



HAL
open science

Évolutions propres de la microstructure de dislocations et conséquences sur le comportement élastoplastique des métaux

Laurent Langlois

► **To cite this version:**

Laurent Langlois. Évolutions propres de la microstructure de dislocations et conséquences sur le comportement élastoplastique des métaux. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paul Verlaine - Metz, 2000. Français. NNT : 2000METZ023S . tel-01775391

HAL Id: tel-01775391

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775391>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Laurent LANGLOIS

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur
OPTION : Mécanique

	UNIVERSITE DE METZ S.C.P.
iv.	
te	S/12 001 23

Evolutions propres de la microstructure de dislocations et conséquences sur le comportement élastoplastique des métaux

Soutenance prévue le 4 juillet 2000 devant le jury composé de :

M. BERVEILLER	Université de Metz	Directeur de thèse
X. LEMOINE	SOLLAC Lorraine	Examineur
C. REY	Ecole Centrale Paris	Rapporteur
F. SIDOROFF	Ecole Centrale Lyon	Rapporteur
C. TEODOSIU	Université Paris - Nord	Examineur
L. TOTH	Université de Metz	Examineur
A. ZAOUI	Ecole Polytechnique - Palaiseau	Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM, UMR 7554),
ISGMP, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Laurent LANGLOIS

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur

OPTION : Mécanique

Evolutions propres de la microstructure de dislocations et conséquences sur le comportement élastoplastique des métaux

Soutenance prévue le 4 juillet 2000 devant le jury composé de :

M. BERVEILLER	Université de Metz	Directeur de thèse
X. LEMOINE	SOLLAC Lorraine	Examineur
C. REY	Ecole Centrale Paris	Rapporteur
F. SIDOROFF	Ecole Centrale Lyon	Rapporteur
C. TEODOSIU	Université Paris - Nord	Examineur
L. TOTH	Université de Metz	Examineur
A. ZAOUI	Ecole Polytechnique - Palaiseau	Examineur

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier le professeur Marcel Berveiller pour m'avoir accepté dans son équipe de recherche et m'avoir fait confiance pendant toute la durée de cette thèse.

Je tiens ensuite à remercier les professeurs Colette Rey, François Sidoroff, Christian Téodosiu, Laszlo Toth et André Zaoui pour m'avoir écouté et accepté d'évaluer ce travail malgré leur emploi du temps chargé.

Ce travail a été mené grâce au soutien de SOLLAC Lorraine. A cette occasion, je tiens à remercier Xavier Lemoine qui m'a beaucoup aidé pendant cette thèse et qui a aussi accepté de participer au jury.

Je remercie le Professeur Henry Petryk pour m'avoir aidé efficacement à résoudre quelques problèmes de thermodynamique particulièrement délicats (cf. §II)

Je veux aussi dire merci à Mohamed Cherkaoui avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer.

Ces remerciements vont aussi à tous les membres du LPMM et plus particulièrement tous ceux qui de près ou de loin m'ont permis de prendre du recul et de garder mon humour face aux nombreuses difficultés rencontrées. Parmi ceux là, se reconnaîtrons entre autres : Anne, Isa, Raph, Fred, Pat, Aimé, Fred (l'autre), Yazid, Mahdia, Amadou, Idriss, Stéphane, Christophe...

La rédaction de ce mémoire s'est faite dans de bonnes conditions grâce en grande partie au soutien des « gens » de l'ENSAM. Parmi eux, je tiens à remercier plus particulièrement Régis Bigot.

Cette thèse a été l'occasion de découvrir une nouvelle région dont le climat pluvieux, gris, froid ne pourront pas me faire oublier la gentillesse et la générosité de ceux qui me l'ont fait découvrir (Fred, J&J...).

Enfin, si la rédaction de ce mémoire vous est agréable vous le devrez entièrement à Frédérique et Paul.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2000 0035
Cote	S/M3 00/23
Loc	Magasin

SOMMAIRE

INTRODUCTION	6
 CHAPITRE I : Vers une Représentation des Métaux par un Matériau Biphase à Ecrouissage Non Local et contenant des Frontières Mobiles.	9
 I.1 Anisotropie induite par la déformation plastique	10
 I.2 Modèles existants	13
1.2.1 Modèles macroscopiques ou modèles phénoménologiques	13
1.2.2 Modèles microscopiques	15
1.2.3 Modèles polycristallins	16
 I.3 Hétérogénéités plastiques intragranulaires	19
1.3.1 Glissement multiple hétérogène	19
1.3.2 Microstructure de dislocations	19
a. Conditions en température et vitesse de déformation	19
b. Formation de la microstructure avec la déformation plastique	20
c. Morphologie et orientation de la microstructure	21
d. Evolution de la microstructure en chargements monotones	24
e. Chargements complexes	26
1.3.3 Microbandes de cisaillement	28
a. Microbande de première génération ou microbande de transition	28
b. Microbande de deuxième génération	28
c. Bandes de cisaillement	29
1.3.4 Conclusions	31
 I.4 Modèles tenant compte de la microstructure de dislocation	32
I.4.1 Modèles macroscopiques	32
I.4.2 Modèles polycristallins	32
I.4.3 Modèles intragranulaires	34

a.	Modèle biphasé	34
b.	Modèle biphasé avec écrouissage non local	34
c.	Modèle biphasé avec un écrouissage non local et une structure évolutive	35
d.	Modèle biphasé avec une structure évolutive	36
I.5	Modèle biphasé évolutif non local	38
I.5.1	Matériau biphasé	38
a.	Déformation plastique	39
b.	Morphologie des cellules	39
c.	Déformation plastique macroscopique	40
I.5.2	Ecrouissage non local	40
a.	Elasticité	40
b.	Critère de plasticité	40
c.	Limites d'écoulement et lois d'écrouissage	40
I.5.3	Frontières mobiles	41
	Références bibliographiques	43
	 CHAPITRE II : Approche Thermomicromécanique	 47
II.1	Energie libre de Helmholtz et forces thermodynamiques	48
II.1.1	Milieu continu contenant des frontières de discontinuité du champ de déformation plastique	48
a.	Relations locales	48
b.	Relations macroscopiques	50
c.	Energie libre de Helmholtz	51
d.	Dissipation intrinsèque	53
II.1.2	Application à la structure biphasée à structure évolutive et écrouissage non local	57
a.	Champ de déformation et de contrainte	57
b.	Contraintes internes	58

c.	Energie libre de Helmholtz	61
II.1.3	Forces thermodynamiques	63
II.2	Dissipation et forces critiques	66
II.2.1	plasticité et écrouissage non local	66
a.	Critères de plasticité	66
b.	Ecrouissage	68
c.	Résumé	73
II.2.2	Dissipation associée au mouvement de frontière et fonction de charge morphologique.	75
a.	Dissipation associée au mouvement de la surface	75
b.	Surface de charge associée aux variables morphologiques	78
c.	Cas particulier où la morphologie des cellules est donnée par deux variables internes	82
d.	Approximation de la surface de charge	86
e.	Force critique associée à N , le nombre de cellules par unité de volume	90
II.3	Equations constitutives du matériau biphasé à structure évolutive et écrouissage non local	91
II.4	Conclusion	93
	Références bibliographiques	94
 CHAPITRE III : Simulation numérique du comportement du matériau biphasé à structure évolutive et écrouissage non local		96
III.1	Chargements monotones	
III.1.1	Cisaillement monotone	97
III.1.2	Etude paramétrique	102
a.	Matrice d'écrouissage	103
b.	Morphologie initiale de la microstructure	105

c.	Type de chargement	106
d.	Conclusion	107
III.1.3	Conclusion	108
III.2	Chargements complexes	109
III.2.1	Un cas de chargement complexe	109
a.	Caractéristiques fondamentales des chargements complexes	110
b.	Force motrice équivalente suivant les demi-axes	111
c.	Evolution de la microstructure	113
d.	Conclusion	113
III.2.2	Différentes directions pour le second chargement	113
a.	Caractéristiques des chargements complexes	114
b.	Force motrice équivalente suivant les demi-axes	115
III.2.3	Différentes valeurs de prédéformation	116
a.	Caractéristiques des chargements complexes	116
b.	Allure des régimes transitoires	118
c.	Résumé	118
III.2.4	Essai Bauschinger	121
a.	Etude paramétrique	121
b.	Comparaison avec l'expérience	121
III.2.5	Autres cas de chargement complexe	125
a.	Etude paramétrique	125
b.	Essais expérimentaux	127
III.3	Conclusion	130
	Références bibliographiques	132
CHAPITRE IV	Grains biphasés à structure évolutive et écrouissage non local pour une modélisation du comportement du polycristal.	133

IV.1 Modélisation du comportement élastoplastique d'un matériau polycristallin à grains biphasés à structure évolutive et écrouissage non local	135
IV.1.1 A l'échelle du grain	135
IV.1.2 A l'échelle du polycristal	137
IV.2 Formulation thermomicromécanique	138
IV.2.1 Energie libre d'Helmholtz et force motrice dans un grain	138
a. Cinématique	138
b. Energie libre d'Helmholtz	139
c. Dissipation intrinsèque	139
d. Forces motrices	140
IV.2.2 Dissipation et forces critiques	142
a. Cissions critiques et écrouissage	142
b. Forces critiques opposées à l'évolution de la morphologie	146
c. Conclusions	146
IV.2.3 Equations constitutives	147
a. Variables internes pour un grain	147
b. Critères et lois d'évolution des variables internes	148
IV.3 Résultats numériques	150
IV.3.1 Modèle simplifié	150
a. Hypothèses simplificatrices	150
b. Méthode de transition d'échelle autocohérente et tenseur de localisation	150
IV.3.2 Simulations, chargements monotones et complexes	152
a. Chargement monotone en traction uniaxiale	152
b. Chargements complexes	157
c. Conclusion	160
IV.4 Conclusions et perspectives	161
Références bibliographiques	163
CONCLUSION	164

ANNEXE A1	166
ANNEXE A2	168
ANNEXE A3	172
Références bibliographiques	175

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Trois types de phénomènes limitent les possibilités de mise en forme des tôles : la formation de plis, l'apparition de bandes de cisaillement correspondant à la localisation de déformation plastique et la création de fissures ou de cavités. Ces phénomènes, relativement faciles à étudier en chargements monotones et proportionnels, deviennent très difficiles à prévoir dans le cas de chargements complexes.

Par exemple, la fabrication d'une boîte boisson nécessite plusieurs opérations mettant en œuvre des directions de chargement et des taux de déformations très différents. La première phase consiste en un emboutissage d'un flan circulaire pour former un godet. Les bords de celui-ci sont ensuite relevés par trois opérations successives de repassage. Finalement, le haut de la boîte subit un rétreint pour obtenir la forme du col. A la fin de chacune des étapes de mise en forme, le comportement du matériau (allongement à rupture, limite d'écoulement...) dépend fortement du chargement qu'il a subi.

La prévision de la localisation s'effectue actuellement grâce aux Courbes Limites de Formage (CLF). Ces courbes sont bâties point par point pour chaque direction de sollicitation dans le plan des déformations principales (ϵ_1 , ϵ_2). Cette méthode, incontournable aujourd'hui pour maîtriser les procédés, est toutefois très lourde à mettre œuvre surtout dans le cas de chargements complexes. Chaque nouveau chargement nécessite l'élaboration d'une nouvelle CLF.

Pour alléger cette méthode, il est nécessaire de mettre en place des modèles permettant de prévoir la localisation de la déformation plastique au cours des chargement complexes subis par le matériau au cours de sa mise en forme. De plus, il serait intéressant que cet outil théorique permette la conception de nouveaux trajets de chargement ou l'élaboration de nouveaux matériaux.

Les modèles existant, quelles que soient les échelles qu'ils utilisent pour la description des phénomènes physiques, s'avèrent souvent inefficaces pour les chargements complexes. Les modèles phénoménologiques, tout comme les modèles utilisant une méthode de transition d'échelle autocohérente, ne sont pas capables de prévoir la localisation de la déformation plastique ni les principales caractéristiques des chargements complexes (microplasticité, allure des régimes transitoires...). Si ces modèles éprouvent tant de difficultés c'est que certains mécanismes physiques sont mal pris en compte car mal décrits.

Classiquement, deux phénomènes sont responsables de la perte de ductilité : l'adoucissement texturale provoqué par la rotation des grains et la formation d'une microstructure de dislocations. Le second phénomène semble avoir une influence prépondérante dans la mesure où un recuit de restauration annihilant la structure de dislocations et laissant intact la texture cristallographique, redonne au matériau sa capacité à se déformer.

Dans ce travail, on propose de bâtir un modèle du comportement des métaux soumis à des chargements complexes en tenant compte de la microstructure intragranulaire de dislocations.

La microstructure de dislocations apparaît au cours de la déformation plastique contrairement aux joints de grains qui existent dans le matériau à l'état initial. Cette microstructure est constituée de murs à forte densité de dislocations entourant des cellules à faible densité de

dislocations. Cette microstructure évolue au cours du chargement, ceci étant surtout sensible au cours des régimes transitoires entre deux chargements. Sa forme et son orientation résultent essentiellement d'un effet global du chargement extérieur et peu de la cristallographie.

Les effets de la présence d'une microstructure de dislocations sur le comportement du matériau se caractérisent par des contraintes internes d'ordre trois (suivant la classification introduite par la mesure des contraintes aux rayons X) et une anisotropie du libre parcours moyen des dislocations. De plus, cette microstructure est susceptible de se déstabiliser provoquant l'apparition de microbandes de cisaillement. Celles-ci sont les prémisses de la ruine du matériau par macrobandes de cisaillement.

Ce travail a pour objectif de construire un modèle tenant compte de la microstructure de dislocations et de son effet sur le comportement macroscopique.

Pour cela, dans un premier temps, la structure polycristalline du matériau est négligée. La microstructure de dislocations est représentée par un matériau biphasé ayant une structure évolutive et un écrouissage non local traduisant les mécanismes d'accumulation des dislocations. Le champ de déformation plastique est supposé uniforme par phase et la morphologie de la microstructure devient une variable interne du problème.

Dans un premier chapitre, à partir des observations expérimentales portant sur les microstructures de dislocations et en s'appuyant sur les modèles déjà existants, on met en place une stratégie pour la modélisation. Au chapitre II, à partir des hypothèses mises en place à la fin du chapitre précédent et dans le cadre des petites transformations quasi-statiques isothermes, on procède à la formulation thermodynamique du problème. Dans le chapitre qui suit, on expose quelques résultats numériques pour des cas de chargements monotones et complexes mettant en évidence l'importance de la prise en compte des hétérogénéités plastiques intragranulaires. Dans une quatrième et dernière partie, on bâtit un modèle dans lequel on réintroduit la structure polycristalline pour tenir compte des effets de la texture et des contraintes intergranulaires (ordre II). Les premiers résultats numériques obtenus laissent entrevoir l'importance de la prise en compte de la structure de dislocations dans l'obtention du comportement macroscopique des métaux en chargements complexes.

CHAPITRE I

Vers une Représentation des Métaux
par un Matériau Biphase
à Ecrouissage Non Local
et contenant des Frontières Mobiles

I.1 Analyse du comportement macroscopique des métaux en chargements complexes.

Au cours de la déformation plastique, le comportement des métaux devient anisotrope. Par exemple, pour un acier à température ambiante, après une séquence de laminage, la limite d'écoulement et la limite à rupture pour une traction uniaxiale dans le sens long, transverse ou à 45° sont différentes (figure I.1).

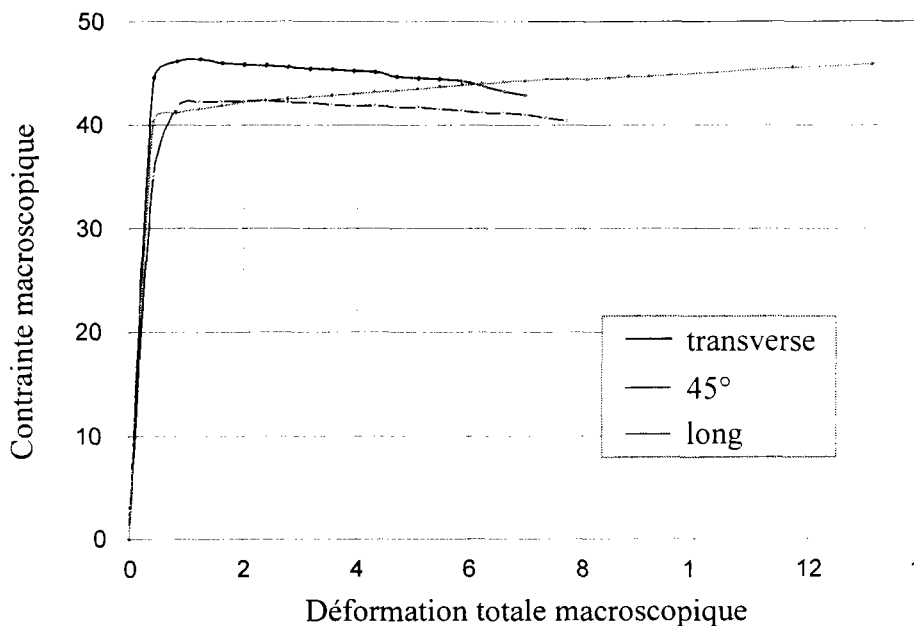


Figure I.1: prédéformation de 10% en laminage suivi de traction uniaxiale dans le sens transverse, long et 45° par rapport à la direction de laminage

De plus, la forme des régimes transitoires entre deux chargements présente des caractéristiques différentes. Pour les essais de traction transverse et à 45°, la contrainte passe par un pic avant de décroître lentement jusqu'à localisation de la déformation plastique macroscopique. Par contre, pour l'essai dans le sens long, ce pic n'existe pas : la contrainte est monotone croissante jusqu'à la localisation.

Schmitt et al. [SAB85] distinguent trois types de régimes transitoires :

- trajets continus ou pseudo continus
- trajets Bauschinger ou pseudo Bauschinger
- trajets durs

Thuillier et al. [T92] illustrent ces trois types de réponses possibles par des résultats obtenus pour des tractions uniaxiales suivies d'essais de cisaillement à 45°, 90° et -45° par rapport à la direction de traction (figure I.2).

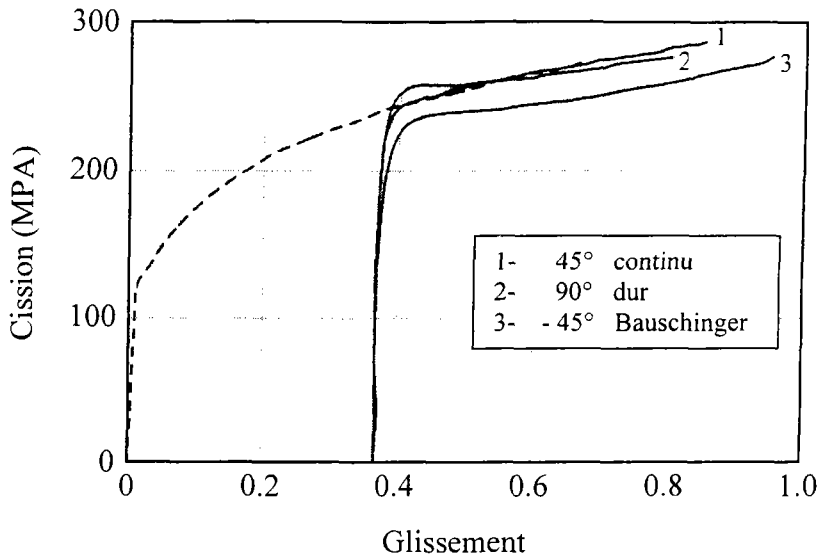


Figure I.2 : essai de traction suivi d'essais de cisaillement à 90° , 45° et -45° par rapport à la direction de traction.

Schmitt et al. [SAB85] proposent de classer ces types de trajet en fonction de l'angle (β) entre le premier et le deuxième chargement dans le repère des déformations. Si on note ε^1 et ε^2 les déformations associées aux deux chargements constituant le trajet complexe, cet angle est défini par la relation suivante :

$$\cos(2\beta) = \Theta = \frac{\varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2}{\sqrt{\varepsilon_{pq}^1 \varepsilon_{pq}^1} \sqrt{\varepsilon_{rs}^2 \varepsilon_{rs}^2}} \quad [I.1]$$

La figure I.3 donne de façon schématique le type de régime transitoire obtenu en fonction de la valeur de l'angle β .

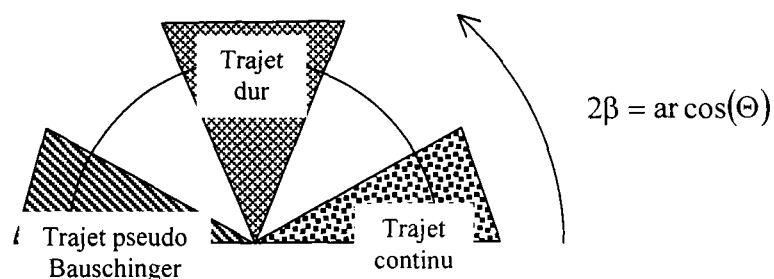
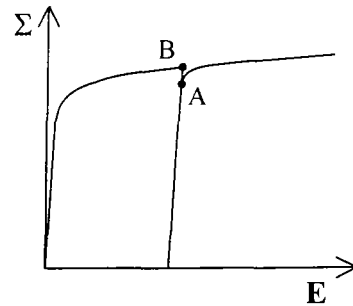


Figure I.3 : type de trajet en fonction de β

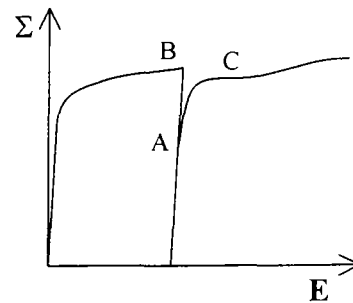
- **Trajet continu ou pseudo continu :** Θ aux alentours de 1

La limite d'écoulement pour le second trajet (point A) est à peu près égale à celle obtenue à la fin du premier chargement (point B). Le taux d'écrouissage est positif tout au long du régime transitoire.



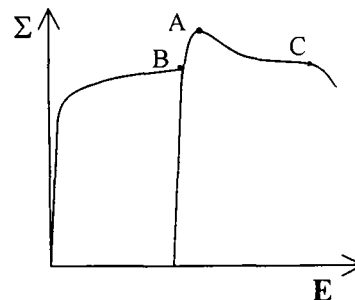
- **Trajet Bauschinger ou pseudo Bauschinger :** Θ aux alentours de -1

La limite d'écoulement est plus faible pour le second chargement (proche du point A) que celle obtenue à la fin du premier trajet (point B). La réponse contrainte déformation au cours du régime transitoire présente un plateau (point C) correspondant à un taux d'écrouissage proche de zéro. Au début du second chargement, le matériau quitte prématurément le domaine élastique (seuil de microplasticité (point A)) pour rentrer dans une phase plastique à écrouissage fort.



- **Trajet dur :** Θ aux alentours de 0

La limite d'écoulement est plus forte pour le second trajet (proche du point A) que celle obtenue à la fin du premier chargement (point B). La réponse macroscopique au cours du régime transitoire présente un pic suivi d'une période d'adoucissement (taux d'écrouissage négatif (entre les points A et C)). Ce type de trajet peut déboucher sur la localisation de la déformation plastique (point C) comme celle observée pour les essais de traction de la figure I.1.



Conclusion

L'objectif de ce travail est de bâtir un modèle permettant de suivre l'anisotropie du matériau en fonction de son chargement. On veut pouvoir retrouver les réponses contraintes – déformation d'un acier doux pour un trajet de chargement complexe, quel que soit son type (continu, dur ou Bauschinger). L'un des objectifs primordiaux de ce travail est aussi de pouvoir construire après un chargement donné, la courbe limite de formage. On veut retrouver l'évolution de la limite à rupture du matériau pour un chargement donné, en fonction de toute l'histoire du chargement qu'il a subi antérieurement.

I. 2 Modèles existants

Les modèles du comportement élastoplastique des métaux sont nombreux et peuvent être classés selon leur échelle :

- Modèles macroscopiques ou phénoménologiques
- Modèles microscopiques (échelle de quelques dislocations)
- Les autres... (échelles intermédiaires)

I.2.1 Modèles macroscopiques ou modèles phénoménologiques.

Les premiers modèles phénoménologiques du comportement élastoplastique des métaux qui viennent à l'esprit sont les modèles utilisant le critère de plasticité de Von Mises.

La déformation plastique est représentée par un tenseur d'ordre deux ε_{ij}^p . La contrainte équivalente au sens de Von Mises, σ_{eq} , est calculée à partir du déviateur des contraintes, σ_{ij}^D pour tenir compte du fait que la déformation plastique se fait à volume constant:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D} \quad [I.2]$$

σ_{eq} , qui peut être vue comme la contrainte de traction donnant la même énergie élastique, est comparée à la limite d'écoulement en traction.

Le taux de déformation plastique est donné par la loi de normalité en prenant comme potentiel de dissipation le critère de plasticité lui-même.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^D}{\sigma_{eq}} \dot{\lambda} \quad [I.3]$$

$\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique.

L'évolution de la limite d'écoulement Y avec la déformation plastique est donnée par la loi d'écrouissage isotrope.

$$\dot{Y} = H(\varepsilon^p) \dot{\lambda} \quad [I.4]$$

En approchant la réponse contrainte équivalente - déformation équivalente par une fonction puissance, Prandtl et Reuss proposent pour $H(\varepsilon^p)$, la loi suivante :

$$H(\varepsilon^p) = \frac{K}{M} p^{\frac{1-M}{M}} \quad [I.5]$$

où p est la déformation plastique cumulée :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad [I.6]$$

L'application du critère d'instabilité géométrique de Considère permet de retrouver la limite à rupture du matériau en traction uniaxiale.

L'écrouissage isotrope correspond à une croissance homothétique de la surface de charge. Pour prendre en compte l'effet des contraintes internes X_{ij} du matériau sans pour autant spécifier leur provenance, il est possible d'introduire dans ce critère un écrouissage cinématique ([P49], [Z59]) correspondant quant à lui à une translation de la surface de charge. Cette modification du premier critère permet de mieux reproduire l'effet Bauschinger. On peut prendre en première approximation une loi linéaire pour l'écrouissage cinématique. Dans ce cas, on obtient :

$$\dot{X}_{ij} = C \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad [I.7]$$

La figure I.4 représente l'évolution de la surface de charge avec la déformation plastique pour un écrouissage isotrope et cinématique :

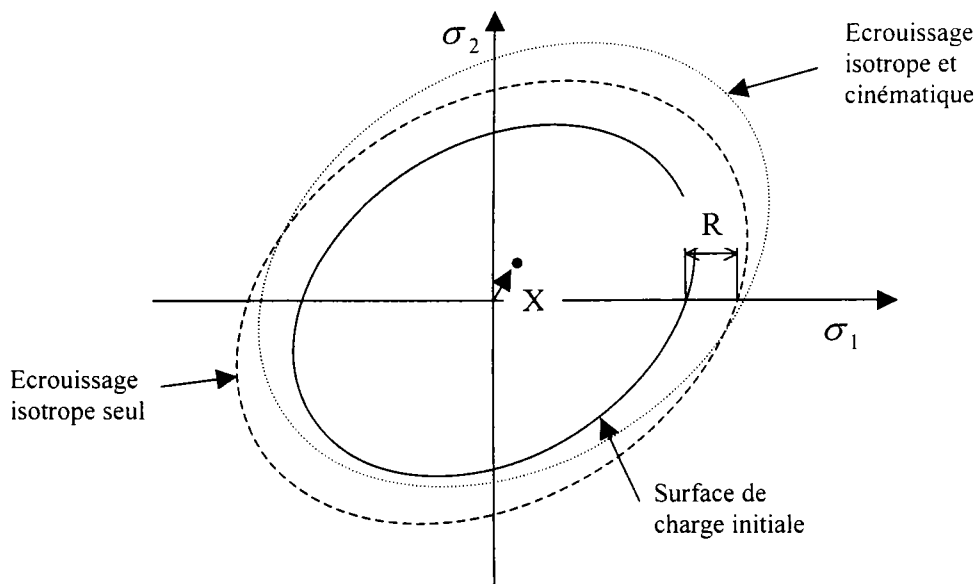


Figure I.4 : Evolution de la surface de charge dans le cas d'un écrouissage isotrope seul et dans le cas d'un écrouissage isotrope plus cinématique.

