

# L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs

André Stef

► **To cite this version:**

André Stef. L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1992. Français. NNT : 1992NAN10130 . tel-01754399

**HAL Id: tel-01754399**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754399>**

Submitted on 30 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

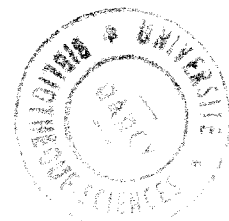
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**  
présentée à  
**l'UNIVERSITE DE NANCY I**



pour l'obtention du grade de  
Docteur de l'Université de Nancy I  
Option Mathématiques

par

**André STEF**

**L'ENSEMBLE EXCEPTIONNEL  
DANS LA CONJECTURE D'ERDŐS  
CONCERNANT LA PROXIMITE DES DIVISEURS**

Soutenu publiquement le 22 juin 1992 devant le jury composé de

<b>Daniel Barlet</b>	Président	Professeur à l'Université de Nancy I
<b>Etienne Fouvry</b>	Rapporteur	Professeur à l'Université de Paris XI
<b>Jean-Louis Nicolas</b>	Rapporteur	Professeur à l'Université de Lyon I
<b>Paul Erdős</b>	Examineur	Professeur à l'Académie des Sciences de Budapest (Hongrie)
<b>Gérald Tenenbaum</b>	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Nancy I

à Claire,

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Gérard Tenenbaum qui a dirigé ce travail. J'ai pu bénéficier de sa grande connaissance de la théorie probabiliste des nombres, de sa disponibilité et de ses encouragements. J'ai apprécié le climat de sympathie qui caractérisait nos relations.

Etienne Fouvry m'a initié à la théorie des nombres. Je lui suis très reconnaissant d'avoir assuré le suivi en acceptant la tâche de rapporteur.

Je remercie Jean-Louis Nicolas pour l'intérêt porté à ce travail et pour avoir accepté d'en être le rapporteur.

Je suis très honoré que monsieur le Professeur Paul Erdős ait bien voulu faire partie du jury.

Je remercie vivement Daniel Barlet d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens enfin à remercier tous les membres du Département de Mathématiques de Nancy I, et en particulier mes compagnons de thèse Nicole Bardy et Cyrille Crapsky, pour leur accueil.

# Table des Matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>Notations</b> .....	10
<b>Chapitre 1. Minoration de l'ensemble exceptionnel</b> .....	11
1. Introduction .....	12
2. Notations et conventions .....	13
3. Estimation de $\text{card } E_{\alpha,T}$ .....	14
4. Estimations auxiliaires .....	20
5. Démonstration du théorème .....	25
<b>Chapitre 2. Majoration de l'ensemble exceptionnel</b> .....	27
1. Introduction .....	28
2. Notations et conventions .....	30
3. Estimation auxiliaires .....	32
4. Lemmes essentiels .....	37
5. Démonstration du théorème .....	46
<b>Chapitre 3. Entiers lexicographiques</b> .....	50
1. Introduction .....	51
2. Equations fonctionnelles .....	56
3. Démonstration du théorème 2 .....	59
4. Démonstration du théorème 3 .....	68
5. Démonstration du théorème 4 .....	72
<b>Addendum. Résolution élémentaire d'une équation de Volterra</b> .....	74
<b>Annexe. Valeurs approchées de <math>\delta</math> et <math>\mu</math></b> .....	79
<b>Références bibliographiques</b> .....	80

# INTRODUCTION

P. Erdős conjectura dans les années trente que presque tout entier possède deux diviseurs  $d$  et  $d'$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ . Ici et dans la suite nous convenons de dire qu'une relation est satisfaite pour *presque tout entier*, ou encore *presque partout* si le nombre des entiers  $n \leq x$  ne vérifiant pas la propriété est  $o(x)$ .

L'argument heuristique sous-jacent dans la conjecture d'Erdős est l'hypothèse que, pour un entier "normal" donné  $n$ , les éléments de l'ensemble  $\{\ln(d'/d) : d, d'|n, (d, d') = 1\}$  sont uniformément répartis dans l'intervalle  $[-\ln n, \ln n]$ . Le nombre de tels éléments  $\ln(d'/d)$  est au moins  $3^{\omega(n)}$ , qui est de l'ordre de  $(\ln n)^{\ln 3}$  pour un entier normal. On peut donc s'attendre à ce qu'au moins un couple de diviseurs distincts  $(d, d')$  de  $n$  vérifie

$$|\ln(d'/d)| \ll (\ln n)^{1-\ln 3},$$

ce qui inclut la conjecture.

Maier et Tenenbaum ([MT]) démontrèrent les premiers la validité de cet argument en 1984, en obtenant le résultat suivant

**Théorème A (Maier & Tenenbaum (1984)).** *Soit  $\xi(n)$  une fonction tendant vers  $+\infty$  avec  $n$ . Pour presque tout entier  $n$ , il existe deux diviseurs  $d$  et  $d'$  de  $n$  tels que*

$$(1) \quad 1 < d'/d \leq 1 + (\ln n)^{1-\ln 3} \exp\left(\xi(n)\sqrt{\ln_2 n}\right)$$

S'intéressant au nombre  $\nabla(n, t)$  de couples  $(d, d')$  vérifiant  $d, d'|n$ ,  $(d, d') = 1$  et  $|\ln(d'/d)| \leq t$ , Hall et Tenenbaum ([HT] *Theorem 51*) démontrent le résultat suivant qui contient (1).

**Théorème B (Hall & Tenenbaum (1988)).** *Soit  $\beta = 1 - (1 + \ln_2 3)/\ln 3 \approx 0,00415$ . Pour tout  $x > 16$ , pour tout réel  $t \in [0, \ln x]$ , pour tout  $\xi \in [0, \sqrt{\ln_2 x}]$ , et pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus*

$$O\left(x\{(\xi\sqrt{\ln_2 x})^{-\beta}(\ln_3 x)^{4\beta} + \exp(-\xi^2/50)\}\right)$$

d'entre eux, on a

$$(2) \quad \nabla(n, t) > t(\ln x)^{\ln 3 - 1} \exp\left(-\xi\sqrt{\ln_2 x}\right).$$

Nous désignons par *ensemble exceptionnel*, et nous notons  $\mathbf{E}$ , l'ensemble des entiers ne possédant pas deux diviseurs  $d$  et  $d'$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ . Le théorème B implique que le nombre  $E_x$  des entiers  $n \leq x$  appartenant à  $\mathbf{E}$  vérifie

$$(3) \quad E_x \ll x(\ln_2 x)^{-\beta}(\ln_3 x)^{4\beta}$$

L'un des buts de notre travail est d'établir le résultat suivant, qui permet de préciser cette majoration.

**Théorème 1.** *Soit  $x \geq 3$ ,  $t \in [0, \ln x]$ , et soit  $\xi \in [0, \sqrt{\ln_2 x}]$ . Pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus*

$$O\left(x\left\{\exp\left(-c\xi^{1/2}(\ln_2 x)^{1/4}\right) + \exp\left(-\xi^2/33\right)\right\}\right)$$

d'entre eux, on a

$$\nabla(n, t) > t(\ln x)^{\ln 3 - 1} \exp\left(-\xi\sqrt{\ln_2 x}\right)$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

Dans le cas de la conjecture d'Erdős, correspondant à  $t = \ln 2$ , on obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.** *Le nombre  $E_x$  des entiers  $n \leq x$  ne possédant pas deux diviseurs  $d$  et  $d'$  tels que  $d < d' \leq 2d$  satisfait à*

$$E_x \ll x e^{-c\sqrt{\ln_2 x}}$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

Le théorème 1 est obtenu en affinant la méthode utilisée pour montrer le théorème B. Dans les deux cas, le principe est d'étudier pour  $n = \prod_{i=1}^{\Omega(n)} p_i$ , avec  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{\Omega(n)}$ , la structure des diviseurs de  $p_1 p_2 \dots p_k$  par récurrence sur  $k$ . On utilise le fait que les facteurs premiers d'un entier satisfont statistiquement à certaines propriétés d'équirépartition. Afin de préciser les améliorations apportées à la méthode pour parvenir au théorème 1, nous esquissons la démonstration dans le cas  $t = \ln 2$ , correspondant à la majoration de  $E_x$ .

On définit, pour  $n \leq x$

$$n_k := \prod_{\substack{p|n \\ p \leq u_k}} p \quad \text{où} \quad u_k := \exp \exp k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

L'étude de  $n_k$  est plus aisée que celle de  $p_1 p_2 \dots p_k$ , car la fonction  $n \mapsto n_k$  est multiplicative. Notamment, l'ordre de grandeur de  $n_k$  sera facile à déterminer.



Pour  $z$  réel, on pose

$$V(n, z) := \sum_{\substack{d, d' | n \\ (d, d')=1}} \left\{ 1 : \left| \ln \frac{d'}{d} - z \right| \leq \ln 2 \right\}$$

On a  $V(n, 0) = \nabla(n, t)$ . On pose

$$\mathcal{L}(n) := \{z \in \mathbf{R} : V(n, z) \geq 1\}.$$

$\mathcal{L}(n)$  est mesurable. On pose alors

$$\lambda(n) := \text{mes } \mathcal{L}(n).$$

Lorsque  $\lambda(m)$  est grand, pour un entier  $m$  fixé vérifiant  $P^+(m) \leq u_k$ , nous montrons qu'il existe un grand nombre de couples  $(p, q)$  de nombres premiers satisfaisant à  $u_k < p < q \leq u_{k+r}$  et  $\ln q - \ln p \in \mathcal{L}(m)$ , ce qui implique que  $mpq$  vérifie (2). Cela se traduira, en termes probabilistes, par la relation

$$(4) \quad \text{Prob} \left( n_{k+r} \text{ ne vérifie pas (2)} \right) \leq (1 - \varepsilon) \text{Prob} \left( n_k \text{ ne vérifie pas (2)} \right).$$

Dans le but d'établir une minoration de  $\lambda(m)$ , on introduit, pour un entier  $m$  sans facteur carré, la fonction de répartition  $F(z) := \sum_{d, d' | m, \ln(d/d') \leq z} 1$ , qui est liée à la fonction  $\nabla(n, t)$  par les relations

$$\nabla(m, t) = F(t) - F(-t - 0)$$

$$V(m, z) = F(z + t) - F(z - t - 0).$$

La transformée de Fourier de  $F$  dépend multiplicativement de  $m$ ; on a

$$\rho(m, \theta) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta z} dF(z) = \sum_{d, d' | m} \left( \frac{d'}{d} \right)^{i\theta} = \prod_{p | m} (1 + 2 \cos(\theta \ln p)).$$

Par des techniques d'analyse de Fourier, on montre alors que l'on a, pour tout entier  $m$  sans facteur carré

$$(5) \quad \lambda(m) \geq \frac{1}{16\pi} \left( \int_0^1 3^{-2\omega(m)} \rho(m, \theta)^2 d\theta \right)^{-1}$$

Nous remarquons que  $\rho(p, \theta)^2 = 3 + 2 \cos(2\theta \ln p) + 4 \cos(\theta \ln p)$ . Lorsqu'on évalue cette expression en moyenne sur  $p$ , on ne peut attendre aucun effet d'oscillation des cosinus lorsque  $\theta \ln p$  est petit, disons  $p \leq e^{1/\theta}$ , de sorte que  $\rho(p, \theta)^2$  vaut 9 en moyenne sur ces valeurs de  $p$ , alors que les effets de compensation de signes permettent d'assimiler  $\cos(2\theta \ln p)$  et  $\cos(\theta \ln p)$  à 0, et donc  $\rho(p, \theta)^2$  à 3, pour des valeurs plus grandes de  $p$ , soit  $p > e^{1/\theta}$ .

On peut donc raisonner heuristiquement en remplaçant dans des évaluations en moyenne  $\rho(p, \theta)^2$  par  $3^{\omega(p) + \omega_\theta(p)}$ , où  $\omega_\theta$  est la fonction additive définie par

$$\omega_\theta(n) := \omega(n, e^{1/\theta}) = \sum_{\substack{p | n \\ p \leq e^{1/\theta}}} 1.$$

Comme  $\rho(n, \theta)^2$  est une fonction multiplicative de  $n$ , on obtient ainsi que l'ordre moyen de  $\rho(n, \theta)^2$  est  $3^{\omega(n)+\omega_\theta(n)}$  et les techniques disponibles concernant les valeurs moyennes de fonctions multiplicatives positives ou nulles permettent de justifier pleinement le raisonnement heuristique précédent. On a  $\omega(n_k) \sim k$  et  $\omega_\theta(n_k) \sim \ln(1/\theta)$  pour  $k$  et  $\theta$  fixés avec  $\theta > e^{-k}$  et presque tout entier  $n$ , d'où

$$\rho(n, \theta)^2 \approx 3^{\omega(n)+\omega_\theta(n)} \approx 3^k \theta^{-\ln 3}.$$

En admettant que cette approximation reste valable uniformément en  $k$  et  $\theta$ , on obtient

$$\int_0^1 3^{-2\omega(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta \approx \int_0^{e^{-k}} d\theta + \int_{e^{-k}}^1 \theta^{-\ln 3} 3^{-k} d\theta \\ \asymp e^{-k}$$

En reportant dans la minoration (5) avec  $m = n_k$ , il vient

$$(6) \quad \lambda(n_k) \gg e^k,$$

c'est-à-dire une minoration optimale à un facteur multiplicatif constant près puisque l'on a pour presque tout  $n$

$$\lambda(n_k) \ll \ln n_k \ll e^k.$$

Grâce à (6), on peut obtenir (4) avec une minoration de  $\varepsilon$  par une constante absolue.

Ce schéma de démonstration est celui de la démonstration originale de Hall-Maier-Tenenbaum conduisant à la majoration (3) de  $E_x$ . En fait les approximations

$$\omega(n_k) \sim k \quad \text{et} \quad \omega_\theta(n_k) \sim \ln(1/\theta) \quad (\theta > e^{-k})$$

ne sont pas valables presque partout en  $k$  et  $\theta$ . Ainsi que l'a montré Erdős dans [E2], un tel résultat est nécessairement soumis à une restriction de la forme

$$\frac{k + \ln \theta}{\ln k} \longrightarrow +\infty.$$

Pour tenir compte de ce défaut d'uniformité, Hall et Tenenbaum majorèrent trivialement  $\rho(n_k, \theta)^2 3^{-2\omega(n_k)}$  par 1 dans un domaine du type  $\theta < e^{-k} \varepsilon^{-1}$ . Cela a pour effet d'une part d'imposer que  $\varepsilon$  soit petit dans (4), et d'autre part d'induire un ensemble exceptionnel relativement gros puisque le contrôle de  $\omega(n_k)$  et  $\omega_\theta(n_k)$  est demandé sur une suite relativement dense de valeurs de  $k$ .

La spécificité de notre traitement du problème réside dans le fait que nous n'exigeons plus une minoration de  $\lambda(n_k)$  pour une suite d'indices  $k$  égale à une progression géométrique de raison bornée. Nous opérons en fait une optimisation entre le nombre d'indices  $k$  contrôlés et la qualité de ce contrôle. En particulier nous demandons que l'inégalité  $\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k) > c \ln(\theta e^k)$ , avec  $c > 1/\ln 3$ , ait lieu uniformément en  $\theta$ , y compris pour  $\theta$  "proche" de  $e^k$ . Cela nous permet d'obtenir effectivement la minoration optimale (6). La contrepartie technique inhérente à une telle démarche est que l'ensemble des indices  $k$  pour lesquels (6) a lieu ne possède pas une structure simple. Nous obtenons uniquement par un argument de nature probabiliste l'existence d'une suite assez longue d'indices, soit  $\{k_1, \dots, k_h\}$ , pour lesquels les estimations souhaitées sont vérifiées, mais ces indices dépendent de l'entier  $n$  non exceptionnel considéré. Cela engendre une difficulté supplémentaire non négligeable pour mettre en place la récurrence analogue à (4) mais où  $k = k_i(n)$ ,  $k + r = k_{i+1}(n)$ . Il est en effet nécessaire de raisonner sur des ensembles éventuellement très minces, résultant de la partition de  $\{n : n \leq x\}$  induite par les conditions  $(k_1(n), \dots, k_i(n)) = (k_1, \dots, k_i)$ .

La majoration du théorème 2 incite à chercher des minoration non triviales pour  $E_x$ . Il est clair que  $\mathbf{E}$  est infini, car il contient en particulier les nombres premiers supérieurs à 2. On a donc en première estimation

$$E_x \gg \frac{x}{\ln x}.$$

Dans le but d'améliorer cette minoration, revenons à l'argument heuristique invoqué par Erdős à l'appui de la conjecture. On suppose que, pour un entier  $n$  donné, les éléments de l'ensemble  $\{\ln(d'/d) : d, d' | n, (d, d') = 1\}$  sont uniformément répartis dans l'intervalle  $[-\ln n, \ln n]$ . Le nombre de tels éléments est inférieur à  $3^{\Omega(n)}$ . On peut donc s'attendre à ce que

$$\min_{\substack{(d, d')=1 \\ d \neq d'}} \left| \ln \left( \frac{d'}{d} \right) \right| \geq 3^{-\Omega(n)} \ln n.$$

Pour un entier normal,  $\Omega(n)$  est de l'ordre de  $\ln_2 n$  et donc

$$\min_{\substack{(d, d')=1 \\ d \neq d'}} \left| \ln \left( \frac{d'}{d} \right) \right| \geq (\ln n)^{1-\ln 3} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

Cependant, si  $\Omega(n) < \frac{1}{\ln 3} \ln_2 n$ , on a alors  $3^{-\Omega(n)} \ln n > 1$ , ce qui implique que  $n$  appartient à l'ensemble exceptionnel. En considérant les entiers ayant "peu" de facteurs premiers, on obtient effectivement une minoration non triviale de  $E_x$ , que nous précisons dans le résultat suivant.

**Théorème 3.** Soit  $\beta = 1 - (1 + \ln_2 3) / \ln 3 \approx 0,00415$ . Le nombre  $E_x$  des entiers  $n \leq x$  ne possédant pas deux diviseurs  $d$  et  $d'$  tels que  $d < d' \leq 2d$  satisfait à

$$E_x \gg x (\ln x)^{-\beta} \exp\left(-c\sqrt{\ln_2 x \ln_3 x}\right)$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

En fait, il ne suffit pas qu'un entier ait peu de facteurs premiers pour qu'il appartienne à l'ensemble exceptionnel. En effet, tout entier pair, par exemple, vérifie la conjecture. Pour éviter ce type d'obstruction, nous considérons pour  $\alpha \leq 1/\ln 3$  et  $T = T(x)$  grand, l'ensemble  $E_{\alpha,T}$  des entiers  $n \leq x$  vérifiant

$$\Omega(n) \leq \alpha \ln_2 x,$$

et

$$P^-(n) > T.$$

$E_{\alpha,T}$  est donc un ensemble d'entiers ayant peu de facteurs premiers et pas de petits facteurs premiers. Nous estimons  $\text{card } E_{\alpha,T}$  par la méthode de Selberg-Delange décrite dans [T2]. Nous obtenons le résultat suivant

**Lemme 1.** Soit  $0 < \gamma < 1$ . On a uniformément pour  $\frac{3}{2} \leq T \leq \exp(\ln x)^{1/10}$  et  $\gamma \leq \alpha \leq 1$

$$\text{card } E_{\alpha,T} \gg_T x (\ln x)^{-Q(\alpha + \alpha \ln(1 - \ln_2 T / \ln_2 x))} (\ln_2)^{-1/2},$$

où  $Q(\alpha) := 1 - \alpha + \alpha \ln \alpha$ .

L'idée de base de la preuve du théorème 3 consiste alors à montrer, par une méthode de pondération, que pour  $\alpha$  et  $T$  convenablement choisis, dépendant de  $x$ , presque tous les éléments de  $E_{\alpha,T}$  sont des exceptions à la conjecture d'Erdős.

Les résultats qui suivent ont été établis en collaboration avec Gérald Tenenbaum

Nous avons minoré  $\mathbf{E}$  en montrant qu'il contenait des entiers ayant peu de facteurs premiers. Nous pouvons alors nous demander si  $\mathbf{E}$  possède des entiers  $n$  ayant un "nombre normal" de facteurs premiers, à savoir  $\ln_2 n$ . Désignons par  $\{p_j(n) : 1 \leq j \leq \omega(n)\}$  la suite croissante des facteurs premiers d'un entier  $n$  et par  $\alpha_j(n)$  l'unique entier  $\nu$  tel que  $p_j(n)^\nu \parallel n$  ( $1 \leq j \leq \omega(n)$ ) et posons

$$n_j := \prod_{i < j} p_i(n)^{\alpha_i(n)} \quad (1 \leq j \leq \omega(n)).$$

On montre par un raisonnement élémentaire sur les valuations  $p$ -adiques que, lorsqu'un entier  $n$  vérifie

$$\min_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j > 2,$$

il appartient alors à  $\mathbf{E}$ .

Si  $\{d_j(n) : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$  désigne la suite croissante des diviseurs de  $n$ , Tenenbaum a montré dans [T2] que l'on a pour tout  $n$

$$(7) \quad \max_{1 \leq j < \tau(n)} d_{j+1}(n)/d_j(n) = \max_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j.$$

La fonction  $D(x, y) := \text{card}\{n \leq x : \max p_j(n)/n_j \leq y\}$  est étudiée dans [T2, T3], et peut être utilisée dans différents domaines de la théorie des nombres. Nous étudions ici le problème dual, c'est à dire celui de la répartition de la fonction

$$(8) \quad G(n) := \min_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j.$$

Nous désignons par  $\mathcal{L}(y)$  l'ensemble des entiers  $n \geq 1$  tels que  $G(n) > y$ . Nous avons donc  $\mathcal{L}(2) \subset \mathbf{E}$ .

Nous considérons la structure d'ordre sur les diviseurs d'un entier  $n$  fixé induite par l'ordre lexicographique, obtenu en associant à chaque diviseur  $d = \prod_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)^{\beta_j}$  ( $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j(n)$ ) le mot  $\beta_{\omega(n)} \dots \beta_1$  de longueur  $\omega(n)$ .

On constate qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre lexicographique corresponde à l'ordre naturel est que  $n \in \mathcal{L}(1)$ .

Cette propriété nous a conduit à désigner  $\mathcal{L}(1)$  comme l'ensemble des entiers lexicographiques.

Une seconde propriété attrayante de cet ensemble  $\mathcal{L}(1)$  est la suivante.

**Théorème 4.** Soit  $n$  un nombre entier. On a

$$(9) \quad \min_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j = \min_{1 \leq j \leq \tau(n)} d_{j+1}(n)/d_j(n)$$

si, et seulement si,  $n \in \mathcal{L}(1)$ .

Dans le but d'estimer le nombre d'entiers normaux inférieurs à  $x$  ne satisfaisant pas la conjecture d'Erdős, nous définissons  $\mathcal{L}(x, y) := \mathcal{L}(y) \cap [1, x]$ . Et nous étudions le comportement asymptotique de la quantité

$$(10) \quad L(x, y; t) := \sum_{n \in \mathcal{L}(x, y)} t^{\omega(n)}.$$

La fonction arithmétique  $n \mapsto t^{\omega(n)}$  permet d'opérer un "recentrage exponentiel" (selon l'expression utilisée en théorie des probabilités) d'une somme arithmétique autour d'un ensemble d'entiers ayant une quantité prescrite de facteurs premiers.

Nous posons pour  $\delta < 1$

$$(11) \quad F(\delta) := \int_0^{1/2} v^{-\delta} \frac{dv}{1-v}.$$

$F$  est une fonction strictement croissante, telle que  $F(] - \infty, 1[) = ]0, +\infty[$ . Nous désignons, pour chaque  $t > 0$ , par  $\delta(t)$  l'unique solution de l'équation

$$(12) \quad tF(\delta) = 1.$$

Enfin, nous posons

$$(13) \quad \eta(t) := \begin{cases} 1 - \delta(t) & (t \leq 1/\ln 2) \\ \frac{1}{3}(1 - \delta(t))^{-2} & (t > 1/\ln 2). \end{cases}$$

On peut noter que  $\delta(t) \geq 0$  si, et seulement si,  $t \leq 1/\ln 2$ .

Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Théorème 5.** Pour chaque  $t > 0$ , il existe une constante  $K(t) > 0$  telle que, étant donné  $T > 1$ , on ait uniformément pour  $1/T \leq t \leq T$ ,  $1 \leq y \leq T$ ,

$$(14) \quad L(x, y; t) = \left\{ K(t) + O_T \left( \frac{(\ln_2 x)^2}{(\ln x)^{\eta(t)}} \right) \right\} \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}}.$$

On peut se rapporter à l'annexe pour une estimation numérique de  $\delta(t)$ .

Nous donnons dans un Addendum à la fin du chapitre 3 un résultat plus faible quant au terme d'erreur de (14), que nous démontrons par une méthode élémentaire.

Nous déduisons notamment de (14) l'estimation de la fonction de compte  $L(x) := L(x, 1; 1)$  des entiers lexicographiques. On a

$$L(x) \sim K(1) \frac{x}{(\ln x)^\delta},$$

où  $\delta = \delta(1) = 0,2228\dots$ . On peut remarquer que le théorème 5 n'améliore pas la minoration de  $E_x$  obtenue par le théorème 3. Nous allons voir qu'il fournit cependant une minoration effective d'un sous-ensemble de  $\mathbf{E}$  disjoint de celui qui a servi pour le théorème 3.

