



HAL
open science

Analyse temps-fréquence de signaux vibratoires de boîtes de vitesses

Harald Oehlmann

► **To cite this version:**

Harald Oehlmann. Analyse temps-fréquence de signaux vibratoires de boîtes de vitesses. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1996. Français. NNT : 1996NAN10216 . tel-01754405

HAL Id: tel-01754405

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754405>

Submitted on 30 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique
École Doctorale IAE+M – DFD Automatique et Production automatisée



Analyse temps-fréquence de signaux vibratoires de boîtes de vitesses

THÈSE

soutenue publiquement le 15 juillet 1996

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1
(Spécialité Automatique)

par

Harald Oehlmann

Composition du jury

Président : G. DEMOMENT

Rapporteurs : P. FLANDRIN
U. KIENCKE

Examineurs : D. BRIE
A. RICHARD
M. TOMCZAK
F. VILLARS

Man sieht nur was man weiß.¹

Johann Wolfgang von Goethe

Qu'est-ce que c'est, une fourchette ?
L'interférence entre deux cuillères !

Marius Alexandru Ghetie

¹On voit seulement ce que l'on sait.

Remerciements

Cette étude a été réalisée au Centre de Recherche en Automatique de Nancy dans le cadre de l'IAR, institut franco-allemand pour les applications de la recherche.

En premier lieu, je tiens à remercier Monsieur Alain Richard, Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, de m'avoir accueilli dans son équipe. J'ai particulièrement apprécié sa curiosité scientifique et l'ambiance qu'il a su instaurer au sein de l'équipe.

Je remercie également vivement :

Monsieur Guy Demoment, Professeur à l'Université de Paris Orsay, pour avoir accepté de présider le jury. Son accueil, sa convivialité et ses remarques avisées m'ont été précieux.

Monsieur Patrick Flandrin, directeur de recherches CNRS à l'ENS Lyon, d'avoir accepté la charge de rapporter sur ce travail. J'ai apprécié son accueil chaleureux à Lyon, mais surtout l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail. Ses remarques et ses précieux conseils m'ont beaucoup apporté.

Monsieur Uwe Kiencke, Professeur à l'Université de Karlsruhe, de m'avoir suivi pendant ma thèse dans le cadre de l'IAR et d'avoir finalement, accepté le rôle de rapporteur. Je garde un très bon souvenir des discussions que nous avons eues.

Monsieur David Brie, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, qui m'a suivi durant toute ma thèse. Il a investi énormément de temps et d'énergie pour me soutenir, discuter avec moi et me conseiller.

Monsieur Marc Tomczak, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, pour m'avoir également suivi pendant ma thèse, pour nos discussions et ses conseils fructueux.

Monsieur Francois Villars, Ingénieur à la société PSA, qui, directement concerné par ce travail, a accepté de le juger.

Je tiens aussi à remercier fortement Monsieur Vincent Begotto pour notre collaboration durant ce projet.

Je remercie également, pour leur aide, les membres de l'équipe et plus particulièrement Dominique Dalponte, Thierry Bastogne, Cyril Christophe, Céline Defranoux, Marius Ghetie, Norbert Henzel, Sabine Huraux, Jean-Marc Lebel, Michel Mensler, Hassan Noura, Olivier Pernot, Nathalie Pezzin, ainsi que Karen Perronnet, Majid Belkhat, Denis Roegel, Uwe Franz, Magda Müller-Klumpp, Manfred Männle, Günther Schneider, Axel Kaske, Jürgen von Hagen et Volker Quaschnig.

Préambule

La thèse de Harald Oehlmann, préparée au CRAN, s'inscrit dans le cadre de l'IAR (Institut franco-allemand pour les applications de la recherche) qui regroupe les universités de Karlsruhe, de Duisbourg, de Strasbourg (ENSPS et ENSAIS), de Mulhouse (Université de Haute-Alsace), de Grenoble (INPG) et de Nancy (Université Henri Poincaré, Nancy I et INPL) dans les secteurs de l'EEA.

Harald Oehlmann, ingénieur diplômé de l'université de Karlsruhe, a bénéficié d'une bourse du Land Baden-Württemberg. L'avancement de son travail a été régulièrement suivi par le Professeur Uwe Kiencke de l'université de Karlsruhe.

Nous tenons à remercier ici l'ensemble des promoteurs et artisans de ces échanges fructueux tant sur le plan de la recherche que de l'amitié franco-allemande.

Alain Richard

Ce document est disponible dans sa version couleur.
Vous pouvez l'obtenir sur simple demande à :

Harald Oehlmann

CRAN-I2S

Université Henri Poincaré, Nancy 1

Faculté des sciences

B.P. 239

F-54506 Vandœuvre Cedex

Téléphone : ++33 3 8391 2069

OEHLMANN@CRAN.U-NANCY.FR

Table des matières

Remerciements	5
Préambule	7
Liste des symboles et abréviations	13
Liste des conventions	15
Glossaire	17
Introduction	19
1 Acquisition et modélisation des signaux vibratoires	21
1.1 Introduction	21
1.2 La boîte de vitesses	22
1.3 Conditions expérimentales et instrumentation	23
1.3.1 Banc d'essai	23
1.3.2 Instrumentation et mesures	24
1.3.3 Acquisition et numérisation des signaux	25
1.4 Campagnes de mesures	25
1.5 Modélisation du signal vibratoire	26
1.5.1 Modélisation de l'excitation engendrée par les engrenages	27
1.5.2 Modélisation des excitations engendrées par les roulements	37
1.5.3 Modèle vibratoire du carter	40
1.5.4 Modèle du signal vibratoire	40
1.6 Moyennage synchrone	46
1.6.1 Intérêt pour la séparation des fréquences et la localisation des défauts	46
1.6.2 Exemples expérimentaux	47
1.7 Conclusion	49

2	Distributions Temps-Fréquence	51
2.1	Introduction	51
2.2	Pourquoi une analyse TF pour les signaux vibratoires?	52
2.3	Propriétés souhaitables d'une représentation TF	53
2.4	Le principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor	54
2.5	Le spectrogramme	55
2.5.1	Définition	55
2.5.2	Propriétés	56
2.6	Distribution de Wigner-Ville	57
2.6.1	Définition	57
2.6.2	Propriétés	57
2.7	Classe de Cohen	58
2.7.1	Définition	58
2.7.2	Propriétés des représentations	59
2.7.3	Exemples	60
2.8	Mécanisme des interférences	61
2.8.1	Distributions TF à interférences réduites	64
2.9	Noyau Optimal	65
2.9.1	Principe	65
2.9.2	Algorithme rapide	66
2.9.3	Discussion	68
2.10	Conclusions	69
3	Distributions de Wigner-Ville Locales	71
3.1	Motivations	71
3.2	Définition des fonctions produit temporel et fréquentiel	74
3.2.1	La fonction produit temporel	74
3.2.2	La fonction produit fréquentiel	75
3.3	Propriétés des fonctions produits temporel et fréquentiel	75
3.3.1	Cas des signaux séparables en temps	75
3.3.2	Cas des signaux séparables en fréquence	86
3.3.3	Signaux non-séparables	87
3.4	Estimation des bornes d'intégration optimales	96
3.4.1	Filtrage des fonctions produits	97
3.4.2	Estimation des bornes d'intégration optimales	100

3.5	Distributions de Wigner-Ville Locales	102
3.5.1	Lissage local de la distribution de Wigner-Ville	102
3.5.2	Liens avec la Classe de Cohen	104
3.5.3	Propriétés de la distribution de Wigner-Ville Locale	105
3.6	Conclusion	108
4	Distributions de Wigner-Ville Locales : Implantation et exemples	111
4.1	Introduction	111
4.2	Implantation numérique	111
4.2.1	Calcul des fonctions produit temporel et fréquentiel	111
4.2.2	Implantation des filtres de lissage	112
4.2.3	Implantation de la combinaison	113
4.2.4	Algorithme	113
4.3	Exemples et comparaisons	116
4.3.1	Signal «route»	116
4.3.2	Signal «singauss»	120
4.4	Conclusion	124
5	Analyse TF des signaux vibratoires de boîtes de vitesses	127
5.1	Introduction	127
5.2	Méthode d'analyse TF	128
5.2.1	Choix et calcul de la représentation TF	129
5.2.2	Interprétation et sélection des composantes principales	129
5.2.3	Synthèse et validation du modèle	129
5.3	Analyse des signaux de vibration d'engrenages	131
5.3.1	Exemple d'analyse	131
5.3.2	Etude comparative	139
5.4	Analyse des signaux de vibration de roulements	149
5.4.1	Défaut sur bague externe	149
5.4.2	Défaut sur bague interne	149
5.4.3	Etude de la zone de charge	154
5.5	Modèle vibratoire de la boîte	156
5.6	Conclusion	160
	Conclusion	163

Annexe

A Moyennage synchrone	165
A.1 Principe du moyennage synchrone	165
A.2 Amélioration du RSB	166
A.3 Effet fréquentiel du moyennage	167
B Implantation de l’algorithme du noyau optimal	171
B.1 Calcul des positions de l’arbre	172
C Calcul de la transformée de Fourier du signal «route»	175
Bibliographie	177
Permis d’imprimer	181
Abstract	183

Liste des symboles et abréviations

$A()$	Fonction d'ambiguïté
$\text{arc}()$	Fonction d'arc
$\text{arctg}()$	Arc tangente
$\delta()$	Impulsion de Dirac
$E\{\}$	Energie $E\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) ^2 dt$
$\mathbb{E}\{\}$	Espérance mathématique
ERT	Erreur de transmission statique
f	Variable de fréquence
$F_{t,\omega}(\theta)$	Fonction produit fréquentiel
$\mathcal{F}\{\}$	Transformée de Fourier
$\mathcal{F}^{2D}\{\}$	Transformée de Fourier bidimensionnelle
$\mathcal{F}^{-1}\{\}$	Transformée de Fourier inverse
$(\mathcal{F}^{2D})^{-1}\{\}$	Transformée de Fourier bidimensionnelle inverse
$G_{\sigma}()$	Fonction de Gauss
$I()$	Fonction indicatrice
LCA	Ligne de conduite apparente
$\text{ld}()$	Logarithme à base 2
NO	Représentation du Noyau Optimal
PBA	Pas de base apparent
$\text{ppcm}()$	Plus petit commun multiple
RCA	Rapport de conduite apparent
RCH	Rapport de conduite par l'hélice
RCT	Rapport de conduite
RSB	Rapport signal sur bruit
t	Variable de temps
$T_{t,\omega}(\tau)$	Fonction produit temporel
TF	temps-fréquence
RTF	Représentation temps-fréquence
$\text{sinc}()$	Sinus cardinal $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$
SP	Spectrogramme
WV	Distribution de Wigner-Ville
WVL	Représentation de Wigner-Ville Locale

φ	Angle
$\Phi(), \phi()$	Noyau
θ	Décalage fréquentiel
τ	Décalage temporel
ω	Fréquence (angulaire)

Liste des conventions

Intégrales. Une intégrale sans bornes spécifiées suppose des limites de $-\infty$ à ∞ :

$$\int \equiv \int_{-\infty}^{\infty}$$

Transformée de Fourier. La transformée de Fourier $S(\omega)$ et le signal $s(t)$ vérifient la correspondance suivante :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t)e^{-j\omega t} dt \quad \longleftrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\omega)e^{jt\omega} d\omega.$$

Fonction gaussienne. La fonction de Gauss de surface unité et d'écart-type σ est notée :

$$G_{\sigma}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

Convolution. La convolution est notée par une étoile :

$$f(t, \omega) \star g(t, \omega) = \iint f(\tau, \theta) g(t - \tau, \omega - \theta) d\tau d\theta.$$

La convolution par rapport à la variable t est notée comme suit :

$$f(t, \omega) \underset{(t)}{\star} g(t, \omega) = \int f(\tau, \omega) g(t - \tau, \omega) d\tau.$$

Rectangle. La fonction rectangulaire est définie par :

$$\text{rect}_a(u) = \begin{cases} 1 & |u| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Glossaire

Atome. Un atome TF est un objet bien concentré dans le plan TF, par exemple une gaussienne. Un atome doit être très proche de la limite donnée par le principe d'incertitude.

Fréquence instantanée. La fréquence instantanée d'un signal est définie comme la dérivée de la phase :

$$s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad \longrightarrow \quad \omega(t) = \varphi'(t)$$

Chirp. Un chirp est un signal concentré sur une fréquence instantanée qui varie dans le temps $\omega(t)$. Il est décrit typiquement par le signal $s(t) = Ae^{j\phi(t)}$.

Introduction

Cette étude a pour cadre un contrat CNRS entre le Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) et la société P.S.A.- Centre d'essai de Belchamp. L'objectif du contrat, initié il y a 3 ans, est la conception d'un prototype de surveillance de boîtes de vitesses soumises à des essais d'endurance. Le système final doit donc permettre l'arrêt de l'essai dès lors qu'un des constituants de la boîte s'avère défectueux. Il est en effet essentiel de pouvoir mettre fin à l'essai avant que le défaut initial n'ait entraîné des détériorations plus importantes au sein de la boîte, rendant le diagnostic du défaut original difficile, voire impossible. Il était donc demandé de réaliser un système capable de détecter de manière précoce les défauts d'engrenage, de roulement et de localiser ces défauts dans la boîte. En effet, dans ce type d'essais, seuls ces deux types de pièces sont testés, ce qui explique que nous excluons toute autre défaillance mécanique. Le principal intérêt de la localisation est alors de fournir une aide aux mécaniciens chargés d'étudier les causes des détériorations de l'élément mécanique incriminé.

Devant l'ampleur de la tâche, le travail a été scindé en deux parties. La première, qui fait l'objet de ce document, concerne l'analyse des signaux vibratoires enregistrés sur la boîte. La seconde, relative à la conception d'algorithmes de détection / localisation des défauts et à leur implantation est présentée dans le mémoire de thèse de Vincent Begotto [Beg97].

Le problème de l'analyse des signaux vibratoires de boîtes de vitesses est difficile pour deux raisons principales. En premier lieu, le système mécanique étudié est complexe de par sa conception, mais aussi de par le nombre d'éléments qu'il inclut. En second lieu, pour ce type de système, on ne dispose pas de modèles théoriques fiables. Aussi, le travail, tel qu'il avait été défini au départ, consistait à évaluer l'apport des représentations temps-fréquence (TF) à l'analyse des signaux vibratoires et par là même, à la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. On pouvait en effet espérer que ce type de représentation fût à même de donner une vision nouvelle des processus mis en jeu.

Le document est organisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre est relatif à l'acquisition et à la modélisation des signaux vibratoires de boîtes de vitesses. Chacun des constituants de la boîte est étudié du point de vue de l'excitation qu'il engendre et de son modèle vibratoire, caractérisant le transfert entre l'excitation et le point de mesure. Le modèle du signal vibratoire est une somme de sinusoïdes modulées en amplitude et en phase, auxquelles peut se superposer (dans le cas de défauts de roulements) la réponse du système mécanique à un train d'impulsions. Une analyse de Fourier expérimentale permet sa validation mais montre également les limitations d'une telle approche.

Le deuxième chapitre présente les idées principales de l'analyse TF. Sur la base du modèle

du signal vibratoire précédent, on justifie l'intérêt d'une telle approche. Le problème de la réduction des interférences, indispensable à la lisibilité des représentations TF y est aussi largement étudié, ce qui permet d'introduire la méthode du noyau optimal. A notre sens, c'est celle qui, actuellement, fournit le meilleur compromis entre la qualité des résultats et le coût de calcul. Cette approche a cependant des limitations qui sont également mises en évidence.

Pour pallier ces inconvénients, une approche originale est présentée au troisième chapitre. Appelée distribution de Wigner-Ville Locale, elle permet d'effectuer un lissage local de la distribution de Wigner-Ville à partir de la donnée des dimensions de la fenêtre de lissage. Une procédure pour l'estimation de ces dimensions, optimales au sens de la réduction des interférences est également proposée. Enfin, certaines propriétés sont étudiées.

Le quatrième chapitre présente la discrétisation de la méthode nécessaire à son implantation, ainsi qu'une évaluation de ses performances sur des signaux synthétiques.

Enfin, le cinquième chapitre concerne l'analyse TF des signaux vibratoires de boîtes de vitesses. Pour cela, on propose une méthode d'analyse qui se décompose en trois étapes :

- choix et calcul d'une représentation TF ;
- sélection et interprétation physique des composantes significatives ;
- synthèse d'un modèle temporel pour la validation de l'analyse et des résultats fournis par les différentes méthodes.

Elle est alors appliquée à l'analyse des signaux obtenus sur boîte saine, avec défaut d'engrenage puis de roulement. Pour chaque cas, on met en évidence les composantes caractéristiques ; une interprétation physique est également proposée. L'ensemble des résultats obtenus permet d'élaborer un modèle vibratoire de la boîte de vitesses.

Chapitre 1

Acquisition et modélisation des signaux vibratoires

1.1 Introduction

Une boîte de vitesses est à l'origine de phénomènes vibratoires qui rendent compte de son état de fonctionnement. Tout conducteur a d'ailleurs pu en avoir une idée notamment lors d'un changement de vitesses brutal.

Cette approche de contrôle acoustique est d'ailleurs utilisée depuis longtemps pour le contrôle des boîtes de vitesses en fin de chaîne de production.

Cependant, les signaux vibratoires apparaissent comme un moyen d'investigation plus fin, et toujours non-destructif, des processus physiques mis en jeu au sein d'une boîte.

Dans un premier temps, on présente les conditions expérimentales puis l'acquisition des signaux vibratoires.

Pour la phase de modélisation, on s'intéresse aux sources d'excitation potentielles que sont les engrenages et les roulements, ainsi qu'à la propagation de ces excitations jusqu'aux capteurs accélérométriques.

Les engrenages constituent la principale source de vibrations dans une boîte saine. On présente donc, dans un premier temps, les notions de base nécessaires à la compréhension du phénomène d'engrènement. Le cas des engrenages droits est d'abord traité et étendu au cas des engrenages hélicoïdaux. Puis, la notion d'erreur de transmission, reconnue comme principale source d'excitation vibratoire, est introduite. Elle permet l'étude des périodicités de l'excitation engendrée par un engrenage sain ou défectueux.

Les roulements défectueux constituent une deuxième source d'excitation possible dont la périodicité se déduit des caractéristiques géométriques du roulement considéré. On s'intéresse également à la zone de charge qui rend compte d'une répartition anisotrope des contraintes axiales et radiales appliquées au roulement.

La propagation des vibrations jusqu'aux capteurs est prise en compte par l'introduction d'un modèle aux éléments finis du carter de boîte dont le principal intérêt est de fournir un modèle du signal vibratoire enregistré.

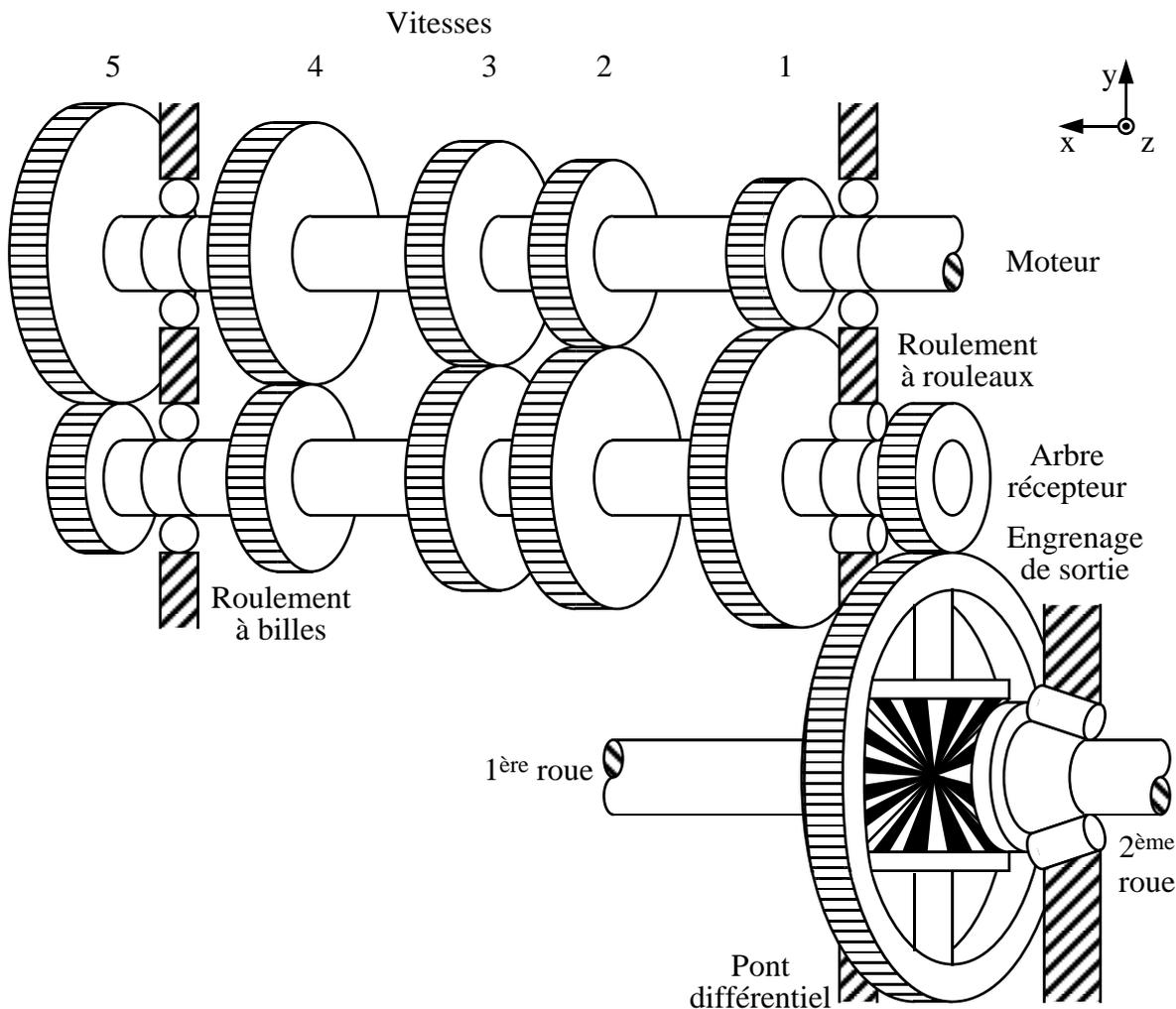


FIG. 1.1: Principe de fonctionnement de la boîte de vitesses.

Ce modèle est du type somme de sinusoïdes modulées en amplitude et en phase. Une analyse spectrale expérimentale permet de le valider mais montre aussi les limitations d'une telle approche pour l'analyse des lois de modulation. Dans le cas des défauts d'engrenages, elle permet également de valider les périodicités des différentes excitations et justifie l'utilisation du moyennage synchrone. En revanche, les signaux vibratoires correspondant aux défauts de roulements sont plus difficilement interprétables.

1.2 La boîte de vitesses

Une boîte de vitesses est une structure mécanique complexe qui se compose principalement de deux arbres sur lesquels se trouvent les pignons des différents rapports. Les pignons moteurs sont solidaires de l'arbre tandis que les pignons récepteurs peuvent être rendus solidaires de l'arbre par un système de crabots. Les pignons utilisés sont tous hélicoïdaux, exception faite des pignons de la marche arrière qui sont droits mais qui n'ont pas été étudiés. Les arbres reposent sur des paliers à roulements, deux roulements à billes pour l'arbre moteur

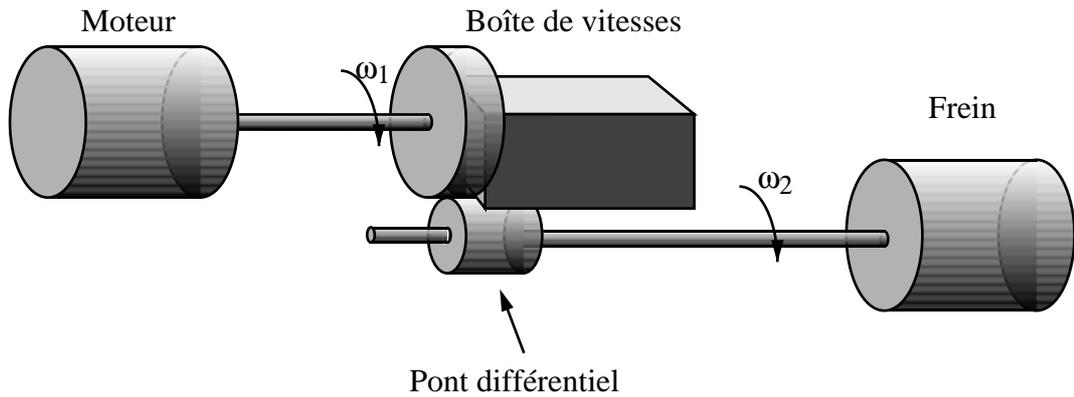


FIG. 1.2: Schéma du banc d'essai.

(primaire), un roulement à billes et un à rouleaux pour l'arbre récepteur (secondaire). Le roulement à rouleaux se trouve en sortie de l'arbre récepteur, à proximité de l'engrenage de sortie qui transmet le mouvement au pont différentiel. La couronne repose sur deux paliers à roulements coniques.

Les caractéristiques des engrenages étudiés, à savoir le rapport de réduction et le rapport de conduite, (RCT) sont données dans le tableau 1.1.

Engrenage	1	2	3	4	5	Sortie
Rapport de réduction	12x41	20x39	28x38	37x39	41x35	17x64
RCT	2,1	2,6	2,7	3,0	2,9	3,1

TAB. 1.1: Caractéristiques des engrenages.

1.3 Conditions expérimentales et instrumentation

1.3.1 Banc d'essai

Les différentes expériences ont été réalisées sur un banc d'écoute de boîte, qui diffère des bancs d'essais d'endurance par ses performances supérieures en terme de précision des asservissements de vitesse et de couple. Le banc utilisé se compose de trois parties principales représentées sur la figure 1.2 :

Entraînement

La boîte de vitesses est entraînée par un moteur à courant continu asservi en vitesse.

Frein

Un moteur à courant continu fonctionnant en génératrice permet de fournir un couple résistant maintenu constant.

Montage de la boîte de vitesses

La boîte à tester est montée sur un châssis par l'intermédiaire de patins en caoutchouc destinés à filtrer les vibrations du châssis. L'arbre moteur de la boîte est relié à la

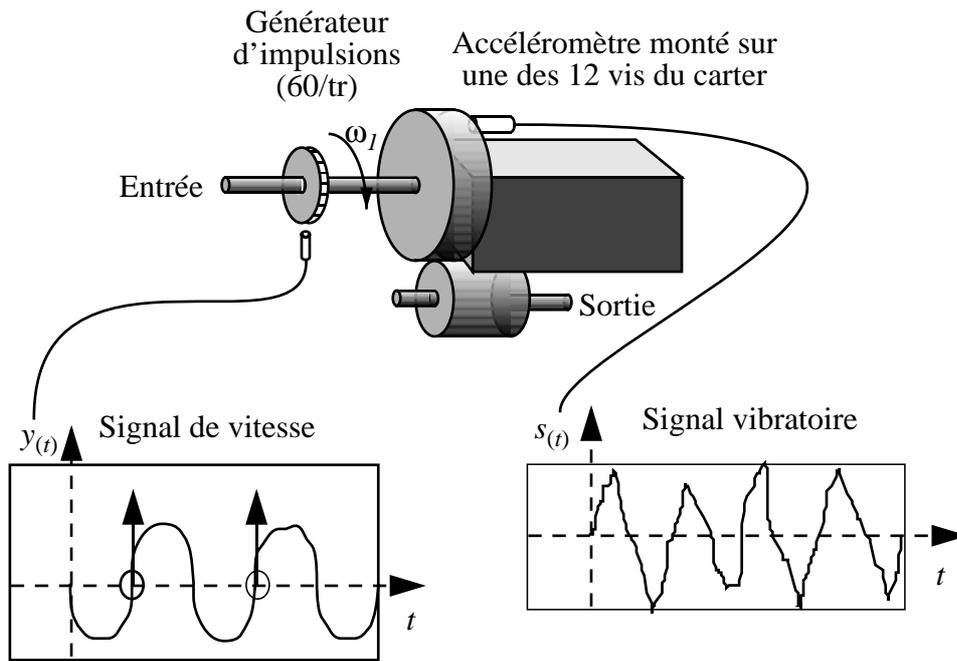


FIG. 1.3: L'instrumentation du banc d'essai.

sortie du moteur d'entraînement par l'intermédiaire d'un accouplement acyclique qui restreint son influence. Le différentiel est bloqué et la sortie de la boîte est liée au moteur frein également par un accouplement acyclique.

Les conditions expérimentales des essais effectués sont regroupées dans le tableau 1.2.

Vitesse d'entrée (1ère à 4ème vitesse)	:	75tr/s
(5ème vitesse)	:	61tr/s
Couple résistant	:	80Nm

TAB. 1.2: Conditions des tests d'endurance

1.3.2 Instrumentation et mesures

L'instrumentation du banc d'essai est décrite sur la figure 1.3 :

Capteurs vibratoires

Les capteurs vibratoires utilisés sont des accéléromètres piézo-électriques mono-axe fixés sur les vis de ceinture de la boîte (cf. fig 1.3). Douze positions de mesure sont disponibles. L'axe de sensibilité maximum des capteurs est orienté dans le sens des arbres (axe x de la figure 1.1). La bande passante des accéléromètres est de 10kHz. Les signaux vibratoires sont amplifiés par un amplificateur de charge dont le gain est adapté à la dynamique propre à chaque signal. Pour cette étude, l'amplitude absolue n'a donc pas de signification réelle et seules ses variations sont à prendre en compte.

Capteur tachymétrique

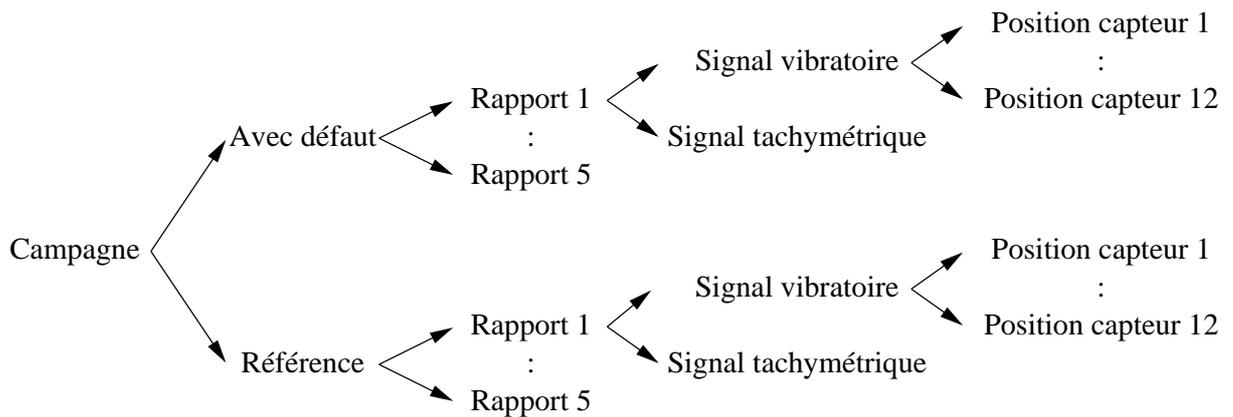


FIG. 1.4: Une campagne de mesure consiste à effectuer les mesures avec une boîte présentant un certain type de défaut, par exemple un écaillage sur un pignon récepteur, et une campagne de référence sous les mêmes conditions mais sans défaut. Les rapports 1 à 5 et toutes les positions de capteur sont configurés pour effectuer les mesures.

La position angulaire de l'arbre moteur est mesurée par un générateur d'impulsions qui fournit 60 impulsions par tour d'arbre. Ce capteur tachymétrique permet de suivre des variations locales de la vitesse angulaire de l'arbre. En revanche, il ne permet pas une mesure absolue de sa position car il ne dispose pas de référence.

1.3.3 Acquisition et numérisation des signaux

Les signaux sont enregistrés sur une bande magnétique à l'aide d'un enregistreur analogique. La numérisation des signaux est ensuite effectuée à 28kHz ou 22.5kHz. Le filtre anti-repliement est de type Cauer de fréquence de coupure 11.2kHz. Le nombre d'échantillons de 40960(28kHz) et 65536(22.5kHz) correspond à 1,5 ou à 2.9 secondes d'enregistrement.

1.4 Campagnes de mesures

Au cours de cette étude, tout un ensemble de campagnes de mesures a été effectué. Dans ce travail, seules les campagnes relatives aux défauts d'engrenage et de roulement à billes ont été exploitées.

La structure d'une campagne de mesure est illustrée sur la figure 1.4. Elle consiste à effectuer une mesure de référence du signal vibratoire sur une boîte saine. On introduit ensuite un élément défectueux dans la boîte et on recommence la mesure.

Pour chaque essai, on enregistre le signal vibratoire correspondant à chacun des 5 rapports et à chacune des douze positions capteur pour étudier leur influence.

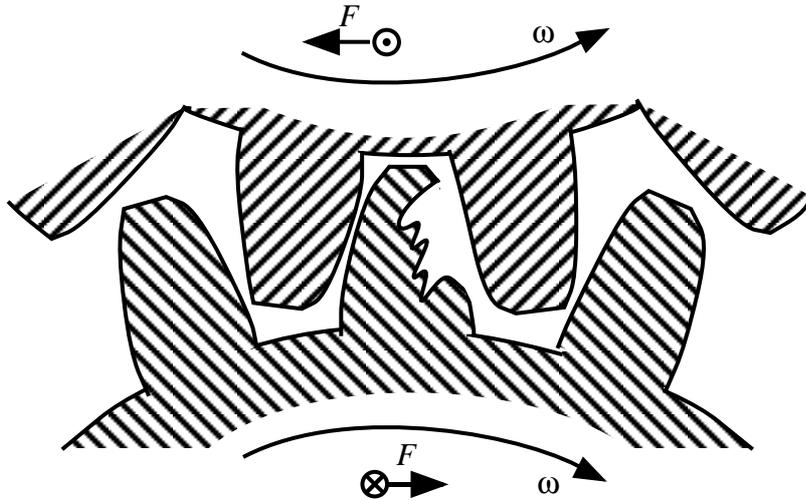


FIG. 1.5: Défaut d'écaillage d'une dent. Les vecteurs des forces (F) ont une composante orthogonale à cause des engrenages hélicoïdaux.

Défaut d'engrenage

Le type de défaut étudié correspond à l'écaillage d'engrenage (cf. fig. 1.5). Il se caractérise par un manque de matière. Pour tous les essais, les écaillages ont été usinés au niveau du cercle primitif de la dent, et ce sur toute sa longueur (cf. chapitre 1.5.1.1). Ce sont des défauts de type écaillage important. Le défaut de denture est situé sur le pignon récepteur pour les rapports 1 à 4 et sur le pignon moteur pour le rapport 5.

Défaut de roulement à billes

Le type de défaut étudié correspond également à un écaillage. Deux positions du défaut ont été envisagées : sur la bague interne et sur la bague externe (cf. fig 1.6). Les défauts ont été usinés selon l'axe horizontal de la bague.

Ce type de roulement a été choisi car c'est celui qui pose le plus de problèmes du point de vue de l'analyse. En premier lieu, il se trouve sur un arbre qui tourne à des vitesses différentes selon le rapport engagé, en second lieu, les efforts radiaux et axiaux engendrés par les pignons hélicoïdaux font apparaître des phénomènes complexes (modification de la géométrie du roulement, répartition des charges).

1.5 Modélisation du signal vibratoire

De nombreuses études [CS92, Ran81, SG90, McF86], traitant du problème de surveillance de réducteurs à engrenages, font état de résultats obtenus sur bancs de mesures où seule une paire de roues dentées est montée. Ceci simplifie considérablement le problème d'analyse car la contribution de la structure supportante peut être négligée. Le signal ainsi enregistré

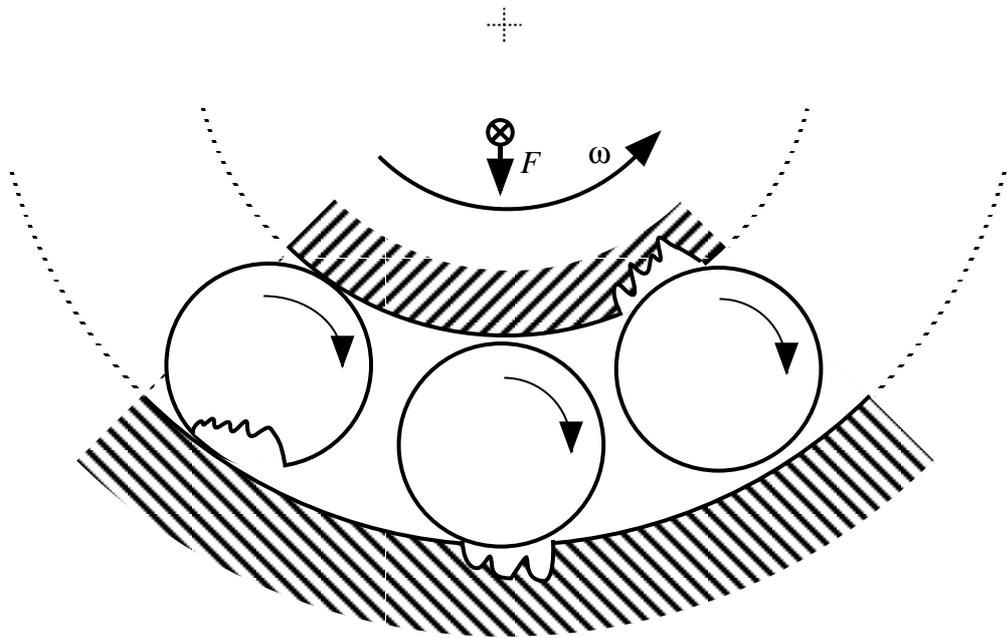


FIG. 1.6: Les défauts d'un roulement peuvent être situés sur la bague externe, sur la bague interne ou sur l'élément.

présente un bon rapport signal sur bruit d'une part, et, d'autre part, il n'existe aucune ambiguïté quant à l'interprétation des résultats obtenus (pas de problèmes d'alignement ou de balourd).

Or, une boîte de vitesses automobile est un organe éminemment non-linéaire où coexistent de nombreuses sources d'excitation hormis les multiples engrenages et roulements. On peut citer les principales :

- sources d'excitation externes (ex : variation du couple frein et du régime moteur)
- sources d'excitation internes (ex : circulation du fluide de lubrification).

De plus, l'enveloppe que constitue le carter n'est pas infiniment rigide et possède donc des modes de résonance qui sont susceptibles, s'ils sont sollicités, de modifier considérablement le niveau vibratoire et par là même, de rendre l'interprétation du signal beaucoup plus difficile. L'objectif de ce paragraphe est de présenter une approche pour la modélisation du signal vibratoire mesuré sur le carter de boîte de vitesses. Pour cela, chacun des éléments constituant la boîte de vitesses sera examiné, d'une part, du point de vue de l'excitation qu'il est susceptible d'engendrer, et d'autre part, de son comportement dynamique. Ainsi, on considérera successivement les engrenages, les roulements et enfin la structure mécanique, et dans la mesure du possible, on tentera de mettre en évidence certaines propriétés des signaux vibratoires grâce à une analyse fréquentielle du signal. On mettra également en évidence les limitations d'une telle analyse.

1.5.1 Modélisation de l'excitation engendrée par les engrenages

Les pignons utilisés sont de forme hélicoïdale, cependant pour la bonne compréhension du mécanisme d'engrènement, on présente dans un premier temps l'engrènement de dents droites.

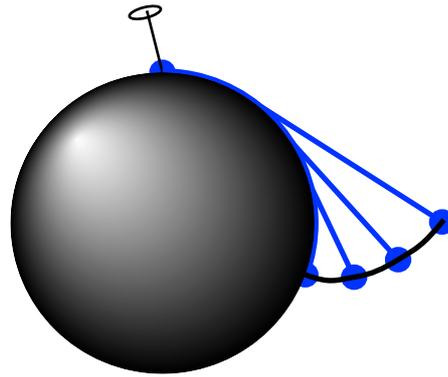


FIG. 1.7: Développement du cercle.

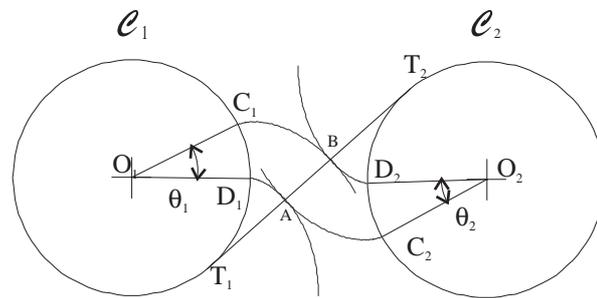


FIG. 1.8: Développantes de cercle conjuguées.

1.5.1.1 Denture droite

Ligne de contact

Dans ce type d’engrenage, le profil des dents correspond à une développante de cercle. C’est à dire la trajectoire d’un point d’une corde tendue que l’on déroule d’un cercle (cf. fig. 1.7).

Soient deux cercles C_1 et C_2 et leurs développantes de cercles respectives. Par construction, il est possible de montrer que le lieu géométrique des points de contact entre deux développantes conjuguées se situe sur la tangente commune $\overline{T_1T_2}$ aux deux cercles (cercles de base). Cette tangente est appelée ligne d’action. La figure 1.8 donne un exemple de construction géométrique permettant de tracer la ligne d’action.

La distance AB (longueur de la ligne de contact) est égale à :

$$AB = \text{arc}(C_1D_1) = \overline{O_1D_1}\theta_1 \tag{1.1}$$

$$AB = \text{arc}(C_2D_2) = \overline{O_2D_2}\theta_2 \tag{1.2}$$

Les équations 1.1 et 1.2 montrent que le rapport de transmission $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ dépend uniquement des diamètres de base (diamètres des cercles C_1 et C_2).

La figure 1.9 montre le plan d’action. Dans le cas d’une denture à profil en développante de cercle, le lieu géométrique des points de contact entre les dents est une droite dans le plan $x - z$. Dans le plan d’action, les lignes de contact des différentes dents qui engrènent simultanément sont équidistantes et lors d’un engrènement elles se déplacent avec un pas constant.

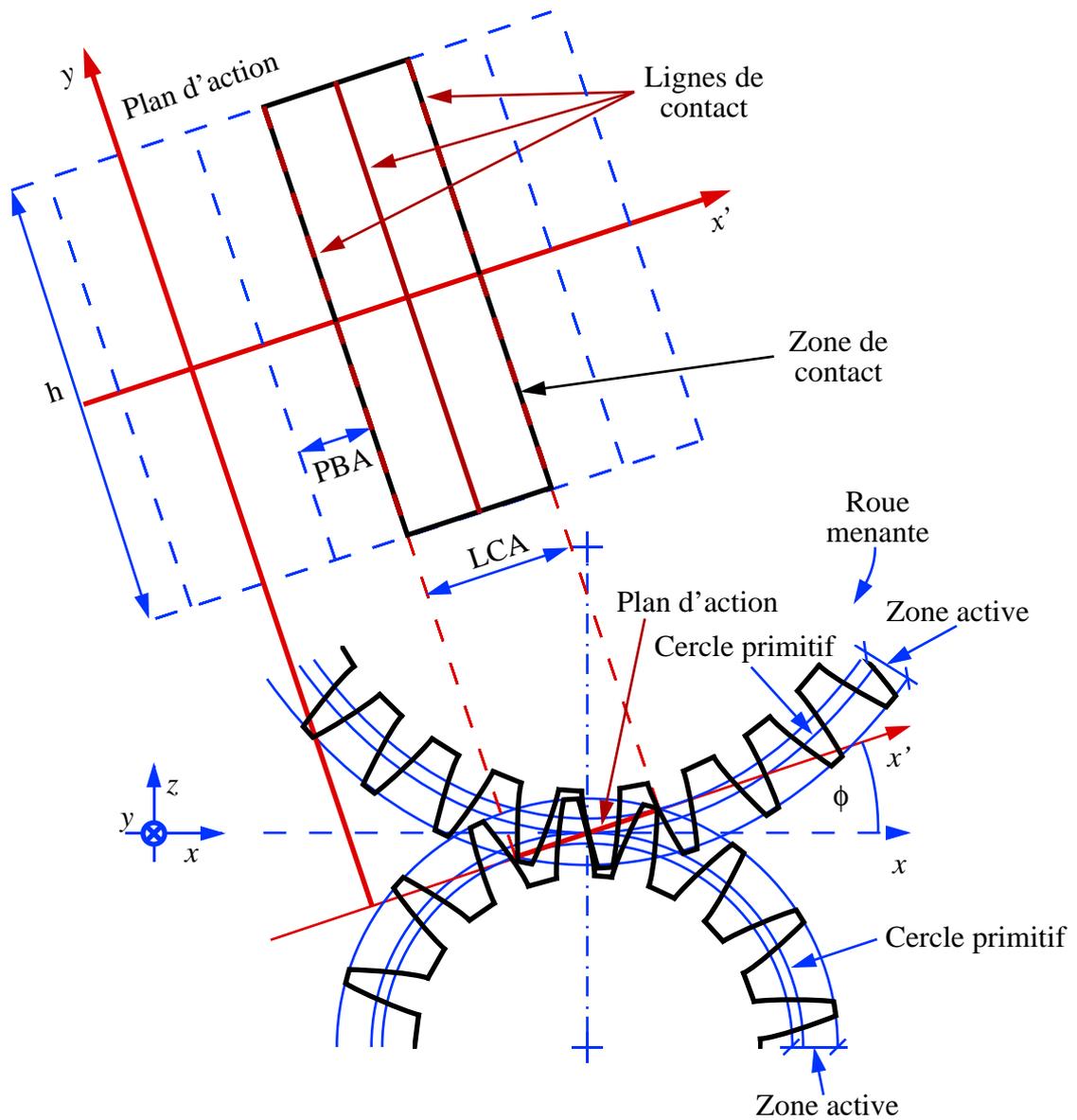


FIG. 1.9: Plan d'action dans le cas d'un engrenage droit. Le contact des dents s'effectue dans le plan d'action et décrit une droite inclinée d'un angle ϕ par rapport à l'axe x . La distance séparant deux lignes de contact est égale à un pas de base (PBA). Le sens de progression des lignes de contact est orienté suivant $-x$.

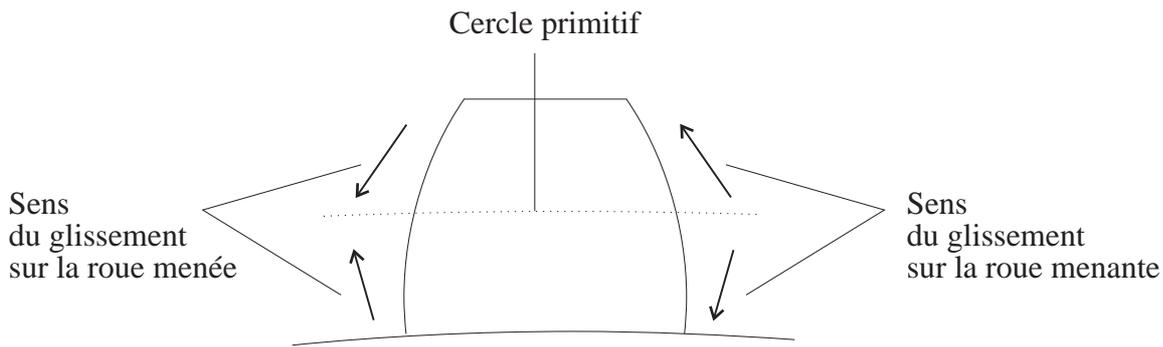


FIG. 1.10: Sens du glissement sur une denture.

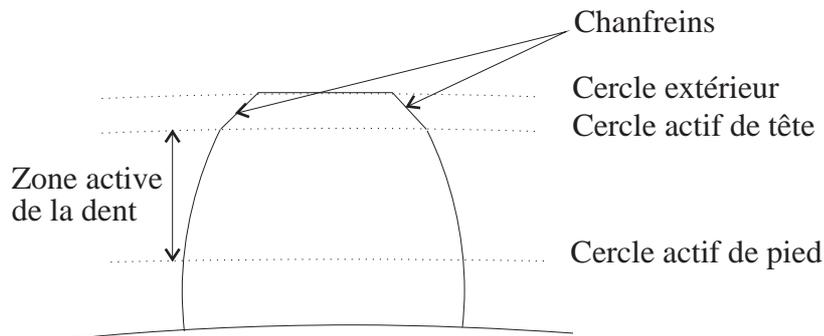


FIG. 1.11: Limites de la ligne de contact.

Cercle primitif de fonctionnement

Dans des conditions d'engrènement données (distance d'entraxe), il existe sur un engrènement une ligne de contact où les dentures roulent parfaitement l'une sur l'autre. Ce lieu est appelé «cercle primitif de fonctionnement». De part et d'autre de ce cercle, il y a présence de glissement. La figure 1.10 précise le sens des glissements sur les roues menantes et menées. Sur le cercle primitif, les vitesses des deux points en contact sont égales, alors qu'en dehors, les vitesses sont différentes grâce aux rayons respectifs différents.

Cette ligne de contact évolue dans une zone active, délimitée sur le profil de denture par deux cercles (cf. fig. 1.11) :

- le cercle actif de pied
- le cercle actif de tête

En effet, il existe des contraintes dimensionnelles à respecter lors de la réalisation des dents. Elles sont fonction des conditions de résistance à la rupture, à la fatigue, etc., lors de l'engrènement.

Ligne de conduite et Rapport de conduite apparent

La limitation de la partie active de la dent entraîne une diminution de la longueur utilisable de la ligne d'action. Ce segment utile est dénommé ligne de conduite apparente (LCA).

Le rapport de conduite apparent (RCA) est alors défini comme le rapport entre cette nouvelle

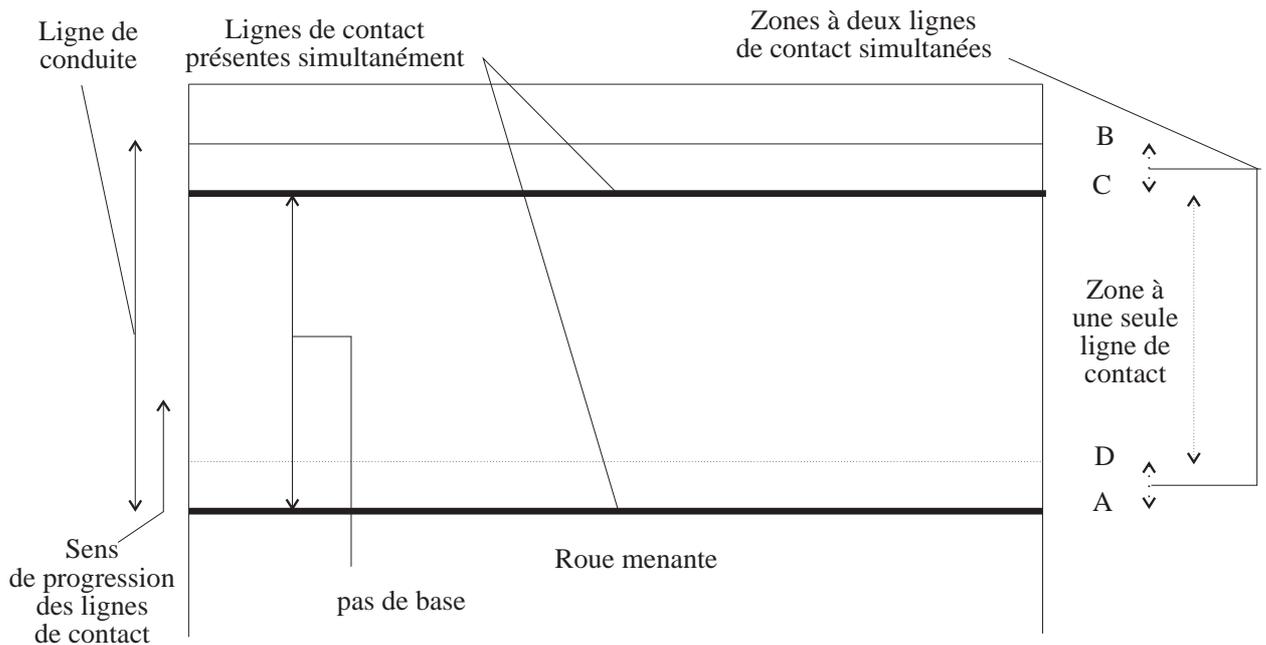


FIG. 1.12: Plan d'action du couple pignon / roue (denture droite).

longueur divisée par le pas de base (PBA : le pas de base correspond à l'épaisseur de base de la dent plus l'intervalle de base séparant deux dents consécutives).

Exemple d'engrènement de deux dentures droites

La figure 1.12 donne l'évolution des lignes de contact dans un plan d'action. Dans le cas de dentures droites ce plan est une simple extension de la ligne d'action. Sa largeur correspond à celle de la dent. Dans le cas de la roue menante, ce schéma s'interprète alors de la manière suivante :

Au début de l'engrènement de deux dents, le cercle actif de pied de la roue menante (point A) entre en contact avec le cercle actif de tête de la roue menée. Puis, cette ligne de contact progresse vers le haut de la denture et s'arrête au cercle actif de tête (point B) (respectivement de pied) de la roue menante (respectivement menée).

Nous allons maintenant nous intéresser au nombre de dents en contact à un instant donné de l'engrènement (dans le cas où le pas de base est inférieur à la ligne de conduite). La figure 1.12 fait apparaître trois zones : $[AD]$, $[DC]$ et $[CB]$. Lorsqu'une ligne de contact est située dans l'intervalle $[AD]$ (début d'engrènement de la paire de dents numéro 2), une ligne de contact est aussi présente dans l'intervalle $[CB]$. Cette ligne de contact correspond à la fin de l'engrènement de la paire de dents numéro 1 (la paire numéro 1 engrène avant la paire numéro 2). Par conséquent, nous avons deux dents de la roue menante en contact avec la denture de la roue menée.

Quand la ligne de contact est dans l'intervalle $[DC]$, une seule dent de la roue menante est en contact avec la roue menée.

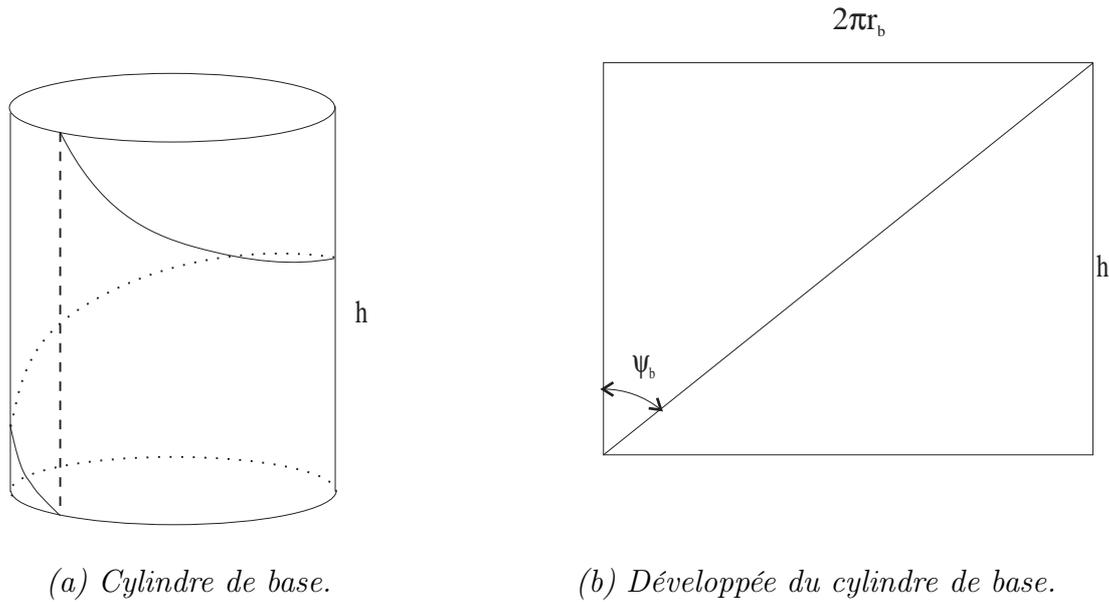


FIG. 1.13: Géométrie des dentures hélicoïdales.

1.5.1.2 Denture hélicoïdale

Une denture hélicoïdale est déduite de la figure 1.8 par une translation parallèle aux axes des roues et en appliquant une rotation proportionnelle au vecteur de translation. La figure 1.13 montre le mouvement ainsi obtenu sur un cylindre de rayon r et de hauteur h .

L'angle ψ_b correspond à l'angle d'hélice de base. La figure 1.13(b) représente la trajectoire d'un point M dans un plan tangent au cylindre. Le sens de parcours de cette trajectoire dépend de la roue considérée.

Exemple d'engrènement de deux dentures hélicoïdales

Ainsi, pour connaître la position des lignes de contact dans le plan d'action (figure 1.14), il est nécessaire de connaître l'angle d'hélice (ψ_b), le pas de base (PBA), la largeur de la dent et la longueur de la ligne d'action. Ces paramètres permettent de déterminer le rapport de conduite apparent (dont la définition n'a pas changé par rapport au paragraphe précédent) et le rapport de conduite par l'hélice (RCH). Ce dernier est défini comme suit :

$$\text{RCH} = \frac{h \tan(\psi_b)}{\text{PBA}}$$

où PBA est le pas de base et h la largeur de la dent.

La figure 1.15 illustre le rôle joué par l'angle d'hélice dans le plan d'action. Dans cet exemple, le rapport de conduite total (RCT) est égal à 3,1 et nous avons :

$$\text{RCT} = \text{RCH} + \text{RCA} = 1,55 + 1,55 \quad \text{et} \quad \psi_b = 28,5^\circ$$

Nous obtenons un faisceau de droites parallèles équidistantes inclinées d'un angle ψ_b . Le nombre de dents engrenant simultanément à un instant donné, dépend de la position de la

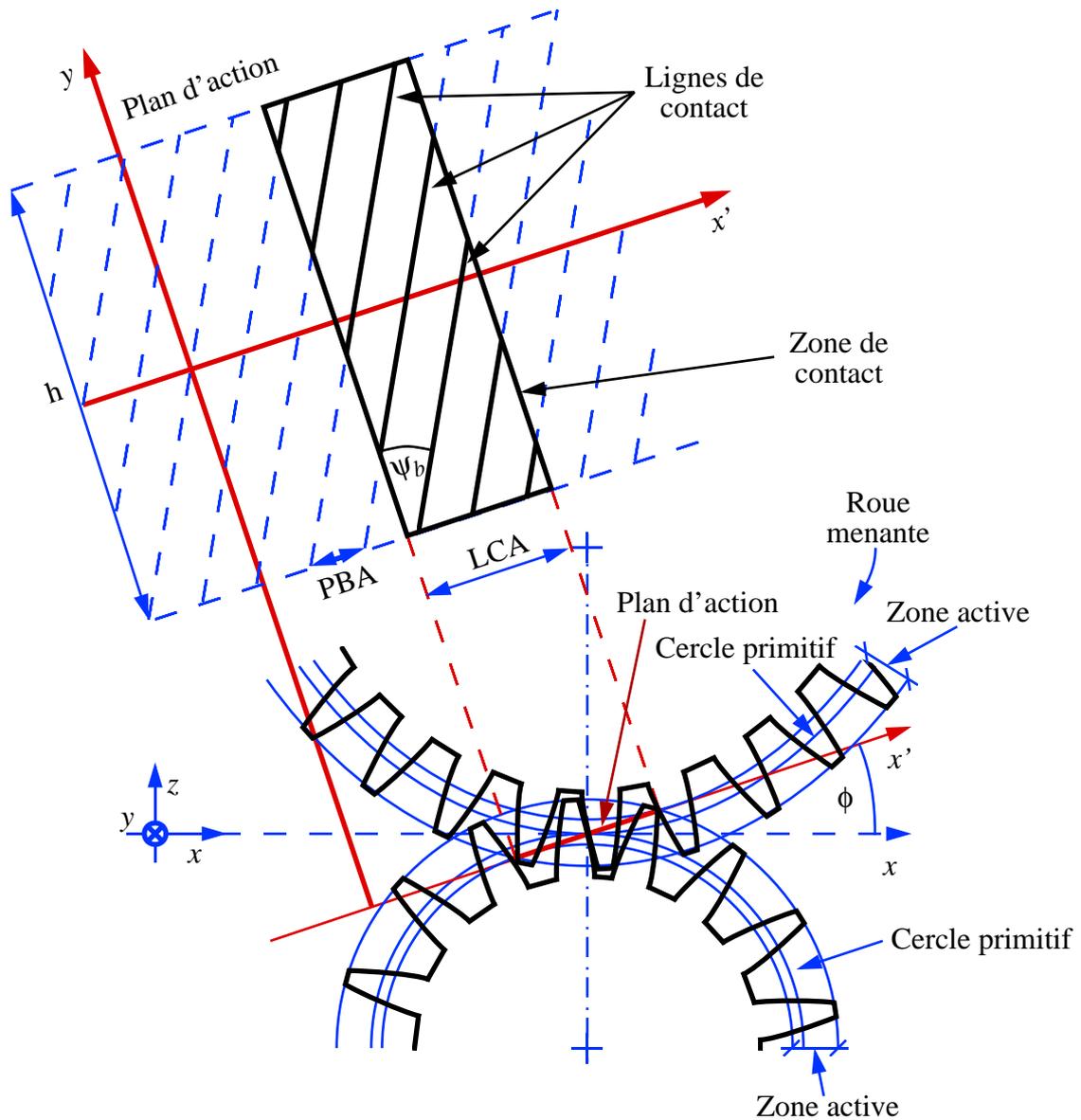


FIG. 1.14: Plan d'action dans le cas d'un engrenage hélicoïdal. Le contact des dents s'effectue dans le plan d'action et décrit une droite inclinée d'un angle de pression ϕ par rapport à l'axe x . En conséquence, les lignes de contact sont équidistantes avec une distance égale au pas de base (PBA) et inclinées de l'angle d'hélice de base ψ_b dans le plan de contact. Le sens de progression des lignes de contact pendant l'engrènement est orienté suivant $-x$.

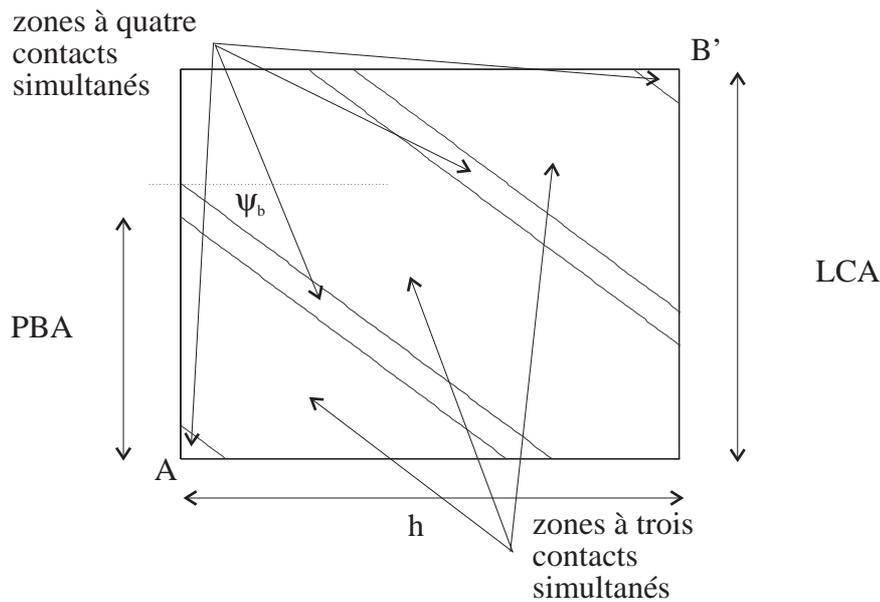


FIG. 1.15: Plan d'action du couple pignon/roue (denture hélicoïdale).

ligne de contact dans le plan d'action. Les zones où quatre lignes de contact sont présentes en même temps, peuvent être déterminées de manière graphique. En effet, nous savons qu'aux points A , B de début et de fin d'engrènement d'une dent, nous en avons trois autres en contact ($RCT = 3, 1$). Il suffit alors de tracer, à partir de chacun de ces points, un réseau de droites parallèles espacées de PBA .

