



HAL
open science

Contribution à la réalisation et à la simplification des systèmes multivariables

Ghani Hashim

► **To cite this version:**

Ghani Hashim. Contribution à la réalisation et à la simplification des systèmes multivariables. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1990. Français. NNT : 1990NAN10029 . tel-01754375

HAL Id: tel-01754375

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754375>

Submitted on 30 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

Présentée pour l'obtention du

DOCTORAT

de

L'UNIVERSITE DE NANCY I

en AUTOMATIQUE

par

Ghani HASHIM

CONTRIBUTION A LA REALISATION ET A LA SIMPLIFICATION

DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

Soutenance le 27 Avril 1990 devant la commission d'Examen

Président : P. BERTRAND

Rapporteurs : M. DAROUACH

: C. IUNG

Examineurs : H. BOURLES

: P. BUGNET

: C. HUMBERT

: A. RACHID

: J. RAGOT

A la mémoire de mon père

A ma mère

A mon frère et mes sœurs

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Automatique et de Recherche Appliquée (LARA) à l'Ecole Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy (ESSTIN).

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur HUMBERT C., Directeur du LARA et Chef du département Cybernétique à l'ESSTIN, pour la bienveillance qu'il m'a toujours témoignée.

Que Monsieur RACHID A., Maître de Conférences à l'Université de Nancy I, qui a assuré l'encadrement de ce travail, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour les encouragements et les précieux conseils qu'il m'a apportés.

Monsieur le Professeur BERTRAND P., Professeur à l'ESE (Ecole Supérieure d'Electricité) et Directeur du LSS (Laboratoire des Signaux et Systèmes) me fait l'honneur de présider ce jury et de m'accorder sa confiance. Je l'en remercie vivement.

Je remercie chaleureusement messieurs les Professeurs IUNG C., de l'Institut Polytechnique de Lorraine et DAROUACH M., Professeur à l'Institut Universitaire de Technologie de Longwy pour avoir accepté de juger ce travail ainsi que pour les critiques constructives qu'ils ont formulées à son sujet.

Je suis très honoré de la présence à mon jury de Monsieur BUGNET P., Professeur à l'ESIP (Ecole Supérieure des Ingénieurs de Poitiers).

J'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur RAGOT J. de l'Institut Polytechnique de Lorraine pour avoir accepté de juger ce travail.

Que Monsieur BOURLES H., Ingénieur de recherche à l'EDF, accepte l'expression de mon profond respect, ainsi que mes remerciements pour l'honneur qu'il me fait en participant à ce Jury.

Enfin, je voudrais associer à ces remerciements tous mes camarades du Laboratoire et en particulier Messieurs MEHDI D., MIRAMBET M. et Mademoiselle MAIRET I. pour leur collaboration ainsi que Mademoiselle GARANDET K. qui s'est brillamment acquittée de la présentation de ce document.

Sommaire

<u>Introduction</u>	1
<u>Bibliographie</u>	2
<u>Chapitre I</u> DEFINITIONS ET PROPRIETES DES SYSTEMES DYNAMIQUES LINEAIRES INVARIANTS	4
1- <u>Introduction</u>	5
2- <u>Description externe</u>	5
3- <u>Description interne : modèle d'état</u>	8
4- <u>Réalisation minimale</u>	9
<u>Chapitre II</u> REALISATION MINIMALE	12
1- <u>Introduction</u>	13
2- <u>Approche du problème de réalisation par matrice de Hankel</u>	13
3- <u>Approche du problème de réalisation par la matrice de Page</u>	22
4- <u>Réalisation minimale par les paramètres de Markov généralisés</u>	22
5- <u>Réalisation minimale à partir d'entrées/sorties</u>	24
6- <u>Résultats numériques</u>	26
7- <u>Conclusion</u>	29
8- <u>Bibliographie</u>	30
<u>Chapitre III</u> REALISATION APPROCHEE	32
1- <u>Introduction</u>	33
2- <u>Réalisation des séquences de paramètres de Markov à partir d'entrées/sorties</u>	34
3- <u>Détermination de l'ordre</u>	44
4- <u>Conclusion</u>	51
5- <u>Bibliographie</u>	52
<u>Chapitre IV</u> APPLICATION	53
1- <u>Présentation de l'installation pilote</u>	54
2- <u>Description technique du processus</u>	54
3- <u>Modélisation du processus thermique</u>	60

4- <u>Campagnes de mesures</u>	64
5- <u>Identification</u>	66
6- <u>Application à la chaudière</u>	70
7- <u>Validation des modèles</u>	74
8- <u>Discussion et conclusion</u>	75
9- <u>Bibliographie</u>	76
<u>Chapitre V</u> EVALUATION DE LA MATRICE DE TRANSFERT ASSOCIEE A UNE REALISATION	77
1- <u>Introduction</u>	78
2- <u>Les différentes méthodes</u>	78
3- <u>Résultats numériques</u>	88
4- <u>Conclusion</u>	90
5- <u>Bibliographie</u>	90
<u>Chapitre VI</u> REDUCTION DE MODELES	92
1- <u>Introduction</u>	92
2- <u>Approximation de fonctions de transfert (domaine fréquentiel)</u>	94
3- <u>Approximation du modèle d'état (domaine temporel)</u>	103
4- <u>Choix de l'ordre du modèle réduit</u>	113
5- <u>Résultats numériques</u>	118
6- <u>Conclusion</u>	120
7- <u>Bibliographie</u>	120

INTRODUCTION



La théorie du système est le domaine de la science qui concerne l'étude des "systèmes", au sens large. Il n'est pas aussi simple d'en formuler une définition générale. On peut considérer qu'un système est une réalité physique constituée d'une cause et d'un effet. Le but de la théorie du système est de trouver un moyen mathématique pour décrire son comportement.

La description du comportement des systèmes est donnée au moyen d'un modèle. C'est un ensemble de relations entre les variables liées au système, pouvant décrire toutes ses caractéristiques. Ces relations peuvent être des équations différentielles, des équations algébriques, des équations aux dérivées partielles... etc, selon le choix du type de modèle qui dépend du système.

Le problème général de l'identification consiste à attribuer des équations à un système dont les lois physiques internes sont inconnues ou trop complexes, mais dont on peut observer le comportement externe. Les techniques modernes de commande et de filtrage s'appuient sur les descriptions des processus définis par leur représentation interne, à la différence de la théorie classique des asservissements basée sur la connaissance d'une représentation externe du système. Cette dernière est limitée aux systèmes linéaires et invariants; par contre, la représentation interne est aisément étendue aux systèmes multivariables (multi-entrées multi-sorties) non-linéaires et variants. L'avantage principal de la représentation interne est sa facilité de programmation pour des solutions numériques, particulièrement en conception et analyse des systèmes discrets.

Le modèle qui définit la représentation interne d'un processus est dit modèle d'état. La théorie qui consiste à trouver une représentation sous forme d'état d'un processus est la théorie de la réalisation. Nous avons été amenés à rappeler au cours d'un chapitre introductif, un certain nombre de définitions et propriétés des systèmes dynamiques linéaires invariants. Un bref rappel historique sur les problèmes de réalisation nous permettra de situer les idées qui ont été développées au cours de ces dernières années. Ho et Kalman [1966] ont été les premiers à proposer un algorithme de réalisation minimale des systèmes linéaires à partir de la suite (théoriquement infinie) des paramètres de Markov (PM) (ou la réponse impulsionnelle) du système. Cette approche a été reprise par de nombreux auteurs (Silverman [1971], Rôsza [1974], Gupta [1973], Van den Hof [1982] Eydgani (1984)) qui ont proposé de nouveaux algorithmes de réalisation.

Dans le même but de la réalisation minimale, Mayne [1968] a proposé une méthode permettant de tirer la partie commandable et la partie observable d'une réalisation non-minimale.

Enfin un autre aspect du problème (Budin [1971], Guidorzi [1975], Liu [1977]) consiste à prendre directement comme données des couples d'entrées-sorties quelconques du système, sans passer par la phase de la réalisation classique qui nécessite le plus souvent la connaissance des transmittances ou des paramètres de Markov. Tous ces travaux de réalisation minimale basés sur la connaissance exacte des paramètres de Markov ou d'une séquence d'entrées/sorties non bruitée sont exposés et détaillés dans le chapitre II. Une étude comparative ainsi que les avantages et les inconvénients sont également présentés.

Le problème de la réalisation approchée consistant à trouver une représentation d'état à partir de données bruitées fait l'objet du chapitre III. Ce point est considéré en vue de l'identification des systèmes multi-entrées, multi-sorties (MIMO), et dans cette perspective, nous exposons les méthodes de Guidorzi, ainsi que les algorithmes d'estimation des paramètres de Markov (Irving [1969], Hajdasinski [1978], ---). Dans ce même contexte, l'estimation de l'ordre du système est un point important également considéré dans ce chapitre.

Une application pratique des différents développements des précédents chapitres a été considérée sur un processus pilote constitué d'une chaudière et d'un échangeur thermique. Les résultats de l'identification de ce système MIMO sont exposés dans le chapitre IV.

Le problème inverse de la réalisation minimale à savoir le calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état, est également largement discuté et une étude comparative de

différents algorithmes de calcul fait l'objet du chapitre V. Nous y présentons également une méthode développée au laboratoire et proposons une généralisation d'un algorithme au cas MIMO.

Le chapitre VI traite de la réduction de modèles des systèmes MIMO de grande dimension. Un exposé détaillé des méthodes fréquentielles (Padé, Routh, Décomposition fractionnelle, Silverman, Pal, ...) et temporelles (Davison, Chidambara, Moore, ...) est présenté. L'étude critique des algorithmes existants dans la bibliographie, nous a permis de cerner leurs limites et nous a amené à proposer un nouvel algorithme de réduction de modèle permettant de remédier à certains de leurs inconvénients.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. L. Ho and R. E. Kalman, "Effective construction of linear state-variable models from input / output functions", 3rd Allerton conference circuit and systems theory, pp. 449-459, 1965.
- [2] L. M. Silvermann, "Realization of linear Dynamical system", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 554-567, Dec. 1971.
- [3] P. Rosza and N. K. Sinha, "Efficient algorithm for irreducible realization of a rational matrix", Int. J. Control, Vol. 20, No. 5, pp. 739-751, 1974.
- [4] D. Q. Mayne, "Computational procedure for the minimal realisation of transfert function matrices", Proc. IEE, Vol. 115, No. 9, pp. 1363-1368, Sep. 1968.
- [5] R. D. Gupta, "An explicit Approach to minimal réalisation from system MP", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 52-54, Feb. 1973.
- [6] Ali M. Eydgahi & Harpreet Singh, "Transfer-Function Matrix Realization Using Taylor series Expansion about a General point a", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-29, No. 9, pp. 829-831, Sep. 1984.
- [7] Ali M. Eydgahi & Harpreet Singh, "A modified procedure for the realization of the Transfer-function matrix from a mixture of Markov parameters and Moments", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-30, No. 3, pp. 299-301, March 1984.
- [8] Michael A. Budin, "Minimal realization of Discrete linear systems from input-output observation", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-16, No. 5, pp. 395-401, Oct. 1971.
- [9] R. Liu and L. C. Suen, "Minimal Dimension realization and identifiability of input-output sequences", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 227-232, 1977.
- [10] H. P. Zeiger and A. J. McEwen, "Approximate Linear realization of given dimension via Ho's algorithm", IEEE Trans. on Auto. Control Technical notes and Correspondence, pp. 153-155, 1973.
- [11] S. Kung, "A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 705-714, 1979.
- [12] Paul Van den Hof, "Approximate realisation of noisy linear systems : The Hankel and Page matrix approach", M.Sc. report, Eindhoven University of technology, Netherland, Dec. 1982.
- [13] E. Irving, "Identification des systèmes: Algorithme de B. L. Ho pour les systèmes à temps discret. Transformation des systèmes à temps discret en systèmes à temps continu" EDF, France. 1969.
- [14] A. Hajdasinski, "A Markov parameter Approach to identification of multivariable dynamical systems", Technical report, Departement of Electrical Engineering, Eindhoven university of Technology, Netherlande 1976.

[15] A. Hajdasinski, "The gauss-Markov approximation scheme for identification of multivariable dynamical system Via the realization thoery", Technical report, Departement of Electrical Engineering, Einhoven university of Technology, Netherlande 1978.

[16] A. Hajdasinski and A. A. H. Damen, "Realization of the Markov parameter sequences using the singular value decomposition of the Hankel matrix", Technical report, Departement of Electrical Engineering, Einhoven university of Technology, Netherland 1979.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET PROPRIETES DES SYSTEMES DYNAMIQUES LINEAIRES INVARIANTS

1 - Introduction

Nous nous limitons ici aux systèmes dynamiques linéaires invariants stables. L'étude, la conception et l'automatisation de tels systèmes exigent souvent d'en connaître un modèle mathématique.

Les grandeurs principales de celui-ci sont :

- le temps, noté t
- les grandeurs d'entrées, notées u qui peuvent être des commandes ou des perturbations
- les grandeurs de sorties, notées y .

On peut alors définir un système comme une transformation dynamique des entrées en sorties.

On peut distinguer deux représentations de cette transformation :

1. directement par les relations d'entrées/sorties : c'est la description externe.
2. indirectement en introduisant la notion d'état : c'est la description interne.

Les relations entre ces deux descriptions d'un même système, nous conduiront à traiter le problème de la réalisation minimale (Chapitre II) et celui du calcul de la matrice de transfert (chapitre V).

Le but de ce chapitre est de donner un ensemble de définitions et propriétés utiles à la présentation de la réalisation minimale des systèmes.

2 - Description externe

Une fonction ψ dite relation d'entrée/sortie applique u dans y :

$$y(t) = \psi(u(\cdot), t)$$

qui ne dépend que des valeurs de $u(\cdot)$ antérieures à t (causalité).

Remarque

Si on applique au système une entrée $u(\cdot)$ sur un intervalle $[t_1; +\infty]$, notée $u[t_1; +\infty]$, plusieurs sorties $y [t_1; +\infty]$ pourront correspondre à cette entrée dépendant de l'entrée appliquée avant t_1 .

Ceci nous conduit à préciser qu'un système est au repos à l'instant t_1 si la sortie $y[t_1; +\infty]$ est définie d'une façon unique par l'entrée $u[t_1; +\infty]$; cette restriction sera précisément levée en introduisant la notion d'état.

2-1) Systèmes continus

Pour caractériser un système multivariable linéaire stationnaire continu à p entrées et q sorties, il suffit de connaître la sortie pour une classe d'entrées à partir desquelles toute entrée peut s'exprimer.

Une classe d'entrée est par exemple l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ (cas mono-entrée $p = 1$), puisque toute entrée continue s'écrit :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \quad (\text{I.1})$$

La réponse du système à l'entrée $\delta(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, notée $g(t)$. La sortie (cas mono-sortie $q = 1$) pour une entrée quelconque est :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

ou encore

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t-\tau).d\tau \quad (I.3)$$

notée indifféremment :

$$y = g * u \quad (I.4)$$

* symbolisant le produit de convolution (continu)

Remarque :

On s'est placé ici dans l'hypothèse habituelle où l'impulsion $\delta(t)$ est appliquée à l'instant initial $t_0 = 0$. Plus généralement, $g(t)$ est la réponse à l'entrée $\delta(t - t_0)$, qui par causalité est nulle pour $t < t_0$.

L'équation (I.4) s'étend aisément aux systèmes multivariables :

$$y = G * u \quad (I.5)$$

G est une matrice ($q \times p$), d'élément $g_{ij}(t)$ (réponse impulsionnelle de la sortie i relative à l'entrée j).

Si on introduit la transformation de Laplace, la relation (I.5) devient alors :

$$y(s) = G(s) u(s) \quad (I.6)$$

où $G(s)$ est la matrice de transfert du système.

Définition

Une matrice $G(s)$ dont les éléments sont des fractions rationnelles en s est dite propre si $G(\infty)$ est une matrice constante ; $G(s)$ est strictement propre si $G(\infty) = 0$

Exemple : $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ est une matrice propre ; $G(\infty) = D$.

Si $D = 0$, $G(s)$ est alors strictement propre.

2-2) Systèmes discrets

La différence essentielle avec le cas continu se situe dans la nature du temps. Les signaux discrets sont définis à des instants régulièrement espacés donnés par $t = t_0 + kT$; k est un indice temporel qui peut prendre des valeurs entières ≥ 0 et T l'intervalle de temps ; t_0 peut avoir une valeur quelconque. L'origine du temps peut être choisie telle que $t_0 = 0$. Il est possible de choisir l'échelle des temps telle que $T = 1$.

On définit un signal discret par cette suite de nombres apparaissant aux instant kT . En termes d'impulsion unitaire de Dirac :

$$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = kT \\ 0 & \text{pour } t \neq kT \end{cases}$$

En suivant une démarche analogue à celle du paragraphe précédent, toute entrée discrète ($p = 1$ cas mono-entrée) peut être exprimée :

$$u^*(t) = u(kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(kT) \delta(t-kT) \quad (I.7)$$

On définira la réponse impulsionnelle discrète $f(t - kT)$ [ou séquence de pondération] comme étant la réponse du système à l'entrée $\delta(t - kT)$. De même, la sortie (cas mono-sortie $q = 1$), pour une entrée quelconque, est donnée par :

$$y^*(t) = \{y(kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT) u(kT) \quad (I.8)$$

ou encore

$$y^*(t) = \{y(kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) u(t-kT) \quad (I.9)$$

notée également :

$$y = f * u \quad (I.10)$$

* désignant le produit de convolution (discret).

Dans le cas multivariable, on a :

$$y = F * u \quad (I.11)$$

où F est la matrice $q \times p$ des séquences de pondération.

Par transformée en z de l'équation (I.11).

$$y(z) = F(z) u(z) \quad (I.12)$$

où $F(z)$ est la matrice de transfert (discrète) du système.

Remarque

On suppose implicitement que u et y (cas continu et discret) sont nuls pour $t < 0$.

Pour un système multivariable linéaire dynamique composé de p entrées $u_1(k) \dots u_p(k)$ et q sorties $y_1(k) \dots y_q(k)$, on définit la matrice de transfert $F(z)$ ($q \times p$) (la matrice rationnelle en z) qui satisfait la condition suivante :

$$y(z) = F(z) u(z)$$

où

$$y(z) = \begin{bmatrix} y_1(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_q(z) \end{bmatrix} ; \quad u(z) = \begin{bmatrix} u_1(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p(z) \end{bmatrix}$$

et $y(z)$, $u(z)$ sont les transformées en " z " de $y(k)$ et $u(k)$ avec des conditions initiales nulles.

Le polynôme caractéristique $d(z)$ d'une matrice de transfert $F(z)$, strictement propre ou propre, est défini comme étant le plus petit dénominateur commun unitaire de tous les mineurs de $F(z)$.

Le degré $\delta(F(z))$ d'une matrice de transfert $F(z)$ strictement propre ou propre, est défini comme le degré de son polynôme caractéristique (en pratique, c'est le plus petit nombre de décalages nécessaires pour modéliser la dynamique du système).

3- Description interne ; modèle d'état

Comme nous l'avons déjà vu, la relation d'entrée/sortie ψ ne permet de déterminer la sortie du système à l'instant t que si on connaît tout le passé de l'entrée. On conçoit facilement les difficultés d'utiliser cette description si le système n'est pas au repos à l'instant initial considéré. Ceci, nous amène à introduire le concept d'état que l'on définit comme étant un ensemble de grandeurs permettant de résumer le passé en vue de l'étude de l'avenir. En d'autres termes, l'état représente l'ensemble des conditions initiales qui conjointement à la connaissance de l'entrée $u[t_0, \infty]$ permet de caractériser d'une façon unique la sortie $y[t_0, \infty]$. Une fonction de sortie η définit la sortie en fonction de l'entrée et de l'état à l'instant t :

$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t) \quad (I.13)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

est le vecteur d'état dont les éléments $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sont les variables d'état.

3-1) Systèmes continus

Un système dynamique linéaire stationnaire continu, de dimension finie est caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{(Equation d'état)} \\ y = Cx + Du & \text{(Equation de sortie)} \end{cases} \quad (I.14)$$

où A, B, C et D sont des matrices constantes de dimensions appropriées et x le vecteur d'état de dimension $n \times 1$.

En intégrant l'équation différentielle et en prenant $t_0 = 0$ comme instant initial, on obtient :

$$y(t) = Ce^{At} x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + D u(t) \quad (I.15)$$

Supposons le système initialement au repos ($x(0) = 0$) et appliquons lui successivement les entrées $u(t) = 0$ sauf la $i^{\text{ème}}$ composante qui est égale à $\delta(t)$. On en déduit immédiatement la réponse impulsionnelle de (I.14), soit :

$$G(t) = C e^{At} B + D \delta(t) \quad (I.16)$$

En appliquant la transformée de Laplace, on a :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (I.17)$$

3-2) Systèmes discrets

Un système dynamique linéaire discret, de dimension finie est caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Hx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (I.18)$$

un calcul immédiat conduit à l'expression :

$$y_k = H\Phi^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} H\Phi^{k-i-1} \Gamma u_i + D u_k \quad (I.19)$$

Toujours par analogie avec le cas continu, on en déduit la relation donnant la séquence de pondération du système décrit par (I.18)

$$\begin{cases} F_0 = D & \text{si } k = 0 \\ F_k = H\Phi^{k-1}\Gamma & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad (I.20)$$

Enfin, par transformation en z de (I.18), on obtient :

$$F(z) = H(zI - \Phi)^{-1} \Gamma + D \quad (I.21)$$

4- Réalisation minimale

Le quadruplet de matrices $\{A, B, C, D\}$, appelé réalisation du système continu représenté par (I.14), définit complètement le comportement dynamique extérieur du système.

Etant donné $G(s)$ ou $G(t)$, $\{A, B, C, D\}$ définit une réalisation de G , si et seulement si la relation (I. 16) ou (I. 17) est satisfaite.

Les matrices (Φ, Γ, H, D) définissent une réalisation du système discret représenté par (I.18) et caractérisent complètement le comportement dynamique extérieur du système.

Etant donné $F(z)$ (ou F_k), les matrices $\{\Phi, \Gamma, H, D\}$ définissent une réalisation de F , si et seulement si la relation (I. 20) ou (I. 21) est satisfaite.

D'une façon générale, on dit qu'une réalisation est minimale ou irréductible, s'il n'existe pas d'autres réalisations dont la dimension de l'état est plus petite.

On peut dès lors se poser deux questions :

Existe-t-il une solution à ce problème ? (réalisabilité)
Si oui, est-elle unique ? (classe d'équivalence)

Réalisabilité

Le problème posé consiste à savoir si, étant donnée une relation d'entrée/sortie ($G(s)$, $G(t)$, $F(z)$ ou F_k), il existe a priori un modèle d'état de la forme (I.14) (ou (I.18)), de dimension finie, ayant la même relation d'entrées/sorties.

Théorème 4.1

Une matrice de transfert $G(s)$ est réalisable par un système dynamique de la forme (I.14) si et seulement si, $G(s)$ est une matrice rationnelle propre.

Ce théorème peut s'appliquer aux systèmes discrets.

Classe d'équivalence

Soit un système dynamique Σ : décrit par $\{A, B, C, D\}$ peut-on déterminer un autre système de même dimension $\tilde{\Sigma} : \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$ ayant la même relation d'entrées/sorties ?

Des éléments de réponse sont données par la définition suivante :

Deux systèmes dynamiques de même dimension $\Sigma : \{A, B, C, D\}$ et $\tilde{\Sigma} : \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$ sont équivalents, si les vecteurs d'état associés sont reliés par la relation : $\tilde{x} = P x$ où P est une matrice constante régulière.

Théorème 4.2

Deux systèmes équivalents S et \tilde{S} ont même relation d'entrées/sorties et sont reliés par :

$$\tilde{A} = PAP^{-1}; \quad \tilde{B} = PB; \quad \tilde{C} = CP^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{D} = D.$$

Définition et critère de commandabilité

Un événement (x, τ) est commandable (à l'état nul) si et seulement si, il existe un instant $t \geq \tau$ fini et une entrée $u[\tau, t]$ qui amène (x, τ) en $(0, t)$. Pour préciser, on parlera de complète commandabilité à l'instant τ si et seulement si, tout événement (x, τ) , est commandable.

La paire (A, B) est commandable si et seulement si,

$$\begin{aligned} & \text{rang}([\Delta(A, B)]) = n \\ \text{où} \quad & \Delta(A, B) = [B; AB; \dots; A^{n-1}B] \end{aligned}$$

La paire (Φ, Γ) , est commandable si et seulement si,

$$\begin{aligned} & \text{rang}([\Delta(\Phi, \Gamma)]) = n \\ \text{où} \quad & \Delta(\Phi, \Gamma) = [\Gamma; \Phi\Gamma, \dots; \Phi^{n-1}\Gamma] \end{aligned}$$

Observabilité :

L'observabilité est au couple état-sortie ce qu'est la commandabilité au couple entrée-état ; en termes plus précis, le problème d'observation consiste à déterminer l'événement présent (x, τ) à partir de la connaissance de la sortie future.

Un événement (x, τ) est observable si, et seulement si, il existe un instant $t \geq \tau$, fini, tel que cet événement puisse être déterminé d'une façon unique à partir de la sortie $y[\tau, t]$ du système, en régime libre ($u[\tau, t] = 0$).

Corollaire :

Pour le cas continu, la paire (A, C) , est observable si et seulement si

$$\text{rang} [\Delta (A,C)] = n$$

$$\text{où } \Delta (A,C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Pour le cas discret, la paire (Φ,H) , est observable si, et seulement si

$$\text{rang}[\Delta(\Phi,H)] = n$$

$$\text{où } \Delta(\Phi,H) = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

La recherche de la réalisation minimale consiste à trouver la partie complètement commandable et observable du système. Les autres réalisations de dimension supérieure confèrent donc au modèle d'état correspondant une complexité non significative vis-à-vis du comportement des entrées/sorties du système.

CHAPITRE II
REALISATION MINIMALE

1- Introduction

Avant de donner une définition précise de la réalisation d'un système linéaire invariant, on peut distinguer deux types de réalisation dépendant des données :

- 1- réalisation minimale dans le cas où les données sont exactes.
- 2- réalisation approchée dans le cas où les données sont bruitées.

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes approches concernant la réalisation minimale des systèmes multivariables à partir de :

- 1- la relation d'entrée/sortie (ψ)
- 2- la matrice des réponses impulsionnelles (paramètres de Markov)
- 3- un ensemble de mesures $u[t_0 ; t_1]$, $y[t_0 ; t_1]$

Ho et Kalman ont été les premiers à développer une théorie de la réalisation et à proposer un algorithme basé sur la matrice de Hankel. Ensuite, cette approche a été reprise et améliorée par d'autres auteurs, Zeiger [1973], Kung [1979].

Des variantes de cette approche ont été proposées par Gupta [1968], Silverman [1971], Rôzsa [1974] et également à partir de la matrice de Page ou encore, en utilisant les moments ou un mixage des paramètres de Markov et des moments.

Parallèlement à toutes ces méthodes basées sur la matrice de Hankel, Mayne [1968] a proposé une méthode de réalisation minimale directement basée sur la matrice de transfert du système.

D'autres approches de la réalisation minimale ont été proposées par Budin [1972], Liu [1977], Guidorzi [1975] en se basant sur une séquence d'entrées/sorties.

Les bases ainsi que les outils mathématiques des méthodes citées sont présentés et détaillés dans ce chapitre. Une étude comparative de ces différents algorithmes proposés est également donnée.

2- Approche du problème de réalisation par la matrice de Hankel (Hajdasinski [1978])

Etant donné $G(s)$ (ou $F(z)$) une matrice de transfert ($q \times p$) strictement propre, son développement en série autour de $s = \infty$ s'écrit :

$$G(s) = M_0 s^{-1} + M_1 s^{-2} + M_2 s^{-3} + \dots \quad (\text{II.1})$$

où

$$M_i = C A^i B \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{Paramètres de Markov}) \quad (\text{II.2})$$

Pour vérifier ces résultats, on utilise la transformée de Laplace de l'équation d'état et de l'équation de sortie :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (\text{II.3})$$

$$y(t) = C x(t) \quad (\text{II.4})$$

on obtient :

$$y(s) = C(sI - A)^{-1} B u(s) + C(sI - A)^{-1} x_0 \quad (\text{II.5})$$

on posant $x_0 = B \beta_0$ où x_0 est l'état initial.

on obtient
$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) + C(sI - A)^{-1}B\beta_0 \quad (II.6)$$

Maintenant, on peut déduire la réponse impulsionnelle $y(t)$ du système qui est simplement la transformée de Laplace inverse de $y(s)$; rappelons que $y(t)$ est définie avec des conditions initiales nulles :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = Ce^{At}B \quad u(s) = 1 \quad (II.7)$$

En développant la matrice e^{At} en série, on a :

$$y(t) = C \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} B = \sum_{i=0}^{\infty} C A^i B \frac{t^i}{i!} \quad (II.8)$$

Le terme matriciel CA^iB représentent le $i^{\text{ème}}$ paramètre de Markov et sera notés M_i , soit

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \frac{t^i}{i!} \quad (II.9)$$

Les équations (II.5) et (II.6) peuvent s'écrire :

$$y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{s^{i+1}} u(s) + C (sI - A)^{-1}x_0 \quad (II.10)$$

ou

$$y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{s^{i+1}} u(s) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{s^{i+1}} \beta_0 \quad (II.11)$$

Supposons que l'on s'intéresse à une classe d'entrées pouvant être représenté par des séries :

$$u(t) = u_{-1} \delta(t) + \sum_{i=0}^{\infty} u_i \frac{t^i}{i!} \quad (II.12)$$

On peut s'attendre à un vecteur de sortie de la forme :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \frac{t^i}{i!} \quad (II.13)$$

La transformée de Laplace des équations (II.12) et (II.13) donne :

$$u(s) = u_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} u_i \frac{1}{s^{i+1}} \quad (\text{II.14})$$

$$y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \frac{1}{s^{i+1}} \quad (\text{II.15})$$

En remplaçant (II.14) et (II.15) dans (II.11) on obtient la relation fondamentale :

$$y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{s^{i+1}} (u_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} u_i \frac{1}{s^{i+1}}) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{s^{i+1}} \beta_o \quad (\text{II.16})$$

$$y(s) = \frac{M_o}{s} (u_{-1} + \beta_o) + \dots + \frac{M_o}{s} \left[\frac{u_o}{s} + \frac{u_1}{s^2} + \dots + \frac{u_n}{s^{n+1}} + \dots \right] \\ + \frac{M_1}{s^2} \left[\frac{u_o}{s} + \dots + \frac{u_n}{s^{n+1}} + \dots \right] + \dots \quad (\text{II.17})$$

Pour des conditions initiales nulles, $u_i = 0 \quad i < 0$

$$y(s) = \left[\frac{u_o}{s} + \frac{u_1}{s^2} + \dots + \frac{u_n}{s^{n+1}} + \dots \right] \left[\frac{M_o}{s} + \frac{M_1}{s^2} + \dots + \frac{M_n}{s^{n+1}} + \dots \right] \quad (\text{II.18})$$

$$y(s) = u(s) \left[M_o s^{-1} + M_1 s^{-2} + \dots \right] \quad (\text{II.19})$$

Donc

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = M_o s^{-1} + M_1 s^{-2} + \dots \quad (\text{II.20})$$

vérifie l'équation (II.1).

Pour le cas discret, en suivant une démarche analogue à celle du cas continu, on obtient :

$$F(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = M_o z^{-1} + M_1 z^{-2} + \dots \quad (\text{II.21})$$

avec $M_k = H\Phi^k\Gamma \quad k = 0, 1, 2, \dots$

D'après l'équation (II.20) ou (II.21), on peut facilement déduire les paramètres de Markov à partir de la matrice de transfert et dans ce cas ils sont exacts.

2-1) Algorithme de Ho et Kalman

Ho et Kalman [1966] ont été les premiers à proposer un algorithme de construction d'une réalisation minimale $\{A, B, C\}$ des systèmes linéaires invariants basé sur les paramètres de Markov.

La première étape de cet algorithme consiste à construire la matrice-bloc de dimension $r \times r$ ("matrice de Hankel généralisée") à partir des paramètres de Markov M_k :

$$H_r = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{r-1} \\ M_1 & M_2 & \dots & M_r \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{r-1} & M_r & \dots & M_{2r-2} \end{bmatrix} = [M_{i+j-2}]$$

r doit être choisi de façon à satisfaire la condition: $\text{rang}[H_r] = \text{rang}[H_{r+1}]$.

De la même façon, on définit $\tau^L H_r$ comme étant la matrice-bloc de dimension $r \times r$ construite à partir de la séquence $\{M_{k+L}\}$ par un décalage de la matrice de Hankel H_r de L blocs vers le haut ou vers la gauche :

$$\tau^L H_r = [M_{i+j+L-2}]$$

Les résultats essentiels de l'approche de la matrice de Hankel sont les suivants :

Proposition 1

La séquence $\{M_k\}$, $k=0, \dots, L$ a une réalisation de dimension finie si et seulement si, il existe un entier r et des constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ tels que

$$M_{r+j} = \sum_{i=1}^r \alpha_{i-1} M_{r-i+j} \quad \text{pour } j \geq 0$$

Les α_k sont les coefficients du plus petit dénominateur commun de la matrice de transfert $G(s)$.

Proposition 2

Si $\{M_k\}$ admet une réalisation de dimension finie, alors

$$n_0 = \text{rang}(H_r) = \text{rang}(H_{r+i}) \quad i \geq 1$$

où n_0 est la dimension minimale du système

La deuxième étape consiste à trouver des matrices non-singulières P et Q telle que :

$$P H_r Q = \begin{matrix} n_0 & & \\ \text{qr-n}_0 & & \end{matrix} \left[\begin{array}{c|c} I_n & \underline{Q} \\ \hline \underline{Q} & \underline{Q} \end{array} \right] = J = \begin{matrix} & & \\ & & \\ & & \end{matrix} U_q^T U_p$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$, p est le nombre d'entrées, q est le nombre de sorties

$$n = \text{rang}(H_r)$$

$$U_q = \begin{matrix} \text{qr-n}_0 \\ [I_{n_0} \quad \underline{Q}] \end{matrix}$$

$$U_p = \begin{matrix} \text{pr-n}_0 \\ [I_{n_0} \quad \underline{Q}] \\ n_0 \end{matrix}$$

La détermination de P et Q peut se faire de plusieurs manières :

a) La transformation d'Andrée (Hajdasinski [1976])

Si A est une matrice carrée non singulière (cas de la matrice S_T) alors, pour P et Q quelconques tels que $PAQ = I$, $A^{-1} = QP$

Une méthode simple pour obtenir P et Q à partir de A consiste à appliquer une séquence d'opérations élémentaires qui transforment la matrice A en une matrice identité :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & PAQ \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

d'où

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette méthode est difficilement programmable.

b) Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Définition et propriétés de la SVD

L'introduction de la SVD sous sa forme compacte nécessite le rappel de théorèmes et de définitions importants :

La SVD existe pour toute matrice A de dimension m x h, elle est donnée par :

$$A = U \Sigma V^T$$

où

U est une matrice de dimension m x n constituée de n colonnes orthonormales U_j telles que :

$$U^T U = I_n$$

Σ est une matrice diagonale de dimension n x n.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

V est une matrice de dimension h x n constituée de m colonnes orthonormales V_j telles que :

$$V^T V = I_n$$

Les σ_j sont appelées valeurs singulières.

Si le rang de A est égale k ($k \leq n$), la SVD de A est donnée par :

$$A = U \Sigma V^T = U_k \Sigma_k V_k^T$$

où

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$$

U_k est la matrice des premières k colonnes de U

V_k est la matrice des premières k colonnes de V

$$\Sigma_k = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$$

L'utilisation de cette technique pour trouver P et Q aboutit à :

$$P = \begin{bmatrix} \Sigma_n^{-1} (U_q^n)^T \\ \dots \\ (U_{qk}^{qk-n})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_n^{-1} & | & \underline{0} \\ \dots & & \dots \\ \underline{0} & | & I_{qk-n} \end{bmatrix} (U_{qk}^{qk})^T$$

où

$$U_{qk}^n = U \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \Sigma \quad \text{et} \quad (U_{qk}^{qk-n})^T \text{ peuvent être choisis de telle sorte}$$

que toutes les lignes qk-n soient orthonormales et

$$Q = (V_{pk}^n \mid V_{pk}^{pk-n}) \quad (\text{où } V_{pk}^n = V)$$

Cette technique est très fiable.

La dernière étape consiste à calculer la réalisation à l'aide des formules :

$$A = U_p [JP(\tau H_r)QJ]U_q^T$$

$$B = U_p [JPH_r E_p^T] \tag{II.22}$$

$$C = [E_q H_r Q] U_q^T$$

$$\text{où } E_p = [I_p \ 0_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \quad (p \times pr) \text{ (bloc matrice)}$$

$$E_q = [I_q \ 0_q \ 0_q \ \dots \ 0_q] \quad (q \times qr) \text{ (bloc matrice)}$$

$$\tau H_r = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_r \\ M_2 & M_3 & \dots & M_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_r & M_{r+1} & \dots & M_{2r-1} \end{bmatrix} : \text{matrice de Hankel décalée d'un bloc.}$$

Pour construire la matrice de Hankel décalée, on a besoin du paramètre de Markov M_{2r-1} .

Comme nous l'avons souligné en introduction, plusieurs techniques permettant d'obtenir la réalisation minimale d'un système selon l'algorithme de Ho et Kalman ont été proposées. Nous en développerons quelques unes dans ce qui suit.

2-2) Algorithme de Silverman [1971]

La matrice principale sur laquelle l'algorithme est basé est une sous-matrice de Hankel :

$$\Gamma_{r,r+1} = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_r \\ M_1 & M_2 & \dots & M_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{r-1} & M_r & \dots & M_{2r-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

où

r est le degré du plus petit dénominateur commun.

n est le rang de $\Gamma_{r,r}$ et également la dimension minimale du système.

Par élimination de Gauss, $\Gamma_{r,r+1}$ peut être transformée en une matrice possédant n colonnes indépendantes correspondant à la matrice identité $n \times n$. Par élimination des lignes nulles du résultat on obtient $\bar{\Gamma}_{r+1}$, la réalisation minimale est alors obtenue de la façon suivante :

- Les q premières colonnes de $\bar{\Gamma}_{r+1}$ constituent la matrice B .
- Les n colonnes de $\bar{\Gamma}_{r+1}$ sont les q colonnes de droite par rapport à celles de la matrice identité constituent la matrice A .
- Les n colonnes de $\Gamma_{1,r}$ qui ont les mêmes indices de colonnes que la matrice identité en $\bar{\Gamma}_r$ représentent la matrice C .

2-3) Algorithme de Rôzsa [1974]

Elle utilise la matrice de Hankel de dimension $n \times n$ où n est la somme du degré du plus petit dénominateur commun de la matrice de transfert et de son nombre de colonnes (i. e. le nombre d'entrées). En éliminant les lignes de la forme normale de Hermite correspondant à cette matrice de Hankel, on aboutit à la réalisation minimale par la même technique que Silverman.

2-4) Algorithme de Zeiger [1974]

L'idée est de réaliser la factorisation de l'algorithme de Ho et Kalman à l'aide de la technique SVD. La procédure de Zeiger est la suivante: on considère la SVD de la matrice de Hankel H :

$$H = U \Sigma V^T = (U \sqrt{\Sigma}) (\sqrt{\Sigma} V^T) \\ = R Q$$

Dans notre cas (cas déterministe) les valeurs singulières σ_k sont nulles pour tout $k > \text{ordre } n$ ($n = \text{rang}(H)$) du système.

En éliminant les lignes et les colonnes nulles de Σ ainsi que les colonnes correspondantes de U et de V on obtient :

$$H_n = R_n Q_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (\text{II.24})$$

Q_n est la matrice de commandabilité de rang n .

R_n est la matrice d'observabilité de rang n .

La réalisation minimale est donnée par :

$B = n$ premières lignes \times q premières colonnes de Q_n

$C = p$ premières lignes \times n premières colonnes de R_n

Par ailleurs, A vérifie : $R_n A Q_n = \overleftarrow{H}_n = H_n \uparrow$

\overleftarrow{H}_n est obtenu par décalage de H d'un bloc vers la gauche.

$H_n \uparrow$ est obtenu par décalage de H d'un bloc vers le haut.

une solution en A est donnée par : $A = R_n^+ \overleftarrow{S}_n Q_n^+$

où $()^+$ désigne le pseudo-inverse de $()$.

2-5) Algorithme de Kung [1979]

C'est une modification de la méthode de Zeiger, la différence principale se situant au niveau de la détermination de la matrice A . En effet l'évaluation de la matrice A n'est pas basée sur le décalage de la matrice de Hankel (Zeiger), mais sur les propriétés de décalage des matrices de commandabilité et d'observabilité :

$$A = R^+ R \uparrow$$

ou

$$A = \overleftarrow{Q} Q^+$$

2-6) Algorithme de Mayne [1968]

Mayne a proposé une méthode de réalisation à partir des coefficients de la matrice de transfert.

Son algorithme comporte deux étapes :

- Pour chacune des fonctions de transfert on obtient soit une réalisation observable soit une réalisation commandable.
- La partie commandable (observable) de la réalisation obtenue en (a) est ensuite extraite et l'on obtient ainsi une réalisation minimale.

2-7) Algorithme de Gupta [1969]

Cette méthode permet d'obtenir le polynôme minimal d'un système à partir de ses paramètres de Markov.

Considérons

$$Y_i^p = [M_i, M_{i+1}, \dots, M_{i+p-1}]^T$$

où les M_j sont les paramètres de Markov.

On construit la matrice de Gram G_p afin de déterminer l'indice de réalisabilité r :

$$G_p = [g_{ij}] = [\langle Y_i^p, Y_j^p \rangle] = [\text{tr} \left(\sum_{k=0}^{p-1} M_{i+k}^T \cdot M_{i+k} \right)]$$

où r satisfait la condition :

$$\text{Rang} (G_r) = \text{rang} (G_{r+k}) \quad \text{pour } k \geq 1$$

Une fois r trouvé, on calcule les coefficients $\{\alpha_i\}$ du polynôme minimal qui satisfont :

$$M_{r+j} = \sum_{i=1}^r \alpha_{i-1} \cdot M_{r-i+j} \quad j \geq 0$$

la solution est donnée par la résolution du système linéaire :

$$G_r \cdot \alpha = g$$

où

$$\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}]^T$$

$$G_r = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rr} \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_{1,r+1} \\ g_{2,r+1} \\ \vdots \\ g_{r,r+1} \end{bmatrix}$$

Après avoir trouvé α , on peut former la "matrice bloc compagne" proposée par Ho et Kalman qui donne en général une réalisation non minimale et qui doit donc être réduite pour aboutir à la réalisation minimale (en utilisant la procédure de Mayne par exemple).

3- Approche du problème de réalisation par la matrice de Page (Van den Hof [1982])

Nous parlerons de l'avantage d'utiliser cette matrice par rapport à celle de Hankel lorsque nous aborderons le cas bruité. Pour le moment, nous présentons la façon d'utiliser cette matrice pour une réalisation minimale dans le cas déterministe.

La matrice de Page est définie à partir des paramètres de Markov de la façon suivante :

$$P[i,j] = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{j-1} \\ M_j & M_{j+1} & \dots & M_{2j-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{(i-1)j} & \vdots & \dots & M_{ij-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA^j \\ \vdots \\ CA^{(i-1)j} \end{bmatrix} [B \ AB \ \dots \ A^{j-1} \ B] \quad (II.25)$$

$$= R_j[i].Q[j]$$

De la même manière que la matrice de Hankel est le produit de la matrice d'observabilité et de la matrice de commandabilité du système $\{A, B, C\}$, la matrice de Page est le produit d'une matrice d'observabilité $[A^j, C]$ et d'une matrice de commandabilité $[A, B]$.

Si les paramètres de Markov sont ordonnés en fonction des colonnes et non des lignes, on obtient une matrice dite matrice de Page (ou Chinese) : elle est le produit de la matrice d'observabilité de $\{A, C\}$ et de la matrice de commandabilité $\{A^j, B\}$. La condition nécessaire pour avoir une décomposition correcte de cette matrice sous la forme (II.25) est :

$$\text{rang}(P) = n$$

Pour vérifier cette condition, il est nécessaire et suffisant que la matrice d'observabilité et la matrice de commandabilité de P soient de rang n. On prend alors $i, j \geq n$ comme condition suffisante.

Les matrices B et C peuvent être déterminées à partir de n'importe quelle décomposition R et Q de P, et la matrice A peut être déterminée par décalage de la matrice P puisque :

$$\overleftarrow{P} = R_j[i] \ A \ Q[j]$$

Pour obtenir une décomposition, on peut utiliser la SVD comme dans la méthode de Kung.

En résumé, les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres de Markov pour obtenir une réalisation minimale en utilisant la matrice de page est :

La séquence $\{M_k\}$, $k = 0, \dots, L$ admet une réalisation de dimension finie et avec dimension minimale n_0 et (C, A^j) est une paire observable si et seulement si,

$$\text{rang}(P) = n_0$$

4- Réalisation minimale par les paramètres de Markov généralisés

4-1) Réalisation de la matrice de transfert à partir des moments (Bruni [1969])

Les paramètres de Markov s'obtiennent par le développement des matrices de transfert autour de $s = \infty$. Par contre les moments s'obtiennent par le développement des matrices de transfert autour de $s = 0$, soit :

$$G(s) = -Y_1 - Y_2 s - Y_3 s^2 - \dots$$

où $Y_i = CA^{-i} B = \frac{1}{i!} \times i^{\text{ème}}$ moment du système $i = 1, 2, 3, \dots$

L'utilisation des moments a l'avantage de mieux approcher la réponse permanent. Par contre, l'utilisation des paramètres de Markov permet d'approcher le régime transitoire.

Toutes les techniques utilisées pour la réalisation minimale à partir des paramètres de Markov sont valables pour les moments et donnent la réalisation $\Sigma : A^{-1}, B, C$

L'utilisation des moments est recommandée si les données sont contaminées par des bruits mais leur utilisation en identification pose le problème de leur estimation à partir d'entrées-sorties.

4-2) Procédure modifiée pour la réalisation à partir du mixage des paramètres de Markov et des moments (Singh [1985])

La combinaison des moments et des paramètres de Markov pour la réalisation possède l'avantage d'approcher les réponses permanente et transitoire simultanément.

La matrice de Hankel généralisée H_{ij} est définie de la manière suivante :

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} Y_k & Y_{k-1} & \dots & Y_1 & M_0 & M_1 & \dots & M_{j-k-1} \\ Y_{k-1} & Y_{k-2} & \dots & M_1 & M_2 & \dots & \dots & M_{j-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{i-k-1} & M_{i-k} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & M_{i+j-k-2} \end{bmatrix}$$

L'application de n'importe quelle technique de réalisation minimale donne :

$$\Sigma : A^{-1}, B, CA^{k-1}$$

où le triplet (A, B, C) peut être déterminé.

Deux constructions possibles de la matrice de Hankel aboutissent à des réalisations différentes :

$$H_r = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_r \\ M_0 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{r-1} \\ M_1 & M_0 & Y_1 & \dots & Y_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{r-2} & M_{r-1} & \vdots & \dots & Y_1 \end{bmatrix}$$

et

$$H_r' = \begin{bmatrix} Y_1 & M_0 & M_1 & \dots & M_{r-2} \\ Y_2 & Y_1 & M_0 & \dots & M_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_r & Y_{r-1} & \vdots & \dots & Y_1 \end{bmatrix}$$

La première matrice donne $\Sigma : A, B, C$ et la deuxième donne $\Sigma : A^{-1}, B, C$

4-3) Réalisation de la matrice de transfert par le développement en série de Taylor autour d'un point quelconque (Singh [1984])

L'avantage de cette réalisation est d'être plus générale que celle obtenue par les moments et les paramètres de Markov. Les différentes valeurs de (a) donnent différents quadruplets {A, B, C, D} : on peut donc déterminer une famille de réalisations.

Soit une matrice de fonction de transfert de p-entrées et q-sorties

$$G(s) = \frac{T(s)}{\alpha(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n T_{n-i} s^i}{\sum_{i=0}^r \alpha_{r-i} s^i} \quad \text{et } n < r$$

où les α_i ($i = 0, 1, 2, \dots, r$) sont des scalaires et T_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) des matrices ($q \times p$). Le développement en série de Taylor de $G(s)$ autour du point $s = a$ s'écrit :

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(a) (s-a)^i$$

où les matrices ($q \times p$) $H_i(a)$ sont données par :

$$H_i(a) = \frac{G^i(a)}{i!}$$

et

$$G^i(a) = \frac{d^i}{ds^i} G(s) \Big|_{s=a}$$

l'utilisation de n'importe quelle technique de réalisation minimale donne

$$\Sigma : A^{-1}, B, C$$

5- Réalisation minimale à partir d'entrées/sorties

Introduction :

Plusieurs méthodes ont été proposées pour obtenir la réalisation minimale d'un système linéaire invariant multi-entrées multi-sorties à partir des observations des entrées et des sorties. Ces algorithmes sont limités au cas de mesures non-bruitées. Nous allons en présenter quelques uns ici.

5-1) Méthode de Budin [1971]

Un système linéaire invariant discret peut être représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= H x(k) \end{aligned} \quad \text{(II.26)}$$

ces équations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [\Phi \ \Gamma] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \\ y(k) &= H x(k) \end{aligned} \quad \text{(II.27)}$$

Si H est la matrice d'identité alors :

$$y(k) = x(k)$$

et la première partie de (II.27) devient :

$$y(k+1) = [\Phi \Gamma] \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

ceci représente une relation directe entre l'entrée et la sortie. En utilisant (II.28), [A B] peut être obtenu à partir de la relation :

$$\sum_{k=1}^N [y(k+1) \dots y(k+n+r)] = [\Phi \Gamma] \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} y(k) & \dots & y(k+n+r-1) \\ u(k) & \dots & u(k+n+r-1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Si la matrice multiplicative $[\Phi \Gamma]$ dans la relation (II.29) a un inverse, il existe une solution unique pour $[\Phi \Gamma]$. Dans le cas général où le système n'est pas complètement observable (H n'est pas nécessairement la matrice identité) il est possible d'obtenir une expression similaire à (II.28), impliquant les entrées-sorties et les paramètres du système.

5-2) Méthode de Guidorzi [1975]

Soit S un processus dynamique complètement observable à définir et représentable par un modèle d'état de la forme :

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= H x_k + D u_k \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.30})$$

On désigne enfin par p le nombre d'entrées.

On s'intéresse alors à l'identification à partir de la séquence entrées/sorties $\{u_k, y_k\}$. On supposera bien sûr que S est identifiable à partir de ces informations. On admet que S possède q sorties linéairement indépendantes, soit $\text{rang}(H) = q \leq n$ et que D est identiquement nul.

Dans ces conditions, il existe une base T de l'espace d'état dans laquelle $\{\Phi, \Gamma, H\}$ est transformée en $\{\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}\}$ avec la structure canonique suivante, en notant $F = [F_{ij}] = T \Phi T^{-1}$:

$$F_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & I_{n_i-1} & & \\ f_{ii,1} & \cdot & f_{ii,n_i} & \end{bmatrix}; \quad F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{ij,1} & \cdot & f_{ij,n_{ij}} & 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, \dots, q \quad (\text{II.31})$$

$$\bar{H} = HT^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot \end{array} \right] \\ \leftarrow \quad n_1+1 \quad \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot \end{array} \right] \\ \leftarrow \quad n_1+\dots+n_{q-1}+1 \quad \rightarrow \end{array} \quad (\text{II.32})$$

La matrice T est formée à partir des n premières colonnes linéairement indépendantes, sélectionnées de gauche à droite parmi la suite :

$$s^T(H, \Phi) = [h_1, h_2, \dots, h_q; \Phi^T h_1, \dots, \Phi^T h_q; \dots; (\Phi^T)^{n-1} h_1, \dots, (\Phi^T)^{n-1} h_q] \quad (\text{II.33})$$

où h_i^T désignent les lignes de H. n_i est le plus petit entier tel que $(\Phi^T)^{n_i} h_i$ soit combinaison linéaire des colonnes situées à sa gauche dans (II.33). Dans ces conditions, la transformation T est donnée par :

$$T^T = [h_1, \dots, (\Phi^T)^{n_1-1} h_1 | h_2, \dots, (\Phi^T)^{n_2-1} h_2 | \dots | h_q, \dots, (\Phi^T)^{n_p-1} h_q] \quad (\text{II.34})$$

$$G = TF$$

Algorithme

1) A partir des séquences d'entrées-sorties on trouve, par l'identification structurale, l'ensemble d'entiers n_1, \dots, n_q (la dimension de chaque sous-système) et par l'identification paramétrique les paramètres des polynômes P(z) et Q(z) de la représentation d'entrée-sortie :

$$P(z) y(z) = Q(z) u(z)$$

2) Les éléments de G sont les coefficients des polynômes Q(z).

3) On écrit directement la matrice triangulaire k^{-1} où les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de k^{-1} sont les coefficients de z^{n_i} de la $i^{\text{ème}}$ ligne de P(z).

