



**HAL**  
open science

# Étude des instabilités dans les membranes minces sous chargements thermomécaniques

Kodjo Attipou

► **To cite this version:**

Kodjo Attipou. Étude des instabilités dans les membranes minces sous chargements thermomécaniques. Autre. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0207 . tel-01754467

**HAL Id: tel-01754467**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754467v1>**

Submitted on 30 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Spécialité : Mécanique des Matériaux

présentée par :

## KODJO ATTIPOU

---

### Étude des Instabilités dans les Membranes Minces sous Chargements Thermomécaniques

---

Composition du jury :

<i>Rapporteurs :</i>	M. Alain CIMETIERE M. Ali LIMAM	Professeur émérite (ENSMA, Poitiers) Professeur (INSA, Lyon)
<i>Examineurs :</i>	M. Rabah BOUZIDI M. René MOTRO	Professeur associé (Université de Nantes) Professeur émérite (LMGC, Montpellier)
<i>Directeur :</i>	M. Foudil MOHRI	Professeur associé (LEM3, Metz)
<i>Co-directeurs :</i>	M. Salim BELOUETTAR M. Michel POTIER-FERRY	Docteur (LIST, Luxembourg) Professeur (LEM3, Metz)





# Remerciements

Ce travail a été mené au sein du *Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux* (LEM3) à Metz en France et au *Luxembourg Institute of Science and technology* (LIST) à Esch-Sur-Alzette au Luxembourg. Je tiens à remercier ici quelques personnes sans qui ce travail n'aurait sans doute jamais abouti.

Mes remerciements vont tout d'abord au Professeur Michel Potier-Ferry pour m'avoir proposé ce sujet et au Professeur Associé Foudil Mohri pour avoir accepté de me diriger dans ce travail. Leurs directives et leurs nombreux conseils m'ont permis d'approfondir et de parfaire mes connaissances dans le domaine des instabilités dans les structures. Je les remercie tout particulièrement pour la patience dont ils ont su faire preuve pendant mes moments de doute et de perdition au cours de ce long travail.

Je remercie le Dr. Salim Belouettar pour m'avoir supervisé durant mon contrat de travail au LIST et pour ses précieux conseils tant professionnels que personnels. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes collègues et supérieurs au LIST pour leurs précieux conseils et accompagnement dans ce travail.

Mes remerciements vont également à mes collègues au LEM3 et plus particulièrement à Fan Xu pour son soutien au quotidien et sa collaboration pendant toutes ces années où nous avons travaillé ensemble.

Enfin mes remerciements vont à ma famille notamment à mes parents pour leur soutien indéfectible.

Ce travail de recherche a été financé par le *Fonds National de la Recherche Luxembourg* (FNR) via la subvention AFR PHD-08-069. Ce projet a été réalisé dans le cadre du projet FNR WRINKLE (C10/MS/784868).



*Je dédie cette thèse  
à mes parents,  
à mes frères,  
à Yanice.*



# Sommaire

<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les instabilités dans les membranes minces</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Non-linéarités dans les membranes minces . . . . .	8
1.3 Les instabilités dans les membranes minces . . . . .	11
1.3.1 Instabilités mécaniques . . . . .	11
1.3.2 Couplage thermo-mécanique . . . . .	15
1.4 Méthodes de résolution . . . . .	18
1.4.1 Approches expérimentales . . . . .	19
1.4.2 Résolutions analytiques et semi-analytiques . . . . .	21
1.4.3 Méthodes numériques . . . . .	21
1.4.3.1 L'algorithme itératif de type Newton-Raphson . . . . .	22
1.4.3.2 Pilotage des algorithmes de prédiction-correction . . . . .	24
1.4.3.3 La Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	28
1.5 Exemple numérique : flambage d'un arc circulaire . . . . .	31
1.6 Conclusion . . . . .	37
<b>2 Étude du plissement des membranes minces sous chargement mécanique</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	40
2.2 Formulation du modèle complet . . . . .	40
2.2.1 Relations cinématiques . . . . .	41
2.2.2 Loi de comportement et approche énergétique . . . . .	43
2.3 Formulation du modèle réduit . . . . .	47
2.3.1 L'approche en séries de Fourier . . . . .	48
2.3.2 Un modèle réduit simplifié de membrane . . . . .	50
2.4 Stratégies de résolution . . . . .	52
2.4.1 Approche analytique . . . . .	52

---

2.4.2	Approche numérique . . . . .	55
2.5	Exemples numériques . . . . .	58
2.5.1	Cas d'un chargement biaxial . . . . .	60
2.5.2	Cas d'un chargement uniaxial . . . . .	68
2.6	Conclusion . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Effet thermique sur le plissement des membranes minces</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	78
3.2	Origine des contraintes et déformations thermiques . . . . .	79
3.3	Formulation du problème thermo-mécanique . . . . .	80
3.4	Stratégies de résolution . . . . .	83
3.4.1	Approche analytique . . . . .	83
3.4.2	Implémentation numérique . . . . .	86
3.4.2.1	Forme générale du problème non linéaire . . . . .	86
3.4.2.2	Discrétisation du problème par éléments finis . . . . .	88
3.4.2.3	Implémentation de la MAN . . . . .	90
3.5	Exemples numériques . . . . .	93
3.5.1	Membrane sous chargement biaxial . . . . .	94
3.5.1.1	Exemple de validation . . . . .	94
3.5.1.2	Conditions aux bords . . . . .	101
3.5.2	Membrane sous chargement uniaxial . . . . .	103
3.5.2.1	Convergence de maillage . . . . .	106
3.5.2.2	Variation de la longueur d'onde . . . . .	112
3.5.2.3	Influence de l'épaisseur de la membrane . . . . .	113
3.5.2.4	Membrane en pré-tension . . . . .	115
3.5.2.5	Influence de la géométrie . . . . .	119
3.5.2.6	Répartition non-uniforme de la variation de température . . . . .	124
3.5.3	Comparaison plissement thermique et plissement mécanique . . . . .	126
3.6	Conclusion . . . . .	129
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>131</b>
	<b>Annexe : Conditions aux limites du modèle réduit</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# Table des figures

1	Antenne spatiale de la Nasa (Spartan/IAE) (source : <a href="http://nasaimages.org">nasaimages.org</a> ) . . . . .	2
2	Plissement lors du laminage des tôles minces (source : <a href="#">[Abdelkhalek et al., 2011]</a> )	3
3	Plissement mécanique d'une membrane (source : <a href="#">[Lecieux and Bouzidi, 2010]</a> ) . . .	3
1.1	Charpente et membrane du toit du Centre Pompidou à Metz pendant sa construction. L'architecture de la toiture est faite en double courbures pour permettre sa résistance face aux aléas climatiques (vent, neige, grêle,...). (source : blog Marc de Metz). . . . .	9
1.2	Centre National de Natation de Pékin encore appelé <i>water cube</i> . Les parois sont en éthylène tétrafluoroéthylène (ETFE), un matériau plastique qui assure sa résistance aux différences de température et de pression. (source : Fan Xu). . . . .	9
1.3	Poutre en grands déplacements et grandes rotations dans le cas des non linéarités géométriques. La composante non linéaire du tenseur des déformations permet de prendre en compte la courbure de la poutre en déformation. . . . .	10
1.4	Flambage globale d'une plaque. . . . .	12
1.5	Un film mince et rigide en PDMS (polydiméthylsiloxane) collé sur une fondation épaisse et souple en PDMS soumis à un effort de compression en déplacement imposé. La longueur d'ondes des plis est très petite devant la largeur de la structure. Un accroissement de l'effort de compression provoque le dédoublement des plis. (image <a href="#">[Brau et al., 2010]</a> ). . . . .	12
1.6	Plissement causé par un effort de traction. (a) La zone de compression est localisée au centre de la membrane tandis que les bords de la membrane sont en traction. (b) Les plis apparaissent dans la zone de compression de la membrane et leur taille est fonction de la taille de la zone de compression. (images <a href="#">[Friedl et al., 2000]</a> ). . . . .	13
1.7	Passage entre les rouleaux d'une bande de membrane mince. (b) L'apparition des plis se fait en amont du rouleau (image de Converter Accessory Corporation). . . . .	14
1.8	Forme des plis dans les structures films sur substrat. La structure est soumise à une double compression biaxiale. (a) mode sinusoïdal, (b) mode échiquier, (c) mode chevron (ou zigzag) - <a href="#">[Xu et al., 2014a]</a> . . . . .	15
1.9	Plissement des structures gonflables. (a) Membrane hémisphérique gonflée puis appuyée. (b) Déformée d'un airbag circulaire. (images <a href="#">[Diaby, 2005]</a> ). . . . .	16
1.10	Délaminage d'une structure film sur substrat à cause des plis formés. (a) Plis réguliers dûs à la contrainte de compression. (b) Augmentation de l'amplitude des plis à cause de l'accroissement de la contrainte de compression. (c) Perte d'adhérence des couches superposées suite à une trop grande amplitude des plis. . . . .	17
1.11	Banc d'essai pour l'étude du plissement d'une membrane aux bords elliptiques <a href="#">[Orszulik and Shan, 2012]</a> . . . . .	18

1.12	Banc d'essai pour l'étude du plissement d'une membrane cruciforme. La membrane est sollicitée en traction/compression le long des deux axes sous diverses charges. ([Lecieux and Bouzidi, 2010]). . . . .	20
1.13	(a) Schéma de Newton-Raphson. Inversion d'une matrice jacobienne à chaque itération. Convergence relativement rapide de la solution. (b) Schéma de Newton-Raphson modifié. Une seule inversion de matrice. Lente convergence de la solution. (image help.solidworks.com) . . . . .	25
1.14	Modes d'échec du contrôle du pas de prédiction (a) par charge imposée (snap-through) ou (b) déplacement imposé (snap-back) (image help.solidworks.com) . . . . .	26
1.15	Algorithme modifiée de Riks (image documentation Abaqus) . . . . .	27
1.16	Schéma descriptif du principe de la MAN. Une étape $j$ permet de suivre une branche de la courbe plus ou moins longue en fonction de l'ordre de troncature de la série. . . . .	29
1.17	Géométrie et conditions aux limites de l'arc circulaire. . . . .	32
1.18	Courbe de bifurcation de l'arc circulaire. En bleu, on constate le saut de courbe <i>snap-through</i> , conséquence d'un calcul à charge imposée. La force maximale appliquée est 2000 N. (a) Déplacement U. (b) Déplacement V. . . . .	34
1.19	Comparaison de la méthode de longueur d'arc et la MAN. Les astérisques sur la courbe représentent la fin de chaque pas de continuation de la MAN. Les points PB1 à PB3 sont les points de bifurcation de la courbe. Au voisinage de PB1 et PB2, les pas de calcul sont plus petits. Le point PB3 est le point d'arrêt du chargement. . . . .	35
1.20	Déformées de l'arc circulaire aux points de bifurcation (PB). . . . .	36
2.1	Structure déformable occupant le domaine $\Omega$ . Les conditions aux limites sont appliquées en déplacement imposé sur le bord $\partial\Omega_U$ et en force imposée sur le bord $\partial\Omega_F$ . . . . .	41
2.2	Deux champs macroscopiques pour décrire le phénomène de plissement dans une direction donnée. . . . .	48
2.3	Dimensions et chargement de la membrane. La membrane est soumise à une traction dans la direction $y$ suivie d'une compression dans la direction $x$ , la traction étant maintenue. . . . .	53
2.4	Élément coque à 8 noeuds et 5 degrés de liberté utilisé pour le calcul du modèle complet dans le logiciel ABAQUS. Ce type d'élément est idéal pour les structures minces. . . . .	59
2.5	Mode opératoire de la simulation sous ABAQUS. . . . .	59
2.6	Élément plaque quadrangulaire Q8 à 8 noeuds utilisé pour le calcul du modèle réduit dans le code de calcul MATLAB. . . . .	60
2.7	Membrane sous chargement biaxial. . . . .	61
2.8	Les deux géométries de membrane étudiées : (a) membrane carrée, (b) membrane rectangulaire . . . . .	62
2.9	Organigramme du calcul biaxial pour le calcul du modèle réduit et du modèle complet. Le calcul analytique est pré-requis pour le calcul du modèle réduit afin de déterminer la longueur d'onde. . . . .	63
2.10	Maillages utilisés pour les deux modèles de membrane (membrane rectangulaire $400 \times 200$ mm). (a) Maillage très fin $100 \times 20$ éléments pour le calcul du modèle complet dans ABAQUS afin d'avoir une bonne représentation des plis. (b) Maillage très grossier $6 \times 10$ éléments pour le calcul dans MATLAB grâce à la technique de réduction du modèle. . . . .	64



2.11	Influence de l'effort de traction sur l'effort critique de compression (membrane carrée $200 \times 200$ mm).	65
2.12	Courbes de bifurcation au centre de la membrane (membrane rectangulaire). Les courbes des deux modèles de membrane sont très proches.	66
2.13	Mode de plissement à différentes charges de compression (membrane rectangulaire). On observe une différence au voisinage des bords de la membrane : le modèle complet a une plus grande amplitude que le modèle réduit en post-bifurcation pour la même charge de compression. Ailleurs les deux modes de plissement sont presque superposés.	67
2.14	Déformées de la membrane au voisinage du point de bifurcation et en post-bifurcation (modèle complet). Les zones de grandes amplitudes varient du centre aux bords de la membrane.	67
2.15	Membrane sous tension longitudinale.	68
2.16	Organigramme du calcul uniaxial.	70
2.17	Zones de contraintes $\sigma_x$ (N/mm <sup>2</sup> ) au voisinage du point de bifurcation : $N_Y = 2.27$ N/mm (membrane courte $200 \times 400$ mm)	70
2.18	Zones de contraintes $\sigma_x$ (N/mm <sup>2</sup> ) en post-bifurcation : $N_Y = 3$ N/mm (membrane courte)	71
2.19	Zones de contraintes $\sigma_x$ (N/mm <sup>2</sup> ) au voisinage du point de bifurcation : $N_Y = 6$ N/mm (membrane longue)	71
2.20	Zones de contraintes $\sigma_x$ (N/mm <sup>2</sup> ) en post-bifurcation : $N_Y = 10.9$ N/mm (membrane longue)	72
2.21	Équidistance de l'amplitude maximale des plis par rapport au centre de la membrane [Zheng, 2009].	73
2.22	Courbes de bifurcation pour une membrane courte.	73
2.23	Courbes de bifurcation pour une membrane longue.	73
2.24	Déformées des membranes : modèle complet. Les plis sont localisés près des bords de la membrane, là où la contrainte de compression est la plus importante.	74
3.1	Conditions aux limites dans le plan pour une membrane rectangulaire. (a) flambage thermique, (b) flambage mécanique et (c) couplage thermo-mécanique.	80
3.2	Membrane sous chargement biaxial : dimensions et conditions aux limites de type encastrement appliquées au modèle réduit de la membrane.	86
3.3	Élément plaque quadrangulaire Q8	89
3.4	Comparaison des courbes de réponse des maillages fin et grossier dans le modèle complet	96
3.5	Déformée de la membrane pour différents conditions aux bords (modèle réduit)	97
3.6	Déformée de la membrane en post-bifurcation pour $\Delta T = -30^\circ C$ (modèle réduit)	102
3.7	Courbes de bifurcation en fonction des conditions aux bords (modèle réduit)	103
3.8	Déformée de la membrane pour différents conditions aux bords (modèle réduit)	104
3.9	Chargement uniaxial de la membrane : conditions aux limites de type encastrement appliquées au modèle réduit.	105
3.10	Distribution de contraintes au voisinage du point de bifurcation (modèle complet)	105
3.11	Rapport des contraintes de traction et de compression induites au centre de la membrane	106
3.12	Courbes de bifurcation pour l'étude de convergence de maillage	108
3.13	Profils des plis pour l'étude de convergence de maillage ( $\Delta T = -10^\circ C$ )	109
3.14	Résultats des deux modèles de membrane : exemple de validation	110
3.15	Mode de plissement pour les deux modèles au même point de chargement	111

3.16	Courbes de bifurcation : variation de la longueur d'onde (zoom au voisinage du point de bifurcation) . . . . .	113
3.17	Evolution du mode de plissement en fonction de la variation du chargement thermique (modèle complet) . . . . .	114
3.18	Courbes de bifurcation pour différentes valeurs de l'épaisseur (modèle réduit) . . . . .	115
3.19	Conditions aux limites appliquées au modèle réduit de la membrane dans l'étape de pré-traction. . . . .	116
3.20	Bifurcation curves for $\bar{u} = 0.01$ mm (full and reduced model) . . . . .	116
3.21	Bifurcation curves for $\bar{u} = 0.05$ mm (full and reduced model) . . . . .	117
3.22	Bifurcation curves for $\bar{u} = 0.1$ mm (full and reduced model) . . . . .	117
3.23	Evolution of bifurcation curves for the reduced model . . . . .	118
3.24	Evolution of wrinkles profiles at $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ for the reduced model . . . . .	118
3.25	Bifurcation curves for $\bar{u} = 0.5$ mm (variation of the wavelength) . . . . .	119
3.26	Mode de plissement pour $r = 3$ . . . . .	120
3.27	Mode de plissement pour $r = 5$ . . . . .	120
3.28	Mode de plissement pour $r = 7$ . . . . .	121
3.29	Courbes de bifurcation pour différentes valeurs de $r$ . . . . .	121
3.30	Déformée de la membrane en post-bifurcation (modèle réduit) . . . . .	122
3.31	Distance entre le centre de la membrane et l'amplitude maximale . . . . .	123
3.32	Déformée d'une membrane carrée sous chargement thermique uniaxial . . . . .	125
3.33	Distribution de la variation de la température pour différentes valeurs de $n$ . . . . .	126
3.34	Mode de plissement pour une distribution non uniforme de la température $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ (modèle complet) . . . . .	127
3.35	Comparaison modes de plissement pour $n = 1$ ( $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ ) . . . . .	127
3.36	Comparaison modes de plissement pour $n = 5$ ( $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ ) . . . . .	128
3.37	Comparaison modes de plissement pour $n = 20$ ( $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ ) . . . . .	128
3.38	Comparaison des courbes de bifurcation pour les différents types de chargement uniaxial . . . . .	128

# Liste des tableaux

2.1	Application des conditions aux limites de type encastrement aux deux modèles de membranes. Voir annexe 3.6 pour plus de détails sur le passage des conditions aux limites du modèle complet au modèle réduit. . . . .	62
2.2	Cas de chargement biaxial : calcul de l'effort critique de compression $\lambda^{cr}$ (N/mm) ((a) membrane carrée et (b) membrane rectangulaire) . . . . .	63
2.3	Variation de longueur d'onde $l_x/L_x$ entre les deux géométries de membrane pour le modèle réduit ((a) membrane carrée et (b) membrane rectangulaire). . . . .	65
2.4	Application des conditions aux limites de type encastrement aux deux modèles de membranes dans le cas d'un chargement uniaxial. . . . .	69
3.1	Application des conditions aux limites de type encastrement aux deux modèles de membranes pour le cas d'un chargement biaxial thermo-mécanique. . . . .	84
3.2	Dimensions de la membrane et propriétés du matériau . . . . .	95
3.3	Nombre d'éléments pour l'étude de convergence de maillage . . . . .	98
3.4	Résultats analytiques pour le chargement biaxial . . . . .	98
3.5	Caractéristiques de l'ordinateur utilisé pour les calculs . . . . .	99
3.6	Résultats pour $\Delta T = -1$ avec $ N_x^{lim}  = 0.009$ N/mm . . . . .	99
3.7	Résultats pour $\Delta T = -10$ avec $ N_x^{lim}  = 0.028$ N/mm . . . . .	100
3.8	Résultats pour $\Delta T = -20$ avec $ N_x^{lim}  = 0.038$ N/mm . . . . .	100
3.9	Résultats pour $\Delta T = -50$ avec $ N_x^{lim}  = 0.06$ N/mm . . . . .	101
3.10	Différent maillages pour les deux modèles de membrane . . . . .	107
3.11	Pretensioning cases . . . . .	115



# Introduction générale

On parle de structure mince lorsque l'épaisseur de la structure est très petite devant sa largeur ou sa longueur. Dans la pratique, ce rapport peut être de l'ordre de  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$ . Les structures minces peuvent être classées en trois principales catégories : les plaques, les coques et les membranes. Les plaques sont définies comme étant des structures minces plates, n'ayant pas de courbure et présentant une certaine résistance à la flexion. Les coques sont des structures minces présentant un rayon de courbure faible ou important. C'est le cas des toits courbes, des silos et des réservoirs. À la différence des plaques et des coques, les membranes peuvent présenter une courbure ou non, cependant elles ont une résistance à la flexion quasi nulle.

Les structures minces sont largement utilisées dans plusieurs domaines de l'industrie. Leur utilisation est favorisée par le rapport poids/résistance qu'elles offrent. Dans l'industrie aéronautique, la surface des ailes d'un avion est composée de coques minces reliées entre elles par des nervures et des longerons ; ceci assure le faible poids des ailes, favorisant ainsi la portance de l'aéronef. Dans le domaine aérospatial, les voilures des antennes gonflables (figure 1) et des radars ainsi que les voiles solaires sont faites en membranes minces pour, d'une part, augmenter la capacité du volume de stockage et réduire la masse, et d'autre part, utiliser moins de force pour leur déploiement. On retrouve également l'utilisation des structures minces dans l'industrie métallurgique notamment dans le processus de laminage des tôles minces et aussi dans l'industrie du bâtiment comme la fabrication des revêtements de sols en PVC.

Idéalement, les plaques et les coques travaillent en flexion parce qu'elles peuvent supporter des charges jusqu'à une certaine limite à cause de leur résistance à la flexion. Par contre, les membranes ne peuvent pas travailler en flexion parce qu'elles ne présentent quasiment aucune rigidité de flexion. Pour assurer leur tenue en flexion pendant leur utilisation, les membranes sont pré-tendues afin de créer ou d'augmenter la rigidité de flexion. Cette mise sous tension



FIGURE 1 – Antenne spatiale de la Nasa (Spartan/IAE) (source : nasaimages.org)

induit, sous l'effet Poisson, des contraintes négatives, créant ainsi des zones de compression.

Les structures minces sont souvent soumises à des contraintes de compression. Lorsque ces contraintes dépassent le seuil critique de résistance à la flexion, il se produit un phénomène d'instabilité géométrique qui se traduit par une déformation hors-plan de la structure. Dans le cas des plaques et coques, l'instabilité se produit généralement à l'échelle globale de la structure : on parle de *flambage global*. Dans les membranes, l'instabilité se produit à l'échelle locale de la structure, de façon périodique et est caractérisée par une longueur d'onde petite devant la largeur de la structure : on parle de *flambage local* ou de *plissement*. Il existe des cas particuliers où le flambage local s'observe dans des structures minces telles que les plaques et les coques. Nous pouvons citer l'exemple du laminage à froid des tôles minces en acier où le plissement est qualifié de *bords longs* ou *centre long* (voir [Abdelkhalek et al., 2011]) selon les zones d'apparition des plis (figure 2). Dans la suite de notre document, le terme *plissement* sera exclusivement employé pour désigner le phénomène d'instabilité dans les membranes minces.

Le plissement dans les membranes minces peut être dû à plusieurs types de sollicitations d'ordre mécanique, thermique, chimique, etc. Les sollicitations dues aux déformations mécaniques sont les plus répandues. On les retrouve notamment dans le processus de transport de bande dans l'industrie métallurgique et textile. La traction dans la bande provoque, sous l'effet Poisson, des contraintes de compressions transversales, et génère l'apparition de plis (figure 3). Dans le cas thermique, une membrane mince soumise à un chargement thermique (refroidis-

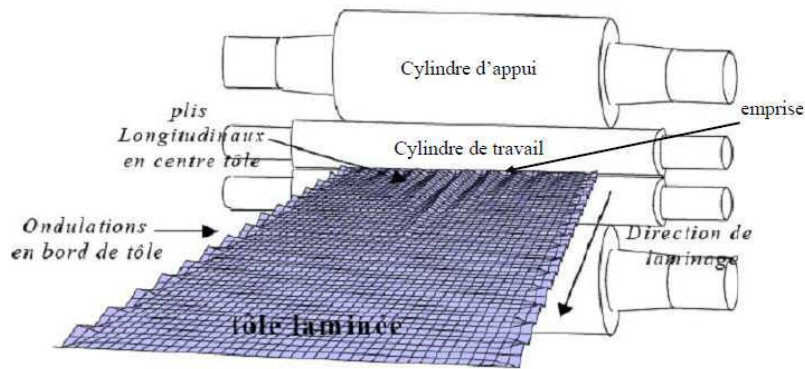


FIGURE 2 – Plissement lors du laminage des tôles minces (source : [Abdelkhalek et al., 2011])

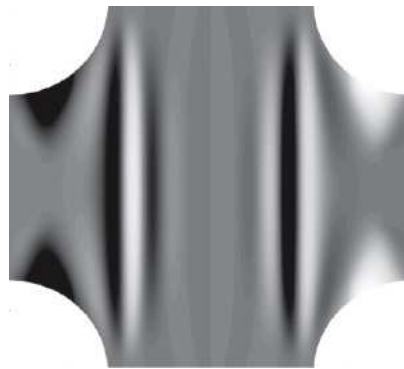


FIGURE 3 – Plissement mécanique d’une membrane (source : [Lecieux and Bouzidi, 2010])

sement ou réchauffement) développent des contraintes mécaniques à cause des conditions aux limites qui contraignent éventuellement les déformations thermiques de la membrane.

Il existe dans la littérature beaucoup de références sur le flambage des plaques et des coques. D’ailleurs, l’ouvrage de Robert Jones [Jones, 2006] présente - de façon non exhaustive - quelques aspects des flambages mécaniques et thermiques des plaques et coques sous différentes conditions d’appuis, entre autres. Cependant, les références sur le plissement des membranes restent assez limitées dans la littérature, surtout pour le cas du plissement thermo-mécanique.

L’étude du flambage des plaques et des coques conduit généralement à la résolution de problèmes aux valeurs propres. Le plissement des membranes est un phénomène plus complexe car il fait intervenir deux niveaux d’échelles : l’échelle locale, caractérisée par une très faible longueur d’ondes de l’instabilité par rapport à la dimension de la structure, et l’échelle globale, caractérisée par la dimension de la structure elle-même. Son étude requiert alors la résolution de problèmes non linéaires multi-échelles. Les méthodes et techniques de résolution de problèmes de plissement des membranes sont diverses et variées. Elles peuvent être d’ordre

analytique et/ou numérique comme expérimentale. L'objectif est d'améliorer la détection des valeurs critiques et de prédire le comportement de la membrane. Les avancées faites dans les méthodes de résolution permettent en général de réduire le coût du calcul et de faciliter la modélisation du phénomène de plissement grâce à des techniques d'homogénéisation qui assurent le couplage entre l'échelle globale et l'échelle locale. Ainsi, la méthode introduite par Damil et Potier-Ferry [Damil and Potier-Ferry, 2006] est une méthode semi-analytique qui utilise la technique des séries de Fourier à double échelle pour modéliser les instabilités d'une poutre sur fondation élastique de type *Winkler*. L'avantage d'une telle méthode par rapport aux analyses asymptotiques de bifurcation réside dans le fait qu'elle reste valide loin du point de bifurcation. Par ailleurs, cette méthode permet également de réduire le nombre d'éléments du maillage dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis, et par conséquent, de réduire le temps de calcul. Cependant, comme toute méthode semi-analytique, elle est basée sur des approximations plus ou moins contraignantes dont la plus significative est sans doute le choix *a priori* de la longueur d'onde du mode de l'instabilité.

L'objectif de recherche de cette thèse est d'approfondir la méthode des séries de Fourier pour l'appliquer à l'étude du plissement des membranes minces. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas du chargement thermo-mécanique. La résolution numérique est faite par la méthode des éléments finis. L'algorithme de résolution des équations non linéaires est basée sur les Méthodes Asymptotiques Numériques, ceci afin d'assurer des gains de temps de calcul supplémentaires quant à l'utilisation des méthodes numériques classiques (Newton-Raphson, Riks, longueur d'arc, ...).

Le présent document est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, nous faisons l'état de l'art des différents types d'instabilités dans les membranes minces notamment mécanique et thermo-mécanique ainsi que les techniques de résolutions des problèmes d'instabilité. Les méthodes numériques de résolution des problèmes non linéaires sont revues. Nous rappelons également les grands principes de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour la résolution de problèmes d'élasticité non linéaire. Des exemples numériques sont présentés en fin de chapitre pour comparer les différentes méthodes numériques discutées.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude du plissement des membranes sous chargement méca-



---

nique. Deux modèles de membrane sont mis en évidence. Le premier modèle est un modèle complet dont les équations sont les équations classiques de Föppl-Von Kàrmàn de flambage de plaques. Le deuxième modèle est un modèle réduit construit à partir des équations du modèle complet en appliquant la technique des séries de Fourier. La MAN est utilisée pour la résolution numérique des équations non linéaires du modèle réduit. Son implémentation est faite dans le code de calcul MATLAB. La modélisation du modèle complet est faite à l'aide du logiciel commercial éléments finis ABAQUS. La méthode de résolution numérique utilisée dans ABAQUS est celle de la longueur d'arc ou méthode de Riks modifiée. Des exemples numériques impliquant les deux modèles de membrane sont présentés à des fins de validation de la méthode des séries de Fourier.

Enfin, le chapitre 3 évoque la prise en compte de l'effet thermique dans le plissement des membranes minces. Les équations des deux modèles de membrane sont réécrites avec prise en charge de la variation de température dans les équations. L'effet thermique sur le comportement des membranes minces sous des conditions d'appui spécifiques est étudié à travers divers exemples. Des comparaisons entre le modèle complet et le modèle réduit sont faites dans des cas bien spécifiques où les limites du modèle réduit sont également soulevées.



# Chapitre 1

## Généralités sur les instabilités dans les membranes minces

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Non-linéarités dans les membranes minces</b>	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Les instabilités dans les membranes minces</b>	<b>11</b>
1.3.1	Instabilités mécaniques	11
1.3.2	Couplage thermo-mécanique	15
<b>1.4</b>	<b>Méthodes de résolution</b>	<b>18</b>
1.4.1	Approches expérimentales	19
1.4.2	Résolutions analytiques et semi-analytiques	21
1.4.3	Méthodes numériques	21
<b>1.5</b>	<b>Exemple numérique : flambage d'un arc circulaire</b>	<b>31</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>

---

## 1.1 Introduction

Le traitement des problèmes d'instabilités dans les membranes requiert au préalable la compréhension du phénomène d'instabilité. Il s'agit pour la plupart des cas de prédire le comportement de la membrane sous diverses sollicitations. Il existe beaucoup de références dans la littérature sur les instabilités dans les membranes minces. Outre les ouvrages de [Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959, Jones, 2006] qui présentent de façon détaillée des études sur le flambage des structures minces, notamment les poutres, plaques et coques, plusieurs auteurs se sont également penchés sur l'étude du plissement dans les structures minces.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques travaux de la littérature concernant les instabilités dans les membranes minces. Après avoir parlé des non-linéarités dans les membranes minces, nous nous intéressons au phénomène des instabilités dans les membranes. Ensuite, nous discutons des méthodes d'analyse des instabilités dans les membranes. Nous mettons l'accent principalement sur des méthodes expérimentales, semi-analytiques et numériques. Concernant les méthodes numériques, nous présentons plus en détail certaines approches numériques qui sont essentiellement utilisées dans notre étude dans les chapitres suivants. À la fin de ce chapitre, nous donnons quelques exemples d'application des approches numériques présentées.

## 1.2 Non-linéarités dans les membranes minces

Les membranes minces sont largement utilisées dans plusieurs domaines de l'industrie tels que le domaine aérospatial ou encore le génie civil. Elles interviennent dans la conception de plusieurs édifices dans l'industrie du bâtiment. Nous pouvons citer l'exemple du centre Pompidou de Metz (figure 1.1) dont la toiture est composée d'une membrane à base de fibre de verre et de téflon reposant sur une charpente faite de bois lamellé-collé. La géométrie non régulière de la toiture à double courbure, favorise la tenue en flexion et en traction-compression de la structure permettant de supporter des charges climatiques (neige, vent). Les façades du Centre National de Natation de Pékin (figure 1.2) sont des membranes faites à base d'un matériau plastique, l'éthylène tétrafluoroéthylène (ETFE), qui est réputé être très résistant aux différences de températures et de pression. Sur la figure 1.2b, on constate que les conditions aux limites de type encastrement appliquées sur la membrane provoquent des instabilités de

plissement au voisinage du bord de la membrane. Ces instabilités constituent des non-linéarités dans la membrane.



FIGURE 1.1 – Charpente et membrane du toit du Centre Pompidou à Metz pendant sa construction. L'architecture de la toiture est faite en double courbures pour permettre sa résistance face aux aléas climatiques (vent, neige, grêle,...). (source : blog Marc de Metz).



(a) Façades en matériau plastique ETFE



(b) Présence de plis aux bords

FIGURE 1.2 – Centre National de Natation de Pékin encore appelé *water cube*. Les parois sont en éthylène tétrafluoroéthylène (ETFE), un matériau plastique qui assure sa résistance aux différences de température et de pression. (source : Fan Xu).

Les membranes minces présentent souvent des particularités dans leur conception et leur utilisation qui sont à l'origine des instabilités qu'on peut rencontrer. Ces particularités donnent lieu à des non-linéarités qui peuvent être classées en trois catégories :

- Non linéarités matérielles
- Conditions limites et contact
- Non linéarités géométriques

Les non-linéarités matérielles concernent les matériaux dont les lois de comportement sont non linéaires, c'est-à-dire que les contraintes sont des fonctions non linéaires des déformations. Selon les cas, nous pouvons avoir des lois de comportement élastique non linéaire, élastoplastique, viscoplastique, élasto-viscoplastique ou de fluage [Halphen and Nguyen, 1975]. Ces types de problèmes non linéaires sont souvent résolus à l'aide de méthodes itératives [Zienkiewicz and Taylor, 1991, Bathe, 2006]. Dans notre étude, nous nous limitons aux matériaux ayant un comportement élastique linéaire. Les non-linéarités liées aux conditions aux limites comprennent les problèmes de contact, le frottement, les chocs. Dans ces types de problèmes, les conditions aux limites changent au cours du chargement. Les non-linéarités géométriques dans les membranes minces sont causées par les grands déplacements que subissent certaines membranes lors du chargement. Cela se traduit par une composante non linéaire dans le tenseur des déformations. Les non-linéarités géométriques sont associées aux structures subissant de grands déplacements et de grandes rotations (figure 1.3). Les références citées plus haut présentent également des exemples sur les non-linéarités géométriques. Dans les membranes minces, on observe dans certains cas, de fortes non-linéarités géométriques liées aux sollicitations auxquelles sont soumises les membranes. Nous nous intéressons au comportement post-critique des membranes minces en prenant en compte les non-linéarités géométriques avec l'hypothèse des grands déplacements, des petites rotations et petites déformations avec une loi de comportement linéaire. Ces hypothèses sont valables dans le modèle complet. Néanmoins, le modèle réduit ne permet pas d'aller très loin du point de bifurcation.

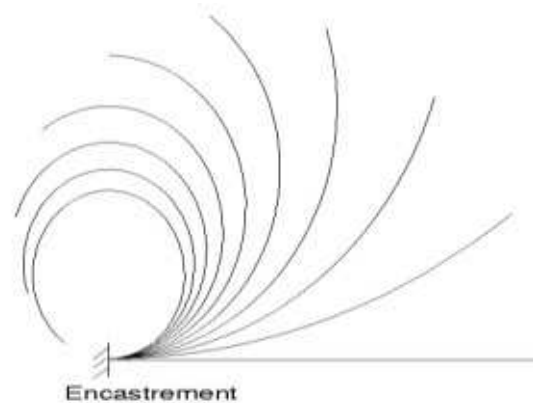


FIGURE 1.3 – Poutre en grands déplacements et grandes rotations dans le cas des non linéarités géométriques. La composante non linéaire du tenseur des déformations permet de prendre en compte la courbure de la poutre en déformation.

Il existe une quatrième catégorie de non-linéarités qui est plutôt lié aux instabilités du comportement qui se présentent dans l'analyse des problèmes dynamiques. Comme exemple, on peut considérer l'étude des vibrations de structures sandwich viscoélastiques dont les propriétés du matériau dépendent de la fréquence de vibration de la structure [Boumediene et al., 2014, Lougou et al., 2014].

## 1.3 Les instabilités dans les membranes minces

On parle d'instabilité d'une structure lorsque cette structure quitte l'état fondamental vers un état secondaire (qui peut être stable ou instable) sous l'effet d'une sollicitation extérieure. L'état stable est généralement retrouvé dès que la sollicitation cesse d'exister dans le cas d'un comportement élastique. Dans les membranes minces, cette instabilité se traduit par une déformation hors-plan. Le flambage et le plissement sont les types d'instabilités les plus fréquemment rencontrés. Avant les années 30, les problèmes de flambage ont longtemps été associés aux colonnes dans les édifices et aux plaques dans les enveloppes ou structures des navires. Par la suite, avec l'avènement de l'industrie aéronautique, il s'est produit un fort engouement pour l'analyse du flambage des structures minces. En effet, par souci d'efficacité et de performances, les structures deviennent de plus en plus minces et légères et sont donc très sensibles au flambage. Au delà du flambage, on peut également observer le phénomène de plissement qui peut être interprété comme du flambage à faible longueur d'onde. Ce phénomène intervient essentiellement dans les structures très minces de type membrane caractérisées par une rigidité de flexion quasi nulle.

### 1.3.1 Instabilités mécaniques

Les instabilités mécaniques sont induites par des sollicitations purement mécaniques. On distingue principalement deux types d'instabilités mécaniques dans les structures minces : le flambage et le plissement. Le flambage mécanique se produit lorsque la structure mince (plaque ou coque) est soumise à un effort normal de compression. Il se produit alors une instabilité globale caractérisée par une déformation hors-plan à l'échelle de la structure (figure 1.4). Le flambage mécanique est le type d'instabilité le plus largement abordé dans la littérature. Le

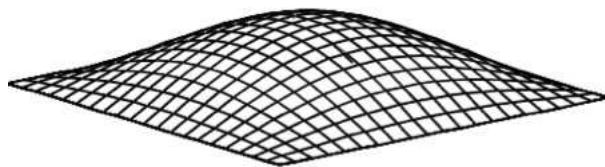


FIGURE 1.4 – Flambage globale d’une plaque.

plissement mécanique peut être défini comme un mode de flambage localisé. Cela se traduit par une déformation hors-plan de la structure à l’échelle locale (échelle très petite devant la dimension de la structure), caractérisée par un mode répétitif et une longueur d’onde suffisamment petite devant la largeur de la structure. Cette définition est qualitative, néanmoins, la limite entre flambage et plissement reste vague et varie dans la littérature.

Il existe deux types de sollicitations mécaniques pouvant conduire au plissement des structures minces : la compression et la traction. Lorsqu’on soumet une plaque ou une coque à un effort de compression au delà d’une valeur critique, outre le flambage, il peut se produire aussi le phénomène de plissement de la structure. La figure 1.5 montre que dans certains cas, un accroissement de l’effort de compression engendre le dédoublement des plis.

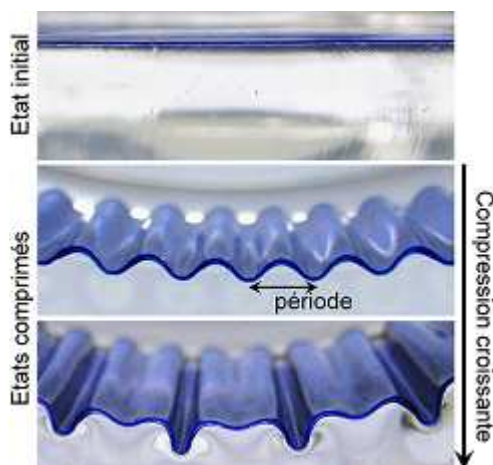


FIGURE 1.5 – Un film mince et rigide en PDMS (polydiméthylsiloxane) collé sur une fondation épaisse et souple en PDMS soumis à un effort de compression en déplacement imposé. La longueur d’ondes des plis est très petite devant la largeur de la structure. Un accroissement de l’effort de compression provoque le dédoublement des plis. (image [Brau et al., 2010]).

Une structure mince soumise à une traction globale peut présenter, sous l’effet Poisson et sous des conditions aux limites spécifiques, des contraintes de compression transverses [Friedl et al., 2000, Jacques and Potier-Ferry, 2005]. L’apparition des zones de compression ex-



plique la formation des plis dans la structure (figure 1.6). On peut citer comme exemple le processus de transport de bandes dans les industries des tôles, des panneaux composites, des tissus en textile, où la mise sous traction de la bande, couplée à la forme des rouleaux de transport, est à l'origine des plis observés (figure 1.7 ci-dessous et figure 2 dans l'introduction générale). De manière générale, l'origine des plis est l'apparition de contraintes de compression dans la structure mince. Cependant, dans le cas du transport de bandes, l'apparition des plis peut provenir aussi de la conicité des rouleaux qui crée des contraintes de traction non-uniforme dans la bande à cause du frottement entre le rouleau et la tôle. Cette géométrie des rouleaux contribue à augmenter l'amplitude des plis [Jacques et al., 2007].

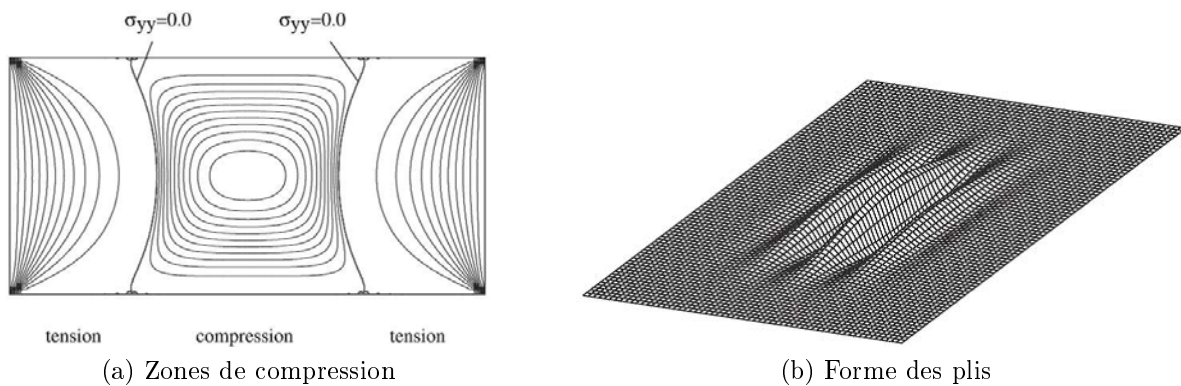


FIGURE 1.6 – Plissement causé par un effort de traction. (a) La zone de compression est localisée au centre de la membrane tandis que les bords de la membrane sont en traction. (b) Les plis apparaissent dans la zone de compression de la membrane et leur taille est fonction de la taille de la zone de compression. (images [Friedl et al., 2000]).

Contrairement aux plaques et aux coques minces, les membranes minces ne présentent pas de rigidité à la flexion. Ainsi, il est quasiment impossible de les soumettre à des efforts de compression sans pré-tension initiale. La mise sous traction globale dans une direction donnée crée une certaine rigidité à la flexion de la membrane dans cette direction. Cette mise en tension peut générer des contraintes de compression dans l'autre direction. Cette technique est employée dans le déploiement des antennes gonflables. Par ailleurs, dans le processus de transport de membranes minces (PVC par exemple), un effort de traction est nécessaire pour assurer le passage de la bande entre les rouleaux. De même que pour le cas des tôles minces, il se crée dans la membrane des contraintes de compression sous l'effet Poisson qui engendrent le phénomène de plissement (figure 1.7).

L'étude du plissement mécanique des structures minces a permis, dans un premier temps,

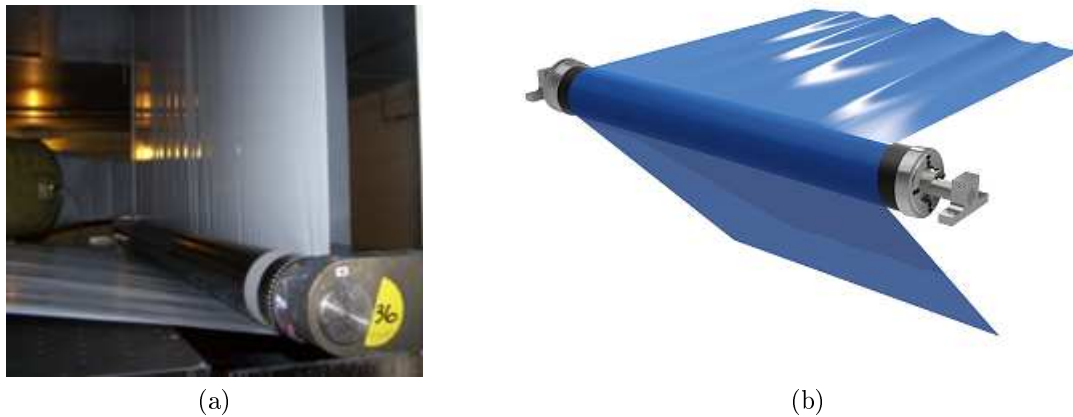


FIGURE 1.7 – Passage entre les rouleaux d’une bande de membrane mince. (b) L’apparition des plis se fait en amont du rouleau (image de Converter Accessory Corporation).

de déterminer les états de contraintes et de déformations après le phénomène de plissement. Les travaux de [Wagner, 1931, Wagner and Ballerstedt, 1935] ont permis d’expliquer la formation des plis dans les structures plaques et coques très minces en prédisant l’apparition des contraintes de traction ainsi que la direction des plis grâce à la théorie de champs de tension. [Miller et al., 1985] a développé un algorithme numérique basé sur la modification de la loi de comportement pour prendre en compte le phénomène de plissement. Cette technique n’étant valable que pour les matériaux isotropes, les travaux de [Roddeman et al., 1987a, Roddeman et al., 1987b] en ont apporté une correction afin de l’étendre aux membranes anisotropes. Cette correction consiste à modifier le tenseur des déformations afin d’obtenir un état de contraintes correct après le plissement. Le modèle de Roddeman était uniquement limité à la détermination des zones de plissement et aucune information n’était donnée sur les caractéristiques des plis comme la taille ou la longueur d’onde.

Par la suite, d’autres études ont porté sur l’influence de plusieurs facteurs sur le plissement mécanique ainsi que les caractéristiques des plis. C’est dans cette optique que [Kim et al., 2000] a étudié l’influence de la géométrie et du rapport des contraintes traction/compression en proposant une méthode des éléments finis basée sur la théorie de bifurcation. Beaucoup d’auteurs dans la littérature ont étudié le plissement des structures minces soumises à une tension globale essentiellement en présence de discontinuités géométriques telles que les fissures, les trous ou même la géométrie de la structure [Tomita and Shindo, 1988, Shaw and Huang, 1990,

[Shimizu et al., 1991, Gilabert et al., 1992]. Pour [Friedl et al., 2000], en absence de discontinuités géométriques, on observe quand même le phénomène de plissement dans les structures minces sous tension globale, ceci en prenant en compte des conditions aux limites spécifiques. Les travaux de [Diaby, 2005, Diaby et al., 2006] ont contribué à l'étude du plissement des structures gonflables ayant un comportement de type membrane (figure 1.9). De plus, de récentes études ont permis d'étudier l'apparition de plissement dans les films minces sur substrat sous diverses conditions d'appui et de sollicitations mécaniques [Xu et al., 2014a, Xu et al., 2014b, Xu et al., 2015a, Xu et al., 2015b]. Les formes particulières des plis observés (figure 1.8) témoignent en effet de l'existence de plusieurs points de bifurcations. Ces points de bifurcation correspondent généralement au phénomène de dédoublement des plis (figure 1.5) ou l'apparition de plis dans une autre direction (figures 1.8-b et 1.8-c).