1.5.1.3 Erreur de transmission

Un engrenage dont la denture est infiniment rigide, le profil parfait et dont l'espacement est uniforme, transmet un mouvement homocinétique. Cependant, dans la réalité, il existe de nombreuses imperfections dues par exemple à l'usinage, à la complexité des calculs de profil de dentures et aux raideurs finies des dents. De plus, d'autres facteurs viennent perturber le processus d'engrènement. Ainsi, par exemple, les flexions des arbres et les déformations de carter doivent être prises en compte lors de la conception d'un engrenage.

D'après A. Sloane et D.B. Welbourn [Wel70], la grandeur supposée rendre le mieux compte des irrégularités de l'engrènement et par là même, être la principale source de vibration d'un engrenage, est l'erreur de transmission statique.

La variation périodique du nombre de dents en contact (fonction du rapport de conduite) et la déformation élastique sont à l'origine de composantes variables dans le mouvement angulaire relatif des deux dents. On appelle alors erreur de transmission statique la différence entre le mouvement angulaire uniforme et cette variation. Dans la littérature, l'erreur de transmission (ERT) statique linéaire est notée : $ERT = R_b \delta \theta$ où R_b est le rayon de base et θ l'image de l'erreur de transmission angulaire.

Les travaux de D. Mark [Mar78] permettent d'expliquer comment la charge et la déflexion sous charge influent sur l'erreur de transmission.

Les hypothèses de départ sont que, lorsque l'engrenage est sous couple, les lignes de contact

restent parallèles à celles du même engrenage à vide. L'erreur de transmission statique est alors évaluée selon l'axe x du plan d'action (axe x' de la figure 1.14) grâce à la définition d'une raideur moyenne :

$$\bar{K}_j(x) = \frac{1}{\cos(\psi_b)} \int_{y_b}^{y_a} K_j(x, y) dy \quad (1.3)$$

(avec $K_j(x, y)$ coefficient de raideur de la dent j , y_a , y_b limites de la dent selon l'axe y (cf. fig 1.14)) et une variation moyenne du profil sur une paire de dents¹ :

$$\bar{\eta}_{m,j}(x) = A \int_{y_b}^{y_a} K_j(x, y) \eta_{m,j}(x, y) dy \quad \bar{\eta}_{r,j}(x) = A \int_{y_b}^{y_a} K_j(x, y) \eta_{r,j}(x, y) dy \quad (1.4)$$

(avec $\eta_{m,j}(x, y)$, (resp. $\eta_{r,j}(x, y)$) déviation par rapport au profil idéal de la dent du pignon moteur (resp. récepteur) de la j ème paire de dents) qui permet d'exprimer $\text{ERT}(x)$ comme :

$$\text{ERT}(x) = \frac{W}{\sum_j \bar{K}_j(x)} + \frac{\sum_j (\bar{\eta}_{m,j} + \bar{\eta}_{r,j})}{\sum_j \bar{K}_j(x)}. \quad (1.5)$$

à W représente la force totale transmise.

Le premier terme de l'expression 1.5 représente les déformations provoquées par la charge sur la dent tandis que le second terme prend en compte les déformations de profil dues à la fabrication. Ce dernier peut se décomposer en une première composante $\bar{a}_{K_j}(x)$ qui varie d'une dent à l'autre, et en une deuxième $\bar{m}_K(x)$ qui est le profil moyen de toutes les dents d'un pignon. On aboutit alors à l'écriture suivante :

$$\frac{\sum_j (\bar{\eta}_{m,j} + \bar{\eta}_{r,j})}{\sum_j \bar{K}_j(x)} = \bar{m}(x) + \bar{a}_j(x) \quad (1.6)$$

L'apparition d'un défaut se manifeste alors dans la partie $\bar{a}_j(x)$.

Périodicité des fonctions $\bar{m}(x)$ et $\bar{a}_j(x)$

La fonction $\bar{m}(x)$, correspondant au profil moyen d'une dent, possède une période égale à la distance PBA séparant deux points homologues de deux dents consécutives. En d'autres termes, si l'on suppose l'engrenage animé d'une vitesse angulaire constante ω_m , cette dernière est liée à la période d'engrènement de la manière suivante :

$$T_{\text{eng}} = \frac{\text{PBA}}{\omega_m R_{b_m}}$$

où R_{b_m} désigne le rayon de base du pignon moteur.

La fonction $\bar{a}_j(x)$ varie d'une dent à l'autre. Par conséquent, en présence d'un défaut, sa périodicité est égale à la distance PBA multipliée par le nombre de dents N_m (ou N_r) du pignon étudié. Si l'on utilise la même hypothèse que précédemment, on obtient alors une période égale à la période de rotation du pignon.

¹L'indice m (η_m) correspond à une quantité liée au pignon moteur, l'indice r (η_r) au pignon récepteur.

Compte tenu des remarques précédentes, on en déduit alors que la grandeur 1.6 a une périodicité égale à : $\text{ppcm}(N_m, N_r) \cdot \text{PBA}$.

Ainsi, dans le spectre de l'erreur de transmission statique, nous retrouvons la fréquence d'engrènement, due à $\bar{m}(x)$, et ses harmoniques. Les composantes aléatoires se traduisent, dans le spectre, par des raies à des fréquences multiples des fréquences de rotation $f_{\text{rot},m}$ et $f_{\text{rot},r}$. Cependant, elles n'ont pas d'influence [Mar78] sur l'amplitude à la fréquence d'engrènement. De plus, D. Mark a montré que la décomposition en série de Fourier de la partie $\bar{a}_j(x)$ fait apparaître les termes correspondant aux bandes latérales (observées dans le spectre de vibration expérimental) présentes autour du fondamental d'engrènement et de ses harmoniques.

En conclusion, le modèle théorique présenté met en évidence des phénomènes de modulation et permet de valider le modèle proposé par R.B Randall, élaboré à partir de constats expérimentaux. En effet, l'équation 1.5 peut s'écrire sous une forme plus simple :

$$\text{ERT}(x) = (W + S_m + S_r + S_{\text{dent}}) S_k \quad (1.7)$$

où S_k et S_{dent} sont des fonctions périodiques de période égale à celle de l'engrènement T_{eng} , S_m et S_r sont des fonctions périodiques de périodes respectives égales aux périodes de rotation des arbres $T_{\text{rot},m}$ et $T_{\text{rot},r}$. W est la charge constante.

1.5.1.4 Modèle de l'excitation engendrée par les engrenages

En fait, il apparaît que beaucoup de phénomènes mis en jeu dans le processus d'engrènement sont encore loin d'être parfaitement expliqués et que les rares travaux réellement exploitables sont ceux de [Mar78].

On définit la fréquence d'engrènement par :

$$f_{\text{eng}} = N_m f_{\text{rot},m} = N_r f_{\text{rot},r}. \quad (1.8)$$

Par approximation de Fourier d'ordre K , un modèle pour l'excitation engendrée par un engrenage consiste en un vecteur force dont chacune des composantes est de la forme :

$$x_{\text{eng}}(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t) \sin(2\pi k f_{\text{eng}} t + \varphi_k(t)).$$

Compte tenu du résultat 1.7, les lois de modulation d'amplitude $A_k(t)$ et de phase $\varphi_k(t)$ peuvent se décomposer sous la forme :

$$\begin{aligned} A_k(t) &= A_{0,k} + A_{m,k}(t) + A_{r,k}(t) \\ \varphi_k(t) &= \varphi_{0,k} + \varphi_{m,k}(t) + \varphi_{r,k}(t) \end{aligned}$$

Les fonctions $A_{m,k}(t)$ (resp. $A_{r,k}(t)$) et $\varphi_{m,k}(t)$ (resp. $\varphi_{r,k}(t)$) sont des fonctions périodiques de période $T_{\text{rot},m}$ (resp. $T_{\text{rot},r}$).

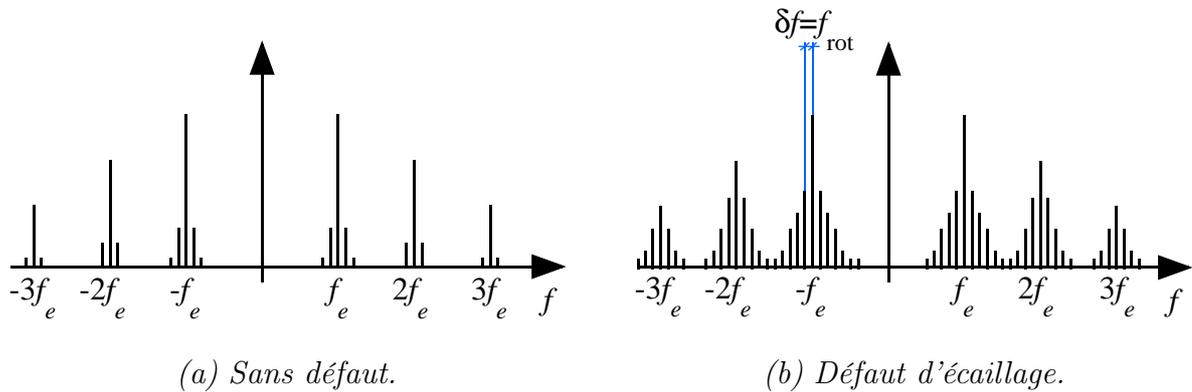


FIG. 1.16: Spectre de l'excitation engendrée par un engrenage.

Cas d'un engrenage sain

Il existe de nombreuses causes à l'origine de l'apparition des phénomènes de modulation d'amplitude et de phase. On peut citer, à titre d'exemple, outre les défauts d'usinage de dent (cf. ERT), les faux ronds d'arbre pour la modulation d'amplitude et les variations de vitesse pour la modulation de phase.

Cependant, pour un engrenage sain, ces phénomènes sont réduits et présentent une évolution temporelle relativement lente. Dans le domaine spectral, cela se traduit par des raies de modulation occupant une bande étroite (cf. fig. 1.16(a))

Cas d'un engrenage défectueux

Une dent écaillée engendre également des phénomènes de modulation d'amplitude et de phase de période égale à la période de rotation de l'élément défectueux. Contrairement au cas précédent, les fonctions de modulation présentent des variations rapides sur une durée relativement courte. Cela se traduit par l'apparition de raies de modulation sur une large gamme fréquentielle (figure 1.16(b)).

Cependant, les phénomènes physiques liés à l'engrènement d'une dent écaillée sont en fait très mal connus et un des objectifs de cette étude est de réaliser une analyse fine de ceux-ci.

1.5.2 Modélisation des excitations engendrées par les roulements

Tout comme les engrenages, les roulements sont à l'origine de phénomènes vibratoires complexes. Ils constituent aussi une source d'excitation potentielle. Les vibrations engendrées sont principalement dues au désalignement d'arbres, au type de lubrifiant, et aux instabilités de cages. Cependant, la contribution vibratoire d'un roulement sain par rapport au phénomène d'engrènement est négligeable et est à l'origine d'un signal à large bande spectrale qui peut être assimilé à un bruit.

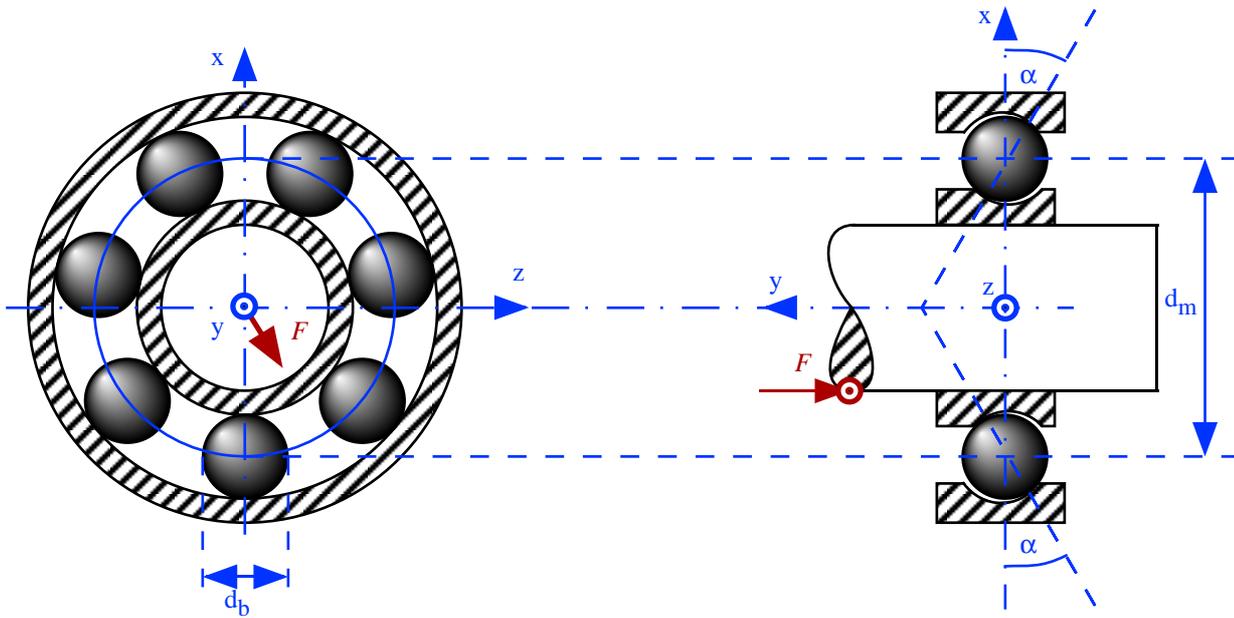


FIG. 1.17: Roulement à billes soumis à une force radiale et axiale. La force axiale déplace la bague interne et engendre un angle de contact α non-nul.

1.5.2.1 Fréquences caractéristiques de défauts

Les défauts localisés engendrent une excitation assimilable à un train d'impulsions périodiques correspondant au passage de l'élément roulant sur le défaut. Par conséquent, la périodicité de cette excitation est fonction de la position du défaut sur le roulement (bague interne, bague externe, éléments ou cage) (cf. fig. 1.6). Nous pouvons expliciter ces fréquences caractéristiques en fonction de la position du défaut.

Un roulement à billes (cf. fig 1.17) se compose de la bague interne, de la bague externe, des billes et de la cage dont le rôle est de guider celles-ci (elle n'est pas représentée sur le schéma de la figure 1.17).

Les grandeurs géométriques caractéristiques du roulement sont le nombre de billes N , leur diamètre d_b et le diamètre moyen d_m .

De plus, l'utilisation d'engrenages hélicoïdaux engendre une contrainte axiale. Cette force entraîne un déplacement axial de l'arbre et donc de la bague interne. Le plan de contact des billes se trouve alors incliné d'un angle α , appelé angle de contact, par rapport au plan vertical ($x - z$). Cette quantité dépend de la charge et n'est donc pas connue a priori. En revanche, elle est bornée supérieurement.

On peut, à partir de ces grandeurs géométriques, déterminer les fréquences de répétition des défauts [Beg97, Gar90] :

défaut sur la bague interne :

$$f_{d,bi} = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right) (f_{\text{rot}} - f_{\text{ext}}), \quad (1.9)$$

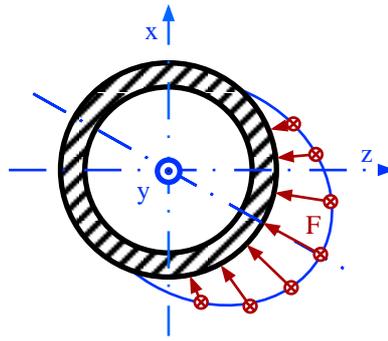


FIG. 1.18: Exemple de répartition des contraintes apparaissant dans le plan perpendiculaire à l'axe.

défaut sur la bague externe :

$$f_{d,be} = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right) (f_{\text{rot}} - f_{\text{ext}}), \quad (1.10)$$

défaut sur la bille :

$$f_{d,bille} = \frac{N}{2} \frac{d_m}{d_b} \left(1 - \left(\frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right)^2 \right) (f_{\text{rot}} - f_{\text{ext}}) \quad (1.11)$$

avec f_{rot} : fréquence de rotation de la bague interne et f_{ext} : fréquence de rotation de la bague externe. La fréquence de la bague externe est nulle si la bague est montée à force dans le carter.

A la différence des engrenages, l'impossibilité de connaître a priori l'angle de contact se traduit par le fait qu'on ne connaît pas non plus la périodicité de l'excitation des différents défauts. On peut seulement en donner un encadrement.

1.5.2.2 Zone de charge

Les contraintes axiales et radiales appliquées aux roulements d'une boîte de vitesses ne sont pas isotropes. Cette répartition des forces est à l'origine de zones plus ou moins chargées comme le montre la figure 1.18. Ainsi, dans le cas d'un écaillage sur la bague interne, l'amplitude des chocs dûs au passage d'une bille sur le défaut doit varier suivant la position du défaut par rapport à la zone de charge.

Donc, les travaux de [MS84] considèrent que le train d'impulsion périodique engendré par le défaut est modulé en amplitude par une fonction de la forme :

$$y(t) = \sin(2\pi f_{d,bi}t)(1 + \beta \sin(2\pi f_{\text{rot}}t)).$$

Cette modélisation ne prend pas en compte les glissements ou micro-blocages éventuels des billes sur la piste. De plus, dans le cas d'un engrenage hélicoïdal, il existe des contraintes axiales qui font varier l'angle de contact entre deux valeurs. Par conséquent, d'après, les calculs précédents, la fréquence d'apparition du défaut peut varier et donc provoquer une modulation de fréquence.

1.5.2.3 Modèle vibratoire d'un palier à roulement

Le roulement constitue l'élément de liaison entre la partie en mouvement et la partie immobile. Cependant, les paliers à roulements ont un comportement non-linéaire dû à la présence de jeux mécaniques et aux contacts entre les éléments roulants et le chemin de roulement.

Une approche pour la modélisation du signal vibratoire est présentée dans [Beg97]. Le résultat principal concerne l'influence du pré-chargement : un fort pré-chargement tend à diminuer les effets des non-linéarités d'un roulement.

1.5.3 Modèle vibratoire du carter

Une approche relativement générale consiste à supposer que le carter admet une modélisation par éléments finis. Le signal enregistré sur le carter admet la représentation suivante :

$$\begin{cases} M\ddot{\vec{z}}(t) + C\dot{\vec{z}}(t) + K\vec{z}(t) = \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) = L\ddot{\vec{z}}(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

avec :

- $\ddot{\vec{z}}$: Vecteur des accélérations des m éléments discrets de la structure mécanique
- M : Matrice des masses discrètes
- C : Matrice des amortissements
- K : Matrice des raideurs
- L : Matrice d'observation
- \vec{y} : Signal vibratoire (de dimension égale au nombre de capteurs)

\vec{x} représente les forces externes appliquées à la structure que l'on décompose en :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_a(t). \quad (1.13)$$

$\vec{x}_h(t)$ représente une excitation harmonique et $\vec{x}_a(t)$ est une excitation aléatoire modélisée par un bruit blanc qui inclut les vibrations extérieures à la boîte, la circulation des fluides de lubrification, l'excitation due aux roulements sains et les erreurs de modélisation.

1.5.4 Modèle du signal vibratoire

1.5.4.1 Signal sans défaut

Dans le cas d'une boîte saine, $\vec{x}_h(t)$ correspond à l'excitation harmonique engendrée par les engrenages ($\vec{x}_{\text{eng}}(t)$). Compte tenu des résultats du paragraphe 1.5.1.4, chacune de ces composantes est de la forme :

$$x_{\text{eng}}(t) = \sum_{k=1}^{K_1} A_{1,k}(t) \sin(2\pi k f_{\text{eng},1} t + \varphi_{1,k}(t)) + \sum_{k=1}^{K_2} A_{2,k}(t) \sin(2\pi k f_{\text{eng},2} t + \varphi_{2,k}(t)). \quad (1.14)$$

$f_{\text{eng},1}$ correspond à la fréquence d'engrènement du rapport sous couple et $f_{\text{eng},2}$ est celle du pignon de sortie.

Compte tenu de la décomposition précédente de l'excitation et de la linéarité du modèle aux éléments finis, on peut montrer [DG91] que le signal vibratoire enregistré sur le carter peut se décomposer selon :

$$\vec{y}(k) = \underbrace{\vec{y}_{\text{eng}}(k)}_{\text{signal harmonique}} + \underbrace{\vec{y}_a(k)}_{\text{signal aléatoire}}. \quad (1.15)$$

La partie harmonique correspond à la partie observée des fréquences et modes de l'excitation harmonique déformée par la structure mécanique. La partie purement aléatoire correspond à la réponse de la structure à l'excitation aléatoire.

Le signal $y_{\text{eng}}(t)$ peut donc s'écrire sous une forme similaire à $x_{\text{eng}}(t)$ en gardant à l'esprit que les lois de modulation sont différentes car modifiées par la structure :

$$y_{\text{eng}}(t) = \sum_{k=1}^{K_1} A_{1,k}(t) \sin(2\pi k f_{\text{eng},1} t + \varphi_{1,k}(t)) + \sum_{k=1}^{K_2} A_{2,k}(t) \sin(2\pi k f_{\text{eng},2} t + \varphi_{2,k}(t)). \quad (1.16)$$

Les nombres de composantes K_1 , K_2 et la forme des lois de modulation sont a priori inconnus. Cependant, à vitesse et couple résistant constants, leur nombre est constant (pour une position donnée). Les périodicités sont elles aussi connues dès lors que la vitesse de rotation de l'arbre moteur est mesurée.

La figure 1.19 montre le spectre d'un signal vibratoire d'une boîte saine.

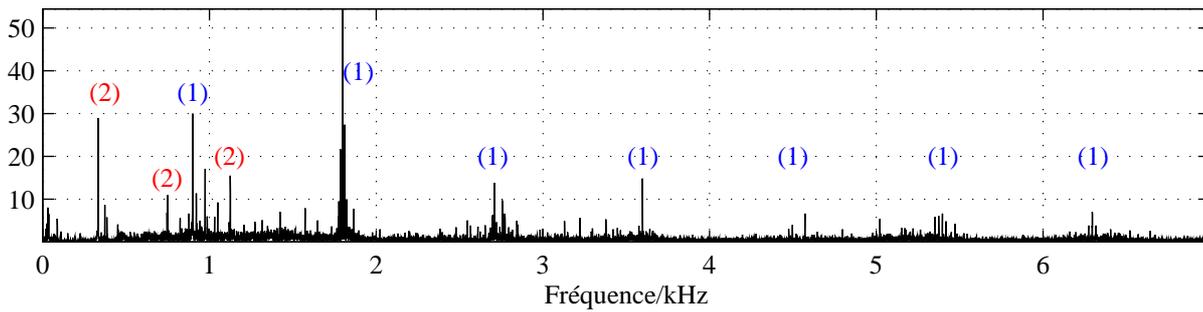
Les deux fréquences d'engrènement ($f_{\text{eng},1} = 900\text{Hz}$, $f_{\text{eng},2} = 373\text{Hz}$) et leurs harmoniques sont nettement visibles dans la figure 1.19(a). En revanche, les raies caractéristiques des engrenages qui ne sont pas sous couple, ne sont pas visibles.

Les fonctions modulantes $A(t)$, $\varphi(t)$ se manifestent dans le spectre par des raies latérales autour des fréquences d'engrènement. L'espacement de ces raies est égal à la fréquence de rotation des arbres. Ce phénomène est visible sur la figure 1.19(b) qui correspond à un agrandissement autour de la troisième harmonique de la première fréquence d'engrènement. Les bandes latérales dues au pignon moteur (espacement de 75Hz) sont visibles. En revanche, les raies dues au pignon récepteur, espacées de 22Hz, sont plus réduites.

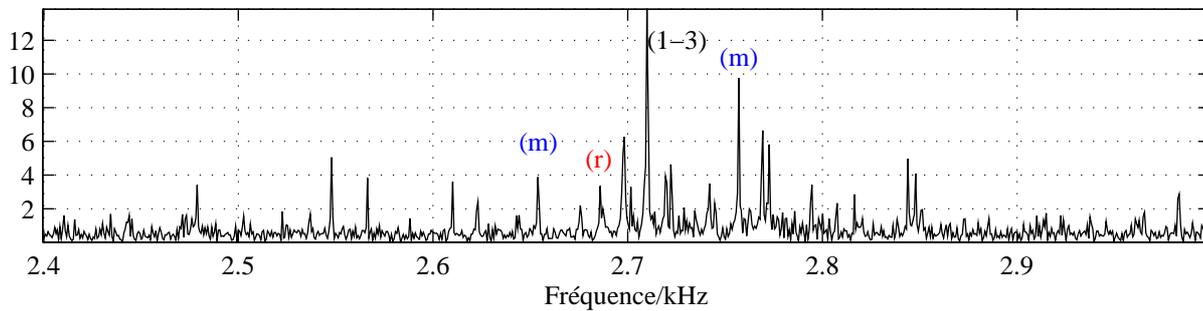
Les comportements vibratoires du carter et des roulements ne sont pas directement accessibles car ils ne peuvent pas être séparés des contributions du reste de la structure. En revanche, une simple comparaison des spectres correspondant à des positions de capteur différentes montre que l'influence du carter doit être prise en compte.

1.5.4.2 Signal avec défaut d'engrenage

La figure 1.20 montre le spectre d'un signal avec un défaut sur le pignon récepteur. Le signal temporel correspondant est celui de la figure 1.23(a). Un modèle possible est toujours celui donné par l'équation 1.16. Les fréquences d'engrènement ne sont pas modifiées. Seule la forme des lois de modulation varie, ce qui se caractérise dans le domaine spectral par l'apparition de raies latérales espacées de 22Hz (fréquence de rotation du pignon récepteur). Comparativement au spectre correspondant à une boîte saine, les raies de modulation occupent une large bande (figure 1.19(b)). Un défaut se traduit donc dans le spectre par le même phénomène qu'une erreur de transmission de ce pignon.

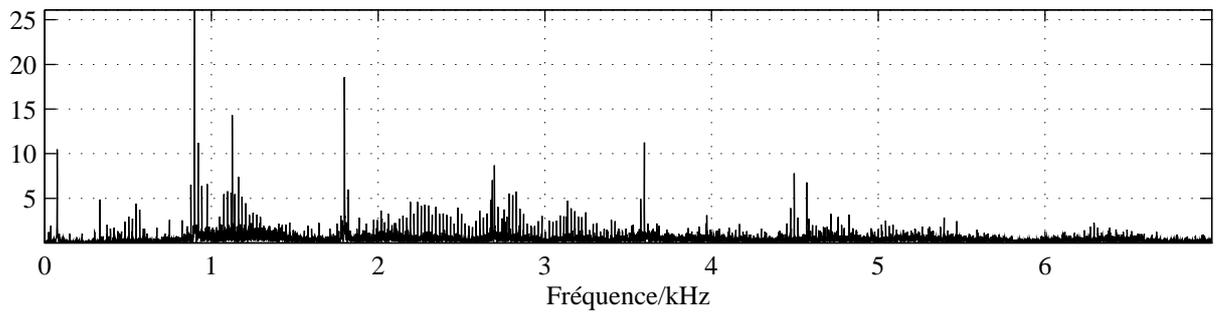


(a) Spectre. Les fréquences d'engrènement du premier rapport à 900Hz (marquées avec 1) et du pignon de sortie à 373Hz (marquées avec 2), et leurs multiples, sont visibles.

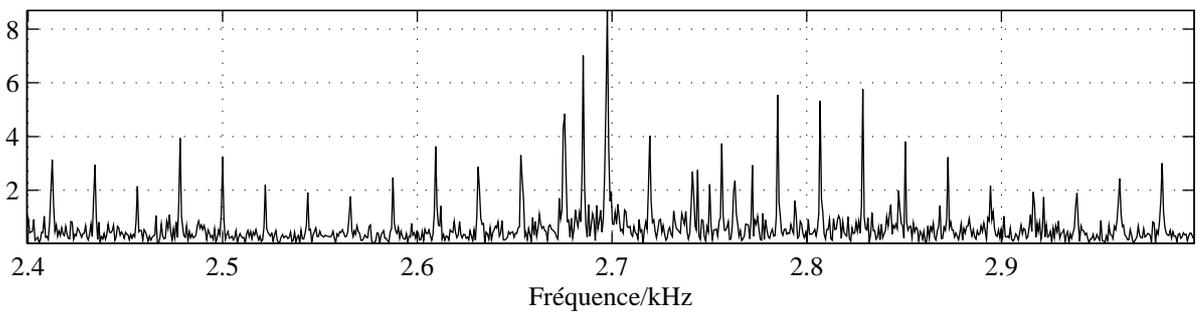


(b) Zoom du spectre sur la troisième harmonique de la fréquence d'engrènement (1-3). Les raies latérales dues au pignon moteur (m) et pignon récepteur (r) sont faibles et réparties sur une bande étroite.

FIG. 1.19: Transformée de Fourier du signal vibratoire d'une boîte saine, première vitesse, première position de capteur.



(a) Spectre.



(b) Zoom.

FIG. 1.20: Transformée de Fourier du signal vibratoire première vitesse, première position de capteur avec défaut sur le pignon récepteur.

L'analyse de Fourier ne permet en fait qu'une analyse de la périodicité des phénomènes et elle ne donne pas accès aux phénomènes de modulation.

Une approche possible pour l'analyse des lois de modulation est d'effectuer une démodulation d'amplitude et de phase par rapport à la fréquence d'engrènement et à ses harmoniques [BBT96, FB95, BTOR97]. Typiquement, ces méthodes consistent à effectuer un décalage fréquentiel du signal original suivi d'un filtrage passe-bas. On peut remarquer que cette approche peut s'interpréter en terme d'analyse TF puisqu'on cherche à caractériser le comportement temporel du signal autour d'une fréquence donnée. Cependant les possibilités d'analyse qu'elle procure sont relativement limitées puisqu'elle devient inefficace dès lors que les phénomènes de modulation sont à large bande [BTOR97].

Une question centrale reste en suspens concernant la validité du modèle 1.16. D'un point de vue mécanique, cela correspond en fait à se demander si le phénomène d'engrènement d'une dent écaillée n'engendre pas de nouvelles composantes que l'erreur de transmission statique ne permet pas de prendre en compte.

1.5.4.3 Signal avec défaut de roulement

L'excitation engendrée par un défaut de roulement peut être prise en compte dans le modèle du signal vibratoire en l'introduisant dans l'expression de l'excitation totale appliquée au carter (cf. eq. 1.13) :

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\vec{x}_{\text{eng}}(t) + \vec{x}_{\text{roul}}(t)}_{\vec{x}_h(t)} + \vec{x}_a(t). \quad (1.17)$$

Une approche simplifiée [MS84] consiste à considérer que $\vec{x}_{\text{roul}}(t)$ peut être assimilé à un train d'impulsions périodiques dont l'amplitude et la direction dépendent de la position angulaire instantanée du défaut (voir paragraphe 1.5.2.2).

Compte tenu de l'hypothèse de linéarité du carter, le signal vibratoire enregistré sur le carter peut se décomposer en :

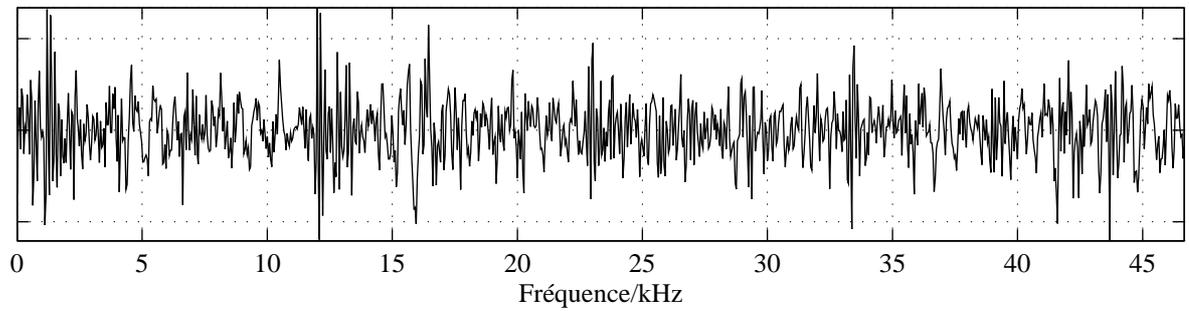
$$\vec{y}(t) = \vec{y}_{\text{eng}}(t) + \vec{y}_{\text{roul}}(t) + \vec{y}_a(t). \quad (1.18)$$

Théoriquement, et sous réserve que les hypothèses (linéarité) émises soient valides, le signal $\vec{y}_{\text{eng}}(t)$ correspond au signal obtenu sur la boîte saine.

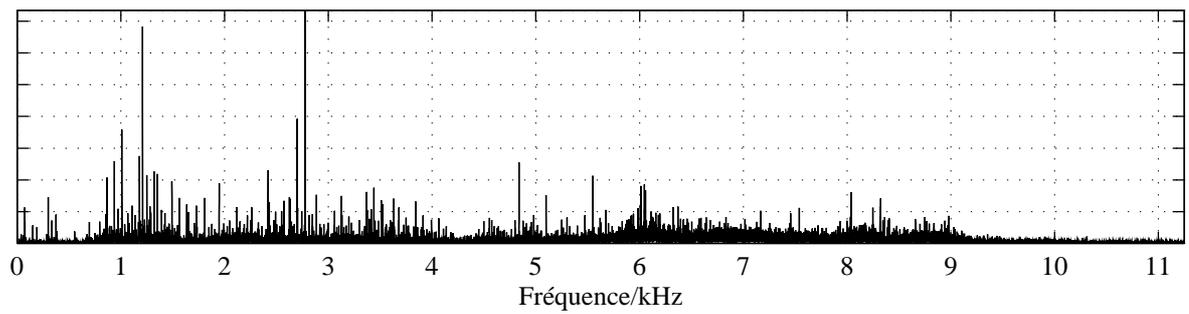
$\vec{y}_{\text{roul}}(t)$ doit correspondre à la réponse de la structure à un train d'impulsions (périodiques?) modulé en amplitude (zone de charge).

Le spectre expérimental obtenu à partir du signal avec un défaut sur la bague interne du roulement est montré sur la figure 1.21(b). Outre le signal vibratoire engendré par les engrenages (raies à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques), il contient un grand nombre de raies sur une large gamme fréquentielle. Cependant, et contrairement au cas des engrenages, l'analyse des périodicités est délicate. Le signal temporel semble faire apparaître des transitoires avec une certaine périodicité mais leur forme est très variable.

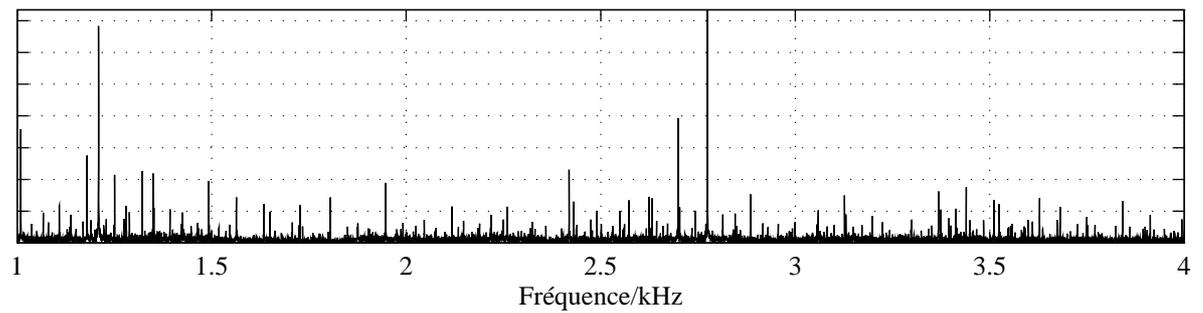
En fait, l'analyse des signaux correspondant au défaut de roulement est relativement compliquée et ce pour deux raisons principales. La première est relative à l'influence de la zone de charge. La seconde réside dans l'impossibilité de connaître a priori la périodicité de l'excitation. Ceci est notamment la conséquence de la méconnaissance de l'angle de contact.



(a) *Signal temporel.*



(b) *Spectre.*



(c) *Zoom du spectre.*

FIG. 1.21: *Transformée de Fourier du signal vibratoire avec un défaut sur la bague interne, 4ème vitesse, 11ème position de capteur, $f_e = 22.5\text{kHz}$.*

Additionnellement, on peut se poser la question de savoir si l'hypothèse sur la périodicité est valable ou si, au contraire, des phénomènes dynamiques (tels que des micro-glissements) ne peuvent engendrer un mouvement plus complexe des éléments.

Notons enfin qu'une démodulation ne permet pas une analyse des signaux vibratoires avec défaut de roulements.

1.6 Moyennage synchrone

Comme nous l'avons souligné précédemment, un défaut sur engrenage peut être décelé en mettant en évidence un phénomène de modulation d'amplitude et / ou de phase. Cependant, le fait que les défauts se traduisent par des signaux courts et le grand nombre de phénomènes perturbateurs présents dans le signal, rendent difficile la reconnaissance d'une telle modulation. A ceci, on peut ajouter un RSB peu élevé. Dans de telles circonstances, on comprend que les informations concernant cette modulation soient difficiles à extraire. Une alternative pour résoudre ce problème, a été proposée par P.D. McFadden et J.D. Smith [MS85] : le moyennage synchrone. Il s'agit d'une mise en forme du signal et à ce titre, il ne constitue qu'une étape préliminaire au traitement du signal. Cependant, il apparaît que cette mise en forme offre des possibilités intéressantes notamment vis à vis du problème de séparation des sources d'excitation et de localisation des défauts.

Une étude plus approfondie du moyennage synchrone et de ses effets est présentée à l'annexe A.

1.6.1 Intérêt pour la séparation des fréquences et la localisation des défauts

Le signal vibratoire enregistré sur le carter peut se décomposer de la manière suivante :

$$y(k) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{signal harmonique}} + \underbrace{y_s(t)}_{\text{signal structure}} + \underbrace{w(t)}_{\text{bruit}}$$

et le problème de la surveillance des engrenages et roulements revient à surveiller la partie harmonique du signal. Il se pose donc le problème de la séparation des modes (fréquences) liés à l'excitation harmonique de ceux liés à la structure mécanique.

Une approche consiste à utiliser le moyennage synchrone pour effectuer ce découplage. En effet, une interprétation possible de la décomposition précédente consiste à considérer le signal vibratoire comme la somme d'un signal purement déterministe (harmonique) et d'un signal purement aléatoire de moyenne nulle :

$$\begin{aligned} y(k) &= \underbrace{y_h(t)}_{\text{signal harmonique}} + \underbrace{y_s(t)}_{\text{signal structure}} + \underbrace{w(t)}_{\text{bruit}} \\ &= y_h(t) + \underbrace{y_s(t) + w(t)}_{\text{signal aléatoire}} \\ &= y_h(t) + y_a(t). \end{aligned}$$

Si on effectue un moyennage synchrone sur N segments de longueur appropriée, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (y_{\text{moy}}^N(t)) = y_h(t).$$

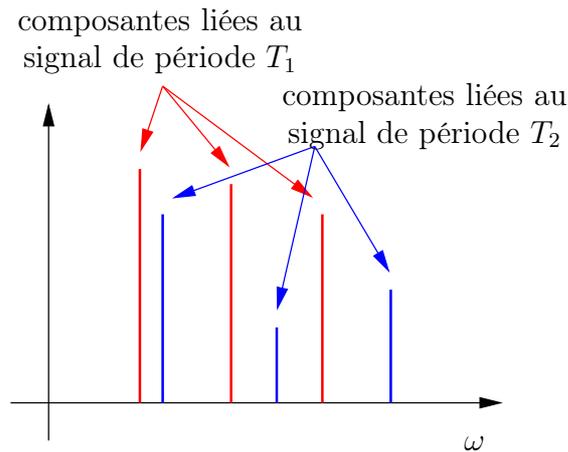


FIG. 1.22: Spectre d'un signal harmonique somme de signaux de périodes différentes.

Il apparaît alors clairement que seul subsiste, dans le signal moyenné, la partie harmonique du signal et que par conséquent, le moyennage synchrone permet une séparation effective des composantes liées à l'excitation de celles liées à la structure.

Le moyennage synchrone effectué sur une période T_i peut être vu, dans le domaine fréquentiel, comme un filtre sélectif des fréquences multiples de $\frac{1}{T_i}$ et permet d'obtenir un signal où seules les composantes liées au signal de période T_i subsistent. Cette propriété est très intéressante notamment pour la localisation des éléments défectueux.

En effet, un choix judicieux de la période de moyennage permet d'extraire de l'excitation harmonique, la partie associée uniquement à l'élément dont la fréquence de rotation est donnée par l'inverse de la période de moyennage. Supposons maintenant que le signal se décompose comme la somme de signaux de périodes différentes (comme c'est le cas pour le signal vibratoire de boîte de vitesses) :

$$y_h(t) = \sum_i y_{T_i}(t).$$

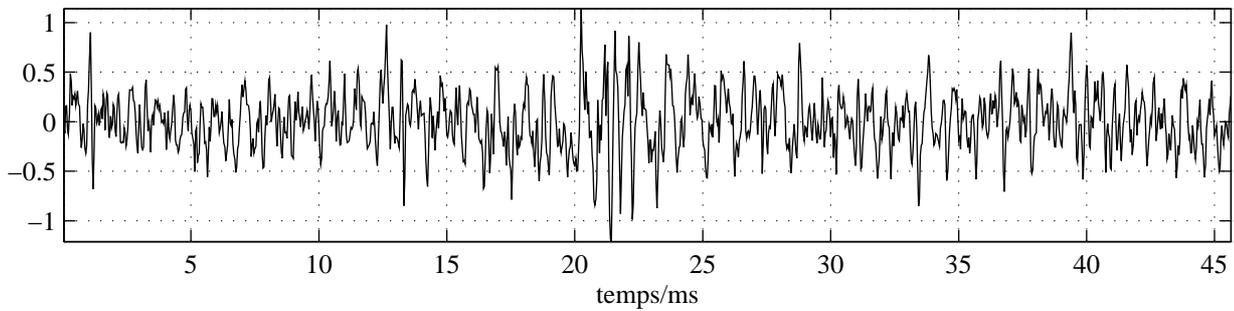
1.6.2 Exemples expérimentaux

La figure 1.23(a) montre un signal de vibration non moyenné pour un défaut situé sur le pignon récepteur du rapport de première. La durée du signal est égale à un tour d'arbre récepteur. On constate que l'impulsion provoquée par le défaut est noyée dans le bruit.

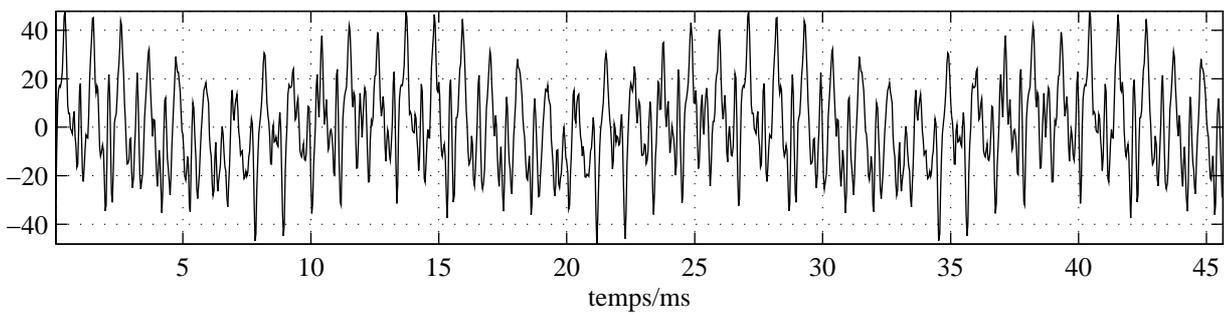
La figure 1.23(c) montre le signal moyenné par rapport à l'arbre récepteur. Le transitoire correspondant au défaut apparaît plus clairement.

Par contre, un signal moyenné par rapport à l'arbre moteur (cf. figure 1.23(b)) ne montre aucun transitoire. Ainsi, on peut facilement conclure que le défaut se situe sur le pignon de l'arbre récepteur.

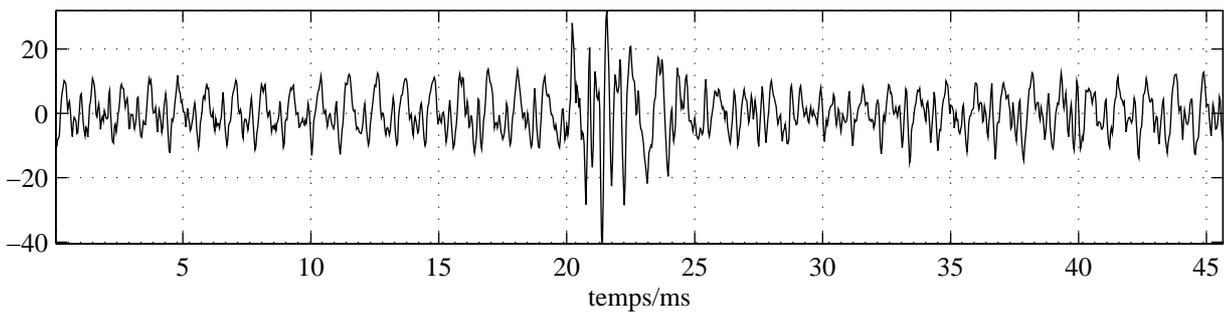
Le RSB du signal moyenné (1.23(c)) est nettement amélioré par rapport au signal brut. Il est même possible de distinguer l'engrènement de chaque dent.



(a) *Signal brut.*



(b) *Signal moyenné par rapport à l'arbre moteur.*



(c) *Signal moyenné par rapport à l'arbre récepteur.*

FIG. 1.23: *Signal première vitesse, première position du capteur, avec défaut d'écaillage sur le pignon récepteur. La période de l'arbre moteur est $T_1=13,3ms$, celle de l'arbre récepteur de $T_2=45,2ms$.*

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les conditions expérimentales et l'acquisition des signaux vibratoires de boîtes de vitesses ont été présentées.

Dans un second temps, on a présenté une modélisation du signal vibratoire en termes d'excitation et de transmission.

Les résultats, essentiellement tirés de la littérature, ont permis de mettre en évidence les points suivants :

- Les engrenages sont la source principale des vibrations au sein d'une boîte saine. L'excitation qu'ils engendrent peut se décomposer en trois contributions, une de même période que la période d'engrènement, qui caractérise le profil moyen des dents, une de période égale à la période de rotation de l'arbre moteur, qui caractérise l'écart de profil de chaque dent avec le profil moyen et une troisième, de période égale à la période de rotation de l'arbre récepteur, caractéristique des dents de ce pignon. Cette excitation peut se modéliser comme une somme de sinusoïdes modulées en amplitude et en phase. Un défaut d'écaillage engendre un phénomène de modulation dont la période est caractéristique de sa position mais qui, contrairement au cas des engrenages sains, présente des variations rapides.
- Les roulements sains engendrent une excitation négligeable par rapport à celle des engrenages. D'autre part, leur modèle vibratoire est mal connu.
En revanche, un roulement avec défaut engendre une excitation dont la période peut se déterminer à partir de la donnée de ses caractéristiques. Cependant, la méconnaissance de l'angle de contact ne permet pas de la calculer a priori. Dans le cas d'un défaut sur bague interne, cette excitation est modulée en fonction de la position angulaire du défaut, à cause de la zone de charge.
- Le carter de boîte peut être pris en compte par l'introduction d'un modèle à éléments finis qui résulte des fonctions de transfert linéaires.

Le signal vibratoire enregistré sur la boîte de vitesses peut alors se décomposer en une partie harmonique et une partie aléatoire. Les différents défauts se manifestent par une modification de la partie harmonique du signal enregistré.

Une analyse spectrale expérimentale permet de confirmer la validité du modèle proposé dans le cas d'une boîte saine et avec défaut de denture. En revanche, dans le cas d'un défaut de roulement, le signal est beaucoup plus difficile à interpréter. Les limitations de l'analyse de Fourier pour l'étude des phénomènes de modulation ont également été mises en évidence.

Une conséquence de la périodicité stricte de l'excitation engendrée par les engrenages est la possibilité d'utiliser la technique du moyennage synchrone qui, outre une amélioration sensible du rapport signal sur bruit, permet de séparer les sources d'excitation harmonique et par là même de localiser les pignons défectueux.

L'utilisation des distributions TF pour l'analyse des signaux vibratoires est justifiée au chapitre suivant et repose essentiellement sur leur adéquation avec le modèle du signal vibratoire.

Chapitre 2

Distributions Temps-Fréquence

2.1 Introduction

Leon Cohen a dit : «le temps-fréquence, c'est comme l'homme qui observe la nature, la couleur du ciel change du rouge au bleu puis à nouveau au rouge avant la nuit». Tout l'intérêt d'une analyse TF est résumé dans cette phrase. C'est en fait la perte de la notion de temps qui rend l'analyse de Fourier difficilement accessible, ou tout du moins, éloignée de notre perception intuitive des phénomènes non-stationnaires.

L'application d'outils TF à l'analyse des signaux vibratoires est déjà ancienne. C'est notamment ce qui est fait dans [Pim62]. L'outil d'analyse utilisé est le spectrogramme, méthode qui est à l'heure actuelle toujours couramment employée. Ainsi [WM93a, WM93b] l'appliquent à la détection de défauts d'engrenage. Le problème principal associé à cette méthode est son manque de résolution.

C'est pour pallier cet inconvénient que la distribution de Wigner-Ville a connu un regain d'intérêt dans les années 1980. Proposée à l'origine proposé dans le contexte de la mécanique quantique, par E. P. Wigner [Wig32], c'est J. Ville [Vil48] qui a eu l'idée de l'appliquer à l'analyse des signaux. Mais ce sont en fait les travaux de [EG76, CM80a, FE81] qui sont véritablement à l'origine de l'engouement qu'elle a suscité. Ses applications à l'analyse des signaux vibratoires sont multiples. Citons entre autres [BO90] dans le domaine de l'acoustique sous-marine, [KB94, GM94] dans le domaine de l'automobile et [For90] dans le domaine particulier des engrenages.

L'inconvénient principal associé à la distribution de Wigner-Ville est son manque de lisibilité, conséquence de la présence de termes d'interférence qui n'ont pas de réalité physique et peuvent masquer les composantes physiquement significatives. Aussi, le problème de la réduction des interférences a suscité beaucoup de travaux et un grand nombre de distributions à interférences réduites ont vu le jour [ZAM90, CW89]. La plupart de ces méthodes sont des membres de la classe de Cohen [Coh66] qui définit une distribution TF et ses propriétés à partir de la donnée de son noyau. Ce noyau est en fait une fonction de lissage de la distribution de Wigner-Ville.

Quelque soit le noyau utilisé, il apparaît en fait toujours possible de trouver un signal où les capacités de lissage du noyau (et donc de réduction des interférences) seront mises en défaut. C'est sur la base de ce constat qu'est née l'idée de définir un noyau dépendant du

signal analysé [JP90, BJ93b, BJ93a, CBB95]. Plus récemment, l'idée de rendre le noyau à la fois dépendant du signal mais aussi du temps a été développée [CJ95, JB95]. La méthode présentée au chapitre 3 généralise ce type d'approches.

Enfin, la méthode de réallocation [AF95] utilise un point de vue différent pour améliorer la lisibilité des représentations TF de la classe de Cohen.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps, on justifie l'analyse TF des signaux vibratoires de boîtes de vitesses. On introduit ensuite les propriétés souhaitables d'une distribution TF et le principe de Heisenberg-Gabor. Deux représentations TF particulières que sont le spectrogramme et la distribution de Wigner-Ville, sont alors présentées individuellement puis dans le cadre de la classe de Cohen.

Le mécanisme de création des interférences dans la distribution de Wigner-Ville est alors étudié. Enfin on présente la méthode du noyau optimal développée par Richard G. Baraniuk et Douglas L. Jones [BJ93b].

2.2 Pourquoi une analyse TF pour les signaux vibratoires ?

Le chapitre précédent a permis de souligner le peu de connaissances dont on dispose sur les phénomènes physiques intervenant à l'intérieur d'un système mécanique complexe tel qu'une boîte de vitesses. En outre, ils sont trop nombreux et complexes pour que tous leurs effets puissent être pris en compte sans hypothèses simplificatrices.

Cette forte complexité se retrouve au niveau des signaux de vibration recueillis sur la boîte. Ces derniers, très riches en information, ne sont que partiellement interprétables par les moyens traditionnels (signal temporel, transformée de Fourier, cepstre). Face à cette lacune, l'apport des représentations TF est a priori indéniable. En effet, de telles représentations vont permettre d'accéder simultanément à trois types d'information significative :

- L'amplitude de la représentation fournit une information de puissance.
- Les fréquences qui apparaissent vont permettre d'identifier et d'étudier les différents éléments mécaniques en jeu par leurs modes et les contraintes auxquelles ils sont soumis.
- Les deux informations précédentes, et donc les différents événements que l'on peut distinguer dans la représentation, peuvent être localisés dans le temps, donnant ainsi une information sur le déroulement et l'enchaînement des divers processus.

Un modèle des signaux vibratoires a été présenté au paragraphe 1.5.3. Ce modèle (cf. eq. 1.16) consiste en une somme de sinusoides modulées en fréquence et en amplitude :

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t) \sin(\omega_k t + \varphi_k(t)).$$

Dans la représentation TF idéale correspondante, chaque composante du modèle se traduit par une suite de maxima d'amplitude $(A_k(t))^2$ et de fréquence instantanée $\omega_k + \dot{\varphi}_k(t)$. Autrement dit, tous les paramètres du modèle, à savoir le nombre de composantes K et les fonctions modulantes $A_k(t)$ et $\varphi_k(t)$ sont directement accessibles à partir de la représentation TF, qui est donc parfaitement adaptée à ce type d'analyse.

Qui plus est, les représentations TF permettent de mettre en évidence des « composantes complexes » de signaux, de façon très simple. En particulier, une variation locale de la fréquence, qui est une façon d'envisager la modulation de phase, se traduit simplement par une trajectoire dans le plan TF.

Bien sûr, l'utilisation des représentations TF ne se limite pas au modèle précité. Des composantes supplémentaires, avec un support limité en temps, correspondant à une modification dynamique du nombre de composantes K , peuvent également être prises en compte. Or, ce type de comportement est attendu, notamment dans le cas d'un défaut de roulement.

2.3 Propriétés souhaitables d'une représentation TF

Une représentation TF est une fonction des variables temps (t) et fréquence (ω) qui distribue l'énergie du signal en fonction de ces deux variables :

$$E\{s(t)\} = \iint \text{RTF}(t, \omega) dt d\omega. \quad (2.1)$$

Cette distribution peut être interprétée comme l'extension des deux distributions d'énergie classiques :

- La puissance du signal :

$$P(t) = |s(t)|^2 \quad (2.2)$$

- et la puissance de la transformée de Fourier :

$$P(\omega) = |S(\omega)|^2 = |\mathcal{F}\{s(t)\}|^2 \quad (2.3)$$

qui satisfont les conditions :

$$E\{s(t)\} = \int P(t) dt = \int P(\omega) d\omega.$$

Il est alors naturel d'imposer que la représentation TF ait comme distributions marginales les distributions d'énergie du signal.

La condition de distribution marginale temporelle s'écrit :

$$P(t) = \int \text{RTF}(t, \omega) d\omega \quad (2.4)$$

et celle de distribution marginale fréquentielle :

$$P(\omega) = \int \text{RTF}(t, \omega) dt. \quad (2.5)$$

L'interprétation d'une distribution TF comme distribution d'énergie impose qu'elle satisfasse un certain nombre de propriétés dites souhaitables :

La représentation TF doit être réelle :

$$\text{RTF}(t, \omega) \in \mathbb{R} \quad \forall t, \omega,$$

et positive

$$\text{RTF}(t, \omega) \geq 0 \quad \forall t, \omega.$$

Covariance en translation

$$s_2(t) = s_1(t - t_0)e^{-j\omega_0 t} \quad \longrightarrow \quad \text{RTF}_2(t, \omega) = \text{RTF}_1(t - t_0, \omega - \omega_0). \quad (2.6)$$

Covariance en dilatation

$$s_2(t) = \sqrt{a}s_1(at) \quad \longrightarrow \quad \text{RTF}_2(t, \omega) = \text{RTF}_1\left(at, \frac{\omega}{a}\right). \quad (2.7)$$

Conservation du support

La propriété du support temporel (fréquentiel) faible est satisfaite, si la distribution TF d'un signal identiquement nul en dehors d'un certain intervalle temporel (fréquentiel) est, elle aussi, nulle en dehors de cet intervalle.

$$s(t) = 0 \quad \forall t \notin [t_1; t_2] \quad \longrightarrow \quad \text{RTF}(t, \omega) = 0 \quad \forall \omega, \quad \forall t \notin [t_1; t_2]. \quad (2.8)$$

En revanche, la propriété de conservation du support stricte impose que la distribution TF soit nulle en tout point où le signal est nul.

$$s(t_0) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{RTF}(t_0, \omega) = 0 \quad \forall \omega. \quad (2.9)$$

D'autres propriétés souhaitables existent ; cependant dans le contexte de l'analyse des signaux, elles sont moins importantes (c'est un jugement de valeur).

Les propriétés précédentes admettent une formulation mathématique. Cependant, dans le cadre de l'analyse, un certain nombre d'autres propriétés souhaitables ne sont pas, ou difficilement, quantifiables :

- Les paramètres du modèle vibratoire (équation 1.16), à savoir les lois de modulation d'amplitude et de phase, doivent être accessibles aisément.
- La représentation TF doit être facilement interprétable, c'est-à-dire que des phénomènes parasites ne doivent pas venir perturber sa lecture.
- La résolution TF de la représentation TF, c'est à dire sa capacité à séparer des composantes proches, doit permettre une analyse fine.

2.4 Le principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Le principe d'incertitude permet de lier la durée d'un signal à sa largeur de bande. Il tire son nom de la mécanique quantique, où il exprime l'impossibilité de connaître avec précision la position et le moment cinétique d'une particule en mouvement.

Son introduction en théorie du signal, due à Gabor, traduit l'impossibilité d'avoir un signal dont les supports temporels et fréquentiels sont arbitrairement petits. Le principe d'incertitude fournit alors une borne inférieure sur l'encombrement TF d'un signal.

La durée (temporelle) d'un signal est définie par :

$$T^2 = \frac{1}{\mathbb{E}\{|s(t)|^2\}} \int (t - \bar{t})^2 |s(t)|^2 dt \quad (2.10)$$

où \bar{t} est le temps moyen :

$$\bar{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\{|s(t)|^2\}} \int t |s(t)|^2 dt.$$

De manière duale, la largeur de bande est définie à partir de la transformée de Fourier de $s(t)$.

$$B^2 = \frac{1}{\mathbb{E}\{|S(\omega)|^2\}} \int (\omega - \bar{\omega})^2 |S(\omega)|^2 d\omega \quad (2.11)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\mathbb{E}\{|S(\omega)|^2\}} \int \omega |S(\omega)|^2 d\omega$$

Le produit durée-largeur de bande satisfait l'inégalité d'Heisenberg-Gabor :

$$T \cdot B \geq \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Cette inégalité se transforme en égalité dans le cas des signaux gaussiens :

$$s(t) = c \mathbf{G}_\sigma(t - t_0) e^{j(\omega_0 t + \varphi)}.$$

Les signaux gaussiens apparaissent donc comme les signaux ayant la plus grande concentration dans le plan TF. Dans cette optique, Gabor [Gab46] introduit la terminologie de logon ou atome TF.

L'inégalité de Heisenberg-Gabor peut donc être vue comme une limitation mathématique qui interdit une localisation arbitrairement petite dans les domaines temporel et fréquentiel. Une description conjointe du signal ne peut échapper à des limitations analogues. On peut cependant imaginer que, de par leur structure les représentations TF sont à même de fournir une approche «naturellement» mieux adaptée au problème de la mesure de l'encombrement TF [Fla93].

2.5 Le spectrogramme

2.5.1 Définition

Le spectrogramme est la méthode la plus ancienne pour obtenir une représentation TF. C'est aussi la plus utilisée.

L'idée à la base de son développement est en fait très simple : pour déterminer le contenu fréquentiel du signal à la date t , on considère non plus la TF du signal global, mais la TF du signal local, c'est-à-dire considéré autour de l'instant t .

La localité du signal est assurée par l'introduction d'une fenêtre centrée sur t de durée limitée.

On définit alors le signal fenêtré :

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

où la fenêtre $h(t)$ possède la propriété de localité, c'est-à-dire :

$$h(t) = \begin{cases} \approx 1 & t \text{ petit} \\ \approx 0 & t \text{ grand} \end{cases}$$

Un grand nombre de fenêtres peut être utilisé dans la pratique (Rectangle, Triangle, Hanning, Hamming, Kaiser ou Flattop).

Le spectrogramme est alors défini comme la puissance de la transformée du signal fenêtré, ou transformée de Fourier à court terme :

$$SP(t, \omega) = |\mathcal{F}\{s_t(\tau)\}|^2 \quad (2.13)$$

Le spectrogramme définit une représentation TF puisqu'il distribue l'énergie du signal sur le plan TF (plan $t - \omega$).

2.5.2 Propriétés

Comme cela a été souligné au paragraphe précédent, on ne peut pas distribuer les points TF de manière arbitraire et les objets TF sont contraints d'avoir une dimension minimale donnée par le principe d'incertitude.

Le principe d'incertitude appliqué au signal fenêtré $s_t(\tau)$ permet alors d'établir [Fla93] que le produit durée \cdot bande de $s_t(\tau)$, ie. son encombrement TF, est l'addition des encombrements du signal $s(t)$ et de la fenêtre $h(t)$.

Ce point peut s'interpréter comme une mise en évidence de la faible résolution du spectrogramme.

Une autre limitation est liée à l'utilisation d'une fenêtre unique. Elle peut s'appréhender de manière intuitive en considérant un signal constitué de la somme de plusieurs objets TF occupant des surfaces TF différentes. Les objets définissant une surface approximativement identique à celle de la fenêtre d'analyse seront bien localisés. Si, en revanche, tel n'est pas le cas, les objets TF seront déformés par la fenêtre d'analyse. Un résultat optimal nécessite alors plusieurs fenêtres de dimensions adaptées aux composantes du signal qui sont inconnues a priori.

D'un point de vue pratique, on procède alors par essais successifs avec des fenêtres de largeurs différentes et l'analyse s'effectue à partir de plusieurs spectrogrammes. Des approches adaptatives pour la détermination de la longueur de fenêtre optimale ont été également proposées [JP90].

