



**HAL**  
open science

# Modélisation par éléments finis sur micro-ordinateur de la mise en forme de tôles minces : application au profilage, validation expérimentale par le moiré

Marion Martiny-Weitig

## ► To cite this version:

Marion Martiny-Weitig. Modélisation par éléments finis sur micro-ordinateur de la mise en forme de tôles minces : application au profilage, validation expérimentale par le moiré. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1992. Français. NNT : 1992NAN10222 . tel-01754408

**HAL Id: tel-01754408**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754408>**

Submitted on 30 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITE DE NANCY I

UFR ESSTIN

GRUPE DE FORMATION DOCTORALE

MECANIQUE ET ENERGETIQUE

# THESE



présentée à l' Université de Nancy I pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE NANCY I**

par

**Marion MARTINY-WEITIG**

Ingénieur ESSTIN

**MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS SUR MICRO-ORDINATEUR**

**DE LA MISE EN FORME DE TOLES MINCES :**

**APPLICATION AU PROFILAGE,**

**VALIDATION EXPERIMENTALE PAR LE MOIRE**

---

Soutenue publiquement le 2 juillet 1992, devant la Commission d'Examen

---

## Membres du Jury

Président :	R. MAINARD	Professeur, Université de Nancy I
Rapporteurs :	N. RECHO	Professeur, Université de Haute-Alsace
	D. RONDOT	Professeur, Université de Franche-Comté
Examineur :	Ch. AUBURTIN	Maître de Conférences, Université de Nancy I
	M. GUEURY	Professeur, Université de Nancy I
	H. HAMLILI	Ingénieur d'Etudes, Haironville S.A.
	M. HOSDAIN	Président - Directeur Général, Haironville S.A.
	D. LARCHER	Professeur, Université de Nancy I
	M.-O. RIGO	Professeur, Université de Franche-Comté



A Pierre, Gauthier et Charles

A ma famille





**AVANT - PROPOS**



## **AVANT - PROPOS**

Le présent travail a été effectué sous la direction de Monsieur le Professeur Michel GUEURY, au sein du laboratoire E.R.I.N. (Equipe de Recherche en Interfaces Numériques) à l'Ecole Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy (E.S.S.T.I.N.). Je tiens à lui exprimer ma plus sincère reconnaissance pour les conseils et directives qu'il n'a cessé de m'apporter ainsi que pour la confiance et le soutien qu'il m'a constamment prodigués tout au long de mes travaux et ce, dans un climat de réelle amitié.

Je suis honorée que Monsieur le Professeur Robert MAINARD, Directeur de l'E.S.S.T.I.N., ait accepté de présider ce Jury en dépit de ses lourdes activités. Je le prie d'accepter ici mes vifs remerciements.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Monsieur le Professeur Daniel RONDOT, de l'Université de Franche-Comté, et Monsieur le Professeur Naman RECHO, de l'Université de Haute-Alsace, d'avoir bien voulu accepter la lourde tâche de rapporteur.

Je suis très honorée que Monsieur Michel HOSDAIN, Président-Directeur Général de HAIRONVILLE S.A., ait accepté de participer à ce Jury de Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

J'exprime ma sincère gratitude au Professeur Marie-Odile RIGO, Directeur de l'I.U.T. de Belfort, d'avoir accepté de faire partie de ce Jury de Thèse.

Ce travail n'aurait pu se faire sans le soutien et les facilités que m'a accordé Monsieur le Professeur Dominique LARCHER, de l'Université de Nancy I, au sein de sa section Maintenance Industrielle. Qu'il trouve ici mes plus vifs remerciements pour avoir bien voulu participer à ce Jury.

Je remercie pour leurs encouragements efficaces et leurs nombreux et précieux conseils Monsieur Christian AUBURTIN, Maître de conférences à l'Université de Nancy I et Monsieur Hassane HAMLILI, Ingénieur d'Etudes à HAIRONVILLE S.A..

Ce travail n'aurait pu se faire sans l'aide matérielle de la Région Lorraine que je tiens à remercier publiquement en y associant le Président et les Membres du Conseil Régional.

J'exprime ma très grande reconnaissance à Monsieur Henri PRON, Directeur Industriel et Monsieur Philippe ANGOT, Ingénieur en Chef R & D, de HAIRONVILLE S.A., pour les facilités et les moyens qui m'ont été offerts au sein du Bureau d'Etudes Méthodes Profilage de leur société.

Que Monsieur le Professeur Roger MARI, de l'Université de Nancy I, soit également remercié. Auprès de lui j'ai toujours trouvé encouragements amicaux et aide constante.

Enfin, je remercie tous mes camarades du laboratoire ERIN, les enseignants et le personnel de l'E.S.S.T.I.N., qui ont facilité ma tâche et m'ont permis de travailler dans une ambiance cordiale, chaleureuse et sympathique.







**ABSTRACT**



## ABSTRACT

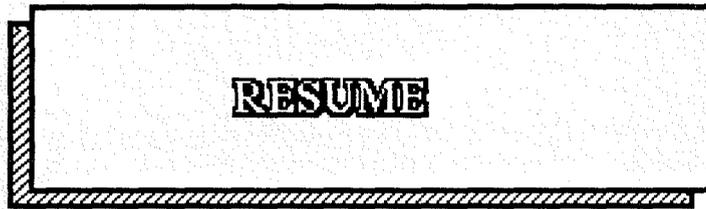
The current situation of numerical simulation is that it has not reached its climax in Engineering Science and in building structure mechanics in particular.

The objectives of this work are to construct and validate a general method of finite-elements software for personal computers. The developed bidimensional algorithms are destined to thin structure shaping (sheet-iron) in the non-linear mechanics field (geometric and material) in elasto-plastic "large deformation" with rubbing-friction (implicit algorithm).

The steps, during this work, have followed stages such as :

- a detailed study of the various statements proposed in current literature (large deformation, contact),
- the development of algorithms,
- the application of the digital simulation of the roofing-shape process with thin sheet-iron,
- an experimental validation through the Moiré method.







## RESUME

Actuellement, la simulation numérique connaît un essor sans précédent dans les Sciences de l'Ingénieur et en particulier en mécanique des structures.

L'objectif poursuivi dans ce travail est de réaliser et de valider un code général de calcul par éléments finis, d'architecture modulaire, fonctionnant intégralement sur micro-ordinateur. Les modules bidimensionnels développés sont dédiés à la mise en forme de structures minces (tôles) dans le domaine de la mécanique non-linéaire (géométrie et matérielle) en élasto-plasticité "grandes déformations" avec contact-frottement (algorithme implicite).

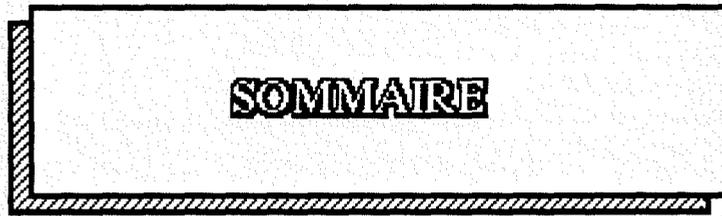
La démarche poursuivie au cours de ce travail repose sur les étapes suivantes :

- étude détaillée des diverses formulations proposées dans la littérature (grandes déformations, contact),
- mise en oeuvre des algorithmes de calcul,
- application à la simulation numérique du processus du formage de profilés de couverture-bardage à partir de tôles minces,
- validation expérimentale par la méthode du moiré.

## MOTS CLES

Elasto-plasticité - Grandes déformations - Eléments finis - Profilage  
- Contact - Frottement - Non-linéaire - Micro-ordinateur - Moiré





**SOMMAIRE**



## TABLE DES MATIERES

AVANT - PROPOS .....	5
ABSTRACT.....	11
RESUME.....	15
SOMMAIRE .....	19
I - 1 Table des matières.....	21
I - 1 Table des figures .....	25
NOTATIONS ET SYMBOLES .....	31
INTRODUCTION.....	37
CHAPITRE I : TRANSFORMATIONS FINIES .....	45
I - 1 CINEMATIQUE.....	47
I - 1 - 1 Descriptions du mouvement.....	48
I - 1 - 2 Configurations classiques.....	49
I - 1 - 3 Grandes déformations.....	50
I - 2 TENSEUR GRADIENT $\underline{F}$ .....	50
I - 3 DEFORMATION ET TAUX DE DEFORMATIONS.....	52
I - 3 - 1 Transformation locale du produit scalaire.....	52
I - 3 - 2 Théorème de la décomposition polaire.....	54
I - 3 - 3 Taux de déformation .....	56
I - 4 TENSEURS DES CONTRAINTES.....	57

CHAPITRE II : GRANDES DEFORMATIONS.....	63
II - 1 HYPOTHESES.....	65
II - 2 OBJECTIVITE.....	66
II - 2 - 1 Principe d'Indifférence Matérielle .....	66
II - 2 - 2 Changement de référentiel .....	66
II - 2 - 3 Dérivations objectives.....	68
II - 3 PRINCIPALES FORMULATIONS.....	71
II - 3 - 1 Loi de comportement en petites perturbations.....	73
II - 3 - 2 Loi de comportement en grandes déformations.....	74
II - 3 - 3 Intégration de la loi de comportement.....	77
II - 3 - 3 - 1 Approximation cinématique au cours du pas.....	78
II - 3 - 3 - 2 Schéma d'intégration des équations de comportement.....	82
II - 4 EQUATIONS D'EQUILIBRE EN GRANDES DEFORMATIONS .....	83
II - 4 - 1 Principe des Puissances Virtuelles.....	83
II - 4 - 2 Formulation incrémentale.....	87
 CHAPITRE III : CONTACT ET FROTTEMENT .....	 91
III - 1 INTRODUCTION.....	93
III - 2 LOIS DE CONTACT ET DE FROTTEMENT .....	94
III - 2 - 1 Introduction .....	94
III - 2 - 2 Cinématique au voisinage d'une particule matérielle candidate au contact.....	95
III - 2 - 3 Lois de contact.....	100
III - 2 - 4 Lois de frottement .....	101
III - 2 - 5 Conclusion .....	105
III - 3 INEQUATIONS DE CONTACT ET DE FROTTEMENT .....	105
III - 3 - 1 Introduction .....	105
III - 3 - 2 Equations d'équilibre couplées avec les inéquations de contact et de frottement .....	106
III - 3 - 3 Linéarisation du résidu .....	107
III - 3 - 3 - 1 Méthode de pénalisation.....	107
III - 3 - 3 - 2 Autres méthodes.....	110

CHAPITRE IV : MISE EN OEUVRE NUMERIQUE ET VALIDATION .....	117
IV - 1 INTRODUCTION	
METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	119
IV - 2 CHOIX DE L'ELEMENT FINI .....	121
IV - 2 - 1 Elément Fini incompressible.....	121
IV - 2 - 2 Phénomène de blocage.....	125
IV - 2 - 3 Intégration réduite et sélective.....	126
IV - 2 - 4 Solution retenue.....	128
IV - 3 DISCRETISATION.....	129
IV - 3 - 1 Discrétisation spatiale.....	129
IV - 3 - 2 Discrétisation temporelle.....	130
IV - 4 MATRICE DE RIGIDITE TANGENTE.....	131
IV - 5 CORRECTION D'EQUILIBRE.....	132
IV - 6 INCREMENTATION AUTOMATIQUE .....	134
IV - 7 MODULES PRINCIPAUX SUR MICRO-ORDINATEUR.....	135
IV - 8 VALIDATION	
INDENTATION D'UN SUBSTRAT NON-REVETU .....	138
IV - 8 - 1 Indentation.....	138
IV - 8 - 2 Résultats.....	144
IV - 8 - 3 Conclusions.....	146
CHAPITRE V : SIMULATION DU PROFILAGE ET VALIDATION EXPERIMENTALE.....	149
V - 1 PROFILAGE DE TOLES MINCES .....	151
V - 1 - 1 Principe.....	151
V - 1 - 2 Analyse du problème.....	152
V - 2 COURBE RATIONNELLE DU MATERIAU .....	153
V - 3 MOIRE .....	155
V - 3 - 1 Introduction .....	155
V - 3 - 2 Historique.....	155
V - 3 - 3 Principes.....	158
V - 3 - 4 Procédé d'obtention.....	159
V - 3 - 4 - 1 Translation suivant l'axe Ox de l'éprouvette.....	160
V - 3 - 4 - 2 Rotation d'un petit angle $\alpha$ autour de l'axe Oz.....	160

V - 3 - 4 - 3 Allongement relatif dans la direction Ox. ....	162
V - 3 - 4 - 4 Cas général translation, rotation, déformation. ....	163
V - 3 - 5 Avantages de cette méthode. ....	168
V - 4 MISE EN OEUVRE EXPERIMENTALE .....	169
V - 5 SIMULATION NUMERIQUE DU PROFILAGE .....	172
V - 6 RESULTATS DE LA SIMULATION .....	181
V - 7 RESULTATS DU MOIRE .....	186
CONCLUSION .....	195
ANNEXES .....	195
ANNEXE I : Définitions et propriétés .....	203
ANNEXE II : Loi de comportement en élasto-plasticité .....	209
ANNEXE III : Algorithme de prédiction élastique avec correction radiale .....	213
ANNEXE IV : Equation implicite locale en contrainte plane .....	216
ANNEXE V : Matrices intervenant dans la formulation matricielle du Principe des Puissances Virtuelles dans le cas de la modélisation bidimensionnelle .....	218
ANNEXE VI : Aspect expérimental .....	220
ANNEXE VII : Validation : flexion trois points d'une poutre .....	226
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	229

**TABLE DES FIGURES**

**Figure I.1** : Référentiel, repère cartésien et configurations..... 47

**Figure I.2** : Les quatre descriptions classiques du corps solide..... 49

**Figure I.3** : Décomposition polaire du tenseur  $\underline{F}$  de deux manières différentes mais équivalentes  $\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R}$ ..... 54

**Figure I.4** : Evolution de la force interne  $df$  de  $C(0)$  à  $C(t)$ ..... 58

**Figure I.5** : Contraintes de Piola-Kirchhoff n°2 dans  $C(0)$  et contraintes de Cauchy-Euler ..... 59

**Figure II.1** : Représentation de l'espace des contraintes en trois zones.: zone élastique, zone plastique, zone visco-plastique..... 72

**Figure II.2** : Décomposition multiplicative du gradient des déformations :  $\underline{F} = \underline{F}^e \cdot \underline{F}^p$ .  $C(0)$  configuration initiale,  $C(t)$  configuration actuelle,  $C(t)$  configuration naturelle locale..... 76

**Figure II.3** : Corps solide en équilibre avec conditions aux limites et chargement extérieur..... 84

**Figure III.1** : Noeuds maîtres et noeud esclave appartenant respectivement au contacteur A et à la structure B..... 95

**Figure III.2** : Problème du contact avec frottement. Définition du repère orthonormé et des deux surfaces candidates au contact..... 98

**Figure III.3** : Graphe de contact. Relation entre  $x_n$  et  $r_n$ ..... 99

**Figure III.4** : Graphe de frottement. Relation entre  $v_t$  et  $r_t$ ..... 99

**Figure III.5** : Définition de la distance d'interpénétration  $d$ ..... 103

**Figure III.6** : Analogie contact - plasticité..... 104

**Figure III.7** : Graphe différentiable de contact..... 108

**Figure III.8** : Graphe différentiable de frottement..... 108

**Organigramme III.1**  
Organigramme de la méthode de Jean et Touzot (1988)..... 111

**Figure III.9** : Axes de référence ..... 113

<b>Organigramme IV.1 : Présentation de la Méthode</b>	
des Eléments Finis. ....	120
<b>Figure IV.1 : Elément isoparamétrique linéaire.</b> .....	121
<b>Figure IV.2 : Elément plan rectangulaire de longueur 2L et</b> de hauteur 2H.....	122
<b>Figure IV.3 : Les trois types de déformation suivant l'axe des X.</b> .....	124
<b>Figure IV.4 : Schémas d'intégration réduite</b> .....	127
<b>Figure IV.5 : Schémas d'intégration sélective.</b> .....	127
<b>Figure IV.6 : L'élément "Serendip" à 8 noeuds, avec la transformation</b> Fe de l'élément de référence à l'élément réel.....	128
<b>Figure IV.7 : Modélisation du corps solide en éléments finis.</b> .....	130
<b>Figure IV.8 : Méthodes de Newton-Raphson "pure" et "modifiée".</b> Les schémas correspondent à un système à une seule inconnue nodale p.....	133
<b>Figure IV.9 : Corrections d'équilibre.</b> .....	133
<b>Organigramme IV.2 : Organigramme - Elasto-plasticité en</b> transformations finies.....	136
<b>Organigramme IV.3 : Algorithme du module SIGELP de calcul des</b> contraintes.....	137
<b>Tableau IV.1 : Composition chimique.</b> .....	138
<b>Figure IV.10 : Courbe rationnelle modélisée par morceaux.</b> .....	139
<b>Tableau IV.2 : Paramètres optimisés.</b> .....	139
<b>Figure IV.11 : Courbe expérimentale de l'indentation d'un barreau en</b> acier 35CD4 par un indenteur sphérique .....	140
<b>Figure IV.12 : Profils obtenus après déchargement à l'aide d'un</b> profilomètre 3D.....	141
<b>Figure IV.13 : Maillage en éléments Lagrange 4 noeuds.</b> .....	141
<b>Figure IV.14 : Maillage en éléments Serendip 8 noeuds.</b> .....	142
<b>Figure IV.15 : Maillage en éléments Serendip 12 noeuds, à interpolation</b> bi-cubique, 9 points de Gauss.....	142
<b>Figure IV.16 : Schéma de l'incrémentement entre les positions de</b> l'indenteur sphérique aux paliers t et t + dt.....	143
<b>Figure IV.17 : Comparaison de la courbe expérimentale</b> charge / indentation et de la courbe obtenue par la simulation en éléments finis.....	144
<b>Figure IV.18 : Chargement : l'indenteur est en contact avec le noeud de</b> fond. ....	145
<b>Figure IV.19 : Déchargement : l'indenteur n'est plus en contact avec le</b> noeud de fond mais avec un noeud de bord.....	145

<b>Figure IV.20</b> : Maillage déformé du barreau en chargement élasto-plastique .....	146
<b>Figure V.1</b> : Procédé de mise en forme à froid de la tôle mince technique de profilage.....	151
<b>Figure V.2</b> : Déformation progressive par profilage.....	152
<b>Figure V.3</b> : Action du galet et du contre-galet.....	152
<b>Figure V.4</b> : Courbe rationnelle d'un matériau. ....	153
<b>Figure V.5</b> : Epreuve de traction uniaxiale. Deux tiges en acier placées à chaque tête, empêchent le glissement de l'éprouvette dans les mors de la machine, au début de la traction. ....	154
<b>Figure V.6</b> : Réseau témoin $R_V$ . Traits verticaux parallèles à l'axe des y.....	159
<b>Figure V.7</b> : R et R' sont en coïncidence totale. Obtention d'une teinte uniforme.....	159
<b>Figure V.8</b> : Translation de R' : l'opacité et la transparence.....	160
<b>Figure V.9</b> : Franges de moiré obtenues par une rotation $\alpha$ du réseau témoin, l'intervalle séparant les franges est inversement proportionnel à l'angle $\alpha$ : $\alpha = p/f$ .....	161
<b>Figure V.10</b> : Franges obtenues à la suite d'un allongement du modèle sur lequel est gravé le réseau témoin.....	163
<b>Figure V.11</b> : Réseau témoin $R_V$ et franges noires de moiré obtenues.....	164
<b>Figure V.12</b> : Procédé de dérivation graphique pour obtenir $v_{,x}$ et $v_{,y}$ avec le moiré $M_H$ .....	165
<b>Figure V.13</b> : Modifications du faisceau de franges par rotation du réseau témoin.....	167
<b>Figure V.14</b> : Numérotation des franges par rotation du réseau témoin.....	168
<b>Figure V.15</b> : Courbe rationnelle de l'acier du profilé. Loi d'écrouissage puissance.....	173
<b>Tableau V.1</b> : Valeurs des paramètres optimisés de la courbe rationnelle.....	174
<b>Figure V.16</b> : Représentation par morceaux de la courbe rationnelle de l'acier du profilé.....	174
<b>Figure V.17</b> : Caractéristiques géométriques d'une onde du profilé.....	175
<b>Figure V.18</b> : Caractéristiques géométriques du profilé : rayon, épaisseur, inclinaison du pli. ....	175
<b>Figure V.19</b> : Le point S est point de symétrie pour le pli.....	176

<b>Figure V.20</b> : Structure finale à obtenir à l'issue du calcul par éléments finis.....	176
<b>Figure V.21</b> : Maillage définitif en 78 éléments à 8 noeuds, quadratiques.....	177
<b>Figure V.22</b> : Conditions de blocage en U et V. à l'extrémité gauche de la tôle. ....	177
<b>Figure V.23</b> : Projection successive, sur le galet de forme, des noeuds candidats.....	178
<b>Figure V.24</b> : Action du galet et du contre galet. Mise en forme progressive de la tôle par passage dans les différentes têtes de la ligne de profilage.....	179
<b>Figure V.25</b> : Evaluation du vecteur D, déplacement imposé à l'extrémité S pour que BS soit déformé au minimum : $L = L'$ .....	179
<b>Figure V.26</b> : Visualisation du profilé obtenu à la fin de l'incrémentation.....	181
<b>Figure V.27</b> : Agrandissement de la partie gauche du profilé. Angle de pliage de $65^\circ$ .....	182
<b>Figure V.28</b> : Plages des déformations plastiques équivalentes (%). Angle de pliage de $65^\circ$ .....	183
<b>Figure V.29</b> : Taux d'énergies de déformation plastique ( $\text{kJ/m}^3$ ). Angle de pliage de $65^\circ$ .....	183
<b>Figure V.30</b> : Plages des contraintes de von Mises. Angle de pliage de $65^\circ$ .....	184
<b>Figure V.31</b> : Déformée du profilé en chargement. Angle de pliage de $20^\circ$ .....	184
<b>Figure V.32</b> : Déformée du profilé en chargement. Angle de pliage de $38^\circ$ .....	185
<b>Figure V.33</b> : Déformée du profilé, après déchargement, avec l'angle de pliage de $65^\circ$ .....	185
<b>Figure V.34</b> : Positions des franges de moiré sur l'intrados et l'extrados du profilé. ....	186
<b>Tableau V.2</b> : Valeurs des interfranges de moiré sur l'extrados du profilé - versus $n^\circ$ de tête.....	186
<b>Figure V.35</b> : Photographie des franges de moiré obtenues sur le profilé. ....	187
<b>Figure V.36</b> : Numérisation de la photographie de la figure précédente : les parties claires correspondent aux franges noires et inversement ; la courbe permet de calculer l'interfrange.....	188

<b>Figure V.37</b> : Numérisation de la photographie de la figure V.35 et vue en trois dimensions de cette dernière.....	189
<b>Tableau V.3</b> : Comparaison des valeurs d'interfranges de moiré sur l'extrados du profilé.....	191
<b>Figure V.38</b> : Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux.....	192
<b>Figure V.39</b> : Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux pour les déformations.....	192
<b>Figure V.40</b> : Evolution de l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques .....	193





**NOTATIONS ET SYMBOLES**



## NOTATIONS ET SYMBOLES

### NOTATIONS

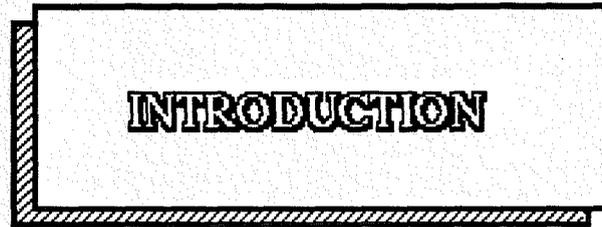
$[B]$	matrice déplacement-déformation
$[G]$	matrice déplacement-gradient
$[N]$	matrice des fonctions d'interpolation
$\{u\}$	vecteur de déplacements nodaux
$C(t)$	configuration à l'instant $t$
$C_{ijkl}$	composante du tenseur d'élasticité
$E$	module de Young
$E_T$	module tangent de la courbe d'écroutissage
$F$	transformation
$f$	interfrange
$G$	module de cisaillement ou module de Coulomb
$J$	jacobien de $F$
$J_2$	second invariant
$m$	masse
$M$	module plastique
$M_h$	moiré horizontal
$M_v$	moiré vertical
$n$	normale
$p$	variable définissant l'écroutissage isotrope
$\rho$	pas du réseau
$R$	repère
$R$	force thermodynamique associée à $p$
$\mathbb{R}^3$	espace euclidien
$t_0$	instant initial
$t$	instant donné
$T$	température
$u$	vecteur champ de déplacement

$\mathbf{v}$	vecteur vitesse
$V$	volume
$x_i, X_\alpha$	coordonnée d'un point P ( $\alpha$ , instant initial ; i, instant t)
$\varphi$	énergie interne d'écouissage
$\nu$	coefficient de Poisson
$\rho$	masse volumique
$\sigma_0$	limite d'élasticité
$\sigma_e$	contrainte équivalente de von Mises
$\underline{\mathbf{A}}$	tenseur d'Euler-Almansi
$\underline{\mathbf{B}}$	tenseur de Cauchy-Green gauche
$\underline{\mathbf{C}}$	tenseur de Cauchy-Green droit
$\underline{\mathbf{D}}$	tenseur taux de déformation
$\underline{\mathbf{E}}$	tenseur de Green-Lagrange
$\underline{\mathbf{F}}$	tenseur gradient (ou application linéaire tangente)
$\underline{\mathbf{F}}^e$	tenseur gradient élastique
$\underline{\mathbf{F}}^p$	tenseur gradient plastique
$\underline{\text{Grad}} \mathbf{u}$	tenseur gradient de $\mathbf{u}$
$\underline{\mathbf{I}}$	tenseur identité
$\underline{\mathbf{L}}$	tenseur gradient de vitesse
$\underline{\mathbf{R}}$	tenseur de rotation
$\underline{\mathbf{U}}$	tenseur de déformation pure droit
$\underline{\mathbf{V}}$	tenseur de déformation pure gauche
$\underline{\mathbf{W}}$	tenseur taux de rotation
$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$	tenseur taux de déformation en petites déformations
$\underline{\boldsymbol{\Theta}}$	premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff
$\underline{\boldsymbol{\Pi}}$	deuxième tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}$	tenseur de contrainte de Cauchy-Euler
$\underline{\boldsymbol{\tau}}$	tenseur de contrainte de Kirchhoff

## SYMBOLES

$\{ \}$	vecteur colonne
$\langle \rangle$	vecteur ligne
$[ ]$	matrice
$g_{i,j}$	dérivation partielle $\partial g_i / \partial x_j$
$\mathbf{u}$	vecteur
$\underline{\mathbf{M}}$	tenseur
$\underline{\mathbf{M}}^C$	dérivée contravariante du tenseur $\underline{\mathbf{M}}$
$\underline{\mathbf{M}}_C$	dérivée covariante du tenseur $\underline{\mathbf{M}}$
$\underline{\mathbf{M}}^J$	dérivée de Jaumann du tenseur $\underline{\mathbf{M}}$
$\underline{\mathbf{M}}^L$	dérivée de Lee du tenseur $\underline{\mathbf{M}}$
$\underline{\mathbf{M}}^R$	dérivée en rotation propre du tenseur $\underline{\mathbf{M}}$
$\underline{\mathbf{M}}^T$	transposé du tenseur
$\underline{\mathbf{M}}^{Tr}$	dérivée de Truesdell du tenseur $\underline{\mathbf{M}}$
$\delta_{ij}$	symbole de Kroneker
$\text{Ln}()$	fonction logarithme népérien
$\text{Exp}()$	fonction exponentielle
$\text{Log}()$	fonction logarithme décimal
$\cdot$	produit tensoriel
$:$	produit tensoriel contracté (2 indices)





**INTRODUCTION**



## INTRODUCTION

Le but de ce travail est de développer un Code de Calcul par Eléments Finis sur Micro-ordinateur permettant, conformément à la demande industrielle, de simuler numériquement le processus de mise en forme des profilés de couverture-bardage à partir de tôles minces (Martiny-Weitig et al., 1991).

Ce problème s'avère ardu en raison de la présence simultanée de trois types de non-linéarité :

- la première, d'origine géométrique, est induite par les grands déplacements (rotations),
- la deuxième est étroitement liée au comportement du matériau (élasto-plasticité, visco-plasticité, entre autres),
- enfin la dernière, d'ordre cinématique, est provoquée par le phénomène de contact entre la pièce et l'outil de forme, souvent associé à une loi de frottement difficile à appréhender.

Actuellement, les procédés de mise en forme des métaux, comme le profilage, sont fondés principalement sur des règles empiriques de "bonne pratique" qui font partie de la mémoire de l'entreprise. Dans la recherche d'une meilleure qualité des produits et d'une rentabilité accrue, l'industriel cherche à investir dans la modernisation de son outil de travail et de ses méthodes de conception. Le développement rapide de l'informatique couplé à celui des techniques de simulation numériques, le conduit aujourd'hui à entrevoir des solutions techniques autrefois impossibles à trouver.

De sa conception à sa réalisation, le produit profilé franchit de nombreuses étapes dont l'une, très importante, est l'étude du processus de fabrication. Ainsi, au cours de l'élaboration d'un nouveau profil, l'industriel profileur est amené à résoudre un certain nombre de problèmes tels que :

- l'évolution des efforts de profilage,
- la détermination du nombre optimal de têtes dans la ligne de fabrication,
- la mise en place et le réglage des galets de forme.

A chacune de ces étapes, les moyens informatiques sont de plus en plus sollicités pour l'aide qu'ils apportent à la décision.

Dès lors, on conçoit aisément qu'un modèle numérique prédictif puisse constituer un outil précieux dans :

- la compréhension de la sensibilité de certains paramètres,
- l'étude de la faisabilité de pièces complexes,
- l'étude des critères d'apparition de défauts,
- le dimensionnement des outillages et l'estimation de leur fiabilité.

Dans ce cadre, le travail que nous avons à entreprendre est une contribution effective à l'objectif fixé par l'industriel.

Pour y parvenir, nous faisons largement appel à la Mécanique des Milieux Continus et nous rappelons les équations fondamentales qui serviront à modéliser le profilage. Ces équations n'admettent pas de solution analytique dans le cas général et, partant, requièrent l'emploi de méthodes numériques de résolution. Nous avons retenu la méthode des éléments finis qui constitue, à l'heure actuelle, un outil numérique extrêmement puissant pour le calcul des structures en régime non-linéaire et nous en exposerons les lignes principales.

Le faible coût de ce type de calcul effectué par micro-ordinateurs nous a incité à développer en priorité cet outil sur ces machines.

Dans le processus de formage de métaux, le contact entre le solide en cours de formation et l'outil qui le façonne est fondamental. Il s'accompagne, le plus souvent, de frottement et de grands déplacements. Il en résulte que des parties importantes de la pièce peuvent entrer en contact avec l'outil, sans que l'on puisse connaître, à priori, les zones où se produira ce contact. Cette indétermination qu'il faut lever, rend obligatoire l'insertion d'un modèle de contact généralisé dans le code d'éléments finis que nous avons pour charge de développer.

Enfin, il nous a semblé indispensable de valider nos algorithmes par une confrontation

L'ordre de déroulement des différentes étapes de la présente étude est le suivant :

**Le chapitre 1** rappelle les définitions préliminaires des différents tenseurs lagrangiens et eulériens permettant le choix adéquat des contraintes et des déformations au cours d'une transformation finie.

**Le chapitre 2** précise l'intégration des lois de comportement avec une grande taille d'incrément. En partant de l'expression du Principe des Puissances Virtuelles, la non-linéarité matérielle est traitée selon un algorithme implicite inconditionnellement stable, allié à des corrections d'équilibre de type Newton-Raphson qui préservent l'objectivité de la loi de comportement au cours de l'incrémentation. Les différentes formulations des équations d'équilibre sont décrites et la forme la mieux adaptée au problème posé est présentée.

**Le chapitre 3** traite des problèmes de contact. Nous analysons les différentes méthodes de résolution connues et nous développons un algorithme permettant de traiter ce phénomène conformément aux hypothèses communément admises.

**Le chapitre 4** est central dans la mesure où la mise en oeuvre numérique et la validation du code DIAGUE-PROFIL y sont établis.

Les principaux développements portent sur :

- le choix de l'élément fini,
- l'algorithme d'intégration des lois de comportement,
- les corrections d'équilibre,
- le déroulement automatique du calcul incrémental, piloté par un menu déroulant.

Ce dernier doit permettre une utilisation du Code, aisée et "conviviale". Divers modules graphiques, à fonctionnalité propre (saisies de données, sortie de résultats), doivent contribuer à rendre le code attrayant, même pour un non-spécialiste du domaine.

La validation porte sur un problème d'indentation, dont on connaît les résultats d'essais.

Enfin, **le chapitre 5** souligne l'aspect expérimental relatif à la méthode du moiré (Martiny-Weitig, 1990). De tous les procédés d'extensométrie couramment employés, il nous a semblé que la méthode des moirés répond le mieux à la mesure des déformations

ailleurs, bien adaptée à la mesure des déformations importantes. Enfin, les investissements qu'elle requiert sont relativement modestes en regard de ceux des autres techniques.

**Le Code DIAGUE-PROFIL doit être appliqué à la simulation numérique du processus du formage de profilés de couverture-bardage à partir de tôles minces, dans le cadre d'un contrat industriel avec la Société HAIRONVILLE S.A.**





**CHAPITRE I**

**TRANSFORMATIONS FINIES**

**DEFINITIONS**



## CHAPITRE I

### TRANSFORMATIONS FINIES DEFINITIONS

#### I - 1 CINEMATIQUE

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , nous considérons un corps solide comme formé d'une infinité de points matériels rigidement liés appelés particules.

Nous appellerons "milieu continu", l'ensemble des points matériels disposés de manière continue dans l'espace ambiant.

La position de chaque particule est repérée par trois nombres réels qui sont les coordonnées du point matériel dans un référentiel arbitraire.

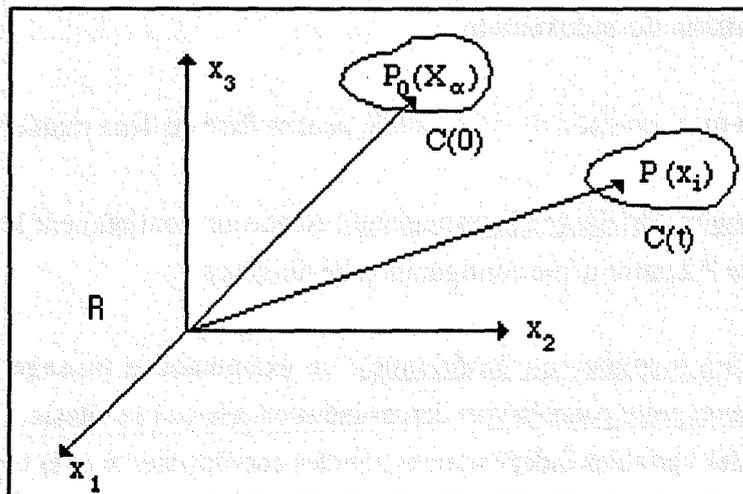


Figure I.1 : Référentiel, repère cartésien et configurations.

L'ensemble des positions des particules constitue, à un instant donné, une configuration du corps. Le mouvement du corps est l'évolution de cette configuration dans l'espace et dans le temps.

La position de chaque particule matérielle  $P_0$  à un instant initial  $t_0$ , est donnée par ses coordonnées  $X_\alpha$  dans le repère  $R$ . La configuration ainsi décrite est appelée configuration initiale  $C(0)$ .

Cette configuration de volume  $V$  est en équilibre sous contrainte nulle et sa température  $T_0$  est uniforme. Sous l'action des sollicitations extérieures, le corps se déforme.

Le mouvement peut être décrit dans un système de coordonnées eulériennes  $x_i$  dépendant de la position initiale  $X_\alpha$  et du temps écoulé  $t$  :

$$x_i = x_i ( X_\alpha, t_0, t ) \quad (1.1)$$

ou encore

$$x_i = x_i ( X_\alpha ) \quad (1.2)$$

où  $x_i$  est relatif à l'instant  $t$  et  $X_\alpha$  est relatif à l'instant  $t_0$ .

Nous admettons que les points infiniment voisins d'une particule donnée restent infiniment voisins au cours de la transformation et donc que les points infiniment voisins de cette particule à un instant quelconque lui étaient déjà infiniment voisins à l'instant initial.

### I - 1 - 1 Descriptions du mouvement

La description du mouvement d'un corps solide peut se faire de deux manières :

- la description matérielle (ou lagrangienne), en suivant continûment le trajet de la particule  $P$  à partir d'une configuration de référence,

- la description spatiale (ou eulérienne), en examinant le passage de la particule  $P$  en un point géométrique déterminé et en relevant sa vitesse.

Dans ce cas, les variables indépendantes sont les coordonnées  $x_i$  et le temps  $t$ . Les grandeurs sont attachées à ce point géométrique, en général fixe dans l'espace.

Nous retiendrons la description lagrangienne qui est mieux adaptée à la cinématique du corps solide. La description eulérienne, quant à elle, convient davantage aux écoulements de fluides.

### I - 1 - 2 Configurations classiques

On distingue habituellement dans la description lagrangienne, trois types de configurations de référence en équilibre qui sont :

- la configuration initiale  $C(0)$  du corps à l'instant  $t = 0$ ,
- la configuration courante ou actuelle  $C(t)$  du corps à l'instant  $t$ ,
- la configuration intermédiaire  $C^*(\tau)$  entre  $C(0)$  et  $C(t)$ .

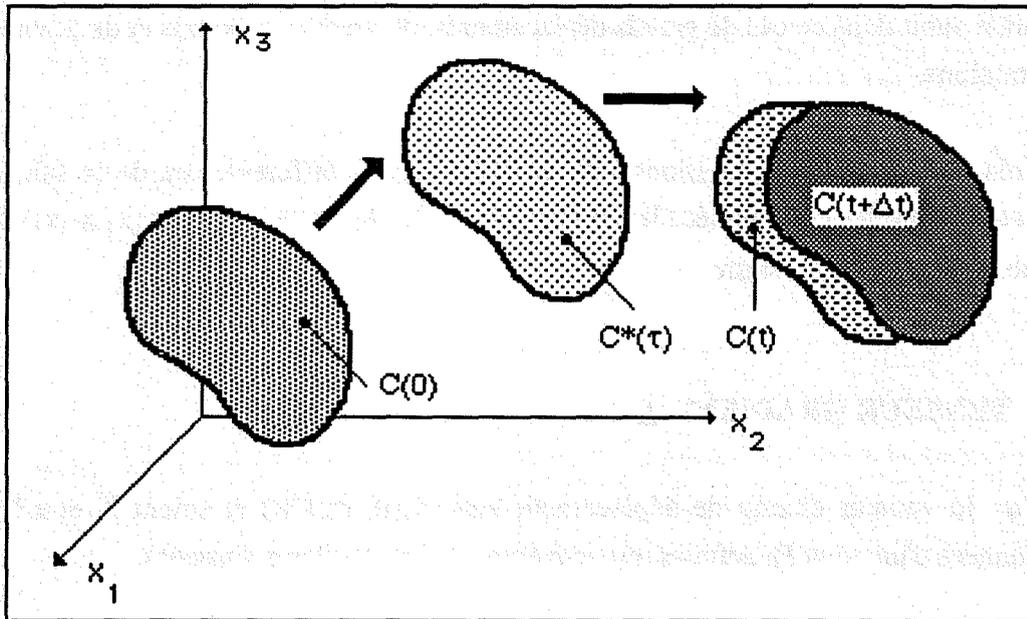


Figure I.2 : Les quatre descriptions classiques du corps solide

Si  $C(t+\Delta t)$  désigne la configuration incrémentée du solide à l'instant  $t+\Delta t$ , configuration dite alors incrémentée, les quatre descriptions usuelles du mouvement sont :

- la description lagrangienne totale (DLT), en prenant  $C(0)$  comme référence (Hibbit et al.,1970),
- la description lagrangienne actualisée (DLA), en prenant  $C(t)$  comme référence (Mac Meeking et al.,1975),
- la description lagrangienne généralisée (DLG), en prenant  $C^*(\tau)$  comme référence (Cescotto,1978),
- la description eulérienne (DE), en prenant  $C(t+\Delta t)$  comme référence (El Moutassim et al.,1988).

La description lagrangienne généralisée est une formulation très générale qui permet de retrouver :

- la description lagrangienne actualisée lorsque  $\tau$  tend vers  $t$ ,
- la description lagrangienne totale lorsque  $\tau$  tend vers  $0$ .

### I - 1 - 3 Grandes déformations

On appelle "transformation finie" ou encore "grande déformation", toute transformation d'une configuration  $C(t)$  en une configuration  $C(t+\Delta t)$  dans laquelle les déplacements et les gradients des déplacements ne respectent plus l'hypothèse des "petites perturbations". Le solide subit dans ce cas de grands déplacements, de grandes rotations et de grandes déformations.

Il en résulte que les configurations  $C(0)$  et  $C(t)$  sont très différentes et, de ce fait, la distinction entre les coordonnées lagrangiennes  $(X_1, X_2, X_3)$  et eulériennes  $(x_1, x_2, x_3)$  de chaque particule est nécessaire.

### I - 2 TENSEUR GRADIENT $\mathbf{F}$

Soit  $\mathbf{u}$  le vecteur champ de déplacement entre  $C(0)$  et  $C(t)$  et soient  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$  les coordonnées d'un point  $P_0$  définies respectivement à l'instant  $0$  et à l'instant  $t$ .

Nous avons la relation :

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{F}$  est une transformation :

- bijective
- continue par rapport aux variables d'espace et du temps
- différentiable.

Soient  $Q_0$  une particule voisine de  $P_0$  dans  $C(0)$  et  $Q$  la particule correspondante dans  $C(t)$ .

Les coordonnées de  $Q$  sont données par :

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) \quad (1.4)$$

Le milieu étant continu et le déplacement  $d\mathbf{X}$  suffisamment petit, on peut écrire :

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \quad (1.5)$$

On note  $\underline{\mathbf{F}}$  le tenseur gradient (ou application linéaire tangente) de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  qui s'exprime des deux façons suivantes :

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ou} \quad F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \quad (1.6)$$

et  $\underline{\text{Grad}} \mathbf{u}$  le tenseur gradient de  $\mathbf{u}$  défini par :

$$\underline{\text{Grad}} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.7)$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\underline{\mathbf{F}} d\mathbf{X} = \underline{\text{Grad}} \mathbf{u} d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \quad (1.8)$$

ou encore :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\text{Grad}} \mathbf{u} + \underline{\mathbf{I}} \quad (1.9)$$

où  $\underline{\mathbf{I}}$  est le tenseur identité.

Le tenseur  $\underline{\mathbf{F}}$  prend en compte à la fois la rotation locale du solide et sa déformation totale.

Les relations géométriques suivantes s'en déduisent :

- entre un élément de volume mesuré à l'instant initial dans  $C(0)$  et mesuré à l'instant  $t$  dans  $C(t)$  :

$$dV_t = J dV_0 \quad (1.10)$$

- entre un élément de surface  $dS_0$ , pris à l'instant initial et caractérisé par une normale unitaire  $\mathbf{n}_0$ , et entre un élément de surface  $dS_t$ , pris à l'instant  $t$  et de normale unitaire  $\mathbf{n}_t$  :

$$\mathbf{n}_0 dS_0 = (\det \underline{\mathbf{F}})^{-1} \underline{\mathbf{F}}^T \mathbf{n}_t dS_t = J^{-1} \underline{\mathbf{F}}^T \mathbf{n}_t dS_t \quad (1.11)$$

Formule de NANSON

Notons que le tenseur  $\underline{\mathbf{F}}$  n'est pas symétrique ( $\underline{\mathbf{F}} \neq \underline{\mathbf{F}}^T$ ).

Le principe de la conservation de la masse permet d'écrire :

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV_t = \rho J dV_0 \quad (1.12)$$

où

$\rho_0$  est la masse volumique du matériau dans  $C(0)$

$\rho$  est la masse volumique du même matériau dans  $C(t)$

$J = \det \underline{\mathbf{F}}$  est le jacobien de  $\underline{\mathbf{F}}$

Il en résulte que :

$$\det \underline{\mathbf{F}} = J = \frac{\rho_0}{\rho} \geq 0 \quad (1.13)$$

**Remarque :**

Si le matériau est supposé incompressible, son volume est constant, donc  $\det \underline{\mathbf{F}} = 1$ .

### I - 3 DEFORMATION ET TAUX DE DEFORMATIONS

Pour définir la déformation du solide, i.e. ses changements de formes, il faut éliminer le mouvement de corps solide qui n'entraîne aucune déformation.

Le tenseur gradient de déformation  $\underline{\mathbf{F}}$  recèle des informations sur la déformation du solide et sur sa rotation au voisinage d'une particule.

Pour caractériser les changements de forme, il faut évaluer convenablement les variations de longueurs et les variations d'angles de façon à éliminer la rotation parasite de corps solide contenue dans  $\underline{\mathbf{F}}$ .

#### I - 3 - 1 Transformation locale du produit scalaire.

Le produit scalaire  $dx \cdot dx$  est exprimé dans la configuration de référence  $C(0)$  en fonction de  $d\mathbf{X}$  et  $\delta\mathbf{X}$ . Les vecteurs  $dx$  et  $\delta x$  sont les transformés dans la configuration  $C(t)$  des vecteurs  $d\mathbf{X}$  et  $\delta\mathbf{X}$  dans la configuration de référence  $C(0)$  :

$$dx \cdot \delta x = dX \underline{F}^T \underline{F} \delta X = dX \underline{C} \delta X \quad (1.14)$$

Le tenseur  $\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$ , symétrique et défini positif est le tenseur des dilatations ou encore le tenseur de Cauchy-Green droit. Il permet d'exprimer le produit scalaire des vecteurs transportés  $dx$  et  $\delta x$  en fonction des vecteurs initiaux correspondants  $dX$  et  $\delta X$ . Sa connaissance permet de définir la forme locale de la configuration déformée du solide en chaque point.

$\underline{C}$  est un tenseur lagrangien car il opère sur des vecteurs définis sur la configuration initiale  $C(0)$ .

Le produit scalaire  $dX \cdot \delta X$  est donné par :

$$dX \cdot \delta X = dx \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1} \delta x = dx (\underline{F} \underline{F}^T)^{-1} \delta x = dx \underline{B}^{-1} \delta x \quad (1.15)$$

Le tenseur  $\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T$ , symétrique et défini positif, est le tenseur de Cauchy-Green gauche.

Les tenseurs  $\underline{C}$  et  $\underline{B}$  ainsi définis deviennent unitaires pour des mouvements de corps rigide.

Les allongements sont évalués à partir des produits scalaires dans les configurations actuelle et initiale par :

- dans la configuration initiale  $C(0)$  :

$$dx \cdot \delta x - dX \cdot \delta X = dX \underline{C} \delta X - dX \delta X = 2 dX \underline{E} \delta X \quad (1.16)$$

en posant :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{I}) \quad (1.17)$$

$\underline{E}$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Il est symétrique, lagrangien et invariant dans une rotation de corps rigide.

- dans la configuration courante  $C(t)$  :

$$dx \cdot \delta x - dX \cdot \delta X = dx \delta x - dx \underline{B}^{-1} \delta x = 2 dx \underline{A} \delta x \quad (1.18)$$

en posant :

$$\underline{A} = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{B}^{-1}) \quad (1.19)$$

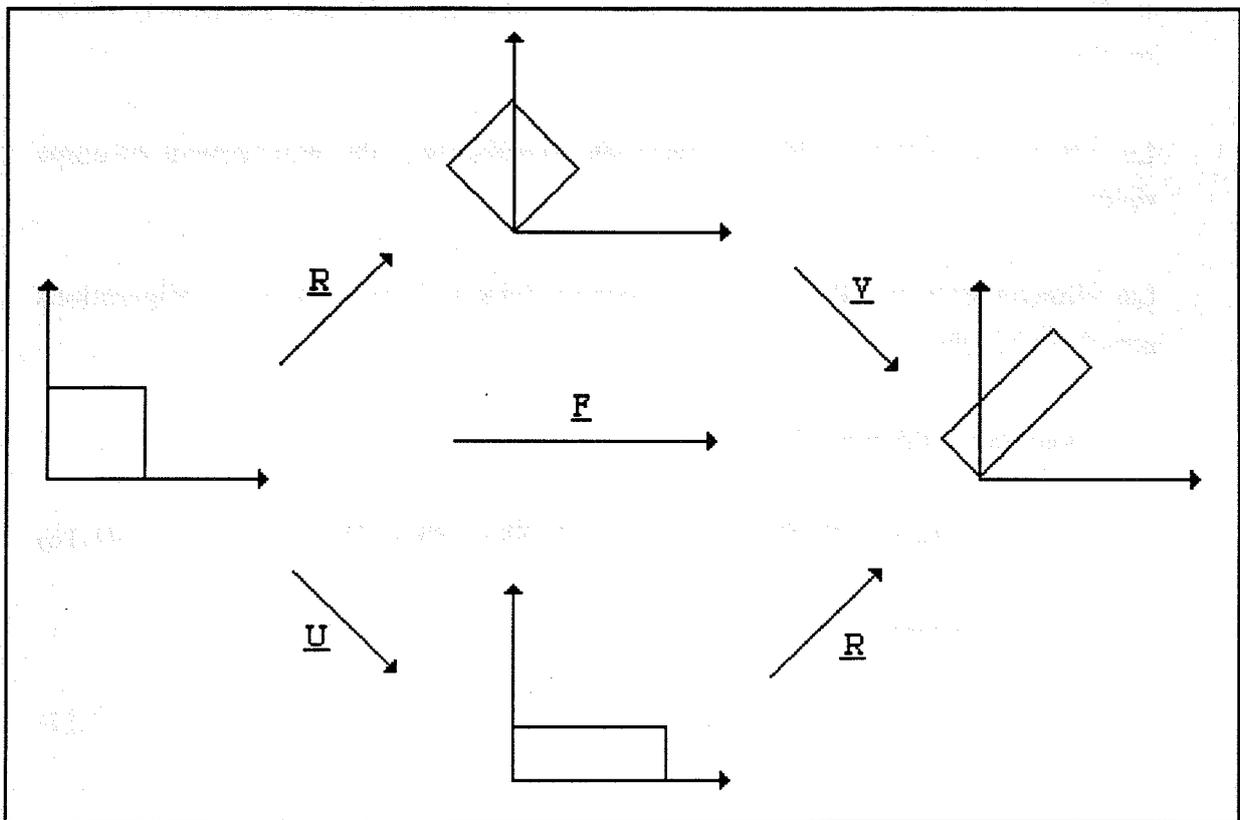
$\underline{A}$  est le tenseur des déformations de Euler-Almansi. Il est symétrique et eulérien.

Les tenseurs eulériens  $\underline{B}$  et  $\underline{A}$  sont obtenus en transportant dans  $C(t)$  les tenseurs lagrangiens  $\underline{C}$  et  $\underline{E}$  par la transformation deux fois covariante :

$$\underline{B} = \underline{F}^{-T} \underline{C} \underline{F}^{-1} \text{ et } \underline{A} = \underline{F}^{-T} \underline{E} \underline{F}^{-1} \quad (1.20)$$

La relation (1.20) est intéressante pour exprimer  $\underline{E}$  connaissant  $\underline{A}$  à partir des mesures obtenues par le moiré qui sont de nature eulérienne.

### I - 3 - 2 Théorème de la décomposition polaire



**Figure I.3** : Décomposition polaire du tenseur  $\underline{F}$  de deux manières différentes mais équivalentes :  $\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R}$

Le théorème de la décomposition polaire permet de définir deux autres tenseurs de déformations très utiles dans le formalisme des grandes déformations et dans l'interprétation du moiré. On peut écrire de manière unique :

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R} \quad (1.21)$$

où  $\underline{R}$  est un tenseur orthogonal de rotation qui exprime la rotation de corps rigide.

$\underline{U}$  et  $\underline{V}$  sont deux tenseurs de déformation pure, respectivement droit et gauche, symétriques et définis positifs. Ils traduisent au voisinage d'un point matériel P des élongations de tous les vecteurs passant par ce point.

Nous avons également :

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{U}^T \underline{R}^T \underline{R} \underline{U} = \underline{U}^2 \quad (1.22)$$

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T = \underline{V} \underline{R} \underline{R}^T \underline{V}^T = \underline{V}^2 \quad (1.23)$$

$\underline{U}$ ,  $\underline{V}$  et  $\underline{C}$ ,  $\underline{B}$  sont donc des tenseurs coaxiaux 2 à 2. Les directions principales de  $\underline{C}$  (respectivement de  $\underline{B}$ ) coïncident avec les directions principales de  $\underline{U}$  (respectivement de  $\underline{V}$ ).  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  ont pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de  $\underline{C}$  et de  $\underline{B}$ .

Dès lors, le tenseur rotation s'écrit :

$$\underline{R} = \underline{F} \underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-1} \underline{F} \quad (1.24)$$

La décomposition polaire est numériquement coûteuse en temps, en outre, elle conduit à des erreurs numériques importantes lorsque les matrices U et V sont mal conditionnées (Annexe I).

Dans un mouvement de solide rigide, on a :

$$\underline{U} = \underline{V} = \underline{I} \quad (1.25)$$

Nous pouvons définir une double famille de mesure des déformations (Hill, 1959) en posant :

$$e_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{U}^\alpha - \underline{I}) \quad \text{pour} \quad \alpha \neq 0 \quad (1.26)$$

$$\text{avec } e_0 = \text{Log } \underline{U}$$

$$e_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{V}^\alpha - \underline{I}) \quad \text{pour} \quad \alpha \neq 0 \quad (1.27)$$

$$\text{avec } \bar{e}_0 = \text{Log } \underline{V}$$

On remarque que les tenseurs de Green-Lagrange  $\underline{E}$  et d'Euler-Almansi  $\underline{A}$  sont les mesures  $e_2$  et  $e_{-2}$  de cette famille.

### I - 3 - 3 Taux de déformation

Le vecteur vitesse d'une particule occupant la position  $X_\alpha$  dans la configuration  $C(0)$  est donné par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1.28)$$

Le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est tangent à la trajectoire de la particule au point  $x_i$ . Le tenseur  $\underline{F}$  s'exprime alors en fonction de  $\mathbf{v}$  :

$$\dot{\underline{F}} = \frac{\partial \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right]}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.29)$$

La dérivée temporelle d'un vecteur  $d\mathbf{x}$  est définie par :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\underline{F}} d\mathbf{X} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (1.30)$$

On introduit le tenseur non symétrique  $\underline{L}$  :

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \underline{\text{grad}} \mathbf{v} \quad (1.31)$$

$\underline{L}$  est appelé tenseur gradient des vitesses de déformations. Il se décompose en une partie symétrique  $\underline{D}$  et une partie antisymétrique  $\underline{W}$ .

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \quad (1.32)$$

$\underline{D}$  est le tenseur taux de déformation, lié à la vitesse de déformation de la matière :

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \quad (1.33)$$

$\underline{W}$  est le tenseur taux de rotation, lié à la vitesse de rotation de la matière :

$$\underline{W} = \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (1.34)$$

En petites perturbations,  $\underline{D}$  est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.35)$$

Nous montrons que le tenseur taux de déformation de Green-Lagrange  $\underline{\dot{E}}$ , équivaut au transporté par  $\underline{F}$  du tenseur eulérien  $\underline{D}$  dans la configuration de référence  $C(0)$ .

En effet, dans la configuration  $C(0)$  :

$$d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} = 2 d\mathbf{X} \underline{E} \delta\mathbf{X} \quad (1.36)$$

L'équivalent du tenseur  $\underline{E}$  dans la configuration courante  $C(t)$  est le tenseur taux de déformation  $\underline{D}$  :

$$d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} = 2 d\mathbf{x} \underline{D} \delta\mathbf{x} = 2 d\mathbf{X} \underline{F}^T \underline{D} \underline{F} \delta\mathbf{X} \quad (1.37)$$

En comparant les deux relations, on en déduit effectivement la relation entre  $\underline{\dot{E}}$  et  $\underline{D}$  :

$$\underline{\dot{E}} = \underline{F}^T \underline{D} \underline{F} \quad (1.38)$$

$\underline{\dot{E}}$  est transporté par  $\underline{F}$  du tenseur taux de déformation  $\underline{D}$ .

