_1, \dots, x_n)$	8
l	19
m	217
n	18
q	217
r	27
x	3
$(x_{p(j)})_{j \in J}$	218
y	3

Lettres calligraphiées

$\mathcal{E}$	108
$\mathcal{F}$	18
$\mathcal{F}_n$	18
$\mathcal{I}$	174
$\mathcal{L}$	174
$\mathcal{P}$	108
$\mathcal{R}$	17
$\mathcal{S}$	18
$^{\wedge}\mathcal{T}$	25
$\Delta\mathcal{T}$	149
$^{\wedge}\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$	25
$\Delta\mathcal{T}(\mathcal{V})$	27
$\mathcal{X}$	19
$\mathcal{Y}$	38
$\mathcal{Z}$	16

Lettres épaisses — Majuscules

A	219
E	219
E_i	93
F	219
G	219
H	219
H_j	109
H_l	109
K	115
K_j	116
N	22
N*	22
Q	23
R	23
S	21

Lettres épaisses — Minuscules

a	219
a'	49
$\bar{a}$	158
$\bar{\bar{a}}$	200
a_i	25
a{d_j @ x_j}_{j∈J}	40

b	219
c	219
d	219
d_j	116
e	25
f	21, 219
g	219
h	219
l	219
l_i	25
l_I	25
[l_{p(j)}]^{j∈J}	36
o	219
u	219
v	219
x	25, 219
x_l	19
x_n	16
x_∅	31
x_J	31
y	219
y_i	117

Lettres grecques — Majuscules

Φ	21
$\overline{\Phi}$	72
$^s\Phi$	149
$^s\overline{\Phi}$	158
ΔΦ	199
Δ$\overline{\Phi}$	200
_bΦ	54
_cΦ	54
_sΦ	58
_SΦ	191
K	179
Λ	40
Ω	21
Ω⁰	32
Ω	21
Ω/≅	72
_bΩ	54
_cΩ	54
_sΩ	58
_SΩ	191

${}_1\Omega \times {}_2\Omega$	67
Σ	21
$\overline{\Sigma}$	72
$\$ \Sigma$	149
$\$ \overline{\Sigma}$	158
$\Delta \Sigma$	199
$\Delta \overline{\overline{\Sigma}}$	200
${}_b\Sigma$	54
${}_c\Sigma$	54
${}_s\Sigma$	58
${}_S\Sigma$	191
$\$ \Theta$	149
$\$ \ominus$	149
$\$ \ominus / \equiv$	158
$\Delta \Theta$	199
$\Delta \ominus$	199
$\Delta \ominus / \triangleq$	200
Υ	178
Ξ	180

Lettres grecques — Minuscules

α	54
${}^0\alpha$	53
${}^n\alpha$	53
η	23
$\phi_{\mathbf{f}}$	21
$\overline{\phi}_{\mathbf{f}}$	72
$\$ \phi_{\mathbf{f}}$	149
$\$ \overline{\phi}_{\mathbf{f}}$	158
$\Delta \phi_{\mathbf{f}}$	199
$\Delta \overline{\overline{\phi}_{\mathbf{f}}}$	200
${}_b\phi_{\mathbf{f}}$	54
${}_c\phi_{\mathbf{f}}$	54
${}_s\phi_{\mathbf{f}}$	58
${}_S\phi_{\mathbf{f}}$	191
γ	70
κ	178
$\sigma_{\mathbf{S}}$	21
$\overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$	72
$\$ \sigma_{\mathbf{S}}$	149
$\$ \overline{\sigma}_{\mathbf{S}}$	158
$\Delta \sigma_{\mathbf{S}}$	199
$\Delta \overline{\overline{\sigma}_{\mathbf{S}}}$	200