2.6 Distribution de Wigner-Ville

2.6.1 Définition

La distribution de Wigner-Ville est définie à partir du signal temporel, ou de manière duale à partir de sa transformée de Fourier :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int S^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) S \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) e^{-jt\theta} d\theta. \quad (2.15)$$

Cette distribution est bilinéaire, car le signal est multiplié par lui-même. On peut interpréter l'équation 2.14 (et 2.15) en utilisant la notion de corrélation. La valeur de la distribution $\text{WV}(t, \omega)$ est la mesure de la corrélation du signal avec sa version décalée en fréquence et considérée selon l'axe du temps inverse.

C'est une approche globale dans le sens où elle accorde un poids similaire au signal qu'il soit considéré au voisinage ou non de l'instant d'observation courant t .

2.6.2 Propriétés

Comme cela a été mis en évidence au paragraphe 2.3, les propriétés importantes pour l'analyse des signaux sont essentiellement la résolution TF et l'interprétabilité. C'est donc sur celles-ci que nous focaliserons notre attention. Les propriétés supplémentaires ne sont pas présentées ici [Coh95, Fla93].

Résolution TF

La résolution TF de la distribution de Wigner-Ville est excellente. On peut notamment la mettre en évidence sur les deux exemples suivants :

- Chirps linéaires

$$s(t) = e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t^2 + j\omega_0 t} \longrightarrow \text{WV}(t, \omega) = \delta(\omega - \Delta\omega t - \omega_0) \quad (2.16)$$

Pour les chirps linéaires, la distribution de Wigner-Ville est parfaitement concentrée sur la loi de la fréquence instantanée.

- Gaussienne à l'orientation TF arbitraire

$$s(t) = G_\sigma(t) e^{j\left(\frac{\Delta\omega}{2}t^2 + j\omega_0 t\right)} \longrightarrow \text{WV}(t, \omega) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2} - \sigma^2(\omega - \Delta\omega t - \omega_0)^2} \quad (2.17)$$

La distribution de Wigner-Ville préserve l'encombrement d'une gaussienne défini par le principe d'incertitude. Dans ce sens, elle possède donc une résolution TF maximale.

Interprétabilité

L'interprétabilité se mesure en fonction des résultats souhaités pour l'analyse. Elle se décompose comme suit :

- Réelle

La distribution de Wigner-Ville est réelle.

- Positivité

On ne peut pas garantir la positivité de la distribution de Wigner-Ville en toute généralité. En fait, une condition nécessaire et suffisante permettant d'assurer la positivité est que le signal considéré ait une structure de chirp linéaire (signal à modulation linéaire de fréquence et enveloppe gaussienne). Cette non-propriété engendre des problèmes d'interprétation. Ainsi une valeur négative de la distribution de Wigner-Ville invalide l'interprétation physique directe d'énergie du signal en ce point.

- Interférences

Les résultats fournis par la distribution de Wigner-Ville sont très satisfaisants dès lors qu'on considère un signal monocomposante de géométrie TF simple (chirp linéaire). En revanche, dès qu'il s'agit de signaux multicomposantes ou de géométrie TF plus compliquée, la distribution de Wigner-Ville fait apparaître des termes d'interférence. Ces termes sont localisés dans le plan TF à des endroits où les signaux qui les engendrent n'ont pas d'énergie. De ce fait, ils compliquent notablement l'analyse jusqu'à la rendre pratiquement impossible.

Le mécanisme des interférences sera présenté plus en détail au paragraphe 2.8.

La distribution de Wigner-Ville est une représentation de la classe plus générale, dite de Cohen.

2.7 Classe de Cohen

2.7.1 Définition

La classe de Cohen [Coh66, CM80b, Fla93, Coh95] regroupe un grand nombre de représentations TF, notamment celles utilisées dans ce travail. Elle est définie à partir du signal temporel :

$$\text{RTF}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint \phi(\theta, \tau) s^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) s \left(u + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j(\theta t - \tau \omega + \theta u)} du d\tau d\theta \quad (2.18)$$

ou, de manière duale, à partir du spectre :

$$\text{RTF}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint \phi(\theta, \tau) S^* \left(u + \frac{\theta}{2} \right) s \left(u - \frac{\theta}{2} \right) e^{-j(\theta t - \tau \omega + \tau u)} du d\tau d\theta. \quad (2.19)$$

Le noyau $\phi(\theta, \tau)$ détermine les propriétés de la représentation.

Cette expression est la transformée de Fourier bidimensionnelle de :

$$M(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau) \int s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{j\theta t} dt \quad (2.20)$$

On appelle, par analogie avec la théorie des distributions statistiques, la fonction $M(\theta, \tau) = (\mathcal{F}^{2D})^{-1}\{\text{RTF}(t, \omega)\}$, fonction caractéristique de $\text{RTF}(t, \omega)$.

Dans l'expression de la fonction caractéristique (eq. 2.20), hormis le noyau $\phi(\theta, \tau)$, intervient également la fonction d'ambiguïté $A(\theta, \tau)$, définie par :

$$A(\theta, \tau) = \int s^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) s \left(u + \frac{\tau}{2} \right) e^{j\theta u} du. \quad (2.21)$$

La fonction d'ambiguïté peut s'interpréter comme une corrélation TF puis qu'elle mesure la ressemblance du signal avec sa version décalée en temps (τ) et en fréquence (θ).

On appelle donc la variable τ , le décalage temporel et la variable θ , le décalage fréquentiel.

Les distributions TF de la classe de Cohen sont donc celles qui correspondent à la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction d'ambiguïté pondérée par le noyau :

$$\text{RTF}(t, \omega) = \mathcal{F}^{2D} \{ \phi(\theta, \tau) \cdot A(\theta, \tau) \} \quad (2.22)$$

En appliquant la transformée de Fourier à chaque terme on obtient :

$$\text{RTF}(t, \omega) = \Phi(t, \omega) \star \text{WV}(t, \omega) \quad (2.23)$$

où $\Phi(t, \omega) = \mathcal{F}^{2D} \{ \phi(\theta, \tau) \}$ est la transformée de Fourier du noyau et en utilisant le fait que la transformée de la fonction d'ambiguïté donne la distribution de Wigner-Ville.

Une interprétation intéressante de l'équation 2.23 est qu'on obtient l'ensemble des représentations de la classe de Cohen par un lissage de la distribution de Wigner-Ville avec la transformée de Fourier du noyau.

2.7.2 Propriétés des représentations

L'intérêt de la notion de noyau est qu'elle permet une étude simple des propriétés des distributions TF et qu'elle offre une approche intéressante pour la réduction des interférences. Cependant, dans ce paragraphe nous nous intéressons essentiellement aux propriétés non subjectives des distributions TF.

Conservation d'énergie

La représentation conserve l'énergie du signal ou de sa transformée de Fourier si $\phi(0, 0) = 1$.

Marginales

Les contraintes à imposer au noyau pour qu'il satisfasse les conditions de distribution marginale sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Distribution marginale temporelle} & \phi(\theta, 0) = 1 \quad \forall \theta \\ \text{Distribution marginale fréquentielle} & \phi(0, \tau) = 1 \quad \forall \tau \end{array}$$

Si l'une des conditions marginales est satisfaite alors la conservation de l'énergie l'est aussi.

Réelle

Un noyau donnant une représentation réelle satisfait la symétrie $\phi(\theta, \tau) = \phi^*(-\theta, -\tau)$.

Covariance en translation

La représentation est covariante en translation si le noyau ne dépend ni du temps ni de la fréquence.

Covariance en dilatation

Le noyau doit être un noyau de produit :

$$\phi(\theta, \tau) = \phi(\theta\tau).$$

Positivité

Un noyau qui assure des représentations positives peut être construit à partir d'une combinaison linéaire de noyaux de type spectrogrammes. L'encombrement TF des noyaux de distributions positives est supérieur ou égal à la limite définie par le principe d'incertitude.

Support

Les conditions de conservation du support sont de deux types :

support temporel faible	$\int \phi(\theta, \tau) e^{j\theta t} d\theta = 0$	si $ \tau \leq 2 t $
support temporel strict		si $ \tau \neq 2 t $
support fréquentiel faible	$\int \phi(\theta, \tau) e^{j\tau\omega} d\tau = 0$	si $ \theta \leq 2 \omega $
support fréquentiel strict		si $ \theta \neq 2 \omega $

Résolution

Une représentation TF fournit une résolution maximale, si l'encombrement sur le plan TF d'un signal quelconque est minimal. Une mesure de l'encombrement est donnée dans [Fla93, Fla87] pour un signal centré sur l'origine du plan TF :

$$\Delta_s(\phi(\theta, \tau)) = \frac{1}{4\pi^2 \mathbf{E}\{s(t)\}} \iint \left(\frac{t^2}{T^2} + T^2 \omega^2 \right) \text{RTF}(t, \omega) dt d\omega$$

où T est la durée du signal supposée non-nulle. Cet encombrement est minimal si le noyau est réel, maximal à l'origine et satisfait les conditions de distribution marginale.

2.7.3 Exemples

Les distributions présentées précédemment, à savoir le spectrogramme et la distribution de Wigner-Ville, sont toutes deux membres de la classe de Cohen.

2.7.3.1 Distribution de Wigner-Ville

Compte tenu de l'équation 2.23, qui stipule que toute représentation TF de la classe de Cohen peut s'écrire comme la convolution de la distribution de WV avec la transformée de Fourier bidimensionnelle du noyau, on peut écrire :

$$\text{WV}(t, \omega) = \delta(t) \delta(\omega) \star \text{WV}(t, \omega)$$

dont on déduit que le noyau correspondant à la distribution de Wigner-Ville est identiquement égal à un sur tout le plan d'ambiguïté :

$$\phi(\theta, \tau) = 1. \quad (2.24)$$

Elle satisfait donc les propriétés suivantes : conservation d'énergie, distributions marginales temporelles et fréquentielles, réelle, covariance en translation et en dilatation, support faible. En revanche, elle n'est pas positive, et ne garantit pas la conservation du support au sens strict.

2.7.3.2 Spectrogramme

On montre [Fla93, Coh95] que la fonction caractéristique correspondant au spectrogramme s'écrit :

$$M(\theta, \tau) = A_{h(-t)}(\theta, \tau) \cdot A(\theta, \tau)$$

où $A_{h(-t)}(\theta, \tau)$ est la fonction d'ambiguïté de la fenêtre considérée selon l'axe du temps inversé. On déduit alors de l'équation 2.20 que :

$$\begin{aligned} \phi(\theta, \tau) &= \frac{M(\theta, \tau)}{A(\theta, \tau)} = \frac{A_{h(-t)}(\theta, \tau)A(\theta, \tau)}{A(\theta, \tau)} \\ &= A_{h(-t)}(\theta, \tau) = \int h^* \left(-t - \frac{\tau}{2} \right) h \left(-t + \frac{\tau}{2} \right) e^{j\theta t} dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Les seules propriétés que possède le spectrogramme sont donc la conservation d'énergie (sous réserve que la fenêtre ait une énergie égale à 1), la réalité et la positivité.

2.8 Mécanisme des interférences

Compte tenu de l'équation 2.23, la distribution de Wigner-Ville apparaît comme centrale¹ puisque les autres distributions peuvent s'en déduire par un lissage approprié. Si on se fixe comme objectif la construction d'une distribution TF à interférences réduites, il convient dans un premier temps de comprendre le mécanisme de création des interférences, pour être à même, dans un second temps, de choisir le noyau de manière adéquate.

Le mécanisme des interférences est en fait inhérent à la nature bilinéaire de la distribution de Wigner-Ville. Ainsi, si on considère le signal $s(t)$ obtenu par superposition de deux composantes $s_1(t)$ et $s_2(t)$, on peut alors décomposer la distribution de Wigner-Ville du signal

¹Le choix de la distribution de Wigner-Ville est arbitraire. On peut le justifier par le fait qu'elle possède beaucoup de «bonnes» propriétés.

$s(t)$ en trois termes :

$$\begin{aligned} \text{WV}(t, \omega) &= \underbrace{\int s_1^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{\text{WV}_{s_1(t)}(t, \omega)} + \underbrace{\int s_2^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_2 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{\text{WV}_{s_2(t)}(t, \omega)} \\ &\quad + \underbrace{\int \left(s_1^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_2 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + s_2^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{I_{s_1 s_2}(t, \omega)} \\ &= \text{WV}_{s_1}(t, \omega) + \text{WV}_{s_2}(t, \omega) + 2 \operatorname{Re} \{ \text{WV}_{s_1 s_2}(t, \omega) \}. \end{aligned}$$

Les deux premiers sont les distributions de Wigner-Ville des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ que l'on désigne par auto-termes et le troisième, qui provient de l'interaction entre les deux composantes $s_1(t)$ et $s_2(t)$, constitue le terme d'interférence. Il existe une certaine ambiguïté quant à la notion d'interférence. En effet, si les composantes $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont à support TF disjoints, la notion d'interférence est significative. Si en revanche on considère un signal sinusoïdal et que l'on scinde arbitrairement ce signal en deux sous-signaux, alors la notion d'interférences perd toute signification puisque c'est grâce à elles que la distribution de Wigner-Ville va pouvoir se concentrer sur la fréquence instantanée.

Pour comprendre le mécanisme qui engendre les interférences dans la distribution de Wigner-Ville, on peut considérer l'exemple simple donné par [Fla93]. Soit $s_0(t)$ un atome TF et soient $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les signaux définis à partir de $s_0(t)$ par :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a_1 s_0 \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) e^{j2\pi \frac{\Delta\omega}{2} t} e^{j\varphi_1} \quad a_1 \geq 0 \\ s_2(t) &= a_2 s_0 \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) e^{-j2\pi \frac{\Delta\omega}{2} t} e^{j\varphi_2} \quad a_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont, à une atténuation et une phase pure près, des versions translatées en temps et en fréquence du signal initial. Si on considère alors le signal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$, sa distribution de Wigner-Ville s'écrit :

$$\text{WV}_s(t, \omega) = \text{WV}_{s_1}(t, \omega) + \text{WV}_{s_2}(t, \omega) + I_{s_1 s_2}(t, \omega).$$

$I_{s_1 s_2}(t, \omega)$ désigne le terme d'interférence qui est donné par :

$$I_{s_1 s_2}(t, \omega) = 2a_1 a_2 \text{WV}_{s_0}(t, \omega) \cos(2\pi(t\Delta\omega - \omega\Delta t) + (\varphi_1 - \varphi_2))$$

Compte tenu de la covariance en translation de la distribution de Wigner-Ville, on a :

$$\begin{aligned} \text{WV}_s(t, \omega) &= a_1^2 \text{WV}_{s_0} \left(t - \frac{\Delta t}{2}, \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) + a_2^2 \text{WV}_{s_0} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \\ &\quad + 2a_1 a_2 \text{WV}_{s_0}(t, \omega) \cos(2\pi(t\Delta\omega - \omega\Delta t) + (\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Cet exemple simple est intéressant car il permet de mettre en évidence les propriétés générales du mécanisme de création des interférences.

- Les interférences sont localisées au voisinage d'un point TF défini comme le centre géométrique de la droite joignant les composantes (auto-termes) en interaction.

Si les auto-termes sont situés en (t_1, ω_1) et (t_2, ω_2) , l'interférence est située en :

$$t_I = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad \omega_I = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{2.27}$$

- Les interférences ont un comportement oscillant. Dans le cas de géométries simples, la fréquence d'oscillation est proportionnelle à la distance TF entre les composantes en interaction :

$$\omega = \sqrt{\Delta t^2 + \Delta \omega^2}. \quad (2.28)$$

Le vecteur d'onde (l'axe des oscillations) est orthogonal à l'axe désignant les centres de gravité des composantes en action.

- L'amplitude des interférences peut valoir jusqu'à deux fois celle des auto-termes. Si on revient à l'exemple précédent, c'est le cas pour $a_1 = a_2$.

Cette règle de construction des interférences est tout à fait compatible avec la formule des interférences de Janssen [Jan82, Fla93] :

$$|\mathbb{WV}_{\text{interférence}}(t, \omega)|^2 = \iint \mathbb{WV}_{s_1(t)} \left(t + \frac{\tau}{2}, \omega + \frac{\theta}{2} \right) \mathbb{WV}_{s_2(t)} \left(t - \frac{\tau}{2}, \omega - \frac{\theta}{2} \right) d\tau d\theta \quad (2.29)$$

Si les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont des composantes de type atomique bien localisées, on parle alors d'interférences externes. Cependant la différentiation des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est arbitraire et si on considère le cas limite où $s_1(t) = s_2(t)$, on parle alors d'interférences internes résultant de l'interaction d'une composante avec elle-même.

Pour l'étude des interférences internes, le modèle utilisé est du type signal modulé en amplitude et en phase :

$$x(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$$

Si on considère que les variations d'amplitude sont lentes par rapport aux variations de phase, la distribution de Wigner-Ville prend la forme d'une intégrale oscillante que l'on peut approcher par la méthode de la phase stationnaire. Non seulement cette approche fournit un résultat cohérent avec la règle de construction des interférences, mais elle permet de montrer que la fréquence d'oscillation des interférences internes en un point TF est d'autant plus grande que ce point est éloigné de la fréquence instantanée.

Si l'on revient au cas de deux atomes TF, la règle de construction des interférences admet une interprétation duale dans le plan d'ambiguïté, ainsi, pour le signal $s(t)$ défini précédemment (cf. eq. 2.26) :

$$A_s(\theta, \tau) = A_{s_1}(\theta, \tau) + A_{s_2}(\theta, \tau) + J_{s_1 s_2}(\theta, \tau)$$

avec :

$$J_{s_1 s_2}(\theta, \tau) = A_{s_1 s_2}(\theta, \tau) + A_{s_2 s_1}(\theta, \tau).$$

La distribution de Wigner-Ville étant la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction d'ambiguïté, on a :

$$A_{s_1 s_2}(\theta, \tau) = A_{s_2 s_1}^H(\theta, \tau).$$

Dans le cas du signal $s(t)$ considéré, on a :

$$A_{s_1 s_2}(\theta, \tau) = a_1 a_2 A_{s_0}(\theta + \Delta \omega, \tau - \Delta t).$$

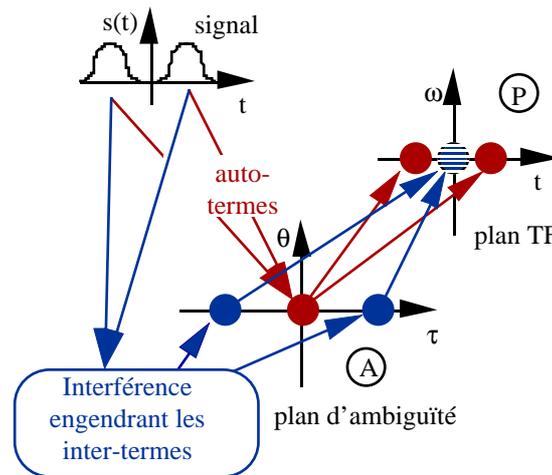


FIG. 2.1: Calcul de la distribution de Wigner-Ville d'un signal multi-composantes constitué de deux gaussiennes. Dans le plan d'ambiguïté, les deux auto-termes se superposent à l'origine. Deux interférences sont créées à $\tau = \pm \text{Distance temporelle}$ entre les composantes (en bleu) ($A_{s_1s_2}, A_{s_2s_1}$). Dans le plan TF, le terme d'interférence est situé entre les auto-termes à $t = 0$.

Cet exemple met en évidence certaines propriétés de la fonction d'ambiguïté. La transformée de Fourier inverse du terme d'interférence entre $s_1(t)$ et $s_2(t)$ reproduit la fonction d'ambiguïté du signal élémentaire $s_0(0)$ à une distance de l'origine égale à la distance TF séparant les deux composantes.

La transformée de Fourier de l'auto-terme est quant à elle centrée sur l'origine.

Cette propriété est en accord avec l'interprétation de la fonction d'ambiguïté en terme de corrélation TF, qui fournit notamment un autre moyen d'appréhender les comportements oscillant des interférences et non-oscillant des auto-termes.

2.8.1 Distributions TF à interférences réduites

Comme cela a été souligné aux paragraphes 2.2 et 2.3, parmi les propriétés souhaitables des distributions TF, la lisibilité est un facteur essentiel pour l'analyse des signaux non-stationnaires. Cette propriété présente l'inconvénient d'être subjective et donc non quantifiable. L'approche la plus cohérente consiste alors à utiliser les connaissances disponibles sur leur mécanisme de création pour développer une stratégie de réduction des interférences. Compte tenu des résultats présentés précédemment, deux pistes peuvent être exploitées :

- Les interférences sont oscillantes dans le plan TF.

La réduction des interférences est obtenue en lissant la distribution de Wigner-Ville par un filtre $\Phi(t, \omega)$ passe-bas bidimensionnel. Un exemple typique de cette approche est la distribution de pseudo Wigner-Ville [Fla93, Coh95], qui utilise un filtre séparable.

- Les interférences sont éloignées de l'origine dans le plan d'ambiguïté.

La réduction des interférences est obtenue en multipliant la fonction d'ambiguïté par

le noyau, qui vaut typiquement :

$$\phi(\theta, \tau) = \begin{cases} \approx 1 & \text{au voisinage de l'origine} \\ \approx 0 & \text{loin de l'origine.} \end{cases}$$

Cette approche est bien sûr équivalente à la précédente. Cependant le point de vue change avec le domaine considéré puisque la transformée de Fourier bidimensionnelle de $\Phi(t, \omega)$ définit un passe-bas bidimensionnel.

Un exemple typique est donné par la distribution de Choi-Williams [CW89].

Quelque soit le point de vue adopté pour la réduction des interférences, les méthodes référencées ont en commun de définir un lissage fixe (ie. dont l'action est identique en tout point TF et privilégiant une orientation donnée dans le plan TF).

Différentes alternatives sont alors envisageables. Une première consiste à considérer un lissage fixe mais dont la direction privilégiée est déterminée en fonction du signal analysé. Dans cette catégorie entre la méthode du noyau optimal présentée au paragraphe suivant.

Une seconde alternative consiste à paramétrer une fonction de lissage (ou un noyau), et à déterminer pour chaque point TF, la valeur optimale selon un critère donné, du paramètre libre. Dans ce sens, on peut parler d'une adaptation locale du lissage. Dans cette catégorie entrent les approches proposées par [JP90, CJ95]. Enfin la méthode dite du noyau optimal adaptative [JB95] et la méthode présentée au chapitre 3 peuvent être vues comme une combinaison des deux alternatives précédentes.

En tout état de cause, quelque soit l'approche retenue, il convient de souligner que le lissage passe-bas (éventuellement local) imposé pour la réduction des interférences se traduit en contre-partie par une perte de résolution TF.

2.9 Noyau Optimal

2.9.1 Principe

La méthode du noyau optimal à été développée par Richard G. Baraniuk et Douglas L. Jones en 1990 [BJ90, BJ93b, BJ94]. Elle a pour objectif la réduction des interférences par la détermination d'un noyau adapté au signal. La distribution TF est alors obtenue en calculant la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction d'ambiguïté pondérée par le noyau (cf. eq. 2.22). Compte tenu de l'éloignement des termes d'interférence par rapport au point origine dans le plan d'ambiguïté, le noyau optimal $\phi(\theta, \tau)$ est défini comme la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\max_{\phi} E \{M(\theta, \tau)\} \quad \text{avec} \quad E \{M(\theta, \tau)\} = \iint |\phi(\theta, \tau)A(\theta, \tau)|^2 d\tau d\theta$$

- Le noyau est réel, positif, il conserve l'énergie, c'est à dire :

$$\phi(0, 0) = 1, \quad \phi(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^+.$$

On peut noter qu'outre le fait que la conservation de l'énergie soit une propriété souhaitable, celle-ci est également importante du point de vue de l'algorithme, car elle permet de fixer la valeur initiale du noyau indispensable à la mise en œuvre de l'optimisation.

- Le volume du noyau est borné.

En fait, on appelle volume du noyau, son énergie :

$$E \{ \phi(\theta, \tau) \} = \iint |\phi(\theta, \tau)|^2 d\theta d\tau \leq V_{\max}.$$

- Le noyau est radialement décroissant.

Dans un système de coordonnées polaires, cette contrainte s'écrit :

$$\phi(r_1, \alpha_1) \geq \phi(r_2, \alpha_2) \quad \forall r_1 < r_2, \alpha_1 = \alpha_2.$$

Le noyau optimal est essentiellement constitué de 0 et de 1. Ceci est une conséquence des contraintes imposées. En effet, imaginons une fonction d'ambiguïté avec deux massifs énergétiques. La contrainte sur le volume permet d'envisager deux solutions :

1. couvrir les deux massifs et affecter au noyau la valeur $\frac{1}{2}$.
2. couvrir le massif le plus énergétique et affecter la valeur 1 au noyau.

Dans les deux cas, le volume du noyau est identique, cependant la seconde solution maximise l'énergie de la fonction caractéristique et correspond donc à la solution optimale.

De manière générale, le noyau optimal inclut le point énergétique le plus proche du point courant et le pondère par un. Seules les parties du noyau obtenues lors de la dernière itération de l'algorithme peuvent avoir une valeur inférieure à un.

2.9.2 Algorithme rapide

Une version rapide pour la détermination du noyau optimal est proposée dans [BJ94]. Compte tenu des contraintes de mémoire imposées par la station de travail utilisée, nous avons modifié quelque peu la version originale. Cette modification est présentée à l'annexe B.

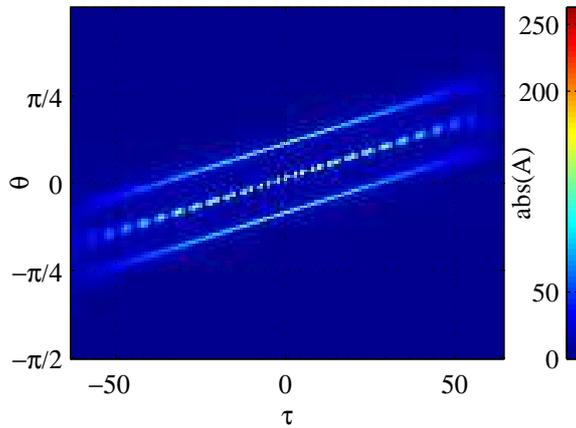
Le fonctionnement de l'algorithme est le suivant. Il considère le point le plus énergétique de la fonction d'ambiguïté et tente d'établir un chemin permettant de le relier au noyau. Si le chemin n'existe pas, il relie le point considéré au point situé sur le même rayon et effectue, en ce point, la moyenne des énergies des deux points de départ. Cette opération est réitérée jusqu'à ce qu'elle permette la liaison au noyau courant. La solution finale est obtenue dès que le volume V_{\max} est atteint.

Si, lors de la dernière itération, le volume est insuffisant pour relier les derniers points, alors le noyau est pondéré par une valeur inférieure à un de telle sorte que le volume correspondant permette d'atteindre V_{\max} .

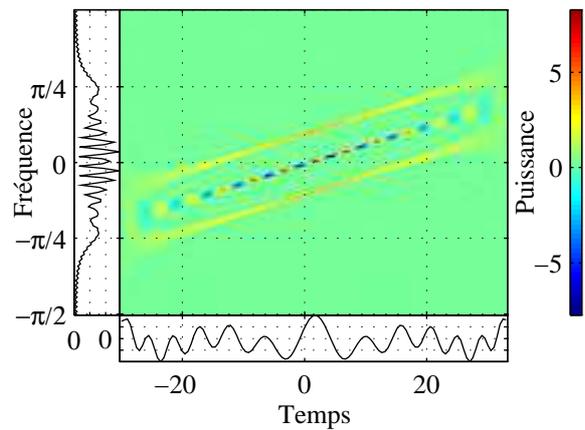
Ce comportement est illustré sur l'exemple suivant. Soit le signal «route» (appelé ainsi en raison de l'allure de sa distribution de Wigner-Ville figure 2.2(b)) défini par :

$$s_{\text{route}}(t) = \underbrace{e^{j(\frac{1}{2}mt^2 + \omega_0 t)}}_{s_1(t)} + \underbrace{e^{j(\frac{1}{2}mt^2 - \omega_0 t)}}_{s_2(t)}. \quad (2.30)$$

Sa fonction d'ambiguïté est représentée sur la figure 2.2(a). Elle met en évidence l'auto-terme centré sur l'origine du plan d'ambiguïté et les termes d'interférence parallèles à l'auto-terme. Le noyau obtenu pour un volume V_{\max} de 102 échantillons est représenté sur la figure 2.2(c). Il suit l'auto-terme sans incorporer d'inter-termes.



(a) Fonction d'ambiguïté du signal.



(b) Distribution de Wigner-Ville.

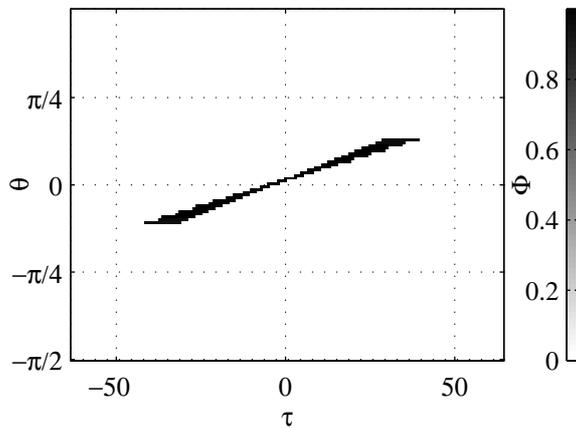
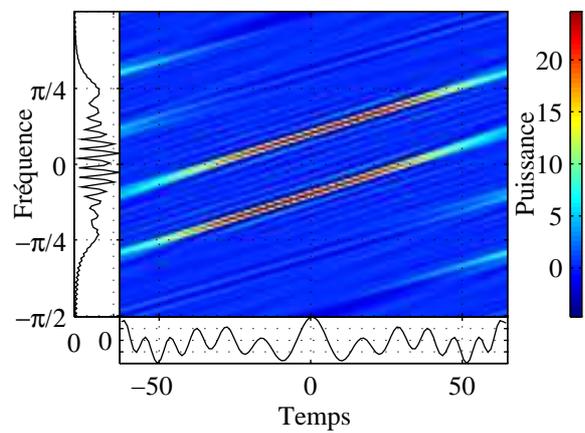
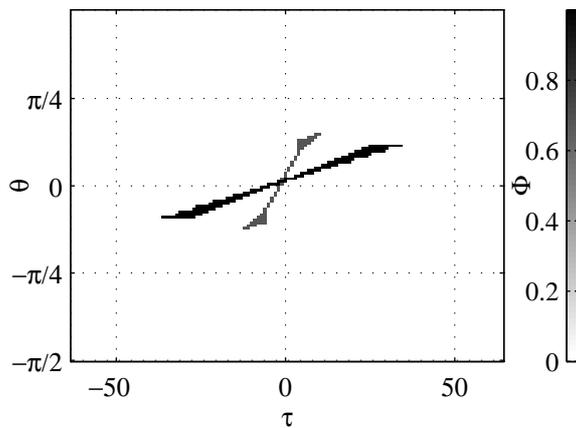
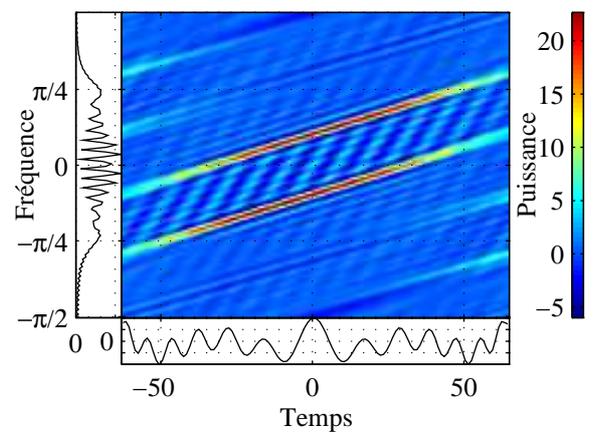
(c) Noyau optimal, $V_{max}=102$ échantillons.(d) Représentation du noyau optimal, $V_{max}=102$ échantillons.(e) Noyau optimal, $V_{max}=103$ échantillons.(f) Représentation du noyau optimal, $V_{max}=103$ échantillons.

FIG. 2.2: Distributions temps-fréquences du signal «route» défini par l'équation 2.30.

La figure 2.2(e) montre le noyau obtenu pour un volume $V_{\max}=103$ échantillons, c'est à dire un échantillon de plus. A partir de ce volume, le noyau optimal inclut une partie des termes d'interférences. Ceci est en fait une conséquence du fenêtrage des données inhérente au traitement d'un nombre fini de données et dont l'effet dans le plan d'ambiguïté est de pondérer, par une fenêtre triangulaire, l'amplitude des différents termes. A partir d'un certain volume limite (103 dans l'exemple), l'énergie de l'auto-terme devient tellement faible que l'algorithme préfère inclure un terme d'interférence à haute énergie, et ce malgré la pénalisation introduite par le volume nécessaire à la création du lien. Pour être plus précis, on aboutit à une situation analogue dès lors que l'énergie de l'auto-terme devient inférieure à l'énergie contenue sous le lien, divisée par le volume du lien. La représentation TF correspondante est cependant tout à fait acceptable. Même si l'interférence est visible, son amplitude est faible.

2.9.3 Discussion

La méthode du noyau optimal est très efficace et met clairement en évidence l'intérêt d'une méthode adaptative par rapport aux méthodes à noyau fixe. Elle a notamment permis de fournir des représentations TF interprétables sur presque tous les signaux réels (voir chapitre 5). Cependant, comme toute méthode, elle a ses limitations qu'il faut connaître pour une utilisation rationnelle. Elles sont essentiellement de deux types :

- Préférence des composantes énergétiques

C'est une conséquence stricte de la définition énergétique du critère. Ainsi pour un signal multicomposantes d'énergies très différentes, les composantes de faible énergie auront peu d'influence sur la forme de noyau. Cela a deux conséquences :

- La forme d'une structure à faible énergie est adaptée à la forme des structures les plus énergétiques.
- Si la forme d'une structure faible est incompatible avec la forme des structures énergétiques, elles n'apparaissent plus dans la représentation.

- Préférence des structures linéaires

Le noyau est contraint d'évoluer selon les rayons, donc les structures qui suivent un rayon sont avantagées par l'algorithme. Les conséquences sont les suivantes :

- Si l'algorithme a le choix entre une structure non-linéaire et une structure linéaire, la structure linéaire est avantagée.
- Les structures approximativement linéaires sont linéarisées suivant une direction moyenne.

Enfin, pour les composantes de forme complexe (lois de modulation non-linéaires), on peut souligner qu'il est délicat de définir un noyau «souhaitable» pour la réduction des interférences.

Plusieurs exemples où ces comportements peuvent être mis en évidence sont présentés aux chapitres 4 et 5. Ainsi, la tendance à préférer les structures linéaires se manifeste souvent sur les signaux vibratoires de boîte de vitesses qui contiennent des sinusoïdes pures rehaussées par rapport aux structures plus complexes correspondant aux défauts.

La tendance à la linéarisation est mise en évidence sur le signal «singauß» défini à l'équation 4.4. Il correspond à la superposition d'un signal modulé sinusoïdalement en fréquence et d'une gaussienne. La représentation du noyau optimal correspondant linéarise la structure

et de plus tend à interrompre la loi de la fréquence instantanée dans les régions de forte courbure.

2.10 Conclusions

Ce chapitre a permis de développer les idées principales relatives à l'analyse TF et notamment le problème de la réduction des interférences. Dans ce cadre, la méthode du noyau optimal a été présentée. C'est une méthode extrêmement efficace et qui, dans sa version rapide, offre à notre sens, le meilleur rapport qualité des résultats / coût de calcul. Nous l'avons utilisée intensivement pour l'analyse des signaux vibratoires. Elle présente cependant certaines limitations, inhérentes à son principe.

Ces limitations ont motivé le développement de nouvelles approches où le noyau est rendu dépendant du temps. La méthode présentée au chapitre suivant est en fait une généralisation de ces approches, dans le sens où le noyau est rendu dépendant de la position TF considérée.

Chapitre 3

Distributions de Wigner-Ville Locales

3.1 Motivations

La distribution de Wigner-Ville est définie comme une intégrale par rapport à la variable τ sur tout l'axe réel :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.1)$$

Considérons alors un signal dont la distribution de Wigner-Ville présente des composantes d'interférences temporelles, c'est-à-dire provenant de l'interaction du signal avec sa version décalée en temps. Si de plus, on suppose le signal constitué d'une somme de composantes séparables en temps¹, alors il existe une limite, notée τ_{\max} , qui permet de séparer, dans la distribution de Wigner-Ville, la contribution des auto-termes de celles des inter-termes :

$$\text{WV}(t, \omega) = \underbrace{\int_{\tau \in]-\tau_{\max}; \tau_{\max}[} \dots d\tau}_{\text{Contribution des auto-termes}} + \underbrace{\int_{\tau \notin]-\tau_{\max}; \tau_{\max}[} \dots d\tau}_{\text{Contribution des inter-termes}} .$$

L'idée sur laquelle est fondée la méthode proposée consiste à limiter les bornes d'intégration à la valeur τ_{\max} permettant de séparer au mieux la contribution des auto et inter-termes.

Ce point est illustré par l'exemple suivant. On considère le signal de la figure 3.1(a) composé de trois impulsions de Dirac avec une distance temporelle égale à T entre chaque impulsion :

$$s(t) = \delta(t - T) + \delta(t) + \delta(t + T). \quad (3.2)$$

Sa distribution de Wigner-Ville discrète représentée sur la figure 3.1(b) montre trois termes d'interférences situés aux instants $t = (-\frac{T}{2}, 0, \frac{T}{2})$:

- Instant $t = 0$

La distribution de Wigner-Ville évaluée en $t = 0$ correspond à la superposition d'un auto-terme constant, correspondant à $\delta(t)$, avec un terme d'interférence fortement oscillant résultant de l'interaction entre $\delta(t - T)$ et $\delta(t + T)$.

¹La notion de composantes séparables en temps (ou en fréquence) est définie de manière plus précise au paragraphe 3.3.1

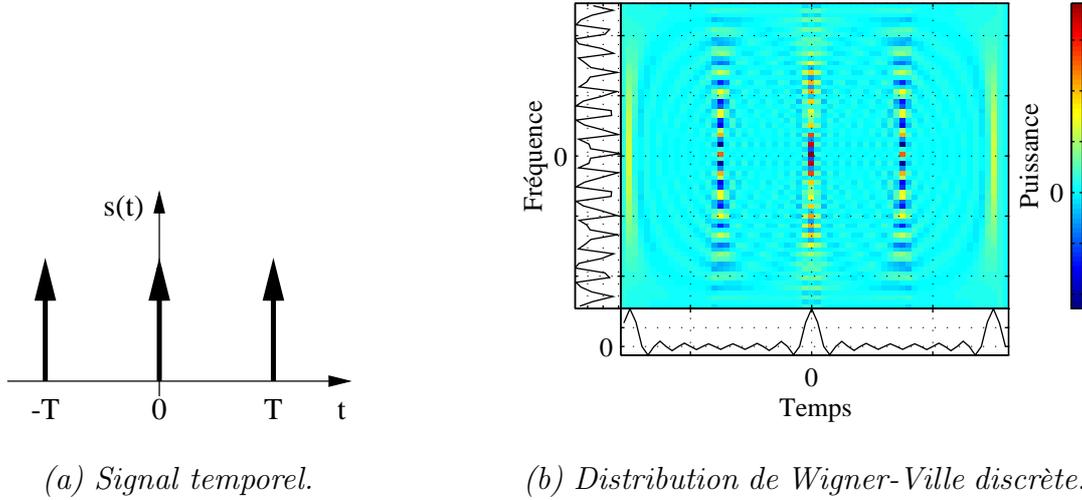


FIG. 3.1: Signal constitué de 3 impulsions équidistantes.

L'influence de ce terme est supprimée si on évalue l'intégrale sur l'intervalle $\tau \in]-T; T[$:

$$P(0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in]-T; T[} s^* \left(-\frac{\tau}{2} \right) s \left(\frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

– Instant $t = \pm \frac{T}{2}$

A ces instants, la distribution de Wigner-Ville résulte uniquement des interactions entre $\delta(t + T)$ et $\delta(t)$ pour $t = -\frac{T}{2}$, et $\delta(t)$ et $\delta(t - T)$ pour $t = \frac{T}{2}$. Les interférences ne sont prises en compte qu'à partir du décalage $\tau = \pm \frac{T}{2}$. Une limitation des bornes d'intégration à $\tau \in]-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}[$ permet leur suppression.

On considère alors la représentation TF obtenue en limitant l'intervalle d'intégration de la distribution de Wigner-Ville (eq.3.1) à $\tau \in]-\tau_{\max}; \tau_{\max}[$:

$$P(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in]-\tau_{\max}; \tau_{\max}[} s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

- Pour le résultat de la figure 3.2(a), τ_{\max} est fixé à T . A l'instant $t = 0$, l'inter-terme superposé à l'auto-terme a disparu. Mais les termes d'interférence à $t = \pm \frac{T}{2}$ sont encore visibles sans changement.
- Pour le résultat de la figure 3.2(b), τ_{\max} vaut $\frac{T}{2}$; la représentation correspondante ne présente plus aucune interférence.

Un certain nombre de points peuvent être mis en évidence, à la vue de cet exemple :

- Il est possible de réduire les interférences temporelles par une limitation des bornes d'intégration de la distribution de Wigner-Ville (eq. 3.1).
- Pour un signal donné, les limites optimales τ_{\max} dépendent du point (t, ω) considéré sur le plan TF. Ainsi, si on revient à l'exemple précédent, τ_{\max} optimal dépend de t :
 - $t = 0$: $\tau_{\max} = T$.
 - $t = \pm T$: $\tau_{\max} = \frac{T}{2}$.

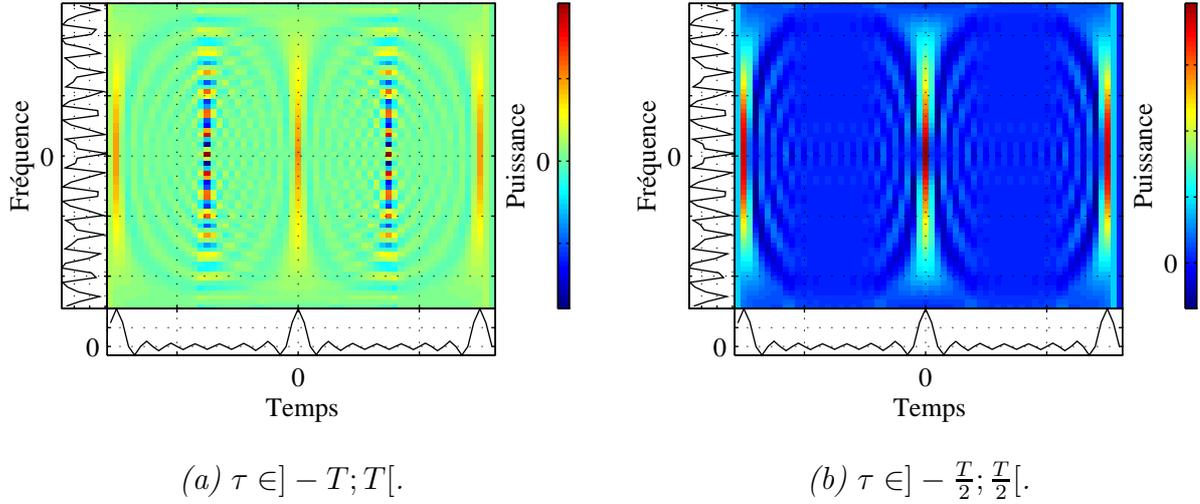


FIG. 3.2: Transformée de Wigner-Ville évaluée sur une plage d'intégration limitée.

- En tout autre point $\tau_{\max} = \infty$.

Sur la base de ces observations, l'idée d'une distribution TF locale, c'est-à-dire adaptée à chaque point sur le plan TF, est très satisfaisante. Exprimé en terme de noyau, cela revient à considérer un noyau différent pour chaque point du plan TF. Pour pallier les inconvénients des méthodes présentées au chapitre 2, principalement dûs à leur caractère global, nous proposons une nouvelle représentation TF. Lors de sa conception, nous nous sommes imposés les contraintes suivantes :

- Le noyau dépend explicitement du temps et de la fréquence. Il est adapté à chaque point du plan TF.
- Il n'impose pas de connaissance a priori sur la forme des structures TF.
- La mise en oeuvre de la méthode doit être simple et le nombre des paramètres à régler, réduit.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Les fonctions produit temporel et fréquentiel sont d'abord définies à partir des formes temporelles et fréquentielles de la distribution de Wigner-Ville. Leurs propriétés sont étudiées dans le cas des signaux séparables en temps puis séparables en fréquence. Dans le cas des signaux non-séparables, on traite le cas de deux exemples significatifs : un signal séparable dans le plan TF et un second totalement non-séparable (deux composantes qui se croisent). Les deux résultats clef de cette étude sont d'une part, l'existence de limites d'intégration $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$ respectivement optimales au sens de la réduction des interférences temporelles et fréquentielles. D'autre part, les fonctions produit temporel et fréquentiel ont des propriétés de séparation des contributions des auto-termes et inter-termes.

Sur la base de ces résultats, une approche pour l'estimation des limites optimales est proposée. Elle repose sur un lissage bidimensionnel des fonctions produit temporel et fréquentiel, associé à une stratégie de détection. La représentation TF finale, appelée distribution de Wigner-Ville Locale est obtenue en effectuant un lissage local de la distribution de Wigner-Ville, les dimensions du filtre de lissage se déduisant des valeurs $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$ estimées.

La notion de lissage local est présentée plus précisément au dernier paragraphe selon un formalisme qui permet d'interpréter la distribution de Wigner-Ville Locale en termes de noyau dépendant du temps et de la fréquence. Certaines propriétés sont également étudiées.

3.2 Définition des fonctions produit temporel et fréquentiel

3.2.1 La fonction produit temporel

Si on considère la définition de la distribution Wigner-Ville (eq. 3.1), on peut décomposer l'intégrale sur l'axe réel en la somme de deux intégrales sur le demi-axe des réels positifs² :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s^* \left(t + \frac{\tau}{2} \right) s \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (3.3)$$

qui, compte tenu de la relation $z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}$ peut s'écrire :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty o(\tau) \operatorname{Re} \left\{ s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} \right\} d\tau. \quad (3.4)$$

La fonction $o(u)$ définie par :

$$o(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & u = 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

permet la prise en compte de l'asymétrie à zéro.

On définit alors la fonction produit temporel $T_{t,\omega}(\tau)$ comme étant l'argument de l'intégrale 3.4 :

$$T_{t,\omega}(\tau) = o(\tau) \operatorname{Re} \left\{ s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} \right\}. \quad (3.6)$$

Celle-ci, intégrée de 0 à ∞ , donne la distribution de Wigner-Ville :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty T_{t,\omega}(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

²Dans le cas où le signal $s(t)$ contient une impulsion de Dirac $\delta(t)$, il est nécessaire de définir précisément laquelle des deux intégrales de l'équation 3.3 la prend effectivement en compte. On pourrait par exemple considérer la décomposition :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in [0; \infty[} s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in]0; \infty] } s^* \left(t + \frac{\tau}{2} \right) s \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Cependant elle n'est pas opportune parce qu'elle invalide l'équation 3.4. Une alternative est de considérer l'impulsion de Dirac comme un cas limite d'un signal satisfaisant la condition d'intégrabilité absolue (par exemple une gaussienne). Une telle approche conduit à pondérer l'impulsion de Dirac par un facteur $\frac{1}{2}$ si elle apparaît à l'instant $\tau = 0$.

3.2.2 La fonction produit fréquentiel

La distribution de Wigner-Ville admet une expression duale de la forme 3.1 qui utilise, non plus le signal $s(t)$, mais sa transformée de Fourier : $S(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$. Elle est donnée par :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int S\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) e^{-jt\theta} d\theta \quad (3.8)$$

En procédant de manière similaire au cas précédent, on peut écrire :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty o(\theta) \operatorname{Re} \left\{ S\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) e^{-jt\theta} \right\} d\theta. \quad (3.9)$$

On définit alors la fonction produit fréquentiel comme étant l'argument de l'intégrale 3.9 :

$$F_{t,\omega}(\theta) = o(\theta) \operatorname{Re} \left\{ S\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) e^{-jt\theta} \right\} \quad (3.10)$$

et sa relation avec la distribution Wigner-Ville est donnée par :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F_{t,\omega}(\theta) d\theta. \quad (3.11)$$

Les fonctions produits fréquentiel et temporel peuvent être considérées comme duales car l'une se déduit de l'autre par la règle de substitution :

$$\begin{aligned} s(t) &\leftrightarrow S^*(\omega) \\ t &\leftrightarrow \omega \\ \tau &\leftrightarrow \theta. \end{aligned}$$

Pour conclure ce paragraphe, on peut souligner que l'intérêt des décompositions 3.3 et 3.9 réside dans le fait qu'elles permettent de faire apparaître des arguments qui sont des fonctions réelles des variables t , ω , τ (cf. eq. 3.4 et 3.9). Leur étude est plus simple que celles des fonctions complexes $s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau}$ et $S\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) e^{-jt\theta}$.

3.3 Propriétés des fonctions produits temporel et fréquentiel

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement des fonctions produits temporel (3.6) et fréquentiel (3.10). Pour cela, on considère successivement le cas des signaux séparables en temps, séparables en fréquence, puis non-séparables.

3.3.1 Cas des signaux séparables en temps

Considérons un signal $s(t)$ constitué de la somme de deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ séparables en temps, c'est à dire, dont les supports $T_1 =]-\infty; t_1]$, $T_2 = [t_2; \infty[$ sont disjoints ($T_1 \cap T_2 = \emptyset$)

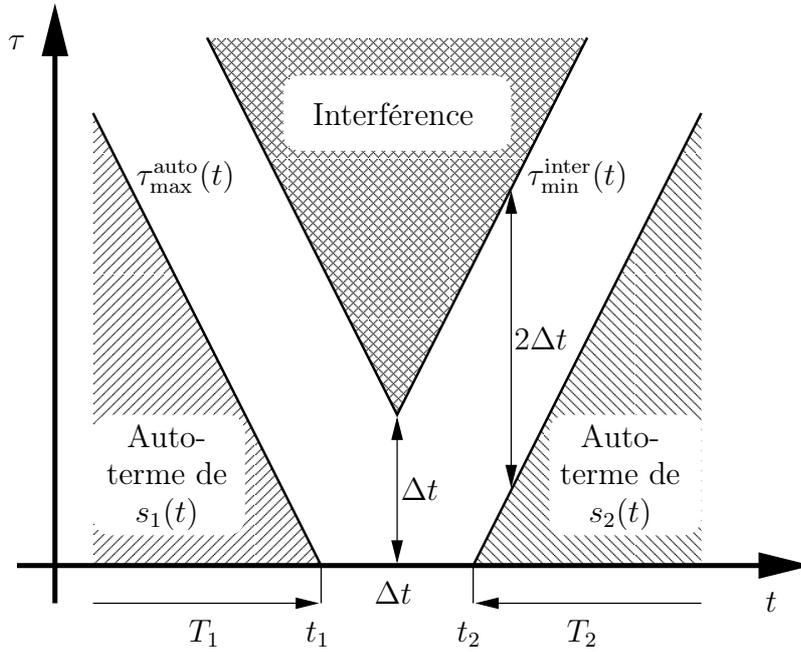


FIG. 3.3: Support dans le plan $t - \tau$ de la fonction $T_{t,\omega}(\tau)$ du signal 3.12 séparable en temps.

et séparés par un intervalle $]t_1; t_2[$ de longueur $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s_1(t) + s_2(t) & (3.12) \\
 s_1(t) &= 0 \quad \text{si } t \notin T_1 =]-\infty; t_1] \\
 s_2(t) &= 0 \quad \text{si } t \notin T_2 = [t_2; \infty[\\
 \Delta t &= t_2 - t_1 \quad t_2 > t_1
 \end{aligned}$$

3.3.1.1 Support de la fonction produit temporel

La fonction produit temporel de ce signal est donnée par :

$$\begin{aligned}
 T_{t,\omega}(\tau) &= \Re \left\{ \underbrace{\left(s_1^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right) e^{-j\omega\tau}}_{\text{auto-termes de } s_1} + \underbrace{\left(s_2^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_2 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right) e^{-j\omega\tau}}_{\text{auto-termes de } s_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left(s_1^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_2 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + s_2^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right) e^{-j\omega\tau}}_{\text{interférence}} \right\} \cdot o(\tau). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Dans l'expression 3.13, les contributions des auto-termes et inter-termes ont été rendues explicites.

Il s'agit maintenant d'étudier leur comportement dans le plan $t - \tau$. Les supports dans le plan $t - \tau$ des différents termes de l'équation 3.13 sont représentés sur la figure 3.3. L'auto-terme associé à $s_1(t)$ se situe dans le demi-plan $\tau < 2(t - t_1)$ (noté $s_1(t)$ sur la figure) tandis que celui associé à $s_2(t)$ est localisé dans le demi-plan $\tau < 2(t - t_2)$. Les inter-termes sont pour

leur part, dans la région du plan $t - \tau$ correspondant à :

$$\begin{cases} \tau > 2(t - t_1) \\ \tau > -2(t - t_2). \end{cases}$$

Dans la zone intermédiaire, la fonction produit temporel est identiquement nulle. En d'autres termes, dans le cas des signaux séparables en temps, la fonction produit temporel possède la propriété de séparabilité, dans le sens où les supports des termes correspondant aux auto-termes sont disjoints du support des inter-termes. Si de plus, on examine l'évolution de $T_{\omega,t}(\tau)$ suivant l'axe τ , alors il existe des valeurs $\tau_{\max}^{\text{auto}}(t, \omega)$, $\tau_{\min}^{\text{inter}}(t, \omega)$, telles que :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} T_{t,\omega}^{\text{auto}}(\tau) \neq 0 \\ T_{t,\omega}^{\text{inter}}(\tau) = 0 \end{array} \right\} \forall t, \omega, \tau < \tau_{\max}^{\text{auto}}(t) \\ \left. \begin{array}{l} T_{t,\omega}^{\text{auto}}(\tau) = 0 \\ T_{t,\omega}^{\text{inter}}(\tau) \neq 0 \end{array} \right\} \forall t, \omega, \tau \geq \tau_{\min}^{\text{inter}}(t) \end{aligned}$$

où les valeurs limites sont définies par :

$$\tau < \tau_{\max}^{\text{auto}}(t) = \begin{cases} -2(t - t_1) & \text{si } t \leq t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ 2(t - t_2) & \text{si } t \geq t_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\tau \geq \tau_{\min}^{\text{inter}}(t) = \begin{cases} -2(t - t_2) & \text{si } t < \frac{t_1+t_2}{2} \\ 2(t - t_1) & \text{si } t \geq \frac{t_1+t_2}{2}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Cette propriété est plus forte que la précédente puisque la fonction $T_{t,\omega}(\tau)$ possède la propriété de séparabilité selon l'axe τ . En simplifiant, on peut dire que les auto-termes sont concentrés autour de $\tau = 0$ alors que les inter-termes sont repoussés à des valeurs de τ plus grandes.

3.3.1.2 Comportement oscillant de la fonction produit temporel

Le problème est maintenant d'étudier le comportement de l'amplitude de la fonction produit temporel selon les différents axes t , ω , τ . Pour commencer, considérons le cas du signal $s(t)$ constitué de deux rectangles d'amplitudes constantes et de durées finies :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad s_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in]t_0; t_1[\\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} 1 & t \in]t_2; t_3[\\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On peut alors écrire la fonction produit temporel :

$$T_{t,\omega}(\tau) = I_1(t, \tau) \cos(\omega\tau) o(\tau) + I_2 \cos(\omega\tau) o(\tau) + I_{1,2}(t, \tau) \cos(\omega\tau)$$

où $I_1(t, \tau)$ est la fonction indicatrice du support de l'auto-terme associé à $s_1(t)$ et $I_{1,2}(t, \tau)$ est la fonction indicatrice du support de l'interférence (cf. fig. 3.4).

Le comportement de la fonction $T_{t,\omega}(\tau)$ est le suivant :

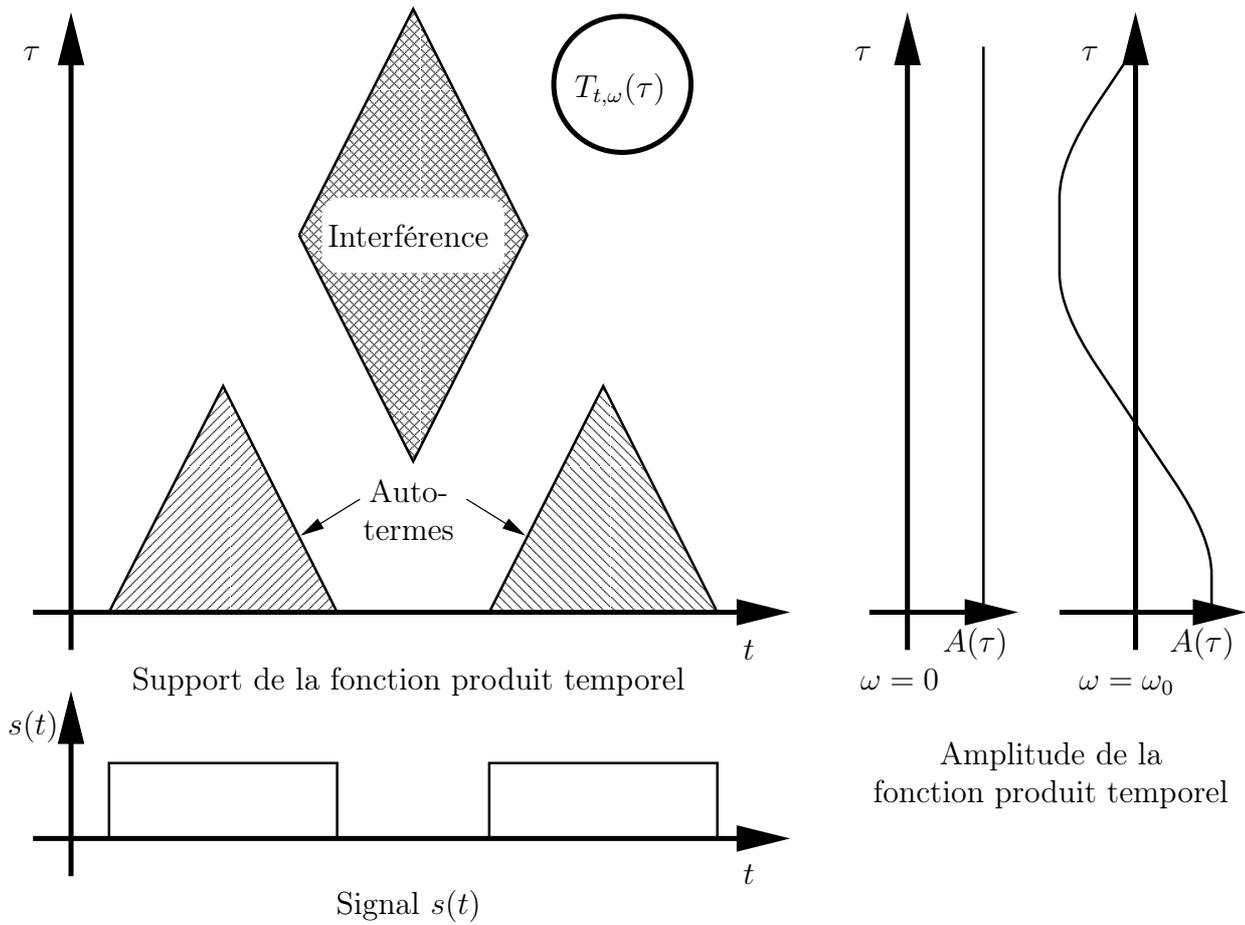


FIG. 3.4: La fonction $T_{t,\omega}(\tau)$ pour un signal composé de deux rectangles d'amplitudes constantes et de durées finies. La fonction d'amplitude $A(\tau) = \cos(\omega\tau)$ est tracée à droite pour les cas $\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$ petit, positif.

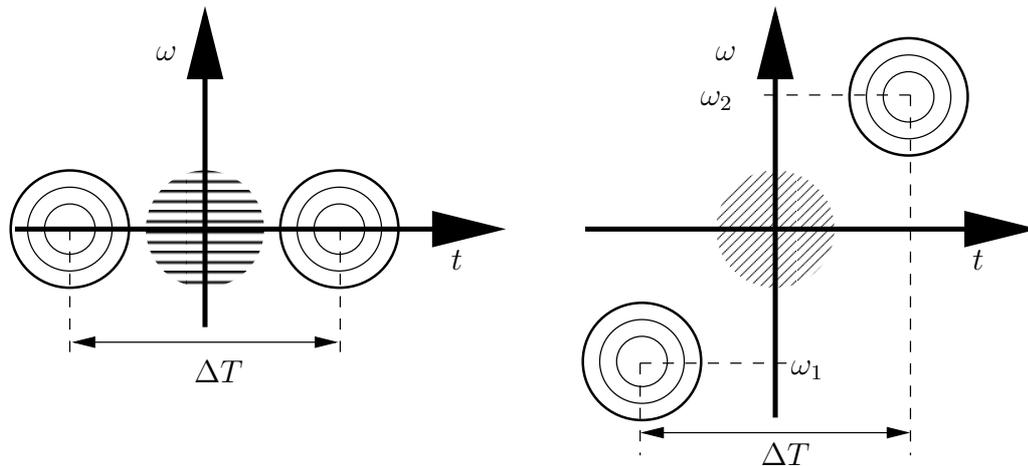


FIG. 3.5: Deux atomes TF dans des configurations différentes et l'oscillation d'interférence.

- L'amplitude $I(t, \tau)$ de chacun des termes est modulée par la fonction $\cos(\omega\tau)$. Deux exemples sont donnés sur la droite de la figure 3.4. Le premier correspond à $\omega = 0$, le second à une fréquence ω du même ordre de grandeur que $\frac{1}{4\Delta T}$ où ΔT est l'écart temporel entre $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

A la vue de cet exemple, on peut dégager les points suivants :

- Les auto-termes ne présentent pas de caractère oscillant selon l'axe t mais oscillent selon $\cos(\omega\tau)$. Ils sont situés au voisinage de l'axe $\tau = 0$; la phase initiale de $\cos(\omega\tau)$ est donc toujours nulle. Au voisinage de $\omega = 0$, l'auto-terme de $T_{t,\omega}(\tau)$, intégré sur le demi-axe des $\tau \geq 0$, est donc positif. Quand ω augmente, la valeur de l'intégrale diminue. Dans le cas particulier du signal rectangle, et de manière plus générale, dans le cas de tout signal $s(t)$ à support temporel fini, l'intégrale peut devenir positive, nulle ou négative selon la valeur de ω . Cependant, en valeur absolue, elle a une décroissance en $\frac{1}{\omega}$ (enveloppe de la fonction sinc).
- L'amplitude du terme d'interférence est, elle aussi, modulée par la fonction $\cos(\omega\tau)$. Cependant son éloignement de l'axe $\tau = 0$ se traduit par le fait que la phase initiale de $\cos(\omega\tau)$ n'est plus nulle. Le terme d'interférence intégré selon τ peut indifféremment être positif, négatif ou nul. La valeur absolue de l'intégrale est maximale en $\omega = 0$ et elle décroît également en $\frac{1}{\omega}$.

Le cas particulier étudié correspond en fait au cas de deux «atomes» TF, disjoints en temps et centrés sur $\omega = 0$ (cf. fig 3.5).

Une généralisation possible correspond au cas où un des atomes TF est aussi décalé en fréquence, l'écart temporel restant constant (cf. fig. 3.5, droite).

