Courbes et hypersurfaces nulles en géométrie pseudo-Riemannienne

Xavier Charuel

▶ **To cite this version:**

Xavier Charuel. Courbes et hypersurfaces nulles en géométrie pseudo-Riemannienne. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2003. Français. NNT : 2003NAN10005 . tel-01754437

HAL Id: tel-01754437
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754437

Submitted on 30 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Xavier CHARUEL

Courbes et hypersurfaces nulles en géométrie pseudo-Riemannienne

Soutenue publiquement le 14 Février 2003

Membres du jury :

Jacques Lafontaine	Rapporteur, Président du jury	Professeur à l'université Montpellier 2
Ines Kath	Rapporteur	Chargée de recherche DFG à l'université de Goettingen
Janos Szenthe	Rapporteur	Professeur à l'université de Budapest
Wolfgang Bertram	Examinateur	Professeur à l'université Henri Poincaré Nancy I
Vincente Cortes-Suarez	Examinateur	Professeur à l'université Henri Poincaré Nancy I
Lionel Bérard Bergery	Directeur de thèse	Professeur à l'université Henri Poincaré Nancy I

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Remerciements

A l'issue de ce travail, je tiens en premier lieu à remercier Lionel Bérard Bergery qui a dirigé ma thèse. Grâce à ses connaissances si vastes en géométrie (et dans bien d'autres domaines), j'ai pû profiter d'un soutien inappréciable pour cette première expérience de recherche. J'ai eu la chance durant ces trois dernières années de bénéficier de sa capacité d'écoute, sa grande disponibilité et son esprit critique qui m'ont permis de découvrir constamment de nouvelles problématiques et d'affiner considérablement la rédaction de ma thèse. Qu'il en soit vivement remercié ici.

Je suis sensible à l'honneur que me fait Jacques Lafontaine en acceptant de présider ce jury. Merci à lui d'avoir bien voulu endosser cette responsabilité.
Je remercie également Ines Katz pour sa participation à ce jury.
Les échanges que j'ai entretenus par mails avec Janos Szenthe m'ont poussé à approfondir la dernière partie de cette thèse. Merci à lui pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail, et pour sa présence dans ce jury.
J'ai pû, durant ces années de thèse, apprendre beaucoup auprès de Wolfgang Bertram et Vincete Cortes-Suarez, et profiter de leurs connaissances approfondies. Je les remercie sincèrement de faire partie de ce jury.

Je tiens aussi à remercier l'équipe de théorie spectrale et géométrie de Grenoble, qui m'a invité à exposer mes travaux. Les nombreuse discussions qui en ont résultées, en particulier avec Luc Rozoy, Charles Boubel, Yves Carrière et Gérard Besson m'ont permis d'enrichir considérablement ma thèse. Je les en remercie donc chaleureusement.
Je remercie aussi Joachim Lohkamp et Jost Eschenburg pour l'intérêt qu'il ont porté à ma thèse, et la possibilité qu'ils m'ont offert de parler de ce travail à Augsburg.

Un grand merci encore à Oussama Hijazi pour son soutien, son aide, et la possibilité qu'il m'a donné de m'ouvrir à d'autres domaines.
J'ai eu la chance de bénéficier des connaissances et du soutien des membres de l'équipe de géométrie spinorielle. J'en remercie par conséquent Bertrand Morel (qui m'a si souvent sorti de mes difficultés en informatique), Nicolas Ginoux, Eric Beaufort, Jean-François Grosjean, Emmanuel Humbert et Julien Maubon.
Je dois beaucoup à l'institut Elie Cartan pour son accueil, et les moyens mis à ma disposition.

Enfin, cette thèse n'aurait pû aboutir sans l'appui réconfortant de ma famille : merci donc à mes frères pour leur soutien, à François et Lucas pour leur sourire, à mes parents pour leur aide si précieuse, et, aussi et surtout, merci à Marie-Laure pour tout l'amour dont elle m'a entouré.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Table des matières

Introduction 8

Chapitre 1. **Une généralisation du repère de Frénet sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une forme quadratique non-dégénérée de signature quelconque** 13
1. **Introduction** 14
2. **Le but du repère de Frénet** 14
3. **La construction classique dans le cas Euclidien** 15
4. **Généralisation au cas pseudo-Riemannien** 18

Annexe : l'article sur le repère de Frénet généralisé 24
Abstract 25
Résumé 25
1. **Introduction** 26
2. **A preliminary study of kernels** 30
3. **The geometrical fundations of the construction** 34
4. **The construction of our basis** 38
5. **The matrix of derivatives** 43
6. **The change of basis** 49
7. **Parametrization of curves** 49
8. **Remarks on the invariants $\varkappa_k$, $\Upsilon_{k,i}$ and ς_k.** 51
9. **Generalizing the construction to arbitrary pseudo-Riemannian manifolds** 52

Bibliography 53

Chapitre 2. **Repères de Frénet généralisés pour des courbes sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ou $\mathbb{H}^n$ muni d'une forme réflexive abitraire** 55
1. **Introduction** 56
2. **Rappel des notations** 56
3. **Le théorème général** 57
4. **Rappel du résultat obtenu dans le cas pseudo-Riemannien : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme quadratique d'indice quelconque** 59
5. **Le cas symplectique : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme alternée** 63
6. **Le cas complexe hermitien : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme hermitienne** 67
7. **Le cas quaternionic anti-hermitien : $K = \mathbb{H}$, $\langle,\ \rangle$ est une forme anti-hermitienne** 74

Chapitre 3. **Des coordonnées adaptées à la géométrie d'une hypersurface dégénérée** 81
Introduction 82
1. **Le premier invariant : la seconde forme fondamentale** 84
2. **Les invariants associés à une hypersurface dégénérée** 92
3. **Une taille canonique du champ X** 113
4. **Choix de section** 122

5. **Propagation sur la variété ambiante** 131
6. **Les espaces à courbure constante** 140
7. **Les espaces localement symétriques** 143
Annexe 1 : Un exemple en dimension 3 156
Annexe 2 : l'horizon de Schwarschild 158
Annexe 3 : l'opérateur de Weingarten 160
Bibliographie 163

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHEQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
F-5401 VILLERS-LES-NANCY Cedex

Introduction

Dans la théorie générale des sous-variétés, les sous-variétés dégénérées (ou nulles), bien que peu étudiées, ont vu leur importance croître en physique mathématique, et particulièrement en relativité.
Pour ne citer que quelques exemples parmi tant d'autres, nous pouvons mentionner que

• A. Nersessian et E.Ramos ont montré en 1998 (cf. [**N-Ra**]) qu'il existe un modèle géométrique de particule basé entièrement sur la géométrie des courbes nulles dans l'espace temps de Minkowski $\mathbb{R}^{4,1}$, qui sous quantisation donne les équations d'onde correspondantes à des particules massives de spin arbitraire.

• Les horizons des trous noirs (horizons cosmologiques, horizons des événements, ...) sont des hypersurfaces dégénérées de l'espace temps considéré.

• dans un article récent (cf. [**G-S-W**]), G.J. Galloway, S. Surya, et E. Woolgar ont établi des résultats allant dans le sens de la conjecture d'Horowitz-Myers, stipulant que l'unique solution de masse minimum qui asymptote le soliton Ads est le soliton lui-même. Dans la preuve de leur théorème d'unicité apparaîssent des collections d'hypersurfaces dégénérées totalement géodésiques.

Il semble donc important de mieux comprendre les problèmes liés à la dégénérescence de la métrique induite sur une sous-variété.

La grande différence entre sous-variétés dégénérées et non-dégénérées réside dans le fait que pour les premières, le fibré normal a une intersection non triviale avec le fibré tangent de la sous-variété. Ceci nous empêche donc d'appliquer les méthodes classiques que l'on utilise en géométrie Riemannienne. Il semble donc indispensable de mettre au point de nouvelles techniques pour aborder l'étude des sous-variétés dégénérées.

Dans cette thèse, nous nous limiterons à l'étude des courbes nulles (sous-variétés dégénérées de dimension 1), et des hypersurfaces dégénérées (sous-variétés dégénérées de co-dimension 1) totalement géodésiques d'une variété pseudo-Riemannienne.
Le premier chapitre est consacré à l'étude des courbes dans les espaces de Minkowski $\mathbb{R}^{p,q}$. Dans ces espaces, contrairement aux courbes spatialles ou temporelles qui admettent une paramétrisation naturelle (paramétrisation par longueur d'arc ou unitaire), les courbes nulles n'ont, exception faite des géodésiques (qui ont un paramétrage affine), à-priori aucune paramétrisation naturelle connue. Pour tenter d'associer à ces courbes un paramétrage naturel, nous batissons une généralisation du repère de Frénet dans les espaces de Minkowski pseudo-Riemannien. Rappelons que dans le cas Euclidien, ce repère se construit par un simple procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur le vecteur tangent de la courbe considérée et ses dérivées successives. Cependant, dans le cadre pseudo-Riemannien, l'existence de vecteurs isotropes nous empêche d'appliquer le même procédé.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
F-5060 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Plusieurs constructions ont déjà été proposées pour généraliser le repère de Frénet (cf. notamment [**D-B**], et [**D-J**]), mais aucune, à notre connaissance, n'a aboutit à un repère véritablement canonique.
Notre but, dans ce premier chapitre, est donc de batir un repère de Frénet généralisé "canonique", associé à toute courbe suffisamment régulière des espaces de Minkowski pseudo-Riemannien.

Dans le chapitre 2, nous généralisons notre construction aux courbes réelles sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ou $\mathbb{H}^n$ munis de formes réflexives (2-formes bilinéaires non-dégénérées, symétriques ou alternées sur $\mathbb{R}^n$, hermitiennes ou anti-hermitiennes sur $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{H}^n$) arbitraires.
En particulier, si le premier chapitre se généralise, à l'aide du transport parallèle, aux variétés pseudo-Riemanniennes, le cas de $\mathbb{R}^n$ muni d'une 2-forme alternée donne une généralisation aux variété symplectiques connectées.
Notons que la méthode établie dans ces deux premiers chapitres pour généraliser le repère de Frénet ne se limite pas au cadre réel, complexe, ou quaternionnien. On pourrait tenter de généraliser cette méthode à d'autres corps possédant une dérivation, ou même d'autres algèbres. Il serait notamment particulièrement intéressant de trouver une généralisation pour les algèbres à composition associatives telles que $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{R}(2)$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}(2)$, ... Ceci nous permettrait d'élargir notre étude, qui donne des résultats pour les groupes d'isométries $SO(n)$, $Sp(n, \mathbb{R})$, $U(n)$, $SO(n, \mathbb{H})$, ... à de nouveaux groupes tels que $O(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$, $Gl(n, \mathbb{C})$, $SO(2n, \mathbb{C})$, ...

Enfin, le troisième chapitre est consacré à l'étude des hypersurfaces dégénérées d'une variété pseudo-Riemannienne (pour lesquelles la métrique induite sur l'hypersurface est dégénérée en tout point). Pour ces hypersurfaces, le fibré normal est inclus dans le fibré tangent, ce qui nous empêche notamment de voir l'opérateur important qui apparaît dans la théorie classique des sous-variétés, la seconde forme fondamentale, comme une simple projection sur le fibré normal. Cette seconde forme fondamentale existe malgré tout canoniquement, et nous verrons qu'elle représente la première obstruction à l'intégrabilité d'une G-structure induite sur l'hypersurface dégénérée. Pour étudier le défaut à l'intégrabilité de cette structure, nous nous limitons alors à l'étude des hypersurfaces dégénérées totalement géodésiques.
En utilisant les techniques de la cohomologie de Spencer, nous déduirons d'autres obstructions à l'intégrabilité, desquelles sortiront des listes d'opérateurs qui nous aideront à mieux comprendre la géométrie de notre hypersurface, et donc à construire des systèmes de coordonnées locaux adaptés à cette géométrie.

La construction de coordonnées sur une hypersurface dégénérée avait déjà été tentée en 1950 par A.G. Walker, qui avait proposé des coordonnées locales sur une variété $\mathcal{M}$ indécomposable admettant une distribution totalement isotrope parallèle X (cf. [**W 1**], et [**W 2**]). Walker avait construit des coordonnées $\{(x_i)_{i=1}^{d_1}, (y_i)_{i=1}^{d_2}, (z_i)_{i=1}^{d_1}\}$, où les coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$ paramètrent les feuilles intégrales de la distribution X, et les coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}, (y_i)_{i=1}^{d_2}$ paramètrent les feuilles intégrales de la distribution $X^\perp$ ($X \subset X^\perp$). La métrique dans ces coordonnées était alors donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{d_1} \\ 0 & A & H \\ I_{d_1} & H^t & B \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices A et B sont symétriques, et où A et H ne dépendent pas des coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$.
Cependant, ces coordonnées sont loin d'être uniques, et étant construites comme solution arbitraire d'un système différentiel, des informations sur la géométrie locale de la variété risquent d'être cachées par un choix particulier de telles coordonnées.

Plus récemment, C. Boubel avait tenté d'améliorer les coordonnées de Walker, et de rechercher des coordonnées les plus uniques possibles (cf. [**Bou**]). Il obtenait notamment grâce à ses coordonnées une classification locale des variétés Lorentziennes suivant leur holonomie.
Toutefois, les coordonnées de Boubel sont intimement liées au cadre, dans lequel il se plaçait, des variétés pseudo-Riemanniennes réductibles, indécomposables, et aux propriétés de l'holonomie.

C'est à la suite notamment de ces travaux que nous débutons notre étude, et tentons de construire des systèmes de coordonnées locales les plus uniques possibles, et les plus adaptés possibles à la géométrie de l'hypersurface.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

CHAPITRE 1

Une généralisation du repère de Frénet sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une forme quadratique non-dégénérée de signature quelconque

1. Introduction

Dans une variété pseudo-Riemannienne, on peut distinguer trois types de courbes, selon la causalité de leur vecteur tangent :

- des courbes temporelles
- des courbes spatiales
- des courbes nulles

Il est connu que chaque courbe temporelle (respectivement spatiale) possède une paramétrisation naturelle, appelée paramétrisation unitaire, telle que le vecteur tangent de la courbe soit en tout point de norme -1(respectivement +1). Par contre, une courbe nulle ne possède pas, en général, de paramétrisation naturelle, exception faite des géodésiques nulles (qui admettent un paramétrage affine tel que le vecteur tangent $\dot{c}$ vérifie $D_{\dot{c}}\dot{c} = 0$). Le but de ce chapitre est de définir une paramétrisation naturelle sur toute courbe nulle, suffisamment régulière, des espaces de Minkowski $\mathbb{R}^{p,q}$. Pour cela, l'idée va être de construire un repère mobile canonique le long de telles courbes.
Dans le cas Riemannien, il est connu qu'un tel repère existe : le repère de Frénet (cf. entre autres [**Sp**]). Cependant, la construction de ce repère reposant sur un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, il y a des difficultés à généraliser ce repère dans le cas pseudo-Riemannien (à cause de l'existence de vecteurs isotropes). Plusieurs constructions ont déjà été proposées, utilisant parfois des données auxiliaires (cf. [**B-D**] ou [**Bo 1**]) ; mais aucune, à notre connaissance, ne s'est révélée être véritablement canonique (ces constructions laissaient libre un certain nombre de choix).
Nous décrivons donc dans l'article mis en annexe de ce chapitre la construction d'un repère mobile canonique , généralisant le repère de Frénet, associé à toute courbe suffisamment régulière des espaces de Minkowski pseudo-Riemannien, et décrivons les courbures de Frénet généralisées.
Ce repère nous permet alors de définir une paramétrisation naturelle sur toute courbe (en particulier sur les courbes nulles) suffisamment régulière de $\mathbb{R}^{p,q}$. Comme dans le cas Riemannien, le transport parallèle nous permet de généraliser notre construction aux variétés pseudo-Riemanniennes.

2. Le but du repère de Frénet

Considérons une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et munissons $\mathbb{R}^n$ d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$.
Pour toute valeur $t \in I$, et tout entier i compris entre 1 et n, nous notons $F_i(t)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les dérivées successives $c^{(1)}(t), ..., c^{(i)}(t)$. Il est clair que l'on a une inclusion $F_i(t) \subseteq F_{i+1}(t)\ \ \forall t \in I,\ \ \forall 1 \leq i \leq n-1$.

DÉFINITION 2.1. Nous appelons drapeau associé à la courbe c la suite d'inclusion

$$\boxed{F_1(t) \subseteq ... \subseteq F_n(t)\ \ \forall t \in I}.$$

Dans le but de construire des repères le long de la courbe c, nous devons imposer des hypothèses de régularité sur la courbe, pour assurer notamment que le comportement du drapeau ne dépend pas de la valeur $t \in I$, autrement dit que l'on ait $F_i(t) \underset{\neq}{\subset} F_{i+1}(t)\ \forall t \in I$, ou $F_i(t) \equiv F_{i+1}(t)\ \forall t \in I$. Sous ces hypothèses de régularité, nous pouvons alors définir un unique entier r_c (compris entre 1 et n) vérifiant $F_{r_c-1}(t) \underset{\neq}{\subset} F_{r_c}(t) \equiv F_{r_c+1}(t)\ \forall t \in I$.

DÉFINITION 2.2.

(1) On appelle repère mobile sur une courbe c (suffisamment régulière) un ensemble de champs de vecteurs $\{v_1, ..., v_{r_c}\}$ sur c formant une base orthonormée du sous-espace $F_{r_c}(t)$ pour chaque valeur $t \in I$.

(2) Un repère mobile sur c est dit adapté au drapeau de c si pour tout entier i compris entre 1 et r_c, on a $< v_1(t), ..., v_i(t) > \equiv F_i(t)\ \forall t \in I$.

La théorie des repères mobiles a été largement étudiée par le passé, en particulier par E. Cartan (cf. **[Car 1]** et **[Car 3]**).

Le but du repère de Frénet est alors de construire, le long de toute courbe c suffisamment régulière de $\mathbb{R}^n$, un repère mobile canonique adapté au drapeau de c.

Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes : soit $\mathfrak{V} := \{v_1, ..., v_{r_c}\}$ un repère mobile le long d'une courbe c. Nous noterons
• $G(\mathfrak{V})(t) := (\langle v_i(t), v_j(t) \rangle)_{1 \leq i,j \leq r_c}$ la matrice de Gram du repère mobile $\mathfrak{V}$
• $\Delta(\mathfrak{V})(t) = Mat(Id, \{v_i\}, \{v_i'\})$ la matrice des dérivées.

3. La construction classique dans le cas Euclidien

Considérons une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et munissons $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini positif. Nous commençons, comme annoncé précédemment, par imposer des hypothèses de régularité sur la courbe c (nous verrons par la suite que nous pouvons affaiblir ces hypothèses) :

DÉFINITION 3.1. La courbe c est dite régulière si les dérivées successives $c^{(1)}(t), ..., c^{(n)}(t)$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$ pour toute valeur $t \in I$. Sur le drapeau associé à c, la régularité de la courbe se traduit par la suite d'inclusions strictes

$$F_1(t) \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} F_n(t) = \mathbb{R}^n\ \forall t \in I.$$

Dans le cas Euclidien (où il n'existe pas de vecteur isotrope non nul), le résultat primordial qui va être à la base de la construction du repère de Frénet est donné par le lemme suivant :

LEMME 3.2. *Les sous-espaces $F_i(t)$ sont tous non-dégénérés pour la métrique induite par le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Si un sous espace $F_i(t)$ était dégénéré, la métrique induite sur ce sous-espace aurait donc un noyau non trivial, et tout élément de ce noyau serait un vecteur isotrope de $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$. Or, puisque le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est défini positif, il ne peut exister de vecteur isotrope non nul de $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$. □

Considérons alors une courbe c régulière ; nous pouvons lui associer un repère mobile, adapté au drapeau de c, canonique, appelé repère de Frénet (cf. **[Sp]** et **[Car 2]**), définit par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3. *Soit $c : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$. Alors nous pouvons associer à c un unique repère mobile $\{v_1, ..., v_n\}$, appelé repère de Frénet, vérifiant*

(1) *pour tout entier i compris entre 1 et n, le déterminant δ_i de la matrice de passage de la base $\{c^{(1)}, ..., c^{(i)}\}$ de F_i à la base $\{v_1, ..., v_i\}$ vérifie $\delta_i(t) > 0\ \ \forall t \in I$*

(2)
$$G(\mathfrak{V}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\Delta(\mathfrak{V}) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & 0 \\ k_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

pour des fonctions $k_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement positives.

DÉMONSTRATION. La construction de ce repère repose simplement sur l'application du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les vecteurs $c^{(1)}(t), ..., c^{(n)}(t)$; on pose, pour tout $t \in I$

◇ $v_1(t) := \frac{c^{(1)}(t)}{\|c^{(1)}(t)\|}$

◇ pour $2 \leq i \leq n$, puisque $F_{i-1}(t)$ est un sous-espace non-dégénéré de $F_i(t)$ (cf. lemme 2.2), on décompose, pour tout $t \in I$, l'espace $F_i(t)$ en somme directe othogonale $F_i(t) = F_{i-1}(t) \overset{\perp}{\oplus} F_{i-1}^{\perp i}(t)$ (où $F_{i-1}^{\perp i}(t)$ désigne l'orthogonal de $F_{i-1}(t)$ dans $F_i(t)$), et on pose alors $v_i(t) := \frac{\pi^{\perp i}(c^{(i)}(t))}{\|\pi^{\perp i}(c^{(i)}(t))\|}$, où $\pi^{\perp i}$ est la projection $F_i \to F_{i-1}^{\perp i}$.

Remarque : $\|\ \pi^{\perp i}(c^{(i)}(t))\ \| \neq 0$ car sinon, puisque le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est défini positif, on aurait $\pi^{\perp i}(c^{(i)}(t)) = 0$, et donc $c^{(i)}(t) \in F_{i-1}(t)$, ce qui contredit l'hypothèse de régularité.

□

Remarque : on peut restreindre l'hypothèse de régularité en demandant seulement que les (n-1) premières dérivées $\{c^{(1)}, ..., c^{(n-1)}\}$ soient indépendantes ; dans ce cas, on construit le repère de Frénet $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ par une orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les vecteurs $c^{(1)}, ..., c^{(n-1)}$, et on complète ce repère avec le vecteur $v_n := v_1 \times ... \times v_{n-1}$. Le théorème précédent reste vrai, à ceci près que les fonctions k_i peuvent alors être choisies positives, à l'exception de la dernière fonction k_{n-1}.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

DÉFINITION 3.4. Les fonctions $k_1, ..., k_{n-1}$ qui apparaissent dans la matrice des dérivées du repère de Frénet sont appelées courbures de Frénet.

L'importance des courbures de Frénet est qu'elles permettent de reconstruire la courbe initiale : plus précisément, étant données des fonctions $k_1, ..., k_{n-1}$, on peut se demander si il existe une courbe c admettant ces fonctions pour courbures de Frénet, et à quelle condition près cette courbe est unique. La réponse à ces questions est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.5. *Etant données (n-1) fonctions continues $k_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ (pour i=1,...,n-1), avec $k_i > 0$ $\forall i$. Alors il existe une courbe $c : [a, b] \to \mathbb{R}$, paramétrée par longueur d'arc, admettant les fonctions k_i pour courbures de Frénet. De plus, deux telles courbes diffèrent d'un déplacement Euclidien (une translation suivie d'une rotation de $SO(n)$).*

Remarquons que pour faire la construction ci-dessus, on peut affaiblir l'hypothèse de régularité (définition 2.1) en la remplaçant par la condition suivante :

DÉFINITION 3.6. La courbe c est dite r-régulière (pour un entier $1 \leq r \leq n$) si l'on a $F_{r-1}(t) \underset{\neq}{\subset} F_r(t) \equiv F_{r+1}(t)$ $\forall t \in I$

Remarques :

(1) Dire que c est r-régulière revient à dire que le drapeau associè à c est de la forme $F_1(t) \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} F_r(t)$ $\forall t \in I$.

(2) Dire que c est régulière au sens de la définition 2.1 revient à dire que c est n-régulière.

Si la courbe c est r-régulière, on peut montrer (à l'aide des formules de Taylor) que le sous-espace $F_r(t)$ ne dépend pas de la valeur $t \in I$. On peut alors identifier F_r avec $\mathbb{R}^r$, et appliquer la construction précédente.

Remarquons enfin que le transport parallèle nous permet de généraliser la construction à toute courbe (suffisamment régulière) d'une variété Riemannienne. Considérons en effet une variété Riemannienne (M^n, g), et $c : I \to M$ une courbe de M, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
L'espace tangent T_xM en $x = c(0)$ est muni d'un produit scalaire non-dégénéré, défini positif, g_x. Pour tout $t \in I$, considérons le transport parallèle $\tau(t) : T_xM \to T_{c(t)}M$ le long de c par rapport à la connexion de Levi-Civita de (M, g). En tout point $c(t)$, la courbe c admet un vecteur tangent $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M$, et des dérivées successives
$D^{(k)}\dot{c} = \underbrace{D_{dt}(D_{dt}(...(D_{dt}}_{k}\dot{c})))$.
Les vecteurs $c^{(k)}(t) := \tau^{-1}(t)D^{(k-1)}\dot{c}$ sont des vecteurs de T_xM, et par les théorèmes généraux sur les équations différentielles, on sait que l'on peut construire une unique courbe $\gamma : I \to T_xM$ telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma^{(k)}(t) = c^{(k)}(t)$ $\forall k$. Nous pouvons alors appliquer notre construction à la courbe γ. Pour cela, notons $F_k^c(t)$ (respectivement $F_k^\gamma(t)$) l'espace engendré par les dérivées successives $\{\dot{c}, ..., D^{(k-1)}\dot{c}(t)\}$ (respectivement $\{c^{(1)}(t), ..., c^{(k)}(t)\}$).

DÉFINITION 3.7. La courbe c est dite r-régulière si $F_{r-1}^c(t) \underset{\neq}{\subset} F_r^c(t) \equiv F_{r+1}^c(t)$ $\forall t \in I$.

Puisque le transport parallèle est une isométrie linéaire, il est facile de montrer que l'on a

PROPOSITION 3.8. *La courbe c est r-régulière si et seulement si la courbe γ est r-régulière (au sens de la définition 2.5).*

Par conséquent, si la courbe c est r-régulière, nous pouvons construire un repère mobile canonique $\{v_1, ..., v_r\}$ dans T_xM, associé à la courbe γ. En posant $w_i(t) := \tau(t)(v_i(t))$ pour touit entier i compris entre 1 et r, on obtient alors un repère mobile $\{w_1, ..., w_r\}$ le long de la courbe c, avec les mêmes courbures k_i que γ (car $D_{dt}w_i(t) = \tau(t)(v_i'(t))$ puisque $\tau(t)$ est linéaire).

4. Généralisation au cas pseudo-Riemannien

Considérons une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ étant muni d'une forme quadratique $\langle\ ,\ \rangle$ non-dégénérée de signature quelconque.
Supposons que c soit r-régulière. Le drapeau associé à c est donc de la forme $F_1(t) \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} F_r(t)\ \forall t \in I$. Cependant, si la forme $\langle\ ,\ \rangle$ n'est pas définie (positive ou négative), l'existence de vecteurs isotropes nous prive de l'argument qui, dans le cas Euclidien, nous permettait de conclure que les sous-espaces $F_i(t)$ étaient tous non-dégénérés (pour la métrique induite). Et en fait, il peut très bien y avoir des sous-espaces $F_i(t)$ dégénérés dans le drapeau associé à c : par exemple, si c est une courbe nulle, l'espace $F_1(t)$ engendré par le vecteur $c^{(1)}(t)$ est dégénéré pour tout $t \in I$. Afin de construire un repère mobile le long de c, nous sommes donc contraints d'imposer des hypothèses de régularité plus fortes que précédemment, à savoir :
• contrôler le drapeau de c : nous demandons que la courbe c soit r-régulière, de telle sorte à ce que le drapeau associé à c soit de la forme $F_1(t) \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} F_r(t)\ \underline{\underline{\forall t \in I}}$.
et
• contrôler la dégénérescence des sous-espaces $F_i(t)$: nous demandons que la dégénérescence de chaque sous-espace $F_i(t)$ ne dépende pas de t ; autrement dit, nous souhaitons avoir $F_i(t)$ dégénéré pour tout $t \in I$, ou $F_i(t)$ non-dégénéré pour tout $t \in I$. Les courbes vérifiant ces deux conditions seront dites r-pseudo-régulières.

DÉFINITION 4.1. Une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$ sera dite r-pseudo-régulière si

(1) c est r-régulière, i.e. $F_{r-1}(t) \underset{\neq}{\subset} F_r(t) \equiv F_{r+1}(t)\ \forall t \in I$

(2) Pour tout entier k compris entre 1 et r, le déterminant de Gram g_k (déterminant de la matrice de Gram $(\langle c^{(i)}(t), c^{(j)}(t)\rangle)_{1\leq i,j\leq k}$) est soit identiquement nul, soit une fonction ne s'annulant pas (donc strictement positive ou négative).

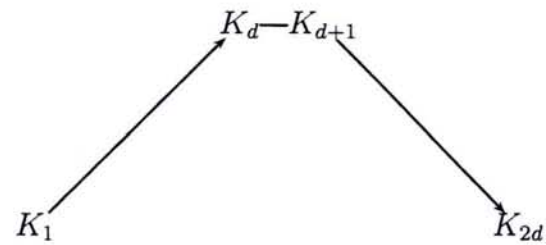
Supposons a présent que la courbe c soit r-pseudo-régulière. Si dans le drapeau associé à c apparaît un sous-espace F_i dégénéré, on a alors $F_i^{\perp_{i+1}} \cap F_i \neq \{0\}$; on n'a donc plus de supplémentaire naturel de F_i dans F_{i+1}. Ceci nous empêche donc d'appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt, comme dans le cas Euclidien.
Pour généraliser le repère de Frénet, nous allons donc batir un repère mobile, bloc par bloc, entre chaque sous-espaces non-dégénérés consécutifs du drapeau. Pour cela, considérons deux sous-espaces non-dégénérés $F_i \underset{\neq}{\subset} F_j$ consécutifs dans le drapeau associé à c.

On a alors une décomposition naturelle de F_j sous la forme $F_j = F_i \overset{\perp}{\oplus} F_i^{\perp j}$. Nous allons batir notre repère entre F_i et F_j en choisissant une base pseudo-orthonormée de $F_i^{\perp j}$.
Si $j = i+1$, on peut opérer comme dans le cas Euclidien, et choisir comme base orthonormée de $F_i^{\perp i+1}$ le vecteur unitaire $\frac{\pi^{\perp}(c^{(i+1)})}{\|\pi^{\perp}(c^{(i+1)})\|}$.
Si maintenant $j > i+1$, chaque sous-espace F_k pour $i+1 \leq k \leq j-1$ est dégénéré pour la métrique induite, donc possède un noyau K_{k-i}. En étudiant précisément le comportement de ces noyaux, nous montrons alors deux faits importants :

(1) l'écart entre deux sous-espaces non-dégénérés consécutifs du drapeau associé à c est un entier nécessairement impair ; autrement dit, il existe un entier d tel que $j - i = 2d + 1$.

(2) Le noyau croît jusqu'à atteindre le noyau K_d (i.e. $K_l \underset{\neq}{\subset} K_{l+1}$ $\forall i+1 \leq l \leq d-1$), puis se stabilise une fois (i.e. $K_d \equiv K_{d+1}$), et enfin décroît progressivement jusqu'à se vider et obtenir le sous-espace non-dégénéré F_j (i.e. $K_l \underset{\neq}{\supset} K_{l+1}$ $\forall d+1 \leq l \leq 2d-1$).

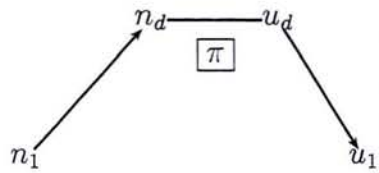
On peut symboliser ce comportement par le diagramme suivant :



F_i non-dégénéré $\qquad$ F_j non-dégénéré

Pour souligner ce comportement, nous dirons que le drapeau de c est de profondeur 1, et d'indice 1

Nous batissons alors notre repère entre les sous-espaces F_i et F_j en construisant des paires Artinniennes orthogonales entre elles successives $(n_1^{(i-1)}, u_i)$ pour $i = 1, ..., d$ (n_1 étant un vecteur du noyau K_1 qui est de dimension 1), emboîtées l'une dans l'autre (nous interdisons les entrelacements ! !), puis nous complétons par un vecteur unitaire $\pi := n_1^{(d)}$ orthogonal à toutes les paires Artinniennes (la condition $\pi := n_1^{(d)}$ unitaire fixant alors le choix du vecteur $n_1 \in K_1$). Nous pouvons visualiser cette construction sur le diagramme suivant :



Nous obtenons finalement une décomposition de $F_i^{\perp j}$ sous la forme d'une somme orthogonale de plans Artinniens, et d'un vecteur unitaire :

$F_i^{\perp j} = \mathcal{H}_1 \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_d \overset{\perp}{\oplus} < \pi >$, où $\mathcal{H}_i$ désigne le plan engendré par les vecteurs $n_1^{(i-1)}$ et

u_i.
Si maintenant, à partir d'un rang $\tau \leq r$, les sous-espaces F_i sont tous dégénérés, nous montrons alors que la suite des noyaux K_i de F_i est croissante (i.e. $K_\tau \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} K_r$), et nous complétons notre repère par les vecteurs $n_\tau, n_\tau^{(1)}, ..., n_\tau^{(r-\tau)}$, où n_τ est le vecteur de K_τ (qui est de dimension 1) choisi de telle sorte à ce que le vecteur $n_\tau^{(r-\tau+1)}$, qui à-priori est dans le noyau $K_r \subset F_r$, vérifie $n_\tau^{(r-\tau+1)} \in K_{r-1}$.

Conclusion Soit $c : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe r-pseudo-régulière de $\mathbb{R}^n$ (r étant un entier compris entre 1 et n).

A la courbe c, nous associons
3 suites finies d'entiers :

(1) une suite $(a_k)_{0\leq k\leq m}$, croissante, correspondant aux entiers successifs tels que le déterminant de Gram $g_{a_k} \neq 0$ (avec la convention $a_0 = 0, g_0 = 1$).

(2) une suite $(b_k)_{0\leq k\leq m}$ définie par $b_k = a_{k+1} - a_k$, et par convention, nous noterons $b_m = r - a_m$.

(3) une suite $(d_k)_{0\leq k\leq m-1}$ définie par $b_k = 2d_k + 1$.

Nous construisons alors un repère de Frénet généralisé défini par le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. *Etant données une courbe r-pseudo-régulière $c : I \to \mathbb{R}^n$ (I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0), et une 2-forme symétrique, non-dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe un unique repère mobile $\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ sur $F_r(t)$, vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *$\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ est adaptée au drapeau $F_1 \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} F_r$, i.e. $F_i(t)$ admet pour base la famille $\{v_1(t), ..., v_i(t)\}$ pour tout entier i compris entre 1 et r, et tout $t \in I$*

(2) *Pour tout entier i compris entre 0 et m, la fonction non nulle δ_i, définie comme étant le déterminant de la matrice de passage de la base $\{c^{(1)}, ..., c^{(i)}\}$ de F_i à la base $\{v_1, ..., v_i\}$, vérifie : $\delta_i(0) > 0$ (et donc $\delta_i(t) > 0\ \forall t \in I$)*

(3) *la (r,r)-matrice U représentant la restriction de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ à F_r (qui est un sous-espace constant de $\mathbb{R}^n$, indépendant de la valeur $t \in I$) relativement à la base $\{v_1, ..., v_r\}$ est donnée par la matrice (constante)*

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \mathcal{U}_{k_m-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0_{r-a_m} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{U}_i = (-1)^{d_i}\epsilon_i U_i$, $\epsilon_i (= \pm 1)$ est le signe du quotient $g_{a_{i+1}}(g_{a_i})^{-1}$, U_i est la matrice (b_i, b_i) definie par

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_i} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_i} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

et 0_{r-a_m} *est la matrice nulle de type* $(r-a_m, r-a_m)$

(4) *le repère mobile* $\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ *vérifie* $V' = \Delta V$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \widetilde{Lc_{h-1}} & \Delta_h & Lc_h \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

avec $h = m-1$, *et la* (r,r)*-matrice* Δ *admet une décomposition en blocs dont la diagonale principale est construite à partir des matrices :*

(i) Δ_i, *une* (b_i,b_i)*-matrice dépendant de* d_i *fonctions, de la forme*

$$\Delta_i = \left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \gamma_{d_i-1} & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagup & \diagup & 0 & \gamma_{d_i-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \diagup & \diagup & \diagup & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma_1 & \diagup & \diagup & \diagup & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(où l'on a encadré la ligne $d_i + 1$*)*

(ii) Γ, *une* $(r-a_m, r-a_m)$ *matrice dépendant de* r-$a_m - 1$ *fonctions* ς_l *(l=1,...,r-*$a_m - 1$*) sur I, de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & & 1 \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \dots & \varsigma_{r-a_{k_{max}}-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'il n'y a pas de matrice Γ *si (et seulement si)* $a_m = r$.

(iii) • $Lc_i = \varkappa_i L_i$, *où* L_i *est la* (b_i, b_{i+1})*-matrice définie par*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et $\varkappa_i$ *est une fonction strictement positive sur* I.

• $\widetilde{Lc}_i = \widetilde{\varkappa}_i \widetilde{L}_i$, *où* $\widetilde{L}_i$ *est la* (b_{i+1}, b_i)*-matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et la fonction $\widetilde{\varkappa}_i$ *est définie par* $\widetilde{\varkappa}_i = -\epsilon_i \epsilon_{i+1} \varkappa_i$.

Remarques :
1. Si les sous-espaces F_i qui apparaîssent dans le drapeau de c sont tous non-dégénérés, on retrouve alors le repère de Frénet classique.
2. Le repère de Frénet ainsi généralisé nous permet de définir une paramétrisation naturelle de chaque courbe r-pseudo-régulière, et les fonctions qui apparaîssent dans la matrice des dérivées pour cette paramétrisation nous donnent alors les courbures de Frénet généralisées.
3. Comme dans le cas Euclidien, le transport parallèle nous permet de généraliser cette construction à toute courbe suffisamment régulière d'une variété pseudo-Riemannienne.

D'autre part, comme dans le cas Euclidien, ce repère caractérise la courbe, d'après le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. *Choisissons un entier $r \leq n$, et F_r un sous-espace quelconque de $\mathbb{R}^n$ (de dimension r). Donnons nous*

- *un entier m compris entre 0 et r*
- *une suite $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ d'entiers compris entre 1 et r*
- *une suite $(\epsilon_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ avec $\epsilon_i = \pm 1 \ \forall i$*
- *un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0*
- *des fonctions réelles définies sur I $\gamma_{i,j}$ (pour $0 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq d_i$), ς_i (pour $1 \leq i \leq r - a_m - 1$), et $\varkappa_i$ (pour $0 \leq i \leq m-1$) avec $\varkappa_i > 0 \ \forall i$*

Soit maintenant $V : (t \in I) \to V(t) := \{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ tel que

1. $V(0)$ est un repère de F_r
2. la matrice de Gram de $V(t)$ est donnée par la matrice U définie comme dans le théorème 4.2 (donc U ne dépend que des données a_i et ϵ_i)
3. $V' = \Delta V$, où la matrice Δ est définie comme dans le théorème 4.2 (donc Δ dépend des fonctions $\gamma_{i,j}, \varsigma_i$, et $\varkappa_i$)

Alors il existe une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$ (en fait dans F_r) admettant V pour repère de Frénet, et telle que pour tout entier i compris entre 1 et r, et toute valeur $t \in I$, les familles $\{c^{(1)}(t), ..., c^{(i)}(t)\}$ et $\{v_1(t), ..., v_i(t)\}$ soient des bases du même espace, de même orientation.
De plus, la courbe c est unique à déplacement près, et reparamétrage près.

Annexe : l'article sur le repère de Frénet généralisé

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Abstract

Frenet's frames (for regular curves in Euclidian space) has been generalized both in higher dimensions and for arbitrary Riemannian manifolds. On the other hand, Frenet's frames are constructed through a Gram-Schmidt orthonormalization process, so there are some difficulties to generalize them to Minkowski spaces (i.e. a non-degenerate quadratic form on $\mathbb{R}^n$ with any signature), because of isotropic vectors. Various constructions have already been given, with different choices and sometimes auxiliary datas.

In this paper, we present an explicit construction for a canonical moving frame for any "sufficiently regular" curve in Minkoswski space (without any choice of auxiliary datas). Then we detail the associated (generalized) curvatures.

As in Riemannian case, parallel transport gives us an easy way to translate the above construction to any pseudo-Riemannian manifold.

Résumé

La construction du repère de Frénet (pour une courbe régulière de l'espace Euclidien) se généralise en dimension supérieure et se transporte aux variétés Riemanniennes en général. Cependant, cette construtions repose sur le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, et quelques difficultés apparaissent, à cause des vecteurs isotropes, si l'on veut la généraliser même aux espaces de Minkowski (i.e. une forme quadratique non-dégénérée de signature quelconque sur $\mathbb{R}^n$). Différentes constructions ont déjà été proposées (par exemple dans le cas Lorentzien), certaines d'entre elles avec des données auxiliaires.

Dans cet article, nous proposons une construction explicite d'un repère mobile canonique (sans donnée auxiliaire) pour toute courbe "suffisamment régulière" d'un espace de Minkowski. On détaille aussi les courbures (généralisées) associées.

Comme dans le cas Riemannien, le transport parallèle nous permet de copier cette construction pour toute courbe (suffisamment régulière) d'une variété pseudo-Riemannienne.

1. Introduction

1.1. Statement of the problem.

Let us consider a curve $c : I \to \mathbb{R}^n$, I being an open interval of $\mathbb{R}$, and $\mathbb{R}^n$ furnished with its Euclidian structure.
We suppose the curve c to be regular, in the sense that the iterative derivatives $c^{(1)}(t), ..., c^{(n)}(t)$ are independent vectors for all $t \in I$. Under this assumption, it is well known that one may build a particular frame associated to the curve c, called the Frenet's frame (for details , cf **[Sp]** for example), and deduce from that curvature and torsion.
In fact, we may restrict our hypothesis of regularity into a weaker one, which we shall call r-regularity (for $1 \leq r \leq n$) : $c^{(1)}(t), ..., c^{(r)}(t)$ are independent,
and $c^{(r+1)}(t) \in F_r(t) \quad :=< c^{(1)}(t), ..., c^{(r)}(t) > \quad \forall\ t \in I$.
Indeed, it is clear that, in this case, the subspace $F_r(t)$ is independent of t (we can see this using Taylor formulae), and thus, we may identify F_r with $\mathbb{R}^r$, so that we are led to the former case.
Our aim in this article is to generalize this construction of a canonical frame field associated to each sufficiently regular curve in $\mathbb{R}^n$ furnished with an arbitrary non degenerate quadratic form.
Remark 1.1 Some constructions were already studied in particular cases (see for example **[Y-C W]** and **[D]**, chapter 13 problem 8 p. 329). Also, some authors introduce auxiliary datas along the curve in order to manage with isotropic vectors (see for example **[D-B]** chapter 3 and **[D-J]**). Here, we want to focuss on a "canonical" construction, without any auxiliary choices, which applies to any Minkoswski space and more generally to any pseudo-Riemannian manifold (see chapter 9).

1.2. Some definitions and notations.

Let us consider a curve $c : I \to \mathbb{R}^n$, where $\mathbb{R}^n$ is furnished with a fixed non-degenerate quadratic form $\langle\ ,\ \rangle$. In all this paper, for any $t \in I$, we will denote by $F_k(t)$ the space generated by the iterative derivatives $c^{(1)}(t), ..., c^{(k)}(t)$, and by $g_k(t)$ the Gram's determinant of these vectors, i.e. the determinant of the (k,k) matrix
$(\langle c^{(i)}(t), c^{(j)}(t)\rangle$, i, j $\in \{1, ..., k\})$.

DÉFINITION 1.1. A curve will be said " pseudo-regular " if

(1) c is r-regular, i.e. $F_{r-1} \underset{\neq}{\subset} F_r \equiv F_{r+1}$

(2) for all $k \leq r$, the function g_k is either positive, identically zero, or negative

From now on, the curve c will always be assumed pseudo-regular.
We may then define a strictly increasing finite sequence (a_k) (with $a_0 = 0$), corresponding to the successive integers such that $g_{a_k} \neq 0$.
We denote by $b_k := a_{k+1} - a_k$. Then, for any integer i from 1 to $b_k - 1$, we must have $g_{a_k+i} \equiv 0$, so that the spaces F_{a_k+i} are degenerate for the restricted form.
We denote by K_{a_k+i} the kernel of the restricted form on F_{a_k+i}.

We will prove in the next chapter that we have only 3 possibilities

$$K_{a_k+i}\begin{cases}\underset{\neq}{\subset} K_{a_k+i+1}\\ \equiv K_{a_k+i+1}\\ \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+i+1}\end{cases} \quad \text{with respectively} \quad dimK_{a_k+i+1}=\begin{cases}dimK_{a_k+i}+1\\ dimK_{a_k+i}\\ dimK_{a_k+i}-1\end{cases}$$

It allows us to define a sequence (d_k) by supposing that
• we have a strictly increasing sequence $K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k}$

• this sequence is maximal, i.e. $K_{a_k+d_k} \underset{\neq}{\not\subset} K_{a_k+d_k+1}$, so that

$$K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1} \quad \text{or} \quad K_{a_k+d_k} \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k+1}.$$

Now, it is clear that we have a direct sum decomposition

$$F_{a_k+i} = F_{a_k} \oplus \underbrace{K_{a_k+i}}_{kernel} \quad \forall\ 1 \leq i \leq d_k.$$

Finally, the last notations we need in this article are the following :

$\diamond$ we denote by k_{max} the unique integer such that the last term of the sequence (a_k) is $a_{k_{max}}$, i.e. k_{max} satisfies $g_i \equiv 0$ for any integer i from $a_{k_{max}}+1$ to r, and $g_{a_{k_{max}}} \neq 0$.

$\diamond$ by convention, we will denote by $b_{a_{k_{max}}}$ the integer $r - a_{k_{max}}$.

Let us remark that :

(1) k_{max} may be equal to 0 (with our convention $g_0 = 1$). In this case, where all subspaces F_i are degenerate, the curve c is said totally isotropic.

(2) g_r may be null or not. In fact, it is clear that $g_r \neq 0 \Longleftrightarrow r = a_{k_{max}}$. Then we will have to distinguish two cases, according to $r = a_{k_{max}}$ or not.

1.3. Statement of the main result.

With the notations above, we will prove that $b_k = 2d_k + 1$, and that we have

$$K_{a_k+d_k+1} \equiv K_{a_k+d_k}.$$

More precisely, we will obtain the following sequence :

$$K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1} \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k+2} \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+b_k-1}.$$

Finally, we are able to construct a basis adapted to the moving flag $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_r$, canonical in a sense that we will precise in chapter 3, given by the following theorem :

THÉORÈME 1.2. *Given a r-regular, pseudo-regular, curve c: $I \to \mathbb{R}^n$, and a non-degenerate quadratic form $\langle \ , \ \rangle$ on $\mathbb{R}^n$, there exists a unique moving basis $\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ on $F_r(t)$ with the following properties :*

(1) *$\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ is adapted to the flag $F_1 \subset ... \subset F_r$, i.e. $F_i(t)$ is generated by $\{v_1(t), ..., v_i(t)\}$ for any integer i from 1 to r, and any $t \in I$*

(2) *the (r,r) matrix U of the restriction of $\langle \ , \ \rangle$ to F_r with respect to the basis $\{v_1, ..., v_r\}$ is*

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \mathcal{U}_{k_{max}-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0_{r-a_{k_{max}}} \end{pmatrix}$$

where $\mathcal{U}_k = (-1)^{d_k}\epsilon_k U_k$, $\epsilon_k = \pm 1$ is the sign of $g_{a_{k+1}}(g_{a_k})^{-1}$ (remark that $g_{a_k} \neq 0$ for $0 \leq k \leq k_{max} - 1$), U_k the (b_k, b_k) matrix defined by

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

and $0_{r-a_{k_{max}}}$ is the null matrix of type $(r - a_{k_{max}}, r - a_{k_{max}})$

(3) *the moving basis $\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ satisfies $V' = \Delta V$, i.e.*

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \widetilde{Lc_{h-1}} & \Delta_h & Lc_h \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

with $h = k_{max} - 1$, and the (r,r) matrix Δ admits a block-decomposition which main diagonal is made with :
(i) Δ_i is a (b_i,b_i) matrix, $b_i = 2d_i + 1$, with a decomposition

$$\begin{pmatrix} T_i & O_{d_i} \\ D_i & \widetilde{T_i} \end{pmatrix}$$

where

- T_i *is the* (d_i, d_i+1) *matrix with*

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\widetilde{T}_i$ *is the* (d_i+1, d_i) *matrix with*

$$\widetilde{T}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- D_i *is a* (d_i+1, d_i+1) *matrix depending on* d_i *functions* $\Upsilon_{i,j}$ *(j=1,...,*d_i*) on I, in the form*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{i,d_i} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{i,d_i-1} & 0 & \Upsilon_{i,d_i} \\ 0 & \dots & 0 & \Upsilon_{i,d_i-2} & 0 & \Upsilon_{i,d_i-1} & 0 \\ 0 & \dots & \diagup & 0 & \diagup & 0 & \dots \\ 0 & \diagup & 0 & \diagup & 0 & \dots & \dots \\ \Upsilon_{i,1} & 0 & \Upsilon_{i,2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Upsilon_{i,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Γ *is a* $(r-a_{k_{max}}, r-a_{k_{max}})$ *matrix depending on* $r\text{-}a_{k_{max}}-1$ *functions* ς_i *(i=1,...,*$r\text{-}a_{k_{max}}-1$*) on I, in the form*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & & 1 \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \dots & \varsigma_{r-a_{k_{max}}-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Notice that there is no matrix Γ *if (and only if)* $a_{k_{max}} = r$.

(iii) • $Lc_i = \varkappa_i L_i$, *where* L_i *is the unique* (b_i, b_{i+1}) *matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

and $\varkappa_i$ *is a positive function on I.*

• $\widetilde{Lc_i} = -\epsilon_i \epsilon_{i+1} \varkappa_i \widetilde{L_i}$, *where* $\widetilde{L_i}$ *is the unique* (b_{i+1}, b_i) *matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

and the function $\varkappa_i$ *is the same as in the matrix* Lc_i.

2. A preliminary study of kernels

Let us recall that for $1 \leq i \leq b_k - 1$, the space F_{a_k+i} is degenerate for the form $\langle \quad , \quad \rangle$, with kernel K_{a_k+i}.

Since $F_{a_k+i+1} = F_{a_k+i} \oplus < c^{(a_k+i+1)} >$, it is clear that we have either $dim K_{a_k+i+1} = dim K_{a_k+i} + 1$, $dim K_{a_k+i+1} = dim K_{a_k+i}$, or $dim K_{a_k+i+1} = dim K_{a_k+i} - 1$. More precisely, we have the following result :

LEMME 2.1. *Either* $K_{a_k+i} \subset K_{a_k+i+1}$ *or* $K_{a_k+i} \equiv K_{a_k+i+1}$ *or* $K_{a_k+i} \supset K_{a_k+i+1}$

DÉMONSTRATION.
If $c^{(a_k+i+1)}$ is orthogonal to F_{a_k+i}, we then have either $\langle c^{(a_k+i+1)}, c^{(a_k+i+1)}\rangle = 0$, in which case $K_{a_k+i+1} = K_{a_k+i} \oplus < c^{(a_k+i+1)} >$, or $|c^{(a_k+i+1)}|^2 \neq 0$, and then $K_{a_k+i} \equiv K_{a_k+i+1}$. Now, if $c^{(a_k+i+1)}$ is not orthogonal to F_{a_k+i}, let $z \in K_{a_k+i+1}$. We have $z = y + \lambda c^{(a_k+i+1)}$, with y$\in F_{a_k+i}$, *and* $\lambda \in \mathbb{R}$. We have $\langle y+\lambda c^{(a_k+i+1)}, x\rangle = 0 \quad \forall\ x \in F_{a_k+i+1}$; particulary, for $x \in K_{a_k+i}$, we obtain $\langle \lambda c^{(a_k+i+1)}, x\rangle = 0$. Thus, if $c^{(a_k+i+1)}$ is orthogonal to K_{a_k+i}, we have $K_{a_k+i} \subseteq K_{a_k+i+1}$. If $c^{(a_k+i+1)}$ is not orthogonal to K_{a_k+i}, the equality $\langle \lambda c^{(a_k+i+1)}, x\rangle = 0 \quad , \forall\ x \in K_{a_k+i}$ implies $\lambda = 0$. In this case, we deduce $z = y + \lambda c^{(a_k+i+1)} = y \in F_{a_k+i}$ and z satisfies $\langle z, x\rangle = 0 \quad \forall\ x \in F_{a_k+i+1} \supset F_{a_k+i}$. Thus $z = y \in K_{a_k+i}$, and then $K_{a_k+i+1} \subseteq K_{a_k+i}$. □

Let us suppose that, for $i = 1, ..., d_k - 1$, we have $dim K_{a_k+i+1} = dim K_{a_k+i} + 1$, in other words, that $K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k}$, and suppose besides that d_k is the first index i for which the kernel K_{a_k+i} is not increasing.
Then we must have either $K_{a_k+d_k+1} \equiv K_{a_k+d_k}$ or $K_{a_k+d_k+1} \subset K_{a_k+d_k}$.
We know that we may write $F_{a_k+i} = F_{a_k} \oplus K_{a_k+i}$ for $i = 1$ until d_k, and we will denote by $e_{k;i} := \pi^{K_{a_k+i}}(c^{(a_k+i)})$, where $\pi^{K_{a_k+i}} : F_{a_k+i} \to K_{a_k+i}$ is the natural projection for that direct sum.
Let us notice that $e_{k;i} \notin K_{a_k+i-1}$, since otherwise, we would have $c^{(a_k+i)} \in F_{a_k} \oplus K_{a_k+i-1} = F_{a_k+i-1}$, which contradicts the hypothesis on the flag (F_j).