$b\sigma\mathbf{S}$	54
$c\sigma\mathbf{S}$	54
$s\sigma\mathbf{S}$	58
$\tau_{\mathbf{a}}$	32
$\tau_{\mathbf{a}}^{x_J}$	33
$\overline{\tau}_{\mathbf{a}}$	75
$\$_{\tau_{\mathbf{a}}}$	150
$\$_{\overline{\tau}_{\mathbf{a}}}$	161
$\Delta_{\tau_{\mathbf{a}}}$	201
$\Delta_{\overline{\tau}_{\mathbf{a}}}$	201
$b\tau_{\mathbf{a}}$	55
$c\tau_{\mathbf{a}}$	55
$s\tau_{\mathbf{a}}$	61
ν	178
ξ	23
$\overline{\xi}$	70
$(\xi_j)_J$	33
$(\xi_j)_{j \in \emptyset}$	33
ζ	24

Symboles-mots

Card	217
CLA	178
Dom	3, 4
$\text{Ej}_{B,A}$	7
Emp	3, 4
Emp	63
Graph	4
Id_{Ω}	34
$\text{In}_{A,B}$	7
lg	25
MOD	180
prol	178
Sj_G	6
$\text{Sj}_{\cong}$	74
Var	31

Appendice D

Index — Mots

CLA-ensemble-générateur d'un magma $\rightarrow$ 178
CLA-ensemble-générateur-libre d'un magma $\rightarrow$ 178
 E -arité $\rightarrow$ 8
 $\mathcal{E}$ -modèle $\rightarrow$ 111
 E -semi-constante $\rightarrow$ 8
 n -aire $\rightarrow$ 18
 Ω -congruence $\rightarrow$ 69
 Ω -sortage $\rightarrow$ 178
 Ω -super-congruence $\rightarrow$ 82
 $\mathcal{P}$ -confinement d'une variable $\rightarrow$ 109
 $\mathcal{P}$ -garniture d'une formule germinale $\rightarrow$ 109
 $\mathcal{P}$ -théorème $\rightarrow$ 119
 Υ -magma-libre d'une classe de magmas $\rightarrow$ 179
 $\mathcal{V}$ -automorphisme $\rightarrow$ 62
 $\mathcal{V}$ -endomorphisme $\rightarrow$ 54
 $\mathcal{V}$ -épimorphisme $\rightarrow$ 64
 $\mathcal{V}$ -formule-conduit $\rightarrow$ 93
 $\mathcal{V}$ -formule-inclusion $\rightarrow$ 93
 $\mathcal{V}$ -homomorphisme $\rightarrow$ 54
 $\mathcal{V}$ -isomorphisme $\rightarrow$ 61
 $\mathcal{V}$ -magma $\rightarrow$ 21
 $\mathcal{V}$ -sous-magma $\rightarrow$ 58
 $\mathcal{V}$ -terme $\rightarrow$ 27
 $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule $\rightarrow$ 17, 89
 $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-appartenance $\rightarrow$ 91
 $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-confinement $\rightarrow$ 90
 $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-existence $\rightarrow$ 90
 $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-identité $\rightarrow$ 92
 $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme $\rightarrow$ 17, 25

APEX $\rightarrow$ 115
APINA $\rightarrow$ 122
CACO $\rightarrow$ 123

CAPA $\rightarrow$ 123
 CO $\rightarrow$ 118
 CONDA $\rightarrow$ 118
 CONFA $\rightarrow$ 115
 EXAP $\rightarrow$ 116
 EXID $\rightarrow$ 116
 IDET $\rightarrow$ 122
 IDEX $\rightarrow$ 115
 IN $\rightarrow$ 117
 INAP $\rightarrow$ 117
 INRE $\rightarrow$ 122
 INTRA $\rightarrow$ 122
 INU $\rightarrow$ 122
 ISY $\rightarrow$ 122
 RAP $\rightarrow$ 117
 REC $\rightarrow$ 122
 RERISO $\rightarrow$ 122
 REXI $\rightarrow$ 117
 RIDRO $\rightarrow$ 122
 RIGA $\rightarrow$ 117
 SAP $\rightarrow$ 116
 SEXI $\rightarrow$ 116
 SID $\rightarrow$ 116
 XIVA $\rightarrow$ 121
 XIXI $\rightarrow$ 115