Il est facile de voir que pour tout  $n$  de  $\mathcal{L}(1)$ , on a  $\omega(n) \leq (1/\ln 2 + o(1)) \ln_2 n$ . Par "recentrage exponentiel", le théorème 5 permet d'estimer, pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1/\ln 2[$ , à un facteur  $(\ln x)^{o(1)}$  près le nombre des entiers de  $\mathcal{L}(x, y)$  tels que  $\omega(n)$  soit "proche" de  $\alpha \ln_2 x$ . On obtient le résultat suivant

**Théorème 6.** Pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1/\ln 2[$ , l'équation  $F(\sigma) - \alpha F'(\sigma) = 0$  possède une unique solution  $\sigma = \sigma_\alpha < 1$ . Soient  $T > 1$ , et  $(\alpha_0, \alpha_1)$  tels que  $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1/\ln 2$ . Pour toute constante  $A = A(\alpha_0, \alpha_1, T)$  assez grande il existe une constante  $B$  telle que l'on ait uniformément pour  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ,  $1 \leq y \leq T$ ,  $x \geq 16$ ,

$$(15) \quad x(\ln x)^{-\mu(\alpha)} e^{-B\sqrt{\ln_2 x}} \ll \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x, y) \\ |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| \leq A\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \ll x(\ln x)^{-\mu(\alpha)} e^{B\sqrt{\ln_2 x}}$$

avec

$$(16) \quad \mu(\alpha) = \sigma_\alpha - \alpha \ln F(\sigma_\alpha).$$

Dans le cas où  $\alpha = -\delta'(1)$ , on peut choisir  $B = 0$ .

On peut se rapporter à l'annexe pour une estimation numérique de  $\mu(\alpha)$ .

On a en particulier  $\mu(1) = 0,687\dots$ , ce qui apporte une réponse quantitative à la question de la taille de l'intersection de  $\mathbf{E}$  et de l'ensemble des entiers satisfaisant au théorème de Hardy et Ramanujan.

Un théorème d'Alladi [A] énonce que si les transformées de Laplace de deux fonctions de répartition sont proches, alors les deux fonctions sont proches. En appliquant ce résultat à la fonction de répartition

$$G(z) := \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x, y) \\ \omega(n) \leq z}} t^{\omega(n)},$$

on établit que  $\omega(n)$  a une distribution approximativement gaussienne sur l'ensemble  $\mathcal{L}(x, y)$ .

**Théorème 7.** Soit  $T > 1$ . On a uniformément pour  $1/T \leq t \leq T$ ,  $1 \leq y \leq T$ ,  $z \in \mathbf{R}$ ,

$$\frac{1}{L(x, y; t)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x, y) \\ \omega(n) \leq a(t) \ln_2 x + z \sqrt{b(t) \ln_2 x}}} t^{\omega(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du + O\left(\left(\frac{\ln_4 x}{\ln_3 x}\right)^{1/8}\right),$$

où l'on a posé

$$a(t) = -t\delta'(t), \quad b(t) = -(t\delta'(t) + t^2\delta''(t)).$$

Cela permet en particulier de retrouver le résultat du théorème 6 et on généralise pour  $t$  quelconque le cas  $\alpha = -\delta'(1)$ .

## Notations

La lettre  $p$ , avec ou sans indice, désigne un nombre premier.  $a|b$  signifie :  $a$  divise  $b$ ;  $p^\nu || a$  signifie :  $p^\nu | a$  et  $p^{\nu+1} \nmid a$ .

$P^+(n)$  (resp.  $P^-(n)$ ) désigne le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier de l'entier  $n > 1$ . Par convention  $P^+(1) = 1$ ,  $P^-(1) = +\infty$ .

La fonction  $\omega(n)$  (resp.  $\Omega(n)$ ) désigne le nombre de facteurs premier d'un entier  $n$  comptés sans multiplicité (resp. avec multiplicité).

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1$$

$$\Omega(n) := \sum_{p^\nu || n} \nu$$

$$\Omega(n, z) := \sum_{\substack{p^\nu || n \\ p \leq z}} \nu$$

$$\varphi(n) := \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m, n) = 1}} 1 = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

On désigne par  $\ln_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithme.

$f$  et  $g$  étant deux fonctions de plusieurs variables définies sur un domaine  $D$  les notations  $f = O(g)$  et  $f \ll g$  signifient qu'il existe une constante  $K = K(D)$  telle que  $|f| \leq K|g|$  sur tout le domaine  $D$ .

La notation  $f \asymp g$  signifie que  $f \ll g$  et  $g \ll f$ .

$\zeta(s)$  désigne la fonction de Riemann.



# **CHAPITRE 1**

## **MINORATION DE L'ENSEMBLE EXCEPTIONNEL**

# Chapitre 1

## Minoration de l'Ensemble Exceptionnel

### 1. Introduction.

La conjecture d'Erdős, démontrée par Maier et Tenenbaum en 1984 ([MT]), affirme que presque tout entier possède deux diviseurs  $d$  et  $d'$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ .

On appelle Ensemble Exceptionnel, que l'on note  $\mathbf{E}$ , l'ensemble des entiers ne possédant pas deux diviseurs  $d$  et  $d'$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ . La conjecture énonce donc que  $\mathbf{E}$  est de densité nulle.

$\mathbf{E}$  est infini, car il contient en particulier les nombres premiers supérieurs à 2. On note alors  $E_x$  le cardinal de l'ensemble des entiers inférieurs à  $x$  appartenant à l'ensemble exceptionnel. On a donc en première estimation

$$E_x \gg \frac{x}{\ln x}.$$

On obtient au chapitre 2 la majoration

$$E_x \ll xe^{-c(\ln_2 x)^{1/2}},$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

Dans le but d'améliorer la minoration de  $E_x$ , nous étudions l'argument heuristique invoqué par Erdős à l'appui de la conjecture. On suppose que, pour un entier  $n$  donné, les éléments de l'ensemble  $\{\ln(d'/d) : d, d' | n, (d, d') = 1\}$  sont uniformément répartis dans l'intervalle  $[-\ln n, \ln n]$ . Le nombre de tels éléments est inférieur à  $3^{\Omega(n)}$ . On peut donc s'attendre à ce que

$$\min_{\substack{(d, d')=1 \\ d \neq d'}} \left| \ln \left( \frac{d'}{d} \right) \right| \geq 3^{-\Omega(n)} \ln n.$$

Pour un entier normal,  $\Omega(n)$  est de l'ordre de  $\ln_2 n$  et donc

$$\min_{\substack{(d,d')=1 \\ d \neq d'}} \left| \ln \left( \frac{d'}{d} \right) \right| \geq (\ln n)^{1-\ln 3} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

Cependant, si  $\Omega(n) < \frac{1}{\ln 3} \ln_2 n$ , on a alors  $3^{-\Omega(n)} \ln n > 1$ , ce qui implique que  $n$  appartient à l'ensemble exceptionnel. En étudiant les entiers ayant peu de facteurs premiers, on obtient le résultat suivant.

**Théorème.** Soit  $\beta = 1 - (1 + \ln_2 3)/\ln 3 \approx 0,00415$ . Le nombre  $E_x$  des entiers  $n \leq x$  ne possédant pas deux diviseurs  $d$  et  $d'$  tels que  $d < d' \leq 2d$  satisfait à

$$E_x \gg x (\ln x)^{-\beta} \exp \left( -c \sqrt{\ln_2 x \ln_3 x} \right)$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

Il ne suffit pas qu'un entier ait peu de facteurs premiers pour qu'il appartienne à l'ensemble exceptionnel. En effet, tout entier pair, par exemple, vérifie la conjecture. Pour éviter ce type d'obstruction, nous considérons pour  $\alpha \leq 1/\ln 3$  et  $T = T(x)$  grand,  $E_{\alpha, T}$ , l'ensemble des entiers  $n \leq x$  vérifiant

$$\Omega(n) \leq \alpha \ln_2 x,$$

et

$$P^-(n) > T.$$

$E_{\alpha, T}$  est donc un ensemble d'entiers ayant peu de facteurs premiers et pas de petits facteurs premiers.  $\text{card } E_{\alpha, T}$  est estimé par la méthode de Selberg-Delange. On montre que pour  $\alpha$  et  $T$  convenablement choisis, dépendant de  $x$ , presque tous les éléments de  $E_{\alpha, T}$  sont des exceptions à la conjecture d'Erdős.

## 2. Notations et conventions.

Etant donné un nombre complexe  $s$ , on définit implicitement les nombres réels  $\sigma$  et  $\tau$  par la relation  $s = \sigma + i\tau$ .

On définit la fonction  $Q(\alpha) := 1 - \alpha + \alpha \ln \alpha$ .

On introduit également, pour  $T \geq 1$ , la fonction

$$\chi_T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } P^-(n) > T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3. Estimation de $\text{card } E_{\alpha, T}$ .

Nous rappelons d'abord un résultat relatif à la méthode de Selberg-Delange et dont on pourra trouver la démonstration dans [T2], p.213.

**Lemme 3.1.** Soit  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  une série de Dirichlet convergente pour  $\sigma > 1$ . On suppose qu'il existe un nombre complexe  $z$  tel que les dérivées d'ordre  $\leq 3 + \lceil |z| \rceil$  de la série de Dirichlet

$$G(s, z) := \zeta(s)^{-z} F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_z(n) n^{-s}$$

soient absolument convergentes en  $s = 1$ . On pose

$$H(z) := \sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)| (\ln 3n)^{|z|+2} n^{-1}.$$

Alors, on a pour  $A > 0$ ,  $|z| \leq A$

$$\sum_{n \leq x} a_n = x(\ln x)^{z-1} \left( \frac{1}{\Gamma(z)} G(1, z) + O_A \left( \frac{H(z)}{\ln x} \right) \right).$$

**Lemme 3.2.** Soit  $0 < \gamma < 1$ . On a uniformément pour  $\frac{3}{2} \leq T \leq \exp(\ln x)^{1/10}$  et pour  $\gamma \leq \alpha \leq 1$

$$\text{card } E_{\alpha, T} \gg_{\gamma} x(\ln x)^{-Q(\alpha) + \alpha \ln(1 - \ln_2 T / \ln_2 x)} (\ln_2 x)^{-1/2}$$

*Démonstration.* Ce résultat est démontré dans le chapitre 2.6 de [T2] dans le cas  $T = \frac{3}{2}$ . Il s'agit donc d'une généralisation, qui donne un résultat uniforme en  $T$ . On définit pour un entier  $k$

$$N_k(x) := \text{card} \{ n \leq x : P^-(n) > T, \Omega(n) = k \}$$

$N_k(x)$  est le coefficient de  $z^k$  dans l'expression

$$(3.1) \quad A_T(x, z) := \sum_{n \leq x} \chi_T(n) z^{\Omega(n)}.$$

Si on connaît une estimation de (3.1), on peut alors évaluer  $N_k(x)$  en appliquant la formule de Cauchy.

On remarque que  $\chi_T(n)z^{\Omega(n)}$  est une fonction multiplicative de  $n$ . On considère alors, pour  $|z| < 2$  et  $T \geq 1$ , la fonction

$$\begin{aligned} F_T(s, z) &:= \sum_{n \geq 1} \chi_T(n) \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} \\ &= \prod_{p \leq T} \left(1 - \frac{z}{p^s}\right) \prod_p \left(1 - \frac{z}{p^s}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

$F_T$  converge pour  $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ . On pose alors

$$G_T(s, z) := \zeta(s)^{-z} F_T(s, z) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_{z,T}(n)}{n^s}$$

$g_{z,T}$  est une fonction multiplicative de  $n$ . On développe alors  $G_T(s, z)$  en produit eulérien convergent pour  $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} G_T(s, z) &= \prod_{p \leq T} \left(1 - \frac{z}{p^s}\right) \prod_p \left(1 - \frac{z}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z \\ &= M_T(s, z) G_1(s, z), \end{aligned}$$

avec

$$M_T(s, z) := \prod_{p \leq T} \left(1 - \frac{z}{p^s}\right).$$

De cette écriture, on déduit, pour  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  et pour  $|\xi| \leq 1/(2-\delta)$ ,  $|z| \leq 2(1-\delta)$

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{z,T}(p^\nu) \xi^\nu = \begin{cases} (1-\xi)^z & \text{pour } p \leq T \\ (1-\xi)^z (1-\xi z)^{-1} & \text{pour } p > T \end{cases}$$

On a en particulier

$$g_{z,T}(p) = \begin{cases} -z & \text{pour } p \leq T \\ 0 & \text{pour } p > T \end{cases}$$

La formule de Cauchy dans le disque  $|\xi| \leq 1/(2-\delta)$  implique que pour tout nombre premier  $p$  et pour  $|z| \leq 2(1-\delta)$

$$|g_{z,T}(p^\nu)| \leq M_\delta (2-\delta)^\nu \quad (\nu \geq 2)$$

avec

$$M_\delta := \sup_{\substack{|\xi| \leq 1/(2-\delta) \\ |z| \leq 2(1-\delta)}} |(1-\xi)^z| \left\{1 + |1-\xi z|^{-1}\right\} < +\infty$$

On en déduit que pour  $\sigma > \sigma_0(\delta) := \frac{\ln(2-\delta)}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln(1/(1-\delta/2))}{\ln 2}$ ,

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 1} |g_{z,T}(p^\nu)| p^{-\nu\sigma} \ll_\delta T^{1-\sigma} + \ln_2(3T) \quad (1 \leq T, |z| \leq 2(1-\delta)).$$

On a  $\sigma_0(\delta) < 1$  pour  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . Par le Théorème 2 du chapitre II.2 de [T2], on conclut que  $G_T(s, z)$  converge absolument pour  $\sigma > \sigma_0(\delta)$  et  $T \geq 1$ . Ainsi  $G_T(s, z)$  et ses dérivées successives en  $s$  sont toutes absolument convergentes en  $s = 1$ . Le lemme 3.1 fournit alors l'estimation, pour  $|z| \leq 2(1-\delta)$

$$(3.2) \quad A_T(z, x) = x(\ln x)^{z-1} \left( \frac{1}{\Gamma(z)} G_T(1, z) + O_\delta \left( \frac{H_T(z)}{\ln x} \right) \right)$$

avec

$$H(z) := \sum_{n=1}^{\infty} |g_{z,T}(n)| (\ln 3n)^{|z|+2} n^{-1}.$$

On pose

$$G_T^*(s, z) := \sum_{n=1}^{\infty} |g_{z,T}(n)| n^{-s} \quad (\sigma > \sigma_0(\delta))$$

On remarque que pour tout  $z$ ,  $|z| \leq 2(1-\delta)$  et pour tout  $T$ ,  $\frac{3}{2} \leq T < x$ , on a

$$H_T(z) \ll \frac{\partial^4}{\partial s^4} G_T^*(1, z) + 1.$$

Or

$$|G_T^*(s, z)| \leq G_T^*(\sigma, z) \leq M_T(\sigma, |z|) G_1^*(\sigma, z) \quad (\sigma > \sigma_0(\delta))$$

$M_T(\sigma, |z|)$  et  $G_1^*(\sigma, z)$  sont des fonctions décroissantes de  $\sigma$ . Soit  $\eta$  un nombre réel,  $0 < \eta \leq (1 - \sigma_0(\delta))/2$ . La formule de Cauchy dans le disque  $|s - 1| < \eta$  fournit la majoration

$$(3.3) \quad H_T(z) \leq 1 + \eta^{-4} M_T(1 - \eta, |z|) G_1^*(1 - \eta, z).$$

On remarque que

$$(3.4) \quad G_1^*(1 - \eta, z) \leq G_1^*((1 + \sigma_0(\delta))/2, z) \ll_\delta 1.$$

On pose

$$\eta = \min((2 \ln T)^{-1}, (1 - \sigma_0(\delta))/2),$$

ce qui permet d'obtenir la majoration

$$(3.5) \quad M_T(1 - \eta, z) \ll (\ln T)^{|z|} + 1.$$

On déduit de (3.3), (3.4), (3.5) que pour  $\frac{3}{2} \leq T$

$$H_T(z) \ll_{\delta} |\ln T|^{4+|z|}.$$

En reportant cette majoration dans (3.2), nous obtenons alors l'estimation pour  $\frac{3}{2} \leq T < x$  et  $|z| \leq 2(1 - \delta)$

$$(3.6) \quad A_T(z, x) = x(\ln x)^{z-1} \left( \frac{1}{\Gamma(z)} G_T(1, z) + O_{\delta} \left( \frac{(\ln T)^6}{\ln x} \right) \right).$$

Il s'agit maintenant d'estimer le coefficient de  $z^k$  dans  $A_T(z, x)$ . Dans ce but, on pose

$$h_T(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} G_T(1, z).$$

On a alors

$$\frac{1}{\Gamma(z)} G_T(1, z) = z h_T(z) = z h_1(z) M_T(1, z).$$

$h_1(z)$  est une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < 2$ . Si la fonction  $\ln$  désigne la détermination principale du logarithme complexe, on a alors

$$\ln M_T(1, z) = \sum_{p \leq T} \ln \left( 1 - \frac{z}{p} \right) = -z \ln_2 T + \theta_T(z),$$

où  $\theta_T(z)$  désigne une série entière de la variable  $z$ , dépendant du paramètre  $T$ , de rayon de convergence égal à 2. De plus  $\theta_T(z) = O_{\delta}(1)$  pour  $|z| \leq 2(1 - \delta)$ . On a donc

$$(3.7) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} G_T(1, z) = z h_1(z) (\ln T)^{-z} e^{\theta_T(z)}.$$

Pour  $k \geq 0$ , la formule de Cauchy appliquée sur le disque  $|z| \leq r$ , avec  $r \leq 2(1 - \delta)$  fournit l'estimation

$$N_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} A(z, x) z^{-k-1} dz$$

On a donc, d'après (3.6),

$$(3.8) \quad N_k(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{\ln x} Q_k(x) + O_{\delta} \left( x \frac{(\ln T)^6}{(\ln x)^2} \oint_{|z|=r} a(\ln x)^{\operatorname{Re} z} |z|^{-k-1} dz \right),$$

où

$$Q_k(x) := \oint_{|z|=r} e^{z(\ln_2 x - \ln_2 T)} h_1(z) e^{\theta_T(z)} z^{-k} dz.$$

Posons  $r := k/\ln_2 x$  pour  $k \leq 2(1 - \delta)\ln_2 x$  et désignons par  $S_k(x)$  le terme d'erreur de (3.8). On a

$$S_k(x) \ll_\delta x \frac{(\ln T)^6}{(\ln x)^2} r^{-k} \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} d\theta,$$

avec

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} d\theta &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{k \cos \theta} d\theta + \pi = 2 \int_0^1 e^{kt} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \pi \\ &\leq 2e^k \int_0^1 e^{-k(1-t)} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} + \pi \leq 2\Gamma(\tfrac{1}{2})e^k k^{-1/2} + \pi. \end{aligned}$$

Le terme d'erreur dans (3.8) est donc

$$(3.9) \quad S_k(x) \ll_\delta x \frac{(\ln T)^6}{(\ln x)^2} \left(\frac{\ln_2 x}{k}\right)^k e^k k^{-1/2} \ll x \frac{(\ln T)^6}{(\ln x)^2} \frac{(\ln_2 x)^k}{k!},$$

la deuxième majoration étant obtenue en appliquant la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

On remarque que  $Q_k(x)$  est indépendant de  $r$ ,  $0 < r \leq 2(1 - \delta)$ . On pose alors  $Y := \ln_2 x - \ln_2 T$  et  $r := (k - 1)/Y$  pour  $2 \leq k \leq 2(1 - \delta)Y$ . On a

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} (z - r)e^{zY} z^{-k} dz = \frac{Y^{k-2}}{(k-2)!} - r \frac{Y^{k-1}}{(k-1)!} = 0.$$

On pose alors  $B_T(z) := h_1(z)e^{\theta_T(z)}$ . On voit que

$$(3.10) \quad Q_k(x) = B_T(r) \oint_{|z|=r} e^{zY} z^{-k} dz + \oint_{|z|=r} \{B_T(z) - B_T(r) - (z - r)B_T'(r)\} e^{zY} z^{-k} dz$$

On a

$$\oint_{|z|=r} e^{zY} z^{-k} dz = \frac{Y^{k-1}}{(k-1)!}$$

On remarque de plus que pour  $2 \leq k \leq 2(1 - \delta)Y$ , on a  $r \leq 2(1 - \delta)$  d'où

$$(3.11) \quad B_T(r) \gg_\delta 1.$$



On majore le second terme du membre de droite de (3.10) que l'on note  $R_{k,T}$ . On remarque que pour  $|z| = r \leq 2(1 - \delta)$ , on a

$$\begin{aligned} B_T(z) - B_T(r) - (z - r)B_T'(r) &= (z - r) \int_0^1 (1 - t)B_T''((r + t(z - r))) dt \\ &\ll |z - r|^2 \sup_{|w| \leq r} |B''(w)| \\ &\ll_\delta |z - r|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} R_{k,T} &\ll_\delta \frac{x}{\ln x} \oint_{|z|=r} |z - r|^2 e^{Y \operatorname{Re} z} |z|^{-k} dz \\ &\ll_\delta \frac{x}{\ln x} \int_0^{2\pi} r^{3-k} (1 - \cos \theta) e^{rY \cos \theta} d\theta \\ &\ll_\delta \frac{x}{\ln x} \int_0^1 r^{3-k} e^{(k-1)t} \sqrt{1-t} dt \\ &\ll_\delta \frac{x}{\ln x} r^{3-k} e^{k-1} (k-1)^{-3/2} \\ &\ll_\delta \frac{x}{\ln x} \frac{Y^{k-1}}{(k-1)! Y^2}. \end{aligned}$$

On a donc pour  $\frac{3}{2} \leq T < x$  et pour  $2 \leq k \leq 2(1 - \delta)Y$

$$(3.12) \quad Q_k(x) = \frac{1}{2\pi} B_T \left( \frac{k-1}{Y} \right) \frac{x}{\ln x} \frac{Y^{k-1}}{(k-1)!} \{1 + O(kY^{-2})\}$$

Soit  $\alpha, \gamma \leq \alpha \leq 2(1 - \delta)(1 - \ln_2 T / \ln_2 x)$ . On pose

$$k = [\alpha \ln_2 x].$$

On a, d'après (3.11) et (3.12), en estimant  $(k-1)!$  par la formule de Stirling,

$$Q_k(x) \gg_\gamma x (\ln x)^{-Q(\alpha) + \alpha \ln(1 - \ln_2 T / \ln_2 x)} (\ln_2 x)^{-1/2} \{1 + O(Y^{-1})\},$$

et d'après (3.9),

$$S_k(x) \ll x (\ln x)^{-Q(\alpha)} \frac{(\ln T)^6}{\ln x} (\ln x)^{-1/2}.$$

Pour  $\ln_2 T \leq \frac{1}{10} \ln_2 x$  et pour  $0 < \gamma \leq \alpha \leq 1$ , on en déduit

$$E_{\alpha,T} \geq N_k(x) \gg_\gamma x (\ln x)^{-Q(\alpha) + \alpha \ln(1 - \ln_2 T / \ln_2 x)} (\ln_2 x)^{-1/2},$$

comme annoncé.

On déduit notamment de ce lemme que pour  $\frac{3}{2} \leq T < x$ ,  $\ln_2 T < (\ln_2 x)^{2/3}$  et pour  $0 < \gamma \leq \alpha \leq 1$ , on a

$$(3.13) \quad \text{card } E_{\alpha, T} \gg_{\gamma} x(\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln_2 x)^{-1/2} (\ln T)^{-\alpha(1+\frac{1}{2}\ln_2 T/\ln_2 x)}.$$

#### 4. Estimations auxiliaires.

On rappelle sans démonstration deux lemmes utiles, dont on pourra trouver les preuves dans [T2], p.3 et p.339 respectivement.

**Lemme 4.1.(Somme par parties).** Soit  $\{a_n : n \geq 1\}$  une suite de nombres complexes. On pose

$$A(t) := \sum_{n \leq t} a_n \quad (t > 0).$$

Alors, pour chaque fonction  $b \in C^1[1, x]$ , on a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t) dt.$$

**Lemme 4.2.** Soit  $f$  une fonction multiplicative non négative satisfaisant pour des constantes convenables  $A$  et  $B$  à

$$(i) \quad \sum_{p \leq y} f(p) \leq Ay \quad (y \geq 0)$$

$$(ii) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} f(p^{\nu}) p^{-\nu} \ln p^{\nu} \leq B$$

alors on a, pour  $x > 1$

$$\sum_{n \leq x} f(n) \leq (A + B + 1) \frac{x}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}.$$

**Lemme 4.3.** On a, pour  $\frac{3}{2} \leq T \leq x$  et  $0 < y < 2$ ,

$$\sum_{n \leq x} \chi_T(n) y^{\Omega(n)} \ll x(\ln x)^{y-1} (\ln T)^{-y}.$$

*Démonstration.* Par le lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \chi_T(n) y^{\Omega(n)} &\ll \frac{x}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \chi_T(n) y^{\Omega(n)} \\ &\ll \frac{x}{\ln x} \prod_{T < p \leq x} \left(1 - \frac{y}{p}\right)^{-1} \\ &\ll x(\ln x)^{y-1} (\ln T)^{-y}, \end{aligned}$$

comme annoncé.