LEMME 2.2. *The family* $\{e_{k;1}, ..., e_{k;d_k}\}$ *is a basis of* $K_{a_k+d_k}$

DÉMONSTRATION.
This family is free. Indeed, if $\sum_{i=1}^{d_k} \lambda_i e_{k;i} = 0$ with coefficients λ_i not all nil, let m the greatest index i such that $\lambda_m \neq 0$. We then have $\lambda_m e_{k;m} = -\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e_{k;i} \in K_{a_k+m-1}$, so $e_{k;m} \in K_{a_k+m-1}$, which is impossible. Thus, the family $\{e_{k;1}, ..., e_{k;d_k}\}$ forms a basis of $K_{a_k+d_k}$ (since it is clear that $dim K_{a_k+d_k} = d_k$). □

LEMME 2.3. *We have* $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;i}\rangle = 0 \qquad \forall\ i = 1, ..., d_k$

DÉMONSTRATION.
Let us write $c^{(a_k+d_k)}$ under the form $c^{(a_k+d_k)} = e_{k;d_k} + \sum_{i=1}^{a_k} \alpha_i c^{(i)}$.
Then we have $c^{(a_k+d_k+1)} = e'_{k;d_k} + \sum_{i=1}^{a_k} \alpha'_i c^{(i)} + \sum_{i=1}^{a_k} \alpha_i c^{(i+1)}$.
Thus, $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;i}\rangle = \langle e'_{k;d_k}, e_{k;i}\rangle$.
Now, $\langle e'_{k;d_k}, e_{k;i}\rangle + \langle e_{k;d_k}, e'_{k;i}\rangle = \underbrace{\langle e_{k;d_k}, e_{k;i}\rangle'}_{=0} = 0$.
So $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;i}\rangle = -\langle e_{k;d_k}, e'_{k;i}\rangle$.
But $e'_{k;i} \in F_{a_k+i+1}$: indeed, we may write $c^{(a_k+i)} = e_{k;i} + \sum_{l=1}^{a_k} \beta_l c^{(l)}$, and then $e'_{k;i} = c^{(a_k+i+1)} - \sum_{l=1}^{a_k} \beta'_l c^{(l)} - \sum_{l=1}^{a_k} \beta_l c^{(l+1)} \in F_{a_k+i+1}$.
We deduce that $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;i}\rangle = 0 \qquad \forall\ i = 1, ..., d_k - 1$. On the other hand, we have $\langle e_{k;d_k}, e_{k;d_k}\rangle = 0$, so $\langle e'_{k;d_k}, e_{k;d_k}\rangle = 0$. It results that $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;d_k}\rangle = 0$. □

Using this lemma together with lemma 2.1, we get

COROLLAIRE 2.4. *We have* $K_{a_k+d_k+1} \equiv K_{a_k+d_k}$

Then we may complete our family $\{e_{k;1}, ..., e_{k;d_k}\}$ into a basis of $F_{a_k+d_k+1}$, adding a vector $e_{k;d_k+1}$ defined in the following way : the quotient space $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k}$ is not degenerate (we quotient the space$F_{a_k+d_k+1}$ by its kernel),and contains $F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k}$, which is also non-degenerate.
Thus, the orthogonal space of $F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k}$ inside $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k}$ is a supplementary subspace of dimension 1, and we get the orthogonal decomposition
$F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k} = F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k} \oplus (F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$.
This supplementary subspace gives us a vector $e_{k;d_k+1}$ (unique modulo the kernel $K_{a_k+d_k}$), that we may choose unitary (i.e. $\langle e_{k;d_k+1}, e_{k;d_k+1}\rangle = \pm 1$, and we denote it by ϵ^k), and such that the family $\{e_{k;1}, ..., e_{k;d_k+1}\}$ is a basis of $F_{a_k+d_k+1}$.

Remarks

(1) The vector $e_{k;d_k+1}$ is not isotropic, otherwise it should belong to the kernel $K_{a_k+d_k+1}$, and we would then have $dim K_{a_k+d_k+1} = dim K_{a_k+d_k} + 1$, which is not the case.

(2) The quotient space $F_{a_{k+1}}/F_{a_k}$ is of type (d_k, d_k+1) or (d_k+1, d_k). Thus, ϵ^k is the signature of this quotient space.

(3) In order to fix the ideas, we may consider the vector $e_{k;d_k+1}$ as the unitary projection of the vector $c^{(a_k+d_k+1)}$ onto the quotient space $(F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$.

Lemma 2.3 may be generalized in the following :

LEMME 2.5. *We have*
$\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;i}\rangle = 0, \quad \forall\ 1 \leq m \leq d_k, \quad \forall\ i = 1, ..., d_k + 1 - m.$

DÉMONSTRATION.
Lemma 2.3 tells us that the result is true for $m = 1$. Suppose the lemma true up to m-1, $2 \leq m \leq d_k$. Remark that, since $e'_{k;i} \in F_{a_k+i+1}$, we may decompose
$e'_{k;i} = \sum_{l=1}^{a_k} \lambda_l c^{(l)} + \sum_{l=1}^{i+1} \nu_l e_{k;l}$, with $a_k + 2 \leq a_k + i + 1 \leq a_k + d_k + 2 - m \leq a_k + d_k$.

But for any $l \leq a_k$, $\langle e'_{k;i}, c^{(l)}\rangle + \langle e_{k;i}, c^{(l+1)}\rangle = \underbrace{\langle e_{k;i}, c^{(l)}\rangle'}_{=0} = 0$, and so,

$$\langle e'_{k;i}, c^{(l)}\rangle = -\langle e_{k;i}, \underbrace{c^{(l+1)}}_{\in\ F_{l+1} \subseteq F_{a_k+1}} \rangle = 0.$$

Thus, the vector $e_{k;i}$ is orthogonal to the space F_{a_k}, and therefore, since the space F_{a_k} is non degenerate, we have $\lambda_l = 0 \quad \forall\ 1 \leq l \leq a_k$. We obtain $e'_{k;i} = \sum_{l=1}^{i+1} \nu_l e_{k;l}$, and we immediately deduce, according to our induction hypothesis, that
$\langle c^{(a_k+d_k+m-1)}, e'_{k;i}\rangle = 0$.
It follows, according to the equality

$$\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;i}\rangle + \underbrace{\langle c^{(a_k+d_k+m-1)}, e'_{k;i}\rangle}_{=0} = \underbrace{\langle c^{(a_k+d_k+m-1)}, e_{k;i}\rangle'}_{=0 \text{ by hypothesis}},$$

that $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;i}\rangle = 0$. □

LEMME 2.6. *$\forall\ 1 \leq i \leq d_k - 1$, there is a function C_i such that $e'_{k;i} = e_{k;i+1} + C_i e_{k;1}$. Moreover, there are some functions $C_1, ..., C_{d_k}, \delta_k$ such that $e'_{k;d_k} = \delta_k e_{k;d_k+1} + \sum_{l=1}^{d_k} C_l e_{k;l}$.*

DÉMONSTRATION.
We have seen, in the proof of lemma 2.5, that $\pi^{F_{a_k}}(e'_{k;i}) = 0 \qquad \forall\ 1 \leq i \leq d_k$, where $\pi^{F_{a_k}}$ is the projection $F_{a_k+i+1} \to F_{a_k}$.
Let us then write $c^{(a_k+i)} = e_{k;i} + \sum_{l=1}^{a_k} \phi_l^{(i)} c^{(l)}$. We obtain, for $1 \leq i \leq d_k - 1$,
$e'_{k;i} = c^{(a_k+i+1)} - \sum_{l=1}^{a_k} \phi_l^{(i)'} c^{(l)} - \sum_{l=1}^{a_k} \phi_l^{(i)} c^{(l+1)} = e_{k;i+1} - \phi_{a_k}^{(i)} e_{k;1} + \zeta$, where $\zeta \in F_{a_k}$.
Thus, since $\pi^{F_{a_k}}(e'_{k;i}) = 0$, $e'_{k;i} = e_{k;i+1} - \phi_{a_k}^{(i)} e_{k;1}$. Thus we obtain the result with $C_i = -\phi_{a_k}^{(i)}$.
For $i = d_k$, the result is clear since $\pi^{F_{a_k}}(e'_{k;d_k}) = 0$. More precisely, we may write $c^{(a_k+d_k+1)} = \delta_k e_{k;d_k+1} + \sum_{l=1}^{d_k} \theta_l e_{k;l} + \sum_{l=1}^{a_k} \varphi_l c^{(l)}$. Then the equality
$e'_{k;d_k} = c^{(a_k+d_k+1)} - \sum_{l=1}^{a_k} \phi_l^{(d_k)'} c^{(l)} - \sum_{l=1}^{a_k} \phi_l^{(d_k)} c^{(l+1)}$ implies, as above, that
$e'_{k;d_k} = \delta_k e_{k;d_k+1} + \sum_{l=1}^{d_k} \theta_l e_{k;l} - \phi_{a_k}^{(d_k)} e_{k;1}$. □

LEMME 2.7. *$\forall\ 1 \leq m \leq d_k + 1$, we have $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;d_k+2-m}\rangle \neq 0$*

DÉMONSTRATION.
The result is true for m=1 : indeed, we may write
$c^{(a_k+d_k+1)} = \sum_{l=1}^{a_k} \varphi_l c^{(l)} + \sum_{l=1}^{d_k} \theta_l e_{k;l} + \delta_k e_{k;d_k+1}$, and then, if $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;d_k+1}\rangle = 0$, we must have $\delta_k = 0$, so that $c^{(a_k+d_k+1)} \in F_{a_k+d_k}$, a contradiction.
Suppose the result true for an integer $m \leq d_k$, i.e. $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;d_k+2-m}\rangle \neq 0$.
We have $\langle c^{(a_k+d_k+m+1)}, e_{k;d_k+1-m}\rangle + \langle c^{(a_k+d_k+m)}, e'_{k;d_k+1-m}\rangle = \underbrace{\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;d_k+1-m}\rangle}_{=0 \text{ according to lemma } 2.5}'$.
In other words, if $m \geq 2$ we have

$$\begin{aligned}\langle c^{(a_k+d_k+m+1)}, e_{k;d_k+1-m}\rangle &= -\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e'_{k;d_k+1-m}\rangle \\ &= -\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;d_k+2-m} + C_{d_k+1-m} e_{k;1}\rangle\end{aligned}$$

Now, according to lemma 2.6 and the induction hypothesis, this is equal to $-\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;d_k+2-m}\rangle$, which is not null.

If $m = 1$, we obtain

$$\begin{aligned}\langle c^{(a_k+d_k+2)}, e_{k;d_k}\rangle &= -\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e'_{k;d_k}\rangle \\ &= -\langle c^{(a_k+d_k+1)}, \delta_k e_{k;d_k+1} + \sum_{l=1}^{d_k} \mathcal{C}_l e_{k;l}\rangle \\ &= -\langle c^{(a_k+d_k+1)}, \delta_k e_{k;d_k+1}\rangle \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

□

Remark that lemma 2.5 and 2.7 imply that

$$\boxed{K_{a_k+d_k+m} \equiv K_{a_k+d_k+1-m} \quad ,\forall\ 1 \leq m \leq d_k}$$

To end this section, let us prove the following lemma relating the signs ϵ^k and ϵ_k.

LEMME 2.8. *The sign ϵ^k of $\langle e_{k;d_k+1}, e_{k;d_k+1}\rangle$ is related to the sign ϵ_k of the quotient $g_{a_{k+1}}(g_{a_k})^{-1}$ by the formula $\epsilon^k = (-1)^{d_k}\epsilon_k$.*

DÉMONSTRATION. Let us denote by $B_k^{[int]}$ the basis of F_{a_k} defined by the recurrence
$\begin{cases} \bullet B_{k+1}^{[int]} = B_k^{[int]} \cup \{e_{k;1}, e_{k;1}^{(1)}, ..., e_{k;1}^{(b_k-1)}\} & \text{if} \quad a_{k+1} \neq a_k + 1, \quad \text{i.e.} \quad \text{if} \quad b_k \neq 1 \\ \bullet B_{k+1}^{[int]} = B_k^{[int]} \cup \{\pi^{F_{a_k}^{\perp a_k+1}}(c^{(a_k+1)})\} & \text{if} \quad a_{k+1} = a_k + 1, \quad \text{i.e.} \quad \text{if} \quad b_k = 1 \end{cases}$
We denote by $g_k^{[int]}$ the Gram's determinant of the basis $B_k^{[int]}$. Then, an easy computation shows that $\langle e_{k;1}^{(d_k)}, e_{k;1}^{(d_k)}\rangle^{2d_k+1} = (-1)^{d_k} g_{a_{k+1}}^{[int]} (g_{a_k}^{[int]})^{-1}$ $(\star)$.
From lemma 2.6, we may deduce that $e_{k;1}^{(d_k)} = \delta_k e_{k;d_k+1} + \kappa$, for some function κ on $K_{a_k+d_k}$, so that $\langle e_{k;1}^{(d_k)}, e_{k;1}^{(d_k)}\rangle = \delta_k^2 \langle e_{k;d_k+1}, e_{k;d_k+1}\rangle$. Consequently,

$$\begin{aligned}\epsilon^k &:= sgn\langle e_{k;d_k+1}, e_{k;d_k+1}\rangle \\ &= sgn\langle e_{k;1}^{(d_k)}, e_{k;1}^{(d_k)}\rangle \\ &= (-1)^{d_k} sgn(g_{a_{k+1}}^{[int]} (g_{a_k}^{[int]})^{-1}) (\star\star)\end{aligned}$$

where the last equality results from equation $(\star)$.
Now, since the matrix $P^{(k)}$ of change of basis from the basis $\{c^{(1)}, ..., c^{(a_k)}\}$ of F_{a_k} to the basis $B_k^{[int]}$ is an upper triangular matrix with coefficient 1 everywhere on the main diagonal, and since we clearly have $(P^{(k)})^t Gram\{c^{(1)}, ..., c^{(k)}\} P^{(k)} = Gram\{B_k^{[int]}\}$, we deduce that $[det(P^{(k)})]^2 g_{a_k} = g_k^{[int]}$, ie $g_{a_k} \equiv g_k^{[int]}$.
Thus, the equation $(\star\star)$ gives us the result. □

3. The geometrical fundations of the construction

3.1. First step : when the kernel grows.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Since the space $F_{a_k+2d_k+1}$ is not degenerate, we have
$dimF_{a_k+2d_k} + dimF_{a_k+2d_k}^{\perp a_k+2d_k+1} = dimF_{a_k+2d_k+1} = a_k + 2d_k + 1$; in other words,
$dimF_{a_k+2d_k}^{\perp a_k+2d_k+1} = 1$.
Thus, the space $F_{a_k+2d_k}^{\perp a_k+2d_k+1}$ is generated by a vector $n_{k;1}$, necessarily null since $F_{a_k+2d_k}$ is degenerate. Moreover, let us remark that $n_{k;1} \in F_{a_k+1}$. Indeed, recall that if we write $e_{k;1} = \pi^{K_{a_k+1}}(c^{(a_k+1)})$, we have $e_{k;1} \in K_{a_k+1} \subset K_{a_k+2} \subset ... \subset K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1}$, so $e_{k;1} \in F_{a_k+d_k+1}^{\perp a_k+2d_k+1}$, and on the other hand, the lemma 2.5 ensures us that $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;1} \rangle = 0 \quad \forall\ 1 \leq m \leq d_k$, so that $e_{k;1} \in F_{a_k+2d_k}^{\perp a_k+2d_k+1}$.
Since the space $F_{a_k+2d_k}^{\perp a_k+2d_k+1}$ has dimension 1, there exists a smooth function $\lambda_{(k)}(t)$ satisfying $n_{k;1} = \lambda_{(k)} e_{k;1}$, which naturally implies $n_{k;1} \in F_{a_k+1}$.

Remark now that the equalities
$\diamond\ \underbrace{dimF_{a_k+2d_k-1}}_{a_k+2d_k-1} + dimF_{a_k+2d_k-1}^{\perp a_k+2d_k+1} = \underbrace{dimF_{a_k+2d_k+1}}_{a_k+2d_k+1}$
$\diamond\ \underbrace{dimF_{a_k+2d_k-1}}_{a_k+2d_k-1} + dimF_{a_k+2d_k-1}^{\perp a_k+2d_k} = \underbrace{dimF_{a_k+2d_k}}_{a_k+2d_k} + dim\ \underbrace{F_{a_k+2d_k-1} \cap K_{a_k+2d_k}}_{\equiv K_{a_k+2d_k} \subset K_{a_k+2d_k-1}}$
imply that $dim\quad F_{a_k+2d_k-1}^{\perp a_k+2d_k+1} = 2 = dim\quad F_{a_k+2d_k-1}^{\perp a_k+2d_k}$. Thus we deduce that
$F_{a_k+2d_k-1}^{\perp a_k+2d_k} \equiv F_{a_k+2d_k-1}^{\perp a_k+2d_k+1} \equiv K_{a_k+2d_k-1}$.
Therefore, we may choose a vector $n_{k;2}$ such that $K_{a_k+2d_k-1} = < n_{k;1} > \oplus < n_{k;2} >$.
Let us remark that $n'_{k;1}$ is a priori the most natural candidate, since
$\forall\ 1 \leq m \leq a_k + 2d_k - 1, \quad \langle n'_{k;1}, c^{(m)} \rangle + \underbrace{\langle n_{k;1}, c^{(m+1)} \rangle}_{=0} = \underbrace{(\langle n_{k;1}, c^{(m)} \rangle)'}_{=0}$.

The above construction may be pursued in the same way for the spaces $F_{a_k+2d_k-m}$ (for any integer m from 1 to d_k), and leads us to introduce some vectors $n_{k;2}, ..., n_{k;d_k+1}$ which are nothing but the successive derivatives of $n_{k;1}$.
Remark nevertheless that for $m \leq d_k - 1$, the previous computations show that
$dimF_{a_k+2d_k-m}^{\perp a_k+2d_k+1} = dimF_{a_k+2d_k-m}^{\perp a_k+2d_k-m+1} = 1 + dimK_{a_k+2d_k-m+1} = dimK_{a_k+2d_k-m}$, so that $F_{a_k+2d_k-m}^{\perp a_k+2d_k+1} \equiv K_{a_k+2d_k-m}$, which forces the introduced vectors $n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}$, belonging to a kernel, to be isotropic.
On the contrary, for m=d_k, we have $K_{a_k+d_k+1} \equiv K_{a_k+d_k}$, so
$dimF_{a_k+d_k}^{\perp a_k+2d_k+1} = dimF_{a_k+d_k}^{\perp a_k+d_k+1} = 1 + dimK_{a_k+d_k+1} > dimK_{a_k+d_k}$.
Thus the space $F_{a_k+d_k}^{\perp a_k+2d_k+1}$ contains strictly the kernel $K_{a_k+d_k}$, and the introduced vector $n_{k;d_k+1}$ (which we will denote by π_k in the next sections), generating a supplementary space of $K_{a_k+d_k}$ in $F_{a_k+d_k}^{\perp a_k+2d_k+1}$, is not isotropic.
Moreover, it is important to note that, since $n_{k;1} \in F_{a_k+1}$, we have $n_{k;i} = n_{k;1}^{(i-1)} \in F_{a_k+i}$ for $1 \leq i \leq d_k + 1$, so that $n_{k;i} \in K_{a_k+i}$ for $i \leq d_k$. In particular, for $i \leq d_k$, it is clear that $\{n_{k;1}, ..., n_{k;i}\}$ is a basis of K_{a_k+i}, and thus

$$\boxed{K_{a_k+i} \quad \equiv \quad < n_{k;1}, ..., n_{k;i} > \quad \equiv \quad K_{a_k+2d_k-i+1}}$$

Finally, let us remark that, by construction, it is clear that we have

$$\diamond \quad K_{a_k+2d_k-m} \equiv F^{\perp a_k+2d_k-m+1}_{a_k+2d_k-m} \equiv F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+2d_k-m} \equiv \underbrace{F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+2d_k-m+1}}_{\equiv K_{a_k+2d_k-m+1}} \oplus < n_{k;m+1} >$$

for m$<d_k$, and

$$\diamond \quad F^{\perp a_k+d_k+1}_{a_k+d_k} \equiv F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k} \equiv \underbrace{F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k+1}}_{\equiv K_{a_k+d_k+1} \equiv K_{a_k+d_k}} \oplus < n_{k;d_k+1} >$$

Before beginning the second step, we may wonder what choice of vector $n_{k;1}$ seems the most judicious, in other words, knowing that one may write $n_{k;1} = \lambda_{(k)} e_{k;1}$ for some function $\lambda_{(k)}(t)$, the problem is to find some function $\lambda_{(k)}$ which makes the choice of the vector $n_{k;1}$ the most natural one.
In view of what we have just seen above, the only function $\lambda_{(k)}$ which seems to impose itself is the function which would allow to normalize the non-isotropic vector $n_{k;d_k+1}$, i.e. the unique positive function such that we have $\langle n^{(d_k)}_{k;1}, n^{(d_k)}_{k;1} \rangle = \epsilon^k$, where $\epsilon^k = \pm 1$ is the sign of $\langle e_{k;d+1}, e_{k;d_k+1} \rangle$. Since $n^{(d_k)}_{k;1} = \lambda_{(k)} e^{(d_k)}_{k;1} + \varkappa$ for some vector $\varkappa$ in the kernel $K_{a_k+d_k}$, it is clear that $\langle n^{(d_k)}_{k;1}, n^{(d_k)}_{k;1} \rangle = \lambda^2_{(k)} \langle e^{(d_k)}_{k;1}, e^{(d_k)}_{k;1} \rangle$. Now, recall that we have seen in the previous section that $\langle e^{(d_k)}_{k;1}, e^{(d_k)}_{k;1} \rangle^{2d_k+1} = (-1)^{d_k} g_{a_{k+1}} (g_{a_k})^{-1}$. Thus, we deduce that the function $\lambda_{(k)}$ which we are looking for must satisfy $\lambda^{2(2d_k+1)}_{(k)} = (-1)^{d_k} \epsilon^k g_{a_k} (g_{a_{k+1}})^{-1} = \epsilon_k g_{a_k} (g_{a_{k+1}})^{-1}$.
In other words, we are led to the following

Formula 3.1 : $g_{a_k} (g_{a_{k+1}})^{-1} = (\lambda^2_{(k)} \epsilon_k)^{2d_k+1}$

If besides, we impose $\lambda_{(k)} > 0$, by analogy with the Frenet's frame in Riemannian Geometry (where this last condition determines in some sorts the orientation of the frame), the function $\lambda_{(k)}$ is then defined in a unique way by the previous formula.

3.2. Second step : when the kernel decreases.

It is important to note that $F^{\perp a_k+d_k}_{a_k+d_k-1} \equiv K_{a_k+d_k} \underset{\neq}{\subset} F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k-1}$. Indeed, we have $dim F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k-1} = d_k + 2$. Our first aim is to find a priori a vector $u_{k;d_k}$ such that $F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k-1} \equiv \underbrace{F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k}}_{\underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k}} \oplus < u_{k;d_k} >$.
Then we must choose some vector $u_{k;d_k}$, orthogonal to the space $F_{a_k+d_k-1}$, but not belonging to the space $F^{\perp a_k+2d_k+1}_{a_k+d_k}$ (i.e. such that $\langle u_{k;d_k}, n_{k;d_k} \rangle \neq 0$) ; moreover, it seems natural,

if possible, to want to choose $u_{k;d_k}$ isotropic.

For those reasons, the previous strategy, which would have consisted to take for vector $u_{k;d_k}$ the vector $n_{k;1}^{(d_k+1)}$, does not seem to be the most judicious anymore, since now, the kernel $K_{a_k+d_k-1}$ does not coincide with the space $F_{a_k+d_k-1}^{\perp a_k+2d_k+1}$ anymore. In particular, we lose the argument which, in the first step, ensured us that the introduced vectors $n_{k;i}$ were indeed isotropic.
This may be expressed by the fact that the hyperbolic plane generated by the vectors $n_{k;d_k}$ and $n_{k;1}^{(d_k+1)}$ is furnished with a metric of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^k \\ -\epsilon^k & \kappa \end{pmatrix}$$

for some function $\kappa \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ (taking into account the fact that $\langle n_{k;d_k}, n_{k;1}^{(d_k+1)} \rangle = \langle n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k+1)} \rangle = \underbrace{\langle n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k)} \rangle'}_{=0} - \langle n_{k;1}^{(d_k)}, n_{k;1}^{(d_k)} \rangle = -\epsilon^k$).
Then, it seems more judicious to account for the "*obstruction of the vector* $n_{k;1}^{(d_k+1)}$ *to be isotropic*" by defining the vector $u_{k;d_k}$ so that we have $n_{k;1}^{(d_k+1)} = u_{k;d_k} + \Upsilon_{k,d_k} n_{k;d_k}$, where Υ_{k,d_k} is the function $-\frac{\epsilon^k}{2}\kappa = (-1)^{d_k-1}\frac{\epsilon_k}{2}\kappa$.
The hyperbolic plane $\mathcal{H}_{k,d_k}$ generated by the vectors $n_{k;d_k}$ and $u_{k;d_k}$ is then furnished with the metric

$$\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^k \\ -\epsilon^k & 0 \end{pmatrix}$$

For the same reasons, we may hope to end naturally the whole process by introducing for $2 \leq i \leq d_k$ some vectors $u_{k;d_k+1-i}$, such that

$\diamond$ $F_{a_k+d_k-i}^{\perp a_k+2d_k+1} \equiv \underbrace{F_{a_k+d_k-i+1}^{\perp a_k+2d_k+1}}_{\supsetneq K_{a_k+d_k-i+1}} \oplus < u_{k;d_k+1-i} >$
$\diamond$ $\langle u_{k;d_k+1-i}, n_{k;d_k+1-i} \rangle = (-1)^i \epsilon^k$
$\diamond$ $\langle u_{k;d_k+1-i}, n_{k;d_k+m-i} \rangle = 0 \quad \forall \ 2 \leq m \leq i$
$\diamond$ $\langle u_{k;d_k+1-i}, u_{k;d_k+1-j} \rangle = 0 \quad \forall \ 1 \leq j \leq i$
$\diamond$ $u'_{k;d_k+1-i} = u_{k;d_k+2-i} + \Upsilon_{k,d_k+2-i} n_{k;d_k+3-i} + \Upsilon_{k,d_k+1-i} n_{k;d_k+1-i}$

Remarks :
• we have $dim K_{a_k+d_k-i+2} = d_k - i + 2 < d_k + i - 1 = dim F_{a_k+d_k-i+2}^{\perp a_k+2d_k+1}$, and thus $K_{a_k+d_k-i+2} \subsetneq F_{a_k+d_k-i+2}^{\perp a_k+2d_k+1}$.
• we have $u_{k;d_k+1-i} \in F_{a_k+d_k+i+1} \quad \forall \ 1 \leq i \leq d_k$

We thus have obtained a decomposition of the space $F_{a_{k+1}} \equiv F_{a_k+2d_k+1}$ in the sum

$F_{a_{k+1}} = F_{a_k} \oplus < n_{k;d_k+1} > \oplus \mathcal{H}_{k,1} \oplus ... \oplus \mathcal{H}_{k,d_k}$, each of the hyperbolic planes $\mathcal{H}_{k,i} =< n_{k;i}, u_{k;i} >$ being furnished with a metric in the form

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{i-1}\epsilon_k \\ (-1)^{i-1}\epsilon_k & 0 \end{pmatrix}$$

4. The construction of our basis

Let us suppose that we have already built a basis $\mathcal{B}_k$ of F_{a_k}, satisfying the conditions given by the theorem 1.1 (with k possibly 0 and the conventions $a_0 = 0, F_0 = \{0\}$,

$g_0 = 1, and \quad \mathcal{B}_0 = \emptyset$).
We want to build $\mathcal{B}_{k+1}$ on $F_{a_{k+1}}$.

4.1. The case where $k < k_{max}$.

In this case, there exists an integer a_{k+1}; Then we will complete the basis of F_{a_k} into a basis of $F_{a_{k+1}}$.
First, if $a_{k+1} = a_k + 1$, i.e. if F_{a_k+1} is not degenerate, then the orthogonal space $F_{a_k}^{\perp a_k+1}$ has dimension 1, and $F_{a_k+1} = F_{a_k} \overset{\perp}{\oplus} F_{a_k}^{\perp a_k+1}$.
Then we may complete the family $\mathcal{B}_k$ with some unitary vector generating the space $F_{a_k}^{\perp a_k+1}$, and we define $\lambda_{(k)}(t) > 0$ to be the function such that the vector $\pi_k := \lambda_{(k)}\pi^{F_{a_k}^{\perp a_k+1}}(c^{(a_k+1)})$ has norm ϵ_k.
Note that we clearly have $\lambda_{(k)}^2\epsilon_k = g_{a_k}(g_{a_{k+1}})^{-1}$.

Now, if $a_{k+1} \neq a_k + 1$, we must make a more subtle analysis.
Let $n_{k;1} := \lambda_{(k)}e_{k;1}$ a vector generating the kernel K_{a_k+1}, $\lambda_{(k)}$ being the smooth function defined by

$$\begin{cases} (\lambda_{(k)}^2\epsilon_k)^{2d_k+1} = g_{a_k}(g_{a_{k+1}})^{-1} \\ \lambda_{(k)} > 0 \end{cases}$$

Let $n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)}$ the (i-1)-th derivative of $n_{k;1}$ for $2 \leq i \leq d_k$, and put $\pi_k := n_{k;1}^{(d_k)}$.
Recall that the function $\lambda_{(k)}$ has been chosen in order to have $\langle \pi_k, \pi_k \rangle = (-1)^{d_k}\epsilon_k = \pm 1$.

PROPOSITION 4.1. *The family $\mathcal{B}_k \cup \{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k\}$ is a basis of the space $F_{a_k+d_k+1}$*

DÉMONSTRATION.
Since $\mathcal{B}_k$ is a basis of F_{a_k} which is non-degenerate, and since the vectors $\{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k\}$ are all orthogonal to F_{a_k}, it is clear that it is sufficient to prove that the family $\{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k\}$ is free.
Suppose that $\sum_{i=1}^{d_k} \alpha_i n_{k;i} + \beta\pi_k = 0$. Then the equality $\left|\sum_{i=1}^{d_k} \alpha_i n_{k;i} + \beta\pi_k\right|^2 = 0$ implies that $\beta = 0$.
Now, suppose that the coefficients $\alpha_1, ..., \alpha_{d_k}$ are not all null; Denoting by p the greatest

index i such that $\alpha_i \neq 0$, we have $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i n_{k;i} = 0$, and thus
$n_{k;p} = -\frac{1}{\alpha_p} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i n_{k;i} \quad \in K_{a_k+p-1}$, which is absurd, since $n_{k;p}$ may be written
$n_{k;p} = \zeta_{(k)} e_{k;p} + \xi_p$, with $\xi_p \in K_{a_k+p-1}$, and $e_{k;p} \notin K_{a_k+p-1}$.
Therefore, we have $\alpha_1 = ... = \alpha_{d_k} = 0$. □

It remains to complete this family into a basis of $F_{a_{k+1}}$.

PROPOSITION 4.2. *For each integer i from 1 to d_k, there exists a vector $u_{k;i}$, uniquely defined modulo the kernel K_{a_k+i-1}, satisfying the following conditions :*

(1) $u_{k;i}$ *is orthogonal to the space* F_{a_k}

(2) $\langle u_{k;i}, n_{k;j} \rangle = 0 \quad \forall \ 1 \leq j \leq d_k \quad , \quad j \neq i$

(3) $\langle u_{k;i}, n_{k;i} \rangle = (-1)^{1-i} \epsilon_k$

(4) $\langle u_{k;i}, \pi_k \rangle = 0$

(5) $\langle u_{k;i}, u_{k;j} \rangle = 0 \quad \forall \ i \leq j \leq d_k$

DÉMONSTRATION.
Let us write $u_{k;i} = \nu_i c^{(a_k+2d_k+2-i)} + \sum_{j=1}^{d_k} \eta_{k,j} n_{k;j} + \xi_k \pi_k + \sum_{j=i+1}^{d_k} \mu_{k,j} u_{k;j} +$
$\sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} \eta_{l,j} n_{l;j} + \xi_l \pi_l + \sum_{j=1}^{d_l} \mu_{l,j} u_{l;j} \right)$.
We choose below the coefficients $\eta_{l,j}, \xi_l, \mu_{l,j}$ so that $u_{k;i}$ satisfies the conditions (1),...,(5) in the proposition.

1. $\forall \ 0 \leq l \leq k-1 \quad , \quad \forall \ 1 \leq j \leq d_l$

• $\langle u_{k;i}, n_{l;j} \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{l;j} \rangle + (-1)^{j-1} \epsilon_l \mu_{l,j} = 0.$

So we choose $\mu_{l,j} = (-1)^j \epsilon_l \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{l;j} \rangle$.

• $\langle u_{k;i}, \pi_l \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, \pi_l \rangle + (-1)^{d_l} \epsilon_l \xi_l = 0.$

So we choose $\xi_l = (-1)^{d_l-1} \epsilon_l \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, \pi_l \rangle$.

• $\langle u_{k;i}, u_{l;j} \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, u_{l;j} \rangle + (-1)^{j-1} \epsilon_l \eta_{l,j} = 0.$

So we choose $\eta_{l,j} = (-1)^j \epsilon_l \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, u_{l;j} \rangle$.

2.

• $\forall\ 1 \leq j \leq i-1$
$\langle u_{k;i}, n_{k;j} \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{k;j} \rangle = 0$ according to lemma 2.5

• $\forall\ i+1 \leq j \leq d_k$
$\langle u_{k;i}, n_{k;j} \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{k;j} \rangle + (-1)^{j-1} \epsilon_k \mu_{k,j} = 0.$

So we choose $\mu_{k,j} = (-1)^j \epsilon_k \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{k;j} \rangle$.

3. $\langle u_{k;i}, n_{k;i} \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{k;i} \rangle = (-1)^{i-1} \epsilon_k.$

So we choose $\nu_i = \frac{(-1)^{i-1}\epsilon_k}{\langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{k;i} \rangle}$.
Recall that $\langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, n_{k;i} \rangle \neq 0$ according to lemma 2.7.

4. $\langle u_{k;i}, \pi_k \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, \pi_k \rangle + (-1)^{d_k} \epsilon_k \xi_k = 0.$

So we choose $\xi_k = (-1)^{d_k-1} \epsilon_k \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, \pi_k \rangle$.

5.

• $\forall\ i+1 \leq j \leq d_k$

$\langle u_{k;i}, u_{k;j} \rangle = \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, u_{k;j} \rangle + (-1)^{j-1} \epsilon_k \eta_{k,j} = 0.$

So we choose $\eta_{k,j} = (-1)^j \epsilon_k \nu_i \langle c^{(a_k+2d_k+2-i)}, u_{k;j} \rangle$.

•

$$\begin{aligned}
\langle u_{k;i}, u_{k;i}\rangle &= \langle u_{k;i}, \nu_i c^{(a_k+2d_k+2-i)} + \sum_{j=1}^{d_k} \eta_{k,j} n_{k;j} + \xi_k \pi_k + \sum_{j=i+1}^{d_k} \mu_{k,j} u_{k;j} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} \eta_{l,j} n_{l;j} + \xi_l \pi_l + \sum_{j=1}^{d_l} \mu_{l,j} u_{l;j} \right) \rangle \\
&= \nu_i \langle u_{k;i}, c^{(a_k+2d_k+2-i)} \rangle + (-1)^{i-1} \epsilon_k \eta_{k,i} \\
&= \nu_i \langle \nu_i c^{(a_k+2d_k+2-i)} + \sum_{j=1}^{d_k} \eta_{k,j} n_{k;j} + \xi_k \pi_k + \sum_{j=i+1}^{d_k} \mu_{k,j} u_{k;j} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} \eta_{l,j} n_{l;j} + \xi_l \pi_l + \sum_{j=1}^{d_l} \mu_{l,j} u_{l;j} \right), c^{(a_k+2d_k+2-i)} \rangle + (-1)^{i-1} \epsilon_k \eta_{k,i} \\
&= \nu_i^2 |c^{(a_k+2d_k+2-i)}|^2 + \sum_{j=i+1}^{d_k} (-1)^j \epsilon_k \eta_{k,j} \mu_{k,j} + (-1)^{d_k-1} \epsilon_k \xi_k^2 \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{d_k} (-1)^j \epsilon_k \mu_{k,j} \eta_{k,j} + \\
&\sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} (-1)^j \epsilon_l \eta_{l,j} \mu_{l,j} + (-1)^{d_l-1} \epsilon_l \xi_l^2 + \sum_{j=1}^{d_l} (-1)^j \epsilon_l \eta_{l,j} \mu_{l,j} \right) \\
&\quad + 2(-1)^{i-1} \epsilon_k \eta_{k,i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notice that the last equation defines the coefficient $\eta_{k,i}$. □

Thus we have succeeded in completing our initial basis $\mathcal{B}_k$ of F_{a_k} into a basis $\mathcal{B}_k \cup \{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k, u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}\}$ of $F_{a_{k+1}}$, where the vectors $u_{k;i}$ are defined modulo the kernel K_{a_k+i-1}, and the metric has the following matrix in that basis :

$$\begin{pmatrix}
(-1)^{d_0}\epsilon_0 U_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & (-1)^{d_1}\epsilon_1 U_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & (-1)^{d_{k-1}}\epsilon_{k-1}U_{k-1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \epsilon_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\epsilon_k & 0 \\
0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k}\epsilon_k & 0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\epsilon_k & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & \epsilon_k & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

In other words, we have obtained a matrix

$$\begin{pmatrix}
(-1)^{d_0}\epsilon_0 U_0 & & \\
& \ddots & \\
& & (-1)^{d_k}\epsilon_k U_k
\end{pmatrix}$$

4.2. The case where $k = k_{max}$.

Recall that we have denoted by r the unique integer such that $F_{r-1} \underset{\neq}{\subset} F_r \equiv F_{r+1}$.
If $r = a_{k_{max}}$, then the constuction is finished at level k_{max} : we have the basis $\mathcal{B}_r$ of F_r satisfying the conditions of Theorem 1.1 .
If $r > a_{k_{max}}$, then for any integer i between $a_{k_{max}}+1$ and r, the space F_i must be degenerate.

Furthermore, we have the following result :

LEMME 4.3. *If $a_k = a_{k_{max}} < r$, then $K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_r$*

DÉMONSTRATION.

Suppose the result false. Then, with our previous notation for d_k, this means that $r \geq a_k + d_k + 1$.
Then we may complete the basis $\mathcal{B}_k$ of F_{a_k} into a basis of F_r, adding vectors $\{n_{k;1}, \dots, n_{k;d_k}, \pi_k, u_{k;d_k}, \dots, u_{k;a_k+2d_k-r+2}\}$, in the same way that we have done in the previous section. It is clear that we must have $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, \pi_k \rangle \neq 0$, otherwise, we should have $c^{(a_k+d_k+1)} \in F_{a_k+d_k}$, and consequently, $F_{a_k+d_k} \equiv F_{a_k+d_k+1}$, which would imply $r \leq a_k + d_k$.
Remark that the proof of lemma 2.7 is still true as long as one may start the induction. We thus conclude that $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, n_{k;d_k+2-m} \rangle \neq 0$ for any integer m with $2 \leq m \leq d_k + 1$. In particular, we have $\langle c^{(r+1)}, n_{k;a_k+2d_k-r+1} \rangle \neq 0$. But, since $c^{(r+1)} \in F_{r+1} \equiv F_r$, we have $\langle c^{(r+1)}, n_{k;a_k+2d_k-r+1} \rangle = 0$. (Remark that $a_k + 2d_k + 1 > r$, otherwise there would exist an

integer a_{k+1} defined by $a_{k+1} := a_k + 2d_k + 1$, which would give a contradiction with the fact that $k = k_{max}$). □

Thus we obtain a basis of F_r adding to the family $\mathcal{B}_k$ some vectors $n_{k;1}, ..., n_{k;r-a_{k_{max}}}$, where $n_{k;i} \in K_{a_k+i} - K_{a_k+i-1}$.
In this basis, the metric is

$$\begin{pmatrix} (-1)^{d_0}\epsilon_0 U_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & (-1)^{d_{k_{max}-1}}\epsilon_{k_{max}-1}U_{k_{max}-1} & \\ & & & O_{r-a_{k_{max}}} \end{pmatrix}$$

In conclusion, we may say that the process described in this paper must then come to an end either with a non-degenerate final space F_r, or with a degenerate space F_r, in which case, the residual kernel is constituted with vectors of type " $n_{k_{max};i}$ ".

5. The matrix of derivatives

5.1. The case where $k < k_{max}$.

In this section, we are going to choose explicitly the vectors $u_{k;i}$, which were previously defined only modulo the kernel K_{a_k+i-1}. We choose them so that the basis $\mathcal{B}_k \cup \{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k, u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}\}$ satisfies the conditions (3) given in Theorem 1.1 .

• By construction, it is clear that we have $n'_{k;i} = n_{k;i+1}$ for any integer i from 1 to d_k.

• Since $\pi'_k \in F_{a_k+d_k+2}$, we may write $\pi'_k = \alpha^{(0)}_{k,d_k} u_{k;d_k} + \beta^{(0)}_k \pi_k + \sum_{j=1}^{d_k} \gamma^{(0)}_{k,j} n_{k;j}$
$+ \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} \alpha^{(0)}_{l,j} u_{l;j} + \beta^{(0)}_l \pi_l + \sum_{j=1}^{d_l} \gamma^{(0)}_{l,j} n_{l;j} \right)$.

$\diamond \ \forall \ 0 \leq l \leq k-1, \quad \forall \ 1 \leq j \leq d_l$
$$\langle \pi'_k, n_{l;j} \rangle = -\langle \pi_k, n'_{l;j} \rangle = \begin{cases} -\langle \pi_k, n_{l;j+1} \rangle & if \quad j < d_l \\ -\langle \pi_k, \pi_l \rangle & if \quad j = d_l \end{cases} = 0$$
Then we deduce that $\alpha^{(0)}_{l,j} = 0$ for any integer j from 1 to d_l.

$\diamond \ \forall \ 0 \leq l \leq k-1$
$\langle \pi'_k, \pi_l \rangle = -\langle \pi_k, \pi'_l \rangle = -\langle \pi_k, u_{l;d_l} + \Upsilon_{l,d_l} n_{l;d_l} \rangle = 0.$

Thus, we have $\beta^{(0)}_l = 0$.
$\diamond \ \forall \ 0 \leq l \leq k-1 \quad , \quad \forall \ 1 \leq j \leq d_l$
$\langle \pi'_k, u_{l;j} \rangle = -\langle \pi_k, u'_{l;j} \rangle = 0$

since $u'_{l;j} \in F_{a_l+2d_l+3-j} \subseteq F_{a_l+2d_l+2} \subseteq F_{a_{k-1}+2d_{k-1}+2} \equiv F_{a_k+1}$

So, we have $\gamma^{(0)}_{l,j} = 0 \quad \forall\ 1 \leq j \leq d_l$.
$\diamond\ \langle \pi'_k, n_{k;d_k} \rangle = -\langle \pi_k, n'_{k;d_k} \rangle = -\langle \pi_k, \pi_k \rangle = (-1)^{d_k-1}\epsilon_k$.

Thus, $\alpha^{(0)}_{k,d_k} = 1$.
$\diamond\ \langle \pi'_k, \pi_k \rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle \pi_k, \pi_k \rangle'}_{=(-1)^{d_k}\epsilon_k} = 0$
Thus, $\beta^{(0)}_k = 0$.

Therefore, $\pi'_k = u_{k;d_k} + \sum_{j=1}^{d_k} \gamma^{(0)}_{k,j} n_{k;j}$.
Recall that the vector $u_{k;d_k}$ is defined modulo the kernel $K_{a_k+d_k-1}$; this leads us to substitute to the vector $u_{k;d_k}$ the vector $v_{k;d_k}$ defined by $v_{k;d_k} = u_{k;d_k} + \sum_{j=1}^{d_k-1} \gamma^{(0)}_{k,j} n_{k;j}$, and then, denoting by $\Upsilon_{k,d_k} := \gamma^{(0)}_{k,d_k}$, we obtain :

$$\pi'_k = v_{k;d_k} + \Upsilon_{k,d_k} n_{k;d_k}.$$

• $v_{k;d_k}$ being defined in this way, let us compute $v'_{k;d_k}$.
For this, let us write $v'_{k;d_k} = \alpha_{k,d_{k-1}} u_{k;d_{k-1}} + \alpha_{k,d_k} v_{k;d_k} + \beta_k \pi_k + \sum_{j=1}^{d_k} \gamma_{k,j} n_{k;j}$
$+ \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{d_l} \alpha_{l,j} u_{l;j} + \beta_l \pi_l + \sum_{j=1}^{d_l} \gamma_{l,j} n_{l;j} \right)$.

$\diamond\ \forall\ 0 \leq l \leq k-1 \quad , \quad \forall\ 1 \leq j \leq d_l$
$\langle v'_{k;d_k}, n_{l;j} \rangle = -\langle v_{k;d_k}, \underbrace{n'_{l;j}}_{\in F_{a_l+j+1} \subseteq F_{a_{k-1}+d_{k-1}+1}} \rangle = 0.$

Thus, $\alpha_{l,j} = 0 \quad \forall\ 0 \leq l \leq k-1 \quad , \quad \forall\ 1 \leq j \leq d_l$.
$\diamond\ \langle v'_{k;d_k}, \pi_l \rangle = -\langle v_{k;d_k}, \underbrace{\pi'_l}_{\in F_{a_l+d_l+2} \subseteq F_{a_{k-1}+d_{k-1}+2}} \rangle = 0.$

Thus, $\beta_l = 0$.
$\diamond\ \forall\ 0 \leq l \leq k-1 \quad , \quad \forall\ 1 \leq j \leq d_l$
$\langle v'_{k;d_k}, u_{l;j} \rangle = -\langle v_{k;d_k}, \underbrace{u'_{l;j}}_{\in F_{a_l+2d_l+3-j} \subseteq F_{a_{k-1}+2d_{k-1}+2}} \rangle = 0.$

Thus, $\gamma_{l,j} = 0 \quad \forall\ 0 \leq l \leq k-1, \quad \forall\ 1 \leq j \leq d_l$.
$\diamond\ \langle v'_{k;d_k}, n_{k;d_k} \rangle = -\langle v_{k;d_k}, n'_{k;d_k} \rangle = -\langle v_{k;d_k}, \pi_k \rangle = 0.$

Thus, $\alpha_{k,d_k} = 0$.
$\diamond\ \langle v'_{k;d_k}, n_{k;d_k-1} \rangle = -\langle v_{k;d_k}, n'_{k;d_k-1} \rangle = -\langle v_{k;d_k}, n_{k;d_k} \rangle = (-1)^{d_k}\epsilon_k.$

Thus, $\alpha_{k,d_{k-1}} = 1$.
$\diamond\ \langle v'_{k;d_k}, \pi_k \rangle = -\langle v_{k;d_k}, \pi'_k \rangle = -\langle v_{k;d_k}, v_{k;d_k} + \Upsilon_{k,d_k} n_{k;d_k} \rangle = (-1)^{d_k}\epsilon_k \Upsilon_{k,d_k}.$

Thus, $\beta_k = \Upsilon_{k,d_k}$.
$\diamond\ \langle v'_{k;d_k}, v_{k;d_k} \rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle v_{k;d_k}, v_{k;d_k} \rangle'}_{=0} = 0.$

Thus, $\gamma_{k,d_k} = 0$.

From all these computations, it results that $v'_{k;d_k} = u_{k;d_{k-1}} + \Upsilon_{k,d_k}\pi_k + \sum_{j=1}^{d_k-1}\gamma_{k,j}n_{k;j}$. Reminding that the vector $u_{k;d_{k-1}}$ is defined modulo the kernel $K_{a_k+d_k-2}$, we are led to substitute to the vector $u_{k;d_{k-1}}$ the vector $v_{k;d_{k-1}} := u_{k;d_{k-1}} + \sum_{j=1}^{d_k-2}\gamma_{k,j}n_{k;j}$, and then, putting $\Upsilon_{k,d_k-1} := \gamma_{k,d_k-1}$, we obtain :

$$v'_{k;d_k} = v_{k;d_{k-1}} + \Upsilon_{k,d_k}\pi_k + \Upsilon_{k,d_k-1}n_{k;d_k-1}.$$

• Now, suppose that, for $i = d_k - 2, ..., 1$, we have made a particular choice, for any $i+1 \leq h \leq d_k$, of vector $u_{k;h} + \sum_{j=1}^{h-1}\gamma_{k,j}n_{k;j}$, that we will denote by $v_{k;h}$, satisfying the following equation
$v'_{k;h} = v_{k;h-1} + \Upsilon_{k,h}n_{k;h+1} + \Upsilon_{k,h-1}n_{k;h-1} \quad \forall\ 1 \leq h \leq i.$
Let us then write $v'_{k;i+1} = \alpha_{k,i}u_{k;i} + \sum_{j=i+1}^{d_k}\alpha_{k,j}v_{k;j} + \beta_k\pi_k + \sum_{j=1}^{d_k}\gamma_{k,j}n_{k;j}$
$+ \sum_{l=0}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{d_l}\alpha_{l,j}u_{l;j} + \beta_l\pi_l + \sum_{j=1}^{d_l}\gamma_{l,j}n_{l;j}\right).$

$\diamond$ exactly the same computations as above show easily that all coefficients $\alpha_{l,j}, \beta_l, \gamma_{l,j}$ equal to 0, for any integer l from 0 to k-1, and any integer j from 1 to d_l.
$\diamond\ \forall\ i+1 \leq j \leq d_k$
$\langle v'_{k;i+1}, n_{k;j}\rangle = -\langle v_{k;i+1}, n'_{k;j}\rangle = 0.$

Thus, $\alpha_{k,j} = 0$.

$\diamond\ \langle v'_{k;i+1}, n_{k;i}\rangle = -\langle v_{k;i+1}, n'_{k;i}\rangle = -\langle v_{k;i+1}, n_{k;i+1}\rangle = (-1)^{i-1}\epsilon_k.$

Thus, we deduce that $\alpha_{k,i} = 1$.
$\diamond\ \langle v'_{k;i+1}, \pi_k\rangle = -\langle v_{k;i+1}, \pi'_k\rangle = 0.$

Thus, $\beta_k = 0$.
$\diamond\ \forall\ i+2 \leq j \leq d_k$

$$\begin{aligned}\langle v'_{k;i+1}, v_{k;j}\rangle &= -\langle v_{k;i+1}, v'_{k;j}\rangle \\ &= -\langle v_{k;i+1}, v_{k;j-1} + \Upsilon_{k,j}n_{k;j+1} + \Upsilon_{k,j-1}n_{k;j-1}\rangle \\ &= 0 \quad \text{except} \quad \text{for} \quad i+1 = \begin{cases} j+1 \\ j-1 \end{cases}\end{aligned}$$

So, we have $\gamma_{k,j} = 0 \quad \forall\ i+3 \leq j \leq d_k$.

$\diamond\ \langle v'_{k;i+1}, v_{k;i+2}\rangle = -\langle v_{k;i+1}, v_{k;i+1} + \Upsilon_{k,i+2}n_{k;i+3} + \Upsilon_{k,i+1}n_{k;i+1}\rangle$
$= (-1)^{i+1}\epsilon_k\Upsilon_{k,i+1}$

Thus, $\gamma_{k,i+2} = \Upsilon_{k,i+1}$.
$\diamond\ \langle v'_{k;i+1}, v_{k;i+1}\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle v_{k;i+1}, v_{k;i+1}\rangle)'}_{=0} = 0.$

Thus, $\gamma_{k,i+1} = 0$.

Therefore, we may write $v'_{k;i+1} = u_{k;i} + \Upsilon_{k,i+1} n_{k;i+2} + \sum_{j=1}^{i} \gamma_{k,j} n_{k;j}$.

But, the vector $u_{k;i}$ being defined modulo the kernel K_{a_k+i-1}, we may substitute to this vector the vector $v_{k;i} := u_{k;i} + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{k,j} n_{k;j}$, so that, denoting by $\Upsilon_{k,i} := \gamma_{k,i}$, we obtain : $v'_{k;i+1} = v_{k;i} + \Upsilon_{k,i+1} n_{k;i+2} + \Upsilon_{k,i} n_{k;i}$.