appartenance $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-appartenance
 arité $\rightarrow$ E -arité
 atomique $\rightarrow$ terme atomique
 automorphisme $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -automorphisme
 axiome $\rightarrow$ 21, 107, 111
 axiome intentionnel $\rightarrow$ 119
 base $\rightarrow$ 4
 bonne tranche d'un magma $\rightarrow$ 190
 cible $\rightarrow$ 4
 classe d'équivalence $\rightarrow$ 70
 cohérent $\rightarrow$ formellement cohérent
 cohérent $\rightarrow$ sémantiquement cohérent
 comblée $\rightarrow$ exposition comblée
 conduit $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -formule-conduit
 confinement $\rightarrow$ $\mathcal{P}$ -confinement d'une variable
 confinement $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-confinement
 congruence $\rightarrow$ Ω -congruence
 conséquence symbolique $\rightarrow$ 119
 domaine $\rightarrow$ 3, 4

éjection $\rightarrow$ 6
 empreinte $\rightarrow$ 3, 4
 endomorphisme $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -endomorphisme
 épimorphisme $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -épimorphisme
 existence $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-existence
 exposition $\rightarrow$ 108
 exposition comblée $\rightarrow$ 198
 fonction $\rightarrow$ 5
 formellement cohérent $\rightarrow$ 175
 formule $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule
 formule-appartenance $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-appartenance
 formule-conduit $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-conduit
 formule-confinement $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-confinement
 formule-existence $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-existence
 formule germinale $\rightarrow$ 89
 formule-identité $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-identité
 formule-inclusion $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-inclusion
 garniture $\rightarrow$ $\mathcal{P}$ -garniture d'une formule germinale
 générateur $\rightarrow$ **CLA**-ensemble-générateur d'un magma
 générateur $\rightarrow$ **CLA**-ensemble-générateur-libre d'un magma
 germinale $\rightarrow$ formule germinale
 grand-vocabulaire $\rightarrow$ 19
 graphe $\rightarrow$ graphe fonctionnel
 graphe fonctionnel $\rightarrow$ 3, 4
 graphe fonctionnel vide $\rightarrow$ 3
 homomorphisme $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -homomorphisme
 identité $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -formule-identité
 image $\mathcal{V}$ -homomorphe $\rightarrow$ 64
 inclusion $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -formule-inclusion
 initial $\rightarrow$ magma initial d'une classe de magmas
 injection $\rightarrow$ 6
 isomorphisme $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -isomorphisme
 libre $\rightarrow$ **CLA**-ensemble-générateur-libre d'un magma
 libre $\rightarrow$ Υ -magma-libre d'une classe de magmas
 magma $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -magma
 magma $\rightarrow$ Υ -magma-libre d'une classe de magmas
 magma initial d'une classe de magmas $\rightarrow$ 203
 magma-produit $\rightarrow$ 66
 magma-quotient $\rightarrow$ 72
 modèle $\rightarrow$ $\mathcal{E}$ -modèle
 nulle $\rightarrow$ 18
 opération fondamentale $\rightarrow$ 21
 place $\rightarrow$ 27
 poème $\rightarrow$ 108, 114
 préfixe $\rightarrow$ 27
 règle d'inférence déduite $\rightarrow$ 121