Pris individuellement, chacun des termes aura le même comportement selon les axes ω et τ , à la différence près que ce comportement sera observé à la fréquence ω_1 (respectivement ω_2) pour l'auto-terme associé à $s_1(t)$ (respectivement $s_2(t)$) et à la fréquence $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ pour l'inter-terme. En revanche, cette géométrie des atomes TF se caractérise par l'apparition d'une oscillation de $T_{t,\omega}(\tau)$ selon l'axe t . La périodicité de cette oscillation est inversement proportionnelle à l'écart fréquentiel $\omega_2 - \omega_1$ entre les deux atomes. Cependant, cette oscilla-

tion n'est en rien liée à l'écart temporel entre les deux atomes. Elle n'est pas caractéristique d'une interférence temporelle.

La gamme fréquentielle pour laquelle la fonction $T_{t,\omega}(\tau)$ est significativement différente de 0 est liée à la largeur de bande (équivalente) des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Un cas limite correspond à deux impulsions de Dirac décalées en temps. Chacun des termes $s_1(t)$ et $s_2(t)$ a alors une largeur de bande infinie. Ce cas est traité à titre d'exemple à la fin du paragraphe.

Les auto-termes de $T_{t,\omega}(\tau)$ ne présentent pas de caractère oscillant selon ω ; ceci est principalement dû à la phase initiale nulle de $\cos(\omega\tau)$ sur les auto-termes. En revanche, les inter-termes oscillent fortement selon ω à la fréquence ΔT (écart temporel).

3.3.1.3 Fonction produit fréquentiel

On désire maintenant étudier le comportement de la fonction produit fréquentiel, toujours dans le cas d'un signal séparable en temps. De manière à simplifier l'analyse, et parce que le cas général n'est pas plus informatif, on considère le cas particulier suivant :

$$s(t) = s_1(t) + s_1(t - T_0).$$

La transformée de Fourier de $s(t)$ est alors donnée par :

$$S(\omega) = S_1(\omega) (1 + e^{-jT_0\omega}).$$

Sans perdre en généralité, on supposera que $s_1(t)$ est centré sur $t = 0$ et que $S_1(\omega)$ est centré sur $\omega = 0$. La fonction produit fréquentiel de ce signal s'exprime par :

$$F_{t,\omega}(\theta) = \underbrace{\operatorname{Re} \left\{ S_1 \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S_1^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) \right\}}_{A(\omega,\theta)} \cdot \left(\underbrace{\cos(\theta t) + \cos(\theta(T_0 - t))}_{\text{auto-termes}} + 2 \underbrace{\cos(T_0\omega) \cos \left(\theta \left(t - \frac{T_0}{2} \right) \right)}_{\text{interférence}} \right). \quad (3.16)$$

Le terme $A(\omega, \theta)$ correspond à la partie de $F_{t,\omega}(\theta)$ indépendante de t . Il est centré sur $\omega = 0$ et on peut, de plus, raisonnablement supposer qu'il décroît quand $\omega \rightarrow \pm\infty$ et $\theta \rightarrow \infty$. Le cas des deux impulsions de Dirac est, une fois encore, un cas limite puisque $A(\omega, \theta)$ devient alors constant selon les axes ω et θ .

La fonction produit fréquentiel ne possède pas la propriété de séparabilité pour les signaux séparables en temps. Le deuxième terme dépend de t et sa valeur est donc modifiée selon que l'on se positionne sur un auto-terme ou un inter-terme. Il modifie $A(\omega, \theta)$ et introduit en particulier un comportement oscillant selon ω . Ce point est discuté sur les deux cas suivants :

- Sur un auto-terme, à $t = 0$ ou $t = T_0$, l'expression 3.16 devient :

$$F_{t=0,\omega}(\theta) = A(\omega, \theta) \left(\underbrace{1 + \cos(\theta T_0)}_{\text{auto-termes}} + 2 \underbrace{\cos(T_0\omega) \cos \left(-\theta \frac{T_0}{2} \right)}_{\text{interférence}} \right)$$

La contribution de l'auto-terme se caractérise par la modulation de $A(\omega, \theta)$ par la fonction $1 + \cos(\theta T_0)$ qui oscille selon θ à la fréquence T_0 . La contribution de l'inter-terme se manifeste, quant à elle, par des oscillations selon θ à la fréquence $\frac{T}{2}$ et selon ω à la fréquence T_0 .

- Sur l'interférence $t = \frac{T_0}{2}$, l'expression 3.16 s'écrit :

$$F_{t=\frac{T_0}{2}, \omega}(\theta) = A(\omega, \theta) \left(\underbrace{2 \cos\left(\theta \frac{T_0}{2}\right)}_{\text{auto-termes}} + \underbrace{2 \cos(T_0 \omega)}_{\text{interférence}} \right). \quad (3.17)$$

Les auto-termes oscillent dans le sens θ avec la fréquence $\frac{T_0}{2}$, en revanche, le terme d'interférence est indépendant de θ . Il oscille simplement selon ω à la fréquence T_0 .

Sur cet exemple, on peut mettre en évidence que la fonction produit fréquentiel ne possède pas de propriété de séparabilité pour les signaux séparables en temps. Au contraire, elle tend à répartir cette information dans tout le plan $\omega - \theta$.

Le cas séparable en temps se caractérise essentiellement par l'apparition d'une composante oscillante selon θ à la fréquence T_0 (écart temporel). C'est en fait un comportement similaire à celui engendré par un écart fréquentiel sur la fonction produit temporel (cf. paragraphe 3.3.1.2).

3.3.1.4 Représentation de Wigner-Ville Locale dans le cas des signaux séparables en temps

Dans le cas des signaux séparables en temps (eq. 3.12), on peut obtenir une représentation TF sans interférence, en limitant les bornes d'intégration à une valeur $\tau_{\max}(t)$. Cette distribution TF appelée Wigner-Ville Locale (dans le cas des signaux séparables dans le temps) est définie par :

$$\begin{aligned} \text{WVL}^T(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in]-\tau_{\max}(t); \tau_{\max}(t)[} s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\tau \in [0; \tau_{\max}(t)[} T_{t, \omega}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Compte tenu des propriétés du support de la fonction produit temporel, la valeur $\tau_{\max}(t)$ doit satisfaire les conditions suivantes :

- $\tau_{\max}(t) < \tau_{\min}^{\text{inter}}(t)$
Cette contrainte assure que tout terme interférentiel sera supprimé (voir figure 3.3). Cette borne supérieure est donnée explicitement à l'équation 3.15.
- $\tau_{\max}(t) > \tau_{\max}^{\text{auto}}(t)$
Cette contrainte assure que tous les auto-termes de la fonction produit fréquentiel sont pris en compte. La valeur de cette borne inférieure est donnée à l'équation 3.14.

La valeur limite $\tau_{\max}(t)$ doit donc satisfaire :

$$\tau_{\max}(t) \in [\tau_{\max}^{\text{auto}}(t); \tau_{\min}^{\text{inter}}(t)].$$

Afin de conserver un maximum de résolution TF, on choisira :

$$\tau_{\max}(t) = \tau_{\min}^{\text{inter}}(t). \quad (3.19)$$

Dans le cas d'un signal composé de deux atomes TF décalés en temps, les propriétés du support de la fonction produit temporel ne sont plus qu'approximativement vérifiées. En fait, un recouvrement des auto et inter-termes de la fonction produit temporel est possible. Cependant, dans les zones correspondantes, sa valeur est faible. Dans ce cas, il est souhaitable de fixer $\tau_{\max}(t)$ à une valeur intermédiaire :

$$\tau_{\max}(t) \in [\tau_{\min}^{\text{inter}}(t); \tau_{\max}^{\text{auto}}(t)].$$

La limitation des bornes d'intégration dans l'équation 3.18 peut s'interpréter comme un filtrage local (ie. dépendant du temps) de la distribution de Wigner-Ville. En effet, en introduisant une fenêtre rectangulaire de durée $2\tau_{\max}(t)$, on peut écrire l'équation 3.18 :

$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \text{rect}_{\tau_{\max}}(\tau) \cdot s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.20)$$

c'est à dire :

$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left\{ \text{rect}_{\tau_{\max}}(\tau) \cdot s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right\}.$$

La transformée de Fourier d'un produit correspondant à une convolution dans le domaine des fréquences, on a :

$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left\{ \text{rect}_{\tau_{\max}}(\tau) \right\} \star_{(\omega)} \mathcal{F} \left\{ s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\}.$$

c'est à dire :

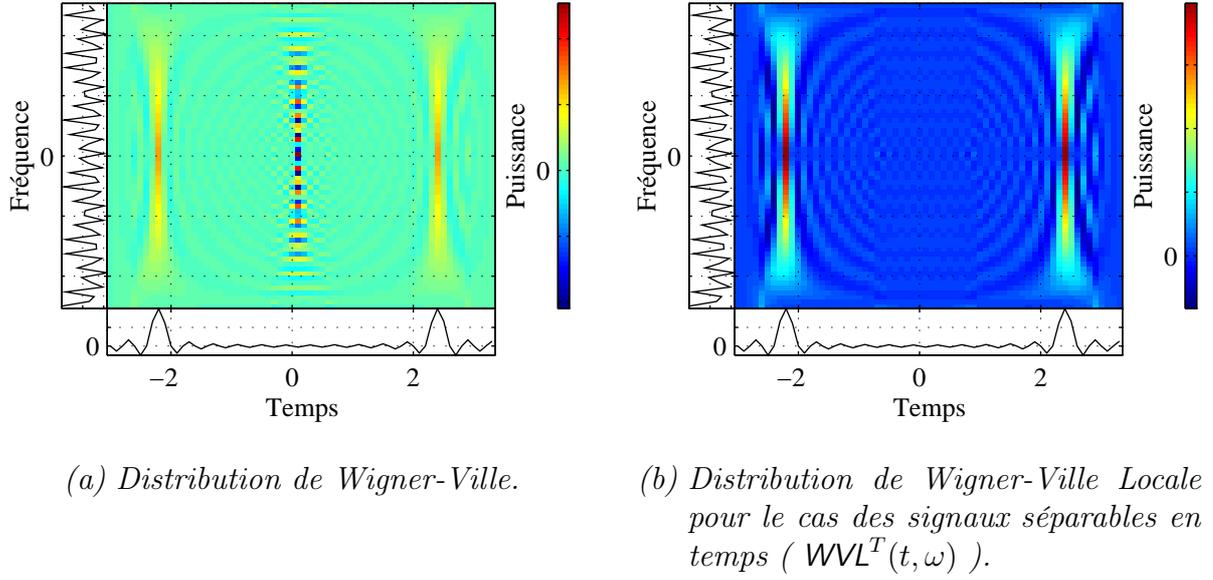
$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left\{ \text{rect}_{\tau_{\max}}(\tau) \right\} \star_{(\omega)} \text{WV}(t, \omega). \quad (3.21)$$

avec

$$\Phi_{\tau_{\max}}^T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left\{ \text{rect}_{\tau_{\max}}(t) \right\} = \frac{\tau_{\max}}{\pi} \text{sinc}(\tau_{\max}\omega). \quad (3.22)$$

La procédure de limitation des bornes de l'intégrale (eq 3.18) à $\tau_{\max}(t)$ peut être vue comme un lissage de la distribution de Wigner-Ville dans le sens ω avec une fonction sinc de fréquence $\frac{\tau_{\max}(t)}{2\pi}$.

Ce filtre correspond à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\tau_{\max}(t)$. Ce point de vue permet une interprétation intéressante. Deux composantes TF séparées par une distance temporelle au moins égale à ΔT engendrent un terme d'interférences localisé au milieu des deux composantes. Une limitation de l'intégrale à $\tau_{\max}(t)$ permet donc d'éliminer tout terme d'interférence engendré par les composantes ayant une distance temporelle supérieure à $2\tau_{\max}(t)$.

FIG. 3.6: Représentations TF du signal «dirac» avec $T_0 = 2.3$.

3.3.1.5 Exemple «dirac»

Pour illustrer le comportement respectif des fonctions produit temporel et fréquentiel, on considère le signal constitué de la somme de deux impulsions de Dirac décalées en temps :

$$s_{\text{dirac}}(t) = \frac{1}{2} (\delta(t - T_0) + \delta(t + T_0)) \quad (3.23)$$

dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$S_{\text{dirac}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(T_0\omega). \quad (3.24)$$

Sa distribution de Wigner-Ville, donnée par :

$$WV(t, \omega) = \frac{1}{8\pi} \underbrace{(\delta(t - T_0) + \delta(t + T_0))}_{\text{auto-termes}} + \underbrace{2\delta(t) \cos(2T_0\omega)}_{\text{interférence}} \quad (3.25)$$

est représentée sur la figure 3.6(a). Le terme d'interférence est visible à $t = 0$.

Un calcul explicite des fonctions produit temporel et fréquentiel donne :

$$T_{\text{dirac } t, \omega}(\tau) = \underbrace{\frac{1}{8} \delta(\tau) (\delta(t - T_0) + \delta(t + T_0))}_{\text{auto-termes}} + \underbrace{\frac{1}{4} \cos(2T_0\omega) \delta(t) \delta(\tau - 2T_0)}_{\text{interférence}}, \quad (3.26)$$

$$F_{\text{dirac } t, \omega}(\theta) = \underbrace{\frac{\text{o}(\theta)}{8\pi} (\cos(\theta(t - T_0)) + \cos(\theta(t + T_0)))}_{\text{auto-termes}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \cos(2T_0\omega) \cos(t\theta)}_{\text{interférence}}. \quad (3.27)$$

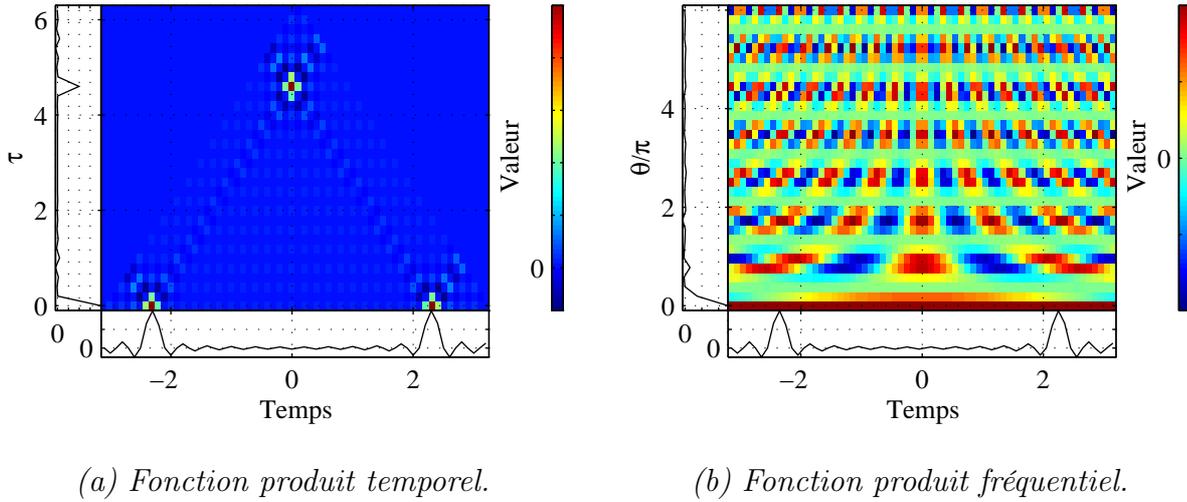


FIG. 3.7: Fonctions produit temporel et fréquentiel du signal d'exemple «dirac» sur $\omega = 0$ avec $T_0 = 2.3$. Le signal est indiqué dans la marge inférieure. La marge gauche montre le cumulatif dans le sens temporel. Un décalage fréquentiel ($\omega \neq 0$) influe sur le signe des termes éloignés de $\tau = 0$.

La figure 3.7 représente les fonctions $T_{\text{dirac } t, \omega}(\tau)$ et $F_{\text{dirac } t, \omega}(\theta)$ pour le cas $\omega = 0$. Sur la fonction produit temporel, les auto-termes sont à proximité de l'origine de l'axe τ tandis que les inter-termes sont situés à une valeur de τ égale à la distance temporelle des termes engendrant l'interférence. En revanche la fonction produit fréquentiel ne permet pas de séparer l'interférence et les auto-termes; au contraire, leurs contributions sont distribuées sur tout le volume $\theta - t - \omega$.

La formule 3.19 nous fournit les limites optimales pour calculer la représentation de Wigner-Ville Locale. Avec $t_1 = -T_0$, $t_2 = T_0$ et $T_0 = 2, 3$, on obtient :

$$\tau_{\max}^T(t) = \begin{cases} -2(t - 2, 3) & \text{si } t < 0 \\ 2(t + 2, 3) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une illustration de l'interprétation en termes de lissage est donnée par la figure 3.8.

Sur le terme d'interférence, la limite d'intégration vaut $\tau_{\max}(0) = 2T_0$, ce qui donne une fonction de lissage $\Phi_{\tau_{\max}(0)}^T(\omega)$ égale à :

$$\Phi_{2T_0}^T(\omega) = \frac{4T_0}{2\pi} \text{sinc}(2T_0\omega)$$

de même fréquence de coupure que la fréquence de l'interférence (voir le deuxième terme dans l'équation 3.25).

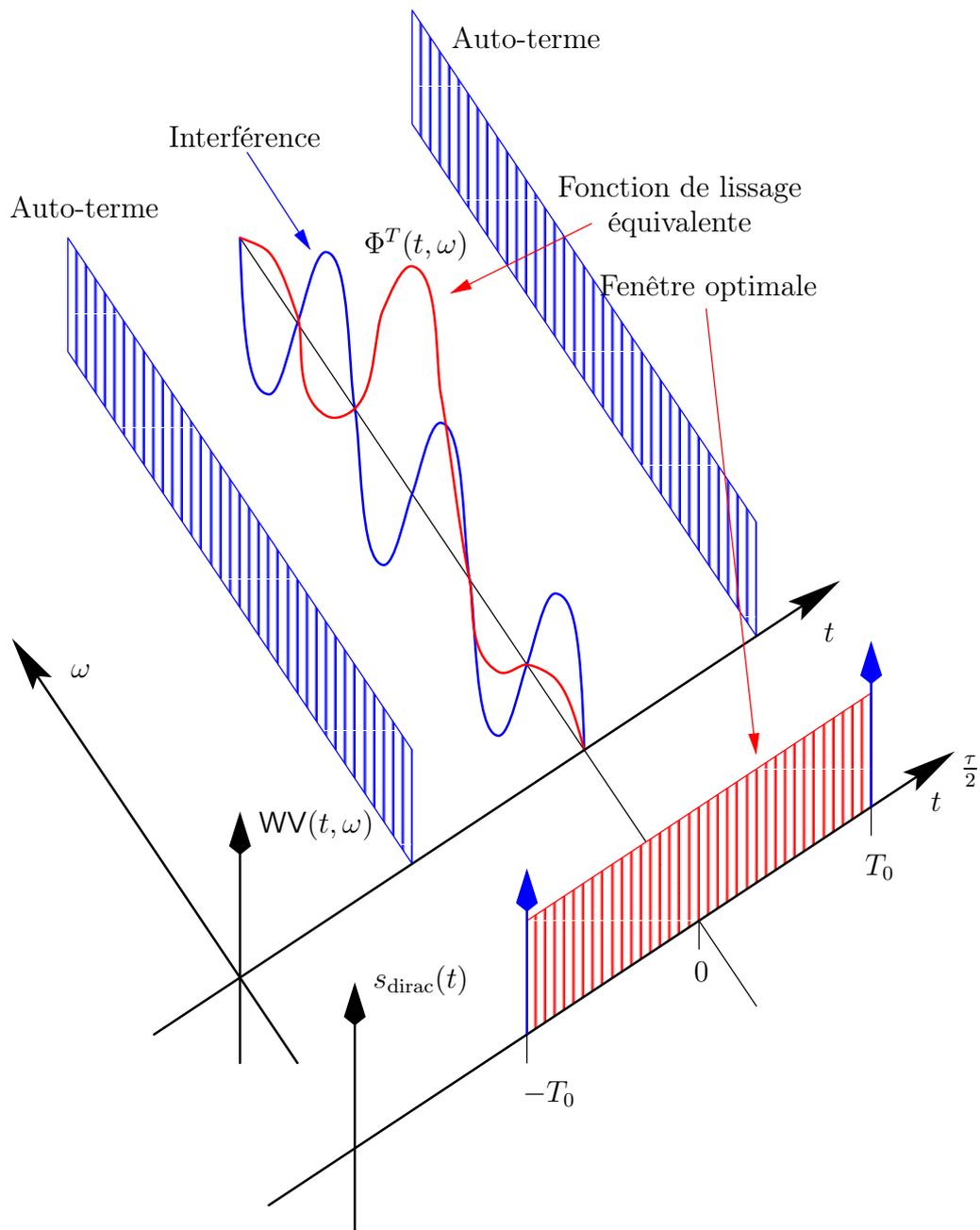


FIG. 3.8: La distribution de Wigner-Ville et le signal «dirac» sont représentés en bleu. Une interférence est située à $t = 0$. La méthode de Wigner-Ville Locale introduit à l'instant $t = 0$, une fenêtre optimale de longueur $2T_0$, indiquée en rouge. Ce fenêtrage de la distribution de Wigner-Ville à l'instant $t = 0$ est équivalent à un lissage de la distribution avec la fonction sinc représentée en rouge.

3.3.2 Cas des signaux séparables en fréquence

Un signal séparable en fréquence peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= S_1(\omega) + S_2(\omega) & (3.28) \\
 S_1(\omega) &= 0 \quad \text{si } \omega \notin \Omega_1 =]-\infty; \omega_1] \\
 S_2(\omega) &= 0 \quad \text{si } \omega \notin \Omega_2 = [\omega_2; \infty[\\
 \Delta\omega &= \omega_2 - \omega_1 \quad \omega_2 > \omega_1
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la dualité entre les fonctions produit temporel et fréquentiel, leurs propriétés dans le cas des signaux séparables en fréquence peuvent se déduire de l'étude précédente, effectuée dans le cas séparable en temps.

Ainsi la fonction produit fréquentiel, donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_{t,\omega}(\theta) &= \mathcal{R}e \left\{ \underbrace{o(\theta) \left(S_1 \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S_1^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) + S_2 \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S_2^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) \right)}_{\text{auto-terme}} e^{-jt\theta} + \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left(S_1 \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S_2^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) + S_2 \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S_1^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) \right)}_{\text{interférences}} e^{-jt\theta} \right\}. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

possède la propriété de séparabilité selon l'axe θ et son comportement sera identique à celui de la fonction produit temporel.

En revanche, la fonction produit temporel ne possède aucune propriété de séparabilité et tend à répartir la contribution des inter et auto-termes dans tout l'espace $t - \omega - \theta$.

Ainsi, si on considère le signal :

$$s(t) = s_1(t) (1 + e^{j\omega_0 t}). \quad (3.30)$$

Sa fonction produit temporel donnée par :

$$\begin{aligned}
 T_{t,\omega}(\tau) &= \underbrace{o(\theta) \cdot \mathcal{R}e \left\{ s_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) s_1^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\}}_{A(t,\tau)} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\underbrace{\cos(\tau\omega) + \cos(\tau(\omega - \omega_0))}_{\text{auto-termes}} + 2 \underbrace{\cos \left(\tau \left(\omega - \frac{\omega_0}{2} \right) \right) \cos(\omega_0 t)}_{\text{interférence}} \right) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

est structurellement identique à la fonction produit fréquentiel 3.16.

3.3.2.1 Représentation de Wigner-Ville Locale dans le cas des signaux séparables en fréquence

La représentation de Wigner-Ville Locale dans le cas des signaux séparables en fréquence consiste à limiter les bornes d'intégration de la forme fréquentielle de la distribution de

Wigner-Ville (eq. 3.8) à une valeur $\theta_{\max}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \text{WVL}^F(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta \in]-\theta_{\max}(\omega); \theta_{\max}(\omega)[} S\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) S^*\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) e^{-jt\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta \in [0; \theta_{\max}(\omega)[} F_{t, \omega}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

De manière duale au cas séparable en temps, cette limite ne dépend que de la fréquence ω et est donnée par :

$$\theta_{\max}^F(\omega) = \begin{cases} -2(\omega - \omega_2) & \text{si } \omega < \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ 2(\omega - \omega_1) & \text{si } \omega \geq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{cases}. \quad (3.33)$$

L'action de la limitation de l'intégrale est équivalente à un lissage local de la distribution de Wigner-Ville suivant l'axe du temps par une fonction sinc de fréquence $\frac{\theta_{\max}(\omega)}{2\pi}$:

$$\text{WVL}^F(t, \omega) = \Phi_{(t)}^F \star_{(t)} \text{WV}(t, \omega) \quad (3.34)$$

$$\Phi_{(t)}^F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left\{\text{rect}_{\theta_{\max}}(\theta)\right\} = \frac{2\theta_{\max}}{2\pi} \text{sinc}(\theta_{\max}t). \quad (3.35)$$

3.3.3 Signaux non-séparables

Ce paragraphe a pour but d'étendre l'étude au cas plus général des signaux non-séparables. Pour cela, on définit la distribution de Wigner-Ville Locale pour cette classe de signaux. Puis on étudie les propriétés des fonctions produits temporel et fréquentiel pour définir les limites d'intégration optimales au sens de la réduction des interférences. Cette étude n'est pas faite dans le cas général, mais sur deux exemples que nous avons jugés significatifs, parce qu'ils correspondent à des cas limites et qu'ils permettent d'en déduire les limites optimales et donc, la distribution de Wigner-Ville Locale correspondante, dans le cas de signaux plus complexes.

3.3.3.1 Représentation de Wigner-Ville Locale

Comme cela a été montré précédemment dans le cas séparable en temps, on peut éliminer les interférences en lissant la distribution de Wigner-Ville selon ω par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\tau_{\max}(t)$ (un lissage différent est effectué pour chaque valeur de t). De manière duale, dans le cas séparable en fréquence, l'élimination des interférences se fait par un filtrage passe-bas local (ie. dépendant de la fréquence) à la fréquence de coupure $\theta_{\max}(\omega)$.

Dans le cas non-séparable, l'élimination des interférences peut se faire selon les deux axes avec des filtres bidimensionnels :

$$\text{WVL}(t, \omega) = \Phi(t, \omega) \star \text{WV}(t, \omega). \quad (3.36)$$

On peut, par exemple, choisir un filtre de lissage séparable, de la forme :

$$\Phi(t, \omega) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left\{\text{rect}_{\tau_{\max}}(\tau)\right\}}_{\Phi^T(\omega)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left\{\text{rect}_{\theta_{\max}}(\theta)\right\}}_{\Phi^F(t)}. \quad (3.37)$$

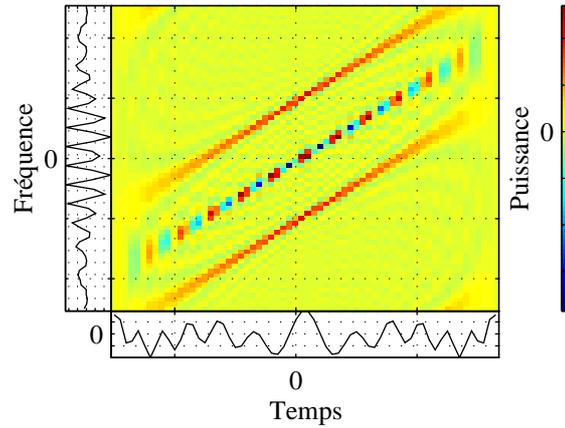


FIG. 3.9: Distribution de Wigner-Ville du signal «route» (eq. 3.38).

On reviendra plus en détail au paragraphe 3.5 sur les possibilités de choix des filtres. Cependant, quelque soit la solution retenue, elle sera fonction des valeurs $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$ qu'il convient de définir. Ceci fera l'objet des deux paragraphes suivants.

Soulignons encore que les valeurs $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$ dépendent du point TF considéré. La valeur de Wigner-Ville Locale en un point TF (t_0, ω_0) est obtenue à partir de l'équation 3.36 avec les paramètres $\tau_{\max}(t_0, \omega_0)$ et $\theta_{\max}(t_0, \omega_0)$ maintenus constants lors de l'évaluation de l'intégrale de convolution. En fait, les variables t et ω doivent être considérées comme différentes suivant qu'elles sont relatives à τ_{\max} ou à la convolution. Cependant pour ne pas alourdir la présentation, on utilise la même notation. Ce point est présenté de manière plus formelle au paragraphe 3.5.

3.3.3.2 Exemple «route»

Le premier exemple considéré est la somme de deux chirps à variation de fréquence linéaire avec la pente TF m ($\omega(t) = mt \pm \omega_0$) :

$$\begin{aligned} s_{\text{route}}(t) &= \underbrace{e^{j(\frac{1}{2}mt^2 + \omega_0 t)}}_{s_1(t)} + \underbrace{e^{j(\frac{1}{2}mt^2 - \omega_0 t)}}_{s_2(t)} \\ &= 2e^{j\frac{1}{2}mt^2} \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le nom «route» qui lui a été donné provient de la forme de sa distribution de Wigner-Ville représentée sur la figure 3.9. L'interférence apparaît au milieu des composantes et peut être considérée comme le résultat de la superposition d'interférences temporelle et fréquentielle. Le signal n'est ni séparable en temps, ni séparable en fréquence. Cependant, si l'on se place d'un point de vue conjoint, il est séparable en TF.

Ce signal est en fait une généralisation du signal «dirac» (cf. paragraphe 3.3.1.5) puisque ce dernier correspond au cas limite $m \rightarrow \infty$.

Bornes d'intégration optimales

Les bornes d'intégration optimales peuvent se déterminer aisément à partir de l'exemple «dirac» précédent et plus précisément à partir de son interprétation en terme de lissage (voir

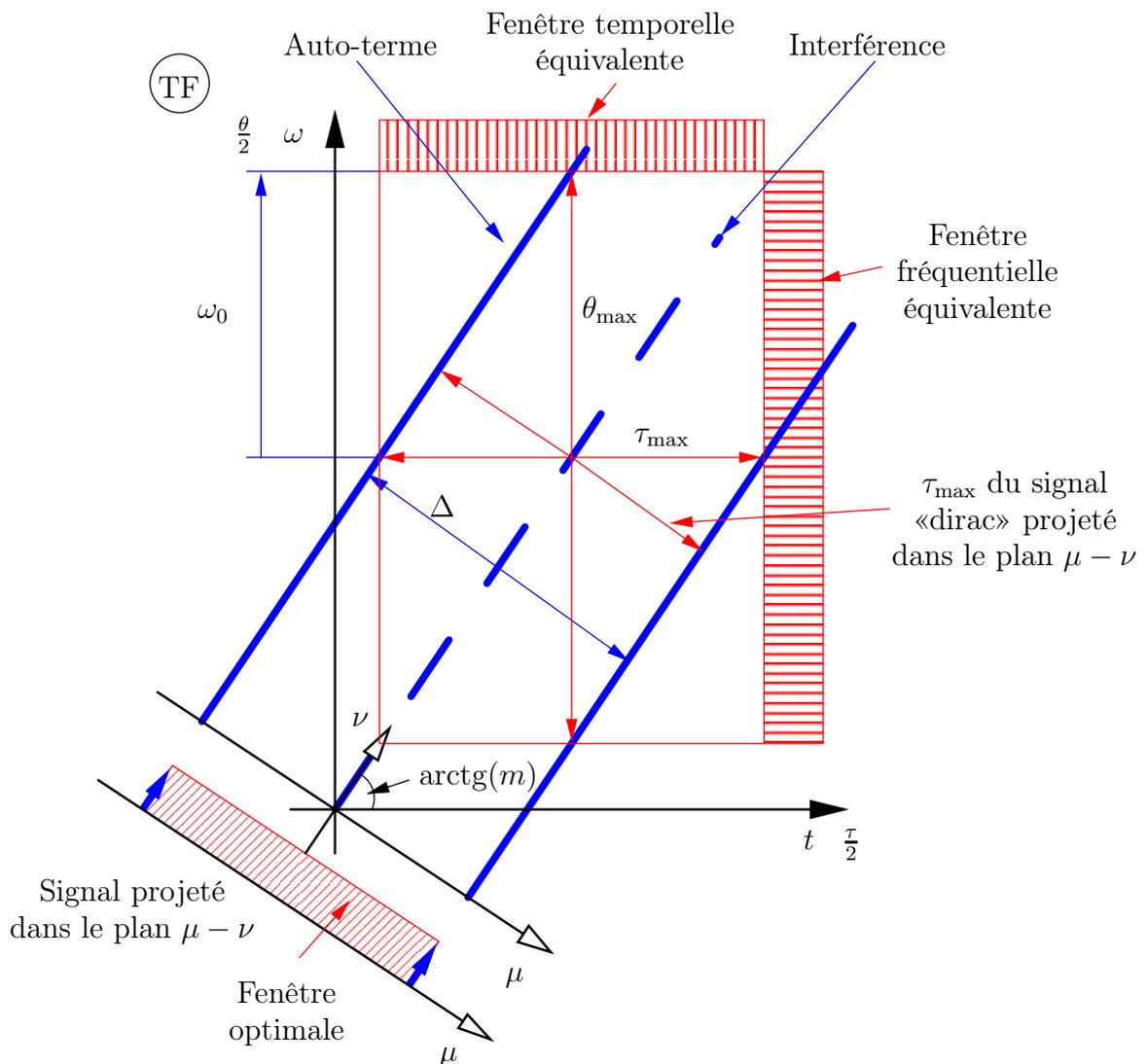


FIG. 3.10: La distribution de Wigner-Ville du signal «route» pour le cas $m = \frac{3}{2}$ est représentée en bleu. Dans le système de coordonnées $(\mu - \nu)$ obtenu par rotation du repère $(t - \omega)$, elle est équivalente à celle du signal «dirac» (voir figure 3.8). Sur l'axe des interférences ($\mu = 0$), le filtre séparable optimal a des longueurs de fenêtre τ_{\max} et θ_{\max} .

figure 3.8). En effet, si l'on se place dans le système de coordonnées $\mu - \nu$ (voir figure 3.10), le problème de la réduction des interférences des deux chirps parallèles est similaire au cas «dirac» précédent. Le système de coordonnées $\mu - \nu$ se déduit du système $t - \omega$ par une rotation d'angle $\arctan(m) - \frac{\pi}{2}$ et est défini par :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\nu &= \vec{e}_t + m\vec{e}_\omega \\ \vec{e}_\mu &= m\vec{e}_t - \vec{e}_\omega.\end{aligned}$$

La distance entre les deux chirps vaut :

$$\Delta = \frac{2\omega_0}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Si on tient compte de l'équivalence entre les deux chirps linéaires dans le repère $\mu - \nu$ et du signal «dirac» dans le repère $t - \omega$, le problème de la réduction des interférences revient à synthétiser le filtre $\Theta(t, \omega)$ qui, dans le système $\mu - \nu$, est équivalent au filtre de lissage optimal. Pour le cas du signal «dirac» :

$$\Phi_{\text{dirac}}^T(\omega) = \frac{2\tau_{\max}}{2\pi} \text{sinc}(\tau_{\max}\omega). \quad (3.39)$$

De plus, on impose au filtre d'être séparable (cf. eq. 3.37) :

$$\Phi(\omega) = \underbrace{\frac{\tau_{\max}}{\pi} \text{sinc}(\tau_{\max}\omega)}_{\Phi^T(\omega)} \cdot \underbrace{\frac{\theta_{\max}}{\pi} \text{sinc}(\theta_{\max}t)}_{\Phi^F(t)}.$$

On peut alors obtenir un filtre dont le comportement sera équivalent à celui du filtre optimal pour le cas «dirac» en accordant les points où la fonction de lissage est nulle sur ceux de la fonction $\Theta_{\text{dirac}}(\nu)$ orientée selon l'axe ν (voir figure 3.11).

La distance des points à valeur nulle centrés autour de $\nu = 0$ est : $D = \frac{2\pi}{\Delta}$. Un simple raisonnement géométrique permet alors d'établir que la fonction de lissage dans le sens temporel peut avoir ses points à valeur nulle distants de $D_t = \frac{mD}{\sqrt{1+m^2}}$, et, pour la fonction de lissage fréquentiel, $D_\omega = \frac{D}{\sqrt{1+m^2}}$, distances qui correspondent aux bornes d'intégration :

$$\tau_{\max}(t, mt) = \frac{\pi}{D_t} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} = \frac{\omega_0}{m} \quad (3.40)$$

$$\theta_{\max}(t, mt) = \frac{\pi}{D_\omega} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 + m^2} = \omega_0. \quad (3.41)$$

Si l'on revient à la figure 3.10, ce résultat admet une interprétation géométrique claire et tout à fait compatible avec le cas des signaux séparables en temps ou en fréquence. Soit (t_0, ω_0) un point TF, centre géométrique de deux points TF (t_1, ω_1) et (t_2, ω_2) , où existent les composantes en interaction.

- La borne $\tau_{\max}(t_0, \omega_0)$ est obtenue en démarrant à l'axe t jusqu'à ce que l'on rencontre une composante. La valeur de τ_{\max} est alors égale au double de la distance entre (t_0, ω_0) et la composante.
- La borne $\theta_{\max}(t_0, \omega_0)$ est obtenue de manière similaire. Cependant il faut (bien sûr) se déplacer selon l'axe fréquentiel.

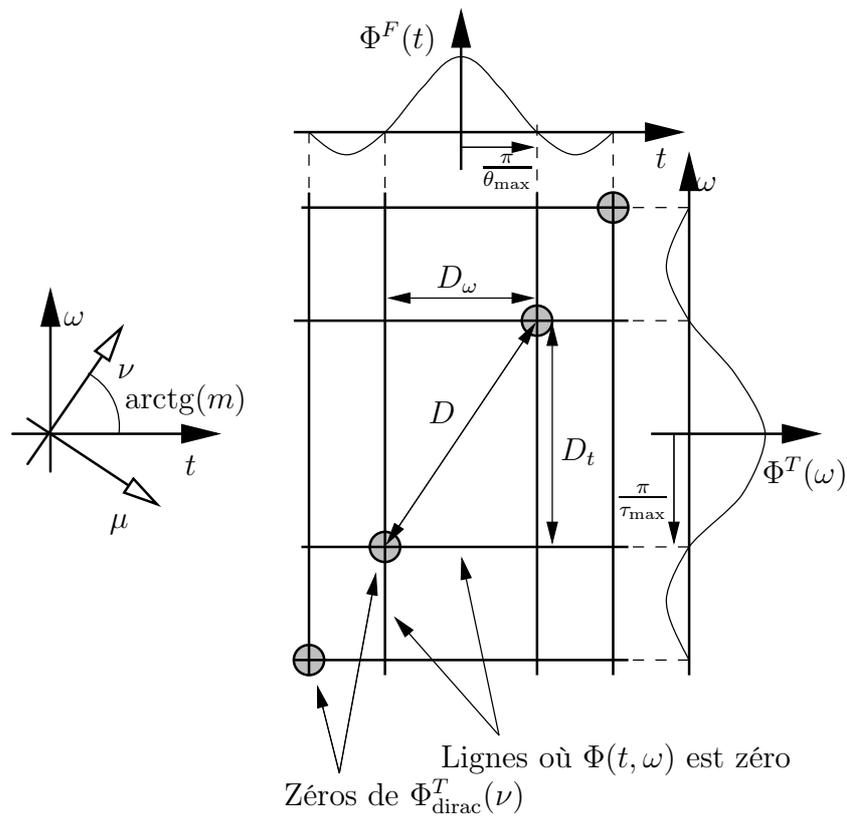


FIG. 3.11: La fonction de lissage pour le signal «route» est obtenue en accordant les points à valeur nulle du filtre optimal (indiqués par les cercles), obtenu dans le cas «dirac» mais orienté selon ν , avec les points à valeurs nulle du filtre séparable $\Phi(t, \omega) = \Phi^T(\omega)\Phi^F(t)$. Les deux fonctions de lissage sont représentées sur les marges. Les points à valeur nulle sont accordés sur ceux de $\Phi_{\text{dirac}}^T(\nu)$.

Ces limites définissent une fenêtre rectangulaire, dont les contours sont représentés sur la figure 3.10. Ce fenêtrage (temporel et fréquentiel) du signal est le fenêtrage maximal qui permette d'assurer que le signal fenêtré soit séparable en temps et en fréquence.

Dans ce paragraphe, nous avons donc pu définir les valeurs des bornes d'intégration optimales. La seconde étape, objet du paragraphe suivant, est alors de déterminer si les fonctions produit temporel et fréquentiel permettent de retrouver ces valeurs.

Fonction produit temporel et fréquentiel

Les expressions du signal temporel «route» et de sa transformée de Fourier (voir annexe C), donnée par :

$$S(\omega) = S_1(\omega_0)e^{-j\frac{1}{2m}(\omega-\omega_0)^2} + S_2(\omega_0)e^{-j\frac{1}{2m}(\omega+\omega_0)^2} \quad (3.42)$$

montrent qu'elles sont structurellement identiques. Les fonctions produits temporel et fréquentiel le seront donc aussi. On peut alors se contenter de l'étude de la fonction produit temporel :

$$T_{t,\omega}(\tau) = \underbrace{2 \cos(\tau(mt - \omega)) \cos(2\omega_0 t)}_{\text{interférence}} + \underbrace{\cos(\tau(mt - (\omega - \omega_0))) + \cos(\tau(mt - (\omega + \omega_0)))}_{\text{auto-termes}}. \quad (3.43)$$

Les auto-termes ont été identifiés en calculant séparément les fonctions produit temporel de chacun des chirps linéaires :

$$T_{t,\omega}(\tau) = \cos(\tau(mt - (\omega \pm \omega_0))). \quad (3.44)$$

L'évaluation de la fonction produit temporel $T_{t,\omega}(\tau)$ sur les interférences et les auto-termes donne respectivement :

– sur l'interférence ($\omega = mt$) :

$$T_{t,\omega=mt}(\tau) = \underbrace{2 \cos(2\omega_0 t)}_{\text{interférence}} + \underbrace{2 \cos(\omega_0 \tau)}_{\text{auto-termes}} \quad (3.45)$$

– sur un auto-terme ($\omega = mt - \omega_0$) :

$$T_{t,\omega=mt-\omega_0}(\tau) = \underbrace{2 \cos(\tau\omega_0) \cos(2\omega_0 t)}_{\text{interférence}} + \underbrace{1 + \cos(2\omega_0 \tau)}_{\text{auto-termes}} \quad (3.46)$$

En ces points particuliers, la fonction produit temporel ne met en évidence aucune propriété de séparabilité. Ainsi, sur l'interférence, $T_{t,\omega}(\tau)$ peut se décomposer selon l'équation 3.45 ; la contribution des composantes en interaction (interférence) est indépendante de τ tandis que celle des chirps est une fonction oscillante de τ à la fréquence ω_0 . Sur l'auto-terme, en revanche, c'est la contribution du chirp (auto-terme) qui est constante tandis que celle des interférences oscille avec τ .

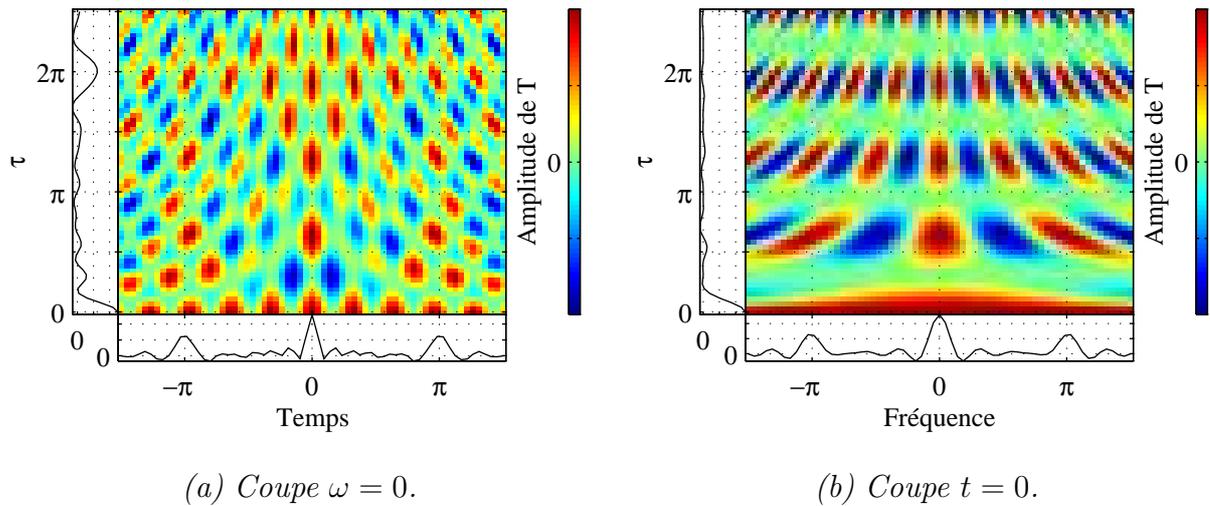


FIG. 3.12: Fonctions $T_{t,\omega}(\tau)$ de signal d'exemple «route» avec les paramètres $\omega_0 = \pi$ et $m = 1$. Les sommes cumulées sont représentés dans les marges.

En fait, le comportement de la fonction produit temporel mérite d'être examiné de manière plus globale. Ainsi, les figures 3.12(a) et 3.12(b) la montrent selon deux coupes ($\omega = 0$ et $t = 0$) avec les paramétrisations $\omega_0 = \pi$, $m = 1$ pour le signal route.

En premier lieu, l'examen de la figure 3.12(b) nous permet de confirmer que le fait de considérer $T_{t,\omega}(\tau)$ selon $\omega - \tau$ ne fournit aucune indication quant à la localisation des termes interférentiels.

En second lieu, la figure 3.12(a) permet les observations suivantes :

- Les auto-termes sont localisés autour de $t = \pm\pi$. Ils occupent des massifs de moyenne positive.
- Le terme d'interférence occupe un massif centré sur $t = 0$, $\tau = 2\pi$ et qui correspond à la borne $\tau_{\max}(t, \omega)$ définie précédemment. Il est lui aussi de moyenne positive mais peut éventuellement être de moyenne nulle ou négative suivant que l'axe se situe sur un terme d'interférence d'amplitude nulle ou négative.

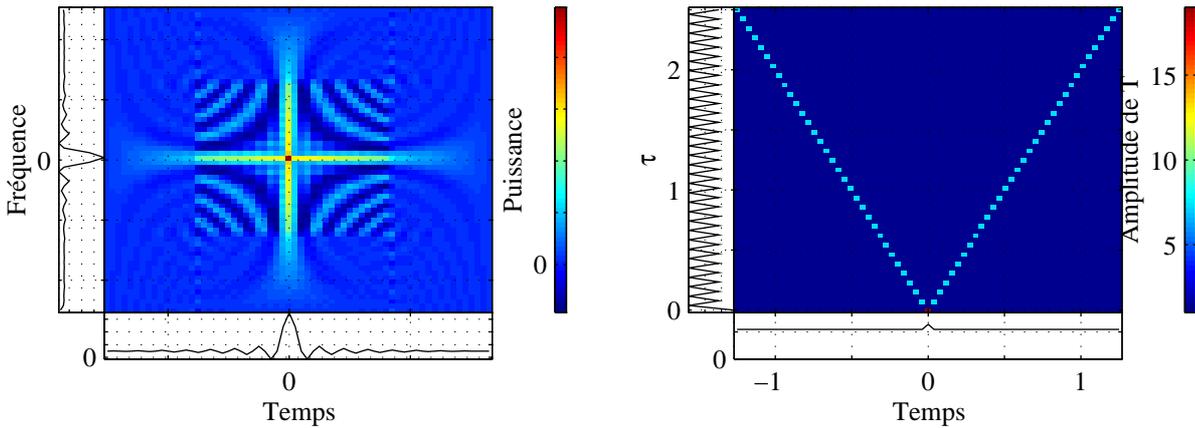
La fonction produit temporel possède donc la capacité de séparer les contributions des auto-termes et inter-termes. Limiter les bornes d'intégration à la valeur $\tau_{\max}(t, \omega)$ revient à supprimer la contribution des interférences temporelles et à ne conserver que les interférences fréquentielles.

Comme cela a été précisé, cette discussion est valable pour la localisation des interférences fréquentielles sur la fonction produit fréquentiel.

3.3.3.3 Exemple «croix»

Un deuxième exemple de signal non-séparable en temps et en fréquence est donné par le signal suivant :

$$s_{\text{croix}}(t) = 1 + a \delta(t). \quad (3.47)$$



(a) Distribution de Wigner-Ville.

(b) Fonctions $T_{t,\omega}(\tau)$ sur le plan $t-\tau$ avec $\omega = 0, a = 6$. Les sommes cumulées sont représentés dans les marges.

FIG. 3.13: Signal «croix» (eq. 3.47) avec $a = 6$.

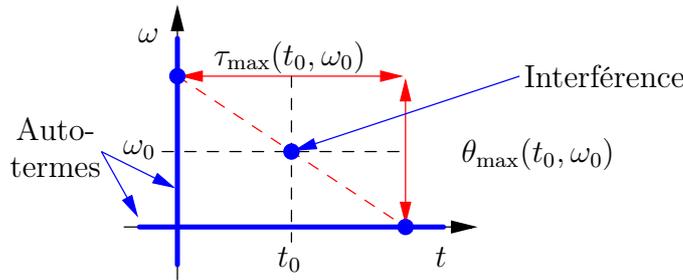


FIG. 3.14: Les interférences existent en tout point milieu de deux points TF en interaction. Les longueurs de fenêtres sont obtenues à partir de cette règle.

Sa distribution de Wigner-Ville est représentée sur la figure 3.13(a). Elle permet une bonne localisation des deux composantes (figure 3.13(a)), cependant, des interférences sont visibles et proviennent de l'interaction des deux composantes orthogonales.

Pour la détermination des bornes d'intégration, de même que précédemment, on utilise la règle du point milieu qui stipule qu'une interférence existe en tout point milieu de deux points TF où les composantes sont en interaction (figure 3.14).

Cet exemple est simple car chaque terme de l'interférence ne résulte que de l'interaction d'une paire de points. Les longueurs de fenêtre sont alors choisies de manière à exclure ces points :

$$\tau_{\max}(t, \omega) = \begin{cases} 2|t| & t \neq 0 \wedge \omega \neq 0 \\ \infty & t = 0 \vee \omega = 0 \end{cases} \quad \theta_{\max}(t, \omega) = \begin{cases} 2|\omega| & \omega \neq 0 \wedge t \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \vee t = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Ces bornes sont clairement mises en évidence sur les fonctions produit temporel et fréquentiel (qui sont structurellement identiques). Ainsi, la fonction produit temporel du signal «croix»

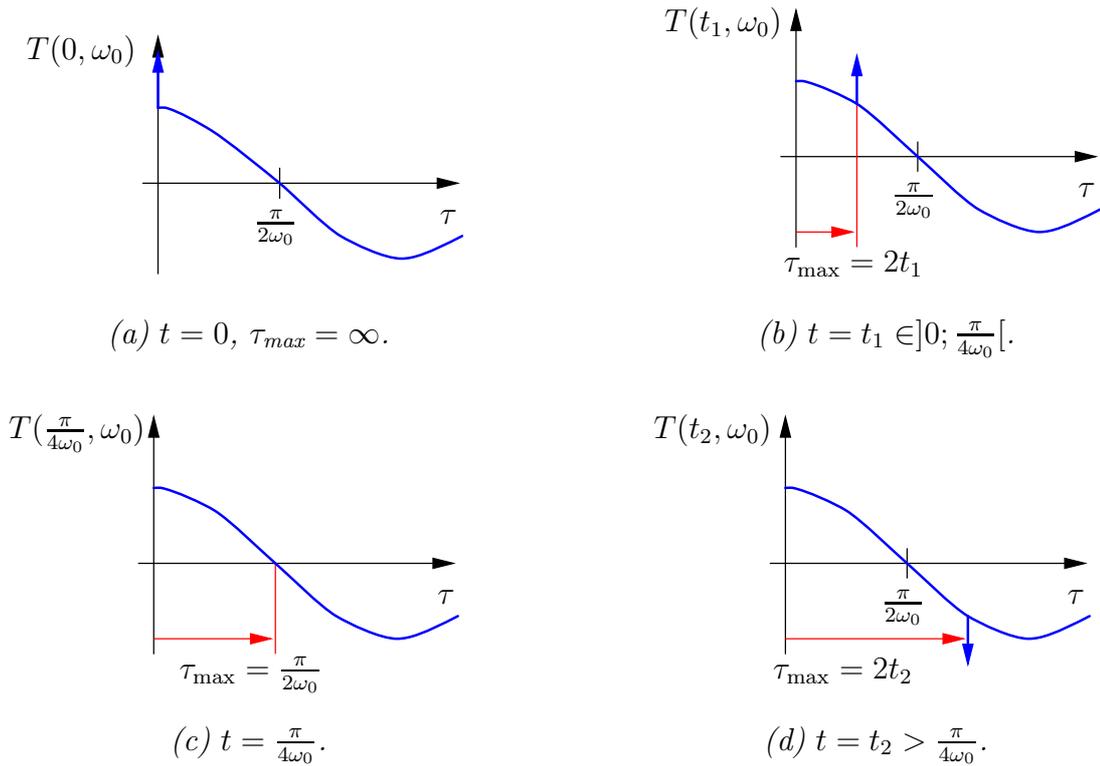


FIG. 3.15: Fonction produit temporel du signal «croix» sur différents points TF ($t, \omega_0 \neq 0$).

donne :

$$T_{\text{croix } t, \omega}(\tau) = \underbrace{o(\tau) \cos(\omega\tau) + a^2 \delta(t) \delta(\tau)}_{\text{auto-termes}} + \underbrace{a o(\tau) \left(\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right)}_{\text{interférences}} \cos(\omega\tau). \quad (3.49)$$

Une coupe de cette fonction est représentée sur la figure 3.13(b). Les limites $\tau_{\max}(t, \omega)$ correspondent aux points d'apparition des impulsions.

Considérons maintenant le cas $\omega \neq 0$. A une fréquence fixe, on peut distinguer trois comportements possibles de $T(t, \omega)$:

- $t = 0$ (figure 3.15(a))

Sur l'auto-terme, la contribution des interférences (fréquentielles) dans la fonction produit temporel se caractérise par l'impulsion de Dirac à $\tau = 0$. Cependant, l'interprétation de l'impulsion comme caractéristique des interférences est sujette à critique et notre point de vue consiste plutôt à la considérer comme liée à la composante. Cela correspond en fait à notre incapacité à séparer deux composantes dans les zones où elles sont confondues. En ces points, τ_{\max} est alors égal à ∞ .

- $t = t_1 < \frac{1}{\omega_0}$ (figure 3.15(b))

Le terme d'interférence se manifeste par une impulsion de Dirac positive à $\tau_{\max} = 2|t|$.

- $t = \frac{1}{\omega_0}$ (figure 3.15(c))

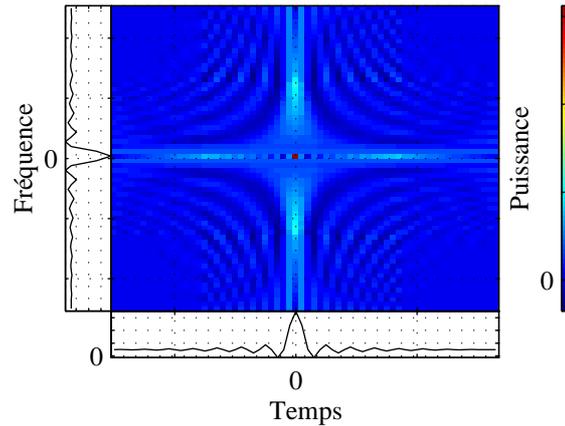


FIG. 3.16: Représentation de Wigner-Ville Locale du signal «croix».

Dans ce cas, le terme interférentiel est multiplié par zéro, ce qui l'annule.

Ce cas n'est pas pris en compte dans la définition des limites d'intégration optimales (équation 3.48), qui repose sur la règle de construction du point milieu. Néanmoins, la non-détectabilité de la limite optimale n'a aucune conséquence car le terme d'interférence est d'amplitude nulle.

- $t = t_2$, $\frac{1}{\omega_0} < t_2 < \frac{3}{\omega_0}$ (figure 3.15(d))

Ce cas est tout à fait similaire au cas t_1 , exception faite de l'amplitude de l'impulsion qui est négative.

La distribution de Wigner-Ville Locale calculée avec les bornes définies par l'équation 3.48 est représentée sur la figure 3.16. Elle présente des modifications notables par rapport à la distribution de Wigner-Ville du signal original. L'amplitude des termes interférentiels a été atténuée. Chaque «bras» est pondéré par une fenêtre triangulaire et, au point origine ($\omega = 0$, $t = 0$), apparaît une impulsion d'amplitude élevée. Ce comportement était tout à fait prévisible. En effet, la limitation des bornes d'intégration revient à décomposer le signal original en quatre sous-signaux :

$$s_{\text{croix}} = I_{t \leq 0}(t) + I_{t > 0}(t) + \mathcal{F}^{-1} \{I_{\omega \leq 0}(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1} \{I_{\omega > 0}(\omega)\}$$

(I_T : indicatrice de l'intervalle T).

La distribution de Wigner-Ville Locale correspond alors à la superposition des quatre distributions de Wigner-Ville relatives à la décomposition précédente, auxquelles se superpose une impulsion représentative de l'interaction de ces composantes en leur point commun. La présence de cette impulsion n'est rien d'autre que la conséquence de notre incapacité à séparer la contribution des composantes en tout point où elles se recouvrent.

3.4 Estimation des bornes d'intégration optimales

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence les comportements typiques des fonctions produits et notamment leurs propriétés de séparation des contributions des auto-termes et des interférences. Ainsi, les auto-termes sont situés au voisinage de $\tau = 0$ et sont

typiquement décroissants lorsque τ augmente, alors que les termes d'interférence occupent une région située au voisinage de τ_{\max} pour la fonction produit temporel et θ_{\max} pour la fonction produit fréquentiel. Ils présentent en ces points un extremum local qui peut être positif ou négatif selon le point TF considéré. Ces propriétés peuvent être utilisées pour estimer les valeurs τ_{\max} et θ_{\max} .

Cependant, des termes oscillants peuvent se superposer à ces courbes typiques. C'est par exemple le cas pour la fonction produit temporel correspondant à deux atomes TF séparables en fréquence mais pas en temps (cf. fig. 3.5) ou, pour la fonction produit fréquentiel, dans le cas dual (paragraphe 3.3.1.3).

La présence de ces termes oscillants peut rendre l'estimation des bornes optimales délicates. Pour effectuer leur estimation, on propose donc de procéder à un filtrage préalable des fonctions produits temporel et fréquentiel. Les fonctions lissées sont alors utilisées pour effectuer l'estimation des bornes optimales.

3.4.1 Filtrage des fonctions produits

3.4.1.1 Propriétés souhaitables des filtres

Compte tenu de la finalité du filtrage, à savoir fournir les fonctions produits lissées à partir desquelles va s'effectuer l'estimation des bornes optimales, les filtres utilisés doivent être choisis de manière à ce que les points suivants soient vérifiés :

- Aux massifs caractéristiques des auto-termes et interférences peuvent se superposer des termes oscillants selon τ , t et ω . Ces oscillations sont engendrées par les auto ou inter-termes situés à une même valeur de t , mais à une valeur de ω différente.

L'élimination de ces oscillations peut se faire par un lissage suivant les axes τ , t et ω . Cependant, seules les deux premières directions sont retenues car le lissage selon ω , outre une complexité accrue, tend à diminuer l'amplitude des massifs caractéristiques des interférences qui sont eux aussi oscillants en ω .

Une justification supplémentaire du lissage selon t est donnée dans le cas des signaux plus complexes. Ainsi, si l'on se reporte à l'exemple «route», il permettra de faire ressortir, en collaboration avec le lissage selon τ , les extrema globaux de cette fonction produit temporel, caractéristiques des termes d'interférence.

- Le filtrage ne doit pas perturber la procédure d'estimation des bornes optimales. Ainsi, si on revient à l'exemple des signaux séparables en temps, le caractère abrupt des transitions doit être préservé. Cette contrainte impose d'effectuer un lissage local selon τ (filtre passe-bas avec une fréquence de coupure relativement élevée).

On peut également remarquer que, malgré la méconnaissance de la position des interférences, leur occurrence est d'autant plus probable que τ est grand. On peut donc essayer d'adapter la largeur de bande du filtre en fonction de τ .

- L'opération de filtrage est lourde en calcul. On aura donc avantage à utiliser des filtres de dimensions réduites lors de l'implantation.

3.4.1.2 Fonctions produit temporel et fréquentiel lissées

Les filtres (Γ_T, Γ_F) utilisés sont des passe-bas bidimensionnels gaussiens séparables. Les fonctions produit temporel et fréquentiel peuvent donc s'exprimer par :

$$\begin{aligned}\bar{T}_{t,\omega}(\tau) &= (T_{t,\omega}(\tau) \star_{(\tau)} \mathbf{G}_{\sigma_\tau}(\tau)) \star_{(t)} \mathbf{G}_{\sigma_t}(t) \\ &= T_{t,\omega}(\tau) \star_{(\tau,t)} \underbrace{(\mathbf{G}_{\sigma_\tau}(\tau) \cdot \mathbf{G}_{\sigma_t}(t))}_{\Gamma_T(\tau,t)}\end{aligned}\quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{t,\omega}(\theta) &= (F_{t,\omega}(\theta) \star_{(\theta)} \mathbf{G}_{\sigma_\theta}(\theta)) \star_{(\omega)} \mathbf{G}_{\sigma_\omega}(\omega) \\ &= F_{t,\omega}(\theta) \star_{(\theta,\omega)} \underbrace{(\mathbf{G}_{\sigma_\theta}(\theta) \cdot \mathbf{G}_{\sigma_\omega}(\omega))}_{\Gamma_F(\theta,\omega)}.\end{aligned}\quad (3.51)$$

Les largeurs de bande des filtres sont inversement proportionnelles aux valeurs σ des différentes gaussiennes. Par analogie avec la terminologie des statistiques, on appelle σ l'écart-type de la fonction de lissage.

Compte tenu de la plus grande probabilité d'avoir une interférence pour une valeur de τ (resp. θ) élevée, l'écart-type des fonctions de lissage a été rendu dépendant de τ (resp. θ) selon³ :

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(\tau) &= \sigma_{\tau,0} - \sigma_{\tau,\Delta} \cdot \tau \\ \sigma_t(\tau) &= \sigma_{t,0} - \sigma_{t,\Delta} \cdot \tau\end{aligned}\quad (3.52)$$

pour le lissage de la fonction produit temporel (équation 3.50), et de manière tout à fait similaire :

$$\begin{aligned}\sigma_\theta(\theta) &= \sigma_{\theta,0} - \sigma_{\theta,\Delta} \cdot \theta \\ \sigma^\omega(\theta) &= \sigma_{\omega,0} - \sigma_{\omega,\Delta} \cdot \theta\end{aligned}\quad (3.53)$$

pour le lissage de la fonction produit fréquentiel (équation 3.51).

D'un point de vue fréquentiel, cela revient à augmenter la largeur de bande des filtres avec τ (ou θ) de façon à obtenir (du moins on l'espère) une meilleure estimation des bornes d'intégration optimales.