• Finally, it remains us to compute the derivative $v'_{k;1}$. According to whether the space $F_{a_{k+1}+1}$ is degenerate or not, we are going to introduce a new vector χ, which will generate the kernel (in the degenerate case), or the orthogonal space $F_{a_{k+1}}^{\perp a_{k+1}+1}$ (in the non-degenerate case).
More precisely, we choose the vector χ to be
◦ the null vector if $r = a_{k+1}$
◦ the unitary projection of the vector $c^{(a_{k+1}+1)}$ on the space $F_{a_{k+1}}^{\perp a_{k+1}+1}$ if $F_{a_{k+1}+1}$ is not degenerate, i.e. if $a_{k+2} = a_{k+1} + 1$
◦ $\lambda_{(k+1)} e_{k+1;1}$, if $F_{a_{k+1}+1}$ is degenerate, where $e_{k+1;1}$ is the projection of the vector $c^{(a_{k+1}+1)}$ onto the kernel $K_{a_{k+1}+1}$, and $\lambda_{(k+1)}$ is the function defined by

$$\begin{cases} (\lambda_{(k+1)}^2 \epsilon_{k+1})^{2d_{k+1}+1} = g_{a_{k+1}} (g_{a_{k+2}})^{-1} \\ \lambda_{(k+1)} > 0 \end{cases}$$

if $k+1 \neq k_{max}$, or some function which we will define in the next section if $k+1 = k_{max}$.

Let us then write $v'_{k;1} = \varkappa_k \chi + \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d_l} \alpha_{l,j} v_{l;j} + \beta_l \pi_l + \sum_{j=1}^{d_l} \gamma_{l,j} n_{l;j} \right)$.

◇ The same computations as we have made above show that all coefficients are equal to 0, except $\varkappa_k$, $\gamma_{k,2}$, and $\gamma_{k-1,1}$.
◇ $\langle v'_{k;1}, v_{k;2} \rangle = -\langle v_{k;1}, v_{k;1} + \Upsilon_{k,2} n_{k;3} + \Upsilon_{k,1} n_{k;1} \rangle = -\epsilon_k \Upsilon_{k,1}$.

Thus, $\gamma_{k,2} = \Upsilon_{k,1}$.
◇ $\langle v'_{k;1}, u_{k-1;1} \rangle = -\langle v_{k;1}, \varkappa_{k-1} n_{k;1} + \Upsilon_{k-1,1} n_{k-1;2} + \kappa n_{k-2;1} \rangle = -\epsilon_k \varkappa_{k-1}$
for some function κ on $\mathbb{R}$.

Thus, $\gamma_{k-1,1} = -\epsilon_{k-1} \epsilon_k \varkappa_{k-1}$.

Therefore, we obtain $v'_{k;1} = \varkappa_k \chi + \Upsilon_{k,1} n_{k;2} - \epsilon_{k-1} \epsilon_k \varkappa_{k-1} n_{k-1;1}$.

Relatively to the basis $\mathcal{B}_{k+1} \equiv \mathcal{B}_k \cup \{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k, v_{k;d_k}, ..., v_{k;1}\}$, the matrix of derivatives looks like

$$\begin{pmatrix}
\Delta_0 & Lc_0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \widetilde{Lc_{k-2}} & \Delta_{k-1} & Lc_{k-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \widetilde{Lc_{k-1}} & 0 & 1 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{k,d_k} & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{k,d_k-1} & 0 & \Upsilon_{k,d_k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{k,d_k-2} & 0 & \Upsilon_{k,d_k-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & \diagup & 0 & \diagup & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \Upsilon_{k,1} & 0 & \Upsilon_{k,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots 0 & \Upsilon_{k,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \underline{\underline{\chi_k}}
\end{pmatrix}$$

where the last column represents the coefficients of the vector $\chi \in F_{a_{k+1}+1} - F_{a_{k+1}}$.

In other words, we have obtained a matrix in the form

$$\begin{pmatrix}
\Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \widetilde{Lc_{k-1}} & \Delta_k & Lc_k
\end{pmatrix}$$

5.2. The case where $k = k_{max}$.

If $r = a_{k_{max}}$, there is nothing more to do. If $a_{k_{max}} < r$, exactly in the same way as we have done above, we put $n_{k_{max};1} = \lambda_{(k_{max})} e_{k_{max};1}$, and for any integer i from 2 to r-$a_{k_{max}}$, $n_{k_{max};i} := n^{(i-1)}_{k_{max};1}$.
Here, the only problem lies in the choice of the function $\lambda_{(k_{max})}$, noting that the previous formula does not apply anymore, since now, there does not exist a non-zero "$g_{a_{k_{max}+1}}$".
In fact, the most natural choice of $\lambda_{(k_{max})}$ is given by the following proposition.

PROPOSITION 5.1. *There exists a unique choice of function $\lambda_{(k_{max})}$ such that*

$$\begin{cases} n'_{k_{max};r-a_{k_{max}}} \in K_{r-1} \\ \lambda_{(k_{max})}(0) = 1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.
An easy computation shows that $n'_{k_{max};r-a_{k_{max}}} = (\lambda_{(k_{max})} e_{k_{max};1})^{(r-a_{k_{max}})}$

$$= \lambda_{(k_{max})} e_{k_{max};1}^{(r-a_{k_{max}})} + (r-a_{k_{max}})\lambda'_{(k_{max})} e_{k_{max};1}^{(r-a_{k_{max}}-1)} + \underbrace{\sum_{i=2}^{r-a_{k_{max}}} C^i_{r-a_{k_{max}}} \lambda^{(i)}_{k_{max}} e_{k_{max};1}^{(r-a_{k_{max}}-i)}}_{\in K_{r-1}}.$$

Moreover, since $e_{k_{max};1}^{(r-a_{k_{max}})} \in K_{r+1} \equiv K_r$, we may write it as $\sum_{i=1}^{r-a_{k_{max}}} \nu_i e_{k_{max};1}^{(i-1)}$, for some functions ν_i, so that $n'_{k_{max};r-a_{k_{max}}} \in K_{r-1} \iff \lambda_{(k_{max})}\nu_{r-a_{k_{max}}} + (r-a_{k_{max}})\lambda'_{(k_{max})} = 0$.

Therefore, $\lambda_{(k_{max})}$ is the unique solution of the above differential equation with initial condition $\lambda_{(k_{max})}(0) = 1$. □

From this, it results that for the curves for which the final space F_r is degenerate, we may introduce a third kind of functions ς_i, such that the matrix of derivatives admits a decomposition

$$\begin{pmatrix}
\Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \widetilde{Lc_{k_{max}-2}} & \Delta_{k_{max}-1} & Lc_{k_{max}-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \varsigma_1 & \dots & \dots & \varsigma_{r-1-a_{k_{max}}} & 0
\end{pmatrix}$$

i.e. the matrix

$$\Delta = \begin{pmatrix}
\Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \widetilde{Lc_{h-1}} & \Delta_h & Lc_h \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Gamma
\end{pmatrix}$$

with $h = k_{max} - 1$.

6. The change of basis

Notice that one may get our new basis $\{v_1, ..., v_r\}$ of F_r from the canonical basis $\{c^{(1)}, ..., c^{(r)}\}$ by an upper triangular matrix, the main diagonal of which is

$$(\underbrace{\lambda_{(0)}, ..., \lambda_{(0)}}_{b_0}, \underbrace{\lambda_{(1)}, ..., \lambda_{(1)}}_{b_1}, ..., \underbrace{\lambda_{(k_{max})}, ..., \lambda_{(k_{max})}}_{r-a_{k_{max}}})$$

Besides, we have the following result relating the functions $\lambda_{(i)}$ and $\varkappa_i$:

PROPOSITION 6.1. $\varkappa_i = \frac{\lambda_{(i)}}{\lambda_{(i+1)}}$ $\begin{cases} \forall\ 0 \leq i \leq k_{max} - 1 & if\ \ r \neq a_{k_{max}} \\ \forall\ 0 \leq i \leq k_{max} - 2 & if\ \ r = a_{k_{max}} \end{cases}$

DÉMONSTRATION.
★ First case : if $a_{i+1} \neq a_i + 1$
In this case, $\chi = n_{i+1;1} = \lambda_{(i+1)} e_{i+1;1}$.
We have $v'_{i;1} = \varkappa_i \lambda_{(i+1)} e_{i+1;1} + \Upsilon_{i,d_i} n_{i;2} - \epsilon_{i-1}\epsilon_i \varkappa_{i-1} n_{i-1;1}$.
But $c^{(a_{i+1}+1)} = e_{i+1;1} + y$, where $y \in F_{a_{i+1}}$. So, $v'_{i;1} = \varkappa_i \lambda_{(i+1)} c^{(a_{i+1}+1)} + z$ (1), for some vector $z \in F_{a_{i+1}}$.
Furthermore, we know, looking at the change of basis above, that we may write $v_{i;1} = \lambda_{(i)} c^{(a_{i+1})} + v$, with $v \in F_{a_{i+1}-1}$. Thus, $v'_{i;1} = \lambda_{(i)} c^{(a_{i+1}+1)} + w$ (2), with $w \in F_{a_{i+1}}$.

Equations (1) and (2) together with the fact that $c^{(1)}, ..., c^{(a_{i+1}+1)}$ are independent give us the result.

★ Second case : if $a_{i+1} = a_i + 1$
The above arguments are still valid ; we just have to write now $\chi = \pi_{i+1} := \lambda_{(i+1)} \pi^{F^{\perp a_{i+1}+1}_{a_{i+1}}}(c^{(a_{i+1}+1)})$.
□

Using **Formula 3.1**, we may deduce

Formula 6.1 : $\varkappa_i^2 = |g_{a_i}|^{\frac{1}{2d_i+1}} \quad |g_{a_{i+1}}|^{(-\frac{1}{2d_i+1} - \frac{1}{2d_{i+1}+1})} \quad |g_{a_{i+2}}|^{\frac{1}{2d_{i+1}+1}}$

7. Parametrization of curves

The study that we have led in this paper allows us to give a natural parametrization to each pseudo-regular curve c in the following way :

PROPOSITION 7.1. *Given any t_0 in I,*

(1) *If* $||c^{(1)}||^2 \neq 0$, *i.e. if* $a_1 = 1$, *there exists a unique parametrization* $\gamma = c \circ \varphi$ *such that*

$$\begin{cases} \langle \gamma^{(1)}, \gamma^{(1)} \rangle = \pm 1 \\ \varphi(0) = t_0 \\ \varphi' > 0 \end{cases}$$

(2) *If* $k_{max} \neq 0$ *and* $a_1 \neq 1$ *(i.e.* $||c^{(1)}||^2 = 0$*),there exists a unique parametrization* $\gamma = c \circ \varphi$ *such that*

$$\begin{cases} |g_{a_1}| = 1 \\ \varphi(0) = t_0 \\ \varphi' > 0 \end{cases}$$

(3) *If* $k_{max} = 0$, *i.e. if* c *is totally isotropic, there exists a unique parametrization* $\gamma = c \circ \varphi$ *such that*

$$\begin{cases} \gamma^{(r+1)} \in F_{r-1} \\ \varphi(0) = t_0 \\ \varphi' > 0 \\ \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.
1. If $||c^{(1)}||^2 \neq 0$, i.e. if $a_1 = 1$, then , putting $\gamma = c \circ \varphi$, the vector $\gamma^{(1)} = \varphi'.c^{(1)}$ is unitary if and only if $\varphi' = \pm\lambda_{(0)}$ by definition of $\lambda_{(0)}$.
The only solution with $\varphi' > 0$ is then $\varphi' = \lambda_{(0)}$ with initial condition $\varphi(0) = t_0$.

2. If $||c^{(1)}||^2 = 0$, and there exists an integer a_1 such that $g_{a_1} \neq 0$, then it is easy to show that we have the following result (where we omit the proof) :

LEMME 7.2. *Let* $\gamma = c \circ \varphi$ *a parametrization of the curve* c, *and let us denote by* $g_{a_1}^{[c]}$ *(respectively* $g_{a_1}^{[\gamma]}$*) the Gram's determinant of* F_{a_1} *relatively to the curve* c *(respectively to the curve* γ*).*
Then we have $g_{a_1}^{[\gamma]} = \varphi'^{2b_0} g_{a_1}^{[c]}$.

Consequently, we may deduce

$$\begin{aligned} |g_{a_1}^{[\gamma]}| = 1 &\iff \varphi'^{2b_0} |g_{a_1}^{[c]}| = 1 \\ &\iff \varphi'^{2b_0} = \lambda_{(0)}^{2b_0} \\ &\iff \varphi' = \lambda_{(0)} \quad \text{if} \quad \text{we} \quad \text{choose} \quad \varphi' > 0 \end{aligned}$$

3. If c is totally isotropic, i.e. if $k_{max} = 0$, then the proposition (5.1) gives us a unique function $\lambda_{(0)}$ such that the vector $n_{0;1} := \lambda_{(0)} e_{0;1} = \lambda_{(0)} c^{(1)}$ satisfies $\begin{cases} n_{0;1}^{(r)} \in F_{r-1} \\ \lambda_{(0)}(0) = 1 \end{cases}$. Therefore, if we put $\gamma = c \circ \varphi$ with $\varphi' = \lambda_{(0)}$, we obtain

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)} &= \varphi' c^{(1)} \\ &= \lambda_{(0)} c^{(1)} \\ &= n_{0;1}\end{aligned}$$

and thus, $\gamma^{(r+1)} \in F_{r-1}$, and $\varphi'(0) = 1$. □

Remarks :

(1) Those parametrizations may be seen in a natural way as parametrizations "by arc-length", in the sense that they are nothing else but the parametrizations $\gamma = c \circ \varphi$ which give us $\gamma^{(1)} = v_1$.
In other words, for the curve γ, the new function $\lambda_{(0)}$ is identically 1, so that the triangular matrix of change of basis from the basis $\{\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(r)}\}$ to the basis $\{v_1, ..., v_r\}$ begins with a block of coefficients 1 on its main diagonal.

(2) In the two first cases, the parametrization may be called *unitary*, since it allows us to norm the first non-isotropic vector that we meet.
In the third case, the parametrization is given by a function $\lambda_{(0)}$ satisfying a first order differential equation. That is why this parametrization may be called an *affine* parametrization.

Note that the result we have obtained gives a generalization of the well-known result that any null geodesic has an affine parametrization , since a null geodesic is nothing but a pseudo-regular curve, 1-regular, with $k_{max} = 0$.

8. Remarks on the invariants $\varkappa_k$, $\Upsilon_{k,i}$ and ς_k.

As for Frenet's frames, the curve is characterized by its (generalized) curvatures, i.e. the invariants $\Upsilon_{l,i}, \varkappa_l, \varsigma_l$. More precisely :

THÉORÈME 8.1. *Let $\varkappa_k > 0$, $\Upsilon_{k,i}$ and ς_k be smooth real functions, and $(a_k)_{k \leq r}$ a sequence of integer. There exists a curve for which the subspaces F_{a_k} are not degenerate, and having the functions $\Upsilon_{k,i}$, $\varkappa_k$, ς_k for (generalized) curvatures. Furthermore, any two such curves differ by an isometry (i.e. a translation followed by an element of the orthogonal group).*

The proof of this proposition works exactly in the same way as in the Riemannian case, so we omit it (for details , cf **[Sp]** second volume p. 1.43).
Notice also that the invariants $\varkappa_k$ and $\Upsilon_{k,i}$ are not exactly of the same nature. To see that, it is sufficient to remark that the functions $\varkappa_k$ are positive by definition (see proposition

6.1), whereas the functions $\Upsilon_{k,i}$ have, a priori, no sign.
As an example, let us consider the curve c of $\mathbb{R}^{1,3}$ defined by

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{1,3} \\ t &\longmapsto \frac{1}{4}(\frac{4}{3}t^3 + t, 2t^2, \frac{4}{3}t^3 - t) \end{aligned}$$

We have :

$c^{(1)}(t) = \frac{1}{4}(4t^2 + 1, 4t, 4t^2 - 1)$
$c^{(2)}(t) = (2t, 1, 2t)$
$c^{(3)}(t) = (2, 0, 2)$

Hence, the vectors $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ are clearly independent.

Respectively to this basis, the Gram's matrix of c is

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In this example, we have (with our usual notations) :
$a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad d_0 = 1, \quad n_{0;1} = c^{(1)}, \quad \pi_0 = c^{(2)}.$
Since $(c^{(2)})' = c^{(3)} + 0.c^{(1)}$, we get $\Upsilon_{0,1} = 0$.

9. Generalizing the construction to arbitrary pseudo-Riemannian manifolds

Let (M, g) be any n-dimensional pseudo-Riemannian manifold. Let $c : I \to M$ be a smooth curve in M, where I is some open interval in $\mathbb{R}$, containing 0.
The tangent space T_xM at $c(0) = x \in M$ is given with a non-degenerate quadratic form g_x. For any $t \in I$, we may consider the parallel transport $\tau(t) : T_xM \to T_{c(t)}M$ along c with respect to the Levi-Civita connection D of g. At any point c(t), the curve c admits a velocity vector $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M$, and iterated derivatives : $D^{(k)}\dot{c} = \underbrace{D_{dt}(D_{dt}(...(D_{dt}}_{k}\dot{c})))$.
Then $c^{(k)}(t) := \tau(t)^{-1}D^{(k-1)}\dot{c}$ are vectors in T_xM, and we may build a unique curve $\gamma : I \to T_xM$ such that $\gamma(0) = 0$ and $\gamma^{(k)}(t) = c^{(k)}(t)$.
Now, we may translate our construction to c by applying it to the curve γ. For that, we denote by $F_k^c(t)$ (respectively $F_k^\gamma(t)$) the space generated by $\{\dot{c}(t), ..., D^{(k-1)}\dot{c}(t)\}$ (respectively $\{c^{(1)}(t), ..., c^{(k)}(t)\}$).

DÉFINITION 9.1. The curve c is said " pseudo-regular " if

(1) c is r-regular, i.e. $F_{r-1}^c \subsetneq F_r^c \equiv F_{r+1}^c$

(2) for any integer $k \leq r$, the Gram's determinant of $F_k^c(t)$, i.e. the determinant of the (k,k) matrix $(\langle D^{(i)}\dot{c}(t), D^{(j)}\dot{c}(t)\rangle$,i,j $\in \{0, ..., k-1\})$, is either positive, identically zero, or negative

Since the parallel transport $\tau(t)$ is a linear isometry, we may deduce that

PROPOSITION 9.2. *The curve c is pseudo-regular if and only if the curve γ is.*

Therefore, if the curve c is pseudo-regular, our previous work allows us to build a canonical frame $\{v_1, ..., v_r\}$ inside T_xM, associated to the curve γ. Consequently, if we put $w_i(t) := \tau(t)(v_i(t))$, we obtain a moving frame $\{w_1, ..., w_r\}$ for the curve c, with the same invariants $\Upsilon_{k,j}, \varkappa_k, \varsigma_k$ (which is a staightforward consequence of the fact that $D_{dt}w_i(t) = \tau(t)(v_i'(t))$ since $\tau(t)$ is linear).

Bibliography

[**B-G**] M.Berger-B.Gostiaux, Géométrie différentielle, Presses Universitaires de France, Paris (1987)

[**D**] J.Dieudonné, Eléments d'analyses Tome IV, Gauthier-Villars, Paris (1971)

[**D-B**] K.Duggal-A.Bejancu, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Vol. 364 (1996)

[**D-J**] K.Duggal-D.Jin, Geometry of null curves, Math. J. Toyama University 22, 95-120 (1999)

[**Sp**] M.Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish (1975)

[**Y-C W**] Yung-Chow Wong, Frenet formulas for curves in Real, Complex and Quaternionic Euclidian spaces, Differential Geometry in honor of K.Yano, Kinokuniya, Tokyo, 525-541 (1972)

CHAPITRE 2

Repères de Frénet généralisés pour des courbes sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ou $\mathbb{H}^n$ muni d'une forme réflexive abitraire

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons construit un repère de Frénet généralisé associé à toute courbe suffisamment régulière de $\mathbb{R}^n$ muni d'une forme quadratique non-dégénérée de signature arbitraire. A l'aide de cette construction, le transport parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita nous a permis de généraliser ce repère aux variétés pseudo-Riemanniennes.
Il était alors naturel de se demander si cette généralisation était encore possible pour des courbes dans une variété symplectique. Rappelons à cet effet qu'une structure symplectique sur une variété M est la donnée d'une 2-forme alternée, non-dégénérée, ω_p, sur chaque espace tangent T_pM.
Nous commençons donc par batir un "modèle" de repère de Frénet sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une 2-forme alternée non-dégénérée. Le transport parallèle par rapport à une connexion symplectique (connexion D pour laquelle la forme symplectique ω est parallèle, i.e. qu'en tout point $p \in M$, et pour tous champs de vecteurs A, B au voisinage de p, on a : $\forall V \in T_pM$, $\mathcal{L}_V\omega(A,B) = \omega(D_VA, B) + \omega(A, D_VB)$) nous permet alors de généraliser notre construction aux variétés symplectiques munies d'une connexion symplectique.
Remarquons que, contrairement au cas pseudo-Riemannien, une connexion symplectique n'est pas déterminée de manière unique par la condition de parallèlisme. Pour cette raison, nous sommes contraints de nous donner une connexion symplectique sur la variété étudiée, et ne pouvons donc pas généraliser notre repère aux variétés symplectiques en général, mais seulement aux variétés symplectiques connectées.
Dans un second temps, nous nous sommes penchés sur le problème des courbes réelles sur le corps des complexes ou des quaternions. Un repère de Frénet avait déjà été construit dans le cas Euclidien pour des courbes sur $\mathbb{C}^n$, ou $\mathbb{H}^n$ (cf. [**Y-C W**]).
Nous avons donc généralisé cette construction au cas de courbes réelles sur $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ muni d'une 2-forme non-dégénérée, hermitienne ou anti-hermitienne (de telles 2-formes sont dites réflexives).
Finalement, les deux premiers chapitres de cette thèse nous donnent donc un repère de Frénet généralisé pour des courbes réelles sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ou $\mathbb{H}^n$ muni d'une forme réflexive arbitraire.

2. Rappel des notations

Considérons une courbe c : $I \to \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$), I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et munissons $\mathbb{K}^n$ d'une forme non-dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ quadratique, alternée, hermitienne ou anti-hermitienne.
Nous notons pour tout $t \in I$

- $F_k(t)$ l'espace engendré par les dérivées succéssives $c^{(1)}(t), ..., c^{(k)}(t)$
- $g_k(t)$ le déterminant de Gram de ces vecteurs, i.e. le déterminant de la

(k,k) matrice$(\langle c^{(i)}(t), c^{(j)}(t)\rangle, i, j \in \{1, ..., k\})$

et nous posons la définition suivante :

DÉFINITION 2.1. nous dirons que c est r-pseudo-régulière si

(1) c est r-régulière, i.e. $F_{r-1}(t) \underset{\neq}{\subset} F_r(t) \equiv F_{r+1}(t)\ \forall t \in I$

(2) pour tout entier $k \leq r$, la fonction g_k vérifie $g_k \equiv 0$ (i.e. le sous-espace F_k est dégénéré), ou $g_k(t) \neq 0\ \forall t \in I$ (i.e. le sous-espace $F_k(t)$ est non-dégénéré).

Nous notons $K_k(t)$ le noyau de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ restreint à $F_k(t)$ (éventuellement vide si $F_k(t)$ est non-dégénéré), et nous savons alors que

$$K_k \begin{cases} \underset{\neq}{\subset} K_{k+1} \\ \equiv K_{k+1} \\ \underset{\neq}{\supset} K_{k+1} \end{cases} \quad \text{avec respectivement} \quad dimK_{k+1} = \begin{cases} dimK_k + 1 \\ dimK_k \\ dimK_k - 1 \end{cases}$$

A partir de maintenant, nous supposerons c r-pseudo-régulière.

A la courbe c, nous associons 3 suites finies d'entiers :

(1) une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq m}$, croissante, correspondant aux entiers successifs tels que $g_{a_k} \neq 0$ (avec la convention $a_0 = 0, g_0 = 1$)

(2) une suite $(b_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ définie par $b_k = a_{k+1} - a_k$, et par convention, nous noterons $b_m = r - a_m$

(3) une suite $(d_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ définie par les conditions

$$\begin{cases} K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k} \\ et \\ K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1} \text{ ou } K_{a_k+d_k} \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k+1} \end{cases}$$

Il est alors clair que pour tout entier i compris entre 1 et d_k, on a la décomposition $F_{a_k+i} = F_{a_k} \oplus K_{a_k+i}$, et nous notons $e_{k;i}$ le projeté du vecteur $c^{(a_k+i)}$ sur le noyau K_{a_k+i}. Rappelons que

(1) m peut être nul. On dira alors que c est totalement isotrope.

(2) g_r peut être nul ou non, selon que r¿a_m ou r= a_m.

3. Le théorème général

THÉORÈME 3.1. *Etant donnée une courbe r-pseudo-régulière $c : I \to \mathbb{K}^n$, et une forme réflexive non-dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$), il existe un unique repère mobile $\{v_1(t), \ldots, v_r(t)\}$ sur $F_r(t)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *$\{v_1(t), \ldots, v_r(t)\}$ est adaptée au drapeau $F_1 \subset \ldots \subset F_r$, i.e. $F_i(t)$ admet pour base la famille $\{v_1(t), \ldots, v_i(t)\}$ pour tout entier i compris entre 1 et r, et tout $t \in I$*

(2) *la (r,r)-matrice U représentant la restriction de la forme* $\langle \ , \ \rangle$ *à* F_r *relativement à la base* $\{v_1, ..., v_r\}$ *est donnée par*

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \mathcal{U}_{k_m-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0_{r-a_m} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{U}_i$ *est une matrice* (b_i, b_i) *que l'on explicitera selon les cas,* 0_{r-a_m} *est la matrice nulle de type* $(r - a_m, r - a_m)$

(3) *la base mobile* $\{v_1(t), ..., v_r(t)\}$ *vérifie* $V' = \Delta V$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \widetilde{Lc_{h-1}} & \Delta_h & Lc_h \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

avec $h = m - 1$, *et la (r,r)-matrice* Δ *admet une décomposition en blocs dont la diagonale principale est construite à partir des matrices :*

(i) Δ_i, *une* (b_i,b_i)*-matrice dépendant de* d_i *fonctions, que l'on explicitera selon les cas*

(ii) Γ, *une* $(r - a_m, r - a_m)$ *matrice dépendant de* $r\text{-}a_m - 1$ *fonctions* ς_l $(l=1,...,r\text{-}a_m - 1)$ *sur I, de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & & 1 \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \dots & \varsigma_{r-a_{kmax}-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'il n'y a pas de matrice Γ *si (et seulement si)* $a_m = r$.

(iii) • $Lc_i = \varkappa_i L_i$, *où* L_i *est la* (b_i, b_{i+1})*-matrice définie par*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et $\varkappa_i$ est une fonction sur I.

- $\widetilde{Lc}_i = \widetilde{\varkappa}_i \widetilde{L}_i$, *où* $\widetilde{L}_i$ *est la* (b_{i+1}, b_i)*-matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et la fonction $\widetilde{\varkappa}_i$ *s'exprime en fonction de* $\varkappa_i$.

4. Rappel du résultat obtenu dans le cas pseudo-Riemannien : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme quadratique d'indice quelconque

Dans un premier temps, nous avons effectué une étude des noyaux K_{a_k+i}, de laquelle il est ressorti 2 lemmes importants :

LEMME 4.1. $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;i} \rangle = 0 \ \ \forall 1 \leq m \leq d_k \ \ \forall 1 \leq i \leq d_k + 1 - m$

LEMME 4.2. $\langle c^{(a_k+d_k+m)}, e_{k;d_k+2-m} \rangle \neq 0 \ \ \forall 1 \leq m \leq d_k + 1$

A partir de ces 2 lemmes, nous avons pû déduire

(1) $b_k = 2d_k + 1$

(2) $K_{a_k+d_k+m} \equiv K_{a_k+d_k+1-m} \ \ \forall 1 \leq m \leq d_k$

(3) l'évolution des noyaux se traduit par la suite suivante :

$$K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1} \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k+2} \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+2d_k}$$

Remarque : l'égalité $K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1}$ nous a permis de décomposer le quotient $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k}$ sous la forme $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k} = F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k} \overset{\perp}{\oplus} (F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$, et nous notons $e_{k;d_k+1}$ le projeté unitaire de la classe du vecteur $c^{(a_k+d_k+1)}$ sur l'espace de dimension 1 $(F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$.

D'autre part, nous avons établi une relation entre le signe ϵ^k de $\langle e_{k;d_k+1}, e_{k;d_k+1} \rangle$ et le signe ϵ_k du quotient $g_{a_{k+1}}(g_{a_k})^{-1}$, donnée par

LEMME 4.3. $\epsilon^k = (-1)^{d_k}\epsilon_k$

Dans un second temps, supposant que nous ayons construit une base $\mathcal{B}_k$ de F_{a_k}, nous avons vu qu'il était naturel de compléter $\mathcal{B}_k$ en une base de $F_{a_k+d_k+1}$ en ajoutant des vecteurs $n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, n_{k;d_k+1} := \pi_k$ définis par $\begin{cases} n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1} & \text{pour une fonction } \lambda_{(k)} \\ n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)} & \text{pour } 1 \leq i \leq d_k + 1 \end{cases}$.
Rappelons que nous avons rebaptisé π_k le dernier vecteur obtenu pour bien souligner le fait que ce dernier, contrairement aux autres vecteurs $n_{k;i}$, n'est pas isotrope.
Ceci étant, il nous fallait faire un choix de fonction $\lambda_{(k)}$, et nous avons pû nous rendre compte que le choix qui s'imposait naturellement était celui permettant de normer le premier vecteur non-isotrope que nous obtenions, i.e. le vecteur π_k.Ceci nous a amené à définir $\lambda_{(k)}$ par les conditions $\boxed{\begin{cases} (\lambda^2\epsilon_k)^{2d_k+1} = g_{a_k}(g_{a_{k+1}})^{-1} \\ \lambda_{(k)} > 0 \end{cases}}$

Afin de compléter notre base initiale $\mathcal{B}_k$ de F_{a_k} en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $F_{a_{k+1}}$, nous avons alors introduit des vecteurs $u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}$ tels que l'on ait la décomposition

$$\boxed{F_{a_{k+1}} = F_{a_k} \overset{\perp}{\oplus} < \pi_k > \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{k;1} \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{k;d_k}}$$

où $\mathcal{H}_{k;i} := < n_{k;i}, u_{k;i} >$ est un plan hyperbolique muni d'une métrique donnée par $\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{i-1}\epsilon_k \\ (-1)^{i-1}\epsilon_k & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, nous avons obtenu une base de $F_{a_{k+1}}$ telle que la restriction de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ à $F_{a_{k+1}}$ relativement à cette base soit donnée par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \mathcal{U}_k \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{U}_i = (-1)^{d_i}\epsilon_i U_i$, $\epsilon_i = \pm 1$ est le signe du quotient $g_{a_{i+1}}(g_{a_i})^{-1}$, et U_i est la matrice (b_i, b_i) definie par

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_i} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_i} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

A ce stade, nous avons pû nous apercevoir que chaque vecteur $u_{k;i}$, construit de facon à vérifier les conditions métriques ci-dessus, n'est défini que modulo le noyau K_{a_k+i-1}. Afin d'obtenir des vecteurs définis de manière unique, nous avons alors imposé des conditions

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

sur les dérivées, à savoir que les dérivées $u'_{k;i}$ n'aient pas de composante suivant le noyau K_{a_k+i} (utilisant le fait que $u'_{k;i}$ soit défini modulo K_{a_k+i}). La matrice des dérivées prend alors la forme :

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 \dots & \dots & 0 & \widetilde{Lc_{k-1}} & \Delta_k & Lc_k & \end{pmatrix}$$

où

Δ_i est une matrice (b_i,b_i), dépendant de d_i fonctions γ_l, se décomposant sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \gamma_{d_i-1} & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagup & \diagup & 0 & \gamma_{d_i-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \diagup & \diagup & \diagup & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma_1 & \diagup & \diagup & \diagup & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par récurrence, avec les conventions $F_0 = \emptyset, \mathcal{B}_0 = \emptyset$, nous avons ainsi pû construire une base de F_{a_m}. Pour finir, il nous restait à terminer notre construction en complétant notre base de F_{a_m} en une base de F_r (dans le cas où $r > a_m$). Dans ce but, nous avons d'abord établi que si $r > a_m$, nous avions nécessairement une suite finale croissante de noyaux donnée par :

LEMME 4.4. *Si $r > a_m$, on a $K_{a_m+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_m+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_r$.*

Ceci étant, il semblait alors tout à fait naturel de poursuivre notre construction de manière analogue à ce que nous avions fait précédemment ; Autrement dit, nous avons considéré les vecteurs $n_{m;1} := \lambda_{(m)} e_{m;1}$ (pour une fonction $\lambda_{(m)}$), et pour tout entier i compris entre 2 et $r - a_m$, $n_{m;i} := n_{m;1}^{(i-1)}$.
Là encore, le seul problème qu'il nous fallait résoudre était de choisir la fonction $\lambda_{(m)}$. Ce problème a été résolu en montrant le lemme suivant :

LEMME 4.5. *Il existe une unique fonction $\lambda_{(m)}$ vérifiant*

$$\begin{cases} n'_{m;r-a_m} \in K_{r-1} \\ \lambda_{(m)}(0) = 1 \end{cases}$$

Bilan

Etant donnée une courbe r-pseudo-régulière $c : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ étant muni d'une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$, nous avons construit un unique repère mobile $\{v_1, ..., v_r\}$ adapté au drapeau $F_1 \subset ... \subset F_r$, vérifiant les conditions du théorème 2.1 avec :

(i) $\mathcal{U}_i = (-1)^{d_i}\epsilon_i U_i$, $\epsilon_i = \pm 1$ est le signe du quotient $g_{a_{i+1}}(g_{a_i})^{-1}$, et U_i est la matrice (b_i, b_i) definie par

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_i} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_i} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Δ_i est une matrice (b_i,b_i), dépendant de d_i fonctions γ_l, se décomposant sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \gamma_{d_i-1} & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagup & \diagup & 0 & \gamma_{d_i-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \diagup & \diagup & \diagup & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma_1 & \diagup & \diagup & \diagup & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(iii) $\tilde{\varkappa}_i = -\epsilon_i\epsilon_{i+1}\varkappa_i$

Pour finir, nous avons établi 3 conséquences importantes de notre construction :

(1) les invariants $\varkappa_i$ apparaissant dans les matrices Lc_i et $\tilde{Lc}_{i+1}$ sont reliés aux déterminants de Gram g_{a_i} par la formule

$$\varkappa_i^2 = |g_{a_i}|^{\frac{1}{2d_i+1}} \quad |g_{a_{i+1}}|^{(-\frac{1}{2d_i+1}-\frac{1}{2d_{i+1}+1})} \quad |g_{a_{i+2}}|^{\frac{1}{2d_{i+1}+1}}$$

(2) notre repère mobile nous a permis de définir une paramétrisation naturelle de toute courbe pseudo-régulière, généralisant les paramétrisations par la longueur des courbes non nulles et affines des géodésiques nulles.

(3) le transport parallèle nous a permis de généraliser notre construction aux variétés pseudo-Riemanniennes en général

5. Le cas symplectique : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme alternée

Considérons une courbe c $:I \to \mathbb{R}^{2n}$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et munissons $\mathbb{R}^{2n}$ d'une forme $\langle\ ,\ \rangle$ non-dégénérée, alternée que nous noterons ω. Supposons que c soit r-pseudo-régulière.

Le premier fait important que nous pouvons immédiatement remarquer est que pour tout entier impair i compris entre 1 et r, le sous-espace F_i est dégénéré. Par conséquent, la suite $(a_k)_{0\leq k\leq m}$ est une suite croissante d'entiers pairs. D'autre part, on vérifie facilement que les lemmes 2.1 et 2.2 deviennent ici :

LEMME 5.1. $\omega(c^{(a_k+d_k+i)}, e_{k;j}) = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq d_k - 1\ ,\ \forall\ 1 \leq j \leq d_k - i$

LEMME 5.2. $\omega(c^{(a_k+d_k+i)}, e_{k;d_k+1-i}) \neq 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq d_k$

Remarque : pour prouver le lemme 3.2, on commence par monter que le résultat est vrai pour $i = 1$: si $\omega(c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;d_k}) = 0$, alors le lemme 3.1 entraîne immédiatement que $K_{a_k+d_k} \subseteq K_{a_k+d_k+1}$, ce qui, par définition de d_k, revient à dire que l'on a l'égalité $K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1}$. Or, une telle stabilité du noyau ne peut se produire, car sinon, de manière analogue au cas pseudo-Riemannien, la décomposition $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k} = F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k} \overset{\perp}{\oplus} (F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$ nous donnerait un espace $(F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$ non-dégénéré de dimension 1, ce qui ne peut exister pour une forme alternée. Il s'ensuit que le lemme 3.2 est vrai au rang $i = 1$. La preuve se termine par récurrence de la même manière que pour le lemme 2.2 .

A partir de ces deux lemmes, nous pouvons déduire :

(1) $b_k = 2d_k$

(2) $K_{a_k+d_k+i} \equiv K_{a_k+d_k-i} \quad \forall\ 1 \leq i \leq d_k - 1$

(3) l'évolution des noyaux se traduit par la suite suivante :
$K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subseteq} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subseteq} \cdots \underset{\neq}{\subseteq} K_{a_k+d_k} \underset{\neq}{\supseteq} K_{a_k+d_k+1} \underset{\neq}{\supseteq} \cdots \underset{\neq}{\supseteq} K_{a_k+2d_k-1}$.

Supposons maintenant que nous ayons construit une base $\mathcal{B}_k$ de F_{a_k} ; De manière analogue au cas pseudo-Riemannien, nous complétons $\mathcal{B}_k$ en une base de $F_{a_k+d_k}$ en ajoutant

des vecteurs $n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}$ définis par $\begin{cases} n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1} \text{ pour une fonction } \lambda_{(k)} \\ n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)} \text{ pour } 1 \leq i \leq d_k \end{cases}$
et il nous faut trouver un choix de fonction $\lambda_{(k)}$ le plus naturel possible.
Le choix effectué dans le cas pseudo-Riemannien, qui consistait à normer le premier vecteur non nul "$n_{k;d_k+1}$" obtenu, ne semble plus applicable ici, puisque pour une forme symplectique quelconque, tout vecteur est forcément isotrope. Toutefois, nous pouvons remarquer que dans le cas pseudo-Riemannien, normer le vecteur "$n_{k;d_k+1}$" revenait à normer les termes non diagonaux des matrices de Gram des plans hyperboliques ¡$n_{k;1}^{(d_k-i)}, n_{k;1}^{(d_k+i)}$¿, i.e. que le choix de fonction $\lambda_{(k)}$ que nous avons privilégié est celui qui permettait d'obtenir les égalités $\langle n_{k;1}^{(d_k-i)}, n_{k;1}^{(d_k+i)} \rangle = \pm 1 \ \forall \ 1 \leq i \leq d_k$. Par analogie, dans le cas symplectique, il apparaît donc naturel de choisir la fonction $\lambda_{(k)}$ telle que
$\omega(n_{k;1}^{(d_k-i)}, n_{k;1}^{(d_k+i+1)}) = \pm 1 \quad \forall \ 1 \leq i \leq d_k$ (où l'assymétrie qui apparaît avec la formule précédente traduit ici l'abscence d'étape de stabilité du noyau). A l'aide de la propriété de compatibilité de la connexion avec la métrique, il est aisé de montrer que ce choix revient à demander $\omega(n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k)}) = \pm 1$, et nous noterons ce signe ϵ^k. Or, en utilisant exactement les mêmes techniques que dans la démonstration du lemme 2.3, nous pouvons facilement déduire que $\omega(e_{k;1}^{(d_k-1)}, e_{k;1}^{(d_k)})^{2d_k} = g_{a_{k+1}} g_{a_k}^{-1}$. (ce qui montre notamment que dans le cas alterné, tous les Gram non nuls sont de même signe!!).
Ceci nous amène alors tout naturellement à choisir la fonction $\lambda_{(k)}$ telle que

$$\boxed{\begin{cases} (\lambda_{(k)}^2)^{2d_k} = g_{a_k} g_{a_{k+1}}^{-1} \\ \lambda_{(k)} > 0 \end{cases}}$$

Afin d'interpréter géométriquement le signe ϵ^k qui apparaît, remarquons que, puisque les deux espaces $F_{a_k+d_k-1} \subsetneq F_{a_k+d_k+1}$ ont le même noyau $K_{a_k+d_k-1}$, nous pouvons décomposer l'espace quotient $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1}$ sous la forme $F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1} \overset{\perp}{\oplus} (F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^{\perp}$ ($(F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^{\perp}$ étant un espace de dimension 2, non dégénéré pour la forme alternée induite). Ceci étant, en notant $\pi^{\perp}$ la projection canonique
$F_{a_k+d_k+1} \to F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1} \to (F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^{\perp}$, et ω_Q la forme alternée induite sur $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1}$ par ω, alors il est clair que ϵ^k est le signe de $\omega_Q(\pi^{\perp}(c^{(a_k+d_k)}), \pi^{\perp}(c^{(a_k+d_k+1)}))$.
Remarquons en oûtre que si d_k est impair, ϵ^k peut être interprété comme le signe du pfaffien de la matrice de Gram de la famille $\{c^{(a_k+1)}, ..., c^{(a_k+2d_k)}\}$.

Pour compléter notre base de $F_{a_k+d_k}$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $F_{a_{k+1}}$, le plus simple semble à-priori de continuer à prendre les dérivées successives du vecteur $n_{k;1}$. On obtient ainsi une décomposition de $F_{a_{k+1}}$ sous la forme $F_{a_{k+1}} = F_{a_k} \oplus P_1 \oplus ... \oplus P_{d_k}$ où chaque plan hyperbolique $P_i := < n_k^{(d_k-i)}, n_k^{(d_k+i-1)} >$ est muni d'une métrique de la forme $\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{i+1}\epsilon^k \\ (-1)^i \epsilon^k & 0 \end{pmatrix}$. L'inconvénient de cette décomposition est que les plans P_i ne sont pas orthogonaux entre eux. En effet, alors que dans le cas pseudo-Riemannien, on avait
$\langle n_k^{(d_k-i)}, n_k^{(d_k+1-i)} \rangle = \frac{1}{2} \langle n_k^{(d_k-i)}, n_k^{(d_k-i)} \rangle' = 0$, dans le cas symplectique, cette dernière égalité n'est plus valable. Pour cette raison, il nous faut compenser chaque vecteur $n_k^{(d_k-i+1)}$

par un vecteur de l'espace $F_{a_k+d_k+i}$ de telle sorte à obtenir des plans hyperboliques orthogonaux entre eux.
Ceci nous amène donc à compléter la base $\mathcal{B}_k \cup \{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}\}$ de $F_{a_k+d_k}$ avec des vecteurs $\{u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}\}$ construits de telle sorte à obtenir la décomposition

$\boxed{F_{a_{k+1}} = F_{a_k} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{k;1} \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{k;d_k}}$, où $\mathcal{H}_{k;i} :=< n_{k;i}, u_{k;i} >$ est un plan hyperbolique.

Nous obtenons ainsi une base de $F_{a_{k+1}}$ relativement à laquelle la restriction de la forme alternée ω est donnée par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \mathcal{U}_k \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{U}_i = \epsilon^i U_i$, $\epsilon^i = \pm 1$, et U_i est la matrice (b_i, b_i) definie par

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_i-1} \\ \vdots & & & 0 & \diagup & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_i} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $u_{k;i}$ construits de manière à obtenir les conditions métriques ci-dessus sont alors définis modulo le noyau K_{a_k+i}. Nous pouvons alors choisir de manière unique chaque vecteur $u_{k;i}$ de telle sorte à ce que la matrice des dérivées soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 & Lc_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 \dots & \dots & 0 & \widetilde{Lc_{k-1}} & \Delta_k & Lc_k \end{pmatrix}$$

où

Δ_i est une matrice (b_i,b_i), dépendant de d_i fonctions γ_l, se décomposant sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{d_i} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \diagup & \diagup & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \diagup & \diagup & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \diagup & \dots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\
\gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Par récurrence, nous avons ainsi obtenu une base de l'espace F_m. A ce stade, nous pouvons terminer notre construction pour obtenir une base de F_r exactement de la même manière que dans le cas pseudo-Riemannien. Autrement dit, si $r > a_m$, nous montrons que nous avons forcément $K_{a_m+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_m+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_r$, et nous posons alors $n_{m;1} := \lambda_{(m)} e_{m;1}$ et, pour i compris entre 2 et $r - a_m$, $n_{m;i} := n_{m;1}^{(i-1)}$, où $\lambda_{(m)}$ est l'unique fontion vérifiant $\begin{cases} n'_{m;r-a_m} \in K_{r-1} \\ \lambda_{(m)}(0) = 1 \end{cases}$

Bilan

Etant donnée une courbe r-pseudo-régulière $c : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ étant muni d'une forme bilinéaire, alternée, non-dégénérée ω, il existe un unique repère mobile $\{v_1, ..., v_r\}$ adapté au drapeau $F_1 \subset ... \subset F_r$, vérifiant les conditions du théorème 2.1 avec :

(i) $\mathcal{U}_k = \epsilon^k U_k$, $\epsilon^k = \pm 1$ est le signe de $\omega_Q(\pi^\perp(c^{(a_k+d_k)}), \pi^\perp(c^{(a_k+d_k+1)}))$ (où $\pi^\perp$ désigne la projection canonique de l'espace $F_{a_k+d_k+1}$ sur l'espace non dégénéré de dimension 2 $(F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^\perp$, et ω_Q est la forme alternée induite sur le quotient $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1}$ par ω), et U_k est la matrice (b_k, b_k) definie par

$$U_k = \begin{pmatrix}
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k-1} \\
\vdots & & & 0 & \diagup & 0 & 0 \\
\vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\
\vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\
0 & \diagup & & & & & \vdots \\
(-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0
\end{pmatrix}$$

(ii) Δ_k est une matrice (b_k,b_k), dépendant de d_k fonctions γ_l, se décomposant sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{d_k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \diagup & \diagup & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \diagup & \diagup & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \diagup & \dots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\
\gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

(iii) $\widetilde{\varkappa_k} = (-1)^{d_k}(-1)^{d_{k+1}}\epsilon^k\epsilon^{k+1}\varkappa_k$

Remarques :

(1) Les fonctions $\varkappa_k$ apparaissant dans les matrices Lc_k et $\widetilde{Lc_{k+1}}$ sont reliées aux déterminants de Gram g_{a_k} par la formule

$$\boxed{\varkappa_k^2 = |g_{a_k}|^{\frac{1}{2d_k}}|g_{a_{k+1}}|^{(-\frac{1}{2d_k}-\frac{1}{2d_{k+1}})}|g_{a_{k+2}}|^{\frac{1}{2d_{k+1}}}}$$

(2) Notre repère nous permet de définir une paramétrisation naturelle, relativement à une forme alternée arbitraire, de toute courbe pseudo-régulière.

(3) Si on se donne une connexion symplectique ∇ sur une variété symplectique (M,ω), le transport parallèle défini par ∇ permet d'étendre notre construction à (M,ω). Autrement dit, notre repère mobile peut être généralisé à toute variété symplectique munie d'une connexion symplectique.

6. Le cas complexe hermitien : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme hermitienne

Considérons une courbe $c : I \to \mathbb{C}^n$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et munissons $\mathbb{C}^n$ d'une forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$.
Remarquons tout d'abord que puisque la matrice de gram de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ relativement à la famille $\{c^{(1)}, ..., c^{(a_k)}\}$ est hermitienne, il est clair son déterminant g_{a_k} est réel.
Si nous essayons de généraliser le lemme 3.1 à notre cas, nous nous apercevons aisément que nous avons une légère différence avec le cas réel ; En effet, nous obtenons $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;i}\rangle = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq d_{k-1}$, mais $\mathfrak{Re}\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;d_k}\rangle = 0$. Autrement dit, dans le cas complexe, $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;d_k}\rangle$ n'est pas nécessairement nul : c'est un imaginaire pur que nous noterons $ip_{(k)} \in i\mathbb{R}$.

Nous avons donc deux cas à distinguer : le cas où $p_{(k)}$ est nul (on aura alors une étape de stabilité du noyau analogue au cas pseudo-Riemannien), et le cas où $p_{(k)}$ est non nul (nous n'aurons pas de stabilité du noyau, comme ce qui se passe dans le cas symplectique). Géométriquement, ceci se traduit par la propriété suivante : contrairement au cas réel, où on pouvait écrire notre matrice de Gram sous forme de blocs diagonaux tous de tailles impaires (cas pseudo-Riemannien), ou de tailles paires (cas symplectique), dans le cas complexe, nous pourrons toujours écrire la matrice de Gram sous forme de blocs diagonaux, mais ces derniers pourront être de taille paire ou impaire.
Les lemmes 3.1 et 3.2 se généralisent alors de la facon suivante :

LEMME 6.1.

(1) *Si* $p_{(k)} = 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;i}\rangle = 0 \ \forall \ 1 \leq l \leq d_k \ \forall \ 1 \leq i \leq d_k + 1 - l$

(2) *Si* $p_{(k)} \neq 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;i}\rangle = 0 \ \forall \ 1 \leq l \leq d_k - 1 \ \forall \ 1 \leq i \leq d_k - l$

LEMME 6.2.

(1) *Si* $p_{(k)} = 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;d_k+2-l}\rangle \neq 0 \ \forall \ 1 \leq l \leq d_k + 1$

(2) *Si* $p_{(k)} \neq 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;d_k+1-l}\rangle \neq 0 \ \forall \ 1 \leq l \leq d_k$

Supposons construit une base $\mathcal{B}_k$ de F_{a_k}.

1er cas : si $\mathbf{p_{(k)} = 0}$

Nous avons alors

(1) $b_k = 2d_k + 1$
(2) $K_{a_k+d_k+m} \equiv K_{a_k+d_k+1-m} \ \forall 1 \leq m \leq d_k$
(3) l'évolution des noyaux se traduit par la suite suivante :

$$K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k} \equiv K_{a_k+d_k+1} \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k+2} \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+2d_k}$$

Comme dans le cas pseudo-Riemannien, nous construisons un vecteur $e_{k;d_k+1}$ (projeté unitaire de $c^{(a_k+d_k+1)}$ sur $(F_{a_k+d_k}/K_{a_k+d_k})^{\perp}$), et, en notant $\epsilon^{(k)}$ le signe de $\langle e_{k;d_k+1}, e_{k;d_k+1}\rangle$, et ϵ_k le signe de $g_{a_{k+1}} g_{a_k}^{-1}$ (ce qui a bien un sens puisque g_{a_k} et $g_{a_{k+1}}$ sont réels), nous avons

LEMME 6.3. $\epsilon^{(k)} = (-1)^{d_k}\epsilon_k$

Afin de compléter $\mathcal{B}_k$ en une base de $F_{a_{k+1}}$, nous posons

$$(\star) \begin{cases} n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1} & \text{pour une fonction } \lambda_{(k)} \ : \ I \to \mathbb{C} \\ n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)} & \text{pour } 1 \leq i \leq d_k + 1 \end{cases}$$ et nous choisissons la fonction $\lambda_{(k)}$ telle que $\pi_k := n_{k;1}^{(d_k)}$ soit unitaire. Ceci nous amène à la formule

$$(\star\star) \boxed{(|\lambda_{(k)}|^2 \epsilon_k)^{2d_k+1} = g_{a_k} g_{a_{k+1}}^{-1}}.$$

Notons $\widetilde{\lambda}_{(k)}$ la fonction réelle positive vérifiant $(\star\star)$, et $\widetilde{\pi}_{(k)}$ le vecteur construit à partir de cette fonction (i.e. $\widetilde{\pi}_{(k)} := (\widetilde{\lambda}_{(k)} e_{k;1})^{(d_k)}$). Alors pour toute fonction $f_{(k)} : I \to \mathbb{C}$ de module 1, la fonction $\lambda_{(k)} := f_{(k)}\widetilde{\lambda}_{(k)}$ est solution de $(\star\star)$. Réciproquement, toute solution de $(\star\star)$ peut être obtenue de cette manière. Par conséquent, faire un choix de fonction $\lambda_{(k)}$ vérifiant $(\star\star)$ revient à choisir une fonction $f_{(k)}$ de module 1.
Pour faire ce choix, remarquons que pour la forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$, nous avons $\langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle + \langle\widetilde{\pi}_{(k)}, \widetilde{\pi}'_{(k)}\rangle = \langle\widetilde{\pi}_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle' = 0$. Autrement dit, $\mathfrak{Re}(\langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle) = 0$. Donc, contrairement au cas pseudo-Riemannien, nous n'avons pas $\langle\widetilde{\pi}_{(k)}\ ', \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle = 0$, mais seulement $\langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle$ imaginaire pur. Notons $\langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle = \mathrm{i}\beta_k$, $\beta_k \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 6.4. *Il existe une unique fonction $f_{(k)} : I \to \mathbb{C}$ telle que :*

(1) $|f_{(k)}|^2 = 1$

(2) *le vecteur π_k associé à $\lambda_{(k)} := f_{(k)}\langle$ vérifie $\langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle = 0$*

(3) $\lambda_{(k)}(0) = 1$

DÉMONSTRATION. Notons $\widetilde{n}_{k;1} := \langle e_{k;1}$ et $n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1}$. On a alors $n_{k;1} = f_{(k)}\widetilde{n}_{k;1}$. D 'où,

$$\begin{aligned}
\pi_k &= (n_{k;1})^{(d_k)} \\
&= (f_{(k)}\widetilde{n}_{k;1})^{(d_k)} \\
&= \sum_{i=0}^{d_k} C_{d_k}^i f_{(k)}^{(d_k-i)} \widetilde{n}_{k;1}^{(i)} \\
&= f_{(k)}\widetilde{\pi}_{(k)} + d_k f'_{(k)} \widetilde{n}_{k;1}^{(d_k-1)} + \sum_{i=0}^{d_k-2} C_{d_k}^i f_{(k)}^{(d_k-i)} \widetilde{n}_{k;1}^{(i)}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\begin{cases} \pi_k = f_{(k)}\widetilde{\pi}_{(k)} + d_k f'_{(k)} \widetilde{n}_{k;d_k} + \sum_{i=0}^{d_k-2} C_{d_k}^i f_{(k)}^{(d_k-i)} \widetilde{n}_{k;i+1} \\ \pi'_k = f_{(k)}\widetilde{\pi}'_{(k)} + (d_k+1) f'_{(k)} \widetilde{\pi}_{(k)} + \zeta \ \text{ avec } \zeta \in K_{a_k+d_k} \end{cases}$.