La microstructure interne du matériau est prise en compte de façon très « moyennée » au travers des lois d'écrouissage. De façon schématique, l'écrouissage isotrope peut être relié à l'augmentation de la densité de dislocation au cours de la déformation plastique. L'écrouissage cinématique, quant à lui, représente l'évolution des contraintes internes au sein du matériau au cours du chargement.

Ces modèles donnent des résultats satisfaisants et rapides pour des chargements monotones et proportionnels mais s'avèrent peu efficaces pour des chargements complexes. L'introduction d'un écrouissage cinématique permet d'améliorer les résultats concernant le seuil de plasticité pour un essai Bauschinger mais donne de très mauvais résultats pour les trajets durs et pseudo continus.

Pour obtenir de meilleurs résultats pour des chargements cycliques et des petites déformations, beaucoup ont introduit des lois d'évolution des contraintes internes plus complexes ([Z59], [M67], [HHZ89]). Malgré cela, ces modèles n'obtiennent pas le plateau correspondant à une stagnation de la contrainte, alors que celui-ci est déjà présent à petites déformations (Hu[92]).

Pour améliorer les résultats obtenus pour les essais Bauschinger, Hu et al. introduisent de nouvelles variables internes prenant en compte les effets de la microstructure de dislocations. Les détails de ce modèle seront exposés dans la dernière partie du chapitre I.

1.2.2 Modèles microscopiques

Ces modèles basés sur la théorie des milieux discrets utilisent des Volumes Élémentaires Représentatifs (VER) de taille caractéristique de quelques nanomètres.

A cette échelle, apparaissent de façon discrète, les défauts de la matière ou plus particulièrement les défauts cristallins. Ceux-ci peuvent être regroupés en trois catégories :

- Les défauts ponctuels : lacunes et précipités
- Les défauts linéaires : dislocations
- Les défauts surfaciques : faute d'empilement et interfaces

Les modèles microscopiques étudient plus particulièrement les mécanismes associés à la création, l'évolution et l'annihilation des dislocations [K79] dans la mesure où leur mouvement est le mécanisme essentiel générant la déformation plastique à cette échelle.

Pour cela, Peach et Koehler ont calculé la force thermodynamique agissant sur un segment de dislocation. En utilisant cette force et en discrétisant une boucle de dislocation entière, il est possible d'obtenir son mouvement. A partir de la relation d'Orowan, reliant la vitesse des dislocations au taux de glissement, on peut remonter au taux de déformation plastique du VER.

Kubin [K99], en élargissant cette méthode à une configuration complète de dislocations, et en introduisant des lois d'interaction entre dislocations, arrive à reproduire la formation d'une structure cellulaire de dislocation au cours de la déformation d'un monocristal.

Le problème de ces modèles est leur grande difficulté à remonter jusqu'à l'échelle macroscopique. Les mécanismes physiques microscopiques (création, mouvement, ancrage, annihilation...) sont décrits de façon précise, mais les transitions d'échelle vers les variables macroscopiques que sont la déformation plastique et la contrainte sont rarement abordées. De plus il est très difficile, à partir d'une taille d'échelle si faible, de poser correctement les conditions aux limites et les conditions initiales dans le VER. La modélisation d'un joint de grain par exemple et ses actions sur le comportement intragranulaire sont très difficiles à représenter. Ces modèles, d'une très grande utilité pour comprendre les mécanismes physiques locaux, ne sont souvent appliqués qu'à des monocristaux.

La structure polycristalline des métaux sera prise en compte par des modèles utilisant des échelles plus grandes avec des Volumes Elémentaires Représentatifs contenant un ensemble de grains.

I.2.3 Modèles polycristallins

Pour ces modèles, la taille du Volume Elémentaire Représentatif est de quelques centimètres. Cette échelle prend en compte la structure polycristalline du matériau sans décrire de façon précise ce qui se passe à l'intérieur des grains.

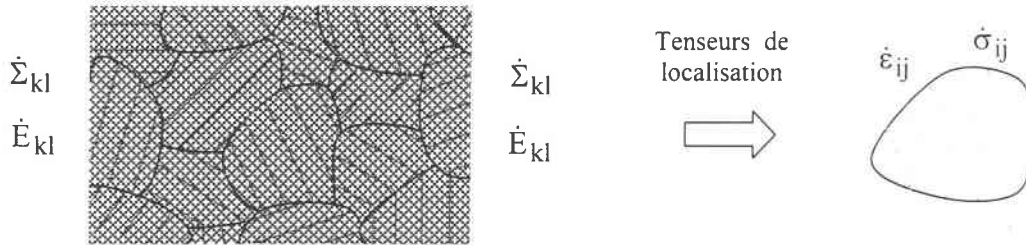


Figure I.5 : Les tenseurs de localisation relient les grandeurs macroscopiques aux grandeurs locales appliquées au grain.

Des méthodes de transition d'échelle, comme par exemple celles de Taylor, Sachs ou la méthode autocohérente permettent de relier les taux de déformation et de contrainte macroscopique \dot{E}_{ij} , $\dot{\Sigma}_{ij}$ aux grandeurs locales $\dot{\epsilon}_{ij}$ et $\dot{\sigma}_{ij}$ appliquées au grain (figure I.5). Le tenseur de localisation ainsi défini, peut dépendre du comportement local du grain, de sa géométrie (forme et orientation) et du comportement du milieu dans lequel il est confiné. On peut donc ainsi prendre en compte en partie les contraintes internes d'ordre deux issues des interactions entre grains.

La déformation plastique locale est décrite en terme de glissements homogènes sur chacun des systèmes cristallographiques. Les équations suivantes donnent le taux de déformation $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ et le taux de rotation plastique $\dot{\omega}_{ij}^p$ en fonction des glissements cristallographiques $\dot{\gamma}^g$.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = R_{ij}^g \dot{\gamma}^g \quad [I.8]$$

$$\dot{\omega}_{ij}^p = P_{ij}^g \dot{\gamma}^g \quad [I.9]$$

R_{ji}^g et P_{ij}^g sont les tenseurs de projection de Schmid associés au système de glissement g . Pour les modèles polycristallins, les variables internes (au sens thermodynamique) sont les glissements cristallographiques homogènes et non la déformation plastique comme dans les modèles macroscopiques. La force thermodynamique et la force critique associées au glissement sont :

- la cission résolue calculée comme la projection de la contrainte locale sur le système de glissement
 - la cission critique représentant la résistance propre du grain au glissement.
- Le critère pour déterminer si un système est potentiellement actif est donné par l'équation suivante :

$$|\tau^g| = \tau_c^g \quad [I.10]$$

Les phénomènes physiques intragranulaires, (principalement les mécanismes liés aux dislocations) sont pris en compte au travers :

- du choix des variables internes : les γ^g ont été choisis pour rendre compte du mode particulier de déformation des grains par glissement suivant ses systèmes cristallographiques.
- du calcul de la cission critique
- des lois d'écrouissage reliant le taux de cission critique aux taux de glissement.

$$\dot{\tau}_c^g = H^{gh}(\gamma^i) \dot{\gamma}^h \quad [I.11]$$

Franciosi [F84] a introduit dans cette loi l'évolution de la densité de dislocation moyenne sur les systèmes de glissement au cours de la déformation plastique. La cission critique suivant le système g (τ_c^g), est reliée aux densités de dislocation suivant tous les systèmes (ρ^h) au travers de la loi de Schmidt :

$$\tau_c^g = \tau_c^o + \mu b \sqrt{a^{gh} \rho^h} \quad [I.12]$$

où b est l'amplitude du vecteur de Burgers, μ le module élastique de cisaillement, τ_c^o la cission critique initiale et a^{gh} la matrice d'interaction entre systèmes de glissement (cf. Franciosi).

Le taux d'écrouissage suivant le système g est obtenu en dérivant l'équation [I.11] :

$$\dot{\tau}_c^g = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 b^2}{\tau_c^g - \tau_c^o} a^{gh} \dot{\rho}^h \quad [I.13]$$

En tenant compte des différents mécanismes intragranulaires (création et annihilation de dislocations) on peut relier l'évolution de la densité de dislocation $\dot{\rho}^h$ aux taux de glissement $\dot{\gamma}^u$. On obtient ainsi la relation :

$$\dot{\tau}_c^g = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 b^2}{\tau_c^g - \tau_c^o} a^{gh} (L_{hu} \dot{\gamma}^u) \quad [I.14]$$

Ces modèles permettent de prendre en compte l'effet des contraintes internes d'ordre deux induites par la structure polycristalline des métaux et de suivre l'évolution de la texture cristallographique auxquelles est attachée une partie de l'anisotropie induite par la

déformation plastique. Contrairement aux modèles phénoménologiques présentés précédemment, les contraintes internes et leur évolution n'apparaissent pas comme des lois complémentaires mais comme des résultats des équations de champ. Les mécanismes physiques intragranulaires, quant à eux, restent du domaine des lois complémentaires issues la plupart du temps d'observations expérimentales.

De façon générale, on peut dire que ces modèles donnent des résultats en accord avec les observations expérimentales pour :

- les contraintes internes d'ordre deux (intergranulaires)
- les textures pour des chargements monotones
- l'écrouissage pour des chargements monotones
- les surfaces de plasticité
- anisotropie plastique induite par la texture

Par contre, le problème des changements de trajets persiste. On ne retrouve pas la forme des régimes transitoires, que ce soit pour un trajet dur ou un trajet de type Bauschinger.

Pour une séquence de laminage traction transverse, la réponse macroscopique obtenue ne possède pas de pic de contrainte. De plus, la localisation de la déformation plastique n'est pas du tout représentée. Pour un essai Bauschinger, les constatations sont identiques. Le plateau observé au début du second chargement n'est pas obtenu numériquement et le seuil de microplasticité est très souvent surévalué.

Si ces modèles éprouvent tant de difficultés à reproduire les trajets de chargement complexes, c'est que certains mécanismes physiques sont mal pris en compte car mal décrits. Parmi ces mécanismes, celui qui semble primordial est la formation d'une structure intragranulaire de dislocations avec la déformation plastique. L'hétérogénéité du champ de déformation plastique intragranulaire et le champ de contraintes internes (ordre trois) qui lui est associé, n'est pas représenté de façon suffisante au travers des lois d'écrouissage comme celles de l'équation [I.11].

Dans ce travail, nous allons donc bâtir un modèle du comportement élastoplastique des métaux en prenant en compte les effets des hétérogénéités plastiques intragranulaires.

I.3 Hétérogénéités plastiques intragranulaires

I.3.1 Glissement multiple hétérogène

Ce phénomène correspond à une subdivision du grain en zones de glissement multiple homogène [R88].

Cette hétérogénéité est sans doute liée à la perturbation du champ de contrainte dans le grain par les interactions intergranulaires (contraintes d'ordre deux). Les glissements nécessaires pour accommoder les différentes régions du grain avec les déformations des grains voisins sont différents et s'activent simultanément.

Contrairement aux joints de grain qui sont des frontières stationnaires par rapport à la matière, les frontières entre les zones de glissement multiple homogène sont des frontières mobiles se mettant en place et évoluant avec la déformation plastique.

Les contraintes internes associées à cette hétérogénéité sont difficiles à évaluer mais semblent de l'ordre de grandeur des contraintes d'ordre deux issues de l'interaction intergranulaire. Les conséquences sur le comportement global semblent donc négligeables par rapport à d'autres hétérogénéités comme la microstructure de dislocations.

I.3.2 Microstructures de dislocations

a) Conditions en température et vitesse de déformation

En chargement monotone ou séquentiel, la déformation plastique intragranulaire n'est pas uniforme à l'échelle du micromètre. Si la température à laquelle se produit la déformation dépasse une température critique T_C , il se crée dans chaque grain une microstructure cellulaire de dislocations constituée de zones à forte (parois des cellules) et à faible (intérieur des cellules) densité de dislocation (figure I.6).

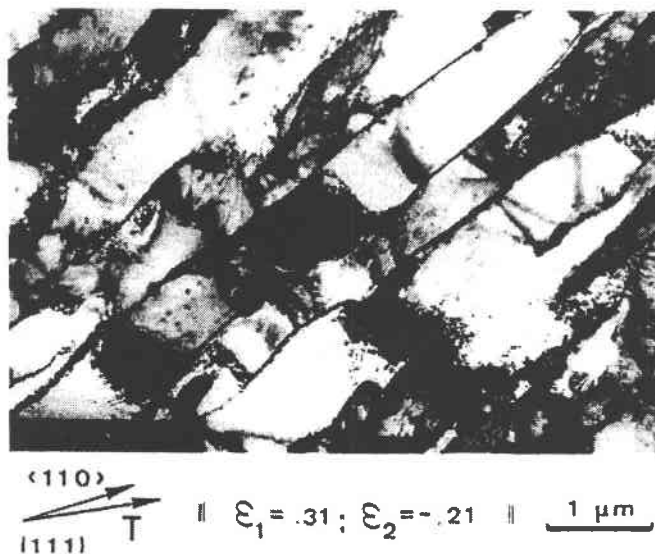


Figure I.6 : Microstructure de dislocation pour un essai de traction [S]

La température critique T_C est définie par Luft [L91] pour les métaux à structure Cubique Centrés (CC) entre $0.1 T_F$ et $0.2 T_F$ où T_F désigne la température de fusion du métal en K. En dessous de cette température, la répartition des dislocations au cours de la déformation reste uniforme. Au-dessus de cette température, l'activité thermique devenant prépondérante devant la différence de mobilité entre dislocations coins et vis, les métaux CC acquièrent un comportement proche des métaux pour lesquels on assiste à la formation de cellules (CFC par exemple).

La vitesse de déformation joue un rôle important dans le processus de formation de la microstructure de dislocation. On note que la taille des cellules de dislocations observées expérimentalement diminue avec la vitesse de déformation. Au-delà d'une vitesse limite, la répartition des dislocations reste uniforme tout au long du chargement.

b) Formation de la microstructure avec la déformation plastique

Pollnov et al. [PPL75] ont observé la formation des cellules de dislocations dans un monocristal de fer. Ils dénombrent quatre stades illustrés par la figure I.7 :

Stade 0 : Des sources de dislocations (Frank et Read...) créent un grand nombre de dislocations mobiles sur le système de glissement principal.

Stade 1 : Une partie des dislocations primaires est bloquée par des défauts ponctuels (lacunes, précipités...) ou d'autres dislocations et forment des petits amas de boucles contribuant ainsi à l'écrouissage du matériau.

Stade 2 : Un deuxième système de glissement est activé. Les dislocations qu'il génère viennent interagir fortement avec les dislocations du système primaire. Il en résulte la création d'une structure croisée centrée sur le système primaire.

Stade 3 : La structure cellulaire de dislocations est installée. Sa forme et son orientation sont liées au réseau cristallographique et aux activités relatives des systèmes primaires et secondaires.

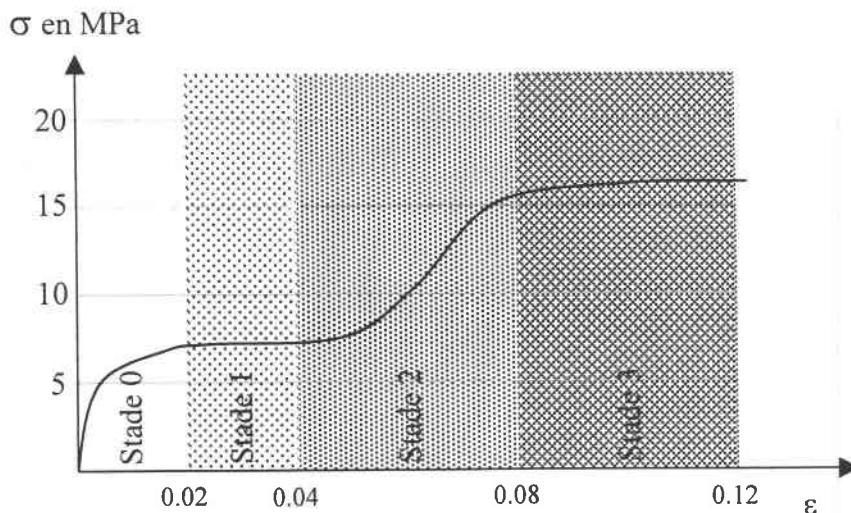


Figure I.7 : les différents stades de formation de la microstructure de dislocations dans un monocristal de fer

Keh et Weissmann [KW63] ainsi que Lan et al. [LKD92] observent les mêmes évolutions de la microstructure de dislocations pour un fer polycristallin.

c) Morphologie et orientation de la microstructure

De nombreuses études ont permis de relier la forme et l'orientation de la microstructure de dislocations à l'orientation cristallographique du grain et au type de chargement appliqué. [KW63, FS83, S86, RS89]

Pour des essais de traction uniaxiale sur des monocristaux ou des polycristaux, on observe des cellules de dislocations de forme allongée constituées de longs murs parallèles [PPL75, T70, LS83, LDY93, RB77,]. Les parois de dislocations sont fines et bien définies. Les mêmes observations ont été réalisées pour des essais de cisaillement [RS89], des essais de laminage [I89, S63] ou des essais de torsion.

L'orientation de la microstructure est directement liée à l'orientation des systèmes de glissement actifs dans le grain. En traction uniaxiale, en cisaillement ou pour un laminage, dans la plupart des grains, il existe un système de glissement (système primaire) très actif devant les autres (systèmes secondaires). Fernandes et al. [FS83] observent que les murs de dislocations s'orientent presque parallèlement (à quelques degrés près) à ce système, l'écart de quelques degrés étant certainement dû à l'influence des systèmes secondaires.

Par contre, pour des trajets de type expansion équibiaxiale pour lesquels il existe plusieurs systèmes de glissement primaires d'activité plastique comparable, les cellules sont de forme équiaxe [FS83, S86]. En effet pour ce type de trajet, il n'existe pas de direction de glissement privilégiée et donc pas d'orientation ni de forme privilégiée pour la microstructure de dislocation (figure I.8).

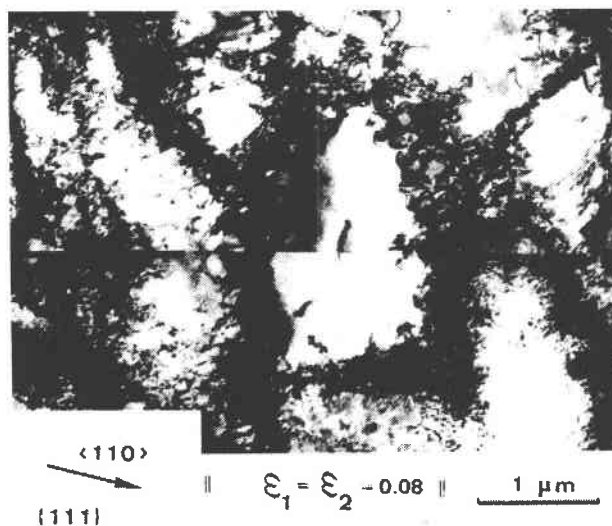


Figure I.8 : microstructure de dislocation obtenue après une expansion équibiaxiale[]

La topologie des cellules de dislocations étant liée à l'activité des systèmes de glissement primaires et secondaires, l'orientation et la forme des cellules sont uniformes par zones de glissement homogène. C'est-à-dire que dans les gros grains, la morphologie des cellules de dislocations ne sera pas la même d'un endroit à l'autre du grain [H90, JH90].

De plus, les zones de glissement homogène étant désorientées les unes par rapport aux autres de quelques dixièmes de degrés, l'accommodation de ces zones entraîne une accumulation de dislocations aux frontières de ces sous-domaines. Ces dislocations forment des murs denses de dislocations qui contrairement aux joints de grain sont des frontières mobiles se mettant en place et évoluant avec la déformation plastique (figure I.9).

Pour les aciers, la taille de grain est suffisamment faible pour que la structure intragranulaire de dislocation reste uniforme tout au long de la déformation.

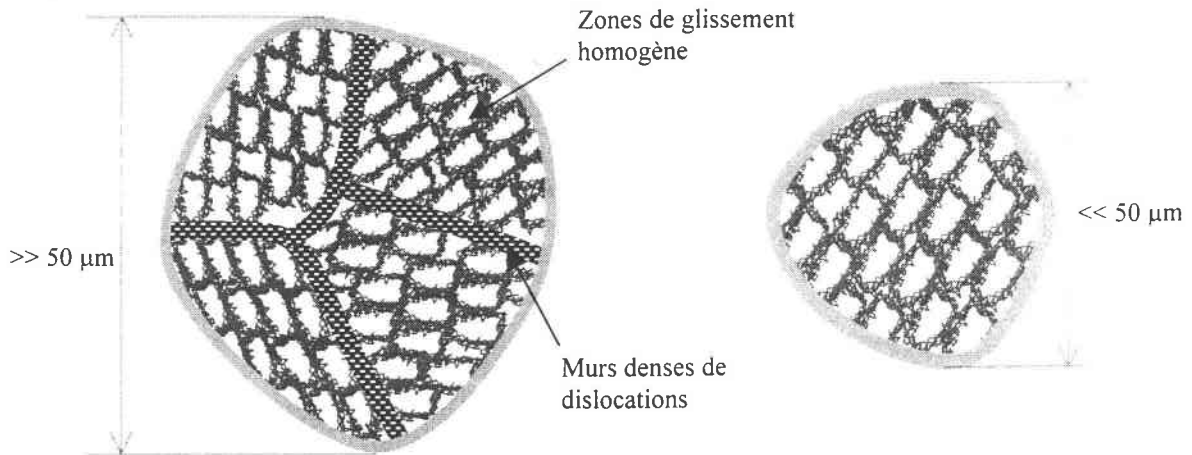


Figure I.9 : subdivision des gros grains en zones à morphologie de cellules de dislocations uniformes séparées par des murs denses de dislocations

Le tableau I.1 donne, en fonction du type de chargement, l'orientation et la forme des cellules observées expérimentalement.

	Orientation	Référence géométrique
Traction	33° à 66°	Direction de traction
Expansion équibiaxiale	aucune	Normale au plan de l'expansion
Laminage	$\sim 35^\circ$	Plan de laminage
Cisaillement	$\sim 0^\circ$ ou $\sim 90^\circ$	plan de cisaillement

Tableau I.1 : orientation des cellules de dislocations pour des chargements simples

Lemoine et al. [LMB94] ont étudié, à l'aide de la méthode autocohérente en élastoplasticité classique, les relations entre les directions cristallographiques des grains, l'orientation de la microstructure de dislocations mesurée expérimentalement et la direction du chargement.

Les données d'entrée du problème sont :

- Acier doux sans texture initiale
- Les familles de glissement prises en compte sont $\{110\}\langle 111\rangle$ et $\{112\}\langle 111\rangle$
- Elasticité isotrope ($G = 80 \text{ Gpa}$, $\nu = 0.3$)
- Ecrouissage linéaire prenant en compte l'auto-écrouissage et l'écrouissage latent (Franciosi)
- Quatre types de chargement :
 - Traction uniaiale
 - Expansion équibiaxiale
 - Cisaillement
 - Laminage

Si on replace par projection stéréographique dans le plan de la tôle l'orientation des deux systèmes les plus actifs de chaque grain, on obtient pour différents taux de chargement en traction uniaiale la figure I.10.

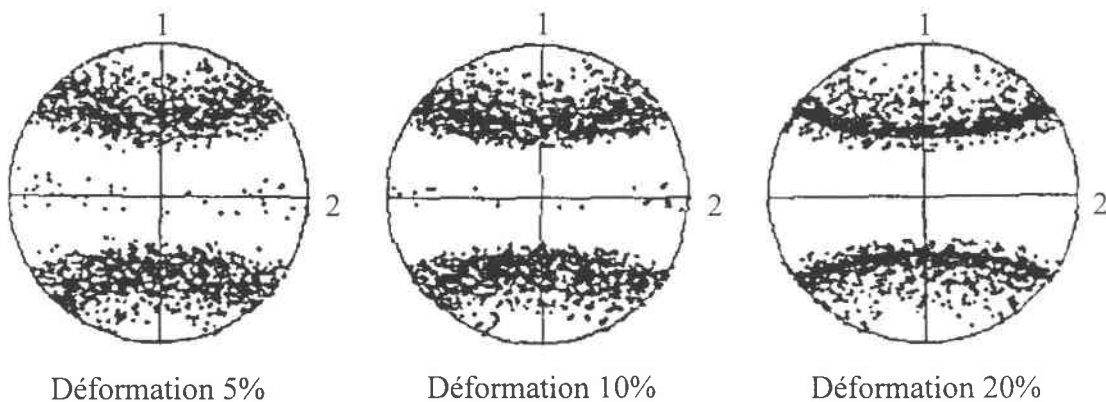


Figure I.10 : projection stéréographique dans le plan de la tôle des directions des deux systèmes de glissement les plus actifs pour chaque grain en traction

Pour une déformation de 5%, l'ensemble des orientations forme un nuage plus ou moins diffus. Quelle que soit la direction cristallographique du grain (mise à part quelques singularités), les systèmes de glissement activés sont orientés entre 35° et 45° par rapport à la direction de traction. Ceci est dû en partie au grand nombre de systèmes de glissement dans les structures Cubiques Centrées.

Avec la déformation plastique, les figures de pôles montrent que les directions des systèmes de glissement les plus sollicités se resserrent autour d'un ensemble (ponctuel ou linéique) de directions idéales. La rotation du réseau cristallin fait passer d'une répartition aléatoire des directions cristallographiques vers une répartition centrée sur des directions idéales dépendant essentiellement du chargement extérieur. Lemoine et al. montrent que ces directions privilégiées concordent avec les orientations des structures de dislocations mesurées expérimentalement.

Toute cette étude tend à montrer que la forme et l'orientation de la microstructure de dislocations sont surtout influencées par le chargement extérieur. D'un grain à l'autre, **la topologie de la microstructure de dislocations** ne varie pas beaucoup et résulte d'un **effet global du chargement** sur le polycristal.

d) Evolution de la microstructure en chargements monotones

Contrairement aux joints de grains qui sont des frontières fixes par rapport à la matière, la microstructure de dislocation évolue au cours de la déformation plastique.

En chargement monotone, pour un acier doux et quel que soit le type de chargement (traction uniaxiale, expansion équibiaxiale et déformation plane), Schmitt et al. [FS83, S86] observent que l'épaisseur des parois diminue avec la déformation plastique et tend vers une valeur limite située aux alentours du dixième de micromètre.

De la même façon, il constate que la taille des cellules diminue avec la déformation plastique [S86]. Il attribue ce phénomène à la création, au cours du chargement, de nouveaux murs de dislocations au sein même de la microstructure déjà existante.

La stabilisation de la microstructure obtenue aux alentours de 40% de déformation plastique, semble liée à l'équilibre entre les mécanismes de création et d'annihilation des dislocations.

La taille des cellules de dislocations est de l'ordre de $1\mu\text{m}$, l'épaisseur des murs de $0.1\mu\text{m}$ alors que les grains ont une taille caractéristique de $10\mu\text{m}$.

Tabata et al.[TYF78] en observant la structure cellulaire dans un monocristal d'aluminium constatent une diminution de la longueur des lignes de glissement avec la déformation plastique. Ils expliquent que les dislocations mobiles s'arrêtent exactement dans les murs de dislocations et n'observent pas de ligne de glissement traversant plusieurs cellules.

Le libre parcours moyen des dislocations est donc limité par la taille des cellules. La figure I.11 montre comment évolue les dislocations au sein de la microstructure de dislocation.