**Lemme 4.4.** Soit  $\frac{3}{2} \leq T \leq x$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ , et  $U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$  l'ensemble des entiers  $n \in E_{\alpha, T}$  vérifiant

$$\max_{T \leq z \leq x} \left\{ \Omega(n, z) - \alpha(1 + \varepsilon) \ln \frac{\ln z}{\ln T} \right\} \leq \lambda.$$

On a

$$\text{card } U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda) = \text{card } E_{\alpha, T} + O\left(\alpha^{-1} x (\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-\alpha} \varepsilon^{-2} (1 + \varepsilon)^{-\lambda}\right).$$

*Démonstration.* On étudie l'ensemble  $V = V_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$  des entiers  $n$  appartenant à  $E_{\alpha, T}$  pour lesquels il existe un entier  $k$ ,  $\ln_2 T \leq k \leq \ln_2 x + 1$ , tel que

$$\Omega(n, z_k) - \alpha(1 + \varepsilon)(k - 1) + \alpha(1 + \varepsilon) \ln_2 T - \lambda > 0,$$

avec  $z_k := \exp \exp k$ . Soit  $y \in [1, 3/2]$ , on a

$$\text{card } V \leq \sum_{\ln_2 T \leq k \leq \ln_2 x + 1} \sum_{n \leq x} \chi_T(n) \alpha^{\Omega(n) - \alpha \ln_2 x} y^{\Omega(n, z_k) - \alpha(1 + \varepsilon)(k - 1) - \ln_2 T - \lambda}.$$

En effet, le poids  $\chi_T(n) \alpha^{\Omega(n) - \alpha \ln_2 x}$  est supérieur ou égal à 1 si  $n \in E_{\alpha, T}$  et compris entre 0 et 1 sinon, et de même la puissance de  $y$  est supérieure à 1 si et seulement si  $n \in V$ . D'après le lemme 4.2, la somme intérieure en  $n$  est

$$\begin{aligned} &\ll x (\ln x)^{-1 - \alpha \ln \alpha} y^{-\alpha(1 + \varepsilon)(k - 1) - \ln_2 T - \lambda} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \chi_T(n) y^{\Omega(n, z_k)} \alpha^{\Omega(n)} \\ &\ll x (\ln x)^{-1 - \alpha \ln \alpha} y^{-\alpha(1 + \varepsilon)(k - 1) - \ln_2 T - \lambda} \prod_{T < p \leq z_k} \left(1 - \frac{y\alpha}{p}\right)^{-1} \prod_{z_k < p \leq x} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)^{-1} \\ &\ll x (\ln x)^{-1 + \alpha - \alpha \ln \alpha} (\ln T)^{-y\alpha} y^{-\alpha(1 + \varepsilon)(k - 1) - \ln_2 T - \lambda} e^{k(y\alpha - \alpha)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\text{card } V \ll x (\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-y\alpha + \alpha(1 + \varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \sum_{\ln_2 T \leq k \leq \ln_2 x + 1} e^{k(y\alpha - \alpha - \alpha(1 + \varepsilon) \ln y)}$$

La somme en  $k$  est une série géométrique dont la raison est minimale pour le choix  $y = 1 + \varepsilon$ . Elle vaut alors  $e^{-\alpha Q(1 + \varepsilon)}$ . Comme  $Q(1 + \varepsilon) \gg \varepsilon^2$ , il suit

$$\text{card } V \ll \alpha^{-1} x (\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-\alpha} \varepsilon^{-2} (1 + \varepsilon)^{-\lambda}.$$

Soit  $n \in E_{\alpha, T}$ . On suppose que  $n$  n'appartient pas à  $U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$ . Il existe donc un réel  $z$ ,  $T < z \leq x$  vérifiant

$$\Omega(n, z) - \alpha(1 + \varepsilon) \ln \frac{\ln z}{\ln T} > \lambda.$$

On considère alors l'unique entier  $k$ ,  $\ln_2 T \leq k \leq \ln_2 x + 1$ , vérifiant  $z_{k-1} < z \leq z_k$ . On a alors

$$\Omega(n, z_k) \geq \Omega(n, z) > \alpha(1 + \varepsilon) \ln \frac{\ln z}{\ln T} + \lambda,$$

avec  $\ln z \geq k - 1$ . D'où

$$\Omega(n, z_k) - \alpha(1 + \varepsilon)(k - 1 - \ln_2 T) > \lambda,$$

ce qui implique que  $n$  appartient à  $V$ , dont on a majoré le cardinal. On obtient bien alors le terme d'erreur annoncé pour  $U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$ .

**Lemme 4.5.** Soit  $S_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$  l'ensemble des entiers  $n \in U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$  possédant deux diviseurs  $d$  et  $d'$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ , et soit

$$A_\varepsilon := \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon) \ln 3 - Q(1 + \varepsilon)} \quad (0 < \varepsilon < 1/2)$$

On a uniformément pour  $3/2 \leq T \leq x$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $\alpha \in ]0, A_\varepsilon]$

$$\text{card } S_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda) \ll x(\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-\alpha-1} 3^\lambda (1 + \varepsilon)^{-\lambda} \varepsilon^{-2}.$$

*Démonstration.* On majore  $\text{card } S_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$  en comptant, pour chaque entier  $n \in U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$ , le nombre de couples de diviseurs  $(d, d')$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ . Ainsi

$$\text{card } S_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda) \leq \sum_{n \in U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)} \sum_{\substack{dd' | n \\ d < d' \leq 2d}} 1$$

On introduit des poids dans cette somme. La fonction  $\chi_T(n) \alpha^{\Omega(n) - \alpha \ln_2 x}$  majore la fonction caractéristique de  $E_{\alpha, T}$ . D'après le lemme 4.4, pour tout entier  $n \in U_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda)$  et pour tout diviseur  $d'$  de  $n$ , on a

$$\Omega(n, d') - \alpha(1 + \varepsilon) \ln \frac{\ln d'}{\ln T} - \lambda < 0.$$

Soit  $y \in [1/4, 1]$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \text{card } S_{\alpha, T}(\varepsilon, \lambda) \\ & \leq y^{\alpha(1+\varepsilon)\ln_2 T - \lambda} \sum_{n \leq x} \chi_T(n) \alpha^{\Omega(n) - \alpha \ln_2 x} \sum_{\substack{dd' | n \\ d < d' \leq 2d}} y^{\Omega(n, d') - \alpha(1+\varepsilon)\ln_2 d'} \\ & \leq (\ln x)^{-\alpha \ln \alpha} (\ln T)^{\alpha(1+\varepsilon)\ln y} y^{-\lambda} \sum_{T < d < x} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} \\ & \quad \times \sum_{d < d' < 2d} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} (\ln d')^{-\alpha(1+\varepsilon)\ln y} \sum_{T < m \leq x/dd'} \chi_T(m) y^{\Omega(m, d')} \alpha^{\Omega(m)}. \end{aligned}$$

On définit maintenant

$$S_1 := x(\ln x)^{-\alpha \ln \alpha} (\ln T)^{\alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \sum_{T < d \leq x^{1/4}} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} \\ \times \sum_{d < d' < 2d} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} (\ln d')^{-\alpha(1+\varepsilon) \ln y} \sum_{T < m \leq x/dd'} \chi_T(m) y^{\Omega(m, d')} \alpha^{\Omega(m)}.$$

D'après le lemme 4.2, la somme intérieure en  $m$  de  $S_1$  est

$$\ll \frac{x}{dd' \ln(x/dd')} \sum_{m \leq x/dd'} \frac{1}{m} \chi_T(m) y^{\Omega(m, d')} \alpha^{\Omega(m)} \\ \ll \frac{x}{dd'} (\ln x)^{-1} \prod_{T < p \leq d'} \left(1 - \frac{y\alpha}{p}\right)^{-1} \prod_{d' < p \leq x/dd'} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)^{-1} \\ \ll \frac{x}{dd'} (\ln x)^{-1+\alpha} (\ln T)^{-y\alpha} (\ln d')^{y\alpha-\alpha}.$$

D'où

$$S_1 \ll x(\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-y\alpha+\alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \sum_{T < d \leq x^{1/4}} \frac{1}{d} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} \\ \times \sum_{d < d' \leq 2d} \frac{1}{d'} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} (\ln d')^{y\alpha-\alpha-\alpha(1+\varepsilon) \ln y}.$$

Par sommation par parties et par le lemme 4.3, la somme intérieure en  $d'$  est

$$\ll (\ln d)^{y\alpha-\alpha-\alpha(1+\varepsilon) \ln y} \left( \frac{1}{d} \sum_{d < d' \leq 2d} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} + \int_d^{2d} \frac{1}{t^2} \sum_{d < d' \leq t} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} dt \right) \\ \ll (\ln d)^{-1-\alpha+2y\alpha-\alpha(1+\varepsilon) \ln y} (\ln T)^{-y\alpha}.$$

On obtient donc

$$S_1 \ll x(\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-2y\alpha+\alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \\ \times \sum_{T < d \leq x^{1/4}} \frac{1}{d} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} (\ln d)^{-1-\alpha+2y\alpha-\alpha(1+\varepsilon) \ln y}.$$

Par sommation par parties et par le lemme 4.3, la somme en  $d$  est

$$\ll \frac{(\ln x)^{B-y\alpha}}{x^{1/4}} \sum_{T < d \leq x^{1/4}} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} + \int_T^{x^{1/4}} \frac{(\ln u)^{B-y\alpha}}{u^2} \sum_{T < d \leq u} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} du \\ \ll (\ln x)^{B-1} (\ln T)^{-y\alpha} + B^{-1} (\ln T)^{B-y\alpha},$$

pourvu que

$$B := -1 - \alpha + 3y\alpha - \alpha(1 + \varepsilon) \ln y < 0.$$

On a alors

$$(4.1) \quad S_1 \ll B^{-1} x (\ln x)^{-Q(\alpha)} (\ln T)^{-1-\alpha} y^{-\lambda} \ln_2 x.$$

On définit maintenant

$$S_2 := x (\ln x)^{-\alpha \ln \alpha} (\ln T)^{\alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \sum_{x^{1/4} < d \leq x^{1/2}} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} \\ \times \sum_{d < d' < 2d} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} (\ln d')^{-\alpha(1+\varepsilon) \ln y} \sum_{T < m \leq x/dd'} \chi_T(m) y^{\Omega(m, d')} \alpha^{\Omega(m)}.$$

D'après le lemme 4.2, la somme intérieure en  $m$  de  $S_2$  est

$$\ll \frac{x}{dd' \ln(2x/dd')} \sum_{m \leq x/dd'} \frac{1}{m} \chi_T(m) y^{\Omega(m, d')} \alpha^{\Omega(m)} \\ \ll \frac{x}{dd'} (\ln(2x/dd'))^{-1} \prod_{\substack{T < p \leq x/dd' \\ p < d'}} \left(1 - \frac{y\alpha}{p}\right)^{-1} \prod_{\min(d', x/dd') < p \leq x/dd'} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)^{-1} \\ \ll \frac{x}{dd'} (\ln 3x/dd')^{-1+y\alpha} (\ln T)^{-y\alpha},$$

cette dernière majoration étant obtenue en remarquant que  $\min(d', x/dd') \ll x/dd'$ . D'où

$$S_2 \ll x (\ln x)^{-\alpha \ln \alpha} (\ln T)^{-y\alpha + \alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \sum_{x^{1/4} < d \leq x^{1/2}} \frac{1}{d} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} \\ \times \sum_{d < d' \leq 2d} \frac{1}{d'} \chi_T(d') (y\alpha)^{\Omega(d')} (\ln d')^{-\alpha(1+\varepsilon) \ln y} (\ln(3x/dd'))^{-1+y\alpha}.$$

Par sommation par parties et par le lemme 4.3, la somme intérieure en  $d'$  est

$$\ll (\ln d)^{-1+y\alpha - \alpha(1+\varepsilon) \ln y} (\ln(3x/d^2))^{-1+y\alpha} (\ln T)^{-y\alpha}.$$

On obtient donc

$$S_2 \ll x (\ln x)^{-\alpha \ln \alpha} (\ln T)^{-2y\alpha + \alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda} \\ \times \sum_{x^{1/4} < d \leq x^{1/2}} \frac{1}{d} \chi_T(d) (y\alpha)^{\Omega(d)} (\ln d)^{-1+2y\alpha - \alpha(1+\varepsilon) \ln y} (\ln(3x/d^2))^{-1+y\alpha}.$$

Par sommation par parties et par le lemme 4.3, on a

$$S_2 \ll B^{-1} x (\ln x)^{-Q(\alpha)+B} (\ln T)^{-3y\alpha + \alpha(1+\varepsilon) \ln y} y^{-\lambda},$$

si  $B = -1 - \alpha + 3y\alpha - \alpha(1 + \varepsilon) \ln y < 0$ .

On a alors

$$(4.2) \quad S_2 \ll x(\ln x)^{-Q(\alpha)}(\ln T)^{-1-\alpha}y^{-\lambda} \left( \frac{\ln x}{\ln T} \right)^B.$$

Si  $B < 0$ , on a, par définition de  $S_1$  et  $S_2$ , et d'après (4.1) et (4.2),

$$\text{card } S_{\alpha,T}(\varepsilon, \lambda) \leq S_1 + S_2 \ll B^{-1} x(\ln x)^{-Q(\alpha)}(\ln T)^{-1-\alpha}y^{-\lambda}.$$

La valeur maximale de  $\alpha$  pour laquelle  $B \leq -\varepsilon^2$  est

$$\alpha(y) := \frac{1 - \varepsilon^2}{3y - 1 - (1 + \varepsilon) \ln y}.$$

$\alpha(y)$  est maximal pour le choix  $y = y(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)/3$ . Pour

$$\alpha \leq A_\varepsilon := \alpha(y) = \frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon) \ln 3 - Q(1 + \varepsilon)}$$

et pour  $3/2 \leq T < x$ , on a alors

$$\text{card } S_{\alpha,T}(\varepsilon, \lambda) \ll x(\ln x)^{-Q(\alpha)}(\ln T)^{-1-\alpha}3^\lambda(1 + \varepsilon)^{-\lambda}\varepsilon^{-2},$$

comme annoncé.

## 5. Démonstration du théorème.

Pour  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}]$  et  $\lambda > 0$ , on remarque l'inégalité triviale, pour  $\frac{3}{2} \leq T < x$  et tout  $\alpha \in ]0, 1]$ ,

$$(5.1) \quad E_x \geq \text{card } U_{\alpha,T}(\varepsilon, \lambda) - \text{card } S_{\alpha,T}(\varepsilon, \lambda).$$

Par les lemmes 4.4 et 4.5, on a donc, pour  $\alpha \leq A_\varepsilon$

$$(5.2) \quad E_x \geq \text{card } E_{\alpha,T} + O \left( x(\ln x)^{-Q(\alpha)}(\ln T)^{-\alpha}(1 + \varepsilon)^{-\lambda}\varepsilon^{-2} \{3^\lambda(\ln T)^{-1} + 1\} \right)$$

On utilisera la minoration de  $E_{\alpha,T}$  du lemme 3.2 donnée par (3.13) pour  $\gamma \leq \alpha \leq 1$  et  $(\ln_2 T) \leq (\ln_2 x)^{2/3}$

$$(5.3) \quad \text{card } E_{\alpha,T} \gg_\gamma x(\ln x)^{-Q(\alpha)}(\ln T)^{-\alpha(1+\frac{1}{2}\ln_2 T/\ln_2 x)}(\ln_2 x)^{-1/2}.$$

On souhaite obtenir la meilleure minoration possible de  $E_x$ . Pour cela, on pose  $\alpha = A_\varepsilon$ . On a alors

$$Q(\alpha) = \beta + \frac{\ln_2 3}{\ln 3} \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

où  $\beta = Q(1/\ln 3) = 1 - (1 + \ln_2 3)/\ln 3$ . On obtient

$$\text{card } E_{\alpha, T} \gg x(\ln x)^{-\beta} \exp \left\{ -\frac{\ln_2 3}{\ln 3} \varepsilon \ln_2 x - \alpha \ln_2 T + O\left(\varepsilon^2 \ln_2 x + (\ln_2 x)^{1/3}\right) \right\}.$$

D'après (5.2) et (5.3), pour obtenir que presque tous les entiers  $n \in E_{\alpha, T}$  sont des exceptions à la conjecture d'Erdős, il suffit alors que la condition suivante soient réalisée.

$$(5.4) \quad (\ln T)^{\frac{1}{2} \alpha \ln_2 T / \ln_2 x} (\ln_2 x)^{1/2} (1 + \varepsilon)^{-\lambda} \varepsilon^{-2} \{3^\lambda (\ln T)^{-1} + 1\} \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

En considérant le logarithme du terme de gauche de (5.4), il suffit donc d'avoir

$$-\lambda \varepsilon + \frac{1}{2} \ln_3 x + 2 \ln(1/\varepsilon) + \frac{\alpha}{2} (\ln_2 T)^2 / \ln_2 x + O(\varepsilon^2 \lambda) \longrightarrow -\infty,$$

et

$$-\ln_2 T + \lambda \ln 3 + \frac{1}{2} \ln_3 x + 2 \ln(1/\varepsilon) + \frac{\alpha}{2} (\ln_2 T)^2 / \ln_2 x + O(\varepsilon \lambda) \longrightarrow -\infty.$$

En minimisant  $\varepsilon^2 \ln_2 x + \ln_2 T$ , on obtient qu'il existe  $c_1, c_2, c_3$  trois constantes absolues strictement positives telles que pour

$$\begin{aligned} \ln_2 T &= c_1 \sqrt{\ln_2 x \ln_3 x}, \\ \varepsilon &= c_2 \sqrt{\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}}, \\ \lambda &= c_3 \sqrt{\ln_2 x \ln_3 x}, \end{aligned}$$

presque tout entier  $n \in E_{\alpha, T}$  est exception à la conjecture d'Erdős. Et on a alors

$$E_x \gg x(\ln x)^{-\beta} \exp \left( -c \sqrt{\ln_2 x \ln_3 x} \right),$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.



## **CHAPITRE 2**

### **MAJORATION DE L'ENSEMBLE EXCEPTIONNEL**

# Chapitre 2

## Majoration de l'Ensemble Exceptionnel

### 1. Introduction.

P. Erdős conjectura dans les années trente que presque tout entier possède deux diviseurs  $d$  et  $d'$  vérifiant  $d < d' \leq 2d$ .

L'argument heuristique invoqué est l'hypothèse que, pour un entier  $n$  donné, les éléments de l'ensemble  $\{\ln(d'/d) : d, d' | n, (d, d') = 1\}$  sont uniformément répartis dans l'intervalle  $[-\ln n, \ln n]$ . Le nombre de tels éléments  $\ln(d'/d)$  est au moins  $3^{\omega(n)}$ , qui est de l'ordre de  $(\ln n)^{\ln 3}$  pour un entier normal. On peut donc s'attendre à ce qu'au moins un couple de diviseurs distincts  $(d, d')$  de  $n$  vérifie

$$\left| \ln \left( \frac{d'}{d} \right) \right| \ll (\ln n)^{1-\ln 3},$$

ce qui inclut la conjecture.

Maier et Tenenbaum ([MT]) démontrèrent les premiers la validité de cet argument en 1984, en obtenant le résultat suivant

*Soit  $\xi(n)$  une fonction tendant vers  $+\infty$  avec  $n$ . Pour presque tout entier  $n$ , il existe deux diviseurs  $d$  et  $d'$  de  $n$  tels que*

$$(1.1) \quad 1 < \frac{d'}{d} \leq 1 + (\ln n)^{1-\ln 3} \exp \left( \xi(n) \sqrt{\ln_2 n} \right)$$

S'intéressant au nombre  $\nabla(n, t)$  de couples  $(d, d')$  vérifiant  $d, d' | n$ ,  $(d, d') = 1$  et  $|\ln(d'/d)| \leq t$ , Hall et Tenenbaum ([HT] *Theorem 51*) démontrent le résultat suivant qui contient (1.1)

Soit  $\beta = 1 - (1 + \ln_2 3) / \ln 3 \approx 0,00415$ . Pour tout  $x > 16$ , pour tout réel  $t \in [0, \ln x]$ , pour tout  $\xi \in [0, \sqrt{\ln_2 x}]$ , et pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus

$$O\left(x\left\{\left(\xi\sqrt{\ln_2 x}\right)^{-\beta}\left(\ln_3 x\right)^{4\beta} + \exp\left(-\xi^2/50\right)\right\}\right)$$

d'entre eux, on a

$$\nabla(n, t) > t(\ln x)^{\ln 3 - 1} \exp\left(-\xi\sqrt{\ln_2 x}\right).$$

En particulier, le nombre  $E_x$  des entiers  $n \leq x$  ne satisfaisant pas la conjecture d'Erdős vérifie

$$E_x \ll x(\ln_2 x)^{-\beta}(\ln_3 x)^{4\beta}$$

Le principe de la démonstration est d'étudier pour  $n = \prod_{i=1}^{\Omega(n)} p_i$ , avec  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{\Omega(n)}$ , la structure des diviseurs de  $p_1 p_2 \dots p_k$  pour un certain  $k$ , pour en déduire une structure probabiliste des diviseurs de  $p_1 p_2 \dots p_{k+1}$ .

Nous donnons maintenant un nouveau résultat, qui sera démontré dans ce chapitre.

**Théorème.** Soit  $x \geq 3$ ,  $t \in [0, \ln x]$ , et soit  $\xi \in [0, \sqrt{\ln_2 x}]$ . Pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus

$$O\left(x\left\{\exp\left(-c\xi^{1/2}(\ln_2 x)^{1/4}\right) + \exp\left(-\xi^2/33\right)\right\}\right)$$

d'entre eux, on a

$$(1.2) \quad \nabla(n, t) > t(\ln x)^{\ln 3 - 1} \exp\left(-\xi\sqrt{\ln_2 x}\right)$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

On obtient ce résultat en affinant la méthode du *Theorem 51* de [HT], et notamment en choisissant les entiers  $k$  pour lesquels on étudie  $p_1 p_2 \dots p_k$ .

Dans le cas de la conjecture d'Erdős, correspondant à  $t = \ln 2$ , on obtient le résultat suivant

**Corollaire.** Le nombre  $E_x$  des entiers  $n \leq x$  ne possédant pas deux diviseurs  $d$  et  $d'$  tels que  $d < d' \leq 2d$  satisfait à

$$E_x \ll x e^{-c\sqrt{\ln_2 x}}$$

où  $c$  désigne une constante absolue strictement positive.

*Démonstration:* Le corollaire se déduit aisément du théorème en posant  $t = \ln 2$  et  $\xi = \frac{1}{2}(\ln 3 - 1)\sqrt{\ln_2 x}$ .

## 2. Notations et conventions.

On définit, pour  $n \leq x$

$$n_k := \prod_{\substack{p|n \\ p \leq u_k}} p \quad \text{où} \quad u_k := \exp \exp k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

L'étude de  $n_k$  est plus aisée que celle de  $p_1 p_2 \dots p_k$ , car la fonction  $n \mapsto n_k$  est multiplicative. Notamment, l'ordre de grandeur de  $n_k$  sera facile à déterminer.

On pose

$$\begin{aligned} t_1 &:= (\ln x)^{1-\ln 3} e^{\frac{1}{2}\xi\sqrt{\ln_2 x}} \\ t_2 &:= \ln x e^{-\frac{1}{2}\xi\sqrt{\ln_2 x}} \end{aligned}$$

Pour établir le théorème, il suffit d'établir

$$(2.1) \quad \nabla(n, t) > t_1^{-1} t$$

avec le nombre d'exceptions annoncé, dans le domaine  $t_1 \leq t \leq t_2$ . En effet, pour  $t < t_1$ , le théorème annonce un résultat moins bon que la minoration triviale  $\nabla(n, t) \geq 1$ . Et pour  $t_2 < t \leq \ln x$ , on déduit de (2.1) que  $\nabla(n, t) \geq \nabla(n, t_2) > t_1^{-1} t_2 \geq (\ln x)^{\ln 3 - 1} t \exp(-\xi\sqrt{\ln_2 x})$ , comme annoncé.

Pour  $z$  réel, on pose

$$V(n, z) := \sum_{\substack{d, d' | n \\ (d, d') = 1}} \left\{ 1 : \left| \ln \frac{d'}{d} - z \right| \leq t \right\}$$

On a  $V(n, 0) = \nabla(n, t)$ . On pose

$$\mathcal{L}_t(n) := \{z \in \mathbf{R} : V(n, z) > t_1^{-1} t\}$$

$\mathcal{L}_t(n)$  est une réunion finie d'intervalles, donc mesurable. On pose alors

$$\lambda_t(n) := \text{mes } \mathcal{L}_t(n).$$

Remarquons immédiatement que  $\lambda_t(n) \leq 2(\ln n + t)$ .