On en déduit que $\langle\pi'_k, \pi_k\rangle = |f_{(k)}|^2 \langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle + d_k f_{(k)} \bar{f}'_{(k)} \langle\widetilde{\pi}'_{(k)}, \widetilde{n}_{k;d_k}\rangle + (d_k+1) f'_{(k)} \bar{f}_{(k)} \langle\widetilde{\pi}_{(k)}, \widetilde{\pi}_{(k)}\rangle$.

Puisque $f_{(k)}$ doit être de module 1, on peut noter $f_{(k)} = e^{(\mathrm{i}\theta_{(k)})}$ avec $\theta_{(k)}$ une fonction réelle. La dernière égalité devient alors $\langle\pi'_k, \pi_k\rangle = \mathrm{i}(\beta_k + (2d_k+1)\epsilon^{(k)}\theta'_{(k)})$.
D 'où $\langle\pi'_k, \pi_k\rangle = 0 \iff \theta'_{(k)} = (-1)^{d_k+1} \frac{\epsilon_k \beta_k}{2d_k+1}$. Après intégration , nous obtenons $\theta_{(k)}$ à une constante près, cette dernière étant déterminée par la condition 3.

□

Une fois choisie la fonction $\lambda_{(k)}$, nous construisons les vecteurs $n_{k;i}$ définis par les relations $(\star)$, et la construction se poursuit alors, à peu de choses près, comme dans le cas pseudo-Riemannien. On élabore des vecteurs $u_{k;d_k}, \ldots, u_{k;1}$ tels que la matrice de Gram de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ relativement à la base $\{n_{k;1}, \ldots, n_{k;d_k}, \pi_k, u_{k;d_k}, \ldots, u_{k;1}\}$ soit donnée par $(-1)^{d_k}\epsilon_k U_k$, avec

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci définit les vecteurs $u_{k;i}$ $\begin{cases} \bullet \text{modulo le noyau } K_{a_k+i-1} \\ \bullet \text{modulo un vecteur } \mathrm{i}\zeta_{k;i} n_{k;i}, \text{ où } \zeta_{k;i} \text{est une fonction réelle} \end{cases}$

Par analogie au cas pseudo-Riemannien, il est facile de montrer que l'on peut choisir un représentant de la classe $[u_{k,i}/K_{a_k+i}]$ pour tout entier i compris entre 1 et d_k, de telle sorte que la dérivée $u'_{k;i}$ s'écrive $u'_{k;i} = u_{k;i-1} + \kappa_{k;i} n_{k;i+1} + \mathrm{i} g_{k;i} n_{k;i} + \kappa_{k;i-1} n_{k;i-1}$, où $g_{k;i}$ est une fonction réelle (qui apparaît car $\langle u'_{k;i}, u_{k;i}\rangle + \langle u_{k;i}, u'_{k;i}\rangle = \langle u_{k;i}, u_{k;i}\rangle' = 0$ entraîne $\mathfrak{Re}(\langle u'_{k;i}, u_{k;i}\rangle) = 0$, et non $\langle u'_{k;i}, u_{k;i}\rangle = 0$)

Il suffit alors de remplacer $u_{k;i}$ par $v_{k;i} := u_{k;i} + \mathrm{i} l_{k;i} n_{k;i}$ où $l_{k;i}$ est la fonction réelle définie par $\begin{cases} l'_{k;i} + g_{k;i} = 0 \\ l_{k;i}(0) = 1 \end{cases}$ pour avoir $v'_{k;i} = v_{k;i-1} + \bar{\Upsilon}_{k;i} n_{k;i+1} + \Upsilon_{k;i-1} n_{k;i-1}$.

Finalement, relativement à la base $\mathcal{B}_{k+1} := \mathcal{B}_k \cup \{n_{k;1}, \dots, n_{k;d_k}, \pi_k, u_{k;d_k}, \dots, u_{k;1}\}$, la matrice des dérivées est donnée par

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 & Lc_0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{Lc_0} & \Delta_1 & Lc_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{Lc_1} & \ddots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \widetilde{Lc_{k-2}} & \Delta_{k-1} & Lc_{k-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \widetilde{Lc_{k-1}} & 0 & 1 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{k,d_k} & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{k,d_k-1} & 0 & \bar{\Upsilon}_{k,d_k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Upsilon_{k,d_k-2} & 0 & \bar{\Upsilon}_{k,d_k-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \diagup & 0 & \diagup & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \Upsilon_{k,1} & 0 & \bar{\Upsilon}_{k,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots 0 & \bar{\Upsilon}_{k,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \varkappa_k & \end{pmatrix}$$

où la dernière colonne represente le coefficient d'un vecteur $\chi \in F_{a_{k+1}+1} - F_{a_{k+1}}$.

2nd cas : si $\mathbf{p_{(k)} \neq 0}$

Nous avons alors

(1) $b_k = 2d_k$

(2) $K_{a_k+d_k+l} \equiv K_{a_k+d_k-l} \ \forall \ 1 \leq l \leq d_k$

(3) l'évolution des noyaux se traduit par la suite suivante :
$K_{a_k+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+2} \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} K_{a_k+d_k} \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+d_k+1} \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} K_{a_k+2d_k-1}$.

Nous posons $\begin{cases} n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1} \quad \text{pour une fonction } \lambda_{(k)} \ : \ I \to \mathbb{C} \\ n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d_k \end{cases}$ et nous choisissons la fonction $\lambda_{(k)}$ de telle sorte que $\langle n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k)} \rangle = \pm \mathrm{i} \quad (\star)$
(et ainsi nous obtenons $\langle n_{k;1}^{(d_k-l)}, n_{k;1}^{(d_k+l-1)} \rangle = \pm \mathrm{i} \ \forall 1 \leq l \leq d_k - 1$).

Rque : il est clair que $\langle n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k)} \rangle$ est imaginaire pur, donc l'équation $(\star)$ équivaut à $|\langle n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k)} \rangle|^2 = 1$, soit $|\lambda_{(k)}|^2 \ |\langle e_{k;1}^{(d_k-1)}, e_{k;1}^{(d_k)} \rangle|^2 = 1 \ (\star\star)$.
Or, à l'aide de nos techniques usuelles, nous pouvons montrer que $|\langle e_{k;1}^{(d_k-1)}, e_{k;1}^{(d_k)} \rangle|^{2d_k} = (-1)^{d_k} g_{a_{k+1}} g_{a_k}^{-1}$. L'équation $(\star\star)$ équivaut donc à

$$\boxed{(|\lambda_{(k)}|^2)^{2d_k} = (-1)^{d_k} g_{a_k} g_{a_{k+1}}^{-1}}$$

Ceci détermine la fonction $\lambda_{(k)}$ à une phase près .

Maintenant, nous remarquons que le plan engendré par les vecteurs $\{n_{k;1}^{(d_k-1)}, n_{k;1}^{(d_k)}\}$ est muni d'une métrique de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon^k \mathrm{i} \\ -\epsilon^k \mathrm{i} & \kappa \end{pmatrix}$ où $\epsilon^k := \pm 1$ et κ est la fonction réelle définie par $\kappa := \langle n_{k;1}^{(d_k)}, n_{k;1}^{(d_k)} \rangle$.
Dans le cas symplectique, cette fonction κ n'apparaissait pas, puisque la forme considérée était alternée. On peut cependant remarquer, dans notre cas, que l'on peut faire un choix de fonction $\lambda_{(k)}$ telle que la fonction κ s'annule. Ce choix est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 6.5. *Il existe une unique fonction $f_{(k)} \ : \ I \to \mathbb{C}$ telle que*

(1) $|f_{(k)}|^2 = 1$

(2) *la fonction $\widetilde{\kappa}$ définie par $\widetilde{\kappa} := \langle \widetilde{n_{k;1}}^{(d_k)}, \widetilde{n_{k;1}}^{(d_k)} \rangle$ est nulle (où $\widetilde{n_{k;1}} := f_{(k)} n_{k;1}$)*

(3) $f_{(k)}(0) = 1$

DÉMONSTRATION. Posons $f_{(k)} := e^{\mathrm{i}\theta_{(k)}}$. Alors nous pouvons voir facilement que la fonction $\widetilde{\kappa}$ est reliée à la fonction κ par la formule $\widetilde{\kappa} = \kappa + 2\epsilon^k \theta'_{(k)}$. □

Comme dans le cas symplectique, on peut maintenant poser $u_{k;d_k} := n_{k;1}^{(d_k)} = n'_{k;d_k}$. On construit alors des vecteurs $\{u_{k;d_k-1}, ..., u_{k;1}\}$ tels que la matrice de Gram de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ relativement à la famille $\{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}\}$ soit donnée par

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k-1}\epsilon^k \mathrm{i} \\ \vdots & & & 0 & \diagup & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \epsilon^k \mathrm{i} & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -\epsilon^k \mathrm{i} & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k}\epsilon^k \mathrm{i} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci définit les vecteurs $u_{k;l}$ (pour $1 \leq l \leq d_k - 1$) $\begin{cases} \bullet \text{modulo le noyau} K_{a_k+l-1} \\ \bullet \text{modulo un vecteur } h_l n_{k;l} \\ \text{pour une fonction réelle } h_l \end{cases}$

On peut alors faire un choix particulier de vecteur $u_{k;l}$ de telle sorte que la matrice des dérivées soit donnée par

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \zeta_h & \gamma_h & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \diagup & \diagup & \zeta_h^* & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \diagup & \diagup & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \zeta_2 & \diagup & \dots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \gamma_1 & \zeta_2^* & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $h = d_k$, γ_l est une fonction réelle, ζ_l est une fonction imaginaire, et $\zeta_l^* := -\mathrm{i}\bar{\zeta_l}\mathrm{i} = -\zeta_l$.

Par récurrence, nous avons ainsi obtenu une base de l'espace F_m. A ce stade, nous pouvons terminer notre construction pour obtenir une base de F_r exactement de la même manière que dans le cas pseudo-Riemannien. Autrement dit, si $r > a_m$, nous montrons que nous avons forcément $K_{a_m+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_m+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_r$, et nous posons alors $n_{m;1} := \lambda_{(m)} e_{m;1}$ et, pour i compris entre 2 et $r - a_m$, $n_{m;i} := n_{m;1}^{(i-1)}$, où $\lambda_{(m)}$ est l'unique fontion vérifiant $\begin{cases} n'_{m;r-a_m} \in K_{r-1} \\ \lambda_{(m)}(0) = 1 \end{cases}$

Bilan

Etant donnée une courbe r-pseudo-régulière c : $I \to \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ étant muni d'une forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$, il existe un repère $\{v_1, ..., v_r\}$ adapté au drapeau $F_{\subset} ... \subset F_r$, tel que la matrice de Gram et la matrice des dérivées se décomposent en blocs pairs ou impairs suivant les conditions du théorème 2.1, avec

• Cas impair

(i) $\mathcal{U}_k := (-1)^{d_k}\epsilon_{(k)}U_k$, où $\epsilon_{(k)}$ est le signe du quotient $g_{a_{k+1}}g_{a_k}^{-1}$, et U_k est la matrice $(2d_k+1, 2d_k+1)$ définie par

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Δ_k est une matrice $(2d_k+1, 2d_k+1)$ dépendant de d_k fonctions $\gamma_l : I \to \mathbb{C}$ de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{d_k} & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \gamma_{d_k-1} & 0 & \bar{\gamma}_{d_k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagup & \diagup & 0 & \bar{\gamma}_{d_k-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \diagup & \diagup & \diagup & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma_1 & \diagup & \diagup & \diagup & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \bar{\gamma}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(iii) $\tilde{\varkappa}_k = \begin{cases} -\epsilon_k\epsilon_{k+1}\bar{\varkappa}_k & \text{si } b_k \text{ est impair} \\ -(-1)^{d_k}\epsilon^k\epsilon_{k+1}\bar{\varkappa}_k & \text{si } b_k \text{ est pair (où le signe } \epsilon^k \text{ est défini ci-dessous)} \end{cases}$

• Cas pair

(i) $\mathcal{U}_k := \epsilon^k i U_k$, où $\epsilon^k = \pm 1$, et U_k est la matrice $(2d_k, 2d_k)$ donnée par

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k-1} \\ \vdots & & & 0 & \diagup & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Pour interpréter le signe ϵ^k, notons comme pour le cas réel alterné $\pi^\perp$ la projection canonique $F_{a_k+d_k+1} \to F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1} \to (F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^\perp$, et $\langle\ ,\ \rangle_Q$ la forme hermitienne induite sur $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1}$ par $\langle\ ,\ \rangle$. Il est clair que $\langle \pi^\perp(c^{(a_k+d_k)}), \pi^\perp(c^{(a_k+d_k+1)})\rangle_Q$ est un imaginaire pur $\alpha\mathrm{i}$ (pour une fonction réelle α). Nous pouvons alors aisément vérifier que ϵ^k est le signe de α. Autrement dit, $\epsilon^k = sgn(-\mathrm{i}\langle \pi^\perp(c^{(a_k+d_k)}), \pi^\perp(c^{(a_k+d_k+1)})\rangle_Q)$.

(ii) Δ_k est une matrice $(2d_k, 2d_k)$ dépendant de d_k fonctions réelles $\gamma_l : I \to \mathbb{R}$ et $d_k - 1$ fonctions imaginaires $\zeta_l : I \to \mathrm{i}\mathbb{R}$, de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \zeta_h & \gamma_h & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \diagup & \diagup & \zeta_h^* & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \diagup & \diagup & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \zeta_2 & \diagup & \dots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \gamma_1 & \zeta_2^* & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $h := d_k$ et $\zeta_l^* := -\zeta_l$.

(iii) $\tilde{\varkappa_k} = \begin{cases} -(-1)^{d_{k+1}}\epsilon_k\epsilon^{k+1}\mathrm{i}\bar{\varkappa_k} & \text{si } b_k\text{est impair} \\ (-1)^{d_k}(-1)^{d_{k+1}}\epsilon^k\epsilon^{k+1}\bar{\varkappa_k} & \text{si } b_k \text{ est pair} \end{cases}$

Finalement, nous remarquons que l'équation $\varkappa_k = \lambda_{(k)}\lambda_{(k+1)}^{-1}$ est encore valable, et nous donne donc une expresion de $|\varkappa_k|$ en fonction des déterminants de Gram de la courbe c.

7. Le cas quaternionic anti-hermitien : $K = \mathbb{H}$, $\langle,\ \rangle$ est une forme anti-hermitienne

Considérons une courbe c : $I \to \mathbb{H}^n$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et munissons $\mathbb{H}^n$ d'une forme anti-hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$ (telle que $\langle \lambda x, \mu y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle\bar{\mu}\ \forall x, y \in \mathbb{H}^n$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{H}$).
Dans ce cas, $\langle c^{(a_k+d_k+1)}, e_{k;d_k}\rangle$ est un réel, que nous noterons $p_{(k)}$.
Nous distinguons deux cas, selon que $p_{(k)} = 0$ ou $p_{(k)} \neq 0$. Les lemmes 3.1 et 3.2 se généralisent alors par :

LEMME 7.1.

(1) *Si* $p_{(k)} = 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;i}\rangle = 0\ \forall\ 1 \leq l \leq d_k\ \forall\ 1 \leq i \leq d_k + 1 - l$

(2) *Si* $p_{(k)} \neq 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;i}\rangle = 0\ \forall\ 1 \leq l \leq d_k - 1\ \forall\ 1 \leq i \leq d_k - l$

LEMME 7.2.

(1) *Si* $p_{(k)} = 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;d_k+2-l}\rangle \neq 0\ \forall\ 1 \leq l \leq d_k + 1$

(2) *Si* $p_{(k)} \neq 0$, *on a* $\langle c^{(a_k+d_k+l)}, e_{k;d_k+1-l}\rangle \neq 0\ \forall\ 1 \leq l \leq d_k$

Supposons construit une base $\mathcal{B}_k$ de F_{a_k}.

1er cas : si $p_{(k)} = 0$

Nous posons $\begin{cases} n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1} & \text{pour une fonction } \lambda_{(k)} : I \to \mathbb{H} \\ n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)} & \text{pour } 1 \leq i \leq d_k \\ \pi_k := n_{k;1}^{(d_k)} \end{cases}$.

et nous choisissons la fonction $\lambda_{(k)}$ de telle sorte à obtenir $\langle \pi_k, \pi_k\rangle = \mathrm{i}$. Ceci nous conduit à l'équation $\boxed{\lambda_{(k)}\langle e_{k;1}^{(d_k)}, e_{k;1}^{(d_k)}\rangle\bar{\lambda}_{(k)} = \mathrm{i}}$ $(\star)$.
Remarquons que si $\tilde{\lambda}_{(k)} := q\lambda_{(k)}$ vérifie également l'équation $(\star)$, alors $qi\bar{q} = \mathrm{i}$. L'équation $(\star)$ laisse donc un degré de liberté sur le choix de la fonction $\lambda_{(k)}$. Nous utilisons alors ce degré de liberté pour choisir $\lambda_{(k)}$ de telle sorte à avoir aussi $\langle \pi_k', \pi_k\rangle = 0$.
Soit donc $\tilde{n}_{k;1} := \tilde{\lambda}_{(k)} e_{k;1}$ avec $\tilde{\lambda}_{(k)}$ vérifiant $(\star)$. Posons $n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1}$ avec $\begin{cases} \lambda_{(k)} = q\tilde{\lambda}_{(k)} \\ qi\bar{q} = \mathrm{i} \end{cases}$
On a donc $n_{k;1} = q\tilde{n}_{k;1}$. Ceci étant, il est aisé de montrer que, pour obtenir $\langle \pi_k', \pi_k\rangle = 0$, il suffit de choisir la fonction q telle que $\begin{cases} q' = -\frac{\mathrm{i}}{2d_k+1} q\langle \tilde{\pi}_k', \tilde{\pi}_k\rangle \\ qi\bar{q} = \mathrm{i} \end{cases}$

Remarque : l'équation $\langle \pi_k, \pi_k\rangle = \mathrm{i}$ entraîne $|\langle \pi_k, \pi_k\rangle| = 1$, ce qui implique $\boxed{(|\lambda_{(k)}|^2)^{2d_k+1} = |g_{a_k} g_{a_{k+1}}^{-1}|}$.

Nous construisons alors des vecteurs $\{u_{k;1}, ..., u_{k;d_k}\}$ tels que la matrice de Gram de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ relativement à la base $\{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, \pi_k, u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}\}$ soit donnée par $\mathrm{i}U_k$, avec

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci définit les vecteurs $u_{k;l}$ $\begin{cases} \bullet \text{modulo le noyau } K_{a_k+l-1} \\ \bullet \text{modulo un vecteur } \zeta_{k;l}(1, \mathrm{j}, \mathfrak{k}) n_{k;l} \end{cases}$

Il ne nous reste alors plus qu'à choisir les vecteurs $u_{k;i}$ de manière unique afin d'obtenir une matrice des dérivées de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \zeta_h & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \zeta_{h-1} & \mathrm{i}\gamma_h & \zeta_h^* & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagup & & \diagup & \mathrm{i}\gamma_{h-1} & \zeta_{h-1}^* & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \diagup & \diagup & \diagup & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \zeta_2 & \diagup & \diagup & \diagup & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathrm{i}\gamma_1 & \zeta_2^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $h = d_k$, γ_l est une fonction réelle, ζ_l est une fonction imaginaire de la forme $h_l \mathrm{i}$ pour une fonction réelle h_l, et $\zeta_l^* := -\mathrm{i}\bar{\zeta}_l \mathrm{i} = -\zeta_l$.

2nd cas : si $\mathbf{p_{(k)} \neq 0}$

Nous posons $\begin{cases} n_{k;1} := \lambda_{(k)} e_{k;1} \quad \text{pour une fonction} \quad \lambda_{(k)} : I \to \mathbb{H} \\ n_{k;i} := n_{k;1}^{(i-1)} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d_k \end{cases}$

et nous choisissons la fonction $\lambda_{(k)}$ telle que

(1) $\langle n_{k;d_k}, n'_{k;d_k} \rangle = \epsilon^k = \pm 1$

(2) $\langle n'_{k;d_k}, n'_{k;d_k} \rangle = 0$

où $\epsilon^k = \pm 1$ est le signe de $\langle \pi^\perp(c^{(a_k+d_k)}), \pi^\perp(c^{(a_k+d_k+1)}) \rangle_Q$, où $\pi^\perp$ désigne la projection canonique de l'espace $F_{a_k+d_k+1}$ sur l'espace non-dégénéré de dimension 2 $(F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^\perp$, et $\langle\ ,\ \rangle_Q$ est la forme anti-hermitienne induite sur ce quotient par $\langle\ ,\ \rangle$).

L'équation (1) nous mène alors à l'équation $\lambda_{(k)}\langle e_{k;1}^{(d_k-1)}, e_{k;1}^{(d_k)}\rangle\bar{\lambda}_{(k)} = \epsilon^k$, soit $|\lambda_{(k)}|^2\langle e_{k;1}^{(d_k-1)}, e_{k;1}^{(d_k)}\rangle = \epsilon^k$, que l'on peut encore écrire $\boxed{(|\lambda_{(k)}|^2)^{2d_k} = g_{a_k}g_{a_{k+1}}^{-1}}$ $(\star\star)$, ce qui fixe la fonction $\lambda_{(k)}$ à une phase près.

Notons $\tilde{\lambda}_{(k)}$ la fonction réelle positive vérifiant $(\star\star)$, et posons $\lambda_{(k)} := f_k\tilde{\lambda}_{(k)}$, avec $|f_k|^2 = 1$. Pour avoir $\langle n_{k;1}^{(d_k)}, n_{k;1}^{(d_k)}\rangle = 0$, il suffit alors de choisir la fonction f_k définie par

$$\begin{cases} f_k\langle \tilde{n}_{k;1}^{(d_k)}, \tilde{n}_{k;1}^{(d_k)}\rangle + 2d_k\epsilon^k f_k' = 0 \\ |f_k|^2 = 1 \end{cases}$$

Nous continuons notre construction en posant $u_{k;d_k} := n_{k;1}^{(d_k)} = n_{k;d_k}'$, puis nous trouvons des vecteurs $\{u_{k;d_k-1}, ..., u_{k;1}\}$ tels que la matrice de Gram de la forme $\langle\ ,\ \rangle$ relativement à la famille $\{n_{k;1}, ..., n_{k;d_k}, u_{k;d_k}, ..., u_{k;1}\}$ soit donnée par $\epsilon^k U_k$, avec

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k-1} \\ \vdots & & & 0 & \diagup & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci définit les vecteurs $u_{k;l}$ (pour $1 \leq l \leq d_k - 1$) $\begin{cases} \bullet \text{modulo le noyau} K_{a_k+l-1} \\ \bullet \text{modulo un vecteur } h_l n_{k;l} \\ \text{pour une fonction réelle } h_l \end{cases}$

On peut alors faire un choix particulier de vecteur $u_{k;l}$ de telle sorte que la matrice des dérivées soit donnée par

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \zeta_h & \gamma_h & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \diagup & \diagup & \zeta_h & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \diagup & \diagup & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \zeta_2 & \diagup & \dots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \gamma_1 & \zeta_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $h = d_k$, γ_l est une fonction réelle, et ζ_l est une fonction imaginaire.

Par récurrence, nous avons ainsi obtenu une base de l'espace F_m. A ce stade, nous pouvons terminer notre construction pour obtenir une base de F_r exactement de la même manière que dans le cas pseudo-Riemannien. Autrement dit, si $r > a_m$, nous montrons que nous avons forcément $K_{a_m+1} \underset{\neq}{\subset} K_{a_m+2} \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} K_r$, et nous posons alors $n_{m;1} := \lambda_{(m)}e_{m;1}$

et, pour i compris entre 2 et $r - a_m$, $n_{m;i} := n_{m;1}^{(i-1)}$, où $\lambda_{(m)}$ est l'unique fontion vérifiant
$\begin{cases} n'_{m;r-a_m} \in K_{r-1} \\ \lambda_{(m)}(0) = 1 \end{cases}$

Bilan

Etant donnée une courbe r-pseudo-régulière c : $I \to \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^n$ étant muni d'une forme anti-hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$, il existe un repère $\{v_1, ..., v_r\}$ adapté au drapeau $F_{\subset} ... \subset F_r$, tel que la matrice de Gram et la matrice des dérivées se décomposent en blocs pairs ou impairs suivant les conditions du théorème 2.1, avec

• Cas impair

(i) $\mathcal{U}_k := \mathrm{i}U_k$, où U_k est la matrice $(2d_k + 1, 2d_k + 1)$ définie par

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^{d_k} \\ \vdots & & & & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Δ_k est une matrice $(2d_k + 1, 2d_k + 1)$ dépendant de d_k fonctions réelles $\gamma_l : I \to \mathbb{R}$, et de $d_k - 1$ fonctions imaginaires $\zeta_l : I \to \mathrm{i}\mathbb{R}$, de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta_h & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \zeta_{h-1} & \mathrm{i}\gamma_h & \zeta_h^* & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \diagup & & \diagup & \mathrm{i}\gamma_{h-1} & \zeta_{h-1}^* & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \diagup & \diagup & \diagup & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \zeta_2 & \diagup & \diagup & \diagup & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathrm{i}\gamma_1 & \zeta_2^* & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $h = d_k$, et $\zeta_l^* := -\mathrm{i}\bar{\zeta}_l\mathrm{i} = -\zeta_l$.

(iii) $\tilde{\varkappa}_k = \begin{cases} (-1)^{d_k}(-1)^{d_{k+1}}\mathrm{i}\bar{\varkappa}_k\mathrm{i} & \text{si } b_k \text{ est impair} \\ (-1)^{d_k}(-1)^{d_{k+1}}\epsilon^k\mathrm{i}\bar{\varkappa}_k & \text{si } b_k \text{ est pair} \end{cases}$

• Cas pair

(i) $\mathcal{U}_k := \epsilon^k U_k$, où $\epsilon^k = \pm 1$ est le signe de $\langle \pi^\perp(c^{(a_k+d_k)}), \pi^\perp(c^{(a_k+d_k+1)})\rangle_Q$ ($\pi^\perp$ désignant la projection canonique de l'espace $F_{a_k+d_k+1}$ sur l'espace non dégénéré de dimension 2 $(F_{a_k+d_k-1}/K_{a_k+d_k-1})^\perp$, et $\langle\ ,\ \rangle_Q$ est la forme hermitienne induite sur le quotient $F_{a_k+d_k+1}/K_{a_k+d_k-1}$ par $\langle\ ,\ \rangle$), et U_k est la matrice $(2d_k, 2d_k)$ donnée par

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-1)^{d_k-1} \\ \vdots & & & 0 & \diagup & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \diagup & & & & & \vdots \\ (-1)^{d_k} & 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Δ_k est une matrice $(2d_k, 2d_k)$ dépendant de d_k fonctions réelles $\gamma_l : I \to \mathbb{R}$ et $d_k - 1$ fonctions imaginaires $\zeta_l : I \to \mathbb{H}$, de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \zeta_h & \gamma_h & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \diagup & \diagup & \zeta_h & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \diagup & \diagup & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \zeta_2 & \diagup & \dots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \gamma_1 & \zeta_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $h := d_k$.

(iii) $\tilde{\varkappa}_k = \begin{cases} (-1)^{d_k}(-1)^{d_{k+1}}\epsilon^{k+1}\bar{\varkappa}_k\mathrm{i} & \text{si } b_k \text{ est impair} \\ (-1)^{d_k}(-1)^{d_{k+1}}\epsilon^k\epsilon^{k+1}\bar{\varkappa}_k & \text{si } b_k \text{ est pair} \end{cases}$

Pour finir, nous remarquons que l'équation $\varkappa_k = \lambda_{(k)}\lambda_{(k+1)}^{-1}$ est encore valable, ce qui nous donne une expresion de $|\varkappa_k|$ en fonction des déterminants de Gram de la courbe c.

CHAPITRE 3

Des coordonnées adaptées à la géométrie d'une hypersurface dégénérée

Introduction

La géométrie pseudo-Riemannienne présente de nombreuses différences avec la géométrie Riemannienne, différences dues notamment à l'existence de vecteurs isotropes.
Ainsi, contrairement au cas d'une variété Riemannienne, où la métrique induite sur une hypersurface est forcément définie positive, dans le cas pseudo-Riemannien, on distingue trois types d'hypersurfaces :

- des hypersurfaces temporelles, pour lesquelles le champ normal est temporel
- des hypersurfaces spatialles, pour lesquelles le champ normal est spatial
- des hypersurfaces nulles, pour lesquelles le champ normal est isotrope

Pour les hypersurfaces temporelles ou spatialles, la métrique induite sur l'hypersurface est non-dégénérée ; pour cette raison, on dit que ces hypersurfaces sont non-dégénérées. Au contraire, pour les hypersurfaces nulles, la métrique induite est dégénérée ; on dit alors que l'hypersurface est dégénérée.

Lorsque l'on étudie une hypersurface H d'une variété pseudo-Riemannienne (M, g), on voit apparaître très rapidement un opérateur important : la seconde forme fondamentale .

Si l'hypersurface H est non-dégénérée, on peut, comme dans le cas Riemannien, interpréter cet opérateur comme une projection de la connexion de Levi-Civita D de (M, g) sur le fibré normal $NH = TH^{\perp}$ à l'hypersurface, puisque la décomposition $TM_{|H} = TH \overset{\perp}{\oplus} NH$ reste vraie dans ce cas. On peut alors décrire la géométrie de H à l'aide de la connexion D^H induite sur H par D, et de la seconde forme fondamentale.
Dans le cas d'une hypersurface H dégénérée, la seconde forme fondamentale existe canoniquement, mais elle pose deux problèmes essentiels :

- si H est dégénérée, le fibré normal NH est un sous-fibré du fibré tangent TH, et n'est donc plus un supplémentaire naturel de TH dans $TM_{|H}$. Il n'existe donc plus de supplémentaire canonique de TH dans $TM_{|H}$. Par conséquent, il est plus difficile d'interpréter la seconde forme fondamentale comme une simple projection (comme on le fait pour une variété Riemannienne), puisque pour ce faire, il nous faut alors faire un choix de supplémentaire de TH dans $TM_{|H}$.
- la connexion D sur M n'induit pas nécéssairement une connexion métrique sur H, et même quand cela se produit, cette connexion ne suffit pas, avec la seconde forme fondamentale, à décrire entièrement la géométrie de l'hypersurface H. Il manque de l'information, que nous devons trouver et traduire sous forme de nouveaux opérateurs.

Ce second problème peut s'interpréter facilement en termes de G-structures : sur la variété ambiante, on a une structure pseudo-Riemannienne (une $O(p, q)$-structure), qui induit une G-structure sur H. Si H est dégénérée, le groupe G n'est alors plus un groupe orthogonal, et la G-structure induite se comporte donc très différemment d'une structure pseudo-Riemannienne. En particulier, on n'a pas forcément une G-connexion D^H induite sur H par D.

Notre but dans ce chapitre va donc être de mieux comprendre la géométrie intrinsèque d'une hypersurface dégénérée d'une variété pseudo-Riemannienne, en définissant de nouveaux invariants naturellement associés à l'hypersurface H, traduisant en quelques sortes

le défaut de la G-structure induite sur H à être intégrable. Nous utiliserons alors ces invariants pour tenter de construire des systèmes de coordonnées adaptés à la géométrie de l'hypersurface.
Dans un premier temps, nous rappelerons comment définir et interpréter la seconde forme fondamentale d'une hypersurface. Nous limiterons notre étude au cas d'une hypersurface H dégénérée totalement géodésique (i.e. à seconde forme fondamentale identiquement nulle), puisque nous verrons que la seconde forme fondamentale d'une hypersurface dégénérée est en fait la première obstruction à l'intégrabilité de la G-structure induite sur H. En utilisant les techniques de la cohomologie de Spencer, nous déduirons alors de nouvelles obstructions à l'intégrabilité, et utiliserons ces obstructions pour décider selon les cas comment construire des systèmes de coordonnées naturels sur l'hypersurface.
Avec le chapitre 5, nous expliquerons comment propager nos coordonnées au voisinage de l'hypersurface. Enfin, nous appliquerons nos résultats au cas des espaces à courbures constantes (chapitre 6), et plus généralement (chapitre 7), aux espaces localement symétriques pour lesquels on verra que l'équation $DR = 0$ entraînera plusieurs conséquences intéressantes pour nos coordonnées.

Dans ce chapitre, nous considérons une variété pseudo-Riemannienne (M^n, g), et $H \subset M$ une hypersurface dégénérée de M. Notre but va être de dégager les invariants successifs associés naturellement à H, afin de construire des systèmes de coordonnées adaptés à la géométrie de H.

1. Le premier invariant : la seconde forme fondamentale

Dans l'étude de la géométrie des sous-variétés, il apparaît un opérateur important appelé seconde forme fondamentale (on désigne quelquefois la métrique induite sur la sous-variété sous le nom de première forme fondamentale). Dans le cas de sous-variétés non-dégénérées (i.e. telles que la métrique induite sur la sous-variété soit non-dégénérée en tout point), cet opérateur permet, avec la connexion induite sur la sous-variété, de décrire entièrement la géométrie de la sous-variété. Dans le cas où la métrique induite est dégénérée (en tout point), la seconde forme fondamentale existe canoniquement. Cependant, elle ne contient pas, avec la connexion induite, toute l'information sur la géométrie de la sous-variété.
Dans cette thèse, nous limiterons notre étude au cas des sous-variétés de codimension 1, autrement dit des hypersurfaces.
Dans ce premier chapitre, nous allons rappelé comment est définie la seconde forme fondamentale d'une hypersurface dégénérée H, et expliqué comment cet opérateur s'interprète géométriquement. Pour cela, nous considérerons deux points de vue différents pour aborder l'étude d'une hypersurface :

- une vision "classique", en décrivant géométriquement les propriétés d'une hypersurface dégénérée
- une vision en termes de G-structures

1.1. Définition.

Nous commençons ici par quelques rappels sur la seconde forme fondamentale d'une hypersurface en général (pour plus de détails, le lecteur pourra consulter, entre autres, [**B**] ou [**O'N**]).

DÉFINITION 1.1. Soit H une hypersurface de (M, g), variété pseudo-Riemannienne. Notons D la connexion de Levi-Civita de (M, g). On appelle seconde forme fondamentale de H l'opérateur symétrique $II \in S^2TH^* \otimes TM/TH$ défini par

$$\begin{aligned} II : TH \times TH &\longrightarrow TM/TH \\ (U, V) &\longmapsto [D_U V] \end{aligned}$$

Remarque : cet opérateur est bien tensoriel car pour tous champs $Y, Y' \in TH$ le long de H, et toute fonction f sur H, on a $D_Y(fY') = fD_YY' + \underbrace{Y(f)Y'}_{\in TH}$, donc $[D_Y(fY')] = f[D_YY']$. Par conséquent, $II_p(Y_p, Y'_p)$ ne dépend que des valeurs Y_p et Y'_p, et

non pas des champs Y, Y' prolongeant Y_p, Y'_p sur M (au voisinage de p) avec $Y, Y' \in TH$ le long de H.

DÉFINITION 1.2. L'hypersurface H est dite totalement géodésique si $D_Y Y' \in TH$ pour tous champs Y, Y' sur TH le long de H (quel que soit leur prolongement à M). Autrement dit, une hypersurface H est totalement géodésique si et seulement si sa seconde forme fondamentale est identiquement nulle.

Il est connu que l'on a les équivalences suivantes (on pourra consulter [**O'N**] pour une preuve de cette affirmation) :

PROPOSITION 1.3.

H est totalement géodésique $\iff$ D induit par restriction une connexion (sans torsion) sur la variété H
$\iff$ toute géodésique de M qui est tangente à H en un point est dans H (au moins localement)

Remarquons que, via la métrique g sur M, on a toujours $T_pM/T_pH = (T_pH^\perp)^*$, l'isomorphisme étant donné par

$$\begin{aligned} \phi : T_pH^\perp &\longrightarrow (T_pM/T_pH)^* \\ U_p &\longmapsto (\varphi : [Y_p] \to g_p(U_p, Y_p)) \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.4. *La seconde forme fondamentale d'une hypersurface H peut donc être vue comme un opérateur $II \in S^2TH^* \otimes (TH^\perp)^*$.*

Dans le cas où l'hypersurface H est non-dégénérée (en tout point), la décomposition $T_pM = T_pH \overset{\perp}{\oplus} T_pH^\perp$ nous montre que l'on a un isomorphisme $T_pM/T_pH \simeq T_pH^\perp$. En fait, dans le cas-non dégénéré, T_pH posséde un produit scalaire non-dégénéré, et on a ainsi une identification $(T_pH^\perp)^* \simeq T_pH^\perp$.
On retrouve alors la définition classique $II_p : T_pH \times T_pH \to T_pH^\perp$ (cf. [**B**]).

A partir de maintenant, nous considérons le cas où l'hypersurface H est partout dégénérée. Si H est partout dégénérée, on a $T_pH^\perp \subset T_pH \ \forall p \in H$; Il n'y a donc plus de décomposition naturelle en somme directe de T_pM. D'autre part, $T_pH^\perp$ est maintenant totalement isotrope. Par conséquent, il n'y a plus d'isomorphisme canonique entre $T_pH^\perp$ et son dual $(T_pH^\perp)^*$.
Cependant, nous avons dans ce cas une propriété supplémentaire : puisque H est une hypersurface de M, il est clair que $T_pH^\perp$ est de dimension un. Notons alors χ la 1-distribution sur H définie par $\chi : p \in H \to T_pH^\perp \subset T_pH$. Nous avons alors

PROPOSITION 1.5. *Tout champ $X \in \chi$ est géodésique. Autrement dit, χ est totalement géodésique.*

DÉMONSTRATION. Soit $X \in \chi$ et $Y \in \Gamma(TH)$.
On a $\langle D_X X, Y\rangle = X\langle X, Y\rangle - \langle X, D_X Y\rangle$. Or $\langle X, Y\rangle = 0$ sur H, et X est un champ sur H. Donc $X\langle X, Y\rangle = 0$.
D'autre part, $\langle X, D_X Y\rangle = \langle X, [X, Y]\rangle + \langle X, D_Y X\rangle$. Puisque le crochet $[X, Y]$ est un

champ sur H, on a $\langle X, [X,Y]\rangle = 0$. En oûtre, $\langle X, D_Y X\rangle = \frac{1}{2}Y\langle X, X\rangle = 0$.
D'où $\langle D_X X, Y\rangle = 0 \quad \forall Y \in \Gamma(TH)$. Il s'ensuit que $D_X X \in \chi$. Comme χ est de dimension un, $D_X X$ est donc proportionnel à χ.
D'où le résultat. □

COROLLAIRE 1.6. *La seconde forme fondamentale de H vérifie $II(X,X,.) = 0$ $\forall X \in \chi$.*

Plus précisément, soit $X \in \chi$ et $Y \in \Gamma(TH)$. Puisque $\langle D_Y X, X\rangle = \frac{1}{2}Y\langle X, X\rangle = 0$, nous en déduisons que $D_Y X$ reste tangent à H, et donc que $II(X,Y) = II(Y,X) = 0$. Notons alors $\mathcal{Y}$ le quotient TH/χ. La remarque que nous venons de faire prouve alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1.7. *la seconde forme fondamentale de H passe (sur TH) au quotient en un élément de $\chi^* \otimes S^2\mathcal{Y}^*$.*

On retrouve ici la vision de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface dégénérée adoptée par G.J. Galloway (cf. [**G**]), et R.Wald (cf. [**W**]).

De plus, puisque $\chi = TH^{\perp}$, le produit scalaire g_p, restreint à T_pH, passe au quotient en un produit scalaire sur $\mathcal{Y}$, non-dégénéré . En particulier, il y a un isonorphisme canonique

$\mathcal{Y} \simeq \mathcal{Y}^*$, et on peut ainsi identifier $\mathcal{Y}$ avec son dual (par contre, on distinguera soigneusement χ et χ^*). A l'aide de cette identification, on obtient finalement $II \in \chi^* \otimes S^2\mathcal{Y}$.

D'autre part, puisque χ est une 1-distribution sur H, χ définit donc un 1-feuilletage sur H ; D'après la proposition 1.5, ce 1-feuilletage de H est géodésique. Le quotient de H par ce feuilletage n'est pas forcément une variété (entre autres, il n'est pas forcément séparé). Cependant, quitte à prendre un voisinage d'un point base $p_0 \in H$ "adapté au feuilletage χ", on peut supposer que sur ce voisinage (quitte à l'appeler encore H), le feuilletage correspond aux fibres d'une fibration $\pi : H \to \overset{\swarrow}{H}$, où $\overset{\swarrow}{H}$ est une variété de dimension $dim\ H - 1$ (cf. [**P**]).
L'application $T_p\pi : T_pH \to T_{\pi(p)}\overset{\swarrow}{H}$ a alors pour noyau $\chi = T_pH^{\perp}$, donc $T_p\pi$ induit un isomorphisme naturel de $\mathcal{Y}_p = T_pH/\chi$ avec $T_{\pi(p)}\overset{\swarrow}{H}$.
Autrement dit, $\mathcal{Y}$, vu comme un fibré vectoriel sur H, n'est autre que le fibré image réciproque du fibré tangent à $\overset{\swarrow}{H}$ par $\pi : \mathcal{Y} = \pi^* T\overset{\swarrow}{H}$.
Pour $p \in H$, on a donc un produit scalaire induit sur $T_{\pi(p)}\overset{\swarrow}{H}$ par $T_p\pi$. Cependant, ce produit scalaire peut varier sur $T_{\pi(p)}\overset{\swarrow}{H}$, si on change de point p dans la fibre $\pi^{-1}(\pi(p))$ au-dessus de $\pi(p)$. Il n'y a donc pas forcément (en général) de métrique canonique sur $\overset{\swarrow}{H}$. Cependant, quitte à restreindre encore le voisinage choisi dans H, on peut supposer que la projection $\pi : H \to \overset{\swarrow}{H}$ admet des sections $\sigma : \overset{\swarrow}{H} \to H$ (telles que $\pi \circ \sigma = id_{\overset{\swarrow}{H}}$). Si maintenant σ est une telle section, $T_{\overset{\swarrow}{p}}\sigma$ injecte $T_{\overset{\swarrow}{p}}\overset{\swarrow}{H}$ dans $T_{\sigma(\overset{\swarrow}{p})}H$, transversalement à χ ; Autrement dit, on a $T_{\overset{\swarrow}{p}}\sigma(T_{\overset{\swarrow}{p}}\overset{\swarrow}{H}) \cap T_{\sigma(\overset{\swarrow}{p})}H^{\perp} = \{0\}$. En particulier, g induit par restriction

une structure pseudo-Riemannienne (non-dégénérée) sur $\sigma(\check{H})$. On peut alors la considérer comme une structure sur $\check{H}$, mais dans le cas général, cette structure dépend de la section σ.
La propriété suivante, remarquée entre autres par Kupeli (cf. [**Ku**]), va nous permettre de relier la seconde forme fondamentale II à la façon dont cette structure dépend de σ.

PROPOSITION 1.8. *Soit H une hypersurface dégénérée d'une variété pseudo-Riemannienne (M^n, g). Alors, pour $X \in \chi$, l'opérateur $II(X,.,.) \in S^2\mathcal{Y}$ mesure la variation, par changement de section, de la métrique induite sur $\check{H}$. Plus précisément, on a*

$\forall X \in \chi,\ II(X,.,.) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g.$

DÉMONSTRATION. Soient $X \in \chi$, $Y, Y' \in \mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X g(Y,Y') &= X\langle Y,Y'\rangle - \langle [X,Y],Y'\rangle - \langle Y,[X,Y']\rangle \\
&= \langle D_X Y, Y'\rangle + \langle Y, D_X Y'\rangle \\
&\quad -\langle D_X Y - D_Y X, Y'\rangle - \langle Y, D_X Y' - D_{Y'} X\rangle \\
&= \langle D_Y X, Y'\rangle + \langle Y, D_{Y'} X\rangle \\
&= Y\underbrace{\langle X,Y'\rangle}_{=0} - \langle X, D_Y Y'\rangle + Y'\underbrace{\langle Y,X\rangle}_{=0} - \langle D_{Y'} Y, X\rangle \\
&= -\langle X, D_Y Y' + D_{Y'} Y\rangle \\
&= -\langle X, 2D_Y Y' + [Y,Y']\rangle \\
&= -2\langle X, D_Y Y'\rangle + \langle X, [Y,Y']\rangle.
\end{aligned}$$

Or $[Y,Y'] \in \mathcal{Y}$, donc $\langle X,[Y,Y']\rangle = 0$.
D'où $\mathcal{L}_X g(Y,Y') = -2II(X,Y,Y')$. □

COROLLAIRE 1.9. *La métrique induite sur $\check{H}$ par une section σ ne dépend pas du choix de la section σ (au moins localement) si et seulement si H est totalement géodésique. Autrement dit, il existe une structure pseudo-Riemannienne canonique induite par $g_{|H}$ sur $\check{H}$ si et seulement si H est totalement géodésique.*

Remarque : d'après la proposition 1.8, une hypersurface dégénérée H est totalement géodésique si et seulement si $\mathcal{L}_X g = 0\ \forall X \in \chi$. Cette propriété a été généralisée aux sous-variétés dégénérées de codimension arbitraire d'une variété pseudo-Riemannienne par D.N. Kupeli (cf. [**Ku**]) qui appelle une sous-variété dégénérée N stationnaire si $\mathcal{L}_U g_N = 0$ pour tous champs U du noyau de la métrique induite sur N.

Par définition, la seconde forme fondamentale mesure, pour deux champs Y,Y' sur H, le défaut du champ $D_Y Y'$ à rester sur H. Nous allons maintenant, à l'aide de la théorie des G-structures, considérer la seconde forme fondamentale avec un regard nouveau.
Si H est une hypersurface partout dégénérée, la restriction de g à H est une forme quadratique partout dégénérée (de co-rang 1). Du point de vue des "G-structures", une

telle donnée se comporte très différemment d'une structure pseudo-Riemannienne (une $O(p,q) - structure$), qui est alors non-dégénérée. En particulier, si l'hypersurface H est non-dégénérée (en tout point), il existe sur H une connexion métrique sans torsion induite par la connexion de Levi-Civita de (M,g). De plus, cette connexion est unique : c'est la connexion de Levi-Civita de la variété pseudo-Riemannienne $(H, g_{|H})$.
Dans le cas dégénéré, une telle connexion n'existe pas nécessairement sur H, et , si elle existe, elle n'est pas forcément unique.
Nous allons donc à présent étudier plus précisément ces différences entre hypersurfaces dégénérées et non-dégénérées du point de vue des G-structures, et en déduire une nouvelle interprétation de la seconde forme fondamentale.

1.2. Interprétation en termes de G-structures.

1.2.1. *rappels sur les G-structures.*
Nous donnons ici les définitions principales concernant les G-structures. Le lecteur pourra consulter [**Ch**] ou [**Ber**] pour plus de détails.

DÉFINITION 1.10. Soit G un groupe linéaire (sous-groupe de Lie de $Gl(n,\mathbb{R})$). On appelle G-structure sur une variété M une réduction du fibré des repères de M à G.
Autrement dit, une G-structure est la donnée d'un G-fibré principal $\mathcal{P}$ sur M, et d'un homomorphisme α du fibré $\mathcal{P}$ dans le fibré $\mathcal{PM}$ des repères de TM, équivariant pour l'inclusion de G dans $Gl(n,\mathbb{R})$ (i.e. $\alpha(p.g) = \alpha(p).g \quad \forall\ p \in \mathcal{P}, g \in G$).

Exemples

(1) Une $O(n)$-structure n'est rien d'autre que la donnée d'une métrique Riemannienne sur M.

(2) Une $O(p,q)$-structure est la donnée d'une métrique pseudo-Riemannienne sur M.

(3) Une $Sp(n,\mathbb{R})$-structure est la donnée d'une structure presque symplectique sur M.

(4) Une $Gl(n,\mathbb{C})$-structure (où l'on considère l'inclusion $Gl(n,\mathbb{C}) \subset Gl(2n,\mathbb{R})$) est la donnée d'une structure presque complexe sur M.

DÉFINITION 1.11. Soit $\mathcal{P}$ une G-structure sur une variété M. Une connexion sur le G-fibré principal $\mathcal{P}$ est appelée une G-connexion sur M. Une G connexion sur M est donc la donnée :
• d'une G-structure sur M : $\overset{\frown}{\mathcal{P}}^{G} \xrightarrow{\pi^{\mathcal{P}}} M$
• d'une connexion sur $\mathcal{P}$

Intégrabilité de G-structure

Quand on a une G-structure sur une variété M, une des questions importantes que l'on

peut se poser est de savoir si cette structure est intégrable. Nous commençons donc ici par définir la notion d'intégrabilité d'une G-structure.

Sur $\mathbb{R}^n$, on a une G-structure naturelle pour tout groupe linéaire G, qui n'est rien d'autre que le fibré $pr_1 : \mathbb{R}^n \times G \to \mathbb{R}^n$.
On appelle cette structure la G-structure plate canonique.

DÉFINITION 1.12. On dit qu'une G-structure est intégrable si elle est, en tout point, localement isomorphe à la G-structure plate canonique. Autrement dit, une G-structure sur une variété M est intégrable si pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de p dans M, et des coordonnées $\{x_1, ..., x_n\}$ sur $\mathcal{U}$ telles que la section $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ de $\mathcal{PM}$ sur $\mathcal{U}$ soit une section de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{U}$. Un tel système de coordonnées est alors dit admissible par rapport à la G-structure $\mathcal{P}$.

Remarque : Si $\{x_1, ..., x_n\}$, $\{y_1, ..., y_n\}$ sont deux systèmes de coordonnées admissibles sur des ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, alors la matrice Jacobienne $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans G pour tout point $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Exemples

(1) Une $O(p, q)$-structure est intégrable si et seulement si la métrique pseudo-Riemannienne induite est à courbure nulle.

(2) Une $Gl(n, \mathbb{C})$-structure intégrable est la donnée d'une structure complexe sur M.

(3) Une $Sp(n, \mathbb{R})$-structure intégrable est la donnée d'une structure symplectique sur M.

Le premier tenseur d'intégrabilité

En général, décider si une G-structure sur une variété M est intégrable est une question délicate. La stratégie la plus communément employée consiste à tester, sur la G-structure, des obstructions successives à l'intégrabilité. Nous allons dans ce paragraphe définir la première de ces obstructions à l'intégrabilité d'une G-structure, connue sous le nom de tenseur de Chern-Bernard.
Le lecteur pourra trouver une bonne introduction aux problèmes d'intégrabilité d'une G-structure, et à la cohomologie de Spencer dans l'article de D.V. Alekseevsky et S. Marchiafava (cf. [**A – M**]).

Soit $\mathcal{P} \to M$ une G-structure. Il existe toujours une G-connexion ∇. A la connexion ∇, on associe un tenseur $T^\nabla \in \bigwedge^2 T^*M \otimes TM$ appelé torsion de ∇ :
$T^\nabla(Y, Y') = \nabla_Y Y' - \nabla_{Y'} Y - [Y, Y']$.
Une propriété fondamentale des G-structures est donnée par le lemme suivant :

LEMME 1.13. *une G-structure intégrable admet toujours une G-connexion sans torsion.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert muni d'un système de coordonnées admissibles $\{x_1, ..., x_n\}$. Soit $\omega_\mathcal{U}$ la connexion plate sur $\mathcal{P}_{|\ \mathcal{U}}$, telle que les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ soient

parallèles.
On recouvre M par une famille localement finie de tels ouverts. Soit $\{f_u\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$; On définit alors la connexion $\omega := \sum_{\mathcal{U}} \pi^* f_u . \omega_u$, où $\pi : \mathcal{P} \to M$ est la projection. □

Nous allons, à l'aide de cette propriété, définir une première obstruction à l'intégrabilité d'une G-structure.
Pour cela, notons $V \approx \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G. L'application $Alt_{1,2} : \bigotimes^2 V^* \otimes V \to \bigwedge^2 V^* \otimes V$, restreinte à $V^* \otimes \mathfrak{g} \subset \bigotimes^2 V^* \otimes V$, induit une application G-équivariante $\partial : V^* \otimes \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 V^* \otimes V$.
Cette application G-équivariante passe à une application $\Gamma(V^* \otimes \mathfrak{g}) \to \Gamma(\bigwedge^2 V^* \otimes V)$.
Comme le quotient $\bigwedge^2 V^* \otimes V / \partial(V^* \otimes \mathfrak{g})$ s'interprète en termes de cohomologie de Spencer, nous notons usuellement $\mathcal{H}^{0,2}(\mathfrak{g})$ ce quotient, et c la projection $\bigwedge^2 V^* \otimes V \to \mathcal{H}^{0,2}(\mathfrak{g})$.