4) On calcule k puis $\Lambda(z) = P(z) k$

5) A partir de k et de $\Lambda(z)$ on écrit directement les matrices \bar{H} et F en utilisant le fait que les colonnes non nulles de \bar{H} sont celles de k et que les colonnes significatives de F sont données par les coefficients du polynôme en $\Lambda(z)$.

6- Résultats numériques

$$\text{Soit} \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{5}{s+3} & \frac{3}{s+4} \\ \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Dans une première étape, on détermine les

$$\text{paramètres de Markov} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -15 & -12 & 45 & 48 & -135 \dots \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -8 & -6 & 20 \dots \end{bmatrix}$$

$$\text{et les Moments} = \begin{bmatrix} -1.6667 & -0.75 & 0.5556 & 0.1875 & -0.1852 & \dots \\ -2.5 & -1 & 3.25 & 1.5 & -3.6250 & \dots \end{bmatrix}$$

Les réalisations minimales données par les méthodes précédentes sont les suivantes :

Ho et Kalman

$$A = \begin{bmatrix} -3.4891 & -0.4861 & 0.0164 & -0.0472 \\ -1.9818 & -4.1599 & 0.4925 & -0.0789 \\ -0.5612 & -2.5349 & 0.0887 & 0.4049 \\ 15.0965 & 5.5396 & -3.1486 & -2.4396 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.2201 & 0.1734 \\ -0.1564 & 0.0889 \\ 0.9402 & 0.1871 \\ -0.2079 & 0.9628 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 19.9088 & -2.5572 & 0.1729 & -0.2677 \\ -2.4946 & -0.1631 & 1.6522 & 0.1434 \end{bmatrix}$$

Silverman

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8571 & 5.1429 \\ 0 & 0 & -6.8571 & -13.1429 \\ 1 & 0 & -2.7143 & 1.7143 \\ 0 & 1 & -1.7143 & -7.2857 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -15 & -12 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rôzsa

On obtient les mêmes résultats que par Silverman.

Zeiger

$$A = \begin{bmatrix} -3.9969 & -0.7776 & -0.0057 & 0 \\ -0.0043 & -3 & -0.0073 & -0.0004 \\ 0.0442 & -0.4239 & -2.0058 & 0.0479 \\ 0.0019 & -0.0129 & -0.0569 & -0.9973 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5251 & 1.7307 \\ -0.6943 & -0.0086 \\ 2.8877 & 2.1112 \\ -1.9618 & -0.9447 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.7573 & -6.0567 & -0.0444 & 0 \\ -0.0205 & 0.3905 & -0.8028 & -1.8351 \end{bmatrix}$$

Kung

On obtient les mêmes résultats que Zeiger.

Matrice de Page

$$A = \begin{bmatrix} -3.7683 & -0.4042 & -0.1092 & -0.0225 \\ -2.9036 & -2.9085 & -0.1466 & -0.0664 \\ 6.0024 & -1.8129 & -2.0850 & -0.1675 \\ 14.8567 & 3.0970 & -2.9048 & -1.2382 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.1509 & 0.2136 \\ -0.6372 & 0.6212 \\ -0.6239 & 0.7485 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18.4072 & -7.7163 & -2.1075 & -0.4367 \\ -2.4585 & 0.0825 & 1.6023 & -0.6179 \end{bmatrix}$$

Gupta

Les coefficients α_i du polynôme minimal sont $= \begin{bmatrix} -24 \\ -50 \\ -35 \\ -10 \end{bmatrix}$

Une réalisation non minimale est alors donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \end{bmatrix}$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 0 & -50 & 0 & -35 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 50 & 0 & -35 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \\ -15 & -12 \\ 2 & 2 \\ 45 & 48 \\ -8 & -6 \\ -135 & -192 \\ 20 & 14 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une réalisation minimale peut en être déduite en extrayant la partie observable et commandable :

1- Réalisation commandable de $\{A, B, C\}$

$$f_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -24 & -0.6645 \\ 1 & 0 & 0 & -50 & -3.7182 \\ 0 & 1 & 0 & -35 & -1.7478 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -0.1941 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad g_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h_k = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 45 & -135 & 3 \\ 1 & 2 & -8 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

2- Partie observable de $\{f_k, g_k, h_k\}$

$$f_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix} \quad g_o = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -15 & -12 \\ 45 & 48 \\ -135 & -192 \end{bmatrix} \quad h_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1046 & 2.0372 & 0.6476 & 0.0675 \end{bmatrix}$$

$\{f_o, g_o, h_o\}$ est une réalisation minimale.

Moments

$$A = \begin{bmatrix} -0.8703 & -0.0258 & -0.0256 & -0.0079 \\ 3.8058 & -3.1541 & -0.6624 & 0.1423 \\ -1.6619 & 1.9154 & -1.2212 & -0.2211 \\ -7.7044 & 8.9720 & 10.9172 & -4.7544 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.6106 & 0.2673 \\ -0.6701 & -0.3246 \\ 0.3522 & -0.8076 \\ -0.2327 & 0.4134 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5.2171 & -3.1101 & -0.6460 & 0.1801 \\ 2.6144 & 1.1090 & 0.4295 & 0.0195 \end{bmatrix}$$

Moments + paramètres de Markov

$$A = \begin{bmatrix} -3.3548 & -0.1670 & -0.4404 & -0.0049 \\ -2.4687 & -0.5623 & -0.0114 & -0.1722 \\ 0.2787 & -1.3 & -3.7105 & 0.0527 \\ 14.0497 & 6.1387 & 6.4114 & -2.3723 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2497 & 0.1480 \\ -0.8860 & -0.2733 \\ 0.1503 & 0.3043 \\ -0.3607 & 0.9005 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 20.0736 & 0.0586 & 0.2141 & -0.0218 \\ -2.4368 & -1.7418 & -0.0697 & -0.1517 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que toutes ces réalisations donnent lieu à la même fonction de transfert $G(s)$.

7- Conclusion

A travers ce bref rappel des principaux algorithmes de réalisation minimale basée sur l'utilisation de la matrice de Hankel, il ressort que toutes ces méthodes utilisent $2r$ (r est indice de la réalisabilité) paramètres de Markov sauf la matrice de Page et la méthode de Gupta qui en nécessitent r^2 .

Les méthodes utilisant le test du rang sont numériquement très sensibles. Ces problèmes sont évités dans les algorithmes de Silverman (basé sur l'élimination de Gauss) et dans celui de Rôzsa (basé sur la transformation de Hermite) car ces deux algorithmes utilisent une borne supérieure du degré du dénominateur commun de la matrice de transfert supposé connue.

D'un point de vue pratique, la technique de Zeiger ou de Kung offre le plus d'avantages car elle utilise l'algorithme SVD qui est numériquement stable, de plus elle ne nécessite pas la connaissance explicite de la matrice de transfert et enfin elle donne la dimension du système ainsi qu'une réalisation minimale de façon simple et directe.

On peut également noter que la SVD est un outil très efficace pour traiter le problème de la réalisation approchée (Chapitre III) ainsi que celui de la réduction de modèle (Chapitre VI).

8- Bibliographie

- 1- A. Barraud, "Réalisation Minimale et Approximation Optimale des Systèmes Dynamiques Linéaires Invariants", Thèse Docteur ès- Sciences. Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, 1975.
- 2- C. Bruni, A. Isidori, and A. Rubert, " A Method of Realization Based on the Moments of the Impulse - Response Matrix", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-14, pp. 203-204, April 1969.
- 3- M. A. Budin, " Minimal Realization of Discrete Linear Systems from Input-Output Observations", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-16, No. 5, pp. 395-401, Octobre 1971.
- 4- A. M. Eydgahi and H. Singh, "A Modified Procedure for the Realization of the Transfer-Function Matrix from a Mixture of Markov Parameters and Moments", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-30, No. 3, pp. 299-301, March 1985.
- 5- A. M. Eydgahi and H. Singh, "Transfer-Function Matrix Realization using Taylor Series Expansion about a General Point a", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-29, No. 9, pp. 829-831, September 1984.
- 6- G. Favier, "Quelques Rappels sur les Décomposition de Matrices", Laboratoire de Signaux et Systèmes, Nice, France.
- 7- Gene H. Golub & C. F. Van Loan, "Matrix computations", The Johns Hopkins University Press, 1985 (fourth printing).
- 8- R. Guidorzi, "Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems", Automatica, Vol. 11, pp. 361-374, 1975.
- 9- R. D. Gupta and F. W. Fairman, "An Explicit Approach to Minimal Realization from System Markov Parameters".
- 10- A. K. Hajdasinski, "A Markov Parameter Approach to Identification of Multivariable Dynamical Systems", Technical Report, Eindhoven University of Technology, Netherlands, November 1976.
- 11- A. K. Hajdasinski, "Realization of the Markov Parameter Sequences Using Singular Value Decomposition of the Hankel Matrix", Technical Report, Eindhoven University of Technology, Netherlands, May 1979.
- 12- A. K. Hajdasinski, "The Gauss-Markov Approximation Scheme for Identification of Multivariable Dynamical Systems via the Realization Theory, An Explicit Approach", Technical Report, Eindhoven University of Technology, Netherlands, August 1978.
- 13- B. L. Ho and R. E. Kalman, "Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Functions", Proc. 3rd Conf. Circuit and Systems Theory, pp. 449-459, 1965.
- 14- S. Kung, "A New Identification and Model Reduction Algorithm via Singular Value Decomposition", IEEE Trans. on Auto. Control, 1979.
- 15- R. Liu and L. C. Suen, "Minimal Dimension Realization and Identifiability of Input-Output Sequences", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 227-232, April 1977.
- 16- D. Q. Mayne, "Computational Procedure for the Minimal Realisation of Transfert-Function Matrices", Proc. IEE, Vol. 115, No. 9, pp. 1363-1368, 1968.
- 17- Pal Rôzsa and N. Sinha, "Efficient Algorithm for Ireducible Realization of a Rational Matrix", Int. J. Control, Vol. 20, No. 5, pp. 793-751, 1974.

-
- 18- L. M. Silverman, "Realization of Linear Dynamical Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 554-567, Dec. 1971.
- 19- P. Van den Hof, "Approximate Realization of Noisy Linear Systems: The Hankel and Page Matrix Approach", Eindhoven University of Technology, M. Sc. Report, Dec. 1982.
- 20- H. P. Zeiger and A. J. Mc ewen, "Approximate Linear Realization of Given Dimension via Ho's Algorithm", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 153-155, April 1974.
- 21- G. Hashim, A. Rachid, D. Mehdi and C. Humbert, "Minimal Realization Methods : A Comparative Study", IASTED Symposium, Feb. 17-20, 1987, Switzerland.**

CHAPITRE III

REALISATION APPROCHEE

2- Réalisation des séquences de paramètres de Markov à partir d'entrées/sorties

L'utilisation de la réalisation comme moyen d'identification requiert l'estimation de la réponse impulsionnelle du système à partir d'entrées/ sorties quelconques. Ce point est la tâche la plus importante, car si on arrive à avoir la réponse impulsionnelle du système très proche des réponses impulsionnelles exactes, le système sera évidemment identifiable. La réalisation peut alors être très facilement obtenue par une des méthodes de réalisation minimale.

2-1) A partir des réponses en échelons (Irving [1971])

Supposons connues les réponses aux échelons unités du système

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= H x_k \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.1})$$

où $u_k \in \mathbb{R}^p$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^q$ avec

$$u_0^1 = u_1^1 = \dots = u_{L-1}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$

$$u_0^2 = u_1^2 = \dots = u_{L-1}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_2$$

.

$$u_0^p = u_1^p = \dots = u_{L-1}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = e_p$$

Pour $x_0 = 0$, on obtient successivement

$$[y_1^1 \ y_2^1 \ \dots \ y_L^1] = [H\Gamma \ H\Phi\Gamma \ \dots \ H\Phi^{L-1}\Gamma] \begin{bmatrix} e_1 & \dots & \cdot & e_1 \\ 0 & e_1 & \dots & \cdot & e_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e_1 \end{bmatrix}$$

$$[y_1^2 \ y_2^2 \ \dots \ y_L^2] = [H\Gamma \ H\Phi\Gamma \ \dots \ H\Phi^{L-1}\Gamma] \begin{bmatrix} e_2 & \dots & \cdot & e_2 \\ 0 & e_2 & \dots & \cdot & e_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

.

$$[y_1^q \ y_2^q \ \dots \ y_L^q] = [H\Gamma \ H\Phi\Gamma \ \dots \ H\Phi^{L-1}\Gamma] \begin{bmatrix} e_p & \dots & \cdot & e_p \\ 0 & e_p & \dots & \cdot & e_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e_p \end{bmatrix}$$

Soit sous forme condensée :

$$[| y_1^1 \ y_1^2 \ \dots \ y_1^q | | y_2^1 \ y_2^2 \ \dots \ y_2^q | \dots | y_L^1 \ y_L^2 \ \dots \ y_L^q |] = [H\Gamma \ H\Phi\Gamma \ \dots \ H\Phi^{L-1}\Gamma] \begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ 0 & I & \dots & I \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdot & \dots & I \end{bmatrix}$$

$$H\Gamma = | y_1^1 \ y_1^2 \ \dots \ y_1^q |$$

$$H\Gamma + H\Phi\Gamma = | y_2^1 \ y_2^2 \ \dots \ y_2^q |$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$H\Gamma + H\Phi\Gamma + \dots + H\Phi^{L-1}\Gamma = | y_L^1 \ y_L^2 \ \dots \ y_L^q |$$

En retranchant successivement la 2^{ème} équation de la 1^{ère}, la 3^{ème} de la 2^{ème}, la L^{ème} de la L-1^{ème} on obtient :

$$H\Gamma = | y_1^1 \ y_1^2 \ \dots \ y_1^q |$$

$$H\Phi\Gamma = | y_2^1 \ y_2^2 \ \dots \ y_2^q | - | y_1^1 \ y_1^2 \ \dots \ y_1^q |$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$H\Phi^{L-1}\Gamma = | y_L^1 \ y_L^2 \ \dots \ y_L^q | - | y_{L-1}^1 \ y_{L-1}^2 \ \dots \ y_{L-1}^q |$$

Ces dernières expressions permettent d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée à partir des réponses indicielles.

Cette technique impose dans le cas pratique la connaissance précise de l'instant d'application des échelons sinon on perd quelques paramètres de Markov et les résultats de la réalisation ne sont pas corrects.

2-2) Approximation stochastique (EL-Sherief [April, 1979], [Dec., 1979])

Considérons le système sous la forme d'espace d'état en discret :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= H x(k) + v(k) \end{aligned} \tag{III.2}$$

$v(k)$ est un bruit (non mesurable) non corrélé avec $u(k)$

Les conditions initiales étant nulles, l'état est donné par :

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i \Gamma u(k-i-1) \quad (\text{III.3})$$

que l'on peut réécrire

$$x(k) = \sum_{i=0}^{L-1} \Phi^i \Gamma u(k-i-1) + \sum_{i=L}^{\infty} \Phi^i \Gamma u(k-i-1) \quad (\text{III.4})$$

où L est l'horizon d'identification, fonction des indices d'observabilité et de commandabilité p_i et q_j , donné par :

$$L = \max[p_i] + \max[q_j] \quad i = 1, 2, \dots, q \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (\text{III.5})$$

On définit alors les vecteurs auxiliaires de dimension (LP) suivants:

$$M_i^T = [h_i^T \Gamma \quad h_i^T \Phi \Gamma \quad \dots \quad h_i^T \Phi^{L-1} \Gamma] \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{III.6})$$

$$U_{(k)}^{T(k+L-1)} = [u^T(k+L-1) \quad u^T(k+L-2) \quad \dots \quad u^T(k)] \quad (\text{III.7})$$

où
$$H^T = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_q] \quad (\text{III.8})$$

Utilisant (III.4), (III.6) et (III.7) avec (III.2), la sortie du système (III.2) à l'instant $(k+1)$ est :

$$y_i(k+L) = U_{(k)}^{T(k+L-1)} M_i + \varepsilon_i(k-1) + v_i(k+L)$$

où
$$\varepsilon_i(k-1) = h_i^T \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{j+L} \Gamma u(k-i-1) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{III.9})$$

ou sous une forme plus concise

$$y_i(k+1) = U_{(k)}^{T(k+L-1)} M_i + \varepsilon_i$$

avec
$$e_i = \varepsilon_i(k-1) + v_i(k+L) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{III.10})$$

L'équation (III.10) représente le système (III.2) sous forme non paramétrique. Elle représente aussi la réponse impulsionnelle de système (III.2)

Pour trouver l'estimation des paramètres inconnus du vecteur M_i , $i = 1, 2, \dots, q$ de (III.10), on minimise le critère d'erreur des moyens-carrés normalisés :

$$f(\hat{M}_i) = E\left[\frac{e_i^2}{U_k^T(k+L-1) U(k)}\right]$$

où
$$e_i = y_i(k+L) - U(k)^T M_i \quad i = 1, 2, \dots, q$$

les estimées \hat{M}_i , $i = 1, 2, \dots, q$ sont calculées récursivement au moyen d'un algorithme d'approximation stochastique :

$$\hat{M}_i(k+L) = \hat{M}_i(k-1) + v(k) \frac{U(k)}{\|U_k(k+L-1)\|^2} [y_i(k+L) - U(k)^T \hat{M}_i(k-1)]$$

$$i = 1, 2, \dots, q \quad k = 1, L+2, 2L+3, \dots$$

La séquence $v(k)$ et l'estimée initiale doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v(i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{\infty} v(i) = \infty \quad \sum_{i=1}^{\infty} v^2(i) < \infty$$

et

$$E\|\hat{M}_i(0)\|^2 < \infty \quad i = 1, 2, \dots, q$$

El-Sherief et al. ont trouvé que l'on obtient une meilleure approximation si :

$$L \geq \max[p_i] + \max[q_i] \quad i = 1, 2, \dots, q \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (\text{III.11})$$

Cet algorithme sert à identifier un système multi-entrées mono-sortie à partir de données bruitées en temps réel et il n'est pas nécessaire de connaître la statistique des bruits. Cet algorithme est également utilisé dans le cas où le rapport signal/bruit est faible, mais il faut disposer de beaucoup de données pour assurer la convergence de l'algorithme. Par exemple pour un rapport signal/bruit de 0.3, la méthode converge pour 1200 observations.

2-3) Méthode des moindres carrés (El-Sherief [1978])

Supposons que les sorties mesurées d'un système multivariable soient bruitées :

$$z_i(k) = y_i(k) + v_i(k) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{III.12})$$

où

$z_i(k)$ est la $i^{\text{ème}}$ sortie bruitée et $v_i(k)$ le bruit associé.

La représentation discrète pour la $i^{\text{ème}}$ sortie du système est :

$$z_i(k) = U_i^T(k) \theta_i + e_i(k) \quad (\text{III.13})$$

$U_i(k)$ est un vecteur (en général fonction des entrées et sorties), θ_i est le vecteur des paramètres à estimer caractérisant la $i^{\text{ème}}$ sortie ; $e_i(k)$ est l'erreur résiduelle de la $i^{\text{ème}}$ sortie observée.

L'utilisation de la méthode des moindres carrés donne une estimation non biaisée de θ_i si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

les séquences $U_i(k)$ et $e_i(k)$ sont statistiquement indépendantes.

la séquence de l'erreur résiduelle $e_i(k)$ a une moyenne nulle.

L'utilisation de cette technique pour l'estimation de la séquence d'une réponse impulsionnelle se fait en prenant :

$$U_i(k) = [u^T(k-1) u^T(k-2) \dots u^T(k-L)]^T \quad (\text{III.14})$$

$$e_i(k) = v_i(k) \quad (\text{III.15})$$

L'équation (III.13), devient :

$$z_i(k) = \sum_{j=0}^{L-1} M_{j,i} u(k-j-1) + v_i(k) \quad i = 1, \dots, q$$

$M_{j,i}$ est la séquence de réponse impulsionnelle du système (qui sont les éléments de θ_i)

Des équations (III.14) et (III.15), on constate que la séquence du vecteur $U_i(k)$ est non-corrélée avec l'erreur résiduelle $e_i(k)$. De plus, si la séquence $V_i(k)$ a une moyenne nulle, l'estimation des paramètres de la réponse impulsionnelle du modèle est dans ce cas non biaisée.

Le vecteur M_i , correspondant à chaque sous-système, peut être estimé par l'algorithme des moindres carrés récursif :

$$\hat{M}_i(k+1) = \hat{M}_i(k) + \frac{p_i(k) U_i^*(k+1) [z_i(k+1) - U_i^{*T}(k+1) \hat{M}_i(k)]}{1 + U_i^{*T}(k+1) p_i(k) U_i^*(k+1)}$$

$$p_i(k+1) = p_i(k) - \frac{p_i(k) U_i^*(k+1) (p_i(k) U_i^*(k+1))^T}{1 + U_i^{*T}(k+1) p_i(k) U_i^*(k+1)}$$

$$p_i(0) = \alpha_i I \quad \alpha_i > 1$$

avec

$$U_i^*(k+1) = [u^T(k) \dots u^T(k-L+1) v_i(k) \dots v_i(k-L+1)]^T$$

les valeurs de $v_i(k)$ sont calculées à chaque itération par :

$$\hat{v}_i(k) = z_i(k) - \hat{U}_i^{*T} \hat{M}_i^*(k) \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Cette méthode a les mêmes avantages et les inconvénients que la méthode précédente.

2-4) Approximation Gaussienne-Markovienne (Hajdasinski [1978], [1979])

Dans cette méthode, on cherche à trouver un ensemble fini de paramètres de Markov $\{M_i\}$ $i =$

0, 1, 2, ..., k à partir des observations bruitées $\{u(k), y(k)\}$ (cas discret) pour $k = L, L+1, \dots, L+N+1$.

A partir de l'équation (II.17) de la méthode de Ho et Kalman, on peut écrire :

$$y(L) = M_0 u(L-1) + M_1 u(L-2) + M_2 u(L-3) + \dots + M_k u(L-k-1) + \dots + M_L u(-1) \quad (\text{III.16})$$

et pour l'observation $L+m$

$$y(L+m) = M_0 u(L-1+m) + M_1 u(L-2+m) + \dots + M_k u(L-k-1+m) + \dots + M_{L+m} u(-1) \quad (\text{III.17})$$

On définit alors la matrice d'entrées mesurées, qui dépend des trois indices L, k , et m :

$$S_{k, L, m} = \begin{bmatrix} u(L-1) & \dots & u(L-1+m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u(L-1-k) & \dots & u(L-1-k+m) \end{bmatrix} (k+1)px(m+1) \quad (\text{III.18})$$

et la matrice des sorties mesurées :

$$y^T = [y(L) \ y(L+1) \ \dots \ y(L+m)] \quad (\text{III.19})$$

Les estimés des $(k+1)$ premiers paramètres de Markov seront notés :

$$\hat{M}(0), \hat{M}(1), \dots, \hat{M}(k)$$

Les sorties mesurées sont :

$$\hat{y}(L) = [\hat{M}(0) \ \hat{M}(1) \ \dots \ \hat{M}(k)] \begin{bmatrix} u(L-1) \\ u(L-2) \\ \vdots \\ u(L-k-1) \end{bmatrix} + [M(k+1) \ M(k+2) \ \dots \ M(L)] \begin{bmatrix} u(L-k-2) \\ \vdots \\ u(-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

$$\hat{y}(L+m) = [\hat{M}(0) \ \hat{M}(1) \ \dots \ \hat{M}(k)] \begin{bmatrix} u(L-1+m) \\ u(L-2+m) \\ \vdots \\ u(L-k-1+m) \end{bmatrix} + [M(k+1) \ M(k+2) \ \dots \ M(L+m)] \begin{bmatrix} u(L-k-2+m) \\ \vdots \\ u(-1) \end{bmatrix}$$

Ces équations s'écrivent de façon condensée :

$$\hat{y}^T = \hat{M}^T S_{k, L, m} + N^T S_\infty \quad (\text{III.21})$$

avec

$$\hat{y}^T \triangleq [\hat{y}(L) \ \dots \ \hat{y}(L+m)] \quad (\text{III.22})$$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} u(L-k-2) & \cdot & \dots & u(L-1-k+m-1) \\ u(L-k-3) & \cdot & \dots & u(L-1-k+m-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u(-1) & \cdot & \dots & \vdots \\ 0 & \cdot & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdot & \dots & u(-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

$$\hat{M}^T \triangleq [\hat{M}(0) \quad \hat{M}(1) \quad \dots \quad \hat{M}(k)] \quad (\text{III.24})$$

$$N^T \triangleq [M_{k+1} \dots M_L \dots M_{L+m}] \quad (\text{III.25})$$

Par souci de simplification, on pose $S_k, L, m = S_m$

Pour trouver \hat{M} , on minimise la forme quadratique V

$$V = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) \quad (\text{III.26})$$

dont la stationnarité s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{M}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \text{tr}[(y - \hat{y})^T (y - \hat{y})]}{\partial \hat{M}} = 0 \quad (\text{III.27})$$

Déterminons l'expression de V

$$V = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) = yy^T - y\hat{y}^T - \hat{y}y^T + \hat{y}\hat{y}^T \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{aligned} V = & yy^T - y \hat{M}^T S_m - y N^T S_\infty - S_m^T \hat{M} y^T - S_\infty N y^T + S_m^T \hat{M} \hat{M}^T S_m \\ & + S_m^T \hat{M} N^T S_\infty + S_\infty N \hat{M}^T S_\infty + S_\infty N N^T S_\infty \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr} V}{\partial \hat{M}} = & 0 - S_m y - 0 - S_m y - 0 + (S_m S_m^T + S_m S_m^T) \hat{M} + S_m S_\infty^T N + S_m S_\infty^T N + 0 \\ = & - 2 S_m y + 2 S_m S_m^T \hat{M} + 2 S_m S_\infty^T N \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{\partial \text{tr} V}{\partial \hat{M}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{M} = [S_m S_m^T]^{-1} S_m y - [S_m S_m^T]^{-1} S_m S_\infty^T N \quad (\text{III.31})$$

Si le bruit du système est blanc, on peut trouver une estimation des premiers $(k+1)$ paramètres de Markov basée sur $(m+1)$ échantillons d'entrées et $(m+1)$ échantillons de sorties :

$$\hat{M} = [S_m S_m^T]^{-1} S_m y \quad (\text{III.32})$$

c'est-à-dire que l'on peut négliger le deuxième terme de l'estimateur.

Si l'estimée de M (i.e. des $(k+1)$ premiers paramètres de Markov) est calculée à partir d'entrées/sorties très bruitées, cette méthode est biaisée. Une amélioration de l'estimation a été proposée (Gerth [1971]) :

$$\{u/y\} \rightarrow \{ \hat{M} \} \rightarrow \{ M(i) \}$$

$$\Gamma = [I_n : R K_n : R^2 K_n : \dots : R^{k+1-n} K_n]$$

où

$$K_n^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & | & a \\ I_{n-1} & | & \end{bmatrix}$$

5- Calculer $M(i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ en utilisant les moindres carrés minimisant le critère :

$$\sum_{i=0}^k \{ y(i, a, M, T_u) - \hat{y}(i, \hat{M}, T_u) \}_{j_r}^2 = \min.$$

Donc

$$m_{j_r} = [\Gamma T_{u_{j_r}} T_{u_{j_r}}^T \Gamma^T]^{-1} G T_{u_{j_r}} T_{u_{j_r}}^T n_{j_r}$$

où

$$m_{j_r}^T = [M(0)_{j_r} \ M(1)_{j_r} \ \dots \ M(n-1)_{j_r}]$$

$$n_{j_r}^T = [\hat{M}(0)_{j_r} \ \hat{M}(1)_{j_r} \ \dots \ \hat{M}(k)_{j_r}]$$

6- Pour déterminer plusieurs éléments de la séquence $\{ M_i \}$

$$[M(0)_{j_r} \ M(1)_{j_r} \ \dots \ M(k)_{j_r}] = m_{j_r}^T \Gamma$$

Le problème essentiel de cet algorithme est la difficulté de calcul due à la dimension de $(S_m S_m^T)^{-1}$ qui peut diminuer la précision de l'estimation, surtout dans le cas multivariable. Ici, on a modifié cet algorithme de manière à éviter ce problème.

On peut négliger le deuxième terme de l'équation (III.31) dans les trois cas suivants :

1- Les conditions initiales pour le système sont nulles, donc $S_\infty^T = 0$

2- Les entrées du système sont des séquences de bruit blanc, ce qui entraîne $E\{S_\infty^T\} = 0$,

et le terme $S_\infty^T M$ est asymptotiquement nul.

3- Pour un système stable, les paramètres du Markov tendent vers zéro pour k et m suffisamment grands, les valeurs de $(S_m S_m^T)^{-1} S_m S_\infty^T M$ sont alors négligeables.

Cette méthode peut être appliquée directement aux systèmes multi-entrées multi-sorties, mais elle n'est pas récursive. Cependant, elle a les mêmes avantages et inconvénients que la méthode précédente.

2-5) Analyse en corrélation (Sinha [1978])

Considérons un système linéaire invariant discret de dimension n avec q entrées et p sorties donné sous la représentation d'état suivante :

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (III.33)$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k) \quad (III.34)$$

où $v(k)$ est un bruit de mesure.

Les paramètres de Markov M_i du système sont :

$$M_i = H \Phi^i \Gamma \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (III.35)$$

En combinant les équations III.33, III.34 et III.35, la sortie du système à l'instant k est donnée par :

$$y(k) = H \Phi^{k-1} x(0) + v(k) + \sum_{i=0}^{k-1} M_i u(k-i-1) \quad (III.36)$$

L'espérance mathématique de $y(k).u^T(j)$ est

$$E[y(k) u^T(j)] = H \Phi^{k-1} E[x(0) u^T(j)] + E[v(k) u^T(j)] + \sum_{i=0}^{k-1} M_i E[u(k-i-1) u^T(j)] \quad (III.37)$$

On considère alors le cas où la séquence d'entrée est non corrélée, i. e. :

$$E[u(k) u^T(j)] = I \delta_{ij} \quad (III.38)$$

où I est la matrice identité et δ_{ij} est le symbole de "Kronecker". De plus, on suppose

$$E[u(k) v^T(j)] = 0 \quad \text{pour tous } k, j \quad (III.39)$$

$$E[x(0) u^T(j)] = 0 \quad \text{pour tous } j \quad (III.40)$$

pour ce cas, l'équation (III.37) se réduit à :

$$M_{k-j} = E[y(k) u^T(j)] \quad (III.41)$$

L'équation (III.41) indique que le paramètre de Markov M_{k-j} est égale à l'inter-corrélation entre le $j^{\text{ème}}$ séquence d'entrée et la $k^{\text{ème}}$ séquence de sortie, à condition que la séquence d'entrée soit une séquence de bruit blanc non corrélée avec l'état initial et le bruit de mesure.

Si le système est stationnaire et ergodique, on peut écrire :

$$M_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i+k) u^T(i) \quad (III.42)$$

Une bonne approximation nécessite un très grand nombre d'échantillons. La version récursive de cet algorithme peut être utilisé pour améliorer l'estimation en temps réel :

$$M_k^{(N+1)} = M_k^{(N)} - \frac{1}{N+1} [y(k+N+1) u^T(N+1)] \quad (III.43)$$

où $M_k^{(N)}$ est l'estimation de M_k obtenue à partir de N échantillons d'entrées-sorties.

Cette méthode exige que les entrées soient des bruits blancs et que la perturbation $v(k)$ soit non corrélée avec la commande.

3- Détermination de l'ordre

L'estimation des paramètres d'un modèle nécessite en général la connaissance préalable de l'ordre du système. En pratique, l'ordre n'est pas connu. Ce paragraphe traite de la détermination de l'ordre d'un système à partir des données E/S.

3-1) Critère d'Akaike (LJUNG [1988])

Ce critère est défini par la relation suivante :

$$FPE = \lambda \frac{(1 + P/N)}{(1 - P/N)}$$

où

P est le nombre de paramètres du modèle

N est la taille de l'échantillon

λ est la variance du bruit

En pratique, on choisit l'ordre du modèle qui rend l'erreur final de prédiction (FPE) minimale.

3-2) A partir d'une séquence des réponses impulsionnelles (Sinha [1983])

Soit la séquence de la réponse impulsionnelle ($M_0, M_1, M_2, \dots, M_N$) d'un système multi-entrées multi-sorties d'ordre n , les M_i étant des blocs de dimension ($q \times p$), où q est le nombre de sorties, p est le nombre d'entrées. On peut déterminer le rang de la matrice de Hankel défini par :

$$H(j,k) = \begin{bmatrix} M_k & M_{k+1} & \dots & M_{k+j-1} \\ M_{k+1} & M_{k+2} & \dots & M_{k+j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{k+j-1} & M_{k+j} & \dots & M_{k+2j-2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Si j est plus grand que n , le rang de la matrice de Hankel représente l'ordre du système. On peut donc déterminer n en évaluant le déterminant de $H(j,k)$ pour chaque k et pour différentes valeurs de j jusqu'à ce que le déterminant devienne nul pour tout k , quand $j = n+k$.

Pratiquement, ces déterminants ne seront jamais nuls quand les données sont bruitées. Quelques critères supplémentaires doivent être introduits pour utiliser cette méthode. Une première approche consiste à calculer la valeur moyenne du déterminant de $H(j,k)$ pour chaque j , et à tracer le rapport D_j en fonction de j .

$$D_j = \left| \frac{\text{valeur moyenne du déterminant de } H(j,k)}{\text{valeur moyenne du déterminant de } H(j+1,k)} \right| \quad (\text{III.45})$$

L'ordre n est la valeur de j qui maximise le rapport D_j .

Une autre approche consiste tout d'abord à déterminer une estimation de l'autocorrélation de la séquence impulsionnelle bruitée en utilisant la relation :

$$\Phi_i = \frac{1}{N-i+1} \sum_{k=0}^{N-i} M_k M_{k+i} \quad (\text{III.46})$$

on détermine ensuite le rang de la matrice de Hankel formée à partir des coefficients d'auto-corrélation estimés ρ_i définis par :

$$\rho_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_0} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.47})$$

Ici également le déterminant ne peut pas être exactement nul, on utilise alors D_j (test du rapport des déterminants) donné par l'équation (III.45) afin d'avoir de meilleurs résultats. Ces approches sont valables pour un rapport bruit-signal faible.

3-3) Critères de covariance (Système monovarié)

Les méthodes qui traitent de ce problème sont basées sur l'hypothèse que l'entrée est suffisamment riche de telle sorte qu'elle excite tous les modes du système. Dans la suite on considère que cette condition est satisfaite.

Dans un premier temps, on présente la procédure de Woodside (1971) : à partir des observations entrée/sortie bruitées $\{u_k\}$ et $\{y_k\}$, on construit :

$$a_k = \begin{bmatrix} u_0 \\ y_0 \\ u_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$$

on définit la matrice de covariance de a_k :

$$Q_k = E [a_k a_k^T]$$

On peut montrer que pour le cas déterministe, la matrice Q est singulière si k est plus grand que l'ordre n du système et que

$$\text{rang}(Q_k) = k > n$$

Dans le cas bruité, la matrice Q_k est toujours non singulière. Woodside [1971] a montré que si on commence à partir d'une valeur de k donné, le tracé du rapport

$$D_k = \frac{\det Q_k}{\det Q_{k+1}}$$

en fonction de k présente un saut brutal lorsque $k = n$. Ce saut apparaît clairement si le rapport signal/bruit est assez grand, mais il est difficile à distinguer lorsque ce rapport devient petit.

D'après Woodside on améliore ce tracé en utilisant le rapport :

$$D_k^* = \frac{\det \hat{P}_k}{\det \hat{Q}_k^*}$$

où \hat{Q}_k^* est la $2k \times 2k$ partie inférieure gauche de \hat{Q}_k et \hat{P}_k est la $(2k+1) \times (2k+1)$ partie inférieure droite de $\hat{Q}_k = Q_k + \sigma^2 R$

où $\sigma^2 R$ est la matrice de covariance du signal bruité.

Une autre approche de ce problème utilisant une matrice instrumentale a été proposée (Wellstead [1976], [1978]). Dans ce cas, la matrice Q_k est remplacée par :

$$\Gamma_k = E[a_k b_k^T]$$

où

$$b_k = \begin{bmatrix} u_0 \\ z_0 \\ u_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix}$$

$\{z_i\}$ est une séquence de sortie d'un système stable d'ordre supérieur ou égale à k et le rang de Γ_k est donné par :

$$\text{rang}(\Gamma_k) = \min [k+n+1, 2k+1]$$

Wellstead [13] a rapporté que l'utilisation du test du rapport des déterminants du produit de la matrice instrumentale présente un saut apparent, même pour un rapport signal/bruit faible.

3-4) Moindres carrés simples (El-Sherief [1979])

Pour des données déterministes, l'estimation de l'ordre d'un système multi-entrées, mono-sortie peut s'obtenir de façon exacte par une méthode récursive (moindres carrés simples). La méthode suivante s'applique pour un système général multi-entrées multi-sorties.

$$y(z) = G(z) u(z) \tag{III.48}$$

Pour le $i^{\text{ème}}$ sous-système de l'équation (III.48), supposons que la matrice carrée $Q_i(k)$ de dimension $n_i \times (p+1)$ soit définie par :

$$Q_i(k) = I - H_i^+(k) H_i(k) \tag{III.49}$$

où

n_i est la dimension du sous-système i , p est le nombre d'entrées.

$$H_i(k) = \begin{pmatrix} u_1(0) & \dots & u_1(1-n_i) & u_2(0) & \dots & u_p(1-n_i) & -y_i(0) & \dots & -y_i(1-n_i) \\ u_1(k-1) & \dots & u_1(k-n_i) & u_2(k-1) & \dots & u_p(k-n_i) & -y_i(k-1) & \dots & -y_i(k-n_i) \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

et $H_i^+(k)$ est le pseudo-inverse de la matrice $H_i(k)$, I est la matrice identité. Une version récursive de l'équation (III.48) a été proposée par Sinha et Pille [1971] :

$$Q_i(k+1) = Q_i(k) - \frac{Q_i(k) h_i(k+1) (Q_i(k) h_i(k+1))^T}{h_i^T(k+1) Q_i(k) h_i(k+1)} \quad (\text{III.51})$$

où

$$Q_i(0) = I \quad (\text{III.52})$$

et

$$h_i(k+1) = [u_1(k) \ u_1(k-1) \ \dots \ u_1(k-n_i+1) \ u_2(k) \ \dots \ u_p(k-n_i+1) \ -y_i(k) \ \dots \ -y_i(k-n_i+1)]^T \quad (\text{III.53})$$

L'algorithme permettant de déterminer l'ordre n_i de chaque sous-système i est basé sur le théorème suivant :

Théorème

Considérons la $i^{\text{ème}}$ ligne (sous-système i) de la matrice $G(z)$ de l'équation (III.48) qui peut être écrite :

$$G_i(z) = \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(z)}{D_i(z)} \quad p \text{ est le nombre d'entrées} \quad (\text{III.54})$$

Supposons que l'ordre de chaque sous-système soit N_i , où N_i est un entier qui peut être choisi arbitrairement grand.

soit

$$q_i = \text{tr}(Q_i(k)) \quad (\text{III.55})$$

où $Q_i(k)$ est obtenu récursivement à l'aide des équations (III.50) et (III.51). On fait varier k de 1 à M_i ($M_i \leq N_i(p+1)$) jusqu'à ce que q_i soit constant. L'ordre de chaque sous-système est alors donné par :

$$n_i = N_i - q_i \quad (\text{III.56})$$

Cette méthode n'est pas valable pour le cas bruité, car la matrice $H_i(k)$ sera de rang plein et donc, $q = 0$. Elsherief et al. [1979] ont proposé une méthode pour calculer l'ordre d'un système multi-entrées, mono-sortie pour le cas déterministe et le cas bruité. C'est une méthode non récursive basée sur la technique de l'erreur des résidus.

3-5) Technique de l'erreur des résidus

3-5.1) Cas déterministe

Supposons qu'on a un ensemble de n vecteurs lignes $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. On s'intéresse au problème de savoir quand un vecteur y est combinaison linéaire de cet ensemble. Ce problème est

équivalent à l'égalité suivante :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \text{rang}[X] \quad (\text{III.57})$$

où

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Il est aussi équivalent à la relation

$$y = \phi X \quad (\text{III.58})$$

pour un vecteur ligne ϕ .

Pour un vecteur ligne ϕ quelconque, supposons que

$$\hat{y} = \hat{\phi} X \quad (\text{III.59})$$

est l'estimation de y par ϕ . On définit le résidu de ϕ par :

$$e(\phi) = \| y - \hat{y} \| \quad (\text{III.60})$$

On peut donc voir que y est une combinaison linéaire de $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ si et seulement si $e(\phi) = 0$ pour un certain ϕ . Toutefois ce vecteur n'est pas facile à déterminer. Alternativement, on considère

$$\phi^0 = y X^+ \quad (\text{III.61})$$

où X^+ est le pseudo-inverse de X . D'après (III.59) et (III.60), supposons que

$$\hat{y}^0 = y X^+ X$$

d'où

$$e^0 = e(\phi^0) = y(I - X^+ X)y^T \quad (\text{III.62})$$

Il est possible de montrer que

$$e^0 \leq e(\phi) \quad (\text{III.63})$$

pour tout ϕ . Par conséquent, on a le lemme suivant :

Lemme

Le vecteur y est une combinaison linéaire de $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ si et seulement si $e^0 = 0$.

On peut utiliser les résultats précédents pour déterminer les ordres n_i du paragraphe 3 à partir des données, on utilise k séquences d'entrée/sortie, et on suppose que l'ordre de $i^{\text{ème}}$ système est l_i en utilisant l'équation suivante :

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{n_i} a_{ij}(l) u_j(k-l) - \sum_{l=1}^{n_i} d_i(l) y_i(k-l) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{III.64})$$

on peut obtenir l'expression

$$Y_i(k) = H_i(k, l_i) \phi_i(l_i) \quad (\text{III.65})$$

$H_i(k, l_i)$ est défini par l'équation (III.50)

$$Y_i(k) = [y_i(1) \ y_i(2) \ \dots \ y_i(k)]^T$$

$$\phi_i(l_i) = [a_{i1}(1) \ a_{i1}(2) \ \dots \ a_{i1}(l_i) \ a_{i2}(1) \ \dots \ a_{i2}(l_i) \ d_i(1) \ \dots \ d_i(l_i)]^T$$

$a_{ij} \ j = 1, \dots, p$ les coefficients de chaque numérateur dans la matrice de transfert.

$d_i \ i = 1, \dots, q$ les coefficients du dénominateur commun de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de transfert.

A partir des équations (III.63) et (III.65) on obtient :

$$e_i^0(l_i) = Y_i^T(k) [I - H_i(k, l_i) H_i^+(k, l_i)] Y_i(k) = \Delta_i(l_i)$$

d'après le lemme ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} e_i^0(l_i) &= 0 && \text{si } l_i \geq n_i \\ &= \Delta_i(l_i) > 0 && \text{si } l_i < n_i \end{aligned}$$

Le vecteur $Y_i(k)$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $H_i(k, l_i)$ si $l_i \geq n_i$.

Pour le $i^{\text{ème}}$ sous-système, on trace le résidu $e_i^0(l_i)$ en fonction de l_i ; l'ordre n_i est le plus petit entier l_i pour le quel $e_i^0(l_i) = 0$.

3-5.2) Cas bruité

Supposons que le vecteur y soit perturbé par un bruit de moyenne nulle v :

$$y^* = y + v \quad (\text{III.66})$$

On peut utiliser les résultats précédents pour déterminer les ordres n_i à partir des données bruitées, on utilise k séquences d'entrée/sortie, et on suppose que l'ordre de $i^{\text{ème}}$ système est l_i . En utilisant l'équation suivante :

$$y_i^*(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{n_i} a_{ij}(l) u_j(k-l) - \sum_{l=1}^{n_i} d_i(l) y_i^*(k-l) + \sum_{l=1}^{n_i} d_i(l) v_i(k-l) + v_i(k)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

(III.67)

On peut obtenir l'expression :

$$Y_i^*(k) = H_i^*(k, l_i) \phi_i(l_i) + W_i(k)$$
(III.68)

où

$$W_i(k) = [w_i(1) \ w_i(2) \ \dots \ w_i(k)]^T$$

$$w_i(k) = \sum_{l=1}^{l_i} d_i(l) v_i(k-l) + v_i(k)$$

et $H_i^*(k, l_i)$ est défini par l'équation (III.50) mais n_i et $y_i(k)$ sont remplacés par l_i et $y_i^*(k)$

$$Y_i^*(k) = [y_i^*(1) \ y_i^*(2) \ \dots \ y_i^*(k)]^T$$

$$\phi_i(l_i) = [a_{i1}(1) \ a_{i1}(2) \ \dots \ a_{i1}(l_i) \ a_{i2}(1) \ \dots \ a_{ip}(l_i) \ d_i(1) \ \dots \ d_i(l_i)]^T$$

a_{ij} $j = 1, \dots, p$ les coefficients de i, j numérateur.
 d_i $i = 1, \dots, q$ les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ dénominateur commun.

On définit

$$Z_i(k) = Y_i^*(k) - W_i(k)$$

A partir des équations (III.76), (III.68) et de la définition de $H_i^*(k, l_i)$ on peut remarquer que le vecteur $Z_i(k)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $H_i^*(k, l_i)$ si $l_i \geq n_i$ et non si $l_i < n_i$.

D'après le lemme on peut obtenir les résultats suivants :

$$E\{e_i(l_i) H_i^*(k, l_i)\} = \begin{cases} g_i(l_i) & \text{si } l_i \geq n_i \\ g_i(l_i) + \Delta_i(l_i) & \text{si } l_i < n_i \end{cases}$$
(III.69)

$$(III.70)$$

où

$$e_i(l_i) = Y_i^{*T}(k) [I - H_i^*(k, l_i) H_i^{*+}(k, l_i)] Y_i^*(k)$$
(III.71)

$$g_i(l_i) = E\{W_i^T(k) [I - H_i^*(k, l_i)] W_i(k)\}$$
(III.72)

$$\Delta_i(l_i) = Z_i^T(k)[I - H_i^*(k, l_i)H_i^{*+}(k, l_i)] Z_i(k) \quad (\text{III.73})$$

Supposons que $\hat{e}_i(l_i)$ soit l'estimation de $E\{e_i(l_i) | H_i^*(k, l_i)\}$ où $e_i(l_i)$ est évalué par l'équation (III.71), donc l'équation (III.69) peut être réécrite :

$$\hat{e}_i(l_i) = E\{e_i(l_i) | H_i^*(k, l_i)\} = f_i(l_i) + g_i(l_i) \quad (\text{III.74})$$

où

$$f_i(l_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } l_i \geq n_i \\ \hat{\Delta}_i(l_i) > 0 & \text{si } l_i < n_i \end{cases} \quad (\text{III.75})$$

$$(\text{III.76})$$

A partir de l'équation (III.72) on peut constater que $g_i(l_i)$ est presque constant si k est suffisamment grand ; donc l'ordre n_i peut être estimé de la façon suivante :

Pour la $i^{\text{ème}}$ sortie, l'erreur sur le résidu $\hat{e}_i(l_i)$ est tracée en fonction de l_i . De cette courbe on obtient n_i qui est le plus petit entier l_i pour lequel la partie de courbe est quasiment plate, avec $l_i \geq n_i$.

En pratique, au lieu de tracer l'erreur des résidues $\hat{e}_i(l_i)$, il vaut mieux tracer $\hat{d}_i(l_i)$, la différence de l'erreur des résidues, défini par :

$$\hat{d}_i(l_i) = \hat{e}_i(l_i) - \hat{e}_i(l_i+1)$$

Cette technique peut être utilisée dans le cas où le bruit est coloré . L'inconvénient de cette méthode est d'être non récursive, donc la dimension de H augmente avec l_i , et pose un problème de calcul. On a modifié cette méthode de telle sorte qu'elle ne pose pas de problème de dimension.

4- Conclusion

A travers les algorithmes d'estimation de la réponse impulsionnelle, on a constaté que :

1- Les données doivent être riches de telle sorte qu'en excitant tous les modes du système elles assurent une séquence de réponse impulsionnelle correspondant au système. Ici les méthodes récursives sont recommandées.

2- La technique de Irving impose dans le cas pratique la connaissance précise de l'instant d'application des échelons sinon on perd quelques paramètres de Markov et les résultats de la réalisation ne sont pas corrects.

3- Les méthodes récursives (Approximation stochastique, méthode des moindres carrés) donnent de bons résultats même dans le cas où le taux bruit/signal est grand.

4- La méthode Gaussienne-Markovienne n'est pas récursive donc, dans le cas où on a besoin de beaucoup de données cette méthode pose des problèmes de dimension. Nous avons modifié la procédure de calcul de telle sorte que le problème ne se pose plus.

La deuxième étape consiste à trouver la réalisation approchée du système à partir de la séquence des PM, ici on a vu que les méthodes basées sur la SVD donnent d'abord une estimation de l'ordre puis un moyen direct de trouver la réalisation approchée.

Si les données sont très bruitées, la SVD ne donne pas une bonne estimation de l'ordre. Dans ce cas nous avons besoin d'un algorithme plus fiable que la SVD pour estimer celui-ci avant de chercher la réalisation approchée. Cette recherche de l'ordre a constitué une partie de ce chapitre. On peut souligner que la technique de l'erreur des résidus est la plus efficace dans le cas réel. En effet, elle est utilisable même avec un taux de bruit relativement élevé ou avec un bruit coloré.

5- Bibliographie

- 1- H. El-Sherief and N. K. Sinha, "Stochastic Approximation Algorithm for the Identification of Linear Multivariable Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC- 24, No. 2, pp. 331-333, April 1979.
- 2- H. El-Sherief and N. K. Sinha , "On Line Identification of Linear Discrete-Time Multivariable System", Proc. IEE, Vol. 126, No. 12, pp. 1321-1325, Dec. 1979.
- 3- H. El-Sherief and N. K. Sinha, "Choice of Models for the Identification of Linear Multivariable Discrete-Time Systems", Proc. IEE, Vol. 126, No. 12, pp. 1326-1330, Dec. 1979.
- 4- W. Gerth, "On the Construction of Low Order Linear State-Variable Models from Measured Data", Roc. of th 2; ne. IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Dusseldorf, 1971.
- 5- A. K. Hajdasinski, "The Gauss-Markov Approximation Scheme for Identification of Multivariable Dynamical Systems via the Realization Theory", Technical report, Eindhoven University of Technology, Departement of electrical Engineering, August 1978.
- 6- A. K. Hajdasinski, "A Markov parameter Approach to Identification of Multivariable Dynamical Systems", Technical report, Eindhoven University of Technology, Departement of electrical Engineering, November 1976.
- 7- E. Irving, "Identification des systèmes partie III : Algorithme de B. L. Ho pour les systèmes à temps discret. Transformation des systèmes à temps discret en systèmes à temps continu", Service Informatique et mathématique Appliquées EDF France.
- 8- G. N. Saridis, "Stochastic Approximation Methods for Identification and Control - A Survey", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-19, No. 6, pp. 798-809, Dec. 1974.
- 9- N. K. Sinha, A. K. Mahalanabis and H. El. Sherief, "A non-parametric approach to the Identification of Linear Multivariable Systems", Int. J. Systems SCI, Vol. 9, No. 4, pp. 425-430, 1978.
- 10- N. K. Sinha and B. Kuszta, "Modeling and identification of dynamic system", Chapter 13, pp. 260-261, Van Nostrand Reinhold Company, 1983.
- 11- N. K. Sinha and W. Pille, "On-line parameter estimation using the matrix pseudo-inverse", Proc. IEE. ,Vol. 118, pp. 1041-1046, 1971.
- 12- P. E. Wellstead, "Model identification using an auxiliary system", Proc. IEE, Vol. 123, pp. 1373-1379, 1976.
- 13- P. E. Wellstead, "An instrumental product moment test for model order estimation", Automatica, Vol. 14, pp. 71-89, 1978.
- 14- C. M. Woodside, "Estimation of the order of linear systems", Automatica, Vol. 7, pp. 727-733, 1971.
- 15- L. LJUNG, "System Identification Toolbox", for use with MATLAB User's Guide, April 6, 1988.

Chapitre IV
APPLICATION

Le but de ce chapitre est d'appliquer les résultats précédents à l'identification d'un processus thermique pilote.

Les mesures obtenues étant bruitées, nous nous sommes placés dans le cas d'une réalisation approchée. Nous proposons d'appliquer la méthode de Zeiger ou Kung basée sur la technique SVD, la méthode des moindres carrés pour estimer les paramètres de Markov et la technique de l'erreur des résidus pour estimer l'ordre. Nous comparons les résultats obtenus avec les deux méthodes classiques suivantes :

- moindres carrés simples,
- moindres carrés adaptatifs.

1- Présentation de l'installation pilote

Le système pilote est un processus thermique intégrant un système de régulation numérique (fig. IV.1). La configuration de ce procédé est gérée par un automate programmable qui pilote des électrovannes. L'ensemble des mesures issues des capteurs est stocké dans un micro-ordinateur.