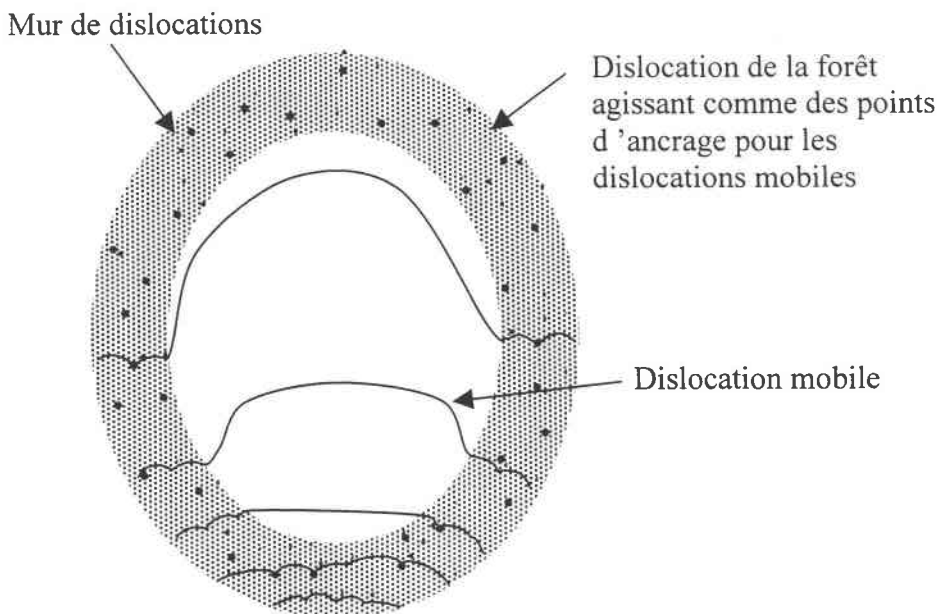


Figure I.11 : mouvement des dislocations au sein de la microstructure

Sous l'application d'une contrainte, des dislocations générées par des sources situées dans les murs se déplacent. Leur vitesse est plus grande à l'intérieur des cellules du fait du faible nombre d'obstacles qu'elle y rencontre. Par contre dans les murs, chaque dislocation de la forêt jouant le rôle d'ancrage pour les dislocations mobiles, leur vitesse est faible. La vitesse de propagation des dislocations augmente rapidement au début de la traversée de la cellule, puis décroît lentement jusqu'à atteindre le mur opposé où elle est bloquée par la forêt de dislocations.

De ces observations, on peut noter deux phénomènes très importants :

- Le libre parcours moyen (L) des dislocations est limité par la taille des cellules. Par exemple, pour une traction uniaxiale, la forme allongée des cellules confère à L un caractère anisotrope (figure I.12).
- Les dislocations ayant généré du glissement plastique dans les cellules en les traversant se stockent dans les murs et accroissent ainsi la densité de dislocations accumulées au sein du matériau.

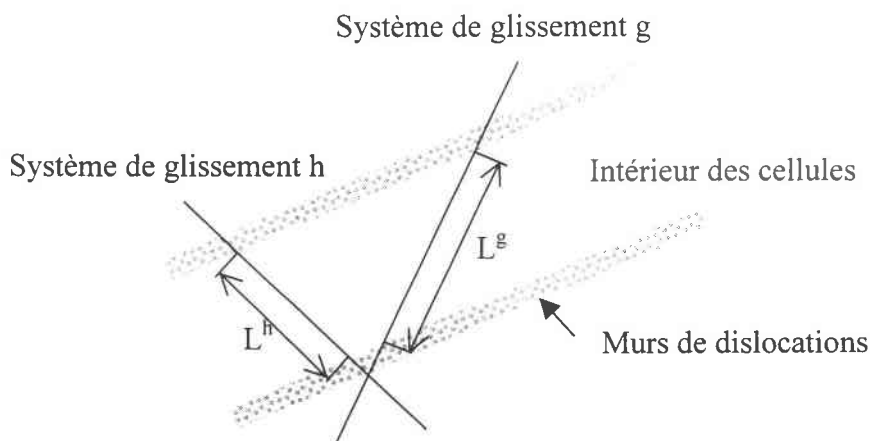


Figure I.12 : anisotropie du libre parcours moyen des dislocations induite par la microstructure de dislocations (cas particulier de murs plans)

Il est très important de noter que les parois de dislocations sont des structures dipolaires (figure I.13). Le glissement se produisant dans le même sens dans chacune des cellules, les dislocations stockées de part et d'autre des murs sont de signes opposés. Avec l'augmentation de la contrainte, la distance entre les deux dislocations composant le dipôle diminue jusqu'à une valeur limite en dessous de laquelle, les deux dislocations s'annihilent spontanément.

De façon générale, pour des chargements monotones, l'accroissement de la densité de dislocations dans le matériau est dû au stockage dans les parois des dislocations ayant traversé les cellules y générant ainsi du glissement. L'annihilation se produit essentiellement dans les murs de dislocations et correspond à l'annihilation des dipôles stockés, poussée par la contrainte interne dans les murs (chargement plus interaction cellule - paroi).

L'hétérogénéité du champ de déformation plastique associée à la microstructure de dislocations génère un champ de contrainte lui aussi fortement hétérogène. Mugrabi [M88] a mesuré la contrainte interne dans les murs de dislocations : Il l'estime à trois fois la limite d'écoulement macroscopique.

La densité de dislocation mesurée par Mughrabi [M83] dans les murs de dislocations peut atteindre 10^{15} m^{-2} alors que celle dans les cellules reste de l'ordre de 10^{13} m^{-2} .

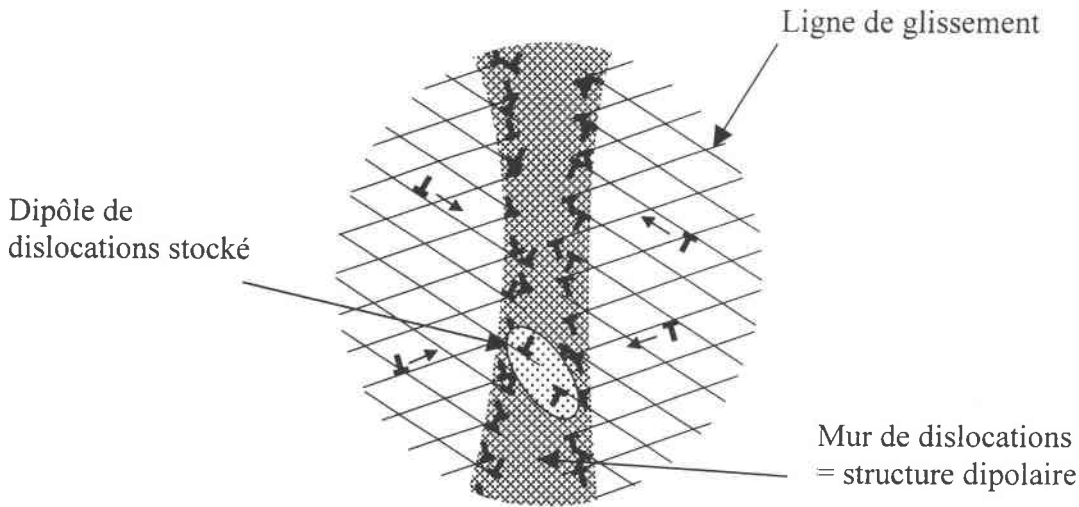


Figure I.13 : les parois des cellules sont des structures dipolaires de dislocations

e) Chargements complexes

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que la microstructure de dislocation jouait un rôle essentiel au cours des chargements complexes. Au début du régime transitoire, une microstructure de dislocations caractéristique du premier chargement est installée. Cette microstructure est caractérisée par :

- Une géométrie : forme et orientation des cellules modifiant de façon anisotrope le libre parcours moyen des dislocations.
- Des contraintes internes d'ordre trois issues des interactions cellules – parois
- Une densité de dislocation essentiellement concentrée dans les murs
- Une polarité des murs de dislocations

Cette configuration doit s'adapter au nouveau chargement. L'interaction est d'autant plus importante que les microstructures caractéristiques des deux chargements (liées à leurs systèmes de glissement respectifs) sont différentes.

Thuillier [T92] a étudié cette interaction en fonction du type de chargement complexe (Bauschinger, continu ou dur)

- Trajet continu :

Les systèmes de glissements activés sont les mêmes, il n'y a pas de grosse incompatibilité entre les microstructures caractéristiques du premier et du deuxième chargement. Ceci explique notamment l'aspect continu de la réponse macroscopique.

- Trajet Bauschinger :

Il y a dissolution de la première microstructure. Les dislocations accumulées dans les murs par le premier chargement sont sollicitées en sens inverse par le second chargement. Les dislocations se libèrent donc des murs et par interaction viennent former de nouveaux murs suivant le même mode que pour un trajet monotone (voir figure I.14).

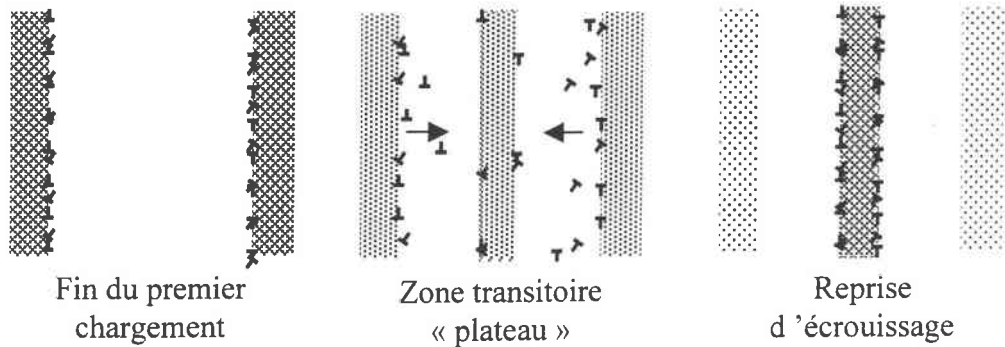


Figure I.14 : Dissolution et reconstruction de la microstructure de dislocations au cours d'un essai Bauschinger ou pseudo Bauschinger

D'après Hasegawa et al. ou Hu et al. toute la phase de dissolution de la microstructure déjà existante se fait à densité de dislocation totale constante, ce qui explique le fait que l'écrouissage devient faible mais positif pendant cette phase. La reprise d'écrouissage correspond à la reconstitution de murs de dislocations qui auront une polarité opposés à celle du préchargement.

- Trajet dur :

Les transitions de microstructure, pour les trajets durs, sont beaucoup plus difficiles à définir. Rauch, Schmitt, ou Thuillier ont observé que la microstructure de dislocations ne peut s'adapter au nouveau chargement et que la déformation se localise dans les grains sous la forme de microbandes de cisaillement. Ce processus peut conduire à la formation de macrobandes de cisaillement et à la ruine du matériau. La capacité du matériau à adapter sa configuration de dislocations dépend fortement de l'amplitude de la prédéformation.

De façon générale, Schmitt et al. [FS83, S86, RS89] ont observé que, pendant le régime transitoire, la microstructure passe de la configuration acquise à la fin du premier chargement vers une configuration correspondant à celle qu'on aurait eue en appliquant le second chargement seul. Cette transition est plus ou moins continue et peut provoquer l'activation de mécanismes perturbateurs comme la formation de microbandes de cisaillement. Schmitt et al. [FS83] notent que la durée du régime transitoire augmente avec l'amplitude de la prédéformation.

I.3.3 Microbandes de cisaillement

Pour des trajets de chargement complexes durs ou pour des grandes déformations en chargement monotone, Thuillier et beaucoup d'autres [T92, BHK89, MHH81, HK86, JH90, H90, ALH91, H92, H93], observent à l'intérieur de grain, la formation de microbandes de cisaillement. On distingue deux types de microbande :

a. Microbande de première génération ou microbande de transition

L'un des premiers à utiliser le terme de microbande est Hu [H62]. Il observe dans un monocristal de Fe-Si des zones d'orientation cristallographique différente ($3^\circ - 4^\circ$) séparées par des bandes. Ces bandes sont constituées d'une dizaine de segments de $0.2\mu\text{m}$ d'épaisseur et de quelques μm de longueur parallèles entre eux. Chaque segment apparaît comme une zone à faible densité de dislocations bordée de chaque côté par un mur à forte densité de dislocations.

Dymeck et al. [DB84] nomment « bandes de transition » des bandes entre deux domaines d'un même grain faiblement désorientés. Elles n'ont pas la structure de dislocations décrite par Hu. Elles forment une sorte de joint de grain accommodant la déformation des différents domaines.

Hansen et al. appellent les bandes décrites par Hu, bandes de première génération. Ces bandes séparant des blocs de cellules ont une orientation qui ne semble pas liée directement à l'orientation cristallographique du grain.

b. Microbande de deuxième génération

Hansen et al. définissent aussi une microbande de deuxième génération [H90, JH90, H92, H93]. Elle doit son nom au fait qu'elle se superpose à une microstructure déjà existante (structure cellulaire de dislocation par exemple) (figure I.16).

Ces microbandes sont des structures de dislocations de forme parallélépipédique de 0.2 à $0.4\mu\text{m}$ d'épaisseur et de quelques μm de longueur. Elles sont parallèles entre elles et sont espacées de quelques μm par la structure cellulaire de dislocations. Elles sont plus ou moins parallèles à un plan de glissement. [MH79, MHH81, T92]

Dans un grain, il n'est pas rare d'observer deux familles de microbandes. En mesurant le cisaillement exercé par la famille la plus récente sur la plus ancienne, Thuillier [T92] met en évidence le fait que chaque bande transporte un important glissement (glissement simple). La localisation de la déformation sous la forme de ces microbandes est aussi mise en évidence par le cisaillement éventuel de joints de grain [MH79].

Ces bandes apparaissent dans le matériau au cours des chargements complexes. Thuillier a déterminé, pour une séquence de traction-cisaillement, les conditions d'apparition des microbandes de deuxième génération. Ces conditions sont relatives aux systèmes de glissement actifs pendant la traction (premier chargement) vis à vis de ceux sollicités pendant le cisaillement (deuxième chargement) :

Une condition nécessaire d'apparition de microbandes est que le système de glissement associé à la microbande (ζ^g) ait été latent pendant la prédeformation [T92].



Figure I.16: microbandes réparties périodiquement dans les grains lors d'un trajet cisaillement - traction d'un acier doux [T92]

Thuillier constate aussi que dans une grande partie des cas, le système de glissement associé à la microbande est le système de glissement le plus sollicité au cours du second chargement. Il semblerait en fait que la microstructure de dislocation induite par la prédéformation ne puisse s'adapter au deuxième chargement et qu'il en résulte une déstabilisation de cette dernière. La structure de bandes de cisaillement vient se substituer à la microstructure de dislocation pour générer du glissement.

Il est très important de noter que la bande de deuxième génération est associée à un plan de glissement, qu'elle est le siège d'un important glissement et qu'elle apparaît comme la déstabilisation de la microstructure cellulaire de dislocation qui représente l'histoire thermomécanique du matériau.

c. Bandes de cisaillement

Bien que les bandes de cisaillement ne soient pas des structures intragranulaires, il est nécessaire de les étudier car elles sont les prémisses de la ruine du matériau [MH79, AS80, HM84, KR85, KM86, DHMA88, I89, K90]. Il est important entre autre de connaître les mécanismes associés à la naissance de ces macrobandes au cours des trajets de chargement durs.

Hoc [H99] a étudié la localisation de la déformation plastique dans les aciers IF (acier doux) lors d'une séquence de chargement constituée d'une traction plane suivie par une traction uniaxiale dans le sens long, transverse et à 45° par rapport à la direction de traction plane.

Il constate que pendant les essais de traction, la déformation se localise sous la forme d'une ou deux bandes macroscopiques. (figure I.15)

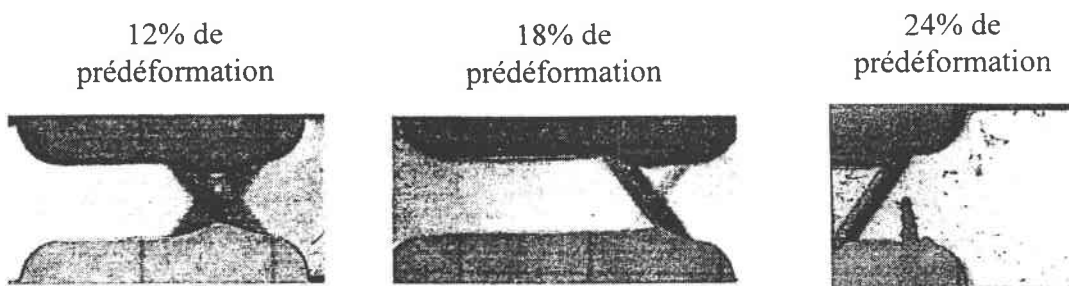


Figure I.15 : macrobandes de cisaillement pour des essais de traction plane suivis de traction uniaxiale dans le sens transverse pour différents taux de prédéformation, [H99]

Quelle que soit la direction de la traction uniaxiale, il note que ces bandes forment un angle d'environ 54° avec la direction de traction uniaxiale.

L'influence de l'apparition de ces microbandes sur le comportement macroscopique est une diminution de la force avec des déformations inférieures à 1%.

On retrouve les mêmes phénomènes pour des essais de laminages suivis de tractions dans le sens long transverse et 45° réalisées par Korbel et Martin [KM88](figure I.16).

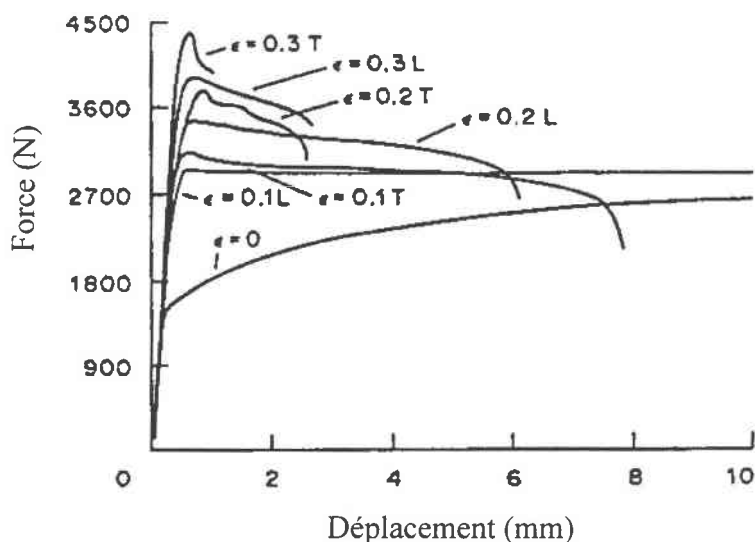


Figure I.16 : courbe force-déplacement pour des séquences de laminage suivies de traction uniaxiale dans le sens long et transverse [KM88]

Hoc [H99] a étudié plus particulièrement la germination de la macrobande de cisaillement pour des tractions uniaxiales dans le sens transverse. Il constate que quelle que soit la prédéformation en traction plane, le début de la localisation coïncide avec le maximum de force. Au début de la localisation les conditions du critère de Considère sont respectées, ce qui veut dire que la genèse de la macrobande est liée à une instabilité géométrique.

La quasi totalité de la déformation plastique est concentrée dans les macrobandes après la localisation. Hoc n'observe aucune ligne de glissement en dehors de la bande. Il observe par contre deux familles de lignes à l'intérieur des macrobandes qu'il appelle « macro systèmes de glissement ». L'influence des joints de grain semble quasi nulle.

Beaucoup d'auteurs suggèrent qu'une microstructure de dislocation particulière est à l'origine de la macrobande de cisaillement. Dève et al. [DHMA88] montrent par une étude d'un monocristal de Fe-Ti-Mn que la bande de cisaillement est un regroupement de parois de dislocations parallèles au plan de glissement, mais indépendantes des microbandes. Par contre, Korbel et Martin [KM86] ou Mori et al. [MN, MNM] affirment que la macrobande provient de la propagation de microbandes de cisaillement à travers le polycristal. Inagaki explique quant à lui, que ces bandes naissent aux joints de grain.

Lors de la création de la macrobande de cisaillement le critère de Considère est respecté [H99]. Les conditions de ce critère concernent le module tangent élastoplastique et la contrainte dans le matériau. Dans le cas de chargement complexe de type dur, la contrainte à la recharge est plus importante qu'en trajet continu. De plus le module tangent, traduisant le comportement du matériau est influencé par l'apparition de microbandes de cisaillement qui tendent en fait à le faire diminuer. L'effet des microbandes sur le comportement global du matériau lui fait atteindre les conditions du critère de Considère et provoque ainsi l'apparition de la macrobande de cisaillement. De ce fait, on peut dire que la localisation de la déformation plastique macroscopique est liée à un bouleversement de la microstructure intragranulaire.

De la même façon, Korbel et Martin [KM86] attribuent l'orientation des macrobandes non pas aux directions particulières du chargement extérieur mais à l'orientation de la microstructure de dislocations sous-jacente. Celle-ci est déterminée au travers de la cristallographie par le chargement extérieur.

I.3.4 Conclusions

Nous avons vu dans les parties I.1 et I.2 que la prise en compte de la microstructure de dislocation est nécessaire pour la modélisation du comportement élastoplastique des métaux en chargement complexe.

De l'étude de la microstructure de dislocation, il se dégage trois points fondamentaux :

- L'hétérogénéité intragranulaire apparaît avec la déformation plastique comme une division du grain en deux types de régions : des murs de dislocations qui sont des structures dipolaires dans lesquelles est accumulée la majeure partie des dislocations du matériau, des cellules où la densité de dislocation est faible. La forme et l'orientation de la microstructure ainsi constituée, résultent d'un effet global du chargement sur le polycristal.
- L'hétérogénéité à l'intérieur de chaque grain se fait par accumulation, dans les parois, de dislocations traversant les cellules. L'augmentation de la densité de dislocation dans les murs est liée ainsi au glissement cristallographique des cellules. La structure dipolaire des murs combinée à l'action des contraintes internes intragranulaires (interaction cellules – parois) définissent le processus d'annihilation des dislocations dans les murs. La saturation de la densité de dislocation constatée expérimentalement vient de l'équilibre entre les mécanismes d'accumulation et d'annihilation [R93].
- La microstructure de dislocation évolue au cours de la déformation plastique contrairement à la structure polycristalline qui reste fixe par rapport à la matière. Au cours de chargements monotones, les parois de dislocations s'amincissent et la taille des cellules de dislocations diminue. Au cours de chargements complexes, cette microstructure peut rester inchangée (trajet continu) ou se dissoudre pour en reformer une nouvelle (trajet Bauschinger et certains trajets durs) ou bien encore se déstabiliser et conduire à la formation de microbandes de cisaillement. Celles-ci peuvent provoquer la localisation de la déformation plastique macroscopique. (Macrobandes de cisaillement...)

Les phénomènes physiques recensés ci-dessus paraissent fondamentaux pour la mise en place d'un modèle micromécanique du comportement élastoplastique des métaux soumis à des chargements complexes.

Dans la partie qui suit, sont exposés quelques modèles représentant de façon directe les effets de la microstructure de dislocation.

Comme nous l'avons vu, le comportement des deux phases est plastique linéaire. De la même façon, la loi d'évolution de la force critique suivant la variable morphologique est prise linéaire avec seuil. Les lois d'évolution sont données par :

$$\begin{cases} F_c^i = F_{c0} + H^i \gamma^i \\ F_c^o = F_{c0} + H^o \gamma^o \\ F_c^a = F_{ca} + H^a \gamma^a \end{cases} \quad [I.22]$$

Le seuil de plasticité des deux phases est pris initialement identique. Les résultats obtenus par ce modèle sont exposés sur la figure I.20.

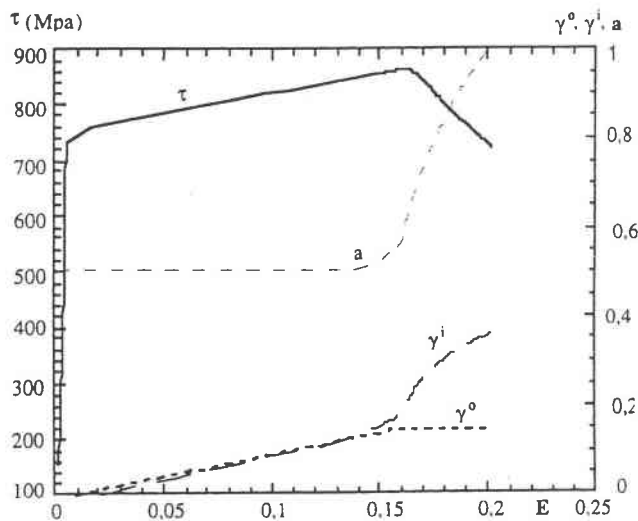


Figure I.20 : évolution de la contrainte macroscopique et des variables internes avec la déformation totale

La figure I.20 montre que la localisation de la déformation plastique est obtenue avec l'activation de la variable morphologique. Sans ajout d'un terme d'écrouissage non local ni l'introduction d'un autoécrouissage faible ou négatif, David obtient l'adoucissement du matériau. Cet adoucissement est lié à l'aspect non elliptique de l'énergie libre vis à vis de la morphologie. La localisation de la déformation plastique macroscopique ainsi obtenue est donc le résultat de la déstabilisation de la microstructure de dislocation et non de l'adoucissement propre de l'une des phases (écrouissage négatif).

1.5 Modèle Biphase Evolutif Non Local

1.5 Modèle Biphase Evolutif Non Local

Sous certaines conditions (Température, vitesse de déformation...), au cours de la déformation plastique, apparaît dans chaque grain une microstructure de dislocation constituée de zones à forte et faible densité de dislocation. Cette microstructure est la marque d'un champ de déformation plastique et de contraintes internes associées fortement hétérogènes. Au cours des trajets de chargement complexes, la microstructure de dislocation joue un rôle prépondérant. Son comportement est à l'origine de la diversité des formes de régimes transitoires observée pour des chargements complexes de type dur, continu ou Bauschinger.

Le modèle autocohérent élastoplastique classique ne prenant pas en compte l'hétérogénéité de la déformation plastique intragranulaire ni le champ de contraintes internes qui lui est associé, n'arrive pas à reproduire le comportement lors de chargements complexes. Les changements de microstructures pouvant déboucher sur une instabilité plastique sous la forme de microbandes, ne peuvent pas non plus être envisagés par une description du champ de déformation plastique par champ moyen à l'échelle du grain.

Les modèles macroscopiques comme celui développé par Hu et Téodosiu ne sont pas satisfaisants non plus, dans la mesure où pour chaque matériau et chaque chargement il est nécessaire de procéder à une identification des paramètres des lois complémentaires. Cette démarche, même si elle est envisageable pour l'étude de trajets connus, ne peut être utilisée dans une démarche de conception de matériaux ou de trajets de chargement optimum.

Dans ce travail, nous nous proposons donc de bâtir un modèle micromécanique du comportement élastoplastique des métaux tenant compte des effets de la microstructure de dislocation. Il semble fondamental de conserver au travers des hypothèses que nous devons formuler, les trois points suivant :

- a. La densité de dislocation, la déformation plastique et le champ de contraintes internes au sein de la microstructure de dislocation sont fortement hétérogènes.
- b. La microstructure se forme par accumulation dans les murs de dislocations ayant traversé les cellules. L'augmentation de la densité de dislocation dans les parois est liée à la déformation plastique des cellules.
- c. La microstructure de dislocation évolue au cours du chargement. Les effets de cette évolution sont fondamentaux au cours des chargements complexes.

1.5.1 Matériau biphasé

H1 : Comme dans les modèles de Mughrabi [M83], Muller [M94], Lemoine [L95] ou David [D97], la microstructure est considérée comme un matériau biphasé. L'intérieur des cellules constitue la première phase et les murs de dislocation la deuxième.