#### I - 4 TENSEURS DES CONTRAINTES

Le tenseur des contraintes le plus naturel est le tenseur des contraintes de Cauchy (ou d'Euler)  $\underline{\sigma}$ , de composantes  $\sigma_{ij}$  défini sur la configuration courante déformée. Il caractérise l'effort de cohésion s'exerçant entre deux particules du milieu continu à l'instant considéré.

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  défini l'effort  $d\mathbf{f}_t$  exercé sur l'élément de surface  $dS_t$  de normal  $\mathbf{n}_t$  dans la configuration  $C(t)$  :

$$d\mathbf{f}_t = \underline{\sigma} \mathbf{n}_t dS_t \quad (1.39)$$

Le tenseur  $\underline{\sigma}$  défini sur la configuration  $C(t)$  est eulérien et symétrique.

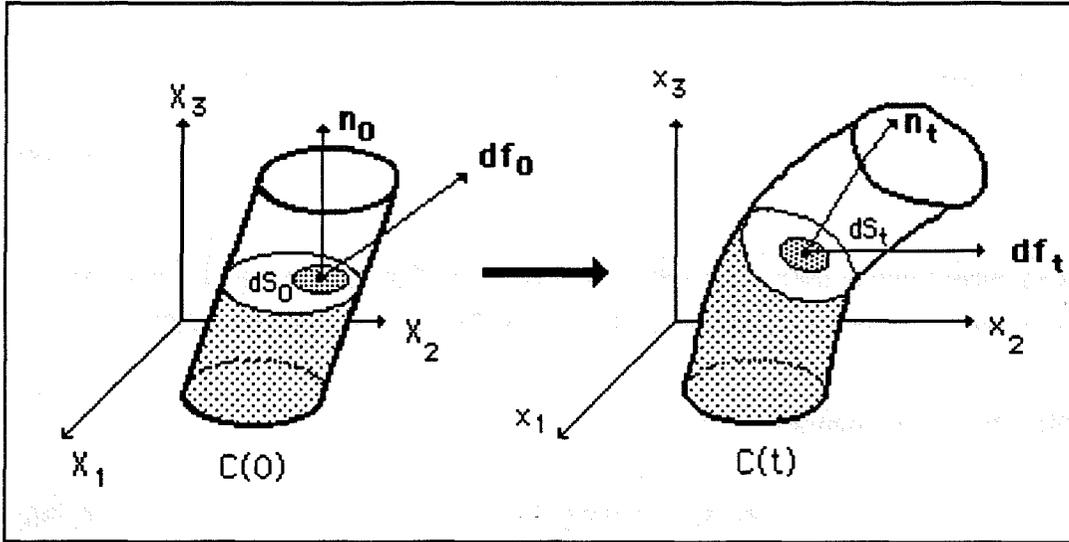


Figure 1.4 : Evolution de la force interne  $df$  de  $C(0)$  à  $C(t)$ .

On définit le tenseur de Kirchhoff par :

$$\underline{\tau} = (\det \underline{F}) \underline{\sigma} \quad (1.40)$$

$\underline{\tau}$  est symétrique et son emploi est fréquent dans la formulation variationnelle en grandes déformations car il conduit dans la discrétisation spatiale en éléments finis à une formulation matricielle symétrique.

Sa signification physique découle de la conservation de la masse :

$$\det \underline{F} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{donc} \quad \frac{\underline{\tau}}{\rho_0} = \frac{\underline{\sigma}}{\rho} \quad (1.41)$$

Comme pour les déformations, les contraintes peuvent être définies, soit sur la configuration de référence  $C(0)$ , soit sur la configuration actuelle  $C(t)$ .

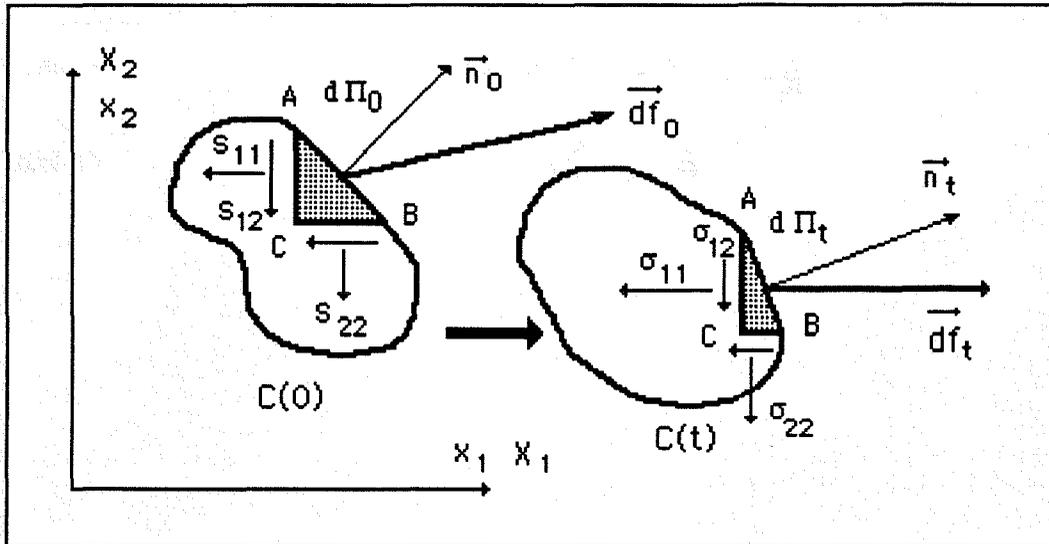
En transportant l'élément de surface  $n_t dS_t$  dans la configuration de référence, on obtient le tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce  $\underline{\Theta}$  (P.K.1) encore appelé tenseur de Boussinesq.

$$df_t = \underline{\Theta} n_0 dS_0 \quad (1.42)$$

$\underline{\Theta}$  est un tenseur ni lagrangien, ni eulérien et n'a pas de signification physique simple.

En transportant le vecteur contrainte dans la configuration de référence  $C(0)$ , on fait apparaître le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce  $\underline{\Pi}$  (P.K.2) :

$$df_0 = \underline{\Pi} n_0 dS_0 \quad (1.43)$$



**Figure I.5 :** Contraintes de Piola-Kirchhoff n°2 dans  $C(0)$  et contraintes de Cauchy-Euler définies dans  $C(t)$  sur l'élément matériel ABC.

$\underline{\Pi}$  est un tenseur lagrangien symétrique, invariant dans une rotation de corps rigide. Les contraintes de PK2 sont des contraintes mesurées dans des axes qui ont tourné avec la matière, elle peuvent être fournies simplement, en cas de grandes rotations et de petites déformations, à partir d'une extensométrie (moiré ou jauges électriques).

Tous ces tenseurs sont reliés par la relation (Annexe I) :

$$\underline{\tau} = (\det \underline{F}) \underline{\sigma} = \underline{\Theta} \underline{F}^T = \underline{F} \underline{\Pi} \underline{F}^T \quad (1.44)$$

ou encore par

$$\underline{\Pi} = \underline{F}^{-1} \underline{\Theta} = \underline{F}^{-1} \underline{\tau} \underline{F}^{-T} = (\det \underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \quad (1.45)$$

Nous utiliserons très souvent la formule de passage des contraintes de PK2 aux contraintes de Cauchy-Euler (1.45).

**Remarque :**

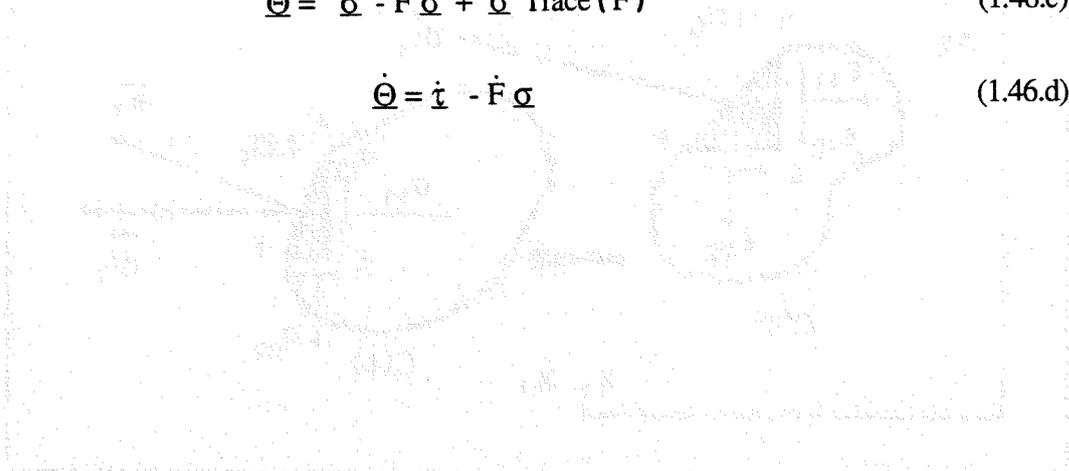
Les dérivées temporelles de tous ces tenseurs ne coïncident pas ; elles sont liées au même instant par les relations suivantes :

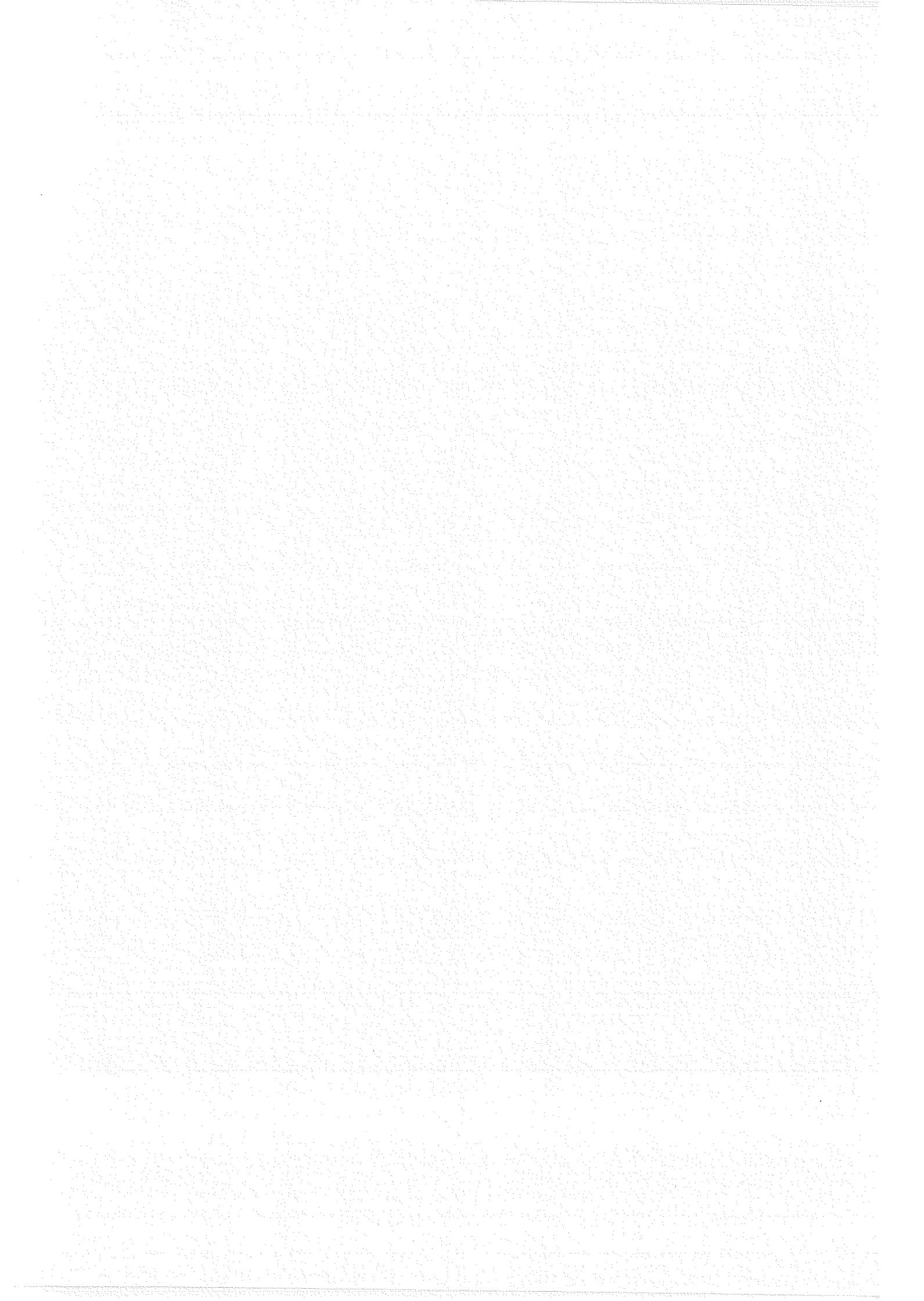
$$\dot{\underline{\Pi}} = \underline{\tau} - \dot{\underline{F}} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \dot{\underline{F}} \quad (1.46.a)$$

$$\dot{\underline{\Pi}} = \underline{\sigma} - \dot{\underline{F}} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \dot{\underline{F}} + \underline{\sigma} \text{Trace}(\dot{\underline{F}}) \quad (1.46.b)$$

$$\dot{\underline{\Theta}} = \underline{\sigma} - \dot{\underline{F}} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \text{Trace}(\dot{\underline{F}}) \quad (1.46.c)$$

$$\dot{\underline{\Theta}} = \dot{\underline{\tau}} - \dot{\underline{F}} \underline{\sigma} \quad (1.46.d)$$







**CHAPITRE II**  
**GRANDES DEFORMATIONS**



## CHAPITRE II

### GRANDES DEFORMATIONS LOIS DE COMPORTEMENT ET EQUATIONS D'EQUILIBRE

#### II - 1 HYPOTHESES

On adopte les hypothèses suivantes, communément retenues dans la littérature :

- le matériau est homogène et isotrope, subissant de petites déformations élastiques,
- le taux de déformation est séparable en une partie élastique et une partie plastique,
- la déformation est isotherme quasistatique,
- les déformations plastiques sont isovolumes,
- l'écroutissage est isotrope.

La question essentielle réside finalement dans le choix idoine de la loi de comportement. La loi de comportement est en effet primordiale dans la formulation variationnelle du problème des grandes déformations en vue du traitement numérique par éléments finis du profilage.

Il existe une grande variété de lois de comportement et il est souvent difficile de trancher en faveur de la meilleure d'entre elles.

Dans le cas présent, l'acier entrant dans la fabrication des tôles est un matériau "matériellement simple", pour lequel l'emploi du tenseur gradient de déformation  $\underline{F}$  ou de ses tenseurs dérivés est licite.

## II - 2 OBJECTIVITE

### II - 2 - 1 Principe d'Indifférence Matérielle

La formulation d'une loi de comportement, par nature intrinsèque, doit être établie en respectant les Principes Fondamentaux de la Mécanique et de la Thermodynamique. Elle doit notamment vérifier le "Principe d'Indifférence Matérielle" encore appelé "Principe d'Objectivité" (Sidoroff, 1982).

En transformations finies, cette propriété est essentielle car le solide change continuellement de configuration.

Une loi de comportement en grandes déformations s'écrit comme une relation soit entre tenseurs eulériens objectifs dans la configuration actuelle, soit entre tenseurs lagrangiens dans la configuration initiale.

### II - 2 - 2 Changement de référentiel

Considérons :

- \* la configuration  $C$  liée au repère  $R$
- \* la configuration  $C'$  liée au repère  $R'$
- \*  $Q(t)$  la rotation qui permet de passer de  $C$  à  $C'$ .

Les formules de changement de référentiel s'écrivent (Annexe I) :

1 - pour les positions

$$\mathbf{x}' = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} \quad (2.1)$$

$\mathbf{Q}(t)$  est orthogonal donc :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (2.2)$$

$$\text{avec } \det \mathbf{Q} = 1 \quad (2.3)$$

2 - pour les vecteurs :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{v} \quad (2.4.a)$$

ou encore :

$$v'_i = Q_{ij} v_j \quad (2.4.b)$$

3 -pour les tenseurs du second ordre :

$$\underline{T}' = \underline{Q}(t) \underline{T} \underline{Q}^T(t) \quad (2.5.a)$$

ou, sous forme indicielle :

$$T'_{ij} = Q_{ik} T_{kl} Q_{jl} \quad (2.5.b)$$

4 - pour les tenseurs mixtes :

$$\underline{F}' = \underline{Q}(t) \underline{F} \quad (2.6)$$

Les changements de repères peuvent être interprétés comme des mouvements de corps rigide du solide. L'objectivité d'un tenseur est effective lorsque les formules de changement de repères (2.5) et (2.6) sont vérifiées.

Ces relations permettent d'exprimer les différents tenseurs du chapitre I dans un référentiel qui a tourné.

#### Application aux tenseurs lagrangiens.

Les tenseurs lagrangiens, définis dans la configuration de référence, ne sont pas affectés par le changement de référentiel.

D'où :

$$\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E} \quad \text{tenseur des déformations d'Euler-Almansi} \\ \underline{C}' &= \underline{C} \quad \text{tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche} \\ \underline{U}' &= \underline{U} \quad \text{tenseur de déformations pure gauche} \\ \underline{\Pi}' &= \underline{\Pi} \quad \text{tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (PK2)} \end{aligned}$$

#### Application aux tenseurs eulériens.

Les tenseurs eulériens du second ordre qui respecte la relation (2.5) sont des tenseurs objectifs car ils se transforment comme des tenseurs (indépendants de l'observateur) dans leur configuration  $C(t)$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{A}' &= \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T \quad \text{tenseur des déformations d'Almansi-Euler} \\ \underline{B}' &= \underline{Q} \underline{B} \underline{Q}^T \quad \text{tenseur des déformations de Cauchy-Green droit} \\ \underline{U}' &= \underline{Q} \underline{U} \underline{Q}^T \quad \text{tenseur de déformation pure droit} \\ \underline{\tau}' &= \underline{Q} \underline{\tau} \underline{Q}^T \quad \text{tenseur des contraintes de Kirchhoff} \end{aligned}$$

Les tenseurs lagrangiens ainsi que les tenseurs eulériens objectifs peuvent donc être utilisés directement dans l'écriture d'une loi de comportement, contrairement aux tenseurs eulériens non objectifs.

#### Application aux tenseurs hybrides.

On peut citer, parmi ce type de tenseurs non-objectifs,  $\underline{F}$  (tenseur gradient de la transformation),  $\underline{R}$  (tenseur rotation pure),  $\underline{\Theta}$  (tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff n°1).

Leur loi de transformation s'écrit :

$$\underline{T}' = \underline{Q} \underline{T} \quad (2.7)$$

Il faudra évidemment tenir compte de la rotation  $\underline{Q}$  afin d'éviter qu'une rotation de corps rigide ne génère des contraintes indésirables dans le solide (Annexe I).

### **II - 2 - 3 Dérivations objectives**

En élasto-plasticité "grandes déformations", la loi de comportement relie les vitesses de contraintes aux vitesses de déformations.

Or la loi de comportement doit porter sur des tenseurs objectifs, le problème revient donc à trouver, parmi tous les tenseurs objectifs rencontrés, ceux dont la dérivée temporelle est objective.

Dans la configuration de référence initiale  $C(0)$ , la réponse est immédiate puisque la dérivée temporelle des tenseurs définis dans cette configuration est objective.

Dans la configuration courante  $C(t)$ , la difficulté est d'un autre ordre.

En effet, si  $\underline{M}$  est un tenseur eulérien objectif, sa dérivée temporelle n'est pas objective en raison de la présence de  $\underline{\Omega}$  qui introduit des termes complémentaires parasites (Annexe I).

L'idée est donc d'éliminer ces rotations parasites en dérivant le tenseur dans un repère plus ou moins lié à la matière.

Pour pallier cet inconvénient, la dérivation doit tenir compte de la rotation indésirable afin d'aboutir à une dérivation objective. Il existe dans la littérature beaucoup de dérivées objectives.

Citons entre autres :

**- la dérivée de Truesdell :**

elle est obtenue en transportant le tenseur  $\underline{M}$  dans  $C(0)$  et en dérivant dans  $C(0)$  :

$$\underline{M}^{Tr} = \frac{1}{\det \underline{F}} \underline{F} \frac{d}{dt} ((\det \underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{M} \underline{F}^{-T}) \underline{F}^T \quad (2.8.a)$$

$$\underline{M}^{tr} = \dot{\underline{M}} - \underline{L} \underline{M} - \underline{M} \underline{L}^T - \underline{M} \text{ trace } \underline{D} \quad (2.8.b)$$

**- la dérivée convective contravariante :**

on considère  $\underline{M}$  dans  $C(t)$ , on le transpose dans  $C(0)$ , on dérive dans  $C(0)$  puis on le reporte dans  $C(t)$  :

$$\underline{M}^c = \underline{F} \frac{d}{dt} (\underline{F}^{-1} \underline{M} \underline{F}^{-T}) \underline{F}^T \quad (2.9.a)$$

$$\underline{M}^c = \dot{\underline{M}} - \underline{L} \underline{M} - \underline{M} \underline{L}^T \quad (2.9.b)$$

**- la dérivée convective covariante :**

on considère  $\underline{M}$  dans  $C(0)$ , on le transpose dans  $C(t)$ , on dérive dans  $C(t)$  puis on le reporte dans  $C(0)$  :

$$\underline{M}_c = \underline{F}^{-T} \frac{d}{dt} (\underline{F}^T \underline{M} \underline{F}) \underline{F}^{-1} \quad (2.10.a)$$

$$\underline{M}_c = \dot{\underline{M}} + \underline{L}^T \underline{M} + \underline{M} \underline{L} \quad (2.10.b)$$

Ces trois dérivées sont établies dans un repère matériel non orthonormé, on ne peut donc pas les traiter comme des dérivées habituelles. Pour pallier cette difficulté, il faut dériver dans un repère orthonormé qui ne suit que la rotation du corps.

**- la dérivée de Green-Naghdi ou dérivée en rotation propre :**

le transport par rotation et son réciproque s'écrivent (Green et al., 1971) :

$$\underline{M}_0 = \underline{R}^T \underline{M} \underline{R} \quad \text{et} \quad \underline{M} = \underline{R} \underline{M}_0 \underline{R}^T \quad (2.11)$$

La dérivée objective  $\underline{M}^R$  est donnée par :

$$\underline{M}^R = \underline{R} \frac{d}{dt} (\underline{R}^T \underline{M} \underline{R}) \underline{R}^T \quad (2.12.a)$$

$$\underline{M}^R = \dot{\underline{M}} - \underline{\Omega}' \underline{M} + \underline{M} \underline{\Omega}' \quad \text{avec} \quad \underline{\Omega}' = \underline{R} \underline{R}^T \quad (2.12.b)$$

où  $\underline{\Omega}'$  représente le taux de rotation propre (tenseur orthogonal).

$\underline{\Omega}'$  est lié à  $\underline{W}$  par la relation suivante :

$$\underline{W} = \underline{\Omega}' + \frac{1}{2} \underline{R} (\dot{\underline{U}} \underline{U}^{-1} + \underline{U}^{-1} \dot{\underline{U}}) \underline{R}^T \quad (2.13)$$

Sous cette forme  $\underline{M}^R$  est difficile à calculer et, en outre, dépend de la configuration initiale  $C(0)$ .

**- la dérivée de Lee ou dérivée en rotation matérielle :**

$$\underline{M}^L = \dot{\underline{M}} - \underline{\Omega}^* \underline{M} + \underline{M} \underline{\Omega}^* \quad (2.14)$$

où  $\underline{\Omega}^*$  représente le taux de rotation matérielle.

**- la dérivée de Jaumann :**

$$\underline{M}^J = \dot{\underline{M}} - \underline{W} \underline{M} + \underline{M} \underline{W}^T \quad (2.15)$$

La dérivée de Jaumann est aussi appelée dérivée corotationnelle car elle peut s'obtenir par dérivation dans un référentiel particulier pour lequel le taux de rotation est identiquement nul.

On passe facilement d'une dérivée objective à une autre par les relations :

$$\underline{M}^c = \underline{M}^{tr} - \underline{M} \text{trace } \underline{D} = \underline{M}^J - \underline{D} \underline{M} - \underline{M} \underline{D} = \underline{M}_c - 2 (\underline{D} \underline{M} + \underline{M} \underline{D}) \quad (2.16)$$

Remarque :

Dans un mouvement de corps solide, toutes ces dérivées coïncident puisque le taux de déformation  $\underline{D}$ , défini par la formule 1.33, est nul :

$$\underline{M}^c = \underline{M}^r = \underline{M}^j = \underline{M}_c \quad (2.17)$$

## II - 3 PRINCIPALES FORMULATIONS

Différentes théories en élasto-plasticité "grandes déformations" ont été proposées.

En France, notamment, l'étude des "Grandes déformations et Endommagement" a fait l'objet de travaux théoriques et expérimentaux très élaborés par de nombreuses équipes réunies au sein d'un GRECO qui regroupait notamment l'Ecole Centrale de Lyon [(Sidoroff, 1982, 1984) et (Dogui, 1983)], l'INSA de Lyon [(Boivin, 1970) et (Brunet et Bahuaud, 1985)], l'Université de Technologie de Compiègne [(El Moutassim et Touzot, 1988) et (Detraux, 1985)], l'ENSET (Ladevèze, 1980), l'Ecole Polytechnique [(Mandel, 1971, 1974, 1983), (Stolz, 1982) , (Nguyen Q.S. et Bui H.D., 1974)], l'Université de Metz (Molinari), entre autres.

En Belgique, les grandes déformations ont été essentiellement développées par l'équipe du Professeur Ch. Massonnet de l'Université de Liège (Cescotto, 1978), (Charlier, 1987) et (Habraken, 1989)

Les corps élasto-visco-plastiques sont des corps pour lesquels on peut définir à chaque instant, dans l'espace des contraintes, un domaine d'élasticité borné par une surface seuil (surface de plasticité) telle que si l'état représentatif des contraintes est intérieur à ce domaine, les déformations restent réversibles quelle que soient leurs vitesses (Mandel, 1974).

Lorsque l'état de contrainte sort de ce domaine, des déformations permanentes, dites aussi irréversibles ou plastiques, se produisent. Dans ce cas, l'état de contrainte dépend du trajet de déformation et, en général, de la vitesse avec laquelle il est décrit (corps visco-plastique) (Mrichcha, 1992).

Toutefois, à température ambiante et pour la plupart des corps, les contraintes sont quasi-indépendantes de la vitesse de déformation.

Ce cas limite correspond à la plasticité classique.

On considère habituellement trois types de comportements pour les métaux :

**- le comportement élastique :**

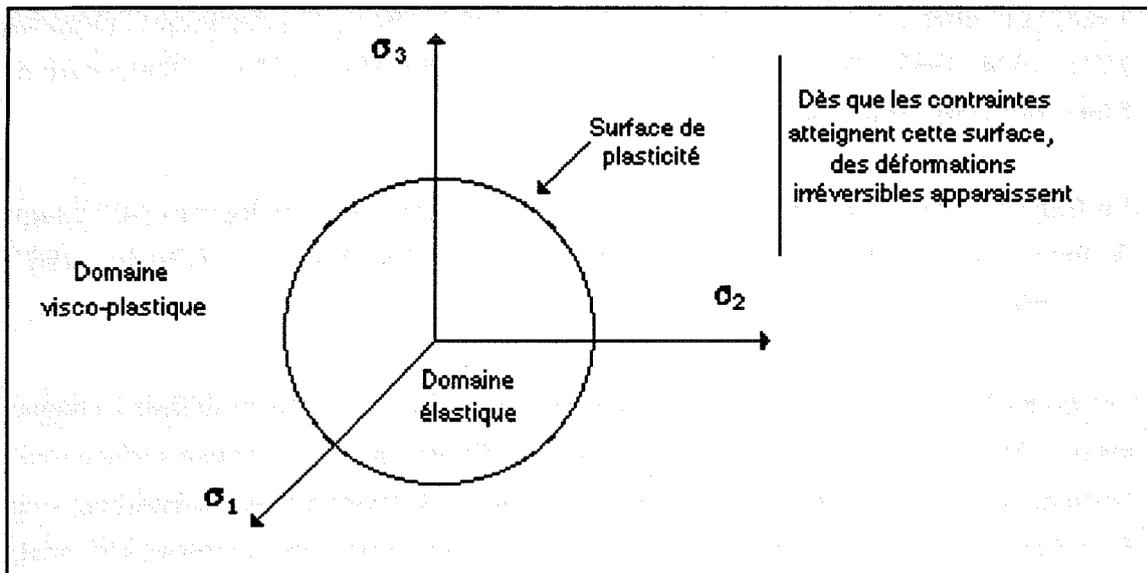
Ce cas limite est suggéré par les études de petites déformations ; il permet toutefois un bon nombre d'applications.

**- le comportement élasto-plastique :**

Il apparaît notamment dans le formage à froid des métaux et dans de nombreux cas de déformations permanentes des structures métalliques.

**- le comportement élasto-visco-plastique :**

Il doit être obligatoirement envisagé si l'on souhaite modéliser les grandes déformations à chaud des métaux.



**Figure II.1** : Représentation de l'espace des contraintes en trois zones : zone élastique, zone plastique, zone visco-plastique.

Lorsque des déformations irréversibles (ou plastiques) se produisent en plus des déformations élastiques (les déformations totales étant la somme des déformations élastiques et des déformations plastiques), il est nécessaire de déterminer ces contributions à l'aide des lois d'élasticité et de plasticité et d'analyser comment ces deux composantes se combinent pour produire la déformation résultante.

### II - 3 - 1 Loi de comportement en petites perturbations.

En petites déformations, nous avons la décomposition suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.18)$$

$\varepsilon_{ij}^e$  est le tenseur des déformations élastiques,  
 $\varepsilon_{ij}^p$  est le tenseur des déformations plastiques.

L'énergie libre  $\psi$  d'un solide de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope en petites déformations s'écrit :

$$\psi(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e + \varphi(p) \quad (2.19)$$

$C_{ijkl}$  : composante du tenseur d'élasticité,  
 $p$  : variable interne scalaire décrivant l'écrouissage isotrope,  
 $\varphi$  : énergie interne d'écrouissage.

Comme les déformations élastiques ne dissipent pas d'énergie, la dissipation s'écrit :

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p - R \dot{p} \geq 0 \quad \underline{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \underline{\varepsilon}^e} \quad R = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \quad (2.20)$$

$R$  est la force thermodynamique associée à  $p$  ; elle caractérise physiquement la dilatation en écrouissage isotrope de la surface seuil dans l'espace des contraintes.

En adoptant le critère de von Mises, le plus souvent utilisé pour les matériaux métalliques usuels, la fonction seuil se met sous la forme :

$$f(\underline{\sigma}, p) = J_2(\underline{\sigma}) - R(p) - \sigma_0 \quad (2.21)$$

où  $R(p)$  est la fonction d'écrouissage,  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité et  $J_2(\underline{\sigma})$  le second invariant du tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}$ .

Dans le cadre d'un matériau standard généralisé (Halphen et Nguyen Q.S., 1975), les équations de comportement s'écrivent :

$$\dot{\underline{\sigma}} = C \dot{\underline{\varepsilon}}^e \quad (2.22)$$

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}, p) \quad (2.23)$$

$$\dot{p} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial R} = \lambda = \left( \frac{2}{3} \dot{\underline{\epsilon}}^p : \dot{\underline{\epsilon}}^p \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

$$\text{si } f(\underline{\sigma}, p) = \dot{f}(\underline{\sigma}, p) = 0 \text{ alors } \lambda \geq 0 \quad (2.25)$$

sinon  $\lambda = 0$  (retour élastique).

Remarques :

- la deuxième égalité est homogène de degré un en vitesse, un changement de l'échelle de temps n'a aucun effet sur elle.

- le temps représente ici un paramètre commode permettant de caractériser la déformation et non pas le temps physique, au sens classique du terme.

### II - 3 - 2 Loi de comportement en grandes déformations

Dans le cas des grandes déformations, la décomposition de la déformation totale en parties élastique et plastique, perd sa signification. De nouveaux développements géométriques doivent être envisagés.

Si l'on considère un point P du solide S et son voisinage dans la configuration actuelle C(t) et que l'on décharge le corps jusqu'à l'état de contrainte nulle, les déformations élastiques réversibles disparaissent. Les déformations plastiques irréversibles subsistent. La configuration ainsi obtenue est appelée configuration relâchée C<sup>r</sup>(t).

Cette configuration est une vue de l'esprit car un relâchement complet de chaque "voisinage" entraîne la perte de la continuité du solide. Il ne faut pas la confondre avec la configuration "déchargée" qui est réalisable : en effet l'annulation des forces appliquées (déchargement) à une structure après plastification peut laisser subsister un état de "contraintes résiduelles".

C'est du choix de la configuration C<sup>r</sup>(t) que partent les variantes de la formulation.

C<sup>r</sup>(t) peut être :

1 - une configuration naturelle locale définie à une rotation près ; malheureusement une telle configuration naturelle n'existe pas globalement pour le solide en son entier (présence possible de contraintes résiduelles),

2 - une configuration naturelle locale relâchée avec la rotation fixée par un trièdre directeur lié au réseau cristallin lorsque le solide est un monocristal (Mandel, 1974), (Stolz, 1982),

3 - une configuration intermédiaire où la rotation arbitraire est fixée par des conditions liées au comportement du matériau avec l'introduction de variables internes d'érouissage tensorielles (Sidoroff, 1982).

Ces modèles, qui sont souvent fondés sur la thermodynamique des processus irréversibles (Ladevèze, 1980), peuvent prendre en compte l'anisotropie (initiale et/ou induite) du matériau. La principale difficulté inhérente à ce type de formulation est d'ordre purement géométrique (description sur plusieurs configurations).

Nous avons utilisé la troisième approche.

Soit  $\mathbf{r}$  le vecteur des coordonnées dans la configuration naturelle locale. Le tenseur jacobien  $\underline{\mathbf{F}}^P$  relatif au passage de la configuration initiale  $C(0)$  à la configuration relâchée  $C^r(t)$  (déformation plastique) est :

$$\underline{\mathbf{F}}^P = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.26)$$

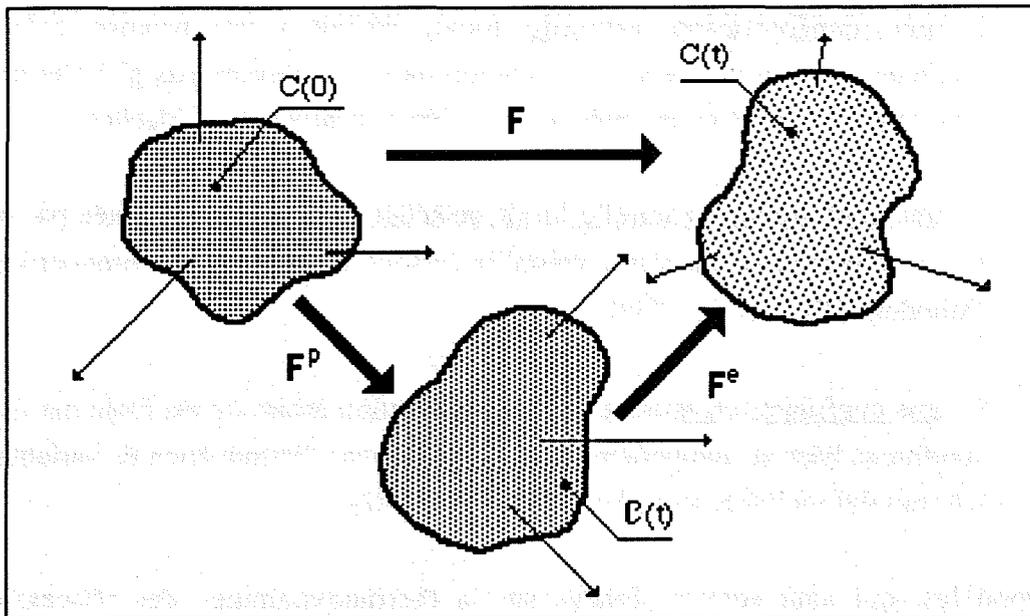
Puisque la déformation élastique est nulle dans la configuration relâchée  $C^r(t)$ , nous pouvons la décrire par le tenseur jacobien  $\underline{\mathbf{F}}^e$  :

$$\underline{\mathbf{F}}^e = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.27)$$

On a établi précédemment que le tenseur jacobien relatif à la déformation totale se décompose comme suit :

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} = \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{F}}^P \quad (2.28)$$

Cette décomposition multiplicative du tenseur gradient en parties élastique et plastique n'est pas commutative (Lee, 1971).



**Figure II.2** : Décomposition multiplicative du gradient des déformations :  $\underline{F} = \underline{F}^e \cdot \underline{F}^p$ .  
 $C(0)$  configuration initiale,  $C(t)$  configuration actuelle,  
 $C(t)$  configuration naturelle locale.

Dès lors, il est clair que le développement d'une loi de comportement en élasto-plasticité est différente selon que l'on travaille en hypothèses de petites ou de grandes déformations.

En conclusion, nous travaillerons en description lagrangienne actualisée avec la dérivée de Jaumann et le tenseur de Kirchhoff  $\underline{\tau}$  qui conduisent à une formulation variationnelle symétrique et, partant, à une matrice de rigidité symétrique après discrétisation par éléments finis.

Comme nous l'avons signalé auparavant, les lois de comportement les plus souvent utilisées pour la modélisation des solides en grandes transformations sont des lois différentielles qui relient le taux de contraintes au taux de déformations.

Nous avons vu que ces lois doivent satisfaire au principe d'indifférence matérielle et pour cela faire intervenir des dérivées objectives des contraintes.

Plusieurs types de dérivées objectives ont été proposées. Nous retenons comme loi de comportement en élasto-plasticité isotrope (Annexe II) :

$$\tau_{ij}^J = C_{ijkl}^{ep} D_{kl} \quad (2.29)$$

avec

$$C_{ijkl}^{ep} = 2 G \left[ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{3}{2 \sigma_e^2} \frac{M}{(3G+1)} \tau_{ij}^D \tau_{kl}^D \right] \quad (2.30)$$

où

$\tau^D$  est le tenseur déviateur relatif à  $\tau$ ,

M est le module plastique,

$\sigma_e$  est la contrainte équivalente de von Mises,

G est le module de Coulomb ou module de cisaillement.

Le module tangent  $E_T$  de la courbe d'érouissage relie la contrainte vraie à la déformation logarithmique ou naturelle.

Il a été montré que (Brunet, 1987) :

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{E_T \left( 1 + \frac{\sigma(1-2\nu)}{E} \right)} - \frac{1}{E} \quad (2.31)$$

le terme  $(1 - 2\nu) \sigma / E$  est de l'ordre de grandeur des déformations élastiques, donc négligeable d'après les hypothèses de travail, d'où :

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \quad (2.32)$$

et l'on retrouve l'expression usuelle utilisée en petites déformations.

### II - 3 - 3 Intégration de la loi de comportement

Pour diminuer le temps de calcul, on est amené à augmenter le pas de temps, mais de manière raisonnable afin de tenir compte des considérations suivantes :

- le principe d'indifférence matérielle n'est respecté qu'au sens infinitésimal en utilisant la dérivée de Jaumann,
- le suivi de la loi de comportement se dégrade lorsque l'on augmente le pas de temps.

Dans la suite, on suppose que  $\Delta t$  ne permet plus d'utiliser, au cours de l'incrément, les hypothèses des petites perturbations (petits déplacements, petites déformations et

petites rotations), mais qu'il est suffisamment petit pour réaliser un suivi convenable de la loi de comportement.

L'intégration de la loi de comportement exige, une fois la dérivée objective choisie, la connaissance des grandeurs cinématiques du solide au cours du pas, telles que le taux de déformation et le taux de rotation à tout instant  $\tau$  entre  $t$  et  $t+\Delta t$ .

Or, quand on utilise le schéma de résolution de Newton-Raphson pour la recherche de la configuration en équilibre du solide à l'instant  $t+\Delta t$ , on ne connaît que la configuration du solide à l'instant  $t$  (résultat du pas précédent).

L'estimation de la configuration du solide à l'instant  $t+\Delta t$  est obtenue par la résolution des équations linéarisées au cours des itérations.

Ainsi, l'intégration de la loi de comportement sur un pas de temps fini  $\Delta t$  nécessite :

- le choix d'une cinématique au cours du pas afin de déterminer la déformation et la rotation,
- le choix d'un schéma d'intégration dans le temps.

### **II - 3 - 3 - 1 Approximation cinématique au cours du pas**

Afin d'assurer l'objectivité incrémentale pour un pas de temps donné, on a besoin de connaître la cinématique au cours du pas et en particulier l'évolution des tenseurs taux de déformation  $\underline{D}$  et de rotation  $\underline{W}$ .

Ainsi l'intégration de la loi de comportement à ce stade entre dans le cadre de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à conditions initiales connues.

En général, les seules informations dont on dispose sont :

- les coordonnées de la configuration  $C(t)$ ,
- les coordonnées de la configuration  $C(t+\Delta t)$ .

Pour déterminer les tenseurs taux de déformation  $\underline{D}$  et taux de rotation  $\underline{W}$ , il faut adopter une approximation cinématique au cours du pas, qui peut être :

- Une approximation sur les déplacements entre  $C(t)$  et  $C(t+\Delta t)$  :

L'idée consiste à supposer une histoire des déplacements entre  $C(t)$  et  $C(t+\Delta t)$  et d'en déduire l'évolution de  $\underline{D}$  et de  $\underline{W}$  au cours de l'incrément de temps  $\Delta t$ .

Le choix le plus simple est d'adopter une variation linéaire au cours du temps.

Le tenseur gradient s'écrit :

$$\underline{E}(\tau) = \frac{1}{\Delta t} [(t + \Delta t - \tau) \underline{E}(t) + (\tau - t) \underline{E}(t + \Delta t)] \quad , \quad \text{avec } \tau \in [t, t + \Delta t] \quad (2.33)$$

Ce choix n'assure pas l'objectivité incrémentale. En effet, si la transformation entre  $t$  et  $t+\Delta t$  est une rotation pure, la transformation entre  $t$  et  $\tau$  définie par la relation (2.33) ne l'est pas. De même si la transformation entre  $t$  et  $t+\Delta t$  est une transformation isovolume, l'incompressibilité n'est pas satisfaite pour la transformation entre les instants  $t$  et  $\tau$ .

- Une approximation sur le gradient de déformation (Godinas et Cescotto, 1984) :

La démarche suivie dans cette approximation suppose que le tenseur taux de déformation  $\underline{L}$  est constant au cours du pas :

$$\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L} = \text{constante} \quad (2.34)$$

On diagonalise la matrice  $[\mathbf{L}]$  associée au tenseur  $\underline{L}$  :

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{F}]^{-1} [\mathbf{L}^D] [\mathbf{F}] \quad (2.35)$$

$[\mathbf{L}^D]$  est une matrice diagonale, qui s'écrit sous la forme :

$$[\mathbf{L}^D] = [\dot{\mathbf{F}}'] [\mathbf{F}']^{-1} \quad (2.36)$$

$[\mathbf{F}']$  est une matrice diagonale reliée à  $[\mathbf{F}]$  par :

$$[\mathbf{F}'] = [\Phi] [\mathbf{F}] [\Phi]^{-1} \quad (2.37)$$

On obtient alors le système d'équations différentielles découplées :

$$F'_{ii}(\tau) = \exp \left[ L'_{ii}^D(\tau - t) \right] F'_{ii}(t) \quad (2.38)$$

- Une approximation sur les déformations pures : (Braudel, 1986)

Cette approximation suppose que les déformations pures droites varient exponentiellement en gardant leurs axes propres fixes :

$$D(t) = \frac{1}{\Delta t} Q \ln U_{\Delta t} Q^T = \text{constante} \quad (2.39)$$

[ Q ] est la matrice orthogonale permettant le passage dans la base propre de [ U<sub>Δt</sub> ] :

$$[ U_{\Delta t} ] = [ Q ] [ U_{\Delta t}^D ] [ Q ]^T \quad (2.40)$$

La matrice [ Q ] est supposée constante sur l'intervalle [ t, t+Δt ], la matrice [ U<sub>Δt</sub> ] est obtenue par décomposition polaire.

Ce choix confère les propriétés suivantes :

- si la transformation entre C(t) et C(t+Δt) est une rotation pure, cette approximation ne génère pas de déformation.

- si la transformation entre C(t) et C(t+Δt) est isovolume, cette approche satisfait l'hypothèse d'incompressibilité.

Sous l'angle purement numérique, cette méthode n'est pas toujours avantageuse car les calculs de la décomposition polaire peuvent se révéler délicats notamment lorsque le tenseur de la décomposition pure est peu différent du tenseur identité.

- Une approximation sur la rotation incrémentale (Rubinstein et Atluri, 1983) :

Cette approche repose sur la résolution de l'équation tenso-différentielle :

$$\Delta \dot{\underline{R}}(\tau) = \underline{W}(\tau) \Delta \underline{R}(\tau) \quad (2.41)$$

avec la condition initiale :  $\Delta \underline{R}(0) = \underline{I}$

où  $\underline{R}(\tau)$  est l'incrément de rotation et  $\underline{W}$  est le tenseur taux de rotation.

Pour simplifier la résolution de l'équation différentielle (2.41) on remplace  $\underline{W}(\tau)$ , fonction du temps, par une valeur constante. On montre que l'erreur d'intégration est minimale (Rubinstein et Atluri, 1983), (Brunet, 1987), (Gelin, 1988) pour :

$$\tau = t + \Delta t / 2$$

La solution exacte de l'équation différentielle ainsi modifiée est donnée par la matrice de rotation suivante qui s'écrit sous la forme d'une exponentielle :

$$\Delta \underline{R}(t + \Delta t) = \exp \left[ \underline{W} \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t \right] \underline{I} \quad (2.42)$$

Dans le cas bidimensionnel, la rotation est définie par un paramètre unique  $\theta(t) = W_{12}$

$$[\underline{W}(t)] = \theta(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

et par suite :

$$[\exp(\underline{W}(t))] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Ainsi le calcul des contraintes à l'instant  $t + \Delta t$  s'effectue selon l'algorithme suivant :

- au début de l'incrément, la contrainte est "tournée" de  $t$  à  $t + \frac{\Delta t}{2}$  :

$$\tau \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \Delta R^{1/2} \tau(t) \Delta R^{1/2 T} \quad (2.45)$$

- on intègre les équations de comportement selon un schéma implicite, d'où :

$$\tau \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \Delta \tau^J \quad (2.46)$$

$\Delta \tau^J$  est l'incrément de contrainte due à la déformation ,

- on tourne l'état de contrainte, ainsi calculé, avec la même rotation que précédemment, d'où :

$$\tau(t + \Delta t) = \Delta R \tau \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta R^T + \Delta R^{1/2} \Delta \tau^J \Delta R^{1/2 T} \quad (2.47)$$

C'est la méthode que nous avons retenue car, en procédant de cette façon, l'erreur entre la rotation exacte et la rotation donnée par l'approximation est de l'ordre de  $(\Delta t)^3$ .

### II - 3 - 3 - 2 Schéma d'intégration des équations de comportement

Afin de ne pas surcharger les notations, on adopte par la suite la notation des petites déformations, car l'algorithme qui est décrit n'est pas uniquement réservé aux grandes déformations.

Il existe plusieurs méthodes d'intégration de la loi de comportement (Pinsky et al., 1983), (Ortiz et al., 1985), cependant celle qui semble offrir les meilleurs résultats est la méthode de prédiction élastique avec correction radiale, appelée aussi méthode d'intégration implicite au premier ordre (Simo et al., 1985).

Dans un premier temps, nous déterminons un état de contrainte d'essai élastique avec la loi de Hooke, soit :

$$\Delta \underline{S} = 2 G \Delta \underline{E} \quad (2.48)$$

Si nous supposons un état de prédiction élastique :

$$s_{ij}^E = s_{ij} + 2 G \Delta e_{ij} \quad (2.49)$$

L'état de contrainte élasto-plastique ne doit pas violer le critère de plasticité, i.e. nous devons tester la position de l'état de contrainte élastique par rapport à la surface de charge :

$$f(\sigma^F, p^F) = 0 \quad (2.50)$$

où  $p^F$  est le paramètre d'écrouissage

Dans le cas où le précédent critère n'est pas respecté, nous corrigeons en projetant sur la surface de charge pour évaluer l'incrément de déformation élastique équivalent :

$$s_{ij}^F = s_{ij}^E \frac{\sigma_e^F}{\sigma_e^E} \quad (2.51)$$

La contrainte équivalente de von Mises  $\sigma_e^F$  est donnée par la courbe rationnelle du matériau identifiée à partir d'un essai de traction uniaxiale :

$$\sigma_e^F = f(\varepsilon_e^P + \Delta\varepsilon_e^P) \quad (2.52)$$

ensuite, l'incrément de déformation plastique équivalente est donné par l'équation implicite locale :

$$\Delta\varepsilon_e^P = \frac{\sigma_e^E - f(\varepsilon_e^P + \Delta\varepsilon_e^P)}{3G} \quad (2.53)$$

que l'on résout numériquement par une procédure de type Newton-Raphson (Annexe III).

**Remarque :**

En état de contrainte plane, où les contraintes  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{33}$  sont nulles, les relations entre les déviateurs conduisent à une incompatibilité entre l'état des contraintes finales et l'état des déformations (Simo et al., 1986), (Aravas, 1987), (Brunet, 1987).

Il est alors indispensable de rétablir l'équation implicite locale en termes de contraintes et de déformations et non plus en termes de déviateurs (Annexe IV).

## II - 4 EQUATIONS D'EQUILIBRE EN GRANDE DEFORMATION

### II - 4 - 1 Principe des Puissances Virtuelles

Le principe des puissances virtuelles conduit à une formulation équivalente à celle des équations d'équilibre. Le point essentiel est que la puissance virtuelle (ou réelle) de déformation d'un corps doit s'annuler dans un mouvement de corps rigide virtuel (ou réel).

Soit S un solide de volume V en équilibre, soumis à un chargement extérieur et à des conditions aux limites.

Rappelons que le matériau constituant ce corps est supposé homogène, isotrope et isotherme.

Dans un solide déformable de volume  $V$  en équilibre, soumis à un chargement extérieur et à des conditions aux limites, le champ de contrainte doit satisfaire :

\* les équations d'équilibre dans  $V$  sur la configuration courante  $C(t)$  :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho_t \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{sur } V \quad (2.54.a)$$

\* les conditions aux limites en vitesse :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^d \quad \text{sur } S_v \quad (2.54.b)$$

\* les conditions en contrainte :

$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}_d = \mathbf{T}_d \quad \text{sur } S_T \quad (2.54.c)$$

avec  $S = S_v \cup S_T$  la surface frontière de  $V$ .

Le tenseur symétrique de Cauchy-Euler  $\underline{\sigma}$  est défini sur la configuration  $C(t)$ , il est eulérien.

Nous pouvons représenter le corps solide en équilibre de la façon suivante (fig. II.3) :

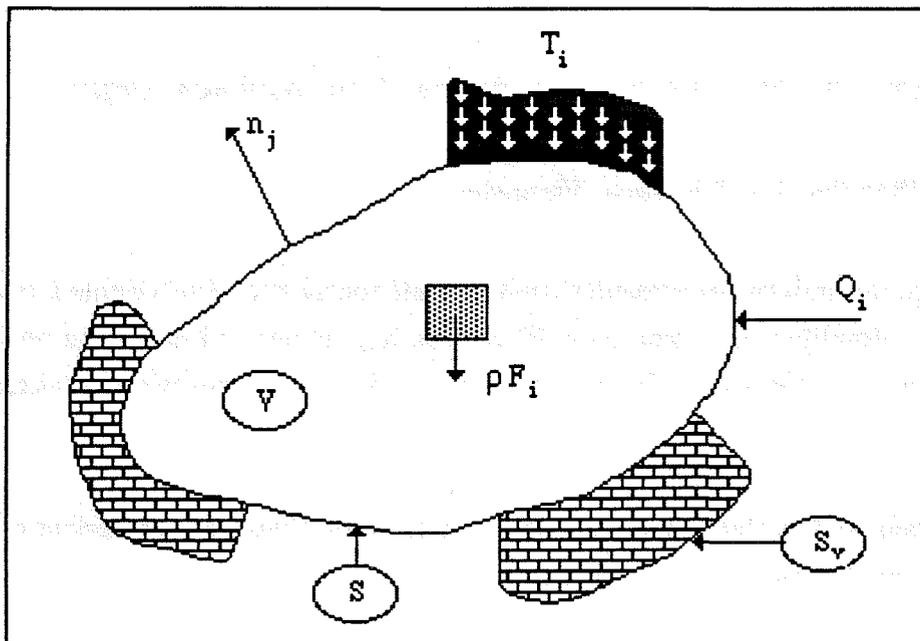


Figure II.3 : Corps solide en équilibre avec conditions aux limites et chargement extérieur.

Nous prenons pour notation :

$T_i$  = forces de surfaces, appliquées à l'unité de surface extérieure du corps,

$Q_i$  = forces extérieures concentrées,

$\rho F_i$  = forces de volume,

$\underline{\sigma}$  = tenseur des contraintes de Cauchy,

$n_j$  = normale extérieure.

En grandes déformations, on distingue deux types de chargement surfacique :

- la charge morte, où les efforts appliqués sont donnés par unité de surface dans la configuration initiale de référence avec l'équivalence :

$$T_0 \, dS_0 = T_t \, dS_t \quad (2.55)$$

- la charge hydrostatique, où les efforts sont donnés par unité de surface dans la configuration actuelle et évoluent avec la géométrie selon la formule de NANSON (1.11).

On définit les tenseurs de vitesses, conjugués aux différents tenseurs de contraintes, grâce à l'expression des puissances massiques des efforts intérieurs :

$$\frac{\underline{\sigma}}{\rho_t} : \underline{D} = \frac{\underline{\tau}}{\rho_0} : \underline{D} = \frac{\underline{\pi}}{\rho_0} : \underline{\dot{E}} = \frac{\underline{\Theta}}{\rho_0} : \underline{\dot{E}} \quad (2.56)$$

la relation (2.56) définit sans ambiguïté les couples de tenseurs énergétiquement conjugués à utiliser pour exprimer convenablement la formulation variationnelle (Hill, 1968).

Sous l'action des efforts extérieurs, il apparaît dans le solide des efforts intérieurs qui équilibrent les efforts extérieurs.

Le principe des déplacements virtuels conduit au bilan des travaux virtuels interne et externe :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \rho F_i \delta u_i dV + \int_T T_i \delta u_i dS + Q_i \delta u_i \quad (2.57)$$

écrit pour toute variation  $\delta u_i$  des déplacements cinématiquement admissibles où  $\delta \varepsilon_{ij}$  désignent les variations virtuelles des déformations. On notera que cette relation est indépendante de la loi de comportement.

Soit  $v^*$  un champ virtuel de vitesse, cinématiquement admissible à zéro sur  $S_V$ .

Pour une charge morte, les différentes formes du Principe des Puissances Virtuelles s'écrivent :

\* Forme eulérienne :

avec le tenseur de contrainte d'Euler-Cauchy :

$$\int_{V_t} \underline{\sigma} : \underline{D}(v^*) dV_t = \int_{V_t} \rho_t F \cdot v^* dV_t + \int_{S_t} T^t \cdot v^* dS_t \quad (2.58)$$

\* Formes lagrangiennes :

- avec le tenseur de contrainte de Kirchhoff :

$$\int_{V_0} \underline{\tau} : \underline{D}(v^*) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 F \cdot v^* dV_0 + \int_{S_0} T^0 \cdot v^* dS_0 \quad (2.59)$$

- avec le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff (PK1) :

$$\int_{V_0} \underline{Q} : \dot{\underline{E}}(v^*) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 F \cdot v^* dV_0 + \int_{S_0} T^0 \cdot v^* dS_0 \quad (2.60)$$

- avec le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff (PK2) :

$$\int_{V_0} \underline{\pi} : \dot{\underline{E}}(v^*) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 F \cdot v^* dV_0 + \int_{S_0} T^0 \cdot v^* dS_0 \quad (2.61)$$

## II - 4 - 2 Formulation incrémentale

La forme variationnelle des équations d'équilibre du solide utilisée dans la Méthode des Eléments Finis s'exprime soit sous l'une des formes du Théorème des Puissances Virtuelles, soit sous des formes "taux" ou "incrémentales" dérivées des formules précédentes, mieux adaptées à la résolution numérique des équations non-linéaires d'équilibre.

Nous avons utilisé une version incrémentale portant sur les contraintes et non sur les incréments de contraintes.