Une remarque peut être faite concernant l'intégrale de convolution (équations 3.50 et 3.51) où l'écart-type σ_τ (resp. σ_θ) dépend de τ (resp. θ). Lors de son évaluation, la valeur de $\sigma_\tau(\tau)$ (resp. $\sigma_\theta(\theta)$) est maintenue constante. Cette remarque peut également être rapprochée de celle faite pour le lissage local de la représentation de Wigner-Ville (voir paragraphe 3.3.3.1).

3.4.1.3 Quelques indications sur le choix des paramètres

Il est clair que le paramétrage des filtres a une influence sur le résultat de l'estimation des limites optimales. On peut, pour leur choix, avoir à l'esprit les points suivants⁴ :

³Les paramètres de la pente linéaire seront spécifiés dans l'implantation par la valeur de σ à la fin de l'axe τ , donc à $\tau = \frac{N}{2}$ avec N le nombre de points du signal.

⁴Le choix des paramètres est discuté pour le filtrage de la fonction produit temporel. Ces remarques sont également valables pour les filtres de la fonction produit fréquentiel.

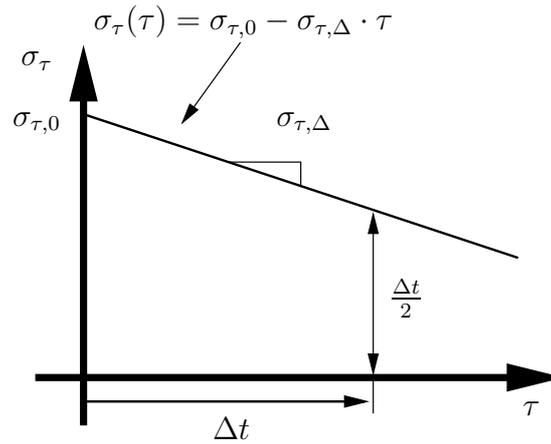


FIG. 3.17: La fonction $\sigma_\tau(\tau) = f\{\tau\}$ peut être choisie de manière à prendre en compte une éventuelle connaissance de la distance temporelle minimale Δt entre les composantes du signal.

Résolution TF

Des filtres à large bande permettent de mettre en évidence des structures proches avec une bonne précision. Des filtres à bande étroite tendent à regrouper les composantes proches et avantagent les structures les plus énergétiques.

Suppression des interférences

Pour limiter l'influence des interférences temporelles, un lissage important selon t et τ doit être assuré (passe-bas de bande étroite).

La suppression des interférences apparaît comme une propriété antagoniste à la résolution TF. On est donc en droit de penser qu'il existe un lissage optimal assurant le meilleur compromis résolution / suppression des interférences.

Prise en compte des connaissances a priori sur la géométrie des structures TF

Si on dispose d'une information a priori sur les distances TF entre les différentes composantes, on peut utiliser la règle suivante :

la borne inférieure de la résolution TF dépend de l'écart des fonctions de lissage et vaut 2σ à la valeur τ égale à la distance Δt supposée connue a priori. On peut alors imposer à $\sigma_\tau(\tau)$ de passer par ce point (voir figure 3.17). Ces considérations permettent de fixer $\sigma_{\tau,0}$ et $\sigma_{t,0}$ dès lors que $\sigma_{\tau,\Delta}$ et $\sigma_{t,\Delta}$ sont choisis :

$$\sigma_{\tau,0} = \Delta t \left(\frac{1}{2} + \sigma_{\tau,\Delta} \right) \quad \sigma_{t,0} = \Delta t \left(\frac{1}{2} + \sigma_{t,\Delta} \right).$$

Les paramètres $\sigma_{\tau,\Delta}$ et $\sigma_{t,\Delta}$ contrôlent la décroissance de l'écart-type des filtres et contrôlent donc la localité du lissage. Ils doivent donc être choisis de manière à optimiser le compromis résolution / suppression des interférences.

Enfin, pour conclure ce paragraphe, soulignons qu'il n'existe pas de raison particulière de donner à $\sigma_{\tau,0}$, $\sigma_{t,0}$, $\sigma_{\theta,0}$ et $\sigma_{\omega,0}$ des valeurs différentes (pas de connaissance a priori), ils peuvent tous être fixés à la même valeur. Il en va de même pour $\sigma_{\tau,\Delta}$, $\sigma_{t,\Delta}$, $\sigma_{\theta,\Delta}$ et $\sigma_{\omega,\Delta}$.

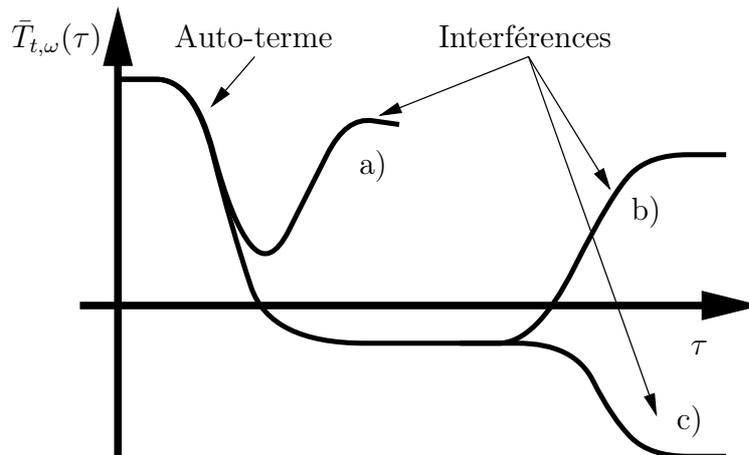


FIG. 3.18: Forme de la fonction produit temporel lissée avec auto-terme et interférences temporels. Dans les cas a) et b), l'interférence est d'amplitude positive. Dans le cas c) l'amplitude de l'interférence est négative. Dans le cas a), l'auto-terme et l'interférence se recouvrent.

3.4.2 Estimation des bornes d'intégration optimales

La tâche d'estimation des bornes d'intégration $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$, nécessaire à l'évaluation de la représentation de Wigner-Ville Locale, peut être formulée comme un problème de détection des termes d'interférence dans les fonctions produit lissées.

3.4.2.1 Détection des interférences temporelles

A t, ω fixés, la fonction produit temporel (lissé) a un comportement caractéristique qui permet de séparer les auto-termes des inter-termes :

- Un auto-terme se trouve à proximité de $\tau = 0$, il est positif et décroît quand τ augmente.
- Une interférence commence à une valeur de $\tau > 0$. En pratique, on pourra imposer $\tau > \tau_{\min}$. Elle peut être d'amplitude positive ou négative.

A titre d'exemple, la figure 3.18 illustre ces composantes respectives. Pour les cas a) et b), l'interférence a une amplitude positive et dans le cas c) une amplitude négative. Le cas a) correspond à un recouvrement partiel des auto et inter-termes.

L'approche retenue pour l'estimation de τ_{\max} consiste à surveiller la décroissance de $\bar{T}_{t,\omega}(\tau)$ selon les valeurs de τ croissantes. Elle est illustrée par la figure 3.19.

- Une interférence d'amplitude positive est détectée par le changement de pente de la courbe. Pour cela, la valeur courante de $\bar{T}_{t,\omega}(\tau_0)$ est comparée à la valeur minimale de $\bar{T}_{t,\omega}(\tau)$ sur l'horizon $[0; \tau_0]$. Si leur différence devient supérieure à un seuil alors une interférence est déclarée présente.
- Les interférences d'amplitude négative sont détectées dès que la valeur de $\bar{T}_{t,\omega}(\tau)$ devient significativement négative.

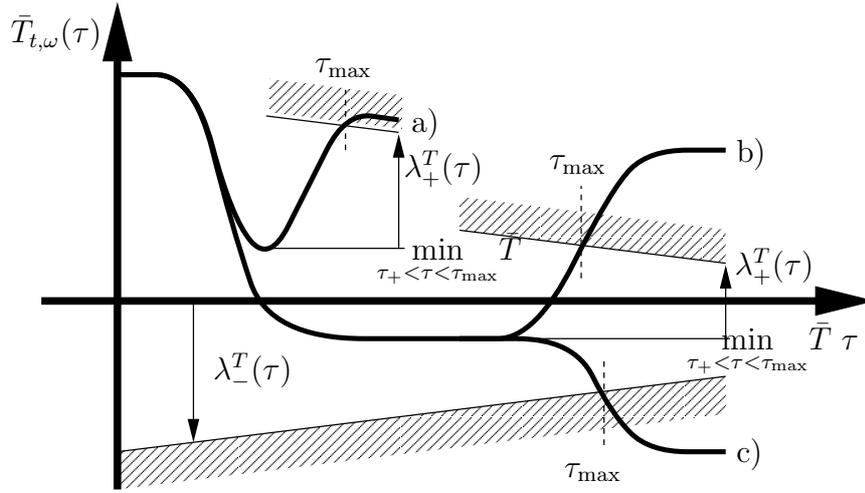


FIG. 3.19: Illustration de la méthode de détection (eq. 3.54) avec les trois exemples de la fonction produit temporel lissée montrés en figure 3.18.

$\tau_{\max}(t, \omega)$ est alors estimé comme le plus petit instant où l'une de ces deux conditions est satisfaite, c'est à dire :

$$\tau_{\max}(t, \omega) = \min \left\{ \tau_0 \mid \left(\bar{T}_{t,\omega}(\tau_0) - \min_{\tau_+ < \tau < \tau_0} \bar{T}_{t,\omega}(\tau) > \lambda_+^T \right) \vee \left(\bar{T}_{t,\omega}(\tau_0) < \lambda_-^T \right) \right\}. \quad (3.54)$$

La mauvaise qualité du lissage au voisinage de $\tau = 0$ (de sa réalisation, cf. chapitre 4.2.2) impose certaines précautions. Ainsi, on ignore les éventuelles valeurs initiales négatives et le niveau de référence est établi à partir de la première valeur positive de $\bar{\tau}_{t,\omega}(\tau)$:

$$\tau_+ = \min \{ \tau \mid \bar{T}_{t,\omega}(\tau) \geq 0 \}. \quad (3.55)$$

Compte tenu de la plus grande probabilité d'avoir une interférence à une valeur de τ élevé, le seuil λ_+^T est choisi linéairement décroissant, λ_-^T est l'opposé de λ_+^T :

$$\begin{aligned} \lambda_+^T(\tau) &= \lambda_0^T - \lambda_{\Delta}^T \cdot \tau \\ \lambda_-^T(\tau) &= -\lambda_+^T(\tau). \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.4.2.2 Détection des interférences fréquentielles

L'estimation de $\theta_{\max}(t, \omega)$ est faite à partir de la fonction produit fréquentiel selon l'axe θ . Ceci mis à part, l'approche retenue est totalement similaire au cas des interférences temporelles :

$$\theta_{\max}(t, \omega) = \min \left\{ \theta_0 \mid \left(\bar{F}_{t,\omega}(\theta_0) - \min_{\theta_+ < \theta < \theta_0} \bar{F}_{t,\omega}(\theta) > \lambda_+^F \right) \vee \left(\bar{F}_{t,\omega}(\theta_0) < \lambda_-^F \right) \right\} \quad (3.57)$$

avec :

$$\theta_+ = \min \{ \theta \mid \bar{F}_{t,\omega}(\theta) \geq 0 \} \quad (3.58)$$

et les seuils :

$$\begin{aligned} \lambda_+^F(\theta) &= \lambda_0^F - \lambda_{\Delta}^F \cdot \theta \\ \lambda_-^F(\theta) &= -\lambda_+^F(\theta). \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.4.2.3 Choix des paramètres

Les quatre paramètres à choisir permettent de fixer l'évolution des seuils $\lambda^T(\tau)$ et $\lambda^F(\tau)$. Les paramètres λ_{Δ}^T et λ_{Δ}^F contrôlent la décroissance des seuils et influent sur la localité de la distribution de Wigner-Ville Locale résultante (cf. paragraphe 3.4.1.3).

Les paramètres λ_0^T et λ_0^F influent sur les performances de la détection et sont à choisir par l'utilisateur.

3.5 Distributions de Wigner-Ville Locales

A partir des valeurs $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$, on peut envisager différentes possibilités pour obtenir une distribution TF à interférences réduites. Si l'on revient à l'interprétation en terme de lissage local de la distribution de Wigner-Ville, ces différentes possibilités résultent simplement des différentes formes que l'on peut donner aux filtres de lissage.

Ce point a déjà été abordé aux paragraphes § 3.3.1.4, § 3.3.2.1 et § 3.3.3.1. Comme cela avait été souligné, et bien que cela n'apparaisse pas dans la notation utilisée, une attention toute particulière doit être accordée à l'interprétation des variables t et ω selon qu'elles sont relatives aux limites optimales ou à la convolution. Cela nous conduit à introduire une nouvelle définition de la distribution de Wigner-Ville Locale où la différence entre ces variables est rendue explicite.

Dans ce cadre, les différentes formes de la distribution de Wigner-Ville Locale sont reformulées. Diverses extensions sont également proposées.

La non-appartenance de la distribution de Wigner-Ville Locale à la classe de Cohen nous conduit alors à une généralisation qui permet d'interpréter la fonction de lissage en terme de noyau dépendant du temps et de la fréquence.

L'étude de certaines propriétés permet de définir les conditions d'admissibilité directement sur le noyau (covariances, réalité). Pour d'autres (distributions marginales, énergie), la définition des conditions que doit satisfaire la distribution de Wigner-Ville Locale pose des difficultés. Cependant, une étude est possible pour la classe des signaux séparables en temps et/ou en fréquence.

3.5.1 Lissage local de la distribution de Wigner-Ville

On définit la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférences temporelles par (cf. eq. 3.20) :

$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\text{rect}_{\tau_{\max}(t, \omega)}(\tau)}_{\phi^T(t, \omega, \tau)} s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.60)$$

où la fonction de fenêtre est définie par (cf. eq. 3.22) :

$$\phi^T(t, \omega, \tau) = \text{rect}_{\tau_{\max}(t, \omega)}(\tau). \quad (3.61)$$

La grandeur $\phi(t, \omega, \tau)$ a été introduite de manière à prendre en compte la limitation des bornes d'intégration à la valeur $\tau_{\max}(t, \omega)$.

De par l'introduction d'un fenêtrage dépendant de t et de ω , la distribution définie par l'équation 3.60 peut être vue comme une extension de la distribution de pseudo Wigner-Ville [Fla93].

De manière à pouvoir prendre en compte explicitement les dépendances temporelle et fréquentielle de la fenêtre, on différencie les variables temps et fréquence suivant qu'elles sont relatives au signal ou à la fenêtre :

$$\text{WVL}^T(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \phi^T(t', \omega', \tau) s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.62)$$

$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \text{WVL}^T(t' = t, \omega' = \omega, t, \omega). \quad (3.63)$$

Cette équation peut être interprétée comme la transformée de Fourier du produit de $\phi^T(t', \omega', t, \omega)$ par $s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right)$ et donc :

$$\text{WVL}^T(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \{ \phi^T(t', \omega', \tau) \} \star_{(\omega)} \text{WV}(t, \omega). \quad (3.64)$$

De manière tout à fait similaire, la représentation de Wigner-Ville Locale sans interférences fréquentielles est définie par (cf. eq. 3.32) :

$$\text{WVL}^F(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_{\theta \rightarrow t} \{ \phi^F(t', \omega', \theta) \} \star_{(t)} \text{WV}(t, \omega) \quad (3.65)$$

$$\text{WVL}^F(t, \omega) = \text{WVL}^F(t' = t, \omega' = \omega, t, \omega) \quad (3.66)$$

avec la fenêtre (cf. eq. 3.35) :

$$\phi^F(t', \omega', \theta) = \text{rect}_{\theta_{\max}(t', \omega')}(\theta). \quad (3.67)$$

Enfin, la distribution de Wigner-Ville Locale (sans interférences) est obtenue en lissant successivement la distribution de Wigner-Ville selon t et ω :

$$\text{WVL}(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \{ \phi^T(t', \omega', \tau) \} \star_{(\omega)} \mathcal{F}_{\theta \rightarrow t} \{ \phi^F(t', \omega', \theta) \} \star_{(t)} \text{WV}(t, \omega) \quad (3.68)$$

$$\text{WVL}(t, \omega) = \text{WVL}(t' = t, \omega' = \omega, t, \omega) \quad (3.69)$$

que l'on peut également écrire, compte tenu de la séparabilité des fonctions de lissage (cf. eq. 3.36) :

$$\begin{aligned} \text{WVL}(t', \omega', t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \{ \phi^T(t', \omega', \tau) \} \cdot \mathcal{F}_{\theta \rightarrow t} \{ \phi^F(t', \omega', \theta) \} \right) \star_{(t, \omega)} \text{WV}(t, \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F}_{\theta \rightarrow t}^{2D} \{ \phi^T(t', \omega', \tau) \cdot \phi^F(t', \omega', \theta) \} \right) \star_{(t, \omega)} \text{WV}(t, \omega) \\ &= \Phi(t', \omega', t, \omega) \star_{(t, \omega)} \text{WV}(t, \omega). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Si l'on revient au fenêtrage rectangulaire utilisé, la fonction de lissage s'écrit (cf. eq. 3.37) :

$$\Phi(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{\substack{\tau \rightarrow \omega \\ \theta \rightarrow t}}^{2D} \left\{ \text{rect}_{\tau_{\max}(t', \omega')}(\tau) \cdot \text{rect}_{\theta_{\max}(t', \omega')}(\theta) \right\} \quad (3.71)$$

$$= \frac{2\tau_{\max}(t', \omega')\theta_{\max}(t', \omega')}{\pi} \text{sinc}(\tau_{\max}(t', \omega')\omega) \text{sinc}(\theta_{\max}(t', \omega')t). \quad (3.72)$$

La séparabilité des fonctions de lissage permet également d'exprimer la distribution de Wigner-Ville Locale à partir de la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférences temporelles (resp. fréquentielles) :

$$\text{WVL}(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \left\{ \phi^T(t', \omega', \tau) \right\} \star_{(\omega)} \text{WVL}^F(t', \omega', t, \omega) \quad (3.73)$$

$$\text{WVL}(t', \omega', t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_{\theta \rightarrow t} \left\{ \phi^F(t', \omega', \theta) \right\} \star_{(t)} \text{WVL}^T(t', \omega', t, \omega). \quad (3.74)$$

Cette forme est intéressante car elle permet d'utiliser le résultat fourni implicitement lors de la détermination des bornes $\tau_{\max}(t', \omega')$ (resp. $\theta_{\max}(t', \omega')$). C'est cette forme qui a été effectivement utilisée lors de l'implantation de la méthode (voir chapitre 4).

Le fenêtrage rectangulaire est connu pour introduire des oscillations et l'on peut penser améliorer la lisibilité de la représentation en utilisant des fenêtres plus douces, dont la taille est rendue dépendante de $\tau_{\max}(t', \omega')$ et $\theta_{\max}(t', \omega')$. Ainsi, on peut considérer des fenêtres gaussiennes d'écart-type et de gain équivalents à ceux de la fenêtre rectangulaire :

$$\Phi(t', \omega', t, \omega) = \frac{2\tilde{\tau}_{\max}(t', \omega')\tilde{\theta}_{\max}(t', \omega')}{\pi} \mathcal{F}_{\substack{\tau \rightarrow \omega \\ \theta \rightarrow t}}^{2D} \left\{ \mathbf{G}_{\tilde{\tau}_{\max}(t', \omega')}(\tau) \cdot \mathbf{G}_{\tilde{\theta}_{\max}(t', \omega')}(\theta) \right\} \quad (3.75)$$

avec

$$\tilde{\tau}_{\max}(t, \omega) = \frac{\tau_{\max}(t, \omega)}{2\sqrt{3}}$$

$$\tilde{\theta}_{\max}(t, \omega) = \frac{\theta_{\max}(t, \omega)}{2\sqrt{3}}.$$

On peut également envisager d'abandonner l'idée d'un lissage séparable et de généraliser l'expression 3.70 au cas des lissages conjoints, en définissant une fenêtre de lissage dont les dimensions sont rendues dépendantes de $\tau_{\max}(t', \omega')$ et $\theta_{\max}(t', \omega')$.

3.5.2 Liens avec la Classe de Cohen

Malgré la similitude de forme entre les distributions de Wigner-Ville Locale et de pseudo Wigner-Ville (cf. eq. 3.78), la dépendance temporelle et fréquentielle de la taille des fenêtres de lissage rend impossible la caractérisation de la distribution de Wigner-Ville Locale en tant que membre de la classe de Cohen.

Ainsi, tout membre de la classe de Cohen est entièrement caractérisé par la donnée de sa fonction caractéristique qui s'écrit comme le produit de la fonction d'ambiguïté par le noyau (cf. eq. 2.20) :

$$M(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau)A(\theta, \tau).$$

Or, un calcul formel de la fonction caractéristique de la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférence temporelle (resp. fréquentielle) est possible dès que le signal étudié est séparable en temps (resp. fréquence). En effet, dans ce cas, les limites d'intégration ne dépendent que du temps (resp. de la fréquence).

Ainsi, la transformée de Fourier bidimensionnelle inverse de l'équation 3.60 donne :

$$M^T(\theta, \tau) = (\mathcal{F}^{2D})^{-1} \{ \text{WVL}^T(t, \omega) \} \quad (3.76)$$

$$= \mathcal{F}_{t \rightarrow \theta}^{-1} \{ \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) \} \star_{(\theta)} A(\theta, \tau). \quad (3.77)$$

Le point crucial est que la dépendance temporelle de la fonction de lissage résulte en une fonction caractéristique qui s'exprime comme la convolution de la fonction d'ambiguïté par la transformée de Fourier inverse du filtre local. Ce produit de convolution ne peut pas être simplifié en un produit simple, ce qui interdit d'inclure la distribution de Wigner-Ville Locale dans la classe de Cohen.

En revanche, dès que la fonction de lissage devient indépendante de t et ω (ie. la distribution de Wigner-Ville Locale est une distribution de pseudo Wigner-Ville), le produit de convolution se simplifie en un produit simple :

$$M_{\text{pWV}}(\theta, \tau) = \mathcal{F}_{t \rightarrow \theta}^{-1} \{ \phi(\tau) \} \cdot A(\theta, \tau) \quad (3.78)$$

où $\phi(\tau)$ est la fonction de lissage de la distribution de pseudo Wigner-Ville.

L'incapacité de la classe de Cohen à prendre en compte une dépendance temporelle et fréquentielle des fonctions de lissage apparaît comme une limitation qu'il peut être intéressant de lever par une extension adéquate. Ainsi, une possibilité, proposée par [CJ95, JB95], est de généraliser la fonction d'ambiguïté en la faisant explicitement dépendre du temps.

L'approche que nous suivons est différente dans le sens où c'est le noyau qui est ici rendu dépendant du temps et de la fréquence. Ainsi, si on revient à l'équation 3.70, elle peut se mettre sous la forme :

$$\text{WVL}(t', \omega', t, \omega) = \mathcal{F}_{\substack{\tau \rightarrow \omega \\ \theta \rightarrow t}}^{2D} \{ \phi(t', \omega', \theta, \tau) \cdot A(\theta, \tau) \} \quad (3.79)$$

ce qui permet d'interpréter la distribution de Wigner-Ville Locale comme le résultat d'une pondération de la fonction d'ambiguïté par un noyau dépendant du temps et de la fréquence.

3.5.3 Propriétés de la distribution de Wigner-Ville Locale

3.5.3.1 Distributions marginales

Nous n'avons pas réussi à exprimer les conditions sur le noyau étendu $\phi(t', \omega', \theta, \tau)$ pour qu'il satisfasse les conditions marginales. Ceci est en fait lié à la difficulté de définir précisément ce que doivent être les conditions marginales sur la distribution $\text{WVL}(t', \omega', t, \omega)$.

Cependant, une discussion est possible pour les signaux séparables en temps. Dans ce cas, la distribution de Wigner-Ville Locale correspond à la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférence temporelle car la fonction de lissage ne dépend que du temps (cf. eq. 3.77) :

$$\text{WVL}^T(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.80)$$

La distribution marginale temporelle est satisfaite sous la condition $\tau_{\max}(t) > 0$ vraie par construction :

$$\begin{aligned} \int \text{WVL}^T(t, \omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \underbrace{\int e^{-j\omega\tau} d\omega}_{\delta(\tau)} d\tau \\ &= |s(t)|^2. \end{aligned}$$

La distribution marginale fréquentielle est, pour sa part, satisfaite si la fonction caractéristique de la distribution de Wigner-Ville Locale évaluée en $\theta = 0$ égale la fonction caractéristique de la densité spectrale du signal ($M_{S(\omega)}(\tau) = \int |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = A(\theta = 0, \tau)$). Compte tenu de l'équation 3.77, cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned} A(\theta = 0, \tau) &= M^T(\theta = 0, \tau) \\ &= \mathcal{F}_{t \rightarrow \theta}^{-1} \{ \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) \} \star_{(\theta)} A(\theta, \tau) |_{\theta=0} \\ &= \iint \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) e^{j\alpha t} dt \int s^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) s \left(u + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\alpha u} du d\alpha \\ &= \iint \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) s^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) s \left(u + \frac{\tau}{2} \right) \underbrace{\int e^{j\alpha(t-u)} d\alpha}_{\delta(t-u)} du dt \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\int s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) dt = \int \text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau) s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) dt \quad \forall \tau. \quad (3.81)$$

La condition 3.81 n'est pas satisfaite dès que le signal engendre des composantes interférentielles temporelles. Par exemple, si l'on considère le signal «dirac» (cf. eq. 3.23) et que l'on fixe $\tau = T_0$, on se positionne dans le plan d'ambiguïté sur un terme d'interférence. Or, pour cette valeur de τ , $\text{rect}_{\tau_{\max}(t)}(\tau)$ est nulle, et donc $M^T(0, T_0) = 0$, tandis que, en ce point, la fonction d'ambiguïté ne l'est pas. La distribution marginale fréquentielle de la distribution de Wigner-Ville Locale est constante alors que la densité spectrale est une fonction oscillante (cf. eq. 3.24).

Par dualité TF, on en déduit immédiatement que, pour les signaux séparables en fréquence, la distribution marginale fréquentielle est satisfaite mais pas la distribution marginale temporelle. Compte tenu du fait que la distribution de Wigner-Ville Locale est une combinaison des deux distributions $\text{WVL}^T(t, \omega)$ et $\text{WVL}^F(t, \omega)$, les distributions marginales ne sont, en général, pas satisfaites.

Cependant, il existe deux classes de signaux où la distribution de Wigner-Ville Locale satisfait les distributions marginales. La première est de manière triviale la classe des signaux sans interférence et la deuxième correspond aux signaux simultanément séparables en temps et en fréquence (cette condition ne peut être qu'approximativement vérifiée). Un exemple est donné par le signal de la partie droite de la figure 3.5.

3.5.3.2 Conservation d'énergie

Si la distribution satisfait une des conditions marginales temporelle ou fréquentielle, comme c'est le cas pour les signaux séparables en temps ou en fréquence, l'énergie est également

conservée. En revanche, la définition de la condition à imposer à la distribution $\text{WVL}(t', \omega', t, \omega)$ et par là même, la condition à imposer à $\phi(t', \omega', t, \omega)$, restent des problèmes ouverts.

3.5.3.3 Covariance en translation

La condition de covariance en translation s'écrit :

$$\tilde{s}(t) = s(t - t_0)e^{j\omega_0 t} \quad \longrightarrow \quad \widetilde{\text{WVL}}(t, \omega) = \text{WVL}(t - t_0, \omega - \omega_0)$$

qui compte tenu des équations 3.69 et 3.70 devient :

$$\tilde{\Phi}(t', \omega', t, \omega) \star \widetilde{\text{WV}}(t, \omega) = \Phi(t' = t - t_0, \omega' = \omega - \omega_0, t - t_0, \omega - \omega_0) \star \text{WV}(t - t_0, \omega - \omega_0).$$

$\tilde{\Phi}(t', \omega', t, \omega)$ est la fonction de lissage correspondant au signal $\tilde{s}(t)$. En exploitant la propriété de covariance de $\text{WV}(t, \omega)$, on obtient la condition de covariance :

$$\tilde{\Phi}(t', \omega', t, \omega) = \Phi(t' + t_0, \omega' + \omega_0, t - t_0, \omega - \omega_0)$$

ou de manière équivalente :

$$\tilde{\phi}(t', \omega', \theta, \tau) = \phi(t' + t_0, \omega' + \omega_0, \theta, \tau).$$

Ce résultat traduit simplement le fait que la fonction de lissage local de $\tilde{s}(t)$ est la version translatée de celle du signal original.

Dans le cas des lissages séparables, cette condition devient :

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}^T(t', \omega', t, \omega) = \Phi^T(t' + t_0, \omega' + \omega_0, t - t_0, \omega - \omega_0) \\ \tilde{\Phi}^F(t', \omega', t, \omega) = \Phi^F(t' + t_0, \omega' + \omega_0, t - t_0, \omega - \omega_0) \\ \tilde{\phi}^T(t', \omega', \theta, \tau) = \phi^T(t' + t_0, \omega' + \omega_0, \theta, \tau) \\ \tilde{\phi}^F(t', \omega', \theta, \tau) = \phi^F(t' + t_0, \omega' + \omega_0, \theta, \tau). \end{cases}$$

On peut vérifier que cette condition est vraie dans le cas de la distribution de Wigner-Ville Locale. En effet, les fonctions de lissage local sont obtenues par estimation à partir des fonctions produit temporel et fréquentiel. C'est donc la covariance de ces fonctions (immédiate à vérifier) qui est à même de garantir la covariance de la distribution de Wigner-Ville Locale.

3.5.3.4 Covariance en dilatation

La condition de dilatation est :

$$\tilde{s}(t) = \sqrt{a}s(at) \quad \longrightarrow \quad \widetilde{\text{WVL}}(t, \omega) = \text{WVL}\left(at, \frac{\omega}{a}\right).$$

En procédant de manière similaire au cas précédent, on obtient la condition sur le noyau :

$$\tilde{\Phi}(t', \omega', t, \omega) = \Phi\left(at', \frac{\omega'}{a}, at, \frac{\omega}{a}\right).$$

Or, la seule possibilité pour qu'une fonction $f\left(at, \frac{\omega}{a}\right) = f(t, \omega)$ satisfasse la condition précédente est que les variables t, ω interviennent par l'intermédiaire d'un produit $f(t, \omega) = f(t \cdot \omega)$ [Coh95]. Dans le cas étudié, cela correspond à la condition suivante :

$$\Phi(t', \omega', t, \omega) = \Phi(t' \cdot \omega', t \cdot \omega, t' \cdot \omega, t \cdot \omega'). \quad (3.82)$$

Cette condition n'est en général pas satisfaite par le noyau donné à l'équation 3.72 car, d'une part, les limites optimales sont des fonctions présentant souvent des discontinuités et, d'autre part, le terme $\text{sinc}(\tau_{\max}\omega) \text{sinc}(\theta_{\max}t)$ n'est pas une fonction du produit $t \cdot \omega$.

Cependant, toute limite optimale de la forme :

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(t') &= at' \\ \theta_{\max}(\omega') &= b\omega' \end{aligned}$$

permet au noyau de satisfaire la condition de covariance en dilatation. C'est, par exemple le cas du signal «croix» (cf. eq 3.48) si l'on exclut les axes $t = 0, \omega = 0$.

3.5.3.5 Réalité

La réalité de la distribution est assurée dès lors que la fonction de filtrage vérifie la condition de symétrie :

$$\phi(t', \omega', \theta, \tau) = \phi(t', \omega', -\theta, -\tau).$$

Toutes les définitions de représentation de Wigner-Ville Locale proposées satisfont cette condition par construction.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle distribution TF, appelée distribution de Wigner-Ville Locale a été proposée. L'idée à la base de sa construction est d'effectuer un lissage de la distribution de Wigner-Ville par des fenêtres dont les dimensions dépendent du point TF considéré.

Le premier point abordé concerne la définition des dimensions optimales au sens de la réduction des interférences. Pour cela, les fonctions produit temporel et fréquentiel sont introduites. L'étude de leurs propriétés, effectuée dans le cas des signaux séparables en temps, en fréquence et non-séparables, met en évidence leur capacité à isoler la contribution des auto-termes de celle des interférences. Les points de séparation obtenus sont en accord avec la règle de construction du point milieu et permettent de définir les dimensions de la fenêtre optimale.

En second lieu, se pose le problème d'estimer les dimensions des fenêtres pour chaque valeur de t et ω . Cette estimation est réalisée en deux étapes. La première consiste en un filtrage bidimensionnel de la fonction produit temporel selon les axes t et τ , qui permet d'éliminer l'influence des termes oscillants et de faire ressortir les «massifs» caractéristiques des auto-termes et des interférences temporelles. L'estimation des limites $\tau_{\max}(t, \omega)$ est alors réalisée à partir de la détection des massifs caractéristiques d'interférences temporelles.

La même approche appliquée à la fonction produit fréquentiel permet d'obtenir les limites optimales $\theta_{\max}(t, \omega)$ pour la réduction des interférences fréquentielles.

Enfin, à partir de la donnée des dimensions de la fenêtre, la distribution de Wigner-Ville Locale est obtenue en effectuant un lissage local de la distribution de Wigner-Ville. Différentes possibilités sont proposées. La prise en compte du caractère local du lissage impose de différencier les variables temps et fréquence suivant qu'elles sont relatives au lissage ou au signal. Il résulte de cette formulation que la distribution de Wigner-Ville Locale peut être vue comme une extension de la classe de Cohen dans le sens où elle utilise un noyau qui dépend explicitement du temps et de la fréquence.

Un autre intérêt de la forme proposée est qu'elle permet l'étude de certaines propriétés de la distribution.

Le chapitre suivant présente la discrétisation de la méthode. Ses performances sont étudiées sur des signaux synthétiques et comparées à celles de la méthode du noyau optimal.

Chapitre 4

Distributions de Wigner-Ville Locales : Implantation et exemples

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente la discrétisation de la méthode proposée précédemment, nécessaire à son implantation sur ordinateur. Les performances sont ensuite évaluées sur des signaux synthétiques et comparées à celles fournies par la méthode du noyau optimal.

4.2 Implantation numérique

La phase de discrétisation a pour objectif d'approcher le cas continu de telle sorte que les résultats obtenus soient identiques sur la grille TF (ie. en tous points de cette grille). Lors de la discrétisation, les erreurs de quantification et les erreurs numériques sont ignorées.

Plus précisément, la distribution de Wigner-Ville Locale nécessite la discrétisation des quatre étapes suivantes :

- Calcul des fonctions produit temporel et fréquentiel sur une grille t - ω équidistante, en évitant les problèmes de recouvrement.
- Lissage des fonctions produit temporel et fréquentiel.
- Estimation des bornes d'intégration optimales $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$.
- Calcul de la distribution de Wigner-Ville Locale en respectant la convolution discrète.

Hormis la procédure d'estimation des bornes optimales, qui ne pose pas de problème particulier, la discrétisation de chacune de ces étapes est présentée. L'algorithme complet est ensuite présenté sous la forme d'un structogramme et sa complexité numérique est évaluée.

4.2.1 Calcul des fonctions produit temporel et fréquentiel

Le calcul des fonctions produit temporel (eq. 3.6) et fréquentiel (eq. 3.10) impose d'interpoler le signal temporel et sa transformée de Fourier par un facteur 2 pour pouvoir disposer des termes $s(t - \frac{\tau}{2})$ et $S^*(\omega - \frac{\theta}{2})$. Etant données N valeurs du signal $s(t)$ obtenues par

échantillonnage à la fréquence f_e , on doit, à l'issue de la phase d'interpolation, disposer des valeurs du signal et de sa transformée de Fourier aux $2N$ instants et fréquences discrets :

$$\begin{aligned} t &= k \cdot \frac{T_e}{2} & k &= -N \dots N - 1 \\ \omega &= n \cdot \frac{f_e}{2N} & n &= -N \dots N - 1 \end{aligned}$$

où $T_e = \frac{1}{f_e}$ est la période d'échantillonnage, k le temps discret et n la fréquence discrète.

Nous avons procédé par interpolation dans le domaine spectral :

$$\vec{s}_{2N}^i = \text{DFT}^{-1} \left\{ \underbrace{(0 \dots 0)}_{N/2} \text{DFT} \left\{ \vec{s}_N^T \right\} \underbrace{(0 \dots 0)}_{N/2} \right\}^T \quad (4.1)$$

$$\vec{S}_{2N}^i = \text{DFT} \left\{ \underbrace{(0 \dots 0)}_{N/2} \vec{s}_N^T \underbrace{(0 \dots 0)}_{N/2} \right\}^T \quad (4.2)$$

où, par convention, \vec{s}_K représente un vecteur de K données discrètes.

Le résultat de cette interpolation n'est pas optimal car elle suppose implicitement le signal interpolé périodique de période $\frac{2N}{2f_e}$ ce qui n'est généralement pas le cas¹. Cela se traduit principalement par une mauvaise interpolation des échantillons au voisinage des limites de la fenêtre temporelle. Cependant, compte tenu du fenêtrage des données, la distribution de Wigner Ville tend vers zéro dans ces régions et cet effet est négligé².

4.2.2 Implantation des filtres de lissage

Le filtrage des fonctions produit nécessite l'implantation de quatre bancs de filtres gaussiens dont l'écart-type dépend de τ . Les versions discrètes des fonctions produit ont un support de forme triangulaire, conséquence du fenêtrage des données, dont les dimensions sont :

- Axe t (ω) : $2N$ échantillons aux valeurs $-N \dots N - 1$.
- Axe τ (θ) : la base du triangle est à $\tau = 0$ et sa pointe à $\tau = N - 1$. Celle-ci a une largeur égale à deux échantillons aux instants (fréquences) $k = (-1; 0)$.

Chaque banc de filtres comprend au minimum N filtres définis par leur écart-type.

Pour minimiser l'influence des effets de bords, les filtres ont été implantés en effectuant une normalisation par leur surface active (c'est une technique qui vient du traitement d'image) :

$$\bar{T}'_{k,n}(\tau) = \frac{1}{L + \min(L, \tau)} \sum_{i=-\min(L, \tau)}^L \mathbf{G}_{\sigma(\tau)}(\tau - i) \cdot T_{k,n}(i)$$

La longueur L du filtre est obtenue en tronquant la gaussienne $\mathbf{G}_{\sigma(\tau)}(\tau)$ dès que son amplitude est inférieure à 5% de la valeur maximale.

¹Une alternative serait d'effectuer une interpolation dans le domaine temporel. La méthode typique consiste à introduire des zéros entre les échantillons et de filtrer avec un passe-bas de fréquence de coupure de $\frac{f_e}{4}$ dont les performances sont à spécifier.

²Ce comportement est mis en évidence sur la figure 3.9 : l'interpolation spectrale fait que le signal a une amplitude élevée sur les bords de la fenêtre, mais la distribution de Wigner-Ville tend vers zéro dans cette zone.

4.2.3 Implantation de la combinaison

Lors de l'estimation des bornes d'intégration temporelles $\tau_{\max}(t, \omega)$, on peut calculer simultanément la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférence temporelle. Compte tenu de l'équation 3.74, on peut réutiliser ce résultat en le convoluant avec le filtre obtenu à partir de la donnée des limites $\theta_{\max}(t, \omega)$:

$$\text{WVL}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left\{ \text{rect}_{\theta_{\max}}(\theta) \right\} \star_{(t)} \text{WVL}^T(t, \omega)$$

De plus, afin d'assurer l'égalité des formes 3.73 et 3.74, on utilise la convolution circulaire.

Enfin, on peut remarquer que la transformée de Fourier discrète de $\text{rect}_T(k)$ donnée par :

$$\text{DFT} \{ \text{rect}_T(k) \} = 1 + 2 \sum_{i=1}^T \cos \left(\frac{2\pi i k}{N} \right)$$

se prête facilement à une implantation récursive car le filtre de largeur $T + 1$ se déduit aisément de celui de largeur T .

4.2.4 Algorithme

La dualité entre le temps et la fréquence nous permet d'utiliser le même algorithme pour l'estimation des limites d'intégration temporelles et fréquentielles. L'algorithme final (voir figure 4.1) appelle deux fois le sous-programme «WVL-Iteration» :

- la première fois avec, comme argument, le signal temporel interpolé (eq. 4.1),
- la deuxième fois avec, comme argument, le spectre interpolé (eq. 4.2).

A chaque appel, WVL-Iteration fournit les limites d'intégration $\tau_{\max}(k, n)$ (resp. $\theta_{\max}(k, n)$) et la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférence temporelle (resp. fréquentielle).

Le structogramme de WVL-Iteration est présenté à la figure 4.2 dans le cas du premier appel. Le tableau 4.1 présente la correspondance entre les paramètres pour le deuxième appel.

L'algorithme a été développé pour être utilisé dans un environnement Matlab. Le programme principal est une fonction «M» qui appelle, d'une part, le sous-programme «WVL-Iter» et, d'autre part, un sous-programme calculant la distribution de Wigner-Ville Locale. Ces deux sous-programmes sont des fonctions «mex» écrites en langage C.

Dans le cas où les valeurs de τ_{\max} et θ_{\max} sont estimées à l'infini, la complexité de l'algorithme est :

$$O\{N\} = \underbrace{2 \cdot 2N \text{Id}(2N)}_{\text{Interpolation}} + \underbrace{2 \cdot 12(N)^2}_{T,F} + \underbrace{2 \cdot (2N)^3 \cdot L}_{\text{Filtrage}} + \underbrace{2 \cdot (2N)^3}_{\text{WVL}^T, \text{WVL}^F} + \underbrace{(2N)^3}_{\text{WVL}}$$

où N est le nombre d'échantillons, $L \leq N$ est la longueur des filtres (supposée identique pour chacun des quatre filtres). La complexité de l'algorithme provient essentiellement du filtrage. Le temps de calcul sur notre SUN-IPX est de l'ordre de 10 minutes pour un signal de 64 échantillons, ce qui peut amener à penser que l'abréviation WVL signifie Wigner-Ville Lent.

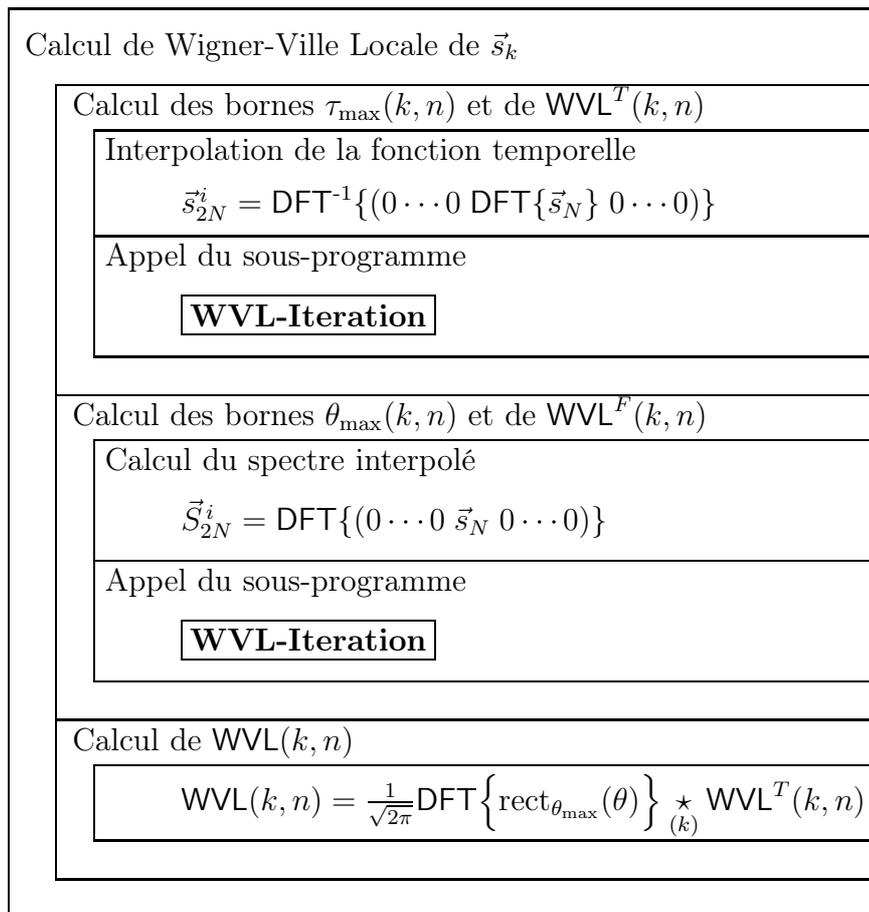


FIG. 4.1: Structogramme de l'algorithme de calcul de la distribution de Wigner-Ville Locale.

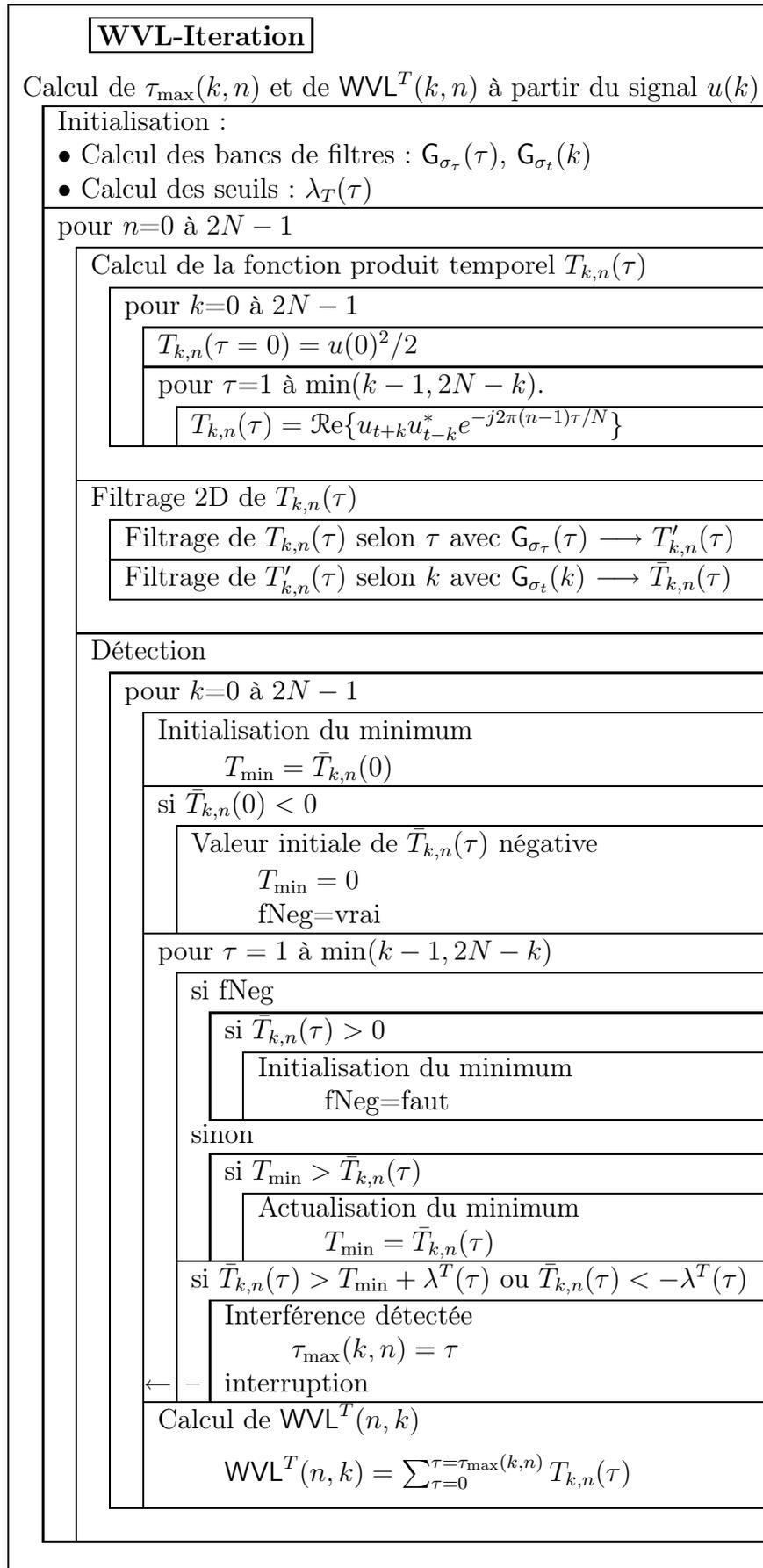


FIG. 4.2: Structogramme du sous-programme de l'algorithme Wigner-Ville Locale.

WVL-Iteration : $\vec{u}_{2N} = \vec{s}_{2N}^i$	WVL-Iteration : $\vec{u}_{2N} = \vec{S}_{2N}^i$
$G_{\sigma_\tau}(\tau)$	$G_{\sigma_\theta}(\theta)$
$G_{\sigma_t}(k)$	$G_{\sigma_\omega F}(n)$
n	k
k	n
$T_{k,n}(\tau)$	$F_{k,n}(\theta)$
$\bar{T}_{k,n}(\tau)$	$\bar{F}_{k,n}(\theta)$
τ	θ
σ_t	σ_ω
σ_τ	σ_θ
$\tau_{\max}(k, n)$	$\theta_{\max}(k, n)$
$WVL^T(k, n)$	$WVL^F(k, n)$

TAB. 4.1: Règles de correspondance entre les variables relatives aux fonctions produit temporel et produit fréquentiel.

Cependant, de nombreuses optimisations sont encore possibles, notamment dans l'implantation du filtrage. A titre d'exemple, la fonction produit temporel lissée selon l'axe temporel k $\bar{T}_{k,n}(\tau)$ se déduit de $\bar{T}_{k,0}(\tau)$ par multiplication avec le terme $e^{-j\frac{2\pi(n-1)\tau}{N}}$. Ceci impose de stocker la fonction produit lissée mais divise le coût de calcul de l'opération de filtrage par un facteur N .

4.3 Exemples et comparaisons

Dans ce paragraphe, deux signaux synthétiques sont utilisés pour illustrer le comportement de l'approche proposée. Les performances sont comparées avec celles fournies par la méthode du noyau optimal.

4.3.1 Signal «route»

Le premier exemple traité est le signal «route» introduit au paragraphe 3.3.3. Il permet de mettre en évidence le fonctionnement de l'algorithme. Le signal «route» correspond à la superposition de deux chirps linéaires de même pente m et distants de $2\omega_0$ (équation 3.38) :

$$s_{\text{route}}(t) = e^{j(\frac{1}{2}mt^2 + \omega_0 t)} + e^{j(\frac{1}{2}mt^2 - \omega_0 t)}.$$

Pour la simulation, les différents paramètres ont été fixés à $\omega_0 = \pi$, $m = \frac{1}{2}$. Le nombre des échantillons est égal à $N = 64$.

Les résultats présentés sur la figure 4.3 ont été obtenus avec comme choix de paramètres

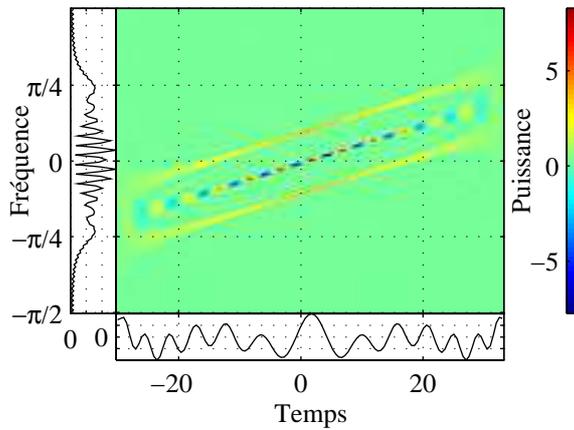
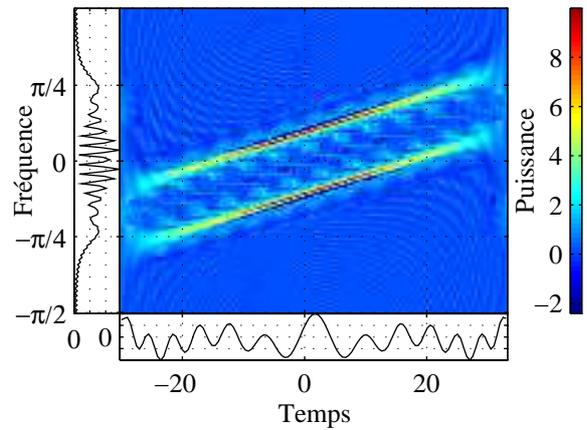
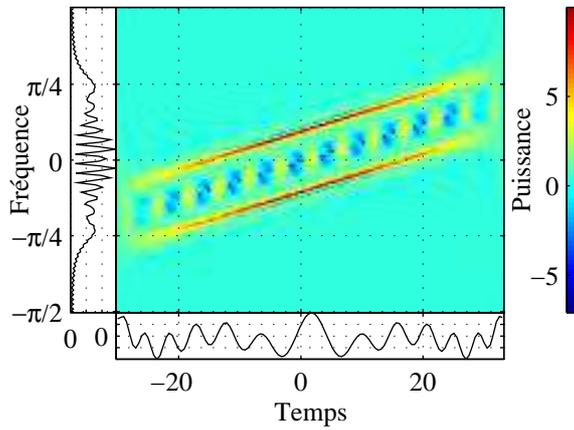
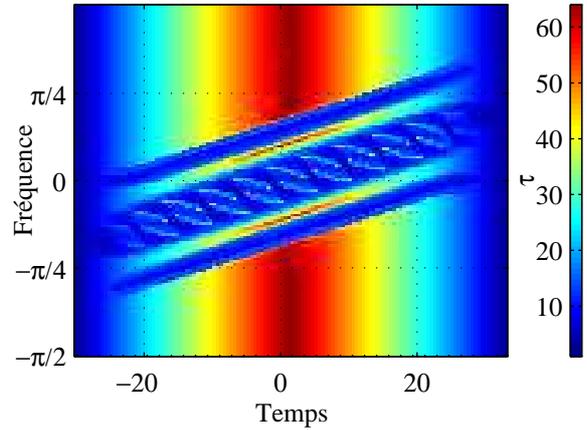
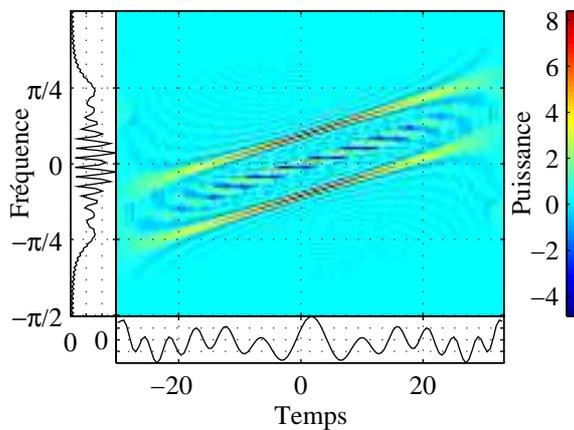
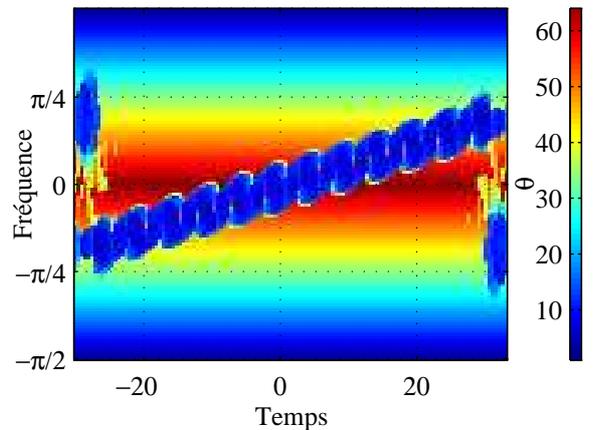
(a) Wigner-Ville $WV(t, \omega)$.(b) Wigner-Ville Locale $WVL(t, \omega)$.(c) Représentation $WVL^T(t, \omega)$.(d) Limites d'intégration $\tau_{max}(t, \omega)$.(e) Représentation $WVL^F(t, \omega)$.(f) Limites d'intégration $\theta_{max}(t, \omega)$.

FIG. 4.3: Algorithme WVL appliqué sur le signal «route».

pour l'algorithme WVl :

$$\begin{aligned}
\sigma_{t,0} &= \sigma_{\tau,0} = \sigma_{\omega,0} = \sigma_{\theta,0} = 4 \text{ échantillons} \\
\sigma_{t,1} &= \sigma_{\tau,1} = \sigma_{\omega,1} = \sigma_{\theta,1} = 3 \text{ échantillons} \\
\lambda_{T,0} &= 19,2 \cdot \mathbb{E}\{S_{\text{route}}(t)\} & \lambda_{T,1} &= \frac{\lambda_0^T}{3} \\
\lambda_{F,0} &= 9,6 \cdot \mathbb{E}\{S_{\text{route}}(\omega)\} & \lambda_{F,1} &= \frac{\lambda_0^T}{3}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La figure 4.3(a) montre la distribution de Wigner-Ville ; on remarque l'apparition entre les deux chirps d'une composante interférentielle. Son amplitude est égale à deux fois celle des auto-termes.

La figure 4.3(b) montre le résultat fourni par la distribution de Wigner-Ville Locale qui lui ne présente (presque) plus d'interférence.

La figure 4.3(c) correspond à la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférences temporelles ($WVL^T(t, \omega)$) obtenue à partir des valeurs de $\tau_{\max}(t, \omega)$ représentées sur la figure 4.3(d).

Les figures 4.3(e) et 4.3(f) correspondent à la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférence fréquentielle et les valeurs $\theta_{\max}(t, \omega)$ correspondantes.

Plusieurs remarques peuvent être faites. La première concerne l'effet de fenêtrage des données qui se traduit par le fenêtrage triangulaire des limites optimales selon l'axe t pour $\tau_{\max}(t, \omega)$ et selon l'axe ω pour $\theta_{\max}(t, \omega)$. Toute valeur de $\tau_{\max}(t, \omega)$ sur ce triangle correspond à une valeur de $\tau_{\max}(t, \omega) = \infty$ dans le cas continu.

Toute valeur qui n'est pas sur le triangle indique qu'une interférence a été détectée. Ainsi, entre les deux composantes, la présence d'interférences se caractérise par des bornes d'intégration très courtes.

On peut remarquer que des interférences sont également détectées au voisinage «extérieur» des chirps. Ceci peut être attribué aux oscillations sinc qui, avec la valeur de seuil retenue, sont détectées comme des interférences.

En revanche, le seuil pour les interférences fréquentielles est mieux choisi car il donne des résultats tout à fait conformes à ceux attendus. On peut seulement constater la présence de fausses détections que l'on peut attribuer aux effets de bord. Cependant, ils n'altèrent pas la qualité du résultat.

Dans la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférences temporelles il ne subsiste que des termes interférentiels orientés selon ω , par opposition à la distribution de Wigner-Ville Locale sans interférences fréquentielles où seuls des termes orientés selon t subsistent. Ceci peut être vu comme une mise en évidence de l'équivalence entre le fenêtrage temporel (resp. fréquentiel) et le lissage fréquentiel (resp. temporel).

Finalement, la distribution de Wigner-Ville Locale obtenue par fenêtrage simultané montre l'efficacité de la méthode pour la réduction des interférences. Les oscillations parasites qui subsistent résultent de l'utilisation d'une fenêtre rectangulaire et peuvent être sensiblement restreintes par l'utilisation de fenêtres plus «douces».

Une illustration de la procédure d'estimation de $\tau_{\max}(t, \omega)$ est donnée à la figure 4.4. La figure 4.4(a) représente la fonction produit temporel pour $\omega = 0$; les cumulants selon τ et t

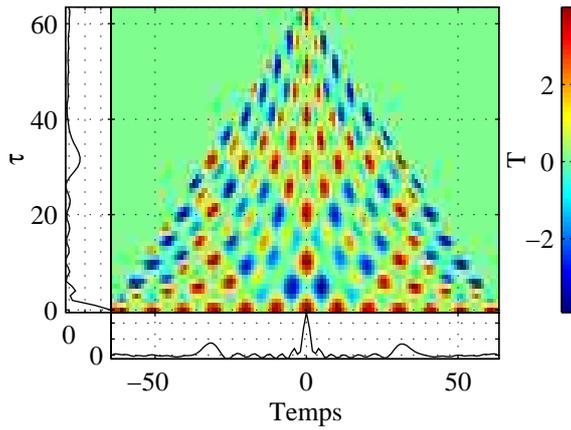
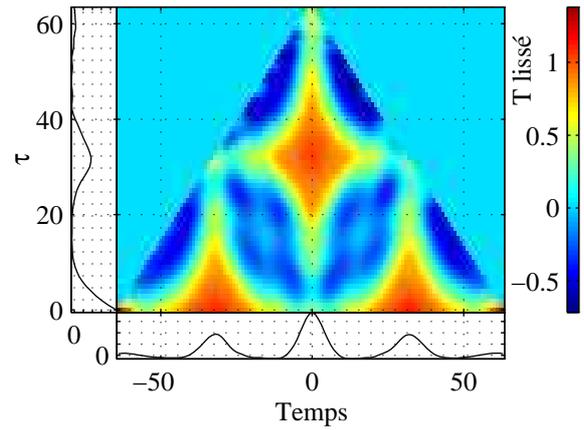
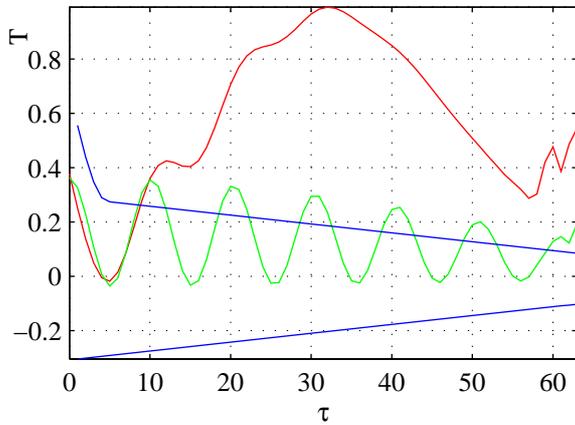
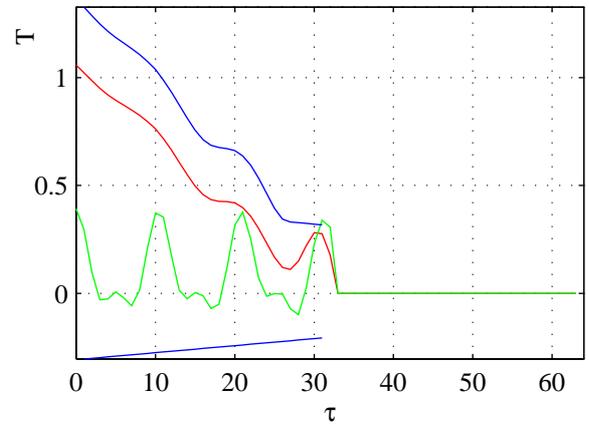
(a) $T_{t,\omega}(\tau)$ à $\omega = 0$.(b) $\bar{T}_{t,\omega}(\tau)$ à $\omega = 0$.(c) Sur l'interférence $t = 0$, $\omega = 0$.(d) Sur l'auto-terme $t = 0$, $\omega = \pi$.

FIG. 4.4: Fonction produit temporel, fonction produit temporel lissé et estimation de τ_{max} . vert : $T_{t,0}(\tau)/10$, rouge : $\bar{T}_{t,0}(\tau)$, bleu : les seuils $\lambda_+^T + \min \bar{T}$ et λ_-^T .

sont représentés dans les marges inférieure et de gauche. Le cumulatif selon τ est bien sûr la distribution de Wigner-Ville évaluée en $\omega = 0$.