H2 : La structure polycristalline du matériau n'est pas prise en compte :
Deux choses nous ont amené à faire cette hypothèse :

- En chargement complexe, les effets de la microstructure de dislocation sont prépondérants devant ceux de la structure polycristalline. C'est-à-dire que la morphologie de la microstructure est le principal paramètre agissant au cours des changements de trajets. Or celle-ci varie peu d'un grain à l'autre du fait du grand nombre de systèmes de glissement dans les matériaux CC et de l'évolution de la texture avec la déformation. Celle-ci résulte en grande partie d'un effet global du chargement macroscopique.

Néanmoins, cette hypothèse forte peut porter à conséquence, notamment pour la modélisation du comportement de matériaux prédéformés ayant subi un recuit de restauration. En effet, le recuit efface la microstructure de dislocation induite par la prédéformation et ne garde que la texture. La microstructure de dislocation qui se forme au cours des chargement après le recuit est influencée par cette texture initiale. L'incidence sur le comportement en chargement complexe peut être non négligeable.

- Le fait de ne pas tenir compte de la texture cristallographique du matériau permet de dissocier les difficultés associées d'une part à la transition d'échelle macroscopique et d'autre part à la gestion des variables internes morphologiques. Ce modèle simplifié permet de comprendre comment se comportent ces variables et d'envisager leurs effets dans un futur modèle polycristallin.

a. Déformation plastique

Le champ de déformation plastique est représenté par un champ constant par morceau et égale à sa moyenne volumique sur chacune des phases (équations I.23 et I.24).

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} = \frac{1}{V^s} \int_{V^s} \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad [I.23]$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} = \frac{1}{V^h} \int_{V^h} \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad [I.24]$$

$\varepsilon_{ij}^p(r)$ est la déformation plastique locale, V^s et V^h sont les volumes occupés par les cellules et les murs respectivement.

b. Morphologie des cellules

H3 : Comme dans les modèles de Lemoine et Muller, les cellules sont représentées par des inclusions ellipsoïdales noyées dans une matrice figurant les murs. Nous ne considérons qu'une seule famille d'ellipsoïdes représentant la morphologie moyenne des cellules sur tout le matériau. Cette hypothèse est appuyée par le fait que la microstructure de dislocation est à peu près uniforme sur tout le matériau. La géométrie de la microstructure de dislocation est donc fixée à partir de sept paramètres morphologiques que sont :

- trois demi-axes définissant la forme de l'ellipsoïde : a, b, c
- trois angles d'Euler donnant l'orientation de la microstructure dans le repère de chargement : $\varphi_1, \phi, \varphi_2$
- le nombre de cellules par unité de volume : N

c. Déformation plastique macroscopique

La déformation plastique macroscopique peut d'ores et déjà être calculée en fonction des variables internes définies ci-dessus. Si on appelle f la fraction volumique de cellule, on obtient :

$$\mathbf{E}_{ij}^p = f\bar{\mathbf{E}}_{ij}^{ps} + (1-f)\bar{\mathbf{E}}_{ij}^{ph} \quad [I.25]$$

où f est donnée par :

$$f = \frac{4}{3}\pi Nabc \quad [I.26]$$

La géométrie de notre problème étant posée, il nous faut maintenant aborder le comportement propre de chacune des phases.

I.5.2 Ecrouissage non local

a. Elasticité

H4 : Le comportement élastique est supposé isotrope. Les modules de cisaillement et les coefficients de Poisson de chacune des phases sont supposés égaux.

b. Critère de plasticité

H5 : A chaque phase est associé un critère de plasticité de type Von Mises. Ce critère concerne la contrainte interne qui s'écrit comme la somme de la contrainte macroscopique Σ_{ij} et de la contrainte résiduelle τ_{ij} provenant des interactions cellules-parois.

c. Limites d'écoulement et lois d'écrouissage

Pour respecter le fait que le matériau est initialement homogène, les limites d'écoulement initiales des murs et des cellules sont supposées égales.

Les lois d'écrouissage sont inspirées de celles utilisées par Muller [M94]. La matrice d'écrouissage contient un terme non local (**H6**) traduisant l'influence du taux de déformation plastique des cellules sur le durcissement des parois.

L'auto-écrouissage de l'intérieur de la phase molle est faible. Il y a peu d'accumulation de dislocation dans cette partie du matériau. De même l'action de la déformation des murs sur la limite d'écoulement des cellules est supposée nulle.

1.5.3 Frontières mobiles

H7 : La microstructure de dislocation évolue au cours du chargement. Les sept paramètres définissant la géométrie des cellules deviennent donc des variables internes comme dans le travail de Lemoine [L95].

Les interfaces entre les cellules et les parois seront considérées parfaites : le déplacement et le vecteur contrainte sont continus au travers de la frontière entre les deux phases.

Le mouvement de la frontière est un mouvement propre et ne correspond pas à un déplacement de la matière. Contrairement aux structures composites classiques, il n'y a pas continuité de la vitesse au travers de l'interface.

Le taux de déformation plastique macroscopique est donné par la relation qui suit :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = f \dot{\epsilon}_{ij}^{ps} + (1-f) \dot{\epsilon}_{ij}^{ph} + f (\dot{\epsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\epsilon}_{ij}^{ph}) \quad [I.26]$$

Le troisième terme de cette relation donne l'influence directe des évolutions de la microstructure sur la déformation plastique macroscopique.

La dissipation associée à l'évolution des variables morphologiques est calculée en considérant un coefficient de résistance locale au mouvement de la frontière. Les difficultés pour calculer ce coefficient à partir de considérations physiques nous amènent à le considérer constant.

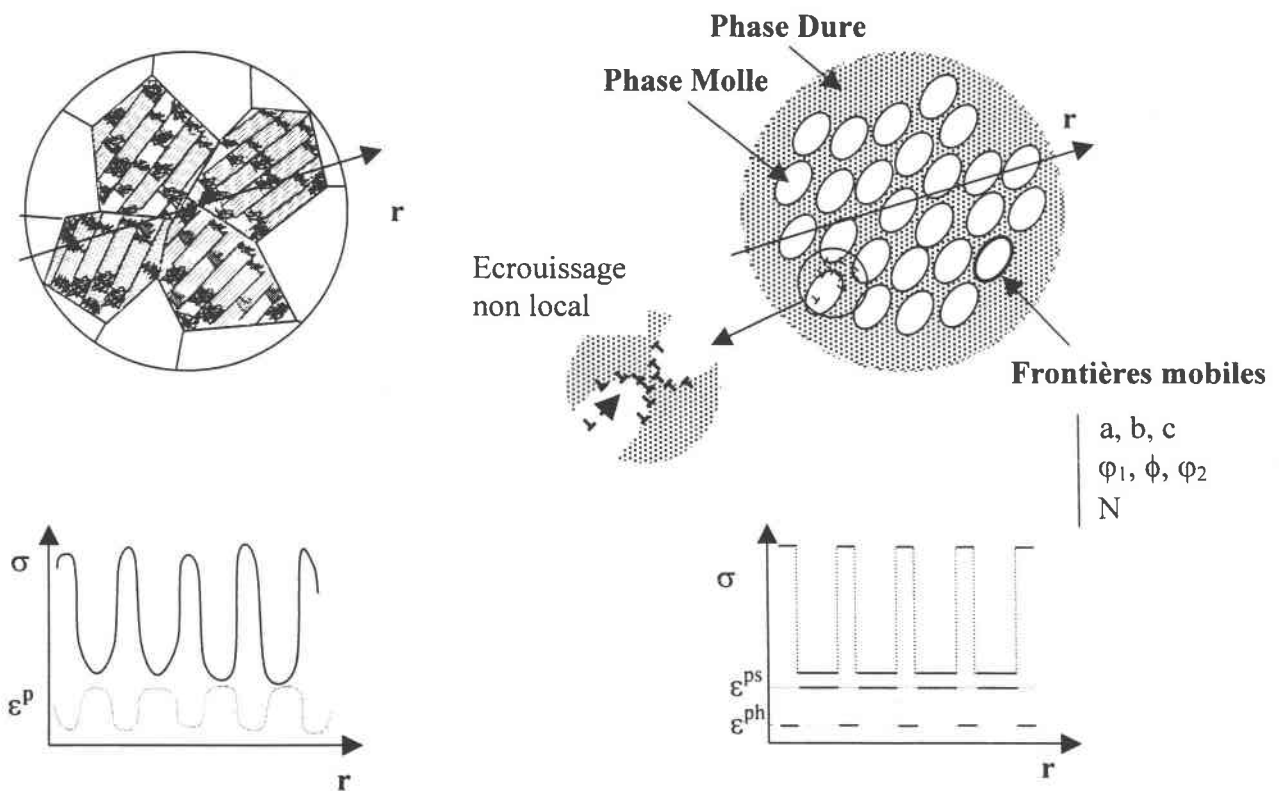


Figure I.23 : représentation de la microstructure de dislocation par un matériau biphasé à structure évolutive (frontières mobiles) et à écouissage non local.

La partie cinématique du modèle et les principales hypothèses étant fixées, il nous faut maintenant aborder la formulation thermodynamique. Cette formulation fera apparaître des termes spécifiques aux frontières mobiles et au phénomène d'écroutissage non local.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALH91 ANANTHAN, V.S., LEFFERS, T., HANSEN, N., « Characteristics of second Generation Microbands in Cold-rolled Copper », 1991, Scripta Metallurgica, Vol.25, pp(137-142)
- AS80 ANAND, L., SPITZIG W.A., Initiation of Localized Shear Bands in Plane Strain », 1980, J. Mech. Phys. Solids, Vol.28, pp(113-128)
- BHK89 BAY, B., HANSEN, N., KUHLMANN-WILSDORF D., « Deformation Structures in Lightly Rolled Pure Aluminium », 1989, Materials Sciences and Engineering, Vol.A112, pp(385-397)
- DB84 DYMECK, S., BLICHARSKI, M.R., « The Structure of Transition Bands in Ferritic Stainless Steels », 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(99-104)
- DHMA88 DEVE, H., HARREN, S., Mac CULLOUGH, C., ASARO, R.J., « Micro and Macroscopic Aspects of Shear Band Formation in Internally Nitrited Single Crystal of Fe-Ti-Mn Alloys », 1988, Acta Met., Vol.36, N°2, pp(341-365)
- D97 DAVID, F., « Modélisation meso-macro de la localisation de la déformation : Etude de la sensibilité au cisaillement adiabatique d'un acier à blindage », 1997, ETCA, Thèse de l'Université de Metz
- FS83 FERNANDES, J.V., SCHMITT, J.H., « Dislocation Microstructures in Steel during Deep Drawing », 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870)
- H62 HU, H., « Microbands in a Rolled Si-Fe crystal and their role in recrystallization », 1962, Acta Met., Vol.10, pp(1112-1116)
- HM84 HATHERLY, M., MALIN, S.A., « Shear Bands in Deformed Metals », 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(449-454)
- HK86 HANSEN, N., KUHLMANN-WILSDORF, D., « Low Energy Dislocation Structures due to Unidirectional Deformation at Low Temperatures », 1986, Materials Science and Engineering, Vol.81, pp(141-161)
- HHZ89 HU, H., HWANG, K., ZHOU, C., « Constitutive Relations of Metallic Materials under Cyclic Loading », Acta Mecanica Sinica, Vol.21, 705
- H90 HANSEN, N., « Cold Deformation Microstructures », 1990, Mat. Science and Technology, Vol.6, pp(1039-1046)
- H92 HANSEN N., « Deformation Microstructures », 1992, Scripta Metall. et Mat., Vol.27, pp(1447-1452)
- HRT92 HU, Z., RAUCH, E.F., TEODOSIU, C., « Work-hardening Behavior of Mild Steel under Stress Reversal at Large Strains », 1992, Int. J. of Plasticity, Vol.8, pp(839-856)

- H93 HUGUES, D.A., Microstructural Evolution in a Non Cell Forming Metals Al-Mg », 1993, Acta Met., Vol.41, N°5, pp(1421-1430)
- H99 HOC, T., « Etude Expérimentale de la Localisation de la Déformation Plastique dans les Aciers If au Cours de Changement de Trajet de la Déformation »,
- I89 INAGAKI, H., « Development of Microstructures and Textures during Cold Rolling of Polycrystalline Iron Containing an Excess Amount of Dissolved Carbon », 1989, z. Metalkde, pp(474-483)
- JH90 JUUL JENSEN, D., HANSEN, N., « Flow Stress Anisotropy in Aluminium », 1990, Acta Met., Vol.38, pp(1369-1380)
- KW63 KEH, A.S., WEISSMANN, S., « Deformation in Body-centered Cubic Metals », 1963, In Electron Microscopy and Stength of Crystal, Eds G. THOMAS, J. WASHBURN, pp(231,300)
- KR85 KORBEL, A., RICHET, M., « Formation of Shear Bands during Cyclic Deformation of Aluminium », 1985, Acta Met., Vol.33, N°11, pp(1971-1978)
- KM86 KORBEL, A., MARTIN, P., « Microscopic versus Macroscopic Aspect of Shear Bands Deofrmation », 1986, acta Met., Vol.34, N°10, pp(1905-1909)
- KM88 KUBIN, L.P., MARTIN, G., « Non Linear Phenomena in Materials Science », 1988, Trans. Tech. Publications Ltd, Suisse.
- K90 KORBEL A., « The Mechanism of Strain Localization in Metals », 1990' Archives of Metallurgy, Vol.35, pp(177-203)
- LS83 LIBOVICKY, S., SESTAK, B., « Development of the dislocation arrangement in Fe-0.9wt% Si single Crystals Deformed in Tension », 1983, Phil. Mag. A, Vol.47, pp(63-78)
- L91 LUFT, A., « microstructural Processes of Plastic Instabilities in Strengthened Metals », 1991, Progress in Materials Science, Vol.35, pp(97-204)
- LKD92 LAN, Y., KLAAR, H.J., DAHL, W., « Evolution of Dislocation Structures and Deformation Behavior of Iron at Different Temperatures : Part I. Strain Hradening Curves and Cellular Structures », 1992, Metall. Trans., Vol.23A, pp(537-544)
- LDY93 LIU, Y.Z., DONG, D.Y., YUAN, K., « Experimental Investigation of Microstructural Damage in an A-K Sheet Subjected to Two-stage Straining », 1993, J. of Mat. Process. Tech., Vol.39, pp(133-143)
- LMB94 LEMOINE, X., MULLER, D., BERVEILLER, M., « Texture of Microstructure in BCC Metals for Various Loading Paths », 1994, Mat. Science Forum, Vol.(157-162), pp(1821-1826)

- L95 LEMOINE, X., « Analyse Micromécanique de la Formation des Cellules de Dislocations et Conséquences sur le Comportement des Aciers », 1995, Thèse de l'université de Metz
- M67 MRÖZ, Z., « On the Description of Anisotropic Work-Hardening », 1967, J. Mech. Phys. Solids, 1967, 15, 163
- MHH81 MALIN, A.S., HATHERLY, M., «The Microstructure of rolled Copper single Crystal», 1981, Z. Metallkde, pp(310-317)
- M94 MULLER, D., « Influence de l'Écrouissage Non Local et de l'Hétérogénéité Intragranulaire sur le Comportement des Aciers Polycristallins », 1994, thèse de l'Université de Metz
- MLKB MULLER, D., LEMOINE, X., KRATOCHVIL, J., BERVEILLER, M., « Non-local Behavior of Metals », 1994, Trans. Of the ASME, Vol.116, pp(35-36), pp(393-398)
- P49 PRAGER, W., « recent developments in the Mathematical Theory of Plasticity », 1949, J. Appl. Phys. 20, 235.
- RB77 RONDE-OUSTAU F., BAUDELET, B., « Microstructure and Strain Path in Deep Drawing », 1977, Acta. Met., Vol.25, pp(1523-1529)
- R88 REY, C., « Effect of grain Boundaries on the Mechanical Behavior of Grains in Polycrystals », 1988, Revue Phys. Appl., Vol23, pp(491-500)
- R93 RAUCH, E.F., « Etude de l'Écrouissage des Matériaux, Aspects Microstructuraux et Lois de Comportement », 1993, Thèse d'habilitation de l'INPG
- RS89 RAUCH, E.F., SCHMITT, J.H., Dislocation Substructures in Mild Steel Deformed in Simple Shear », 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A113, pp(441-448)
- SAB85 SCHMITT, J.H., AERNOUDT, E., BAUDELET, B., « Yield Loci for Polycrystalline Metals without Texture », 1985, Material Sciences and Engineering, Vol.A147, pp(143-154)
- S86 SCHMITT, J.H., « Contribution à l'Etude de la Microplasticité des Aciers », 1986, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG).
- T70 TAKEUSHI, T., « Work Hardening of Iron Single Crystal between 25°C and 900°C », 1970, Japanese J. of Applied Phys., Vol.9, N°4, pp(391-400)
- TYF78 TABATA, T., YAMANAKA, S., FUJITA, H., « In Situ Deformation of the [111] Aluminium Single Crystals Observed by High Voltage Electron Microscopy », 1978, Acta. Met., Vol.26, N°4, pp(405-411)

- T92 THUILLIER, S., « Rhéologie et microstructure associées à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux », 1992, Thèse de l'INPG (Grenoble)
- Z59 ZIEGLER, H., « A Modification of Prager's Hardening Rule », 1959, Q. Appl. Math. 17, 55.

CHAPITRE II

Approche Thermomicromécanique

CHAPITRE II

APPROCHE THERMOMICROMECHANIQUE

Au chapitre précédent, ont été posées les hypothèses pour une représentation biphasée à structure évolutive et écrouissage non local de la microstructure de dislocations.

Dans cette partie, la formulation thermodynamique et mécanique est mise en place en vue de l'obtention des équations constitutives du modèle.

Dans un premier temps, l'expression de l'énergie libre d'Helmholtz est établie dans le cadre général d'un milieu continu contenant des frontières de discontinuité du champ de déformation plastique et soumis à des transformations quasistatiques et isothermes. A partir du premier principe de la thermodynamique et après avoir calculé le taux d'énergie libre et la puissance des efforts extérieurs, on établit l'expression de la dissipation intrinsèque en fonction de la vitesse de propagation de l'interface de discontinuité. En appliquant le calcul de l'énergie libre à la représentation biphasée de la microstructure de dislocations (cellules ellipsoïdales dans une matrice représentant les murs), on obtient l'expression des contraintes internes mais aussi celle des forces motrices associées à l'évolution de la morphologie des cellules. A cette occasion, les différences entre la représentation biphasée de la microstructure de dislocations et un matériau biphasé classique sont mises en évidence.

Dans un deuxième temps, on établit l'expression des forces critiques et des critères d'évolution des variables internes. A chaque phase est associé un critère de plasticité de type Von Mises avec écrouissage cinématique et isotrope. Le calcul des limites d'écoulement est relié à la densité de dislocations par la relation de Taylor et les lois d'écrouissage sont déterminées à partir de considérations sur la cinématique des dislocations basées sur les observations expérimentales du premier chapitre. Pour le calcul des forces critiques associées à la morphologie, on introduit un seuil de résistance locale à la propagation de la frontière de discontinuité. Les forces critiques obtenues font apparaître un couplage entre les variables internes morphologiques. Pour simplifier leur calcul, une surface de charge approchée leur est associée permettant l'écriture d'un critère simple d'évolution de la morphologie.

Avant de conclure, dans la dernière partie, on établit de façon synthétique les équations constitutives du modèle complet.

II.1 Energie libre de Helmholtz et forces thermodynamiques.

Les transformations envisagées par ce modèle étant isothermes, l'énergie libre d'Helmholtz correspond à l'énergie élastique stockée au sein du matériau. Cette énergie a pour source la contrainte macroscopique issue des conditions aux limites et les contraintes résiduelles qui proviennent des interactions mécaniques entre les cellules et les parois de dislocations.

Dans un premier temps, l'énergie libre est calculée dans le cadre général des milieux continus contenant des frontières de discontinuité de la déformation plastique sous l'hypothèse des petites perturbations.

II.1.1 Milieu continu contenant des frontières de discontinuité du champ de déformation plastique.

Soit un milieu continu de volume V supposé infini contenant des surfaces de discontinuité du champ de déformation plastique Δ et soumis à un déplacement u_i^d sur sa frontière extérieure (figure II.1).

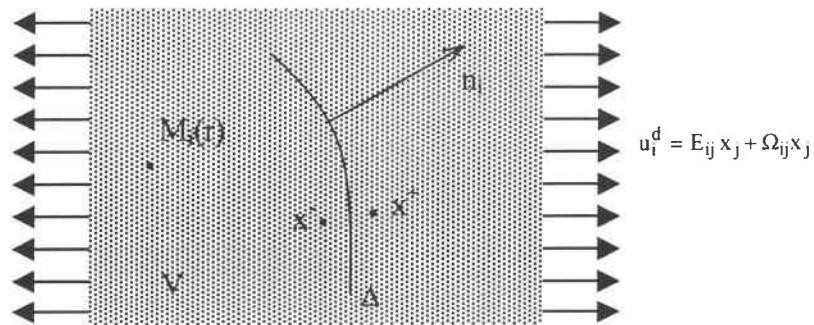


Figure II.1 : milieu continu infini contenant des frontières de discontinuité du champ de déformation plastique

$n_i(r)$ est la normale à Δ en r du côté + vers le côté -.

a. Relations locales

La condition de continuité du champ de déplacement $u_i(r)$ se traduit par la relation II.1 :

$$\epsilon_{ikl} \beta_{jl,k}(r) = 0 \quad [\text{II.1}]$$

où β_{ij} est le gradient du déplacement et ϵ_{ikl} l'indice des permutations.

$$\beta_{ij}(r) = u_{i,j}(r) \quad [\text{II.2}]$$

La continuité du déplacement est aussi vérifiée au travers de la surface Δ supposée parfaite. Dans ce cas elle s'exprime sous la forme :

$$[u_i(\mathbf{r})] = 0 \quad [\text{II.3}]$$

où $[x] = x^+ - x^-$ désigne le saut de la grandeur x au travers de la frontière.

β_{ij} est souvent décomposé en sa partie symétrique (tenseur des déformations) et antisymétrique (tenseur des rotations) :

$$\beta_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \omega_{ij}(\mathbf{r}) \quad [\text{II.4}]$$

Classiquement, on peut faire apparaître les parties élastiques et plastiques du gradient de déplacement.

$$\beta_{ij}(\mathbf{r}) = \beta_{ij}^e(\mathbf{r}) + \beta_{ij}^p(\mathbf{r}) \quad [\text{II.5}]$$

De la même façon, cette décomposition peut être appliquée aux tenseurs de déformation et de rotation :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) \quad [\text{II.6}]$$

$$\omega_{ij}(\mathbf{r}) = \omega_{ij}^e(\mathbf{r}) + \omega_{ij}^p(\mathbf{r}) \quad [\text{II.7}]$$

En l'absence de force volumique et considérant des transformations quasi – statiques, le principe de conservation de la quantité de mouvement impose au tenseur des contraintes σ_{ij} les relations suivantes :

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{II.8}]$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ji}(\mathbf{r}) \quad [\text{II.9}]$$

Au travers de l'interface parfaite Δ , il y a continuité du vecteur contrainte:

$$[\sigma_{ij}n_j] = 0 \quad [\text{II.10}]$$

La loi de comportement élastique du matériau permet de relier la contrainte à la déformation élastique :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \quad [\text{II.11}]$$

b. Relations macroscopiques

Comme il est spécifié sur la figure II.1, on ne considère que des conditions limites en déplacement appliquées sur la surface extérieure ∂V du volume V :

$$u_i^d = E_{ij}x_j + \Omega_{ij}x_j \quad [\text{II.12}]$$

E_{ij} et Ω_{ij} sont les moyennes volumiques de la déformation et de la rotation locale.

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.13}]$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \omega_{ij}(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.14}]$$

En introduisant les relations II.6 et II.11 dans l'équation II.13, on obtient :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \left(C_{ijkl}^{-1}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) \right) dV \quad [\text{II.15}]$$

En considérant un milieu élastique homogène et en introduisant la contrainte macroscopique Σ_{ij} comme la moyenne volumique de la contrainte locale, il vient :

$$E_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{ij} + E_{ij}^p \quad [\text{II.16}]$$

où E_{ij}^p , la déformation plastique macroscopique, est donnée par :

$$E_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.17}]$$

La loi de comportement élastique macroscopique s'écrit :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}^e \quad [\text{II.18}]$$

avec

$$E_{ij}^e = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.19}]$$

L'hypothèse d'un milieu élastique homogène fait que la déformation plastique macroscopique correspond à la moyenne volumique de la déformation plastique locale.

Classiquement, la dérivée par rapport au temps de la déformation plastique macroscopique est reliée aux taux de déformation plastique locale par une simple relation de moyenne.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.20}]$$

Or, dans la représentation de la microstructure de dislocations adoptée dans ce modèle, les frontières de discontinuité du champ de déformation plastique sont mobiles. Dans ce cas, le taux de déformation plastique macroscopique ne se résume plus à une simple intégrale de volume. En effet, il faut tenir compte du fait que la région du matériau balayée par la frontière entre t et $t+dt$ subit un saut de déformation plastique. Un terme additionnel contenant les effets de la propagation des interfaces de discontinuité apparaît donc :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{V} \int_{\Delta} [\epsilon_{ij}^p] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.21}]$$

où w_{α} est la vitesse de propagation de Δ .

Ce terme additionnel est fonction de la vitesse de propagation de l'interface et du saut de déformation plastique au travers de celle-ci.

c. Energie libre de Helmholtz

En plasticité isotherme et quasi-statique, l'énergie libre d'Helmholtz correspond exclusivement à l'énergie élastique stockée au sein du matériau. Dans l'hypothèse d'une élasticité linéaire et homogène, la densité volumique d'énergie libre, e , s'exprime de la façon suivante :

$$e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) \quad [\text{II.22}]$$

L'énergie libre totale est obtenue en intégrant la densité e sur le volume V :

$$\Phi = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.23}]$$

Les relations II.6 et II.7 permettent de décomposer l'intégrale de volume II.23 en :

$$\Phi = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) u_{i,j}(\mathbf{r}) dV - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.24}]$$

En intégrant par partie la première intégrale et en tenant compte de II.8, l'énergie libre d'Helmholtz devient :

$$\Phi = \int_V \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) \right)_{,j} dV - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.25}]$$

Grâce au théorème de la divergence appliquée au cas d'un milieu contenant des surfaces de discontinuité, On peut expliciter le premier terme de II.25 :

$$\Phi = \int_{\partial V} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) n_j dS - \int_{\Delta} [\sigma_{ij} u_i n_j] dS - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.26}]$$

Le vecteur contrainte étant continu au travers de Δ , la deuxième intégrale de surface est nulle. Les conditions aux limites II.12 permettent alors de simplifier II.26 :

$$\Phi = \int_{\partial V} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) E_{ik} x_k n_j dS - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.27}]$$

En appliquant à nouveau le théorème de la divergence à la première intégrale de volume, on obtient :

$$\Phi = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij}(\mathbf{r}) E_{ik} x_k)_{,j} dV + \int_{\Delta} [\sigma_{ij}(\mathbf{r}) E_{ik} x_k n_j] dS - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.28}]$$

La continuité du vecteur contrainte et la relation d'équilibre permettent de réduire II.28 à :

$$\Phi = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) E_{ik} x_{k,j} dV - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.29}]$$

En sortant la déformation totale macroscopique de la première intégrale, et en utilisant II.15, l'énergie libre devient :

$$\Phi = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E_{ij} - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.30}]$$

La contrainte $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ peut être décomposée en faisant apparaître la contrainte macroscopique Σ_{ij} et la contrainte résiduelle $\tau_{ij}(\mathbf{r})$.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \Sigma_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{r}) \quad [\text{II.31}]$$

Le champ de contrainte résiduelle respecte la relation d'équilibre II.8 :

$$\tau_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad [\text{II.32}]$$

et la relation de moyenne :

$$\frac{1}{V} \int_V \tau_{ij}(\mathbf{r}) dV = 0 \quad [\text{II.33}]$$

L'introduction de cette décomposition dans la relation II.30 permet d'écrire :

$$\Phi = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E_{ij} - \int_V \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV - \int_V \frac{1}{2} \tau_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) dV \quad [\text{II.32}]$$

La contrainte macroscopique peut être sortie de la deuxième intégrale. En considérant la relation II.17 et la loi de comportement élastique macroscopique, la relation II.32 devient :

$$\Phi = \frac{1}{2} V (E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV \quad [\text{II.33}]$$

L'énergie libre d'Helmholtz est la somme des contributions de la contrainte macroscopique (chargement extérieur) et des contraintes résiduelles. Celles-ci sont générées par les incompatibilités de la déformation plastique.

d Dissipation intrinsèque

Dans le cas de transformations isothermes et quasi-statiques, le premier principe de la thermodynamique se traduit par la relation II.34 :

$$P_{\text{ext}} - \dot{\Phi} = D \quad [\text{II.34}]$$

où D désigne la dissipation intrinsèque et P_{ext} la puissance des efforts extérieurs.