Afin d'obtenir, entre deux configurations, une formulation incrémentale correcte avec un intervalle fini de temps non nécessairement petit, nous procédons par différence des expressions du Théorème des Puissances Virtuelles sur les deux configurations, en prenant soin de l'exprimer sur une même configuration.

En effet, les opérations d'additivité ne peuvent être définies qu'entre quantités rapportées à la même configuration. On utilise donc des grandeurs qui décrivent une configuration, définies et mesurées dans une autre configuration.

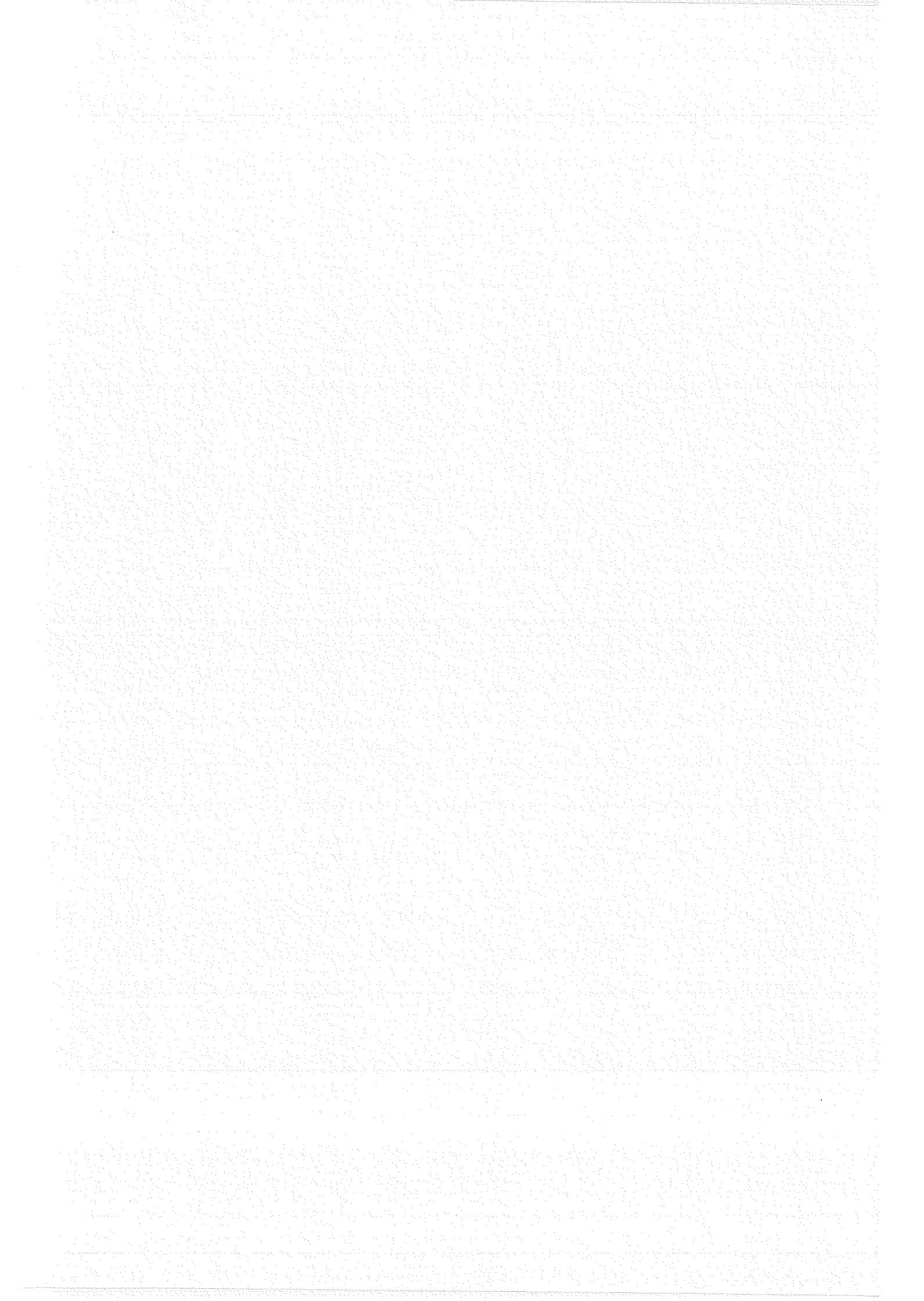
A partir de la formulation (2.59) et de la définition de la dérivée de Jaumann, on obtient la forme la plus adaptée à l'algorithme d'intégration implicite retenu :

$$\int_V \Delta \tau^J : D - (2 \Delta D \cdot \tau) : D + \tau : (\text{grad} \Delta u \cdot \text{grad} v) ] dV =$$
$$\int_V \rho (F + \Delta F) \cdot v dV + \int_S (T + \Delta T) \cdot v dS - \int_V \tau : D dV \quad (2.62)$$

### Remarques :

- Il apparaît que la description cinématique des grandes déformations constitue un obstacle géométrique important. Les configurations successives occupées par le solide étant distinctes, il est essentiel de toujours préciser dans quelle configuration les calculs sont effectués.
- Dans une formulation le choix de la loi de comportement et le choix du Principe des Puissances Virtuelles sont indépendants, néanmoins certains choix sont plus adéquats que d'autres selon le type de problème.

**- En pratique, la loi de comportement est introduite sous forme incrémentale, c'est pourquoi nous utiliserons de façon exclusive les formes incrémentales.**





**CHAPITRE III**  
**CONTACT ET FROTTEMENT**



## CHAPITRE III

### CONTACT ET FROTTEMENT

#### III - 1 INTRODUCTION

Les problèmes de contact entre solides sont fréquemment rencontrés en mécanique des structures.

En effet, dans les domaines de la mise en forme par déformation permanente (profilage, emboutissage, forgeage), de la construction mécanique, du génie civil, les processus de contact avec ou sans frottement jouent un rôle prédominant.

Le contact s'établit entre deux corps : le premier, déformable, est appelé "la structure" (métal, sol), le second, rigide ou déformable, est nommé "la fondation" ou "le contacteur" (outil, pieu).

De grands déplacements relatifs entre les deux corps peuvent avoir lieu et les surfaces de contact ne sont pas toujours lisses ; elles présentent souvent des discontinuités de pentes (aspérités). L'entrée en contact des deux corps s'accompagne alors de déformation plastique ou de la rupture de ces aspérités.

Nous supposons que la taille des aspérités est très faible vis à vis des autres dimensions des corps et de la taille des éléments finis utilisés. Il paraît alors plus logique d'abandonner le concept microscopique pour aborder un concept macroscopique du contact.

Nous supposons également qu'aucun lubrifiant ou polluant n'influence le frottement entre les deux corps : nous nous plaçons dans le cas de frottement sec.

Il est reconnu que le contact avec lubrifiant exige l'utilisation d'autres lois de frottement plus élaborées dont l'expression convenable est très difficile à établir.

Actuellement, la méthode des éléments finis permet de discrétiser spatialement des surfaces de formes quelconques et de prendre en compte des conditions aux limites diverses. Il en résulte qu'elle constitue un outil apte à simuler les problèmes de contact.

L'objectif de ce travail est donc :

- d'analyser les différentes méthodes de résolution du problème de contact entre deux corps dont l'un au moins est déformable,
- de développer un algorithme qui permet de traiter de façon fiable et efficace le problème sur micro-ordinateur, en ayant à l'esprit que :
  - le solide peut présenter de grandes déformations et de grandes rotations,
  - le contact peut être adhérent ou glissant, avec ou sans frottement,
  - le contact peut apparaître et disparaître à de multiples reprises pendant le chargement,
  - la forme des surfaces de contact peut présenter des discontinuités de pente,
  - l'équilibre des forces en présence doit être respecté au mieux,
  - un point quelconque de la surface de la structure peut entrer en contact avec un point quelconque de la fondation.

### **III - 2 LOIS DE CONTACT ET DE FROTTEMENT**

#### **III - 2 - 1 Introduction**

Le milieu continu est supposé parfaitement déterminé, à tout instant  $t$ , par la connaissance des informations suivantes :

- \* la configuration  $C(t)$ , c'est à dire l'ensemble des positions de ses particules,
- \* l'état des variables internes : les contraintes de Cauchy-Euler  $\sigma$  et les paramètres d'érouissage qui sont reliés par les équations d'équilibre, la loi de comportement du solide et la loi de contact et frottement.

Pour les deux corps en contact la surface réelle du contact et les forces dans cette zone font partie des inconnues du problème. La surface de contact peut connaître également une évolution au cours du chargement.

Dans notre cas, comme le contact a lieu entre un solide rigide et un solide déformable, la surface de contact reste celle géométriquement imposée par le déplacement du solide.

### III - 2 - 2 Cinématique au voisinage d'une particule matérielle candidate au contact

Nous allons étudier le cas particulier de l'espace à deux dimensions (El Mouatassim, 1989), (They et al., 1992).

Soient deux corps soumis au contact : A le contacteur et B la structure.

Considérons ensuite  $P_1$  et  $P_2$  deux noeuds maîtres de A de coordonnées respectives  $X_{P_1}$  et  $X_{P_2}$  et  $P'$  un noeud esclave de B de coordonnées  $X_{P'}$ .

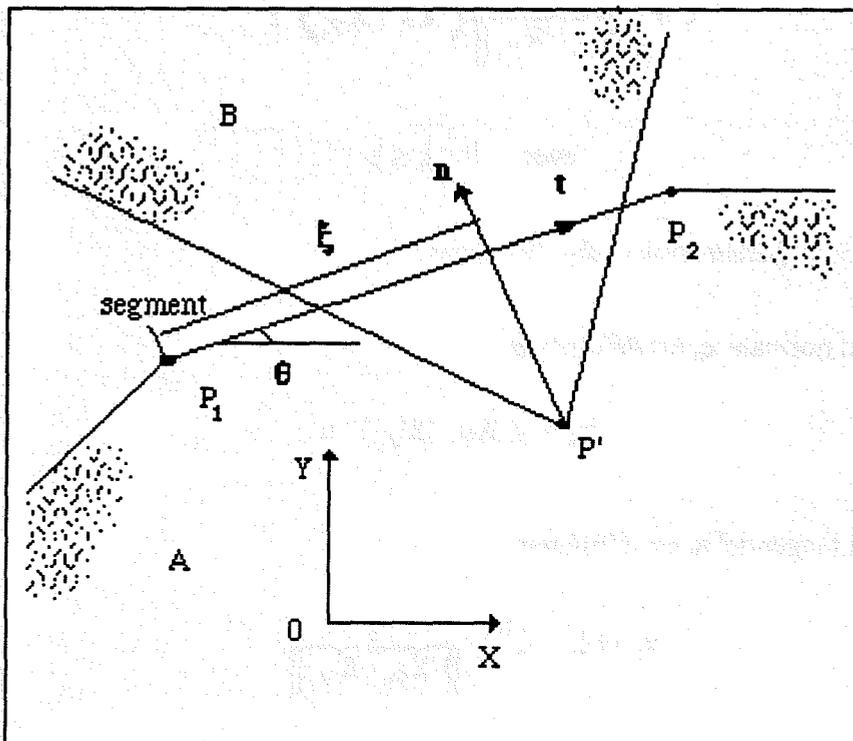


Figure III.1 : Noeuds maîtres et noeud esclave appartenant respectivement au contacteur A et à la structure B.

Définissons toutes les quantités qui nous seront utiles pour établir la formulation numérique.

\* Définition des vecteurs normal et tangentiel dans le plan :

Le vecteur unitaire tangentiel  $\mathbf{t}$  est défini par :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\| \mathbf{X}_{P_2} - \mathbf{X}_{P_1} \|} ( \mathbf{X}_{P_2} - \mathbf{X}_{P_1} ) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Le vecteur unitaire normal au plan  $\mathbf{n}$  a pour coordonnées :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

\* *Définition de la coordonnée curviligne :*

Pour suivre l'évolution du point de contact, nous définissons une coordonnée normalisée  $x$  obtenue par projection du point  $P'$  de la structure sur le segment  $[P_1, P_2]$  du contacteur, soit :

$$\xi = \frac{1}{\| \mathbf{X}_{P_2} - \mathbf{X}_{P_1} \|} \langle \mathbf{X}_{P'} - \mathbf{X}_{P_1} \rangle \cdot \mathbf{t} \quad (3.3)$$

$$\text{avec : } 0 \leq \xi \leq 1$$

\* *Définition de la pénétration et du glissement :*

La pénétration normale  $x_n$  est définie par :

$$x_n = \langle \mathbf{X}_{P'} - \mathbf{X}_{P_1} \rangle \cdot \mathbf{n} \quad (3.4)$$

Le glissement tangentiel  $x_t$  est défini par :

$$x_t = (\xi - \xi^0) \frac{1}{\| \mathbf{X}_{P_2} - \mathbf{X}_{P_1} \|} \quad (3.5)$$

où  $\xi^0$  est la coordonnée normalisée initiale de la particule  $P'$ .

La différence  $(\xi - \xi^0)$  représente le glissement de la particule  $P'$  sur le segment considéré.

\* *Variation du vecteur normal  $\mathbf{n}$  et du vecteur tangentiel  $\mathbf{t}$  :*

Les variations sont données par (Simo et al., 1985) :

$$\delta \mathbf{n} = - \frac{1}{\| \mathbf{X}_{P_2} - \mathbf{X}_{P_1} \|} [\mathbf{t} \ \langle \mathbf{n} \rangle] \left( \delta \mathbf{X}_{P_2} - \delta \mathbf{X}_{P_1} \right) \quad (3.6)$$

$$\delta \mathbf{t} = - \frac{1}{\| \mathbf{X}_{P_2} - \mathbf{X}_{P_1} \|} [\mathbf{n} \ \langle \mathbf{n} \rangle] \left( \delta \mathbf{X}_{P_2} - \delta \mathbf{X}_{P_1} \right) \quad (3.7)$$

\* *Variation de la distance normale et du glissement :*

La variation de la distance normale est donnée par :

$$\delta x_n = \langle \delta \mathbf{X}_{P_2} - \delta \mathbf{X}_{P_1} \rangle \mathbf{n} + \langle \delta \mathbf{X}_{P_1} - \delta \mathbf{X}_{P_2} \rangle \delta n \quad (3.8.a)$$

La variation de la distance de glissement est :

$$\delta x_t = \langle \delta \mathbf{X}_{P_2} - \delta \mathbf{X}_{P_1} \rangle \mathbf{t} + \langle \delta \mathbf{X}_{P_1} - \delta \mathbf{X}_{P_2} \rangle \delta t - \xi^0 \delta l \quad (3.8.b)$$

Nous pouvons alors écrire plus simplement :

$$\delta x_n = \langle \delta \mathbf{X} \rangle \mathbf{c}_n^s \quad (3.9.a)$$

et

$$\delta x_t = \langle \delta \mathbf{X} \rangle \mathbf{c}_t^s \quad (3.9.b)$$

avec :

$$\delta \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \delta X_{P_1} \\ \delta X_{P_2} \end{Bmatrix} \quad (3.9.c)$$

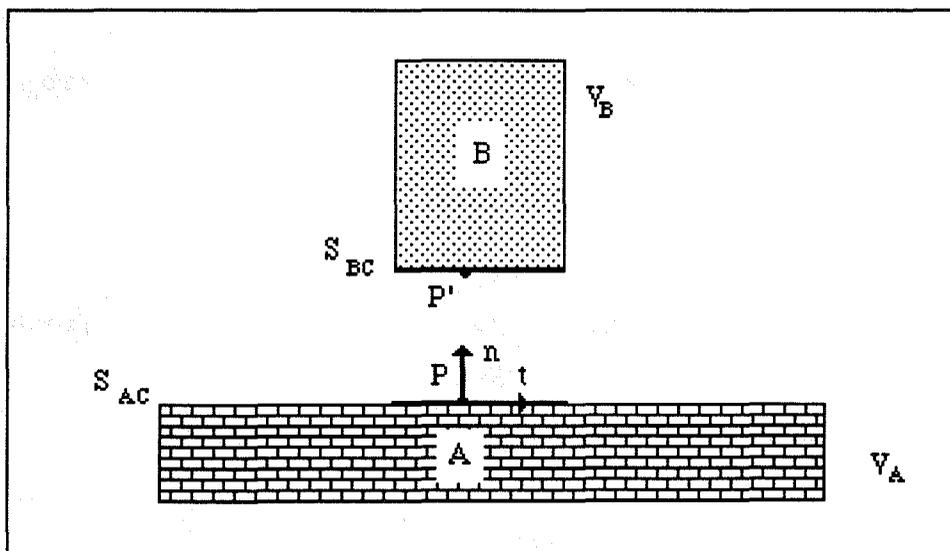
$$\mathbf{c}_n^s = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ (1 + \xi) \sin \theta \\ -(1 - \xi) \cos \theta \\ \xi \sin \theta \\ -\xi \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (3.9.d)$$

$$c_t^s = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -(1 - \xi^0) \cos \theta + \frac{x_n}{l} \sin \theta \\ -(1 - \xi^0) \sin \theta - \frac{x_n}{l} \cos \theta \\ -\xi^0 \cos \theta - \frac{x_n}{l} \sin \theta \\ -\xi^0 \cos \theta + \frac{x_n}{l} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.9.e)$$

$$\text{avec } l = \| X_{P_2} - X_{P_1} \|$$

\* *Application au contact - frottement :*

Soient deux solides A et B, de volumes  $V_A$  et  $V_B$ , de surfaces externes  $S_A$  et  $S_B$  et deux ensembles  $S_{AC}$  et  $S_{BC}$  de surfaces incluant les particules "candidates au contact" : une telle particule P appartenant à  $S_{AC}$  est une particule qui risque, compte tenu des caractéristiques géométriques et mécaniques du problème, d'entrer en contact avec le solide B. Supposons que l'on sélectionne une particule P' de  $S_{BC}$  la plus proche de P. Nous faisons cela pour exprimer la "non pénétration" du solide A dans le solide B, i.e. toutes les particules P candidates au contact, appartenant à  $S_{AC}$ , sont bien extérieures au solide B.



**Figure III.2 :** Problème du contact avec frottement. Définition du repère orthonormé et des deux surfaces candidates au contact.

Nous définissons un repère local de contact d'origine P et de vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  orienté selon  $\mathbf{PP}'$ ,  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  choisis arbitrairement dans le plan normal en P à  $\mathbf{n}$  et tels que  $\mathbf{R} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$  soit un repère orthonormé direct (Fig. III.2).

On note :

- $x$  : coordonnée de P' dans R,
- $\mathbf{v}$  : vitesse relative de P par rapport P',
- $\mathbf{r}$  : réaction dans le repère R.

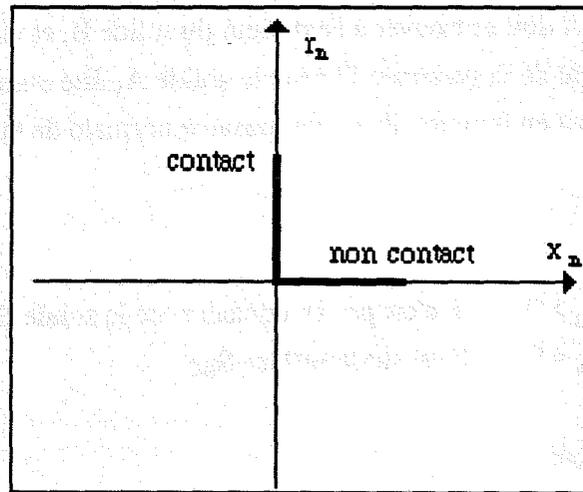


Figure III.3 : Graphe de contact.  
Relation entre  $x_n$  et  $r_n$ .

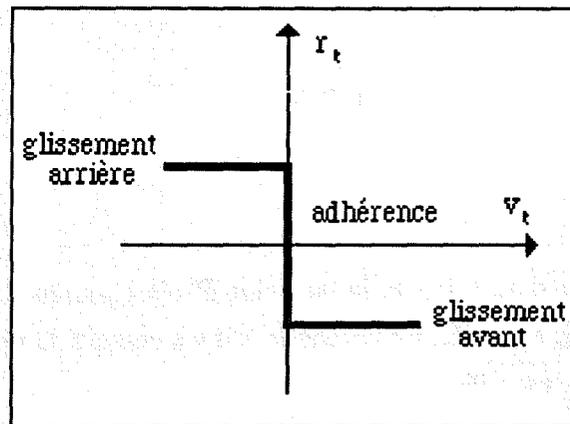


Figure III.4 : Graphe de frottement.  
Relation entre  $v_t$  et  $r_t$ .

Par construction :  $x_t = 0$  et  $x_n = \mathbf{PP}'$

Nous pouvons également représenter schématiquement les liens existant entre  $x_n$  et  $r_n$  (graphe de contact) ainsi qu'entre  $v_t$  et  $r_t$  (graphe de frottement).

Nous définissons, de même, les composantes normale et tangentielle de  $r$  :  $r_n$  et  $r_t$ .

### III - 2 - 3 Lois de contact

- *Condition de non pénétration* :

A tout instant  $t$ , le solide A doit se trouver à l'extérieur du solide B, et vice et versa. La condition d'impénétrabilité de la particule P' dans le solide A, dite aussi condition de contact cinématique, s'écrit en fonction de la composante normale de la position de la particule P', dans

R :

$$x_n > 0 \quad \text{P n'est pas en contact avec le solide B} \quad (3.10)$$

$$x_n = 0 \quad \text{P est sur la surface } S_{BC} \quad (3.11)$$

- *Condition de non adhésion* :

La condition de non adhésion, dite aussi condition de contact statique, exprime que le solide A ne doit pas empêcher la particule P' de décoller. Elle s'écrit en fonction de la composante normale, dans R, de la réaction  $r$  exercée par le solide A sur la particule P' du solide B :

$$r_n \geq 0 \quad (3.12)$$

- *Tautologie* :

Cette condition traduit que si  $x_n > 0$ , i.e. la particule P' n'est pas en contact avec le solide A, alors la réaction  $r_n$  est nulle. En revanche, s'il y a contact, la réaction  $r_n$  n'est pas nulle mais la distance  $x_n$  est nulle.

Cette condition s'écrit :

$$x_n r_n = 0 \quad (3.13)$$

Les formes duales équivalentes aux relations ci-dessus s'écrivent :

\* si l'on privilégie la réaction normale de contact  $r_n$  :

$$r_n \geq 0 \quad \forall s_n \geq 0 \quad (s_n - r_n) x_n \geq 0 \quad (3.14.a)$$

\* si l'on privilégie la distance normale  $x_n$  :

$$x_n \geq 0 \quad \forall y_n \geq 0 \quad (y_n - x_n) r_n \geq 0 \quad (3.14.b)$$

Les formes précédentes s'adaptent bien à l'application des algorithmes numériques destinés à la résolution des inéquations variationnelles (Gauss-Seidel avec projection, gradient projeté de Rosen, etc...).

Pour pouvoir mettre en équation le problème de contact, les conditions cinématique et statique du contact doivent être complétées par une loi de frottement. Nous allons donc étudier diverses lois de frottement existants.

### III - 2 - 4 Lois de frottement

Les lois de frottements les plus utilisées dérivent soit du modèle de Coulomb, soit de lois de frottement non locales, soit de modèles avec surface seuil de frottement et lois de comportement.

- *Modèle de Coulomb* :

Dans le cas de contact isotrope, la loi de frottement fourni par le modèle de Coulomb exprime que la cission limite est proportionnelle à la pression normale. Elle s'écrit :

$$|r_t| \leq \mu r_n \quad \text{si} \quad v_t = 0 \quad (3.15)$$

$$r_t = -\mu r_n \frac{v_t}{|v_t|} \quad \text{si} \quad |v_t| \neq 0 \quad (3.16)$$

où

$\mu$  est le coefficient de frottement de Coulomb,

$v_t$  est la vitesse tangentielle relative de la particule P par rapport à P',

$r_t$  est la composante tangentielle de la réaction du solide B sur le solide A,

$r_n$  est la composante normale de la réaction du solide B sur le solide A

- Autre écriture du Modèle de Coulomb :

La forme équivalente suivante peut être envisagée (Kallala, 1991) :

$$|r_t| < \mu |r_n| \Rightarrow v_t = 0 \quad (3.17)$$

$$|r_t| = \mu |r_n| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } v_t = \lambda r_t$$

Elle introduit un seuil de frottement à partir du rapport des composantes dans le repère local des forces de contact.

- *Modèle de Tresca* :

Ce modèle exprime une relation linéaire entre la réaction tangentielle  $r_t$  et la réaction normale limite d'écoulement  $r_0$  :

$$|r_t| = -\mu \frac{r_0}{\sqrt{3}} \frac{v_t}{|v_t|} \quad (3.18)$$

$\mu$  est le coefficient de frottement de Tresca

- *Modèles de frottement non local* :

On peut également considérer la déformabilité des aspérités et en déduire que le phénomène de frottement est non local, autrement dit, qu'il dépend de la mécanique de toute l'aspérité dont la taille joue un rôle important :

$$|\sigma_t| \leq \mu S_\rho(\sigma_n) \quad \text{si} \quad v_t = 0 \quad (3.19.a)$$

$$|\sigma_t| = \mu S_\rho(\sigma_n) \quad \text{si} \quad |v_t| \neq 0 \quad (3.19.b)$$

$$\text{où} \quad S_\rho(\sigma_n)(x) = \int_{S_c} \omega_\rho(|x-y|) \sigma_n(y) dy \quad (3.19.c)$$

$\sigma_t$ ,  $\sigma_n$  et  $\mu$  sont respectivement la contrainte tangentielle, la contrainte normale et le coefficient de frottement dans le modèle de coulomb.

$S_\rho$  est la fonction qui permet de répartir la contrainte normale  $\sigma_n$  sur la surface  $S_c$  en contact de l'aspérité.

- *Modèle de frottement "élastoplastique" :*

Par analogie avec l'élastoplasticité, ce modèle est basé sur les principes suivants :

\* décomposition de la distance de contact :

distance de contact "d"  
=  
distance d'adhérence réversible "d<sup>a</sup>" + distance de glissement non réversible "d<sup>s</sup>"

$$d = d^a + d^s = (d_n^a + d_n^s) + (d_t^a + d_t^s) \quad (3.20)$$

où  $d_n$  est la distance normale et  $d_t$  la distance tangentielle ; les variables internes  $d_t^a$  et  $d_t^s$  sont respectivement comparable à la déformation élastique réversible et la déformation plastique irréversible.

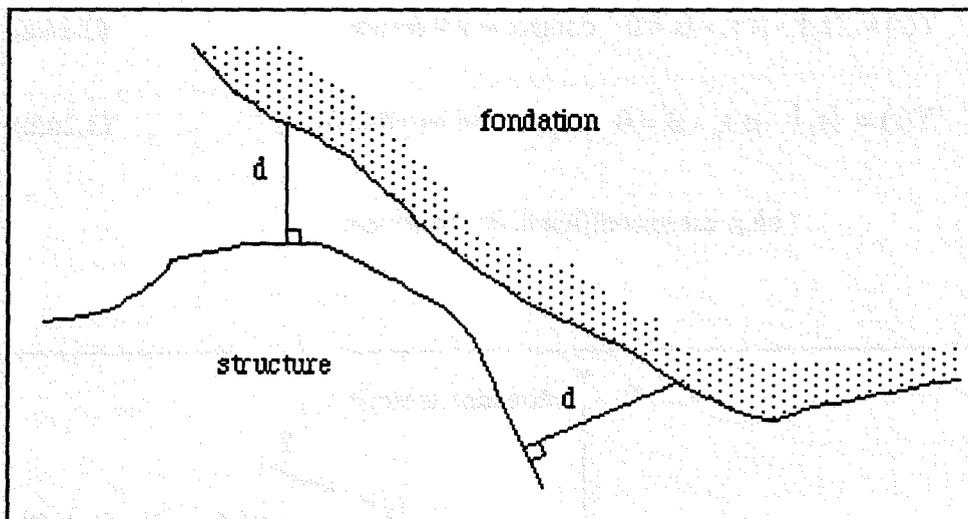


Figure III.5 : Définition de la distance d'interpénétration d.

\* relations : réaction-adhérence, réaction-rodage et réaction-usure :

Le modèle distingue trois types de réactions :

\* la réaction de contact liée à la distance d'adhérence :

$$\begin{Bmatrix} r_n \\ r_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n^a \\ d_t^a \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

\* la réaction de rodage liée à la distance de glissement :

$$r_t^s = q_t d_t^s \quad (3.22)$$

\* la réaction d'usure liée à la distance de glissement cumulée :

$$r^c = q d^c \quad (3.23)$$

où  $k_n$ ,  $k_t$ ,  $q_t$  et  $q$  sont les coefficients de pénalisation qui représentent le comportement moyen des aspérités des surfaces de contact.

\* critère de glissement :

Ce critère permet de faire la distinction entre contact adhérent et contact glissant.

Dans le cas du modèle de Coulomb, il s'écrit :

$$Y(r) = |r_t| - \mu r_n - B < 0 \quad \text{contact et adhérence} \quad (3.24.a)$$

$$Y(r) = |r_t| - \mu r_n - B = 0 \quad \text{séparation ou glissement} \quad (3.24.b)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement.

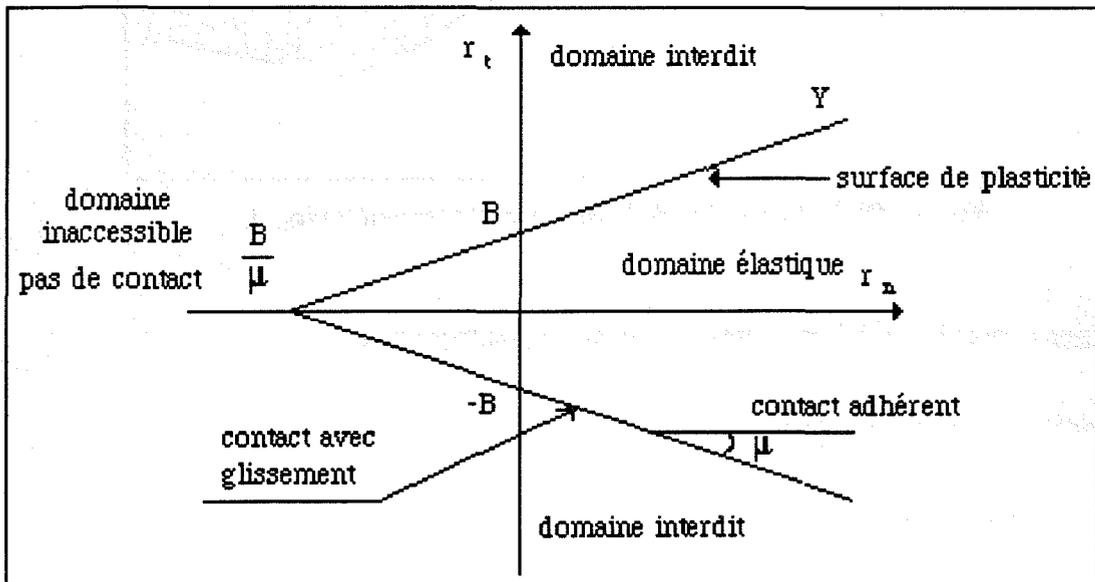


Figure III.6 : Analogie contact - plasticité : différents domaines de contact.

**Remarque :**

L'évolution du coefficient de frottement en fonction de l'usure est souvent introduite dans le critère de glissement sous la forme :

$$Y(r, r^c) = |r_t| - \mu(r^c) r_n \leq 0 \quad (3.25)$$

ce qui traduit l'ouverture ou la fermeture du cône de frottement.

\* loi de glissement :

Le calcul de la distance de glissement nécessite l'introduction d'un potentiel de glissement :

$$Z(r, r^s, r^c)$$

Le glissement irréversible est évalué à partir de :

$$\dot{d}^s = \lambda \frac{dZ}{dr^s} \quad (3.26)$$

$\lambda$  est le coefficient exprimant la colinéarité de la vitesse de glissement et le vecteur normal au potentiel  $Z$ .

### III - 2 - 5 Conclusion

Plusieurs lois de contact et de frottement peuvent être considérées. Nous retiendrons la première forme du modèle de Coulomb qui est la plus souvent utilisée en mécanique et en génie civil. De par le caractère modulaire du logiciel, l'introduction de nouvelles lois de contact ne pose aucun problème.

## III - 3 INEQUATIONS DE CONTACT ET DE FROTTEMENT

### III - 3 - 1 Introduction

Pour modéliser le contact, nous pouvons nous placer dans l'une des deux hypothèses suivantes :

*Première hypothèse* : nous modélisons le contact avec des conditions bilatérales.

Avantage : le problème est fondé sur des équations variationnelles.

Inconvénient : seuls les problèmes pour lesquels la surface de contact est connue a priori peuvent être étudiés.

*Deuxième hypothèse* : nous modélisons le contact avec des conditions unilatérales.

Avantage : c'est le cas général.

Inconvénient : le problème est basé sur des inéquations variationnelles (introduction des conditions d'impénétrabilité et de non-adhésion).

Les difficultés principales du problème de contact proviennent du fait que les conditions aux limites liées au contact ne sont pas connues à l'avance et qu'elle dépendent de la solution du problème.

Les méthodes usuelles utilisées pour la résolution des problèmes non-linéaires ne sont pas efficaces pour résoudre des inéquations variationnelles de contact avec frottement.

### III - 3 - 2 Equations d'équilibre couplées avec les inéquations de contact et de frottement

Ecrivons l'équilibre global du solide par le principe des puissances virtuelles :

$$P(t, v^*) = P_{\text{int}}(t, v^*) + P_{\text{ext}}(t, v^*) + P_{\text{cnt}}(t, v^*) \quad (3.27)$$

où :

$v^*$  : champ de vitesses cinématiquement admissible,

$P_{\text{int}}$  : puissance virtuelle des efforts internes,

$P_{\text{ext}}$  : puissance virtuelle des efforts extérieurs,

$P_{\text{cnt}}$  : puissance virtuelle des efforts de contact.

Le calcul de  $\{ F_{\text{cnt}} \}$  est délicat à cause des inéquations définissant le problème.

### III - 3 - 3 Linéarisation du résidu

Nous calculons la valeur  $x$  qui annule par la méthode de Newton-Raphson le résidu non linéaire  $\{R(x)\}$ . Ensuite à partir d'un point  $x_i$ , nous linéarisons le résidu au voisinage de  $x_i$  et nous définissons  $x_{i+1}$  comme solution du système linéarisé :

$$\left[ \left[ \frac{\partial F_{int}(x)}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial F_{ext}(x)}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial F_{cnt}(x)}{\partial x} \right] \right]_{x=x_i} \{ \Delta x \} = - \{ R(x_i) \} \quad (3.28.a)$$

et  $x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad (3.28.b)$

Pour résoudre un problème non-linéaire, la méthode de Newton-Raphson consiste à faire quelques itérations avant d'atteindre la solution du problème linéarisé

Nous définissons alors deux matrices de rigidité du solide :

1 - une première correspondant à la matrice de rigidité tangente du solide et des efforts extérieurs :

$$[ K_T ] = \left[ \frac{\partial F_{int}(x)}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial F_{ext}(x)}{\partial x} \right] \quad (3.29)$$

2 - une seconde correspondant à la matrice de rigidité tangente du contact :

$$[ K_C ] = \left[ \frac{\partial F_{cnt}(x)}{\partial x} \right] \quad (3.30)$$

Le problème revient alors à évaluer les réactions de contact  $\{F_{cnt}(x)\}$  et  $[K_C]$ .

#### III - 3 - 3 - 1 Méthode de pénalisation

Dans un premier temps nous approchons les graphes non différentiables des figures III-3 et III-4 en graphes différentiables par morceaux.

Nous obtenons alors :

\* pour la réaction normale :

$$\begin{aligned} \text{si } x_n \geq 0 & \text{ alors } r_n = 0 \\ \text{si } x_n < 0 & \text{ alors } r_n = k_n x_n \end{aligned}$$

Nous représentons ce système d'inégalités par le graphe de la figure III.7.

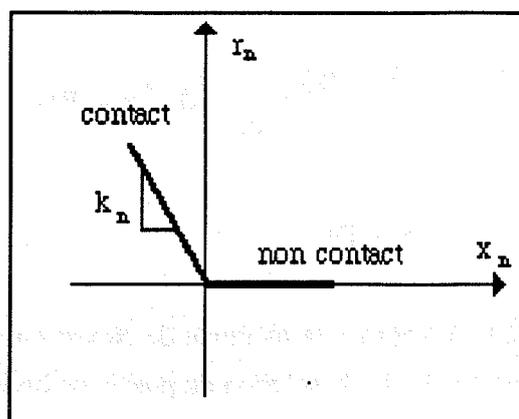


Figure III.7 : Graphe différentiable de contact.

\* pour la réaction tangentielle

$$\text{si } |v_t| \geq v_a \text{ alors } r_t = \mu r_n \frac{v_t}{|v_t|}$$

$$\text{si } |v_t| < v_a \text{ alors } r_t = k_t x_t$$

Cette fois, nous obtenons la figure III.8 :

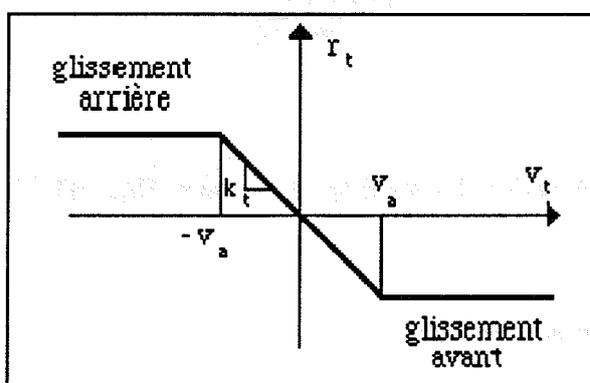


Figure III.8 : Graphe différentiable de frottement.

$k_n$  et  $k_t$  sont des coefficients de pénalisation qui doivent être :

- suffisamment grands pour que la pénétration et le glissement tangentiels adhèrent entre les solides de contact soient faibles,

- suffisamment petits pour que la matrice de contact soit bien conditionnée (Annexe I).

L'analyse géométrique des positions des noeuds candidats au contact est effectuée à chaque itération également selon un schéma de type Newton-Raphson.

Le chargement extérieur est appliqué par accroissements successifs à cause du comportement non réversible du frottement et éventuellement de la loi de comportement du solide.

Par hypothèse :

- \* la configuration  $C(t)$ , en équilibre sous le chargement extérieur, est telle que son champ de déplacement est cinématiquement admissible et que son champ de contrainte est statiquement admissible.
- \* les réactions de contact respectent la loi de frottement.

Rappelons qu'à l'instant  $t$ , nous connaissons :

- \* la position des particules :  $x(t)$ ,
- \* le tenseur des contraintes :  $\sigma(t)$ ,
- \* les réactions de contact :  $F_{\text{cnt}}(t)$ ,
- \* les variables internes.

Par contre à l'instant  $t+\Delta t$ , on ne connaît que  $x(t+\Delta t)$ .

Pour déterminer la configuration  $C(t+\Delta t)$ , nous appliquons :

- le chargement extérieur par incréments (discrétisation temporelle),
- le schéma itératif de Newton-Raphson pour assurer l'équilibre.

A chaque itération, nous testons le statut de chaque noeud candidat au contact :

- \* si  $x_n \geq 0$  alors pas de contact et  $r_n = 0$
- \* si  $x_n < 0$  alors contact et  $r_n = k_n x_n$

A partir de la distance tangentielle  $x_t = v_t \Delta t$ , nous calculons  $r_t = k_t x_t$  :

\* si  $|r_t| \geq \mu |r_n|$  alors nous sommes en situation de contact glissant et de ce fait :

$$r_t = \mu r_n \frac{v_t}{|v_t|} \quad (3.31)$$

\* si  $|r_t| < \mu |r_n|$  alors nous avons cette fois un contact adhérent et alors :

$$r_t = k_t x_t \quad (3.32)$$

Nous procédons ensuite à l'assemblage des efforts aux noeuds :

$$\{F_{cnt}\} = \underset{s=1}{\overset{s}{\mathbf{A}}} \{f_{cnt}^s\} \quad (3.33a)$$

avec

$$f_{cnt}^s = r_n^s c_n^s + r_t^s c_t^s \quad (3.33b)$$

La matrice de rigidité tangente du contact est alors l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires :

$$K_C = \underset{s=1}{\overset{s}{\mathbf{A}}} K_c^s \quad (3.34)$$

avec :

\* pour le contact adhérent :

$$K_c^s = k_n \{c_n^s\} \langle c_n^s \rangle + k_t \{c_t^s\} \langle c_t^s \rangle \quad (3.35)$$

\* pour le contact glissant :

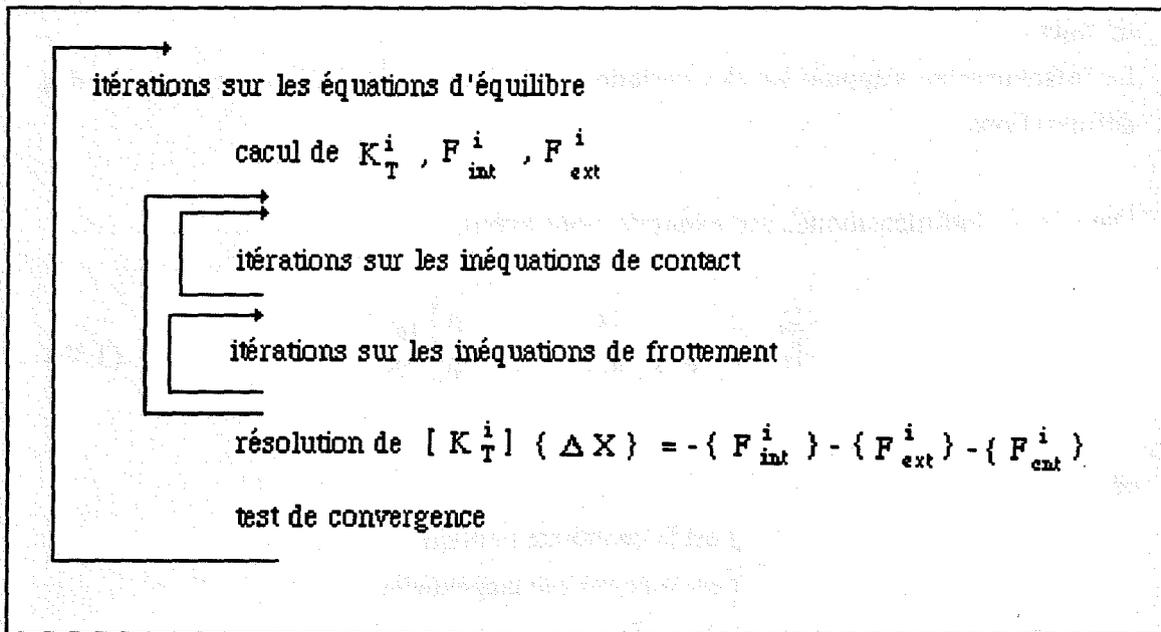
$$K_c^s = k_n \{c_n^s\} \langle c_n^s \rangle \quad (3.36)$$

$c_n^s$  et  $c_t^s$  sont définis selon les formules 3.9.

### III - 3 - 3 - 2 Autres méthodes

- méthode de résolution directe :

Cette méthode, proposée par Jean et Touzot (1988), consiste d'abord à condenser le système d'équations aux noeuds candidats au contact puis, à minimiser le système d'équations non-linéaires sous contact. Elle est résumée par l'organigramme suivant (Organigramme III.1) :



**Organigramme III.1** : Organigramme de la méthode de Jean et Touzot (1988).

*- méthode des multiplicateurs de Lagrange :*

Cette première méthode consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange  $A_n$  et  $A_t$ , représentant respectivement les réactions normales et tangentielles, dans l'écriture des équations d'équilibre du solide. Ceci a l'avantage de vérifier exactement les conditions de contact et de frottement. En revanche, cette méthode a l'inconvénient d'augmenter le nombre d'inconnues et d'être alors obligé d'utiliser des méthodes de résolution appropriées. Parmi celles-ci, citons par exemple les méthodes de décomposition par partitionnement des variables du système d'équations globales qui tiennent compte des zéros (correspondant aux réactions de contact  $A_n$  et  $A_t$ ) apparaissant sur la diagonale de la matrice de rigidité.

*- méthode du Lagrangien perturbé :*

C'est une combinaison de la méthode de pénalité et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange distinguant le cas du frottement adhérent du cas de frottement glissant. Son utilisation peut être considérée comme une amélioration de la méthode de pénalité en évitant l'emploi de coefficients de pénalité trop grands qui perturbent le conditionnement de la matrice de rigidité.

- méthode des éléments finis de contact avec seuil :

Des éléments finis de contact bi- et tri-dimensionnels ont été développés par Charlier et Cescotto (1985). Ils reposent sur l'hypothèse du frottement sec de type Coulomb. Ils peuvent modéliser des problèmes de grandes déformations en autorisant de grands pas de calcul.

Le raisonnement s'appuie sur des variations infiniment petites des contraintes et des déformations.

Dans le cas bidimensionnel, par exemple, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ \phi K_p \operatorname{sgn} \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

où :

- p est la contrainte normale,
- $\tau$  est la contrainte tangentielle,
- $\phi$  est le frottement interne,
- u et v sont les déplacements.

Nous avons par ailleurs:

$$\begin{aligned} p &= K_p u \\ \tau &= K_t v \end{aligned}$$

Un élément fini de frontière est ensuite élaboré. Cet élément fini doit être compatible avec les éléments de structure adjacents. Les coordonnées et les déplacements sont obtenus par les mêmes fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned} x &= N_i(\zeta) x_i & u &= N_i(\zeta) u_i \\ y &= N_i(\zeta) y_i & v &= N_i(\zeta) v_i \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec  $i = 1$  à 3.

- $x_i, y_i$  sont les coordonnées nodales,
- $u_i, v_i$  sont les déplacements nodaux,
- $N_i(\zeta)$  sont les fonctions d'interpolation.

Les axes globaux sont  $(e_x, e_y)$  et les axes locaux à l'élément sont  $(e_u, e_v)$ ,  $e_u$  étant orienté vers l'intérieur du corps.

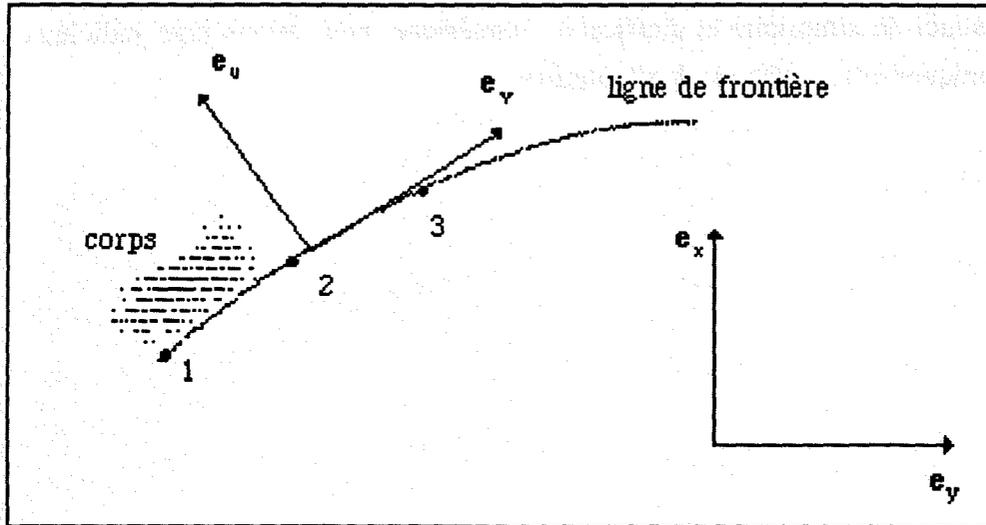


Figure III.9 : Axes de référence : axes globaux et axes locaux sur une ligne de frontière.

Deux types de fondations sont développés :

1 - une frontière constituée d'un nombre quelconque d'arcs de parabole consécutifs, définis à l'aide des mêmes fonctions d'interpolation que la frontière de la structure. Ses déplacements sont également paraboliques,

2 - une frontière circulaire, définie par son centre et son rayon. Ses déplacements comprennent une rotation par rapport à sa position initiale, une variation de son rayon, une variation de la position de son centre.

Il faut ensuite calculer les distances et vitesses relatives dans les axes locaux  $(e_u, e_v)$  de la structure et de la fondation, à partir d'un point (d'intégration) de la structure.

La matrice de rigidité est, quant à elle, obtenue en dérivant les équations d'équilibre.

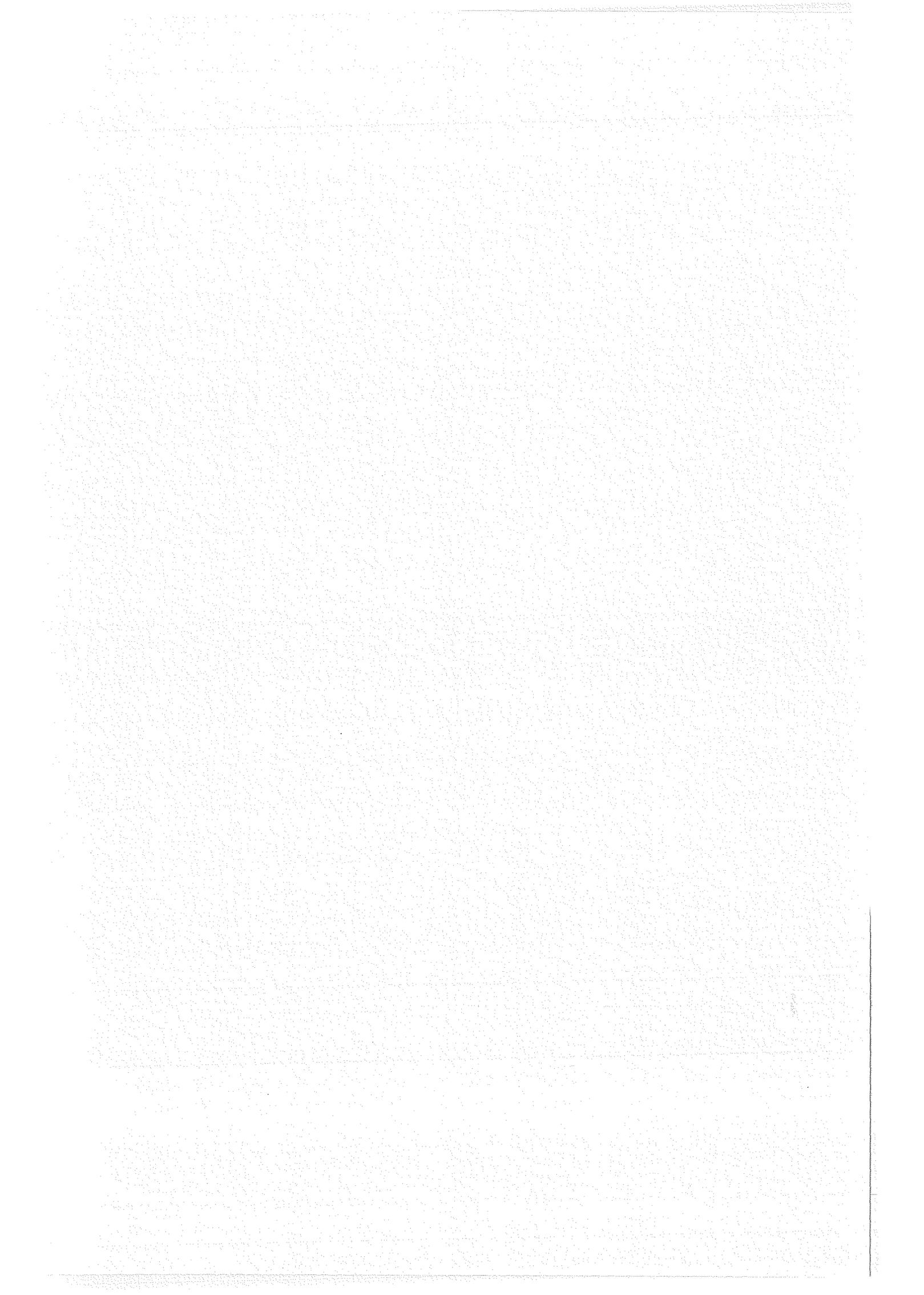
Différentes approximations ont conduit à implanter dans l'élément de contact le calcul par perturbation des déplacements nodaux d'une matrice d'itération parfaitement tangente. Ceci permet généralement d'améliorer la convergence et de limiter le temps de calcul.

Signalons que les éléments de contact sont généralement assez peu nombreux en regard du nombre total d'éléments finis du maillage de la structure.

### III - 3 - 3 - 2 Conclusions

L'utilisation de ces méthodes sur micro-ordinateur est coûteuse en temps en raison des nombreux accès (lecture et écriture) sur le disque dur.

Dans un souci de simplicité et d'efficacité numérique, nous avons jugé judicieux d'utiliser uniquement la méthode de pénalisation.





**CHAPITRE IV**

**MISE EN OEUVRE NUMERIQUE  
ET  
VALIDATION**



## CHAPITRE IV

### MISE EN OEUVRE ET VALIDATION NUMERIQUE

#### IV - 1 INTRODUCTION : METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'analyse des structures s'effectue généralement à l'aide de codes de calcul par Eléments Finis. C'est dans le cadre de cette méthode que s'inscrivent les réalisations numériques du problème étudié en vue de traiter sur micro-ordinateur des structures "industrielles" relativement complexes.

Il convient tout d'abord, de rappeler brièvement la **Méthode des Eléments Finis**.

Chaque formulation mécanique du problème se présente sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles spatiales et temporelles gouvernant un nombre infini de variables d'état à l'intérieur du solide et d'un certain nombre de conditions aux limites. Le problème ainsi formulé est un problème continu.

Il est en général difficile à résoudre analytiquement et souvent seules l'existence et l'unicité de sa solution sont démontrées. Cependant pour modéliser une structure industrielle complexe, une technique numérique de résolution telle que la **Méthode des Eléments Finis** s'avère nécessaire.

Cette méthode permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un système discret d'équations algébriques portant sur un nombre fini de variables. La résolution de ce système est ensuite effectuée numériquement à l'aide de divers algorithmes numériques programmables sur ordinateur.

La solution du problème réel est ainsi approchée dans l'espace par un ensemble discret de valeurs.

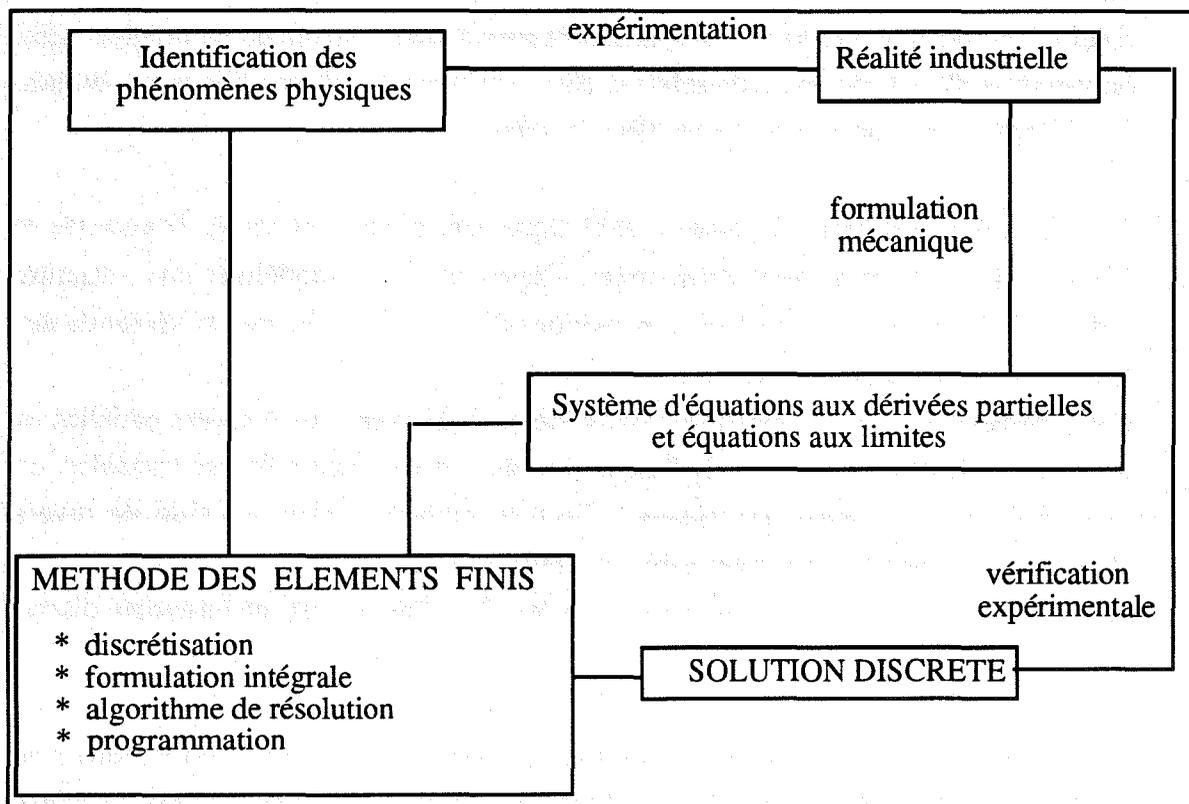
Pour la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, nous effectuons une discrétisation spatiale. Le domaine sur lequel la solution est recherchée est discrétisé

spatialement de manière approchée par un maillage d'éléments, caractérisés par la position de noeuds. Ce maillage réalise une partition du domaine.