Le processus thermique, (fig. IV.2) se compose :

- d'un générateur thermique : une chaudière à gaz à circulation d'eau chaude.
- d'un récepteur thermique constitué de deux échangeurs de chaleur à faisceaux tubulaires rectilignes.
- d'un by-pass constitué d'une vanne trois voies, qui permet de recycler directement une partie du débit d'eau disponible à la sortie de la chaudière
- de capteurs (débit et températures).
- de vannes de régulation pneumatiques.
- de deux indicateurs locaux de débit à lecture directe.
- d'électrovannes à fermeture hors tension

2- Description technique du processus

2-1) Générateur thermique

Le générateur thermique est une chaudière de type domestique dont les caractéristiques principales sont données dans le tableau (IV.1).

L'énergie utilisée est du gaz de Groningue de pouvoir calorifique égal à 8400 Kcal/m^3 .

La chaudière est équipée de trois sécurités qui coupent l'alimentation de gaz en cas :

- d'élévation anormale de la température de l'eau.
- de baisse de la pression du gaz.
- d'absence de flamme.

Le fluide caloporteur est de l'eau utilisée en circuit fermé à débit forcé par un accélérateur.

2-2) Récepteur thermique

Le récepteur thermique est constitué de deux échangeurs à faisceaux tubulaires de type liquide-liquide fonctionnant à contre-courant.

Les caractéristiques principales sont données dans le tableau (IV.1).

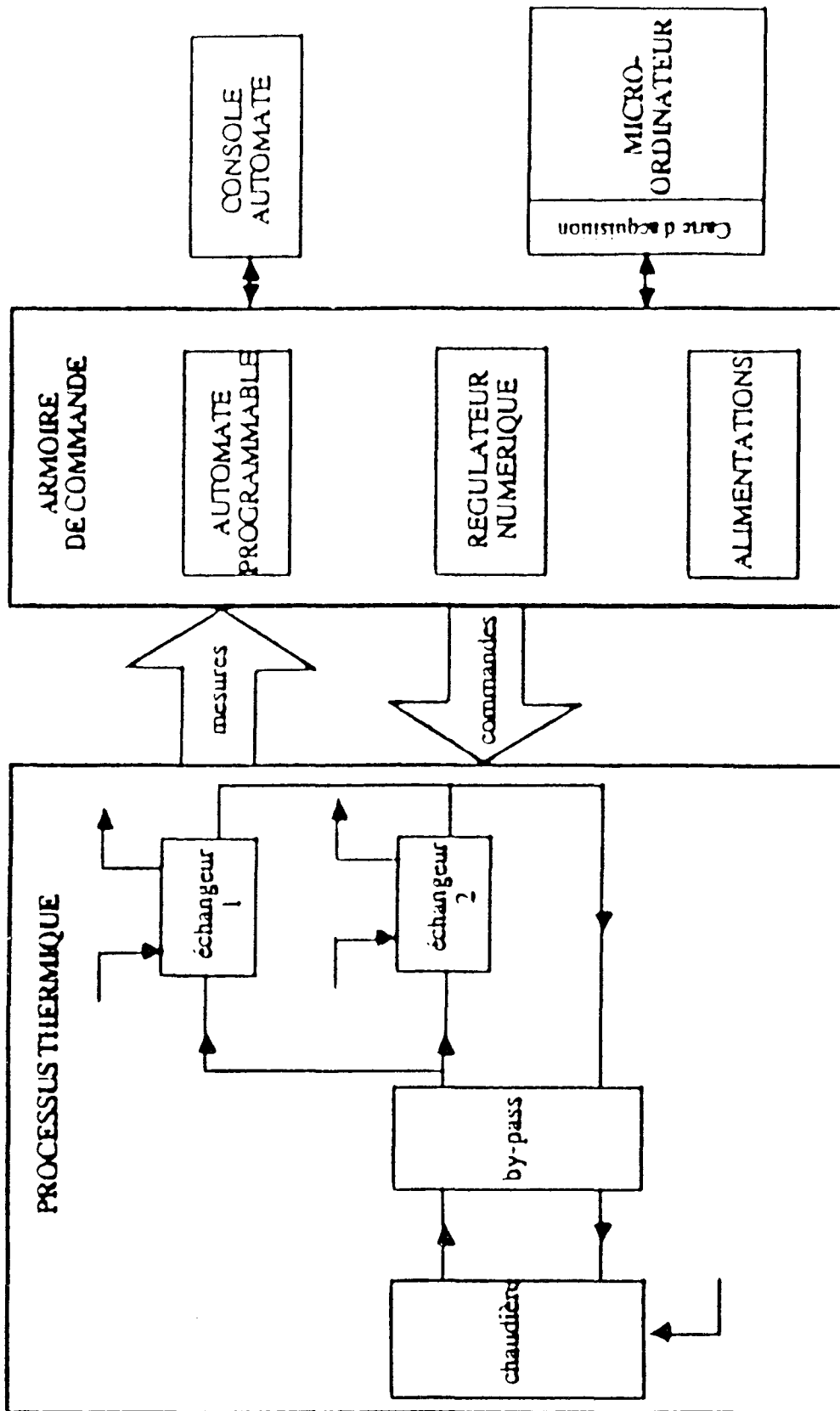


Figure IV.1 : Installation pilote

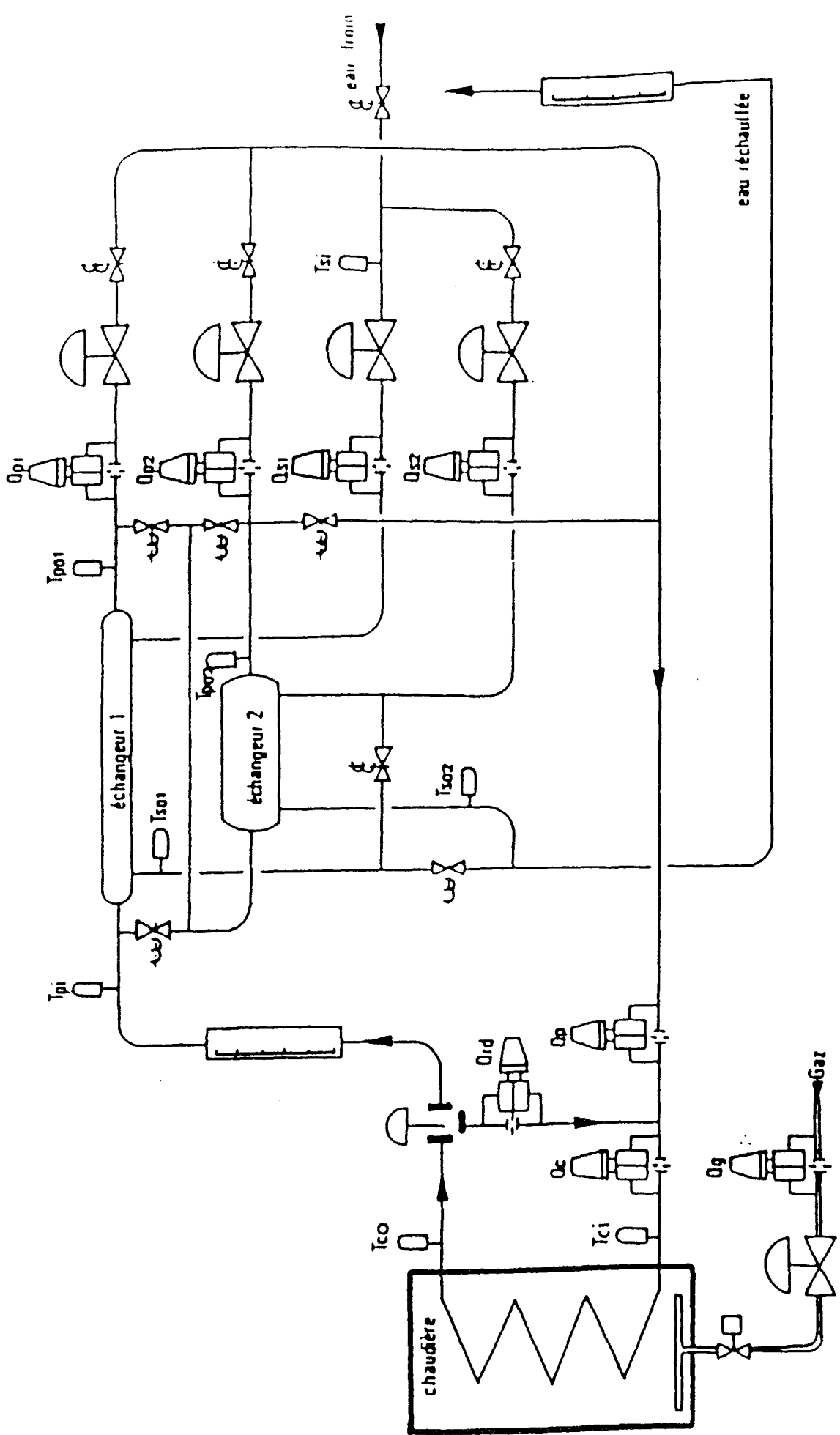


Figure IV.2 : Processus thermique

Chaudière	Puissance calorifique Débit de gaz maximum Débit d'eau nominal	13 200 kcal / h 2,2 m ³ / h 500 l / h
Echangeur 1	Puissance calorifique Débit d'eau primaire nominal Débit d'eau secondaire nominal	12 000 l / h 300 l / h 480 l / h
Echangeur 2	Puissance calorifique Débit d'eau primaire nominal Débit d'eau secondaire nominal	13 200 kcal / h 400 l / h 6 620 l / h

Tableau IV.1 : Caractéristiques du processus thermique.

Le système a été conçu de manière à s'adapter rapidement à des configurations d'échanges différentes.

Il est ainsi possible d'étudier les cas suivants :

- Les deux circuits primaires en série ou en parallèle.
- Les deux circuits secondaires en série ou parallèle.
- Chaque échangeur individuellement.

On remarquera que dans le cas des deux circuits secondaires en série, le circuit secondaire de l'échangeur 2 n'est plus à contre-courant, le passage d'une configuration à une autre se fait à l'aide des électrovannes.

Dans le cadre de notre application nous nous sommes limités à une configuration avec un seul échangeur en service, en l'occurrence l'échangeur 1.

Les mesures de températures et de débits sont converties en un signal électrique de 4-20 mA par un transmetteur, (R/I (température), $\Delta P/I$ (débit)).

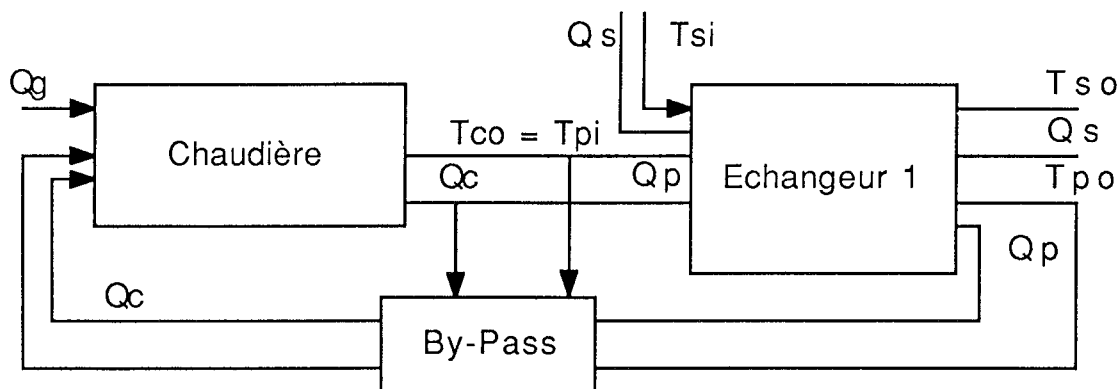
Les organes de réglage des débits équipant le processus sont tous des vannes de régulation pneumatique. Le signal électrique 4-20 mA issu des régulateurs est converti en une pression d'air de 0,2 à 1 bar par un convertisseur électropneumatique permettant la commande de la vanne.

Un système de régulation numérique 8 boucles " MICON P200 " disposant de 15 entrées et 8 sorties analogiques est utilisé pour la commande du processus. Cet appareil peut assurer d'autres services: opérations mathématiques, fonctions spéciales pour le cas de systèmes complexes, surveillance des mesures, déclenchement d'alarme en cas d'anomalies etc...

La régulation du processus thermique (Fig. IV.3) consiste à maintenir constante la température de l'eau à la sortie du secondaire (T_{SO1}), malgré la présence de perturbations, dont la principale est le débit d'eau froide à l'entrée du circuit secondaire (Q_{S1}) ; ce débit dépend en effet de la consommation d'eau chaude de l'utilisateur.

D'une façon générale, cette température peut être réglée par :

- Le débit de gaz (Q_g) de la chaudière (régulation globale),
- Le débit d'eau du circuit primaire de l'échangeur (Q_{p1}) (régulation séparée de la chaudière et de l'échangeur).



$$T_{ci} = f(T_{co}, Q_c, Q_p, T_{po})$$

Figure IV.3 : Schéma bloc du processus thermique étudié.

La réalisation des régulations séparées de la chaudière et de l'échangeur 1 a nécessité la mise en place de 5 régulateurs (Fig. IV. 4) :

- Un régulateur de débit de gaz (Q_g),
- Un régulateur de température de l'eau à la sortie chaudière (T_{co})
- Un régulateur de débit d'eau dans le circuit primaire de l'échangeur 1 (Q_{p1})
- Un régulateur de température de l'eau à la sortie du circuit secondaire de l'échangeur (T_{so1})
- Un régulateur de débit d'eau dans le circuit secondaire (Q_{s1}).

L'environnement informatique d'un micro-ordinateur IBM-PC, permettant d'exploiter, est composé d'une carte d'acquisition de mesure DATA Translation (DT-2801) et un logiciel ASYST spécialisé dans l'acquisition des données.

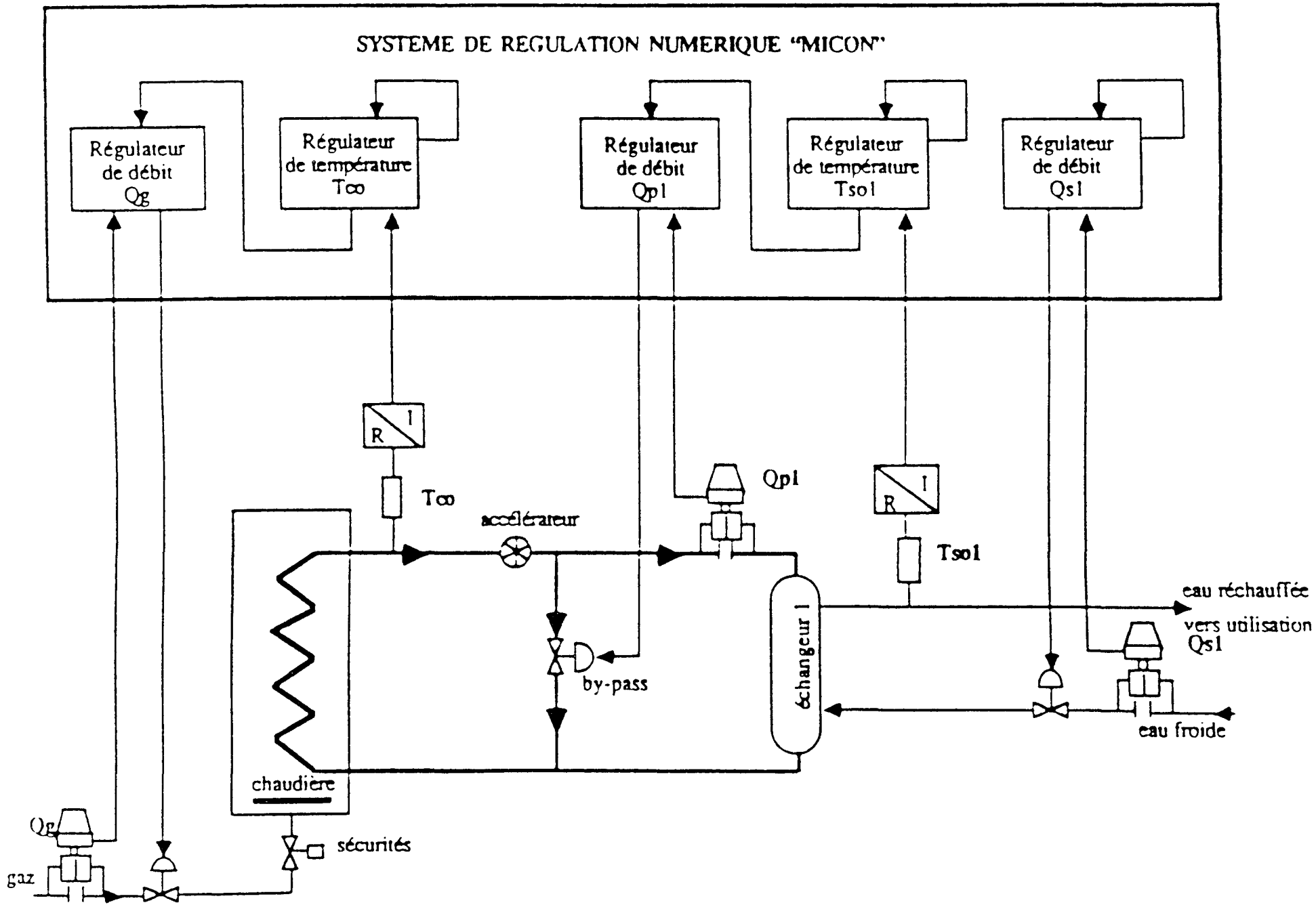


Figure IV.4 : Schéma de principe des boucles de régulation

3- Modélisation du processus thermique

3-1) Modélisation physique

De nombreuses études ayant traité de la modélisation d'un échangeur à tube concentrique et également de la modélisation d'une chaudière (Krzakala [1981], Peinier [1981], Lang [1981], Charrois [1983]), nous nous limiterons ici rappeler les équations principales de fonctionnement de ce procédé.

a) Chaudière :

- pour une chaudière alimentée par un débit de gaz Q_g , l'eau sous un débit Q_c , passe d'une température d'entrée T_{ci} à une température de sortie T_{co} telle que :

$$\frac{dT_{co}}{dt} = -a_c Q_c (T_{co} - T_{ci}) + b_c Q_g \quad (IV.1)$$

b) échangeur :

- pour un échangeur dont le primaire est alimenté par un débit d'eau Q_p aux températures d'entrée T_{pi} et de sortie T_{po} et le secondaire par un débit d'eau Q_s aux températures d'entrée T_{si} et de sortie T_{so} on a :

$$\frac{dT_{po}}{dt} = -T_{po} (a_p + b_p Q_p) + b_p Q_p T_{pi} + a_p T_{si} \quad (IV.2)$$

$$\frac{dT_{so}}{dt} = -T_{so} (a_s + b_s Q_s) + b_s Q_s T_{si} + a_s T_{pi} \quad (IV.3)$$

Les coefficients a_j et b_j sont fonctions de la géométrie de l'échangeur et de la chaudière ainsi que du fluide considéré.

En appliquant les équations différentielles (IV.1, IV.2, IV.3) au système pilote avec seul l'échangeur 1 en service, nous obtenons un ensemble de trois équations (une pour la chaudière et deux pour l'échangeur 1), qui représentent complètement le processus.

a) Chaudière :

$$\frac{dT_{co}}{dt} = -a_c Q_c T_{co} + b_c Q_g + a_c Q_c T_{ci} \quad (IV.4)$$

b) Echangeur 1 :

$$\frac{dT_{po1}}{dt} = -a_{p1} T_{po1} + b_{p1} Q_{p1} (T_{pi} - T_{po1}) + a_{p1} T_{si}$$

$$\frac{dT_{so1}}{dt} = -a_{s1} T_{so1} - b_{s1} Q_{s1} (T_{so1} - T_{si}) + a_{s1} T_{pi} \quad (IV.5)$$

A ce système d'équations nous devons ajouter une équation algébrique qui rend compte du couplage existant entre la chaudière et l'échangeur :

$$T_{ci} = \frac{1}{Q_c} [Q_{p1} T_{po1} + (Q_c - Q_{p1}) T_{co}] \quad (IV.6)$$

Le modèle n'est pas linéaire puisqu'il présente des produits de températures par des débits. Deux techniques permettent de linéariser ce modèle :

- introduction des variables débits calorifiques permettant d'éliminer les produits $Q \times T$ (agrégation),

- on suppose que le processus n'est soumis qu'à de faibles variations autour d'un point de fonctionnement, le modèle est alors linéarisé autour de ce point.

3.2) Modèle en débits calorifiques

En introduisant les variables débits calorifiques :

$D_c = Q_c (T_{co} - T_{ci})$: débit calorifique disponible en sortie chaudière,

$D_g = K_g Q_g$: débit calorifique du gaz,

$D_{p1} = Q_{p1} (T_{pi} - T_{po1})$: débit calorifique propre à l'échangeur 1,

$D_{s1} = Q_{s1} (T_{so1} - T_{si})$: débit calorifique disponible au secondaire de l'échangeur 1,

K_g : étant le pouvoir calorifique du gaz.

les équations (IV.4 et IV.5) se réécrivent :

$$\frac{dD_c}{dt} = a_1 D_c + b_1 D_g \quad (IV.7)$$

$$\frac{dD_{s1}}{dt} = a_2 D_{s1} + b_2 D_{p1} \quad (IV.8)$$

3.3) Modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement (Charrois [1983])

Soit A un point de fonctionnement nominal du procédé caractérisé par les variables ($Q_g, Q_c, Q_{p1}, Q_{s1}, T_{ci}, T_{co}, T_{pi}, T_{po1}, T_{si}, T_{so1}$), pour de petites variations autour de ce point on peut écrire :

$$(\Delta T_{coA})' = -a_c Q_{cA} \Delta T_{coA} + b_c \Delta Q_{gA} + a_c Q_{cA} \Delta T_{ciA} + a_c (T_{ciA} - T_{coA}) \Delta Q_{cA} \quad (IV.9)$$

$$(\Delta T_{po1A})' = (-a_{p1} - b_{p1} Q_{p1A}) \Delta T_{po1A} + b_{p1} (T_{piA} - T_{po1}) + b_{p1} Q_{p1A} \Delta T_{piA} + a_{p1} \Delta T_{siA} \quad (IV.10)$$

$$(\Delta T_{so1A})' = (-a_{s1} - b_{s1} Q_{s1A}) \Delta T_{so1A} - b_{s1} (T_{so1A} - T_{siA}) \Delta Q_{s1A} + a_{s1} \Delta T_{piA} + b_{s1} Q_{s1A} \Delta T_{siA} \quad (IV.11)$$

où ()' désigne la dérivée.

3.4) Simplification du modèle (Evrard [1989])

Pour plus de clarté, dans ce qui suit nous ne ferons plus apparaître l'indice "1" correspondant à l'échangeur 1, ainsi que l'indice A caractérisant le point de fonctionnement. Aux équations (IV.9,

IV.10 et IV.11) il faut ajouter l'équation de couplage (IV.6), qui s'écrit autour du point de fonctionnement :

$$(T_{ci} + \Delta T_{ci}) (Q_c + \Delta Q_c) = (Q_p + \Delta Q_p) (T_{po} + \Delta T_{po}) + (Q_{rd} + \Delta Q_{rd}) (T_{co} + \Delta T_{co}) \quad (IV.12)$$

avec :

$$Q_{rd} = Q_c - Q_{pc}$$

En développant et en négligeant les termes d'ordre 2 on obtient :

$$Q_c \Delta T_{ci} = - T_{ci} \Delta Q_c + Q_p \Delta T_{po} + T_{po} \Delta Q_p + Q_{rd} \Delta T_{co} + T_{co} \Delta Q_{rd} \quad (IV.13)$$

Dans le principe de fonctionnement du processus, le débit (Q_c) est maintenu constant (débit pulsé par un accélérateur à plaques dont la vitesse est constante), ce qui implique :

$$\Delta q_c = 0$$

de plus $\Delta q_{rd} = \Delta q_c - \Delta Q_p = -\Delta Q_p$

L'équation de couplage (IV.13) s'écrit finalement :

$$Q_c \Delta T_{ci} = Q_p \Delta T_{co} + (T_{po} + T_{co}) \Delta Q_p - Q_p \Delta T_{co} + Q_c \Delta T_{co} \quad (IV.14)$$

En remplaçant $Q_c \Delta T_{ci}$ par son expression (IV.14), dans l'équation (IV.9) et en tenant compte de $\Delta Q_c = 0$, on obtient l'équation finale pour la chaudière :

$$(\Delta T_{co})' = - a_c Q_p \Delta T_{co} + a_c Q_p \Delta T_{po} + b_c \Delta Q_g + a_c (T_{po} - T_{co}) \Delta Q_p \quad (IV.15)$$

Si l'on considère d'une part, que les pertes calorifiques le long de la conduite entre la sortie de la chaudière et l'entrée du circuit primaire sont négligeables, et d'autre part que la température à l'entrée du secondaire (eau du réseau) ne subit pas de variations sensibles (hypothèses vérifiées lors de campagnes de mesures), on a :

$$\Delta T_{pi} = \Delta T_{co} \quad \text{et} \quad \Delta T_{si} = 0$$

Avec les hypothèses précédentes, les équations (IV.10 et IV.11) deviennent respectivement:

a) pour le circuit primaire de l'échangeur :

$$(\Delta T_{po})' = b_p Q_p \Delta T_{co} - (a_p + b_p Q_p) \Delta T_{po} + b_p (T_{co} - T_{po}) \Delta Q_p \quad (IV.16)$$

b) pour le circuit secondaire de l'échangeur :

$$(\Delta T_{so})' = a_s \Delta T_{co} - (a_s + b_s Q_s) \Delta T_{so} - b_s (T_{so} - T_{si}) \Delta Q_s \quad (IV.17)$$

Le modèle simplifié formé des trois équations différentielles (IV.15, IV.16 et IV.17) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx$$

avec

$$x = y = \begin{bmatrix} T_{co} \\ T_{po} \\ T_{so} \end{bmatrix} : \text{vecteur d'état} = \text{vecteur des sorties}$$

$$u = \begin{bmatrix} Q_g \\ Q_p \\ Q_s \end{bmatrix} : \text{vecteur des entrées}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ F_{31} & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où la température T et le débit Q représentent, effectivement, les variations ΔT et ΔQ .

La version discrète de ce modèle est obtenue par :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta} = A x_k + B u_k \quad \text{où } \Delta \text{ est la période d'échantillonnage}$$

Soit

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k$$

$$y_k = C x_k \quad \text{avec} \quad A = I + \Delta F, \quad B = \Delta G \quad \text{et} \quad C = H$$

Les paramètres de ce modèle dépendent du point de fonctionnement puisqu'ils varient avec les températures et les débits des fluides, mais les résultats obtenus montrent que leur variation est relativement faible et que ce modèle peut être considéré comme stationnaire par rapport au modèle linéarisé autour du point de fonctionnement. En plus les coefficients B_{23} et B_{32} ne sont pas réellement nulles.

Les expressions des trois sorties sont :

$$T_{co}(k+1) = F_{11} T_{co}(k) + F_{12} T_{po}(k) + G_{11} Q_g(k) + G_{12} Q_p(k) \quad (\text{IV.18})$$

$$T_{po}(k+1) = F_{21} T_{co}(k) + F_{22} T_{po}(k) + G_{22} Q_p(k) + G_{23} Q_s(k) \quad (\text{IV.19})$$

$$T_{so}(k+1) = F_{31} T_{co}(k) + F_{33} T_{so}(k) + G_{23} Q_p(k) + G_{33} Q_s(k) \quad (\text{IV.20})$$

Pour identifier les paramètres de ce modèle, il convient d'éliminer des entrées / sorties, les composantes continues. D'un point de vue pratique nous avons opéré de la manière suivantes : l'excitation du processus n'a été réalisée qu'après avoir amené celui-ci à un point de repos qui représente le point de fonctionnement nominal autour duquel on a étudié les variations.

4- Campagnes de mesures

4-1) Choix d'un point de fonctionnement

Dans ce paragraphe nous nous proposons de déterminer les limites de fonctionnement du processus.

Pour un débit Q_p maximum disponible à l'entrée du circuit primaire de l'échangeur, nous avons construit (Fig. IV.5) les abaques de variations de la température de l'eau à la sortie du secondaire T_{SO} en fonction de la température de l'eau à la sortie de la chaudière T_{CO} pour différents débits d'eau dans le circuit secondaire Q_s .

A partir de ces abaques, il est possible de choisir un point de fonctionnement nominal. Cependant différentes contraintes limitent ce choix :

- Il est préférable de choisir un point de fonctionnement relativement éloigné des conditions extrémales de fonctionnement, afin d'éviter des problèmes de saturation (vanne de régulation de débit complètement fermée ou complètement ouverte),

- Il est également souhaitable que la température en sortie du circuit secondaire T_{SO} puisse varier de façon sensible.

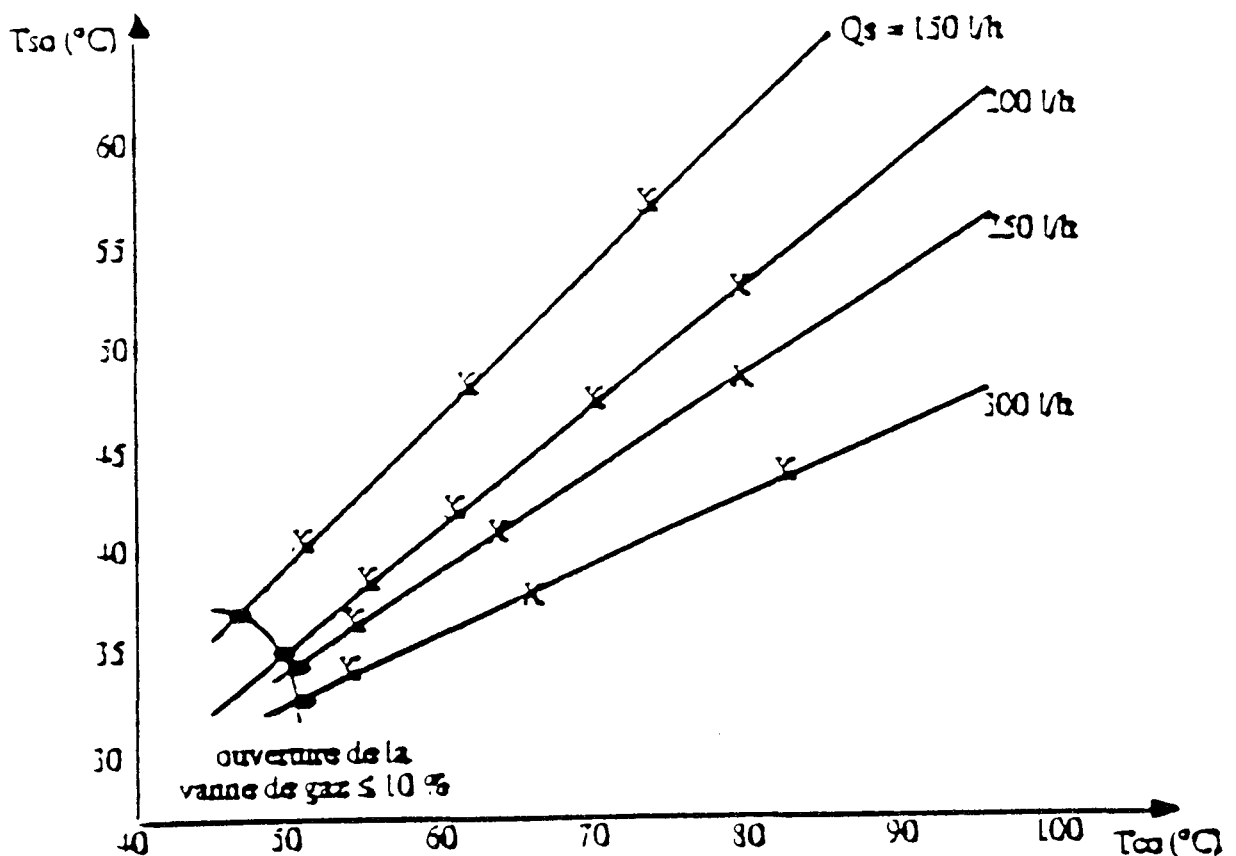


Figure IV.5 : Abaques de fonctionnement

$$T_{SO} = f(T_{CO}, Q_s) \text{ pour } Q_p = 300 \text{ l/h}$$

Pour respecter ces contraintes, nous avons choisi le point de fonctionnement suivant :

- débit circuit primaire : $Q_p = 2001/h$
- débit circuit secondaire : $Q_s = 2001/h$
- température sortie chaudière : $T_{co} = 75^\circ C$

Pour ces valeurs, la température de sortie du circuit secondaire en régime permanent vaut :

$$T_{so} = 49^\circ C.$$

Plusieurs campagnes de mesures en vue de l'identification ont été effectuées autour de ce point de fonctionnement choisi. Les entrées utilisées sont des créneaux ou échelons positifs et négatifs. Il convient de choisir les entrées d'excitation en respectant les contraintes suivantes :

- leur amplitude reste à l'intérieur du domaine de fonctionnement linéaire.
- leur durée doit être compatible avec les différentes constantes de temps du procédé.

4-2) Filtrage et centrage des données

Nous avons effectué un filtrage des données à l'aide d'un filtre passe-bas numérique du premier ordre. Ce dernier a été réalisé à partir du filtre analogique passe-bas du premier ordre :

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{1}{f_c}$$

f_c est la fréquence de coupure désirée

A l'aide de la transformation bilinéaire $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, on obtient le filtre numérique

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

où

$$a_0 = a_1 = \frac{T}{T + 2\tau} \quad b_1 = \frac{T - 2\tau}{T + 2\tau}$$

T étant la période d'échantillonnage

Dans notre cas, $a_0 = 0.1116$ $b_1 = -0.7767$ avec $T = 8 \text{ sec.}$ $f_c = 0.01 \text{ Hz}$

la transformation bilinéaire entre la fréquence analogique et la fréquence numérique est :

$$\omega_d T = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\omega_a T}{2}$$

Le vecteur centré $Y_c(k)$ des observations est alors obtenu par :

$$Y_c(k) = Y_f(k) - m$$

où

$Y_f(k)$ est le vecteur d'observation filtré.

m est la moyenne des n premières observations en régime statique.

5- Identification

Ce processus est identifié par les trois méthodes suivantes :

- 1- Réalisation approchée (SVD)
- 2- Moindres carrés simples (modèle ARX)
- 3- Moindres carrés adaptatifs (méthode d'El-Sherief)

5-1) Moindres carrés simples (Modèle ARX)

La relation entrée/sortie la plus simple est sans aucun doute la description obtenue à partir d'une équation linéaire aux différences :

$$y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \dots + \alpha_n y(t-n) = \beta_1 u(t-1) + \dots + \beta_m u(t-m) + e(t) \quad (\text{IV.21})$$

En posant

$$A(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_n q^{-n}$$

et

$$B(q^{-1}) = \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_m q^{-m}$$

l'expression (IV.21) se réécrit :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t) + e(t) \quad (\text{IV.22})$$

ou encore :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{1}{A(q^{-1})} e(t) \quad (\text{IV.23})$$

Ce modèle est appelé modèle ARX où AR se réfère à la partie auto-régressive et X à l'entrée externe. La structure ARX présente les avantages suivantes :

- elle permet d'opérer dans un contexte déterministe (on ne modélise pas le bruit)
- le prédicteur est linéaire (possibilité d'exploitation temps réel)

L'expression générale d'un modèle de structure ARX multi-entrées/mono-sortie est la suivante :

$$\alpha(q^{-1}) y(k) = \beta_1(q^{-1}) u_1(k-nk_1) + \dots + \beta_{nu}(q^{-1}) u_{nu}(k-nk_{nu}) + e(k) \quad (\text{IV.24})$$

avec

$$\alpha(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{na} q^{-na}$$

$$\beta_i(q^{-1}) = \beta_{i1} + \beta_{i2} q^{-1} + \dots + \beta_{inb} q^{-nb+1} \quad (i = 1, \dots, nu)$$

où na et nb représentent les ordres respectifs des polynômes α et β_i , est nk_i le retard.

Pour identifier les paramètres α_i et β_{ij} , on a utilisé la méthode des moindres carrés simple du logiciel "MATLAB".

Soit un échantillon constitué de N observations, l'équation (IV.24) s'écrit de manière générale sous la forme matricielle :

$$Y(k) = \varphi(k) \theta + E(k) \quad (IV.25)$$

où

$Y(k) = [y(k) \ y(k+1) \ \dots \ y(k+N-1)]^T$ est le vecteur des mesures de la sortie de dimension $[N \times 1]$.

$\theta = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \beta_{11} \ \dots \ \beta_{1m_1} \ \beta_{21} \ \dots \ \beta_{2m_2} \ \dots]$ est le vecteur des paramètres de dimension $[(n + m_1 + m_2 + \dots) \times 1]$.

$E(k) = [e(k) \ \dots \ e(k+N-1)]^T$ est le vecteur d'erreur de prédiction de dimension $[N \times 1]$.

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \dots & -y(k-n) & u_1(k-1) & \dots & u_1(k-m_1) & u_2(k-1) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ -y(k+N-2) & \dots & -y(k-n+N-2) & u_1(k+N-1) & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

est une matrice de mesures d'entrées/sorties de dimension $[N \times (n + m_1 + m_2 + \dots)]$.

La méthode des moindres carrés consiste à estimer le vecteur des paramètres qui minimise le critère quadratique :

$$J(\theta) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j^2(k) = E \cdot E^T \quad (IV.26)$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\hat{\theta} = [\varphi^T \varphi]^{-1} \varphi^T y$$

où $\hat{\theta}$ est le vecteur des paramètres estimés qui minimise le critère (IV.26)

5.2) Moindres carrés adaptatifs (Méthode d'El-Sherief)

Cette méthode a été proposée par El-Sherief (1979) pour identifier un système discret multivariable à partir d'entrées-sorties bruitées ou non sous la forme d'une matrice de transfert.

La matrice de transfert d'un système multivariable discret de q-sorties et p-entrées peut être écrite :

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}(z)}{D_1(z)} & \frac{A_{12}(z)}{D_1(z)} & \dots & \frac{A_{1p}(z)}{D_1(z)} \\ \frac{A_{21}(z)}{D_2(z)} & \frac{A_{22}(z)}{D_2(z)} & \dots & \frac{A_{2p}(z)}{D_2(z)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{q1}(z)}{D_q(z)} & \frac{A_{q2}(z)}{D_q(z)} & \dots & \frac{A_{qp}(z)}{D_q(z)} \end{bmatrix} \quad (IV.27)$$

où $A_{ij}(z)$ et $D_i(z)$, $i = 1, \dots, q$; $j = 1, \dots, p$, sont des polynômes en z et peuvent être exprimés par :

$$A_{ij}(z) = a_{ij}(1) z^{n_i-1} + a_{ij}(2) z^{n_i-2} + \dots + a_{ij}(n_i-1) z + a_{ij}(n_i) \quad (IV.28)$$

$$D_i(z) = z^{n_i} + d_i(1) z^{n_i-1} + \dots + d_i(n_i-1) z + d_i(n_i) \quad (\text{IV.29})$$

où n_i est la dimension de chaque sous-système.

Le problème d'identification exige la détermination de $G(z)$, i. e. de $\{ A_{ij}(z), D_i(z) \}$ à partir d'une séquence d'entrées/sorties $u(k)$ et $y(k)$ ($k = 1, 2, \dots$).

Les relations E/S du système, d'après l'équation (IV.27), sont :

$$D_i(z) y_i(k) = \sum_{j=1}^p A_{ij}(z) u_j(k) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (\text{IV.30})$$

où $y_i(k)$ est la $i^{\text{ème}}$ sortie et $u_j(k)$ est la $j^{\text{ème}}$ entrée de système. D'après les équations (IV.28, IV.29), la sortie peut être réécrite :

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{n_i} a_{ij}(l) u_j(k-l) - \sum_{l=1}^{n_i} d_i(l) y_i(k-l) \quad (\text{IV.31})$$

cas déterministe

L'équation (IV.31) peut être mise sous forme condensée :

$$Y_i(k) = H_i(k) \phi_i$$

où

$$H_i(k) = \begin{pmatrix} u_1(0) & \dots & u_1(1-n_i) & u_2(0) & \dots & u_p(1-n_i) & -y_i(0) & \dots & -y_i(1-n_i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1(k-1) & \dots & u_1(k-n_i) & u_2(k-1) & \dots & u_p(k-n_i) & -y_i(k-1) & \dots & -y_i(k-n_i) \end{pmatrix}$$

$$\phi_i = [a_{i1}(1) \ a_{i1}(2) \ \dots \ a_{i1}(n_i) \ a_{i2}(1) \ \dots \ a_{ip}(n_i) \ d_i(1) \ \dots \ d_i(n_i)]^T$$

$$Y_i(k) = [y_i(1) \ y_i(2) \ \dots \ y_i(k)]^T$$

L'estimation de l'ordre n_i peut s'obtenir de façon exacte par la méthode des moindres carrés simples (chapitre III.3.4).

Pour k assez grand, les paramètres $a_{ij}(l)$ et $d_i(l)$ de chaque sous système peuvent être estimés par l'algorithme des moindres carrés :

$$\hat{\phi}_i(k) = H_i^+(k) Y_i(k) \quad \text{où } ()^+ \text{ est le pseudo-inverse de } ()$$

La version récursive de cet algorithme est :

$$\hat{\phi}_i(k+1) = \hat{\phi}_i(k) + \frac{P_i(k) h_i(k+1) [y_i(k+1) - h_i^T(k+1) \hat{\phi}_i(k)]}{1 + h_i^T(k+1) P_i(k) h_i(k+1)}$$

$$P_i(k+1) = P_i(k) - \frac{P_i(k) h_i(k+1) (P_i(k) h_i^T(k+1))^T}{1 + h_i^T(k+1) P_i(k) h_i(k+1)}$$

$$P_i(0) = \alpha_i I \quad \alpha_i > 1$$

avec

$$h_i(k+1) = [u_1(k) \ u_1(k-1) \ \dots \ u_1(k-n_i+1) \ u_2(k) \ \dots \ u_p(k-n_i+1) \ -y_i(k) \ \dots \ -y_i(k-n_i+1)]^T \quad (IV.32)$$

Cas bruité

Supposons que les sorties bruitées du système multivariable soient contaminées par une séquence de bruit blanc $v(k)$:

$$y_i^*(k) = y_i(k) + v_i(k) \quad (IV.33)$$

$y_i^*(k)$ est la $i^{\text{ème}}$ sortie bruitée et $v_i(k)$ est le bruit de la $i^{\text{ème}}$ sortie.

Les sorties bruitées du système peuvent être représentées par les équations suivantes :

$$y_i^*(k) = \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{n_i} a_{ij}(l) u_j(k-l) - \sum_{l=1}^{n_i} d_i(l) y_i^*(k-l) + \sum_{l=1}^{n_i} d_i(l) v_i(k-l) + v_i(k) \quad (IV.34)$$

$$y_i^*(k) = h_i^{*T}(k) \phi_i^* + v_i(k)$$

où

$$h_i^*(k+1) = [u_1(k) \ u_1(k-1) \ \dots \ u_1(k-n_i) \ \dots \ u_p(k-n_i) \ -y_i^*(k) \ \dots \ -y_i^*(k-n_i) \ v_i(k) \ \dots \ v_i(k-n_i)]^T$$

$$\phi_i^*(k) = [a_{i1}(1) \ a_{i1}(2) \ \dots \ a_{i1}(n_i) \ a_{i2}(1) \ \dots \ a_{ip}(n_i) \ d_i(1) \ \dots \ d_i(n_i) \ \dots \ d_i(n_i)]^T$$

n_i est estimé par la méthode des résidus (chapitre III.5.2). $\phi_i^*(k)$ peut être estimé par l'algorithme des moindres carrés récursifs mais les résidus $v_i(k)$ ne sont pas connus. Une estimation raisonnable de ces résidus peut être obtenue par :

$$\hat{v}_i^*(k) = y_i^*(k) - \hat{h}_i^{*T} \hat{\phi}_i^*(k) \quad (IV.35)$$

où $\hat{\phi}_i^*(k)$ est l'estimation de ϕ_i^* à la $k^{\text{ème}}$ itération obtenue par l'algorithme des moindres carrés récursifs et \hat{h}_i^{*T} est construit à l'aide de l'équation (IV.32), $v_i(k)$ étant remplacé par l'équation (IV.35).

6- Application à la chaudière

6-1) Identification SISO

Le triplet {A, B, C} des équations d'état, les coefficients (α_i et β_i) du modèle ARX et les coefficients de numérateur et du dénominateur de la méthode d'El-Sherief sont déterminés à partir des réponses indicielles (Fig. 1, 2, et 3).

a- Chaudière Fig. (1)

Le point de consigne est caractérisé par :

$$\begin{aligned} Q_{ga} &= 0.8 \text{ m}^3/\text{h} + 10\% \\ Q_{p1} &= 200 \text{ l/h} \\ Q_{s1} &= 200 \text{ l/h} \end{aligned}$$

Entrée = Q_{ga}

Sortie = T_{co}

Période d'échantillonnage = 40 sec. C. T = Constante de Temps.

<u>Réalisation</u> Fig. (1.1)	<u>Modèle ARX</u> Fig. (1.2)	<u>Méthode d'El-Sherief</u> Fig. (1.3)
A = 0.9682 B = 0.4968 C = 0.4 C.T = 20.6 min.	$\alpha = [1 \ -0.9690]$ $\beta = [0 \ 0.1914]$ C. T = 21.17 min.	Den. = [1 - 0.9661] Num. = [0 0.2082] C. T = 19.33 min.

b- Echangeur

b.1- Circuit primaire Fig. (2)

Le point de consigne est caractérisé par :

$$\begin{aligned} Q_{ga} &= 0.8 \text{ m}^3/\text{h} \\ Q_{p1} &= 200 \text{ l/h} + 10 \% \\ Q_{s1} &= 200 \text{ l/h} \end{aligned}$$

Entrée = Q_{p1}

Sortie = T_{po}

Période d'échantillonnage = 8 sec.

<u>Réalisation</u> Fig. (2.1)	<u>Modèle ARX</u> Fig. (2.2)	<u>Méthode d'El-Sherief</u> Fig. (2.3)
A = 0.5759 B = 0.7509 C = 0.0316 C. T = 14.5 sec	$\alpha = [1 \ -0.6276]$ $\beta = [0 \ 0.0092]$ C. T = 17.17 sec	Den. = [1 -0.6483] Num. = [0 0.0082] C. T = 18.4 Sec

b.2- Circuit secondaire Fig. (3)

Le point de consigne est caractérisé par :

$$\begin{aligned} Q_{ga} &= 0.8 \text{ m}^3/\text{h} \\ Q_{p1} &= 200 \text{ l/h} \\ Q_{s1} &= 200 \text{ l/h} + 10\% \end{aligned}$$

Entrée = Q_{s1}

Sortie = T_{so}

Période d'échantillonnage = 8 sec.

<u>Réalisation</u> Fig. (3.1)	<u>Modèle ARX</u> Fig.(3.2)	<u>Méthode d'El-Sherief</u> Fig. (3.3)
A = 0.5921	$\alpha = [1 \ -0.8437]$	Den. = [1 -0.8312]
B = 0.8061	$\beta = [0 \ -0.0045]$	Num. = [0 -0.0038]
C = -0.0393		
C. T = 15 sec	C. T = 47 sec	C. T = 43 sec

6-2) Modèle de connaissance

Cette identification est obtenu en utilisant séparément les trois sorties du modèle de connaissance établis au paragraphe précédent : Fig. (5)

Le point de consigne est caractérisé par :

$$\begin{aligned} Q_{ga} &= 0.8 \text{ m}^3/\text{h} \pm 10\% \\ Q_{p1} &= 200 \text{ l/h} \pm 10\% \\ Q_{s1} &= 200 \text{ l/h} \pm 10\% \end{aligned}$$

a- chaudière : Fig. (5.1, 6.1)

Entrées = [Q_{ga} Q_{p1} T_{po}] Sortie = T_{co}

La période d'échantillonnage = 120 sec.

<u>1 - Réalisation</u>	<u>2 - Modèle ARX</u>	<u>3 - Méthode d'El-Sherief</u>
A = 0.915	$\alpha = [1 \ \ \ \ \ -0.9160]$	Den. = [1 -0.8991]
B = [0.2 -0.013 0.076]	$\beta = [0.19 \ -0.009 \ 0.076]$	Num. = [0.13 -0.013 0.14]
C = 0.96		
C.T = 22.5 min	C.T = 22.7 min	C.T = 18.8 min

b- Echangeur :

Entrées = [T_{co} Q_{p1} Q_{s1}] Sortie = [T_{po} T_{so}]

Période d'échantillonnage = 8 Sec.

Réalisation

$$A = \begin{bmatrix} 0.1697 & 0.0203 \\ 0.6572 & 0.7427 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.9592 & 0.0912 & -0.1343 \\ -0.1169 & 0.1374 & 0.0689 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0958 & 0.1376 \\ 0.4543 & -0.0130 \end{bmatrix}$$

b.1- Circuit primaire : Fig.(5.2, 6.2)

Entrées = [Tco Qp1 Qs1] Sortie = [Tpo]

La période d'échantillonnage = 8 sec.

1 - Réalisation	2 - Modèle ARX	3 - Méthode d'El-Sherief
A = 0.6125 B = [0.6592 0.1794 - 0.0440] C = 0.221 C.T = 16.3 sec	$\alpha = [1 \quad -0.6354]$ $\beta = [0.0846 \quad 0.0119 \quad -0.0037]$ C.T = 17.6 sec	Den. = [1 - 0.6433] Num. = [0.0857 0.0121 - 0.0037] C.T = 18.1sec

b.2- Circuit secondaire Fig. (5.3, 6.3)

Entrées = [Tco Qp1 Qs1] Sortie = [Tso]

La période d'échantillonnage = 8 sec.

1 - Réalisation	2 - Modèle ARX	3 - Méthode d'El-Sherief
A = 0.7082 B = [0.5905 0.0187 - 0.0837] C = 0.3191 C. T = 23 sec.	$\alpha = [1 \quad -0.6052]$ $\beta = [0.0567 \quad 0.0041 \quad -0.0087]$ C.T = 15.9 sec	Den. = [1 - 0.6040] Num = [0.0573 0.0041 - 0.0089] C.T = 15.8sec

6-3) Modèle de boîte noire

Le point de consigne est caractérisé par

$$Q_{ga} = 0.8 \text{ m}^3/\text{h} \pm 10\%$$

$$Q_{p1} = 200 \text{ l/h} \pm 10\%$$

$$Q_{s1} = 200 \text{ l/h} \pm 10\%$$

a- Chaudière Fig. (7.1)

Entrées = [Qga Qp1 Qs1] Sortie = Tco

Période d'échantillonnage = 120 sec.

1- Réalisation

$$A = \begin{bmatrix} 0.8802 & -0.0746 & -0.0344 \\ 0.2544 & -0.7520 & 0.3174 \\ -0.2471 & -0.6195 & -0.5890 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5746 & -0.0038 & -0.0113 \\ -0.5138 & 0.0093 & -0.0029 \\ 0.4832 & -0.0158 & -0.0069 \end{bmatrix}$$
$$C = [0.8959 \quad 0.2559 \quad 0.1399]$$

2- Modèle ARX

$$\beta_1 = [0 \quad 0.5920 \quad 0.2234 \quad -0.1748]$$
$$\beta_2 = [0 \quad -0.012 \quad -0.0005 \quad 0.0034]$$
$$\beta_3 = [0 \quad -0.0039 \quad -0.0022 \quad -0.0018]$$
$$\alpha = [1 \quad -0.5172 \quad -0.2416 \quad -0.106]$$

3- Méthode d'El-Sherief

$$\text{Num1.} = [0 \quad 0.3405 \quad 0.2377 \quad 0.0322]$$
$$\text{Num2.} = [0 \quad 0.0081 \quad -0.0126 \quad 0.0100]$$
$$\text{Num3.} = [0 \quad -0.0251 \quad 0.0232 \quad -0.0218]$$
$$\text{Den.} = [1 \quad -0.4986 \quad -0.2222 \quad -0.1242]$$

b- Echangeur

b-1 Circuit primaire Fig. (7.2)

Entrées = [Qga Qp1 Qs1] Sortie = Tpo

Période d'échantillonnage = 8 sec.