Le taux d'énergie libre peut être obtenu par dérivation de la relation II.23 contenant un effet lié au mouvement de la frontière [G73].

$$\dot{\Phi} = \int_V \dot{\varepsilon} dV - \int_{\Delta} [e] w_i n_i dS \quad [\text{II.35}]$$

En introduisant la décomposition de la déformation totale II.6 dans l'expression du taux de densité d'énergie libre, on obtient :

$$\dot{\varepsilon} = \sigma_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) \quad [\text{II.36}]$$

Le saut de densité d'énergie libre est donné par :

$$[e] = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^+ (\varepsilon_{ij}^+ - \varepsilon_{ji}^{p+}) - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^- (\varepsilon_{ij}^- - \varepsilon_{ij}^{p-}) \quad [\text{II.37}]$$

Ces deux dernières relations permettent d'écrire le taux d'énergie libre totale de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = & \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_{\Delta} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ \varepsilon_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- \varepsilon_{ij}^-) w_{\alpha} n_{\alpha} dS \\ & - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV + \int_{\Delta} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) (\varepsilon_{ij}^{p+} - \varepsilon_{ij}^{p-}) w_{\alpha} n_{\alpha} dS \end{aligned} \quad [\text{II.38}]$$

Négligeant les forces volumiques, la puissance des efforts extérieurs se réduit à la puissance des efforts exercés aux frontières du volume V :

$$P_{\text{ext}} = \int_{\partial S} \sigma_{ij} n_j v_i dS \quad [\text{II.39}]$$

Grâce au théorème de la divergence et en tenant compte des surfaces de discontinuité Δ , il vient :

$$P_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV + \int_{\Delta} [\sigma_{ij} n_j v_i] dS \quad [\text{II.40}]$$

Grâce aux conditions d'Hadamard [H03], le saut de vitesse matérielle $[v_i]$ s'exprime en fonction de la vitesse de propagation de Δ considérée parfaite : $[u_i] = 0$ mais $[\dot{u}_i] \neq 0$

$$[v_i] = -[u_{i,j} n_j] w_{\alpha} n_{\alpha} \quad [\text{II.41}]$$

Le vecteur contrainte étant continu au travers de l'interface mobile, la puissance des efforts extérieurs devient :

$$P_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV - \int_{\Delta} \sigma_{ij} n_j [u_{i,k} n_k] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.42}]$$

La relation d'équilibre et la symétrie du tenseur des contraintes permettent d'obtenir :

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{\Delta} \sigma_{ij} n_j [u_{i,k} n_k] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.43}]$$

La continuité du déplacement implique la compatibilité de la déformation totale au travers de l'interface mobile. Le saut du gradient de déplacement n'est donc pas quelconque. De façon générale, il s'écrit [H61] [W67]:

$$[u_{i,j}] = \lambda_i n_j \quad [\text{II.44}]$$

où λ_i est un vecteur inconnu.

Cette propriété du gradient de déformation introduite dans l'intégrale de surface de II.43, amène :

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{\Delta} \sigma_{ij} n_j \lambda_i w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.45}]$$

En introduisant II.44 dans II.45, on obtient finalement l'expression suivante pour la puissance des efforts extérieurs:

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{\Delta} \sigma_{ij} [\epsilon_{ij}] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.46}]$$

D'après le premier principe de la thermodynamique II.34, la dissipation intrinsèque est égale à la différence entre la puissance des efforts extérieurs II.46 et le taux d'énergie libre II.38. Ce qui donne :

$$D = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV - \int_{\Delta} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) \left[\varepsilon_{ij}^p \right] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.47}]$$

De la même façon que pour le taux de déformation plastique ou le taux d'énergie libre, la dissipation intrinsèque est la somme d'un terme provenant de la dissipation volumique locale et d'un terme lié au mouvement de la surface de discontinuité prenant en compte le fait que la région du matériau balayée par la surface subit un saut de déformation plastique.

L'équation II.47 peut être écrite plus en détail en introduisant l'opérateur interfacial P_{ijkl} [Hi72] reliant le saut de déformation totale au saut de déformation plastique [H83]:

$$\left[\varepsilon_{ij} \right] = P_{ijkl} C_{klmn} \left[\varepsilon_{mn}^p \right] \quad [\text{II.48}]$$

Le tenseur P_{ijkl} dépend des coefficients élastiques du matériau et de la normale à l'interface. L'introduction de la décomposition de la déformation totale et de la loi de comportement élastique dans II.48 permettent de relier le saut de contrainte au travers de l'interface au saut de déformation plastique :

$$\left[\sigma_{ij} \right] = C_{ijkl} \left(P_{klmn} C_{mnpq} - I_{klpq} \right) \left[\varepsilon_{pq}^p \right] \quad [\text{II.49}]$$

En élasticité isotrope, le tenseur P_{ijkl} est donné par :

$$P_{ijkl} = \frac{1}{4\mu} \left(\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} n_i n_j n_k n_l \right) \quad [\text{II.50}]$$

où λ désigne le premier coefficient de Lamé et μ le module de cisaillement élastique.

En introduisant II.49 et II.50 dans l'expression de la dissipation intrinsèque, on obtient finalement [I98]:

$$D = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV - \int_{\Delta} \left(\sigma_{ij}^- - \mu \left[\varepsilon_{ij}^p \right] \right) \left[\varepsilon_{ij}^p \right] w_{\alpha} n_{\alpha} dS - 2\mu \int_{\Delta} \left[\varepsilon_{ij}^p \right] n_j \left[\varepsilon_{ik}^p \right] n_k w_{\alpha} n_{\alpha} dS \\ + \frac{\mu}{1-\nu} \int_{\Delta} \left(\left[\varepsilon_{ij}^p \right] n_i n_j \right)^2 w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [\text{II.51}]$$

Nous avons obtenu une expression de la dissipation intrinsèque dans le cas général d'un solide contenant des surfaces de discontinuité de la déformation plastique. Cette expression

fait apparaître le terme volumique classique et une expression contenant trois termes liés au mouvement propre de la surface de discontinuité.

La résolution du problème tel qu'il est énoncé par II.51 pourrait se faire directement. L'intégrale de volume impose la contrainte $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ comme force motrice associée à la déformation plastique et les trois intégrales de surface définissent la force motrice associée au mouvement d'un élément de surface de la frontière Δ . Le problème consiste alors à trouver pour tout instant t la déformation plastique et la position de la frontière de discontinuité. Le grand nombre de degrés de liberté (variables internes) nécessaire pour décrire la microstructure et notamment la surface Δ , rend très complexe la résolution complète de ce problème.

Pour le simplifier, on s'inspire des observations expérimentales du chapitre I. Alors que la formulation II.51 peut s'appliquer à toute forme de frontière, la géométrie des cellules de dislocation n'est pas quelconque. Raisonnablement, elle peut être approchée par un ellipsoïde [M94],[L95]. Cette représentation permet :

- de toucher un grand nombre de forme de cellules
- de prendre en compte l'aspect fermé des interfaces cellule-paroi.
- d'avoir une expression analytique simple de la surface Δ , de sa normale et de sa vitesse
- de réduire le nombre de variables internes morphologiques à sept.

Cette démarche est celle adoptée par Cherkaoui [CB99] pour décrire la croissance des plaquettes de martensite dans un acier TRIP. En effet, il associe à chaque plaquette une forme ellipsoïdale. La vitesse d'évolution des plaquettes est caractérisée par un paramètre en choisissant un mode de croissance particulier des plaquettes (homothétique, plane... en fixant une forme initiale). L'orientation de celle-ci est quant à elle définie par la variante de martensite obtenue par la transformation. Le saut de déformation au travers de la frontière est fixe et correspond à la déformation de transformation dépendant de la variante de martensite produite, cette hypothèse étant appuyée sur la croissance quasi instantanée des plaquettes devant les temps caractéristiques de la plasticité classique par mouvement de dislocations.

A la différence du modèle de représentation de Cherkaoui, la forme et l'orientation des cellules est complètement libre. De plus, nous n'avons pas la notion de déformation de transformation. Le saut au travers de Δ évolue au cours du temps. Nous avons affaire à une sorte de transformation de phase continue dans le temps.

Dans la partie qui suit, nous appliquons les résultats obtenus jusqu'ici au cas d'une structure cellulaire de dislocations à morphologie évolutive.

II.1.2 Application à la structure biphase à structure évolutive et écoulement non local

A la fin du chapitre précédent, nous avons approché le champ de déformation plastique au sein de la microstructure de dislocation par un champ constant par morceau (figure II.2). Les cellules sont représentées par des inclusions ellipsoïdales noyées dans une matrice désignant les murs.

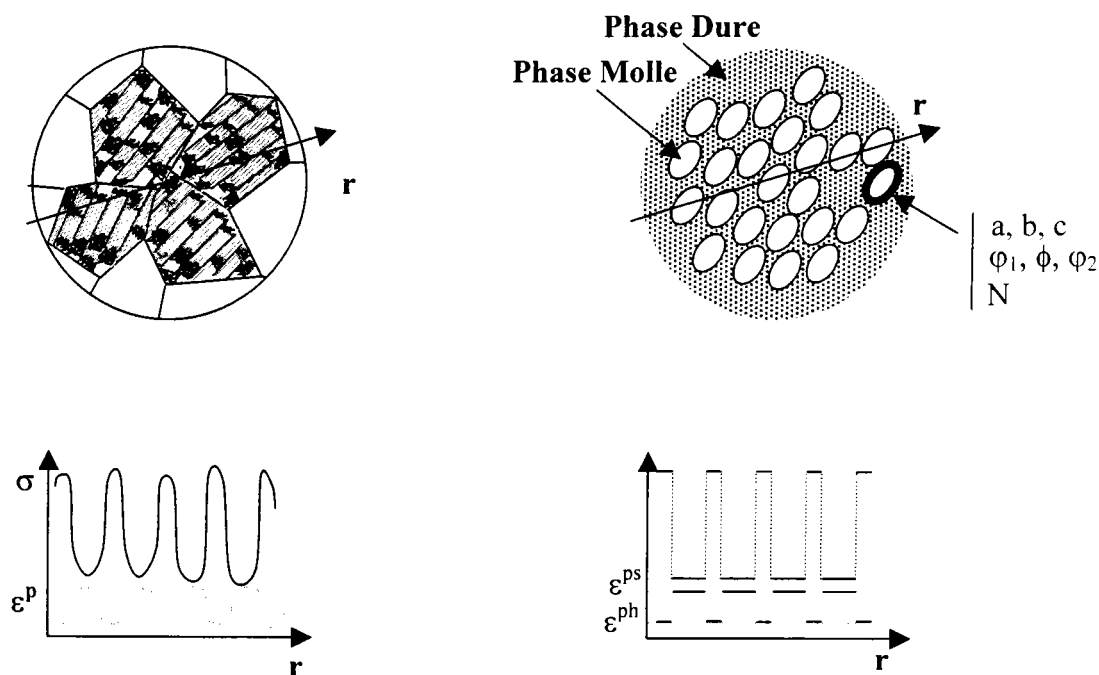


Figure II.2 : représentation de la microstructure de dislocation par un matériau biphase à structure évolutive et écoulement non local

a. Champ de déformation et de contrainte

Soit V^s le volume occupé par les cellules et V^h celui occupé par les murs. Les fractions volumiques de cellule et de mur sont données par :

$$f^{\text{cellule}} = f = \frac{V^s}{V} \quad [\text{II.52}]$$

$$f^{\text{mur}} = 1 - f \quad [\text{II.53}]$$

Le champ de déformation plastique est décrit par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) = \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} = \frac{1}{V^s} \int_{V^s} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}') dV' \quad \text{si } \mathbf{r} \in V^s \\ \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) = \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} = \frac{1}{V^h} \int_{V^h} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}') dV' \quad \text{si } \mathbf{r} \in V^h \end{array} \right. \quad [\text{II.54}]$$

La déformation plastique macroscopique est définie comme la moyenne volumique des déformations plastiques locales (équation II.17). En fonction des déformations plastiques moyennes sur chacune des phases, elle devient :

$$E_{ij}^p = f \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} + (1-f) \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \quad [\text{II.55}]$$

En considérant le saut de déformation plastique uniforme sur toute l'interface cellule-paroi Δ , et égal à :

$$\left[\varepsilon_{ij}^p \right] = \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} \quad [\text{II.56}]$$

Le taux de déformation plastique macroscopique devient à partir de II.21 :

$$\dot{E}_{ij}^p = f \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{ps} + (1-f) \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{ph} + \dot{f} (\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}) \quad [\text{II.57}]$$

Les déformations totale et élastique macroscopiques peuvent s'écrire en fonction de leur moyenne sur chacune des phases :

$$E = f \bar{\varepsilon}_{ij}^s + (1-f) \bar{\varepsilon}_{ij}^h \quad [\text{II.58}]$$

$$E^e = f \bar{\varepsilon}_{ij}^{es} + (1-f) \bar{\varepsilon}_{ij}^{eh} \quad [\text{II.59}]$$

b. Contraintes internes

En appelant $\bar{\sigma}_{ij}^s$, $\bar{\sigma}_{ij}^h$, $\bar{\tau}_{ij}^s$ et $\bar{\tau}_{ij}^h$ les contraintes internes et résiduelles moyennes dans les deux phases, on a les relations suivantes :

$$\Sigma_{ij} = f \bar{\sigma}_{ij}^s + (1-f) \bar{\sigma}_{ij}^h \quad [\text{II.60}]$$

$$0 = f \bar{\tau}_{ij}^s + (1-f) \bar{\tau}_{ij}^h \quad [\text{II.61}]$$

Le calcul des contraintes internes faisant intervenir les interactions cellule-paroi, est basé sur le problème de l'inclusion matrice d'Eshelby-Kröner [E57] , [K61].

La topologie de ce problème est la suivante :

Une inclusion de volume V^I ayant une déformation plastique uniforme ϵ^{Pl} est noyée dans une matrice de volume V infini par rapport à V^I et ayant un champ de déformation plastique uniforme E^P .

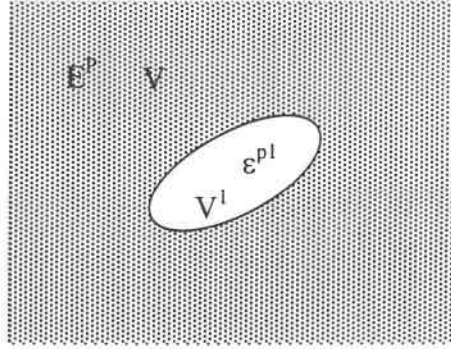


Figure II.3 : Topologie du problème de l'inclusion ellipsoïdale de Eshelby et Kröner

L'accommodation entre les champs de déformation plastique de l'inclusion et de la matrice au travers de leur interface est purement élastique et non élasto-plastique. Ceci conduit, notamment dans le cas de la plasticité polycristalline où le grain est représenté par un ellipsoïde plongé dans le matériau élasto-plastique équivalent, à une surestimation des contraintes internes issues des interactions inclusion matrice. Cette constatation a amené Zaoui et al. à introduire un coefficient d'accommodation pour réduire les effets des interactions sur le calcul des contraintes internes. Dans notre cas, l'inclusion peut être considérée comme un milieu quasiment dépourvu de dislocations et ayant donc un comportement élastique quasi plastique parfait. C'est-à-dire, qu'en considérant une densité de dislocation nulle à l'intérieur de la cellule on ne peut concevoir un champ de déformation plastique hétérogène dans la cellule.

Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale, la déformation totale dans l'inclusion est uniforme et est donnée par :

$$\epsilon_{ij}^I = E_{ij} + S_{ijkl} (\epsilon_{kl}^{Pl} - E_{kl}^P) \quad [II.62]$$

où S_{ijkl} est le tenseur d'Eshelby prenant en compte les interactions mécaniques entre l'inclusion et la matrice. Le calcul de la déformation totale dans l'inclusion est détaillé en Annexe A. La déformation élastique ϵ_{ij}^{el} à partir de laquelle nous allons tirer la contrainte interne découle facilement de II.62 :

$$\epsilon_{ij}^{el} = E_{ij} + S_{ijkl} (\epsilon_{kl}^{Pl} - E_{kl}^P) - \epsilon_{ij}^{Pl} \quad [II.63]$$

En introduisant la décomposition de la déformation totale macroscopique et la loi de comportement élastique dans II.63, nous obtenons finalement l'expression de la contrainte interne dans l'inclusion.

$$\sigma_{ij}^l = \Sigma_{ij} + C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (E_{mn}^p - \varepsilon_{mn}^{pl}) \quad [\text{II.64}]$$

On remarque que la contrainte obtenue est uniforme dans l'inclusion et que la contrainte résiduelle est fonction du saut de déformation plastique entre l'intérieur de l'inclusion et la matrice. Le tenseur S ne dépend que de la forme et de l'orientation de la cellule.

Pour le matériau biphasé, la contrainte interne dans une cellule peut être estimée en la considérant comme une inclusion ellipsoïdale noyée dans une matrice dont la déformation plastique est égale à la déformation plastique macroscopique du matériau. Cette représentation permet de prendre en compte en partie la présence des autres cellules. Les perturbations du champ de déformation plastique autour d'une cellule provoquées par la présence des autres cellules ne sont prises en compte que de façon moyenne par une approximation du champ E^p uniforme.

Les cellules étant considérées toutes identiques, la contrainte interne dans chaque cellule est identique. Finalement, on obtient comme expression de la contrainte interne des cellules :

$$\sigma_{ij}^s = \bar{\sigma}_{ij}^s = \Sigma_{ij} + C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (E_{mn}^p - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ps}) \quad [\text{II.65}]$$

La contrainte interne moyenne dans les murs est déterminée à partir de la relation II.60:

$$\bar{\sigma}_{ji}^h = \Sigma_{ij} - \frac{f}{1-f} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (E_{mn}^p - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ps}) \quad [\text{II.66}]$$

Les contraintes internes sont fonctions de la contrainte macroscopique provenant du chargement extérieur et des interactions cellule-paroi. Ces interactions proviennent des incompatibilités de la déformation plastique des cellules et des murs au travers du tenseur d'Eshelby (géométrie des cellules et des parois) et du saut de déformation plastique (direction et amplitude de l'incompatibilité).

En introduisant la relation II.55 dans les relations II.65 et II.66, les contraintes internes des deux phases deviennent :

$$\sigma_{ij}^s = \Sigma_{ij} - (1-f) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph}) \quad [\text{II.67}]$$

$$\sigma_{ij}^h = \Sigma_{ij} + f C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph}) \quad [\text{II.68}]$$

Les contraintes résiduelles sont fonctions

- de la morphologie des cellules au travers de la fraction volumique et du tenseur d'Eshelby
- du saut de déformation plastique

En introduisant la matrice de passage entre le repère macroscopique et le repère propre de la cellule, on peut dissocier les variables internes d'orientation et de forme de la microstructure de dislocation. En appelant S_{ijkl}^* le tenseur d'Eshelby exprimé dans le repère propre de l'ellipsoïde, l'expression des contraintes résiduelles est donnée par :

$$\tau_{ij}^s = -(1-f) P_{im} P_{jn} P_{kp} P_{lq} C_{mnrs} (I_{rskl} - S_{rskl}^*) (\bar{\varepsilon}_{pq}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{pq}^{ph}) \quad [\text{II.69}]$$

$$\tau_{ij}^s = f P_{im} P_{jn} P_{kp} P_{lq} C_{mnrs} (I_{rskl} - S_{rskl}^*) (\bar{\varepsilon}_{pq}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{pq}^{ph}) \quad [\text{II.70}]$$

c. Energie libre de Helmholtz

En considérant l'uniformité par morceaux du champ de déformation plastique, l'énergie libre peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{V} \Phi(E_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}, a, b, c, \varphi_1, \phi, \varphi_2, N) = \frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) - \frac{1}{2} f \tau_{ij}^s \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} + \frac{1}{2} (1-f) \tau_{ij}^h \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \quad [\text{II.71}]$$

Les relations II.69 et II.70 introduites dans II.71, donnent l'expression de l'énergie libre d'Helmholtz en fonction des variables internes :

$$\varphi = \frac{1}{V} \Phi(E_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}, a, b, c, \varphi_1, \phi, \varphi_2, N) = \frac{1}{2} (E_{ij} - f \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph}) + \frac{1}{2} f (1-f) P_{im} (\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}) P_{jn} C_{mnrs} (I_{rskl} - S_{rskl}^*) P_{kp} (\bar{\varepsilon}_{pq}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{pq}^{ph}) P_{lq} \quad [\text{II.72}]$$

Dans cette expression, on a :

Variable pilote

- E_{ij} : déformation totale macroscopique

Variables internes thermodynamiques

- $\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}$: déformation plastique moyenne à l'intérieur des cellules (phase molle)
- $\bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}$: déformation plastique moyenne dans les murs (phase dure)
- a, b, c : demi-axes des cellules
- $\varphi_1, \phi, \varphi_2$: angles d'Euler fixant l'orientation de la microstructure
- N : nombre de cellules par unité de volume

Grandeurs fonction des variables internes

- f : fraction volumique de phase molle (intérieur des cellules) $f = \frac{4\pi}{3V} Nabc$
- S_{ijkl} : tenseur d'Eshelby contenant l'aspect géométrique des interactions cellules parois $S_{ijkl}^* \left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c} \right)$
- P : matrice de passage entre le repère macroscopique et le repère propre de la cellule $P(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$

Autres

- C_{ijkl} : tenseur des modules élastiques
- I_{ijkl} : tenseur unité d'ordre quatre

Dans l'expression de l'énergie libre d'Helmholtz obtenue, on note :

- la présence du terme classique de la plasticité fonction des grandeurs macroscopiques : $\frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p)$
- la présence d'un autre terme classique de la plasticité des composites fonction des interactions entre les cellules et les murs de dislocations. Ce terme dépend du saut de déformation plastique au travers de l'interface et du tenseur d'Eshelby contenant l'aspect géométrique de l'interaction.
- le tenseur d'Eshelby et la fraction volumique sont des variables internes du problème et donc sont susceptibles d'évoluer au cours du chargement. Ceci différencie notre représentation de la microstructure de dislocations des composites classiques pour lesquels la morphologie des inclusions reste fixe par rapport à la matière. On peut noter que le terme $f(1-f)$ est non convexe. L'activation des variables internes correspondantes intervenant dans l'expression de la fraction volumique peut donc être à l'origine d'une perte d'ellipticité du modèle, provoquant ainsi une instabilité géométrique de la microstructure.

Dans la partie suivante, nous établissons l'expression des forces motrices associées aux variables internes. Celles-ci correspondent au signe près, à la dérivée de l'énergie libre par rapport à la variable interne concernée.

Dans la résolution du problème, celles-ci sont comparées aux forces critiques calculées à partir de la dissipation intrinsèque (deuxième membre du premier principe de la thermodynamique). Le calcul de la dissipation et des forces critiques fait l'objet du chapitre II.2.

II.1.3 Forces thermodynamiques

Les forces thermodynamiques relatives à chacune des variables internes sont obtenues par dérivation de l'énergie libre :

$$F_{x_i} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad [\text{II.73}]$$

La force thermodynamique associée à la plasticité classique est donnée pour chacune des phases par :

$$F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}} = \sigma_{ij}^s \quad [\text{II.74}]$$

$$F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}} = \sigma_{ij}^h \quad [\text{II.75}]$$

Les forces thermodynamiques associées au mouvement de la frontière peuvent être décomposées en deux groupes.

- Celles associées à l'orientation de la microstructure :

$$F_{\varphi_1} = 2f(1-f) \text{sym} \left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \varphi_1} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \right] C_{ijkl} \left(I_{klpq} - S_{klpq} \right) P_{pr} \left(\bar{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{rs}^{ph} \right) P_{qs} \quad [\text{II.76}]$$

$$F_{\phi} = 2f(1-f) \text{sym} \left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \phi} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \right] C_{ijkl} \left(I_{klpq} - S_{klpq} \right) P_{pr} \left(\bar{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{rs}^{ph} \right) P_{qs} \quad [\text{II.77}]$$

$$F_{\varphi_2} = 2f(1-f) \text{sym} \left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \varphi_2} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \right] C_{ijkl} \left(I_{klpq} - S_{klpq} \right) P_{pr} \left(\bar{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{rs}^{ph} \right) P_{qs} \quad [\text{II.78}]$$

- Celles relatives aux demi-axes des cellules :

$$F_a = \frac{f}{a} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph} \right) - \frac{f}{2a} (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} \left(I_{klmn} - S_{klmn} \right) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} \\ + \frac{1}{2} f (1-f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial a} \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} \quad [\text{II.79}]$$

$$\begin{aligned}
 F_b = & \frac{f}{b} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph} \right) - \frac{f}{2b} (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} \\
 & + \frac{1}{2} f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^{p*} C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial b} \Delta \varepsilon_{mn}^{p*}
 \end{aligned} \quad [II.80]$$

$$\begin{aligned}
 F_c = & \frac{f}{c} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph} \right) - \frac{f}{2c} (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} \\
 & + \frac{1}{2} f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^{p*} C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial c} \Delta \varepsilon_{mn}^{p*}
 \end{aligned} \quad [II.81]$$

où $\text{Sym}[y_{ij}]$ désigne la partie symétrique de y_{ij} : $\frac{1}{2}(y_{ij} + y_{ji})$

$\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*}$ est l'expression du saut de déformation plastique dans le repère propre de la cellule :

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} = P_{im} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \quad [II.82]$$

Il reste à définir la force thermodynamique relative au nombre de cellules par unité de volume.

$$\begin{aligned}
 F_N = & \frac{f}{N} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph} \right) \\
 & + \frac{f}{N} (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*}
 \end{aligned} \quad [II.83]$$

On peut noter que les forces thermodynamiques associées aux variables morphologiques n'ayant pas de relation cinématique directe avec la déformation plastique macroscopique sont indépendantes du chargement extérieur. Leur valeur n'est fonction que du saut de déformation plastique, de la fonction volumique et du tenseur d'Eshelby et ne proviennent donc que des interactions mécaniques cellule-paroi.

Par contre les forces thermodynamiques associées aux demi-axes ou au nombre de cellules par unité de volume, variables internes qui interviennent dans l'expression du taux de fraction volumique de cellule, font intervenir la contrainte macroscopique.

L'orientation et les rapports de forme des cellules ont un effet indirect sur le comportement macroscopique du matériau biphasé par l'intermédiaire du couplage qu'ils entretiennent avec les contraintes internes. La modification de la valeur des contraintes internes, liée au changement de forme ou d'orientation de la microstructure, peut provoquer un écoulement plastique dans l'une des phases.

Le couplage est bien évidemment bilatéral. La plasticité et notamment le saut de déformation plastique joue un rôle essentiel dans l'évolution de la morphologie des cellules.