remplaçande $\rightarrow$ 49
 remplaçat $\rightarrow$ 49
 remplacé $\rightarrow$ 49
 remplacer $\rightarrow$ 39, 49, 117, 138
 représentant $\rightarrow$ 70
 sémantiquement cohérent $\rightarrow$ 175
 semi-constante $\rightarrow$ E -semi-constante
 semi-constante vide $\rightarrow$ 8
 semi-fonction $\rightarrow$ 4
 semi-fonction vide $\rightarrow$ 4
 semi-fonction tau $\rightarrow$ 32, 33
 signature $\rightarrow$ 18
 significatif $\rightarrow$ terme significatif
 signifier $\rightarrow$ 95, 96, 98, 99, 100
 sortage $\rightarrow$ Ω -sortage
 sous-magma $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -sous-magma
 sous-terme $\rightarrow$ 26, 48
 sous-terme du premier niveau $\rightarrow$ 122
 substituande $\rightarrow$ 41
 substituat $\rightarrow$ 41
 substitué $\rightarrow$ 41
 substituer $\rightarrow$ 39, 40, 42, 116, 136
 super-congruence $\rightarrow$ Ω -super-congruence
 support $\rightarrow$ 21
 surjection $\rightarrow$ 6
 sur-terme $\rightarrow$ 26
 symbole $\rightarrow$ 14, 16
 symbole réservé $\rightarrow$ 17
 terme $\rightarrow$ $\mathcal{V}$ -terme
 terme $\rightarrow$ $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ -terme
 terme atomique $\rightarrow$ 26
 terme significatif $\rightarrow$ 17, 149
 terme significatif sans variable $\rightarrow$ 197
 théorème $\rightarrow$ $\mathcal{P}$ -théorème
 tranche $\rightarrow$ bonne tranche d'un magma
 variable $\rightarrow$ 14, 17, 19
 variable syntaxique $\rightarrow$ 219
 vocabulaire $\rightarrow$ 18
 vocabulaire $\rightarrow$ grand-vocabulaire
 zone $\rightarrow$ 27

Aristide Mégreli
Université *Nancy I*
U.F.R. S.T.M.I.A.
Département d'informatique

12 septembre 1990

Thèse (doctorat d'université)

Titre : “ Algèbre galactique — Un procédé de calcul formel, relatif aux semi-fonctions, à l'inclusion et à l'égalité ”.

Thèse soutenue mardi 11 septembre 1990.

JURY

Directeur de thèse : Claude Kirchner (directeur de recherche, INRIA).

Rapporteurs : Jean-Pierre Jouannaud (professeur, université Paris-Sud),
Pierre Marchand (professeur, université Nancy I).

Autres membres : Jean-Louis Krivine (professeur, université Paris VII),
Pierre Lescanne (directeur de recherche, C.N.R.S.), René Schott (professeur,
université Nancy I).

ADRESSES

Jean-Pierre Jouannaud : L.R.I. / Bât. 490 / Université Paris-Sud / 91405 Orsay.

Claude Kirchner : CRIN / B.P. 239 / 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX.

Jean-Louis Krivine : Équipe de logique mathématique / Université Paris VII / 2,
place Jussieu / 75251 Paris CEDEX 05.

Pierre Lescanne : CRIN / B.P. 239 / 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX.

Pierre Marchand : Département d'informatique / Université Nancy I / B.P. 239 /
54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX.

René Schott : CRIN / B.P. 239 / 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX.

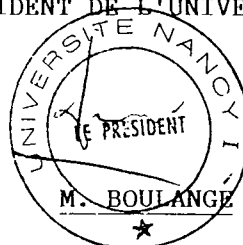
NOM DE L'ETUDIANT : NEGRELIS Aristide .

NATURE DE LA THESE : L'algèbre $\mathcal{G}$, un calcul formel relatif
aux semi-fonctions, à l'inclusion et
à l'égalité.

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 14 SEP. 1990 n°1815

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



Galactic algebra — A formal calculus connected with semi-functions, inclusion and equality

Universal algebra is one of the theoretical foundations of computer science. Nevertheless we cannot apply it directly to reasoning about many mathematical objects (such as fields) or about most programs (because of exceptions):

- we cannot consider any proper semi-function (partial function);
- we cannot distinguish any proper subset of the carrier.

So we would like a more general theory.

After having re-examined *partial algebra* and *order-sorted algebra*, each one being only a part of what is wished for, I have looked for and eventually discovered a broader calculus, G algebra, connected with equality (universal alg.), semi-functions (partial alg.), subsets and inclusion (order-sorted alg.).

This calculus is a formal logic which has these characteristics:

- each term has a meaning (no nonsense);
- each item of information is coded as formula (not as a "declaration");
- typing is proving (not parsing).

And which has these properties:

- the logic is complete (completeness theorem);
- G algebra is a homogeneous, clean superset of universal algebra;
- in each class of models there are a free algebra and an initial algebra.

Keywords — Universal algebra, logic of equality, partial algebra, order-sorted algebra, semi-function, partial function, subtype, identity.