Les axes sont gradués en échantillons du signal interpolé, les dimensions de la fonction produit temporel sont égales à $t \times \tau = 128 \times 64$. L'inter-terme est visible à $t = 0$ et les auto-termes à $t = \pm\pi$ ($= \pm 32,25$ échantillons interpolés). La version discrète de la fonction produit temporel présente beaucoup de similarités avec la version continue (cf. fig. 3.12(a)). On notera cependant le support triangulaire de la fonction produit temporel discrète, conséquence d'un fenêtrage rectangulaire des données. Une comparaison plus fine peut être effectuée. Ainsi, sur les figures 4.4(c) et 4.4(d) sont représentées en vert les fonctions $T_{32,0}(\tau)$ (auto-terme) et $T_{0,0}(\tau)$ (inter-terme) qui sont comparées à leur version continue.

$$T_{0,0}(\tau) = 2 + 2 \cos(\omega_0 \tau)$$

et

$$T_{\frac{\pi}{2},0}(\tau) = 2 \cos\left(\frac{2\omega_0^2}{m}\right) \cos(\tau\omega_0) + 1 + \cos(2\omega_0\tau).$$

On peut remarquer que, dans les deux cas, la version discrète reproduit assez fidèlement la fonction théorique, avec cependant la présence d'une atténuation imputable aux déphasages introduits par la discrétisation.

L'intérêt du lissage est mis en évidence par la figure 4.4(b) où les massifs associés aux auto et inter-termes sont parfaitement visibles.

La procédure de détection est illustrée par les figures 4.4(c) et 4.4(d) qui montrent les résultats obtenus sur une interférence et un auto-terme. Le comportement des fonctions produit lissées correspond bien à celui attendu (voir paragraphe 3.3.3.2).

Les figures 4.5 illustrent la procédure d'estimation de $\theta_{\max}(t, \omega)$ à partir de la fonction produit fréquentiel. Elles sont tout à fait similaires au cas précédent à deux points près. Le premier est une conséquence du facteur $m = \frac{1}{2}$ (pente des chirps) qui agit comme un facteur d'échelle sur la fonction produit fréquentiel par rapport à la fonction produit temporel. Le second point est une conséquence de la discrétisation qui rend la fonction produit fréquentiel non-disponible pour $\omega = 0$. Celle qui est représentée correspond en fait à $\omega = \frac{1}{2}$ échantillon. Ceci explique la différence entre les fonctions produit temporel et produit fréquentiel. Cependant, et c'est le point important, la fonction produit fréquentiel lissée a un comportement tout à fait similaire à la fonction produit temporel lissée.

On peut comparer le résultat fourni par la distribution de Wigner-Ville Locale à celui obtenu avec la méthode du noyau optimal (figure 2.2(c)).

4.3.2 Signal «singauss»

Le deuxième exemple est plus intéressant dans le sens où il permet de mettre en évidence la supériorité de la distribution de Wigner-Ville Locale par rapport à la méthode du noyau optimal. Le signal «singauss» est constitué de la superposition de deux composantes :

- un chirp $s_{\sin}(k)$ dont la fréquence instantanée suit une loi sinusoïdale,
- une gaussienne $s_{\text{gauss}}(k)$ centrée sur le point ($\omega = 0, t = 16$) donc située en un point où les termes interférentiels du signal $s_{\sin}(k)$ vont se superposer à la gaussienne.

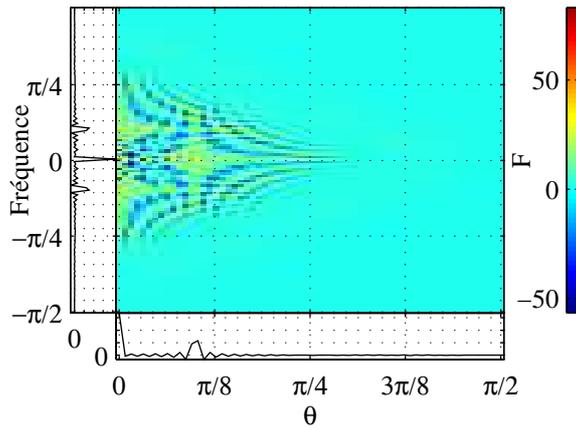
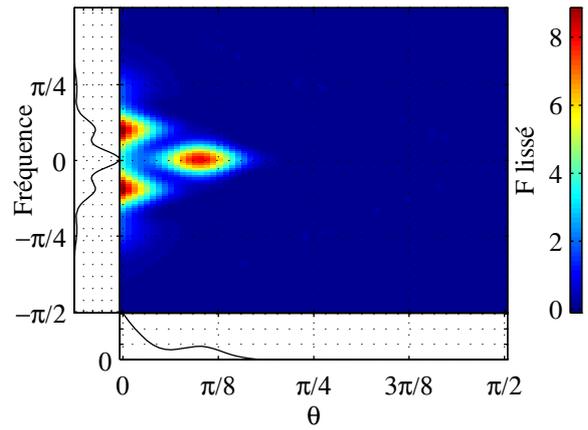
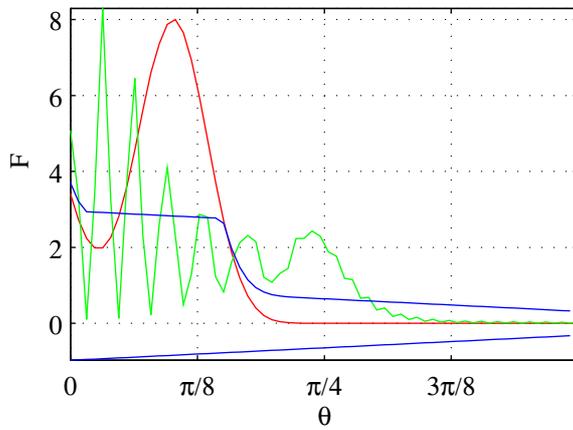
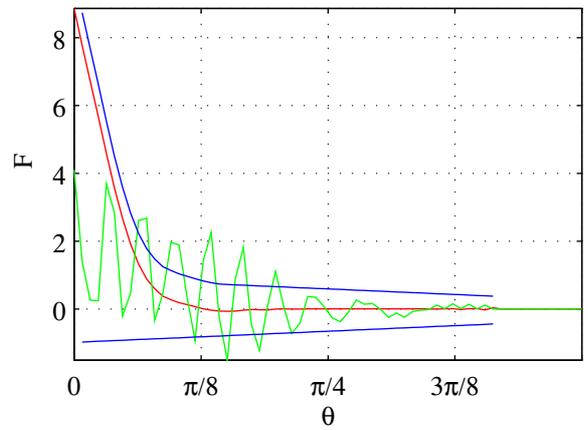
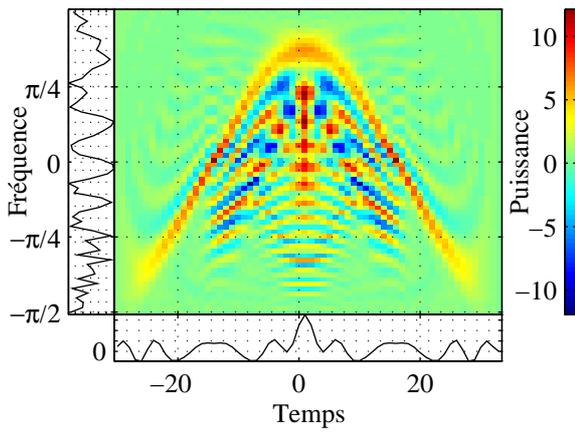
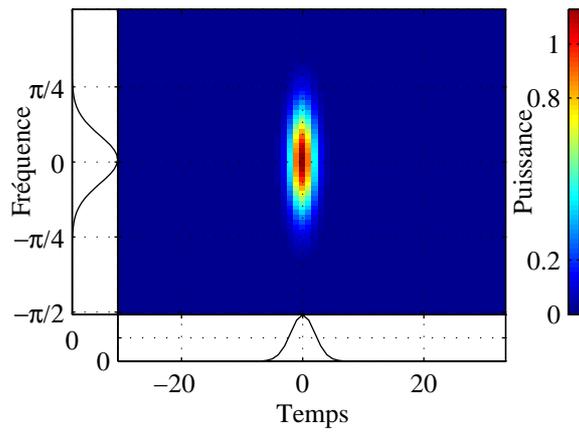
(a) $F_{t,\omega}(\theta)$ à $t = 0$.(b) $\bar{F}_{t,\omega}(\theta)$ à $t = 0$.(c) Sur l'interférence $t = 0$, $\omega = 0$.(d) Sur l'auto-terme $t = \pi$, $\omega = 0$.

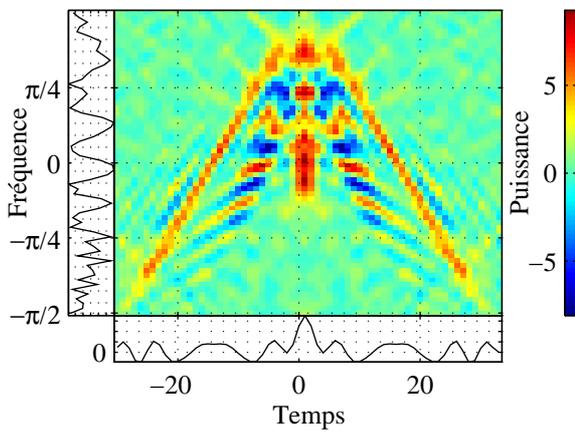
FIG. 4.5: Fonction produit fréquentiel, fonction produit fréquentiel lissée et estimation de θ_{max} . Vert : $F_{0,\omega}(\theta)/10$, rouge : $\bar{F}_{0,\omega}(\theta)$, bleu : les seuils $\lambda_+^F + \max \bar{F}$ et λ_-^F .



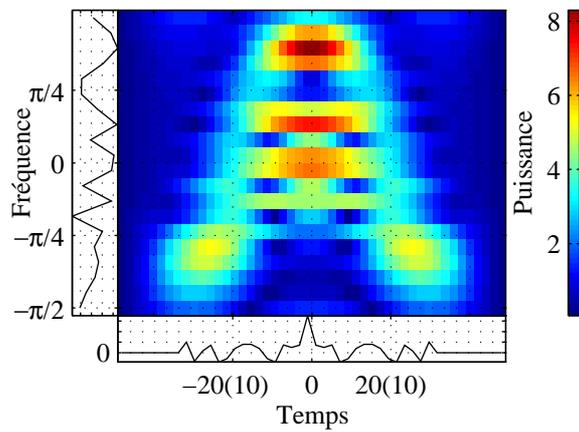
(a) Wigner-Ville.



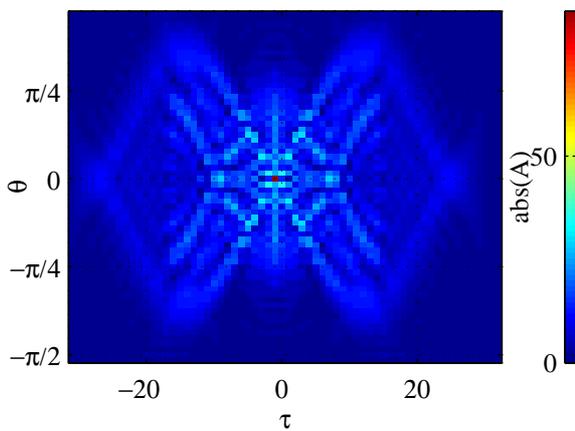
(b) Wigner-Ville de la composante $s_{gauss}(t)$.



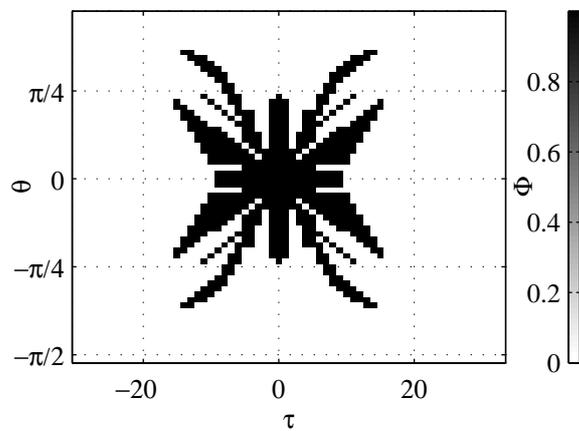
(c) Représentation Noyau Optimal avec un volume de 300 échantillons.



(d) Spectrogramme avec fenêtre glissante Hanning de taille 20.

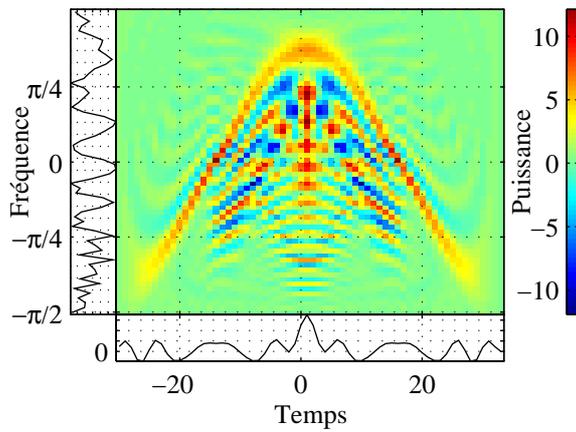


(e) Fonction d'ambiguïté.

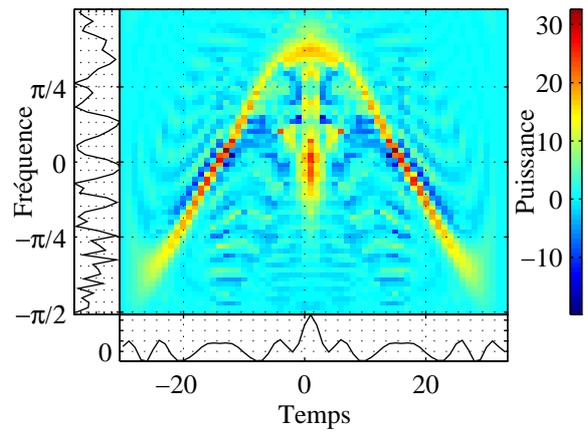


(f) Noyau Optimal $\Phi(\theta, \tau)$.

FIG. 4.6: Wigner-Ville, Spectrogramme et Noyau Optimal du signal «singauss».



(a) Wigner-Ville.



(b) Wigner-Ville Locale.

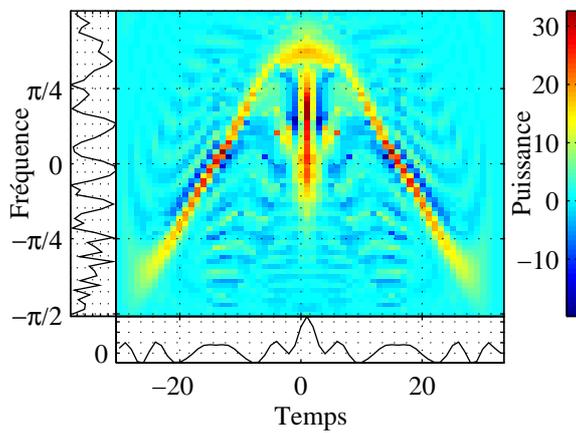
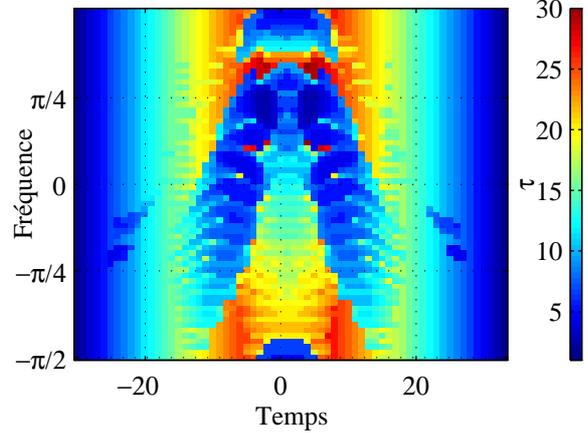
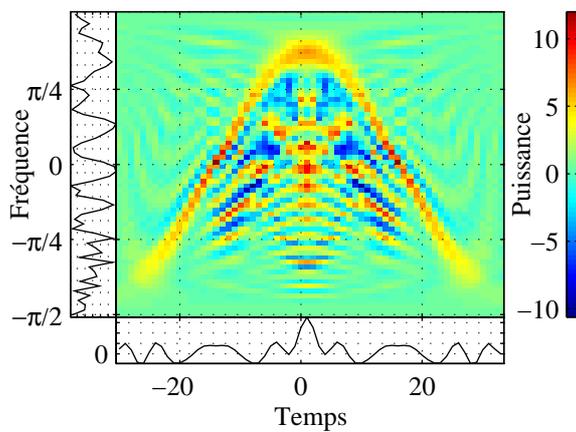
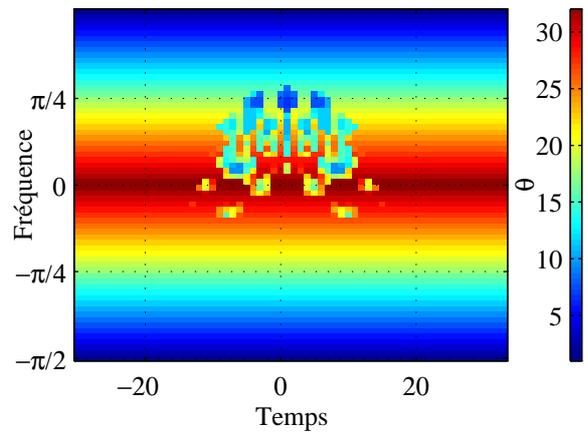
(c) Représentation $WVL^T(t, \omega)$.(d) Limites d'intégration $\tau_{max}(t, \omega)$.(e) Représentation $WVL^F(t, \omega)$.(f) Limites d'intégration $\theta_{max}(t, \omega)$.

FIG. 4.7: Algorithme WVL appliqué au signal «singauss».

$$\begin{aligned}
s_{\text{singauss}}(k) &= s_{\text{sin}}(k) + s_{\text{gauss}}(k) \\
s_{\text{sin}}(k) &= e^{-j0,4(N-2)\sin\left(\frac{2\pi(k-1)}{N-2}\right)} \\
s_{\text{gauss}}(k) &= 2,5 \cdot e^{-\frac{(k-16)^2}{2}} \\
N &= 32 \quad k = 1 \dots N.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Sa distribution de Wigner-Ville est représentée sur la figure 4.7(a). Le chirp sinusoïdal est bien visible mais la gaussienne est complètement masquée par les interférences. Pour plus de clarté, la distribution de Wigner-Ville de la gaussienne seule est représentée sur la figure 4.6(b).

Le spectrogramme du signal (fig. 4.6(d)) ne permet pas l'identification des différentes composantes. Une interprétation possible mais erronée consisterait, par exemple, à considérer qu'il résulte de la superposition de 4 ou 5 gaussiennes.

La méthode du noyau optimal fournit le résultat de la figure 4.6(c) pour une valeur de noyau relativement importante (300 échantillons=7% du volume total). La fonction d'ambiguïté (figure 4.6(e)) a une géométrie relativement complexe à laquelle le noyau (figure 4.6(c)) tente de s'adapter. La représentation TF correspondante est intéressante parce qu'elle permet de mettre en évidence certaines des limitations de cette approche (voir paragraphe 2.9.3). Ainsi sa tendance à linéariser les structures apparaît clairement sur le chirp sinusoïdal qui est même interrompu dans la zone à forte courbure. La composante gaussienne ressort maintenant bien, cependant, il subsiste des termes d'interférence dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que celle des composantes. C'est en fait une conséquence de la stratégie poursuivie par l'algorithme (optimisation sur les rayons de la fonction d'ambiguïté) et de la difficulté à définir le noyau optimal pour les structures de forme complexe.

Le résultat le plus satisfaisant est fourni par la distribution de Wigner-Ville Locale (figure 4.7). Pour cet exemple, les paramètres ont été fixés comme suit :

$$\begin{aligned}
\sigma_{t,0} &= \sigma_{\tau,0} = \sigma_{\omega,0} = \sigma_{\theta,0} = 1,5 \text{ échantillon} \\
\sigma_{t,1} &= \sigma_{\tau,1} = \sigma_{\omega,1} = \sigma_{\theta,1} = 1 \text{ échantillon} \\
\lambda_{T,0} &= \frac{1}{8} \cdot \mathbf{E}\{s_{\text{route}}(t)\} & \lambda_{T,1} &= \frac{\lambda_{T,0}}{3}, \\
\lambda_{F,0} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}\{S_{\text{route}}(\omega)\} & \lambda_{F,1} &= \frac{\lambda_{T,0}}{3}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Les points remarquables sont que la distribution suit bien la loi de modulation du chirp et que les interférences sont fortement atténuées, ce qui permet de faire ressortir la gaussienne. La forme de la gaussienne est d'ailleurs assez proche de la forme idéale donnée par la distribution de Wigner-Ville de cette composante (figure 4.6(b)). En fait, seuls subsistent deux points interférentiels situés au dessus de la gaussienne. Ils correspondent en fait à deux points où la procédure de détection n'a pas fonctionné.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la discrétisation des différentes étapes et l'algorithme final calculant la distribution de Wigner-Ville Locale ont été présentés. Dans sa version actuelle, le princi-

pal inconvénient de cette approche réside dans son coût de calcul. Cependant différentes améliorations sont envisageables.

En revanche, les résultats fournis sur les signaux synthétiques ont permis de montrer les performances supérieures par rapport à la méthode du noyau optimal, notamment dans le cas de composantes à la géométrie complexe. Un point important est que ces performances ne semblent pas trop se dégrader en présence de bruit.

Ainsi son application aux signaux vibratoires de boîtes de vitesses (voir chapitre 5) a également fourni des résultats plus fins que la méthode du noyau optimal.

Chapitre 5

Analyse TF des signaux vibratoires de boîtes de vitesses

5.1 Introduction

L'application d'un outil tel que le temps-fréquences à l'analyse d'un signal, nécessite de définir en premier lieu les objectifs de cette analyse. Dans le cas des signaux vibratoires de boîtes de vitesses, et compte tenu de la finalité de l'étude (diagnostic de défauts de boîte), un des objectifs premiers est la caractérisation des phénomènes de modulation d'amplitude et de phase d'une part sur une boîte saine, et d'autre part sur une boîte avec un élément défectueux.

Cette caractérisation est en effet indispensable à l'élaboration d'une stratégie de diagnostic cohérente. Si l'on s'en tient à la détection et à la localisation d'éléments défectueux, une analyse de Fourier est capable de fournir une caractérisation suffisamment discriminante entre les différents états possibles (tout au moins pour les défauts d'engrenages et de bague externe de roulements). Cependant, dès lors que l'on s'intéresse au problème d'analyse et de diagnostic physique, l'analyse de Fourier montre ses limitations.

Le vrai problème est en fait moins lié à l'analyse de Fourier en elle-même qu'à la méconnaissance des phénomènes physiques mis en jeu lors de l'engrènement d'une dent (qu'elle soit saine ou détériorée). C'est dans ce cadre que se manifeste tout l'intérêt d'une analyse TF. Notamment, le point important est sa capacité à «montrer les choses autrement», à changer de point de vue. On peut aussi espérer mieux comprendre des phénomènes qui jusqu'alors restaient inaccessibles.

Outre la caractérisation des phénomènes de modulation présents dans le signal vibratoire, notre objectif est l'interprétation des signaux vibratoires et la validation (ou l'invalidation) des hypothèses classiquement admises.

Pour cela, nous proposons une méthode d'analyse que nous avons souhaitée la plus systématique possible. Elle est appliquée à l'étude des signaux vibratoires de boîtes saines, puis avec défauts d'engrenages, et finalement sur des boîtes avec des défauts de roulement.

Pour chaque cas, on tente de dégager les structures caractéristiques, afin d'étudier l'influence du positionnement des capteurs. Enfin, et dans la mesure du possible, on fournit une interprétation physique des phénomènes observés. L'ensemble des résultats obtenus nous conduit

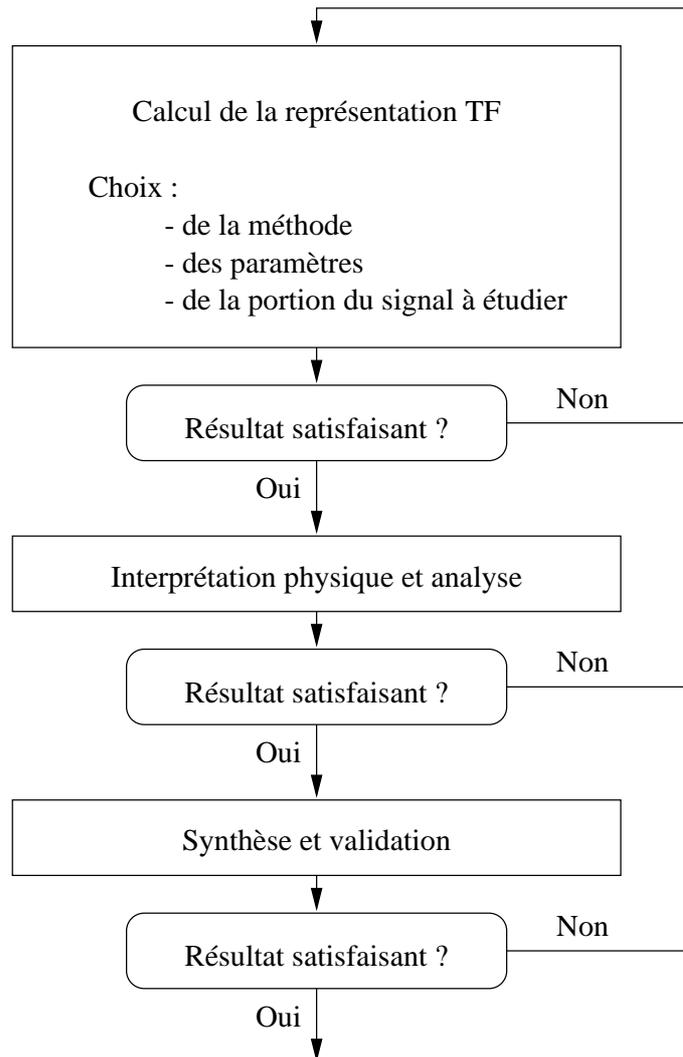


FIG. 5.1: Démarche d'analyse TF.

à proposer un modèle vibratoire de la boîte de vitesses, qui bien que largement incomplet, offre l'avantage de bien mettre en évidence les informations que l'on peut extraire du signal.

Ce chapitre est une synthèse des travaux présentés dans [OBBT95b, OBBT95c, OBBT95a, OBTR97, OBTR96].

5.2 Méthode d'analyse TF

La méthode que nous proposons suit le principe présenté sur la figure 5.1 ; elle peut se décomposer en trois étapes :

- choix et calcul de la représentation TF,
- interprétation et sélection des composantes principales,
- synthèse et validation du modèle.

5.2.1 Choix et calcul de la représentation TF

Trois méthodes fournissant des représentations TF sont considérées pour notre problème d'analyse. Ce sont respectivement la méthode du spectrogramme (transformée de Fourier avec fenêtre glissante) qui, d'un point de vue historique, fut la première à être mise en oeuvre sur les signaux vibratoires [Pim62], la méthode du noyau optimal et la méthode de Wigner-Ville Locale. Le tableau 5.1 résume les avantages et les inconvénients liés à chaque méthode.

Deux critères ont été retenus pour choisir une méthode de représentation. Le premier concerne l'élimination des interférences, tandis que le second est lié au temps de calcul de la représentation. Le problème de réduction des interférences est important dans le cas de l'analyse car il est essentiel pour nous de conserver uniquement les informations relatives aux processus physiques observés. Le chapitre 5.3.1 montre des exemples de mise en oeuvre de ces différentes techniques. La méthode qui conserve le mieux les structures locales tout en réduisant les interférences est la représentation de Wigner-Ville Locale. Cependant, le temps de calcul est important puisqu'il est proportionnel à N^4 . La méthode du spectrogramme possède une mauvaise résolution TF et ne permet donc pas une analyse fine du signal de vibration. Pour notre part, nous avons choisi d'utiliser de façon systématique dans les chapitres 5.3 et 5.4, la méthode du noyau optimal, car elle fournit le meilleur compromis entre la réduction des interférences et un coût de calcul raisonnable. Elle présente toutefois l'inconvénient d'altérer légèrement les composantes principales comme nous le verrons par la suite. La méthode de Wigner-Ville Locale est alors utilisée pour lever un doute quant à l'existence d'une composante.

5.2.2 Interprétation et sélection des composantes principales

En premier lieu, afin de pouvoir interpréter une représentation TF, les structures les plus énergétiques sont retenues, car elles sont supposées être caractéristiques du phénomène physique observé. Par exemple, un défaut tel qu'un écaillage localisé de denture, se traduit par une brusque augmentation de l'énergie du système. Cette dernière se caractérise par une augmentation de l'amplitude et de la fréquence des vibrations.

En second lieu, l'interprétation physique consiste alors à faire le lien entre ces structures TF et nos connaissances a priori sur les différents éléments constituant la boîte de vitesses (roulements et engrenages) ainsi que sur les conditions de fonctionnement (vitesse de rotation).

5.2.3 Synthèse et validation du modèle

La synthèse d'un signal à partir d'une représentation TF est un problème complexe. C'est cependant, une étape clef car elle permet d'une part, de valider la méthode de calcul de la représentation TF, et d'autre part, de vérifier si le choix des composantes TF sélectionnées pour l'interprétation est correct.

Pour notre part, nous avons adopté une approche simplifiée fondée sur un modèle temporel à amplitude variable et à variations linéaires de fréquences instantanées correspondant aux structures typiques trouvées dans les signaux vibratoires.

Méthode	Avantages	Inconvénients	Paramètres	Complex.
Noyau optimal	<ul style="list-style-type: none"> – Adaptation optimale du noyau pour tout le signal – Réduction des interférences – Bonne résolution TF 	<ul style="list-style-type: none"> – Structures linéaires dominantes – Les structures les plus énergétiques imposent leur forme – Tendance à linéariser les structures – Besoin important de mémoire 	Volume du Noyau	$N^2 \log N$
Wigner-Ville locale	<ul style="list-style-type: none"> – Noyau local pour chaque point TF – Réduction des interférences – Très bonne résolution TF 	<ul style="list-style-type: none"> – Temps de calcul – 3 paramètres à fixer – Besoin important de mémoire 	3	N^4
Spectrogramme	<ul style="list-style-type: none"> – Facilité de mise en œuvre 	<ul style="list-style-type: none"> – Mauvaise résolution TF – fenêtre à choisir 	Fenêtre (Type, largeur)	$N \log N$
Wigner-Ville	<ul style="list-style-type: none"> – Facilité de mise en œuvre – Bonne résolution TF 	<ul style="list-style-type: none"> – Présence d'interférences (Cela complique l'interprétation et peut cacher les composantes) 	aucun	$N \log N$

TAB. 5.1: Tableau récapitulatif des avantages et inconvénients de chaque méthode TF.

Chaque composante est décrite par une droite (dans le plan TF) d'amplitude variable dont le modèle est donné par :

$$c(t) = A(t) \cos \left(2\pi \left(f_0 + \frac{\Delta f}{2} t \right) t + \varphi_0 \right).$$

Le modèle final est alors la somme de ces composantes :

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \cos \left(2\pi \left(f_{0,i} + \frac{\Delta f_i}{2} t \right) t + \varphi_{0,i} \right). \quad (5.1)$$

Les paramètres suivants doivent être évalués :

- nombre N et position des lignes i : ils sont obtenus directement sur la représentation TF,
- phases $\varphi_{0,i}$: les phases sont estimées par corrélation ou optimisation de l'erreur quadratique,
- amplitudes $A_i(t)$: une bonne méthode d'estimation de l'amplitude consiste à intégrer la racine carrée de l'amplitude de la représentation TF sur une région entourant chaque composante.

La méthode utilisée tente d'estimer cette intégrale par les valeurs de la représentation TF sur chacune des lignes ; ces valeurs sont pondérées par des facteurs α_i constants qui sont déterminés par optimisation non linéaire :

$$A_i(t) = \alpha_i \sqrt{\text{RTF}(t, \omega(t))}.$$

La validation est alors effectuée en comparant le signal estimé $\hat{s}(t)$ au signal original.

Ce modèle peut éventuellement être utilisé dans une procédure de détection.

5.3 Analyse des signaux de vibration d'engrenages

5.3.1 Exemple d'analyse

A titre d'exemple, on présente l'application de la méthode d'analyse proposée à un signal vibratoire correspondant à un défaut d'engrenage situé sur le pignon récepteur du rapport de première.

5.3.1.1 Calcul de la représentation TF

Les figures 5.2, 5.3(a) et 5.4 montrent les représentations TF obtenues respectivement par la méthode du spectrogramme, du noyau optimal, et de Wigner-Ville Locale.

La représentation fournie par le spectrogramme manque clairement de résolution pour pouvoir effectuer une analyse fine du signal.

En comparaison, les méthodes du noyau optimal et de Wigner-Ville Locale font ressortir beaucoup plus de détails. Notamment, les composantes fortement énergétiques de type

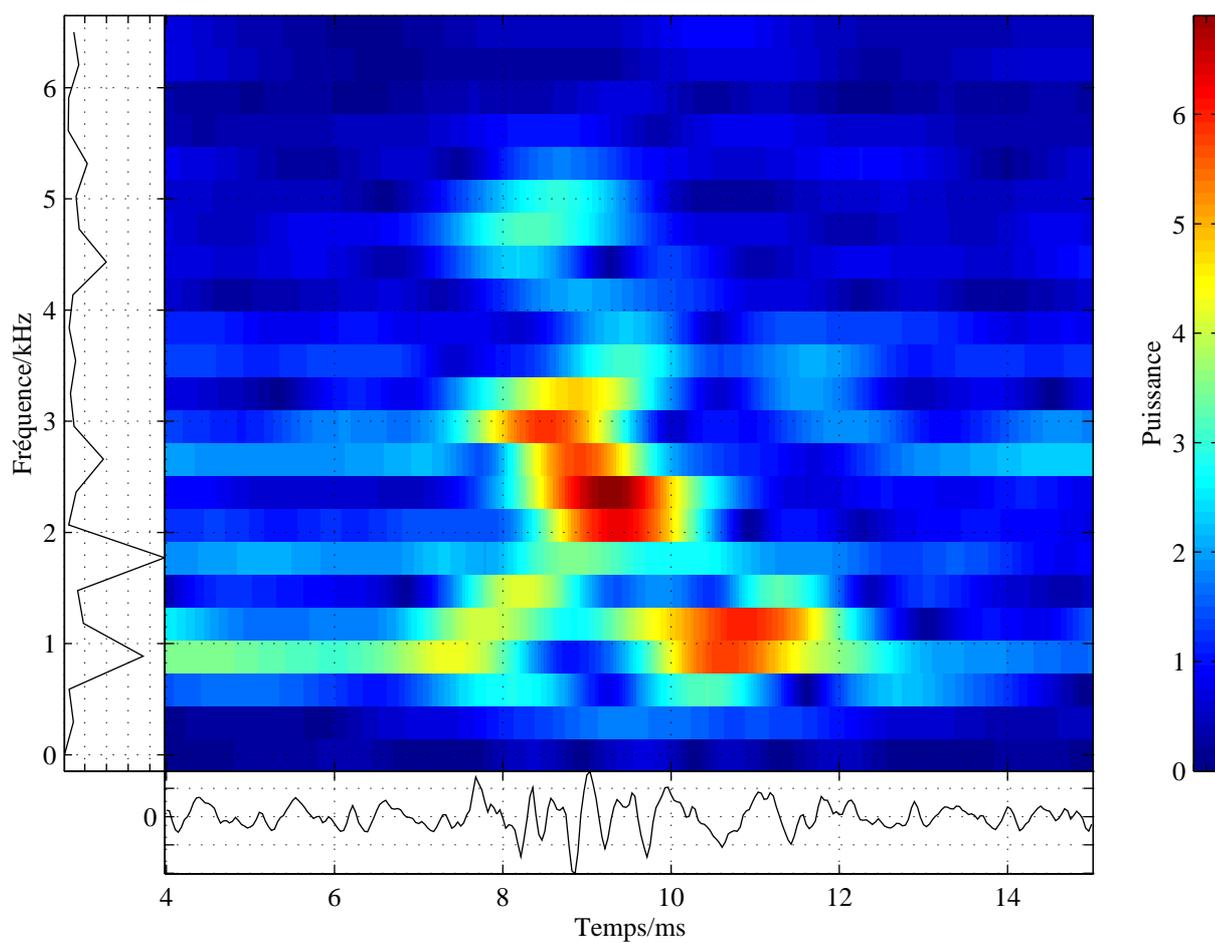
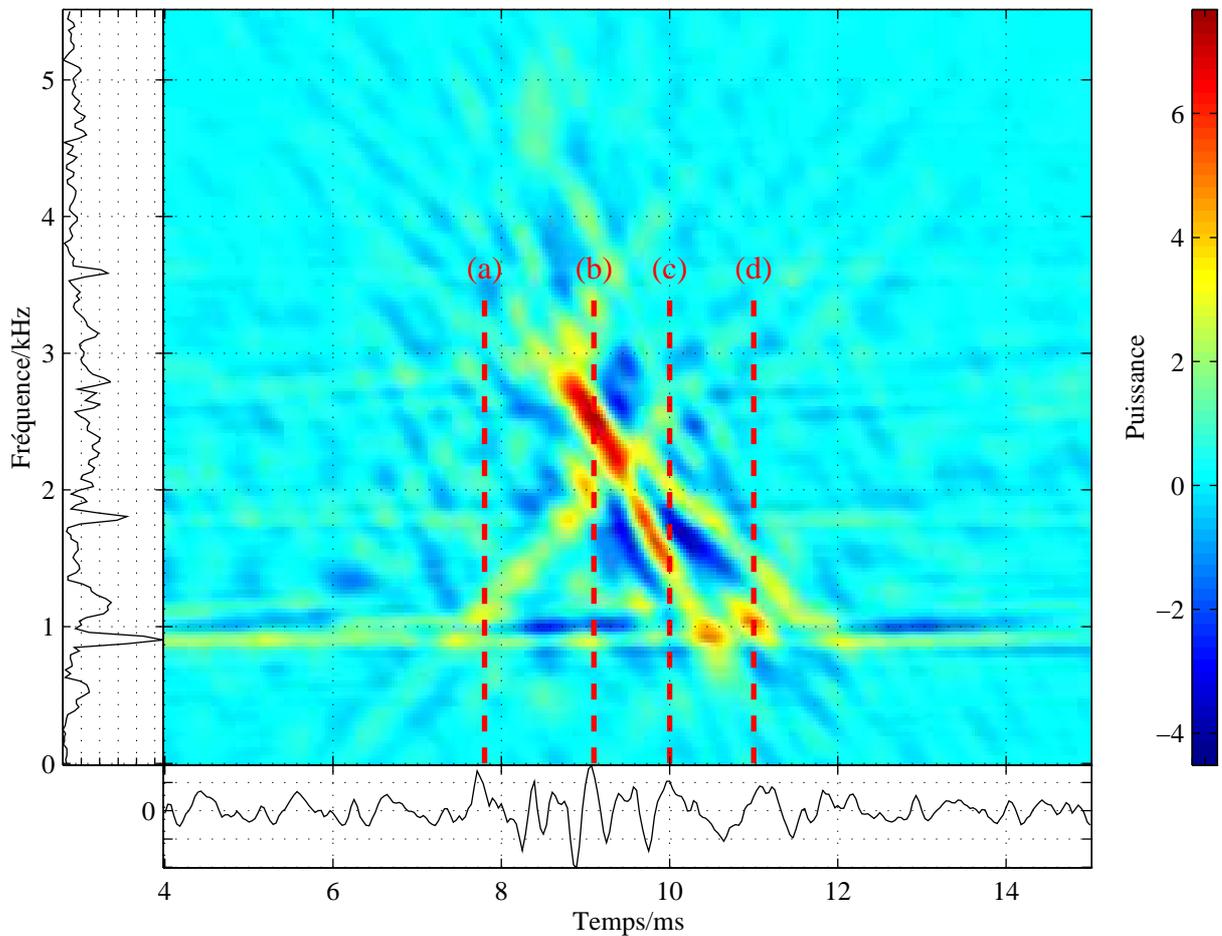
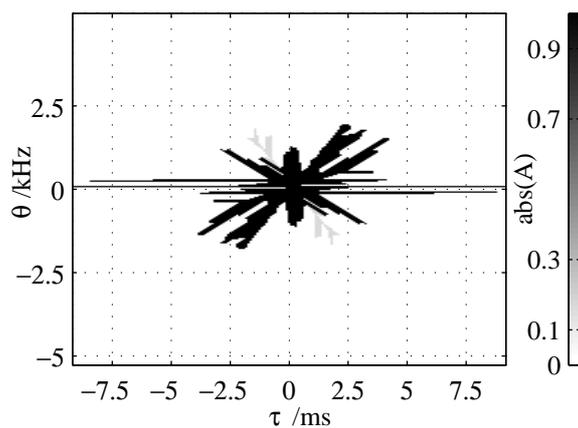


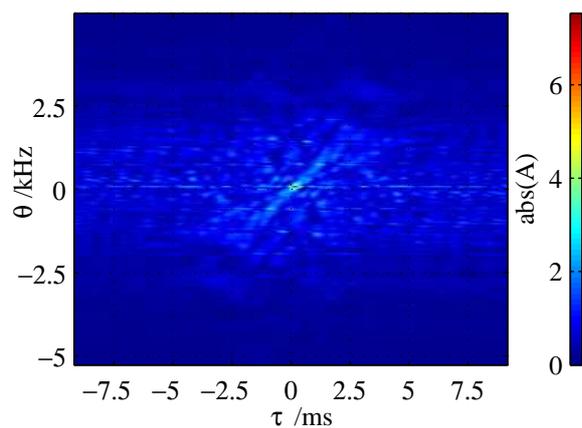
FIG. 5.2: Spectrogramme du signal, 1ère vitesse, 1ère position, défaut d'engrenage.



(a) Représentation du Noyau Optimal. Les instants indiqués (a-d) correspondent aux différentes phases de l'engrènement de la dent écaillée.



(b) Le noyau de la représentation 5.3(a).



(c) La valeur absolue de la fonction d'ambiguïté.

FIG. 5.3: Méthode de noyau optimal pour le signal 1ère vitesse, 1ère position, défaut d'engrenage.

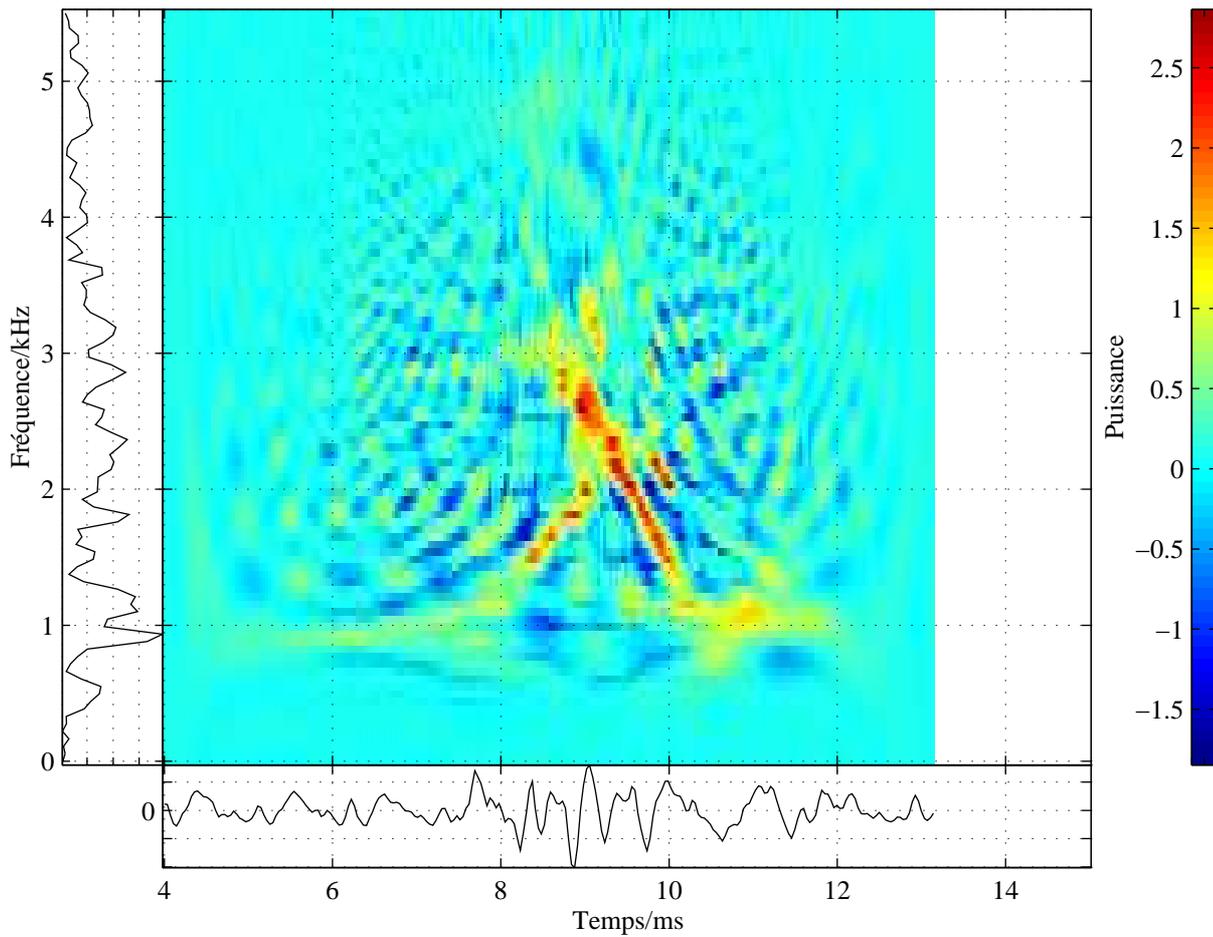


FIG. 5.4: Représentation de Wigner-Ville Locale du signal, 1ère vitesse, 1ère position, défaut d'engrenage. Le signal est décimé par un facteur 2 pour diminuer le nombre d'échantillons. Les paramètres sont les suivants : $N = 256$, $\sigma_{T,F,0} = 6$, $\sigma_{T,F,1} = 4.5$, $\lambda_{T,0} = \frac{3}{512.9} E\{s(t)\}$, $\lambda_{F,0} = \frac{3}{512.5} E\{S(\omega)\}$, $\lambda_{T,F,1} = \frac{\lambda_{T,F,0}}{3}$.

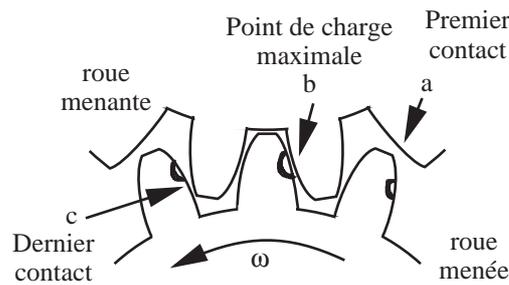


FIG. 5.5: Engrènement de la roue écaillée.

chirp linéaire, sont présentes dans les deux cas. Cependant le chirp de pente croissante est d'amplitude plus faible dans la distribution du noyau optimal que dans la distribution de Wigner-Ville Locale.

On peut également remarquer que la ligne correspondant à la fréquence d'engrènement est toujours présente dans la représentation du noyau optimal, alors qu'elle est interrompue entre les deux chirps dans la représentation de Wigner-Ville Locale.

Lors de l'étape suivante, dédiée à l'interprétation des représentations TF, nous utiliserons les résultats fournis par les méthodes du noyau optimal et de Wigner-Ville Locale.

5.3.1.2 Interprétation physique

On constate que le spectrogramme ne permet pas de localiser précisément les structures fortement énergétiques présentes dans le plan TF.

Les deux représentations (Noyau optimal et Wigner-Ville locale) permettent de faire l'interprétation suivante.

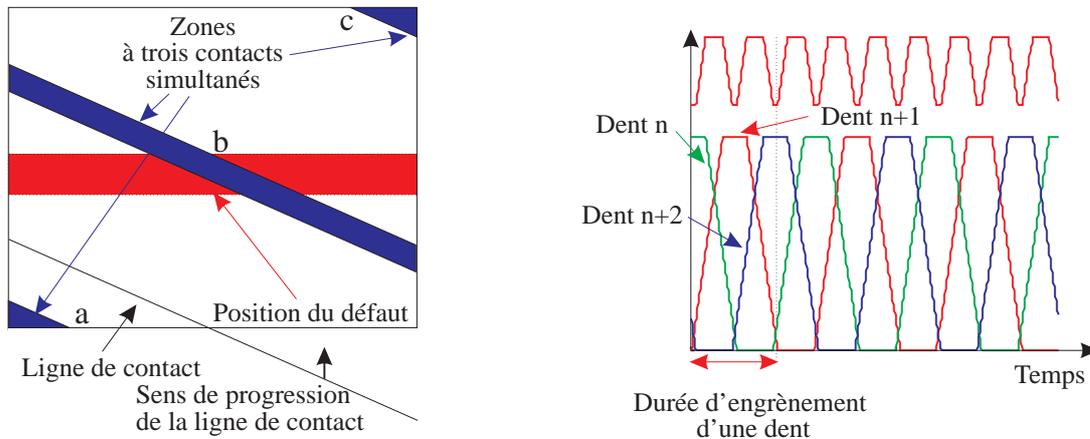
Hors défaut, la fréquence d'engrènement correspondant au rapport 1 et à ses harmoniques sont bien visibles à 906Hz et ses multiples. Les vibrations associées à l'engrenage de sortie de boîte se manifestent principalement sur l'harmonique 2 à 1121Hz. L'écaillage se traduit par une concentration de l'énergie du signal sur une durée approximativement équivalente à l'engrènement de 4 dents. Un examen plus détaillé de l'évolution temporelle du signal permet de scinder le phénomène en quatre phases (a) (b) (c) et (d). La figure 5.5 donne la correspondance de celles-ci avec l'engrènement de la roue écaillée.

(a) Premier contact avec la dent écaillée

Le premier contact de la dent écaillée se manifeste par un pic d'énergie de faible amplitude à l'instant (a). Il traduit le fait que les déformations de la dent de la roue menante ne sont pas encore maximales. Cependant, notons que par rapport à une roue normale, la flexion de cette dernière est notablement accrue. Ceci est la conséquence de deux causes principales : le moment de flexion est maximal au niveau du cercle actif de tête (point d'attaque de la dent de la roue menée) et la présence de la rainure usinée au niveau du cercle primitif tend à diminuer la raideur de la dent.

(b) Déformation maximale de la dent

En ce point, le signal vibratoire présente une forte concentration d'énergie.



(a) Plan d'action de l'engrenage. Les zones à 3 contacts simultanés sont marquées en bleu. La position du défaut est marquée en rouge avec les lieux des phénomènes a-c.

(b) La longueur totale de la ligne d'action. Une paire de dents après l'autre est prise en charge et contribue à la ligne de contact avec une forme de trapèze. La ligne d'action totale est la somme des trapèzes.

FIG. 5.6: La longueur de la ligne d'action totale varie avec le temps en raison du nombre variable de dents en contact simultané.

La méthode du noyau optimal semble indiquer que le phénomène prépondérant se manifeste par un chirp linéaire qui se superpose aux fréquences pures d'engrènement. Ce chirp a son point d'énergie maximum à 2415Hz. Elle est trois fois supérieure à l'énergie normale et légèrement décalée dans le temps par rapport à l'engrènement normal. Cela peut s'expliquer en supposant que le décalage est dû à une déformation anormale du couple pignon/roue. On peut également remarquer que ce chirp commence aux environs de la fréquence 3100Hz.

La distribution de Wigner-Ville Locale présente beaucoup de similarités, notamment, les caractéristiques du chirp linéaire sont les mêmes. Cependant, un chirp de pente positive apparaît plus nettement et la ligne de la fréquence d'engrènement est interrompue. Cela peut indiquer que l'engrènement de la dent écaillée n'engendre pas de phénomène qui se superpose à l'engrènement normal, mais modifie ce dernier.

Se pose maintenant le problème de caractériser l'excitation engendrée par l'écaillage. En se reportant au plan d'action (cf. figure 5.6(a)), on constate que l'on passe successivement d'une zone à deux contacts à une zone à trois contacts, puis à nouveau à deux contacts. Ces variations du nombre de dents engrenant simultanément entraînent une variation des pressions de contact sur la dent. Lorsque le défaut est situé dans une telle zone, la variation de pression est encore plus importante car les surfaces en regard ont diminué. Ce sont ces variations de pression qui engendrent l'excitation principale. Compte tenu de la valeur du rapport de conduite (égal à 2,1) les zones à trois contacts sont très étroites (voir figure 5.6(a)) et l'excitation peut être assimilée à une impulsion. Les modes transversaux de denture ou de voile du pignon peuvent alors être excités.

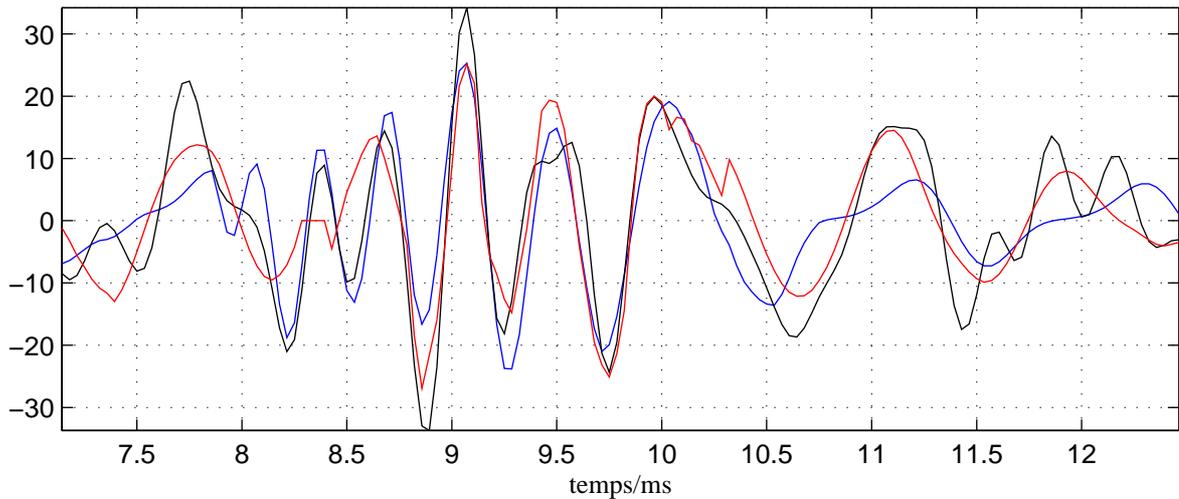


FIG. 5.7: Reconstruction du signal avec défaut de denture, 1ère vitesse, 1ère position.
 Noir : Signal mesuré, bleu : reconstruction à partir de la représentation du noyau optimal, rouge : reconstruction à partir de Wigner-Ville Locale.

L'énergie supplémentaire commence alors à se dissiper au cours d'un processus de relaxation. La fréquence de la composante liée au phénomène d'écaillage décroît approximativement de façon linéaire avec le temps ainsi que son amplitude. Ces variations caractérisent la manière dont l'énergie du système est absorbée par le système mécanique.

Or, un système mécanique linéaire de type «masse amortisseur ressort», dont l'énergie augmente, voit seule son amplitude varier mais pas sa fréquence propre. Le processus de relaxation à variation linéaire de fréquence n'est donc pas adapté à ce modèle linéaire.

(c) Dernier contact de la dent défectueuse

Dans cette position l'engrènement de la roue écaillée avec le pignon s'achève. Cependant, le phénomène de relaxation d'énergie continue.

(d) Dissipation d'énergie

Environ 4ms après le début du phénomène, toute l'énergie supplémentaire a été dissipée. L'engrènement s'effectue normalement.

5.3.1.3 Synthèse d'un signal temporel

Les différents paramètres du modèle 5.1 sont évalués directement sur les représentations TF (Noyau optimal, Wigner-Ville Locale).

Les paramètres obtenus à partir du noyau optimal sont :

- Nombre N et position des lignes i : 4 lignes sont prises en compte : la fréquence d'engrènement du premier engrenage et sa première harmonique (902Hz, 1805Hz), la deuxième harmonique de la fréquence d'engrènement de l'engrenage de sortie de boîte (1121Hz) et le chirp linéaire (3,7Hz 8,4ms - 0,7kHz 10,79ms).
- Phases $\varphi_{0,i}$: les phases sont estimées par corrélation (chirp) ou optimisation non-linéaire (sinusoïdes) de l'erreur quadratique.

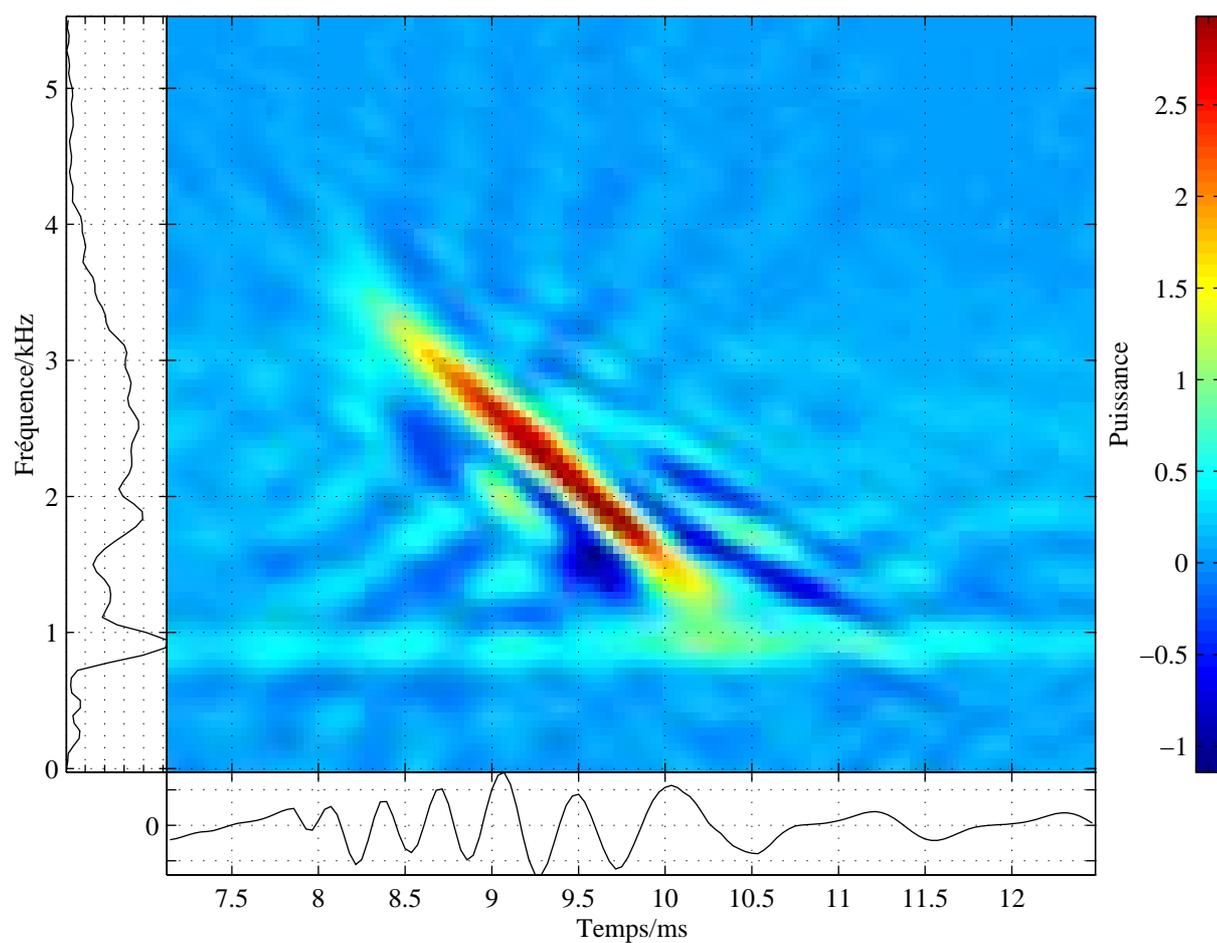


FIG. 5.8: Représentation Noyau Optimal du Signal synthétisé à partir de Noyau Optimal, 1er vitesse, 1er position.

- Amplitudes $A_i(t)$: Les valeurs des facteurs d'amplitudes estimées α_i sont : 0,69 (chirp), 0,24 (902Hz), 0,35 (1121Hz) et 0,2 (1805Hz).

Ceux obtenus à partir de la représentation de Wigner-Ville Locale sont :

- Nombre N et position des lignes i : 4 lignes sont prises en compte : Le chirp descendant (2,6kHz 8,82ms - 1,53kHz 10,07ms), le chirp ascendant (1,53kHz 8,46ms - 2,02 9,11ms), le petit chirp descendant (2,24kHz 9,93ms - 2,08kHz 10,07ms) et la sinusoïde à 1,15kHz (proche de la deuxième harmonique de la fréquence d'engrènement de l'engrenage de sortie).
- Phases $\varphi_{0,i}$: toutes les phases sont estimées par optimisation non-linéaire de l'erreur quadratique.
- Amplitudes $A_i(t)$: les facteurs d'amplitude estimés sont : 0,12 (chirp descendant) ; 0,1 (chirp ascendant) ; 0,09 (petit chirp descendant) et 0,12 (sinusoïde).

Les signaux résultant de la reconstruction et le signal réel sont représentés sur la figure 5.7. A l'issue de la reconstruction, les erreurs quadratiques valent respectivement 0,3% de l'énergie du signal pour le noyau optimal, et 0,27% pour Wigner-Ville Locale.

Dans les deux cas, l'amplitude est assez mal estimée. Ceci peut être attribué à l'approximation «brutale» de l'intégrale. En revanche, les signaux reconstruits sont bien en phase avec le signal réel, notamment dans la zone du transitoire. Ceci nous permet de conclure que la composante correspondant au choc principal est bien décrite par le chirp linéaire.

Ceci est d'ailleurs corroboré par la similitude des représentations TF obtenues à partir des signaux synthétisés. Ainsi la figure 5.8 correspond à la distribution du noyau optimal obtenue sur le signal synthétisé.

En second lieu, une comparaison des performances des deux méthodes considérées est possible et met en évidence la supériorité de la distribution de Wigner-Ville Locale. En effet, l'erreur finale est légèrement inférieure et les facteurs d'amplitude estimées sont pratiquement constants, ce qui indique une meilleure estimation des amplitudes.

D'autre part, les valeurs des fréquences pures obtenues sur les représentations TF sont différentes (902Hz (NO), 1,15kHz (WVL)). L'examen des signaux synthétisés, notamment dans la dernière partie du signal (>11ms), montre que c'est Wigner-Ville Locale qui fournit le résultat le plus consistant. C'est en fait une conséquence de la tendance de la méthode du noyau optimal à adapter les structures les moins énergétiques aux structures les plus énergétiques (en l'occurrence, la fréquence d'engrènement qui est fortement présente dans le signal mais pas sur l'intervalle du transitoire correspondant au défaut).

5.3.2 Etude comparative

5.3.2.1 Analyse fine d'une dent saine

Dans le chapitre 1.5.1.3, il a été établi que le phénomène vibratoire prépondérant, observé dans une boîte saine, est produit par l'engrènement.

La figure 5.9 met en évidence la fréquence d'engrènement du rapport engagé et ses harmoniques, seules structures énergétiques décelables dans le plan TF.