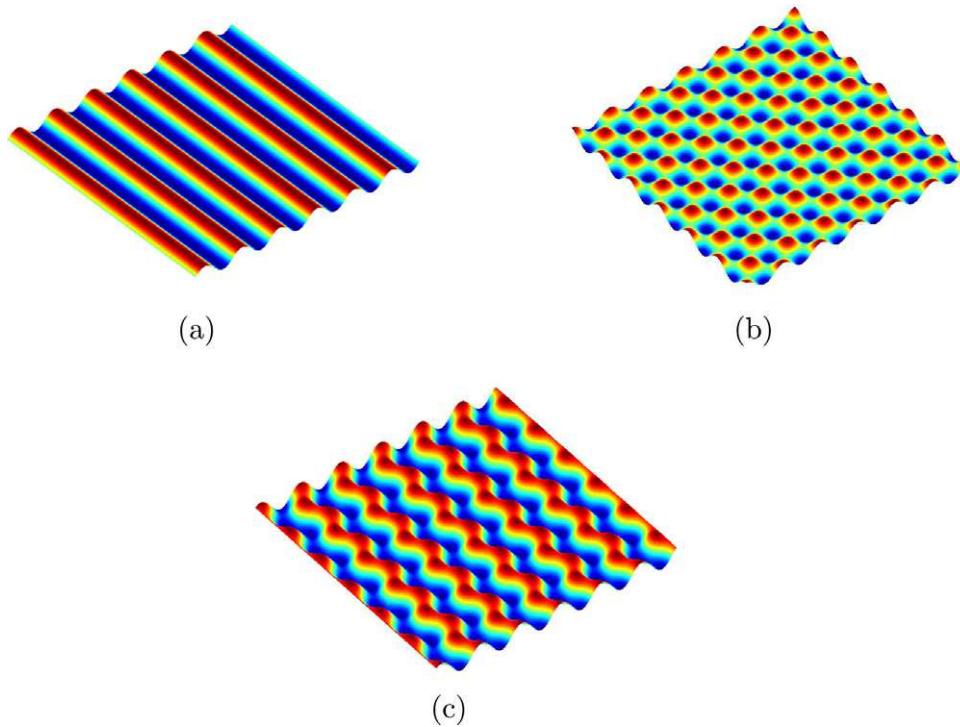


FIGURE 1.8 – Forme des plis dans les structures films sur substrat. La structure est soumise à une double compression biaxiale. (a) mode sinusoïdal, (b) mode échiquier, (c) mode chevron (ou zigzag) - [Xu et al., 2014a]

### 1.3.2 Couplage thermo-mécanique

Dans certaines applications, les membranes minces sont soumises à de fortes variations de température couplées avec des contraintes de traction et/ou compression (exemple des voiles so-

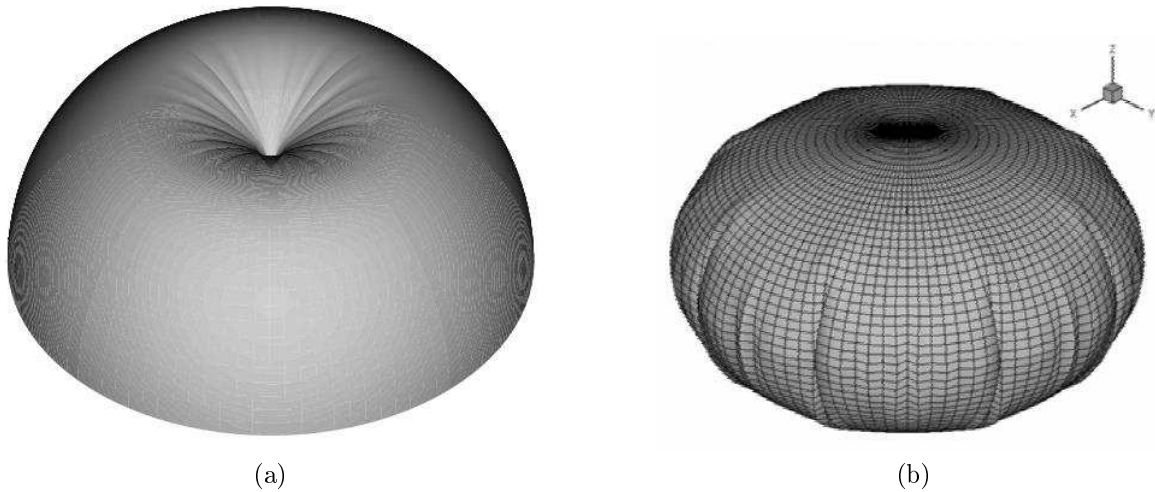


FIGURE 1.9 – Plissement des structures gonflables. (a) Membrane hémisphérique gonflée puis appuyée. (b) Déformée d'un airbag circulaire. (images [Diaby, 2005]).

laire ou lors de la fabrication des membranes PVC). Les contraintes mécaniques couplées à des déformations thermiques peuvent provoquer le phénomène d'instabilité des membranes. Comme pour le cas des instabilités mécaniques, des contraintes de compression localisées peuvent apparaître dans la membrane et engendrer le phénomène de plissement.

Le plissement thermo-mécanique des membranes minces est très complexe à étudier du fait de l'hétérogénéité des contraintes dans la membrane. La plupart des travaux menés dans ce domaine sont consacrés à l'étude du plissement thermique dans les structures minces de type films minces sur substrat ou dans les structures minces multicouches. Le cas le plus souvent étudié est le phénomène de délaminage qu'entraîne le plissement. Le délaminage est caractérisé par une séparation de couches superposées qui perdent leur adhérence. Par exemple, lors du processus de dépose à chaud du film mince sur le substrat, des plis peuvent se former dans le film mince et provoquer le délaminage (figure 1.10). [Plassa, 1969] a étudié le phénomène d'apparition des plis dans les films minces de germanium. Ses travaux ont permis de montrer de façon expérimentale, que la contrainte thermique anisotrope est la cause de la formation des plissements réguliers dans certaines conditions. Ainsi, les films de germanium devraient être déposés sur les substrats de mica à des températures aussi élevées que possible afin d'obtenir une forte adhésion entre les deux matériaux. Toujours dans le domaine expérimental et concernant les films sur substrat, les travaux de [Iyer et al., 1995] ont montré que, dans le processus de préparation chimique des films de carbone de type diamant, des contraintes internes appa-

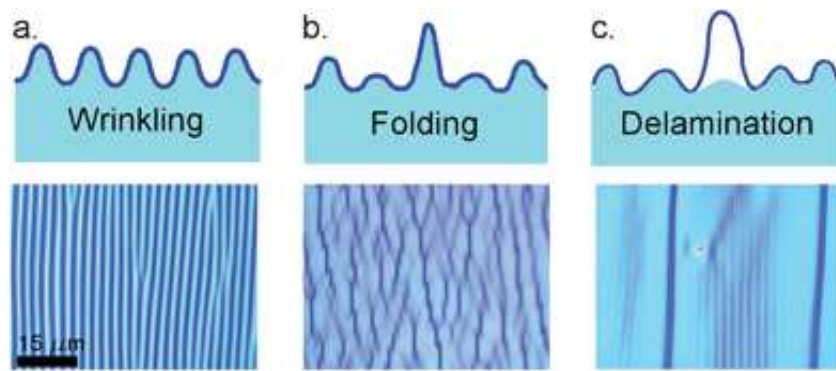


FIGURE 1.10 – Délaminage d’une structure film sur substrat à cause des plis formés. (a) Plis réguliers dus à la contrainte de compression. (b) Augmentation de l’amplitude des plis à cause de l’accroissement de la contrainte de compression. (c) Perte d’adhérence des couches superposées suite à une trop grande amplitude des plis.

raissent et que le relâchement de ces contraintes engendrait des modes d’instabilités sous forme sinusoïdale. [Carter et al., 1996] sont parvenus à la même conclusion en développant un modèle basé sur le processus de saut discontinu pour décrire l’apparition et la propagation des plis dans les films minces en métal sur substrat. Ils ont montré que le relâchement des contraintes de compression, résultant de la dépose du film, conduit à l’apparition de zones de plissement et que ces dernières se propagent sur la surface pendant le mouvement .

Outre l’étude du délaminage dû à l’apparition des plis dans les membranes, certains auteurs ont également étudié l’influence de la température sur le plissement dans les membranes minces. Les travaux de Chiu et al. sont probablement les premiers du genre. En effet, Chiu et al. ont étudié le plissement dans les membranes polymères sous chargement thermo-mécanique [Chiu et al., 1994]. Leur étude est basée sur une modification de la méthode des éléments finis utilisée par Roddeman [Roddeman et al., 1987a, Roddeman et al., 1987b]. Les références de Blandino et al. sont très intéressantes tant dans le domaine aérospatial que dans d’autres domaines. En effet, les conditions d’utilisation des voiles solaires et des antennes gonflables de la NASA sont des exemples pertinents de membranes minces en polymères soumises à des chargements thermiques. Ainsi, Blandino et al. ont étudié la caractérisation du plissement dans une membrane mince carrée encadrée, soumise à des chargements mécaniques en ses coins et un chargement thermique uniforme [Blandino et al., 2001]. Ses études expérimentales ont montré que, dans des conditions isothermes, lorsque le chargement mécanique augmente, le nombre de plis augmente avec une diminution de l’amplitude des plis, la zone de plissement restant inchangée. Par ailleurs, l’amplitude des plis augmente quand on applique une charge thermique

uniforme. Blandino et al. ont également étudié le plissement d'une membrane carrée chargée symétriquement et soumise à une charge thermique en son milieu sous forme de spot. Des tests expérimentaux et des simulations numériques sous ABAQUS ont été conduits et ont donné des résultats satisfaisants [Blandino et al., 2002].

Durant la dernière décennie, plusieurs études ont été consacrées à l'analyse du plissement thermo-mécanique notamment dans les structures sandwich [Birman, 2004, Birman, 2005, Gu and Asaro, 2008], les structures en membrane [Hornig et al., 2006] et les films sur substrat [Goyal et al., 2010]. Plus récemment, [Orszulik and Shan, 2012] ont conduit une analyse par éléments finis dans ABAQUS et des tests expérimentaux pour étudier l'effet des chargements thermiques localisés sur le plissement d'une membrane présentant des bords elliptiques (figure 1.11). Dans leur étude, le plissement est réduit en appliquant des combinaisons de forces de tension variées.

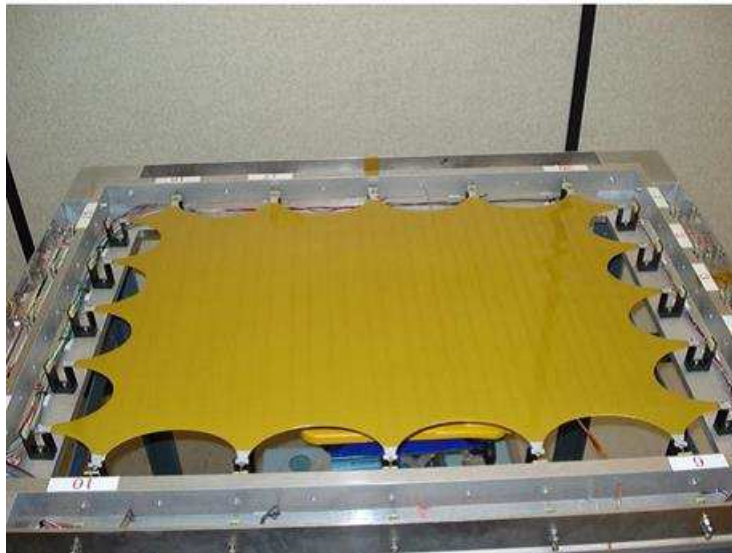


FIGURE 1.11 – Banc d'essai pour l'étude du plissement d'une membrane aux bords elliptiques [Orszulik and Shan, 2012].

## 1.4 Méthodes de résolution

Il existe plusieurs techniques permettant de traiter les problèmes d'instabilités dans les membranes. Ces techniques peuvent être classées en trois catégories distinctes : les approches expérimentales, les méthodes analytiques et semi-analytiques et les méthodes numériques. La méthode expérimentale permet de reproduire à une échelle donnée le phénomène rencontré.

Elle permet également d'expliquer de manière empirique le phénomène d'instabilité dans les membranes. Cependant, l'utilisation de cette méthode nécessite des infrastructures qui sont coûteuses. Les méthodes analytiques, semi-analytiques et numériques, quant à elles, font intervenir des équations mathématiques et physiques pour modéliser au mieux le phénomène observé. Ces méthodes ont l'avantage de nécessiter moins d'infrastructures que la méthode expérimentale. Les approches analytiques, semi-analytiques et numériques étant souvent basées sur des hypothèses, leur utilisation nécessite une bonne compréhension du problème étudié. De plus, la validation des modèles analytiques, semi-analytiques ou numériques et de leurs hypothèses nécessite leur confrontation aux essais expérimentaux.

Les méthodes de résolution du problème de plissement des membranes minces peuvent être classées en deux groupes : les méthodes directes et les méthodes réduites. Les méthodes directes sont caractérisées par une résolution par les éléments finis des équations classiques en utilisant des éléments coques [Wong and Pellegrino, 2006]. Les modèles de membrane qui sont résolus par ces méthodes sont qualifiés de *modèles microscopiques* ou *modèles complets* et sont basés simplement sur la théorie élastique des coques [Wang et al., 2007, Wang et al., 2009, Lecieux and Bouzidi, 2010, Lecieux and Bouzidi, 2012, Healey et al., 2013]. L'inconvénient des méthodes directes est qu'elles nécessitent un grand nombre de degrés de liberté pour la résolution par éléments finis, ce qui augmente considérablement le temps de calcul. C'est dans cette optique que des méthodes alternatives comme les méthodes réduites sont intéressantes quand elles peuvent être appliquées. Ces méthodes réduites sont pour la plupart caractérisées par une modification des équations constitutives de membrane [Roddeman et al., 1987a, Roddeman et al., 1987b, Chiu et al., 1994]. On en déduit ainsi une simplification des équations générales, ce qui conduit à la construction de modèles de membrane qualifiés de *modèles réduits* ou *modèles macroscopiques*.

### 1.4.1 Approches expérimentales

Les approches expérimentales pour l'étude du plissement des structures minces sont très peu nombreuses. Quelques auteurs, [Jenkins et al., 1998, Cerda et al., 2002, Cheng et al., 2004, Wong and Pellegrino, 2006, Lecieux and Bouzidi, 2010], ont mené des études expérimentales afin d'expliquer le phénomène de plissement dans les membranes, l'objectif étant de fournir



des informations sur les caractéristiques des plis comme leur taille, leur forme et leur évolution au cours du chargement. Par exemple, [Lecieux and Bouzidi, 2010] ont montré à travers des tests expérimentaux (figure 1.12) que l'amplitude des plis diminue lorsqu'on augmente le chargement, le nombre des plis augmente et les courbures maximales ne restent pas constantes au cours du chargement. Pour certains auteurs, les études expérimentales menées leur ont permis de valider des résultats issus d'un modèle numérique [Kim et al., 2000, Blandino et al., 2001, Blandino et al., 2002, Wang et al., 2009, Li et al., 2011]. [Cuong et al., 2015] ont conduit des études expérimentales afin de simuler des états de contraintes dans les membranes comme les contraintes résiduelles dans le cas du laminage à froid des tôles minces.

Dans le cas de l'étude du plissement dans les structures films sur substrat, les études expérimentales menées par [Plassa, 1969, Iyer et al., 1995, Carter et al., 1996] ont permis de déterminer les conséquences du plissement telles que notamment le délaminage.

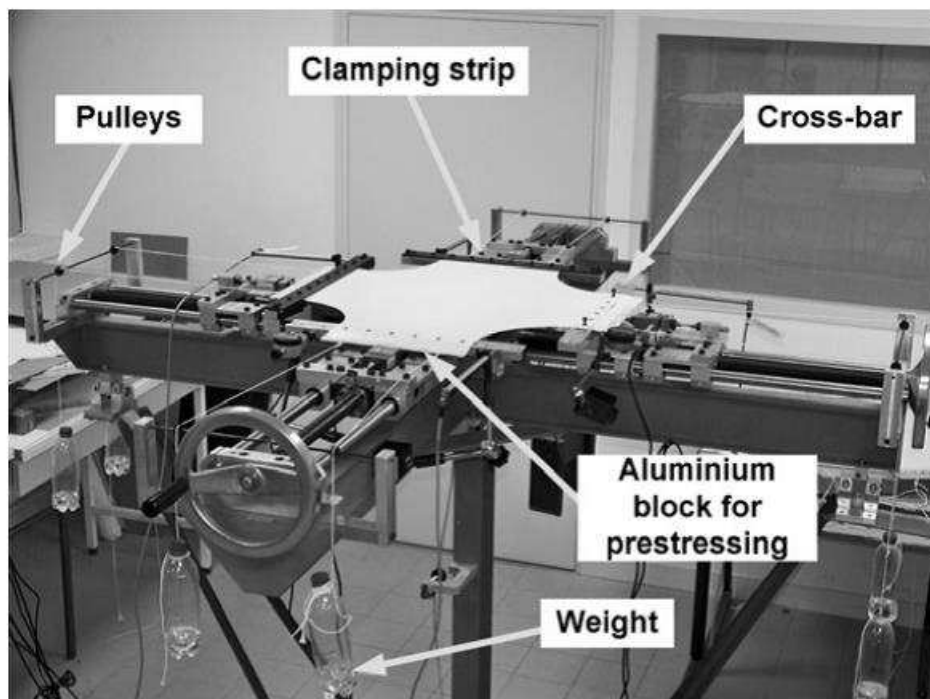


FIGURE 1.12 – Banc d'essai pour l'étude du plissement d'une membrane cruciforme. La membrane est sollicitée en traction/compression le long des deux axes sous diverses charges. ([Lecieux and Bouzidi, 2010]).



### 1.4.2 Résolutions analytiques et semi-analytiques

Les approches analytiques et semi-analytiques sont les méthodes les plus utilisées dans la littérature pour étudier le phénomène d'instabilité dans les membranes minces. Ces approches sont souvent employées pour traiter des problèmes relativement simples ou complexes. Les travaux de Wagner [Wagner, 1931, Wagner and Ballerstedt, 1935] sont sans doute les premiers du genre à traiter du phénomène de plissement mécanique dans les membranes minces.

Les méthodes analytiques et semi-analytiques sont efficaces pour étudier le plissement dans les membranes minces. Elles s'intéressent à trouver les charges critiques seulement, sans s'intéresser aux modes de plissement et leur évolution pendant le chargement [Miller et al., 1985, Roddeman et al., 1987a, Roddeman et al., 1987b].

Dans notre travail, nous faisons une approche semi-analytique basée sur les séries de Fourier à double échelle. Les premiers travaux sur cette approche semi-analytique ont été menés par [Damil and Potier-Ferry, 2006, Damil and Potier-Ferry, 2010]. Cette approche semi-analytique nous permet de développer un modèle réduit dont les équations peuvent être résolues de façon analytique ou numérique. La résolution numérique permet d'obtenir d'autres informations sur les caractéristiques des plis telles que la taille des plis, leur nombre et leur évolution pendant le chargement. Dans la prochaine section, nous détaillerons quelques approches numériques utilisées pour la résolution de problèmes d'instabilités dans les membranes minces.

### 1.4.3 Méthodes numériques

L'étude des instabilités dans les membranes minces peut se ramener à la résolution de problèmes non linéaires dépendant d'un paramètre réel  $\lambda$  :

$$R(U, \lambda) = 0 \tag{1.1}$$

où  $U$  est le vecteur inconnu et  $R$  est un vecteur rassemblant  $n$  équations, encore appelé *vecteur résidu*.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour la résolution des problèmes non linéaires sous la forme de l'équation (1.1). Dans notre travail, nous utilisons essentiellement deux types de méthodes : une méthode de prédiction-correction basée sur un algorithme itératif de type Newton-

Raphson avec ses différentes versions de contrôle (force imposée, déplacement imposée, longueur d'arc) [Brebbia and Connor, 1969, Murray and Wilson, 1969, Riks, 1979, Crisfield, 1981, Zienkiewicz and Taylor, 1991] et une méthode asymptotique numérique reposant sur des techniques de développement en séries entières des courbes de solution [Cochelin et al., 2007]. Cette section présente les notions fondamentales des stratégies de résolution numérique adoptées dans notre travail.

### 1.4.3.1 L'algorithme itératif de type Newton-Raphson

Dans la procédure de résolution de l'équation (1.1), on cherchera à générer une suite de points  $(U^1, \lambda^1), (U^2, \lambda^2), \dots, (U^j, \lambda^j), \dots$  à partir d'un point donné  $(U^0, \lambda^0)$  solution de (1.1), chaque point satisfaisant un critère de tolérance  $\|R(U^j, \lambda^j)\| < \epsilon$  où  $\epsilon$  est un nombre positif donné. C'est le principe des méthodes de continuation de type prédiction-correction. Les méthodes de prédiction-correction se composent de plusieurs étapes :

- l'étape de prédiction
- la correction
- le choix du paramètre de chemin
- le contrôle de la longueur des pas

L'étape de prédiction consiste à approximer la solution recherchée par un incrément de prédiction  $(\Delta U^{(0)}, \Delta \lambda^{(0)})$  :

$$\begin{cases} U^{j+1} = U^j + \Delta U^{(0)} \\ \lambda^{j+1} = \lambda^j + \Delta \lambda^{(0)} \end{cases} \quad (1.2)$$

En remplaçant l'équation (1.2) dans l'équation (1.1) et en négligeant les termes d'ordres supérieurs, l'incrément de prédiction  $(\Delta U^{(0)}, \Delta \lambda^{(0)})$  est alors solution du problème linéaire :

$$\frac{\partial R}{\partial U} \Big|_j \Delta U^{(0)} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Big|_j \Delta \lambda^{(0)} = 0 \quad (1.3)$$

où le terme  $\frac{\partial R}{\partial U} \Big|_j$  est une matrice jacobienne, ou matrice tangente. Pour pouvoir résoudre le problème linéaire (1.3), nous ajoutons une condition supplémentaire qui définit le choix du

paramètre de chemin, soit à déplacement imposé  $\Delta\bar{u}$  ou à charge imposée  $\Delta a$  :

$$\Delta U^{(0)} = \Delta\bar{u} \quad \text{ou} \quad \Delta\lambda^{(0)} = \Delta a \quad (1.4)$$

Nous reviendrons sur les conséquences de ce choix (déplacement imposé ou charge imposée) à la fin de ce paragraphe.

L'étape de correction effectuée est celle de Newton. En effet, si le point de prédiction ne vérifie pas  $\|R(U^{j+1}, \lambda^{j+1})\| < \epsilon$ , on procède à une ou plusieurs corrections en faisant une approximation à l'itération  $(i+1)$  comme dans (1.2) :

$$\begin{cases} U^{(i+1)} = U^{(i)} + \Delta U^{(i)} \\ \lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta\lambda^{(i)} \end{cases} \quad (1.5)$$

Dans ce cas, l'équation linéaire à résoudre est alors :

$$\left. \frac{\partial R}{\partial U} \right]_i \Delta U^{(i)} + \left. \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right]_i \Delta\lambda^{(i)} = -R(U^{(i)}, \lambda^{(i)}) \quad (1.6)$$

qui est rendue homogène en ajoutant une condition supplémentaire de type (1.4) en fixant soit l'incrément de déplacement, soit l'incrément du coefficient de charge :

$$\Delta U^{(i)} = \{0\} \quad \text{ou} \quad \Delta\lambda^{(i)} = 0 \quad (1.7)$$

On stoppe les corrections lorsque le critère de tolérance  $\|R(U^i, \lambda^i)\| < \epsilon$  est satisfait.

Cet algorithme, appelé algorithme de Newton-Raphson (figure 1.13a), permet de résoudre  $n^{iter} + 1$  (n-itérations + 1) problèmes linéaires pour passer de  $(U^j, \lambda^j)$  à  $(U^{(j+1)}, \lambda^{(j+1)})$ . Cette méthode de résolution est très coûteuse en temps de calcul du fait de l'inversion d'une matrice jacobienne à chaque itération. Cependant, de nombreuses variantes sont proposées, notamment pour économiser en temps de calcul. Par exemple, nous pouvons garder la même matrice tangente  $\left. \frac{\partial R}{\partial U} \right]_{(1)}$  pour toutes les itérations de correction : c'est l'algorithme de Newton-Raphson modifié (figure 1.13b). Cette technique est intéressante pour diminuer le temps de calcul mais le taux de convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson est inévitablement perdu et le gain de temps obtenu est souvent annihilé par la perte due aux itérations supplémentaires.

Dans le cas de problèmes non linéaires où les courbes de réponse présentent des points extremums, l'algorithme de Newton-Raphson atteint ses limites. En effet, la définition du pas de prédiction (équation (1.4)) impose une croissance continue de l'incrément de prédiction là où il diminue. On observe alors un phénomène de *saut* sur la courbe de réponse (figure 1.14). On parle de *snap-through* pour le contrôle du pas de prédiction par charge imposée et *snap-back* pour le contrôle du pas de prédiction par déplacement imposé.

Pour assurer le pilotage de l'algorithme de Newton-Raphson, on peut contrôler le pas de prédiction par la méthode de la longueur d'arc qui a l'avantage d'être plus efficace en présence des points limites en forces ou en déplacements.

### 1.4.3.2 Pilotage des algorithmes de prédiction-correction

Il existe plusieurs techniques de pilotage des algorithmes de prédiction-correction, la plus populaire étant la longueur d'arc imposé. Les équations de contrôle de pas de prédiction (1.4) et (1.7) sont remplacées par :

$$\|\Delta U^{(0)}\|^2 + (\Delta \lambda^{(0)})^2 = \Delta a^2 \quad (1.8)$$

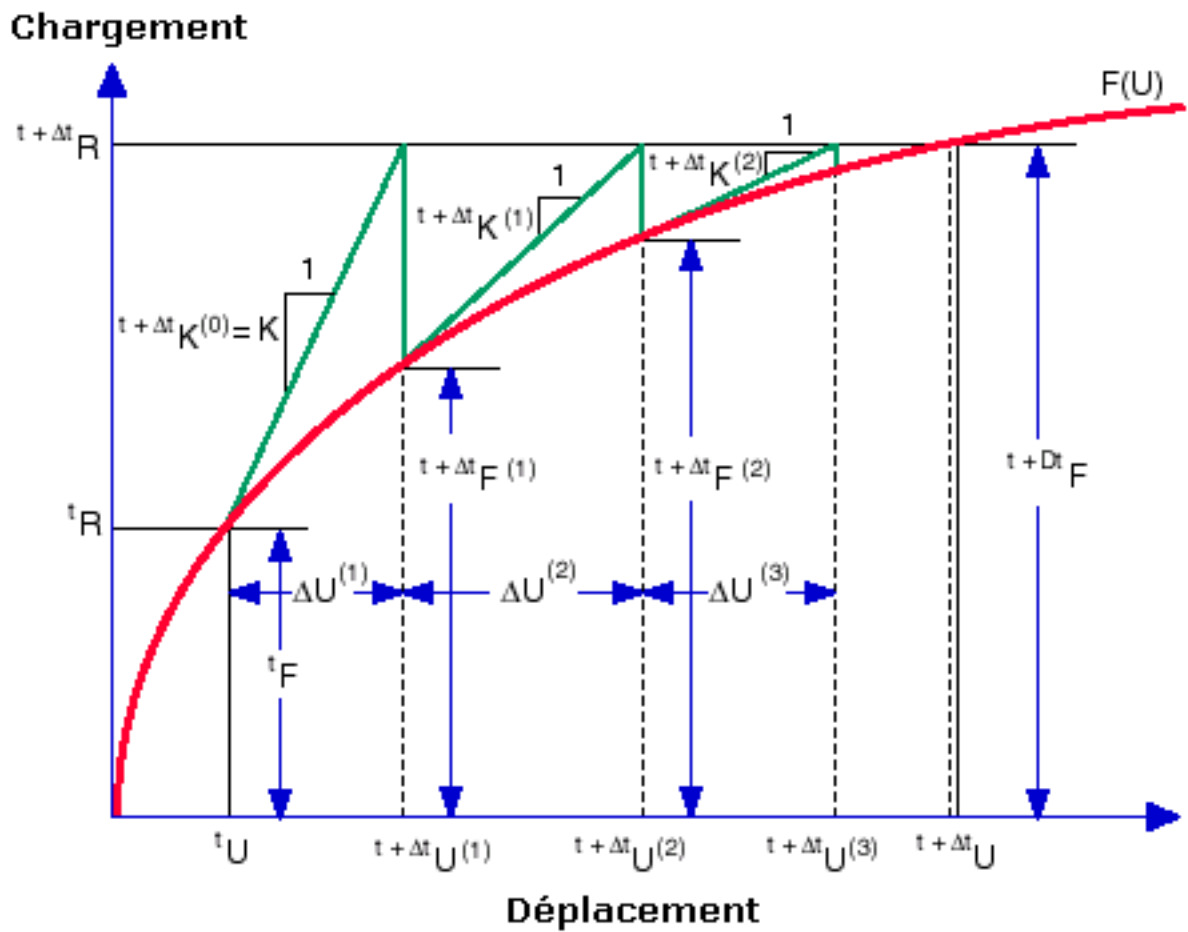
ou

$$\Delta U^{(i)} \cdot \Delta U^{(0)} + \Delta \lambda^{(i)} \Delta \lambda^{(0)} = 0 \quad (1.9)$$

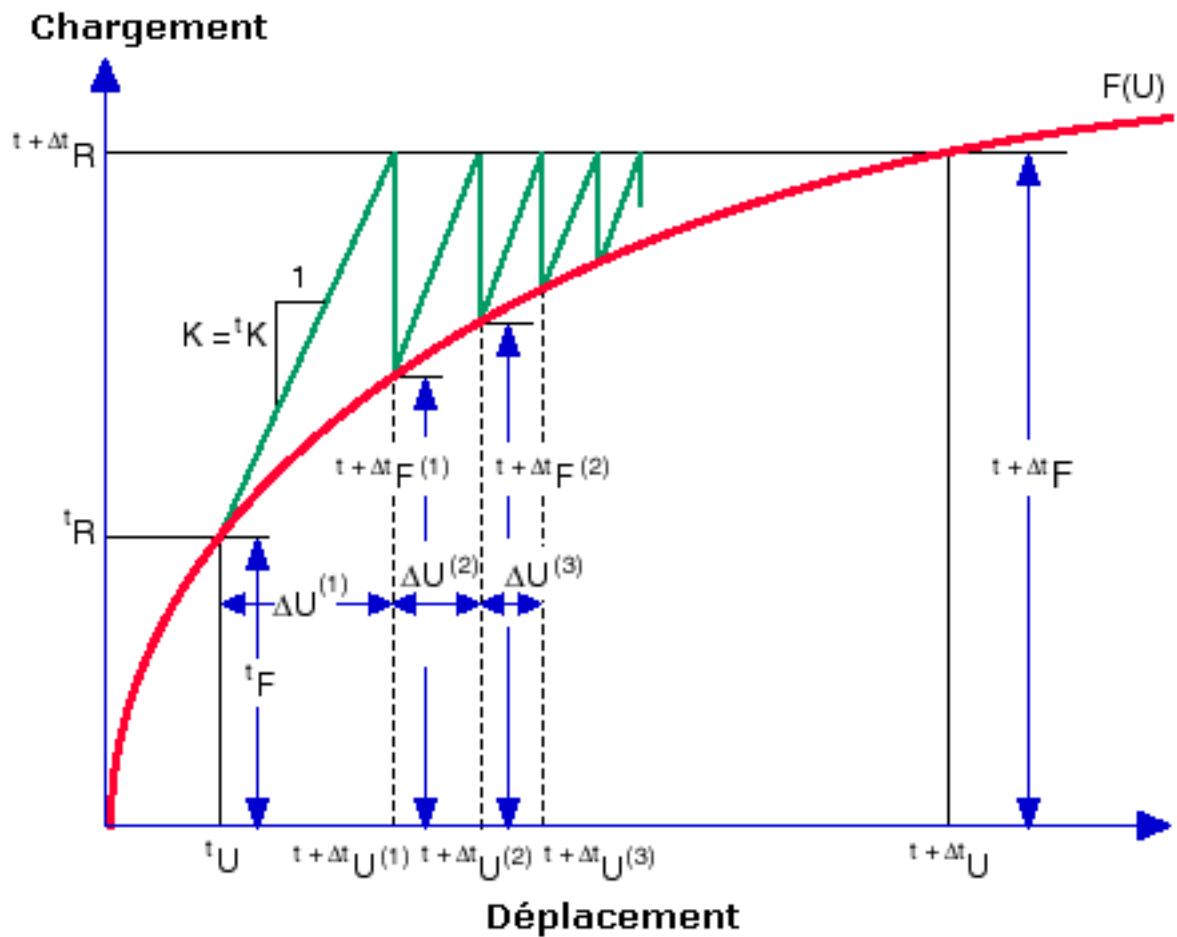
La combinaison de l'algorithme itératif de type Newton-Raphson avec cette technique de pilotage constitue la version modifiée de l'algorithme de Riks [Riks, 1979, Crisfield, 1981]. C'est cet algorithme qui est utilisé dans ABAQUS/Standard comme solveur lorsqu'on effectue une analyse post-critique des structures en adoptant la commande STATIC/RIKS disponible dans le code (figure 1.15).

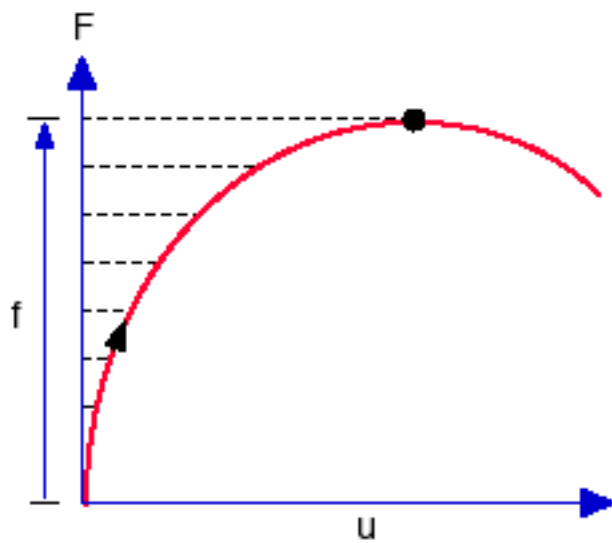
#### ***L'analyse STATIC/RIKS dans ABAQUS***

Soit  $P^N$  ( $N$  étant les degrés de liberté du modèle) le mode de chargement de la structure sur chaque degré de liberté et  $\lambda$  le paramètre de chargement. Soit  $u^N$  les déplacements de chaque degré de liberté à l'instant  $t$  où l'état du chargement est  $\lambda P^N$ . L'espace de solution est mis à l'échelle en adimensionnel pour obtenir la même magnitude sur chaque axe. Dans Abaqus, cette mise à l'échelle est faite en mesurant la valeur absolue maximale  $\bar{u}$  de tous les déplacements à

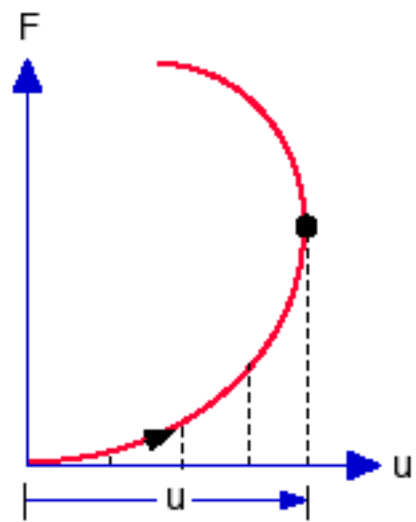


(a)



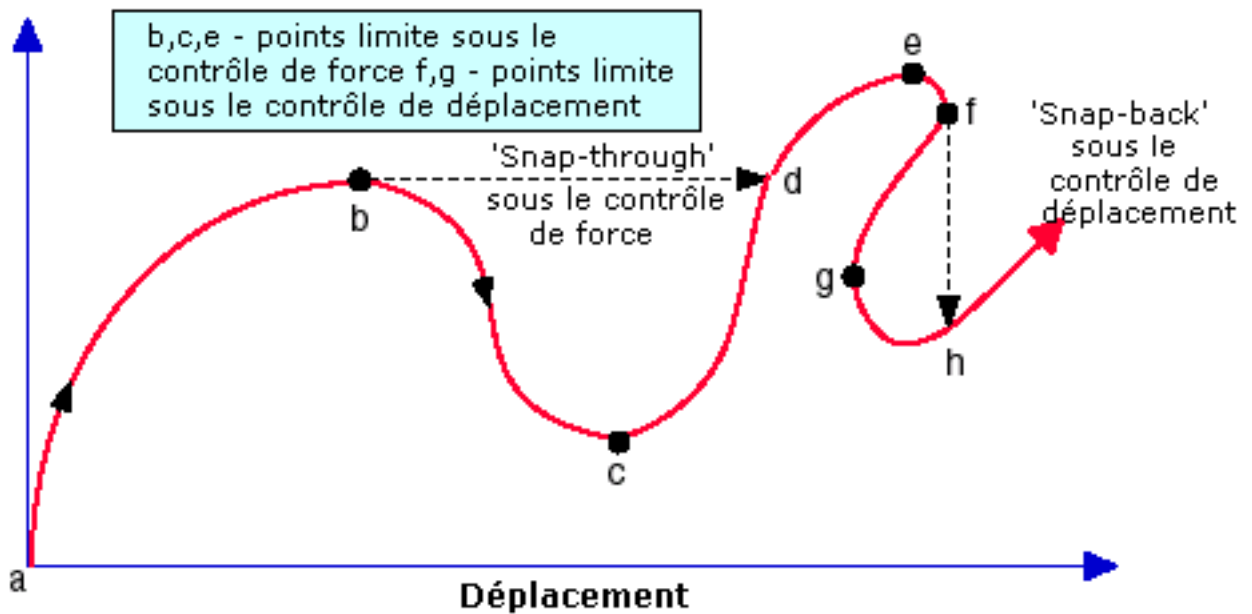


a. Echec du contrôle de force



b. Echec du contrôle de déplacement

Chargement



c. Echec des contrôles de force et de déplacement

FIGURE 1.14 – Modes d'échec du contrôle du pas de prédiction (a) par charge imposée (snap-through) ou (b) déplacement imposé (snap-back) (image help.solidworks.com)

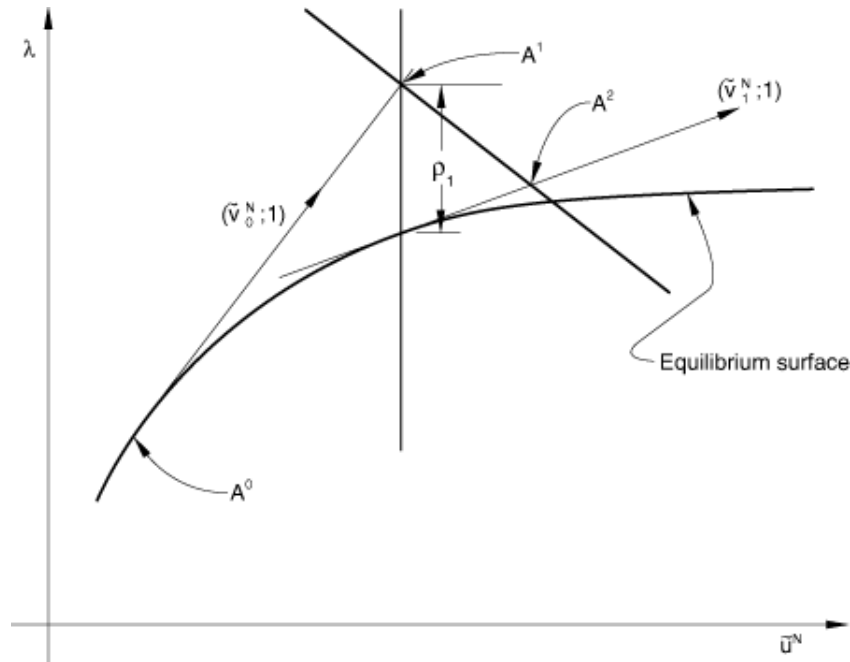


FIGURE 1.15 – Algorithme modifiée de Riks (image documentation Abaqus)

l'itération initiale. On définit aussi le scalaire  $\bar{P} = (P^N P^N)^{1/2}$ . Ainsi, l'espace de solution mis à l'échelle donne :

- Charge =  $\lambda \tilde{P}^N$ ,  $\tilde{P}^N = P^N / P$ ,
- Déplacements =  $\tilde{u}^N = (u^N / \bar{u})$ ;

Le système à résoudre s'écrit :

$$K^{NM} u^M = \lambda P^N \quad (1.10)$$

où  $K^{NM}$  est la matrice de rigidité tangente de la structure. On suppose une solution initiale de la forme  $(\tilde{u}_0^N, \lambda_0)$ . Une nouvelle matrice tangente est formée,  $K_0^{NM}$  et on résout :

$$K_0^{NM} v^M = P^N \quad (1.11)$$

La taille de l'incrément est choisie sur une longueur d'arc  $\Delta l$  de la courbe de réponse de telle sorte que :

$$\Delta \lambda_0 = \frac{\pm \Delta l}{(\tilde{v}_0^N \tilde{v}_0^N + 1)^{1/2}} \quad (1.12)$$

La valeur de la longueur d'arc est initialement choisie par l'utilisateur et ABAQUS/Standard l'ajuste automatique en se basant sur le taux de convergence, et dans les limites d'une longueur d'arc maximale  $\Delta l_{max}$  et minimale  $\Delta l_{min}$  choisies par l'utilisateur. Pour assurer la convergence

de cet algorithme, on peut choisir une valeur maximale de la longueur d'arc  $\Delta l_{max}$  assez petite, mais cela augmente considérablement le nombre d'itérations et par conséquent le temps de calcul. Lorsque la longueur d'arc minimale  $\Delta l_{min}$  choisie est trop élevée, cela peut faire rater des parties de la courbe de réponse présentant des zones de forte courbure. Il convient alors de choisir dans ABAQUS, des limites optimales de la longueur d'arc afin d'assurer une bonne convergence de l'analyse non linéaire et en un temps optimal. Nous verrons plus loin, dans le paragraphe sur la méthode asymptotique numérique, que ce choix est inutile dans la mesure où la MAN assure un pilotage automatique et quasiment optimal du paramètre de cheminement.

### *L'analyse de post-bifurcation dans ABAQUS*

Lors du calcul d'instabilité d'une structure par éléments finis, il convient parfois d'introduire des imperfections dans la structure afin d'initier l'instabilité. Dans ABAQUS, ces imperfections sont introduites par trois méthodes différentes. Une première méthode consiste à appliquer directement une force perturbatrice en un ou plusieurs points de la structure qui peuvent provoquer l'instabilité. La deuxième méthode est une méthode d'imperfection géométrique qui consiste à créer un défaut dans la structure en modifiant sa géométrie d'origine. La troisième méthode est basée sur l'introduction des imperfections géométriques à l'aide des modes propres de la structure. Cette troisième méthode est la plus couramment utilisée [Wong and Pellegrino, 2006]. Il s'agit d'une analyse de post-bifurcation qui est réalisée en deux étapes. Une première étape consiste à faire un calcul des valeurs propres pour déterminer les différents modes d'instabilité de la structure. Ces modes d'instabilité sont ensuite introduits en tant qu'imperfections géométriques dans la structure et l'analyse de post-bifurcation est faite par la méthode de Riks.

#### **1.4.3.3 La Méthode Asymptotique Numérique**

Dans ce paragraphe, nous rappelons les notions fondamentales de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). Le lecteur pourra se référer à [Cochelin et al., 2007] pour plus de détails.

La MAN est une technique de résolution des équations non linéaires. C'est une alternative aux méthodes de continuation classiques de type prédiction-corrrection. L'idée générale de la MAN est de déterminer numériquement une séquence de morceaux de branches de solution (figure 1.16), chaque morceau de branche étant représenté de façon continue par un développe-



ment en série entière tronqué à un ordre élevé.

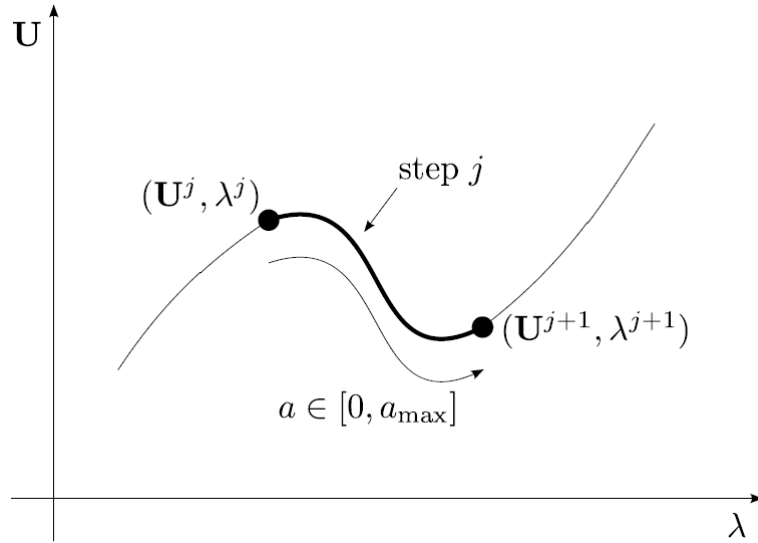


FIGURE 1.16 – Schéma descriptif du principe de la MAN. Une étape  $j$  permet de suivre une branche de la courbe plus ou moins longue en fonction de l'ordre de troncature de la série.

L'algorithme de la MAN repose principalement sur trois techniques de bases : la perturbation, la discrétisation et la continuation.

La technique de perturbation consiste à chercher des solutions du problème non linéaire défini par l'équation (1.1) sous forme de séries entières tronquées à un ordre  $p$ , en fonction d'un paramètre de chemin  $a$  :

$$\begin{cases} U(a) = U^j + \sum_{p=1}^{N_{ordre}} a^p U_p \\ \lambda(a) = \lambda^j + \sum_{p=1}^{N_{ordre}} a^p \lambda_p \end{cases} \quad (1.13)$$

Nous supposons que le point de départ  $(U^j, \lambda^j)$  satisfait l'équation (1.1). Le paramètre de chemin  $a$  est défini comme une pseudo-longueur d'arc qui correspond à la projection de l'incrément de solution sur la direction tangente  $(U_1, \lambda_1)$  :

$$a = (U - U^j) \cdot U_1 + (\lambda - \lambda^j) \lambda_1 \quad (1.14)$$

Après développement de l'équation (1.1), nous obtenons des équations linéaires à chaque ordre  $R_p(U_p, \lambda_p)$  et qui peuvent être résolues de manière récurrente.

La deuxième étape dans l'algorithme de la MAN est la discrétisation. Les équations linéaires obtenues après l'étape de perturbation peuvent être résolues numériquement par une technique de discrétisation spatiale : différences finies, éléments finis, volumes finis, équations intégrales,

méthodes spectrales, méthodes sans maillage... Dans notre étude, nous utilisons la discrétisation par la méthode des éléments finis. Nous retrouvons à chaque ordre un même terme  $\frac{\partial R}{\partial U} \Big|_j$  qui constitue le terme tangent. En mécanique non linéaire, ce terme désigne la matrice de rigidité tangente  $K_t$  du système d'équations non linéaires à résoudre. Ainsi, le problème discrétisé à l'ordre 1 revient à résoudre :

$$[K_t] \{v_1\} = \lambda_1 \{F\} \quad (1.15)$$

où  $\{v_p\}$  est le vecteur des déplacements discrétisé et  $\{F\}$  le vecteur force unitaire. À l'ordre  $p \geq 2$ , nous avons :

$$[K_t] \{v_p\} = \lambda_p \{F\} + \{F_p^{nl}\} \quad (1.16)$$

où  $\{F_p^{nl}\}$  dépend des termes aux ordres antérieurs. L'avantage ici de la MAN par rapport à la méthode de Newton–Raphson est l'inversion d'une seule matrice  $K_t$  à chaque pas de calcul là où la méthode de Newton–Raphson nécessite plusieurs corrections donc plusieurs inversions de matrice pour chaque pas de calcul, ce qui réduit le coût du calcul.