1- Réalisation

$$A = \begin{bmatrix} -0.4557 & 0.1981 & 0.1215 \\ -0.4750 & 0.5417 & 0.5931 \\ 0.4187 & 0.9654 & 0.1555 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.8480 & -0.0404 & 0.1330 \\ 0.2651 & 0.0112 & -0.0017 \\ 0.1236 & -0.0042 & -0.0271 \end{bmatrix}$$
$$C = [-1.3480 \quad -0.1955 \quad -0.0607]$$

2- Modèle ARX

$$\beta_1 = [0 \quad 0.0220 \quad -0.0542 \quad 0.0681]$$
$$\beta_2 = [0 \quad 0.0683 \quad -0.0608 \quad -0.0068]$$
$$\beta_3 = [0 \quad -0.0225 \quad 0.0180 \quad 0.0041]$$
$$\alpha = [1 \quad -0.9516 \quad -0.0664 \quad 0.0363]$$

3- Méthode d'El-Sherief

$$\begin{aligned} \text{Num1.} &= [0 \quad 0.0252 \quad -0.0517 \quad 0.0610] \\ \text{Num2.} &= [0 \quad 0.0579 \quad -0.0456 \quad -0.0117] \\ \text{Num3.} &= [0 \quad -0.0206 \quad 0.0146 \quad 0.0056] \\ \text{Den.} &= [1 \quad -0.9684 \quad -0.0689 \quad 0.0557] \end{aligned}$$

b-2 Circuit Secondaire Fig. (7.3)

Entrées = [Qga Qp1 Qs1] Sortie = Tso

Période d'échantillonnage = 8 Sec.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.4929 & 0.1432 & 0.0701 \\ -0.4495 & 0.6859 & 0.1337 \\ -0.1769 & 0.2015 & 0.2790 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0.8461 & -0.0902 & 0.0529 \\ -0.3463 & -0.0303 & 0.0070 \\ -0.2703 & -0.0780 & 0.0269 \end{bmatrix} \\ C &= [-1.1127 \quad -0.1481 \quad -0.0898] \end{aligned}$$

2- Modèle ARX

$$\begin{aligned} \beta_1 &= [0 \quad -0.0995 \quad 0.1287 \quad 0.0144] \\ \beta_2 &= [0 \quad 0.0225 \quad -0.0093 \quad -0.0133] \\ \beta_3 &= [0 \quad -0.0765 \quad 0.0568 \quad 0.0180] \\ \alpha &= [1 \quad -0.8858 \quad -0.0472 \quad -0.0498] \end{aligned}$$

3- Méthode d'El-Sherief

$$\begin{aligned} \text{Num1.} &= [0 \quad -0.0379 \quad 0.0993 \quad -0.0157] \\ \text{Num2.} &= [0 \quad 0.0250 \quad -0.0141 \quad -0.0110] \\ \text{Num3.} &= [0 \quad -0.0698 \quad 0.0446 \quad 0.0232] \\ \text{Den.} &= [1 \quad -0.8940 \quad -0.0502 \quad -0.0378] \end{aligned}$$

7- Validation des modèles

7-1) Critère graphique

La validation a consisté à tracer simultanément les sorties réelles et les sorties prédites par les modèles pour les deux campagnes de mesures (Fig. 5 et Fig. 6). Les figures (5. 1, 6.1), (5.2, 6.2) et (5.3, 6.3) présentent ces différents tracés et confirment la validité des modèles identifiés par toutes les méthodes.

7-2) Tests des fonctions d'auto et d'inter-corrélation

Le test des fonctions d'autocorrélation des résidus et des fonctions d'intercorrélation entre les résidus et les entrées permet de vérifier la qualité des modèles retenus. Les figures ((8.1) à (8.4), (9.1) à (9.4) et (10.1) à (10.4)) présentent les fonctions obtenues pour les modèles identifiés à partir de la première campagne. Sur chaque figure apparaît également l'intervalle de confiance à l'intérieur duquel la valeur de la fonction d'auto ou d'inter-corrélation a une probabilité de 95% d'être nulle.

8- Discussion et conclusion

1- L'utilisation d'un échelon sur chacune des entrées Q_{ga} , Q_{p1} et Q_{s1} , donne un moyen graphique simple pour déterminer les constantes de temps de la chaudière et des circuits primaire et secondaire de l'échangeur. Ces constantes de temps sont :

Chaudière = 20 Min.

Circuit primaire d'échangeur = 15 Sec.

Circuit secondaire de l'échangeur = 20 Sec.

Sur les figures 1, 2 et 3, les modèles obtenus sont satisfaisants, le léger décalage entre la sortie mesurée et celle du modèle est dû au fait que les autres entrées ne sont pas constantes.

2- Les modèles obtenus à partir des modèles de connaissance sont bons d'après la validation. En plus, l'utilisation de ces modèles pour (1) donne de bon résultats.

3- Quand on considère le système comme une boîte noire, avec les débits comme entrées et les températures comme sorties, on peut dire que les résultats de la chaudière sont satisfaisants par rapport aux résultats (1) et (2). Ce n'est pas le cas pour l'échangeur.

Les modèles obtenus par les trois techniques sont presque les mêmes d'après la validation et la constante de temps, l'avantage de la méthode de la réalisation par rapport aux autres est la possibilité de l'utiliser pour le cas multi-entrées, multi-sorties comme on l'a vu pour l'échangeur et également et surtout pour estimer l'ordre du système.

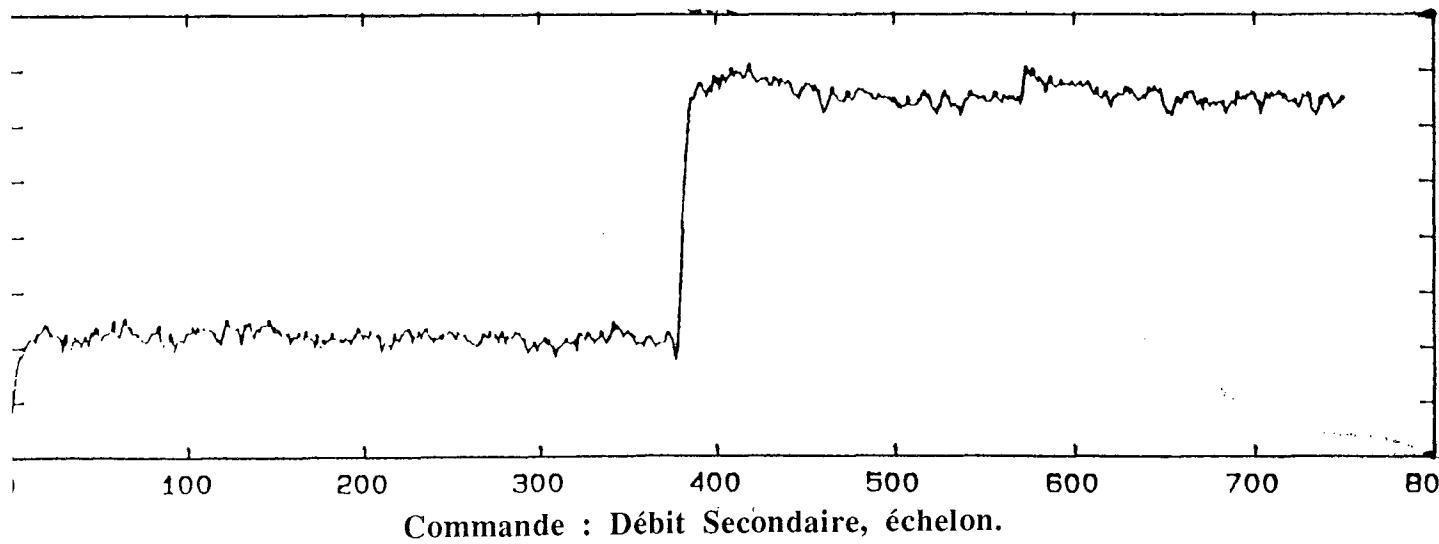
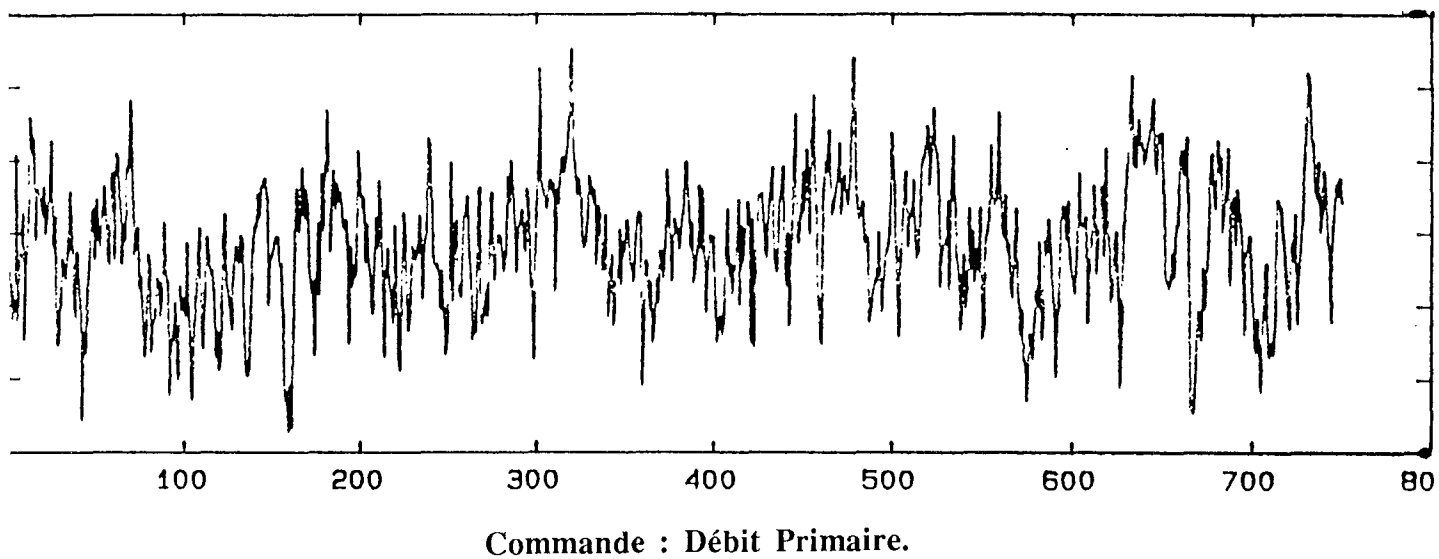
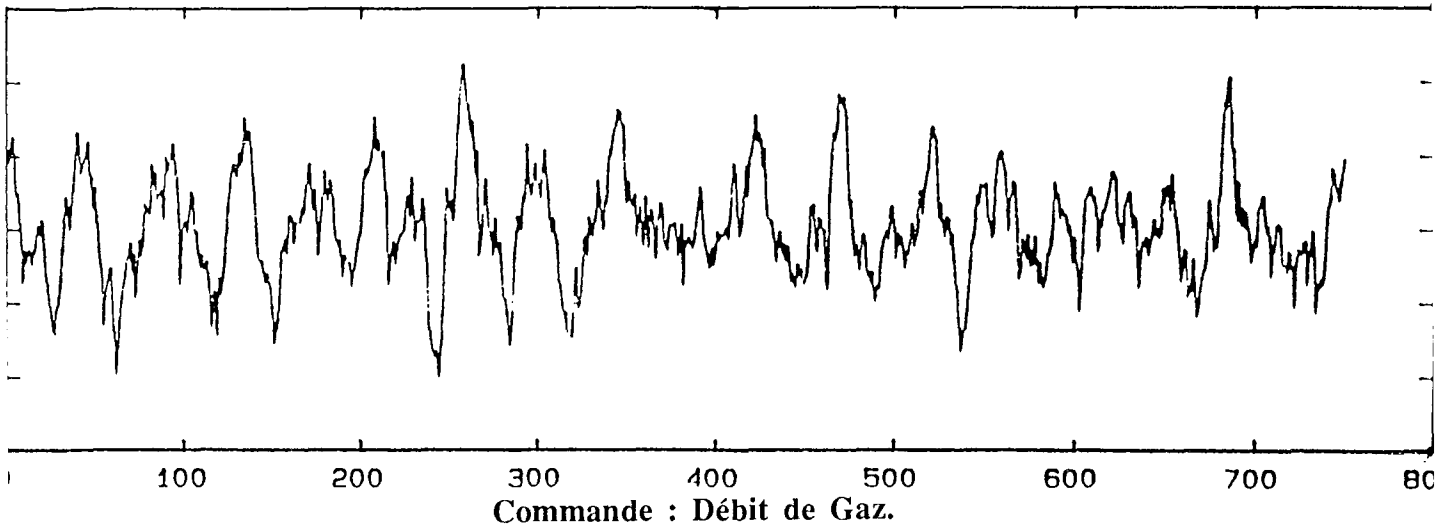


Fig. 3

TEMPERATURE SORTIE SECONDAIRE

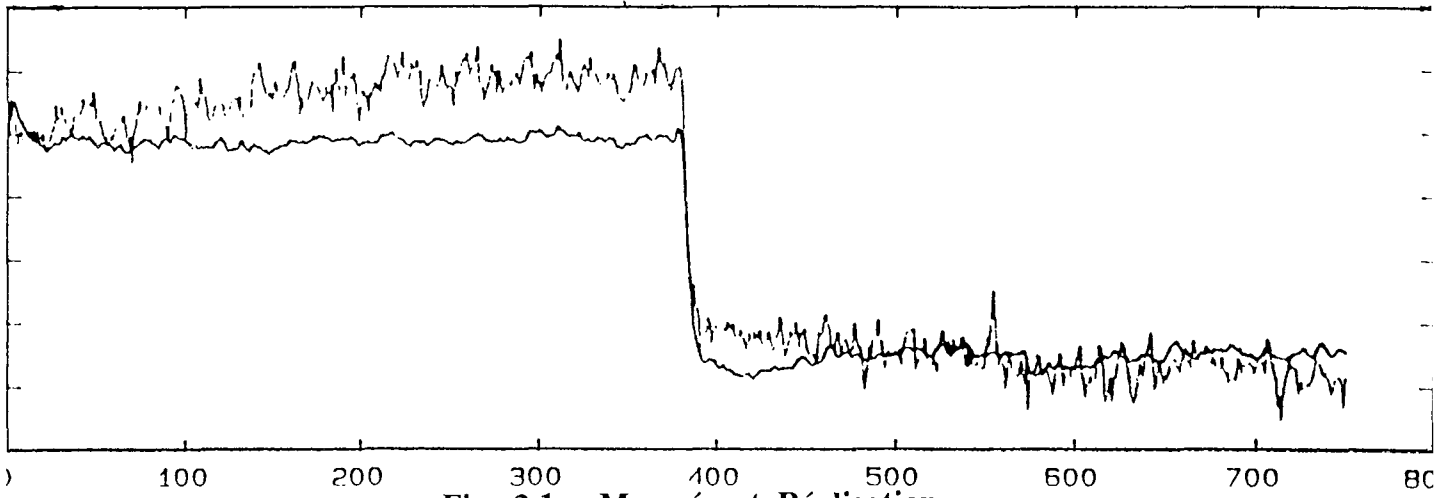


Fig. 3.1 : Mesurée et Réalisation

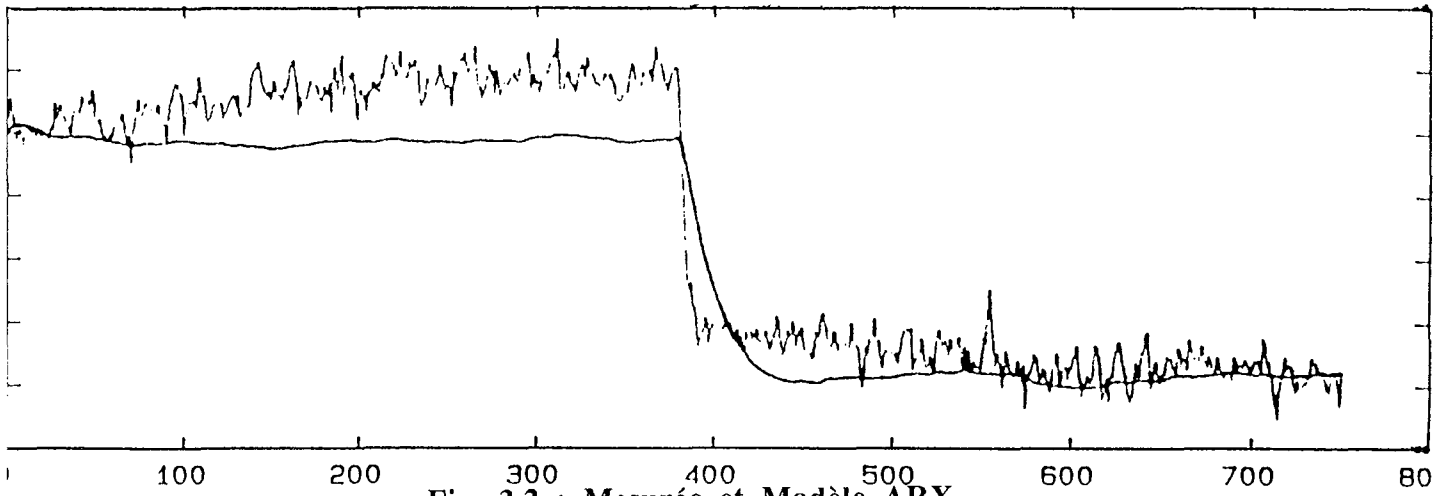


Fig. 3.2 : Mesurée et Modèle ARX.

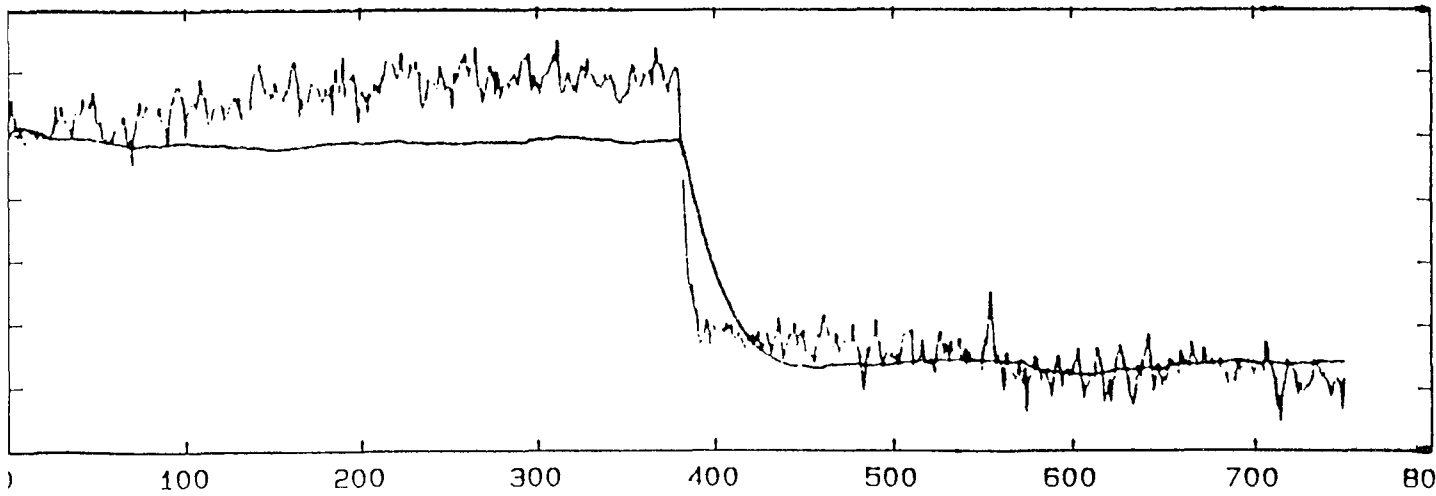


Fig. 3.3 : Mesurée et Moindres Carrés Adaptatifs.

Première Campagne de Mesure " Température Sortie Primaire " [Tpo]

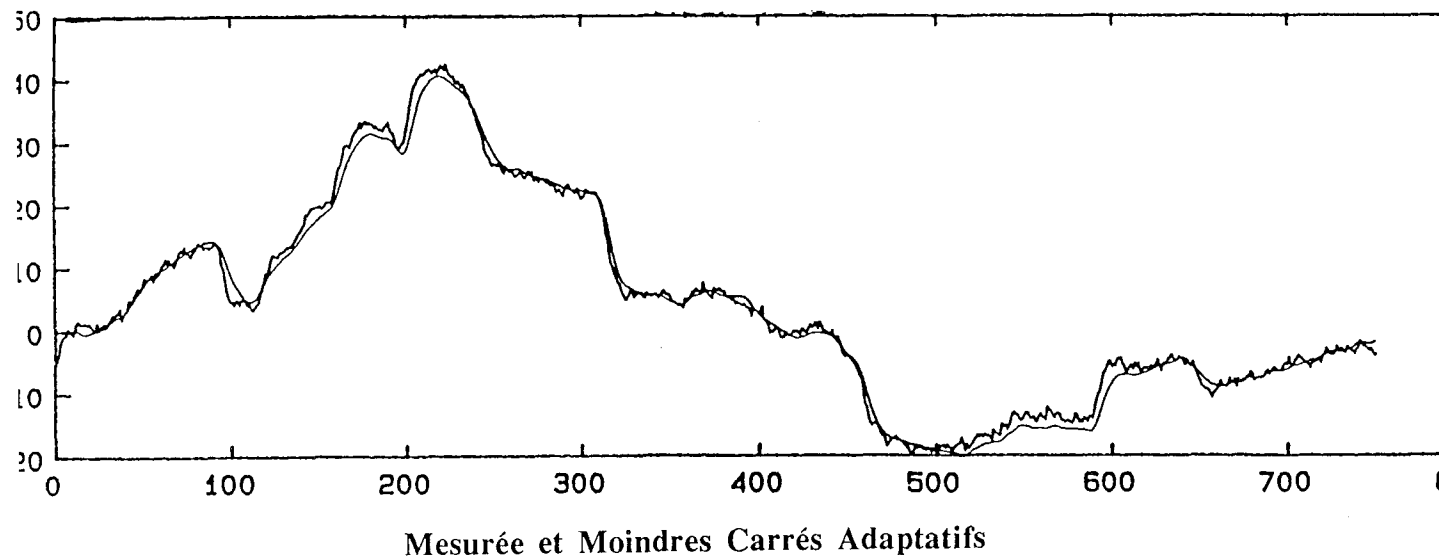
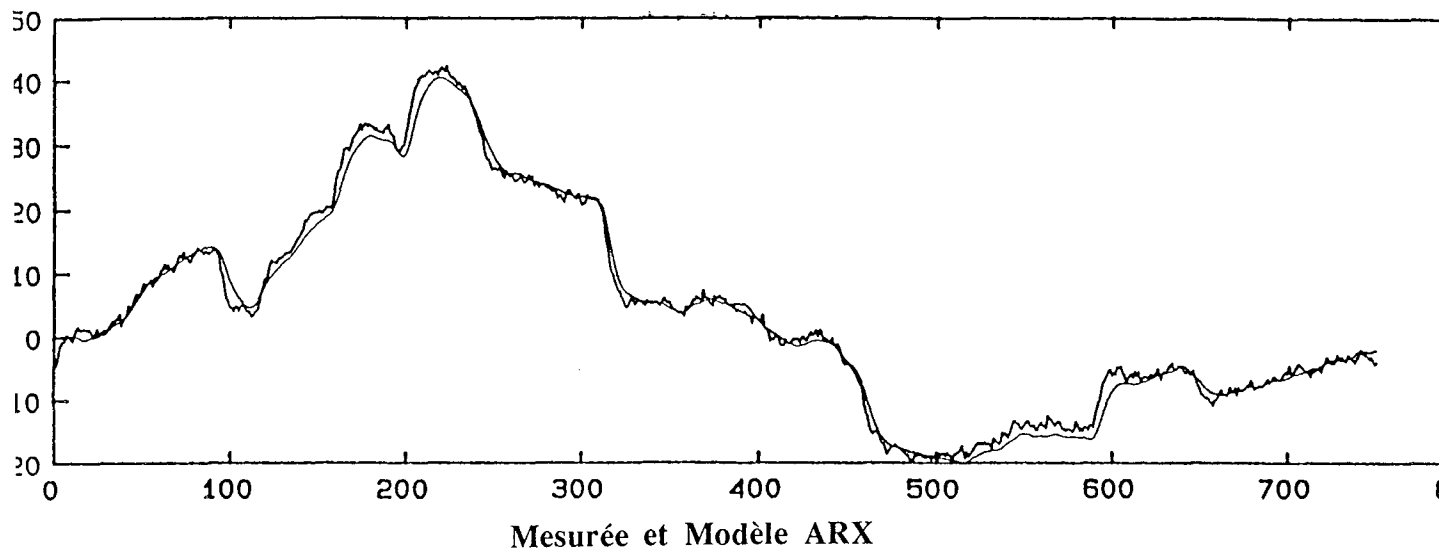
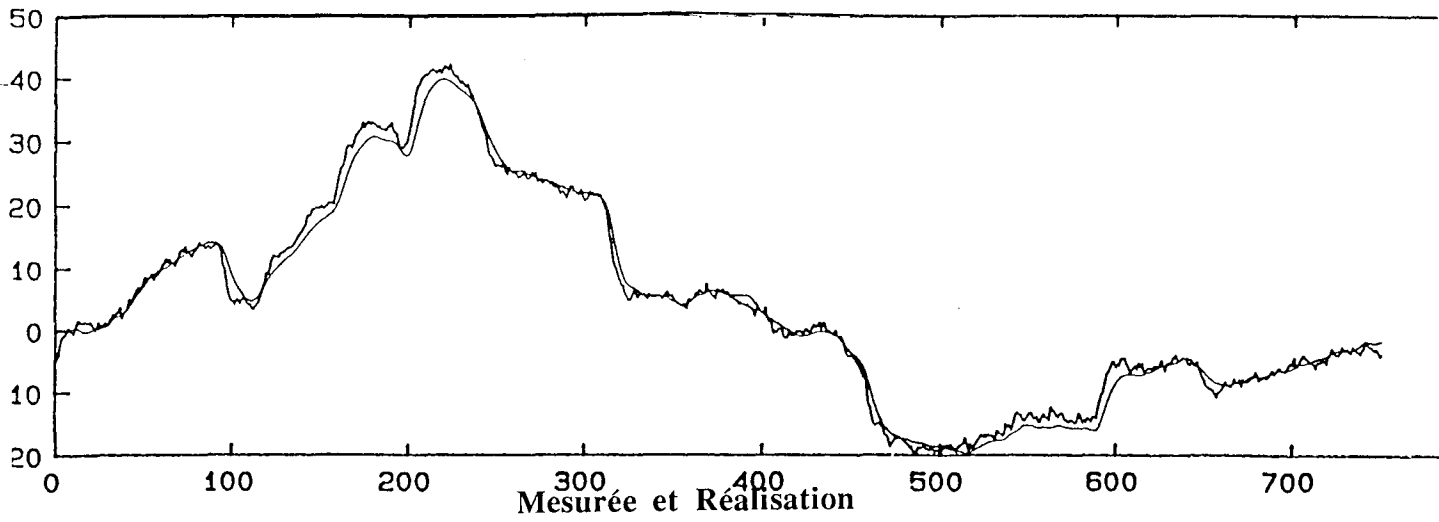


Fig. 5.2

Deuxième Campagne de Mesure " Température Sortie Primaire " [Tpo]

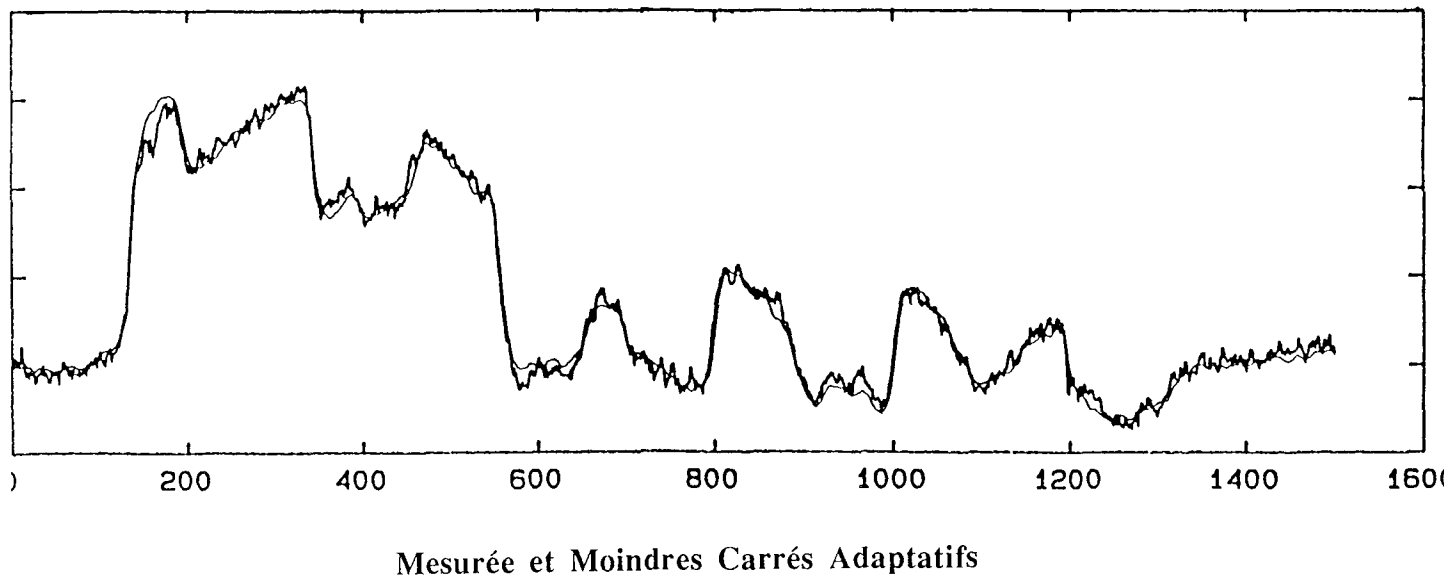
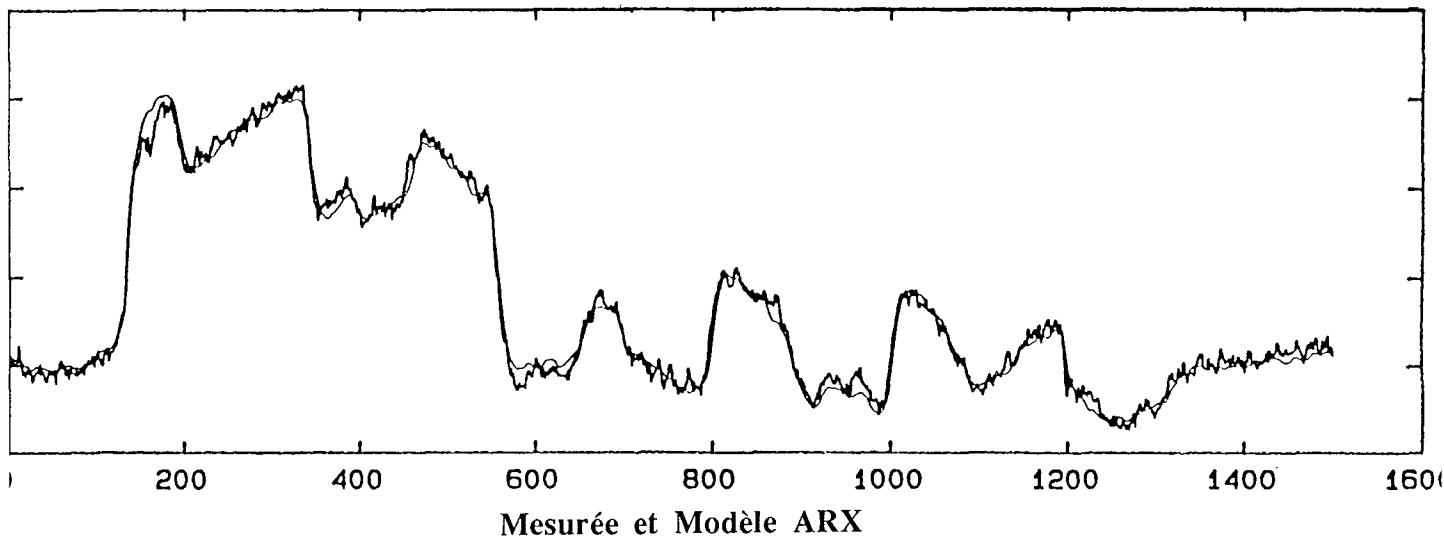
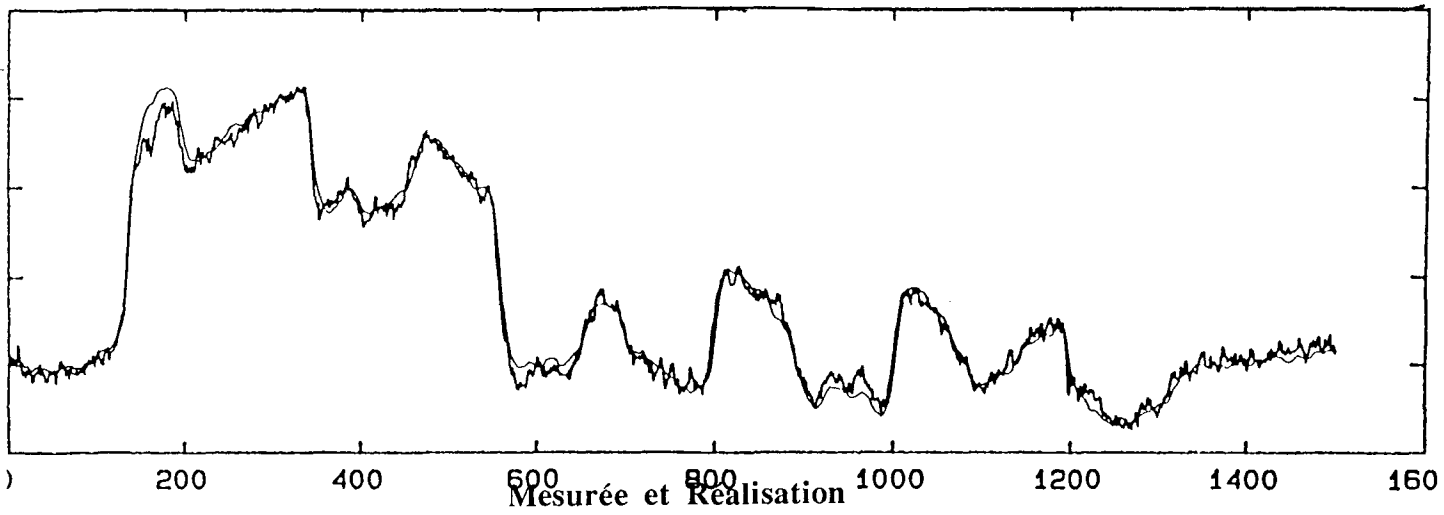
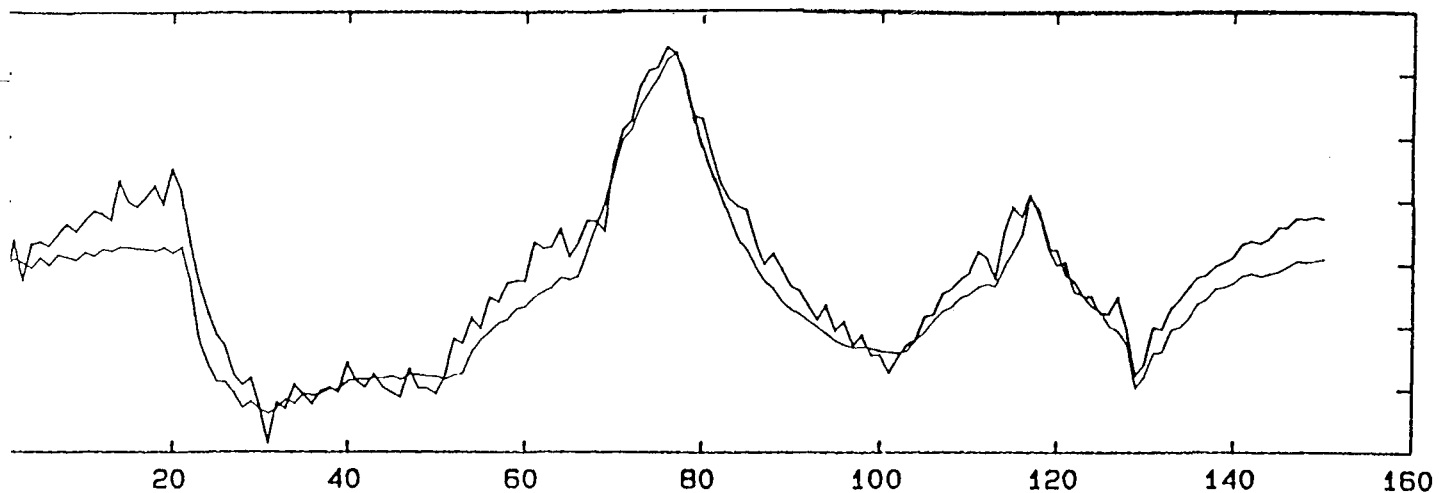
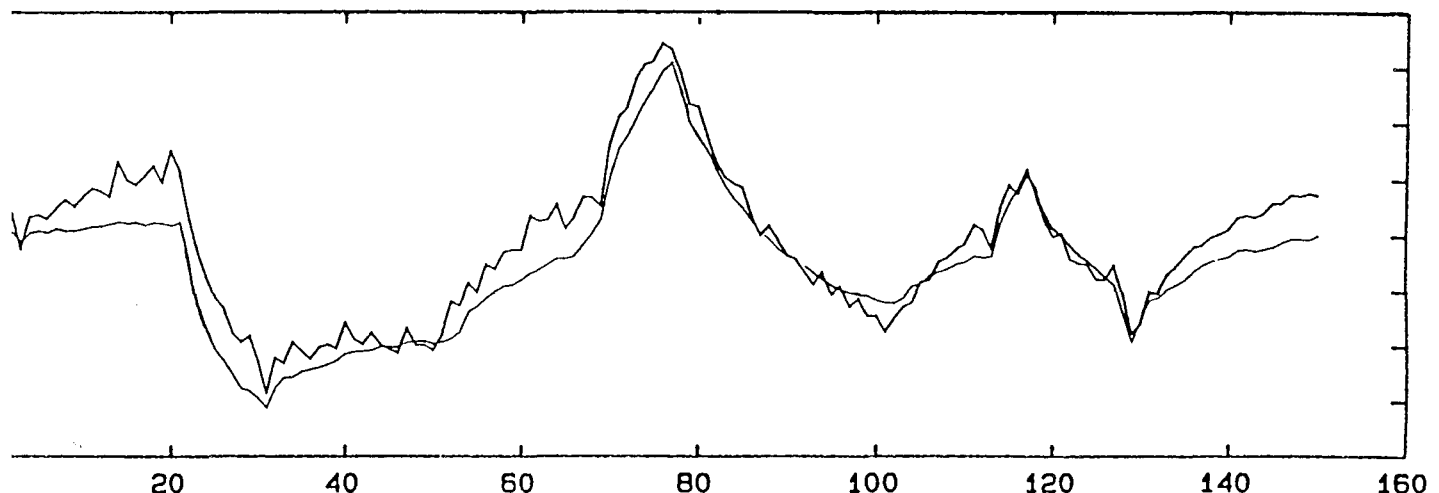


Fig. 6.2

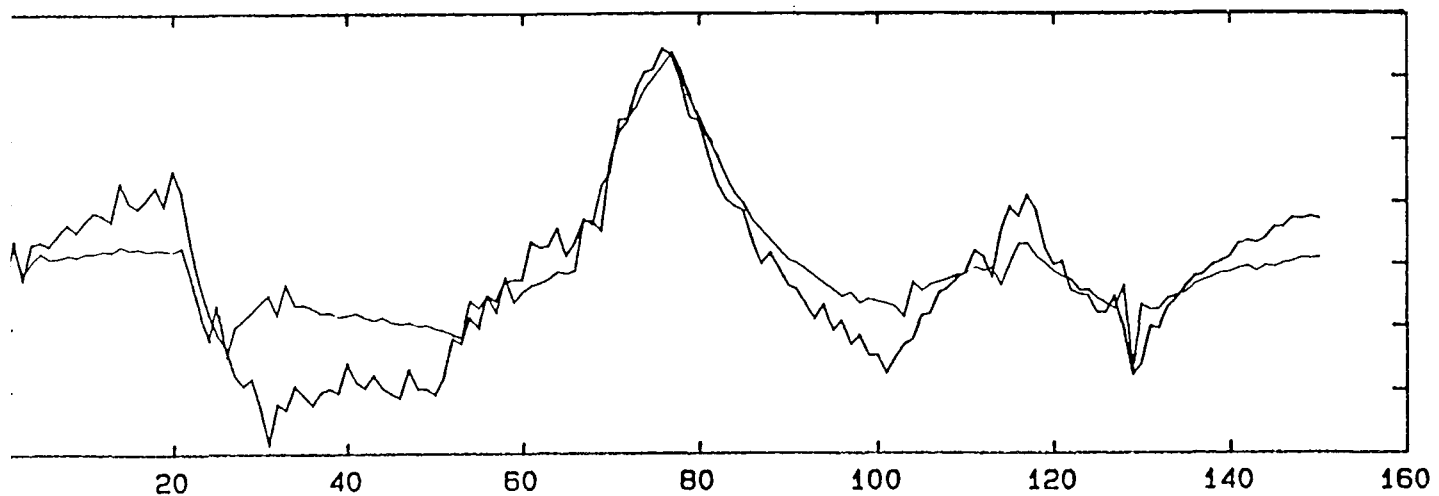
Boîte Noire " Température Sortie Chaudière " [Tco]



Mesurée et Réalisation



Mesurée et Modèle ARX



Mesurée et Moindres Carrés Adaptatifs

Fig. 7.1

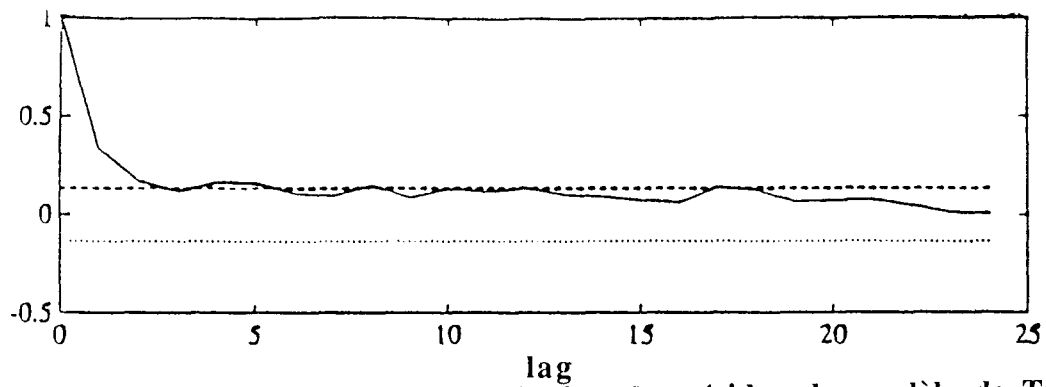


Figure 9.1 : Fonction d'autocorrélation des résidus du modèle de Tpo

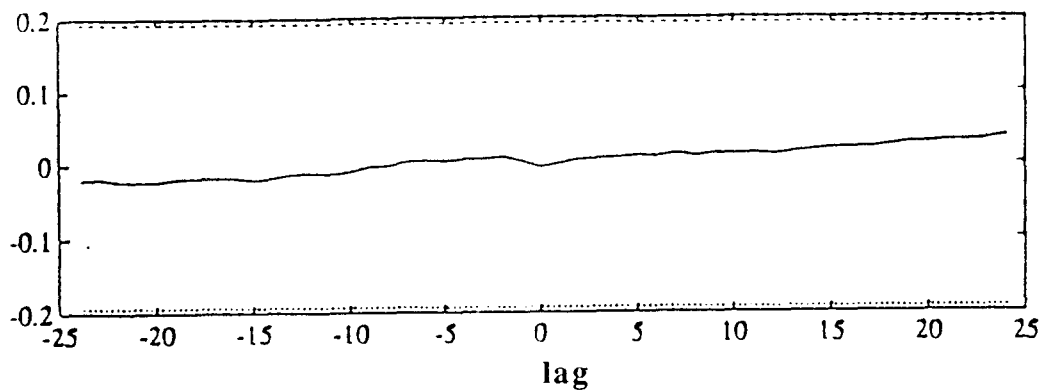


Figure 9.2 : Fonction d'intercorrélation entre les résidus et l'entrée Tco (Modèle de Tpo)

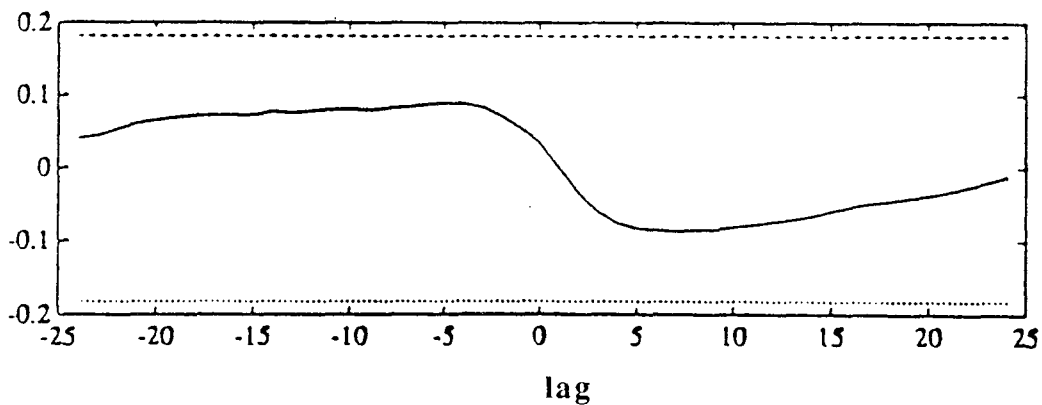


Figure 9.3 : Fonction d'intercorrélation entre les résidus et l'entrée Qp (Modèle de Tpo)

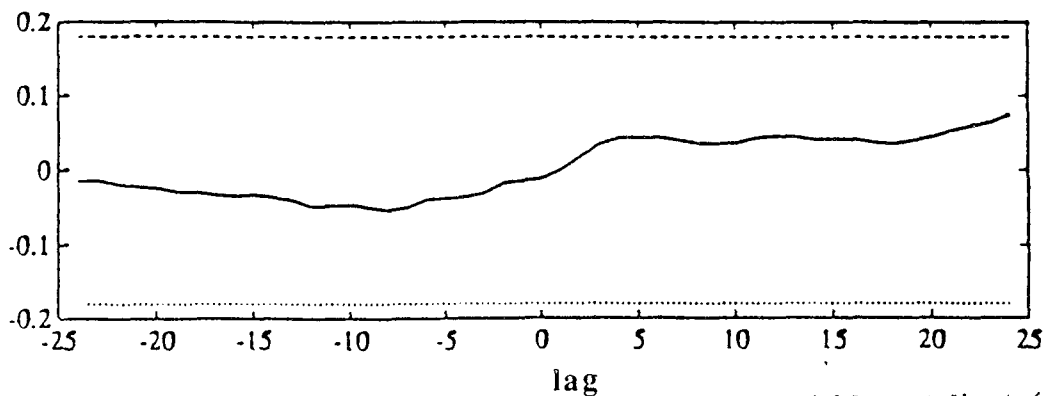
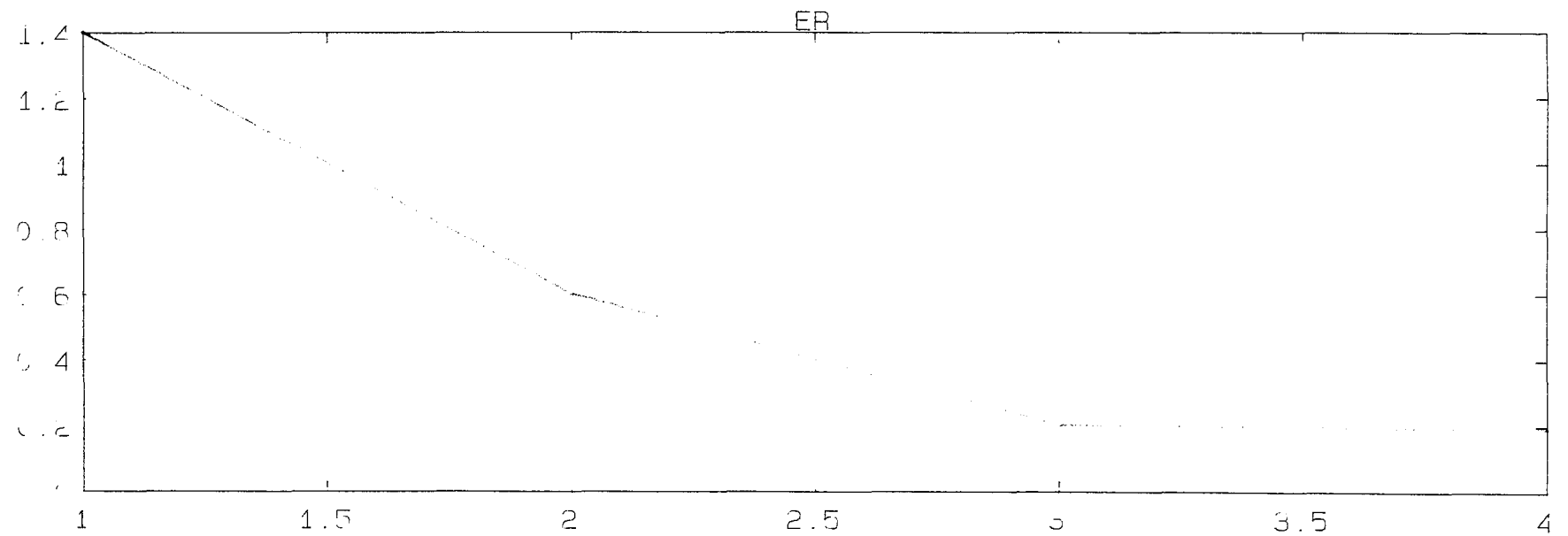
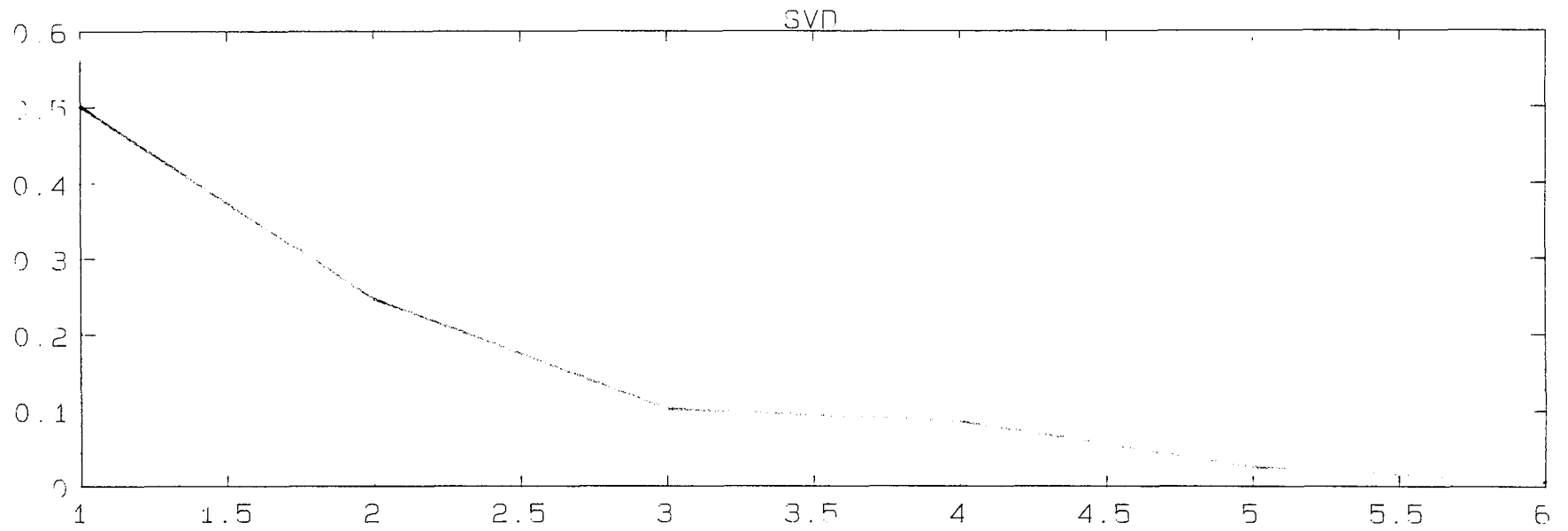


Figure 9.4 : Fonction d'intercorrélation entre les résidus et l'entrée Qs (Modèle de Tpo)



Détermination de l'ordre de la chaudière (Boîte Noire) par SVD et ER

9- Bibliographie

- 1- A. Charrois, "Réalisation et conduite optimale d'une installation d'échange de chaleur", thèse d'ingénieur CNAM, Nancy, Mars 1983.
- 2- J. M. Evrard, "Techniques de détection et de localisation de défauts appliquées à un processus thermique pilote", Thèse d'ingénieur CNAM, Nancy, Mai 1989.
- 3- G. Krzakala, "Contribution à l'extension du calcul hiérarchisé. Application à l'équilibrage des bilans de mesures et à la commande des systèmes cascades". Thèse de docteur ès-science, Nancy, Octobre, 1981.
- 4- J. D. Landau, "Identification et commande des systèmes à l'aide des progiciels P. I. M et PC-REG", Hermès, Paris, 1988.
- 5- B. Lang, "Identification et commande optimal d'un processus thermique pilote par micro-processor", Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Nancy, 1981.
- 6- F. Peinier, "Identification et Commande d'un processus thermique", Thèse d'ingénieur CNAM, Nancy, 1981.
- 7- G. Hashim, A. Rachid and C. Humbert, "Analysis of a pilot thermal process", Congrès ESM, Rome 1989.

CHAPITRE V

**EVALUATION DE LA MATRICE DE TRANSFERT
ASSOCIEE A UNE REALISATION**

1- Introduction

L'automatique actuelle traite des systèmes de plus en plus complexes et nécessite donc non seulement des méthodes théoriques d'analyse et de synthèse mais également des algorithmes fiables et numériquement robustes.