PROPOSITION 1.14. *Soient ∇, ∇' deux G-connexions sur le fibré $\mathcal{P} \to M$. Alors on a $c(T^\nabla) = c(T^{\nabla'})$.*

DÉMONSTRATION. On a $\nabla - \nabla' = B$, où B est un (1,2)-tenseur. On en déduit aisément $T^\nabla - T^{\nabla'} = 2Alt_{1,2}(B)$. Or, l'application $Y' \to B(Y, Y')$ est dans $\mathfrak{g}$, pour tout Y. D'où $B \in V^* \otimes \mathfrak{g}$. Donc $T^\nabla - T^{\nabla'} \in \partial(V^* \otimes \mathfrak{g})$. □

Nous notons $c_1 := c(T^\nabla) \in \mathcal{H}^{0,2}(\mathfrak{g})$, pour ∇ une G-connexion arbitraire (c_1 est bien défini d'après la proposition précédente).

PROPOSITION 1.15. *Une G-structure admet une G-connexion sans torsion si et seulement si $c_1 = 0$. Dans ce cas, la G-structure est dite 1-intégrable.*

DÉMONSTRATION. Si la G-structure admet une G-connexion sans torsion ∇^0, alors $c_1 = c(T^{\nabla^0}) = c(0) = 0$.
Réciproquement, si $c_1 = 0$, soit ∇ une G-connexion quelconque. On a alors $c_1 = c(T^\nabla) = 0$, donc $T^\nabla \in \partial(V^* \otimes \mathfrak{g})$. Autrement dit, il existe un (1,2)-tenseur B tel que $T^\nabla = Alt_{1,2}(B)$.
La G-connexion $\nabla^0 := \nabla - \frac{1}{2}B$ vérifie alors $T^{\nabla^0} = 0$. □

Nous retrouvons ici le résultat de S. Kobayashi et T.Nagano (cf. [**K – Na**]).

DÉFINITION 1.16. c_1 est appelé premier tenseur d'intégrabilité, ou tenseur de Chern-Bernard, de la G-structure.

COROLLAIRE 1.17. *Une condition nécessaire pour qu'une G-structure soit intégrable est* $\underline{c_1 = 0}$.

1.2.2. *Le cas des hypersurfaces dégénérées.*

Revenons à notre hypersurface dégénérée $H \subset M$. Sur H, on a une métrique induite $g_{|H}$ qui est dégénérée en tout point. Cette métrique correspond à une G-structure sur H, mais pour laquelle G n'est pas un groupe orthogonal. Cette G-structure se comporte donc très différemment d'une structure pseudo-Riemannienne. En particulier, il n'existe pas nécessairement de G-connexion sans torsion sur H (i.e. la G-structure n'est pas forcément 1-intégrable) ; d'autre part, si une telle connexion existe sur H, elle n'est pas nécessairement unique. Afin de mieux comprendre le comportement de la G-structure induite sur H

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES

par la métrique $g_{|H}$, et de déterminer si elle est intégrable (ou au moins 1-intégrable), nous sommes donc contraints de faire une analyse précise de cette G-structure, et de rechercher son premier tenseur d'intégrabilité.
Dans un premier temps, nous étudierons la G-structure au premier ordre, nous contentant de trouver des informations sur H données uniquement par la métrique induite. Nous en déduirons alors une première obstruction à l'intégrabilité de la G-structure induite sur H. Dans les chapitres suivants, nous étudierons les G-structures d'ordre supérieur ; en particulier, l'essentiel de l'information que nous tirerons se situera à l'ordre 2, quand nous considérerons non seulement la métrique induite sur H, mais aussi la connexion induite par la connexion de Levi-Civita de la variété ambiante (dans le cas, bien sûr, où H est totalement géodésique).

Sur M, on a une métrique pseudo-Riemannienne, autrement dit une $O(p,q)$-structure. Cette structure induit une G-structure sur H, avec

$$\begin{aligned} G ='' \, & Isom(H, g_{|H})'' \\ & = \{h_{|H} / \ h \in O(p,q) \ \ laisse \ \ stable \ \ H \ \ et \ \ g_{|H}\} \end{aligned}$$

Remarque : cette structure correspond à l'action du groupe $Aut(T_pH, g_{|T_pH \times T_pH})$ sur T_pH.

Si on choisit une base diagonalisante de V, dans laquelle $g_{|V}$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{p-1,q-1} \end{pmatrix}$$

alors on peut montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est donnée par

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & B^t \\ 0 & D \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}^{n-2}, D \in \mathfrak{so}(p-1, q-1) \right\}$$

Plus précisément, on a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{n-2} \times (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(p-1, q-1))$ (l'algèbre de Lie du groupe conforme agissant sur $\mathbb{R}^{n-2}$).

Soit ∇ une G-connexion sur H, et T^∇ sa torsion. Pour $X \in \chi$, on a clairement $T^\nabla_X X = 0$; L'opérateur T^∇_X passe donc au quotient $\mathcal{Y}$. On obtient ainsi un opérateur

$$\begin{aligned} [T^\nabla_X] : \mathcal{Y} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ [Y] &\longmapsto [T^\nabla_X Y] \end{aligned}$$

Décomposons alors l'opérateur $[T^\nabla_X] \in \mathcal{Y}^* \otimes \mathcal{Y} \approx End(\mathcal{Y})$ en parties symétriques et anti-symétriques par rapport à la métrique induite sur $\mathcal{Y}$: $[T^\nabla_X] = S^\nabla_X + A^\nabla_X$.

PROPOSITION 1.18. *$S^\nabla_X \simeq \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g$, i.e. $\forall \ Y, Y' \in \Gamma(TH)$, $g_{\mathcal{Y}}(S^\nabla_X[Y], [Y']) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(Y, Y')$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
2\langle S_X^\nabla[Y],[Y']\rangle &= \langle T_X^\nabla Y, Y'\rangle + \langle Y, T_X^\nabla Y'\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Y'\rangle - \langle \nabla_Y X, Y'\rangle - \langle [X,Y], Y'\rangle \\
&\quad + \langle Y, \nabla_X Y'\rangle - \langle Y, \nabla_{Y'} X\rangle - \langle Y, [X,Y']\rangle \\
&= X\langle Y, Y'\rangle - \langle [X,Y], Y'\rangle - \langle Y, [X,Y']\rangle \\
&\quad + \underbrace{\langle X, \nabla_Y Y'\rangle + \langle \nabla_{Y'} Y, X\rangle}_{=0 \text{ car } \nabla \text{ connexion sur } H} \\
&= \mathcal{L}_X g(Y,Y')
\end{aligned}$$

□

Puisque $\mathcal{L}_X g$ est indépendant de ∇, nous obtenons donc une première obstruction à l'existence d'une G-connexion sans torsion sur H. Plus précisément, on a le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 1.19. *Soit H une hypersurface dégénérée de M, variété pseudo-Riemannienne.*

Alors $c_1 = 0 \Longleftrightarrow H$ est totalement géodésique.

DÉMONSTRATION. Supposons $c_1 = 0$. Il existe donc sur H une G-connexion sans torsion ∇^0. On a alors $S_X^{\nabla^0} = 0 \quad \forall\ X \in \chi$. D'où $\mathcal{L}_X g = 0 \quad \forall\ X \in \chi$. La seconde forme fondamentale de H est donc nulle.
Réciproquement, supposons H totalement géodésique. La connexion de Levi-Civita D de (M,g) induit une connexion D^Hsur H. Puisque D est sans torsion, il en est de même de D^H. D'autre part, puisque D est métrique, on a, pour tous champs U, V, W sur V,

$$\begin{aligned}
U\langle V, W\rangle &= \langle D_U V, W\rangle + \langle V, D_U W\rangle \\
&= \underbrace{\langle D_U^H V, W\rangle + \langle V, D_U^H W\rangle}_{\text{puisque } H \text{ est totalement geodesique}}
\end{aligned}$$

Donc D^H est une connexion sur H, métrique et sans torsion.
D'où $c_1 = c(T^{D^H}) = c(0) = 0$. □

2. Les invariants associés à une hypersurface dégénérée

Comme nous l'avons déjà souligné précédemment, la seconde forme fondamentale d'une hypersurface dégénérée H ne contient pas, avec la connexion induite D^H, toute l'information sur la géométrie de H. Pour trouver où se cache l'information manquante, il nous faut donc définir de nouveaux invariants naturellement associés à H. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette partie, en utilisant les techniques de la cohomologie de Spencer. Nous verrons dans les parties suivantes quels sont les liens qui relient les invariants obtenus et la construction de coordonnées adaptées sur H.

Pour plus de clarté, nous résumons ci-dessous en quelques mots le procédé par lequel nous obtenons nos nouveaux invariants.
Pour tout entier k compris entre 1 et n-1, $\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}$-module. On a donc une représentation naturelle de $\mathfrak{g}$ sur $\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}$: $\quad r_k : \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{R}}(\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g})$.
Il est clair que cette représentation est réductible. Autrement dit, il existe des sous-espaces de $\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}$ invariants sous l'action de $\mathfrak{g}$.
Nous allons dégager progressivement les invariants associés à H en regardant les quotients "successifs" par ces sous-espaces invariants.
Rappelons à cet effet que nous avons les deux suites :

$$\begin{cases} \chi \to V \to V/\chi := \mathcal{Y} \\ \mathcal{Y}^* \simeq \mathcal{Y} \to V^* \to \chi^* \end{cases}$$

Dans la pratique, nous formons ces quotients de la manière suivante (dans toute la suite, nous désignerons par X un champ de la distribution χ, et $Y, Y', ...$ des champs sur $\mathcal{Y}$) :

1. Soit ∇ une G-connexion sur H (si H est totalement géodésique, nous choisirons $\nabla = D^H$). Nous notons $\mathcal{R}^{(k)}$ l'opérateur associé à l'étape k : $\mathcal{R}^{(1)} = T^{\nabla}$, $\mathcal{R}^{(2)} = R^{\nabla}$, $\mathcal{R}^{(3)} = \nabla R^{\nabla}$, ...

2. Nous considérons l'inclusion $\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g} \subset \bigotimes^k V^* \otimes V^* \otimes V$, et formons le sous-quotient $(\bigotimes^{k-1} \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}) \bigcap (\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g})$ (qui est le quotient contenant le plus de termes χ^*, qui soit non-trivial, car $(\bigotimes^k \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}) \bigcap (\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}) = \{0\}$). A ce quotient correspond la courbure $\langle \mathcal{R}^{(k)}(\underbrace{X, ..., X}_{k}, Y, X), Y' \rangle$.

3. Nous remplaçons un à un les facteurs χ^* par $\mathcal{Y}$ (avec l'identification $\mathcal{Y} \simeq \mathcal{Y}^*$), puis le dernier facteur $\mathcal{Y}$ par χ, afin d'obtenir les k+1 quotients et courbures correspondantes

- $(\bigotimes^l \chi^* \otimes \mathcal{Y} \bigotimes^{k-l-2} \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}) \bigcap (\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}) \leftrightarrow \langle \mathcal{R}^{(k)}(\underbrace{X, ..., X}_{l}, Y, \underbrace{X, ..., X}_{k-l-2}, Y', X), Y'' \rangle$

pour $l = 0, ..., k-2$.
- $(\bigotimes^{k-1} \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}) \bigcap (\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}) \leftrightarrow \langle \mathcal{R}^{(k)}(\underbrace{X, ..., X}_{k-1}, Y, Y'), Y'' \rangle$.
- $(\bigotimes^{k-1} \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \chi) \bigcap (\bigwedge^k V^* \otimes \mathfrak{g}) \leftrightarrow$ composante en X de $\mathcal{R}^{(k)}(\underbrace{X, ..., X}_{k-1}, Y, X)$.

4. Nous recommençons le même procédé à partir de chacun des k+1 sous-quotients obtenus, et continuons ainsi jusqu'à obtenir finalement le quotient $\bigotimes^{k+1} \mathcal{Y} \otimes \chi \leftrightarrow$ composante en X de $\mathcal{R}^{(k)}(Y_1, ..., Y_{k+1})$.

Remarquons en oûtre qu'en utilisant les symétries de l'opérateur $\mathcal{R}^{(k)}$, nous pouvons identifier chacun des sous-quotients obtenus.

2.1. Première étape : k=1, étude de la torsion.

Soit∇ une G-connexion arbitraire. Nous écrivons d'abord le sous-quotient
$\mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y} \simeq \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$ auquel correspond l'élément de torsion $[T^{\nabla}_X Y]$ (où [.] désigne

la classe dans $\mathcal{Y} = TH/\chi$). Ce quotient se sépare naturellement en $\chi^* \otimes \mathcal{S}^2\mathcal{Y}$ et $\chi^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Y}$.

Ensuite, viennent au même niveau
• $\chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi \simeq \mathcal{Y}$ auquel correspond la composante en X de $T^\nabla_X Y$
• $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$ auquel correspond l'élément de torsion $[T^\nabla_Y Y']$
Remarquons que ces deux derniers éléments de torsion ne donnent des invariants bien définis sur H que si le premier élément $[T^\nabla_X Y]$ est nul.
Enfin, on a le quotient $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi$ auquel correspond la composante en X de $T^\nabla_Y Y'$ (bien définie si les deux torsions précédentes sont nulles).

Parmi tous les objets qui apparaissent successivement, il nous reste à découvrir quels sont les vrais invariants ; Autrement dit, la question est de savoir quels éléments de torsion on peut tuer par un changement de G-connexion.
Considérons donc ∇' une autre G-connexion. La différence $\nabla' - \nabla$ est un (1,2)-tenseur B, tel que l'opérateur B_U. soit antisymétrique par rapport à $g_{|H}$. De plus, la torsion $T^{\nabla'}$ est reliée à la torsion T^∇ par la formule $T^{\nabla'} = T^\nabla + 2Alt_{1,2}(B)$.
Nous allons choisir le tenseur B tel que la nouvelle connexion ∇' ait une torsion aussi "nulle" que possible. Pour cela, nous commencons par le premier élément de torsion obtenu $[T^\nabla_X Y]$, que nous décomposons en parties symétrique $(S^\nabla_X Y)$ et antisymétrique $(A^\nabla_X Y)$ par rapport à $g_{|H}$. Nous avons déjà vu que $S^\nabla_X \simeq \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g$. $\mathcal{L}_X g$ étant indépendant de la G-connexion ∇, nous obtenons donc là une première obstruction pour pouvoir annuler $[T^\nabla_X Y]$. Nous allons donc essayer d'annuler $A^\nabla_X Y$.

LEMME 2.1. $A^{\nabla'}_X Y = A^\nabla_X Y + [B_X Y]$

DÉMONSTRATION. $T^{\nabla'}_X Y = T^\nabla_X Y + B(X,Y) - B(Y,X)$ sur V. Or

$$\begin{aligned}\langle B_Y X, Y'\rangle &= -\langle X, B_Y Y'\rangle \text{car } B_Y \text{ est antisymétrique / } g_{|H} \\ &= 0 \quad \text{puisque } X \in \chi\end{aligned}$$

D'où $[B_Y X] = 0$.
D'autre part, B_X. est antisymétrique par rapport à $g_{|H}$.
D'où $A^{\nabla'}_X Y = A^\nabla_X Y + [B_X Y]$. □

Ceci nous amène donc à choisir B tel que $[B_X Y] = -A^\nabla_X Y$. On obtient ainsi $A^{\nabla'}_X Y \equiv 0$.
D'autre part, $\nabla_Y X$ et $B_Y X$ sont verticaux
(car $\forall U \in V$, $\langle \nabla_Y X, U\rangle = Y\langle X, U\rangle - \langle X, \nabla_Y U\rangle = 0$). Il est donc naturel de choisir $B_Y X = -\nabla_Y X$, de sorte que $\nabla'_Y X \equiv 0$.
Afin d'annuler la composante en X de $T^{\nabla'}_X Y$, il suffit alors de choisir
$\mathcal{V}^X(B_X Y) = B_Y X - \mathcal{V}^X(T^\nabla_X Y)$ (où $\mathcal{V}^X$ désigne la composante en X).
Puisque la métrique induite par g sur $\mathcal{Y}$ est non-dégénérée, l'opérateur $[T^\nabla_Y .]$ admet un adjoint $T^{\nabla *}_Y$. Nous posons alors $[B_Y Y'] = \frac{1}{2}(\underbrace{T^{\nabla *}_Y Y' + T^{\nabla *}_{Y'} Y}_{\text{symétrique en Y,Y'}} - \underbrace{[T^\nabla_Y Y']}_{\text{antisymétrique en Y,Y'}})$.

On a alors

• B est antisymétrique par rapport à $g_{|H}$, puisque

$$\begin{aligned}2(\langle B_Y Y', Y''\rangle + \langle Y', B_Y Y''\rangle) &= \langle T_Y^{\nabla *} Y', Y''\rangle + \langle T_{Y'}^{\nabla *} Y, Y''\rangle - \langle T_Y^{\nabla} Y', Y''\rangle \\ &\quad + \langle T_Y^{\nabla *} Y'', Y'\rangle + \langle T_{Y''}^{\nabla *} Y, Y'\rangle - \langle T_Y^{\nabla} Y'', Y'\rangle \\ &= \langle Y', T_Y^{\nabla} Y''\rangle + \langle Y, T_{Y'}^{\nabla} Y''\rangle - \langle T_Y^{\nabla} Y', Y''\rangle \\ &\quad + \langle Y'', T_Y^{\nabla} Y'\rangle + \langle Y, T_{Y''}^{\nabla} Y'\rangle - \langle Y', T_Y^{\nabla} Y''\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

• $[T_Y^{\nabla'} Y'] = 0$, puisque

$$\begin{aligned}[T_Y^{\nabla'} Y'] &= [T_Y^{\nabla} Y'] + [B_Y Y' - B_{Y'} Y] \\ &= [T_Y^{\nabla} Y'] - [T_Y^{\nabla} Y'] \\ &= 0\end{aligned}$$

Enfin, pour annuler la composante en X de $T_Y^{\nabla'} Y'$, il suffit de choisir $\mathcal{V}^X(B_Y Y') = -\mathcal{V}^X(\nabla_Y Y')$.

Conclusion La seule obstruction à pouvoir construire une G-connexion sans torsion sur H est $\mathcal{L}_X g$, i.e. la seconde forme fondamentale de H. On retrouve le fait que la 1-intégrabilité de la G-structure induite sur H, qui en général se traduit par la nullité du tenseur de Chern-Bernard de la G-structure, s'interprête dans le cas d'une hypersurface dégénérée H par le fait que cette hypersurface soit totalement géodésique :

$$\begin{aligned}H \quad \text{admet une } G\text{-connexion sans torsion} &\iff \underbrace{c_1}_{\in H^{0,2}(\mathfrak{g})} = 0 \\ &\iff H \quad \text{est totalement géodésique} \\ &\iff \text{tout champ } X \in \chi \\ &\qquad \text{est un champ de Killing sur } H\end{aligned}$$

Pour continuer notre étude, nous supposerons donc que H est totalement géodésique.

Dans ce cas, le corollaire 1.9 nous montre que l'on peut identifier les fibrés $\mathcal{Y}$ et $\check{H}$.

2.2. Les bases de la construction d'un système de coordonnées sur H.

2.2.1. *Des coordonnées sur H.*

Avant de continuer notre étude, et afin de bien identifier les invariants suivants que nous allons dégager, nous allons faire un petit aparté pour expliquer la stratégie générale que nous allons suivre pour construire un système de coordonnées sur H.

Nous avons déjà vu que nous pouvons associer à l'hypersurface H deux fibrés fondamentaux :
• un fibré de dimension un, χ, qui représente le noyau de $g_{|H}$.
• un fibré quotient $\overset{\checkmark}{H} := H/\chi$.
La construction de notre système de coordonnées sur H va se faire naturellement à partir de deux choix :
• 1^{er} choix : une section $\sigma : \overset{\checkmark}{H} \to H$ telle que $\pi \circ \sigma = id_{\overset{\checkmark}{H}}$.
• 2^{nd} choix : un champ $X^\sigma \in \chi$ défini le long de l'image de σ.
Une fois ces choix effectués, nous construisons nos coordonnées de la manière suivante : soit $\overset{\checkmark}{U}$ une carte sur le quotient $\overset{\checkmark}{H}$, et $\{\overset{\checkmark}{Y}_i\}_{1\leq i\leq n-2}$ des champs coordonnées sur $\overset{\checkmark}{U}$; Nous remontons les champs $\overset{\checkmark}{Y}_i$ sur $\sigma(\overset{\checkmark}{H}) \subset H$ en posant
$Y_i^\sigma(\sigma(\pi(p))) := T_{\pi(p)}\sigma(\overset{\checkmark}{Y}_i(\pi(p))) \quad \forall p \in \pi^{-1}(\overset{\checkmark}{U})$.
Les champs $\{Y_i^\sigma\}_{1\leq i\leq n-2}$ vérifient alors $[Y_i^\sigma, Y_j^\sigma] = 0$. Il ne nous reste plus qu'à propager les champs X^σ et Y_i^σ sur H :
• puisque tout champ de la distribution χ est géodésique, il est naturel de propager X^σ en un champ X sur H vérifiant $D_X X = 0$
• pour avoir des champs coordonnées, on propage chaque champ Y_i^σ en un champ $Y_i^{\sigma,X}$ sur H en imposant l'équation $\mathcal{L}_X Y_i^{\sigma,X} = 0$, i.e. $[X, Y_i^{\sigma,X}] = 0$

LEMME 2.2. *Les champs $Y_i^{\sigma,X}$ ainsi construits sont alors π-reliés aux champs $\overset{\checkmark}{Y}_i$.*

DÉMONSTRATION. Notons $\varphi^X : I \times H \to H$ le flot du champ X. On a, pour $p \in H$,

$$\begin{aligned} \varphi^X(p) \ : \ I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto \varphi_t^X(p) \end{aligned}$$

avec $\varphi_t^X(p)$ la valeur en t de la courbe intégrale du champ X de condition initiale $\varphi_0^X(p) = p$.
On a alors $\mathcal{L}_X Y_i^{\sigma,X} = 0 \iff \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_{t*}^X Y_i^{\sigma,X} - Y_i^{\sigma,X}}{t} = 0$.
Notons

$$\begin{aligned} \psi^X \ : \ I &\longrightarrow T\sigma(\overset{\checkmark}{H}) \\ t &\longmapsto \varphi_{t*}^X Y_i^{\sigma,X} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{L}_X Y_i^{\sigma,X} = 0 \iff (\psi^X)'(0) = 0 \quad (car \ \varphi_0^X \equiv Id_H)$.

Or

$$
\begin{aligned}
(\psi^X)'(a) &= \lim_{s\to 0}\frac{\psi^X(a+s)-\psi^X(a)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\varphi^X_{(s+a)*}Y_i^{\sigma,X}-\varphi^X_{a*}Y_i^{\sigma,X}}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\varphi^X_{a*}(\varphi^X_{s*}Y_i^{\sigma,X}-Y_i^{\sigma,X})}{s}\\
&= \varphi^X_{a*}(\lim_{s\to 0}\frac{\varphi^X_{s*}Y_i^{\sigma,X}-Y_i^{\sigma,X}}{s})\\
&\qquad \text{par continuité de} \quad \varphi^X_{a*}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

D'où $\mathcal{L}_X Y_i^{\sigma,X} = 0 \Longleftarrow (\psi^X)' = 0$, i.e.

$$
\begin{aligned}
\psi^X &= cste\\
&= \psi^X(0)\\
&= Y_i^{\sigma,X}
\end{aligned}
$$

D'où, $\forall t \in I \quad \varphi^X_{t*}Y_i^{\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X}$, autrement dit, $T_p\varphi_t^X(Y_i^{\sigma,X}(p)) = Y_i^{\sigma,X}(\varphi_t^X(p))$. Considérons alors un point $q \in H$. On peut écrire q sous la forme $q = \varphi_t^X(p)$, pour $t \in I$ et $p = \sigma(\pi(q)) \in \sigma(\overset{\checkmark}{H})$; On obtient ainsi

$$
\begin{aligned}
T_p\pi(Y_i^{\sigma,X}(p)) &= T_p\pi(Y_i^{\sigma}(p))\\
&= T_p\pi.T_{\pi(p)}\sigma.\overset{\checkmark}{Y}_i(\pi(p))\\
&= T_{\pi(p)}(\pi\circ\sigma)\overset{\checkmark}{Y}_i(\pi(p))\\
&= \overset{\checkmark}{Y}_i(\pi(p)) \quad car \quad \pi\circ\sigma = Id_{\overset{\checkmark}{H}}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
T_q\pi(Y_i^{\sigma,X}(q)) &= T_q\pi Y_i^{\sigma,X}(\varphi_t^X(p)) \\
&= T_q\pi.T_p\varphi_t^X.Y_i^{\sigma,X}(p) \\
&= T_p(\pi\circ\varphi_t^X)Y_i^{\sigma,X}(p) \\
&= T_p\pi(Y_i^{\sigma,X}(p)) \quad car \quad \pi\circ\varphi_t^X = \pi \\
&= T_p\pi(Y_i^{\sigma}(\sigma(\pi(p)))) \\
&= T_p\pi.T_{\pi(p)}\sigma.\overset{\swarrow}{Y}_i(\pi(p)) \\
&= T_{\pi(p)}(\pi\circ\sigma).\overset{\swarrow}{Y}_i(\pi(p)) \\
&= \overset{\swarrow}{Y}_i(\pi(p)) \quad car \quad \pi\circ\sigma = Id_{\overset{\swarrow}{H}}
\end{aligned}$$

D'où, $\forall q \in H \quad T_q\pi(Y_i^{\sigma,X}(q)) = \overset{\swarrow}{Y}_i(\pi(q))$. □

Remarque : même si nous n'insisterons pas sur le fait que les champs $Y_i^{\sigma,X}$ ainsi construits soient π-reliés, nous soulignons tout de même le fait que la notion de champs reliés est très importante dès que l'on a une fibration (pour plus de détails sur les champs reliés, le lecteur pourra consulter **[Sp]**).

COROLLAIRE 2.3. $[Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}] = 0 \ \forall 1 \leq i,j \leq n-2$

DÉMONSTRATION. Le résultat découle immédiatement de $[Y_i^{\sigma}, Y_j^{\sigma}] = 0$ et $\varphi_{t*}^X Y_i^{\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X}$. □

On obtient ainsi des coordonnées$\{x, y_1, ..., y_{n-2}\}$ sur l'ouvert $U := \sigma(\overset{\swarrow}{U})$ de H, définies par :

•

$$\begin{aligned}
x \ : \ H &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto x(p)
\end{aligned}$$

telle que $(\varphi_{x(p)}^X)^{-1}(p) = \varphi_{-x(p)}^X(p) \in \sigma(\overset{\swarrow}{H})$

• $y_i(p) = \overset{\swarrow}{y}_i(\pi(p))$ ($\overset{\swarrow}{y}_i$ étant la coordonnée sur $\overset{\swarrow}{U}$ telle que $\partial_{\overset{\swarrow}{y}_i} = \overset{\swarrow}{Y}_i$).

Les champs $\{X, Y_1^{\sigma,X}, ..., Y_{n-2}^{\sigma,X}\}$ sont alors liés à ces coordonnées par

$$\begin{cases} X = \partial_x \\ Y_i^{\sigma,X} = \partial_{y_i} \end{cases}$$

2.2.2. *La connexion.*
D'après le théorème de Frobenius et le lemme précédent, on déduit aisément que la distribution $p \in H \to < Y_1^{\sigma,X}(p), ..., Y_{n-2}^{\sigma,X}(p) > \subset T_pH$ est intégrable. Ceci nous permet donc de définir une sous-variété intégrale $\mathcal{H}^{\sigma,X} \subset H$ telle que
$\forall p \in H \quad T_p\mathcal{H}^{\sigma,X} = < Y_1^{\sigma,X}(p), ..., Y_{n-2}^{\sigma,X}(p) >$. On obtient ainsi une décomposition de TH en parties horizontale et verticale sous la forme : $T_pH = T_p\mathcal{H}^{\sigma,X} \overset{\perp}{\oplus} < X_p >$.
A cette décomposition, on associe deux projections :
• une projection horizontale $\mathcal{H}^{\sigma,X} \ : \ T_pH \to T_p\mathcal{H}^{\sigma,X}$
• une projection verticale $\mathcal{V}^{\sigma,X} \ : \ T_pH \to < X_p >$

D'autre part, si on suppose H totalement géodésique, la connexion de Levi-Civita D sur (M, g) induit une connexion sur H, métrique et sans torsion. On peut alors décomposer cette connexion selon les parties horizontale et verticale. On obtient ainsi des fonctions $\beta_i^{\sigma,X}, \Gamma_{ij}^k, h_{ij}^{\sigma,X}$ sur H $(1 \leq i, j, k \leq n-2)$ définies par :
• $D_X Y_i^{\sigma,X} = D_{Y_i^{\sigma,X}} X = \beta_i^{\sigma,X} X$ (1)
• $D_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X} = \Gamma_{ij}^k Y_k^{\sigma,X} + h_{ij}^{\sigma,X} X$ (2)

Les fonctions ci-dessus vérifient les propriétés suivantes :
• Γ_{ij}^k et $h_{ij}^{\sigma,X}$ sont symétriques en i,j (car $[Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}] = 0$)
• $X(\Gamma_{ij}^k) = 0$: en effet, on déduit de la formule de Koszul que

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ij}^k g_{kl} &= 2\langle D_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X}, Y_l^{\sigma,X} \rangle \\ &= Y_i^{\sigma,X}(g_{lj}) + Y_j^{\sigma,X}(g_{li}) - Y_l^{\sigma,X}(g_{ij}) \\ &\qquad \text{(où l'on note} \quad g_{ij} := \langle Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X} \rangle) \end{aligned}$$

Or $X(g_{ij}) = \mathcal{L}_X g(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) = 0$ si H est totalement géodésique.

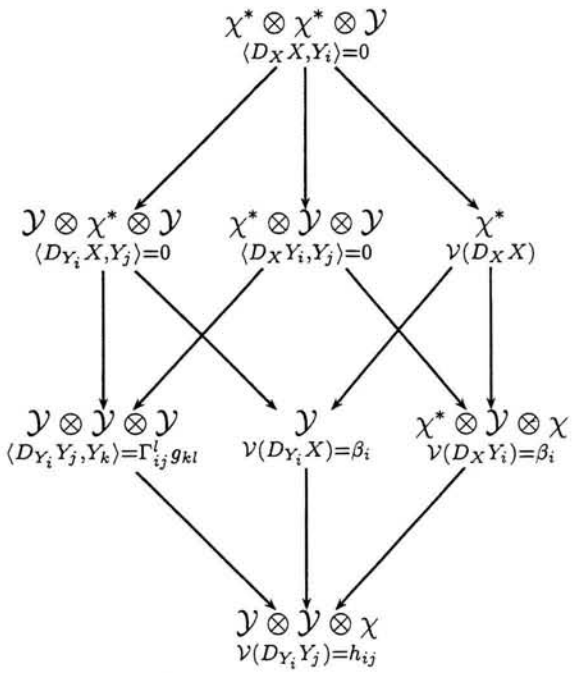
Remarques :

1. Les équations (1) et (2) représentent les formules de Weingarten et Gauss pour une immersion pseudo-Riemannienne en codimension 2(cf. [**Sp**], tome IV). Γ_{ij}^k est la connexion induite par D^H sur $Im\sigma$; c'est aussi, puisque H est totalement géodésique, la connexion induite sur $Im\sigma$ par la connexion de Levi-Civita D de (M, g). Quant à $h_{ij}^{\sigma,X}$, c'est la composante en X de la seconde forme fondamentale de la sous-variété de codimension 2 $Im\sigma$ (il n'y a pas de composante transverse à H puisque H est totalement géodésique).

2. Dans la suite, afin d'alléger les notations, si l'on se donne une section et un champ X, nous omettrons la plupart du temps les indices σ, X, et nous écrirons les champs $Y_i^{\sigma,X}$ simplement Y_i, et les fonctions $\beta_i^{\sigma,X}, h_{ij}^{\sigma,X}$ simplement β_i et h_{ij}.

2.2.3. *Choix des coordonnées.*
Afin d'avoir des coordonnées bien définies sur H, il nous restera à décider si il y a des choix de section et de taille du champ X plus naturels que d'autres.
Il est clair que, par changement de section et de taille de X, les fonctions $\beta_i^{\sigma,X}$ et $h_{ij}^{\sigma,X}$,

qui apparaissent dans les termes de connexion varient elles-aussi. Bien évidemment, ce que l'on peut espérer faire de mieux est d'annuler toutes ces fonctions.
Pour confirmer cette idée, et voir dans quel ordre on va essayer d'annuler ces fonctions, effectuons la décomposition en sous-quotients successifs au niveau de la connexion $D^H \in V^* \otimes \mathfrak{g}$. Nous obtenons le diagramme suivant (avec l'identification $\mathcal{Y}^* \simeq \mathcal{Y}$) :



La première fonction qui sort est $\mathcal{V}(D_X X)$, que nous avons imposée nulle pour propager le champ $X^\sigma \in \Gamma(TIm(\sigma))$ sur H. Le diagramme confirme que propager le champ X^σ par l'équation $D_X X = 0$ est effectivement un bon choix. En fait, cette idée est naturelle : les courbes intégrales du champ X étant des géodésiques nulles, imposer $D_X X = 0$ revient à choisir le paramétrage affine de ces géodésiques.
Dans un second temps apparaissent les fonctions β_i et Γ^k_{ij}. Pour ces dernières, il n'y a pas de choix de σ ou de X préférable, car les fonctions Γ^k_{ij} sont invariantes par changement de section, aussi bien que par changement de taille de X. En fait, ces fonctions sont liées à la géométrie du quotient $\overset{\checkmark}{H}$, et on ne pourra les avoir nulles que si le quotient est plat. Remarquons toutefois qu'en ayant imposé d'avoir des champs coordonnées (tels que $[Y_i, Y_j] = 0$), nous avons tué la partie alternée des 2-tenseurs $Y_i, Y_j \to \Gamma^k_{ij}$.
Enfin, tout en bas du diagramme, on trouve les fonctions h_{ij}.

La stratégie que nous allons adopter pour faire des choix de section et de taille de X va donc être, dans un premier temps, d'essayer d'annuler les fonctions β_i, puis, dans un second temps, d'essayer d'annuler les fonctions h_{ij}.
Remarquons en oûtre que dire que les fonctions β_i et h_{ij} peuvent être toutes annulées revient à dire que la connexion D^H, induite sur H par la connexion de Levi-Civita de (M, g), est localement une connexion produit de la connexion de Levi-Civita sur une sous-variété non-dégénérée de codimension 2 par une connexion plate. Nous dirons dans ce cas que l'hypersurface H est localement un produit affine $\mathcal{H}^\sigma \times X$.
Insistons bien sur le fait que notre notion de produit affine est assez forte, et ne peut se lire uniquement sur la métrique induite sur l'hypersurface : nous demandons non seulement

que la métrique soit localement un produit (ce qui, d'après Kupeli (cf. [**Ku**]), est toujours le cas si H est totalement géodésique, puisque si l'on se donne une section σ, alors H est localement un produit pseudo-Riemannien dégénéré $(\chi \times Im\sigma, Pr^* g_{|Im\sigma})$ où $Pr : \chi \times Im\sigma \to Im\sigma$ est la projection canonique), mais aussi que la connexion induite sur H, D^H, soit elle-même une connexion produit. Dans notre recherche de coordonnées canoniques, nous serons donc aussi amené à essayer de mesurer le défaut de l'hypersurface H à être localement un produit affine.

2.3. Seconde étape : k=2, la courbure.

2.3.1. *Lien avec la cohomologie de Spencer.*

Exactement comme nous l'avons fait pour la torsion, nous pouvons obtenir une seconde obstruction à l'intégrabilité d'une G-structure.

Pour cela, considérons $\mathfrak{g}^{(1)} := Ker\partial$, où $\partial = Alt_{1,2} \ : \ V^* \otimes \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 V^* \otimes V$. Il est clair que deux G-connexions ∇ et ∇' ont la même torsion si et seulement si $\nabla - \nabla' \in \Gamma(\mathfrak{g}^{(1)})$.

On peut alors construire la suite $V^* \otimes \mathfrak{g}^{(1)} \xrightarrow{\partial_1} \bigwedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{\partial_2 = Bianchi} \bigwedge^3 V^* \otimes V$.

Il est clair que l'on a l'inclusion $Im\ \partial_1 \subseteq Ker\ \partial_2$. Autrement dit, cette suite est une chaîne. Nous pouvons alors former le quotient $Ker\ \partial_2 / Im\ \partial_1$; Remarquons maintenant que la courbure d'une G-connexion vit dans $\bigwedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$, et que si la G-connexion est sans torsion, alors sa courbure (qui vérifie automatiquement la première identité de Bianchi) vit dans $Ker\ \partial_2$. On construit alors la seconde obstruction à l'intégrabilité d'une G-structure en définissant $c_2 := [R^\nabla] \in Ker\ \partial_2 / Im\ \partial_1 := \mathcal{H}^{1,2}(\mathfrak{g})$, pour ∇ une G-connexion sans torsion arbitraire.

Remarques :

(1) On vérifie que la classe c_2 ne dépend pas de la G-connexion sans torsion ∇ choisie.

(2) Cette seconde classe c_2 mesure le défaut à l'existence d'une G-connexion sans torsion à courbure nulle.

2.3.2. *Les invariants associés à la courbure.*

La stratégie est la même que pour la torsion : nous écrivons les quotients successifs de $\bigwedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} \subset \bigwedge^2 V^* \otimes V^* \otimes V$, et nous dégageons les invariants successifs qui apparaîssent. Nous obtenons ainsi la liste suivante de quotients et courbures associées, où chaque terme de courbure obtenu ne donne un invariant bien défini sur H que si les invariants précédents sont nuls :

I. $\chi^* \otimes \chi^* \otimes \mathcal{S}^2\mathcal{Y} \leftrightarrow \langle R(X, Y_i)X, Y_j \rangle = 0$

II.

2.1. $\bigwedge^2 \mathcal{Y}^* \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y} \leftrightarrow \langle R(Y_i, Y_j)X, Y_k \rangle = 0$

2.2. $\chi^* \otimes \Gamma_{2\wedge 3} \leftrightarrow \langle R(X, Y_i)Y_j, Y_k \rangle = 0$

2.3. $\chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \chi \approx \chi^* \otimes \mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{V}(R(X, Y_i)X) = X(\beta_i)$

III.

3.1. $\mathcal{R}^{\mathcal{Y}} \leftrightarrow \langle R(Y_i, Y_j)Y_k, Y_l\rangle$
3.2. $\bigwedge^2 \mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{V}(R(Y_i, Y_j)X) = Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)$
3.3. $\chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi \simeq \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{V}(R(X, Y_i)Y_j)$
IV. Tous les quotients précédents donnent enfin
$\Gamma_{1\wedge 2} \otimes \chi \leftrightarrow \mathcal{V}(R(Y_i, Y_j)Y_k) = \Gamma^k_{ij}h_{il} + Y_i(h_{jk}) + h_{jk}\beta_i - \Gamma^l_{ik}h_{jl} - Y_j(h_{ik}) - h_{ik}\beta_j$

où l'on note
◇ $\Gamma_{i\wedge j}$ l'ensemble des 3-tenseurs sur $\mathcal{Y}$ vérifiant la première identité de Bianchi, et qui sont alternés en i,j.
◇ $\mathcal{R}^{\mathcal{Y}}$ l'ensemble des courbures sur $\mathcal{Y}$.

Nous obtenons donc ici des avatars des formules de Gauss-Codazzi, pour une immersion pseudo-Riemannienne en codimension 2. Ceci apparaît plus clairement en introduisant un 2-tenseur symétrique $\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ sur H définit de la façon suivante : une fois choisie une section σ et un champ $X \in \chi$, nous construisons des champs coordonnées $X, Y_1^{\sigma,X}, ..., Y_{n-2}^{\sigma,X}$ comme expliqué au chapitre 2.2. En tout point $p \in H$, $\{X(p), Y_1^{\sigma,X}(p), ..., Y_{n-2}^{\sigma,X}(p)\}$ est alors une base de l'espace tangent T_pH. On définit alors le 2-tenseur $\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ sur H par les conditions suivantes :
◇ $\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ est bilinéaire, et symétrique
◇ $\mathfrak{h}^{\sigma,X}(X, X) = 0$
◇ $\mathfrak{h}^{\sigma,X}(X, Y_i^{\sigma,X}) = \beta_i^{\sigma,X}$
◇ $\mathfrak{h}^{\sigma,X}(Y_j^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) = h_{ij}^{\sigma,X}$

On peut alors résumer les formules précédentes par l'équation

$$\boxed{\mathcal{V}^{\sigma,X}(R(A, B)C) = D_A\mathfrak{h}^{\sigma,X}(B, C) - D_B\mathfrak{h}^{\sigma,X}(A, C)} \quad \forall A, B, C \in \Gamma(TH)$$

Les courbures qui sortent sont donc :

1. $\mathcal{V}(R(X, Y_i)X) = X(\beta_i)$
2.
- $\langle R(Y_i, Y_j)Y_k, Y_l\rangle$ qui représente la courbure du quotient $\overset{\checkmark}{H}$
- $\mathcal{V}(R(Y_i, Y_j)X) = Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)$
- $\mathcal{V}(R(X, Y_i)Y_j) = \Gamma^k_{ij}\beta_k + X(h_{ij}) - Y_i(\beta_j) - \beta_i\beta_j$

3. $\mathcal{V}(R(Y_i, Y_j)Y_k) = \Gamma^l_{jk}h_{il} + Y_i(h_{jk}) + h_{jk}\beta_i - \Gamma^l_{ik}h_{jl} - Y_j(h_{ik}) - h_{ik}\beta_j$

Remarque : d'après la formule précédente, il est clair que l'on a $\mathcal{V}^{\sigma,X}(R(A, B)C) = 0$ pour tous champs A, B, C sur H si et seulement si $D_A\mathfrak{h}^{\sigma,X}(B, C) = D_B\mathfrak{h}^{\sigma,X}(A, C)$ $\forall A, B, C \in \Gamma(TH)$. Dans ce cas, on dit que $\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ est un tenseur de Codazzi (cf. [**B**] p.435).

2.3.3. *Lien entre les invariants et la courbure de Ricci.*
Pour bien cerner le problème, il faut bien voir qu'il y a trois courbures de Ricci qui jouent un rôle primordial :
1. la courbure de Ricci de la variété ambiante Ric^M
2. la courbure de Ricci de la connexion D^H Ric^H
3. la courbure de Ricci d'une section Ric^σ

En fait, si on a fait un choix de section σ, σ est un difféomorphisme de $\overset{\swarrow}{H}$ sur $Im\ \sigma$. De plus, par construction,

$$\begin{aligned}\overset{\swarrow}{g}(\overset{\swarrow}{Y}_i, \overset{\swarrow}{Y}_j) &= g(Y_i, Y_j) \\ &= g(\sigma_* \overset{\swarrow}{Y}_i, \sigma_* \overset{\swarrow}{Y}_j) \\ &= \sigma^* g(\overset{\swarrow}{Y}_i, \overset{\swarrow}{Y}_j)\end{aligned}$$

Donc σ est une isométrie de $(\overset{\swarrow}{H}, \overset{\swarrow}{g})$ sur $(\sigma(\overset{\swarrow}{H}) = Im\ \sigma, g_\sigma)$. On peut donc identifier la courbure de Ricci Ric^σ d'une section à la courbure de Ricci $\overset{\swarrow}{Ric}$ du quotient :

$$\begin{cases} \overset{\swarrow}{Ric} = \sigma^*(Ric^\sigma) \\ Ric^\sigma = \pi^*(\overset{\swarrow}{Ric}) \end{cases}$$

Un calcul direct montre alors que l'on a :

PROPOSITION 2.4.
(i) $Ric^M(X, Y_i) = -X(\beta_i)$
(ii)

$$\begin{cases} Ric^H(X, Y_i) - Ric^H(Y_i, X) = X(\beta_i) \\ Ric^H(Y_i, Y_j) - Ric^H(Y_j, Y_i) = Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i) \end{cases}$$

(iii) En décomposant $\mathcal{V}(R(X, Y_i)Y_j)$ *en parties symétrique et alternée, on obtient :*

•

$$\begin{aligned} R(X, Y_i)Y_j - R(X, Y_j)Y_i &= R(X, Y_i)Y_j + R(Y_j, X)Y_i \\ &= -R(Y_i, Y_j)X \text{ par Bianchi} \\ &= (Y_j(\beta_i) - Y_i(\beta_j))X \\ &= (Ric^H(Y_j, Y_i) - Ric^H(Y_i, Y_j))X \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} R(X, Y_i)Y_j + R(X, Y_j)Y_i &= (2\Gamma_{ij}^k \beta_k + 2X(h_{ij}) \\ &\quad -Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i) - 2\beta_i\beta_j)X \\ &= -(Ric^M(Y_i, Y_j) - Ric^\sigma(Y_i, Y_j))X \\ &= -(Ric^M(Y_i, Y_j) - \pi^* \overset{\swarrow}{Ric}(Y_i, Y_j))X \end{aligned}$$

2.3.4. *Le problème du* $\mathfrak{g}^{(1)}$.
Nous avons déjà défini $\mathfrak{g}^{(1)}$ précédemment comme étant le noyau de l'application $\partial = Alt_{1,2} \ : \ V^* \otimes \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 V^* \otimes V$. Nous avions remarqué que deux G-connexions ∇, ∇' ont même torsion si et seulement si $\nabla - \nabla' \in \Gamma(\mathfrak{g}^{(1)})$.
Dans l'esprit de la cohomologie de Spencer, le but est de trouver une G-connexion, sans torsion, plate. On est donc amené, à-priori, à chercher si, étant donné une G-connexion sans torsion ∇, il existe $s \in \Gamma(\mathfrak{g}^{(1)})$ telle que la G-connexion (sans torsion) $\nabla' = \nabla + s$ soit plate.
Dans la pratique toutefois, on est souvent amené à imposer des conditions supplémentaires aux G-connexions sans torsion que l'on considère, ce qui revient à se restreindre à un sous-espace $\mathfrak{g}_{(1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(1)}$.
Dans le cas qui nous intéresse, il nous est donné sur H non seulement la métrique $g_{|H}$, mais aussi une connexion privilégiée, sans torsion, D^H. Pour étudier la géométrie de H, les invariants qui nous intéressent sont donc liés non seulement à la métrique $g_{|H}$, mais aussi à la connexion D^H. Pour cette raison, on ne peut se permettre de variation de la connexion ; Autrement dit, dans notre étude, on va choisir un sous-espace $\mathfrak{g}_{(1)} = \{0\}$.
Il est malgré tout intéressant de regarder les changements de connexion par une section de $\mathfrak{g}^{(1)}$ pour savoir, parmi les invariants que l'on a déjà dégagés, quels sont ceux qui sont liés à la connexion D^H, et quels sont ceux qui ne sont liés qu'à la métrique $g_{|H}$.
Pour cela, la première chose à faire est de calculer $\mathfrak{g}^{(1)}$.

PROPOSITION 2.5. $\mathfrak{g}^{(1)} = S^2V^* \otimes \chi$

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\mathfrak{g}^{(1)} = (S^2V^* \otimes V) \cap (V^* \otimes \mathfrak{g})$. Regardons dans un premier temps la restriction de $\mathfrak{g}^{(1)}$ à $\mathcal{Y}$: on obtient $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{Y}} := (S^2\mathcal{Y}^* \otimes \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{Y}^* \otimes \mathfrak{so}(\mathcal{Y}))$. Or, puisque $\mathcal{Y}$ est muni d'une métrique non-dégénérée, $\mathcal{Y}$ peut s'identifier, via cette métrique, à son dual $\mathcal{Y}^*$. On a donc $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{Y}} \simeq (S^2\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{Y}^* \otimes \mathfrak{so}(\mathcal{Y}))$. Si on regarde les éléments de $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{Y}}$ comme des 3-formes, on peut encore écrire $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{Y}} \simeq (S^2\mathcal{Y}^* \otimes \mathcal{Y}^*) \cap (\mathcal{Y}^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Y}^*)$. Or les éléments de ce dernier sous-espace sont les 3-formes symétriques en leurs deux premières variables, antisymétriques en leurs deux dernières variables. De telles 3-formes sont forcément nulles, d'après le premier lemme des tresses. D'où on déduit $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{Y}} = \{0\}$. D'où $\mathfrak{g}^{(1)} \subseteq S^2V^* \otimes \chi$.
Réciproquement, il est clair que $S^2V^* \otimes \chi \subset S^2V^* \otimes V$. De plus, $V^* \otimes \chi$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Donc $V^* \otimes (V^* \otimes \chi) \subset V^* \otimes \mathfrak{g}$. D'où $S^2V^* \otimes \chi \subset V^* \otimes \mathfrak{g}$. Donc $S^2V^* \otimes \chi \subset \mathfrak{g}^{(1)}$.

Remarque : on aurait pû retrouver ce résultat en regardant des variations de connexion ; Soit ∇ une G-connexion sans torsion, et s un (1,2)-tenseur. Pour que la connexion $\nabla' := \nabla + s$ reste métrique, il faut que $\forall U \in \Gamma(TH), \quad s_U.$ soit antisymétrique par rapport à $g_{|H}$. Pour que ∇' soit aussi sans torsion, il faut que s soit symétrique, i.e. $s_UV = s_VU \quad \forall U, V \in \Gamma(TH)$.
On a alors
• $\langle s_UV, W\rangle = -\langle V, s_UW\rangle$

•

$$\begin{aligned}\langle s_U V, W\rangle &= \langle s_V U, W\rangle \\ &= -\langle U, s_V W\rangle \\ &= -\langle U, s_W V\rangle \\ &= \langle s_W U, V\rangle \\ &= \langle s_U W, V\rangle\end{aligned}$$

D'où $\langle s_U V, W\rangle = 0 \quad \forall U, V, W \in \Gamma(TH)$. Donc $s_U V \in \chi \quad \forall U, V \in \Gamma(TH)$. □

Revenons donc à notre connexion D^H. Peut-on, par un choix judicieux de $s \in S^2V^* \otimes \chi$, annuler des invariants de courbure pour une connexion $\nabla = D^H + s$?
La réponse est claire : choisissons

$$\begin{cases} s_X X = 0 \text{ pour conserver } \nabla_X X = 0 \\ s_X Y_i = -\beta_i \\ s_{Y_i} Y_j = -h_{ij} \end{cases}$$

La connexion ∇ ainsi construite n'est alors rien d'autre que $\nabla^\sigma := \mathcal{H}^\sigma(D^H)$, et pour cette connexion ∇^σ, on a

$$\begin{cases} \mathcal{V}(R^{\nabla^\sigma}(X, Y_i)X) = 0 \\ \mathcal{V}(R^{\nabla^\sigma}(Y_i, Y_j)X) = 0 \\ \mathcal{V}(R^{\nabla^\sigma}(X, Y_i)Y_j) = 0 \end{cases}$$

Par contre, changer la connexion D^H par un champ X ne pourra modifier $\langle R(Y_i, Y_j)Y_k, Y_l\rangle$, donc pas non plus en général $\mathcal{V}(R(Y_i, Y_j)Y_k)$ (qui n'est bien définie sur $\mathcal{Y}$ que si la courbure précédente est nulle).

Conclusions :
1) Pour les trois premiers invariants, il n'y a donc pas de section, ni de taille du champ X canoniques. Toute section et toute taille de X donne une G-connexion sans torsion permettant de les annuler.
2) Les deux invariants $\langle R(Y_i, Y_j)Y_k, Y_l\rangle$ et $\mathcal{V}(R(Y_i, Y_j)Y_k)$ ne sont liés qu'à la métrique $g_{|H}$, et non pas à la connexion D^H.

En particulier, on en déduit :

PROPOSITION 2.6. *Contrairement au cas non-dégénéré, où restreindre la métrique revient au même que de restreindre la connexion, dans le cas dégénéré, restreindre la connexion est plus fort que de restreindre la métrique.*

2.4. Troisième étape : k=3, la dérivée de la courbure.

2.4.1. *Les invariants associés à DR.*
Nous écrivons les quotients successifs de $\bigwedge^3 V^* \otimes \mathfrak{g}$, en commencant par $(\chi^* \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}) \bigcap (\bigwedge^3 V^* \otimes \mathfrak{g})$, jusqu'à ce que l'on arrive au quotient $(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi) \bigcap (\bigwedge^3 V^* \otimes \mathfrak{g})$.