L'étape de continuation de la MAN consiste à appliquer pas à pas les deux premières étapes afin de déterminer complètement la branche de solution. Il s'agit ici de déterminer un nouveau point de départ  $(U^{j+1}, \lambda^{j+1})$  et de ré-appliquer la technique de perturbation et la discrétisation. À chaque pas de calcul, le nouveau point de départ est calculé pour une valeur donnée du paramètre de chemin  $a$  que nous noterons  $a_{max}$  :

$$\begin{cases} U^{j+1} = U(a_{max}) \\ \lambda^{j+1} = \lambda(a_{max}) \end{cases} \quad (1.17)$$

Le choix de  $a_{max}$  est primordial pour obtenir une bonne convergence de la solution. Une valeur trop grande de  $a_{max}$  entraînerait un risque de sortie de la zone de convergence. Si  $a_{max}$  est trop petit, on se limiterait inutilement à de petits pas. La valeur de  $a_{max}$  à chaque pas de calcul peut être déterminée par la différence entre les ordres consécutifs ou à partir du vecteur résidu (voir [Cochelin et al., 2007] pour plus de détails). Nous calculons ici  $a_{max}$  par la différence entre des ordres consécutifs :

$$a_{max} = \left( \epsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (1.18)$$

où  $\epsilon \ll 1$  est un paramètre choisi par l'utilisateur et  $p$  est l'ordre de troncature des séries entières.

Ainsi,  $a_{max}$  est déterminé automatiquement à chaque pas de calcul *a posteriori* et assure ainsi le caractère adaptatif et quasiment optimal du paramètre de cheminement dans la MAN. C'est pourquoi la MAN est une méthode alternative efficace pour la résolution des équations non linéaires. Elle a été appliquée efficacement pour résoudre différents problèmes de la mécanique. Il existe une multitude de références sur l'application de la MAN dans la résolution de problèmes de mécanique du solide en flambage de structures [Lahmam et al., 2002, Boutyour et al., 2004, Nezamabadi, 2009, Bechet and Boudaoud, 2009, Mhada et al., 2012, Nezamabadi et al., 2013, Ed-dinari et al., 2014, Xu et al., 2014a, Xu et al., 2014b, Xu et al., 2015a, Xu et al., 2015b, Attipou et al., 2015] comme en vibrations de structures [Daya and Potier-Ferry, 2001, Boudaoud et al., 2009, Abdoun et al., 2009, Boumediene et al., 2011, Bekhoucha et al., 2015] pour ne citer que celles-là.

Une technique permettant d'accélérer la convergence de la MAN est de remplacer la série tronquée par des fractions rationnelles connues sous le nom d'approximants de Padé [Padé, 1892]. Le lecteur intéressé pourra se référer à [Baker and Graves-Morris, 1996, Brezinski and Redivo-Zaglia, 2015] pour une présentation détaillée des approximants de Padé et à [Cochelin et al., 2007, Lahmam et al., 2002] pour l'utilisation des approximants de Padé avec la MAN. Nous nous limitons dans notre étude qu'à l'utilisation des séries entières tronquées.

## 1.5 Exemple numérique : flambage d'un arc circulaire

Nous présentons ici un exemple numérique afin de montrer les performances ainsi que les limites des méthodes numériques présentées plus haut. Cet exemple est basé sur le flambage d'un arc circulaire profond. Il a été largement étudié dans la littérature en tant que test numérique pour tester la robustesse des procédures de pilotage de calculs non linéaires [DaDeppo and Schmidt, 1975, Simo and Vu-Quoc, 1986, Lahmam et al., 2002].

Le test consiste à appliquer une charge ponctuelle au sommet d'un arc circulaire profond de rayon  $R = 100$  mm, avec un angle d'ouverture  $\alpha = 145^\circ$  (figure 1.17). Il est encastré à l'une

de ses extrémités et simplement appuyé à l'autre. Les caractéristiques géométriques sont telles que  $EA = 100EI$  et  $EI = 10^6$  où  $A$  et  $I$  notent l'aire et l'inertie de la section de l'arc.  $E$  est le module d'élasticité.

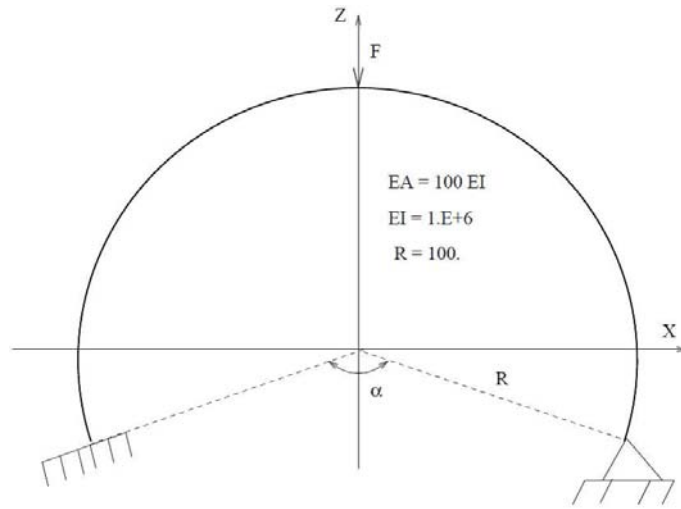


FIGURE 1.17 – Géométrie et conditions aux limites de l'arc circulaire.

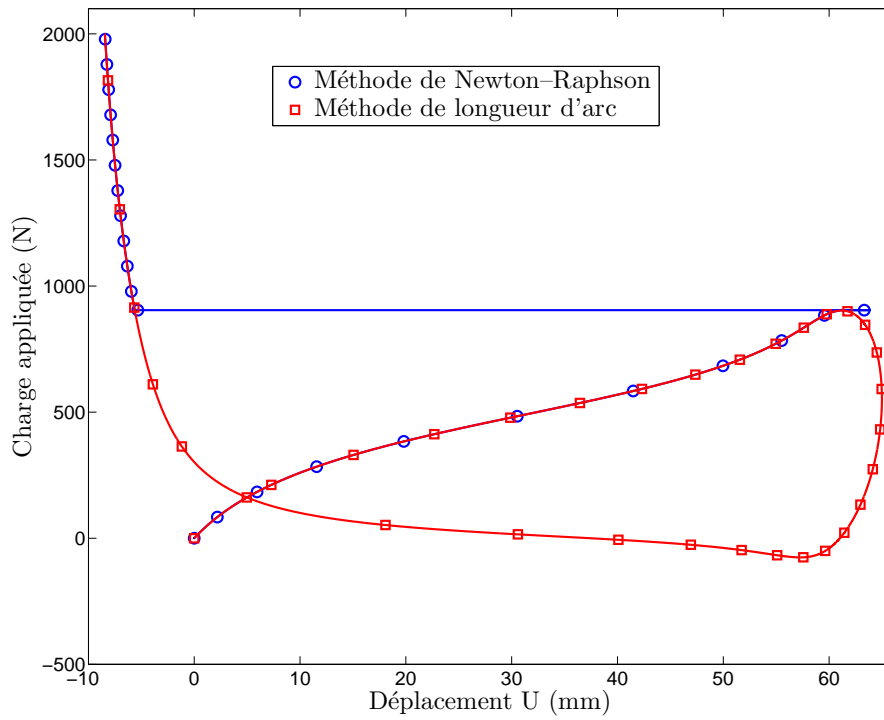
Le but de cet exemple est de déterminer la courbe charge-déplacement du problème non linéaire étudié. Pour la résolution de cet exemple, nous appliquons trois différents types de calculs non linéaires : la méthode de Newton-Raphson, la méthode de la longueur d'arc et la méthode asymptotique numérique. Dans les deux premiers cas, le test a été effectué à l'aide du logiciel ABAQUS. Pour les résultats de la MAN, nous présentons les résultats des travaux de [Lahmam et al., 2002].

Les figures 1.18a et 1.18b montrent les courbes de réponse de la méthode de Newton-Raphson et la méthode de longueur d'arc représentant la charge  $F$  en fonction des déplacements  $U$  et  $V$  du point d'application de la force. La figure 1.19 montre la comparaison entre la méthode de Riks et la MAN. Les figures 1.20 montre les déformées de l'arc circulaire aux différents points de bifurcation mentionnés sur la figure 1.19 (PB3 étant le point d'arrêt de l'application de la force  $F$ ).

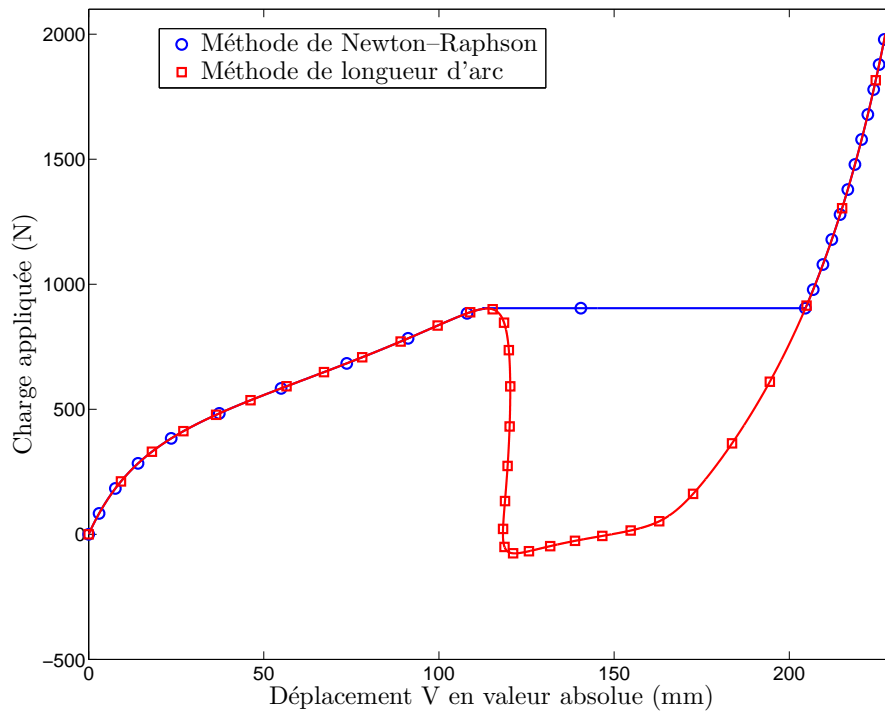
L'analyse conduit dans ABAQUS avec la méthode *Static General* utilise l'algorithme de Newton-Raphson et ne permet pas de détecter la deuxième partie de la courbe à partir de la première bifurcation (PB1 sur la figure 1.19). En effet, à force imposée, l'algorithme de Newton-Raphson permet de suivre uniquement la courbe de réponse avec une force imposée sans cesse croissante. Nous avons alors un saut de la courbe de réponse (en bleu) sur les figures 1.18a et

1.18b correspondant à la partie où la force appliquée diminue. Dans [Simo and Vu-Quoc, 1986] la technique de force imposée est utilisée pour trouver la première partie de la courbe de réponse. Ensuite, une combinaison *déplacement/longueur d'arc* est appliquée pour retrouver la deuxième partie de la courbe ; ce qui correspond à la méthode de RIKS ou méthode de longueur d'arc dans ABAQUS (courbes en rouge sur les figures 1.18a et 1.18b). Le calcul de Simo et Vu-Quoc a nécessité 155 pas de calcul sans oublier le nombre d'itérations requises pour minimiser le résidu d'équilibre à chaque pas.

La stratégie de résolution de Lahmam et al. [Lahmam et al., 2002] utilise l'algorithme de la MAN à l'ordre 15, nécessitant que 8 pas de calcul au lieu des 155 pour la méthode de la longueur d'arc dans [Simo and Vu-Quoc, 1986]. Les 8 points sur la courbe de la figure 1.19 indiquent la fin de chaque pas de continuation de la MAN. On remarque que les longueurs de pas s'adaptent en fonction de la non linéarité de la courbe de réponse. Ainsi les pas sont courts au voisinage des points limites et relativement longs dans le reste de la courbe.



(a)



(b)

FIGURE 1.18 – Courbe de bifurcation de l'arc circulaire. En bleu, on constate le saut de courbe *snap-through*, conséquence d'un calcul à charge imposée. La force maximale appliquée est 2000 N. (a) Déplacement  $U$ . (b) Déplacement  $V$ .

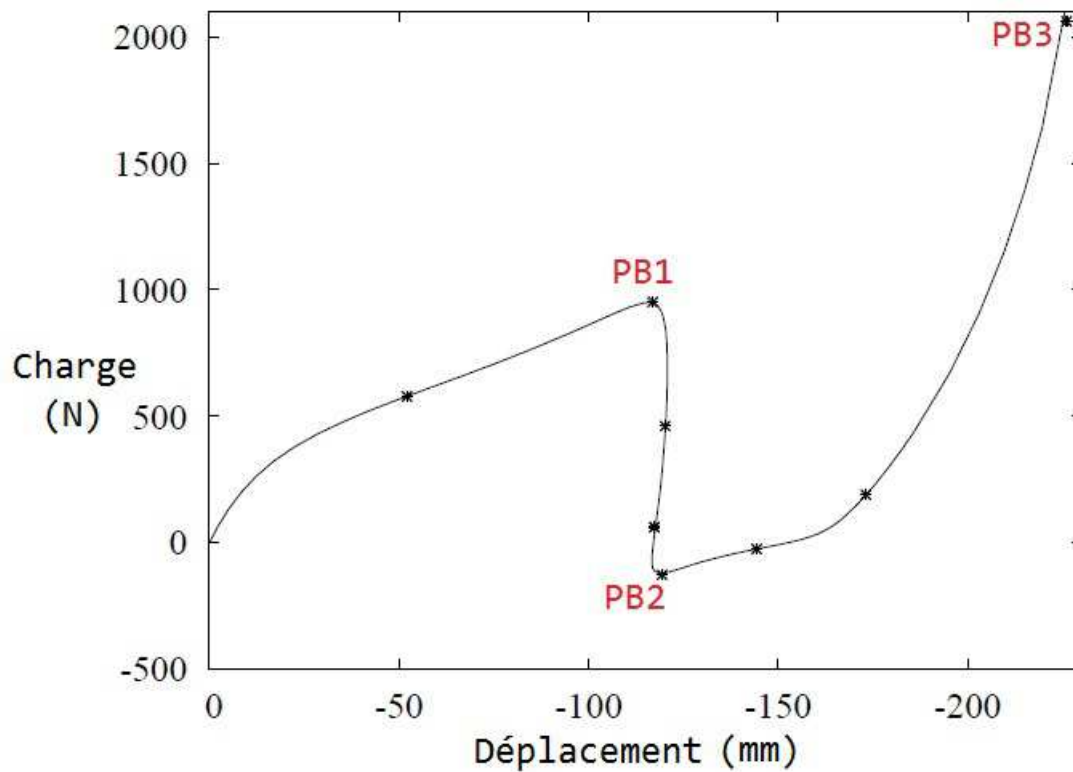
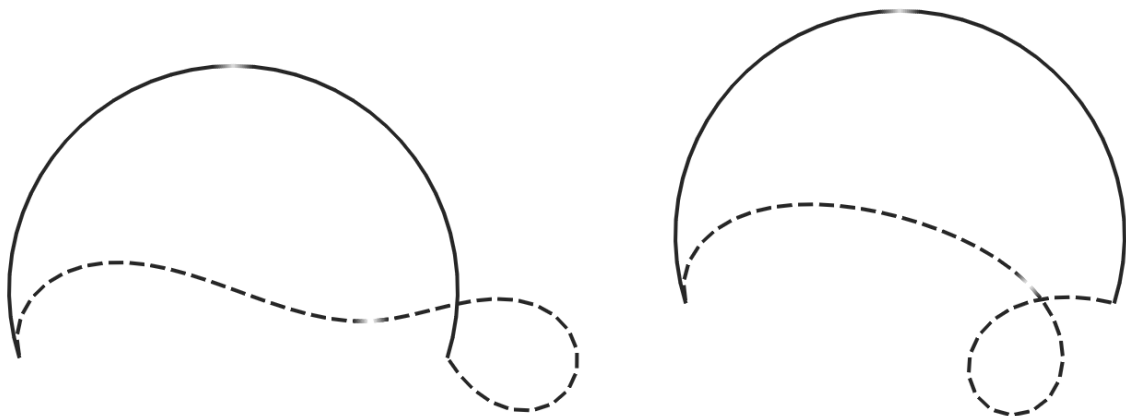
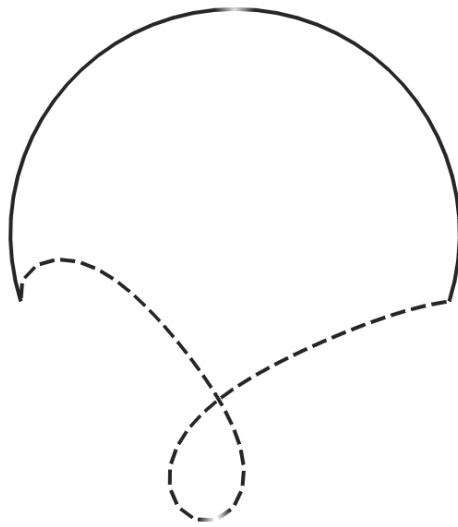


FIGURE 1.19 – Comparaison de la méthode de longueur d'arc et la MAN. Les astérisques sur la courbe représentent la fin de chaque pas de continuation de la MAN. Les points PB1 à PB3 sont les points de bifurcation de la courbe. Au voisinage de PB1 et PB2, les pas de calcul sont plus petits. Le point PB3 est le point d'arrêt du chargement.



(a) PB1 :  $F_1 = 902.9$  N,  $V = 113.8$  mm

(b) PB2 :  $F_2 = -76$  N,  $V = 121.6$  mm



(c) PB3 :  $F_3 = 2001.4$  N,  $V = 227.4$  mm

FIGURE 1.20 – Déformées de l'arc circulaire aux points de bifurcation (PB).



## 1.6 Conclusion

En conclusion de ce chapitre, nous avons passé en revue les différents types de non linéarités qu'on peut rencontrer dans les membranes minces. Nous avons mis l'accent sur les non linéarités géométriques qui constituent principalement le type de non linéarité que nous étudierons dans les chapitres suivants. Nous avons également fait l'état de l'art des différentes méthodes de résolution pour les problèmes d'instabilité dans les membranes minces. Les méthodes itératives basées sur la longueur d'arc et la méthode alternative basée sur la MAN sont les méthodes les plus efficaces pour étudier les instabilités et le comportement post-critique. À travers l'exemple numérique présenté en fin de chapitre sur le flambage d'un arc circulaire, nous avons montré que la MAN est une très bonne alternative aux algorithmes itératifs de type Newton-Raphson ou Riks dans l'analyse des problèmes non linéaires. Comme les pas de la MAN sont automatiques, ils se réduisent en présence des fortes non-linéarités et au voisinage des bifurcations. Cela permet de détecter le point de bifurcation et de suivre après la branche bifurquée. Cependant chacune des méthodes de résolution présente des avantages et des inconvénients. Par exemple, le calcul de la MAN devient lourd lorsqu'on prend un ordre de troncature élevé : on gagne en précision ce qu'on perd en temps de calcul. L'utilisation de l'une ou l'autre des méthodes de résolution est à la discrétion de l'utilisateur, le choix devant être fait en fonction du type de problème non linéaire étudié.

Dans la suite de ce travail, nous étudions le comportement des membranes minces soumises à des contraintes purement mécaniques. Nous introduisons une technique de réduction de modèle basée sur les séries de Fourier à double échelle. Cette technique sera couplée à la MAN pour une résolution par éléments finis.



# Chapitre 2

## Étude du plissement des membranes minces sous chargement mécanique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulation du modèle complet</b>	<b>40</b>
2.2.1	Relations cinématiques	41
2.2.2	Loi de comportement et approche énergétique	43
<b>2.3</b>	<b>Formulation du modèle réduit</b>	<b>47</b>
2.3.1	L'approche en séries de Fourier	48
2.3.2	Un modèle réduit simplifié de membrane	50
<b>2.4</b>	<b>Stratégies de résolution</b>	<b>52</b>
2.4.1	Approche analytique	52
2.4.2	Approche numérique	55
<b>2.5</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>58</b>
2.5.1	Cas d'un chargement biaxial	60
2.5.2	Cas d'un chargement uniaxial	68
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>

---

## 2.1 Introduction

Le plissement mécanique a été largement étudié dans la littérature sous diverses formes. Plusieurs auteurs ont étudié le flambage mécanique [Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959, Brush and Almroth, 1975, Jones, 2006, Timoshenko and Gere, 2009]. L'ouvrage de [Jones, 2006] propose un large éventail d'études sur le flambage des poutres, plaques et coques ainsi que sur deux types de flambage : mécanique et thermique.

Dans ce chapitre, nous étudions le phénomène de plissement des membranes minces soumises à des sollicitations mécaniques. Nous développons une méthode de résolution semi-analytique basée sur la technique des séries de Fourier à coefficients lentement variables. Cette technique a été introduite par Damil et Potier-Ferry et appliquée au cas de poutre sur fondation de type Winkler [Damil and Potier-Ferry, 2006, Damil and Potier-Ferry, 2010]. Plus tard, d'autres travaux ont permis d'approfondir la technique en l'appliquant aux poutres sandwich et aux structures 2D en membrane [Liu et al., 2012, Damil et al., 2013, Damil et al., 2014]. La technique des séries de Fourier, pour le cas des membranes, consiste à construire, dans un premier temps, un modèle complet de membrane à partir des équations classiques de flambage de plaque. Ensuite, la technique des séries de Fourier est appliquée aux équations du modèle complet pour obtenir un modèle réduit de la membrane. La résolution numérique des deux modèles de membranes est effectuée par la méthode des éléments finis. Le modèle complet est modélisé à l'aide du logiciel ABAQUS qui utilise la méthode de la longueur d'arc pour la résolution du système d'équations non linéaires. Le modèle réduit de la membrane est résolu numériquement à l'aide de la méthode asymptotique numérique et son implémentation est faite dans le code de calcul MATLAB. Les exemples numériques présentés en fin de chapitre permettent de valider le modèle réduit par rapport au modèle complet.

## 2.2 Formulation du modèle complet

Dans cette section, nous rappelons les équations fondamentales du flambage des plaques. Soit une structure ouverte 3D déformable, occupant un domaine  $\Omega$  avec un bord extérieur  $\partial\Omega$  séparé en deux parties disjointes et complémentaires  $\partial\Omega_U$  et  $\partial\Omega_F$  (figure 2.1). Sur ces deux parties, les déplacements et les efforts sont imposés, respectivement. Afin d'établir les équations d'équilibre

de la structure, nous écrivons tout d'abord les relations cinématiques, ensuite nous introduisons la loi de comportement du matériau et enfin nous déduisons les équations d'équilibre de la structure à partir de l'approche énergétique.

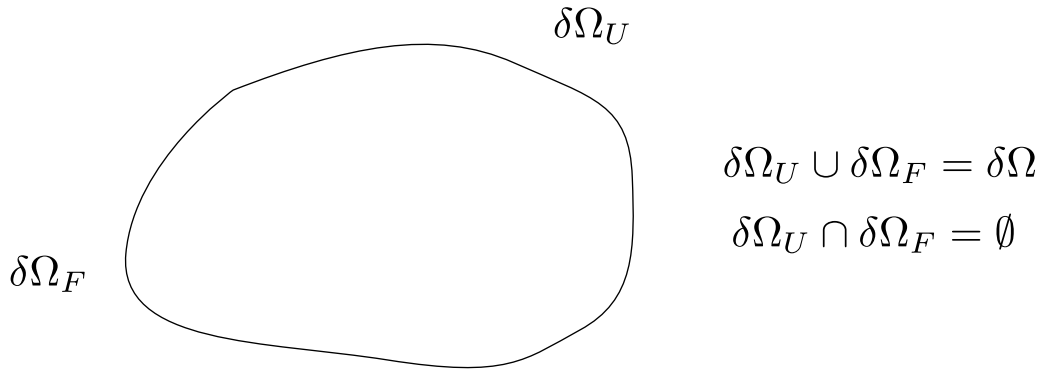


FIGURE 2.1 – Structure déformable occupant le domaine  $\Omega$ . Les conditions aux limites sont appliquées en déplacement imposé sur le bord  $\partial\Omega_U$  et en force imposée sur le bord  $\partial\Omega_F$ .

### 2.2.1 Relations cinématiques

Dans la suite de notre étude, nous supposons que notre structure 3D est une membrane mince. Par définition, la membrane mince est caractérisée par une très faible épaisseur par rapport aux autres dimensions. De ce fait, nous utilisons la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love pour écrire les relations cinématiques.

Soit  $u$ ,  $v$  et  $w$  les déplacements d'un point quelconque de la membrane dans le domaine  $\Omega$  suivant les principaux axes de coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Dans le cadre de la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love, le champ des déplacements de la membrane mince s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = \bar{u}(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) = \bar{v}(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) = \bar{w}(x, y) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1), les variables  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  représentent les déplacements du plan moyen de la membrane et les angles de rotation de la membrane sont définis par  $\partial w / \partial x$  et  $\partial w / \partial y$  (hypothèse des petites rotations due à la faible épaisseur). En prenant en compte les grandes

déformations, et selon la théorie de Föppl-von Kàrmàn, le champ des déformations totales  $\gamma$  s'écrit :

$$\{\gamma\} = \{\bar{\gamma}\} + z \{\kappa\} \quad (2.2)$$

où :

$$\{\bar{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

et

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$(\bar{\gamma}_x, \bar{\gamma}_y, \bar{\gamma}_{xy})$  et  $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$  sont les composantes du champ des déformations en membrane et de la courbure du plan moyen de la membrane, respectivement. Le champ des déformations  $\{\bar{\gamma}\}$  peut être décomposé de la façon suivante :

$$\{\bar{\gamma}\} = \{\varepsilon(\mathbf{u})\} + \{\gamma^{nl}(w)\} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{u} = (\bar{u}, \bar{v})$ .  $\{\varepsilon(\mathbf{u})\}$  est la partie linéaire du champ des déformations et  $\{\gamma^{nl}(w)\}$  la partie non linéaire du champ des déformations :

$$\{\varepsilon(\mathbf{u})\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\{\gamma^{nl}(w)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Par abus de notation et compte tenu du fait qu'on est en présence d'une membrane mince, nous utiliserons, dans la suite de notre travail, la notation  $(u, v, w)$  au lieu de  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  pour désigner les déplacements du plan moyen de la membrane.

### 2.2.2 Loi de comportement et approche énergétique

La loi de comportement pour un matériau isotrope élastique décrit une relation entre le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\{\gamma\}$  et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\{S\}$  (dont les composantes sont :  $S_x, S_y$  et  $S_{xy}$ ) dans le cas des grandes déformations. Cette relation, encore appelée *loi de Hooke*, s'écrit :

$$\{S\} = [L] \{\gamma\} \quad (2.8)$$

avec  $[L]$  la matrice de raideur du matériau en contraintes planes :

$$[L] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

L'approche énergétique menée dans ce paragraphe permet de déterminer les équations d'équilibre de la membrane. Nous désignons par  $\mathcal{E}$  l'énergie de déformation ou encore le travail des efforts internes et par  $\mathcal{W}$  le travail des efforts externes :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_0} \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \langle \gamma \rangle \{S\} dz \right\} dx dy \quad (2.10)$$

$$\mathcal{W} = \iint_{\Omega_0} (\mathbf{u}\mathbf{F}_u + wF_w) dx dy \quad (2.11)$$

où  $t$  est l'épaisseur de la membrane et  $\Omega_0$  représente la surface de la membrane.  $\mathbf{F}_u$  est la force appliquée dans le plan  $(x, y)$  et  $F_w$  est l'effort exercé sur la membrane suivant l'axe  $z$ . En introduisant l'équation (2.2) dans l'équation (2.10), nous obtenons :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_0} \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \{ \langle \bar{\gamma} \rangle \{S\} + z \langle \kappa \rangle \{S\} \} dz \right\} dx dy \quad (2.12)$$

Nous définissons le tenseur des efforts normaux  $\{N\}$  et le tenseur des moments résultants  $\{M\}$  :

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{S\} dz \quad (2.13a)$$

$$\{M\} = \int_{-t/2}^{t/2} z \{S\} dz \quad (2.13b)$$

Les efforts  $\{N\}$  et moments  $\{M\}$  sont limités aux composantes  $(N_x, N_y, N_{xy})$  et  $(M_x, M_y, M_{xy})$ , respectivement. Les composantes suivant l'axe  $z$  sont négligées à cause de l'épaisseur de la membrane qui est très petite devant les autres dimensions et de la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love. En remplaçant les équations (2.13a) et (2.13b) dans l'équation (2.12), nous pouvons écrire :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_0} (\langle \bar{\gamma} \rangle \{N\} + \langle \kappa \rangle \{M\}) dx dy \quad (2.14)$$

Nous appliquons à présent le Principe des Travaux Virtuels (PTV) qui stipule que pour un système quasi-statique en équilibre, la somme des travaux virtuels des efforts internes est égale à la somme des travaux virtuels des efforts externes :

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{W} \quad (2.15)$$

où  $\delta$  représente la variation virtuelle de la fonction associée. En prenant en compte l'équation (2.5), la variation virtuelle des travaux des efforts internes nous donne :

$$\delta \mathcal{E} = \iint_{\Omega_0} (\langle \delta \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle \{N\} + \langle \delta \gamma^{nl}(w) \rangle \{N\} + \langle \delta \kappa \rangle \{M\}) dx dy \quad (2.16)$$



Nous posons à présent :

$$\{\varepsilon(\mathbf{u})\} = \frac{\{\nabla \mathbf{u}\} + {}^t\{\nabla \mathbf{u}\}}{2} \quad (2.17a)$$

$$2\{\gamma^{nl}(w)\} = {}^t\nabla w \otimes \nabla w \quad (2.17b)$$

$$\{\kappa\} = -\{\nabla^2 w\} \quad (2.17c)$$

avec  $\nabla$ , l'opérateur gradient. En considérant les équations (2.17a), (2.17b) et (2.17c), l'équation (2.16) peut se réécrire :

$$\delta\mathcal{E} = \iint_{\Omega_0} (\langle \delta \nabla \mathbf{u} \rangle \{N\} + \langle \delta \nabla w \rangle \{N\} \{\nabla w\} - \langle \delta \nabla^2 w \rangle \{M\}) dx dy \quad (2.18)$$

L'intégration par parties de l'équation (2.18) nous donne :

$$\delta\mathcal{E} = \iint_{\Omega_0} (-\langle \delta \mathbf{u} \rangle \{\nabla N\} - \langle \delta w \rangle \{(\nabla(N\nabla w) + \nabla^2 M)\}) dx dy + \text{termes sur le bord} \quad (2.19)$$

Par définition nous avons :

$$\{\nabla N\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\{\nabla(N\nabla w)\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} N_x \frac{\partial w}{\partial x} & N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \\ N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} & N_y \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\{\nabla^2 M\} = \{\nabla(\nabla M)\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} & \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La variation virtuelle des travaux des efforts extérieurs s'écrit :

$$\delta\mathcal{W} = \iint_{\Omega_0} (\delta \mathbf{u} \mathbf{F}_u + \delta w F_w) dx dy \quad (2.23)$$

Ainsi, l'équation (2.15) devient :

$$\iint_{\Omega_0} \{ -\langle \delta \mathbf{u} \rangle \{ \nabla N \} - \langle \delta w \rangle \{ (\nabla (N \nabla w) + \nabla^2 M) \} \} dx dy = \iint_{\Omega_0} (\delta \mathbf{u} \mathbf{F}_u + \delta w F_w) dx dy \quad (2.24)$$

En procédant au découplage de l'équation (2.24), nous obtenons le système d'équations d'équilibre suivant :

$$(\delta \mathbf{u}) : \{ \nabla N \} + \{ \mathbf{F}_u \} = 0 \quad (2.25a)$$

$$(\delta w) : -\nabla^2 M - \nabla \cdot (N \nabla w) + F_w = 0 \quad (2.25b)$$

Par définition, pour le cas d'une membrane symétrique par rapport au plan moyen, les équations (2.13a) et (2.13b) peuvent se réécrire :

$$\{ N \} = [\mathbf{L}^m] \{ \bar{\gamma} \} \quad (2.26a)$$

$$\{ M \} = -[\mathbf{D}] \{ \nabla^2 w \} \quad (2.26b)$$

avec  $[\mathbf{L}^m]$  la matrice d'élasticité en membrane de la structure et  $[\mathbf{D}]$  la matrice de flexion :

$$[\mathbf{L}^m] = \int_{-t/2}^{t/2} [L] dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[\mathbf{D}] = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 [L] dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

En remplaçant (2.26b) dans le système (2.25) et en considérant les équations (2.25a) et (2.26a), nous pouvons déduire les équations de Föppl-von Kàrmàn pour une membrane élastique isotrope :

$$\{ \nabla N \} + \{ \mathbf{F}_u \} = 0 \quad (2.29a)$$

$$\{N\} = [\mathbf{L}^m] \{\bar{\gamma}\} \quad (2.29b)$$

$$\{\bar{\gamma}\} = \{\varepsilon(\mathbf{u})\} + \{\gamma^{nl}(w)\} \quad (2.29c)$$

$$\mathbf{D}\Delta^2 w - \nabla \cdot (N \nabla w) + F_w = 0 \quad (2.29d)$$

avec  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  et  $\Delta^2 = \nabla^4$ .

Les équations de Föppl-von Kàrmàn ainsi définies constituent les équations d'équilibre du modèle complet de la membrane pris comme modèle de référence. Le système non linéaire précédent est d'abord discrétisé par éléments finis puis résolu par les méthodes itératives classiques ou alternatives présentées dans le chapitre 1. En présence des parois très minces et de la géométrie élancée des membranes, les instabilités par plissement nécessitent souvent des maillages très fins induisant des systèmes avec des nombres de degrés de liberté importants. La simulation numérique de ce modèle complet de la membrane est faite dans le logiciel commercial ABAQUS. Nous allons à présent construire le modèle réduit de la membrane à partir des équations du modèle complet en introduisant la technique des séries de Fourier double échelle.

## 2.3 Formulation du modèle réduit

Dans cette section, nous développons les équations d'un modèle réduit permettant de décrire le plissement de la membrane. Le phénomène de plissement étudié dans ce document conduit à une réponse décrite comme étant la somme d'un champ moyen lentement variable et d'une fluctuation qui est presque périodique dans une direction donnée. Il faut au moins deux champs macroscopiques pour décrire le mode presque périodique du plissement des membranes (figure 2.2). Nous définissons ici par *champ macroscopique*, le champ des déplacements du modèle réduit de la membrane. De la même manière, nous utiliserons le terme *microscopique* pour désigner les équations d'équilibre du modèle complet de la membrane (équations (2.29)).

La modélisation du phénomène de plissement peut se faire par la méthode d'analyse de bifurcation selon la théorie de Landau-Ginzburg [Wesfreid and Zaleski, 1984]. Une autre

approche développée par Damil et Potier-Ferry en 2006 [Damil and Potier-Ferry, 2006] permet également de modéliser ce phénomène en représentant les champs périodiques par des séries de Fourier avec des coefficients lentement variables. Cette technique est similaire à une théorie d'homogénéisation où une analyse double échelle permet de déduire des équations macroscopiques à partir d'équations classiques microscopiques [Kouznetsova et al., 2004, Attipou et al., 2013]. Cette approche a été appliquée au cas des structures 1-D telles que les poutres [Damil and Potier-Ferry, 2010, Liu et al., 2012, Yu et al., 2013] et aux structures 2-D telles que les membranes minces [Damil et al., 2013, Nakhoul, 2013, Damil et al., 2014].

Nous établissons ici les équations du modèle réduit de la membrane mince en appliquant la technique de l'approche des séries de Fourier aux équations du modèle complet défini par le système (2.29).

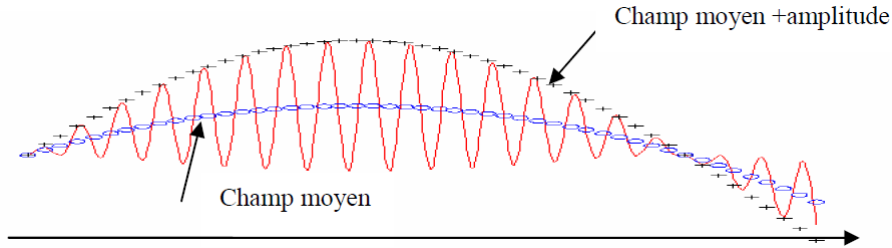


FIGURE 2.2 – Deux champs macroscopiques pour décrire le phénomène de plissement dans une direction donnée.

### 2.3.1 L'approche en séries de Fourier

Comme décrit précédemment, la réponse du système peut être modélisée par la somme d'un champ lentement variable et d'une fluctuation périodique. Ainsi, les inconnues  $\mathbf{U} = (u, v, w, \bar{\gamma}, N)$  du système d'équations (2.29) du modèle complet de la membrane sont réécrites sous forme de séries de Fourier dont les coefficients varient lentement par rapport à l'harmonique :

$$\mathbf{U}(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_j(x, y) \exp(jiqx) \quad (2.30)$$

où  $q$  est le nombre d'onde,  $i$  est l'unité imaginaire qui vérifie  $i^2 = -1$  et  $j$  représente l'ordre des harmoniques.  $\mathbf{U}_j$  est l'amplitude réelle des oscillations. Dans cette écriture de la série de Fourier, nous supposons que le plissement de la membrane s'observe dans la direction  $x$ ,

d'où l'utilisation de la variable spatiale  $x$  sous la fonction harmonique. Le but ici est de développer un modèle réduit de la membrane dont les inconnues sont les coefficients de Fourier  $\mathbf{U}_j(x, y)$ . Ainsi, le modèle réduit de la membrane est déduit du modèle complet (2.29) par simple identification des coefficients de Fourier dans chaque équation. Avant de développer les équations du modèle réduit, nous rappelons quelques règles de calcul pour la manipulation des séries de Fourier ainsi définies. Ces règles de calcul ont été introduites dans [Damil and Potier-Ferry, 2006, Damil and Potier-Ferry, 2010] pour le cas 1-D. Cependant, elles peuvent être généralisées pour le cas 2-D [Damil et al., 2013, Damil et al., 2014]. Ainsi, le  $j^{\text{ième}}$  coefficient de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  des séries de Fourier  $\mathbf{U}(x, y)$  s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^n \mathbf{U}}{\partial x^n}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial x} + jq\right)^n \mathbf{U}_j \quad (2.31a)$$

$$\left(\frac{\partial^n \mathbf{U}}{\partial y^n}\right)_j = \frac{\partial^n \mathbf{U}_j}{\partial y^n} \quad (2.31b)$$

$$\{(\nabla w)_j\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w_j}{\partial x} + jqw_j \\ \frac{\partial w_j}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.31c)$$

Soit  $\mathbf{V}(x, y)$  une somme de séries de Fourier ayant les mêmes propriétés que  $\mathbf{U}(x, y)$ . On a :

$$(\mathbf{UV})_j = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_{j_1} \mathbf{V}_{j-j_1} \quad (2.32)$$

En appliquant les règles (2.31) et (2.32) aux équations (2.6) et (2.7), nous obtenons la version macroscopique du tenseur des déformations membranaires :

$$\{\varepsilon_j(\mathbf{u}_j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x} + jq\right) u_j \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial}{\partial x} + jq\right) v_j + \frac{\partial u_j}{\partial y} \right] \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

$$\{\gamma_j^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j_1 i q \right) w_{j_1} \left( \frac{\partial}{\partial x} + (j - j_1) i q \right) w_{j-j_1} \\ \\ \frac{1}{2} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial w_{j_1}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w_{j-j_1}}{\partial y} \right) \\ \\ \frac{1}{2} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j_1 i q \right) w_{j_1} \frac{\partial w_{j-j_1}}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

De façon analogue, nous déduisons la version macroscopique de l'équation de flexion (2.29d) :

$$\mathbf{D} (\Delta^2 w)_j - \nabla_j \left( \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} N_{j_1} (\nabla w)_{j-j_1} \right) + F_{w_j} = 0 \quad (2.35)$$

### 2.3.2 Un modèle réduit simplifié de membrane

Les coefficients de l'harmonique 0 ( $j = 0$ ) sont réels alors que les coefficients des autres harmoniques ( $j \neq 0$ ) sont complexes, ce qui double le nombre de degrés de liberté dans un modèle discrétisé, pour la résolution par la méthode des éléments finis. Par ailleurs, les coefficients des séries de Fourier sont supposés constants sur une période  $[x, x + 2\pi/q]$ . Afin de simplifier notre modèle réduit de membrane, nous nous limitons à trois harmoniques ( $j = -1, 0, 1$ ). On obtient ainsi une enveloppe réelle et une enveloppe complexe. Rappelons qu'il faut au moins deux champs macroscopiques pour décrire le plissement de la membrane. L'harmonique 0 permet de retrouver le champ moyen  $\mathbf{U}_0(x, y)$  de l'enveloppe et les harmoniques  $\mathbf{U}_{-1}(x, y)$  et  $\mathbf{U}_1(x, y)$  représentent l'amplitude des oscillations (figure 2.2).

Afin de rester dans le domaine de validité de la théorie de Ginzburg-Landau, nous allons procéder à quelques approximations [Damil and Potier-Ferry, 2010] :

- Les amplitudes sont supposées lentement variables et leurs variations sont négligées : ainsi, seule l'enveloppe  $w_1$  est prise en compte et toutes ses dérivées d'ordre quatre sont négligées ;
- Les termes complexes sont négligés (donc tous les termes d'ordre trois) ;
- Les déplacements en membrane  $(u, v)$  et les efforts dans le plan  $N$  sont développés uniquement à l'ordre 0 car les efforts normaux sont supposés non-oscillants.

Pour simplifier les notations, nous écrivons  $(u, v, w, \bar{\gamma}, N) \stackrel{\text{def}}{=} (u_0, v_0, w_1, \bar{\gamma}_0, N_0)$ . En appliquant ces hypothèses simplificatrices aux équations (2.33), (2.34) et (2.35), nous obtenons :

$$\{\bar{\gamma}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q^2 w^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

$$-6Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (Dq^4 + N_x q^2) w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_w = 0 \quad (2.37)$$

avec  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ .

L'équation macroscopique (2.36) peut être séparée en deux parties : une partie linéaire et symétrique  $\{\gamma^l(\mathbf{u})\}$  identique à la déformation en membrane pure  $\{\varepsilon(\mathbf{u})\}$  et une partie non linéaire  $\{\gamma^{wr}(w)\}$  qui donne la déformation de la membrane due au plissement :

$$\{\gamma^l(\mathbf{u})\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

$$\{\gamma^{wr}(w)\} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q^2 w^2 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.39)$$

La différence avec la théorie classique de Föppl-von Kàrmàn est le terme quadratique  $q^2 w^2$  dans la composante du tenseur des déformations macroscopiques suivant la direction des plis.

Finalement, les équations du modèle réduit de la membrane se résume comme suit :

$$\{\nabla N\} + \{F_u\} = 0 \quad (2.40a)$$

$$\{N\} = [\mathbf{L}^m] (\{\gamma^l(\mathbf{u})\} + \{\gamma^{wr}(w)\}) \quad (2.40b)$$

$$-6Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (Dq^4 + N_x q^2) w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_w = 0 \quad (2.40c)$$

Le système d'équations (2.40) représente un modèle non linéaire qui assure le couplage entre les équations non linéaires de membrane et l'équation de bifurcation (2.40c) satisfaite par l'enveloppe du mode de plissement. Ce modèle macroscopique simplifié permet de coupler les instabilités locales et globales lors du phénomène de plissement dans les membranes minces.

## 2.4 Stratégies de résolution

### 2.4.1 Approche analytique

La résolution numérique de la linéarisation de l'équation d'équilibre macroscopique (2.40c) autour de l'état fondamental passe d'abord par la détermination du nombre d'onde  $q$ . En effet, la définition des séries de Fourier (2.30) impose de connaître *a priori* la valeur de  $q$ . La résolution analytique de l'équation (2.40c) nous permet de déterminer  $q$ . Cette résolution analytique se fait avec la prise en compte de conditions aux limites spécifiques et de types de chargement appropriés. Nous supposons que la membrane n'est soumise qu'à l'action des efforts internes, ce qui implique  $F_u = F_w = 0$  et  $N$  est une constante. L'équation (2.40c) devient alors :

$$-6Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (Dq^4 + N_x q^2) w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.41)$$

Nous étudions ici le cas d'un chargement biaxial de la membrane. Ce chargement consiste à appliquer une traction uniforme constante sur la membrane dans la direction  $y$  suivi d'une compression dans la direction  $x$  (figure 2.3b). Avant d'atteindre le point de bifurcation, la



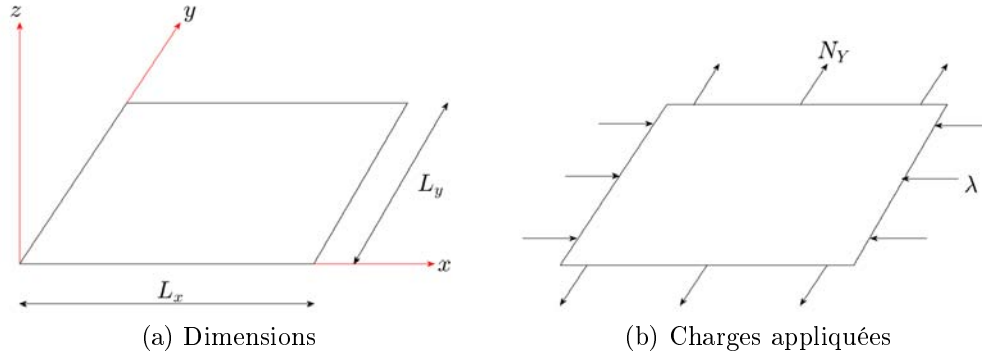


FIGURE 2.3 – Dimensions et chargement de la membrane. La membrane est soumise à une traction dans la direction  $y$  suivie d'une compression dans la direction  $x$ , la traction étant maintenue.

réponse de la membrane est linéaire et l'effort normal est sous la forme générale :

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{N}^A(x, y) + \lambda \mathbf{N}^B(x, y) \quad (2.42)$$

où  $\mathbf{N}^A = N_Y \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$  est la traction constante dans la direction  $y$ , avec  $N_Y > 0$ , l'amplitude de la force, et  $\mathbf{N}^B = -\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x$  est la charge dans la direction  $x$ .  $\lambda$  est un paramètre scalaire tel que :

$$\begin{cases} \lambda < 0 \rightarrow \text{effort de traction} \\ \lambda > 0 \rightarrow \text{effort de compression} \end{cases} \quad (2.43)$$

En théorie, le plissement est obtenu lorsque la membrane est soumise à un effort interne de compression. Donc on prendra dans la suite de l'analyse la seconde condition de (2.43) :  $\lambda > 0$ .

En remplaçant l'équation (2.42) dans (2.41), on obtient :

$$(\lambda - 6Dq^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (N_Y + 2Dq^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (Dq^4 - \lambda q^2) w = 0 \quad (2.44)$$

L'équation (2.44) est une équation de type *Helmoltz* (tant que  $0 < \lambda < 6Dq^2$ ) incluant des dérivées par rapport à  $x$  et  $y$ . Ainsi, on peut chercher des solutions générales harmoniques de (2.44) sous la forme :

$$w(x, y) = \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \quad (2.45)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des paramètres réels qui sont déterminés à partir des conditions aux limites choisies. Soulignons une différence importante pour la prise en compte des conditions aux limites.