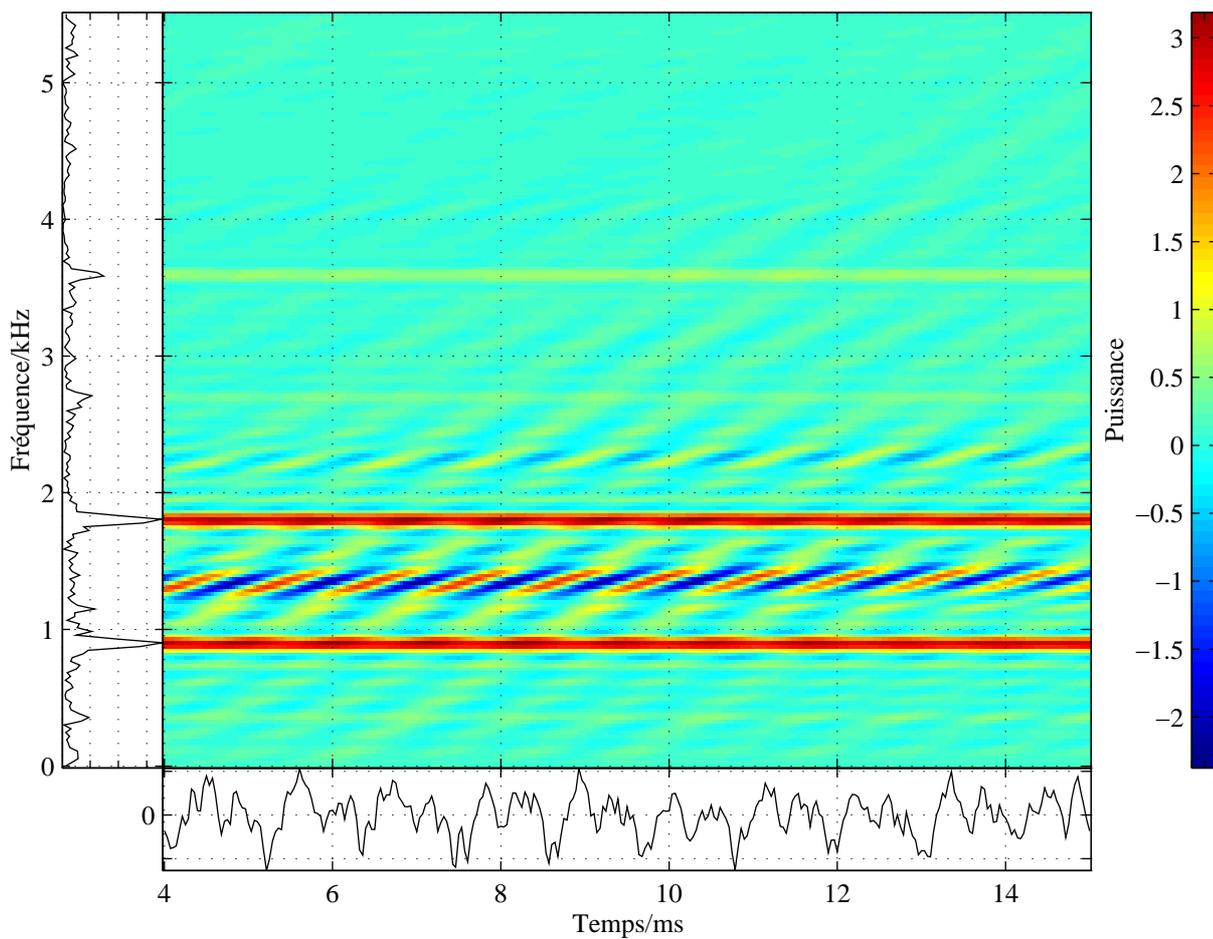


FIG. 5.9: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal d'engrènement sans défaut après moyennage synchrone par rapport à l'arbre secondaire. Les principales structures énergétiques qui se dégagent de cette figure correspondent aux fréquences d'engrènement du pont et du rapport de boîte et leurs harmoniques respectives. La ligne horizontale située entre 1kHz et 2kHz correspond à une interférence et n'a par conséquent aucune signification physique.

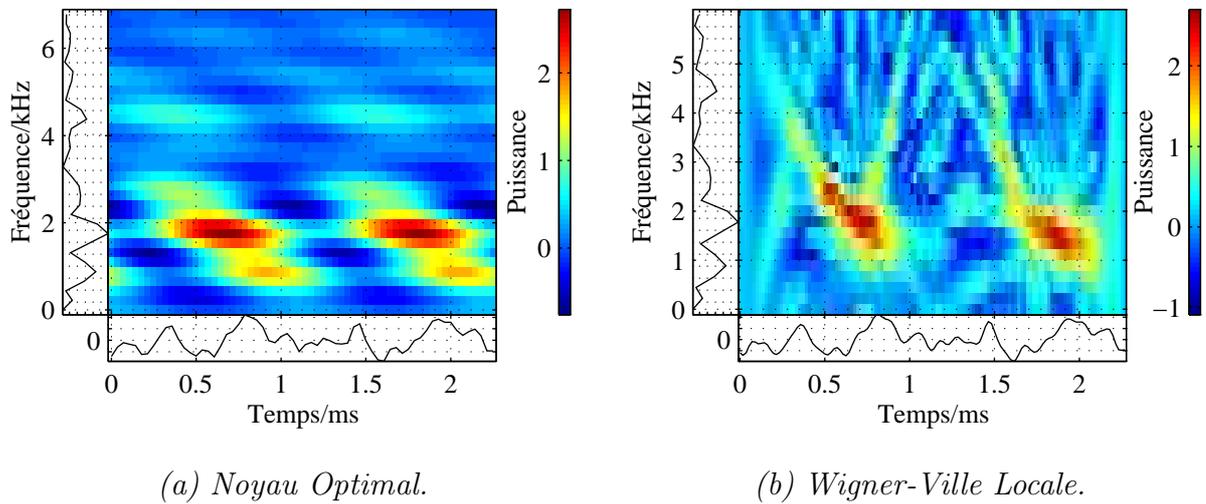


FIG. 5.10: Signal d'engrènement de deux dents, 1ère vitesse, 1ère position, moyenné par rapport à l'arbre récepteur. Ce signal est de durée 2.3ms, ce qui correspond au passage d'une dent dans le plan d'action. Ce temps est de 2.3 (Rapport de conduite) fois la période d'engrènement.

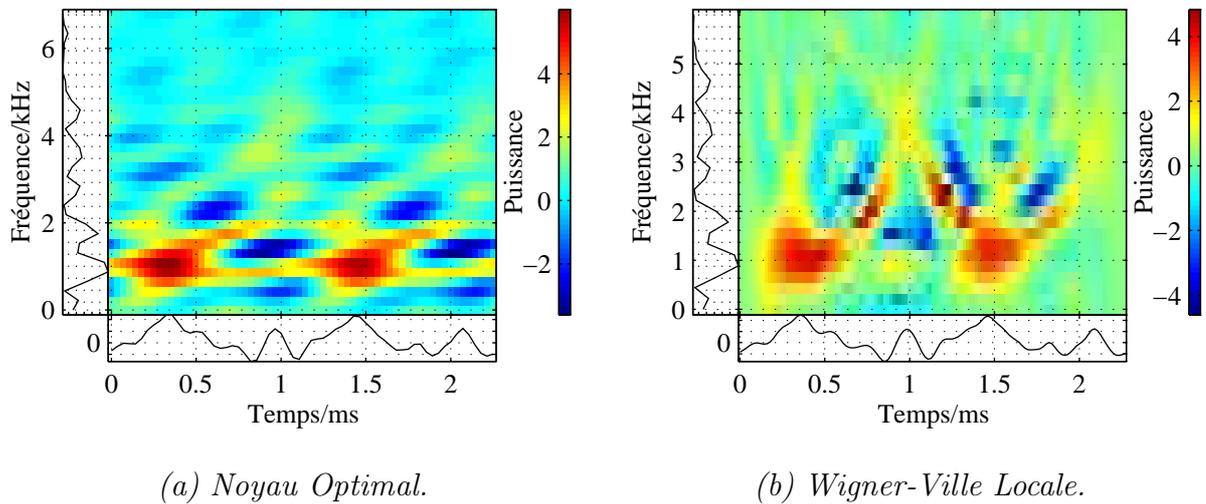


FIG. 5.11: Signal d'engrènement de deux dents, 1ère vitesse, 1ère position, moyenné par rapport à l'arbre moteur.

Les figures 5.10(a) et 5.10(b) correspondent aux représentations TF obtenues sur un signal moyenné par rapport à l'arbre récepteur et de durée égale à deux fois la période d'engrènement. Une fois encore, soulignons la résolution TF de la distribution de Wigner-Ville Locale ! On y distingue notamment deux chirps décroissants séparés par une durée d'environ 1ms correspondant à la période d'engrènement. Il convient de souligner que ce signal est représentatif de l'engrènement des dents simultanément en contact et que, par conséquent, on ne peut pas isoler la contribution d'une seule dent.

La figure 5.11 montre les représentations du noyau optimal et de Wigner-Ville Locale correspondant au même signal, mais moyenné par rapport à l'arbre moteur. Par rapport à la figure précédente, l'allure des distributions a changé et, outre la présence d'un chirp décroissant (uniquement visible sur la distribution Wigner-Ville Locale), on peut également distinguer l'apparition de chirps croissants.

Pour bien interpréter ce résultat, il faut en premier lieu se remémorer que, selon Mark (cf. paragraphe 1.5.1.3), l'erreur de transmission se décompose (cf. eq. 1.6) en une contribution moyenne $\bar{m}(x)$ (profil moyen) et une contribution $\bar{a}_j(x)$ représentative de l'écart de profil de chaque dent par rapport au profil moyen. On peut également décomposer cette dernière en la somme de deux contributions relatives aux arbres moteur $\bar{a}_{m,j}(x)$ et récepteur $\bar{a}_{r,j}(x)$:

$$\bar{m}(x) + \underbrace{\bar{a}_{m,j}(x) + \bar{a}_{r,j}(x)}_{\bar{a}_j(x)}.$$

Le moyennage synchrone par rapport à l'arbre moteur (resp. récepteur) fournit un signal où seul subsistent la partie moyenne et la contribution de l'arbre moteur (resp. récepteur).

Si l'on revient aux différentes distributions TF, la contribution de chacun des pignons est obtenue en éliminant les parties communes à chacune des distributions. Ceci nous permet d'attribuer les composantes de type chirp croissant au pignon moteur et décroissant au pignon récepteur.

5.3.2.2 Influence de la position du défaut

Les figures 5.3(a), 5.13, 5.14, 5.15 et 5.16 montrent les représentations TF des signaux de vibrations des rapports de boîtes 1 à 5. Ces signaux ont préalablement subi un moyennage synchrone par rapport à la période de rotation de l'arbre récepteur excepté le rapport 5 où la période de moyennage est celle de l'arbre moteur. En effet, le défaut a été usiné, pour les rapports 1 à 4, sur chaque roue dentée de l'arbre récepteur. Seul le rapport 5 présente un engrenage dont le défaut est situé sur le pignon de l'arbre primaire.

A partir de ces représentations TF, nous avons pu faire les observations suivantes : la durée du phénomène transitoire correspondant à l'engrènement de la dent endommagée est d'environ 4ms ; cette durée est indépendante du rapport engagé. Les représentations TF ont des caractéristiques similaires dans le sens où les motifs correspondant au défaut peuvent se décomposer en deux types de structures :

- Le premier correspond à la modulation d'amplitude des deux fréquences d'engrènement (rapport de boîte et engrenage de sortie) et leurs harmoniques. D'un point de vue mécanique, ce phénomène de modulation peut être attribué aux variations instantanées de charge.

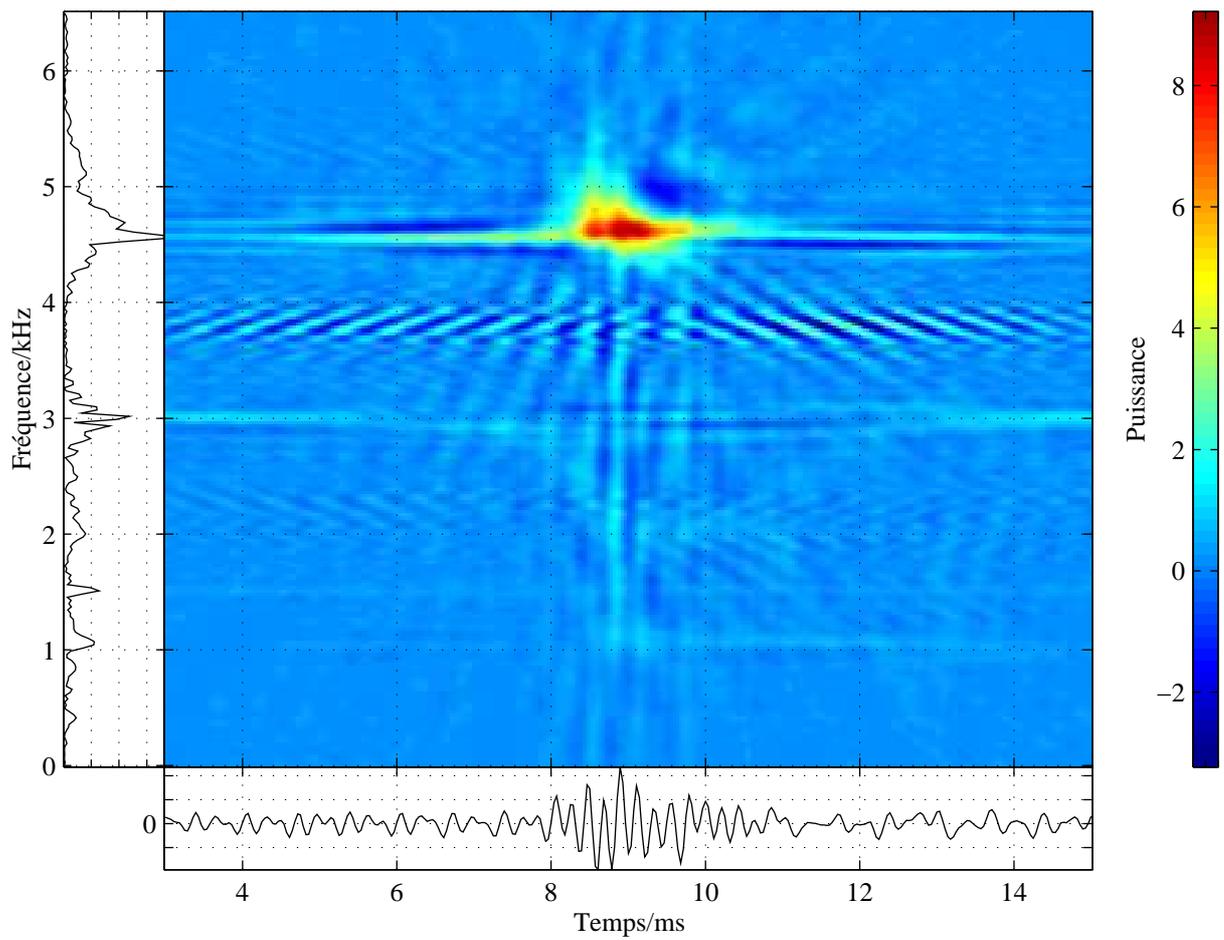


FIG. 5.12: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal d'écaillage, 2ème vitesse, 1ère position.

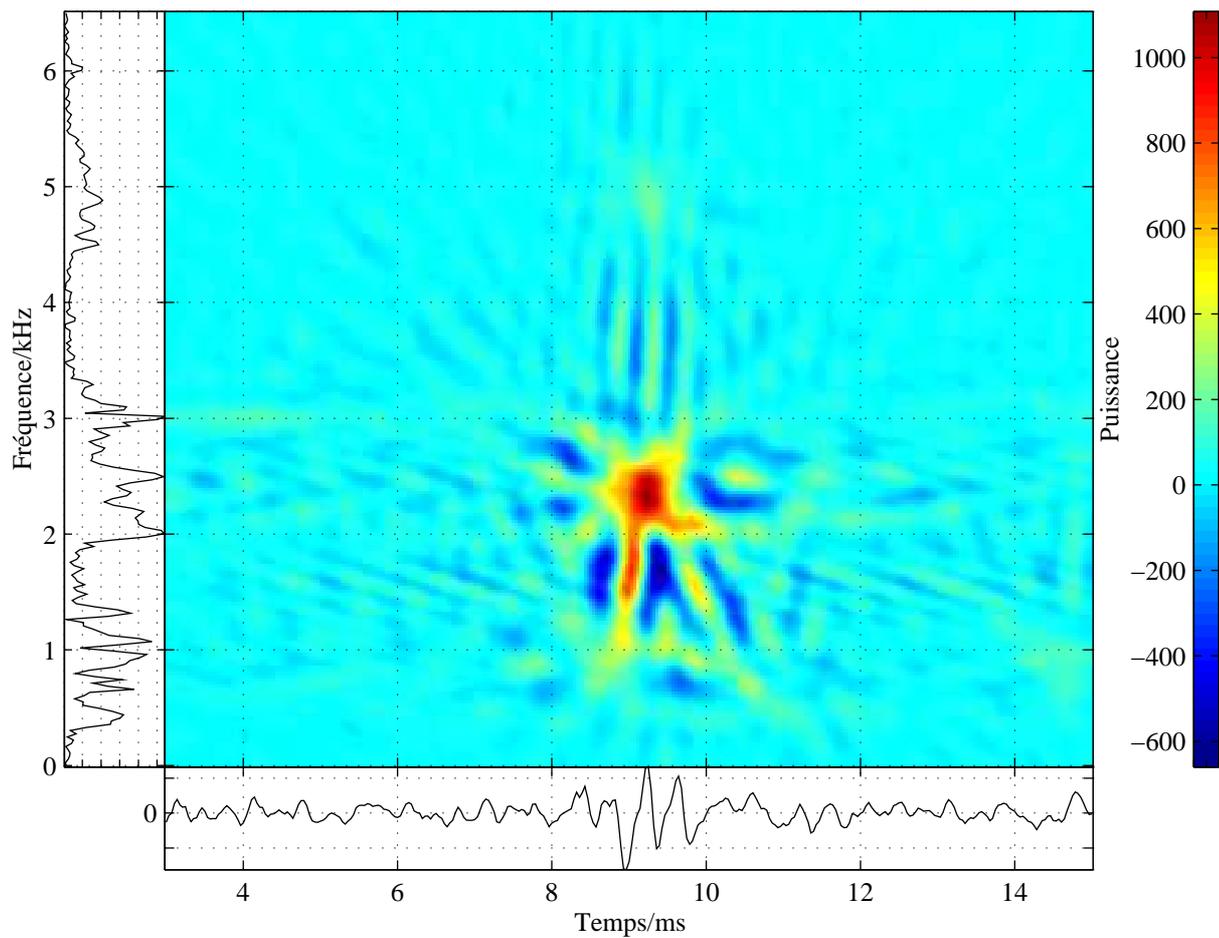


FIG. 5.13: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal d'écaillage, 2ème vitesse, 6ème position.

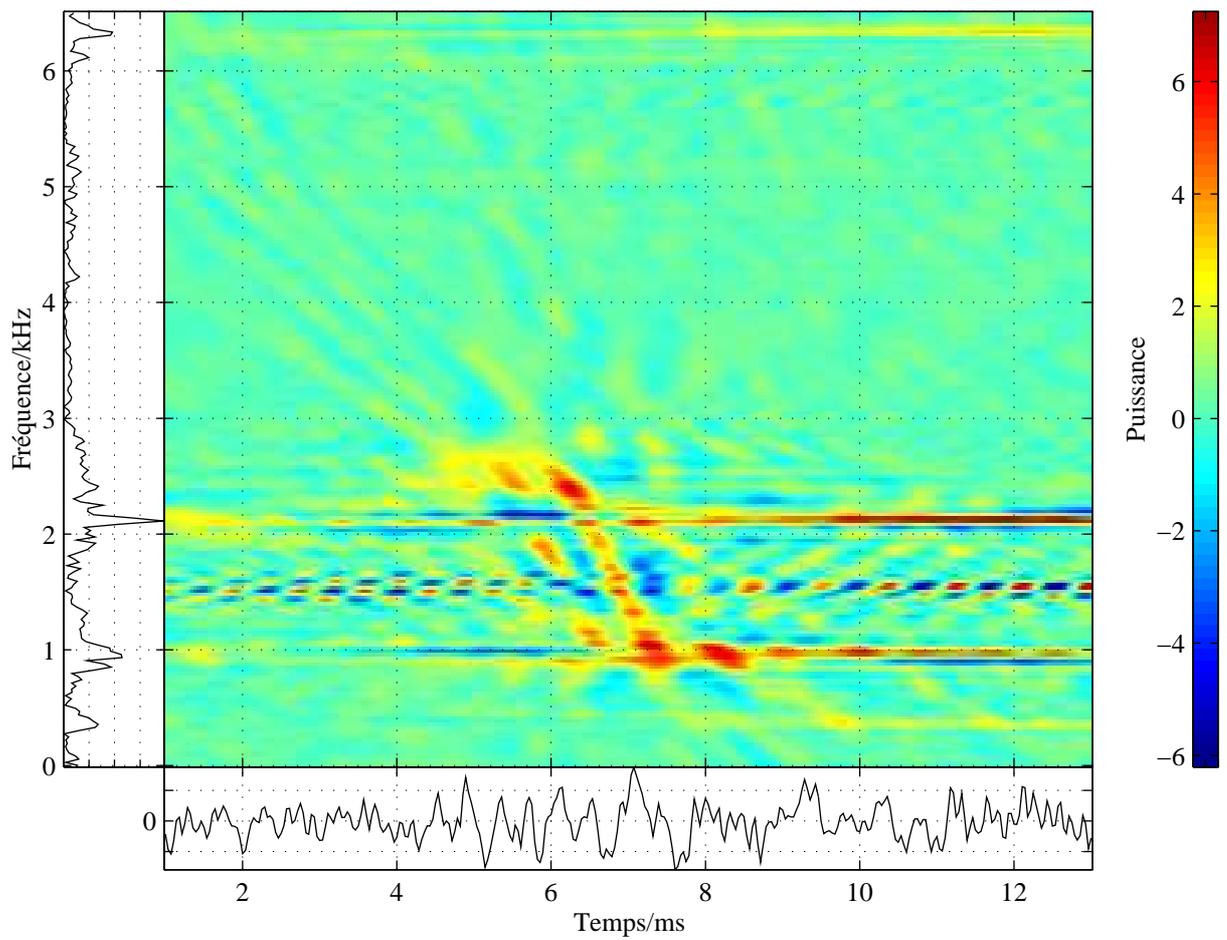


FIG. 5.14: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal d'écaillage, 3ème vitesse, 5ème position.

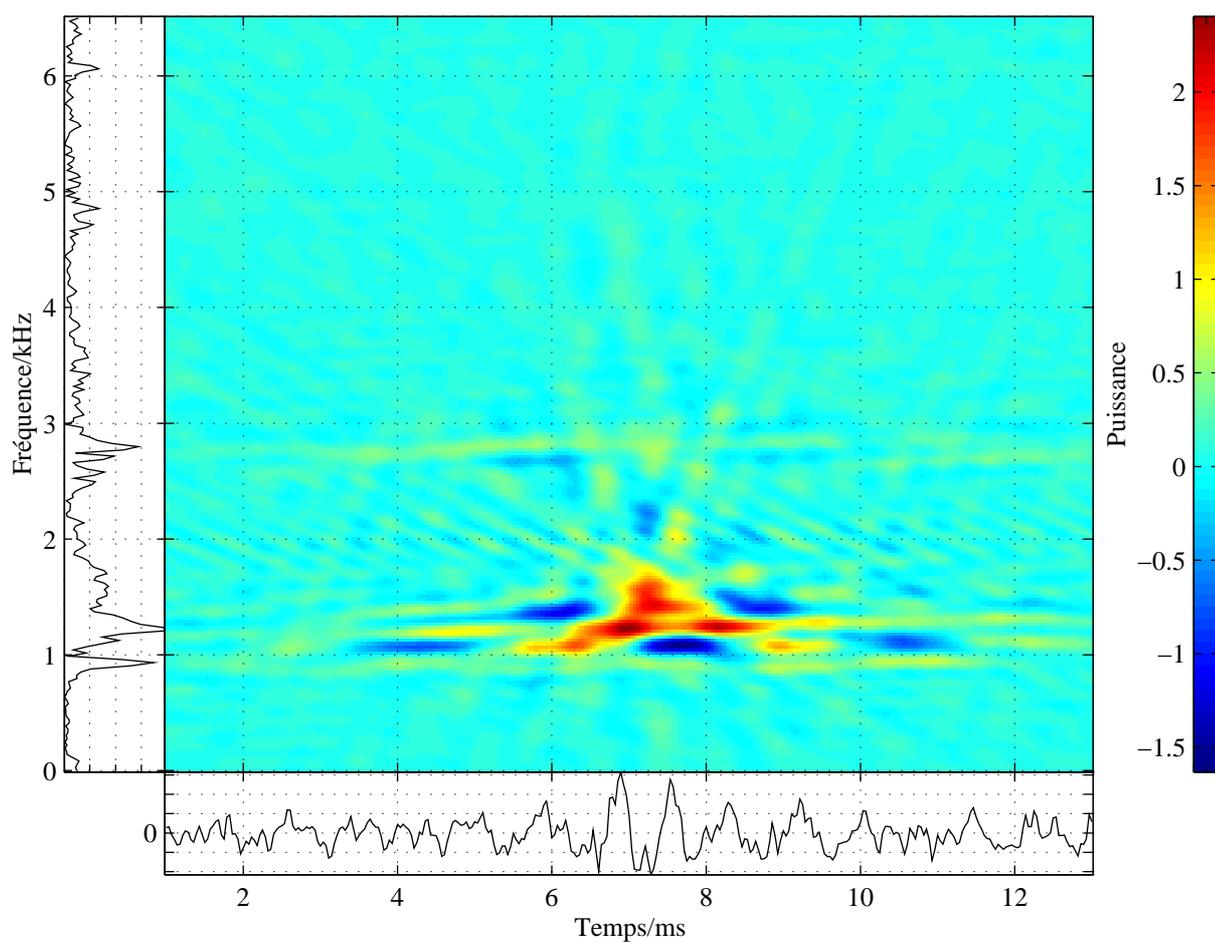


FIG. 5.15: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal d'écaillage, 4ème vitesse, 5ème position.

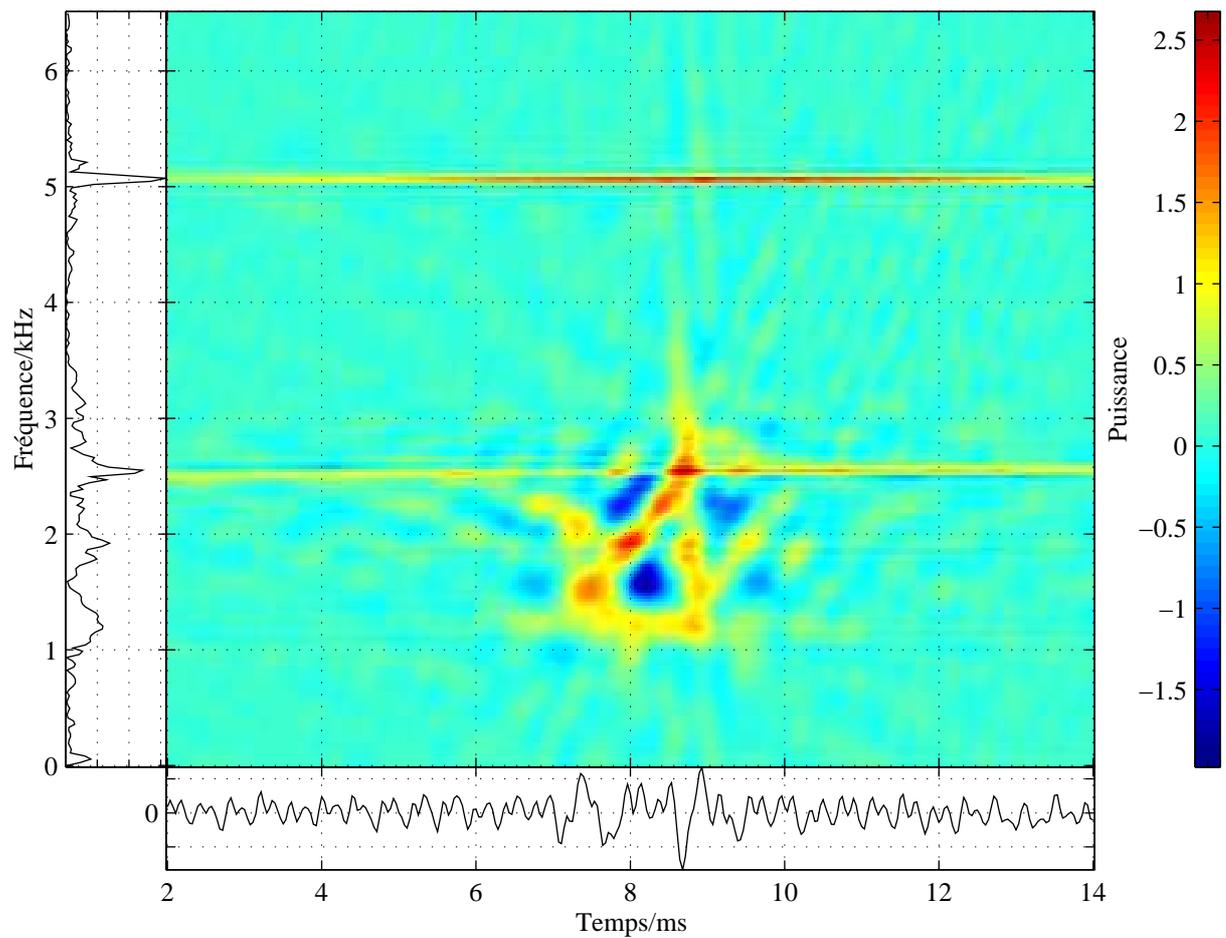


FIG. 5.16: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal d'écaillage, 5ème vitesse, 1ère position.

- Le second type de structure observé dans le plan TF correspond aux composantes dont la fréquence varie, de façon linéaire.

En ce qui concerne l'excitation engendrée par l'écaillage, elle est principalement le résultat des variations de pression, conséquence des variations du nombre de dents en contact. Les rapports de conduite totaux des vitesses 2, 3 et 5 étant proches mais inférieurs à 3, on peut imaginer que selon la position et les dimensions du défaut, il se produit une ou deux impulsions principales. D'autre part, l'intensité de l'excitation décroît quand le rapport de conduite augmente. En effet, plus le rapport de conduite est grand, plus les surfaces des dents en regard est grand et donc plus les variations de pression sont faibles.

Les structures principales visibles sur les représentations TF des rapports 3 et 5 possèdent quelques particularités intéressantes que nous allons détailler.

- Rapport 2 (figure 5.13)

Outre les fréquences d'engrènement, les structures visibles sont une impulsion et un chirp décroissant de même pente que le chirp du rapport de première. Le phénomène semble avoir été engendré par une seule excitation.

- Rapport 3 (figure 5.14)

Contrairement aux autres rapports, on ne distingue que des chirps décroissants de pente égale à celle du rapport de première. Cependant, on peut remarquer la répétition du même motif ce qui est révélateur de l'existence de deux excitations principales.

- Rapport 4 (figure 5.15)

Le transitoire engendré par le défaut est peu énergétique, ce qui a comme conséquence de compliquer l'analyse. Cela peut être dû au fait que c'est l'engrenage qui a le plus grand rapport de conduite total (très légèrement supérieur à 3). Cependant, une composante de type chirp linéaire est tout à fait imaginable.

Théoriquement le nombre d'excitations peut, suivant la position du défaut, varier de 1 à 4. Sur le signal étudié, une seule est visible.

- Rapport 5 (figure 5.16)

A la différence des autres rapports, les chirps ont une pente positive. Cela peut être attribué au fait que le défaut est situé sur le pignon de l'arbre moteur et non sur le récepteur (voir paragraphe 5.3.2.1).

Comme sur le rapport 3, la répétition du même motif indique que le transitoire a été engendré par deux excitations successives.

5.3.2.3 Influence de la position du capteur

Les représentations TF diffèrent considérablement suivant la position du capteur. Les figures 5.12 et 5.13 donnent une représentation TF du même défaut pour deux positions différentes de prise de mesures. Cependant, d'un point de vue qualitatif, les structures caractéristiques sont toujours les mêmes. Seul leur niveau énergétique est modifié. Ainsi, il apparaît que la position du capteur a uniquement une influence sur l'amplitude et non sur le contenu fréquentiel.

Ce constat montre donc que le carter de boîte a, d'une part, un comportement linéaire et d'autre part, une fonction de transfert différente pour chaque position de capteur.

5.4 Analyse des signaux de vibration de roulements

Dans le chapitre 1.5.2, nous avons vu que les roulements sont à l'origine d'impulsions périodiques lorsqu'ils présentent des détériorations. Cette périodicité dépend de la position du défaut dans le roulement et excite la structure. En théorie, le calcul de ces fréquences d'apparition doit permettre la localisation du défaut dans le roulement. Cependant, en pratique, les variations de l'angle de contact et les glissements éventuels des éléments sur les chemins de roulement rendent les impulsions aperiodiques. Ainsi, la localisation du défaut devient difficile et le moyennage synchrone inopérant.

Cette étude porte sur le roulement à billes situé sur l'arbre secondaire près du rapport de 4ème. Le premier exemple traite d'un défaut de bague externe, le second d'un défaut de bague interne. Le cas d'un défaut sur une bille n'est pas abordé car le mouvement de la bille sur elle-même est aléatoire, invalidant ainsi le résultat donné par l'équation 1.11 présenté dans le chapitre 1.5.2.1. Pour un angle de contact nul, les fréquences d'apparition sont données par :

$$\begin{aligned} f_{e,bi} &= 4,46(f_{\text{rot}} - f_{\text{ext}}) \\ f_{e,be} &= 2,52(f_{\text{rot}} - f_{\text{ext}}) \end{aligned}$$

La bague externe de ce roulement n'est pas montée à force sur le carter. Elle peut donc cheminer et sa vitesse de rotation est inconnue a priori.

5.4.1 Défaut sur bague externe

La figure 5.18 donne une représentation TF d'un signal avec défaut sur bague externe. On distingue quatre lignes verticales équidistantes. Chacune d'elle présente une série d'impulsions provoquées par le passage d'un élément sous charge sur le défaut. Leur durée est d'environ 1 ms et leur domaine de fréquence est compris entre 500Hz et 3kHz. La période de répétition de ces impulsions est de 5,4ms.

Cette périodicité montre que la bague externe est animée d'une vitesse de rotation constante ou plus probablement nulle par rapport au carter. Si de plus, les glissements des éléments sur les pistes de roulements sont négligés, on obtient un angle de contact de $23,8^\circ$.

D'autre part, l'allure de la représentation TF ne varie pas beaucoup en fonction du rapport de boîte engagé (cf figure 5.17). Seule la périodicité des lignes verticales et la répartition des impulsions sur ces dernières sont différentes puisqu'elles dépendent de la vitesse de rotation de la bague interne.

Enfin, l'orientation approximativement verticale des impulsions indique que la structure (carter) est faiblement dispersive.

5.4.2 Défaut sur bague interne

On discerne nettement les fréquences d'engrènement du rapport de boîte et du pont à 2,7kHz et 1,3kHz et leurs harmoniques (cf. fig. 5.19). De plus, dans un tour d'arbre secondaire (14ms), on distingue, sur l'agrandissement (cf. figure 5.20), deux impulsions (A, B) de forte énergie.

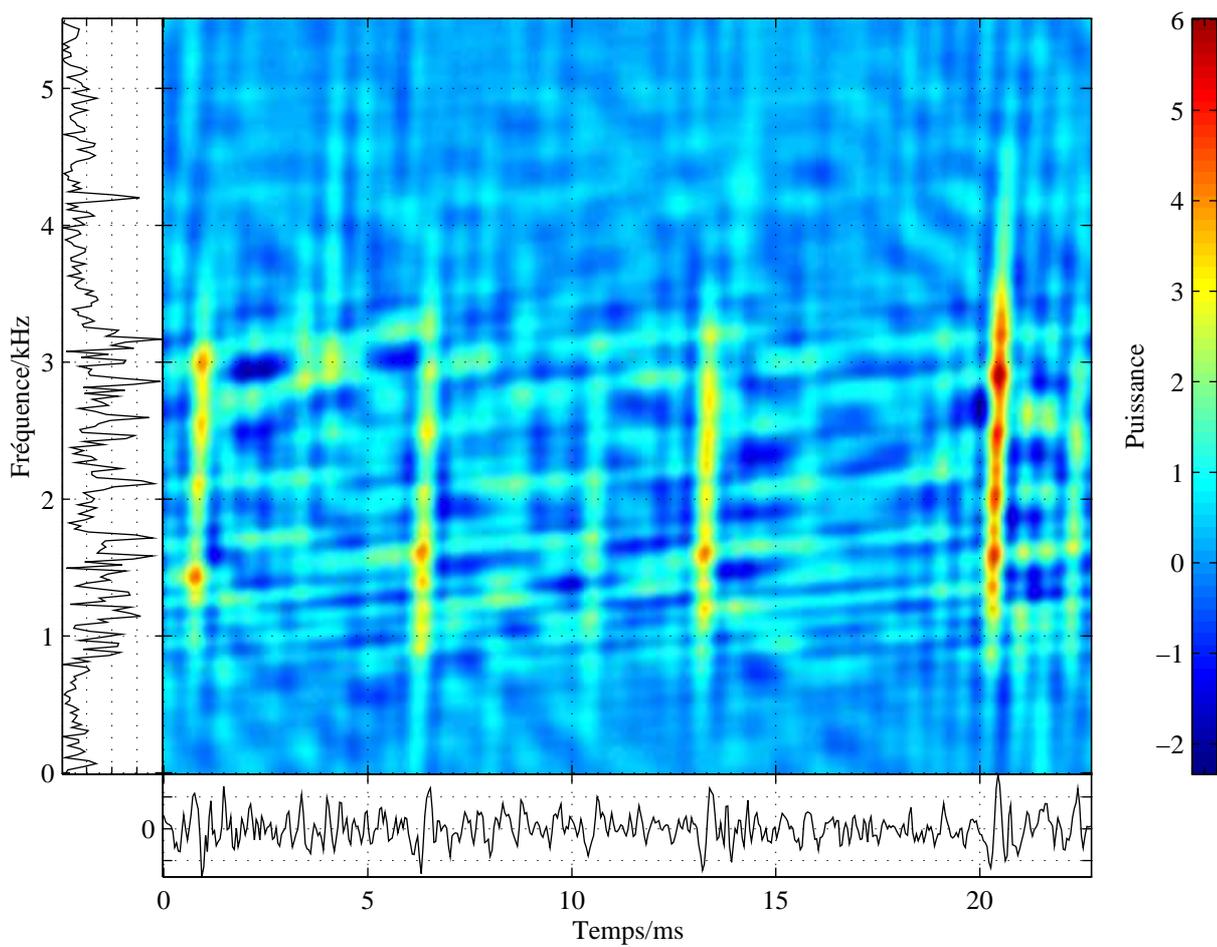


FIG. 5.17: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal de défaut sur la bague externe, 3ème vitesse, 10ème position.

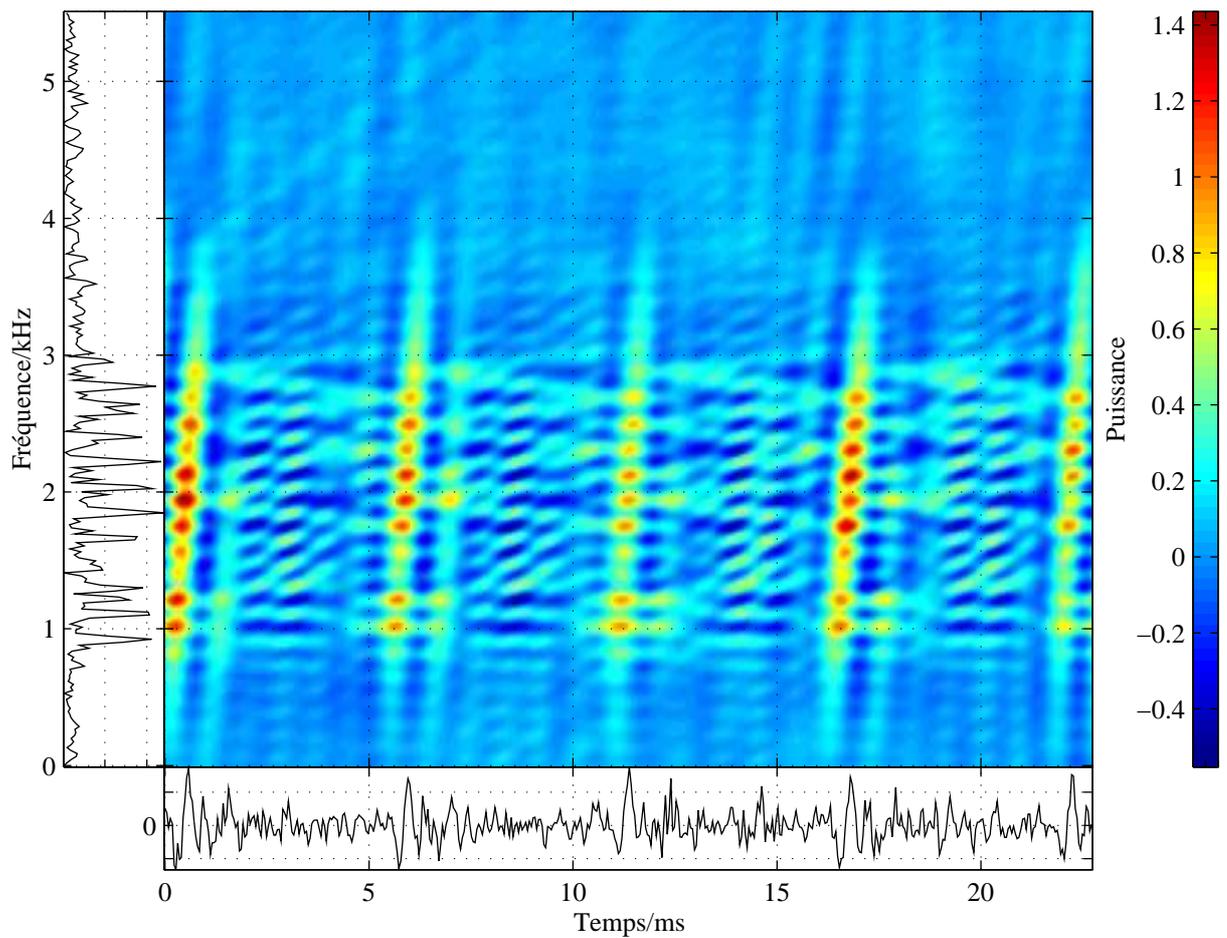


FIG. 5.18: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal de défaut sur la bague externe, 4ème vitesse, 11ème position.

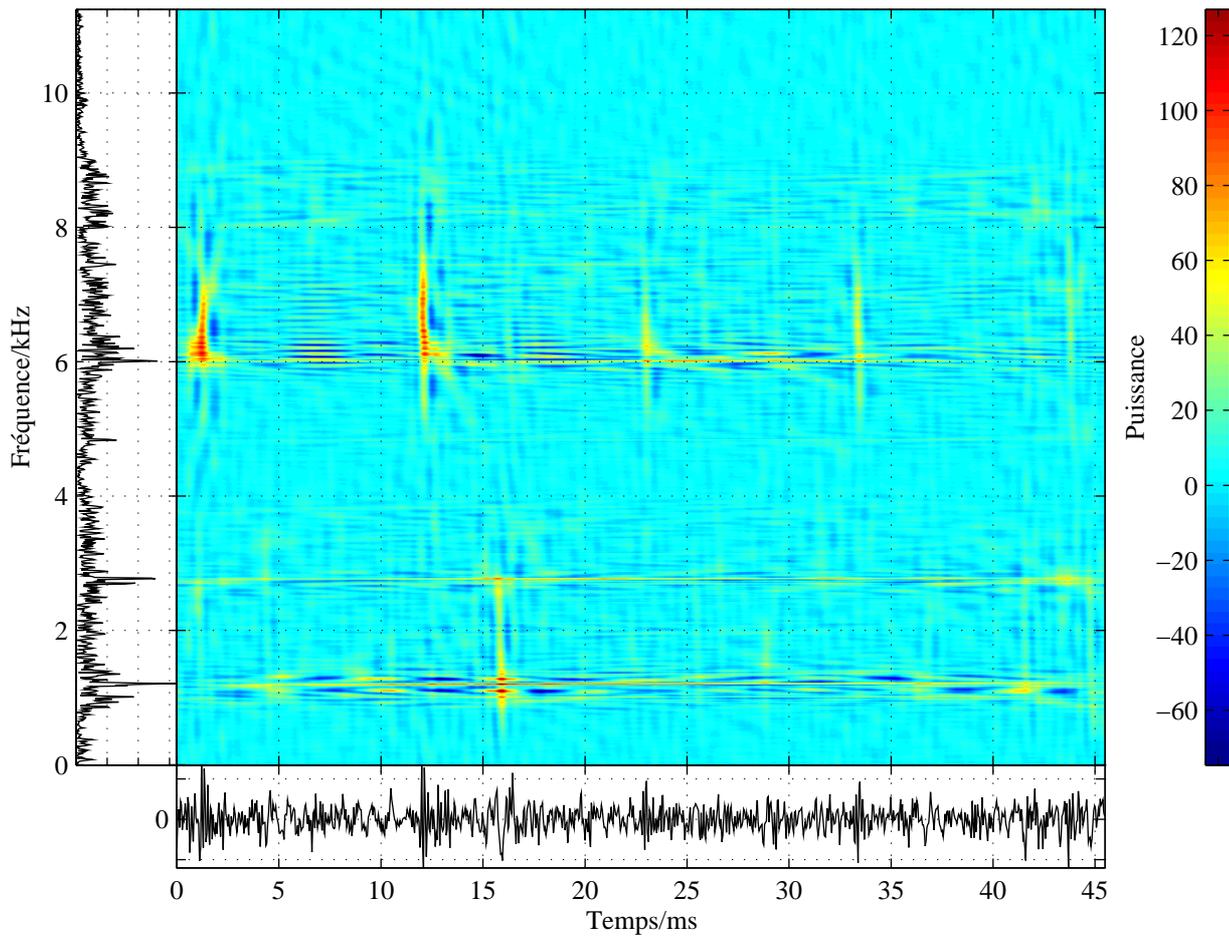


FIG. 5.19: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal de défaut sur la bague interne, 4^{ème} vitesse, 11^{ème} position. $N = 1024$. La fréquence maximale monte à $f_e/2$ grâce à l'utilisation du signal analytique.

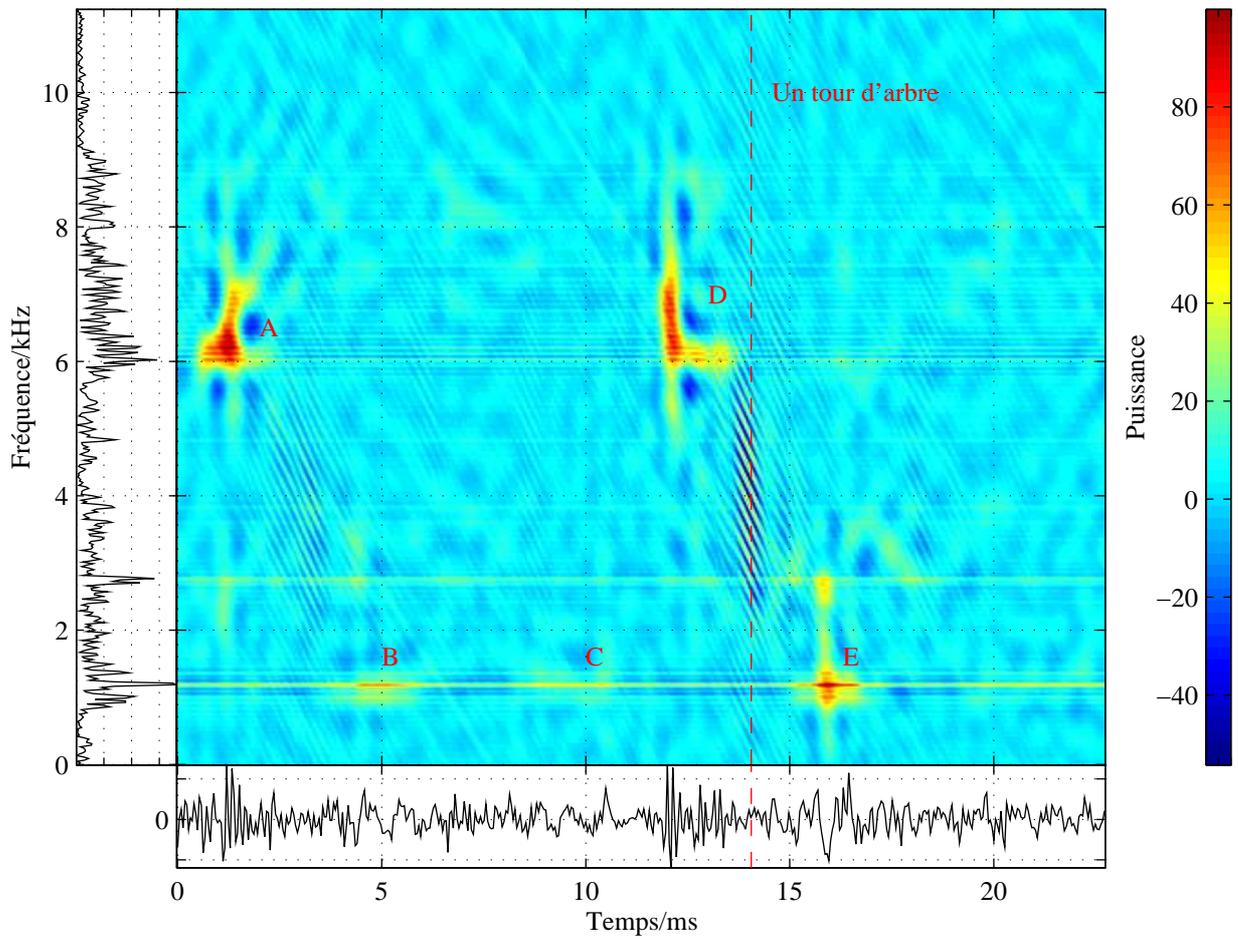


FIG. 5.20: Représentation TF par la méthode du Noyau Optimal du signal de défaut sur la bague interne, 4ème vitesse, 11ème position, $N = 512$.

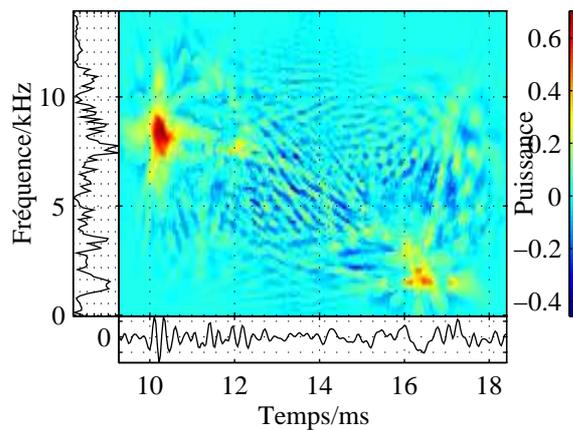
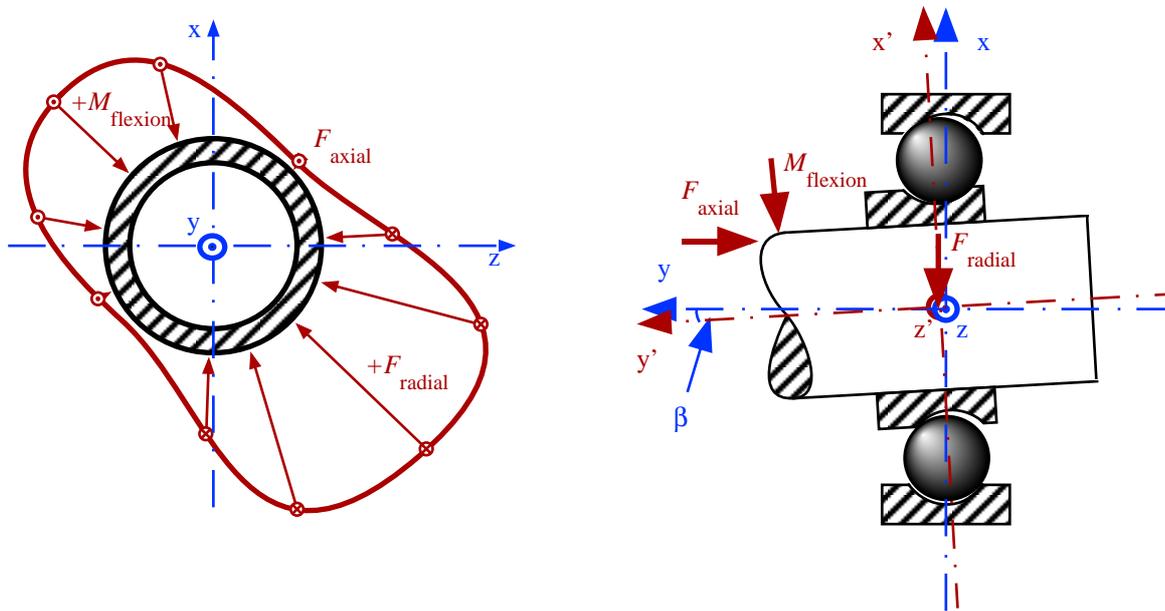


FIG. 5.21: Représentation TF par la méthode du Wigner-Ville Locale du Massif à 10ms du signal de défaut sur la bague interne, 4ème vitesse, 11ème position, $N = 128$. L'information supplémentaire est très limitée par rapport au temps de calcul de 22 Minutes et le nombre de points diminué.



(a) La zone de charge correspondante avec les apports des différentes forces.

(b) Le roulement est soumis à une force axiale et une force radiale. De plus, un moment de flexion ($M_{flexion}$) cause une inclinaison de l'arbre avec l'angle α .

FIG. 5.22: Description du mécanisme générateur d'une zone de charge dynamique.

Ces impulsions sont localisées autour d'une fréquence de 6kHz. Par ailleurs, quatre autres impulsions (B, C, E, F) de fréquence et d'énergie moins élevées sont centrées autour de la fréquence d'engrènement de l'engrenage de sortie. Les impulsions sont espacées d'environ 3,3ms.

Trois ou quatre billes passent sur le défaut à chaque tour d'arbre secondaire. L'énergie des impulsions est pondérée par la zone de charge suivant la position angulaire du défaut (cf. chapitre 1.5.2). L'examen de la figure 5.20, permet d'observer des variations dans la périodicité du phénomène, révélatrices de glissements ou de variations d'angle de contact. En utilisant la périodicité moyenne, l'angle de contact est évalué à 24° . Cette valeur concorde avec le résultat obtenu dans le cas d'un défaut sur bague externe.

5.4.3 Etude de la zone de charge

Il est possible d'étudier la zone de charge à partir du signal vibratoire correspondant à un défaut sur la bague interne (cf. figure 5.19).

Le passage d'un défaut, dans les zones fortement chargées, se traduit par l'apparition d'un phénomène haute fréquence tandis que le passage sur des zones faiblement chargées se caractérise par des composantes basses fréquences.

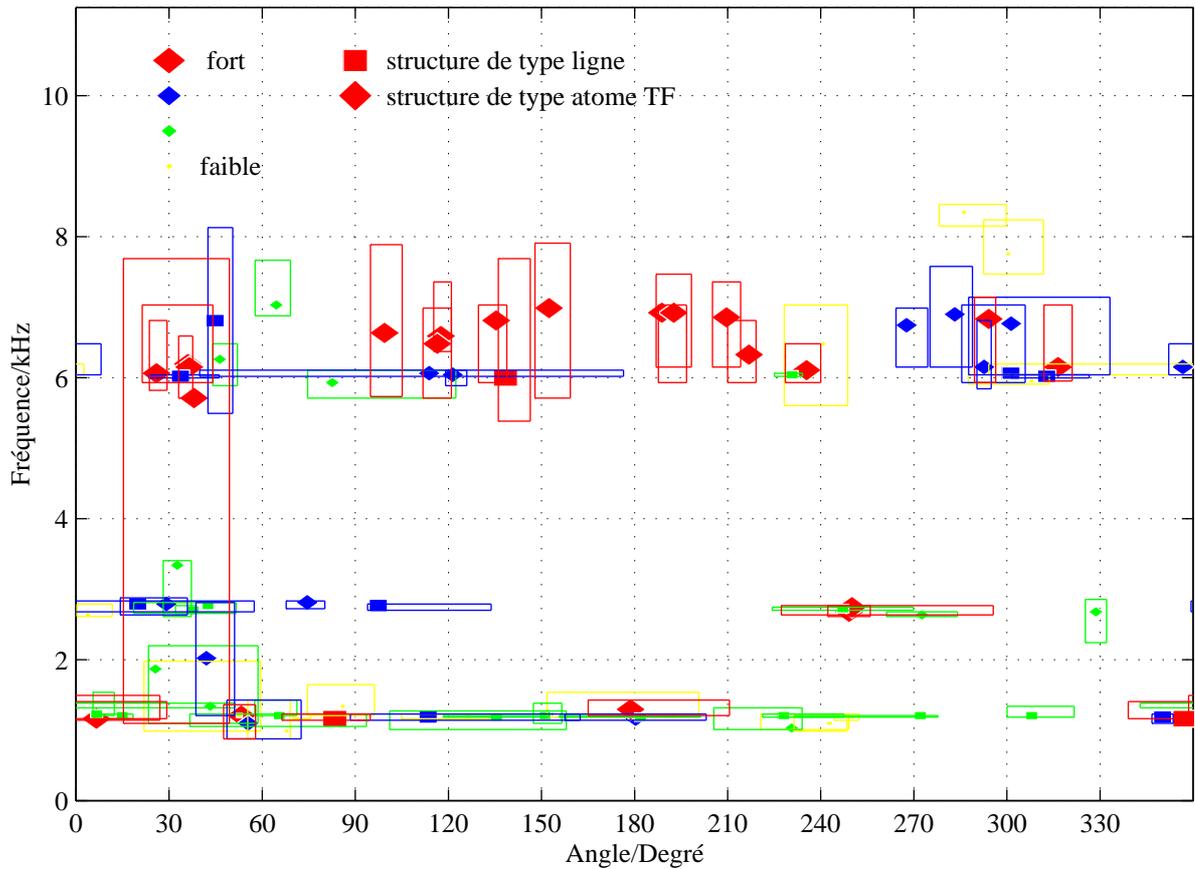


FIG. 5.23: Répartition des maxima TF en fonction de la période de rotation de l'arbre secondaire.

5.4.3.1 Zone de charge statique

Les premiers essais que nous avons faits avaient comme objectif de mettre en évidence l'influence de la zone de charge statique (cf. fig. 5.22). Dans le cas statique, les forces axiales et radiales représentées sur cette figure sont supposées constantes.

On peut assimiler le passage des éléments sur le défaut à une opération d'échantillonnage de la zone de charge (cf. figure 5.22(a)) de fréquence égale à la fréquence de passage d'une bille sur le défaut.

L'hypothèse d'une zone de charge statique impose alors que la période T_c de la zone de charge soit un multiple de la période de rotation de la bague interne.

Nous avons donc relevé les coordonnées des structures présentes dans le plan TF puisqu'elles correspondent au passage d'un défaut. La figure 5.23 montre les résultats obtenus. On n'y discerne aucun regroupement.

Cela montre que la période de l'arbre récepteur n'est pas un multiple de la période de la zone de charge.

En d'autres termes, l'hypothèse d'une zone de charge statique n'est pas valide. Il est nécessaire d'introduire la notion de zone de charge dynamique.

5.4.3.2 Zone de charge dynamique

Les forces axiales ou/et radiales présentées sur la figure 5.22 sont maintenant supposées dépendre simultanément du temps et de la position angulaire du défaut. Ces variations des forces ont pour effet de modifier la position relative de la bague interne par rapport à la bague externe à la fois en translation (variation de l'angle de contact α) et en rotation (angle β sur la figure 5.22(b)). On peut noter que les variations d'angle de contact α causent des variations de la périodicité de l'excitation engendrée par le passage d'une bille sur le défaut.

L'examen de la figure 5.19 montre une périodicité de la zone de charge puisqu'on a toujours une structure haute fréquence suivie de deux structures basse fréquence. Les résultats obtenus pour une période égale à $T_c = \frac{1}{1,34} T_{\text{rot},r}$ sont montrés sur la figure 5.24. On peut y distinguer un regroupement des structures haute fréquence.

Avec une périodicité multiple de T_c , on obtient aussi des regroupements en nombre égal à ce multiple. Dans le cas de la boîte de vitesses, le désalignement de la bague interne par rapport à la bague externe engendre une zone de charge dont l'allure est représentée sur la figure 5.22(a). Elle se caractérise par deux zones à forte charge. Les résultats correspondant à une telle configuration sont obtenus pour une période de $2T_c$. Ainsi, la figure 5.25 montre les deux regroupements correspondant aux zones à forte charge.

Un point remarquable est que l'on peut voir les différents points obtenus comme résultant de l'échantillonnage d'une courbe dans le plan TF. Cette courbe pourrait s'interpréter comme la «caractéristique TF» de la zone de charge.

Pour comprendre les phénomènes à l'origine d'une telle zone de charge, on peut utiliser un modèle simplifié, même s'il n'explique pas la totalité des procédures mises en jeu. Ainsi une oscillation de l'arbre selon l'axe y (figure 5.22(b)) avec une périodicité T_c , peut engendrer un tel phénomène. Le mouvement de l'arbre module les forces axiales (cf. fig. 5.26) ; la zone de charge résultante a alors l'allure de celle représentée sur la figure.

5.5 Modèle vibratoire de la boîte

L'ensemble des résultats obtenus précédemment nous conduit à proposer un modèle vibratoire de la boîte de vitesses qui, bien que largement incomplet, permet une caractérisation des phénomènes physiques mis en jeu.

Une boîte de vitesses peut être décomposée en deux parties distinctes. La première comprend tous les éléments mobiles (engrenages, roulements, arbres de transmission), tandis que la seconde correspond au carter et aux bagues externes des roulements.

Un défaut, suivant sa position (engrenages, roulements) engendre une excitation à des endroits différents de la boîte (cf. figure 5.27). Elle est transmise au capteur via un système non-linéaire et/ou variant dans le temps (défaut d'engrenage, défaut de bague interne) ou via un système linéaire (défaut de bague externe).

De manière plus précise, on peut dire, que le carter (et la bague externe) est un système linéaire dont la fonction de transfert dépend de la position de l'excitation et du point de mesure. Il est faiblement dispersif.