Ensuite, en chacun des noeuds du maillage sont choisies des variables principales appelées variables nodales. Dès que les valeurs des variables principales sont connues aux noeuds, les valeurs de ces variables en chaque point intérieur à l'élément sont interpolées à l'aide de fonctions dites d'interpolation, assurant, suivant le type de l'élément choisi, une continuité de ces variables et/ou de ses dérivées, d'un élément à un autre.

On réalise ainsi une interpolation par sous-domaines. Chaque type d'élément peut être considéré comme l'image par une bijection d'un élément unique ayant même topologie, appelé élément de référence et fixé une fois pour toutes. La bijection permettant de transformer l'élément de référence en un élément particulier du maillage ne dépend que de l'élément du maillage et donc de la position de ses noeuds. Lorsque cette bijection est définie à l'aide des fonctions d'interpolation, l'élément est dit isoparamétrique. Les éléments finis isoparamétriques sont très utilisés, certains éléments spéciaux ont même été développés pour simuler au mieux des structures particulières comme les structures fissurées notamment (Récho, 1987).

L'action des éléments finis peut être schématisée de la façon suivante Braudel (1986) :



**Organigramme IV.1** : Présentation de la Méthode des Eléments Finis.

## IV - 2 CHOIX DE L'ELEMENT FINI

En grandes transformations, le maillage peut être fortement distordu, l'élément fini utilisé doit être apte à subir de grands changements de forme sans que les résultats (contraintes et déformations) en soient altérés (Nagtegaal et al., 1981), (Rakotomanana, 1986).

Dans le domaine élasto-plastique, nous devons donc tenir compte de deux phénomènes importants, à savoir, l'incompressibilité de la matière et le blocage ou verrouillage numérique.

### IV - 2 - 1 Élément Fini incompressible.

Nous nous contentons de mettre en évidence les sources d'incompressibilité à l'aide de l'exemple d'un élément rectangulaire linéaire.

\* *Élément linéaire isoparamétrique :*

Rappelons que dans l'élément isoparamétrique, les mêmes fonctions de forme  $N_i$  sont utilisées pour l'interpolation du déplacement et pour définir la forme de l'élément lui-même.

Considérons l'élément quadratique à quatre noeuds et quatre points de Gauss dans l'espace  $(x,y,z)$  (Fig. IV.1) :

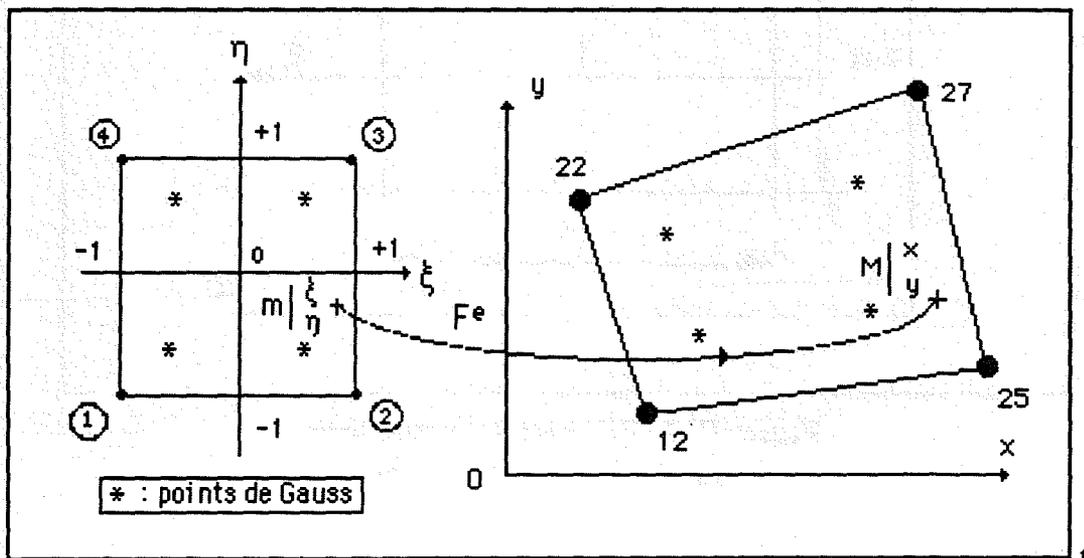


Figure IV.1 : Élément isoparamétrique linéaire, 4 noeuds type Lagrange.

La transformation  $F^e$  :

\* définit les coordonnées réelles  $x$  et  $y$  de chaque point  $M$  de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  du point  $m$  correspondant de l'élément de référence encore appelé, élément parent,

\* est bijective en tout point intérieur et sur tout le contour de l'élément si celui-ci n'est pas trop distordu.

Les fonctions d'interpolation sont :

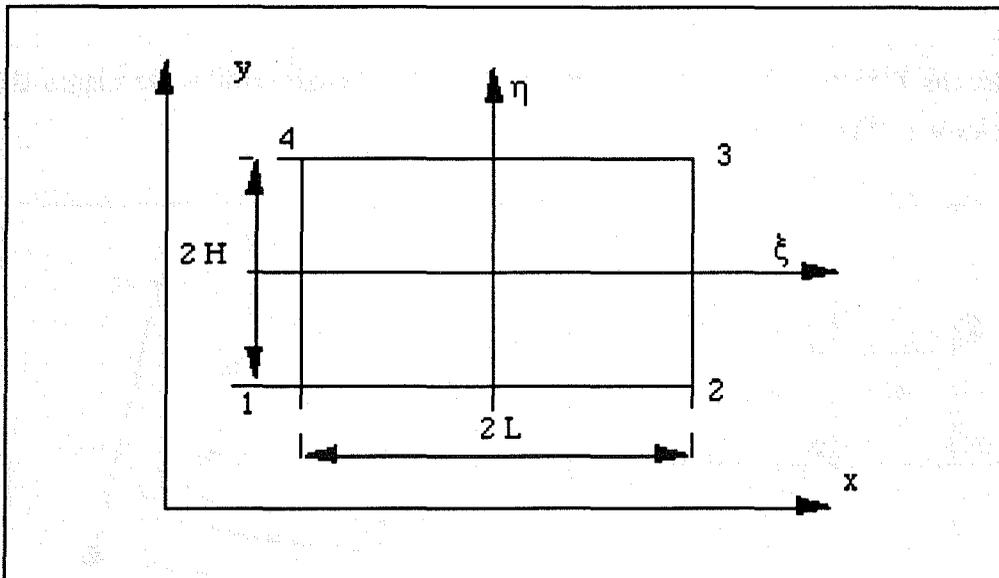
$$\langle N \rangle = \langle N_{i=1,4} \rangle \quad (4.1.a)$$

avec 
$$N_i = (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) / 4 \quad (4.1.b)$$

où  $\xi_i, \eta_i$  sont les coordonnées paramétriques du noeud  $i$ .

\* *Modes naturels du gradient de déformation  $F$*  :

Par exemple, considérons un élément fini rectangulaire de longueur  $2L$  et de hauteur  $2H$ .



**Figure IV.2** : Elément plan rectangulaire de longueur  $2L$  et de hauteur  $2H$ .

Nous avons :

$$N_1 = (1 - \xi) (1 - \eta) / 4 \quad (4.2.a)$$

$$N_2 = (1 + \xi) (1 - \eta) / 4 \quad (4.2.b)$$

$$N_3 = (1 + \xi) (1 + \eta) / 4 \quad (4.2.c)$$

$$N_4 = (1 - \xi) (1 + \eta) / 4 \quad (4.2.d)$$

L'interpolation du vecteur  $\{x\}$  donne :

$$\{x\} = \sum_{i=1,4} N_i \{x_i\} \quad (4.3)$$

Les composantes du gradient de déformation  $\underline{F}$  discrétisées dans l'élément s'obtiennent par l'égalité (1.9) ou encore par :

$$F_{i,j} = \delta_{i,j} + \langle N_j \rangle \{u_n\}$$

avec  $\{u\}$  le vecteur de déplacements nodaux.

Tous calculs faits, nous pouvons mettre le résultat sous la forme :

$$F_{11} = 1 + \frac{1}{4L} (p_1 + p_2 \eta) \quad (4.4.a)$$

$$F_{12} = \frac{1}{4L} (p_6 + p_4 \eta) \quad (4.4.b)$$

$$F_{21} = \frac{1}{4H} (p_5 + p_2 \xi) \quad (4.4.c)$$

$$F_{22} = 1 + \frac{1}{4H} (p_3 + p_4 \xi) \quad (4.4.d)$$

où les coefficients  $p_i$ , représentant les types de déformation standard de l'élément, sont donnés par les relations :

$$p_1 = -U_1 + U_2 + U_3 - U_4 \quad (4.5.a)$$

$$p_2 = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 \quad (4.5.b)$$

$$p_3 = -V_1 - V_2 + V_3 + V_4 \quad (4.5.c)$$

$$p_4 = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \quad (4.5.d)$$

$$p_5 = -U_1 - U_2 + U_3 + U_4 \quad (4.5.e)$$

$$p_6 = -V_1 + V_2 + V_3 - V_4 \quad (4.5.f)$$

On obtient ainsi les modes de  $\underline{F}$  suivant la direction X (Figure IV.3) :

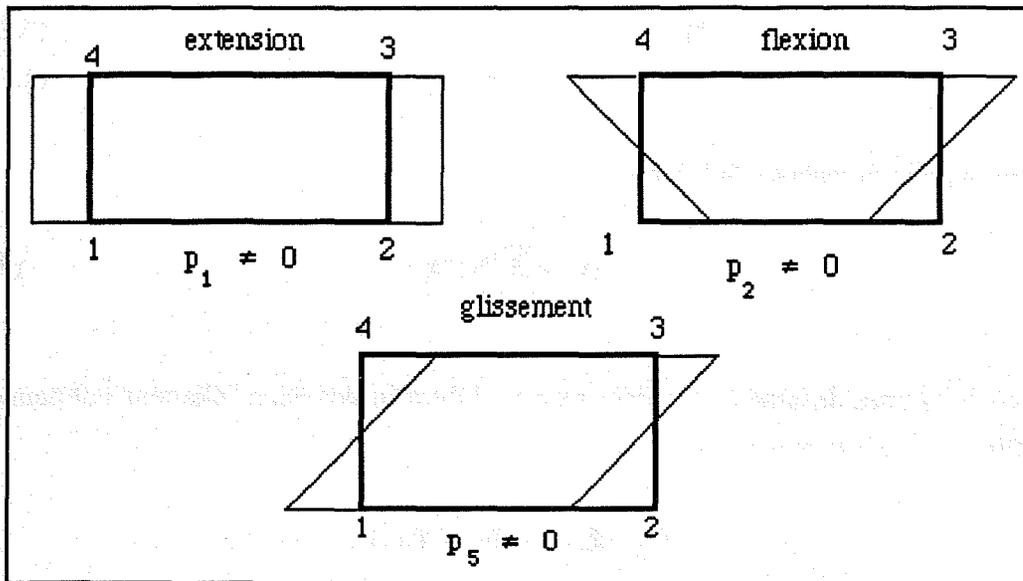


Figure IV.3 : Les trois types de déformation suivant l'axe des X.

De même suivant l'axe des Y, nous obtenons pour :

- \*  $p_6 \neq 0$  : une extension
- \*  $p_4 \neq 0$  : une flexion
- \*  $p_3 \neq 0$  : un glissement.

\* *Incompressibilité locale dans l'élément*

Dans l'élément considéré, l'incompressibilité en chaque point s'exprime par la relation :

$$J = \det \underline{F} = 1 \quad (4.6)$$

ce qui revient à écrire :

$$J = 1 + \frac{1}{4L} (p_1 + p_2 \eta) + \frac{1}{4H} (p_3 + p_4 \xi) + \left[ (p_1 + p_2 \eta) (p_3 + p_4 \xi) - (p_5 + p_2 \xi) (p_6 + p_4 \eta) \right] \quad (4.7)$$

Une étude systématique de toutes les combinaisons possibles des différents modes naturels de  $\underline{F}$  (pour avoir  $\det \underline{F} = 1$ ) nous montre que l'incompressibilité locale ne peut pas être vérifiée en chaque point de l'élément lorsqu'il subit le mode de flexion, c'est à dire lorsque  $p_2 \neq 0$ .

Dans ce cas, en effet :

$$J = \det \underline{F} = 1 = 1 + p_2 \eta / 4L \quad (4.8)$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit  $p_2$  si et seulement si  $\eta = 0$ .

Cela signifie que seuls les points pour lesquels  $\eta = 0$  vérifie l'incompressibilité locale.

Nous suivons la même démarche pour démontrer :

$$J = \det \underline{F} = 1 = 1 + p_4 \xi / 4H \quad (4.9)$$

Cette égalité est vérifiée, quel que soit la valeur de  $p_4$ , uniquement si  $\xi = 0$ .

Dans ce cas, les points seuls pour lesquels  $\xi = 0$  vérifient l'incompressibilité locale.

Ainsi, l'analyse permet de conclure dans l'élément considéré, que le centre seul de coordonnées ( $\eta = 0$ ,  $\xi = 0$ ) vérifie l'incompressibilité locale, que ce soit en petites ou en grandes déformations.

De ce fait ce type d'élément rectangulaire ne convient pas à la modélisation de l'élasto-plasticité.

#### IV - 2 - 2 Phénomène de blocage.

Il est connu que dans le cas des grandes déformations élasto-plastiques certains éléments ne conviennent pas bien en raison du phénomène numérique de "verrouillage" (locking) du maillage (Nagtegaal et al., 1974), (Rice et al., 1971) encore appelé, par certains, phénomène de blocage.

En effet, si nous adoptons les notations des petites déformations, l'énergie de déformation s'écrit sous la forme :

$$\int_V (2 \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \varepsilon_{kk}) dv = \int_V F \cdot u dv \quad (4.10.a)$$

où le module de plasticité est 
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.10.b)$$

et le module d'incompressibilité est 
$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.10.c)$$

L'incompressibilité plastique octroie la valeur 0,5 au coefficient de Poisson. De ce fait, le module d'incompressibilité  $\lambda$  tend vers l'infini entraînant une surestimation de la matrice de rigidité d'où le terme de blocage.

Cet inconvénient peut être évité par l'une des approches suivantes :

- utilisation de la performance naturelle d'un élément (Nagtegaal et al., 1974) : il est souhaitable que celui-ci soit de haute précision,
- utilisation d'une topologie particulière du maillage suivant une analyse préliminaire des déformations,
- mise en œuvre d'une technique d'intégration sélective ou réduite (Mallett, 1982),
- mise en œuvre d'un principe variationnel modifié (principe utilisé en Mécanique des Fluides incompressibles).

La dernière méthode reposant sur la formulation mixte exige l'emploi de nombreuses variables entraînant de ce fait des temps de calcul très importants.

Pour la formulation sur micro-ordinateur, il est donc plus adapté d'utiliser la méthode d'intégration sélective ou réduite.

Développons un peu plus particulièrement ces deux méthodes.

#### **IV - 2 - 3 Intégration réduite et sélective**

L'utilisation des méthodes d'intégration réduite ou sélective est maintenant chose courante.

##### **\* Intégration réduite :**

Cette méthode consiste à intégrer numériquement la force nodale et la rigidité tangente à l'aide d'une formulation de degré inférieur à la formule exacte.

Seulement cette sous-intégration conduit, en général, à une rigidité tangente singulière de l'élément et introduit, de plus, des modes d'énergie nulle.

Pour l'élément quadratique à huit noeuds et neuf points de Gauss, par exemple, le schéma d'intégration réduite utilise seulement quatre points de Gauss (Fig. IV.4).

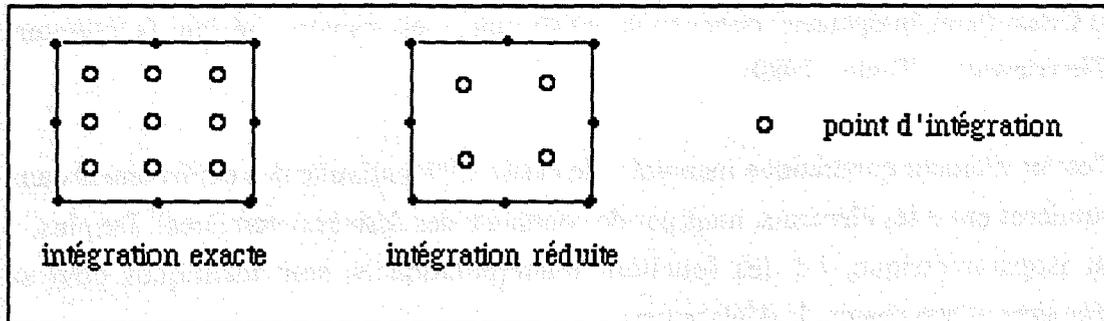


Figure IV.4 : Schémas d'intégration réduite pour un élément quadratique 8 noeuds et 9 points de Gauss.

*\* Intégration sélective :*

Cette intégration est basée sur la décomposition de l'énergie de déformation de l'élément en un terme de volume due à la dilatation pure et un terme dû au cisaillement pur (Formule 4.10).

Spécifiquement à l'élément incompressible, l'intégration sélective consiste alors à sous-intégrer la contribution de dilatation pure dans chaque grandeur (force nodale, rigidité tangente) et à utiliser l'intégration exacte pour évaluer les termes de cisaillement.

Résumons, par exemple, le schéma d'intégration sélective de l'élément linéaire à quatre noeuds pour un matériau incompressible.

Selon (4.10) l'intégration du "terme en  $\lambda$ " est réduite au point  $\xi = \eta = 0$  qui vérifie l'incompressibilité plastique. Les termes en  $\mu$  sont intégrés exactement.

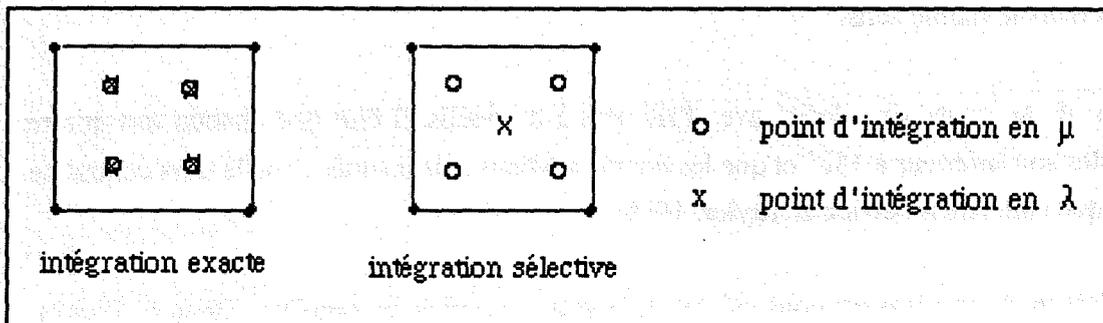


Figure IV.5 : Schémas d'intégration sélective pour un élément 4 noeuds et 4 points de Gauss.

#### IV - 2 - 4 Solution retenue

L'élément isoparamétrique 8 nœuds "Serendip" avec une intégration réduite (2x2) points de Gauss (sous-intégration) donne toute satisfaction, il est souvent cité dans la littérature (Zienkiewicz et Taylor, 1989).

C'est un élément quadratique incomplet de classe  $C^0$  (continuité des déplacements aux frontières entre les éléments, mais pas de continuité des dérivées premières). De plus, il est isoparamétrique, i.e. les fonctions d'interpolation  $N_i$  sont identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement.

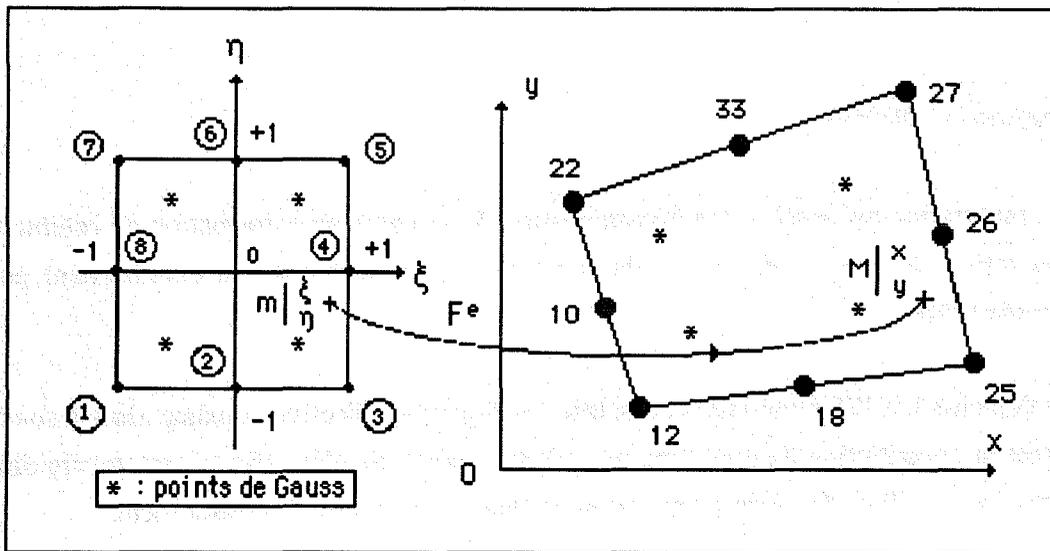


Figure IV.6 : L'élément "Serendip", à 8 nœuds, avec la transformation  $F_e$  de l'élément de référence à l'élément réel.

#### Remarque :

L'élément réel est défini par la séquence des 8 nœuds (12, 18, 25, 26, 27, 33, 22, 10) pris dans le même sens.

Pour éviter toute singularité avec l'élément à 8 nœuds, il faut que chacun des quatre angles soit inférieur à  $180^\circ$  et que les nœuds médians soient situés dans le tiers central de chaque côté (Zienkiewicz et Taylor, 1989).

L'élément à 8 nœuds est construit sur la base polynômiale incomplète (Dhatt et Touzot, 1984) :

$$\langle p \rangle = \langle 1, \xi, \eta, \xi^2, \xi \eta, \eta^2, \xi^2 \eta, \xi \eta^2 \rangle \quad (4.11)$$

Ses fonctions d'interpolation sont :

- pour les nœuds coins (  $i = 1, 3, 5, 7$  )

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad (4.12)$$

- pour les nœuds intermédiaires (  $i = 2, 4, 6, 8$  )

$$N_i = \frac{1}{2} \xi^2 (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{1}{2} \eta^2 (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2) \quad (4.13)$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  se calculent sans difficulté.

Les coordonnées, dans l'espace de références, des points de Gauss utilisés pour l'intégration numérique et les poids correspondants sont :

$$\xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_1 = -\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad W_1 = W_2 = 1 \quad (4.14)$$

En notant  $[J^e]$ , la matrice jacobienne de la transformation géométrique  $F_e$ , nous obtenons :

$$\{\partial \xi\} = [J^e] \{\partial x\} \quad (4.15.a)$$

ce qui signifie que :

$$\{\partial x\} = [J^e]^{-1} \{\partial \xi\} \quad (4.15.b)$$

où  $\det [J^e]$  est toujours positif afin de vérifier la condition de non pénétrabilité de la matière. Sinon la matrice de rigidité devient singulière et la technique de remaillage de la structure s'impose.

## IV - 3 DISCRETISATION

### IV - 3 - 1 Discrétisation spatiale

L'approximation nodale pour le déplacement  $\{\mathbf{u}\}$  d'un point M de l'élément (Fig. IV-5), s'écrit :

$$\{\mathbf{u}\} = [N] \{\mathbf{u}_i\} \quad (4.16)$$

où  $[N]$  est une matrice contenant les fonctions d'interpolation,  
 $\{u_i\}$  est le vecteur déplacements nodaux de l'élément.

On suppose que les fonctions d'interpolation ne dépendent pas de  $\{u_i\}$ , hypothèse communément admise en description lagrangienne actualisée, par conséquent l'accroissement virtuel des déplacements est donné sur chaque élément par la même interpolation :

$$\{\delta u\} = [N] \{\delta u_i\} \quad (4.17)$$

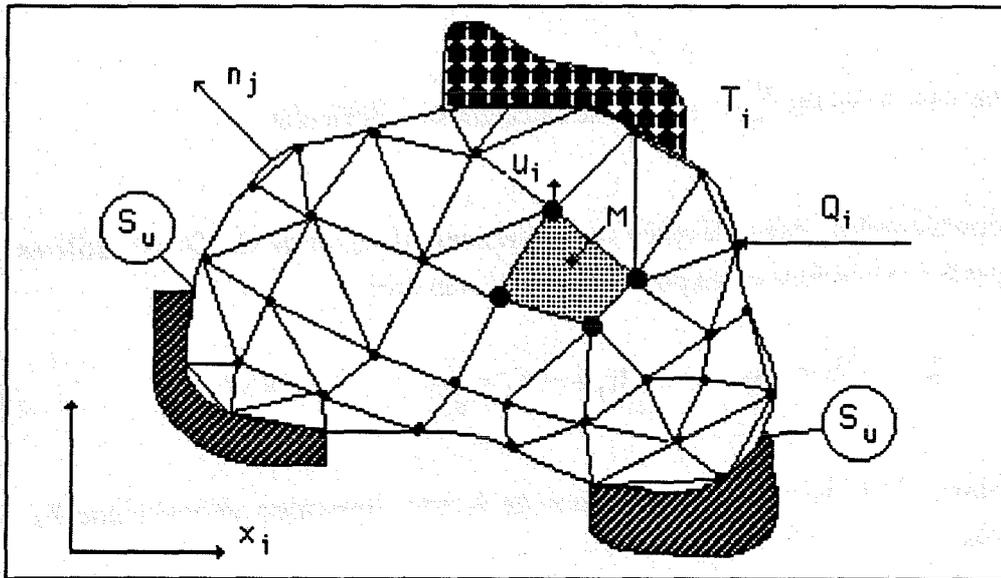


Figure IV.7 : Modélisation du corps solide en éléments finis.

On en déduit, avec la formule :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (4.18)$$

que

$$\{D\} = [B] \{u_i\} \quad (4.19)$$

Les composantes de la matrice  $[B]$  sont fonctions des dérivées partielles des fonctions d'interpolation.

#### IV - 3 - 2 Discrétisation temporelle

En choisissant la forme la plus concise du Principe des Puissances Virtuelles (2.62) et en partant de la relation (1.46.d) ainsi que de la définition de la dérivée de Jaumann (2.15) , on obtient la forme la plus adaptée à l'algorithme d'intégration implicite retenu :

$$\int_V [ \Delta \tau^J : D - (2 \Delta D \cdot \tau) : D + \tau : (\text{grad} \Delta u \cdot \text{grad} v) ] dV = \quad (4.20)$$

$$\int_V \rho (F + \Delta F) \cdot v dV + \int_S (T + \Delta T) \cdot v dS - \int_V \tau : D dV$$

La loi de comportement s'écrit sous la forme matricielle :

$$\{ \Delta \tau^J \} = [ C^{ep} ] \{ \Delta u_i \} \quad (4.21)$$

Par ailleurs, la dérivée de Jaumann est donnée par la relation :

$$\tau^J = \tau + \frac{1}{2} ( \sigma_{lj} \delta_{ki} + \sigma_{kj} \delta_{li} + \sigma_{li} \delta_{kj} + \sigma_{ki} \delta_{lj} ) D_{kl} \quad (4.22)$$

Dans le cas bidimensionnel, la discrétisation du premier membre du Principe des Puissances Virtuelles, aboutit à (Annexe V) :

$$\sum_{i,j} W_i W_j \{ \delta_{u_k} \}^T \left[ [B]^T ([C^{ep}] - [Q])[B] + [G]^T [Z][G] \right] \{ u_k \} e \det J \quad (4.23)$$

où :

- [G] est la matrice d'interpolation donnant le gradient de l'incrément de déplacement à partir de l'incrément de déplacement nodal,
- [Q] est la matrice symétrique introduite par le deuxième terme de la relation (4.22),
- [Z] est la matrice symétrique correspondant aux termes du second ordre  $\sigma_{ij} v_{k,i} \delta v_{k,j}$ ,
- e est l'épaisseur de l'élément.

On obtient finalement une forme matricielle, linéarisée autour de la dernière configuration d'essai, dans laquelle les inconnues nodales sont les incréments de déplacement :

$$[ K_T ] \{ \Delta u_i \} = \{ F + \Delta F \} - \{ R \} \quad (4.24)$$

#### IV - 4 MATRICE DE RIGIDITE TANGENTE

La matrice de rigidité tangente est déterminée par la réponse donnée par l'algorithme d'intégration de la loi de comportement.

En conservant les notations "petites perturbations", on pose par définition (Nagtegaal, 1982) et (Brunet, 1987) :

$$C^{ep} = \frac{\partial \sigma^F}{\partial \varepsilon} \quad (4.25)$$

On obtient une matrice tangente implicite de même forme que la matrice tangente explicite, seuls le module de cisaillement et le module plastique sont modifiés :

$$C_{ijkl}^{ep} = G^* (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left[ \frac{E}{3(1-2\nu)} - \frac{2}{3} G^* \right] \delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{3G^*}{\sigma_F^2 \left[ 1 + \frac{M^*}{3G} \right]} s_{ij}^F s_{kl}^F \quad (4.26)$$

avec :

$$G^* = \frac{\sigma_F}{\sigma_E} G \quad \text{où } G \text{ est le module de Coulomb} \quad (4.27)$$

$$M^* = \frac{M}{\frac{\sigma_F}{\sigma_E} \left( \frac{M}{3G} + 1 \right) - \frac{M}{3G}} \quad \text{où } M \text{ est le module plastique} \quad (4.28)$$

L'utilisation de ce module tangent implicite augmente notablement la vitesse de convergence dans les corrections d'équilibre.

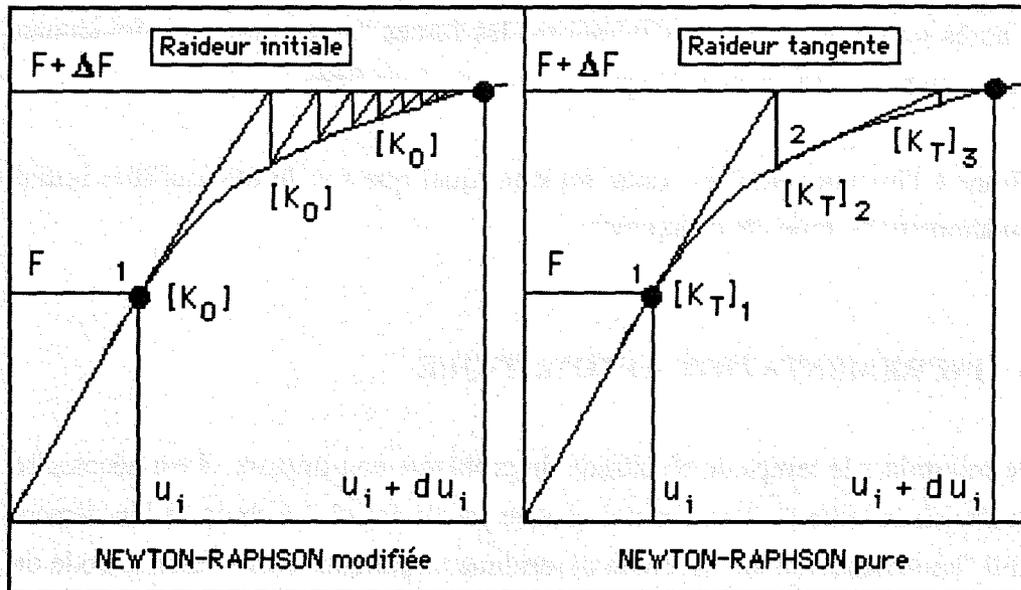
#### IV - 5 CORRECTION D'EQUILIBRE

D'une manière classique, la résolution du système non-linéaire (4.24) consiste à construire une série d'approximations  $u_k^i(t+\Delta t)$  solutions de :

$$[K_T(u_k^i)] \{\Delta u_k^{i+1}\} = {}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\Delta t}R^i \quad (4.29)$$

$$u_k^{i+1}(t+\Delta t) = u_k^i(t+\Delta t) + \Delta u_k^{i+1} \quad (4.30)$$

La solution  $u(t+\Delta t)$  apparaît comme une somme de termes correctifs, il n'est donc pas utile de calculer précisément les configurations des pas intermédiaires, il suffit de corriger à chaque pas l'essentiel de l'erreur (Hamlili, 1989).

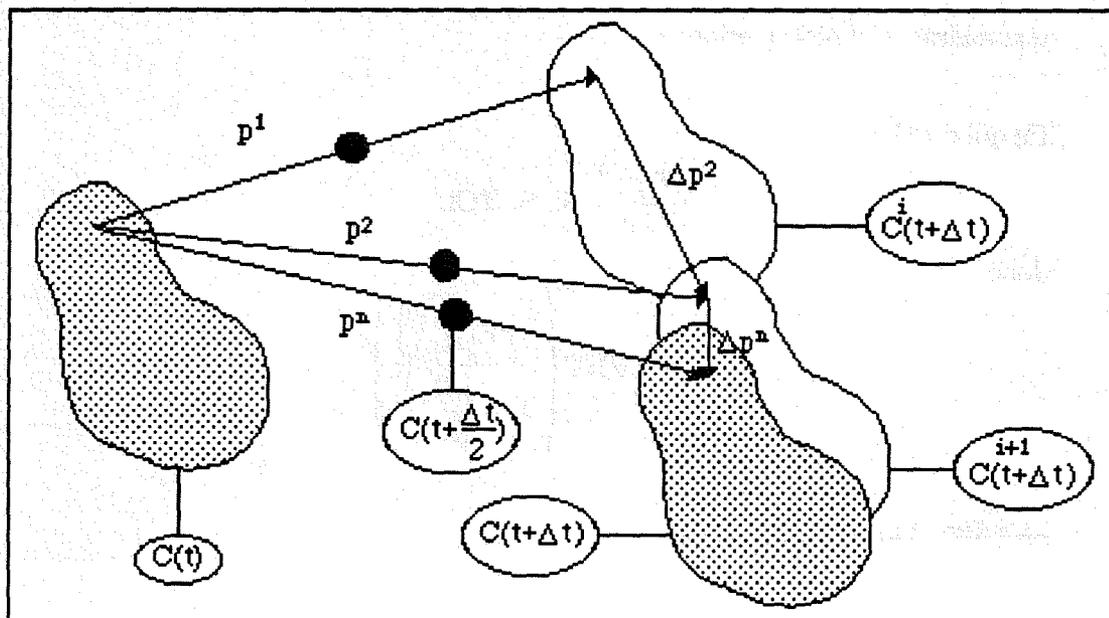


**Figure IV.8 :** Méthodes de Newton-Raphson "pure" et "modifiée"

Les schémas correspondent à un système à une seule inconnue nodale  $u$ .

La résolution du système non-linéaire (4.24) est réalisée par la procédure classique de Newton-Raphson (Fig. IV.8).

Le calcul des contraintes à l'instant  $(t+\Delta t)$  dans l'itération d'équilibre  $(i+1)$  s'effectue avec l'état de contrainte convergent à l'instant  $(t)$  et non sur l'état de contrainte non-convergent  $(i)$ , avec l'incrément de déformation totale évalué au point milieu de l'incrément de déplacement total (Fig. IV.9).



**Figure IV.9 :** Corrections d'équilibre.

Ainsi, après un certain nombre d'itérations, les forces "hors-équilibre" deviennent inférieures, au sens d'une norme adéquate, à une tolérance fixée  $\alpha$ .

L'équilibre à l'instant  $(t+\Delta t)$  est donc satisfait, quel que soit le déséquilibre initial, indépendamment du trajet de chargement.

#### IV - 6 INCREMENTATION AUTOMATIQUE

Afin de minimiser le temps de résolution du problème non-linéaire, il est nécessaire de bien choisir la taille de l'incrément à chaque pas de calcul. Le choix de l'incrément est établi "automatiquement" selon un algorithme empirique, utilisé dans le code de calcul ABAQUS (Hibbit, 1977), qui se présente comme suit :

si à l'itération globale "4" la convergence n'est pas atteinte, alors à chaque itération  $i \geq 4$ , on essaye de prévoir à quelle itération  $m$  elle le sera.

On suppose pour cela que :

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} = \frac{R_{i+1}}{R_i} = \dots = \frac{R_m}{R_{m-1}} = \lambda$$

d'où  $R_m = \lambda R_{m-1} = \dots = \lambda^{m-i} R_i \leq \text{TOL}$

avec  $R$  la norme du vecteur forces résiduelles (norme du maximum) et  $\text{TOL}$  une tolérance choisie a priori :

Ce qui conduit à :

$$\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)^{m-i} R_i \approx \text{TOL}$$

donc

$$m = i + \text{ENT} \left( \frac{\text{Log} \left( \frac{\text{TOL}}{R_{i-1}} \right)}{\text{Log} \left( \frac{R_i}{R_{i-1}} \right)} \right)$$

où  $\text{ENT} (.)$  est la partie entière.

Ce raisonnement s'applique lorsque l'algorithme a tendance à converger :

$$(R_i / R_{i-1} < 1).$$

On compare alors ensuite  $m$  au nombre maximal d'itérations MITER, choisi a priori :

- si  $m > \text{MITER}$ , on reprend le calcul avec un incrément de force quatre fois plus petit,
- si  $m \leq \text{MITER}$ , on poursuit les itérations.

Par ailleurs :

- si sur deux incréments successifs le nombre d'itération à convergence est inférieur ou égal à  $\text{MITER}/2$ ,

alors l'incrément suivant est à multiplier par un facteur  $K = 1.25$ ,

- chaque incrément de force DF est tel que :

$\text{DFMIN} \leq \text{DF} \leq \text{DFMAX}$ , où  $\text{DFMIN}$  et  $\text{DFMAX}$  sont choisis a priori.

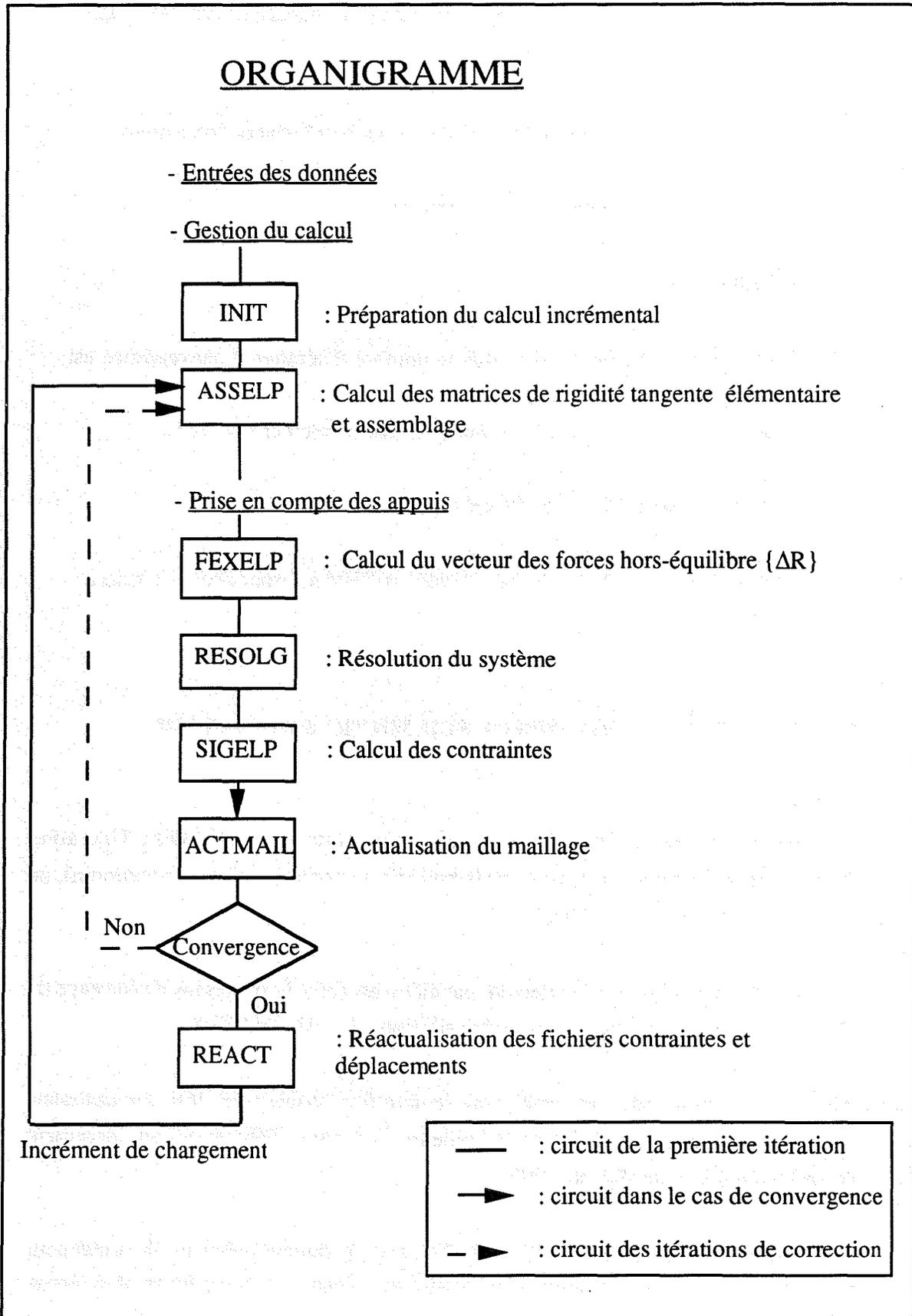
#### IV - 7 MODULES PRINCIPAUX SUR MICRO-ORDINATEUR

Afin de pallier les limitations du système d'exploitation DOS (Disk Operating System) liées à la taille d'adressage de la mémoire centrale (640 Ko au maximum), on a adopté une architecture modulaire.

Les modules spécifiques au traitement par éléments finis du processus de formage de tôles minces ont été ajoutés aux modules généraux du code DIAGUE.

Ainsi, un nouveau code a été établi sous le nom de DIAGUE-PROFIL qui complète la panoplie des codes déjà réalisés par ailleurs (Auburtin, 1990) et qui ont largement été utilisés par la suite (Récho, 1990).

Les modules sont écrits en "FORTRAN 77", avec la double précision (8 octets pour les réels et 4 octets pour les entiers) qui assure une réduction très appréciée des erreurs d'arrondi. La taille de chaque module exécutable ne dépasse pas les limites de la mémoire centrale, chaque module "source" ne contient pas plus de deux mille instructions (Gueury, 1985).



Organigramme IV.2 : Organigramme - Elasto-plasticité en transformations finies.

Calcul des incréments de contraintes :

- Calcul de l'incrément de déformation totale évalué au point milieu de l'incrément de déplacement total :

$$\{ d\epsilon^i \} = \left[ t + \frac{\Delta t}{2} B^i \right] \{ p^i \}$$

- Rotation du tenseur des contraintes de l'état convergent à l'instant ( t ) :

$$\sigma \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \Delta R^{(i) \frac{1}{2}} \sigma ( t ) \Delta R^{(i) \frac{1}{2} T}$$

- Prédiction élastique :

$$s_{ij}^E = s_{ij} + 2 G \Delta e_{ij}$$

- Test de la position de l'état de contrainte par rapport à la surface de charge :

$$f ( \sigma^E, p^E )$$

- Si  $f ( \sigma^E, p^E ) > 0$  :

- Résolution de l'équation implicite locale :

$$\Delta \epsilon_e^E = \frac{\sigma_e^E - f ( \epsilon_e^E + \Delta \epsilon_e^E )}{3 G}$$

- Identification de la contrainte équivalente locale à partir de la courbe rationnelle du matériau :

$$\sigma_e^E = f ( \epsilon_e^E + \Delta \epsilon_e^E )$$

- Projection du tenseur contrainte sur la surface de charge :

$$s_{ij}^E = s_{ij} \frac{\sigma_e^E}{\sigma^E}$$

- Rotation du tenseur des contraintes actualisé

$$\sigma ( t + \Delta t ) = \Delta R^{(i) \frac{1}{2}} \sigma^E ( t + \Delta t ) \Delta R^{(i) \frac{1}{2} T}$$

**Organigramme IV.3 :** Algorithme du module SIGELP de calcul des contraintes.

Le module central de résolution par blocs des systèmes d'équations linéaires selon l'algorithme de Gauss-Crout a été tout particulièrement adapté au micro-ordinateur, permettant notamment de traiter des problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

La seule limitation physique à la taille du calcul réside uniquement dans la capacité du disque dur à stocker la matrice de rigidité. Il est à noter que d'autres méthodes de résolution efficaces (multigrilles) ont été parallèlement développées pour le code DIAGUE (Auburtin, 1990, 2), (Auburtin et Gueury, 1991).

## IV - 8 VALIDATION : INDENTATION D'UN SUBSTRAT NON-REVETU

### IV - 8 - 1 Indentation

La validation porte sur la simulation numérique de l'indentation d'un barreau en acier 35CD4 (AISI 4137) par un indenteur sphérique en diamant dont on suppose la rigidité infinie. Le chargement et le déchargement sont étudiés dans l'hypothèse d'un contact avec frottement de type Coulomb ( $\mu = 0,1$ ).

Cette étude, pour laquelle nous possédons des résultats expérimentaux, a été réalisée en utilisant un algorithme explicite et un coefficient de frottement nul ( $\mu = 0$ ) (Gueury et al., 1989).

L'indentation est une méthode expérimentale bien appropriée pour tester les propriétés mécaniques des matériaux en surface. Dans le cas de revêtements, cette approche est souvent choisie pour évaluer la dureté, la fragilité et/ou l'adhésion d'un composite substrat/dépôt. Les modèles analytiques ne donnent pas suffisamment d'informations sur les champs de déformations et de contraintes, notamment à l'interface substrat / dépôt où un endommagement peut apparaître.

Les indenteurs sont des diamants Rockwell C de 0.2 mm de rayon, ayant un cône à 120° pour les indentations dépassant une profondeur de 15  $\mu\text{m}$ . Les barreaux à indenter ont pour dimensions 30x30x5 mm<sup>3</sup>, ils sont en acier 35CD4 (AISI 4137) polis "miroir" (RA  $\approx$  0.01  $\mu\text{m}$ ).

La composition de cet acier est la suivante (% en poids) :

C	Mn	Si	Cr	Mo
0,35	0,75	0,25	1,05	0,28

Tableau IV.1: Composition chimique de l'acier 35CD4.

Caractéristiques mécaniques de l'acier 35CD4 à 20°C :

masse volumique :  $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$ , module d'Young :  $E = 200,7 \text{ GPa}$ , coefficient de Poisson :  $\nu = 0,309$ , limite d'élasticité :  $\sigma_0 = 0,970 \text{ GPa}$ , dureté :  $H = 350 \text{ HV}$ .

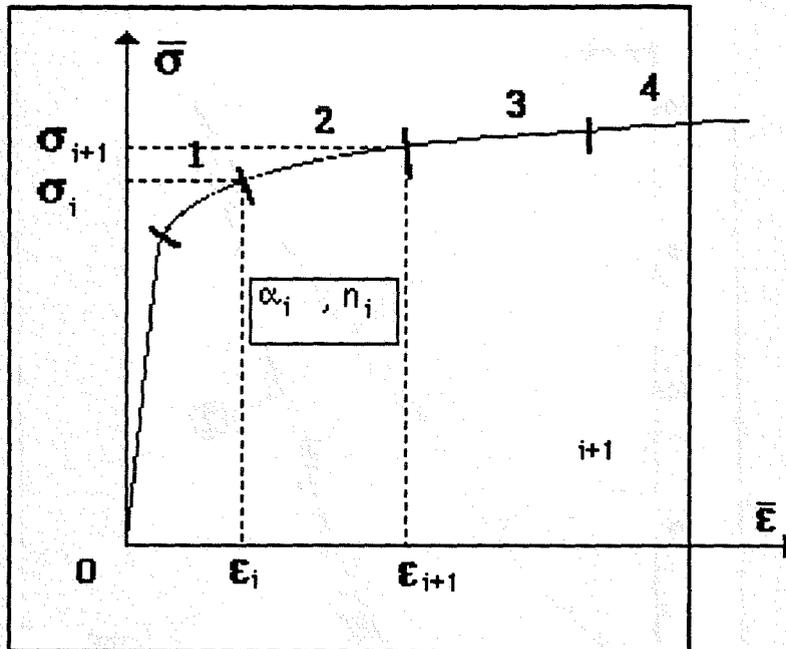


Figure IV.10 : Courbe rationnelle de l'acier 35CD4 modélisée par morceaux.

La courbe rationnelle ci-dessus a été obtenue à partir d'un essai de traction uniaxiale, son allure indique clairement que cet acier appartient à la classe des matériaux standards généralisés, à écrouissage positif.

On en donne une représentation analytique par morceaux ( au nombre de 4) de la forme :

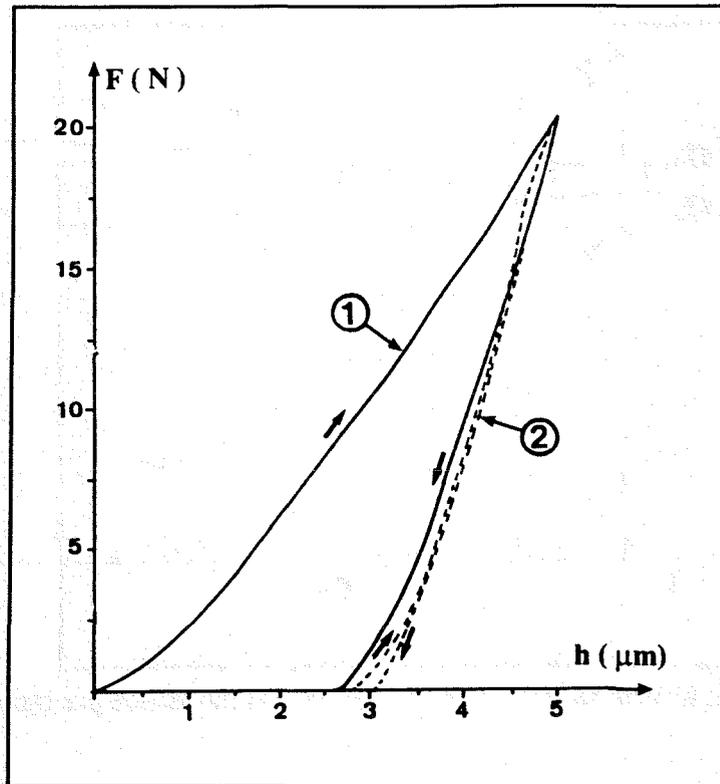
$$\sigma = \sigma_i [ 1 - \alpha_i + \alpha_i (\varepsilon/\varepsilon_i)^n ]$$

avec les paramètres ci-après, tirés d'une optimisation par gradients conjugués :

	1	2	3	4
$\varepsilon_i$	0.00483	0.09983	0.69983	0.89983
$\sigma_i$	970	1134.37	1412.29	1480.77
$n_i$	0.409	0.603	0.068	2.006
$\alpha_i$	0.0693	0.1094	2.8022	0.0839

Tableau IV.2 : Paramètres optimisés de la courbe rationnelle de l'acier 35CD4 .

Les mesures charges / indentations ont été effectuées à l'aide d'un C.S.E.M. "Scratch Tester ", elles conduisent aux courbes expérimentales ci-dessous, en chargement, déchargement puis rechargement :



**Figure IV.11 :** Courbe expérimentale de l'indentation d'un barreau en acier 35CD4 par un indenteur sphérique en diamant.

La figure indique clairement les différences de comportement en chargement (1: élasto-plastique) et en déchargement (2 : retour élastique). La figure IV.12 montre les profils (direct et inverse) obtenus après déchargement, à l'aide d'un profilomètre 3D. On notera la formation d'un bourrelet sur le bord supérieur.

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- 1- indenteur sphérique infiniment rigide,
- 2- substrat homogène et isotrope,
- 3- transformations isothermes quasi-statiques,
- 4- petites déformations élastiques,
- 5- incrément total de déformation = partie élastique + partie plastique,
- 6- incompressibilité plastique,
- 7- écrouissage isotrope, l'anisotropie induite est négligée,
- 8- incréments de déplacements suffisamment petits.

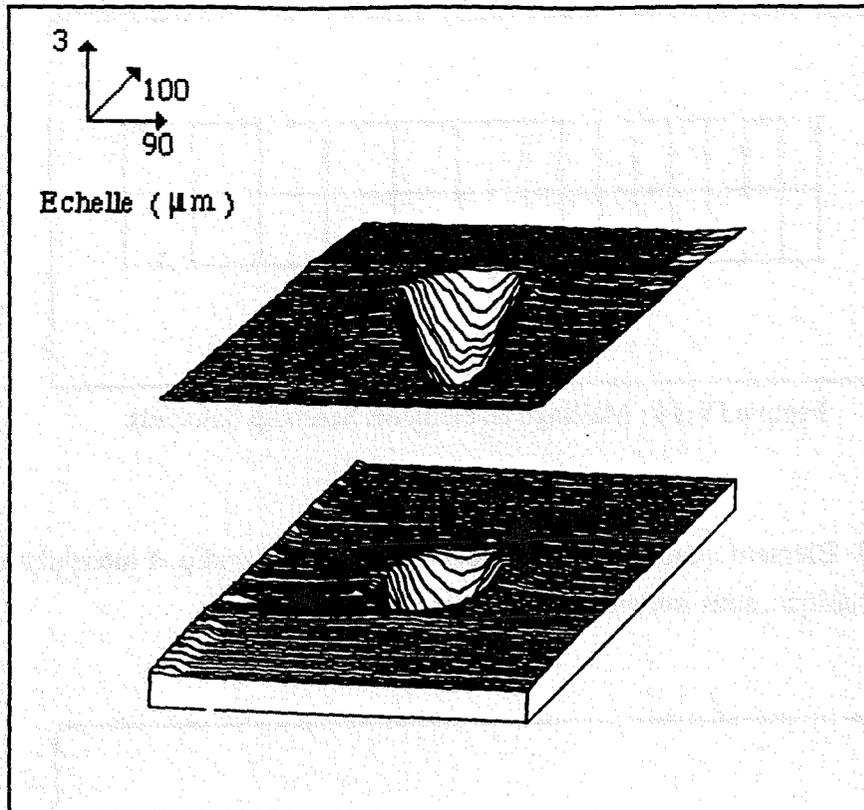


Figure IV.12 : Profils obtenus après déchargement, à l'aide d'un profilomètre.

Le barreau à indenter a été maillé avec trois types d'éléments finis isoparamétriques :

1- Élément quadrilatère à 4 noeuds, de type Lagrange, à interpolation bi-linéaire, 4 points de Gauss.