Cette analyse a été discuté dans divers travaux antérieurs [Liu et al., 2012, Mhada et al., 2012] et elle est reprise en annexe 3.6. Prenons l'exemple d'un encastrement qui se traduit classiquement par :

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.46)$$

sur le bord dans un modèle coque (modèle complet). Pour le modèle réduit, l'enveloppe  $w_1(x, y) = w(x, y)$  ne satisfait que :

$$w_1 = w = 0 \quad (2.47)$$

sur le bord. Ainsi, nous prenons comme conditions aux limites sur le modèle réduit :

$$w(x, 0) = w(x, L_y) = w(0, y) = w(L_x, y) = 0 \quad (2.48)$$

où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions de la membrane (figure 2.3a). La solution générale de (2.44) devient :

$$w(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_y}y\right) \quad (2.49)$$

En remplaçant l'équation (2.49) dans (2.44), on a :

$$\lambda = \frac{6Dq^2 \left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 + (N_Y + 2Dq^2) \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 + Dq^4}{q^2 + \left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2} \quad (2.50)$$

On obtient le nombre d'onde critique  $q^{wr}$  par minimisation de la fonction  $q \rightarrow \lambda(q)$  en annulant sa dérivée par rapport à  $q$  :

$$(q^{wr})^2 = \sqrt{\frac{N_Y}{DL_y^2} - \frac{\pi^2}{L_x^2} \left(\frac{5}{L_x^2} + \frac{2}{L_y^2}\right)} - \left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 \quad (2.51)$$

La charge critique  $\lambda^{cr}$  est déduite en remplaçant l'équation (2.51) dans l'équation (2.50) :

$$\lambda^{cr} = \lambda(q^{wr}) \quad (2.52)$$

L'équation (2.50) peut être simplifiée en prenant en compte quelques hypothèses simplificatrices :

- La longueur d'onde est très petite devant la longueur de la membrane :  $\frac{1}{L_x} \ll q$
- L'effort de compression est très petit devant la traction uniforme :  $2Dq^2 \approx \lambda \ll N_Y$

Avec ces hypothèses, la charge devient alors :

$$\lambda(q) = \frac{N_Y \pi^2}{q^2 L_y^2} + Dq^2 \quad (2.53)$$

Le nombre d'onde critique équivalent et la charge critique équivalente donnent [Cerda et al., 2002] :

$$q_s^{wr} = \sqrt[4]{\frac{N_Y \pi^2}{D L_y^2}} \quad (2.54a)$$

$$\lambda_s^{cr} = \frac{2\pi}{L_y} \sqrt{D N_Y} \quad (2.54b)$$

## 2.4.2 Approche numérique

L'approche numérique que nous développons dans cette section est celle de l'implémentation des équations macroscopiques dans le code de calcul MATLAB. Nous partons de la formulation faible du modèle macroscopique de la membrane :

$$\iint_{\Omega_0} (\langle \delta \bar{\gamma} \rangle [\mathbf{L}^m] \{ \bar{\gamma} \} + \langle \delta \Delta w \rangle [\mathbf{D}] \{ \Delta w \}) dx dy = \lambda \delta \mathcal{W} \quad (2.55)$$

avec  $\lambda$  un paramètre de chargement. Par définition, l'énergie de flexion macroscopique  $\mathcal{E}_f$  s'écrit :

$$2\mathcal{E}_f = \iint_{\Omega_0} (\langle \Delta w \rangle [\mathbf{D}] \{ \Delta w \}) dx dy \quad (2.56)$$

La forme variationnelle de l'équation (2.56) nous donne :

$$\delta \mathcal{E}_f = D \iint_{\Omega_0} \left( 2q^4 w \delta w + 12q^2 \frac{\partial w}{\partial x} \left( \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 4q^2 \frac{\partial w}{\partial y} \left( \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dx dy \quad (2.57)$$

L'équation (2.57) peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\delta\mathcal{E}_f = \iint_{\Omega_0} \langle \delta\beta \rangle [\mathbf{L}^f] \{\beta\} dx dy \quad (2.58)$$

où  $\beta$  est un vecteur défini par :

$$\langle \beta \rangle = \left\langle w \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \quad (2.59)$$

et  $[\mathbf{L}^f]$  est la matrice de flexion du modèle macroscopique :

$$[\mathbf{L}^f] = 2D \begin{bmatrix} q^4 & 0 & 0 \\ 0 & 6q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2q^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

L'équation (2.55) devient alors :

$$\iint_{\Omega_0} \{ \langle \delta\bar{\gamma} \rangle [\mathbf{L}^m] \{\bar{\gamma}\} + \langle \delta\beta \rangle [\mathbf{L}^f] \{\beta\} \} dx dy = \lambda \iint_{\Omega_0} (\delta\mathbf{u}\mathbf{F}_u + \delta w F_w) dx dy \quad (2.61)$$

Les inconnues de l'équation (2.61) peuvent être notées par le vecteur suivant :

$$\langle \theta \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} w \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \quad (2.62)$$

À partir des équations (2.36) et (2.62), le tenseur des déformations macroscopiques en membrane  $\{\bar{\gamma}\}$  peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\{\bar{\gamma}\} = \left( [\mathbf{H}] + \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\theta)] \right) \{\theta\} \quad (2.63)$$

où  $[\mathbf{H}]$  est une matrice de passage du vecteur gradient  $\{\theta\}$  au vecteur déformation linéarisée  $\{\gamma^l\}$  et  $[\mathbf{A}(\theta)]$  est une matrice dépendant du gradient de déplacement qui permet de traduire sous forme vectorielle la partie non linéaire du tenseur des déformations macroscopiques  $\{\gamma^{wr}\}$  :

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$[A(\theta)] = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 w & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

et nous pouvons déduire de l'équation (2.63) :

$$\{\delta\bar{\gamma}\} = ([H] + [A(\theta)]) \{\delta\theta\} \quad (2.66)$$

Le système d'inconnues  $\{\beta\}$  peut être réécrit en fonction de  $\{\theta\}$  en introduisant une matrice de passage  $[T_\beta]$  :

$$\{\beta\} = [T_\beta] \{\theta\} \quad (2.67)$$

avec :

$$[T_\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Finalement, la formulation faible du modèle macroscopique de la membrane devient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0} \langle \delta\theta \rangle \left( ({}^t[H] + {}^t[A(\theta)]) \{N\} + {}^t[T_\beta] [L^f] [T_\beta] \{\theta\} \right) dx dy = \\ \lambda \iint_{\Omega_0} (\delta \mathbf{u} \mathbf{F}_u + \delta w F_w) dx dy \end{aligned} \quad (2.69)$$

avec :

$$\{N\} = [L^m] \left( [H] + \frac{1}{2} [A(\theta)] \right) \{\theta\} \quad (2.70)$$

Le problème ainsi défini est discrétisé et résolu par la méthode des éléments finis et implémenté dans le code de calcul MATLAB. Nous allons dans la suite de ce chapitre présenter des exemples numériques des deux modèles de membrane que nous avons développés : le modèle complet (pris comme modèle de référence) et le modèle réduit issu de l'application de la méthode de Fourier double échelle.

## 2.5 Exemples numériques

Nous présentons ici quelques exemples numériques sur l'application de la méthode des séries de Fourier double échelle dans la simulation du plissement des membranes minces sous sollicitations mécaniques. Les exemples portent essentiellement sur la sollicitation biaxiale et uniaxiale d'une membrane mince.

Les deux modèles de membrane, dont les équations sont développées dans ce chapitre, sont pris en compte : le modèle complet décrit par le système d'équations (2.29) et le modèle réduit, simplifié à l'enveloppe réelle d'ordre 1, décrit par le système d'équations (2.40). Les équations du modèle complet sont discrétisées par des éléments coques de type S8R5 dans le logiciel ABAQUS. Il s'agit d'éléments coques tridimensionnels quadrilatéraux à 8 nœuds avec intégration réduite et 5 degrés de liberté dont 3 composants de translation et 2 composantes de rotation dans le plan (figure 2.4). Les éléments de type S8R5 semblent adéquats pour les problèmes de type "*coque mince*" avec de petites déformations en membrane et rotations modérées (théorie de Föppl-von Kàrmàn). La résolution numérique du modèle complet est faite à l'aide de la méthode de RIKS qui est basée sur la technique de la longueur d'arc. Ce choix de résolution nous permet de passer les points limites - éventuels - de la courbe charge-déplacement du problème étudié [Riks, 1979, Crisfield, 1981]. Nous présentons figure 2.5 le mode opératoire de la simulation faite dans ABAQUS. Dans les grandes lignes, nous construisons d'abord le modèle de plaque suivant les dimensions fixées. Ensuite nous définissons le type de calcul à effectuer, soit le calcul STATIC/RIKS, en choisissant une longueur d'arc optimale pour le pilotage de l'algorithme. Puis nous définissons les conditions aux limites et les efforts exercés sur la membrane (efforts de traction et/ou compression et force perturbatrice) avant de passer au maillage de la structure et au calcul proprement dit.

Les équations du modèle réduit sont implémentées dans le code de calcul MATLAB et discrétisées à l'aide d'élément plaque quadrangulaire à 8 nœuds (éléments de type Q8, figure 2.6). La méthode de résolution numérique appliquée est la Méthode Asymptotique Numérique qui est une méthode alternative aux méthodes numériques basées sur des algorithmes itératifs de type Newton-Raphson. Le choix de cette méthode (MAN) nous permet d'assurer une simplification du problème non linéaire en transformant ce dernier en une suite récurrente de problèmes linéaires résolus par la méthode des éléments finis.

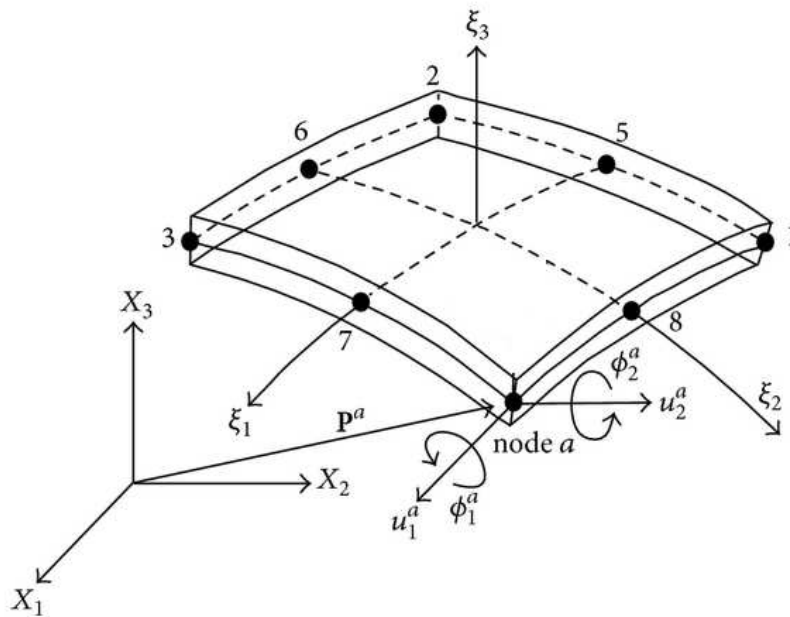


FIGURE 2.4 – Élément coque à 8 noeuds et 5 degrés de liberté utilisé pour le calcul du modèle complet dans le logiciel ABAQUS. Ce type d'élément est idéal pour les structures minces.

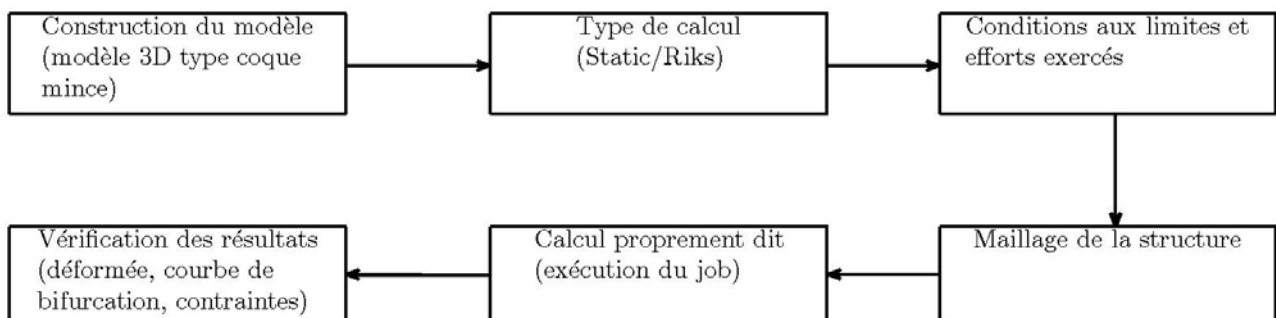


FIGURE 2.5 – Mode opératoire de la simulation sous ABAQUS.

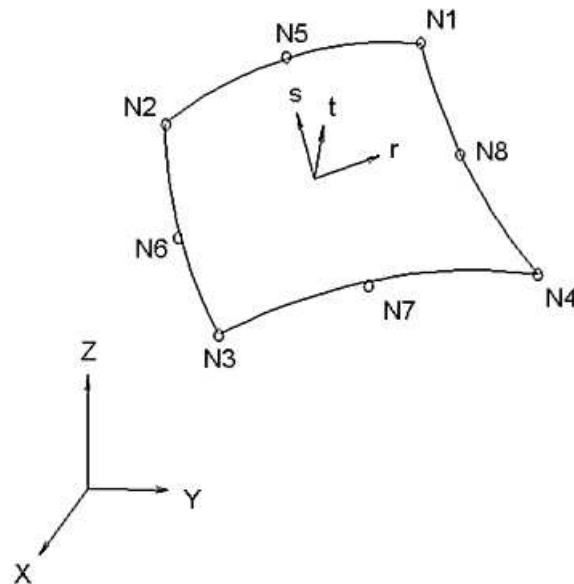


FIGURE 2.6 – Élément plaque quadrangulaire Q8 à 8 nœuds utilisé pour le calcul du modèle réduit dans le code de calcul MATLAB.

Nous effectuons deux types d'exemples numériques basées sur les sollicitations mécaniques. Le premier exemple concerne l'étude d'une membrane mince sous sollicitation biaxiale. Dans le deuxième exemple, nous étudions le comportement d'une membrane mince soumise à un effort de tension globale (sollicitation uniaxiale).

Les caractéristiques du matériau de la membrane étudiée sont identiques dans tous les exemples. Le matériau est supposé élastique linéaire et isotrope avec comme module d'Young  $E = 70000$  MPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Les caractéristiques géométriques de la membrane sont détaillées dans chaque cas.

Les résultats présentés pour chaque exemple constituent également une validation numérique de la méthode de résolution semi-analytique développée dans cette étude. Des comparaisons sont faites entre les deux modèles de membrane et les limites du modèle réduit sont relevées.

### 2.5.1 Cas d'un chargement biaxial

Dans cet exemple, nous étudions le plissement d'une membrane mince sous chargement biaxial. La membrane mince est soumise successivement à deux efforts dans des directions perpendiculaires, l'une en traction et l'autre en compression (figure 2.7). Ce type d'exemple simule l'effet d'une compression sur une membrane pré-tendue. La traction crée une rigidité à la flexion



de la membrane mince. Le but de cet exemple est de déterminer l'effort critique de compression pour lequel les instabilités apparaissent dans la membrane ainsi que les caractéristiques des instabilités notamment la longueur d'onde et la forme des plissements. Nous analysons également le comportement de la membrane au delà de la charge critique de compression, en post-bifurcation.

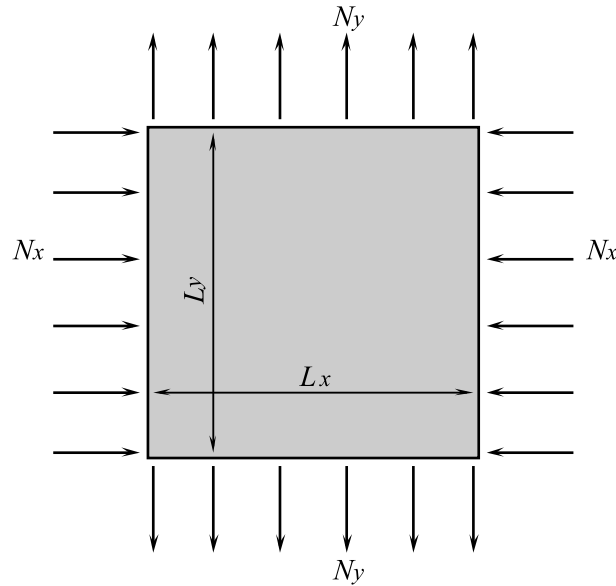


FIGURE 2.7 – Membrane sous chargement biaxial.

Deux géométries de la membrane sont considérées : (a)  $L_x = L_y = 200$  mm et (b)  $L_x = 400$  mm,  $L_y = 200$  mm (figure 2.8). Dans tous les cas, l'épaisseur de la membrane est fixe :  $t = 0.05$  mm. Les conditions aux limites diffèrent suivant l'effort appliqué. Dans la première étape de la simulation, sous l'effort de traction, seuls les déplacements  $w$  sont restreints sur tous les bords (voir l'équation (2.48) pour la formulation). Dans la deuxième étape, sous l'effort de compression, les déplacements  $v$  sont restreints sur les bords  $(x, 0)$  et  $(x, L_y)$ . Les déplacements  $w$  sont également restreints sur tous les bords. Le tableau 2.1 présente une synthèse des conditions aux limites des deux modèles de membrane pour chaque étape de calcul.

Les conditions aux limites dans l'étape 1 permettent d'avoir une contrainte  $\sigma_y$  de traction, uniforme dans la direction  $y$ , et une contrainte  $\sigma_x$  quasiment nulle dans la direction  $x$ . Dans l'étape 2, les conditions aux limites définies permettent de maintenir constant l'effort de traction exercé lors de la première phase de la simulation.

La stratégie de résolution décrite dans la section 2.4.1 permet de déterminer de façon analytique les valeurs de l'effort critique de compression et de la longueur d'onde correspondante,

TABLE 2.1 – Application des conditions aux limites de type encastrement aux deux modèles de membranes. Voir annexe 3.6 pour plus de détails sur le passage des conditions aux limites du modèle complet au modèle réduit.

	Modèle complet	Modèle réduit
Étape 1 : traction	$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sur tous les bords	$w = 0$ sur tous les bords
Étape 2 : compression	$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sur tous les bords et $v = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$	$w = 0$ sur tous les bords et $v = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$

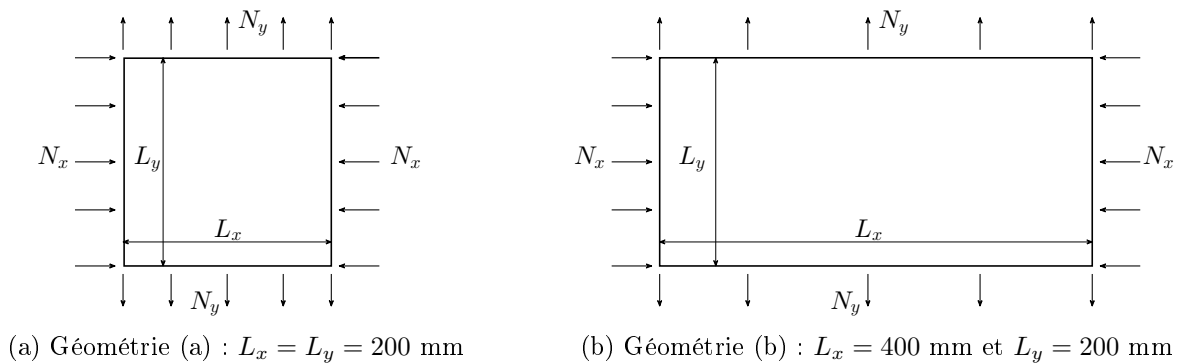


FIGURE 2.8 – Les deux géométries de membrane étudiées : (a) membrane carrée, (b) membrane rectangulaire

à l'aide des équations (2.51) et (2.52). La méthode des séries de Fourier impose de déterminer *a priori* le nombre d'onde pour le calcul numérique. Ainsi, nous utilisons la valeur du nombre d'onde calculée analytiquement que nous remplaçons dans le système d'équations macroscopiques (2.40) du modèle réduit pour la résolution numérique dans MATLAB (figure 2.9).

Le modèle de membrane dans ABAQUS est maillé finement dans la direction  $x$  avec 100 éléments afin d'avoir un élément de maillage assez petit devant la longueur d'onde estimée. Dans la direction  $y$ , par contre, le maillage reste grossier, avec 20 éléments, car nous supposons que dans cette direction le mode de plissement est identique à un mode de flambage avec une demi-onde. Ce choix de maillage nous permet d'optimiser le temps de calcul de la simulation du modèle complet dans ABAQUS. Dans MATLAB, le modèle réduit de la membrane est maillé avec 6 éléments dans la direction  $x$  et 10 éléments dans la direction  $y$ . Ce choix de maillage dans la direction  $x$  correspond à la définition de l'approche des séries de Fourier (réduction de modèle) où peu d'éléments sont nécessaires pour obtenir le mode de plissement. Ainsi, le

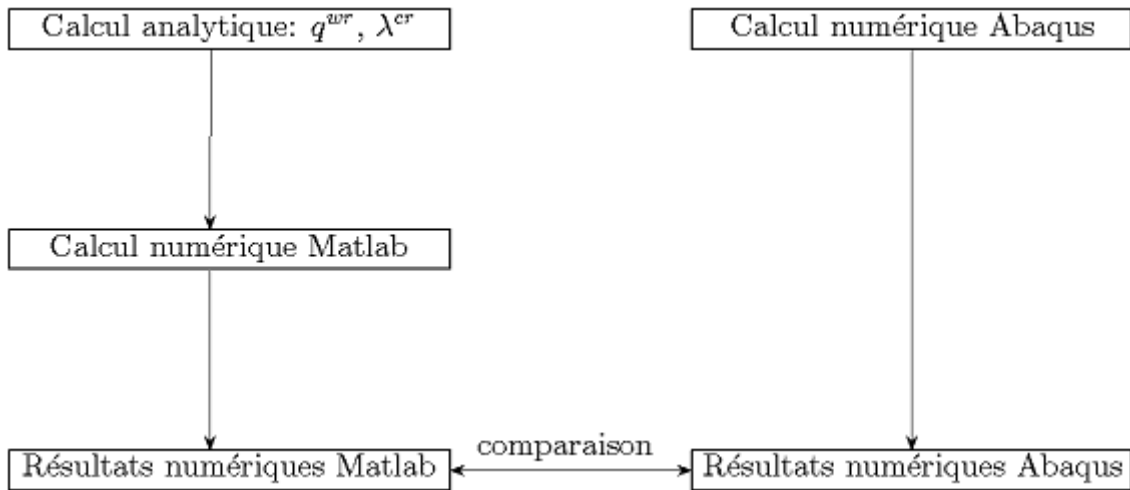


FIGURE 2.9 – Organigramme du calcul biaxial pour le calcul du modèle réduit et du modèle complet. Le calcul analytique est pré-requis pour le calcul du modèle réduit afin de déterminer la longueur d’onde.

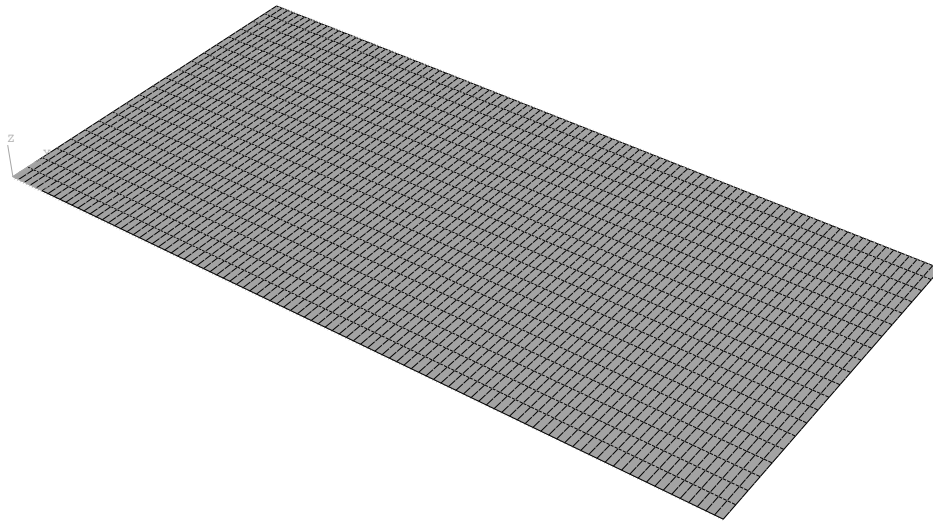
modèle complet utilise 2000 éléments contre 60 éléments seulement pour le modèle réduit, ce qui correspond à un gain de temps de calcul d’environ 1/30 en passant du modèle complet au modèle réduit [Attipou et al., 2015]. Pour cette étude, nous considérons différentes valeurs de l’effort de traction uniforme  $N_Y$ .

Les tableaux 2.2 et 2.3 présentent les résultats des simulations dans MATLAB et ABAQUS en comparaison avec les résultats issus de la résolution analytique (section 2.4.1) en fonction de l’effort de traction uniforme  $N_Y$ . Nous y retrouvons les valeurs de l’effort critique de compression  $\lambda^{cr}$  (tableau 2.2) et de la longueur d’onde  $l_x/L_x$  (tableau 2.3) avec  $l_x = 2\pi/q^{wr}$ . La figure 2.11 donne un aperçu graphique du tableau 2.2 pour la membrane carrée avec les valeurs de l’effort critique de compression en fonction de la traction uniforme imposée.

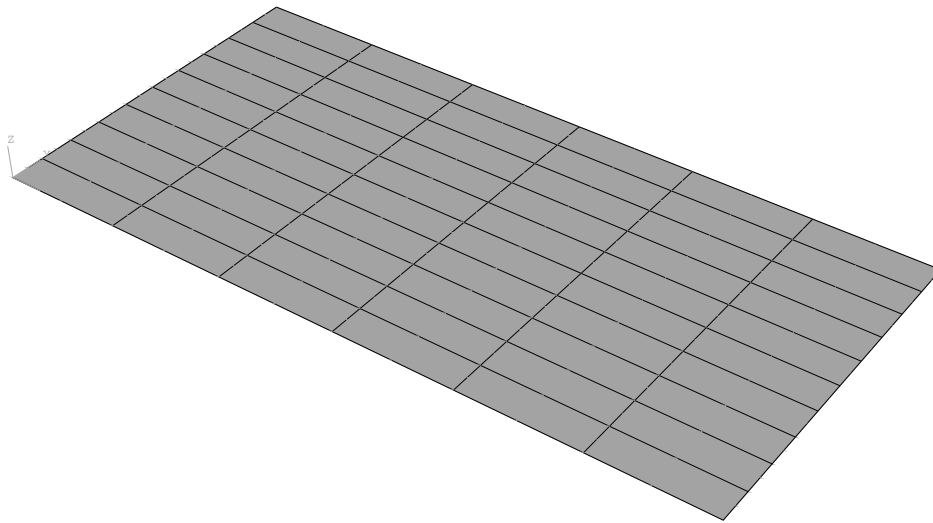
TABLE 2.2 – Cas de chargement biaxial : calcul de l’effort critique de compression  $\lambda^{cr}$  (N/mm) ((a) membrane carrée et (b) membrane rectangulaire)

Traction uniforme $N_Y$ (N/mm)	Modèle réduit		Modèle complet		Analytique	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
5	0.0640	0.0633	0.0630	0.0629	0.0717	0.0712
10	0.0900	0.0893	0.0880	0.0889	0.0954	0.0948
15	0.1100	0.1093	0.1080	0.1089	0.1144	0.1138
20	0.1270	0.1262	0.1250	0.1258	0.1306	0.1300

Quelques commentaires et remarques peuvent se déduire des résultats obtenus :



(a)



(b)

FIGURE 2.10 – Maillages utilisés pour les deux modèles de membrane (membrane rectangulaire  $400 \times 200$  mm). (a) Maillage très fin  $100 \times 20$  éléments pour le calcul du modèle complet dans ABAQUS afin d'avoir une bonne représentation des plis. (b) Maillage très grossier  $6 \times 10$  éléments pour le calcul dans MATLAB grâce à la technique de réduction du modèle.

TABLE 2.3 – Variation de longueur d'onde  $l_x/L_x$  entre les deux géométries de membrane pour le modèle réduit ((a) membrane carrée et (b) membrane rectangulaire).

Traction uniforme $N_Y$ (N/mm)	Géométrie	
	(a)	(b)
5	0.1591	0.0794
10	0.1337	0.0667
15	0.1207	0.0603
20	0.1123	0.0561

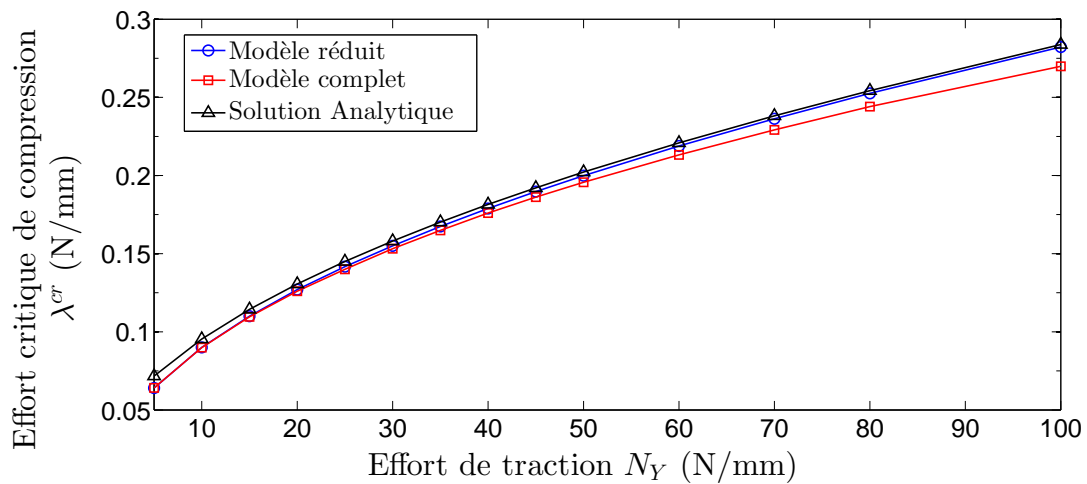


FIGURE 2.11 – Influence de l'effort de traction sur l'effort critique de compression (membrane carrée  $200 \times 200$  mm).

- Les résultats du modèle réduit sont en adéquation avec les résultats du modèle complet.
- Pour chacun des modèles de membrane, la différence entre les efforts critiques de compression des deux géométries étudiées est très faible (environ 1%). Ceci vient justifier les hypothèses simplificatrices émises dans la section 2.4.1 où la longueur d'onde est très faible devant  $L_x$  et l'effort de compression très petit devant la traction uniforme. En effet, les équations (2.54) ne dépendent pas de  $L_x$  contrairement aux équations (2.51) et (2.52). Ainsi,  $L_x$  a une influence quasi nulle sur l'effort critique de compression  $\lambda^{cr}$ .
- Le nombre de plis augmente avec  $L_x$  (tableau 2.3).

Les figures 2.12 et 2.13 présentent, respectivement, les courbes de bifurcation et les modes de plissement des deux modèles de membrane pour la géométrie (b) uniquement. Les figures 2.14a et 2.14b, quant à elles, montrent les déformées (en 3D) du modèle complet (géométrie (b)) pour des valeurs de l'effort critique de compression au voisinage du point de bifurcation et en post-bifurcation.

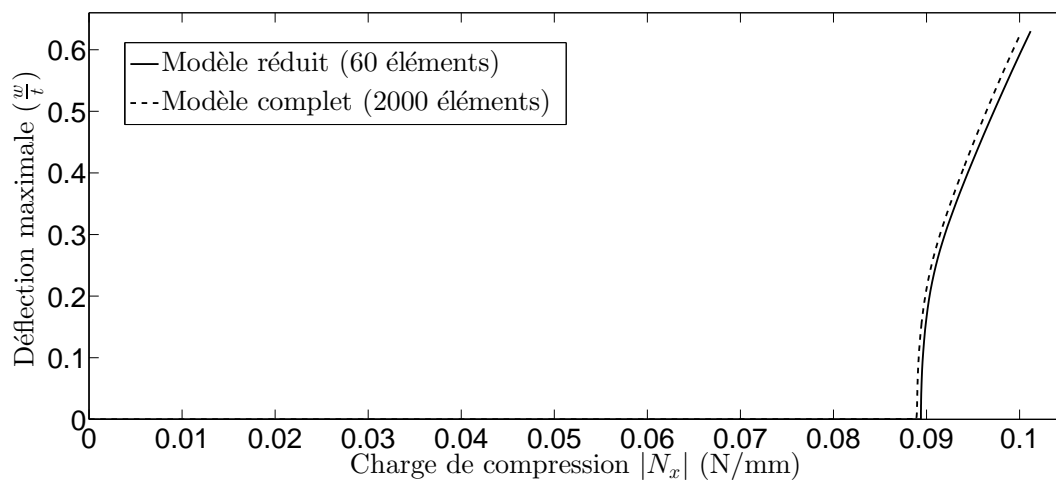


FIGURE 2.12 – Courbes de bifurcation au centre de la membrane (membrane rectangulaire). Les courbes des deux modèles de membrane sont très proches.

La courbe de bifurcation du modèle réduit est presque similaire à celle du modèle complet (figure 2.12). On peut conclure que le modèle réduit permet de retrouver approximativement la même charge critique de compression que dans le modèle complet. Les modes de plissement observés pour les deux modèles de membrane mettent en évidence un *effet de bord* (figure 2.13). En effet, pour une charge de compression plus importante, le mode de plissement du modèle réduit présente une amplitude beaucoup moins importante que le modèle complet, ce

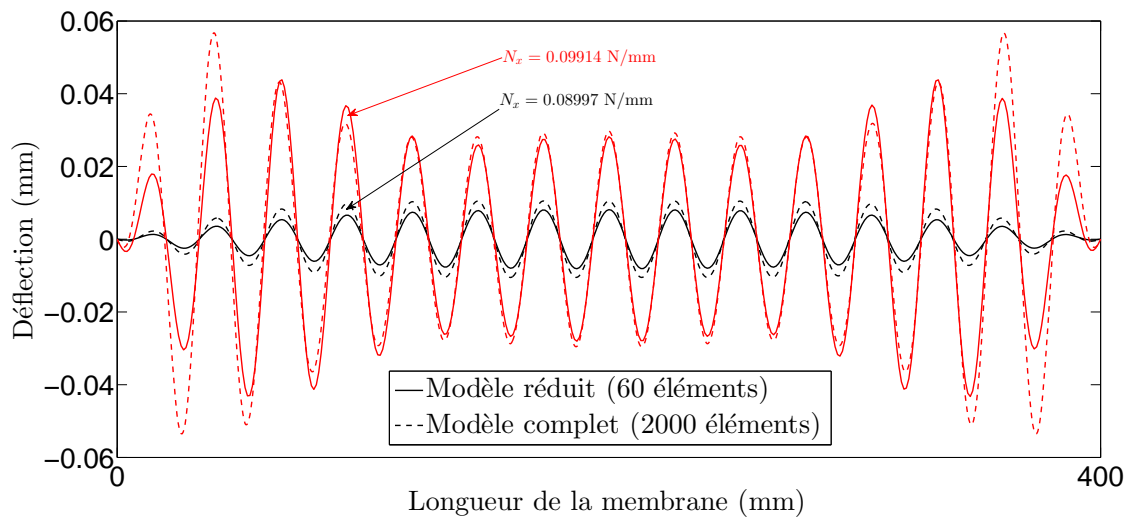


FIGURE 2.13 – Mode de plissement à différentes charges de compression (membrane rectangulaire). On observe une différence au voisinage des bords de la membrane : le modèle complet a une plus grande amplitude que le modèle réduit en post-bifurcation pour la même charge de compression. Ailleurs les deux modes de plissement sont presque superposés.

qui montre que la validité de la méthode de Fourier est atteinte au voisinage des bords de la membrane. La même observation a été faite dans [Huang et al., 2015].

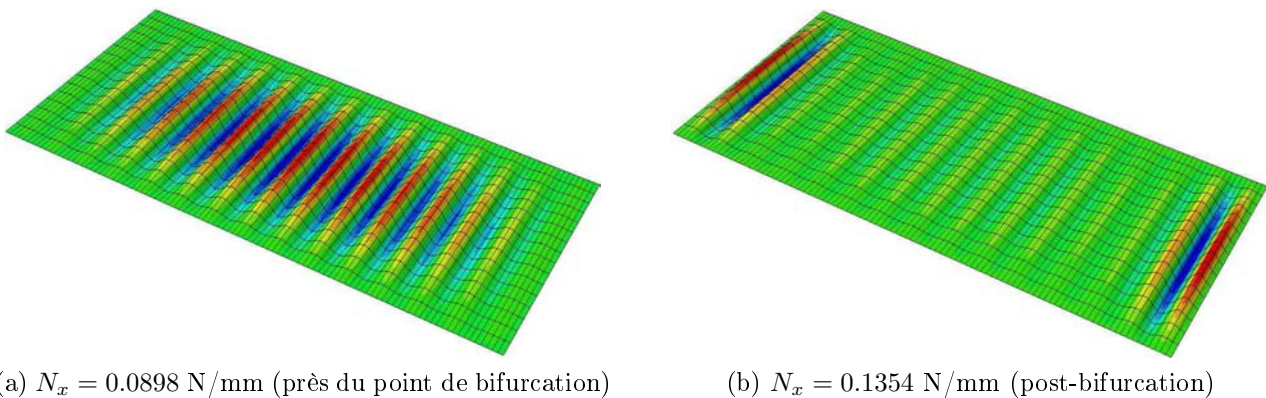


FIGURE 2.14 – Déformées de la membrane au voisinage du point de bifurcation et en post-bifurcation (modèle complet). Les zones de grandes amplitudes varient du centre aux bords de la membrane.

En conclusion à cet exemple, pour le cas d'un chargement biaxial, le modèle réduit permet de retrouver le même mode de plissement que le modèle complet de la membrane, avec en sus, un gain de temps non négligeable. Cependant, en post-bifurcation, ce modèle réduit présente une limitation quand on est au voisinage des bords de la membrane. Cette limitation se traduit par une non-adéquation du mode de plissement avec le modèle complet. Un moyen de contourner cette limitation serait d'augmenter le nombre d'harmoniques dans les équations du modèle

réduit ou alors de considérer l'enveloppe complexe [Mhada et al., 2012]. On peut également utiliser une méthode de superposition de modèles comme dans [Hu et al., 2011, Xu et al., 2014b], ce qui permet de considérer le modèle complet seulement au voisinage des bords de la membrane tout en gardant le modèle réduit dans les autres régions.

### 2.5.2 Cas d'un chargement uniaxial

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode des séries de Fourier au cas de chargement mécanique uniaxial d'une membrane mince. La membrane peut être mise sous traction globale en utilisant la technique de la force imposée ou du déplacement imposé. La mise sous traction de la membrane par force imposée ou déplacement imposé ne donne pas les mêmes résultats concernant la contrainte critique de traction et le mode de plissement. Nous reviendrons sur cet aspect dans l'exemple suivant. Pour l'instant nous considérons dans cet exemple que la mise sous traction de la membrane se fait par force imposée (figure 2.15). Ce type de chargement est similaire à la traction de bande dans les industries métallurgiques et textiles. Il s'agit ici de déterminer l'effort critique de traction globale qui provoque l'instabilité de la membrane, c'est-à-dire l'apparition du plissement. Les caractéristiques des plis sont également déterminées.

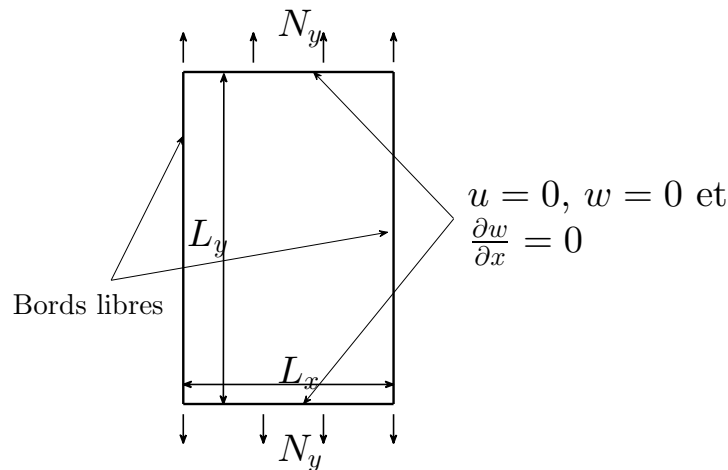


FIGURE 2.15 – Membrane sous tension longitudinale.

Nous considérons deux géométries de la membrane : une membrane courte avec  $L_x = 200$  mm,  $L_y = 400$  mm et une membrane longue avec  $L_x = 200$  mm,  $L_y = 1400$  mm. Dans tous les cas, l'épaisseur reste fixe :  $t = 0.05$  mm. Comme conditions aux limites spécifiques, les déplacements latéraux des bords d'application de l'effort de traction sont restreints :  $u = 0$



sur  $(x, 0)$  et  $(x, L_y)$ . Les déplacements  $w$  sont restreints sur les bords d'application de l'effort de traction (voir tableau 2.4). Les conditions aux limites appliquées provoquent, sous l'effet Poisson, l'apparition des contraintes de compression dans la direction perpendiculaire à la direction d'application de la force.

TABLE 2.4 – Application des conditions aux limites de type encastrement aux deux modèles de membranes dans le cas d'un chargement uniaxial.

	Modèle complet	Modèle réduit
Traction uniaxiale	$u = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$	$u = w = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$

L'hétérogénéité des champs de contraintes dans la membrane rend impossible la recherche d'une solution analytique pour ce type de problème. Ainsi, [Friedl et al., 2000] ont utilisé l'hypothèse d'une membrane en appui simple et soumise à des chargements combinés longitudinalement et transversalement pour discuter du rapport entre la traction globale et la compression induite sous l'effet Poisson. Pour [Jacques and Potier-Ferry, 2005], quelques approximations ont permis de déterminer analytiquement la longueur d'onde en fonction du rapport entre la traction globale et la compression induite. Dans notre exemple, nous avons préalablement conduit une simulation du modèle complet dans ABAQUS pour déterminer la longueur d'onde correspondant à la charge critique de traction. Ensuite, cette longueur d'onde critique est utilisée dans les équations du modèle réduit pour conduire l'analyse numérique dans MATLAB (figure 2.16).

En ce qui concerne le maillage, le modèle complet dans ABAQUS est maillé avec 24 éléments sur  $L_x$  et 100 éléments sur  $L_y$  (2400 éléments *S8R5*) tandis que le modèle réduit est maillé avec 4 éléments sur  $L_x$  et 20 éléments sur  $L_y$  (80 éléments *Q8*). Les raisons du choix de ce type de maillage sont identiques à celles évoquées pour l'exemple précédent.

Les figures 2.17 à 2.20 montrent les zones de compression dans la membrane pour différentes valeurs de l'effort de traction exercé. Nous retrouvons sur les figures 2.22 et 2.23, les courbes de bifurcation pour les deux modèles de membrane. Enfin, les figures 2.24a et 2.24b montrent les déformées en 3D des deux géométries de la membrane pour le modèle complet.

Sur les figures 2.19 et 2.20, nous notons l'apparition des zones de traction dues aux bords

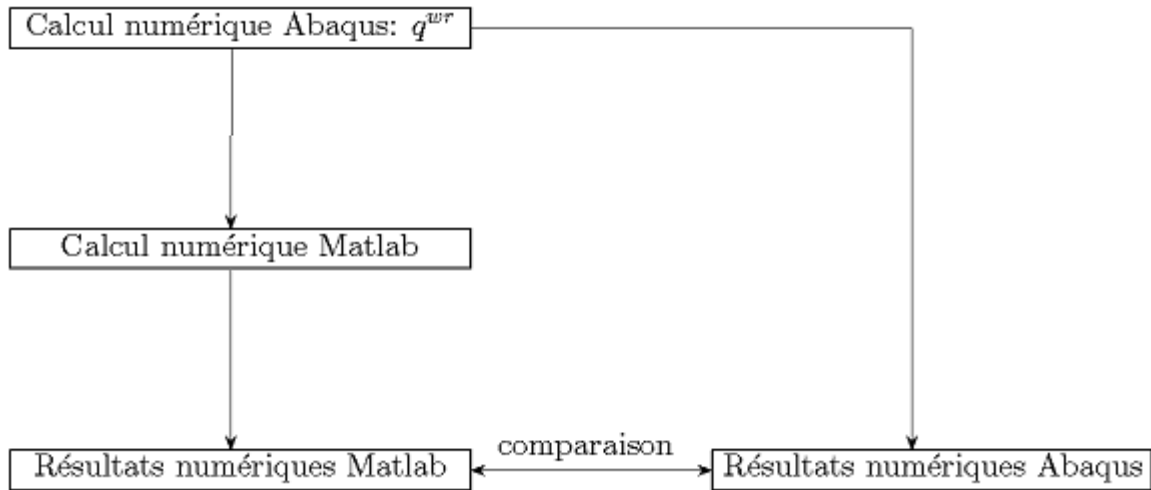
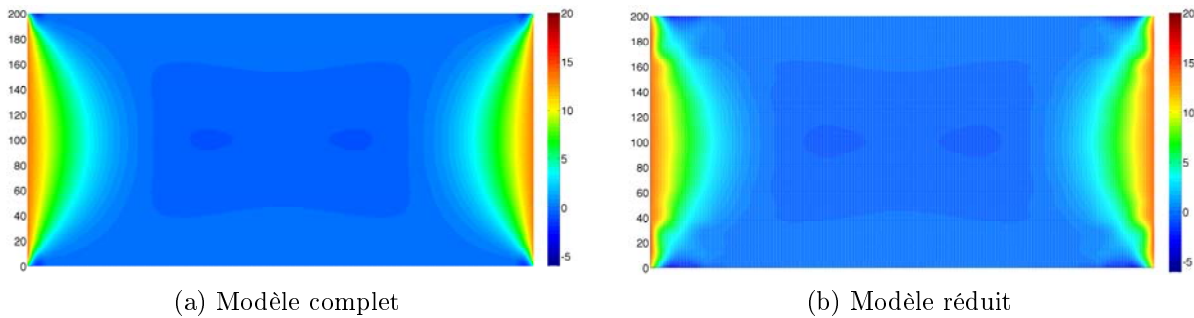


FIGURE 2.16 – Organigramme du calcul uniaxial.

restreints ainsi que l'apparition des zones de compression dans le sens transverse, sous l'effet Poisson. Nous notons également l'apparition de zones de plissement près des bords dans le cas de la membrane longue (figure 2.20a). De plus, la longueur d'onde n'est pas constante sur toute la longueur de la membrane longue. Ceci peut s'expliquer par le fait que les contraintes de compression sont très faibles, voire quasiment nulles, au centre de la membrane [Friedl et al., 2000]. Dans le cas de la membrane courte, les zones de plissement se situent au centre (figure 2.18a).


 FIGURE 2.17 – Zones de contraintes  $\sigma_x$  ( $\text{N}/\text{mm}^2$ ) au voisinage du point de bifurcation :  $N_Y = 2.27 \text{ N}/\text{mm}$  (membrane courte  $200 \times 400 \text{ mm}$ )

À partir de ces résultats, on peut déduire que la variation de la longueur  $L_y$  de la membrane, dans le cas d'un chargement uniaxial, a une influence sur la localisation des plis. En effet, [Zheng, 2009] a mené une étude sur des membranes élastomères diélectriques où il a montré que pour un rapport d'aspect  $L_y/L_x \leq 2.8$ , les plis apparaissent au centre de la membrane alors que pour  $L_y/L_x \geq 2.9$ , les plis apparaissent en deux différents points, équidistants du centre de la membrane (figure 2.21). Les géométries de membrane étudiées dans cet exemple

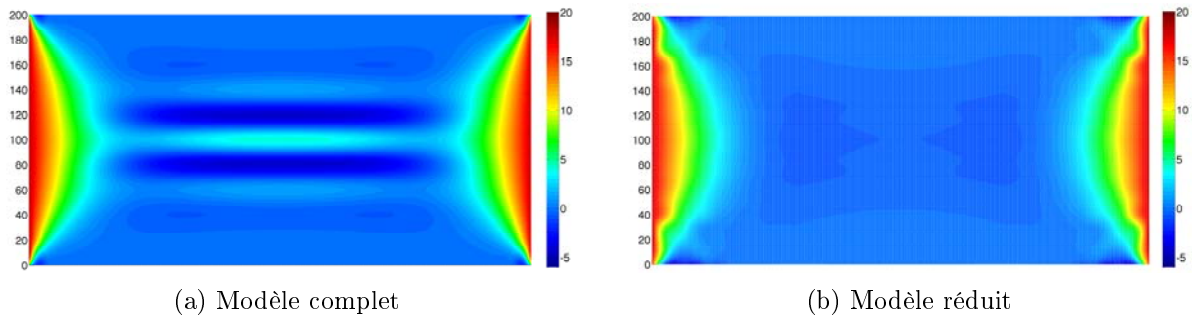


FIGURE 2.18 – Zones de contraintes  $\sigma_x$  ( $\text{N}/\text{mm}^2$ ) en post-bifurcation :  $N_Y = 3 \text{ N}/\text{mm}$  (membrane courte)

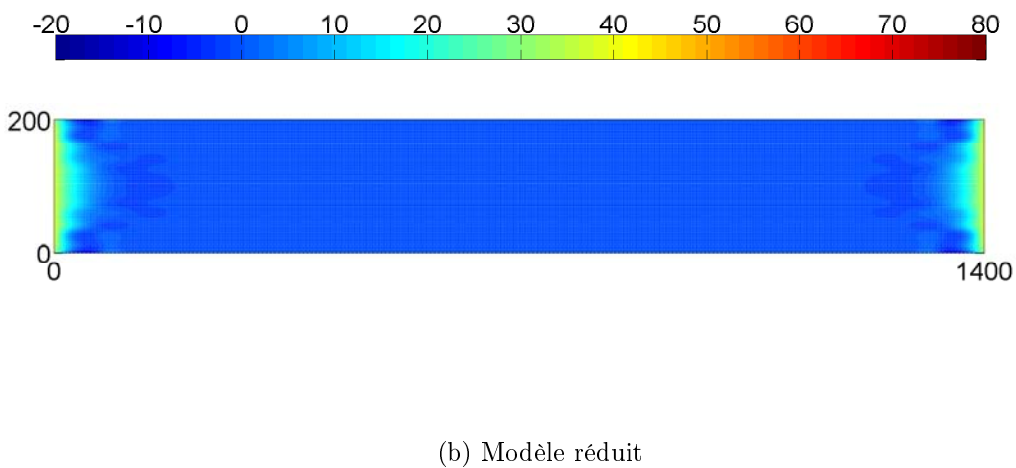
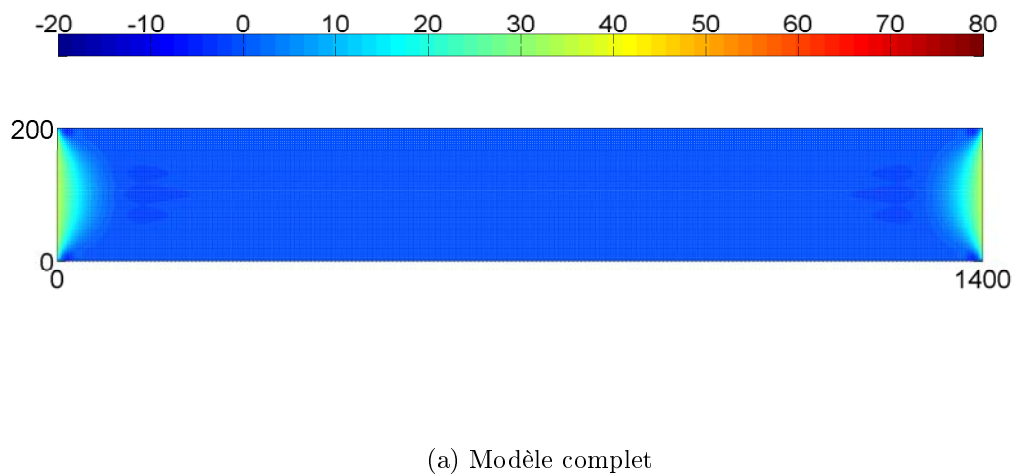
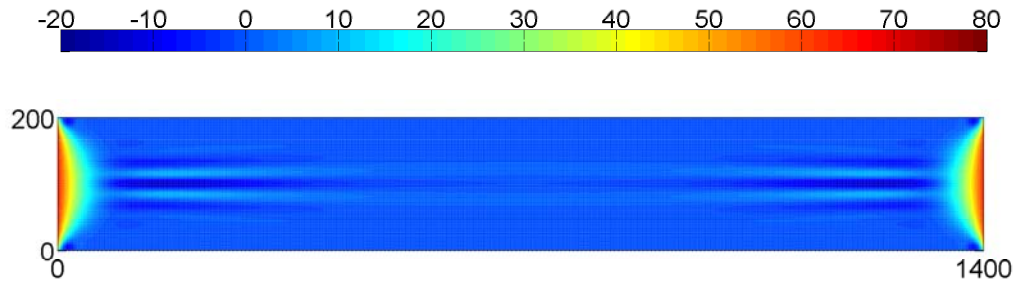
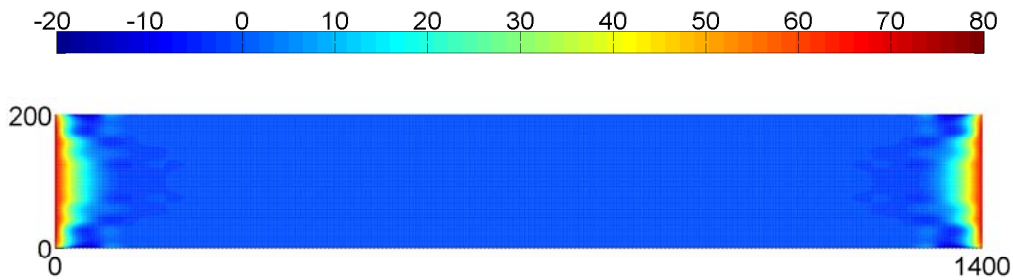


FIGURE 2.19 – Zones de contraintes  $\sigma_x$  ( $\text{N}/\text{mm}^2$ ) au voisinage du point de bifurcation :  $N_Y = 6 \text{ N}/\text{mm}$  (membrane longue)



(a) Modèle complet



(b) Modèle réduit

FIGURE 2.20 – Zones de contraintes  $\sigma_x$  (N/mm<sup>2</sup>) en post-bifurcation :  $N_Y = 10.9$  N/mm (membrane longue)

ont respectivement un rapport de 2 pour la membrane courte, et 7 pour la membrane longue, ce qui justifie la localisation des zones de plissement observées.

Les courbes de bifurcation sur les figures 2.22 et 2.23 montrent une certaine adéquation entre les deux modèles de membrane, la différence étant négligeable (environ 3.2%). Le déphasage observé provient sans doute des limitations du modèle réduit, notamment dans les approximations prises en compte lors de la simplification du modèle. Les déformées des membranes montrent bien les zones de plissement pour les deux types de géométrie étudiées (figures 2.24a et 2.24b).

Pour conclure cet exemple, nous pouvons dire que le chargement uniaxial présente des zones

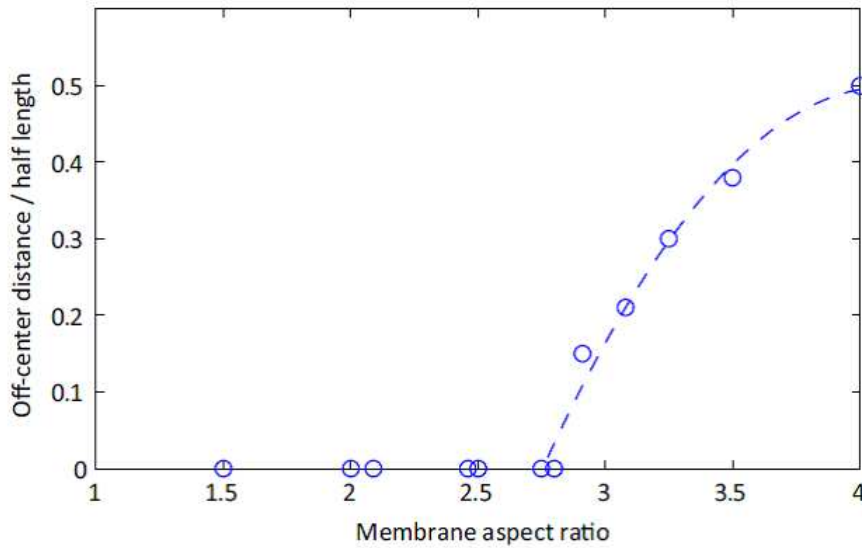


FIGURE 2.21 – Équidistance de l’amplitude maximale des plis par rapport au centre de la membrane [Zheng, 2009].

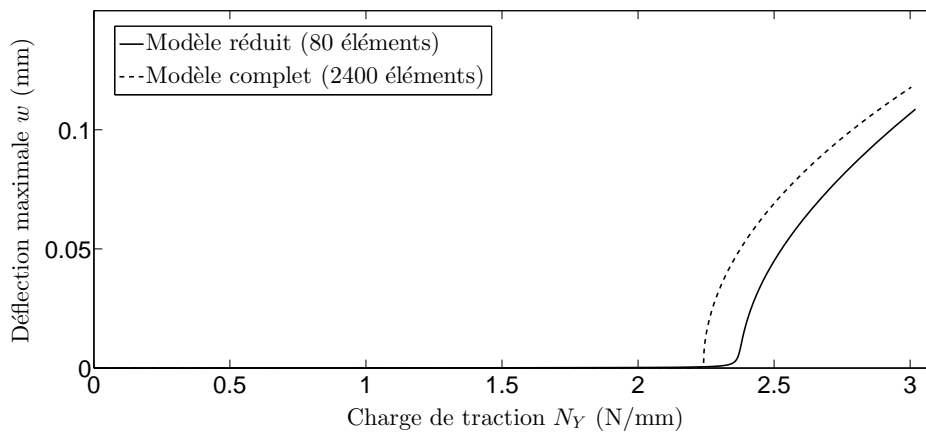


FIGURE 2.22 – Courbes de bifurcation pour une membrane courte.

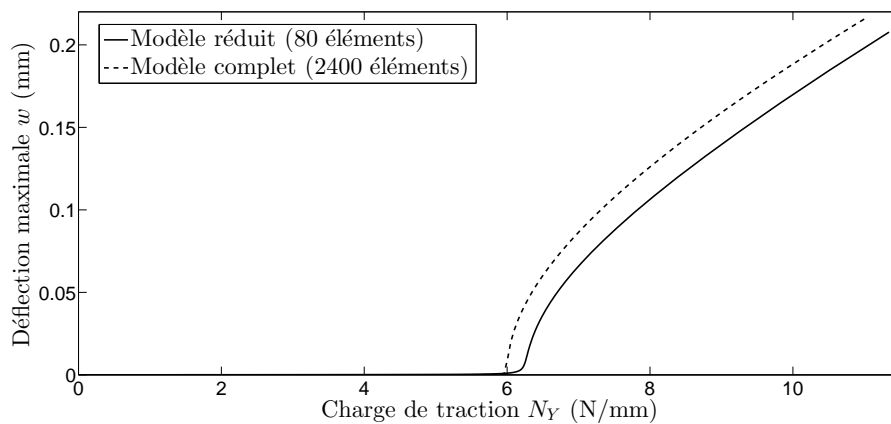


FIGURE 2.23 – Courbes de bifurcation pour une membrane longue.

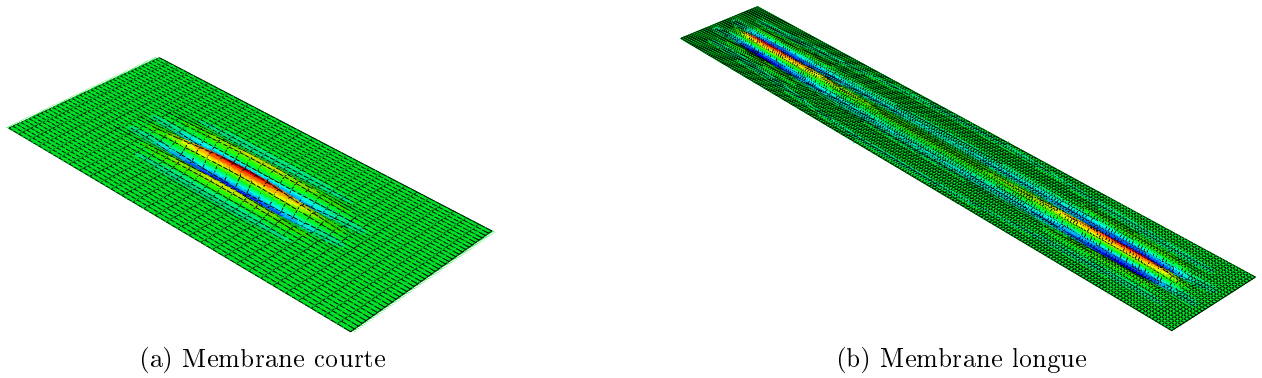


FIGURE 2.24 – Déformées des membranes : modèle complet. Les plis sont localisés près des bords de la membrane, là où la contrainte de compression est la plus importante.

de contraintes de compression non uniforme dans la membrane. L'utilisation du modèle réduit permet de retrouver approximativement la charge critique de traction, avec un gain de temps du même ordre que dans l'exemple précédent (environ 1/30). L'inconvénient majeur reste la détermination de la longueur d'onde avant d'effectuer le calcul du modèle réduit. Le choix de la méthode de détermination de la longueur d'onde n'a pas d'influence sur le résultat. En effet, les résultats obtenus dans [Friedl et al., 2000] et [Jacques and Potier-Ferry, 2005] sont en adéquation avec les résultats obtenus dans notre exemple.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le plissement des membranes minces sous contraintes purement mécaniques. Afin de construire un modèle simplifié de la membrane, nous avons développé une technique de réduction de modèle basée sur les séries de Fourier à double échelle. Cette méthode, appliquée au cas de chargement mécanique des membranes minces, permet de réduire de façon significative, le nombre de degrés de liberté dans la perspective d'une résolution par la méthode des éléments finis. En effet, à cause des longueurs d'onde très courtes, caractéristiques du plissement des structures minces, la modélisation du phénomène de plissement requiert un nombre important de degrés de liberté pour retrouver le mode d'instabilité en utilisant le modèle complet de la membrane. Avec la méthode des séries de Fourier, ce nombre important de degrés de liberté est quasiment divisé par 30 lors du passage du modèle complet à un modèle réduit simplifié. Ainsi, un des avantages de l'utilisation de la méthode des séries de

Fourier est le gain de temps de calcul qu'on peut obtenir en fonction de la réduction du nombre de degrés de liberté.

Les exemples présentés à la fin de ce chapitre montrent une adéquation entre les résultats du modèle complet et du modèle réduit. Les limites de l'approche du modèle réduit se situent dans la connaissance a priori du nombre d'ondes d'une part, et d'autre part il faut que les plissements se fassent dans une seule direction. Par ailleurs, une attention particulière doit être accordée au comportement de la membrane au voisinage des bords, là où le mode de plissement n'est pas totalement recouvert comme dans le modèle complet. En effet, les approximations faites dans la simplification du modèle de la membrane et les conditions aux limites prises en compte impliquent de prendre des mesures supplémentaires comme par exemple utiliser une technique de couplage de modèles. Cette technique de couplage permettrait d'utiliser le modèle complet au voisinage des bords de la membrane et le modèle réduit dans les autres zones de la membrane. Par exemple, la méthode Arlequin développée par [Ben Dhia, 1998, Ben Dhia and Rateau, 2001] est une méthode de superposition de modèles qui a été utilisée par beaucoup d'auteurs dans la littérature pour étudier les instabilités dans les structures 1D, 2D ou 3D [Rateau, 2003, Ben Dhia and Rateau, 2005, Hu et al., 2008, Ben Dhia and Jamond, 2010, Hu et al., 2010, Hu et al., 2011, Xu et al., 2014b]. Enfin le dernier exemple de ce chapitre nous a permis de montrer que les instabilités mécaniques dans les membranes dépendent fortement des conditions aux limites.

Dans la suite de ce travail, nous nous proposons d'étendre le développement de la méthode des séries de Fourier double échelle en étudiant l'influence de la température sur le plissement des membranes minces. Nous prendrons ainsi en compte, outre les contraintes et déformations mécaniques, les déformations thermiques et les contraintes thermiquement induites dans le développement du modèle réduit de la membrane.





# Chapitre 3

## Effet thermique sur le plissement des membranes minces

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>78</b>
<b>3.2</b>	<b>Origine des contraintes et déformations thermiques</b>	<b>79</b>
<b>3.3</b>	<b>Formulation du problème thermo-mécanique</b>	<b>80</b>
<b>3.4</b>	<b>Stratégies de résolution</b>	<b>83</b>
3.4.1	Approche analytique	83
3.4.2	Implémentation numérique	86
<b>3.5</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>93</b>
3.5.1	Membrane sous chargement biaxial	94
3.5.2	Membrane sous chargement uniaxial	103
3.5.3	Comparaison plissement thermique et plissement mécanique	126
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le comportement d'une membrane mince sous contraintes mécaniques conduisant au plissement de la membrane. En se reportant aux discussions menées dans le chapitre 1, nous avons vu que les membranes minces sont souvent employées dans des conditions où elles sont soumises à des différences de température et de pression (exemple du *water cube* en Chine, voir figure 1.2). Dans les industries métallurgiques et/ou textiles (laminage de tôles, fabrication du PVC, ...), les membranes minces sont également soumises à de fortes variations de température en plus des contraintes mécaniques liées au processus de transport de bandes. Ainsi, afin d'étudier les instabilités dans les membranes minces, il ne convient pas seulement d'étudier le comportement de la membrane sous sollicitations purement mécaniques. La température peut-elle aussi jouer un rôle plus ou moins prépondérant dans l'apparition des plis dans les membranes minces ? Nous répondrons à cette question dans ce chapitre en étudiant l'influence du paramètre température sur les instabilités dans les membranes minces.

Pour définir le cadre de notre travail dans ce chapitre, nous supposons que le champ de température est donné. Le chargement thermique consiste en une variation de température dans la membrane en prenant uniquement en compte le coefficient de dilatation thermique du matériau constituant notre membrane. Ainsi, nous étudierons tout au long de ce chapitre le chargement thermo-mécanique de la membrane mince, autrement dit, nous considérons une membrane soumise aussi bien à des contraintes et déformations mécaniques qu'à des déformations thermiques liées à la variation de température.

L'objectif de ce chapitre est donc, d'une part d'appliquer la méthode des séries de Fourier (développée dans le chapitre précédent) au cas du plissement thermo-mécanique des membranes minces, et d'autre part d'étudier le comportement de la membrane sous chargement thermo-mécanique. Dans cette extension de la méthode des séries de Fourier pour le cas thermo-mécanique, nous adoptons le même mode opératoire que dans le chapitre 2, c'est-à-dire que nous réécrivons les équations du modèle réduit de la membrane en prenant en compte les déformations thermiques issues du chargement thermique de la membrane. Outre les déformations thermiques, les conditions aux limites prises en compte entraînent des contraintes mécaniques dans la membrane qui sont couplées aux contraintes induites par les déformations

thermiques. Certains travaux et résultats présentés dans ce chapitre peuvent être retrouvés dans [Attipou et al., 2015].

Dans la première partie de ce chapitre, nous expliquons l'origine des contraintes et déformations thermiques. Ensuite, nous rappelons les principales équations de la thermoélasticité et déduisons les équations du modèle complet de la membrane comme dans le chapitre précédent (chapitre 2). Par la suite, nous déduisons les équations du modèle réduit simplifié de la membrane en appliquant la méthode des séries de Fourier double échelle introduite dans le chapitre 2. Nous présentons également des stratégies de résolution, notamment la résolution analytique et l'approche numérique pour la résolution par la méthode des éléments finis. Les exemples numériques présentés en fin de chapitre constituent, d'une part, des exemples de validation du modèle réduit, et d'autre part, des études paramétriques du plissement thermo-mécanique des membranes minces.

## 3.2 Origine des contraintes et déformations thermiques

Une déformation thermique bloquée engendre dans une membrane des contraintes que nous pouvons appeler *contraintes thermiques* (par abus de langage), et qui sont en fait des *contraintes thermiquement induites*. Le caractère 2D des membranes implique la possibilité de l'existence d'une combinaison de chargement mécanique et thermique ; tout dépend des conditions aux limites considérées. Par exemple, si nous considérons une membrane en appuis simples sur tous ses bords, seul le flambage thermique est observé ; ceci à cause du blocage parfait de tous les bords de la membrane (figure 3.1a). Ainsi, un réchauffement uniforme engendre des contraintes de compression thermiquement induites et un refroidissement uniforme engendre des contraintes de traction thermiquement induites. Pour des exemples sur ce type de conditions aux limites, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de [Timoshenko and Goodier, 1951] et [Jones, 2006] où seuls les phénomènes d'instabilités globales (flambage) sont traités. Pour une membrane ayant deux bords adjacents restreints en déplacement (normal et tangentiel) dans le plan, seul le flambage mécanique peut être observé à cause de l'expansion thermique qui n'est pas restreinte (figure 3.1b). Pour restreindre l'expansion thermique, nous devons au moins bloquer le déplacement dans le plan de deux bords opposés (figure 3.1c). Il existe alors une combinaison entre un chargement mécanique et un chargement thermique. Dans ce travail, nous étudierons

exclusivement le cas où les conditions aux limites de la membrane permettent d'appliquer un chargement thermo-mécanique (figure 3.1c).

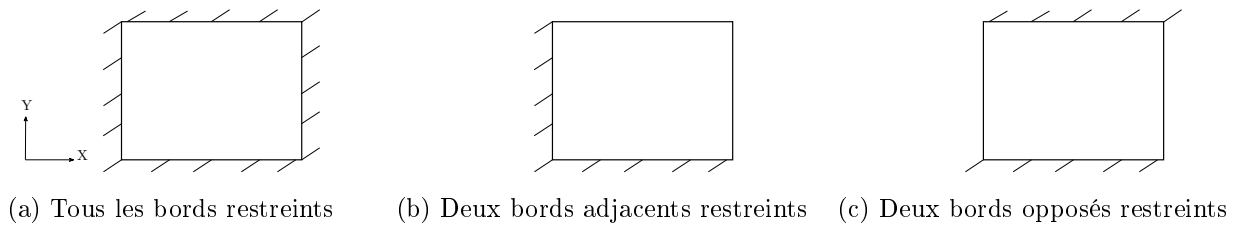


FIGURE 3.1 – Conditions aux limites dans le plan pour une membrane rectangulaire. (a) flambage thermique, (b) flambage mécanique et (c) couplage thermo-mécanique.

Pour comprendre la distribution des contraintes dans un problème de flambage ou plissement thermique des membranes minces, nous pouvons introduire un concept de *chargement mécanique équivalent*. L'idée est de visualiser une force mécanique nécessaire pour contenir l'expansion thermique afin de simuler le déplacement restreint. Ainsi, le problème de flambage thermique est comparable à un problème de flambage de membrane sous chargement mécanique. En prenant en compte des conditions aux limites spécifiques, nous parvenons à un problème de plissement mécanique en présence des longueurs d'onde courtes [Friedl et al., 2000, Jacques and Potier-Ferry, 2005, Damil et al., 2014]. Cependant, cette possibilité de comparaison ne permet pas d'obtenir la même charge critique de flambage ou de plissement pour les deux types de problèmes (thermique et mécanique). En effet, l'état des contraintes dans la membrane avant la charge critique n'est pas identique dans les deux types de problèmes. Nous reviendrons sur cet aspect dans les exemples numériques.

Dans la suite de ce travail, nous allons développer les équations de la membrane dans le même cadre que dans le chapitre 2, c'est-à-dire la formulation du modèle complet et du modèle réduit de la membrane et la méthode de résolution par la MAN.

### 3.3 Formulation du problème thermo-mécanique

Nous considérons une membrane mince isotrope et élastique soumise à une déformation thermique. La forme généralisée Duhamel-Neumann de la loi de Hooke permet d'écrire en contraintes planes les relations entre les composantes du tenseur des déformations totales  $\{\gamma\}$

et du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\{S\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_x = \frac{S_x}{E} - \frac{\nu S_y}{E} + \alpha \Delta T \\ \gamma_y = -\frac{\nu S_x}{E} + \frac{S_y}{E} + \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)S_{xy}}{E} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique et  $\Delta T = T - T_0$  est la variation de température dans la membrane, avec  $T_0$  la température initiale (ou de référence) et  $T$  la température à un instant donné. Nous supposons que le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  est identique dans toutes les directions  $x$  et  $y$  du fait de l'isotropie du matériau considéré. Nous supposons également que les paramètres matériaux définis par  $(E, \nu, \alpha)$  sont constants par rapport à la variation de température. À partir de l'équation (3.1), on peut déduire l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_x - \alpha \Delta T) + \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\gamma_y - \alpha \Delta T) \\ S_y = \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\gamma_x - \alpha \Delta T) + \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_y - \alpha \Delta T) \\ S_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Sous forme matricielle, l'équation (3.2) s'écrit :

$$\{S\} = [L] (\{\gamma\} - \Delta T \{\alpha\}) \quad (3.3)$$

avec  $\{\alpha\} = {}^t\langle \alpha, \alpha, 0 \rangle$  et  $[L]$  défini par l'équation (2.9). La déformation totale de la membrane s'écrit :

$$\{\gamma\} = \{\gamma^m\} + \{\varepsilon^{th}\} \quad (3.4)$$

où  $\{\gamma^m\}$  est la déformation due aux contraintes mécaniques et  $\{\varepsilon^{th}\}$  est la déformation due à l'expansion thermique. Par report de l'équation (3.4) dans l'équation (3.3), on peut déduire

que :

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T \{\alpha\} \quad (3.5)$$

Le développement des équations du modèle complet de la membrane pour les problèmes de plissement thermo-mécanique est identique aux équations (2.29) dans le chapitre 2. Le terme additionnel à prendre en compte ici est la déformation thermique  $\{\varepsilon^{th}\}$  qui intervient dans la loi de comportement. Les équations du modèle complet s'écrivent alors :

$$\{\nabla N\} + \{\mathbf{F}_u\} = 0 \quad (3.6a)$$

$$\{N\} = [\mathbf{L}^m] (\{\bar{\gamma}\} - \{\varepsilon^{th}\}) \quad (3.6b)$$

$$\{\bar{\gamma}\} = \{\varepsilon(\mathbf{u})\} + \{\gamma^{nl}(w)\} \quad (3.6c)$$

$$\mathbf{D}\Delta^2 w - \nabla(N\nabla w) + F_w = 0 \quad (3.6d)$$

On applique par la suite la méthode des séries de Fourier double échelle aux équations du système (3.6). Nous restons dans les mêmes hypothèses et approximations que dans le chapitre 2 pour le développement des inconnues du système (3.6) sous forme de séries de Fourier définies par l'équation 2.30. On en déduit ainsi les équations du modèle réduit du problème thermo-mécanique :

$$\{\nabla N\} + \{\mathbf{F}_u\} = 0 \quad (3.7a)$$

$$\{N\} = [\mathbf{L}^m] ((\{\gamma^l(\mathbf{u})\} - \{\varepsilon^{th}\}) + \{\gamma^{wr}(w)\}) \quad (3.7b)$$

$$-6Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2Dq^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (Dq^4 + N_x q^2) w - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + F_w = 0 \quad (3.7c)$$

Nous remarquons que le terme thermique  $\{\varepsilon^{th}\}$  intervient dans la déformation en membrane. Ainsi, une augmentation de la température ( $\Delta T > 0$ ) conduit à une diminution de l'effort en membrane, ce qui implique l'apparition de contraintes de compression induites par la déformation thermique restreinte. Avec les conditions aux limites spécifiques définies par la figure 3.1a, cette augmentation de la température conduit à un problème de flambage global [Jones, 2006].

Dans notre étude, on se place dans le cas des conditions aux limites définies par la figure 3.1c. Dans ces conditions, une augmentation de la température cause également un flambage global de la membrane. Pour étudier le plissement de la membrane, nous considérons alors un refroidissement de la membrane. En effet, pour  $\Delta T < 0$ , la déformation thermique engendre une contrainte de tension globale dans la membrane dans la direction  $y$  et des contraintes de compression localisées dans la direction  $x$  à cause de l'effet Poisson. Cette distribution des contraintes a permis de mettre en évidence dans le chapitre 2 l'apparition de plissement dans une membrane sous chargement uniaxial. Des exemples numériques détaillés sur l'effet thermique sont présentés dans la section 3.5 de ce chapitre. Dans la section suivante, nous allons discuter des approches de résolution des problèmes de plissement thermo-mécanique dans les membranes minces.

## 3.4 Stratégies de résolution

### 3.4.1 Approche analytique

La résolution analytique du problème de membrane défini par le système d'équations (3.7) requiert la détermination des valeurs critiques de la longueur d'onde et de la charge pour une variation de température donnée. Rappelons que dans le cas de problèmes de plissements induits par des déformations thermiques, des conditions aux limites spécifiques doivent être prises en compte. On considère ainsi une membrane rectangulaire soumise à une baisse de température uniforme ( $\Delta T < 0$ ) suivie d'une charge de compression comme décrite sur la figure 3.2 ( $N_x < 0$ ). Comme conditions aux limites spécifiques (tableau 3.1), les deux bords de coordonnées  $(x, 0)$  et  $(x, L_y)$  sont bloqués dans la direction  $y$  ( $(v, w)|_{(x,0)} = 0$  et  $(v, w)|_{(x,L_y)} = 0$ ). Compte tenu des conditions aux limites où les déplacements  $v$  sont bloqués sur les bords longs (voir figure 3.2), nous avons d'une part  $\gamma_y = 0$ , et d'autre part  $S_x = 0$  à cause du chargement thermique.

Ainsi, la contrainte induite par une déformation thermique suite à la baisse de la température et aux conditions aux limites se déduit de l'équation (3.1) :

$$N_y = -Et\alpha(\Delta T) \quad (3.8)$$

Cette contrainte thermiquement induite  $N_y$  est uniforme et positive dans la membrane à cause des bords latéraux ( $x = 0$  et  $x = L_x$ ) qui sont libres en déplacement dans la direction  $y$ .

TABLE 3.1 – Application des conditions aux limites de type encastrement aux deux modèles de membranes pour le cas d'un chargement biaxial thermo-mécanique.

	Modèle complet	Modèle réduit
Étape 1 : thermique	$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sur tous les bords et $v = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$	$w = 0$ sur tous les bords et $v = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$
Étape 2 : compression	$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sur tous les bords et $v = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$	$w = 0$ sur tous les bords et $v = 0$ sur les bords $(x, 0)$ et $(x, L_y)$

La longueur d'onde de l'instabilité est déduite de l'équation de flexion (3.7c). Concernant les conditions aux limites, nous appliquons les mêmes types de conditions aux limites développées dans la section 2.4.1 du chapitre 2. Une discussion plus détaillée sur les types de conditions aux limites du modèle réduit est faite en annexe 3.6 et dans des travaux antérieurs [Liu et al., 2012, Mhada et al., 2012]. Ainsi, le modèle complet de la membrane encastree sur le bord entraîne des conditions aux limites sur le modèle réduit satisfaites par la relation :

$$w(x, 0) = w(x, L_y) = w(0, y) = w(L_x, y) = 0 \quad (3.9)$$

Avec ce type de conditions aux limites, la solution générale de l'équation (3.7c) (qui est une équation de type *Helmoltz*) est sous la forme :

$$w(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (3.10)$$



En remplaçant l'équation (3.10) dans l'équation(3.7c), nous pouvons écrire :

$$(\lambda - 6Dq^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (N_Y + 2Dq^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (Dq^4 - \lambda q^2)w = 0 \quad (3.11)$$

Nous considérons les mêmes hypothèses que dans la section 2.4.1 du chapitre 2. Nous déduisons alors la valeur critique du nombre d'onde  $q^{wr}$  et la contrainte critique de compression  $\sigma_x^{wr}$  en fonction de la variation de température :

$$q^{wr} = \left[ \frac{12(1 - \nu^2)\pi^2\alpha}{t^2 L_y^2} (-\Delta T) \right]^{1/4} \quad (3.12a)$$

$$\sigma_x^{wr} = -\pi E \left( \frac{\alpha}{3(1 - \nu^2)} \right)^{1/2} \frac{t}{L_y} (-\Delta T)^{1/2} \quad (3.12b)$$

La longueur d'onde critique  $l^{wr}$  est déduite de l'équation (3.12a) :

$$l^{wr} = \frac{2\pi}{q^{wr}} = \left( \frac{4\pi^2}{3(1 - \nu^2)^2 \alpha} \right)^{1/4} (tL_y)^{1/2} \left( -\frac{1}{\Delta T} \right)^{1/4} \quad (3.13)$$

Le caractère multiéchelle du phénomène de plissement peut être déduit de l'équation (3.13). En effet, la quantité microscopique est représentée par la longueur d'onde critique  $l^{wr}$  et la quantité macroscopique est représentée par la longueur  $L_y$  définissant la dimension de la membrane, d'où l'analyse du plissement associe l'échelle microscopique avec l'échelle macroscopique. Nous pouvons également conclure à partir des équations (3.12b) et (3.13) que :

- Une augmentation de la variation de la température entraîne une diminution de la longueur d'onde.
- La longueur  $L_x$  de la membrane n'influence ni la longueur d'onde ni la contrainte critique de compression ; seul le nombre d'oscillations augmente lorsque la longueur  $L_x$  augmente.
- La longueur d'onde  $l^{wr}$  dépend des caractéristiques géométriques macroscopiques et du coefficient de dilation mais elle est indépendante des constantes élastiques.

Nous allons à présent étudier, dans la section suivante, l'implémentation numérique du modèle réduit dans un code éléments finis (MATLAB).

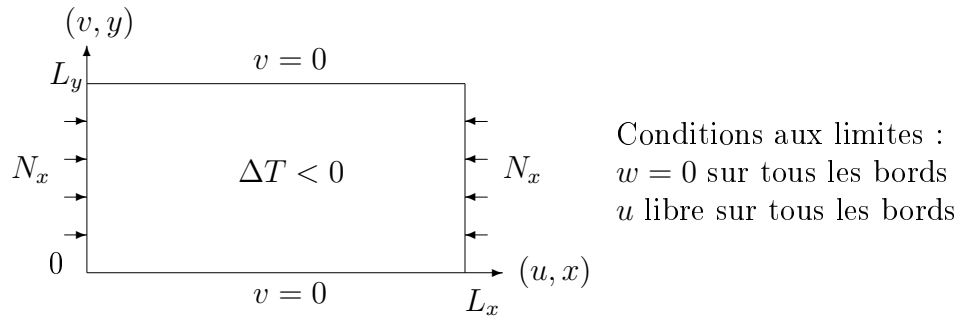


FIGURE 3.2 – Membrane sous chargement biaxial : dimensions et conditions aux limites de type encastrement appliquées au modèle réduit de la membrane.

### 3.4.2 Implémentation numérique

Dans cette section, nous développons une approche numérique du plissement thermo-mécanique dans les membranes minces. Il s'agit ici d'implémenter les équations du modèle réduit de la membrane dans le code de calcul MATLAB. Nous commençons d'abord par établir la forme générale du problème non linéaire. Ensuite nous procédons à la discrétisation du problème et son implémentation numérique avec la méthode asymptotique numérique (MAN) adoptée comme méthode de pilotage.

#### 3.4.2.1 Forme générale du problème non linéaire

La procédure permettant de retrouver la forme générale du problème non linéaire est similaire au développement mené dans la section 2.4.2 du chapitre 2. Nous partons de la formulation faible du modèle macroscopique définie par l'équation (2.69). En considérant les équations (3.7b) et (2.70), le vecteur des efforts normaux dans le cas du problème thermo-mécanique peut s'écrire :

$$\{N\} = [\mathbf{L}^m] \left( [\mathbf{H}] + \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\theta)] \right) \{\theta\} - [\mathbf{L}^m] \{\varepsilon^{th}\} \quad (3.14)$$

Dans le cas thermo-mécanique, le vecteur  $\{\theta\}$  s'écrit :

$$\{\theta\} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \alpha \Delta T \right\rangle \quad (3.15)$$

Les matrices de passage  $[H]$  et  $[A(\theta)]$  s'écrivent alors :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[A(\theta)] = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 w & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Le vecteur  $\{\varepsilon^{th}\}$  peut se réécrire en fonction du vecteur  $\{\theta\}$  en introduisant une matrice de transformation  $[H^{th}]$  tel que :

$$\{\varepsilon^{th}\} = [H^{th}] \{\theta\} \quad (3.18)$$

avec

$$[H^{th}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

En développant le premier terme du premier membre de l'équation (2.69) et en considérant les équations (3.14) et (3.18), nous pouvons écrire :

$$({}^t[H] + {}^t[A(\theta)]) \{N\} = ({}^t[H] + {}^t[A(\theta)]) [L^m] \left( [H] + \frac{1}{2} [A(\theta)] \right) \{\theta\} - ({}^t[H] + {}^t[A(\theta)]) [L^m] [H^{th}] \{\theta\} \quad (3.20)$$

En remplaçant l'équation (3.20) dans l'équation (2.69), nous pouvons déduire la formulation faible du modèle macroscopique du problème thermo-mécanique :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} \langle \delta \theta \rangle \left( ({}^t[H] + {}^t[A(\theta)]) [L^m] \left( [H] + \frac{1}{2} [A(\theta)] \right) + {}^t[T_\beta] [L^f] [T_\beta] \right) \{\theta\} dx dy - \\ & \iint_{\Omega_0} \langle \delta \theta \rangle {}^t[A(\theta)] [L^m] [H^{th}] \{\theta\} dx dy = \\ & \lambda \iint_{\Omega_0} (\delta \mathbf{u} F_{\mathbf{u}} + \delta w F_w) dx dy + \iint_{\Omega_0} \langle \delta \theta \rangle {}^t[H] [L^m] \{\varepsilon^{th}\} dx dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le second terme dans le deuxième membre de l'équation (3.21) constitue la forme variationnelle de l'énergie thermique due à la variation de température. Ce terme étant indépendant du gradient des déformations dans sa forme faible, il contribue alors à la somme des travaux des efforts extérieurs appliqués à la membrane. Si nous considérons un chargement thermique de la membrane, autrement dit nous appliquons un facteur de charge  $\lambda$  à la variation de température, nous pouvons alors déduire de l'équation (3.21) la forme générale du problème non linéaire pour le plissement thermique [Singha et al., 2001] :

$$([K_u(U)] + \lambda [K_{th}(U)]) \{U\} = \lambda (\{F\} + \{F_{th}\}) \quad (3.22)$$

où  $[K_u(U)]$  est la matrice de rigidité dépendant uniquement des déplacements,  $[K_{th}(U)]$  est la matrice de rigidité géométrique due à l'effet thermique, encore appelé matrice de couplage thermo-mécanique et  $\{F_{th}\}$  représente le vecteur-force des forces fictives exercées sur la membrane pour causer la déformation thermique due à la variation de température, avec :

$$[K_u(U)] = \iint_{\Omega_0} \left( ({}^t[\mathbf{H}] + {}^t[\mathbf{A}(\theta)]) [\mathbf{L}^m] \left( [\mathbf{H}] + \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\theta)] \right) + {}^t[\mathbf{T}_\beta] [\mathbf{L}^f] [\mathbf{T}_\beta] \right) dx dy \quad (3.23)$$

$$[K_{th}(U)] = - \iint_{\Omega_0} {}^t[\mathbf{A}(\theta)] [\mathbf{L}^m] [H^{th}] dx dy \quad (3.24)$$

et

$$\{F_{th}\} = \iint_{\Omega_0} {}^t[\mathbf{H}] [\mathbf{L}^m] \{\varepsilon^{th}\} dx dy \quad (3.25)$$

### 3.4.2.2 Discrétisation du problème par éléments finis

Le problème non linéaire défini par l'équation (3.21) est discrétisé par la méthode des éléments finis. La discrétisation se fait à l'aide d'élément plaque quadrangulaire à 8 nœuds noté Q8 (figure 3.3).

Pour décrire les déplacements de l'élément, nous introduisons des fonctions d'interpolation  $N_i$  ( $i$  étant l'indice du nœud) encore appelées fonctions de forme. Les déplacements aux nœuds

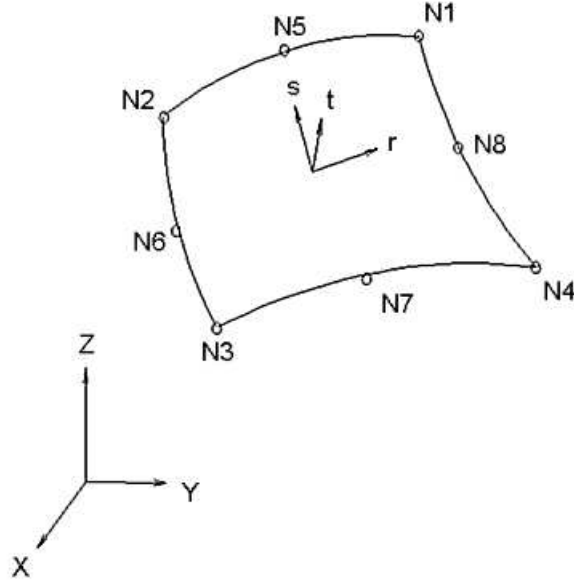


FIGURE 3.3 – Élément plaque quadrangulaire Q8

s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u = \langle \mathcal{N}_u \rangle \{Q\}^e = \langle \mathcal{N}_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ \mathcal{N}_8 \ 0 \ 0 \rangle \{Q\}^e \\ v = \langle \mathcal{N}_v \rangle \{Q\}^e = \langle 0 \ \mathcal{N}_1 \ 0 \ \dots \ 0 \ \mathcal{N}_8 \ 0 \rangle \{Q\}^e \\ w = \langle \mathcal{N}_w \rangle \{Q\}^e = \langle 0 \ 0 \ \mathcal{N}_1 \ \dots \ 0 \ 0 \ \mathcal{N}_8 \rangle \{Q\}^e \end{cases} \quad (3.26)$$

où  $\{Q\}^e$  est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément  $e$ . En considérant le système (3.26), nous pouvons écrire le vecteur gradient du déplacement élémentaire  $\{\theta\}^e$  en fonction de la matrice gradient des fonctions de forme  $[G]$  :

$$\{\theta\}^e = [G] \{Q\}^e \quad (3.27)$$

avec :

$$[G] = {}^t \left\langle \frac{\partial \mathcal{N}_u}{\partial x} \ \frac{\partial \mathcal{N}_u}{\partial y} \ \frac{\partial \mathcal{N}_v}{\partial x} \ \frac{\partial \mathcal{N}_v}{\partial y} \ \mathcal{N}_w \ \frac{\partial \mathcal{N}_w}{\partial x} \ \frac{\partial \mathcal{N}_w}{\partial y} \right\rangle \quad (3.28)$$

Ainsi, la forme discrétisée de la matrice de rigidité élémentaire s'écrit, à partir de l'équation (3.23) :

$$[K_u(U)]^e = \iint_{\Omega_0} \left( ({}^t[B_l] + {}^t[B_{nl}]) [L^m] \left( [B_l] + \frac{1}{2} [B_{nl}] \right) + {}^t[B_f] [L^f] [B_f] \right) dx dy \quad (3.29)$$

où :

$$[B_l] = [H] [G] \quad (3.30)$$

$$[B_{nl}] = [A(\theta(q))] [G] \quad (3.31)$$

$$[B_f] = [T_\beta] [G] \quad (3.32)$$

Nous pouvons déduire également la forme discrétisée de la matrice de rigidité géométrique élémentaire :

$$[K_{th}(U)]^e = \iint_{\Omega_0} {}^t[B_{nl}] [\mathbf{L}^m] [H^{th}] [G] dx dy \quad (3.33)$$

### 3.4.2.3 Implémentation de la MAN

Avant de résoudre le problème non linéaire du plissement thermo-mécanique par la MAN, nous allons mettre les équations du modèle macroscopique de la membrane sous une forme discrétisée globale :

$$\sum_e \langle \delta Q \rangle^e \iint_{\Omega_0} ({}^t[B_m] \{N\} + {}^t[B_f] [\mathbf{L}^f] [B_f] \{Q\}^e) dx dy = \lambda \sum_e \langle \delta Q \rangle^e \{F\}^e \quad (3.34)$$

et

$$\{N\} = [\mathbf{L}^m] \left( [B_l] + \frac{1}{2} [B_{nl}] \right) \{Q\}^e - [\mathbf{L}^m] \{\varepsilon^{th}\}^e \quad (3.35)$$

avec

$$[B_m] = [B_l] + [B_{nl}] \quad (3.36)$$

La MAN est une méthode de continuation qui consiste à représenter une branche de solutions par des morceaux branches (voir [Cochelin et al., 2007]). Nous supposons que la solution initiale est connue à un point de coordonnées  $q^j$ . Selon la technique de perturbation, nous calculons la solution approchée de la branche suivante de solution ( $j + 1$ ) en représentant les inconnus de l'équation (3.34) sous forme de séries entières tronquées à l'ordre *Nordre* :

$$N^{j+1} = N^j + \sum_{p=1}^{Nordre} a^p N_p \quad (3.37)$$

$$Q^{j+1} = Q^j + \sum_{p=1}^{Nordre} a^p Q_p \quad (3.38)$$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j + \sum_{p=1}^{Nordre} a^p \lambda_p \quad (3.39)$$

où  $a$  est le paramètre de chemin défini par :

$$a = \langle Q_1 \rangle \{Q^{j+1} - Q^j\} + \lambda_1 (\lambda^{j+1} - \lambda^j) \quad (3.40)$$

La valeur maximale du paramètre de chemin  $a$  est adoptée selon les mêmes principes que dans [Cochelin et al., 2007] :

$$a_{max} = \left( \epsilon \frac{\|Q_1\|}{\|Q_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (3.41)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre de précision défini par l'utilisateur.

En remplaçant les équations (3.37), (3.38) et (3.39) dans les équations (3.34) et (3.35), nous obtenons un système d'équations linéaires à chaque ordre de développement. Ainsi, à l'ordre 1, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_e \langle \delta Q \rangle^e \iint_{\Omega_0} ({}^t[B_m(Q^j)] \{N_1\} + {}^t[B_{nl}(Q_1)] \{N^j\} + {}^t[B_f] [L^f] [B_f] \{Q_1\}^e) dx dy = \\ \sum_e \langle \delta Q \rangle^e \lambda_1 \{F\}^e \\ \{N_1\} = [L^m] [B_m(Q^j)] \{Q_1\}^e - \lambda_1 [L^m] \{\varepsilon^{th}\}^e \\ \{N^j\} = [L^m] \left( [B_l] + \frac{1}{2} [B_{nl}(Q^j)] \right) \{Q^j\}^e - \lambda^j [L^m] \{\varepsilon^{th}\}^e \\ 1 = \langle Q_1 \rangle \{Q_1\} + \lambda_1^2 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Le terme  ${}^t[B_{nl}(Q_1)] \{N^j\}$  peut se réécrire :

$${}^t[B_{nl}(Q_1)] \{N^j\} = {}^t[G] [\hat{N}^j] [G] \{Q_1\}^e \quad (3.43)$$

où  $[\hat{N}^j]$  est la matrice qui transforme le terme non linéaire géométrique en une forme simple

d'utilisation avec la MAN (voir [Cochelin et al., 2007, Huang et al., 2015]) :

$$[\hat{N}^j] = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \hat{N}_x^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{N}_x^j & \hat{N}_{xy}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{N}_{xy}^j & \hat{N}_y^j \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Nous déduisons alors du système (3.42), la matrice de rigidité tangente élémentaire  $[k_t(U^j)]$  et le vecteur force thermique élémentaire  $\{f_{th}\}$  :

$$[k_t(U^j)] = \iint_{\Omega_0} \left( {}^t[B_m(Q^j)] [\mathbf{L}^m] [B_m(Q^j)] + {}^t[G] [\hat{N}^j] [G] + {}^t[B_f] [\mathbf{L}^f] [B_f] \right) dx dy \quad (3.45)$$

$$\{f_{th}\} = {}^t[B_m(Q^j)] [\mathbf{L}^m] \{\varepsilon^{th}\}^e \quad (3.46)$$

Après assemblage, nous déduisons un problème linéaire d'ordre 1 sous la forme :

$$[K_t(U^j)] \{Q_1\} = \lambda_1 \{F + F_{th}\} \quad (3.47)$$

Nous développons à présent les équations (3.34) et (3.35) à l'ordre  $p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_e \langle \delta Q \rangle^e \iint_{\Omega_0} \left( {}^t[B_m(Q^j)] \{N_p\} + {}^t[G] [\hat{N}^j] [G] \{Q_p\} + {}^t[B_f] [\mathbf{L}^f] [B_f] \{Q_p\}^e \right) dx dy = \\ \sum_e \langle \delta Q \rangle^e \lambda_p \{F\}^e + \{F_{int_p}^{nl}\}^e \\ \{N_p\} = [\mathbf{L}^m] [B_m(Q^j)] \{Q_p\}^e - \lambda_p [\mathbf{L}^m] \{\varepsilon^{th}\}^e + \{N_p^{nl}\}^e \\ 0 = \langle Q_1 \rangle \{Q_p\} + \lambda_1 \lambda_p \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Nous noterons l'apparition de termes non linéaires dans le système d'équations précédent (3.48).

Ces termes non linéaires dépendent des déplacements, des contraintes et des déformations ther-



miques aux ordres antérieurs et s'expriment grâce à la formule de récurrence :

$$\{F_{int_p}^{nl}\} = -\sum_{r=1}^{p-1} {}^t[B_{nl}(Q_{p-r})] \{N_r\} \quad (3.49)$$

$$\{N_p^{nl}\} = [L^m] \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} [B_{nl}(Q_{p-r})] \{Q_r\} \quad (3.50)$$

Finalement, en reportant la loi de comportement défini par  $\{N_p\}$  dans l'équation des puissances virtuelles du système (3.48), on voit apparaître la même matrice de rigidité tangente élémentaire qu'à l'ordre 1 défini dans l'équation (3.47) :

$$[K_t(U^j)] \{Q_p\} = \lambda_p \{F + F_{th}\} + \{F_p^{nl}\} \quad (3.51)$$

où :

$$\{F_p^{nl}\} = \{F_{int_p}^{nl}\} - \iint_{\Omega_0} {}^t[B_{nl}(Q^j)] \{N_p^{nl}\} dx dy \quad (3.52)$$

La variation de température est obtenue à chaque pas de calcul à partir de l'équation suivante :

$$(\Delta T)^{j+1} = \lambda^j (\Delta T)_0 + a\lambda_1 (\Delta T)_0 + a^2\lambda_2 (\Delta T)_0 + \dots + a^p\lambda_p (\Delta T)_0 \quad (3.53)$$

où  $(\Delta T)_0$  est la variation de température unitaire définie arbitrairement.

## 3.5 Exemples numériques

Les exemples conduits dans cette section sont basés sur l'étude du plissement d'une membrane mince. Ces exemples constituent une caractérisation du comportement de la membrane soumise à un chargement thermo-mécanique. L'objectif ici est de montrer l'efficacité et la robustesse de la méthode de Fourier développée dans les sections précédentes par rapport aux méthodes dites "directes" que nous avons décrites dans le chapitre 1. Les équations d'équilibre du modèle réduit sont implémentées dans le code de calcul MATLAB et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) a été utilisée pour la résolution des équations non-linéaires. À des fins de validation et de références, le modèle complet de la membrane est modélisé à l'aide du logiciel commercial d'éléments finis ABAQUS. Pour cela, nous utilisons le module ABAQUS/Standard qui

a recours à un schéma d'intégration implicite, idéal pour la résolution des problèmes statiques non linéaires. Dans ABAQUS/Standard, seules les équations d'équilibre du modèle complet de la membrane sont considérées, et ces équations non-linéaires sont résolues suivant la méthode de la longueur d'arc (voir chapitre 1, section 1.4.3.2). Nous utilisons les mêmes éléments de discrétisation que dans les exemples numériques du chapitre 2 : le modèle réduit a été discrétisé à l'aide d'éléments rectangulaires quadratiques à 8 noeuds dans MATLAB (élément Q8, figure 3.3) et le modèle complet étudié dans ABAQUS/Standard a été discrétisé à l'aide d'éléments coques quadratiques à 8 noeuds avec intégration réduite (S8R5, voir figure 2.4 dans le chapitre 2, section 2.5).

Deux principaux exemples sont présentés dans cette section. Le premier exemple est consacré à l'étude d'une membrane soumise à un chargement "biaxial". On désigne par chargement biaxial, l'application d'un chargement thermo-mécanique qui génère des contraintes mécaniques dans deux directions différentes. Il s'agit ici d'un chargement thermique pur suivi d'une compression uniforme. Le chargement thermique, couplé à des conditions aux limites spécifiques (voir figure 3.2), crée une contrainte de traction dans une direction donnée. La compression uniforme se fait alors dans la direction perpendiculaire à la contrainte de traction induite par le chargement thermique. Notons que pour ce cas de chargement biaxial, il existe une solution analytique qui a été présentée dans la section précédente (section 3.4.1). Dans le deuxième exemple, le cas d'un chargement "uniaxial" est étudié. La membrane est alors soumise à un chargement thermique pur avec des conditions aux limites spécifiques qui génèrent des contraintes de traction uniaxiale dans la membrane. Nous explorerons différents aspects de ce cas à travers des études paramétriques en prenant en compte la longueur d'onde, la charge de pré-tension, le rapport d'aspect géométrique et la répartition non-uniforme de la variation de température.

### 3.5.1 Membrane sous chargement biaxial

#### 3.5.1.1 Exemple de validation

L'analyse numérique d'une membrane mince soumise à un chargement biaxial est faite dans cet exemple. Ce test constitue un exemple de validation numérique de la résolution analytique présentée dans la section 3.4.1. Le chargement s'effectue en deux étapes. D'abord, on applique un chargement thermique caractérisé par une baisse de température uniforme dans la membrane et

ensuite, on maintient la température constante et on applique un effort de compression comme indiquée sur la figure 3.2. Les conditions aux limites sont présentées dans le tableau 3.1. Ce type de chargement peut être comparé au refroidissement d'une membrane mince lors du processus de transport de bande dans l'industrie sidérurgique ou textile.

L'objectif dans cet exemple est de montrer la validité de la méthode des séries de Fourier à travers la résolution analytique et numérique. Notons que dans cet exemple, nous présentons deux méthodes numériques, l'une avec le modèle complet de la membrane pour une résolution à l'aide de la méthode de la longueur d'arc, et l'autre avec le modèle réduit pour une résolution à l'aide de la MAN implémenté dans MATLAB. La résolution du modèle complet est considérée comme une solution de référence tandis que la solution analytique et la résolution du modèle réduit sont issues de l'application de la méthode des séries de Fourier. Les caractéristiques géométriques et les propriétés du matériau de la membrane sont données dans le tableau 3.2.

TABLE 3.2 – Dimensions de la membrane et propriétés du matériau

Dimensions et propriétés	
Longueur	$L_x = 400$ mm
Largeur	$L_y = 200$ mm
Épaisseur	$t = 0.05$ mm
Module d'Young	$E = 70000$ N/mm <sup>2</sup>
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Coefficient d'expansion thermique	$\alpha = 23.10^{-6}$ /K at 20° C

Pour cette étude, différentes valeurs du chargement thermique sont prises en compte dans l'étape du chargement thermique :  $\Delta T = \{-1, -10, -20, -50\}$  L'analyse numérique consiste à déterminer la charge critique de compression à laquelle les plissements apparaissent dans la membrane. Les résultats numériques sont comparés aux résultats analytiques calculés à partir des équations (3.12a) et (3.12b).

#### a) Effet du Maillage.

On se propose d'abord d'étudier l'effet du maillage sur le plissement de la membrane (bifurcation et comportement post-critique). À titre d'exemple, la température retenue ici est  $\Delta T = -10^\circ C$ . Nous avons pour cela utilisé un maillage grossier ( $4 \times 8$  éléments) et un maillage fin ( $40 \times 200$  éléments). La figure 3.4 représente les courbes de réponse pour les deux maillages

et les figures 3.5a et 3.5b celles des déformées. Dans le cas du maillage grossier, on remarque que la bifurcation est plus élevée par rapport à celle du maillage fin. Pour le maillage fin, la charge critique est  $N_x^{crit} = 0,026$  N/mm. Pour le maillage grossier, la charge critique est plus élevée, de l'ordre  $N_x^{crit} = 0,029$  N/mm. De ce fait, les courbes de réponse post-critique sont différentes. On remarque aussi sur la figure 3.5a que les plissements dans le maillage grossier ne sont pas bien représentés. Par la suite, dans le modèle complet, seuls les maillages fins permettant de bien représenter les plissements sont retenus et comparés aux résultats du modèle réduit.

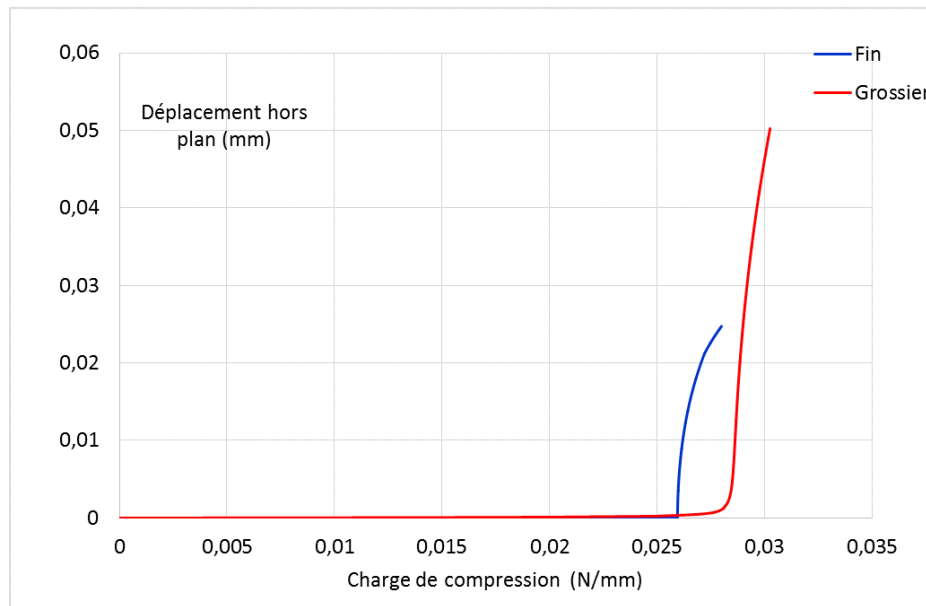
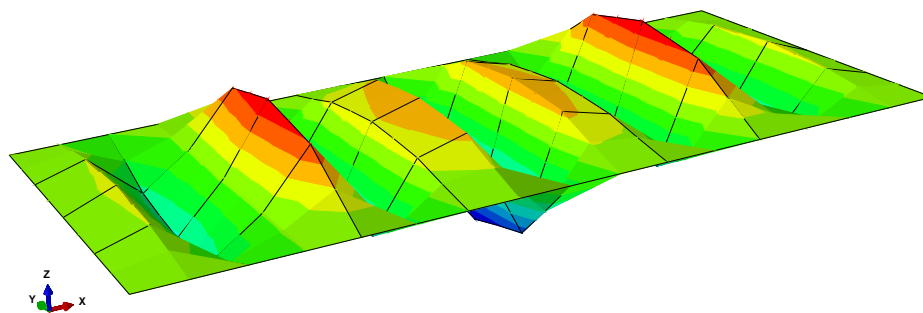
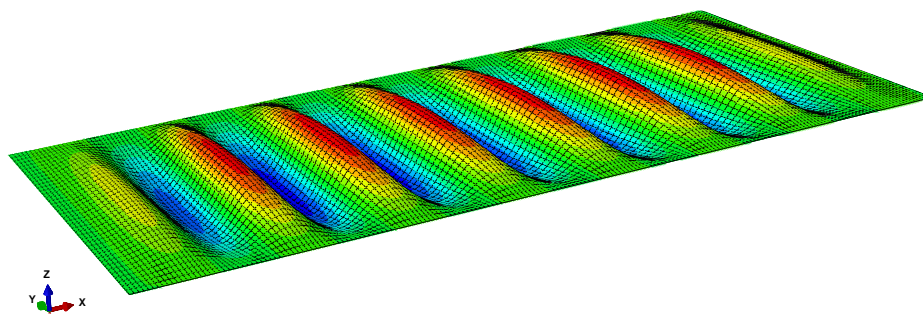


FIGURE 3.4 – Comparaison des courbes de réponse des maillages fin et grossier dans le modèle complet



(a) Maillage grossier



(b) Maillage fin

FIGURE 3.5 – Déformée de la membrane pour différents conditions aux bords (modèle réduit)

### b) Comparaison modèle complet et modèle réduit

Les tests suivants consistent à étudier l'influence du maillage dans le modèle complet et le modèle réduit sur la bifurcation et le comportement post-critique de la membrane. On étudiera en particulier le temps de calcul et la densité du maillage. Nous considérons différentes variations de température dans cette étude de convergence de maillage (voir tableau 3.4). Soit  $n_y$  et  $n_x$  le nombre d'éléments dans les directions  $y$  et  $x$ , respectivement. Le tableau 3.3 présente les valeurs de  $n_y$  et  $n_x$  prises en compte pour les deux modèles de membrane. Les résultats issus de la résolution analytique sont présentés dans le tableau 3.4.

TABLE 3.3 – Nombre d'éléments pour l'étude de convergence de maillage

Modèle complet		Modèle réduit	
$n_y$	$n_x$	$n_y$	$n_x$
20	50	10	4
40	100	20	6
-	200	-	8

TABLE 3.4 – Résultats analytiques pour le chargement biaxial

Température $\Delta T$ ( $^{\circ}C$ )	Charge critique $N_x^{crit}$ (N/mm)	Longueur d'onde $l^{wr}$ (mm)
-1	$7.980 \cdot 10^{-3}$	89.0466
-10	$2.523 \cdot 10^{-2}$	50.0746
-20	$3.568 \cdot 10^{-2}$	42.1075
-50	$5.642 \cdot 10^{-2}$	33.4869

La longueur d'onde calculée analytiquement à partir de l'équation (3.13) est utilisée pour la simulation numérique du modèle réduit. Nous déterminons également la longueur d'onde observée dans le cas du modèle complet afin de la comparer au résultat analytique. Par ailleurs, le temps de calcul de la simulation numérique des deux modèles est aussi relevé. Pour chaque calcul, nous fixons une charge limite de compression  $|N_x^{lim}|$ , prise comme valeur maximale, en tenant compte de la charge critique déterminée analytiquement (tableau 3.4), ceci afin d'optimiser le temps de calcul nécessaire pour la complétion de la simulation. Le tableau 3.5 présente les caractéristiques de l'ordinateur sur lequel sont effectués les calculs. Rappelons cependant que ces données (temps de calcul) sont dépendantes de la charge des processeurs (CPU) au

moment des calculs.

TABLE 3.5 – Caractéristiques de l’ordinateur utilisé pour les calculs

Désignation	Valeur
Type de CPU	Intel Core i7-4970K
Fréquence CPU (Giga Hertz)	4.5
Nombre de CPU	4
Mémoire vive (Giga Octets)	16

Les tableaux 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9 montrent les résultats obtenus pour différentes variations de température. Ces résultats prennent en compte la charge critique de plissement de la membrane et le temps de calcul pour les deux modèles de membrane, ainsi que la longueur d’onde observée dans la simulation du modèle complet. On peut déjà se rendre compte de la différence entre les temps de calcul. Passant du modèle complet au modèle réduit, le temps de calcul est quasiment divisé par 10 dans la plupart des cas. Ce résultat est en adéquation avec le nombre d’éléments de maillage utilisé dans chaque modèle. On passe ainsi de 1000-8000 éléments pour le modèle complet à 40-160 éléments pour le modèle réduit, ce qui correspond à une réduction de maillage d’au moins 96 %.

TABLE 3.6 – Résultats pour  $\Delta T = -1$  avec  $|N_x^{lim}| = 0.009$  N/mm

(a) Modèle complet - ABAQUS

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Longueur d’onde $l^{wr}$ (mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$
50	$8.70737 \cdot 10^{-3}$	$8.70651 \cdot 10^{-3}$	87.9972	87.9972	1061	2174
100	$8.70562 \cdot 10^{-3}$	$8.70475 \cdot 10^{-3}$	87.9972	87.9972	2155	4702
200	$8.70515 \cdot 10^{-3}$	$8.70426 \cdot 10^{-3}$	87.9972	85.9972	4555	10377

(b) Modèle réduit - MATLAB

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 10$	$n_y = 20$	$n_y = 10$	$n_y = 20$
4	$8.41723 \cdot 10^{-3}$	$8.42279 \cdot 10^{-3}$	100.48	166.67
6	$8.41390 \cdot 10^{-3}$	$8.42374 \cdot 10^{-3}$	131.69	240.92
8	$8.41218 \cdot 10^{-3}$	$8.42232 \cdot 10^{-3}$	166.68	317.96

TABLE 3.7 – Résultats pour  $\Delta T = -10$  avec  $|N_x^{lim}| = 0.028$  N/mm

(a) Modèle complet - ABAQUS

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Longueur d'onde $l^{wr}$ (mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$
50	$2.59526 \cdot 10^{-2}$	$2.59518 \cdot 10^{-2}$	47.9854	47.9854	1738	2596
100	$2.59433 \cdot 10^{-2}$	$2.59424 \cdot 10^{-2}$	51.9842	51.9842	2900	4910
200	$2.59408 \cdot 10^{-2}$	$2.59398 \cdot 10^{-2}$	49.9848	49.9848	3796	9548

(b) Modèle réduit - MATLAB

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 10$	$n_y = 20$	$n_y = 10$	$n_y = 20$
4	$2.55847 \cdot 10^{-2}$	$2.56470 \cdot 10^{-2}$	109.78	178.77
6	$2.55943 \cdot 10^{-2}$	$2.56374 \cdot 10^{-2}$	142.11	258.39
8	$2.55960 \cdot 10^{-2}$	$2.56319 \cdot 10^{-2}$	178.08	343.28

TABLE 3.8 – Résultats pour  $\Delta T = -20$  avec  $|N_x^{lim}| = 0.038$  N/mm

(a) Modèle complet - ABAQUS

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Longueur d'onde $l^{wr}$ (mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$
50	$3.63469 \cdot 10^{-2}$	$3.63468 \cdot 10^{-2}$	39.9756	39.9756	587	803
100	$3.63461 \cdot 10^{-2}$	$3.63460 \cdot 10^{-2}$	39.9756	39.9756	972	1667
200	$3.63459 \cdot 10^{-2}$	$3.63458 \cdot 10^{-2}$	41.9744	41.9744	1726	2788

(b) Modèle réduit - MATLAB

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 10$	$n_y = 20$	$n_y = 10$	$n_y = 20$
4	$3.59640 \cdot 10^{-2}$	$3.60429 \cdot 10^{-2}$	106.74	174.67
6	$3.59621 \cdot 10^{-2}$	$3.59971 \cdot 10^{-2}$	140.11	249.16
8	$3.59600 \cdot 10^{-2}$	$3.60203 \cdot 10^{-2}$	176.97	335.55



TABLE 3.9 – Résultats pour  $\Delta T = -50$  avec  $|N_x^{lim}| = 0.06$  N/mm

(a) Modèle complet - ABAQUS

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Longueur d'onde $l^{wr}$ (mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$	$n_y = 20$	$n_y = 40$
50	$5.69972 \cdot 10^{-2}$	$5.69972 \cdot 10^{-2}$	31.9516	31.9516	668	1038
100	$5.69963 \cdot 10^{-2}$	$5.69963 \cdot 10^{-2}$	31.9516	31.9516	1132	1908
200	$5.69960 \cdot 10^{-2}$	$5.69959 \cdot 10^{-2}$	33.9486	33.9486	2081	3572

(b) Modèle réduit - MATLAB

$n_x$	Charge critique $ N_x^{crit} $ (N/mm)		Temps de calcul (s)	
	$n_y = 10$	$n_y = 20$	$n_y = 10$	$n_y = 20$
4	$5.65642 \cdot 10^{-2}$	$5.66910 \cdot 10^{-2}$	112.13	178.90
6	$5.65400 \cdot 10^{-2}$	$5.66596 \cdot 10^{-2}$	146.17	259.52
8	$5.65600 \cdot 10^{-2}$	$5.66580 \cdot 10^{-2}$	182.57	343.56

Concernant la charge critique de plissement, on observe à peu près la même valeur pour chaque cas de calcul dans les deux modèles, ce qui nous permet de dire que de façon globale, les deux modèles donnent des résultats similaires. Après analyse des résultats obtenus, nous pouvons conclure que les maillages  $40 \times 100$  pour le modèle complet et  $8 \times 20$  pour le modèle réduit donnent une bonne optimisation du temps de calcul et des résultats presque similaires.

La figure 3.6 montre la déformée de la membrane pour une variation de température de  $30$  °C et avec une contrainte de compression  $\sigma_x = -0.99$  N/mm<sup>2</sup>.

### 3.5.1.2 Conditions aux bords

Dans les tests précédemment effectués, nous avons pris comme conditions aux bords de la membrane le cas *encastré*. Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence des conditions aux bords sur la charge critique de plissement et le mode de plissement de la membrane. On considère une membrane rectangulaire de dimensions  $400 \times 200$  soumise à un chargement biaxial : un chargement thermique  $\Delta T = -20$  °C suivi d'une compression uniforme (voir figure 3.2). Nous prenons en compte successivement deux types de conditions aux bords : une membrane encastrée sur les bords d'application de l'effort de compression puis une membrane en appui simple sur les bords d'application de l'effort de compression. Dans l'annexe 3.6, nous

$$\sigma_x = -0.98806 \text{ N/mm}^2$$

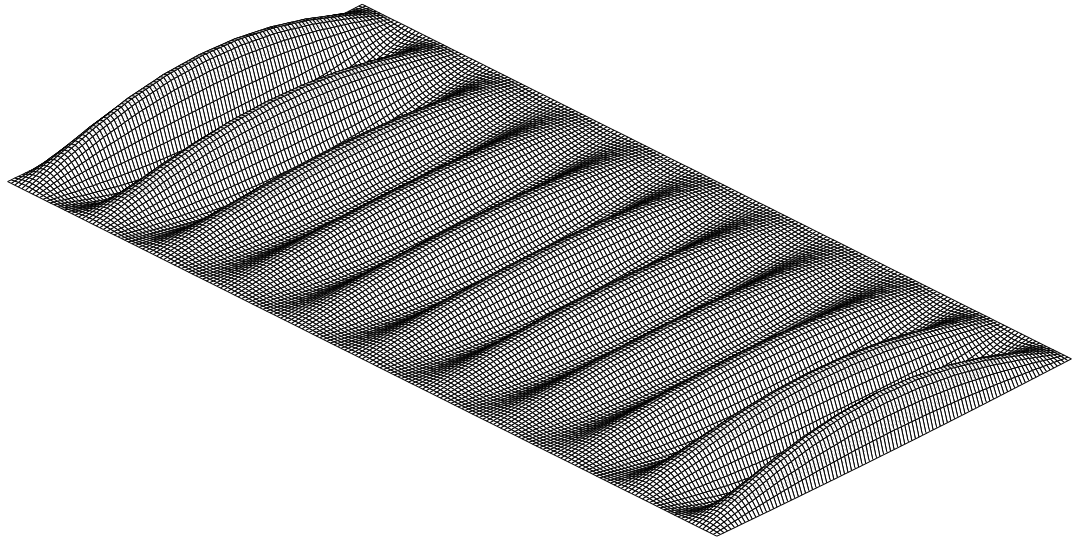


FIGURE 3.6 – Déformée de la membrane en post-bifurcation pour  $\Delta T = -30^\circ\text{C}$  (modèle réduit)

présentons le mode d'application des conditions aux limites macroscopiques pour le modèle réduit en partant du modèle complet. Ainsi, pour simuler une membrane encastree sur le modèle réduit, nous bloquons les déplacements  $w$  sur les bords et pour une membrane en appui simple, les déplacements  $w$  sont libres [Liu et al., 2012, Mhada et al., 2012].

La figure 3.7 présente les courbes de bifurcation obtenues où on constate que l'amplitude maximale de la membrane en appui simple augmente beaucoup plus rapidement que celle de la membrane encastree. Par ailleurs, la charge critique de bifurcation est approximativement semblable. Les figures 3.8a et 3.8b montrent les déformées de la membrane pour une contrainte de compression  $\sigma_x = 0.9 \text{ N/mm}^2$ . On remarque bien l'effet des conditions aux bords du type *encastrement* avec une amplitude quasi nulle près des bords courts (figure 3.8a) et du type *appui simple* avec une amplitude plus importante près des bords courts (figure 3.8b). On peut donc conclure que les conditions aux bords ont une influence significative sur le mode de plissement de la membrane sous chargement biaxial.

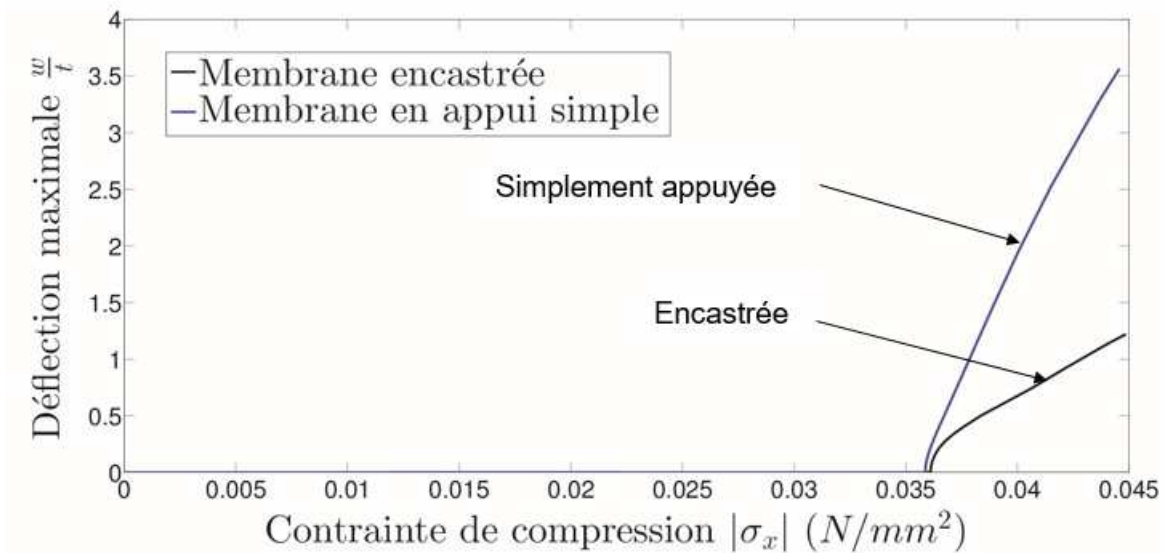


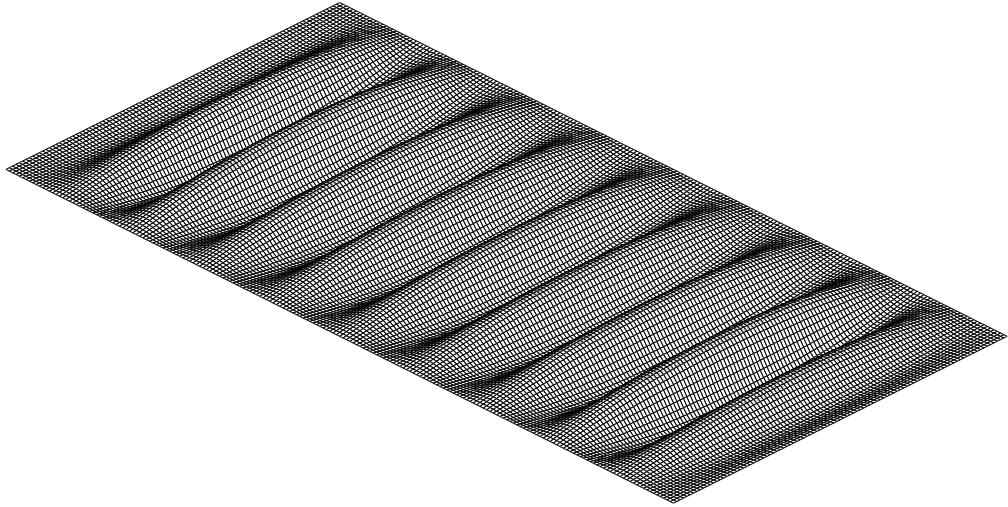
FIGURE 3.7 – Courbes de bifurcation en fonction des conditions aux bords (modèle réduit)

### 3.5.2 Membrane sous chargement uniaxial

Dans cet exemple, nous considérons une membrane mince isotrope soumise à une baisse globale et uniforme de la température. Nous gardons les mêmes dimensions et caractéristiques de la membrane que pour le cas précédent (tableau 3.2). De manière générale, si la membrane est en appuis simples ou encastrement sur tous ses bords, le chargement thermique provoque un phénomène de flambage global (voir [Jones, 2006]). Pour obtenir le phénomène de plissement, des conditions aux limites spécifiques doivent être prises en compte. Ainsi, deux bords opposés de la membrane sont encastres et les autres bords sont libres (figure 3.9). Une baisse uniforme de la température dans la membrane induit des contraintes de traction  $S_{xx}$  le long de l'axe perpendiculaire aux bords bloqués (figure 3.10a). Sous l'effet Poisson, des contraintes de compression  $S_{yy}$  apparaissent au centre de la membrane dans la direction parallèle aux bords bloqués (figure 3.10b). Ces contraintes de compression sont de relativement faibles (environ 4% de  $S_{xx}$ ) par rapport aux contraintes de traction induites par le chargement thermique. En effet, la figure 3.11 montre le rapport entre les contraintes de traction et de compression induites au centre de la membrane.

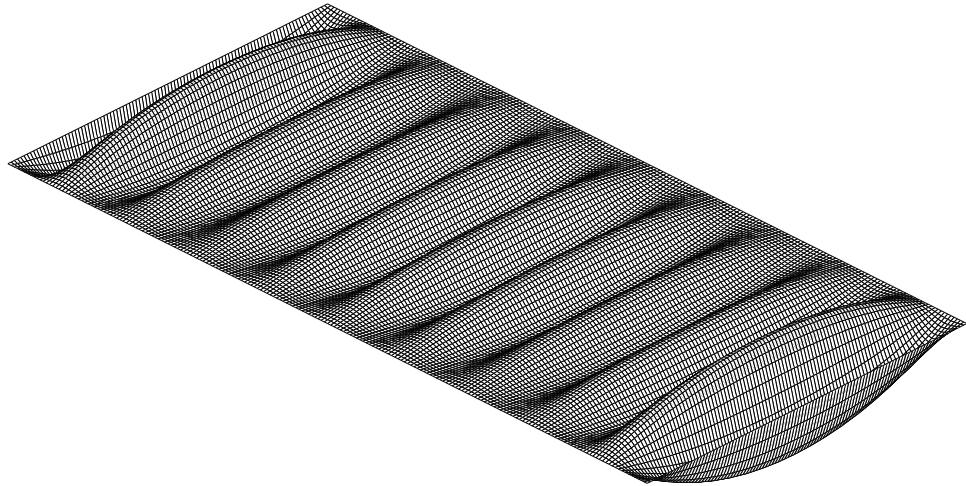
De nombreux tests ont été conduits pour étudier le phénomène de plissement. D'abord nous effectuons une étude de convergence de maillage pour étudier l'effet du maillage sur la température critique de plissement et sur le mode de plissement. Ensuite nous effectuons des

$$\sigma_x = -0.89719 \text{ N/mm}^2$$



(a) Membrane encastrée

$$\sigma_x = -0.89138 \text{ N/mm}^2$$



(b) Membrane en appui

FIGURE 3.8 – Déformée de la membrane pour différents conditions aux bords (modèle réduit)

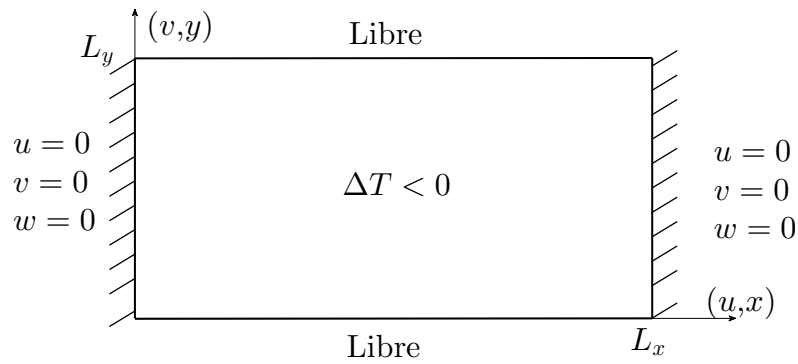


FIGURE 3.9 – Chargement uniaxial de la membrane : conditions aux limites de type encastrement appliquées au modèle réduit.

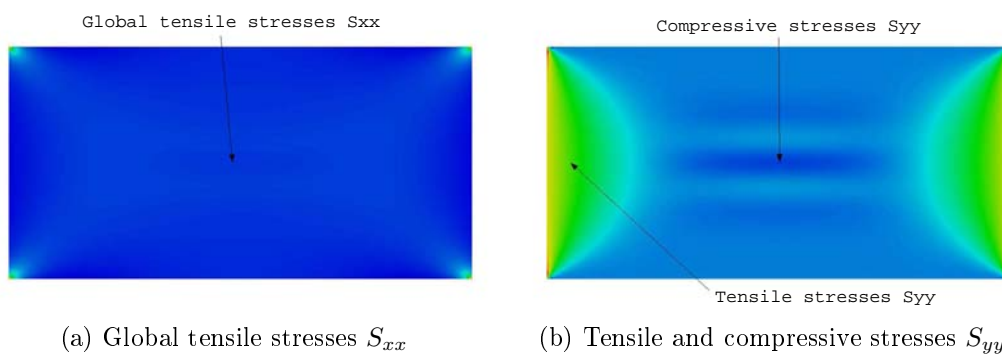


FIGURE 3.10 – Distribution de contraintes au voisinage du point de bifurcation (modèle complet)

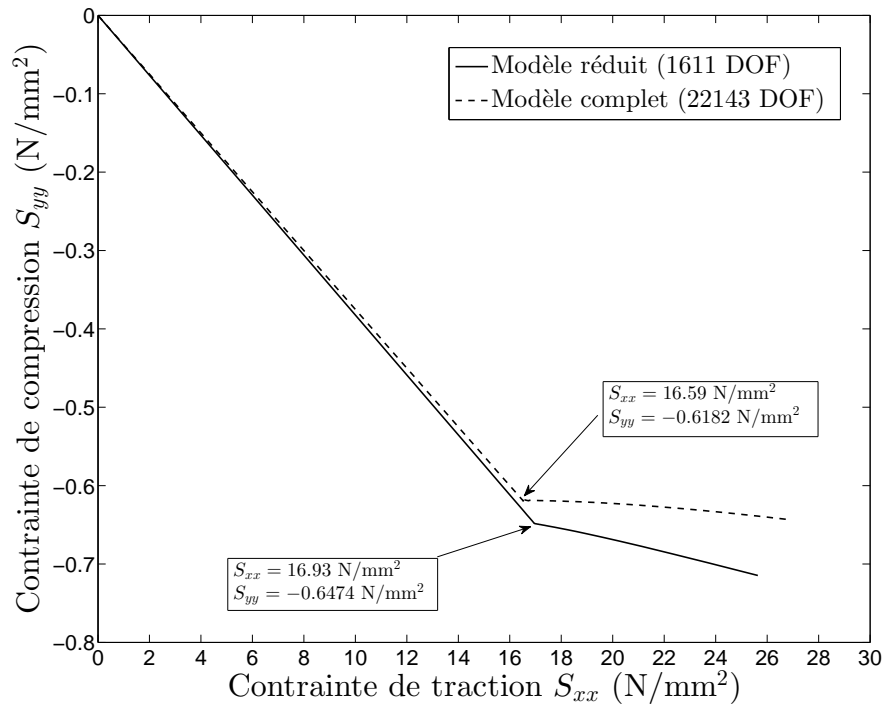


FIGURE 3.11 – Rapport des contraintes de traction et de compression induites au centre de la membrane

études paramétriques du phénomène de plissement en prenant en compte plusieurs paramètres comme le nombre d'ondes, la charge de pré-traction, le rapport de géométrie et la répartition non-uniforme de la variation de température.

### 3.5.2.1 Convergence de maillage

L'objectif de ce test est d'étudier l'efficacité du maillage sur le plissement de la membrane et aussi de déterminer le maillage adéquat pour optimiser les calculs des exemples suivants. Les deux modèles de membranes sont considérés dans cette étude. Différents maillages sont considérés dans ce test. Soit  $n_x$  le nombre d'éléments dans la direction  $x$  et  $n_y$  le nombre d'éléments dans la direction  $y$ . Le rapport  $n_y/n_x$  est supposé constant dans tous les cas :  $n_y/n_x = 0.4$ . Le tableau 3.10 donne un récapitulatif des différents maillages utilisés pour chaque calcul avec le nombre de degrés de liberté correspondant.

Les résultats présentés sur les figures 3.12a et 3.12b montrent les courbes de bifurcation de la variation de température en fonction du rapport entre l'amplitude maximale et l'épaisseur de la membrane  $w/t$ . La différence observée entre les deux courbes est négligeable (environ 0.3%). On remarque que seulement peu de degrés de liberté sont nécessaires dans le calcul du

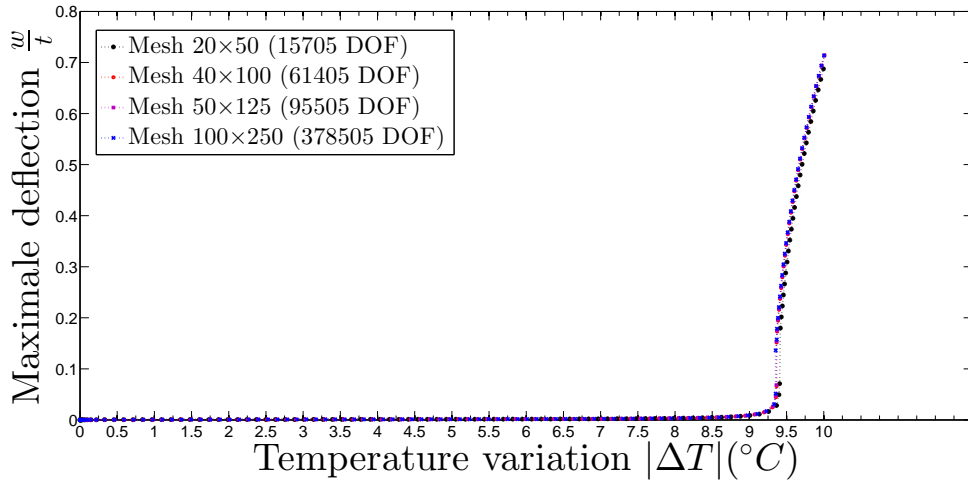
TABLE 3.10 – Différent maillages pour les deux modèles de membrane

$n_y \times n_x$ (ABAQUS model)	$n_y \times n_x$ (MATLAB model)
20 × 50 (15705 dof)	4 × 10 (447 dof)
40 × 100 (61405 dof)	6 × 15 (939 dof)
50 × 125 (95505 dof)	8 × 20 (1611 dof)
100 × 250 (378505 dof)	12 × 30 (3495 dof)
-	20 × 50 (9423 dof)

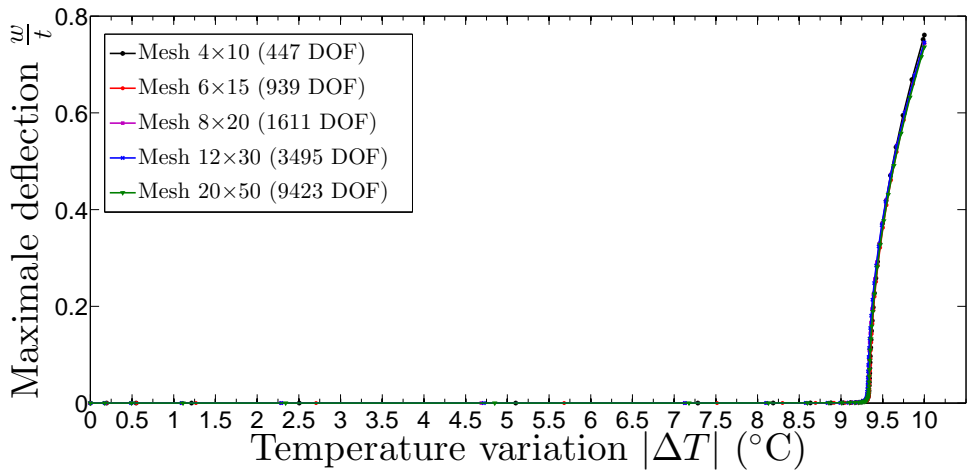
modèle réduit pour obtenir de bons résultats alors que le calcul du modèle complet requiert un maillage assez dense pour obtenir des résultats satisfaisants. Les différents maillages étudiés dans le calcul du modèle réduit pour le test de convergence permettent de décrire la courbe de bifurcation et le point de bifurcation est déterminé avec précision dans tous les cas. Sur les figures 3.13a et 3.13b, les profils de plissement de la membrane sont présentés pour une variation de température fixe ( $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ ) proche du point de bifurcation. Les profils sont représentés à une distance de  $x = L/2$ . On remarque que le maillage grossier  $4 \times 10$  n'est pas approprié pour représenter exactement le comportement des plis au voisinage des bords. Cependant, les autres maillages présentent des résultats très proches. Au vu des résultats obtenus, on peut conclure que les maillages  $40 \times 100$  (modèle complet) et  $8 \times 20$  (modèle réduit) présentent à la fois une bonne optimisation du temps de calcul et des résultats précis. Ces maillages seront donc utilisés dans la suite des exemples.

Les figures 3.14a et 3.14b constituent un exemple de validation de la méthode des séries de Fourier par rapport au modèle complet de la membrane car elles permettent de comparer les courbes de bifurcation et les profils des plis. La même température critique est obtenue pour les deux types de modèles ( $\approx 9.3^\circ\text{C}$ ). Les profils des plis sont quasiment identiques dans la zone centrale de la membrane. La différence observée près des bords libres peut s'expliquer par la non-uniformité de la longueur d'onde dans le calcul du modèle complet tandis que dans le modèle réduit, la longueur d'onde est définie a priori et reste constante. Les modes de plissement sont quasiment identiques pour les deux modèles (figure 3.15).

Un avantage de la méthode des séries de Fourier est mis en évidence dans ces résultats en considérant la question des degrés de liberté. En effet, le calcul du modèle réduit requiert trente



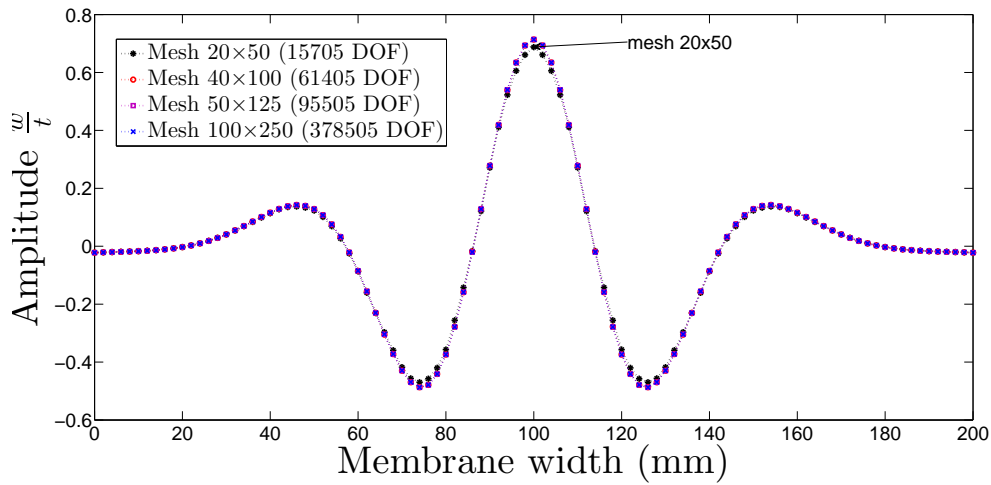
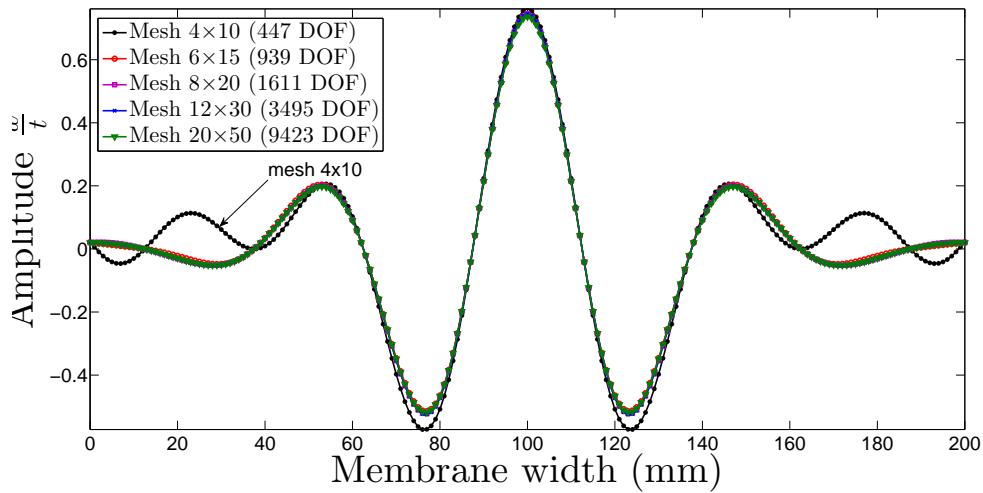
(a) Modèle complet

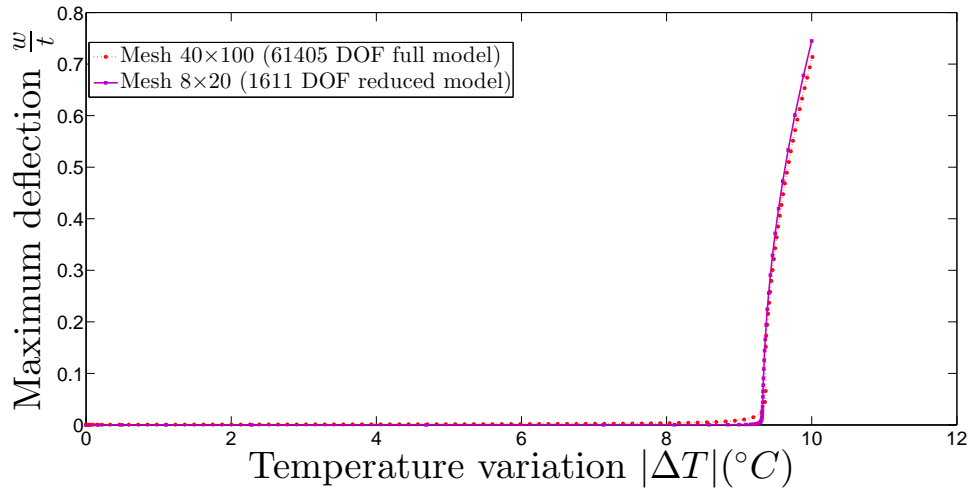


(b) Modèle réduit

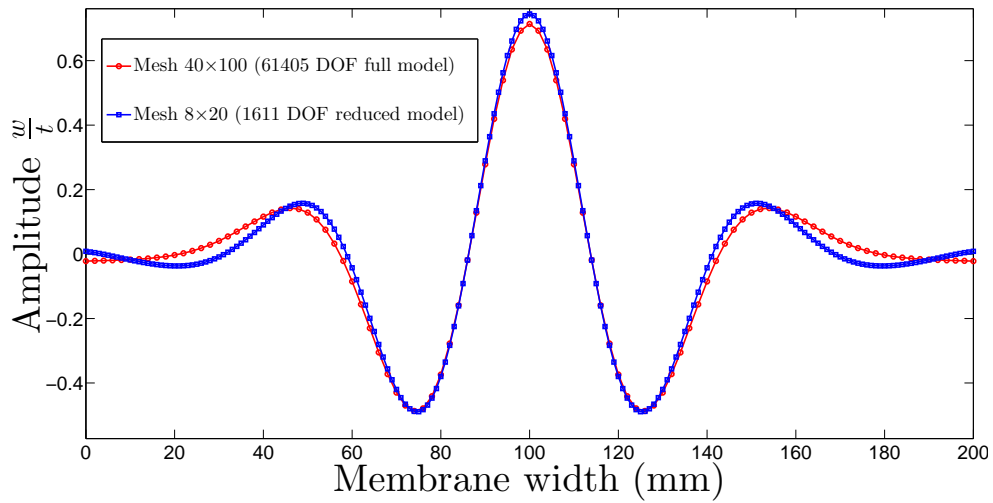
FIGURE 3.12 – Courbes de bifurcation pour l'étude de convergence de maillage



(a) Modèle complet ( $\Delta T = -10^\circ\text{C}$ )(b) Modèle réduit ( $\Delta T = -10^\circ\text{C}$ )FIGURE 3.13 – Profils des plis pour l'étude de convergence de maillage ( $\Delta T = -10^\circ\text{C}$ )

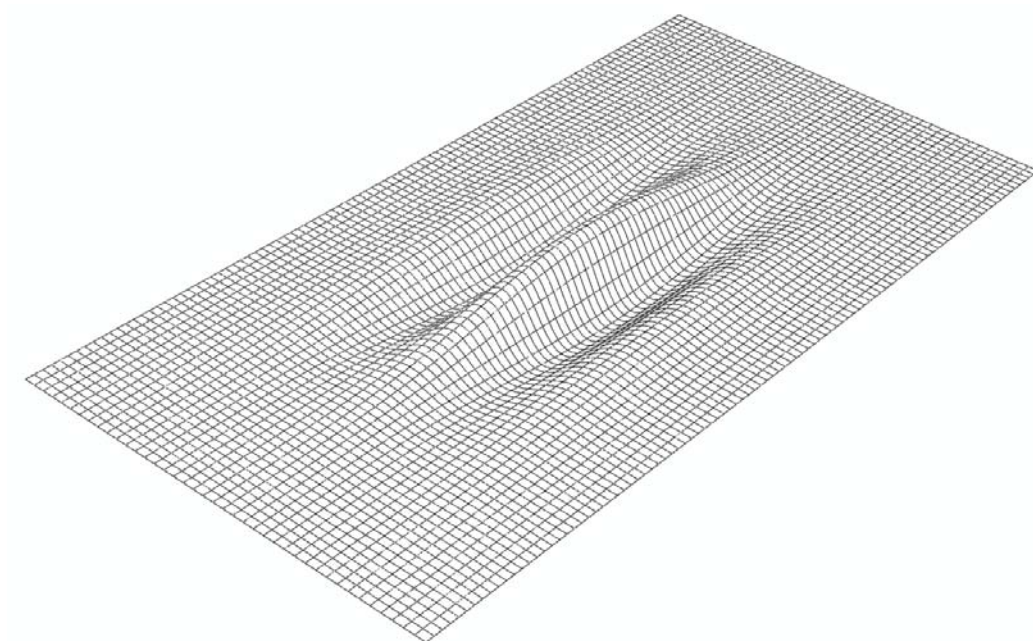


(a) Courbes de bifurcation

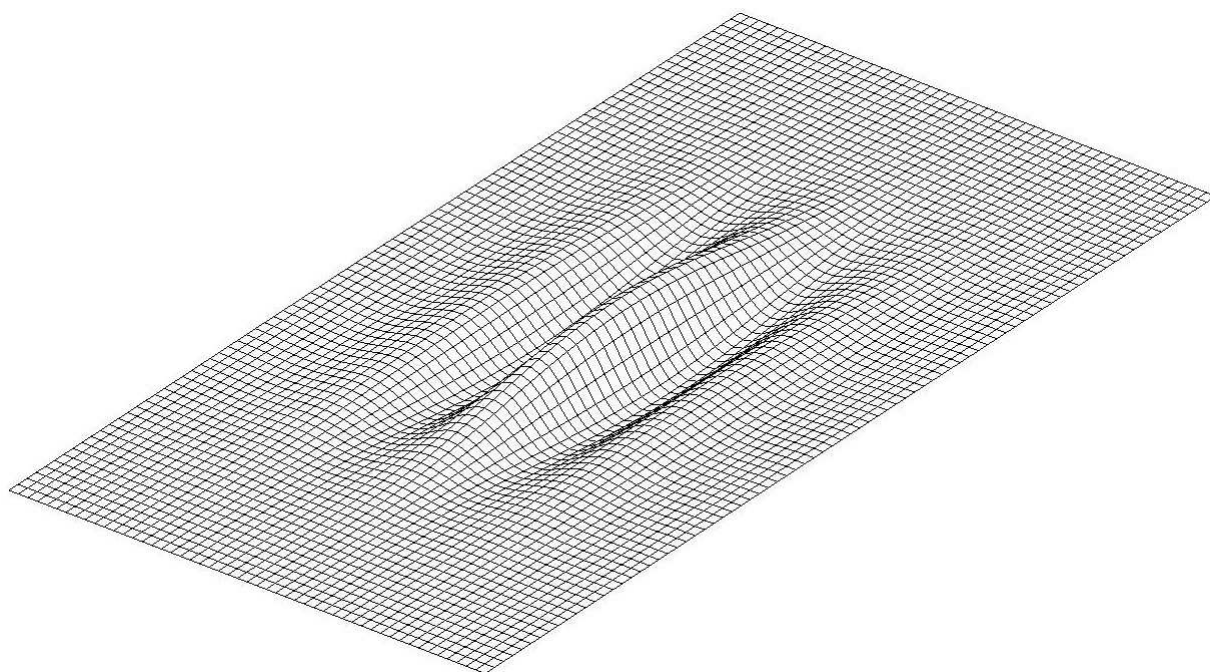


(b) Profils des plis ( $\Delta T = -10^\circ\text{C}$ )

FIGURE 3.14 – Résultats des deux modèles de membrane : exemple de validation



(a) Modèle complet (Abaqus,  $\Delta T = -10^\circ\text{C}$ )



(b) Modèle réduit (Matlab,  $\Delta T = -10^\circ\text{C}$ )

FIGURE 3.15 – Mode de plissement pour les deux modèles au même point de chargement

fois moins de degrés de liberté que le modèle complet (figure 3.14a). Ceci a une influence sur le temps de calcul qui est divisé par environ 8 dans le cas du modèle réduit par rapport au modèle complet ([Yu et al., 2013]). Ainsi, le temps de calcul pour le modèle réduit dans MATLAB est de 364 secondes alors que le calcul du modèle complet dans ABAQUS s'exécute en 2460 secondes.

### 3.5.2.2 Variation de la longueur d'onde

Dans le calcul du modèle réduit, la méthode des séries de Fourier impose d'avoir une longueur d'onde fixe au préalable. Ainsi, dans cet exemple, le nombre d'onde déterminé de manière numérique. Différentes valeurs de la longueur d'onde sont définies. Les calculs menés ont permis de déterminer une valeur minimale de la longueur d'onde.

La relation entre le nombre d'onde  $q$  (dans l'équation 2.30) et la longueur d'onde  $l_q$  est définie dans l'équation ci-après :

$$l_q = \frac{2\pi}{q} \quad (3.54)$$

L'intervalle de variation de la longueur d'onde est fixée en prenant en compte la largeur de la membrane étudiée et une estimation du nombre d'ondes est faite. Dans le cas présent et compte tenu des dimensions et propriétés de la membrane (tableau 3.2), nous définissons un intervalle approximatif dans laquelle se trouverait la longueur d'onde minimale : de 50 mm à 60 mm. Le pas de l'intervalle est égal à 1 pour obtenir des résultats arrondis à l'unité. Les courbes obtenues pour chacune des valeurs de la longueur d'onde sont présentées sur la figure 3.16. Le point de bifurcation décroît à partir de  $l_q = 51$  mm jusqu'à  $l_q = 58$  mm et croît à partir de  $l_q = 59$  mm. Les courbes de la figure 3.16 montre que la valeur minimale du point de bifurcation est obtenue pour  $l_q = 58$  mm. Cette longueur d'onde minimale déterminée pour le modèle réduit de la membrane correspond à la longueur d'onde déterminée pour le modèle complet au voisinage du point de bifurcation. En effet, dans le calcul du modèle complet, la longueur d'onde varie continuellement tout au long du chargement (figures 3.17a et 3.17b). Ainsi, au point de bifurcation, la longueur d'onde observée dans le modèle complet nous donne la variation de température minimale dans le calcul du modèle réduit.

Comme nous l'avons dit au début de cet exemple, une prédiction de la longueur d'onde est nécessaire pour pouvoir effectuer les calculs du modèle réduit de la membrane pour le cas

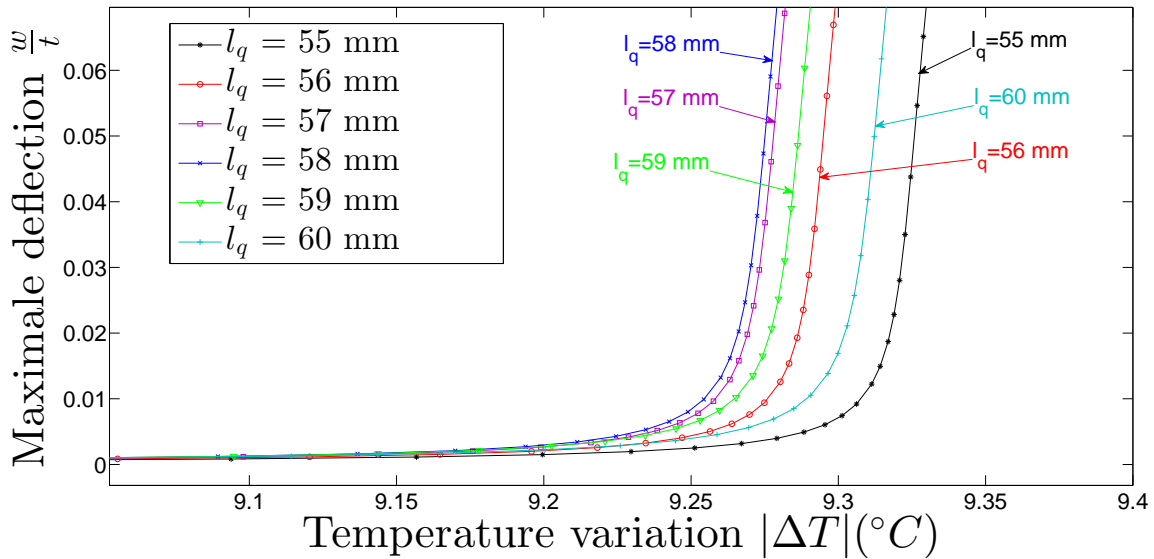
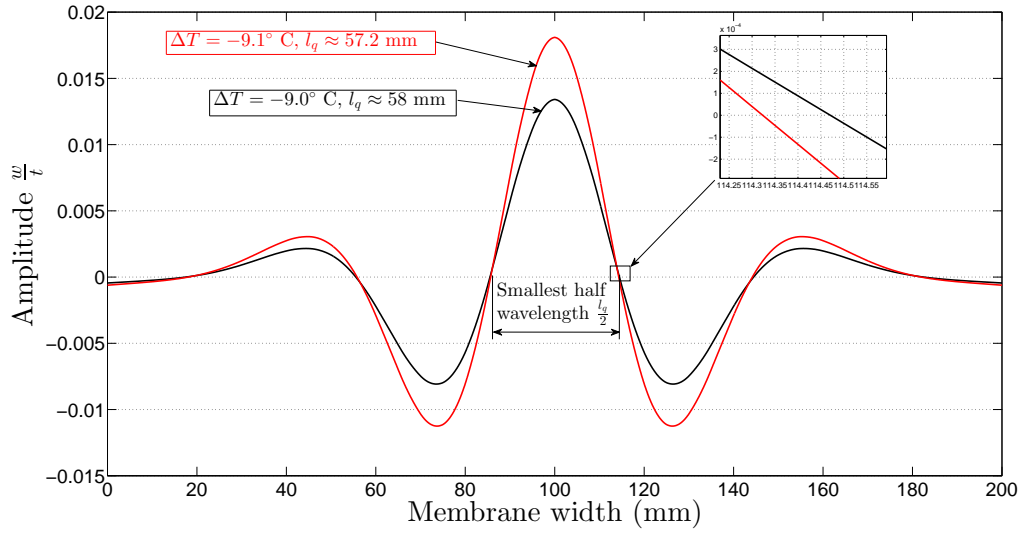


FIGURE 3.16 – Courbes de bifurcation : variation de la longueur d’onde (zoom au voisinage du point de bifurcation)

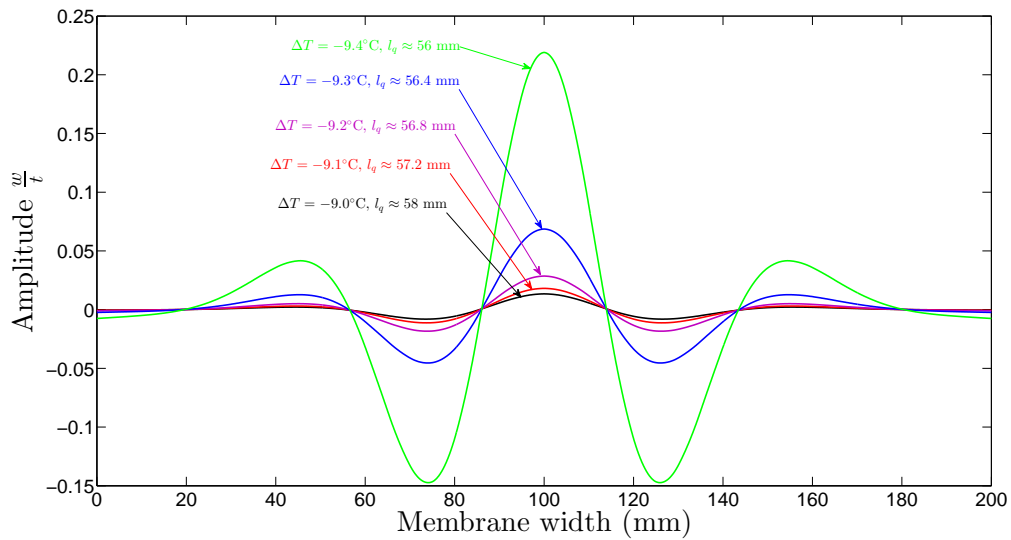
du chargement uniaxial. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées. Des cas similaires ont été étudiés par [Friedl et al., 2000] et [Jacques and Potier-Ferry, 2005]. Dans ces références, une solution analytique approximative est étudiée pour déterminer a priori le nombre d’onde dans l’analyse de flambage d’une membrane soumise à un chargement mécanique. Une autre méthode consiste à effectuer une analyse non linéaire standard (en utilisant ABAQUS par exemple) pour déterminer la longueur d’onde critique. C’est cette méthode que nous avons appliquée dans notre étude. L’utilisation de cette méthode peut paraître redondante car elle donne déjà les résultats recherchés. Toutefois, elle permet une comparaison entre le modèle complet et le modèle réduit. Il existe une troisième méthode utilisée par [Wong and Pellegrino, 2006] qui est une étude des modes propres. Dans cette méthode, la longueur d’onde du premier mode correspondant à la plus faible énergie est utilisée dans l’analyse de bifurcation.

### 3.5.2.3 Influence de l’épaisseur de la membrane

Dans ce paragraphe, on se propose d’étudier l’influence de la variation de l’épaisseur de la membrane sur la charge critique de plissement. On considère pour cela une membrane rectangulaire de dimensions  $200 \times 400$  avec différentes valeurs de l’épaisseur  $t$  (en mm) : 0.02, 0.05 (par défaut) et 0.1. On applique une baisse de température uniforme dans la membrane en considérant les conditions aux limites définies sur la figure 3.9.



(a) Decay between two temperature variations



(b) Different temperature variations

FIGURE 3.17 – Evolution du mode de plissement en fonction de la variation du chargement thermique (modèle complet)

La figure 3.18 présente les courbes de bifurcation en fonction de l'épaisseur de la membrane. On constate que la charge critique de plissement augmente avec l'épaisseur. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'augmentation de l'épaisseur augmente la rigidité de la membrane.

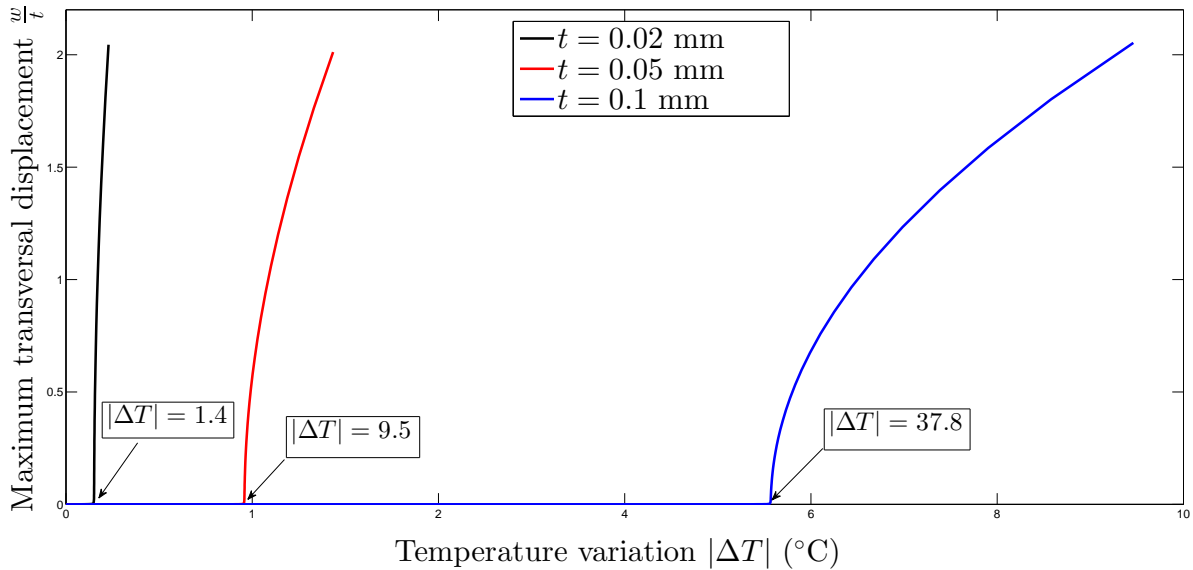


FIGURE 3.18 – Courbes de bifurcation pour différentes valeurs de l'épaisseur (modèle réduit)

### 3.5.2.4 Membrane en pré-tension

Nous considérons dans cet exemple, une membrane pré-chargée en traction. L'objectif ici est d'étudier l'effet de la variation de température sur une membrane pré-contrainte. La membrane est soumise à une traction uniaxiale avant d'appliquer la variation de température. La figure 3.19 montre les conditions aux limites dans la première étape (étape de pré-traction). La traction est appliquée par un déplacement imposé  $\bar{u}$  ( $\bar{u} > 0$ ). Trois cas dans l'étape de pré-traction sont étudiés :  $\bar{u} = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ . Pour chaque cas, un calcul initial est conduit afin de déterminer la longueur d'onde minimale. Le tableau 3.11 donne les valeurs de  $\bar{u}$  et la longueur d'onde minimale correspondante.

TABLE 3.11 – Pretensioning cases

Displacement $\bar{u}$ (mm)	Minimal wavelength (mm)
0.01	54
0.05	47
0.10	43

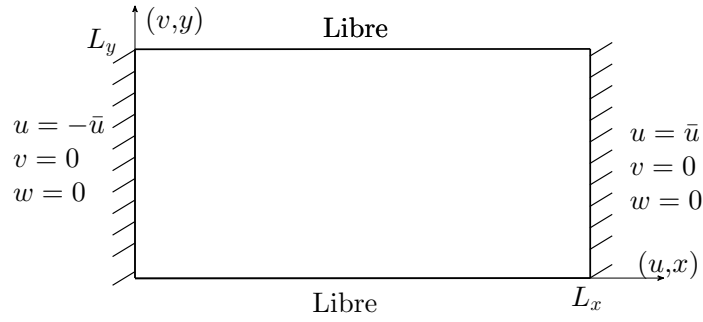


FIGURE 3.19 – Conditions aux limites appliquées au modèle réduit de la membrane dans l'étape de pré-traction.

Dans les figures 3.20 à 3.22, nous présentons une comparaison entre les deux modèles de membrane. Les légendes montrent la longueur d'onde dans chaque modèle et pour chaque cas.  $l_q^{min}$  correspond à la longueur d'onde minimale déterminée dans le modèle réduit et  $l_q$  est la longueur d'onde observée dans la simulation du modèle complet, au voisinage du point de bifurcation. On remarque dans le comportement post-critique que le modèle réduit présente des défaillances dans les grandes amplitudes (au-delà de  $\frac{w}{t} = 1,5$ ). Ceci est dû aux hypothèses simplificatrices prises en compte dans la construction du modèle réduit.

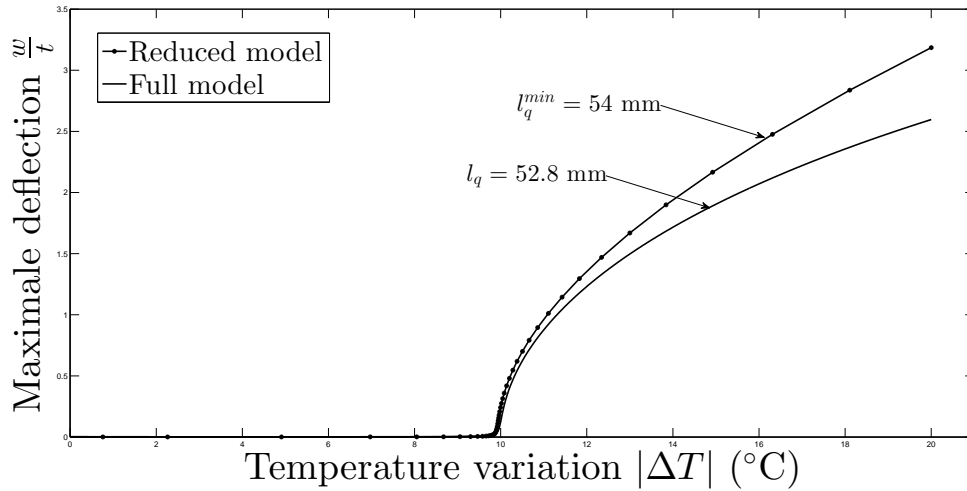
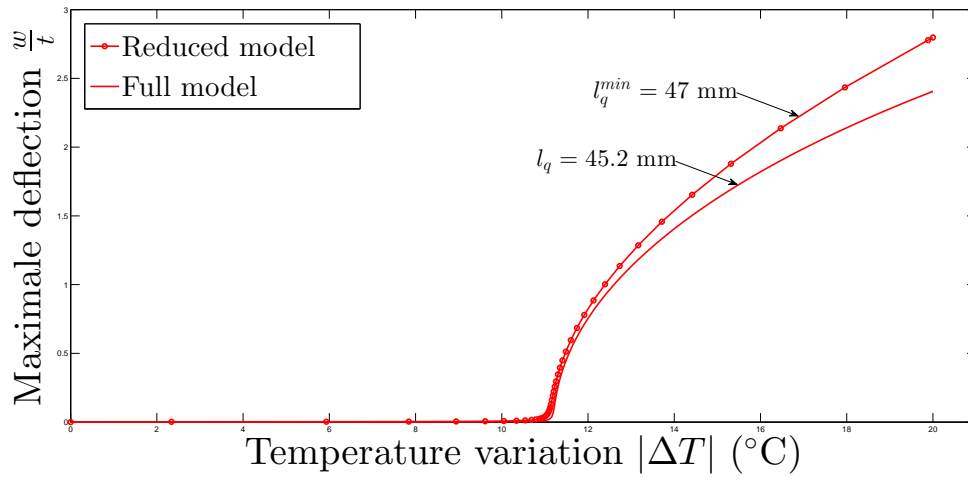
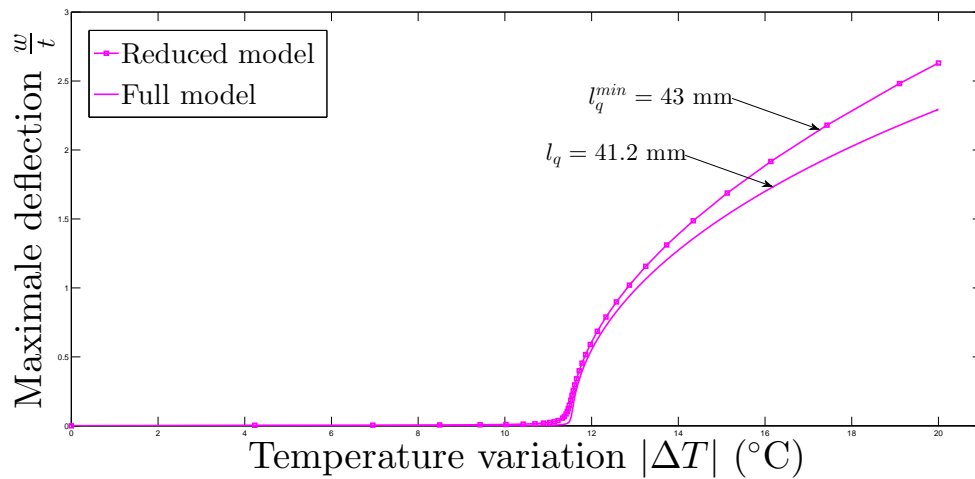


FIGURE 3.20 – Bifurcation curves for  $\bar{u} = 0.01$  mm (full and reduced model)

Les figures 3.23 et 3.24 montrent l'évolution des courbes de bifurcation et des modes de plissement associés en post-bifurcation (avec  $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ ). Les résultats obtenus sont en adéquation avec les prédictions : lorsque la membrane est précontrainte, sa rigidité augmente ainsi que le point de bifurcation (figure 3.23). Cependant, lorsque la charge de pré-traction est trop grande ( $\bar{u} = 0.5\text{mm}$ ), la membrane est dans un état de contrainte proche de la zone de



FIGURE 3.21 – Bifurcation curves for  $\bar{u} = 0.05$  mm (full and reduced model)FIGURE 3.22 – Bifurcation curves for  $\bar{u} = 0.1$  mm (full and reduced model)

bifurcation. En effet, pour la même membrane étudiée, [Friedl et al., 2000] a effectué un test qui consiste à appliquer une traction uniforme sur les bords courts de la membrane jusqu'au phénomène de plissement. Il a été alors déterminé d'après les calculs, une contrainte critique de plissement  $\sigma_{crit} = 236 \text{ N/mm}^2$ , correspondant à  $\bar{u} = 0.6743 \text{ mm}$  qui est proche du déplacement imposé  $\bar{u} = 0.5 \text{ mm}$  utilisé dans notre étape de pré-traction. La plus petite variation de température est obtenue pour  $l_q = 30 \text{ mm}$  (figure 3.25). Le point de bifurcation décroît alors qu'il est supposé croître en considérant la figure 3.23. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'un déplacement imposé de 0.5 mm met la membrane dans un état de contrainte proche du point de bifurcation où le déplacement critique est 0.6743 mm.

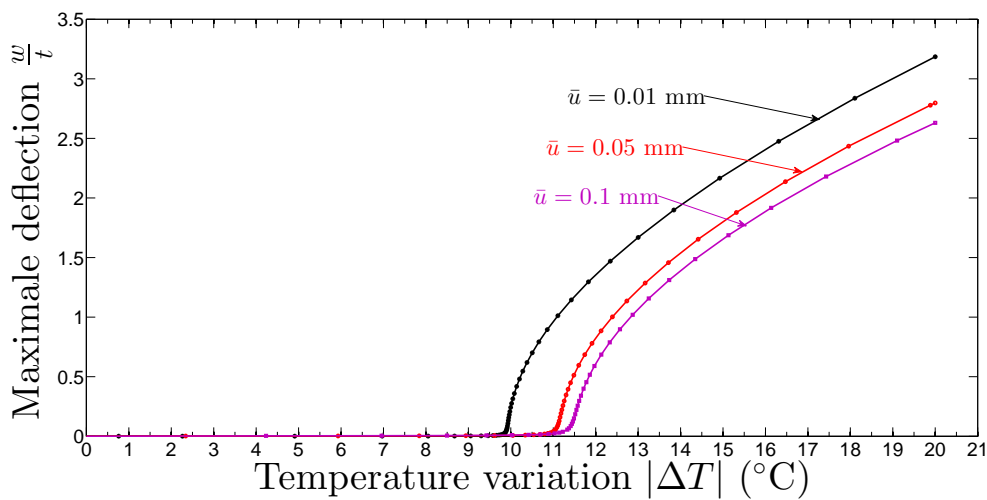


FIGURE 3.23 – Evolution of bifurcation curves for the reduced model

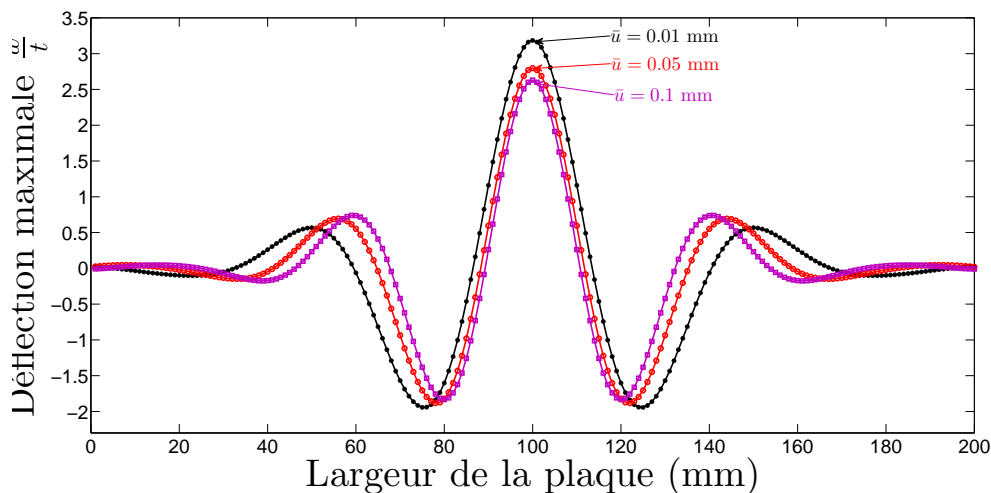
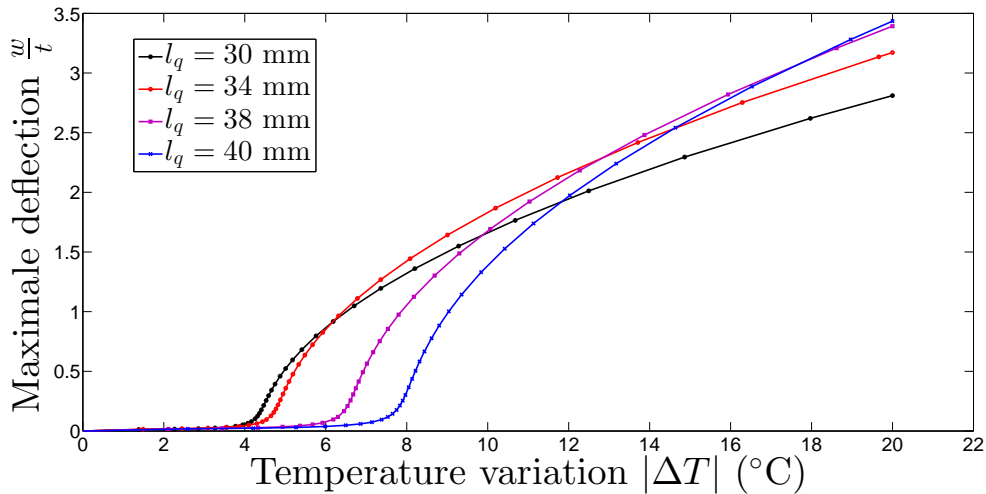


FIGURE 3.24 – Evolution of wrinkles profiles at  $\Delta T = -20^\circ\text{C}$  for the reduced model

FIGURE 3.25 – Bifurcation curves for  $\bar{u} = 0.5$  mm (variation of the wavelength)

### 3.5.2.5 Influence de la géométrie

#### Cas d'une membrane rectangulaire

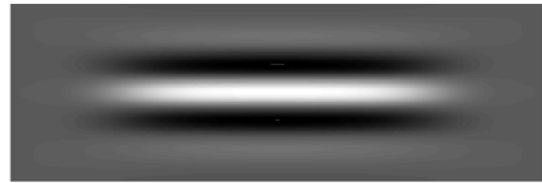
Les effets de la géométrie sur le comportement de la membrane sont étudiés dans cet exemple. Le rapport entre la longueur et la largeur de la membrane est noté  $r = L_x/L_y$ . La largeur de la membrane est considérée fixe :  $L_y = 200$  mm et on fait varier la longueur  $L_x$  en fonction du facteur  $r$ . Trois valeurs de  $r$  sont prises en compte dans cette étude :  $r = 3, 5$  et  $7$ , ce qui nous donne respectivement  $L_x = 600, 1000$ , et  $1400$  mm. Les résultats de la simulation des deux types de modèles de membrane (complet et réduit) sont présentés dans les figures 3.26, 3.27 et 3.28. Nous constatons que la région d'apparition des plissements varie en fonction du facteur  $r$ . En effet, il apparaît que la zone de plissement se déplace du centre vers les bords de la membrane lorsque la valeur de  $r$  augmente. Ceci peut s'expliquer par le fait que les contraintes de compression dans la direction  $y$  (décrites dans la figure 3.10) localisées près des bords restreints de la membrane sont à l'origine des plissements. Les courbes de bifurcation présentées sur la figure 3.29 montrent bien que la charge thermique critique augmente avec le rapport  $r$ . Les figures 3.30a, 3.30b et 3.30c montrent les déformées de la membrane en post-bifurcation pour les différentes valeurs  $r$ .

La figure 3.31 montre la distance entre l'amplitude maximale et le centre de la membrane par rapport au facteur  $r$ . Dans le calcul sur MATLAB, on constate que pour chaque valeur de la longueur d'onde choisie, l'amplitude maximale se situe au centre de la membrane pour  $r = 2.75$ . Le même résultat a été obtenu par Zheng dans sa thèse [Zheng, 2009] où il a été

dié le comportement d'un élastomère diélectrique soumis à une traction uniforme. En effet, selon [Jacques and Potier-Ferry, 2005], dans ce test de traction uniaxiale, la dimension longitudinale des plis dépend de la taille de la zone de compression qui elle-même est plus ou moins indépendante de la longueur de la membrane.



(a) Modèle complet ( $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ )



(b) Modèle réduit ( $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ )

FIGURE 3.26 – Mode de plissement pour  $r = 3$

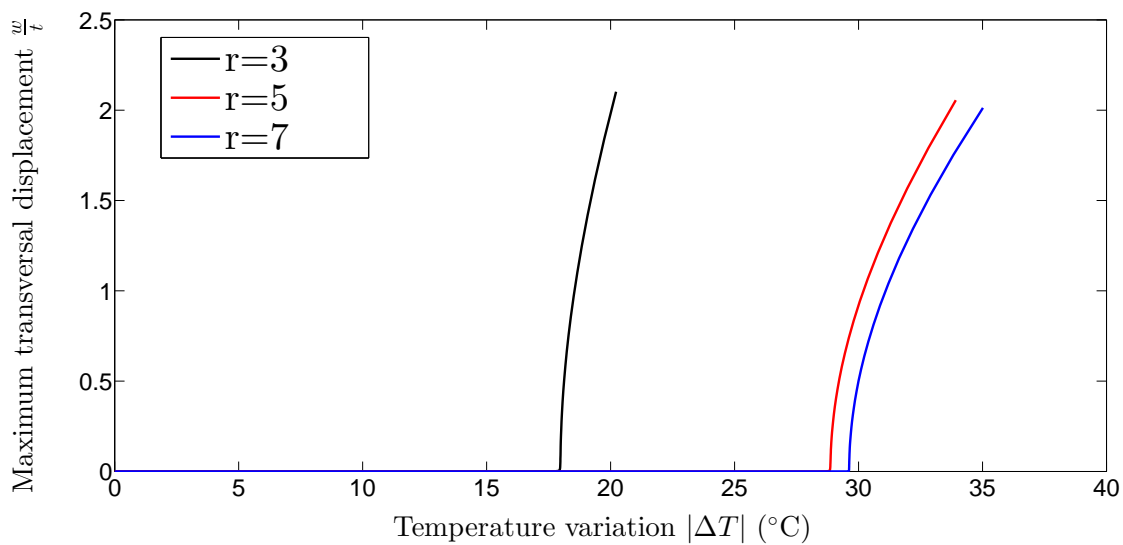


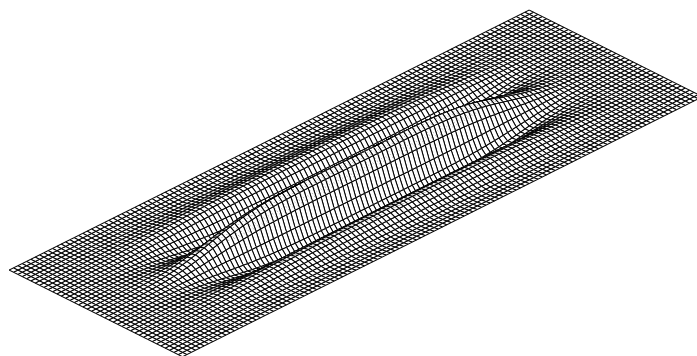
(a) Modèle complet ( $\Delta T = -30^\circ\text{C}$ )



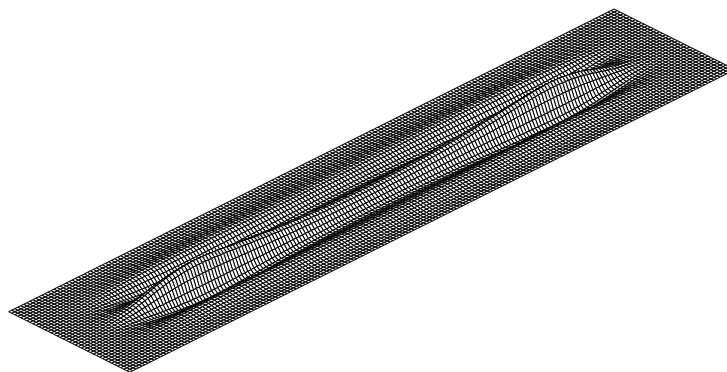
(b) Modèle réduit ( $\Delta T = -30^\circ\text{C}$ )

FIGURE 3.27 – Mode de plissement pour  $r = 5$

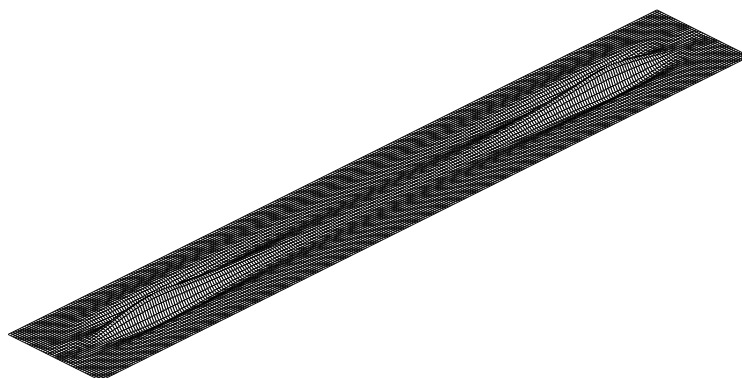
(a) Modèle complet ( $\Delta T = -30^\circ\text{C}$ )(b) Modèle réduit ( $\Delta T = -30^\circ\text{C}$ )FIGURE 3.28 – Mode de plissement pour  $r = 7$ FIGURE 3.29 – Courbes de bifurcation pour différentes valeurs de  $r$



(a)  $r = 3$



(b)  $r = 5$



(c)  $r = 7$

FIGURE 3.30 – Déformée de la membrane en post-bifurcation (modèle réduit)

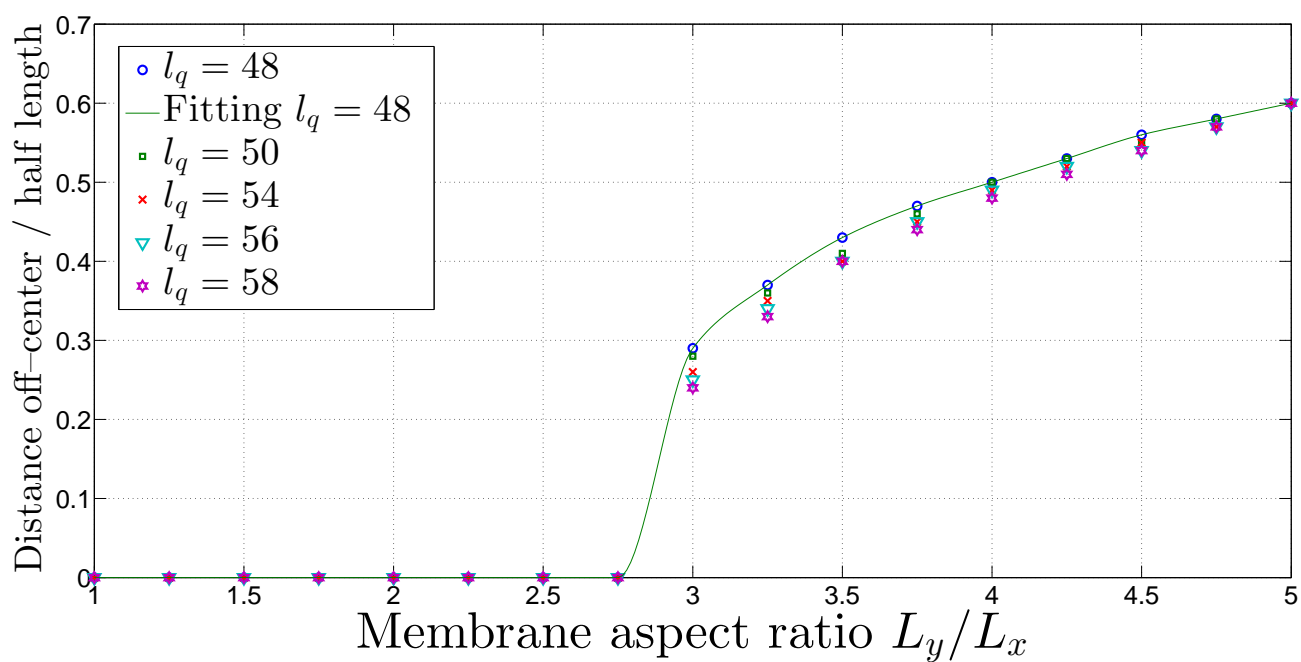


FIGURE 3.31 – Distance entre le centre de la membrane et l'amplitude maximale

### Cas d'une membrane carrée

On se propose maintenant d'étudier le comportement d'une membrane carrée soumise à un chargement thermique uniaxial. Les dimensions de la membrane sont  $400 \times 400$  et  $600 \times 600$  et les conditions aux limites sont les mêmes que sur la figure 3.9. Les résultats présentés dans cet exemple (figure 3.32) ne sont pas assez pertinents car les instabilités sont fortement localisées aux bords de la membrane. En effet, on a vu dans le chapitre précédent que le modèle réduit ne permettait pas de représenter exactement le comportement de la membrane au voisinage des bords. La figure 2.13 du chapitre 2 montre très bien les effets de bords observés dans ce cas de figure.

#### 3.5.2.6 Répartition non-uniforme de la variation de température

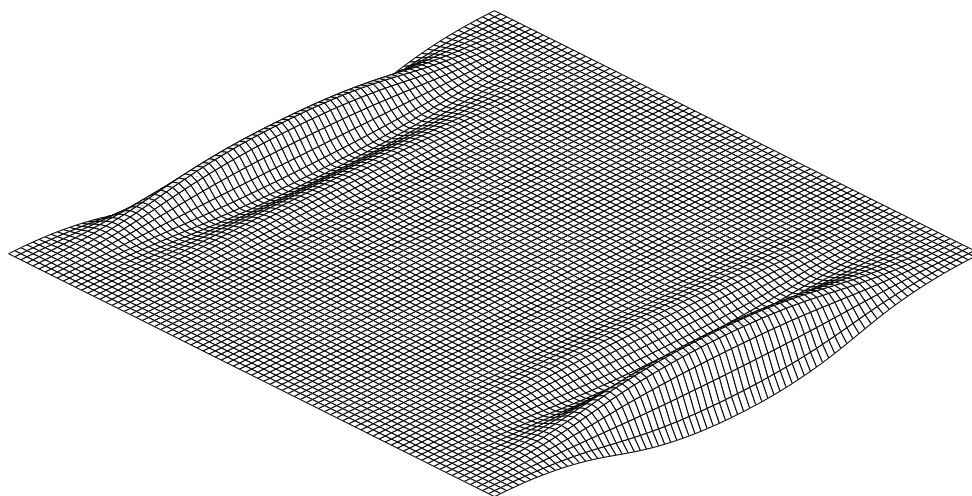
Dans cet exemple, nous étudions le comportement de la membrane soumise à une distribution non-uniforme de la variation de la température dans le sens de la longueur  $L_x$ . La distribution reste uniforme dans le sens de la largeur  $L_y$ . Les dimensions et caractéristiques de la membrane sont les mêmes que celles définies dans le tableau 3.2. La membrane est soumise uniquement à une baisse de température ( $\Delta T < 0$ ). La variation de la température en fonction de l'abscisse  $x$  de la membrane est décrite par la loi puissance suivante :

$$\Delta T(x) = - \left( \frac{x}{L_x} \right)^n \quad (3.55)$$

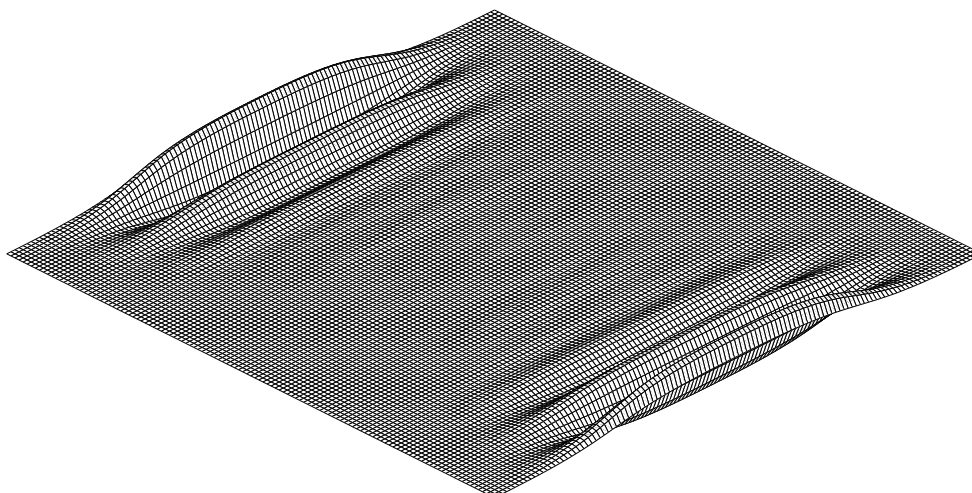
avec  $x \in [0, L_x]$ . Dans cette condition décrite par l'équation (3.55), la valeur absolue de la variation de température croît du bord  $x = 0$  au bord  $x = L_x$ . La figure 3.33 montre la distribution de la variation de température le long de la membrane en fonction de l'exposant  $n$ . Une valeur nulle de  $n$  correspond à une variation uniforme de la température dans la membrane. Pendant l'étape de chargement thermique, le bord  $x = L_x$  se refroidit plus vite que le bord  $x = 0$ . Pour des valeurs très élevées de  $n$ , la variation de température est presque nulle dans une grande région de la membrane.