Les invariants qui sortent sont :

I. $\mathcal{V}(D_X R(X,Y_i)X) = XX(\beta_i)$
II.
• $\mathcal{V}(D_X R(X,Y_i)Y_j) = X(\Gamma^k_{ij}\beta_k + X(h_{ij}) - Y_i(\beta_j) - \beta_i\beta_j) - \beta_j X(\beta_i)$
• $\mathcal{V}(D_X R(Y_i,Y_j)X) = X(Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)) - \beta_i X(\beta_j) + \beta_j X(\beta_i)$
• $\mathcal{V}(D_{Y_i} R(X,Y_j)X) = Y_i X(\beta_j) - \Gamma^k_{ij} X(\beta_k) - 2\beta_i X(\beta_j)$
III.
• $\mathcal{V}(D_X R(Y_i,Y_j)Y_k) = (Y_i(\Gamma^l_{jk}) - Y_j(\Gamma^l_{ik}) + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm})\beta_l + X(\Gamma^l_{jk}h_{il} + Y_i(h_{jk}) + h_{jk}\beta_i - \Gamma^l_{ik}h_{jl} - Y_j(h_{ik}) - h_{ik}\beta_j) - \beta_i(\Gamma^l_{jk}\beta_l + X(h_{jk}) - Y_j(\beta_k) - \beta_j\beta_k) + \beta_j(\Gamma^l_{ik}\beta_l + X(h_{ik}) - Y_i(\beta_k) - \beta_i\beta_k) - \beta_k(Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i))$
• $\mathcal{V}(D_{Y_k} R(X,Y_i)Y_j) = Y_k(\Gamma^l_{ij}\beta_l + X(h_{ij}) - Y_i(\beta_j) - \beta_i\beta_j) - \Gamma^l_{ki}(\Gamma^m_{lj}\beta_m + X(h_{lj}) - Y_l(\beta_j) - \beta_l\beta_j) - \Gamma^l_{kj}(\Gamma^m_{il}\beta_m + X(h_{il}) - Y_i(\beta_l) - \beta_i\beta_l) - h_{kj}X(\beta_i) - \beta_k(\Gamma^l_{ij}\beta_l + X(h_{ij}) - Y_i(\beta_j) - \beta_i\beta_j)$
• $\mathcal{V}(D_{Y_k} R(Y_i,Y_j)X) = Y_k(Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)) - \Gamma^l_{ki}(Y_l(\beta_j) - Y_j(\beta_l)) - h_{ik}X(\beta_j) - \Gamma^l_{kj}(Y_i(\beta_l) - Y_l(\beta_i)) + h_{kj}X(\beta_i) - \beta_k(Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i))$
• $\langle D_{Y_i} R(Y_j,Y_k)Y_l, Y_m\rangle$
IV. $\mathcal{V}(D_{Y_i} R(Y_j,Y_k)Y_l)$

Remarque : Les invariants obtenus ne sont pas tous indépendants ; En effet, la seconde identité de Bianchi nous donne :

•

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D_X R(Y_i,Y_j)X) &= -\mathcal{V}(D_{Y_i} R(Y_j,X)X) - \mathcal{V}(D_{Y_j} R(X,Y_i)X)\\ &= \mathcal{V}(D_{Y_i} R(X,Y_j)X) - \mathcal{V}(D_{Y_j} R(X,Y_i)X)\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D_X R(Y_i,Y_j)Y_k) &= -\mathcal{V}(D_{Y_i} R(Y_j,X)Y_k) - \mathcal{V}(D_{Y_j} R(X,Y_i)Y_k)\\ &= \mathcal{V}(D_{Y_i} R(X,Y_j)Y_k) - \mathcal{V}(D_{Y_j} R(X,Y_i)Y_k)\end{aligned}$$

A l'aide du 2-tenseur symétrique $\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ introduit à la section 2.3.2, nous pouvons résumer les formules ci-dessus par l'équation :

$$\boxed{\mathcal{V}^{\sigma,X}(D_A R(B,C)D) = D^2_{A,B}\mathfrak{h}^{\sigma,X}(C,D) - D^2_{A,C}\mathfrak{h}^{\sigma,X}(B,D) + \sum_{l=1}^{n-2} R^l_{B,C,D}\mathfrak{h}^{\sigma,X}(Y_l^{\sigma,X}, A)}$$

$\forall A,B,C,D \in \Gamma(TH)$ (où $D^2\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ désigne le tenseur $DD\mathfrak{h}^{\sigma,X}$ (cf. [**B**]), et $R^l_{B,C,D}$ désigne la composante en $Y_l^{\sigma,X}$ de $R(B,C)D$)

2.4.2. *Interprétation à l'aide de la courbure de Ricci.*

PROPOSITION 2.7.
i) $D_X Ric^M(X,Y_i) = -XX(\beta_i)$

ii)

$$\begin{cases} D_X Ric^H(X, Y_i) - D_X Ric^H(Y_i, X) = XX(\beta_i) \\ D_X Ric^H(Y_i, Y_j) - D_X Ric^H(Y_j, Y_i) = \mathcal{V}(D_X R(Y_i, Y_j)X) \end{cases}$$

iii) $D_X Ric^H(Y_i, Y_j) = -\mathcal{V}(D_X R(X, Y_i)Y_j)$
iv) $D_{Y_i} Ric^M(X, Y_j) = -\mathcal{V}(D_{Y_i} R(X, Y_j)X)$
v) $D_{Y_k} Ric^H(Y_i, Y_j) = -\mathcal{V}(D_{Y_k} R(X, Y_i)Y_j)$
vi) $D_{Y_k} Ric^H(Y_i, Y_j) - D_{Y_k} Ric^H(Y_j, Y_i) = \mathcal{V}(D_{Y_k} R(Y_i, Y_j)X)$
vii) $D_{Y_j} Ric^H(Y_k, Y_i) - D_{Y_i} Ric^H(Y_j, Y_k) = \mathcal{V}(D_X R(Y_i, Y_j)Y_k)$

Nous résumons ci-dessous l'ensemble des quotients et invariants associés que nous avons obtenus pour la torsion, la courbure, et la dérivée de la courbure.
Rappelons que chaque "courbure" obtenue ne donne un invariant bien défini que si les courbures précédentes (qui apparaîssent en remontant chaque branche convergent vers la courbure considérée) sont toutes nulles. Par exemple, dans la table associée à la courbure, pour que $Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)$ soit un invariant bien défini dans $\bigwedge^2 \mathcal{Y}$, il faut que les fonctions $X(\beta_i)$ soient toutes nulles.

Dans la suite, nous verrons que les différents invariants de courbure ont un lien très étroit avec la construction de systèmes de coordonnées adaptés sur H, et nous donnons une interprétation de chacun de ces invariants. Nous avons choisi, pour ne pas trop alourdir notre étude, de ne pas décrire aussi précisément les invariants associés à DR, et de ne pas chercher d'autres invariants pour les étapes suivantes. Nous tenons tout de même à mentionner que :

• les invariants associés à DR peuvent aussi s'interpréter en termes de coordonnées. Leur nullité ou non permet de savoir ce que l'on peut espérer faire pour améliorer nos coordonnées. Remarquons toutefois que dans le cas où il existe un champ $X \in \chi$ parallèle sur H (cas où l'on se placera pour faire des choix de section), les invariants liés à DR ne sont "en gros" rien d'autre que les dérivées des invariants de courbure.

• notre liste d'invariants n'est pas exhaustive : nous pourrions continuer à étudier le défaut d'intégrabilité de la G-structure induite sur H, et écrire de nouvelles tables en regardant les obstructions successives à l'intégrabilité liées aux dérivées supérieures de la courbure (en particulier, pour l'étape suivant DR, nous serions amenés à discuter l'existence d'une éventuelle structure projective sur H).

Nous obtenons successivement une structure
• de carré pour la torsion
• de cube pour la courbure
• d'hypercube pour DR

Pour plus de carté, nous avons décrit la structure d'hypercube pour DR sous la forme de deux cubes, qui ne sont pas indépendants : il existe des liens, représentés par des pointillés, entre ces deux cubes. Plus précisément, il existe un lien partant de chaque terme

du premier cube aboutissant au terme dans le second cube ayant même position que le terme initial. Par exemple, il y a un lien partant de $\Gamma_{2\wedge 3} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}$ aboutissant à $\Gamma_{2\wedge 3}$, un autre partant de $\mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \Gamma_{2\wedge 3}$ aboutissant à $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$,...

A l'aide de ces tables nous pouvons distinguer des courbures primaires qui sont définies intrinsèquement, des courbures secondaires qui ne sont définies que si une courbure précédente est nulle, des courbures tertiaires ...
Par exemple, dans la table associé à la courbure, les fonctions $X(\beta_i)$ sont des courbures primaires, alors que les fonctions $Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)$ ne sont que des courbures secondaires.

Remarquons enfin que la table de la torsion a un sens légèrement différent des autres tables :
◇ pour l'étape de la torsion, on est vraiment dans l'esprit de la cohomologie de Spencer ; on ne considère sur H que la métrique induite (i.e. la G-structure), et on décrit les obstructions à trouver une G-connexion sans torsion.
◇ pour les étapes suivantes, on utilise les techniques de la cohomologie de Spencer, mais on est pas dans la même philosophie : on ne cherche pas une G-connexion sans torsion meilleure que les autres ; on considère sur H non seulement la G-structure (la métrique induite), mais on se donne en plus une G-connexion privilégiée D^H, et les invariants obtenus sont, pour la plupart, liés non seulement à la métrique $g_{|H}$, mais aussi à cette connexion.

Convention dans les tables suivantes, nous avons adopté les conventions de notation suivantes :

◇ $\Gamma_{i\wedge j}$ désigne l'ensemble des 3-tenseurs sur $\mathcal{Y}$ vérifiant l'identité de Bianchi, et alternés en leurs variables i et j
◇ $\square_{i_1\wedge j_1, i_2\wedge j_2,\ldots}$ désigne l'ensemble des 4-tenseurs sur $\mathcal{Y}$ vérifiant l'identité de Bianchi, à la fois sur leurs trois premières variables et sur leurs trois dernières variables, alternés en leur variables $i_1 - j_1$, $i_2 - j_2$,...
◇ $\mathcal{R}^{\mathcal{Y}}$ désigne l'ensemble des courbures sur le fibré $\mathcal{Y}$
◇ $\mathcal{DR}^{\mathcal{Y}}$ désigne l'ensemble des dérivées de courbure sur $\mathcal{Y}$

Table des invariants liés à la torsion

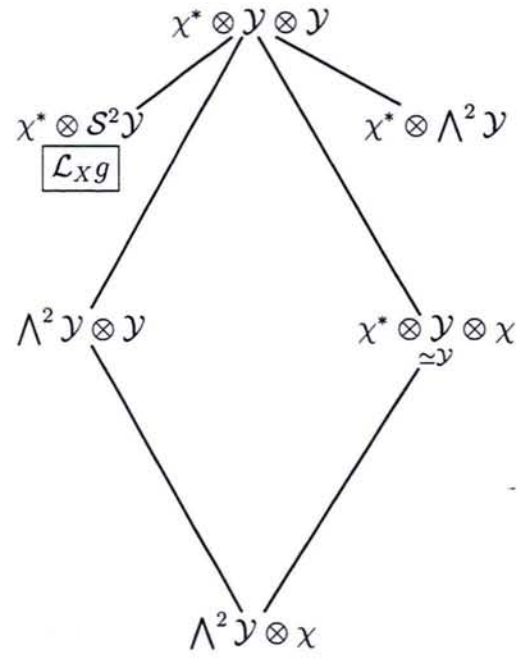


Table des invariants liés à la courbure

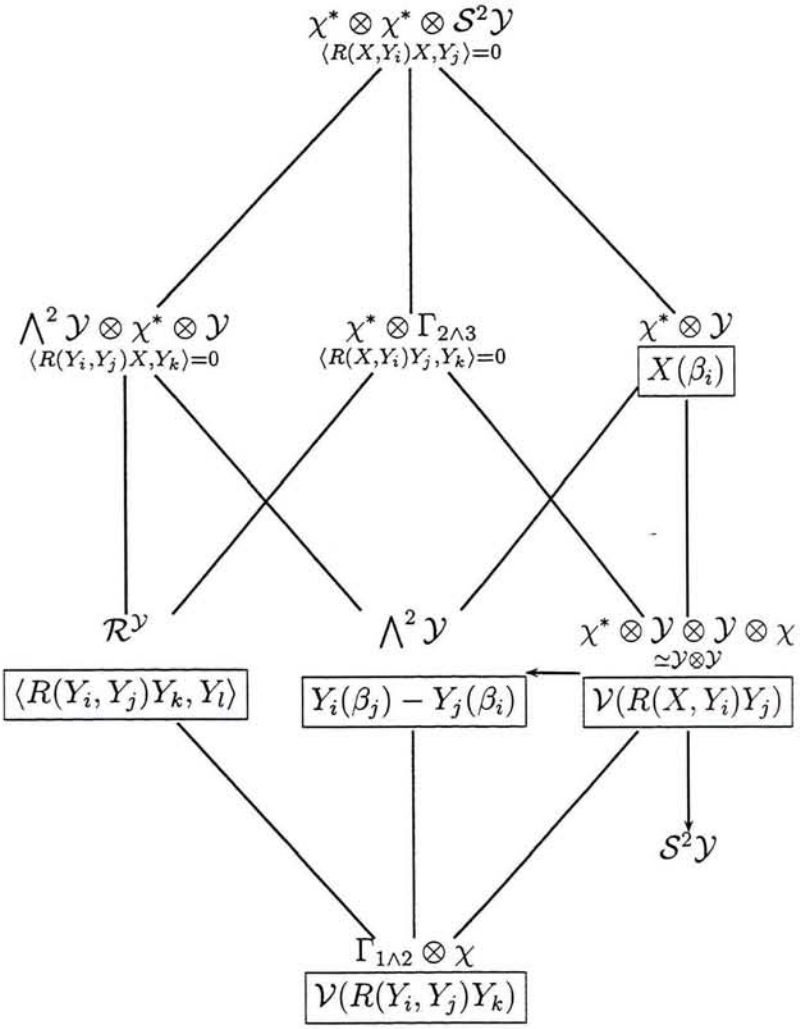
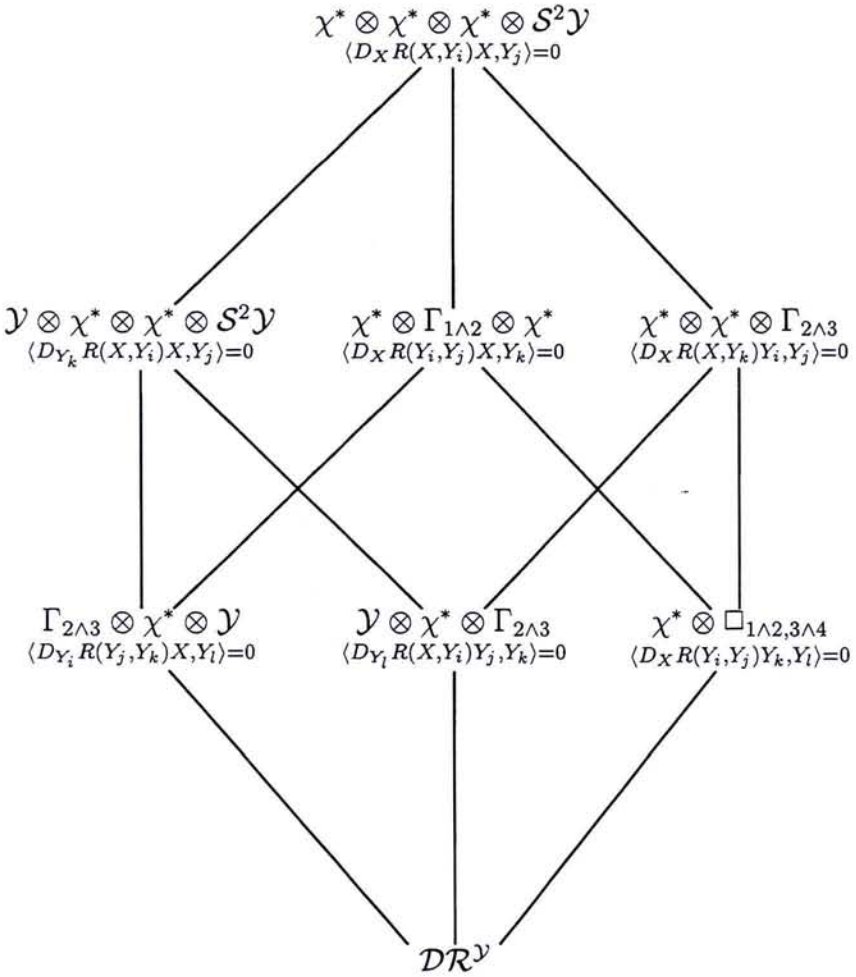
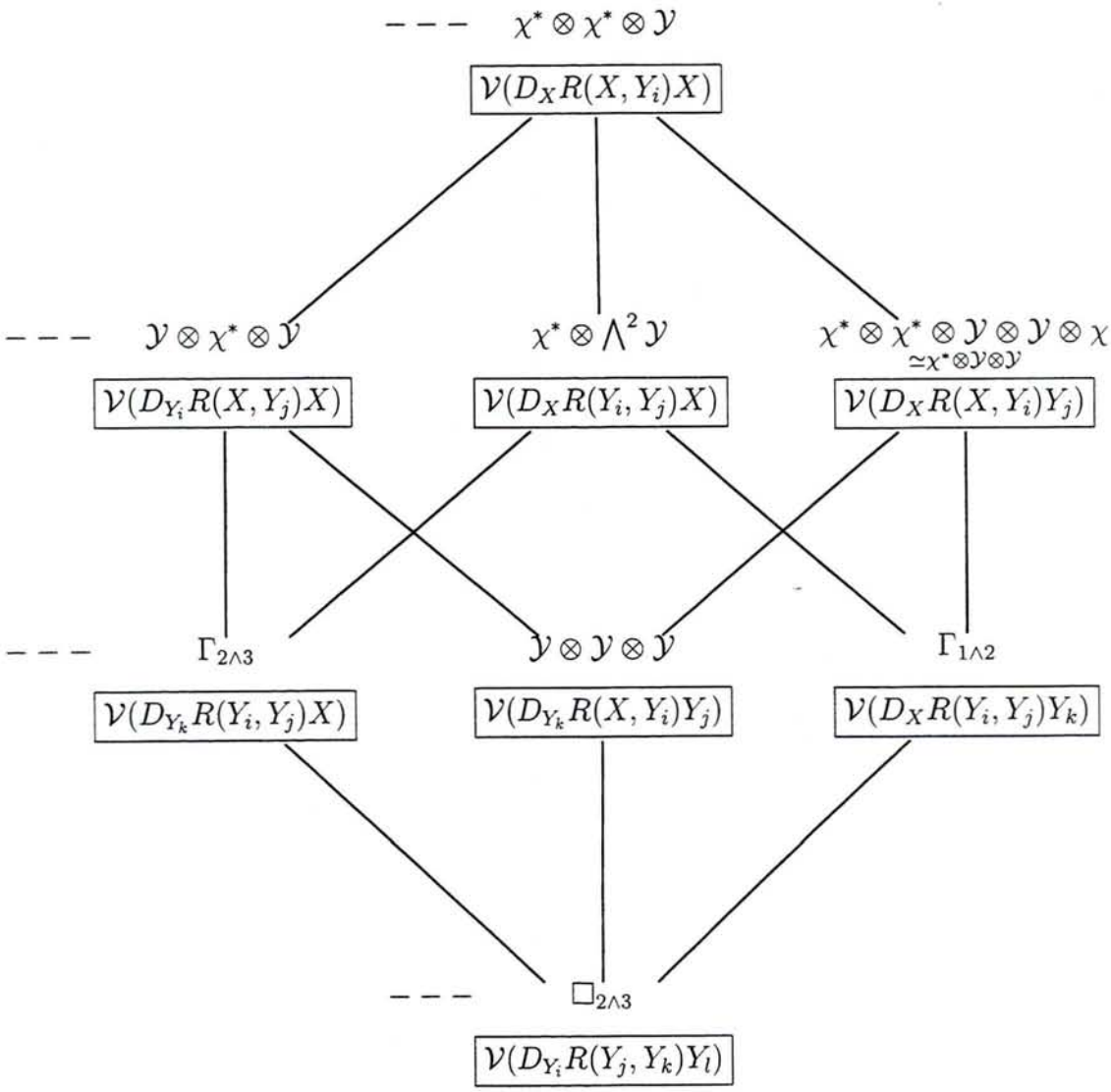


Table des invariants liés à DR



$\langle D_{Y_i} R(Y_j, Y_k)Y_l, Y_m\rangle$


$\chi^* \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}$
$\mathcal{V}(D_X R(X, Y_i)X)$
$\mathcal{Y} \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y}$
$\chi^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Y}$
$\chi^* \otimes \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \chi$
$\simeq \chi^* \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$
$\mathcal{V}(D_{Y_i} R(X, Y_j)X)$
$\mathcal{V}(D_X R(Y_i, Y_j)X)$
$\mathcal{V}(D_X R(X, Y_i)Y_j)$
$\Gamma_{2\wedge 3}$
$\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$
$\Gamma_{1\wedge 2}$
$\mathcal{V}(D_{Y_k} R(Y_i, Y_j)X)$
$\mathcal{V}(D_{Y_k} R(X, Y_i)Y_j)$
$\mathcal{V}(D_X R(Y_i, Y_j)Y_k)$
$\square_{2\wedge 3}$
$\mathcal{V}(D_{Y_i} R(Y_j, Y_k)Y_l)$

3. Une taille canonique du champ X

Etant donnés une section $\sigma : \overset{\checkmark}{H} \to H$ arbitraire, et un champ $X \in \chi$ défini sur l'image de σ, nous avons vu, dans le chapitre précédent, que nous pouvons construire des champs coordonnées $\{X, Y_1^{\sigma,X}, ..., Y_{n-2}^{\sigma,X}\}$ pour lesquels la connexion D^H s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} D_X Y_i^{\sigma,X} = D_{Y_i^{\sigma,X}} X = \beta_i^{\sigma,X} X \\ D_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X} = \Gamma_{ij}^k Y_k^{\sigma,X} + h_{ij}^{\sigma,X} X \end{cases}$$

Nous avons expliqué que, dans la perspective de faire des choix particuliers de section et de taille de X, la première chose qu'il semblait naturelle de faire était d'essayer d'annuler les fonctions β_i.
Nous verrons dans le chapitre suivant que ces dernières ne varient pas par changement de section. Par conséquent, nous ne pouvons que jouer sur la taille de X pour espérer les annuler. Nous allons donc maintenant essayer de voir s'il existe une taille de X permettant d'annuler les fonctions β_i, et, dans le cas négatif, nous verrons que nous pouvons malgré tout définir une taille de X canonique permettant "d'annuler le plus possible" les fonctions β_i.
Ajoutons que nous travaillons dans le domaine affine. Pour cette raison, l'expression "taille canonique" doit être prise entre guillemets : nous ne pourrons jamais obtenir d'objets réellement canoniques si nous ne donnons pas un minimum de conditions initiales.
Dans la pratique, nous sommes contraints de nous donner un point base $p_0 \in H$, et notre but est de construire des coordonnées au voisinage de ce point base p_0. Pour obtenir des "tailles canoniques", nous devons donc nous donner des conditions initiales au point p_0.

3.1. Changement de taille de X.

Changer la taille de X revient à choisir, sur l'image de σ, un champ $\tilde{X}^{\sigma} := f^\sigma X$, pour une fonction lisse $f^\sigma : Im\ \sigma \to \mathbb{R}$.
Après propagation sur M, on obtient un champ $\widetilde{X} \in \Gamma(TH)$ défini par

$$\begin{cases} D_{\widetilde{X}} \widetilde{X} = 0 \\ \widetilde{X} = \tilde{X}^{\sigma} \quad sur \quad Im\ \sigma \end{cases}$$

Ce champ est alors relié au champ X par l'équation $\widetilde{X} = fX$, où f est la fonction sur M définie par

$$\begin{cases} X(f) = 0 \\ f = f^\sigma \quad sur \quad Im\ \sigma \end{cases}$$

Remarque : puisque $X(f) = 0$, la fonction f peut être vue comme une fonction sur le quotient $\overset{\checkmark}{H}$.

LEMME 3.1. $Y_i^{\sigma,fX} = Y_i^{\sigma,X} + \zeta_i X$, *avec* $\zeta_i : M \to \mathbb{R}$, *la fonction définie par*

$$\begin{cases} X(\zeta_i) = \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} \\ \zeta_i = 0 \quad sur \quad Im\ \sigma \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Posons $Y_i^{\sigma,fX} = \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j^i Y_j^{\sigma,X} + \zeta_i X$.
Puisque sur l'image de σ, $Y_i^{\sigma,fX}(x=0) = Y_i^{\sigma} = Y_i^{\sigma,X}(x=0)$, on a forcément $\alpha_j^i(x=0) = 0$ pour $i \neq j$, $\alpha_i^i(x=0) = 1$, et $\zeta_i(x=0) = 0$, $\forall 1 \leq i,j \leq n-2$. De plus,

$$\begin{aligned} [fX, Y_i^{\sigma,fX}] = 0 &\iff [fX, \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j^i Y_j^{\sigma,X} + \zeta_i X] = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^{n-2} fX(\alpha_j^i) Y_j^{\sigma,X} + (fX(\zeta_i) - \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j^i Y_j^{\sigma,X}(f))X = 0 \\ &\iff \begin{cases} X(\alpha_j^i) = 0 \\ fX(\zeta_i) - \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j^i Y_j^{\sigma,X}(f) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_j^i(x=0) = 0$ pour $i \neq j$, et $X(\alpha_j^i) = 0$, on en déduit $\alpha_j^i \equiv 0$ pour $i \neq j$. De même, on obtient $\alpha_i^i \equiv 1$. Il en résulte alors immédiatement $fX(\zeta_i) - Y_i^{\sigma,X}(f) = 0$.
D'où $X(\zeta_i) = \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f}$. □

LEMME 3.2. $\beta_i^{\sigma,fX} = \beta_i^{\sigma,X} + \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f}$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} D_{fX} Y_i^{\sigma,fX} &= D_{fX}(Y_i^{\sigma,X} + \zeta_i X) \\ &= f(\beta_i^{\sigma,X} + X(\zeta_i))X \\ &= (\beta_i^{\sigma,X} + X(\zeta_i))fX \\ &= (\beta_i^{\sigma,X} + \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f})fX \end{aligned}$$

□

Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une taille de X permettant d'annuler les fonctions β_i.

PROPOSITION 3.3.

$$\exists f \in \mathcal{C}^\infty(\overset{\checkmark}{H})/\beta_i^{\sigma,fX} = 0 \iff (O1) \begin{cases} X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \\ Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \end{cases} \quad \forall 1 \leq i,j \leq n-2.$$

DÉMONSTRATION. Annuler les fonctions $\beta_i^{\sigma,fX}$ revient à choisir f sur $\overset{\checkmark}{H}$ telle que $\frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} = -\beta_i^{\sigma,X} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2$.
Un tel système admet une solution si et seulement si
• $X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0$ car $X(f) = 0$

et
• $Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X}) = Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) \quad \forall 1 \leq i,j \leq n-2$ car

$$\begin{aligned} Y_j^{\sigma,X}(\frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f}) - Y_i^{\sigma,X}(\frac{Y_j^{\sigma,X}(f)}{f}) &= \frac{Y_j^{\sigma,X}Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} - \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f}\frac{Y_j^{\sigma,X}(f)}{f} \\ &\quad - \frac{Y_i^{\sigma,X}Y_j^{\sigma X}(f)}{f} + \frac{Y_j^{\sigma,X}(f)}{f}\frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} \\ &= [Y_j^{\sigma,X}, Y_i^{\sigma,X}](f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Remarques :
1. La nullité de $X(\beta_i^{\sigma,X})$ est un invariant sur H au sens où si il existe une section σ et un champ $X \in \chi$ tels que $X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0$, alors $X(\beta_i^{\sigma',fX}) = 0$ pour toute section σ' et toute taille f de X.
2. Si $X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0$ pour une section σ et un champ $X \in \chi$, alors $Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X})$ est un invariant sur H (i.e. ne dépend ni de la section σ, ni de la taille du champ X).

3.2. Interprétation du système $(O1)$.

Etant donnés une section $\sigma : \overset{\checkmark}{H} \to H$, et X^σ un champ sur l'image de σ que nous propageons sur H par l'équation $D_X X = 0$.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que l'obstruction à l'existence d'une taille de X permettant d'annuler toutes les fonctions β_i est donnée par le système

$$(O1) \quad \begin{cases} X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \\ Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \end{cases} \quad \forall\ 1 \leq i,j \leq n-2$$

Nous allons maintenant essayer de comprendre mieux cette obstruction en l'interprétant de différentes manières.

3.2.1. *Interprétation en termes de 1-forme.*

Soit $\phi^{\sigma,X}$ la 1-forme sur H définie par $\phi^{\sigma,X}(U) := \mathcal{V}^{\sigma,X}(\nabla_U X)\ \forall\ U \in \Gamma(TH)$.
Alors on a

$$\begin{cases} \phi^{\sigma,X}(X) = 0 \\ \phi^{\sigma,X}(Y_i^{\sigma,X}) = \beta_i^{\sigma,X}\ \forall\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

PROPOSITION 3.4. $(01) \iff \begin{cases} \textit{la 1-forme } \phi^{\sigma,X} \textit{ est fermée pour tout choix de section } \sigma, \\ \textit{et de champ } X \in \chi. \end{cases}$

DÉMONSTRATION.
• $d\phi^{\sigma,X}(X,X) = 0.$

•

$$d\phi^{\sigma,X}(X, Y_i^{\sigma,X}) = X(\phi^{\sigma,X}(Y_i^{\sigma,X})) - Y_i^{\sigma,X}(\phi^{\sigma,X}(X)) - \phi^{\sigma,X}([X, Y_i^{\sigma,X}])$$
$$= X(\beta_i^{\sigma,X})$$

•

$$d\phi^{\sigma,X}(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) = Y_i^{\sigma,X}(\phi^{\sigma,X}(Y_j^{\sigma,X})) - Y_j^{\sigma,X}(\phi^{\sigma,X}(Y_i^{\sigma,X})) - \phi^{\sigma,X}([Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}])$$
$$= Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X})$$

□

3.2.2. *Interprétation en termes de courbure.*

Les fonctions $X(\beta_i^{\sigma,X})$ et $Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X})$ se trouvaient en tête de la liste des invariants associés à la courbure. Plus précisément, on a

LEMME 3.5. $(O1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{V}^{\sigma,X}(R(X, Y_i^{\sigma,X})X) = 0 \\ \mathcal{V}^{\sigma,X}(R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma X})X) = 0 \end{cases}$

Puisque $\begin{cases} \langle R(X, Y_i^{\sigma,X})X, Y_k^{\sigma,X} \rangle = 0 \\ \langle R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X, Y_k^{\sigma,X} \rangle = 0 \end{cases}$ $\forall 1 \leq i, j, k, \leq n-2$, les champs $R(X, Y_i^{\sigma,X})X$ et $R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X$ sont verticaux. D'où

PROPOSITION 3.6. $(O1) \Longleftrightarrow \begin{cases} R(X, Y_i^{\sigma,X})X = 0 \\ R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X = 0 \end{cases}$ $\forall 1 \leq i, j \leq n-2$

3.2.3. *Interprétation en termes de volume.*

A chaque choix de section σ et de champ $X \in \chi$, on peut associer une forme volume sur H définie par $\omega^{\sigma,X} := X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X}$.
Il est clair que par changement de taille de X, la forme volume varie selon l'équation : $\omega^{\sigma,fX} = f\omega^{\sigma,X}$.

PROPOSITION 3.7.
(i) $D_X\omega^{\sigma,X} \equiv 0$
(ii) $D_{Y_i^{\sigma,X}}\omega^{\sigma,X} = (\beta_i^{\sigma,X} + \sum_{j=1}^{n-2} \Gamma_{ij}^j)\omega^{\sigma,X}$

DÉMONSTRATION.

(i)

$$\begin{aligned} D_X\omega^{\sigma,X} &= D_X(X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X}) \\ &= D_X X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-2} X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{j-1}^{\sigma,X} \wedge D_X Y_j^{\sigma,X} \wedge Y_{j+1}^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j^{\sigma,X} X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{j-1}^{\sigma,X} \wedge X \wedge Y_{j+1}^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} D_{Y_i^{\sigma,X}}\omega^{\sigma,X} &= D_{Y_i^{\sigma,X}}(X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X}) \\ &= D_{Y_i^{\sigma,X}} X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-2} X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{j-1}^{\sigma,X} \wedge D_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X} \wedge Y_{j+1}^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &= \beta_i^{\sigma,X} X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-2} \Gamma_{ij}^j X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X} \\ &= (\beta_i^{\sigma,X} + \sum_{j=1}^{n-2} \Gamma_{ij}^j)\omega^{\sigma,X} \end{aligned}$$

□

Puisque les fonctions Γ_{ij}^k sont invariantes par changement de taille de X, on en déduit que

$$\begin{aligned} D_{Y_i^{\sigma,fX}}\omega^{\sigma,fX} &= (\beta_i^{\sigma,fX} + \sum_{j=1}^{n-2} \Gamma_{ij}^j)\omega^{\sigma,fX} \\ &= (\beta_i^{\sigma,X} + \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} + \sum_{j=1}^{n-2} \Gamma_{ij}^j) f\omega^{\sigma,X} \end{aligned}$$

Donc, pour annuler les dérivées $D_{Y_i}\omega$, il faut choisir une fonction f sur $\check{H}$ telle que

$(\star)$ $\frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} = -\beta_i^{\sigma,X} - \sum_{j=1}^{n-2} \Gamma_{ij}^j \quad \forall 1 \leq i,j,k \leq n-2$

LEMME 3.8. $\forall 1 \leq i,j,k \leq n-2$,
(i) $X(\Gamma_{ij}^k) = 0$
(ii) $Y_i^{\sigma,X}(\sum_{j=1}^{n-2}\Gamma_{kj}^j) = Y_k^{\sigma,X}(\sum_{j=1}^{n-2}\Gamma_{ij}^j)$

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà montré (i) dans le chapitre précédent. Quant à l'équation (ii), c'est une conséquence directe de la symétrie du tenseur de courbure de Ricci $\overset{\checkmark}{Ric}$ du quotient $\overset{\checkmark}{H}$. □

A l'aide du lemme précédent, on déduit aisément que les obstructions pour trouver une fonction f sur $\overset{\checkmark}{H}$ vérifiant $(\star)$ sont données par le système $(O1)$.
On en déduit donc :

PROPOSITION 3.9. $(O1) \Longleftrightarrow$ *Il existe un volume parallèle sur* H

3.2.4. *Interprétation à l'aide de la courbure de Ricci de la connexion* D^H.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que

$$\begin{cases} Ric^H(X, Y_i^{\sigma,X}) - Ric^H(Y_i^{\sigma,X}, X) = X(\beta_i^{\sigma,X}) \\ Ric^H(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) - Ric^H(Y_j^{\sigma,X}, Y_i^{\sigma,X}) = Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X}) \end{cases}$$

On en déduit donc :

PROPOSITION 3.10. $(O1) \Longleftrightarrow$ *Le tenseur de courbure de Ricci de la connexion* D^H, Ric^H, *est symétrique.*

Remarques :
1. Rappelons qu'en général, la courbure de Ricci d'une connexion n'a aucune raison d'être symétrique.
2. Cette équivalence entre le système $(O1)$ et la symétrie de la courbure de Ricci de la connexion D^H avait déjà était remarquée par K. Katsuno (cf. [**K 1**]).

En oûtre, remarquons que l'on a aussi

PROPOSITION 3.11. $X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \Longleftrightarrow X$ *est dans le noyau de* Ric^M.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de $Ric^M(X,X) = 0$ et $Ric^M(X, Y_i^{\sigma,X}) = -X(\beta_i^{\sigma,X})$. □

3.2.5. *Interprétation à l'aide d'un opérateur de type Weingarten.*

DÉFINITION 3.12. L'opérateur de Weingarten est l'opérateur, défini pour chaque champ $X \in \chi$ par

$$\begin{aligned} b^X : \mathcal{Y} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ [Y] &\longmapsto [D_Y X] \end{aligned}$$

(pour plus de détails sur cet opérateur, le lecteur pourra se reporter à l'Annexe 1)
Dans le cas d'une hypersurface dégénérée totalement géodésique, il est clair que les opérateurs b^X sont identiquement nuls, car pour tous champs Y sur H et $X \in \chi$, le champ $D_Y X$ est vertical. Il est alors naturel de considérer, pour tout champ $X \in \chi$ (vérifiant $D_X X = 0$) l'opérateur $\mathfrak{b}^X$ qui a tout champ Y sur H associe non plus la partie horizontale de $D_Y X$ (i.e. la projection sur le quotient $\mathcal{Y}$), mais sa partie verticale (autrement dit, $D_Y X$ lui-même, puisque $D_Y X$ est vertical).

PROPOSITION 3.13. *Etant donnée une section $\sigma : \check{H} \to H$, et X^σ un champ vertical sur l'image de σ propagé sur H par l'équation $D_X X = 0$. Alors on a*

$$(O1) \Longleftrightarrow \textit{le (2-1)-tenseur} \quad (U,V) \longmapsto D_U \mathfrak{b}^X(V) \quad \textit{est symétrique}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} D_X \mathfrak{b}^X = 0 \\ D_{Y_i^{\sigma,X}} \mathfrak{b}^X(Y_j^{\sigma,X}) - D_{Y_j^{\sigma,X}} \mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X}) = 0 \quad \forall 1 \leq i,j \leq n-2 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.

$$\bullet D_X \mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X}) - D_{Y_i^{\sigma,X}} \mathfrak{b}^X(X) = D_X(\mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X})) - \mathfrak{b}^X(D_X Y_i^{\sigma,X}) - \underbrace{D_{Y_i^{\sigma,X}}(\mathfrak{b}^X(X))}_{=0 \quad car \quad \mathfrak{b}^X(X)=0} + \mathfrak{b}^X(D_{Y_i^{\sigma,X}} X)$$

$$= D_X D_{Y_i^{\sigma,X}} X - \mathfrak{b}^X(\underbrace{[X, Y_i^{\sigma,X}]}_{=0})$$

$$= R(X, Y_i^{\sigma,X})X$$

$$\bullet D_{Y_i^{\sigma,X}} \mathfrak{b}^X(Y_j^{\sigma,x}) - D_{Y_j^{\sigma,X}} \mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X}) = D_{Y_i^{\sigma} X}(\mathfrak{b}^X(Y_j^{\sigma,X})) - \mathfrak{b}^X(D_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X})$$

$$- D_{Y_j^{\sigma,X}}(\mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X})) + \mathfrak{b}^X(D_{Y_j^{\sigma,X}} Y_i^{\sigma,X})$$

$$= D_{Y_i^{\sigma,X}} D_{Y_j^{\sigma,X}} X - D_{Y_j^{\sigma,X}} D_{Y_i^{\sigma,X}} X + D_{[Y_j^{\sigma,X}, Y_i^{\sigma,x}]} X$$

$$= R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X$$

$$\bullet D_X \mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X}) = D_X(\mathfrak{b}^X(Y_i^{\sigma,X})) - \mathfrak{b}^X(D_X Y_i^{\sigma,X})$$

$$= D_X D_{Y_i^{\sigma,X}} X - \beta_i^{\sigma,X} \underbrace{\mathfrak{b}^X(X)}_{=0}$$

$$= R(X, Y_i^{\sigma,X})X$$

□

3.3. Une taille canonique de X.

Donnons nous une section σ arbitraire, et $X^\sigma \in \chi$ un champ sur l'image de σ. Après propagation sur H, nous obtenons des champs $X, Y_1^{\sigma,X}, ..., Y_{n-2}^{\sigma,X} \in \Gamma(TH)$ pour lesquels $D_X Y_i^{\sigma,X}$ s'écrit sous la forme $D_X Y_i^{\sigma,X} = \beta_i^{\sigma,X} X$.

Nous avons vu que si l'on a $(O1)\begin{cases} X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \\ Y_i(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \end{cases}$ $\forall 1 \leq i,j \leq n-2$, alors nous pouvons définir une taille de X pour laquelle $\beta_i^{\sigma,fX} \equiv 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n-2$.

En effet, il suffit pour cela de poser $\widetilde{X} := fX$ avec f la fonction sur H définie par

$$\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} = -\beta_i^{\sigma,X} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2 \\ f(p_0) = 1 \end{cases}$$

où p_0 est un point base fixé.

Si maintenant $(O1)$ n'est pas vérifié, nous ne pourrons jamais annuler toutes les fonctions β_i. Nous allons alors définir une taille de X en essayant d'annuler au maximum ces fonctions.

Nous supposerons dans un premier temps que les fonctions $X(\beta_i^{\sigma,X})$ sont toutes nulles.

Remarque : rappelons que la nullité des fonctions $X(\beta_i^{\sigma,X})$ est un invariant sur H. Notre hypothèse ne dépend donc pas des choix σ, X que nous avons fait initialement.

PROPOSITION 3.14. *Si $X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2$, alors il existe une taille de X, définie à une constante multiplicative près, pour laquelle les fonctions $\beta_i^{\sigma,fX}(y_1, ..., y_{n-2})$ vérifient : $\beta_i^{\sigma,fX}(0, ..., 0, y_i, ..., y_{n-2}) \equiv 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2$.*

DÉMONSTRATION. Pour alléger les notations, nous noterons $Y_i := Y_i^{\sigma,X}$, $\beta_i := \beta_i^{\sigma,X}$, et $c_{ij} := Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X})$.

Nous choisirons f solution d'un système différentiel de la forme $\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_i(f)}{f} = -\beta_i + \alpha_i \ \forall 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$ pour des fonctions $\alpha_i : H \to \mathbb{R}$. Pour déterminer f, il nous faut alors faire un choix de fonctions α_i.

Choix de α_1 : notre but étant d'annuler au maximum les fonctions β_i, nous sommes tentés de choisir $\alpha_1 \equiv 0$, de manière à annuler $\beta_1^{\sigma,fX}$. Ce choix est possible, car le système

$(\star 1)$ $\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_1(f)}{f} = -\beta_1 \end{cases}$ admet effectivement des solutions.

Choix de α_2 : Pour que le système $(\star 2)$ $\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_1(f)}{f} = -\beta_1 \\ \frac{Y_2(f)}{f} = -\beta_2 + \alpha_2 \end{cases}$ admette des solutions, il faut que la fonction α_2 que l'on va choisir vérifie $\begin{cases} X(\alpha_2) = 0 \\ Y_1(\alpha_2) = c_{12} \end{cases}$. Ce dernier système admet effectivement des solutions car $X(c_{12}) \equiv 0$. Soit donc F_2 une solution quelconque de ce système. Alors toute fonction de la forme $F_2 + h(y_2, ..., y_{n-2})$ est encore solution du système.

De manière à annuler au maximum $\beta_2^{\sigma,fX}$, nous posons
$\alpha_2(y_1, ..., y_{n-2}) = F_2(y_1, ..., y_{n-2}) - F_2(0, y_1, ..., y_{n-2})$.

Nous avons alors bien $\beta_2^{\sigma,fX}(0, y_2, ..., y_{n-2}) = 0$.

Choix de α_i : supposons choisies des fonctions $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}$. Pour que le système

$(\star i-1)$ $\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_j(f)}{f} = -\beta_j + \alpha_j \ \ \forall 1 \leq j \leq i-1 \end{cases}$ admette des solutions, il faut que les fonctions $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}$ que l'on a choisies vérifient $\begin{cases} X(\alpha_j) = 0 \\ Y_j(\alpha_k) - Y_k(\alpha_j) = c_{jk} \ \ \forall 1 \leq j,k \leq i-1 \end{cases}$.

Ceci étant, nous devons choisir une fonction α_i telle que le système $(\star i)$ $\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_j(f)}{f} = -\beta_j + \alpha_j \ \ \forall 1 \leq j \leq i \end{cases}$ admette des solutions.

Nous en déduisons que la fonction α_i doit vérifier $\begin{cases} X(\alpha_i) = 0 \\ Y_j(\alpha_i) = Y_i(\alpha_j) - c_{ij} \ \ \forall 1 \leq j \leq i-1 \end{cases}$.

Or ce dernier système admet des solutions car
- $X(c_{ij}) = 0 \ \ \forall 1 \leq j \leq i-1$
- $\forall 1 \leq j,k \leq i-1$, on a

$$\begin{aligned} Y_k(Y_i(\alpha_j) - c_{ij}) - Y_j(Y_i(\alpha_k) - c_{ik}) &= Y_iY_k(\alpha_j) - Y_k(Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)) - Y_iY_j(\alpha_k) + Y_j(Y_i(\beta_k) - Y_k(\beta_i)) \\ &= Y_i(Y_k(\alpha_j) - Y_j(\alpha_k)) - Y_i(Y_k(\beta_j) - Y_j(\beta_k)) \\ &= Y_i(c_{kj}) - Y_i(c_{kj}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit donc F_i une solution quelconque de ce dernier système. Alors toute fonction de la forme $F_i(y_1, ..., y_{n-2}) + h(y_i, ..., y_{n-2})$ est encore solution du système. Nous posons alors $\alpha_i(y_1, ..., y_{n-2}) = F_i(y_1, ..., y_{n-2}) - F_i(0, ..., 0, y_i, ..., y_{n-2})$.
Pour toute fonction f solution de $(\star i)$, on a alors :

$\beta_j^{\sigma,fX}(0, ..., 0, y_i, ..., y_{n-2}) = 0 \ \ \forall 1 \leq j \leq i$.

Finalement, en continuant le processus, nous obtenons une fonction f solution de

$(\star n-2)$ $\begin{cases} X(f) = 0 \\ \frac{Y_i(f)}{f} = -\beta_i + \alpha_i \ \ \forall 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$ pour les fonctions α_i construites comme ci-dessus. La fonction f est alors unique à une constante multiplicative près.

□

Remarques :
1. Si $(O1)$ est vérifié, la construction ci-dessus nous donne bien une taille de X pour laquelle $\beta_i^{\sigma,fX} \equiv 0 \ \ \forall 1 \leq i \leq n-2$.
2. Le fait que la taille de X décrite ci-dessus ne soit définie qu'à une constante multiplicative près n'est pas étonnant : cela vient juste du fait que le paramétrage affine des géodésiques tangentes aux champs $X \in \chi$ n'est défini qu'à une fonction affine près. Choisir la constante multiplicative revient alors à choisir le paramétrage affine des géodésiques nulles, et faire un tel choix revient à imposer une condition initiale en p_0, comme par exemple $f(p_0) = 1$.

Dans le cas où $X(\beta_i^{\sigma,X}) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2$, notre stratégie pour construire une taille de X a donc été d'annuler progressivement les fonctions β_i, la première sur l'hypersurface H toute entière, la seconde sur une sous-variété de codimension 1 de H, la $i^{ème}$ sur une sous-variété de codimension (i-1) de H. Il nous reste maintenant à traiter le cas général, où les fonctions $X(\beta_i^{\sigma,X})$ ne sont pas forcément nulles. La seule chose que l'on puisse alors faire est de changer β_i sur la section σ initiale. Autrement dit, on construit f de la même manière que précédemment sur la section σ, comme étant solution d'un système différentiel $\left\{ \frac{Y_i^{\sigma,X}(f)}{f} = -\beta_i^{\sigma,X} + \alpha_i \ \forall 1 \leq i \leq n-2 \right.$, où l'on choisit les fonctions $\alpha_i \ : \ Im \ \sigma \to \mathbb{R}$ comme dans la démonstration de la proposition 3.13, et on propage finalement f sur H par l'équation $X(f) = 0$.
On obtient ainsi une taille de X telle que les fonctions $\beta_i^{\sigma,fX}(x, y_1, ..., y_{n-2})$ vérifient :

$$\beta_i^{\sigma,fX}(0, 0, ..., 0, y_i, ..., y_{n-2}) \equiv 0.$$

Dans le cas général, on a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 3.15. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de (M, g), variété pseudo-Riemannienne. Soit $\sigma \ : \ \check{H} \to H$ une section quelconque du quotient $\check{H} := H/\chi$. Alors il existe une taille de $X \in \chi$, définie à une constante multiplicative près, pour laquelle les fonctions $\beta_i^{\sigma,fX}(x, y_1, ..., y_{n-2})$ vérifient :*

$$\beta_i^{\sigma,fX}(0, 0, ..., 0, y_i, ..., y_{n-2}) \equiv 0 \ \ 1 \leq i \leq n-2.$$

4. Choix de section

Nous avons vu que sur toute section $\sigma \ : \ \check{H} \to H$, nous pouvons choisir une taille de X naturelle. Il nous reste maintenant à savoir s'il existe des choix de section plus naturels que d'autres. Dans le cas général, ceci est une question très difficile, et on a aucune chance de trouver des sections particulières en général, si l'on ne se donne pas de données supplémentaires. Nous ne traiterons donc ici que le cas favorable où il existe un champ $X \in \chi$ parallèle sur H (i.e. qu'il existe une taille de X permettant d'annuler toutes les fonctions β_i). Même dans ce cas, il y a peu de chances de trouver des sections canoniques en général, mais nous verrons que l'on peut tout de même définir des sections intéressantes.
Considérons donc une section $\sigma : \check{H} \to H$ quelconque, et supposons que la taille de X associée à σ permet d'annuler toutes les fonctions β_i.
Dans un premier temps, nous allons alors chercher à savoir si, par changement de section, nous pouvons réussir à annuler les fonctions $h_{ij}^{\sigma,X}$. Ce faisant, nous serons a-même de savoir si notre hypersurface H est un produit affine.
Ensuite, nous montrerons que nous pourrons malgré tout définir des sections privilégiées (qui ne seront pas uniques) adaptées à la géométrie de H.

Soit donc σ une section quelconque, et choisissons sur σ une taille de X telle que :

$\beta_i^{\sigma,X} \equiv 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2.$

4.1. Changement de section.

Notons $\Gamma(\overset{\checkmark}{H})$ l'ensemble des sections $\overset{\checkmark}{H} \to H$. Nous avons une action de $\mathcal{C}^\infty(\overset{\checkmark}{H}, \mathbb{R})$ sur $\Gamma(\overset{\checkmark}{H})$ donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\overset{\checkmark}{H}, \mathbb{R}) \times \Gamma(\overset{\checkmark}{H}) &\longrightarrow \Gamma(\overset{\checkmark}{H}) \\ (\overset{\checkmark}{f}, \sigma) &\longmapsto \overset{\checkmark}{f}.\sigma : (\overset{\checkmark}{q} \longmapsto \phi^X_{\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{q})}(\sigma(\overset{\checkmark}{q}))) \end{aligned}$$

(où ϕ^X désigne le flot du champ X). Cette action est clairement transitive.

LEMME 4.1. $Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X} + d\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{Y}_i)X.$

DÉMONSTRATION. Notons $Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j^i Y_j^{\sigma,X} + \xi_i X.$

Sur l'image de la section $\overset{\checkmark}{f}.\sigma$, on a $Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} := Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma} \in \Gamma(TIm(\overset{\checkmark}{f}.\sigma))$, où $Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma}$ est le champ défini par

$$\begin{aligned} Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma}(\overset{\checkmark}{f}.\sigma(\overset{\checkmark}{q})) &= T_{\overset{\checkmark}{q}}\overset{\checkmark}{f}.\sigma.\overset{\checkmark}{Y}_i(\overset{\checkmark}{q}) \\ &= T_{\sigma(\overset{\checkmark}{q})}\phi^X_{\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{q})}.T_{\overset{\checkmark}{q}}\sigma.\overset{\checkmark}{Y}_i(\overset{\checkmark}{q}) + X(\phi^X_{\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{q})}(\sigma(\overset{\checkmark}{q}))d\overset{\checkmark}{f}.\overset{\checkmark}{Y}_i(\overset{\checkmark}{q}) \\ &= T_{\sigma(\overset{\checkmark}{q})}\phi^X_{\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{q})} Y_i^\sigma(\sigma(\overset{\checkmark}{q})) + X(\overset{\checkmark}{f}.\sigma(\overset{\checkmark}{q}))d\overset{\checkmark}{f}.\overset{\checkmark}{Y}_i(\overset{\checkmark}{q}) \\ &= Y_i^{\sigma,X}(\phi^X_{\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{q})}(\sigma(\overset{\checkmark}{q}))) + d\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{Y}_i(\overset{\checkmark}{q}))X(\overset{\checkmark}{f}.\sigma(\overset{\checkmark}{q})) \\ &= Y_i^{\sigma,X}(\overset{\checkmark}{f}.\sigma(\overset{\checkmark}{q})) + d\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{Y}_i(\overset{\checkmark}{q}))X(\overset{\checkmark}{f}.\sigma(\overset{\checkmark}{q})) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} [Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X}, X] = 0 &\Longleftrightarrow [\sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j^i Y_j^{\sigma,X} + \xi_i X, X] = 0 \\ &\Longleftrightarrow -\sum_{j=1}^{n-2} X(\alpha_j^i) Y_j^{\sigma,X} - X(\xi_i)X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} X(\alpha_j^i) = 0 \\ X(\xi_i) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc $\alpha_j^i \equiv 0$ pour $i \neq j$, $\alpha_i^i \equiv 1$, $\xi_i = d\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{Y}_i)$.

D'où $Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X} + d\overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{Y}_i)X$.

□

Remarque : notons f la fonction définie sur H par $f := \overset{\checkmark}{f} \circ \pi$. Il est clair que l'on a $X(f) \equiv 0$. De plus, pour tout point $q \in H$, on a

$$\begin{aligned} T_q f.Y_i^{\sigma,X}(q) &= T_q(\overset{\checkmark}{f} \circ \pi).Y_i^{\sigma,X}(q) \\ &= T_{\pi(q)}\overset{\checkmark}{f}.\underbrace{T_q\pi.Y_i^{\sigma,X}(q)}_{=\overset{\checkmark}{Y}_i(\pi(q))} \\ &= T_{\pi(q)}\overset{\checkmark}{f}.\overset{\checkmark}{Y}_i(\pi(q)) \end{aligned}$$

On a donc $Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X} + df(Y_i^{\sigma,X})X$.