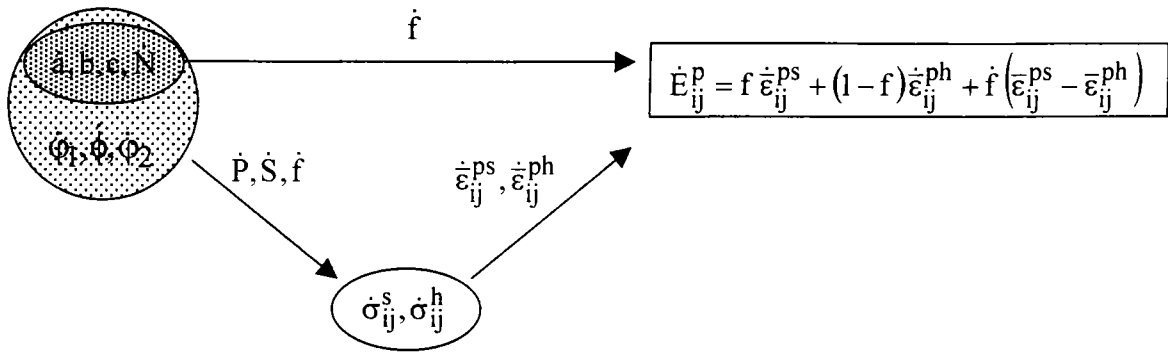


Figure II.4: effet de l'évolution de la microstructure sur le taux de déformation plastique macroscopique.

II.2 Dissipation et forces critiques

Dans la partie II.1, nous avons établi l'expression de l'énergie libre d'Helmholtz et de la force motrice associée à chacune des variables internes. Il nous faut maintenant aborder le calcul de la dissipation qui correspond au deuxième membre du premier principe de la thermodynamique énoncé en II.34. De la dissipation, nous obtiendrons l'expression des forces critiques associées aux variables internes. Une variable interne x_i est considérée potentiellement active si sa force motrice F^i est égale à sa force critique F_c^i .

Dans ce qui suit, x_μ^i désigne une variable morphologique i , a^i un demi axe et α^i un des trois angles d'Euler.

II.2.1 Plasticité et écrouissage non local

On se place dans le cadre de la plasticité indépendante du temps. La morphologie des cellules de dislocations résultant plus d'un effet global du chargement que d'un effet lié directement à la cristallographie, la structure polycristalline du matériau a été négligée. Cette hypothèse permet de ne tenir compte que des effets de la structure intragranulaire.

A chaque phase est associé un critère de plasticité de type Von Mises. Dans ce cas, la dissipation intrinsèque (D_{e_p}) liée à la déformation plastique des phases sans considérer de mouvement de l'interface cellule-paroi est donnée par :

$$D_{e_p} = f Y_c^s \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} + (1-f) Y_c^h \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} \quad [\text{II.84}]$$

où $\bar{\epsilon}_{eq}^p$ est le multiplicateur plastique de la phase considérée. Y_c^s et Y_c^h sont les limites d'écoulement de la phase molle et de la phase dure respectivement.

Le matériau est considéré initialement homogène. L'hétérogénéité n'apparaît qu'avec la déformation plastique. Pour respecter cette hypothèse, les limites d'écoulement initiales des deux phases sont considérées égales.

a. Critères de plasticité

Le critère de plasticité s'écrit en fonction des limites d'écoulement de la façon suivante :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{sD} \sigma_{ij}^{sD}} = \sigma_{eq}^s = Y_c^s \quad [\text{II.85}]$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{hD} \sigma_{ij}^{hD}} = \sigma_{eq}^h = Y_c^h \quad [\text{II.86}]$$

où σ_{ij}^D désigne le déviateur des contraintes $\left(\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$.

La direction de glissement dans les phases est donnée par la loi de normalité en prenant comme fonction potentielle le critère de Von Mises lui-même.

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{ps} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{sD}}{\sigma_{eq}^s} \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} \quad [II.87]$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{ph} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{hD}}{\sigma_{eq}^h} \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} \quad [II.88]$$

Le taux de déformation d'une phase i est donné par le système suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\dot{\epsilon}}_{eq}^{pi} = 0 \quad & \text{si} \quad \begin{cases} \sigma_{eq}^i < Y_c^i \\ \forall \dot{\sigma}_{eq}^i \end{cases} \\ \bar{\dot{\epsilon}}_{eq}^{pi} = 0 \quad & \text{si} \quad \begin{cases} \sigma_{eq}^i = Y_c^i \\ \dot{\sigma}_{eq}^i - \dot{Y}_c^i < 0 \end{cases} \\ \bar{\dot{\epsilon}}_{eq}^{pi} \neq 0 \quad & \text{si} \quad \begin{cases} \sigma_{eq}^i = Y_c^i \\ \dot{\sigma}_{eq}^i - \dot{Y}_c^i = 0 \end{cases} \quad [II.89] \end{aligned}$$

La direction de l'écoulement plastique est donnée par la règle de normalité (II.87 et II.88).

L'amplitude de l'écoulement est donnée par la règle de consistance qui dans notre cas s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{eq}^s = \dot{Y}_c^s \quad [II.90]$$

$$\dot{\sigma}_{eq}^h = \dot{Y}_c^h \quad [II.91]$$

Nous supposons pour la suite que la limite d'écoulement dans les phases est indépendantes de la géométrie des cellules. On écrit donc :

$$Y_c^s = Y_c^s(\bar{\epsilon}^{ps}, \bar{\epsilon}^{ph}) \quad [II.92]$$

$$Y_c^h = Y_c^h(\bar{\epsilon}^{ps}, \bar{\epsilon}^{ph}) \quad [II.93]$$

Les taux d'évolution des limites d'écoulement sont donc donnés par une matrice d'écrouissage contenant quatre termes

$$\dot{Y}_c^s = H^{ss} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}, x^i \right) \bar{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{ps} + H^{sh} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}, x^i \right) \bar{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{ph} \quad [II.94]$$

$$\dot{Y}_c^h = H^{hs} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}, x^i \right) \bar{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{ps} + H^{hh} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}, x^i \right) \bar{\dot{\varepsilon}}_{eq}^{ph} \quad [II.95]$$

H^{ss}, H^{sh}, H^{hs} et H^{hh} sont a priori des fonctions de toutes les variables internes (déformations plastiques et morphologie).

b. Ecrouissage

Le but de cette partie est de définir les relations entre les taux d'évolution des limites d'écoulement et des déformations plastiques dans les deux phases.

En plasticité classique, la limite d'écoulement est reliée à la densité de dislocation ρ par la loi de Taylor :

$$Y_c = Y_c^0 + \alpha \mu b \sqrt{\rho} \quad [II.96]$$

où Y_c^0 est la limite d'écoulement initiale du matériau, μ le module de cisaillement, b le module du vecteur de Burgers et α un coefficient dépendant du matériau.

Le taux d'écrouissage est obtenu par dérivation de II.96 :

$$\dot{Y}_c = \frac{(\alpha \mu b)^2}{Y_c - Y_c^0} \dot{\rho} \quad [II.97]$$

Pour définir complètement la relation d'écrouissage, il faut maintenant relier le taux d'évolution de la densité de dislocations au taux de déformation plastique. Cette relation doit prendre en compte les phénomènes d'accumulation et d'annihilation des dislocations présents au sein du matériau. En plasticité classique la relation choisie est la suivante :

$$\dot{\rho} = \left(\frac{2}{b\delta} - \frac{y}{b} \rho \right) \dot{\varepsilon}_{eq}^p \quad [II.98]$$

où δ est le libre parcours moyen des dislocations et y est la distance caractéristique d'annihilation des dislocations.

Dans l'équation II.98, le premier terme représente les mécanismes d'accumulation des dislocations et le second contient les effets des mécanismes d'annihilation. Le terme d'annihilation est proportionnel à la densité de dislocations pour tenir compte du fait que la probabilité que deux dislocations soient en position de s'annihiler est d'autant plus grande que la densité de dislocation est importante.

Dans le cas de la représentation de la microstructure de dislocations par un matériau biphasé, la limite d'écoulement d'une phase est reliée à sa densité de dislocations par la même relation que II.96 :

$$Y_c^s = Y_c^o + \alpha\mu b\sqrt{\rho^s} \quad [\text{II.99}]$$

$$Y_c^h = Y_c^o + \alpha\mu b\sqrt{\rho^h} \quad [\text{II.100}]$$

Les taux d'écroissage s'expriment facilement en fonctions des taux d'évolution des densités de dislocations à partir de II.97 :

$$\dot{Y}_c^s = \frac{1}{2} \frac{(\alpha\mu b)^2}{Y_c^s - Y_c^o} \dot{\rho}^s \quad [\text{II.101}]$$

$$\dot{Y}_c^h = \frac{1}{2} \frac{(\alpha\mu b)^2}{Y_c^s - Y_c^o} \dot{\rho}^h \quad [\text{II.102}]$$

On peut remarquer que jusqu'à présent, le comportement des deux phases vis à vis de la densité de dislocations, est identique (mêmes μ , Y_c^o , α et b). Nous n'avons donc pas affaire à un composite classique constitué de deux matériaux ayant des relations de comportement totalement différentes et indépendantes. En fait, l'hétérogénéité du comportement vient de l'hétérogénéisation de la répartition des dislocations dans le matériau et non pas d'un comportement intrinsèque hétérogène. Avec la déformation plastique, les dislocations s'accumulent dans certaines zones particulières du matériau.

Au sein de la microstructure de dislocations, la déformation plastique dans les cellules est reliée au taux d'écroissage des murs. Cette deuxième interaction cellule-paroi différencie le matériau biphasé classique de la représentation de la microstructure de dislocation développée ici. En effet, dans un composite biphasé classique l'interaction entre les deux phases n'apparaît qu'au travers des contraintes internes. Le couplage entre les limites d'écoulement n'existe pas, c'est-à-dire que les lois de comportements des deux matériaux sont indépendantes. Dans notre modèle apparaît un couplage entre les deux phases au travers des limites d'écoulement provenant du mouvement particulier des dislocations au sein de la microstructure. Ceci différencie aussi notre biphasé des composites moins classiques comme les Alliages à Mémoire de Forme ou les acier TRIP qui possèdent des frontières mobiles mais qui ont des lois comportements indépendantes pour chaque phase.

Les taux de densité de dislocations des deux phases dépendent des taux de déformation plastique dans les deux phases :

$$\dot{\rho}^s = \lambda_{ss} \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} + \lambda_{sh} \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} \quad [\text{II.103}]$$

$$\dot{\rho}^h = \lambda_{hs} \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} + \lambda_{hh} \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} \quad [\text{II.104}]$$

Il faut maintenant définir les fonctions λ à partir des observations expérimentales du chapitre I. Cette étude est inspirée des travaux de Muller. [MKB93]

- **auto écrouissage de l'intérieur des cellules**

La densité de dislocations dans les cellules reste faible au cours de la déformation plastique. Pour des raisons de simplicité, on prend λ_{ss} égale à une constante κ . Ceci donne pour H_{ss} :

$$H_{ss} = \frac{L_1}{\left(Y_c^s - Y_c^o\right)} \kappa \quad [\text{II.105}]$$

- **écrouissage non local de l'intérieur des cellules**

Ce terme traduit le phénomène de durcissement des cellules par des dislocations ayant généré de l'écoulement plastique dans les murs.

N'observant pas expérimentalement de dislocations provenant des murs et s'accumulant dans les cellules, nous considérons ce terme nul.

$$H_{sh} = 0 \quad [\text{II.106}]$$

- **écrouissage non local des murs**

La définition de ce terme est essentielle car il représente la deuxième face des interactions entre les cellules et les parois.

Considérons le cas simplifié de la figure II.5.

La déformation plastique de l'intérieur des cellules est due à la traversées de dislocations (figure II.5a). Celles-ci en s'accumulant dans les murs, accroissent la densité de dislocation dans les murs (figure II.5b).

Le taux d'évolution de la densité de dislocation de la phase dure est relié au taux de glissement dans la phase molle $\dot{\gamma}^s$ par la relation suivante :

$$\dot{\rho}^h = \frac{2}{b\delta} \frac{f}{1-f} \dot{\gamma}^s \quad [\text{II.107}]$$

où δ est le libre parcours moyen des dislocations. Dans le cas simplifié de la figure II.5, il s'exprime en fonction de l'épaisseur des murs de la façon suivante :

$$\delta = \frac{f}{1-f} \delta^* \quad [\text{II.108}]$$

Ceci est vrai, dans le cas de chargement monotone.

Si on considère maintenant, un chargement complexe de type Bauschinger, pendant la phase transitoire du second chargement, on se retrouve dans le cas illustré par la figure II.6. La déformation plastique à l'intérieur des cellules est due au retour d'une partie des dislocations ayant été stockées pendant le premier chargement [HRT92]. Dans ce cas, la relation II.107 devient :

$$\dot{\rho}^h = -\frac{2}{b\delta} \frac{f}{1-f} \dot{\gamma}^s \quad [II.108]$$

Le signe de la relation dépend donc de la polarité des dipôles produisant la déformation plastique devant celle des dipôles stockés dans les murs.

Pour la représentation simplifiée des figures II.5 et II.6, la polarité des dislocations stockées est donnée par le saut de glissement ($\gamma^s - \gamma^h$). La polarité des dislocations traversant les cellules est donnée par le signe de la contrainte interne τ^s dans les cellules.

La relation II.107 et II.108 peuvent donc se regrouper sous II.109 :

$$\dot{\rho}^h = \text{sign}\left(\tau^s(\gamma^s - \gamma^h)\right) \frac{2}{b\delta} \quad [II.109]$$

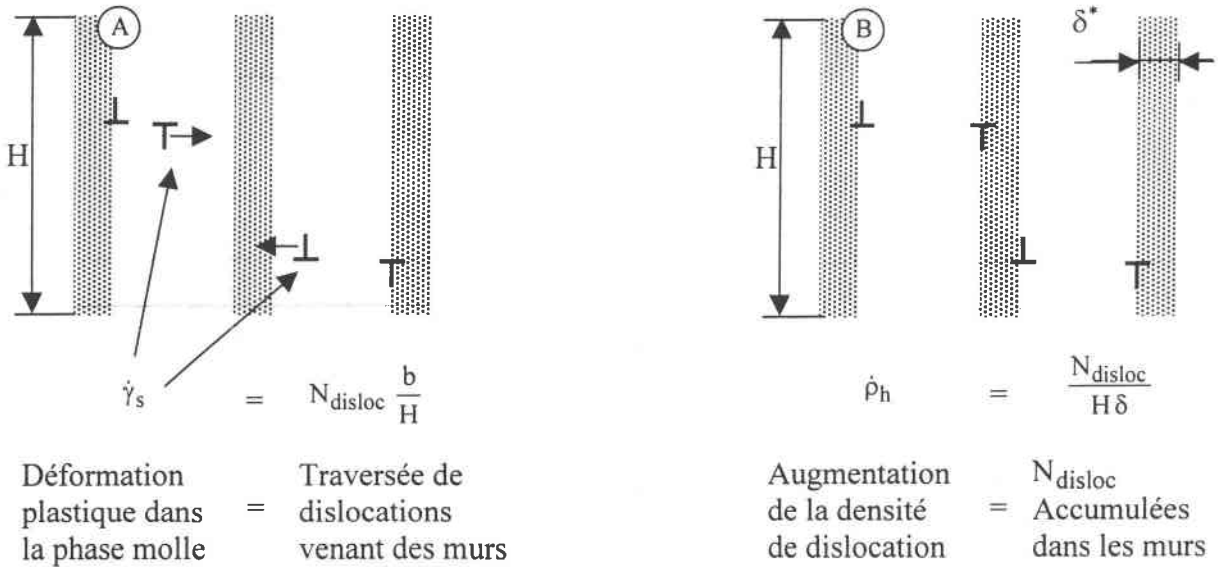


Figure II.5 : représentation simplifié du phénomène d'écrouissage non local

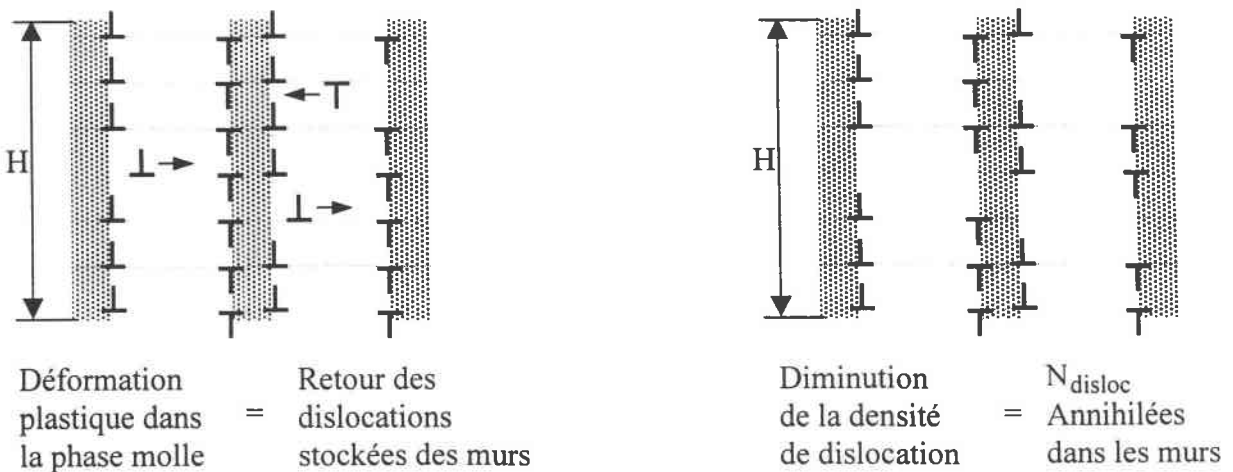


Figure II.6 : représentation du phénomène d'écrouissage non local dans le cas d'un essai Bauschinger

Dans la représentation biphasée de notre modèle, la polarité des dislocations traversant les cellules est donnée suivant le critère de Von Mises par le déviateur de la contrainte interne à l'intérieur des cellules σ_{ij}^{sD} . La polarité des dislocations stockées dans les murs est donnée par le saut de déformation plastique $\left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}\right)$.

En s'inspirant des résultats obtenus pour la représentation simplifiée de la microstructure de dislocations, on adopte pour l'érouissage non local, la loi suivante :

$$\dot{\rho}^h = \frac{2}{b\delta} \frac{f}{1-f} \zeta(\Theta) \bar{\varepsilon}_{eq}^{ps} \quad [\text{II.110}]$$

avec

$$\Theta = \frac{\sigma_{ij}^{sD} \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}\right)}{\sigma_{eq}^s \left(\bar{\varepsilon}^{ps} - \bar{\varepsilon}^{ph}\right)_{eq}} \quad [\text{II.111}]$$

et avec la fonction $\zeta(\Theta)$ définie par :

$$\begin{cases} \text{si } \Theta \geq 0 & \zeta(\Theta) = 1 \\ \text{si } \Theta \leq 0 & \zeta(\Theta) = (1+s)\Theta + 1 \end{cases} \quad [\text{II.112}]$$

où s est un paramètre ajustable compris entre 0 et 1 permettant de prendre en compte le fait qu'en essai Bauschinger une partie des dislocations s'échappant des parois s'interceptent et reforment de nouvelles structures de dislocations de polarité opposée. Toutes les dislocations traversant les cellules ne viennent donc pas s'annihiler avec celles du murs opposés.

Le terme non local de la matrice d'érouissage s'exprime donc :

$$H_{hs} = \frac{(\alpha\mu b)^2}{Y_c^h - Y_c^o} \left(\frac{2}{b\delta}\right) \frac{f}{1-f} \zeta(\Theta) \quad [\text{II.113}]$$

- auto érouissage des murs

L'annihilation des dislocations est concentrée dans les parois (figure I.13). En s'inspirant du terme d'annihilation de l'équation II.98, nous adoptons la loi suivante :

$$\dot{\rho}^h = -\frac{2y}{b} \rho^h \bar{\varepsilon}_{eq}^{ph} \quad [\text{II.114}]$$

En introduisant II.114 dans II.102, on obtient :

$$H_{hh} = -\frac{y}{b} (\alpha\mu b)^2 \left(Y_c^h - Y_c^o\right) \quad [\text{II.115}]$$

Comme pour l'érouissage non local, la déformation plastique des murs pendant le régime transitoire d'un essai Bauschinger ne s'accompagne pas d'une diminution de la densité de dislocations. On introduit une nouvelle fonction $\zeta_2(\Theta_2)$ dépendant cette fois-ci de la direction du glissement des murs devant la polarité des dislocations représentée par le saut de déformation plastique.

$$\begin{cases} \text{si } \Theta_2 \geq 0 & \zeta_2(\Theta_2) = 1 \\ \text{si } \Theta_2 \leq 0 & \zeta_2(\Theta_2) = (1 + s_2)\Theta_2 + 1 \end{cases} \quad [\text{II.116}]$$

avec

$$\Theta_2 = \frac{\sigma_{ij}^{hD} (\bar{\epsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\epsilon}_{ij}^{ph})}{\sigma_{eq}^h (\bar{\epsilon}^{ps} - \bar{\epsilon}^{ph})_{eq}} \quad [\text{II.117}]$$

Le terme d'auto érouissage des parois devient :

$$H_{hh} = -\frac{\gamma}{b} (\alpha \mu b)^2 (Y_c^h - Y_c^o) \zeta_2(\Theta_2) \quad [\text{II.118}]$$

c Résumé

La microstructure de dislocations est représentée par un matériau biphasé. A chacune des phases est associé un critère de plasticité de type Von Mises avec un érouissage cinématique et isotrope. La règle de normalité donne les directions de glissement en fonction du déviateur des contraintes internes calculées dans la première partie de ce chapitre.

Les limites d'écoulement sont reliées aux densités de dislocation par la loi de Taylor. Cette loi est prise identique pour les deux phases. C'est-à-dire que vis à vis de la densité de dislocation, le comportement du matériau est homogène. Cette homogénéité touche aussi le comportement élastique et la limite d'écoulement initiale.

L'hétérogénéisation du matériau provient exclusivement de la cinématique des dislocations choisie (d'après les observations expérimentales). Contrairement à la loi classique II.92 décrivant les mécanismes d'accumulation et d'annihilation de façon moyenne et homogène, on a désigné l'une des phases (murs) comme zone d'accumulation des dislocations et défini le mécanisme d'accumulation comme une interaction entre les deux phases que l'on a appelé érouissage non local.

A partir des observations expérimentales, on obtient la relation d'érouissage suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_c^s \\ \dot{Y}_c^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{Y_c^s - Y_c^o} & 0 \\ \frac{L_2}{Y_c^h - Y_c^o} \frac{f}{1-f} \zeta(\Theta) & -L_3 (Y_c^h - Y_c^o) \zeta_2(\Theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} \\ \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} \end{bmatrix} \quad [\text{II.116}]$$

Dans la matrice d'érouissage, sont pris en compte les phénomènes suivant :

- l'accumulation des dislocations dans parois (écrouissage non local)
- le réarrangement des dislocations au cours des régimes transitoires des chargements complexes. (fonction $\zeta(\Theta)$)
- l'annihilation des dislocations au sein des murs
- la faible accumulation de dislocations à l'intérieur des cellules

Par contre, l'anisotropie liée à la nature cristallographique des dislocation n'est pas du tout représentée. Ce phénomène est pris en compte dans les modèle de Muller [M94] et Lemoine [L95] par la matrice d'interaction a_{ij} dont les coefficients ont été déterminés par Franciosi [F84] dans le cas des métaux CFC. Ici, la limite d'écoulement reste isotrope et est reliée à la densité totale de dislocations.

De plus, l'aspect anisotrope de l'annihilation n'est pas non plus représenté. Là aussi, l'annihilation est exprimée en fonction de la densité de dislocations totale.

L'effet de la morphologie de la microstructure de dislocations sur les termes de la matrice d'écrouissage a été négligé. En fait, la forme des cellules confère au libre parcours moyen des dislocations un aspect anisotrope (figure I.12).

En fait, les aspects anisotropes des relations d'écrouissage liés au fait que les dislocations doivent se déplacer suivant les plans de glissement sont très difficiles à reproduire dans le cadre d'une plasticité décrite à partir d'un critère de Von Mises pour laquelle le repère cristallographique n'a pas de signification.

Dans cette partie, nous avons donné l'expression des paramètres L_1 , L_2 , L_3 et des fonctions $\zeta(\Theta)$ et $\zeta_2(\Theta_2)$. Ceux-ci étant issus de l'étude d'une représentation simplifiée de la microstructure, nous les considérons comme des paramètres du matériau. Leur ordre de grandeur est fixé par l'expression que nous en avons donné au chapitre II.1.2. Ils doivent toutefois faire l'objet d'un ajustement pour représenter de façon plus précise le comportement du matériau réel.

II.2.2 Dissipation associée au mouvement de frontière et fonction de charge morphologique.

Les forces thermodynamiques associées aux variables internes morphologiques ont été établies à la fin du chapitre II.1. A ces forces motrices sont opposées des forces critiques issues des mécanismes dissipatifs associés à la propagation des interfaces de discontinuité.

Dans son modèle Lemoine considère ces forces critiques nulles. Cela signifie que la microstructure de dislocation adopte spontanément une configuration représentant un minimum d'énergie. Cette hypothèse n'est pas acceptable dans le cas des chargements complexes dans la mesure où les instabilités microstructurales observées expérimentalement (microbandes de cisaillement) viennent justement de l'impossibilité pour la microstructure de s'adapter au nouveau chargement. L'aspect persistant de la microstructure de dislocation ne peut pas être obtenu à partir d'une simple minimisation de l'énergie libre.

a. Dissipation associée au mouvement de la surface

La dissipation intrinsèque D_μ , liée à la propagation de la surface de discontinuité, peut être obtenue à partir de l'équation II.61 pour laquelle on considère des taux de déformation plastique nuls.

$$D_\mu = \frac{1}{2} \int_{\Delta} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) [\varepsilon_{ij}^p] w_\alpha n_\alpha dS \quad [\text{II.117}]$$

Le terme $\tau^\mu = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) [\varepsilon_{ij}^p]$ apparaît comme la force thermodynamique locale associée au mouvement de la frontière.

A cette force thermodynamique, on oppose une force critique calculée en considérant en chaque point de Δ un seuil τ_c^μ de résistance à la propagation de la frontière (figure II.7).

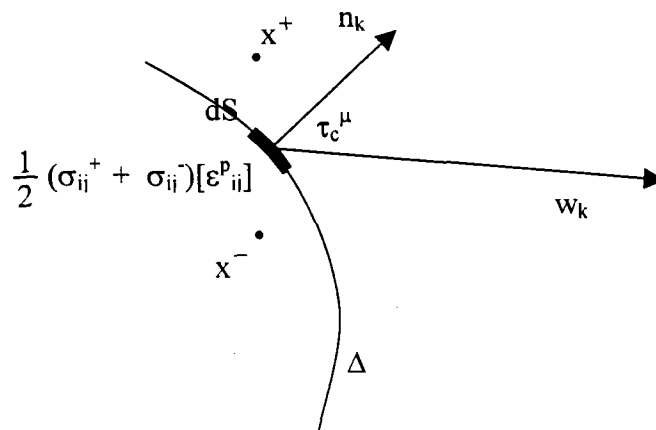


Figure II.7: coefficient de résistance au mouvement de la frontière.

De façon générale, le coefficient de résistance à la propagation de la frontière de discontinuité de la déformation plastique, dépend des variables internes:

$$\tau_c^\mu = \tau_c^\mu(\varepsilon_{ij}^{ps}, \varepsilon_{ij}^{ph}, x_\mu, \dots) \quad [\text{II.118}]$$

Les difficultés rencontrées pour l'identifier physiquement nous amènent dans un premier temps à le considérer constant.