Lorsque  $\lambda_t(m)$  est grand pour un entier  $m$  fixé vérifiant  $P^+(n) \leq u_k$ , nous verrons qu'il existe un grand nombre de couples  $(p, q)$  de facteurs premiers satisfaisant à  $u_k < p < q \leq u_{k+r}$  et  $\ln q - \ln p \in \mathcal{L}_t(m)$ , ce qui implique que  $mpq$  vérifie (1.2). Cela se traduira, en termes probabilistes, par la relation

$$(2.2) \quad \text{Prob}(n_{k+r} \text{ ne vérifie pas (1.2)}) \leq (1 - \varepsilon) \text{Prob}(n_k \text{ ne vérifie pas (1.2)}).$$

Dans le but d'établir une minoration de  $\lambda_t(m)$ , nous introduisons, pour un entier  $m$  sans facteur carré, la transformée de Fourier de la fonction de répartition  $F(z) := \sum_{d, d'|m, \ln(d/d') \leq z} 1$ , telle que  $\nabla(m, t) = F(t) - F(-t - 0)$  et  $V(m, z) = F(z + t) - F(z - t - 0)$ , soit

$$\begin{aligned} \rho(m, \theta) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta z} dF(z) \\ &= \sum_{d, d'|m} \left(\frac{d'}{d}\right)^{i\theta} = \prod_{p|m} (1 + 2 \cos(\theta \ln p)). \end{aligned}$$

On pose encore

$$\rho^*(m, \theta) := \prod_{\substack{p|m \\ p > e^{1/\theta}}} (1 + 2 \cos(\theta \ln p)).$$

Nous définissons aussi, pour  $n$  entier et  $\theta > 0$ , la fonction arithmétique

$$\omega_\theta(n) := \omega(n, e^{1/\theta}) = \sum_{\substack{p|n \\ p > e^{1/\theta}}} 1.$$

Nous pouvons supposer  $\xi \geq 4$ , car pour  $\xi \in [0, 4[$ , le nombre d'exceptions annoncé par le théorème est alors  $O(x)$ .

On pose maintenant pour  $x \geq 4$  et  $\xi \in [4, \sqrt{\ln_2 x}]$

$$\begin{aligned} h &= h(x, \xi) := \min \left\{ \left[ \frac{1}{2} (\xi)^{1/2} (\ln_2 x)^{1/4} \right], \xi^3 \right\} \geq 1 \\ L &= L(x, \xi) := \left[ \ln_2 x - \frac{1}{2} \xi \sqrt{\ln_2 x} \right] \\ M &= M(x, \xi) := L + h^2 \leq \ln_2 x - \frac{1}{4} \xi \sqrt{\ln_2 x} \end{aligned}$$

On introduit également la fonction  $Q(\alpha) := 1 - \alpha + \alpha \ln \alpha$ .

Dans tout ce travail, la notation  $c_i$ , avec  $i$  entier, désigne une constante absolue strictement positive, indépendante des paramètres du problème.

### 3. Estimations auxiliaires.

**Lemme 3.1.** Soit  $m$  un entier sans facteur carré vérifiant  $3^{-\omega(m)}t_1^{-1}(t+\ln m) \leq \frac{1}{2}$ , on a la relation

$$\lambda_t(m) \geq \frac{1}{16\pi} \left( \int_0^{1/t} 3^{-2\omega(m)} \rho(m, \theta)^2 d\theta \right)^{-1}.$$

*Démonstration.* Ce résultat est établi dans [HT], (inégalité (5.43), p.108). Pour la commodité du lecteur, nous redonnons ici les détails. Remarquons que

$$2 \cdot 3^{\omega(m)}t = \int_{-\infty}^{+\infty} V(m, z) dz \leq 2t_1^{-1}t(t + \ln m) + \int_{\mathcal{L}_t(m)} V(m, z) dz$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$(3.1) \quad 2 \cdot 3^{\omega(m)}t \leq 2t_1^{-1}t(t + \ln m) + \left( \lambda_t(m) \int_{\mathcal{L}_t(m)} V(m, z)^2 dz \right)^{1/2}$$

Pour un réel  $\Delta$  fixé, nous connaissons la majoration

$$\mathbf{1}_{[\Delta-t, \Delta+t]}(z) \leq 2 \left( \frac{\sin((\Delta - z)/2t)}{((\Delta - z)/2t)} \right)^2 = 2t \int_{-1/t}^{1/t} e^{-i(\Delta-z)\theta} (1 - |\theta t|) d\theta$$

On applique cette formule pour  $\Delta = \ln(d'/d)$ . On obtient ainsi

$$V(m, z) \leq 2t \int_{-1/t}^{1/t} e^{-i(\Delta-z)\theta} (1 - |\theta t|) \sum_{dd'|m} \left( \frac{d'}{d} \right)^{i\theta} d\theta$$

Grâce à la formule de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_t(m)} V(m, z)^2 dz &\leq 8\pi t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - |\theta t|)^2 \rho(m, \theta)^2 d\theta \\ &\leq 16\pi t^2 \int_0^{1/t} \rho(m, \theta)^2 d\theta, \end{aligned}$$

puisque  $\rho$  est une fonction paire de  $\theta$ . En reportant dans (3.1), on obtient bien la minoration annoncée. La minoration de  $\lambda_t(m)$  se ramène ainsi à la majoration de l'intégrale de  $\rho(m, \theta)^2$ .

On rappelle sans démonstration deux lemmes utiles, dont on pourra trouver les preuves dans [T2], p.339 et p.445 respectivement.

**Lemme 3.2.** Soit  $f$  une fonction multiplicative non négative satisfaisant pour des constantes convenables  $A$  et  $B$  à

- (i)  $\sum_{p \leq y} f(p) \leq Ay \quad (y \geq 0)$
- (ii)  $\sum_p \sum_{\nu \geq 2} f(p^\nu) p^{-\nu} \ln p^\nu \leq B.$

Alors on a, pour  $x > 1$

$$\sum_{n \leq x} f(n) \leq (A + B + 1) \frac{x}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}.$$

**Lemme 3.3.** Soit  $\Phi(x, z) := \text{card}\{n : n \leq x, P^-(n) > z\}$ , où  $P^-(n)$  désigne le plus petit facteur premier de  $n$ . Pour  $2 \leq z \leq \frac{1}{2}x$ , on a

$$\Phi(x, z) \asymp \frac{x}{\ln z}.$$

Les deux lemmes suivants permettent d'obtenir une estimation utile de  $\omega(n_k)$ .

**Lemme 3.4.** Pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O(xh^2 e^{-hQ(2)})$  d'entre eux, on a la relation suivante

$$(3.2) \quad \max_{L \leq k < M} \frac{\omega(n_k)}{k} \leq 2.$$

*Démonstration.* Le nombre des entiers  $n$  n'excédant pas  $x$  et ne satisfaisant pas l'inégalité (3.2) est majoré par

$$\sum_{L \leq k < M} \sum_{n \leq x} 2^{\omega(n_k) - 2k} \ll x \sum_{L \leq k < M} 2^{-2k} e^k = x \sum_{L \leq k < M} e^{-kQ(2)}$$

où la somme intérieure en  $n$  est estimée grâce au lemme 3.2. Comme  $L > h$ , cette majoration est bien  $O(xh^2 \exp(-hQ(2)))$ .

**Lemme 3.5.** Soit  $x \geq 3$ . Pour tout réel  $\xi$ ,  $1 < \xi \leq \sqrt{\ln_2 x}$ , et pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O(xh^2 \exp(-\xi^2/32))$  d'entre eux, on a

$$(3.3) \quad \min_{L \leq k < M} \frac{\omega(n_k) - k}{\sqrt{k}} \geq -\frac{\xi}{4}.$$

*Démonstration.* Soit  $\{y_k : L \leq k < M\}$  une suite finie de nombres de  $]0, 1]$ . Le nombre des entiers inférieurs à  $x$  ne satisfaisant pas (3.3) est majoré par

$$(3.4) \quad \sum_{L \leq k < M} \sum_{n \leq x} y_k^{\omega(n_k) - k + \frac{1}{4}\xi\sqrt{k}} \ll x \sum_{L \leq k < M} \exp(-k \ln y_k + \frac{1}{4}\xi\sqrt{k} \ln y_k + (y_k - 1)k),$$

où la somme intérieure est estimée grâce au lemme 3.2.

Choisissons

$$y_k = \left(1 - \frac{\xi}{4\sqrt{k}}\right) \quad (L \leq k < M).$$

Le terme de droite de (3.4) vaut alors

$$x \sum_{L \leq k < M} \exp(-kQ(y_k)) \ll x \sum_{L \leq k < M} \exp(-\xi^2/32) \ll xh^2 \exp(-\xi^2/32),$$

où nous avons utilisé l'inégalité  $Q(y) \geq (y - 1)^2/2$  ( $0 < y \leq 1$ ).

Le lemme suivant donne une minoration du nombre de facteurs premiers d'un entier dans un intervalle.

**Lemme 3.6.** Pour tout réel  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , on a la propriété suivante: pour tous les entiers  $n \leq x$ , sauf au plus  $O(xh^2Q(\alpha)^{-1} \exp(-hQ(\alpha)))$  d'entre eux, on a

$$(3.5) \quad \min_{\substack{L \leq k < M \\ h \leq s \leq k}} s^{-1} \omega(n_k/n_{k-s}) > \alpha.$$

*Démonstration.* Ce résultat est analogue au *Lemma 51.2* de [HT]. Le nombre des entiers  $n \leq x$  ne satisfaisant pas la relation (3.5) n'excède pas

$$\begin{aligned} \sum_{L \leq k < M} \sum_{h \leq s \leq k} \sum_{n \leq x} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s}) - \alpha s} &\ll \sum_{L \leq k < M} \sum_{h \leq s \leq k} x \exp(-sQ(\alpha)) \\ &\ll xh^2Q(\alpha)^{-1} \exp(-hQ(\alpha)), \end{aligned}$$

où la première estimation découle du lemme 3.2.



**Lemme 3.7.** Pour tout entier  $k$ ,  $L \leq k < M$ , et pour tout réel  $\theta \geq e^{-k}$ , on a uniformément la majoration

$$(3.6) \quad \sum_{n \leq x} 3^{-\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 \ll x (\ln(3 + \theta))^4.$$

*Démonstration.* Ce résultat est établi au *Lemma* 50.3 de [HT]. Pour la commodité du lecteur, nous redonnons ci-dessous les détails. On a

$$\rho(n_k, \theta)^2 \leq 3^{2\omega_\theta(n_k)} \rho^*(n_k, \theta)^2$$

En reportant cette majoration dans (3.6) et en faisant appel au lemme 3.2, on obtient que le terme de gauche de (3.6) est

$$\ll x \exp \left\{ \sum_{e^{1/\theta} < p \leq u_k} \frac{1}{p} \left( -1 + \frac{\rho(p, \theta)^2}{3} \right) \right\}$$

Le *Lemma* 30.1 de [HT] implique que, pour  $\theta \leq 2$ , la somme en  $p$  est  $O(1)$ . Pour  $\theta > 2$ , on scinde cette somme comme suit. D'une part, par le lemme (30.1) de [HT], on a

$$\sum_{\exp(\ln(3+\theta))^2 < p \leq u_k} \frac{1}{p} \left( -1 + \frac{\rho(p, \theta)^2}{3} \right) \ll 1$$

D'autre part, majorant trivialement  $\rho(p, \theta)^2 \leq 9$  pour  $p \leq \exp(\ln(3 + \theta))^2$ , on peut écrire

$$\sum_{2 \leq p \leq \exp(\ln(3+\theta))^2} \frac{1}{p} \left( -1 + \frac{\rho(p, \theta)^2}{3} \right) \leq \sum_{2 \leq p \leq \exp(\ln(3+\theta))^2} \frac{2}{p} \leq 4 \ln_2(3 + \theta) + O(1).$$

On obtient l'estimation uniforme attendue en regroupant les deux majorations précédentes.

Suivent maintenant trois lemmes techniques.

**Lemme 3.8.** Pour tout réel  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , et pour tout entier  $k$ ,  $L \leq k < M$ , on a uniformément

$$(3.7) \quad \sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow \\ u_{k-h} < p \leq u_k}} \frac{1}{n} \sum_{0 \leq s \leq h} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s}) - \alpha s} \ll Q(\alpha)^{-1} e^h.$$

*Démonstration.* Une interversion de sommation permet d'écrire le terme de gauche de (3.7) comme une somme de produits eulériens, soit

$$\begin{aligned}
 & \sum_{0 \leq s \leq h} \alpha^{-\alpha s} \prod_{u_{k-h} < p \leq u_{k-s}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{u_{k-s} < p \leq u_k} \left(1 + \frac{\alpha}{p-1}\right) \\
 & \ll \sum_{0 \leq s \leq h} \alpha^{-\alpha s} \exp \left\{ \sum_{u_{k-h} < p \leq u_{k-s}} \frac{1}{p} \sum_{u_{k-s} < p \leq u_k} \frac{\alpha}{p} \right\} \\
 & \ll \sum_{0 \leq s \leq h} \exp(-s\alpha \ln \alpha + h - s + s\alpha) \leq \sum_{s \geq 0} e^{h-sQ(\alpha)} \\
 & \ll Q(\alpha)^{-1} e^h,
 \end{aligned}$$

comme annoncé.

**Lemme 3.9.** Pour tout réel  $\alpha \in ]1/\ln 3, 1[$ , et pour tout entier  $k, L \leq k < M$ , on a uniformément

$$(3.8) \quad \int_{e^{-k}}^{e^{h-k}} \sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow \\ u_{k-h} < p \leq u_k}} \frac{1}{n} \frac{\rho^*(n, \theta)^2}{3^{\omega(n) - \omega_\theta(n)}} \frac{e^k}{(\theta e^k)^{\alpha \ln 3}} d\theta \ll \frac{e^h}{\alpha \ln 3 - 1}.$$

*Démonstration.* On majore d'abord la somme intérieure de (3.8) de façon analogue à la démonstration du lemme 3.8. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow \\ u_{k-h} < p \leq u_k}} \frac{1}{n} \frac{\rho^*(n, \theta)^2}{3^{\omega(n) - \omega_\theta(n)}} & \ll \prod_{u_{k-h} < p \leq e^{1/\theta}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{e^{1/\theta} < p \leq u_k} \left(1 + \frac{\rho(p, \theta)^2}{3(p-1)}\right) \\
 & \ll e^h \prod_{e^{1/\theta} < p \leq u_k} \left(1 + \frac{\rho(p, \theta)^2}{3(p-1)}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
 & \ll e^h \exp \left\{ \sum_{e^{1/\theta} < p \leq u_k} \frac{1}{p} \left(-1 + \frac{\rho(p, \theta)^2}{3}\right) \right\} \\
 & \ll e^h,
 \end{aligned}$$

grâce au *Lemma* 30.1 de [HT].

Cette majoration est uniforme en  $\theta$ ,  $e^{-k} \leq \theta \leq e^{h-k}$ . La majoration

$$\int_{e^{-k}}^{e^{h-k}} \frac{e^k}{(\theta e^k)^{\alpha \ln 3}} d\theta < \frac{1}{\alpha \ln 3 - 1}$$

achève alors la démonstration du lemme.

**Lemme 3.10.** Pour tout réel  $\psi$ ,  $\psi > 0$  et tout entier  $k$ ,  $L \leq k < M$ , on a uniformément

$$(3.9) \quad \sum_{\substack{n \\ \ln n > \psi e^k \\ p|n \Rightarrow \\ u_{k-h} < p \leq u_k}} \frac{1}{n} \ll e^{h-\psi}.$$

*Démonstration.* On utilise la méthode de Rankin. Soit  $\beta$  un nombre réel,  $0 < \beta < 1$ , le terme de gauche de (3.9) est majoré par

$$\sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow \\ u_{k-h} < p \leq u_k}} \frac{1}{n} \left( \frac{n}{u_k^\psi} \right)^\beta = u_k^{\psi\beta} \prod_{u_{k-h} < p \leq u_k} \left( 1 + \frac{1}{p^{1-\beta}} \right)$$

Pour le choix  $\beta = e^{-k}$ , on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \\ \ln n > \psi e^k \\ p|n \Rightarrow \\ u_{k-h} < p \leq u_k}} \frac{1}{n} &\ll e^{-\psi} \exp \left\{ \sum_{u_{k-h} < p \leq u_k} \frac{1}{p^{1-\beta}} \right\} \\ &\ll e^{-\psi} \exp \left\{ \sum_{u_{k-h} < p \leq u_k} \frac{1 + O(\beta \ln p)}{p} \right\} \\ &\ll e^{h-\psi}. \end{aligned}$$

#### 4. Lemmes essentiels.

Nous rappelons que  $\xi \in \left[ \frac{1}{4}, \sqrt{\ln_2 x} \right]$  et que

$$\begin{aligned} t_1 &= t_1(x, \xi) = (\ln x)^{1-\ln 3} e^{\frac{1}{2}\xi\sqrt{\ln_2 x}} \\ t_2 &= t_2(x, \xi) = \ln x e^{-\frac{1}{2}\xi\sqrt{\ln_2 x}} \\ h &= h(x, \xi) = \min \left\{ \left[ \frac{1}{2} (\xi)^{1/2} (\ln_2 x)^{1/4} \right], \xi^3 \right\} \\ L &= L(x, \xi) = \left[ \ln_2 x - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\ln_2 x} \right] \\ M &= M(x, \xi) = L + h^2 \leq \ln_2 x - \frac{1}{4}\xi\sqrt{\ln_2 x} \end{aligned}$$

**Lemme 4.1 (Lemme fondamental).** *Pour tous les entiers  $n \leq x$ , sauf au plus  $O(x\{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\})$  d'entre eux, on a la propriété suivante:*

*Chaque ensemble  $\mathcal{K}(j) := \{j + mh : 0 \leq m < h\}$ ,  $L \leq j < L + h$ , contient au moins un élément  $k = k(j, n)$  tel que*

$$(4.1) \quad \int_0^{1/t_1} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta \leq c_1 3^{2\omega(n_k)} e^{-k},$$

$$(4.2) \quad \ln n_k \leq c_2 e^k,$$

$$(4.3) \quad k - \frac{1}{4}\xi\sqrt{k} \leq \omega(n_k) \leq 2k.$$

Dans la démonstration de la conjecture d'Erdős par Maier et Tenenbaum [MT], on cherchait une majoration de  $\int_0^{1/t_1} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta$  et de  $\ln n_k$  qui soit valable pour presque tout entier  $n$  et chaque  $k$  fixé. On imposait ainsi une propriété très locale. Le nombre des exceptions dans ces majorations était  $O(x(\ln_2 x)^{-c})$  pour le cas particulier  $t = \ln 2$ .

Dans l'optique d'un meilleur contrôle du terme d'erreur, on adopte ici une démarche moins restrictive, en imposant seulement les propriétés (4.1), (4.2), (4.3) pour au moins un  $k$  choisi dans un échantillon  $\mathcal{K}(j)$  constitué de valeurs très éloignées les unes des autres. L'indépendance stochastique des facteurs premiers éloignés nous affranchit alors de cette exigence de contrôle local, car nous verrons que  $\int_0^{1/t_1} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta$  et  $\ln n_k$  dépendent essentiellement des grands facteurs premiers de  $n_k$ .

On obtient ainsi des majorations optimales quant à l'ordre de grandeur. En effet, nous déduisons de (4.1), grâce au lemme 3.1, la minoration  $\lambda_t(n_k) \gg e^k$ , alors que par (4.2) on a  $\lambda_t(n_k) \ll \ln n_k \ll e^k$ .

*Démonstration.* On a pour tout  $j$  de  $[L, L + h[$ ,  $\mathcal{K}(j) \subset [L, M[$ . La propriété (4.3) découle donc immédiatement des lemmes 3.4 et 3.5, pourvu que  $c_3 < Q(2)$ .

Pour  $k \in \mathcal{K}(j)$ ,  $L \leq j < L + h$ , on considère les domaines

$$D_1(k) := [0, e^{-k}], D_2(k) := [e^{-k}, e^{h-k}], D_3(k) := [e^{h-k}, 2], D_4(k) := [2, 1/t_1].$$

On pose alors

$$A_i(n, k) := \int_{D_i(k)} \rho(n_k, \theta)^2 3^{-2\omega(n_k)} e^k d\theta \quad (1 \leq i \leq 4)$$

Pour majorer  $\int_0^{1/t_1} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta$  comme annoncé, il suffit de montrer que

$$A_i(n, k) \ll 1 \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Par la majoration triviale  $|\rho(n_k, \theta)| \leq 3^{\omega(n_k)}$ , on voit que l'on a pour tout  $n \leq x$ ,

$$(4.4) \quad \max_{\substack{L \leq j < L+h \\ k \in \mathcal{K}(j)}} A_1(n, k) \leq 1$$

Nous traiterons la majoration de  $A_2(n, k)$  plus loin. Soit maintenant un réel  $\alpha$ ,  $1/\ln 3 < \alpha < 1$ , par exemple  $\alpha = \frac{1}{2}(1/\ln 3 + 1)$ . Nous majorons  $A_3(n, k)$  en employant essentiellement la méthode du *Lemma* 51.4 de [HT]. On écrit

$$A_3(n, k) = \int_{e^{h-k}}^2 3^{-\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 \frac{e^k}{3^{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}} d\theta$$

On applique le lemme 3.6 aux valeurs  $s_\theta = [\ln(\theta e^k)]$ . Pour  $\theta \in [e^{h-k}, 2]$  on a bien  $h \leq s_\theta \leq k$ . De plus, on a la relation

$$\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k) \geq \omega(n_k) - \omega(n_{k-s_\theta}),$$

car  $k - s_\theta \geq \ln(1/\theta)$ . On en déduit que pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O(xh^2 Q(\alpha)^{-1} e^{-hQ(\alpha)})$  d'entre eux, on a l'inégalité

$$(4.5) \quad \min_{\substack{L \leq j < L+h \\ k \in \mathcal{K}(j) \\ e^{h-k} \leq \theta \leq 2}} \left( \frac{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}{[\ln(\theta e^k)]} \right) > \alpha.$$

Pour tous les entiers vérifiant (4.5), on obtient donc

$$A_3(n, k) \leq 3 \int_{D_3(k)} 3^{-\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 \frac{e^k}{(\theta e^k)^{\alpha \ln 3}} d\theta$$

Par le lemme 3.7, on a la majoration uniforme en  $j$  et  $k$

$$\sum_{n \leq x} \int_{D_3(k)} 3^{-\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 \frac{e^k}{(\theta e^k)^{\alpha \ln 3}} d\theta \ll \frac{x}{\alpha \ln 3 - 1} e^{-h(\alpha \ln 3 - 1)}$$

Pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O\left(xh^2 \left\{ \frac{e^{-hQ(\alpha)}}{Q(\alpha)} + \frac{e^{-h(\alpha \ln 3 - 1)}}{(\alpha \ln 3 - 1)} \right\}\right)$  d'entre eux, on a donc

$$(4.6) \quad \max_{\substack{L \leq j < L+h \\ k \in \mathcal{K}(j)}} A_3(n, k) \leq 1.$$

Par le lemme 3.5, on a pour tous les entiers  $n \leq x$ , sauf  $O(xh^2 \exp(-\xi^2/32))$  d'entre eux, la relation

$$(4.7) \quad A_4(n, k) \leq e^k 3^{-k + \frac{1}{4}\xi\sqrt{k}} \int_{D_4(k)} 3^{-\omega(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta \quad (L \leq k < M)$$

On remarque que  $\omega_\theta(n_k) = 0$  pour  $\theta \in D_4(k)$ , donc, par le lemme 3.7, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \int_{D_4(k)} 3^{-\omega(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 d\theta &\ll x \int_2^{1/t_1} (\ln(3 + \theta))^4 d\theta \\ &\ll x e^{(\ln 3 - 1)\ln_2 x - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\ln_2 x}} (\ln_2 x)^4 \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n \leq x}^* A_4(n, k) \ll x (\ln_2 x)^4 \exp(f(k)) \quad (L \leq k < M)$$

où  $\sum_{n \leq x}^*$  désigne la somme sur tous les entiers  $n$  vérifiant (4.7), avec

$$f(k) := k(1 - \ln 3) + \frac{1}{4}(\ln 3) \xi \sqrt{k} + (\ln 3 - 1) \ln_2 x - \frac{1}{2} \xi \sqrt{\ln_2 x}.$$

Pour  $x \geq x_0$ ,  $x_0$  assez grand,  $f$  est maximal pour  $k = L$ , et

$$\begin{aligned} f(L) &\leq \left\{ \frac{3 \ln 3 - 4}{4} \right\} \xi \sqrt{\ln_2 x} \\ &\leq -\frac{1}{6} \xi \sqrt{\ln_2 x} \\ &\leq -\frac{2}{3} h^2 \end{aligned}$$

Donc, pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O(xh^2 \{\exp(-\xi^2/32) + e^{-h}\})$ , on a

$$(4.8) \quad \max_{\substack{L \leq k < L+h \\ k \in \mathcal{K}(j)}} A_4(n, k) \leq 1$$

Dans [MT], on majore trivialement  $A_2(n, k)$ , car on ne peut pas établir la propriété locale  $\omega(n_k) - \omega(n_{k-s}) > \alpha s$  pour  $s$  petit, avec un nombre acceptable d'exceptions. La distribution des facteurs premiers d'un entier n'est pas assez régulière pour que l'on puisse obtenir une estimation uniforme dans de très petits intervalles. La majoration triviale de  $A_2(n, k)$  impose une minoration  $\lambda_t(n_k) > \varepsilon e^k$  où  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus l'utilisation du *Theorem 07* de [HT] ne donne qu'une majoration  $\ln n_k < R e^k$  où  $R$  tend vers  $+\infty$  si l'on demande un nombre acceptable d'exceptions.

Ces problèmes seront ici résolus simultanément. On verra que ces propriétés locales sont en fait "presque sûrement" réalisées pour au moins un  $k$  choisi dans l'échantillon  $\mathcal{K}(j)$ , qui est constitué de valeurs très éloignées les unes des autres. Cependant, cet indice  $k$  dépend de l'entier  $n$  considéré.

Remarquons l'inégalité, pour  $\theta \in D_2(k)$ ,

$$3^{-2\omega(n_k)} \rho(n_k, \theta)^2 \leq 3^{-2(\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k))} \rho^*(n_k, \theta)^2.$$

De même que pour  $\rho(n_k, \theta)^2$  dans le lemme 3.7, on peut établir qu'en moyenne  $\rho^*(n_k, \theta)^2$  est de l'ordre de  $3^{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}$ . Cet ordre moyen apparait dans le lemme 3.9 sous une forme pondérée.

Soient maintenant  $\delta, \sigma, \psi$  trois réels strictement positifs que nous fixerons plus loin. On pose

$$\begin{aligned} H(n, k) &:= \sum_{0 \leq s \leq h} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s}) - \alpha s + \sigma}, \\ I(n, k) &:= 3^\sigma \delta \int_{D_2(k)} 3^{-\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)} \rho^*(n_k, \theta)^2 \frac{e^k}{(\theta e^k)^{\alpha \ln 3}} d\theta, \\ J(n, k) &:= \begin{cases} 1 & \text{si } \ln(n_k/n_{k-h}) > \psi e^k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

$H, I, J$  sont à valeurs positives.

Si  $H(n, k) < 1$ , alors, pour  $\theta \in D_2(k)$ , on considère  $s_\theta = \lceil \ln(\theta e^k) \rceil$ . On a  $s_\theta \in [0, h]$  et  $k - s_\theta \geq \ln(1/\theta)$ , d'où

$$\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k) \geq \omega(n_k) - \omega(n_{k-s_\theta}) > \alpha s - \sigma \geq \alpha \lceil \ln(\theta e^k) \rceil - \sigma,$$

d'où

$$A_2(n, k) \leq \frac{3}{\delta} I(n, k).$$

Pour obtenir  $A_2(n, k) < 3/\delta$ , il suffit donc d'établir  $H(n, k) < 1$  et  $I(n, k) < 1$ .

Par le *Theorem 07* de [HT], pour tous les entiers  $n \leq x$ , sauf au plus  $O(xh^2 e^{-c_4 h})$  d'entre eux, on a

$$(4.9) \quad \max_{\substack{L \leq j < L+h \\ k \in \mathcal{K}(j)}} e^{-k} \ln n_{k-h} \leq 1$$

Pour obtenir  $\ln n_k \leq (\psi + 1)e^k$ , il suffit donc d'établir que l'on a simultanément (4.9) et  $J(n, k) = 0$ .

On se ramène donc à montrer que, pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf un nombre acceptable d'exceptions, on a

$$\max_{L \leq j < L+h} \min_{k \in \mathcal{K}(j)} \{H(n, k) + I(n, k) + J(n, k)\} < 1$$

Remarquons, à  $k$  fixé, que  $H, I, J$  dépendent uniquement des facteurs premiers  $p$  de  $n$  dans l'intervalle  $]u_{k-h}, u_k]$ . C'est dans ce but qu'on utilise  $\rho^*$  et non  $\rho$ , et qu'on introduit  $J$ .

On fixe  $j, L \leq j < L + h$ . On pose  $k_i := j + (i - 1)h, 1 \leq i \leq h$ . On a alors

$$\mathcal{K}(j) = \{k_i : 1 \leq i \leq h\}$$

Pour  $1 \leq u \leq h$ , désignons par  $m_u$  un entier générique dont les facteurs premiers sont dans  $]u_{k_u-h}, u_{k_u}]$  et par  $a$  (resp.  $b$ ) un entier générique satisfaisant  $p|a \Rightarrow \ln_2 p \leq j - h$  (resp.  $p|b \Rightarrow \ln_2 p > j + h(h - 1)$ ). Tout entier  $n$  s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$n = ab \prod_{u=1}^h m_u.$$

Par le *Theorem 07* de [HT], pour tous les entiers  $n \leq x$ , sauf au plus  $O(xe^{-h})$  d'entre eux, on a

$$(4.10) \quad a \prod_{u=1}^h m_u = \prod_{\substack{p^v \| n \\ p \leq u_M}} p^v \leq \frac{1}{2} \frac{x}{u_M}$$

Etudions la somme

$$S_x := \sum_{n \leq x}^* \prod_{u=1}^h (H(n, k_u) + I(n, k_u) + J(n, k_u))$$

où  $\sum_{n \leq x}^*$  désigne la somme sur tous les entiers  $n \leq x$  vérifiant (4.10). On a

$$S_x = \sum_{m_1, \dots, m_h} \prod_{u=1}^h (H(m_u, k_u) + I(m_u, k_u) + J(m_u, k_u)) \sum_a^* \sum_{b \leq x / (a \prod_{u=1}^h m_u)} 1.$$

On remarque, pour tous les éléments de cette somme, que l'on a, d'après (4.10),  $u_{j+h(h-1)} \leq u_M \leq \frac{1}{2}x / (a \prod_{u=1}^h m_u)$ . Par le lemme 3.3, on peut donc majorer la somme intérieure en  $b$ , soit

$$S_x \ll xe^{-j-h(h-1)} \prod_{u=1}^h \frac{1}{m_u} (H(m_u, k_u) + I(m_u, k_u) + J(m_u, k_u)) \sum_a \frac{1}{a}$$



On rappelle que

$$\sum_a \frac{1}{a} = \prod_{p \leq u_j - h} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ll e^{j-h}$$

On obtient alors

$$S_x \ll x e^{-h^2} \prod_{u=1}^h \sum_{m_u} \frac{1}{m_u} (H(m_u, k_u) + I(m_u, k_u) + J(m_u, k_u))$$

Par les lemmes 3.7, 3.8 et 3.9, il suit

$$S_x \ll x \left( c_5 \frac{\alpha^\sigma}{Q(\alpha)} + c_6 \frac{3^\sigma \delta}{\alpha \ln 3 - 1} + c_7 e^{-\psi} \right)^h$$

On choisit  $\alpha = \frac{1}{2}(1/\ln 3 + 1)$ . Nous pouvons alors fixer

$$\psi > 0 \quad \text{tel que} \quad c_7 e^{-\psi} < \frac{1}{3e},$$

$$\text{puis } \sigma > 0 \quad \text{tel que} \quad c_5 \frac{\alpha^\sigma}{Q(\alpha)} < \frac{1}{3e},$$

$$\text{et enfin } \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad c_6 \frac{3^\sigma \delta}{\alpha \ln 3 - 1} < \frac{1}{3e}.$$

$\alpha, \psi, \sigma, \delta$  sont alors des constantes absolues.

Ainsi, pour tous les entiers  $n \leq x$ , sauf au plus  $O(xhe^{-h})$  d'entre eux, on a

$$(4.11) \quad \prod_{u=1}^h (H(n, k_u) + I(n, k_u) + J(n, k_u)) < 1 \quad (L \leq j < L+h)$$

Pour tous les entiers  $n$  vérifiant (4.11), on a alors bien

$$\max_{L \leq j < L+h} \min_{k \in \mathcal{K}(j)} \{H(n, k) + I(n, k) + J(n, k)\} < 1$$

Donc, pour tout  $j, L \leq j < L+h$ , il existe au moins un entier  $k \in \mathcal{K}(j)$  tel que

$$(4.12) \quad A_2(n, k) \leq \frac{3}{\delta}$$

$$(4.13) \quad \ln \left( \frac{n_k}{n_{k-h}} \right) \leq \psi e^k$$

On pose alors

$$c_1 := \frac{3}{\delta} + 3,$$

$$c_2 := \psi + 1,$$

$$c_3 := \frac{1}{2} \min(Q(\alpha), \alpha \ln 3 - 1, Q(2), 1)$$

Les inégalités (4.4), (4.6), (4.8), (4.9), (4.12), (4.13) et les lemmes 3.4 et 3.5 permettent alors d'obtenir les estimations annoncées.

Le *Lemma* 51.4 de [HT] est l'analogie du lemme 4.1 pour la démonstration du *Theorem* 51. Le lemme 4.1 peut être utilisé à la place du *Lemma* 51.4 dans la démonstration du *Theorem* 51 de [HT]. Si on impose alors seulement  $h \leq \frac{1}{2}\xi^{1/2}(\ln_2 x)^{1/4}$ , on obtient (1.2), avec un nombre d'exceptions

$$O\left(x\left\{h^2 \exp(-\xi^2/32) + \exp(-ch) + \exp(-c(\ln_2 x)/h^2)\right\}\right).$$

Le choix optimal  $h = (\xi\sqrt{\ln_2 x})^{1/3}$  permet d'obtenir un nombre d'exceptions qui est

$$O\left(x\left\{\xi^{2/3}(\ln_2 x)^{1/3} \exp(-\xi^2/32) + \exp(-c'\xi^{1/3}(\ln_2 x)^{1/6})\right\}\right).$$

Cela fournit une estimation meilleure que celle du *Theorem* 51 mais moins bonne que le résultat annoncé ici. On note que dans le cas particulier de la conjecture d'Erdős, on obtient

$$E_x \ll x \exp\left(-c(\ln_2 x)^{1/3}\right).$$

On peut en fait améliorer cette majoration du nombre d'exceptions en exhibant d'autres "bons"  $k$  dans l'intervalle  $[L, M]$ . Cette approche nécessite un raffinement supplémentaire de la méthode utilisée dans le *Theorem* 51.

On pose

$$\begin{aligned} r &:= \lfloor \ln(2c_2 + 2) \rfloor + 1 \\ H &:= \lfloor h/r \rfloor \\ \mathcal{K} &:= \bigcup_{v=1}^H \mathcal{K}(L + (v-1)r) \\ &= \{L + (u-1)h + (v-1)r : 1 \leq u \leq h, 1 \leq v \leq H\} \end{aligned}$$

**Lemme 4.2 (Lemme complémentaire).** Soit, pour  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $X_t$  l'ensemble des entiers  $n \leq x$  pour lesquels il existe une suite croissante d'indices

$$\mathcal{H}(n) := \{k_1(n) < k_2(n) < \dots < k_H(n)\} \subset \mathcal{K}$$

telle que, pour tout  $k \in \mathcal{H}(n)$ , on ait les relations

$$(4.14) \quad \lambda_t(n_k) \geq c_0 e^k,$$

$$(4.15) \quad \ln n_k \leq c_2 e^k,$$

$$(4.16) \quad \omega(n_k) \leq 2k,$$

alors

$$\text{card } X_t = x + O\left(x\left\{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\right\}\right).$$

*Démonstration.* On applique le lemme 4.1 aux valeurs  $j_v := L + r(v - 1)$ , avec  $1 \leq v \leq H$ . On obtient alors, pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O(x\{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\})$  d'entre eux, une suite de "bons" indices

$$\mathcal{H}^*(n) = \{k_1^*(n), k_2^*(n), \dots, k_H^*(n)\} \subset \mathcal{K}(n)$$

de la forme  $k_v^*(n) = j_v + (u_v(n) - 1)h$  avec  $1 \leq u_v(n) \leq h$ . Ces éléments sont bien distincts, car ils sont distincts modulo  $h$ . De plus, pour tout  $k \in \mathcal{H}^*(n)$  on a (4.1), (4.15), (4.16).

Pour utiliser le lemme 3.1 et obtenir l'inégalité (4.14), il nous reste donc à majorer  $3^{-\omega(n_k)} t_1^{-1} (t + \ln n_k)$ . Pour  $k \in \mathcal{H}^*(n)$ , on a  $\omega(n_k) \geq k - \frac{1}{4} \xi \sqrt{\ln_2 x}$  d'après (4.3). On a alors

$$\begin{aligned} 3^{-\omega(n_k)} t_1^{-1} t &\leq \exp \left\{ -k \ln 3 + \ln 3 \ln_2 x + \left( \frac{1}{4} \ln 3 - 1 \right) \xi \sqrt{\ln_2 x} \right\} \quad (t \leq t_2) \\ &\leq \exp \left\{ \frac{3 \ln 3 - 4}{4} \xi \sqrt{\ln_2 x} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{6} \xi \sqrt{\ln_2 x} \right\}. \end{aligned}$$

De plus, pour  $t \leq t_2$ , on a

$$\begin{aligned} 3^{-\omega(n_k)} t_1^{-1} \ln n_k &\leq c_2 \exp \left\{ (\ln 3 - 1)(\ln_2 x - k) + \left( \frac{\ln 3 - 2}{4} \right) \xi \sqrt{\ln_2 x} \right\} \\ &\leq c_2 \exp \left\{ \frac{3 \ln 3 - 4}{4} \xi \sqrt{\ln_2 x} \right\} \\ &\leq c_2 \exp \left\{ \frac{1}{6} \xi \sqrt{\ln_2 x} \right\}. \end{aligned}$$

Donc pour  $x$  assez grand, on a

$$3^{-\omega(n_k)} t_1^{-1} (t + \ln n_k) \leq \frac{1}{2}$$

D'après (4.1) et le lemme 3.1, on en déduit, pour  $x$  assez grand, que pour tout  $k \in \mathcal{H}^*(n)$  et tout  $t \in [t_1, t_2]$ , on a

$$\lambda_t(n_k) \geq \frac{1}{16\pi c_1^2} e^k.$$

Pour le choix  $c_0 = 1/16\pi c_1^2$  on a bien (4.14).

On ordonne alors l'ensemble  $\mathcal{H}^*(n)$  et on obtient bien l'ensemble  $\mathcal{H}(n)$  annoncé.

Le résultat donné par le lemme 4.2 est en fait uniforme en  $r$ ,  $1 \leq r \leq h$ . Nous verrons plus loin pourquoi nous avons fixé  $r = \lfloor \ln(2c_2 + 2) \rfloor + 1$  au lieu de prendre simplement  $r = 1$ .

## 5. Démonstration du théorème.

On note  $E_{x,t,\xi}$  l'ensemble des entiers  $n \leq x$  ne satisfaisant pas (1.2).  $X_t$  étant l'ensemble défini au lemme 4.2, on appelle  $Y_t$  l'ensemble des entiers inférieurs à  $x$  n'appartenant pas à  $X_t$ .

Pour  $n \in X_t$ , on définit  $\mathcal{H}'(n) := \{k_1(n) < k_2(n) < \dots < k_H(n)\} \subset \mathcal{K}$ , l'unique suite croissante d'indices telle que tout  $k \in \mathcal{H}'(n)$  vérifie (4.14), (4.15), (4.16) et telle que

$$\left( \begin{array}{l} k \in \mathcal{K}, \quad k \notin \mathcal{H}'(n) \\ k \text{ vérifie (4.14), (4.15), (4.16)} \end{array} \right) \iff k > k_H(n)$$

On pose, dans un but de simplification des écritures,  $k_{H+1}(n) := M$  pour  $n \in X_t$ . Nous remarquons alors que pour tout  $n \in X_t$ , on a

$$k_{s+1}(n) - k_s(n) \geq r \quad (1 \leq s \leq H)$$

Soit alors

$$T_s := \{n : n \in X_t, V(n_{k_s(n)}, 0) \leq t_1^{-1}t\} \quad (1 \leq s \leq H+1)$$

Il est immédiat que  $T_s$  est une suite décroissante. De plus

$$E_{x,t,\xi} \subset T_{H+1} \cup Y_t.$$

Par le lemme 4.2, on a donc

$$(5.1) \quad \text{card } E_{x,t,\xi} \leq \text{card } T_{H+1} + c_8 x \{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\}$$

Nous allons établir une relation de récurrence sur  $\text{card } T_s$ .

Soit  $T_{s,k}$ ,  $1 \leq s \leq H$ , l'ensemble des entiers  $n$  appartenant à  $T_s$  et tels que  $k_s(n) = k$ . Il est alors immédiat que les  $T_{s,k}$  sont deux à deux disjoints et que l'on a  $T_s = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} T_{s,k}$ . D'où

$$(5.2) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} \text{card } T_{s,k} = \text{card } T_s$$

Pour  $1 \leq s \leq H$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , soit alors  $M_{s,k}$  l'ensemble des entiers  $m \leq x$  qui sont de la forme  $m = n_k$  pour au moins un entier  $n$  compté dans  $T_{s,k}$ . La définition de  $\mathcal{H}'$  implique qu'un même entier  $m$  ne peut appartenir, pour un  $s$  donné, qu'à au plus un ensemble  $M_{s,k}$ , c'est à dire que les  $M_{s,k}$  sont deux à deux disjoints, à  $s$  fixé.

On définit alors  $D_{s,k}$ ,  $1 \leq s \leq H$ , l'ensemble des entiers  $n \leq x$  qui s'écrivent sous la forme  $n = mapqb$  avec  $m \in M_{s,k}$ ,  $a|m$ ,  $P^-(b) > u_{k+r}$  et

$$(5.3) \quad e^k \leq \ln p \leq c_2 e^k,$$

$$(5.4) \quad \ln p < \ln q \leq \ln p + (c_2 + 2)e^k,$$

$$(5.5) \quad \ln q - \ln p \in \mathcal{L}_t(m) \cap [0, +\infty[.$$

On a alors  $\ln q \leq (2c_2 + 2)e^k \leq e^{k+r}$ . Un entier  $n \in D_{s,k}$  vérifie donc  $V(n_{k+r}, 0) > t_1^{-1}t$ . On peut alors écrire

$$\bigcup_{k \in \mathcal{K}} D_{s,k} \subset (T_s \setminus T_{s+1}) \cup Y_t$$

De plus les ensembles  $D_{s,k}$  sont disjoints deux à deux, d'où

$$(5.6) \quad \text{card}(T_s \setminus T_{s+1}) \geq \sum_{k \in \mathcal{K}} \text{card} D_{s,k} - c_8 x \{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\}$$

Dénombrons les éléments de  $D_{s,k}$ .

$$\text{card} D_{s,k} = \sum_{m \in M_{s,k}} \sum_{a|m} \sum_{p,q} \sum_{\substack{b \leq x/ampq \\ P^-(b) > u_{k+r}}} 1$$

où  $\sum_{p,q}$  désigne la somme sur les nombres premiers  $p$  et  $q$  vérifiant (5.3), (5.4) et (5.5). La somme intérieure sur  $b$  peut être estimée grâce au lemme 3.3 en remarquant que  $ampq \leq \exp(4c_2 e^k)$  et donc  $u_{k+r} = o(x/ampq)$ . On a

$$\text{card} D_{s,k} \gg x e^{-k} \sum_{m \in M_{s,k}} \frac{1}{m} \sum_{a|m} \frac{1}{a} \sum_{p,q} \frac{1}{pq}.$$

On remarque que  $\mathcal{L}_t(m) \cap [0, +\infty[ \subset [0, (c_2 + 2)e^k]$  d'après (4.13), avec  $k \geq L$  et  $t \leq t_2$ . Par le choix de  $r = \lceil \ln(2c_2 + 2) \rceil + 1$ , quand la propriété (5.5) est réalisée, la propriété (5.4) est alors redondante. Quand  $m$  et  $p$  sont fixés,  $q$  couvre alors une réunion d'au plus  $3^{\omega(m)} \leq 9^k$  intervalles (d'après (4.16)) de longueur logarithmique totale égale à

$$\text{mes}(\mathcal{L}_t(m) \cap [0, +\infty[) = \frac{1}{2} \lambda_t(m) \geq \frac{1}{2} c_0 e^k$$

d'après (4.14). Par le théorème des nombres premiers, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_q \frac{1}{q} &\gg e^{-k} \sum_q \frac{\ln q}{q} \\ &\gg \lambda_t(m) e^{-k} + O\left(9^k \exp\left(-c_9 e^{k/2}\right)\right) \\ &\gg 1 \end{aligned}$$

De plus

$$\sum_p \frac{1}{p} \gg 1$$

et on remarque que

$$\sum_{a|m} \frac{1}{a} \geq \zeta(2)^{-1} \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Finalement

$$(5.7) \quad \text{card } D_{s,k} \gg x e^{-k} \sum_{m \in M_{s,k}} \frac{1}{\varphi(m)}$$

où  $\varphi$  désigne la fonction d'Euler.

On majore alors  $\text{card } T_{s,k}$ . Un élément de  $T_{s,k}$  peut s'écrire sous la forme  $n = mdb$ , où  $m \in M_{s,k}$ ,  $p|d \Rightarrow p|m$ ,  $P^-(b) > u_k$ . Donc

$$\text{card } T_{s,k} \leq \sum_{m \in M_{s,k}} \sum_{\substack{d < x/m \\ p|d \Rightarrow p|m}} \sum_{\substack{b \leq x/md \\ P^-(b) \leq u_k}} 1$$

Par le lemme 3.2, on a alors

$$\begin{aligned} \text{card } T_{s,k} &\ll x \sum_{m \in M_{s,k}} \frac{1}{m} \sum_{\substack{d < x/m \\ p|d \Rightarrow p|m}} \frac{1}{d \ln(x/md)} \prod_{u_k < p \leq \ln_2(x/md)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \\ &\ll x e^{-k} \sum_{m \in M_{s,k}} \frac{1}{m} \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \\ &\ll x e^{-k} \sum_{m \in M_{s,k}} \frac{1}{\varphi(m)} \end{aligned}$$

Ainsi, sans avoir à estimer  $\sum_{m \in M_{s,k}} \varphi(m)^{-1}$  dans (5.7), on a donc

$$\text{card } D_{s,k} \gg T_{s,k}.$$

On reporte cette minoration dans (5.2) et (5.6), il existe donc une constante absolue  $\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $s$ ,  $1 \leq s \leq H$ , on a

$$(5.8) \quad \text{card } T_{s+1} \leq (1 - \varepsilon) \text{card } T_s + c_8 x \{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\}$$

On suppose maintenant que pour un certain réel  $x$ , on a

$$(5.9) \quad E_{x,t,\xi} \geq c_8 x (1 + 2\varepsilon^{-1}) \{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\}$$

Alors, pour tout  $s$ ,  $1 \leq s \leq H$ , on a d'après (5.1),

$$\begin{aligned} \text{card } T_s &\geq E_{x,t,\xi} - c_8 x \{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\} \\ &\geq c_8 2\varepsilon^{-1} x \{e^{-c_3 h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\} \end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans (5.8), on obtient

$$(5.10) \quad \text{card } T_{s+1} \leq (1 - 2\varepsilon^{-1}) \text{card } T_s \quad (1 \leq s \leq H)$$

Par récurrence sur  $s$ , sachant que  $\text{card } T_1 \leq x$ , on a donc

$$\text{card } T_{H+1} \leq x(1 - 2\varepsilon^{-1})^H.$$

Comme  $H = [h/r]$ , en reportant dans (5.1), on a

$$E_{x,t,\xi} \ll x \{e^{-c_{10} h} + h^2 \exp(-\xi^2/32)\}.$$

Associé à l'hypothèse (5.9), on a alors, par définition de  $h$ , pour tout  $x \geq 16$ ,

$$\begin{aligned} E_{x,t,\xi} &\ll x \left\{ \exp\left(-c_{10} \min\left\{\frac{1}{2}\xi^{1/2}(\ln_2 x)^{1/4}, \xi^3\right\}\right) + \xi^6 \exp(-\xi^2/32) \right\} \\ &\ll x \left\{ \exp\left(-c \xi^{1/2}(\ln_2 x)^{1/4}\right) + \exp(-\xi^2/33) \right\}, \end{aligned}$$

qui est bien le résultat annoncé.

## CHAPITRE 3

### ENTIERS LEXICOGRAPHIQUES



# Chapitre 3

## Entiers lexicographiques

André STEF et Gérald TENENBAUM

### 1. Introduction.

Désignons par  $\{p_j(n) : 1 \leq j \leq \omega(n)\}$  la suite croissante des facteurs premiers d'un entier  $n$  et par  $\alpha_j(n)$  l'unique entier  $\nu$  tel que  $p_j(n)^\nu \parallel n$  ( $1 \leq j \leq \omega(n)$ ). Nous posons alors

$$n_j := \prod_{i < j} p_i(n)^{\alpha_i(n)} \quad (1 \leq j \leq \omega(n)).$$

De nombreux problèmes de crible s'énoncent en termes de comparaison des tailles respectives de  $p_j(n)$  et  $n_j$ . Un important résultat d'Erdős [E], précisé ultérieurement par Bovey [B], énonce que

$$\max_{1 \leq j \leq \omega(n)} \frac{\ln n_j}{\ln p_j(n)} \sim \frac{\ln_3 n}{\ln_4 n}$$

pour presque tout  $n$ . Si  $\{d_j(n) : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$  désigne la suite croissante des diviseurs de  $n$ , Tenenbaum a montré dans [T1] que l'on a pour tout  $n$

$$(1.1) \quad \max_{1 \leq j < \tau(n)} d_{j+1}(n)/d_j(n) = \max_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j.$$

L'étude de la fonction de répartition de cette fonction arithmétique est susceptible de surprenantes applications à des problèmes apparemment disjoints de théorie des nombres, cf [T1, T3].

Nous nous proposons ici d'entreprendre l'étude duale, c'est-à-dire celle de la répartition de la fonction

$$(1.2) \quad G(n) := \min_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j.$$

Nous convenons que  $G(1) = +\infty$  et nous désignons par  $\mathcal{L}(y)$  l'ensemble des entiers  $n \geq 1$  tels que  $G(n) > y$ .

On sait que l'une des questions centrales dans l'étude de la structure fine des diviseurs d'un entier normal est le conflit entre les deux relations d'ordre naturelles dont on peut munir l'ensemble des  $d_j(n)$  ([HT, ET]). La structure d'ordre additif est la trace de l'ordre de  $\mathbf{Z}$ . La structure d'ordre multiplicatif est induite par l'ordre lexicographique, obtenu en associant à chaque diviseur  $d = \prod_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)^{\beta_j}$  ( $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j(n)$ ) le mot  $\beta_{\omega(n)} \dots \beta_1$  de longueur  $\omega(n)$ .

Notons  $\sigma_n$  la permutation de  $\{j : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$  qui transforme l'ordre additif dans l'ordre lexicographique. Il est facile de constater qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\sigma_n$  coïncide avec l'identité est que  $n \in \mathcal{L}(1)$ .

En effet, si  $n \notin \mathcal{L}(1)$ , il existe un  $j$  tel que  $p_j = p_j(n) \leq n_j$ . Puisque  $p_j \nmid n_j$ , on a en fait  $p_j < n_j$ . On peut donc écrire  $p_j = d_s(n)$ ,  $n_j = d_t(n)$  avec  $s < t$ . Or  $\sigma_n(s) > \sigma_n(t)$  par définition de  $n_j$ . Il s'ensuit que  $\sigma_n$  n'est pas l'identité. Réciproquement, si  $n \in \mathcal{L}(1)$ , considérons  $d_s(n)$  et  $d_t(n)$ , avec  $s < t$ . Si  $j$  est le plus grand indice tel que  $d_s(n)$  et  $d_t(n)$  aient des valuations  $p_j(n)$ -adiques distinctes, on a nécessairement  $v_{p_j}(d_s(n)) < v_{p_j}(d_t(n))$ . Cela implique  $\sigma_n(s) < \sigma_n(t)$ . Comme  $s$  et  $t$  sont quelconques, on obtient bien que  $\sigma_n$  coïncide avec l'identité.

Cette propriété nous a conduit à désigner  $\mathcal{L}(1)$  comme l'ensemble des entiers lexicographiques.

Une seconde propriété attrayante de cet ensemble d'entiers est la suivante

**Théorème 1.** Soit  $n$  un nombre entier. On a

$$(1.3) \quad \min_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n)/n_j = \min_{1 \leq j \leq \tau(n)} d_{j+1}(n)/d_j(n)$$

si, et seulement si,  $n \in \mathcal{L}(1)$ .

*Démonstration.* La condition est clairement nécessaire puisque le membre de droite de (1.3) est au moins 1. Montrons qu'elle est suffisante. Soit  $j = k$  un indice réalisant le minimum du membre de droite de (1.3). On a pour un certain  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq \omega(n)$ ,

$$d_{k+1}(n) = p_\ell^{\beta_\ell} \dots p_1^{\beta_1}$$

avec  $\beta_\ell \geq 1$  et  $\beta_j \geq 0$  pour  $1 \leq j < \ell$ . Alors  $d_{k+1}(n) | n_{\ell+1}$  et puisque  $p_{\ell+1} > n_{\ell+1}$ , on a aussi  $d_k(n) | n_{\ell+1}$ , d'où, pour des exposants  $\gamma_j \geq 0$  convenables,

$$d_k(n) = p_\ell^{\gamma_\ell} \dots p_1^{\gamma_1}.$$

Soit  $m$  le plus petit indice tel que  $\beta_j = \gamma_j$  pour  $m < j \leq \ell$ . Comme  $d_k(n) \neq d_{k+1}(n)$ , on a  $m \geq 1$ . Si  $\beta_m < \gamma_m$ , alors

$$d_{k+1}(n)/d_k(n) \leq n_m/p_m < 1,$$

ce qui est manifestement impossible. Donc  $\beta_m > \gamma_m$ , et il suit

$$(1.4) \quad d_{k+1}(n)/d_k(n) \geq p_m/n_m.$$

Comme  $n_m < p_m$ , on a en fait égalité dans (1.4). Par définition de  $k$ , cela implique

$$p_m/n_m = \min p_j/n_j,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Soit  $\mathbf{E}$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que

$$(1.5) \quad \min d_{j+1}(n)/d_j(n) \geq 2.$$

La relation (1.5) implique en particulier  $\mathcal{L}(2) \subset \mathbf{E}$ . Une célèbre conjecture d'Erdős, établie par Maier et Tenenbaum [MT], affirme que  $\mathbf{E}$  est de densité nulle.

Soit  $E_x$  le nombre des entiers  $n$  de  $\mathbf{E}$  n'excédant pas  $x$ . Le résultat de [MT] équivaut à  $E_x = o(x)$  et Hall et Tenenbaum ont donné dans [HT] l'estimation effective

$$E_x \ll x(\ln_2 x)^{-\beta}(\ln_3 x)^{4\beta},$$

avec  $\beta = 1 - (1 + \ln_2 3)/\ln 3 = 0,00415\dots$ . Stef a amélioré considérablement cette majoration au chapitre 2 et a obtenu une minoration (peut-être optimale) de  $E_x$  au chapitre 1. Il montre en fait que l'on a pour une constante positive convenable  $c$

$$(1.6) \quad x(\ln x)^{-\beta+o(1)} \ll E_x \ll xe^{-c\sqrt{\ln_2 x}}.$$

Cet encadrement reflète bien l'état actuel de nos connaissances sur la structure multiplicative des entiers. La majoration est obtenue en montrant que les facteurs premiers satisfont statistiquement à certaines propriétés relatives d'équirépartition, et la valeur explicite de la fonction de  $x$  résultante indique le degré d'uniformité auquel les méthodes disponibles permettent de parvenir. La minoration découle d'un principe heuristique plus simple: si le nombre total des quantités distinctes de la forme  $\ln(d_j(n)/d_k(n))$ , qui est normalement "voisin" de  $3^{\omega(n)}$ , est inférieur à  $\ln n$ , on peut s'attendre à ce que le minimum ne soit pas trop proche de 0.

Le fait que ce principe puisse être rendu effectif nous donne un premier renseignement sur la structure de l'ensemble exceptionnel  $\mathbf{E}$  pour la conjecture d'Erdős. Il contient en particulier presque tous les entiers  $n$  tels que  $\omega(n) < ((1 - \varepsilon)/\ln 3) \ln_2 n$ . A cet égard, il semble intéressant d'exhiber d'autres structures multiplicatives représentatives des entiers de  $\mathbf{E}$ . Quelle minoration peut-on donner, par exemple, pour le nombre des  $n$  de  $\mathbf{E}$  n'excédant pas  $x$  et possédant le nombre "normal" de facteurs premiers, soit  $\omega(n) \sim \ln_2 n$ ? L'étude de la répartition du nombre de facteurs premiers des entiers lexicographiques fournit une première réponse à cette question.

Il est bien connu que la fonction arithmétique  $n \mapsto t^{\omega(n)}$  permet souvent d'opérer un "recentrage exponentiel" (selon l'expression utilisée en théorie des probabilités) d'une somme arithmétique autour d'un ensemble d'entiers ayant une quantité prescrite de facteurs premiers. Nous allons montrer que cette technique fonctionne encore, quoique sous une forme plus sophistiquée, dans l'étude des nombres lexicographiques.

Posons  $\mathcal{L}(x, y) := \mathcal{L}(y) \cap [1, x]$ . Les motivations exposées plus haut nous conduisent à étudier le comportement asymptotique de la quantité

$$(1.7) \quad L(x, y; t) := \sum_{n \in \mathcal{L}(x, y)} t^{\omega(n)}.$$

Nous obtenons le résultat suivant, pour l'énoncé duquel nous introduisons quelques notations.

Nous posons pour  $\delta < 1$

$$(1.8) \quad F(\delta) := \int_0^{1/2} v^{-\delta} \frac{dv}{1-v}.$$

$F$  est une fonction strictement croissante, telle que  $F(-\infty, 1[) = ]0, +\infty[$ . Nous désignons, pour chaque  $t > 0$ , par  $\delta(t)$  l'unique solution de l'équation

$$(1.9) \quad tF(\delta) = 1.$$

Enfin, nous posons

$$(1.10) \quad \eta(t) := \begin{cases} 1 - \delta(t) & (t \leq 1/\ln 2) \\ \frac{1}{3}(1 - \delta(t))^{-2} & (t > 1/\ln 2). \end{cases}$$

On peut noter que  $\delta(t) \geq 0$  si, et seulement si,  $t \leq 1/\ln 2$ .

**Théorème 2.** Pour chaque  $t > 0$ , il existe une constante  $K(t) > 0$  telle que, étant donné  $T > 1$ , on ait uniformément pour  $1/T \leq t \leq T$ ,  $1 \leq y \leq T$ ,

$$(1.11) \quad L(x, y; t) = \left\{ K(t) + O_T \left( \frac{(\ln_2 x)^2}{(\ln x) \eta(t)} \right) \right\} \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}}.$$

De plus  $K(t)$  est une fonction continue de  $t$ .

L'exposant  $\delta(1)$  fournit une formule asymptotique pour la fonction de compte des entiers lexicographiques. On a  $\delta(1) = 0,2228\dots$

Il est facile de voir que pour tout  $n$  de  $\mathcal{L}(1)$ , on a  $\omega(n) \leq (1/\ln 2 + o(1)) \ln_2 n$ . Le théorème 2 (en fait sous la forme affaiblie de (2.11) constituée par le lemme 2.3 *infra*) permet d'estimer, pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1/\ln 2[$ , à un facteur  $(\ln x)^{o(1)}$  près, le nombre des entiers de  $\mathcal{L}(x, y)$  tels que  $\omega(n)$  soit "proche" de  $\alpha \ln_2 x$ .

**Théorème 3.** Pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1/\ln 2[$ , l'équation  $F(\sigma) - \alpha F'(\sigma) = 0$  possède une unique solution  $\sigma = \sigma_\alpha < 1$ . Soient  $T > 1$ , et  $(\alpha_0, \alpha_1)$  tel que  $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1/\ln 2$ . Pour toute constante  $A = A(\alpha_0, \alpha_1, T)$  assez grande il existe une constante  $B$  telle que l'on ait uniformément pour  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ,  $1 \leq y \leq T$ ,  $x \geq 16$ ,

$$(1.12) \quad x(\ln x)^{-\mu(\alpha)} e^{-B\sqrt{\ln_2 x}} \ll \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| \leq A\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \ll x(\ln x)^{-\mu(\alpha)} e^{B\sqrt{\ln_2 x}}$$

avec

$$(1.13) \quad \mu(\alpha) = \sigma_\alpha - \alpha \ln F(\sigma_\alpha).$$

Dans le cas où  $\alpha = -\delta'(1)$ , on peut choisir  $B = 0$ .

On a en particulier  $\mu(1) = 0,687\dots$ , ce qui apporte une réponse quantitative à la question soulevée plus haut concernant la taille de l'intersection de  $\mathbf{E}$  et de l'ensemble des entiers satisfaisant au théorème de Hardy et Ramanujan.

Ainsi que nous le verrons à la section suivante, la structure de  $\mathcal{L}(y)$  induit une équation fonctionnelle pour  $L(x, y; t)$ , qui explique la forme particulière de l'exposant  $\delta(t)$ . La valeur de  $\mu(\alpha)$  s'en déduit par une technique d'optimisation assez générale, exposée à la section 4.

On a

$$(1.14) \quad \mu'(\alpha) = -\ln F(\sigma_\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = -\delta'(\sigma_\alpha).$$

Grâce à (1.12), cela montre que l'ordre normal de la fonction  $\omega(n)$  dans la suite  $\mathcal{L}(y)$  est  $a \ln_2 n$  avec  $a = -\delta'(1) = 0,5624\dots$ . Un théorème d'Alladi [A] nous permet en fait de déduire immédiatement du théorème 2 un analogue du théorème d'Erdős-Kac.

**Théorème 4.** Soit  $T > 1$ . On a uniformément pour  $1/T \leq t \leq T$ ,  $1 \leq y \leq T$ ,  $z \in \mathbf{R}$ ,

$$(1.15) \quad \frac{1}{L(x, y; t)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ \omega(n) \leq a(t) \ln_2 x + z \sqrt{b(t) \ln_2 x}}} t^{\omega(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du + O\left(\left(\frac{\ln_4 x}{\ln_3 x}\right)^{1/8}\right),$$

où l'on a posé

$$(1.16) \quad a(t) = -t\delta'(t), \quad b(t) = -(t\delta'(t) + t^2\delta''(t)) > 0.$$

Ce résultat fournit une nouvelle preuve du théorème 3 et permet de généraliser pour  $t$  quelconque le cas  $\alpha = -\delta'(1)$  de cet énoncé. Il nous a toutefois paru intéressant de prouver séparément le théorème 3 comme corollaire du seul lemme 2.3.

## 2. Equations fonctionnelles.

Dans tout ce qui suit, nous donnons un paramètre  $T > 1$  et nous supposons

$$(2.1) \quad 1/T \leq t \leq T, \quad 1 \leq y \leq T, \quad x \geq 2.$$

Toutes les constantes, implicites ou explicites, peuvent dépendre de  $T$ .

**Lemme 2.1.** *Sous l'hypothèse (2.1), on a*

$$(2.2) \quad L(x, y; t) = 1 + t \sum_{\nu \geq 1} \sum_{p^\nu \leq x} L(\min(x/p^\nu, p/y), y; t).$$

*Démonstration.* Un entier  $n > 1$  compté dans  $\mathcal{L}(x, y)$  s'écrit de manière unique  $n = p^\nu m$  avec  $p > ym$ ,  $p^\nu m \leq x$ ,  $\nu \geq 1$ , et  $m \in \mathcal{L}(y)$ . En remarquant que  $t^{\omega(n)} = t^{\omega(m)+1}$ , on obtient immédiatement (2.2).

**Lemme 2.2.** *Sous l'hypothèse (2.1), on a*

$$(2.3) \quad L(x, y; t) = t \sum_{\sqrt{xy} < p \leq x} L(x/p, y; t) + t \sum_{(xy)^{1/3} < p \leq \sqrt{xy}} L(p/y, y; t) + O\left(x^{2/3}(\ln x)^{T-1}\right).$$

*Démonstration.* La contribution des nombres premiers  $p \leq (xy)^{1/3}$  au membre de droite de (2.2) n'excède pas

$$t \sum_{p \leq (xy)^{1/3}} \left[ \frac{\ln x}{\ln p} \right] L(p/y, y; t).$$

Au vu de l'estimation triviale

$$(2.4) \quad L(z, y; t) \leq \sum_{n \leq z} t^{\omega(n)} \ll_T z(\ln z)^{t-1},$$

on obtient que cette contribution est englobée par le terme d'erreur de (2.3).

Lorsque  $(xy)^{1/3} < p \leq x$ , les seules valeurs admissibles de  $\nu$  dans (2.2) sont  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$ . Le terme principal de (2.3) prend en compte le cas  $\nu = 1$ . La contribution correspondant à  $\nu = 2$  n'excède pas

$$\begin{aligned} \sum_{(xy)^{1/3} < p \leq \sqrt{xy}} L(x/p^2, y; t) &\ll \sum_{p > (xy)^{1/3}} \frac{x}{p^2} (\ln x)^{T-1} \\ &\ll x^{2/3} (\ln x)^{T-1}, \end{aligned}$$

où nous avons de nouveau fait appel à (2.4).

**Lemme 2.3.** *Il existe des constantes positives  $K_1$  et  $K_2$ , ne dépendant que de  $T$ , telles que l'on ait sous l'hypothèse (2.1)*

$$(2.5) \quad K_1 \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}} \leq L(x, y; t) \leq K_2 \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}}.$$

*Démonstration.* Soit  $a = a(T) = 2^{(1-\delta(1/T))/2} > 1$ . Nous établissons par récurrence sur  $k \geq 1$  qu'il existe des constantes positives  $A_0^{(1)}$  et  $A_0^{(2)}$ , ne dépendant que de  $T$ , telles que l'on ait, pour  $2 \leq x \leq \exp 2^k$ ,

$$(2.6) \quad A_k^{(1)} \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}} \leq L(x, y; t) \leq A_k^{(2)} \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}}$$

où l'on a posé pour  $j = 1, 2$

$$A_k^{(j)} := A_0^{(j)} \exp \left\{ (-1)^j \sum_{\ell=1}^k a^{-\ell} \right\}.$$

Nous pouvons manifestement supposer  $k$  assez grand, au vu de l'estimation triviale

$$\frac{x}{\ln x} \ll t(\pi(x) - \pi(y))^+ + 1 \leq L(x, y; t) \leq \sum_{n \leq x} t^{\omega(n)} \ll x(\ln x)^{T-1}.$$

Lorsque  $\exp 2^k < x \leq \exp 2^{k+1}$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour estimer les termes  $L(x/p, y; t)$  et  $L(p/y, y; t)$  dans (2.3). En notant que  $L(x/p, y; t) = 1$  pour  $x/2 < p \leq x$ , nous obtenons ainsi

$$(2.7) \quad L(x, y; t) \leq tA_k^{(2)} \sum_{\sqrt{xy} < p \leq x/2} \frac{x}{p(\ln(x/p))^{\delta(t)}} + \sum_{(xy)^{1/3} < p \leq \sqrt{xy}} \frac{p}{y(\ln(p/y))^{\delta(t)}} + A \frac{x}{\ln x}$$

et

$$(2.8) \quad L(x, y; t) \geq tA_k^{(1)} \sum_{\sqrt{xy} < p \leq x/2} \frac{x}{p(\ln(x/p))^{\delta(t)}} - Ax^{3/4}$$

où  $A$  est une constante dépendant au plus de  $T$ .

Le théorème des nombres premiers permet d'estimer les sommes en  $p$  de (2.7) et (2.8) par sommation d'Abel. On obtient

$$(2.9) \quad \sum_{\sqrt{xy} < p \leq x/2} \frac{x}{p(\ln(x/p))^{\delta(t)}} = \frac{x F(\delta(t))}{(\ln x)^{\delta(t)}} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

et

$$(2.10) \quad \sum_{(xy)^{1/3} < p \leq \sqrt{xy}} \frac{p}{y(\ln(p/y))^{\delta(t)}} \ll \frac{x}{(\ln x)^{1+\delta(t)}}.$$

En reportant dans (2.7) et (2.8) et en notant que

$$(2.11) \quad \delta(t) \leq \delta(1/T) < 1,$$

on obtient, avec des constantes convenables  $B_1(T)$ ,  $B_2(T)$  et pour  $k \geq k_0(T)$ ,

$$\begin{aligned} L(x, y; t) &\leq \frac{A_k^{(2)} x}{(\ln x)^{\delta(t)}} \left\{ tF(\delta(t)) + B_2(T)2^{-k(1-\delta(1/T))} \right\} \\ &\leq \frac{A_{k+1}^{(2)} x}{(\ln x)^{\delta(t)}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L(x, y; t) &\geq \frac{A_k^{(1)} x}{(\ln x)^{\delta(t)}} \left\{ tF(\delta(t)) - B_1(T)2^{-k(1-\delta(1/T))} \right\} \\ &\geq \frac{A_{k+1}^{(1)} x}{(\ln x)^{\delta(t)}}, \end{aligned}$$

puisque  $tF(\delta(t)) = 1$ .

Cela achève la démonstration du lemme 2.3.

**Lemme 2.4.** Soit  $\alpha(t) := \min(1, 1 - \delta(t)) > 0$ . On a sous l'hypothèse (2.1)

$$(2.12) \quad L(x, y; t) = t \int_{\sqrt{x}}^x L(x/u, y; t) \frac{du}{\ln u} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)+\alpha(t)}}\right).$$

*Démonstration.* Les relations (2.3) et (2.5) impliquent immédiatement

$$\begin{aligned} L(x, y; t) &= t \sum_{\sqrt{xy} < p \leq x} L(x/p, y; t) + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{1+\delta(t)}}\right) \\ &= t \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} L(x/p, y; t) + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)+\alpha(t)}}\right). \end{aligned}$$

La dernière somme en  $p$  vaut

$$\int_{\sqrt{x}}^x L(x/u, y; t) \frac{du}{\ln u} + \int_{\sqrt{x}}^x L(x/u, y; t) dR(u),$$

avec  $R(u) := \text{li}(u) - \pi(u) \ll u \exp(-2\sqrt{\ln u})$ . La seconde intégrale en  $u$  vaut

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x}}^x \int_{1^-}^{x/u} dL(v, y; t) dR(u) &= \int_{1^-}^{\sqrt{x}} \{R(x/v) - R(\sqrt{x})\} dL(v, y; t) \\ &\ll \int_{1^-}^{\sqrt{x}} \frac{x}{v} e^{-2\sqrt{\ln(x/v)}} |dL(v, y; t)| \\ &\ll \sum_{n \leq \sqrt{x}} t^{\omega(n)} \frac{x}{n} e^{-2\sqrt{\ln(x/n)}} \\ &\ll x e^{-\sqrt{\ln x}}. \end{aligned}$$

Cela implique bien (2.3).



### 3. Preuve du théorème 2.

Soit  $T > 1$  un paramètre fixé une fois pour toutes. Etant donnés  $y$  et  $t$  satisfaisant (2.1), nous posons

$$(3.1) \quad \delta = \delta(t) \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha(t) = \min(1, 1 - \delta(t)),$$

et nous définissons  $\lambda(x)$  par la relation

$$(3.2) \quad L(x, y; t) = \frac{\lambda(x)x}{(\ln x)^\delta} \quad (x > 1).$$

Comme au paragraphe précédent, nous convenons que toutes les constantes, implicites ou explicites, peuvent dépendre de  $T$ .

En opérant le changement de variables  $u = x^{1-w}$  dans (2.12), il vient

$$(3.3) \quad \lambda(x) = t \int_0^{1/2} \lambda(x^w) w^{-\delta} \frac{dw}{1-w} + O((\ln x)^{-\alpha})$$

Le théorème 2 équivaut à la relation asymptotique

$$(3.4) \quad \lambda(x) = K(t) + O((\ln x)^{-\eta}) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

où  $K(t)$  est une fonction continue de  $t$ . En effet, la positivité de  $K(t)$  découle trivialement de la minoration de lemme 3.

Nous allons établir (3.4) en interprétant (3.3) comme une relation de convolution. Cela nécessite un nouveau changement de variable. Posons

$$\varphi(z) := \begin{cases} \lambda(\exp \exp z) & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases}$$

En tenant compte de l'évaluation triviale

$$0 \leq \lambda(x) \leq (\ln x)^\delta (1+t) \quad (1 < x < 3).$$

pour estimer la contribution à l'intégrale de (3.3) du segment  $0 \leq w \leq 1/\ln x$ , on peut réécrire (3.3) sous la forme

$$(3.5) \quad \varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z-v)g(v) dv + h(z) \quad (z \in \mathbf{R})$$

où l'on a posé, notant  $\rho := 1 - \delta > 0$ ,

$$(3.6) \quad g(v) := \begin{cases} te^{-\rho v}(1 - e^{-v})^{-1} & (v \geq \ln 2) \\ 0 & (v < \ln 2) \end{cases}$$

et où  $h(z)$  satisfait à

$$(3.7) \quad h(z) = 0 \quad (z \leq 0), \quad h(z) \ll e^{-\alpha z} \quad (z > 0).$$

Il est à noter que, pour chaque  $z$ ,  $h(z)$  est une fonction polynomiale de  $t$ , et que  $\frac{\partial h}{\partial t}(z)$  satisfait également la majoration (3.7).

La solution générale de l'équation de Volterra (3.5) est

$$(3.8) \quad \varphi(z) = h(z) + \int_0^{+\infty} G(v)h(z-v) dv$$

avec

$$(3.9) \quad G(v) := \sum_{k=1}^{\infty} g^{*k}(v)$$

où  $g^{*k}$  désigne la  $k$ -ème puissance de convolution de  $g$ . La série (3.9) ne comporte, pour chaque  $v > 0$ , qu'un nombre fini de termes puisque

$$(3.10) \quad g^{*k}(v) = \int_{\mathbf{R}^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} g(v_i) g(v - \sum_{i=1}^{k-1} v_i) dv_1 \dots dv_{k-1}$$

est nul dès que  $k \geq v/\ln 2$ . En particulier, comme

$$(3.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv = 1$$

par définition de  $\delta$ , on voit que

$$(3.12) \quad G(v) = 0 \quad (v < \ln 2), \quad 0 \leq G(v) \leq (2t/\ln 2)v \quad (v \geq \ln 2).$$

Nous allons étudier  $G(v)$  par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace

$$(3.13) \quad \widehat{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sv} G(v) dv = \frac{\widehat{g}(s)}{1 - \widehat{g}(s)},$$

convergente pour  $\operatorname{Re} s > 0$ , ainsi que l'atteste (3.12). On peut incidemment remarquer que cela découle également de l'inégalité

$$|\widehat{g}(s)| \leq \widehat{g}(\sigma) < \widehat{g}(0) = 1 \quad (s = \sigma + i\tau, \sigma > 0)$$

et du théorème de Phragmén-Landau qui affirme que l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace d'une fonction positive ou nulle est une singularité de la somme.

Le lemme suivant, dont nous différons la démonstration, permet de prolonger holomorphiquement  $\widehat{G}(s)$  au demi-plan  $\sigma \geq -\eta(t)$ .

**Lemme 3.1.** *La fonction  $\widehat{g}(s)$  est prolongeable méromorphiquement à tout le plan complexe. La quantité  $\eta = \eta(t)$  étant définie par (1.10), on a  $\widehat{g}(s) \neq 1$  pour  $\sigma \geq -\eta$ ,  $s \neq 0$ . De plus, pour chaque  $T > 1$ , on a*

$$(3.14) \quad \inf_{\substack{\sigma = -\eta \\ 1/T \leq t \leq T}} |1 - \widehat{g}(s)| \gg_T 1.$$

Admettant momentanément ce résultat, nous sommes en mesure d'établir (3.4).

Par la formule d'inversion de Laplace, on peut écrire pour tout  $\sigma > 0$

$$(3.15) \quad G(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{G}(s) e^{vs} ds.$$

On a

$$(3.16) \quad \widehat{g}(s) = t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-s-\rho-j}}{s + \rho + j}.$$

Cette expression fournit évidemment le prolongement méromorphe de  $\widehat{g}(s)$  au plan complexe tout entier. Pour  $\sigma \geq -\rho$ ,  $s \neq -\rho$ , on a en particulier

$$(3.17) \quad \widehat{g}(s) = ts^{-1}2^{-\rho-s} + O(t|s|^{-2}2^{-\rho-\sigma})$$

et l'on en déduit, pour  $|\tau|$  assez grand et  $\sigma \geq -\rho$ , la formule

$$(3.18) \quad \widehat{G}(s) = \frac{t2^{-s-\rho}}{i\tau} + O(\tau^{-2}).$$

Reportons cette évaluation dans (3.15) et estimons la contribution à l'infini du terme principal par la seconde formule de la moyenne. Nous obtenons, pour le choix  $\sigma = 1/v$ , et pour toute valeur du paramètre  $X > 1$ ,

$$(3.19) \quad G(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/v)-iX}^{(1/v)+iX} \widehat{G}(s) e^{vs} ds + O\left(\frac{1}{X}\right).$$

Déplaçons le segment d'intégration jusqu'à  $\sigma = -\eta$ . Le lemme 3.1 garantit alors que  $s = 0$  est la seule singularité traversée par le segment d'intégration, en effet le pôle de  $\widehat{g}(s)$  en  $s = -\rho$  n'est pas une singularité de  $\widehat{G}(s) = \widehat{g}(s)/(1 - \widehat{g}(s))$ . Comme  $\widehat{g}'(0) = -t \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\rho-j}/(\rho+j)^2 < 0$ , le résidu de l'intégrande en  $s = 0$  vaut

$$A := -1/\widehat{g}'(0),$$

et il suit

$$(3.20) \quad G(v) = A + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{Z}} \widehat{G}(s) e^{vs} ds + O\left(\frac{1}{X}\right)$$

où  $\mathcal{Z}$  est la ligne brisée joignant dans cet ordre les points  $(1/v) - iX$ ,  $-\eta - iX$ ,  $-\eta + iX$ ,  $(1/v) + iX$ . La relation (3.18) permet immédiatement d'estimer la contribution à l'intégrale de (3.20) des segments horizontaux de  $\mathcal{Z}$  par  $O(1/X)$ . Par (3.14) et (3.17), on peut majorer la contribution du segment vertical par

$$\ll \int_{-\eta-iX}^{-\eta+iX} \frac{e^{-\eta v}}{|s|} |ds| \ll e^{-\eta v} \ln X.$$

En choisissant  $X = v_0(T) + v$  avec  $v_0(T)$  assez grand, il vient

$$(3.21) \quad G(v) = A + O(ve^{-\eta v}) \quad (v \geq \ln 2).$$

Il est maintenant facile de compléter la démonstration de (3.4). En reportant (3.21) dans (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_{\ln 2}^z \{A + O(ve^{-\eta v})\} h(z-v) dv + O(e^{-\alpha z}) \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} h(w) dw + O\left(\int_{z-\ln 2}^{+\infty} |h(w)| dw + \int_{\ln 2}^z ve^{-\eta v} e^{-\alpha(z-v)} dv + e^{-\alpha z}\right) \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} h(w) dw + O(z^2 e^{-\eta z}), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $\eta \leq \alpha$ . On obtient donc (3.4) avec

$$(3.22) \quad K(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} h(w) dw = -\widehat{h}(0)/\widehat{g}'(0).$$

La convergence uniforme de cette intégrale et de sa dérivée par rapport à  $t$  implique que  $K(t)$  est une fonction dérivable de  $t$ , dont la dérivée est bornée sur  $[-1/T, T]$ .

Il reste à établir le lemme 3.1. Nous consacrons à cette tâche toute la fin de cette section.

Nous considérons  $\widehat{g}(s)$  avec  $s = \sigma + i\tau$ ,  $\sigma \geq -\eta$ ,  $1/T \leq t \leq T$ , et nous utilisons différents arguments selon les valeurs respectives de  $\tau$  et  $t$ . Cela nous conduit à considérer les cinq domaines suivants, où nous avons posé  $\theta_0 = \pi/\ln 4$ ,  $\theta_1 = \sqrt{6}$ ,  $\theta_2 = 2,6$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_1) & \quad |\tau| \leq \theta_0, & 1/T \leq t \leq T \\ (\mathcal{D}_2) & \quad \theta_0 < |\tau| \leq \theta_1, & 1/T \leq t \leq 1/\ln 2 \\ (\mathcal{D}_3) & \quad \theta_1 < |\tau| \leq \theta_2, & 1/T \leq t \leq 1/\ln 2 \\ (\mathcal{D}_4) & \quad |\tau| > \theta_2, & 1/T \leq t \leq 1/\ln 2 \\ (\mathcal{D}_5) & \quad |\tau| > \theta_0, & 1/\ln 2 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'on a pour  $1 \leq j \leq 5$

$$(3.23) \quad \widehat{g}(s) \neq 1 \quad ((t, \tau) \in \mathcal{D}_j, s \neq 0)$$

et

$$(3.24) \quad \inf_{\substack{\sigma = -\eta \\ (t, \tau) \in \mathcal{D}_j}} |1 - \widehat{g}(s)| \gg_T 1.$$

Notre argument est fondé sur la minoration de  $|\operatorname{Im} \widehat{g}(s)|$  lorsque  $1 \leq j \leq 3$  et sur la majoration de  $|\widehat{g}(s)|$  lorsque  $j = 4$  ou  $5$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\tau \geq 0$  car  $\widehat{g}(\bar{s}) = \overline{\widehat{g}(s)}$ . Nous notons systématiquement

$$\psi := \tau \ln 2.$$

La relation (3.16) permet d'écrire

$$(3.25) \quad \operatorname{Im} \widehat{g}(s) = -t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-\sigma-\rho-j}}{|\rho+s+j|^2} \{ \tau \cos \psi + (\rho + \sigma + j) \sin \psi \}.$$

Lorsque  $0 \leq \tau \leq \theta_0$ , on a  $0 \leq \psi \leq \pi/2$  et l'expression entre accolades dans (3.25) est positive ou nulle pour tout  $j$  puisque  $\sigma + \rho \geq \sigma + \eta \geq 0$ . Elle est en fait strictement positive si  $j \geq 1$  et  $\tau \neq 0$ . De plus, pour  $-\eta \leq \sigma < 0$ , on a

$$(3.26) \quad |\widehat{g}(\sigma)| = t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-\rho-\sigma-j}}{\rho + \sigma + j} > t 2^{-\sigma} t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-\rho-j}}{\rho + j} = 2^{-\sigma} > 1,$$

avec la convention que le membre de gauche doit être interprété comme  $+\infty$  lorsque  $t \leq 1/\ln 2$  et  $\sigma = -\eta = -\rho$ . Cela établit (3.23) pour  $j = 1$ . De plus, un argument de continuité standard permet de déduire de (3.26) que  $|1 - \widehat{g}(s)| \gg_T 1$  pour  $\sigma = -\eta$  et  $\tau \leq \tau_0(T)$ , où  $\tau_0(T)$  est une constante suffisamment petite. Compte tenu de (3.25), on obtient donc (3.24) dans le cas  $j = 1$ .

Considérons ensuite le cas  $\theta_0 < \tau \leq \theta_2$ ,  $1/T \leq t \leq 1/\ln 2$ , que nous scinderons ultérieurement en deux sous-cas selon la place de  $\tau$  relativement à  $\theta_1$ . On a  $0 < \rho(1/T) \leq \rho \leq 1$ , de sorte que

$$(3.27) \quad \beta := \rho + \sigma \in [0, 1].$$

Avec cette notation, nous réécrivons (3.25) sous la forme

$$(3.28) \quad \text{Im} \widehat{g}(s) = -t2^{-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} u(j + \beta, \tau)$$

où nous avons posé

$$(3.29) \quad u(x, \tau) := \frac{x \sin \psi + \tau \cos \psi}{x^2 + \tau^2}.$$

Lorsque  $\theta_0 < \tau \leq \theta_1 = \sqrt{6}$ , on a

$$\inf_{x \geq 2} \{x \sin \psi + \tau \cos \psi\} = 2 \sin(\sqrt{6} \ln 2) + \sqrt{6} \cos(\sqrt{6} \ln 2) > 0$$

de sorte que

$$(3.30) \quad |\text{Im} \widehat{g}(s)| \geq \frac{1}{2T} \{u(\beta, \tau) + u(1 + \beta, \tau)\}.$$

Maintenant, observons que

$$(3.31) \quad \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} = \frac{(\tau^2 - x^2) \sin \psi - 2\tau x \cos \psi}{(x^2 + \tau^2)^2}.$$

Comme on a  $\cos \psi \leq 0 \leq \sin \psi$  pour  $\theta_0 < \tau \leq \theta_2$ , on voit que  $u(x, \tau)$  est une fonction croissante de  $x$  sur  $[0, 2]$ . On déduit donc de (3.30) que l'on a pour  $\theta_0 < \tau \leq \theta_1$

$$\begin{aligned} |\text{Im} \widehat{g}(s)| &\geq \frac{1}{2T} \{u(0, \tau) + u(1, \tau)\} \\ &\geq \frac{1}{2T} \left\{ \frac{\cos \psi}{\tau} + \frac{\sin \psi + \tau \cos \psi}{1 + \tau^2} \right\} \\ &\geq \frac{\tau \sin \psi + (1 + 2\tau^2) \cos \psi}{2T\tau(1 + \tau^2)}. \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à  $\tau$  du numérateur de cette dernière expression vaut

$$(1 - \ln 2 - 2\tau\psi) \sin \psi + (\psi + 4\tau) \cos \psi < 0.$$

On peut donc écrire, en posant  $\psi_1 = \sqrt{6} \ln 2$ ,

$$|\operatorname{Im} \widehat{g}(s)| \geq \frac{\theta_1 \sin \psi_1 + (1 + 2\theta_1^2) \cos \psi_1}{2T\theta_1(1 + \theta_1^2)} > \frac{1}{44T}.$$

Cela établit (3.23) et (3.24) dans le cas  $j = 2$ .

Lorsque  $\theta_1 < \tau \leq \theta_2$ , nous remarquons que

$$\inf_{\substack{x \geq 7 \\ \theta_1 < \tau \leq \theta_2}} \{x \sin \psi + \tau \cos \psi\} = 7 \sin \psi_2 + \theta_2 \cos \psi_2 \quad (\psi_2 := \theta_2 \ln 2).$$

Nous déduisons donc de (3.28) que l'on a

$$(3.32) \quad |\operatorname{Im} \widehat{g}(s)| > \frac{v(\beta, T)}{2T},$$

avec

$$v(\beta, T) := \sum_{j=0}^6 2^{-j} u(j + \beta, \tau).$$

Maintenant, observons que  $\partial u(x, \tau)/\partial \tau$  est du signe de

$$\begin{aligned} & ((1 + x \ln 2) \cos \psi - \psi \sin \psi)(x^2 + \tau^2) - 2\tau(x \sin \psi + \tau \cos \psi) \\ &= ((1 + x \ln 2)(x^2 + \tau^2) - 2\tau^2) \cos \psi - (\psi(x^2 + \tau^2) + 2\tau x) \sin \psi \\ &\leq -\tau^2(\cos \psi + \psi \sin \psi) \\ &\leq -6(\cos \psi_2 + \psi_2 \sin \psi) < 0 \end{aligned}$$

pour  $x \geq 0$ . On a donc pour tout  $\beta$  de  $[0, 1]$

$$v(\beta, \tau) \geq v(\beta, \theta_2).$$

Nous allons montrer que  $v(\beta, \theta_2)$  est une fonction croissante de  $\beta$ . On a

$$\frac{\partial}{\partial \beta} v(\beta, \theta_2) = \sum_{j=0}^6 2^{-j} \frac{\partial}{\partial x} u(j + \beta, \theta_2).$$

Or l'expression (3.31) fournit

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \theta_2) = \sin \psi_2 \cdot w_1(x) - 2\theta_2 \cos \psi_2 \cdot w_2(x)$$

avec

$$w_1(x) := \frac{\theta_2^2 - x^2}{(\theta_2^2 + x^2)^2}, \quad w_2(x) := \frac{x}{(\theta_2^2 + x^2)^2}.$$

Un calcul standard montre que  $w_1$  est décroissante pour  $x \leq \theta_2\sqrt{3} \approx 4,5$ , et croissante pour  $x > \theta_2\sqrt{3}$ , alors que  $w_2$  est croissante pour  $x \leq \theta_2/\sqrt{3} \approx 1,5$ , et décroissante pour  $x > \theta_2/\sqrt{3}$ . De plus  $w_2(1) < w_2(2)$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} v(\beta, \theta_2) &= \sin \psi_2 \sum_{j=0}^6 2^{-j} w_1(j + \beta) - 2\theta_2 \cos \psi_2 \sum_{j=0}^6 2^{-j} w_2(j + \beta) \\ &\geq \sin \psi_2 \sum_{j=0}^6 2^{-j} \min_{j \leq x \leq j+1} w_1(x) - 2\theta_2 \cos \psi_2 \sum_{j=0}^6 2^{-j} \min_{j \leq x \leq j+1} w_2(x) \\ &= \sin \psi_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 2^{-j} w_1(j + 1) + 2^{-4} w_1(\theta_2\sqrt{3}) + \sum_{j=5}^6 2^{-j} w_1(j) \right\} \\ &\quad - 2\theta_2 \cos \psi_2 \left\{ \frac{1}{2} w_2(1) + \sum_{j=2}^6 2^{-j} w_2(j + 1) \right\} \\ &> \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Cela montre que  $v(\beta, \theta_2)$  est une fonction croissante de  $\beta$  sur  $[0, 1]$ , d'où

$$v(\beta, \theta_2) \geq v(0, \theta_2) > \frac{1}{1000}.$$

En reportant dans (3.32), il suit

$$|\operatorname{Im} \hat{g}(s)| > \frac{1}{2000T} \quad (\theta_1 < \tau \leq \theta_2),$$

ce qui établit (3.23) et (3.24) pour  $j = 3$ .

Considérons maintenant le cas  $\tau > \theta_2 = 2,6$ ,  $1/T \leq t \leq 1/\ln 2$ . On a toujours  $0 < \rho(1/T) \leq \rho \leq 1$  et  $\beta = \rho + \sigma \in [0, 1]$ . On peut alors écrire, d'après (3.16),

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \hat{g}(s)| &\leq \frac{1}{\ln 2} \left\{ \left| \frac{2^{-\beta}}{\beta + i\tau} + \frac{2^{-\beta-2}}{\beta + 2 + i\tau} \right| + \left| \frac{2^{-\beta-1}}{\beta + 1 + i\tau} \right| + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{2^{-\beta-j}}{|\beta + j + i\tau|} \right\} \\ &\leq \frac{1}{\ln 2} \left\{ \sqrt{4^{-\beta} H(\beta)} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \theta_2^2}} + \frac{1}{4\sqrt{9 + \theta_2^2}} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$H(\beta) := \left| \frac{1}{\beta + i\tau} + \frac{1}{\beta + 2 + i\tau} \right|^2 = \frac{(5\beta + 8)^2 + 25\tau^2}{16(\beta^2 + \tau^2)((\beta + 2)^2 + \tau^2)}.$$



La dérivée logarithmique de  $4^{-\beta}H(\beta)$  n'excède pas

$$-\ln 4 + \frac{10(5\beta + 8)}{(5\beta + 8)^2 + 25\tau^2} \leq -\ln 4 + \frac{130}{64 + 25\theta_2^2} < 0.$$

Il suit

$$(3.33) \quad |\widehat{g}(s)| \leq \frac{1}{\ln 2} \left\{ \sqrt{H(0)} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \theta_2^2}} + \frac{1}{4\sqrt{9 + \theta_2^2}} \right\}.$$

Or

$$H(0) = \frac{4}{\tau^2(4 + \tau^2)} + \frac{25}{16(4 + \tau^2)} \leq \frac{4}{\theta_2^2(4 + \theta_2^2)} + \frac{25}{16(4 + \theta_2^2)}.$$

En reportant cette majoration dans (3.33), on obtient

$$(3.34) \quad |\widehat{g}(s)| < \frac{249}{250} \quad (\tau > \theta_2, \quad 1/T \leq t \leq 1/\ln 2).$$

Cela implique bien (3.23) et (3.24) pour  $j = 4$ .

Il reste à examiner le cas  $\tau > \theta_0 = \pi/\ln 4$ ,  $1/\ln 2 \leq t \leq T$ . La seconde condition équivaut à  $1 \leq \rho \leq \rho(T)$ , et on a  $\eta = 1/(3\rho^2)$ . Par (3.16), on peut écrire pour  $-\eta \leq \sigma \leq 0$ ,  $\tau > \theta_0$ ,

$$(3.35) \quad |\widehat{g}(s)| \leq t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{\eta-\rho-j}}{|\rho - \eta + j + i\tau|} \leq t 2^{\eta-\rho} \left\{ \sum_{j=0}^6 \frac{2^{-j}}{\sqrt{(\rho - \eta + j)^2 + \theta_0^2}} + \sum_{j=7}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\rho + j - \eta} \right\}$$

Maintenant, nous observons que

$$(\rho - \eta)^2 + \theta_0^2 \geq \rho^2 - 2\eta\rho + \theta_0^2 \geq \rho^2 - 2/3 - \theta_0^2 \geq \rho^2(1 + 40\eta/3) \geq \rho^2(1 + 4\eta)^2$$

où l'avant-dernière inégalité découle de  $\theta_0^2 - 2/3 > 40/9$  et la dernière de

$$(1 + 4\eta)^2 = 1 + 8\eta + 16\eta^2 \leq 1 + (8 + 16/3)\eta = 1 + 40\eta/3 \quad (0 \leq \eta \leq 1/3).$$

Cela permet de majorer le terme correspondant à  $j = 0$  dans la somme du membre de droite (3.35) par  $\rho^{-1}(1 + 4\eta)^{-1}$ .

Semblablement, pour  $1 \leq j \leq 6$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} (\rho - \eta + j)^2 + \theta_0^2 &\geq (\rho + j)^2 - 2\eta(\rho + j) + \theta_0^2 \\ &\geq (\rho + j)^2 - 2/3 - 2j/3 + \theta_0^2 \\ &\geq (\rho + j)^2 - 14/3 + \theta_0^2. \end{aligned}$$

Posons

$$a := t 2^{-\rho}/\rho, \quad b := t \sum_{j=1}^6 2^{-\rho-j}/(\rho+j), \quad c := t \sum_{j=7}^{\infty} 2^{-\rho-j}/(\rho+j),$$

de sorte que  $a + b + c = 1$ , et majorons  $2^\eta$  par  $1 + \eta$ . On obtient, en reportant les estimations précédentes dans (3.8),

$$|\widehat{g}(s)| \leq a \frac{1+\eta}{1+4\eta} + b(1+\eta) + c \frac{1+\eta}{1-\eta/8}.$$

Il est facile de vérifier que l'on a

$$\frac{1+\eta}{1+4\eta} \leq 1 - 9\eta/7, \quad \frac{1+\eta}{1-\eta/8} \leq 1 + 27\eta/23 \quad (0 \leq \eta \leq 1/3).$$

Il suit donc

$$|\widehat{g}(s)| \leq 1 - a\eta \left\{ \frac{9}{7} - \frac{b}{a} - \frac{27c}{23a} \right\}.$$

Or on a clairement

$$b < t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-\rho-j}}{\rho+1} = \frac{t 2^{-\rho}}{\rho+1} < a$$

et

$$c < t \sum_{j=7}^{\infty} \frac{2^{-\rho-j}}{\rho+7} = \frac{t 2^{-\rho-6}}{\rho+7} < 2^{-6} a.$$

D'où

(3.36)

$$|\widehat{g}(s)| < 1 - a\eta \left\{ \frac{9}{7} - 1 - \frac{27}{23} 2^{-6} \right\} < 1 - a\eta/4 \quad (\tau > \theta_0, \quad 1/\ln 2 \leq t \leq T).$$

Cela implique (3.23) et (3.24) pour  $j = 5$ , et achève ainsi la démonstration du lemme 3.1.

#### 4. Démonstration du théorème 3.

Montrons d'abord que l'équation

$$(4.1) \quad F(\sigma) - \alpha F'(\sigma) = 0$$

possède une solution unique  $\sigma = \sigma_\alpha < 1$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1/\ln 2[$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} F'(\sigma)^2 &= \left( \int_0^{1/2} \ln(1/v) v^{-\sigma} \frac{dv}{1-v} \right)^2 \\ &< \int_0^{1/2} v^{-\sigma} \frac{dv}{1-v} \int_0^{1/2} \ln^2(1/v) v^{-\sigma} \frac{dv}{1-v} = F(\sigma) F''(\sigma) \end{aligned}$$

implique

$$(4.2) \quad \left( \frac{F'}{F}(\sigma) \right)' = \frac{F F'' - F'^2}{F^2}(\sigma) > 0 \quad (\sigma < 1).$$

Donc  $F'/F$  est strictement croissante sur  $] -\infty, 1[$ . Un calcul standard fournit les limites

$$\frac{F'}{F}(-\infty) = \ln 2 \quad \frac{F'}{F}(1-) = +\infty.$$

Cela implique bien la propriété souhaitée.

Il est à noter que le fait que l'inégalité (4.2) soit stricte implique que  $\sigma_\alpha$  est une fonction strictement décroissante de  $\alpha$ . Un argument de continuité classique permet d'énoncer plus précisément que pour tous  $\alpha_0, \alpha_1, 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1/\ln 2$ , il existe une constante positive  $c_0(\alpha_0, \alpha_1)$  telle que

$$(4.3) \quad \frac{d}{d\alpha} \sigma_\alpha \leq -c_0(\alpha_0, \alpha_1) \quad (\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1).$$

La démonstration de l'encadrement (1.12) repose sur l'évaluation uniforme pour  $1/T \leq t \leq T, 1 \leq x \leq T$ ,

$$(4.4) \quad \sum_{n \in \mathcal{L}(x, y)} t^{\omega(n)} \asymp x(\ln x)^{-\delta(t)},$$

qui est une conséquence immédiate du lemme 2.3. Le principe essentiel consiste à choisir, pour chaque  $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ , une valeur  $t = t_\alpha$  pour laquelle la moyenne (4.4) est centrée sur l'ensemble des entiers  $n$  de  $\mathcal{L}(x, y)$  pour lesquels

$$(4.5) \quad |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| \leq A \sqrt{\ln_2 x}.$$

La majoration est facile et conduit naturellement au choix optimal de  $t_\alpha$ . En effet, pour tout  $t$  de  $[1/T, T]$  on a clairement grâce à (4.4)

$$(4.6) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x, y) \\ |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| \leq A \sqrt{\ln_2 x}}} 1 \leq \sum_{n \in \mathcal{L}(x)} t^{\omega(n) - \alpha \ln_2 x} e^{(\ln T) A \sqrt{\ln_2 x}} \\ \ll x(\ln x)^{-\delta(t) - \alpha \ln t} e^{(\ln T) A \sqrt{\ln_2 x}}.$$

Le choix optimal est donc  $t = t_\alpha$ , défini par

$$(4.7) \quad t_\alpha \delta'(t_\alpha) + \alpha = 0.$$

Or en dérivant l'identité  $tF(\delta(t)) = 1$ , on obtient

$$(4.8) \quad F(\delta(t)) + t\delta'(t)F'(\delta(t)) = 0.$$

Donc (4.7) équivaut à

$$(4.9) \quad \delta(t_\alpha) = \sigma_\alpha$$

Comme  $F$  est strictement croissante sur  $] - \infty, 1[$  et satisfait à  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(1_-) = +\infty$ , on voit que  $\delta$  décroît strictement de  $1_-$  à  $-\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . En particulier, l'équation (4.9) possède bien une solution unique pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1/\ln 2[$ . On peut noter que  $t_\alpha$  est une fonction strictement croissante de  $\alpha$  et que (4.3) implique l'existence d'une constante positive  $c_1(\alpha_0, \alpha_1)$  telle que

$$(4.10) \quad \frac{d}{d\alpha} t_\alpha \geq c_1(\alpha_0, \alpha_1) \quad (\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1).$$

On a  $t_\alpha = 1/F(\sigma_\alpha)$ , donc (4.6) fournit bien la majoration de (1.12) avec  $B = A \max(|\ln t_{\alpha_0}|, |\ln t_{\alpha_1}|)$ .

Tournons maintenant notre attention vers la minoration de (1.12).

Posons  $g_\alpha(t) = \delta(t) + \alpha \ln t$ . Alors, par définition de  $t_\alpha$ , on a  $g'_\alpha(t_\alpha) = 0$ . De plus

$$(4.11) \quad tg'_\alpha(t) = t\delta'(t) + \alpha = \alpha - \frac{F}{F'}(\delta(t))$$

est une fonction décroissant strictement sur  $[0, +\infty[$  de  $\alpha (> 0)$  à  $\alpha - 1/\ln 2 (< 0)$ . Donc  $g_\alpha$  est unimodale sur  $[0, +\infty[$  et possède un unique maximum en  $t = t_\alpha$ .

Soit  $\beta \in [\frac{1}{2}\alpha, \alpha[$ . Pour tout  $z \in [1/2, 1]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ \omega(n) \leq \beta \ln_2 x}} t_\alpha^{\omega(n)} &\leq \sum_{n \in \mathcal{L}(x,y)} (t_\alpha z)^{\omega(n)} z^{-\beta \ln_2 x} \\ &\ll x(\ln x)^{-\delta(t_\alpha z) - \beta \ln z}. \end{aligned}$$

Ici et dans toute la suite, les constantes implicites ou explicites peuvent dépendre de  $\alpha_0, \alpha_1$  et  $T$ . Lorsque  $\beta$  est assez proche de  $\alpha$ , on peut choisir  $z = t_\beta/t_\alpha \in [1/2, 1]$ . Il vient

$$(4.12) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ \omega(n) \leq \beta \ln_2 x}} t_\alpha^{\omega(n)} \ll x(\ln x)^{-\delta(t_\alpha) - w}$$

avec

$$w := g_\beta(t_\beta) - g_\beta(t_\alpha) > 0.$$

De plus, puisque  $g'_\beta(t_\beta) = 0$ , la formule de Taylor implique l'existence d'un  $\gamma \in [\beta, \alpha]$  tel que

$$(4.13) \quad w = -\frac{1}{2}(t_\alpha - t_\beta)^2 g''_\beta(t_\gamma) = \frac{1}{2}(t_\alpha - t_\beta)^2 |g''_\beta(t_\gamma)|.$$

Dérivons (4.11) en remplaçant  $\alpha$  par  $\beta$  et prenons ensuite  $t = t_\beta$ . Il vient

$$\begin{aligned} -t_\beta g''_\beta(t_\beta) &= \frac{F F'' - F'^2}{F'^2} (\delta(t_\beta)) \delta'(t_\beta) \\ &= -F \frac{F F'' - F'^2}{F'^3} (\delta(t_\beta)) \frac{1}{t_\beta}. \end{aligned}$$

Il découle donc de (4.2) que

$$|g''_\beta(t_\beta)| \gg 1 \quad (\beta \rightarrow \alpha),$$

d'où, en reportant dans (4.13),

$$w \geq c_2(t_\alpha - t_\beta)^2 \geq c_3(\alpha - \beta)^2$$

où la seconde inégalité découle de (4.10).

Choisissons  $\beta = \alpha - A/\sqrt{\ln_2 x}$ , où  $A$  est une constante assez grande. Grâce à (4.12) on voit que, pour un choix convenable de  $A$ ,

$$(4.14) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ \omega(n) \leq \beta \ln_2 x}} t_\alpha^{\omega(n)} \leq \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathcal{L}(x,y)} t_\alpha^{\omega(n)}.$$

Symétriquement, on peut montrer par des calculs parallèles que, pour  $\beta = \alpha + A/\sqrt{\ln_2 x}$ , l'estimation (4.14) est encore valable, quitte à remplacer la condition sur  $\omega(n)$  par  $\omega(n) \geq \beta \ln_2 x$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| \leq A\sqrt{\ln_2 x}}} t_\alpha^{\omega(n)} &\geq \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathcal{L}(x,y)} t_\alpha^{\omega(n)} \\ &\gg x(\ln x)^{-\delta(t)} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| \leq A\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \gg x(\ln x)^{-\delta(t) - \alpha \ln t_\alpha} e^{-A|\ln t_\alpha| \sqrt{\ln_2 x}}.$$

Cela implique bien la minoration de (1.12) avec  $B = A \max(|\ln t_{\alpha_0}|, |\ln t_{\alpha_1}|)$ .

Pour achever la démonstration du théorème 3, il reste à étudier le cas  $\alpha = -\delta'(1)$ . On a alors

$$(4.15) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{L}(x,y) \\ |\omega(n) - \alpha \ln_2 x| > A\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \leq e^{-A} \sum_{n \in \mathcal{L}(x,y)} e^{|\omega(n) - \alpha \ln_2 x| / \sqrt{\ln_2 x}} \\ \leq e^{-A} \left( L \left( x, y; \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}} \right\} \right) \exp \left\{ \alpha \sqrt{\ln_2 x} \right\} \right. \\ \left. + L \left( x, y; \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}} \right\} \right) \exp \left\{ -\alpha \sqrt{\ln_2 x} \right\} \right)$$

En notant que, pour  $t = \exp \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}} \right\}$ , on a

$$\delta(t) = \delta(1) \mp \frac{\alpha}{\sqrt{\ln_2 x}} + O \left( \frac{1}{\ln_2 x} \right),$$

on déduit du lemme 2.3 que le membre de gauche de (4.15) est  $\ll x(\ln x)^{-\delta(1)}e^{-A}$ . Cela implique bien le résultat attendu.

## 5. Preuve du théorème 4.

Soit  $\Phi(z) := \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}$ . Nous appliquons le *Theorem 2* d'Alladi [A], que nous énonçons ci-dessous.

**Théorème (Alladi).** *Soit  $F$  une fonction de répartition. Supposons qu'il existe un nombre réel  $u_0 > 10$  tel que*

$$(5.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|uz|} dF(z) \ll e^{u^2/2} \quad (|u| \leq u_0)$$

*et un nombre réel positif  $u_1$  indépendant de  $F$  tel que*

$$(5.2) \quad \varepsilon := \sup_{0 \leq u \leq u_1} e^{-u^2/2} |\widehat{F}(u) - e^{u^2/2}| < 1 \quad \left( \widehat{F}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uz} dF(z) \right).$$

*Alors on a*

$$(5.3) \quad \sup_{z \in \mathbf{R}} |F(z) - \Phi(z)| \ll \frac{1}{\sqrt{u_0}} + \left( \frac{\ln |\ln \varepsilon|}{|\ln \varepsilon|} \right)^{1/8}.$$

Soit  $F(z)$  le membre de gauche de (1.15). On a

$$(5.4) \quad \widehat{F}(u) = L(x, y; t)^{-1} \sum_{n \in \mathcal{L}(x, y)} \exp \left\{ -u \frac{\omega(n) - M}{\sqrt{V}} \right\} t^{\omega(n)}$$

où l'on a posé

$$(5.5) \quad M = M(x) := a(t) \ln_2 x, \quad V = V(x) := b(t) \ln_2 x.$$

Choisissons  $u_0 = (\ln_2 x)^{\eta(t)/4}$ . Il découle immédiatement de (1.11) que l'on a uniformément pour  $|u| \leq u_0$ ,

$$(5.6) \quad \widehat{F}(u) = \left\{ 1 + O \left( \frac{1}{(\ln_2 x)^{1/4}} \right) \right\} e^{u^2/2}.$$

En effet, il suffit de reporter dans (1.11) les évaluations élémentaires suivantes, où l'on a posé  $s = t \exp \left\{ -u/\sqrt{V} \right\}$ ,

$$K(s) = K(t) + O((\ln_2 x)^{-1/4}),$$

et

$$\begin{aligned} \delta(s) \ln_2 x &= \left\{ \delta(t) + \left( \frac{-u}{\sqrt{V}} + \frac{u^2}{2V} \right) t \delta'(t) + \frac{u^2}{2V} t^2 \delta''(t) + O \left( \frac{u^3}{(\ln_2 x)^{3/2}} \right) \right\} \ln_2 x \\ &= \delta(t) \ln_2 x + \frac{uM}{\sqrt{V}} - \frac{u^2}{2} + O((\ln_2 x)^{-1/4}). \end{aligned}$$

En tenant compte de la majoration triviale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|uz|} dF(z) \leq \widehat{F}(u) + \widehat{F}(-u),$$

on voit que (5.1) et (5.2) sont réalisées avec

$$u_0 = (\ln_2 x)^{\eta(t)/4}, \quad u_1 = 1, \quad \varepsilon = (\ln_2 x)^{-1/4}.$$

Cela fournit le résultat annoncé.

## Addendum: Résolution élémentaire d'une équation de Volterra

André STEF

La démonstration du théorème 2 du chapitre 3 est analytique. Nous donnons ici une version plus faible de ce théorème, que nous démontrons par une méthode élémentaire.

**Théorème 5.** *Pour chaque  $T > 1$ , il existe une constante  $\kappa(T) > 0$ , telle que l'on a uniformément pour  $1/T \leq t \leq T$ ,  $1 \leq y \leq T$*

$$(1) \quad L(x, y; t) = \left\{ K(t) + O_T \left( \frac{1}{(\ln x)^{\kappa(T)}} \right) \right\} \frac{x}{(\ln x)^{\delta(t)}},$$

où  $\kappa(T) > 0$ .

Ce résultat découle du résultat plus général suivant

**Théorème 6.** *Soit  $\nu$  une mesure positive définie sur  $[0, 1/2]$  vérifiant pour des constantes positives convenables  $\alpha$ ,  $c_1$ ,  $c_2$*

$$(2) \quad \nu([0, 1/2]) = 1,$$

$$(3) \quad \nu([0, \varepsilon]) \leq c_1 \varepsilon^\alpha,$$

*et telle que tout ensemble mesurable  $\mathcal{I}$  de mesure supérieure ou égale à  $1/32$  vérifie  $\nu(\mathcal{I}) \geq c_2$ . Soit aussi  $A(z)$  une fonction définie pour  $z \geq 0$  telle qu'il existe des constantes strictement positives  $A_1$ ,  $A_2$  et  $c_3$  vérifiant*

$$(4) \quad A_1 \leq A(z) \leq A_2 \quad (z \geq 0)$$

*et telle que*

$$(5) \quad \left| A(z) - \int_0^{1/2} A(uz) d\nu(u) \right| \leq \frac{c_3}{z^\alpha} \quad (z > 0).$$

*Il existe alors des réels strictement positifs  $A$  et  $\kappa$  tels que*

$$(6) \quad A(z) = A + O(z^{-\kappa}) \quad (z \rightarrow +\infty).$$



*Démonstration du théorème 5.* Le théorème 5 équivaut à la relation asymptotique

$$\lambda(x) = K(t) + O((\ln x)^{-\kappa})$$

Par le lemme 2.3, on a  $\lambda(x) \in [K_1, K_2]$  pour  $x \geq 2$ . Nous remarquons que pour  $1 < x < 2$ , on a  $\lambda(x) = (\ln x)^{\delta(t)}$ . On pose alors

$$\lambda^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \lambda(x) & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

On a alors  $\lambda(x) \in [\min(1, K_1), \max(1, K_2)]$  pour  $x > 1$ . On a encore d'après (3.3) la relation

$$\lambda^*(x) = \int_0^{1/2} \lambda^*(x^u) \frac{t du}{u^{\delta(t)}(1-u)} + O((\ln x)^{-\alpha(t)})$$

On introduit alors la fonction  $A(z) := \lambda(\exp z)$ .  $A(z)$  vérifie les conditions d'application du théorème 6 avec la mesure

$$d\nu(u) = \frac{t du}{u^{\delta(t)}(1-u)}$$

et  $\alpha = \alpha(1/T)$ . Le théorème 6 fournit alors le résultat annoncé

*Démonstration du théorème 6.* La relation (5) est une équation de Volterra. La méthode utilisée ici pour la résoudre est analogue à celle utilisée par de Bruijn dans [dB]. On montre que  $A(z)$  ne peut pas osciller librement entre  $A_1$  et  $A_2$ , et que les oscillations éventuelles s'amortissent.

On pose

$$c_4 := \prod_{k=0}^{\infty} \nu([2^{-k-2}, 1/2]) \gg \prod_{\substack{k=0 \\ 2^{k\alpha} > c_1}}^{\infty} \left(1 - \frac{c_1}{2^{(k+2)\alpha}}\right) > 0.$$

On remarque que  $c_4 < 1$ . Il existe deux constantes  $\gamma > 0$  et  $\Gamma \geq \max(2, 4^\alpha)$  vérifiant

$$(7) \quad 1 - \frac{c_2 c_4}{8} < \gamma < 1$$

$$(8) \quad \frac{1}{\Gamma} \left(2c_1 + \frac{c_3}{A_2 - A_1}\right) \leq \min \left( \frac{c_2}{4}, \frac{c_2 c_4}{8} \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha} \right)^{-1} \right)$$

On définit  $z_0 = 0$  et pour  $i \geq 1$

$$(9) \quad z_i := \left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^{i/\alpha}$$

Nous remarquons immédiatement que

$$(10) \quad z_1 \leq 4z_{i+1}.$$

Nous procédons par récurrence sur  $i \geq 0$ . L'hypothèse d'induction est que pour  $i \geq 0$ , il existe des constantes positives  $A_{j,1}$  et  $A_{j,2}$  pour  $0 \leq j \leq i$  vérifiant

$$A_1 = A_{0,1} \leq A_{1,1} \leq \dots \leq A_{i,1} < A_{i,2} \leq \dots \leq A_{1,2} \leq A_{0,2} = A_2,$$

$$A_{j,2} - A_{j,1} = \gamma^j (A_2 - A_1) \quad (0 \leq j \leq i),$$

et telles que pour tout  $j \leq i$ , on ait  $A_{j,1} \leq A(z) \leq A_{j,2}$  pour tout  $z \geq z_j$ .

Cette propriété est bien vérifiée pour  $i = 0$  d'après (4).

Nous définissons

$$L_i(z) := \left\{ u : z_i/z \leq u \leq \frac{1}{2}, A(uz) \geq (A_{i,1} + A_{i,2})/2 \right\}$$

$$M_i(z) := \left\{ u : z_i/z \leq u \leq \frac{1}{2}, A(uz) < (A_{i,1} + A_{i,2})/2 \right\}$$

$L_i(z)$  et  $M_i(z)$  sont mesurables. On définit alors

$$\lambda_i(z) := \text{mes } L_i(z),$$

$$\mu_i(z) := \text{mes } M_i(z).$$

Nous remarquons, d'après (10), que  $\lambda_i(z_{i+1}) + \mu_i(z_{i+1}) \geq \frac{1}{4}$ . On a donc  $\sup(\lambda_i(z), \mu_i(z)) \geq \frac{1}{8}$ . nous supposons dans un premier temps que  $\lambda_i(z_{i+1}) \geq \frac{1}{8}$ . En écrivant  $A(uz) = A\left(\frac{z}{z_{i+1}}uz_{i+1}\right)$  pour  $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\frac{z_{i+1}}{z}$ , nous remarquons que l'on a, pour  $z_{i+1} \leq z \leq 4z_{i+1}$ ,

$$L_i(z) \supset \frac{z_{i+1}}{z} L_i(z_{i+1}) = \left\{ \frac{z_{i+1}}{z} u : \frac{z_i}{z_{i+1}} \leq u \leq \frac{1}{2}, A(uz) \geq (A_{i,1} + A_{i,2})/2 \right\}.$$

D'où

$$\lambda_i(z) \geq \frac{z_{i+1}}{z} \lambda_i(z_{i+1}) \geq \frac{1}{4} \lambda_i(z_{i+1}) \geq \frac{1}{32}.$$

On a alors, pour  $z_{i+1} \leq z \leq 4z_{i+1}$

$$\begin{aligned} A(z) &\geq \int_0^{1/2} A(uz) d\nu(u) - c_3 z^{-\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \int_0^{1/2} (A(uz) - A_{i,1}) d\nu(u) - c_3 z^{-\alpha}, \end{aligned}$$

d'après (2). En découpant la somme, on a alors

$$\begin{aligned} A(z) &\geq A_{i,1} + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{z_i/z}^{z_{i+1}/z} (A(uz) - A_{i,1}) d\nu(u) + \int_{z_i/z}^{1/2} (A(uz) - A_{i,1}) d\nu(u) - c_3 z^{-\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \int_{L_i(z)} \frac{A_{i,2} - A_{i,1}}{2} d\nu(u) - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{z_j/z}^{z_{j+1}/z} (A_{j,1} - A_{i,1}) d\nu(u) - \frac{c_3}{z^\alpha}, \end{aligned}$$

cette deuxième inégalité étant obtenue en utilisant l'hypothèse de récurrence. La relation (3) permet alors d'obtenir

$$\begin{aligned} A(z) &\geq A_{i,1} + \frac{c_2}{2}(A_{i,2} - A_{i,1}) - c_1(A_2 - A_1) \sum_{j=0}^{i-1} \gamma^j \left(\frac{z_{j+1}}{z}\right)^\alpha - \frac{c_3}{z^\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \frac{c_2}{2}(A_{i,2} - A_{i,1}) - c_1(A_2 - A_1) \gamma^i \frac{2}{\Gamma} - c_3 \gamma^{i+1} \frac{1}{\Gamma^{i+1}}, \end{aligned}$$

où on a majoré  $z_{j+1}/z$  par  $z_{j+1}/z_{i+1} = \gamma^{i-j} \Gamma^{j-i}$  dans la somme en  $j$ , et majoré la série géométrique  $\sum_{j=0}^{i-1} \Gamma^{j-i}$  par  $2/\Gamma$ . D'après (8), on a alors

$$A(z) \geq A_{i,1} + \frac{c_2}{4}(A_{i,2} - A_{i,1}).$$

On pose  $\beta_0 := \frac{c_2}{4}$ . Nous établissons une nouvelle récurrence sur  $k \geq 0$ . Nous supposons que pour  $k$  fixé, il existe  $\beta_k > 0$  tel que l'on ait

$$A(z) \geq A_{i,1} + \beta_k (A_{i,2} - A_{i,1}) \quad \text{pour } z_{i+1} \leq z \leq 2^{k+2} z_{i+1}.$$

Par une méthode analogue à celle utilisée précédemment pour minorer  $A(z)$ , on obtient, pour  $2^{k+2} z_{i+1} \leq z \leq 2^{k+3} z_{i+1}$ ,

$$\begin{aligned} A(z) &\geq \int_0^{1/2} A(uz) d\nu(u) - \frac{c_3}{z^\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \beta_k (A_{i,2} - A_{i,1}) \int_{2^{-k-2}}^{1/2} d\nu(u) - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{z_j/z}^{z_{j+1}/z} (A_{j,1} - A_{i,1}) d\nu(u) - \frac{c_3}{z^\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \beta_k (A_{i,2} - A_{i,1}) \int_{2^{-k-2}}^{1/2} d\nu - \sum_{j=0}^{i-1} c_1 (A_{j,1} - A_{i,1}) \left(\frac{z_{j+1}}{z}\right)^\alpha - \frac{c_3}{z^\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \beta_k (A_{i,2} - A_{i,1}) \int_{2^{-k-2}}^{1/2} d\nu - c_1 (A_2 - A_1) \gamma^i \frac{2}{\Gamma} 2^{-k\alpha} - c_3 \frac{\gamma^{i+1}}{\Gamma^{i+1}} 2^{-k\alpha} \\ &\geq A_{i,1} + \beta_{k+1} (A_{i,2} - A_{i,1}), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(11) \quad \beta_{k+1} = \beta_k \nu([2^{-k-2}, 1/2]) - c_1 \gamma^i \frac{2}{\Gamma} 2^{-k\alpha} - c_3 \frac{\gamma^{i+1}}{\Gamma^{i+1}} 2^{-k\alpha} > 0.$$

Nous avons construit une suite  $(\beta_k)$  décroissante, telle que pour tout  $k \geq 0$  et  $z_{i+1} \leq z \leq 2^{k+2} z_{i+1}$ , on a

$$A(z) \geq \beta_k (A_{i,2} - A_{i,1})$$

On obtient par une récurrence facile que pour tout  $k \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \beta_k &\geq \beta_0 \prod_{j=0}^{k-1} \nu([2^{-j-2}, 1/2]) - \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j\alpha} \left( \frac{2c_1}{\Gamma} + \frac{c_3}{(A_2 - A_1)\Gamma} \right) \\ &\geq \frac{c_2}{4} \prod_{j=0}^{\infty} \nu([2^{-j-2}, 1/2]) - \frac{c_2 c_4}{8} \\ &\geq \frac{c_2 c_4}{8} \\ &\geq 1 - \gamma, \end{aligned}$$

d'après (7) et (8).

On pose alors

$$\begin{aligned} A_{i+1,1} &= A_{i,1} + (1 - \gamma)(A_{i,2} - A_{i,1}) \\ A_{i+1,2} &= A_{i,2}. \end{aligned}$$

Nous avons bien alors

$$\begin{aligned} A_{i+1,2} - A_{i+1,1} &= \gamma^{i+1}(A_{i,2} - A_{i,1}) \\ A_{i,1} &\leq A_{i+1,1} < A_{i+1,2} \leq A_{i,2}. \end{aligned}$$

et

$$A_{i+1,1} \leq A(z) \leq A_{i+1,2} \quad (z \geq z_{i+1})$$

Le cas  $\mu_i(z_{i+1}) \geq 1/8$  se résoud par la même méthode, en effectuant des minoration de  $A(z)$  au lieu de majorations. On trouve alors les valeurs suivantes pour  $A_{i+1,1}$  et  $A_{i+1,2}$

$$\begin{aligned} A_{i+1,1} &= A_{i,1} \\ A_{i+1,2} &= A_{i,2} - (1 - \gamma)(A_{i,2} - A_{i,1}). \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons construit deux suites  $(A_{i,1})$  et  $(A_{i,2})$  adjacentes, convergeant vers une même limite  $A > 0$ . Nous avons de plus, pour  $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ ,

$$|A(z) - A| \leq (A_2 - A_1) \gamma^i.$$

Par définition de  $z_i$ , on a alors

$$A(z) = A + O(z^{-\kappa}),$$

avec  $\kappa = -\alpha \ln \gamma / \ln(\Gamma/\gamma)$ .

## ANNEXE

Valeurs approchées de  $\delta$  et  $\mu$  à  $5.10^{-6}$  près.

$t$	$\delta(t)$
0	1
0,1	0,90071
0,2	0,80495
0,3	0,71443
0,4	0,62961
0,5	0,55037
0,6	0,47633
0,7	0,40700
0,8	0,34192
0,9	0,28066
1,0	0,22282
1,1	0,16807
1,2	0,11610
1,3	0,06665
1,4	0,01949
$1/\ln 2$	0
1,5	-0,02558
1,6	-0,06874
1,7	-0,11015
1,8	-0,14994
1,9	-0,18824

$t$	$\delta(t)$
2	-0,22515
3	-0,53570
4	-0,77444
5	-0,96893
6	-1,13333
7	-1,27591
8	-1,40189
9	-1,51482
10	-1,61722
11	-1,71091
12	-1,79730
13	-1,87746
14	-1,95226
15	-2,02237
16	-2,08837
17	-2,15072
18	-2,20981
19	-2,26597
20	-2,31948
$+\infty$	$-\infty$

$\alpha$	$\mu(\alpha)$
0	1
0,1	0,67048
0,2	0,48360
0,3	0,35638
0,4	0,27370
0,5	0,23039
0,6	0,22562
0,7	0,26152
0,8	0,34325
0,9	0,48001
1,0	0,68764
1,1	0,99475
1,2	1,45971
1,3	2,23407
1,4	4,05733
1,44	8,13613
$1/\ln 2$	$+\infty$

## Références bibliographiques

- [A] K. Alladi,  
An Erdős-Kac theorem for integers free of large prime factors, *Acta Arithmetica* **49** (1987), 81–105.
- [B] J.D. Bovey,  
On the size of prime factors of integers, *Acta Arithmetica* **33** (1977), 65–80.
- [dB] N.G. de Bruijn,  
On some Voltera integral equations of which all solutions are convergent, *Indagationes Mathematicae* **12** (1950), 247–256.
- [E] P. Erdős,  
On some properties of prime factors of integers, *Nagoya Math J.* **27** (1966), 617–623.
- [E2] P. Erdős,  
On the distribution of prime divisors, *Aequationes Math.* **2** (1969), 177–183.
- [ET] P. Erdős & G. Tenenbaum,  
Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs, *J. Number Theory* **31** (1989), 285–311.
- [HT] R.R. Hall & G. Tenenbaum,  
*Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics **90**, Cambridge (1988).
- [HT2] R.R. Hall & G. Tenenbaum,  
On Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.
- [MT] H. Maier & G. Tenenbaum,  
On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
- [T1] G. Tenenbaum,  
Sur un problème de crible et ses applications, *Ann. scient. Ec. Norm Sup.* **19** (1986), 1–30.
- [T2] G. Tenenbaum,  
*Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Revue de l'Institut Elie Cartan **13**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1990).
- [T3] G. Tenenbaum,  
Sur un problème de crible et ses applications, 2. Corrigendum et étude du graphe divisoriel, *Prépublication*, (1992).

# UNIVERSITE DE NANCY I

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur STEF André

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY  
en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le - 3 JUIN 1992 n° 279

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