LEMME 4.2.
(i) $\beta_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = \beta_i^{\sigma,X}$
(ii) $h_{ij}^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = h_{ij}^{\sigma,X} + Hess\ f(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) = h_{ij}^{\sigma,X} + Hess\ \overset{\checkmark}{f}(\overset{\checkmark}{Y}_i, \overset{\checkmark}{Y}_j)$

DÉMONSTRATION.
(i)

$$\begin{aligned} D_X Y_i^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} &= D_X(Y_i^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X}(f)X) \\ &= (\beta_i^{\sigma,X} + XY_i^{\sigma,X}(f))X \\ &= (\beta_i^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X}\underbrace{X(f)}_{=0})X \\ &= \beta_i^{\sigma,X}X \end{aligned}$$

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

(ii)

$$\begin{aligned}
D_{Y_i^{\check{f}.\sigma,X}} Y_j^{\check{f}.\sigma,X} &= D_{Y_i^{\sigma,X}+Y_i^{\sigma,X}(f)X}(Y_j^{\sigma,x}+Y_j^{\sigma,X}(f)X) \\
&= D_{Y_i^{\sigma,x}} Y_j^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f)X + Y_i^{\sigma,X}(f)X Y_j^{\sigma,X}(f)X \\
&= D_{Y_i^{\sigma,x}} Y_j^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f)X + Y_i^{\sigma,X}(f) Y_j^{\sigma,X} \underbrace{X(f)}_{=0} \\
&= \Gamma_{ij}^k Y_k^{\sigma,X} + h_{ij}^{\sigma,X} X + Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f)X \\
&= \Gamma_{ij}^k Y_k^{\check{f}.\sigma,X} + (h_{ij}^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f) - \Gamma_{ij}^k Y_k^{\sigma,X}(f))X \\
&= \Gamma_{ij}^k Y_k^{\check{f}.\sigma,X} + (h_{ij}^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f) - D_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X}(f))X \\
&= \Gamma_{ij}^k Y_k^{\check{f}.\sigma,X} + (h_{ij}^{\sigma,X} + Hess\ f(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X
\end{aligned}$$

□

Si l'on souhaite annuler les fonctions h_{ij}, il faut donc que ces dernières soient le hessien d'une fonction f sur H telle que $X(f) = 0$, ce qui revient à dire que les fonctions h_{ij} doivent être le hessien d'une fonction $\check{f}$ sur $\check{H}$.

Remarque : cette condition était déjà apparue dans la thèse de C. Boubel (cf. [**Bou**]).

4.2. Quelques lemmes préliminaires.

DÉFINITION 4.3. Soit B un champ de formes bilinéaires symétriques sur une variété $\mathcal{M}$ munie d'une connexion affine $\mathcal{D}$. On appelle différentielle de $\mathcal{D}$, notée $d_{\mathcal{D}}B$, la 3-forme définie par :

$$d_{\mathcal{D}}B(V,V',V'') = \mathcal{D}_V B(V',V'') - \mathcal{D}_{V'} B(V,V'')$$

LEMME 4.4. *Soit B un champ de formes bilinéaires symétriques sur une variété $\mathcal{M}$ munie d'une connexion affine $\mathcal{D}$.*
Alors si B est le hessien d'une fonction f sur $\mathcal{M}$, on a

$$d_{\mathcal{D}}B(V,V',V'') = df(R^{\mathcal{D}}(V',V)V'' + \mathcal{D}_{T^{\mathcal{D}}(V,V')}V'' - T^{\mathcal{D}}(V,V').V'') \quad \forall V,V',V'' \in \Gamma(T\mathcal{M}).$$

DÉMONSTRATION. Supposons $B = hess\ f$. Alors

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{D}}B(V,V',V'') &= \mathcal{D}_V B(V',V'') - \mathcal{D}_{V'}B(V,V'') \\
&= V(B(V',V'')) - B(\mathcal{D}_V V',V'') - B(V',\mathcal{D}_V V'') \\
&\quad -V'(B(V,V'')) + B(\mathcal{D}_{V'}V,V'') + B(V,\mathcal{D}_{V'}V'') \\
&= V(V'.V''(f) - \mathcal{D}_{V'}V''(f)) - V'(V.V''(f) - \mathcal{D}_V V''(f)) \\
&\quad -\mathcal{D}_V V'.V''(f) + \mathcal{D}_{\mathcal{D}_V V'}V''(f) + \mathcal{D}_{V'}V.V''(f) - \mathcal{D}_{\mathcal{D}_{V'}V}V''(\\
&\quad -V'.\mathcal{D}_V V''(f) + \mathcal{D}_{V'}\mathcal{D}_V V''(f) + V.\mathcal{D}_{V'}V''(f) - \mathcal{D}_V\mathcal{D}_{V'}V \\
&= [V,V'].V''(f) + T^{\mathcal{D}}(V',V).V''(f) + [V',V].V''(f) \\
&\quad +\mathcal{D}_{T^{\mathcal{D}}(V,V')}V''(f) + \mathcal{D}_{[V,V']}V''(f) + \mathcal{D}_{V'}\mathcal{D}_V V''(f) - \mathcal{D}_V\mathcal{D}_{V'}V \\
&= -T^{\mathcal{D}}(V,V')V''(f) + \mathcal{D}_{T^{\mathcal{D}}(V,V')}V''(f) + R^{\mathcal{D}}(V',V)V''(f)
\end{aligned}$$

□

En particulier, on a

COROLLAIRE 4.5. *Soit B un champ de formes bilinéaires symétriques sur une variété $\mathcal{M}$ munie d'une connexion affine $\mathcal{D}$ sans torsion.*
Alors si B est le hessien d'une fonction f sur $\mathcal{M}$, on a

$$d_{\mathcal{D}}B(V,V',V'') = df(R^{\mathcal{D}}(V',V)V'') \quad \forall V,V',V'' \in \Gamma(T\mathcal{M}).$$

Remarquons que si la connexion $\mathcal{D}$ est plate, la réciproque est vraie :

LEMME 4.6. *Soit B un champ de formes bilinéaires symétriques sur une variété $\mathcal{M}$ munie d'une connexion affine $\mathcal{D}$ sans torsion, à courbure nulle.*
Alors B est, au voisinage de chaque point, le hessien d'une fonction f sur $\mathcal{M}$ si et seulement si $d_{\mathcal{D}}B \equiv 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons $d_{\mathcal{D}}B \equiv 0$. Soit $\{V_i\}$ une base de champs de vecteurs parallèles sur $\mathcal{M}$ (une telle base existe si et seulement si $(\mathcal{M},\mathcal{D})$ est plate). Alors pour tous champs V,V' sur $\mathcal{M}$, on a

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{D}}B(V,V',V_i) = 0 &\iff \mathcal{D}_V B(V',V_i) - \mathcal{D}_{V'}B(V,V_i) = 0 \\
&\iff V(B(V',V_i)) - B(\mathcal{D}_V V',V_i) - B(V',\mathcal{D}_V V_i) \\
&\quad -V'(B(V,V_i)) + B(\mathcal{D}_{V'}V,V_i) + B(V,\mathcal{D}_{V'}V_i) = 0 \\
&\iff V(B(V',V_i)) - V'(B(V,V_i)) - B([V,V'],V_i) = 0
\end{aligned}$$

Donc, si $d_{\mathcal{D}}B \equiv 0$, les formes $\psi_{V_i} : V \to B(V,V_i)$ sont fermées. On trouve donc au voisinage de chaque point une fonction h_{V_i}, nulle au point considéré, telle que $\psi_{V_i} = dh_{V_i}$.

L'application linéaire $\phi : V_i \to h_{V_i}$ est alors fermée. En effet,

$$\begin{aligned} V_j\phi(V_i) &= V_j(h_{V_i}) \\ &= dh_{V_i}(V_j) \\ &= \psi_{V_i}(V_j) \\ &= B(V_j, V_i) \\ &= B(V_i, V_j) \\ &= V_i\phi(V_j) \end{aligned}$$

Donc on trouve au voisinage de chaque point une fonction f telle que $\phi = df$. Finalement, on a $B = hess\ f$. □

4.3. Une condition nécessaire à l'annulation des fonctions h_{ij}.

Si on se donne une section σ, et la taille de X naturelle sur l'image de σ, nous avons vu que nous avons une décomposition de TH en parties horizontale et verticale :

$$T_pH = T_p\mathcal{H}^{\sigma,X} \overset{\perp}{\oplus} X_p \quad \forall p \in H.$$

Nous avons alors une projection horizontale $\mathcal{H}^{\sigma,X} : T_pH \to T_p\mathcal{H}^{\sigma,X}$, et une projection verticale $\mathcal{V}^{\sigma,X} : T_pH \to X_p$.
Nous aimerions savoir si il est possible d'annuler les fonctions $h_{ij} := \mathcal{V}(D^H_{Y_i}Y_j)$. Ce problème est en fait équivalent aux deux questions suivantes :
1. Peut-on trouver une section sur laquelle les fonctions h_{ij} soient toutes nulles ?
2. Si oui, peut-on propager la nullité des fonctions h_{ij} ?
Nous savons que les réponses à ces questions sont :
1. Nous pouvons trouver une section sur laquelle les fonctions h_{ij} sont toutes nulles si et seulement si les fonctions $h^{\sigma,X}_{ij}$ correspondent au hessien d'une fonction f sur l'image de σ.
2. Nous pouvons propager la nullité des fonctions h_{ij} si et seulement si on a
$X(h^{\sigma,X}_{ij}) = 0\ \forall\ 1 \leq i, j \leq n-2$.

La difficulté est donc de savoir si, étant donnée une section σ quelconque, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(Im\ \sigma, \mathbb{R})$ telle que, sur la section, l'on ait : $h^{\sigma,X}_{ij} = Hess(f)(Y^{\sigma,X}_i, Y^{\sigma,X}_j)$.

Rappelons que l'image de la section σ définit une sous-variété non-dégénérée, de codimension 2, de M, que l'on peut munir d'une connexion induite $\nabla^\sigma := \mathcal{H}^{\sigma,X}(D^H)$, qui est clairement métrique et sans torsion.
Notons B le 2-tenseur défini par

$$\begin{aligned} B\ :\ \Gamma(TIm\ \sigma) \times \Gamma(TIm\ \sigma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (U, V) &\longmapsto D^H_U V - \nabla^\sigma_U V \end{aligned}$$

B représente alors la seconde forme fondamentale de la sous-variété de codimension 2 $Im\sigma$ (cette seconde forme fondamentale n'a pas de composante transverse à l'hypersurface H, puisque H est totalement géodésique). B est par conséquent un champ de formes bilinéaires symétriques sur $Im\sigma$, tel que $B(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) = h_{ij}^{\sigma,X}$. De plus, on retrouve l'équation de Codazzi-Mainardi :

LEMME 4.7. $d_{\nabla^\sigma} B(V, V', V'') = \mathcal{V}^{\sigma,X}(R^{D^H}(V, V')V'') \quad \forall V, V', V'' \in \Gamma(TIm\ \sigma)$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
d_{\nabla^\sigma} B(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) &= \nabla^\sigma_{Y_i^{\sigma,X}} B(Y_j^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) - \nabla^\sigma_{Y_j^{\sigma,X}} B(Y_i^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) \\
&= Y_i^{\sigma,X} B(Y_j^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) - B(\nabla^\sigma_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) - B(Y_j^{\sigma,X}, \nabla^\sigma_{Y_i^{\sigma,X}} Y_k^{\sigma} \\
&- Y_j^{\sigma,X} B(Y_i^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) + B(\nabla^\sigma_{Y_j^{\sigma,X}} Y_i^{\sigma,X}, Y_k^{\sigma,X}) + B(Y_i^{\sigma,X}, \nabla^\sigma_{Y_j^{\sigma,X}} Y_k^{\sigma,} \\
&= Y_i^{\sigma,X}(h_{jk}^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(h_{ik}^{\sigma,X}) - \Gamma^l_{ik} B(Y_j^{\sigma,X}, Y_l^{\sigma,X}) \\
&\quad + \Gamma^l_{jk} B(Y_i^{\sigma,X}, Y_l^{\sigma,X}) - B(\underbrace{[Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}]}_{=0}, Y_k^{\sigma,X}) \\
&= Y_i(h_{jk}^{\sigma,X}) - Y_j(h_{ik}^{\sigma,X}) + \Gamma^l_{jk} h_{il}^{\sigma,X} - \Gamma^l_{ik} h_{jl}^{\sigma,X} \\
&= \mathcal{V}^{\sigma,X}(R^H(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) Y_k^{\sigma,X})
\end{aligned}$$

□

Remarque : on aurait pû admettre cette équation sans la démontrer en utilisant la théorie générale des immersions pseudo-Riemanniennes en codimension 2 (cf. [**Sp**] t. IV).

PROPOSITION 4.8. *Une condition nécessaire pour pouvoir trouver une section sur laquelle les fonctions h_{ij} sont toutes nulles est qu'il existe, pour toute section σ, une fonction f sur l'image de σ telle que :* $\forall V, V', V'' \in \Gamma(TIm\sigma)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\sigma,X}(R^H(V, V')V'') &= df(R^\sigma(V', V)V'') \\
&= df(R^H(V', V)V'') \\
&\quad \textit{si on propage } f \textit{ par } X(f) = 0
\end{aligned}$$

4.4. Choix de section.

DÉFINITION 4.9. Soit σ une section, et notons $X \in \chi$ le champ X muni de la taille canonique le long de l'image de σ. Il est clair que l'image de σ est une hypersuface de H. Nous noterons alors H^σ la courbure moyenne de cette hypersurface dans H. En d'autres termes, H^σ désigne la trace par rapport à la métrique g_σ du 2-tenseur $h_{ij}^{\sigma,X}{}_{|Im\sigma}$.

Remarque : dans la suite, il nous arrivera souvent de voir H^σ comme une fonction sur l'hypersurface H toute entière. Elle désignera alors la fonction $g^{ij}h_{ij}^{\sigma,X}$.

Après ces définitions, regardons maintenant ce que donnent les changements de section. Soit σ une section quelconque. Nous avons vu que par changement des section, les fonctions h_{ij} varient selon l'équation $(*s)$ $\overset{\checkmark}{h}_{ij}^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = h_{ij}^{\sigma,X} + Hess(\overset{\checkmark}{f})(\overset{\checkmark}{Y}_i, \overset{\checkmark}{Y}_j)$.
Si les fonctions $h_{ij}^{\sigma,X}{}_{|Im\sigma}$ sont le hessien d'une fonction $\overset{\checkmark}{f} \in \mathcal{C}^\infty(\overset{\checkmark}{H}, \mathbb{R})$, il y a donc un choix naturel de section sur laquelle les fonctions h_{ij} sont toutes nulles (et donc aussi nulles sur H si et seulement si les fonctions $X(h_{ij}^{\sigma,X})$ sont toutes nulles).
En particulier, si la variété ambiante M est de dimension 3, on peut toujours trouver localement une fonction f telle que $h_{11}^{\sigma,X} = Hess(\overset{\checkmark}{f})(\overset{\checkmark}{Y}_1, \overset{\checkmark}{Y}_1)$. On a donc dans ce cas une section canonique sur laquelle la fonction h_{11} est identiquement nulle, et cette nullité se propagera à H si (et seulement si) $X(h_{11}) = 0$. On en conclue donc :

PROPOSITION 4.10. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de (M^3, g), variété pseudo-Riemannienne de dimension 3. Il existe sur H un choix de taille de X canonique, mais aussi un choix de section canonique.*

Si maintenant les fonctions $h_{ij}^{\sigma,X}{}_{|Im\sigma}$ ne représentent pas un hessien, remarquons que, en prenant la trace par rapport à la métrique g_σ de l'équation $(*s)$, on obtient
$H^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma,X} = H^\sigma + \overset{\checkmark}{\triangle}\overset{\checkmark}{f}$ (où $\overset{\checkmark}{\triangle}$ désigne le Laplacien de $(\overset{\checkmark}{H}, \overset{\checkmark}{g})$).
Il semble donc naturel de choisir une section $\overset{\checkmark}{f}.\sigma$, en choisissant la fonction $\overset{\checkmark}{f}$ telle que $\overset{\checkmark}{\triangle}\overset{\checkmark}{f} = -H^\sigma$.
On obtient alors $H^{\overset{\checkmark}{f}.\sigma} \equiv 0$ sur l'image de la nouvelle section $\overset{\checkmark}{f}.\sigma$.

DÉFINITION 4.11. On appellera section harmonique une section $\sigma : \overset{\checkmark}{H} \to H$ pour laquelle $H^\sigma \equiv 0$ *sur* $Im(\sigma)$.

On en conclut que si l'on ne peut pas annuler les fonctions h_{ij} sur une section, on peut, du moins, toujours trouver des sections privilégiées sur lesquelles la courbure moyenne H^σ est nulle. Ceci ne définit pas une section de manière unique. En fait, il est clair que l'ensemble des sections harmoniques est l'orbite de l'une d'elles sous l'action des fonctions harmoniques sur le quotient $\overset{\checkmark}{H}$.
On a ainsi restreint le choix de section (donc d'une fonction $\overset{\checkmark}{f}$ sur $\overset{\checkmark}{H}$) au choix d'une fonction $\overset{\checkmark}{f}$ harmonique sur $\overset{\checkmark}{H}$.
Remarque : une section sur l'image de laquelle les fonctions h_{ij} sont toutes nulles peut être vue comme une hypersurface totalement géodésique de H. Si une telle section n'existe pas, on peut toujours trouver des sections harmoniques, l'image d'une telle section pouvant être interprétée comme étant une hypersurface minimale de H.

4.5. Défaut d'une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, à être localement un produit affine.

Les résultats que nous avons obtenus jusque là nous permettent maintenant d'identifier le défaut d'une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, à être, localement, un produit affine. Ce défaut se traduit par le théorème suivant :

THÉORÈME 4.12. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de (M^n, g), variété pseudo-Riemannienne. Notons χ la distribution sur H définie par*
$\chi : p \in H \to Ker g_H$, *et* $\check{H}$ *le quotient* $\frac{H}{\chi}$. *Pour tous choix de section* $\sigma : \check{H} \to H$, *et tout champ* $X \in \chi$ *défini sur l'image de* σ, *nous décomposons le fibré tangent* TH *en partie horizontale* $\mathcal{H}^{\sigma,X}$ *et verticale* $\mathcal{V}^{\sigma,X}$, *où :*
- $\mathcal{V}^{\sigma,X}$ *est engendrée par le champ* X, *propagé sur* H *par l'équation* $D_X X = 0$.
- $\mathcal{H}^{\sigma,X}$ *est engendrée par les relevés* $Y_i^{\sigma,X}$ *sur la section de champs coordonnées sur* $\check{H}$, *propagés à* H *par l'équation* $[X, Y_i^{\sigma,X}] = 0$.

Nous notons alors $\mathcal{V}^{\sigma,X}$ *la projection de* TH *sur* $\mathcal{V}^{\sigma,X}$, *et pour des champs horizontaux* $Y_i^{\sigma,X}$ *et* $Y_j^{\sigma,X}$, $h_{ij}^{\sigma,X}$ *la composante en* X *de* $D^H_{Y_i^{\sigma,X}} Y_j^{\sigma,X}$ *(où* D^H *désigne la connexion induite sur* H *par la connexion de Levi-Civita de* (M^n, g)*).* $h_{ij}^{\sigma,X}$ *représente alors la seconde forme fondamentale de la sous-variété de codimension 2 de* M *définie par l'image de la section* σ.
Alors H *est localement un produit affine si et seulement si pour tout choix de section* σ, *et de taille de* $X \in \chi$, *les deux systèmes suivants sont vérifiés :*

$$(01) \begin{cases} \mathcal{V}^{\sigma,X}(R(X, Y_i^{\sigma,X})X) = 0 \\ \mathcal{V}^{\sigma,X}(R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X) = 0 \end{cases} \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n-2$$

$$(02) \begin{cases} \mathcal{V}^{\sigma,tX}(R(X, Y_i^{\sigma,tX})Y_j^{\sigma,tX}) = 0 \\ \text{les fonctions } h_{ij}^{\sigma,tX} \text{ représentent} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n-2 \\ \text{le hessien d'une fonction } f \text{ sur } Im\sigma \end{cases}$$

pour la fonction t *(bien définie que si le système (O1) est vérifié) sur* H *définie par*

$$\begin{cases} X(t) = 0 \\ \frac{Y_i(t)}{t} = -\beta_i^{\sigma,X} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2 \\ f(p_0) = 1 \quad \text{pour un point base donné} \quad p_0 \end{cases}$$

Remarque : si le système $(O1)$ est vérifié, alors la première équation du système $(O2)$ est alors équivalente à : $\mathcal{V}^{\sigma,X}(R(X, Y_i^{\sigma,X})Y_j^{\sigma,X}) = 0$.

COROLLAIRE 4.13. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si de plus le quotient* $\check{H}$ *est plat, alors on a l'équivalence*
H *est localement un produit affine* $\iff R^H \equiv 0$
(où R^H *désigne le tenseur de courbure de* (H, g_H)*).*

DÉMONSTRATION. Il suffit de traduire les systèmes (O1) et (O2) en termes de courbure, en remarquant que si le système (O1) est vérifié, alors par changement de taille de

X, $\mathcal{V}^{\sigma,X}(R(Y_i^{\sigma,X},X)Y_j^{\sigma,X})$ ne varie pas, et si ce dernier terme de courbure est nul, alors $\mathcal{V}^{\sigma,X}(R(Y_i^{\sigma,X},Y_j^{\sigma,X})Y_k^{\sigma,X})$ est aussi invariante par changement de taille de X. On applique ensuite le lemme 4.6. □

5. Propagation sur la variété ambiante

Nous avons vu dans les chapitres précédents comment construire des systèmes de coordonnées adaptés sur l'hypersurface H. Il nous faut maintenant décider comment nous allons propager nos coordonnées au voisinage de H.
Dans sa thèse, Charles Boubel avait déjà fournit quelques éléments de réponse. En quelques mots, son idée était de définir un champ transverse Z le long de l'hypersurface, et de propager ce champ par une équation différentielle ordinaire de la forme $D_Z Z = \rho_Z^\sharp[X]$, où $\rho_Z^\sharp$ est le champ de vecteurs (qui n'est défini que modulo X, i.e. $\rho_Z^\sharp \in TM/\chi$) associé à une 1-forme construite de telle sorte à ce que certaines dérivées de cette forme donnent des éléments de courbure $\langle R(Z,\bullet)Z,\bullet\rangle$. Cette propagation pose cependant deux problèmes : d'une part, la 1-forme ρ_Z étant construite comme solution d'équations différentielles, il est difficile de trouver une interprétation géométrique de cette forme différentielle. D'autre part, la construction de ρ_Z est intimement liée au cadre particulier dans lequel se place Boubel, i.e. à l'existence d'une décomposition naturelle de $\mathcal{Y}$ en sous-espaces stables par holonomie.
Il semble donc difficile d'essayer de généraliser l'idée de Boubel à notre cas. Pour cette raison, nous allons propager nos coordonnées d'une manière à-priori tout-à-fait différente, l'idée principale étant d'inclure H dans une collection d'hypersurfaces dégénérées . Nous verrons cependant dans la partie 7 sur les espaces localement symétriques que notre façon de propager nos coordonnées n'est pas totalement indépendante de celle de Boubel : sous certaines hypothèses, des choix de section canonique peuvent apparaître pour lesquels notre façon de propager devient alors très proche de celle de Boubel.

5.1. La propagation.

Supposons choisie une section σ, et soit $X^\sigma \in \chi$ muni de la taille canonique. Définissons, sur l'image de σ, un champ Z^σ transverse, dual de X^σ, i.e. vérifiant les équations

$$\begin{cases} \langle Z^\sigma, Z^\sigma\rangle = 0 \\ \langle Z^\sigma, X^\sigma\rangle = 1 \\ \langle Z^\sigma, Y_i^\sigma\rangle = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

La question est alors de savoir comment propager ce champ Z^σ en un champ Z défini sur M, ou du moins au voisinage de l'hypersurface H. Une fois propagé le champ Z^σ, nous propageons les champs $\{X, Y_1, ..., Y_{n-2}\}$ au voisinage de H en imposant les équations

$$\begin{cases} [Z,X] = 0 \\ [Z,Y_i] = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

LEMME 5.1. *Les champs $Z, X, Y_1, ..., Y_{n-2}$ ainsi construits sont alors des champs coordonnées, i.e. que leurs crochets sont tous nuls.*

DÉMONSTRATION. D'après l'identité de Jacobi, nous déduisons facilement que

$$\begin{cases} [[Y_i, Y_j], Z] = 0 \\ [[X, Y_i], Z] = 0 \end{cases} \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n-2.$$

Or

$$\begin{cases} [Y_i, Y_j] = 0 \\ [X, Y_i] = 0 \end{cases} \quad sur \quad H.$$

D'où

$$\begin{cases} [Y_i, Y_j] \equiv 0 \\ [X, Y_i] \equiv 0 \end{cases} \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n-2.$$

□

Nous obtenons ainsi des coordonnées $\{z, x, y_1, ..., y_{n-2}\}$ au voisinage de H telles que

$$\begin{cases} Z = \partial_z \\ H = \{z = 0\} \end{cases}$$

De plus, on a

COROLLAIRE 5.2. *Les surfaces de niveau $H_t := \{z = t\}$ sont des hypersurfaces.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que les distributions $p \in H_z \to < X(p), Y_1(p), ..., Y_{n-2}(p) >$ sont intégrables. Or ceci est évident, d'après le théorème de Frobenius, en utilisant le lemme précédent. □

Le problème est maintenant que l'on ne peut pas controler la dégénérescence des hypersurfaces H_t : nous savons que l'hypersurface $H_0 \equiv H$ est dégénérée, mais nous ne pouvons rien dire sur les hypersurfaces H_t pour $t \neq 0$.
Nous allons donc montrer qu'il existe une façon de propager le champ Z^σ au voisinage de H tel que les hypersurfaces H_t soient toutes dégénérées. Revenons donc à notre section σ sur H et nos champs $Z^\sigma, X^\sigma, Y_1^\sigma, ..., Y_{n-2}^\sigma$ définis sur l'image de σ. Nous allons propager ces champs en deux étapes :
• une propagation " transversale " de la section
• une propagation " verticale "

Propagation transversale
Nous propageons transversalement

(1) Z^σ en un champ Z^0 par l'équation $D_{Z^0} Z^0 = 0$

(2) Y_i^σ en un champ Y_i^0 par l'équation $[Z^0, Y_i^0] = 0$

(3) X^σ en un champ X^0, dual de Z^0, i.e. vérifiant

$$\begin{cases} \langle Z^0, X^0 \rangle = 1 \\ \langle X^0, X^0 \rangle = 0 \\ \langle X^0, Y_i^0 \rangle = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

Propagation verticale

Nous propageons

(1) X^0 en un champ X par l'équation $D_X X = 0$

(2) Y_i^0 en un champ Y_i par l'équation $[X, Y_i] = 0$

(3) Z^0 en un champ Z par l'équation $[X, Z] = 0$

Ces champs sont alors définis sur un ouvert σ^M contenant la section σ.

LEMME 5.3. *Les champs $\{Z, X, Y_1, ..., Y_{n-2}\}$ ainsi construits sont des champs coordonnées.*

DÉMONSTRATION. Il faut monter que

$$\begin{cases} [Y_i, Y_j] = 0 \\ [Z, Y_i] = 0 \end{cases} \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n-2$$

Puisque $[Y_i^0, Z^0] = 0$, on déduit que $\varphi_*^{Z^0} Y_i^0 = Y_i^0$ (où φ^{Z^0} désigne le flot du champ Z^0).
Or $[Y_i^0, Y_j^0] = 0$ sur σ. D'où on déduit $[Y_i^0, Y_j^0] = 0$.
De plus, d'après l'identité de Jacobi, on a $[[Y_i, Y_j], Z] = 0$.
D'où $[Y_i, Y_j] = 0 \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n-2$.
De même, d'après l'identité de Jacobi, on déduit $[[Z, Y_i], X] = 0$. Or $[Z^0, Y_i^0] = 0$ par construction. D'où $[Z, Y_i] = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n-2$. □

Nous obtenons alors des coordonnées $\{z, x, y_1, ..., y_{n-2}\}$ au voisinage de H telles que

$$\begin{cases} Z = \partial_z \\ X = \partial_x \\ Y_i = \partial_{y_i} \\ z = 0 \quad sur \quad H \\ x = 0 \quad sur \quad \sigma^M \end{cases}$$

PROPOSITION 5.4. *Les surfaces de niveau $H_t := \{z = t\}$ sont des hypersurfaces dégénérées.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que H_t est une hypersurface pour tout t. De plus, on a $X\langle X, X\rangle = 2\langle D_X X, X\rangle = 0$. D'où $\langle X, X\rangle = \langle X, X\rangle(x = 0) = 0$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} X\langle X, Y_i\rangle &= \underbrace{\langle D_X X, Y_i\rangle}_{=0} + \langle X, D_X Y_i\rangle \\ &= \langle X, D_{Y_i} X\rangle \\ &= \frac{1}{2} Y_i \langle X, X\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\langle X, Y_i \rangle = \langle X, Y_i \rangle (x = 0) = 0$. □

Remarques :

1. l'égalité $D_Z Z = 0$, valable sur σ^M, n'a aucune raison de rester vraie ailleurs.
2. Sur σ^M, on a
• $\langle Z, Z \rangle = 0$
• $\langle Z, X \rangle = 1$
•

$$\begin{aligned} Z\langle Z, Y_i \rangle &= \langle D_Z Z, Y_i \rangle + \langle Z, D_Z Y_i \rangle \\ &= \langle D_{Y_i} Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y_i \langle Z, Z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, puisque $\langle Z, Y_i \rangle (Z = 0) = 0$, on en déduit que $\langle Z, Y_i \rangle = 0$ sur σ^M.
Donc, sur σ^M, Z est le champ dual de X. Ceci n'est plus vrai en dehors de σ^M : $\langle Z, Z \rangle$ et $\langle Z, Y_i \rangle$ ne restent pas nécessairement nuls.
3. Le champ Z vérifie partout $\langle Z, X \rangle = 1$. En effet, on a

$$\begin{aligned} X\langle Z, X \rangle &= \langle D_X Z, X \rangle + \langle Z, D_X X \rangle \\ &= \langle D_Z X, X \rangle \\ &= \frac{1}{2} Z \langle X, X \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Dans la suite, pour bien souligner le fait que le champ transverse Z ainsi construit dépend de notre choix de section, nous noterons quelquefois Z^σ le champ Z.

5.On a $R(X, Z)X = D_X D_Z X - D_Z \underbrace{D_X X}_{=0} - D_{\underbrace{[X, Z]}_{=0}} X = D_X D_X Z$. Autrement dit, le champ Z est un champ de Jacobi le long des géodésiques nulles tangentes aux champs $X \in \chi$.

6. Notre stratégie a été de propager nos champs au voisinage de H de telle sorte à inclure H dans une collection d'hypersurfaces dégénérées. Ceci n'est pas la façon de faire habituelle. Par exemple, pour le trou noir de Schwarshild, l'horizon $\{r = 2m\}$ est une hypersurface dégénérée, mais les hypersurfaces voisines $\{r = cste > 2m\}$ sont elles non-dégénérées.

5.2. La métrique au voisinage de H.

Après propagation, on obtient des coordonnées au voisinage de H pour lesquelles la métrique s'ecrit sous la forme $g = hdz^2 + 2dxdz + \nu_i dz dy_i + g_{ij}(z, x, y_1, ..., y_{n-2})dy_i dy_j$.

PROPOSITION 5.5. *Sur H, on a*

(1) $X(g_{ij}) = 0$

(2) $X(\nu_i) = 2\beta_i$, *donc* $\nu_i = 2\beta_i x$ *si* $X(\beta_i) = 0$

(3) $X(h) = -2\langle D_Z Z, X\rangle$

(4) $Z(g_{ij}) = Y_j(\nu_i) + Y_i(\nu_j) - 2\Gamma^k_{ij}\nu_k - 2h_{ij}$

DÉMONSTRATION. On a déjà montré l'équation 1. Pour l'équation 2, on a

$$\begin{aligned} X(\nu_i) &= X(\langle Z, Y_i\rangle) \\ &= \langle D_X Z, Y_i\rangle + \langle Z, D_X Y_i\rangle \\ &= \langle D_Z X, Y_i\rangle + \langle Z, D_X Y_i\rangle \\ &= -\langle X, D_Z Y_i\rangle + \langle Z, D_X Y_i\rangle \\ &= -\langle X, D_{Y_i} Z\rangle + \langle Z, D_X Y_i\rangle \\ &= \langle D_{Y_i} X, Z\rangle + \langle Z, D_X Y_i\rangle \\ &= 2\langle D_X Y_i, Z\rangle \\ &= 2\beta_i \ \textit{sur} \ H \end{aligned}$$

D'où, comme $\nu_i(x = 0) = 0$, on en déduit que $\nu_i = 2\beta_i x$ si $X(\beta_i) = 0$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} X(h) &= X\langle Z, Z\rangle \\ &= 2\langle D_X Z, Z\rangle \\ &= 2\langle D_Z X, Z\rangle \\ &= 2Z\underbrace{\langle X, Z\rangle}_{=1} - 2\langle X, D_Z Z\rangle \\ &= -2\langle X, D_Z Z\rangle \end{aligned}$$

L'équation 3 est donc vérifiée (même en dehors de H).

Enfin, on a

$$\begin{aligned} Z(g_{ij}) &= Z\langle Y_i, Y_j\rangle \\ &= \langle D_Z Y_i, Y_j\rangle + \langle Y_i, D_Z Y_j\rangle \\ &= \langle D_{Y_i} Z, Y_j\rangle + \langle Y_i, D_{Y_j} Z\rangle \\ &= Y_i\langle Z, Y_j\rangle - \langle Z, D_{Y_i} Y_j\rangle + Y_j\langle Y_i, Z\rangle - \langle D_{Y_j} Y_i, Z\rangle \\ &= Y_i(\nu_j) + Y_j(\nu_i) - 2\langle D_{Y_i} Y_j, Z\rangle \\ &= Y_i\nu_j + Y_j(\nu_i) - 2\Gamma_{ij}^k \nu_k - 2h_{ij} \ \ sur \ \ H \end{aligned}$$

□

On comprend ici donc bien pourquoi affirmer que l'hypersurface H est un produit affine revient à savoir si l'on peut annuler les fonctions β_i et h_{ij} :
• annuler β_i revient à annuler $X(\langle Z, Y_i\rangle)$, donc aussi $\langle Z, Y_i\rangle$ (car $\langle Z, Y_i\rangle(x = 0) = 0$ par construction).
• Si $\beta_i = 0 \quad \forall \ 1 \leq i \leq n-2$, on a $Z(g_{ij}) = -2h_{ij}$. Annuler les fonctions h_{ij} revient alors à annuler les dérivées $Z(\langle Y_i, Y_j\rangle)$.

Remarquons que l'on a aussi

PROPOSITION 5.6.

(1) $X(h)(x = 0) = 0$

(2) $XX(h) = 2(\langle R(X, Z)X, Z\rangle + \langle D_X Z, D_X Z\rangle)$

(3) $\langle D_Z Z, Z\rangle = \frac{1}{2} Z\langle h\rangle$

(4) $\langle D_Z Z, Y_i\rangle = Z(\nu_i) - \frac{1}{2} Y_i(h)$

DÉMONSTRATION. L'équation 1 est immédiate puisque $X(h) = -2\langle D_Z Z, X\rangle$, et que $D_Z Z = 0$ sur $\sigma^M = \{x = 0\}$.
Pour l'équation 2, on a

$$\begin{aligned} XX(h) &= XX(\langle Z, Z\rangle) \\ &= 2X\langle D_X Z, Z\rangle \\ &= 2(\langle D_X D_X Z, Z\rangle + \langle D_X Z, D_X Z\rangle) \\ &= 2(\langle D_X D_Z X, Z\rangle + \langle D_X Z, D_X Z\rangle) \\ &= 2(\langle R(X, Z)X, Z\rangle + \langle D_X Z, D_X Z\rangle) \end{aligned}$$

L'équation 3 est évidente. Enfin, on a

$$\begin{aligned}\langle D_Z Z, Y_i\rangle &= Z\langle Z, Y_i\rangle - \langle Z, D_Z Y_i\rangle \\ &= Z(\nu_i) - \langle Z, D_{Y_i} Z\rangle \\ &= Z(\nu_i) - \frac{1}{2} Y_i\langle Z, Z\rangle \\ &= Z(\nu_i) - \frac{1}{2} Y_i(h)\end{aligned}$$

□

Regardons maintenant les termes de connexion D_Z.
On a $\langle D_Z X, X\rangle = \frac{1}{2} Z\langle X, X\rangle = 0$.
Donc $D_Z X$ et $D_Z Y_i$ s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} D_Z X = m_k Y_k + nX \\ D_Z Y_i = l_k^i Y_k + \alpha_i X + \varphi_i Z \end{cases}$$

PROPOSITION 5.7. *Sur H, on a (en utilisant les conventions de notation d'Einstein)*

(1) $m_j g_{ij} = \beta_i$

(2) $n + m_j \nu_j = \frac{1}{2} X(h)$

(3) $\varphi_i = -\beta_i$

(4) $l_k^i g_{kj} - \beta_i \nu_j = Y_i(\nu_j) - \Gamma_{ij}^k \nu_k - h_{ij}$

(5) $l_k^i \nu_k + \alpha_i - \beta_i h = \frac{1}{2} Y_i(h)$

DÉMONSTRATION.
(1)

$$\begin{aligned} m_j g_{ij} &= \langle D_Z X, Y_i\rangle \\ &= -\langle X, D_Z Y_i\rangle \\ &= -\langle X, D_{Y_i} Z\rangle \\ &= \langle D_{Y_i} X, Z\rangle \\ &= \beta_i \ \textit{sur} \ H \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} n + m_j \nu_j &= \langle D_Z X, Z \rangle \\ &= \langle D_X Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} X \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} X(h) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \langle D_Z Y_i, X \rangle \\ &= \langle D_{Y_i} Z, X \rangle \\ &= -\langle Z, D_{Y_i} X \rangle \\ &= -\beta_i \ \ sur \ \ H \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} l^i_k g_{kj} - \beta_i \nu_j = l^i_k g_{kj} + \varphi_i \nu_j \ \ sur \ \ H &= \langle D_Z Y_i, Y_j \rangle \\ &= \langle D_{Y_i} Z, Y_j \rangle \\ &= Y_i \langle Z, Y_j \rangle - \langle Z, D_{Y_i} Y_j \rangle \\ &= Y_i(\nu_j) - \Gamma^k_{ij} \nu_k - h_{ij} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} l^i_k \nu_k + \alpha_i - \beta_i h = l^i_k \nu_k + \alpha_i + \varphi_i h \ \ sur \ \ H &= \langle D_Z Y_i, Z \rangle \\ &= \langle D_{Y_i} Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y_i \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y_i(h) \end{aligned}$$

□

Pour finir, revenons quelques instants à nos sections harmoniques. Nous avons vu précédemment que les obstructions à pouvoir annuler les fonctioons β_i s'expriment facilement à l'aide de la forme volume $\omega^{\sigma,X} := X \wedge Y_1^{\sigma,X} \wedge ... \wedge Y_{n-2}^{\sigma,X}$ (cf. chapitre 3.2). Si nous

regardons maintenant ce que donne la dérivée $D_Z\omega^{\sigma,X}$, il est facile de voir que l'on a $D_Z\omega^{\sigma,X} = (n + H^\sigma)\omega^{\sigma,X}$. Or, si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a

$$\begin{aligned} n &= \langle D_X Z, Z\rangle \\ &= \frac{1}{2} X\langle Z, Z\rangle \\ &= 0 \quad sur \quad Im\ \sigma \end{aligned}$$

Les sections harmoniques sont donc les sections sur lesquelles on a $D_Z\omega^{\sigma,X} = 0$. Ceci justifie que les sections harmoniques sont bien naturelles, puisque cette dernière équation est bien l'équation que l'on a envie de chercher à obtenir si l'on a un volume parallèle sur H.

5.3. Quelques lemmes intéressants.

Un simple calcul de courbure de Ricci permet de montrer que, sur H, on a l'égalité suivante :

LEMME 5.8. $Ric^M(X, Z) = X(\sum_{i=1}^{n-2} l_i^i) - \frac{1}{2} XX(h)$.

En particulier, si $\beta_i = 0\ \forall 1 \leq i \leq n-2$, on a, sur H, $\langle Z, Y_i\rangle = 0\ \forall 1 \leq i \leq n-2$, et donc l'équation (4) de la proposition 5.7 devient $l_k^i g_{kj} = -h_{ij}$, i.e. $l_j^i = -h_{ik} g^{kj}$ (où la matrice (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij})).
D'où $\sum_{i=1}^{n-2} l_i^i = -h_{ik} g^{ki} = -H^\sigma$. Donc, si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a

$$\boxed{X(H^\sigma) = -Ric^M(X, Z) - \frac{1}{2} XX(h)}$$

D'autre part, notons $\widetilde{h}_{ij}$ la fonction $\langle D_{Y_i} Y_j, X\rangle$. Sur H, cette fonction s'identifie à la seconde forme fondamentale de H ; la fonction $\widetilde{h}_{ij}$ est donc nulle sur H, si l'on a supposé H totalement géodésique. On a de plus

LEMME 5.9. $Z(\widetilde{h}_{ij}) = X(h_{ij}) + 2\Gamma_{ij}^k \beta_k - Y_j(\beta_i) - Y_i(\beta_j)$ *sur* H.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} Z(\widetilde{h}_{ij}) &= Z\langle D_{Y_i} Y_j, X\rangle \\ &= \langle D_Z D_{Y_i} Y_j, X\rangle + \langle D_{Y_i} Y_j, D_Z X\rangle \\ &= \langle R(Z, Y_i) Y_j, X\rangle + \langle D_{Y_i} D_Z Y_j, X\rangle + \langle D_{Y_i} Y_j, D_Z X\rangle \\ &= \langle R(X, Y_j) Y_i, Z\rangle - Y_i(\beta_j) + \beta_i \beta_j + \Gamma_{ij}^l m_k g_{kl} \\ &= \Gamma_{ij}^l \beta_l + X(h_{ij}) - Y_j(\beta_i) - \beta_i \beta_j \\ &\quad - Y_i(\beta_j) + \beta_i \beta_j + \Gamma_{ij}^l \beta_l \\ &= X(h_{ij}) + 2\Gamma_{ij}^k \beta_k - Y_j(\beta_i) - Y_i(\beta_j) \end{aligned}$$

□

En particulier, si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on obtient, sur H,

$$\boxed{Z(\widetilde{h_{ij}}) = X(h_{ij})}$$

Enfin, nous avons

LEMME 5.10. *Si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a $Z(\langle D_X Y_i, Z\rangle) = \langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle + \frac{1}{2}XY_i\langle Z,Z\rangle$ sur H.*

Remarque : dans la suite, nous noterons avec un léger abus de notation $Z(\beta_i)$ la fonction $Z\langle D_X Y_i, Z\rangle$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
Z\langle D_X Y_i, Z\rangle &= \langle D_Z D_X Y_i, Z\rangle + \underbrace{\langle D_X Y_i, D_Z Z\rangle}_{=0} \\
&= \langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle + \langle D_X D_Z Y_i, Z\rangle \\
&= \langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle + X\langle D_Z Y_i, Z\rangle - \underbrace{\langle D_Z Y_i, D_X Z\rangle}_{=0} \\
&= \langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle + X\langle D_{Y_i} Z, Z\rangle \\
&= \langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle + \frac{1}{2}XY_i\langle Z,Z\rangle
\end{aligned}$$

□

6. Les espaces à courbure constante

Considérons une variété M à courbure constante K. La courbure de M est donc donnée par $R(U,V)W = K(\langle W,U\rangle V - \langle W,V\rangle U)\ \forall\ U,V,W \in \Gamma(TM)$.
Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique de M. Donnons nous une section $\sigma : \overset{\checkmark}{H} \to H$, et fixons une taille de X sur l'image de la section σ. Nous testons sur H le défaut de l'hypersurface à être localement un produit affine.
Pour cela, nous commençons par calculer

$$\begin{cases} \mathcal{V}(R(X, Y_i^{\sigma,X})X) = X(\beta_i^{\sigma,X}) \\ et \\ \mathcal{V}(R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X) = Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X}) \end{cases}$$

et nous montrons que nous pouvons trouver une taille de tX de X sur $Im\ \sigma$ permettant d'annuler toutes les fonctions $\beta_i^{\sigma,tX}$.
Dans un second temps, nous calculons

$$\begin{cases} X(h_{ij}^{\sigma,tX}) \\ et \\ \mathcal{V}(R(Y_i^{\sigma,tX}, Y_j^{\sigma,tX})Y_k^{\sigma,tX}) \end{cases}$$

pour savoir si nous pouvons trouver une section pour laquelle les fonctions h_{ij} sont toutes nulles. Nous montrons qu'une telle section existe uniquement dans le cas plat. Dans le cas non plat, nous choisissons alors une section harmonique.

Nous propageons ensuite nos coordonnées sur H dans un voisinage de l'hypersurface, et définissons ainsi un champ transverse Z comme expliqué dans le chapitre précédent.
Nous finissons en calculant les dérivées transverses $D_Z\bullet$.

6.1. Le cas plat : les espaces de Minkowski.

Soit H une hypersurface dégénérée totalement géodésique de $\mathbb{R}^n_\nu$, $\nu \neq 0, n$. Il est connu que H est alors un hyperplan de $\mathbb{R}^n_\nu$, donc on a $R^H \equiv 0$. D'après le corollaire 4.14, on en déduit :

THÉORÈME 6.1. *Toute hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de $\mathbb{R}^n_\nu$ est, localement, un produit affine.*

Remarque : Il est connu (cf. [**B – D**]) que, dans un espace de Minkowski Lorentzien $\mathbb{R}^n_1$, toute hypersurface dégénérée est localement un produit affine pour la métrique. Par contre, dans le cas non Lorentzien, il existe des hypersurfaces dégénérées qui ne sont pas un produit affine pour la métrique. On voit donc que si l'on ajoûte l'hypothèse totalement géodésique, une hypersurface sera automatiquement un produit affine (pour la métrique et la connexion induite!!), même si la variété ambiante n'est pas Lorentzienne.

Choisissons sur H une section et une taille de X telle que

$$\begin{cases} \beta_i = 0 \\ h_{ij} = 0 \end{cases} \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n-2$$

Construisons nos coordonnées sur H, et propageons les comme expliqué dans le chapitre 5.

On a alors, sur H, $\langle Z, Y_i \rangle = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$. D'autre part, d'après les équations (1), (2) de la proposition 5.6, on en déduit

$$\begin{cases} X(\langle Z, Z \rangle)(x = 0) = 0 \\ XX\langle Z, Z \rangle = 0 \end{cases}$$

D'où $\langle Z, Z \rangle = 0$ sur H, et $\langle D_Z Z, X \rangle = -\frac{1}{2} X \langle Z, Z \rangle = 0$ sur H. Donc, sur H, Z est le champ dual de X, et $D_Z Z$ est tangent à H.
De plus, on a $Z(\widetilde{h_{ij}}) = X(h_{ij}) = 0$ sur H.
Enfin, d'après la proposition 5.7, on a sur H,

$$\begin{cases} D_Z X = 0 \\ D_Z Y_i = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

remarquons en oûtre que la fonction courbure moyenne H^σ est identiquement nulle sur H.

6.2. Espaces à courbure constante K non nulle.

Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de M, variété à courbure

constante $K \neq 0$. On a alors, pour toute section σ, et tout champ $X \in \chi$,

$$\begin{aligned} R(X, Y_i^{\sigma,X})X) &= K(\langle X, X\rangle Y_i^{\sigma,X} - \langle X, Y_i^{\sigma,X}\rangle X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X &= K(\langle X, Y_i^{\sigma,X}\rangle Y_j^{\sigma,X} - \langle X, Y_j^{\sigma,X}\rangle Y_i^{\sigma,X}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} X(\beta_i^{\sigma,X}) = \mathcal{V}(R(X, Y_i^{\sigma,X})X) = 0 \\ Y_i^{\sigma,X}(\beta_j^{\sigma,X}) - Y_j^{\sigma,X}(\beta_i^{\sigma,X}) = \mathcal{V}(R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})X) = 0 \end{cases}$$

Sur toute section σ, on peut donc trouver une taille tX de X telle que
$\beta_i^{\sigma,tX} = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2$.
Donnons nous donc une section σ arbitraire, et choisissons sur l'image de σ une taille du champ X telle que les fonctions $\beta_i^{\sigma,X}$ soient toutes nulles. On a alors

$$\begin{aligned} X(h_{ij}^{\sigma,X}) &= \mathcal{V}(R(X, Y_i^{\sigma,X})Y_j^{\sigma,X}) \\ &= \mathcal{V}(K(\langle X, Y_j^{\sigma,X}\rangle Y_i^{\sigma,X} - \langle Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}\rangle X)) \\ &= -K\langle Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}\rangle \\ &= -Kg_{ij} \end{aligned}$$

Les fonctions $X(h_{ij}^{\sigma,X})$ ne peuvent donc pas être toutes nulles. On en déduit

THÉORÈME 6.2. *Une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, d'une variété à courbure constante non nulle n'est jamais, localement, un produit affine.*

Puisque les fonctions $X(h_{ij})$ ne peuvent pas être toutes nulles, on ne pourra jamais annuler les fonctions h_{ij} sur H toute entière. On peut toutefois se demander si ces fonctions ne peuvent pas être toutes annulées au moins sur l'image d'une section. Le lemme suivant va nous montré qu'en dimension supérieure ou égale à 4, ceci n'est pas possible.

LEMME 6.3. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de M, variété pseudo-Riemannienne à courbure constante non nulle de dimension supérieure ou égale à 4. Soit σ une section, et choisissons une taille de $X \in \chi$ telle que les fonctions $\beta_i^{\sigma,X}$ soient toutes nulles. Alors il n'existe pas de fonction f sur Im σ telle que, sur Im σ, on ait $h_{ij}^{\sigma,X} = Hess(f)(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n-2$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que les fonctions $h_{ij}^{\sigma,X}$ ne soient pas toutes nulles et vérifient, sur Im σ, $h_{ij}^{\sigma,X} = Hess(f)(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(Im\sigma, \mathbb{R})$.
On a alors $\mathcal{V}^{\sigma,X}(R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})Y_k^{\sigma,X}) = df R(Y_j^{\sigma,X}, Y_i^{\sigma,X})Y_k^{\sigma,X} \ \forall \ 1 \leq i, j, k \leq n-2$.
Or, $R(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X})Y_k^{\sigma,X} = K(g_{ki}Y_j^{\sigma,X} - g_{kj}Y_i^{\sigma,X})$. Donc, on déduit que le champ $grad\ f$ vérifie $\langle g_{ki}Y_j^{\sigma,X} - g_{kj}Y_i^{\sigma,X}, grad\ f\rangle = 0$, soit $g_{ki}Y_j^{\sigma,X}(f) - g_{kj}Y_i^{\sigma,X}(f) = 0$
$\forall \ 1 \leq i, j, k \leq n-2$.
Multiplions cette dernière égalité par g^{ki} et faisons la somme sur k. Nous obtenons $g^{ki}g_{ki}Y_j^{\sigma,X}(f) = g^{ki}g_{kj}Y_i^{\sigma,X}(f)$, soit $Y_j^{\sigma,X}(f) = \delta_{ij}Y_i^{\sigma,X}(f) \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n-2$.

Maintenant, puisque M est de dimension supérieure ou égale à 4, pour tout entier i compris entre 1 et n-2, on peut trouver une entier $i \neq j$ compris entre 1 et n-2, et on a alors $Y_i^{\sigma,X}(f) = \delta_{ij} Y_j^{\sigma,X}(f) = 0$.
donc $Y_i^{\sigma,X}(f) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$. Il s'ensuit que f est constante. On a alors
$h_{ij}^{\sigma,X} = Hess(f)(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) = 0 \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n-2$, ce qui est exclu par hypothèse. □

On est donc amené à faire un choix de section harmonique σ.
Puisque l'on a $X(h_{ij}^{\sigma,X}) = -Kg_{ij}$, on en déduit alors que
$X(H^\sigma) = g^{ij} X(h_{ij}^{\sigma,X}) = -(n-2)K$. On en déduit donc que la fonction courbure moyenne est donnée sur H par $H^\sigma = -(n-2)Kx$.

Construisons nos coordonnées sur H, et propageons les comme expliqué au chapitre 5. On a alors, sur H,
$\langle Z, Y_i^{\sigma,X} \rangle = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$. De plus, d'après le lemme 5.8, on déduit que sur H, on a

$$\begin{aligned} XX\langle Z,Z\rangle &= -2(Ric^M(X,Z) + X(H^\sigma)) \\ &= -2((n-1)K\langle X,Z\rangle - (n-2)K) \\ &= -2K \end{aligned}$$

D'où, comme $X(\langle Z,Z\rangle)(x=0) = 0$, on déduit $\langle Z,Z\rangle = -Kx^2$ sur H. Il en résulte que $\langle D_Z Z, X\rangle = -\frac{1}{2} X\langle Z,Z\rangle = Kx$.
En oûtre, on a, sur H, $Z(\widetilde{h_{ij}}) = X(h_{ij}^{\sigma,X}) = -Kg_{ij}$.
Enfin, on a sur H

$$\begin{cases} D_Z X = -KxX \\ D_Z Y_i^{\sigma,X} = l_k^i Y_k^{\sigma,X} \end{cases}$$

avec $l_k^i g_{kj} = -h_{ij}^{\sigma,X}$.