La fonction de transfert est un concept fondamental de la théorie des systèmes linéaires invariants. Les différentes représentations de la fonction de transfert pour un système multi-entrées multi-sorties jouent un rôle important dans la description et l'analyse des caractéristiques du système ainsi que pour la conception de commandes.

Il paraît donc essentiel de disposer d'un algorithme performant permettant de déterminer la matrice de transfert d'un système représenté sous forme d'état.

Ce chapitre présente une étude comparative, d'un point de vue numérique, des algorithmes d'évaluation de la matrice de transfert à partir d'une réalisation $\{A, B, C, D\}$, nous présentons également une méthode que nous avons développée et proposons une généralisation de l'algorithme de Blackwell au cas multi-entrées multi-sorties.

2- Les différentes méthodes

La matrice de transfert d'un système peut être obtenue à partir de sa représentation d'état

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) & (V.1.1) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) & (V.1.2) \end{aligned} \right\} \quad (V.1)$$

est :

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D \quad (V.2)$$

$(sI_n - A)^{-1}$ est calculé traditionnellement par :

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} \quad (V.3)$$

Cette expression est difficilement programmable parce qu'il est nécessaire de déterminer tous les cofacteurs de la matrice polynomiale $(sI - A)$. Une autre possibilité est de calculer la fonction de transfert

$$G(s) = \{ g_{ij}(s) \} = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (V.4)$$

où

$$g_{ij}(s) = z^{ij}(s) / d(s)$$

$$d(s) = s^n + \sum_{h=1}^n d_{h-1} s^{h-1} = \det(sI - A)$$

On peut obtenir les coefficients de $z^{ij}(s)$ et $d(s)$ par l'application d'une transformation d'état qui facilite le calcul des éléments de $G(s)$. La transformation sous la forme compagne ou de Jordan peut être utilisée. Néanmoins, il est bien connu que si la matrice d'état A est non cyclique, il n'existe pas de transformation d'état $\hat{x}(t) = T x(t)$ qui donne A sous forme compagne

$$\hat{A} = T^{-1} A T$$

De plus, la transformation du triplet $\{A, B, C\}$ sous forme Jordan impose la manipulation des nombres complexes ainsi que la détermination des valeurs propres ; le calcul des blocs cycliques par leurs multiplicités et leurs dimensions présente un inconvénient.

2-1) Algorithme de Faddeev et Faddeeva [1963]

Faddeev et Faddeeva ont été les premiers à proposer un algorithme numérique permettant de calculer $(sI - A)^{-1}$.

Si on écrit

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1} B_{n-1} + s^{n-2} B_{n-2} + \dots + s B_1 + B_0}{d(s)} \quad (V.5)$$

avec

$$d(s) = |sI_n - A| = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0 \quad (V.6)$$

alors on en déduit :

$$(s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0) I_n = (sI - A) (s^{n-1} B_{n-1} + s^{n-2} B_{n-2} + \dots + s B_1 + B_0) \quad (V.7)$$

Les matrices B_0, B_1, \dots, B_{n-2} et les coefficients d_0, d_1, \dots, d_{n-1} de $d(s)$ peuvent être calculés par l'algorithme suivant :

$$\left. \begin{array}{ll} d_{n-1} = - \text{trace} (A B_{n-1}) & B_{n-1} = I_n \\ d_{n-2} = - \frac{1}{2} \text{trace} (A B_{n-2}) & B_{n-2} = d_{n-1} I_n + A B_{n-1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ d_1 = - \frac{1}{(n-1)} \text{trace}(A B_1) & B_0 = d_1 I_n + A B_1 \\ d_0 = - \frac{1}{n} \text{trace} (A B_0) & [0 = d_0 I_n + A B_0] \end{array} \right\} \quad (V.8)$$

où la dernière équation sert à vérifier les résultats numériques. Les matrices $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-2}$ et les coefficients d_0, d_1, \dots, d_{n-1} peuvent donc être calculés récursivement :

$$\left. \begin{aligned} B_{n-1} &= A B_{n-i+1} + d_i I_n \\ B_{n-1} &= I_n \\ d_{n-i} &= -\frac{1}{i} \text{trace} (A B_{n-i}) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (V.9)$$

Cette méthode n'est pas satisfaisante pour des systèmes d'ordre élevé ou des systèmes possédant des valeurs propres très réparties.

2-2) Algorithme de Bingularac [1975]

Cette méthode ne demande que le calcul des coefficients de l'équation caractéristique des matrices données. L'algorithme ne nécessite pas de calcul du cofacteur et n'utilise aucune transformation d'état.

Description de l'algorithme

D'après l'équation V.4

$$g_{ij}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = C W(s) = \frac{z_{ij}(s)}{d(s)} \quad (V.10)$$

où

$$d(s) = s^n + \sum_{h=1}^n d_{h-1} s^{h-1} = \det (sI - A) \quad (V.11)$$

$$z_{ij}(s) = \sum_{h=1}^n z_h^{ij}(s) s^{h-1} \quad (V.12)$$

D'après (V.10), la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $W(s) = | w^1(s) \dots w^p(s) |$ de dimension $n \times p$ est donnée par la solution de :

$$(sI - A) w_j(s) = b_j \quad (V.13)$$

où b_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $B = | b_1 \dots b_p |$ de dimension $n \times p$. Donc le $h^{\text{ème}}$ élément $w_{hj}(s)$ du vecteur $w_j(s) = | w_{1j}(s) \dots w_{hj}(s) \dots w_{nj}(s) |^T$ de dimension n peut être exprimé par le rapport de deux polynômes :

$$w_{hj}(s) = \frac{v^{hj}(s)}{d(s)}$$

Le polynôme $v^{hj}(s)$ peut être exprimé par la différence des polynômes caractéristiques des matrices A^{hb_j} et A^{h0} . La matrice A^{hb_j} est obtenue de la matrice A en changeant la $h^{\text{ème}}$ colonne par le vecteur $-b_j$, tandis que la matrice A^{h0} est obtenue de la matrice A en insérant des zéros dans la $h^{\text{ème}}$ colonne.

$$A^{hb_j} = [a^1 \mid \dots \mid a^{h-1} \mid -b_j \mid a^{h+1} \mid \dots \mid a^n]$$

$$A^{h0} = [a^1 \mid \dots \mid a^{h-1} \mid 0 \mid a^{h+1} \mid \dots \mid a^n]$$

Après avoir déterminé les éléments $w_{hj}(s)$ de la matrice de transfert $W(s) = \{w_{hj}(s)\}$, les éléments $g_{ij}(s)$ de la fonction de transfert $G(s) = \{g_{ij}(s)\}$ sont calculés par :

$$g_{ij}(s) = \sum_{h=1}^n c_{ih} w_{hj}(s) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad j = 1, 2, \dots, p$$

2-3) Algorithme de Varga [1981]

Cet algorithme utilise la transformation de similarité orthogonale. Le calcul d'un élément de la matrice de transfert est basé sur la détermination du facteur de gain ainsi que des pôles et des zéros de la partie commandable et observable du système i.e. que l'on obtient directement une forme minimale.

Description de l'algorithme

Cet algorithme calcule chacune des fonctions de transfert mono-entrée, mono-sortie $g_{ij}(s)$,

$$g_{ij}(s) = c_i (sI - A)^{-1} b_j$$

où c_i et b_j sont respectivement, la $i^{\text{ème}}$ ligne de C et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B à partir de l'expression :

$$g_{ij}(s) = k_{ij} \frac{\prod_{k=1}^{q_{ij}} (s - \lambda_{ij}^k)}{\prod_{k=1}^{z_{ij}} (s - \mu_{ij}^k)} \quad (\text{V.14})$$

où

$\mu_{ij}^k, k = 1, 2, \dots, z$ et $\lambda_{ij}^k, k = 1, 2, \dots, q$ sont respectivement les zéros et les pôles de

$g_{ij}(s)$. Il n'y aura pas de simplification de pôles et de zéros parce que l'algorithme élimine la partie non commandable et non observable pour chaque triplet (c_i, A, b_j) . Ceci est réalisé à l'aide de la transformation orthogonale, les pôles et les zéros du résultat "minimal" du système étant déterminés par un calcul de valeurs propres généralisées. Pour calculer le gain k_{ij} , on peut choisir un s_0 quelconque (ni un pôle ni zéro) :

$$k_{ij} = c_i (s_0 I - A)^{-1} b_j \frac{\prod_{k=1}^{z_{ij}} (s_0 - \mu_{ij}^k)}{\prod_{k=1}^{q_{ij}} (s_0 - \lambda_{ij}^k)} \quad (\text{V.15})$$

Cette procédure doit être répétée pour chaque paire d'entrée/sortie.

2-4) Algorithme de Blackwell [1984]

L'idée de cet algorithme est d'obtenir au minimum une équation qui lie la somme des différentes dérivées de la sortie avec la somme des différentes dérivées de l'entrée.

Le processus de détermination des coefficients de la fonction de transfert consiste à générer l'équation différentielle de y en fonction de u.

Si l'on écrit les expressions de y et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n, on obtient

$$\begin{aligned}
 y &= c^T x + d u \\
 y^{[1]} &= c^T \dot{x} + d \dot{u} = c^T A x + c^T b u + d u^{[1]} \\
 y^{[2]} &= c^T A^2 x + c^T b u + c^T b u^{[1]} + d u^{[2]} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 y^{[n]} &= c^T A^n x + c^T A^{n-1} b u + c^T A^{n-2} b u^{[1]} + \dots + c^T A b u^{[n-1]} + d u^{[n]}
 \end{aligned}$$

soit matriciellement :

$$I \begin{pmatrix} y^{[n]} \\ y^{[n-1]} \\ y^{[n-2]} \\ \vdots \\ y^{[1]} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T A^n \\ c^T A^{n-1} \\ c^T A^{n-2} \\ \vdots \\ c^T A \\ c^T \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} d & c^T b & c^T A b & c^T A^2 b & \dots & c^T A^{n-1} b \\ 0 & d & c^T b & c^T A b & \dots & c^T A^{n-2} b \\ 0 & 0 & d & c^T b & \dots & c^T A^{n-3} b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & c^T b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{[n]} \\ u^{[n-1]} \\ u^{[n-2]} \\ \vdots \\ u^{[1]} \\ u \end{pmatrix}$$

ou sous forme condensée

$$[CY] Dy = [CX] x + [CU] D u \tag{V.16}$$

où

$$Dy^T = [y^{[n]} \quad y^{[n-1]} \quad \dots \quad y^{[1]} \quad y]$$

$$Du^T = [u^{[n]} \quad u^{[n-1]} \quad \dots \quad u^{[1]} \quad u]$$

CY est une matrice (n+1) x (n+1).

CX est (n+1) x (n+1)

CU est (n+1)x(n+1)

Les lignes de CX forment la matrice d'observabilité dans un ordre inversé. Cet ensemble d'équations permet d'obtenir au minimum une équation qui relie la somme des différentes dérivées de la sortie y avec la somme des différentes dérivées de l'entrée u. Cette étape peut être réalisée par l'élimination de Gauss appliquée à CGM.

où

$$\text{CGM} = [\text{CX} \mid \text{CY} \mid \text{CU}] \quad \text{est un tableau } (n + 1) \times (3n + 2).$$

On fait donc la triangularisation supérieure de CGM, le résultat va donner un des deux cas suivants :

Cas I : L'état est complètement observable

Puisque CX a une ligne de plus par rapport aux colonnes, on est sûr d'avoir une dernière ligne nulle comme résultat de la triangularisation supérieure de CGM. Dans le cas où seulement la dernière ligne est nulle, cette ligne donne la relation entrée-sortie désirée et les coefficients des dérivées de y sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice d'état A.

Cas II : L'état n'est pas complètement observable

Si le système n'est pas observable via la sortie y, on obtient comme résultat après l'élimination de Gauss (le nombre des lignes nulles de CX sera (1+q), où q est le nombre de lignes dépendantes. Dans ce cas, on a (q+1) choix valables de la représentation de la fonction de transfert. On peut utiliser cette liberté d'éliminer un terme quelconque commun aux (q+1) équations en continuant la triangularisation supérieure de la partie CY du terme CGM.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de la matrice d'état A peut être séparément déterminé par l'utilisation de la procédure vue précédemment en définissant une sortie fictive qui nous permet d'observer complètement l'état du système ; exemple :

$$c^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

Pour ce cas, le coefficient CGM se réduit à :

$$\text{CGM}' = [\text{CX} \mid \text{CY}]$$

et doit d'être traité par le processus de la triangularisation supérieure.

Pour appliquer cet algorithme à un système multivariable, on doit le répéter pour chaque paire d'entrée-sortie.

Afin d'éviter cette répétition, nous avons proposé une généralisation de cet algorithme dans le cas multivariable permettant le calcul de la matrice de transfert en une seule étape, comme expliqué ci-dessous :

2-5) Généralisation de la méthode de Blackwell (Hashim [1988])

Nous avons utilisé la même technique que Blackwell pour le cas monovariable mais nous avons construit CGM à partir de { A, B, C, D } système multivariable donne au minimum q lignes nulles à la fin du résultat de la triangularisation supérieure de CGM, q étant le nombre de sorties. On obtient ainsi q équations qui relient la somme des différentes dérivées des sorties avec la somme des différentes dérivées des entrées, sous la description polynômes matriciels d'entrée-sortie suivante :

$$P(s) Y(s) = Q(s) U(s)$$

Pour trouver les coefficients de la matrice de transfert, on calcule l'inverse de P(s) matrice polynomiale puis le produit de P⁻¹(s) par la matrice polynomiale Q(s).

Dans le cas où le système n'est pas complètement observable on continue l'élimination de Gauss de CY pour générer la matrice de transfert de degré le plus faible possible i.e. irréductible.

Cette généralisation évite la répétition ($q \times p$) fois de l'algorithme de Blackwell pour le cas multivariable où

q = Nombre de sorties
 p = Nombre d'entrées

Elle donne également un moyen pour passer d'une représentation de la description différentielle d'entrée-sortie à la matrice de transfert ou encore d'une représentation d'équation d'état à la représentation de la description différentielle entrée-sortie.

2-6) Algorithme de Misra [1987]

Cet algorithme utilise la transformation de similarité orthogonale pour trouver la partie minimale de chaque paire d'entrée-sortie et applique quelques identités du déterminant pour calculer les éléments des matrices de transfert ;

Description de la méthode :

Misra et al. proposent d'abord l'utilisation de la forme supérieure et inférieure de Hessenberg pour $\{A, b, c, d\}$ (chaque paire d'entrée-sortie) en extrayant sa partie commandable et observable :

1- Elimination de la partie non commandable :

Un système mono-entrée (A, b) peut être toujours réduit à la forme supérieure de Hessenberg (UHF).

Si le système n'est pas complètement commandable, alors la transformation ci-dessus sera réduite (A, b) devenant (F, g) telle que :

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} \quad (V.17)$$

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (V.18)$$

où $F_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ est une matrice supérieure de Hessenberg.

$F_{22} \in \mathbb{R}^{n-n_1 \times n-n_1}$ et $g_1 \in \mathbb{R}^{n_1} = [g_{11} \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Remarquons que la paire (F_{11}, g_1) représente la partie commandable de (A, b) et que les valeurs propres de F_{22} correspondent aux modes non commandable de (A, b) .

2- Elimination de la partie non observable :

Les mêmes résultats peuvent être formulés pour un système mono-sortie (A, c^T) , en ce qui concerne les propriétés d'observabilité.

3- Soit (A, b_j, c_j) la réalisation complètement commandable et observable et sous la forme de Hessenberg obtenue ci-dessus, l'élément (i, j) de sa fonction de transfert $G(s)$ est

$$g_{ij}(s) = c_i^T (sI_n - A)^{-1} b_j \quad (V.19)$$

Pour un système mono-entrée mono-sortie (A, b, c^T) , on peut écrire (Patel & Munro, 1982),

$$\det (sI_n - A + bc^T) = \det (sI_n - A) + c^T \text{adj} (sI_n - A) b \quad (V.20)$$

D'où l'on déduit :

$$c^T (sI_n - A)^{-1} b = \frac{c^T \text{adj}(sI_n - A) b}{\det(sI_n - A)} \quad (V.21)$$

$$= \frac{\det(sI_n - A + bc^T)}{\det(sI_n - A)} - 1 \quad (V.22)$$

Ainsi, $g_{ij}(s)$ peut être écrite comme suit :

$$g_{ij}(s) = \frac{\det(sI_n - A + b_j c_i^T)}{\det(sI_n - A)} - 1 \quad (V.23)$$

D'après (Stewart, 1973), le déterminant d'une matrice dont la $k^{\text{ème}}$ ligne peut être exprimée comme la somme de vecteurs lignes $a_k^T + \hat{a}_k^T$, peut être écrit comme suit

$$\det [(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k + \hat{a}_k \ \dots \ a_n)]^T = \det [(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k \ \dots \ a_n)]^T + \det [(a_1 \ a_2 \ \dots \ \hat{a}_k \ \dots \ a_n)]^T \quad (V.24)$$

De plus, le polynôme caractéristique d'une matrice sous la forme de Hessenberg supérieure peut être calculé efficacement en utilisant une variante de la méthode de Hyman (Wilkinson [1965]).

$$g_{ij}(s) = \frac{\det(\tilde{A} + b_j c_i^T) - \det(\tilde{A})}{\det(\tilde{A})} \quad (V.25)$$

où $\tilde{A} = sI_n - A$

Remarquons que d'après la structure des b_j , le produit des $b_j c_i^T$ aura seulement les premières lignes non nulles, données par $b_{1j} c_i^T$, où b_{1j} est le premier élément de b_j . On définit \hat{A} comme étant une matrice obtenue de \tilde{A} en remplaçant sa première ligne par $b_{1j} c_i^T$. Donc, en utilisant l'équation (V.25) on a :

$$g_{ij}(s) = \frac{\det(\hat{A})}{\det(\tilde{A})} \quad (V.26)$$

2-7) Approche par les paramètres de Markov (Hashim [1989])

C'est une méthode que nous avons proposée et qui permet d'obtenir la matrice de transfert d'un système multivariable à partir de sa réalisation $\{A, B, C\}$.

Description de la méthode :

Pour une réalisation donnée $\{A, B, C\}$, décrivant un système multivariable linéaire de dimension n avec p -entrées et q -sorties, sous la forme d'équation d'état (V.1), les éléments de $g_{ij}(s)$, ($i = 1, 2, \dots, q$; $j = 1, 2, \dots, p$) de la matrice de transfert $G(s)$ de dimension $(q \times p)$, peuvent être exprimés par :

où
$$g_{ij}(s) = z^{ij}(s) / d(s) \tag{V.27}$$

$$d(s) = s^n + \sum_{h=1}^n d_{h-1} s^{h-1} = \det (sI - A) \tag{V.28}$$

est le polynôme caractéristique d'ordre n, tandis que les $z^{ij}(s)$ sont des polynômes d'ordre maximum n-1, i. e. :

$$z^{ij}(s) = \sum_{h=1}^n z_h^{ij} s^h \tag{V.29}$$

G(s) peut donc s'écrire :

$$G(s) = \frac{N_1 + N_2 s + \dots + N_n s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + d_{n-1} s^{n-1} + s^n} \tag{V.30}$$

où

$$N_k = \begin{pmatrix} z_k^{11} & z_k^{12} & \dots & z_k^{1p} \\ z_k^{21} & z_k^{22} & \dots & z_k^{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_k^{q1} & z_k^{q2} & \dots & z_k^{qp} \end{pmatrix} \tag{V.31}$$

Le développement en série de la matrice G(s), autour de $s = \infty$ est :

$$G(s) = M_0 s^{-1} + M_1 s^{-2} + \dots \tag{V.32}$$

où les matrices M_i de dimension (qxp) sont les paramètres de Markov qui peuvent être calculés par :

$$M_i = C A^i B \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{V.33}$$

de (V.30) et (V.32) on a:

$$\frac{N_1 + N_2 s + \dots + N_n s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + d_{n-1} s^{n-1} + s^n} = M_0 s^{-1} + M_1 s^{-2} + \dots + M_{n-1} s^{-n} \tag{V.34}$$

En identifiant les coefficients de même puissance en s de l'équation (V.34), on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= d_1 M_0 + d_2 M_1 + \dots + M_{n-1} \\
 N_2 &= d_2 M_0 + d_3 M_1 + \dots + d_{n-1} M_{n-3} + M_{n-2} \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 N_n &= M_0
 \end{aligned} \right\} \quad (V.35)$$

Cas monovariable

Dans ce cas, les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- 1- Déterminer le polynôme caractéristique de A, qu'on peut calculer efficacement en utilisant une variante de la méthode de Hyman (Wilkinson, 1988).
- 2- Dédurre les n premiers paramètres de Markov (n étant la dimension de A), en utilisant l'équation (V.33).
- 3- calculer les coefficients du numérateur par l'équation (V.36).

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ N_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{n-1} & 1 \\ d_2 & d_3 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{n-1} \end{pmatrix} \quad (V.36)$$

Cas multivariable

Ici, il est possible d'utiliser deux techniques :

- 1- On utilise l'algorithme du cas monovariable pour chaque paire d'entrée-sortie i. e. on calcule un élément de la matrice de transfert à la fois.
- 2- On généralise cette méthode pour calculer tous les éléments de la matrice de transfert en une fois grâce aux étapes suivantes :

a- Détermination des coefficients du dénominateur commun de G(s).

b- Modification de la présentation des paramètres de Markov en les mettant sous la forme stack (1 x (q x p))* pour respecter les dimensions de la matrice de l'équation (V.36). Dans ce cas, chaque colonne de N représente les coefficients du numérateur de chaque entrée-sortie de G(s).

Cette généralisation peut être utilisée pour les deux cas monovariable et multivariable.

* Pour une matrice A de dimension (q x p)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_q \end{pmatrix}$$

où $a_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}]$

la forme stack de A est : $st(A) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_q]^T$

Rosenbrock [1970] a utilisé les paramètres de Markov et en a déduit qu'il est nécessaire que la matrice de transfert soit rationnelle. Les mêmes principes ont été utilisés par Lal et Singh [1972], mais ces derniers n'ont proposé aucun algorithme numérique.

3- Résultats numériques

Nous choisissons un système avec des valeurs propres très réparties. A est une matrice diagonale dont les éléments de diagonaux sont :

-1.0000 e+ 010
 -1.0000 e+ 005
 -9.9990 e+ 003
 -8.0000 e+ 000
 -1.0000 e+ 003
 0
 -1.0000 e- 002
 -1.0000 e+ 000
 -1.0000 e- 004
 -1.0000 e- 009

$$C = B^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

La fonction de transfert exacte est :

NUMERATEUR

DENOMINATEUR

7.9992 e +007 s⁰ +
 1.5998 e +017 s¹ +
 2.4240 e +021 s² +
 3.2360 e +023 s³ +
 4.5090 e +023 s⁴ +
 6.0594 e +022 s⁵ +
 7.7762 e +019 s⁶ +
 8.8806 e +015 s⁷ +
 9.0000 e +010 s⁸ +
 1.0000 e +001 s⁹ +
 0

0
 7.9992 e +007 s¹ +
 7.9992 e +016 s² +
 8.0800 e +020 s³ +
 8.0901 e +022 s⁴ +
 9.0181 e +022 s⁵ +
 1.0099 e +022 s⁶ +
 1.1108 e +019 s⁷ +
 1.1100 e +015 s⁸ +
 1.0000 e +010 s⁹ +
 1.0000 e +000 s¹⁰

L'application des différentes méthodes donne les résultats suivants :

NUMERATEUR

DENOMINATEUR

NUMERATEUR

DENOMINATEUR

1- FADDEEV ET FADDEEVA

8.1936 e+071*s0+	-6.5549 e+081*s0+
-2.1069 e+062*s1+	8.1936 e+071*s1+
4.2138 e+052*s2+	-1.0534 e+062*s2+
-7.8658 e+042*s3+	1.4046 e+052*s3+
1.4748 e+033*s4+	-1.9664 e+042*s4+
-2.3437 e+023*s5+	2.9497 e+032*s5+
7.7763 e+019*s6+	-3.9062 e+022*s6+
8.8806 e+015*s7+	1.1109 e+019*s7+
9.000 e+010*s8+	1.1100 e+015*s8+
1.000 e+001*s9+	1.0000 e+010*s9+
0	1.0000 e+000*s10

2- BANGULAC

7.9992 e+007*s0+	0+
1.5998 e+017*s1+	7.9992 e+007*s1+
2.4240 e+021*s2+	7.9992 e+016*s2+
3.2360 e+023*s3+	8.0800 e+020*s3+
4.5090 e+023*s4+	8.0901 e+022*s4+
6.0594 e+022*s5+	9.0181 e+022*s5+
7.7762 e+019*s6+	1.0099 e+022*s6+
8.8806 e+015*s7+	1.1108 e+019*s7+
9.0000 e+010*s8+	1.1100 e+015*s8+
1.0000 e+001*s9+	1.0000 e+010*s9+
0	1.0000 e+000*s10

3- VARGA

00*s0+	0*s0+
00*s1+	0*s1+
2.4020 e+021*s2+	2.6289 e+016*s2+
3.2357 e+023*s3+	8.0252 e+020*s3+
4.5090 e+023*s4+	8.0895 e+022*s4+
6.0594 e+022*s5+	9.0181 e+022*s5+
7.7762 e+019*s6+	1.0099 e+022*s6+
8.8806 e+015*s7+	1.1108 e+019*s7+
9.0000 e+010*s8+	1.1100 e+015*s8+
1.0000 e+001*s9+	1.0000 e+010*s9+
0	1.0000 e+000*s10

4- BLACKWELL

1.5942 e+073*s0+	6.0061 e-002*s0+
9.5780 e+063*s1+	-1.2659 e+016*s1+
1.8817 e+053*s2+	-1.2779 e+020*s2+
8.7923 e+043*s3+	-1.1995 e+022*s3+
-8.2355 e+033*s4+	6.6630 e+022*s4+
6.8821 e+023*s5+	8.8583 e+022*s5+
7.7761 e+019*s6+	1.0097 e+022*s6+
8.8806 e+015*s7+	1.1108 e+019*s7+
9.0000 e+010*s8+	1.1100 e+015*s8+
9.9999e+000*s9+	1.0000 e+010*s9+
0	1.0000 e+000*s10

5- MISRA

1.1552 e+000*s0+	1.6499 e-008*s0+
1.6020 e+017*s1+	1.6415 e+009*s1+
2.4240 e+021*s2+	8.0065 e+016*s2+
3.2360 e+023*s3+	8.0801 e+020*s3+
4.5090 e+023*s4+	8.0901 e+022*s4+
6.0594 e+022*s5+	9.0181 e+022*s5+
7.7762 e+019*s6+	1.0099 e+022*s6+
8.8806 e+015*s7+	1.1108 e+019*s7+
9.0000 e+010*s8+	1.1100 e+015*s8+
1.0000 e+001*s9+	1.0000 e+010*s9+
0	1.0000 e+000*s10

6- HASHIM & al.

-6.6808 e+072*s0+	0+
1.1839 e+064*s1+	7.9992 e+007*s1+
-3.7414 e+052*s2+	7.9992 e+016*s2+
1.1045 e+044*s3+	8.0800 e+020*s3+
-1.0496 e+034*s4+	8.0901 e+022*s4+
9.1377 e+023*s5+	9.0181 e+022*s5+
7.7762 e+019*s6+	1.0099 e+022*s6+
8.8806 e+015*s7+	1.1108 e+019*s7+
9.0000 e+010*s8+	1.1100 e+015*s8+
1.0000 e+001*s9+	1.0000 e+010*s9+
0	1.0000 e+000*s10

4- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme de calcul de la matrice de transfert à partir d'une réalisation simple et directe, celui-ci ne nécessitant ni le calcul de cofacteurs ni l'utilisation de l'inverse de la matrice qui pose beaucoup de problèmes numériques dans le cas où les matrices sont mal conditionnées. Notre méthode s'applique directement aux systèmes multivariables et les résultats sont satisfaisants dans le cas où les valeurs propres sont rapprochées.

Par contre, l'utilisation de la plupart de ces méthodes aboutit à de mauvais résultats si on les utilise pour un système qui a des valeurs propres largement réparties. Le résultat numérique de ce type de problème montre que : la méthode de Bingulac donne de très bons résultats, la technique de Misra et al. donne des résultats acceptables. La mauvaise précision des autres méthodes vient partiellement du calcul des puissances de A.

D'un point de vue numérique, les méthodes de Faddeev et Faddeeva, Blackwell et notre méthode nécessitent une grande capacité mémoire en raison du calcul des puissances de la matrice A.

5- Bibliographie

- 1- S. P. Bingulac, "On the Calculation of the Transfer Function Matrix", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 134-135, Feb. 1975.
- 2- C. C. Blackwell, "On Obtaining the Coefficients of the Outputs Transfer Function from a State-Space Model and Output Model of a Linear Constant Coefficients System", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-29, No. 12 pp. 1122-1125, 1948.
- 3- D. K. Faddeev and D. N. Faddeeva, "Computational Methods of Linear Algebra", (San Francisco : Freeman), 1963.
- 4- G. Hashim, A. Rachid and C. Humbert, "Calculation of Transfer Function from State-Space Model A Comparative Study", 12th IMACS world congress on scientific computation. July 18-22, 1988, Paris, France.**
- 5- G. Hashim, A. Rachid and C. Humbert, "On the Calculation of Transfer Function from State -Space Model", IJCC Soumis, Juin, 1989.**
- 6- A. J. Laub and B. C. Moore, "Calculation of Transmission Zeros Using QZ Techniques", Automatica, 14, pp. 557-566, 1978.
- 7- M. Lal and H. Singh, "On the Determination of a Transfer Function Matrix from the given State Equations", Int. J. Control, Vol. 15, No. 2, pp. 333-335, 1972.
- 8- P. Misra and R. V. Patel, "Computation of Transfer Function Matrices of Linear Multivariable Systems", Automatica, Vol. 23, No. 5, pp. 635-640, 1987.
- 9- R. V. Patel and P. Misra, "Numerical Algorithms for Eigenvalue Assignment by State Feedback", Proc. IEEE, 72, pp. 1755-1764, 1984.

-
- 10- R. V. Patel and N. Munro, "Multivariable System Theory and Design", Pergamon Press, New York, 1982.
- 11- H. H. Rosenbrock, "State-Space and Multivariable Theory", Ch.1, pp. 12-13, Ch. 2 pp. 38-40, 1970.
- 12- G. W. Stewart, "Introduction to Matrix Computation", Academic Press, New York , 1973.
- 13- A. Varga and V. Sima, "Numerical Stable Algorithm for Transfer Function Matrix evaluation", Int. J. Control., Vol. 33, No. 6, pp. 1123-1133, 1981.
- 14- J. H. Wilkinson, "The Algebraic Eigenvalue Problem", Oxford Science Publications, 1965.

CHAPITRE VI
REDUCTION DE MODELES

1- Introduction

En raison de l'évolution des moyens théoriques et matériels (supports informatiques en particulier) mis à sa disposition, l'automaticien est amené à appréhender des systèmes de plus en plus complexes. Pour de tels systèmes, un modèle obtenu, par exemple, par linéarisation autour d'un point de fonctionnement se révèle très lourd. Ces dernières années ont donc vu croître l'intérêt porté aux méthodes de simplification de modèles. Les applications vont de la simulation permettant de donner les tendances d'évolution du système complexe à l'élaboration de commandes simplifiées.

Depuis la simplification bien connue en asservissement consistant à approcher un système d'ordre élevé par un deuxième ordre dont Bosley et Lees [1972] donnaient déjà une bibliographie très abondante, cette approximation est devenue insuffisante et la théorie de simplification de modèles s'est largement développée depuis.

Dans ce chapitre, on présente les différentes approches couramment rencontrées dans la littérature à savoir :

Approche fréquentielle : Approximation de Padé et ses variantes (Shamash [1974], [1975]), Routh (Fossard [1970], Pal [1980]), fractions continues (Chen [1974]), Réduction optimale (Silverman [1982]), etc.

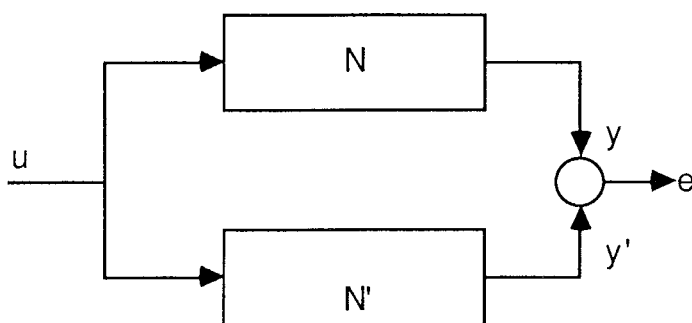
Approche temporelle : Agrégation (Aoki [1968]), Perturbations singulières (Kokotovic [1968]), Réalisation équilibrée (Moore [1981]), Réalisation partielle (Sinha [1983]), etc.

Nous présentons également une méthode que nous avons développée et qui est basée sur le concept d'agrégation mais utilisant la décomposition de Schur pour un système multivariable mal-conditionné pour lequel la plupart des algorithmes de réduction posent des problèmes numériques.

Finallement, on présente quelques critères de choix de l'ordre du modèle réduit (Elrazaz [1979], Moore [1981], Glover [1984]).

1-1) Définition

Soit un système N décrit par un modèle linéaire irréductible d'ordre n , le but des méthodes de réduction consiste à trouver un modèle d'ordre $m < n$, réalisant une "bonne" approximation de N . Nous serons, en général, amené à considérer les caractéristiques du vecteur erreur de sortie entre le système et son modèle réduit N' pour une même entrée standard (impulsion, échelon, bruit blanc, ...)



1-2) Critères de choix d'une méthode de réduction

a) Existence d'une mesure de qualité du modèle réduit :

Les méthodes associées à la minimisation d'un critère sont intéressantes d'une part parce que le modèle obtenu est optimal, mais surtout parce que la valeur normalisée du critère permet de juger de la qualité du modèle réduit et de déterminer un ordre de réduction raisonnable. Il est souhaitable, lorsque ce critère existe, que le modèle réduit d'ordre m tende de façon monotone vers le modèle initial quand m tend vers n .

b) Conservation des propriétés de stabilité :

Il est fondamental que la réduction d'un modèle stable conduise à un modèle stable. De même, un modèle instable doit produire un modèle instable, il est également très souhaitable que les pôles instables soient les mêmes.

c) Propriétés statiques :

La conservation du gain statique est une caractéristique intéressante d'un bon modèle réduit. On peut également demander une erreur statique nulle pour des entrées d'ordre donné (impulsion, échelon, rampe, etc...).

d) Variation des performances en fonction de l'entrée :

En général, il importe assez peu à l'utilisateur d'un modèle réduit que celui-ci soit optimal pour une entrée particulière, dans la mesure où il ne peut préciser l'entrée qui lui sera appliquée ; il espère de bonnes performances pour des entrées quelconques dont il limitera éventuellement la bande de fréquence.

e) Volume de calcul :

En ayant à l'esprit la remarque précédente, il faut savoir que la réduction optimale est un problème de programmation non linéaire relativement ardu, et que les méthodes de type agrégation nécessitent le calcul des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice d'ordre n . Il est bien des cas où un modèle réduit obtenu très simplement par une méthode de fractions continues soit suffisant.

f) Applicabilité en multivariable :

Si dans un système monovisible il est parfois possible par des considérations physiques d'effectuer une simplification de modèle, ceci est impossible pour les systèmes multivariables non découplés. Il est donc souhaitable que la méthode puisse s'appliquer dans le cas multivariable.

2- Approximation de fonctions de transfert (domaine fréquentiel)

Les méthodes présentées dans ce paragraphe sont issues des théories générales d'approximation de fonctions à l'aide de leur développement en séries de Taylor. Les modèles réduits obtenus par ces méthodes possèdent "naturellement" de bonnes qualités statiques mais peuvent poser des problèmes de stabilité.

2-1) Approximation de Padé

L'approximation de Padé d'une fonction $G(s)$ est une fraction rationnelle ($G_a(s) = P_\mu(s)/Q_\nu(s)$) notée symboliquement (μ, ν) dont le développement en série de Taylor autour de $s = 0$ est le même que celui de $G(s)$ jusqu'à l'ordre $\mu + \nu$.

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \sum_{i=0}^{m+n} c_i s^i \quad m < n \quad \text{et } a_0 = 1 \quad (\text{VI.1})$$

De même :

$$G_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^{\mu} \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i s^i} = \sum_{i=0}^{\mu+\nu} \gamma_i s^i \quad \mu < \nu < n \quad (\text{VI.2})$$

$$\alpha_0 = 1$$

c_i et γ_i désignent les coefficients du développement de Taylor de $G(s)$ et $G_a(s)$. Le problème est de déterminer les coefficients α_i et β_i du modèle réduit (VI.2) tels que :

$$\gamma_i = c_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, \mu + \nu$$

La technique de Padé atteint ce but en utilisant une procédure qui se ramène à la résolution de deux ensembles découplés d'équations linéaires :

$$0 = \sum_{j=0}^i \alpha_{i-j} c_j \quad i = \mu + 1, \dots, \mu + \nu \quad (\text{VI.3})$$

$$\alpha_h = 0 \quad \text{pour } h > \nu.$$

$$\beta_i = \sum_{j=0}^i \alpha_{i-j} c_j \quad i = 0, \dots, \mu. \quad (\text{VI.4})$$

Les paramètres α_i du dénominateur sont déterminés par la solution des équations (VI.3). Les équations (VI.4) donnent directement les β_i .

Les coefficients α_i et β_i peuvent aussi être obtenus par résolution du système d'équations (VI.4) en faisant $\gamma_i = c_i$:

ce qui donne

$$\beta_0 = \alpha_0 \gamma_0$$

$$\beta_1 = \alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_0$$

...

$$0 = \alpha_0 \gamma_{(\mu+\nu)} + \dots + \alpha_\nu \gamma_\mu$$

En général, on fixe α_0 ou β_0 à 1.

La méthode se généralise assez simplement au cas multivariable.

Propriétés de l'approximation de Padé :

* Si le modèle initial et le modèle réduit sont stables, l'erreur statique entre les deux modèles est nulle pour toute entrée de la forme :

$$u(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i \quad \text{où } k = m + n$$

* Le modèle d'ordre réduit peut être instable pour un système initial stable. De même, un système instable peut conduire à un approximant stable.

En effet, considérons le système stable

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s^2 + 5s + 4}$$

le modèle réduit d'ordre 1 obtenu par approximation de Padé donne

$$G_a(s) = -\frac{0.1667}{s - 1.333} \quad \text{qui est instable.}$$

Améliorations de l'approximation de Padé :

Dans le but de préserver la stabilité par réduction, Shamash [1974], [Feb.1975] a donné une méthode consistant à calculer le dénominateur du modèle réduit par l'algorithme de Routh et les coefficients du numérateur par la méthode des moments.

Shamash [Mar. 1975], [Dec.1975] a également proposé de combiner l'approximation de Padé et une méthode de pôles dominants. Les pôles dominants sont calculés et retenus dans le modèle réduit : les autres coefficients inconnus sont utilisés pour identifier les premiers moments de $G(s)$. En fait, pour un système initial stable, on ne pourra garantir la stabilité du modèle réduit d'ordre m que si on retient les m pôles dominants de $G(s)$.

2-2) Approximation par les moments (Zakian [1973])

Le moment d'ordre i d'un système de réponse impulsionnelle $F(t)$ se définit comme suit :

$$Y_i = \int_0^{\infty} t^i F(t) dt$$

Les moments sont liés de façon très simple aux coefficients du développement en série de la fonction de transfert au voisinage de $s = 0$. En effet, on peut écrire :

$$G(s) = Y_1 + Y_2s + Y_3s^2 / 2! + \dots$$

La fonction de transfert P_{μ} / Q_{ν} permettant d'obtenir les $(\mu + \nu)$ premiers moments de $G(s)$ est donc son approximant de Padé.

2-3) Approximation par les paramètres de Markov

Baker [1965] a proposé de réaliser l'approximation d'une fonction de transfert autour de plusieurs points. L'approximation autour de $s = \infty$ est l'approximation par les paramètres de Markov.

Si $G(s) = M_0s^{-1} + M_1s^{-2} + \dots$ est le développement de $G(s)$ pour $s = \infty$, les coefficients M_i sont appelés paramètres de Markov.

L'identification par le modèle réduit de quelques paramètres de Markov du système initial permet :

- d'obtenir une meilleure qualité du transitoire.
- de mieux reproduire les propriétés de stabilité du système initial qu'une approximation de Padé, mais sans que l'on puisse assurer la stabilité (l'instabilité) pour un système initial stable (instable).

2-4) Fractions continues

Utilisées depuis longtemps en théorie des circuits, notamment pour la synthèse, les décompositions en fractions continues se sont révélées être un outil commode de simplification des fonctions de transfert (Shamash [Aug. 1974]).

La décomposition classique se présente sous la forme suivante :

$$G(s) = \frac{1}{h_1 + \frac{s}{h_2 + \frac{s}{h_3 + \dots}}}$$

Les coefficients h_i sont les premiers termes de la division de polynômes suivant les puissances croissantes de s (les moments). Les modèles réduits s'obtiennent simplement par troncature de la décomposition.

Exemple :

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 3s + s^2} = \frac{1}{1 + 3s + s^2} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\frac{s+1}{s+2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{s}{4 + s/(1/2)}}$$

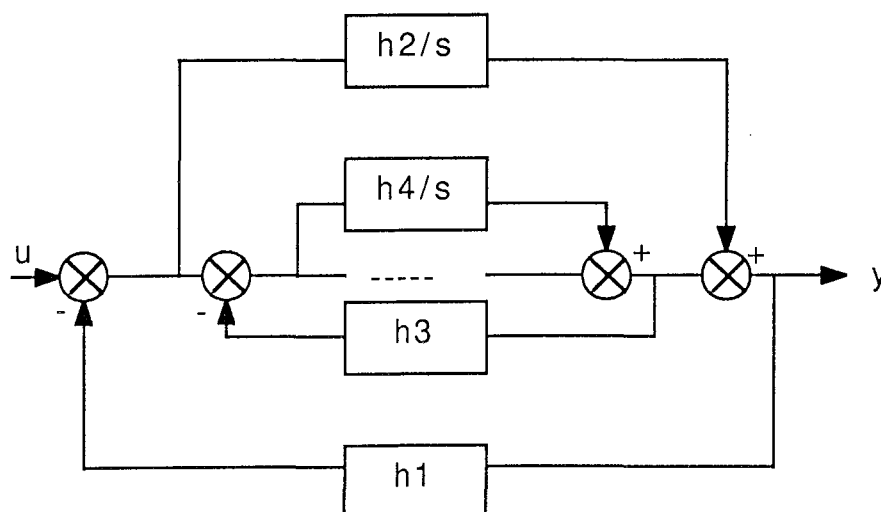
Le modèle réduit d'ordre 1 sera : $G_a(s) = \frac{1}{1 + s/(1/2)} = \frac{1}{1 + 2s}$

Chen [1974] a proposé pour la décomposition, l'utilisation de la forme équivalente suivante :

$$G(s) = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2/s + \frac{1}{h_3 + \dots}}}$$

Les h_i sont les premiers termes de la division de polynômes suivant les puissances décroissantes de s (paramètres de Markov).

Cette formulation conduit à représenter $G(s)$ par une suite de chaînes feed-back et feed-forward imbriquées.



La simplification revient à ignorer l'influence des chaînes les plus intérieures. Ceci n'étant que la généralisation de la simplification bien connue en asservissement consistant à remplacer le transfert $\frac{T}{1+rT}$ par $\frac{1}{r}$ lorsque le gain en boucle ouverte rT est jugé suffisant.

Chen [1974] a montré que l'extension de cette méthode au cas multivariable était possible lorsque le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties. La matrice de transfert est alors décomposée sous la forme suivante :

$$M(s) = \left[H_1 + s \left[H_2 + s \left[\dots \right]^{-1} \right]^{-1} \right]^{-1}$$

L'algorithme de réduction par la méthode de Chen est très simple mais nécessite une légère modification pour être applicable lorsque certains H_i sont nuls. Commault et al. [1977] ont montré que cette méthode n'est qu'un cas particulier de l'approximation de Padé pour laquelle

$$\text{degré du numérateur} = \text{degré du dénominateur} - 1$$

2-5) Approximation mixte

Chuang [1970] a proposé la décomposition suivante :

$$G(s) = \frac{1}{h_1 + \frac{s}{h'_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{s}{\dots}}}}$$

Les h_i et h'_i étant obtenus en divisant alternativement suivant les puissances croissantes et décroissantes de s . Le modèle réduit $G_a(s)$ obtenu en tronquant à l'ordre m cette décomposition possède m moments et m paramètres de Markov identiques à ceux de $G(s)$.

La forme mixte de Caueur proposée par Goldman et Leondes [1977] est la suivante :

$$G(s) = \frac{1}{h_1 + h'_1 s + \frac{s}{h_2 + h'_2 s + \dots}}$$

2-6) Approximation par le tableau de Routh (Fossard [1970], Enright et al.[1980])

Elle utilise la décomposition suivante :

$$G(s) = \beta_1 F_1(s) + \beta_2 F_1(s) F_2(s) + \dots$$

$$F_i(s) = \frac{1}{\alpha_i s + \frac{1}{\alpha_{i+1} s + \frac{1}{\dots}}}$$

Le modèle réduit d'ordre m s'obtient en imposant $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 0$ pour $i > m$. Les coefficients α_i sont calculés par l'algorithme de construction du tableau de Routh classiquement utilisé pour le test

de stabilité. Si le système initial est stable, tout modèle réduit sera stable par construction ; la réciproque n'est en général pas vérifiée.

Le modèle réduit obtenu est une approximation de $G(s)$ autour de $s = \infty$ (hautes fréquences), pour se ramener autour de $s = 0$, Hutton utilise la transformation réciproque :

$$G(s) \rightarrow G_R(s) = \frac{1}{s} G\left(\frac{1}{s}\right)$$

L'algorithme de réduction se déroule donc comme suit :

$$G(s) \xrightarrow{\text{Transformation réciproque}} G_R(s) \xrightarrow{\text{Réduction de Routh}} G_R(s) \xrightarrow{\text{Transformation réciproque}} G(s)$$

Astrom [1970] a donné un algorithme numérique pour calculer α_i et β_j .

L'approximation de Routh possède les propriétés suivantes :

- * La réduction d'un système stable conduit à un système stable.
- * Lorsque le système est instable, Hutton propose d'effectuer une translation de l'axe imaginaire $s \longrightarrow s + a$ ($a > 0$) pour le rendre stable, puis d'effectuer la réduction et de faire ensuite la translation $- a$. La non unicité de a et du modèle réduit rend cette méthode peu satisfaisante.
- * Le modèle réduit d'ordre m garde les m premiers moments de $G(s)$. La méthode est applicable aux systèmes multi-entrées ou multi-sorties.

2-7) Réduction mixte de Pal [1980]

Cette méthode combine l'approche des fractions continues et le tableau de Routh-Hurwitz. Elle s'applique aux systèmes multivariables et garantit que la réduction d'un système stable conduit à un modèle stable.

2-8) Méthode de Hsia [1972]

Cette méthode est basée sur l'égalité des réponses fréquentielles du modèle réduit et du système original autour de la fréquence nulle i.e. $\frac{H(jw)}{L(jw)}$ est proche de l'unité au voisinage de $w = 0$, $H(s)$ étant la fonction de transfert du système :

$$H(s) = K \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} \quad m \leq n \quad (\text{VI.5})$$

dans laquelle les pôles sont stables. $L(s)$ est la fonction de transfert du modèle réduit d'ordre inférieur à n :

$$L(s) = K \frac{1 + c_1 s + \dots + c_p s^p}{1 + d_1 s + \dots + d_q s^q} \quad p \leq q \leq n \quad (\text{VI.6})$$

Dans le cas où $H(s)$ a des pôles instables, ceux-ci doivent être conservés en $L(s)$.

On remarque que les gains du système et du modèle réduit sont les mêmes: il s'agit du gain permettant à l'erreur permanente de la réponse indicielle du modèle de tendre vers zéro. L'approximation consiste à choisir un ordre de $L(s)$ et à calculer les c_i et d_i tels que $L(s)$ ait une

réponse fréquentielle très proche de celle de $H(s)$. Pour cela on utilise le développement en série de Taylor de $\lambda(\omega) = \left| \frac{H(j\omega)}{L(j\omega)} \right|^2$ autour de $\omega = 0$.

On peut remarquer ici que ce développement de Taylor autour de la fréquence nulle ne donne pas une réduction satisfaisante parce qu'il ne tient compte que des très basses fréquences. Une amélioration de cette approche consiste alors à effectuer le développement en série de Taylor autour de la fréquence de coupure du système.

Cette méthode est très difficile à programmer.

2-9) Approximation optimale des systèmes linéaires

Silverman [1981] a utilisé l'approximation de Adamjan-Arov-Krein [1971]. Il a également montré que l'approximation basée sur la réalisation équilibrée est équivalente aux procédures de réalisation minimale proposées par Kung et par Zeiger. Ces approximations sont bonnes mais elles ne sont pas optimales.

Les résultats essentiels de Adamjan et al, sont les suivants :

Théorème 1 (domaine temporel) :

Supposons que σ_{r+1} ($< \sigma_r$) représente la $(r+1)^{\text{ème}}$ valeur singulière de la matrice de Hankel H . Il existe une matrice de Hankel unique Λ^r de rang r qui minimise $\|H - \Lambda\|_s$ pour toutes les matrices de Hankel Λ de rang r et $\|H - \Lambda^r\|_s = \sigma_{r+1}$. De plus $\Lambda^r = H - H(\Phi^r(z))$

où

$$\Phi^r(z) = \sigma_{r+1} \frac{\mu^{r+1}(z)}{\nu^{r+1}(z)} \quad \mu^{r+1}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{r+1}(z) \quad \nu^{r+1}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{r+1}(z)$$

et μ^i et ν^i sont les vecteurs singuliers droit et gauche de la droite de $H(f)$.

Théorème 2 (domaine fréquentiel) :

Supposons que $f \in L_\infty$ et σ_{r+1} ($< \sigma_r$) représente la $r+1^{\text{ème}}$ valeur singulière de $H(f)$. Alors il existe une fonction unique g^r qui minimise $\|f - g\|_\infty$ pour toutes les classes de fonctions $g = g_s + g_1$ où g_s est fonction de degré r strictement propre rationnelle avec des pôles de module < 1 et g_1 représente n'importe quelle fonction bornée sur $|z| = 1$ avec $c_k(g_1) = 0, k > 0$. De plus :

$$g^r(z) = f(z) - \Phi^r(z) \quad \text{et} \quad \|f - g^r\|_\infty = \sigma_{r+1}$$

Silverman démontre que la partie propre stable $g_s^r(z)$ est de degré r et que $H(g_s^r(z)) = H(g^r) = r$ minimise la matrice de Hankel du théorème 1.

Propriété

u^{r+1} a précisément r zéros dans $|z| < 1$ et σ_{r+1} est une valeur singulière de H . Contrairement à Silverman, Adamjan et al. n'ont pas donné d'algorithme pour calculer ces fonctions mais ont proposé des formules faisant intervenir des séries infinies.

On considère une fonction de transfert scalaire :

$$f(z) = c (zI - A)^{-1} b \text{ où } A \text{ est une matrice de dimension } (n \times n)$$

$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ où $d(z) = \det(zI - A)$ est de degré n avec $\deg n(z) < n$. Pour utiliser la représentation équilibrée du système, une expression finie de u^i et v^i peut être obtenue de la façon suivante :

Supposons que $H = H(f)$ et soit T telle que :

$$(A, B, C)_n \xrightarrow{T} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})_n \text{ représentation équilibrée.}$$

Supposons que e_i représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice d'identité $(n \times n)$ donc

$$u^i(z) = \sigma_i^{-1/2} \hat{C} (zI - \hat{A})^{-1} e_i \quad (\text{VI.7})$$

$$v^i(z) = \sigma_i^{-1/2} e_i^T (I - z \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad (\text{VI.8})$$

avec $\lambda = \pm \sigma_{r+1}$, la $r + 1^{\text{ème}}$ valeur propre de H

$$g^r(z) = \frac{z^{-1}n(z)m(z^{-1}) - \lambda d(z^{-1})m(z)}{z^{-1}d(z)m(z^{-1})} \quad (\text{VI.9})$$

Algorithme

On rappelle brièvement les étapes essentielles permettant de calculer g^r du théorème 2 :

1) résoudre les équations de Lyapunov donnant M et W i. e.

$$A W^T + A^T W = - B B^T$$

$$A^T M + A M^T = - C^T C$$

2) calculer les valeurs propres de MW

3) trouver t_{r+1} , la $r + 1^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de passage T

4) trouver $m^*(z)$

L'étape 4 revient à un problème de valeur propre, car si $t_{r+1} b \neq 0$ (vérifiée en général), alors les zéros de $m(z)$ sont les valeurs propres de la matrice :

$$A - \frac{1}{t_{r+1}} b t_{r+1} A$$

Silverman a proposé plusieurs méthodes pour calculer $m(z)$.