La dissipation intrinsèque liée au mouvement de l'interface s'écrit :

$$D_\mu = \int_\Delta \tau_c^\mu |w_\alpha n_\alpha| dS \quad [\text{II.119}]$$

Localement, on pourrait écrire le critère de propagation de la frontière suivant:

$$w_\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau^\mu < \tau_c^\mu \\ \forall \dot{\tau}^\mu \end{cases}$$

$$w_\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau^\mu = \tau_c^\mu \\ \dot{\tau}^\mu < \dot{\tau}_c^\mu \end{cases} \quad [\text{II.120}]$$

$$w_\alpha \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau^\mu = \tau_c^\mu \\ \dot{\tau}^\mu = \dot{\tau}_c^\mu \end{cases}$$

avec

$$\tau^\mu = \frac{1}{2} \left| (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) \varepsilon_{ij}^p \right| \quad [\text{II.121}]$$

Dans la représentation biphasée de ce modèle, nous imposons à la frontière d'être et de rester ellipsoïdale tout au long de la transformation.

- La force thermodynamique globale sur la frontière associée aux variables internes morphologiques ont été calculées au paragraphe précédent.
- Les forces critiques doivent être calculées à partir de la dissipation totale calculée sur toute la frontière.

Il faut donc expliciter le calcul de la dissipation en faisant apparaître les taux d'évolution des variables internes morphologiques. Dans le repère de la cellule, la vitesse de propagation est donnée en fonction du taux des variables internes morphologiques:

$$\begin{aligned}
 v(\dot{x}_\mu, x_\mu) = & \begin{bmatrix} \frac{r \cos \theta \sin \varphi}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \cos \varphi}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 0 & r \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ -r \cos \varphi & 0 & r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad [\text{II.122}]$$

où $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$ sont les composantes du vecteur vitesse de rotation de l'interface Δ dans le repère de la cellule. Ce vecteur peut être exprimé en fonction du taux d'évolution des angles d'Euler par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ \sin \phi \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \cos \phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = K(\phi, \varphi_2) \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad [\text{II.123}]$$

r , θ et φ sont les coordonnées sphériques du point considéré toujours exprimées dans le repère de la cellule. Les points considérés étant sur la frontière ellipsoïdale, r est relié aux deux autres coordonnées par:

$$r(x_\mu) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}}} \quad [\text{II.124}]$$

Avec ces mêmes coordonnées, la normale à l'interface est donnée par:

$$n(x_\mu) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^4} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^4} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^4}}} \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta \sin \varphi}{a^2} \\ \frac{\sin \theta \sin \varphi}{b^2} \\ \frac{\cos \varphi}{c^2} \end{bmatrix} \quad [\text{II.125}]$$

L'élément de surface de l'ellipsoïde projeté sur la sphère de rayon r donne l'élément de surface de la sphère elle-même.

$$(\vec{n} \cdot \vec{e}_r) dS = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \quad [\text{II.126}]$$

En introduisant II.122, II.124, II.125 et II.126 dans l'équation II.119, on obtient l'expression de la dissipation associée à la croissance ellipsoïdale de l'interface cellule-paroi.

$$D_{\mu} = NV \int_{\theta \varphi} \tau_c^{\mu} \sin \varphi r^5 \left[\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^3} \dot{a} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} \dot{b} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2} \dot{c} + \\ & + \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \dot{\alpha} + \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \dot{\beta} \\ & + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \dot{\gamma} \end{aligned} \right] d\varphi d\theta \quad [\text{II.127}]$$

b. Surface de charge associée aux variables morphologiques.

Pour alléger les notations, la dissipation D_{μ} peut se mettre sous la forme suivante:

$$D_{\mu} = \int_{\theta \varphi} |W_{\mu}(\dot{x}_{\mu}, x_{\mu}, \theta, \varphi)| d\theta d\varphi \quad [\text{II.128}]$$

où W_{μ} se retrouve facilement à partir de II.127 et x_{μ} désigne les variables internes morphologiques.

$D_{\mu}(\dot{x}_{\mu}, x_{\mu})$ étant une fonction homogène, l'expression de la force critique est donnée par la dérivée de la dissipation par rapport au taux d'évolution de la variable interne concernée. Ceci donne:

$$F_c^{\mu} = \frac{\partial D_{\mu}}{\partial \dot{x}_{\mu}} = \int_{\Delta} \tau_c^{\mu} \frac{\partial (w_{\alpha} n_{\alpha})}{\partial \dot{x}_{\mu}} \text{sign}(w_{\alpha} n_{\alpha}) dS = \int_{\theta \varphi} \frac{\partial W_{\mu}}{\partial \dot{x}_{\mu}} \text{sign}(W_{\mu}) d\theta d\varphi \quad [\text{II.129}]$$

où $\text{sign}(x)$ est la fonction donnant le signe de x .

On note que la valeur des forces critiques morphologiques F_{μ}^c dépendent de tous les $\dot{x}_{\mu'}$. Il y a donc couplage entre les variables internes morphologiques au travers du critère d'évolution.

$$F_c^{\mu} = F_c^{\mu}(x_{\mu'}, \dot{x}_{\mu'}) \quad [\text{II.130}]$$

Pour connaître la valeur de la force critique suivant une variable interne il faut connaître la vitesse d'évolution de toutes les variables internes.

* propriétés de D_{μ} et F_c^{μ}

La valeur des forces critiques dépendent de la direction de l'évolution et non de son amplitude.

$$F_c^{\mu}(\lambda \dot{x}_{\mu'}, x_{\mu'}) = F_c^{\mu}(\dot{x}_{\mu'}, x_{\mu'}) \quad [\text{II.131}]$$

Les forces critiques sont des fonctions continues de \dot{x}_μ dans la mesure où :

- $\frac{\partial W_\mu}{\partial \dot{x}_\mu}$ est indépendant de \dot{x}_μ
- le lieu des points de Δ pour lesquels W_μ est nulle varie continûment avec \dot{x}_μ .

La conséquence de cette propriété des forces critiques est que la surface $E(D_\mu(\dot{x}_\mu) = \text{constante} \geq 0)$ est régulière.

De plus, E est une surface convexe. En effet, si on considère deux évolutions de variables internes, \dot{x}_μ^1 et \dot{x}_μ^2 , on a :

$$\begin{aligned} D_\mu(\dot{x}_\mu^1) + D_\mu(\dot{x}_\mu^2) &= \int_{\theta \varphi} W(\dot{x}_\mu^1, x_\mu) d\varphi d\theta + \int_{\theta \varphi} W(\dot{x}_\mu^2, x_\mu) d\varphi d\theta \\ &\geq \int_{\theta \varphi} W(\dot{x}_\mu^1, x_\mu) + W(\dot{x}_\mu^2, x_\mu) d\varphi d\theta = D_\mu(\dot{x}_\mu^1 + \dot{x}_\mu^2) \end{aligned} \quad [\text{II.132}]$$

Ces deux propriétés réunies permettent de prendre la dissipation, calculée en considérant un seuil de résistance à la propagation de la surface, comme potentiel de dissipation pour calculer les forces critiques relatives aux variables internes morphologiques.

* Principe du travail maximum

L'évolution de la morphologie de la microstructure est déterminée par le principe du travail maximum.

Ce principe s'énonce de la façon suivante:

$$\begin{cases} \forall \dot{x}_\mu \quad D_\mu(\dot{x}_\mu) \geq F^\mu \dot{x}_\mu = -\dot{\Phi}_\mu \\ \dot{x}_\mu^0 \text{ est solution si } D_\mu(\dot{x}_\mu^0) = F^\mu \dot{x}_\mu^0 \end{cases} \quad [\text{II.133}]$$

$\dot{\Phi}_\mu$ est l'évolution de l'énergie libre due à l'évolution de la morphologie des cellules.

Pour qu'une transformation ait lieu, il faut que l'énergie dissipée au cours de cette transformation soit égale au taux d'énergie libre. Si la dissipation est supérieure, la transformation ne peut pas se produire. Si elle est inférieure, la transformation est instable. On sort du cadre des processus quasi – statiques.

Du fait que la surface E est convexe et régulière, le principe du travail maximum impose:

$$\text{si } \dot{x}_\mu^0 \text{ est solution alors } F_c^\mu(\dot{x}_\mu^0) = F^\mu \quad \forall \mu \quad [\text{II.134}]$$

Graphiquement, ce principe peut être interprété de la façon suivante:

Soit la surface E définie par: $D_\mu(\dot{x}_\mu) = 1$ (figure II.8)

Soit la droite L définie par: $-\dot{\Phi}_\mu(\dot{x}_\mu) = 1$

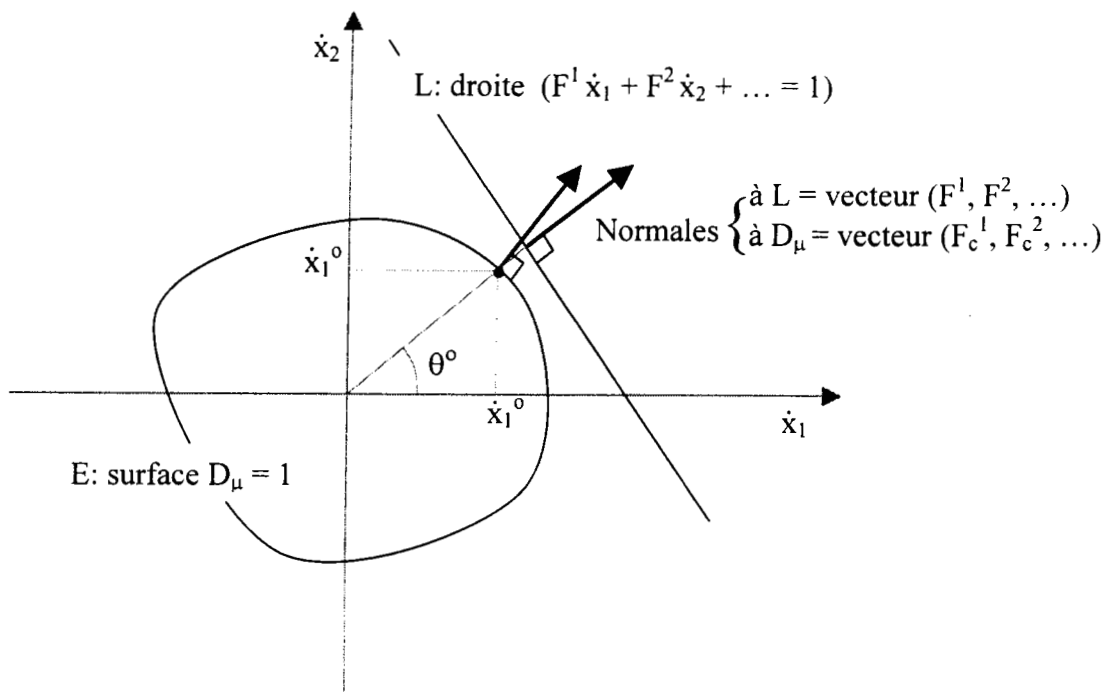


Figure II.8 : Surface à dissipation constante et droite à taux d'énergie libre constant dans le cas où il n'y a pas évolution des variables internes.

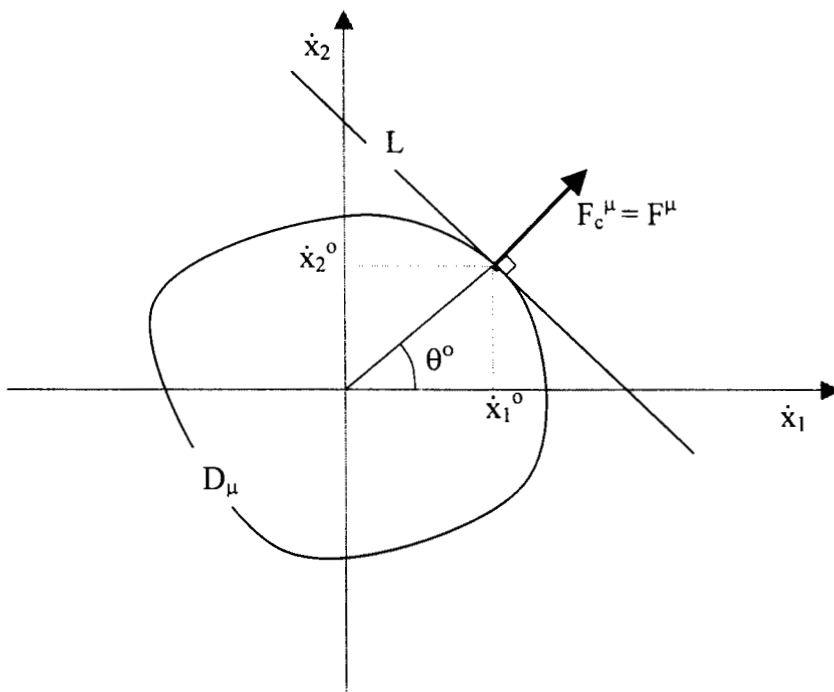


Figure II.9 : Surface E et droite L quand il y a évolution de la morphologie.

Si l'intersection entre L et E est l'ensemble vide (figure II.8), il n'y a pas d'évolution possible de la microstructure.

Par contre, si la « droite » L est tangente à E (figure II.9), une direction d'évolution de la morphologie des cellules définie par l'angle θ° est possible. L'amplitude de l'évolution de la morphologie est donnée par la règle de consistance traduisant le fait que l'on doit rester sur la surface de charge.

Dans l'espace des forces motrices, la surface $(D_\mu = cste)$ devient la surface de charge. Les coordonnées de chaque point de cette surface correspondent aux valeurs des forces critiques obtenues pour toutes les directions d'évolution des variables internes possibles. Ceci revient à reporter pour chaque point M de E, la valeur du vecteur normal composé des forces critiques (figure II.10).

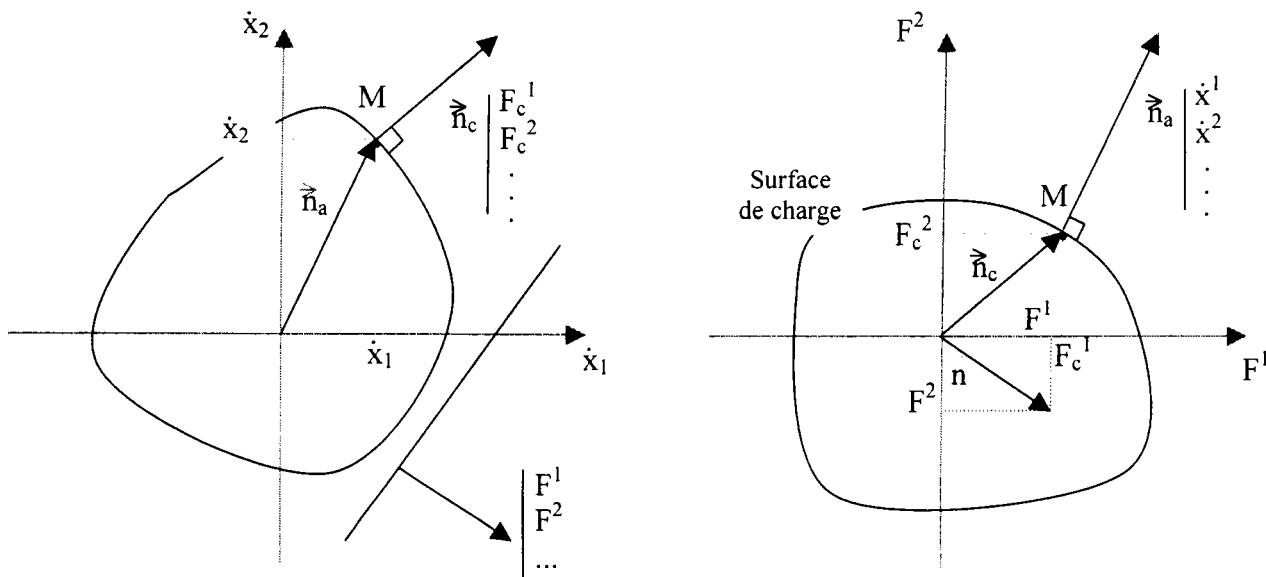


Figure II.10 : Surface de charge pour les variables internes morphologiques

L'aspect des surfaces de charge est fortement lié à la présence ou non de point de vitesse nulle sur l'interface Δ .

- si pour une évolution \dot{x}_μ donnée, $W_\mu(\dot{x}_\mu)$ change de signe sur Δ , alors la surface E est strictement convexe au point \dot{x}_μ considéré.
- Par contre, si $W_\mu(\dot{x}_\mu)$ ne change pas de signe sur Δ , la surface E est plane au point considéré.

Cette propriété vient du fait que si $W_\mu(\dot{x}_\mu)$ ne change pas de signe sur l'interface, les forces critiques cessent autour de ce point de dépendre des taux d'évolution des variables internes.

$$F_c^\mu(\dot{x}_\mu, x_\mu) = \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{\partial W_\mu}{\partial \dot{x}_\mu}(x_\mu) d\theta d\varphi \quad [\text{II.135}]$$

Les forces critiques deviennent donc constantes dans l'espace des taux d'évolution sur une partie de E. Les forces critiques représentant la normale à E, la partie de E concernée est donc plane.

Les parties planes de E apparaissent sur la surface de charge sous la forme de points anguleux. En effet, pour plusieurs taux d'évolution de la microstructure, on obtient les mêmes forces critiques. La valeur de ces forces critiques détermine un point de la surface de charge et l'ensemble des évolutions est l'ensemble des normales possibles en ce point (voir figure II.11).

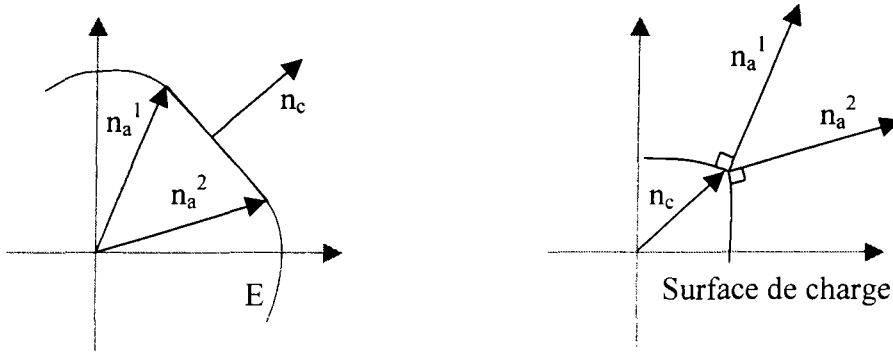


Figure II.11 : singularité de la surface de charge

Dans la partie suivante nous illustrons le problème lié à la détermination de la surface de charge pour les variables morphologiques dans un cas volontairement simplifié ne comprenant que deux variables internes.

c Cas particulier où la morphologie des cellules est donnée par deux variables internes.

Considérons le cas particulier où la microstructure est représentée par des ellipsoïdes de révolution de forme plate (penny shape, $a = b, c$) dont l'orientation est fixe. L'évolution de la morphologie des cellules est déterminée par deux variables internes que sont :

- a : le rayon de l'ellipsoïde
- c : son épaisseur

Dans ce cas particulier la relation II.127 se réduit à:

$$D_{\mu}(\dot{a}, \dot{c}) = \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau_c^{\mu} \left| r^5 \sin \varphi \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^3} \dot{a} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^3} \dot{c} \right) \right| d\varphi d\theta \quad [\text{II.136}]$$

Les forces critiques sont données par:

$$F_c^a = \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau_c^{\mu} \frac{r^5 \sin^3 \varphi}{a^3} \text{sign} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^3} \dot{a} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^3} \dot{c} \right) d\varphi d\theta \quad [\text{II.137}]$$

$$F_c^c = \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau_c^{\mu} \frac{r^5 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{c^3} \operatorname{sign} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^3} \dot{a} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^3} \dot{c} \right) d\varphi d\theta \quad [\text{II.138}]$$

Les surfaces de charges sont obtenues en considérant un paramètre t donnant la direction de l'évolution de la microstructure. Les taux d'évolution de a et c sont :

$$\dot{a} = \dot{\eta} \cos t \quad [\text{II.139}]$$

$$\dot{c} = \dot{\eta} \sin t \quad [\text{II.140}]$$

où $\dot{\eta}$ est l'amplitude de l'évolution. Sa valeur est déterminée pour obtenir une dissipation unitaire ($D_{\mu} = 1$). τ_c^{μ} est fixé à 1 MPa.

La surface $E(t)$ ($D_{\mu}(\eta, t) = 1$) est représentée sur la figure II.11, pour un rayon $a = 3$ et une épaisseur $c = 1$.

Le losange gris correspond à la surface E obtenue en considérant un découplage entre les variables a et c .

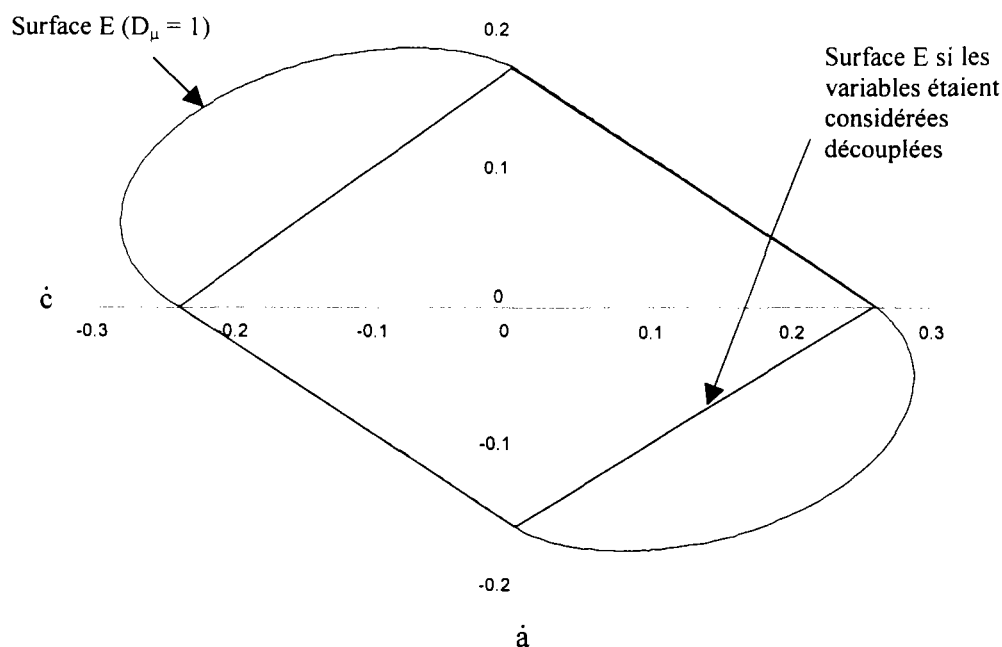


Figure II.12 : Surface $D_{\mu} = 1$ dans l'espace des taux d'évolution (\dot{a}, \dot{c})

Cette même surface est représentée en fonction des forces critiques sur la figure II.13.

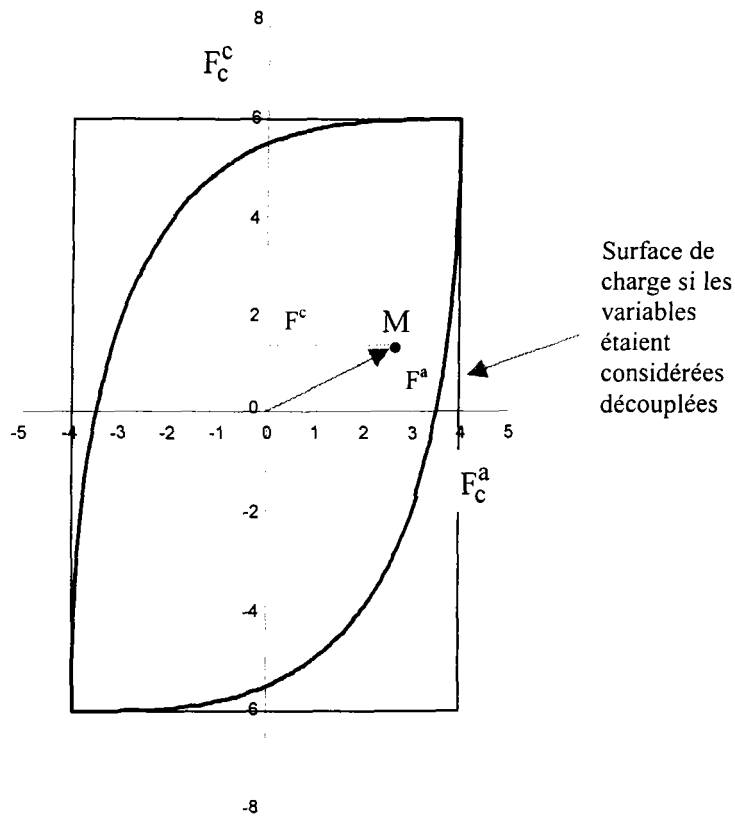


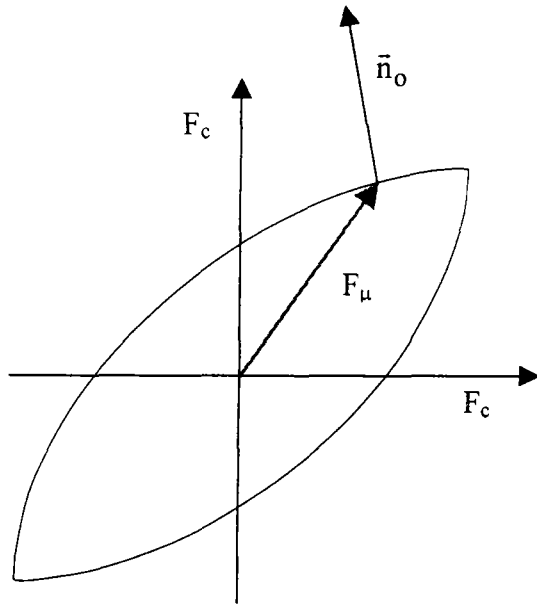
Figure II.13 : Surface $D_\mu = 1$ dans l'espace des forces critiques (F_c^a, F_c^c)

La surface E obtenue possède deux parties planes correspondant à des évolutions de a et c de même signe. Ceci se traduit donc par deux points anguleux sur la surface de charge.

Lors d'un chargement, les forces thermodynamiques associées aux deux variables internes augmentent avec le saut de déformation plastique et la contrainte macroscopique. Lorsque le point M (figure II.13) correspondant à ces forces se situe sur la surface de charge, deux cas illustrés par la figure II.14 et II.15 peuvent se présenter :

- E est strictement convexe en M
- E est convexe en M mais pas strictement

- **Partie strictement convexe de E**



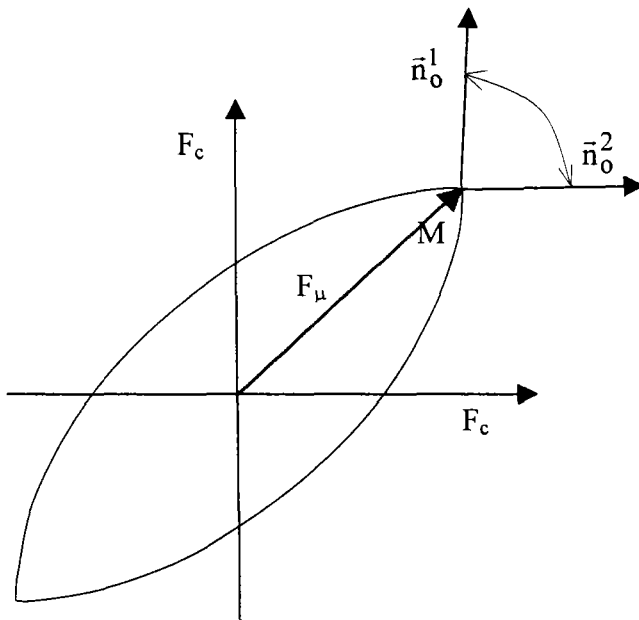
La direction de l'évolution est connue par le vecteur normal \bar{n}_o à la surface de charge. L'amplitude de l'évolution $\dot{\eta}$ est inconnue.