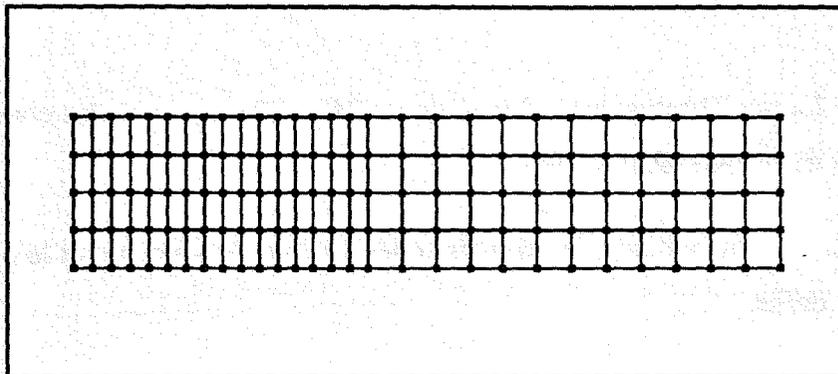
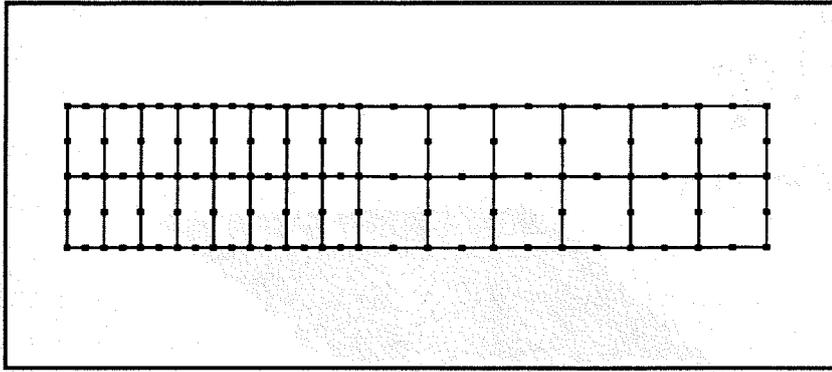


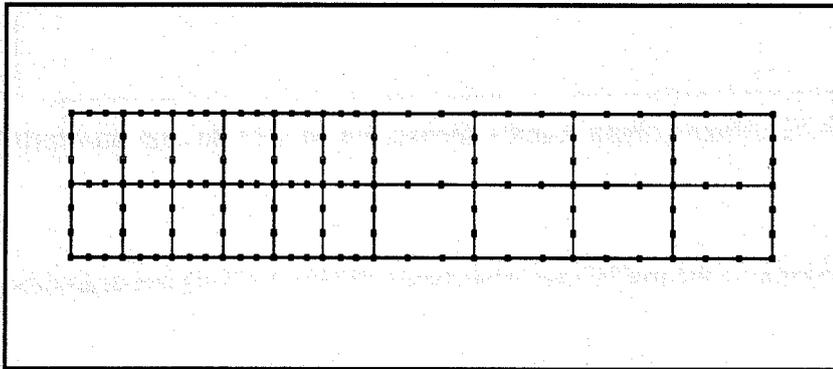
Figure IV.13 : Maillage en éléments Lagrange 4 noeuds.

2- Élément quadrilatère à 8 noeuds, de type Serendip, à interpolation bi-quadratique, sous-intégré avec 4 points de Gauss.



**Figure IV.14** : Maillage en éléments Serendip 8 noeuds.

3- Élément quadrilatère à 12 noeuds, de type Serendip, à interpolation bi-cubique, sous-intégré avec 9 points de Gauss.



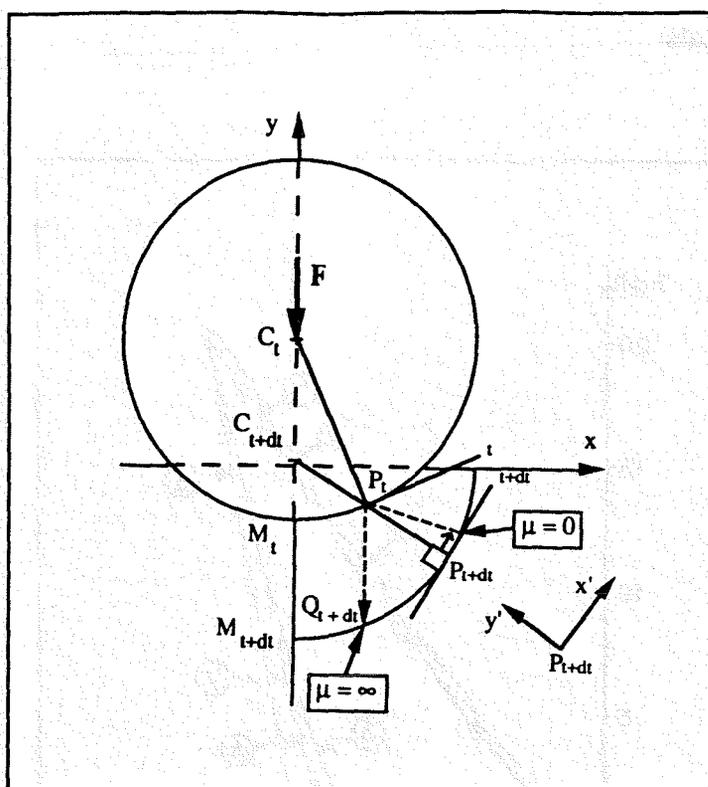
**Figure IV.15** : Maillage en éléments Serendip 12 noeuds, à interpolation bi-cubique, 9 points de Gauss.

La modélisation est axisymétrique ( $240 \times 40 \mu\text{m}$ ), avec des conditions de blocage appropriées :

$u_r = 0$  pour les noeuds situés sur l'axe de symétrie et le bord de droite,

$u_y = 0$  sur le fond du barreau.

La modélisation du contact s'opère de la façon suivante : le contact ou la perte de contact sont détectés sur les noeuds.



**Figure IV.16** : Schéma de l'incrémentation entre les positions de l'indenteur sphérique aux paliers  $t$  et  $t + dt$ .

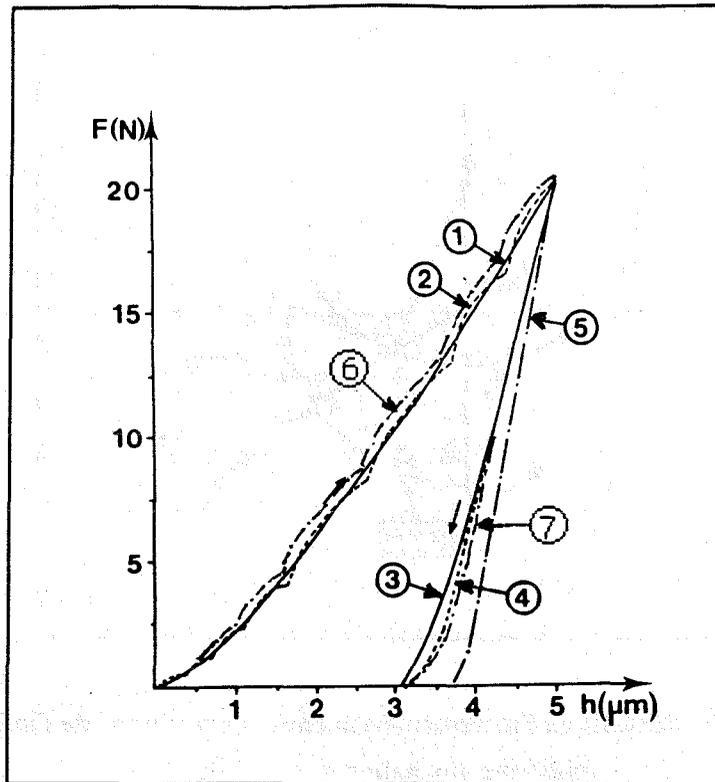
Dans le cas d'un contact sans frottement, la nouvelle position des noeuds en contact est la projection radiale  $P_{t+\Delta t}$  sur le nouveau profil de l'indenteur des noeuds  $P_t$  situés sur le profil initial. La position exacte de ces noeuds est obtenue, après corrections d'équilibre, en faisant tendre vers zéro les composantes tangentielles des réactions.

Dans le cas d'un contact avec frottement, la nouvelle position des noeuds en contact est obtenue à partir de la projection radiale  $P_{t+\Delta t}$  sur le nouveau profil de l'indenteur des noeuds  $P_t$  situés sur le profil initial, puis les corrections d'équilibre font glisser ou non ces noeuds sur la surface à  $t + dt$  en vertu de l'algorithme du contact avec frottement : le noeud glisse si la réaction tangentielle  $R_t$  est supérieure à la valeur limite  $\mu R_n$ , le noeud est bloqué dans le cas contraire.

On peut remarquer que cette position aurait pu être obtenue en supposant d'abord un frottement infini puis en laissant glisser librement les noeuds  $Q_{t+\Delta t}$  le long de la surface de contact.

Numériquement, cette approche utilise toujours la méthode de pénalisation et une formulation en axes locaux qui facilite la détermination des réactions normales et tangentielles.

## IV - 8 - 2 Résultats



**Figure IV.17 :** Comparaison de la courbe expérimentale charge / indentation et de la courbe obtenue par la simulation en éléments finis.

Dans cette figure, les différentes courbes représentent :

- 1 - chargement expérimental,
- 2 - simulation numérique du chargement, méthode explicite,  $\mu = 0$ . (Gueury et Al., 1989),
- 3 - déchargement expérimental,
- 4 - simulation numérique du déchargement, méthode explicite,  $\mu = 0$ , noeud de bord,
- 5 - simulation numérique du déchargement, méthode explicite,  $\mu = 0$ , noeud du fond,
- 6 - simulation numérique du chargement, méthode implicite, frottement  $\mu = 0,1$ ,
- 7 - simulation numérique du déchargement, méthode implicite, frottement  $\mu = 0,1$ , noeud de bord.

La simulation numérique a permis de constater que, lors du déchargement, l'indenteur cesse d'être en contact avec le noeud du fond : en effet la courbe de déchargement obtenue, en supposant ce noeud en contact avec l'indenteur, est par trop éloignée de la courbe expérimentale de déchargement. En revanche, après détection numérique du noeud effectivement en contact et en prenant ce noeud comme référence, nous retrouvons une courbe de déchargement très voisine de la courbe expérimentale.

Compte tenu de la taille très petite de l'empreinte, cet aspect n'a jamais pu être détecté expérimentalement. Il est remarquable de noter que la simulation numérique a permis de constater ce phénomène jamais observé auparavant.

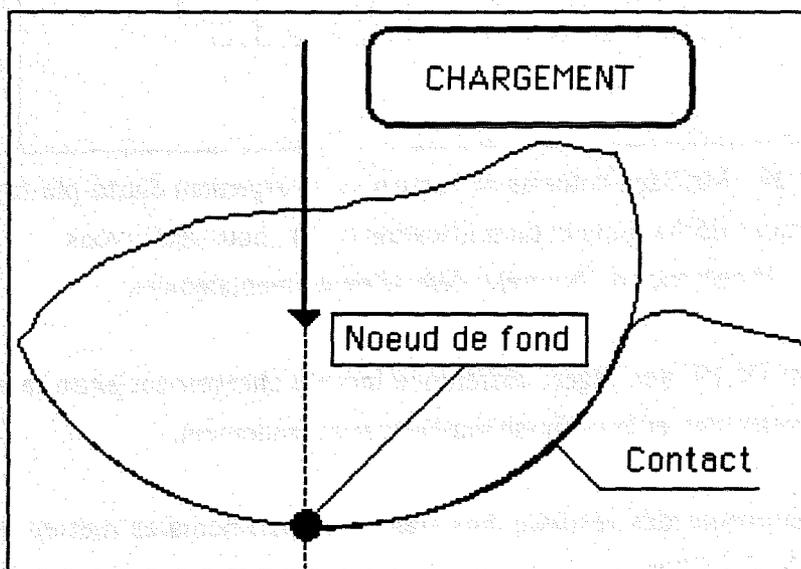


Figure IV.18 : Chargement : l'indenteur est en contact avec le noeud de fond.

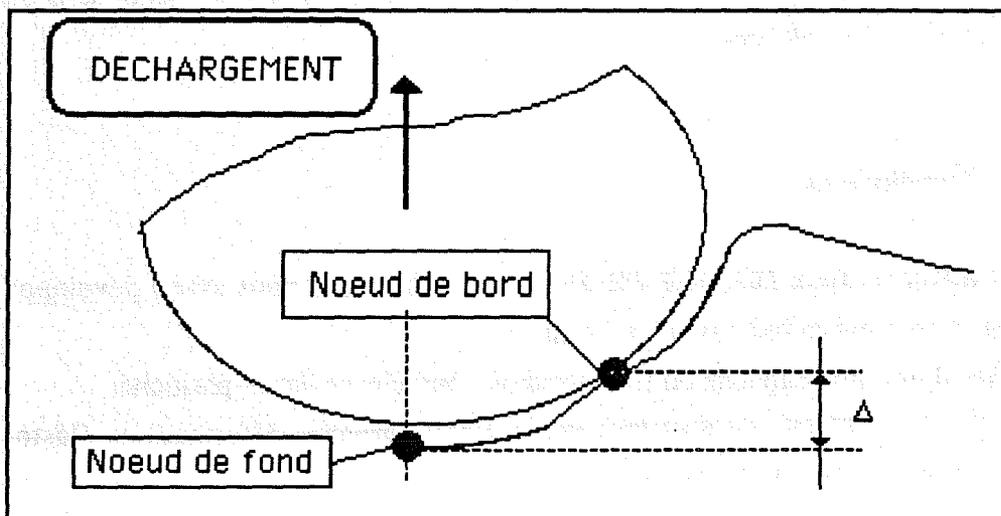
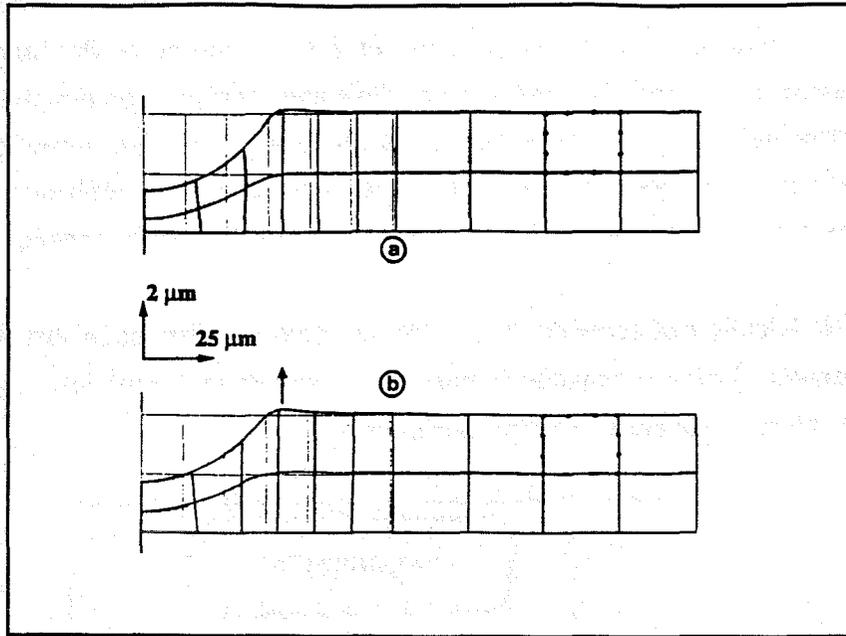


Figure IV.19 : Déchargement : l'indenteur n'est plus en contact avec le noeud de fond mais avec un noeud de bord.



**Figure IV.20 :** Maillage déformé du barreau en chargement élasto-plastique et après déchargement (amplification de 4) ; nous retrouvons la présence du bourrelet détecté expérimentalement.

On notera figure IV.19, une légère différence lors du chargement entre la méthode explicite, sans frottement, et la méthode implicite avec frottement.

L'excellente conformité des résultats aux valeurs expérimentales met en évidence l'efficacité de tels algorithmes et la souplesse de leur exécution, à coût très réduit, sur un simple micro-ordinateur.

La méthode implicite que nous avons développée offre l'avantage d'utiliser une taille d'incrément plus grande, et par conséquent de diminuer le temps de calcul sans en altérer notablement la précision.

### IV - 8 - 3 Conclusions

Le code d'éléments finis DIAGUE-PROFIL non-linéaire que nous avons développé spécialement pour micro-ordinateur, utilisant :

- un algorithme explicite ou un algorithme implicite en élasto-plasticité,
- une formulation en transformations finies (grandes déformations élasto-plastiques et grands déplacements),
- une incrémentation exprimée en axes locaux,

offre une simulation prenant en compte une loi de frottement de type Coulomb.

Il nous a permis, à moindre coût :

1 - de comparer les résultats de la simulation numérique aux résultats expérimentaux suivants :

- des courbes charges / indentations,
- un profil de la surface après déchargement.

**La conformité est excellente.**

2 - une modélisation des bi-couches, avec une analyse convenable des champs de contraintes et de déformations à l'interface substrat / dépôt,

3- l'étude des processus d'endommagement à l'interface substrat / dépôt et dans le dépôt.

La facilité d'adaptation du code DIAGUE-PROFIL en fait un outil numérique très efficace pour traiter les problèmes rencontrés lors de la simulation par éléments finis non-linéaires de l'indentation.

**Remarque :**

La figure IV.17 indique un artefact bien connu des numériciens : en effet, les arcs obtenus lors du chargement sont dus au fait que le contact entre le solide et un élément fini peut se produire entre deux noeuds de l'élément. Dans cas, il n'existe pas de fonction d'interpolation appropriée pour approcher au mieux la courbure du côté déformé. Cela se traduit numériquement par une succession d'arcs dans la simulation du chargement. La taille des arcs est évidemment réduite si le maillage est très fin, ce qui entraîne un accroissement considérable du temps de calcul.



**CHAPITRE V**

**SIMULATION DU PROFILAGE  
ET  
VALIDATION**



## CHAPITRE V

### SIMULATION DU PROFILAGE ET VALIDATION EXPERIMENTALE PAR LE MOIRE

#### V - 1 PROFILAGE DE TOLES MINCES

##### V - 1 - 1 Principe

Le profilage à froid consiste à déformer progressivement, à température ambiante (Figures V.1 et V.2) sans réduction notable d'épaisseur, une plaque plane en la faisant passer dans une série de "têtes" comportant des jeux de galets et des entretoises réglables, montés sur des arbres moteurs à axes horizontaux (Figure V.3).

Le profil de forme (produit résultant de cette déformation) présente une section droite identique sur toute la longueur. Cette longueur n'est limitée que par les nécessités de transport et de manutention.

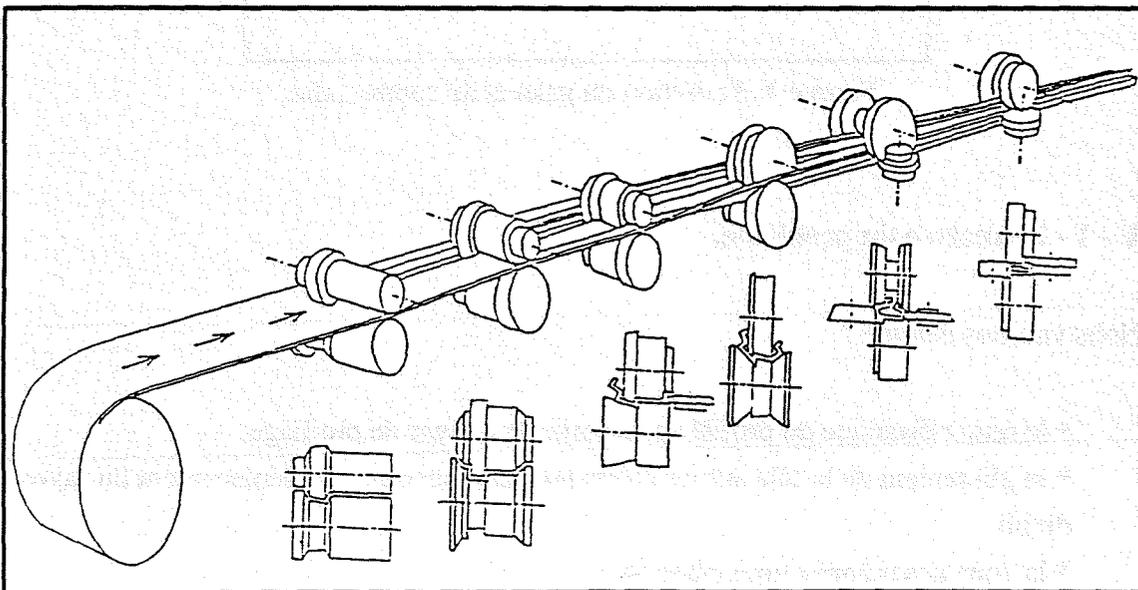
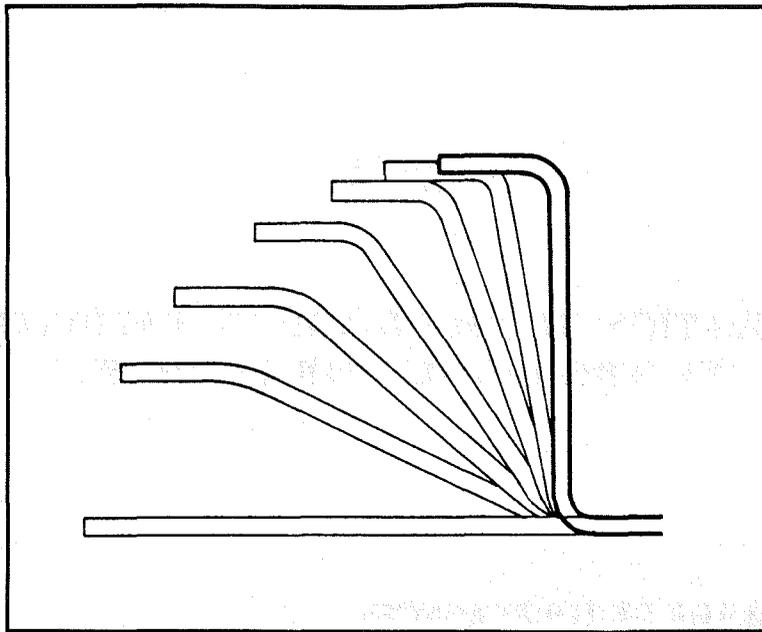
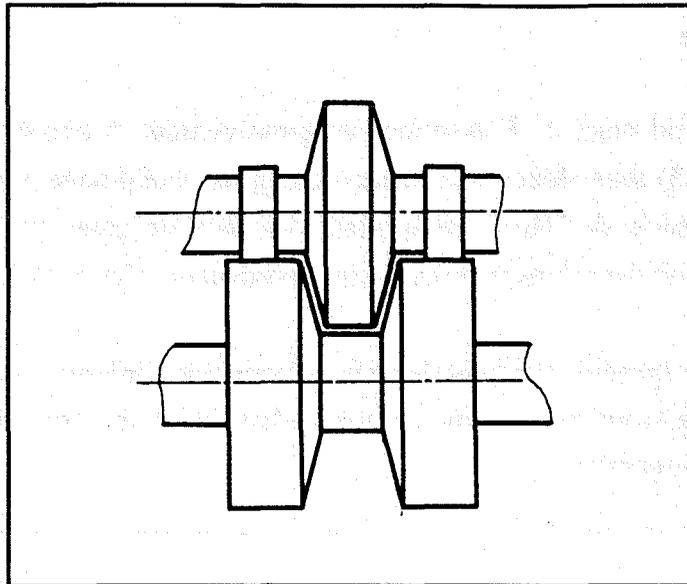


Figure V.1 : Procédé de mise en forme à froid de la tôle mince : technique de profilage.



**Figure V.2 : Déformation progressive par profilage.**



**Figure V.3 : Action du galet et du contre-galet.**

### **V - 1 - 2 Analyse du problème.**

Nous voulons étudier :

- \* le retour élastique du profilé après sortie de la ligne de profilage,
- \* le glissement de la tôle sur les galets pouvant introduire un déplacement du rayon du pli,
- \* la zone des déformations plastiques.

## V - 2 COURBE RATIONNELLE DU MATERIAU

L'équation des puissances virtuelles et les équations cinématiques sont des équations générales valables en mécanique des milieux continus pour n'importe quel type de corps déformable. A ces équations s'ajoute la loi de comportement du matériau qui caractérise la manière dont les contraintes et les paramètres internes sont reliés localement aux déformations (Braudel, 1986). L'obtention de ces équations constitutives requiert une approche par des tests simples comme les tests de traction uniaxiale ou de torsion qui permettent l'identification de la loi de comportement du métal à froid.

Lorsque l'on déforme à froid une éprouvette de métal par une traction uniaxiale, l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation a l'allure suivante (Fig. V.4) :

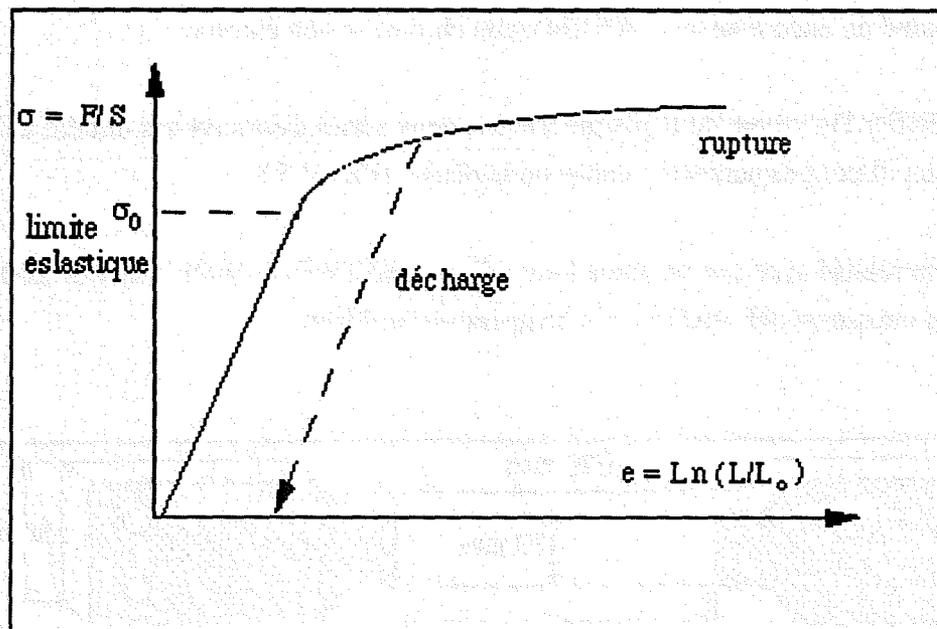


Figure V.4 : Courbe rationnelle d'un matériau.

Tant que la contrainte équivalente est inférieure à un certain seuil appelé limite élastique, la déformation du matériau est réversible. On dit que celui-ci se trouve dans le domaine élastique.

Dès que l'on dépasse ce seuil, il apparaît des déformations irréversibles superposées aux déformations réversibles. On dit que le matériau est dans un état de chargement élasto-plastique.

Si le chargement continue de croître, on peut observer un durcissement du matériau : c'est le phénomène physique d'érouissage.

**Remarque :**

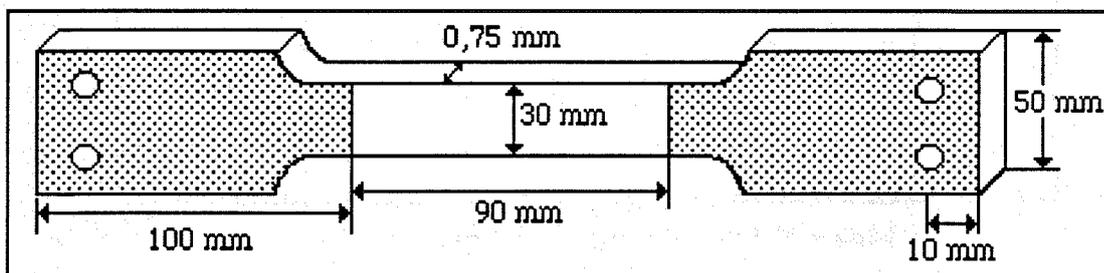
Pour un essai uniaxial, on définit le seuil d'écoulement plastique, ou seuil de plasticité  $\sigma_0$ , comme étant la valeur de la contrainte F/S à partir de laquelle une déformation irréversible se produit.

Le plus grand soin a été apporté à l'expérience fondamentale de traction car la courbe rationnelle déduite de cet essai permet de conduire l'évolution des différents tenseurs au delà de la limite d'élasticité du matériau. La courbe rationnelle de traction et les paramètres qui en sont déduits constituent l'unique référence numérique du comportement mécanique du matériau en domaine élasto-plastique.

Les tôles sont en acier galvanisées et les matériaux des outils sont en acier XC48 chromé et non chromé ou encore en acier 42CD4 traité chromé et non chromé.

Afin de vérifier l'isotropie de la plaque d'acier, deux séries d'éprouvettes ont été taillées suivant deux directions perpendiculaires de la plaque (Fig. V.5.).

L'essai a été réalisé avec une machine hydraulique TESTWELL-WOLPERT de 200 kN, asservie en vitesse de déformation, à la température ambiante.



**Figure V.5 :** Eprouvette de traction uniaxiale.

Deux tiges en acier placées à chaque tête, empêchent le glissement de l'éprouvette dans les mors de la machine, au début de la traction.

Le diagramme forces-déplacements est enregistré directement par la machine instrumentée.

Nous notons des différences entre les deux courbes rationnelles.

Les résultats obtenus sont cohérents dans la mesure où la tôle est laminée à froid, donc écrouie davantage dans le sens longitudinal que dans le sens transversal. De plus, la limite d'élasticité dans le sens du laminage est plus importante que dans le sens perpendiculaire.

### **V - 3 MOIRE**

#### **V - 3 - 1 Introduction**

L'analyse des plaques fléchies présente deux aspects théoriques où les phénomènes physiques intéressant le constructeur sont décrits à l'aide de modèles mathématiques appropriés et un aspect expérimental qui fournit les informations nécessaires de manière directe, par observation des grandeurs sur le modèle même. La majorité des méthodes optiques appartiennent à ce dernier type et cette propriété est particulièrement utile pour l'ingénieur qui dispose ainsi d'une vue d'ensemble du problème examiné.

Le but de ces travaux est de proposer une méthode expérimentale d'analyse de plaques pliées fondée sur le phénomène de "moiré" qui résulte de la superposition de deux réseaux constitués de traits parallèles alternativement opaques et transparents. Un réseau est solidaire du modèle à étudier. A la suite d'une déformation, il apparaît un moiré, i. e. une distribution de franges claires et sombres.

Par l'étude de ces franges, il est possible de déterminer les déplacements et / ou, les déformations du modèle.

Ce dispositif expérimental se distingue des méthodes connues par une plus grande sensibilité et par une souplesse d'utilisation accrue (Pedretti, 1974).

#### **V - 3 - 2 Historique**

Lorsqu'une pièce (élément de charpente, plaque de construction) est soumise à des efforts, il apparaît en chacun de ses points et suivant une direction déterminée une contrainte. Celle-ci provoque une déformation.

Plusieurs procédés existent pour mesurer ces déformations ; les plus répandus et les plus anciens sont :

- les jauges à fil résistant qui ne donnent que des valeurs discrètes mais précises,
- la photo-élasticité qui consiste à mesurer directement les déformations à l'aide d'un revêtement photoélastique collé sur la surface du prototype (résine époxy, polycarbonate), mais qui, de ce fait, renforce le modèle,
- la mesure des déformations par réseaux optiques qui a été développée dès 1954 par P.Dantu.

C'est cette troisième approche que nous développerons plus particulièrement.

A l'origine "un moiré" est un tissu à reflets ondulés et chatoyants que l'on obtient en superposant par leurs endroits deux pièces d'étoffes ; ainsi superposées, on les fait défiler lentement, préalablement humectées et sous forte pression, entre deux cylindres bien lisses et chauffés.

Les étoffes destinées au moirage sont en effet tissées à partir d'une chaîne constituée de gros fil ; comme, lors de la superposition des deux pièces, les fils de la première ne viennent jamais se disposer de façon exactement parallèle aux fils de la seconde, mais les recouvrent seulement par-ci, par-là, en formant avec eux des angles extrêmement aigus, il apparaît aux points d'intersection de ces fils un glaçage dû à la compression à chaud, car c'est en ces points-là que la pression est la plus forte. Par contre, aucun glaçage ne se fait en un point situé en face de l'intervalle entre deux fils. La juxtaposition globale de ces innombrables petits points micassés crée l'effet de moirage.

Si nous observons un tissu moiré avec un compte-fil ou une très forte loupe, les motifs ondulés ne sont plus visibles : seules apparaissent des zones brillantes, micassées, sur le fil de chaîne, qui sont séparées par des zones sombres et mates (Harthong, 1990).

En 1874, Rayleigh proposait déjà une méthode reposant sur l'effet de moiré pour tester la qualité des réseaux de diffraction utilisés en optique : si on en superpose deux, en principe identiques, le moindre défaut dans la périodicité sera mise en évidence par les franges de moirés. Plus tard, le même terme a été repris par l'imprimerie pour indiquer l'effet gênant apparaissant lors d'une mauvaise superposition de trames.

Ligtemberg suivit une autre démarche pour obtenir des franges de moiré. Sa méthode consiste à enregistrer sur un même film l'image d'un réseau réfléchi par le modèle dans

deux stades de charge différents. Ces franges représentent les courbes d'égale pente de la surface déformée.

A ce sujet, il faut dire que l'idée d'utiliser le principe de "levier optique" remonte également à Dantu qui, en 1940, proposait d'avoir recours à un quadrillage réfléchi par la surface du modèle pour déterminer les courbes de la surface.

Les franges de moiré sont obtenues également par l'interférence entre une trame et l'ombre que celle-ci projette sur la structure analysée (moiré d'ombre). Ces figures d'interférence sont les courbes de niveaux de la surface, à condition toutefois que les paramètres géométriques de l'essai soient choisis de manière judicieuse.

En cristallographie, on réalise des moirés en superposant deux lames très minces des cristaux : les franges renseignent sur l'alignement des cristaux et surtout sur les dislocations de cet alignement.

Le moiré est donc un phénomène bien connu des expérimentateurs.

L'avantage décisif des différentes méthodes de moiré dépend de leur caractère purement géométrique qui évite tout intermédiaire entre l'apparition du phénomène observé et son enregistrement. Elles sont toutes rigoureusement exemptes de dérives dans le temps. Cela en facilite l'application soit dans les phénomènes de longues durées tels que les problèmes de fluage, de déformations plastiques ou viscoélastiques, soit dans les problèmes très rapides tels que les vibrations ou la propagation d'ondes de choc.

L'absence de capteurs quelconques rend ces méthodes intéressantes dans le cas de mesures à haute température. On conçoit que de telles méthodes sont susceptibles de développements vastes, aussi bien dans le domaine de l'analyse des structures que dans des disciplines très différentes comme la biomécanique, pour laquelle l'observation instantanée et dépourvue de contact est exigée.

L'interférométrie repose elle aussi sur le même principe : au lieu de superposer deux tissus, ou deux réseaux, elle consiste à superposer deux ondes ; une modification infime de la phase de l'une des deux ondes produit une modification macroscopique des figures d'interférence (Annexe V).

Plusieurs techniques utilisent la méthode du moiré :

- \* connaissance de la distribution des moments de flexion dans les plaques,
- \* mesure des variations d'épaisseur d'un modèle,
- \* détermination des composantes du tenseur des déformations planes dans un matériau.

C'est cette dernière approche que nous utilisons.

### V - 3 - 3 Principes

Le plus simple des effets de moiré est le vernier.

Supposons que l'on superpose deux réseaux de bandes parallèles, alternativement noires et transparentes, de largeurs microscopiques  $\varepsilon$  et  $\mu$  et supposons que  $(\varepsilon - \mu) / \varepsilon$  soit lui-même microscopique, de sorte que  $\varepsilon^2 / (\varepsilon - \mu)$  soit une longueur macroscopique.

Les bandes noires viendront alors recouvrir exactement les bandes claires en des endroits espacés de  $\varepsilon^2 / (\varepsilon - \mu)$ , produisant ainsi des zones (franges) opaques, tandis que les bandes transparentes à mi-chemin entre les franges opaques, donnent des franges claires : le vernier est ainsi un moiré unidimensionnel.

Notons la propriété de grossissement du vernier : une différence infime entre les pas des deux réseaux donne un effet macroscopique.

On peut également se convaincre par une courte réflexion qu'un déplacement microscopique de l'un des réseaux donne un effet macroscopique.

C'est cette dernière propriété du vernier qui est utilisée dans le pied à coulisse. Le phénomène de battement, bien connu en acoustique, est aussi une illustration de l'"effet de vernier".

La leçon générale que nous pouvons tirer de ces exemples est donc l'effet de grossissement, de microscope, du moiré : les franges (et le déplacement d'icelles) sont un effet macroscopique d'une cause microscopique ; de ce fait, elles sont utilisées depuis longtemps par les expérimentateurs pour mettre en évidence une déformation ou un mouvement microscopiques.

### V - 3 - 4 Procédé d'obtention

Le phénomène du moiré peut être observé par interférence de deux réseaux optiques géométriquement identiques, formés de traits rectilignes parallèles, alternativement opaques et transparents, régulièrement espacés d'une distance  $p$  appelée pas du réseau (le pas est la distance entre deux traits identiques -opaques ou transparents- consécutifs).

Les réseaux courants ont une densité de 8 - 12 - 20 - 40 - 80 traits par mm.

Considérons deux réseaux identiques (Figure V.6) :

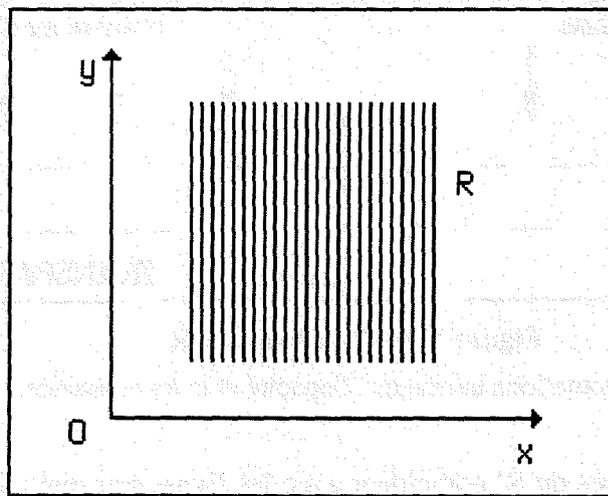


Figure V.6 : Réseau témoin  $R_V$ . Traits verticaux parallèles à l'axe des  $y$ .

Disposons les de la façon suivante (Figure V.7) :

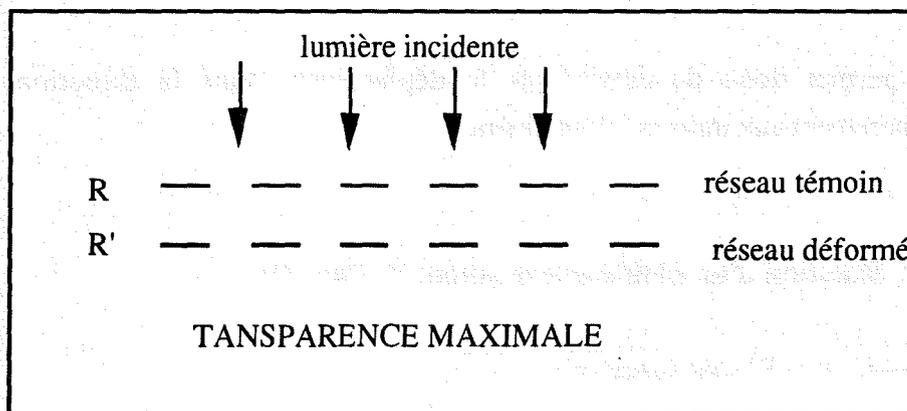


Figure V.7 :  $R$  et  $R'$  sont en coïncidence totale.  
Obtention d'une teinte uniforme.

Le réseau R appelé réseau mère ou réseau témoin est fixe dans l'espace et dans le temps. A ce réseau est associé le repère  $(O,x,y,z)$  (le plan  $Oxy$  est le plan du réseau, l'axe  $Oz$  est perpendiculaire aux traits du réseau). L'autre réseau  $R'$  est solidaire d'une éprouvette qui pourra subir des déplacements et des déformations.

Avant sollicitations du modèle les deux réseaux sont placés en coïncidence parfaite.

#### V - 3 - 4 - 1 Translation suivant l'axe $Ox$ de l'éprouvette.

Translatons le réseau  $R'$  :

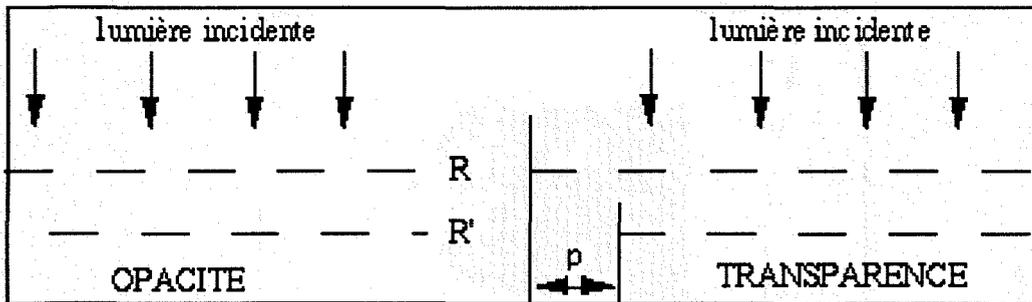


Figure V.8 : Translation de  $R'$ .

Deux situations extrêmes : l'opacité et la transparence.

Quant les traits opaques de  $R'$  coïncident avec les lignes transparentes de  $R$ , il y a extinction totale. En poursuivant la translation, une configuration identique à celle observée à l'état initial est obtenue.

Entre un état et un autre identique, le réseau  $R'$  a été translaté de  $p$ , pas du réseau témoin.

Le moiré permet donc de déterminer le déplacement dans la direction  $Ox$  perpendiculairement aux traits du réseau mère.

#### V - 3 - 4 - 2 Rotation d'un petit angle $\alpha$ autour de l'axe $Oz$ .

A l'instant initial  $R$  et  $R'$  sont superposés.

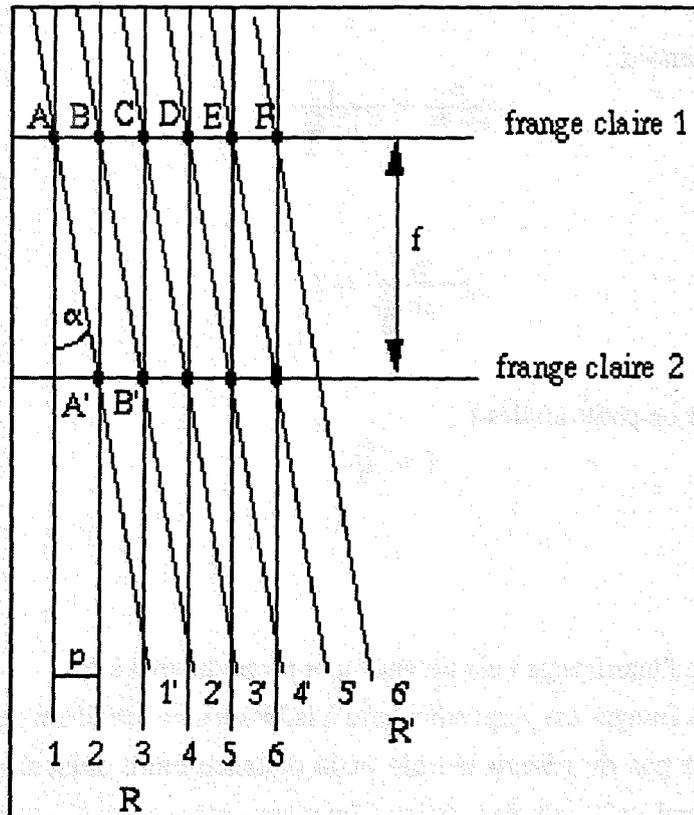
$R'$  subit une petite rotation  $\alpha$  autour de l'axe  $Az$  (Figure V.9).

\* Frange claire 1 :

le point A ainsi que les points B, C, D, E, F n'ont subi aucun déplacement dans la direction Ox. Ces points sont à l'intersection des traits n° i de R et les traits n° i' de R'.

\* Frange claire 2 :

A', B',... sont à l'intersection des traits n° i de R et des traits n° (i-1)' du réseau R'. Ces points ont subi un déplacement de module p dans la direction Ox.



**Figure V.9 :** Franges de moiré obtenues par une rotation  $\alpha$  du réseau témoin, l'intervalle séparant les franges est inversement proportionnel à l'angle  $\alpha$

$$\alpha = p/f$$

En conclusion, nous pouvons dire que :

\* les points situés sur une frange ont subi le même déplacement dans la direction Ox,

\* la différence de déplacement dans la direction Ox pour deux points situés sur des franges adjacentes est égale à p (pas du réseau).

Déterminons maintenant l'angle  $\alpha$ .

Notons  $f$  la distance entre deux franges consécutives encore appelée interfrange.

Nous avons d'une part :

$$\sin \alpha \equiv \frac{p}{B A'}$$

et d'autre part :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{f}{B A'}$$

De ce fait, nous obtenons :

$$\frac{p}{\sin \alpha} = \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

ou encore :

$$\frac{p}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = f$$

ce qui se réduit pour de petits angles à :

$$f = \frac{p}{\alpha} \quad (5.1)$$

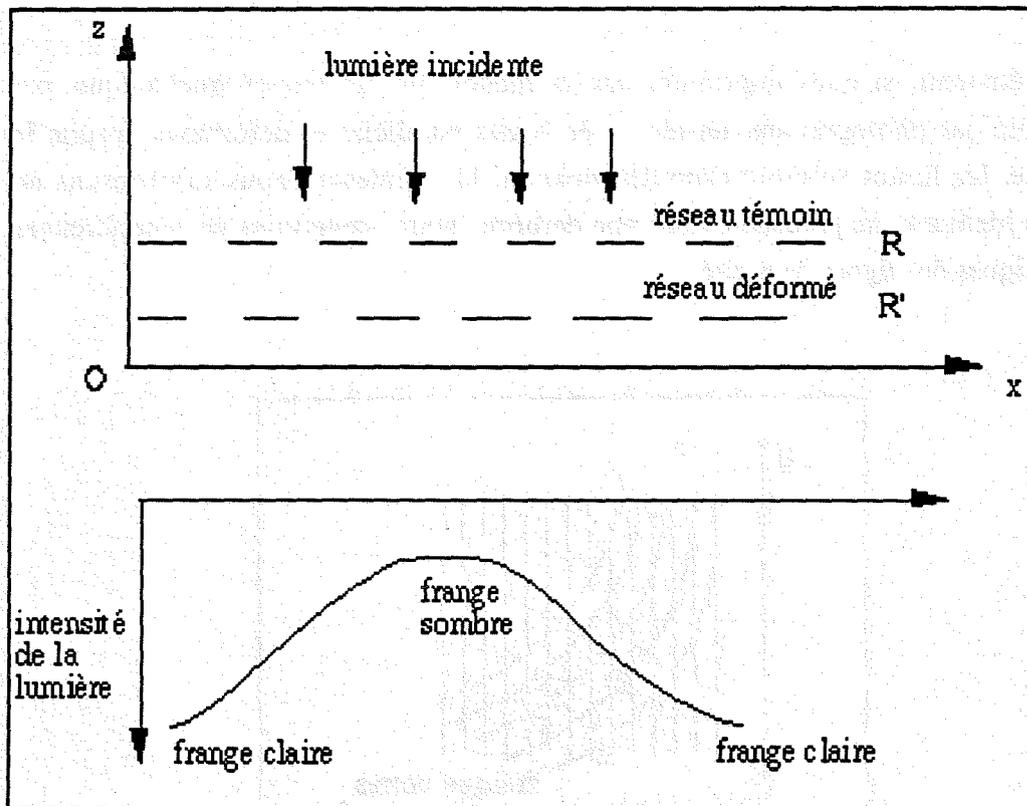
Ainsi :

- \* l'écartement ou l'interfrange  $f$  est inversement proportionnel à  $\alpha$ ,
- \* la direction des franges est perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle  $\alpha$ ,
- \* connaissant le pas du réseau témoin et la distance entre deux franges, il est possible de déterminer l'angle de rotation d'un réseau par rapport à l'autre.

#### V - 3 - 4 - 3 Allongement relatif dans la direction Ox.

Comme le montre la figure V.10, nous observons des franges claires lorsque les traits des deux réseaux coïncident.

Nous voyons que lorsque les deux premiers points de R (A et B) appartenant à deux traits opaques coïncident avec deux traits opaques de R', cela signifie que s'il existe  $n$  traits pour le réseau témoin entre A et B, alors il existe  $n \pm 1$  traits pour le réseau déformé R'.



**Figure V.10 :** Franges obtenues à la suite d'un allongement du modèle sur lequel est gravé le réseau témoin.

#### V - 3 - 4 - 4 Cas général : translation, rotation, déformation.

D'une manière générale nous pouvons donc dire que toute superposition de figures géométriques ayant une structure assez fine et montrant de petites variations, soit dans la structure elle-même, soit dans leur position respective, donneront lieu à des franges d'interférence macroscopique, les franges de moiré.

Considérons une fois de plus, un réseau  $R$ , plus précisément noté  $R_V$  (franges parallèles à l'axe  $Oy$ ), de pas  $p$  et un système d'axes  $(O, x, y)$  lié à ce premier réseau. Après déformation, il donne naissance à un second réseau  $R'$ .

Superposons les deux réseaux et prenons par exemple une droite  $D$  parallèle à  $Ox$ . Elle coupe les deux réseaux en un certain nombre de points. Plus ce nombre sera élevé, plus la ligne  $D$  sera "noircie" en certains endroits. Ces zones plus sombres formeront entre elles les franges de moiré.

A l'inverse lorsque le nombre de points sera minimal, on aura la formation de franges blanches.

Concrètement, si nous imprimons sur un modèle par un moyen quelconque, par exemple par photogravure, un réseau de lignes parallèles et déformons ensuite le modèle, les lignes suivront cette déformation. Si maintenant nous superposons un réseau identique au précédent mais non déformé, nous obtiendrons par interférences mécaniques des lignes de moiré.

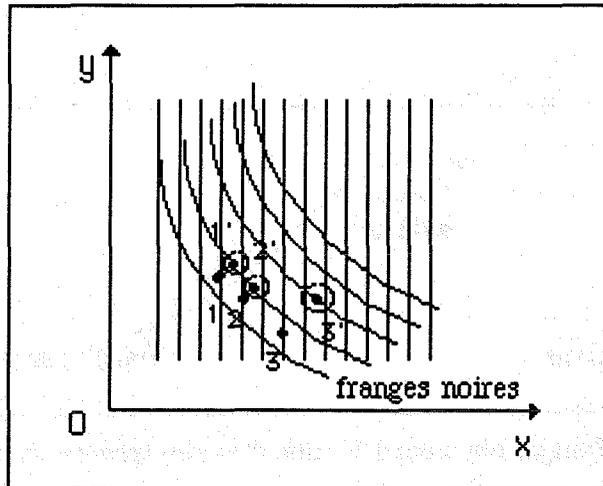


Figure V.11 : Réseau témoin  $R_v$  et franges noires de moiré obtenues.

Soit  $A'$  un point d'une frange noire. Ce point provient de  $A$  appartenant à  $R_v$ . Nous avons la projection du vecteur  $AA'$  sur  $Ox$  qui est égale à  $p/2$ . De même  $B'$  est le transformé de  $B$  et ainsi tous les points sur cette frange noire proviendront de points dont la composante sur  $Ox$  sera égale à  $p/2$ .

Nous remarquerons de même, que  $C'$  est le transformé de  $C$ , la projection du vecteur  $CC'$  sur  $Ox$  est égale à  $3p/2$ . Et ainsi de suite pour tous les points de cette franges.

Les franges noires sont donc les lieux des points où :

$$u = \frac{(2k + 1)}{2} p \quad (5.1)$$

Si maintenant, nous considérons le réseau témoin parallèle à l'axe  $Ox$  les franges de moirés sont les courbes d'isodéplacements verticaux  $v$ . Ce résultat s'applique également aux franges blanches.

Nous pouvons ainsi tracer les courbes des déplacements d'un point quelconque  $P$ .

Ces lignes de moiré sont alors interprétées comme les courbes d'égal déplacement linéique (Dantu, 1954, 1957).

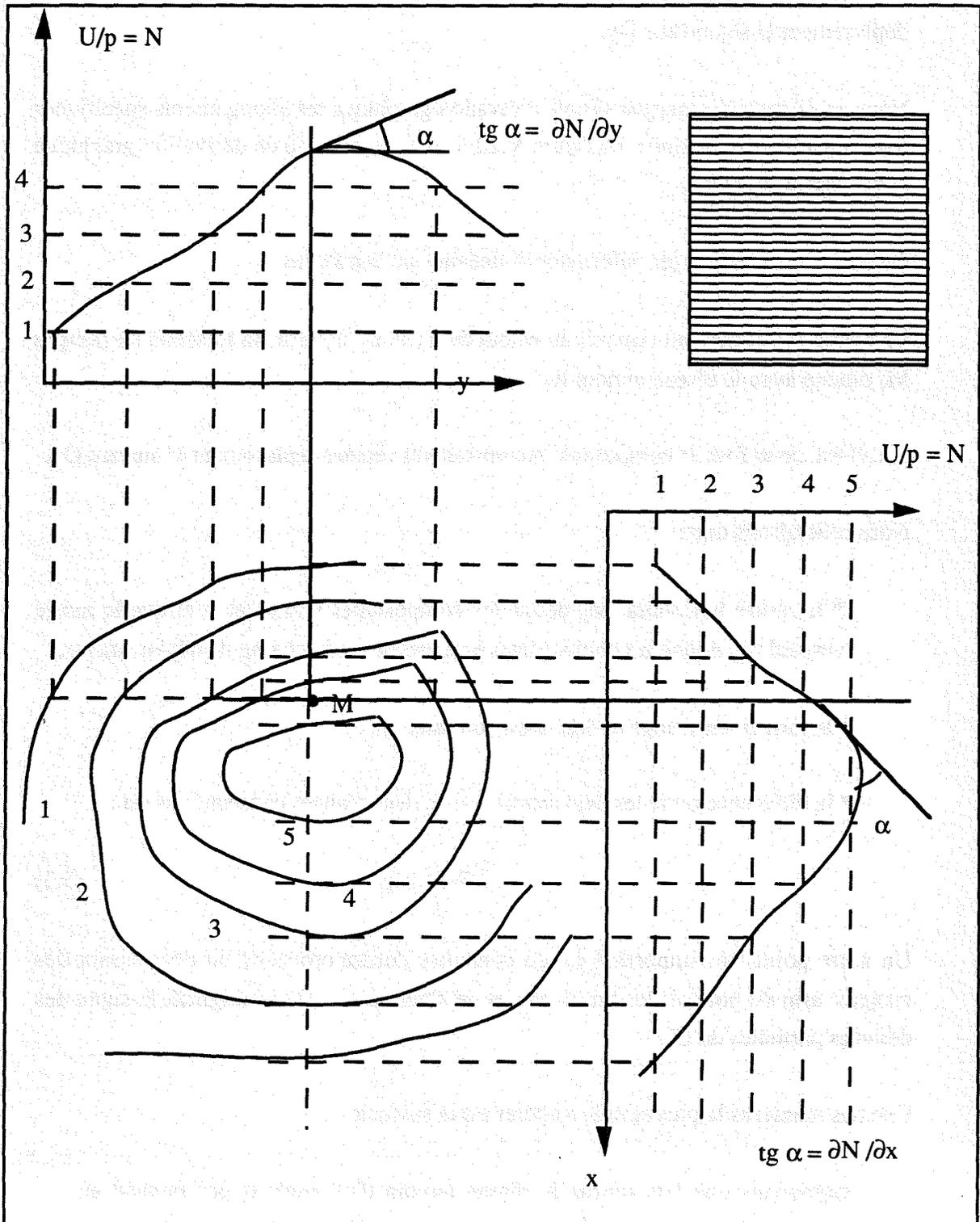


Figure V.12 : Procédé de dérivation graphique pour obtenir  $v_x$  et  $v_y$  avec le moiré  $M_h$ .

Dans le cas présent, nous considérons le réseau ligné horizontalement  $R_h$  parallèle à l'axe  $Ox$  avant toute déformation.

Après déformation, l'application du réseau témoin fait apparaître un faisceau de franges  $M_h$  qui sont donc les lignes d'isodéplacement de la fonction  $v(x,y)$ , composante du déplacement  $U$  selon l'axe  $Oy$ .

Nous en déduisons alors par simple dérivation graphique les allongements spécifiques dans une direction donnée. La figure V.12 résume le procédé de dérivation graphique pour obtenir  $v_{,x}$  et  $v_{,y}$ .

On peut ainsi mesurer les déformations linéaires ou angulaires.

Le même raisonnement conduit au calcul de  $u_{,x}$  et  $u_{,y}$  à partir du faisceau de franges  $M_v$  obtenu avec le réseau témoin  $R_v$ .