2-10) Optimisation

Le critère d'optimisation habituellement considéré est l'intégrale du carré de l'erreur des réponses du système originel et du système réduit aux entrées en échelon ou en impulsion :

$$J = \int_0^{\infty} (y(t) - \hat{y}(t))^2 dt \quad (\text{VI.10})$$

où $y(t)$ est la sortie du système original d'ordre n et $\hat{y}(t)$ la sortie du système réduit d'ordre m . Pour un système mono-entrée, mono-sortie, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$y(t) = \sum_{j=1}^n r_j \exp(p_j t) \quad (\text{VI.11})$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^m \hat{r}_j \exp(\hat{p}_j t) \quad (\text{VI.12})$$

où r_j, \hat{r}_j sont les résidus et p_j, \hat{p}_j sont les pôles du système original et réduit respectivement. Riggs et Edgar [1975] ont calculé les résidus \hat{r} qui minimisent le critère J . Ces résidus peuvent donc être calculés pour la réponse impulsionnelle en résolvant le problème d'optimisation quadratique, soit $(\partial J / \partial \hat{r}_i) = 0$, ce qui donne :

$$\int_0^{\infty} y(t) \exp((\hat{p}_i t)) dt = \int_0^{\infty} \hat{y}(t) \exp((\hat{p}_i t)) dt \quad (i = 1, m) \quad (\text{VI.13})$$

Si $y(t)$ est connu analytiquement, les équations (VI.11) et (VI.12) impliquent :

$$\sum_{j=1}^n \frac{r_j}{p_j + \hat{p}_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\hat{r}_j}{\hat{p}_j + \hat{p}_i} \quad (i = 1, m)$$

Pour une entrée échelon, les réponses permanentes du système et du modèle réduit doivent être égales pour borner J . Donc, le problème d'optimisation est :

$$\min J = \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{r_j}{p_j} \exp(p_j t) - \sum_{j=1}^m \frac{\hat{r}_j}{\hat{p}_j} \exp(\hat{p}_j t) \right)^2 dt$$

sous la contrainte

$$\sum_{j=1}^n \frac{r_j}{p_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\hat{r}_j}{\hat{p}_j}$$

La solution est obtenue par le système d'équations non linéaires :

$$G(-\hat{p}_i) = \hat{G}(-\hat{p}_i)$$

$$\frac{dG}{ds}(-\hat{p}_i) = \frac{d\hat{G}}{ds}(-\hat{p}_i)$$

· · · · ·

$$\frac{d^m G}{ds^m}(-\hat{p}_1) = \frac{d^m \hat{G}}{ds^m}(-\hat{p}_1)$$

où

G est la fonction de transfert du système et \hat{G} celle du modèle réduit.

Exemple :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

l'approximation de premier ordre est donnée par : $\hat{G}(s) = \frac{\hat{r}_1}{s - \hat{p}_1}$

Les coefficients \hat{r}_1 et \hat{p}_1 sont solutions du système :

$$\frac{1}{(1-\hat{p}_1)(2-\hat{p}_1)} = \frac{\hat{r}_1}{(-2\hat{p}_1)}$$

$$\frac{2\hat{p}_1 - 3}{[(1-\hat{p}_1)(2-\hat{p}_1)]^2} = \frac{\hat{r}_1}{(-2\hat{p}_1)^2}$$

D'où l'on tire que le modèle réduit optimal est :

$$\hat{G}(s) = \frac{0.29}{s + 0.62}$$

3- Approximation du modèle d'état (domaine temporel)

Un certain nombre de méthodes de réduction a été proposé à partir du problème suivant : soit un système linéaire d'ordre n décrit par une représentation d'état : trouver un système d'ordre $m < n$ dont le vecteur d'état soit une "bonne approximation" de m composantes jugées suffisamment représentatives du vecteur initial.

Le choix de ces m composantes est relativement aisé lorsque les variables d'état ont un sens physique ou que le modèle initial est sous forme modale.

Dans la suite, nous supposons le modèle initial décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & \text{où } x &\in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{où } x_1 \in \mathbb{R}^m$$

x étant ordonné de sorte que x_1 soit la partie à conserver dans le modèle réduit.

3-1) Méthodes de Davison et Chidambara [1967], [1968]

Supposons le système diagonalisable, dans la base modale nous avons :

$$x = M z = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$M \dot{z} = A M z + B u$$

$$y = C M z + D u$$

$$\dot{z} = M^{-1} A M z + B B u \quad \text{avec} \quad B B = M^{-1} B$$

$$y = C C z + D U \quad \text{avec} \quad C C = C M$$

$$\dot{z} = \Lambda z + B B u$$

$$y = C C z + D u$$

Λ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A par ordre ascendant; on choisit donc la matrice M de façon à pouvoir séparer les valeurs propres dominantes des autres.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B B_1 \\ B B_2 \end{bmatrix} u \quad y = [C C_1 \ C C_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + D u$$

Λ_1 est supposée contenir les m valeurs propres dominantes de A . Les hypothèses sur le rôle des valeurs propres non dominantes sont différentes :

- Pour Davison $z_2 = 0$ les pôles non dominants sont donc totalement négligés :

$$z_1 = x_1 M^{-1}$$

$$\dot{z}_1 = \Lambda_1 z_1 + B B_1 u$$

$$y = C C_1 z_1 + D u$$

$$M_1^{-1} x_1 = \Lambda_1 M_1^{-1} x_1 + B B_1 u$$

$$y = C C_1 M_1^{-1} x_1 + D u$$

$$\dot{x}_1 = M_1 \Lambda_1 M_1^{-1} x_1 + B B_1 u$$

$$y = C C_1 M_1^{-1} x_1 + D u$$

le modèle réduit de Davison est :

$$A = M_1 \Lambda_1 M_1^{-1} \quad B = M_1 B B_1 \quad C = C C_1 M_1^{-1} \quad D = D$$

Fossard[1970] a montré que l'avantage du modèle de Davison résidait dans l'excitation correcte des modes conservés dans le vecteur d'état réduit.

- Pour Chidambara : $z_2 = -\Lambda_2^{-1} B_2 u$: le comportement statique des modes négligés est ainsi conservé :

$$x_1 = M_1 z_1 - M_2 \Lambda_2^{-1} B_2 u$$

$$z_1 = M_1^{-1} (x_1 + M_2 \Lambda_2^{-1} B_2 u)$$

$$z_1 = \Lambda_1 z_1 + BB_1 u$$

$$y = CC_1 z_1 + CC_2 (-\Lambda_2^{-1} B_2 u) + D u$$

$$M_1^{-1} x_1 = \Lambda_1 M_1^{-1} (x_1 + M_2 \Lambda_2^{-1} B_2 u) + BB_1 u$$

$$x_1 = M_1 \Lambda_1 M_1^{-1} x_1 + [M_1 BB_1 + M_1 \Lambda_1 M_1^{-1} M_2 \Lambda_2^{-1} B_2] u$$

$$y = CC_1 M_1^{-1} x_1 + [CC_1 M_1^{-1} M_2 \Lambda_2^{-1} B_2 - CC_2 \Lambda_2^{-1} B_2 + D] u$$

le modèle réduit de Chidambara est donc :

$$A = M_1 \Lambda_1 M_1^{-1} \quad B = M_1 BB_1 + M_1 \Lambda_1 M_1^{-1} M_2 \Lambda_2^{-1} B_2 \quad C = CC_1 M_1^{-1}$$

$$D = CC_1 M_1^{-1} M_2 \Lambda_2^{-1} B_2 - CC_2 \Lambda_2^{-1} B_2 + D$$

l'intérêt connu du modèle de Chidambara est la conservation du gain statique.

Sur le vecteur d'erreur $x_1 - \hat{x}_1$, ces propriétés se traduisent de la façon suivante : pour une entrée en échelon ($x_1 - \hat{x}_1$) ----> 0 dans le modèle de Chidambara, mais $x_1 - \hat{x}_1$ ne possède aucun des modes de Λ_1 .

Davison a proposé plusieurs méthodes pour compenser la perte du gain statique. Nous ne citerons que celle qui ne détruit pas la propriété précédente. Il s'agit simplement d'effectuer une translation sur x , ce qui se traduit en sortie par l'introduction d'une matrice.

$$D = -CC_1 \Lambda_2^{-1} BB_2$$

Montionnons finalement que Wilson [1973] a proposé une version discrète des méthodes précédentes.

3-2) Agrégation (Aoki [1968])

L'existence d'une relation linéaire entre les vecteurs d'état du modèle initial et du modèle réduit conduit à un certain nombre de propriétés intéressantes. Les méthodes de type agrégation semblent également être celles qui présentent les meilleures garanties pour le calcul d'une commande simplifiée.

Définition :

Soit un système S décrit par : $\dot{x} = Ax + Bu$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$

Le système \hat{S} est dit agrégé de S par l'opérateur linéaire L si, à partir de l'état initial

$$\hat{x}(0) = Lx(0)$$

le vecteur d'état \hat{x} de \hat{S} vérifie $\dot{\hat{x}} = Lx$ pour toute entrée u appliquée simultanément aux deux systèmes. Soit

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u ; \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^m \quad m < n, \text{ l'équation dynamique de } \hat{S}$$

L'agrégation est équivalente aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{A}L &= LA \\ \hat{B} &= LB & \hat{C} &= CL^+ \\ L^+ &= L^T(LL^T)^{-1} & & \text{pseudo-inverse de } L \end{aligned} \tag{VI.14}$$

La matrice L est supposée de rang maximum. Le modèle réduit de Davison est un modèle agrégé. Ceci est également vrai pour le modèle de Chidambara en monovarié.

Propriétés de la matrice d'agrégation et des systèmes agrégés

Aoki [1968] a établi qu'une condition nécessaire et suffisante pour que L soit une matrice d'agrégation de (A, B) est que le noyau de L soit invariant par A .

De plus :

- Le système agrégé conserve les modes du système initial.
- La paire (\hat{A}, \hat{B}) est commandable si (A, B) est commandable et L de rang maximum.

Quand les équations d'état sont sous la forme compagne (Sinha [1983]), la matrice de commandabilité du système est donnée par

$$U = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \tag{VI.15}$$

En prémultipliant par L et en tenant compte des relations

$$\begin{aligned} LB &= \hat{B} \quad \text{et} \quad LA = \hat{A}L, \text{ on a} \\ LU &= [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \end{aligned} \tag{VI.16}$$

Si on choisit \hat{A} et \hat{B} aussi sous la forme ligne compagne à partir des pôles dominants, L peut être obtenu directement à partir des équations (VI.15) et (VI.16), où U est la matrice identité lorsque le système est mono-entrée mono-sortie.

Lorsque A est diagonalisable, la matrice d'agrégation peut se calculer par :

$$L = [I_m, 0]T^{-1} \text{ où } T \text{ est la matrice modale.}$$

3-3) Réalisation partielle (Sinha [1983])

Cette approche de réduction de modèle est basée sur une combinaison de certains moments de la réponse impulsionnelle du système original et de ceux du modèle réduit. Cette méthode est similaire à celle de Chen et Shieh mais elle a l'avantage, contrairement aux autres, d'être applicable aux systèmes multivariés. Pour un système représenté sous une forme d'état (A, B, C) , la fonction de transfert est obtenue par :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{VI.17})$$

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i s^{-(i+1)} \quad (\text{VI.18})$$

où

$$M_i = CA^iB \quad (\text{Paramètres de Markov}) \quad (\text{VI.19})$$

ou encore

$$G(s) = - \sum_{i=0}^{\infty} T_i s^i \quad (\text{VI.20})$$

avec

$$T_i = CA^{-(i+1)}B \quad (\text{Moment}) \quad (\text{VI.21})$$

En comparant les équations (VI.19) et (VI.21), on remarque que

$$M_{-i} = T_{i-1} \quad \text{pour } i \geq 1.$$

M_i et M_{-i} seront donc appelés "paramètres de Markov généralisés".

Pour déterminer une approximation d'ordre inférieur à la dimension du système, on doit obtenir des matrices F, G et H telles que certains paramètres de Markov généralisés des deux systèmes soient identiques. En particulier, il peut être noté que l'utilisation des moments assure une bonne approximation de la réponse permanente, et l'usage des paramètres de Markov améliore l'approximation de la réponse transitoire.

La méthode de Rôzsa et Sinha [1974] utilisant la normalisation de Hermite qui permet l'obtention de la réalisation minimale d'un système à partir des paramètres de Markov, peut être généralisée en combinant les moments et les paramètres de Markov dans la matrice de Hankel définie comme suit :

$$H_{ij}(k) \triangleq \begin{bmatrix} M_{-k} & M_{-k+1} & \dots & M_{-k+j-1} \\ M_{-k+1} & M_{-k+2} & \dots & M_{-k+j} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ M_{-k+i-1} & M_{-k+i} & \dots & M_{-k+i+j-2} \end{bmatrix}$$

Si $i \geq \alpha$ et $j \geq \beta$ où α et β sont respectivement les indices d'observabilité et de commandabilité du système, alors le rang de $H_{ij}(k)$ est n et la réalisation minimale peut être obtenue comme on l'a expliqué au chapitre sur la réalisation minimale. Si le processus de normalisation de Hermite est arrêté après m ($m < n$) étapes, la réalisation partielle est obtenue en utilisant seulement quelques paramètres de Markov généralisés au lieu de la totalité.

Shamash [Aug. 1975] a également donné des algorithmes numériques de réduction par la réalisation partielle.

3-4) Agrégation avec réalisation partielle (Sinha [1983])

Lorsque le modèle agrégé conserve les valeurs propres dominantes du système originel, sa stabilité est garantie si le système est stable. Mais, comme on l'a déjà vu, les régimes permanents des réponses indicielles du modèle agrégé et du système ne sont pas identiques. On peut y remédier en sélectionnant un modèle agrégé qui préserve les moments.

Une réalisation partielle (F, G, H) d'un système irréductible (A, B, C) est une réalisation quelconque, pas nécessairement irréductible, telle que $HF^iG = CA^iB$ pour tout $i \in I \underline{\Delta} \{-i_0, -i_0+1, \dots, -1+i_1, i_1\}$ où i_0 et i_1 sont des nombres tels que $i_1 \geq 1$ et $i_0 + i_1 + 1 < \alpha + \beta$, α et β étant respectivement les indices de commandabilité et d'observabilité de (A, B, C).

La procédure pour obtenir les matrices F et G du modèle réduit est exactement la même que celle obtenue par l'agrégation (Aoki [1968]). La matrice H quant à elle est déterminée de façon à préserver certains moments et / ou paramètres de Markov du système initial.

3-5) Méthode des perturbations singulières (Kokotovic [1968], [1969], [1972])

L'approche des perturbations singulières est très utile si le système contient deux échelles de temps, c'est-à-dire si les variables peuvent être découplées en deux groupes : les variables "rapides" et les variables "lentes". Le système est temporairement découplé en deux systèmes d'ordre inférieur représentant les parties "lente" et "rapide" du système. La Décomposition de vecteur d'état du système décrit par

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.22})$$

aboutit donc à :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.23})$$

où

$\varepsilon > 0$ est scalaire, $x_1 \in R^m$ et $x_2 \in R^{n-m}$. Un modèle d'ordre m s'obtient en faisant $\varepsilon = 0$, et en éliminant x_2 de l'équation (VI.15). Celle-ci donne :

$$x_2 = -A_{22}^{-1} (A_{21} x_1 + B_2 u)$$

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x_1 + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u$$

$$y = (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) x_1 - C_2 A_{22}^{-1} B_2 u$$

le modèle réduit est :

$$F = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \quad G = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2, \quad H = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}, \quad D = -C_2 A_{22}^{-1} B_2$$

Le découplage du système en variables "rapides" "lentes" peut se faire à l'aide de plusieurs méthodes :

a) Matrice modale

On cherche un changement de base M tel que la matrice \hat{A} contienne les mêmes valeurs propres que A mais en ascendant i. e.

$$\hat{A} = M^{-1} A M \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1} B \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = C M \quad \hat{C} = [C_1 \ C_2]$$

b) Réalisation équilibrée (Symétrisation interne) (Moore [1981])

Elle consiste à rechercher les composantes d'état les plus fortement commandables et observables. Pour cela on détermine le changement de base $T : x \longrightarrow \bar{x}$ qui diagonalise simultanément les matrices

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A^T t} B B^T e^{A t} dt \quad W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

de la manière suivante :

$$T^{-1} W_c (T^{-1})^T = T^T W_o T = J = \text{diag} (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n)$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$

$$\hat{A} = T^{-1} A T \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1} B \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = C T \quad \hat{C} = [C_1 \ C_2]$$

3-6) Méthode de la réalisation équilibrée

Cette approche a été utilisée par Moore [1981], le modèle réduit qui reflète la partie la plus observable et commandable du système peut être déterminée à partir des tests suivants :

$$\sigma_m \gg \sigma_{m+1}$$

ou $\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \gg \sum_{i=m+1}^n \sigma_i^2$

les matrices [F, G, H] du modèle réduit s'obtiennent par simple partition de \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} :

$$F = P \hat{A} P^T \quad G = P \hat{B} \quad H = \hat{C} P^T \quad \text{avec } P = [I_m \ 0]$$

Obtention de la symétrisation interne

On considère un système continu donné sous la représentation d'état (VI.22).

La matrice de Hankel formée à partir des séquences de la réponse impulsionnelle M_i joue ici un rôle important :

$$H_j = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{j-1} \\ M_1 & M_2 & \dots & M_j \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ M_{j-1} & M_j & \dots & M_{2j-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{j-1} \end{bmatrix} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{j-1}B] = O_j G_j$$

où

O_j et G_j sont respectivement les j matrices d'observabilité et de commandabilité associées à $(A, B, C)_n$. Si A a toutes ses valeurs propres stables, alors la matrice de Hankel infinie $H(f)$ est donnée par :

$$H = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots \\ K_2 & K_3 & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = O G$$

où

O et G sont respectivement les matrices infinie d'observabilité et de commandabilité de $(A, B, C)_n$.

$W = G G^T$ est le Gramien de commandabilité

$M = O^T O$ est le Gramien d'observabilité

Ces matrices W et M de dimension finie ($n \times n$) sont solutions des équations de Lyapunov ;

$$A W^T + A^T W = -B B^T$$

$$A^T M + A M^T = -C^T C$$

Il est bien connu que si $(A, B, C)_n$ et $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})_n$ sont deux réalisations minimales d'un même système, alors il existe une transformation non singulière T telle que :

$$\hat{A} = T A T^{-1} \quad \hat{B} = T B \quad \text{et} \quad \hat{C} = C T^{-1}$$

$$(A, B, C)_n \xrightarrow{T} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})_n$$

donc

$$\hat{O} = O T^{-1} \quad \hat{G} = T G$$

$$\hat{M} = T^{-T} M T^{-1} \quad \hat{W} = T W T^T \quad \text{et} \quad \hat{M} \hat{W} = T^{-T} M W T^T$$

Les valeurs propres de la matrice MW sont donc invariantes par changement de base. Cette invariance est très importante. Puisque les matrices M et W sont définies positives, les valeurs propres $(\sigma_i \ i = 1, \dots, n)$ de MW sont strictement positives :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

W étant une matrice définie positive, elle admet une décomposition en valeurs singulières de la forme :

$$W = U_c \Sigma_c U_c^T \quad U_c U_c^T = I$$

si

$$(A, B, C) \xrightarrow{\Sigma_c^{1/2} U_c^T} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$$

Donc $\hat{W} = I$ et $\hat{M} = \Sigma_c^{1/2} U_c^T M U_c \Sigma_c^{1/2}$; \hat{M} peut alors être décomposée de la façon suivante :

$$\hat{M} = \hat{U}_o \Sigma^2 \hat{U}_o^T \quad \hat{U}_o \hat{U}_o^T = I$$

donc

$$T = \Sigma^{1/2} \hat{U}_o^T \hat{\Sigma}^{-1/2} U_c^T \quad \text{et} \quad M = W = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Le cas discret peut être traité de la même façon en utilisant des équations de Lyapunov en discret (Silverman [1981]).

Cette méthode présente un certain nombre d'avantages en particulier sur le plan numérique : des algorithmes très performants existent pour résoudre les équations de Lyapunov associées à W et M , ainsi que pour diagonaliser des matrices stables. Finalement, elle donne un critère permettant de choisir l'ordre de modèle réduit.

3-7) Méthode d'agrégation via la décomposition de Schur (Hashim [58], Rachid [59])

Cette méthode est une extension de la méthode d'agrégation classique pour un système multivariable MIMO mal-conditionné, stable ou instable, basé sur la décomposition de Schur.

Comme on l'a vu précédemment, la méthode traditionnelle d'agrégation (Aoki [1968]) pour la réduction de modèle suppose B et C de rang plein.

En plus, l'utilisation de la méthode d'agrégation pour un système qui a des valeurs propres multiples ou très voisines peut échouer pour obtenir la matrice modale. Un moyen d'éviter ce problème est de construire la matrice de Jordan mais, malheureusement elle n'est pas fiable numériquement et en plus l'ordre de cette matrice n'est pas facile à déterminer.

Quelques modifications ont été proposées sur cette méthode pour l'utiliser dans le cas général, où les conditions ci-dessus ne sont pas nécessairement valables. Cette méthode est basée sur la décomposition de Schur qui donne un moyen direct pour partitionner et donner des résultats numériquement fiables.

Avant d'expliquer notre méthode, on rappelle brièvement la décomposition de Schur.

La décomposition de Schur

Cette décomposition joue un rôle très important en algèbre linéaire, grâce à sa façon de triangulariser une matrice réelle de dimension n :

$$U^T A U = T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

Dans la diagonale essentielle les valeurs propres de la matrice A sont ordonnées suivant leurs parties réelles ascendantes ou descendantes: on peut donc séparer la partie rapide et la partie lente du système.

La méthode

Pour un système continu donné par sa représentation d'état (VI.22)

1- En utilisant la décomposition de Schur qui sépare la partie lente de la partie rapide on obtient à partir de [A, B, C] :

$$\tilde{A} = U^T A U = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = U^T B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = C U = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]$$

i. e. $\text{Re.}(\lambda_i(\tilde{A}_{11})) > \text{Re.}(\lambda_i(\tilde{A}_{22}))$

$$[G(s)] = [G(s)]_L + [G(s)]_R$$

où

$$[G(s)]_L := [\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1] \text{ représente la partie lente de } [G(s)]$$

$$[G(s)]_R := [\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_1] \text{ représente la partie rapide de } [G(s)]$$

Dans ce cas \tilde{A}_{11} contient les valeurs propres dominantes de la partie stable et la partie instable du système si elle existe.

Dans ce cas, on calcule les valeurs singulières de la matrice de Hankel pour trouver m (l'ordre de modèle réduit) telle que l'erreur totale est inférieure à une tolérance donnée.

2- Le changement de variable est donné par :

$$x \rightarrow S^T x \quad \text{où} \quad S = U$$

La matrice d'agrégation k est donnée comme les premières m lignes de S^T . On voit ici qu'on évite l'inverse de la matrice S qui pose des problèmes au niveau de l'utilisation de la méthode classique pour des systèmes mal-conditionnés. En même temps, la matrice de passage peut être facilement obtenue même dans le cas où la matrice A contient des valeurs propres répétées ou très voisines.

3- Pour obtenir {F, G, H}, les matrices de la représentation d'état du modèle réduit, on utilise la même technique que la méthode classique excepté le calcul de H :

$$H F^{-1} G = C A^{-1} B = \tilde{C} \tilde{A}^{-1} \tilde{B}$$

Une amélioration de cette méthode est donnée (Rachid [95]) en utilisant la technique des perturbations singulières.

4- Choix de l'ordre du modèle réduit

4-1) Le concept des modes dominants (Enright [1980])

Cette technique a été proposée par Davison [1967] et Chidambara [1968] et a été également discutée par Marshall [1966], Mahaparta [1979], Rao [1979] et Elrazaz [1979]. L'idée est de retenir les valeurs propres dominantes pour simplifier un système d'ordre élevé par un modèle d'ordre inférieur de la manière suivante : les variables d'état du système réduit sont choisies en majeure partie parmi les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres dominantes retenues.

Considérons un système linéaire et invariant donné par :

$$\dot{x} = A x(t) + B u(t) : \quad t > 0 \quad (\text{VI.24})$$

et

$$x(0) = 0 \quad (\text{VI.25})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, et A et B sont des matrices d'ordre $(n \times n)$ et $(n \times r)$, respectivement.

L'équation (VI.24) peut être réécrite sous la forme partitionnée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{VI.26})$$

où $x_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$, et x_1 représente l'état à conserver dans le modèle réduit

$$\text{Soit } \Lambda = P^{-1} A P \quad (\text{VI.27})$$

où P est la matrice modale de A.

Λ est la matrice des valeurs propres

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n] \quad (\text{VI.28})$$

avec

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$$

La solution de (VI.24) (VI.25) avec $u(t)$ une entrée en échelon est donnée par :

$$x(t) = P_1 [\exp(\Lambda_1 t) - I] \Lambda_1^{-1} [V_{11} B_1 + V_{12} B_2] + P_0 [\exp(\Lambda_2 t) - I] \Lambda_2^{-1} [V_{21} B_1 + V_{22} B_2] \quad (\text{VI.29})$$

Soit $V = P^{-1}$. Les matrices P, V, Λ et B sont partitionnées comme :

$$P = [P_1 \quad P_0] \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.30})$$

$\Lambda_1 (m \times m)$, et $\Lambda_2 (n - m \times n - m)$ sont des matrices diagonales

Si les m valeurs propres sont considérées comme dominantes, la solution approchée de (VI.29) est donnée par :

$$x(t) = P_1 [\exp(\Lambda_1 t) - I] \Lambda_1^{-1} [V_{11} B_1 + V_{12} B_2] \quad (\text{VI.31})$$

L'erreur impliquée par la négligence des modes $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ dans l'équation (VI.29) est donnée par :

$$E(t) = P_0 [\exp(\Lambda_2 t) - I] \Lambda_2^{-1} [V_{21} B_1 + V_{22} B_2] \quad (\text{VI.32})$$

$$\|E(t)\| \leq \|P_0\| \|\exp(\Lambda_2 t) - I\| \|\Lambda_2^{-1}\| [\|V_{21}\| \|B_1\| + \|V_{22}\| \|B_2\|] \quad (\text{VI.33})$$

$$\|\exp(\Lambda_2 t) - I\| < \sqrt{n-m}; \|\Lambda_2^{-1}\| = \left[\sum_{i=m+1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \right]^{1/2} \cong \frac{1}{|\lambda_{m+1}|} \quad (\text{VI.34})$$

$$\|P_0\| < \|P\|, \quad \|V_{21}\| \|V_{22}\| < \|V\|$$

de (VI.33) et (VI.34)

$$\|E(t)\| \leq \|P\| \|V\| [\|B_1\| + \|B_2\|] \frac{\sqrt{n-m}}{|\lambda_{m+1}|} \quad 0 < t < \infty \quad (\text{VI.35})$$

Pour le système donné en (VI.24), supposons que :

$$\|P\| \|V\| [\|B_1\| + \|B_2\|] = K \quad (\text{constant}) \quad (\text{VI.36})$$

Donc

$$\|E(t)\| \leq K \frac{\sqrt{n-m}}{|\lambda_{m+1}|} \quad 0 < t < \infty \quad (\text{VI.37})$$

Cette équation (VI.37) montre qu'en négligeant les modes rapides l'erreur d'état dépend de $\sqrt{n-m}/|\lambda_{m+1}|$. Donc l'erreur peut être réduite si :

$$U_m = \frac{\sqrt{n-m}}{|\lambda_{m+1}|} \rightarrow 0$$

U_m est une fonction monotone qui décroît lorsque m croît, donc pour ce cas la technique de Mahapatra donne seulement le meilleur choix de m quand $m = n$ et par conséquent il est difficile de choisir un ordre m .

A.S. Rao et al. [1979] ont proposé un critère :

$$V_m = \frac{U_{m-1}}{U_m}$$

V_m peut être utilisé comme critère plus performant pour déterminer l'ordre m . La présence de plusieurs maxima de V_m indique qu'il y a plusieurs choix de m .

Comme nous l'avons déjà dit ces critères ne s'utilisent que dans le cas d'un système à valeurs propres réelles. Z. Elrazaz et N. K. Sinha [1979] ont généralisé ce travail au cas des valeurs propres du système non strictement réelles.

Dans le cas où le système a des valeurs propres complexes la matrice Λ sera sous la forme de Jordan (pour des valeurs propres multiples) et les colonnes de P seront les vecteurs propres généralisés de A .

On doit obtenir les valeurs de $\|\Lambda_2^{-1}\|$ et $\|\exp \Lambda_2 t - I\|$ pour le cas général où Λ_2 a des valeurs propres complexes. $\lambda_i = -\sigma_i - jw_i$ avec $\sigma_i > 0$ et $w_i > 0$.

On a : $\| \exp \Lambda_2 t - I \| \leq 2(n - m)^{1/2}$

et
$$\| \Lambda_2^{-1} \| = \left\| \sum_{i=m+1}^n \frac{\sigma_i \pm j\omega_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \right\| < \frac{\sqrt{n - m}}{\min |\lambda_i|} \quad m+1 \leq i \leq n,$$

donc,

$$\| E(t) \| < K \hat{U}_m$$

où
$$\hat{U}_m = \frac{\sqrt{n - m}}{\min |\lambda_i|} [2\sqrt{n - m} + 1] \quad m + 1 \leq i \leq n$$

$$\hat{V}_m = \frac{\hat{U}_{m-1}}{\hat{U}_m}$$

Ces résultats, peuvent être facilement étendus à un système multi-entrées, multi-sorties à valeurs propres réels et complexes par l'algorithme de Z. Iwai et Y. Kubo [1979].

$$\hat{U}_m = \left[\frac{1}{\min \{ |\lambda_i| \}} - \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_{m+1})} \right] \quad m \leq i \leq n$$

\hat{V}_m est considéré comme un bon critère de sélection de l'ordre du modèle réduit lorsqu'il devient très grand. quand on passe de $m-1$ à m . Par contre \hat{U}_m peut être grand. Il apparaît alors important de comparer \hat{U}_m avec le seuil d'erreur pour s'assurer que le modèle réduit donne une approximation satisfaisante du système original.

Mehta [1982] a trouvé que l'idée des modes dominants dans des cas pratiques ne donne pas de bons résultats, et il a proposé une technique basée sur l'erreur d'intégrale carrée (ISE) ou l'erreur d'intégrale absolue (IAE).

Considérons un système linéaire invariant, donné par :

$$\dot{y}(t) = A y(t) + B u(t) \quad y(0) = 0 \quad (\text{VI.38})$$

$$w(t) = C y(t) \quad (\text{VI.39})$$

supposons que

$$y(t) = P x(t) \quad (\text{VI.40})$$

où P est la matrice modale de A . Ecrivons (VI.40) sous forme partitionnée :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.41})$$

$x_1(t) \in \mathbb{R}^m$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ et m donne l'ordre du modèle réduit.

De (VI.38) et (VI.41) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{VI.42})$$

La simplification de Marshall [47] est obtenu en faisant $\dot{x}_2(t) = 0$

i.e.

$$\dot{x}_1(t) = D_1 x_1(t) + R_1 u(t) \quad (\text{VI.43})$$

$$0 = D_2 x_2(t) + R_2 u(t)$$

La simplification de Davison est obtenue en faisant $x_2 = 0$

Par simplicité, on suppose que les valeurs propres (λ_i ($i = 1, n$)) de A sont distinctes, réelles et négatives, $U \in \mathbb{R}^{\lambda}$ et $W \in \mathbb{R}^{\lambda}$. Sous ces conditions, la sortie du système originel d'après (VI.38) et (VI.39) avec une entrée échelon est :

$$W(t) = CPx(t) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i r_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1) \quad (\text{VI.44})$$

Où h_i est le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur ligne $h = CP$ et r_i est le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur colonne $P^{-1}B$. La sortie du modèle réduit de Marshall est obtenue par :

$$\hat{W}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{h_i r_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1) - \sum_{i=m+1}^n \frac{h_i r_i}{\lambda_i} \quad (\text{VI.45})$$

donc l'erreur est :

$$e(t) = W(t) - \hat{W}(t) = \sum_{i=m+1}^n \frac{h_i r_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} \quad (\text{VI.46})$$

Pour le critère (ISE)

$$E_1 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = - \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \frac{h_i h_j r_i r_j}{\lambda_i \lambda_j (\lambda_i + \lambda_j)} \quad (\text{VI.47})$$

Donc le modèle réduit est donné par l'ensemble des m valeurs propres qui minimisent ISE.

Pour le critère (IAE)

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt \leq \sum_{i=m+1}^n \left| \frac{h_i r_i}{\lambda_i^2} \right| = E_2$$

Une approche pratique pour obtenir le modèle réduit consiste à négliger les valeurs propres pour lesquelles E_2 est petit par rapport aux tolérances de l'erreur intégrale absolue.

Pour le modèle réduit de Davison i.e. $x_2 = 0$ la sortie du modèle réduit est obtenue par :

$$\hat{W}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{h_i r_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1)$$

l'erreur est :
$$e(t) = W - \hat{W} = \sum_{j=m+1}^n \frac{h_j r_j}{\lambda_j} (e^{\lambda_j t} - 1)$$

4-2) Critère des valeurs singulières

Ce critère est proposé par Kung [1979] comme critère de réduction du modèle. On sait que l'utilisation de SVD pour la matrice de Hankel donne :

$$H = U \Sigma V^T.$$

Où S est une matrice diagonale

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \sigma_m & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \sigma_n & \end{bmatrix}$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq \sigma_{m+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ les valeurs singulières de H

si $\sigma_m \gg \sigma_{m+1}$

On peut dire que l'ordre du modèle réduit est m , et on cherche la réalisation d'ordre m comme modèle réduit du système originel d'ordre n .

Moore [1981] a proposé un critère qui est basé sur les valeurs singulières de la réalisation équilibrée i.e.

$$\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i^4 \right)^{1/2} \gg \left(\sum_{i=m+1}^n \sigma_i^4 \right)^{1/2} \tag{VI.48}$$

On remarque que (VI.48) est une fonction monotone croissante en fonction de m et ne permet pas une discrimination entre les modèles réduits acceptables d'ordres différents.

Sinha [1985] a proposé une analyse de l'erreur de la matrice équilibrée pour donner une bonne estimation de l'ordre m du modèle équilibré.

4-3) Norme L_∞

Glover [1984] a proposé l'utilisation de la norme L_∞ pour choisir l'ordre du modèle réduit pour un système multivariable continu ou discret.

Pour un système décrit par :

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = H x(k)$$

Supposons que ce système soit asymptotiquement stable, commandable, observable et équilibré, i.e.

$$\Phi^T M \Phi - M + H^T H = 0$$

$$\Phi W \Phi^T - W + \Gamma \Gamma^T = 0$$

$$M = W = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

$$F(z) = H (z I - \Phi)^{-1} \Gamma$$

On a :

(i) $\|F(z)\|_\infty < 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i$ où les σ_i sont les valeurs singulières du système

(ii) pour m tel que $1 \leq m \leq n-1$

$$\|E_{n-m}(z)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=m+1}^n \sigma_i \quad \text{où} \quad E(z) = F(z) - F_{bm}(z)$$

F_{bm} est le modèle réduit d'ordre m . La borne supérieure théorique dans la norme L_∞ de l'erreur de réduction

$$E(z) = F(z) - F_{bm}(z) = 2 \sum_{i=m+1}^n \sigma_i$$

La norme $\|E(z)\|_\infty = \lambda_{\max}^{1/2}(M W)$

Donc, m doit être choisi de telle manière que $2 \sum_{i=m+1}^n \sigma_i \leq \lambda_{\max}^{1/2}(M W)$

5- Résultats numériques

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & -108 & -37 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [50 \quad 15 \quad 1 \quad 0]$

Les valeurs propres de A sont $-1 \pm 4.899i$, -2 , -2 et la fonction de transfert est :

$$G(s) = \frac{s^2 + 15s + 50}{s^4 + 6s^3 + 37s^2 + 108s + 100}$$

Ce système a des pôles multiples. De ce fait, on ne peut pas appliquer les méthodes basées sur la structure propre.

Les modèles réduits par les différentes méthodes sont donnés ci-dessous :

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [-1.1211 \quad 12.5] \quad (\text{Méthode proposée})$$

$$H = [0.0037 \quad 0.0153] \quad D = 0.4994 \quad (\text{Perturbations singulières})$$

$$F_m = \begin{bmatrix} -0.6616 & 2.5345 \\ -2.5345 & -1.9524 \end{bmatrix} \quad G_m = \begin{bmatrix} 0.6486 \\ 0.7214 \end{bmatrix}$$

$$H_m = [0.6486 \quad -0.7214] \quad (\text{Réalisation équilibrée})$$

Les valeurs singulières de ce système sont : $\sigma_1 = [0.3179 \quad 0.1333 \quad 0.0719 \quad 0.0064]$

Le critère des valeurs singulières et le critère des modes dominants pour choisir l'ordre du modèle réduit donnent :

Ordre du modèle réduit	Critère des valeurs singulières	Critère des modes dominants
1	10	1
2	20	1.5
3	243	1

Les deux critères montrent que l'ordre 2 est la meilleure approximation.

La figure 1 (Réponses indicielles) montre les performances de notre méthode par rapport, aux résultats des perturbations singulières et l'approche de la réalisation équilibrée, pour un modèle réduit du deuxième ordre.

2) Cet exemple est le modèle obtenu par la réalisation de la chaudière (Boîte Noire).

$$A = \begin{bmatrix} 0.8802 & -0.0746 & -0.0344 \\ 0.2544 & -0.7520 & 0.3174 \\ -0.2471 & -0.6195 & -0.5890 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5746 & -0.0038 & -0.0113 \\ -0.5138 & 0.0093 & -0.0029 \\ 0.4832 & -0.0158 & -0.0069 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.8959 \quad 0.2559 \quad 0.1399]$$

Les résultats obtenus par les différentes méthodes sont :

Méthode proposée

$$f = 0.8792 \quad g = [0.8209 \quad -0.0083 \quad -0.0137] \quad h = 0.4715$$

Perturbations singulières

$$f = f \quad g = g \quad h_s = 0.8692$$

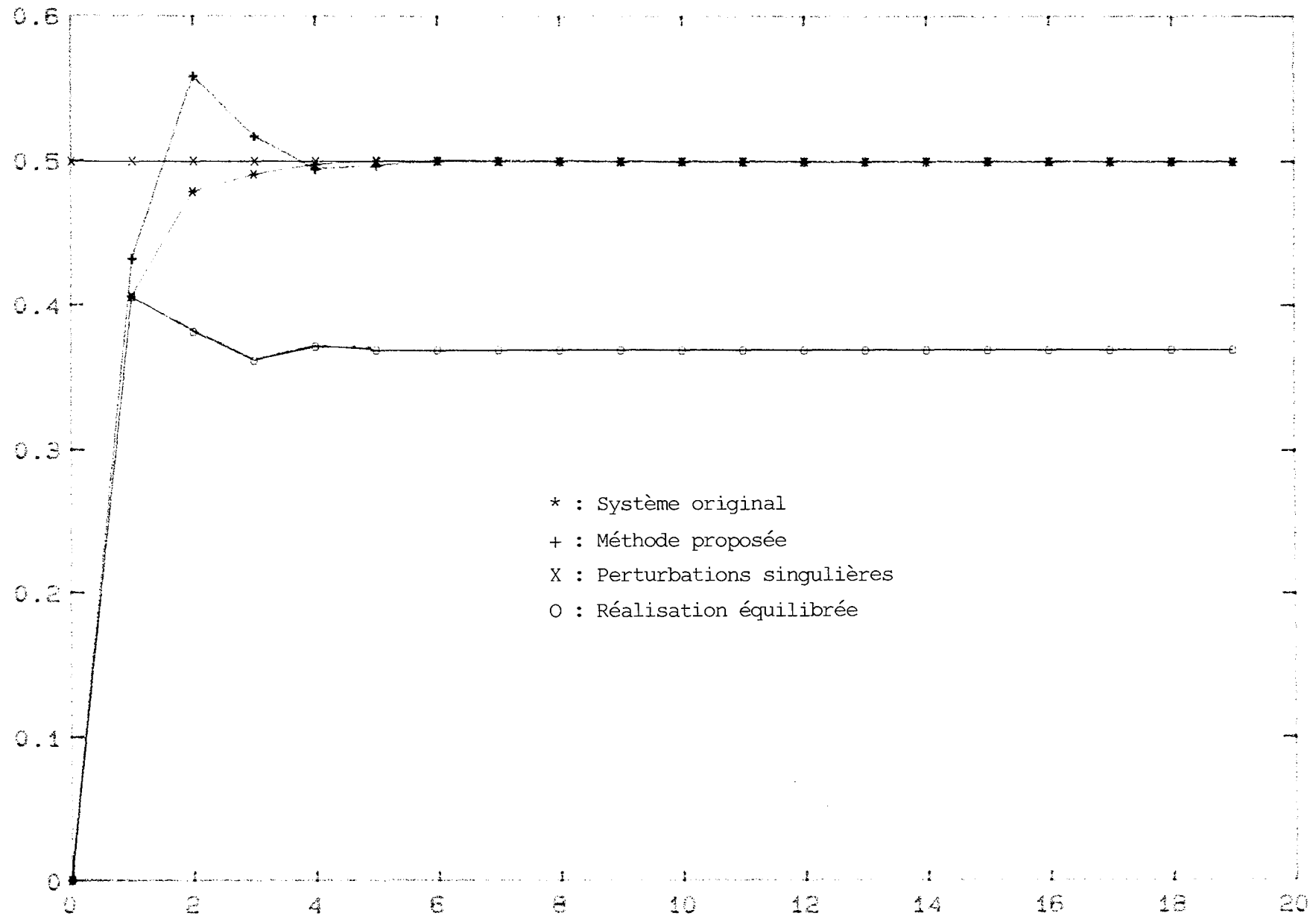
$$D_s = [0.3714 \quad -0.0091 \quad -0.0049]$$

Moore :

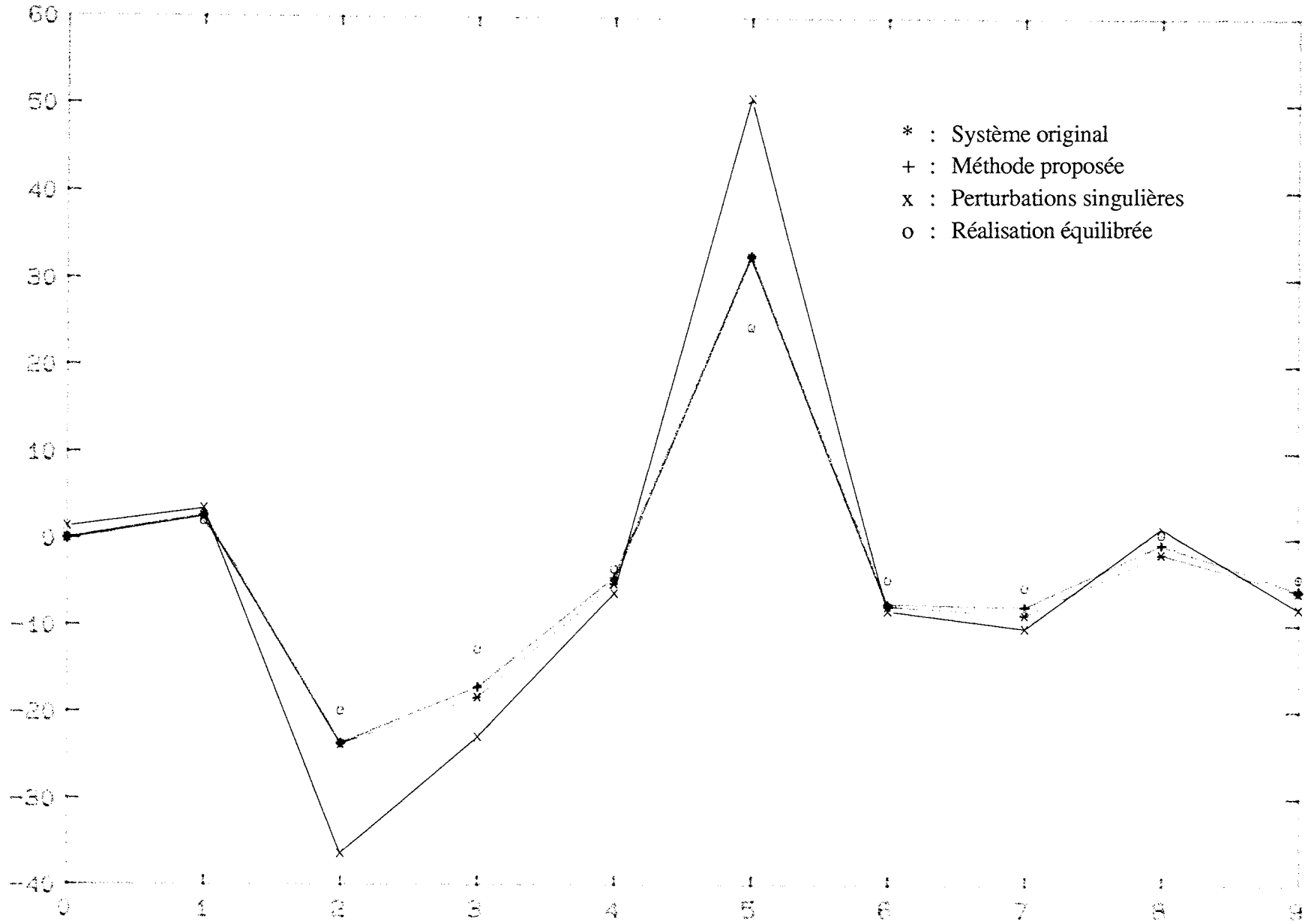
$$a = 0.8741 \quad b = [0.7255 \quad -0.0050 \quad -0.0141] \quad c = 0.7257$$

La figure 2 montre les performances de notre méthode par rapport aux résultats des perturbations singulières et l'approche de la réalisation équilibrée, pour un modèle réduit du premier ordre.

Réponse indicielle du système (*) et des modèles réduits (+, X, O)



Systeme et modèles réduits



6- Conclusion

En ce qui concerne les méthodes fréquentielles, elles sont en général peu simples et limitées aux systèmes SISO.

Les méthodes temporelles dans l'espace d'état quant à elle s'applique aisément aux systèmes MIMO mais présentent des inconvénients dépendant de l'algorithme utilisé :

- L'agrégation pose un problème numérique et spécialement pour les systèmes possédant des pôles multiples ou voisins ; de plus le modèle agrégé n'est souvent pas satisfaisant.

- La réalisation équilibrée ne s'applique qu'aux systèmes stables et minimaux. On peut aussi noter que le gain statique du modèle réduit sera toujours différent de celui du système. Toutefois, cette méthode donne des résultats très satisfaisants pour le régime transitoire, les pôles du modèle réduit étant une certaine combinaison de ceux du système.

- La méthode des perturbations singulières a l'avantage de conserver le gain statique du système et également de tenir compte de l'évolution statique de la partie négligée du système. Par contre, son inconvénient est d'introduire un terme de transmittance directe dans le modèle réduit.

La méthode basée sur la décomposition de Schur que nous avons proposée remédie aux principaux inconvénients cités ci-dessus, car elle évite toute inversion de matrice ; cela nous permet de traiter le problème dans le cas des pôles multiples qui est mal conditionné. De plus le gain statique du modèle réduit est le même que celui du système lorsque ce dernier ne présente pas de pôles à l'origine.

En ce qui concerne le choix de l'ordre du modèle réduit, la méthode la plus efficace est celle de El-Razaz (1979) qui est basée sur le concept du mode dominant.

7- Bibliographie

1- M. J. Bosely and F. B. Lees, "A Survey of Simple transfer function derivation from High Order State Variable Models", *Automatica*, pp. 765-775, Nov. 1972.

2- M. Aoki, "Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation", *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol. AC-13, No. 3, pp. 246-253, June 1968.

3- E. W. Cheney, "Introduction to approximate Theory", McGraw-Hill, New York, 1966.

4- Y. Shamash, "Stable Reduced Order Models Using Padé Approximation", *IEEE Trans. on Auto. Control*, pp. 267-275, August 1974.

5- Y. Shamash, "Linear System Reduction Using Padé Approximation To Allow Retention of Dominant Modes", *Int. J. Control*, pp. 257-272, Feb. 1975.

6- Y. Shamash, "Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and the Padé Approximation Technique", *Int. J. Control*, pp. 475-484, March 1975.

7- Y. Shamash, "Multivariable System Reduction Via Model Methods and Padé Approximation", *IEEE Trans. on Auto. Control*, pp. 815-816, Dec. 1975.

8- M. Lal and R. Mitra, "Simplification of Large System Dynamics using a Moment Evaluation Algorithm", *IEEE Trans. on Auto. Control*, pp. 602-603, Oct. 1974.

9- V. Zakian, "Simplification of Linear Time-Invariant Systems by Moment Matching", *Int. J. of Control*, pp. 455-466, Sep. 1973.

10- G. A. Baker, "Advanced Theory Physics", 1, 1, 1965.

- 11- Y. Shamash, "Continued Fraction for the Reduction of Discret-Time Dynamic Systems", Int. J. of Control, pp. 267-275, Aug. 1974.
- 12- J. E. Akin, "A Note on Control System Simplification", Int. J. of Control, Vol. 14, pp. 989-993, 1971.
- 13- C. F. Chen and L. S. Shieh, "An Algebraic Method for Control System Design", Int.J. Control. pp. 717-739, May 1970
- 14- C. F. Chen, "Model Reduction of Multivariable Control Systems by means of Matrix Continued Fractions", Int. J. of Control, pp. 225-238, Feb. 1974.
- 15- M. J. Bosley, H. W. Kropholler and F. B. Lees, "On the Relation between the Continued Fraction Expansion and the moment Matching Methods of Model Reduction", Int. J. of Control, pp. 461-474, Sep. 1973.
- 16- M. Lal and R. Mitra, "A Comparison of Transfer Function Simplification Methods", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 617-618, Oct. 1974.
- 17- S. C. Chuang, "Application of Continued-Fraction Methods for Modelling Transfer Function to give a more Accurate Transient Response", Electronic Letter, pp. 861-863, Dec. 1970.
- 18- M. J. Goldman and C. T. Leondes, "Truncation of the Mixed Cauer Form. The Approximation in a Definite Mathematical Sense", Int. J. Control, pp. 979-982, June 1977.
- 19- M. F. Hutton and R. F. Friedland, "Routh Approximation for Reducing Order of Linear, Time Invariant, Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 329-337, June 1975.
- 20- M. F. Hutton and M. J. Rabbins, "Simplification of High Order Mechanical Systems using the Routh Approximation", Trans. on A. S. M. E. pp. 383-392, Dec. 1975.
- 21- N. K. Sinha and B. Kuszta, "Modeling and Identification of Dynamic Systems", Van Nostrand Reinhold Company, Chapter 8, 1983.
- 22- P. Rózsa and N. Sinha, "Efficient Algorithm for Irreducible Realization of a Rational Matrix", Int. J. of Control, Vol. 20, No. 5, pp. 739-751, 1974.
- 23- J. Pal, "System Reduction by a Mixed Method", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-25, No. 5, pp. 973-976, Oct. 1980.
- 24- T. C. Hsia, "On the Simplification of Linear Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 372-374, June 1972.
- 25- T. F. Edgar, "Least Squares Model Reduction using Step Response", Int. J. of Control, Vol. 22, No. 2, pp. 261-270, 1975.
- 26- R. M. Chidambara, "On A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, Feb. 1967.
- 27- M. Davison, "A New Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 214-215, 1968.
- 28- A. J. Fossard, "On a Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 261-262, April 1970.
- 29- R. G. Wilson, D. G. Fischer and D. E. Seborg, "Model Reduction for Discrete Time Dynamic Systems", Int. J. Control, pp. 549-558, March 1973.
- 30- J. H. Anderson, "Geometrical Approach to Reduction of Dynamical Systems", Proc. IEE , pp. 1014-1018, July 1967.

- 31- D. Mitra, "The Reduction of Complexity of Linear Time Invariant Dynamic Systems", Proc. on the 4th IFAC, Varsovie, pp. 1439-1444, 1969.
- 32- D. Mitra, "W-Matrix and the Geometry of Model Equivalent and Reduction", Proc. IEE, pp. 1101-1106, 1969.
- 33- P. Bertrand, G. Michalesco et J. M. Siret, "Sur la Synthèse des Modèles réduit par agrégation", RAIRO pp. 105-112, Juin-Juillet 1976.
- 34- J. Hickin and N. K. Sinha, "Optimally Aggregated Models of High Order Systems", Electronic Letter, pp. 632-633, Dec. 1975.
- 35- C. Commault et J. P. Guérin, "Propriétés et Structure des Système Agrégés, Application au Problème de la Projection Optimale", C. R. A. S., Nov. 1977.
- 36- P. V. Kokotovic, P. Sanutti, "Singular Perturbation Method for Reducing the Model Order in Optimal Control Design", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 377-384, Aug. 1968.
- 37- P. V. Kokotovic and R. A. Yackel, "Singular Perturbation of Linear Regulator : Basic Theorems", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 29-37, Feb. 1972.
- 38- P. Sanutti and P. V. Kokotovic, "Near Optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation Method", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 15-21, Feb. 1969.
- 39- Z. Binder et C. Commault, "Une Revue des Méthodes de Simplification de Modèles Dynamiques Linéaires Invariants", RAIRO Automatique / Systems Analysis and Control, Vol. 12, No. 3, pp. 199-219, 1978.
- 40- B. Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-26, No. 1, pp.17-32, Feb. 1981.
- 41- L. M. Silverman, "Optimal Approximation of Linear Systems".
- 42- Y. Shamash, "Model Reduction using Minimal Realisation Algorithms", Elec. Lett. Vol. 11, No. 6, pp. 385-387, 7th Aug. 1975.
- 43- V. M. Adamjan, D. Z. Arov and M. K. Krein, "Analytic Properties of Schmidt parts for a Hankel Operator and the Generalized Schur-Takari problem", Math. USSR Sbornik, Vol. 15, pp. 31-73, 1971.
- 44- K. Glover, "All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and their L^∞ - error bounds", Int. J. Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- 45- N. B. Yeh, C. D. Yang and M. C. Tsai, "Unified Approach to H^∞ - Optimization, Hankel Approximation and balanced Realization problems", Int. J. Control, Vol. 47, No. 4, pp. 967-978, 1988.
- 46- W. H. Enright and M. S. Kamel, "On Selecting a Low-Order Model using the Dominant Mode Concept", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-25, No. 5, pp. 976-978, Oct. 1980.
- 47- S. A. Marshall, "An Approximate Method for Reducing the Order of a Linear System", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 10, pp. 642-643, 1966.
- 48- G. B. Mahapatra, "A Further Note on Selecting a Low-Order System using the Dominant Eigenvalue Concept", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-24, pp. 135-136, Feb. 1979.
- 49- A. S. Rao, S. S. Lamba and S. V. Rao, "Comments on a Note on Selecting a Low-Order System by Davison's Simlification Technique", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-24, pp. 141-142, Feb. 1979.

- 50- Z. Elrazaz and N. K. Sinha, "On the Selection of the Dominant Poles of a System to be retained in a Low-Order Model", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-24, pp. 792-793, Oct. 1979.
- 51- M. Gopal and S. I Mehta, "On The Selection of the eigenvalues to be Retained in the Reduced Order Models", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-27, No. 3, pp. 688-690, June 1982.
- 52- Z. Iwai and Y. Kubo, "Determination of eigenvalues in Marshall's Model Reduction", Int. J. Control, Vol. 30, pp. 823-836, Nov. 1979.
- 53- S. Kung, "A new Identification and model Reduction Algorithm Via Singular Value decomposition", IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 705-714, 1979.
- 54- G. J. Lastman and N. K. Sinha, "An Error Analysis of the Balanced Matrix Method of model Reduction, With Application to the Selection of Reduced-Order Models", Large Scale Systems, pp. 63-71, North Holland 1985.
- 55- M. G. Safonov and R. Y. Chiang, "Robust- Control Tool Box for Use with matlab", User's Guide, June 1, 1988.
- 56- M. G. Safonov, R. Y. Chiang and H. Flashner, " H^∞ Control Synthesis for a Large Space Structure", Proc. of American Cont. Conf. , Atlanta, GA, June 15-17, 1988.
- 57- G. L. Lastman and N. K. Sinha, "A Comparison of the balanced Matrix and the aggregation Methods of Model Reduction", 22nd IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio, Texas, Dec. 1983.
- 58- G. Hashim, A. Rachid and C. Humbert, "Aggregation method for model reduction via Schur decomposition", IMACS "International Symposium on Mathematical and Intelligent Models in System Simulation", Brussels, 3-7 September 1990.**
- 59- A. Rachid and G. Hashim, "Model reduction via Schur decomposition", Soumis Trans. on Auto. Control, 1990.**
- 60- K. J. Asrtom, "Introduction of Stochastic Control Theory", Academic press, 1970.

CONCLUSION

Ce mémoire rassemble un grand nombre de méthodes concernant l'analyse, l'identification ainsi que la simplification des systèmes MIMO (multi-entrées multi-sorties). Les différents algorithmes présentés ont tous été programmés et testés. Une étude comparative a été effectuée afin de déterminer les avantages et inconvénients de chaque procédure. Les résultats de cette étude nous ont permis d'exhiber l'algorithme le plus performant pour chacun des thèmes traités.

Concernant l'identification, nous avons surtout montré l'applicabilité de la théorie de la réalisation malheureusement très peu utilisée par les automaticiens. Rappelons que le principal avantage de la réalisation approchée réside dans le fait qu'elle permet de déterminer aisément et de façon précise la dimension du système MIMO à identifier.

Parmi tous les algorithmes étudiés, nous préconisons :

- la méthode des moindres carrés MIMO pour l'estimation des paramètres de Markov à partir des entrées-sorties.
- la technique SVD (cas des bruits faibles) ou l'erreur des résidus (cas des bruits importants) pour l'estimation de l'ordre du système considéré.
- la technique SVD pour la détermination d'une réalisation.

Pour la détermination de la fonction de transfert à partir d'une représentation d'état (problème réciproque de la réalisation), nous retenons la procédure de Bingulac pour les systèmes mal conditionnés et/ou de grande dimension, tout en notant que toutes les méthodes donnent des résultats satisfaisants pour des systèmes de dimension peu élevée et bien conditionnés.

En ce qui concerne la réduction de modèles, la méthode basée sur la décomposition de Schur que nous avons proposée nous semble la plus générale et la plus performante.

Ce travail peut avoir une suite et des prolongements. Au niveau pratique, les résultats sur la réalisation approchée pourraient et devraient être utilisés comme alternative probante aux méthodes paramétriques pour identifier des processus industriels réels. Au niveau théorique, il nous paraît intéressant de développer des algorithmes récursifs de réalisation approchée ainsi que de réduction de modèles.

ANNEXE

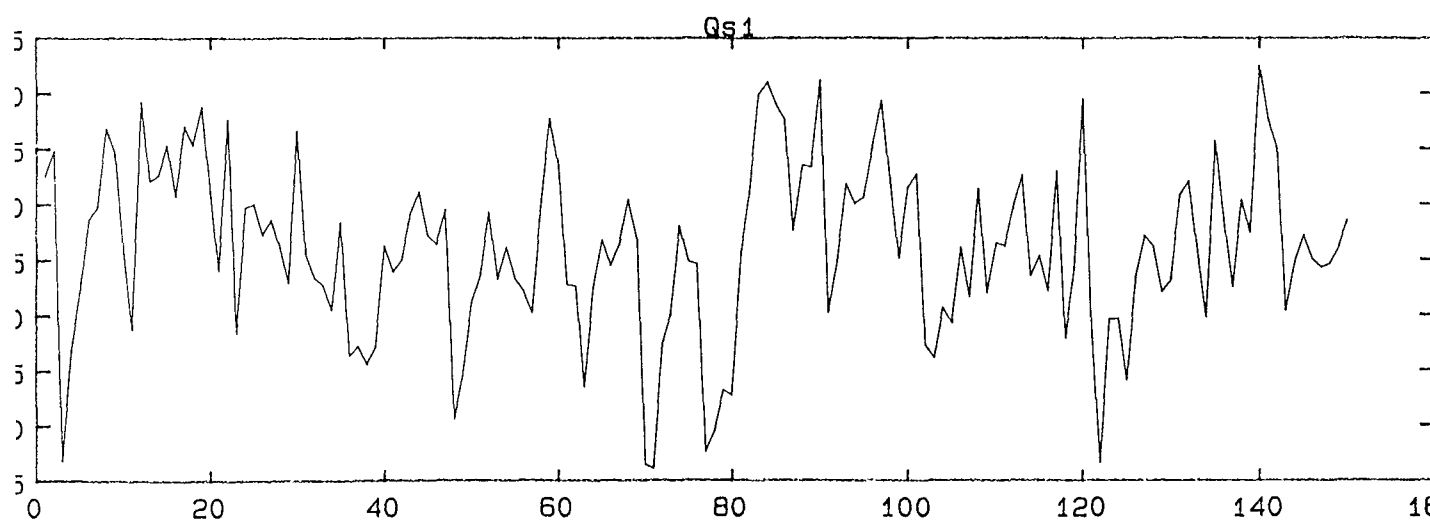
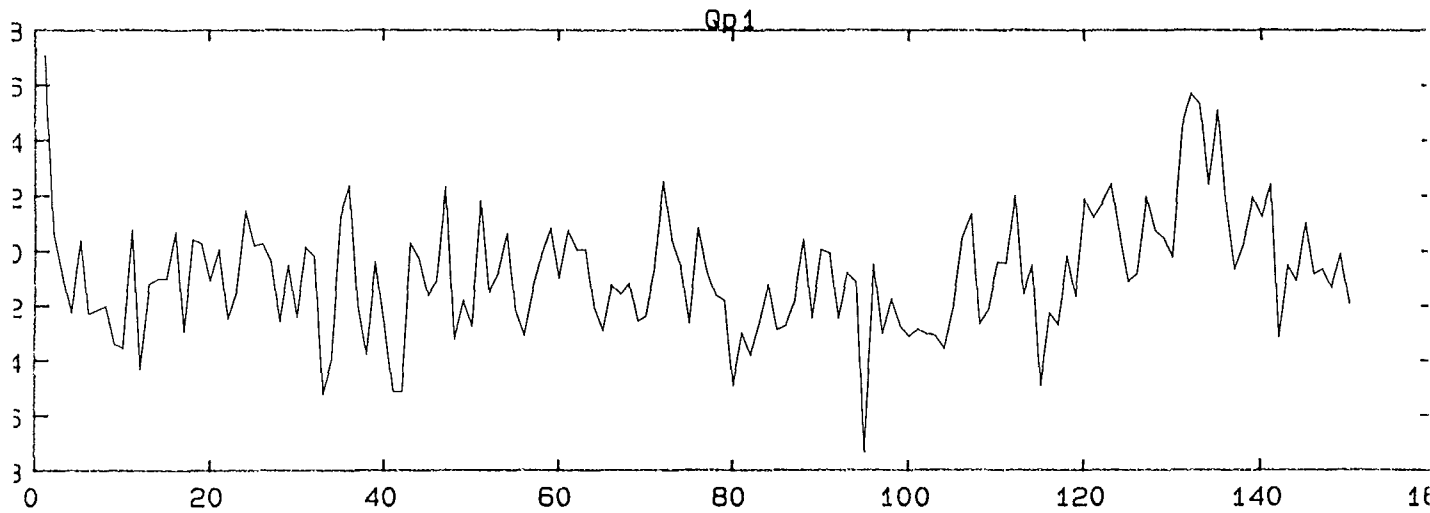
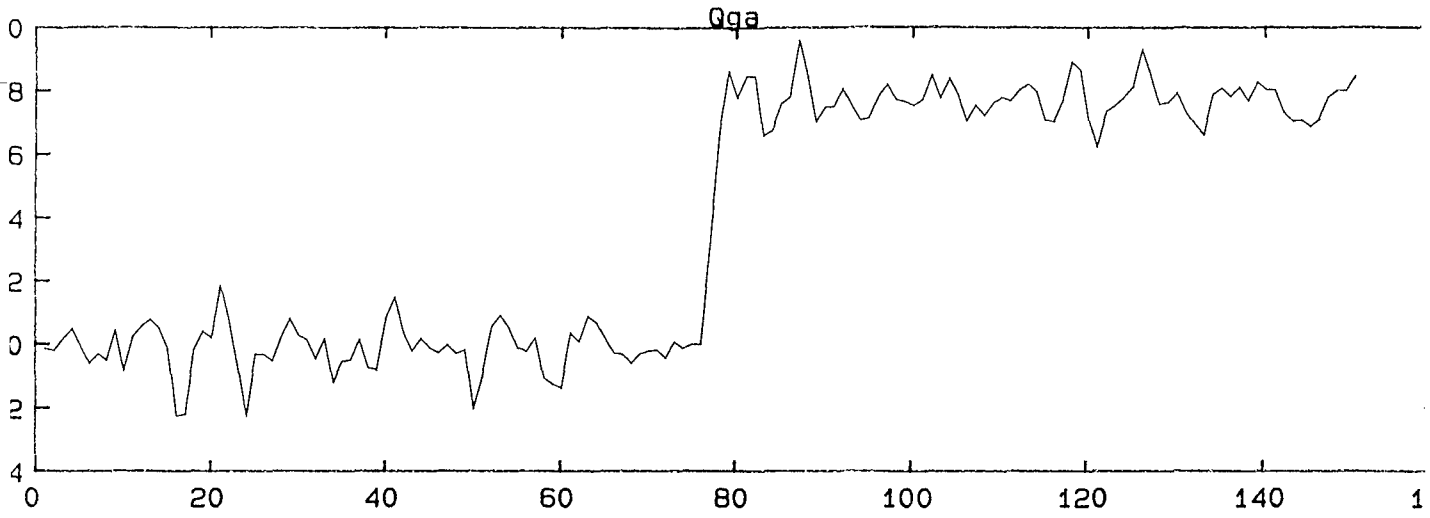


Fig. 1

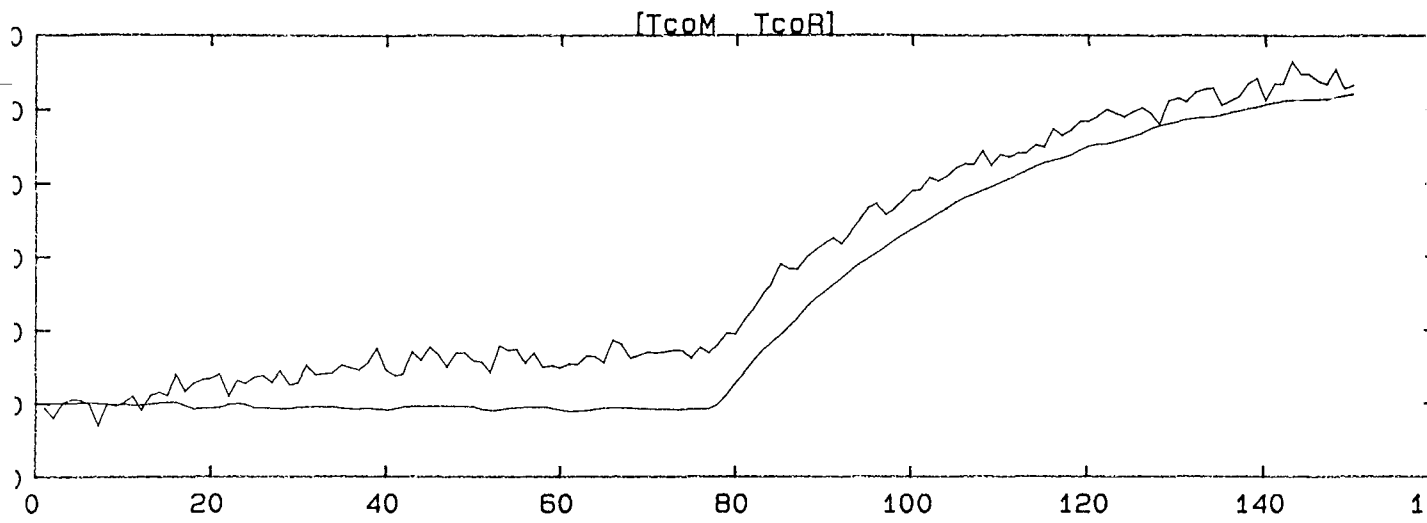


Fig. 1.1

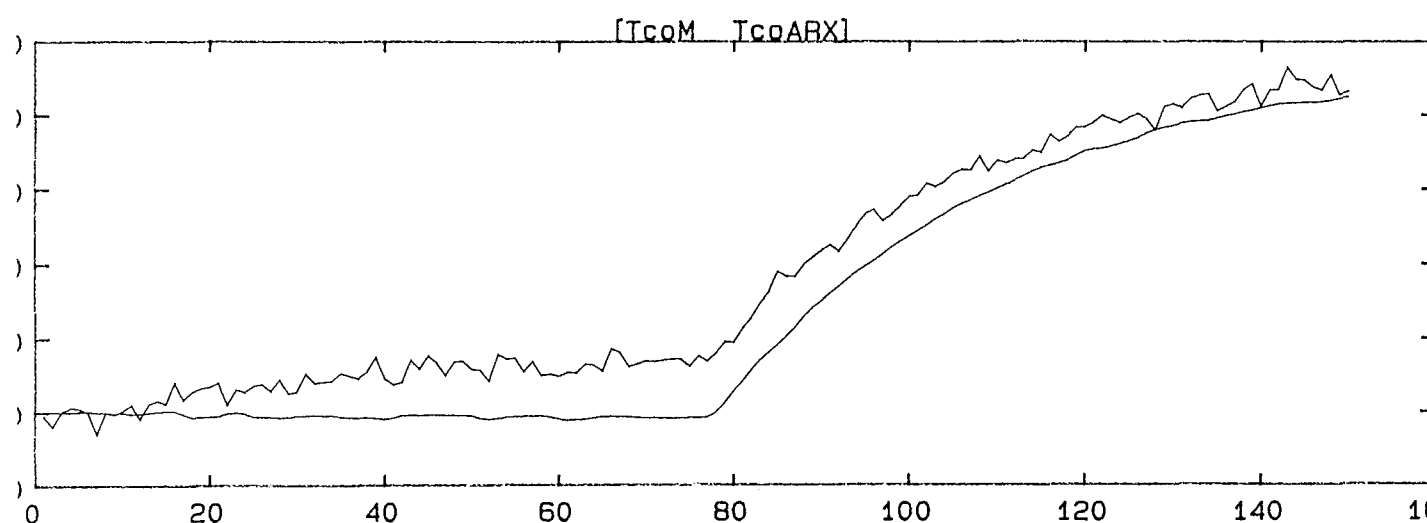


Fig. 1.2

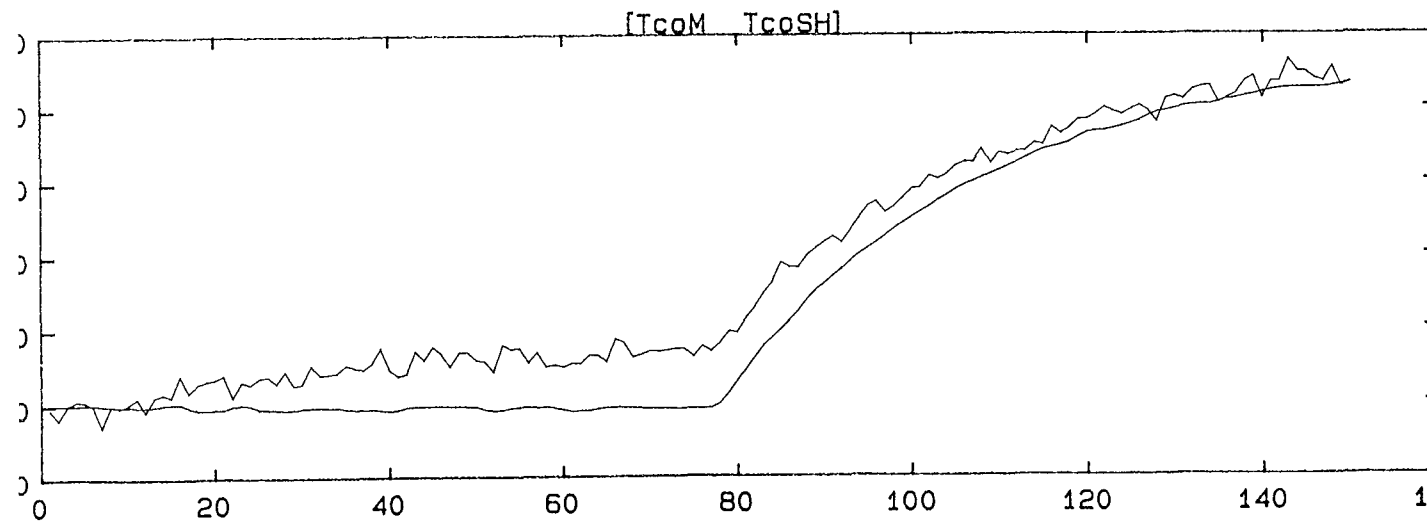


Fig. 1.3

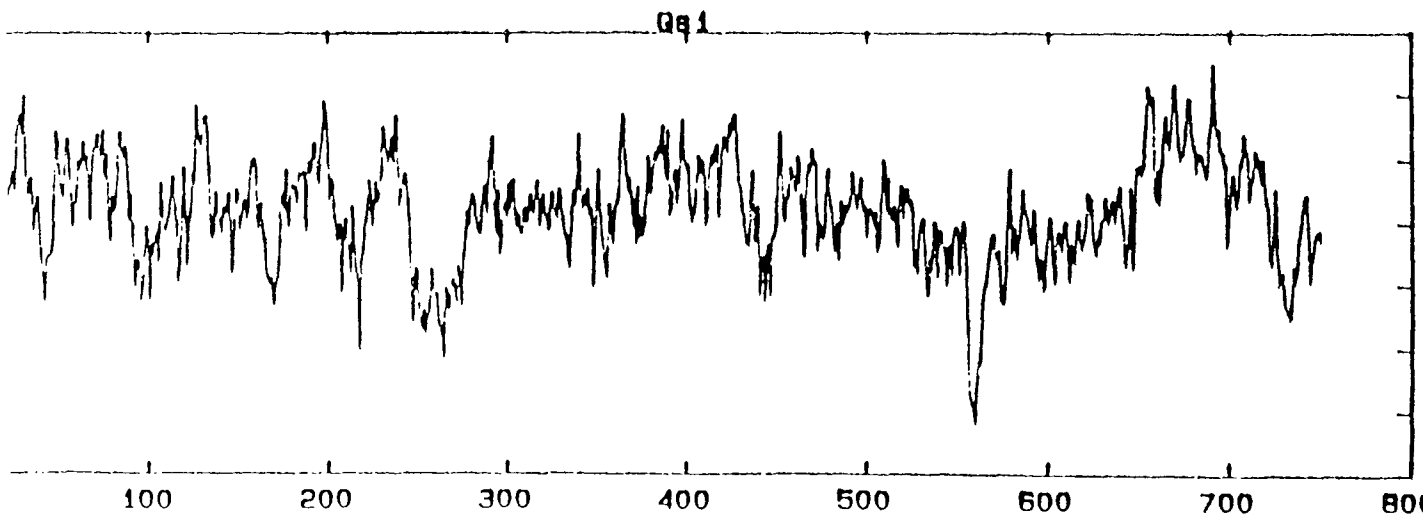
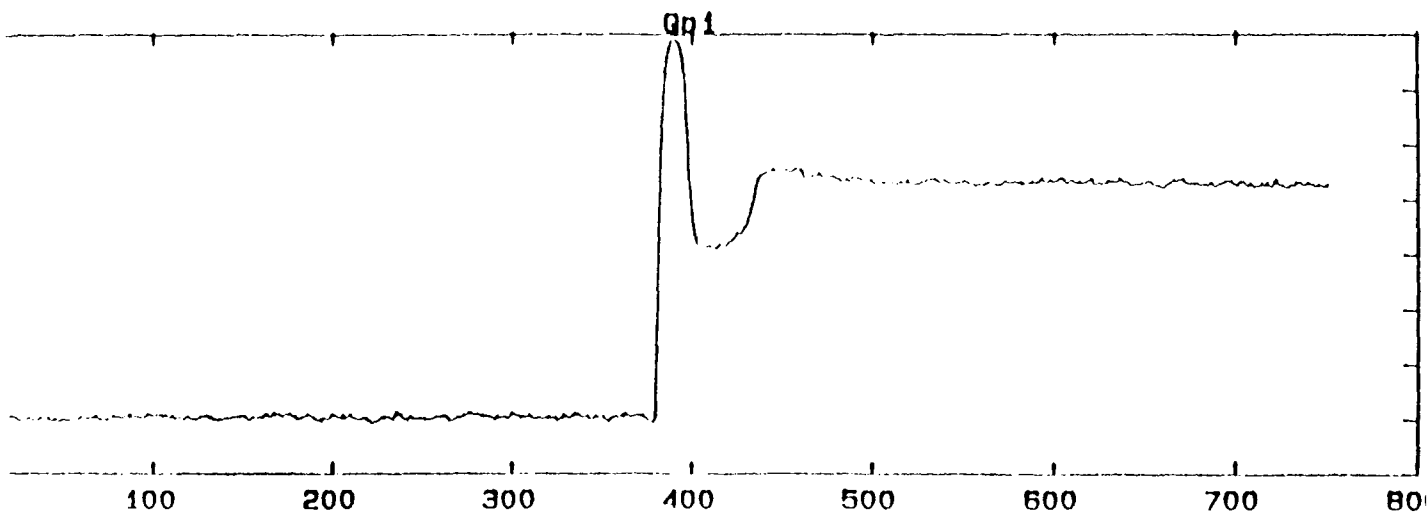
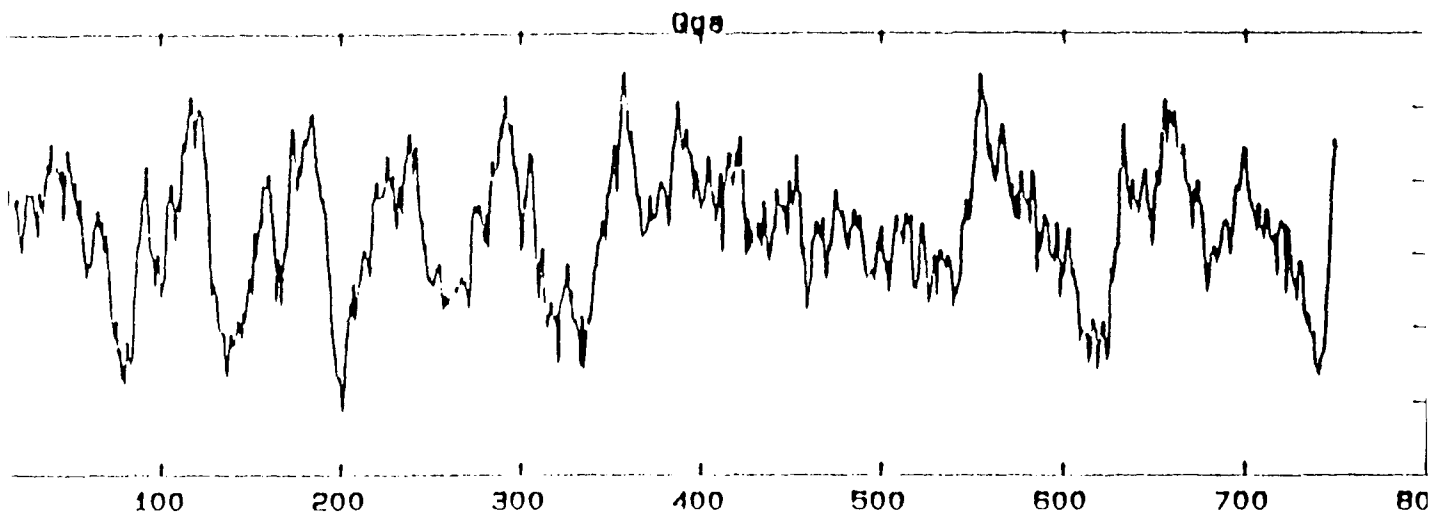


Fig. 2

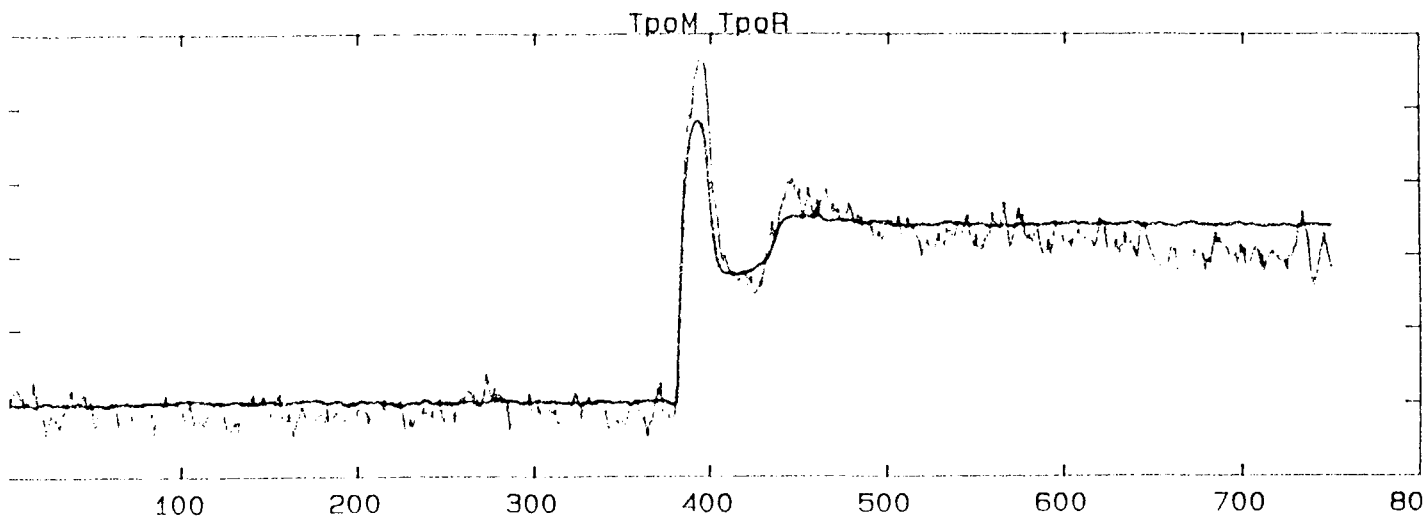


Fig. 2.1

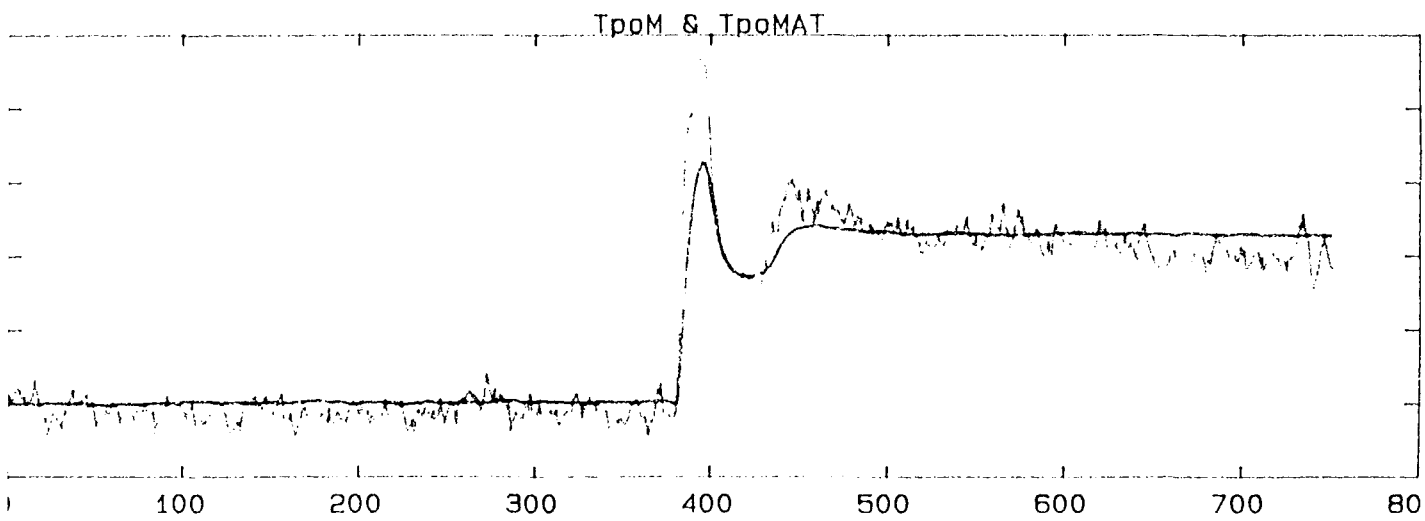


Fig. 2.2

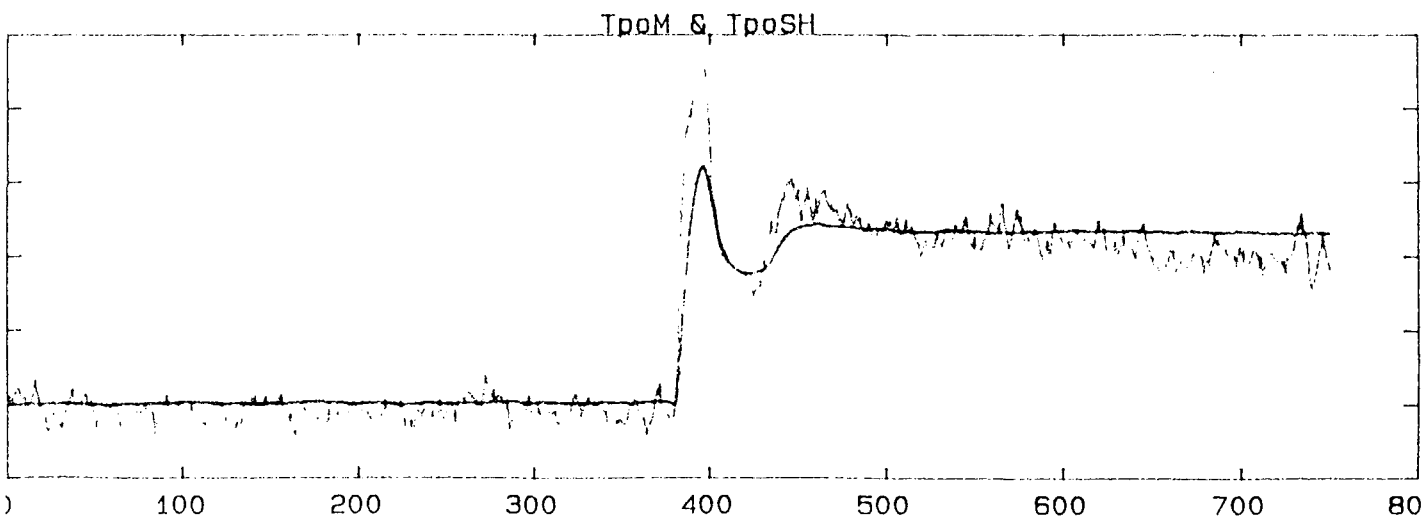
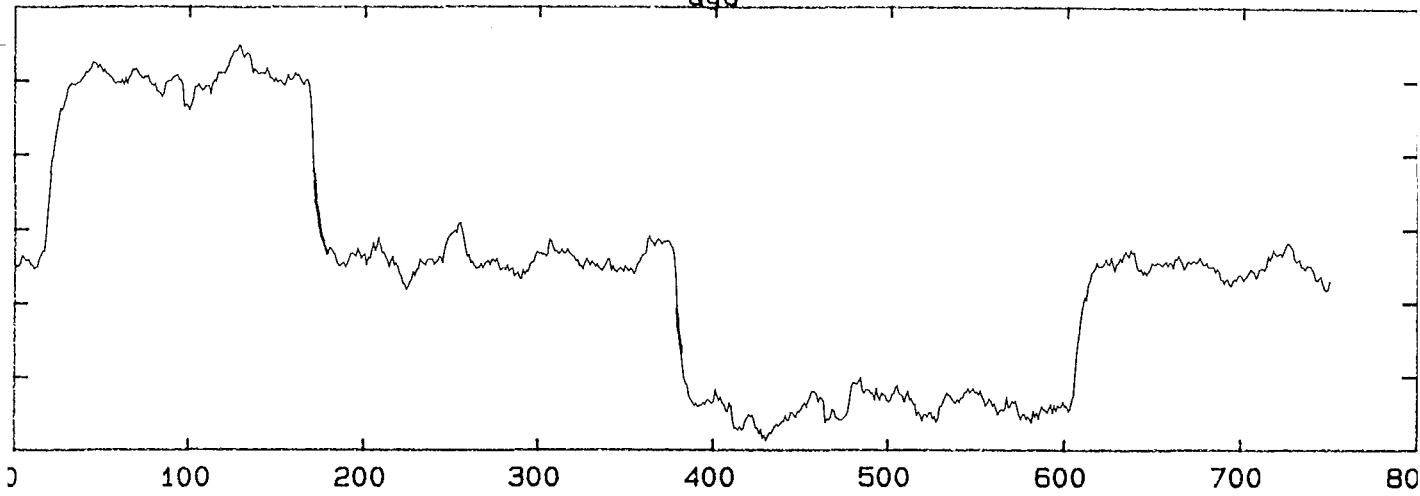
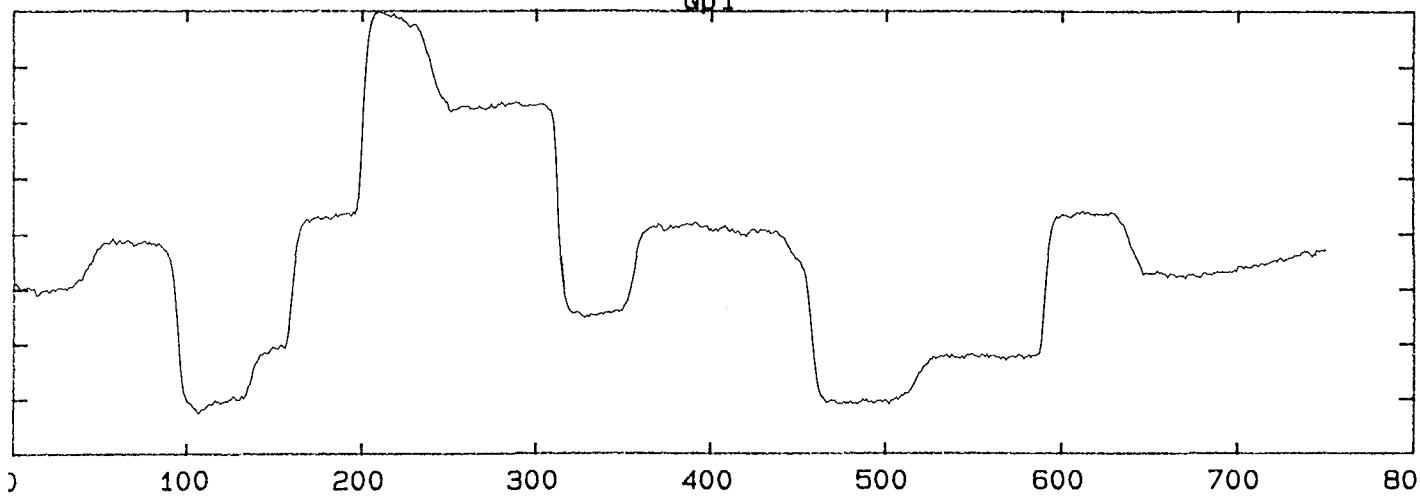


Fig. 2.3

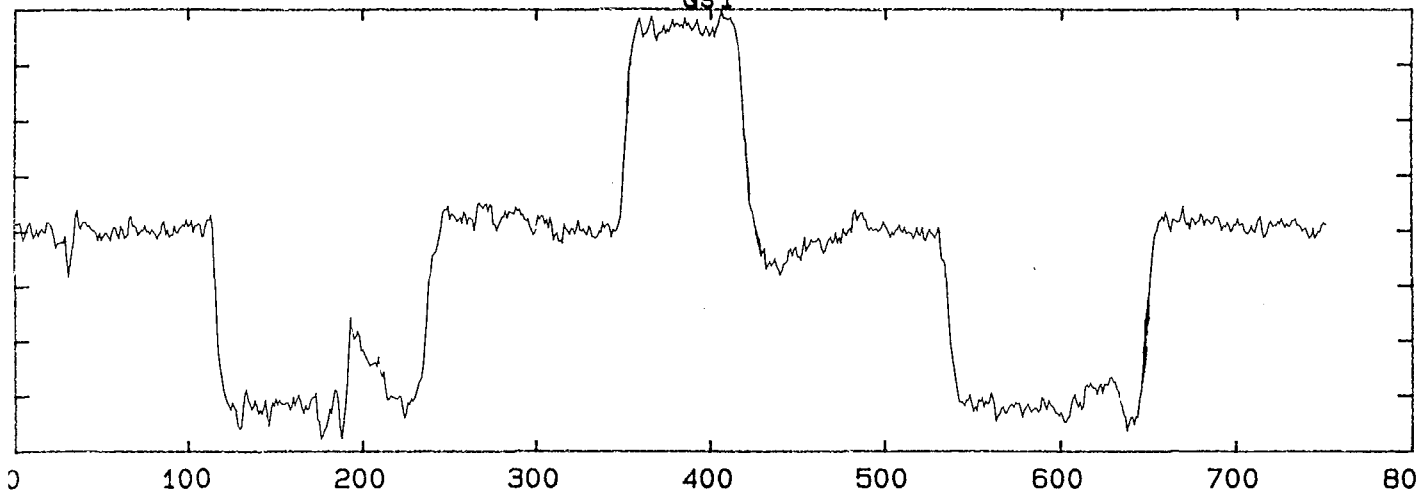
Qqa



Qp1



Qs1



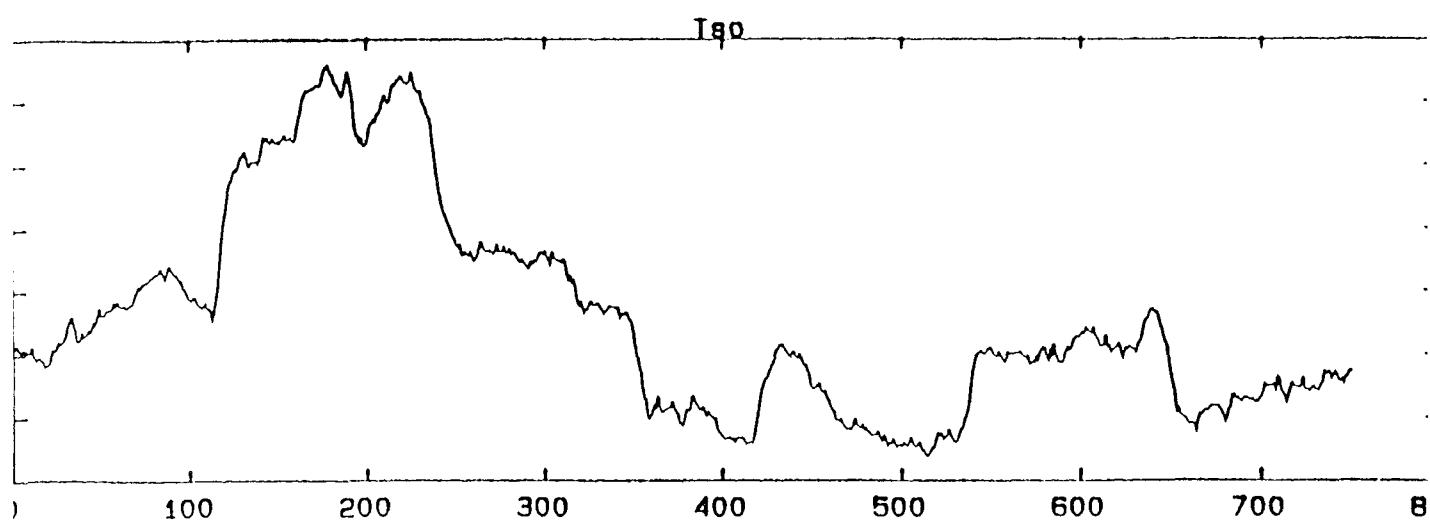
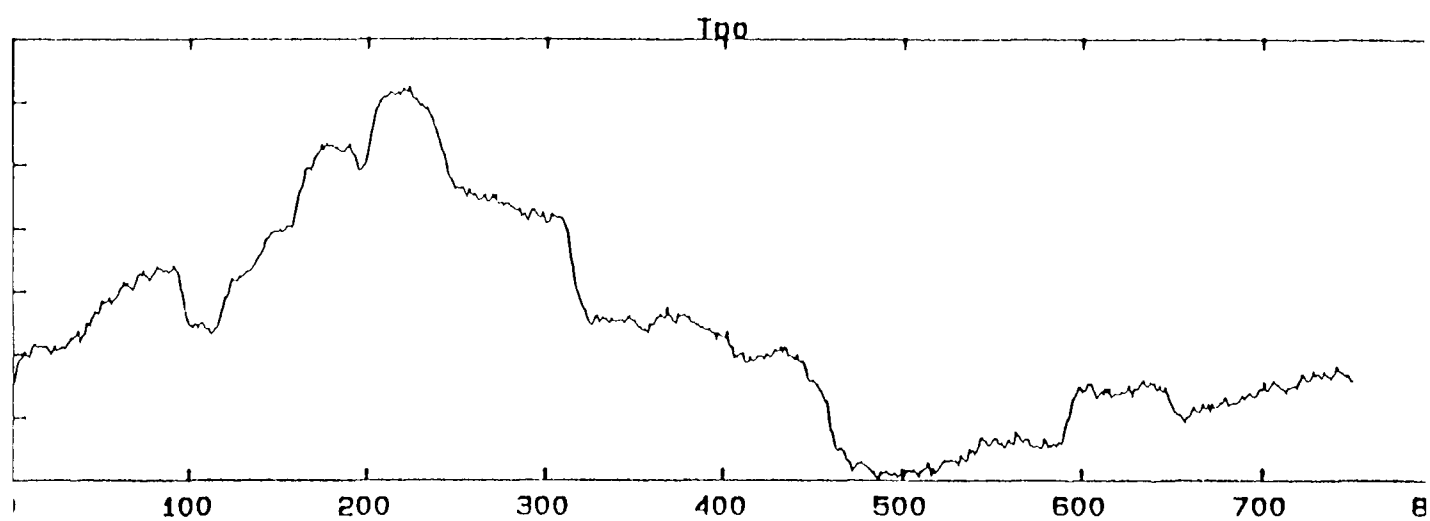
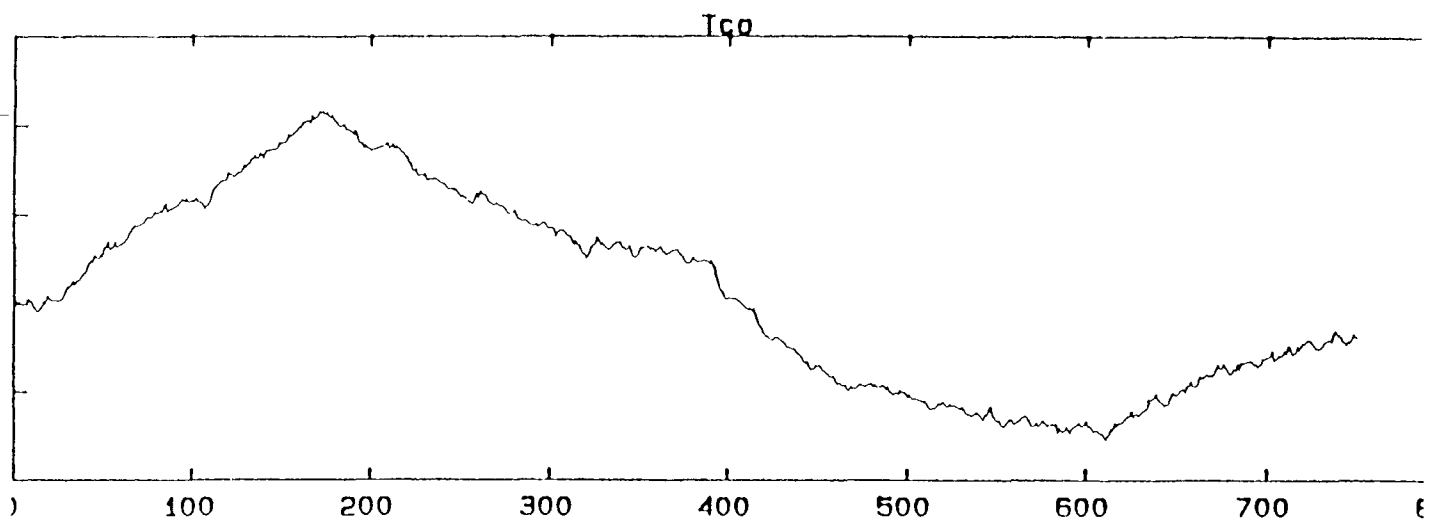
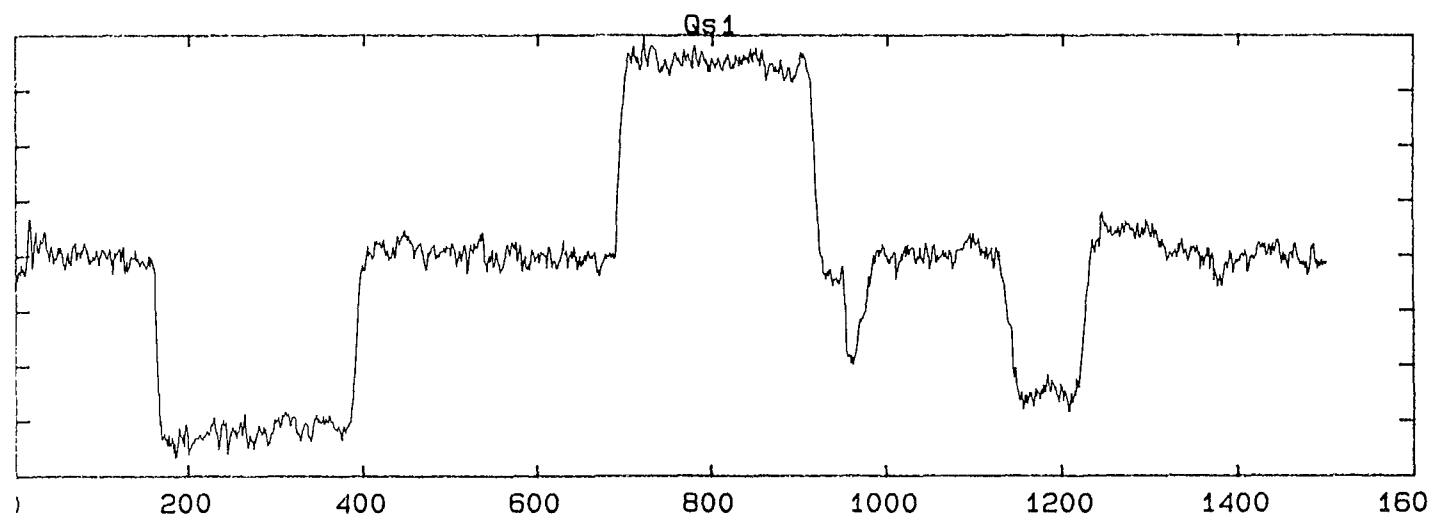
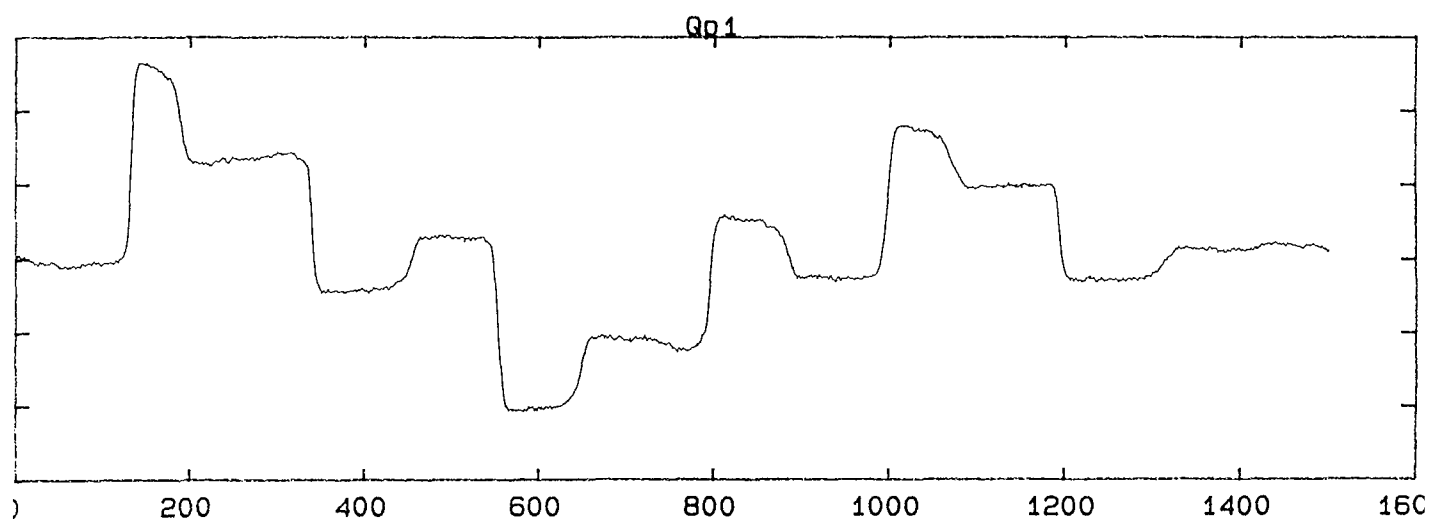
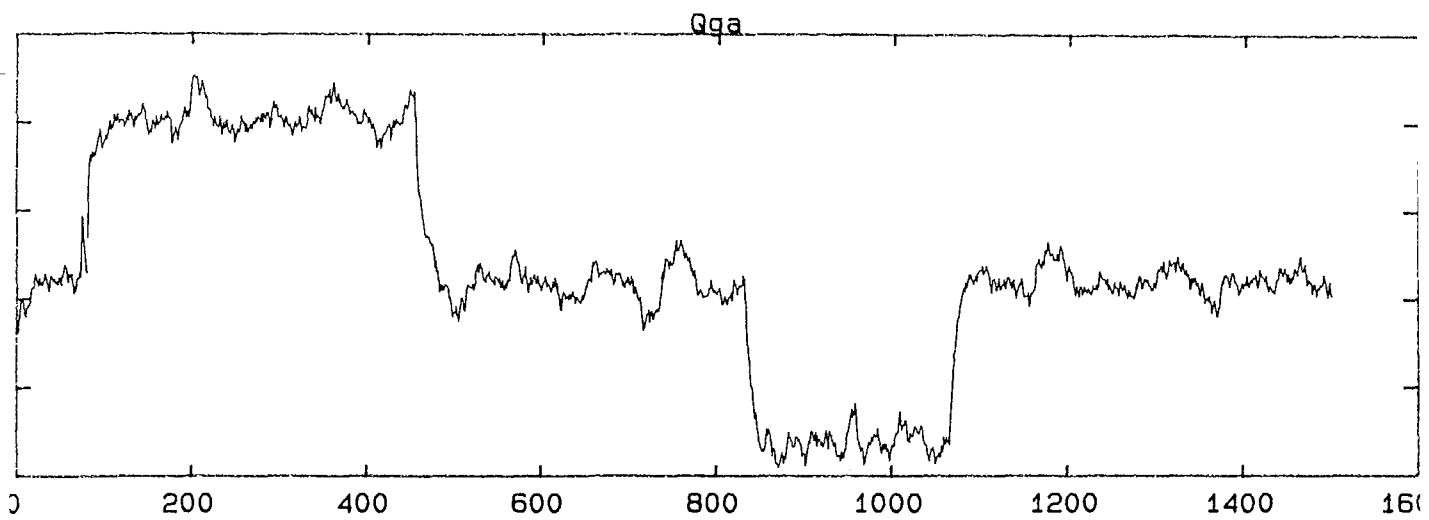