7. Les espaces localement symétriques

Dans ce chapitre, nous supposons que la variété ambiante M est localement symétrique, autrement dit que son tenseur de courbure R^M vérifie $DR^M \equiv 0$.
Dans ce cas, les invariants associés à DR sont tous identiquements nuls, et le processus de construction de tables d'invariants associées à l'hypersurface dégénérée totalement géodésique H s'arrête au niveau de la courbure.
Nous allons dans ce chapitre dégager trois conséquences importantes de l'équation $DR = 0$:

• en premier lieu, nous verrons que les premiers invariants de courbure, les fonctions $X(\beta_i)$ (qui rappelons le sont les seuls invariants "primaires" au niveau de la courbure) sont toutes identiquement nulles

• ensuite, nous verrons que la norme $\langle Z,Z\rangle$ du champ transverse Z a une forme bien particulière : c'est une fonction quadratique en x^2

• enfin, nous verrons que sous certaines hypothèses supplémentaires, nous pouvons trouver des sections canoniques naturellement reliées à la géométrie de l'hypersurface H

Donnons nous donc une section σ quelconque. Pour alléger les notations, nous omettrons les indices σ, X sur les différentes fonctions.

7.1. La nullité des invariants "primaires" de courbure.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, les fonctions $X(\beta_i)$ sont les premiers invariants de courbure qui apparaissent ; nous les avions désignés sous le nom d'invariants primaires de courbure, pour souligner le fait que ces fonctions sont des invariants du quotient $\chi^* \otimes \mathcal{Y}$, définis intrinsèquement, sans condition préalable de nullité d'invariants précédents. Si ces fonctions $X(\beta_i)$ sont toutes nulles, nous pouvons alors définir trois invariants "secondaires" de courbure :

• $\langle R(Y_i, Y_j)Y_k, Y_l\rangle$
• $Y_i(\beta_j) - Y_j(\beta_i)$
• $\mathcal{V}(R(X, Y_i)Y_j)$

Dans cette partie, nous allons voir que sous l'hypothèse $DR = 0$, les fonctions $X(\beta_i)$ sont toutes nécessairement nulles. Autrement dit, si la variété ambiante est localement symétrique, les trois invariants ci-dessus jouent le rôle d'invariants primaires. C'est là le résultat important que nous donne la proposition suivante :

PROPOSITION 7.1. *On a* $X(\beta_i) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$.

DÉMONSTRATION. On a d'une part

$$\begin{aligned} 0 &= D_X R(X, Y_i)X \\ &= D_X(R(X, Y_i)X) - R(D_X X, Y_i)X \\ &\quad -R(X, D_X Y_i)X - R(X, Y_i)D_X X \\ &= D_X(X(\beta_i)X) - R(X, \beta_i X)X \\ &= XX(\beta_i)X \end{aligned}$$

Donc $XX(\beta_i) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
0 &= D_{Y_i}R(X,Y_j)X \\
&= D_{Y_i}(R(X,Y_j)X) - R(D_{Y_i}X,Y_j)X \\
&\quad -R(X,D_{Y_i}Y_j)X - R(X,Y_j)D_{Y_i}X \\
&= D_{Y_i}(X(\beta_j)X) - R(\beta_i X,Y_j)X \\
&\quad -R(X,\Gamma_{ij}^k Y_k + h_{ij}X)X - R(X,Y_j)\beta_i X \\
&= (Y_i X(\beta_j) + X(\beta_j)\beta_i \\
&\quad -\beta_i X(\beta_j) - \Gamma_{ij}^k X(\beta_k) - \beta_i X(\beta_j))X \\
&= (Y_i X(\beta_j) - \Gamma_{ij}^k X(\beta_k) - \beta_i X(\beta_j))X
\end{aligned}$$

Donc, $Y_i X(\beta_j) - \Gamma_{ij}^k X(\beta_k) - \beta_i X(\beta_j) = 0 \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n-2$.
En particulier, pour i=j, on obtient $Y_i X(\beta_i) - \Gamma_{ii}^k X(\beta_k) - \beta_i X(\beta_i) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-2$.
En dérivant cette dernière équation par rapport à X, on obtient alors :
$-X(\beta_i)^2 = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$.
D'où $X(\beta_i) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$. □

7.2. La norme du champ transverse.

D'après notre façon de propager nos coordonnées au voisinage de H, nous avons vu que le champ transverse Z que nous construisons est isotrope le long de la section initiale, mais que sa norme ne reste pas nécessairement nulle au-delà de la section. Il est à-priori difficile de prévoir ce que cette norme devient en dehors de la section initiale. Cependant, si la variété ambiante est localement symétrique, cette norme prend une forme assez agréable : une fonction quadratique en x^2.

PROPOSITION 7.2. *Sur H, on a $\langle Z,Z\rangle = (\kappa + g^{ij}\beta_i\beta_j)x^2$, pour une constante $\kappa \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà vu dans la proposition 5.6 qu'en notant h la fonction $\langle Z,Z\rangle$, nous avons $XX(h) = 2(\langle R(X,Z)X,Z\rangle + \langle D_X Z, D_X Z\rangle)$. D'autre part, nous savons que sur H, $D_X Z$ s'écrit sous la forme $D_X Z = m_k Y_k + nX$, avec $m_i g_{ij} = \beta_i$ (cf. Prop.5.7).
D'où

$$\begin{aligned}
\langle D_X Z, D_X Z\rangle &= g_{ik}m_k m_i \\
&= g_{ik}g^{kl}\beta_l g^{ij}\beta_j \\
&= \beta_i g^{ij}\beta_j
\end{aligned}$$

et donc, puisque les fonctions $X(\beta_i)$ sont toutes nulles, $X\langle D_X Z, D_X Z\rangle = 0$ sur H.
D'autre part, on a sur H

$$\begin{aligned}
0 &= \langle D_X R(X,Z)X, Z\rangle \\
&= \langle D_X(R(X,Z)X), Z\rangle - \langle R(X, D_X Z)X, Z\rangle \\
&= \langle D_X(R(X,Z)X), Z\rangle - m_k \underbrace{\langle R(X,Y_k)X, Z\rangle}_{=X(\beta_k)X=0} \\
&= \langle D_X(R(X,Z)X), Z\rangle \\
&= X\langle R(X,Z)X, Z\rangle - R(X,Z)X, D_X Z \\
&= X\langle R(X,Z)X, Z\rangle - m_k \underbrace{\langle R(X,Z)X, Y_k\rangle}_{=0} \\
&= X\langle R(X,Z)X, Z\rangle
\end{aligned}$$

D'où on déduit que $XXX(h) = 0$ sur H. Il existe donc sur H des fonctions α, β, et γ dépendant des coordonnées $y_1, ..., y_{n-2}$, mais pas de x, telles que $h = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. En oûtre, puisque la fonction h est nulle le long de la section initiale $\{x = 0\}$, on a $\gamma = 0$. De plus, puisque $X(h)(x = 0) = 0$ (cf. Prop 5.6), on en déduit $\beta = 0$.
Donc, sur H, la fonction $\langle Z, Z\rangle$ s'écrit sous la forme $h = \alpha(y_1, ..., y_{n-2})x^2$, avec
$\alpha = \frac{1}{2}XX(h) = \langle R(X,Z)X, Z\rangle + \langle D_X Z, D_X Z\rangle$.
Pour finir, il nous reste à montrer que la fonction $\langle R(X,Z)X, Z\rangle$ est constante sur H, autrement dit que $Y_i(\langle R(X,Z)X, Z\rangle) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$. Or, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \langle D_{Y_i} R(X,Z)X, Z\rangle \\
&= \langle D_{Y_i}(R(X,Z)X), Z\rangle - \langle R(D_{Y_i}X, Z)X, Z\rangle \\
&\quad -\langle R(X, D_{Y_i}Z)X, Z\rangle - \langle R(X,Z)D_{Y_i}X, Z\rangle \\
&= Y_i(\langle R(X,Z)X, Z\rangle) - 2\langle R(X,Z)X, D_{Y_i}Z\rangle - 2\beta_i\langle R(X,Z)X, \\
&= Y_i(\langle R(X,Z)X, Z\rangle) + 2\beta_i\langle R(X,Z)X, Z\rangle - 2\beta_i\langle R(X,Z)X, Z \\
&= Y_i(\langle R(X,Z)X, Z\rangle)
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 7.3. *Si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a alors $\langle Z, Z\rangle = \kappa x^2$ sur H, pour une constante $\kappa := \langle R(X,Z)X, Z\rangle$.*

Remarques :
1. Pour les espaces à courbure constante K, on retrouve bien le fait que $\langle Z, Z\rangle = \kappa x^2$, avec $\kappa = \langle R(X,Z)X, Z\rangle = -K$.
2. Nous avons vu que dans un espace localement symétrique, la fonction $\langle R(X,Z)X, Z\rangle$ est constante. Remarquons que si les fonctions β_i sont toutes nulles , nous pouvons interpréter facilement cette constante.

LEMME 7.4. *Supposons que les fonctions β_i soient toutes nulles. Alors on a*
$S^M_{|Im\sigma} - S^\sigma = 4Ric^M(X,Z) - 2\langle R(X,Z)X, Z\rangle$
où S^M (respectivement S^σ) désigne la courbure scalaire de (M, g) (respectivement $(Im\ \sigma, g_\sigma)$).

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.4, on sait que
$Ric^M(Y_i, Y_j) - Ric^\sigma(Y_i, Y_j) = -2X(h_{ij})$. D'où $g^{ij}Ric^M(Y_i, Y_j) - S^\sigma = -2X(H^\sigma)$.
Or $S^M = g^{ij}Ric^M(Y_i, Y_j) + 2Ric^M(X, Z)$. D'où $S^M_{|\sigma} - 2Ric^M(X, Z) - S^\sigma = -2X(H^\sigma)$.
le résultat découle alors immédiatement du lemme 5.8. □

3. Si H est compacte, nulle géodésiquement complète, alors la fonction $\langle Z, Z\rangle$ devant être bornée sur H, on a nécessairement $\kappa = 0$. En particulier, on en déduit :

COROLLAIRE 7.5. *Une variété pseudo-Riemannienne à courbure constante K non nulle ne possède pas d'hypersurface dégénérée, totalement géodésique, à la fois compacte et nulle géodésiquement complète.*

7.3. Des sections canoniques sur H.

Il nous reste maintenant à voir s'il existe de bonnes sections sur H. Supposons donc que nous pouvons annuler toutes les fonctions β_i sur H. Si les fonctions h_{ij} représentent le hessien d'une fonction $\check{f}$ sur le quotient $\check{H}$, nous savons qu'il existe un bon choix de sections sur l'image desquelles les fonctions h_{ij} sont toutes nulles. Dans le cas contraire, nous avons vu que nous pouvons toujours choisir des sections harmoniques, permettant d'annuler la courbure moyenne d'une section. Cependant, ces sections harmoniques ne sont pas uniques : elles ne sont définies quà une fonction harmonique près sur $\check{H}$. En général, on ne peut pas aller plus loin : il ne semble pas y avoir de choix canonique de section harmonique. Toutefois, nous allons voir que dans certains cas, nous pouvons faire un choix canonique de fonction harmonique sur $\check{H}$, et donc trouver une section harmonique canonique.
En général, ce que l'on peut espérer améliorer en changeant de section sont les termes de métrique, et leurs dérivées, exactement comme ce que l'on a fait pour les repères de Frénet. Dans un second temps, on peut aussi essayer d'améliorer des tenseurs reliés à la géométrie de H, notammant le tenseur de Ricci. Dans le cas présent, les seules dérivées de la métrique que nous pouvons encore espérer modifier sont les dérivées transverses en Z. Le problème est que l'on ne peut pas controler ces dérivées. Pour pouvoir étudier les dérivées en Z, il nous faut savoir comment évoluent, au voisinage de H, les fonctions qui apparaissent dans la métrique sur H ; Or ceci est une question difficile. Pour pouvoir travailler sur les dérivées transverses, il nous faut donc trouver des astuces, comme relier ces dérivées à des termes de courbure sur H. C'est notamment ce que nous donne le lemme 5.10 pour les dérivées $Z\langle D_X Y_i, Z\rangle$ (que l'on a convenu d'appeler, avec un léger abus de notation $Z(\beta_i)$).

LEMME 7.6. *Supposons que les fonctions β_i soient toutes nulles. Alors sur H, on a $XZ(\beta_i) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 5.10, on sait que $XZ(\beta_i) = \langle R(Z, X)Y_i, Z\rangle + \frac{1}{2}XY_i\langle Z, Z\rangle$. Or, si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a $\langle Z, Z\rangle = \kappa x^2$ sur H, pour une constante $\kappa \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que $Y_i\langle Z, Z\rangle = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$. D'où

$XZ(\beta_i) = \langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle$ sur H. Or, sur H, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \langle D_X R(Z,X)Y_i, Z\rangle \\
&= \langle D_X(R(Z,X)Y_i), Z\rangle - \langle R(D_X Z, X)Y_i, Z\rangle \\
&\quad -\langle R(Z, D_X X)Y_i, Z\rangle - \langle R(Z,X)D_X Y_i, Z\rangle \\
&= X\langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle - \langle R(Z,X)Y_i, D_X Z\rangle \\
&= X\langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle
\end{aligned}$$

□

Par conséquent, annuler les fonctions $Z(\beta_i)$ sur une section revient à anuuler ces fonctions partout sur H.

PROPOSITION 7.7. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de (M^n, g), espace localement symétrique. Supposons que*

(1) *la taille canonique de $X \in \chi$ permet d'annuler toutes les fonctions β_i sur H*

(2) *les fonctions $X(h_{ij})$ sont toutes nulles*

(3) *la constante $\kappa := \langle R(X,Z)X, Z\rangle$ est non nulle.*

Alors il existe une section harmonique canonique telle que l'on ait

$Z(\beta_i) = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n-2$ *sur* H.

DÉMONSTRATION. Soit σ une section harmonique. D'après le lemme 5.10, avoir $Z(\beta_i) = 0$ revient à annuler la courbure $\langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle$ (car si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a $Y_i\langle Z, Z\rangle = 0$). On peut facilement voir que, par changement de section, les champs Y_i, Z évoluent selon les équations

$$\begin{cases} Y_i^{f.\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X}(f)X \\ Z^{f.\sigma} = Z^\sigma + s_j Y_j^{\sigma,X} + rX \end{cases}$$

(où f désigne une fonction sur l'image de σ, et s_j, r sont des fonctions que l'on peut calculer explicitement en fonction des dérivées de f).
On en déduit alors que l'on a

$$\begin{aligned}
\langle R(Z^{f.\sigma}, X)Y_i^{f.\sigma,X}, Z^{f.\sigma}\rangle &= \langle R(Z^\sigma, X)Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma\rangle + Y_i^{\sigma,X}(f)\langle R(Z^\sigma, X)X, Z^\sigma\rangle \\
&\quad + s_j\langle R(Y_j^{\sigma,X}, X)Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma\rangle \\
&= \langle R(Z^\sigma, X)Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma\rangle - \kappa Y_i^{\sigma,X}(f) - s_j X(h_{ij}^{\sigma,X}) \\
&= \langle R(Z^\sigma, X)Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma\rangle - \kappa Y_i^{\sigma,X}(f)
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
0 &= \langle D_{Y_k^{\sigma,X}} R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&= Y_k^{\sigma,X}(\langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle) - \langle R(D_{Y_k^{\sigma,X}} Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&\quad - \langle R(Z^\sigma, D_{Y_k^{\sigma,X}} X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle - \langle R(Z^\sigma, X) D_{Y_k^{\sigma,X}} Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&\quad - \langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, D_{Y_k^{\sigma,X}} Z^\sigma \rangle \\
&= Y_k^{\sigma,X}(\langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle) - \Gamma_{ik}^l \langle R(Z^\sigma, X) Y_l^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&\quad - h_{ki}^{\sigma,X} \langle R(Z^\sigma, X) X, Z^\sigma \rangle
\end{aligned}$$

D'où $Y_k^{\sigma,X}(\langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle) = \Gamma_{ik}^l \langle R(Z^\sigma, X) Y_l^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle - \kappa h_{ik}^{\sigma,X}$.
On en déduit que $Y_k^{\sigma,X}(\langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle) = Y_i^{\sigma,X}(\langle R(Z^\sigma, X) Y_k^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle)$
$\forall\ 1 \leq i, k \leq n-2$.
On peut donc trouver une fonction f sur Im σ telle que $Y_i^{\sigma,X} = -\frac{1}{k}\langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle$
$\forall\ 1 \leq i \leq n-2$.
On a alors $\langle R(Z^{f.\sigma}, X) Y_i^{f.\sigma,X}, Z^{f.\sigma} \rangle = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n-2$ sur Im $f.\sigma$. D'autre part, on a

•

$$\begin{aligned}
X(Y_i^{\sigma,X}(f)) &= -\frac{1}{\kappa} X \langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&= -\frac{1}{\kappa}(\langle D_X R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle + \langle R(D_X Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&\quad + \langle R(Z^\sigma, D_X X) Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle + \langle R(Z^\sigma, X) D_X Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&\quad + \langle R(Z^\sigma, X) Y_i^{\sigma,X}, D_X Z^\sigma \rangle) \\
&= 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n-2
\end{aligned}$$

Donc, pour notre nouvelle section $f.\sigma$, on a $Z^{f.\sigma}(\beta_i^{f.\sigma,X}) = 0$ non seulement sur Im $f.\sigma$, mais sur H toute entière.

•

$$\begin{aligned}
Hess(f)(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) &= Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f) - \Gamma_{ij}^k Y_k^{\sigma,X}(f) \\
&= -\frac{1}{\kappa}(Y_i^{\sigma,X}(\langle R(Z^\sigma, X) Y_j^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle) - \Gamma_{ij}^k \langle R(Z^\sigma, X) Y_k^{\sigma,X}, Z^\sigma \rangle \\
&= -\frac{1}{\kappa} \kappa h_{ij}^{\sigma,X} \\
&= -h_{ij}^{\sigma,X}
\end{aligned}$$

D'où, sur l'image de σ, on a $\triangle^\sigma f = tr_{g_\sigma} Hess(f) = -H^\sigma = 0$ puisque σ est harmonique.
donc la fonction f sur Im σ est bien harmonique. La section $f.\sigma$ est donc bien harmonique.
□

En particulier, si M et $\overset{\checkmark}{H}$ sont Einstein, non Ricci-plates, avec même constante (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / Ric_g = \lambda g$ et $Ric_{\overset{\checkmark}{g}} = \lambda \overset{\checkmark}{g}$), et si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H,

alors

•

$$\begin{aligned} X(h_{ij}) &= -\frac{1}{2}(Ric^M(Y_i, Y_j) - \pi^* Ric_{\overset{\checkmark}{g}}(Y_i, Y_j)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \langle R(X,Z)X, Z\rangle &= -X(H^\sigma) - Ric^M(X,Z) \\ &= -Ric^M(X,Z) \\ &= -\lambda \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

On peut donc appliquer la proposition précédente.

Plus généralement, on a

PROPOSITION 7.8. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de (M^n, g), espace localement symétrique. Supposons que*

(1) *la taille canonique de $X \in \chi$ permet d'annuler toutes les fonctions β_i sur H*

(2) *il existe une constante λ telle que $X(h_{ij}) = \lambda g_{ij}$ sur H*

(3) $\lambda \neq \kappa$

Alors il existe une section harmonique canonique telle que l'on ait

$Z(\beta_i) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$ *sur* H.

DÉMONSTRATION. La démonstration est la même que pour la proposition précédente, à ceci près que l'on a cette fois

$$\langle R(Z^{f.\sigma}, X)Y_i^{f.\sigma,X}, Z^{f.\sigma}\rangle = \langle R(Z^\sigma, X)Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma\rangle + (\lambda - \kappa)Y_i^{\sigma,X}(f). \qquad \square$$

En particulier, si M et $\overset{\checkmark}{H}$ sont Einstein (avec $Ric^M = \mu g$ et $Ric_{\overset{\checkmark}{g}} = \overset{\checkmark\checkmark}{\mu} g$), l'équation $Ric^M(Y_i, Y_j) - Ric^\sigma(Y_i, Y_j) = -2X(h_{ij})$ montre alors que l'on peut appliquer la proposition précédente si $\lambda := \frac{\overset{\checkmark}{\mu} - \mu}{2} \neq \kappa$

On peut encore généraliser ce résultat :

PROPOSITION 7.9. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, d'un espace symétrique pseudo-Riemannien (M^n, g). Supposons qu'il existe une taille de X pour laquelle les fonctions β_i sont toutes nulles sur H. Notons κ la constante sur H* $\kappa := \langle R(X,Z)X, Z\rangle$.

Alors si la matrice $(\kappa g_{ij} - X(h_{ij}))_{1\leq i,j\leq n-2}$ *est partout inversible, il existe une section canonique* σ *(non nécéssairement harmonique!!) pour laquelle les fonctions* $Z^\sigma(\beta_i^{\sigma,X})(y_1,...,y_{n-2})$ *vérifient :*

$Z^\sigma(\beta_i^{\sigma,X})(0,...,0,y_i,...,y_{n-2}) \equiv 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2.$

DÉMONSTRATION. Soit σ une section quelconque. Par changement de section, les champs Y_i, Z évoluent selon les équations

$$\begin{cases} Y_i^{f.\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X} + Y_i^{\sigma,X}(f)X \\ Z^{f.\sigma} = Z^\sigma + s_j Y_j^{\sigma,X} + rX \end{cases}$$

avec $s_j g_{ij} = -Y_i^{\sigma,X}(f)$. On en déduit que la courbure $\langle R(Z,X)Y_i, Z\rangle$ évolue sous la forme $\langle R(Z^{f.\sigma},X)Y_i^{f.\sigma,X}, Z^{f.\sigma}\rangle = \langle R(Z^\sigma,X)Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma\rangle + s_j(\kappa g_{ij} - X(h_{ij}^{\sigma,X})$. On peut alors finir la démonstration en utilisant le même procédé que pour la preuve de la proposition 3.14 concernant les fonctions β_i et la taille canonique de X. □

Nous avons vu à travers les propositions précédentes qu'en imposant des conditions supplémentaires sur la courbure, nous pouvons trouver des sections canoniques permettant d'annuler les fonctions $Z(\beta_i)$. Pour bien comprendre l'intérêt de ces sections, il nous faut maintenant comprendre quelle est leur signification géométrique. Rappelons nous à cet effet qu'étant donnée une section σ, nous propageons transversalement le champ Z en imposant l'équation $D_Z Z = 0$ le long de l'hypersurface $\{x = 0\}$. Cette équation ne se conserve pas en général. Il serait donc naturel d'eesayer de trouver une section pour laquelle l'équation $D_Z Z = 0$ se conserve, mais un tel choix mène à des équations trop compliquées pour avoir une solution dans le cas général. On peut alors se demander si on peut au moins choisir la section σ telle que $D_Z Z$ soit vertical (i.e. n'ait pas de composante horizontale en Y_i). Le lemme suivant va répondre à cette question en nous montrant qu'annuler les fonctions $Z(\beta_i)$ revient en fait à annuler la composante horizontale de $D_Z Z$.

LEMME 7.10. *Supposons que les fonctions* β_i *soient toutes nulles sur* H. *On a alors, le long de* H, $D_Z Z = u_i Y_i + \psi X - \kappa x Z$, *où* ψ *est une fonction lisse sur* H, *et les fonctions* u_i *vérifient* $u_i g_{ij} = 2Z(\beta_j)x$.

DÉMONSTRATION.

•

$$\begin{aligned} \langle D_Z Z, X\rangle &= Z\underbrace{\langle Z, X\rangle}_{=1} - \langle Z, D_Z X\rangle \\ &= -\langle Z, D_X Z\rangle \\ &= -\frac{1}{2}X\langle Z, Z\rangle \\ &= -\kappa x \end{aligned}$$

• On a

$$\begin{aligned}\langle R(X,Z)Y_j,Z\rangle &= \frac{1}{2}X\underbrace{Y_j\langle Z,Z\rangle}_{=0} - Z(\beta_j)\\ &= -Z(\beta_j)\\ &= -\langle R(X,Z)Z,Y_j\rangle\\ &= -\langle D_XD_ZZ,Y_j\rangle + \langle D_ZD_XZ,Y_j\rangle\\ &= -X\langle D_ZZ,Y_j\rangle + Z\langle D_XZ,Y_j\rangle\\ &= -X\langle D_ZZ,Y_j\rangle + Z(\beta_j)\end{aligned}$$

On en déduit que $X\langle D_ZZ,Y_j\rangle = 2Z(\beta_j)$. Donc, puisque $XZ(\beta_j)=0$ sur H, on a

$$\begin{cases} XX\langle D_ZZ,Y_j\rangle = 0\\ \langle D_ZZ,Y_j\rangle = 0 \ \textit{sur} \ \{x=0\}\end{cases}$$

D'où $u_ig_{ij} = \langle D_ZZ,Y_j\rangle = 2Z(\beta_j)x$. □

Remarques :

1. Nous avons identifié précédemment les obstructions à ce que H soit localement un produit affine $< Y_1,...,Y_{n-2} > \times < X >$. Annuler les fonctions $Z(\beta_i)$ peut alors s'interpréter comme une condition nécessaire pour que la variété ambiante M (et non plus l'hypersurface H !!) soit localement un produit affine $< Y_1,...,Y_{n-2} > \times < X,Z >$

2. Nous avons vu apparaître la condition $\kappa \neq 0$ dans la proposition 7.6. Il n'est pas étonnant qu'une telle condition apparaisse, car si $\kappa = 0$, annuler les fonctions $Z(\beta_i)$ est une condition très forte, puisque si cela est possible, le champ D_ZZ est non seulement vertical le long de H (i.e. engendré par X et Z), mais on a alors sur H $D_ZZ \equiv 0$ $[X]$.

3. Si on peut construire une section σ telle que les fonctions $Z(\beta_i)$ s'annulent, alors notre façon de propager le champ transverse Z devient très proche de celle proposée par C. Boubel (cf.[**Bou**]), d'après le lemme suivant :

LEMME 7.11. *Soit σ une section pour laquelle les fonctions $Z(\beta_i)$ sont toutes nulles. Définissons la 1-forme ρ_Z sur H par l'équation $\rho_Z(U) := \langle D_ZZ,U\rangle \ \forall U \in \Gamma(TH)$.*
Alors on a : $D_X\rho_Z\bullet = -\langle R(Z,X)Z,\bullet\rangle$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\bullet\langle R(Z,X)Z,X\rangle &= \langle D_ZD_XZ,X\rangle - \langle D_XD_ZZ,X\rangle\\ &= \langle D_ZD_ZX,X\rangle - X\langle D_ZZ,X\rangle\\ &= \frac{1}{2}ZZ\underbrace{\langle X,X\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle D_XZ,D_XZ\rangle}_{=0 \ si \ \beta_i=0 \ \forall i} - X\langle D_ZZ,X\rangle\\ &= -X\langle D_ZZ,X\rangle\\ &= -D_X\rho_Z(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\langle R(Z,X)Z,Y_i\rangle &= \langle D_Z D_X Z, Y_i\rangle - \langle D_X D_Z Z, Y_i\rangle \\
&= Z\langle D_X Z, Y_i\rangle - \underbrace{\langle D_X Z, D_Z Y_i\rangle}_{=0 \ si \ \beta_i=0 \ \forall i} \\
&\quad -X\langle D_Z Z, Y_i\rangle + \langle D_Z Z, D_X Y_i\rangle \\
&= Z(\beta_i) - D_X\rho_Z(Y_i) \\
&= -D_X\rho_Z(Y_i)
\end{aligned}$$

Remarquons que, par le même genre de calcul, on peut montrer que l'on a aussi

$$D_{Y_i}\rho_Z(X) = \langle R(Z,Y_i)Z,X\rangle = \langle R(Z,X)Z,Y_i\rangle = D_X\rho_Z(Y_i). \qquad \square$$

D'autre part, pour revenir sur la condition de non nullité de la constante $\kappa = \langle R(X,Z)X,Z\rangle$, remarquons que nous pouvons interpréter facilement cette condition à l'aide de la 1-forme ρ_Z :

LEMME 7.12. *Si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, alors la constante $\kappa = \langle R(X,Z)X,Z\rangle$ est nulle si et seulement si la 1-forme $\rho_Z : U \to \langle D_Z Z, U\rangle$ passe au quotient $\mathcal{Y}$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\rho_Z(X) &= \langle D_Z Z, X\rangle \\
&= Z\underbrace{\langle Z,X\rangle}_{=1} - \langle Z, D_Z X\rangle \\
&= -\langle Z, D_X Z\rangle \\
&= -\frac{1}{2}X\langle Z,Z\rangle \\
&= -\kappa x
\end{aligned}$$

$\square$

Pour finir, considérons le cas où la variété ambiante M est un espace symétrique semi-simple. Dans ce cas, le tenseur de Ricci de M est parallèle.

LEMME 7.13. *Si M est un espace symétrique semi-simple, alors la fonction $Ric^M(X,Z)$ est constante sur H.*

DÉMONSTRATION.

•

$$\begin{aligned}
0 &= D_X Ric^M(X,Z) \\
&= X(Ric^M(X,Z)) - Ric^M(D_X X, Z) - Ric^M(X, D_X Z) \\
&= X(Ric^M(X,Z)) - Ric^M(X, m_k Y_k + nX) \\
&= X(Ric^M(X,Z))
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}0 &= D_{Y_i} Ric^M(X,Z)\\ &= Y_i(Ric^M(X,Z)) - Ric^M(D_{Y_i}X,Z) - Ric^M(X,D_{Y_i}Z)\\ &= Y_i(Ric^M(X,Z)) - \beta_i Ric^M(X,Z) - l^i_k Ric^M(X,Y_k)\\ &\quad -\alpha_i Ric^M(X,X) + \beta_i Ric^M(X,Z)\\ &= Y_i(Ric^M(X,Z))\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 7.14. *Soit H une hypersurface dégénérée, totalement géodésique, de M^n, espace symétrique semi-simple. Supposons que le quotient $\check{H}$ soit Ricci plat, et que la constante $\kappa' := Ric^M(X,Z)_{|H}$ soit non nulle. Supposons enfin que l'on puisse annuler toutes les fonctions β_i sur H. Alors il existe une section harmonique canonique telle que $Ric^M(Y_i,Z) = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2$ sur H.*

DÉMONSTRATION. Soit σ une section harmonique. Après passage de la section σ à une section $f.\sigma$ (pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(Im\ \sigma, \mathbb{R})$), les champs Y_i, Z évoluent sous la forme

$$\begin{cases} Y_i^{f.\sigma,X} = Y_i^{\sigma,X} + Y_i(f)^{\sigma,X} X \\ Z^{f.\sigma} = Z^\sigma + s_j Y_j^{\sigma,X} + rX \end{cases}$$

On en déduit facilement que

$$\begin{aligned}Ric^M(Y_i^{f.\sigma,x}, Z^{f.\sigma}) &= Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma) + Y_i(f)^{\sigma,X} Ric^M(X, Z^\sigma)\\ &= Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma) + \kappa' Y_i^{\sigma,X}(f)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}Y_j^{\sigma,X}(Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma)) &= D_{Y_j^{\sigma,x}} Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma) + Ric^M(D_{Y_j^{\sigma,x}} Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma)\\ &\quad + Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, D_{Y_j^{\sigma,x}} Z^\sigma)\\ &= \Gamma^k_{ij} Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) + h_{ij}^{\sigma,X} Ric^M(X, Z^\sigma)\end{aligned}$$

On en déduit que $Y_j^{\sigma,X}(Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma)) = Y_i^{\sigma,X}(Ric^M(Y_j^{\sigma,X}, Z^\sigma)) \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n-2$. On peut donc trouver une fonction f sur Im σ telle que $Y_i^{\sigma,X}(f) = -\frac{1}{\kappa'} Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma)$ $\forall \ 1 \leq i \leq n-2$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}0 &= D_X Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma)\\ &= X(Ric^M(Y_i^{\sigma,X}, Z^\sigma))\end{aligned}$$

Donc, pour la nouvelle section $f.\sigma$, on a $Ric^M(Y_i^{f.\sigma}, Z^{f.\sigma}) = 0$ sur H toute entière. Enfin, on a

$$\begin{aligned} Hess(f)(Y_i^{\sigma,X}, Y_j^{\sigma,X}) &= Y_i^{\sigma,X} Y_j^{\sigma,X}(f) - \Gamma_{ij}^k Y_k^{\sigma,X}(f) \\ &= -\frac{1}{\kappa'}(Y_i^{\sigma,X}(Ric^M(Y_j^{\sigma,X}, Z^\sigma)) - \Gamma_{ij}^k Ric^M(Y_k^{\sigma,X}(f))) \\ &= -h_{ij}^{\sigma,X} \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \triangle^\sigma f &= tr_{g_\sigma} Hess(f) \\ &= -H^\sigma \\ &= 0 \ sur \ Im \ \sigma \end{aligned}$$

car σ est harmonique. Donc la section $f.\sigma$ est aussi harmonique. □

Remarque : puisque $Ric^M(X, Z)$ et $\langle R(X, Z)X, Z\rangle$ sont des constantes sur H, on en déduit alors que $X(H^\sigma)$ est une constante a sur H. Donc, dans nos coordonnées, on a $H^\sigma = ax$ sur H.

Regardons maintenant, afin de comprendre la signification géométrique de nos résultats, à quoi correspondent les différentes courbures de Ricci. Plaçons nous, comme d'habitude, dans le cas où les fonctions β_i sont toutes nulles sur H. La courbure de Ricci est alors donnée sur H par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & (Ric^M(Y_i, Y_j)) \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où $Ric^M(Y_i, Y_j) = -2X(h_{ij}) + Ric^\sigma(Y_i, Y_j)$. En prenant la trace par rapport à g_σ de $Ric^M(Y_i, Y_j)$, on voit apparaître la fonction $X(H^\sigma)$, ce qui nous incitait tout naturellement à étudier la fonction H^σ. Si maintenant on sort de H, on est amené à étudier les courbures de Ricci transverses $Ric^M(Z, .)$. Un calcul immédiat montre que si les fonctions β_i sont toutes nulles sur H, on a sur H :

LEMME 7.15.

(1) $Ric^M(X, Z) = -X(H^\sigma) - \kappa$

(2) $Ric^M(Y_i, Z) = Z(\beta_i) + Y_i(H^\sigma) + l_k^j \Gamma_{ik}^j - Y_j(l_j^i) - l_k^i \Gamma_{jk}^j$

(3) $Ric^M(Z, Z)_{|x=0} = Z(H^\sigma) + tr(l^2)$

(où on rappelle que $\langle D_{Y_i} Z, Y_j\rangle = l_k^i g_{kj} = -h_{ij}$)

On voit donc que dans les courbures $Ric^M(Y_i, Z)$ apparaîssent les fonctions $Z(\beta_i)$ (et donc travailler sur ces courbures de Ricci, c'est encore travailler sur les fonctions $Z(\beta_i)$), et que la courbure $Ric^M(Z, Z)$ nous permet de savoir comment évolue transversalement la fonction H^σ.

Annexe 1 : Un exemple en dimension 3

Considérons l'espace anti-de-Sitter de dimension 3, vu comme $Sl(2,\mathbb{R})$, muni du produit scalaire invariant à gauche induit par la forme de Killing $B : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (rappelons que l'on a $B(U,V) = \frac{1}{2}Tr(U.V)$ pour $U, V \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, où le facteur $\frac{1}{2}$ est ajouté ici pour obtenir une courbure constante ègale à -1) : on a donc, pour tout $g \in Sl(2,\mathbb{R})$, et tous $u, v \in T_gSl(2,\mathbb{R})$, $\langle u, v\rangle_g = B(d_gL_g^{-1}(u), d_gL_g^{-1}(v))$, où
$L_g : Sl(2,\mathbb{R}) \to Sl(2,\mathbb{R})$ est la multiplication à gauche par g.

Considérons le sous-groupe G de $Sl(2,\mathbb{R})$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque : si l'on voit les éléments de $Sl(2,\mathbb{R})$ comme des homographies, alors G correspond au sous-groupe

$$\{x \to ax + b, a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}\}$$

L'algèbre de Lie de G est donnée par

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et est engendrée, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, par

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons X (resp. Y) le champ de vecteurs invariant à gauche associé à $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$). Pour tout $g \in G$, on a donc

$$\begin{cases} X(g) = d_eL_g\mathcal{X} \\ et \\ Y(g) = d_eL_g\mathcal{Y} \end{cases}$$

Alors G est une hypersurface dégénérée de $Sl(2,\mathbb{R})$, et le noyau de la métrique induite sur G par la forme de Killing de $Sl(2,\mathbb{R})$ est engendré par le champ X. Plus précisément, la métrique induite sur G est de la forme $\frac{da^2}{a^2}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle D_YY, X\rangle &= \frac{1}{2}\langle [Y,Y], X\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc G est totalement géodésique.
On vérifie que l'on a $D_XX = D_YY = 0$, et $D_XY = -X = -D_YX$ (donc les champs X, Y ne sont pas des champs coordonnées puisque $[X,Y] \neq 0$). D'après le chapitre 6.2, et la proposition 4.11, nous savons que nous pouvons obtenir des champs coordonnées $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

pour lesquels on ait :

$$\begin{cases} D_{\tilde{X}}\tilde{X} = 0 \\ D_{\tilde{X}}\tilde{Y} = D_{\tilde{Y}}\tilde{X} = 0 \\ D_{\tilde{Y}}\tilde{Y} = \tilde{x}\tilde{X} \end{cases}$$

Après calcul, nous vérifions que les champs

$$\begin{cases} \tilde{X} = e^{-y}X \\ et \\ \tilde{Y} = Y + xX \end{cases}$$

vérifient bien les conditions voulues. Dans les coordonnées ainsi construites, la métrique induite sur l'hypersurface est alors donnée par $g_{|G} = \tilde{dy}^2$. Même si l'hypersurface ressemble fort à un produit affine, la connexion induite sur G n'est pas une connexion produit, et en ce sens, l'hypersurface G n'est pas localement un produit affine. En fait, ce qui se passe ici est que G n'est pas plate, et plus précisément, on a $R(Y,X)Y = X \neq 0$.

Annexe 2 : l'horizon de Schwarschild

La métrique de Schwarzschild est l'exemple archétype d'un "système" isolé : elle modélise le champ de gravitation à l'extérieur d'une étoile fixe et statique.
L'espace-temps de Schwaschild (de masse M) est défini comme étant la variété $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+\times S^2$, munie de la métrique $-(1-\frac{2M}{r})dt^2+\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr^2+r^2d\Omega^2$, où $d\Omega^2:=d\theta^2+sin^2\theta d\phi^2$ est la métrique canonique sur la sphère S^2.
A priori, cette métrique n'est définie que pour $r>2M$, puisqu'elle est visiblement singulière en $r=0$ et $r=2M$. Il est connu toutefois (cf. $[\mathbf{H}-\mathbf{E}]$) que le comportement pathologique de cette métrique en $r=2M$ n'est dû qu'à un mauvais choix du système de coordonnées. Par contre, en r=0, on a une vraie singularité, puisque $R^{abcd}R_{abcd}=\frac{48M^2}{r^6}$ diverge quand r tend vers 0. La métrique de Schwarschild a donc pû être étendue (par Kruskal en 1960) sur la région $0<r<2M$.
L'importance de l'espace-temps de Schwarschild étendu vient du fait qu'il représente l'unique solution du problème suivant : trouver un espace-temps Ricci plat (mais non plat), admettant $SO(3)$ comme groupe d'isométries, avec pour orbites principales S^2 de type (0,2). Cette propriété est l'énoncé du théorème de Birkhoff (cf. $[\mathbf{H}-\mathbf{E}]$).
Il est connu que la surface de niveau $\{r=2M\}$ est une hypersurface dégénérée, totalement géodésique. On appelle cette hypersurface "horizon de Schwarschild". Le champ ∂_t, sur cette hypersurface, est un champ nul, géodésique ($D_{\partial_t}\partial_t=0$ en r=2M), et engendre le noyau de la métrique induite sur l'horizon. Prenons comme sous-variété de codimension 2 (image d'une section) la sphère S^2 de l'espace temps de Schwarschild définie par

$$\begin{cases} r=2M \\ t=0 \end{cases}$$

Les champs ∂_θ, ∂_ϕ, restreints à l'horizon, vérifient

$$\begin{cases} [\partial_\theta,\partial_t]=0 \\ [\partial_\phi,\partial_t]=0 \\ [\partial_\theta,\partial_\phi]=0 \\ D_{\partial_t}\partial_\theta=0 \\ D_{\partial_t}\partial_\phi=0 \\ D_{\partial_\theta}\partial_\theta=0 \\ D_{\partial_\phi}\partial_\phi=-sin\theta cos\theta\partial_\theta \\ D_{\partial_\theta}\partial_\phi=cotan\theta\partial_\phi \end{cases}$$

Le champ ∂_t est donc un champ sur le noyau de la métrique induite à l'horizon, muni d'une taille canonique telle que les fonctions β_θ et β_ϕ (les composantes en ∂_t de $D_{\partial_t}\partial_\theta$ et $D_{\partial_t}\partial_\phi$) soient nulles.
De plus, notre section S^2 est une section naturelle pour obtenir $h_{ij}^{S^2,\partial_t}=0$ pour $i,j\in\{\theta,\phi\}$ (où $h_{ij}^{S^2,\partial_t}$ est la composante en ∂_t de $D_{\partial_i}\partial_j$).

Par notre construction, les coordonnées naturelles que l'on retrouve sur l'horizon sont les coordonnées de Schwarschild, et l'on voit de plus que l'horizon de Schwarschild est localement un produit affine (avec une connexion induite qui est une connexion produit).

Remarque : si on propage nos coordonnées au voisinage de l'horizon par la méthode définie au chapitre 5, les coordonnées que l'on obtient ne sont plus les coordonnées de Schwarschild, car par notre façon de propager, les hypersurfaces voisines sont aussi dégénérées, alors que pour les coordonnées de Schwarschild, les hypersurfaces $\{r = cste\}$ pour une constante différente de 2M sont non-dégénérées.

Annexe 3 : l'opérateur de Weingarten

Nous reprenons ici des définitions et formules exploitées en particulier par G.J. Galloway (cf. [**G**]).

Définition Soit H une hypersurface dégénérée d'une variété pseudo-Riemannienne (M, g). l'opérateur de Weingarten est l'opérateur, défini pour tout champ $X \in \chi$ par :

$$\begin{aligned} b^X : \mathcal{Y} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ [Y] &\longmapsto [D_Y X] \end{aligned}$$

et on appelle courbure moyenne nulle la fonction $\theta^X \in \mathcal{C}^\infty(H, \mathbb{R})$ définie par $\theta^X := tr\ b^X$.

Remarques :
1. Soient X et fX deux champs sur χ (pour une fonction f lisse sur H). Alors on a $b^{fX} = fb^X$.
2. Dans le cas d'une hypersurface H totalement géodésique, on a $b^X \equiv 0$ pour tout champ $X \in \chi$.
3. Si θ^X est identiquement nulle, on dit alors que H est un horizon non-expansif (car $\theta^X \simeq div_{\mathcal{Y}} X$). Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [**J** − **K** − **C**].

Dans la suite, nous noterons $D_X b^X$ l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ [Y] &\longmapsto [D_X D_Y X - D_{D_X Y} X] \end{aligned}$$

Proposition
Soit $X \in \chi$ tel que $D_X X = 0$. Alors

(1) $D_X b^X + (b^X)^2 + [R(., X)X] = 0$

(2) $X(\theta^X) = Ric^H(X, X) - \sigma^X - \frac{1}{n-2}(\theta^X)^2$, où $\sigma^X := tr(b_0^2)$ (b_0 désignant la partie sans trace de b^X)

DÉMONSTRATION.
(1)

$$\begin{aligned} D_X b^X([Y]) + (b^2)^X([Y]) &= [D_X D_Y X - D_{D_X Y} X] + [D_{D_Y X} X] \\ &= [D_X D_Y X - D_{[X,Y]} X] \\ &= [R(X, Y)X] \ \ si \ \ D_X X = 0 \end{aligned}$$

(2)Notons $D_X Y_i := \gamma_k^i Y_k + \beta_i X$. On a

- $tr(D_X b) = X(\gamma_i^i) + \gamma_k^i \gamma_i^k - \gamma_k^i \gamma_i^k$
  $= X(\theta)$

- $tr(R(., XX)) = -Ric^H(X, X)$

- $\sigma^X = tr(b^X - \frac{\theta^X}{n-2} Id_{\mathcal{Y}}) \circ (b^X - \frac{\theta^X}{n-2} Id_{\mathcal{Y}})$
  $= tr((b^X)^2) - 2\frac{\theta^X}{n-2} tr(b^X) + \frac{(\theta^X)^2}{(n-2)^2} tr(Id_{\mathcal{Y}})$
  $= tr((b^X)^2) - 2\frac{(\theta^X)^2}{n-2} + \frac{(\theta^X)^2}{n-2}$
  $= tr((b^X)^2) - \frac{(\theta^X)^2}{n-2}$

En prenant la trace de (1) sur $\mathcal{Y}$, on obtient alors l'équation annoncée. □

Remarque : l'équation (2), appelée équation de Raychaudhuri, est une équation importante intervenant dans les théorèmes d'apparition de singularités (cf. [**W**]).

Bibliographie

[A-G] M.A.Akivis-V.V.Goldberg, lightlike hypersurfaces on manifolds endowed with a conformal structure of Lorentzian signature

[A-M] D.V.Alekseevsky-S.Marchiafava, Quaternionic Structures on a Manifold and Subordinated Structures, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol.CLXXI , 205-273 (1996)

[B] A.L. Besse, Einstein manifolds, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (1987)

[BB C] L.Bérard Bergery-X.Charuel, A generalization of Frenet 's frame for non-degenerate quadratic forms with any index, Preprint de l'institut Elie Cartan (2001)

[B-E] J.Beem-P.Ehrlich, Global Lorentzian geometry, Dekker, New York (1981)

[Ber] D.Bernard, Sur la géométrie différentielle des G-structures, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (1960)

[B-G] M.Berger-B.Gostiaux, Géométrie différentielle, Presses Universitaires de France, Paris (1987)

[Bo 1] W.B.Bonnor, Null curves in a Minkowski space-time, Tensor, N-S 20 (1969)

[Bo 2] W.B.Bonnor, Null hypersurfaces in Minkowski space-time, Tensor, N-S 24, 329-345 (1972)

[Bou] C.Boubel, Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes, Thèse de l'université Henri Poincaré, Nancy I (2000)

[Car 1] E.Cartan, La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, Bull. Sc. Math. 34 (1910) ou Oeuvres complètes t.III, Vol. 1

[Car 2] E.Cartan, La théorie des groupes continus et la géométrie, Oeuvres complètes t. III, Vol. 2 (1915)

[Car 3] E.Cartan, La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés, Exposés de Géométrie, V, Paris, Hermann (1935) ou Oeuvres Complètes t. III, Vol. 2

[Ca-Wa] M.Cahen-N.Wallach, Lorentzian symmetric spaces, Bull AMS 76, 585 -591 (1970)

[Ch] S.S. Chern, The geometry of G-structures, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966)

[D] J.Dieudonné, Eléments d'analyse Tome IV, Gauthier-Villars, Paris (1971)

[D-B] K.Duggal-A.Bejancu, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Vol.364 (1996)

[d C] M.do Carmo, Differentiable curves and surfaces, Prentice Hall, New Jersey (1976)

[D-J] K.Duggal-D.Jin, Geometry of null curves, Math. J. Toyama University 22, 95-120 (1999)

[F-G-L] A.Ferrández-A.Giménez-P.Lucas, Null helices in Lorentzian space forms, International Journal of Modern Physics A (2000)

[G] G.J.Galloway, Maximum principles for null hypersurfaces and null splitting theorems, Ann. Henri Poincaré 1, 543-567 (2000)

[G-S-W] G.J.Galloway-S.Surya-E.Woolgar, On the geometry and Mass of Static, Asymptotically Ads Space-times, and the Uniqueness of the Ads Soliton, Phys. Rev. Lett (2002)

[H] S.Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press (1962)

[H-E] S.W.Hawking-G.F.R.Ellis, The large scale structure of space time, Cambridge Univ. Press (1973)

[I] A.Ikemakhen, Examples of indecomposable non-irreductible Lorentzian manifolds, Ann. Sci. Math. Québec 20, no1, 53-66 (1996)

[J-K-C] J.Jezierski-J.Kijowski-E.Czuchry, Geometry of null-like surfaces in General Relativity and its application to dynamics of gravitating matter, Reports on Math.Physics 46, 399-418 (2000)

[K 1] K.Katsuno, Null hypersurfaces in Lorentzian manifolds I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 88, 175-182 (1980)

[K 2] K.Katsuno, Null hypersurfaces in Lorentzian manifolds II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 89, 525-532 (1981)

[K-N] S.Kobayashi-N.Nomizu, Foundations of differential geometry, Interscience

Publishers (1963)

[K-Na] S.Kobayashi-T.Nagano, On a fundamental theorem of Weyl-Cartan on G-structures, J. Mat. Soc. Japan 17 (1965)

[Ko] M.Kossowski, The intrinsic conformal structure and Gauss map of a light-like hypersurface in Minkowski space, Transactions of the American mathematical Society, Vol.316, no 1 (1989)

[Ku] D.N.Kupeli, Singular semi-Riemannian geometry, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1996)

[N-R] P.Nurowski-D.C.Robinson, Intrinsic geometry of a null hypersurface, Class. Quantum Grav. ,17, 4065-4084 (2000)

[N-Ra] A.Nersessian-E.Ramos, A geometrical particle model for anyons, Phys. Lett. B (2001)

[O'N] B.O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to Relativity, Academic press (1983)

[P] R.S.Palais, A global formulation of the Lie theory of transformations groups, Mem. of the Am. Math. Soc. 22 (1957)

[Sp] M.Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish (1975)

[W] R.M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago-London (1984)

[W 1] A.G.Walker, Canonical form for a riemannian space with a parallel field of null planes, Quat. Journ. of Mathematics (Oxford), 1, 69-79 (1950)

[W 2] A.G.Walker, Canonical forms (II) : parallel partially null planes, Quat. Journ. of Mathematics (Oxford), 1, 147-152 (1950)

[Y-C W] Yung-Chow Wong, Frenet formulas for curves in Real, Complex and Quaternionic Euclidian spaces, Differential Geometry in honor of K.Yano, Kinokuniya, Tokyo, 525-541 (1972)

[Z] A.Zeghib, Geodesic foliations in Lorentz 3-manifolds, Comment. Math. Helv. 74, 1-21, (1999)

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

REÇU LE
24 FEV. 2003
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ
NANCY-I

Monsieur **CHARUEL Xavier**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY 1

en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER
n° 806

Nancy, le 10 mars 2003

Le Président de l'Université

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY 1 ★ LE PRÉSIDENT

Cl. BURLET

Université Henri Poincaré, Nancy I
24-30 rue Lionnois - B.P. 3069 - 54013 NANCY Cédex
Tél. : 03 83 68 20 00 - Fax : 03 83 68 21 00

Résumé : Les travaux effectués dans cette thèse portent sur l'étude des sous-variétés "dégénérées" (ou "nulles") des variétés pseudo-Riemanniennes, pour lesquelles la restriction de la structure pseudo-Riemannienne de la variété ambiante dégénère sur la sous-variété.
Pour étudier les problèmes liés à la dégénérescence de la métrique sur la sous-variété, il est nécessaire de réinterpréter les outils fondamentaux exploités depuis longtemps en géométrie Riemannienne.
La première partie de cette thèse consiste ainsi à construire un repère de Frénet généralisé pour les espaces de Minkowski pseudo-Riemanniens. Par transport parallèle, ce résultat se généralise alors pour les variétés pseudo-Riemanniennes.
Dans un second temps, nous généralisons cette construction à d'autres situations voisines, comme notamment le cas des variétés symplectiques, ou encore les variétés pseudo-kählériennes.
Enfin, la troisième partie de la thèse est consacrée à l'étude des hypersurfaces dégénérées, totalement géodésiques, d'une variété pseudo-Riemannienne. Nous dégageons les invariants relatifs de la structure induite sur l'hypersurface, et utilisons ces invariants pour batir des systèmes de coordonnées adaptés à la géométrie de l'hypersurface.

Null curves and null hypersurfaces in pseudo-Riemannian manifolds

Abstract : In this thesis, we study "degenerate" (or "null") submanifolds of pseudo-Riemannian manifolds, for which the restriction of the pseudo-Riemannian structure of the ambiant manifold degenerate on the submanifold.
To study degenerate submanifolds, we need to reinterpret the fondamental tools used for a long time in Riemannian geometry.
In the first part of this thesis, we build a generalized Frénet 's frame in pseudo-Riemannian Minkowski spaces. The parallel transport then allows us to generalize this construction for pseudo-Riemannian manifolds.
In the second part, we generalize our construction to other situations, such as symplectic manifolds, or pseudo-kaehlerian manifolds.
Finally, in the last part of this thesis, we study totally geodesic, degenerate hypersurface in pseudo-Riemannian manifolds. We find invariants relative to the induced structure on the hypersurface, et use them to build local coordinate systems adapted to the geometry of the hypersurface.

Discipline : géométrie différentielle

Mots-Clés : géométrie pseudo-Riemannienne, courbes nulles, repère de Frénet, sous-variété, hypersurface dégénérée, seconde forme fondamentale, cohomologie de Spencer, G-structure, coordonnées locales.

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex