



**HAL**  
open science

# Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette de fluides complexes

Yao Agbessi

► **To cite this version:**

Yao Agbessi. Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette de fluides complexes. Autre [cond-mat.other]. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0160 . tel-01754494

**HAL Id: tel-01754494**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01754494>**

Submitted on 30 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

---

# Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette de fluides complexes

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 02 Septembre 2015

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

**(mention Génie des Procédés et des Produits)**

par

**Yao AGBESSI**

### Composition du jury

*Rapporteurs :* Pierre BRANCHER, Professeur, IMFT, Université Toulouse 3 - Paul Sabatier  
Blaise NSOM, Professeur, LBMS, Université de Brest

*Examineurs :* Innocent MUTABAZI, Professeur, LOMC, Université du Havre (Président du jury)  
Lionel CHOPLIN, Professeur, LRGP, Université de Lorraine (Directeur de thèse)  
Chérif NOUAR, Directeur de recherche CNRS, LEMTA, Université de Lorraine  
Cécile LEMAITRE, Maître de conférences, LRGP, Université de Lorraine

---

Laboratoire Réactions et Génie des Procédés — UMR 7274 CNRS

1 Rue Grandville BP 20451 - 54001 NANCY

&

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée — UMR 7563 CNRS

2 Avenue de la Forêt de Haye TSA 60604 - 54518 VANDOEUVRE-LÉS-NANCY



*À Fleur,  
À ma mère et mon père,  
À Komlan et mes frères et sœurs.*

*« Quand je suis triste, je pense à vous, comme l'hiver on pense au soleil, et quand je suis gai, je  
pense à vous, comme en plein soleil on pense à l'ombre. »*

Victor Hugo

---



## Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit est le fruit d'une collaboration entre le Laboratoire de Réaction et Génie des Procédés (LRGP) et le Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique Appliquée. Ce double environnement de travail m'a permis de mener à bien les différents aspects de cette thèse. Ce travail a reçu un appui financier du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, de la cellule énergie du CNRS et de la région Lorraine.

Je tiens à adresser mes remerciements à mes encadrants, M. Lionel CHOPLIN, M. Chérif NOUAR et Mme Cécile LEMAITRE de m'avoir accordé leur confiance afin que je puisse réaliser ce travail dans une liberté permanente et une incitation continue au travail bien fait. Votre assistance, vos appuis et conseils m'ont beaucoup aidé tout au long cette thèse. J'ai beaucoup appris de vous tant sur le plan humain que sur le plan professionnel. Je suis donc fier d'avoir effectué ce chemin avec vous et je vous témoigne toute ma gratitude.

Je présente mes sincères remerciements M. Pierre BRANCHER et M. Blaise NSOM d'avoir accepté de rapporter ce travail malgré le délai court dont vous avez disposé pour la remise des rapports. Vos critiques et remarques sur ce travail ont été constructives et ont permis d'améliorer le manuscrit final de thèse. Trouvez ici, toute ma profonde gratitude. Je remercie également M. Innocent MUTABAZI d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir présidé mon jury de thèse.

Je remercie tous les membres de l'équipe du GEMICO pour la bonne ambiance et la bonne humeur autour des pauses café. Je tiens à remercier tout particulièrement Philippe MARCHAL pour les cours de rhéologie improvisés dans son bureau et d'avoir lu et corrigé certaines parties « rhéologiquement complexes » du manuscrit. A mes collègues et amis doctorants et post-doc, j'adresse ma gratitude. Votre fréquentation a été d'un très grand soutien pour moi. Je pense notamment à Eve, Alexandre, Edward, Edéluç, Ronald, Emilio, Inès... Ce fût de grands moments de partage, d'échange et donc une grande richesse d'avoir effectué ce bout de chemin avec vous tous.

J'aimerais remercier également tout le personnel de l'atelier mécanique et du service électronique du LEMTA. Je n'aurai pas pu mener à bien les études expérimentales de ce travail sans votre soutien. Votre assistance fût d'une aide précieuse pour moi. Merci donc à Jean Yves, Frank et Jérémie pour leur implication dans la réalisation du dispositif de Taylor-Couette. Merci à Mathieu, Jamal et Simon pour leur aide dans la mise en place et l'exploitation du système d'acquisition. Ma reconnaissance particulière à Simon BECKER pour son assistance inconditionnelle et son implication dans les réglages et la manipulation des systèmes de lasers utilisés.

Je voudrais aussi remercier tous mes amis et collègues du LEMTA, Jing, Zakariya, Waseem, Mondher, Thomas, Sofyane, Caroline, Remy, Assma... Vous avez contribué à mon intégration et vous avez participé à rendre agréable mon séjour au LEMTA.

Je présente ma profonde gratitude à ma marraine Isabel DUCHENE de la Jeune Chambre Économique (JCI) de Nancy qui a bien voulu relire la version finale de mon manuscrit. Tu as proposé spontanément de faire ce travail et je te remercie d'avoir respecté ta parole.

Je voudrais manifester ici, toute ma reconnaissance à M. Kossi NAPO et à M. Magolmééna BANNA de l'Université de Lomé pour leur assistance, aides et conseils dans mon processus de poursuite des études d'ingénieur en France. Si j'arrive à écrire sur cette page en ce jour, c'est aussi grâce à votre inconditionnel soutien. Je suis heureux d'avoir croisé votre chemin.

A mes parents, mes frères et mes sœurs, je voudrais adresser mes plus vifs remerciements. Votre soutien a été continu et sans faille tout au long de mon cursus universitaire et pendant mes travaux de thèse.

Je remercie Fleur d'avoir été là pour moi et de toujours croire en moi. Tu as été mon plus grand soutien dans les moments où j'en avais le plus besoin. Tu mérites plus qu'un simple remerciement sur cette page bien trop petite pour tout exprimer. Je te souhaite beaucoup de courage pour la dernière ligne droite de ta thèse. J'espère être d'un grand reconfort pour toi.

Enfin, je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

*« Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries. »*

Marcel Proust



# Sommaire

<b>Table des figures</b>	<b>x</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xxiii</b>
<b>Notations et conventions</b>	<b>xxv</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
<b>1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>3</b>
1.1 Généralités sur le comportement rhéologique des fluides . . . . .	5
1.1.1 Déformations et tenseur des taux de déformations . . . . .	5
1.1.2 Tenseur des contraintes visqueuses . . . . .	5
1.1.3 Définition de la viscosité . . . . .	7
1.1.4 Fluides newtoniens . . . . .	8
1.1.5 Fluides non newtoniens . . . . .	8
1.2 Fluides complexes . . . . .	10
1.3 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides newtoniens . . . . .	11
1.4 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides viscoélastiques . . . . .	16
1.5 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte . . . . .	17
1.5.1 Objectifs et méthodologie de la thèse . . . . .	18
1.5.2 Plan de la thèse . . . . .	19
<b>2 FORMULATION MATHÉMATIQUE ET ÉCOULEMENT DE BASE</b>	<b>21</b>
2.1 Formulation mathématique . . . . .	23
2.1.1 Équations fondamentales . . . . .	23
2.1.2 Équations constitutives . . . . .	24
2.2 Formulation mathématique adimensionnelle . . . . .	26
2.2.1 Viscosité de référence . . . . .	27
2.2.2 Écoulement de base . . . . .	28

2.2.3	Loi de puissance	28
2.2.4	Loi de Carreau	31
2.2.5	Loi de Bingham	33
2.3	Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette	35
2.3.1	Paramètres de contrôle de la stabilité	35
2.3.2	Ligne de rotation solide et ligne de Rayleigh	38
2.4	Équations aux perturbations	40
2.5	Équations aux perturbations linéarisées	41
2.6	Problème aux valeurs initiales	43
<b>3</b>	<b>ANALYSE LINÉAIRE DE STABILITÉ : APPROCHE MODALE</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction	47
3.2	Problème aux valeurs propres	47
3.3	Résolution numérique	48
3.3.1	Convergence	49
3.4	Étude des spectres de valeurs propres	50
3.4.1	Perturbation axisymétrique ( $m = 0$ )	50
3.4.2	Perturbation non-axisymétrique ( $m \neq 0$ )	55
3.5	Stabilité marginale	58
3.5.1	Calculs de validation	58
3.5.2	Fluides en loi de puissance	60
3.5.3	Fluides de Carreau	71
3.5.4	Fluides de Bingham	73
3.5.5	Caractéristiques des structures à la transition	76
3.6	Conclusion	80
<b>4</b>	<b>ANALYSE LINÉAIRE DE STABILITÉ : APPROCHE NON MODALE</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction	83
4.2	Non-normalité et pseudospectre	83
4.3	Formulation mathématique de la croissance transitoire	87
4.3.1	Méthode de résolution numérique	88
4.3.2	Validation	89
4.3.3	Croissance transitoire pour des fluides rhéofluidifiants	92
4.3.4	Influence de l'anisotropie sur la croissance transitoire	100
4.3.5	Contribution des modes propres à la croissance transitoire	102
4.3.6	Évolution de la perturbation optimale : les mécanismes de la croissance transitoire	103

---

4.4	Conclusion . . . . .	120
<b>5</b>	<b>ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUETTE</b>	<b>121</b>
5.1	Introduction . . . . .	123
5.2	Matériel et méthode . . . . .	124
5.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	124
5.2.2	Mesures rhéologiques . . . . .	126
5.2.3	Fluides utilisés . . . . .	128
5.2.4	Mesure de couple . . . . .	134
5.2.5	Visualisation par ensemencement de paillettes . . . . .	136
5.2.6	Technique de vélocimétrie par images de particules . . . . .	137
5.3	Résultats & discussions . . . . .	139
5.3.1	Manipulations avec le cylindre extérieur fixe . . . . .	139
5.3.2	Manipulations avec le cylindre extérieur tournant . . . . .	154
5.4	Conclusion . . . . .	161
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES</b>	<b>163</b>
<b>A</b>	<b>Opérateurs utilisés dans les équations aux perturbations</b>	<b>169</b>
<b>B</b>	<b>Linear stability of Taylor-Couette flow of shear-thinning fluids</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>

# Table des figures

1.1	Composantes du tenseur des contraintes visqueuses s'exerçant sur un élément de surface, porté par une normale, délimitant un élément de volume cubique. . . . .	6
1.2	Écoulement de Couette plan : écoulement entre deux plans parallèles infinis, l'un se déplaçant à la vitesse $V$ , l'autre étant immobile. . . . .	7
1.3	Évolution de la contrainte de cisaillement $\sigma$ et de la première différence de contraintes normales $N_1$ en fonction du taux de cisaillement pour une solution de polyacrilamide à 1% [Barnes <i>et al.</i> , 1989]. . . . .	9
1.4	Différents comportements rhéologiques des fluides non newtoniens purement visqueux. Évolution de la contrainte visqueuse en fonction du taux de cisaillement. . . . .	10
1.5	Délimitation des zones stable et instable suivant le critère Rayleigh pour un fluide newtonien avec un rapport de rayons $\eta = 0.4$ . . . . .	12
1.6	Régimes d'écoulement observés par [Andereck <i>et al.</i> , 1986] lorsque les deux cylindres tournent en fonction des valeurs des nombres de Reynolds intérieur $Re_1$ et extérieur $Re_2$ , pour un fluide newtonien et un rapport de rayon $\eta = R_1/R_2 = 0.883$ . . . . .	14
2.1	Schéma de la géométrie de l'écoulement de Taylor-Couette. . . . .	23
2.2	Écoulement de base pour un fluide en loi de puissance entre deux cylindres contra-rotatif $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$ pour $\eta = 0.881$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité (1) $n_p = 1$ (fluide newtonien) (2) $n_p = 0.5$ et (3) $n_p = 0.3$ . . . . .	29
2.3	Écoulement de base pour un fluide en loi de puissance en régime contra-rotatif $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$ pour $\eta = 0.4$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité (1) $n_p = 1$ (fluide newtonien) (2) $n_p = 0.5$ et (3) $n_p = 0.3$ . . . . .	30
2.4	Écoulement de base pour un fluide en loi de puissance avec des cylindres en co-rotation pour $\eta = 0.881$ , $Re_1 = 300$ et $Re_2 = 3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité avec (1) $n_p = 1$ (fluide newtonien) (2) $n_p = 0.5$ (3) $n_p = 0.3$ et (4) $n_p = 0.1$ . . . . .	30
2.5	Écoulement de base pour un fluide de Carreau pour $\eta = 0.881$ , $Re_1 = 300$ , $Re_2 = -3000$ et $\lambda = 1$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1) $n_c = 1$ (fluide newtonien) (2) $n_c = 0.5$ et (3) $n_c = 0.3$ . . . . .	31

2.6	Écoulement de base pour un fluide de Carreau pour $\eta = 0.4$ , $Re_1 = 300$ , $Re_2 = -3000$ et $\lambda = 1$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1) $n_c = 1$ (fluide newtonien) (2) $n_c = 0.5$ et (3) $n_c = 0.3$ . . . . .	31
2.7	Comparaison entre l'écoulement de base pour un fluide de Carreau et pour un fluide en loi de puissance avec $\eta = 0.4$ , $n_p = 0.5$ , $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1) $\lambda = 0$ (fluide newtonien), (2) $\lambda = 0.2$ , (3) $\lambda = 10$ et (+ +) loi de puissance avec $n_p = 0.5$ . . . . .	32
2.8	Écoulement de base pour un fluide de Carreau pour $\eta = 0.4$ , $Re_1 = 300$ , $Re_2 = -3000$ et $n_c = 0.5$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1) $\lambda = 0.001$ (2) $\lambda = 0.1$ (3) $\lambda = 1$ et (4) $\lambda = 10$ . . . . .	32
2.9	Régimes d'écoulement d'un fluide de Bingham pour $B_i = 10$ et deux rapports de rayons différents. (a) $\eta = 0.881$ et (b) $\eta = 0.4$ . (I) Ligne de rotation solide, (II) espace annulaire partiellement cisailé et (III) espace annulaire totalement cisailé. . . . .	33
2.10	Écoulement de base pour un fluide de Bingham avec $\eta = 0.881$ , $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1) $B_i = 0$ (fluide newtonien), (2) $B_i = 50$ et (3) $B_i = 100$ . . . . .	34
2.11	Écoulement de base pour un fluide de Bingham avec $\eta = 0.4$ , $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1) $B_i = 0$ (fluide newtonien), (2) $B_i = 10$ et (3) $B_i = 100$ . Les lignes verticales pointillées correspondent à la position d'interface entre les zones cisailée et non cisailée. . . . .	34
2.12	Écoulement de base pour un fluide de Bingham entre deux cylindres en co-rotation pour $\eta = 0.881$ , $Re_1 = 300$ and $Re_2 = 3000$ . (a) Profils de vitesses et (b) profils des viscosités. (1) $B_i = 0$ (fluide newtonien) (2) $B_i = 10$ (3) $B_i = 50$ et (4) $B_i = 100$ . . . . .	35
2.13	Valeurs du paramètre $R_\Omega$ [Dubrulle <i>et al.</i> , 2005] dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour $\eta = 0.881$ . (a) Fluide newtonien et (b) fluide en loi de puissance avec $n_p = 0.3$ . . . . .	36
2.14	Valeur du paramètre $R_\Omega$ [Dubrulle <i>et al.</i> , 2005] dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour $\eta = 0.4$ . (a) Fluide newtonien et (b) fluide en loi de puissance avec $n_p = 0.3$ . . . . .	37
2.15	Lignes de Rayleigh pour un fluide en loi de puissance avec (a) $\eta = 0.881$ (b) $\eta = 0.4$ . (1) Fluide newtonien $n_p = 1$ , (2) $n_p = 0.5$ , (3) $n_p = 0.2$ et (4) $n_p = 0.1$ . (---) Ligne de rotation solide. . . . .	39
2.16	Lignes de Rayleigh pour un fluide de Bingham avec (a) $\eta = 0.881$ (b) $\eta = 0.4$ . (1) $B_i = 0$ (fluide newtonien), (2) $B_i = 1$ et (3) $B_i = 10$ . (---) Ligne de rotation solide. . . . .	39

3.1	Spectres de valeurs propres d'un fluide newtonien avec $\eta = 0.881$ , $Re_1 = 400$ , $k = \pi$ , $m = 0$ (perturbation axisymétrique) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre extérieur $Re_2$ . (a) Sur la ligne de Rayleigh $Re_2 = 352.4$ (b) $Re_2 = 0$ (c) $Re_2 = -4000$ (d) $Re_2 = -25000$ . . . . .	52
3.2	Spectres de valeurs propres d'un fluide newtonien avec $\eta = 0.4$ , $Re_1 = 400$ , $k = \pi$ , $m = 0$ (perturbation axisymétrique) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre extérieur $Re_2$ . (a) $Re_2 = -4000$ et (b) $Re_2 = -25000$ . . . . .	53
3.3	Spectres des valeurs propres d'un fluide en loi de puissance, $n = 0.5$ , avec $\eta = 0.881$ , $Re_1 = 500$ , $k = \pi$ , $m = 0$ (perturbation axisymétrique) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre extérieur $Re_2$ . (a) Sur la ligne de Rayleigh $Re_2 = 454.71$ , (b) $Re_2 = -4000$ . . . . .	54
3.4	Spectres de valeurs propres de fluides rhéofluidifiants avec $\eta = 0.881$ , $k = \pi$ et $m = 0$ (perturbation axisymétrique). (a) Fluide en loi de puissance avec $n = 0.5$ , $Re_2 = -4000$ et (o) $Re_1 = 500$ , (●) $Re_1 = Re_{1c} = 828.14$ , (b) fluide de Carreau avec $n = 0.5$ , $\lambda = 10$ , $Re_2 = -4000$ et (o) $Re_1 = 100$ , (●) $Re_1 = Re_{1c} = 538.55$ . . . . .	54
3.5	Spectres de valeurs propres d'un fluide à seuil, $B_i = 10$ , avec $\eta = 0.881$ , $k = \pi$ et $m = 0$ (perturbation axisymétrique). (a) Sur la ligne de Rayleigh $Re_1 = 500$ et $Re_2 = 560.01$ . (b) $Re_2 = -4000$ et (o) $Re_1 = 500$ , (●) $Re_1 = Re_{1c} = 1962.9$ . . . . .	55
3.6	Spectres de valeurs propres de fluide newtonien, avec $\eta = 0.881$ , $Re_2 = -4000$ , $k = \pi$ et $m = 0$ (perturbation non axisymétrique). (a) $Re_1 = 400$ , (1) $m = 1$ , (2) $m = 3$ , (3) $m = 5$ , (b) (1) $m = 1$ , $Re_1 = Re_{1c} = 1221.4$ , (2) $m = 3$ , $Re_1 = Re_{1c} = 1059.8$ , (3) $m = 5$ , $Re_1 = Re_{1c} = 1011.7$ . . . . .	56
3.7	Spectres de valeurs propres pour un fluide en loi de puissance, $n_p = 0.5$ , avec $\eta = 0.881$ , $Re_2 = -4000$ , $k = \pi$ et différentes valeurs du nombre d'onde azimutal. (a) $Re_1 = 400$ , (1) $m = 1$ , (2) $m = 2$ , (3) $m = 5$ , (b) $m = 5$ , $Re_1 = Re_{1c} = 878.55$ . . . . .	57
3.8	Spectres de valeurs propres pour un fluide à seuil, $B_i = 10$ , avec $\eta = 0.881$ , $Re_2 = -4000$ , $k = \pi$ et différentes valeurs du nombre d'onde azimutal. (a) $Re_1 = 400$ , (1) $m = 1$ , (2) $m = 3$ , (3) $m = 5$ , (b) $m = 1$ , $Re_1 = Re_{1c} = 1962$ . . . . .	57
3.9	Spectres de valeurs propres pour un fluide de Carreau, $n = 0.5$ , $\lambda = 10$ avec une perturbation non axisymétrique pour un rapport de rayon $\eta = 0.881$ . Le nombre de Reynolds du cylindre extérieur et le nombre d'onde axial sont fixés : $Re_2 = -4000$ et $k = \pi$ respectivement. (a) $m = 1$ , $Re_1 = 400$ , (b) $m = 2$ , $Re_1 = 400$ , (c) $m = 3$ , $Re_1 = 400$ , (d) $m = 3$ , $Re_1 = Re_{1c} = 526.49$ . . . . .	58

3.10 Courbes de stabilité marginale dans le plan ( $Re_1, Re_2$ ). (a) Fluide newtonien et avec  $\eta = 0.881$  et  $m \neq 0$  (perturbation 3D) : comparaison de nos résultats (—) avec les travaux de [Meseguer, 2002] ( $\Delta$ ). (— —) Nos résultats pour une perturbation 2D ( $m = 0$ ). (b) Fluide de Bingham,  $B_i = 10$ , avec  $\eta = 0.883$  et  $m = 0$  : comparaison de nos résultats (—) avec ceux de [Landry, 2006] ( $\Delta$ ). . . . . 59

3.11 Représentation des conditions critiques d'apparition des instabilités dans le plan ( $Re_1, Re_2$ ) pour un fluide en loi de puissance et pour deux rapports de rayons,  $\eta = 0.881$  (figures de gauche) et  $\eta = 0.4$  (figures de droite). (a) et (b) Nombre de Reynolds critiques (stabilité marginale) ; (c) et (d) nombres d'onde azimutaux critique ; (e) et (f) nombres d'onde axiaux critique. (1) Fluide newtonien,  $n_p = 1$ , (2)  $n_p = 0.7$ , (3)  $n_p = 0.5$ , (4)  $n_p = 0.3$ . . . 61

3.12 Variation du nombre de Reynolds critique (a) et du nombre d'onde axial critique (b) en fonction de l'indice  $n_p$  pour différentes valeurs de rapport de rayon quand seul le cylindre intérieur tourne. . . . . 62

3.13 Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice  $n_p$  pour différentes valeurs du rapport de rayon. (a) et (b) Régime contra-rotatif, (c) et (d) régime co-rotatif. 62

3.14 Influence du caractère rhéofluidifiant sur le nombre de Reynolds  $Re_{2s}$  à partir duquel la transition bifurque vers les spirales pour (1) un faible entrefer  $\eta = 0.881$  et (2) un large entrefer  $\eta = 0.4$ . . . . . 63

3.15 Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie  $\Gamma^+$  et ( $\square$ ) de la dissipation  $\Gamma^-$  définies par l'équation (3.21) pour un fluide en loi de puissance avec (a)  $\eta = 0.881$  (b) et  $\eta = 0.4$ , en fonction de l'indice de rhéofluidification  $n_p$  lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ). . . . . 65

3.16 Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie  $\Gamma^+$  et ( $\square$ ) de la dissipation  $\Gamma^-$  définies par l'équation (3.21) pour un fluide en loi de puissance avec (a) et (b)  $\eta = 0.881$ , (c) et (d)  $\eta = 0.4$  en fonction de l'indice de rhéofluidification  $n_p$ . A gauche  $Re_2 = -2025$  et à droite  $Re_2 = 500$ . . . . . 66

3.17 Rayons auxquels les fonctions  $f(r)$  ( $\circ$ ) et  $g_1(r) + g_2(r)$  ( $\Delta$ ) définies par les équations ((3.18) - (3.20)) atteignent leur maximum, pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$  et  $\eta = 0.881$ . . . . . 67

3.18 Courbes de stabilité marginale dans le plan ( $Re_{1w}, Re_{2w}$ ) pour un fluide en loi de puissance. (a)  $\eta = 0.881$  ; (b)  $\eta = 0.4$ . (1) Fluide newtonien, (2)  $n_p = 0.7$ , (3)  $n_p = 0.5$ , et (4)  $n_p = 0.3$ . . . . . 67

3.19 Viscosité à la paroi du cylindre intérieur en fonction de l'indice de l'écoulement  $n_p$  pour  $Re_1 = 300$  et (1)  $Re_2 = 0$ , (2)  $Re_2 = -1000$ , (3)  $Re_2 = -2000$  (4)  $Re_2 = -3000$ , (5)  $Re_2 = -4000$ . (a)  $\eta = 0.881$  et (b)  $\eta = 0.4$ . . . . . 69

3.20	Courbes de stabilité marginale ( $Re, R_\Omega$ ) pour un fluide en loi de puissance pour $\eta = 0.881$ . (1) Fluide newtonien, (2) $n_p = 0.7$ , (3) $n_p = 0.5$ et (4) $n_p = 0.3$ . . . . .	70
3.21	Conditions critiques d'apparition des instabilités pour un fluide de Carreau, $\lambda = 10$ , pour deux rapports de rayons, $\eta = 0.881$ (figures de gauche) et $\eta = 0.4$ (figures de droite). (a) et (b) Courbes de stabilité marginale dans le plan ( $Re_1, Re_2$ ), (c) et (d) nombres d'onde azimutaux critiques, (e) et (f) nombres d'onde axiaux critiques. (1) Fluide newtonien, (2) $n_c = 0.7$ , (3) $n_c = 0.5$ , (4) $n_c = 0.3$ . . . . .	71
3.22	Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie $\Gamma^+$ et ( $\square$ ) de la dissipation $\Gamma^-$ définies par l'équation (3.21) pour un fluide de Carreau avec $\eta = 0.4$ en fonction de l'indice de l'écoulement $n_c$ . (a) $Re_2 = -2025$ , (b) $Re_2 = 500$ . . . . .	72
3.23	Variation du nombre de Reynolds critique (a) et du nombre d'onde axial critique (b) en fonction de nombre de Bingham $B_i$ pour différentes valeurs du rapport de rayon quand seul le cylindre intérieur tourne. . . . .	73
3.24	Conditions critiques d'apparition des instabilités pour un fluide de Bingham pour deux rapports de rayons, $\eta = 0.881$ (figures de gauche) et $\eta = 0.4$ (figures de droite). (a) et (b) Courbes de stabilité marginale dans le plan ( $Re_1, Re_2$ ), (c) et (d) nombres d'onde azimutaux critiques, (e) et (f) nombres d'onde axiaux critiques. (1) Fluide newtonien, (2) $B_i = 5$ , (3) $B_i = 10$ , (4) $B_i = 20$ , (5) $B_i = 30$ et (6) $B_i = 50$ . . . . .	74
3.25	Variation du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham $B_i$ pour différents rapports de rayon. (a) et (b) Cylindres en régime contra-rotatif, (c) et (d) cylindres en régime co-rotatif. . . . .	75
3.26	Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie $\Gamma^+$ et ( $\square$ ) de la dissipation $\Gamma^-$ définies par l'équation (3.21) pour un fluide à seuil avec $\eta = 0.4$ en fonction du nombre de Bingham $B_i$ . (a) $Re_2 = -2025$ , (b) $Re_2 = 500$ . . . . .	76
3.27	Contours de la vitesse radiale aux conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayon $\eta = 0.4$ et pour deux valeurs de Reynolds extérieur $Re_2$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives. . . . .	77
3.28	Contours de la vorticité azimutale aux conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayon $\eta = 0.4$ et pour deux valeurs de Reynolds extérieur $Re_2$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives. . . . .	77
3.29	Contours de (a), (b) vitesse radiale et de (c), (d) vorticité azimutale aux conditions critiques pour un fluide en loi de puissance $n_p = 0.5$ pour deux valeurs du nombre de Reynolds extérieur $Re_2$ . Rapport de rayon $\eta = 0.4$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives. . . . .	78



3.30	Contours de (a), (b) vitesse radiale et de (c), (d) vorticité azimutale aux conditions critiques pour un fluide de Bingham $B_i = 10$ pour deux valeurs du nombre de Reynolds extérieur $Re_2$ . Rapport de rayon $\eta = 0.4$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives. . . . .	79
4.1	Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide newtonien sur la ligne de Rayleigh (a) pour un rapport de rayons $\eta = 0.881$ avec $Re_1 = 62.997 \times 10^2$ , $Re_2 = 55.5 \times 10^2$ , $k = 3.318$ , $m = 0$ ; (b) pour un rapport de rayons $\eta = 0.4$ avec $Re_1 = 138.75 \times 10^2$ , $Re_2 = 55.5 \times 10^2$ , $k = 3.416$ , $m = 0$ . . . . .	84
4.2	Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide newtonien entre deux cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ , $Re_2 = -1061.2$ ). (a) $\eta = 0.881$ , $k = 2.176$ , $m = 13$ et (b) $\eta = 0.4$ , $k = 1.136$ , $m = 3$ . . . . .	85
4.3	Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide en loi de puissance $n_p = 0.5$ , pour des cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ , $Re_2 = -1061.2$ ). (a) $\eta = 0.881$ , $k = 1.647$ , $m = 11$ et (b) $\eta = 0.4$ , $k = 0.911$ , $m = 2$ . . . . .	86
4.4	Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide de Carreau $n_c = 0.5$ , $\lambda = 10$ pour des cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ , $Re_2 = -1061.2$ ). (a) $\eta = 0.881$ , $k = 1.736$ , $m = 11$ et (b) $\eta = 0.4$ , $k = 1.221$ , $m = 2$ . . . . .	86
4.5	Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide de Bingham $B_i = 10$ , pour des cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ , $Re_2 = -1061.2$ ). (a) $\eta = 0.881$ , $k = 1.964$ , $m = 13$ et (b) $\eta = 0.4$ , $k = 3.427$ , $m = 3$ . . . . .	87
4.6	Contours d'amplification optimale de l'énergie $G^{opt}$ dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour un fluide newtonien avec un rapport de rayon $\eta = 0.881$ : (a) cylindres contra-rotatifs, (b) cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale. . . . .	90
4.7	Contours des nombres d'onde optimaux dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour un fluide newtonien entre deux cylindres contra-rotatifs de rapport de rayon $\eta = 0.881$ . (a) Nombres d'onde azimutaux optimaux $m^{opt}$ et (b) nombres d'onde axiaux optimaux $k^{opt}$ . Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale. . . . .	91
4.8	Contours des nombres d'onde optimaux dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour un fluide newtonien entre deux cylindres co-rotatifs de rapport de rayon $\eta = 0.881$ . (a) Nombres d'onde azimutaux optimaux $m^{opt}$ et (b) nombres d'onde axiaux optimaux $k^{opt}$ . Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale. . . . .	91
4.9	Influence de la valeur du rapport de rayon $\eta = \hat{R}_1/\hat{R}_2$ sur l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide newtonien dans le régime contra-rotatif avec $Re_1 = 101$ et $Re_2 = -1061.2$ . . . . .	92

4.10	Contours de l'amplification optimale de l'énergie $G^{opt}$ dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour un fluide en loi de puissance avec $n_p = 0.5$ et le rapport de rayon $\eta = 0.881$ : (a) cylindres contra-rotatifs, (b) cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale. . . . .	93
4.11	Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation $R_\Omega$ . Cas d'un fluide newtonien avec $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal $m^{opt}$ et (d) temps optimal $t^{opt}$ . . . . .	94
4.12	Structure de la perturbation optimale le long de la ligne de Rayleigh ( $R_\Omega = -1$ ) pour un fluide newtonien et $\eta = 0.881$ . Nombres d'onde (a) azimutaux et (b) axiaux en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement. ( $\circ$ ) $\eta = 0.881$ et ( $\square$ ) $\eta = 0.4$ . . . . .	95
4.13	(a) Amplification optimale de l'énergie et (b) temps optimal en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement sur la ligne de Rayleigh ( $R_\Omega = -1$ ) pour un fluide newtonien et $\eta = 0.881$ . ( $\circ$ ) $\eta = 0.881$ et ( $\square$ ) $\eta = 0.4$ . . . . .	95
4.14	Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation $R_\Omega$ . Cas d'un fluide en loi de puissance pour $n_p = 0.5$ et un rapport de rayon $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal $m^{opt}$ et (d) temps optimal $t^{opt}$ . . . . .	96
4.15	Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation $R_\Omega$ . Cas d'un fluide de Carreau $n_c = 0.5$ , $\lambda = 10$ pour un rapport de rayon $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal $m^{opt}$ et (d) temps optimal $t^{opt}$ . . . . .	97
4.16	Influence du caractère rhéofluidifiant sur l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide en loi de puissance avec $\eta = 0.881$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de cisaillement $Re$ et deux valeurs du nombre de rotation $R_\Omega$ . (a) $R_\Omega = 0.12$ et (b) $R_\Omega = 0.1$ . . . . .	98
4.17	Contours de l'amplification optimale de l'énergie $G^{opt}$ dans le plan $(Re_1, Re_2)$ pour un fluide en loi de Bingham avec $B_i = 10$ et le rapport de rayon $\eta = 0.881$ : (a) cylindres contra-rotatifs, (b) cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale. . . . .	98

4.18 Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$ . Cas d'un fluide de Bingham  $B_i = 10$  pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal  $m^{opt}$  et (d) temps optimal  $t^{opt}$ . . . . . 99

4.19 Influence du seuil de contrainte sur l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide en loi de Bingham avec  $\eta = 0.881$  pour le couple de nombre de Reynolds  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ . . . . . 100

4.20 Évolution de l'énergie de la perturbation optimale pour  $Re_1 = 100$ ,  $Re_2 = -1061.2$ . (1) En conservant le terme de stratification de la viscosité (terme de facteur  $d\mu^b/dr$ ) et le terme de la perturbation de la viscosité (terme de facteur  $\mu^t - \mu^b$ ). (2) En supprimant le terme de la stratification de la viscosité. (3) En supprimant le terme de la perturbation de la viscosité. (a) Fluide en loi de puissance,  $n_p = 0.5$  avec  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . (b) Fluide de Carreau  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec  $m^{opt} = 12$  et  $k^{opt} = 1.842$ . . . . . 101

4.21 Contribution à l'amplification optimale de l'énergie des différents modes propres, classés par valeurs propres décroissantes, pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$ . (a) Cas d'un fluide newtonien pour  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 2.176$ . (b) Cas d'un fluide en loi de puissance pour  $n_p = 0.5$  avec  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . (c) Cas d'un fluide de Carreau,  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec  $m^{opt} = 12$  et  $k^{opt} = 1.842$ . (d) Cas d'un fluide de Bingham,  $B_i = 10$  avec  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 1.964$ . . . . . 102

4.22 Spectres de valeurs propres numérotées, pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$ . (a) Cas d'un fluide newtonien pour  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 2.176$ . (b) Cas d'un fluide en loi de puissance pour  $n_p = 0.5$  avec  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . (c) Cas d'un fluide de Carreau,  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec  $m^{opt} = 12$  et  $k^{opt} = 1.842$ . (d) Cas d'un fluide de Bingham,  $B_i = 10$  avec  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 1.964$ . . . . . 103

4.23 Contours de la perturbation optimale dans le plan  $(r, z)$  pour un fluide newtonien avec  $\eta = 0.881$ , sur la ligne de Rayleigh ( $Re_1 = 1135$  et  $Re_2 = 1000$ ),  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.32$  et  $G^{opt} = 5.58$ . Contours de la vorticité azimutale à (a)  $t = 0$  et (b) au temps optimal  $t = t^{opt}$ . Contours de la composante azimutale de la vitesse à (c)  $t = 0$ ,  $v_{max} = 0.52$  et (d) au temps optimal  $t = t^{opt}$ ,  $v_{max} = 0.1$ ; les contours sont normés avec la vitesse maximale  $v_{max}$  au temps  $t$  et sont représentés par des pas de 0.2. . . . . 104

4.24 Contours de la perturbation optimale dans le plan  $(r, z)$  pour un fluide newtonien avec  $\eta = 0.881$ , sur la ligne de Rayleigh ( $Re_1 = 1135, Re_2 = 1000$ ),  $m^{opt} = 0, k^{opt} = 3.318$  et  $G^{opt} = 5.58$ . Contours de la composante radiale de l'énergie cinétique de la perturbation  $1/2 u'^2(t)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$  et à (b) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . Contours de la composante azimutale de l'énergie cinétique de la perturbation  $1/2 v'^2(t)$  à (c) l'instant initial  $t = 0$  et à (d) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . Contours de la composante axiale de l'énergie cinétique de la perturbation  $1/2 w'^2(t)$  à (e) l'instant initial  $t = 0$  et à (f) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . . . . . 105

4.25 Évolution des composantes radiale, azimutale et axiale de l'énergie cinétique moyenne sur la ligne de Rayleigh pour un fluide dans le plan  $(r, z)$ ,  $\eta = 0.881, m^{opt} = 0, k^{opt} = 3.318, G^{opt} = 5.58, Re_1 = 1135$  et  $Re_2 = 1000$ . . . . . 106

4.26 Contours de la perturbation optimale pour un fluide newtonien pour  $\eta = 0.881, Re_1 = 101, Re_2 = -1061.2$  avec  $m^{opt} = 13, k^{opt} = 2.176$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r) \partial v'/\partial \theta$  représente la divergence bidimensionnelle dans le plan de cisaillement. . . . . 107

4.27 Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l'amplification de l'énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d'un fluide newtonien, (a)  $\eta = 0.881, m^{opt} = 13, k^{opt} = 2.176$  et  $G^{opt} = 20.62$ . (b)  $\eta = 0.4, m^{opt} = 3, k^{opt} = 1.136$  et  $G^{opt} = 4.288$ . . . . . 111

4.28 Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l'amplification de l'énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d'un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ , (a)  $\eta = 0.881, m^{opt} = 11, k^{opt} = 1.647$  et  $G^{opt} = 88.16$ . (b)  $\eta = 0.4, m^{opt} = 2, k^{opt} = 0.911$  et  $G^{opt} = 12.59$ . . . . . 112

4.29 Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l'amplification de l'énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d'un fluide de Carreau avec  $n_c = 0.5$  et  $\lambda = 10$  (a)  $\eta = 0.881, m^{opt} = 11, k^{opt} = 1.736$  et  $G^{opt} = 231.25$ . (b)  $\eta = 0.4, m^{opt} = 2, k^{opt} = 1.221$  et  $G^{opt} = 37.17$ . . . . . 113

4.30 Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l'amplification de l'énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d'un fluide à seuil avec  $B_i = 10$ , (a)  $\eta = 0.881, m^{opt} = 13, k^{opt} = 1.964$  et  $G^{opt} = 12.08$ . (b)  $\eta = 0.4, m^{opt} = 3, k^{opt} = 3.427$  et  $G^{opt} = 2.22$ . . . . . 114

4.31 Contours de la perturbation optimale pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ,  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r) \partial v'/\partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement. . . . . 116

4.32 Contours de la perturbation optimale pour un fluide de Carreau avec  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ,  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.736$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r) \partial v'/\partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement. . . . . 117

4.33 Contours de la perturbation optimale pour un fluide de Bingham avec  $B_i = 10$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ,  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 1.964$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r) \partial v'/\partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement. . . . . 118

4.34 Contours de la perturbation optimale pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ ,  $\eta = 0.4$ ,  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  avec  $m^{opt} = 2$  et  $k^{opt} = 0.911$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r) \partial v'/\partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement. . . . . 119

5.1 (a) Photo du dispositif de Taylor-Couette. (b) Coupe du dispositif de Taylor-Couette. Le moteur 1 entraîne en rotation le cylindre intérieur tandis que le moteur 2 entraîne le cylindre extérieur . . . . . 125

5.2 Image du capteur de force à butées mécaniques FN3280. . . . . 126

5.3 (a) Photo du rhéomètre AR 2000 de la marque TA Instruments. (b) La géométrie cône-plan utilisée. . . . . 127

5.4	Formule chimique développée de la glycérine. . . . .	128
5.5	Formule chimique développée de la CarboxyMéthyl Cellulose (CMC). . . . .	129
5.6	Rhéogramme des solutions de CMC utilisées. Viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les courbes d'écoulement sont approchées avec les modèles de Carreau et de Cross. . . . .	130
5.7	Formule chimique développée du xanthane . . . . .	131
5.8	Rhéogramme des solutions de xanthane utilisées. Viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les courbes d'écoulement sont approchées avec le modèles de Carreau et la loi de puissance. . . . .	132
5.9	Évolution de la première différence des contraintes normales en fonction du taux de cisaillement pour les solutions de xanthane utilisées. . . . .	133
5.10	Couple nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur, en l'absence de liquide dans l'entrefer, en fonction de la vitesse de rotation du cylindre $\hat{\Omega}_1$ . . . . .	134
5.11	Protocole de mesure du couple. Vitesse de rotation en fonction du temps lorsque (a) Seul le cylindre intérieur tourne et (b) lorsque les deux cylindres sont en rotation. (-) Vitesse de rotation du cylindre intérieur $\hat{\Omega}_1$ et (— —) vitesse de rotation du cylindre extérieur $\hat{\Omega}_2$ . . . . .	135
5.12	Évolution du couple dans le temps lorsque seul le cylindre intérieur tourne, à une vitesse de rotation $\hat{\Omega}_1 = 400 \text{ tr}/\text{min}$ . Le fluide est une solution aqueuse de xanthane à 0.5%, $n = 0.23$ . . . . .	136
5.13	Schéma du montage expérimental utilisé pour les mesures de Vélocimétrie par Image de Particules (Particle Image Velocimetry, PIV). . . . .	137
5.14	Couple exercé sur le cylindre intérieur par les solutions de glycérine à 85%. (o) Résultats expérimentaux du présent travail, (-) valeurs données par l'équation analytique (5.4). La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	141
5.15	Couple adimensionnel, défini par l'équation (5.5) en fonction du nombre de Reynolds intérieur pour une solution de glycérine à 85%, (o) résultats expérimentaux, (— —) courbe de référence de [Donnelly et Simon, 1960] pour $a = 2 \times 10^4$ et $b = 42$ . (-) Expression analytique de l'équation (5.5). . . . .	141
5.16	Nombre de Nusselt (couple adimensionnel s'exerçant sur le cylindre intérieur, défini par l'équation (5.12)) en fonction de l'écart au seuil d'instabilité $\varepsilon = (Re_1 - Re_{1c})/Re_{1c}$ lorsque le cylindre extérieur est fixe pour une solution newtonienne de glycérine à 85% en masse. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	142

5.17	Visualisation des structures d'instabilité par ensemencement de paillettes pour une solution de glycérine à 85% (a) $Re_1/Re_{1c} = 1$ et (b) $Re_1/Re_{1c} = 5$ . Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	143
5.18	Champ du vecteur vitesse, projeté sur le plan d'observation, obtenu par mesures PIV pour une solution de glycérine à 85% en masse, $\mu = 0.135 Pa.s$ , pour diverses valeurs du nombre de Reynolds du cylindre intérieur $Re_1$ . Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	144
5.19	Évolution de $\hat{v}_{max} = max\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{w}^2}$ en fonction du nombre de Reynolds intérieur $Re_1$ , pour une solution de glycérine à 85%. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est immobile. . . . .	145
5.20	Couple exercé sur le cylindre intérieur par (a) une solution de CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ et (b) une solution de xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ ). (o) Valeurs expérimentales. (-) Valeurs théoriques en régime laminaire. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	146
5.21	Nombre de Nusselt (couple adimensionnel s'exerçant sur le cylindre intérieur, défini par l'équation (5.12)) en fonction de l'écart au seuil d'instabilité $\varepsilon = (Re_1 - Re_{1c})/Re_{1c}$ lorsque le cylindre extérieur est fixe. (o) solution de glycérine à 85%, ( $\square$ ) solution de CMC à 0.4%, $n = 0.63$ et ( $\diamond$ ) solution de xanthane à 0.5%, $n = 0.23$ . . . . .	147
5.22	Nombre de Reynolds critique d'apparition de la 1ère instabilité en fonction du caractère rhéofluidifiant lorsque seul le cylindre intérieur est en rotation. (-) Résultats numériques. Résultats expérimentaux pour des solutions polymères dont la rhéologie est gouvernée par des lois de puissance. (o) Solution de glycérine ( $n = 1$ ). ( $\Delta$ ) Solution de CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ ); ( $\square$ ) solutions de xanthane à 0.1% en masse ( $n = 0.49$ ), 0.2% en masse ( $n = 0.38$ ) et 0.5% ( $n = 0.23$ ). . . . .	148
5.23	Visualisation des structures à l'apparition de la première instabilité et au-delà pour une solution de xanthane à 0.5% ( $n = 0.23$ ) lorsque seul le cylindre intérieur tourne. (a) $Re_1 = 53$ , (b) $Re_1 = 82$ , (c) $Re_1 = 96 (1.25 \times Re_{1c})$ , (d) $Re_1 = 122 (1.56 \times Re_{1c})$ et (e) $Re_1 = 250$ . La ligne rouge de la figure 5.23 est utilisée pour matérialiser la position radiale du diagramme spatio-temporel de la figure 5.25. . . . .	150
5.24	Vitesse de glissement des tourbillons, en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur $\hat{\Omega}_1$ , pour une solution de xanthane 0.5%. Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	150
5.25	Diagramme spatio-temporel de l'écoulement chaotique d'une solution de xanthane à 0.5% ( $n = 0.23$ ). (a) $Re_1 = 53$ , (b) $Re_1 = 78$ , (c) $Re_1 = 96$ , (d) $Re_1 = 122$ , (e) $Re_1 = 180$ et (f) $Re_1 = 250$ . . . . .	151

5.26	Champ du vecteur vitesse obtenu par mesures PIV et projeté dans le plan d'observation, pour une solution de xanthane à 0.5%, $n = 0.23$ , pour diverses valeurs du nombre de Reynolds du cylindre intérieur $Re_1$ . Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	152
5.27	Évolution de $\hat{v}_{max} = max\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{w}^2}$ en fonction du nombre de Reynolds intérieur $Re_1$ pour des solutions rhéofluidifiantes comparées à la référence newtonienne représentée par le symbole (o). (a) (□) solution de CMC à 0.4%, $n = 0.63$ . (b) (△) solution de xanthane à 0.1%, $n = 0.49$ ; (◇) solution de xanthane à 0.5%, $n = 0.23$ . Les flèches représentent la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe. . . . .	153
5.28	Couple exercé sur le cylindre intérieur par une solution de glycérine à 85% (fluide newtonien) pour des cylindres contra-rotatifs. Le cylindre extérieur tourne à une vitesse de rotation fixe $\hat{\Omega}_2 = -99.25 tr/min$ . (o) Valeurs expérimentales. (-) Valeurs théoriques du couple en régime laminaire. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. . . . .	154
5.29	Courbes de stabilité marginale pour une solution de glycérine à 85% en masse. (o) Seuils d'instabilités détectés par mesure de couple, (-) seuils calculés par analyse de stabilité linéaire détaillée au chapitre 3. . . . .	155
5.30	Couple exercé sur le cylindre intérieur pour des cylindres contra-rotatifs. (o) Valeurs expérimentales. (-) Valeurs théoriques du couple en régime laminaire. (a) et (b) solution de CMC à 0.5% ( $n = 0.54$ ). (c) et (d) solution de xanthane à 0.5% ( $n = 0.23$ ). Les flèches représentent les valeurs théoriques d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. . . . .	157
5.31	Courbes de stabilité marginale pour des fluides en loi de puissance. Solutions de CMC (△) à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ ) et (△)0.5% ( $n = 0.54$ ); solutions de xanthane (□) à 0.2% ( $n = 0.38$ ) et (◇) 0.5% ( $n = 0.23$ ). (-) Résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire pour les mêmes indices d'écoulement. . . . .	160



# Liste des tableaux

3.1	Étude de la convergence des calculs. Conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayons $\eta = 0.881$ , lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ) pour différents nombres de points de collocation $N$ . . . . .	49
3.2	Etude de la convergence des calculs. Conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayons $\eta = 0.4$ , lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ) pour différents nombres de points de collocation $N$ . . . . .	49
3.3	Nombre de Reynolds critique $Re_{1c}$ d'un fluide newtonien siège de perturbations axisymétriques, pour un rapport de rayon pour $\eta = 0.883$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds $Re_2$ . Comparaison avec les résultats obtenus par [Landry, 2006] avec la méthode des différences finies (DF) et avec une méthode de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev (PC) et les résultats obtenus par [Tagg, 1994]. . . . .	59
4.1	Croissance optimale de l'énergie pour un rapport de rayon $\eta = 0.881$ et pour différents couples de nombre de Reynolds. Comparaison de nos résultats avec ceux de [Meseguer, 2002] et [Maretzke <i>et al.</i> , 2014]. . . . .	90
4.2	Comparaison de l'amplification optimale de l'énergie avec les rapports de rayons $\eta = 0.881$ et $\eta = 0.4$ pour différents modèles de fluides rhéofluidifiants. . . . .	93
5.1	Caractéristiques des moteurs PARVEX (RX120L). . . . .	125
5.2	Paramètres du modèle en loi de puissance décrivant le comportement rhéologique des solutions de CarboxyMéthyl Cellulose utilisées, pour la gamme de taux de cisaillement intervenant dans l'expérience de Taylor-Couette. . . . .	130
5.3	Paramètres du modèle en loi de puissance décrivant le comportement rhéologique des solutions de xanthane utilisées et la gamme de taux de cisaillement intervenant dans les expériences de Taylor-Couette. . . . .	133
5.4	Comparaison des nombres de Reynolds théorique et expérimental d'apparition des instabilités. . . . .	140

5.5	Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques $Re_{1c}$ théoriques et expérimentaux pour les fluides rhéofluidifiants lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ). . . . .	148
5.6	Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques $Re_{1c}$ théorique et expérimentale d'apparition des instabilités pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les cylindres sont contra-rotatifs ( $\hat{\Omega}_2 = -99.25 \text{ tr}/\text{min}$ ). . . . .	158
5.7	Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques $Re_{1c}$ théorique et expérimentale d'apparition des instabilités pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les cylindres sont contra-rotatifs ( $\hat{\Omega}_2 = -198.25 \text{ tr}/\text{min}$ ). . . . .	158
5.8	Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques $Re_{1c}$ théorique et expérimentale d'apparition des instabilités pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les cylindres sont contra-rotatifs ( $\hat{\Omega}_2 = -297.25 \text{ tr}/\text{min}$ ). . . . .	158

# Notations et conventions

## Tenseurs et matrices

$\underline{a}$  : Tenseur  $a$  d'ordre 1 (vecteur)

$\underline{\underline{a}}$  : Tenseur  $a$  d'ordre 2

$\underline{\underline{a}}$  : Matrice  $a$

## Écoulement de fluides entre deux cylindres tournants

$R_1$  : Rayon du cylindre intérieur

$R_2$  : Rayon du cylindre extérieur

$d$  : Espace annulaire ou entrefer

$U/V$  : Vitesse linéaire

$P$  : Pression

$\Omega_1$  : Vitesse angulaire du cylindre intérieur

$\Omega_2$  : Vitesse angulaire du cylindre extérieur

$Re_1$  : Nombre de Reynolds du cylindre intérieur avec la viscosité  $\mu_{ref}$

$Re_2$  : Nombre de Reynolds du cylindre extérieur avec la viscosité  $\mu_{ref}$

$Re_{1w}$  : Nombre de Reynolds du cylindre intérieur défini avec la valeur de la viscosité au niveau de la paroi du cylindre intérieur  $\mu(R_1)$

$Re_{2w}$  : Nombre de Reynolds du cylindre extérieur défini avec la valeur de la viscosité au niveau de la paroi du cylindre intérieur  $\mu(R_1)$

$Re$  : Nombre de Reynolds de cisaillement

$R_\Omega$  : Nombre de rotation

$We$  : Nombre de Weissenberg

$De$  : Nombre de Déborah

$\mathcal{E}$  : Nombre élastique

$\eta$  : Rapport des rayons  $\eta = R_1/R_2$

$G$	: Chapitre 5 : couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur
$Nu_\omega$	: Nombre de Nusselt
$m$	: Nombre d'onde azimutal
$k$	: Nombre d'onde axial
$E$	: Chapitre 1 : module de Young
$E$	: Chapitres 2 & 4 : énergie cinétique de la perturbation
$N$	: Nombre de points de collocation de Gauss-Lobatto
$\Gamma^+$	: Terme de production d'énergie
$\Gamma^-$	: Terme de dissipation d'énergie

## Caractéristiques des fluides et paramètres rhéologiques

$\underline{\underline{\tau}}$	: Déviateur du tenseur des contraintes ou tenseur des contraintes visqueuses
$\underline{\underline{\gamma}}$	: Tenseur des déformations
$\underline{\underline{d}}$	: Tenseur des taux des déformations
$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$	: Tenseur des taux de cisaillement
$\Gamma$	: Deuxième invariant du tenseur $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$
$\tau$	: Deuxième invariant du tenseur $\underline{\underline{\tau}}$
$\mu_{ref}$	: Viscosité de référence
$\mu$	: Viscosité dynamique
$\nu$	: Viscosité cinématique
$B_i$	: Nombre de Bingham
$n_p$	: Indice de rhéofluidification de la loi de d'Ostwald (ou loi de puissance)
$n_c$	: Indice de rhéofluidification de la loi de Carreau
$\lambda$	: Constante de temps pour la loi de Carreau
$N_1/N_2$	: Première/deuxième différence des contraintes normales
$\hat{K}$	: Consistance
$\hat{\rho}$	: Masse volumique

## Quelques fonctions mathématiques

$(\hat{\cdot})$	: Quantité dimensionnelle
$(\cdot)^*$	: Complexe conjugué pour un vecteur et transconjugué pour une matrice
$(\cdot)^b$	: Écoulement de base

---

$(\cdot)_c$  : Condition critique

$(\cdot)^T$  : Transposé

## Autres variables et opérateurs

$\epsilon$  : Grandeur positive infinitésimale

$\hat{\nabla}$  : Opérateur vectoriel du gradient dimensionnel

$\Delta$  : Opérateur laplacien

$D$  : Opérateur  $\partial/\partial r$

$D_*$  : Opérateur  $D + 1/r$

$\tilde{D}$  : Opérateur  $D - 1/r$

$\mathcal{L}$  : Opérateur linéaire

$\mathcal{M}$  : Opérateur linéaire

## Autres notations (abréviations)

CMC : CarboxyMéthyl Cellulose

PAA : PolyAcrylAmide

PIV : Vélocimétrie par image de particules (Particle Image Velocimetry)

ECC : Écoulement de Couette circulaire

CCD : Charge Coupled Device

PC : Personal computer

WKB : Wentzel–Kramers–Brillouin



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le contrôle d'un système industriel en génie des procédés passe par la maîtrise de la dynamique des fluides en écoulement. [Reynolds, 1883] a observé que lorsqu'on augmente la vitesse d'un écoulement d'eau en conduite rectiligne, on passe d'un état ordonné, laminaire à un état chaotique, turbulent. Le paramètre adimensionnel qui pilote le changement de régime est le nombre de Reynolds,  $Re = \hat{\rho}\hat{U}\hat{d}/\hat{\mu}$ , où  $\hat{\rho}$  est la masse volumique,  $\hat{U}$  la vitesse,  $\hat{d}$  le diamètre de la conduite et  $\hat{\mu}$  la viscosité dynamique du fluide. Entre le régime laminaire et le régime de turbulence développée, on peut observer, pour des valeurs intermédiaires de  $Re$ , des états transitionnels avec des structures hydrodynamiques organisées qui se désorganisent progressivement et même parfois brutalement quand le nombre de Reynolds augmente pour laisser la place à d'autres types de structures. Ces structures sont le résultat d'instabilités qui surgissent dans l'écoulement et sont fortement dépendantes de la dynamique et de la géométrie du système, mais aussi des propriétés intrinsèques des fluides. Ces instabilités caractérisent la transition vers la turbulence et constituent un phénomène complexe. Pour appréhender cette complexité, on s'intéresse souvent à des géométries simplifiées, telles que l'écoulement de Taylor-Couette, écoulement entre deux cylindres concentriques tournant indépendamment. L'étude de la transition à la turbulence des écoulements de fluides complexes est une préoccupation industrielle majeure. Les fluides complexes sont des fluides dont la structure microscopique est complexe tels que les solutions polymères, les suspensions ou les émulsions. Ils sont souvent non-newtoniens et présentent une grande variété de comportements en écoulement en fonction des sollicitations subies. En génie des procédés, les écoulements turbulents sont en général favorisés dans le but d'augmenter les transferts de chaleur et de matière [Holman et Ashar, 1971, Gu et Fahidy, 1985, Haut *et al.*, 2003, Zhu *et al.*, 2000]. Cependant, pour certains procédés, il est plus judicieux d'opérer en régime laminaire de manière à ne pas détériorer les produits fragiles. De nombreuses applications industrielles en génie des procédés montrent ainsi la nécessité de mieux comprendre les mécanismes de transition à la turbulence. Par exemple, lors de l'agitation/mélange de suspensions, pour des nombres de Reynolds modérés, des particules solides peuvent se retrouver piégées dans des structures hydrodynamiques non désirées et conduire à des zones sur-concentrées ou sous-concentrées [Rudman, 1998]. Au contraire, il peut dans certains cas être intéressant de générer des structures

hydrodynamiques, comme par exemple pour l'écoulement de suspensions dans des filtres afin de dégager les particules collées à la paroi filtrante [Belfort *et al.*, 1993].

Plusieurs géométries ont été abordées dans la littérature pour étudier les instabilités hydrodynamiques, mais l'écoulement de Taylor-Couette, écoulement qui permet de mettre en évidence des instabilités centrifuges, est un cas d'école particulier dans l'étude des écoulements fermés, de par sa simplicité mais aussi de par la grande variété de structures instables qu'il permet d'observer.

Le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans le contexte général de la transition vers la turbulence et plus particulièrement dans le contexte de la stabilité hydrodynamique des écoulements de fluides complexes en écoulement dans le dispositif de Taylor-Couette. L'étude de la stabilité d'un écoulement constituant une étape préliminaire indispensable pour appréhender la transition à la turbulence.



# Chapitre 1

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

**D**ans ce chapitre, nous présentons un résumé bibliographique succinct des travaux antérieurs et les problématiques liées aux phénomènes d'instabilités en écoulement de Taylor-Couette.

Dans un premier temps, quelques notions et définitions relatives aux fluides complexes sont présentées. Les travaux antérieurs portant sur la stabilité de ces fluides sont ensuite rappelés pour conduire aux motivations à l'origine de ce travail et les objectifs poursuivis. Le plan du manuscrit est énoncé à la fin du chapitre .

### Sommaire

---

1.1	Généralités sur le comportement rhéologique des fluides . . . . .	5
1.1.1	Déformations et tenseur des taux de déformations . . . . .	5
1.1.2	Tenseur des contraintes visqueuses . . . . .	5
1.1.3	Définition de la viscosité . . . . .	7
1.1.4	Fluides newtoniens . . . . .	8
1.1.5	Fluides non newtoniens . . . . .	8
1.2	Fluides complexes . . . . .	10
1.3	Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides newtoniens . . . . .	11
1.4	Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides viscoélastiques . . . . .	16
1.5	Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte . . . . .	17
1.5.1	Objectifs et méthodologie de la thèse . . . . .	18
1.5.2	Plan de la thèse . . . . .	19

---



## 1.1 Généralités sur le comportement rhéologique des fluides

L'étude du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation fait intervenir trois grandeurs fondamentales : le tenseur des contraintes, le tenseur des taux de déformation et la viscosité. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons présenter ces trois notions en considérant un élément de fluide soumis uniquement à des forces de surface.

### 1.1.1 Déformations et tenseur des taux de déformations

Par définition, un système ou matériau est dit déformable quand les distances et les angles ne se conservent pas lorsqu'il subit une transformation le faisant évoluer entre une configuration initiale à un instant  $t_1$  et une configuration finale à un instant  $t_2$ .

En adoptant une approche lagrangienne, et sous l'hypothèse de petites transformations, on appelle tenseur des déformations (ou tenseur de Green-Lagrange) en un point  $M$  et à l'instant  $t$  le tenseur

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\mathbf{E}}}^T \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \quad (1.1)$$

avec  $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}})$ , le tenseur des gradients de déplacement ( $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$  est le vecteur déplacement) et  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$  le tenseur identité. Le tenseur  $\underline{\underline{\gamma}}$  est symétrique. Il décrit la déformation d'un matériau, sans tenir compte des translations, rotations et dilatations éventuelles. Pour un matériau dit non déformable,  $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ . Cette première approche est généralement la plus utilisée en mécanique du solide.

En adoptant une approche Eulérienne de suivi des particules fluides, et en autorisant les grandes mais aussi de petites transformations, on définit le tenseur des gradients de vitesse,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\mathbf{V}}})$  où  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  est le vecteur vitesse. On peut ainsi accéder au tenseur des taux de déformation ou tenseur des vitesses de déformation

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \right) \quad (1.2)$$

On définit le tenseur des taux de cisaillement

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T = 2 \underline{\underline{\mathbf{d}}} \quad (1.3)$$

Comme le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\gamma}}$ , le tenseur des taux de cisaillement  $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$  est symétrique. Il décrit la vitesse à laquelle se déforme le matériau en l'absence de translation et de rotation éventuelles.

### 1.1.2 Tenseur des contraintes visqueuses

Considérons un volume élémentaire cubique de fluide, et une surface élémentaire  $ds$  sur l'une de ses faces. Soit  $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$  la normale de cet élément de surface, orientée vers l'extérieur de l'élément. La force

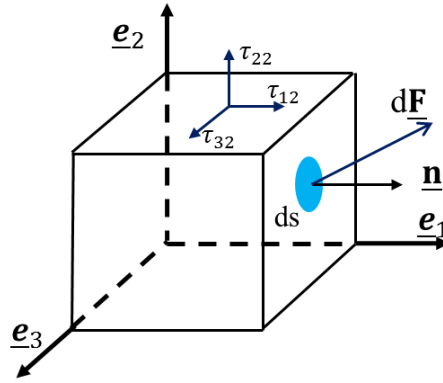


FIG. 1.1 – Composantes du tenseur des contraintes visqueuses s'exerçant sur un élément de surface, porté par une normale, délimitant un élément de volume cubique.

de frottement visqueux s'exerçant sur cet élément de surface est définie par  $d\mathbf{F} = \underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{n}ds$ , figure 1.1. Le tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\underline{\tau}}$  est symétrique et est donc défini par 6 composantes dans le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Les éléments diagonaux de la matrice  $\underline{\underline{\tau}}$  sont les contraintes visqueuses normales alors que les éléments non diagonaux désignent les contraintes visqueuses tangentielles.

La figure 1.1 montre une représentation schématique de la contrainte normale  $\tau_{22}$  et des contraintes tangentielles  $\tau_{12}$  et  $\tau_{32}$ , associées à une force s'exerçant sur la face de normale  $\mathbf{e}_2$  de l'élément de volume cubique. Pour caractériser les fluides viscoélastiques, on s'intéresse souvent à la différence des contraintes normales. Si les contraintes normales  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$  et  $\tau_{33}$  sont égales, elles ne provoquent pas de déformation du matériau. Si elles sont différentes, au contraire, elles peuvent provoquer sa déformation. La première différence de contrainte normale  $N_1$  et la deuxième différence de contrainte normale  $N_2$  sont définies respectivement par

$$N_1(\dot{\gamma}) = \tau_{22} - \tau_{11} \tag{1.4}$$

$$N_2(\dot{\gamma}) = \tau_{33} - \tau_{22} \tag{1.5}$$

L'apparition des premières contraintes normales montre que le cisaillement modifie de façon significative la microstructure du fluide. L'anisotropie des contraintes normales est caractérisée par deux

coefficients  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  tels que

$$N_1 = \Psi_1 \dot{\gamma}^2, \quad (1.6)$$

$$N_2 = \Psi_2 \dot{\gamma}^2, \quad (1.7)$$

où  $\dot{\gamma}$  est le second invariant du tenseur des taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Généralement, la deuxième différence des contraintes normales est faible devant la première. Quelques exemples de fluides avec des différences de contraintes normales non nulles sont présentés dans [Carreau *et al.*, 1997].

### 1.1.3 Définition de la viscosité

L'un des objectifs de la rhéologie est de déterminer une relation entre le tenseur des contraintes visqueuses et le tenseur des taux de déformation.

Considérons par exemple un écoulement unidirectionnel : l'écoulement entre deux plans parallèles infinis comme illustré sur la figure 1.2. Le plan supérieur est animé d'un mouvement de translation axiale à la vitesse  $\underline{V}$ . Le plan inférieur est fixe. Cet écoulement, appelé écoulement de Couette plan est un exemple classique de cisaillement simple.

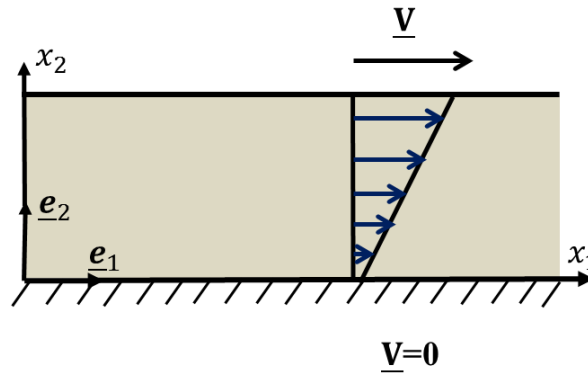


FIG. 1.2 – Écoulement de Couette plan : écoulement entre deux plans parallèles infinis, l'un se déplaçant à la vitesse  $V$ , l'autre étant immobile.

En régime laminaire, la vitesse du fluide est orientée suivant  $\underline{e}_1$  et varie linéairement avec la coordonnée  $x_2$ .

$$\underline{V}(x_1, x_2, x_3) = (\dot{\gamma}_{12} x_2, 0, 0), \quad (1.8)$$

ou  $\dot{\gamma}_{12} = \dot{\gamma}_{21} = dV_1/dx_2$  est la seule composante non nulle du tenseur des vitesses de déformation défini par l'équation (1.3).

Le plateau supérieur en mouvement produit une force  $\underline{F}$  sur le fluide correspondant à la contrainte  $\tau_{12}$ . On observe expérimentalement qu'on peut établir une relation entre  $\tau_{12}$  et  $\dot{\gamma}_{12}$ . Ainsi, le rapport entre la contrainte et le taux de cisaillement permet de définir la viscosité dynamique

$$\tau_{12} = \mu(\dot{\gamma}_{12}) \dot{\gamma}_{12}. \quad (1.9)$$

La viscosité caractérise la résistance à la déformation lors d'une sollicitation. Dans le cas d'un fluide newtonien, la viscosité est indépendante de la sollicitation. Dans le cas d'un fluide non newtonien purement visqueux, elle dépend au contraire de la sollicitation. La dépendance de la viscosité avec le taux de cisaillement permet d'établir une classification globale des fluides complexes.

#### 1.1.4 Fluides newtoniens

Ce sont des fluides dont la viscosité est une constante pour une pression et une température données. En d'autres termes, la viscosité du fluide reste inchangée quel que soit le taux de cisaillement imposé. Le comportement du fluide suit alors la loi de Newton qui stipule qu'une augmentation du taux de cisaillement s'accompagne d'une augmentation proportionnelle de la contrainte

$$\tau \approx \mu \dot{\gamma}, \quad (1.10)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide.

C'est le cas par exemple de la plupart des gaz, de l'eau mais aussi de nombreux fluides formés de petites molécules. Les fluides constitués de longues molécules tels que les solutions polymères présentent une viscosité qui dépend du taux de cisaillement. Ils sont alors dits "non newtoniens".

#### 1.1.5 Fluides non newtoniens

Les fluides non newtoniens sont les plus courants dans la nature et dans l'industrie. La viscosité de ces fluides est une fonction du taux de cisaillement comme dans l'équation (1.9). La plupart des fluides non newtoniens exhibent, sous certaines conditions de sollicitations, deux comportements fondamentaux simultanés : la viscoélasticité et la rhéofluidification.

##### Fluides non newtoniens viscoélastiques

Les fluides viscoélastiques sont des fluides qui, en plus du comportement visqueux, présentent un comportement élastique, caractéristique d'un matériau solide. Ainsi, en plus de la viscosité  $\mu$ , il faut aussi définir le module d'élasticité ou le module de Young  $E$ . Dans le cas limite d'un solide

élastique, la loi de Hooke relie la contrainte à la déformation

$$\tau \approx E \gamma. \quad (1.11)$$

Lorsqu'on applique une force à un tel solide, il se déforme en emmagasinant de l'énergie mécanique et lorsque la force cesse, il revient à sa forme initiale et restitue intégralement l'énergie. Dans le cas d'un fluide viscoélastique, la contrainte est fixée en partie par la viscosité et le taux de cisaillement et en partie par le module de Young et la déformation. Lorsque le module  $E$  est négligeable, le comportement du fluide est purement visqueux : l'énergie mécanique reçue est dissipée par les frottements visqueux. Lorsque ce module est très important, le comportement est élastique et le fluide reprend son état initial quand on arrête les sollicitations.

Les fluides viscoélastiques présentent une première différence des contraintes normales  $N_1$  significative. En effet, un fluide est dit viscoélastique lorsque la première différence des contraintes normales devient plus grande que la contrainte de cisaillement ( $N_1/\sigma > 1$ ) [Barnes *et al.*, 1989]. La figure 1.3 montre l'exemple de comportement viscoélastique d'une solution de polyacrylamide à 1% en masse. Le caractère viscoélastique est à l'origine de phénomènes tels que l'effet Weissenberg [Bird *et al.*, 1987]. Ce phénomène, qui a lieu dans les cuves agitées se manifeste par la montée de liquide le long de l'axe de l'agitateur ; il est dû à l'existence d'une différence des contraintes normales.

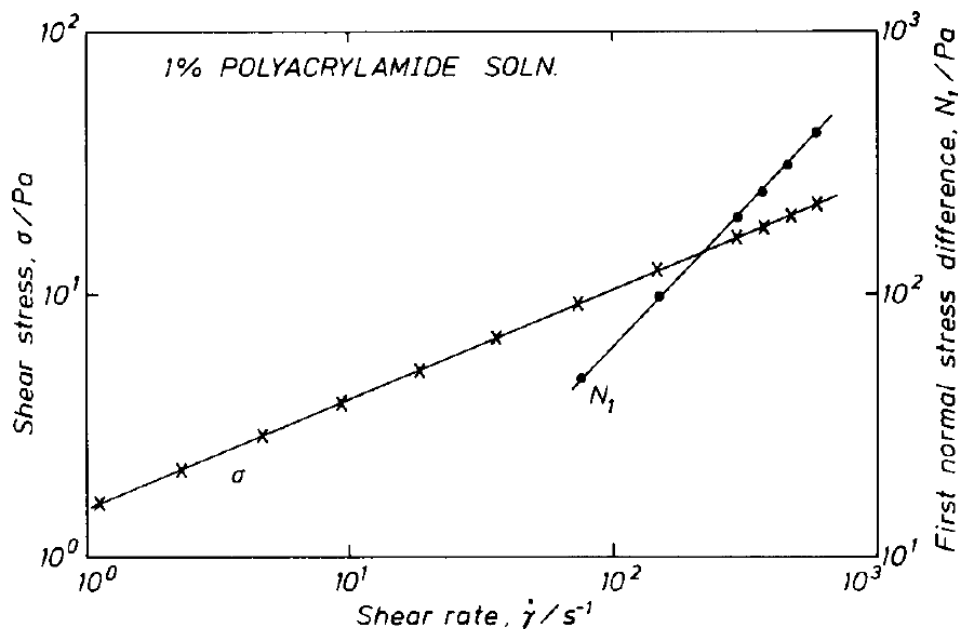


FIG. 1.3 – Évolution de la contrainte de cisaillement  $\sigma$  et de la première différence de contraintes normales  $N_1$  en fonction du taux de cisaillement pour une solution de polyacrylamide à 1% [Barnes *et al.*, 1989].

## Fluides non newtoniens purement visqueux

Un fluide non newtonien est dit purement visqueux lorsque la première différence des contraintes normales est négligeable. La viscosité de ces fluides dépend de la sollicitation imposée. Certains voient leur viscosité diminuer lorsque le taux de cisaillement augmente : ce sont des fluides dits "rhéofluidifiants". D'autres voient leur viscosité augmenter avec le cisaillement comme c'est le cas pour des suspensions de maïzena : ce sont des fluides dits "rhéoépaississants". D'autres encore ne s'écoulent que lorsque la contrainte appliquée dépasse une valeur seuil et suivent un comportement rhéofluidifiant au-delà de ce seuil : ce sont des "fluides à seuil". La figure 1.4 montre les différents types de comportement généralement rencontrés pour les fluides complexes.

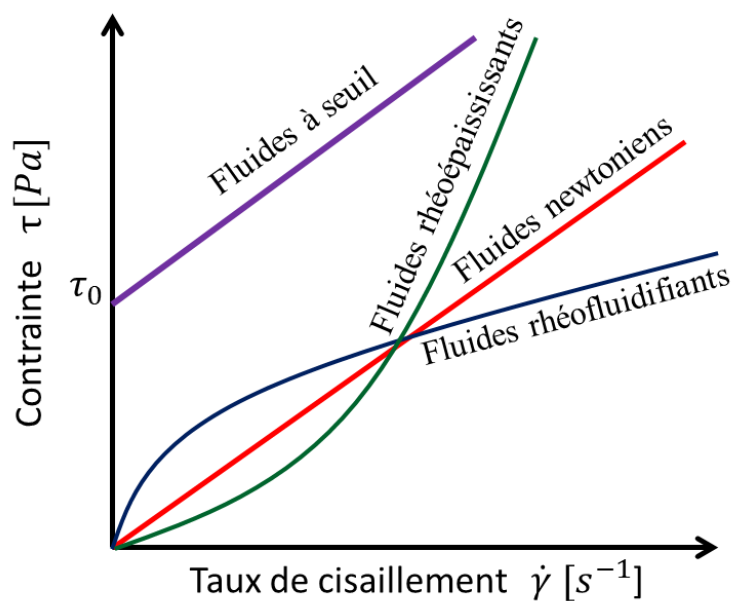


FIG. 1.4 – Différents comportements rhéologiques des fluides non newtoniens purement visqueux. Évolution de la contrainte visqueuse en fonction du taux de cisaillement.

## 1.2 Fluides complexes

Les fluides complexes sont souvent rhéofluidifiants [Cousot, 2012]. Ce comportement rhéologique trouve son origine dans la structure du fluide. Dans les fluides complexes, des objets (particules, molécules polymères, gouttes, bulles) sont dispersés au sein du fluide. Ces objets interagissent avec le fluide et avec les autres objets. Les objets produisent une résistance à l'écoulement, c'est-à-dire, une viscosité élevée. Lorsque le fluide est cisailé, les objets s'organisent, ce qui facilite l'écoulement et diminue la viscosité. Ainsi, dans une solution polymère au repos, les chaînes polymères sont recroquevillées sur elles-mêmes, ce qui correspond à la conformation statistique la plus probable.



Dans cette conformation, les chaînes polymères occupent en première approximation un volume délimité par une enveloppe sphérique. La densité des polymères est en général faible à l'intérieur de la sphère, mais le liquide qui s'y trouve est entravé dans son mouvement par la chaîne, ce qui produit une forte viscosité. Sous cisaillement, les molécules polymères s'allongent et s'orientent dans l'écoulement. Le volume de fluide bloqué par le polymère diminue alors et la viscosité globale diminue. Ce phénomène est d'autant plus important que le taux de cisaillement est grand.

Dans le cas des suspensions, la présence de particules solides gêne l'écoulement du fluide. La viscosité d'une suspension augmente avec la concentration volumique en particules. Sous cisaillement, les particules ont tendance en moyenne à s'aligner dans la direction du cisaillement. Ce phénomène facilite le mouvement relatif des couches de fluide, ce qui produit une viscosité plus faible.

Si la concentration de la suspension est assez élevée, des liaisons physiques (liaisons de Van der Waals ou liaisons ioniques) apparaissent entre les particules pour former un réseau continu. Du fait de ce réseau, le fluide présente une structure solide au repos, qui peut être brisée lorsqu'on applique un effort supérieur à une valeur critique. Le fluide présente un seuil de contrainte. Si la contrainte appliquée est inférieure au seuil, la suspension a un comportement solide ; si elle est supérieure au seuil, la suspension s'écoule comme un liquide. La brisure du réseau est réversible : il se reforme lorsque la contrainte redevient faible. Ce comportement à seuil ne concerne pas seulement les suspensions concentrées, on le trouve aussi dans les mousses, les gels et les émulsions concentrées.

### 1.3 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides newtoniens

Les travaux sur les écoulements tournants ont suscité la curiosité du monde scientifique depuis une centaine d'années. Tout a débuté par les travaux de Maurice Couette qui étudia l'écoulement entre deux cylindres tournants dans le but de déterminer la viscosité d'un fluide [Couette, 1888]. Il réalisa pour cela des mesures du couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur. C'est cette première étude qui est à l'origine du développement des rhéomètres de Couette que l'on connaît de nos jours [Macosko, 1994].

Taylor [Taylor, 1923] s'est lui intéressé à la stabilité de cet écoulement. Il a trouvé avec un très bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux que lorsque la vitesse de rotation du cylindre intérieur dépasse une valeur seuil, des tourbillons apparaissent (instabilité primaire). Ces tourbillons portent aujourd'hui son nom : "tourbillons ou vortex de Taylor". Pour des vitesses encore plus élevées, ces vortex oscillent périodiquement (instabilité secondaire) jusqu'à ce que l'écoulement devienne complètement chaotique (turbulence). Les résultats de Taylor ont été vérifiés par plusieurs études expérimentales ultérieures.

L'écoulement de Taylor-Couette, l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible, entre deux cy-

lindres coaxiaux infiniment longs tournant à des vitesses angulaires différentes est devenu au fil des années le paradigme pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et la transition à la turbulence des systèmes dynamiques non linéaires. Les premières études concernent principalement les fluides newtoniens. Une synthèse de ces différents travaux sur le problème peut se trouver dans deux principaux article de revue [Koschmieder, 1993, Tagg, 1994].

L'écoulement de base, c'est-à-dire l'écoulement de Couette Circulaire, ECC, est purement azimuthal et présente seulement une variation radiale à travers l'espace annulaire entre les deux cylindres (entrefer). Les premières études portent sur l'analyse linéaire des instabilités qui se développent lorsque l'écoulement de base est soumis à une perturbation axisymétrique. Il a été montré que, pour un fluide parfait, l'apparition des instabilités est gouvernée par le critère de Rayleigh : l'ECC est instable pour une perturbation axisymétrique lorsque la dérivée du carré du moment angulaire,  $dL^2/dr$ , est négative pour au moins une position radiale [Drazin et Reid, 1981]. Dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , où  $Re_1$  et  $Re_2$  sont les nombres de Reynolds construits avec la vitesse angulaire de rotation des cylindres intérieur et extérieur respectivement, les domaines stables et instables sont séparés par une ligne dénommée "la ligne de Rayleigh", figure 1.5.

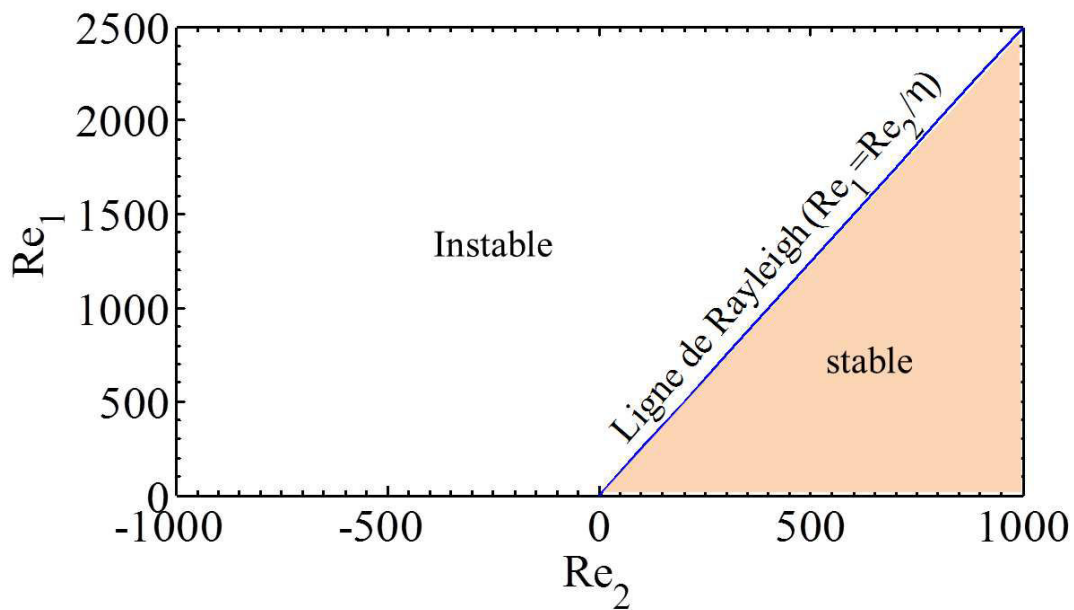


FIG. 1.5 – Délimitation des zones stable et instable suivant le critère Rayleigh pour un fluide newtonien avec un rapport de rayons  $\eta = 0.4$ .

Pour un fluide newtonien, la ligne de Rayleigh est donnée par  $Re_2/Re_1 = \eta$ , avec  $\eta = R_1/R_2$  le rapport de rayons intérieur et extérieur. Sur cette ligne, le moment angulaire est uniforme dans tout l'espace annulaire. Dans la région stable de Rayleigh, on a  $dL^2/dr > 0$  dans tout l'entrefer. Par ailleurs, dans la zone instable du plan  $(Re_1, Re_2)$ , qui se trouve majoritairement dans la zone

où les deux cylindres tournent en sens opposés (la configuration contra-rotative),  $dL^2/dr$  est négatif au voisinage de la paroi du cylindre intérieur mais reste positif près du cylindre extérieur. Ce comportement au voisinage de la paroi du cylindre intérieur a un grand effet sur la longueur d'onde du mode critique [Taylor, 1923]. [Billant et Gallaire, 2005] ont montré en utilisant une approximation WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) pour les grandes longueurs d'ondes que le critère de Rayleigh peut être généralisé à une perturbation non axisymétrique.

Lorsque la viscosité est prise en compte, les instabilités apparaissent si les forces centrifuges déstabilisantes surpassent les forces visqueuses à une échelle de temps inférieure au temps de diffusion. Ainsi, lorsque le cylindre extérieur est fixe par exemple, le moment angulaire décroît du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur. Les instabilités de l'écoulement ECC apparaissent via une perturbation axisymétrique stationnaire avec des rouleaux toroïdaux contra-rotatifs régulièrement espacés dans la direction axiale [Taylor, 1923].

Dans une configuration contra-rotative,  $dL^2/dr$  est négatif au voisinage du cylindre intérieur mais est fortement positif près du cylindre extérieur. Il est montré par l'analyse linéaire de stabilité que pour des vitesses angulaires de rotation du cylindre extérieur suffisamment élevées, l'ECC devient instable du fait de perturbations non axisymétriques [Krueger *et al.*, 1966, Snyder, 1968, Langford *et al.*, 1988]. Le nombre d'onde azimutal qui caractérise l'orientation des structures instables augmente avec le nombre de Reynolds du cylindre extérieur [Langford *et al.*, 1988]. Dans ce cas, les structures sont des tourbillons en forme de spirale, enroulés autour du cylindre intérieur. Ces vortex obliques sont la superposition d'ondes se propageant dans la direction axiale et d'ondes tournant dans la direction azimutale [Altmeyer *et al.*, 2011, Tagg, 1994]. Dans le domaine instable selon le critère de Rayleigh,  $L^2$  décroît quand la position radiale  $r$  augmente du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur, et l'ECC est le siège d'une instabilité caractérisée par l'apparition des rouleaux toroïdaux.

En augmentant le nombre de Reynolds du cylindre intérieur au-delà du nombre de Reynolds critique, différents régimes d'écoulement peuvent être observés selon que les deux cylindres tournent ou que seul le cylindre intérieur tourne. [Andereck *et al.*, 1986] ont étudié par visualisation une vaste diversité d'écoulement dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ . En fonction des valeurs de  $Re_1$  et  $Re_2$ , il peut apparaître dans l'écoulement des tourbillons de Taylor, des tourbillons de Taylor ondulés, des tourbillons hélicoïdaux ou spirales, des spirales ondulées, des spirales turbulentes, des rides, etc. Ils ont ainsi identifié près de 20 régimes d'écoulement différents comme le montre la figure 1.6. Lorsque le cylindre extérieur est fixe, ou pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds  $Re_2$ , la transition vers la turbulence découle d'une succession d'instabilités (tourbillons toroïdaux, des ondulations et des modulations temporelles), l'écoulement devenant de plus en plus complexe jusqu'à l'apparition de la turbulence [Andereck *et al.*, 1986]. La transition vers la turbulence est supercritique.

Par ailleurs, dans le régime contra-rotatif pour des nombres de Reynolds  $Re_2$  suffisamment grands, la

transition vers la turbulence n'est plus supercritique mais plutôt sous-critique [Coles, 1965, Atta, 1966]. En effet, les auteurs ont observé des spirales turbulentes intermittentes en dessous de la limite de stabilité prévue par l'analyse linéaire.

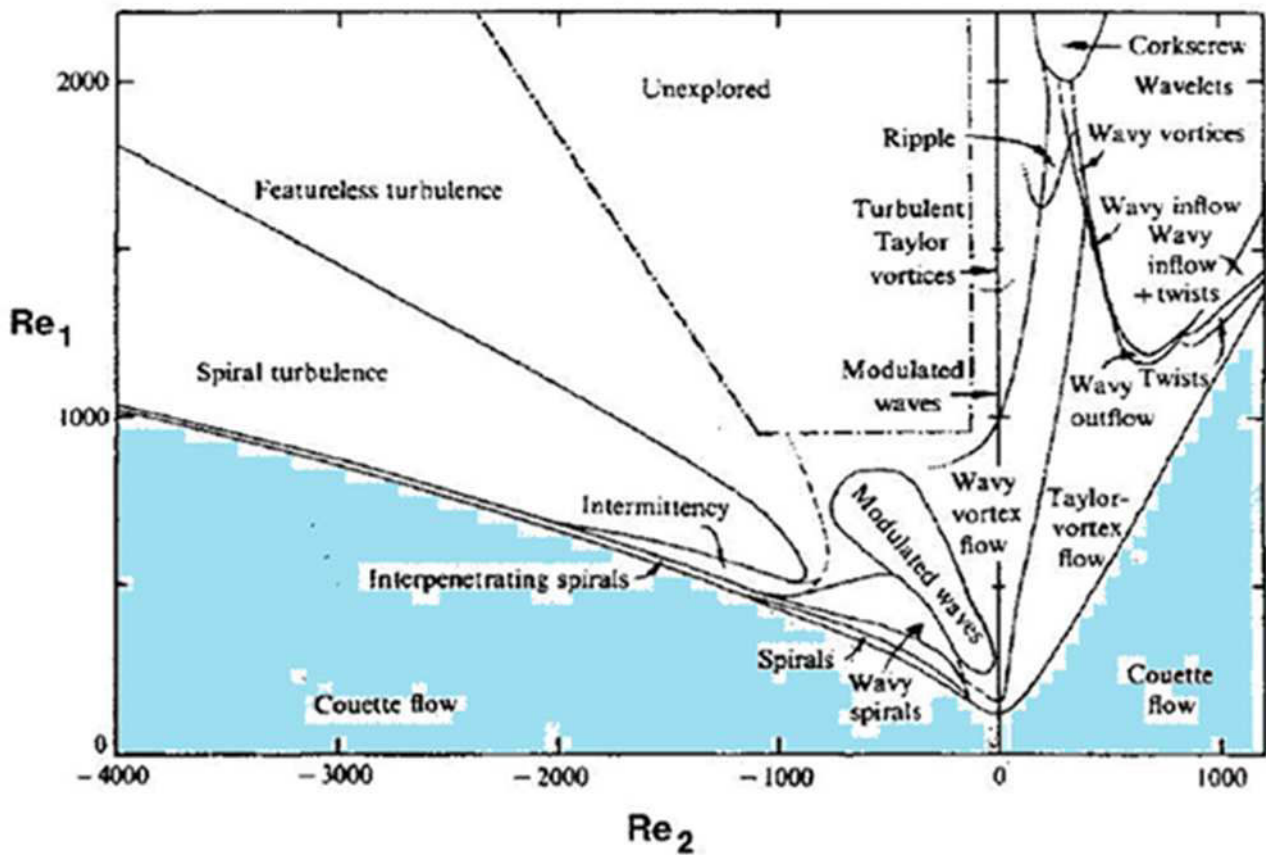


FIG. 1.6 – Régimes d'écoulement observés par [Andereck *et al.*, 1986] lorsque les deux cylindres tournent en fonction des valeurs des nombres de Reynolds intérieur  $Re_1$  et extérieur  $Re_2$ , pour un fluide newtonien et un rapport de rayon  $\eta = R_1/R_2 = 0.883$ .

En analyse linéaire de stabilité, la transition sous-critique peut être caractérisée par la croissance transitoire, considérée comme un prérequis important à une bifurcation sous-critique et la transition vers la turbulence. La croissance transitoire est une condition suffisante mais pas nécessaire. La notion de mécanisme de croissance transitoire a été introduite par [Orr, 1907]. Elle a été reprise ces dernières décennies par [Trefethen *et al.*, 1993, Henningson et Reddy, 1994, Waleffe, 1995] avec l'étude de l'influence de la non-normalité de l'opérateur linéaire dans l'analyse linéaire de stabilité des écoulements cisailés. Dans ce mécanisme, de petites perturbations interagissent avec l'écoulement de base, ce qui produit une augmentation de leur énergie. En effet, malgré la stabilité linéaire de l'écoulement, une croissance suffisamment importante de l'énergie de la perturbation peut déclencher les effets non linéaires qui peuvent maintenir l'énergie cinétique des perturbations non nulle aux temps ultérieurs.

Cette énergie est fortement amplifiée pendant un temps court, inférieur au temps de diffusion visqueuse, avant de décroître sous l'effet de la viscosité.

Pour les écoulements ouverts ou fermés, deux mécanismes physiques ont été identifiés pour expliquer la croissance transitoire : le mécanisme de Orr [Orr, 1907, Schmid et Henningson, 2001] et le mécanisme de lift-up [Landahl, 1980, Ellingsen et Palm, 1975].

Le mécanisme de lift-up agit lorsqu'un tourbillon orienté dans la direction axiale se trouve superposé à un écoulement parallèle, près d'une paroi. Le tourbillon transporte du fluide de faible vitesse en l'éloignant de la paroi et pousse du fluide de haute vitesse vers la paroi. Des zones alternées de basse et haute vitesse axiale appelées "streaks" apparaissent alors. On peut montrer d'après les équations aux perturbations linéarisées que des tourbillons axiaux produisent une perturbation de vitesse axiale augmentant proportionnellement avec le temps, jusqu'à ce que la dissipation visqueuse devienne importante et produise une décroissance de l'énergie de la perturbation.

Le mécanisme de Orr est déclenché par des perturbations formées de tourbillons transverses (de vorticité dans la direction  $z$ ) initialement penché dans la direction opposée à l'écoulement de base (orienté dans la direction  $x$ ). L'écoulement de base alimente ces perturbations en énergie via le tenseur de Reynolds, ce qui produit un basculement progressif des tourbillons. Lorsque les tourbillons commencent à pencher dans la direction de l'écoulement de base, la dissipation visqueuse l'emporte sur le tenseur de Reynolds et l'énergie des perturbation diminue.

Du point de vue mathématique, la croissance transitoire est associée à la non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire [Trefethen *et al.*, 2000]. Cet effet a été souligné pour la première fois par [Gebhardt et Grossmann, 1993] pour le problème de l'écoulement de Taylor-Couette. Les caractéristiques de la croissance transitoire dans l'écoulement de Taylor-Couette ont été étudiées pour la première fois par [Hristova *et al.*, 2002] qui ont calculé le pseudospectre d'une perturbation axisymétrique, pour une périodicité axiale fixée, avec des cylindres en contra-rotation pure de sorte que l'effet de la force de Coriolis disparaisse. Les auteurs ont montré que la courbure augmente la croissance transitoire. [Meseguer, 2002] a déterminé pour un rapport de rayon fixé,  $\eta = 0.881$ , les nombres d'ondes axial et azimutal qui donnent la croissance optimale. Son étude a été menée dans la zone linéaire stable pour les cylindres en contra-rotation. Récemment, des calculs de la croissance transitoire couvrant tout le régime linéairement stable de l'écoulement Taylor-Couette ont été effectués par [Maretzke *et al.*, 2014]. Pour ce faire, ils ont utilisé de nouveaux paramètres, le nombre de Reynolds de cisaillement et le nombre de rotation, introduit par [Dubrulle *et al.*, 2005]. Les auteurs ont trouvé que la croissance transitoire dans la zone linéairement stable de l'écoulement de Taylor-Couette évolue en  $Re^{2/3}$  pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ , ce qui suggère que ces effets pourraient être importants à  $Re$   lev .

## 1.4 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides viscoélastiques

Plusieurs auteurs ont étudié la stabilité de l'écoulement de fluides viscoélastiques dans la géométrie de Taylor-Couette [Giesekus, 1966, Muller *et al.*, 1989], [Larson *et al.*, 1990, Shaqfeh *et al.*, 1992]. Les solutions de polymères, comme les solutions colloïdales et les suspensions sont connues pour leur comportement viscoélastique au-dessus d'une concentration seuil.

En régime laminaire, la rotation produit un cisaillement qui étire les molécules de polymère le long des lignes de courant incurvées. Ceci conduit à la première différence des contraintes normales qui agit contre la force centrifuge. [Larson *et al.*, 1990], par des études d'analyse linéaire de stabilité et expérimentales, ont montré que l'apparition de ces instabilités est due à l'interaction entre la perturbation du profil des vitesses et la première différence des contraintes normales de l'écoulement de base. Les études expérimentales de [Groisman et Steinberg, 1998] sur des polymères fortement élastiques ont montré que les paramètres pilotant ces instabilités sont la concentration de polymère en solution et le nombre de Deborah  $D_e = t_c/t_e$  où  $t_c$  est le temps caractéristique de la restructuration du matériau et  $t_e$  un temps d'observation. Ils ont aussi montré que, pour les fluides purement élastiques, les effets non linéaires sont très importants au moment de la transition, amenant rapidement l'écoulement vers la turbulence élastique (turbulence qui intervient à faible nombre de Reynolds contrairement à la turbulence inertielle qui se produit à grand nombre de Reynolds).

D'une façon générale, en l'absence de dissipation visqueuse, on distingue pour les fluides viscoélastiques, trois modes d'instabilités en fonction de la valeur du nombre élastique  $\mathcal{E} = W_e/Re$  où  $W_e = \lambda_e \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}$  ( $\lambda_e$ , temps de relaxation du polymères) est le nombre de Weissenberg (effet de l'élasticité) et  $Re$  le nombre de Reynolds (effet de l'inertie) : (i) un mode d'instabilité purement inertiel à faible valeur de  $\mathcal{E}$  (d'environ  $10^{-2}$ ), (ii) un mode purement élastique pour des valeurs plus élevées de  $\mathcal{E}$  (d'environ 1) et (iii) un mode inertio-élastique pour des valeurs intermédiaires de  $\mathcal{E}$ . Ces modes sont bien connus et ont fait l'objet d'autres études théoriques et expérimentales [Avgousti et Beris, 1993, Crumeyrolle *et al.*, 2002, Latrache *et al.*, 2012].

Dans ce manuscrit, nous ne nous intéressons pas aux propriétés viscoélastiques des fluides, mais seulement à leur caractère rhéofluidifiant, c'est-à-dire l'influence de la décroissance non linéaire de la viscosité effective avec le taux de cisaillement. Le comportement rhéofluidifiant résulte de la réorganisation de la structure interne d'un fluide afin de réduire la dissipation visqueuse.

## 1.5 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte

L'ECC de fluides rhéofluidifiants est principalement caractérisé par la stratification de la viscosité dans l'espace annulaire. Le degré de cette stratification définie par  $|d\mu^b/dr|$ , où  $\mu^b$  est la viscosité de l'écoulement de base, est d'autant plus important que le fluide est plus rhéofluidifiant et que le rapport des rayons  $\eta$  est plus petit. Le profil des vitesses azimutales est également modifié par la rhéofluidification. En augmentant le caractère rhéofluidifiant, le taux de cisaillement de l'écoulement de base croît à la paroi du cylindre intérieur mais diminue au niveau du cylindre extérieur. Le mécanisme d'instabilité décrit précédemment pour les fluides newtoniens s'applique mais les conditions critiques sont modifiées par la modification du profil des vitesses et la stratification de la viscosité. Les quelques rares travaux traitant de l'ECC des fluides rhéofluidifiants concernent le cas où le cylindre extérieur est fixe. Les conditions critiques sont déterminées expérimentalement et numériquement pour différents rapports de rayons et différents degrés de rhéofluidification.

Du point de vue expérimental, [Sinevic *et al.*, 1986] ont déterminé le seuil d'apparition des vortex de Taylor en mesurant le couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur. Leurs résultats étaient obtenus pour deux rapports de rayons,  $\eta = 0.7$  et  $0.9$ . Le comportement rhéologique des fluides utilisés, des solutions de CMC (CarboxyMéthyl Cellulose) et de Carbopol était décrit par le modèle en loi de puissance.

[Escudier *et al.*, 1995] ont analysé la structure de l'écoulement de fluides rhéofluidifiants dans la géométrie de Taylor-Couette pour un rapport de rayon  $\eta = 0.5$ . Les fluides utilisés étaient une solution aqueuse de gomme de xanthane à 0.15% en masse, rhéofluidifiante et légèrement viscoélastique et une solution aqueuse de Laponite rhéofluidifiante mais aussi thixotrope. Les vitesses axiales et tangentielles étaient mesurées par anémométrie Laser Doppler. Le nombre de Reynolds critique d'apparition des instabilités,  $Re_c$ , défini avec la viscosité à la paroi du cylindre intérieur a été déterminé en suivant l'évolution de la composante axiale de la vitesse pour un rayon fixé et en augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Les auteurs ont souligné que (i) l'apparition des vortex de Taylor se traduit par une augmentation moins importante du nombre de Reynolds ; (ii) le comportement rhéofluidifiant entraîne un déplacement radial du centre des vortex vers le cylindre intérieur.

Du point de vue numérique, les conditions critiques ont aussi été déterminées en utilisant une simulation directe 2D [Lockett *et al.*, 2004, Coronado-Malutti *et al.*, 1986]. D'autres études ont été aussi réalisées en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé résultant de l'analyse de stabilité linéaire [Jastrzebski *et al.*, 1992, Ashrafi et Khayat, 2000, Caton, 2006]. Récemment, une revue critique de ces différentes études a été effectuée par [Alibenyahia *et al.*, 2012]. Dans cet article, il a été montré en outre que lorsque le nombre de Reynolds est défini en utilisant la viscosité de cisaillement à la

paroi du cylindre intérieur comme effectué par [Escudier *et al.*, 1995], le caractère rhéofluidifiant apparaît comme retardant l'apparition des vortex de Taylor. Ce retard est dû à la réduction de l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation et non à la modification de la dissipation visqueuse.

Dans toutes ces études antérieures, le cylindre extérieur est fixe. Dans la littérature, seuls les travaux de [Pascal et Rasmussen, 1995] considèrent les deux cylindres en rotation. Les auteurs ont déterminé le nombre de Reynolds critique d'apparition de la première bifurcation pour un fluide rhéofluidifiant en loi de puissance, avec des rapports de rayons  $\eta = 0.7$  et  $0.9$ . Les résultats sont limités à deux indices de rhéofluidification,  $n = 0.8$  et  $1.2$ . La perturbation considérée était axisymétrique et la perturbation de la viscosité n'était pas prise en compte.

Pour les fluides à seuil, [Graebel, 1964] fut le premier à effectuer une analyse de stabilité linéaire d'écoulement de fluide viscoplastique. Le modèle classique de Bingham a été utilisé pour décrire le comportement seuil. Il a été montré pour un entrefer étroit que le caractère seuil a un effet stabilisant. Puis ont suivis les travaux [Peng et Zhu, 2004] et [Landry, 2006] dans lesquels le seuil s'est avéré produire un effet déstabilisant aux faibles nombres de Bingham dans le régime co-rotatif. [Landry, 2006] ont proposé une explication de cette non-monotonie du nombre de Reynolds critique, basée sur une analyse énergétique de la perturbation. [Landry, 2006] ont également étudié la stabilité dans le régime contra-rotatif pour une perturbation axisymétrique.

Les phénomènes de croissance transitoire dans l'écoulement de Taylor-Couette de fluides rhéofluidifiants ne sont pas à notre connaissance l'objet de beaucoup d'études. Seuls [Chen *et al.*, 2015] ont récemment étudié la croissance transitoire pour un fluide de Bingham (fluide rhéofluidifiant à seuil). Le seuil a pour effet d'atténuer l'amplification optimale de l'énergie.

### 1.5.1 Objectifs et méthodologie de la thèse

L'objectif de cette thèse est de progresser dans la compréhension des mécanismes gouvernant la transition laminaire-turbulente des écoulements de fluides non newtoniens. Une double approche est adoptée : une approche théorique et numérique ainsi qu'une approche expérimentale. Dans ce travail, les deux cylindres peuvent être mis en rotation indépendamment. Deux rapports de rayon, correspondant à un entrefer étroit et un entrefer large ont été considérés pour les approches théoriques et numériques. Seul l'entrefer large a été utilisé lors de l'étude expérimentale.

Lors de l'approche théorique, l'influence du caractère rhéofluidifiant des fluides non newtoniens, caractérisée par la stratification de la viscosité et la modification du profil de vitesse, est étudiée par l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette circulaire dans le cas de perturbations tridimensionnelles. Les comportements aux temps longs et aux temps courts d'une perturbation tridimensionnelle sont étudiés.



Il existe dans la littérature de nombreuses lois de comportement rhéologique. Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons aux fluides non newtoniens purement visqueux, c'est-à-dire aux fluides dont la viscosité varie avec le taux de cisaillement, sans caractère élastique. Ainsi, pour les études numériques, trois modèles sont étudiés : (i) le modèle d'Ostwald ou loi de puissance, (ii) le modèle de Carreau [Carreau, 1972] et (iii) le modèle de Bingham [Bingham, 1916].

Parmi ces trois modèles, le modèle en loi de puissance est le plus répandu. Ce modèle a l'avantage de permettre d'établir des expressions analytiques pour l'écoulement de base. Cependant, pour des entrefers larges, le taux de cisaillement au voisinage de la paroi du cylindre extérieur peut être très faible et la viscosité donnée par le modèle prend de très grandes valeurs, non physiques. La loi de puissance n'est alors pas adaptée pour décrire entièrement l'écoulement. La loi de Carreau permet de corriger ces défauts. Le modèle de Carreau est issu d'une étude théorique et est de classe  $C^\infty$  (fonction infiniment dérivable dans le domaine de l'écoulement) par rapport au deuxième invariant du tenseur des taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Le seul inconvénient est que l'écoulement de base doit être obtenu par un calcul numérique. Par ailleurs, le modèle de Carreau se rapproche du modèle de loi de puissance lorsque le rapport entre la viscosité à fort taux de cisaillement  $\mu_\infty$  et la viscosité à faible taux de cisaillement  $\mu_0$  est négligeable et que le temps caractéristique du fluide  $\lambda$  est très grand.

### 1.5.2 Plan de la thèse

Le travail de ce manuscrit est organisé en 6 chapitres. Dans le chapitre 2, les équations fondamentales de l'écoulement de Taylor-Couette et les paramètres adimensionnels du problème sont définis. L'influence de la rhéologie sur l'écoulement de base et sur l'équation de la ligne de Rayleigh est étudiée. Les paramètres de contrôle de la stabilité de l'écoulement de base sont présentés. Les équations aux perturbations et le problème aux valeurs initiales résultant sont établis.

Le chapitre 3 porte sur le comportement aux temps longs de perturbations bidimensionnelles et tridimensionnelles. Le problème aux valeurs propres est présenté. La résolution numérique du problème est décrite. L'influence du caractère rhéofluidifiant sur les spectres de valeurs propres et sur les conditions critiques d'apparition de la première instabilité est analysée.

Le chapitre 4 s'intéresse au comportement aux temps courts d'une perturbation tridimensionnelle. La croissance transitoire, i.e. l'amplification optimale de l'énergie cinétique de la perturbation, qui constitue un ingrédient essentiel de la transition vers la turbulence est calculée. L'analyse de l'évolution des perturbations optimales avec la rhéofluidification permet d'expliquer les différents mécanismes de ce comportement purement algébrique.

Le chapitre 5 fait l'objet d'une étude expérimentale avec la mise en place d'un dispositif de Taylor-Couette au Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMETA).

Une synthèse des différents résultats marquants, des différentes conclusions et les perspectives qui découlent de ce travail sont présentées à la fin de ce manuscrit.

## Chapitre 2

# FORMULATION MATHÉMATIQUE ET ÉCOULEMENT DE BASE

**C**e chapitre est consacré à la présentation des équations gouvernant la stabilité de l'écoulement d'un fluide non-newtonien entre deux cylindres coaxiaux en rotation. Il est structuré en 6 sections. La première section présente les équations fondamentales du problème qui sont les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement mais aussi les équations constitutives des fluides considérés dans cette étude. La formulation adimensionnelle de ces différentes équations, le choix de la viscosité de référence pour définir les nombres de Reynolds et l'écoulement de base en régime laminaire sont donnés dans la section 2. La section 3 précise les paramètres de contrôle de la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette ainsi que la limite de stabilité selon le critère de Rayleigh. Ensuite, les quatrième et cinquième sections sont consacrées à la description des équations aux perturbations et des équations aux perturbations linéarisées. Enfin la section 6 est destinée à l'établissement du problème aux valeurs propres.

### Sommaire

---

2.1	Formulation mathématique . . . . .	23
2.1.1	Équations fondamentales . . . . .	23
2.1.2	Équations constitutives . . . . .	24
2.2	Formulation mathématique adimensionnelle . . . . .	26
2.2.1	Viscosité de référence . . . . .	27

2.2.2	Écoulement de base . . . . .	28
2.2.3	Loi de puissance . . . . .	28
2.2.4	Loi de Carreau . . . . .	31
2.2.5	Loi de Bingham . . . . .	33
2.3	Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette . . . . .	35
2.3.1	Paramètres de contrôle de la stabilité . . . . .	35
2.3.2	Ligne de rotation solide et ligne de Rayleigh . . . . .	38
2.4	Équations aux perturbations . . . . .	40
2.5	Équations aux perturbations linéarisées . . . . .	41
2.6	Problème aux valeurs initiales . . . . .	43

---

## 2.1 Formulation mathématique

### 2.1.1 Équations fondamentales

Nous considérons l'écoulement de fluides incompressibles entre deux cylindres tournants coaxiaux infiniment longs (figure 2.1). Le cylindre intérieur de rayon  $\hat{R}_1$  tourne à la vitesse angulaire  $\hat{\Omega}_1$ . Le cylindre extérieur de rayon  $\hat{R}_2$  tourne à la vitesse angulaire  $\hat{\Omega}_2$ . Le rapport des rayons est défini par  $\eta = \hat{R}_1/\hat{R}_2$ . Nous adopterons le système de coordonnées cylindriques, avec  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{z}$ , les composantes radiale, azimutale et axiale dans les directions  $\underline{e}_r$ ,  $\underline{e}_\theta$  et  $\underline{e}_z$  respectivement.

Les équations fondamentales du problème sont l'équation de conservation de la masse (équation de continuité) et les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\underline{U}} = 0. \quad (2.1)$$

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{\underline{U}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho} (\hat{\underline{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\underline{U}} = -\hat{\nabla} \hat{P} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\underline{\underline{\tau}}}. \quad (2.2)$$

Le chapeau ( $\hat{\cdot}$ ) indique que les variables sont dimensionnelles. Dans les équations précédentes,  $\hat{\rho}$  est la masse volumique,  $\hat{P}$  est la pression,  $\hat{\underline{U}} = \hat{U} \underline{e}_r + \hat{V} \underline{e}_\theta + \hat{W} \underline{e}_z$  est le vecteur vitesse et  $\hat{\underline{\underline{\tau}}}$  le déviateur du tenseur des contraintes.

Aux équations précédentes, nous devons rajouter les conditions aux limites

$$\hat{\underline{U}} = \hat{\Omega}_1 \hat{R}_1 \underline{e}_\theta \quad \text{pour} \quad \hat{r} = \hat{R}_1, \quad (2.3)$$

$$\hat{\underline{U}} = \hat{\Omega}_2 \hat{R}_2 \underline{e}_\theta \quad \text{pour} \quad \hat{r} = \hat{R}_2. \quad (2.4)$$

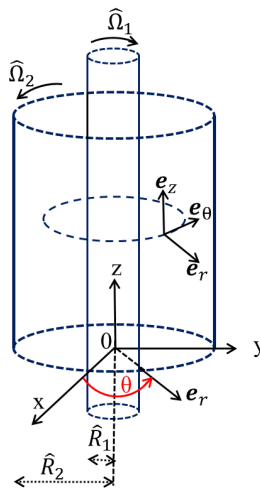


FIG. 2.1 – Schéma de la géométrie de l'écoulement de Taylor-Couette.

### 2.1.2 Équations constitutives

Nous considérons dans cette étude, le cas des fluides non newtoniens purement visqueux (non élastiques). Le déviateur du tenseur des contraintes est donné par

$$\underline{\underline{\hat{\tau}}} = \hat{\mu} \underline{\underline{\hat{\gamma}}} \quad , \quad \hat{\mu} = \hat{\mu}(\hat{\gamma}), \quad (2.5)$$

où  $\underline{\underline{\hat{\gamma}}}$  est le tenseur des taux de cisaillement. La viscosité du fluide  $\hat{\mu}$  est une fonction du second invariant  $\hat{\gamma}$  du tenseur  $\underline{\underline{\hat{\gamma}}}$ ,

$$\underline{\underline{\hat{\gamma}}} = \hat{\nabla} \hat{U} + \hat{\nabla} \hat{U}^T \quad ; \quad \hat{\gamma} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^3 (\hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

La majorité des fluides rencontrés dans les procédés industriels sont rhéofluidifiants. Pour ces fluides, la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente. Nous nous intéresserons ici à trois modèles rhéologiques décrivant le comportement rhéofluidifiant : la loi de puissance, la loi de Carreau et la loi de Bingham. Ces modèles sont les plus simples pour décrire ce comportement. Il existe des lois plus élaborées, néanmoins les modèles choisis contiennent tous les ingrédients du problème.

#### ◦ *Modèle en loi de puissance*

Ce modèle, appelé aussi le modèle d'Ostwald, est le plus connu et le plus simple pour décrire le comportement des fluides rhéofluidifiants sans seuil de contrainte :

$$\underline{\underline{\hat{\tau}}} = \hat{K} \hat{\gamma}^{(n_p-1)} \underline{\underline{\hat{\gamma}}} \quad (2.7)$$

où  $\hat{K}$  est la consistance et  $n_p$  l'indice de rhéofluidification, tel que  $0 < n_p < 1$ . Si  $n_p = 1$ , le fluide est newtonien. Des exemples de fluides rhéofluidifiants décrits par la loi de puissance et les paramètres  $n_p$  et  $\hat{K}$  associés sont donnés dans [Bird *et al.*, 1987].

Si  $n_p \leq 1$ , le fluide est rhéofluidifiant. Dans ce cas, la viscosité du fluide diminue avec  $\hat{\gamma}$ .

Si  $n_p \geq 1$ , le fluide est rhéoépaississant et la viscosité du fluide augmente avec  $\hat{\gamma}$ .

Néanmoins ce modèle présente des singularités pour les taux de cisaillement faibles ( $\hat{\gamma} \rightarrow 0$ ) et élevés ( $\hat{\gamma} \rightarrow \infty$ ). En effet, selon ce modèle, pour  $n_p < 1$ , la viscosité est pratiquement nulle à cisaillement infini et pratiquement infinie pour un cisaillement nul. Pour pallier ce défaut, la loi de Carreau est souvent adoptée lorsque les conditions de l'écoulement font intervenir des zones à très forts et faibles cisaillement.

◦ *Modèle de Carreau*

Le modèle de Carreau [Carreau, 1972] est souvent adopté lorsqu'existent dans l'écoulement des zones à très faibles ou forts cisaillements. Ce modèle permet de corriger les singularités du modèle en loi de puissance précédent avec la présence de deux plateaux newtoniens. Le premier plateau est obtenu à cisaillement faible. Le deuxième est obtenu à cisaillement infini. Une forme généralisée de la loi de Carreau existe avec le modèle empirique à 5 paramètres de Carreau-Yasuda :

$$\underline{\underline{\hat{\tau}}} = \left[ \hat{\mu}_\infty + (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty) [1 + (\hat{\lambda} \hat{\gamma})^a]^{\frac{n_c - 1}{a}} \right] \underline{\underline{\hat{\gamma}}} . \quad (2.8)$$

où  $a$  est un paramètre sans dimension décrivant la transition entre le premier plateau newtonien et la pente de la partie rhéofluidifiante.

Pour  $a = 2$ , nous retrouvons le modèle classique de Carreau :

$$\underline{\underline{\hat{\tau}}} = \left[ \hat{\mu}_\infty + (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty) [1 + (\hat{\lambda} \hat{\gamma})^2]^{\frac{n_c - 1}{2}} \right] \underline{\underline{\hat{\gamma}}} . \quad (2.9)$$

Nous noterons  $\hat{\mu}_0$  la viscosité pour un cisaillement nul (premier plateau newtonien) et  $\hat{\mu}_\infty$ , la viscosité à cisaillement infini (deuxième plateau newtonien). La constante  $\hat{\lambda}$  est un temps caractéristique du fluide. Le taux de cisaillement à partir duquel la viscosité diminue significativement avec le taux de déformation est égal à  $1/\hat{\lambda}$ . L'augmentation de  $\hat{\lambda}$  réduit le premier plateau newtonien et le modèle de Carreau se rapproche du modèle en loi de puissance. C'est aussi le cas lorsque la gamme de cisaillement dans l'espace annulaire se situe exactement dans le régime rhéofluidifiant. Cette condition est réalisable pour un entrefer étroit avec un grand nombre de Reynolds  $Re_1$ . Par ailleurs, pour un large entrefer, et pour des fluides très rhéofluidifiants, le taux de cisaillement au voisinage du cylindre extérieur peut être faible, approchant le taux de cisaillement faible du plateau newtonien. Dans ce cas, le modèle de Carreau serait beaucoup plus approprié que le modèle en loi de puissance. Nous noterons  $n_c$ , l'indice de rhéofluidification d'un fluide de Carreau.

◦ *Modèle de Bingham*

Ce modèle décrit les fluides visco-plastiques. Ce sont des fluides rhéofluidifiants avec un seuil de contrainte  $\hat{\tau}_y$ . En dessous de ce seuil, le fluide se comporte du point de vue cinématique comme un solide. Au-delà, il se comporte comme un fluide purement visqueux. En adoptant le critère de von Mises, le modèle de Bingham s'écrit :

$$\underline{\underline{\hat{\tau}}} = \left[ \hat{\mu}_p + \frac{\hat{\tau}_y}{\hat{\gamma}} \right] \underline{\underline{\hat{\gamma}}} \iff \hat{\tau} > \hat{\tau}_y$$

$$\hat{\gamma} = 0 \iff \hat{\tau} \leq \hat{\tau}_y \quad (2.10)$$

où  $\hat{\mu}_p$  est la viscosité plastique. On note  $\hat{\tau}$ , le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\hat{\tau}}}$  :

$$\hat{\tau} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^3 (\hat{\tau}_{ij} \hat{\tau}_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

## 2.2 Formulation mathématique adimensionnelle

Les équations de la section 2.1 sont mises sous forme adimensionnelle en utilisant les échelles caractéristiques de longueur  $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$ , de vitesse  $\hat{\Omega}_1 \hat{R}_1$ , de contrainte et pression  $\hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}$  avec  $\hat{\mu}_{ref}$ , une viscosité de référence qui sera définie par la suite,

$$t = \frac{\hat{t} \hat{\mu}_{ref}}{\hat{\rho} \hat{d}^2}, \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{d}}, \quad z = \frac{\hat{z}}{\hat{d}}, \quad P = \frac{\hat{P} \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref} \hat{\Omega}_1 \hat{R}_1}, \quad \underline{U} = \frac{\hat{U}}{\hat{\Omega}_1 \hat{R}_1}, \quad \tau_{ij} = \frac{\hat{\tau}_{ij} \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref} \hat{\Omega}_1 \hat{R}_1}, \quad \mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_{ref}}. \quad (2.12)$$

En utilisant la viscosité de référence, les nombres de Reynolds des deux cylindres  $Re_1$  et  $Re_2$  sont définis par

$$Re_1 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}}, \quad Re_2 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_2 \hat{\Omega}_2 \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}}. \quad (2.13)$$

Les équations adimensionnelles gouvernant le problème sont alors

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{U} = 0. \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + Re_1 (\underline{U} \cdot \underline{\nabla}) \underline{U} = -\underline{\nabla} P + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}. \quad (2.15)$$

Les conditions d'adhérence à la paroi ainsi que les conditions d'imperméabilité deviennent :

$$\underline{U} = \underline{e}_\theta \quad \text{pour } r = R_1, \quad (2.16)$$

$$\underline{U} = \frac{Re_2}{Re_1} \underline{e}_\theta \quad \text{pour } r = R_2. \quad (2.17)$$

Sous forme adimensionnelle, les lois constitutives des fluides non newtoniens s'expriment

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \quad \mu = \mu(\dot{\gamma}), \quad (2.18)$$

où

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \underline{\nabla} \underline{U} + \underline{\nabla} \underline{U}^T; \quad \dot{\gamma} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^3 (\dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$



◦ *Modèle d'Ostwald*

Pour les fluides en loi de puissance, la viscosité adimensionnelle est donnée par

$$\mu = \dot{\gamma}^{(n_p-1)}. \quad (2.20)$$

◦ *Modèle de Carreau*

La viscosité  $\hat{\mu}_\infty$  est généralement très faible ( $10^{-3}$  à  $10^{-4} Pa.s$  environ) devant  $\hat{\mu}_0$ . Cette viscosité est souvent négligeable devant la viscosité  $\hat{\mu}_0$  ( $\hat{\mu}_\infty \ll \hat{\mu}_0$ ) [Bird *et al.*, 1987, Tanner, 2000]. Le rapport  $\hat{\mu}_\infty/\hat{\mu}_0$  sera donc négligé dans ce travail. Sous cette hypothèse, la viscosité d'un fluide de Carreau s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\mu = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n_c-1}{2}}, \quad (2.21)$$

où  $\lambda = \hat{\lambda} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}$ .

◦ *Modèle de Bingham*

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad \text{avec} \quad \mu = \begin{cases} \left[1 + \frac{B_i}{\dot{\gamma}}\right] & \iff \tau > B_i, \\ \dot{\gamma} = 0 & \iff \tau \leq B_i, \end{cases} \quad (2.22)$$

où

$$\tau = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^3 (\tau_{ij} \tau_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Nous définissons le nombre adimensionnel de Bingham  $B_i$  comme le rapport entre la contrainte seuil  $\hat{\tau}_y$  et une contrainte visqueuse "nominale"  $\hat{\tau}_n = \hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}$

$$B_i = \frac{\hat{\tau}_y \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1}. \quad (2.24)$$

Le fluide est newtonien lorsque  $B_i = 0$ .

### 2.2.1 Viscosité de référence

Il est important dans l'étude de l'écoulement de Taylor-Couette de préciser la viscosité que l'on prend comme référence pour le fluide. Dans la littérature, la viscosité choisie pour un fluide en loi de

puissance est souvent la viscosité nominale,

$$\hat{\mu}_{ref} = \hat{K} \left( \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d} \right)^{n_p - 1}. \quad (2.25)$$

Cette définition est déduite des échelles caractéristiques utilisées pour adimensionner les équations du problème. Pour le modèle de Carreau, la viscosité du premier plateau newtonien  $\hat{\mu}_0$  est prise comme viscosité de référence. La viscosité plastique  $\hat{\mu}_p$  est choisie dans le cas des fluides de Bingham. Ces viscosités de référence ne sont pas déduites de considérations physiques et ne sont bien souvent pas atteintes dans l'espace annulaire. Cependant, elles ont l'avantage d'être faciles à utiliser contrairement à une viscosité à la paroi  $\mu(R_1)$ .

### 2.2.2 Écoulement de base

L'écoulement de base est ici l'écoulement de Couette circulaire. Sa vitesse est purement azimutale et fonction de  $r$  seul,  $\underline{V}^b = V^b(r) \underline{e}_\theta$ . Elle est solution de l'équation

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \tau_{r\theta}^b \right) = 0, \quad (2.26)$$

provenant de la décomposition suivant l'axe  $e_\theta$  de l'équation (2.15) présentée au §2.2. Les conditions aux limites sont les mêmes que celles décrites dans §2.2.

Dans ce travail, nous utilisons principalement deux rapports de rayons : un rapport de rayon correspondant à un entrefer étroit,  $\eta = 0.881$ , de manière à comparer nos résultats à ceux de la littérature ; un rapport de rayon  $\eta = 0.4$ , correspondant à un large entrefer, pour faire une comparaison avec les résultats expérimentaux présentés au chapitre 5.

### 2.2.3 Loi de puissance

Pour un fluide en loi de puissance, le profil des vitesses est bien connu [Bird *et al.*, 1987]

$$V^b(r) = A_p r + \frac{B_p r}{r^{2/n_p}} \quad (2.27)$$

avec

$$A_p = \frac{1}{R_1} \left[ 1 + \frac{1}{R_1^{2/n_p}} \left( 1 - \frac{Re_2}{Re_1} \eta \right) \left( \frac{1}{R_2^{2/n_p}} - \frac{1}{R_1^{2/n_p}} \right)^{-1} \right] \quad (2.28)$$

$$B_p = -\frac{1}{R_1} \left[ \left( 1 - \frac{Re_2}{Re_1} \eta \right) \left( \frac{1}{R_2^{2/n_p}} - \frac{1}{R_1^{2/n_p}} \right)^{-1} \right] \quad (2.29)$$

Lorsque les deux cylindres tournent en sens opposés, les figures 2.2 et 2.3 montrent les effets du caractère rhéofluidifiant sur le profil des vitesses et le profil de viscosités pour des rapports de rayons  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$ . Le fait marquant est que la courbure des profils devient plus prononcée quand l'indice  $n_p$  diminue. Le taux de cisaillement augmente donc à la paroi du cylindre intérieur alors qu'il diminue très fortement sur le cylindre extérieur. Cet effet est encore plus significatif pour un large entrefer  $\eta = 0.4$ .

Les résultats montrent aussi une stratification forte de la viscosité en fonction de la position radiale dans l'espace annulaire. La viscosité augmente de la paroi du cylindre intérieur vers la paroi du cylindre extérieur. Le degré de stratification dû au terme  $d\mu^b/dr$  s'amplifie quand le caractère rhéofluidifiant augmente (en diminuant  $n_p$ ) comme le montrent les figures 2.2(b) et 2.3(b). Ainsi, la stratification de la viscosité est plus grande à la paroi du cylindre extérieur.

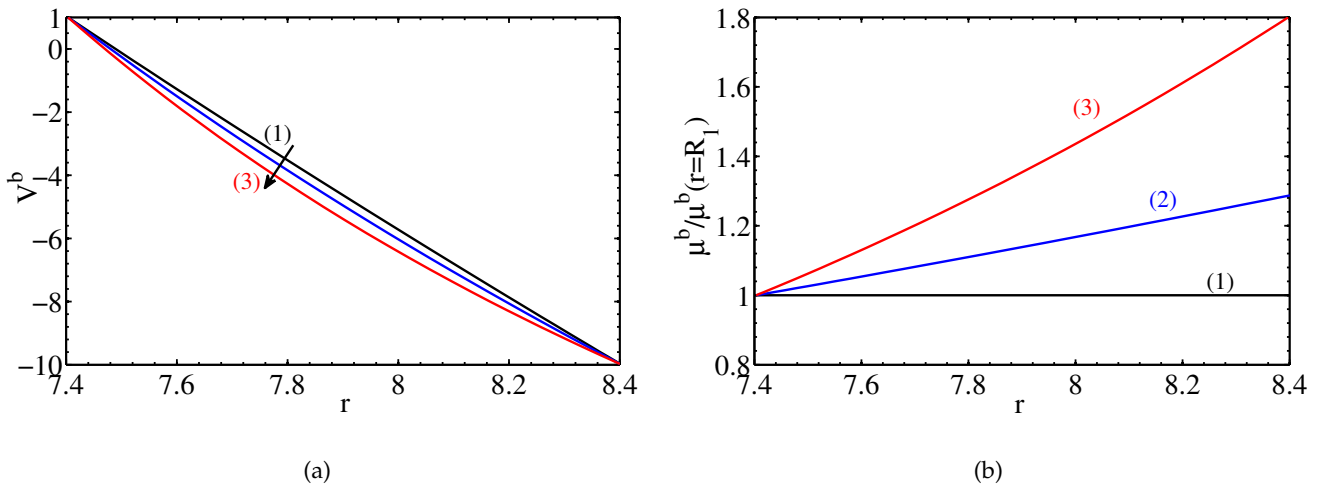


FIG. 2.2 – Écoulement de base pour un fluide en loi de puissance entre deux cylindres contra-rotatif  $Re_1 = 300$  et  $Re_2 = -3000$  pour  $\eta = 0.881$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité (1)  $n_p = 1$  (fluide newtonien) (2)  $n_p = 0.5$  et (3)  $n_p = 0.3$ .

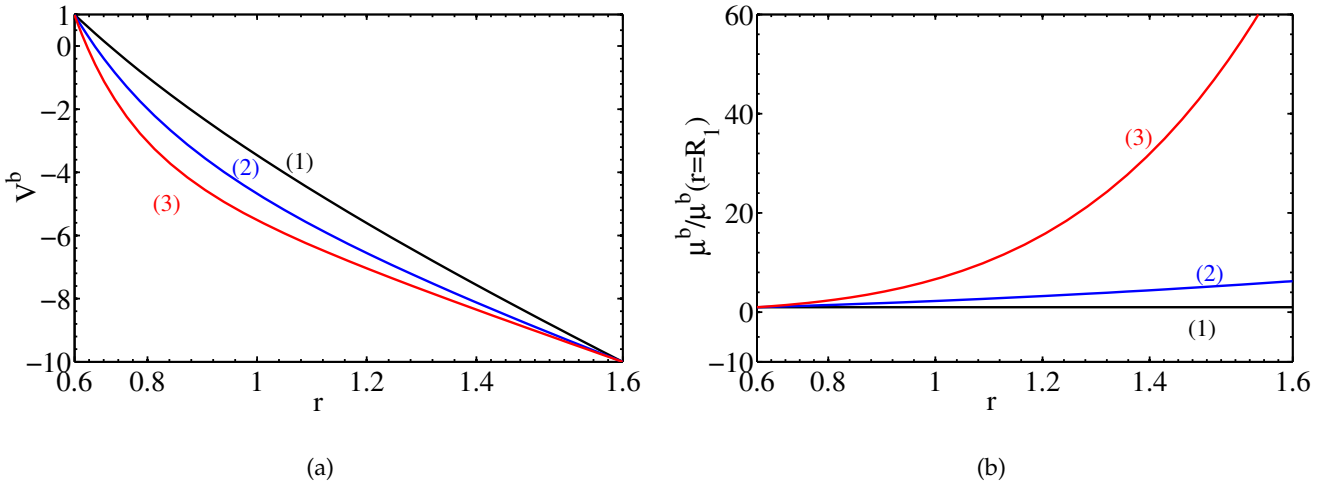


FIG. 2.3 – Écoulement de base pour un fluide en loi de puissance en régime contra-rotatif  $Re_1 = 300$  et  $Re_2 = -3000$  pour  $\eta = 0.4$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité (1)  $n_p = 1$  (fluide newtonien) (2)  $n_p = 0.5$  et (3)  $n_p = 0.3$ .

Pour les cylindres en régime co-rotatif, la figure 2.4 montre que les profils de vitesses et de viscosités sont similaires à ceux du régime contra-rotatif. Mais, les profils de vitesses sont concaves et non plus convexes. En outre, les vitesses sont positives dans tout l'espace annulaire contrairement au régime contra-rotatif où il peut exister une zone de vitesses négatives attachée à la paroi du cylindre extérieur.

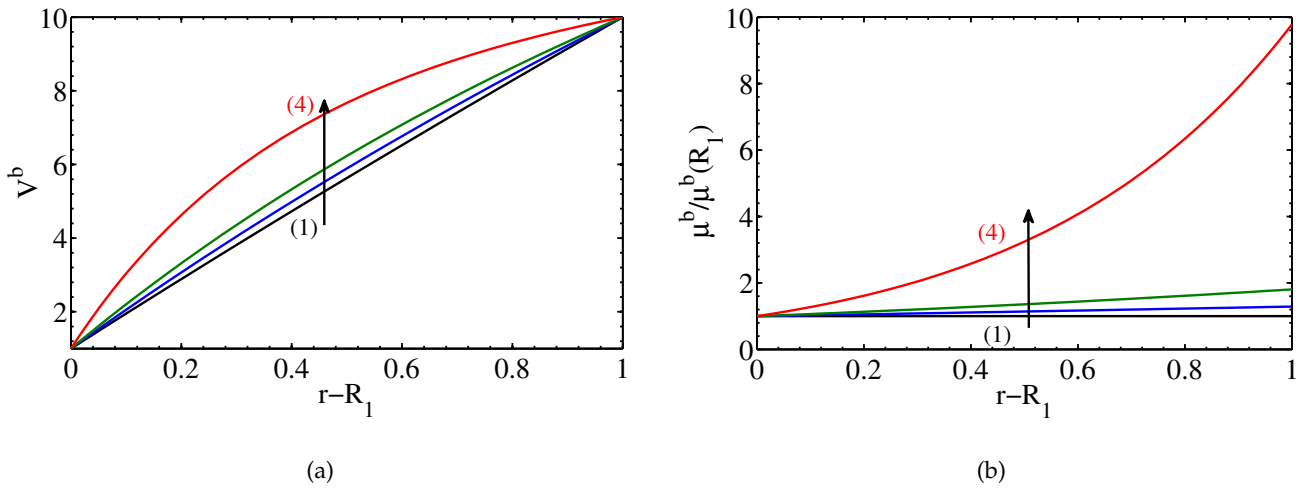


FIG. 2.4 – Écoulement de base pour un fluide en loi de puissance avec des cylindres en co-rotation pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 300$  et  $Re_2 = 3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité avec (1)  $n_p = 1$  (fluide newtonien) (2)  $n_p = 0.5$  (3)  $n_p = 0.3$  et (4)  $n_p = 0.1$ .

### 2.2.4 Loi de Carreau

Pour la loi de Carreau, il n'existe pas d'expression analytique pour l'écoulement de base. L'équation (2.26) a été résolue numériquement en utilisant la méthode itérative de Newton Raphson combinée avec la méthode d'approximation polynomiale de Chebyshev.

Pour des valeurs de  $\lambda$  fixées, l'augmentation de l'indice  $n_c$  produit les mêmes influences sur l'écoulement de base que l'indice  $n_p$  de la loi de puissance, comme le montrent les figures 2.5 et les figures 2.6.

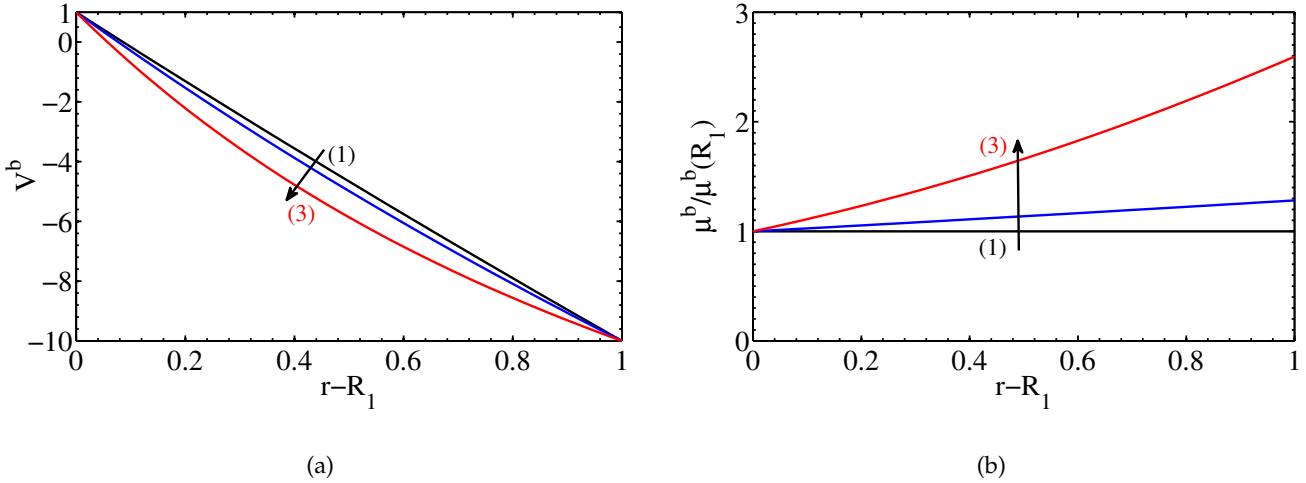


FIG. 2.5 – Écoulement de base pour un fluide de Carreau pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 300$ ,  $Re_2 = -3000$  et  $\lambda = 1$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1)  $n_c = 1$  (fluide newtonien) (2)  $n_c = 0.5$  et (3)  $n_c = 0.3$ .

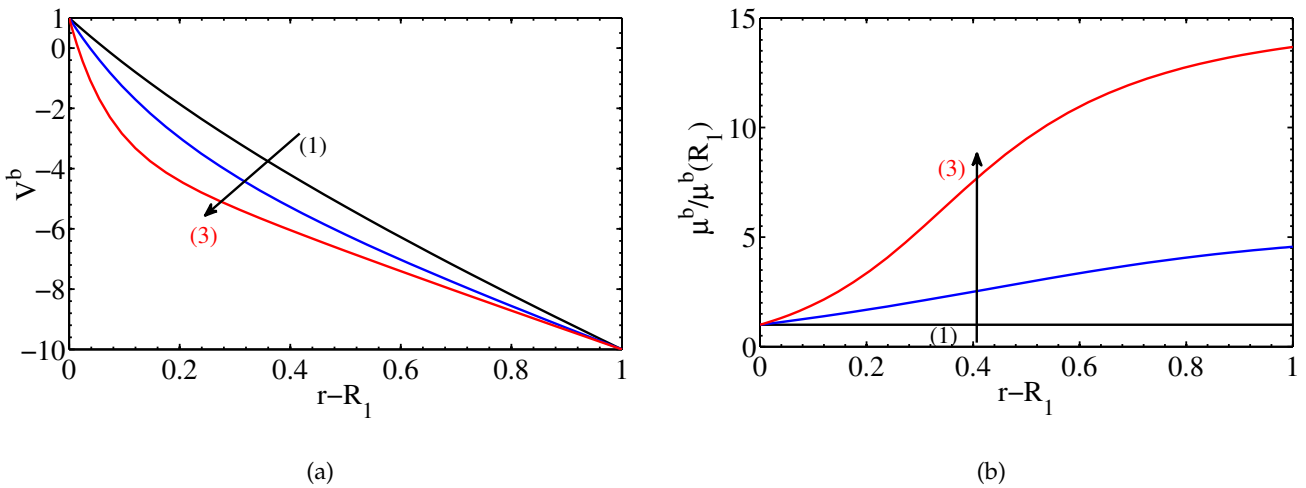


FIG. 2.6 – Écoulement de base pour un fluide de Carreau pour  $\eta = 0.4$ ,  $Re_1 = 300$ ,  $Re_2 = -3000$  et  $\lambda = 1$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1)  $n_c = 1$  (fluide newtonien) (2)  $n_c = 0.5$  et (3)  $n_c = 0.3$ .

Pour des valeurs de  $\lambda$  élevées, l'indice  $n_c$  est similaire à celui de la loi de puissance  $n_p$ . En effet, au voisinage de  $\lambda = 10$ , l'écoulement de base de la loi de carreau est presque identique à celui de la loi de puissance comme illustré sur la figure 2.7 pour  $\eta = 0.4$ .

L'augmentation de  $\lambda$  amplifie également le gradient de vitesse à la paroi du cylindre intérieur, figure 2.8.

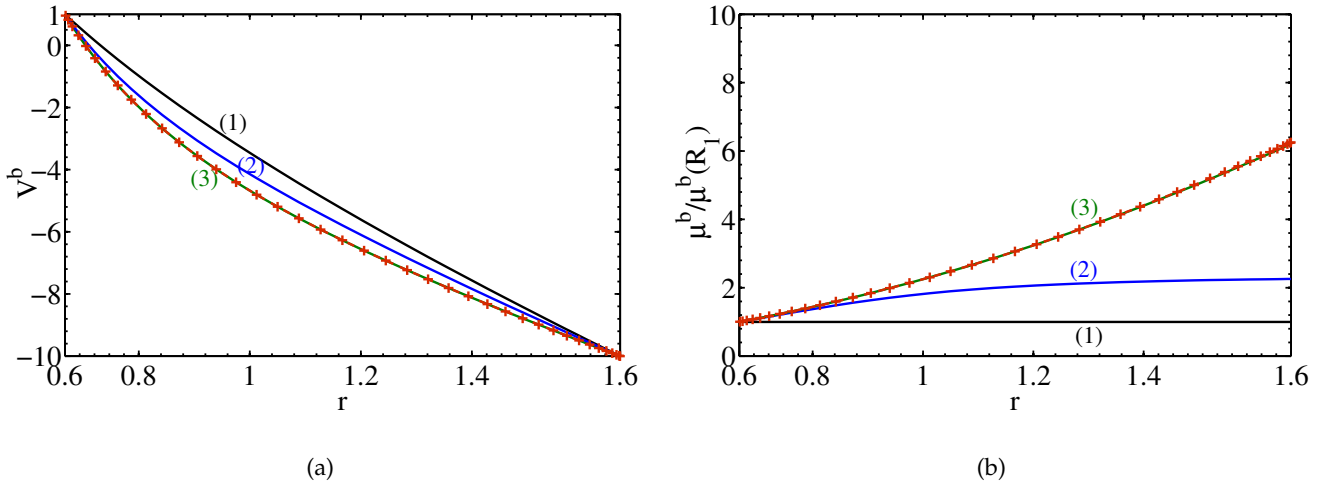


FIG. 2.7 – Comparaison entre l'écoulement de base pour un fluide de Carreau et pour un fluide en loi de puissance avec  $\eta = 0.4$ ,  $n_p = 0.5$ ,  $Re_1 = 300$  et  $Re_2 = -3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1)  $\lambda = 0$  (fluide newtonien), (2)  $\lambda = 0.2$ , (3)  $\lambda = 10$  et (+ +) loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ .

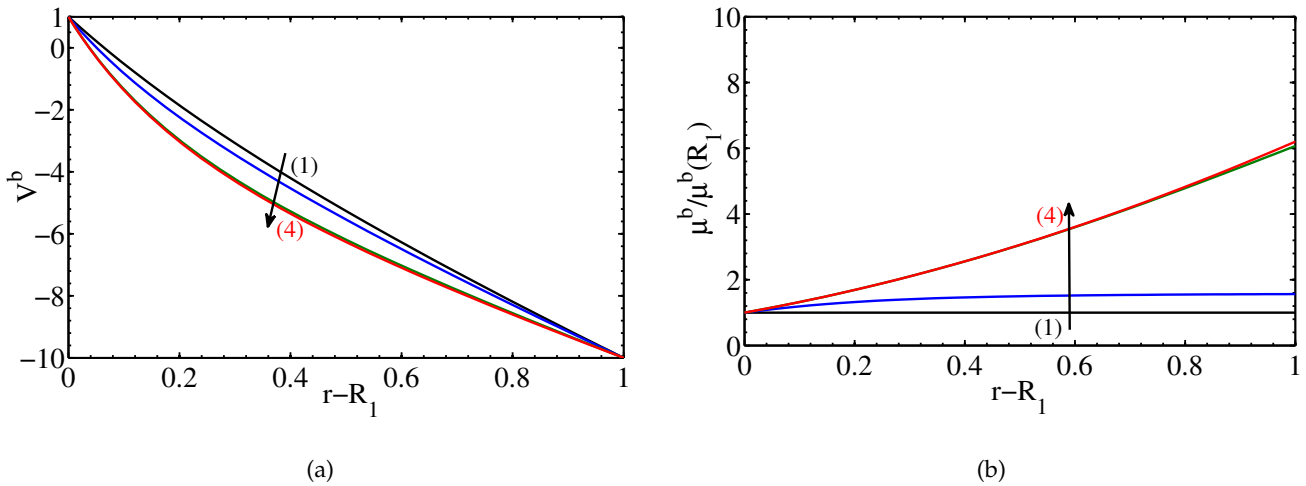


FIG. 2.8 – Écoulement de base pour un fluide de Carreau pour  $\eta = 0.4$ ,  $Re_1 = 300$ ,  $Re_2 = -3000$  et  $n_c = 0.5$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1)  $\lambda = 0.001$  (2)  $\lambda = 0.1$  (3)  $\lambda = 1$  et (4)  $\lambda = 10$ .

### 2.2.5 Loi de Bingham

L'écoulement des fluides à seuil présente une particularité par le fait qu'il existe à faible cisaillement une zone bouchon collée à la paroi du cylindre extérieur. En effet, si la contrainte locale est très faible, inférieure à la contrainte seuil, le fluide ne s'écoule pas et se comporte comme un solide. Ceci peut se produire à la paroi du cylindre extérieur car la contrainte  $y$  est minimale. On peut distinguer 3 cas, qui correspondent à 3 zones différentes dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , comme l'a montré [Landry, 2006]. Ces 3 cas sont illustrés sur la figure 2.9 pour un nombre de Bingham  $B_i = 10$  et les deux rapports de rayons  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$ . La zone (I), pour laquelle le cylindre intérieur et le cylindre extérieur tournent à la même vitesse, est la droite de rotation solide. Dans la zone (II), seule la partie intérieure de l'espace annulaire est en écoulement, la partie extérieure effectuant une rotation solide. Dans la zone (III), tout le fluide contenu dans l'entrefer s'écoule.

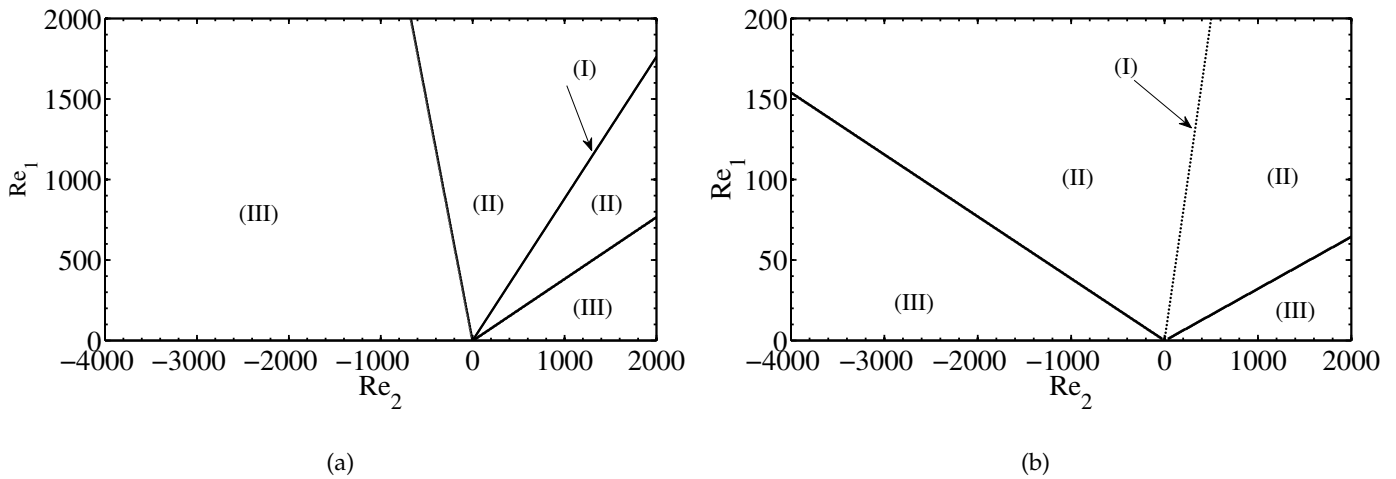


FIG. 2.9 – Régimes d'écoulement d'un fluide de Bingham pour  $B_i = 10$  et deux rapports de rayons différents. (a)  $\eta = 0.881$  et (b)  $\eta = 0.4$ . (I) Ligne de rotation solide, (II) espace annulaire partiellement cisailé et (III) espace annulaire totalement cisailé.

Dans le cas où tout l'espace annulaire est cisailé, cas (III), l'écoulement de base s'écrit

$$V^b(r) = \frac{Re_2}{Re_1} \frac{1}{R_2} r + \frac{1}{2} R_1^2 \tau_1^b r \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \text{sgn}(\tau_1^b) B r \ln \left( \frac{R_2}{r} \right), \quad (2.30)$$

avec  $\tau_1^b$  la contrainte de cisaillement à la paroi du cylindre intérieur

$$\tau_1^b = \frac{2}{\eta^2 - 1} \left[ \left( 1 - \frac{Re_2}{Re_1} \eta \right) \frac{1 - \eta}{\eta} + \text{sgn} \left( \frac{Re_2}{Re_1} \eta - 1 \right) B \ln(\eta) \right]. \quad (2.31)$$

Dans le cas (II), espace annulaire partiellement cisailé, l'écoulement de base devient

$$V^b(r) = \frac{Re_2}{Re_1} \frac{1}{R_0} r + \frac{1}{2} R_1^2 \tau_1^b r \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \text{sgn}(\tau_1^b) B r \ln \left( \frac{R_0}{r} \right), \quad (2.32)$$

où  $R_0$  est la position de l'interface entre la zone cisailée et la zone non cisailée, définie par  $|\tau_{r,\theta}^b| = B_i$ . La contrainte de cisaillement  $\tau_1^b$  est déterminée numériquement en appliquant la condition aux limites  $V^b(R_1) = 1$ .

Pour le cas (I), l'écoulement de base est donné par

$$V^b(r) = \frac{Re_2}{Re_1} \frac{1}{R_2} r. \quad (2.33)$$

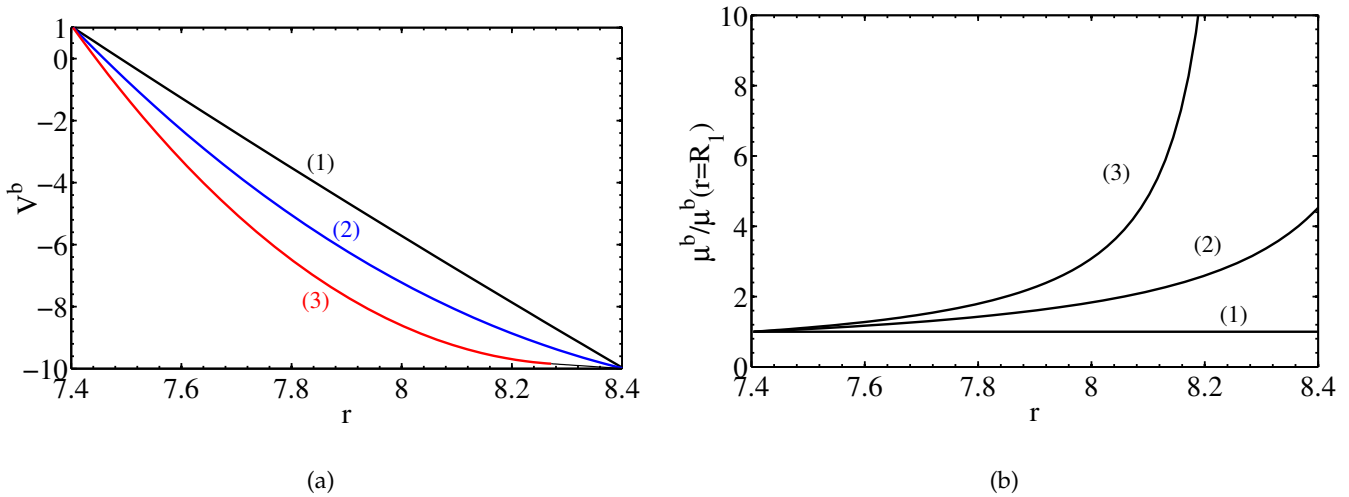


FIG. 2.10 – Écoulement de base pour un fluide de Bingham avec  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 300$  et  $Re_2 = -3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1)  $B_i = 0$  (fluide newtonien), (2)  $B_i = 50$  et (3)  $B_i = 100$ .

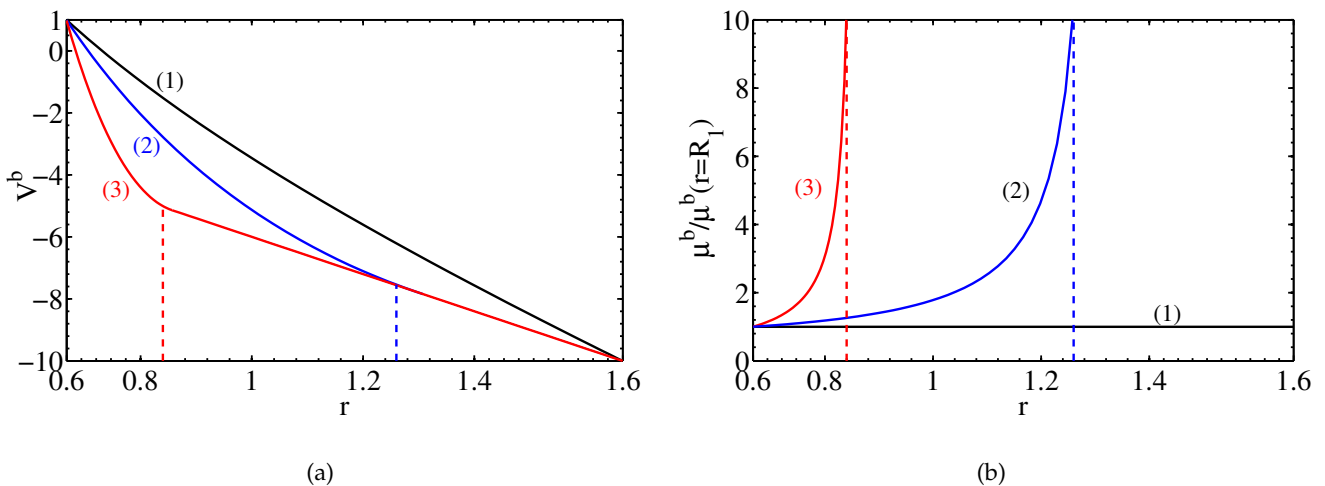


FIG. 2.11 – Écoulement de base pour un fluide de Bingham avec  $\eta = 0.4$ ,  $Re_1 = 300$  et  $Re_2 = -3000$ . (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosité. (1)  $B_i = 0$  (fluide newtonien), (2)  $B_i = 10$  et (3)  $B_i = 100$ . Les lignes verticales pointillées correspondent à la position d'interface entre les zones cisailée et non cisailée.



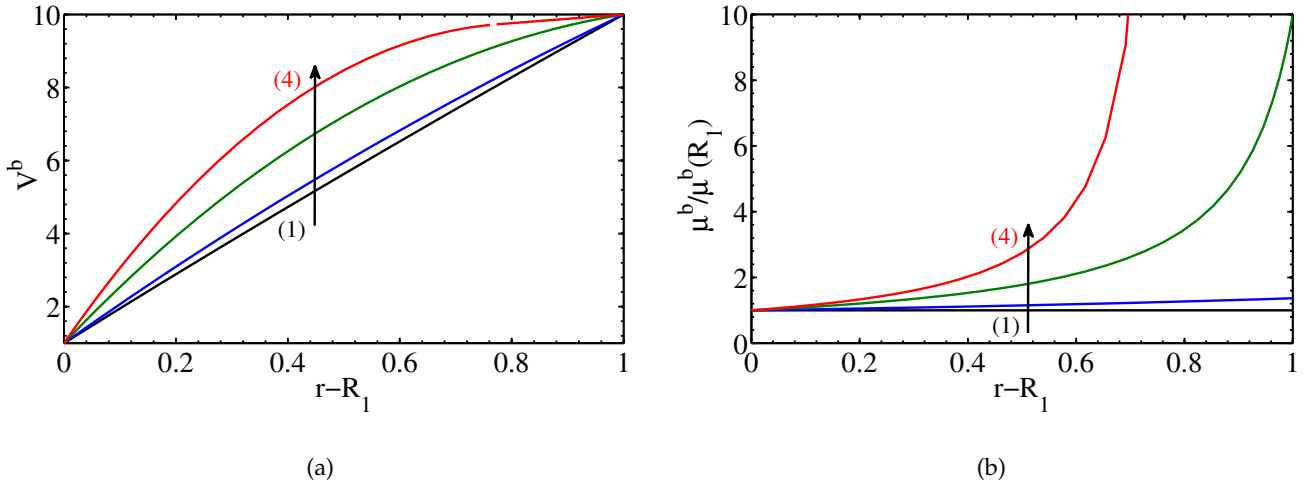


FIG. 2.12 – Écoulement de base pour un fluide de Bingham entre deux cylindres en co-rotation pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 300$  and  $Re_2 = 3000$ . (a) Profils de vitesses et (b) profils des viscosités. (1)  $B_i = 0$  (fluide newtonien) (2)  $B_i = 10$  (3)  $B_i = 50$  et (4)  $B_i = 100$ .

Pour de faibles et larges entrefers, les figures 2.10 et 2.11 montrent l'influence du seuil sur l'écoulement de base. Pour un espace annulaire complètement cisailé, le comportement rhéofluidifiant à seuil a un effet similaire au caractère purement rhéofluidifiant (fluides en loi de puissance et fluide de Carreau). Il apparaît que le taux de cisaillement augmente fortement au niveau du cylindre intérieur lorsque le nombre de Bingham augmente. Quand une zone non cisailée existe dans l'entrefers, le profil de vitesse  $y$  est presque linéaire et la viscosité est infinie au niveau de l'interface (situé en  $r = R_0$ ) séparant la zone cisailée de la zone non cisailée.

## 2.3 Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette

### 2.3.1 Paramètres de contrôle de la stabilité

Les paramètres adimensionnels fondamentaux pour l'étude de l'écoulement de Taylor-Couette des fluides non newtoniens sont principalement des paramètres rhéologiques : l'indice  $n_p$  pour la loi de puissance,  $n_c$  et  $\lambda$  pour le modèle de Carreau, le nombre de Bingham  $B_i$ . La taille de l'entrefers est décrite par le rapport des rayons  $\eta$ . Traditionnellement, les différents régimes de l'écoulement de Taylor-Couette sont décrits par les nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  basés sur la vitesse des cylindres intérieur et extérieur respectivement. Néanmoins, dans le but de séparer l'effet du cisaillement des effets centrifuges, [Dubrulle *et al.*, 2005] ont récemment introduit deux nouveaux paramètres. Il s'agit du nombre de Reynolds de cisaillement  $Re$  défini par le rapport entre le temps de cisaillement  $|\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})|^{-1}$  et le temps visqueux  $\hat{\rho} \hat{d}^2 / \hat{\mu}$  et du nombre de rotation  $R_\Omega$  qui exprime la compétition entre le temps de cisaillement et un temps caractéristique de rotation relatif à la force de

Coriolis subie par le fluide  $2\hat{\Omega}_f(\hat{r})$ .

$$Re = \frac{\hat{\rho} |\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})| d^2}{\hat{\mu}^b(\hat{r})}, \quad R_\Omega = \frac{2\hat{\Omega}_f(\hat{r})}{\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})}, \quad (2.34)$$

où  $\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})$  et  $\hat{\mu}^b(\hat{r})$  désignent respectivement le taux de cisaillement et la viscosité de l'écoulement de base évalués à la position radiale  $\hat{r}$ .

$$\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r}) = \left[ \frac{D\hat{V}^b(\hat{r})}{D\hat{r}} - \frac{\hat{V}^b(\hat{r})}{\hat{r}} \right]_{\hat{r}=\hat{r}} \quad (2.35)$$

La position radiale  $\hat{r}$  et la vitesse angulaire de référence  $\hat{\Omega}_f(\hat{r})$  sont tels qu'une particule fluide située en  $\hat{r}$  et tournant à la vitesse  $\hat{\Omega}_f(\hat{r})$  voit les deux cylindres tourner à des vitesses exactement égales et opposées,

$$[\hat{V}^b(\hat{R}_1) - \hat{\Omega}_f \hat{R}_1] = -[\hat{V}^b(\hat{R}_2) - \hat{\Omega}_f \hat{R}_2]. \quad (2.36)$$

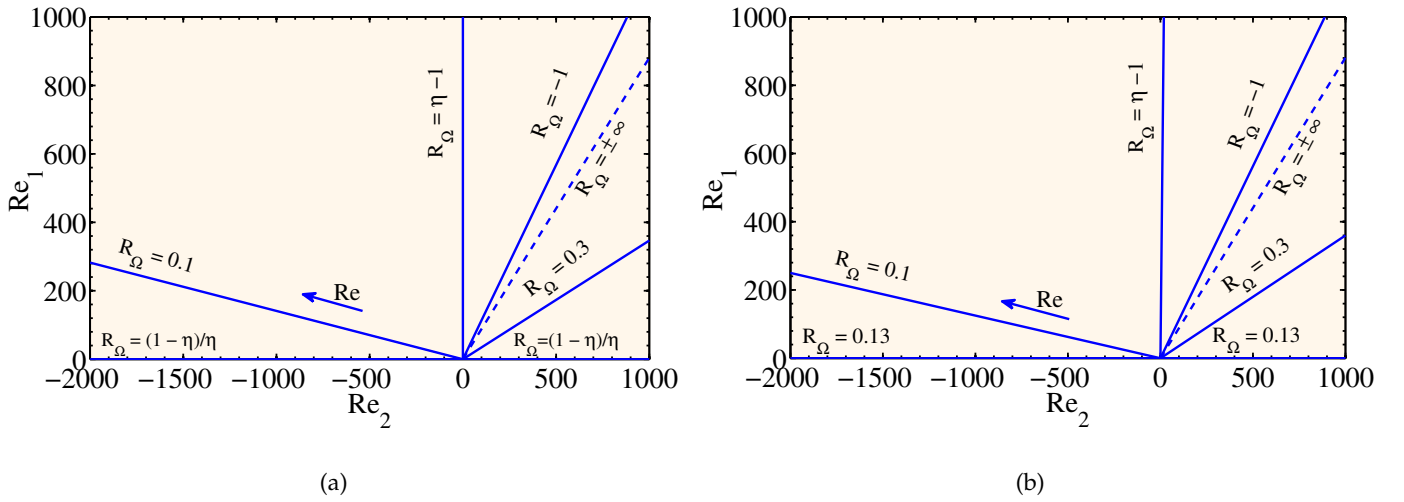


FIG. 2.13 – Valeurs du paramètre  $R_\Omega$  [Dubrulle *et al.*, 2005] dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour  $\eta = 0.881$ . (a) fluide newtonien et (b) fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.3$ .

En adoptant ces définitions dans le cas particulier d'un fluide newtonien, il est montré d'après [Dubrulle *et al.*, 2005] que

$$\bar{r} = \sqrt{R_1 R_2}, \quad Re = \frac{2|\eta Re_2 - Re_1|}{1 + \eta}, \quad R_\Omega = \frac{(1 - \eta)(Re_1 + Re_2)}{\eta Re_2 - Re_1}. \quad (2.37)$$

Pour un fluide en loi de puissance, les équations (2.34) et (2.36) permettent d'obtenir

$$\bar{r} = \left( \frac{(R_1 + R_2) R_1^{\frac{2}{n_p}-1} R_2^{\frac{2}{n_p}-1}}{R_1^{\frac{2}{n_p}-1} + R_2^{\frac{2}{n_p}-1}} \right)^{\frac{n_p}{2}}, \quad Re = \frac{Re_1}{|\dot{\gamma}_{r\theta}^b(\bar{r})|^{(n_p-2)}}, \quad R_\Omega = -\frac{2}{n_p} \frac{B_p}{\bar{r}^{2/n_p}}, \quad (2.38)$$

où  $B_p$  est donné par l'équation (2.29).

La figure 2.13 montre quelques valeurs particulières de  $R_\Omega$  dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  avec  $\eta = 0.881$  pour un fluide newtonien et un fluide en loi de puissance pour  $n_p = 0.3$ . On observe, comme illustré sur la figure 2.13, pour une loi de puissance que les lignes à  $R_\Omega$  constant sont pratiquement identiques pour un fluide newtonien et pour les fluides rhéofluidifiants avec ou sans un seuil de contrainte. Le caractère rhéofluidifiant introduit une faible déviation des droites à  $R_\Omega$  constant pour un entrefer étroit. Cette déviation est plus importante pour un large entrefer comme le montre la figure 2.14.

Pour les fluides de Carreau et de Bingham, les paramètres  $\bar{r}$ ,  $Re$  et  $R_\Omega$  sont calculés numériquement car il n'est pas possible d'avoir une expression analytique. Les valeurs de  $R_\Omega$  obtenues sont similaires à celles des figures 2.13 et 2.14.

Le choix des paramètres de contrôle  $(Re_1, Re_2)$  ou  $(Re, R_\Omega)$  est important pour l'analyse des résultats de stabilité. Dans le chapitre 3, nous utiliserons les paramètres traditionnels  $(Re_1, Re_2)$ , de manière à mettre nos résultats en perspective avec les résultats publiés antérieurement. C'est en effet le choix adopté dans la littérature [Taylor, 1923, Andereck *et al.*, 1986, Pascal et Rasmussen, 1995, Landry, 2006]. On peut facilement passer d'une formulation à l'autre en utilisant les formules 2.34.

En ce qui concerne la croissance transitoire, les deux formulations ont été utilisées dans les travaux récemment publiés. Meseguer [Meseguer, 2002] a ainsi choisi les paramètres  $(Re_1, Re_2)$  alors que [Maretzke *et al.*, 2014] ont choisi les paramètres  $(Re, R_\Omega)$ .

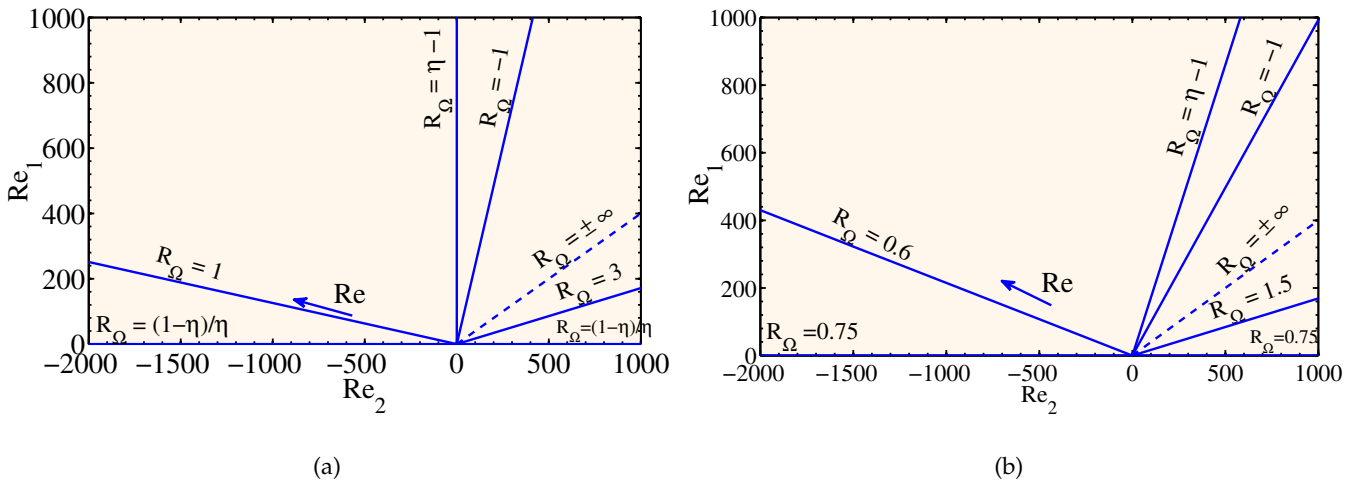


FIG. 2.14 – Valeur du paramètre  $R_\Omega$  [Dubrulle *et al.*, 2005] dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour  $\eta = 0.4$ . (a) Fluide newtonien et (b) fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.3$ .

Dans le chapitre 4, nous utiliserons les paramètres  $(Re_1, Re_2)$  pour présenter les valeurs d'amplification de l'énergie, puis les paramètres  $Re$  et  $R_\Omega$  seront employés pour approfondir l'analyse et expliciter les mécanismes de la croissance transitoire. Cette dernière méthode a l'avantage de fournir une échelle caractéristique de la croissance de l'énergie de la perturbation.

### 2.3.2 Ligne de rotation solide et ligne de Rayleigh

Lorsque les deux cylindres tournent à la même vitesse,  $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2$ , l'ensemble du fluide tourne en bloc et l'on parle de rotation solide. Ce cas est représenté dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  par la droite  $Re_1 = \eta Re_2$  ( $R_\Omega = \pm\infty$ ). Le long de cette ligne, l'écoulement est stable par rapport à toutes les perturbations imposées. En dehors de cette ligne, il peut apparaître des instabilités dans l'écoulement de Taylor-Couette.

[Rayleigh, 1916] a établi un critère de stabilité pour des fluides parfaits. Dans ce cas, les instabilités sont provoquées par les forces centrifuges avec une stratification du moment angulaire  $J = rV^b$ . Selon ce critère, en l'absence de la viscosité, la condition nécessaire et suffisante pour que l'écoulement soit stable est que la dérivée du moment angulaire soit positive dans tout l'entrefer,

$$\frac{d}{dr}(rV^b)^2 > 0, \text{ pour tout } r \in [R_1, R_2]. \quad (2.39)$$

L'écoulement est instable si cette condition n'est pas respectée, ne serait-ce qu'en un point de l'entrefer. Pour plus de détails, voir le critère original [Rayleigh, 1916]. Des interprétations détaillées sont données dans la littérature [Kàrmàn, 1934, Chandrasekhar, 1961, Drazin et Reid, 1981, Charru, 2007]. Les résultats pionniers obtenus pour de grands nombres de Reynolds  $Re_1$  réalisés par [Taylor, 1923] montrent un bon accord avec des résultats expérimentaux. La condition de stabilité de Rayleigh est matérialisée par une ligne dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , la ligne de Rayleigh. En dessous de cette ligne, l'écoulement est stable. Au-dessus, l'écoulement est instable. Cette ligne est plus précisément située dans le demi-plan  $Re_2 > 0$ , ce qui correspond à des cylindres co-rotatifs, figure 2.15. L'écoulement est systématiquement instable pour des cylindres contra-rotatifs (demi-plan  $Re_2 < 0$ ).

Pour un fluide visqueux, la limite de stabilité est une courbe située au-dessus de la ligne de Rayleigh dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , mais qui tend à s'en rapprocher pour les grandes valeurs de  $Re_2$ . De plus, il existe une zone stable dans le demi-plan  $Re_2 < 0$ . La zone stable est donc plus étendue pour un fluide visqueux que pour un fluide parfait, la viscosité a un effet stabilisant.

L'équation de la ligne de Rayleigh pour un fluide visqueux newtonien, obtenue à partir de l'équation (2.39), s'écrit

$$Re_1 = \frac{Re_2}{\eta} \quad \text{dans le plan } (Re_1, Re_2), \quad (2.40)$$

ou

$$R_{\Omega} = -1 \quad \text{dans le plan } (Re, R_{\Omega}). \quad (2.41)$$

Par un calcul analogue, on peut obtenir l'équation de la ligne de Rayleigh pour des fluides non newtoniens.

Ainsi, pour un fluide en loi de puissance, elle devient

$$Re_1 = \left( \frac{1}{n_p(\eta^{2/n_p} - 1) + 1} \right) \eta Re_2. \quad (2.42)$$

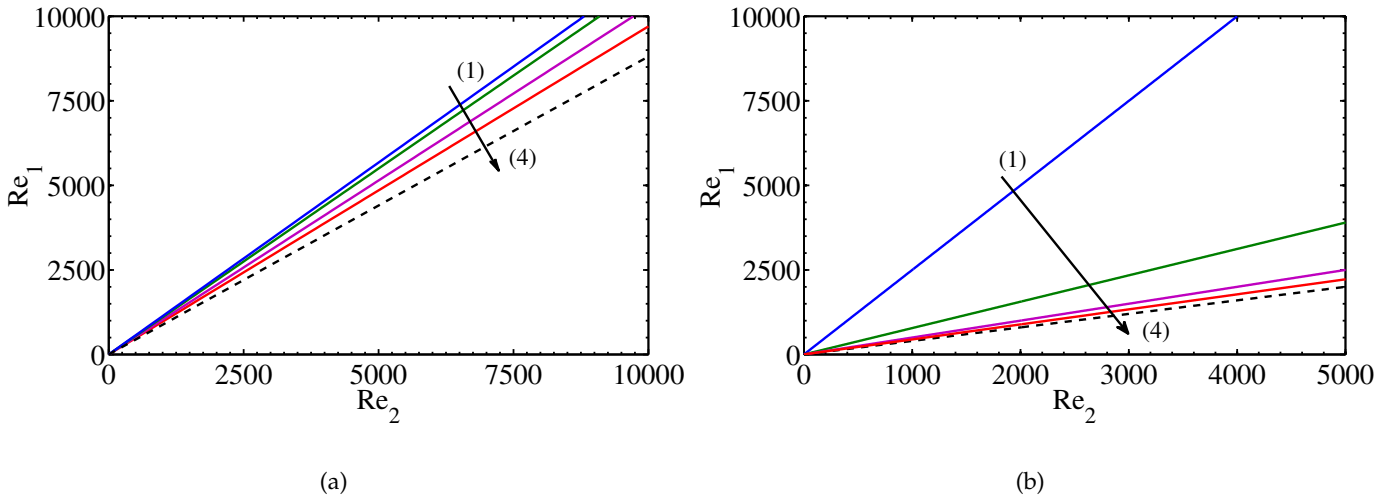


FIG. 2.15 – Lignes de Rayleigh pour un fluide en loi de puissance avec (a)  $\eta = 0.881$  (b)  $\eta = 0.4$ . (1) Fluide newtonien  $n_p = 1$ , (2)  $n_p = 0.5$ , (3)  $n_p = 0.2$  et (4)  $n_p = 0.1$ . (---) Ligne de rotation solide.

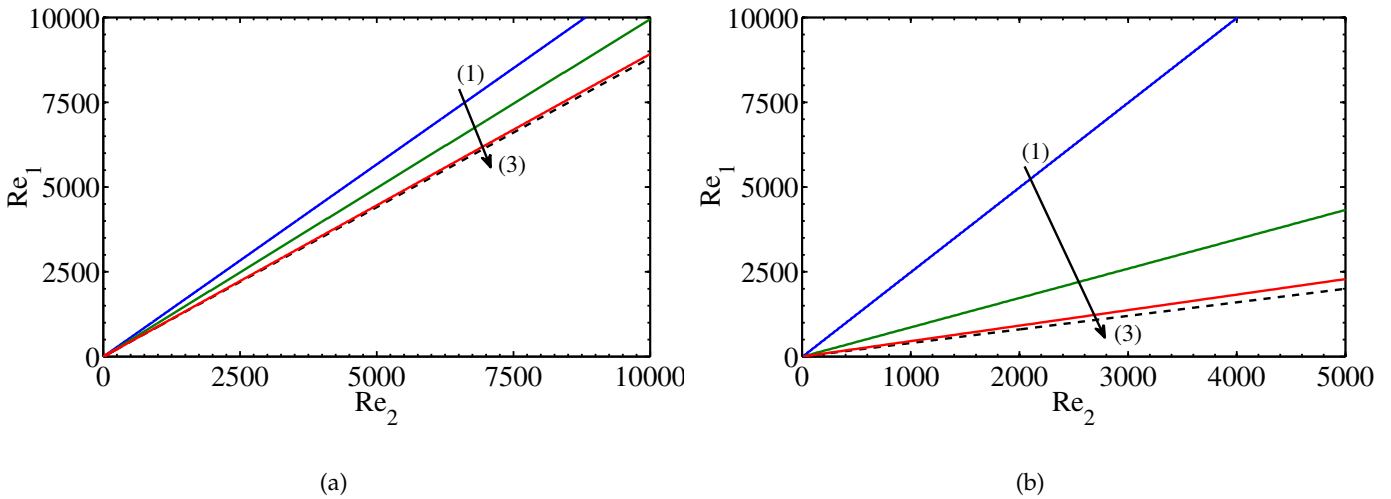


FIG. 2.16 – Lignes de Rayleigh pour un fluide de Bingham avec (a)  $\eta = 0.881$  (b)  $\eta = 0.4$ . (1)  $B_i = 0$  (fluide newtonien), (2)  $B_i = 1$  et (3)  $B_i = 10$ . (---) Ligne de rotation solide.

Comme observé sur la figure 2.15, la rhéofluidification a pour effet d'augmenter l'inclinaison de la

ligne de Rayleigh et la rapprocher de la ligne de rotation solide. Ceci a pour conséquence de réduire la zone dite quasi-Képlérienne, zone située entre la ligne de Rayleigh et la ligne de rotation solide, et également la zone stable.

Pour un fluide de Carreau, la ligne de Rayleigh est obtenue par résolution numérique. Lorsque l'indice  $n_c$  diminue ou lorsque  $\lambda$  augmente, la ligne de Rayleigh devient plus inclinée. Comme attendu, elle se confond pratiquement avec la ligne obtenue en loi de puissance dès que  $\lambda > 10$ . Pour cette raison, nous ne l'avons pas représentée ici.

Pour un fluide de Bingham le critère de Rayleigh a pour expression :

$$Re_1 = \frac{2(1 - \eta) Re_2}{|\tau_1^b| \frac{R_1^2}{R_0^2} + B_i \ln \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 - B_i}. \quad (2.43)$$

Sur la figure 2.16, l'augmentation du caractère rhéofluidifiant en augmentant  $B_i$  rapproche la ligne de Rayleigh de la ligne de rotation solide pour les rapports de rayons étudiés  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$ .

## 2.4 Équations aux perturbations

Pour étudier la stabilité de l'écoulement de Couette circulaire, nous analysons l'évolution temporelle d'une perturbation infinitésimale caractérisée par  $(\epsilon \underline{\mathbf{u}}', \epsilon p', \epsilon \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}')$  avec  $\epsilon \ll 1$ , superposée à l'écoulement de base  $(\underline{\mathbf{U}}^b, P^b, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^b)$ .

$$\{\underline{\mathbf{U}}, P, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}\} = \{\underline{\mathbf{U}}^b, P^b, \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^b\} + \epsilon \{\underline{\mathbf{u}}', p', \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}'\}. \quad (2.44)$$

En substituant (2.44) aux équations (2.14)-(2.15) et en retranchant l'écoulement de base, nous obtenons les équations aux perturbations

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}' = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}'}{\partial t} + Re_1 \left[ \left( \underline{\mathbf{U}}^b \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{\mathbf{u}}' + \left( \underline{\mathbf{u}}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{\mathbf{U}}^b + \epsilon \left( \underline{\mathbf{u}}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{\mathbf{u}}' \right] = -\underline{\nabla} p' + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}'. \quad (2.46)$$

La perturbation du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}'$  s'exprime

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}' = \frac{1}{\epsilon} \left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \left( \underline{\mathbf{U}}^b + \epsilon \underline{\mathbf{u}}' \right) - \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \left( \underline{\mathbf{U}}^b \right) \right] = \mu \left( \underline{\mathbf{U}}^b \right) \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}' \left( \underline{\mathbf{u}}' \right) + \mu \left( \underline{\mathbf{u}}' \right) \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}' \left( \underline{\mathbf{U}}^b + \epsilon \underline{\mathbf{u}}' \right) \quad (2.47)$$

avec

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \left( \underline{\mathbf{U}}^b \right) = \mu \left( \underline{\mathbf{U}}^b \right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}' \left( \underline{\mathbf{U}}^b \right) \quad (2.48)$$

$$\underline{\underline{\tau}} \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) = \mu \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) \quad (2.49)$$

et nous supposons que la viscosité locale  $\mu \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right)$  dans l'écoulement perturbé peut être vue comme la somme de la viscosité de base  $\mu \left( \underline{U}^b \right)$  et d'une viscosité due à la perturbation  $\mu \left( \underline{u}' \right)$ .

$$\mu \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) = \mu \left( \underline{U}^b \right) + \epsilon \mu \left( \underline{u}' \right) . \quad (2.50)$$

Nous apporterons plus de précision sur cette dernière viscosité dans le chapitre de l'analyse linéaire de stabilité. Cette viscosité de la perturbation n'est autre que la viscosité tangentielle. Les équations aux perturbations peuvent alors s'écrire alors formellement

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = L_{Inertie}(\underline{u}') + NL_{Inertie}(\underline{u}') - \underline{\nabla} p' + L_{Visqueux}(\underline{u}') + NL_{Visqueux}(\underline{u}'). \quad (2.52)$$

Cette équation fait apparaître 4 termes principaux sur lesquels nous allons revenir tout au long de ce travail : deux termes linéaires et deux termes non linéaires inertiels et visqueux.

$$L_{Inertie}(\underline{u}') = -Re_1 \left[ \left( \underline{U}^b \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{u}' + \left( \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{U}^b \right] \quad (2.53)$$

$$L_{Visqueux}(\underline{u}') = \underline{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \underline{U}^b \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right) \right] \quad (2.54)$$

$$NL_{Inertie}(\underline{u}') = -Re_1 \left[ \epsilon \left( \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{u}' \right] \quad (2.55)$$

$$NL_{Visqueux}(\underline{u}') = \underline{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \underline{u}' \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) \right] \quad (2.56)$$

## 2.5 Équations aux perturbations linéarisées

Nous reprenons les équations perturbées (2.45) et (2.46) ou (2.51) à (2.56). Nous en négligeons alors les termes d'ordre 2. Ainsi, les équations aux perturbations linéarisées donnent

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + Re_1 \left[ \left( \underline{U}^b \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{u}' + \left( \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{U}^b \right] = -\underline{\nabla} p' + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}', \quad (2.58)$$

avec

$$\underline{\underline{\tau}}' = \frac{1}{\epsilon} \left[ \underline{\underline{\tau}} \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) - \underline{\underline{\tau}} \left( \underline{U}^b \right) \right] = \frac{1}{\epsilon} \left[ \mu \left( \underline{U}^b \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b \right) + \mu \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) \right] \quad (2.59)$$

En remarquant que le tenseur de cisaillement est linéaire,  $\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) = \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b \right) + \epsilon \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right)$  et en linéarisant au premier ordre  $\mu \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right)$  autour de l'écoulement de base  $\underline{U}^b$

$$\mu \left( \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' \right) = \mu \left( \underline{U}^b \right) + \epsilon \sum_{i,j}^3 \frac{\partial \mu \left( \underline{U}^b \right)}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \dot{\gamma}_{ij} \left( \underline{u}' \right) + O(\epsilon^2), \quad (2.60)$$

le tenseur des contraintes perturbé devient

$$\underline{\underline{\tau}}' = \begin{cases} \mu \left( \underline{U}^b \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right) + \frac{\partial \mu \left( \underline{U}^b \right)}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \dot{\gamma}_{ij} \left( \underline{u}' \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{U}^b \right) & \text{si } i, j = r, \theta \text{ (ou } \theta, r) \\ \mu \left( \underline{U}^b \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right) & \text{si } i, j \neq r, \theta \text{ (ou } \theta, r) \end{cases} \quad (2.61)$$

On appelle viscosité tangentielle, l'expression

$$\mu_t = \mu \left( \underline{U}^b \right) + \frac{\partial \mu \left( \underline{U}^b \right)}{\partial \dot{\gamma}_{r\theta}} \dot{\gamma}_{r\theta} \left( \underline{U}^b \right), \quad (2.62)$$

de sorte que

$$\underline{\underline{\tau}}' = \mu^b \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right) + \left( \mu_t - \mu^b \right) \underline{\underline{A}}. \quad (2.63)$$

Les composantes du tenseur  $\underline{\underline{A}}$  sont nulles sauf  $A_{1,2} = A_{2,1} = \dot{\gamma}_{r\theta} \left( \underline{u}' \right)$ .

Les équations aux perturbations linéarisées peuvent alors s'écrire plus simplement

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -Re_1 \left[ \left( \underline{U}^b \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{u}' + \left( \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{U}^b \right] - \underline{\nabla} p' + \underline{\nabla} \cdot \left[ \mu^b \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right) \right] + \underline{\nabla} \cdot \left[ \left( \mu_t - \mu^b \right) \underline{\underline{A}} \right]. \quad (2.65)$$

Plus formellement, nous pouvons écrire

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}' = 0, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = L_I \left( \underline{u}' \right) - \underline{\nabla} p' + L_{V1} \left( \underline{u}' \right) + L_{V2} \left( \underline{u}' \right). \quad (2.67)$$

$L_I \left( \underline{u}' \right) = -Re_1 \left[ \left( \underline{U}^b \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{u}' + \left( \underline{u}' \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{U}^b \right]$  est le terme source traduisant l'inertie de l'écoulement.

$L_{V1} \left( \underline{u}' \right) = \underline{\nabla} \cdot \left[ \mu^b \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left( \underline{u}' \right) \right]$  est le terme visqueux traduisant la stratification de la viscosité.

$L_{V2} \left( \underline{u}' \right) = \underline{\nabla} \cdot \left[ \left( \mu_t - \mu^b \right) \underline{\underline{A}} \right]$  est le terme visqueux traduisant l'anisotropie du tenseur des contraintes



perturbé et le caractère rhéofluidifiant de l'écoulement. C'est le terme qui produit une dissipation visqueuse dans l'écoulement.

En coordonnées cylindriques, la vitesse de la perturbation s'écrit  $\underline{u}' = u' \underline{e}_r + v' \underline{e}_\theta + w' \underline{e}_z$  et les équations (2.66) et (2.67) s'expriment

$$0 = D_* u' + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= -Re_1 \frac{V^b}{r} \left( \frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) - Dp' + \mu^b \left[ \Delta u' - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \right] \\ &+ 2D\mu^b Du' + \frac{1}{r} \frac{\partial(\mu_t - \mu^b)}{\partial \theta} \left( \tilde{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} &= -Re_1 \left( u' D_* V^b + \frac{V^b}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \mu^b \left[ \Delta v' + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \right] \\ &+ D\mu^b \left[ Dv' - \frac{v'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right] + D_* \left[ (\mu_t - \mu^b) \left( \tilde{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \\ &+ (\mu_t - \mu^b) \left[ \frac{1}{r} \left( \tilde{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -Re_1 \frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu^b \Delta w' + D\mu^b \left[ Dw' + \frac{\partial u'}{\partial z} \right], \quad (2.71)$$

où  $D = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $D_* = D + \frac{1}{r}$ ,  $\tilde{D} = D - \frac{1}{r}$  et le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit  $\Delta = D^2 + \frac{1}{r} D + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2$ .

A ces équations seront ajoutées les conditions aux limites de non glissement à la paroi et d'imperméabilité,

$$\underline{u}' = \underline{0} \quad \text{pour } r = R_1, R_2 \quad (2.72)$$

Pour le cas spécifique des fluides de Bingham avec une zone bouchon ( $\tau_y > B_i$ ), il faut exprimer une condition supplémentaire associée à la position de l'interface entre la zone cisailée et la zone non cisailée.

La position radiale de l'interface  $R_y$  s'écrit rigoureusement  $R_y = R_0 + \epsilon h$ . La continuité de la vitesse de l'écoulement à l'interface perturbée permet d'écrire

$$\dot{\gamma}_{ij}(\underline{U}^b + \epsilon \underline{u}') = 0 \quad ; \quad \underline{U}^b + \epsilon \underline{u}' = (1 - \eta) R_y \frac{Re_2}{Re_1} \underline{e}_\theta \quad \text{pour } R_y = R_0 + \epsilon h. \quad (2.73)$$

## 2.6 Problème aux valeurs initiales

Le système linéaire (2.68) - (2.71) est homogène dans les directions axiale et azimutale. La solution de ce système peut donc être recherchée sous la forme d'une superposition de modes normaux en

effectuant une décomposition de Fourier

$$\{\underline{\mathbf{u}}', p'\} = \{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}(r, t), \tilde{p}(r, t)\} \exp[i(m\theta + kz)] + c.c., \quad (2.74)$$

avec  $\underline{\tilde{\mathbf{u}}}(r, t) = \tilde{u}(r, t) \underline{\mathbf{e}}_r + \tilde{v}(r, t) \underline{\mathbf{e}}_\theta + \tilde{w}(r, t) \underline{\mathbf{e}}_z$ ,  $k \in \mathbb{R}$  le nombre d'onde axial et  $m \in \mathbb{N}$  le nombre d'onde azimutal.

En substituant (2.74) dans le système (2.68) - (2.71), on obtient

$$0 = D_* \tilde{u} + \frac{im\tilde{v}}{r} + ik\tilde{w}, \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -Re \frac{V^b}{r} (im\tilde{u} - 2\tilde{v}) - Dp + \mu^b \left[ \Delta \tilde{u} - \frac{2im\tilde{v}}{r^2} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right] \\ &+ 2D\mu^b D\tilde{u} + \frac{im}{r} (\mu_t - \mu^b) \left( \tilde{D}\tilde{v} + \frac{im}{r} \tilde{u} \right), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= -Re \left( \tilde{u} D_* V^b + \frac{V^b}{r} im\tilde{v} \right) - \frac{im}{r} p + \mu^b \left[ \Delta \tilde{v} + \frac{2im\tilde{u}}{r^2} - \frac{\tilde{v}}{r^2} \right] \\ &+ D\mu^b \left[ D\tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{im\tilde{u}}{r} \right] + D_* \left[ (\mu_t - \mu^b) \left( \tilde{D}\tilde{v} + \frac{im\tilde{u}}{r} \right) \right] \\ &+ (\mu_t - \mu^b) \left[ \frac{1}{r} \left( \tilde{D}\tilde{v} + ik\tilde{u} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -Re \frac{V^b}{r} im\tilde{w} - ikp + \mu^b \Delta \tilde{w} + D\mu^b [D\tilde{w} + ik\tilde{u}], \quad (2.78)$$

avec  $\Delta = D^2 + \frac{1}{r}D - \frac{m^2}{r^2} - k^2$ .

On exprime ensuite la pression avec l'équation (2.78) (respectivement équation (2.77)) et la composante  $\tilde{w}$  (resp.  $\tilde{v}$ ) de la vitesse avec l'équation de continuité (2.75), en supposant  $k \neq 0$  (resp.  $m \neq 0$ ) et on remplace leur expression dans les équations (2.76) et (2.77) (resp. équations (2.76) et (2.78)) pour obtenir un système à deux équations et deux inconnues  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  (resp.  $(\tilde{u}, \tilde{w})$ ),

$$\underset{\approx}{\mathcal{M}} \frac{\partial \tilde{\underline{\mathbf{q}}}}{\partial t} = \underset{\approx}{\mathcal{L}} \tilde{\underline{\mathbf{q}}} \quad (2.79)$$

avec  $\tilde{\underline{\mathbf{q}}} = (\tilde{u}, \tilde{v})^T$  (resp.  $\tilde{\underline{\mathbf{q}}} = (\tilde{u}, \tilde{w})^T$ ). Les expressions des opérateurs linéaires  $\underset{\approx}{\mathcal{L}}$  et  $\underset{\approx}{\mathcal{M}}$  sont données dans l'annexe A.

# Chapitre 3

## ANALYSE LINÉAIRE DE STABILITÉ : APPROCHE MODALE

**C**e chapitre présente une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide rhéofluidifiant suite à une perturbation infinitésimale tridimensionnelle.

L'analyse des conditions critiques d'instabilités montre d'une part que le caractère rhéofluidifiant a un effet déstabilisant. D'autre part, l'existence d'un seuil produit plutôt un effet stabilisant sur l'écoulement de base. Cependant, le comportement déstabilisant ou stabilisant du caractère rhéofluidifiant dépend fortement du choix de la viscosité de référence.

Il est observé que la perturbation critique peut être bidimensionnelle (correspondant à des rouleaux toroïdaux contrarotatifs) comme tridimensionnelle (avec des tourbillons enroulés en spirale autour du cylindre intérieur). Une analyse des spectres de valeurs propres est effectuée pour ces deux types de perturbations critiques.

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Problème aux valeurs propres . . . . .	47
3.3	Résolution numérique . . . . .	48
3.3.1	Convergence . . . . .	49
3.4	Étude des spectres de valeurs propres . . . . .	50
3.4.1	Perturbation axisymétrique ( $m = 0$ ) . . . . .	50

3.4.2	Perturbation non-axisymétrique ( $m \neq 0$ ) . . . . .	55
3.5	Stabilité marginale . . . . .	58
3.5.1	Calculs de validation . . . . .	58
3.5.2	Fluides en loi de puissance . . . . .	60
3.5.3	Fluides de Carreau . . . . .	71
3.5.4	Fluides de Bingham . . . . .	73
3.5.5	Caractéristiques des structures à la transition . . . . .	76
3.6	Conclusion . . . . .	80

---

### 3.1 Introduction

Dans le présent travail, des perturbations a priori tridimensionnelles ont été considérées.

Le caractère rhéologiquement complexe des fluides a un grand effet sur la stabilité de l'écoulement.

En effet, deux effets fondamentaux sont à l'œuvre :

- La viscosité est stratifiée dans l'espace annulaire
- Le tenseur des contraintes de la perturbation est anisotrope.

Les résultats seront présentés pour un écoulement en entrefer étroit et en entrefer large. En effet, dans le cas d'un faible entrefer, le cisaillement est homogène, ce qui n'est pas le cas d'un entrefer important. Cet aspect joue un grand rôle dans la stabilité de l'écoulement.

### 3.2 Problème aux valeurs propres

Pour étudier le comportement aux temps longs d'une perturbation, nous allons utiliser une approche modale. Reprenant le problème aux valeurs initiales, équation (2.79) du chapitre 2, nous supposons une dépendance exponentielle en temps de la perturbation. Ainsi, nous cherchons une solution sous la forme

$$\tilde{\mathbf{q}}(r, t) = \underline{\mathbf{q}}(r) \exp(\sigma t), \quad (3.1)$$

où  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  est le taux de croissance complexe.

La partie réelle  $\sigma_r$  désigne le taux d'amplification temporelle de la perturbation. Si  $\sigma_r$  est négatif, la perturbation tend vers zéro aux temps longs et l'écoulement de base est stable. Si au contraire  $\sigma_r$  est positif, la perturbation tend vers infini et l'écoulement est instable. Le cas particulier  $\sigma_r = 0$  correspond à la stabilité dite marginale.

La partie imaginaire  $\sigma_i$  désigne la fréquence d'oscillation. Par ailleurs,  $\sigma_i/k$  représente la vitesse de phase. Nous rappelons que  $k$  est le nombre d'onde axial.

En remplaçant  $\tilde{\mathbf{q}}$  par son expression (3.1) dans l'équation (2.79), on aboutit à un problème aux valeurs propres généralisé

$$\underline{\mathcal{L}}\underline{\mathbf{q}} = \sigma \underline{\mathcal{M}}\underline{\mathbf{q}}, \quad (3.2)$$

où  $\sigma$  est la valeur propre et  $\underline{\mathbf{q}}$  est le vecteur des fonctions propres  $u, v$  ou  $w$ . Dans ce travail,  $\underline{\mathbf{q}} = (u, v)^T$  pour une formulation  $(u, v)$  ou  $\underline{\mathbf{q}} = (u, w)^T$  pour une formulation  $(u, w)$ .

### 3.3 Résolution numérique

Le problème aux valeurs propres (3.2) est résolu en utilisant une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev. Cette méthode permet de capter la structure de l'écoulement au voisinage des parois moyennant un nombre réduit de polynômes de Chebyshev.

La méthode est présentée ci-dessous pour une formulation  $(u, v)$ , mais est applicable de la même manière pour une formulation  $(u, w)$ . Nous développons les fonctions propres  $u$  et  $v$  en séries des polynômes de Chebyshev de 1 ère espèce :

$$u(y) = \sum_{i=0}^N a_i T_i(y) \quad \text{et} \quad Du(y) = \sum_{i=0}^N a_i T_i'(y) \quad (3.3)$$

$$v(y) = \sum_{i=0}^N b_i T_i(y) \quad \text{et} \quad Dv(y) = \sum_{i=0}^N b_i T_i'(y) \quad (3.4)$$

où  $T_i(y) = \cos(i \cos^{-1}(y))$  est le  $i$  ème polynôme de Chebyshev, défini sur l'intervalle  $-1 \leq y \leq 1$  avec  $i$ , un entier supérieur ou égal à zéro. La coordonnée radiale  $r$  étant comprise entre  $R_1$  et  $R_2$ , on définit  $y = r/(R_2 - R_1) + (R_1 + R_2)/(R_1 - R_2)$ , de sorte que  $y$  varie bien entre  $-1$  et  $1$ . L'intervalle  $[-1; 1]$  est discrétisé en  $(N + 1)$  points de collocation de Gauss-Lobatto,  $y_j = \cos(\pi j/N)$  avec  $j = 0, 1, \dots, N$ . L'équation (3.2) est ainsi convertie en un problème aux valeurs propres discret

$$\underline{\mathcal{A}} \underline{a} = \sigma \underline{\mathcal{B}} \underline{a} \quad (3.5)$$

où le vecteur  $\underline{a}$  contient les coefficients des séries (3.3) et (3.4),  $\underline{a} = [(a_0 \ a_1 \dots a_{N-1} \ a_N)^T, (b_0 \ b_1 \dots b_{N-1} \ b_N)^T]^T$ . Les matrices  $\underline{\mathcal{A}}$  et  $\underline{\mathcal{B}}$ , de dimension  $(2N + 2) \times (2N + 2)$ , sont les équivalents des matrices  $\underline{\mathcal{L}}$  et  $\underline{\mathcal{M}}$  respectivement.

**Remarque :** Les conditions aux limites aux parois, à savoir  $\underline{u} = \underline{0}$  et  $Du = 0$  à  $r = R_1$  et  $r = R_2$ , sont traitées numériquement en suivant la méthode proposée dans [Schmid et Henningson, 2001] en écrivant

$$e_r = \sigma u \quad (3.6)$$

où  $e_r$  est choisie arbitrairement et loin des spectres de valeurs propres  $\sigma$ .

$N$	10	20	30	40	50
$Re_{1c}$	120.9858	120.9866	120.9866	120.9866	120.9866
$k_c$	3.1294	3.1294	3.1294	3.1294	3.1294
$m_c$	0	0	0	0	0

TAB. 3.1 – Étude de la convergence des calculs. Conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayons  $\eta = 0.881$ , lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ) pour différents nombres de points de collocation  $N$ .

$N$	10	20	30	40	50
$Re_{1c}$	68.2963	68.2965	68.2965	68.2965	68.2965
$k_c$	3.1834	3.1834	3.1835	3.1835	3.1835
$m_c$	0	0	0	0	0

TAB. 3.2 – Etude de la convergence des calculs. Conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayons  $\eta = 0.4$ , lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ) pour différents nombres de points de collocation  $N$ .

Le problème aux valeurs propres généralisé est ensuite résolu en utilisant l'algorithme  $QZ$  de Matlab [Watkins, 1982, Watkins, 2008]. Cette méthode donne de bons résultats dans le cas des matrices carrées et pleines [Trefethen, 1997] comme c'est le cas dans cette étude. Pour un couple de Reynolds ( $Re_1, Re_2$ ) donné, l'écoulement de base est instable lorsqu'il existe au moins une valeur propre  $\sigma$  de partie réelle positive. La condition de stabilité marginale est atteinte lorsque  $\sigma_r$  associé au mode le moins stable est nulle. En pratique, on a considéré  $\sigma_r \leq 10^{-5}$ . En effet, pour une valeur du nombre de Reynolds extérieur  $Re_2$  fixée, on augmente progressivement la valeur du nombre de Reynolds intérieur  $Re_1$  et, au-delà d'une valeur seuil  $Re_{1c}$ , la partie réelle d'une des valeurs propres devient positive. A cette valeur propre est associé un mode instable avec un nombre d'onde axial critique  $k_c$  et un nombre azimutal critique  $m_c$  (non nul lorsque la perturbation est tridimensionnelle).

### 3.3.1 Convergence

Pour déterminer le nombre de polynômes de Chebyshev nécessaires à la convergence, des tests ont été effectués pour différentes valeurs de  $N$ . Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent les résultats de cette étude pour deux rapports de rayons. A partir de  $N = 40$ , les conditions critiques sont inchangées à

une précision de  $10^{-4}$ . Les résultats que nous présenterons dans ce travail sont généralement obtenus pour  $N = 40$ .

**Remarque :**

Parmi les valeurs propres obtenues après la résolution numérique du système discret (3.5), certaines sont physiques (valeurs propres à partie réelle élevée) et les autres sont des artéfacts numériques (valeurs propres à partie réelle basse). Afin d'éliminer les valeurs propres parasites, les calculs sont systématiquement réalisés pour deux nombres de points de collocation,  $N$  et  $N + 5$  et seules les valeurs propres communes aux deux spectres sont conservées.

### 3.4 Étude des spectres de valeurs propres

Nous allons nous intéresser dans cette section à deux types de perturbations : les perturbations axisymétriques (bidimensionnelles), de nombre d'onde azimutal nul ( $m = 0$ ) et les perturbations tridimensionnelles ( $m \neq 0$ ). Pour une valeur du nombre de Reynolds du cylindre intérieur  $Re_1$  fixée positive, on considère plusieurs valeurs de nombre de Reynolds extérieur positives (régime co-rotatif du plan ( $Re_1, Re_2$ )) ou négatives (régime contra-rotatif). Le cas des fluides newtoniens est d'abord envisagé, puis le cas des fluides non newtoniens rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Nous insisterons sur les différences fondamentales engendrées par la prise en compte du caractère non newtonien.

#### 3.4.1 Perturbation axisymétrique ( $m = 0$ )

Lorsque le fluide est newtonien et que la perturbation est axisymétrique, les équations aux perturbations (2.76) - (2.77) sont purement réelles. En conséquence, les valeurs propres sont réelles ou complexes conjuguées, comme le montre la figure 3.1.

Sur la ligne de Rayleigh en particulier, les valeurs propres sont réelles (voir la démonstration dans l'encadré 3.4.1 de la page suivante) et le spectre est caractérisé par une seule branche unique centrée en  $\sigma_i = 0$  comme le montre la figure 3.1(a). De plus, les spectres sont indépendants du nombre de Reynolds du cylindre intérieur  $Re_1$  [Gebhardt et Grossmann, 1993]. Ceci est démontré en remarquant que, sur la ligne de Rayleigh, le moment angulaire est uniforme dans tout l'espace annulaire.



## Valeurs propres réelles sur la ligne de Rayleigh

Sur la ligne de Rayleigh, il n'y a pas de stratification du moment angulaire,  $d((rV^b)^2)/dr = 0$ . L'écoulement de base s'écrit alors  $V^b = \frac{a}{r}$ , où  $a$  est une constante et  $D_* V^b = DV^b + \frac{V^b}{r} = 0$ . [Gebhardt et Grossmann, 1993] ont montré que dans cette situation, deux modes coexistent. Un premier mode correspondant à  $v \neq 0$  et un second mode à  $v = 0$ .

On déduit à partir de (3.2), dans la formulation  $(u, v)$ , le système d'équation ( $v \neq 0$  et  $v = 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma (DD_* - k^2) u &= \mu^b (DD_* - k^2)^2 v \\ \sigma v &= \mu^b (DD_* v - k^2 v) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans le premier cas, l'équation en  $v$  de la formulation  $(u, v)$  est considérée (seconde ligne du système (3.7)),

$$\sigma v = \mu^b (DD_* v - k^2 v) . \quad (3.8)$$

Cette équation est multipliée par le complexe conjugué  $v^*$  de  $v$ , et intégrée sur le volume  $\mathcal{V} = 2\pi^2 (R_2^2 - R_1^2) / k$

$$\sigma \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} v v^* r dr = \mu^b \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} (DD_* v - k^2 v) v^* r dr . \quad (3.9)$$

Après une intégration par partie, on obtient

$$\sigma \int_{R_1}^{R_2} v v^* r dr = -\mu^b \int_{R_1}^{R_2} [(D_* v) (D_* v^*) + k^2 v v^*] r dr . \quad (3.10)$$

Pour le deuxième cas,  $v = 0$ , l'équation en  $u$  de la formulation  $(u, v)$  est considérée (première ligne du système (3.7)),

$$\sigma (DD_* - k^2) u = \mu^b (DD_* - k^2)^2 v . \quad (3.11)$$

De nouveau, cette équation est multipliée par le complexe conjugué  $u^*$  de  $u$ , et intégrée sur le volume  $\mathcal{V}$ . Après intégration par partie, on obtient

$$-\sigma \int_{R_1}^{R_2} [(D_* u) (D_* u^*) + k^2 u u^*] r dr = \mu^b \int_{R_1}^{R_2} (DD_* u - k^2 u) (DD_* u^* - k^2 u^*) r dr . \quad (3.12)$$

Dans les équations (3.10) et (3.12), obtenues pour les deux cas  $v \neq 0$  et  $v = 0$ , le coefficient  $\sigma$  est réel négatif indépendant de  $Re_1$  et le membre de droite est réel positif indépendant de  $Re_1$ . En conséquence, les valeurs propres  $\sigma$  sont réelles négatives ce qui indique un écoulement stable. De plus, elles sont indépendantes de  $Re_1$ .

Lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ), la majorité des valeurs propres sont réelles comme indiqué sur la figure 3.1(b). Les travaux de [DiPrima et Hall, 1984] ont montré par ailleurs que dans ce cas, la première valeur propre à franchir le demi plan instable est toujours réelle conformément au principe d'échange de stabilité conduisant à l'apparition des vortex de Taylor.

Lorsque les deux cylindres sont en rotation, la branche verticale, constituée de valeurs propres réelles se divise en deux branches latérales incurvées constituées de valeurs propres complexes conjuguées. Le lieu de la séparation de la branche dépend de la valeur de  $Re_2$ . Plus  $|Re_2|$  est grand, plus la séparation est basse dans le spectre comme le montrent les figures 3.1(c) et 3.1(d).

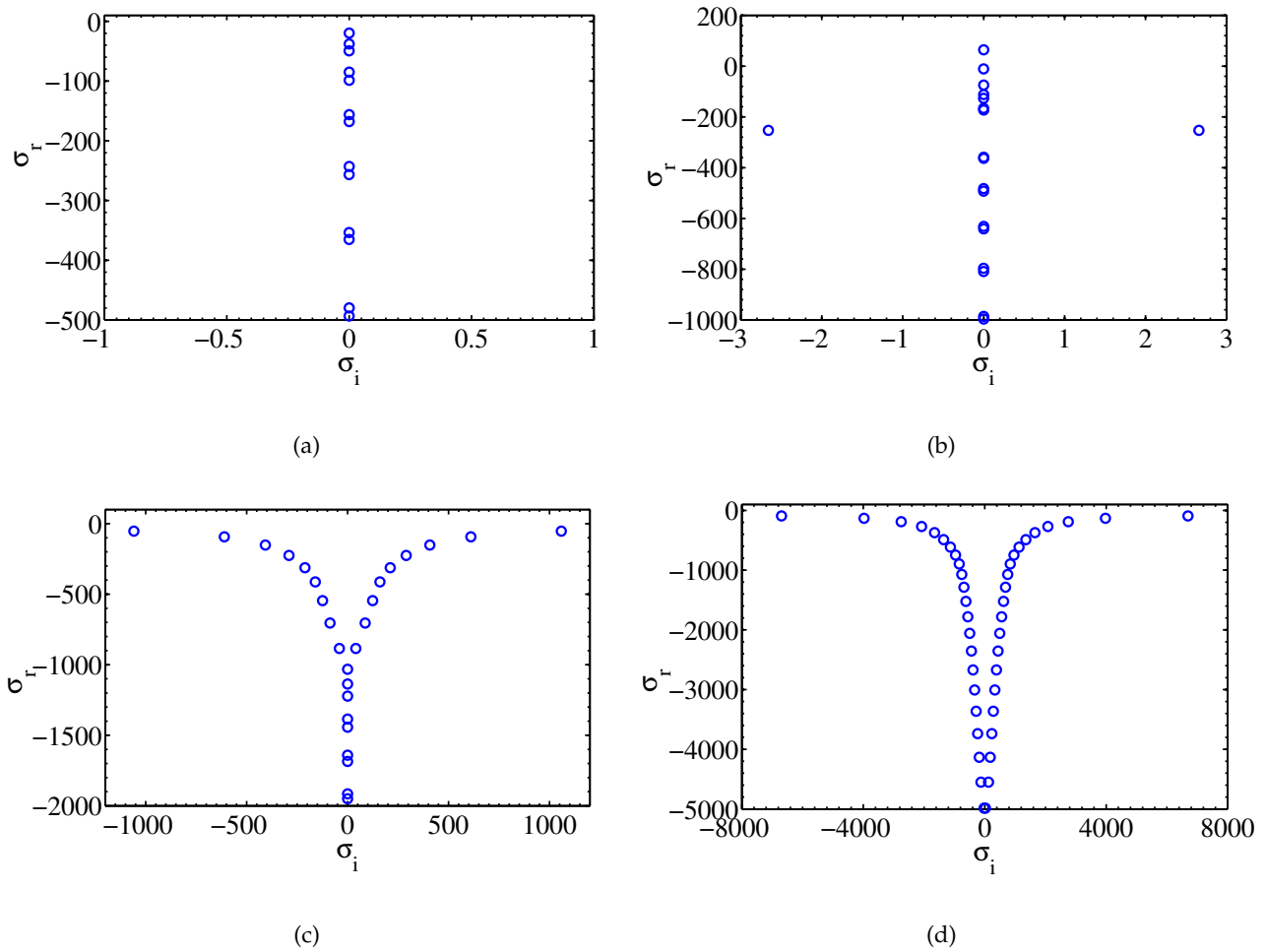


FIG. 3.1 – Spectres de valeurs propres d'un fluide newtonien avec  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 400$ ,  $k = \pi$ ,  $m = 0$  (perturbation axisymétrique) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre extérieur  $Re_2$ . (a) Sur la ligne de Rayleigh  $Re_2 = 352.4$  (b)  $Re_2 = 0$  (c)  $Re_2 = -4000$  (d)  $Re_2 = -25000$ .

La partie imaginaire des spectres est par ailleurs bornée par la fréquence épicyclique  $\kappa$  évaluée à la paroi du cylindre extérieur  $r = R_2$ . Par définition, la fréquence épicyclique est donnée par l'équation

$$\kappa^2(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (rV^b)^2. \quad (3.13)$$

Cette équation découle du théorème de la circulation de Kelvin [Shu, 1982].

Pour un fluide newtonien, la fréquence épicyclique évaluée à la paroi du cylindre extérieur  $r = R_2$  est donnée par

$$\kappa^2(R_2) = 4Re_2(Re_2 - \eta Re_1) \left( \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right). \quad (3.14)$$

En régime co-rotatif, les spectres sont similaires à ceux obtenus dans le régime contra-rotatif. Par ailleurs, lorsque la perturbation est axisymétrique, la première valeur propre à franchir le demi plan instable est toujours réelle dans tous les régimes d'écoulement du plan  $(Re_1, Re_2)$ .

Dans le cas des larges entrefers, la forme des spectres est identique à celles obtenues sur les entrefers étroits, comme cela est illustré sur la figure 3.2.

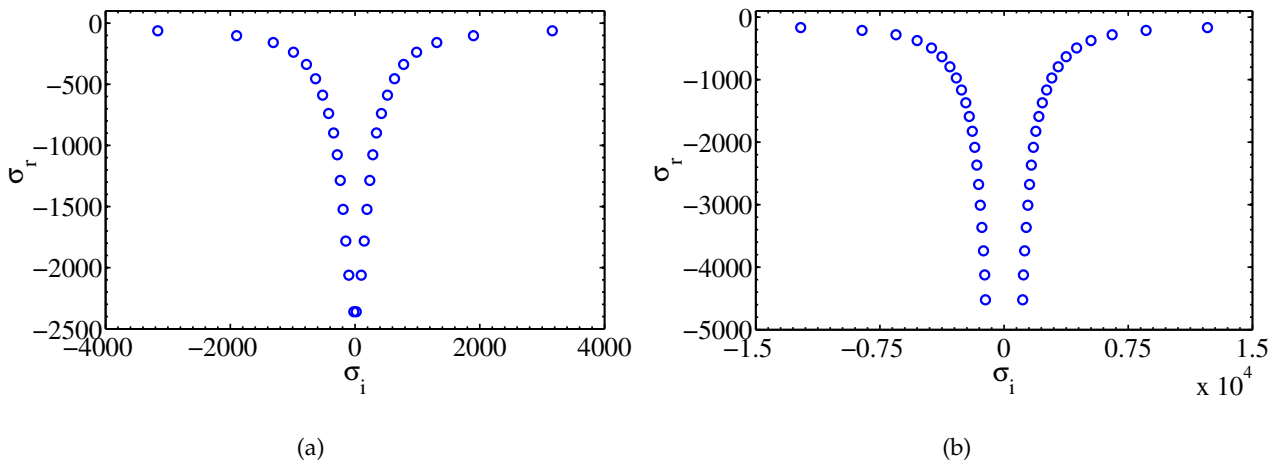


FIG. 3.2 – Spectres de valeurs propres d'un fluide newtonien avec  $\eta = 0.4$ ,  $Re_1 = 400$ ,  $k = \pi$ ,  $m = 0$  (perturbation axisymétrique) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre extérieur  $Re_2$ . (a)  $Re_2 = -4000$  et (b)  $Re_2 = -25000$ .

Les spectres de valeurs propres pour les fluides non newtoniens rhéofluidifiants sont similaires à ceux des fluides newtoniens. Néanmoins, quelques différences fondamentales sont à noter :

- le moment angulaire n'est plus constant sur la ligne de Rayleigh. Par conséquent, les valeurs propres ne sont plus nécessairement réelles mais certaines peuvent être complexes conjuguées comme on peut le voir sur la figure 3.3(a). Cette fois, le spectre des valeurs propres dépend du nombre de Reynolds du cylindre intérieur  $Re_1$ .
- pour un couple de Reynolds  $(Re_1, Re_2)$  fixé, la séparation de la branche centrale a lieu plus près de l'axe des réels que dans le cas des fluides newtoniens, figure 3.3(b).
- les valeurs propres sont plus rapprochées. Cet effet s'accroît avec l'augmentation du caractère rhéofluidifiant, figures 3.4(a) et 3.4(b).

Il est à remarquer que pour une perturbation axisymétrique, pour les fluides rhéofluidifiants, quel que soit le régime d'écoulement, la première valeur propre à franchir le demi plan instable est également réelle comme le montrent les figures 3.4(a) et 3.4(b).

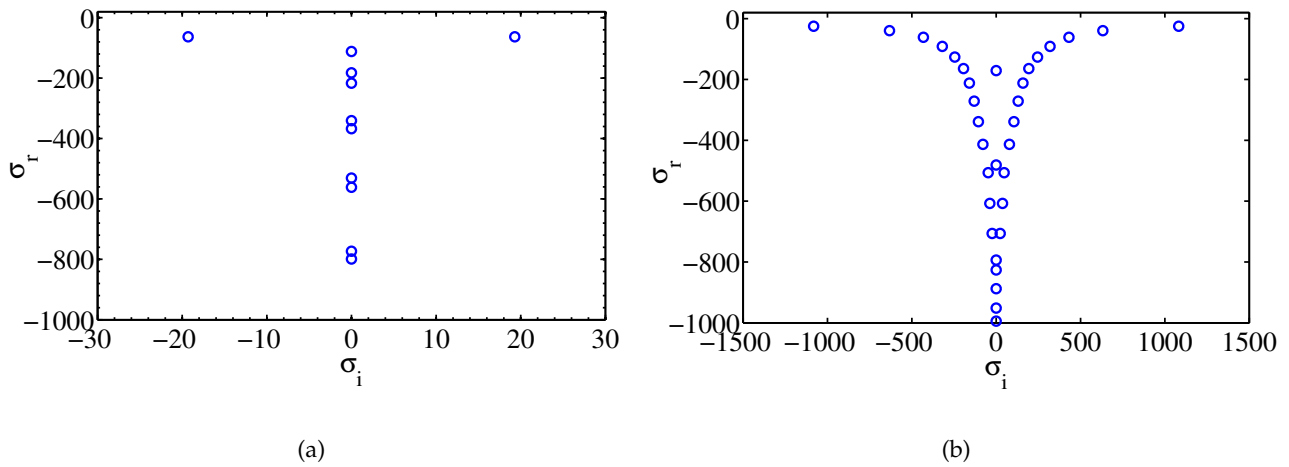


FIG. 3.3 – Spectres des valeurs propres d'un fluide en loi de puissance,  $n = 0.5$ , avec  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 500$ ,  $k = \pi$ ,  $m = 0$  (perturbation axisymétrique) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre extérieur  $Re_2$ . (a) Sur la ligne de Rayleigh  $Re_2 = 454.71$ , (b)  $Re_2 = -4000$ .

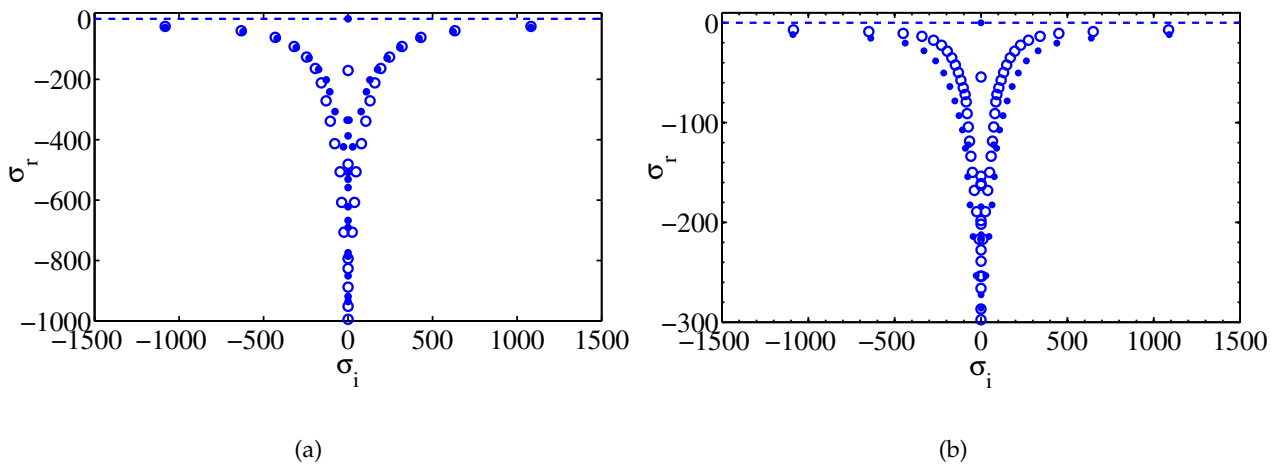


FIG. 3.4 – Spectres de valeurs propres de fluides rhéofluidifiants avec  $\eta = 0.881$ ,  $k = \pi$  et  $m = 0$  (perturbation axisymétrique). (a) Fluide en loi de puissance avec  $n = 0.5$ ,  $Re_2 = -4000$  et ( $\circ$ )  $Re_1 = 500$ , ( $\bullet$ )  $Re_1 = Re_{1c} = 828.14$ , (b) fluide de Carreau avec  $n = 0.5$ ,  $\lambda = 10$ ,  $Re_2 = -4000$  et ( $\circ$ )  $Re_1 = 100$ , ( $\bullet$ )  $Re_1 = Re_{1c} = 538.55$ .

Pour un fluide à seuil, les spectres de valeurs propres sont similaires à ceux des fluides newtoniens et des fluides rhéofluidifiants sans seuil. Quelques différences fondamentales sont aussi à noter :

- les valeurs propres sont réelles sur la ligne de Rayleigh comme illustré sur la figure 3.5(a).
- pour un couple de Reynolds ( $Re_1, Re_2$ ) fixé, la séparation de la branche centrale se produit à une position proche du cas newtonien, figure 3.5(b).
- les valeurs propres sont plus espacées que dans les cas des fluides newtoniens et des fluides rhéofluidifiants sans seuil, figure 3.5(b).

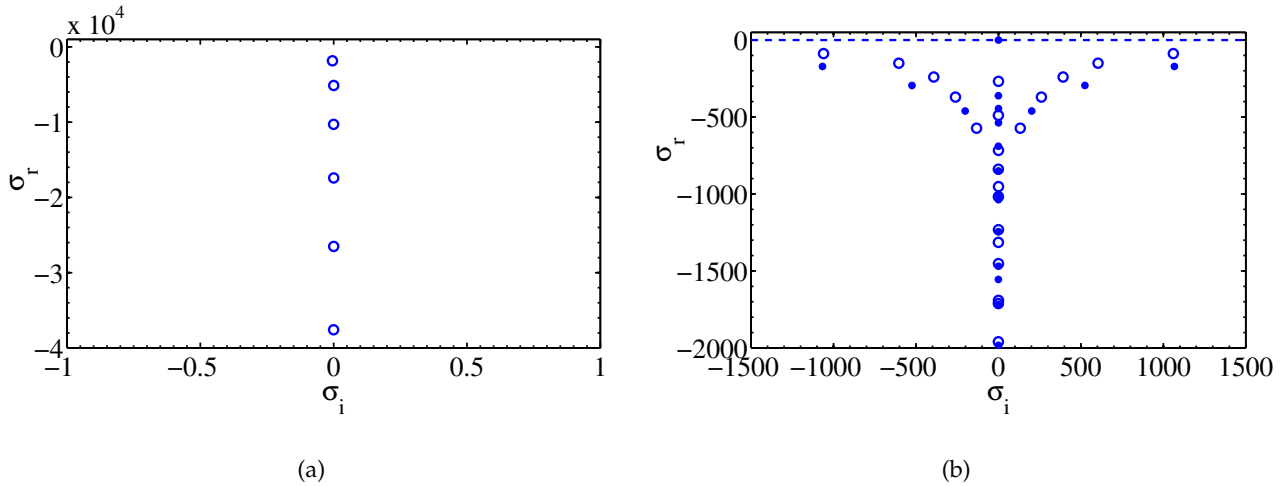


FIG. 3.5 – Spectres de valeurs propres d'un fluide à seuil,  $B_i = 10$ , avec  $\eta = 0.881$ ,  $k = \pi$  et  $m = 0$  (perturbation axisymétrique). (a) Sur la ligne de Rayleigh  $Re_1 = 500$  et  $Re_2 = 560.01$ . (b)  $Re_2 = -4000$  et (○)  $Re_1 = 500$ , (●)  $Re_1 = Re_{1c} = 1962.9$ .

Dans certaines situations, le mode le moins stable n'est pas axisymétrique. Pour cette raison, il est intéressant d'examiner le cas des perturbations non axisymétriques.

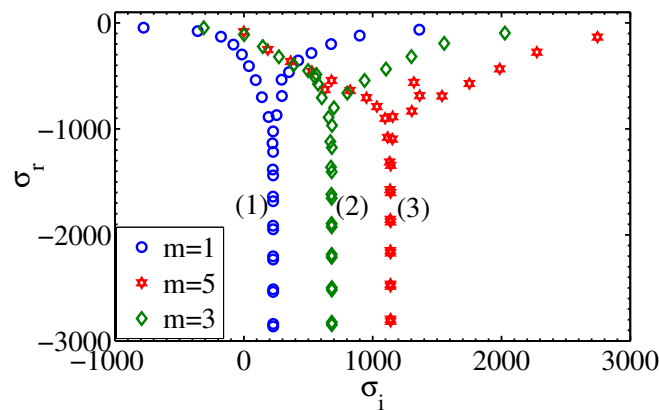
### 3.4.2 Perturbation non-axisymétrique ( $m \neq 0$ )

Pour une perturbation tridimensionnelle ( $m \neq 0$ ), le spectre des valeurs propres n'est plus centré sur l'axe  $\sigma_i = 0$  mais sur une valeur proportionnelle au nombre d'onde azimutal  $m$  et au nombre de Reynolds  $Re_2$ . La classification des spectres est moins évidente à réaliser.

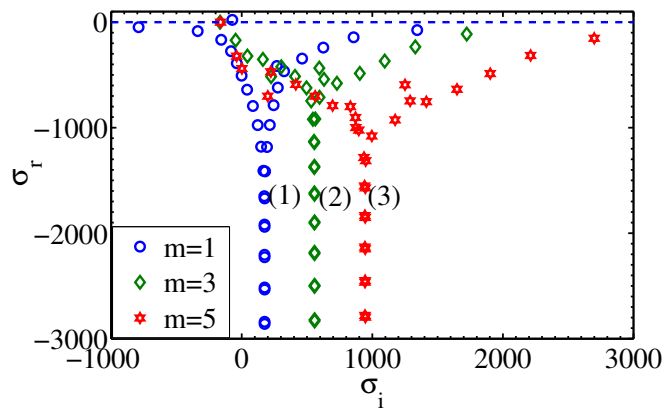
Les résultats numériques ont montré qu'il n'y a pas de différences fondamentales entre les spectres des fluides newtoniens et des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contraintes lorsque la perturbation est tridimensionnelle. D'après les travaux de [Gebhardt et Grossmann, 1993], la structure du spectre des valeurs propres de l'écoulement de Taylor-Couette dépend de la valeur relative du nombre d'onde axial et du nombre d'onde azimutal modifié  $m/r_m$  où  $r_m = (R_1 + R_2)/2$ . Lorsque  $k \gg m/r_m$ , la structure du spectre est proche de celle d'une perturbation axisymétrique. Par contre,

lorsque  $k \ll m/r_m$  le spectre est proche de celui obtenu pour une perturbation homogène dans la direction axiale.

Les calculs montrent qu'en augmentant  $m$ , les spectres des valeurs propres passent progressivement d'une structure en forme de jet (les figures 3.6(a), 3.7(a) et 3.8(a)) caractéristique des perturbations axisymétriques, à une structure en "Y" caractéristique des spectres de perturbation présentant une invariance axiale [Gebhardt et Grossmann, 1993]. D'autre part, les figures 3.6(b), 3.7(b) et 3.8(b) montrent que, quand le nombre de Reynolds  $Re_1$  est augmenté jusqu'à sa valeur critique (valeur pour laquelle  $\sigma_r = 0$ ), le mode critique correspond à une spirale tourbillonnaire, avec une vitesse de phase  $\omega = -\sigma_i/m$ .



(a)



(b)

FIG. 3.6 – Spectres de valeurs propres de fluide newtonien, avec  $\eta = 0.881$   $Re_2 = -4000$ ,  $k = \pi$  et  $m = 0$  (perturbation non axisymétrique). (a)  $Re_1 = 400$ , (1)  $m = 1$ , (2)  $m = 3$ , (3)  $m = 5$ , (b) (1)  $m = 1$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 1221.4$ , (2)  $m = 3$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 1059.8$ , (3)  $m = 5$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 1011.7$ .

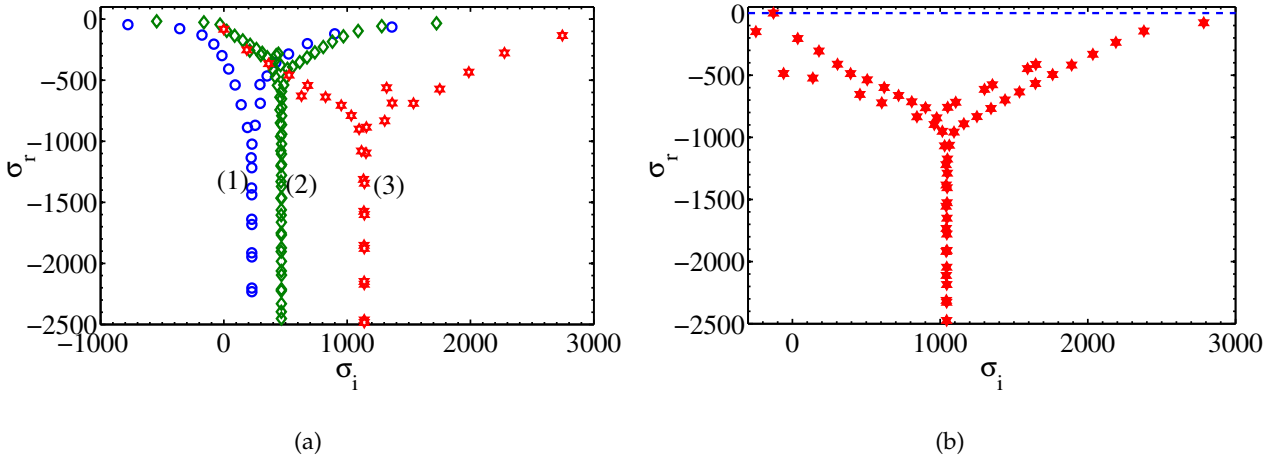


FIG. 3.7 – Spectres de valeurs propres pour un fluide en loi de puissance,  $n_p = 0.5$ , avec  $\eta = 0.881$ ,  $Re_2 = -4000$ ,  $k = \pi$  et différentes valeurs du nombre d'onde azimutal. (a)  $Re_1 = 400$ , (1)  $m = 1$ , (2)  $m = 2$ , (3)  $m = 5$ , (b)  $m = 5$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 878.55$ .

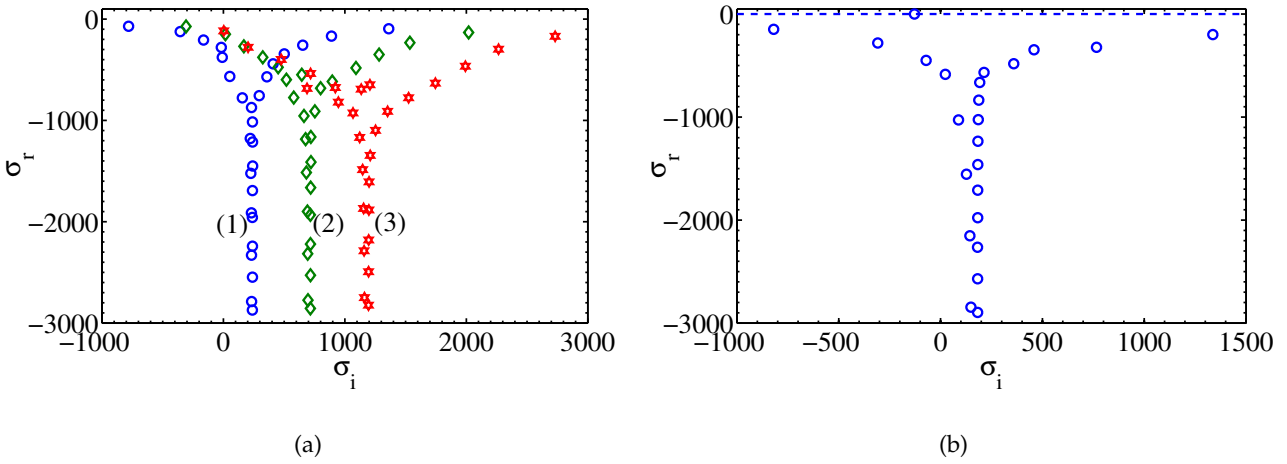


FIG. 3.8 – Spectres de valeurs propres pour un fluide à seuil,  $B_i = 10$ , avec  $\eta = 0.881$ ,  $Re_2 = -4000$ ,  $k = \pi$  et différentes valeurs du nombre d'onde azimutal. (a)  $Re_1 = 400$ , (1)  $m = 1$ , (2)  $m = 3$ , (3)  $m = 5$ , (b)  $m = 1$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 1962$ .

Des résultats similaires sont obtenus pour les spectres des fluides de Carreau comme le montre la figure 3.9. Par ailleurs, le modèle de Carreau donne des spectres similaires au modèle en loi de puissance pour  $\lambda \dot{\gamma}_{r\theta}^b \gg 1$ , conformément aux comparaisons de ces deux lois effectuées dans § 2.1 du chapitre 2.

Globalement, on remarque qu'une perturbation non axisymétrique entraîne donc l'apparition d'ondes qui se propagent.

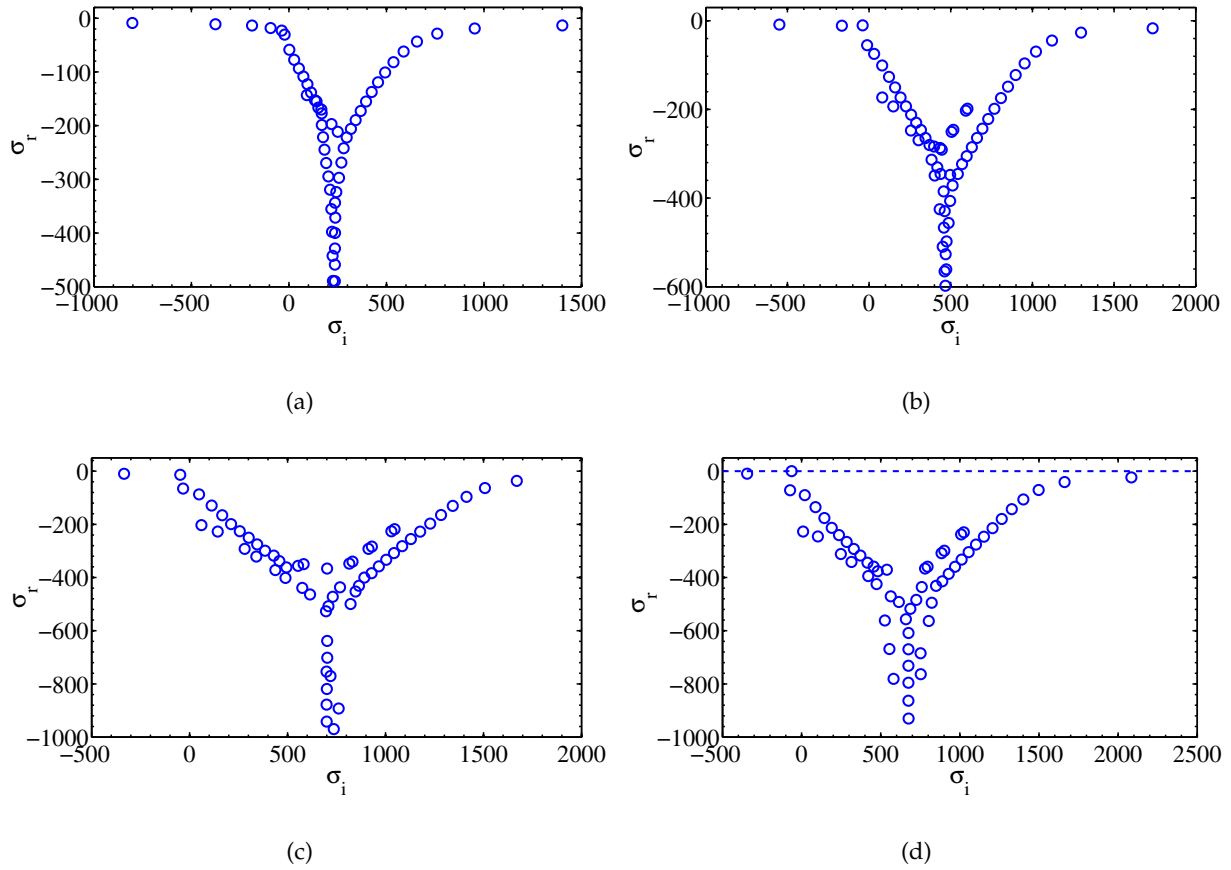


FIG. 3.9 – Spectres de valeurs propres pour un fluide de Carreau,  $n = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec une perturbation non axisymétrique pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . Le nombre de Reynolds du cylindre extérieur et le nombre d'onde axial sont fixés :  $Re_2 = -4000$  et  $k = \pi$  respectivement. (a)  $m = 1$ ,  $Re_1 = 400$ , (b)  $m = 2$ ,  $Re_1 = 400$ , (c)  $m = 3$ ,  $Re_1 = 400$ , (d)  $m = 3$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 526.49$ .

### 3.5 Stabilité marginale

Cette section est consacrée à la détermination des conditions critiques et leur dépendance au caractère rhéofluidifiant.

#### 3.5.1 Calculs de validation

Afin de valider notre code de calcul, des tests ont été effectués en comparant nos résultats avec ceux existant dans la littérature pour des perturbations axisymétriques (2D) et tridimensionnelles (3D).

La figure 3.10(a) montre ainsi un très bon accord entre nos calculs et ceux de [Meseguer, 2002] pour un fluide newtonien pour une perturbation 3D. Sur cette figure, il apparaît de plus que, dans le régime contra-rotatif, les perturbations 2D sont plus stables que les perturbations 3D, de sorte que les



nombre de Reynolds sont surestimés si l'on considère des perturbations bidimensionnelles, comme l'ont montré [Krueger *et al.*, 1966] et [Langford *et al.*, 1988]. Dans le tableau 3.3 sont montrées les conditions critiques pour un fluide newtonien soumis à une perturbation bidimensionnelle. A nouveau, l'accord entre le présent travail et les travaux de [Landry, 2006] et de [Tagg, 1994] est très bon.

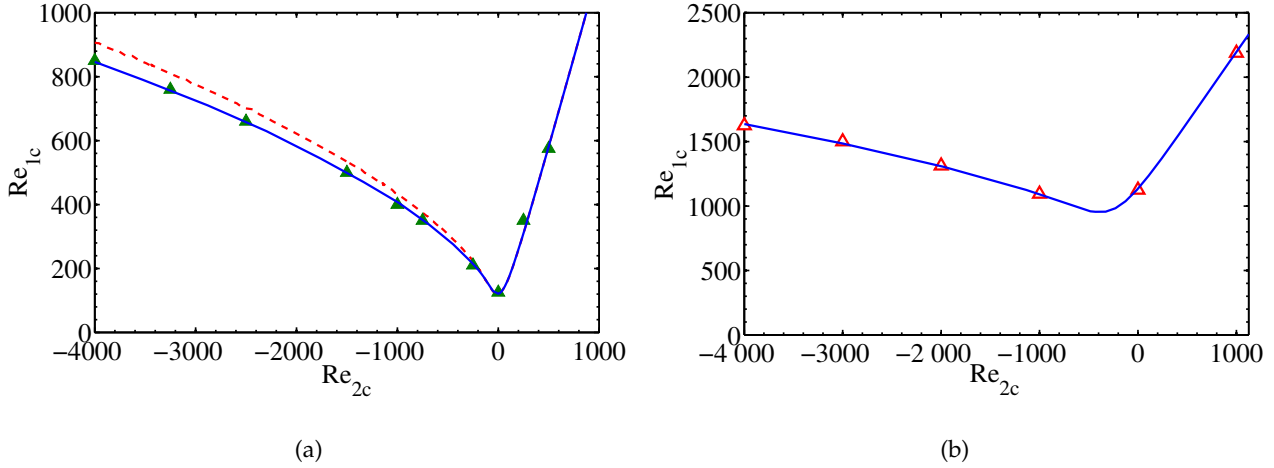


FIG. 3.10 – Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ . (a) Fluide newtonien et avec  $\eta = 0.881$  et  $m \neq 0$  (perturbation 3D) : comparaison de nos résultats (—) avec les travaux de [Meseguer, 2002] ( $\Delta$ ). (— —) Nos résultats pour une perturbation 2D ( $m = 0$ ). (b) Fluide de Bingham,  $B_i = 10$ , avec  $\eta = 0.883$  et  $m = 0$  : comparaison de nos résultats (—) avec ceux de [Landry, 2006] ( $\Delta$ ).

$Re_2$	0	-5	-10	-25	-50	-100
[Landry, 2006](DF)	121.7749	121.5845	121.6138	123.0273	129.2676	151.3940
[Landry, 2006](PC)	121.9805	121.7822	121.8188	123.2324	129.4653	151.6064
[Tagg, 1994]	121.9791	121.7868	121.8205	123.2306	129.4683	151.6083
Présent travail	121.9791	121.7868	121.8205	123.2306	129.4683	151.6084

TAB. 3.3 – Nombre de Reynolds critique  $Re_{1c}$  d'un fluide newtonien siège de perturbations axisymétriques, pour un rapport de rayon pour  $\eta = 0.883$  et différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re_2$ . Comparaison avec les résultats obtenus par [Landry, 2006] avec la méthode des différences finies (DF) et avec une méthode de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev (PC) et les résultats obtenus par [Tagg, 1994].

Pour un fluide en loi de puissance, des comparaisons supplémentaires ont montré une bonne adéquation avec les résultats obtenus par [Pascal et Rasmussen, 1995] pour une perturbation 2D. Sur la figure 3.10(b) nos calculs sont comparés avec succès avec les résultats de [Landry, 2006] pour un

fluide de Bingham ( $B_i = 10$ ) à la suite de perturbations 2D.

### 3.5.2 Fluides en loi de puissance

Les figures 3.11(a) - 3.11(e) montrent pour un fluide en loi de puissance l'influence du caractère rhéofluidifiant sur les conditions critiques d'apparition de la première instabilité. Il apparaît que le caractère rhéofluidifiant a un effet "déstabilisant" ( $Re_{1c}$  diminue) sauf au voisinage de  $Re_2 = 0$  pour un large entrefer.

Quand seul le cylindre intérieur est en rotation, la figure 3.12(a) montre l'influence de l'entrefer et du caractère rhéofluidifiant sur le nombre de Reynolds critique  $Re_{1c}$ . Le caractère rhéofluidifiant a un effet déstabilisant pour les entrefers étroits, mais, pour des caractères très rhéofluidifiant et un entrefer large, un effet stabilisant peut être observé.

Les figures 3.13(a) et 3.13(b) montrent l'évolution du Reynolds critique  $Re_{1c}$  en régime contra-rotatif en fonction de l'indice de rhéofluidification et ce pour différentes valeurs de rapport de rayons  $\eta$ . On peut montrer pour la gamme de nombre de Reynolds  $Re_2$  considérée que  $Re_{1c}$  évolue de manière exponentielle en fonction de  $n_p$ ,

$$Re_{1c}/Re_{1c}(n_p = 1) \propto \exp(n_p^{\beta_1}), \quad (3.15)$$

avec  $\beta_1 = 0.8$  pour  $Re_2 \leq -5025$ .

En régime co-rotatif avec un faible entrefer, une légère stabilisation est mise en évidence par les résultats numériques. Par ailleurs, dans ce régime, les calculs montrent une évolution exponentielle du nombre de Reynolds critique  $Re_{1c}$  avec le caractère rhéofluidifiant, mais, il faut distinguer le cas de l'entrefer étroit (figure 3.13(c)) pour lequel

$$Re_{1c}/Re_{1c}(n_p = 1) \propto \exp(n_p^{\beta_2}), \quad (3.16)$$

avec  $\beta_2 = 0.01$  pour une large gamme de nombre de Reynolds  $Re_2$ .

Pour un entrefer large et pour un fort caractère rhéofluidifiant comme le montre la figure 3.13(d), on retrouve la même loi que pour le régime contra-rotatif  $Re_{1c}(n_p) \propto \exp(n_p^{\beta_1})$  pour de grands nombres de Reynolds  $Re_2$ .

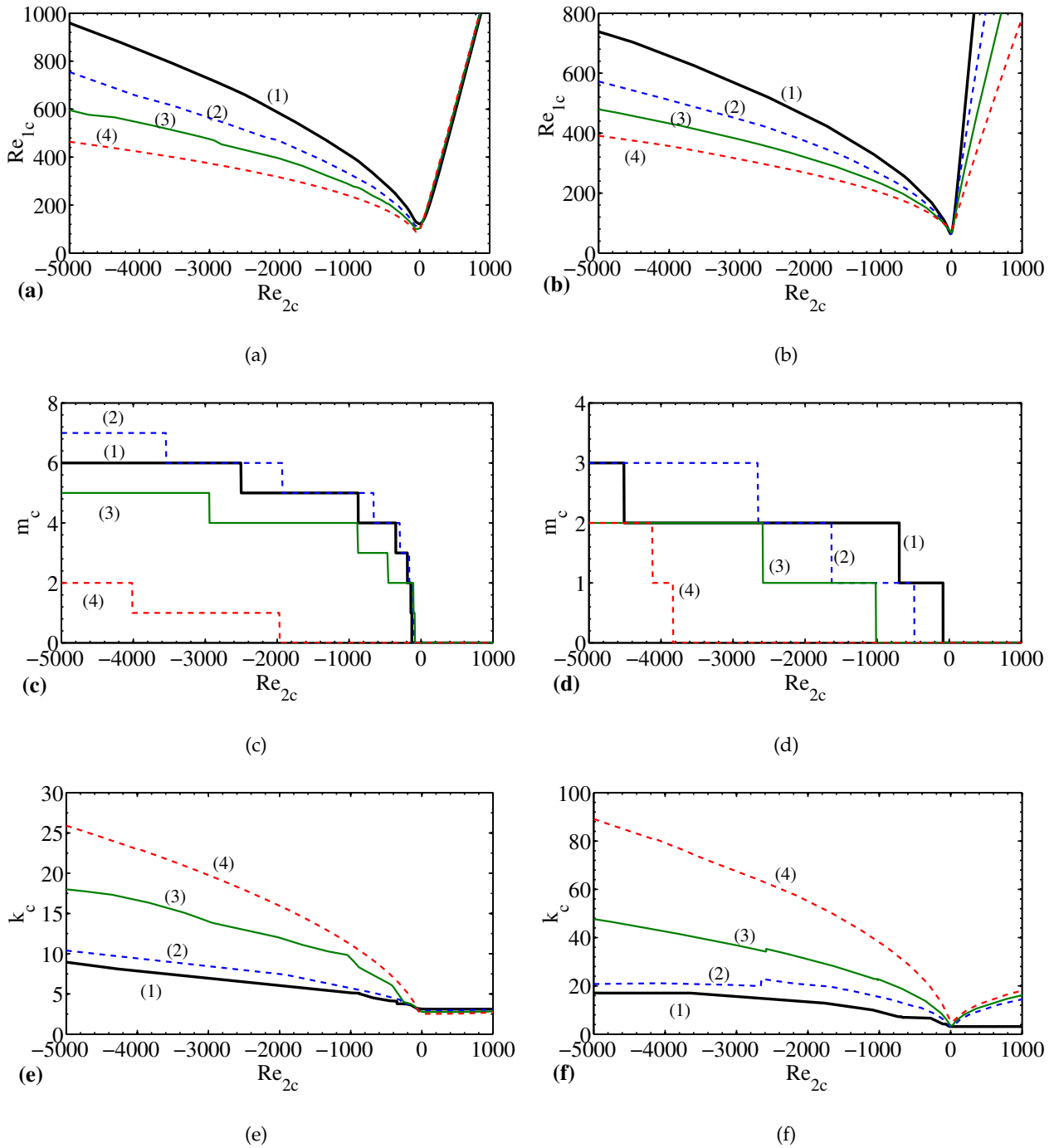


FIG. 3.11 – Représentation des conditions critiques d'apparition des instabilités dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide en loi de puissance et pour deux rapports de rayons,  $\eta = 0.881$  (figures de gauche) et  $\eta = 0.4$  (figures de droite). (a) et (b) Nombre de Reynolds critiques (stabilité marginale); (c) et (d) nombres d'onde azimutaux critique; (e) et (f) nombres d'onde axiaux critique. (1) Fluide newtonien,  $n_p = 1$ , (2)  $n_p = 0.7$ , (3)  $n_p = 0.5$ , (4)  $n_p = 0.3$ .

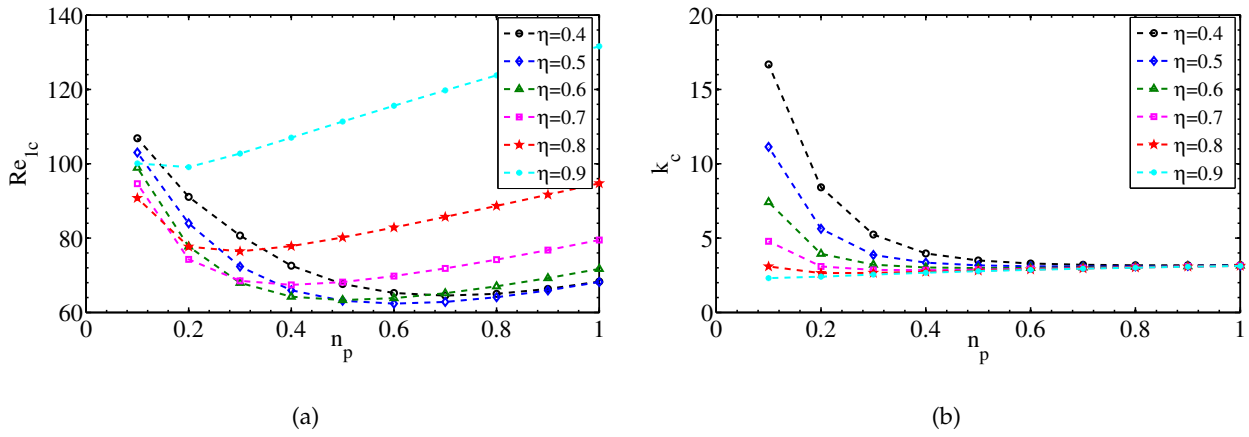


FIG. 3.12 – Variation du nombre de Reynolds critique (a) et du nombre d’onde axial critique (b) en fonction de l’indice  $n_p$  pour différentes valeurs de rapport de rayon quand seul le cylindre intérieur tourne.

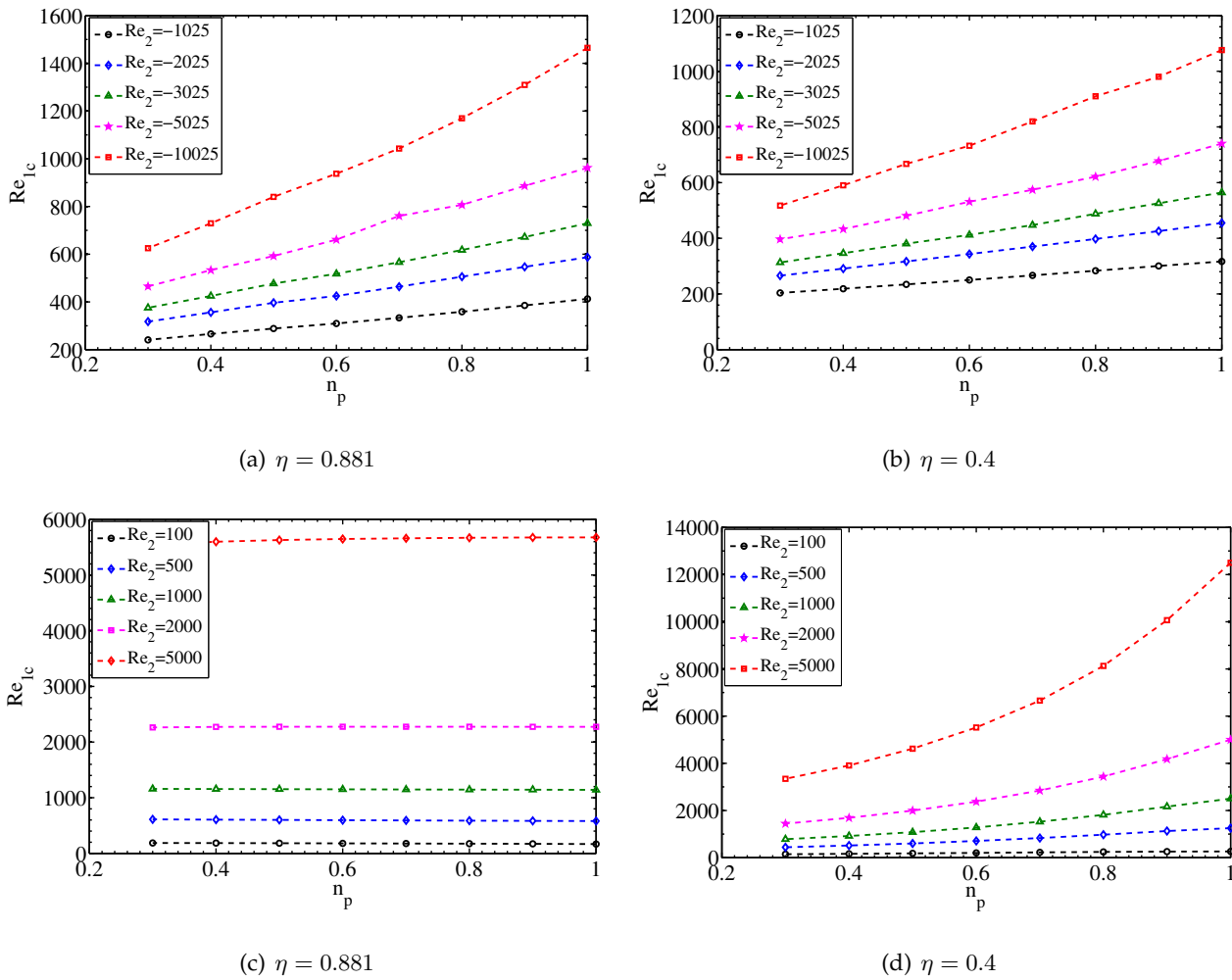


FIG. 3.13 – Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l’indice  $n_p$  pour différentes valeurs du rapport de rayon. (a) et (b) Régime contra-rotatif, (c) et (d) régime co-rotatif.

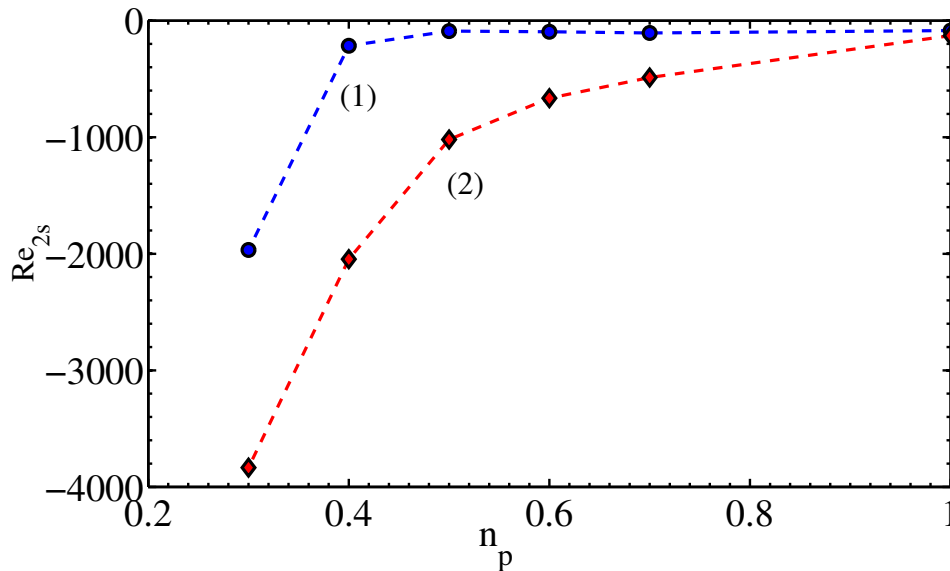


FIG. 3.14 – Influence du caractère rhéofluidifiant sur le nombre de Reynolds  $Re_{2s}$  à partir duquel la transition bifurque vers les spirales pour (1) un faible entrefer  $\eta = 0.881$  et (2) un large entrefer  $\eta = 0.4$ .

Concernant le nombre d'onde azimutal critique, dans le régime co-rotatif, le mode critique est axisymétrique dans la gamme des nombres de Reynolds  $Re_2$  considérée dans cette étude comme le montrent les figures 3.11(c) et 3.11(d). La première instabilité conduit dans ce cas à l'apparition des tourbillons de Taylor.

En régime contra-rotatif, le nombre d'onde azimutal critique augmente avec  $|Re_2|$ . Il existe dans ce cas une valeur limite de  $Re_2$ , notée ici  $Re_{2s}$  à partir de laquelle, la bifurcation primaire se manifeste par des tourbillons contrarotatifs en spirale,  $m_c \geq 0$ . Les tourbillons en spirale sont des ondes qui se propagent dans les directions axiales et azimutales. La figure 3.14 montre que, plus les fluides sont rhéofluidifiants, plus le mode critique reste axisymétrique jusqu'à de grandes valeurs du nombre de Reynolds  $|Re_2|$ .

Les figures 3.11(e) et 3.11(f) indiquent que le nombre d'onde axial augmente avec le nombre de Reynolds  $|Re_2|$  ainsi qu'avec le caractère rhéofluidifiant. Cet effet est d'autant plus significatif que l'espace annulaire est large, comme le montre la figure 3.12(b) dans le cas particulier où  $Re_2 = 0$  (seul le cylindre intérieur tourne). Ce comportement peut être attribué au fait que la taille de l'entrefer effectif, l'espace annulaire compris entre le cylindre intérieur et la position radiale pour laquelle  $V^b = 0$  (le critère de Rayleigh est valable dans cet espace), décroît lorsque que le caractère rhéofluidifiant augmente.

L'effet déstabilisant de la rhéofluidification (diminution de  $Re_{1c}$  quand  $n_p$  diminue) peut être interprété en utilisant l'équation de l'énergie cinétique de la perturbation. Celle-ci est obtenue en multi-

pliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée par le complexe conjugué  $\underline{u}^*$  et en intégrant dans le volume  $\mathcal{V} = 2\pi^2 (R_2^2 - R_1^2) / k$ , délimité par les deux cylindres, et de hauteur égale à une longueur d'onde axiale.

$$\mathcal{R}e(\sigma) \|\underline{u}\|^2 = -Re_1 \int_{R_1}^{R_2} f(r) r dr - \int_{R_1}^{R_2} g_1(r) r dr + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) r dr \quad \text{avec} \quad (3.17)$$

$$f(r) = \dot{\gamma}_{r\theta}^b \frac{u^* v + u v^*}{2} \quad (3.18)$$

$$g_1(r) = \mu^b \left[ \frac{1}{2} (|\dot{\gamma}'_{rr}|^2 + |\dot{\gamma}'_{\theta\theta}|^2 + |\dot{\gamma}'_{zz}|^2) + |\dot{\gamma}'_{r\theta}|^2 + |\dot{\gamma}'_{rz}|^2 + |\dot{\gamma}'_{\theta z}|^2 \right] \quad (3.19)$$

$$g_2(r) = (\mu^b - \mu_t) |\dot{\gamma}'_{r\theta}|^2. \quad (3.20)$$

$$\text{avec } \|\underline{u}\|^2 = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} (u u^* + v v^* + w w^*) r dr.$$

Dans l'équation (3.17), le premier terme du membre de droite traduit une production d'énergie. Cette production d'énergie est associée au travail du tenseur de Reynolds,  $-uv$  sur le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_{r\theta}^b$  ou simplement l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation. Le deuxième terme correspond à la dissipation visqueuse. Le troisième terme provient de la perturbation de la viscosité liée au caractère rhéofluidifiant. Ce dernier terme est positif et constitue par ce fait une source d'énergie pour la perturbation. Comme l'ont fait [Ranganathan et Govindarajan, 2001], on peut comparer la moyenne spatiale du terme de production et des termes de dissipation  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  respectivement définis par

$$\Gamma^+ = \frac{Re_1 \int_{R_1}^{R_2} f(r) r dr}{\|\underline{u}\|^2}, \quad \Gamma^- = \frac{\int_{R_1}^{R_2} g_1(r) r dr - \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) r dr}{\|\underline{u}\|^2} \quad (3.21)$$

Aux conditions critiques d'apparition des instabilités, le terme de production compense exactement la dissipation visqueuse ( $\Gamma^+ = \Gamma^-$ ), comme illustré pour un fluide newtonien ( $n_p$ ) sur les figures 3.15 et 3.16. Afin de déterminer si la réduction de  $Re_{1c}$  lorsque  $n_p$  diminue résulte d'une augmentation du terme de production qui sera lié en partie à l'augmentation de  $\dot{\gamma}_{r\theta}^b$  à la paroi, ou au contraire d'une diminution de la dissipation visqueuse, la méthodologie suivante a été établie : pour un nombre de Reynolds  $Re_2$  fixé, on calcule le nombre de Reynolds intérieur critique dans le cas newtonien ( $Re_{1c}(n_p = 1)$ ). En conservant les valeurs de  $Re_2$  et  $Re_{1c} = Re_{1c}(n_p = 1)$ , on introduit le caractère rhéofluidifiant et on calcule pour le mode le moins stable  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  avec les optimales de  $m_c$  et  $k_c$ .

### Remarque :

Lorsque seul le cylindre intérieur tourne et que l'entrefer est étroit, la figure 3.15(a) montre que  $\Gamma^-$  décroît plus vite que  $\Gamma^+$  quand  $n_p$  diminue, ce qui explique que les instabilités apparaissent à des valeurs de  $Re_1$  inférieures aux valeurs newtoniennes. Pour un large entrefer, la courbe de  $\Gamma^-$  décroît

dans un premier temps lorsque  $n_p$  diminue avant de remonter au-dessus de la courbe  $\Gamma^+$ , conduisant à un effet déstabilisant pour un faible caractère rhéofluidifiant puis un effet stabilisant pour un fort caractère rhéofluidifiant.

En régime contra-rotatif, que l'entrefer soit large ou étroit, les figures 3.16(a) et 3.16(c) montrent qu'en augmentant le caractère rhéofluidifiant, la dissipation visqueuse reste toujours proche de celle d'un fluide newtonien tandis que la production d'énergie augmente significativement, rendant l'écoulement moins stable.

En régime co-rotatif, et seulement pour les entrefers étroits, comme le montre la figure 3.16(b), la production et la dissipation croissent puis décroissent ensuite lorsque la rhéofluidification augmente, avec une prédominance de la dissipation ce qui rend l'écoulement plus stable. En revanche, pour un large entrefer, la figure 3.16(d) montre que la rhéofluidification conduit à un écoulement moins stable puisque la production croît significativement par rapport à la dissipation visqueuse.

Par ailleurs, la figure 3.17 montre le lieu du maximum des fonctions  $f$  et  $(g_1 + g_2)$  définies par les équations (3.18) - (3.20) en fonction du nombre de Reynolds  $Re_2$ . Il apparaît que les maxima de la production et la dissipation visqueuse sont atteints au voisinage du cylindre intérieur.

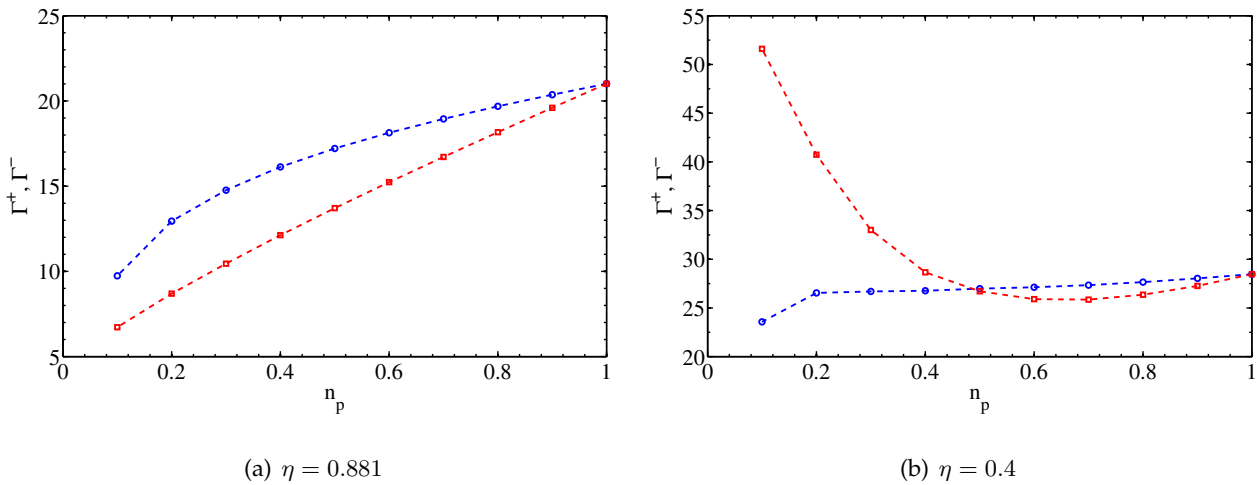
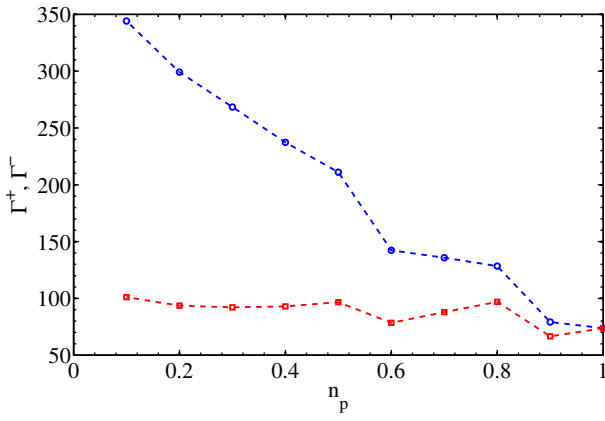
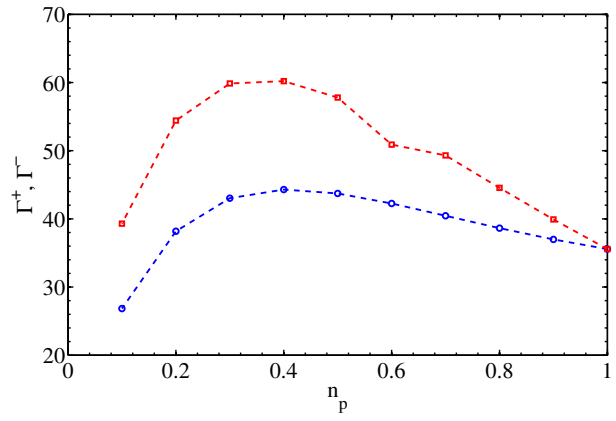


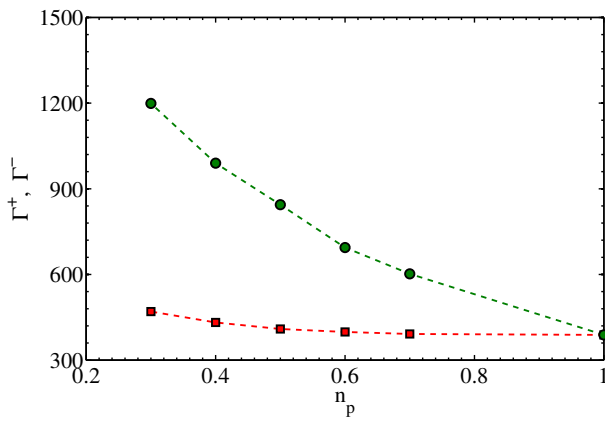
FIG. 3.15 – Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie  $\Gamma^+$  et ( $\square$ ) de la dissipation  $\Gamma^-$  définies par l'équation (3.21) pour un fluide en loi de puissance avec (a)  $\eta = 0.881$  (b) et  $\eta = 0.4$ , en fonction de l'indice de rhéofluidification  $n_p$  lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ).



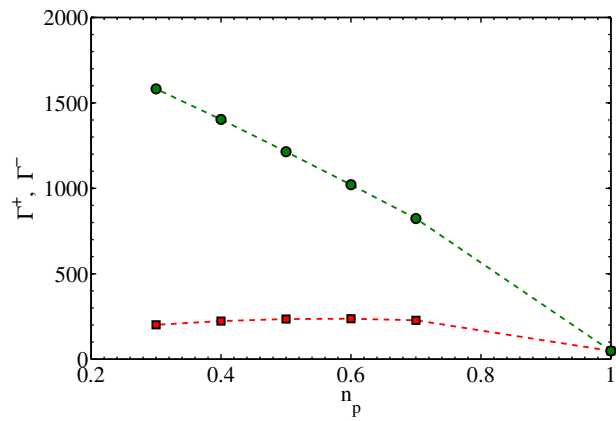
(a) Contra-rotation  $Re_2 = -2500, \eta = 0.881$



(b) Co-rotation  $Re_2 = 500, \eta = 0.881$



(c) Contra-rotation  $Re_2 = -2500, \eta = 0.4$



(d) Co-rotation  $Re_2 = 500, \eta = 0.4$

FIG. 3.16 – Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie  $\Gamma^+$  et ( $\square$ ) de la dissipation  $\Gamma^-$  définies par l'équation (3.21) pour un fluide en loi de puissance avec (a) et (b)  $\eta = 0.881$ , (c) et (d)  $\eta = 0.4$  en fonction de l'indice de rhéofluidification  $n_p$ . A gauche  $Re_2 = -2025$  et à droite  $Re_2 = 500$ .



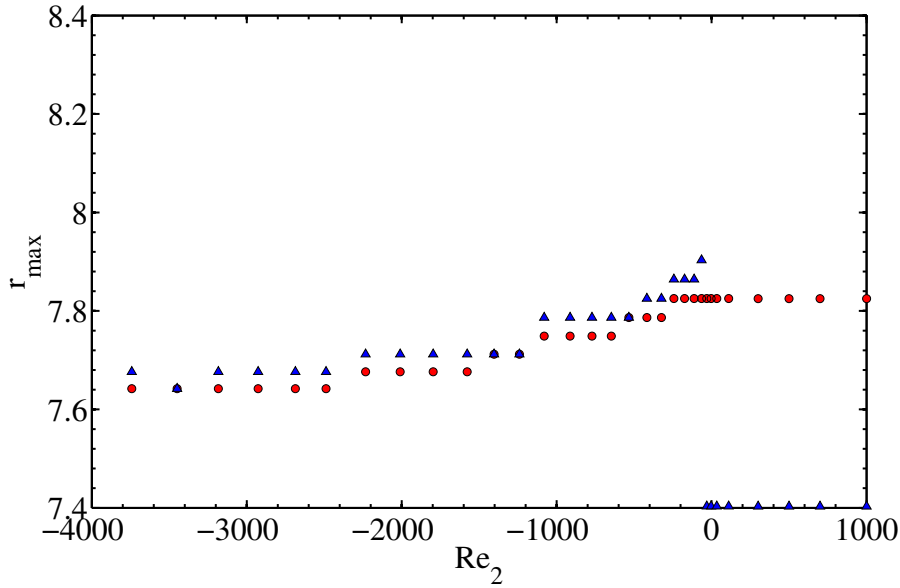


FIG. 3.17 – Rayons auxquels les fonctions  $f(r)$  ( $\circ$ ) et  $g_1(r) + g_2(r)$  ( $\triangle$ ) définies par les équations ((3.18) - (3.20)) atteignent leur maximum, pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$  et  $\eta = 0.881$ .

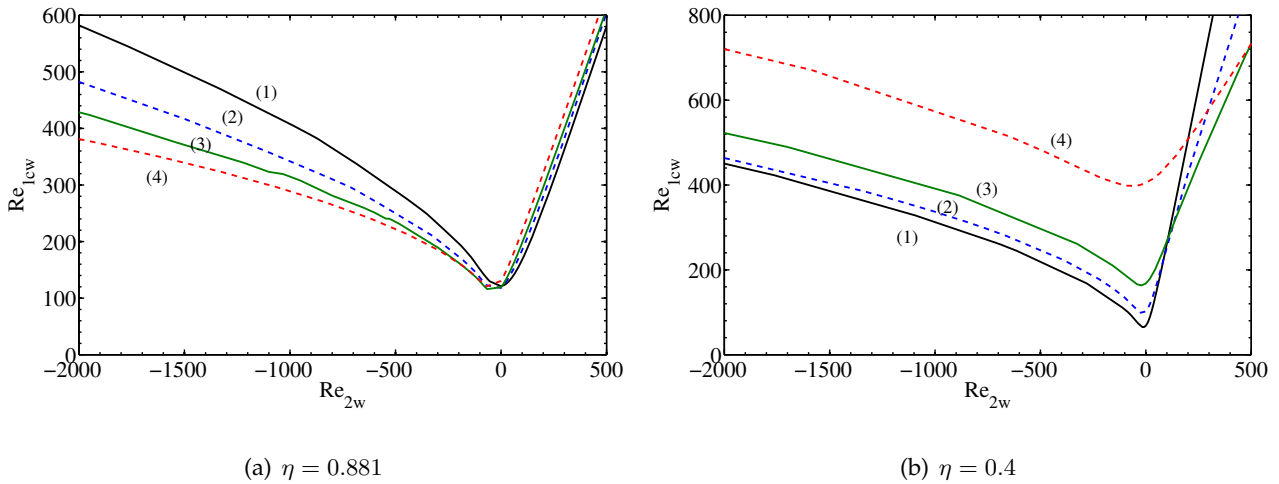


FIG. 3.18 – Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(Re_{1w}, Re_{2w})$  pour un fluide en loi de puissance. (a)  $\eta = 0.881$ ; (b)  $\eta = 0.4$ . (1) Fluide newtonien, (2)  $n_p = 0.7$ , (3)  $n_p = 0.5$ , et (4)  $n_p = 0.3$ .

### Effet de l'échelle de viscosité sur la stabilisation/déstabilisation d'un fluide en loi de puissance

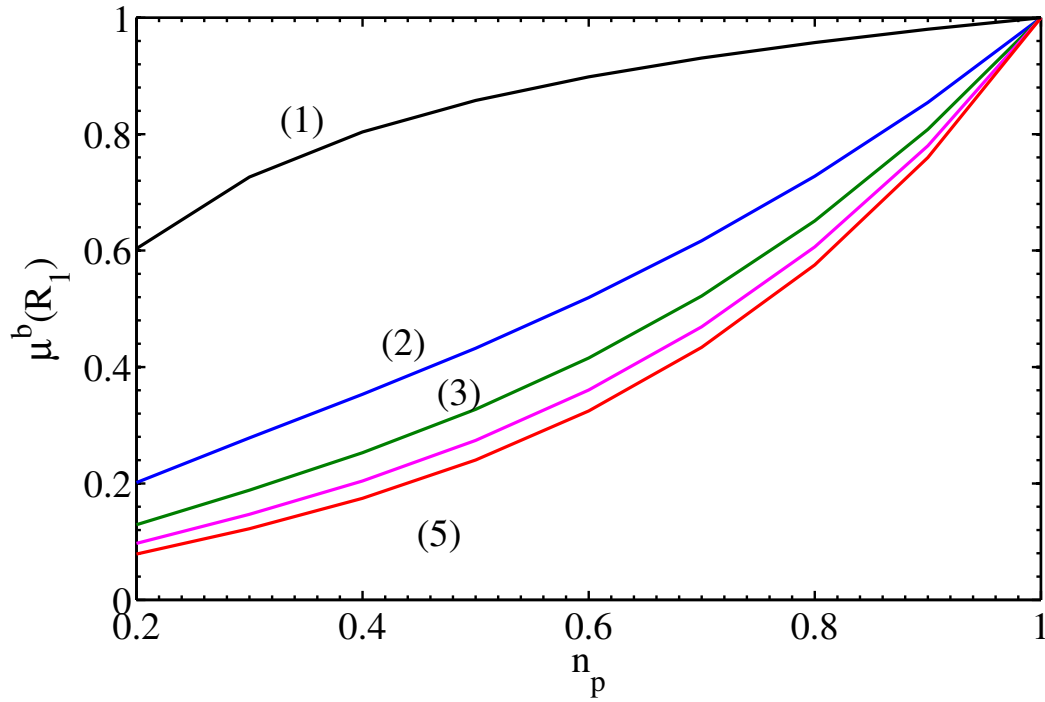
Les nombres de Reynolds utilisés jusqu'à présent sont définis par rapport à une viscosité de référence  $\hat{\mu}_{ref}$ , définie dans le paragraphe §2.2.1 du chapitre 2. Cette viscosité n'est pas nécessairement atteinte dans l'écoulement et n'est donc pas représentative. Néanmoins, l'avantage est qu'elle peut être calculée facilement. Pour pallier cet inconvénient, on peut choisir comme viscosité de référence,

la viscosité à la paroi du cylindre intérieur  $\hat{\mu} = \hat{\mu}^b(\hat{R}_1)$ . C'est la viscosité de la région de l'écoulement où le gradient de vitesse est le plus important. La viscosité  $\hat{\mu} = \hat{\mu}^b(\hat{R}_1)$  a une réalité physique, mais doit être calculée dans chaque cas. Les nombres de Reynolds s'écrivent alors

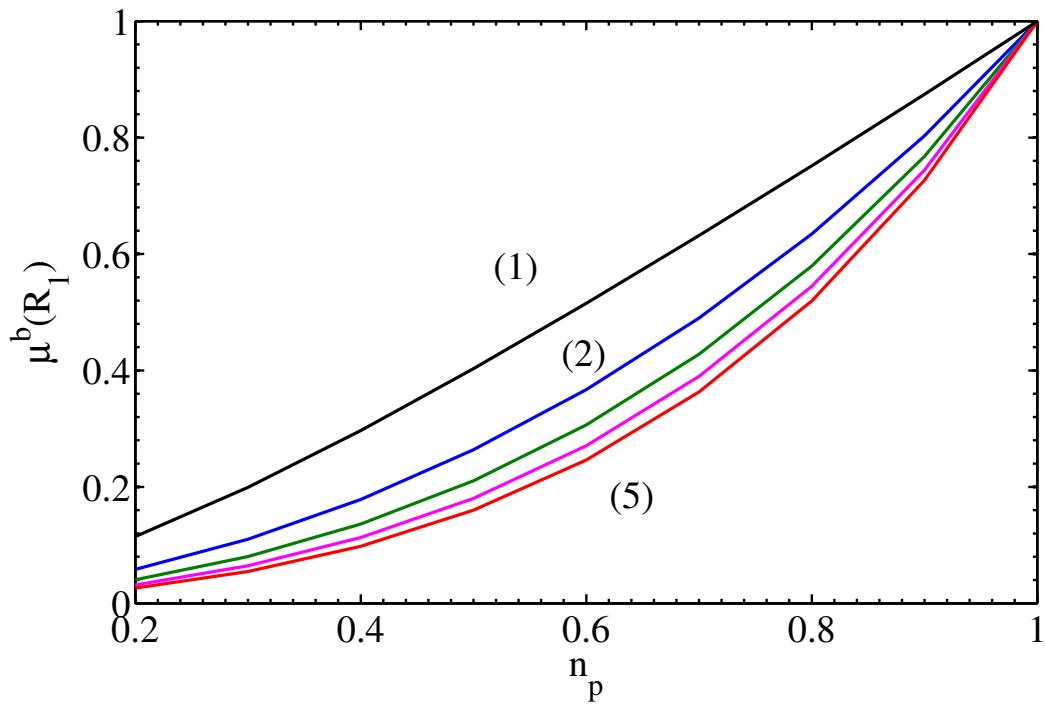
$$Re_{1w} = \frac{\hat{\rho}\hat{R}_1\hat{\Omega}_1\hat{d}}{\hat{\mu}^b(\hat{R}_1)} \quad \text{et} \quad Re_{2w} = \frac{\hat{\rho}\hat{R}_2\hat{\Omega}_2\hat{d}}{\hat{\mu}^b(\hat{R}_1)} \quad (3.22)$$

La figure 3.18 montre les courbes de stabilité marginale avec les nouvelles définitions des nombres de Reynolds  $Re_{1w}$  et  $Re_{2w}$ . Il apparaît que pour un entrefer étroit, comparativement aux figures 3.11(a) et 3.11(b), le caractère rhéofluidifiant a toujours un effet déstabilisant sur l'écoulement dans le régime contra-rotatif et un effet stabilisant dans le régime co-rotatif. En revanche, pour un large entrefer, une stabilisation de l'écoulement est observée dans le régime contra-rotatif tandis qu'une déstabilisation peut être observée en co-rotatif. Les figures 3.19(a) et 3.19(b) montrent pour différentes valeurs des nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  que la viscosité à la paroi du cylindre intérieur  $\mu^b(R_1)$  diminue quand le caractère rhéofluidifiant augmente. Cette variation est beaucoup plus prononcée lorsqu'il s'agit d'un large entrefer.

Par ailleurs, pour un large entrefer, quand  $n_p$  diminue,  $\mu^b(R_1)$  décroît beaucoup plus rapidement que  $Re_{1c}$ . Par conséquent,  $Re_{1cw} = Re_{1c}/\mu^b(R_1)$  augmente avec le caractère rhéofluidifiant. L'effet stabilisant ou déstabilisant de l'écoulement en fonction du caractère rhéofluidifiant dépend du choix de la viscosité de référence. Il faut donc choisir cette dernière avec précaution.



(a)



(b)

FIG. 3.19 – Viscosité à la paroi du cylindre intérieur en fonction de l'indice de l'écoulement  $n_p$  pour  $Re_1 = 300$  et (1)  $Re_2 = 0$ , (2)  $Re_2 = -1000$ , (3)  $Re_2 = -2000$  (4)  $Re_2 = -3000$ , (5)  $Re_2 = -4000$ . (a)  $\eta = 0.881$  et (b)  $\eta = 0.4$ .

### Stabilité marginale dans le plan $(Re, R_\Omega)$

Dans cette partie, la stabilité marginale est représentée dans le plan  $(Re, R_\Omega)$  défini dans le paragraphe § 2.3.1 du chapitre 2. La figure 3.20 montre les résultats pour un fluide en loi de puissance et un entrefer étroit. Pour un fluide newtonien, la courbe de stabilité marginale est délimitée par la ligne de Rayleigh  $R_\Omega = -1$  et la ligne  $Re_1 = 0$  où  $R_\Omega = (1 - \eta)/\eta$ . On observe que le caractère rhéofluidifiant a un effet déstabilisant dans tout le plan  $(Re, R_\Omega)$ .

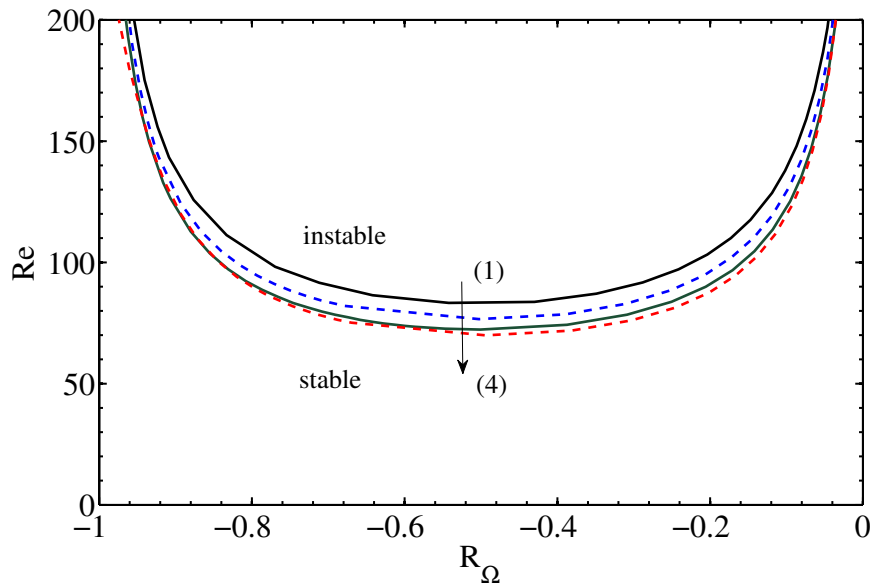


FIG. 3.20 – Courbes de stabilité marginale  $(Re, R_\Omega)$  pour un fluide en loi de puissance pour  $\eta = 0.881$ .

(1) Fluide newtonien, (2)  $n_p = 0.7$ , (3)  $n_p = 0.5$  et (4)  $n_p = 0.3$ .

## 3.5.3 Fluides de Carreau

La figure 3.21 montre les courbes de stabilité marginale dans le cas de fluides de Carreau  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$ , ainsi que les nombres d'onde axiaux et azimutaux critiques correspondants.

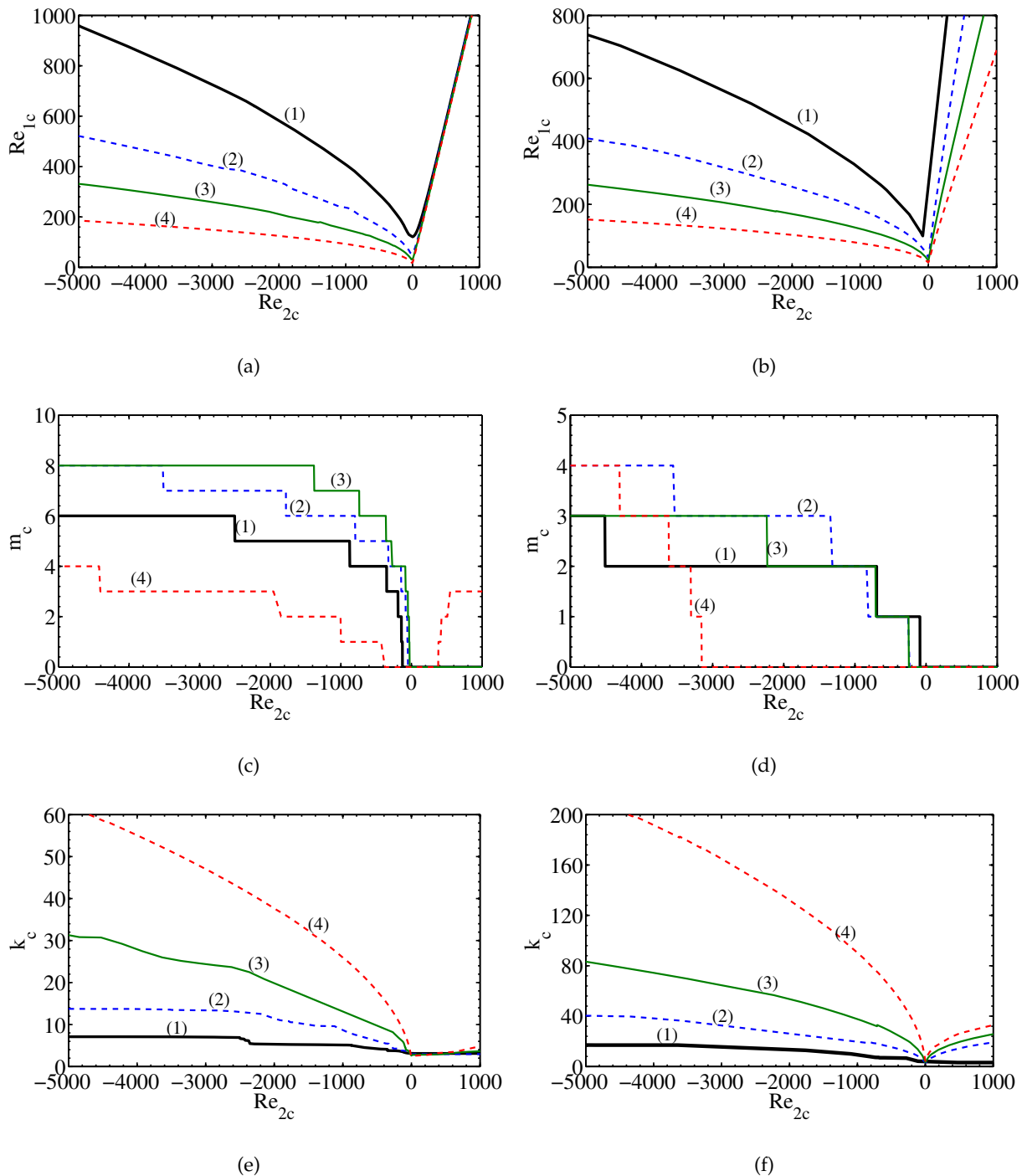


FIG. 3.21 – Conditions critiques d'apparition des instabilités pour un fluide de Carreau,  $\lambda = 10$ , pour deux rapports de rayons,  $\eta = 0.881$  (figures de gauche) et  $\eta = 0.4$  (figures de droite). (a) et (b) Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , (c) et (d) nombres d'onde azimutaux critiques, (e) et (f) nombres d'onde axiaux critiques. (1) Fluide newtonien, (2)  $n_c = 0.7$ , (3)  $n_c = 0.5$ , (4)  $n_c = 0.3$ .

La figure 3.22, résultant de l'analyse énergétique détaillée au § 3.5.2 montre un comportement similaire à celui d'un fluide en loi de puissance.

En régime contra-rotatif comme en régime co-rotatif, lorsqu'on augmente le caractère rhéofluidifiant, la production d'énergie évolue toujours plus vite que la dissipation visqueuse moyenne, ce qui produit une déstabilisation de l'écoulement.

Globalement, l'influence du caractère rhéofluidifiant est similaire à celle observée pour un fluide en loi de puissance.

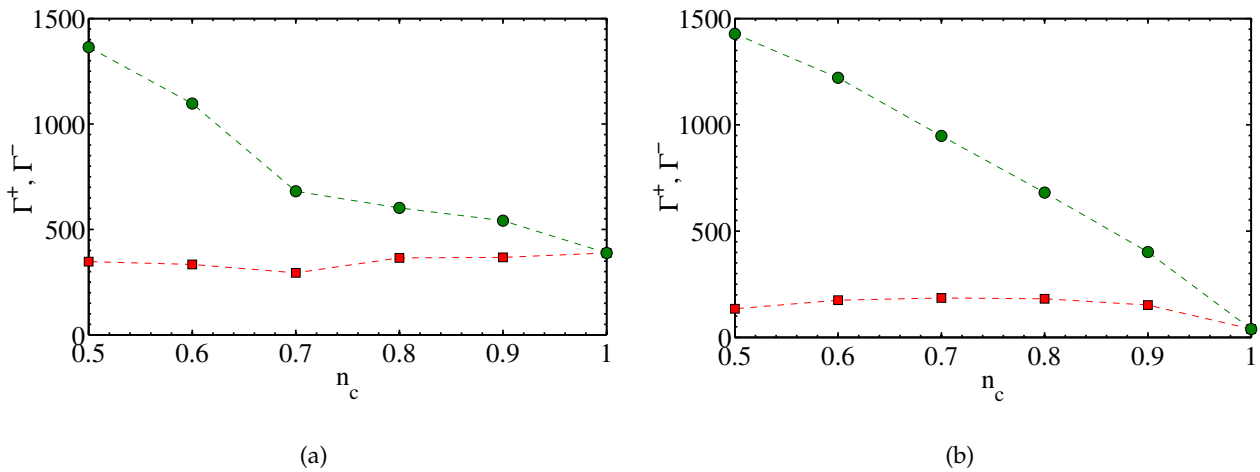


FIG. 3.22 – Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie  $\Gamma^+$  et ( $\square$ ) de la dissipation  $\Gamma^-$  définies par l'équation (3.21) pour un fluide de Carreau avec  $\eta = 0.4$  en fonction de l'indice de l'écoulement  $n_c$ . (a)  $Re_2 = -2025$ , (b)  $Re_2 = 500$ .

### 3.5.4 Fluides de Bingham

La résolution numérique du problème aux valeurs propres (3.2) avec les conditions limites aux limites (2.73) du §2.5 du chapitre 2 ont permis de déterminer les conditions critiques de l'apparition de la première instabilité.

Lorsque seul le cylindre intérieur tourne, la figure 3.23(a) montre la variation du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour différentes valeurs du rapport de rayon. Il apparaît que l'existence d'une contrainte seuil a toujours un effet stabilisant et l'évolution de  $Re_{1c}$ , pour un rapport de rayon fixé, suit une loi de puissance

$$Re_{1c}/Re_{1c}(B_i = 0) \propto B_i^{1.2}. \quad (3.23)$$

Le mode critique est axisymétrique ( $m_c = 0$ ) et le nombre d'onde axial critique, représenté sur la figure 3.23(b), évolue pour un rapport de rayon fixé comme

$$k_c/k_c(B_i = 0) \propto B_i^{0.4}. \quad (3.24)$$

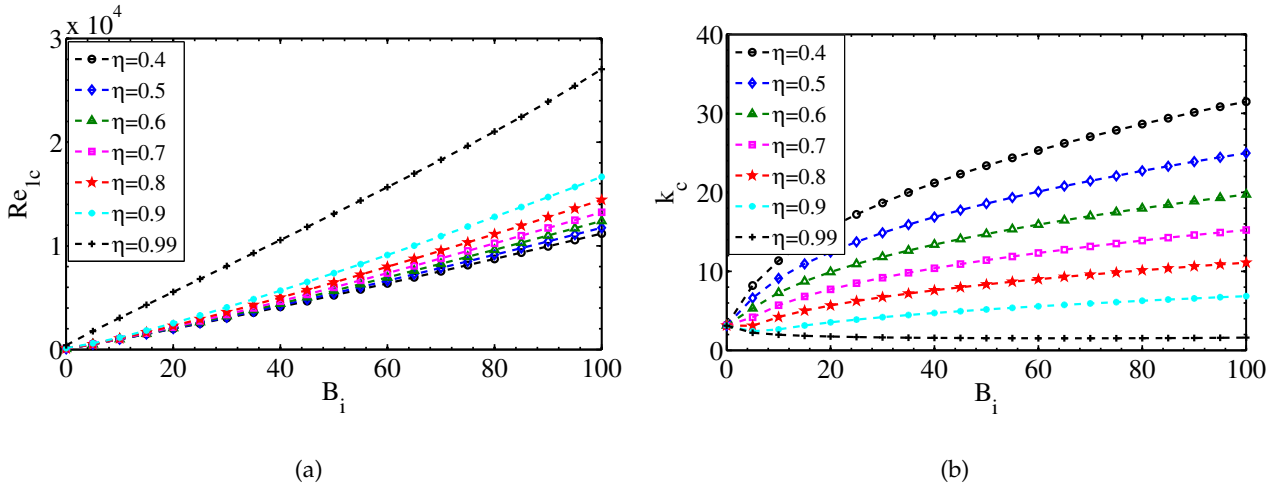


FIG. 3.23 – Variation du nombre de Reynolds critique (a) et du nombre d'onde axial critique (b) en fonction de nombre de Bingham  $B_i$  pour différentes valeurs du rapport de rayon quand seul le cylindre intérieur tourne.

Les figures 3.24(a)-3.24(e) montrent les conditions critiques en régimes contra-rotatif et co-rotatif pour les rapports de rayons  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$ .

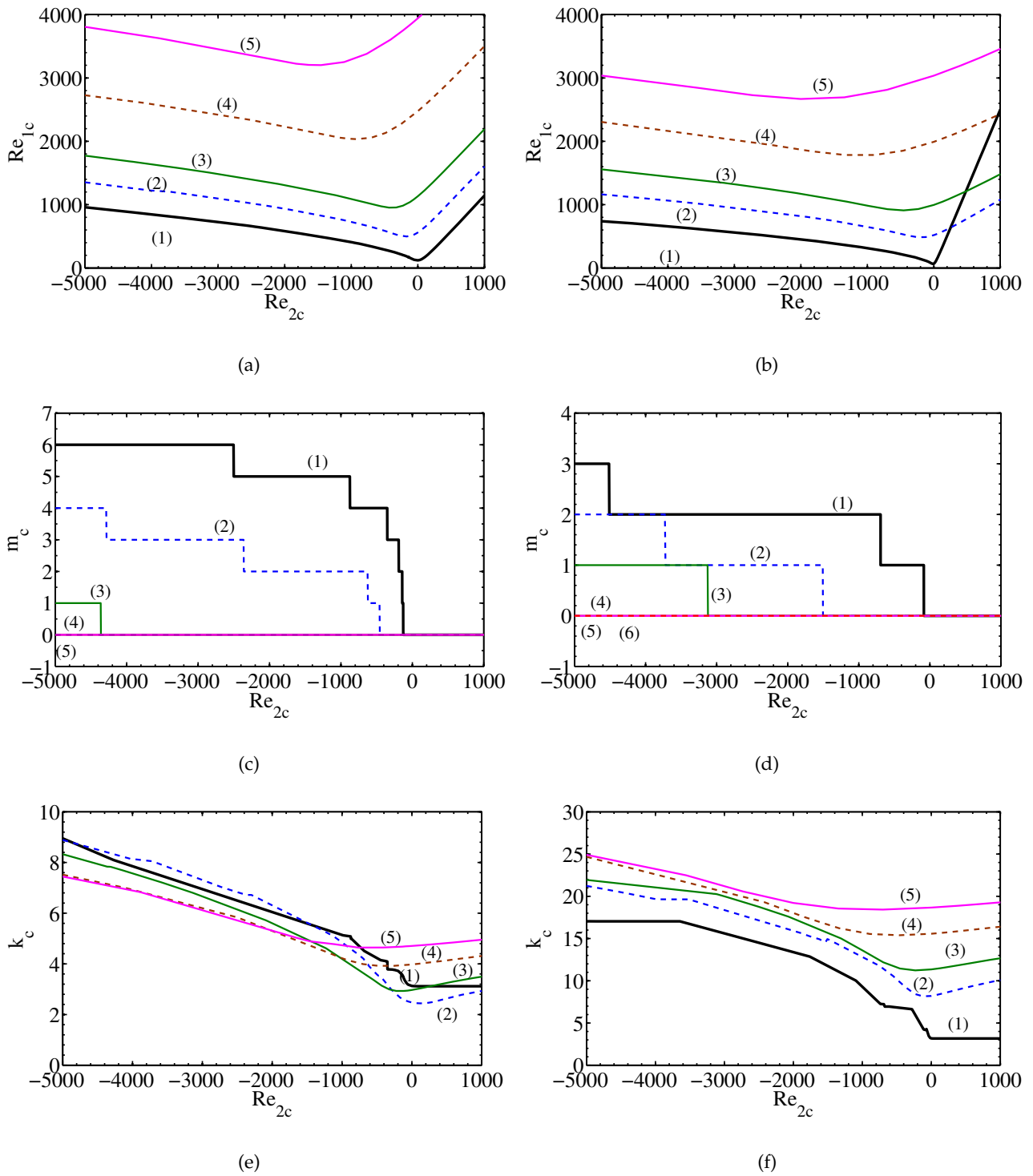


FIG. 3.24 – Conditions critiques d’apparition des instabilités pour un fluide de Bingham pour deux rapports de rayons,  $\eta = 0.881$  (figures de gauche) et  $\eta = 0.4$  (figures de droite). (a) et (b) Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , (c) et (d) nombres d’onde azimutaux critiques, (e) et (f) nombres d’onde axiaux critiques. (1) Fluide newtonien, (2)  $B_i = 5$ , (3)  $B_i = 10$ , (4)  $B_i = 20$ , (5)  $B_i = 30$  et (6)  $B_i = 50$ .



Pour un entrefer étroit, l'existence du seuil est toujours stabilisant en régimes contra- et co-rotatifs comme le montrent la figure 3.24(a) et les figures 3.25(a)(b), représentant l'évolution du nombre de Reynolds critique avec le nombre de Bingham  $B_i$ .

Pour un large entrefer, la figure 3.24(b) et la figure 3.25(b) montrent aussi un caractère stabilisant du seuil en régime contra-rotatif. Néanmoins, une caractéristique fondamentale observée à ce niveau est que, pour des cylindres co-rotatifs, le seuil a un effet déstabilisant pour les grandes valeurs de  $Re_2$  comme le montrent la figure 3.24(b) et la figure 3.25(d). Ce phénomène a déjà été observé par [Peng et Zhu, 2004] et [Landry *et al.*, 2003] et une explication a été donnée par [Landry, 2006].

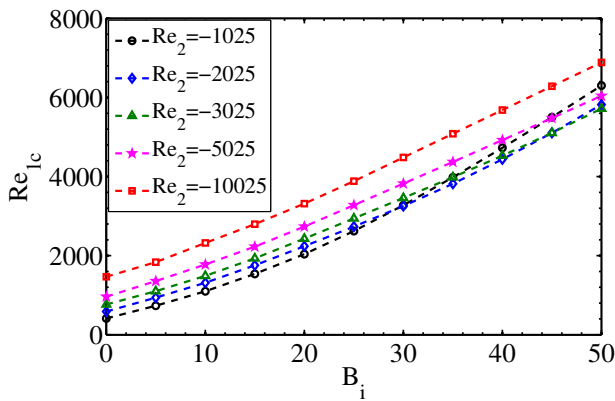
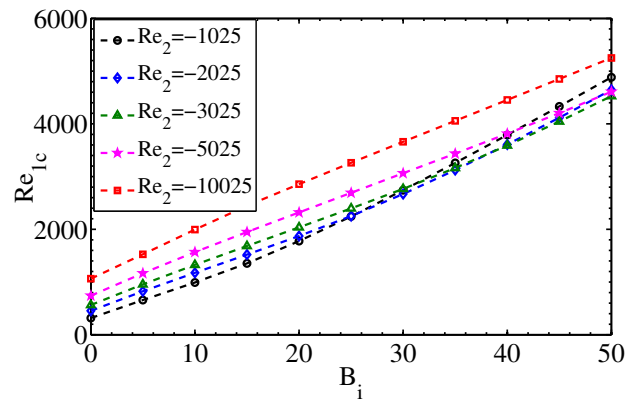
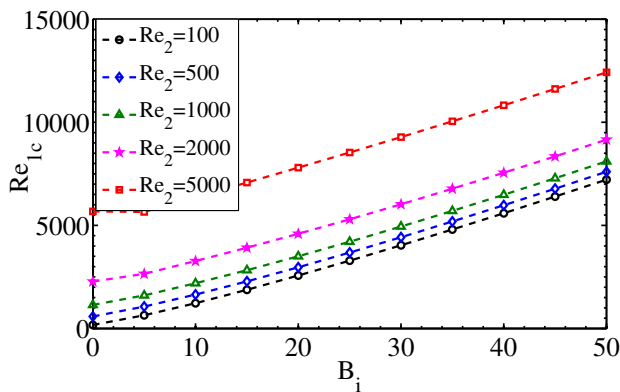
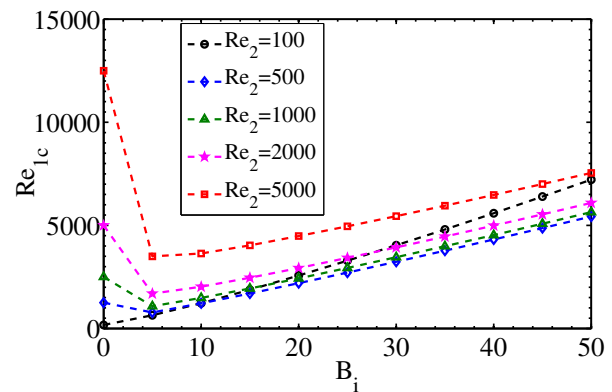
(a)  $\eta = 0.881$ (b)  $\eta = 0.4$ (c)  $\eta = 0.881$ (d)  $\eta = 0.4$ 

FIG. 3.25 – Variation du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham  $B_i$  pour différents rapports de rayon. (a) et (b) Cylindres en régime contra-rotatif, (c) et (d) cylindres en régime co-rotatif.

Comme pour les fluides rhéofluidifiants sans seuil de contrainte, l'influence du seuil peut être appréciée en suivant l'évolution avec le nombre de Bingham des deux termes en compétition dans l'équation d'énergie des perturbations du § 3.5.2. De nouveau, le nombre de Reynolds  $Re_2$  est fixé

et on détermine le nombre de Reynolds intérieur critique pour le cas newtonien  $Re_{1c}(B_i = 0)$ . On considère ensuite un fluide de Bingham, et pour les valeurs de  $Re_2$  et  $Re_1 = Re_{1c}(B_i = 0)$ , on détermine pour le mode le moins stable correspondant aux valeurs optimales des nombres d'onde axiaux  $k_c$  et azimutaux  $m_c$  les valeurs de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ .

Pour des cylindres tournant en sens opposés, la figure 3.26(a) montre que lorsqu'on augmente la valeur du seuil, la production moyenne d'énergie reste proche de celle d'un fluide newtonien tandis que la dissipation visqueuse augmente significativement, rendant l'écoulement plus stable.

Pour des cylindres tournant dans le même sens, lorsqu'on augmente le seuil, la dissipation visqueuse et la production d'énergie moyenne augmentent progressivement avec  $\Gamma^+ \leq \Gamma^-$ . Le seuil a alors un effet déstabilisant. Au-delà d'une valeur limite du nombre de Bingham  $B_i$ , comme illustré sur la figure 3.26(b), le terme d'échange d'énergie devient plus grand que la dissipation entraînant ainsi une stabilisation de l'écoulement.

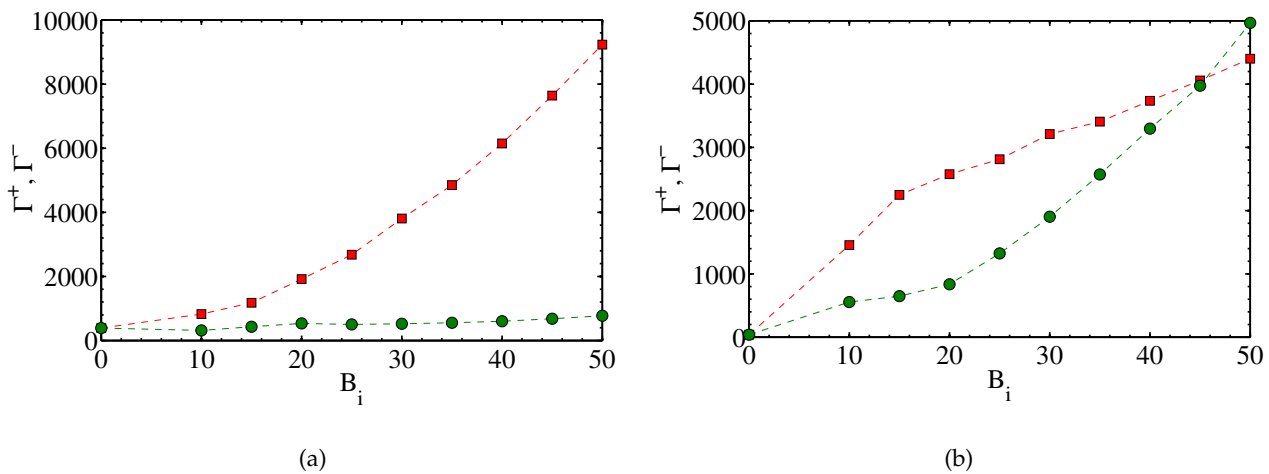


FIG. 3.26 – Moyenne spatiale ( $\circ$ ) de la production d'énergie  $\Gamma^+$  et ( $\square$ ) de la dissipation  $\Gamma^-$  définies par l'équation (3.21) pour un fluide à seuil avec  $\eta = 0.4$  en fonction du nombre de Bingham  $B_i$ . (a)  $Re_2 = -2025$ , (b)  $Re_2 = 500$ .

Les nombres d'onde axiaux des structures instables augmentent avec  $B_i$  et  $|Re_2|$ , figure 3.24(c)(d). Ils varient peu avec  $B_i$  pour un faible entrefer, mais ils augmentent avec  $B_i$  pour un large entrefer. Pour des cylindres contra-rotatifs, le nombre d'onde azimutal reste axisymétrique jusqu'à de plus grandes valeurs de  $|Re_2|$  lorsqu'on augmente  $B_i$  comme le montrent les figures 3.24(e) et 3.24(f).

### 3.5.5 Caractéristiques des structures à la transition

Pour caractériser l'aspect des structures à l'apparition des instabilités, des contours de la vitesse radiale et de la vorticité azimutale ont été représentés. Avant l'apparition des instabilités, ces deux grandeurs sont nulles, l'écoulement de base étant purement azimutal.

Pour un fluide newtonien, les contours de la vitesse radiale de la figure 3.27(b) et les contours de la vorticité azimutale de la figure 3.28(b) montrent l'apparition de rouleaux contra-rotatifs occupant tout l'espace annulaire lorsque seul le cylindre intérieur est en rotation. .

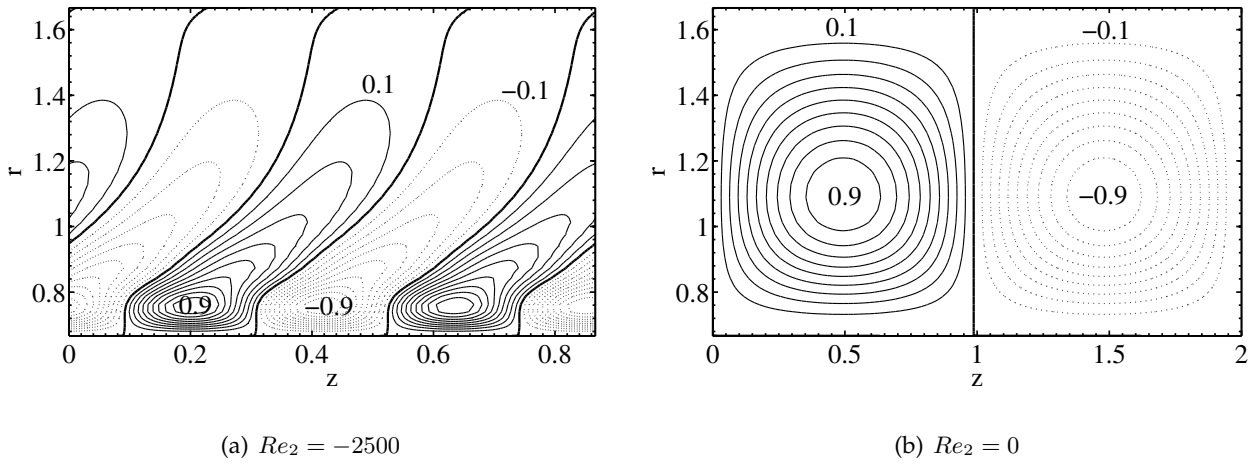


FIG. 3.27 – Contours de la vitesse radiale aux conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayon  $\eta = 0.4$  et pour deux valeurs de Reynolds extérieur  $Re_2$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives.

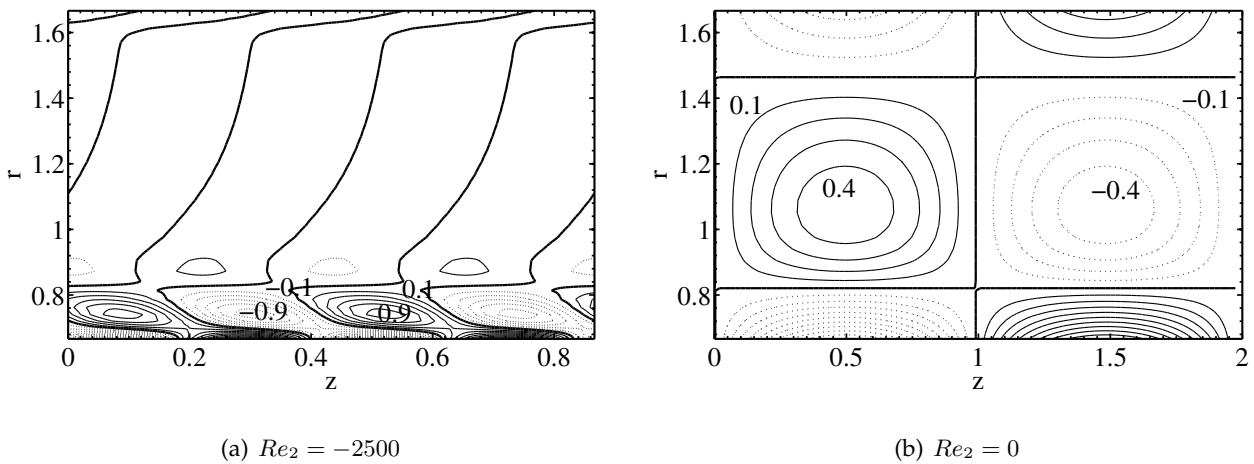


FIG. 3.28 – Contours de la vorticité azimutale aux conditions critiques pour un fluide newtonien, un rapport de rayon  $\eta = 0.4$  et pour deux valeurs de Reynolds extérieur  $Re_2$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives.

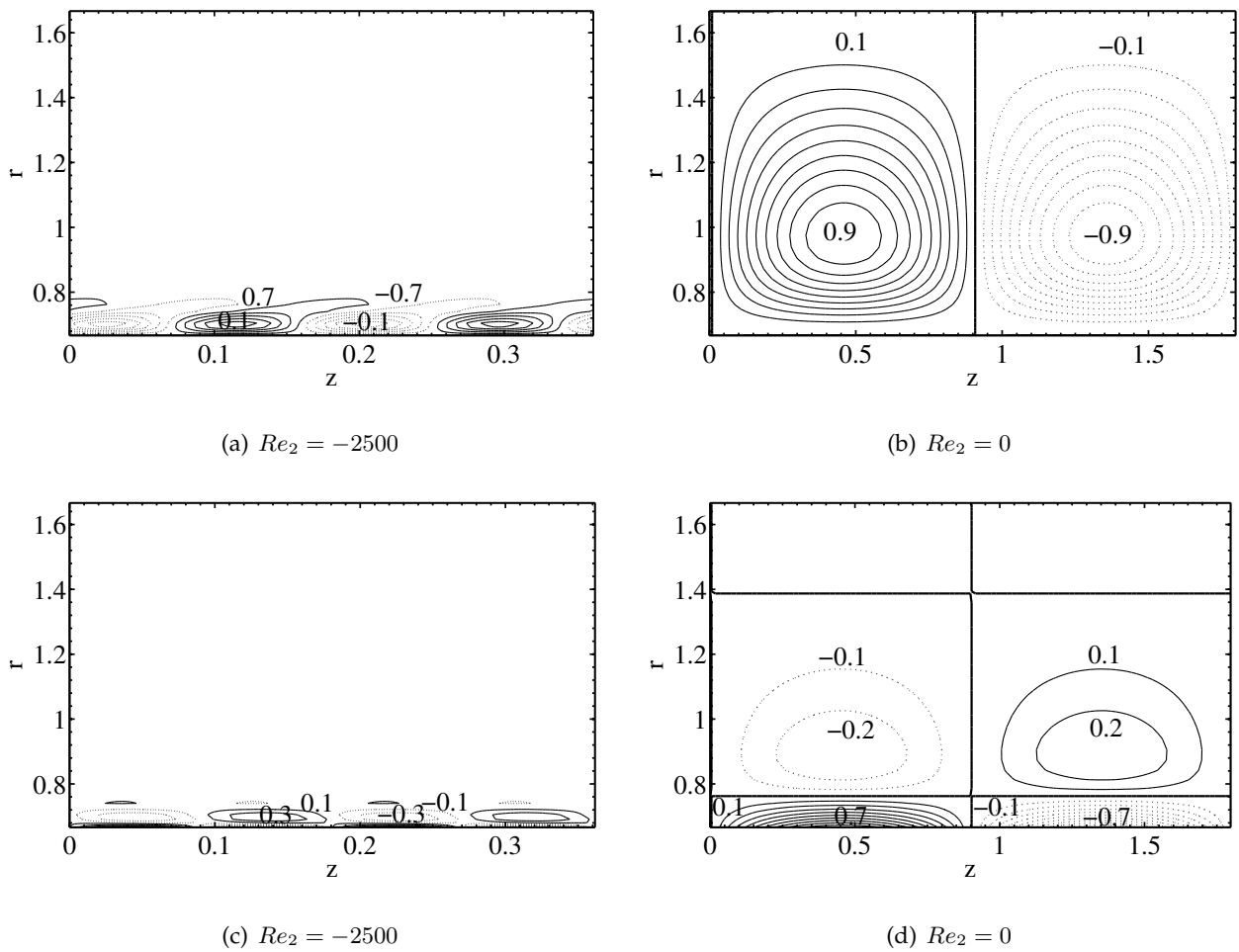


FIG. 3.29 – Contours de (a), (b) vitesse radiale et de (c), (d) vorticité azimutale aux conditions critiques pour un fluide en loi de puissance  $n_p = 0.5$  pour deux valeurs du nombre de Reynolds extérieur  $Re_2$ . Rapport de rayon  $\eta = 0.4$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives.

Lorsque les deux cylindres sont contra-rotatifs, les figures 3.27(a) et 3.28(a) montrent les contours de la vitesse radiale et de la vorticité azimutale. Les rouleaux dans ce cas sont inclinés ( $m_c \neq 0$ ). Et, comme observé par [Taylor, 1923], les structures instables de la première bifurcation sont écrasées contre la paroi du cylindre intérieur. Ceci confirme que l'échange d'énergie se fait principalement à la paroi du cylindre intérieur.

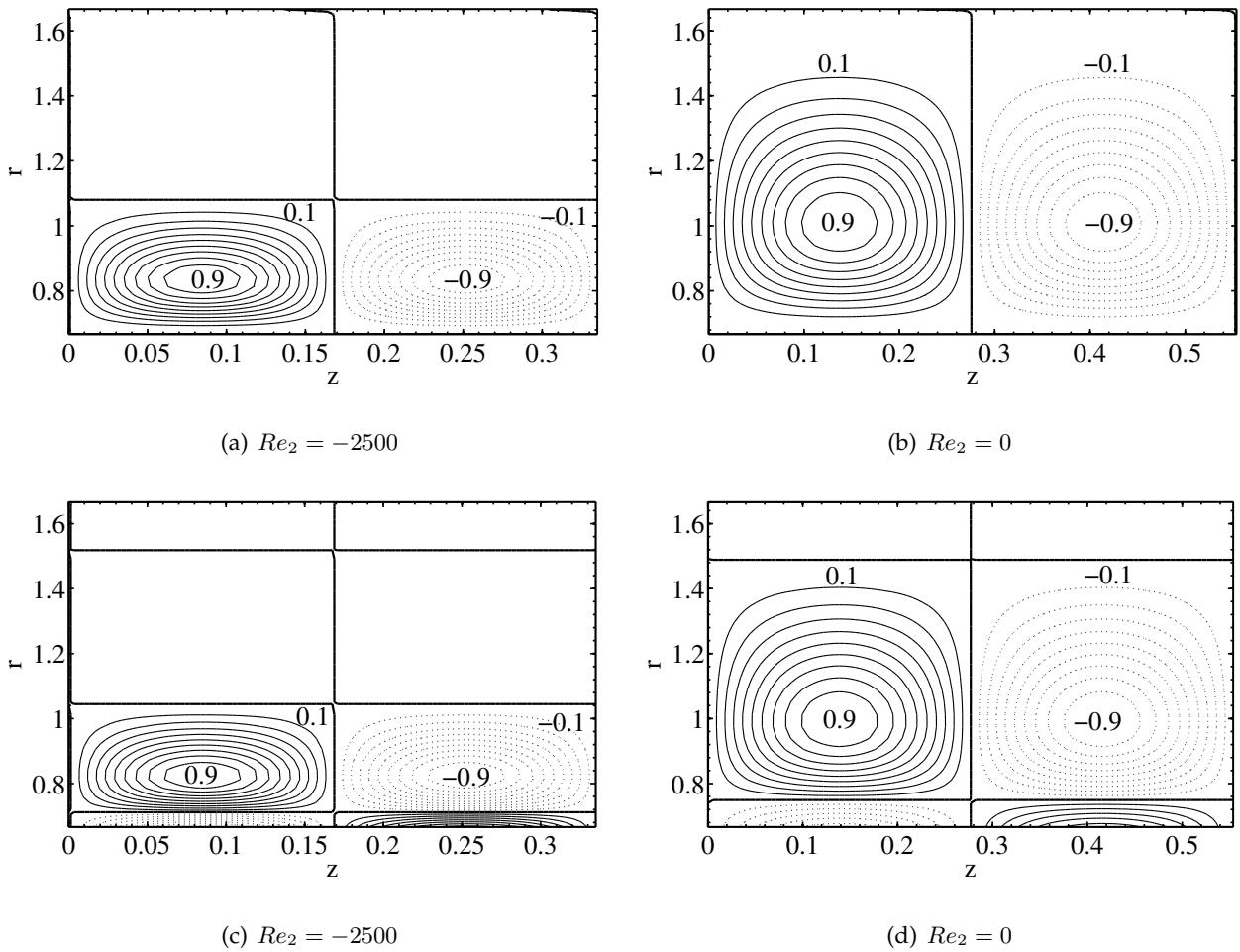


FIG. 3.30 – Contours de (a), (b) vitesse radiale et de (c), (d) vorticité azimutale aux conditions critiques pour un fluide de Bingham  $B_i = 10$  pour deux valeurs du nombre de Reynolds extérieur  $Re_2$ . Rapport de rayon  $\eta = 0.4$ . La ligne continue représente les valeurs positives et les tirets les valeurs négatives.

Pour un fluide en loi de puissance, lorsque seul le cylindre intérieur tourne, la figure 3.29(b) montre que les rouleaux contra-rotatifs ont une taille similaire à la taille du cas newtonien. Ceci est conforme aux résultats de la figure 3.12(b). L'influence du caractère rhéofluidifiant est mis en évidence grâce aux contours de la vorticité azimutale de la figure 3.29(d). Il apparaît que, contrairement aux fluides newtoniens, les tourbillons ne sont plus délimités par des jets axiaux.

Lorsque les deux cylindres sont contra-rotatifs, l'écrasement des structures contre la paroi du cylindre intérieur est beaucoup plus marqué.

La figure 3.30 présente les contours de la vitesse radiale et de la vorticité azimutale pour un fluide de Bingham. On observe pour un cylindre extérieur immobile que les structures ont une forme très proche du cas newtonien.

Pour des cylindres contra-rotatifs, les structures sont moins déformées que dans le cas newtonien et

moins écrasées contre le cylindre intérieur que pour des fluides en loi de puissance.

### 3.6 Conclusion

Nous avons effectué une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette circulaire pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Le caractère rhéofluidifiant a un effet déstabilisant alors que le caractère seuil a un effet stabilisant.

Les résultats numériques montrent qu'en utilisant des nombres de Reynolds définis avec la viscosité calculée à la paroi du cylindre intérieur, la rhéofluidification peut amener à un effet déstabilisant lorsque les deux cylindres sont en contra-rotation. Dans le cas des fluides de Bingham, un effet déstabilisant est observé pour des valeurs faibles ou modérées de  $B_i$ .

Les caractéristiques des structures instables à la transition ont été présentées. Ces structures sont localisées au voisinage de la paroi du cylindre intérieur lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente.

# Chapitre 4

## ANALYSE LINÉAIRE DE STABILITÉ : APPROCHE NON MODALE

**N**ous décrivons dans ce chapitre le comportement d'une perturbation infinitésimale aux temps courts. La non normalité de l'opérateur linéaire associé aux équations du mouvement vis à vis du produit scalaire défini à partir de la norme énergie, induit une croissance transitoire de l'énergie cinétique. L'amplification de l'énergie cinétique peut être suffisamment grande pour que les termes non linéaires deviennent importants et entraînent une déstabilisation sous-critique de l'écoulement. Ce phénomène joue donc un rôle crucial dans la transition vers la turbulence. Pour les fluides newtoniens, la croissance transitoire dans un écoulement de Couette entre deux cylindres tournants a été abordée pour la première fois par [Hristova et al., 2002] et [Meseguer, 2002] mais aussi récemment par [Maretzke et al., 2014]. Dans ce chapitre, nous allons analyser l'influence de la rhéologie i.e de la modification du profil des vitesses, de la stratification de la viscosité et de l'anisotropie du tenseur des contraintes sur la croissance transitoire. Une analyse des différents mécanismes gouvernant la croissance transitoire est aussi effectuée.

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Non-normalité et pseudospectre . . . . .	83
4.3	Formulation mathématique de la croissance transitoire . . . . .	87
4.3.1	Méthode de résolution numérique . . . . .	88

4.3.2	Validation . . . . .	89
4.3.3	Croissance transitoire pour des fluides rhéofluidifiants . . . . .	92
4.3.4	Influence de l'anisotropie sur la croissance transitoire . . . . .	100
4.3.5	Contribution des modes propres à la croissance transitoire . . . . .	102
4.3.6	Évolution de la perturbation optimale : les mécanismes de la croissance transitoire . . . . .	103
4.4	Conclusion . . . . .	<b>120</b>

---



## 4.1 Introduction

L'approche modale traditionnelle du comportement aux temps longs d'une perturbation présentée dans le chapitre 3 a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le moins stable. Cependant, du fait de la non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire, cette analyse se révèle insuffisante car elle ne permet pas de décrire le comportement de la perturbation aux temps courts. Cette propriété mathématique de non-normalité signifie que le sous-espace des perturbations admissibles formées par une combinaison linéaire des modes propres peut extraire de l'énergie de l'écoulement de base. Ainsi, l'énergie cinétique de la perturbation peut croître de manière transitoire même si l'écoulement est linéairement stable. Cette amplification de l'énergie peut être suffisamment importante pour que les termes non linéaires prennent de l'importance et déclenchent la transition vers la turbulence.

L'étude de la croissance transitoire est utilisée à la base pour comprendre la transition sous-critique observée dans le régime linéaire stable contra-rotatif. En effet, les études expérimentales de [Coles, 1965, Atta, 1966] ont montré qu'on peut voir apparaître des spirales turbulentes dans ce régime pour des nombres de Reynolds importants du cylindre extérieur.

Nous proposons dans cette partie d'étudier l'amplification aux temps courts de l'énergie de la perturbation et de déterminer la structure de la perturbation optimale qui permet d'avoir une amplification d'énergie maximale pour les fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte.

## 4.2 Non-normalité et pseudospectre

Par définition, un opérateur  $\mathcal{L}$  est non-normal dans un espace de Hilbert s'il ne commute pas avec son adjoint  $\mathcal{L}^*$ ,

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^* \neq \mathcal{L}^*\mathcal{L}. \quad (4.1)$$

La non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire  $\mathcal{L} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{M}$  (les opérateurs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{L}$  sont définis dans l'annexe A) peut être mise en évidence en étudiant les propriétés de ses pseudospectres [Trefethen *et al.*, 1993, Reddy *et al.*, 1993].

Considérons  $\mathcal{C}$ , la représentation discrète de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Le pseudospectre de  $\mathcal{C}$  est défini comme le sous-espace des nombres complexes  $z$  pour lesquels  $\| (z\mathbf{I} - \mathcal{C})^{-1} \|_E^2 > \epsilon^{-1}$ , où  $\epsilon$  est un nombre positif infiniment petit. Le pseudospectre peut également être défini comme le sous-espace des nombres complexes  $z$  qui sont valeurs propres de  $\mathcal{C} + \Delta\mathcal{C}$  où  $\Delta\mathcal{C}$  est une matrice des perturbations telle que  $\|\Delta\mathcal{C}\|_E^2 > 1/\epsilon$ , avec  $\|(\cdot)\|_E^2$  la norme énergie définie par l'équation (4.3). La matrice des perturbations a une signification physique. En effet, la sensibilité de l'opérateur n'est pas prise en compte dans l'analyse linéaire de stabilité. Cependant, de petites perturbations comme des effets de vibrations pa-

rasites, de rugosité peuvent fortement influencer le comportement des modes les moins stables dans la zone linéairement stable.

Habituellement, le pseudospectre est représenté par les contours de la norme du résolvant  $\left( z\mathbf{I} - \mathcal{L} \right)_{\approx}$  pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . Plus le degré de non-normalité est important et plus les valeurs propres sont sensibles aux perturbations.

La figure 4.1(a) montre le pseudospectre de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\approx}$  pour un fluide newtonien sur la ligne de Rayleigh avec  $k = 3.318$ ,  $m = 0$ ,  $Re_1 = 62.997 \times 10^2$ ,  $Re_2 = 55.5 \times 10^2$ . Les iso-contours marqués  $p$  délimitent les frontières dans le plan complexe des pseudospectres avec  $\epsilon = 10^{-p}$ . L'effet de la non-normalité de l'opérateur linéaire se manifeste beaucoup plus au niveau des valeurs propres les moins stables du spectre. Les figures 4.1(a) et 4.1(b) mettent en évidence, pour les couples de nombres de Reynolds considérés sur la ligne de Rayleigh, que des perturbations d'amplitude  $O(10^{-3.9})$  et  $O(10^{-5.2})$  pour  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$  respectivement, peuvent entraîner un passage dans le demi-plan instable.

Sur les figures 4.2(a) et 4.2(b) sont présentés à titre d'exemple, les pseudospectres pour un écoulement de fluide newtonien en dehors de la ligne de Rayleigh en régime contra-rotatif. L'effet de la non-normalité dans ce cas est plus prononcé à l'intersection des trois branches du spectre. Une perturbation de l'ordre de  $O(10^{-1})$  suffit dans ce cas pour étendre les frontières du pseudospectre dans le demi-plan instable pour  $k = 2.176$ ,  $m = 13$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ .

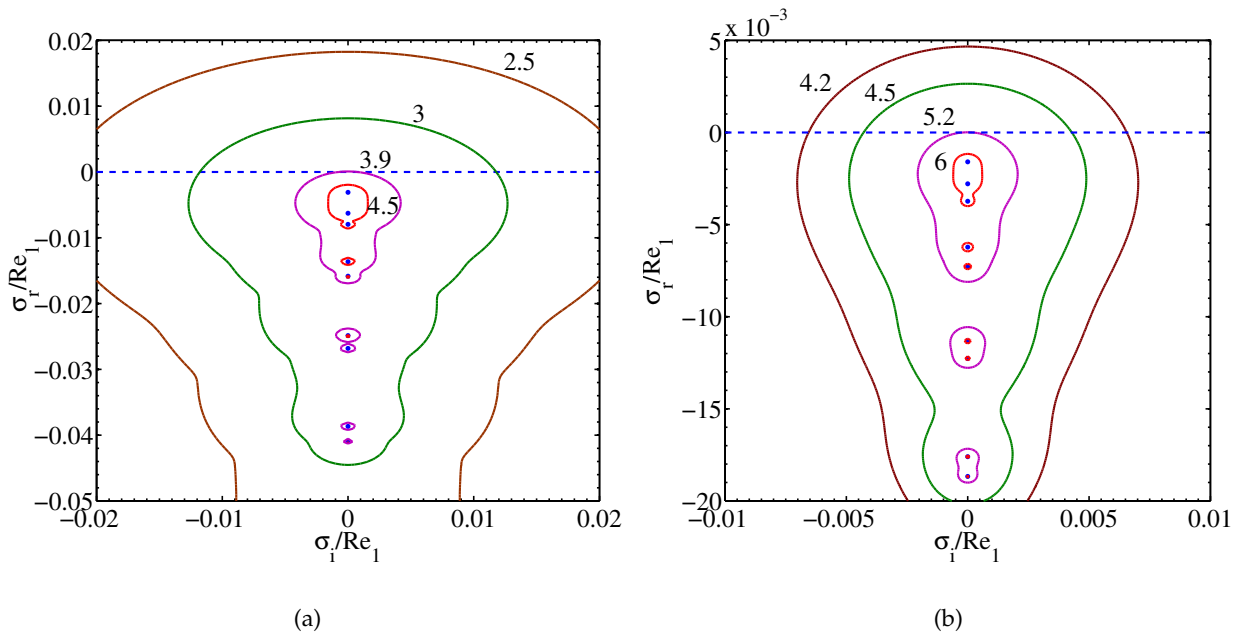


FIG. 4.1 – Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide newtonien sur la ligne de Rayleigh (a) pour un rapport de rayons  $\eta = 0.881$  avec  $Re_1 = 62.997 \times 10^2$ ,  $Re_2 = 55.5 \times 10^2$ ,  $k = 3.318$ ,  $m = 0$ ; (b) pour un rapport de rayons  $\eta = 0.4$  avec  $Re_1 = 138.75 \times 10^2$ ,  $Re_2 = 55.5 \times 10^2$ ,  $k = 3.416$ ,  $m = 0$ .

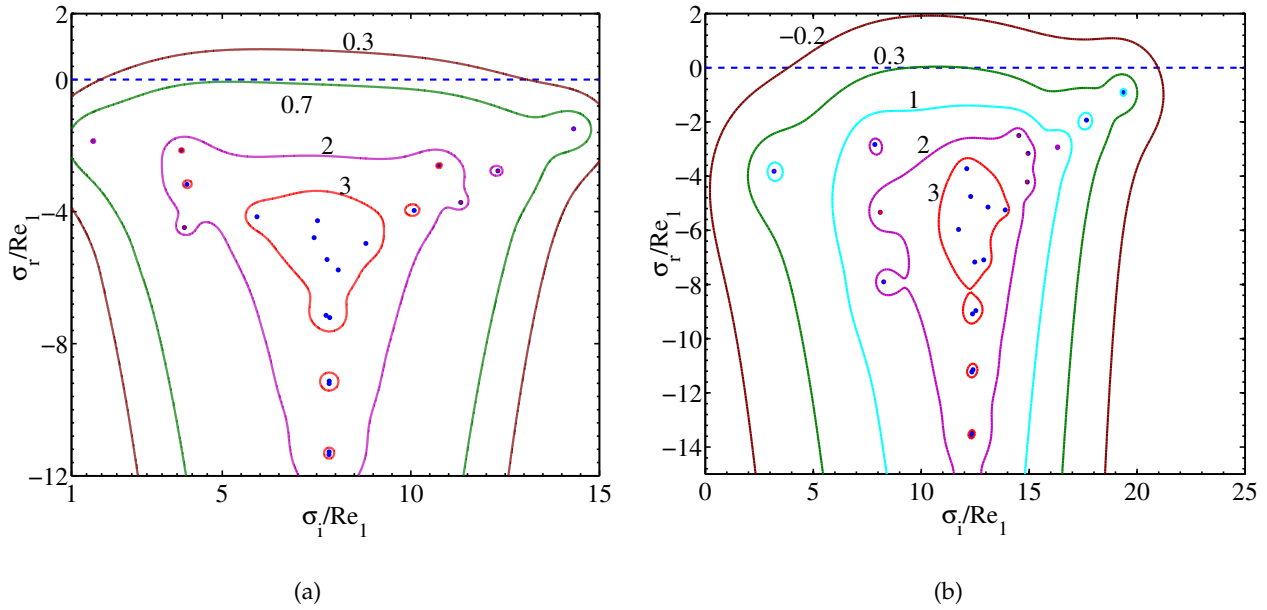


FIG. 4.2 – Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide newtonien entre deux cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ). (a)  $\eta = 0.881$ ,  $k = 2.176$ ,  $m = 13$  et (b)  $\eta = 0.4$ ,  $k = 1.136$ ,  $m = 3$ .

Sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5, sont représentés des pseudospectres pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Les pseudospectres sont calculés aux mêmes valeurs de nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  que pour le cas newtonien considéré à la figure 4.2.

La non-normalité de l'opérateur linéaire est légèrement modifiée par le comportement rhéofluidifiant avec ou sans seuil de contrainte. Par exemple, comme illustré sur la figure 4.4(a) pour un fluide de Carreau avec  $n_c = 0.5$  et  $\lambda = 10$ , une perturbation de l'ordre de  $O(10^{-1.5})$  suffit pour assurer le passage du pseudospectre dans la région du demi-plan instable pour les nombres Reynolds considérés et un entrefer étroit.

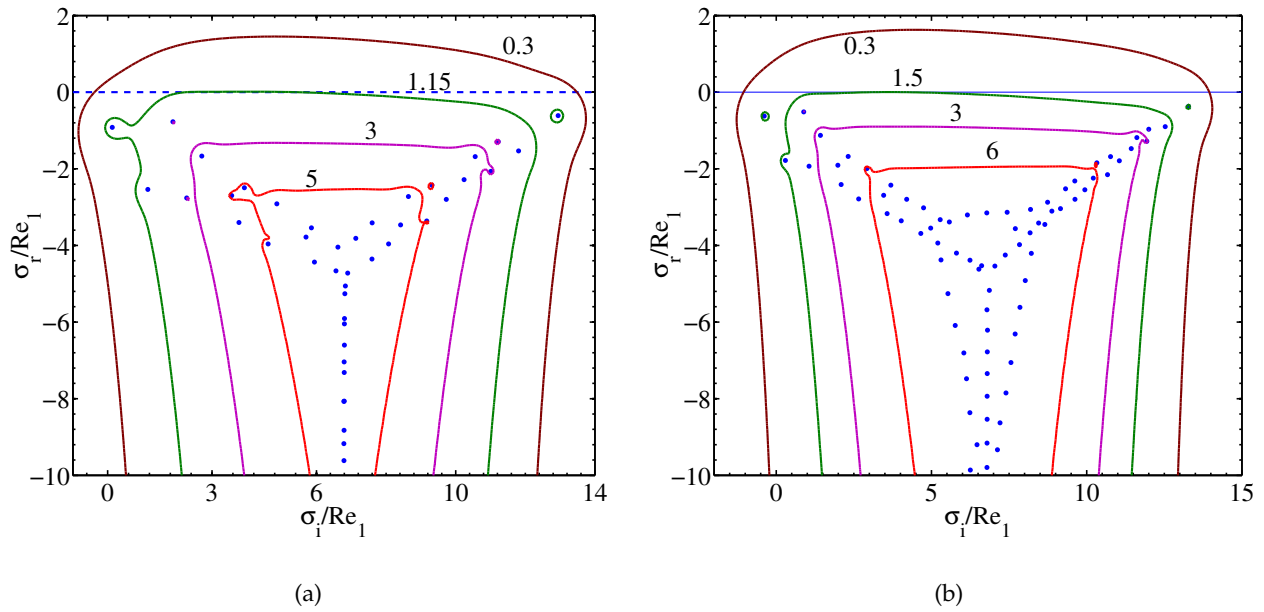


FIG. 4.3 – Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide en loi de puissance  $n_p = 0.5$ , pour des cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ). (a)  $\eta = 0.881$ ,  $k = 1.647$ ,  $m = 11$  et (b)  $\eta = 0.4$ ,  $k = 0.911$ ,  $m = 2$ .

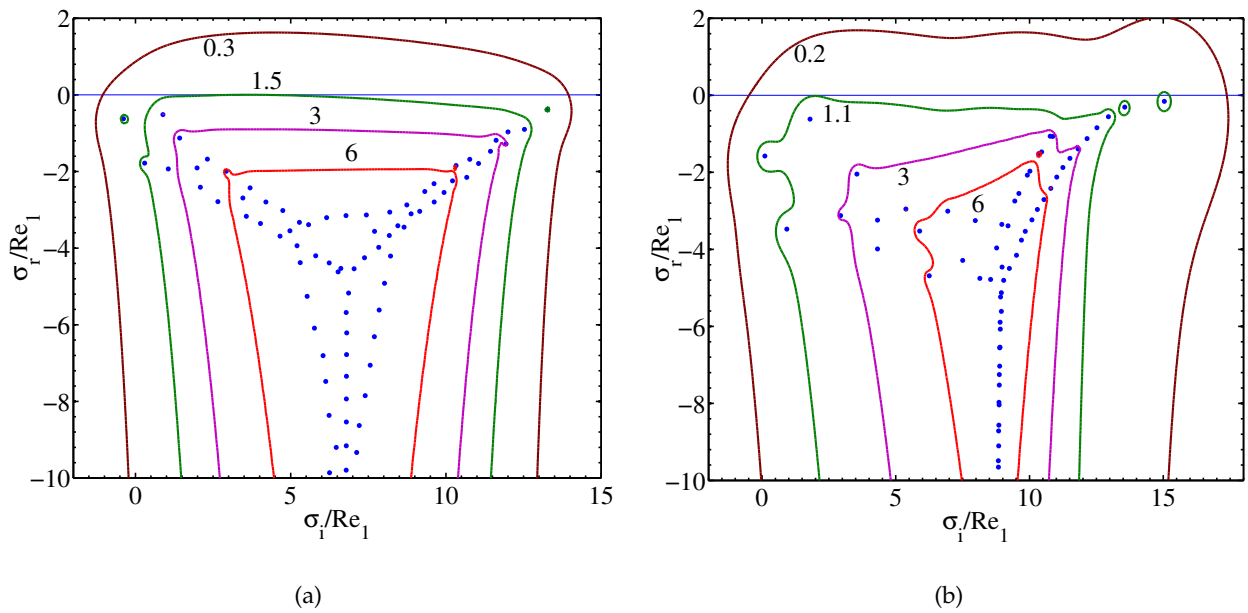


FIG. 4.4 – Pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide de Carreau  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  pour des cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ). (a)  $\eta = 0.881$ ,  $k = 1.736$ ,  $m = 11$  et (b)  $\eta = 0.4$ ,  $k = 1.221$ ,  $m = 2$ .

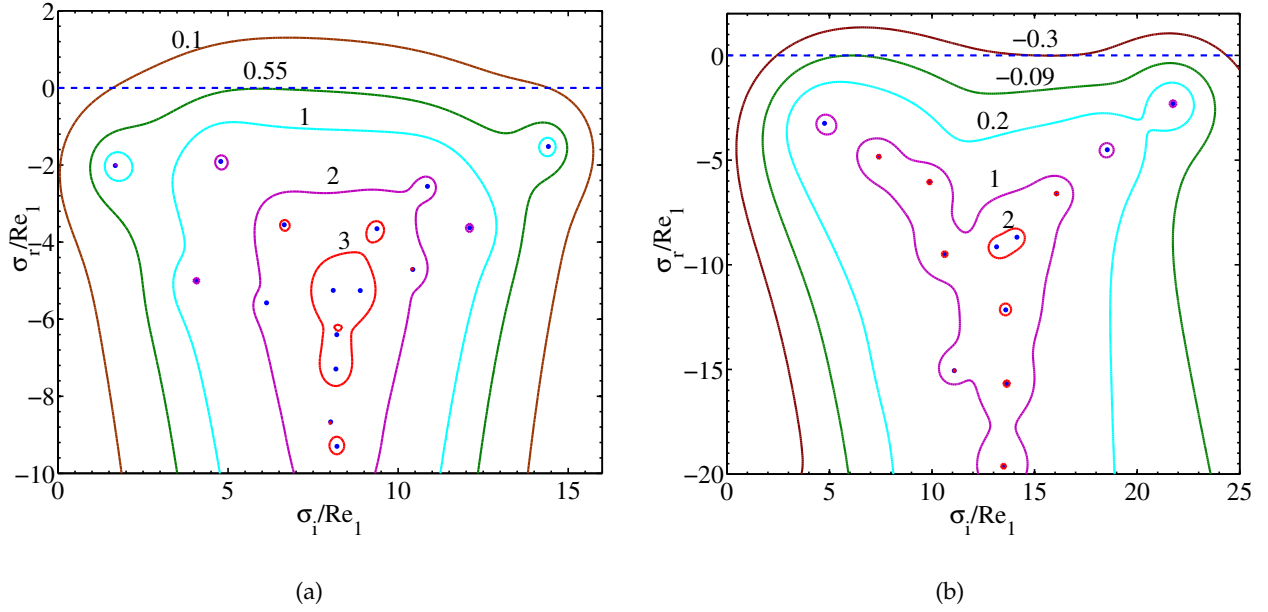


FIG. 4.5 – Pseudospectre de l’opérateur linéaire pour un fluide de Bingham  $B_i = 10$ , pour des cylindres en régime contra-rotatif ( $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ). (a)  $\eta = 0.881$ ,  $k = 1.964$ ,  $m = 13$  et (b)  $\eta = 0.4$ ,  $k = 3.427$ ,  $m = 3$ .

### 4.3 Formulation mathématique de la croissance transitoire

Nous reprenons le problème aux valeurs propres §2.6 du chapitre 2. L’énergie cinétique moyenne de la perturbation à l’instant  $t$  est définie par

$$\|\underline{\mathbf{q}}(t)\|_E^2 = \frac{2\pi}{S} \int_{R_1}^{R_2} (\tilde{u}\tilde{u}^* + \tilde{v}\tilde{v}^* + \tilde{w}\tilde{w}^*) r dr, \quad (4.2)$$

avec  $S = \pi (R_2^2 - R_1^2)$ . La moyenne est effectuée dans le volume délimité par les deux cylindres, d’une hauteur égale à la longueur d’onde axiale ( $2\pi/k$ ). L’évolution transitoire de l’énergie cinétique de la perturbation dans le régime linéairement stable est déterminée en suivant la méthode classique décrite par [Schmid et Henningson, 2001]. Nous présentons dans la suite cette méthode pour une formulation  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  (annexe A). La même méthode est applicable à la formulation  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  avec l’opérateur correspondant (annexe A).

Pour un mode de Fourier donné, l’énergie cinétique instantanée de la perturbation est donnée dans la formulation  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  par

$$\|\underline{\mathbf{q}}(t)\|_E^2 = \frac{2\pi}{S} \int_{R_1}^{R_2} \left[ |\tilde{u}|^2 + \frac{1}{k^2} \frac{1}{r^2} \left| \frac{d}{dr}(r\tilde{u}) \right|^2 + \left( \frac{m^2}{k^2 r^2} + 1 \right) |\tilde{v}|^2 + \frac{im}{k^2 r} \left( \frac{\tilde{v}}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{u}^*) - \frac{\tilde{v}^*}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{u}) \right) \right] r dr. \quad (4.3)$$

Cette fonction dépend du temps et de la condition initiale  $\underline{\mathbf{q}}_0 = (u_0, v_0)^T = \underline{\mathbf{q}}(r, t = 0, m, k)$ .

La formulation  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  est obtenue après l'élimination de la composante  $\tilde{v}$  grâce à l'équation de continuité

$$\|\underline{\mathbf{q}}(t)\|_E^2 = \frac{2\pi}{S} \int_{R_1}^{R_2} \left[ |\tilde{u}|^2 + \frac{1}{m^2} \left| \frac{d}{dr}(r\tilde{u}) \right|^2 + \left( \frac{k^2 r^2}{m^2} + 1 \right) |\tilde{w}|^2 + \frac{ikr^2}{m^2} \left( \frac{\tilde{w}}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{u}^*) - \frac{\tilde{w}^*}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{u}) \right) \right] r dr. \quad (4.4)$$

Le maximum d'amplification de l'énergie cinétique au temps  $t$  pour toutes les conditions initiales possibles est défini par

$$G(t, m, k) = \sup_{\underline{\mathbf{q}}_0 \neq 0} \frac{\|\underline{\mathbf{q}}(t)\|_E^2}{\|\underline{\mathbf{q}}(0)\|_E^2}. \quad (4.5)$$

Le maximum d'énergie cinétique, quel que soit l'instant  $t$  considéré, est donné par

$$G^{max}(m, k) = \sup_{t \geq 0} G(t, m, k). \quad (4.6)$$

Le maximum de  $G^{max}$  pour toutes les combinaisons de modes  $(m, k)$  est l'amplification optimale notée  $G^{opt}$ . Cette amplification optimale est atteinte au temps optimal  $t^{opt}$ .

### 4.3.1 Méthode de résolution numérique

L'amplification de l'énergie  $G(t, m, k)$  est obtenue par calcul numérique. Considérons un sous espace linéaire  $\mathcal{S}_M$  constitué de  $M$  fonctions propres  $\underline{\mathbf{q}}_j = (\tilde{u}_j, \tilde{v}_j)^T$  correspondant aux  $M$  valeurs propres les moins stables du spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Ces valeurs propres sont ensuite classées dans l'ordre décroissant du taux d'amplification temporelle  $\sigma_r$ . Toute perturbation admissible peut être écrite d'une manière approchée comme une combinaison linéaire des fonctions propres  $\underline{\mathbf{q}}_j$ , soit

$$\underline{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{j=M} K_j \underline{\mathbf{q}}_j = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{K}}, \quad (4.7)$$

où  $\underline{\mathbf{Q}}$  est la matrice des vecteurs propres  $\underline{\mathbf{q}}_j$ . On peut alors approcher  $G(t, m, k)$  en calculant l'amplification d'énergie maximale possible au temps  $t$  sur toutes les combinaisons initiales possibles des  $M$  vecteurs propres.

Le problème aux valeurs initiales (2.79) au §2.6 du chapitre 2, peut s'écrire

$$\underline{\mathbf{K}} = e^{\underline{\Sigma} t} \underline{\mathbf{K}}_0, \quad (4.8)$$

avec  $\underline{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_M)$  la matrice diagonale des valeurs propres et  $\underline{\mathbf{K}}_0$  le vecteur des coefficients qui déterminent la perturbation initiale.

La norme énergie de  $\underline{q}(t)$  s'écrit

$$\|\underline{q}(t)\|_E^2 = \underline{K}^* \underline{M} \underline{K} = \underline{K}^* \underline{F}^H \underline{F} \underline{K} = \|\underline{F} \underline{K}\|_2^2, \quad (4.9)$$

où l'exposant  $H$  représente la transposée conjuguée,  $\underline{M}$  est une matrice Hermitienne définie positive qui peut donc être écrite sous la forme  $\underline{M} = \underline{F}^H \underline{F}$ . Les éléments de cette matrice hermitienne proviennent du produit scalaire des  $M$  fonctions propres normalisé par la norme énergie (4.3). Ainsi,

$$G(t) = \sup_{\underline{K}_0 \neq 0} \frac{\|\underline{F} \underline{K}(t)\|_2^2}{\|\underline{F} \underline{K}_0\|_2^2} = \sup_{\underline{K}_0 \neq 0} \frac{\|\underline{F} e^{\underline{\Sigma} t} \underline{F}^{-1} \underline{F} \underline{K}_0\|_2^2}{\|\underline{F} \underline{K}_0\|_2^2}. \quad (4.10)$$

Comme le terme  $\underline{F} \underline{K}_0$  est un vecteur, l'amplification de l'énergie peut être exprimée en utilisant la norme 2 matricielle telle que

$$G(t) = \left\| e^{\underline{\Sigma} t} \right\|_E^2 = \left\| \underline{F} e^{\underline{\Sigma} t} \underline{F}^{-1} \right\|_2^2 = s_1^2, \quad (4.11)$$

où  $s_1$  est la plus grande valeur singulière de la matrice  $\underline{F} e^{\underline{\Sigma} t} \underline{F}^{-1}$ . Comme les fonctions propres ont été exprimées en termes de polynômes de Chebyshev, tous les calculs sont obtenus avec coefficients de Chebyshev. Le nombre de points de collocation nécessaires pour assurer la convergence des calculs dépend du degré de rhéofluidification et de la valeur des nombres de Reynolds considérés. Des calculs tests ont montré que cette convergence est effective pour  $N = 40$ . Cependant, pour des fluides très rhéofluidifiants,  $n_p \leq 0.3$  par exemple pour la loi de puissance, ou encore  $n_c \leq 0.3$  avec  $\lambda \geq 10$  pour la loi de Carreau, le nombre de points de collocation nécessaires peut augmenter considérablement jusqu'à atteindre  $N = 150$ . Par ailleurs la convergence peut être obtenue sans que les spectres soient bien résolus.

### 4.3.2 Validation

Dans le but de valider le code utilisé dans ce travail, qui calcule la croissance transitoire, nous avons effectué des calculs de validation en utilisant un fluide newtonien. Dans le tableau 4.1, les résultats obtenus sont comparés avec ceux de [Meseguer, 2002] et [Maretzke et al., 2014] pour plusieurs valeurs de nombres de Reynolds ( $Re_1, Re_2$ ) en régime contra-rotatif. Les différents cas traités par [Hristova et al., 2002], rassemblés dans leur tableau (II) pour un fluide newtonien et pour différents rapports de rayon, ont été simulés et un écart relatif de moins 1% a été obtenu. Par ailleurs, comme [Hristova et al., 2002], nous avons retrouvé que l'amplification de l'énergie cinétique optimale de la perturbation diminue quand l'espace annulaire augmente.

		[Meseguer, 2002]			[Maretzke et al., 2014]			Présent travail ( $N = 40$ )		
$Re_1$	$Re_2$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$
591	-2588	1.994	10	71.36	1.997	10	71.58	2.015	10	71.58
523	-2975	1.996	11	71.58	1.998	11	71.81	1.985	11	71.80
473	-3213	1.920	11	71.64	1.922	11	71.87	1.924	11	71.87
405	-3510	1.839	11	71.75	1.841	11	71.99	1.833	11	71.99

TAB. 4.1 – Croissance optimale de l'énergie pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$  et pour différents couples de nombre de Reynolds. Comparaison de nos résultats avec ceux de [Meseguer, 2002] et [Maretzke et al., 2014].

Nous avons d'abord calculé les valeurs de croissance optimale pour un fluide newtonien dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  comme le montre la figure 4.6. Ces valeurs pourront ainsi être comparées à celles obtenues avec des fluides rhéofluidifiants. Ces résultats sont conformes à ceux de [Meseguer, 2002], obtenus pour des cylindres contra-rotatifs. L'amplification optimale croît avec la valeur absolue du nombre de Reynolds extérieur  $|Re_2|$ . Elle croît aussi avec  $Re_1$  en régime contra-rotatif, mais elle décroît avec lui en régime co-rotatif pour les gammes explorées dans ce travail. Les nombres d'onde axiaux et azimutaux optimaux sont représentés sur les figures 4.7 et 4.8. Il est intéressant de remarquer que lorsque les deux cylindres sont contra-rotatifs, le nombre d'onde azimutal varie très peu avec les nombres de Reynolds ( $10 < m^{opt} < 13$ ) et que  $m^{opt}$  est grand par rapport au nombre d'onde critique  $m_c$ . Au contraire, le nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$  est plus petit que le nombre d'onde critique  $k_c$ .

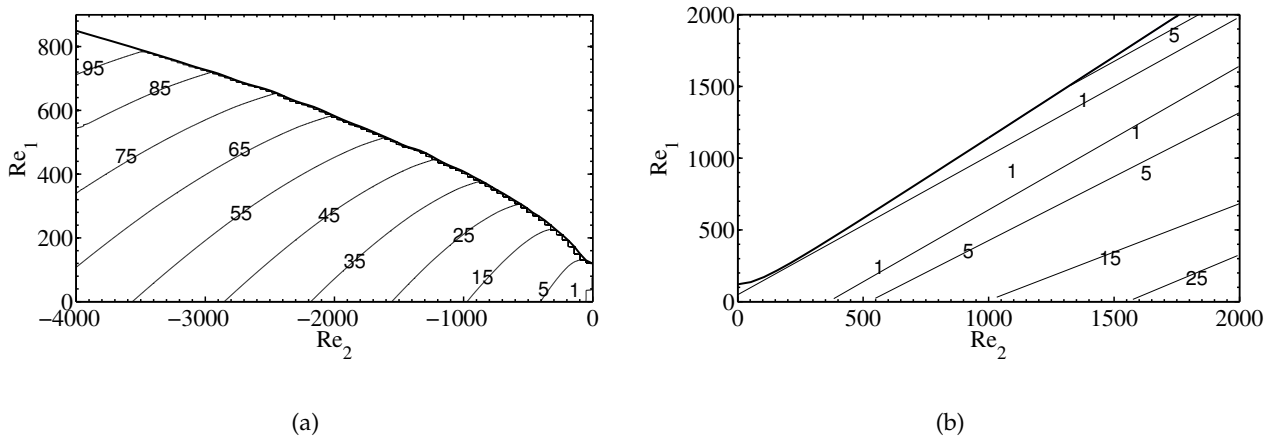


FIG. 4.6 – Contours d'amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$  dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide newtonien avec un rapport de rayon  $\eta = 0.881$  : (a) cylindres contra-rotatifs, (b) cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.



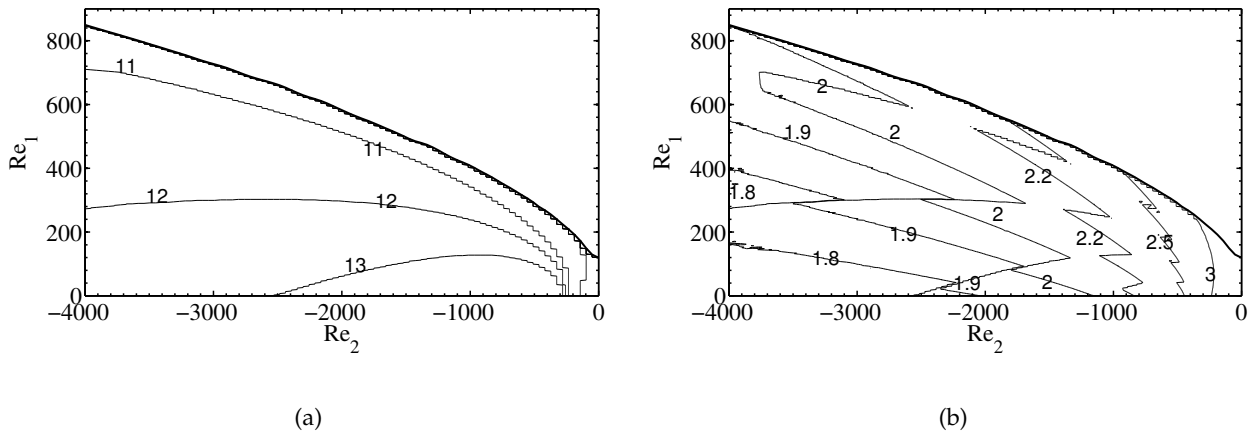


FIG. 4.7 – Contours des nombres d’onde optimaux dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide newtonien entre deux cylindres contra-rotatifs de rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . (a) Nombres d’onde azimutaux optimaux  $m^{opt}$  et (b) nombres d’onde axiaux optimaux  $k^{opt}$ . Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.

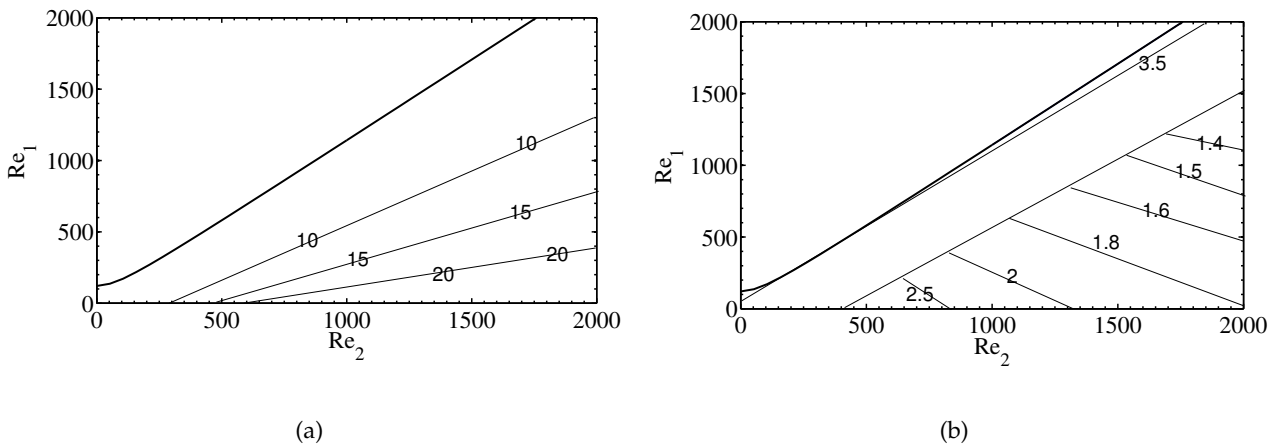


FIG. 4.8 – Contours des nombres d’onde optimaux dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide newtonien entre deux cylindres co-rotatifs de rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . (a) Nombres d’onde azimutaux optimaux  $m^{opt}$  et (b) nombres d’onde axiaux optimaux  $k^{opt}$ . Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.

Nous avons trouvé que la diminution de l’amplification de l’énergie quand l’espace annulaire augmente (figure 4.9) suit la loi

$$G^{opt} \propto \exp(3.2\eta). \quad (4.12)$$

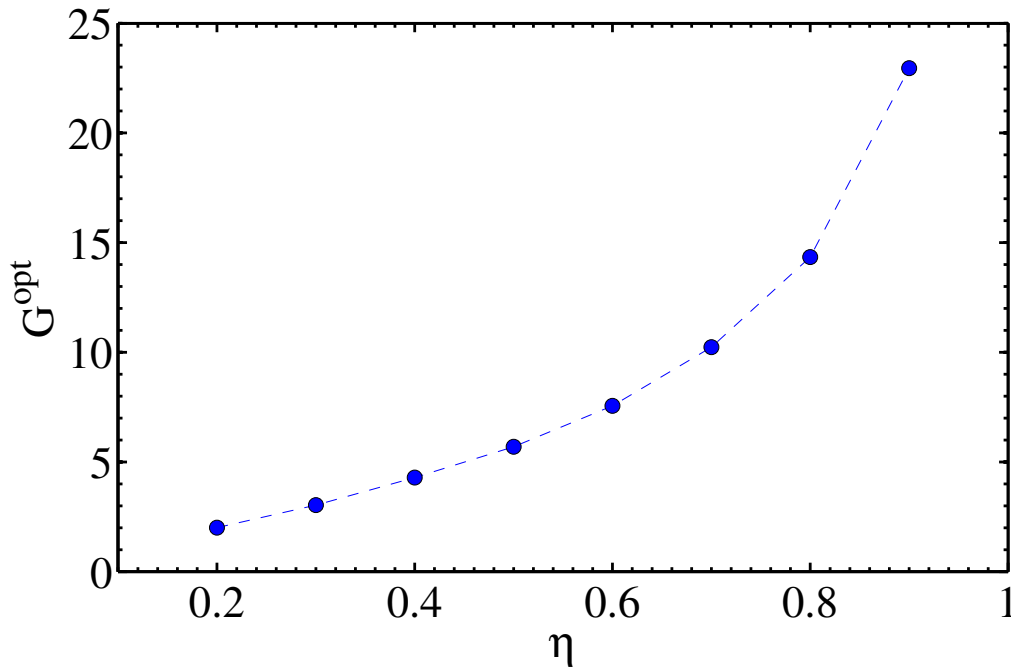


FIG. 4.9 – Influence de la valeur du rapport de rayon  $\eta = \hat{R}_1/\hat{R}_2$  sur l’amplification optimale de l’énergie pour un fluide newtonien dans le régime contra-rotatif avec  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$ .

### 4.3.3 Croissance transitoire pour des fluides rhéofluidifiants

#### Fluides rhéofluidifiants sans seuil de contrainte

La figure 4.10 montre les contours de l’amplification optimale de l’énergie pour un fluide en loi de puissance. L’amplification de l’énergie apparaît plus importante que pour les fluides newtoniens. Une comparaison des conditions de croissance optimale de l’énergie  $G^{opt}$ ,  $k^{opt}$ ,  $m^{opt}$  et  $t^{opt}$  est effectuée dans le tableau 4.2 pour un fluide newtonien, pour un fluide en loi de puissance et un fluide de Carreau avec des valeurs de nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  fixées, un espace annulaire large ( $\eta = 0.881$ ) et étroit ( $\eta = 0.4$ ). L’amplification optimale de l’énergie est encore plus importante pour un fluide de Carreau. Les nombres d’onde azimutaux et axiaux optimaux sont pratiquement les mêmes pour un fluide newtonien et un fluide rhéofluidifiant sans seuil. Par contre, le nombre d’onde axial optimal  $k^{opt}$  est petit par rapport au nombre d’onde critique d’une instabilité exponentielle alors que le nombre d’onde azimutal est important, surtout pour un entrefer étroit.

		$Re_1$	$Re_2$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$	$t^{opt}$
$\eta = 0.881$	Newtonien ( $n = 1$ )	101	-1061.2	2.176	13	20.62	$9.38 \cdot 10^{-3}$
	Loi de puissance ( $n_p = 0.5$ )	101	-1061.2	1.647	11	88.16	$1.71 \cdot 10^{-2}$
	Loi de Carreau ( $n_c = 0.5; \lambda = 10$ )	101	-1061.2	1.736	11	231.25	$2.41 \cdot 10^{-2}$
	Loi de Bingham ( $B_i = 10$ )	101	-1061.2	1.964	13	12.08	$8.31 \cdot 10^{-3}$
$\eta = 0.4$	Newtonien ( $n = 1$ )	101	-1061.2	1.136	3	4.288	$6.97 \cdot 10^{-3}$
	Loi de puissance ( $n_p = 0.5$ )	101	-1061.2	0.911	2	12.59	$1.15 \cdot 10^{-2}$
	Loi de Carreau ( $n_c = 0.5; \lambda = 10$ )	101	-1061.2	1.221	2	37.17	$1.44 \cdot 10^{-2}$
	Loi de Bingham ( $B_i = 10$ )	101	-1061.2	3.427	3	2.22	$2.55 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.2 – Comparaison de l’amplification optimale de l’énergie avec les rapports de rayons  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$  pour différents modèles de fluides rhéofluidifiants.

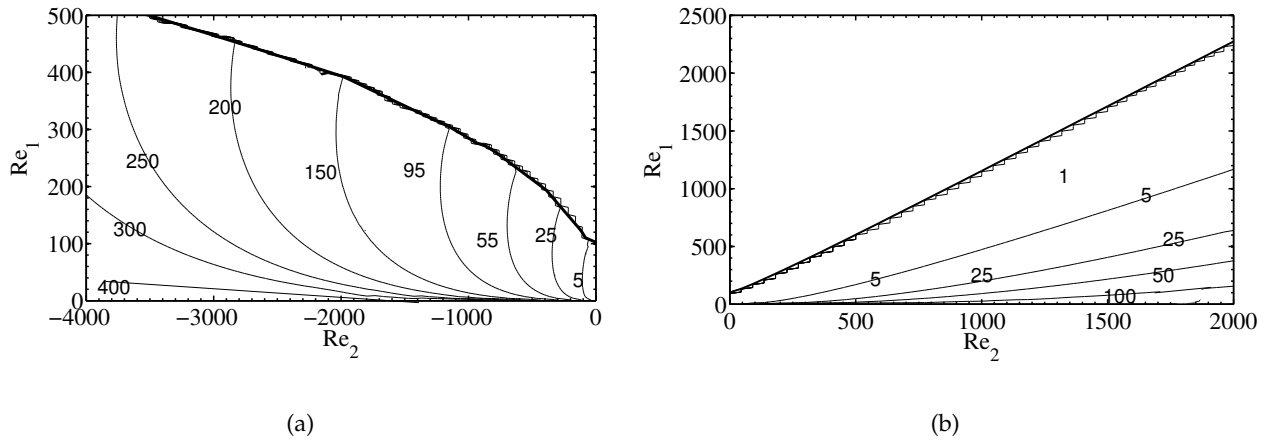


FIG. 4.10 – Contours de l’amplification optimale de l’énergie  $G^{opt}$  dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$  et le rapport de rayon  $\eta = 0.881$  : (a) cylindres contra-rotatifs, (b) cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.

Les travaux récents de [Maretzke et al., 2014] sur la croissance transitoire des fluides newtoniens ont montré qu’il est plus pertinent d’utiliser le nombre de Reynolds de cisaillement  $Re$  et le nombre de rotation  $R_\Omega$  (chapitre 2). Cette représentation permet de séparer les effets de cisaillement de l’effet de la rotation des deux cylindres. Elle permet aussi la recherche de lois asymptotiques décrivant l’évolution de l’amplification optimale de l’énergie en fonction de ces effets (cisaillement et rotation). Les caractéristiques de la perturbation optimale pour un fluide newtonien en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement  $Re$  pour différentes valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$  sont représentées sur la figure 4.11. Nous retrouvons l’échelle asymptotique  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$  pour des valeurs de  $Re$  suffisamment élevées comme indiqué dans [Maretzke et al., 2014]. Pour  $Re \geq 10^4$ , le nombre d’onde azimutal devient indépendant de  $Re$  et varie peu avec  $R_\Omega$ . Ceci confirme entre autres les résultats de

la figure 4.7. En effet, pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ , la figure 4.11(c), montre que  $10 \leq m^{opt} \leq 13$ . Pour ce qui concerne le nombre d'onde axial optimal, il est observé sur la figure 4.11(b) qu'il est indépendant de  $Re$  pour  $Re \geq 10^4$  et qu'il reste dans la gamme  $1 \leq k^{opt} \leq 2$  pour les différentes valeurs de  $R_\Omega$  testées. Le temps optimal  $t^{opt}$  décroît asymptotiquement comme  $t^{opt} \propto Re^{-2/3}$ .

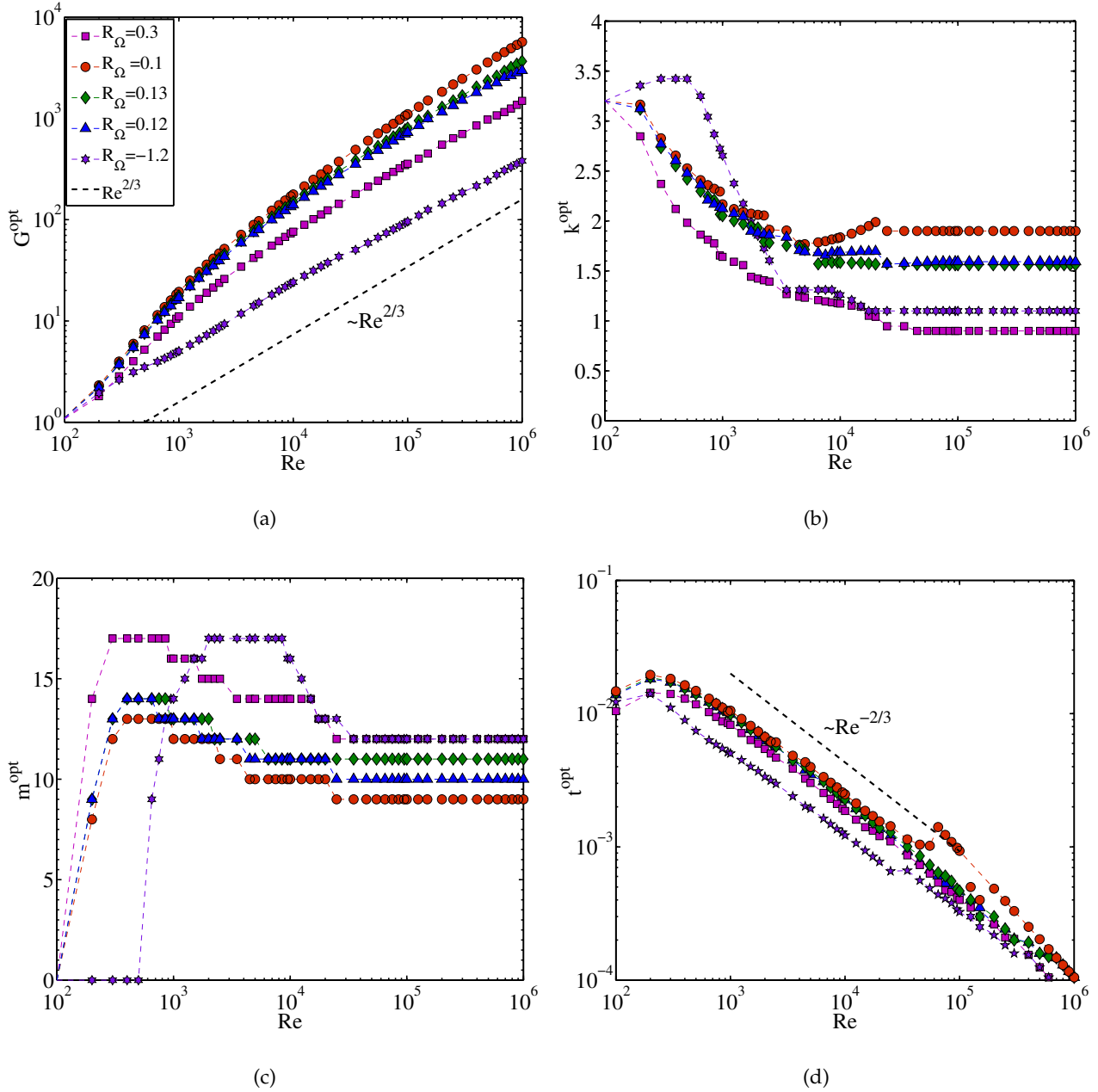


FIG. 4.11 – Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$ . Cas d'un fluide newtonien avec  $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal  $m^{opt}$  et (d) temps optimal  $t^{opt}$ .

Néanmoins, il se révèle une caractéristique très particulière sur la ligne de Rayleigh. Le long de

cette ligne où  $R_\Omega = -1$ , la perturbation la plus amplifiée est axisymétrique, quelle que soit la valeur de  $Re$  et le rapport de rayon  $\eta$ , avec un nombre d'onde axial optimal  $k^{opt} \approx \pi$  comme le montre la figure 4.12. De plus, l'amplification optimale se comporte en  $G^{opt} \propto Re^2$ , figure 4.13(a). La figure 4.13(b) montre que le temps optimal  $t^{opt}$  est pratiquement indépendant du nombre de Reynolds de cisaillement dès que  $Re \geq 300$ .

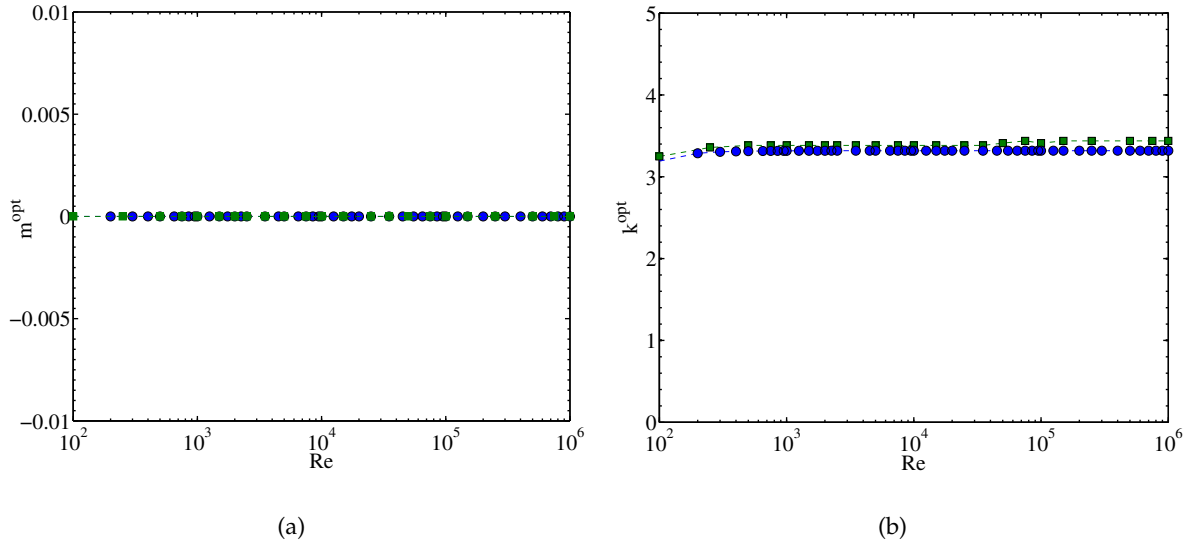


FIG. 4.12 – Structure de la perturbation optimale le long de la ligne de Rayleigh ( $R_\Omega = -1$ ) pour un fluide newtonien et  $\eta = 0.881$ . Nombres d'onde (a) azimutaux et (b) axiaux en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement. ( $\circ$ )  $\eta = 0.881$  et ( $\square$ )  $\eta = 0.4$ .

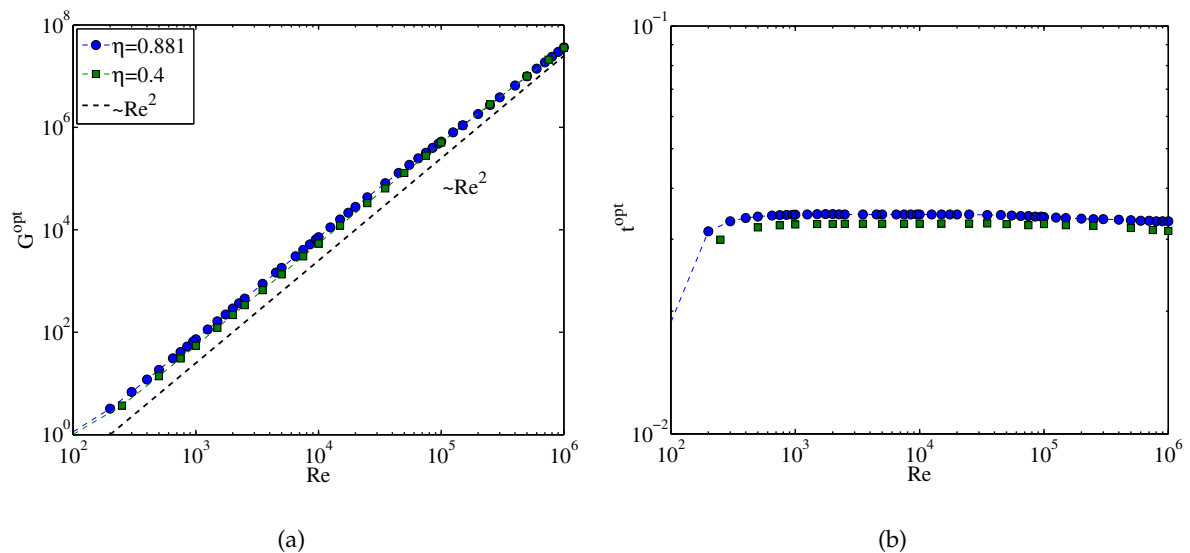


FIG. 4.13 – (a) Amplification optimale de l'énergie et (b) temps optimal en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement sur la ligne de Rayleigh ( $R_\Omega = -1$ ) pour un fluide newtonien et  $\eta = 0.881$ . ( $\circ$ )  $\eta = 0.881$  et ( $\square$ )  $\eta = 0.4$ .

Les figures 4.14(a) et 4.14(b) montrent les caractéristiques de la perturbation optimale pour les fluides en loi de puissance et de Carreau. L'évolution asymptotique est identique à celle d'un fluide newtonien. En effet, à grand nombre de Reynolds de cisaillement  $Re$ ,  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$ ,  $t^{opt} \propto Re^{-2/3}$ ,  $10 \leq m^{opt} \leq 13$  et  $k^{opt} < k_c$ .

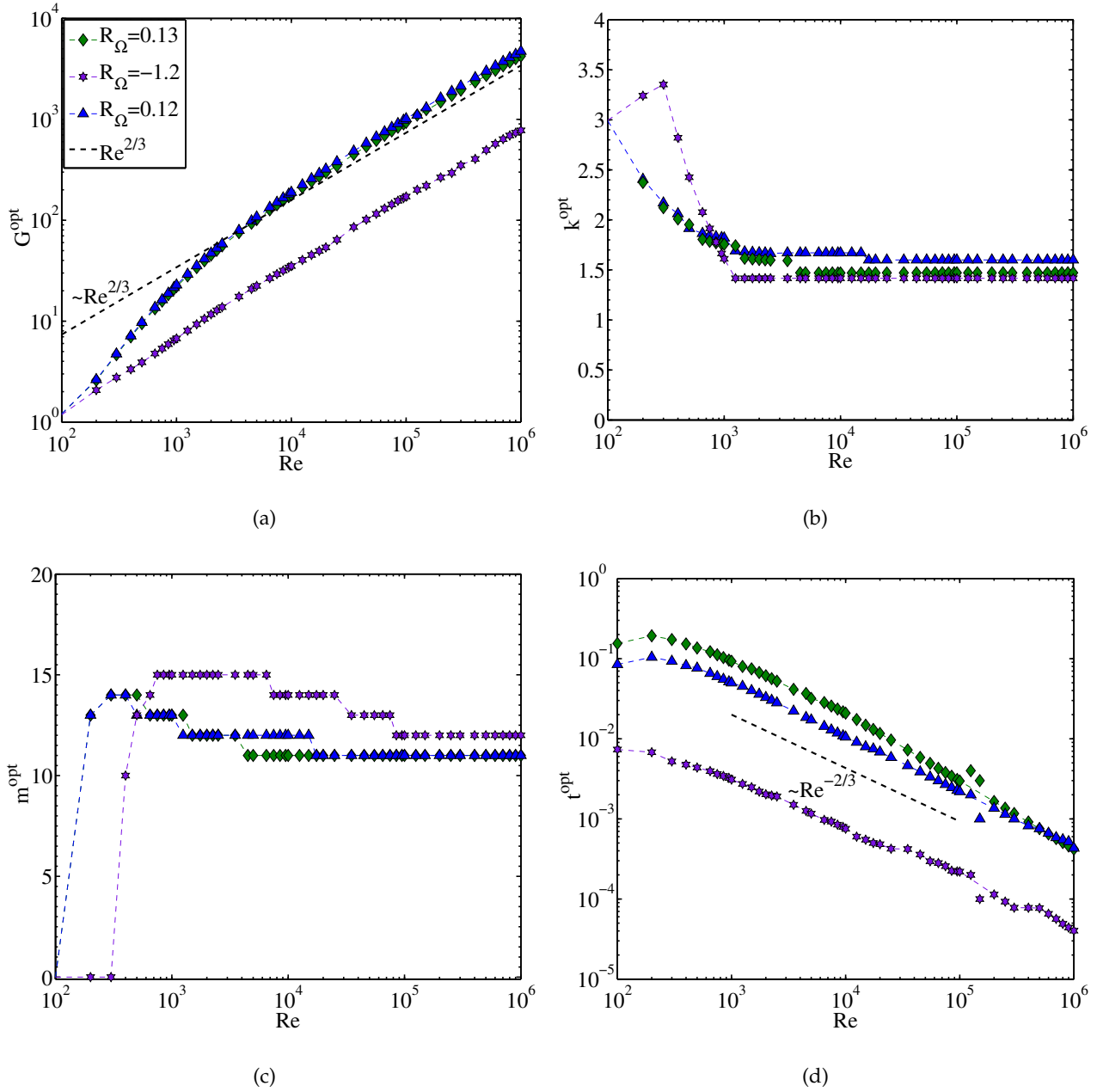


FIG. 4.14 – Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$ . Cas d'un fluide en loi de puissance pour  $n_p = 0.5$  et un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal  $m^{opt}$  et (d) temps optimal  $t^{opt}$ .

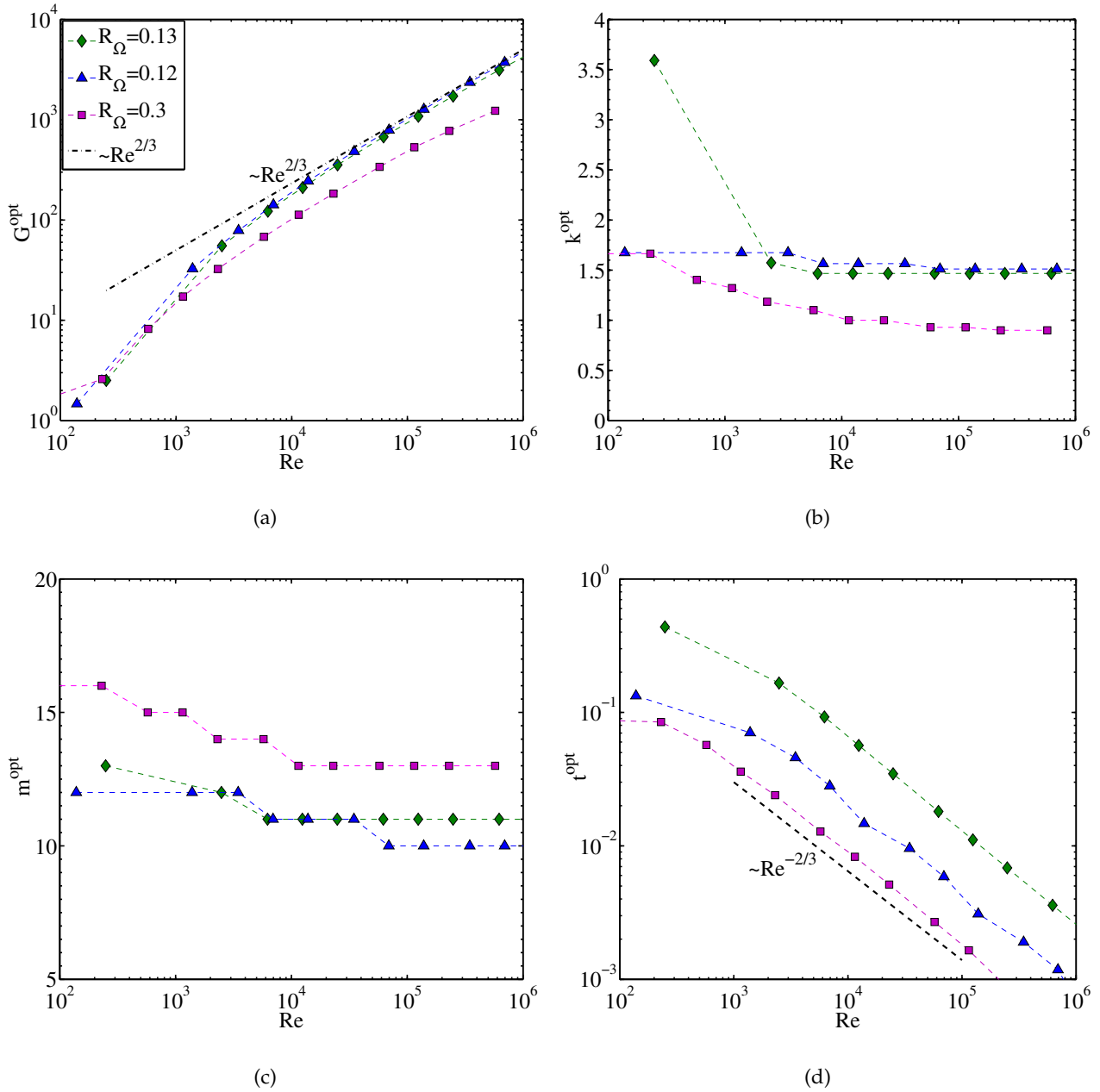


FIG. 4.15 – Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$ . Cas d'un fluide de Carreau  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal  $m^{opt}$  et (d) temps optimal  $t^{opt}$ .

Une comparaison de l'amplification de l'énergie avec celle d'un fluide newtonien pour différentes valeurs de  $Re$  et  $R_\Omega$ , figure 4.16, montre que  $G^{opt}$  augmente avec l'indice de rhéofluidification du fluide. Ceci est une conséquence de l'augmentation de la non-normalité de l'opérateur linéaire soulignée dans §4.2. Les résultats numériques pour un fluide en loi de puissance peuvent être corrélés

par une expression de la forme

$$\frac{G^{opt}}{G_{n_p=1}^{opt}} \propto \exp(-n_p^\alpha) \quad (4.13)$$

où  $G_{n_p=1}^{opt}$  est l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide newtonien et  $\alpha = 1/3$ .

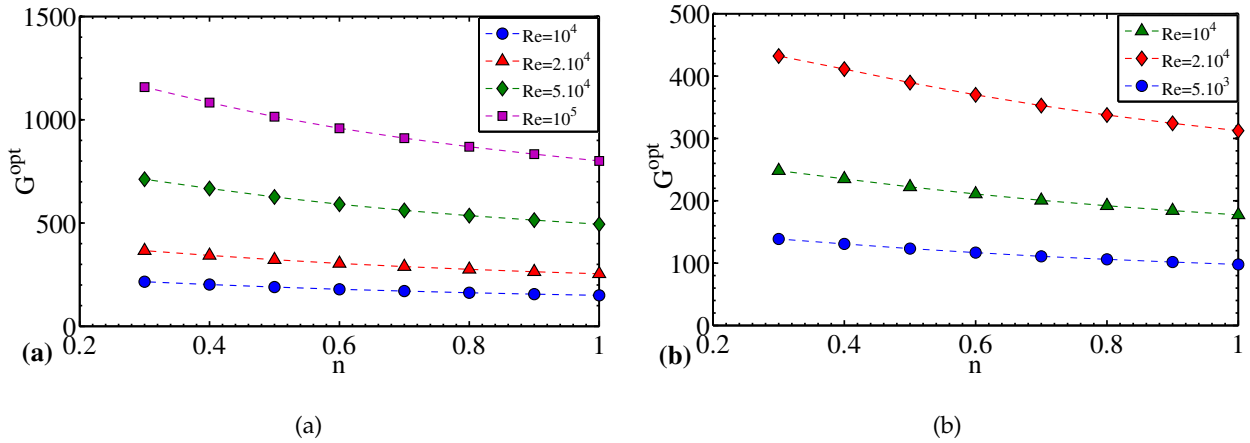


FIG. 4.16 – Influence du caractère rhéofluidifiant sur l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide en loi de puissance avec  $\eta = 0.881$  pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de cisaillement  $Re$  et deux valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$ . (a)  $R_\Omega = 0.12$  et (b)  $R_\Omega = 0.1$ .

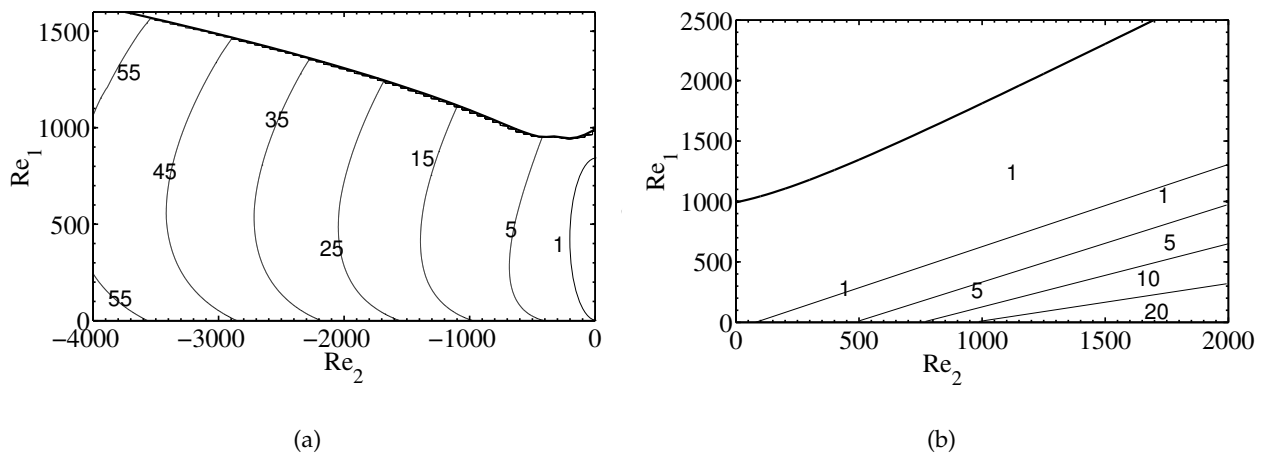


FIG. 4.17 – Contours de l'amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$  dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide en loi de Bingham avec  $B_i = 10$  et le rapport de rayon  $\eta = 0.881$  : (a) cylindres contra-rotatifs, (b) cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.

### Fluides à seuil

Le tableau 4.2 montre que pour un fluide à seuil, l'amplification de l'énergie de la perturbation est plus faible comparativement aux fluides newtoniens et aux fluides rhéofluidifiants sans seuil de



contrainte. Les figures 4.17(a) et 4.17(b) montrent les contours de cette énergie optimale dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ .

Dans le plan  $(Re, R_\Omega)$ , les figures 4.18 montrent que  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$ ,  $t^{opt} \propto Re^{-2/3}$ ,  $9 \leq m^{opt} \leq 13$  et  $k^{opt} < k_c$  comme pour les fluides newtoniens et les fluides rhéofluidifiants sans seuil de contrainte.

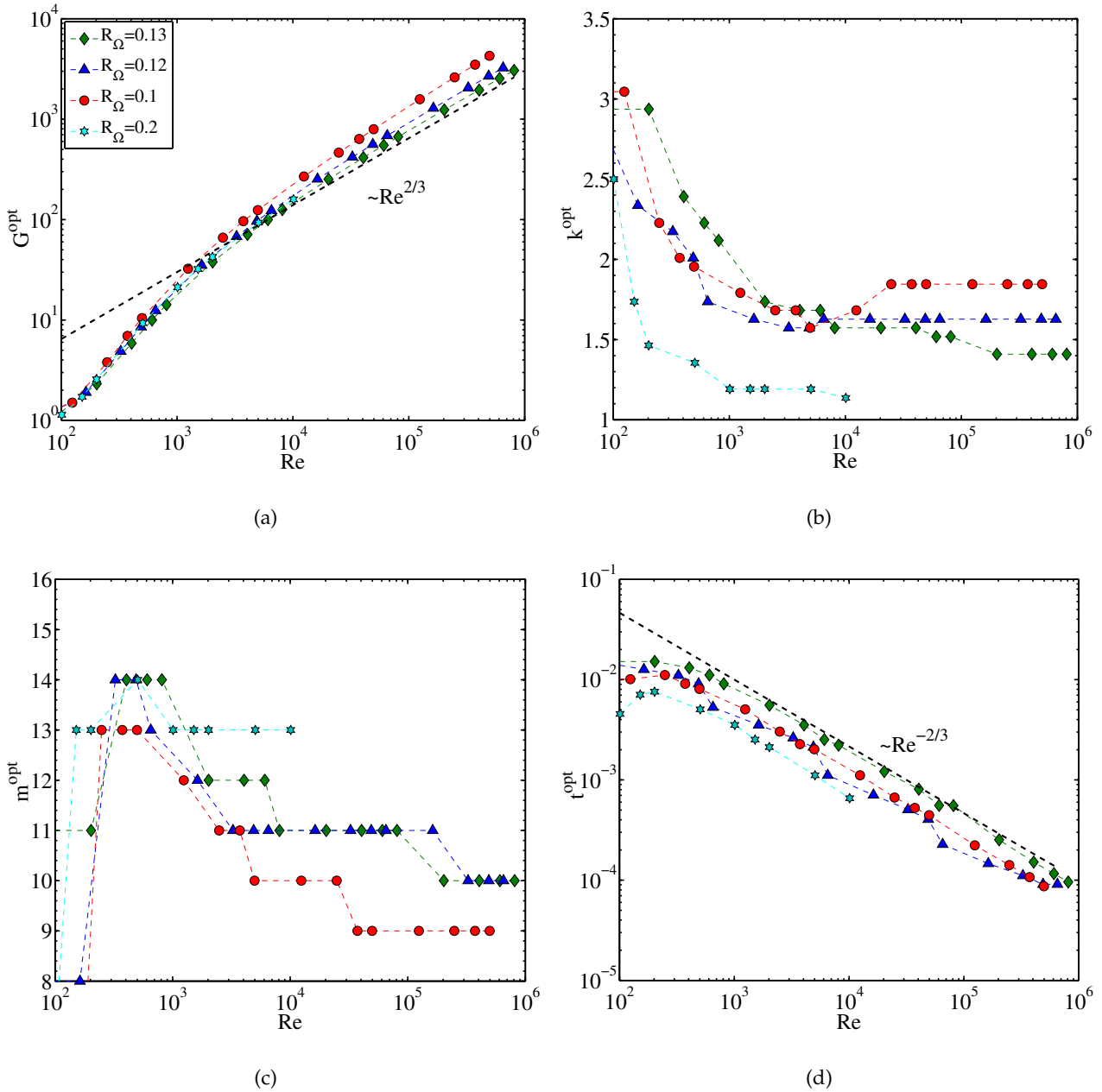


FIG. 4.18 – Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation  $R_\Omega$ . Cas d'un fluide de Bingham  $B_i = 10$  pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ . (a) Amplification optimale de l'énergie  $G^{opt}$ , (b) nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$ , (c) nombre d'onde azimutal optimal  $m^{opt}$  et (d) temps optimal  $t^{opt}$ .

Une comparaison de l'amplification de l'énergie avec celle d'un fluide newtonien pour différentes valeurs des nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  (figure 4.19) montre un comportement asymptotique approximatif

$$\frac{G^{opt}}{G_{B_i=0}^{opt}} \propto \log(1/B_i) \quad (4.14)$$

où  $G_{B_i=0}^{opt}$  est l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide newtonien.

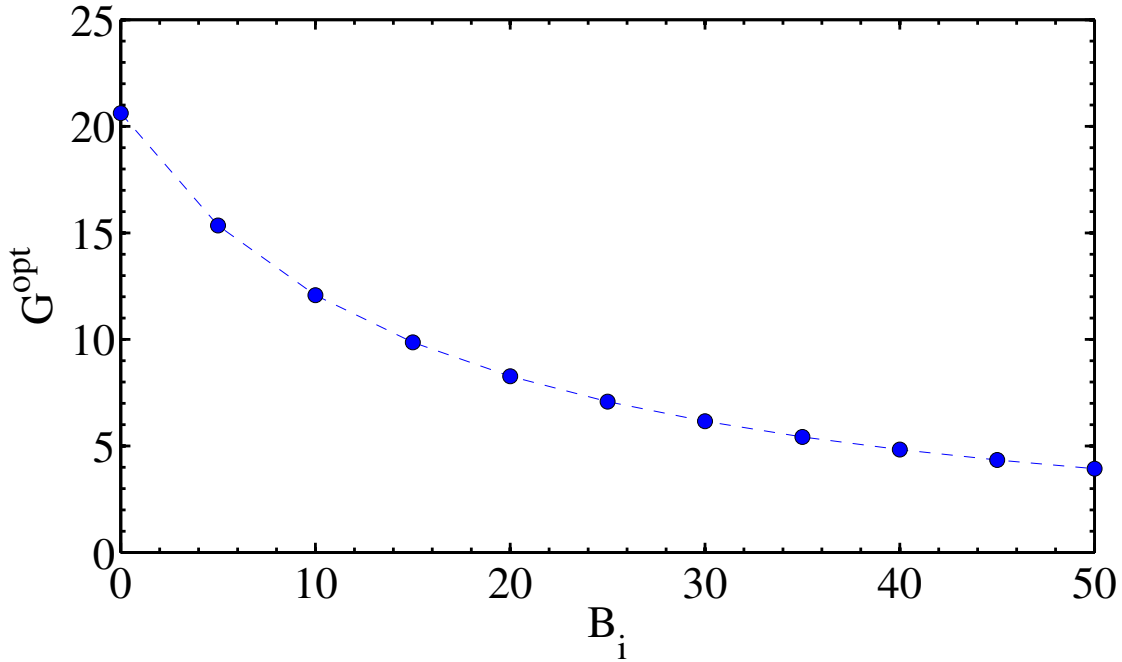
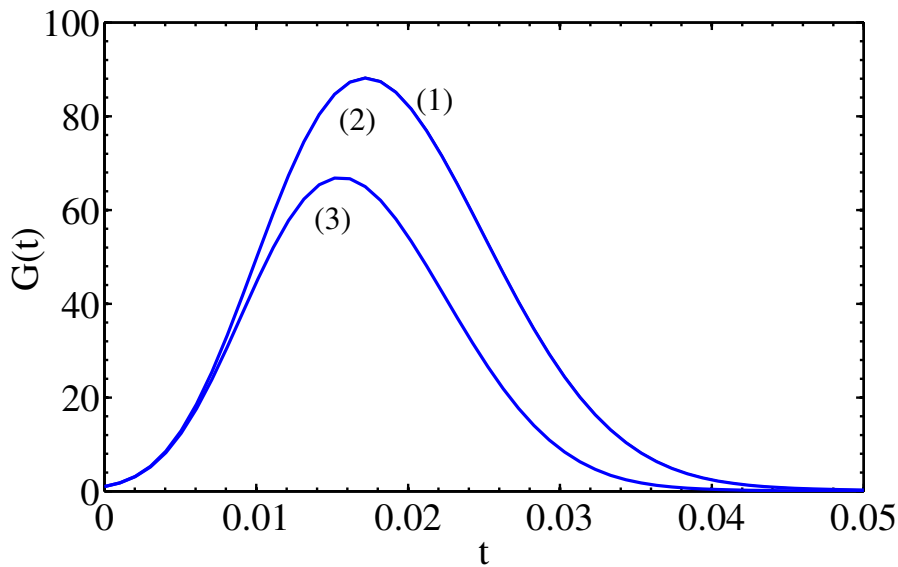


FIG. 4.19 – Influence du seuil de contrainte sur l'amplification optimale de l'énergie pour un fluide en loi de Bingham avec  $\eta = 0.881$  pour le couple de nombre de Reynolds  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ .

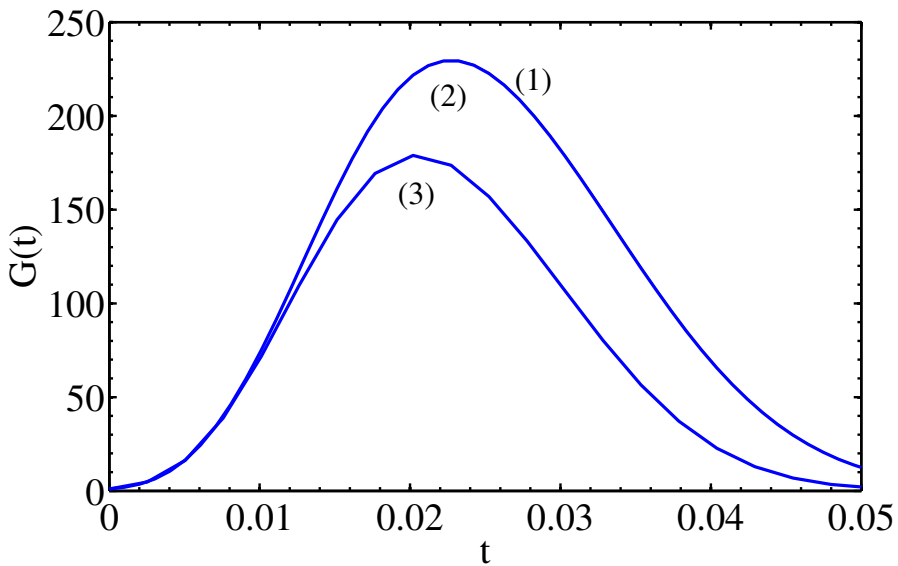
#### 4.3.4 Influence de l'anisotropie sur la croissance transitoire

L'effet de la rhéologie sur l'amplification de l'énergie peut être relié aux spectres des valeurs propres. En effet pour le fluide newtonien, les fluides en loi de puissance et de Carreau, les valeurs propres sont organisées en doublets contrairement aux valeurs propres des fluides de Bingham. Ceci est d'autant plus marqué que le fluide est plus rhéofluidifiant.

Les équations aux perturbations (2.76) - (2.77) du chapitre 2 font apparaître des termes de natures différentes. Le terme de facteur  $d\mu^b/dr$  exprime la stratification de la viscosité. Le terme de facteur  $\mu^t - \mu^b = \frac{\partial\mu(\underline{U}^b)}{\partial\dot{\gamma}_{r\theta}}\dot{\gamma}_{r\theta}(\underline{U}^b)$  exprime la perturbation de la viscosité due au caractère rhéofluidifiant. Sur la figure 4.20, la croissance transitoire est calculée en supprimant alternativement le terme  $d\mu^b/dr$  et le terme  $\mu^t - \mu^b$ . Il apparaît ainsi que la perturbation de la viscosité joue un rôle important alors que la stratification contribue peu à la croissance transitoire.



(a)



(b)

FIG. 4.20 – Évolution de l'énergie de la perturbation optimale pour  $Re_1 = 100$ ,  $Re_2 = -1061.2$ . (1) En conservant le terme de stratification de la viscosité (terme de facteur  $d\mu^b/dr$ ) et le terme de la perturbation de la viscosité (terme de facteur  $\mu^t - \mu^b$ ). (2) En supprimant le terme de la stratification de la viscosité. (3) En supprimant le terme de la perturbation de la viscosité. (a) Fluide en loi de puissance,  $n_p = 0.5$  avec  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . (b) Fluide de Carreau  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec  $m^{opt} = 12$  et  $k^{opt} = 1.842$ .

### 4.3.5 Contribution des modes propres à la croissance transitoire

Sur la figure 4.21 est représentée la contribution des différents modes propres à la croissance transitoire. La perturbation optimale est projetée sur la base des modes propres. Les modes sont rangés par ordre décroissant des valeurs propres. La figure 4.22 montre ces modes pour un fluide newtonien. Les figures 4.22(b) et 4.22(c) montrent les modes pour les fluides en loi de puissance et de Carreau respectivement. La figure 4.22(d) montre les modes pour un fluide de Bingham. On observe que seuls les premiers modes contribuent significativement à l'amplification de l'énergie et que ces premiers modes sont tous d'importance comparable.

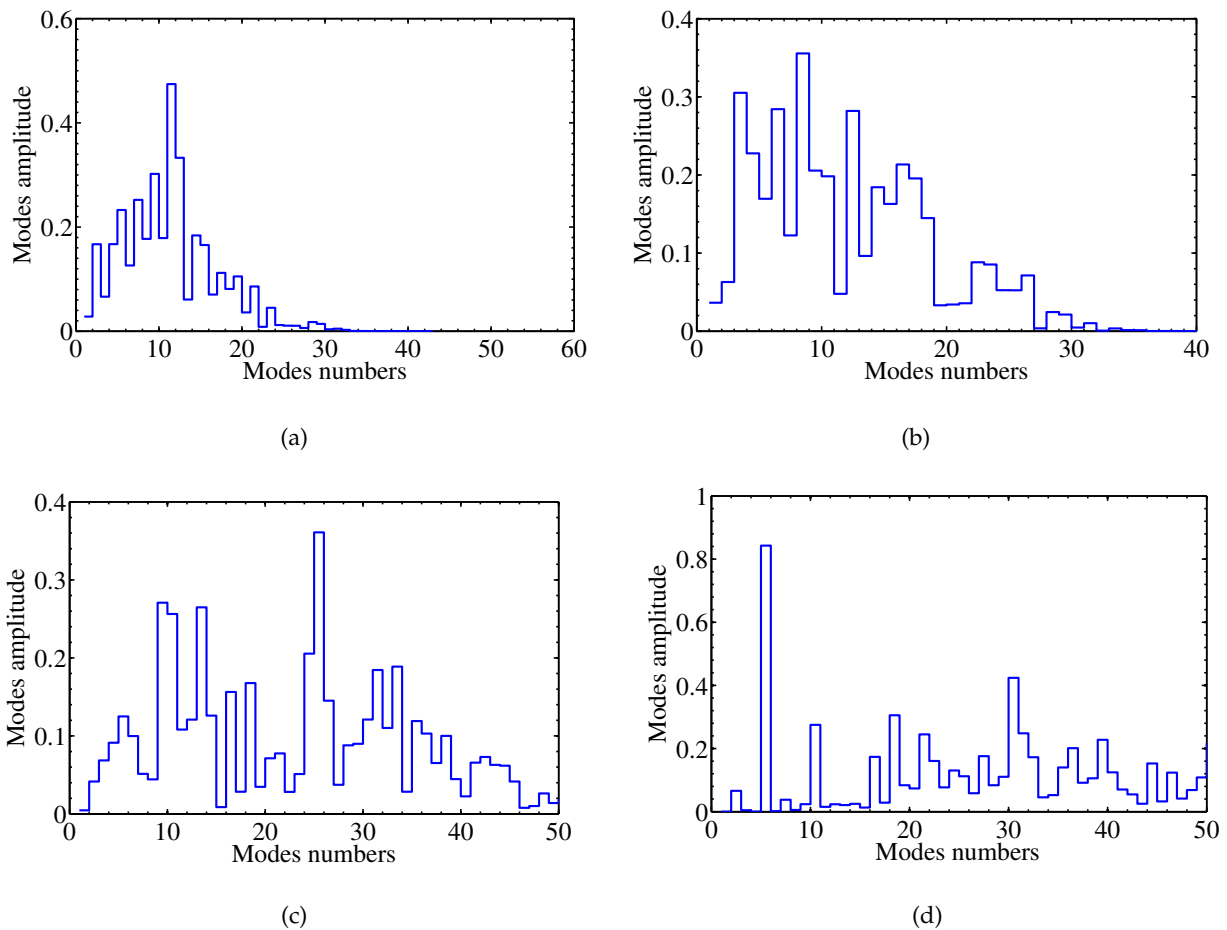


FIG. 4.21 – Contribution à l'amplification optimale de l'énergie des différents modes propres, classés par valeurs propres décroissantes, pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$ . (a) Cas d'un fluide newtonien pour  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 2.176$ . (b) Cas d'un fluide en loi de puissance pour  $n_p = 0.5$  avec  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . (c) Cas d'un fluide de Carreau,  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec  $m^{opt} = 12$  et  $k^{opt} = 1.842$ . (d) Cas d'un fluide de Bingham,  $B_i = 10$  avec  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 1.964$ .

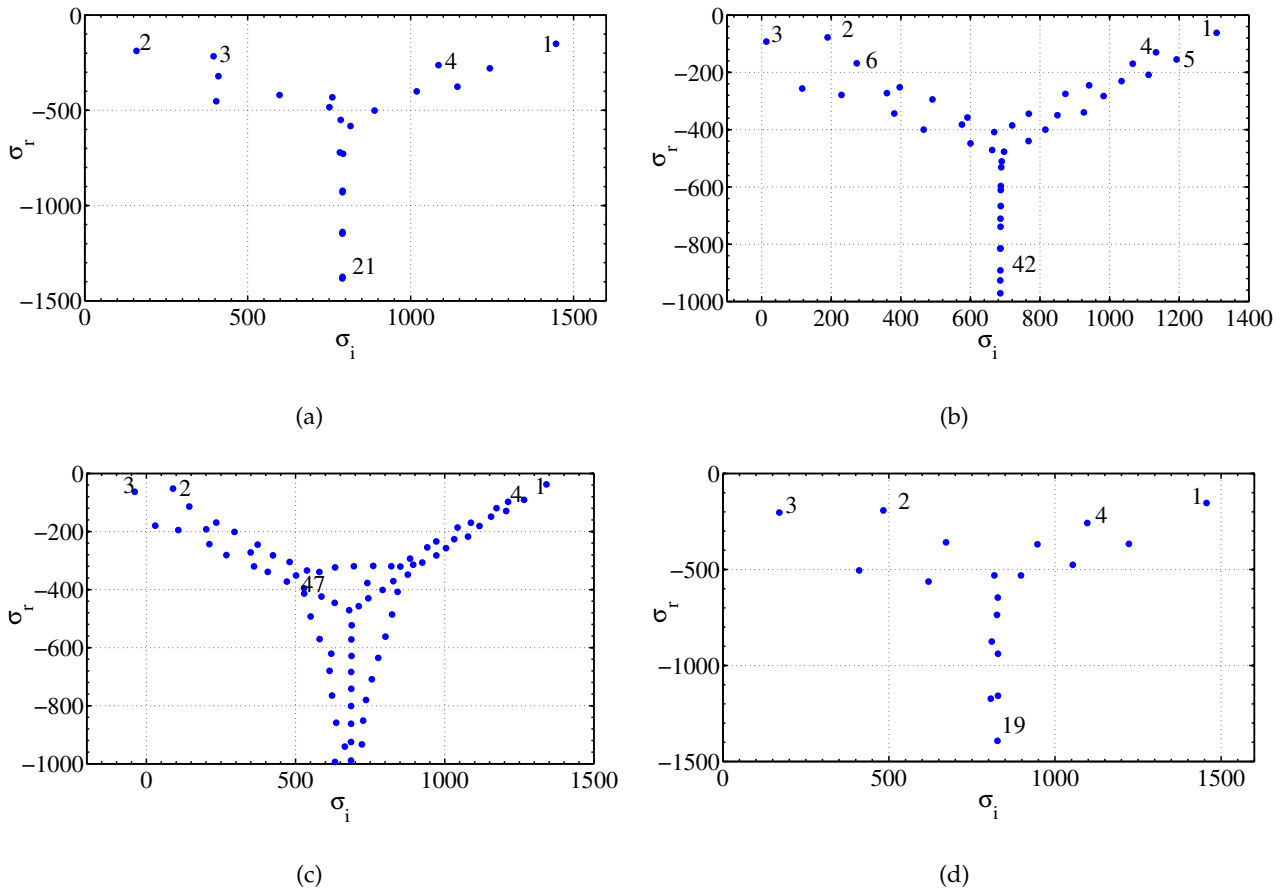


FIG. 4.22 – Spectres de valeurs propres numérotées, pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$ . (a) Cas d'un fluide newtonien pour  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 2.176$ . (b) Cas d'un fluide en loi de puissance pour  $n_p = 0.5$  avec  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.647$ . (c) Cas d'un fluide de Carreau,  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  avec  $m^{opt} = 12$  et  $k^{opt} = 1.842$ . (d) Cas d'un fluide de Bingham,  $B_i = 10$  avec  $m^{opt} = 13$  et  $k^{opt} = 1.964$ .

### 4.3.6 Évolution de la perturbation optimale : les mécanismes de la croissance transitoire

Dans cette partie, la perturbation optimale et son évolution sont décrites pour différentes valeurs des nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  dans la zone de stabilité linéaire.

#### Perturbation optimale pour des fluides newtoniens

L'étude numérique de la perturbation optimale pour des fluides newtoniens montre que le comportement sur la ligne de Rayleigh doit être distingué du comportement dans le reste du plan  $(Re_1, Re_2)$ . En effet, sur cette ligne, nous avons montré au §4.3.3 que la croissance transitoire évolue pour de grandes valeurs de Reynolds de cisaillement  $Re$  en  $O(Re^2)$ .

La figure 4.23 montre les contours de la vorticité azimuthale et de la composante azimuthale de la vitesse pour la perturbation optimale à l'instant initial  $t = 0$  et à l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . Il apparaît que cette perturbation optimale est une superposition le long de la direction axiale de stries de la

vitesse azimuthale.

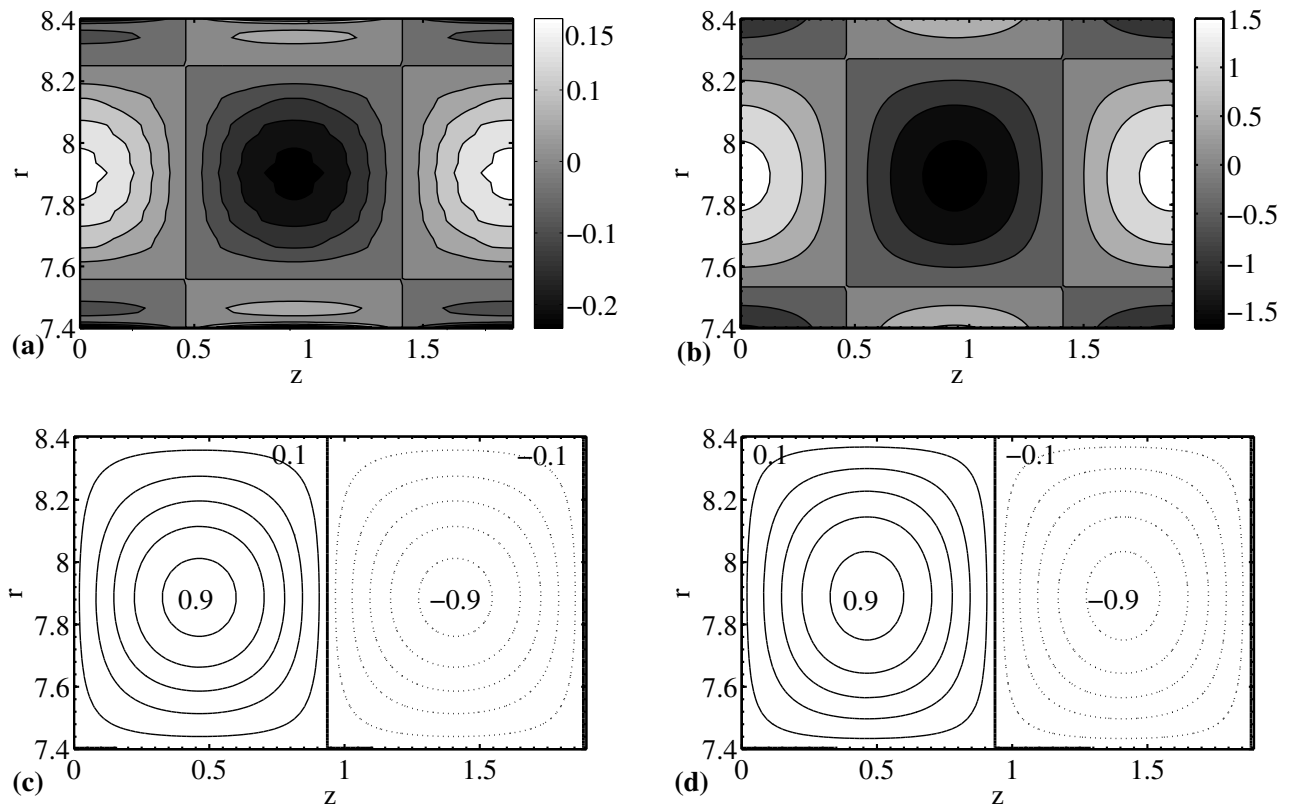


FIG. 4.23 – Contours de la perturbation optimale dans le plan  $(r, z)$  pour un fluide newtonien avec  $\eta = 0.881$ , sur la ligne de Rayleigh ( $Re_1 = 1135$  et  $Re_2 = 1000$ ),  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.32$  et  $G^{opt} = 5.58$ . Contours de la vorticité azimuthale à (a)  $t = 0$  et (b) au temps optimal  $t = t^{opt}$ . Contours de la composante azimuthale de la vitesse à (c)  $t = 0$ ,  $v_{max} = 0.52$  et (d) au temps optimal  $t = t^{opt}$ ,  $v_{max} = 0.1$ ; les contours sont normés avec la vitesse maximale  $v_{max}$  au temps  $t$  et sont représentés par des pas de 0.2.

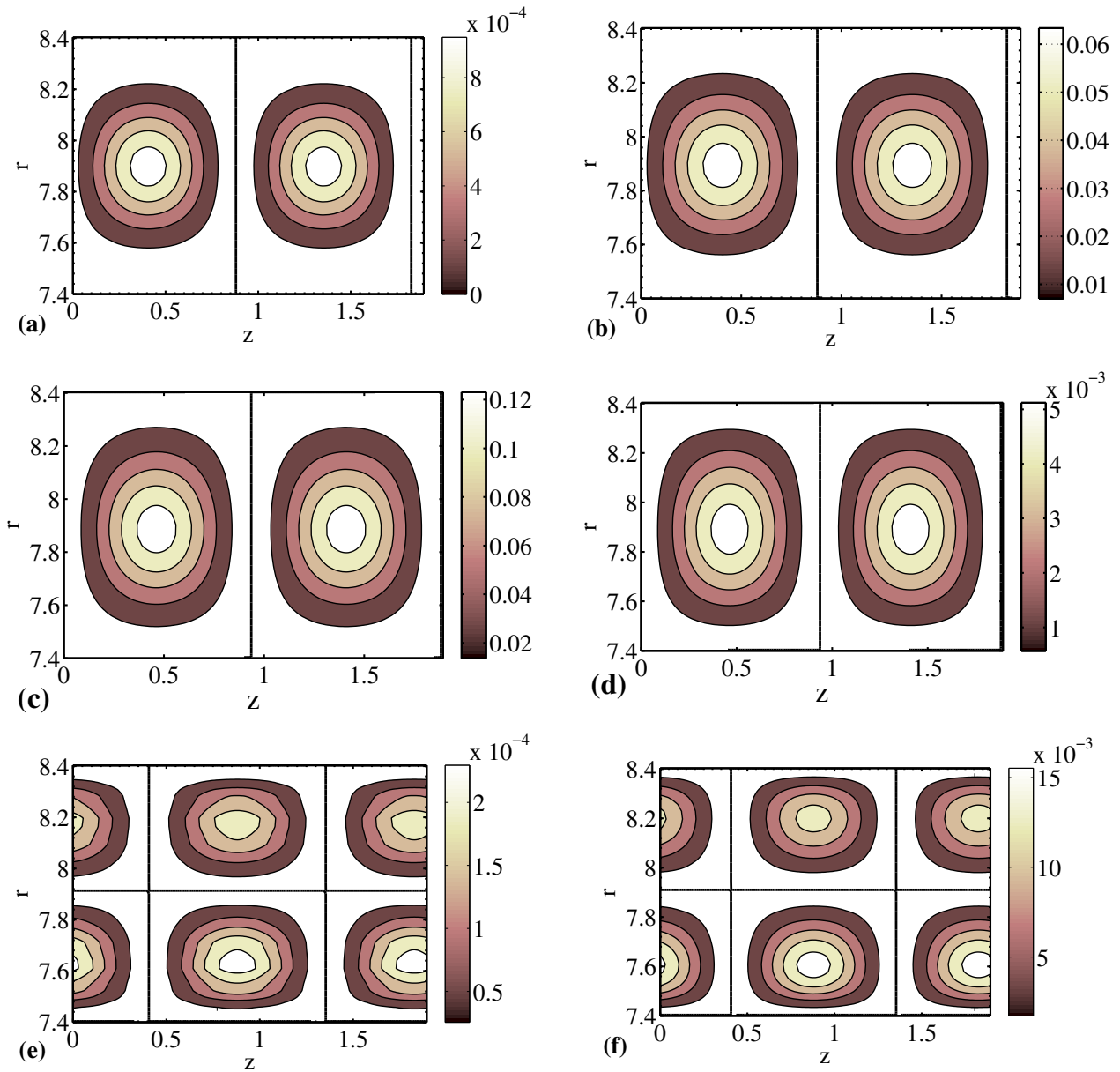


FIG. 4.24 – Contours de la perturbation optimale dans le plan  $(r, z)$  pour un fluide newtonien avec  $\eta = 0.881$ , sur la ligne de Rayleigh ( $Re_1 = 1135$ ,  $Re_2 = 1000$ ),  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.318$  et  $G^{opt} = 5.58$ . Contours de la composante radiale de l'énergie cinétique de la perturbation  $1/2 u'^2(t)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$  et à (b) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . Contours de la composante azimutale de l'énergie cinétique de la perturbation  $1/2 v'^2(t)$  à (c) l'instant initial  $t = 0$  et à (d) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . Contours de la composante axiale de l'énergie cinétique de la perturbation  $1/2 w'^2(t)$  à (e) l'instant initial  $t = 0$  et à (f) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ .

La figure 4.24 montre les contours des énergies cinétiques locales radiale, azimutale et axiale de la perturbation. On observe qu'à l'instant initial, plus de 99% de l'énergie cinétique de la perturbation est concentrée dans la composante azimutale. A l'instant optimal  $t = t^{opt}$ , cette énergie est

principalement transférée dans les composantes radiale et axiale. Cette tendance peut également être observée sur la figure 4.25, où est représentée l'énergie cinétique moyenne contenue dans le volume  $\mathcal{V} = 2\pi^2 (R_2^2 - R_1^2) / k$ ,

$$E_r = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \tilde{u}\tilde{u}^* \rangle; \quad E_\theta = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \tilde{v}\tilde{v}^* \rangle; \quad E_z = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \tilde{w}\tilde{w}^* \rangle \quad (4.15)$$

avec

$$\langle \cdot \rangle = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} (\cdot) r dr d\theta dz. \quad (4.16)$$

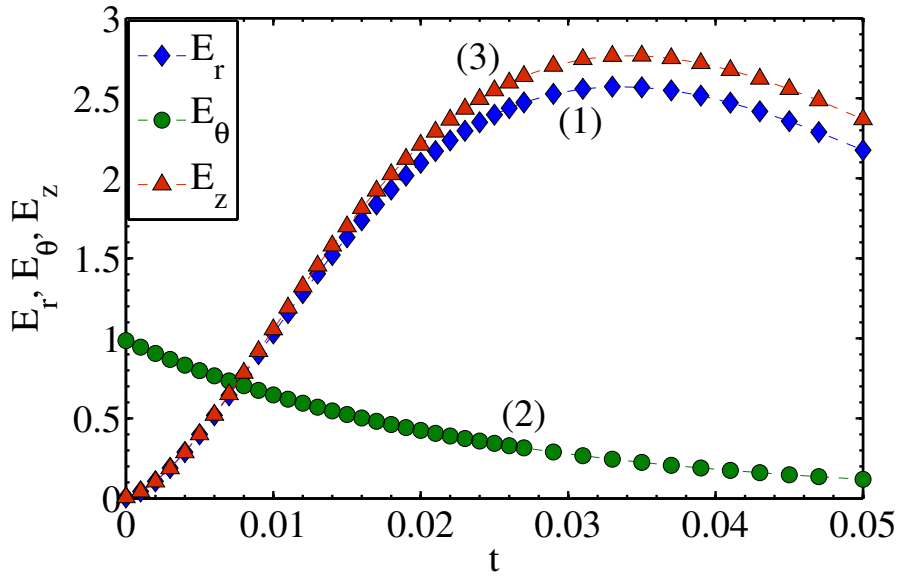


FIG. 4.25 – Évolution des composantes radiale, azimutale et axiale de l'énergie cinétique moyenne sur la ligne de Rayleigh pour un fluide dans le plan  $(r, z)$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.318$ ,  $G^{opt} = 5.58$ ,  $Re_1 = 1135$  et  $Re_2 = 1000$ .



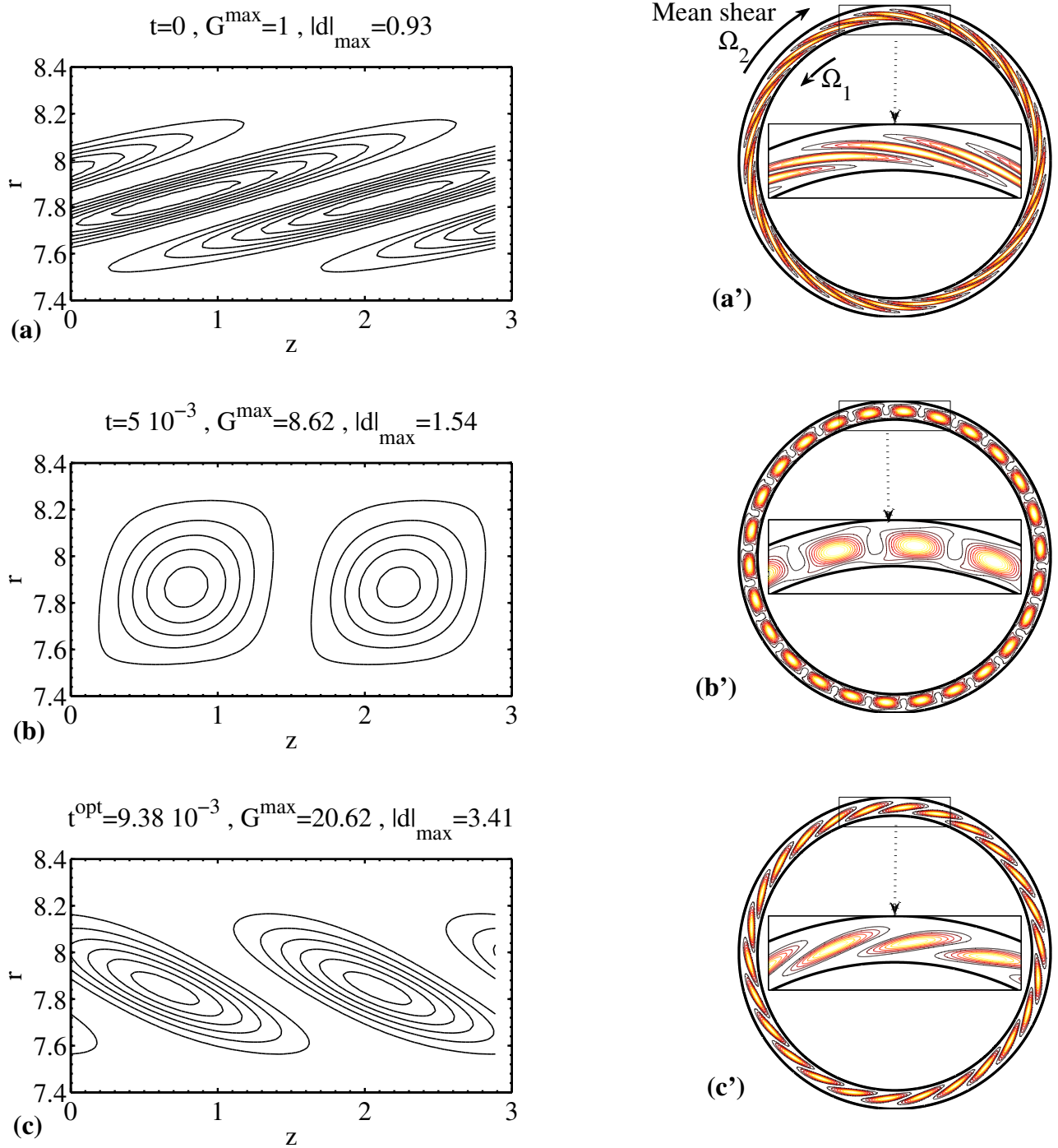


FIG. 4.26 – Contours de la perturbation optimale pour un fluide newtonien pour  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$  avec  $m^{\text{opt}} = 13$ ,  $k^{\text{opt}} = 2.176$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r)\partial v'/\partial \theta$  représente la divergence bidimensionnelle dans le plan de cisaillement.

On observe que la perturbation optimale est initialement formée de stries azimutales se transformant progressivement en rouleaux azimutaux selon le mécanisme d'anti-lift-up. Ce mécanisme a été mis en évidence pour la première fois par [Antkowiak et Brancher, 2007] dans le cas d'un tourbillon de Lamb-Oseen soumis à un bruit hydrodynamique et serait caractéristique des écoulements rotatifs. La manifestation de ce phénomène est contraire au mécanisme lift-up bien connu pour les écoulements plans cisailés où les rouleaux longitudinaux initiaux se transforment en de puissantes stries longitudinales [Ellingsen et Palm, 1975].

[Antkowiak et Brancher, 2007] ont proposé deux approches explicatives de ce comportement. La première approche est basée sur les équations aux perturbations linéarisées de la vitesse et de la vorticité azimutales. La seconde approche provient de l'interprétation de la composante radiale de des équations linéaires aux perturbations.

Pour illustrer la première approche, l'équation aux perturbations linéarisées est réécrite en introduisant la vorticité azimutale  $\omega'_\theta = \partial u'/\partial z - \partial v'/\partial r$ . Dans la limite d'un fluide parfait, l'évolution de la vitesse et la vorticité azimutales est donnée par

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \Delta v', \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \omega'_\theta}{\partial t} = -2Re_1 \Omega^b \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad (4.18)$$

avec  $\Omega^b = V^b/r$ , la vitesse angulaire de l'écoulement de base. La vitesse azimutale satisfait à l'équation de diffusion, et décroît avec la viscosité. Par contre, la vorticité azimutale  $\omega'_\theta$  est entraînée par le gradient axial  $\frac{\partial v'}{\partial z}$  des stries azimutales (la force de Coriolis active la formation des stries azimutales). En utilisant la même démarche que [Ellingsen et Palm, 1975], il apparaît que les stries de la vitesse azimutale d'amplitude  $O(\epsilon)$  peuvent générer des rouleaux ou "vortex" azimutaux d'amplitude  $O(\epsilon Re)$  à l'échelle de temps  $(Re)$ .

Dans la deuxième approche, le mécanisme anti-lift-up peut être illustré en considérant la composante radiale des équations aux perturbations linéarisées [Antkowiak et Brancher, 2007]

$$\frac{\partial u'}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + 2\Omega^b v' \quad (4.19)$$

Le terme  $2\Omega^b v'$  provient de la force de Coriolis. L'équation (4.19) indique que les particules fluides avec des stries azimutales positives subissent une force centrifuge importante et croissante qui n'est pas compensée par le gradient de pression, et sont ainsi poussées vers la paroi du cylindre extérieur. Au contraire, les particules des stries azimutales négatives sont poussées contre la paroi du cylindre intérieur. Ce processus va donc initier la formation de rouleaux azimutaux.

En dehors de la ligne de Rayleigh où l'amplification optimale de l'énergie évolue en  $O\left(Re^{2/3}\right)$  pour

de grands  $Re$ , le moment angulaire n'est plus uniforme dans l'espace annulaire et la fréquence épicyclique n'est plus nulle. Dans ce cas, à l'instant initial, le contour de l'énergie de la perturbation est orienté dans le sens contraire à l'écoulement de base comme le montrent la figure 4.26(a) dans le plan  $(r, z)$  et la figure 4.26(a') dans le plan  $(r, \theta)$ . Par la suite, ce contour d'énergie bascule progressivement jusqu'à s'aligner avec l'écoulement de base au temps optimal  $t = t^{opt}$  comme illustré sur les figures 4.26(c) et 4.26(c'). Les figures 4.26(c) et 4.26(c') montrent que les contours sont orientés perpendiculairement à l'écoulement de base à un temps intermédiaire d'environ  $t \approx t^{opt}/2$ .

### Mécanisme de croissance transitoire dans le régime linéaire stable

Dans cette partie, on considère une perturbation optimale tridimensionnelle. Il a été montré au paragraphe précédent qu'elle est initialement orientée dans la direction contraire à l'écoulement de base avant de s'aligner avec cette dernière (figure 4.26(c) et figure 4.26(c')). Dans le cas d'une perturbation optimale bidimensionnelle, la perturbation est orientée transversalement à l'écoulement de base à l'instant optimal comme l'ont montré [Butler et Farrell, 1992] pour un écoulement de Couette plan et de Poiseuille. Une perturbation 2D caractérisée par une homogénéité dans la direction axiale ne peut croître qu'à travers le mécanisme de Orr 2D [Orr, 1907], un mécanisme basé sur le théorème de Kelvin. En effet, le contour initial d'une structure verticale au départ devient faible en énergie et bascule avec l'écoulement de base. En conséquence, la vitesse le long de ce contour croît afin de conserver la circulation initiale [Foures et al., 2013]. Ainsi, la vorticité de l'écoulement de base dans la direction axiale peut connaître une extension en fonction de la variation de l'aire dans le plan de cisaillement comme l'ont évoqué [Vitoshkin et al., 2012] pour les écoulements plans cisailés. Dans leurs travaux [Vitoshkin et al., 2012] ont montré que l'interaction entre la vorticité axiale  $q$  et la divergence plane  $d$  joue un rôle déterminant dans la croissance de l'énergie de la perturbation.

$$q = (1/r)\partial(rv')/\partial r - (1/r)\partial u'/\partial \theta, \quad (4.20)$$

$$d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r)\partial v'/\partial \theta. \quad (4.21)$$

Leur analyse est étendue ici au cas de l'écoulement de Taylor-Couette. En suivant leur méthodologie, nous effectuons ainsi la décomposition de Helmholtz bidimensionnelle

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_d + \mathbf{u}_q \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_d = \nabla(\phi) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_q = -\mathbf{rot}(\psi \mathbf{e}_z), \quad (4.22)$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions scalaires, telles que la divergence plane  $d$  et la vorticité axiale  $q$  satisfont

$$d = \Delta_H(\phi) \quad \text{et} \quad q = \Delta_H(\psi), \quad (4.23)$$

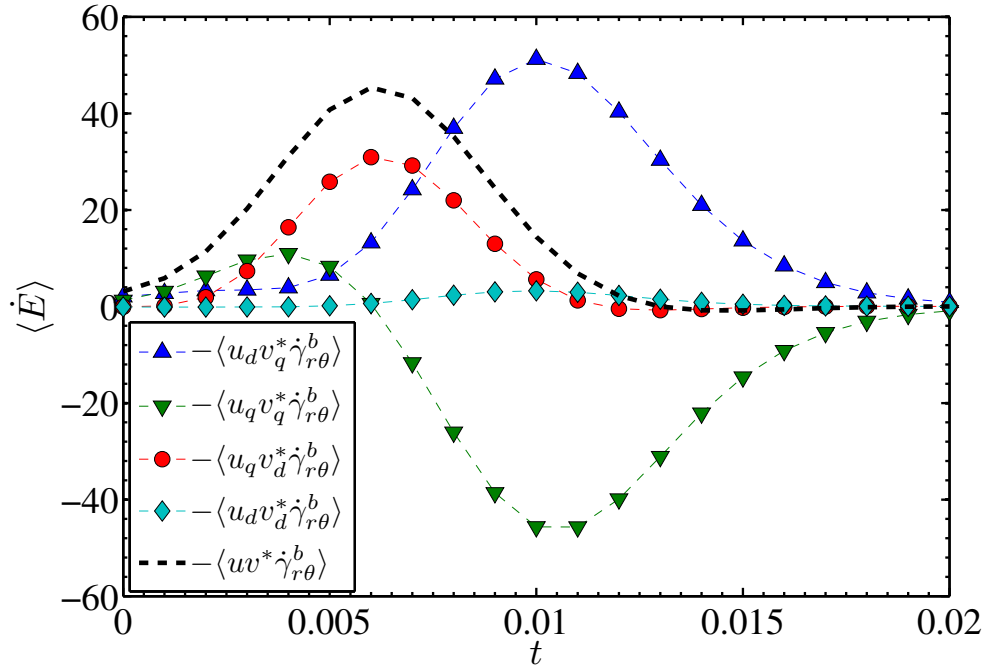
où  $\Delta_H = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial/\partial\theta^2$  est le laplacien  $(r, \theta)$ . Pour le cas limite d'un fluide parfait, l'équation de l'énergie moyenne spatiale est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} &= -Re_1 \left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b \tilde{w}^* \right\rangle, \\ &= -Re_1 \left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b (u_d + u_q) (v_d^* + v_q^*) \right\rangle, \\ &= -Re_1 \left( \left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_d v_d^* \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_d v_q^* \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_d^* \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_q^* \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

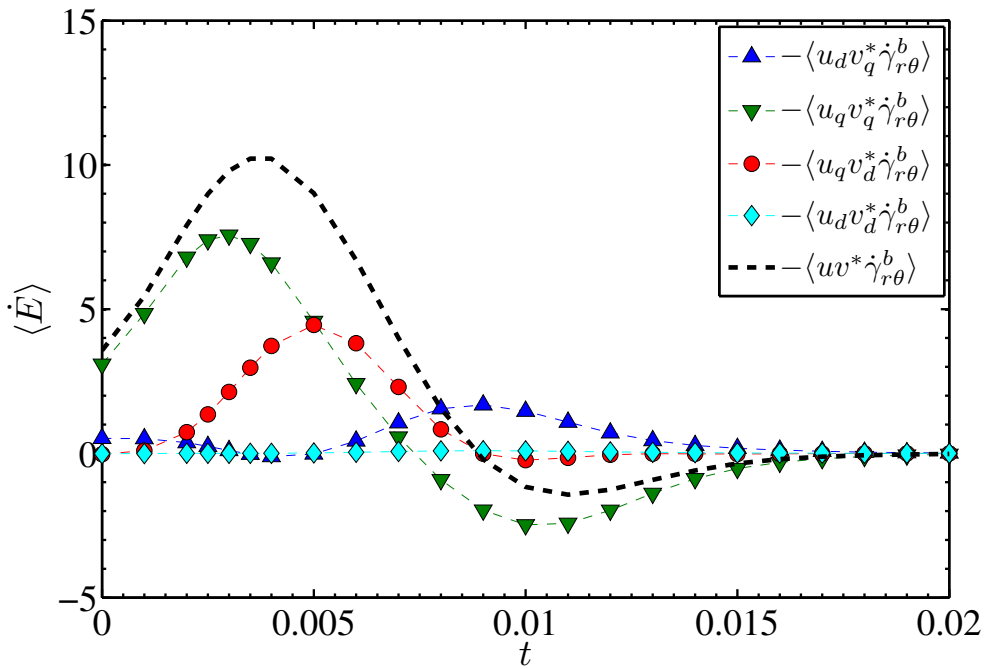
avec  $E = \frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^2}{2}$ ,  $\mathbf{u}_d = (u_d, v_d, w_d)$  et  $\mathbf{u}_q = (u_q, v_q, w_q)$ .

Le premier terme du membre de droite de l'équation (4.24) est la contribution de la divergence  $d$  à la croissance de l'énergie. Les second et troisième termes représentent la contribution mixte de  $q$  et  $d$  et traduisent l'interaction entre la divergence plane et la vorticité axiale. Le quatrième terme représente la manifestation du mécanisme de Orr 2D. L'intensité de ces différents termes, composants de la contrainte de Reynolds en fonction du temps est représentée sur la figure 4.27 pour un fluide newtonien et sur la figure 4.28 pour un fluide en loi de puissance. L'évolution des termes est qualitativement, similaire dans les deux cas mais aussi pour les fluides de Carreau et de Bingham représentés par les figures 4.29 et 4.30 respectivement. Cependant, les amplitudes sont beaucoup plus importantes pour un fluide en loi de puissance et encore plus pour un fluide en loi de Carreau.

La croissance de l'énergie est initialement dominée par le terme rotationnel  $-\left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_q^* \right\rangle$ , ce qui signifie que le mécanisme de Orr 2D est en œuvre. A partir de  $t \approx t^{opt}/2$ , la perturbation optimale est perpendiculaire à l'écoulement de base, puis le terme  $-\left\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_q^* \right\rangle$  décroît, devient négatif, ce qui signifie que le mécanisme de Orr produit une décroissance de l'énergie. La contribution des termes mixte  $d - q$  est positive et est donc à l'origine de l'amplification de l'énergie de la perturbation  $E$  quand les rouleaux sont alignés dans la direction de l'écoulement de base.

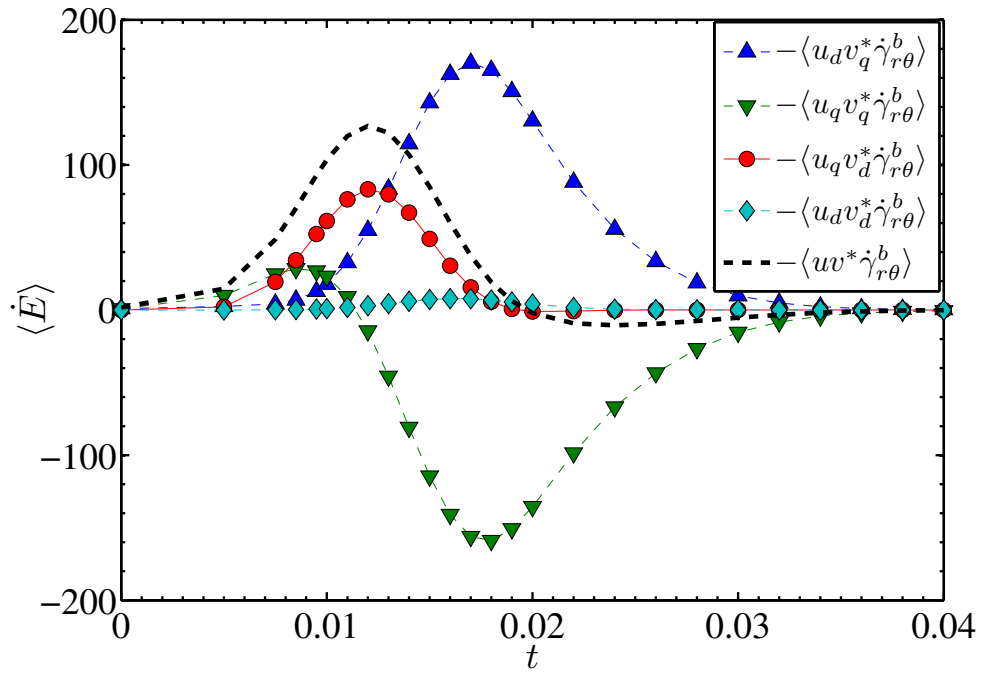


(a)

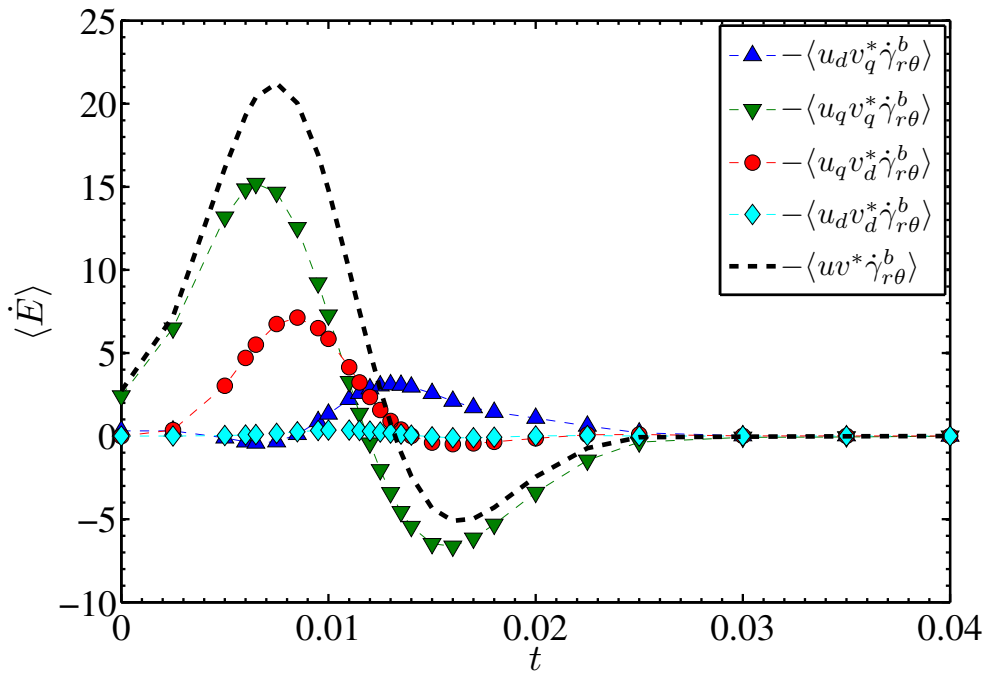


(b)

FIG. 4.27 – Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l’amplification de l’énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d’un fluide newtonien, (a)  $\eta = 0.881$ ,  $m^{opt} = 13$ ,  $k^{opt} = 2.176$  et  $G^{opt} = 20.62$ . (b)  $\eta = 0.4$ ,  $m^{opt} = 3$ ,  $k^{opt} = 1.136$  et  $G^{opt} = 4.288$ .

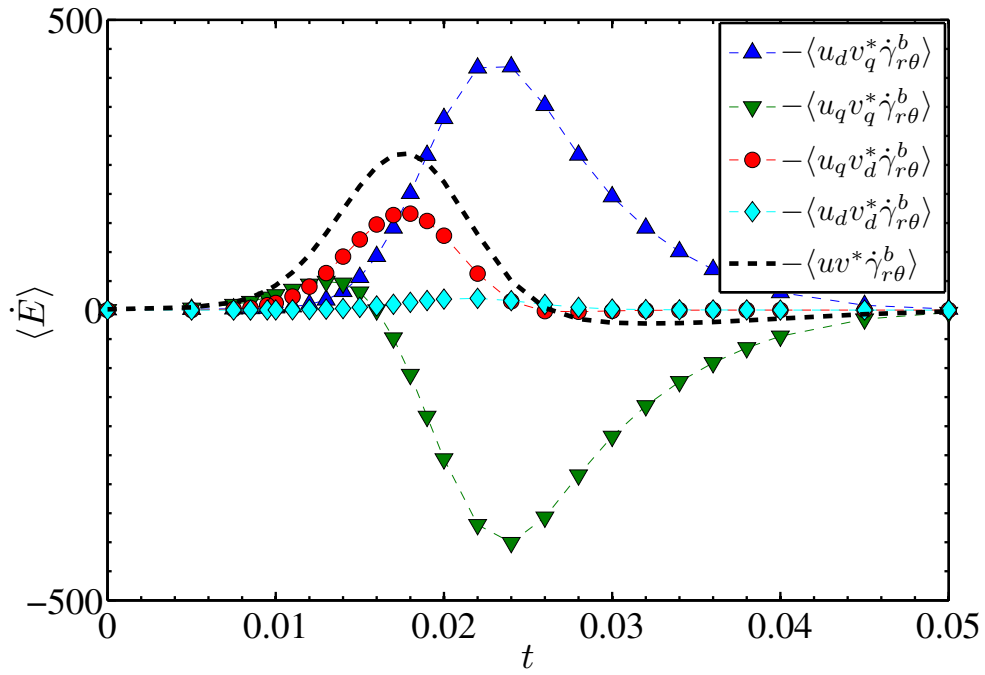


(a)

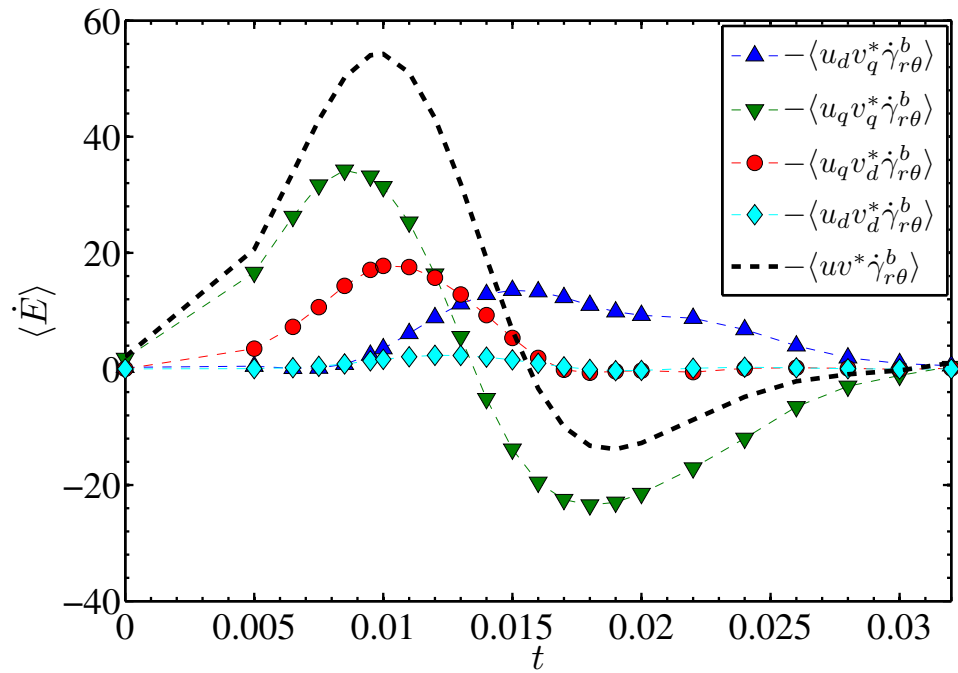


(b)

FIG. 4.28 – Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l’amplification de l’énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d’un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ , (a)  $\eta = 0.881$ ,  $m^{opt} = 11$ ,  $k^{opt} = 1.647$  et  $G^{opt} = 88.16$ . (b)  $\eta = 0.4$ ,  $m^{opt} = 2$ ,  $k^{opt} = 0.911$  et  $G^{opt} = 12.59$ .

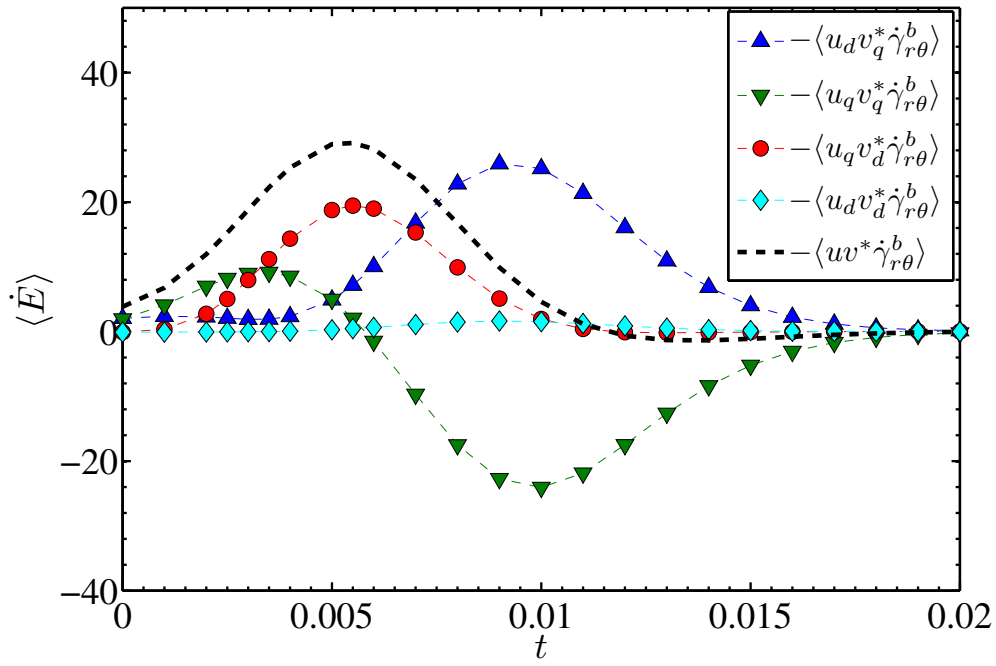


(a)

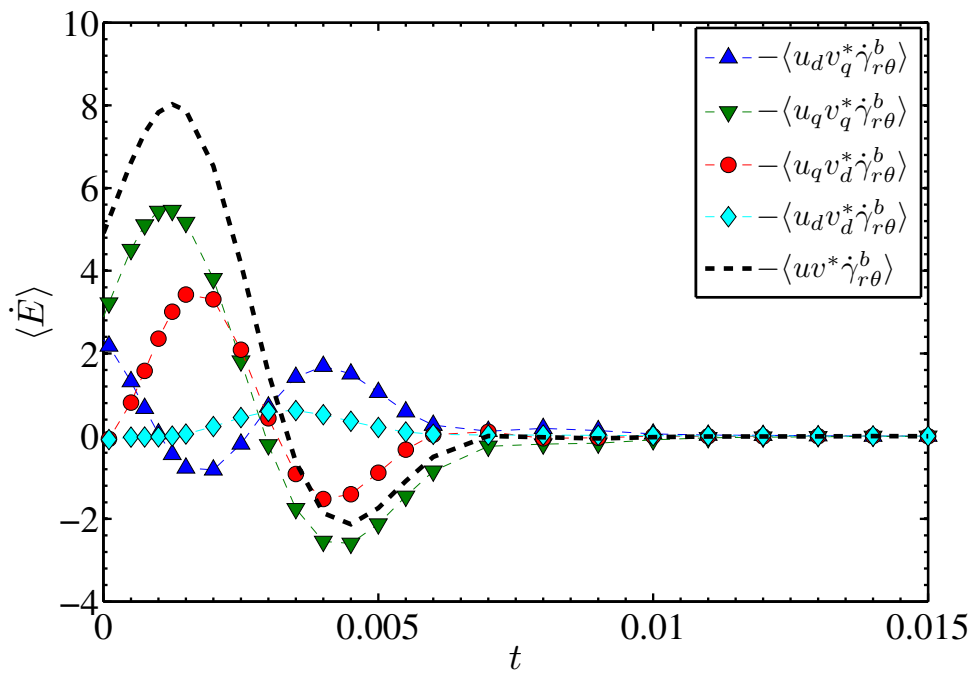


(b)

FIG. 4.29 – Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l’amplification de l’énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d’un fluide de Carreau avec  $n_c = 0.5$  et  $\lambda = 10$  (a)  $\eta = 0.881$ ,  $m^{opt} = 11$ ,  $k^{opt} = 1.736$  et  $G^{opt} = 231.25$ . (b)  $\eta = 0.4$ ,  $m^{opt} = 2$ ,  $k^{opt} = 1.221$  et  $G^{opt} = 37.17$ .



(a)



(b)

FIG. 4.30 – Contribution des différentes composantes des tenseurs de Reynolds à l’amplification de l’énergie de la perturbation 3D pour  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  dans le cas d’un fluide à seuil avec  $B_i = 10$ , (a)  $\eta = 0.881$ ,  $m^{opt} = 13$ ,  $k^{opt} = 1.964$  et  $G^{opt} = 12.08$ . (b)  $\eta = 0.4$ ,  $m^{opt} = 3$ ,  $k^{opt} = 3.427$  et  $G^{opt} = 2.22$ .



**Perturbation optimale pour des fluides rhéofluidifiants purement visqueux**

Dans le cas des fluides rhéofluidifiants purement visqueux, nous avons vu que le moment angulaire n'est pas constant sur la ligne de Rayleigh, contrairement au cas newtonien. Il n'est donc pas besoin de séparer l'étude de la ligne de Rayleigh des autres domaines. La ligne de Rayleigh s'éloigne par ailleurs de la courbe de stabilité marginale quand le caractère rhéofluidifiant s'accroît. La perturbation optimale dans le domaine linéairement stable du plan  $(Re_1, Re_2)$  est qualitativement similaire à celle d'un fluide newtonien en dehors de la ligne de Rayleigh. La croissance de l'énergie évolue dans tout ce domaine en  $O\left(Re^{2/3}\right)$ , pour de grandes valeurs de  $Re$ . Les figures 4.31 et 4.34 montrent l'évolution de cette perturbation optimale avec le temps pour des rapports de rayons  $\eta = 0.881$  et  $\eta = 0.4$  pour un fluide en loi de puissance. La figure 4.32 montre l'évolution de la perturbation optimale avec le temps pour un rapport de rayon  $\eta = 0.881$  pour un fluide en loi de Carreau, et la figure 4.33 pour un fluide de Bingham. La perturbation optimale est principalement localisée au voisinage de la paroi du cylindre intérieur. Cet effet est beaucoup plus prononcé pour un large rapport de rayon comme montré sur la figure 4.34.

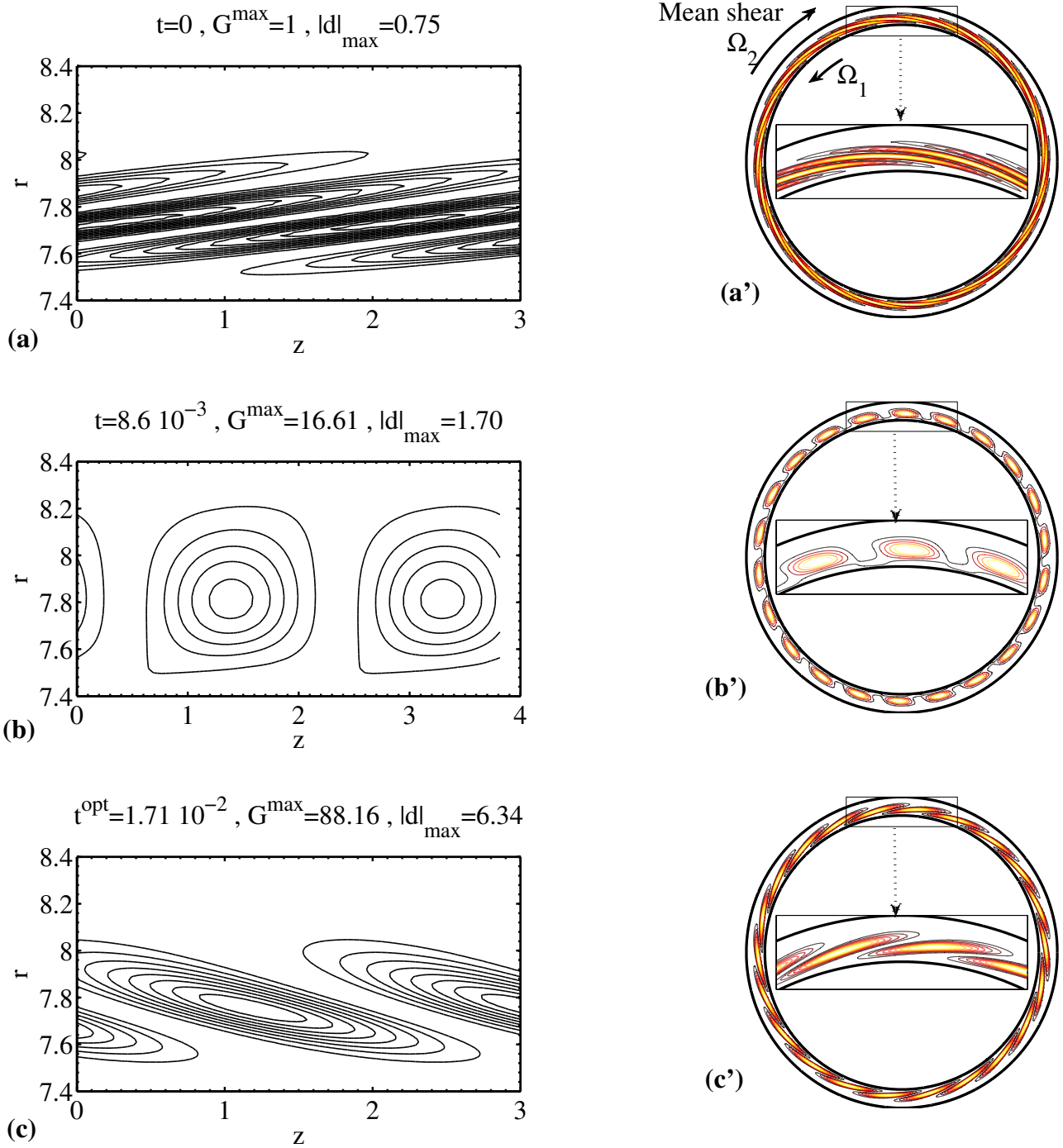


FIG. 4.31 – Contours de la perturbation optimale pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ,  $m^{\text{opt}} = 11$  et  $k^{\text{opt}} = 1.647$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . La quantité  $d = \partial u' / \partial r + u' / r + (1/r) \partial v' / \partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement.

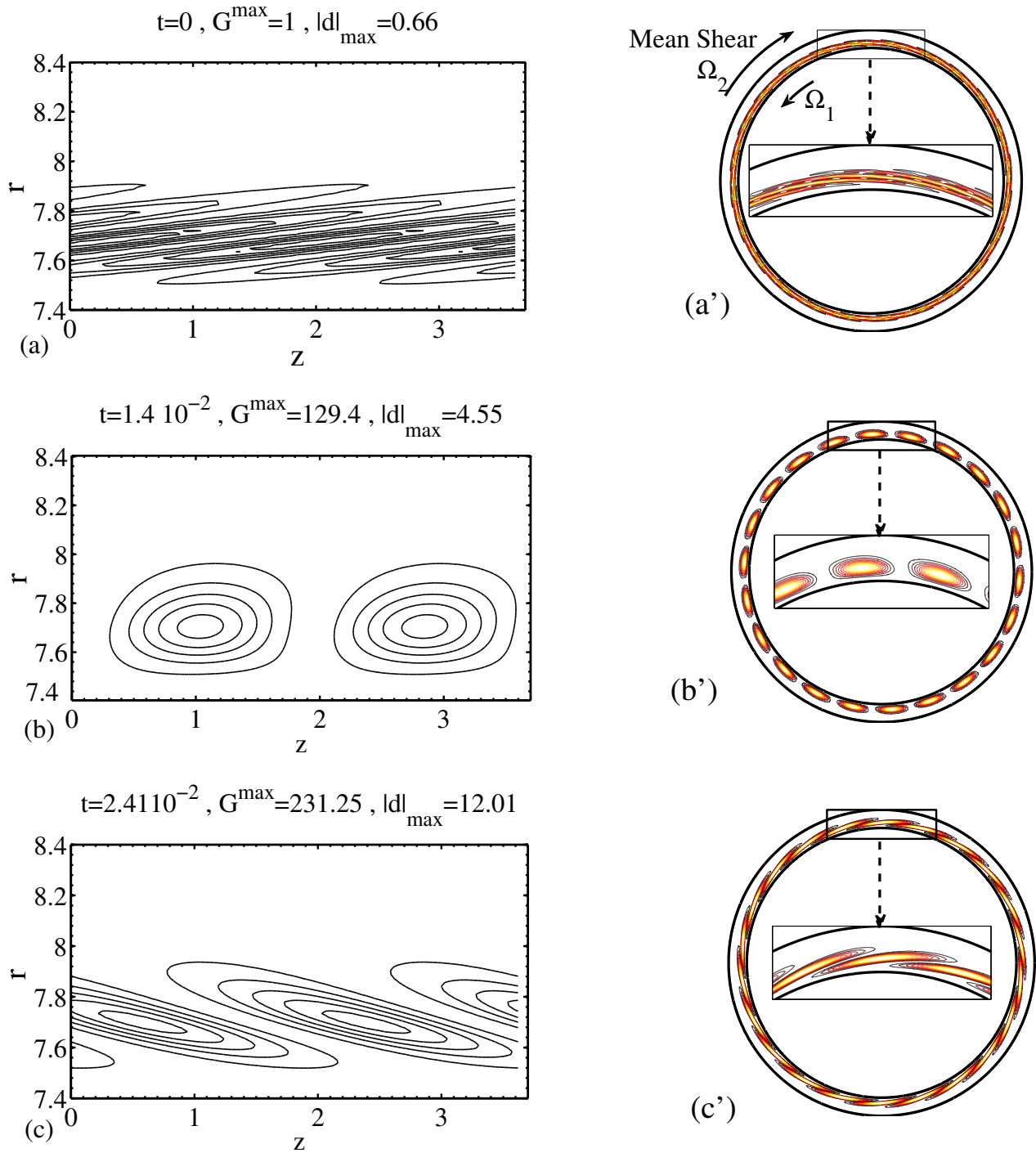


FIG. 4.32 – Contours de la perturbation optimale pour un fluide de Carreau avec  $n_c = 0.5$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ,  $m^{opt} = 11$  et  $k^{opt} = 1.736$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . La quantité  $d = \partial u' / \partial r + u' / r + (1/r) \partial v' / \partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement.

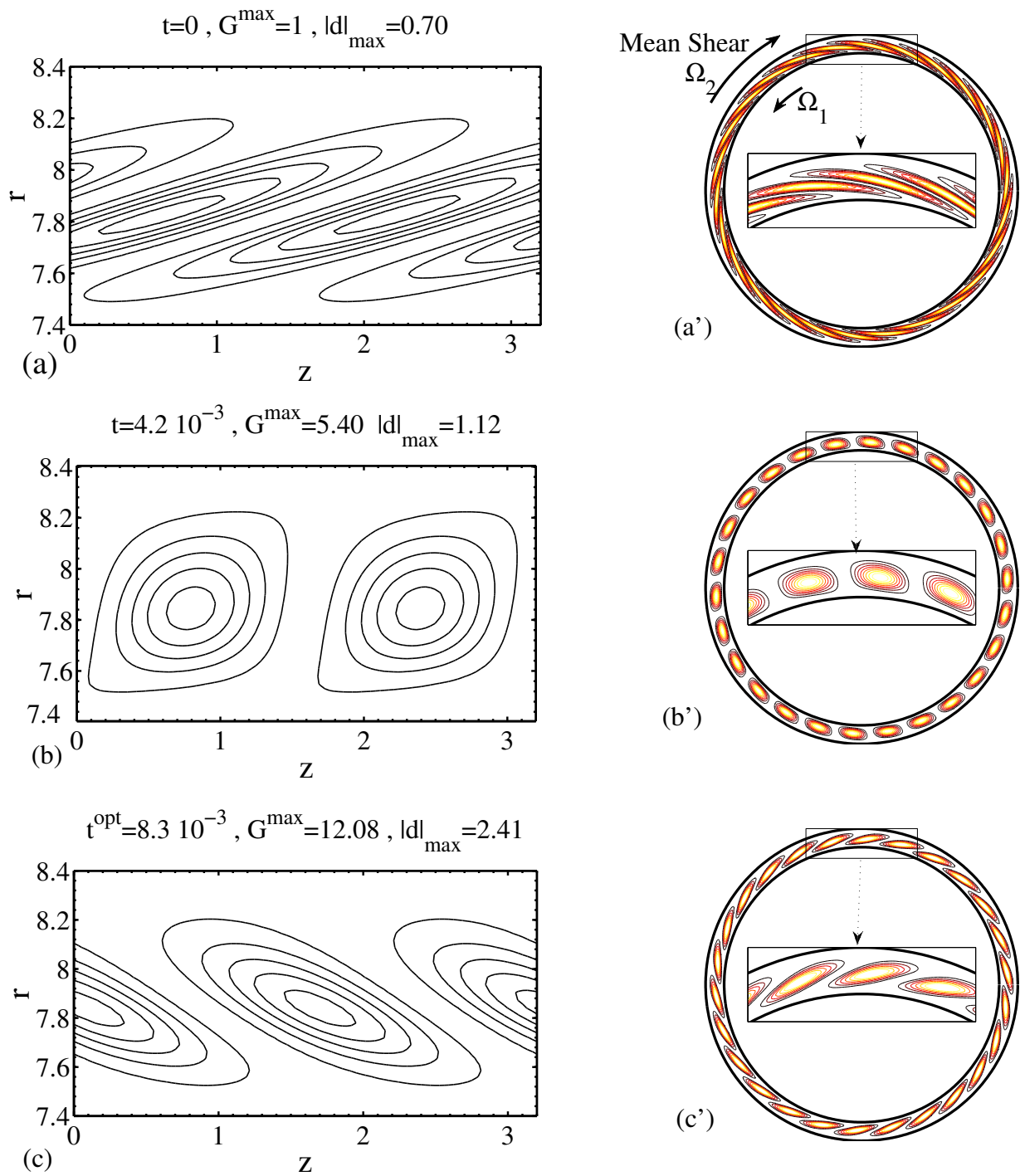


FIG. 4.33 – Contours de la perturbation optimale pour un fluide de Bingham avec  $B_i = 10$ ,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$ ,  $m^{\text{opt}} = 13$  et  $k^{\text{opt}} = 1.964$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . La quantité  $d = \partial u' / \partial r + u' / r + (1/r) \partial v' / \partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement.

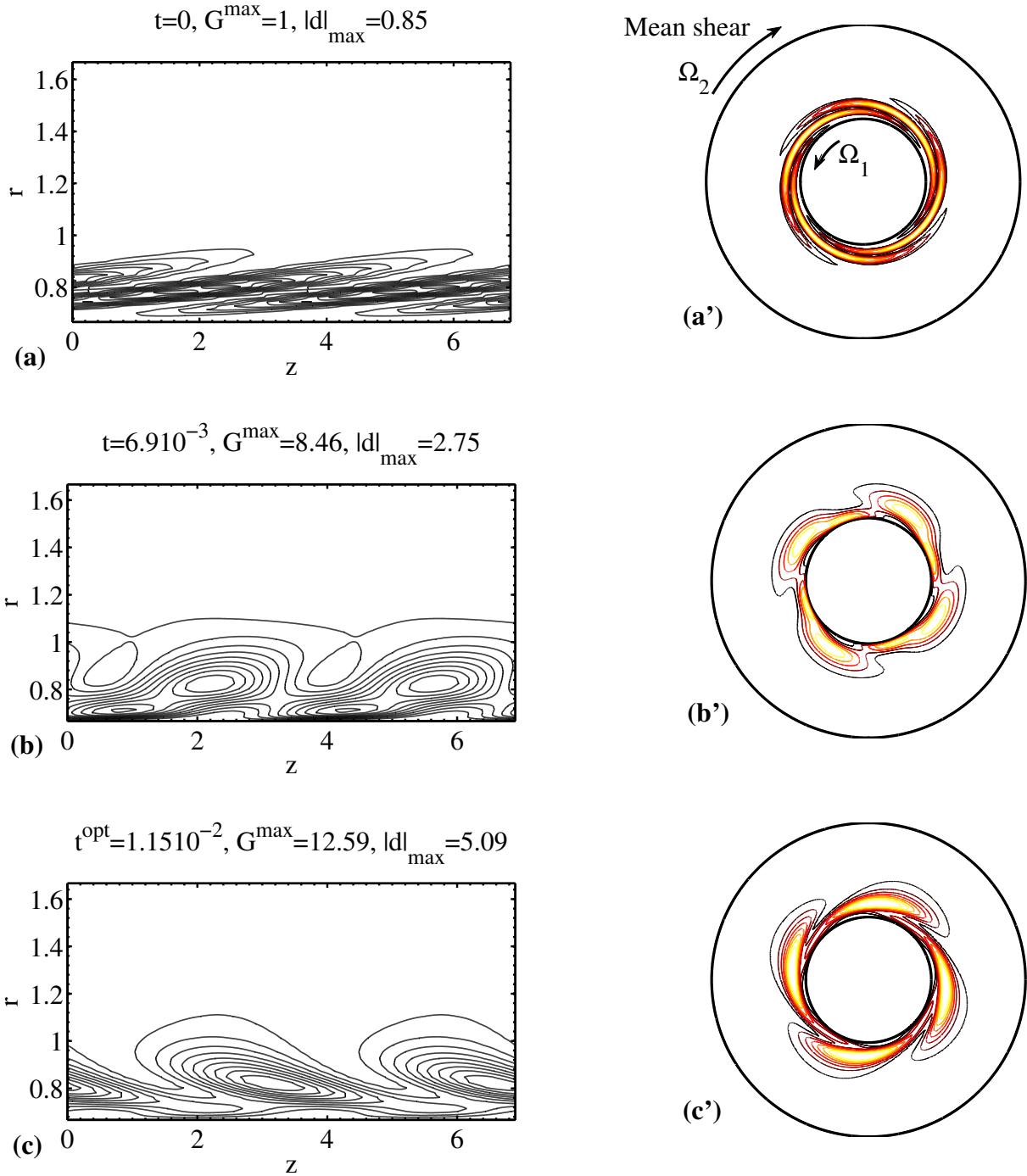


FIG. 4.34 – Contours de la perturbation optimale pour un fluide en loi de puissance avec  $n_p = 0.5$ ,  $\eta = 0.4$ ,  $Re_1 = 101$  et  $Re_2 = -1061.2$  avec  $m^{\text{opt}} = 2$  et  $k^{\text{opt}} = 0.911$ . A gauche : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, z)$  à (a) l'instant initial  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c) l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . A droite : contours de l'énergie cinétique de la perturbation dans le plan  $(r, \theta)$  à (a') l'instant initial  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{\text{opt}}/2$  et à (c') l'instant optimal  $t = t^{\text{opt}}$ . La quantité  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r) \partial v'/\partial \theta$  représente la divergence 2D dans le plan de cisaillement.

## 4.4 Conclusion

L'amplification de l'énergie cinétique d'une perturbation tridimensionnelle aux temps courts a été étudiée dans ce chapitre. La non normalité de l'opérateur linéaire à l'origine de cette amplification a été caractérisée par l'étude des pseudospectres.

La croissance transitoire de la perturbation est également fortement affectée par la rhéologie. Elle est grandement amplifiée pour un fluide de Carreau et réduite pour un fluide de Bingham. L'étude de la perturbation optimale a permis d'identifier les mécanismes en jeu. Le mécanisme de Orr est celui qui est à l'œuvre dans tous les régimes d'écoulement pour le fluide newtonien, les fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte, sauf sur la ligne de Rayleigh pour le fluide newtonien où il a été identifié un comportement particulier suivant le mécanisme anti-lift-up.

Dans le cas du mécanisme de Orr, l'amplification optimale de l'énergie évolue en  $Re^{2/3}$  alors qu'elle évolue en  $Re^2$  avec le mécanisme anti-lift-up.

## Chapitre 5

# ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUETTE

**N**ous présentons dans ce chapitre une étude expérimentale de l'écoulement de fluides non newtoniens rhéofluidifiants dans un dispositif de Taylor-Couette. Dans un premier temps, une validation du dispositif expérimental a été effectuée dans le cas d'un fluide newtonien : une solution aqueuse de glycérine. Des rouleaux de Taylor ont été observés par une technique classique de visualisation. La taille de ces rouleaux a aussi été mesurée. Des mesures du couple nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur ont également été réalisées. Le champ de vitesse a été mesuré par PIV (Particle Image Velocimetry). Dans ce cas de référence newtonien, lorsque seul le cylindre intérieur tourne et pour des nombres de Reynolds au moins jusqu'à 5 fois la valeur critique, les rouleaux de Taylor restent stationnaires et axisymétriques.

Des fluides rhéofluidifiants faiblement viscoélastiques ont ensuite été utilisés. Il s'agit des solutions aqueuses de CarboxyMéthyl Cellulose (CMC) et de xanthane à différentes concentrations. Ces fluides suivent le modèle de la loi de puissance dans la gamme de cisaillement régnant dans notre dispositif. La première différence des contraintes normales de ces fluides étant très faible devant la contrainte de cisaillement, leur caractère viscoélastique peut en effet être négligé.

Pour un fluide fortement rhéofluidifiant, les rouleaux de la première instabilité apparaissent avec une vitesse de glissement dans la direction axiale. Ce phénomène a été déjà observé par [Escudier et al., 1995]. En analysant l'hystérésis du système, une légère transition par bifurcation sous-critique a été observée. Le caractère sous-critique de cette bifurcation a été confirmée par une analyse faiblement non linéaire non présentée dans ce manuscrit. Par ailleurs, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de  $1.5 \times Re_{1c}$ , la structure de l'écoulement devient de plus en plus complexe, mettant en évidence un écoulement chaotique.

## Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	123
5.2	Matériel et méthode . . . . .	124
5.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	124
5.2.2	Mesures rhéologiques . . . . .	126
5.2.3	Fluides utilisés . . . . .	128
5.2.4	Mesure de couple . . . . .	134
5.2.5	Visualisation par ensemencement de paillettes . . . . .	136
5.2.6	Technique de vélocimétrie par images de particules . . . . .	137
5.3	Résultats & discussions . . . . .	139
5.3.1	Manipulations avec le cylindre extérieur fixe . . . . .	139
5.3.2	Manipulations avec le cylindre extérieur tournant . . . . .	154
5.4	Conclusion . . . . .	161

---



## 5.1 Introduction

Nous avons présenté dans les premiers chapitres de ce travail, l'analyse linéaire de stabilité et la croissance transitoire d'une perturbation dans un écoulement de Couette. Nous avons observé principalement que, dans le régime contra-rotatif, il peut y avoir une importante croissance transitoire de l'énergie de la perturbation surtout pour les fluides fortement rhéofluidifiants. Cette croissance transitoire suggère une bifurcation sous-critique. Dans le cas newtonien, [Coles, 1965] a observé expérimentalement une bifurcation sous-critique dans le régime contra-rotatif. Elle a été caractérisée numériquement par [Meseguer *et al.*, 2009]. Il convient de noter que le caractère rhéofluidifiant en lui-même peut être à l'origine d'une bifurcation sous-critique, comme cela a été observé dans d'autres situations [Albaalbaki et Khayat, 2011, Chekila *et al.*, 2011, Bouteraa *et al.*, 2015].

Lorsque seul le cylindre intérieur est en rotation, les scénarios de la transition vers la turbulence de l'écoulement de Couette circulaire (ECC) sont connus depuis les travaux sur les instabilités de [Taylor, 1923]. [Taylor, 1923] a montré mais aussi caractérisé l'existence de l'écoulement secondaire constitué de rouleaux contrarotatifs occupant tout l'espace annulaire. La taille de ces rouleaux et le seuil de vitesse de rotation critique d'apparition de l'écoulement secondaire mesurés expérimentalement sont en bon accord avec les prédictions de l'analyse linéaire de stabilité. Suite à cette étude, on sait que lorsque seul le cylindre intérieur tourne, la transition est supercritique, c'est-à-dire que la transition s'effectue par l'apparition successive de structures instables de différents aspects jusqu'à l'établissement d'un écoulement chaotique turbulent. En effet, le régime primaire dit TVF (Taylor Vortex Flow) se déstabilise au profit d'un autre régime dit WVF (Wavy Vortex Flow), ensuite en MWVF (Modulated Wavy Vortex Flow) puis enfin la turbulence.

Lorsque les deux cylindres sont en rotation, différents régimes d'écoulement peuvent être observés. [Andereck *et al.*, 1986] ont inventorié plus d'une vingtaine de régimes d'écoulements. De plus, dans le régime contra-rotatif, et pour des nombres de Reynolds extérieur  $Re_2$  suffisamment élevés, [Coles, 1965] a montré que l'écoulement peut subir une transition sous-critique. Il n'y a plus dans ce cas de succession d'instabilités conduisant à l'apparition de la turbulence mais plutôt une bifurcation brusque. Ce phénomène a été mis en évidence par une analyse faiblement non linéaire [Davey, 1962] qui a montré qu'une perturbation d'amplitude finie suffisamment grande peut conduire à la turbulence.

La motivation principale de ce travail expérimental est de montrer comment se manifeste la transition à la turbulence pour les fluides non newtoniens rhéofluidifiants. Nous utilisons principalement dans cette étude des fluides dont la viscosité peut être décrite par une loi de puissance. Les résultats expérimentaux sont confrontés aux résultats de l'analyse de stabilité linéaire du chapitre 2.

Trois méthodes expérimentales ont été utilisées pour caractériser l'apparition des instabilités :

- la mesure de couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur,
- une visualisation des mouvements des paillettes qui s'orientent dans le sens de l'écoulement,
- la vélocimétrie par images de particules (Particle Image Velocimetry, PIV).

L'objectif initial des expériences était d'étudier la nature de la première bifurcation pour les fluides rhéofluidifiants dans le régime contra-rotatif, où la croissance transitoire est importante. Nous nous sommes rendus compte à la suite des résultats des premiers chapitres que les phénomènes intéressants ont lieu à grands nombres de Reynolds  $|Re_2|$ . Malheureusement, pour des raisons d'ordre technique et de temps, il n'a pas été possible d'explorer les valeurs pertinentes en accord avec l'étude théorique. A défaut, nous nous sommes intéressés aux gammes de nombres de Reynolds accessibles par notre dispositif.

## 5.2 Matériel et méthode

### 5.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est composé de deux cylindres concentriques coaxiaux et indépendants de longueur  $\hat{L} = 1.2 \text{ m}$ . L'espace annulaire entre ces deux cylindres est  $\hat{d} = 30 \text{ mm}$ . Le cylindre intérieur, de rayon  $\hat{R}_1 = 20 \text{ mm}$ , tourne à la vitesse angulaire  $\hat{\Omega}_1$ . Le cylindre extérieur de rayon  $\hat{R}_2 = 50 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $2 \text{ mm}$ , tourne à la vitesse angulaire  $\hat{\Omega}_2$ . Le cylindre intérieur est en acier et a été peint en noir pour éviter des réflexions des rayons laser et permettre un meilleur contraste lors de la visualisation. Le cylindre extérieur est transparent, en plexiglas. La configuration permet d'avoir un rapport de rayon de  $\eta = 0.4$  et un rapport d'aspect  $\zeta = \hat{L}/\hat{d}$  compris entre 32 et 40 en fonction du niveau de remplissage du fluide. Pour effectuer les mesures de PIV, le cylindre extérieur baigne dans une cuve à section carrée de  $16 \text{ cm}$  de côté et de  $75 \text{ cm}$  de hauteur remplie d'eau. Les parois de la cuve, d'une épaisseur de  $2 \text{ mm}$ , sont en plexiglas et sont situées à une distance minimale de  $2 \text{ cm}$  du cylindre extérieur. Cette cuve permet de réduire la réfraction des rayons lumineux lors de leur traversée du cylindre extérieur en plexiglas, qui agit comme un dioptre.

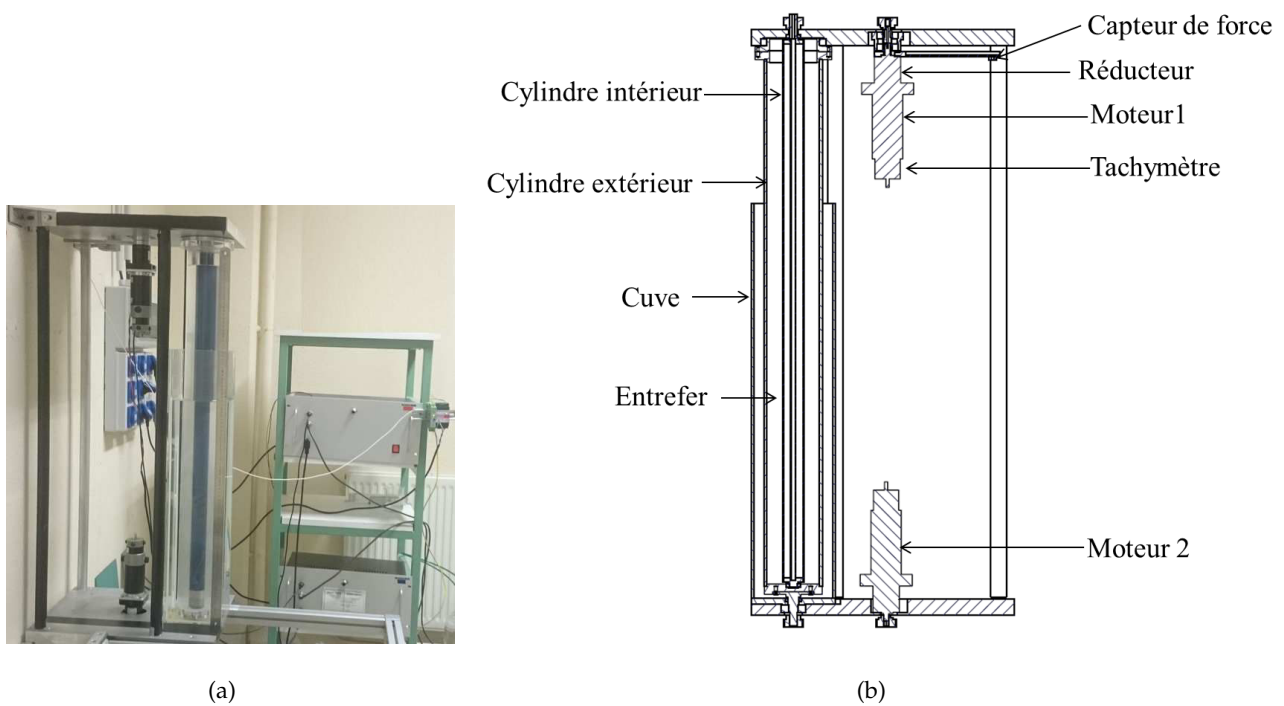


FIG. 5.1 – (a) Photo du dispositif de Taylor-Couette. (b) Coupe du dispositif de Taylor-Couette. Le moteur 1 entraîne en rotation le cylindre intérieur tandis que le moteur 2 entraîne le cylindre extérieur

Les deux cylindres sont commandés par deux moteurs indépendants PARVEX (RX120L) asservis en rotation par des servomoteurs à courant continu. Les caractéristiques de ces moteurs sont données dans le tableau 5.1.

Couple en rotation lente	0.285	N.m
Courant permanent rotation lente	2.8	A
Tension d'alimentation de définition	45	V
Vitesse de définition	3000	tr/min
Tension maximale	60	V
Vitesse maximale	5300	tr/min
Coefficient de couple électromagnétique	0.107	N.m/A
Couple de frottement sec	1.2	N.cm
Masse moteur	1.35	kg

TAB. 5.1 – Caractéristiques des moteurs PARVEX (RX120L).

Pour mieux contrôler les vitesses de rotation des deux cylindres, deux variateurs RTR solidaires à un capteur tachymétrique intégré (TBN 206) sont accouplés aux moteurs. Deux réducteurs de rapport 1/10 sont également associés aux moteurs. Le système est équilibré à une vitesse de rotation maximale de  $\pm 300 \text{tr/min}$  pour les deux cylindres. Une réduction du rapport des rayons des pou-

lies entre le bras du moteur et le cylindre intérieur a permis d'augmenter la vitesse de rotation du cylindre intérieur à  $\pm 600 \text{ tr/min}$ . Le pilotage du système est réalisé avec logiciel Labview.

Un capteur de force (DOERLER MESURES, FN3280) a été utilisé pour la mesure des couples exercés par le fluide sur le cylindre intérieur. La figure 5.2 montre l'image du capteur. Il s'agit d'un capteur de force à butées mécaniques intégrées avec une étendue de mesure de  $0.5N$ . La précision est de  $\pm 0.1\%$  sur l'étendue de la mesure.



FIG. 5.2 – Image du capteur de force à butées mécaniques FN3280.

### 5.2.2 Mesures rhéologiques

Pour caractériser les fluides mis en œuvre, un rhéomètre rotatif AR2000 TA Instruments a été utilisé, 5.3(a). Une géométrie cône-plan de rayon  $\hat{R} = 30 \text{ mm}$  et d'angle de  $\hat{\theta} = 1^\circ C$  a été utilisée, 5.3(b). Cette géométrie est souvent utilisée parce que le gradient de vitesse et la contrainte résultants dans l'échantillon sont uniformes. Les rhéomètres rotatifs sont de deux types :

- soit on impose une contrainte à l'échantillon et on mesure le taux de cisaillement résultant.
- soit on impose un taux de cisaillement et on mesure la contrainte résultante.

Dans notre cas, le rhéomètre est à cisaillement imposé et permet d'avoir l'évolution du taux des contraintes en fonction du taux de cisaillement imposé. Par déduction, on obtient les propriétés rhéologiques du fluide telles que la viscosité et la première différence des contraintes normales.

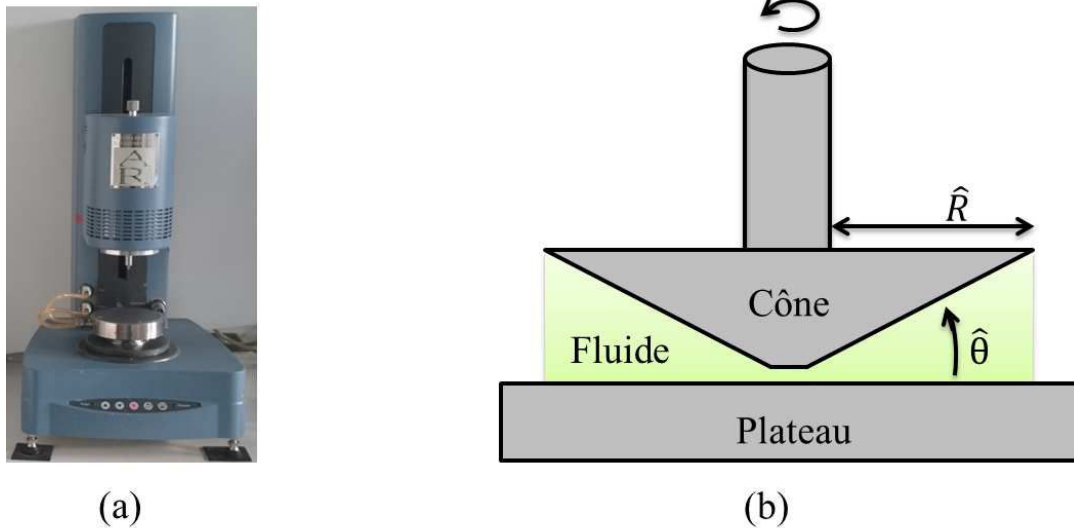


FIG. 5.3 – (a) Photo du rhéomètre AR 2000 de la marque TA Instruments. (b) La géométrie cône-plan utilisée.

La relation entre le second invariant du tenseur des contraintes et le couple  $\hat{G}$  est donnée par

$$\hat{\tau} = \frac{3\hat{G}}{2\pi\hat{R}^3} \quad (5.1)$$

Le second invariant du tenseur des taux de cisaillement est obtenu à partir de la vitesse angulaire de rotation du cône  $\hat{\Omega}$  et de l'angle entre le cône et le plateau  $\hat{\theta}$ . Le gradient de vitesse est alors donné par

$$\hat{\dot{\gamma}} = \frac{\hat{\Omega}}{\hat{\theta}} \quad (5.2)$$

La viscosité s'écrit par définition

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\tau}}{\hat{\dot{\gamma}}} \quad (5.3)$$

### Programme du rhéomètre

Pour les mesures rhéologiques, nous imposons à l'échantillon des plateaux successifs de cisaillement. Au départ, nous effectuons un pré-cisaillement de l'échantillon en imposant un échelon de vitesse de cisaillement. Ensuite on réalise une montée par paliers de vitesses de cisaillement en respectant un temps de  $1mn$  avant les mesures sur ces paliers jusqu'au cisaillement maximal. Une descente par paliers est aussi réalisée pour revenir à la vitesse de cisaillement nulle. Cette mesure en aller (montée) et retour (descente) permet de vérifier s'il y a dépendance temporelle du comportement du fluide et éventuellement s'il a un comportement thixotrope.

Cette procédure est utilisée pour toutes les mesures rhéologiques effectuées dans ce travail.

### 5.2.3 Fluides utilisés

Trois produits dissous dans l'eau, à diverses concentrations, ont été utilisés dans cette étude :

- une solution aqueuse de glycérine utilisée comme fluide de référence newtonien,
- une solution aqueuse faiblement rhéofluidiante sans seuil de contrainte de CarboxyMéthyl Cellulose (CMC),
- une solution aqueuse fortement rhéofluidifiante sans seuil de contrainte de gomme de xanthane.

#### Solution de glycérine : fluide newtonien de référence

La glycérine, appelée aussi glycérol est un alcool liquide visqueux, incolore, inodore de formule chimique brute  $\text{CH}_2\text{OH}-\text{CHOH}-\text{CH}_2\text{OH}$ . Elle est très hygroscopique, miscible à l'eau et à d'autres alcools. La figure 5.4 présente la structure moléculaire de la glycérine.

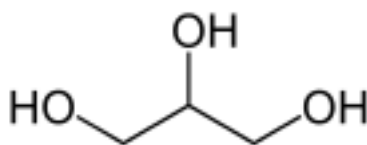


FIG. 5.4 – Formule chimique développée de la glycérine.

La glycérine se trouve généralement dans la nature sous la forme d'esters : les glycérides. Elle est présente aussi dans des huiles et dans les graisses d'origines animales. En génie des procédés, la glycérine est un sous-produit issu de la fabrication des savons et des acides gras ou issu de la synthèse du propylène ou encore de la fermentation des solutions à base de sucres.

Nous avons choisi la glycérine comme fluide newtonien de référence parce que c'est un fluide transparent, bon marché et très visqueux. La glycérine utilisée dans ce travail est la glycérine bi-distillée 99.5% fournie par VWL CHEMICALS sous forme de liquide transparent à forte viscosité. Cette solution a été diluée pour obtenir une solution à 85% en masse, de viscosité dynamique  $\mu_1 = 0.135 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  à  $20^\circ\text{C}$ .

#### Solutions de CarboxyMéthyl Cellulose (CMC)

La CarboxyMéthyl Cellulose (CMC) est le nom commun d'une série d'éthers cellulosiques obtenue à partir de la cellulose. La CMC est utilisée dans l'industrie alimentaire comme additif E446, viscosifiant, stabilisant et agent suspensif. Les solutions de CMC sont rhéofluidifiantes. Au-delà d'une concentration limite, elles peuvent présenter un seuil de contrainte et un comportement élastique.

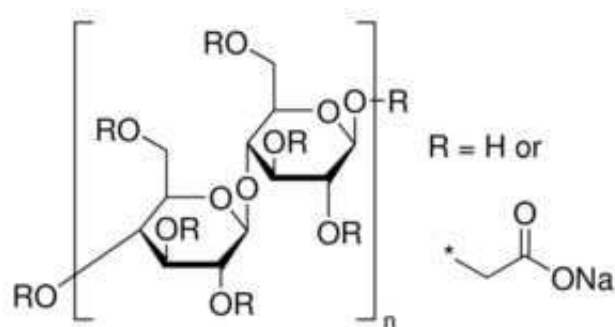


FIG. 5.5 – Formule chimique développée de la CarboxyMéthyl Cellulose (CMC).

### Préparation des solutions de CMC

La CMC utilisée dans cette étude est de type C5013 - 1 KG haute viscosité de SIGMA-ALDRICH. Sa masse moléculaire est de  $7 \times 10^6$  daltons. Elle se présente initialement sous forme de poudre blanche inodore et insipide. Elle est légèrement hygroscopique.

Les solutions aqueuses sont préparées à 0.4, 0.5 et 0.7% en masse. Lors de la préparation de la solution, la masse de poudre désirée est incorporée à de l'eau sous agitation. On obtient une solution aqueuse transparente. La solution obtenue est ensuite laissée au repos pendant 24h avant les mesures rhéologiques, l'introduction dans le dispositif de Taylor-Couette et les différentes mesures expérimentales.

### Caractéristiques rhéologiques des solutions de CMC

Les mesures rhéologiques sont effectuées avec le rhéomètre décrit dans le paragraphe § 5.2.2. Le fluide est soumis à un taux de cisaillement dans la gamme [ $10^{-2}$   $500 \text{ s}^{-1}$ ]. Les rhéogrammes obtenus sont présentés sur la figure 5.6. A faible cisaillement, seules les mesures dont le couple est supérieur à  $\hat{G} \geq 5 \mu\text{N.m}$  (limite du capteur de force du rhéomètre) ont été retenues. Les courbes d'écoulement sont modélisées par des modèles de carreau et de Cross.

Dans cette étude, nous nous intéressons principalement à la gamme de cisaillement correspondant à l'apparition de la première instabilité. Dans cette gamme, les courbes d'écoulement peuvent être approchées par une loi de puissance. Le tableau 5.2 montre les paramètres rhéologiques obtenus en fonction de la gamme de cisaillement régnant dans notre dispositif de Taylor-Couette.

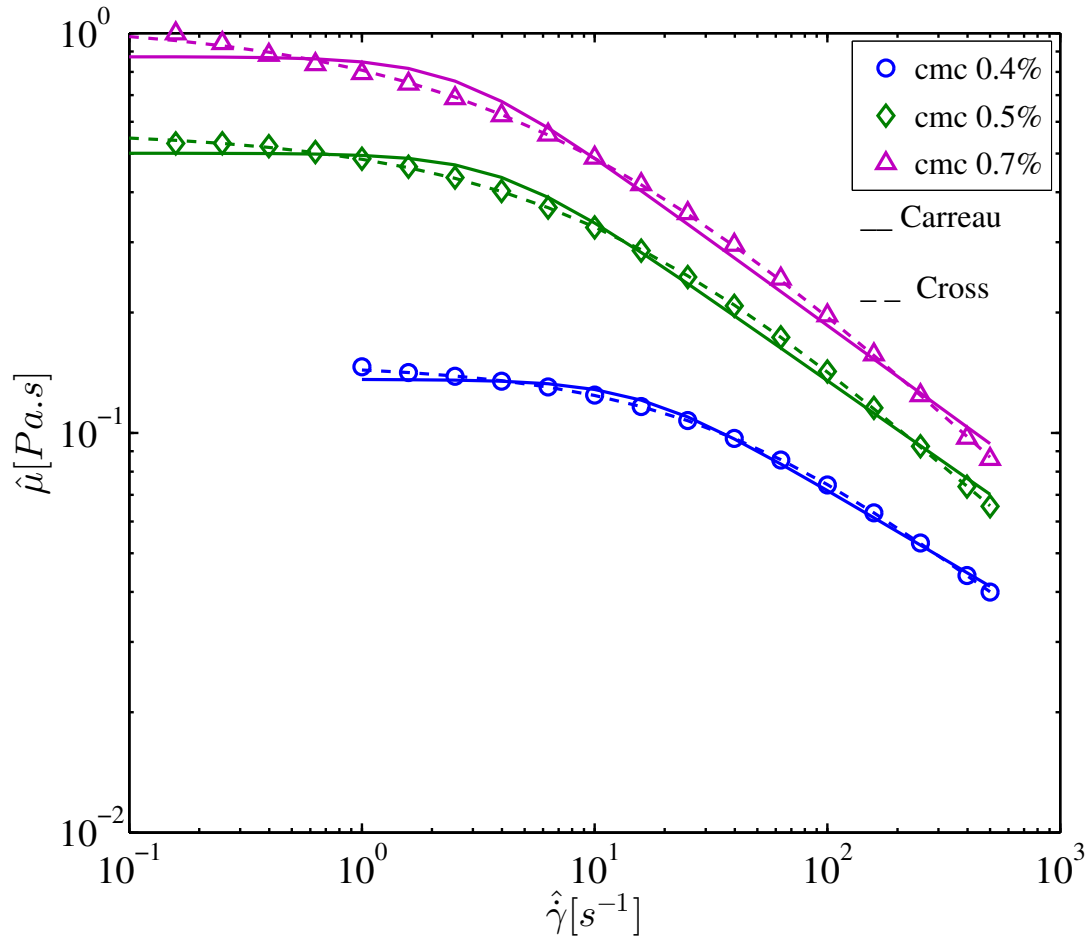


FIG. 5.6 – Rhéogramme des solutions de CMC utilisées. Viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les courbes d'écoulement sont approchées avec les modèles de Carreau et de Cross.

Références des fluides	$\hat{K} [Pa.s^n]$	$n$	$\hat{\gamma} [s^{-1}]$
C5013 - 1 KG 0.7 %	1.785	0.51	[10 - 500]
C5013 - 1 KG 0.5 %	1.118	0.54	[10 - 500]
C5013 - 1 KG 0.4 %	0.38	0.63	[10 - 500]

TAB. 5.2 – Paramètres du modèle en loi de puissance décrivant le comportement rhéologique des solutions de CarboxyMéthyl Cellulose utilisées, pour la gamme de taux de cisaillement intervenant dans l'expérience de Taylor-Couette.

### Solutions de xanthane

La gomme de xanthane est un hétéropolysaccharide produit à partir de la bactérie *Xanthomonas Campestris*. Le xanthane est soluble dans l'eau et est stable sur une large amplitude de températures. Il est très utilisé comme additif alimentaire sous le code *E415*, pour son pouvoir viscosifiant et sus-



pendant. Il est vendu sous forme d'une poudre blanche très fine.

Deux gommés de xanthane ont été utilisées dans le cadre de cette étude. La gomme de xanthane G12536 – 100G fournie par SIGMA-ALDRICH et la gomme de xanthane SATIAXANE CX 930 de CARGILL. La masse moléculaire de ces gommés est estimée généralement entre  $1.5 \times 10^6$  et  $5 \times 10^6$  daltons. Ces gommés permettent d'avoir une solution aqueuse fortement rhéofluidifiante. A très fortes concentrations, les solutions aqueuses de xanthane peuvent présenter un caractère viscoélastique et un effet seuil.

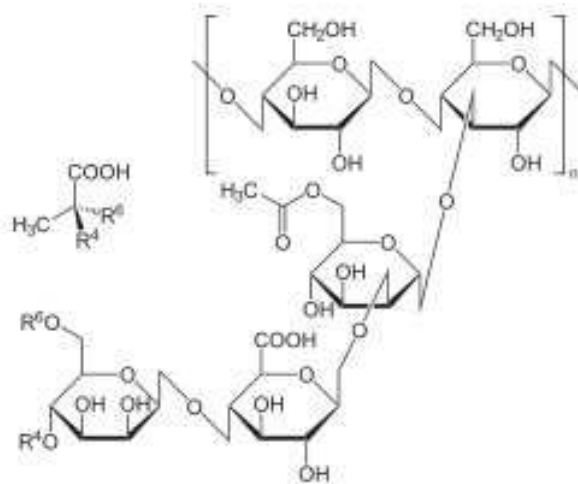


FIG. 5.7 – Formule chimique développée du xanthane

### Préparation des solutions de xanthane

Des solutions de xanthane de concentrations 0.1 ; 0.3 et 0.5% en masse ont été fabriquées selon le mode opératoire suivant : la poudre de xanthane est mélangée sous agitation pendant plusieurs heures dans un volume d'eau distillée dépendant de la concentration désirée. Pour éviter la formation des grumeaux, la dispersion est effectuée en pluie fine sous agitation vigoureuse. La solution est chauffée pendant l'agitation au bain-marie à  $50^{\circ}\text{C}$ . Elle est ensuite conservée dans un réfrigérateur à  $6^{\circ}\text{C}$  jusqu'à l'utilisation pour éviter le développement des bactéries et pour assurer le retour à un état d'équilibre thermique. Pour utilisation, après la sortie du réfrigérateur, la solution est laissée au repos au moins 24h pour le retour à cet état d'équilibre thermique proche des conditions des expériences. A l'issue de cette préparation, la solution est translucide, ce qui permet de réaliser des mesures PIV. Si cette procédure n'est pas respectée, la solution obtenue est trouble et les mesures de PIV sont difficiles à effectuer.

### Caractéristiques rhéologiques des solutions de xanthane

Les mesures rhéologiques sont réalisées avec le rhéomètre décrit dans le paragraphe § 5.2.2. Le fluide est soumis à un cisaillement dans la gamme  $[10^{-2} \text{ } 500 \text{ s}^{-1}]$  ou  $[10^{-1} \text{ } 500 \text{ s}^{-1}]$ . Dans cette plage de taux de cisaillement, les couples obtenus sont tous supérieurs à  $\hat{G} \geq 5\mu N.m$  (limite du capteur de force du rhéomètre). La figure 5.8 montre les rhéogrammes obtenus pour les solutions de xanthane utilisées dans cette étude. Les courbes d'écoulement sont ajustées avec les modèles de Carreau et la loi de puissance. Dans le tableau 5.3 sont présentés les paramètres rhéologiques en loi de puissance obtenus à partir des rhéogrammes et la gamme de cisaillement correspondante régnant dans le dispositif de Taylor-Couette.

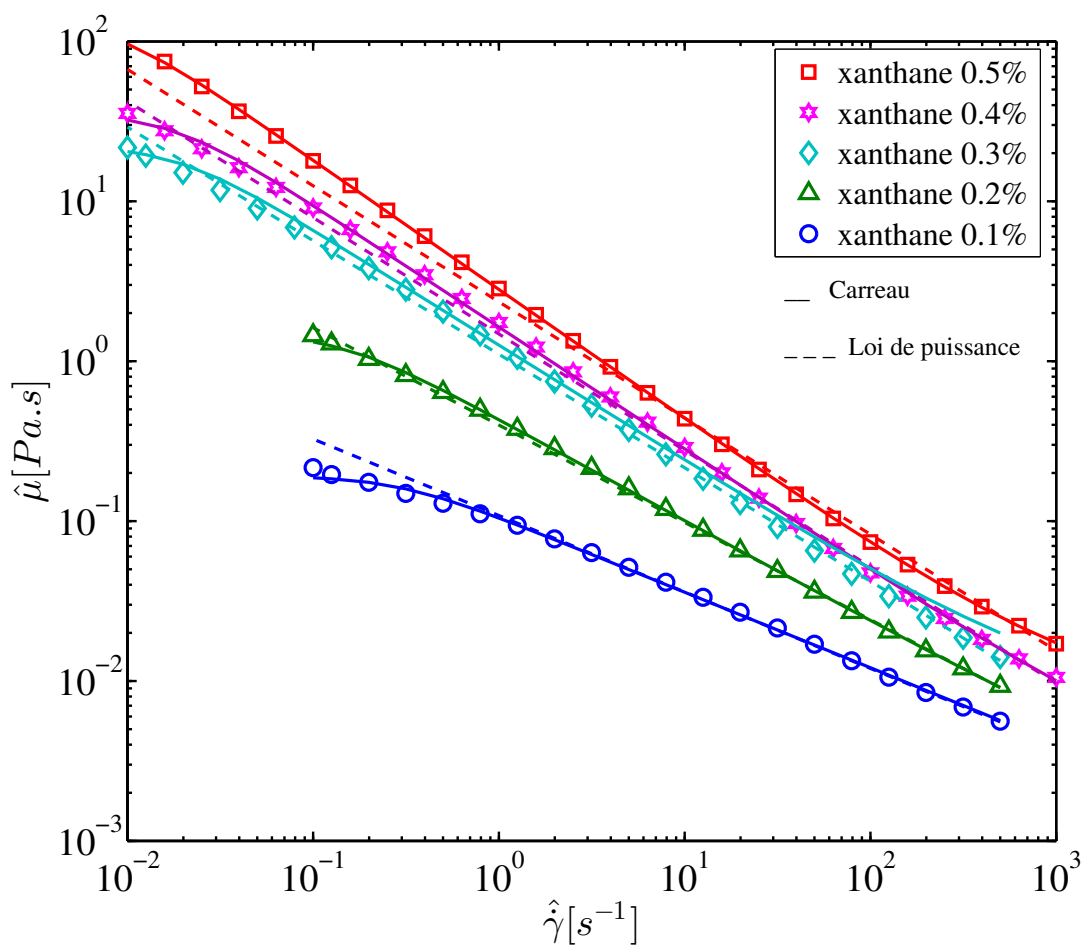


FIG. 5.8 – Rhéogramme des solutions de xanthane utilisées. Viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les courbes d'écoulement sont approchées avec le modèles de Carreau et la loi de puissance.

Références des fluides	$\hat{K}[Pa.s^n]$	$n$	$\hat{\gamma}[s^{-1}]$
SIGMA-ALDRICH 0.1 %	0.119	0.49	[0.1 - 300]
SIGMA-ALDRICH 0.2 %	0.41	0.38	[0.1 - 300]
SIGMA-ALDRICH 0.3 %	1.197	0.26	[0.1 - 300]
SIGMA-ALDRICH 0.4 %	1.654	0.24	[0.1 - 500]
SATIAXANE CX 930 0.5 %	2.67	0.23	[0.01 - 500]

TAB. 5.3 – Paramètres du modèle en loi de puissance décrivant le comportement rhéologique des solutions de xanthane utilisées et la gamme de taux de cisaillement intervenant dans les expériences de Taylor-Couette.

La figure 5.9 montre l'évolution de la première différence des contraintes normales. Elle est faible pour les solutions de xanthane testées sauf pour la solution à 0.5% en masse pour laquelle on note une légère augmentation à partir de  $\hat{\gamma} = 100 s^{-1}$ . [Groisman et Steinberg, 1998] ont montré que l'élasticité des solutions de xanthane ne peut donc pas engendrer d'instabilités. L'apparition d'instabilités dans l'écoulement serait alors principalement due à son caractère très rhéofluidifiant.

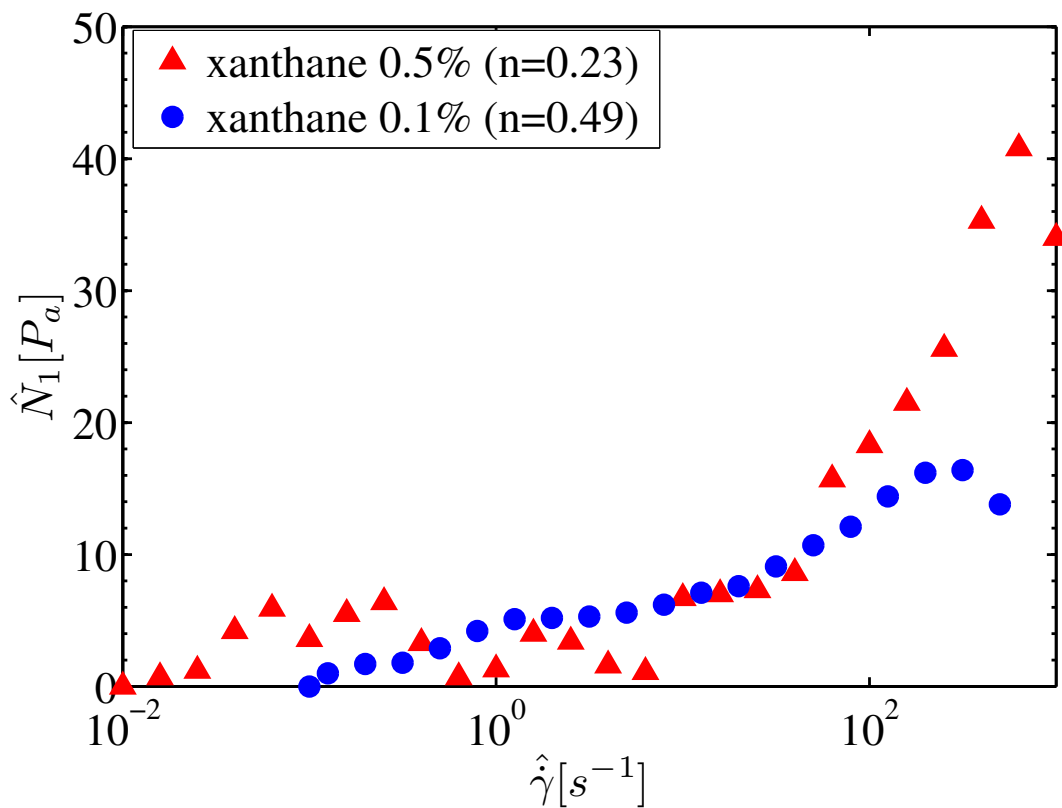


FIG. 5.9 – Évolution de la première différence des contraintes normales en fonction du taux de cisaillement pour les solutions de xanthane utilisées.

### 5.2.4 Mesure de couple

#### Calibration du capteur de force

Le capteur de force utilisé mesure à la fois le couple de cisaillement, le couple de frottement au niveau des joints et du roulement à billes, et les vibrations du dispositif. Le couple dû aux vibrations est éliminé en effectuant une moyenne glissante du signal mesuré. Afin d'accéder au couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur, une calibration du capteur de force est alors nécessaire pour déterminer le couple de frottement. Pour cela, des mesures à vide ont été effectuées c'est-à-dire des mesures pour un cylindre intérieur tournant en l'absence de liquide dans l'entrefer, le cylindre extérieur étant fixe. Le couple à vide a été obtenu pour diverses vitesses de rotation du cylindre intérieur  $\hat{\Omega}_1$  de 0 à 600 *tr/min*, figure 5.10. Des essais réalisés à vitesses  $\hat{\Omega}_1$  croissante puis décroissante confirment qu'il n'y a pas de phénomènes d'hystérésis : les couples obtenus pour une même valeur de  $\hat{\Omega}_1$  lors d'une montée et lors d'une descente sont égaux à une précision inférieure à la marge d'erreur du capteur de force, qui est de 0.05% (précision de  $\pm 0.1\%$  sur l'étendue de la mesure de 500 *mN*).

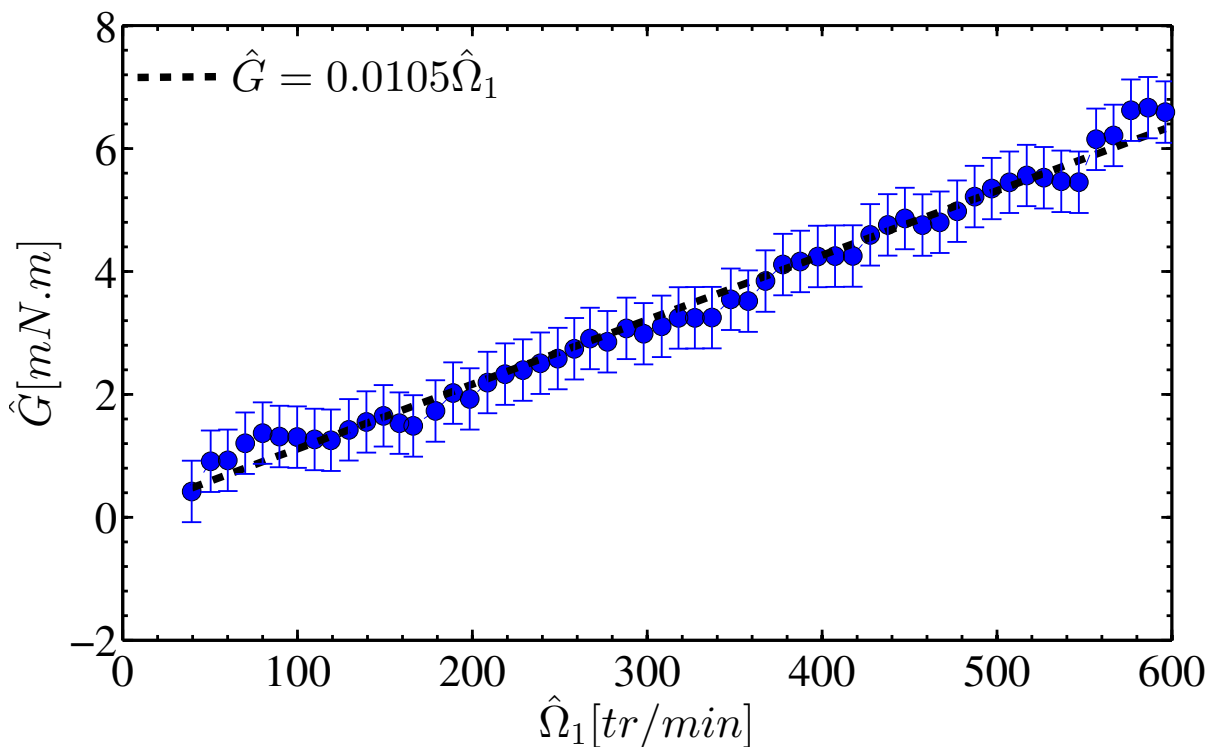


FIG. 5.10 – Couple nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur, en l'absence de liquide dans l'entrefer, en fonction de la vitesse de rotation du cylindre  $\hat{\Omega}_1$ .

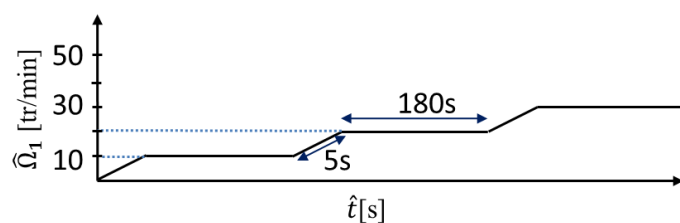
### Protocole de mesure de couple

Les mesures du couple sont réalisées lors de longs paliers de vitesses de rotation, raccordés par de courtes rampes montantes ou descendantes comme illustré sur les figures 5.11(a) et 5.11(b). Ces longs paliers permettent ainsi aux instabilités éventuelles de s'établir et de disposer d'un temps assez long pour moyenner la valeur du couple et filtrer ainsi les bruits dus aux vibrations du moteur et les bruits électroniques. Les rampes permettent d'augmenter progressivement la vitesse de rotation du cylindre entre deux paliers.

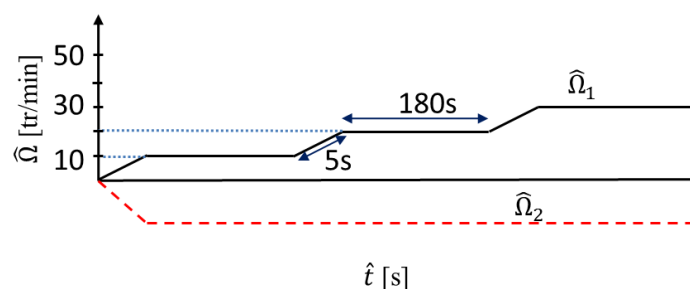
Différents tests préliminaires ont montré que des paliers de 180 s, reliés par des rampes de 5 s sont suffisants pour avoir une bonne mesure du couple. La montée et la descente en vitesse de rotation du cylindre intérieur a lieu par pas de 5 tr/min ou 10 tr/min.

Une fois la mesure du couple réalisée, une moyenne est effectuée sur la moitié du palier et la mesure du couple à vide décrite au §5.2.4 est soustraite.

Un exemple de couple obtenu après ce post-traitement est présenté sur la figure 5.12, pour une vitesse de rotation du cylindre intérieur de 400 tr/min maintenue pendant 7200 s, précédée d'une montée continue de 0 à 400 tr/min en 5 s et suivie d'une descente de 400 à 0 tr/min en 5 s. On observe que le couple obtenu varie très peu, et se situe dans la gamme de précision du capteur de force. Les mesures sont effectuées pour des paliers successifs croissants puis décroissants, dans le but de détecter une hystérésis éventuelle de l'écoulement. La durée moyenne d'une expérience est ainsi de 3h.



(a)



(b)

FIG. 5.11 – Protocole de mesure du couple. Vitesse de rotation en fonction du temps lorsque (a) Seul le cylindre intérieur tourne et (b) lorsque les deux cylindres sont en rotation. (-) Vitesse de rotation du cylindre intérieur  $\hat{\Omega}_1$  et (- -) vitesse de rotation du cylindre extérieur  $\hat{\Omega}_2$ .

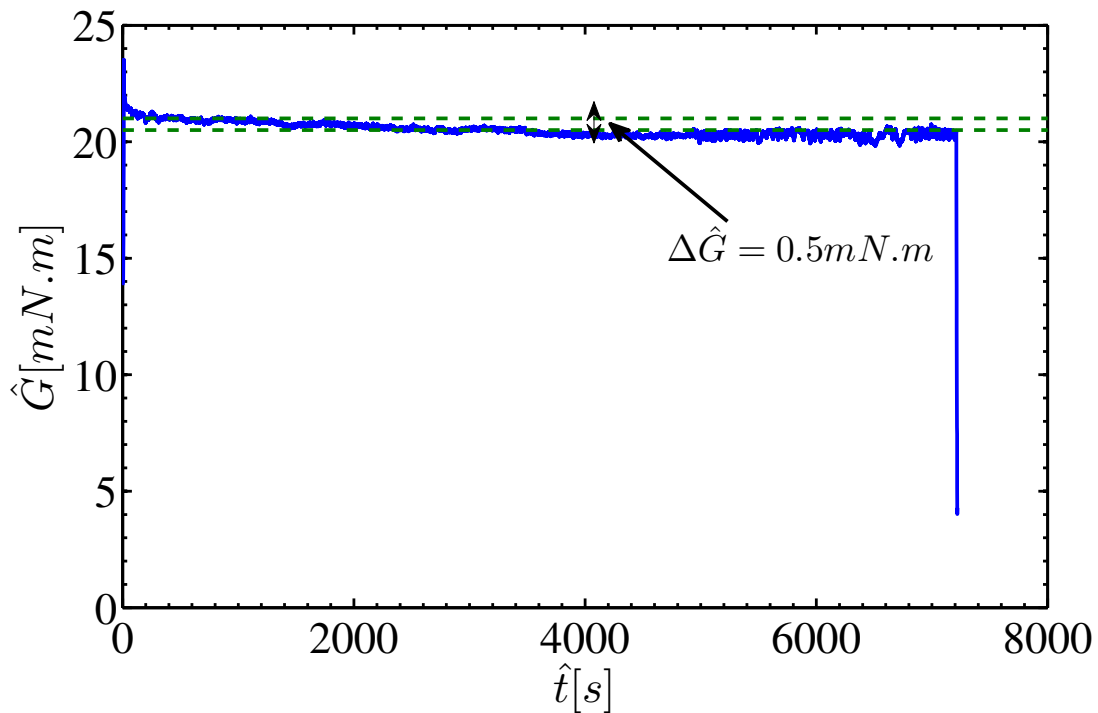


FIG. 5.12 – Évolution du couple dans le temps lorsque seul le cylindre intérieur tourne, à une vitesse de rotation  $\hat{\Omega}_1 = 400 \text{ tr/min}$ . Le fluide est une solution aqueuse de xanthane à 0.5%,  $n = 0.23$ .

Des prises de température sont également effectuées au début et à la fin de chaque expérience. Une différence de température maximale de  $\Delta T \approx 3^\circ C$  a été mesurée. Ce réchauffement, dû à la dissipation visqueuse dans le fluide, a peu d'influence sur la mesure du couple sur la durée moyenne d'une expérience.

### 5.2.5 Visualisation par ensemencement de paillettes

La visualisation par ensemencement de paillettes a également été utilisée pour caractériser la transition vers la turbulence de l'écoulement de Taylor circulaire. Dans ce but, des particules fines d'Iriodine, mesurant quelques dizaines de microns, sont incorporées dans le fluide. Une nappe laser rouge passant par l'axe des cylindres, éclaire les particules d'Iriodine se trouvant sur son chemin, ce qui provoque l'éclairage d'une tranche de l'écoulement. Une caméra CCD de Dantec Dynamics, modèle Flowsence ( $1600 \times 1200$  pixels, 30 images par seconde) avec un objectif de  $60 \text{ mm}$ , disposée perpendiculairement au plan du laser filme le mouvement des particules du plan éclairé. La caméra est reliée à un *PC* pour l'acquisition et le traitement des images obtenues.

## 5.2.6 Technique de vélocimétrie par images de particules (Particle Image Velocimetry, PIV)

De nos jours, la technique de vélocimétrie par images de particules ou de PIV [Adrian, 1984, Raffel *et al.*, 2007, Stanislas *et al.*, 2004, Adrian et Westerweel, 2011] est la technique optique la plus utilisée pour caractériser les champs de vitesse des écoulements de fluides. Cette technique, basée sur la diffusion de la lumière, présente l'avantage d'être non intrusive. La figure 5.13 montre le schéma de principe d'un système de PIV.

Il existe deux systèmes de mesure de PIV. La PIV 2D qui fournit deux composantes de la vitesse; ces deux composantes sont obtenues par une projection du vecteur vitesse dans le plan de mesure; c'est le système le plus adapté pour des écoulements bidimensionnels. Et enfin, la PIV 3D qui permet d'accéder aux trois composantes de la vitesse; c'est le système le plus adapté pour les mesures en régime turbulent.

Dans cette étude, un système de PIV 2D fourni par "Dantec Measurement Technology" est utilisé. Ce dispositif a été déjà employé lors des thèses de [Benbelkacem, 2009] et [Rigal, 2012].

La technique de PIV consiste en quatre étapes principales :

- ensemencement du fluide avec de fines particules,
- éclairage d'une tranche de fluide avec une nappe laser,
- enregistrement des images par une caméra rapide de haute résolution,
- post-traitement des images filmées par des algorithmes informatiques.

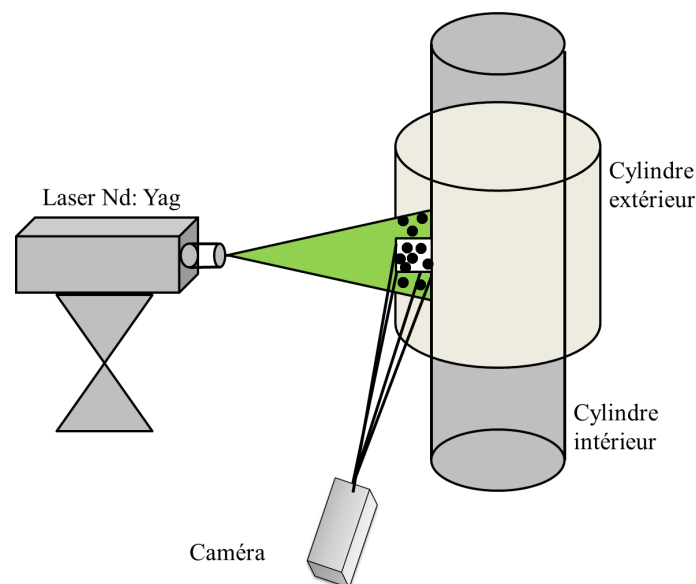


FIG. 5.13 – Schéma du montage expérimental utilisé pour les mesures de Vélocimétrie par Image de Particules (Particle Image Velocimetry, PIV).

### Particules traçantes

Dans cette étude, les particules d'ensemencement sont des billes de verre creuses argentées de 10 microns de diamètre environ, également fournies par la société "Dantec Measurement Technology". La lumière diffusée par ces particules est captée par la caméra, ce qui permet, après post-traitement, d'obtenir le champ de vitesse du fluide.

### Source lumineuse : le laser Nd :Yag

La source lumineuse utilisée est un laser pulsé Nd :Yag (Neodymium doped : Yttrium aluminium garnet) de longueur d'onde  $\lambda_d = 532 \text{ nm}$ . Le laser Nd :Yag émet donc de la lumière dans le vert. Le laser émet deux impulsions successives d'une durée de 10 nanosecondes chacune, espacées dans le temps de quelques millisecondes, à une fréquence de  $10 \text{ Hz}$ . Ce temps est déterminé selon la vitesse de rotation du cylindre intérieur et le temps de traversée de la nappe par les particules. Les particules ne doivent pas traverser la nappe entre 2 pulses. L'épaisseur de la nappe laser est de  $1 \text{ mm}$ . Lors de chaque impulsion, l'énergie lumineuse produite est d'environ  $100 \text{ mJ}$ .

Le laser est placé à mi-hauteur des cylindres dans une zone où la paroi du cylindre extérieur a été affinée et traitée pour être la plus lisse possible. A cette hauteur, l'écoulement est peu affecté par les effets de bords.

La qualité du faisceau laser, qui doit conduire à l'image la plus nette possible, est contrôlée en réglant et en ajustant rigoureusement la distance entre le laser et la cuve d'eau.

### Enregistrement des images et post-traitement

Les particules d'ensemencement sont utilisées comme traceurs dans l'écoulement. La lumière diffusée par ces particules est captée au cours du temps par une caméra CCD PIV de "Dantec Dynamics". La caméra est commandée par un ordinateur équipé du logiciel "Digital Studio" de "Dantec Dynamics". Ce logiciel commande l'acquisition par la caméra puis il permet le post-traitement des images.

Du fait de la double impulsion périodique émise par le laser, on obtient toutes les 100 millisecondes deux images successives filmées à 1 milliseconde d'écart.

Des algorithmes de traitement d'image et de reconnaissance de forme permettent de corréliser les deux images et d'obtenir la vitesse des particules, projetée sur le plan de mesure, à partir de leurs positions successives. On suppose alors que les particules sont transportées passivement par le fluide et on obtient ainsi les champs de vitesse de l'écoulement.

Plusieurs algorithmes de PIV, utilisés pour suivre le mouvement de groupements de particules, sont présentés dans la littérature, notamment la corrélation moyennée.



La corrélation moyennée est particulièrement indiquée lorsque les images sont de mauvaise qualité ou que l'on dispose d'un nombre d'images insuffisant [Meinhart *et al.*, 2000]. Elle s'est révélée la plus adaptée dans notre cas. Les images sont capturées à  $800 \times 600$  pixels. Nous avons considéré des fenêtres d'interrogation de  $32 \times 32$  pixels des images.

## 5.3 Résultats & discussions

### 5.3.1 Manipulations avec le cylindre extérieur fixe

Dans cette partie, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus lorsque le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur est immobile.

#### Fluide newtonien : solution aqueuse de glycérine

##### Mesures de couple

Pour caractériser la première bifurcation de l'ECC, des mesures du couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur ont été effectuées à l'aide du capteur de force décrit au paragraphe 5.2.1. [Wendt, 1933] est le premier à utiliser la méthode de mesure de couple pour détecter l'apparition des rouleaux de Taylor.

En régime laminaire, et pour un fluide newtonien, le couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur augmente linéairement avec la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Cette évolution cesse d'être linéaire lorsqu'apparaissent les instabilités.

Les premières mesures ont été effectuées sur la glycérine, fluide newtonien servant de référence à notre étude. L'évolution du couple dans le régime laminaire pour les fluides newtoniens est bien connue [Wendt, 1933, Donnelly, 1958]. Il suit une expression analytique,

$$\hat{G}_{lam} = \frac{4\pi\hat{\mu}^b\hat{R}_1^2\hat{R}_2^2\hat{\Omega}_1\hat{H}}{\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2} \quad (5.4)$$

Pour trouver une évolution asymptotique, [Wendt, 1933] a défini le couple adimensionnel

$$G = \hat{G} / (\hat{\rho}\hat{\nu}^2\hat{H}) \quad (5.5)$$

où  $\hat{\nu} = \hat{\mu}/\hat{\rho}$  désigne la viscosité cinématique et  $\hat{H}$  la hauteur du cylindre.

A l'apparition des instabilités, [Donnelly et Simon, 1960] ont trouvé, en reprenant les données expérimentales de [Wendt, 1933] et [Donnelly, 1958], que l'évolution du couple après l'apparition des

instabilités suit la loi

$$\hat{G} = a\hat{\Omega}_1^{-1} + b\hat{\Omega}_1^{1.36} \quad (5.6)$$

où  $a$  et  $b$  sont des coefficients à ajuster pour décrire les résultats expérimentaux.

D'autres corrélations issues de l'expérience existent dans la littérature.

[Wendt, 1933] a ainsi montré que le couple suit une loi de puissance telle que  $G \approx Re_1^{\alpha_c}$ . L'exposant  $\alpha_c$  dépend du régime d'écoulement,

$$\alpha_c = 1.3 \quad \text{pour } Re_1 \leq 10^4, \quad (5.7)$$

$$\alpha_c = 1.73 \quad \text{pour } Re_1 \geq 10^4. \quad (5.8)$$

Toujours dans la zone instable, [Lathrop *et al.*, 1992, Lewis et Swinney, 1999] ont obtenu expérimentalement, pour un rapport rayon  $\eta = 0.724$ , un exposant de,

$$\alpha_c = 1.5 \quad \text{pour } 4 \times 10^2 \leq Re_1 \leq 10^4, \quad (5.9)$$

$$\alpha_c = 1.7 \quad \text{pour } 10^4 \leq Re_1 \leq 10^5. \quad (5.10)$$

Par une étude de stabilité linéaire, [Barcilon et Brindley, 1984, King *et al.*, 1984] ont trouvé que  $\alpha_c$  ne dépend pas du régime d'écoulement et que

$$G \approx Re_1^{5/3}. \quad (5.11)$$

La figure 5.14 montre l'évolution du couple dimensionnel  $\hat{G}$  pour une solution de glycérine à 85% en masse. Dans le régime laminaire, avant l'apparition des instabilités, les valeurs mesurées se superposent bien avec les valeurs données par l'équation (5.4) de [Wendt, 1933]. A l'apparition des instabilités, le couple expérimental s'écarte progressivement du couple analytique laminaire.

Le tableau 5.4 montre un bon accord entre le nombre de Reynolds critique expérimental et celui de l'analyse de stabilité linéaire.

	$Re_{1c}$	$k_c$
Analyse linéaire	68.3	3.18
Glycérine (expérience) 85%	$69.2 \pm 5\%$	3.2

TAB. 5.4 – Comparaison des nombres de Reynolds théorique et expérimental d'apparition des instabilités.

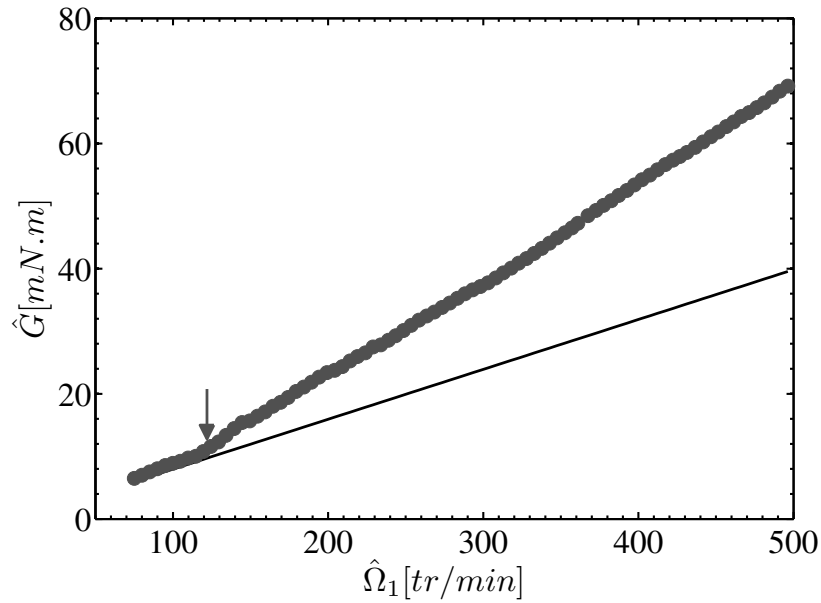


FIG. 5.14 – Couple exercé sur le cylindre intérieur par les solutions de glycérine à 85%. (○) Résultats expérimentaux du présent travail, (-) valeurs données par l'équation analytique (5.4). La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe.

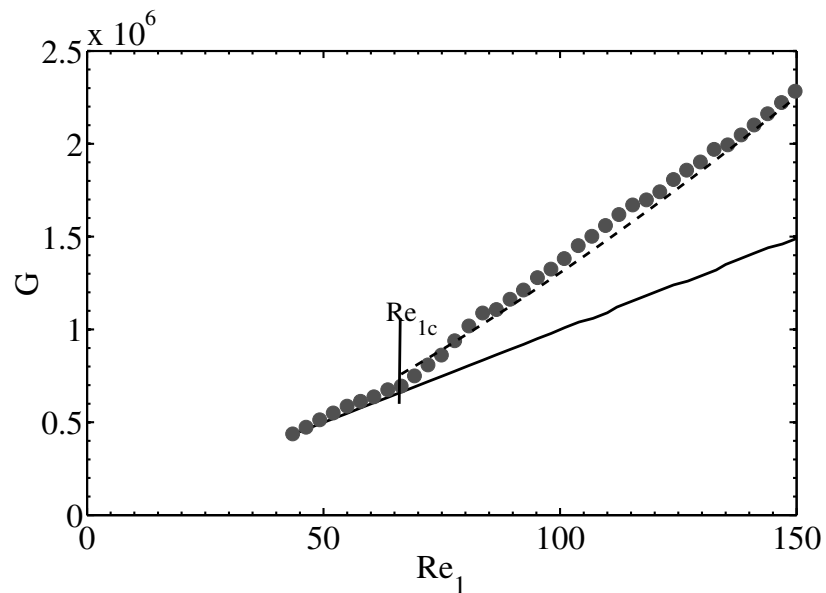


FIG. 5.15 – Couple adimensionnel, défini par l'équation (5.5) en fonction du nombre de Reynolds intérieur pour une solution de glycérine à 85%, (○) résultats expérimentaux, (---) courbe de référence de [Donnelly et Simon, 1960] pour  $a = 2 \times 10^4$  et  $b = 42$ . (-) Expression analytique de l'équation (5.5).

Sur la figure 5.15 est représenté le couple adimensionnel  $G$  défini par l'équation (5.5) en fonction

du nombre de Reynolds du cylindre intérieur. Il apparaît que les couples mesurés sont en très bon accord avec l'expression de [Donnelly et Simon, 1960].

Par ailleurs, les mesures de couple effectuées pour des vitesses de rotations du cylindre intérieur croissantes puis décroissantes n'ont montré aucune hystérésis de l'écoulement.

[Dubrulle et Hersant, 2002], puis [Eckhardt *et al.*, 2007, van Gils *et al.*, 2011] ont proposé une analogie entre l'écoulement de Taylor-Couette et la convection de Rayleigh-Bernard. Dans cette analogie, un parallèle a été proposé entre la stratification du moment angulaire et la stratification de la température et leur rôle sur la déstabilisation de l'écoulement. Suivant ces travaux antérieurs, on peut alors définir l'équivalent d'un nombre de Nusselt  $Nu_\omega$ , associé au couple visqueux comme

$$Nu_\omega = \frac{G}{G_{lam}}, \quad (5.12)$$

où  $G_{lam}$  représente la valeur adimensionnelle que prendrait le couple en régime laminaire pour la même valeur du nombre de Reynolds  $Re_1$ , équations (5.4) - (5.5). Ce nombre sans dimension permet de s'affranchir des paramètres géométriques liés au dispositif expérimental. Dans le régime laminaire,  $Nu_\omega = 1$ . Quand l'écoulement se déstabilise,  $Nu_\omega > 1$ .

Sur la figure 5.16, il apparaît qu'au delà du seuil d'instabilité, le nombre de Nusselt semble évoluer comme la racine carrée de l'écart au seuil d'instabilité  $\varepsilon = (Re_1 - Re_{1c}) / Re_{1c}$ .

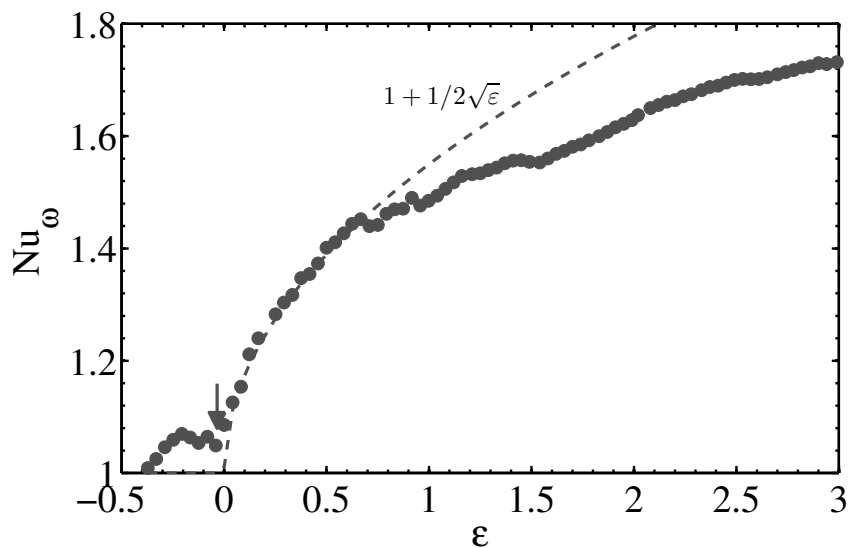


FIG. 5.16 – Nombre de Nusselt (couple adimensionnel s'exerçant sur le cylindre intérieur, défini par l'équation (5.12)) en fonction de l'écart au seuil d'instabilité  $\varepsilon = (Re_1 - Re_{1c}) / Re_{1c}$  lorsque le cylindre extérieur est fixe pour une solution newtonienne de glycérine à 85% en masse. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe.

### Visualisation des structures instables par ensemencement des paillettes

La figure 5.17 montre des rouleaux de Taylor dans la solution newtonienne de glycérine lorsque seul le cylindre intérieur tourne. Lorsqu'on augmente progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les rouleaux de Taylor apparaissent à partir d'une vitesse de rotation correspondant à  $Re_{1c} = 69.2 \pm 5\%$ . Cette valeur est en bon accord avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire  $Re_{1c} = 68.3$ . Les structures sont organisées en paires de rouleaux contra-rotatifs périodiquement espacées. La mesure expérimentale de la taille d'une cellule de Taylor conduit à un nombre d'onde axial  $k_c = 3.2$ . Cette valeur est proche de la valeur théorique,  $k_c = 3.18$ .

Il est à remarquer que, pour les gammes de cisaillement dans l'entrefer,  $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 300$ , l'écoulement demeure stationnaire jusqu'au moins  $Re_1/Re_{1c} = 5$ . Nous n'avons pas observé de seconde instabilité avec notre dispositif pour la solution de glycérine.

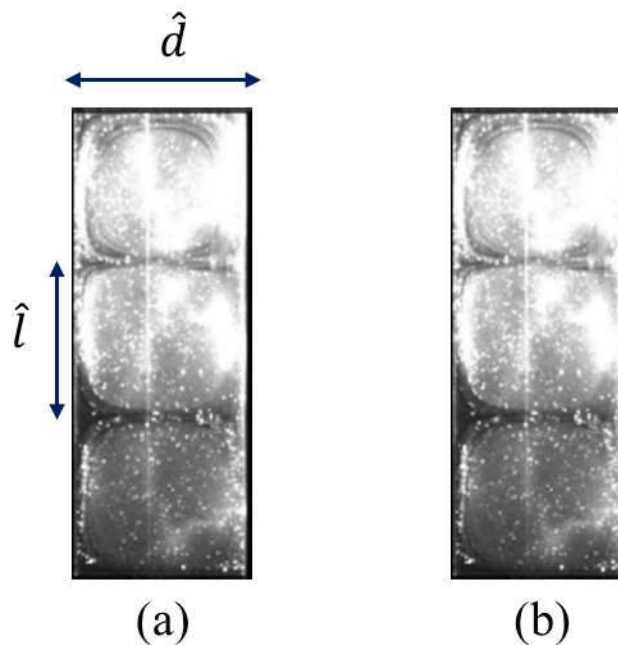


FIG. 5.17 – Visualisation des structures d'instabilité par ensemencement de paillettes pour une solution de glycérine à 85% (a)  $Re_1/Re_{1c} = 1$  et (b)  $Re_1/Re_{1c} = 5$ . Le cylindre extérieur est fixe.

### Mesure du champ de vitesse par PIV

La figure 5.18 montre les champs de vitesse obtenus par PIV pour la solution de glycérine à 85% en masse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds intérieur  $Re_1$  (le cylindre extérieur fixe). Elle confirme les résultats issus de la visualisation : la première instabilité apparaît à  $Re_{1c} = 69.2 \pm 5\%$  et le nombre d'onde axial observé est de  $k_c = 3.2$ . On peut noter que les rouleaux de Taylor occupent tout l'espace annulaire, comme l'indiquait la figure 3.27(b) du chapitre 3.

La deuxième instabilité ne peut pas être observée dans les gammes de nombre de Reynolds accessibles par notre dispositif, qui dispose d'un large entrefer  $\eta = 0.4$ . Pour le taux de cisaillement maximal obtenu à  $\hat{\Omega}_1 = 600 \text{ tr}/\text{min}$ , le mode instable reste stationnaire et axisymétrique comme le montre le champ de vitesse de la figure 5.18(e).

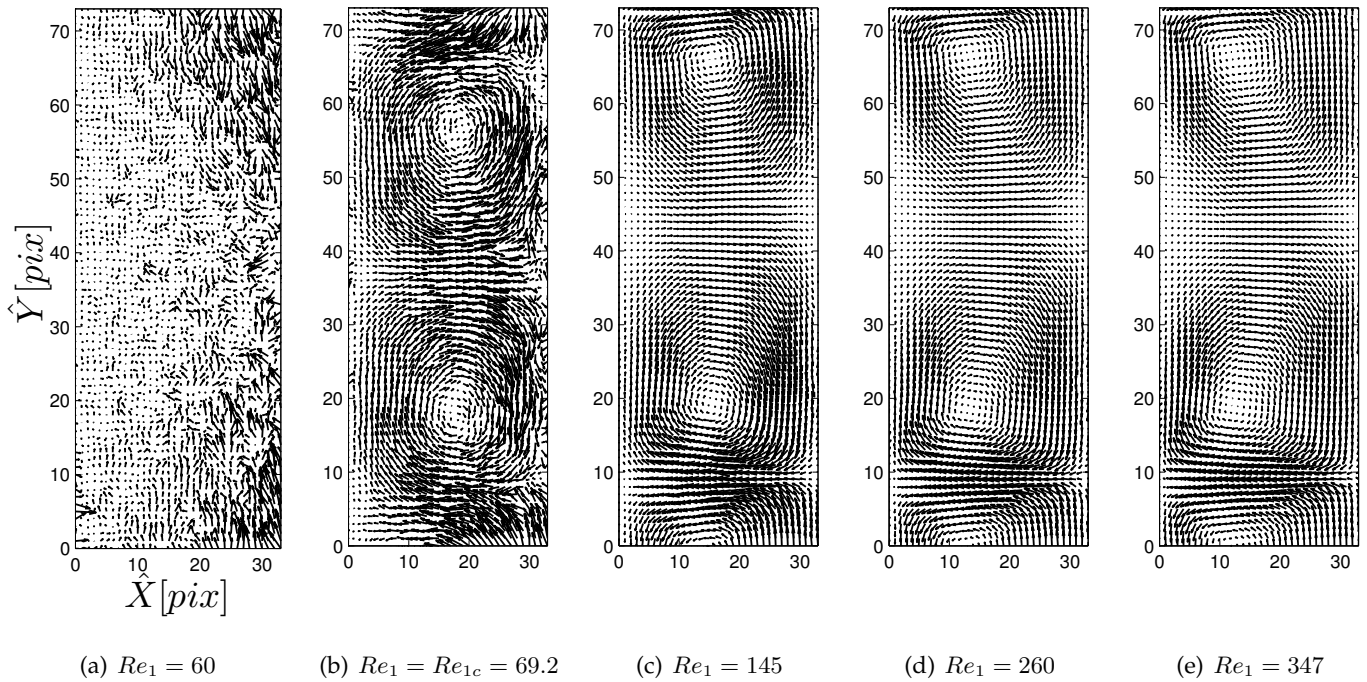


FIG. 5.18 – Champ du vecteur vitesse, projeté sur le plan d'observation, obtenu par mesures PIV pour une solution de glycérine à 85% en masse,  $\mu = 0.135 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , pour diverses valeurs du nombre de Reynolds du cylindre intérieur  $Re_1$ . Le cylindre extérieur est fixe.

L'écoulement de Couette circulaire est purement azimutal. Lorsque les instabilités se développent, les composantes radiale  $\hat{u}$  et axiale  $\hat{w}$  de la vitesse ne sont plus nulles.

Pour un fluide newtonien, et lorsque seul le cylindre intérieur est en rotation, la figure 5.19 montre l'évolution de  $\hat{v}_{max} = \max \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{w}^2}$  en fonction du nombre de Reynolds intérieur. Pour  $Re_1 \leq 69.2$ ,  $\hat{v}_{max}$  est nul et il augmente avec  $Re_1$  au-delà de cette valeur critique.

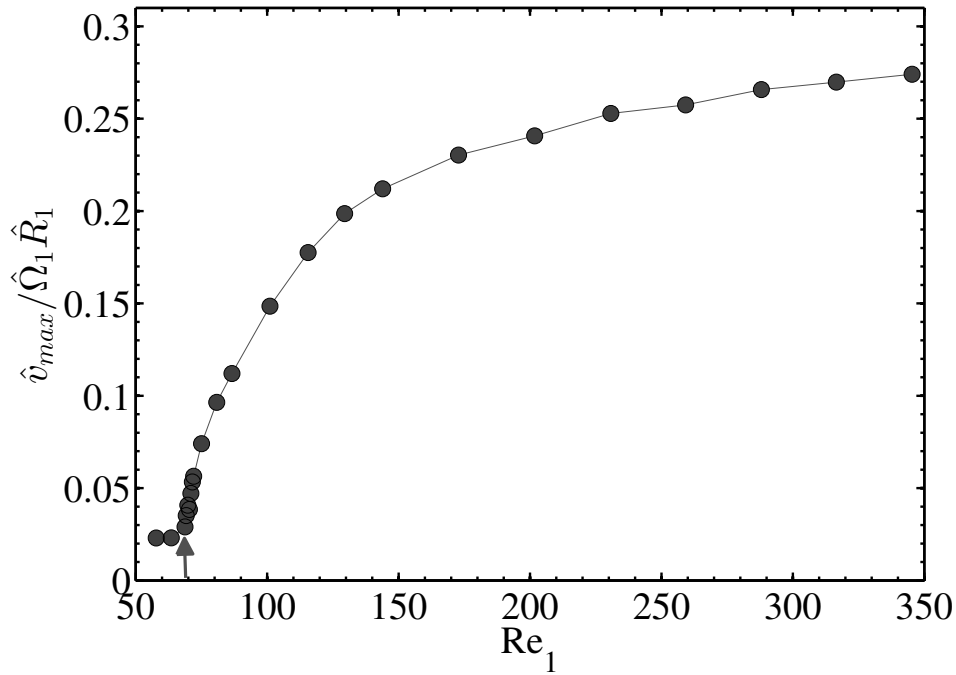


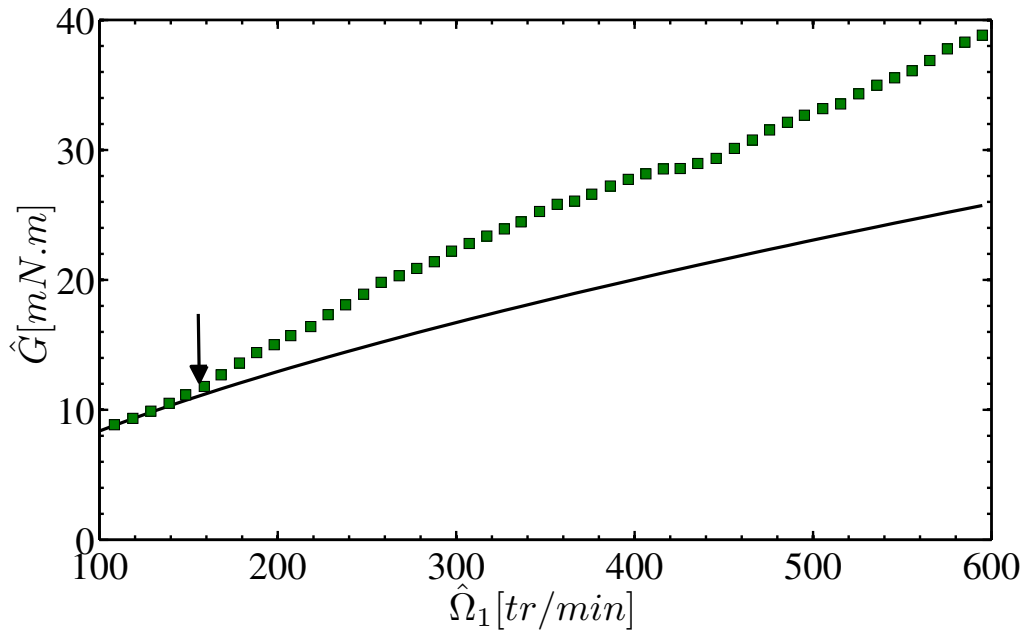
FIG. 5.19 – Évolution de  $\hat{v}_{max} = \max\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{w}^2}$  en fonction du nombre de Reynolds intérieur  $Re_1$ , pour une solution de glycérine à 85%. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est immobile.

### Fluides rhéofluidifiants : solutions aqueuses de CMC et de xanthane

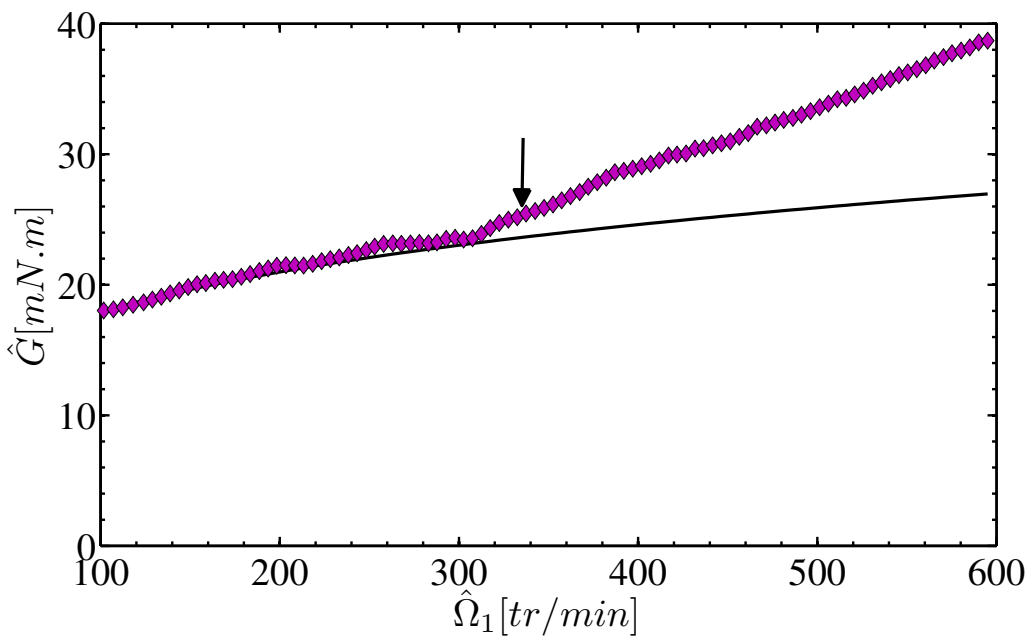
#### Mesures de couple

Comme pour un fluide newtonien, l'apparition des instabilités se manifeste par une augmentation significative du couple.

Sur la figure 5.20 est tracé le couple mesuré en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur pour deux solutions rhéofluidifiantes : une solution de CMC à 0.4% en masse d'indice  $n = 0.63$ , figure 5.20(a), et une solution de xanthane à 0.5% en masse d'indice  $n = 0.23$ , figure 5.20(b). Dans le régime laminaire, le couple mesuré et le couple théorique sont superposés. La vitesse à laquelle apparaissent les rouleaux est en bon accord avec la théorie pour la CMC. Pour la solution de xanthane, la vitesse à laquelle apparaissent les rouleaux est inférieure à la valeur théorique. Ceci traduirait une transition sous-critique de la bifurcation.



(a)



(b)

FIG. 5.20 – Couple exercé sur le cylindre intérieur par (a) une solution de CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$  et (b) une solution de xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ ). (o) Valeurs expérimentales. (-) Valeurs théoriques en régime laminaire. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe.



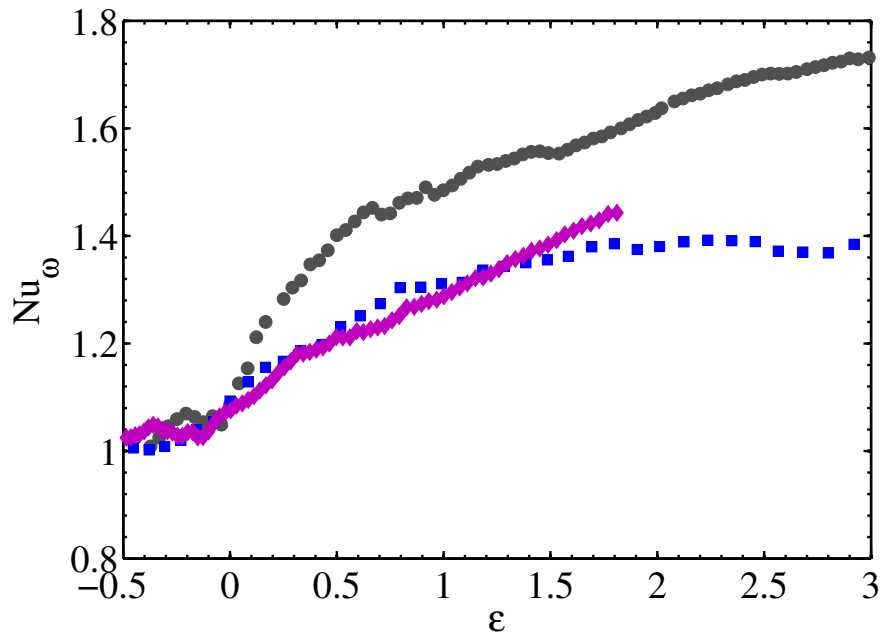


FIG. 5.21 – Nombre de Nusselt (couple adimensionnel s’exerçant sur le cylindre intérieur, défini par l’équation (5.12)) en fonction de l’écart au seuil d’instabilité  $\varepsilon = (Re_1 - Re_{1c})/Re_{1c}$  lorsque le cylindre extérieur est fixe. ( $\circ$ ) solution de glycérine à 85%, ( $\square$ ) solution de CMC à 0.4%,  $n = 0.63$  et ( $\diamond$ ) solution de xanthane à 0.5%,  $n = 0.23$ .

La figure 5.21 montre l’évolution du nombre de Nusselt pour le fluide newtonien et des solutions rhéofluidifiantes en fonction de l’écart au seuil de stabilité  $\varepsilon$  lorsque le cylindre extérieur ne tourne pas. La forme de la courbe après le seuil de stabilité diffère selon l’indice d’écoulement. Pour une rhéofluidification nulle ( $n = 1$ ) ou modérée ( $n = 0.63$ ), une évolution en racine carrée est trouvée alors que l’évolution est linéaire pour une forte rhéofluidification ( $n = 0.23$ ). Ceci dénote une modification de la structure de l’écoulement.

#### Nombre de Reynolds critique $Re_{1c}$

Le tableau 5.5 donne une comparaison entre les nombres de Reynolds critiques déduits des mesures de couples et de l’analyse de stabilité linéaire lorsque le cylindre extérieur est fixe. L’écart maximal constaté entre l’expérience et la théorie pour la solution de xanthane est de 12%.

	Stabilité linéaire	Expérience
Glycérine 85% (newtonien)	68.3	69.2 ±5%
CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ )	64.87	69.2 ±5%
xanthane à 0.2% en masse ( $n = 0.38$ )	73.95	77.13±5%
xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ )	87.73	76.69±5%

TAB. 5.5 – Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques  $Re_{1c}$  théoriques et expérimentaux pour les fluides rhéofluidifiants lorsque seul le cylindre intérieur tourne ( $Re_2 = 0$ ).

Sur la figure 5.22 sont présentées les valeurs seuils de la première instabilité en fonction de l'indice d'écoulement. Les valeurs théoriques et expérimentales sont proches sauf pour la solution très rhéofluidifiante de xanthane ( $n = 0.23$ ).

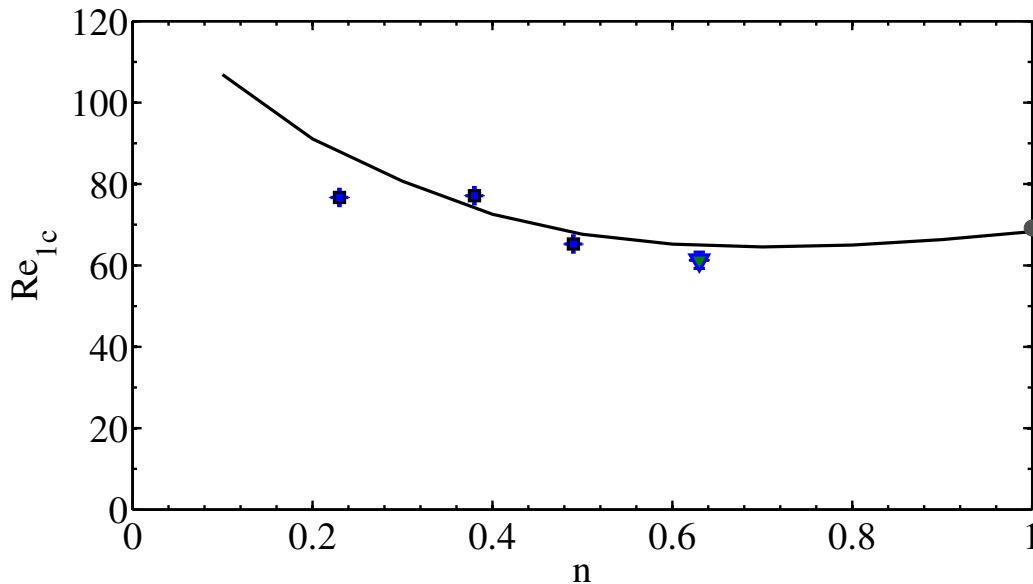


FIG. 5.22 – Nombre de Reynolds critique d'apparition de la 1ère instabilité en fonction du caractère rhéofluidifiant lorsque seul le cylindre intérieur est en rotation. (—) Résultats numériques. Résultats expérimentaux pour des solutions polymères dont la rhéologie est gouvernée par des lois de puissance. (○) Solution de glycérine ( $n = 1$ ). (△) Solution de CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ ); (□) solutions de xanthane à 0.1% en masse ( $n = 0.49$ ), 0.2% en masse ( $n = 0.38$ ) et 0.5% ( $n = 0.23$ ).

### Écoulement chaotique d'une solution de xanthane

Nous étudions dans cette partie, l'influence du caractère fortement rhéofluidifiant sur la transition vers la turbulence. L'expérience est réalisée quand seul le cylindre intérieur est en rotation. Dans la configuration de Taylor-Couette, l'apparition d'un écoulement chaotique peut se manifester

de trois manières :

- Une transition de quasi-périodicité ou le dédoublement de période. Dans cette transition, l'écoulement laminaire reste stationnaire jusqu'à un Reynolds critique où il devient périodique. A un nombre de Reynolds plus grand, une seconde fréquence apparaît. Les deux fréquences de l'écoulement dites bi-périodiques peuvent être séparées dans le spectre de Fourier. Une nouvelle fréquence apparaît, double de la précédente, quand on augmente encore le nombre de Reynolds, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'écoulement perde sa dépendance temporelle et devienne chaotique.
- Une transition par intermittence. Cette transition se manifeste souvent par l'apparition des "bouffées" turbulentes dans l'écoulement laminaire.
- Une transition par cascade sous-harmonique. Dans ce cas, on assiste à des dédoublements successifs de fréquence, mais ces dédoublements sont très rapprochés au moment de la bifurcation. Il s'en suit une cascade d'instabilités paramétriques dans laquelle le signal périodique voit sa période doubler successivement pour laisser place à un écoulement chaotique.

La figure 5.23 montre des visualisations de l'écoulement d'une solution de xanthane fortement rhéofluidifiante. Les instabilités apparaissent pour un nombre de Reynolds critique  $Re_{1c} = 78 \pm 5\%$ . Les structures instables sont alors des rouleaux de nombre d'onde axial  $k_c = 8$ . Par ailleurs, ces rouleaux se déplacent avec une vitesse de glissement  $\hat{V}_g = [0.8 - 3] \text{ mm/s}$ . Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, la figure 5.24 montre l'évolution de la vitesse de glissement pour  $1 \times Re_{1c}$ ,  $1.15 \times Re_{1c}$ ,  $1.25 \times Re_{1c}$  et  $1.5 \times Re_{1c}$ . L'écoulement devient presque chaotique à  $Re_1 = 1.5 \times Re_{1c}$  comme observé sur la figure 5.23(e).

Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par [Li et Khayat, 2004] pour un fluide de Carreau dans un entrefer étroit. Moyennant un modèle réduit, ils montrent que les rouleaux de Taylor, stables dans le cas de fluide newtonien, sont déstabilisés à des nombres de Reynolds d'autant plus faibles que le caractère rhéofluidifiant est marqué.

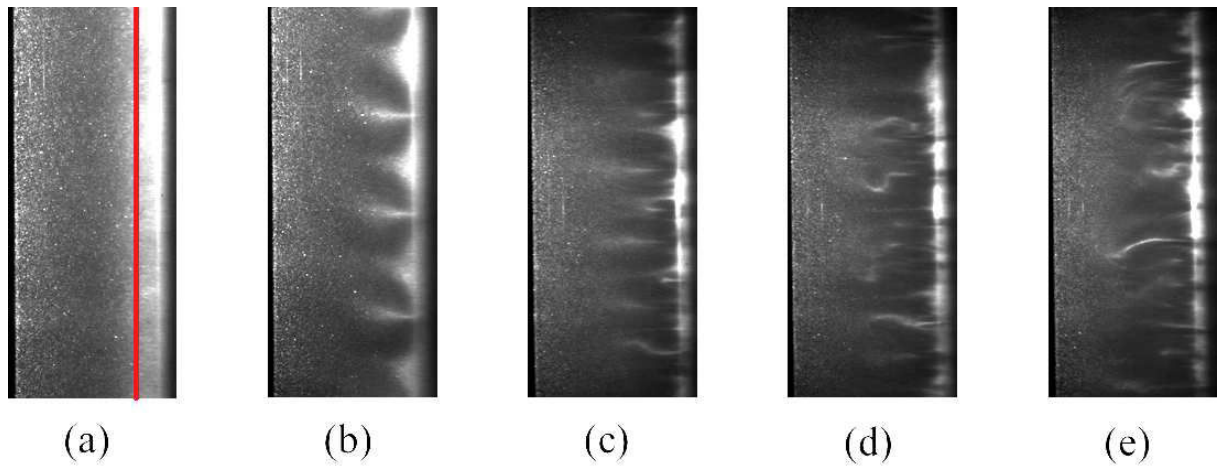


FIG. 5.23 – Visualisation des structures à l'apparition de la première instabilité et au-delà pour une solution de xanthane à 0.5% ( $n = 0.23$ ) lorsque seul le cylindre intérieur tourne. (a)  $Re_1 = 53$ , (b)  $Re_1 = 82$ , (c)  $Re_1 = 96$  ( $1.25 \times Re_{1c}$ ), (d)  $Re_1 = 122$  ( $1.56 \times Re_{1c}$ ) et (e)  $Re_1 = 250$ . La ligne rouge de la figure 5.23 est utilisée pour matérialiser la position radiale du diagramme spatio-temporel de la figure 5.25.

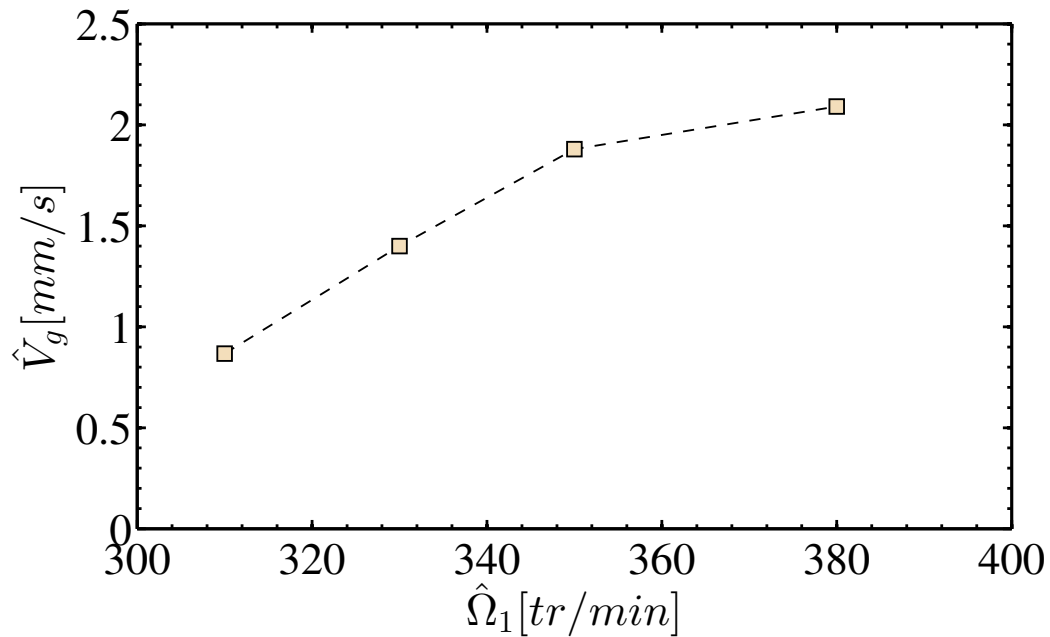


FIG. 5.24 – Vitesse de glissement des tourbillons, en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur  $\hat{\Omega}_1$ , pour une solution de xanthane 0.5%. Le cylindre extérieur est fixe.

La transition d'un écoulement ordonné à un écoulement chaotique engendrée par le caractère rhéofluidifiant est confirmée par le diagramme spatio-temporel de la figure 5.25. Le diagramme est obtenu à la position radiale matérialisée sur la figure 5.23(a). Les figures 5.25(e) et 5.25(f) té-

moignent de l'apparition d'un phénomène chaotique. Ce phénomène est révélateur de la transition sous-critique engendrée par le fort caractère rhéofluidifiant du fluide.

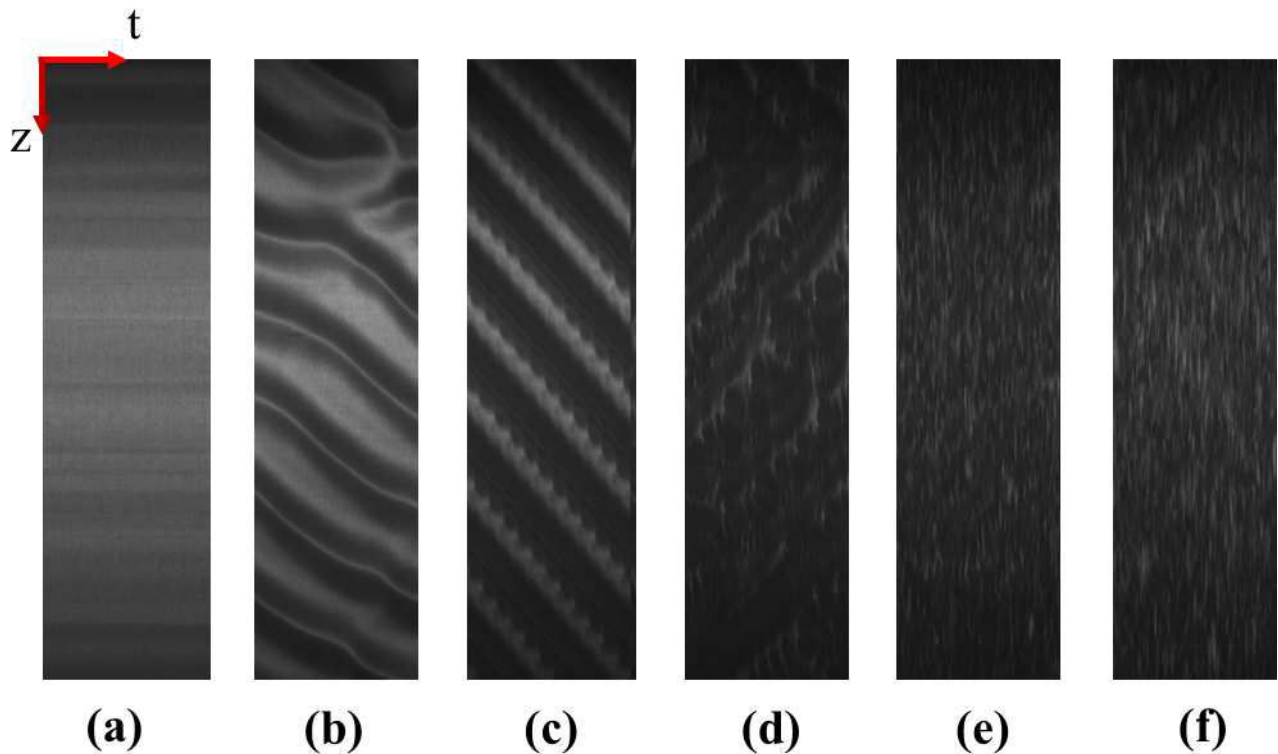


FIG. 5.25 – Diagramme spatio-temporel de l'écoulement chaotique d'une solution de xanthane à 0.5 % ( $n = 0.23$ ). (a)  $Re_1 = 53$ , (b)  $Re_1 = 78$ , (c)  $Re_1 = 96$ , (d)  $Re_1 = 122$ , (e)  $Re_1 = 180$  et (f)  $Re_1 = 250$ .

### Mesure du champ de vitesse par PIV

La figure 5.26 montre les champs de vitesse pour une solution de xanthane à 0.5% ( $n = 0.23$ ) lorsque seul le cylindre intérieur tourne. Les rouleaux apparaissent vers  $Re_{1c} = 78 \pm 5\%$  et sont localisés au voisinage de la paroi du cylindre intérieur comme le prévoyait la figure 3.29(b) du chapitre 3. Le nombre de Reynolds critique théorique est  $Re_{1c}$ . Le nombre d'onde axial de ces rouleaux peut être estimé à  $k_c = 7.5$ , valeur cohérente avec celle calculée par l'analyse de stabilité linéaire,  $k_c = 7.19$ .

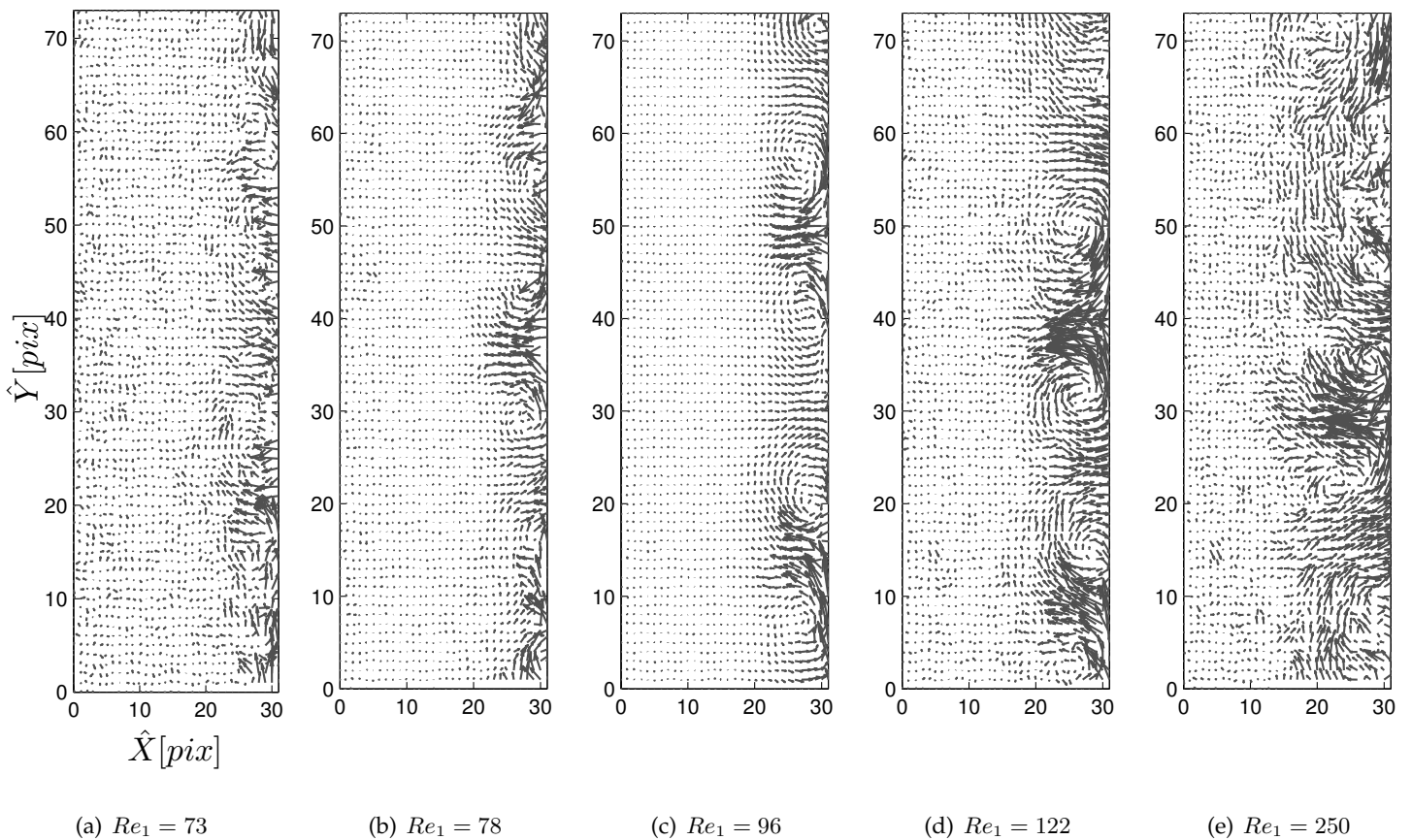
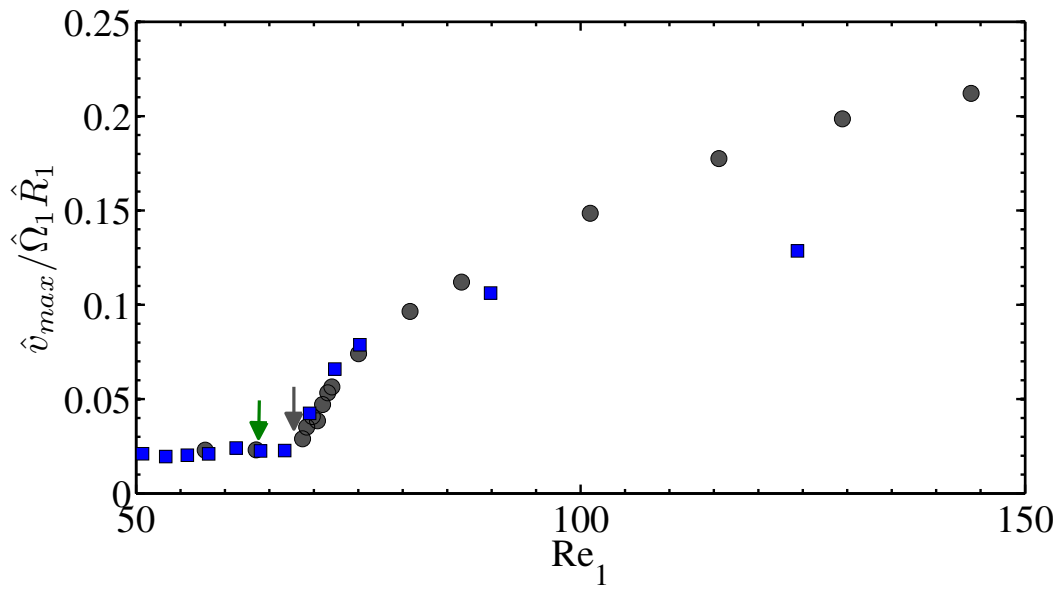
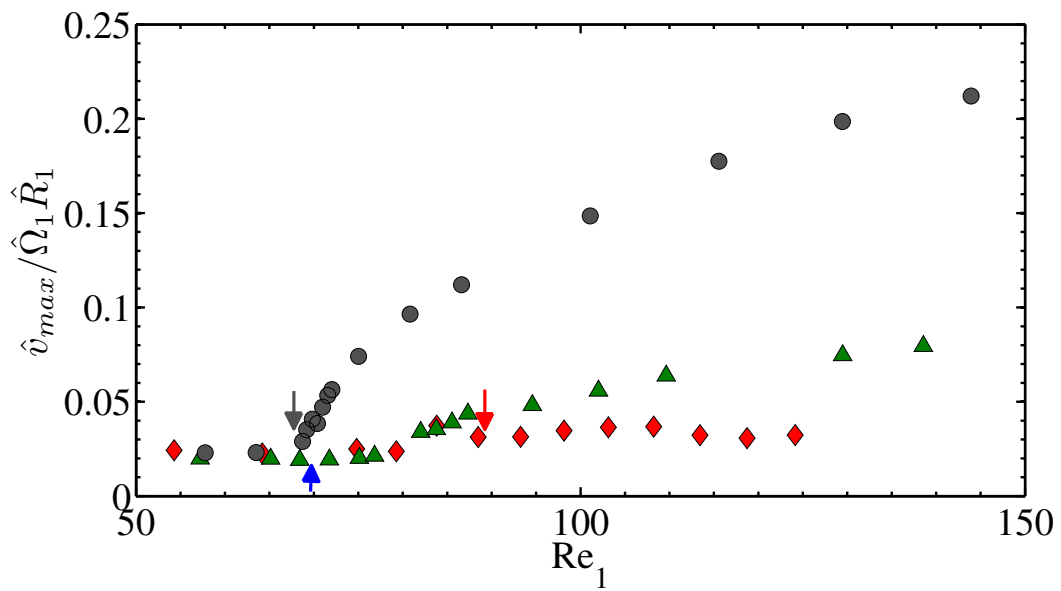


FIG. 5.26 – Champ du vecteur vitesse obtenu par mesures PIV et projeté dans le plan d'observation, pour une solution de xanthane à 0.5%,  $n = 0.23$ , pour diverses valeurs du nombre de Reynolds du cylindre intérieur  $Re_1$ . Le cylindre extérieur est fixe.

La figure 5.27 montre l'évolution du terme  $\hat{v}_{max} = \max \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{w}^2}$  pour une solution de CMC et une solution de xanthane respectivement. Seul le cylindre intérieur est en rotation. A nouveau,  $\hat{v}_{max}$  est proche de zéro en dessous des nombres de Reynolds critiques et il augmente au-delà. On observe que l'énergie des perturbations diminue lorsque le rhéofluidification augmente [Escudier *et al.*, 1995].



(a)



(b)

FIG. 5.27 – Évolution de  $\hat{v}_{max} = \max\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{w}^2}$  en fonction du nombre de Reynolds intérieur  $Re_1$  pour des solutions rhéofluidifiantes comparées à la référence newtonienne représentée par le symbole  $(\circ)$ . (a)  $(\square)$  solution de CMC à 0.4%,  $n = 0.63$ . (b)  $(\triangle)$  solution de xanthane à 0.1%,  $n = 0.49$ ;  $(\diamond)$  solution de xanthane à 0.5%,  $n = 0.23$ . Les flèches représentent la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3. Le cylindre extérieur est fixe.

### 5.3.2 Manipulations avec le cylindre extérieur tournant

Dans cette partie, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus lorsque les cylindres sont en rotation.

#### Fluide newtonien : solution de glycérine

##### Mesures de couple

La figure 5.28 montre l'évolution de couple pour un cylindre extérieur tournant à la vitesse de rotation  $\hat{\Omega}_2 = -99.25 \text{ tr/min}$ . L'évolution du couple en régime laminaire et le seuil d'apparition des premières instabilités sont conformes aux résultats de la théorie linéaire.

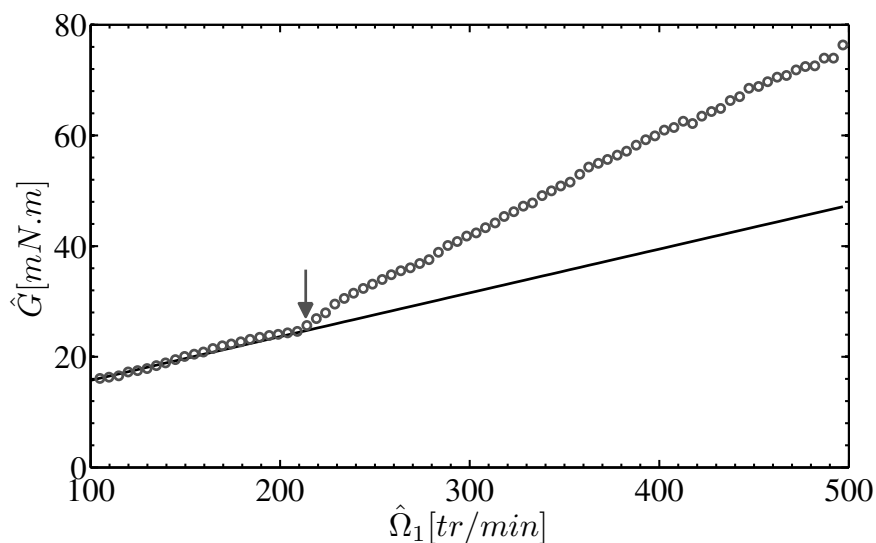


FIG. 5.28 – Couple exercé sur le cylindre intérieur par une solution de glycérine à 85% (fluide newtonien) pour des cylindres contra-rotatifs. Le cylindre extérieur tourne à une vitesse de rotation fixe  $\hat{\Omega}_2 = -99.25 \text{ tr/min}$ . (o) Valeurs expérimentales. (-) Valeurs théoriques du couple en régime laminaire. La flèche représente la valeur théorique d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3.

#### Courbes de stabilité marginale

Des mesures du nombre Reynolds  $Re_1$  critique ont été effectuées pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds extérieur  $Re_2$ . Comme illustré sur la figure 5.29, les seuils obtenus pour  $Re_2 > 100$  et  $Re_2 < -300$  sont légèrement inférieurs à la théorie, ce qui pourrait indiquer que la transition est sous critique. D'après les résultats du chapitre 4, la croissance transitoire devient importante pour  $|Re_2| > 500$ . Malheureusement notre dispositif ne nous a pas permis d'explorer des nombres de Reynolds de valeur absolue plus élevée.



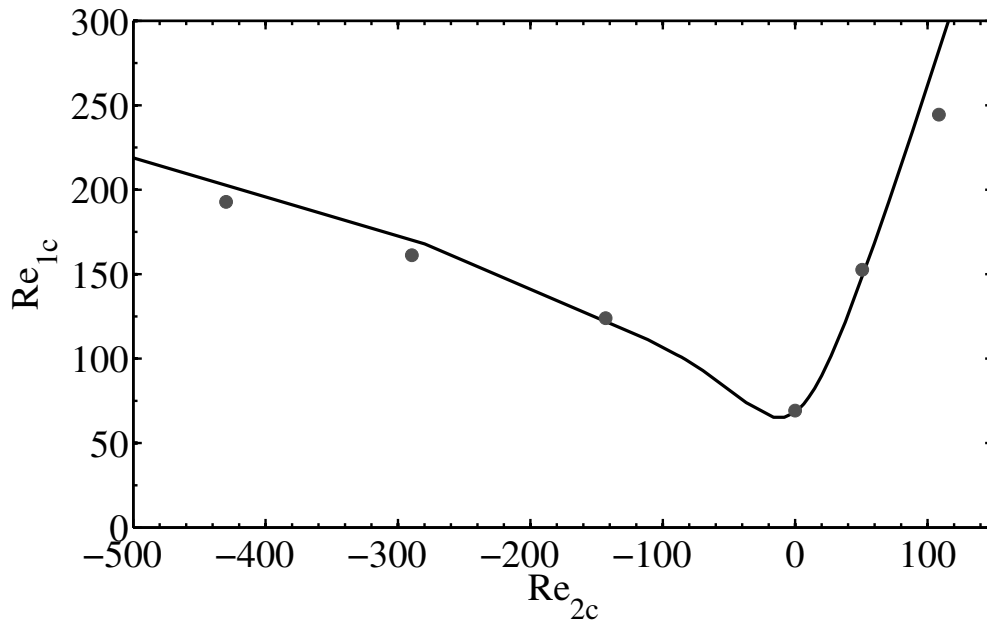


FIG. 5.29 – Courbes de stabilité marginale pour une solution de glycérine à 85% en masse. (o) Seuils d’instabilités détectés par mesure de couple, (-) seuils calculés par analyse de stabilité linéaire détaillée au chapitre 3.

La transition à la turbulence se manifeste par une succession de 4 séquences d’instabilités comme l’ont montré [Taylor, 1923]. La première instabilité est constituée des rouleaux contrarotatifs de Taylor et peut être prédite par une analyse linéaire de stabilité. Cette première instabilité, intervenant au-delà d’un nombre de Reynolds critique  $Re_{1c}$  ne dépend pas de la longueur des cylindres [Cole, 1976] mais seulement du rapport des rayons.

L’apparition d’une deuxième instabilité produit une perte partielle de la symétrie de l’écoulement et conduit à des tourbillons ondulés. Les conditions d’apparition de cette instabilité dépendent fortement du rapport des rayons et du rapport d’aspect du dispositif de Taylor-Couette [Cole, 1976]. Ainsi, elle peut apparaître pour  $Re_1/Re_{1c} \in [1.05 - 1.10]$  pour un rapport de rayon  $\eta = 0.95$ . Pour un large entrefer,  $\eta = 0.5$  par exemple, elle apparaît au-delà de  $Re_1/Re_{1c} = 10$ .

Lorsqu’on continue à augmenter  $Re_1$ , une troisième instabilité conduit à une perte complète de symétrie, avec l’apparition de modulations sur les tourbillons.

A partir d’un quatrième nombre de Reynolds critique, on voit apparition des tourbillons faiblement turbulents.

A delà d’une cinquième valeur du nombre de Reynolds  $Re_1$ , des ondes tourbillonnaires se mettent en place et l’écoulement devient complètement turbulent.

Les limites d’existence des différents régimes d’instabilités sont résumées dans le diagramme obtenu par [Andereck et al., 1986] pour un entrefer étroit, d’après leurs observations expérimentales.

Le dispositif expérimental de cette étude présentant un large entrefer  $\eta = 0.4$ , et un rapport d'aspect de  $\Gamma \in [36 - 40]$  en fonction de la hauteur du liquide, nous n'avons pas pu observer la deuxième instabilité pour la solution de glycérine, le fluide newtonien de référence dans ce travail.

### **Fluides rhéofluidifiants : solutions de CMC et de xanthane**

#### **Mesures de couple**

La figure 5.30 montre les couples obtenus pour une solution de CMC d'indice  $n = 0.54$  et une solution de xanthane d'indice  $n = 0.23$  lorsque le cylindre extérieur tourne. Le couple mesuré en régime laminaire est en bon accord avec la théorie. Le seuil d'instabilité mesuré est en meilleur accord avec la théorie dans le cas du xanthane que dans le cas de la CMC. Ceci est expliqué par le fait que la loi de puissance décrit mieux le comportement rhéologique du xanthane que celui de la CMC.

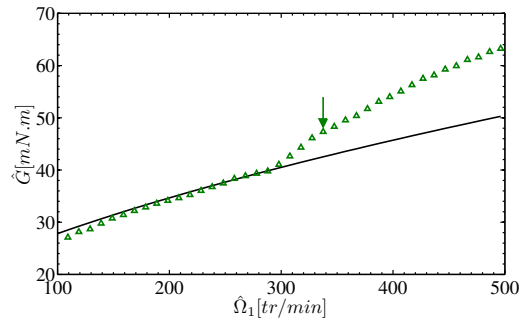
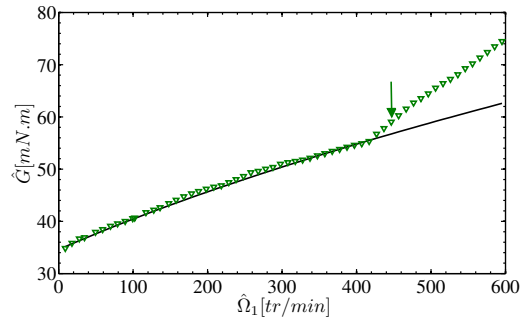
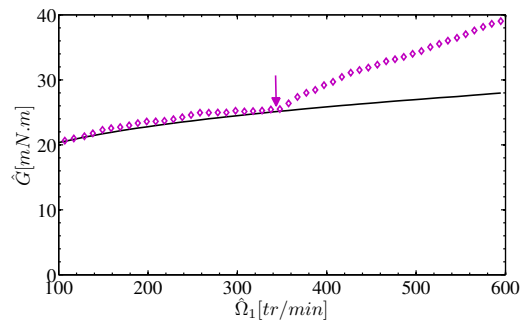
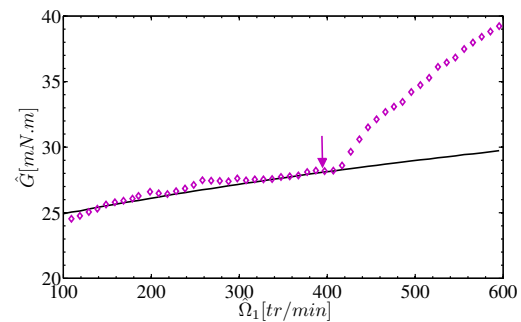
(a)  $\hat{\Omega}_2 = -99.25 \text{ tr/min}$ (b)  $\hat{\Omega}_2 = -297.25 \text{ tr/min}$ (c)  $\hat{\Omega}_2 = -99.25 \text{ tr/min}$ (d)  $\hat{\Omega}_2 = -297.25 \text{ tr/min}$ 

FIG. 5.30 – Couple exercé sur le cylindre intérieur pour des cylindres contra-rotatifs. ( $\circ$ ) Valeurs expérimentales. (-) Valeurs théoriques du couple en régime laminaire. (a) et (b) solution de CMC à 0.5% ( $n = 0.54$ ). (c) et (d) solution de xanthane à 0.5% ( $n = 0.23$ ). Les flèches représentent les valeurs théoriques d'apparition des instabilités d'après l'analyse de stabilité linéaire décrite au chapitre 3.

**Courbes de stabilité marginale**

Dans les tableaux 5.6 à 5.8 sont résumées les valeurs des seuils de stabilité obtenues par l'expérience et par l'analyse de stabilité linéaire. On note un écart entre la théorie et l'expérience d'au plus 15%, sauf pour le xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ ) où l'écart relatif atteint 32%. Cet écart est dû en partie à l'incertitude sur la mesure des paramètres rhéologiques pour chaque solution.

	$Re_2$	Stabilité linéaire	Expérience
Glycérine 85% (newtonien)	-143.8	123.93	121.1 ±5%
CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ )	-114.27	102.63	104.98 ±5%
CMC à 0.5% en masse ( $n = 0.54$ )	-57.2	81.79	67.65±5%
xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ )	-69.4	91.23	99.98±5%

TAB. 5.6 – Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques  $Re_{1c}$  théorique et expérimentale d'apparition des instabilités pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les cylindres sont contra-rotatifs ( $\hat{\Omega}_2 = -99.25 \text{ tr}/\text{min}$ ).

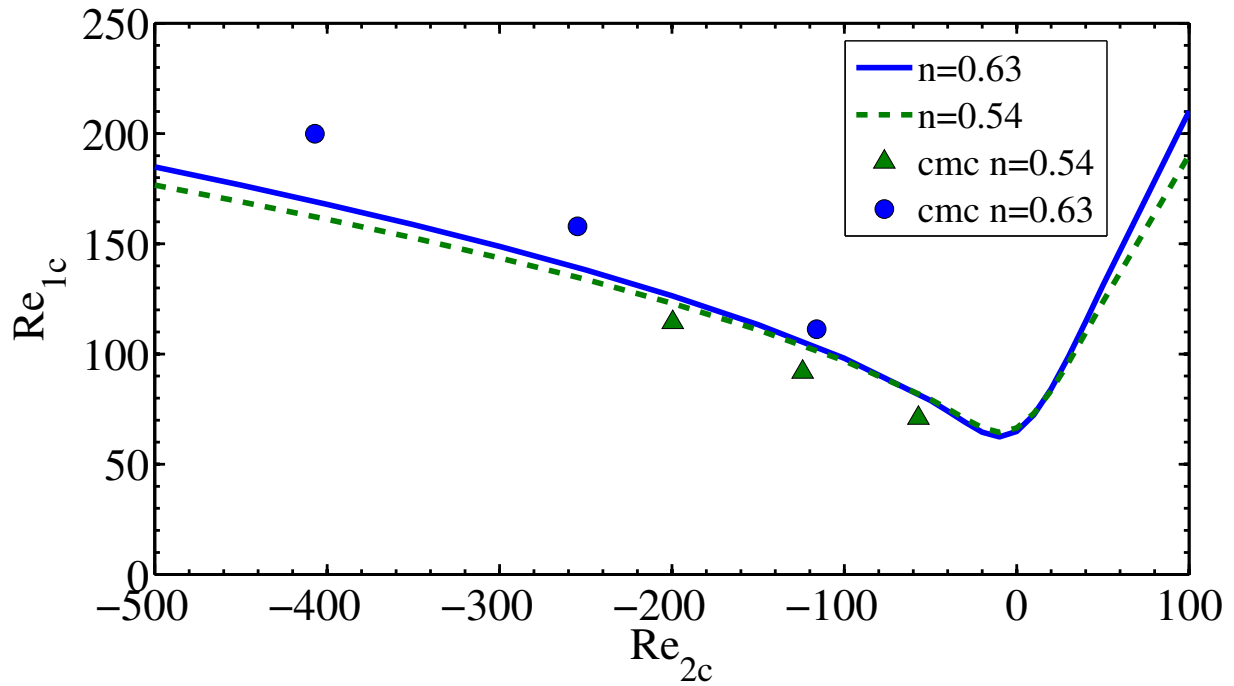
	$Re_2$	Stabilité linéaire	Expérience
Glycérine 85% (newtonien)	-289.49	170.54	161.24 ±5%
CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ )	-254.88	139.69	157.98 ±5%
CMC à 0.5% en masse ( $n = 0.54$ )	-122.5	103.56	88.3±5%
xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ )	106.26	91.23	120.49±5%

TAB. 5.7 – Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques  $Re_{1c}$  théorique et expérimentale d'apparition des instabilités pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les cylindres sont contra-rotatifs ( $\hat{\Omega}_2 = -198.25 \text{ tr}/\text{min}$ ).

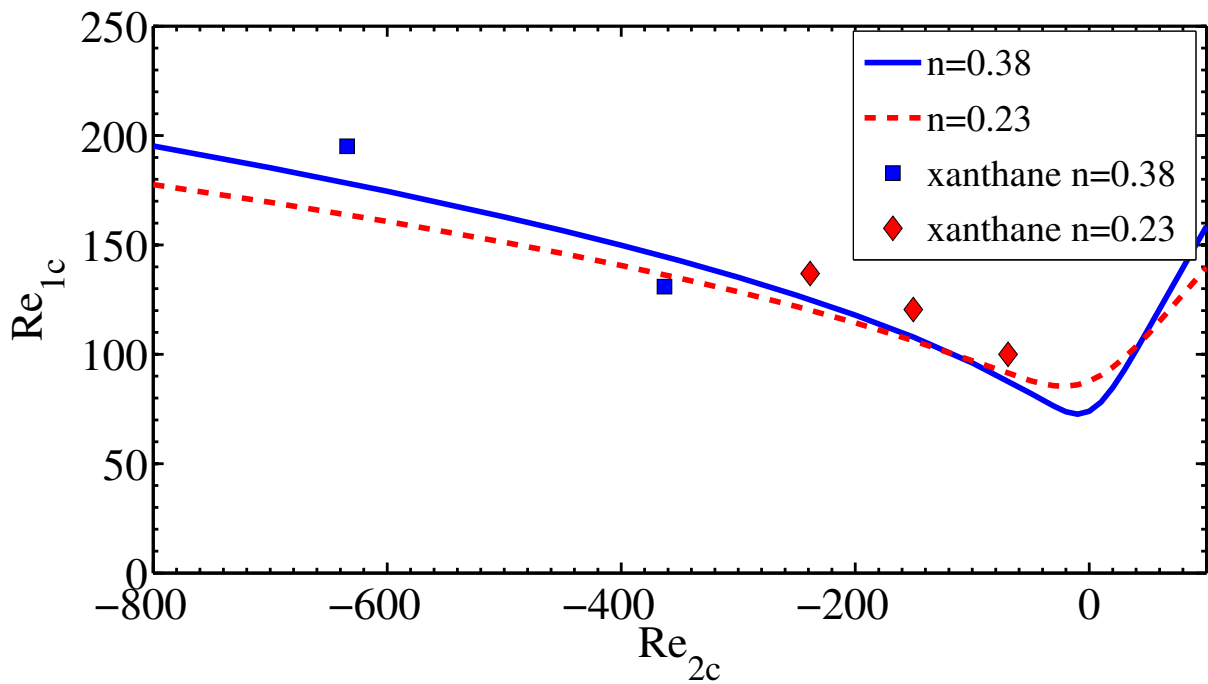
	$Re_2$	Stabilité linéaire	Expérience
Glycérine 85% (newtonien)	-429.88	205.58	192.79 ±5%
CMC à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ )	-403.8	169.15	193.69 ±5%
CMC à 0.5% en masse ( $n = 0.54$ )	-199.46	122.95	114.37±5%
xanthane à 0.5% en masse ( $n = 0.23$ )	-238.58	120	136.91±5%

TAB. 5.8 – Comparaison des nombres de Reynolds intérieurs critiques  $Re_{1c}$  théorique et expérimentale d'apparition des instabilités pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les cylindres sont contra-rotatifs ( $\hat{\Omega}_2 = -297.25 \text{ tr}/\text{min}$ ).

Sur la figure 5.31 sont présentées les mesures de stabilité marginale pour les solutions de CMC et de xanthane, comparées aux courbes obtenues avec l'analyse linéaire. Pour la CMC, figure 5.31(a), les mesures pour  $n = 0.63$  sont au dessus des mesures pour  $n = 0.54$  dans la gamme de  $Re_2$  testée, ce qui est cohérent avec les calculs. En ce qui concerne le xanthane, figure 5.31(b), les mesures semblent indiquer un effet déstabilisant du caractère rhéofluidifiant pour  $Re_2 \leq -300$  et stabilisant pour  $Re_2 \geq -300$ . La théorie prévoit l'inversion de comportement vers  $Re_2 \geq -100$ .



(a)



(b)

FIG. 5.31 – Courbes de stabilité marginale pour des fluides en loi de puissance. Solutions de CMC ( $\triangle$ ) à 0.4% en masse ( $n = 0.63$ ) et ( $\triangle$ ) 0.5% ( $n = 0.54$ ); solutions de xanthane ( $\square$ ) à 0.2% ( $n = 0.38$ ) et ( $\diamond$ ) 0.5% ( $n = 0.23$ ). (–) Résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire pour les mêmes indices d'écoulement.

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de revisiter les instabilités centrifuges d'un dispositif de Taylor-Couette de large enfer. Les techniques utilisées pour détecter l'apparition de la première instabilité donnent des résultats en très bon accord avec les études expérimentales et théoriques existantes dans la littérature.

Nous avons en outre mis en évidence d'une part, une bifurcation sous critique pour des fluides fortement rhéofluidifiants et d'autre part, un écoulement chaotique induit par les effets rhéofluidifiants.





# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons effectué une étude théorique et numérique de la stabilité linéaire d'une perturbation tridimensionnelle pour des entrefers étroits ( $\eta = 0.881$ ) et large ( $\eta = 0.4$ ), ainsi qu'une étude expérimentale avec un entrefer large.

Lors de l'analyse de stabilité linéaire, l'évolution d'une perturbation aux temps longs et aux temps courts a été examinée.

Trois modèles rhéologiques ont été utilisés : le modèle en loi de puissance et le modèle en loi de Carreau pour décrire les fluides rhéofluidifiants sans seuil de contrainte ; le modèle de Bingham pour décrire les fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte.

L'étude du comportement aux temps longs d'une perturbation a été effectuée en adoptant une approche modale conduisant à l'établissement d'un problème aux valeurs propres, résolu en utilisant une méthode spectrale basée sur les polynômes de Chebyshev. Les résultats ont montré que pour un nombre de Reynolds extérieur donné  $Re_2$ , l'augmentation du caractère rhéofluidifiant entraîne une diminution du nombre de Reynolds critique  $Re_{1c}$  sauf au voisinage de  $Re_2 = 0$  (seul le cylindre intérieur tourne) et seulement dans le régime co-rotatif pour des entrefers étroits. Cette diminution est due à l'augmentation rapide de l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation, conséquence, non seulement de l'augmentation de taux de cisaillement à la paroi du cylindre intérieur mais aussi de la modification des fonctions propres. Pour les fluides à seuil, une augmentation du nombre de Reynolds critique avec le nombre de Bingham  $B_i$  est observée pour un entrefer étroit dans les régimes co- et contra-rotatifs pour un entrefer large et dans le régime contra-rotatif seul pour un entrefer large. Dans ce cas, le terme de dissipation visqueuse, constitué essentiellement des termes quadratiques, devient dominant par rapport à l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation. Dans le régime co-rotatif, et pour de larges entrefers, une diminution du nombre de Reynolds critique peut être observée quand le seuil augmente [Peng et Zhu, 2004, Landry, 2006].

Pour les cylindres contra-rotatifs, le nombre de Reynolds extérieur  $|Re_{2s}|$  au-delà duquel le mode critique axisymétrique des rouleaux de Taylor bifurque vers les rouleaux en spirales augmente significativement lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente. Par ailleurs, les longueurs d'ondes de ces spirales sont fortement réduites quand la rhéofluidification augmente car "l'entrefer effectif", l'espace compris entre le cylindre intérieur et le rayon où la vitesse de base s'annule, devient plus étroit. Le nombre de Reynolds extérieur  $|Re_{2s}|$  est encore plus élevé pour les fluides à seuil.

L'analyse du comportement aux temps courts est effectuée en étudiant la croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation. Les observations expérimentales [Coles, 1965], montre qu'on peut avoir une transition sous-critique dans la région linéairement stable. En général, la croissance transitoire est associée à une bifurcation sous-critique. Ce phénomène purement algébrique, est ini-

tié par la non normalité de l'opérateur linéaire associé aux équations aux perturbations. En effet, cet opérateur peut être sensible à de petites perturbations (vibration des moteurs par exemple ou encore la rugosité des cylindres). La quantification de cette sensibilité et donc la mise en évidence de la non normalité est effectuée par l'analyse des pseudospectres. Il apparaît alors que la réceptivité de l'opérateur linéaire augmente légèrement avec le caractère rhéofluidifiant. Cet effet est beaucoup plus prononcé pour les fluides fortement rhéofluidifiants et l'amplification optimale de l'énergie augmente d'un facteur 10 comparativement aux valeurs obtenues pour les fluides newtoniens pour des nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  fixés.

L'étude de la croissance transitoire dans tout le domaine linéairement stable et pour une large gamme de paramètres rhéologiques a été grandement facilitée par l'introduction et la généralisation du nombre de rotation  $R_\Omega$  et du nombre de Reynolds de cisaillement  $Re$ .

L'analyse de la structure de la perturbation optimale pour un grand nombre de Reynolds de cisaillement et un entrefer étroit montre que celle-ci est associée à de grandes valeurs du nombre d'onde azimuthal  $m^{opt} \approx 12$  et de faible nombre d'onde axial  $1 \leq k^{opt} \leq 2$ . D'autre part, pour un large entrefer ( $\eta = 0.4$ ),  $m^{opt} = 2$  et  $k^{opt} \propto 1$ . Il apparaît donc que le caractère rhéofluidifiant a un faible effet sur le nombre d'onde axial optimal  $k^{opt}$  et le nombre d'onde azimuthal optimal  $m^{opt}$  pour un rapport de rayon fixé.

- Dans le cas particulier de la ligne de Rayleigh pour un fluide newtonien, le moment angulaire est constant et la perturbation optimale est constituée par la superposition dans la direction axiale de stries de forte et faible vitesses azimuthales à l'instant initial avant d'évoluer progressivement vers des rouleaux à l'instant optimal par le mécanisme d'anti-lift-up [Antkowiak et Brancher, 2007]. L'amplification optimale de l'énergie suit dans ce cas, une loi de puissance du type  $G^{opt} \propto Re^2$ , où  $Re$  est le Reynolds de cisaillement.

- En dehors de la ligne de Rayleigh, la perturbation optimale, initialement orientée dans la direction contraire à l'écoulement de base, s'incline progressivement pour s'aligner avec ce dernier à l'instant optimal  $t = t^{opt}$ . L'amplification de la perturbation optimale tridimensionnelle est analysée en étudiant l'interaction entre la divergence plane et la vorticité axiale comme l'ont suggéré [Vitoshkin et al., 2012] pour un écoulement de Couette plan. La décomposition des contraintes de Reynolds  $-uv$  en fonction des différents termes de la divergence plane et du rotationnel lié a la vorticité a montré que la croissance de l'énergie est dominée par les termes mixtes  $-(u_d v_q + u_q v_d) \dot{\gamma}_{r\theta}^b$  par rapport aux termes dus au mécanisme de Orr 2D, qui produisent quant à eux une décroissance de l'énergie. Les résultats numériques montrent également que, pour des nombres de Reynolds de cisaillement important, l'amplification optimale de l'énergie obéit à  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$ . Ce résultat est en bon accord avec ceux récemment obtenus par [Maretzke et al., 2014] qui prédisent une évolution en  $Re^{2/3}$  dans toute la zone linéairement stable de l'écoulement de Taylor-Couette pour un fluide new-

tonien.

Pour ce qui concerne les fluides non newtoniens rhéofluidifiants, la ligne de Rayleigh ne peut pas être séparée du reste de la zone linéairement stable. Le moment angulaire n'est plus constant sur cette ligne. Les calculs numériques effectués montrent que dans tous les régimes d'écoulement linéairement stable (contra-rotatif et co-rotatif), le mécanisme de basculement de Orr est à l'œuvre. Dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant en loi de puissance, l'évolution de l'amplification optimale en fonction de l'indice de rhéofluidification  $n_p$  suit la loi  $G^{opt} = G_{n=1}^{opt} \times \exp(-n_p^{1/3})$ . La croissance transitoire de l'énergie de la perturbation se trouve renforcée avec l'augmentation du caractère rhéofluidifiant. Ainsi, le caractère rhéofluidifiant favorise la transition vers la turbulence par la superposition linéaire des modes propres. Ce phénomène a été aussi observé dans le cas d'un écoulement de Couette plan [Liu et Liu, 2011] ou encore l'écoulement de Hagen-Poiseuille [Liu et Liu, 2012] pour un fluide en loi de puissance avec un autre mécanisme de la croissance transitoire.

Une étude expérimentale avec un dispositif de Taylor-Couette en plexiglas de large entrefer a été effectuée. Ceci a permis d'analyser la stabilité des écoulements de fluides rhéofluidifiants sans seuil de contrainte mais aussi la transition à la turbulence, notamment la transition vers un écoulement chaotique pour les fluides fortement rhéofluidifiants.

La structure de l'écoulement est étudiée à travers trois techniques : la mesure du couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur, grâce à un capteur de force à butées mécaniques ; la visualisation par ensemencement de fines paillettes dans l'écoulement et la technique de vélocimétrie par images de particules (Particle Image Velocimetry, PIV).

Pour une solution aqueuse de glycérine, utilisée comme fluide newtonien de référence, la première instabilité est apparue pour une valeur de  $Re_{1c} = 69.2 \pm 5\%$ . Les rouleaux de Taylor obtenus sont axisymétriques et stationnaires avec un nombre d'onde axial  $k_c = 3.2$ . Ces conditions critiques sont conformes aux prédictions issues de l'analyse linéaire de stabilité. L'augmentation du nombre de Reynolds intérieur jusqu'à la valeur maximale admissible dans notre dispositif soit  $Re_1 = 4 \times Re_{1c}$  montre que les rouleaux restent axisymétriques et stationnaires comme prédit par [Jones, 1985]. Il est aussi observé que la taille des rouleaux ne change pas de manière significative sur cette gamme de nombre de Reynolds  $Re_1$ . L'évolution des rouleaux peut être caractérisée par la mesure de la norme de la vitesse projetée dans le plan d'observation,  $v_{max} = \sqrt{u_r^2 + w_z^2}$ , issue de la mesure PIV. Cette évolution peut être caractérisée aussi par l'évolution du couple.

Pour les solutions de fluides non newtoniens rhéofluidifiants, les couples sur le cylindre intérieur obtenus pour les solutions de xanthane, fluides fortement rhéofluidifiants, sont plus faibles que les couples obtenus pour les solutions de CMC considérées dans cette étude. De plus, les structures hydrodynamiques obtenues par déstabilisation de l'écoulement des fluides rhéofluidifiants sont ani-

---

mées d'une vitesse verticale (axiale), appelée vitesse de glissement. Ainsi pour les solutions de xanthane à 0.5%, une vitesse de glissement de  $0.81 \text{ mm/s}$  a été obtenue à l'apparition de la première instabilité. Cette vitesse est plus importante que celle obtenue par [Escudier *et al.*, 1995] pour des solutions de xanthane à 0.5% en masse. Ce comportement montre l'influence du caractère rhéofluidifiant sur la stabilité de l'écoulement et une éventuelle transition vers la turbulence.

Les études sur les fluides fortement rhéofluidifiants de xanthane à 0.5% montrent une transition sous critique et l'apparition d'un écoulement chaotique même lorsque seul le cylindre intérieur tourne. Ceci est un résultat nouveau. L'écoulement chaotique intervient à environ  $Re = 1.5 \times Re_{1c}$ .

## Perspectives

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse se présentent sur deux volets. Un aspect théorique et numérique basé sur l'analyse linéaire de stabilité et un aspect expérimental avec la mise en place d'un dispositif de Taylor-Couette. Les perspectives à poursuivre pour compléter ce travail portent sur ces deux parties.

Dans le volet numérique, une étude non linéaire serait nécessaire pour confirmer la transition sous critique et l'apparition de l'écoulement chaotique observé expérimentalement pour les fluides fortement rhéofluidifiants. Ceci pourra se faire par une analyse de stabilité faiblement non linéaire ou purement non linéaire. On peut également envisager une simulation numérique directe de l'écoulement.

Pour l'aspect expérimental, il serait bien d'effectuer les mesures des profils des vitesses de l'écoulement de base avant l'apparition de la première instabilité mais aussi au-delà. Ceci pourrait permettre d'avoir un autre moyen de détecter l'apparition de l'écoulement chaotique. L'étude expérimentale pour les fluides à seuil n'étant pas abordée dans ce manuscrit, il serait nécessaire d'étudier les mesures de couple, des visualisations et des mesures de PIV pour ces fluides (un fluide à seuil comme le carbopol par exemple). Il serait intéressant de regarder aussi les instabilités des fluides viscoélastiques et des suspensions visqueuses.

Par ailleurs, nous étions limités en terme de la rotation du cylindre intérieur ( $600 \text{ tr/min}$ ). Un changement de moteur permettra d'aller plus loin en vue d'étudier le régime turbulent et d'avoir par exemple des lois de comportement asymptotique beaucoup plus générales pour les mesures de couple.

Une caractérisation plus fine du régime chaotique peut être obtenue à partir d'une analyse statistique des fluctuations de la vitesse.



## Annexe A

# Opérateurs utilisés dans les équations aux perturbations

### Formulation $(u, v)$ du problème aux valeurs propres

Pour cette formulation, le problème aux valeurs propres s'écrit

$$\underline{\mathcal{L}} \underline{\mathbf{q}} = \sigma \underline{\mathcal{M}} \underline{\mathbf{q}}, \quad (\text{A.1})$$

avec  $\underline{\mathbf{q}} = (u, v)^T$ .

L'opérateur  $\underline{\mathcal{M}}$  s'exprime

$$\underline{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} DD_* - k^2 & \frac{im}{r} \tilde{D} \\ -\frac{im}{k^2 r} D_* & 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

L'opérateur  $\underline{\mathcal{L}}$  peut s'écrire comme une combinaison de 4 termes,

$$\underline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{V1} + \mathcal{L}_{V2} + \mathcal{L}_{V3} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L}_I = Re_1 \begin{pmatrix} \frac{im}{r} \left[ -\left( V^b \tilde{D} + D V^b \right) D_* + k^2 V^b \right] & -2 \frac{k^2 V^b}{r} + \frac{m^2}{r^2} \left( -\frac{2V^b}{r} + D V^b + V^b D \right) \\ -D_* V^b - \frac{m^2}{k^2 r^2} V^b D_* & -\frac{im}{r} \left( 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) V^b \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{L}_{V1} = \mu^b \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & i m \left[ \frac{2k^2}{r^2} + D \Delta \frac{1}{r} \left( \Delta - \frac{2D}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \\ \frac{i m}{r} \left( -\frac{\Delta D_*}{k^2} + \frac{2}{r} \right) & DD_* - k^2 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \left( \Delta - \frac{2D}{r} + \frac{1}{r^2} - k^2 \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V2} = & D\mu^b \begin{pmatrix} D^2 D_* + \Delta D_* - k^2 D & \frac{i m}{r} \left( \Delta + D^2 - \frac{4D}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \\ -\frac{i m}{k^2 r} D D_* & \left( 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) \tilde{D} \end{pmatrix} \\ & + D^2 \mu^b \begin{pmatrix} k^2 + D D_* & \frac{i m}{r} \tilde{D} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{L}_{V3} = (\mu_t - \mu^b) \begin{pmatrix} \frac{k^2 m^2}{r^2} & -\frac{i k^2 m \tilde{D}}{r} \\ \frac{i m D_*}{r} & \left( D + \frac{2}{r} \right) \tilde{D} \end{pmatrix} + D (\mu_t - \mu^b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i m}{r} & \tilde{D} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

## Formulation $(u, w)$ du problème aux valeurs propres

De même l'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\underline{\mathcal{L}} \underline{\mathbf{q}} = \sigma \underline{\mathcal{M}} \underline{\mathbf{q}}, \quad (\text{A.8})$$

avec  $\underline{\mathbf{q}} = (u, w)^T$ .

L'opérateur  $\underline{\mathcal{M}}$  s'exprime

$$\underline{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} D_*^2 + \frac{1}{r} D_* - \frac{m^2}{r^2} i k D + \frac{2 i k}{r} \\ k D_* & i k^2 + \frac{i m^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

L'opérateur  $\underline{\mathcal{L}}$  peut s'écrire encore comme une combinaison de 4 termes,

$$\underline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{V1} + \mathcal{L}_{V2} + \mathcal{L}_{V3} \quad (\text{A.10})$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I = & Re_1 \begin{pmatrix} \frac{i m}{r^2} \left( 2 D V^b + V^b D - 3 V^b D_* + \frac{m^2 V^b}{r} \right) & \frac{3 k m V^b}{r^2} \\ \frac{i k m}{r} (D V^b - V^b D) & \frac{m}{r} \left( \frac{m^2 V^b}{r^2} + k^2 V^b \right) \end{pmatrix} \\
& + Re \begin{pmatrix} \frac{i m}{r} \left[ -\frac{D V^b}{r} + D^2 V^b - V^b D D_* \right] & \frac{k m}{r} (V^b D + D V^b) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V1} = & \mu^b \begin{pmatrix} -\frac{2 m^2}{r^4} & i k \left[ \left( \frac{2}{r} + D \right) (D_* D - k^2) + \frac{2 D_* D}{r} - \left( \frac{4}{r} + D \right) \frac{m^2}{r^2} \right] \\ k \left( \Delta + \frac{2 D}{r} \right) D_* & i k^2 \left( \Delta + \frac{2 D}{r} \right) \end{pmatrix} \\
& + \mu^b \begin{pmatrix} \left( \frac{2}{r} + D \right) \Delta D_* + \frac{2}{r} \left( D^2 + \frac{D}{r} \right) D_* - \frac{m^2}{r^2} \Delta - \frac{m^2}{r^4} & 0 \\ \frac{2 k m^2}{r^3} & 0 \end{pmatrix} \quad (A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V2} = & D \mu^b \begin{pmatrix} \frac{2}{r} D D_* - \frac{m^2}{r^2} \left( D - \frac{2}{r} \right) & i k \left[ \Delta + \left( \frac{4}{r} + D \right) D \right] \\ k D D_* & i \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) D \end{pmatrix} \\
& + D \mu^b \begin{pmatrix} \left[ \left( D + \frac{2}{r} \right) D + \Delta \right] D_* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + D^2 \mu^b \begin{pmatrix} D D_* + \frac{m^2}{r^2} & i k D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V3} = & \left( \mu_t - \mu^b \right) \begin{pmatrix} \left[ \left( \frac{5}{r} + D \right) D + \frac{3}{r^2} + \frac{2 m^2}{r^2} \right] D D_* + \frac{m^4}{r^4} & i k \left[ \frac{m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} + \left( \frac{5}{r} + D \right) D \right] D \\ k \left[ \left( \frac{3}{r} + D \right) D + \frac{m^2}{r^2} \right] D_* & i k^2 \left( D + \frac{3}{r} \right) D \end{pmatrix} \\
& + D \left( \mu_t - \mu^b \right) \begin{pmatrix} \left( \frac{5}{r} + 2 D \right) D D_* + \frac{m^2}{r^2} (D + D_*) & i k \left( \frac{5}{r} + 2 D \right) D \\ \frac{k m^2}{r^2} + k D D_* & i k^2 D \end{pmatrix} \\
& + D^2 \left( \mu_t - \mu^b \right) \begin{pmatrix} D D_* + \frac{m^2}{r^2} & i k D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.14)
\end{aligned}$$



## **Annexe B**

# **Linear stability of Taylor-Couette flow of shear-thinning fluids**

Yao Agbessi, Brahim Alibenyahia, Chérif Nouar, Cécile Lemaitre, Lionel Choplin

*Journal of Fluid Mechanics*, 776, 354-389, (2015)

## Linear stability of Taylor–Couette flow of shear-thinning fluids: modal and non-modal approaches

Y. Agbessi<sup>1</sup>, B. Alibenyahia<sup>2</sup>, C. Nouar<sup>3,†</sup>, C. Lemaître<sup>1</sup> and L. Choplin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LRGP, UMR 7274 (CNRS), Université de Lorraine, 1 rue Grandville, BP 20451, 54001 Nancy CEDEX, France

<sup>2</sup>LApEH, Université Saad Dahlab, Blida, Algeria

<sup>3</sup>LEMETA, UMR 7563 (CNRS), Université de Lorraine, 2, avenue de la Forêt de Haye, TSA 60604, 54518 Vandoeuvre-Lès-Nancy CEDEX, France

(Received 29 December 2014; revised 13 April 2015; accepted 9 June 2015)

In this paper, the response of circular Couette flow of shear-thinning fluids between two infinitely long coaxial cylinders to weak disturbances is addressed. It is highlighted by transient growth analysis. Both power-law and Carreau models are used to describe the rheological behaviour of the fluid. The first part of the paper deals with the asymptotic long-time behaviour of three-dimensional infinitesimal perturbations. Using the normal-mode approach, an eigenvalue problem is derived and solved by means of the spectral collocation method. An extensive description and the classification of eigenspectra are presented. The influence of shear-thinning effects on the critical Reynolds numbers as well as on the critical azimuthal and axial wavenumbers is analysed. It is shown that with a reference viscosity defined with the characteristic scales  $\hat{\mu}_{ref} = \hat{K}(\hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d})^{(n-1)}$  for a power-law fluid and  $\hat{\mu}_{ref} = \hat{\mu}_0$  for a Carreau fluid, the shear-thinning character is destabilizing for counter-rotating cylinders. Moreover, the axial wavenumber increases with  $Re_2$  and with shear-thinning effects. The second part investigates the short-time behaviour of the disturbance using the non-modal approach. For the same inner and outer Reynolds numbers, the amplification of the kinetic energy perturbation becomes much more important with increasing shear-thinning effects. Two different mechanisms are used to explain the transient growth, depending on whether or not there is a stratification of the angular momentum. On the Rayleigh line and for Newtonian fluids, the optimal perturbation is in the form of azimuthal streaks, which transform into Taylor vortices through the anti-lift-up mechanism. In the other cases, the optimal perturbation is initially oriented against the base flow, then it tilts to align with the base flow at optimal time. The scaling laws for the optimal energy amplification proposed in the literature for Newtonian fluids are extended to shear-thinning fluids.

**Key words:** instability, nonlinear instability, transition to turbulence

† Email address for correspondence: [cherif.nouar@univ-lorraine.fr](mailto:cherif.nouar@univ-lorraine.fr)

## 1. Introduction

The Taylor–Couette flow of a viscous incompressible fluid between two infinitely long coaxial cylinders rotating at different angular velocities is considered as a paradigm for the study of hydrodynamic instabilities and transitions in nonlinear dynamical systems. A survey of the literature on the Taylor–Couette problem can be found in Koschmieder (1993) and Tagg (1994). The basic state, i.e. a circular Couette flow, CCF, is purely azimuthal. The linear instability of the base flow with respect to axisymmetric perturbations is governed in the inviscid limit by the Rayleigh criterion: the CCF flow is unstable with respect to axisymmetric perturbations when the square of the angular momentum,  $L^2$ , decreases with the radius,  $r$ , at some radial position (Drazin & Reid 1981). In the plane  $(Re_1, Re_2)$ , where  $Re_1$  and  $Re_2$  are respectively the inner and outer Reynolds numbers, the Rayleigh stable and unstable domains are separated by the Rayleigh line.

For a viscous fluid, the same instability mechanism applies, except that the instability occurs if the destabilizing force exceeds the viscous force on a time scale smaller than the diffusion time scale. When the outer cylinder is fixed, the instability of the CCF of a viscous incompressible Newtonian fluid appears via a stationary axisymmetric disturbance (Taylor 1923) in the form of toroidal counter-rotating vortices.

For the counter-rotating configuration,  $L^2$  decreases with the radius  $r$  near the inner cylinder and increases near the outer cylinder. It is shown from linear stability analysis that for sufficient counter-rotation of the outer cylinder, the CCF becomes unstable first to a non-axisymmetric mode (Krueger, Gross & Diprima 1966; Snyder 1968; Langford *et al.* 1988). In the unstable Rayleigh regime and co-rotating cylinders, where  $L^2$  decreases from the inner cylinder to the outer cylinder, the CCF becomes centrifugally unstable with respect to axisymmetric toroidal vortices.

Increasing the Reynolds number above the critical values leads to the occurrence of different patterns, depending on whether both cylinders are rotating or only the inner one is rotating. Andereck, Liu & Swinney (1986) investigated by visualization the diversity of flow states depending on the inner and outer Reynolds numbers. When the outer cylinder is fixed, or at low  $Re_2$ , the transition to turbulence is supercritical and occurs through successive linear instabilities.

For counter-rotating cylinders with sufficiently large  $Re_2$ , the transition to turbulence becomes subcritical, as shown experimentally by Coles (1965) and Van Atta (1966). These authors observed intermittent spiral turbulence below the linear stability boundary of the basic CCF.

The transient energy growth of a perturbation is considered as a prerequisite for a subcritical bifurcation. In this mechanism, small perturbations interact with the shear profile to create a much more energetic disturbance. It is argued that, despite linear stability, large growth of a perturbation may trigger nonlinear effects which can sustain its energy away from zero for all times. From the mathematical point of view, the transient growth is associated with the non-normality of the linear operators involved in the linear stability problem (Trefethen *et al.* 2000). Such an effect was pointed out first by Gebhardt & Grossmann (1993) for the Taylor–Couette problem. The features of this transient growth have been investigated by Hristova *et al.* (2002) by the computation of the pseudospectra for an axisymmetric perturbation and fixed axial periodicity, with counter-rotating cylinders such that the net effect of the Coriolis force vanishes. Meseguer (2002) determined, for a fixed radius ratio ( $\eta = 0.881$ ), the optimal axial and azimuthal wavenumbers which provide the maximum transient growth. Recently, results of transient growth calculations covering all linearly stable

356 Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin

regimes of Taylor–Couette flow were presented by Maretzke, Hof & Avila (2014). To do this, they used the shear Reynolds number,  $Re$ , and the rotation number,  $R_\Omega$ , introduced by Dubrulle *et al.* (2005). The authors found that optimal transient growth, in linearly stable Taylor–Couette flow, varies as  $Re^{2/3}$  for large  $Re$ , suggesting that those effects might be significant at large  $Re$ .

To our knowledge, transient growth in Taylor–Couette flow of non-Newtonian fluids has not been considered before in the literature. Actually, in comparison with Newtonian fluids, few studies have been devoted to the Taylor–Couette problem for non-Newtonian fluids, despite the fact that they are involved in a wide variety of industrial applications. Their material properties have a strong impact on the flow behaviour, which may modify the conditions and the mechanisms of flow instabilities. Most non-Newtonian fluids have two common properties, viscoelasticity and shear thinning. Polymer and colloid solutions, as well as particulate dispersions, exhibit this behaviour above a certain concentration threshold. There has been a significant interest in inertialess viscoelastic Taylor–Couette instability, observed initially by Giesekus (1966) and then analysed by Muller, Larson & Shaqfeh (1989), Larson, Shaqfeh & Muller (1990) and Shaqfeh, Muller & Larson (1992). In the laminar state, the rotation produces a shear which stretches the polymer molecules along the curved stream lines. This leads to a first normal stress difference which acts against the centrifugal force. Groisman & Steinberg (1998) showed experimentally that the elastic instability leads to a strong nonlinear flow transition at vanishing inertia. Hereafter, we neglect the elastic response. We focus only on the shear-thinning effects, i.e. the influence of a nonlinear decrease of the effective viscosity with the shear rate. The shear-thinning behaviour arises from the reorganization of the internal fluid structure in order to reduce the viscous dissipation.

### 1.1. Review on Taylor–Couette flow in shear-thinning fluids

Circular Couette flow of shear-thinning fluids is mainly characterized by viscosity stratification in the annular space. The degree of viscosity stratification defined by  $|d\mu^b/dr|$ , where  $\mu^b$  denotes the viscosity of the base flow, is even more significant as the shear thinning is more pronounced and the radius ratio  $\eta$  is small. The azimuthal velocity profile is also modified: with increasing shear-thinning effects, the shear rate increases at the inner wall and decreases at the outer wall. The mechanism of instability described for a Newtonian fluid applies for shear-thinning fluids; however, the critical conditions are modified due to the viscosity stratification and the variation of the velocity profile.

Almost all the papers dealing with the CCF of shear-thinning fluids consider the case where the inner cylinder is rotating and the outer cylinder is fixed. The critical conditions were determined experimentally or numerically for different radius ratios and degrees of shear thinning.

From an experimental point of view, Sinevic, Kuboi & Nienow (1986) determined the onset of Taylor vortices by measuring the torque exerted on the inner rotating cylinder. The results were obtained for two radius ratios  $\eta = 0.7$  and  $0.9$ . The rheological behaviour of the fluids used, CMC and Carbopol solutions, were described by the power-law model. Escudier, Gouldson & Jones (1995) investigated the flow structure in a Taylor–Couette geometry with radius ratio  $\eta = 0.5$ . The fluids used were an aqueous solution of Xanthan gum 0.15 wt%, which is shear-thinning and slightly viscoelastic, and an aqueous solution of Laponite, which is also shear-thinning and thixotropic. Axial and tangential velocity measurements were made using a laser

Doppler anemometer. The critical Reynolds number,  $Re_c$ , defined with the inner-wall shear viscosity, was determined by monitoring the development of the axial velocity component at a fixed radius while increasing the rotation speed of the inner cylinder. The authors observed that: (i) the onset of Taylor vortices is much more gradual than that for a Newtonian fluid and (ii) the shear-thinning behaviour induces a significant radial shift in the location of the vortex eye towards the centre body.

From a numerical point of view, the critical conditions were either determined using two-dimensional (2D) direct numerical simulation (Coronado-Malutti, Mendes & Carvalho 1986; Lockett, Richardson & Worraker 2004) or by solving the eigenvalue problem which results from a linear stability analysis (Jastrzebski, Zaidani & Wronski 1992; Ashrafi & Khayat 2000; Caton 2006). A critical review of these studies was done by Alibenyahia *et al.* (2012). It was shown in that paper that when the Reynolds number is defined using the inner-wall shear viscosity, shear thinning delays the appearance of Taylor vortices. This delay is due to a reduction in the energy exchange between the base flow and the perturbation, rather than the modification of the viscous dissipation.

In all the previous studies, the outer cylinder is fixed. The case where the two cylinders are both rotating was only considered, to our knowledge, by Pascal & Rasmussen (1995). These authors determined the critical Reynolds number for power-law fluids at two radius ratios,  $\eta = 0.7$  and  $0.9$ . The results are limited to two values of shear-thinning index (defined by (2.7)),  $n = 0.8$  and  $1.2$ . The perturbation is assumed to be axisymmetric and the viscosity perturbation was not taken into account.

### 1.2. Objectives, methodology and outline of the paper

The objectives of the present study are to investigate the influence of the shear-thinning behaviour characterized by the stratification of the viscosity and the modification of the velocity profile on a 3D linear stability analysis of CCF. In this study, both cylinders are rotating independently, and both thin and wide gaps are considered. The short- and long-time evolutions of the perturbation will be considered. Many models are available to describe the dependence of the viscosity on the shear rate. All the governing equations of the present paper are given for a general nonlinear purely viscous fluid. For numerical computations we adopt two models: (i) the power-law model and (ii) the Carreau (1972) model. The power-law model is the most popular. It has the advantage of providing simple analytical expressions. However, for very large annular spaces, the shear rate in the vicinity of the outer cylinder could be very low and, in this situation, the power-law model is not very accurate. The Carreau model has a sound theoretical basis and is  $C^\infty$  (differentiable for all degrees of differentiation) with respect to the second invariant of the strain-rate tensor  $\mathbf{I}$ . The main disadvantage is that the base flow has to be calculated numerically. Note that the Carreau model approaches the power-law model as the ratio of the infinite-shear viscosity  $\mu_\infty$  to the zero-shear viscosity  $\mu_0$  can be neglected and the characteristic time of the fluid  $\lambda$  is very large.

The article is organized as follows. In § 2, the governing equations and dimensionless parameters are given. The effects of the rheology on both the base flow and the Rayleigh line are described in §§ 3 and 4. The linear perturbation equations are derived in § 5. In § 6, the long-time behaviour of the perturbation is considered. The influence of the shear-thinning effect on the eigenspectra and critical conditions are analysed. The linear stability problem is presented and the resulting eigenvalue problem is solved numerically. Section 7 deals with transient growth and optimal perturbation. The conclusions of this study are presented in § 8.

358 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*

**2. Mathematical formulation**

*2.1. Governing equations*

We consider the flow of a purely viscous non-Newtonian fluid between two infinitely long concentric cylinders. The inner cylinder of radius  $\hat{R}_1$  is rotating with a constant angular velocity  $\hat{\Omega}_1 > 0$ . The outer cylinder of radius  $\hat{R}_2$  is rotating with a constant angular velocity  $\hat{\Omega}_2$ , with  $\hat{\Omega}_2 > 0$  for co-rotating cylinders and  $\hat{\Omega}_2 < 0$  for counter-rotating cylinders. The radius ratio is  $\eta = \hat{R}_1/\hat{R}_2$ . The incompressibility condition and the momentum equations are, respectively,

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Re_1 (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \tag{2.2}$$

where  $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_z$  is the velocity vector in cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$ ,  $P$  the pressure and  $\boldsymbol{\tau}$  the deviatoric extra-stress tensor. The quantities denoted with a hat ( $\hat{\cdot}$ ) are dimensional while quantities without a hat are non-dimensional. We define the Reynolds numbers  $Re_1$  and  $Re_2$  for the inner and outer cylinders, respectively, as

$$Re_1 = \frac{\hat{\rho}\hat{R}_1\hat{\Omega}_1\hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}}, \quad Re_2 = \frac{\hat{\rho}\hat{R}_2\hat{\Omega}_2\hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}}. \tag{2.3a,b}$$

The governing equations have been non-dimensionalized using the width of the annular space  $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$  as the reference length scale, the velocity of the inner cylinder  $\hat{\Omega}_1\hat{R}_1$  as the velocity scale, the viscous diffusion time  $\hat{\rho}\hat{d}^2/\hat{\mu}_{ref}$  as the time scale and the quantity  $\hat{\mu}_{ref}\hat{R}_1\hat{\Omega}_1/\hat{d}$  for the stress and pressure scales, where  $\hat{\mu}_{ref}$  is a reference viscosity that will be specified later for each rheological model. To the previous equations, we add the no-slip and impermeability conditions at the walls,

$$\mathbf{U}(R_1, \theta, z) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{U}(R_2, \theta, z) = \left(0, \frac{Re_2}{Re_1}, 0\right), \tag{2.4a,b}$$

where the dimensionless radii are expressed as  $R_1 = \eta/(1 - \eta)$  and  $R_2 = 1/(1 - \eta)$ .

*2.2. Rheological models*

We consider a purely viscous shear-thinning fluid. The viscous stress tensor reads

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\boldsymbol{\Gamma})\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{with} \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T, \tag{2.5}$$

where the second invariant of the strain-rate tensor is expressed as

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}. \tag{2.6}$$

(i) The power-law model is given by

$$\hat{\mu} = \hat{K} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(n-1)/2}, \tag{2.7}$$

where  $\hat{K}$  is the consistency coefficient and  $n \leq 1$  the shear-thinning index. Examples of shear-thinning fluids described by the power-law model, and the



associated parameters  $\hat{K}$  and  $n$ , are given in Bird, Armstrong & Hassager (1987). In dimensionless form, the viscosity becomes

$$\mu = \Gamma^{(n-1)/2}, \tag{2.8}$$

and the reference viscosity reads

$$\hat{\mu}_{ref} = \hat{K}(\hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d})^{n-1}. \tag{2.9}$$

(ii) The Carreau model is given by

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty} = (1 + \hat{\lambda}^2 \hat{\Gamma})^{(n-1)/2}, \tag{2.10}$$

where  $\hat{\mu}_0$  is the viscosity of the Newtonian plateau at low shear rate,  $\hat{\mu}_\infty$  is the viscosity of the second Newtonian plateau at very high shear rates, and  $\hat{\lambda}$  is the characteristic time of the fluid. The location of the transition from the Newtonian plateau to the shear-thinning regime is determined by  $1/\hat{\lambda}$ . The infinite-shear viscosity  $\hat{\mu}_\infty$  is generally associated with a breakdown of the fluid, and is frequently significantly smaller ( $10^{-3}$ – $10^{-4}$  times as small) than  $\hat{\mu}_0$ , see Bird *et al.* (1987) and Tanner (2000). The ratio  $\hat{\mu}_\infty/\hat{\mu}_0$  will thus be neglected in the following. Increasing  $\hat{\lambda}$  reduces the Newtonian plateau to lower shear rates and the model thus tends to a power-law model. This is also the case when the range of shear rate in the annular space matches the shear-thinning regime. This happens for a narrow gap with large  $Re_1$ . Whereas, for a wide gap and strong shear-thinning effects, the shear rate in the vicinity of the outer cylinder can be low, approaching the low shear rate Newtonian plateau. In this situation, the Carreau model is more appropriate to use than the power-law model.

The dimensionless effective viscosity is then

$$\mu = (1 + \lambda^2 \Gamma)^{(n-1)/2} \quad \text{with} \quad \lambda = \frac{\hat{\lambda} \hat{\rho} \hat{\mu}_{ref}}{\hat{d}^2}, \tag{2.11}$$

and the viscosity scale in this case reads

$$\hat{\mu}_{ref} = \hat{\mu}_0. \tag{2.12}$$

Note that the reference viscosities adopted here, (2.9) and (2.12), are those widely used in the literature.

### 2.3. Governing parameters

The dimensionless governing parameters are the rheological parameters,  $n$  for the power-law model,  $n$  and  $\lambda$  for the Carreau model, the radius ratio  $\eta$  and the inner and outer Reynolds numbers  $Re_1$  and  $Re_2$ . In order to separate shear and centrifugal effects, Dubrulle *et al.* (2005) introduced another parametrization replacing  $Re_1$  and  $Re_2$  by a shear Reynolds number  $Re$  and a rotation number  $R_\Omega$ . The shear Reynolds number is defined by the ratio between a viscous time scale  $\hat{\rho} \hat{d}^2 / \hat{\mu}$  and a shear time scale  $|\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})|^{-1}$ . The rotation number is defined by the ratio between a shear time

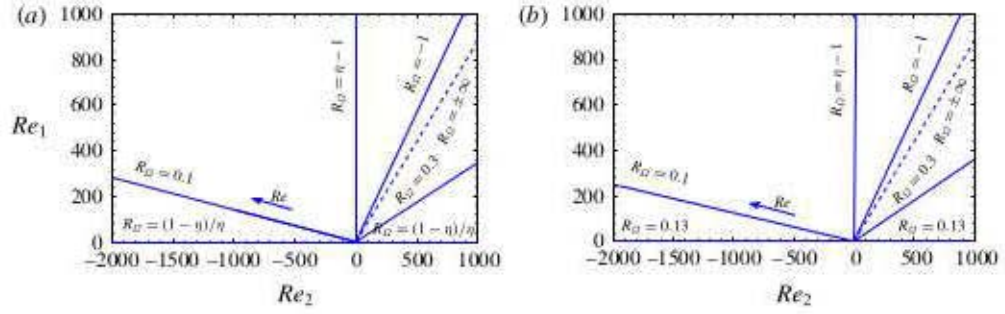
360 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 1. (Colour online) Parameters of Dubrulle *et al.* (2005) represented in the  $(Re_1, Re_2)$  plane at  $\eta = 0.881$ . Contours of rotation number  $R_\Omega$  for (a) Newtonian fluid and (b) power-law fluid with  $n = 0.3$ . The arrow indicates that  $Re$  increases along the constant  $R_\Omega$  line.

scale and a rotation time scale  $1/[2\hat{\Omega}_j(\hat{r})]$ .

$$Re = \frac{\hat{\rho} |\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})| \hat{d}^2}{\hat{\mu}^b(\hat{r})}, \quad R_\Omega = \frac{2\hat{\Omega}_j(\hat{r})}{\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})}. \quad (2.13a,b)$$

The superscript  $b$  refers to the base flow, which is purely azimuthal, and  $\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\hat{r})$  is the base shear rate evaluated at a radial position  $\hat{r}$ . Here,  $\hat{r}$  is the radial position of a frame rotating with an angular velocity  $\hat{\Omega}_j(\hat{r})$  such that

$$[\hat{V}^b(\hat{R}_1) - \hat{\Omega}_j \hat{R}_1] = -[\hat{V}^b(\hat{R}_2) - \hat{\Omega}_j \hat{R}_2]. \quad (2.14)$$

With respect to this rotating frame, the cylinders are seen to rotate with the exact opposite velocities. For a Newtonian fluid, it can be shown straightforwardly (Dubrulle *et al.* 2005) that

$$\bar{r} = \sqrt{R_1 R_2}, \quad Re = \frac{2|\eta Re_2 - Re_1|}{1 + \eta}, \quad R_\Omega = \frac{(1 - \eta)(Re_1 + Re_2)}{\eta Re_2 - Re_1}, \quad (2.15a-c)$$

For power-law fluids, using (2.13) and (2.14), we obtain

$$\bar{r} = \left( \frac{(R_1 + R_2) R_1^{(2/n)-1} R_2^{(2/n)-1}}{R_1^{(2/n)-1} + R_2^{(2/n)-1}} \right)^{n/2}, \quad Re = \frac{Re_1}{|\hat{\gamma}_{r\theta}^b(\bar{r})|^{(n-2)}}, \quad R_\Omega = -\frac{2B_0}{n\bar{r}^{2/n}}, \quad (2.16a-c)$$

where  $B_0$  is given by (3.5). Figure 1 shows, for a thin gap ( $\eta = 0.881$ ), some particular values of  $R_\Omega$  in the usual parameter space  $(Re_1, Re_2)$  for a Newtonian fluid and for a power-law fluid with  $n = 0.3$ . Shear-thinning effects introduce a slight deviation of the constant  $R_\Omega$  lines. For a wide gap, the deviation is much more pronounced.

For Carreau fluids,  $\bar{r}$ ,  $Re$  and  $R_\Omega$  are evaluated numerically. The constant  $R_\Omega$  lines are similar to those of figure 1(b), and are therefore not represented. In the following, we have chosen to express most of our result in the  $(Re_1, Re_2)$  plane, because we believe it is more understandable for the reader. In appendix D, some results for marginal stability are presented in the plane  $(Re, R_\Omega)$ . As far as the transient growth is concerned, based on the work of Maretzke *et al.* (2014), we will use the  $(Re, R_\Omega)$  representation in order to obtain a scaling of the energy growth.

3. Base flows

The base flow is azimuthal and is solution of

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau_{r\theta}^b) = 0, \tag{3.1}$$

with the boundary conditions

$$V^b(R_1) = 1 \quad \text{and} \quad V^b(R_2) = \frac{Re_2}{Re_1}. \tag{3.2a,b}$$

Hereafter, we describe the velocity and the viscosity profiles for power-law and Carreau fluids in the cases of a thin gap and a wide gap,  $\eta = 0.881$  and  $\eta = 0.4$  respectively.

3.1. Power-law fluid

The velocity profile is (Bird *et al.* 1987)

$$V^b(r) = A_0 r + \frac{B_0 r}{r^{2/n}} \tag{3.3}$$

with

$$A_0 = \frac{1}{R_1} \left[ 1 + \frac{1}{R_1^{2/n}} \left( 1 - \frac{Re_2}{Re_1} \eta \right) \left( \frac{1}{R_2^{2/n}} - \frac{1}{R_1^{2/n}} \right)^{-1} \right] \tag{3.4}$$

$$B_0 = -\frac{1}{R_1} \left[ \left( 1 - \frac{Re_2}{Re_1} \eta \right) \left( \frac{1}{R_2^{2/n}} - \frac{1}{R_1^{2/n}} \right)^{-1} \right]. \tag{3.5}$$

Figure 2 shows the effect of the shear-thinning index on the velocity and viscosity profiles for  $\eta = 0.4$ . With increasing shear-thinning effects, the curvature of the velocity profile becomes more pronounced, see figure 2(a). The shear rate increases at the inner wall and decreases at the outer wall. The wider the gap the more this effect is significant. This results in a viscosity stratification within the gap, see figure 2(b). The viscosity as well as the degree of the viscosity stratification increases from the inner wall to the outer wall. This is more pronounced with increasing shear-thinning effects (decreasing  $n$ ). Note that, for given  $Re_1$  and  $Re_2$ , the viscosity at the inner wall decreases with increasing shear-thinning effects, see figure 3. This variation is more pronounced for a large gap than for a thin gap.

Figure 4 shows an example of a velocity profile for co-rotating cylinders. The same characteristics as for counter-rotating cylinders are observed, except that the velocity profile is convex instead of concave.

3.2. Carreau fluid

Since no analytical expression of the velocity profile exists in this case, equation (3.1) is solved numerically using an iterative process combined with a Chebyshev polynomial approximation of the velocity profile. Details can be found in Alibenyahia *et al.* (2012). For a given value of  $\lambda$ , the effect of index  $n$  is similar to the effect of the power-law fluid index. When increasing  $\lambda$ , the base flow tends to that of a power-law fluid. This is observed for values of  $\lambda$  as low as  $\lambda = 10$  (figure 2).

362 Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin

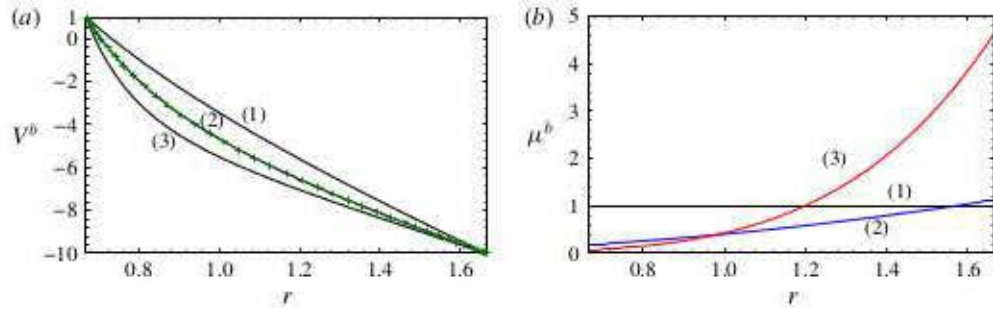


FIGURE 2. (Colour online) Base flow for power-law fluids in the case of counter-rotating cylinders with  $\eta=0.4$ ,  $Re_1=300$  and  $Re_2=-3000$ . (a) Velocity profiles and (b) viscosity profiles for (1)  $n=1$  (Newtonian fluid) (2)  $n=0.5$  and (3)  $n=0.3$ . (---) Velocity profile for a Carreau fluid with  $n=0.5$  and  $\lambda=10$ .

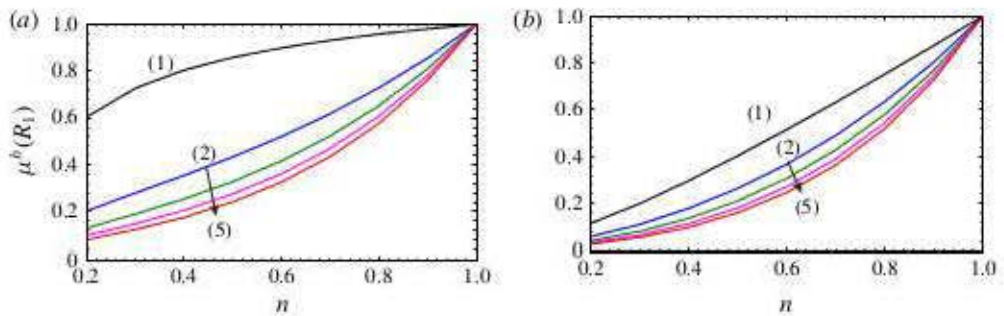


FIGURE 3. (Colour online) Viscosity at the wall of the inner cylinder as function of the shear-thinning index  $n$  for  $Re_1=300$  and (1)  $Re_2=0$ , (2)  $Re_2=-1000$ , (3)  $Re_2=-2000$  (4)  $Re_2=-3000$  and (5)  $Re_2=-4000$ : (a)  $\eta=0.881$ , (b)  $\eta=0.4$ .

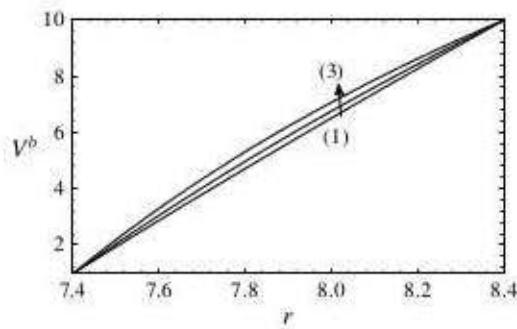


FIGURE 4. Base flow for power-law fluids in the case of co-rotating cylinders with  $\eta=0.881$ ,  $Re_1=300$  and  $Re_2=3000$ , (1)  $n=1$  (Newtonian fluid), (2)  $n=0.5$  and (3)  $n=0.3$ .

#### 4. Solid rotation and Rayleigh lines

The solid rotation line corresponds to the situation where  $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2$  and  $Re_1 = \eta Re_2$ . It is represented with dashed lines in figure 5. In the parametrization of Dubrulle *et al.* (2005), the solid line is given by  $R_{\Omega} = \pm\infty$ .

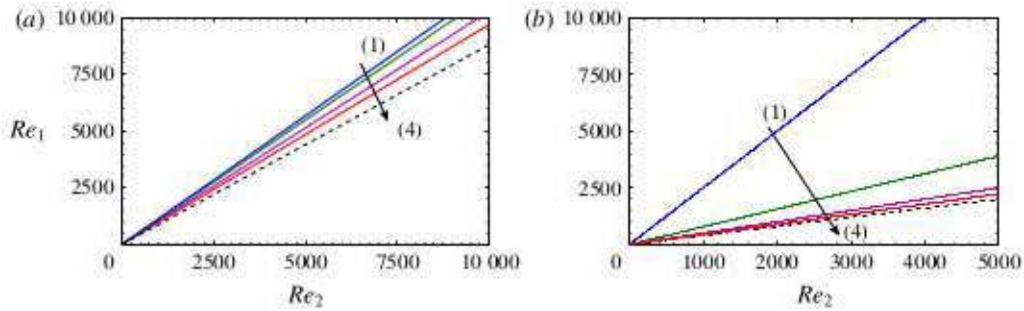


FIGURE 5. (Colour online) Rayleigh line for a power-law fluid with (a)  $\eta = 0.881$  and (b)  $\eta = 0.4$ : (1) Newtonian fluid  $n = 1$ , (2)  $n = 0.5$ , (3)  $n = 0.2$  and (4)  $n = 0.1$ . (---) solid rotation line.

As indicated in the introduction, the instability of the Taylor–Couette flow is due to the stratification of the angular momentum. When the cylinders are co-rotating, the Rayleigh stable regime for an inviscid fluid is defined by  $d/dr(L^2) > 0, \forall r \in [R_1, R_2]$ , where  $L = rV^b$  is the angular momentum (Drazin & Reid 1981). This regime is bounded in the  $(Re_1, Re_2)$  plane by the Rayleigh line, on which  $\exists r$  such that  $d/dr(L^2) = 0$ . For a Newtonian fluid, the Rayleigh line equation reads

$$Re_1 = \frac{Re_2}{\eta}. \tag{4.1}$$

Following the same approach for the non-Newtonian models considered here, the Rayleigh criterion is derived straightforwardly.

For the power-law model, we obtain

$$Re_1 = \left( \frac{1}{n(\eta^{2/n} - 1) + 1} \right) \eta Re_2. \tag{4.2}$$

For the Carreau model, the Rayleigh line is computed numerically. As expected, for sufficiently large  $\lambda$ , say  $\lambda > 10$ , we recover the power-law results for the same  $n$ . Decreasing  $\lambda$  reduces the shear-thinning effects and tends progressively to the Newtonian case.

As illustrated in figure 5(a,b), with increasing shear-thinning effects (decreasing  $n$  or increasing  $\lambda$ ) the Rayleigh line approaches the solid rotation line, thus reducing the so-called quasi-Keplerian zone, which is delimited by these two lines in the plane  $(Re_1, Re_2)$ . In the quasi-Keplerian regime, the angular velocity decreases radially while the angular momentum increases radially.

Note that, for a Newtonian fluid, the Rayleigh line corresponds to  $R_\Omega = -1$ . For a shear-thinning fluid, the calculations show that the Rayleigh line deviates from  $R_\Omega = -1$ . This effect is more significant for a large gap and strong shear-thinning effects. For instance, for a power-law fluid with  $n = 0.3$  and  $\eta = 0.4$ , the Rayleigh line corresponds to  $R_\Omega = -3.17$ .

### 5. Linear perturbation equations

In a classical way, we superimposed on the base flow an infinitesimal perturbation

$$\{U, P, \boldsymbol{\tau}\} = \{U^b, P^b, \boldsymbol{\tau}^b\} + \epsilon \{u', p', \boldsymbol{\tau}'\}. \tag{5.1}$$

364 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*

Substituting  $(\mathbf{U}, P, \boldsymbol{\tau})$  by their expression (5.1) in (2.1) and (2.2), and linearizing around the base flow, we obtain the perturbation equations

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + Re_1[(\mathbf{U}^b \cdot \nabla)\mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{U}^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}', \quad (5.3)$$

where

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{\epsilon} \{ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}^b + \epsilon \mathbf{u}') - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}^b) \} = \mu^b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}') + (\mu_t - \mu^b) \mathbf{A} \quad (5.4)$$

is the perturbation of the deviatoric shear-stress tensor. The components of tensor  $\mathbf{A}$  are all zero except for  $A_{1,2} = A_{2,1} = \dot{\gamma}_{r\theta}(\mathbf{u}')$ . We have introduced in (5.4) the tangential viscosity  $\mu_t$ , given by

$$\mu_t = \mu(\mathbf{U}^b) + \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{r\theta}}(\mathbf{U}^b) \dot{\gamma}_{r\theta}(\mathbf{U}^b). \quad (5.5)$$

We obtain the system

$$0 = D_* u' + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} = & -Re_1 \frac{V^b}{r} \left( \frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) - Dp' + \mu^b \left[ \Delta u' - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \right] \\ & + 2D\mu^b Du' + \frac{1}{r} \frac{\partial(\mu_t - \mu^b)}{\partial \theta} \left( \bar{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} = & -Re_1 \left( u' D_* V^b + \frac{V^b}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \mu^b \left[ \Delta v' + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \right] \\ & + D\mu^b \left[ Dv' - \frac{v'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right] + D_* \left[ (\mu_t - \mu^b) \left( \bar{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + (\mu_t - \mu^b) \left[ \frac{1}{r} \left( \bar{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -Re_1 \frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu^b \Delta w' + D\mu^b \left[ Dw' + \frac{\partial u'}{\partial z} \right], \quad (5.9)$$

where  $D = \partial/\partial r$ ,  $D_* = D + (1/r)$ ,  $\bar{D} = D - (1/r)$  and  $\Delta = D^2 + (1/r)D + ((1/r)(\partial/\partial \theta))^2 + (\partial/\partial z)^2$ .

The boundary conditions are obtained by assuming no slip and impermeability at inner and outer walls,

$$\mathbf{u}' = 0 \quad \text{at } r = R_1, R_2. \quad (5.10)$$

The linear system (5.6)–(5.9) is homogeneous in the axial and azimuthal directions. Perturbations can thus be decomposed into Fourier modes with an azimuthal wavenumber  $m \in \mathbb{Z}$  and an axial wavenumber  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\{\mathbf{u}', p'\} = \{\tilde{\mathbf{u}}(r, t), \tilde{p}(r, t)\} \exp[i(m\theta + kz)] + \text{c.c.}, \quad (5.11)$$

where c.c. stands for the complex conjugate and  $\tilde{\mathbf{u}}(r, t) = \tilde{u}(r, t) \mathbf{e}_r + \tilde{v}(r, t) \mathbf{e}_\theta + \tilde{w}(r, t) \mathbf{e}_z$ . By eliminating the pressure and one velocity component, the resulting

system can be written in terms of two components of the velocity  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  for  $k \neq 0$  or  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  for  $m \neq 0$ . The different formulations lead to an initial value problem which can be written formally as

$$\mathcal{L}\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{M} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} \tag{5.12}$$

where  $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{u}, \tilde{v})^T$  or  $(\tilde{u}, \tilde{w})^T$ , depending on the formulation adopted. The linear operators  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{M}$  are given in appendix A.

**6. Long-time behaviour of the disturbance: eigenvalue problem**

The initial value problem can be turned into an eigenvalue problem by the assumption of the exponential time dependence, i.e.  $\tilde{\mathbf{q}}(r, t) = \mathbf{q}(r) \exp(\sigma t)$ . The resulting generalized eigenvalue problem reads

$$\mathcal{L}\mathbf{q} = \sigma \mathcal{M}\mathbf{q} \tag{6.1}$$

with the complex frequency  $\sigma$  as the eigenvalue. The real part of  $\sigma$  is the growth rate of the perturbation and its imaginary part is its oscillation frequency. The eigenvalue problem (6.1) is discretized using a spectral collocation method based on Chebyshev polynomials evaluated at  $N$  collocation points of the Gauss–Lobatto method. The matrix eigenvalue problem that results is solved using the QZ algorithm with Matlab. To ensure the convergence of the numerical method, computations were performed for increasing  $N$ . It was found that, for  $N \geq 40$ , the five first eigenvalues remain unchanged with three digits accuracy. Each computation was then performed for  $N$  and  $N + 5$ , and only the overlapping eigenvalues were retained. This procedure allows one to remove spurious eigenvalues.

6.1. Eigenvalue spectra

In this section, eigenspectra are analysed for axisymmetric and non-axisymmetric perturbations. For both situations, the inner Reynolds number  $Re_1$  is fixed and the outer Reynolds number  $Re_2$  is varied. Then,  $Re_2$  is fixed and  $Re_1$  is increased until marginal stability is reached.

6.1.1. Axisymmetric perturbation  $m = 0$

The perturbation is 2D and the  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  formulation is used. As  $m = 0$ , the linear operators  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{M}$ , given by equations (A2)–(A7) in appendix A, are real. Therefore, the eigenvalues are real or complex conjugate. Spectra for that case are presented in figure 6 for a Newtonian fluid.

On the Rayleigh line, the angular momentum is constant. The spectrum, figure 6(a), consists of a vertical branch with real eigenvalues. It is independent of  $Re_1$ , as indicated by Gebhardt & Grossmann (1993). These properties are demonstrated in appendix B.

When the outer cylinder is fixed,  $Re_2 = 0$ , most of the eigenvalues are real. DiPrima & Hall (1984) have shown that the first eigenvalue that crosses the real axis is always real, in agreement with the principle of stability exchange.

For counter-rotating cylinders, the real vertical branch, which is made of paired eigenvalues, splits into two lateral curved branches, i.e. one pair of eigenvalues separates into two complex conjugate eigenvalues, see figure 6(b). The higher the absolute value of  $Re_2$ , the lower the locus of the branch separation. The imaginary

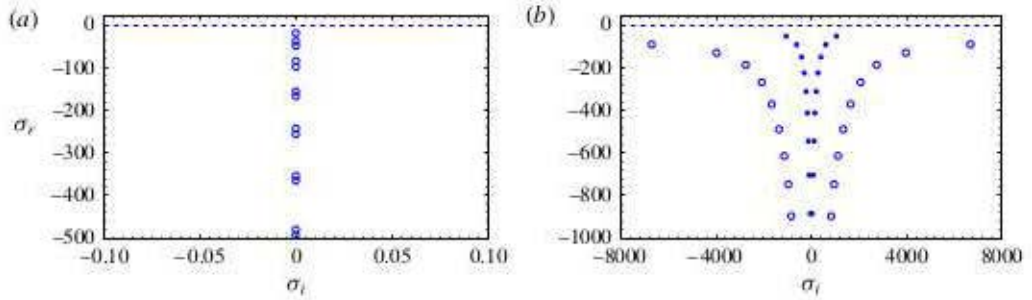
366 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 6. (Colour online) Eigenspectra for a Newtonian fluid undergoing an axisymmetric perturbation  $m = 0$  for  $\eta = 0.881$ ,  $k = \pi$ ,  $Re_1 = 400$ , and varying  $Re_2$ . (a)  $Re_2 = 352.4$  (on the Rayleigh line) and (b) (●)  $Re_2 = -4000$ , (○)  $Re_2 = -25\,000$ .

parts of the spectra are bounded by the epicyclic frequency  $\kappa$  evaluated at the outer wall,  $r = R_2$  (Shu 1982). The epicyclic frequency is defined by

$$\kappa^2(r) = \left( -\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (rV)^2 \right). \quad (6.2)$$

For a Newtonian fluid at  $r = R_2$ ,

$$\kappa^2(R_2) = 4Re_2(Re_2 - \eta Re_1) \left( \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right). \quad (6.3)$$

Similar results are observed for a wide gap.

Additional computations not presented here were conducted for co-rotating cylinders, and spectrum evolutions similar to the counter-rotating situation have been obtained.

For shear-thinning fluids, the eigenspectra are quite similar to the Newtonian case. However, two differences have been noted:

- (i) on the Rayleigh line, the angular momentum is no longer constant in the annular space, thus the eigenvalues are not necessarily real, figure 7(a). Furthermore, they vary with  $Re_1$ .
- (ii) for the same values of  $Re_1$  and  $Re_2$ , the vertical branch separation occurs closer to the real axis than for a Newtonian fluid.

The evolution of the eigenspectra, when  $Re_2$  is fixed and  $Re_1$  is increased until the critical value, is shown in figure 7(b) for a power-law fluid with  $n = 0.5$ . The critical mode is stationary and consists of two counter-rotating vortices. Similar results are obtained for a Carreau fluid.

### 6.1.2. Non-axisymmetric perturbation $m \neq 0$

Numerical computations show no fundamental differences in the eigenspectra shape for Newtonian and shear-thinning fluids. In order not to overload the paper, we have chosen to present only the power-law results. The Carreau model provides similar results when  $\lambda \dot{\gamma}_{r\theta}^h \gg 1$ , as indicated in § 2.2. The classification of the eigenspectra is less evident than in the axisymmetric case. According to Gebhardt & Grossmann (1993), the structure of the eigenspectra depends on the value of the axial wavenumber relative to the modified azimuthal wavenumber  $m/r_m$  with  $r_m = (R_1 + R_2)/2$ .



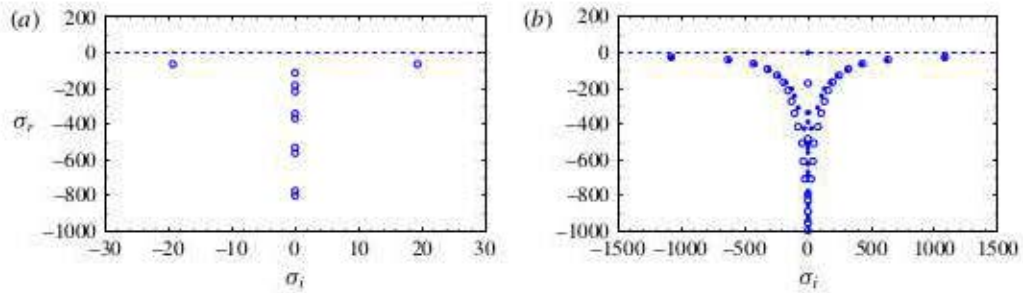


FIGURE 7. (Colour online) Eigenspectra for a power-law fluid undergoing an axisymmetric perturbation  $m = 0$  with  $k = \pi$ ,  $n = 0.5$ ,  $\eta = 0.881$ , varying  $Re_1$  and  $Re_2$  (a) on the Rayleigh line  $Re_2 = 454.71$ ,  $Re_1 = 500$  (b)  $Re_2 = -4000$ , (○)  $Re_1 = 500$ , (●)  $Re_1 = Re_{1c} = 828.14$ .

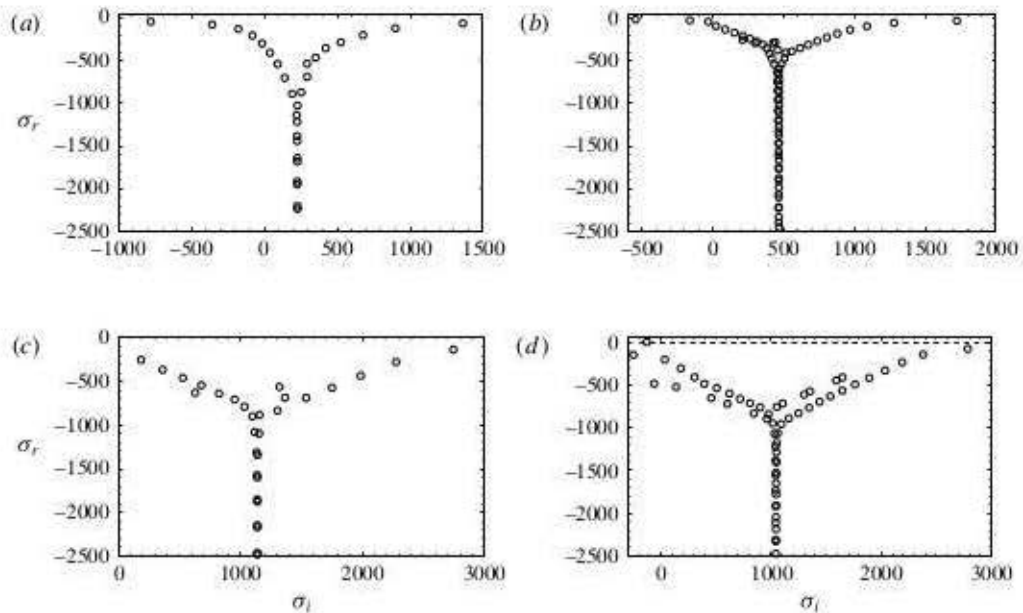


FIGURE 8. Eigenspectra for a power-law fluid undergoing a non-axisymmetric perturbation with  $n = 0.5$ ,  $\eta = 0.881$ . The outer Reynolds number and the axial wavenumber are fixed:  $Re_2 = -4000$  and  $k = \pi$  respectively. (a)  $m = 1$ ,  $Re_1 = 400$ , (b)  $m = 2$ ,  $Re_1 = 400$ , (c)  $m = 5$ ,  $Re_1 = 400$  and (d)  $m = 5$ ,  $Re_1 = Re_{1c} = 878.55$ .

If  $k \geq m/r_m$ , the spectrum structure is close to that of an azimuthal invariant flow. In contrast, if  $k \leq m/r_m$ , features of an axial invariant flow dominate. Figure 8 shows that, with increasing  $m$ , the eigenvalue spectrum evolves from a ‘jet-like’ structure (figure 8a) characteristic of axisymmetric perturbation flow to a ‘Y-shaped’ spectrum characteristic of axial invariant perturbation (Gebhardt & Grossmann 1993). Figure 8(d) shows that when  $Re_1$  is increased until marginal stability ( $\sigma_r = 0$ ), the critical mode corresponds to time-dependent spiral vortices, with an angular phase velocity  $\omega = -\sigma_i/m$ .

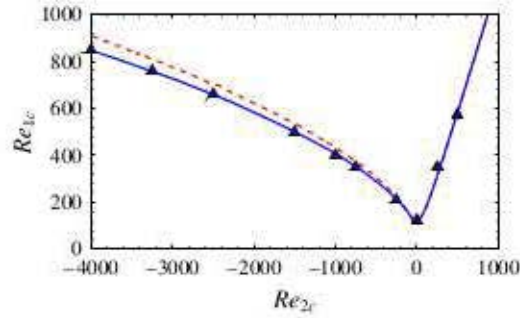
368 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 9. (Colour online) Marginal stability curves in the plane  $(Re_1, Re_2)$  for a Newtonian fluid with  $\eta = 0.881$ : comparison with Meseguer (2002). (Continuous line) our results for 3D perturbations, (dashed line) our results for axisymmetric perturbations  $m=0$ , ( $\Delta$ ) Meseguer (2002).

### 6.2. Marginal stability curves

First, a validation test was performed by comparing our results against studies previously published in the literature. In figure 9 our results are compared against those obtained by Meseguer (2002) for 3D perturbations in a Newtonian fluid. A very good agreement is observed. In the case of counter-rotating cylinders, the critical  $Re_{1c}$  is lower for non-axisymmetric modes ( $m \neq 0$ ) than for axisymmetric modes ( $m = 0$ ), in agreement with the literature (Krueger *et al.* 1966; Langford *et al.* 1988). For power-law fluids, figure 10 shows the influence of the shear-thinning index on the critical conditions. Globally, for fixed  $Re_2$ , shear thinning reduces  $Re_{1c}$ , except in the neighbourhood of  $Re_2 = 0$  with a large gap and for co-rotating cylinders with small gaps, where  $Re_{1c}$  increases slightly. Similar evolutions are observed for Carreau fluids. For  $\lambda \geq 10$ , we recover the power-law results. The decrease of  $Re_{1c}$  with increasing shear-thinning effects can be analysed using the energy equation obtained by multiplying the linearized momentum equations with the complex conjugate  $\mathbf{u}^*$  and integrating between the two cylinders

$$\Re(\sigma)\|\mathbf{u}\|^2 = -Re_1 \int_{R_1}^{R_2} f(r)r \, dr - \int_{R_1}^{R_2} g_1(r)r \, dr + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)r \, dr \quad \text{with} \quad (6.4)$$

$$f(r) = \dot{\gamma}_{r\theta}^b \frac{u^*v + uv^*}{2} \quad (6.5)$$

$$g_1(r) = \mu^b \left[ \frac{1}{2}(|\dot{\gamma}_r|^2 + |\dot{\gamma}_{\theta\theta}|^2 + |\dot{\gamma}_{zz}|^2) + |\dot{\gamma}_{r\theta}|^2 + |\dot{\gamma}_{rz}|^2 + |\dot{\gamma}_{\theta z}|^2 \right] \quad (6.6)$$

$$g_2(r) = (\mu^b - \mu_l) |\dot{\gamma}_{r\theta}'|^2 \quad (6.7)$$

with  $\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{R_1}^{R_2} (1/2)(uu^* + vv^* + ww^*)r \, dr$ .

In (6.4), the first term on the right-hand side is a production term. It is associated with the work of the Reynolds stress,  $-uv$ , on the wall-normal basic shear  $\dot{\gamma}_{r\theta}^b$ . The second term represents viscous dissipation. The third term arises from the viscosity perturbation due to shear thinning; it is positive, and can thus be regarded as a source of energy for the perturbation. Following Ranganathan & Govindarajan (2001), it is convenient to compute and compare the space-averaged production and dissipation

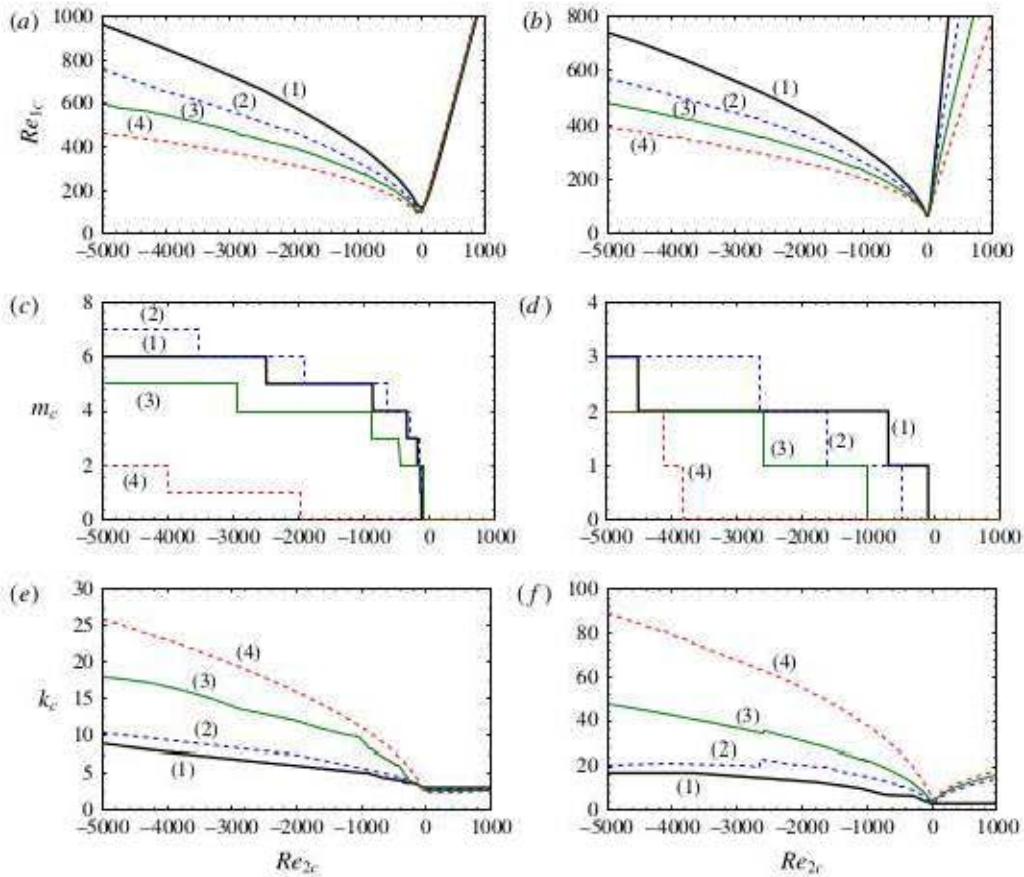


FIGURE 10. (Colour online) Critical conditions of instability for a power-law fluid with two radius ratios,  $\eta = 0.881$  (figures on the left) and  $\eta = 0.4$  (figures on the right). Effect of the shear-thinning index. (a, b) Marginal stability curves in plane  $(Re_1, Re_2)$ , (c, d) critical azimuthal wavenumbers, (e, f) critical axial wavenumbers. (1) Newtonian fluid,  $n = 1$ , (2)  $n = 0.7$ , (3)  $n = 0.5$  and (4)  $n = 0.3$ .

terms  $\Gamma^+$  and  $\Gamma^-$  respectively defined by

$$\Gamma^+ = \frac{Re_1 \int_{R_1}^{R_2} f(r)r \, dr}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad \text{and} \quad \Gamma^- = \frac{\int_{R_1}^{R_2} g_1(r)r \, dr - \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)r \, dr}{\|\mathbf{u}\|^2}. \quad (6.8a,b)$$

At criticality, the production term is exactly balanced by the dissipation term,  $\Gamma^+ = \Gamma^-$ , as shown in figure 11 in the case of a Newtonian fluid. The influence of shear-thinning effects on the energy budget can be appreciated by comparing the results obtained for a Newtonian fluid with those of a power-law at the same value of  $Re_1$ , i.e.  $Re_1 = Re_{1c}$  (Newtonian). The critical azimuthal and axial wavenumbers are evaluated for the parameters  $Re_1 = Re_{1c}$  (Newtonian),  $Re_2$  and  $n$ . With increasing shear-thinning effects, the average viscous dissipation remains close to that of a Newtonian fluid, while the production term increases significantly, rendering the flow less stable than in the Newtonian case. The main factor determining stability or instability of the

370 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*

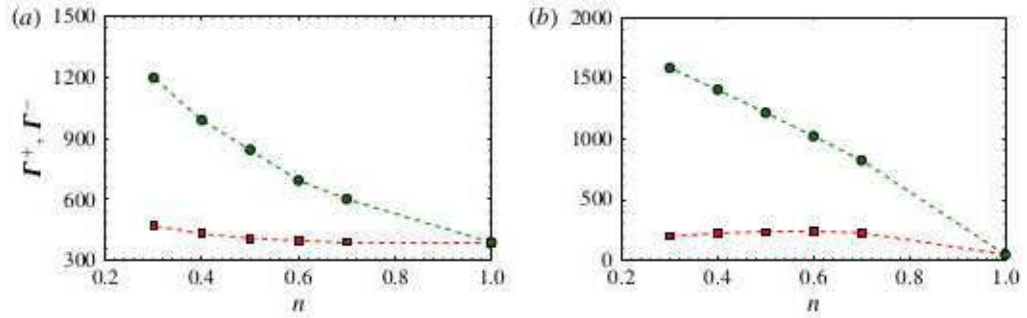


FIGURE 11. (Colour online) Space average of (○) the production term  $\Gamma^+$  and (□) the viscous dissipation term  $\Gamma^-$  defined by (6.8) for a power-law fluid with  $\eta = 0.4$  as a function of shear-thinning index,  $n$ . (a)  $Re_2 = -2025$ , (b)  $Re_2 = 500$ .

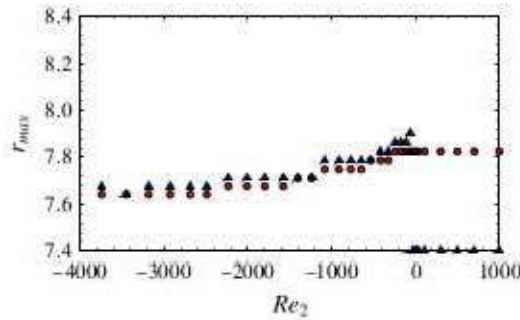


FIGURE 12. (Colour online) Radii at which functions (○)  $f(r)$  and (△)  $g_1(r) + g_2(r)$ , defined by (6.5)–(6.7), are maximal, for a power-law fluid with  $n = 0.5$  and  $\eta = 0.881$ .

flow is thus the exchange of energy between the base flow and the perturbation. In figure 12, the location of the maxima  $f$  and  $(g_1 + g_2)$  functions defined in (6.5)–(6.7) are plotted against  $Re_2$ . It appears that the maxima of the energy exchange and of viscous dissipation occur near the inner cylinder. The increase of  $\Gamma^+$  with increasing shear-thinning effects may be attributed to the increase of the inner velocity gradient. Concerning the critical azimuthal and axial wavenumbers, in the co-rotating regime, the critical mode is axisymmetric (figure 10c,d). The primary bifurcation leads to time-independent Taylor-vortex flow. In the case of the counter-rotating regime, the critical azimuthal wavenumber increases with  $|Re_2|$ . There is a limit value of  $Re_2$ , say  $Re_{2s}$ , under which the primary bifurcation leads to axisymmetric toroidal structures ( $m_c = 0$ ) and over which the bifurcation leads to spiral vortices ( $m_c \geq 1$ ). Spiral vortices are travelling waves in axial and azimuthal directions. Figure 13 shows the variation of  $Re_{2s}$  with the shear-thinning index for both a wide gap and a thin gap. For strong shear-thinning effects, the critical mode remains axisymmetric for large negative  $Re_2$ . The axial wavelength decreases with increasingly negative  $Re_2$  and increasing shear-thinning effects. This may be attributed to the decrease of the ‘effective gap’ where the Rayleigh instability criterion holds, i.e. the gap between the inner cylinder and the ‘nodal surface’ where  $V^b = 0$ .

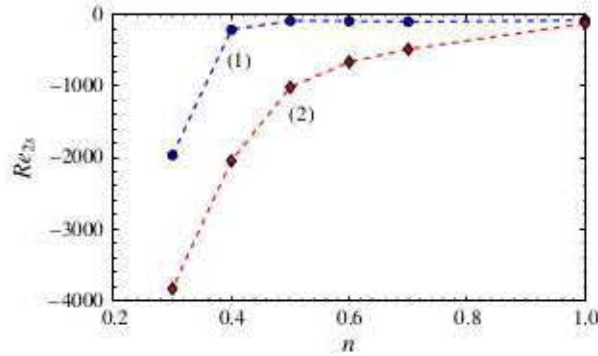


FIGURE 13. (Colour online) Power-law fluids. Influence of the shear-thinning index on the critical outer Reynolds number  $Re_{2s}$ , at which the transition to spirals takes place for (1)  $\eta = 0.881$  and (2)  $\eta = 0.4$ .

### 7. Short-time behaviour: transient growth and optimal perturbation

The traditional approach of stability based on eigenvalues is not sufficient to describe the temporal behaviour of the disturbance at all times because of the non-normality of the linear stability operator. This mathematical property means that there is a potential for energy extraction from the base flow by a subspace of perturbations leading to transient growth, despite the absence of exponential instability.

#### 7.1. Transient growth and characteristics of optimal perturbation

The transient evolution of a perturbation kinetic energy in the linear regime is determined by following the methodology described by Schmid & Henningson (2001). It is presented here only for the  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  formulation, but a similar development applies to the  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  formulation. For a given Fourier mode, the disturbance instantaneous kinetic energy is given by

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}(t)\|_{\tilde{E}}^2 = & \int_{R_i}^{R_o} \left[ |\tilde{u}|^2 + \frac{1}{k^2} \frac{1}{r^2} \left| \frac{d}{dr}(r\tilde{u}) \right|^2 + \left( \frac{m^2}{r^2 k^2} + 1 \right) |\tilde{v}|^2 \right. \\ & \left. + \frac{im}{kr} \left( \frac{\tilde{v}}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{u}^*) - \frac{\tilde{v}^*}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{u}) \right) \right] r dr, \end{aligned} \quad (7.1)$$

which is a function of time and of the initial condition,  $\mathbf{q}_0 = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)^T = \mathbf{q}(r, t = 0, m, k)$ . The maximum kinetic energy amplification at time  $t$  over all initial conditions is defined by

$$G(t, m, k) = \sup_{\mathbf{q}_0 \neq 0} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|_{\tilde{E}}^2}{\|\mathbf{q}(0)\|_{\tilde{E}}^2}. \quad (7.2)$$

The maximum energy transient growth over all times is

$$G^{\max}(m, k) = \sup_{t \geq 0} G(t, m, k). \quad (7.3)$$

The maximum of  $G^{\max}$  over all pairs  $(m, k)$ , denoted  $G^{opt}$ , is reached by the optimal perturbation at time  $t^{opt}$ .

372 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*

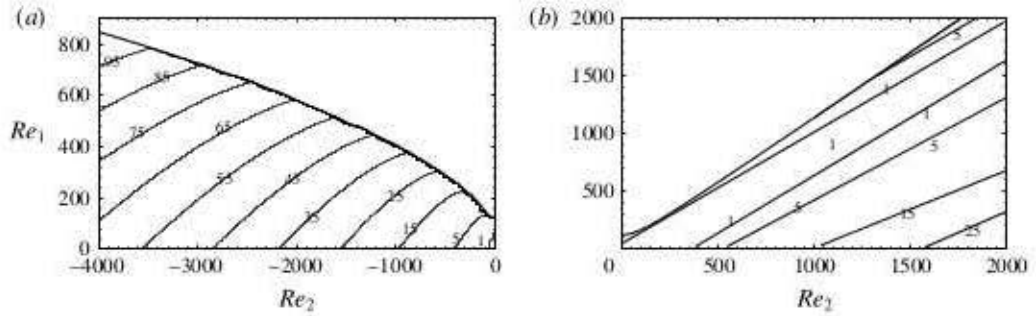


FIGURE 14. Contours of optimal energy growth  $G^{opt}$  in the plane  $(Re_1, Re_2)$  for a Newtonian fluid with  $\eta = 0.881$ : (a) counter-rotating cylinders, (b) co-rotating cylinders. The thick line is the marginal stability curve.

$Re_1$	$Re_2$	Meseguer (2002)			Maretzke <i>et al.</i> (2014)			Present work ( $N = 40$ )		
		$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$
591	-2588	1.994	10	71.36	1.997	10	71.58	2.015	10	71.58
523	-2975	1.996	11	71.58	1.998	11	71.81	1.985	11	71.80
473	-3213	1.920	11	71.64	1.922	11	71.87	1.924	11	71.87
405	-3510	1.839	11	71.75	1.841	11	71.99	1.833	11	71.99

TABLE 1. Comparison of the present results with those of Meseguer (2002) and Maretzke *et al.* (2014) at the same Reynolds numbers and  $\eta = 0.881$ .

First, we performed validation tests for a Newtonian fluid. In table 1, our results are compared against those of Meseguer (2002) and Maretzke *et al.* (2014). Very good agreement is observed. The conditions of Hristova *et al.* (2002) given in their table II were also simulated. A relative discrepancy of less than 1% was obtained.

As a reference case, we further studied the transient growth for a Newtonian fluid. Figure 14 shows contours of the optimal growth for a Newtonian fluid in the plane  $(Re_1, Re_2)$ . The corresponding axial and azimuthal wavenumbers are represented in figures 15 and 16. It is interesting to observe that, in the counter-rotating regime, the optimal azimuthal wavenumber varies little ( $10 < m^{opt} < 13$ ) and is much higher than the critical wavenumber  $m_c$ . Concerning  $k^{opt}$ , it is smaller than the critical axial wavenumber  $k_c$ .

For a shear-thinning fluid, the contours of optimal energy amplification are shown in figure 17. The amplification appears to be much larger than for a Newtonian fluid. In table 2, the optimal growth conditions  $G^{opt}$ ,  $k^{opt}$ ,  $m^{opt}$  and  $t^{opt}$  are compared for Newtonian, power-law and Carreau fluids at given  $Re_1$  and  $Re_2$  for thin and wide gaps. It is observed that the optimal amplification is highest for a Carreau fluid and at a thin gap. The optimal azimuthal and axial wavenumbers are practically the same for Newtonian and shear-thinning fluids. The optimal time is greater for power-law fluids, and even greater for Carreau fluids.

These results may be presented in a concise manner by using the shear Reynolds number  $Re$  and the rotation number  $R_\Omega$ . This representation is more relevant in the determination of scaling laws for the optimal energy amplification (Maretzke *et al.* 2014). Figure 18 shows the characteristics of the optimal perturbation as a function of  $Re$  for different values of  $R_\Omega$ . We recover the scaling  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$  for

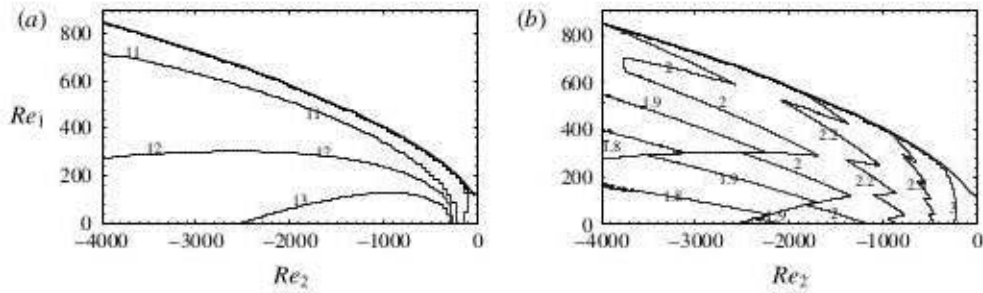


FIGURE 15. Contours of optimal wavenumbers in the  $(Re_1, Re_2)$  plane for a Newtonian fluid flowing between counter-rotating cylinders with  $\eta = 0.881$ . (a) Optimal azimuthal wavenumber  $m^{opt}$  and (b) optimal axial wavenumber  $k^{opt}$ . The thick line is the marginal stability curve.

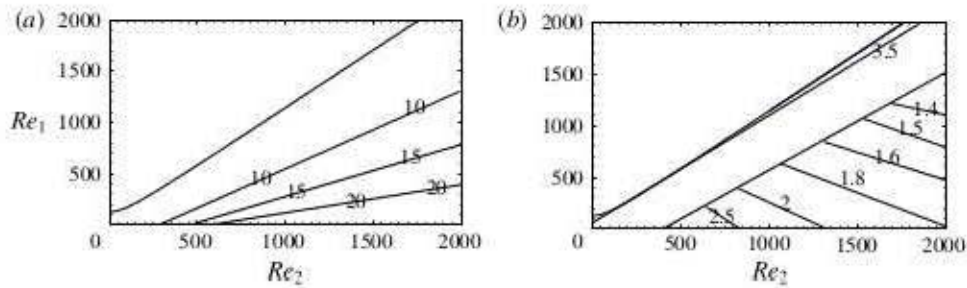


FIGURE 16. Contours of optimal wavenumbers in the  $(Re_1, Re_2)$  plane for a Newtonian fluid flowing between co-rotating cylinders with  $\eta = 0.881$ . (a) Optimal azimuthal wavenumber  $m^{opt}$  and (b) optimal axial wavenumber  $k^{opt}$ . The thick line is the marginal stability curve.

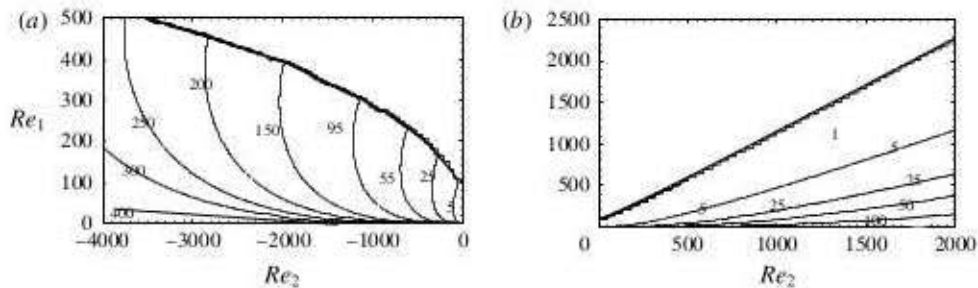


FIGURE 17. Contours of optimal energy growth  $G^{opt}$  in the plane  $(Re_1, Re_2)$  for a power-law fluid with  $n = 0.5$  and  $\eta = 0.881$ : (a) counter-rotating cylinders, (b) co-rotating cylinders. The thick line is the marginal stability curve.

sufficiently large  $Re$ , as indicated by Marezke *et al.* (2014). The optimal azimuthal wavenumber varies slightly with  $R_\Omega$ . At  $\eta = 0.881$ , figure 18(c) shows again that asymptotically  $10 \leq m^{opt} \leq 13$ . In this range of  $m^{opt}$ , the kinetic energy amplification does not change significantly. Concerning the axial wavenumber, it is observed that it is much lower than the linear critical wavenumber  $k_c$ , see figure 18(b). The optimal time  $t^{opt}$  decreases asymptotically as  $t^{opt} \propto Re^{-2/3}$ .

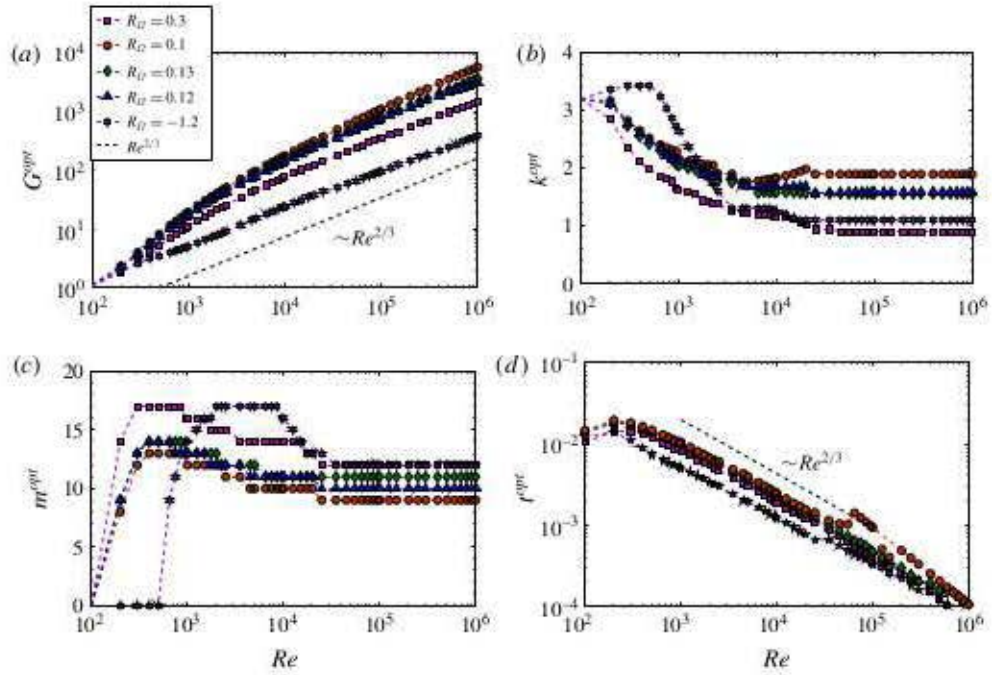
374 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 18. (Colour online) Optimal energy growth and characteristics of the optimal perturbation as a function of the shear Reynolds number  $Re$  for different values of the rotation number  $R_\Omega$ . Newtonian fluid with  $\eta=0.881$ . (a) Optimal energy growth  $G^{opt}$ , (b) optimal wavenumber  $k^{opt}$ , (c) optimal azimuthal wavenumber  $m^{opt}$  and (d) optimal time  $t^{opt}$ .

$\eta$		$Re_1$	$Re_2$	$k^{opt}$	$m^{opt}$	$G^{opt}$	$t^{opt}$
0.881	Newtonian ( $n=1$ )	101	-1061.2	2.176	13	20.62	$9.38 \times 10^{-3}$
	Power-law ( $n=0.5$ )	101	-1061.2	1.647	11	88.16	$1.71 \times 10^{-2}$
	Carreau ( $n=0.5; \lambda=10$ )	101	-1061.2	1.736	11	231.25	$2.41 \times 10^{-2}$
0.4	Newtonian ( $n=1$ )	101	-1061.2	1.136	3	4.288	$6.97 \times 10^{-3}$
	Power-law ( $n=0.5$ )	101	-1061.2	0.911	2	12.59	$1.15 \times 10^{-2}$
	Carreau ( $n=0.5; \lambda=10$ )	101	-1061.2	1.221	2	37.17	$1.44 \times 10^{-2}$

TABLE 2. Comparison of the optimal energy growth at  $\eta=0.881$  and  $\eta=0.4$  for the different fluid models considered.

For the particular case of  $R_\Omega = -1$ , i.e. along the Rayleigh line, the optimal perturbation is axisymmetric with  $k^{opt} \approx \pi$ , as shown by figure 19. The optimal amplification varies as  $G^{opt} \propto Re^2$  (figure 20). The optimal time at which  $G^{opt}$  is reached decreases very slightly with  $Re$ .

The characteristics of optimal perturbations were also determined for power-law and Carreau fluids. They are represented in figures 21 and 22, respectively. It is interesting to note that we recover the same scaling as for a Newtonian fluid. Indeed, at large  $Re$ ,  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$ ;  $t^{opt} \propto Re^{-2/3}$ ;  $10 \leq m^{opt} \leq 13$  and  $1 \leq k^{opt} < 2$  much lower than  $k_c$ . Comparison with the Newtonian case indicates that, for given  $Re$  and  $R_\Omega$ ,  $G^{opt}$  increases with increasing shear-thinning degree, as shown in figure 23. This is



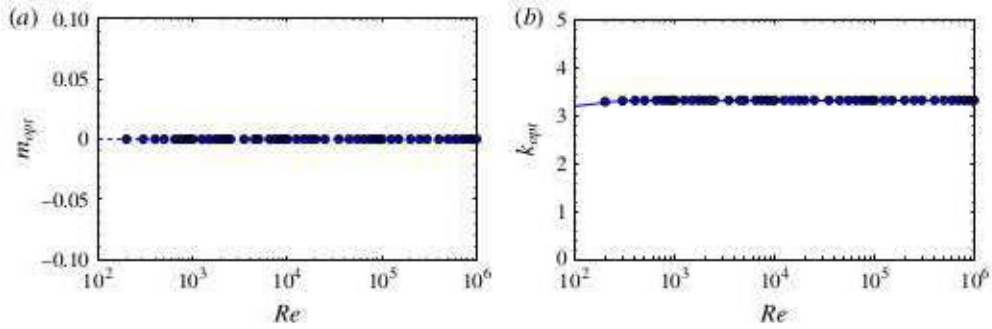


FIGURE 19. (Colour online) Structure of the optimal perturbation along the Rayleigh line ( $R_{\Omega} = -1$ ) for a Newtonian fluid and  $\eta = 0.881$ . (a) Azimuthal and (b) axial wavenumbers as a function of the shear Reynolds number.

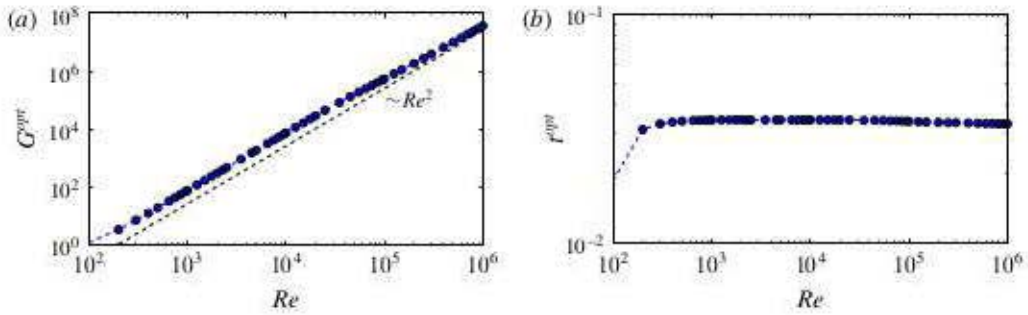


FIGURE 20. (Colour online) (a) Optimal energy growth and (b) optimal time versus shear Reynolds number along the Rayleigh line ( $R_{\Omega} = -1$ ) for a Newtonian fluid with  $\eta = 0.881$ .

related to the increase of the non-normality of the linear operator. The approximate scaling is found:

$$\frac{G^{opt}}{G_{n=1}^{opt}} \propto \kappa \exp(-n^{\alpha}) \tag{7.4}$$

where  $\kappa$  is a constant,  $G_{n=1}^{opt}$  is the optimal energy growth for a Newtonian fluid and  $\alpha = 1/3$ .

### 7.2. Evolution of the optimal perturbation: transient growth mechanism

In this section, the optimal perturbation and its time evolution are described for different values of  $Re_1$  and  $Re_2$  in the linearly stable domain.

#### 7.2.1. Newtonian fluids

For Newtonian fluids, numerical results show that the Rayleigh line should be distinguished from the rest of the domain. The contours of the azimuthal vorticity and azimuthal velocity of the optimal perturbation at initial time  $t = 0$  and optimal time  $t = t^{opt}$  are presented in figure 24. It appears that the optimal perturbation is a superposition along the axial direction of high and low azimuthal velocity streaks. Figure 25 shows the contours of the local kinetic energy associated with the azimuthal, radial and axial components of the velocity perturbation. At initial

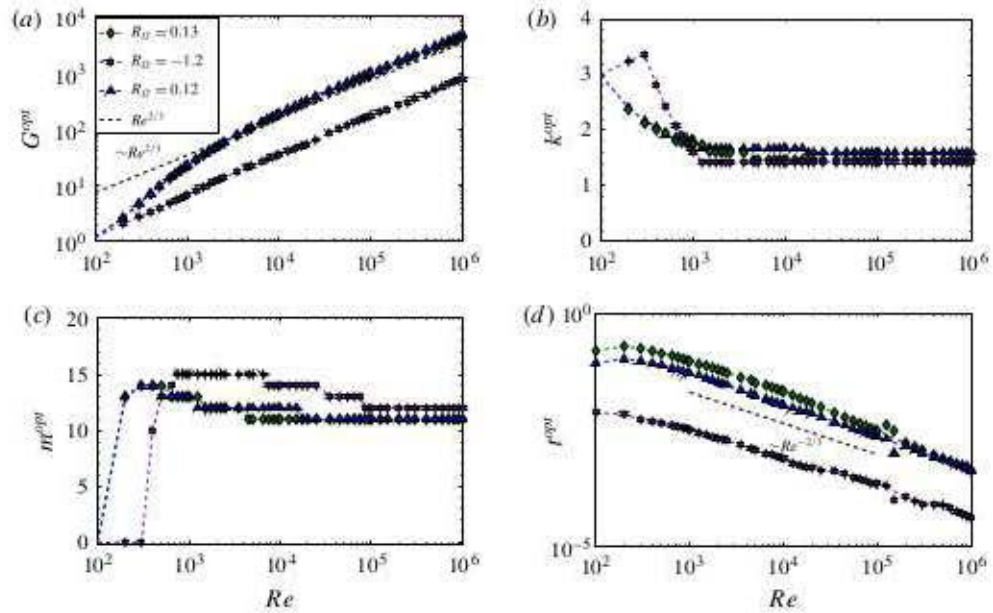
376 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 21. (Colour online) Optimal energy growth and characteristics of the optimal perturbation as a function of the shear Reynolds number  $Re$  for different values of the rotation number  $R_\Omega$ . Power-law fluid with  $n = 0.5$  and  $\eta = 0.881$ . (a) Optimal energy growth  $G^{opt}$ , (b) optimal axial wavenumber  $k^{opt}$ , (c) optimal azimuthal wavenumber  $m^{opt}$  and (d) optimal time  $t^{opt}$ .

time, more than 99 % of the kinetic energy of the perturbation is concentrated in the azimuthal component. At optimal time,  $t = t^{opt}$ , the kinetic energy is merely concentrated in the radial and axial components. This is also illustrated in figure 26, where we have represented the spatial average of the kinetic energy contained in a volume  $\mathcal{V} = 2\pi^2(R_2^2 - R_1^2)/k$ ,

$$E_r = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \tilde{u}\tilde{u}^* \rangle; \quad E_\theta = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \tilde{v}\tilde{v}^* \rangle; \quad E_z = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \tilde{w}\tilde{w}^* \rangle \quad (7.5a-c)$$

with

$$\langle \cdot \rangle = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/k} (\cdot) r dr d\theta dz. \quad (7.6)$$

The optimal perturbation, which is initially in the form of azimuthal streaks, transforms progressively through the anti-lift-up mechanism (Antkowiak & Brancher 2007) into azimuthal rolls. This scenario observed in rotating flows is opposite to the classical lift-up mechanism, active for instance in plane shear flows, where weak streamwise rolls give rise to strong streamwise streaks. Antkowiak & Brancher (2007), proposed two ways of explaining the anti-lift-up scenario.

First, it can be illustrated by considering the linearized perturbation equations for the azimuthal velocity  $v'$  and the azimuthal vorticity  $\omega'_\theta = \partial u'/\partial z - \partial w'/\partial r$  for an axisymmetric perturbation:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \Delta v', \quad (7.7)$$

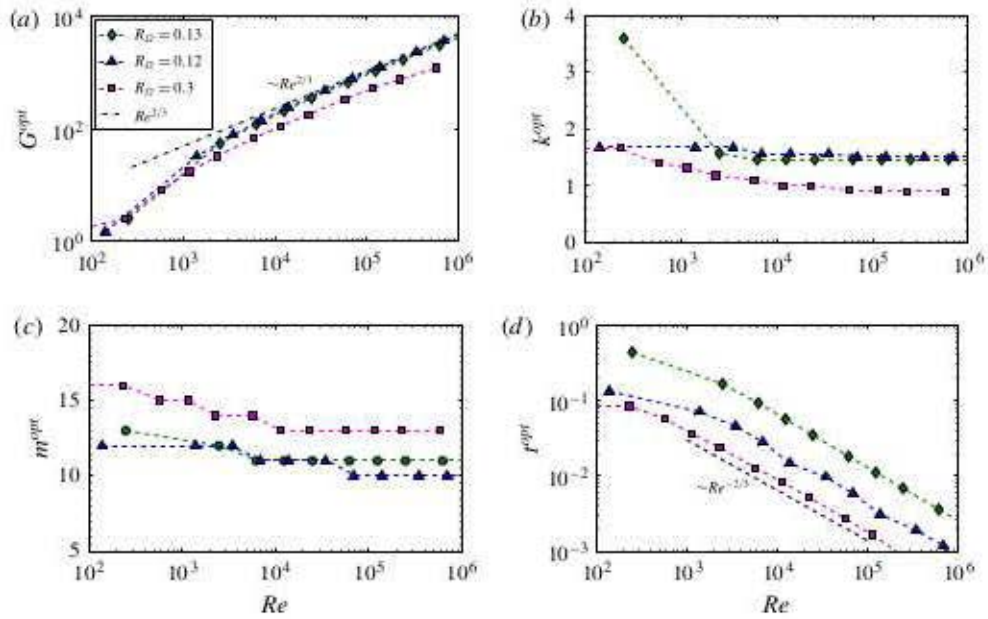


FIGURE 22. (Colour online) Optimal energy growth and characteristics of the optimal perturbation as a function of the shear Reynolds number for different values of the rotation number  $R_\Omega$ . Carreau fluid with  $n = 0.5$ ,  $\lambda = 10$  and  $\eta = 0.881$ . (a) Optimal energy growth  $G^{\text{opt}}$ , (b) optimal axial wavenumber  $k^{\text{opt}}$ , (c) optimal azimuthal wavenumber  $m^{\text{opt}}$  and (d) optimal time  $t^{\text{opt}}$ .

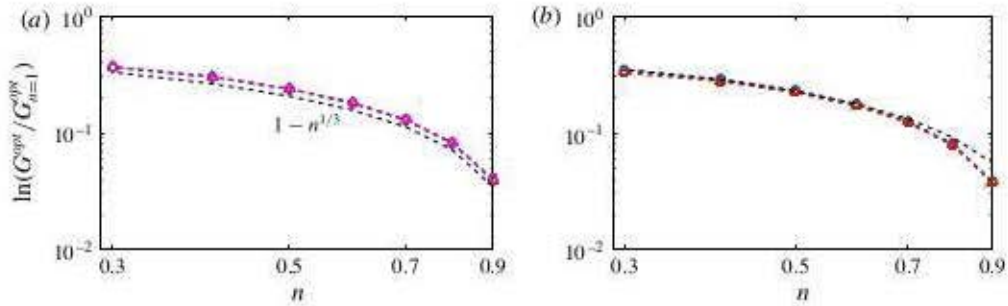


FIGURE 23. (Colour online) Shear-thinning effect on the optimal energy growth for a power-law fluid with  $\eta = 0.881$ , at different shear Reynolds numbers and fixed  $R_\Omega$ . (a)  $R_\Omega = 0.12$ ,  $10^4 \leq Re \leq 10^5$  and (b)  $R_\Omega = 0.1$ ,  $5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^4$ .

$$\frac{\partial \omega'_\theta}{\partial t} = -2 Re_1 \Omega^b \frac{\partial v'}{\partial z} + \Delta \omega'_\theta, \quad (7.8)$$

where  $\Omega^b = V^b/r$  is the basic angular velocity. The azimuthal velocity satisfies a diffusion equation, and decreases viscously. Whereas the azimuthal vorticity is driven by the axial gradient of the azimuthal streaks  $\partial v'/\partial z$  (Coriolis force acting on the azimuthal streak). Using the same arguments as Ellingsen & Palm (1975), it can be seen that an azimuthal velocity streak of amplitude  $O(\epsilon)$  generates azimuthal vortices of amplitude  $O(\epsilon Re)$  on a time scale  $(Re)$ .

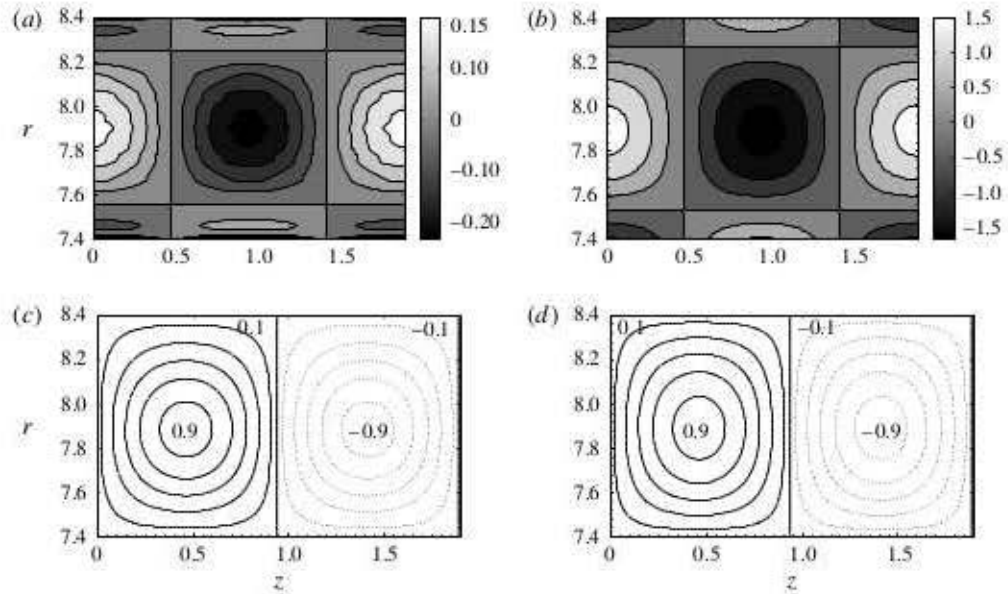
378 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 24. Optimal perturbation represented in the plane  $(r, z)$  for a Newtonian fluid along the Rayleigh line,  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 1135$  and  $Re_2 = 1000$ , with  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.32$  and  $G^{opt} = 5.58$ . Contours of the azimuthal vorticity component at (a)  $t = 0$  and (b) optimal time  $t = t^{opt}$ . Contours of the azimuthal velocity component at (c)  $t = 0$ ,  $v_{max} = 0.52$  and (d) optimal time  $t = t^{opt}$ ,  $v_{max} = 0.1$ ; the contours are normalized by the maximum velocity at time  $t$  and shown in steps of 0.2. The solid lines represent positive values and the dotted lines represent negative values.

The anti-lift-up mechanism can also be illustrated by considering the linearizing radial moment equation (Antkowiak & Brancher 2007)

$$\frac{\partial u'}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + 2\Omega^b v' + \Delta u'. \quad (7.9)$$

The term  $2\Omega^b v'$  arises from the Coriolis force. Equation (7.9) indicates that the fluid particles with positive azimuthal streaks will be pushed towards the outer wall. In contrast, particles with negative streaks will be pushed against the inner wall. This process will initiate the formation of azimuthal rolls.

Outside the Rayleigh line, a stratification of the angular momentum exists and the epicyclic frequency is no longer zero. At the initial time, the contours of the kinetic energy associated with the perturbation are oriented against the basic shear, as shown in figure 27(a) in the plane  $(r, z)$  and in figure 27(a') in the plane  $(r, \theta)$ . These contours will tilt progressively until they almost align with the shear at  $t = t^{opt}$ , as shown in figure 27(c, c').

### 7.2.2. Purely viscous shear-thinning fluids

In the case of purely viscous shear-thinning fluids, the angular momentum is no longer constant along the Rayleigh line. The optimal perturbation in the whole stable domain of plane  $(Re_1, Re_2)$  is qualitatively similar to that obtained for a Newtonian fluid outside the Rayleigh line. Further computations show that the evolution of

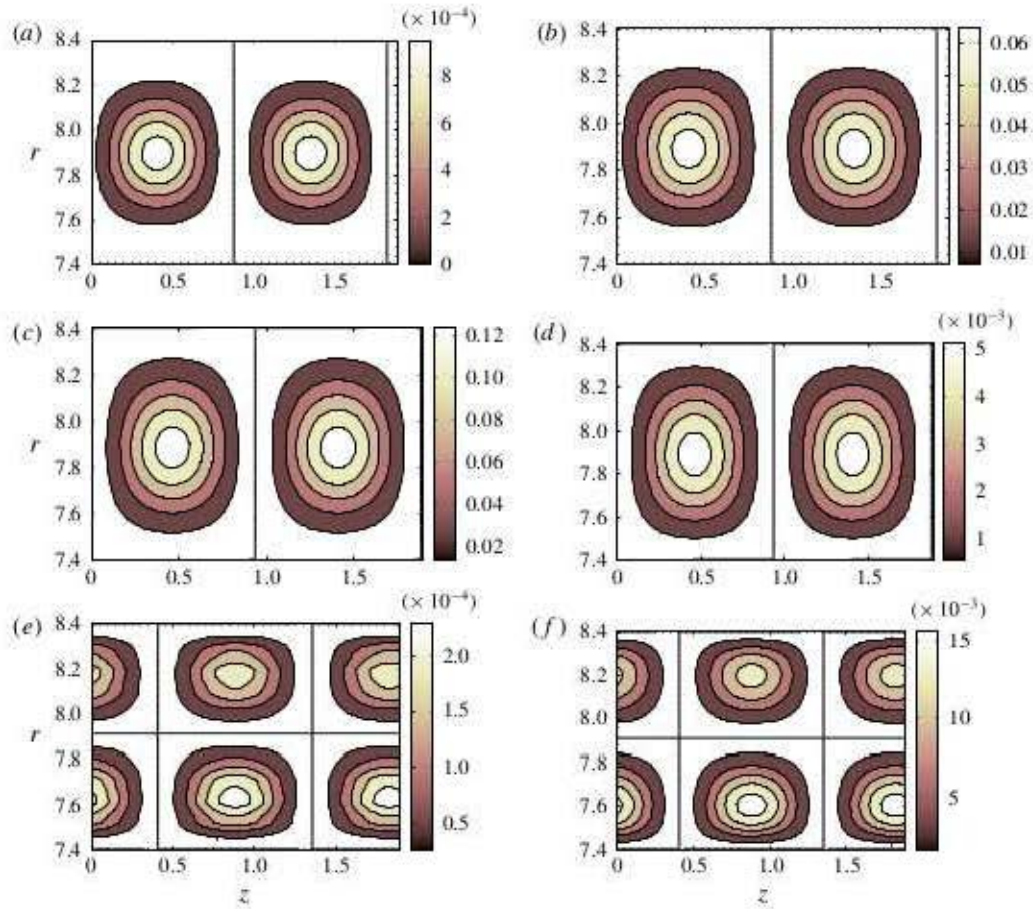


FIGURE 25. (Colour online) Optimal perturbation represented in plane  $(r, z)$  for a Newtonian fluid along the Rayleigh line with  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 1135$ ,  $Re_2 = 1000$ ,  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.32$  and  $G^{opt} = 5.58$ . Contours of the radial component of the kinetic energy  $1/2 u^2(t)$  at (a) initial time  $t = 0$  and (b) optimal time  $t = t^{opt}$ . Contours of the azimuthal component of the kinetic energy  $1/2 v^2(t)$  at (c) initial time  $t = 0$  and (d) optimal time  $t = t^{opt}$ . Contours of the axial component of the kinetic energy  $1/2 w^2(t)$  at (e)  $t = 0$  and (f) optimal time  $t = t^{opt}$ .

the optimal perturbation with time for shear-thinning fluids with  $\eta = 0.881$  and  $\eta = 0.4$  is similar to the Newtonian fluid. However, the optimal perturbation is merely concentrated near the inner wall and more pronounced for a large gap  $\eta = 0.4$ . Furthermore, the transient growth is reduced with decreasing  $\eta$ .

7.2.3. Discussion

Three-dimensional optimal perturbations are initially oriented in the direction opposite to the base flow, then aligned with it at optimal time, e.g. figure 27(c,c'). The same evolution was observed in a boundary layer flow, when the optimization concerns an initial state characterized by a wavepacket rather than a single wavenumber (Cherubini *et al.* 2010; Monokrousos *et al.* 2010). This is in contrast to 2D optimal perturbations, which are oriented transversally to the main shear at the

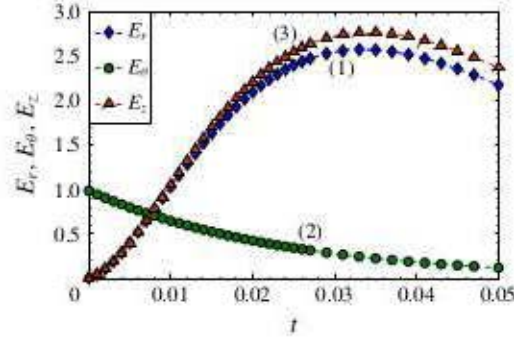
380 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 26. (Colour online) Radial (1), azimuthal (2) and axial (3) kinetic energy components on the Rayleigh line for a Newtonian fluid with  $\eta = 0.881$ ,  $m^{opt} = 0$ ,  $k^{opt} = 3.32$ ,  $G^{opt} = 5.58$ ,  $Re_1 = 1135$  and  $Re_2 = 1000$ .

optimal time, as shown by Butler & Farrell (1992) for plane Couette and Poiseuille flows. Two-dimensional perturbations, i.e. spanwise-independent perturbations, grow only via the Orr mechanism (Orr 1907): a mechanism based on Kelvin's circulation theorem. The initial contour of the vertical structure shortens as it is tilted by the mean shear. As a consequence, the velocity along the contour has to increase to conserve the initial circulation. In the 3D situation, another mechanism, absent in two dimensions, is active. Indeed, the basic shear vorticity, pointing in the spanwise (here axial) direction, may be stretched due to variations of areas in the shear plane, as was shown by Vitoshkin *et al.* (2012) in plane shear flows. These authors pointed out that the interplay between the spanwise vorticity  $q$  and the planar divergence  $d$  fields play a dominant role in energy growth. We extended their analysis to the case of Taylor–Couette flow and found that there is (as in the plane shear flow) a mutual growth of  $d$  and  $q$  and the maximum is reached at  $t = t^{opt}$ , i.e. when the perturbation is tilted with respect to the basic shear. Following Vitoshkin *et al.* (2012), the role played by the interaction between  $d$  and  $q$  is highlighted in the analysis of the energy growth via the Reynolds stress term. For this, a 2D Helmholtz decomposition is performed

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_d + \mathbf{u}_q \quad \text{with } \mathbf{u}_d = \nabla(\phi) \text{ and } \mathbf{u}_q = -\text{rot}(\psi \mathbf{e}_z) \quad (7.10)$$

where  $\phi$  and  $\psi$  are scalar functions, such that the planar divergence  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r)\partial v'/\partial\theta$  and the axial vorticity  $q = (1/r)\partial(rv')/\partial r - (1/r)\partial u'/\partial\theta$  satisfy

$$d = \Delta_H(\phi) \quad \text{and} \quad q = \Delta_H(\psi), \quad (7.11a,b)$$

where  $\Delta_H = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial/\partial\theta^2$  is the 2D Laplacian on the shear plane. At the inviscid limit the spatially averaged energy equation is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} &= -Re_1 \langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{v}}^* \rangle \\ &= -Re_1 \langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b (u_d + u_q)(v_d^* + v_q^*) \rangle \\ &= -Re_1 (\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_d v_d^* \rangle + \langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_d v_q^* \rangle + \langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_d^* \rangle + \langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_q^* \rangle), \end{aligned} \quad (7.12)$$

with  $E = |\tilde{\mathbf{u}}|^2/2$ ,  $\mathbf{u}_d = (u_d, v_d, w_d)$  and  $\mathbf{u}_q = (u_q, v_q, w_q)$ .

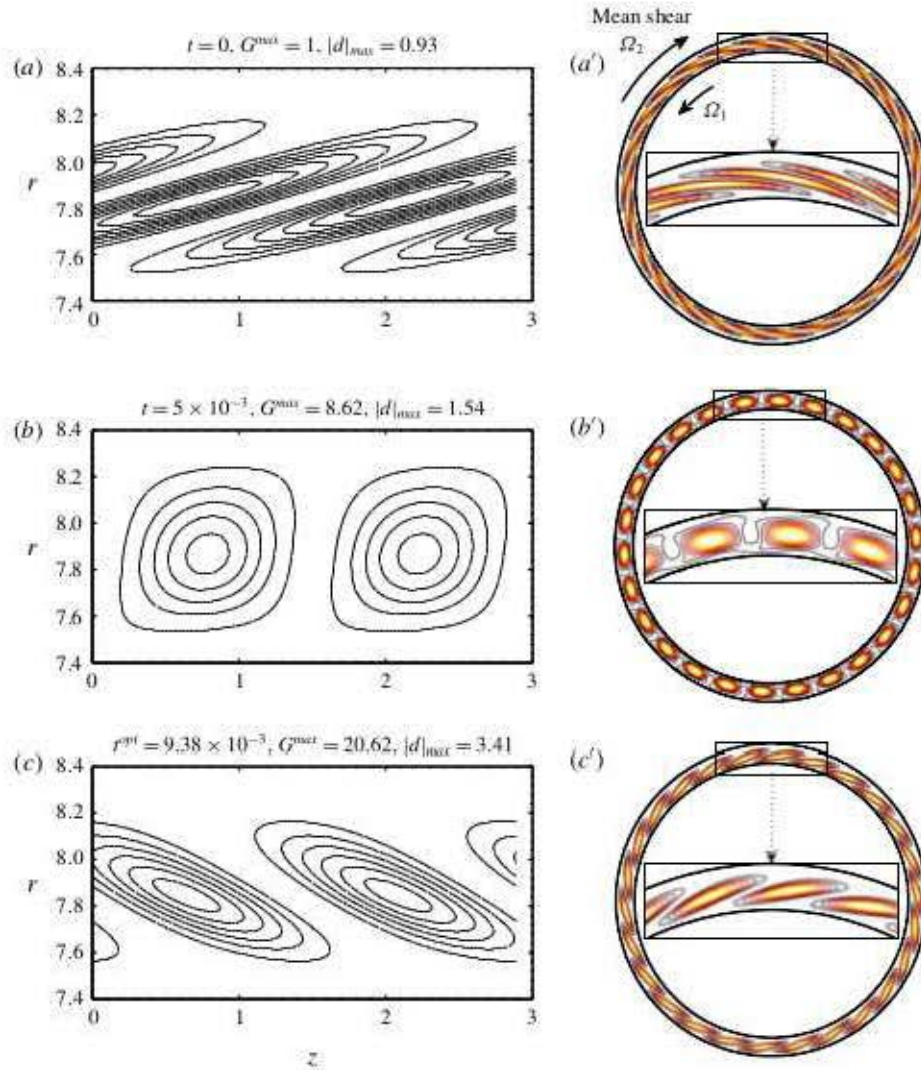


FIGURE 27. (Colour online) Optimal perturbation for a Newtonian fluid for  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$ ,  $Re_2 = -1061.2$  with  $m^{opt} = 13$ ,  $k^{opt} = 2.176$ . Left: contours of the kinetic energy in the plane  $(r, z)$  at (a) initial time  $t = 0$ , (b)  $t \approx t^{opt}/2$  and (c) optimal time  $t = t^{opt}$ . Right: contours of the kinetic energy in the plane  $(r, \theta)$  at (a') initial time  $t = 0$ , (b')  $t \approx t^{opt}/2$  and (c') optimal time  $t = t^{opt}$ . The quantity  $d = \partial u'/\partial r + u'/r + (1/r)\partial v'/\partial \theta$  is the 2D divergence on the shear plane.

The first term on the right-hand side of (7.12) is the contribution of the divergent field. The second and the third terms, i.e. mixed  $q$ - $d$  terms, translate the interplay between the planar divergence and the axial vorticity. The fourth term represents the 2D Orr mechanism. The contribution of the different terms as a function of time is shown in figure 28(a) for a Newtonian fluid and figure 28(b) for a power-law fluid. Qualitatively, the evolutions of the different Reynolds stress components are quite similar; however, the amplitudes reached are higher for power-law fluids. For both fluids, the energy growth is initially dominated by the rotational term  $-\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_q v_q^* \rangle$ ,

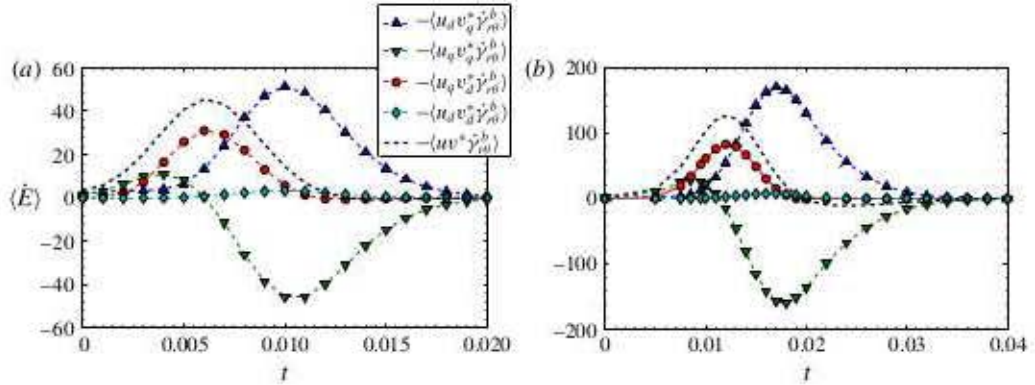
382 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*

FIGURE 28. (Colour online) Contribution of the different Reynolds stress components to the energy amplification of a 3D perturbation for  $\eta = 0.881$ ,  $Re_1 = 101$  and  $Re_2 = -1061.2$ . (a) Newtonian fluid,  $m^{opt} = 13$ ,  $k^{opt} = 2.176$  and  $G^{opt} = 20.62$ . (b) Power-law fluid  $n = 0.5$ ,  $m^{opt} = 11$ ,  $k^{opt} = 1.647$  and  $G^{opt} = 88.16$ .

i.e. the 2D Orr mechanism. From  $t \approx t^{opt}/2$ , the vortices are tilted with the shear,  $-\langle \dot{\gamma}_{r\theta}^b u_d v_q^+ \rangle$  becomes negative, i.e. the Orr mechanism contributes to the decay of the energy. The contribution of the planar divergence term is positive, but very small. The contribution of the mixed term  $d-q$  is positive and is at the origin of the increase of  $E$  when the vortices align with the base shear.

## 8. Conclusion

In this paper, we performed a 3D linear stability analysis of a circular Couette flow of shear-thinning fluids in both a thin gap ( $\eta = 0.881$ ) and a wide gap ( $\eta = 0.4$ ) between two infinitely coaxial cylinders. Long- and short-time evolutions of the disturbances are investigated. Two rheological models were adopted, the power-law model and the Carreau model, to describe the shear-thinning behaviour of the fluids.

First, we considered the asymptotic evolution at long times. Using a normal-mode approach, an eigenvalue problem was derived and solved with a Chebyshev spectral collocation method. The results show that, for a given  $Re_2$ , the shear-thinning character leads to a decrease of the inner critical Reynolds number  $Re_{1c}$ , except in the vicinity of  $Re_2 = 0$  and for a co-rotating regime with a small gap. This reduction is due to an enhancement of the energy exchange between the perturbation and the base flow, which is probably a consequence of the increased shear rate at the inner cylinder wall.

For counter-rotating cylinders, the threshold of the outer Reynolds number,  $|Re_2|$ , at which the critical modes switch from axisymmetric Taylor vortices to spiral vortices increases significantly with increasing shear-thinning effects. The axial wavelength of these spiral vortices is strongly reduced with increasing shear-thinning effects, because of the reduction of the ‘effective gap’ where the Rayleigh’s instability criterion holds.

Second, we studied the transient growth of the perturbation kinetic energy that occurs at short times due to the non-normality of the operators involved in the linearized perturbation equations. A strong increase is observed, up to one order of magnitude for shear-thinning fluids, compared to the Newtonian fluid for given  $Re_1$  and  $Re_2$ .

Features of the optimal perturbation were then determined. We showed that, at large shear Reynolds numbers and for a thin gap, the structure of the optimal perturbation



exhibits a large azimuthal wavenumber  $m^{opt} \approx 12$  and a small axial wavenumber  $1 \leq k^{opt} \leq 2$ , whereas for a wide gap ( $\eta = 0.4$ ),  $m^{opt} = 2$  and  $k^{opt} \propto 1$ . It appears that shear-thinning effects have little influence on  $k^{opt}$  and  $m^{opt}$ .

- (i) In the particular case of a Newtonian fluid with  $(Re_1, Re_2)$  on the Rayleigh line, the angular momentum is constant and the optimal perturbation consists of a superposition along the axial direction of high and low azimuthal velocity streaks, which evolve towards Taylor vortices via the anti-lift-up mechanism. The optimal energy growth behaves as  $G^{opt} \propto Re^2$ .
- (ii) Outside the Rayleigh line, the optimal perturbation, initially oriented against the base shear, tilts until it almost aligns with the shear at  $t = t^{opt}$ . The amplification of the 3D optimal perturbation is analysed in terms of interplay between the planar divergence and the axial vorticity, as suggested by Vitoshkin *et al.* (2012). The decomposition of the Reynolds stress in terms of the various contributions from the divergent and the rotational fields indicates that the energy growth is dominated by the mixed terms  $-(u_d v_q + u_q v_d) \dot{\gamma}_{r\theta}^b$ , which overwhelm the decaying effect of the Orr mechanism. The numerical results show that the optimal energy growth behaves as  $G^{opt} \propto Re^{2/3}$ , in agreement with Maretzke *et al.* (2014).

For shear-thinning fluids, the Rayleigh line should not be distinguished from other situations; the tilting mechanism, described above, applies and the numerical results show that  $G^{opt} = G_{n=1}^{opt} \exp(-n^{1/3})$ . The transient energy growth is enhanced with increasing shear-thinning effects. Thus, shear thinning promotes the transition to turbulence through the linear superposition of eigenmodes. This tendency was observed in a plane Couette flow (Liu & Liu 2011) and a Hagen–Poiseuille flow (Liu & Liu 2012) of power-law fluids involving another transient growth mechanism.

**Acknowledgements**

The financial support for this work from the Energy Cell of the french National Center for Scientific Research (CNRS) is gratefully acknowledged.

**Appendix A. Operators involved in the linearized perturbation equations**

The initial value problem (5.12) reads

$$\mathcal{L}\bar{q} = \mathcal{M} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}. \tag{A 1}$$

A.1.  $(\bar{u}, \bar{v})$  formulation

In this case,  $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})^T$  and the operators  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{L}$  are expressed below

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} DD_* - k^2 & \frac{im}{r} \bar{D} \\ -\frac{im}{k^2 r} D_* & 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \end{pmatrix} \tag{A 2}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{V1} + \mathcal{L}_{V2} + \mathcal{L}_{V3} \tag{A 3}$$

$$\mathcal{L}_I = Re_1 \begin{pmatrix} \frac{im}{r} [-(V^b \bar{D} + D V^b) D_* + k^2 V^b] & -2 \frac{k^2 V^b}{r} + \frac{m^2}{r^2} \left( -\frac{2 V^b}{r} + D V^b + V^b D \right) \\ -D_* V^b - \frac{m^2}{k^2 r^2} V^b D_* & -\frac{im}{r} \left( 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) V^b \end{pmatrix} \tag{A 4}$$

384 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*

$$\mathcal{L}_{V1} = \mu^b \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & im \left[ \frac{2k^2}{r^2} + D \Delta \frac{1}{r} \left( \Delta - \frac{2D}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \\ \frac{im}{r} \left( -\frac{\Delta D_*}{k^2} + \frac{2}{r} \right) & DD_* - k^2 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \left( \Delta - \frac{2D}{r} + \frac{1}{r^2} - k^2 \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A5})$$

$$\mathcal{L}_{V2} = D\mu^b \begin{pmatrix} D^2 D_* + \Delta D_* - k^2 D & \frac{im}{r} \left( \Delta + D^2 - \frac{4D}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \\ -\frac{im}{k^2 r} DD_* & \left( 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) \bar{D} \end{pmatrix} + D^2 \mu^b \begin{pmatrix} k^2 + DD_* & \frac{im}{r} \bar{D} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A6})$$

$$\mathcal{L}_{V3} = (\mu_l - \mu^b) \begin{pmatrix} \frac{k^2 m^2}{r^2} & -\frac{ik^2 m \bar{D}}{r} \\ \frac{im D_*}{r} & \left( D + \frac{2}{r} \right) \bar{D} \end{pmatrix} + D(\mu_l - \mu^b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{im}{r} & \bar{D} \end{pmatrix}. \quad (\text{A7})$$

### A.2. $(\tilde{u}, \tilde{w})$ formulation

In this case,  $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{u}, \tilde{w})^T$  and the operators  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{L}$  are expressed below

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} D_*^2 + \frac{1}{r} D_* - \frac{m^2}{r^2} & ikD + \frac{2ik}{r} \\ kD_* & ik^2 + \frac{im^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A8})$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_{V1} + \mathcal{L}_{V2} + \mathcal{L}_{V3} \quad (\text{A9})$$

$$\mathcal{L}_l = Re_l \begin{pmatrix} \frac{im}{r^2} \left( 2DV^b + V^b D - 3V^b D_* + \frac{m^2 V^b}{r} \right) & \frac{3kmV^b}{r^2} \\ \frac{ikm}{r} (DV^b - V^b D) & \frac{m}{r} \left( \frac{m^2 V^b}{r^2} + k^2 V^b \right) \end{pmatrix} + Re \begin{pmatrix} \frac{im}{r} \left[ -\frac{DV^b}{r} + D^2 V^b - V^b DD_* \right] & \frac{km}{r} (V^b D + DV^b) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A10})$$

$$\mathcal{L}_{V1} = \mu^b \begin{pmatrix} -\frac{2m^2}{r^4} & ik \left[ \left( \frac{2}{r} + D \right) (D_* D - k^2) + \frac{2D_* D}{r} - \left( \frac{4}{r} + D \right) \frac{m^2}{r^2} \right] \\ k \left( \Delta + \frac{2D}{r} \right) D_* & ik^2 \left( \Delta + \frac{2D}{r} \right) \end{pmatrix} + \mu^b \begin{pmatrix} \left( \frac{2}{r} + D \right) \Delta D_* + \frac{2}{r} \left( D^2 + \frac{D}{r} \right) D_* - \frac{m^2}{r^2} \Delta - \frac{m^2}{r^4} & 0 \\ \frac{2km^2}{r^3} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A11})$$

$$\mathcal{L}_{V2} = D\mu^b \begin{pmatrix} \frac{2}{r} DD_* - \frac{m^2}{r^2} \left( D - \frac{2}{r} \right) & ik \left[ \Delta + \left( \frac{4}{r} + D \right) D \right] \\ kDD_* & i \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) D \end{pmatrix} + D\mu^b \begin{pmatrix} \left[ \left( D + \frac{2}{r} \right) D + \Delta \right] D_* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + D^2 \mu^b \begin{pmatrix} DD_* + \frac{m^2}{r^2} & ikD \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A12})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V3} = (\mu_r - \mu^b) & \begin{pmatrix} \left[ \left( \frac{5}{r} + D \right) D + \frac{3}{r^2} + \frac{2m^2}{r^2} \right] DD_* + \frac{m^4}{r^4} & ik \left[ \frac{m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} + \left( \frac{5}{r} + D \right) D \right] D \\ k \left[ \left( \frac{3}{r} + D \right) D + \frac{m^2}{r^2} \right] D_* & ik^2 \left( D + \frac{3}{r} \right) D \end{pmatrix} \\ + D(\mu_r - \mu^b) & \begin{pmatrix} \left( \frac{5}{r} + 2D \right) DD_* + \frac{m^2}{r^2} (D + D_*) & ik \left( \frac{5}{r} + 2D \right) D \\ \frac{km^2}{r^2} + kDD_* & ik^2 D \end{pmatrix} \\ + D^2(\mu_r - \mu^b) & \begin{pmatrix} DD_* + \frac{m^2}{r^2} & ikD \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A 13}$$

**Appendix B. Demonstration that the eigenvalues for a Newtonian fluid on the Rayleigh line are real**

The eigenvalue problem reads

$$\mathcal{L}q = \sigma \mathcal{M}q, \tag{B 1}$$

where  $q = (u, v)^T$  or  $(u, w)^T$ , depending on the formulation adopted.

For a Newtonian fluid, on the Rayleigh line, the angular momentum of the base flow is constant,  $d/dr(rV^b)^2 = 0$ , thus

$$V^b = \frac{a}{r}, \tag{B 2}$$

where  $a$  is a constant scalar and

$$D_* V^b = DV^b + \frac{V^b}{r} = 0. \tag{B 3}$$

As stressed by Gebhardt & Grossmann (1993), two types of modes exist. The first type corresponds to  $v \neq 0$  and the second to  $v = 0$ .

If  $v \neq 0$  then the  $v$  equation of the  $(u, v)$  formulation is considered (second line of system (B 1)),

$$\sigma v = \mu^b (DD_* v - k^2 v). \tag{B 4}$$

This equation is multiplied by the complex conjugate of  $v$ ,  $v^*$  and integrated over volume  $\mathcal{V} = 2\pi^2(R_2^2 - R_1^2)/k$

$$\sigma \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/k} v v^* r dr = \mu^b \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/k} (DD_* v - k^2 v) v^* r dr. \tag{B 5}$$

After integration by parts, this equation becomes

$$\sigma \int_{R_1}^{R_2} v v^* r dr = -\mu^b \int_{R_1}^{R_2} [(D_* v) (D_* v^*) + k^2 v v^*] r dr. \tag{B 6}$$

If  $v = 0$  then the  $u$  equation of the  $(u, v)$  formulation is considered (first line of system (B 1)),

$$\sigma (DD_* - k^2) u = \mu^b (DD_* - k^2)^2 v. \tag{B 7}$$

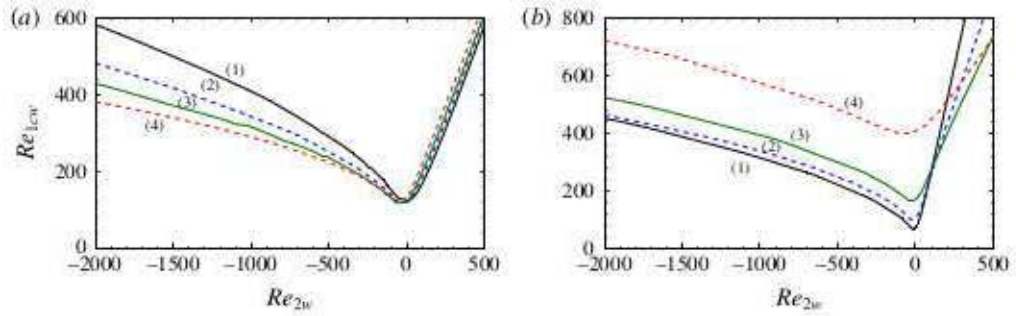
386 *Y. Agbessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*


FIGURE 29. (Colour online) Marginal stability curves in the plane  $(Re_{1w}, Re_{2w})$  for a power-law fluid: (1)  $n = 1$ , Newtonian fluid, (2)  $n = 0.7$ , (3)  $n = 0.5$ , and (4)  $n = 0.3$ . (a)  $\eta = 0.881$ ; (b)  $\eta = 0.4$ .

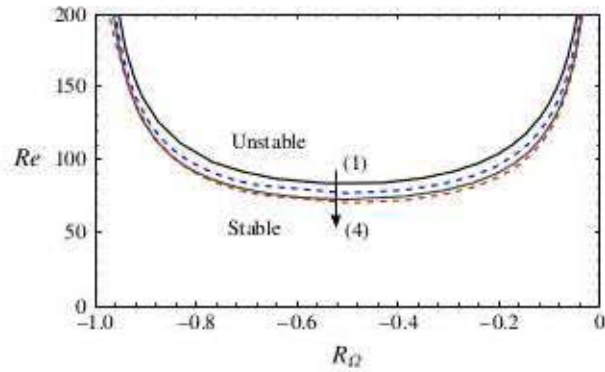


FIGURE 30. (Colour online) Marginal stability curves in the plane  $(Re, R_{\Omega})$  for a power-law fluid with  $\eta = 0.881$ . (1) Newtonian fluid, (2)  $n = 0.7$ , (3)  $n = 0.5$ , and (4)  $n = 0.3$ .

This equation is multiplied by the complex conjugate of  $u$ ,  $u^*$  and integrated over a volume  $\mathcal{V}$  and after integration by parts, we obtain

$$-\sigma \int_{R_1}^{R_2} [(D_* u)(D_* u^*) + k^2 u u^*] r dr = \mu^b \int_{R_1}^{R_2} (D D_* u - k^2 u)(D D_* u^* - k^2 u^*) r dr. \quad (\text{B } 8)$$

For both (B 8) and (B 6), the coefficient of the eigenvalue  $\sigma$  and the right-hand side are real and do not depend on  $Re_1$ . Furthermore, the left-hand side coefficient is negative and the right-hand side is positive. The eigenvalue is thus real and negative, and is independent of  $Re_1$ .

### Appendix C. Effect of the viscosity scale on the stabilization/destabilization of shear thinning

We adopt here a definition of the Reynolds numbers based on the viscosity evaluated at the inner wall,  $\hat{\mu}^b(\hat{R}_1)$ ,

$$Re_{(1,2)w} = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_{(1,2)} \hat{\Omega}_{(1,2)} \hat{d}}{\hat{\mu}^b(\hat{R}_1)}. \quad (\text{C } 1)$$

Figure 29 shows marginal stability curves in terms of  $Re_{1w}$  and  $Re_{2w}$ ,

$$Re_{1w} = \frac{\hat{\rho}\hat{R}_1\hat{\Omega}_1\hat{d}}{\hat{\mu}^b(\hat{R}_1)}, \quad Re_{2w} = \frac{\hat{\rho}\hat{R}_2\hat{\Omega}_2\hat{d}}{\hat{\mu}^b(\hat{R}_1)}. \quad (C\ 2a,b)$$

It appears that the shear-thinning behaviour has a destabilizing effect for a thin gap  $\eta = 0.881$  when both cylinders are counter-rotating. However, for a large gap  $\eta = 0.4$ , stabilization is observed. The opposite effect is found by using as scale the viscosity defined by (2.9). Indeed, for a large gap, when  $n$  decreases,  $\mu^b(R_1)$  decreases more rapidly than  $Re_{1c}$ ; this is why  $Re_{1cw} = Re_{1c}/\mu^b(R_1)$  increases with increasing shear-thinning effects. The selection of the viscosity scale may be considered to be simply a matter of choice; however, the conclusions that one reaches by comparing different shear-thinning fluids among themselves and against Newtonian fluids can be radically different from one choice to another.

#### Appendix D. Marginal stability for a power-law fluid in the plane ( $Re, R_\Omega$ )

Figure 30 shows marginal stability curves for a power-law fluid in the plane ( $Re, R_\Omega$ ). For a Newtonian fluid, the marginal stability curve is delimited by the lines  $R_\Omega = -1$  and  $R_\Omega = (1 - \eta)/\eta$ .

#### REFERENCES

- ALIBENYAHIA, B., LEMAITRE, C., NOUAR, C. & AIT-MESSAOUDENE, N. 2012 Revisiting the stability of circular Couette flow of shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **183**, 37–51.
- ANDERECK, C. D., LIU, S. S. & SWINNEY, H. L. 1986 Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* **164**, 155–183.
- ANTKOWIAK, A. & BRANCHER, P. 2007 On vortex rings around vortices: an optimal mechanism. *J. Fluid Mech.* **578**, 295–304.
- ASHRAFI, N. & KHAYAT, R. E. 2000 Shear-induced chaos in Taylor-vortex flow. *Phys. Rev. E* **61**, 1455–1467.
- BIRD, R., AMSTRONG, R. & HASSAGER, O. 1987 *Dynamics of Polymeric Liquids*. Wiley–Interscience.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. M. 1992 Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A* **4**, 1637–1650.
- CARREAU, J. P. 1972 Rheological equations from molecular network theories. *J. Rheol.* **16**, 99–127.
- CATON, F. 2006 Linear stability analysis of circular Couette flow of inelastic viscoplastic fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **134**, 148–154.
- CHERUBINI, S., ROBINET, J.-C., BOTTARO, A. & DE PALMA, P. 2010 Optimal wave packets in a boundary layer and initial phases of a turbulent spot. *J. Fluid Mech.* **656**, 231–259.
- COLES, D. 1965 Transition in circular Couette flow. *J. Fluid Mech.* **21**, 385–425.
- CORONADO-MALUTTI, O., MENDES, P. R. S. & CARVALLO, M. S. 1986 Instability of inelastic shear-thinning liquids in a Couette flow between concentric cylinders. *Chem. Engng Sci.* **41**, 2915–2923.
- DI PRIMA, R. C. & HALL, P. 1984 Complex eigenvalues for the stability of couette flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* **396** (1810), 75–94.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press.
- DUBRULLE, B., DAUCHOT, O., DAVIAUD, F., LONGARETTI, P. Y., RICHARD, D. & ZHAN, J. P. 2005 Stability and turbulent transport in Taylor–Couette flow from analysis of experimental data. *Phys. Fluids* **17**, 095103, 1–19.
- ELLINGSEN, T. & PALM, E. 1975 Stability of linear flow. *Phys. Fluids* **18** (4), 487–488.

- 388 *Y. Aghessi, B. Alibenyahia, C. Nouar, C. Lemaitre and L. Choplin*
- ESCUQUIER, M. P., GOULDSON, I. W. & JONES, D. M. 1995 Taylor vortices in Newtonian and shear-thinning liquids. *Proc. R. Soc. Lond. A* **449**, 155–176.
- GEBHARDT, T. & GROSSMANN, S. 1993 The Taylor–Couette eigenvalue problem with independently rotating cylinders. *Z. Phys. B* **90** (4), 475–490.
- GIESEKUS, H. 1966 Zur Stabilität von Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten. I. Ebene und kreisförmige Couette-Strömung. *Rheol. Acta* **5**, 239–252.
- GROISMAN, A. & STEINBERG, V. 1998 Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions: experiments. *Phys. Fluids* **10**, 2451–2463.
- HRISTOVA, H., ROCH, S., SCHMID, P. & TUCKERMAN, S. L. 2002 Transient growth in Taylor–Couette flow. *Phys. Fluids* **14**, 3475–3484.
- JASTRZEBSKI, M., ZAIDANI, H. A. & WRONSKI, S. 1992 Stability of Couette flow of liquids with power-law viscosity. *Rheol. Acta* **31**, 264–273.
- KOSCHMIEDER, E. L. 1993 *Bénard Cells and Taylor Vortices*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- KRUEGER, E. R., GROSS, A. & DIPRIMA, R. C. 1966 On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* **24**, 521–538.
- LANGFORD, F., TAGG, R., KOSTELICH, E., SWINNEY, H. L. & GLUBITSKY, M. 1988 Primary instabilities and bicriticality in flow between counter rotating cylinders. *Phys. Fluids* **31**, 776–785.
- LARSON, R. G., SHAQFEH, E. S. G. & MULLER, S. J. 1990 A purely elastic instability in Taylor–Couette flow. *J. Fluid Mech.* **210**, 573–600.
- LIU, R. & LIU, Q. S. 2011 Non-modal instability in plane Couette flow of a power law fluid. *J. Fluid Mech.* **676**, 145–171.
- LIU, R. & LIU, Q. S. 2012 Non-modal stability in Hagen–Poiseuille flow of a shear-thinning fluid. *Phys. Rev. E* **85**, 066318.
- LOCKETT, T. J., RICHARDSON, S. M. & WORRAKER, W. J. 2004 The stability of inelastic non-Newtonian fluids in Couette flow between concentric cylinders. *Trans. ASME J. Fluids Engng* **126**, 385–390.
- MARETZKE, S., HOF, B. & AVILA, M. 2014 Transient growth in linearly stable Taylor–Couette flows. *J. Fluid Mech.* **742**, 254–290.
- MESEGUER, A. 2002 Energy transient growth in the Taylor–Couette problem. *Phys. Fluids* **14**, 1655–1660.
- MONOKROUSOS, A., AKERVIK, E., BRANDT, L. & HENNINGSON, D. S. 2010 Global three-dimensional optimal disturbances in the blasius boundary – layer flow using time-steppers. *J. Fluid Mech.* **650**, 181–214.
- MULLER, S. J., LARSON, R. G. & SHAQFEH, E. S. G. 1989 A purely elastic transition in Taylor–Couette flow. *Rheol. Acta* **24**, 499–503.
- ORR, W. M. 'F. 1907 The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad.* **27**, 9–138.
- PASCAL, J. P. & RASMUSSEN, H. 1995 Stability of power law fluid flow between rotating cylinders. *Dyn. Stab. Syst.* **10**, 65–93.
- RANGANATHAN, B. T. & GOVINDARAJAN, R. 2001 Stabilization and destabilization of channel flow by location of viscosity – stratified fluid layer. *Phys. Fluids* **13**, 1–3.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*, Applied Mathematical Sciences, vol. 142. Springer.
- SHAQFEH, E. S. G., MULLER, S. J. & LARSON, R. G. 1992 The effect of gap width and dilute-solution properties on the viscoelastic Taylor–Couette instability. *J. Fluid Mech.* **235**, 285–317.
- SHU, F. H. 1982 *The Physical Universe: An Introduction to Astronomy*, University Science Books.
- SINEVIC, V., KUBOI, R. & NIENOW, A. W. 1986 Power numbers, Taylor numbers and Taylor vortices in viscous Newtonian and non-Newtonian fluids. *Chem. Engng Sci.* **41**, 2915–2923.
- SNYDER, H. A. 1968 Stability of a rotating Couette flow. I asymmetric waveform. *Phys. Fluids* **11**, 728–734.
- TAGG, R. 1994 The Couette–Taylor problem. *Nonlinear Sci. Today* **4**, 1–25.
- TANNER, R. 2000 *Engineering Rheology*. Oxford University Press.

- TAYLOR, G. I. 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **223**, 289–343.
- TREFETHEN, L. N., CHAPMAN, S. J. R., HENNINGSON, D. S., MESEGUER, A., MULLIN, T. & NIEUWSTADT, F. T. M. 2000 Threshold amplitudes for transition to turbulence in a pipe. *Numerical Analysis Report* 00/17.
- VAN ATTA, C. 1966 Exploratory measurements in spiral turbulence. *J. Fluid Mech.* **25**, 495–512.
- VITOSHKIN, H., HEIFETZ, E., GELFGAT, A. YU. & HARNIK, N. 2012 On the role of vortex stretching in energy optimal growth of three-dimensional perturbations on plane parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **707**, 369–380.





# Bibliographie

- [Adrian et Westerweel, 2011] ADRIAN, R. et WESTERWEEL, J. (2011). *Particle Image Velocimetry*. Cambridge University Press.
- [Adrian, 1984] ADRIAN, R. J. (1984). Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurements of fluid flow : speckle velocimetry vs particle image velocimetry. *Appl. Opt.*, 23(11):1690–1691.
- [Albaalbaki et Khayat, 2011] ALBAALBAKI, B. et KHAYAT, R. E. (2011). Pattern selection in the thermal convection of non-newtonian fluids. *J. Fluid Mech.*, 668:500–550.
- [Alibenyahia *et al.*, 2012] ALIBENYAHIA, B., LEMAITRE, C., NOUAR, C. et AIT-MESSAOUDENE, N. (2012). Revisiting the stability of circular Couette flow of shear-thinning fluids. *J. Non - Newtonian Fluid Mech.*, 183:37–51.
- [Altmeyer *et al.*, 2011] ALTMAYER, S., HOFFMANN, C. et LUCKE, M. (2011). Islands of instability for growth of spiral vortices in the Taylor-Couette system with and without axial through flow. *Phys. Rev. E.*, 84:046308, 1–12.
- [Andereck *et al.*, 1986] ANDERECK, C., LIU, S. et SWINNEY, H. (1986). Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 164:155–183.
- [Antkowiak et Brancher, 2007] ANTKOWIAK, A. et BRANCHER, P. (2007). On vortex rings around vortices : an optimal mechanism. *J. Fluid Mech.*, 578:295–304.
- [Ashrafi et Khayat, 2000] ASHRAFI, N. et KHAYAT, R. E. (2000). Shear-induced chaos in Taylor-vortex flow. *Phys. Rev. E.*, 61:1455–1467.
- [Atta, 1966] ATTA, C. V. (1966). Exploratory measurements in spiral turbulence. *J. Fluid Mech.*, 25: 495–512.
- [Avgousti et Beris, 1993] AVGOUSTI, M. et BERIS, A. N. (1993). Non-axisymmetric modes in viscoelastic taylor-couette flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 50(2–3):225–251.
- [Barcilon et Brindley, 1984] BARCILON, A. et BRINDLEY, J. (1984). Organized structures in turbulent Taylor-Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 143:429–449.

- [Barnes *et al.*, 1989] BARNES, H., HUTTON, J. et WALTERS, K. (1989). *An Introduction to Rheology*. Elsevier.
- [Belfort *et al.*, 1993] BELFORT, G., PIMBLEY, J. M., GREINER, A. et CHUNG, K. Y. (1993). Diagnosis of membrane fouling using a rotating annular filter. 1. cell culture media. *Journal of Membrane Science*, 77(1):1–22.
- [Benbelkacem, 2009] BENBELKACEM, G. (2009). *Viscoélasticité et écoulements de fluides structurés*. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Université de Lorraine.
- [Billant et Gallaire, 2005] BILLANT, P. et GALLAIRE, F. (2005). Generalized Rayleigh criterion for non-axisymmetric centrifugal instabilities. *J. Fluid Mech.*, 542:365–379.
- [Bingham, 1916] BINGHAM, E. C. (1916). An investigation of the laws of plastic flow. *U.S. Bureau of Standards Bulletin*, 13:309–353.
- [Bird *et al.*, 1987] BIRD, R., AMSTRONG, R. et HASSAGER, O. (1987). *Dynamics of polymeric liquids*. Wiley - Interscience, New York.
- [Bouteraa *et al.*, 2015] BOUTERAA, M., NOUAR, C., PLAUT, E., METIVIER, C. et KALCK, A. (2015). Weakly nonlinear analysis of Rayleigh–Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. *J. Fluid Mech.*, 767:696–734.
- [Butler et Farrell, 1992] BUTLER, K. M. et FARRELL, B. M. (1992). Three - dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A*, 4:1637–1650.
- [Carreau, 1972] CARREAU, J. P. (1972). Rheological equations from molecular network theories. *J. Rheol.*, 16:99–127.
- [Carreau *et al.*, 1997] CARREAU, P. J., DE KEE, D. D. et CHHABRA, R. P. (1997). *Rheology of polymeric systems : principles and applications*. Munich ; New York : Hanser Publishers ; Cincinnati : Hanser-Gardner Publications.
- [Caton, 2006] CATON, F. (2006). Linear stability analysis of circular Couette flow of inelastic viscoplastic fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 134:148–154.
- [Chandrasekhar, 1961] CHANDRASEKHAR, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications.
- [Charru, 2007] CHARRU, F. (2007). *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences.
- [Chekila *et al.*, 2011] CHEKILA, A., NOUAR, C., PLAUT, E. et NEMDILI, A. (2011). Subcritical bifurcation of shear-thinning plane poiseuille flows. *J. Fluid Mech.*, 686:272–298.
- [Chen *et al.*, 2015] CHEN, C., WAN, Z.-H. et ZHANG, W.-G. (2015). Transient growth in Taylor-Couette flow of a Bingham fluid. *Phys. Rev. E*, 91:043202.

- 
- [Cole, 1976] COLE, J. A. (1976). Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *J. Fluid Mech.*, 75:1–15.
- [Coles, 1965] COLES, D. (1965). Transition in circular Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 21:385–425.
- [Coronado-Malutti *et al.*, 1986] CORONADO-MALUTTI, O., MENDES, P. R. S. et CARVALLO, M. S. (1986). Instability of inelastic shear-thinning liquids in a Couette flow between concentric cylinders. *Chem. Eng. Sci.*, 41:2915–2923.
- [Couette, 1888] COUETTE, M. (1888). Sur un nouvel appareil pour l'étude de frottement des liquides. *Compte Rend. Acad. Sci.*, 107:388–390.
- [Coussot, 2012] COUSSOT, P. (2012). *Rhéophysique : la matière dans tous ses états*. EDP Sciences CNRS Editions.
- [Crumeyroille *et al.*, 2002] CRUMEYROLLE, O., MUTABAZI, I. et GRISEL, M. (2002). Experimental study of inertioelastic couette–taylor instability modes in dilute and semidilute polymer solutions. *Physics of Fluids*, 14:1681–1688.
- [Davey, 1962] DAVEY, A. (1962). The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 14:336–368.
- [DiPrima et Hall, 1984] DIPRIMA, R. C. et HALL, P. (1984). Complex eigenvalues for the stability of couette flow. *Proc. Roy. Soc. of Lond.. A. Mathematical and Physical Sciences*, 396(1810):75–94.
- [Donnelly, 1958] DONNELLY, R. J. (1958). Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. I. Torque measurements. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 246(1246):312–325.
- [Donnelly et Simon, 1960] DONNELLY, R. J. et SIMON, N. J. (1960). An empirical torque relation for supercritical flow between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 7:401–418.
- [Drazin et Reid, 1981] DRAZIN, P. et REID, W. (1981). Hydrodynamic stability. In *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press.
- [Dubrulle *et al.*, 2005] DUBRULLE, B., DAUCHOT, O., DAVIAUD, F., LONGARETTI, P., RICHARD, D. et ZHAN, J. (2005). Stability and turbulent transport in Taylor-Couette flow from analysis of experimental data. *Phys. Fluids.*, 17:095103, 1–19.
- [Dubrulle et Hersant, 2002] DUBRULLE, B. et HERSANT, F. (2002). Momentum transport and torque scaling in Taylor-Couette flow from an analogy with turbulent convection. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 26(3):379–386.
- [Eckhardt *et al.*, 2007] ECKHARDT, B., GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2007). Torque scaling in turbulent Taylor–Couette flow between independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 581:221–250.

- [Ellingsen et Palm, 1975] ELLINGSEN, T. et PALM, E. (1975). Stability of linear flow. *Phys. Fluids*, 18(4):487–488.
- [Escudier *et al.*, 1995] ESCUDIÉ, M., GOULDSON, I. et JONES, D. (1995). Taylor vortices in Newtonian and shear-thinning liquids. *Proc. Roy. Soc. A*, 449:155–176.
- [Foures *et al.*, 2013] FOURES, D. P. G., CAULFIELD, C. P. et SCHMID, P. J. (2013). Localization of flow structures using 8-norm optimization. *J. Fluid Mech.*, 729:672–701.
- [Gebhardt et Grossmann, 1993] GEBHARDT, T. et GROSSMANN, S. (1993). The Taylor - Couette eigenvalue problem with independently rotating cylinders. *Physik B Condensed Matter*, 90(4):475–490.
- [Giesekus, 1966] GIESEKUS, H. (1966). Zur Stabilität von Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten. 1.Ebene und kreisförmige Couette-Strömung. *Rheol. Acta*, 5:239–252.
- [Graebel, 1964] GRAEBEL, W. (1964). The hydrodynamic stability of a Bingham fluid in Couette flow. *Proceedings of International Symposium on 2nd Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics, Haifa, Israel, April 23-27*, (ed. M. Reiner & D. Abir). Jerusalem Academic Press., pages 636–649.
- [Groisman et Steinberg, 1998] GROISMAN, A. et STEINBERG, V. (1998). Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions : Experiments. *Phys. Fluids.*, 10:2451–2463.
- [Gu et Fahidy, 1985] GU, Z. et FAHIDY, T. (1985). Mass transport in the Taylor - Vortex regime of rotating flow. *Chemical Engineering Science*, 40(7):1145–1153.
- [Haut *et al.*, 2003] HAUT, B., AMOR, H. B., COULON, L., JACQUET, A. et HALLOIN, V. (2003). Hydrodynamics and mass transfer in a Couette - Taylor bioreactor for the culture of animal cells. *Chemical Engineering Science*, 58(3–6):777–784. 17th International Symposium of Chemical Reaction Engineering.
- [Henningson et Reddy, 1994] HENNINGSON, D. S. et REDDY, S. C. (1994). On the role of linear mechanisms in transition to turbulence. *Phys. Fluids*, 6(3):1396–1398.
- [Holman et Ashar, 1971] HOLMAN, K. K. et ASHAR, S. T. (1971). Mass transfer in concentric rotating cylinders with surface chemical reaction in the presence of Taylor vortices. *Chemical Engineering Science*, 26(11):1817–1831.
- [Hristova *et al.*, 2002] HRISTOVA, H., ROCH, S., SCHMID, P. et TUCKERMAN, S. (2002). Transient growth in Taylor-Couette flow. *Phys. Fluids.*, 14:3475–3484.
- [Jastrzebski *et al.*, 1992] JASTRZEBSKI, M., ZAIDANI, H. et WRONSKI, S. (1992). Stability of Couette flow of liquids with power-law viscosity. *Rheol. Acta*, 31:264–273.
- [Jones, 1985] JONES, C. A. (1985). The transition to wavy Taylor vortices. *J. Fluid Mech.*, 157:135–162.
- [Kàrmàn, 1934] KÀRMÀN, T. (1934). Some aspects of the turbulence problem. In *Proceedings of the 4th International Congress of Applied Mechanics*, pages 54–91.

- 
- [King *et al.*, 1984] KING, G. P., LEE, Y. Li, W., SWINNEY, H. L. et MARCUS, P. S. (1984). Wave speeds in wavy Taylor-vortex flow. *J. Fluid Mech.*, 141:365–390.
- [Koschmieder, 1993] KOSCHMIEDER, E. (1993). Bénard Cells and Taylor Vortices. In *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics*. Cambridge University Press, New York.
- [Krueger *et al.*, 1966] KRUEGER, E., GROSS, A. et DIPRIMA, R. (1966). On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 24:521–538.
- [Landahl, 1980] LANDAHL, M. T. (1980). A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 98:243–251.
- [Landry, 2006] LANDRY, M. (2006). Stability and instability of Taylor - Couette flows of a Bingham fluid. *J. Fluid Mech.*, 560:321–353.
- [Landry *et al.*, 2003] LANDRY, M., FRIGAARD, I. et MARTINEZ, D. (2003). *Taylor - Couette instability of a Bingham fluid*. MSc thesis University of British Columbia.
- [Langford *et al.*, 1988] LANGFORD, F., TAGG, R., KOSTELICH, E., SWINNEY, H. et GLUBITSKY, M. (1988). Primary instabilities and bicriticality in flow between counter rotating cylinders. *Phys. Fluids.*, 31:776–785.
- [Larson *et al.*, 1990] LARSON, R. G., SHAQFEH, E. et MULLER, S. (1990). A purely elastic instability in Taylor-Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 210:573–600.
- [Lathrop *et al.*, 1992] LATHROP, D. P., FINEBERG, J. et SWINNEY, H. L. (1992). Transition to shear-driven turbulence in Couette-Taylor flow. *Phys. Rev. A*, 46:6390–6405.
- [Latrache *et al.*, 2012] LATRACHE, N., CRUMEYROLLE, O. et MUTABAZI, I. (2012). Transition to turbulence in a flow of a shear-thinning viscoelastic solution in a taylor-couette cell. *Phys. Rev. E*, 86:056305.
- [Lewis et Swinney, 1999] LEWIS, G. S. et SWINNEY, H. L. (1999). Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-reynolds-number Couette-Taylor flow. *Phys. Rev. E*, 59:5457–5467.
- [Li et Khayat, 2004] LI, Z. et KHAYAT, R. (2004). A non-linear dynamical system approach to finite amplitude taylor-vortex flow of shear - thinning fluids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45 (3):321.
- [Liu et Liu, 2011] LIU, R. et LIU, Q. S. (2011). Non-modal instability in plane Couette flow of a power law fluid. *J. Fluid Mech.*, 676:145–171.
- [Liu et Liu, 2012] LIU, R. et LIU, Q. S. (2012). Non-modal stability in Hagen-Poiseuille flow of a shear-thinning fluid. *Phys. Rev. E*, 85:066318.

- [Lockett *et al.*, 2004] LOCKETT, T., RICHARDSON, S. et WORRAKER, W. (2004). The stability of inelastic non-Newtonian fluids in Couette flow between concentric cylinders. *J. Fluid. Eng.*, 126:385–390.
- [Macosko, 1994] MACOSKO, C. (1994). *Rheology : principles, measurements, and applications*. Advances in interfacial engineering series. Wiley-Blackwell.
- [Maretzke *et al.*, 2014] MARETZKE, S., HOF, B. et AVILA, M. (2014). Transient growth in linearly stable Taylor-Couette flows. *J. Fluid Mech.*, 742:254–290.
- [Meinhart *et al.*, 2000] MEINHART, C., WERELEY, S. et J.G., S. (2000). A PIV Algorithm for Estimating Time-Averaged Velocity Fields. *J. Fluids Eng.*, 122(2):285–289.
- [Meseguer, 2002] MESEGUER, A. (2002). Energy transient growth in the Taylor-Couette problem. *Phys. Fluids.*, 14:1655–1660.
- [Meseguer *et al.*, 2009] MESEGUER, A., MELLIBOVSKY, F., AVILA, M. et MARQUES, F. (2009). Families of subcritical spirals in highly counter-rotating Taylor-Couette flow. *Phys. Rev. E*, 79:036309.
- [Muller *et al.*, 1989] MULLER, S., LARSON, R. et SHAQFEH, E. (1989). A purely elastic transition in Taylor-Couette flow. *Rheol. Acta*, 24:499–503.
- [Orr, 1907] ORR, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad.*, 27:9–138.
- [Pascal et Rasmussen, 1995] PASCAL, J. P. et RASMUSSEN, H. (1995). Stability of power law fluid flow between rotating cylinders. *Dynam. Stabil. Systm.*, 10:65–93.
- [Peng et Zhu, 2004] PENG, J. et ZHU, K. (2004). Linear stability of Bingham fluids in spiral Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 512:21–45.
- [Raffel *et al.*, 2007] RAFFEL, M., WILLERT, C., WERELEY, S. et KOMPENHANS, J. (2007). *Particle Image Velocimetry : a practical guide*. Springer Verlag, Berlin.
- [Ranganathan et Govindarajan, 2001] RANGANATHAN, B. T. et GOVINDARAJAN, R. (2001). Stabilization and destabilization of channel flow by location of viscosity - stratified fluid layer. *Phy. Fluids*, 13:1–3.
- [Rayleigh, 1916] RAYLEIGH, L. (1916). On the dynamics of revolving fluids. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 93:148–154.
- [Reddy *et al.*, 1993] REDDY, S. C., SCHMID, P. J. et HENNINGSON, D. S. (1993). Pseudospectra of the Orr - Sommerfeld Operator. *SIAM J. Appl. Math.*, 53:15–47.
- [Reynolds, 1883] REYNOLDS, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Royal Society Phil. Trans.*, pages 1854–1905.

- 
- [Rigal, 2012] RIGAL, C. (2012). *Comportement de fluides complexes sous écoulement : approche expérimentale par résonance magnétique nucléaire et techniques optiques et simulations numériques*. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Université de Lorraine.
- [Rudman, 1998] RUDMAN, M. (1998). Mixing and particle dispersion in the wavy vortex regime of Taylor–Couette flow. *AIChE Journal*, 44(5):1015–1026.
- [Schmid et Henningson, 2001] SCHMID, P. J. et HENNINGSON, D. S. (2001). *Stability and transition in shear flows*, volume 142 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer.
- [Shaqfeh et al., 1992] SHAQFEH, E., MULLER, S. et LARSON, R. (1992). The effect of gap width and dilute-solution properties on the viscoelastic Taylor-Couette instability. *J. Fluid Mech.*, 235:285–317.
- [Shu, 1982] SHU, F. H. (1982). *The Physical Universe : An Introduction to Astronomy*. University Science Books.
- [Sinevic et al., 1986] SINEVIC, V., KUBOI, R. et NIENOW, A. (1986). Power numbers, Taylor numbers and Taylor vortices in viscous Newtonian and non-Newtonian fluids. *Chem. Eng. Sci.*, 41:2915–2923.
- [Snyder, 1968] SNYDER, H. (1968). Stability of a rotating Couette flow. I. Asymmetric Waveform. *Phys. Fluids.*, 11:728–734.
- [Stanislas et al., 2004] STANISLAS, M., WESTERWEEL, J. et KOMPENHANS, J. (2004). *Particle Image Velocimetry : recent improvements*. Springer Verlag, Berlin.
- [Tagg, 1994] TAGG, R. (1994). The Couette-Taylor problem. *Nonlinear Science Today*, 4:1–25.
- [Tanner, 2000] TANNER, R. (2000). *Engineering rheology*. Oxford University Press, New York.
- [Taylor, 1923] TAYLOR, G. I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. London. A*, 223:289–343.
- [Trefethen, 1997] TREFETHEN, L. (1997). Pseudospectra of linear operators. *SIAM Review*, 39:383–406.
- [Trefethen et al., 2000] TREFETHEN, L. N., CHAPMAN, S. J. R., HENNINGSON, D. S., MESEGUER, A., MULLIN, T. et NIEUWSTADT, F. T. M. (2000). Threshold amplitudes for transition to turbulence in a pipe. *Numerical Analysis Report*, 00/17.
- [Trefethen et al., 1993] TREFETHEN, L. N., TREFETHEN, A. E., REDDY, S. C. et DRISCOLL, T. A. (1993). Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261(5121):578–584.
- [van Gils et al., 2011] van GILS, D. P. M., HUISMAN, S. G., BRUGGERT, G.-W., SUN, C. et LOHSE, D. (2011). Torque scaling in turbulent Taylor-Couette flow with co- and counter-rotating cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, 106:024502.

- [Vitoshkin *et al.*, 2012] VITOSHKIN, H., HEIFETZ, E., GELFGAT, A. Y. et HARNIK, N. (2012). On the role of vortex stretching in energy optimal growth of three - dimensional perturbations on plane parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 707:369–380.
- [Waleffe, 1995] WALEFFE, F. (1995). Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non - normal linearity. *Phys. Fluids*, 7(12):3060–3066.
- [Watkins, 1982] WATKINS, D. (1982). Understanding the QR algorithm. *SIAM Review*, 24(4):427–440.
- [Watkins, 2008] WATKINS, D. (2008). The QR algorithm revisited. *SIAM Review*, 50:133–145.
- [Wendt, 1933] WENDT, F. (1933). Turbulente strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen zylindern. *Ingenieur-Archiv*, 4(6):577–595.
- [Zhu *et al.*, 2000] ZHU, X., CAMPERO, R. J. et VIGIL, R. (2000). Axial mass transport in liquid - liquid Taylor - Couette - Poiseuille flow. *Chemical Engineering Science*, 55(21):5079–5087.





# Résumé

## Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette de fluides complexes

Quand on augmente le nombre de Reynolds d'un écoulement, il passe progressivement d'un état ordonné, laminaire, à un état chaotique, turbulent. Lors de cette transition, on voit apparaître des structures hydrodynamiques ordonnées qui se désordonnent sous l'effet de déstabilisations successives. Ces structures peuvent poser problème lorsqu'on souhaite par exemple homogénéiser des suspensions car des particules peuvent s'y retrouver piégées et générer des zones sur ou sous-concentrées. La plupart des fluides naturels et industriels sont non newtoniens. Pour mieux comprendre et contrôler l'apparition des structures hydrodynamiques dans de tels fluides, nous sommes intéressés dans le cadre de cette thèse, aux mécanismes d'instabilités gouvernant la transition vers la turbulence de fluides complexes dans la configuration simplifiée de Taylor-Couette. Dans un premier volet théorique et numérique, les concepts d'instabilités hydrodynamiques ont été appliqués à l'écoulement de Taylor-Couette pour trois modèles rhéologiques : la loi de puissance, le modèle de Carreau et le modèle de Bingham. Deux rapports de rayons et différentes vitesses de rotation des deux cylindres ont été considérés. La déstabilisation de l'écoulement de Couette circulaire a été étudiée pour prédire l'apparition de structures telles que les rouleaux de Taylor-Couette aux temps longs. Une analyse aux temps courts a également été effectuée pour étudier les phénomènes de croissance transitoire dans l'écoulement. Dans un second volet expérimental, un dispositif de Taylor-Couette en plexiglas a été élaboré. Dans un premier temps, des mesures de couple avec un fluide newtonien (glycérol) ont été réalisées et comparées avec succès avec les résultats de la littérature. Des mesures rhéométriques ont ensuite été réalisées pour choisir des fluides répondant aux lois rhéologiques utilisées dans le volet théorique. Des visualisations ont été effectuées pour détecter l'apparition des instabilités et les conditions critiques ont été comparées aux prédictions de l'analyse linéaire de stabilité. Des mesures de vélocimétrie par image de particules (PIV) ont été aussi effectuées pour déterminer les champs de vitesse de l'écoulement. Ces différentes études ont permis de mettre en évidence le caractère sous-critique et l'apparition d'un écoulement chaotique engendrés par le caractère rhéofluidifiant des fluides.

**Mots clés :** Stabilité, croissance transitoire, transition vers la turbulence, Taylor-Couette, fluides complexes.

## Abstract

### Stability of the Taylor-Couette flow of complex fluids

When increasing the Reynolds number of a flow, it passes gradually from an ordered state, called laminar, to a chaotic state, called turbulent. During this transition, organized hydrodynamic structures appear which disorganize under successive destabilizations. These structures may cause problems for example in the relation to the homogenization of suspensions, because particles may be trapped in the structures, leading to under or over-concentrated zones. Furthermore, most of the fluids found in nature and in the industry are non-Newtonian. In order to better understand and control the apparition of hydrodynamic structures in such fluids, we focused during this PhD on the instability mechanisms governing the transition to turbulence of complex fluids in the simplified configuration of Taylor-Couette. In a theoretical and numerical approach, concepts of hydrodynamic instabilities were applied to the circular Couette flow for three rheological models : the power law, the Carreau and the Bingham models. Two radius ratios and different rotation velocities were considered for the cylinders. The destabilization of the circular Couette flow was studied to predict the apparition of structures such as Taylor vortex at long times. An analysis at short time was also performed to study the phenomena of transient growth. In an experimental approach, a Taylor-Couette device was designed. First, the torque on the inner cylinder was measured for a Newtonian fluid (glycerol) and successfully compared to previous results of the literature. Secondly, rheological measurements were conducted in order to select fluids showing rheological behaviors considered in the theoretical approach. Visualizations were then performed in order to detect the apparition of instabilities and the critical conditions were compared to the predicted by means of the linear stability analysis. Finally, PIV measurements provided velocity fields in the flow. These different studies evidenced a subcritical transition and chaotic flow due to the shear-thinning character of the fluids.

**Key words :** Stability, transient growth, transition to turbulence, Taylor-Couette, complex fluids.