Fig. 5 Première Campagne de Mesure

[Qga Qp1 Qs1] [Tco Tpo Tso]



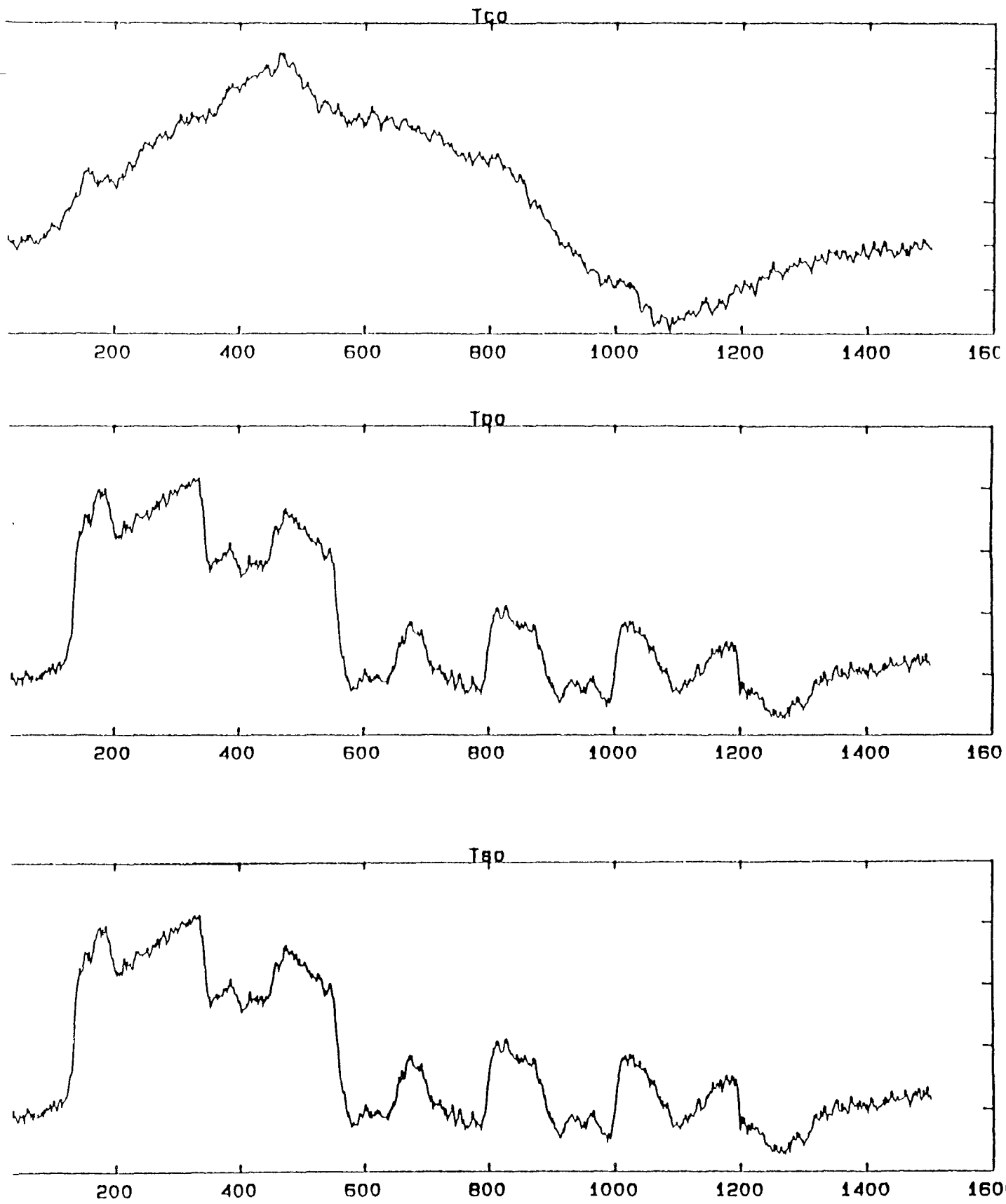


Fig. 6 Deuxième Campagne de Mesure

[Qga Qp1 Qs1] [Tco Tpo Tso]

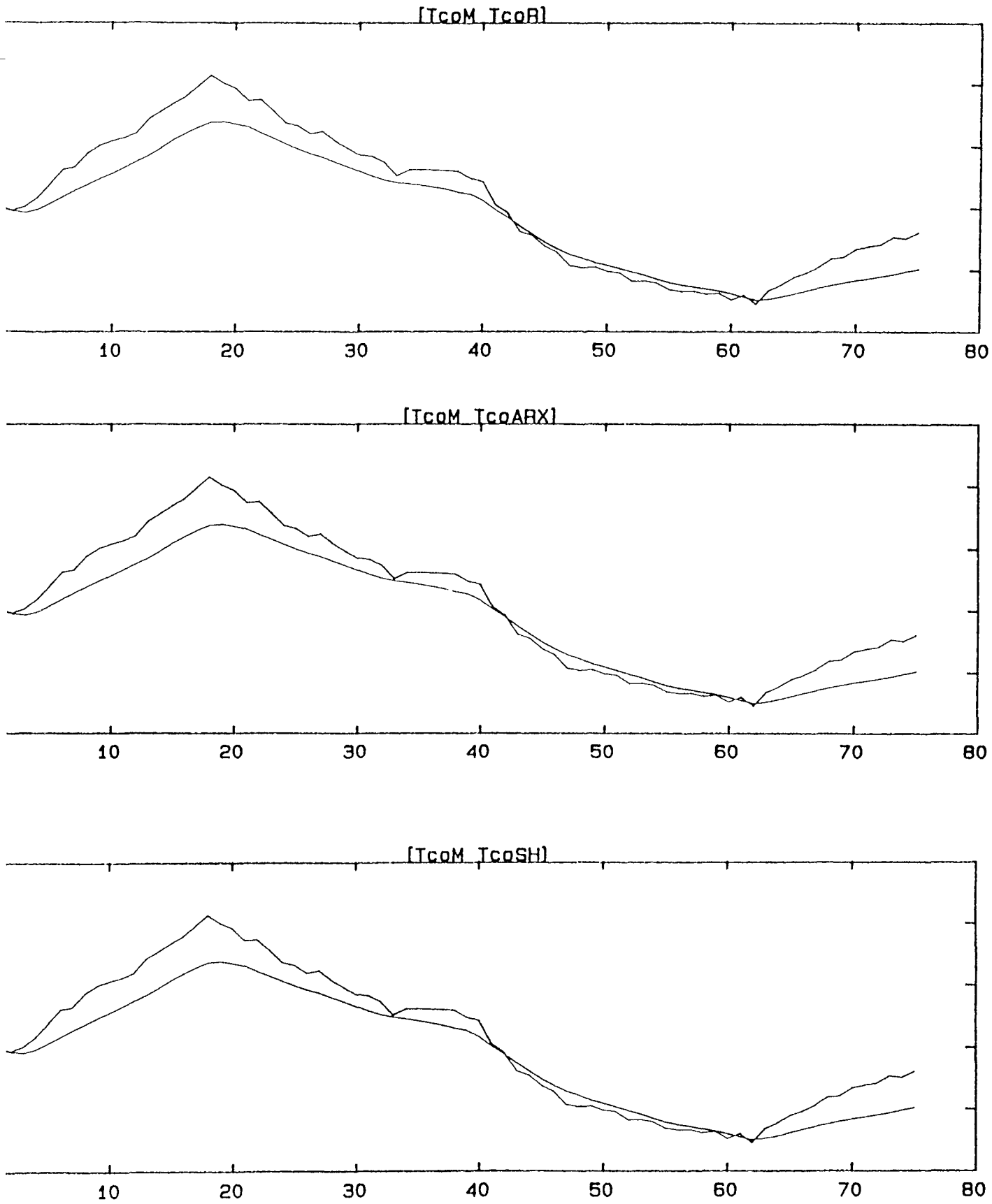


Fig. 5.1 Première Campagne de Mesure " Température Sortie Chaudière "
 [TcoM TcoR] (Mesurée et Réalisation)
 [TcoM TcoARX] (mesurée et Modèle ARX)
 [Tco TcoSH] (mesurée et Moindres carrés Adaptative)

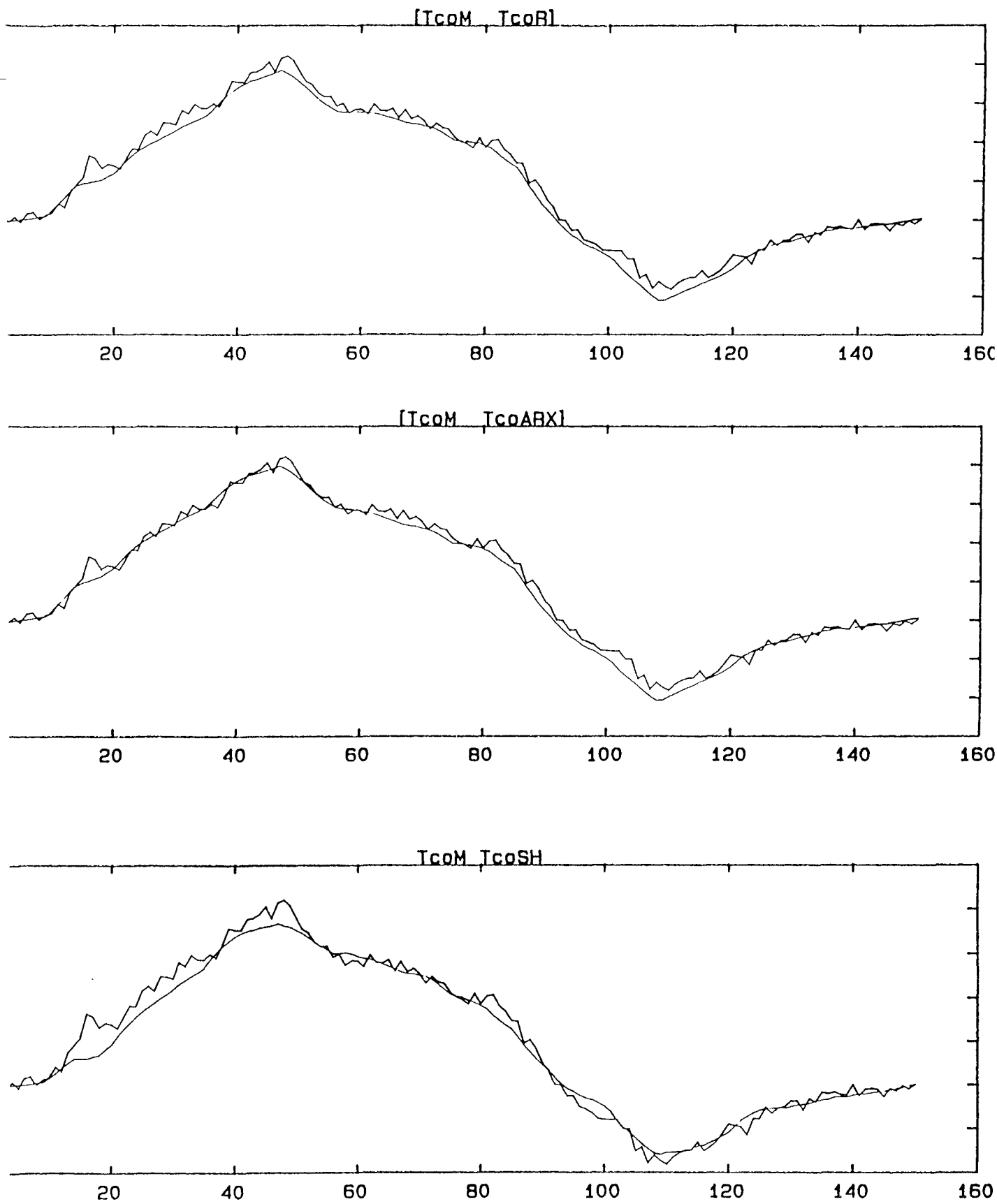


Fig. 6.1 Deuxième Campagne de Mesure " Température Sortie Chaudière "
 [TcoM TcoR] (Mesurée et Réalisation)
 [TcoM TcoARX] (mesurée et Modèle ARX)
 [Tco TcoSH] (mesurée et Moindres carrés Adaptative)

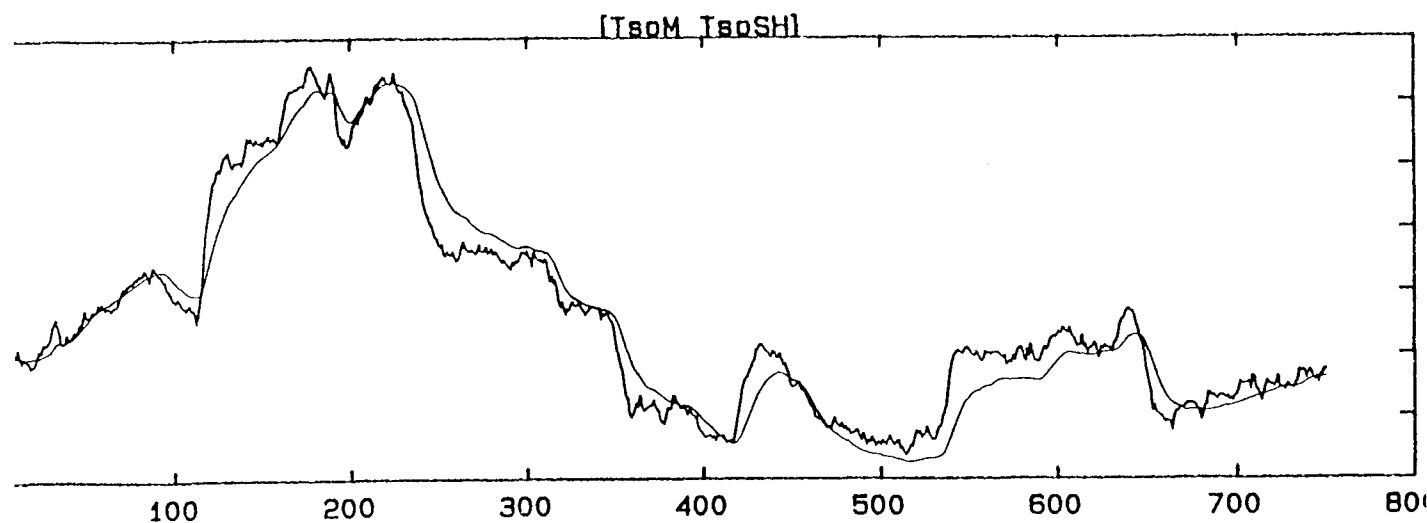
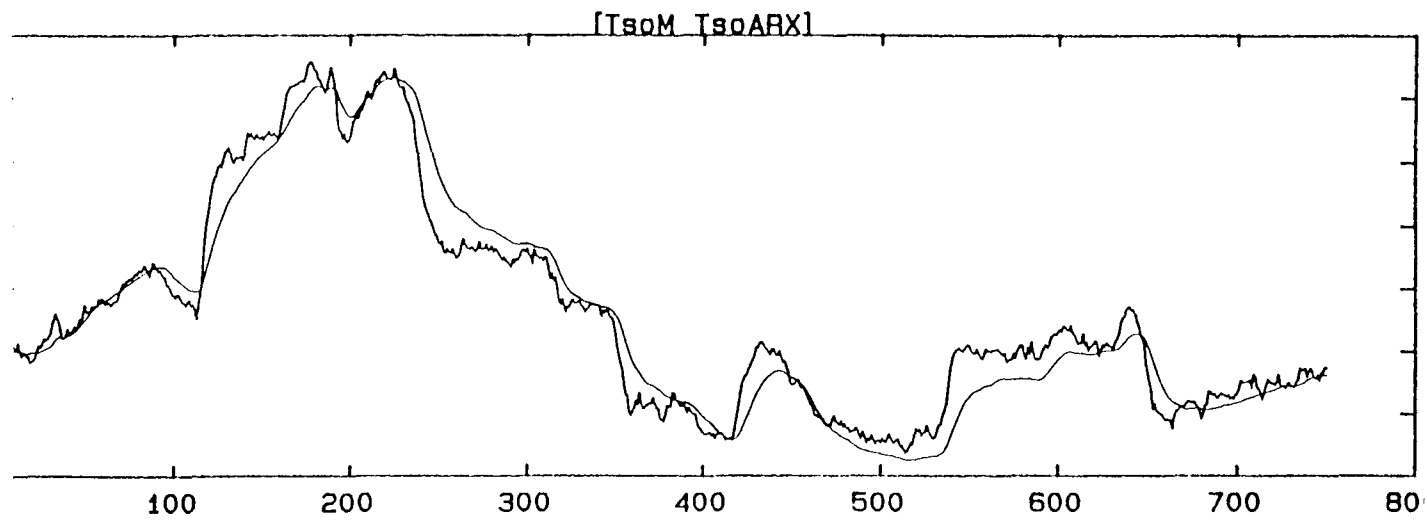
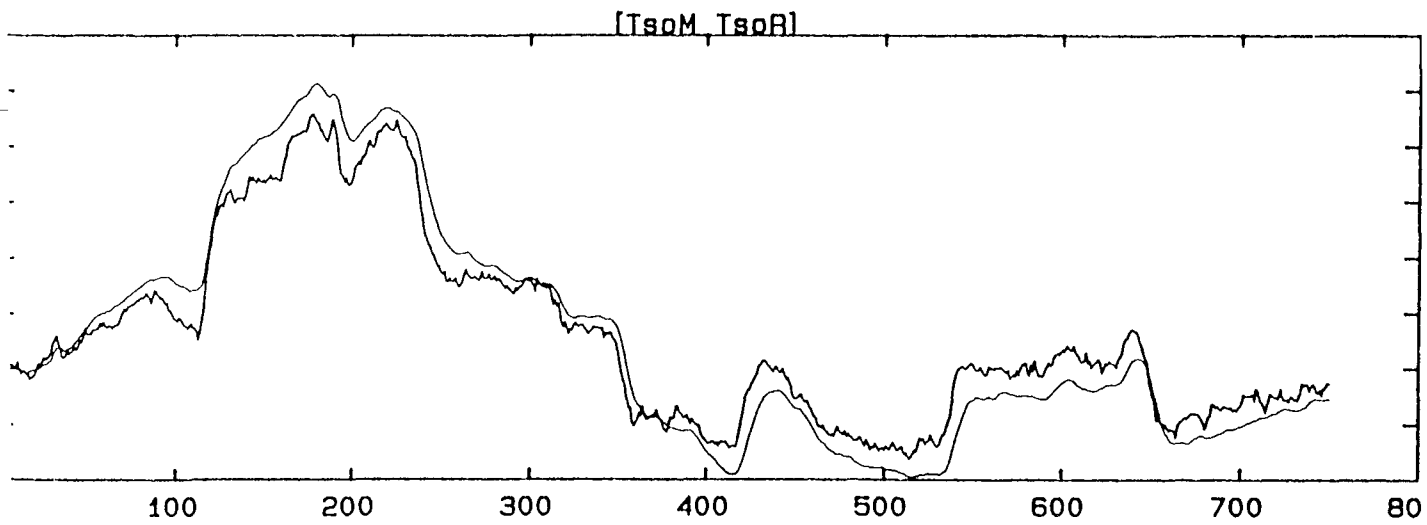


Fig. 5.3 Première Campagne de Mesure " Température Sortie Secondaire "

[TsoM TsoR] (Mesurée et Réalisation)

[TsoM TsoARX] (mesurée et Modèle ARX)

[Tso TsoSH] (mesurée et Moindres carrés Adaptative)

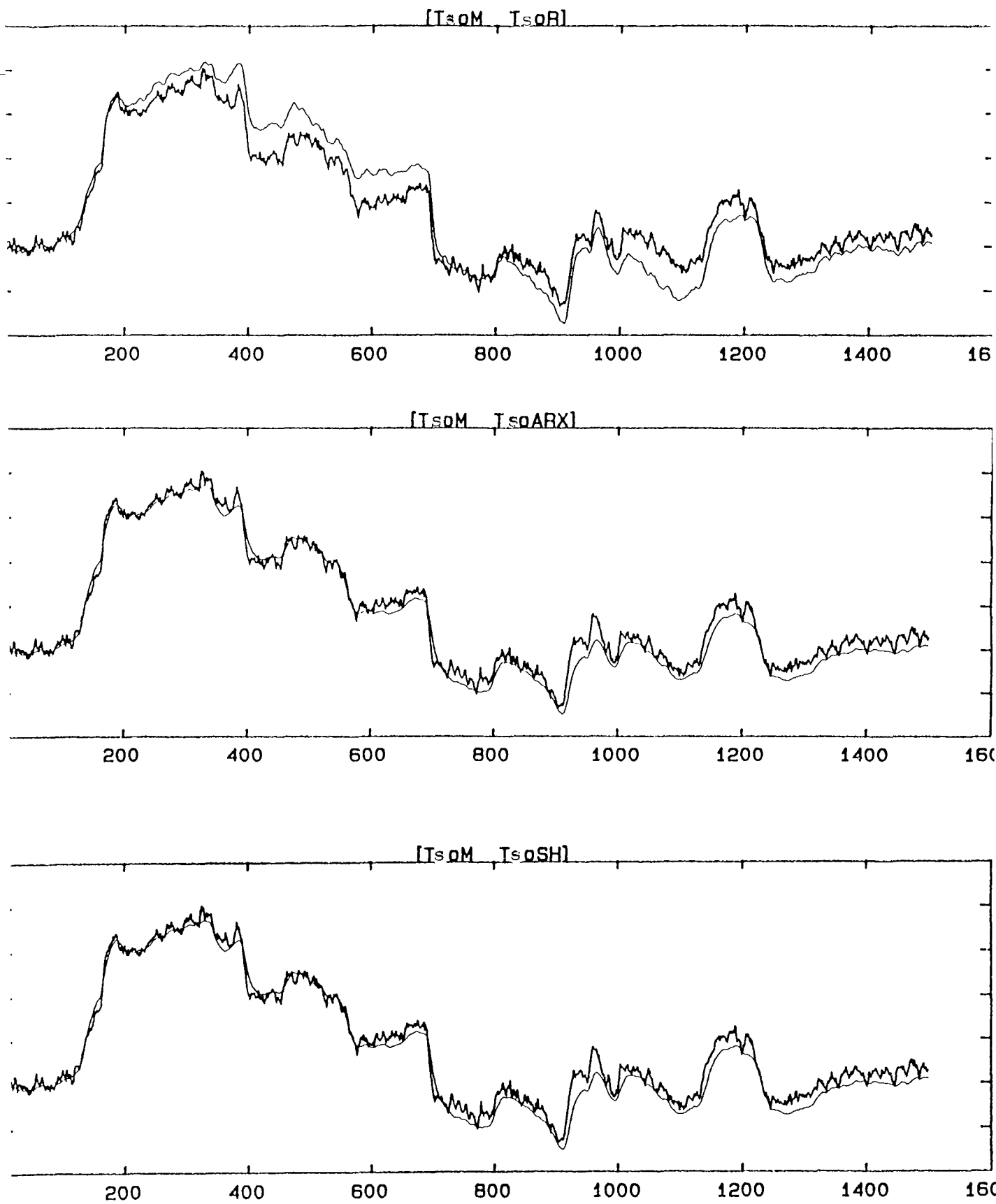


Fig. 6.3 Deuxième Campagne de Mesure " Température Sortie Secondaire "

$[T_{soM} \quad T_{soR}]$ (Mesurée et Réalisation)

$[T_{soM} \quad T_{soARX}]$ (mesurée et Modèle ARX)

$[T_{soM} \quad T_{soSH}]$ (mesurée et Moindres carrés Adaptative)

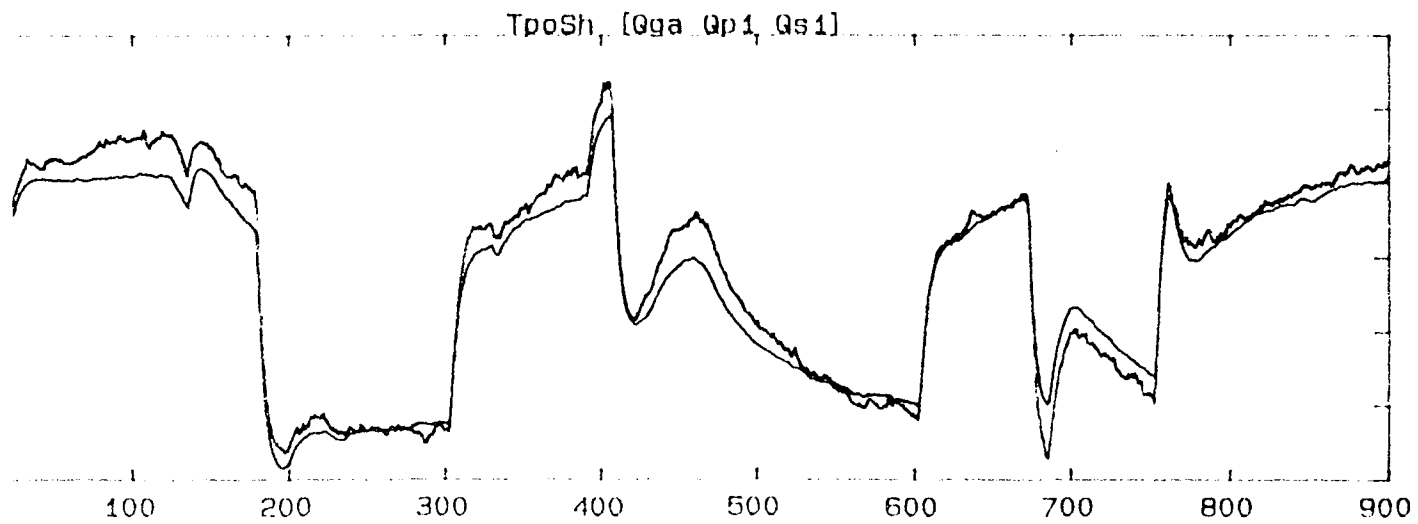
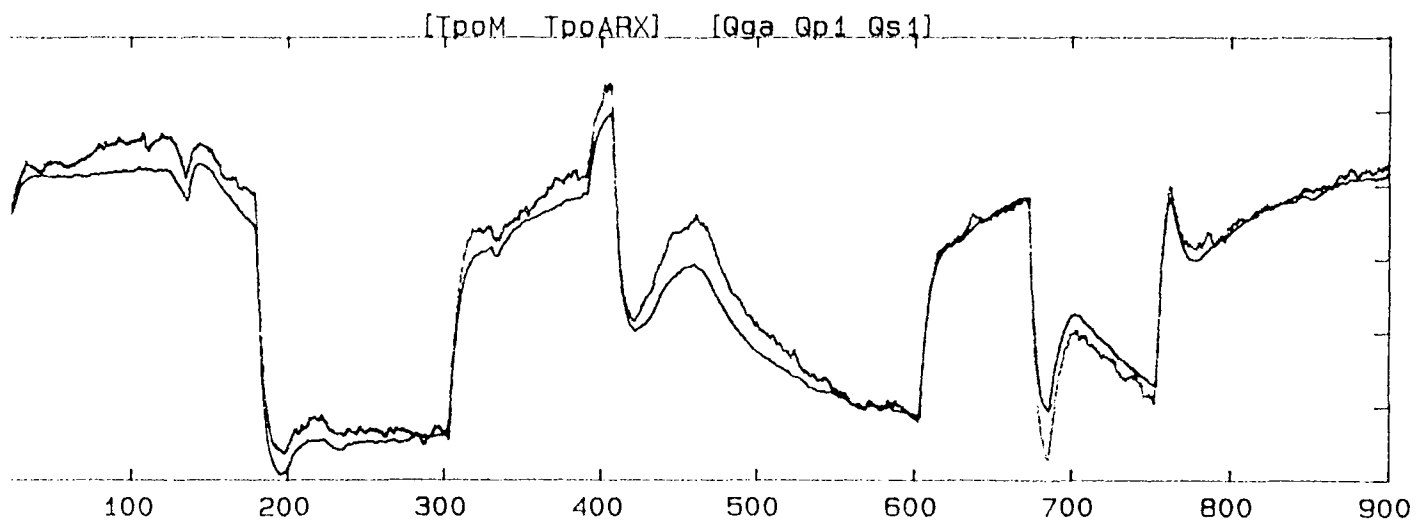
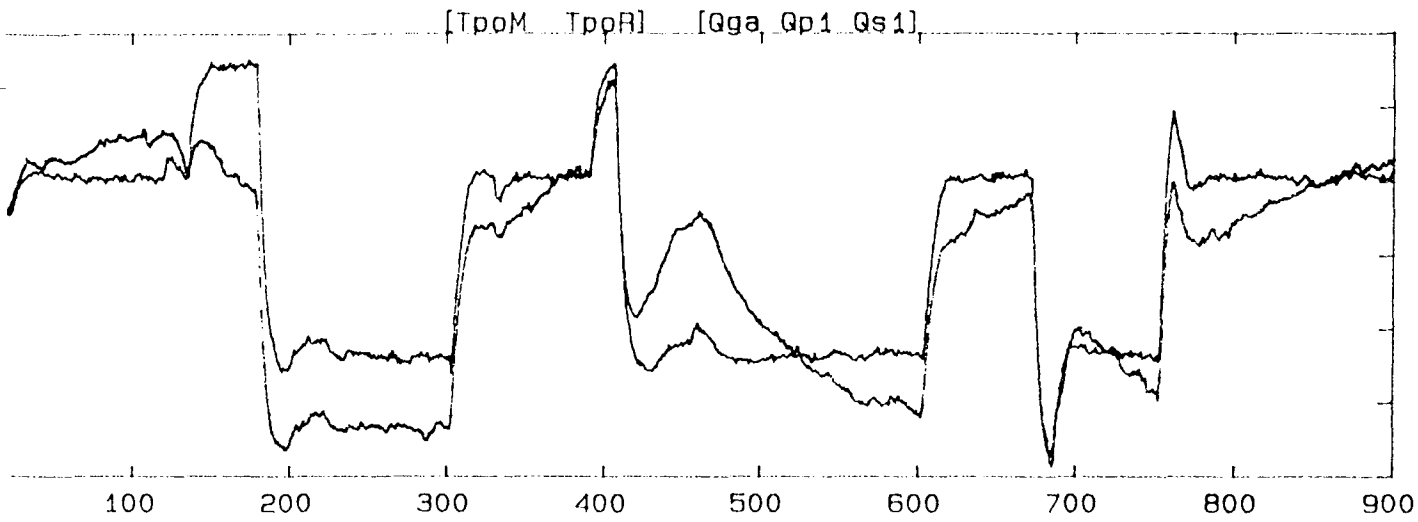


Fig. 7.2 Boite Noire "Température Sortie Primaire"

[TpoM TpoR] (Mesurée et Réalisation)
 [TpoM TpoARX] (Mesurée et Modèle ARX)
 [Tpo TpoSH] (Mesurée et Moindres carrés Adaptative)

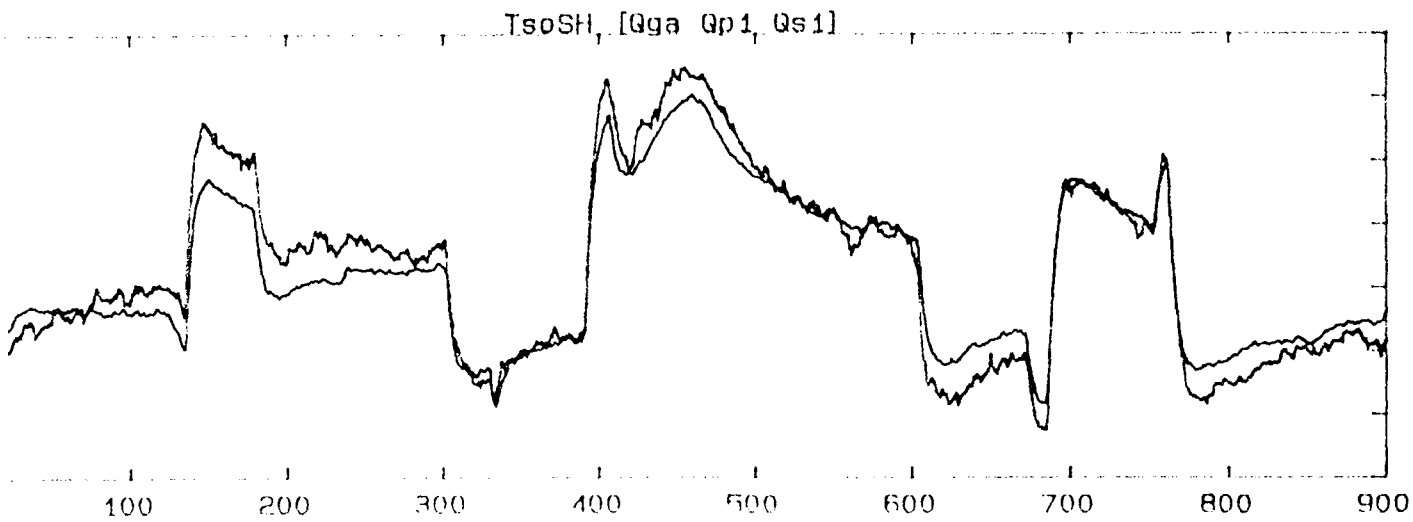
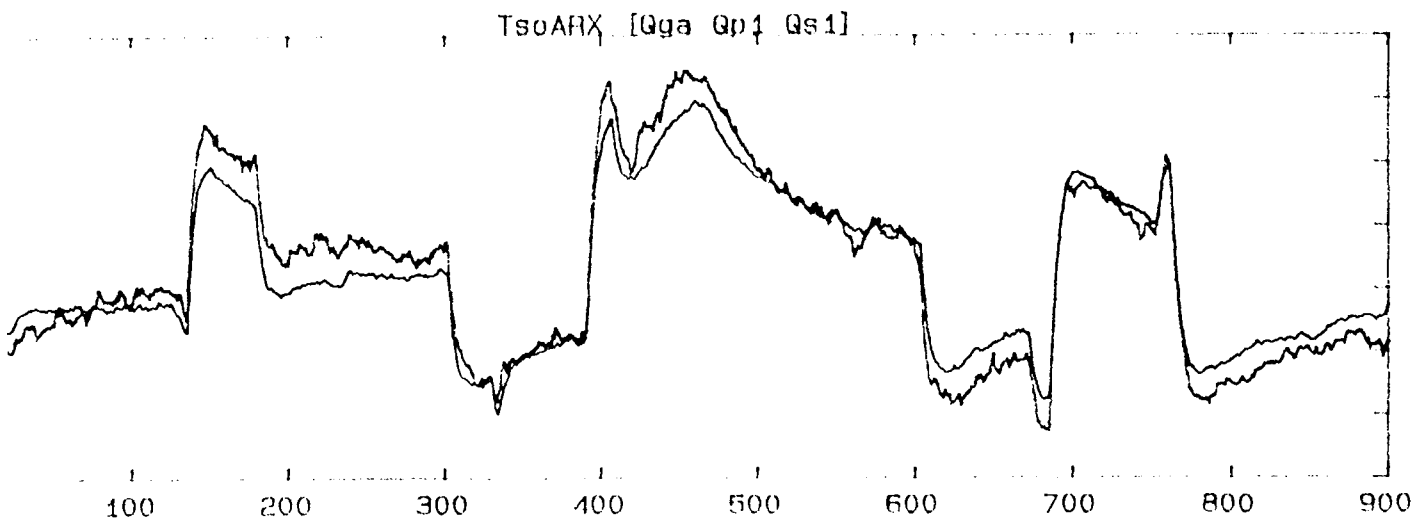
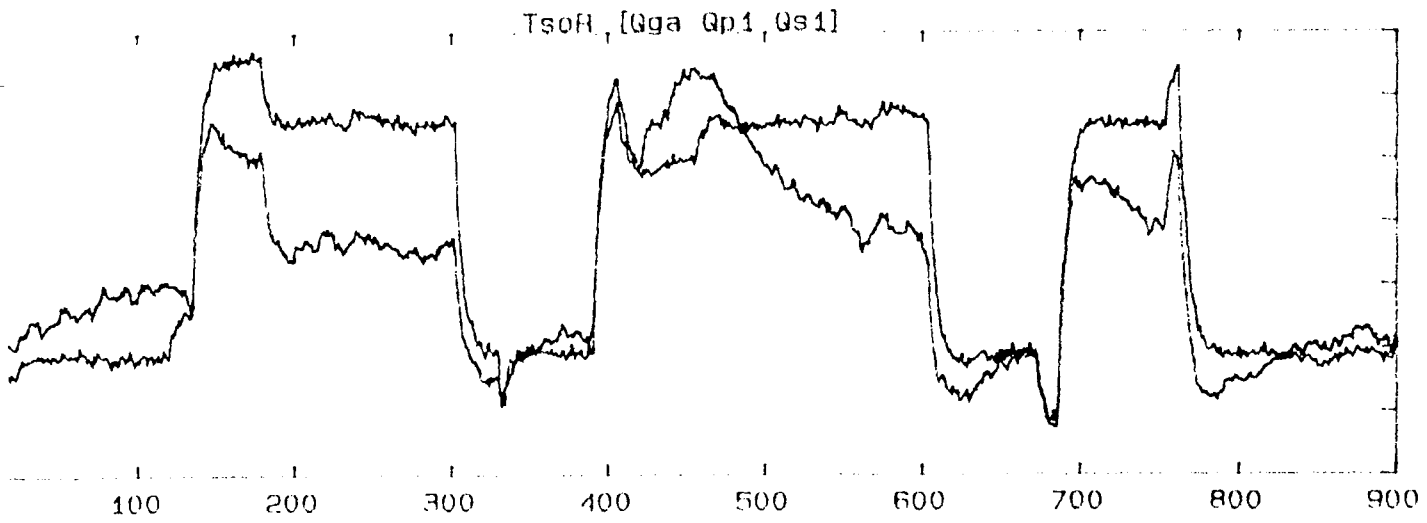


Fig. 7.3 Boite Noire "Température Sortie Secondaire"

[TsoM TsoR] (Mesurée et Réalisation)
 [TsoM Tso ARX] (Mesurée et Modèle ARX)
 [Tso TsoSH] (Mesurée et Moindres carrés Adaptative)

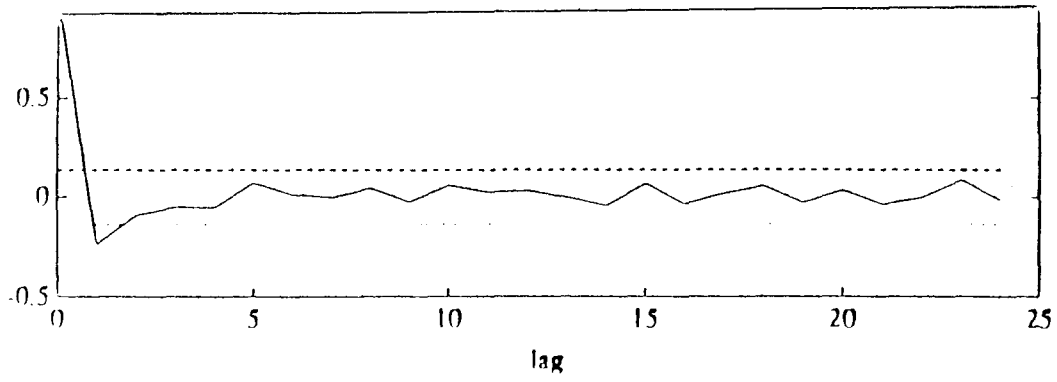


Figure 8.1 : Fonction d'autocorrélation des résidus du modèle de Tco

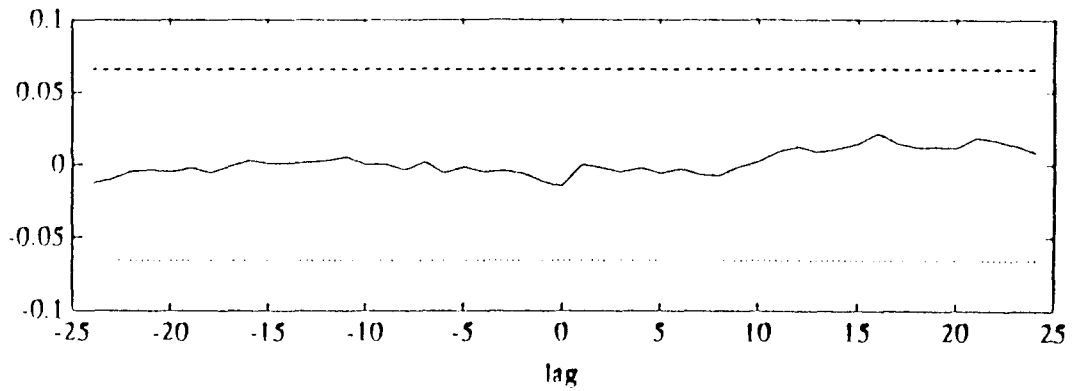


Figure 8.2 : Fonction d'intercorrélation entre les résidus et l'entrée Tpo (modèle de Tco)

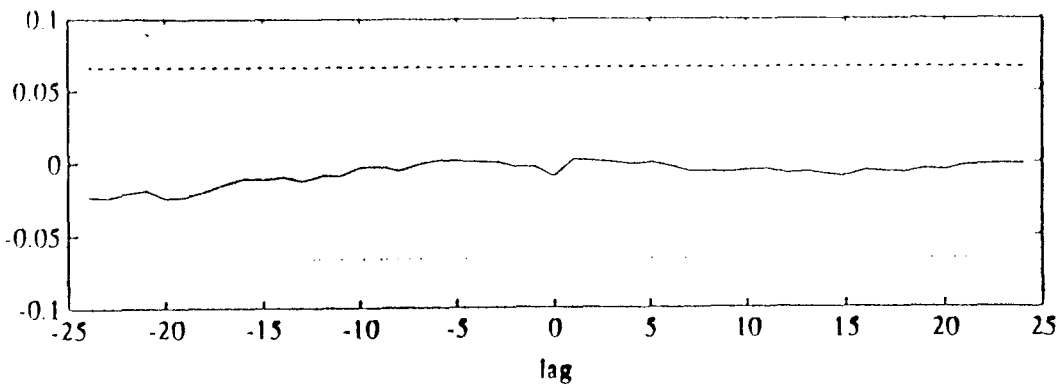


Figure 8.3 : Fonction d'intercorrélation entre les résidus et l'entrée Qg (modèle de Tco)

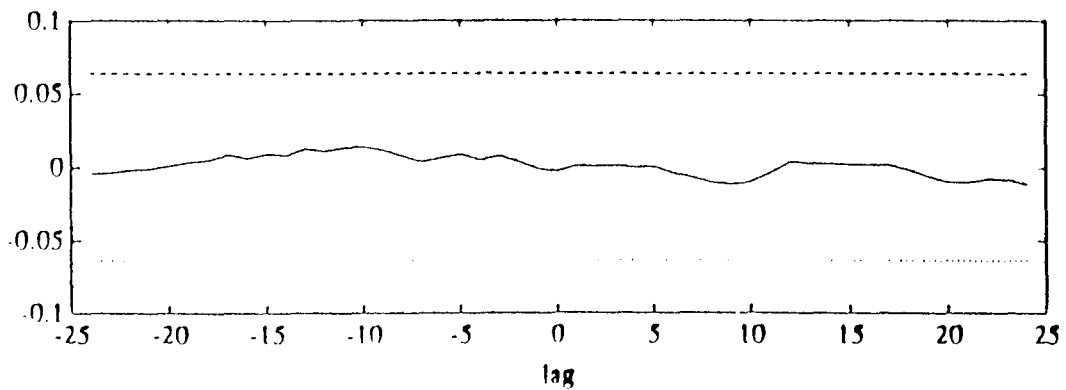


Figure 8.4 : Fonction d'intercorrélation entre les résidus et l'entrée Qp (modèle de Tco)

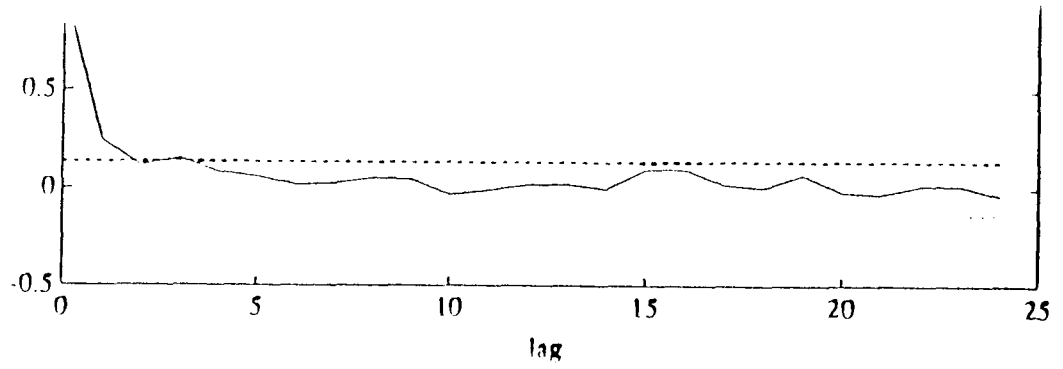


Figure 10.1: Fonction d'autocorrélation des résidus du modèle de Tso

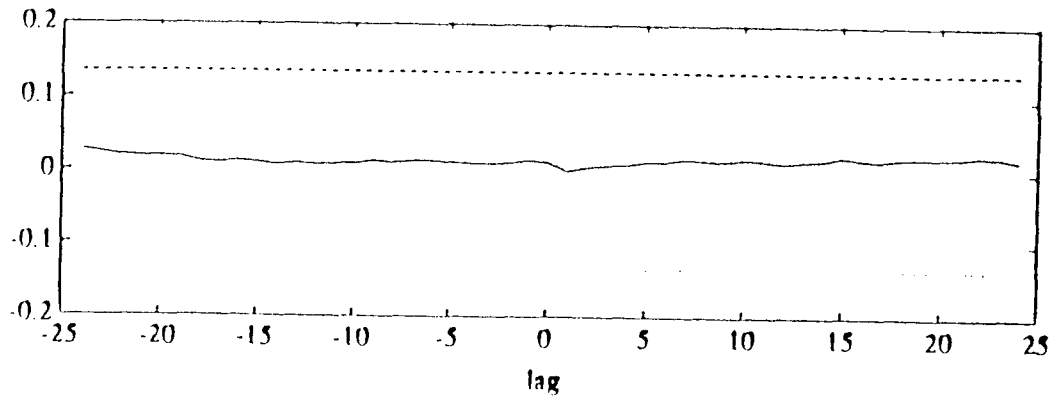


Figure 10.2: Fonction d'intercorrélacion entre les résidus et l'entrée Tco (modèle de Tso)

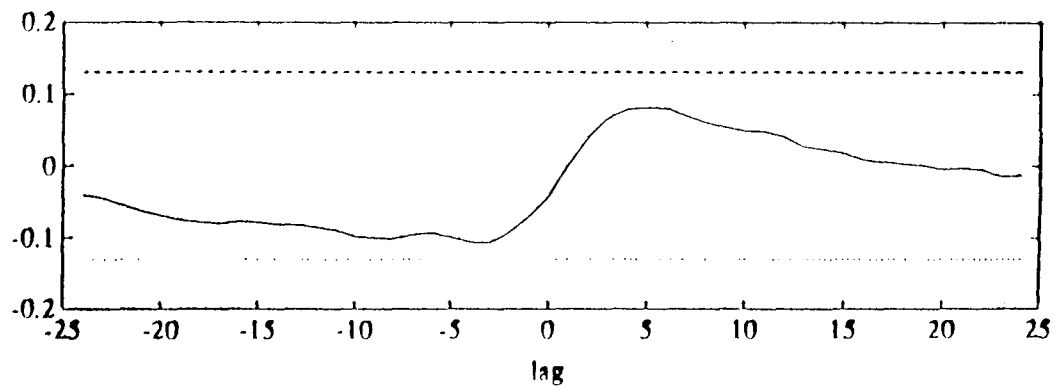


Figure 10.3: Fonction d'intercorrélacion entre les résidus et l'entrée Qs (modèle de Tso)

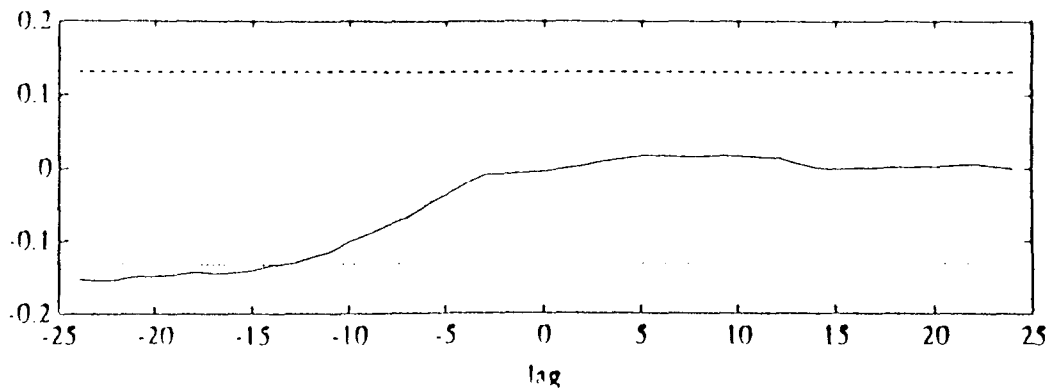


Figure 10.4: Fonction d'intercorrélacion entre les résidus et l'entrée Qp (modèle de Tso)

NOM DE L'ETUDIANT : HASHIM Ghani

NATURE DE LA THESE : Doctorat de l'Université de Nancy I en AUTOMATIQUE



VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 17 AVR. 1990 n° 478

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



Résumé

Ce travail est consacré à la réalisation ainsi qu'à la simplification des systèmes MIMO.

Après un rappel de certaines définitions et propriétés concernant les systèmes MIMO dans le chapitre I, nous présentons dans le deuxième chapitre une étude comparative des différentes méthodes de réalisation minimale : Ho-Kalman, Silverman, Rôzsa, Zeiger, Kung, Mayne, Gupta, approche par la matrice Page ...

Le troisième chapitre est consacré à la réalisation approchée des systèmes MIMO à partir d'entrées-sorties bruitées. Une application de cette approche à l'identification multivariable d'un processus thermique pilote constitué d'une chaudière et d'un échangeur de chaleur est alors donnée dans le chapitre IV.

Le problème inverse de la réalisation minimale à savoir le calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état, est également largement discuté et une étude comparative de différents algorithmes de calcul fait l'objet du chapitre V. Nous y présentons également une méthode développée au Laboratoire et proposons une généralisation d'un algorithme au cas MIMO.

Le chapitre VI est dédié à la réduction de modèles des grands systèmes. Après un exposé détaillé des différentes méthodes (Padé, Routh, décomposition fractionnelle, Davison, Chidambara, agrégation, perturbations singulières, réalisation symétrisée, approximation optimale, ...), nous proposons un nouvel algorithme de réduction de modèle basé sur la décomposition de Schur et nous discutons ses avantages. Enfin, différents critères de sélection de l'ordre du modèle réduit et de validation de modèles sont présentés.

Mots-clés

Réalisation minimale, réalisation approchée, estimation des paramètres de Markov, estimation de l'ordre, modélisation, matrice de transfert, réduction du modèle, choix de l'ordre (modèle réduit).