$u(x,y)$  est, cette fois, la composante horizontale du vecteur déplacement  $U$  suivant  $Ox$ .

Nous retiendrons que :

- \* le moiré horizontal  $M_h$  donne les composantes verticales  $v$  et que le moiré vertical  $M_v$  donne les composantes horizontales  $u$  du champ de déplacements,
- \* le long d'une frange de  $M_v$ ,  $u$  est constant,
- \* la différence entre les déplacements  $u$  de deux franges consécutives est :

$$|D u| = p \quad (5.3)$$

Un autre point très important est de connaître l'ordre croissant ou décroissant des franges, afin de pouvoir les numéroter et de déterminer, sans ambiguïté, le signe des dérivées partielles de  $U$ .

Une des manières la plus simple d'opérer est la suivante :

supposons que l'on tourne le réseau témoin d'un angle  $\alpha$  par rapport au réseau déformé, la forme des franges est changée. En effet le déplacement  $U_1$  d'un point  $A(x,y)$  est donné par :

$$U_1 = U + (-\alpha \wedge OA) \quad (5.4)$$

puisque la déformation réelle  $U$  se superpose au déplacement dû à la rotation  $(-\alpha)$  du réseau déformé par rapport au réseau témoin.

Les composantes de  $U_1$  seront :

$$U(x,y) = u(x,y) + \alpha y \quad (5.5.a)$$

$$V(x,y) = v(x,y) - \alpha x \quad (5.5.b)$$

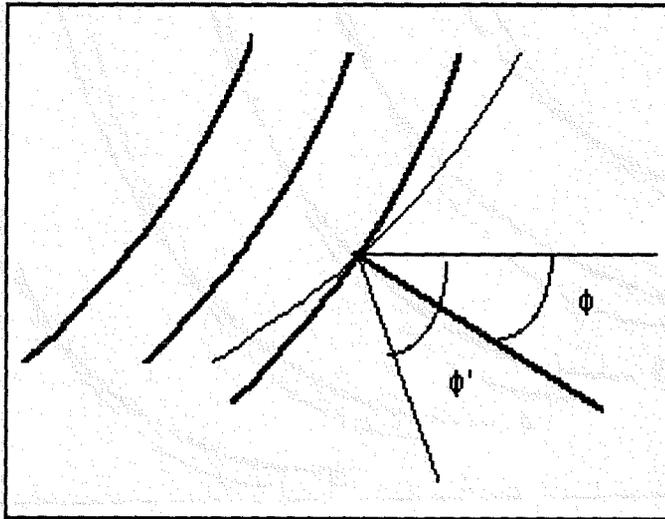


Figure V.13 : Modifications du faisceau de franges par rotation du réseau témoin.

Le long d'une frange du faisceau  $M_V$  :

$$dU = 0 = u_x dx + u_y dy \quad (5.6)$$

par suite, la direction de la normale  $n'$  est telle que :

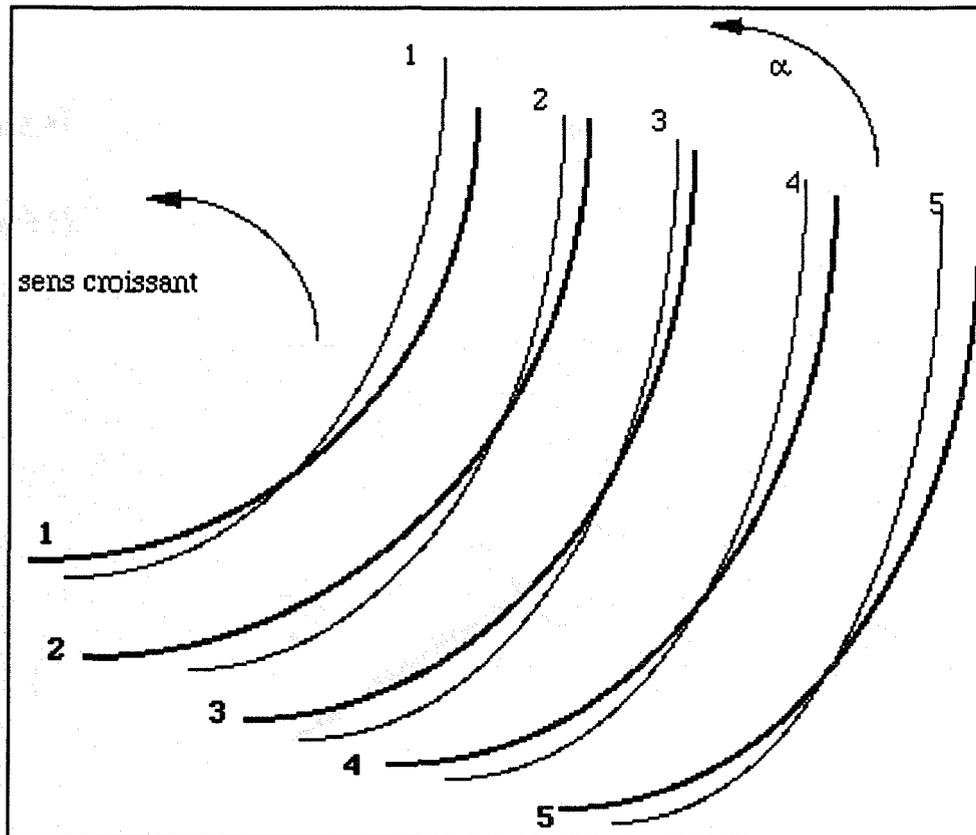
$$\text{tg } \phi' = U_y / U_x = u_y / u_x + \alpha / u_x = \text{tg } \phi + \alpha / u_x \quad (5.7)$$

et donc

$$\text{tg } \phi' - \text{tg } \phi = \alpha / u_x \quad (5.8)$$

$\alpha$  et  $\Delta (\text{tg } \phi)$  ont le même signe lorsque  $u_x$  est positif, les franges tournent alors dans le même sens que le réseau témoin, d'où la règle pour numérotter les franges :

les franges sont numérotées dans le sens croissant suivant  $x$  (ou  $y$ )  $> 0$  si elles tournent dans le même sens que le réseau témoin et dans l'ordre décroissant si elles tournent en sens contraire.



**Figure V.14** : Numérotation des franges par rotation du réseau témoin.

### V - 3 - 5 Avantages de cette méthode.

Avec cette méthode, nous pouvons visualiser et donc mesurer les déformations dans le domaine de la plasticité et du fluage.

Un point fort de cette technique est le fait qu'elle est de caractère purement géométrique et qu'elle ne fait appel à aucun phénomène physique intermédiaire lié par exemple aux extensions ; par conséquent elle n'est pas sujette aux erreurs de non-linéarité pour les grandes déformations ou de dérive pour les phénomènes de longue durée.

Elle permet la mesure des déplacements ou des déformations indépendamment de leurs amplitudes, des effets de la température, du temps, de la fréquence et de la vitesse.

Cette méthode possède en outre d'autres avantages ; elle permet de réaliser une extensiométrie continue, i.e. nous pouvons, par la lecture d'une simple photographie, déterminer les déformations sur toute la surface d'une pièce.

Nous pouvons également en cinématographiant le moiré suivre l'évolution des déformations au cours du temps.

#### **V - 4 MISE EN OEUVRE EXPERIMENTALE**

La réussite de la méthode des moirés dépend pour une large part de la qualité du réseau utilisé comme trame et du soin apporté à son impression sur la surface plane de la tôle.

Les conditions suivantes doivent être remplies au mieux :

- \* trame parfaitement appliquée sur la surface, sans déformation initiale,
- \* traits rigoureusement rectilignes, de pas uniforme et de contraste suffisant,
- \* réseau adapté au champ de déformations à étudier.

Une des méthodes les plus usitées est l'impression directe de la trame par photo-gravure. Son coût étant rédhibitoire, elle est abandonnée depuis longtemps. Nous avons donc décidé d'utiliser un procédé beaucoup simple.

Il est facile de se procurer des laques photo-sensibles au rayonnement ultra-violet et de les déposer en couche mince uniforme sur la surface à étudier. La laque KODAK PHOTO-RESIST (KPR), déposée au pinceau plat, donne des résultats convenables. En revanche, il faut être très vigilant car il n'est pas aisé de la répandre uniformément si la dilution n'est pas optimale pour assurer la fluidité correcte du produit ; ce produit réclame, de plus, certaines précautions à l'emploi. Il est en effet, inflammable et ne doit pas être employé près de flammes ou de sources d'étincelles.

Les opérations suivantes ont été effectuées :

##### *\* Préparation de la surface :*

Après avoir déterminé les endroits où les réseaux doivent être imprimés sur la plaque (nous voulons avoir le reflet des déformations au niveau de chaque tête de profilage et aussi bien au centre de la plaque que sur les côtés ; nous avons également décidé de faire

une application de réseau au verso de la plaque), nous nettoyons ces emplacements au trichloréthylène ; puis nous séchons avec un jet d'air à 40°C.

Une bonne adhérence de la résine ne peut être obtenue que par un nettoyage parfait de la surface à graver. La moindre trace de graisse ou d'oxydation peut provoquer des piqures ou des manques d'adhérence de la résine.

*\* Dépot de la laque photo-sensible :*

La sensibilité spectrale de la laque se situe dans le violet et le proche U.V. entre 250 et 450 nm. On doit donc manipuler à l'abri de toute source susceptible de l'impressionner : lumière solaire, tubes fluorescents, lampes à vapeur de mercure. Un éclairage modéré utilisant des lampes à filament de tungstène est utilisé. Les étapes suivantes peuvent alors se dérouler sans précautions spéciales.

Nous appliquons la solution K.P.R. au pinceau délicatement et très uniformément. Pour ce faire, nous effectuons plusieurs passages régulièrement dans un sens et puis dans l'autre.

Pour terminer, la laque est séchée par un jet d'air chaud à 60°C pendant une minute puis durant 30 secondes dans un souffle d'air à 40°C.

*\* Impression photographique :*

Des essais préliminaires au laboratoire, avec des temps d'insolation et des distances différentes ont permis de trouver les valeurs optimales.

Les réseaux lignés choisis comportent 12 traits par mm. Ce type de réseaux lignés ont été fournis gracieusement, au format 200x300 mm, par la section d'optique du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées de Paris où P. Dantu a mis au point la technique originale de l'extensométrie par le moiré.

Nous avons découpé ces réseaux aux dimensions 60 mm x 40mm.

Après avoir repéré le sens du réseau à la lumière, nous appliquons celui-ci sur la plaque aux endroits sélectionnés.

Ensuite, nous recouvrons le réseau avec un châssis pneumatique réalisé au laboratoire. En effet, il ne faut surtout pas oublier l'importance de l'application du réseau.

Le châssis fabriqué par nos soins et pour ce projet plus spécialement, est composé de deux couronnes en AU4G et d'une fenêtre en polyéthylène transparent.

L'étanchéité est assurée par deux joints toriques de 200 mm se trouvant chacun dans une gorge :

- \* le premier pour assurer le contact des deux couronnes et pour permettre à la fenêtre de venir s'appliquer fortement par la pression atmosphérique sur le réseau souple placé sur la surface de la plaque,
- \* le second pour assurer une adhérence parfaite entre ce châssis et la plaque.

Le vide primaire est donné par une pompe à vide (Annexe VI).

L'insolation est faite par une lampe U.V., à vapeur de mercure, placée à 40 centimètres de la plaque. La lampe est posée sur un support vertical fixe, que nous avons également développé, afin que la position de la lampe au dessus de la tôle soit constante pour chaque insolation. Le calage s'opère à l'aide de repères tracés préalablement sur la plaque.

Le temps de pose optimal est de 4 min 30 s.

Après avoir arrêté la pompe, oté le support et le réseau souple, la plaque est passée dans la profileuse. Nous vérifions, par sécurité, que les réseaux imprimés ne se sont pas abimés au cours du passage dans les têtes.

Nous réalisons ensuite la révélation avec le produit KODAK KPR DYE donnant une coloration noire, avec un très bon contraste. Les parties non exposées sont dissoutes dans l'eau.

La plaque est ensuite séchée pendant 5 minutes par un jet d'air chaud (80°C).

Le résultat de l'impression se traduit par une teinte uniforme très foncée donnant peu de contraste de frange.

Certaines piqures peuvent se produire. Cela peut provenir :

- \* de poussières qui se sont collées sur la couche lors du séchage,
- \* de manques locaux d'adhérence dûs à un dégraissage insuffisant ou à une oxydation de la surface avant sensibilisation,
- \* de poussières qui lors de l'exposition ont protégé localement la résine des radiations ultraviolettes, au cours de l'insolation.

*\* Application :*

La ligne de fabrication sur laquelle nous faisons les essais comporte 21 têtes.

Après avoir imprimé nos réseaux, nous profilons une série de tôles afin d'obtenir des échantillons relatifs à chacune des têtes.

Nous sommes alors en possession de 21 plaques ayant chacune au moins deux réseaux.

Nous effectuons ensuite une série de photographies des faisceaux de franges de moirés.

La forme de ces faisceaux de franges dépend de la rotation du réseau témoin par rapport à l'orientation initiale de la trame imprimée. On recherche donc par une légère rotation du réseau, la position qui semble être la plus convenable.

Ensuite nous maintenons ce réseau témoin parfaitement appliqué sur la tôle.

Les photographies sont prises ensuite avec un appareil 24 x 36 Nikon, équipé d'un objectif "macro" f/55. Le film de 36 vues est un Kodak d'une sensibilité de 400 ASA. Le temps de pose est de 2 secondes.

Il faut insister également sur l'éclairage afin d'obtenir des enregistrements photographiques d'une excellente qualité.

Nous avons conclu, après une série d'essais, que la meilleure manière d'obtenir des photographies exploitables est d'utiliser un éclairage indirect. Celui-ci est assuré par deux spots de 150 Watts éclairant deux réflecteurs de couleur blanche en polystyrène placée à 45° par rapport à la normale à la tôle déformée.

Les films sont développés et tirés sur papier 9 x 13 cm. Ensuite la zone intéressante, au niveau du pli, est agrandie.

Cette partie expérimentale, très importante, exige beaucoup de temps pour la mettre correctement au point.

## **V - 5 SIMULATION NUMERIQUE DU PROFILAGE**

Le type de profilé retenu pour la simulation numérique par éléments finis a les caractéristiques suivantes :

\* *Matériau :*

Acier doux calmé à l'aluminium, classe 2, ST12, pré-peint.

Module d'Young : 203 000 MPa.

Coefficient de Poisson : 0,30.

Masse volumique à 20° C : 7,8 g/cm<sup>3</sup>.

Limite d'élasticité :  $\sigma_0 = 320$  MPa.

Limite de rupture :  $\sigma_r = 352$  MPa.

Allongement de rupture : A = 25 %.

Coefficient de frottement sur acier :  $\mu = 0,1$

La courbe rationnelle a été obtenue à partir d'essais de traction uniaxiale, à vitesse de déformation imposée (Chapitre V-2).

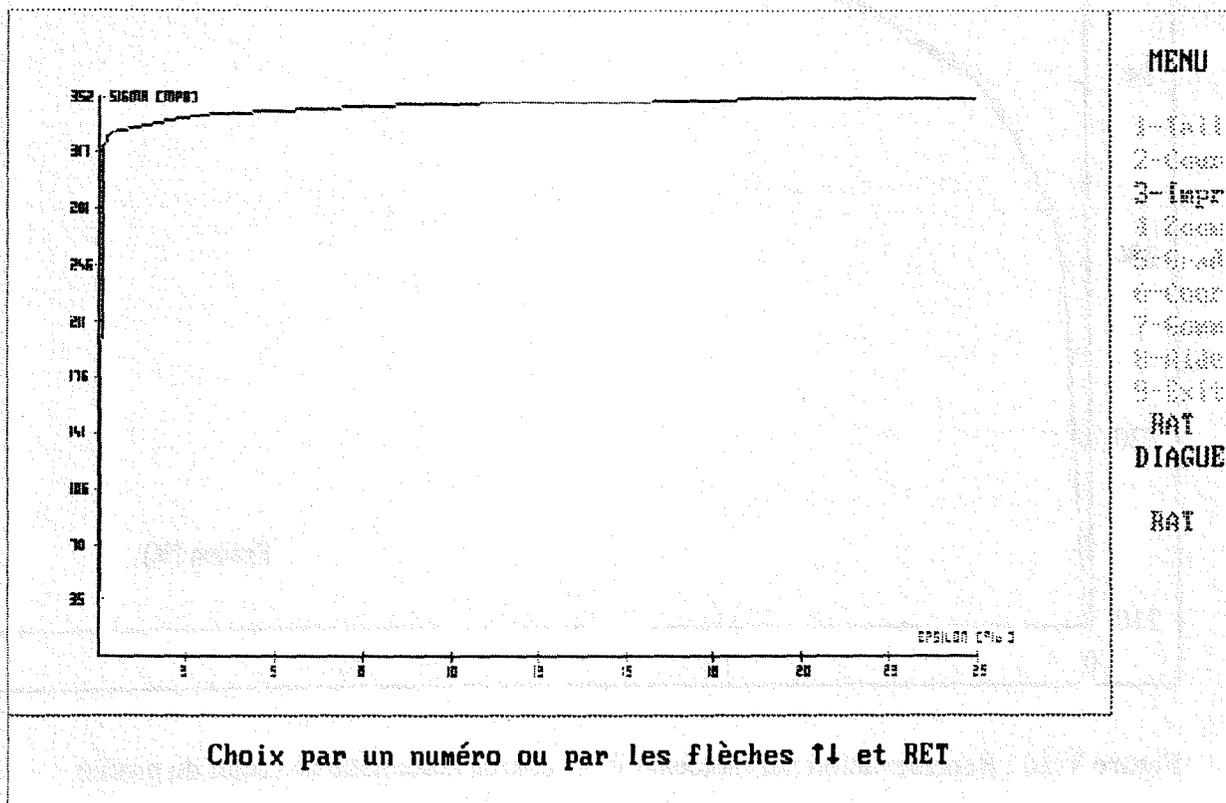


Figure V.15 : Courbe rationnelle de l'acier du profilé. Loi d'écroissage puissance.

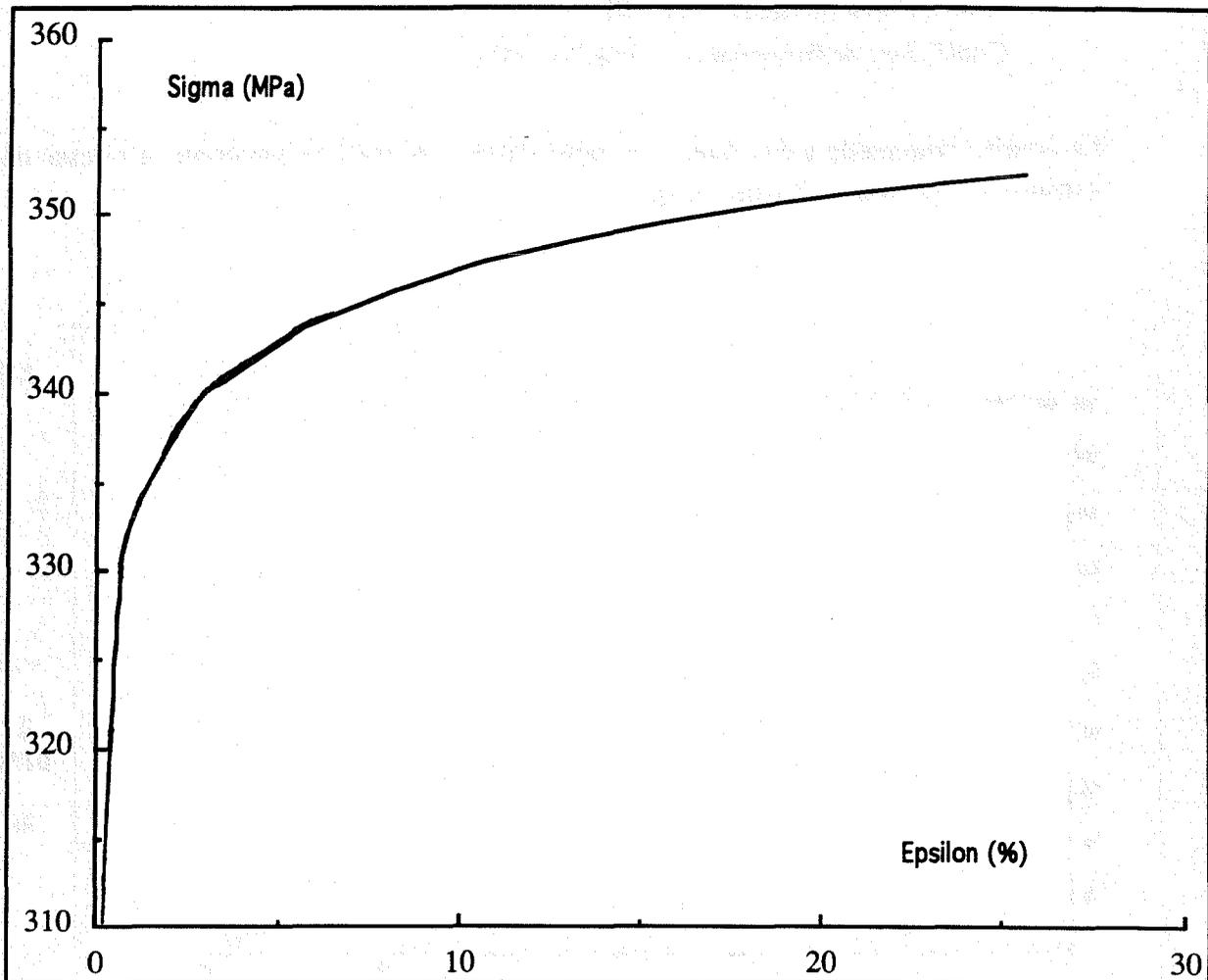
Nous en donnons une représentation analytique par morceaux de la forme :

$$\sigma = \sigma_i [ 1 - \alpha_i + \alpha_i (\varepsilon/\varepsilon_i)^n ]$$

avec les paramètres optimisés suivants, pour deux morceaux :

$\epsilon_i$	$\sigma_i$	$\nu_i$	$\alpha_i$
0,0015763	320	0,03	1
0,0039763	329	0,02	0,8

**Tableau V.1** : Valeurs des paramètres optimisés de la courbe rationnelle.



**Figure V.16** : Représentation par morceaux de la courbe rationnelle de l'acier du profilé.

Les caractéristiques géométriques du profilé sont données en figures V.17 et V.18.

\* *Géométrie* :

Le profilé étudié a une largeur de 915 mm et comporte une série de cinq ondes ayant chacune les caractéristiques suivantes :

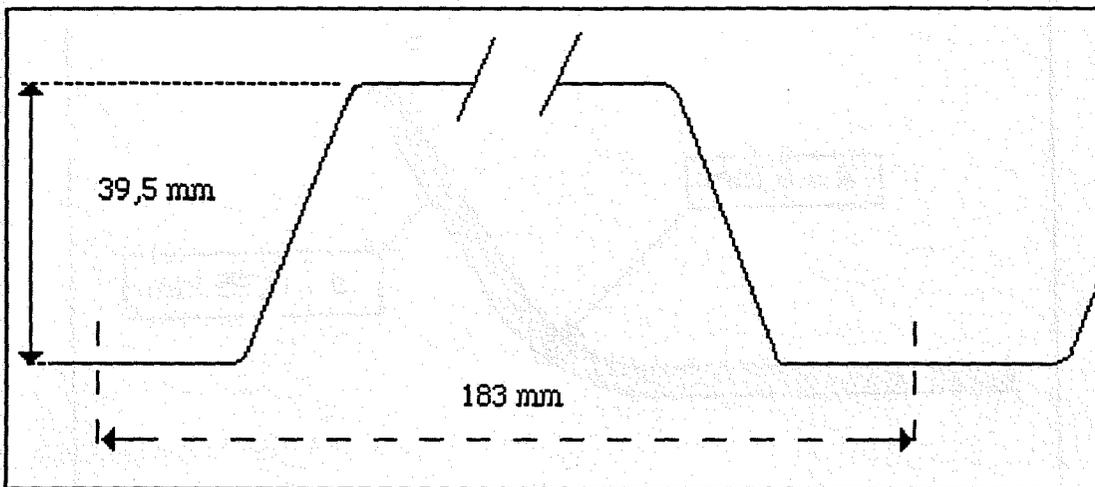


Figure V.17 : Caractéristiques géométriques d'une onde du profilé.

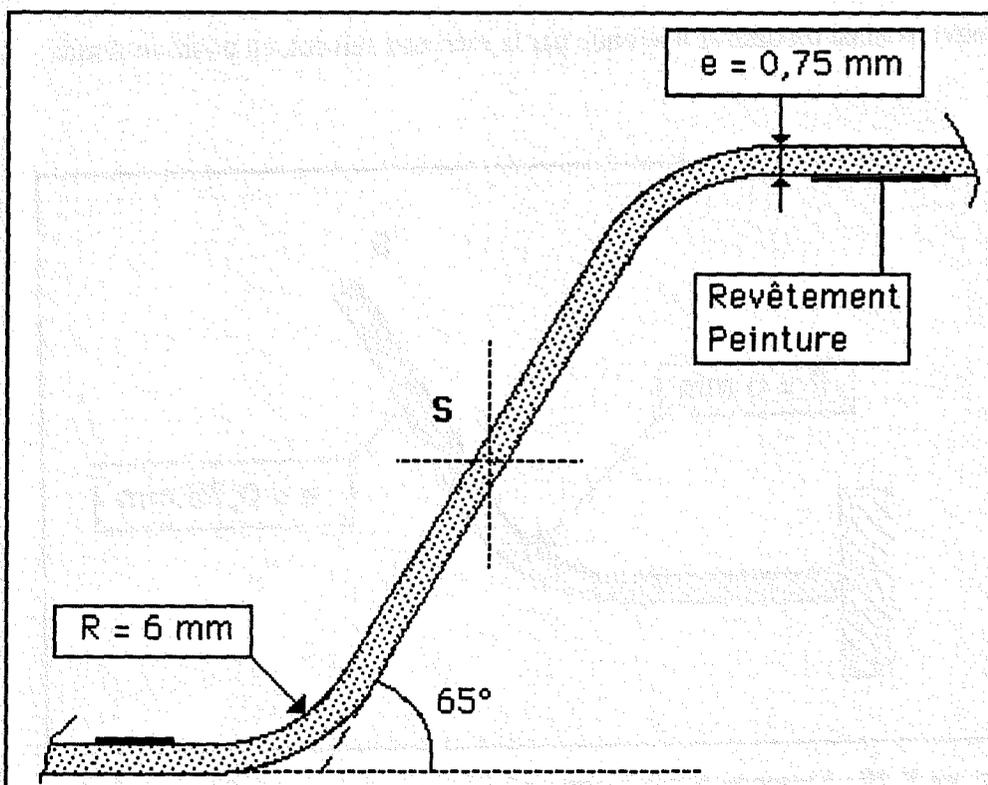
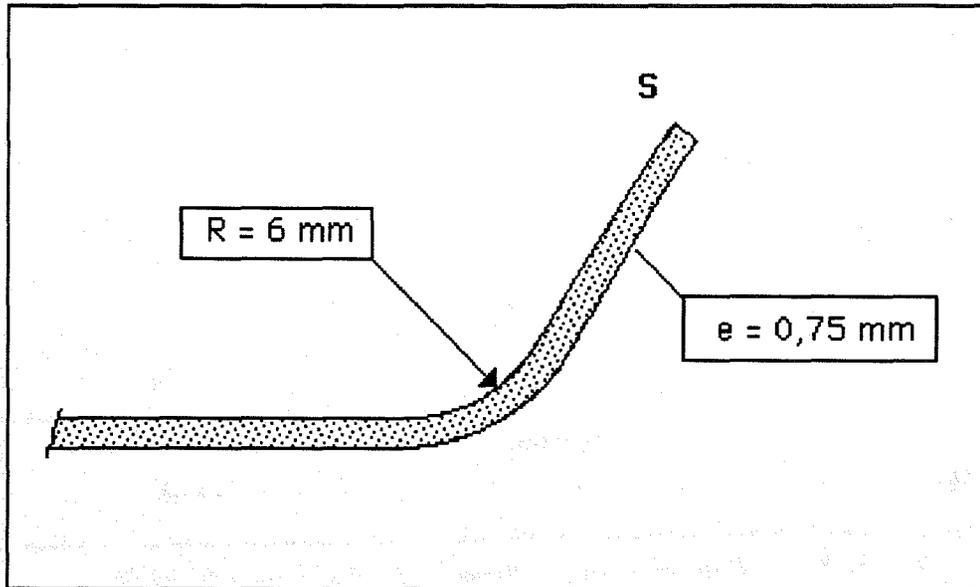


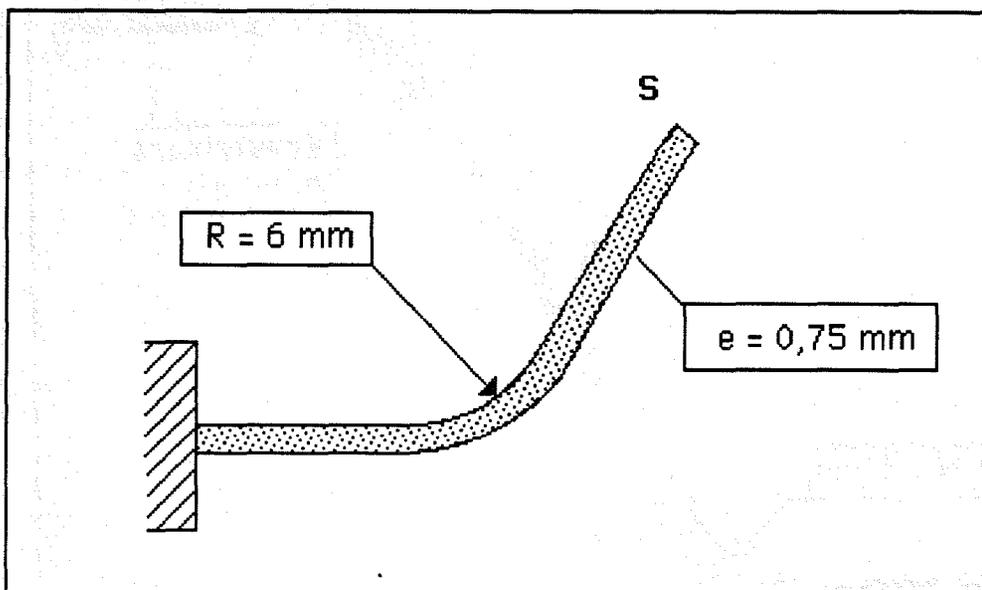
Figure V.18 : Caractéristiques géométriques du profilé :  
rayon, épaisseur, inclinaison du pli.

Nous notons une symétrie évidente par rapport au point S.



**Figure V.19 :** Le point S est point de symétrie pour le pli.

Nous pouvons ainsi modéliser une onde par le morceau suivant, en position finale :

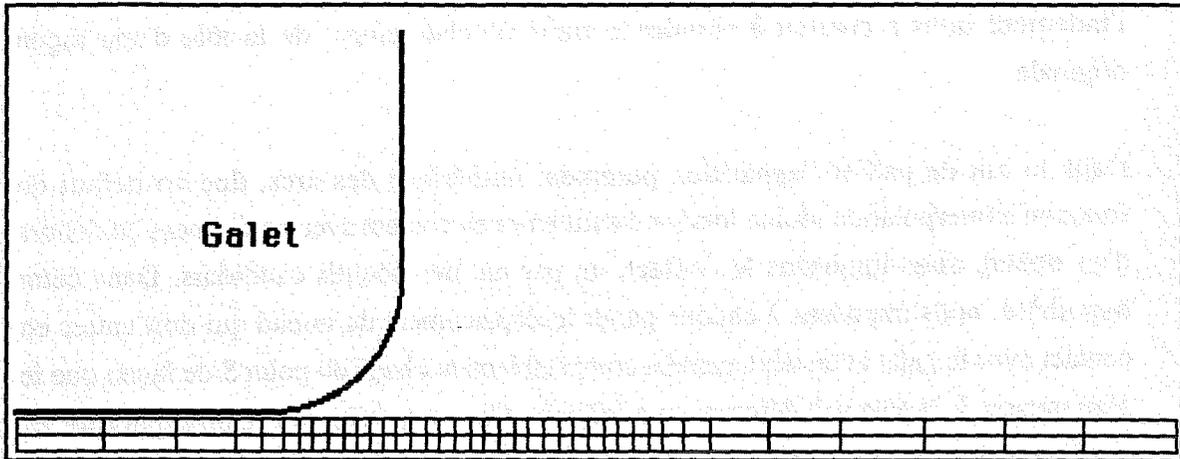


**Figure V.20 :** Structure finale à obtenir à l'issue du calcul par éléments finis.

Seule, la partie de l'onde représentée en figure V.20 sera modélisée par éléments finis. Pour reconstituer l'onde originelle, il suffira d'effectuer une symétrie par rapport au point S et de prolonger chaque extrémité par un morceau de tôle droite de longueur connue.

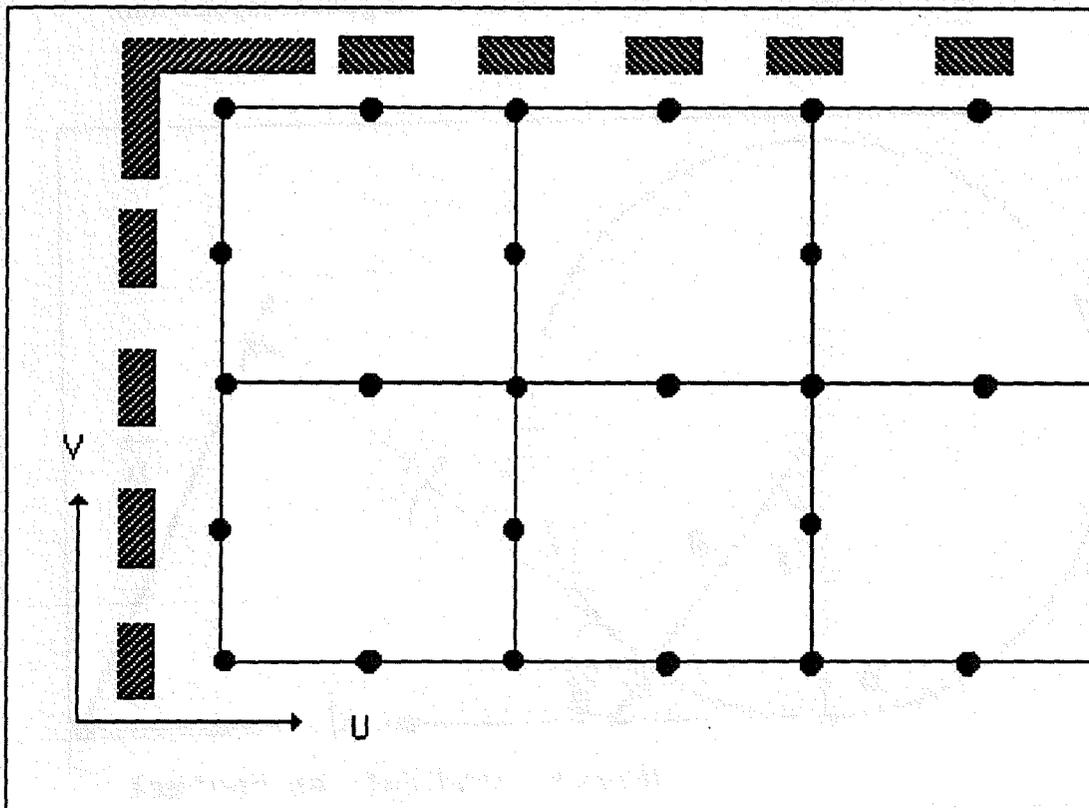
\* *Maillage :*

Le profilé est maillé à l'aide de 78 éléments quadratiques Serendip à 8 noeuds, en 2 lits, avec intégration réduite à  $2 \times 2$  points de Gauss. Le nombre de degrés de liberté est de 634.



**Figure V.21 :** Maillage définitif en 78 éléments à 8 noeuds, quadratiques.  
Evolution de la taille des éléments selon une progression géométrique de raison 0,75 et 1,3 pour les zones éloignées à gauche et à droite du contact avec le galet.

\* *Conditions de blocage :*

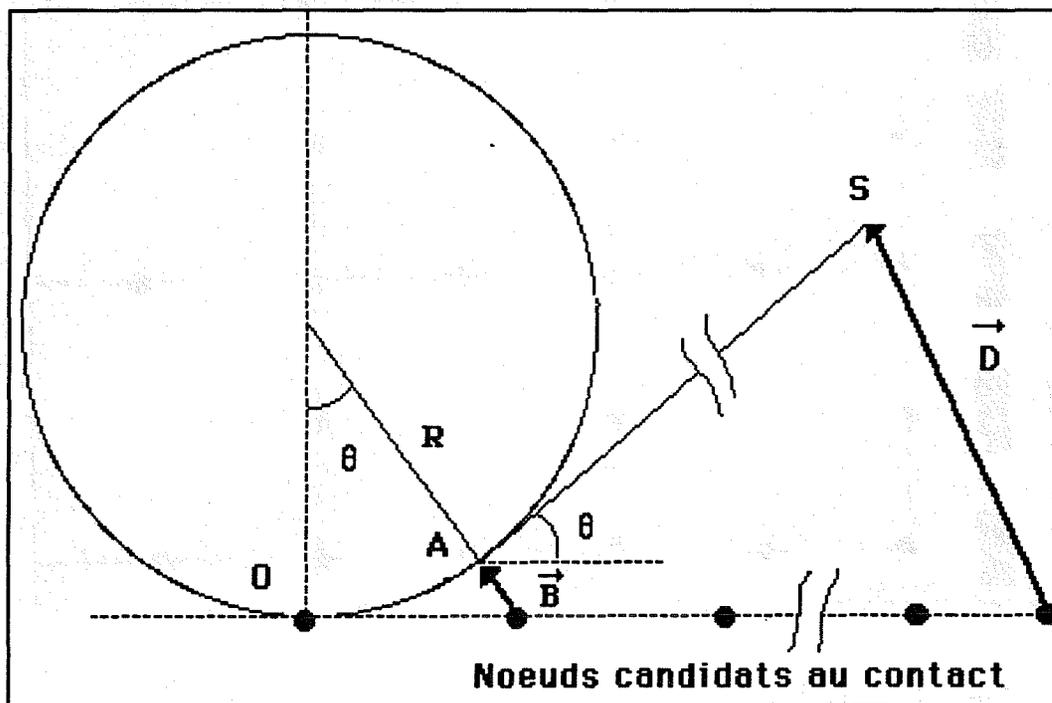


**Figure V.22 :** Conditions de blocage en U et V. à l'extrémité gauche de la tôle.

**\* Incrémentation :**

Le calcul par éléments finis 2D s'effectue en état de déformation plane. La remarque, faite à la fin du chapitre précédent, relative aux arcs observés lors du chargement de l'indenteur nous a conduit à simuler le trajet de chargement de la tôle d'une façon originale.

Dans le but de pallier l'apparition purement numérique des arcs, due au défaut de fonction d'interpolation idoine lorsque l'outil entre en contact avec un élément en dehors d'un noeud, nous imposons le contact, un par un, des noeuds candidats. Dans cette hypothèse, nous imposons à chaque palier le déplacement du noeud qui doit entrer en contact avec le galet et un déplacement convenablement choisi du point S de façon que le plan moyen de la tôle soit déformé au minimum. Cette hypothèse est réaliste puisque les profileurs règlent leurs outils en sorte qu'il n'y ait pas/ou peu de traction dans les flans entre deux têtes de profilage successives. Ce réglage délicat relève du savoir-faire des monteurs et fait partie de la mémoire de l'entreprise. Le bien-fondé de cette idée, nous a fait réfléchir profondément au trajet de chargement numérique qu'il faut imposer à la tôle pour la transformer en profilé, en éludant les artefacts numériques cités précédemment. La mise en forme de la tôle se fait de façon progressive, selon la figure V-23, en partant du premier noeud candidat que l'on projette sur la surface du galet de rayon 6 mm.



**Figure V.23 :** Projection successive, sur le galet de forme, des noeuds candidats.  
Vecteur déplacement **D** imposé au point S et vecteur déplacement **B** imposé au noeud A

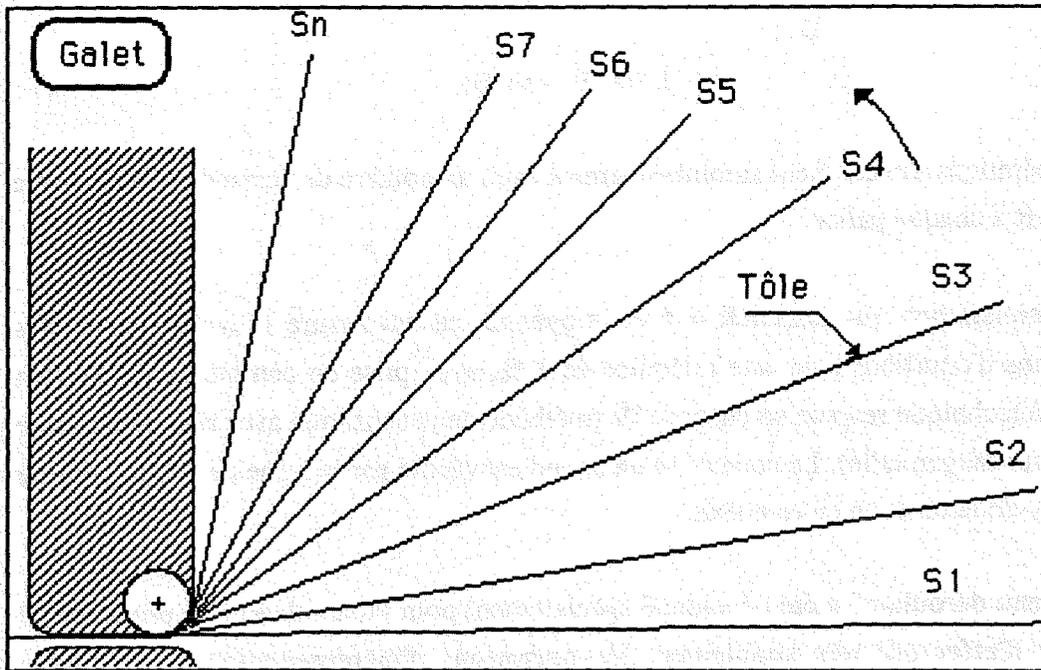


Figure V.24 : Action du galet et du contre galet. Mise en forme progressive de la tôle par passage dans les différentes têtes de la ligne de profilage.

On remarquera que ce trajet de chargement est semblable aux déformations subies par le profilé au cours de son passage sous les différentes têtes de profilage. La tôle sera peu déformée dans sa partie droite en imposant un vecteur déplacement  $D$  à  $S$ .

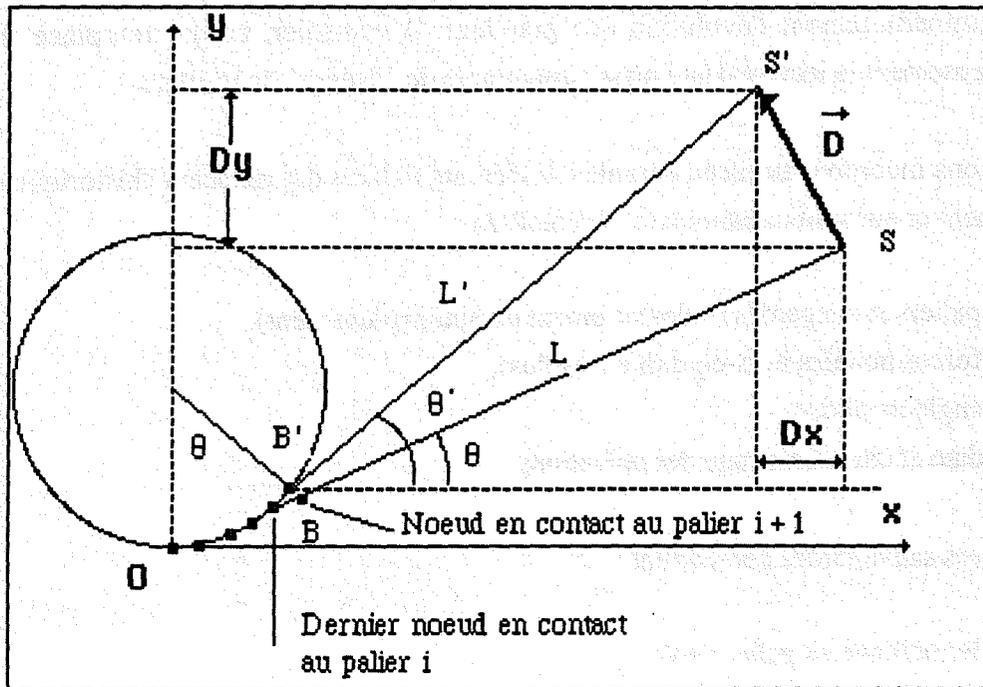


Figure V.25 : Evaluation du vecteur  $D$ , déplacement imposé à l'extrémité  $S$  pour que  $BS$  soit déformé au minimum :  $L = L'$ .

$$D_x = L (\cos \theta' - \cos \theta)$$

D :

$$D_y = L (\sin \theta' - \sin \theta)$$

Les opérations s'enchaînent automatiquement avec un nombre de corrections d'équilibre NCORR à chaque palier.

Nous constatons que NCORR = 6 en moyenne, ce qui assure la convergence des itérations d'équilibre pour une tolérance de 1 %, avec prise en compte du frottement selon la technique retenue au chapitre IV (méthode de pénalisation avec raideur normale et raideur tangentielle). Le contact en un noeud est vérifié par le signe de la composante normale de la réaction en ce noeud.

Un "menu déroulant" a été développé spécialement pour la simulation du profilage. Il permet d'effectuer très simplement les opérations d'incrémentation et de suivre l'évolution du calcul au cours du temps par simple affichage de valeurs caractéristiques (position du palier, numéro de l'itération de correction d'équilibre, valeur de l'angle de pliage mesuré à partir du morceau de tôle non déformé).

A la fin d'un pas, le post-processeur graphique permet la visualisation de la déformée ainsi que le tracé des plages ou des lignes d'isovaleurs (contrainte équivalente de von Mises, déformation plastique équivalente accumulée). Un simple regard sur l'écran donne immédiatement l'évolution des grandeurs à contrôler, ce qui remplace très avantageusement la lecture d'une masse importante de "listings" de résultats.

Nous avons incorporé au menu déroulant différents fichiers qui retracent l'historique du chargement et qui sont constamment réactualisés :

- paliers sauvegardés (volontairement ou automatiquement),
- forces nodales hors-équilibre (résidus),
- angle de pliage,
- date et chronométrage des opérations.

Les fichiers sauvegardés comportent :

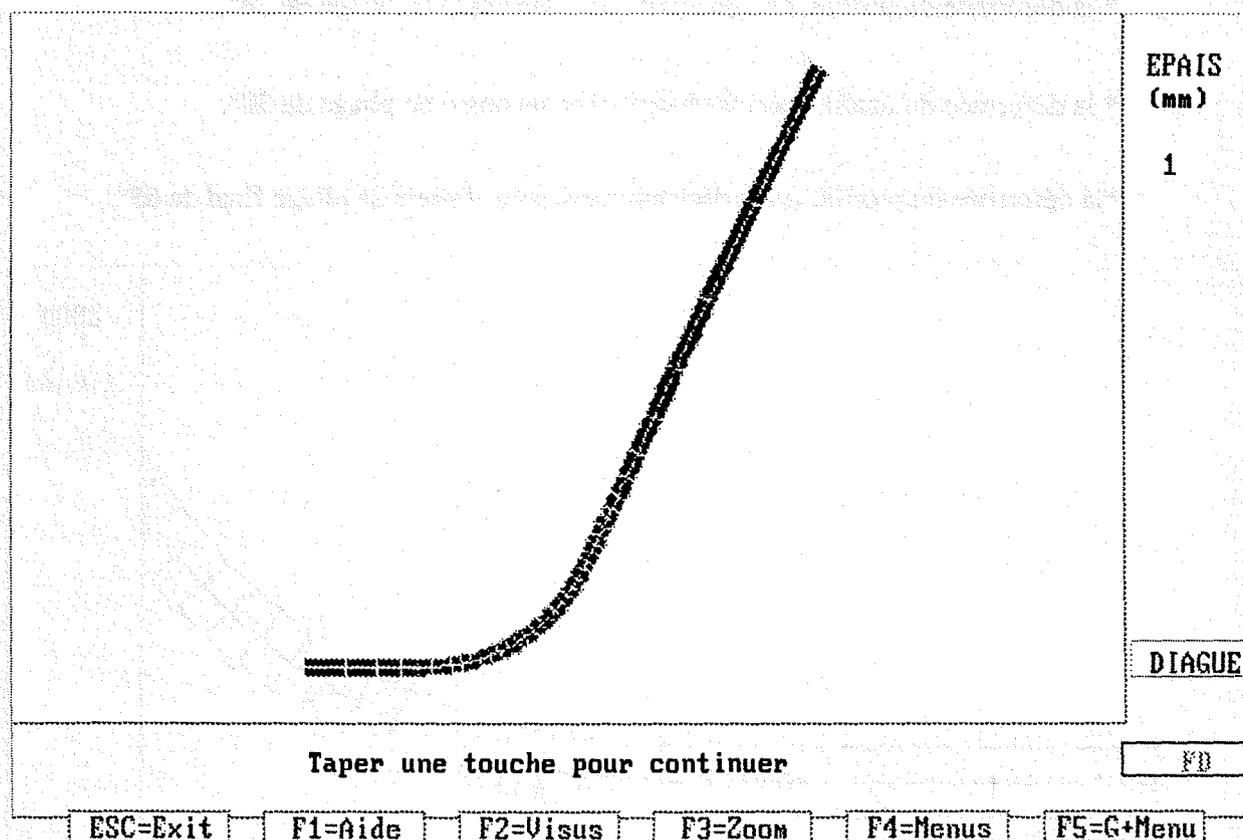
- le maillage au palier  $t + dt$ ,
- les valeurs des tenseurs aux points de Gauss à  $t + dt$ ,
- les valeurs particulières à suivre (module tangent plastique, taux d'énergie plastique, position sur la courbe rationnelle, entre autres).

## V - 6 RESULTATS DE LA SIMULATION

Les calculs se déroulent automatiquement. Il convient toutefois de noter qu'une reprise à partir d'un palier sauvegardé est possible, ce qui offre une grande souplesse en régime non-linéaire où la stratégie d'incrémentation peut évoluer en regard des résultats observés.

A contrario, une pléthore de sauvegardes peut être enclenchée si un phénomène particulier vient à se produire.

Nous donnons ci-après, parmi tant d'autres, quelques résultats significatifs obtenus lors de la simulation numérique, par le Code DIAGUE-PROFIL, du processus de formage d'un type de profilé industriel.



**Figure V.26 :** Visualisation du profilé obtenu à la fin de l'incrémentation.

L'angle de pliage final est de 65 °.

L'épaisseur 1, en mm, affichée en haut et à droite de l'écran, rappelle que le calcul est effectué en état de déformation plane, donc est relatif à une tranche de tôle unité.

La déformée donnée en figure V.26 a été obtenue à l'issue de 35 pas, avec 6 corrections d'équilibre en moyenne par pas. Un pas ou une correction s'effectue en une minute et 10 secondes sur micro-ordinateur à processeur 80486, 25 MHz.

Sur les figures suivantes, nous représentons successivement :

- \* l'agrandissement de la partie pliée du profilé avec un angle de pliage de  $65^\circ$ ,
- \* les plages des déformations plastiques équivalentes (%) avec un angle de pliage de  $65^\circ$ ,
- \* les taux d'énergies de déformation plastique ( $\text{kJ/m}^3$ ) avec un angle de pliage de  $65^\circ$ ,
- \* les plages des contraintes de von Mises avec un angle de pliage de  $65^\circ$ ,
- \* la déformée du profilé, non déchargé, avec un angle de pliage de  $20^\circ$ ,
- \* la déformée du profilé, non déchargé, avec un angle de pliage de  $38^\circ$ ,
- \* la déformée du profilé, après déchargement, avec l'angle de pliage final de  $65^\circ$ .

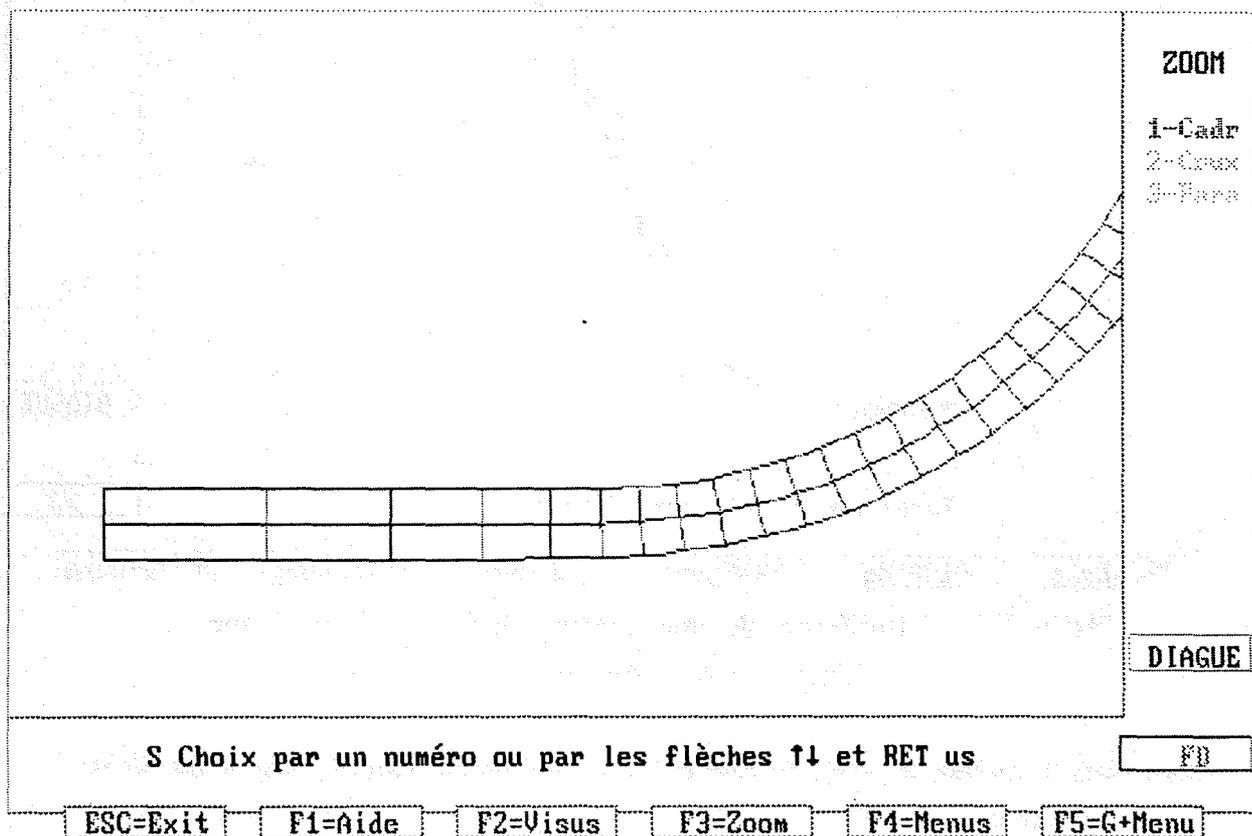


Figure V.27 : Agrandissement de la partie gauche du profilé. Angle de pliage de  $65^\circ$ .

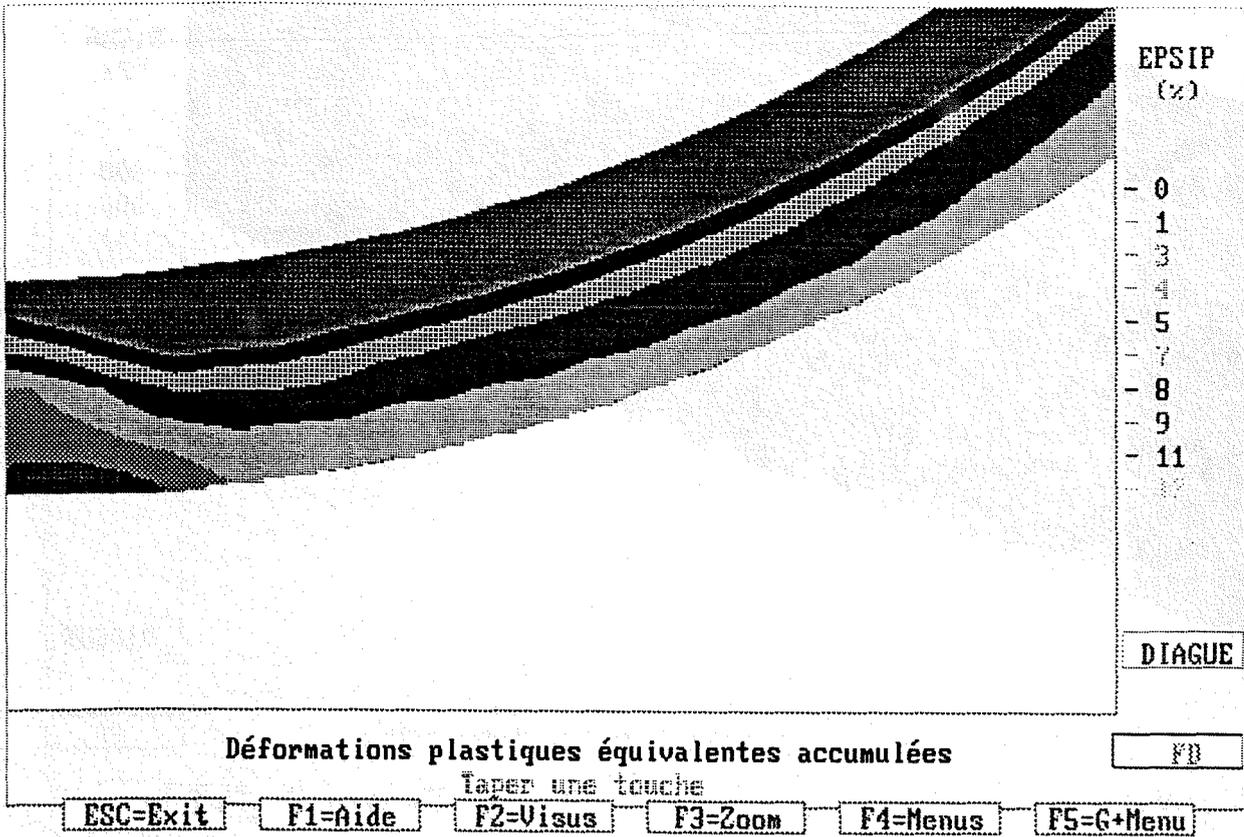


Figure V.28 : Plages des déformations plastiques équivalentes (%). Angle de pliage de 65 °.

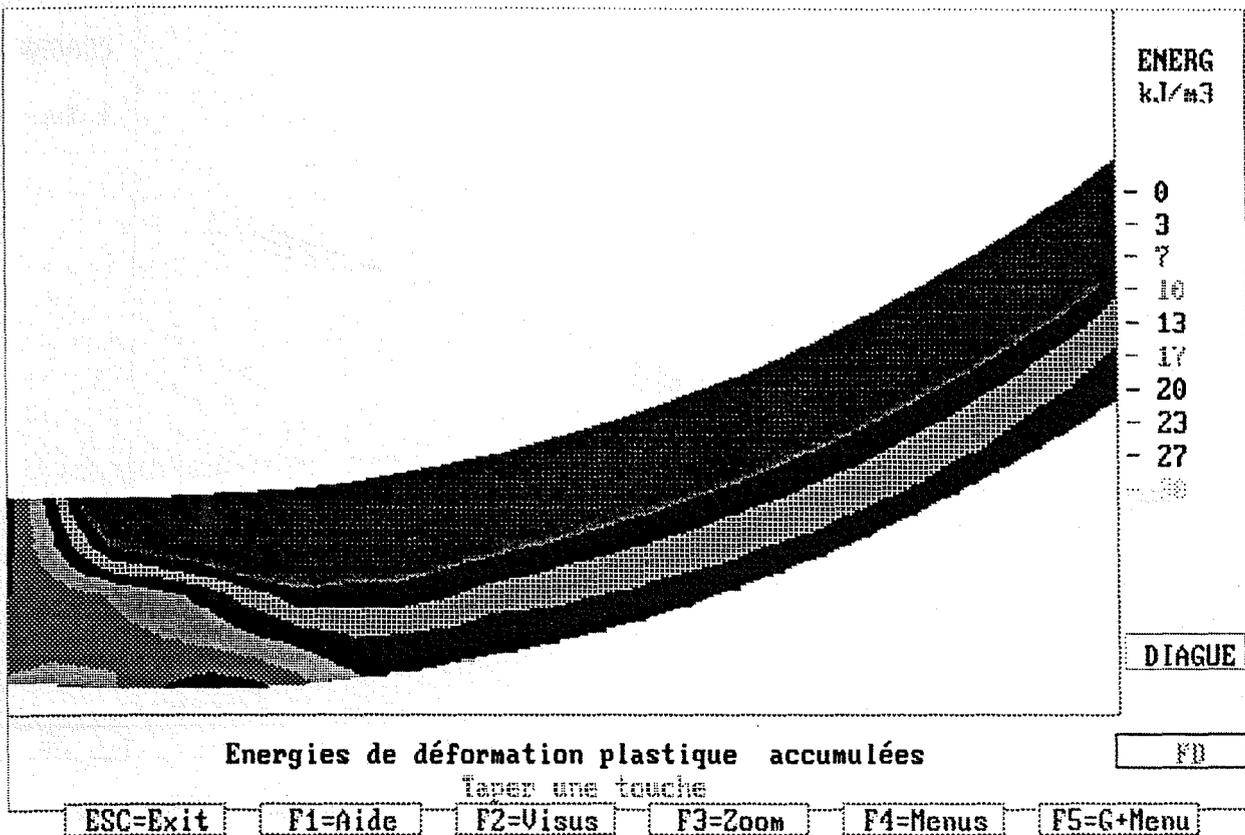


Figure V.29 : Taux d'énergies de déformation plastique (kJ/m³). Pliage à 65 °.

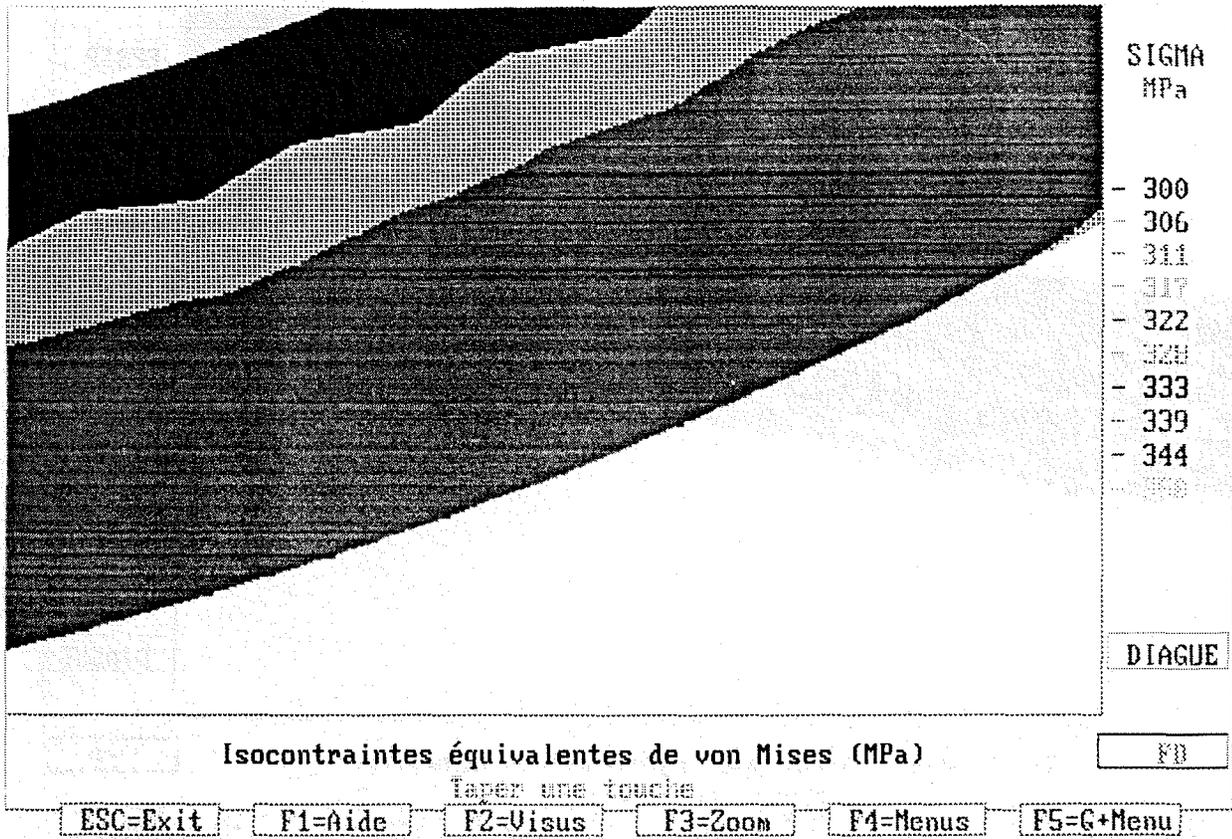


Figure V.30 : Plages des contraintes de von Mises. Angle de pliage de 65 °.

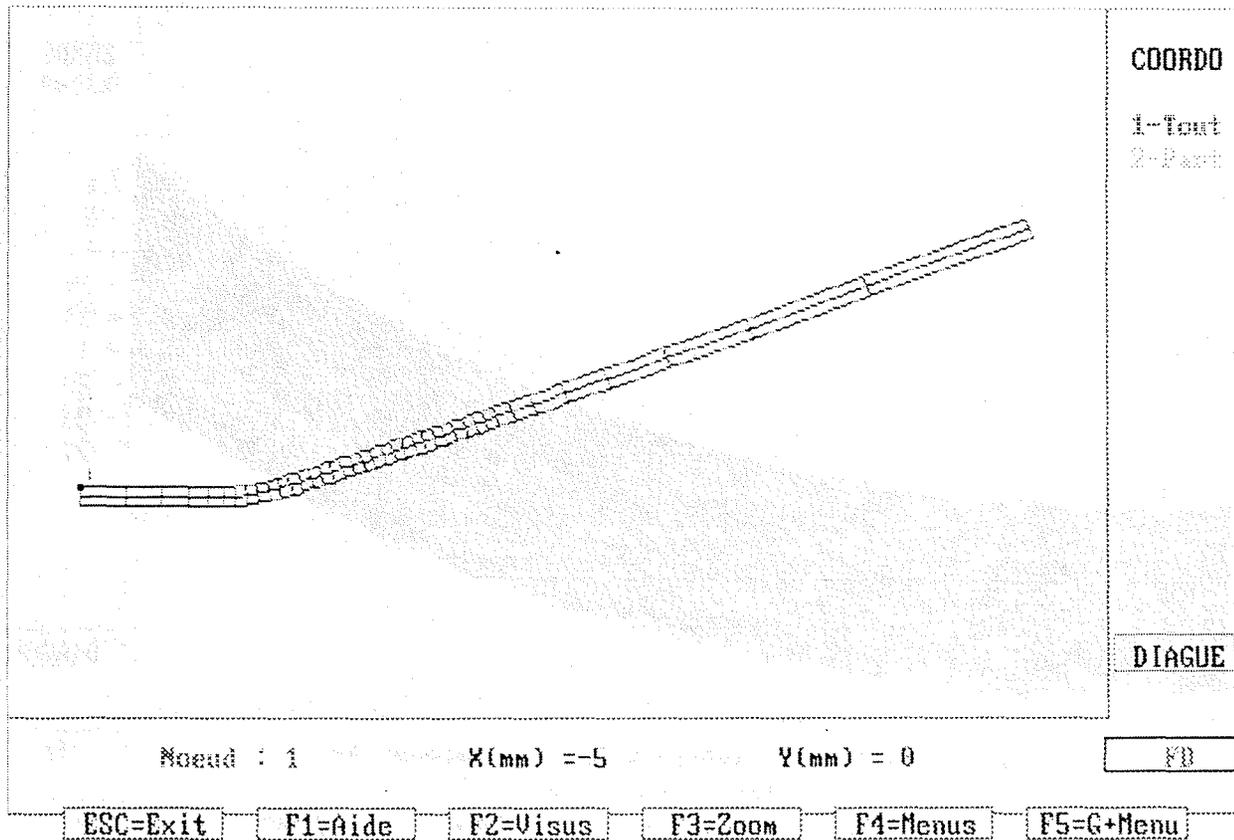


Figure V.31 : Déformée du profilé en chargement. Angle de pliage de 20°.

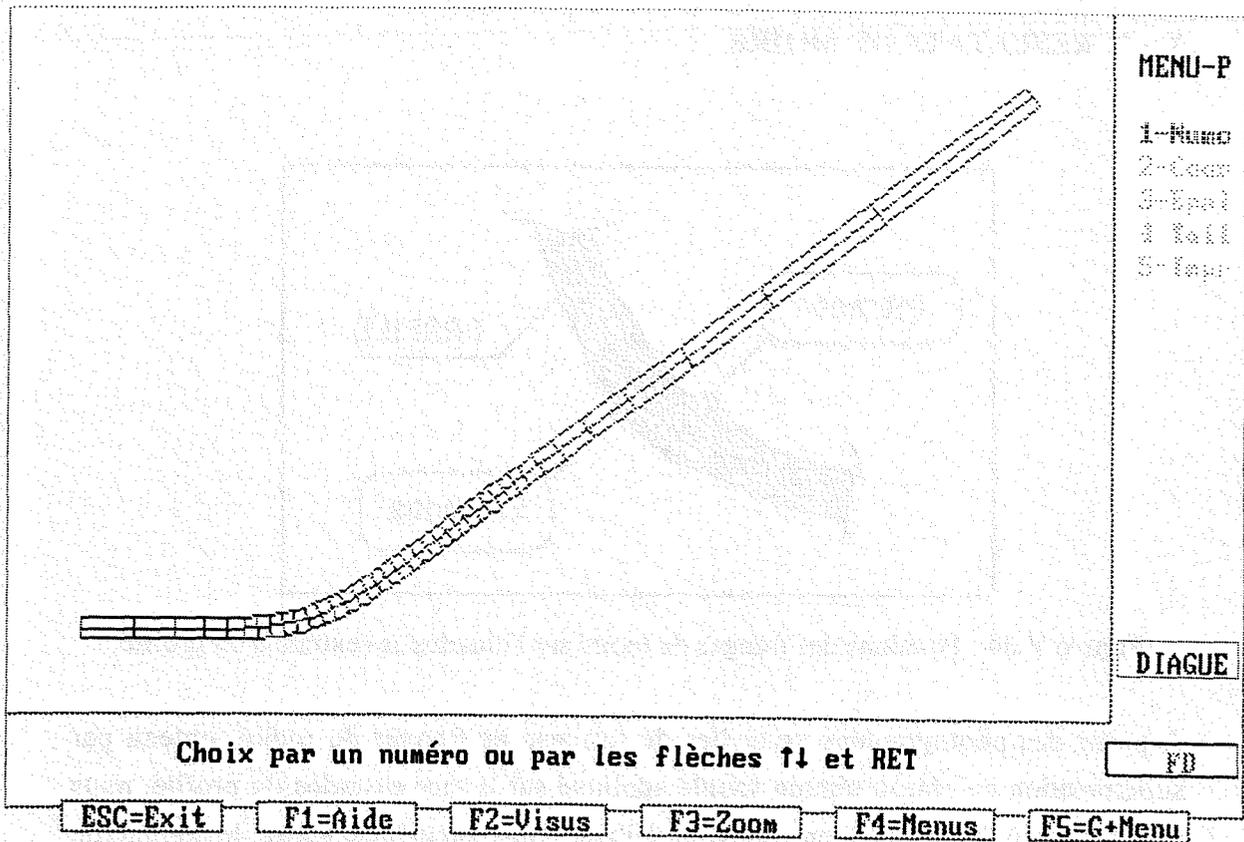


Figure V.32 : Déformée du profilé en chargement. Angle de pliage de 38°.

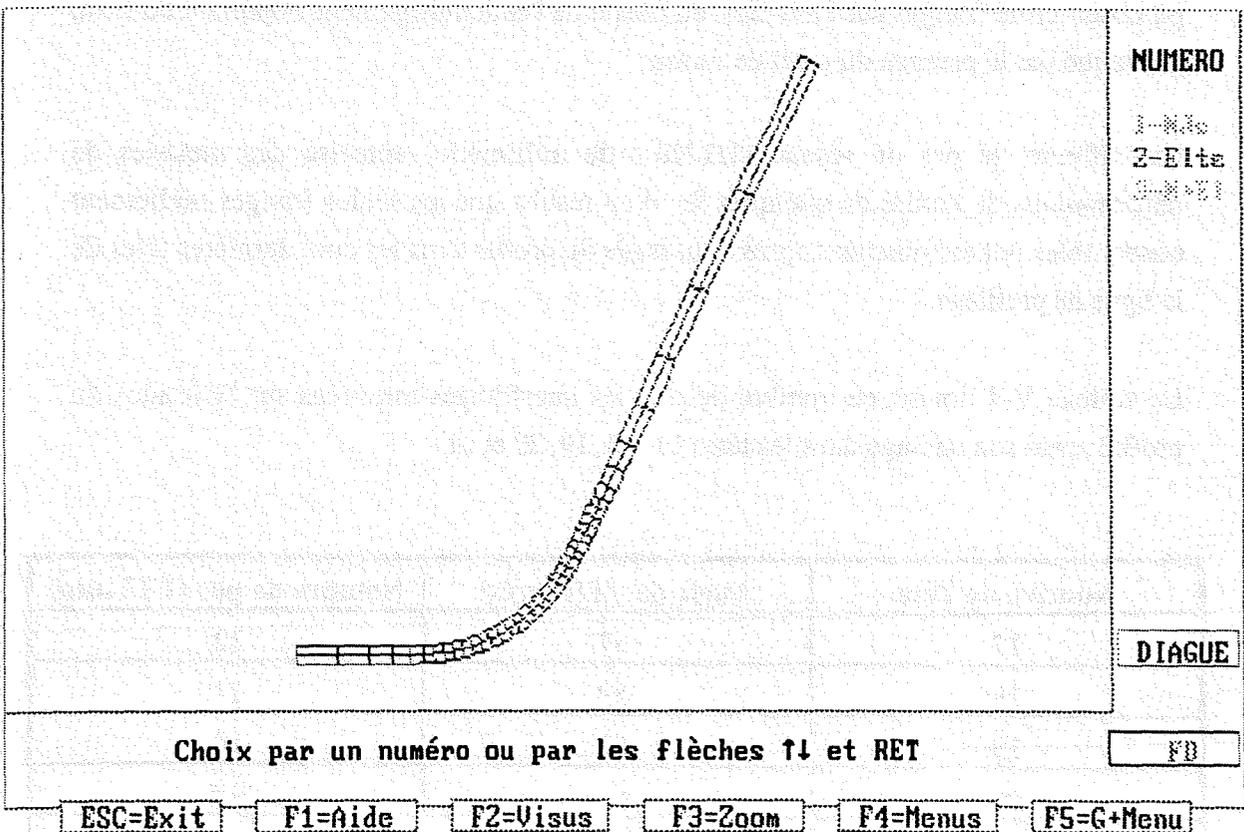
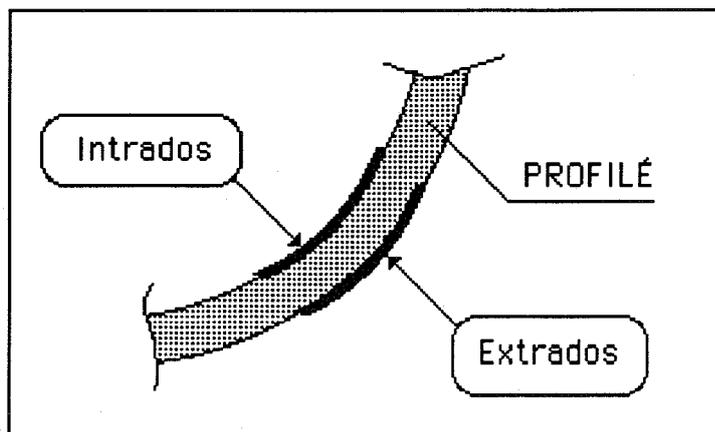


Figure V.33 : Déformée du profilé, après déchargement, avec l'angle de pliage de 65°.

Le retour élastique ("spring back") est de 0,75 °.

## V - 7 RESULTATS DU MOIRE



**Figure V.34** : Positions des franges de moiré sur l'intrados et l'extrados du profilé.

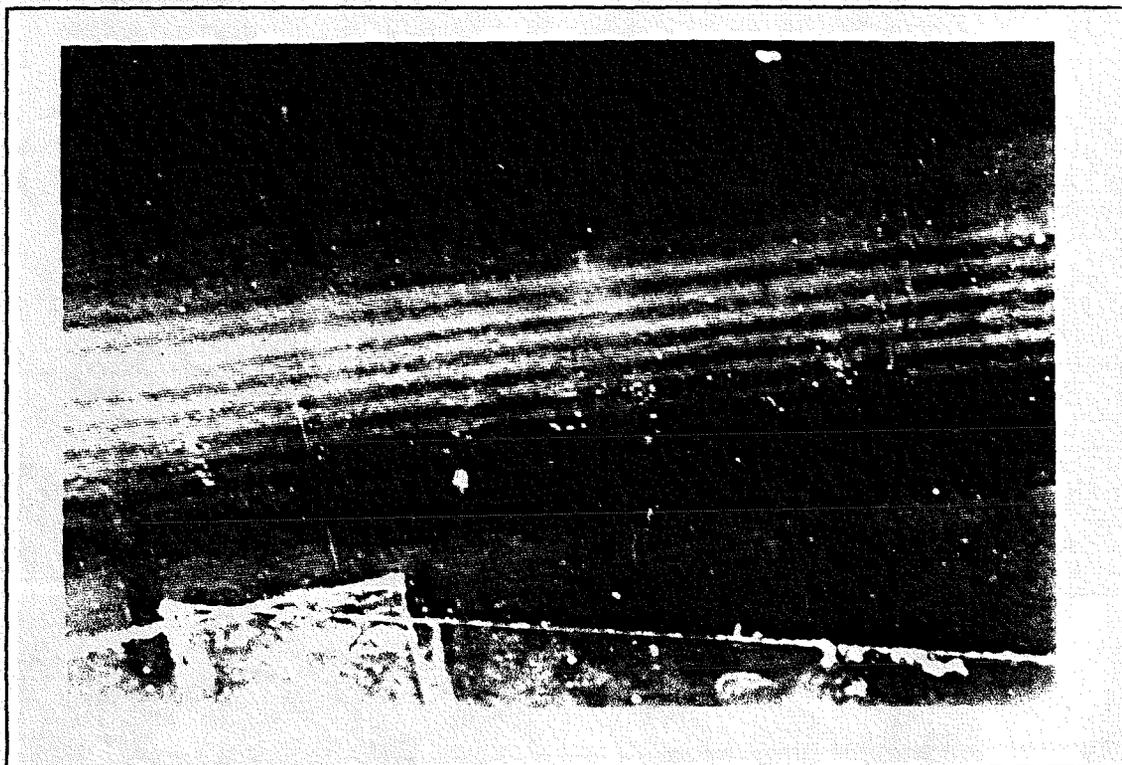
A partir des photographies agrandies du faisceau de franges du moiré, obtenu par superposition du réseau témoin souple appliqué sur la face extrados du profilé, nous avons mesuré l'interfrange en comptant, à l'aide d'une loupe binoculaire, le nombre de traits du réseau entre les milieux de deux franges noires consécutives. Nous n'avons pas pu observer de franges sur l'intrados, en raison de l'endommagement important du film, provoqué par le passage du galet de forme.

Par ailleurs, le pas du réseau (1/12ème de millimètre) autorise des mesures de déformations de l'ordre de quelques %. Il en résulte que les seules franges réellement observables ont été obtenues après le passage du profilé dans les cinq dernières têtes de la ligne de profilage.

Le tableau V-1 donne, en nombre de pas, les interfranges mesurées sur l'extrados du profilé après son passage dans les têtes 17, 18, 19, 20 et 21.

Numéro de Tête	Angle de pli (degrés)	Nombre de pas (1/12 mm)
17	57	12
18	59	11
19	62	10
20	63	9,5
21	65	9

**Tableau V.2** : Valeurs des interfranges de moiré sur l'extrados du profilé - versus n° de tête.

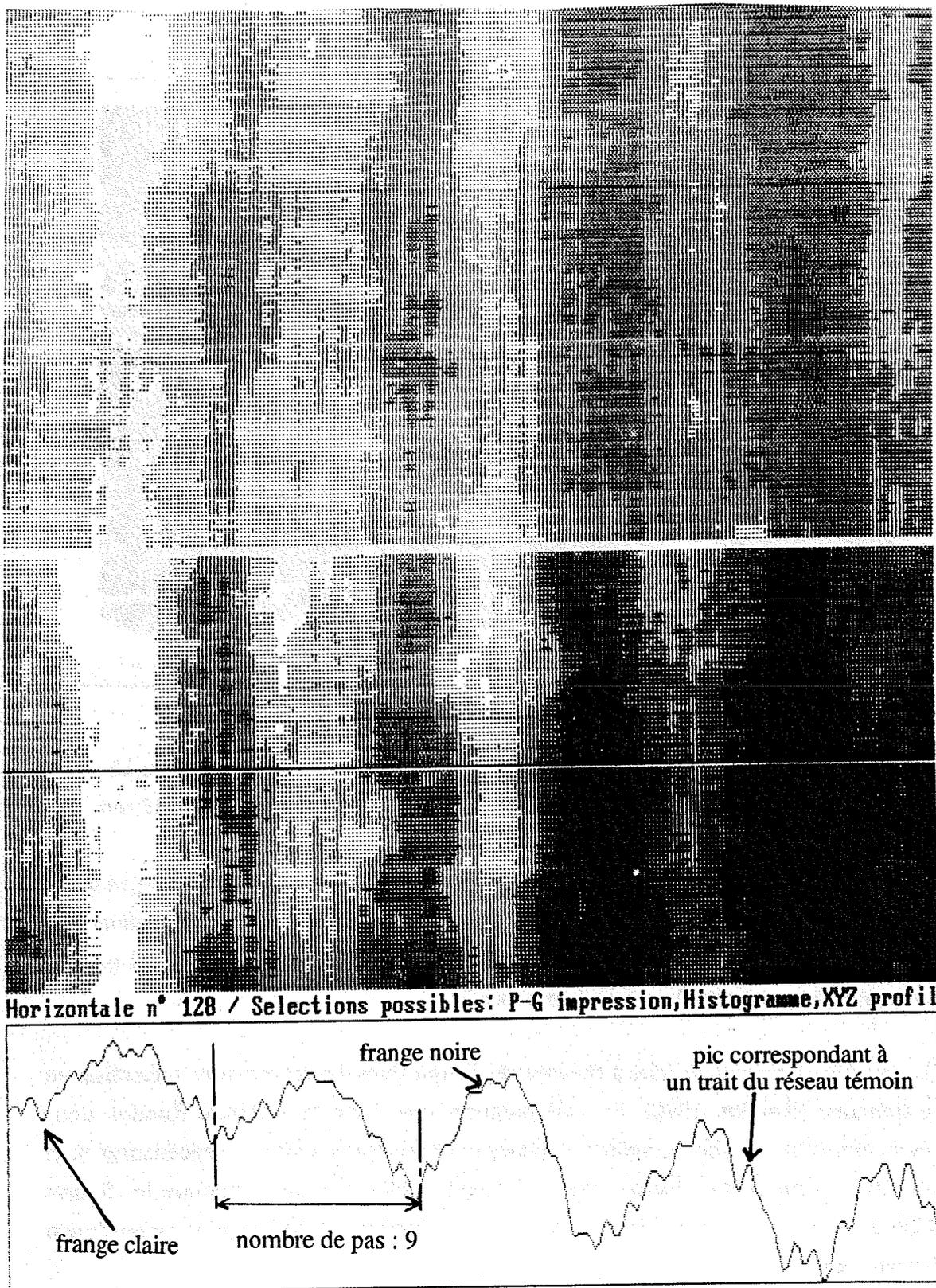


**Figure V.35** : Photographie des franges de moiré obtenues sur le profilé après son passage dans la tête numéro 20. Dans ce cas, l'interfrange est de  $9,5 / 12$  mm.

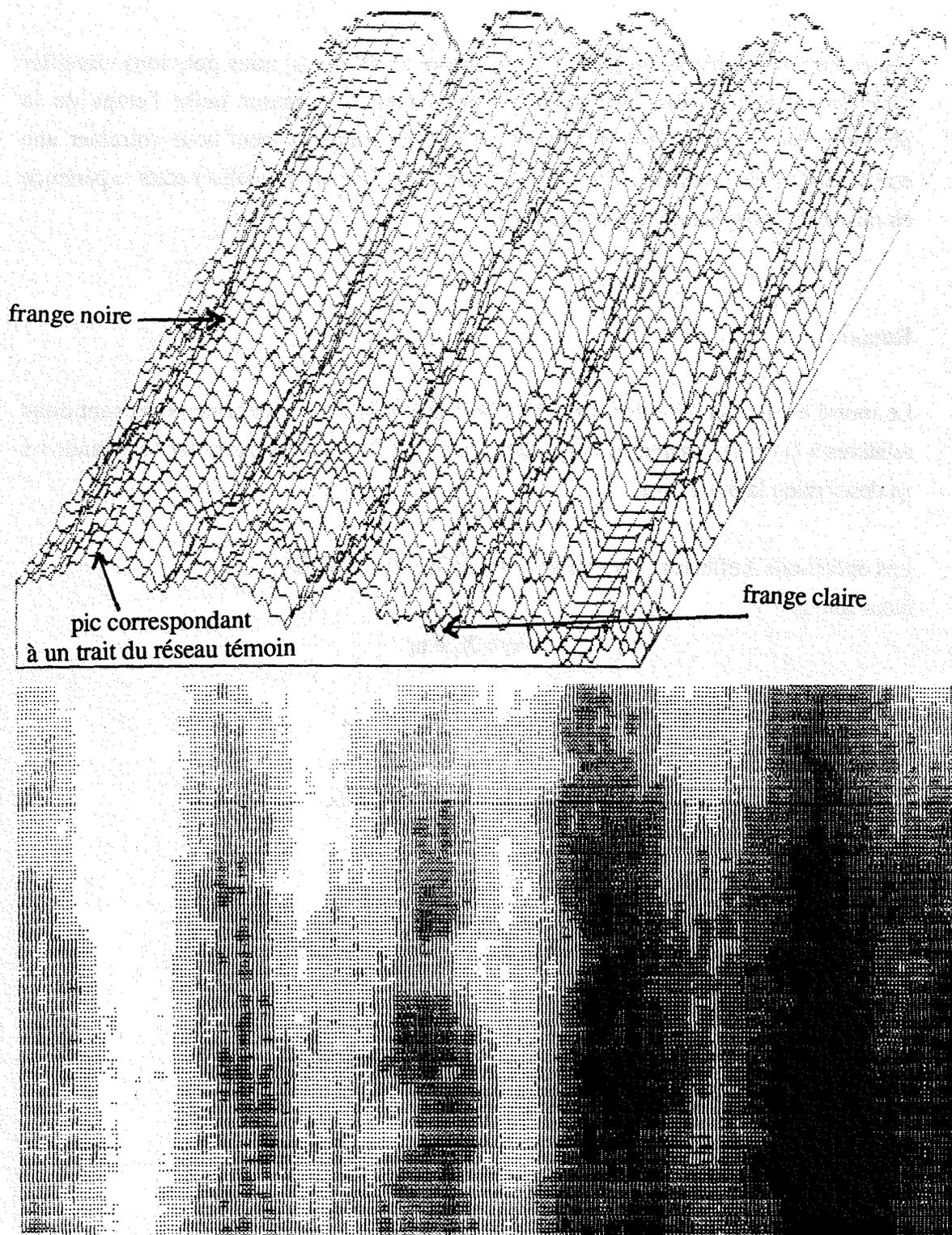
On remarque, sur le cliché photographique V.35, que les franges noires sont épaisses et de contours variables. En conséquence, le milieu de frange est difficile à apprécier. Un traitement par numérisation d'image et lissage numérique s'avère dans le cas présent nécessaire pour accroître la précision des mesures.

Ce type d'essai ne peut se faire à l'heure actuelle que dans des laboratoires spécialisés en ce domaine (Rondot, 1990). En collaboration avec Monsieur Daniel Rondot, nous avons numérisé les photographies obtenues par la méthode exposée précédemment et nous avons obtenu des résultats tout à fait exploitables. Comme le montre les figures V.36 et V.37, les images digitalisées nous permettent d'obtenir plus précisément l'interfrange.

La partie supérieure de la figure V.36 représente le négatif de la photo digitalisée et la partie inférieure est une courbe formée de "pics" qui nous permet de calculer le nombre de traits du réseau témoin compris entre l'axe médian de deux franges claires, par exemple.



**Figure V.36 :** Numérisation de la photographie de la figure précédente :  
les parties claires correspondent aux franges noires et inversement ;  
la courbe permet de calculer l'interfrange.



**Figure V.37** : Numérisation de la photographie de la figure V.35 et vue en trois dimensions de cette dernière.

Sur la figure précédente, nous avons une vue 3D des franges numérisées. De la même façon que précédemment, nous pouvons calculer aisément le nombre de pas.

Cependant notre démarche pourrait être encore améliorée si nous pouvions travailler directement sur la tôle c'est à dire si nous pouvions passer outre l'étape de la photographie. Nous éliminerions ainsi un intermédiaire qui peut nous entraîner une erreur relative de l'ordre de 10%. Pour l'instant nous n'avons pu réaliser cette expérience en raison de l'absence de moyens élaborés.

**Remarque :**

Le moiré est de nature eulérienne, les dérivées partielles des déplacements sont donc relatives à la configuration courante déformée  $C(t)$ . Il faut alors exprimer ces grandeurs en description lagrangienne.

Les opérations à effectuer sont les suivantes (Gueury, 1985, 2) :

Nous avons :

$$x_i = X_i + u_i$$

Soit  $\underline{H}'$  le tenseur de composantes  $\partial u_i / \partial x_j$  défini par :

$$\partial u_i / \partial x_j = \delta_{ij} - \partial X_i / \partial x_j$$

ou encore

$$\underline{H}' = \underline{1} - \underline{F}^{-1}$$

en rappelant la définition du tenseur gradient  $\underline{F}$  :

$$F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$$

D'où, en inversant la relation ci-dessus :

$$\underline{F} = (\underline{1} - \underline{H}')^{-1}$$

et on obtient :

$$\underline{H}' = \underline{F} - \underline{1}$$

que l'on peut écrire :

$$H'_{ij} = \partial u_i / \partial X_j$$

On remarquera que ces dernières relations offrent peu d'intérêt pratique, en revanche, l'obtention du gradient  $F$  à partir de  $H$  est très utile pour comparer directement les résultats tirés du moiré et ceux du calcul par éléments finis au cours duquel le gradient est réactualisé à chaque pas ce qui est le cas dans cette étude.

En tenant compte des relations précédentes, et après déchargement du profilé par mise à zéro en dix pas des forces nodales équivalentes, on obtient les résultats suivants (Tableau V.3).

Angle de pli (degrés)	Nombre de pas (Num.)	Nombre de pas (Exp.)
57	10,88	12
59	10,30	11
62	9,88	10
63	9,34	9,5
65	8,47	9

**Tableau V.3 :** Comparaison des valeurs d'interfranges de moiré sur l'extrados du profilé.

Valeurs expérimentales : (Exp) - Valeurs calculées : (Num).

Nous constatons que les résultats numériques sont en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux, compte tenu de la remarque émise quant à l'amélioration des mesures d'interfranges avec les moyens techniques dont nous ne disposons pas actuellement (Rondot et al., 1988).

**Remarques :**

1 - En réalité la laque photo-sensible est déposée sur le revêtement de la tôle mais nous n'avons pas effectué de corrections car l'épaisseur de la couche de peinture est négligeable (de l'ordre de quelques mm).

2 - Nous avons estimé qu'un déchargement élastique après chaque palier n'était pas indispensable au trajet de chargement, bien que le profilé se relâche à la sortie de chaque tête de la ligne de profilage. Cette hypothèse permet de réaliser un économie très substantielle en temps calcul.

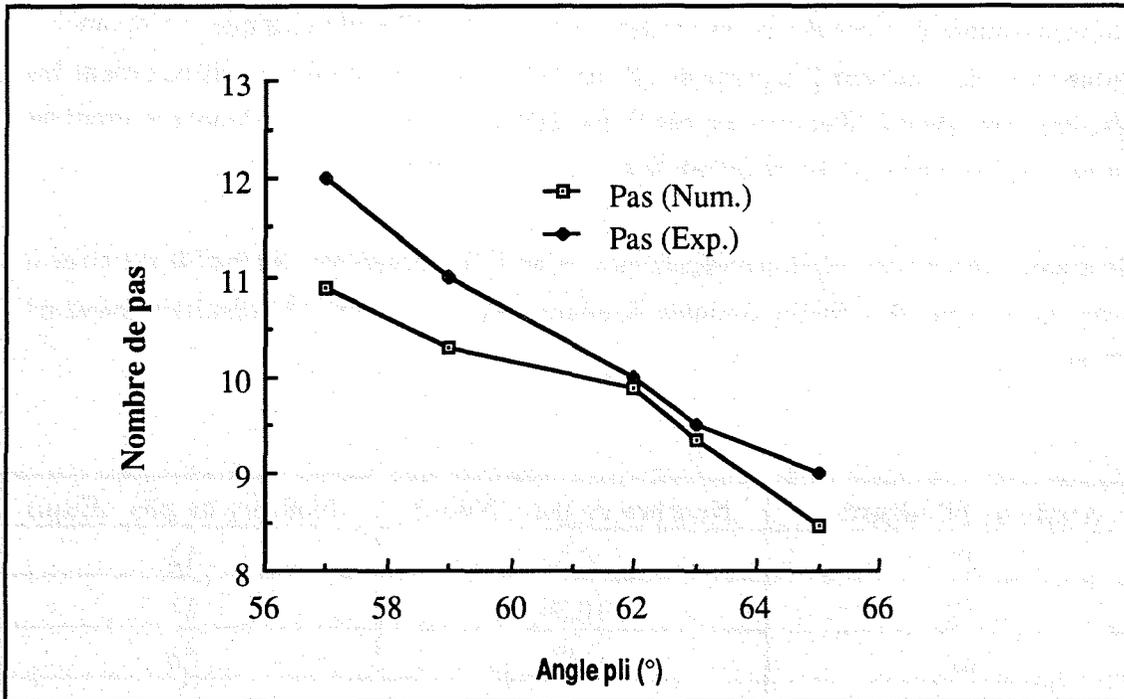


Figure V.38 : Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux exprimés en nombre de pas pour l'interfrange à la sortie des têtes 17, 18, 19, 20 et 21.

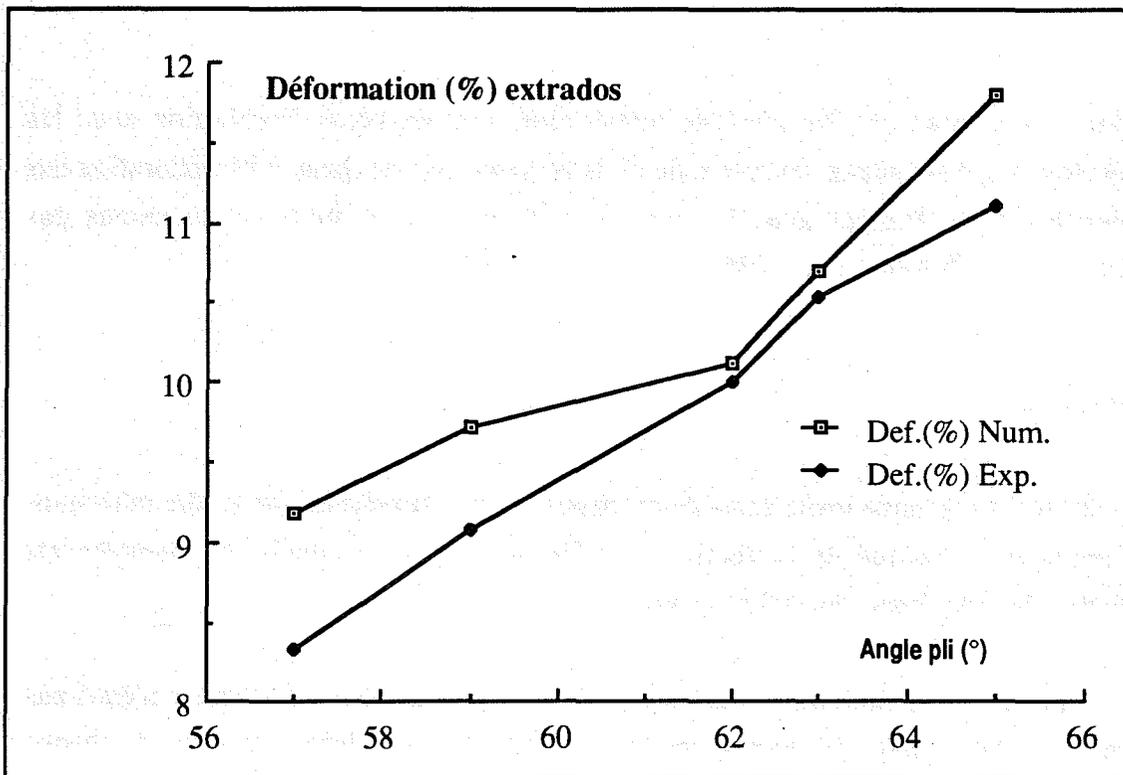
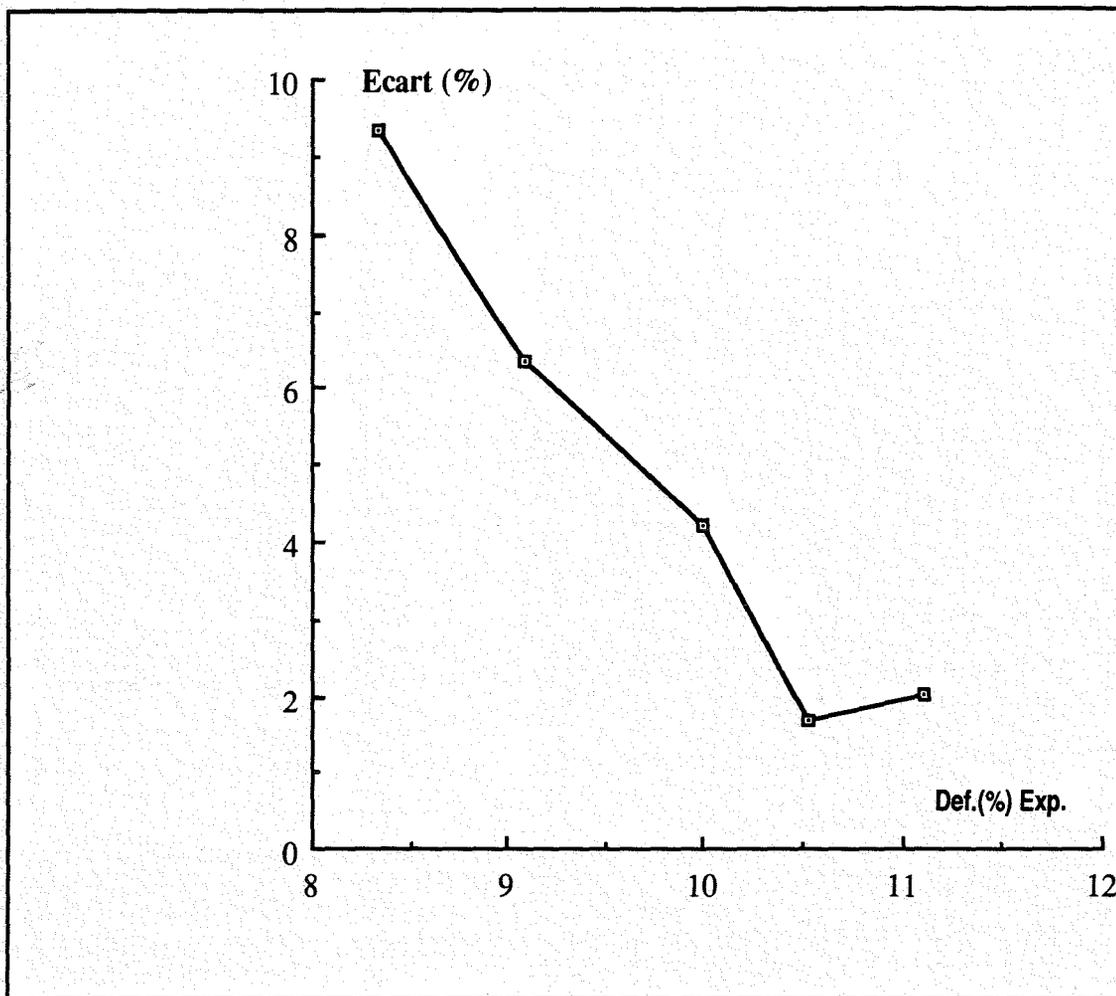


Figure V.39 : Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux pour les déformations (%) à la sortie des têtes 17, 18, 19, 20 et 21.



**Figure V.40 :** Evolution de l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques en fonction de la déformation sur l'extrados du profilé, à la sortie des têtes 17, 18, 19, 20 et 21.



**CONCLUSION**



## CONCLUSION

Ce travail a eu pour objectif principal le développement spécifique d'un Code de Calcul par Eléments Finis qui fonctionne sur micro-ordinateur et qui permet de simuler numériquement, à moindre coût, le processus de mise en forme de profilés de couverture-bardage à partir de tôle minces.

Pour atteindre ce but, nous avons effectué :

\* une étude approfondie des trois types de non-linéarité rencontrés conjointement dans ce problème : géométrique, matérielle et cinématique.

\* l'écriture et la mise en oeuvre numérique, sur micro-ordinateur, du code DIAGUE-PROFIL, dédié à l'industrie du profilage, dont les particularités essentielles résident dans :

- le choix judicieux de l'algorithmique en transformations finies (bidimensionnelles),

- l'intégration idoine de la loi de comportement, avec maintien de l'objectivité au cours du pas et des corrections d'équilibre,

- la prise en compte du contact et du frottement par une méthode de pénalisation, alliant simplicité et robustesse,

- le déroulement automatique du calcul incrémental, grâce à un menu déroulant "convivial" et sûr.

\* une campagne d'essais utilisant la méthode du moiré comme technique d'extensométrie afin de valider les modèles proposés.

La conception modulaire du logiciel DIAGUE-PROFIL permet d'introduire très facilement des extensions futures. De plus, la bonne précision de nos résultats et la

stabilité inconditionnelle de nos algorithmes ont pour origine l'utilisation systématique de schémas implicites dans l'intégration des lois de comportement.

L'avantage de la formulation adoptée est de permettre d'une part, d'utiliser tout l'acquis de la formulation en petites déformations et de respecter, d'autre part, tous les points fondamentaux de l'analyse en grandes déformations élasto-plastiques, à savoir :

- le maintien de l'équilibre au cours du calcul pas à pas,
- le suivi de la loi de comportement,
- le maintien de l'objectivité incrémentale.

En conclusion, le présent mémoire démontre :

- l'applicabilité et l'efficacité des algorithmes implicites dans l'analyse du comportement non-linéaire des structures minces,
- la bonne précision des méthodes de prédiction-correction avec retour radial sur le critère de plasticité,
- les possibilités d'étendre de tels modèles à l'analyse d'autres problèmes industriels concrets.

Le Code DIAGUE-PROFIL a été présentement appliqué avec succès à la simulation numérique du processus du formage de profilés de couverture-bardage à partir de tôles minces, dans le cadre d'un contrat industriel avec la Société HAIRONVILLE S.A.

Sa simplicité de fonctionnement en fait un outil numérique à potentiel élevé. Il fonctionne actuellement sur tout type de micro-ordinateur existant.

Les langages de programmation des modules développés sous le système d'exploitation MS-DOS sont classiques. Il s'agit de :

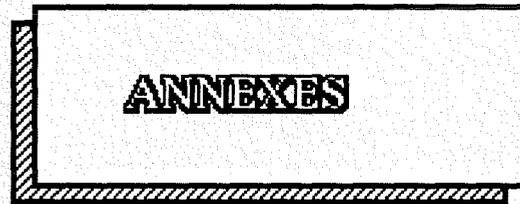
- FORTRAN 77, pour les modules de calcul éléments finis,
- TURBO-PASCAL et TURBO-C, pour les autres modules (saisies, graphismes).

Enfin, nous devons souligner les performances singulièrement appréciées du Code DIAGUE-PROFIL en domaine non-linéaire lorsqu'il est implémenté sur un micro-ordinateur à processeur 80486, ce qui a été le cas pour la présente étude. L'évolution extrêmement rapide de ces appareils laisse entrevoir des possibilités, impensables, il y a encore peu d'années.

La poursuite ultérieure de ces travaux portera sur :

- le développement d'un mailleur 2D, entièrement automatique, avec raffinement local fondé sur l'estimation de l'erreur,
- le remaillage automatique, indispensable dans le cas de forte distorsion qui abaisse notablement les performances numériques de l'élément fini (déformations plastiques élevées),
- la numérisation automatique des franges de moirés,
- l'adaptation du Code à la simulation numérique de l'emboutissage à froid, puis ultérieurement à chaud.







## ANNEXE I

### DEFINITIONS ET PROPRIETES

#### CONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE

Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle, le conditionnement d'une matrice régulière  $A$ , associé à cette norme, est le nombre :

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

On peut également écrire

$$\text{cond}_2(A) = \mu_{\max} / \mu_{\min}$$

où  $\mu_{\max}$  et  $\mu_{\min}$  sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de  $A$

**Propriété :** on dira qu'une matrice est "bien conditionnée", si son conditionnement n'est pas beaucoup plus grand que 1.

Ceci montre que les matrices unitaires sont les matrices les mieux conditionnées possibles, ce qui est l'une des raisons de leur utilisation fréquente dans différents algorithmes d'analyse numérique (Lascaux et al., 1987).

**RELATIONS ENTRE LES DIFFERENTS  
TENSEURS**

Démontrons que  $\underline{\tau} = (\det \underline{E}) \underline{\sigma} = \underline{\Theta} \underline{E}^T = \underline{E} \underline{\Pi} \underline{E}^T$

Nous savons, par définition des différents tenseurs, que :

$$df_0 = \underline{\Pi} \underline{n}_0 dS_0$$

$$df_t = \underline{\Theta} \underline{n}_0 dS_0$$

$$df_t = \underline{\sigma} \underline{n}_t dS_t$$

D'autre part, nous avons par définition :

$$\underline{\tau} = (\det \underline{E}) \underline{\sigma}$$

et la formule de Nanson nous donne :

$$\underline{n}_0 dS_0 = (\det \underline{E})^{-1} \underline{E}^T \underline{n}_t dS_t$$

De ce fait, nous pouvons écrire :

$$df_0 = \underline{\Pi} \underline{n}_0 dS_0 = \underline{\Pi} (\det \underline{E})^{-1} \underline{E}^T \underline{n}_t dS_t$$

or

$$df_t = \underline{\sigma} \underline{n}_t dS_t$$

donc

$$df_0 = \underline{\Pi} (\det \underline{E})^{-1} \underline{E}^T \underline{\sigma}^{-1} df_t = \underline{E}^{-1} df_t$$

on en déduit que

$$\underline{E}^{-1} \underline{\sigma} = (\det \underline{E})^{-1} \underline{\Pi} \underline{E}^T$$

donc

$$(\det \underline{E}) \underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\Pi} \underline{E}^T$$

Nous avons également

$$df_t = \underline{\Theta} \underline{n}_0 dS_0 = \underline{E} df_0 = \underline{E} \underline{\Pi} \underline{n}_0 dS_0$$

ce qui nous donne

$$\underline{\Theta} = \underline{E} \underline{\Pi}$$

et alors :

$$\underline{\Theta} \underline{E}^T = \underline{E} \underline{\Pi} \underline{E}^T$$

## CHANGEMENT DE REFERENTIEL

Les relations de changement de référentiel s'écrivent :

- pour les positions

$$\mathbf{x}' = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}$$

- pour les vecteurs  $\mathbf{v}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{v}$  ou  $v'_i = Q_{ij} v_j$

En effet, puisqu'un vecteur peut être défini à partir de 2 points de positions respectives  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{y}$ , on peut écrire :

$$\text{dans } R \quad \mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

$$\text{dans } R' \quad \mathbf{v}' = \mathbf{y}' - \mathbf{x}'$$

d'où

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}) - (\mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{v}$$

Conclusion :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{v}$$

- pour les tenseurs du second ordre

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T} \mathbf{Q}^T(t)$$

ou encore

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} T_{kl}$$

Nous avons :

$$\text{dans } R \quad \mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{v}$$

$$\text{dans } R' \quad \mathbf{u}' = \mathbf{T}' \mathbf{v}'$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{u} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T} \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{v}' = \mathbf{T}' \mathbf{v}'$$

Donc

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T} \mathbf{Q}^T(t)$$

- pour les tenseurs mixtes

Nous avons :

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}$$

En effet, supposons qu'à l'instant  $t_0$  les 2 référentiels R et R' coïncident. Nous savons de plus que le changement de référentiel ne concerne que la configuration actuelle C(t)

$$\begin{aligned} \text{dans R} \quad \mathbf{dx} &= \mathbf{F} \mathbf{dX} \\ \text{dans R'} \quad \mathbf{dx}' &= \mathbf{F}' \mathbf{dX}' \quad (1) \end{aligned}$$

De plus

$$\mathbf{dx}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{dx} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F} \mathbf{dX} \quad (2)$$

Si l'on soustrait (1) à (2), on obtient, quelque soit  $\mathbf{dX}$ , la relation suivante :

$$(\mathbf{F}' - \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}) \mathbf{dX} = 0$$

De ce fait

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}$$

**OBJECTIVITE DE  $\underline{D}$  ET  $\underline{W}$**

Le tenseur gradient de vitesse  $\underline{L}$  a été défini par :

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}$$

Si nous dérivons cette égalité, nous obtenons :

$$\underline{L}' = \dot{\underline{F}}' \underline{F}'^{-1}$$

or

$$\underline{F}' = \underline{Q} \underline{F}$$

de ce fait, nous avons  $\underline{F}'^{-1} = \underline{F}^{-1} \underline{Q}^{-1}$  et  $\dot{\underline{F}}' = \dot{\underline{Q}} \underline{F} + \underline{Q} \dot{\underline{F}}$

Il résulte que

$$\begin{aligned} \underline{L}' &= (\dot{\underline{Q}} \underline{F} + \underline{Q} \dot{\underline{F}}) (\underline{F}^{-1} \underline{Q}^{-1}) \\ &= \dot{\underline{Q}} \underline{F} \underline{F}^{-1} \underline{Q}^{-1} + \underline{Q} \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \underline{Q}^{-1} \\ &= \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^{-1} + \underline{Q} \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \underline{Q}^{-1} \\ &= \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \underline{Q}^T \\ &= \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{L} \underline{Q}^T \end{aligned}$$

car  $\underline{Q}$  est un tenseur orthogonal, donc  $\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T$

On notera  $\underline{\Omega} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T$  comme étant la vitesse de rotation relative des deux référentiels.

Nous avons vu également que l'on peut décomposer  $\underline{L}$  en deux parties :

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \Rightarrow \underline{L}' = \underline{D}' + \underline{W}'$$

Donc 
$$\underline{L}' = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{D} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{W} \underline{Q}^T$$

Nous montrons de plus que :

$$\underline{D}' = \underline{Q} \underline{D} \underline{Q}^T \text{ et } \underline{W}' = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{W} \underline{Q}^T$$

Ainsi, nous pouvons dire que **le tenseur  $\underline{D}$  est objectif alors que le tenseur taux de rotation  $\underline{W}$  ne l'est pas**

**DERIVATION TEMPORELLE NON  
OBJECTIVE D'UN TENSEUR EULERIEN  
OBJECTIF**

Montrons que si  $\underline{M}$  est un tenseur eulérien objectif, alors sa dérivée temporelle n'est pas objective.