Les résultats de la simulation sont présentés sur la figure 3.34. Nous constatons que pour des valeurs élevées de  $n$  ( $n = 20$ ), une deuxième zone de bifurcation apparaît sur les bords longs de la membrane (figure 3.34e). Les figures 3.35 à 3.37 montrent que les déformées obtenues avec le modèle réduit et le modèle complet ne sont pas comparables. Cette différence peut s'expliquer





(a) Membrane carrée  $400 \times 400$



(b) Membrane carrée  $600 \times 600$

FIGURE 3.32 – Déformée d'une membrane carrée sous chargement thermique uniaxial

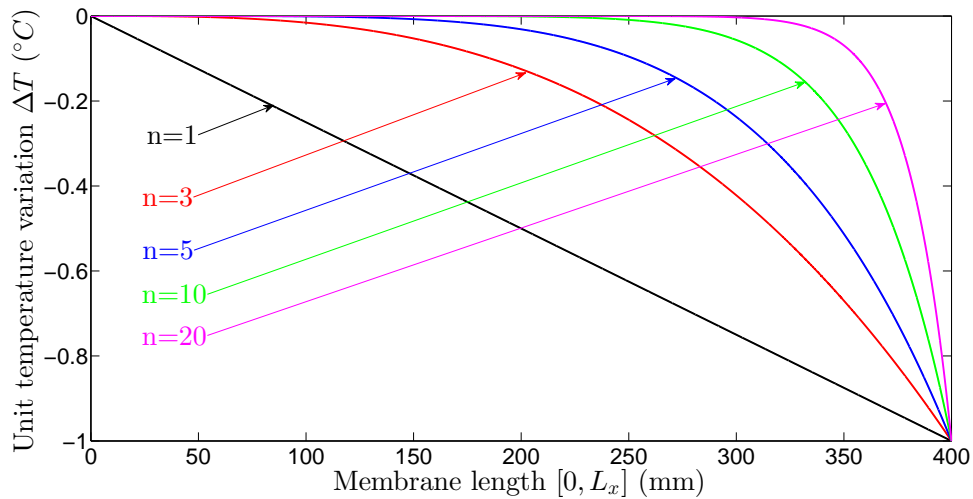


FIGURE 3.33 – Distribution de la variation de la température pour différentes valeurs de  $n$

par le fait que la longueur d'onde varie dans le modèle complet alors qu'elle est fixe dans le calcul du modèle réduit. La différence est d'autant plus importante que la valeur de  $n$  est élevée.

### 3.5.3 Comparaison plissement thermique et plissement mécanique

Nous avons vu en début de ce chapitre, sur l'origine des contraintes et déformations thermiques, que le problème de plissement thermique est comparable à un problème de plissement mécanique. Même si le mode de plissement observé est quasiment le même dans les deux types de problèmes (thermique et mécanique), les contraintes critiques de plissement ne sont pas identiques. C'est ce que nous allons montrer dans cet exemple.

On considère une membrane de dimensions  $200 \times 400$ . Deux tests numériques sont effectués en utilisant le modèle réduit de la membrane : un chargement mécanique pur et un chargement thermique pur. Les conditions aux limites sont respectivement définies sur les figures 2.15 et 3.9. Le chargement mécanique prend en compte la traction imposée et le déplacement imposé. La figure 3.38 présente les courbes de bifurcation des contraintes de traction induites en fonction de l'amplitude maximale de la membrane pour chaque type de problème étudié. On remarque aisément que les contraintes critiques de plissement ne sont pas les mêmes dans tous les cas. Ces résultats entrent en adéquation avec le fait que les instabilités dans les membranes dépendent fortement des conditions aux limites et des types de chargement.

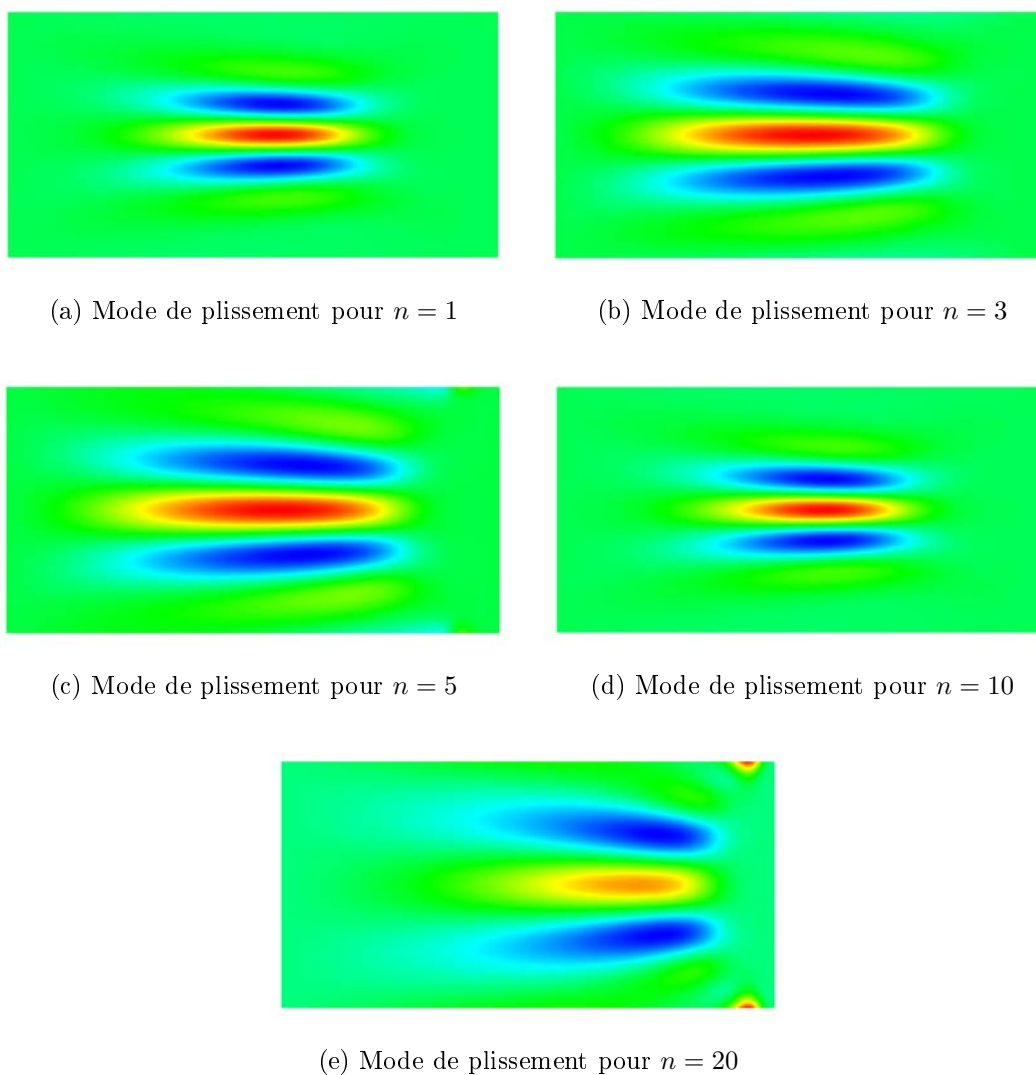


FIGURE 3.34 – Mode de plissement pour une distribution non uniforme de la température  $\Delta T = -20^\circ C$  (modèle complet)

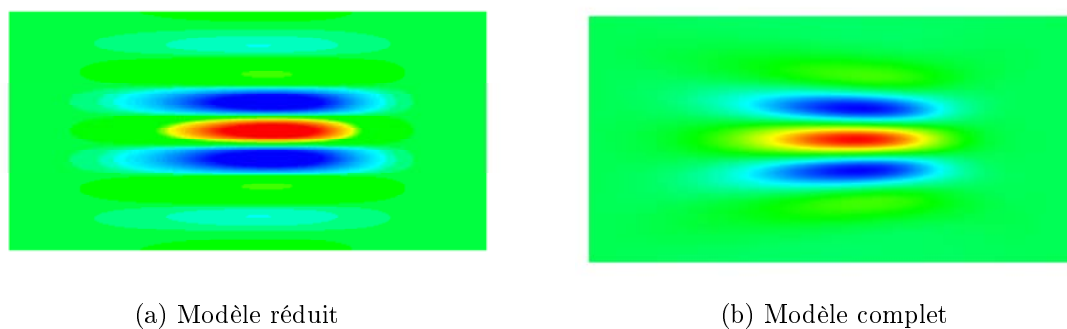


FIGURE 3.35 – Comparaison modes de plissement pour  $n = 1$  ( $\Delta T = -20^\circ C$ )

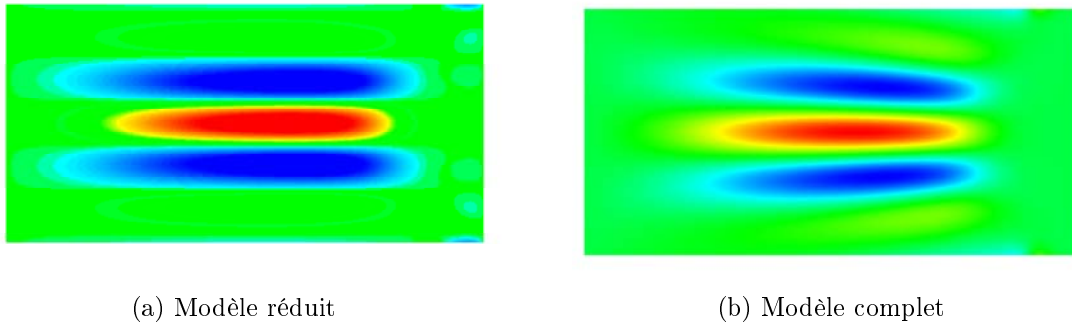


FIGURE 3.36 – Comparaison modes de plissement pour  $n = 5$  ( $\Delta T = -20^\circ C$ )

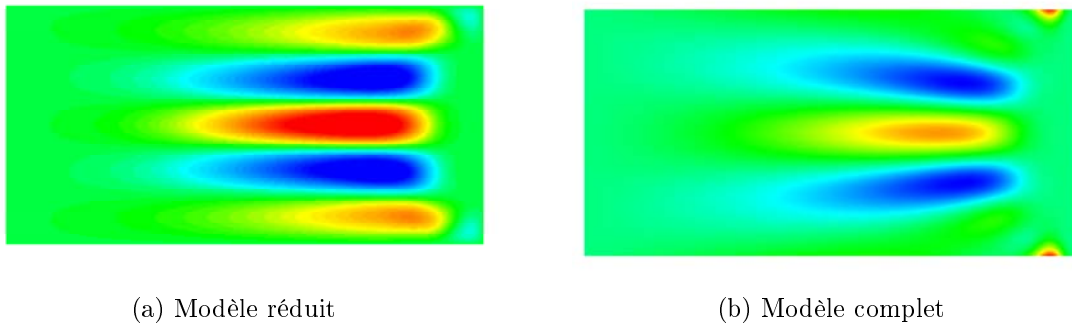


FIGURE 3.37 – Comparaison modes de plissement pour  $n = 20$  ( $\Delta T = -20^\circ C$ )

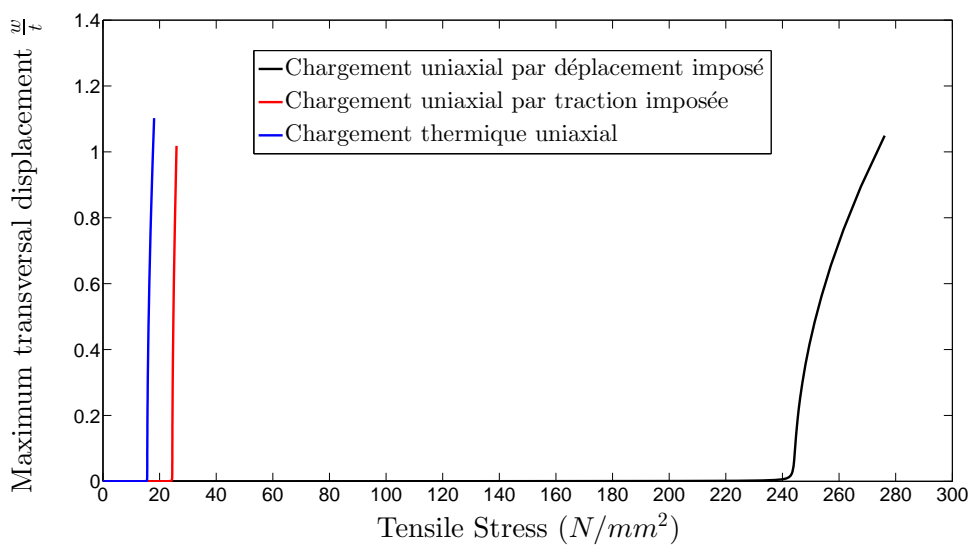


FIGURE 3.38 – Comparaison des courbes de bifurcation pour les différents types de chargement uniaxial

## 3.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'influence de la variation de la température sur le plissement des membranes. La méthode des séries de Fourier a permis de déterminer des équations macroscopiques issues des équations du modèle complet de la membrane. Tout comme dans le chapitre 2, le modèle réduit ainsi défini requiert peu de degrés de liberté dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis. La recherche d'une solution analytique nous a permis de déterminer une contrainte critique de compression et une longueur d'onde critique qui dépendent de la variation de température pour le cas d'une membrane sous chargement biaxial. La validation de cette solution analytique avec la résolution numérique est faite dans les exemples numériques à la fin de ce chapitre. La résolution numérique met en évidence, à travers les exemples numériques, les deux modèles de membrane étudiées : le modèle complet et le modèle réduit.

Les résultats présentés dans les exemples montrent une adéquation entre les deux modèles de la membrane. Il en ressort que le modèle réduit de la membrane permet de retrouver le même mode de plissement que le modèle complet, et ceci en un temps de calcul relativement faible, soit environ 1/10 ème du temps de calcul du modèle complet. Nous avons étudié dans les applications, les effets de plusieurs paramètres sur le comportement de la membrane notamment la variation de la longueur d'onde, l'influence de l'épaisseur et de la géométrie, l'effet d'une pré-tension et la répartition non-uniforme de la variation de température. On constate que pour le chargement biaxial de la membrane (chargement thermique suivi d'une compression uniforme), les conditions aux bords de la membrane ont une grande influence sur le mode de plissement et l'amplitude des plis : une membrane en appui simple présente des plis d'une plus grande amplitude maximale qu'une membrane encastrée en post-bifurcation. Dans le cas d'une membrane sous chargement uniaxial (chargement thermique), un maillage trop grossier du modèle réduit engendre des problèmes de conditions aux bords. Le modèle réduit développé ne permet pas d'étudier le comportement de la membrane soumise à une répartition non-uniforme de la variation de la température. En effet, la longueur d'onde variant fortement dans ce type de chargement, le modèle réduit atteint ses limites dans la mesure où la longueur d'onde dans le calcul du modèle réduit est constante. La défaillance du modèle réduit se retrouve également dans le cas d'un gradient de température où les plis ne sont pas unidirectionnels.



# Conclusion générale et perspectives

Nous présentons ici une synthèse des résultats obtenus au cours de notre étude en partant des moyens mis en œuvre avant de dégager les perspectives éventuelles pour l'approfondissement et l'élargissement du travail.

## Résultats obtenus

L'objectif de cette thèse est le développement et l'implémentation numérique d'une approche semi-analytique pour étudier les instabilités dans les membranes minces. La technique de réduction de modèle utilisée dans ce travail est basée sur la méthode des séries de Fourier à double échelle. Cette technique a permis de construire un modèle simplifié de la membrane ne nécessitant que très peu de degrés de liberté pour une résolution par la méthode des éléments finis.

La première partie du travail a consisté à appliquer la méthode des séries de Fourier pour étudier le plissement d'une membrane mince soumise à un chargement mécanique (chapitre 2). Pour y parvenir, nous avons développé les séries de Fourier à double échelle jusqu'à l'ordre 1. Le problème a été simplifié en considérant uniquement les enveloppes réelles de la membrane. D'autres hypothèses simplificatrices nous ont permis de déduire un modèle réduit de membrane capable de coupler les échelles micro et macro pour étudier les plissements des membranes. L'application de ce modèle réduit pour l'étude du chargement mécanique biaxial et uniaxial d'une membrane nous a donné les résultats suivants :

- Le modèle réduit requiert peu de degrés de liberté, ce qui diminue considérablement le temps de calcul par rapport au modèle complet.
- Le modèle réduit permet de retrouver approximativement la charge critique du plissement de la membrane sous chargement mécanique.

- Le mode de plissement observé est quasiment identique au voisinage du point de bifurcation. Les zones de plissement sont localisées près des bords dans une membrane relativement longue.

Dans la deuxième partie de notre travail (chapitre 3), nous avons introduit le paramètre température dans les équations afin d'étudier le comportement de la membrane sous contraintes thermo-mécaniques. La méthode des séries de Fourier a été adaptée à cet effet afin de prendre en compte une variation de température dans la membrane. Le développement des équations du modèle réduit avec la prise en compte de l'effet thermique nous a permis de déduire que la température intervient uniquement dans la déformation en membrane. Les exemples numériques étudiés nous ont permis de tirer plusieurs conclusions outre celles du chapitre 2. Le choix du maillage du modèle réduit dépend de la précision des résultats voulus. Plus le maillage est fin, plus le résultat est précis, et ceci au détriment du temps de calcul. Les études paramétriques menées ont montré une certaine adéquation entre les résultats du modèle réduit et du modèle complet.

### **Quelques limitations du modèle réduit**

Si l'utilisation du modèle réduit présente bien des avantages tels que la réduction du coût de calcul, il présente néanmoins quelques aspects qui limitent son utilisation par rapport au modèle complet.

- Il est nécessaire de développer analytiquement des équations de base avant de les implémenter numériquement alors que dans le modèle complet, les équations de base sont directement implémentées.
- La longueur d'onde dans le calcul du modèle réduit est constante alors que nous avons remarqué qu'elle varie dans le modèle complet. La variation de la longueur d'onde est d'autant plus grande quand on étudie l'effet d'une non-uniformité de la variation de température dans la membrane et les limites du modèle réduit sont évidentes quand on compare les modes de plissement des deux modèles de la membrane.
- Le modèle réduit de la membrane est très sensible aux conditions aux bords. En effet, nous avons remarqué que lorsque les plis sont très localisés près des bords, le même mode de plissement n'est pas exactement obtenu pour les deux modèles de membrane.



- 
- Très loin de la bifurcation en post-critique, le modèle réduit ne permet pas de retrouver le comportement de la membrane lorsque les amplitudes deviennent grandes.

## Perspectives

Les résultats présentés dans ce travail ont montré que la réduction de modèle en utilisant la méthode des séries de Fourier contribue à réduire considérablement le temps et le coût de calcul dans l'étude des instabilités des membranes minces. Les limitations de ce modèle réduit ouvrent la voie à de nombreuses pistes d'approfondissement de ce travail :

- L'implémentation effective du modèle réduit dans un logiciel de calcul éléments finis et son développement permettrait d'alléger la charge de travail qui consiste à développer de façon analytique les équations du modèle complet. À cet effet, la méthode [Diamant](#) développée par [\[Koutsawa et al., 2008\]](#) et implémentée dans le code de calcul MATLAB est un parfait exemple de la combinaison de la méthode asymptotique et de la différentiation automatique pour la résolution des équations aux dérivées partielles issues de l'introduction des séries de Taylor [\[Bilasse et al., 2009, Koutsawa et al., 2010, Xu et al., 2015a\]](#).
- Il est important aussi d'étudier le développement du modèle réduit en prenant en compte la variation de la longueur d'onde. Cela ouvrirait le champ à l'étude d'un chargement thermique localisé de la membrane.
- Afin de contourner les problèmes d'effet de bord, on peut recourir à une méthode de superposition de modèle qui consiste à considérer le modèle complet aux bords de la membrane afin d'obtenir le mode de plissement adéquat et d'utiliser le modèle réduit dans le reste de la membrane. Une méthode de couplage qui convient à cette technique de superposition de modèle est la méthode Arlequin introduite par [\[Ben Dhia, 1998\]](#) et qui a été beaucoup utilisée dans des problèmes similaires [\[Ben Dhia and Rateau, 2001, Rateau, 2003, Ben Dhia and Rateau, 2005, Hu et al., 2008, Ben Dhia and Jamond, 2010, Hu et al., 2010, Hu et al., 2011, Xu et al., 2014b\]](#).
- Enfin, il convient d'élargir l'étude des instabilités dans les membranes minces au-delà de l'effet thermique, par exemple en considérant le cisaillement, l'effet chimique, les membranes minces multicouches,...



# Annexe : Conditions aux limites du modèle réduit

Dans cette annexe, nous discutons des différents types de conditions aux limites du modèle réduit de la membrane. Le lecteur peut se référer à [Liu et al., 2012, Mhada et al., 2012] pour le cas des poutres.

En passant du modèle complet au modèle réduit, les conditions aux limites des déplacements dans le plan  $(u, v)$  sont directement applicables aux conditions aux limites macroscopiques  $(u_0, v_0)$ , ceci pour des raisons évidentes. Pour les déplacements microscopiques  $w$  (modèle complet), le développement en série de Fourier peut s'écrire comme suit :

$$w(x, y) = w_0 + w_1(x, y) \exp(iqx) + w_{-1}(x, y) \exp(-iqx) \quad (1)$$

Étant donné que l'enveloppe à l'ordre 0,  $w_0$ , est négligée sur les bords de la membrane, et en posant  $w_{-1} = \bar{w}_1$ , l'équation 1 peut être simplifiée :

$$w(x, y) = [w_1(x, y) + \bar{w}_1(x, y)] \cos(qx) + i [w_1(x, y) - \bar{w}_1(x, y)] \sin(qx) \quad (2)$$

L'harmonique  $w_1$  étant une enveloppe complexe, nous pouvons écrire :

$$w_1(x, y) = r_1(x, y) (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad (3a)$$

$$\bar{w}_1(x, y) = r_1(x, y) (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) \quad (3b)$$

où  $r_1(x, y) = |w_1|$  est l'amplitude de l'harmonique et  $\varphi$  la phase. Nous avons alors :

$$w_1(x, y) + \bar{w}_1(x, y) = 2r_1(x, y) \cos(\varphi) \quad (4a)$$

$$w_1(x, y) - \bar{w}_1(x, y) = 2ir_1(x, y) \sin(\varphi) \quad (4b)$$

En remplaçant (4a) et (4b) dans (2), nous obtenons  $w$  développé à l'ordre 1 :

$$w(x, y) = 2r_1(x, y) \cos(qx + \varphi) \quad (5)$$

### *Cas d'une membrane encastree*

Soit  $(x_0, y_0)$ , les coordonnées aux bords de la membrane. On a  $x_0 = 0$  ou  $x_0 = L_x$  et  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = L_y$ , où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions de la membrane. Les conditions aux limites de type encastrement du modèle complet s'écrivent :

$$w(x_0, y_0) = 0, \text{ et } w_{,x}(x_0, y_0) = 0 \quad (6)$$

avec  $w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}$ . La dérivée suivant  $x$  de l'équation (5) s'écrit :

$$w_{,x} = 2r_{1,x} \cos(qx + \varphi) - 2qr_1 \sin(qx + \varphi) \quad (7)$$

En considérant les équations (6) dans les équations (5) et (7), nous obtenons :

$$r_1(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi) = 0 \quad (8a)$$

$$r_{1,x}(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi) - qr_1(x_0, y_0) \sin(qx_0 + \varphi) = 0 \quad (8b)$$

$$r_{1,y}(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi) = 0 \quad (8c)$$

Comme l'amplitude est lentement variable, les termes  $r_{1,x}(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi)$  et  $r_{1,y}(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi)$  peuvent être négligés. Ainsi, nous obtenons les conditions aux limites macroscopiques d'une

membrane encastrée :

$$r_1(x_0, y_0) = 0 \longrightarrow w_1(x_0, y_0) = 0 \quad (9)$$

### *Cas d'une membrane en appuis simples*

On considère les mêmes coordonnées aux bords de la membrane que pour le cas précédent.

Dans les conditions d'appuis simples, le déplacement  $w$  aux bords de la membrane s'écrit :

$$w(x_0, y_0) = 0, \text{ et } w_{,xx}(x_0, y_0) = 0 \quad (10)$$

avec  $w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . La dérivée seconde de l'équation (5) par rapport à  $x$  s'écrit :

$$w_{,xx} = 2r_{1,xx} \cos(qx + \varphi) - 4qr_{1,x} \sin(qx + \varphi) - 2q^2 r_1 \cos(qx + \varphi) \quad (11)$$

En appliquant les conditions d'appuis simples définies par la relation (10) aux équations (5) et (11), nous pouvons déduire :

$$r_1(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi) = 0 \quad (12a)$$

$$2r_{1,xx}(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi) - 4qr_{1,x}(x_0, y_0) \sin(qx_0 + \varphi) - 2q^2 r_1(x_0, y_0) \cos(qx_0 + \varphi) = 0 \quad (12b)$$

L'amplitude étant lentement variable,  $r_{1,xx}$  est petit devant  $qr_{1,x}$ , on peut négliger le 1<sup>er</sup> de (12b). De plus, l'amplitude des oscillations  $r_1$  étant non nulle aux bords de la membrane, nous pouvons déduire, à partir des équations (12), les conditions aux limites macroscopiques de la membrane :

$$r_{1,x}(x_0, y_0) = 0, \quad (13)$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2},$$

ce qui implique :

$$w_{1,x}(x_0, y_0) = 0 \quad (14)$$

Ainsi, en conclusion, une condition aux limites de type simplement appuyé appliquée au

modèle complet de la membrane implique que seule la dérivée première de l'harmonique 1 du modèle réduit est nulle ( $w_{1,x} = 0$ ) et nous avons  $w_1 \neq 0$ .

# Bibliographie

- [Abdelkhalek et al., 2011] Abdelkhalek, S., Montmitonnet, P., Legrand, N., and Buessler, P. (2011). Coupled approach for flatness prediction in cold rolling of thin strip. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(9) :661–675.
- [Abdoun et al., 2009] Abdoun, F., Azrar, L., Daya, E. M., and Potier-Ferry, M. (2009). Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, 87(1-2) :91–100.
- [Attipou et al., 2015] Attipou, K., Hu, H., Mohri, F., Potier-Ferry, M., and Belouettar, S. (2015). Thermal wrinkling of thin membranes using a Fourier-related double scale approach. *Thin-Walled Structures*, 94 :532–544.
- [Attipou et al., 2013] Attipou, K., Nezamabadi, S., Daya, E. M., and Zahrouni, H. (2013). A multiscale approach for the vibration analysis of heterogeneous materials : Application to passive damping. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) :725–739.
- [Baker and Graves-Morris, 1996] Baker, G. A. and Graves-Morris, P. R. (1996). *Padé approximants*, volume 59. Cambridge University Press.
- [Bathe, 2006] Bathe, K.-J. (2006). *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe.
- [Bechet and Boudaoud, 2009] Bechet, F. and Boudaoud, H. (2009). Résolution de problèmes de contact et de frottement avec la Méthode Asymptotique Numérique. *Mathserv.Cnam.Fr*, pages 1–6.
- [Bekhoucha et al., 2015] Bekhoucha, F., Rechak, S., Duigou, L., and Cadou, J.-M. (2015). Branch switching at Hopf bifurcation analysis via asymptotic numerical method : Application to nonlinear free vibrations of rotating beams. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3) :716–730.

- [Ben Dhia, 1998] Ben Dhia, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences - Serie IIB : Mécanique, Physique, Chimie, Astronomie*, 326(12) :899–904.
- [Ben Dhia and Jamond, 2010] Ben Dhia, H. and Jamond, O. (2010). On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22) :1403–1414.
- [Ben Dhia and Rateau, 2001] Ben Dhia, H. and Rateau, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I : Mathematics*, 332(7) :649–654.
- [Ben Dhia and Rateau, 2005] Ben Dhia, H. and Rateau, G. (2005). The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62 :1442–1462.
- [Bilasse et al., 2009] Bilasse, M., Charpentier, I., Daya, E. M., and Koutsawa, Y. (2009). A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II : Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(49-52) :3999–4004.
- [Birman, 2004] Birman, V. (2004). Thermomechanical Wrinkling in Composite Sandwich Structures. *AIAA Journal*, 42(7) :1474–1479.
- [Birman, 2005] Birman, V. (2005). Thermally induced bending and wrinkling in large aspect ratio sandwich panels. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(10 SPEC. ISS.) :1412–1420.
- [Blandino et al., 2002] Blandino, J., Johnston, J., Miles, J., and Dharamsi, U. (2002). The effect of asymmetric mechanical and thermal loading on membrane wrinkling. *AIAA Paper*.
- [Blandino et al., 2001] Blandino, J., Johnston, J., Miles, J., and Soplop, J. (2001). Thin Film Membrane Wrinkling due to Mechanical and Thermal Loads. *AIAA journal*, (c) :1–11.
- [Boudaoud et al., 2009] Boudaoud, H., Belouettar, S., Daya, E. M., and Potier-Ferry, M. (2009). A numerical method for nonlinear complex modes with application to active-passive damped sandwich structures. *Engineering Structures*, 31(2) :284–291.
- [Boumediene et al., 2014] Boumediene, F., Cadou, J. M., Duigou, L., and Daya, E. M. (2014).



- 
- A reduction model for eigensolutions of damped viscoelastic sandwich structures. *Mechanics Research Communications*, 57 :74–81.
- [Boumediene et al., 2011] Boumediene, F., Miloudi, A., Cadou, J. M., Duigou, L., and Boutyour, E. H. (2011). Nonlinear forced vibration of damped plates coupling asymptotic numerical method and reduction models. *Computational Mechanics*, 47(4) :359–377.
- [Boutyour et al., 2004] Boutyour, E. H., Zahrouni, H., Potier-Ferry, M., and Boudi, M. (2004). Asymptotic-numerical method for buckling analysis of shell structures with large rotations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2) :77–85.
- [Brau et al., 2010] Brau, F., Vandeparre, H., Sabbah, A., Poulard, C., Boudaoud, A., and Daman, P. (2010). Multiple-length-scale elastic instability mimics parametric resonance of nonlinear oscillators. *Nature Physics*, 7(1) :56–60.
- [Brebbia and Connor, 1969] Brebbia, C. and Connor, J. (1969). Geometrically nonlinear finite-element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 95(2) :463–486.
- [Brezinski and Redivo-Zaglia, 2015] Brezinski, C. and Redivo-Zaglia, M. (2015). New representations of Padé, Padé-type, and partial Padé approximants. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 284 :69–77.
- [Brush and Almroth, 1975] Brush, D. O. and Almroth, B. O. (1975). Buckling of bars, plates, and shells.
- [Carter et al., 1996] Carter, G., Martynenko, Y., and Moscovkin, P. (1996). Growth and branching of wrinkles in deposited films. *Thin Solid Films*, 287(1-2) :275–279.
- [Cerda et al., 2002] Cerda, E., Ravi-Chandar, K., and Mahadevan, L. (2002). Thin films : wrinkling of an elastic sheet under tension. *Nature*, 419(6907) :579–580.
- [Cheng et al., 2004] Cheng, H. S., Cao, J., Yao, H., Liu, S. D., and Kinsey, B. (2004). Wrinkling behavior of laminated steel sheets. *Journal of Materials Processing Technology*, 151(1-3 SPEC. ISS.) :133–140.
- [Chiu et al., 1994] Chiu, H. C., Benson, R. C., Fiscella, M. D., and Burns, S. J. (1994). Mechanical and thermal wrinkling of polymer membranes. *Journal of applied mechanics*, 61(1) :67–70.
- [Cochelin et al., 2007] Cochelin, B., Damil, N., and Potier-Ferry, M. (2007). Méthode Asymp-

- totique Numérique : une technique de résolution des équations non linéaires. *Hermes Science Publishing, Paris, Londres.*
- [Crisfield, 1981] Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures*, 13 :55–62.
- [Cuong et al., 2015] Cuong, T. D., Tardif, N., and Limam, A. (2015). Experimental and numerical modelling of flatness defects in strip cold rolling. *International Journal of Solids and Structures*, 69-70 :1–11.
- [DaDeppo and Schmidt, 1975] DaDeppo, D. A. and Schmidt, R. (1975). Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *Journal of Applied Mechanics*, 42(4) :894–896.
- [Damil and Potier-Ferry, 2006] Damil, N. and Potier-Ferry, M. (2006). A generalized continuum approach to describe instability pattern formation by a multiple scale analysis. *Comptes Rendus - Mécanique*, 334(11) :674–678.
- [Damil and Potier-Ferry, 2010] Damil, N. and Potier-Ferry, M. (2010). Influence of local wrinkling on membrane behaviour : A new approach by the technique of slowly variable Fourier coefficients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(8) :1139–1153.
- [Damil et al., 2013] Damil, N., Potier-Ferry, M., and Hu, H. (2013). New nonlinear multi-scale models for wrinkled membranes. *Comptes Rendus - Mécanique*, 341(8) :616–624.
- [Damil et al., 2014] Damil, N., Potier-Ferry, M., and Hu, H. (2014). Membrane wrinkling revisited from a multi-scale point of view. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 1(1) :6.
- [Daya and Potier-Ferry, 2001] Daya, E. and Potier-Ferry, M. (2001). A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers & Structures*, 79(5) :533–541.
- [Diaby, 2005] Diaby, A. (2005). *Contribution à l'étude du flambement des structures gonflables.* PhD thesis, Université de Nantes.
- [Diaby et al., 2006] Diaby, A., Le van, A., and Wielgosz, C. (2006). Buckling and wrinkling of prestressed membranes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(11) :992–1001.
- [Ed-dinari et al., 2014] Ed-dinari, A., Mottaqui, H., Braikat, B., Jamal, M., Mohri, F., and Da-

- 
- mil, N. (2014). Large torsion analysis of thin-walled open sections beams by the Asymptotic Numerical Method. *Engineering Structures*, 81 :240–255.
- [Friedl et al., 2000] Friedl, N., Rammerstorfer, F. G., and Fischer, F. D. (2000). Buckling of stretched strips. *Computers and Structures*, 78(1) :185–190.
- [Gilabert et al., 1992] Gilabert, A., Sibillot, P., Sornette, D., Vanneste, C., Maugis, D., and Muttin, F. (1992). Buckling instability and pattern around holes or cracks in thin plates under a tensile load. *European journal of mechanics. A. Solids*, 11(1) :65–89.
- [Goyal et al., 2010] Goyal, S., Srinivasan, K., Subbarayan, G., and Siegmund, T. (2010). On instability-induced debond initiation in thin film systems. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(8) :1298–1313.
- [Gu and Asaro, 2008] Gu, P. and Asaro, R. J. (2008). Wrinkling of sandwich polymer matrix composite panels under transverse thermal gradients. *Fire Safety Journal*, 43(2) :151–160.
- [Halphen and Nguyen, 1975] Halphen, B. and Nguyen, Q. S. (1975). Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de mécanique*, 14 :39–63.
- [Healey et al., 2013] Healey, T. J., Li, Q., and Cheng, R. B. (2013). Wrinkling behavior of highly stretched rectangular elastic films via parametric global bifurcation. *Journal of Nonlinear Science*, 23(5) :777–805.
- [Hornig et al., 2006] Hornig, J., Schoop, H., and Herbrich, U. (2006). Wrinkling Analysis of Thermo-Elastic Membranes. *Technische Mechanik*, pages 33–43.
- [Hu et al., 2008] Hu, H., Belouettar, S., Potier-Ferry, M., and Daya, E. M. (2008). Multi-scale modelling of sandwich structures using the Arlequin method Part I : Linear modelling. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45(1) :37–51.
- [Hu et al., 2010] Hu, H., Belouettar, S., Potier-Ferry, M., Daya, E. M., and Makradi, A. (2010). Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the Arlequin method. *Composite Structures*, 92(2) :515–522.
- [Hu et al., 2011] Hu, H., Damil, N., and Potier-Ferry, M. (2011). A bridging technique to analyze the influence of boundary conditions on instability patterns. *Journal of Computational Physics*, 230(10) :3753–3764.
- [Huang et al., 2015] Huang, Q., Hu, H., Yu, K., Potier-ferry, M., Belouettar, S., Damil, N.,

- Huang, Q., Hu, H., Yu, K., Potier-ferry, M., Belouettar, S., and Damil, N. (2015). Macroscopic simulation of membrane. *International Journal of Solids & Structures*, 64-65 :246–258.
- [Iyer et al., 1995] Iyer, S. B. S., Harshavardhan, K. K., and Kumar, V. (1995). Buckling patterns in diamond-like carbon films. *Thin Solid Films*, 256(1-2) :94–100.
- [Jacques et al., 2007] Jacques, N., Elias, A., Potier-Ferry, M., and Zahrouni, H. (2007). Buckling and wrinkling during strip conveying in processing lines. *Journal of Materials Processing Technology*, 190(1-3) :33–40.
- [Jacques and Potier-Ferry, 2005] Jacques, N. and Potier-Ferry, M. (2005). On mode localisation in tensile plate buckling. *Comptes Rendus - Mecanique*, 333(11) :804–809.
- [Jenkins et al., 1998] Jenkins, C. H., Haugen, F., and Spicher, W. H. (1998). Experimental measurement of wrinkling in membranes undergoing planar deformation. *Experimental Mechanics*, 38(2) :147–152.
- [Jones, 2006] Jones, R. M. (2006). *Buckling of bars, plates, and shells*. Bull Ridge Corporation.
- [Kim et al., 2000] Kim, J. B., Yoon, J. W., and Yang, D. Y. (2000). Wrinkling initiation and growth in modi " ed Yoshida buckling test : Finite element analysis and experimental comparison. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42 :1683–1714.
- [Koutsawa et al., 2010] Koutsawa, Y., Belouettar, S., Makradi, A., and Nasser, H. (2010). Sensitivities of effective properties computed using micromechanics differential schemes and high-order Taylor series : Application to piezo-polymer composites. *Mechanics Research Communications*, 37(5) :489–494.
- [Koutsawa et al., 2008] Koutsawa, Y., Charpentier, I., Daya, E. M., and Cherkaoui, M. (2008). A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I : The Diamant toolbox. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(3-4) :572–577.
- [Kouznetsova et al., 2004] Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D., and Brekelmans, W. a. M. (2004). Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : A nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48-51) :5525–5550.
- [Lahmam et al., 2002] Lahmam, H., Cadou, J. M., Zahrouni, H., Damil, N., and Potier-Ferry, M. (2002). High-order predictor-corrector algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(6) :685–704.

- 
- [Lecieux and Bouzidi, 2010] Lecieux, Y. and Bouzidi, R. (2010). Experimental analysis on membrane wrinkling under biaxial load - Comparison with bifurcation analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 47(18-19) :2459–2475.
- [Lecieux and Bouzidi, 2012] Lecieux, Y. and Bouzidi, R. (2012). Numerical wrinkling prediction of thin hyperelastic structures by direct energy minimization. *Advances in Engineering Software*, 50(1) :57–68.
- [Li et al., 2011] Li, B., Cao, Y. P., Feng, X. Q., and Gao, H. (2011). Surface wrinkling of mucosa induced by volumetric growth : Theory, simulation and experiment. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(4) :758–774.
- [Liu et al., 2012] Liu, Y., Yu, K., Hu, H., Belouettar, S., Potier-Ferry, M., and Damil, N. (2012). A new Fourier-related double scale analysis for instability phenomena in sandwich structures. *International Journal of Solids and Structures*, 49(22) :3077–3088.
- [Lougou et al., 2014] Lougou, K. G., Boudaoud, H., Daya, E. M., and Azrar, L. (2014). Vibration modeling of large repetitive sandwich structures with viscoelastic core. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (November) :00–00.
- [Mhada et al., 2012] Mhada, K., Braikat, B., Hu, H., Damil, N., and Potier-Ferry, M. (2012). About macroscopic models of instability pattern formation. *International Journal of Solids and Structures*, 49(21) :2978–2989.
- [Miller et al., 1985] Miller, R. K., Hedgepeth, J. M., Weingarten, V. I., Das, P., and Kahyai, S. (1985). Finite element analysis of partly wrinkled membranes. 20(1) :631–639.
- [Murray and Wilson, 1969] Murray, D. W. and Wilson, E. L. (1969). Finite-element postbuckling analysis of thin elastic plates. *AIAA Journal*, 7(10) :1915–1920.
- [Nakhoul, 2013] Nakhoul, R. (2013). Méthode multi-échelle pour la modélisation du flambage des tôles minces sous contraintes résiduelles-Application au laminage. *CSMA 2013-11ème Colloque National en Calcul des Structures*, pages 1–8.
- [Nezamabadi, 2009] Nezamabadi, S. (2009). *Méthode Asymptotique Numérique pour l'étude multi échelle des instabilités dans les matériaux hétérogènes*. PhD thesis, Université Paul Verlaine Metz.
- [Nezamabadi et al., 2013] Nezamabadi, S., Sad Saoud, K., and Maurin, B. (2013). Stratégie numérique pour modéliser des plis dans les membranes minces. *Csma 2013*, pages 1–4.

- [Orszulik and Shan, 2012] Orszulik, R. R. and Shan, J. (2012). Fuzzy logic active flatness control of a space membrane structure. *Acta Astronautica*, 77 :68–76.
- [Padé, 1892] Padé, H. (1892). *Sur la représentation approchée d’une fonction par des fractions rationnelles*. Number 740. Gauthier-Villars et fils.
- [Plassa, 1969] Plassa, M. (1969). Effects of elastic instability of thin germanium films. *Thin Solid Films*, 3(5) :305–314.
- [Rateau, 2003] Rateau, G. (2003). *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris.
- [Riks, 1979] Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7) :529–551.
- [Roddeman et al., 1987a] Roddeman, D. G., Drukker, J., Oomens, C. W. J., and Janssen, J. D. (1987a). The Wrinkling of Thin Membranes : Part I - Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :884–887.
- [Roddeman et al., 1987b] Roddeman, D. G., Drukker, J., Oomens, C. W. J., and Janssen, J. D. (1987b). The wrinkling of thin membranes : Part II—numerical analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 54(4) :888–892.
- [Shaw and Huang, 1990] Shaw, D. and Huang, Y. (1990). Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(6) :1019–1027.
- [Shimizu et al., 1991] Shimizu, S., Yoshida, S., and Enomoto, N. (1991). Buckling of plates with a hole under tension. *Thin-Walled Structures*, 12(1) :35–49.
- [Simo and Vu-Quoc, 1986] Simo, J. and Vu-Quoc, L. (1986). A three-dimensional finite-strain rod model. part II : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(1) :79–116.
- [Singha et al., 2001] Singha, M. K., Ramachandra, L., and Bandyopadhyay, J. (2001). Thermal postbuckling analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, 54(4) :453–458.
- [Timoshenko and Gere, 2009] Timoshenko, S. and Gere, J. (2009). *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications, NY.
- [Timoshenko and Goodier, 1951] Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951). *Theory of elasticity*, volume 412. New York.

- 
- [Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*, volume 2. McGraw-hill New York.
- [Tomita and Shindo, 1988] Tomita, Y. and Shindo, a. (1988). Onset and growth of wrinkles in thin square plates subjected to diagonal tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, 30(12) :921–931.
- [Wagner, 1931] Wagner, H. (1931). Flat sheet metal girders with very thin webs, Part I - General theories and assumptions. *National Advisory Commitee for Aeronautics*, Technical(604).
- [Wagner and Ballerstedt, 1935] Wagner, H. and Ballerstedt, W. (1935). Tension fields in originally curved, thin sheets during shearing stresses. *National Advisory Commitee for Aeronautics*, (774).
- [Wang et al., 2009] Wang, C. G., Du, X. W., Tan, H. F., and He, X. D. (2009). A new computational method for wrinkling analysis of gossamer space structures. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6) :1516–1526.
- [Wang et al., 2007] Wang, C. G., Tan, H. F., Du, X. W., and Wan, Z. M. (2007). Wrinkling prediction of rectangular shell-membrane under transverse in-plane displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 44(20) :6507–6516.
- [Wesfreid and Zaleski, 1984] Wesfreid, J. E. and Zaleski, S. (1984). Cellular structures in instabilities. In *Cellular Structures in Instabilities*, volume 210.
- [Wong and Pellegrino, 2006] Wong, Y. W. and Pellegrino, S. (2006). Wrinkled membranes Part III : Numerical simulations. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(1) :63–95.
- [Xu et al., 2014a] Xu, F., Hu, H., Potier-Ferry, M., and Belouettar, S. (2014a). Bridging techniques in a multi-scale modeling of pattern formation. *International Journal of Solids and Structures*, 51(18) :3119–3134.
- [Xu et al., 2015a] Xu, F., Koutsawa, Y., Potier-Ferry, M., and Belouettar, S. (2015a). Instabilities in thin films on hyperelastic substrates by 3D finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 69-70 :71–85.
- [Xu et al., 2014b] Xu, F., Potier-Ferry, M., Belouettar, S., and Cong, Y. (2014b). 3D finite element modeling for instabilities in thin films on soft substrates. *International Journal of Solids and Structures*, 51(21-22) :3619–3632.

- [Xu et al., 2015b] Xu, F., Potier-Ferry, M., Belouettar, S., and Hu, H. (2015b). Multiple bifurcations in wrinkling analysis of thin films on compliant substrates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 76 :203–222.
- [Yu et al., 2013] Yu, K., Hu, H., Chen, S., Belouettar, S., and Potier-Ferry, M. (2013). Multi-scale techniques to analyze instabilities in sandwich structures. *Composite Structures*, 96 :751–762.
- [Zheng, 2009] Zheng, L. (2009). *Wrinkling of Dielectric Elastomer Membranes*. PhD thesis, California Institute of Technology.
- [Zienkiewicz and Taylor, 1991] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (1991). *The finite element method*. New York.



## Résumé

Le plissement est un phénomène d'instabilité observé généralement dans les structures minces ayant un comportement de type membrane. Ces structures minces ne supportent pas d'effort de flexion et sont donc sollicitées en traction, ce qui augmente leur rigidité à la flexion. Dans cette thèse, nous avons développé une technique de réduction de modèle pour la modélisation du phénomène de plissement des membranes minces. Cette technique, basée sur les séries de Fourier à double échelle, permet de déduire d'un modèle complet de membrane, un modèle réduit capable de prendre en compte le flambage global et local de la structure étudiée. Les valeurs critiques concernant la charge de plissement et la longueur d'onde des plis sont déterminées analytiquement d'une part, puis numériquement d'autre part. Des exemples numériques nous ont permis de valider le modèle numérique par rapport au modèle analytique. Les modèles numériques étudiés prennent en compte le modèle complet et le modèle réduit de la membrane. Le modèle complet est simulé dans ABAQUS et résolu numériquement à l'aide de la méthode de la longueur d'arc et le modèle réduit est implémenté dans MATLAB et résolu numériquement à l'aide de la méthode asymptotique numérique. Nous avons étudié le comportement de la membrane sous sollicitation mécanique, thermique et thermo-mécanique. Les résultats obtenus montrent que le modèle réduit est capable de se substituer au modèle complet dans la détermination des contraintes critiques et longueurs d'onde correspondantes. Le gain en temps de calcul obtenu est important, ceci grâce à la très faible densité de maillage requis par le modèle réduit. Il apparaît également que le chargement thermique de la membrane est un facteur important dans l'apparition des instabilités de plissement dans la membrane par rapport au chargement mécanique de type déplacement imposé ou traction imposé. Par ailleurs, le modèle réduit est très sensible aux conditions aux bords de la membrane. Enfin le modèle réduit requiert d'avoir une longueur d'onde des plis quasiment constante dans la largeur de la membrane.

**Mots-clés:** Instabilités, Membranes minces, Plissement, Méthode asymptotique numérique, Méthode de longueur d'arc, Séries de Fourier double échelle, Méthode éléments finis.

# Abstract

Wrinkling is an instability phenomenon generally observed in thin structures with membrane's behavior. Those thin structures have no rigidity to flexion and are therefore used in traction. In this thesis, we developed a reduction model's technique for the modeling of wrinkling phenomenon in thin membranes. This technique, based on the double scale Fourier series, allow us to deduce from a full membrane model, a reduced membrane model that is able to take into account the global and local buckling of the structure. The critical load and critical wavelength are determined analytically on one side, then numerically on the other side. Numerical exemples are conducted to validate the numerical model towards the analytical one. Numerical models studied take into account both full and reduce membrane models. The full model is simulated in ABAQUS and solved numerically using the arc length method and the reduced model is implemented in MATLAB and solved numerically using the asymptotic numerical method. We studied the membrane behavior under mechanical, thermal and thermo-mechanical loading. The results obtained show that the full membrane model can be replaced by the reduced one in determining critical loads and corresponding wavelengths. The gain in computation time obtained is important, due to the coarse mesh required by the reduced model. It appears also that the thermal loading of the membrane is an important parameter in the appearance of wrinkling instabilities comparing it to mechanical loading of imposed displacement or imposed force type. Besides that, the reduced model is very sensitive to membrane's boundaries conditions. Finally, the reduced model requires to have a quasi constant wavelength along the membrane width.

**Keywords:** Instabilities, Thin membranes, Wrinkling, Asymptotic numerical method, Arc length method, Double scale Fourier series, Finite element method.