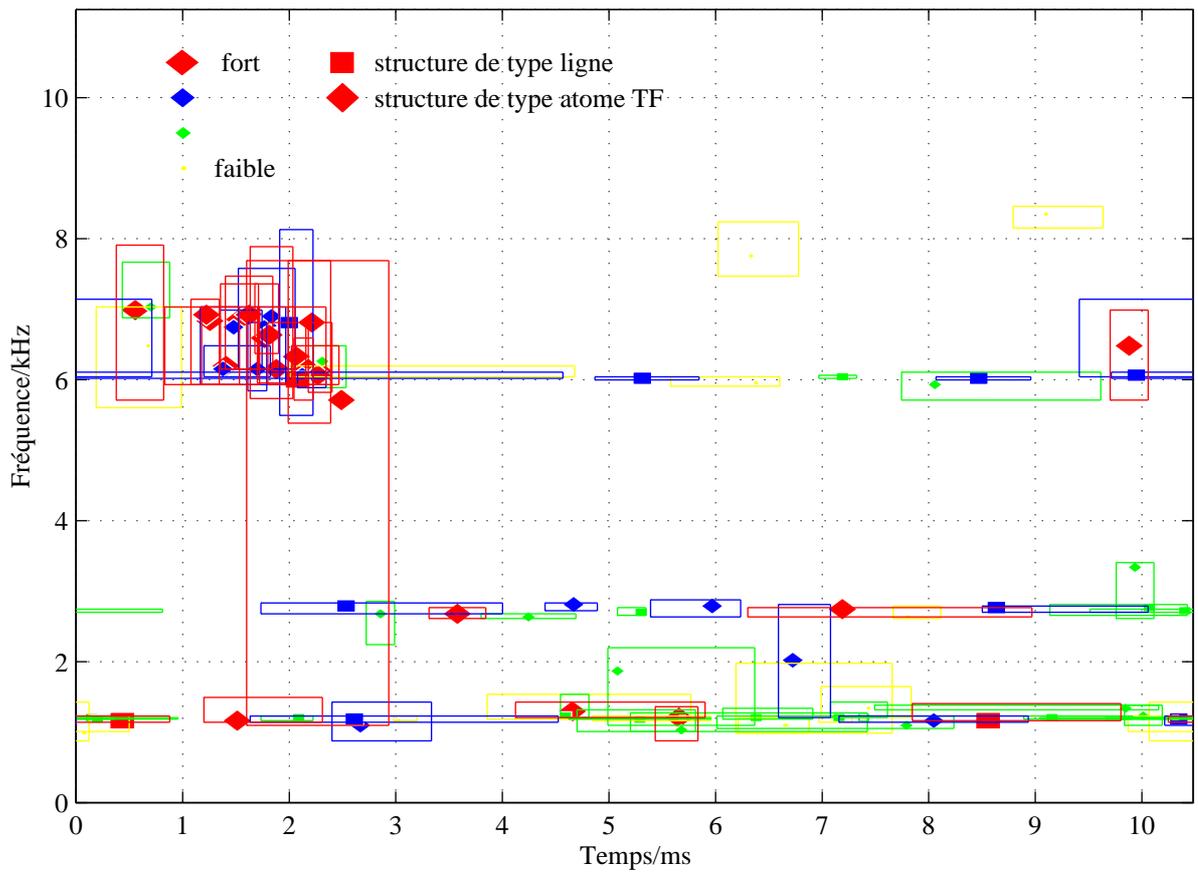


FIG. 5.24: Répartition des maxima TF selon $\frac{1}{1.34}T_{rot,r}$.

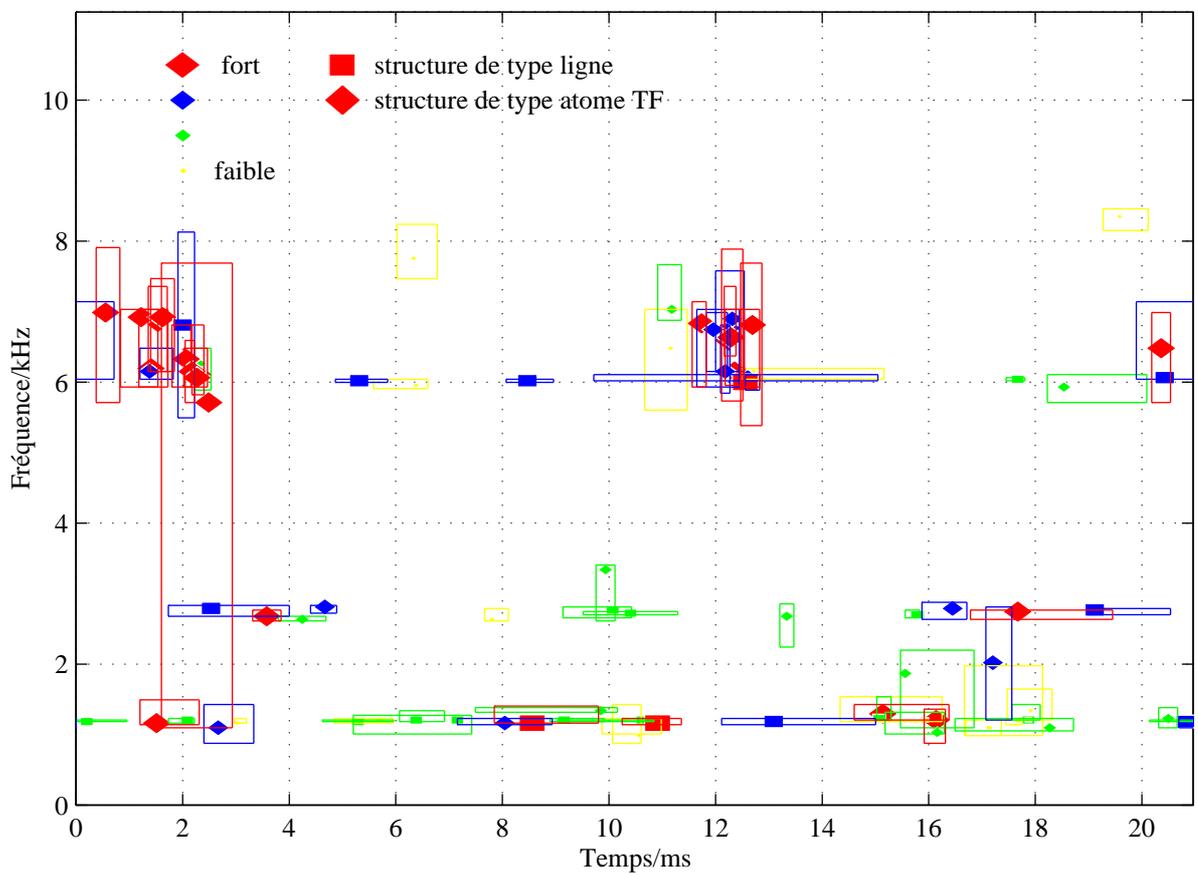


FIG. 5.25: Répartition des maxima TF selon $\frac{1}{0.67}T_{rot,r}$.

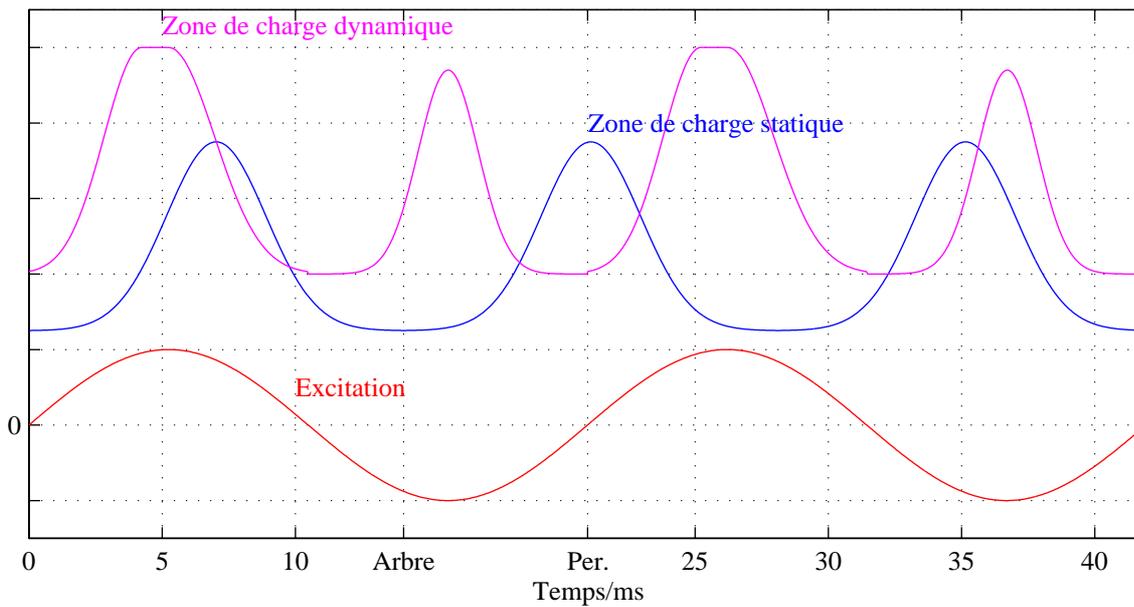


FIG. 5.26: Modèle d'excitation d'une zone de charge dynamique.

Le transfert des roulements est plus difficile à caractériser que ce soit sur boîte saine ou défectueuse. La seule certitude est que ce n'est pas un système linéaire invariant dans le temps (voir zone de charge).

Enfin le transfert des engrenages est lui aussi difficile à caractériser précisément. Cependant, en assimilant l'excitation engendrée par les engrenages à un train d'impulsions (variation du nombre de dents en contact simultané), on peut considérer que le signal vibratoire correspond à la superposition de deux réponses impulsionnelles. La première, caractéristique de l'arbre moteur, est un chirp de pente positive et la seconde, relative à l'arbre récepteur, est un chirp de pente négative.

Le phénomène qui engendre les chirps n'est pas clairement identifié, mais on peut cependant faire certaines hypothèses en s'inspirant de modèles mécaniques simples. Deux types de systèmes peuvent avoir une telle réponse (cf. fig. 5.28) :

- Système linéaire variant dans le temps
Un exemple typique est une barre excitée dont la longueur augmente (chirp décroissant) ou diminue (chirp croissant) dans le temps.
- Système non-linéaire invariant dans le temps
L'exemple typique est une barre excitée de longueur invariante mais dont les déplacements sont bornés.

On peut trouver au sein de la boîte de nombreux exemples qui s'apparentent à l'un ou l'autre type. Ainsi pour les systèmes linéaires variants dans le temps :

- Déplacement de la ligne de contact sur la dent du pied à la tête pour le pignon récepteur, et de la tête au pied pour le pignon moteur.
- Mouvements dynamiques de l'arbre.
- Mouvements dynamiques des billes.

Des exemples pour un système non-linéaire sont :

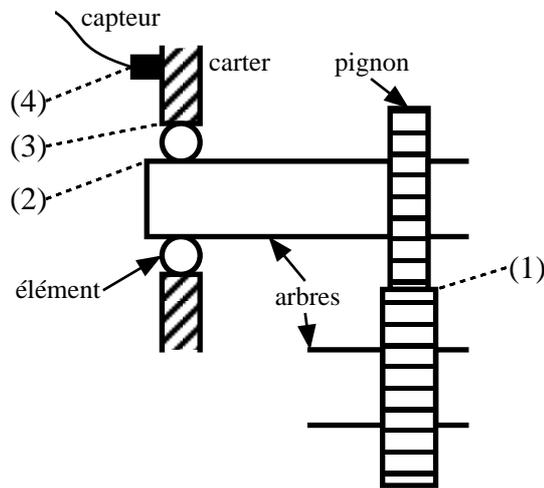
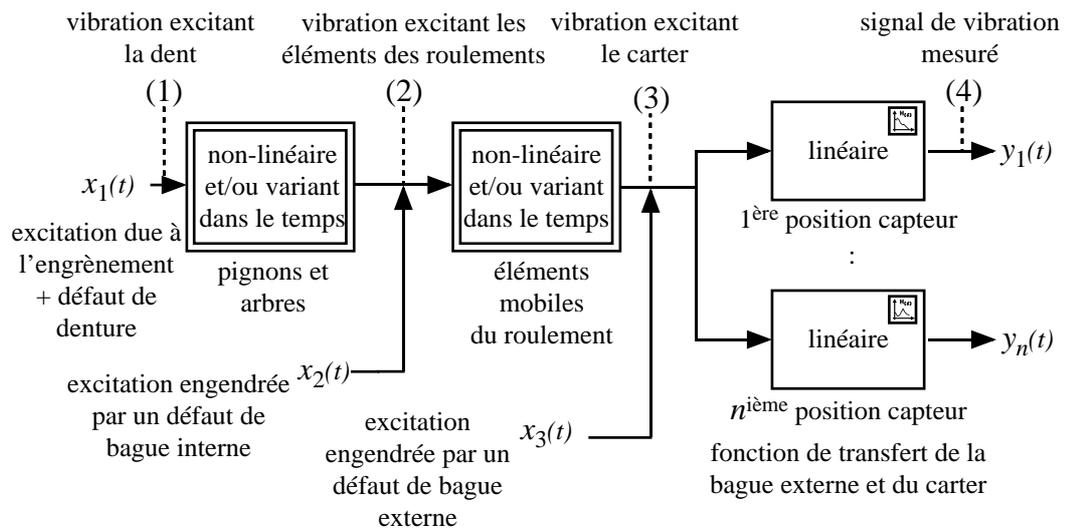


FIG. 5.27: Modèle proposé de la boîte de vitesses.

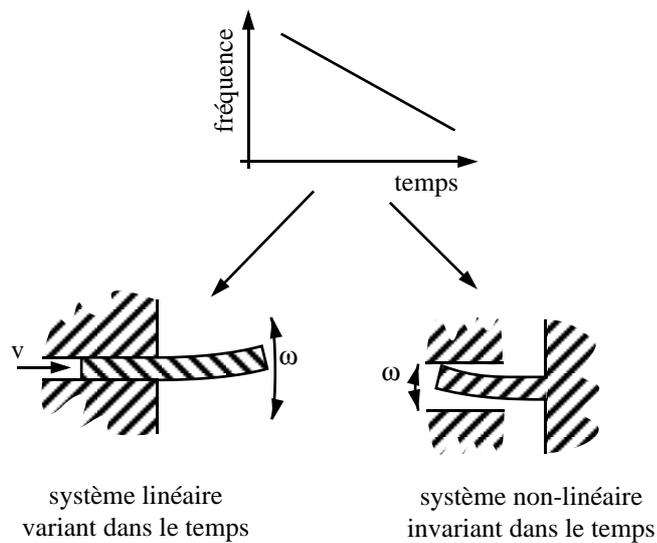


FIG. 5.28: Deux interprétations possibles des chirp linéaires.

- Mouvement des dents limité par les autres dents.
- Mouvement des billes limité par les bagues.

Dans le cas de dents saines, seul le déplacement de la ligne de contact permet d'expliquer les pentes opposées des chirps linéaires. Un phénomène de même type doit être à l'origine de ceux observés pour les dents défectueuses. Cependant, leurs caractéristiques (durée et pente des chirps) sont sensiblement différentes, ce qui peut correspondre soit à une modification des propriétés dynamiques de la dent (due à la rainure usinée), soit à l'excitation d'un mode différent.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode d'analyse TF pour les signaux vibratoires de boîtes de vitesses a été présentée. Elle se décompose en trois étapes :

- Calcul de la représentation TF
 - Deux méthodes ont été retenues. La méthode du noyau optimal est appliquée de manière systématique et la distribution de Wigner-Ville locale est utilisée pour lever un doute quant à l'existence d'une composante.
- Interprétation physique
 - Les composantes significatives sont analysées et interprétées à partir des connaissances a priori sur la boîte de vitesses et ces conditions opératoires.
- Validation par synthèse d'un signal temporel
 - L'objectif de cette phase est double. D'une part, elle permet de vérifier la cohérence des résultats fournis par les différentes méthodes et d'autre part, de valider l'interprétation physique.

Les principaux résultats de cette analyse sont les suivants :

Le signal vibratoire enregistré sur une boîte saine contient uniquement la contribution des engrenages sous couple. Il correspond à la répétition périodique de la superposition de deux chirps de pente opposée, représentatifs des contributions respectives des pignons moteur et récepteur.

L'analyse des signaux avec défaut de denture a montré qu'ils incluaient également des composantes chirp de pente croissante ou décroissante selon la position du défaut. Cependant l'énergie des composantes est beaucoup plus importante, et leurs caractéristiques (durée, pente de modulation) diffèrent du cas des dents saines. Une étude en fonction du positionnement des capteurs a montré la linéarité du carter.

L'analyse des signaux avec défaut sur la bague externe des roulements a permis de confirmer la stricte périodicité de l'excitation correspondante. Elle a également montré que le carter peut être considéré comme faiblement dispersif.

Enfin, l'analyse des signaux avec défaut sur la bague interne des roulements a permis de mettre en évidence la non-périodicité de l'excitation correspondante. L'étude de la zone de charge a, de plus, montré l'insuffisance de la zone de charge statique et nous a conduit à introduire la notion de zone de charge dynamique qui, seule, permet d'expliquer les phénomènes observés. Une conséquence est que le transfert des vibrations varie en fonction de la position angulaire des défauts ainsi que dans le temps.

L'ensemble de ces observations nous permet de proposer un modèle vibratoire de la boîte de vitesses.

Ces résultats ont également été utilisés pour la construction d'une stratégie de détection et localisation de défauts de boîte de vitesses. Notamment, l'analyse des signaux d'écaillage d'engrenage a permis de caractériser les transitoires comme des variations brusques, des lois de modulation du signal par rapport aux variations lentes observées sur les engrenages sains. L'approche retenue pour la détection de défauts d'engrenage consiste alors à associer une méthode de détection de rupture de modèle à un algorithme adaptatif de démodulation [Beg97, BTOR97, BBT96]. Un moyennage synchrone préalable permet la localisation du défaut. La détection des défauts de roulement repose principalement sur une analyse des périodicités de l'excitation réalisée à partir d'une analyse cepstrale [Beg97]. Dans ce cadre, l'intérêt principal de l'analyse TF est qu'elle a permis d'expliquer les périodicités apparentes.

Conclusion

Le travail présenté dans ce document est relatif à l'analyse temps-fréquence (TF) de signaux vibratoires de boîtes de vitesses. Dans ce cadre, nos contributions sont de deux types.

En premier lieu, une nouvelle distribution TF, appelée distribution de Wigner-Ville Locale, a été proposée. Sa conception repose sur l'étude des propriétés des fonctions produit temporel et fréquentiel où deux résultats ont été établis. D'une part, il existe des limites d'intégration $\tau_{\max}(t, \omega)$ et $\theta_{\max}(t, \omega)$, optimales au sens de la réduction des interférences et dont les valeurs sont en accord avec la règle de construction des interférences (règle du point milieu). D'autre part, les fonctions produit temporel et fréquentiel permettent une séparation des contributions des auto-termes et inter-termes.

A partir de ces résultats, une approche pour l'estimation des limites optimales a également été proposée. La représentation TF finale est obtenue en effectuant un lissage local de la distribution de Wigner-Ville. Les dimensions de la fenêtre de lissage sont fonction des limites estimées lors de l'étape précédente.

La distribution de Wigner-Ville Locale n'appartient pas à la classe de Cohen. Cependant, la notion de lissage local, qui à notre connaissance est originale, est présentée selon un formalisme qui résulte en une généralisation de la classe de Cohen. La distribution de Wigner-Ville Locale est membre de cette nouvelle classe. Elle est entièrement caractérisée par la donnée d'un noyau dépendant explicitement du temps et de la fréquence.

La généralisation des propriétés souhaitables d'une distribution TF et les conditions d'admissibilité associées ont été obtenues pour les covariances. Pour les autres propriétés (distributions marginales, énergie), nous nous sommes heurtés à des difficultés relatives à la définition même de ces propriétés. Cependant, nous avons pu obtenir des résultats partiels pour la classe des signaux séparables en temps et/ou en fréquence.

L'application de l'approche proposée sur signaux synthétiques et réels a montré ses performances supérieures, comparativement à celles obtenues par la méthode du noyau optimal. Notamment, elle permet une suppression effective des interférences et contrairement à la méthode du noyau optimal, elle ne privilégie pas les structures les plus énergétiques, de même qu'elle ne tend pas à linéariser les composantes TF. Cela en fait, un outil particulièrement fiable pour l'analyse des signaux non-stationnaires. Actuellement, sa principale limitation est son coût de calcul important.

Les perspectives qu'ouvrent ce travail sont nombreuses. En premier lieu, il convient de développer une version rapide, exploitant par exemple, les remarques faites à la fin du paragraphe 4.2.4 sur l'implantation du filtrage des fonctions produit temporel et fréquentiel. En second lieu, et bien que cela ne présente pas de difficultés majeures, les versions utilisant des lissages gaussiens séparables doivent être réalisées. En revanche, la synthèse de filtres de

lissage locaux non-séparables reste un problème ouvert, de même que l'étude théorique des propriétés des distributions de Wigner-Ville Locales (définition, condition d'admissibilité) et l'évaluation de l'apport de cette approche.

Nos autres contributions sont relatives à l'application des outils TF à l'analyse des signaux vibratoires de boîte de vitesses. Nous avons notamment proposé une méthode d'analyse que nous avons souhaitée la plus systématique possible. Elle se décompose en trois étapes qui sont :

- Choix et calcul des représentations TF

La méthode du noyau optimal a été utilisée de manière systématique car elle présente le meilleur compromis coût de calcul/qualité des résultats. La distribution de Wigner-Ville Locale n'a été utilisée que pour affiner l'analyse ou lever un doute quant à l'existence d'une composante.

- Sélection des composantes principales et interprétation physique
- Synthèse d'un signal temporel et validation

Cette étape est particulièrement utile car elle permet de valider simultanément l'interprétation physique et les résultats fournis par les distributions utilisées.

Cette méthode a été appliquée à l'analyse de signaux vibratoires obtenus sur boîte saine, avec défaut d'engrenage puis de roulement. Elle a permis l'obtention d'un certain nombre de résultats relatifs à l'interprétation des phénomènes physiques mis en jeu au sein de la boîte de vitesses. On peut également souligner que, outre le fait qu'une telle étude n'avait pas été réalisée jusqu'à maintenant, la plupart des résultats n'ont pu être obtenus que grâce à l'analyse TF. A ce titre, l'apport des représentations TF est indéniable et peut sans conteste être attribué à leur capacité à représenter les phénomènes non-stationnaires de façon accessible. Tout n'a bien sûr pas été élucidé et certaines questions restent totalement ouvertes.

Ainsi, la cause mécanique des chirps linéaires, caractéristiques de l'engrènement des dents saines et détériorées, n'a pas été clairement identifiée. Ce point est cependant crucial car une bonne connaissance des phénomènes mécaniques sous-jacents pourrait aboutir à la définition de la signature TF «idéale» et pourrait donc conduire à la définition d'une mesure de la qualité de conception d'un engrenage.

Pour les roulements, la zone de charge a une influence prépondérante. Cependant, il apparaît que sa prise en compte effective impose d'introduire la notion de zone de charge dynamique que l'on peut décrire par sa «caractéristique TF». Outre les problèmes liés à l'identification de ses causes mécaniques, se pose également celui de sa détermination à partir d'un roulement sain.

Enfin, une grande partie des résultats obtenus a été utilisée pour la synthèse d'une stratégie de détection/localisation des défauts de boîte de vitesses. Cependant, l'utilisation directe des représentations TF est parfaitement envisageable et offrirait l'avantage de simplifier la conception des détecteurs.

A notre sens, ce travail ne constitue qu'une première étape et notre souhait est qu'il motive d'autres travaux, notamment chez les mécaniciens pour qui, l'analyse TF pourrait constituer un complément à l'analyse de Fourier traditionnelle.

Annexe A

Moyennage synchrone

Un défaut sur engrenage peut être décelé en mettant en évidence un phénomène de modulation d'amplitude et / ou de phase. Cependant, le fait que les défauts se traduisent par des signaux courts et le grand nombre de phénomènes perturbateurs présents dans le signal, rendent difficile la reconnaissance d'une telle modulation. A ceci, on peut ajouter un RSB peu élevé. Ainsi, dans de telles circonstances, on comprend que les informations concernant cette modulation soient noyées. Une alternative pour résoudre ce problème a été proposée par P.D. McFadden et J.D. Smith [MS85] : le moyennage synchrone. Il s'agit d'une mise en forme du signal et à ce titre, il ne constitue qu'une étape préliminaire au traitement du signal.

Cependant, il apparaît que cette mise en forme offre des possibilités intéressantes notamment vis à vis des problèmes de séparation des sources d'excitation et de localisation des défauts.

A.1 Principe du moyennage synchrone

Le dessin suivant montre un réducteur à engrenage, un des deux pignons présentant un défaut. Le signal vibratoire résulte des chocs dus à l'engrènement d'une dent sur l'autre. Le défaut se traduit par un choc beaucoup plus important.

Un défaut situé sur un pignon de l'arbre primaire (resp. secondaire) se reproduit à la fréquence de rotation de l'arbre primaire (resp. secondaire).

La connaissance des différentes périodicités permet de mettre en évidence les phénomènes liés à chacune des dents sur un pignon donné. Ceci est réalisé en effectuant la sommation de segments du signal temporel décalés d'une durée égale à la période de rotation considérée. Avec une synchronisation adéquate, on peut lier chaque instant du signal vibratoire à une position angulaire de l'arbre.

Le moyennage du signal de vibration en fonction de la fréquence de rotation de l'arbre moteur, est alors effectué en découpant ce dernier en segments dont la durée est équivalente au passage de 60 tops du générateur d'impulsions. Le moyennage suivant la fréquence de rotation de l'arbre récepteur est plus délicat. En effet, nous sommes amenés à calculer le

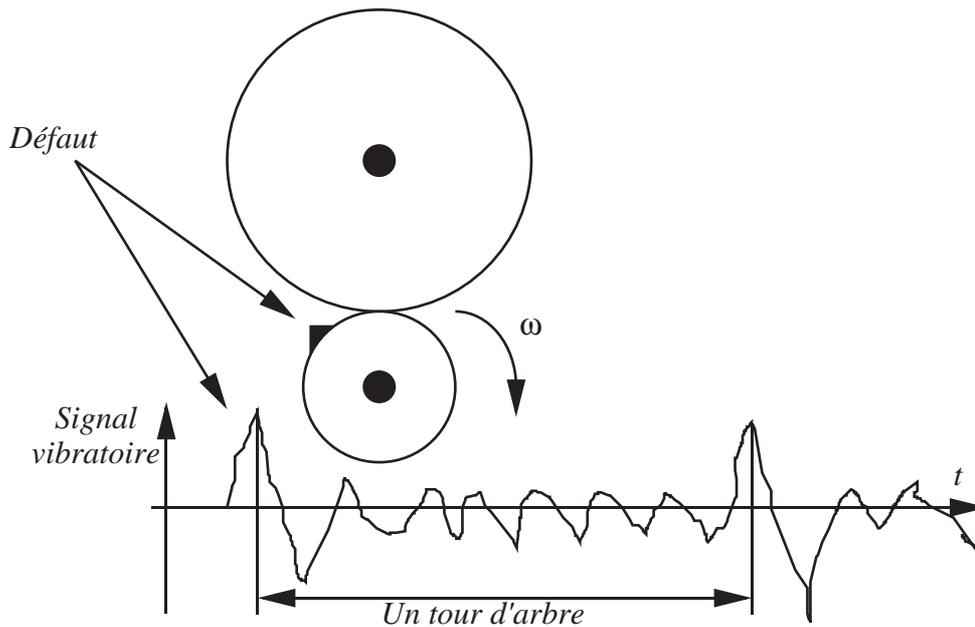


FIG. A.1: Périodicité des chocs engendrés par un défaut d'engrenage.

nombre N_d de tops, équivalent à un tour d'arbre récepteur. N_d est donné par :

$$N_d = 60 \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{A.1})$$

avec N_1 nombre de dents du pignon moteur et N_2 nombre de dents du pignon récepteur.

Or, N_d peut ne pas être un nombre entier (ce qui est le cas pour les rapports 3 à 5). Par conséquent, nous découpons le signal de vibration en tronçons dont la durée est la plus proche possible du passage de N_d tops du générateur d'impulsions. Cependant, l'erreur engendrée par cette approximation est négligeable tout au moins si la vitesse de rotation de l'élément est suffisamment constante. Notons qu'un échantillonnage dont la fréquence serait asservie à la fréquence réelle de rotation permettrait de s'affranchir des variations de phase provoquées par les fluctuations de la vitesse d'entraînement ou du couple résistant. Toutefois, elle introduit de nouveaux problèmes causés par l'utilisation d'une fréquence d'échantillonnage non constante.

A.2 Amélioration du RSB

Supposons un signal périodique perturbé par un bruit additif supposé indépendant du signal. Le moyennage synchrone a pour effet d'augmenter le RSB. On peut notamment montrer [dC85] que si le bruit est supposé blanc et si le moyennage est parfaitement synchrone sur la fréquence de rotation, alors un moyennage effectué sur N segments augmente le RSB de la façon suivante :

$$\text{RSB}_{\text{moyenné}} = \text{RSB}_{\text{non-moyenné}} + 10 \log(N). \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas réel, ce gain est plus faible. Les principaux facteurs de diminution sont la coloration du bruit et l'utilisation d'une fréquence d'échantillonnage non multiple de la fréquence de rotation du pignon étudié.

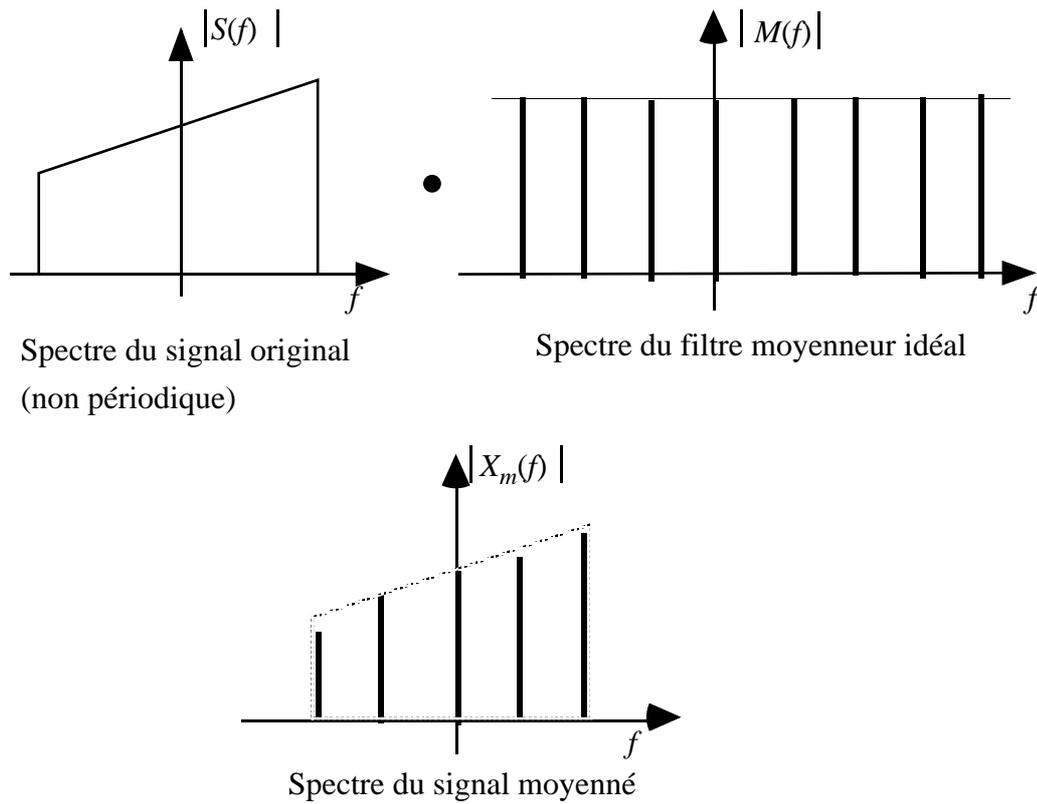


FIG. A.2: *Effet fréquentiel du moyennage synchrone idéal.*

A.3 Effet fréquentiel du moyennage

Dans le cas où l'on suppose que la fréquence d'échantillonnage est un multiple de la fréquence de rotation, le moyennage synchrone correspond dans le domaine fréquentiel à un filtre sélectif des fréquences inverses de la période de moyennage T et de ses harmoniques :

$$\begin{aligned}
 s_{\text{moyenné}}(k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(k - nT) \\
 &= s(k) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - nT) \\
 &\quad \downarrow \mathcal{F} \\
 S_{\text{moyenné}}(\omega) &= S(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n}{T}\right).
 \end{aligned}$$

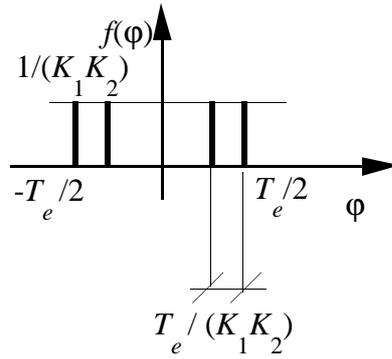


FIG. A.3: Densité de probabilité de l'erreur de phase $\varphi(n)$.

Le spectre du signal original est donc échantillonné avec une période de $1/T$. En pratique, le moyennage est effectué sur un nombre fini de segments. Le signal moyenné s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 s_{\text{moyenné}}(k) &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} s(k - nT) \\
 &= s(k) \star \sum_{n=-N/2+1}^{N/2+1} \delta(k - nT) \\
 &= s(k) \star \left(\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - nT) \right) \text{rect}_N(k) \right) \\
 &\quad \downarrow \mathcal{F} \\
 S_{\text{moyenné}}(\omega) &= S(\omega) \cdot \left(\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n}{T}\right) \right) \star N \text{sinc}(\omega N) \right).
 \end{aligned}$$

On suppose dans un deuxième temps que la fréquence d'échantillonnage n'est plus multiple de la fréquence de rotation. Deux possibilités sont envisageables. La première est le cas où les fréquences sont commensurables, c'est-à-dire :

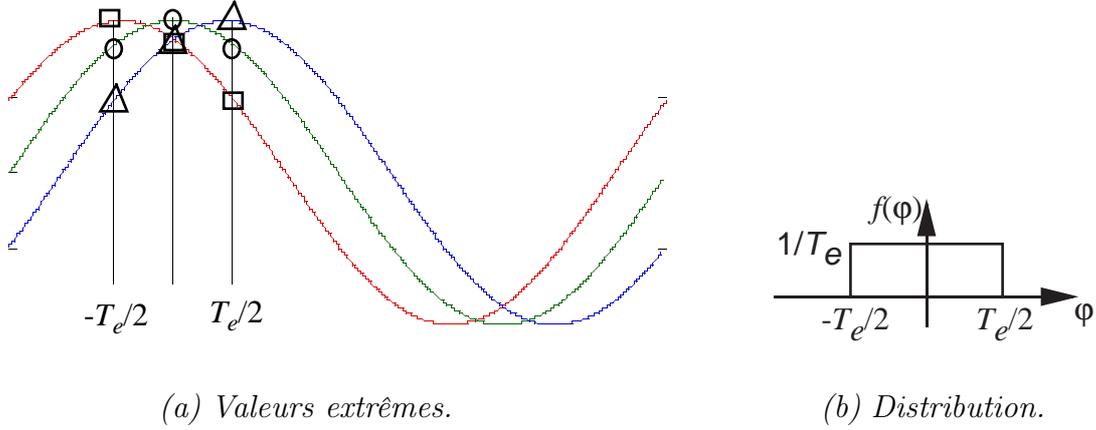
$$\exists K \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \ (\mathbb{Q} \text{ privé de } \mathbb{N}) \quad \text{tel que : } f_e = K f_r. \quad (\text{A.3})$$

L'erreur de phase $\varphi(n)$ faite à chaque accumulation peut prendre un nombre fini de $K_1 \cdot K_2$ valeurs différentes. Elle peut donc être considérée comme une variable aléatoire discrète dont la densité de probabilité est donnée sur la figure A.3.

La deuxième possibilité correspond au cas où les fréquences d'échantillonnage et de rotation sont incommensurables c'est-à-dire :

$$\exists K \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ (\mathbb{R} \text{ privé de } \mathbb{Q}) \quad \text{tel que : } f_e = K f_r.$$

D'un point de vue pratique, c'est le seul cas réaliste, car une connaissance exacte des vitesses de rotation des différents pignons n'est pas envisageable. L'erreur $\varphi(n)$ de phase faite à chaque accumulation est alors décrite comme une variable aléatoire dont la distribution peut

FIG. A.4: Distribution uniforme de l'erreur de phase $\varphi(n)$.

se déduire du cas précédent en faisant $K_1 \cdot K_2 \rightarrow \infty$. Il apparaît alors que $\varphi(n)$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{T_e}{2}; \frac{T_e}{2}]$. Les variations de phases dans le signal et la distribution uniforme sont représentées sur la figure A.4.

En supposant, pour simplifier que le signal original soit composé d'une seule fréquence, le signal moyenné peut s'écrire :

$$s_{\text{moyenné}}(k) = \sum_{n=1}^N s_n(k)$$

$$s_n(k) = \cos\left(\omega \frac{k + \varphi(n)}{f_e}\right).$$

L'erreur de phase $\varphi(n)$ a une distribution uniforme sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. En développant $s_n(k)$ de manière à faire apparaître les termes en phase et en quadrature, on obtient :

$$s_n(k) = \underbrace{\cos\left(\frac{\omega k}{f_e}\right)}_{\text{somme sans déphasage}} \underbrace{\cos\left(\frac{\omega \varphi(n)}{f_e}\right)}_{\text{espérance=?}} - \underbrace{\sin\left(\frac{\omega k}{f_e}\right)}_{\text{déphasage de la somme}} \underbrace{\sin\left(\frac{\omega \varphi(n)}{f_e}\right)}_{\text{espérance} \rightarrow 0}$$

Si on prend l'espérance, la fonction sinus étant impaire, le facteur devant le terme de déphasage s'annule. L'opération de moyennage synchrone avec une fréquence d'échantillonnage non multiple de la fréquence de rotation de l'élément considéré n'introduit donc pas de déphasage «parasite».

On s'intéresse maintenant à l'espérance du terme de sommation :

$$\mathbb{E} \left\{ \cos\left(\frac{\omega \varphi(n)}{f_e}\right) \right\} \Big|_{|\varphi(n)| < \frac{1}{2}, \text{uniforme}}$$

La densité de probabilité de la variable $y = \cos\left(\frac{\omega \varphi(n)}{f_e}\right)$ se déduit de celle de la variable

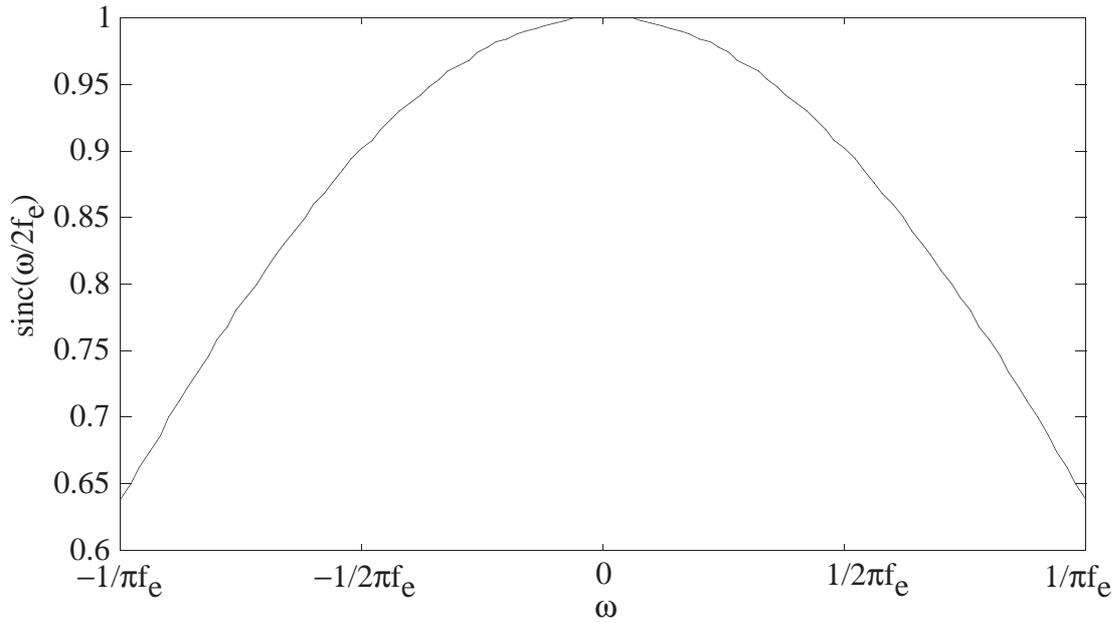


FIG. A.5: Effet fréquentiel d'un moyennage synchrone avec échantillonnage non multiple de la période de rotation.

aléatoire $\varphi(n)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f_y &= 2 \left| \frac{d}{dy} \left(y = \cos \left(\frac{\omega \varphi(n)}{f_e} \right) \right)^{-1} \right| f_{\varphi(n)} \\ &= 2 \frac{f_e}{\omega \sqrt{1-y^2}} f_{\varphi(n)} \end{aligned}$$

En prenant l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{y\} &= \int_{\cos(\frac{\omega}{2f_e})}^1 \frac{2f_e}{\omega \sqrt{1-y^2}} y dy \\ &= \sqrt{1-y^2} \Big|_{\cos(\frac{\omega}{2f_e})}^1 \\ &= 2 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{2f_e} \right) \end{aligned}$$

D'un point de vue fréquentiel, l'opération de moyennage synchrone avec une fréquence d'échantillonnage non multiple de la fréquence de rotation de l'élément considéré revient à multiplier le spectre du signal moyenné original (peigne de Dirac fréquentiel - cf. eq. A.3) par le filtre sinc de la figure A.5.

On peut annuler l'effet de l'erreur de phase sur le spectre du signal moyenné en procédant à un filtrage inverse. Cependant, il convient de souligner qu'une telle procédure présente le désavantage d'amplifier le bruit résiduel. En pratique, l'atténuation dans la bande $[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}]$ étant inférieure ou égale à -3dB, cet effet pourra être négligé.

Annexe B

Implantation de l'algorithme du noyau optimal

Un algorithme rapide de calcul du noyau optimal est présenté dans [BJ94]. Cet algorithme réduit fortement la complexité numérique du problème d'optimisation mais en contrepartie, augmente l'encombrement mémoire, car il nécessite la sauvegarde d'un grand nombre de variables. Plus précisément, à chaque point TF est associé une structure constituée de 5 pointeurs, 1 entier et 2 réels à virgule flottante.

Ainsi, le calcul de la représentation TF d'un signal de 512 points nécessite pour chaque point TF le stockage de la structure (figure B.1), de la fonction d'ambiguïté (entrée, 2 réels à virgule flottante) et de la fonction caractéristique (sortie, 2 réels à virgule flottante) soit un total de :

$$\underbrace{5 \cdot 4 \text{ octets}}_{\text{pointeurs}} + \underbrace{1 \cdot 4 \text{ octets}}_{\text{entier}} + \underbrace{6 \cdot 8 \text{ octets}}_{\text{réels}} = 72 \text{ octets}$$

soit pour l'ensemble de la représentation TF :

$$72 \cdot 512^2 = 18\text{Mo.}$$

Or notre machine dispose de 17Mo de mémoire vive dont 2Mo sont réservés pour le système

Numéro du nœud
Pointeur père Pointeur premier fils Pointeur prochain voisin à gauche
Pointeur du nœud père si super-nœud Pointeur de la racine du super-nœud Valeur du super-nœud Nombre de nœuds dans le super-nœud Valeur du noyau
Position du super-nœud dans la file

FIG. B.1: Structure utilisée par l'algorithme de [BJ94] pour chaque point TF.

Nom	Type	Description
Super	int	Pointeur père ou -1 si racine du super-nœud ou -2 si déjà dans le noyau
Valeur	float	Energie du nœud
Nombre	int	Nombre des nœuds dans le super-nœud

FIG. B.2: La structure modifiée.

et 1Mo pour le programme utilisateur. Les 14Mo de mémoire disponible permettent donc d'allouer $\frac{14\text{Mo}}{512^2} = 56$ octets à chaque point TF.

Nous avons donc été amenés à modifier la structure (figure B.1) pour diminuer sa charge mémoire.

Les pointeurs du premier bloc (qui décrivent l'arbre) sont supprimés et on effectue leur calcul en ligne. Ceci peut se justifier, car la charge de calcul est très faible. L'algorithme de calcul des positions dans l'arbre est décrit au paragraphe B.1.

Le deuxième bloc est condensé selon la figure B.2 et impose un test supplémentaire qui permet d'assurer que la racine du super-nœud soit la plus proche de l'origine. De plus, la valeur du nœud est stockée en réel simple (4 octets). Cela se traduit par une perte de résolution qui a cependant peu d'influence sur les résultats de l'optimisation. Le calcul de la fonction caractéristique est alors réalisé en chargeant la fonction d'ambiguïté (sauvegardée sur disque dur) et en la pondérant avec le noyau. Chaque point de la fonction caractéristique est individuellement sauvegardé sur disque dur.

Une liste de la taille du volume du noyau permet de trouver les nœuds les plus énergétiques. En théorie, il est possible que des nœuds n'appartenant pas à cette liste soient nécessaires, notamment lors des phases de création des super-nœuds. Si tel est le cas, la liste est recrée. Cependant, en deux ans d'utilisation, cela est arrivé deux fois seulement.

La charge mémoire demandée par la version modifiée est de 12 octets par point TF soit 3Mo pour un signal de 512 échantillons.

L'algorithme est entièrement écrit en langage C. L'interface avec Matlab est réalisée en utilisant des fichiers d'échange. Lors du calcul du noyau optimal, Matlab est inactivé et sauvegardé dans le swap du disque dur.

L'algorithme est très rapide (environ 10 secondes pour un signal de 512 échantillons). A cette durée, viennent s'ajouter les 30 secondes nécessaires au calcul de la fonction d'ambiguïté et de la représentation TF.

B.1 Calcul des positions de l'arbre

Pour réaliser la contrainte «radialement décroissante», la notion de rayon doit être traduite sur une grille. Les rayons sont donc approchés par la méthode illustrée sur la figure B.3. Etant donné un point du plan d'ambiguïté ($\theta = 1$, $\tau = 2$), le vrai rayon est tracé en rouge. Trois approximations sont possibles et tracées en bleu. Chacune des possibilités engendre

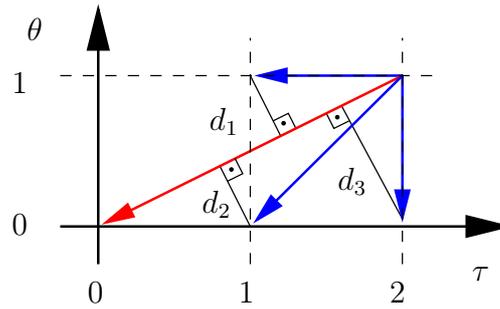


FIG. B.3: Approximation des rayons sur une grille.

une erreur de projection d_1 , d_2 et d_3 qui valent :

$$d_1 = \frac{|\tau|}{\sqrt{\theta^2 + \tau^2}} \quad d_2 = \frac{|\tau - \theta|}{\sqrt{\theta^2 + \tau^2}} \quad d_3 = \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + \tau^2}}.$$

La possibilité choisie est celle qui fournit l'erreur minimale, c'est à dire :

$$\min_d = \begin{cases} d_1 & \text{si } |\theta| < \min(|\tau|, |\theta - \tau|) \\ d_2 & \text{si } |\theta - \tau| \leq \min(|\tau|, |\theta|) \\ d_3 & \text{si } |\tau| < \min(|\theta|, |\theta - \tau|) \end{cases}$$

qui est triviale à implanter.

Annexe C

Calcul de la transformée de Fourier du signal «route»

Le problème est de calculer la transformée de Fourier du signal «route» (cf. eq. 3.38) :

$$s_{\text{route}}(t) = \underbrace{e^{j(\frac{1}{2}mt^2 + \omega_0 t)}}_{s_1(t)} + \underbrace{e^{j(\frac{1}{2}mt^2 - \omega_0 t)}}_{s_2(t)}$$

L'approche¹ suivie consiste à trouver une équation différentielle par rapport à la transformée de Fourier du signal $s_1(t)$, définie par :

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \mathcal{F}\{s_1(t)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{j(\frac{1}{2}mt^2 + \omega_0 t)} e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

En dérivant $s_1(t)$, on obtient :

$$s_1'(t) = j(mt + \omega_0)s_1(t).$$

La transformée de Fourier de cette équation donne :

$$\begin{array}{ccc} s_1'(t) & = & -m(-jts_1(t)) + j\omega_0 s_1(t) \\ \downarrow & \Downarrow \mathcal{F} & \downarrow \\ j\omega S_1(\omega) & = & -mS_1'(\omega) + j\omega_0 S_1(\omega) \end{array}$$

et en réordonnant :

$$S_1'(\omega) = -j \frac{\omega - \omega_0}{m} S_1(\omega).$$

Les solutions de cette équation différentielle sont :

$$S_1(\omega) = S_1(\omega_0) e^{-j \frac{1}{2m} (\omega - \omega_0)^2}. \quad (\text{C.1})$$

¹Cette approche pour le calcul de la transformée de Fourier d'un chirp linéaire nous a été suggérée par Uwe Franz le 1.4.96.

On s'arrête avec le résultat C.1 sans fixer le facteur constant $S_1(\omega_0)$. Le retard de groupe de $S_1(\omega)$ est linéaire et sa pente vaut $\frac{1}{m}$ (inverse de la pente de la fréquence instantanée de $s_1(t)$).

La transformée de Fourier de la fonction $s(t)$ est obtenue en sommant les transformées de Fourier des fonctions $s_1(t)$ et $s_2(t)$:

$$S(\omega) = C_1 e^{-j\frac{1}{2m}(\omega-\omega_0)^2} + C_2 e^{-j\frac{1}{2m}(\omega+\omega_0)^2}. \quad (\text{C.2})$$

Bibliographie

- [AF95] Auger (F.) et Flandrin (P.). – Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 5, Mai 1995, pp. 1068–1089.
- [BBT96] Brie (D.), Begotto (V.) et Tomczak (M.). – Détection de défauts d’engrenages par démodulation simultanée d’amplitude et de phase. *Revue Française de Mécanique*, n° 1, Mars 1996, pp. 5–12.
- [Beg97] Begotto (V.). – *Etude et conception d’un système de surveillance et de diagnostic vibratoires de boîtes de vitesses*. – Thèse de l’Université Henri Poincaré, Nancy I, Juin 1997.
- [BJ90] Baraniuk (R. G.) et Jones (D. L.). – Optimal kernels for time-frequency analysis. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, vol. 1348, 1990, pp. 181–187.
- [BJ93a] Baraniuk (R. G.) et Jones (D. L.). – Signal-dependent time-frequency analysis using a radially gaussian kernel. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 32, 1993, pp. 263–284.
- [BJ93b] Baraniuk (R. G.) et Jones (D. L.). – A signal-dependent time-frequency representation : optimal kernel design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, n° 4, Avril 1993, pp. 1589–1602.
- [BJ94] Baraniuk (R. G.) et Jones (D. L.). – A signal-dependent time-frequency representation : fast algorithm for optimal kernel design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, n° 1, Janvier 1994, pp. 134–146.
- [BO90] Boashash (B.) et O’Shea (P.). – A methodology for detection and classification of some underwater acoustic signals using time-frequency analysis techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, n° 11, Novembre 1990, pp. 1829–1841.
- [BTOR97] Brie (D.), Tomczak (M.), Oehlmann (H.) et Richard (A.). – Gear crack detection by adaptive amplitude and phase demodulation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 2, n° 1, Janvier 1997, pp. 157–167.
- [CBB95] Costa (A. H.) et Boudreaux-Bartels (G. F.). – Design of time-frequency representations using a multiform, tiltable exponential kernel. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 10, Octobre 1995, pp. 2283–2301.
- [CJ95] Czerwinski (R. N.) et Jones (D. L.). – Adaptive Cone-Kernel time-frequency analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 7, Juillet 1995, pp. 1715–1719.

- [CM80a] Claasen (T. A. C. M.) et Mecklenbräuker (W. F. G.). – The Wigner Distribution - a tool for time-frequency signal analysis, Part 1 : continuous-time signals. *Philips Journal of Research*, vol. 35, 1980, pp. 217–250.
- [CM80b] Claasen (T. A. C. M.) et Mecklenbräuker (W. F. G.). – The Wigner Distribution - a tool for time-frequency signal analysis, Part 3 : relations with other time-frequency signal transformations. *Philips Journal of Research*, vol. 35, 1980, pp. 372–389.
- [Coh66] Cohen (L.). – Generalized phase-space distribution functions. *Journal Math. and Physics*, vol. 7, 1966, pp. 781–786.
- [Coh95] Cohen (L.). – *Time-frequency analysis*. – Prentice Hall, 1995.
- [CS92] Capdessus (C.) et Sidahmed (M.). – Analyse des vibrations d'un engrenage : cepstre, corrélation, spectre. *Traitement du signal - spécial traitement du signal en mécanique*, vol. 8, n° 5, Avril 1992, pp. 365–372.
- [CW89] Choi (H. I.) et Williams (W. J.). – Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, 1989, pp. 862–871.
- [dC85] de Coulon (F.). – *Théorie et traitement des signaux*. – Dunod, 1985.
- [DG91] Devauchelle-Gach (B.). – *Diagnostic mécanique des fatigues sur les structures soumises à des vibrations en ambiance de travail*. – Thèse de l'Université Paris IX Dauphine, Décembre 1991.
- [EG76] Escudié (B.) et Grea (J.). – Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie. *Compte-rendu de l'Académie des Sciences*, vol. 283, 1976, pp. 1049–1051.
- [FB95] Feldmann (M.) et Braun (S.). – Diagnostics of nonlinear vibration systems on the basis of the Hilbert transform. In : *2ème conférence internationale des Méthodes de surveillance et techniques de diagnostic acoustiques et vibratoires, octobre 10-12, Senlis (France)*. pp. 221–231. – Société Française de Mécaniciens.
- [FE81] Flandrin (P.) et Escudié (B.). – Géométrie des fonctions d'ambiguïté et des représentations conjointes de Ville : l'approche de la théorie des catastrophes. In : *8ème Colloque GRETSI, Nice*, pp. 69–74.
- [Fla87] Flandrin (P.). – *Représentations temps-fréquences des signaux non-stationnaires*. – Thèse de doctorat d'état es sciences physiques, Institut National Polytechnique de Grenoble, 15 Mai 1987.
- [Fla93] Flandrin (P.). – *Temps-fréquence*. – Hermès, Paris, 1993.
- [For90] Forrester (B. D.). – Analysis of gear vibration in the time-frequency domain. In : *Proceedings of the 44th meeting of the Mechanical Failures Prevention Group of the Vibration Institute, Virginia Beach, Virginia, 3-5 Avril 1990*, pp. 225–234.
- [Gab46] Gabor (D.). – Theory of communication. *Journal of the IEE*, vol. 93, 1946, pp. 429–457.
- [Gar90] Garreau (D.). – Surveillance des roulements par analyse des vibrations. *Cetim info*, n° 115, 1990.

- [GM94] Guetta (O.) et Morandat (A.). – Détection du cliquetis par analyse temps-fréquence et traitement d'images sur des signaux de pression chambre. *In : Journées du GDR TdSI : temps-fréquence, ondelettes et multirésolution : théories, modèles et applications, INSA-Lyon, Lyon, France, 9–11 Mars 1994*, pp. 36.1–36.4.
- [Jan82] Janssen (A. J. E. M.). – On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane. *Philips Journal of Research*, vol. 37, n° 3, 1982, pp. 79–110.
- [JB95] Jones (D. L.) et Baraniuk (R. G.). – An adaptive optimal-kernel time-frequency representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 10, Octobre 1995, pp. 2361–2371.
- [JP90] Jones (D. L.) et Parks (T. W.). – A high resolution data-adaptive time-frequency representation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, n° 12, Décembre 1990, pp. 2127–2135.
- [KB94] König (D.) et Böhme (J. F.). – Application of cyclostationary and time-frequency signal analysis to car engine diagnosis. *In : International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Adelaide, USA*, pp. 149–151.
- [Mar78] Mark (W. D.). – Analysis of the vibratory excitation of gear systems : basic theory. *Journal of the Acoustic Society of America*, vol. 63, n° 5, 1978, pp. 1409–1429.
- [McF86] McFadden (P. D.). – Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of meshing vibration. *Vibr. Acoust. Stress.*, vol. 108, 1986, pp. 165–169.
- [MS84] McFadden (P. D.) et Smith (J. D.). – Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 96, n° 1, 1984, pp. 69–82.
- [MS85] McFadden (P. D.) et Smith (J. D.). – A signal processing technique for detecting local defects in a gear from the signal average of the vibration. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 199, n° 4, 1985, pp. 287–292.
- [OBBT95a] Oehlmann (H.), Brie (D.), Begotto (V.) et Tomczak (M.). – Analyse temps-fréquence de l'écaillage d'engrenages de boîtes de vitesses. *In : 2ème conférence internationale des Méthodes de surveillance et techniques de diagnostic acoustiques et vibratoires, octobre 10-12, Senlis (France)*. pp. 243–253. – Société Française des Mécaniciens.
- [OBBT95b] Oehlmann (H.), Brie (D.), Begotto (V.) et Tomczak (M.). – Examination of gearbox cracks using time-frequency distributions. *In : IEEE International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-95, Detroit, USA, 9-12 Mai 1995, ISBN 0-7803-2432-3, vol. 2*, pp. 925–928.
- [OBBT95c] Oehlmann (H.), Brie (D.), Begotto (V.) et Tomczak (M.). – A method for analysing gearbox failures using time-frequency representations. *In : IEEE UK Symposium on applications of time-frequency and time-scale methods, University of Warwick, Coventry, UK, 30-31 Août 1995, ISBN 1-898783-04-7*, pp. 128–135.

- [OBTR96] Oehlmann (H.), Brie (D.), Tomczak (M.) et Richard (A.). – Time-frequency representations of gearbox faults : analysis and interpretation. *Applied Signal Processing*, vol. 3, n° 1, 1996, pp. 37–53.
- [OBTR97] Oehlmann (H.), Brie (D.), Tomczak (M.) et Richard (A.). – A method for analysing gearbox failures using time-frequency representations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Juillet 1997.
- [Pim62] Pimonow (L.). – *Vibrations en régime transitoire*. – Dunod, 1962.
- [Ran81] Randall (R. B.). – A new method of modeling gear faults. *Journal of mechanical design*, vol. 1, 1981, pp. 259–268.
- [SG90] Sidahmed (M.) et Grenier (Y.). – Surveillance et diagnostic de réducteurs à engrenages. In : *Recueil de conférences traitement du signal en mécanique*, pp. 29–41.
- [Vil48] Ville (J.). – Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Câbles et Transmissions*, vol. 2A, 1948, pp. 61–74.
- [Wel70] Welbourn (D. B.). – Gear error and their resultant noise spectra. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering*, vol. 184, 1970, pp. 131–139.
- [Wig32] Wigner (E. P.). – On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, vol. 40, 1932, pp. 749–759.
- [WM93a] Wang (W. J.) et McFadden (P. D.). – Early detection of gear failure by vibration analysis–I. Calculation of the time-frequency distribution. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 7, n° 3, 1993, pp. 193–203.
- [WM93b] Wang (W. J.) et McFadden (P. D.). – Early detection of gear failure by vibration analysis–II. Interpretation of the time-frequency distribution using image processing techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 7, n° 3, 1993, pp. 205–215.
- [ZAM90] Zhao (Z.), Atlas (L. E.) et Marks (R. J.). – The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, n° 7, Juillet 1990, pp. 1084–1091.



Nom: **OEHLMANN**

Prénom: Harald

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I
en **AUTOMATIQUE**

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le **23 JUL 1998** n°: **58**

Le Président de l'Université



Abstract

Time-frequency analysis of gearbox vibration signals

This work deals with time-frequency (TF) analysis of gearbox vibration signals. It has been supported by a CNRS-grant between the CRAN and PSA.

The first chapter presents the experimental set-up and the modeling of the vibration signals (under fault-free conditions and under gear and bearing fault conditions). The limitations of Fourier analysis for such a class of signals (amplitude and phase modulated sinusoids) are also exhibited.

Chapter 2 presents the main ideas of TF analysis and its interest for vibration signals. Restricting to the Cohen's Class, the problem of interference reduction (crucial for interpretability) is approached as the design of a global kernel. One interesting approach is the signal-dependent Optimal-Kernel method (proposed by Baraniuk and Jones). The properties and limitations of this approach are also discussed.

To handle these limitations, a new TF distribution is proposed in chapter 3. Called the local Wigner-Ville distribution, it consists of a local smoothing (ie. depending on the TF point considered) of the Wigner-Ville distribution. The dimensions of the smoothing windows are obtained by an estimation procedure. This distribution is shown to be a member of an extended class characterised by a time and frequency dependent kernel. Some properties of this new class are studied.

Chapter 4 presents the discretisation and implementation of the method. Simulations using synthetic signals show the effectiveness of the method for interference reduction.

Finally, chapter 5 deals with the TF analysis of the vibration signals. An analysis methodology is proposed and successively applied to the gearbox signals (under fault and fault-free conditions). For each case, the characteristic components are evidenced and a physical interpretation is given. The results enables us to propose a vibratory model of the gearbox.

Résumé

Ce mémoire est relatif à l'analyse TF de signaux vibratoires de boîtes de vitesses. Il a pour cadre un contrat CNRS entre le CRAN et la société PSA dont l'objectif est la conception d'un prototype de surveillance de boîtes de vitesses soumises à des essais d'endurance.

Le premier chapitre concerne l'acquisition et la modélisation du signal vibratoire dans le cas d'une boîte saine ainsi qu'avec des défauts d'engrenages et de roulements. Les limitations de l'analyse de Fourier pour de tels signaux (somme de sinusoides modulées en amplitude et en phase) sont également mises en évidence.

Le deuxième chapitre présente les idées principales de l'analyse temps-fréquence (TF). Sur la base du modèle précédent, on justifie l'intérêt d'une telle approche. Dans le cadre de la classe de Cohen, le problème de la réduction des interférences (crucial pour une bonne interprétabilité) revient à définir un noyau global. La méthode du noyau optimal, proposée par Baraniuk et Jones, et qui à notre sens est une des plus achevées, permet le calcul d'un noyau adapté au signal. Les propriétés et limitations de cette approche sont discutées.

Pour pallier les limitations de l'approche précédente, une nouvelle distribution TF à interférences réduites est proposée au chapitre trois. Appelée distribution de Wigner-Ville Locale, elle consiste à effectuer un lissage local (c'est à dire dépendant du point TF considéré) de la distribution de Wigner-Ville. Les dimensions de la fenêtre de lissage, optimales au sens de la réduction des interférences, sont obtenues à partir d'une procédure d'estimation. On montre que cette distribution est membre d'une classe étendue caractérisée par un noyau dépendant du point TF considéré. Certaines propriétés de cette classe sont étudiées.

Le quatrième chapitre présente la discrétisation de la méthode nécessaire à son implantation. Une évaluation de ses performances sur des signaux synthétiques montre son efficacité pour la réduction des interférences.

Enfin, le cinquième chapitre concerne l'analyse TF des signaux vibratoires. Une méthodologie d'analyse est notamment proposée puis appliquée aux signaux obtenus sur boîte saine, avec défauts d'engrenage puis de roulement. Pour chaque cas, on met en évidence les composantes caractéristiques et on fournit une interprétation physique. L'ensemble des résultats permet de proposer un modèle vibratoire de la boîte de vitesses.

Mots-clés

Analyse temps-fréquence, analyse vibratoire, boîte de vitesses, diagnostic.