Soit  $\underline{M}$  un tenseur eulérien objectif ; nous avons, par définition

$$\underline{M}' = \underline{Q} \underline{M} \underline{Q}^T(1)$$

De plus, nous savons d'une part que :

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T \text{ et donc } \underline{\Omega}^T = \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T$$

D'autre part

$$\underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{I}$$

de ce fait

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T &= \underline{0} \\ \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T &= -\dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T \end{aligned}$$

En conclusion

$$\underline{\Omega}^T = -\underline{\Omega}$$

Dérivons par rapport au temps la formule (1)

$$\underline{M}' = \dot{\underline{Q}} \underline{M} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{M}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{M} \dot{\underline{Q}}^T = \dot{\underline{Q}} (\underline{Q}^T \underline{Q}) \underline{M} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{M}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{M} (\underline{Q}^T \underline{Q}) \dot{\underline{Q}}^T$$

Nous obtenons, après introduction du tenseur "taux de rotation"  $\underline{\Omega}$ , l'égalité suivante :

$$\underline{M}' = \underline{\Omega} (\underline{Q} \underline{M} \underline{Q}^T) + \underline{Q} \dot{\underline{M}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{M} \underline{Q}^T (-\underline{\Omega}) = \underline{Q} \dot{\underline{M}} \underline{Q}^T + \underline{\Omega} \underline{M} - \underline{M}' \underline{\Omega}$$

La présence de  $\underline{\Omega}$  introduit des termes complémentaires parasites qui montre ainsi que la dérivée temporelle d'un tenseur eulérien objectif, n'est pas objective.

## ANNEXE II

### LOI DE COMPORTEMENT EN ELASTO-PLASTICITE

Pour ne pas surcharger les notations, nous adopterons la notation des petites déformations. En effet, l'algorithme que nous proposons n'est pas propre uniquement aux grandes déformations.

Nous savons, par hypothèse, que le taux de déformation est séparable en une partie élastique et une partie plastique .

Dans un premier temps, nous avons :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

Nous pouvons écrire d'autre part :

- la loi de comportement élastique :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij}$$

- la loi de comportement plastique :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

De plus, par hypothèse :

$$d\epsilon = d\epsilon_{eq}^e + d\epsilon_{eq}^p$$

que nous pouvons écrire :

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{d\varepsilon_{eq}^e}{d\sigma} + \frac{d\varepsilon_{eq}^p}{d\sigma}$$

ce qui nous donne la relation suivante :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E} + \frac{1}{M}$$

$E_T$  : module tangent de la courbe d'érouissage reliant la contrainte vraie à la déformation logarithmique

$E$  : module d'Young

$M$  : module plastique

Par définition :

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}$$

que l'on peut écrire après dérivation :

$$d\sigma_{eq} = \frac{3}{2} s_{ij} \frac{ds_{ij}}{\sigma_{eq}}$$

Sachant que la fonction  $f(s, p)$  désigne la fonction seuil représentée par :

$$f(\sigma, p) = \sigma_{eq} - \sigma_k$$

$\sigma_k$  ne dépend que de l'érouissage, donc si nous supposons que l'érouissage est constant, nous obtenons :

$$df = d\sigma_{eq}$$

ou encore :

$$df = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}} ds_{ij}$$

que l'on retiendra sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}}$$

La partie plastique du taux de déformation s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

Nous en déduisons :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

Par définition du paramètre d'érouissage  $\lambda$  est la déformation plastique équivalente :

$$d\lambda = d\varepsilon_{eq}^p$$

Ainsi :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\varepsilon_{eq}^p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\varepsilon_{eq}^p \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}}$$

car

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

donc

$$ds_{ij} = d\sigma_{ij}$$

On obtient alors :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2 M \sigma_{eq}} s_{ij} \dot{\sigma}_{eq}$$

ce qui nous permet d'écrire l'égalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2 M \sigma_{eq}} s_{ij} \dot{\sigma}_{eq}$$

Exprimons  $\dot{\sigma}$  en fonction de  $\dot{\varepsilon}$ .

Dans un premier temps calculons la trace :

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} - \frac{3\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk}$$

et donc

$$\dot{\sigma}_{kk} = \frac{E}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk}$$

Dans un deuxième temps, multiplions les deux membres de l'égalité par  $s_{mn}$ , tout en adoptant la convention d'Einstein :

$$s_{mn} \dot{\epsilon}_{mn} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{mn} s_{mn} + \frac{3}{2M\sigma_{eq}} s_{mn} s_{mn} \dot{\sigma}_{eq} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{mn} s_{mn} + \frac{3}{2M\sigma_{eq}} s_{mn} s_{mn} \dot{\sigma}_{eq}$$

Si l'on considère la contrainte équivalente de Von-Mises :

$$\sigma_{eq}^2 = 3/2 s_{mn} s_{mn}$$

Il découle des deux dernières égalités :

$$s_{mn} \dot{\epsilon}_{mn} = \frac{1}{3G} \dot{\sigma}_{eq} \sigma_{eq} + \frac{2}{3} \frac{3}{2M} \dot{\sigma}_{eq} \sigma_{eq}$$

que l'on peut résumer par :

$$\dot{\sigma}_{eq} = \frac{s_{mn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\left[ \frac{1}{3G} + \frac{1}{M} \right] \sigma_{eq}}$$

Ainsi la formule générale s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \frac{E}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2M\sigma_{eq}} s_{ij} \frac{s_{mn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\left[ \frac{1}{3G} + \frac{1}{M} \right] \sigma_{eq}}$$

A partir de là, on peut exprimer  $\dot{\sigma}_{ij}$  en fonction de  $\dot{\epsilon}_{ij}$  :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \frac{3}{2\sigma_{eq}^2} s_{ij} \frac{s_{mn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\left[ \frac{M}{3G} + 1 \right]} \right]$$

Les deux premiers termes de cette égalité représentent ainsi la déformation élastique, le troisième, la déformation plastique.

### ANNEXE III

#### EQUATION IMPLICITE LOCALE ALGORITHME DE PREDICTION ELASTIQUE AVEC CORRECTION RADIALE CAS GENERAL

Comme tout tenseur peut se décomposer en une partie sphérique et une partie déviatorique (qui elle seule intervient dans les déformations plastiques), il en résulte que :

$$s_{ij} = 2G e_{ij}$$

que l'on peut également écrire sous la forme suivante :

$$\Delta s = 2G \Delta e$$

**Remarque :** la partie déviatorique de  $\sigma$  est notée  $s$  et celle de  $\varepsilon$  est notée  $e$ .

Supposons un état d'essai élastique noté  $s^E$  :

$${}^{t+Dt} s^E_{ij} - {}^t s_{ij} = 2G \Delta e_{ij}$$

égalité que l'on notera abusivement :

$$s^E_{ij} - s_{ij} = 2G \Delta e_{ij}$$

ce qui nous donne :

$$s^E_{ij} = s_{ij} + 2G \Delta e^e_{ij} + 2G \Delta e^p_{ij} = s^F_{ij} + 2G \Delta e^p_{ij}$$

(l'exposant  $e$  représente la partie élastique, l'exposant  $p$  la partie plastique, l'exposant  $E$  l'état de prédiction élastique et l'exposant  $F$  l'état final).

En petites déformations, la loi de comportement plastique s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^F}$$

ou encore :

$$d \epsilon_{ij}^p = d \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^F}$$

Considérons d'une part, la fonction  $f(\sigma, p)$  désignant la fonction seuil :

$$f(\sigma, p) = \sigma_{eq}^F - ((\sigma_0 + R(p)) = \sigma_{eq}^F - \sigma^F$$

avec

$$(\sigma_{eq}^F)^2 = 3/2 s_{ij}^F s_{ij}^F$$

donc

$$\sigma_{eq}^F d\sigma_{eq}^F = 3/2 s_{ij}^F ds_{ij}^F$$

ce qui revient à écrire :

$$d\sigma_{eq}^F = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^F}{\sigma_{eq}^F} ds_{ij}^F$$

D'autre part :

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}^F} = \frac{\partial \sigma_{eq}^F}{\partial s_{ij}^F} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^F}{\sigma_{eq}^F}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}^F} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}^F} \frac{\partial s_{ij}^F}{\partial \sigma_{eq}^F} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}^F} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^F}{\sigma_{eq}^F}$$

Sachant que :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^F}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\Delta e_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^F}{\sigma_{eq}^F} d\lambda$$

donc

$$2G \Delta e_{ij}^P = 3G \frac{s_{ij}^F}{\sigma_{eq}^F} d\lambda$$

et alors

$$s_{ij}^E = s_{ij}^F + 3G \frac{s_{ij}^F}{\sigma_{eq}^F} d\lambda = s_{ij}^F \left( 1 + \frac{3G d\lambda}{\sigma_{eq}^F} \right)$$

Or, par définition, nous avons choisi le paramètre d'écrouissage  $\lambda$  comme étant la déformation plastique équivalente, i.e. :

$$d\lambda = d\varepsilon_{eq}^P$$

De ce fait :

$$\frac{s_{ij}^E}{s_{ij}^F} = 1 + \frac{3G d\varepsilon_{eq}^P}{\sigma_{eq}^F} = \frac{\sigma_{eq}^E}{\sigma_{eq}^F}$$

ce qui revient à écrire :

$$\sigma_{eq}^E = \sigma_{eq}^F + 3G d\varepsilon_{eq}^P$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_{eq}^F}{3G} = \Delta\varepsilon_{eq}^P}$$

## ANNEXE IV

### EQUATION IMPLICITE LOCALE EN CONTRAINTE PLANE

En état de contrainte plane ( $s_{33} = 0$ ), la composante cinématique  $e_{33}$  n'est pas nulle, nous sommes ainsi amenés à rétablir une équation implicite locale adéquate (Hamli, 1990).

Avec la notation des petites déformations, le tenseur de déformation peut s'écrire :

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}} = \Delta \bar{\underline{\underline{\epsilon}}} + \Delta \epsilon_{33} \zeta$$

où

$$\Delta \bar{\underline{\underline{\epsilon}}} = \Delta \epsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta \quad \alpha, \beta \in \{ 1, 2 \}$$

$$\zeta = \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3$$

$(\mathbf{a}_i)_{i=1,2,3}$  forme une base orthonormée

Nous supposons un état de contrainte élastique  $s_{ij}^E$  donné par l'expression :

$$s_{ij}^E = s_{ij} + 2 G \Delta \bar{\epsilon}_{ij}$$

où

$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}$  est le déviateur du tenseur  $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}$

$\underline{\underline{s}}$  est le déviateur du tenseur de contrainte de Cauchy-Euler au début de l'incrément qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s_{ij}^E = s_{ij}^F + 2 G \left( \epsilon_{ij}^P - \Delta \epsilon_{33} \zeta'_{ij} \right)$$

où

$\zeta'$  est le déviateur du tenseur  $\zeta$

$s^F$  est le déviateur du tenseur de contrainte à la fin de l'incrément.

A partir de la dernière égalité et de la loi de comportement en élasto-plasticité, on déduit :

$$\left(1 + 3 G \frac{\Delta \epsilon_e^p}{\sigma^F}\right) s_{ij}^F = s_{ij}^E + 2 G \Delta \epsilon_{33} \zeta'_{ij}$$

Le calcul du second invariant conduit à l'équation suivante :

$$\sigma^F = -3 G \Delta \epsilon_e^p + \left(\sigma^{E^2} + 6 G s_{33}^E \Delta \epsilon_{33} + 4 G^2 \Delta \epsilon_{33}^2\right)^{1/2}$$

d'où l'équation implicite locale :

$$f(\epsilon_e^p + \Delta \epsilon_e^p) = -3 G \Delta \epsilon_e^p + \left(\sigma^{E^2} + 6 G s_{33}^E \Delta \epsilon_{33} + 4 G^2 \Delta \epsilon_{33}^2\right)^{1/2}$$

où l'inconnue cinématique  $\Delta \epsilon_{33}$  est déterminée séparément par la condition  $\sigma_{33} = 0$ .

Ainsi,  $\Delta \epsilon_{33}$  est calculé par la formule implicite ci-dessous (Aravas, 1987) :

$$\left(1 + 3 G \frac{\Delta \epsilon_e^p}{\sigma^F}\right) s_{33}^F = s_{33}^E + \frac{4}{3} G \Delta \epsilon_{33}$$

Cette équation est tirée de la condition cinématique  $\sigma_{33} = 0$  et de la formule

$$\left(1 + 3 G \frac{\Delta \epsilon_e^p}{\sigma^F}\right) s_{ij}^F = s_{ij}^E + 2 G \Delta \epsilon_{33} \zeta'_{ij}.$$

## ANNEXE V

### MATRICES INTERVENANT DANS LA FORMULATION MATRICIELLE DU PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES DANS LE CAS DE LA MODELISATION BIDIMENSIONNELLE.

- Vecteur déplacements nodaux :

$$\langle p \rangle = \langle u, v \rangle$$

- Matrice [B] :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice [G] :

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \hline \frac{1}{T} & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice [Q] :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & \vdots & 0 \\ & 2\sigma_{22} & \sigma_{12} & \vdots & 0 \\ \text{sym} & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \vdots & 0 \\ \hline & & & & 2\sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- Matrice [Z] :

$$[Z] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & 0 & \vdots & 0 \\ & \sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & \vdots & 0 \\ & & \sigma_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \text{sym} & & & \sigma_{22} & \vdots & 0 \\ \hline & & & & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



- \* le 4ème
  - \* le 5ème
- 19ème tête
  - 20ème tête.

Et ainsi de suite :

La tôle numéro 2 est arrêtée au niveau des têtes 11,12,13,14,15.

La tôle numéro 3 est arrêtée au niveau des têtes 6,7,8,9,10..

La tôle numéro 4 est arrêtée au niveau des têtes 1,2,3,4,5.

Nous disposons de 21 plaques, chacune ayant subi une partie de la ligne de profilage.

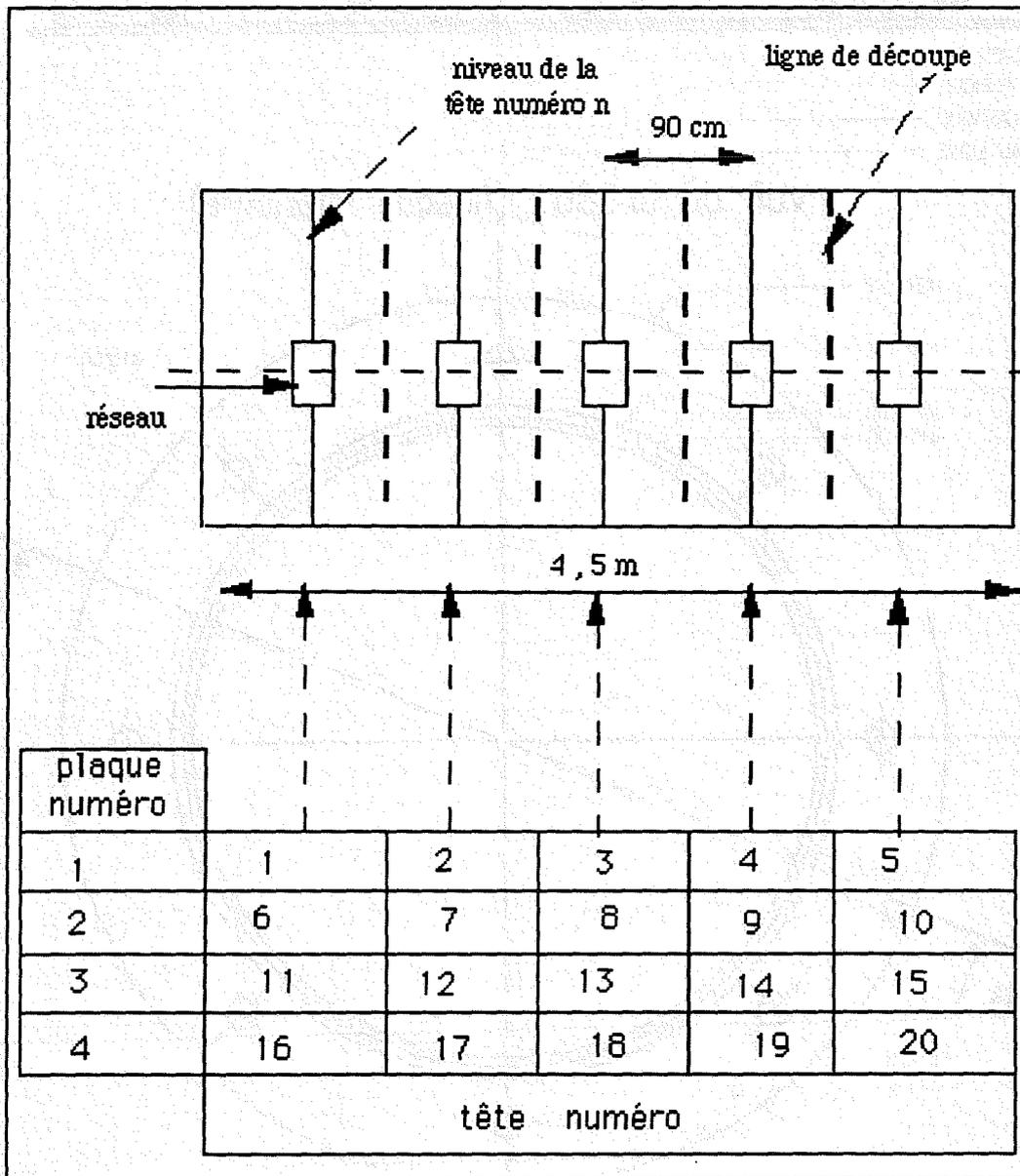
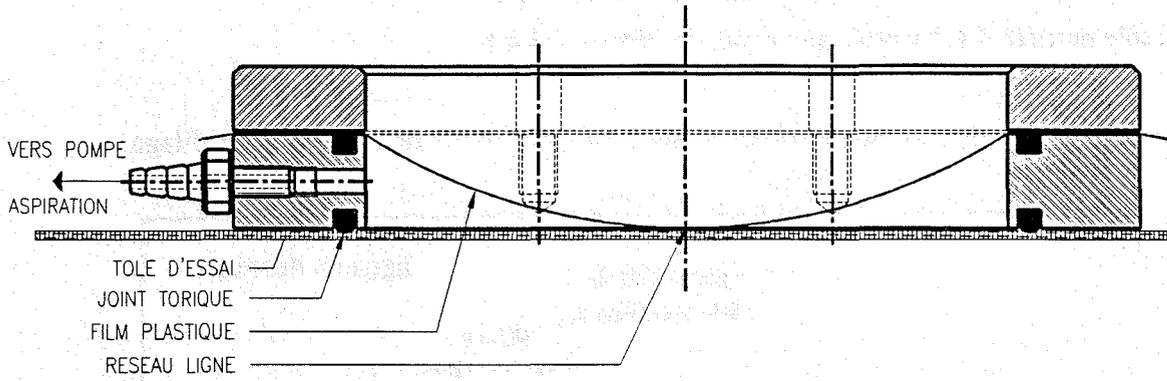


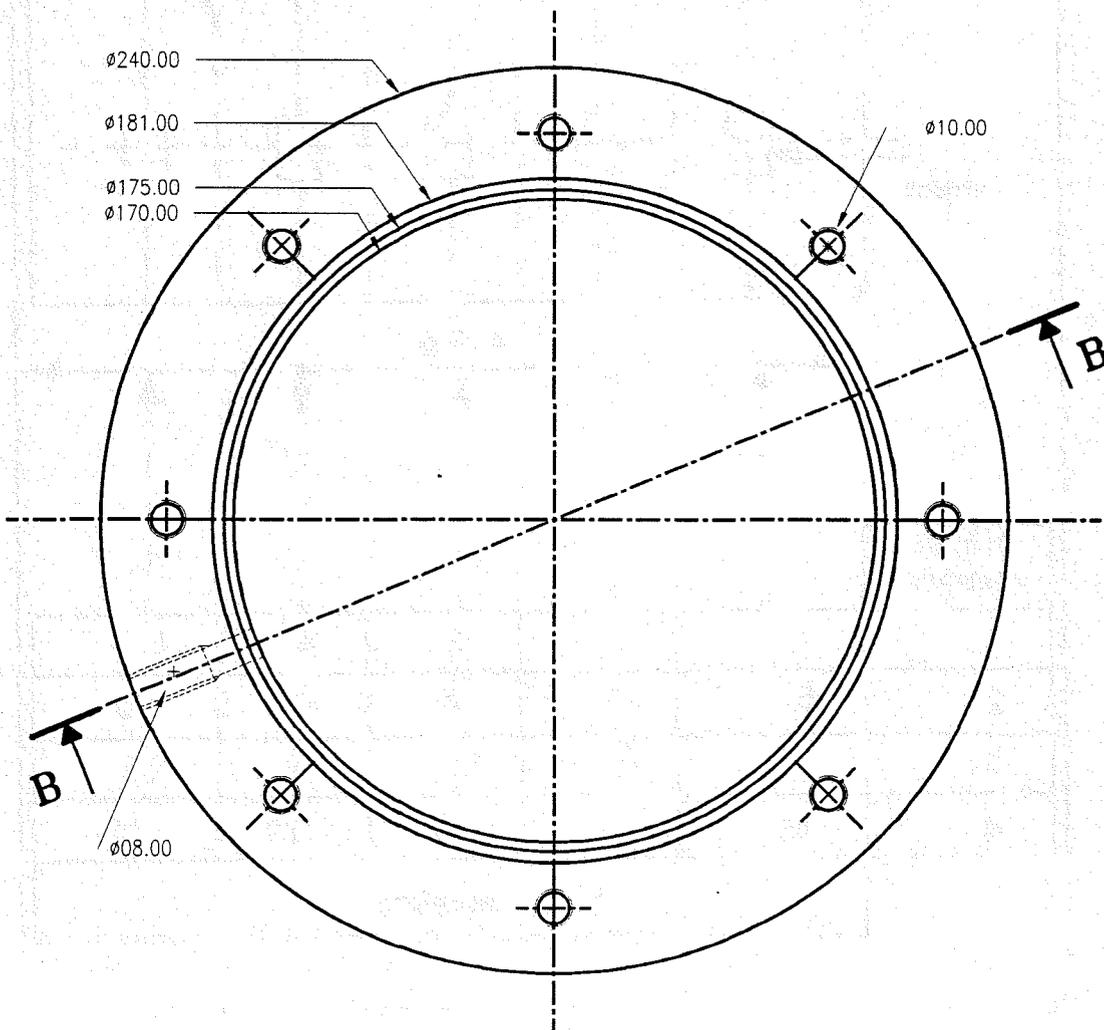
Figure 1 : Principe de l'application des réseaux pour les plaques de 4,5 m.

## A - II - Dessin du chassis

### COUPE B-B (montage assemblé, vide d'air effectué)

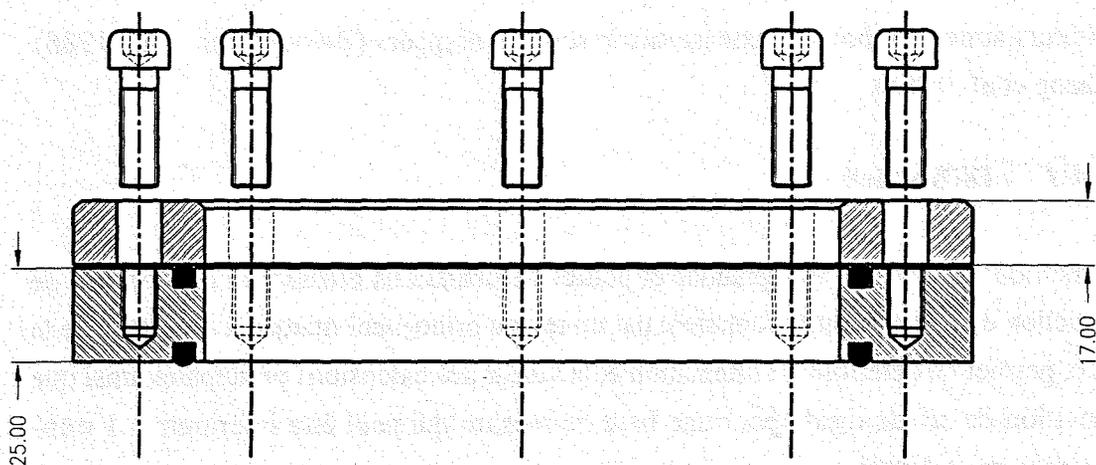


### VUE DE DESSUS (flasque inferieure)

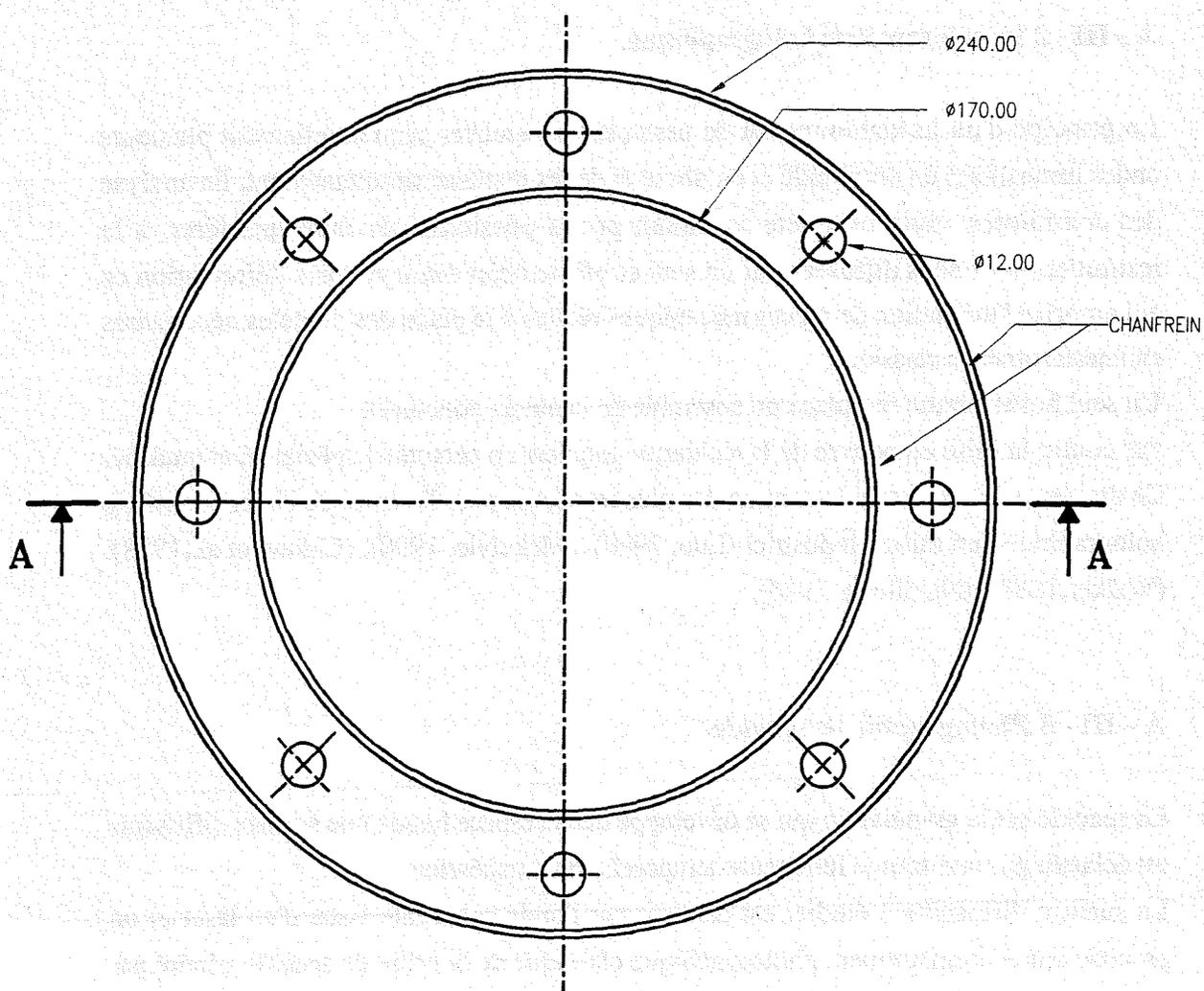


ECHELLE : 1/2

COUPE A-A (details de montage)



VUE DE DESSUS (flasque superieure)



ECHELLE : 1/2

### **A - III - Autres méthodes d'extensométrie**

Plusieurs autres méthodes d'extensométrie sont développées (Breuckmann et al., 1986), (Cheng et al., 1985),

#### **A - III - 1 Diffraction.**

La méthode de mesure des grandes et petites déformations utilisant la phénomène de diffraction d'un rayonnement cohérent par un réseau orthogonal marqué à la surface de la pièce, permet de déterminer l'orientation et la valeur des extensions principales ainsi que la rotation de solide rigide pour une base de mesure qui peut être inférieure à 1 mm<sup>2</sup> (Bremand et al., 1986).

#### **A - III - 2 Interférométrie holographique.**

Le principe d'un hologramme est de permettre de stocker séquentiellement plusieurs ondes lumineuses en amplitude et en phase et de les restituer simultanément. En analyse des contraintes, cette propriété se traduit par la possibilité de faire interférer, à la restitution, les ondes diffusées par un seul et même objet avant et après déformation ce qui autorise l'utilisation de pièces mécaniques réelles à la place des modèles nécessaires en interférométrie classique.

Un seul hologramme remplace un ensemble de capteurs ponctuels.

Par contre la mise en oeuvre de la technique requiert un personnel spécialisé et qualifié. Ce dernier point est certainement un des plus restrictifs pour l'emploi de l'interférométrie holographique en milieu industriel (Luo, 1990), (Mckelvie, 1990), (Chiang et al., 1988), (Walker, 1988), (Nicolletto, 1986).

#### **A - III - 3 Photographie de speckle.**

Le speckle est la granulation qui se développe dans l'espace lorsqu'une surface diffusante est éclairée par une source lumineuse temporellement cohérente.

La surface diffusante à étudier est éclairée par l'onde cohérente issue d'un laser et on procède à un enregistrement photographique classique de la grille de speckle généré par l'objet avant et après déformation (double exposition sur un même film). L'enregistrement s'effectue dans un plan de visée qui peut être ou non, confondu, avec le plan moyen de la surface diffusante. L'information sur le mouvement de la grille de

speckle entre les deux états mécaniques de l'objet (état de repos et état sous charge) est alors contenue sur le négatif enregistré sous la forme d'un moiré entre les deux grilles. Il s'agit donc d'une méthode sensible et quantitative de visualisation globale des champs de gradient, d'un coût moyen et ne nécessitant pas, de la part de l'utilisateur, une qualification trop importante. Elle s'accommode assez bien, de plus, d'un environnement industriel.

#### **A - III - 4 Chromoplasticité.**

Cette méthode, venant de Roumanie, exploite une propriété de certains matériaux à base de composants vinyliques, à savoir, changer de couleur aux points où la contrainte atteint la limite d'écoulement, blanchissement lorsque l'écoulement plastique résulte de contraintes de traction et de noircissement lorsque cet écoulement provient de contraintes de compression. Cette méthode est particulièrement qualitative.

#### **A - III - 5 Thermographie de surface.**

Elle permet de déterminer le développement de zones plastiques sur des éléments métalliques simples.

#### **A - III - 6 Photoelasticimétrie par réflexion.**

Pour cette méthode, la planéité de la surface de la structure n'est pas obligatoire. Elle donne une information qualitative d'ensemble par visualisation du champ des déformations. Les isoclines donnent la position des directions principales et les isochromes, les lieux des points d'égal glissement.

## ANNEXE VII

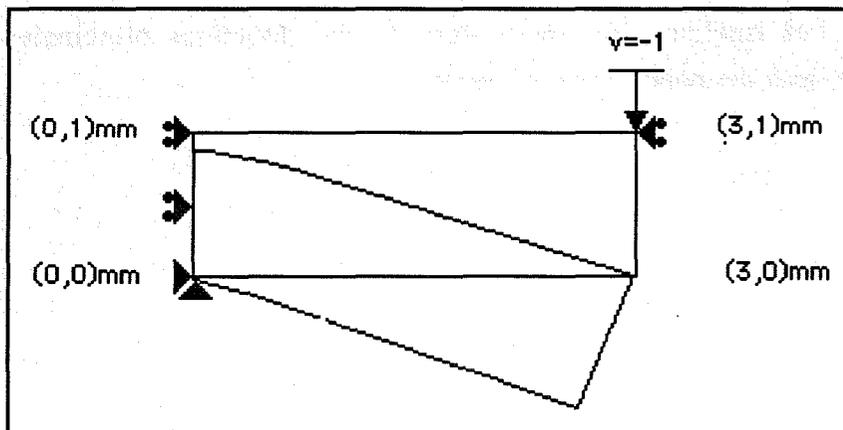
### VALIDATION FLEXION TROIS POINTS D'UNE POUTRE

Pour illustrer l'efficacité de nos modules, nous exposons les résultats d'un test de comparaison proposé par le GRECO "Grandes Déformations et Endommagement", en 1986.

Le test (Figure 1 et Figure 2) consiste à simuler le pliage d'une poutre en déformation plane discrétisée en 48 éléments à 8 noeuds et 2x2 points d'intégration (intégration réduite).

Les caractéristiques du matériau pour un écrouissage isotrope linéaire sont :

- module de Young :  $E = 200\ 000\ \text{MPa}$
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$
- limite d'élasticité :  $\sigma_0 = 400\ \text{MPa}$
- module plastique :  $M = 1\ 000\ \text{MPa}$



**Figure 1** : Test de comparaison. Géométrie de la demi-poutre.  
Déplacement imposé de (0,-1) au point (3,1).

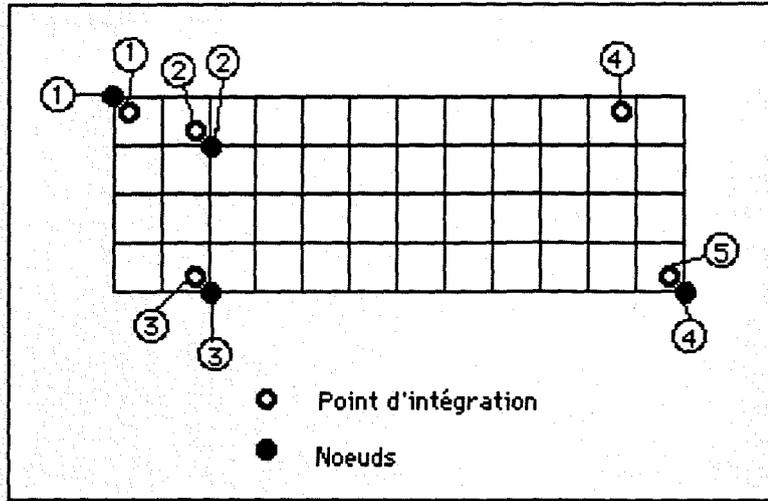


Figure 2 : Maillage de la structure en 48 éléments Serendip 8 nœuds.

Les tableaux 1 et 2 présentent nos résultats, obtenus avec 200 incréments ainsi que les écarts relatifs par rapport aux résultats de Braudel et Brunet, obtenus avec 1000 incréments (solution de référence).

	PI 1	PI 2	PI 3	PI 4	PI 5
$\sigma_{xx}$	+0.018	+0.308	-0.094	+0.018	+0.110
$\sigma_{yy}$	-0.018	+0.007	-0.049	-0.076	+0.894
$\sigma_{xy}$	+0.005	+0.020	-0.043	-0.256	+0.000
$\sigma_{zz}$	+0.011	+0.017	-0.027	+0.503	-0.225

Tableau 1 : Ecart relatif en % sur les contraintes aux points de Gauss.

	N 1	N 2	N 3	N 4
U	+0.00	-0.03	+0.01	-0.01
V	-0.04	-0.02	+0.01	-0.01

Tableau 2 : Ecart relatif en % sur les déplacements aux nœuds.

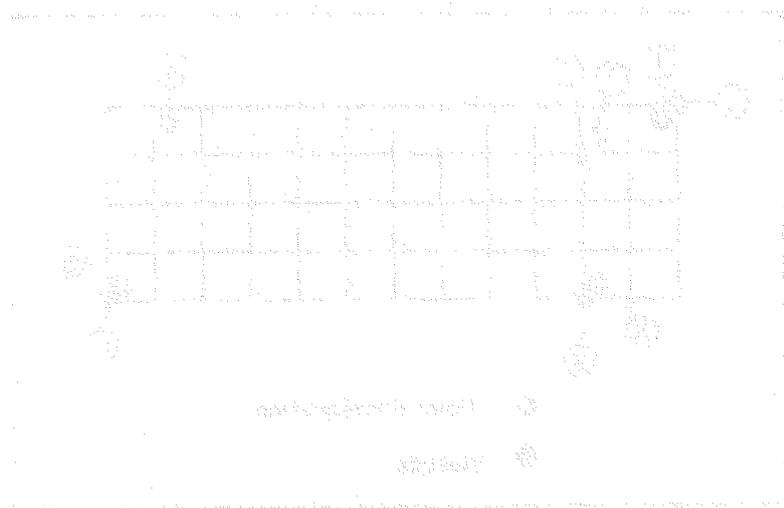


Diagram 1 and Diagram 2 showing the arrangement of symbols and numbers in a 5x5 grid.

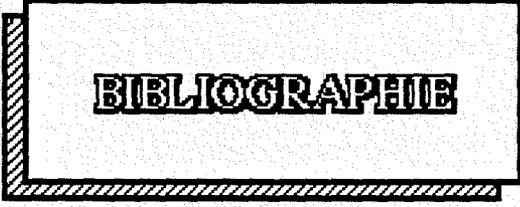
The diagram shows a 5x5 grid with various symbols and numbers. The symbols include circles with numbers inside, circles with dots, and circles with crosses. The numbers are 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. The grid is labeled 'Diagram 1' at the top left and 'Diagram 2' at the top right. Below the grid, there are two labels: 'Diagram 1' and 'Diagram 2'.

1	2	3	4	5
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000

Diagram 3 showing the arrangement of symbols and numbers in a 5x5 grid.

1	2	3	4	5
1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000

Diagram 4 showing the arrangement of symbols and numbers in a 5x5 grid.



**BIBLIOGRAPHIE**



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**ARAVAS N.** - "On the numerical integration of class of pressure-dependent plasticity models". Int. J. Num. Engm., 24, pp. 1395-1416, 1987.

**AUBURTIN Ch.** - "Analyse linéaire et non-linéaire de structures poutres planes par éléments finis et méthodes multigrilles sur micro-ordinateur". Thèse de Doctorat de I.I.N.P.L., Nancy, 1990.

**AUBURTIN Ch.** - "Analyse dynamique linéaire des structures poutres par éléments finis et méthodes multigrilles sur micro-ordinateur", Proc. Congrès STRUCOME 90, Paris, 19-22 novembre 1990.

**AUBURTIN Ch., GUEURY M.** - "Analyse par éléments finis et méthodes multigrilles de structures poutres en statique et en dynamique sur micro-ordinateur". Actes du 10ème Congrès Français de Mécanique, Paris, 2-6 septembre 1991.

**BOIVIN M., BAHUAUD J.** - "Mesure des grandes déformations par la méthode de Moirés". Séminaire International de Mécanique, plasticité appliquée et technique de mise en forme, IGAMI-CESMI-IMSCM, Lyon, 1970.

**BOIVIN M.** - "Contribution à l'étude des déformations finies dans les matériaux écrouissables", Thèse d'Etat, Université de Lyon, 1970.

**BRAUDEL H.J.** - "Modélisation des grandes transformations élastoplastiques d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux". Thèse d'Etat, Lyon, 1986.

**BRAUDEL H.J., ABOUAF M., CHENOT J.-L.** - "An implicit incrementally objective formulation for the solution of elastoplastic problems at finite strain by the F.E.M.". Comput. & Struct., 26, n° 6, pp. 825-843, 1986.

**BREMAND F., LAGARDE A.** - "Méthode optique de mesure des déformations utilisant le phénomène de diffraction", C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Série II, n° 7, 1986.

**BRUNET M., BAHUAUD J.** - "An incremental variational principle in elastic-plastic finite deformation analysis". Rapport GRECO n° 154, 1985.

**BRUNET M.**- "Modélisation numérique des grandes déformations élastoplastiques avec contact et frottement, application des problèmes spécifiques de la mise en forme des métaux". Thèse d'Etat, INSA, Lyon, 1987.

**BREUCKMANN B., THIEME W.** - "New-computer-aided system for automatic fringe analysis in optical metrologies". Proc. of SPIE, The International Society Optical Engineering, 654, pp. 237-241, 1986.

**CESCOTTO S.**- " Etude par éléments finis des grands déplacements et grandes déformations". Thèse de Docteur en Sciences Appliquées, ULg, 1978.

**CHARLIER R.** - "Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis". Thèse de Docteur en Sciences Appliquées, ULg, n°109, 1987.

**CHARLIER R., CESCOTTO S.**- "Modélisation du phénomène de contact unilatéral avec frottement dans un contexte de grandes déformations". Journal de Mécanique théorique et appliquée, 7, 1988.

**CHENG J.H., KIKUCHI N.** - "An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations". Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 49, n° 1, pp. 71-108, 1985.

**CHIANG F.P., HUA LU, DAI Y.Z.** - "Moiré interferometry on curved surfaces". Proceedings of SPIE, The International Society Optical Engineering, 814, pp. 611-14, 1988.

**CHIOU J.-H., LEE J.-D., ERDMAN A.-G.** - "Development of a three dimensional finite element program for large strain elastic-plastic solids". Computers and structures, 36, n° 4, pp. 634-645, 1990.

**DANIEL I.M.** - "Experimental methods in applied mechanics". Journal of Applied Mechanics, 50, pp. 963-76, 1983.

**DANTU P.** - "Utilisation de réseaux pour l'étude expérimentale des phénomènes élastiques et plastiques". C. R. Aca. Sci., Paris, 239, pp. 1769-1774., 1954.

**DANTU P.** - "Utilisation des réseaux pour l'étude des déformations", LCPC, Publ. n°57-6-II, pp.26-46, 1957.

**DESRUES J.** - "Sur l'application de la stéréophotogrammétrie à la mesure des grandes déformations". Revue Française de Mécanique, n°3, pp. 55-63, 1983.

**DETRAUX J.M.** - "Formulation et applications en grandes déformations des solides". Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Technologie de Compiègne, 1985.

**DHATT G., TOUZOT G.** - "Une présentation de la méthode des éléments finis". Maloine S.A. Editeur Paris, 2<sup>ème</sup> édition, 1984.

**DOGUI A.** - "Contribution à l'étude de l'écroutissement isotrope et anisotrope en grandes déformations élastoplastiques". Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Paris VI, 1983.

**EI MOUATASSIM M., TOUZOT G.** - "Modélisation des problèmes de grandes déformations. Formulation et technique de résolutions". 17<sup>ème</sup> Congrès de l'I.U.T.A.M., Grenoble, 1988.

**EI MOUATASSIM M.** - "Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis". Thèse de Doctorat de l'UTC, 1989.

**GELIN J.-C.** - "Recent advances in finite strains elastic-plastic computational algorithms". STRUCOME, Paris, pp.67-80, 1988.

**GODINAS A., CESCOTTO S.** - "Calcul des gradients de vitesses constants au cours d'un pas". Rapport interne n° 159, Université de Liège, 1984.

**GRAHAM S.M.** - "Sensitivity and resolution limitations of various moiré methods". Optics and Lasers in Engineering, 12, pp. 119-33, 1990.

**GREEN A.E., NAGHDI P.M.** - "Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain". Int. J. Eng. Sci., 9, pp. 1219-1229, 1971.

**GUEURY M.** - "Détermination du champ des déformations en front de fissure par la méthode des moirés. Application au calcul des contraintes et de l'intégrale J en domaine élasto-plastique". Thèse de Doctorat d'Ingénieur, U.T.C., Compiègne, 1982.

**GUEURY M., FRANCOIS D.** - "Dépouillement des moirés par éléments finis". C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, série II, n° 8, pp. 383-386, 1984.

**GUEURY M., FRANCOIS D.** - "Experimental study of the J-integral in the plastic zone around a crack tip using the moiré method". Proc. I.C.F.6, New Delhi, Advances in Fracture Research, pp. 3363-3370, 1984.

**GUEURY M., FRANCOIS D.** - "Analyse expérimentale des champs de contraintes planes élasto-plastiques par la méthode du moiré". Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 4, n° 1, pp. 139-155, 1985.

**GUEURY M., BONTHOUX C.** - "Méthode couplée moiré-éléments finis en élasto-plasticité, sur micro-ordinateur". Proc. 10ème Congrès Canadien de Mécanique Appliquée - CANCAM, London, pp. 289-290, 1985.

**GUEURY M.** - "Traitement interactif éléments finis-moiré expérimental en grandes déformations sur micro-ordinateur". Thèse d'Etat, Nancy, 1985.

**GUEURY M., BONTHOUX C., PEUREUX B.** - " Détermination et exploitation rapides de champs continus évolutifs par une technique dérivée des éléments finis". 7ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 1985.

**GUEURY M., BAGUR P., REZAKHANLOU R., von STEBUT J.** - "Elasto-plastic finite element analysis of an axisymmetric indentation on a coated sample, using a simple personal computer", Proc. 16th Leeds-Lyon Symposium on Tribology "Mechanics of coatings", INSA, Lyon, Elsevier Ed., 1989.

**HABRAKEN A.M.** - "Contribution à la modélisation du formage des métaux par la méthode des éléments finis". Thèse de Docteur en Sciences Appliquées, ULg, 1989.

**HALPHEN B., NGUYEN Q.S.** - "Sur les matériaux standards généralisés". J. Mech., 14, n° 1, 1975.

**HAMLILI H., GUEURY M.** - "Traitement par éléments finis de structures en grandes déformations plastiques sur micro-ordinateur", Actes du 9ème Congrès Français de Mécanique, Metz, pp. 400-401, 1989.

**HAMLILI H.** - "Simulation de problèmes de la mécanique non-linéaire du solide par éléments finis sur micro-ordinateur". Thèse de Doctorat de l'I.N.P.L., Nancy, 1990.

**HARTHONG J** - "Le moiré". Advances in Applied Mathematics, 2, pp. 24-75, 1981.

**HARTHONG J., SAHLI H., POINSIGNON R., MEYRUEIS P.** - "Analyse de formes par moiré". J. Phys. III, 1, pp. 69-84, 1990.

**HILL R.** - "Somme basic principles in the mechanics of solids without a natural time". J. Mech. Phys. Solids, 7 pp. 209-225, 1959.

**HILL R.** - "On constitutive inequalities for simple materials -I-". J. Mech. Phys. Solids, 16, pp. 229-242, 1968.

**HILL R.** - "On constitutive inequalities for simple materials -II-". J. Mech. Phys. Solids, 16, pp. 315-322, 1968.

**HUTCHINSON J.W.**- "Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures". Numerical Solution of Nonlinear Problems, R. F. Hartung Ed., New-York, pp. 17-29., 1973.

**JEAN M., TOUZOT G.** - "Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformations problems". Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 7, n° 1, pp. 145-160, 1988.

**KALLALA C., DUBOIS M., JAFFAL H., PINTO Y.**- "Approche géométrique du phénomène de contact unilatéral entre solides par la méthode des éléments finis". Proc. Congrès STRUCOME 91, Paris, Novembre 1991.

**KRESKE K., KEREN E., KAFRI O.** - "Insights on moiré deflectometry". Lasers Optronics, 10, pp. 63-66, 1988.

**LADEVEZE P.** - "Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations". Rapport interne n° 9, L.M.T., E.N.S. Cachan, 1980.

**LALLA R.** - "Moiréverfahren zur Erkennung von Oberflächendefekten durch Bestimmung des Oberflächengradienten". Technisches Messen, 55, pp. 496-500, 1988.

**LASCAUX P., THEODOR R.** - "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur". 2 tomes, Masson, 1987.

**LEE E.H.** - "Elastic-plastic deformation at finite strain" J. Appl. Mech., 36, 1971.

**LIU B.C., LI S., CHIANG F.P.** - "Moire Strain contour of crack-tip deformation". Proc. of SPIE, The International Society Optical Engineering, 814, pp. 286-290, 1988.

**LUO ZHI-SHAN** - "The principle and application of sticking film moiré interferometry". Experimental Mechanics, 30, pp. 164-172, 1990.

**McKELVIE J.** - "On moiré interferometry and the level of detail that it may reveal legitimately". Optics and Lasers in Engineering, 12, pp. 81-99, 1990.

**McMEEKING R.M, RICE J.** - "Finite-Element formulations for problems of large elastic-plastic deformation". Int. J. Solids Structures, 11, pp. 601-616, 1975.

**MALLETT R.L.** - "Finite element selection for finite deformation elastic-plastic analysis". In "Plasticity of metals at finite strain : theory, experiment and computation", Ed. by E. H. Lee and R. L. Mallet , pp. 444-476, 1982.

**MANDEL J.** - "Plasticité classique et viscoplasticité". Cours CSIM n°97, Udine, Springer-Verlag Ed., 1971.

**MANDEL J.** - "Introduction à la mécanique des milieux continus déformables". Ed.Sci. de Pologne, 1974.

**MANDEL J.** - "Sur la définition de la vitesse de déformation élastique en grande transformation élastoplastique". Int. J. Solids Structures, 19, n° 7, pp. 573-578, 1983.

**MARTINY-WEITIG M., HAMLILI H., GUEURY M.** - "Modélisation par éléments finis sur micro-ordinateur du contact avec frottement en grandes déformations. Validation expérimentale par la méthode du moiré". Congrès STRUCENG/FEMCAD, pp. 197-202, 1991.

**MARTINY-WEITIG M.**- "Synthèse des méthodes d'extensiométrie continue utilisant la technique du moiré". Rapport Interne, ERIN 90/2, 1990.

**MRICHCHA A.** - "Algorithmes implicites en élasto-plasticité et en visco-plasticité. Application à la simulation en mise en forme à froid". Thèse de Doctorat de l'université de Franche-Comté, 1992.

**NAGTEGAAL J.C., PARKS D.M., RICE J.R.** - "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 4, pp. 153-177, 1974.

**NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E.** - "Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17, pp. 15-41, 1981.

**NAGTEGAAL J.C.** - "on the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 33, pp. 469-484, 1982.

**NGUYEN Q.S., BUI H.D.** - "Sur les matériaux élasto-plastiques à écrouissage positif ou négatif". *Journal de Mécanique*, 13, n°2, pp. 321-342, 1974.

**NICOLLETTO G.** - "Crack tip displacement analysis by moiré interferometry". *Oesterreichisches Ingenieur und Architekten Zeitschrift*, 131, Fasc.8, pp. 311-314, 1986.

**NING P.-T., PENG W.-L.** - "Automatic analysis of moiré patterns by using an image-processing system". *Experimental Mechanics*, 28, pp. 350-354, 1988.

**NORBRYHN A.** - "Moire topography using a charge coupled device television camera". *Proc. of SPIE., The International Society Optical Engineering*, 398, pp. 208-213, 1983.

**ORITZ M., POPOV E.P.** - "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21, n° 9, pp. 1561-1576, 1985.

**PINSKY P.M., ORITZ M., PISTER K.S.** - "Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 40, pp. 137-158, 1983.

**PEDRETTI M.** - "Nouvelle méthode de moiré pour l'analyse des plaques fléchies". *Thèse de Doctorat ès sciences techniques, E.P.F.L, Lausanne*, 1974.

**POLITCH J.** - "Moiré methods for curvature measurements". *Proc. of SPIE, The International Society Optical Engineering*, 954, pp. 166-172, 1989.

**RAKOTOMANANA R.L.** - "Analyse théorique et numérique des grandes déformations en mécanique des milieux continus". Thèse de Doctorat ès sciences techniques, E.P.F.L, Lausanne, 1986.

**RECHO N.** - "Amorçage et propagation d'une fissure de fatigue dans des éléments de structures métalliques soudées". Thèse d'Etat, Paris VI, 1987.

**RECHO N.** - "Simplified crack propagation in T-welded tubular joints submitted to fatigue". 9th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE n°90-635, Houston, 1990.

**RICE J.R.** - "Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable. Theory and its application to metal plasticity". J. Mech. Phys. Solids, 19, pp. 433-455, 1971.

**RONDOT D., AWAJAN A., MIGNOT J., GALAL T.** - "Détection et quantification des structures linéaires d'une image ou d'une fenêtre de l'image". Proc. 3ème Colloque National de Visualisation et de Traitement d'images, Belfort, 1988.

**RONDOT D.** - "Acquisition, traitement et analyse d'images de visualisation obtenues par thermographie infrarouge, caméra vidéo et laser (imagerie) et tout autre type de capteur ponctuel piloté par moteurs à microdéplacements selon x, y et z (rugosité, vélocimétrie, microthermocouples". Cours de D.E.A., Techniques d'Analyse et d'Optimisation en Energétique, Université de Franche-Comté, 1990.

**ROSSMANITH H.P.** - "Analysis of crack-tip moiré fringe patterns", Int. Journ. of Fracture, 21, pp. 83-106, 1983.

**RUBINSTEIN R., ATLURI S.N.** - "Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analysis". Comput. Meth. Appl. Eng., 36, pp. 277-290, 1983.

**SIDOROFF F.** - "Incremental constitutive equation for large strain elasto-plasticity". Int. J. Engng. Sci., 20, n° 1, pp. 19-26, 1982.

**SIDOROFF F.** - "Cours sur les grandes déformations". Rapport du Greco, n° 5, 1982.

**SIDOROFF F.** - "Ecroûissage cinématique et anisotropie induite en grandes déformations élasto-plastiques". J. Th. App. Mech., 3, n° 1, pp. 117-133, 1984.

**SIMO J.C., TAYLOR R.L.** - "Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48, pp. 101-118, 1985.

**SIMO J.C., TAYLOR R.L.** - "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22, pp. 649-670, 1986.

**STOLZ C.** - "Contribution à l'étude des grandes transformations en élastoplasticité". Thèse de Doctorat d'Ingénieur, ENPC, Paris, 1982.

**THERY L., HAMLILI H., GUEURY M.**- "Modélisation par éléments finis du contact avec frottement en grandes déformations élasto-plastiques sur micro-ordinateur". *Proc. Congrès STRUCOME 91*, Paris, Novembre 1991.

**TIZIANI H.J.** - "Optical methods for precision measurements". *Optical and Quantum Electronics*, 21, pp. 253-282, 1989.

**VOLOSHIN A.S., BURGER C. P., ROWLANDS R.E.** - "Composites analysis by fractional moiré fringe system". *Journal of Composite Materials*, 19, pp. 513-524, 1985.

**WALKER C. A., HYZER J. B.** - "Recent developments and applications of moiré techniques to engineering stress analysis", University of Strathclyde, Glasgow, 1989.

**WALKER C. A.** - "Moiré interferometry for strain analysis". *Optics and Casers in Engineering*, pp. 213-262, 1988.

**WASOWSKI J. J., WASOWSKI L. M.**- "Computer-based optical differentiation of fringe patterns". *Experimental techniques*, 11, Fasc.3, pp. 16-18, 1987.

**ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR K.** - "The finite element methods". 5th Ed., McGraw-Hill Book Company, 1989.



# UNIVERSITE DE NANCY I

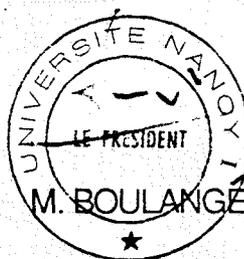
NOM DE L'ETUDIANT : Madame WEITIG (épouse MARTINY) Marion

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I  
en MECANIQUE

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 18 JUIN 1992 n°328

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



# UNIVERSITY OF CALIFORNIA

THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

LIBRARY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA



UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY

## RESUME

Actuellement, la simulation numérique connaît un essor sans précédent dans les Sciences de l'Ingénieur et en particulier en mécanique des structures.

L'objectif poursuivi dans ce travail est de réaliser et de valider un code général de calcul par éléments finis, d'architecture modulaire, fonctionnant intégralement sur micro-ordinateur. Les modules bidimensionnels développés sont dédiés à la mise en forme de structures minces (tôles) dans le domaine de la mécanique non-linéaire (géométrie et matérielle) en élasto-plasticité "grandes déformations" avec contact-frottement (algorithme implicite).

La démarche poursuivie au cours de ce travail repose sur les étapes suivantes :

- étude détaillée des diverses formulations proposées dans la littérature (grandes déformations, contact),
- mise en oeuvre des algorithmes de calcul,
- application à la simulation numérique du processus du formage de profilés de couverture-bardage à partir de tôles minces,
- validation expérimentale par la méthode du moiré.

## MOTS CLES

Elasto-plasticité - Grandes déformations - Éléments finis - Profilage  
- Contact - Frottement - Non-linéaire - Micro-ordinateur - Moiré