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{oa} \\ n_{ob} \end{bmatrix} \dot{\eta} \quad [\text{II.141}]$$

Les directions de glissement dans les deux phases étant connues, dans la résolution complète du problème, il reste trois inconnues que sont : $\dot{\epsilon}_{eq}^{ps}$, $\dot{\epsilon}_{eq}^{ph}$ et $\dot{\eta}$

Figure II.14 : cas strictement convexe

- **Partie non strictement convexe de E**



La direction de l'évolution de la morphologie est située dans un cône $(M, \bar{n}_o^1, \bar{n}_o^2)$.

Les directions de glissement sont connues mais celle de l'évolution de la morphologie ne l'est pas. Dans la résolution complète, on garde comme inconnue : $\dot{\epsilon}_{eq}^{ps}$, $\dot{\epsilon}_{eq}^{ph}$, \dot{a} et \dot{c}

Après résolution, il faut vérifier que l'évolution obtenue se trouve bien dans le cône.

Figure II.15 : cas non strictement convexe

- critère d'évolution

Nous n'avons pas d'expression analytique de la fonction de charge. Pour savoir s'il y a possibilité d'évolution de la morphologie, il faut reprendre l'expression du principe du travail maximum (équations II.102).

A chaque pas, on regarde s'il existe une direction d'évolution possible donnant une dissipation inférieure ou égale au taux d'énergie libre.

Pour cela, on cherche parmi les valeurs de \dot{a} et \dot{c} respectant

$$-\dot{\Phi}_\mu(\dot{a}, \dot{c}, a, c) = F_a(a, c)\dot{a} + F_c(a, c)\dot{c} = 1 > 0 \quad [\text{II.142}]$$

le couple \dot{a}_0, \dot{c}_0 donnant le minimum de dissipation $D_{\mu\min}$.

Si $D_{\mu\min} > 1$, il n'y a pas d'évolution possible

Si $D_{\mu\min} \leq 1$, la direction \dot{a}_0, \dot{c}_0 est une direction possible pour l'évolution. Nous sommes sur la surface de charge.

Dans le cas général où la morphologie des cellules est donnée par les six variables morphologiques, la phase de minimisation sous contrainte de la dissipation est fastidieuse. De plus, l'aspect non strictement convexe de certaines parties de la surface E pose des problèmes quant à la détermination de la direction de l'évolution.

Ces deux points nous amènent à chercher une approximation strictement convexe de la surface de charge dont nous pouvons calculer facilement l'expression analytique.

d Approximation de la surface de charge

Dans un objectif de simplification, l'ensemble des variables internes morphologiques décrivant les cellules est scindé en deux groupes :

- le premier contient les demi-axes des cellules. Ce sont les variables qui interviennent dans l'expression du taux de fraction volumique des cellules. Les variables internes de ce groupe sont notées : a_μ
- le deuxième est constitué des angles d'Euler. Les variables de ce groupe sont notées : α_μ

On considère qu'il y a découplage entre les variables internes des deux groupes.

Le potentiel de dissipation D_μ^* que nous considérons est donné par :

$$D_\mu^*(\dot{a}_\mu, \dot{\alpha}_\mu, a_\mu, \alpha_\mu) = D_\mu(\dot{a}_\mu, \dot{\alpha}_\mu = 0, a_\mu, \alpha_\mu) + D_\mu(\dot{a}_\mu = 0, \dot{\alpha}_\mu, a_\mu, \alpha_\mu) \quad [\text{II.143}]$$

Les forces critiques sont calculées comme précédemment (équation II.129) en ne prenant que la partie de la vitesse due à l'évolution des variables internes du groupe considéré (premier ou deuxième terme de II.122).

- Orientation (α_μ)

La figure II.16 montre la fonction de charge obtenue pour les rotations $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$ des cellules autour de leurs axes propres. La valeur des demi-axes est : $a = 3$, $b = 2$ et $c = 1$. Chaque point de la surface est calculé pour une direction d'évolution des angles fixée par deux paramètres ψ_1 et ψ_2 .

$$\Omega_\mu = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 \sin \psi_2 \\ \sin \psi_1 \sin \psi_2 \\ \cos \psi_2 \end{bmatrix} \dot{\eta} \quad [\text{II.144}]$$

où Ω_μ est le vecteur rotation propre de la cellule exprimé dans son repère.

Cette surface est approchée par un ellipsoïde (figure II.17) centré sur l'origine dont les directions principales sont les directions du repère des forces critiques. Son équation est la suivante :

$$\left(\frac{F_c^\alpha}{F_{co}^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{F_c^\beta}{F_{co}^\beta} \right)^2 + \left(\frac{F_c^\gamma}{F_{co}^\gamma} \right)^2 = 1 \quad [\text{II.145}]$$

où

$$F_{co}^\alpha = F_c^\alpha \left(\dot{\alpha}, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = 0, \dot{a}_\mu = 0, \alpha_\mu, a_\mu \right) \quad [\text{II.146}]$$

$$F_{co}^\beta = F_c^\beta \left(\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta}, \dot{\gamma} = 0, \dot{a}_\mu = 0, \alpha_\mu, a_\mu \right) \quad [\text{II.147}]$$

$$F_{co}^\gamma = F_c^\gamma \left(\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma}, \dot{a}_\mu = 0, \alpha_\mu, a_\mu \right) \quad [\text{II.148}]$$

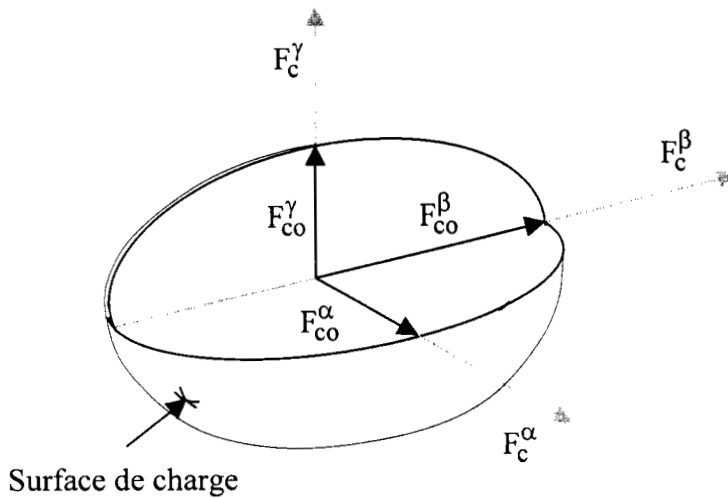


Figure II.17 : surface de charge pour l'orientation approchée par un ellipsoïde

Le critère d'évolution de l'orientation de la microstructure devient assez simple et s'écrit :

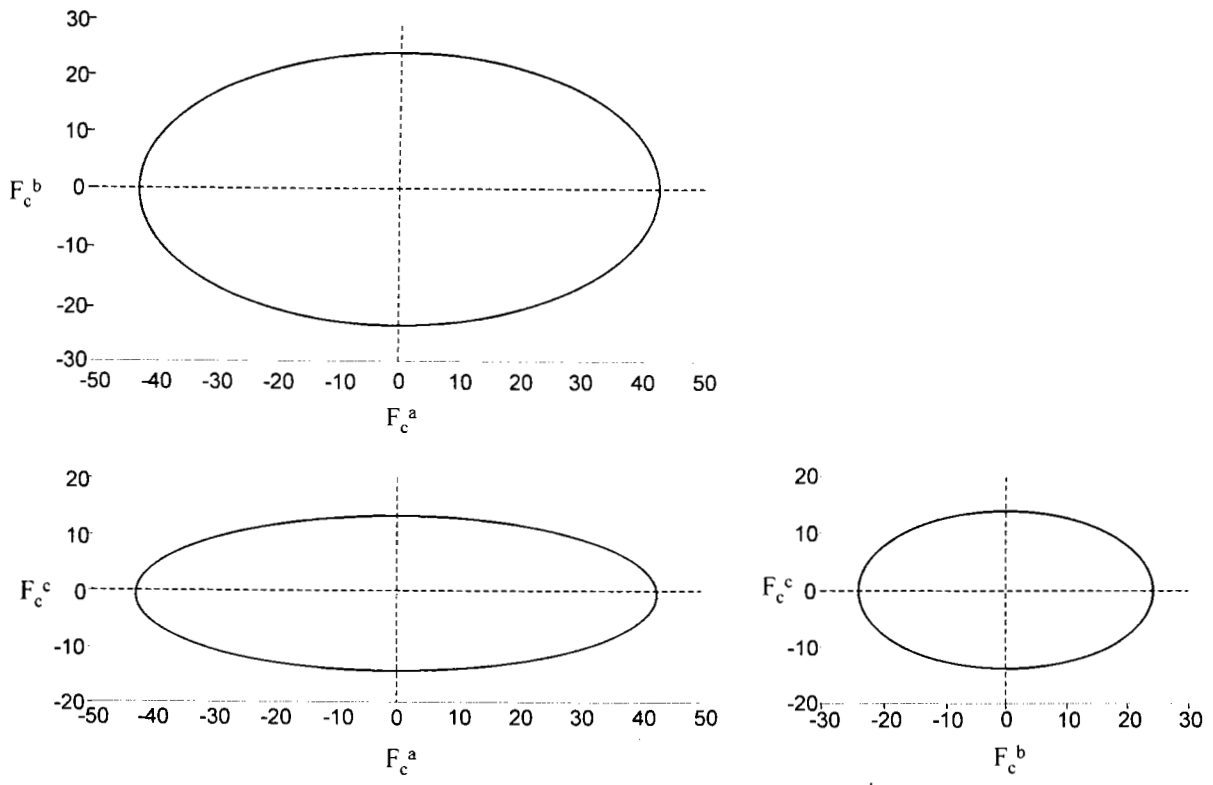


Figure 2 (a): Dissipation surface associated with the evolution of the orientation of the cell microstructure

$$\sqrt{\left(\frac{F^\alpha}{F_{co}^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{F^\beta}{F_{co}^\beta}\right)^2 + \left(\frac{F^\gamma}{F_{co}^\gamma}\right)^2} - 1 = 0 \quad [\text{II.149}]$$

où F^α, F^β et F^γ sont les forces motrices associées aux rotations $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$.

Si on appelle G_μ^* le vecteur composé des forces motrices $F^\alpha, F^\beta, F^\gamma$ et si on sort τ_c^μ des intégrales du calcul des forces critiques, le critère d'évolution de l'orientation des cellules s'écrit alors :

$$\sqrt{G_\mu^{*i} A_G^{ij} G_\mu^{*j}} = G_{eq}^* = \tau_c^\mu \quad [\text{II.150}]$$

où A_G ne dépend que de la morphologie des cellules et s'exprime de la façon suivante :

$$A_G = \begin{bmatrix} \left(\frac{\tau_c^\mu}{F_{co}^\alpha}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\tau_c^\mu}{F_{co}^\beta}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\tau_c^\mu}{F_{co}^\gamma}\right)^2 \end{bmatrix} \quad [\text{II.151}]$$

La direction d'évolution de l'orientation des cellules est donnée par la loi de normalité :

$$\dot{\Omega}_\mu^* = \frac{G_\mu^*}{G_{eq}^*} \dot{\eta}_\Omega \quad [\text{II.152}]$$

$\dot{\eta}_\Omega$ joue ici un rôle équivalent à celui de multiplicateur plastique.

Nous avons établi l'expression des forces critiques pour les rotations des cellules autour des axes de leur repère propre ($\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$). Il faut maintenant remonter aux trois angles d'Euler $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ et $\dot{\phi}$.

L'évolution des angles d'Euler en fonction du taux de rotation des cellules autour de ces axes propres est obtenue en inversant la relation II.123 :

$$\dot{\Omega}_\mu^i = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \phi} \begin{bmatrix} \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ \sin \phi \cos \phi_2 & -\sin \phi \sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 \cos \phi & -\cos \phi \cos \phi_2 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \left(K^{ij}(\phi, \phi_2) \right)^{-1} \dot{\Omega}_\mu^{j*} \quad [\text{II.153}]$$

Les forces motrices suivant $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$ peuvent être calculées à partir des forces motrices suivant les angles d'Euler en utilisant la matrice K :

$$G_{\mu}^{i*} = K^{ij}(\phi, \varphi_2) G_{\mu}^j \quad [\text{II.154}]$$

où G_{μ} désigne le vecteur composé des forces motrices suivant les angles d'Euler.

La relation II.153 n'est pas définie pour ϕ égal à 0° ou 180° . Ces cas nécessitent un traitement particulier. Nous ne les développons pas ici mais ils ont été pris en considération dans les simulations numériques.

- Demi-axes

La figure II.18 montre la fonction de charge obtenue pour les demi-axes. Contrairement à celle associée aux angles d'Euler, elle possède un point anguleux correspondant au cas où les évolutions des demi-axes sont tous de même signe.

Dans un objectif de simplification, cette surface va être approchée par un ellipsoïde.

Cette approximation assez éloignée de la surface obtenue sur la figure II.18 peut se justifier dans la mesure où le fait de prendre un seuil de résistance à la propagation de la surface constant est une grossière approximation des mécanismes mis en jeu lors du mouvement des murs de dislocation. Les difficultés liées à la résolution précise du problème complet semblent démesurées devant le peu de précision avec laquelle nous décrivons la résistance au mouvement des interfaces cellule-paroi.

La définition de l'ellipsoïde représentant la surface de charge nécessite six paramètres (trois angles d'Euler et trois demi-axes).

L'ellipsoïde choisi (figure II.19) est déterminée à partir des règles suivantes :

- l'un de ces sommets correspond avec le point anguleux de la surface de charge non approchée M_1
- il passe par les trois intersections de la surface non approchée avec les axes M_2, M_3 et M_4 .

La première condition permet de déterminer deux angles et un demi-axe $(\theta_1, \theta_2, \rho_1)$, tandis que les trois autres permettent d'obtenir les deux demi-axes et l'angle restant $(\rho_2, \rho_3, \theta_3)$.

Si on appelle T_{μ} le vecteur composé des forces motrices suivant les demi-axes, et $Q_{\mu}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, la matrice de passage entre le repère propre de la surface de charge approchée et le repère principal des forces motrices, le critère d'évolution des demi-axes s'écrit :

$$\sqrt{T_{\mu}^i Q_{\mu}^{ji} A_T^{jk} Q_{\mu}^{kl} T_{\mu}^l} = \sqrt{T_{\mu}^i A_T^{*il} T_{\mu}^l} = T_{\mu eq} = \tau_c^{\mu} \quad [\text{II.155}]$$

où les coefficients de la matrice A_T sont fonctions des rapports entre les demi-axes de la surface de charge approchée (ρ_1, ρ_2, ρ_3) et τ_c^{μ} . Cette matrice (équation II.156) ne dépend que de la géométrie des cellules de dislocations.

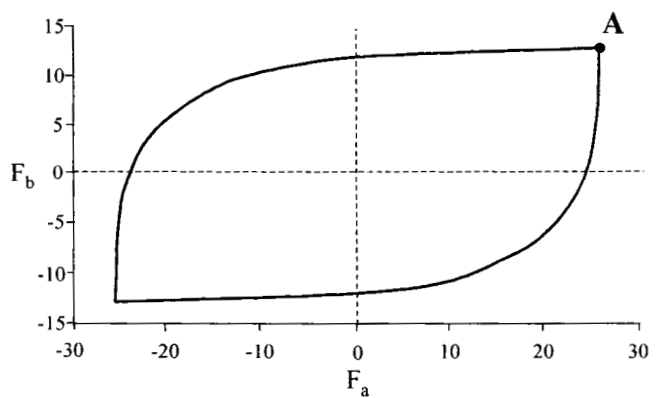
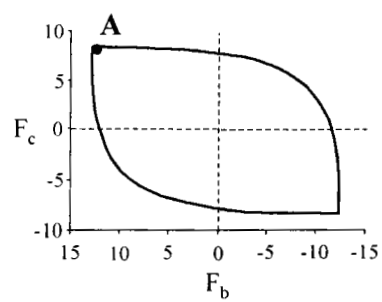
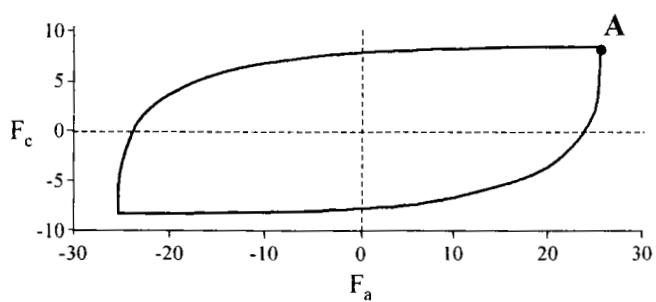


Figure 2 (b): Dissipation surface associated with the evolution of the three half axes of the cell microstructure

$$A_T(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\tau_c^\mu}{\rho_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\tau_c^\mu}{\rho_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\tau_c^\mu}{\rho_3}\right)^2 \end{bmatrix} \quad [\text{II.156}]$$

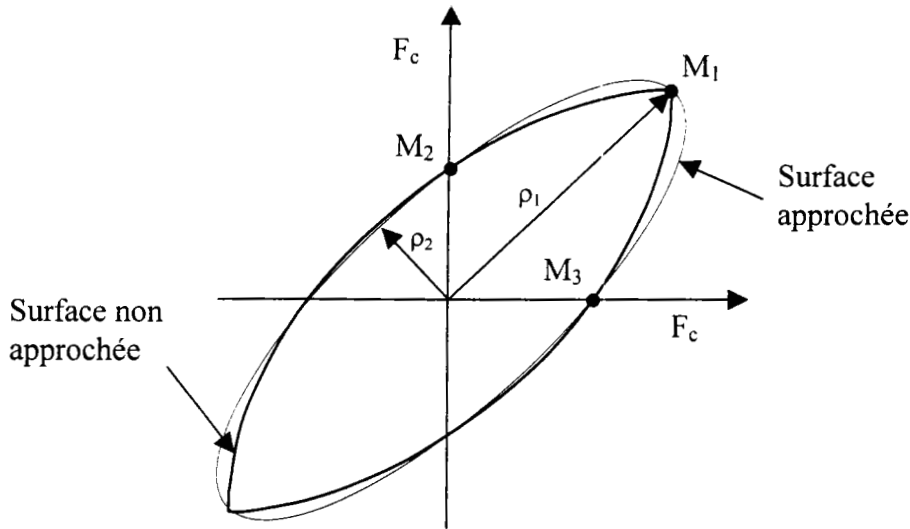


Figure II.19 : surface de charge approchée par un ellipsoïde

La direction d'évolution des variables internes est donnée par la loi de normalité :

$$\dot{R}_\mu = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \frac{A_T^* T_\mu}{T_{\mu eq}} \dot{\eta}_R \quad [\text{III.157}]$$

e. Force critique associée à N, le nombre de cellules par unité de volume

Nous venons d'établir les fonctions de charge associées aux variables internes morphologiques à l'exception de N, le nombre de cellules par unité de volume. L'évolution de cette variable ne peut être rattachée au mouvement de l'interface cellule-paroi. Les mécanismes physiques associés à la création de nouvelles cellules au cours d'un chargement complexe ne sont pas de même nature que ceux associés au changement d'orientation et de forme des cellules.

Nous considérons la force critique suivant le nombre cellules par unité de volume constant pour des raisons de simplicité.

Pour les applications nous garderons N fixe. Le phénomène de création de nouvelles cellules pendant le chargement n'est pas abordé.

II.3 Equations constitutives du matériau biphasé à structure évolutive et écrouissage non local.

Pour représenter la microstructure de dislocation, nous utilisons cinq variables internes que sont :

- $\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps}$: la déformation plastique moyenne à l'intérieur des cellules de dislocation.
- $\bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}$: la déformation plastique moyenne dans les murs de dislocation
- $\Omega_{\mu}^i = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \phi \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$: vecteur contenant la valeur des angles d'Euler donnant l'orientation de la microstructure
- $R_{\mu}^i = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$: vecteur contenant la valeur des trois demi-axes des cellules.
- N : le nombre de cellule par unité de volume

Les forces thermodynamiques associées à ces variables internes sont respectivement:

- σ_{ij}^s : la contrainte interne dans les cellules (équation II.74)
- σ_{ij}^h : la contrainte interne dans les murs (équation II.75)
- $G_{\mu} = \begin{bmatrix} F^{\varphi_1} \\ F^{\phi} \\ F^{\varphi_2} \end{bmatrix}$: un vecteur contenant les forces motrices suivant les angles d'Euler (équations II.51, II.52 et II.53)
- T_{μ} : un vecteur contenant les forces motrices suivant les demi-axes (équations II.79, II.80 et II.81)
- F^N : la force thermodynamique associée à N

Les critères d'évolution des variables internes sont :

- Pour la plasticité des deux phases, un critère de plasticité de type Von Mises avec écrouissage isotrope et cinématique. (équations II.85 et II.86)
- Pour les angles d'Euler, l'approche de la surface de charge par un ellipsoïde permet d'écrire le critère II.150
- De la même façon le critère d'évolution des demi-axes est donné par l'équation II.155
- La force critique associée à N est considérée constante.

La direction des écoulements et des évolutions de la morphologie est donnée par la règle de normalité en prenant comme fonction potentielle le critère lui-même. (équations II.87, II.88, II.152 et II.157)

Si de façon générale, on appelle x_i l'une des cinq variables internes, F^i et F_c^i les forces motrices et critiques qui lui sont associées, l'évolution des variables internes est régie par le système suivant :

$$\dot{x}_i = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F^i(E, x_j) < F_c^i(x_j) \\ \forall \dot{F}^i(E, x_j) \end{cases} \quad (1)$$

$$\dot{x}_i = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F^i(E, x_j) = F_c^i(x_j) \\ \dot{F}^i(E, x_j) < 0 \end{cases} \quad (2) \quad [\text{III.158}]$$

$$\dot{x}_i \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F^i(E, x_j) = F_c^i(x_j) \\ \dot{F}^i(E, x_j) \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Dans le cas (3), l'évolution des variables internes est obtenue par :

$$\dot{x}_i = \left(\frac{\partial F_c^j}{\partial x_i} - \frac{\partial F^j}{\partial x_i} \right)^{-1} \frac{\partial F^j}{\partial E_{kl}} \dot{E}_{kl} = (H_{ji} - B_{ji})^{-1} U_{kl}^j \dot{E}_{kl} \quad [\text{III.159}]$$

où j désigne l'ensemble des variables internes actives.

En utilisant la relation II.57, on obtient le taux de déformation plastique macroscopique en fonction du taux de déformation totale macroscopique. En introduisant cette relation dans l'expression du taux de contrainte macroscopique, on obtient le module tangent du matériau biphasé à structure évolutive et écrouissage non local.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la formulation thermodynamique de la représentation biphasée avec structure évolutive et écrouissage non local de la microstructure de dislocation a été mise en place.

Les particularités de cette représentation par rapport à un composite classique vient de la nature particulière du mode d'hétérogénéisation des métaux liée au mouvement des dislocations.

Cette particularité se manifeste sous deux aspects :

- un aspect lié à l'énergie libre.

La microstructure de dislocation est une structure évolutive douée d'une capacité de mouvement propre (indépendant du mouvement de la matière). La géométrie de la microstructure est une variable interne du problème pour laquelle il a fallu calculer la « force motrice ».

- un aspect lié à la dissipation.

Les limites d'écoulement sont déterminées par une variable intermédiaire : la densité de dislocations. Vis à vis de cette variable le comportement du matériau est homogène. L'hétérogénéisation provient de la cinématique particulière des dislocations (écrouissage non local) et non d'une différence entre les propriétés intrinsèques des deux phases.

Aux forces thermodynamiques associées aux variables morphologiques, il a fallu déterminer un critère d'évolution et des forces critiques.

Le chapitre suivant est consacré à la simulation numérique du modèle que nous venons de mettre en place.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CB99 CHERKAOUI, M., BERVEILLER, M., « Moving inelastic discontinuities and applications to martensitic phase transformation », Arch. Applied Mechanics 1999.
- E57 ESHELBY, J.D., « The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems », 1957, Proc. Roy. Soc., A241, pp.(376-396).
- F84 FRANCIOSI, P., « Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement :modélisation pour un chargement complexe quasi statique », 1984, thèse de l'Université de Paris – Nord.
- G73 GERMAIN. P., « Cours de mécanique des milieux continus », 1973, Tome 1, Théorie générale, eds Masson et cie, Paris.
- H03 HADAMARD, J., « Leçon sur l'équation des ondes et les équations de l'hydrodynamique », 1903, Cours du Collège de France, Paris.
- H61 HILL, R., « Discontinuity relations in mechanics of solids », 1961, Progress in Solid Mechanics 2, eds I.N. SNEDDON and R. HILL, North Holland Amsterdam, pp.(245-276).
- H72 HILL, R., « an invariant treatment of interfacial discontinuities in elastic composites », 1972, Continuum Mechanics And Related Problem of Analysis, Moscow, pp.(594-604).
- H83 HILL, R., « Interfacial operators in the mechanics of composite media », 1983, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N°4, pp.(347-357).
- HRT92 HU, Z., RAUCH, E.F., TEODOSIU, C., « Work-hardening Behaviour of Mild Steel under Stress Reversal at Large Strain », 1992, Int. J. of Plasticity, Vol.8, pp.(839-856).
- I98 AUBERT, I., « Effets de l'hétérogénéité plastique intragranulaire sur le comportement macroscopique des aciers doux lors de chargements complexes », 1998, Thèse de l'Université de Metz.
- K61 KRÖNER, E., « Zur Plastischen Verformung des Vielkristall », 1961, Acta Metall., Vol.9, pp.(155-161).
- L95 LEMOINE, X., « Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers », 1995, Thèse de l'université de Metz.
- MKB93 MULLER, D., KRATOCHVIL, J., BERVEILLER, M., « Effets des écrouissages couplés de différentes parties d'un métal sur la réponse globale en traction-compression et sur les contraintes internes », 1993, C. R. Acad. Sci., Vol.316, pp.(435-440).

- M94 MULLER, D., « Influence de l'écroutissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins », 1994, Thèse de l'Université de Metz.
- W67 WALPOLE, L.J., « The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium », 1967, Proc. Roy. Soc., Vol. A300, pp.(270-289).

CHAPITRE III

Simulation Numérique du comportement
Du Matériau Biphase à Structure Evolutive
et Ecrouissage Non Local

CHAPITRE III

SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DU MATERIAU BIPHASE A STRUCTURE EVOLUTIVE ET ECROUISSAGE NON LOCAL

Dans cette partie, on étudie les résultats obtenus par le modèle pour différents cas de chargement caractéristiques.

Les objectifs visés sont :

- 1 Etudier les principaux résultats obtenus par ce modèle.
- 2 Faire une étude paramétrique visant à évaluer les effets des différents mécanismes introduits au chapitre II comme :
 - La forme et orientation de la morphologie prises comme variables internes thermodynamiques
 - L'écroissage non local
 - L'auto écroissage des parois (annihilation)

sur le comportement macroscopique, la microstructure et les mécanismes microscopiques du matériau :

Du point de vue macroscopique, on étudie :

- Le taux d'écroissage macroscopique
- L'allure des régimes transitoires en trajet dur, continu ou Bauschinger
 - Microplasticité
 - Limite d'écoulement macroscopique
- La localisation de la déformation plastique

Du point de vue microscopique, on s'attarde sur :

- Les contraintes internes, les déformations plastiques et les densités de dislocations dans chacune des phases
- La forme et l'orientation des cellules
- L'évolution de la morphologie au cours des régimes transitoires

- 3 Etudier et maîtriser les variables morphologiques, les forces motrices et critiques associées et les couplages qu'elles entretiennent avec la déformation plastique. Ceci servira ensuite pour la construction d'un modèle polycristallin du même type que celui de Lemoine, développé au dernier chapitre.

III.1 Chargements monotones

Pour voir, dans un premier temps, le type de résultats obtenus par le modèle, nous étudions un cas de chargement monotone en cisaillement. Les caractéristiques du chargement et la valeur des paramètres choisies pour cette simulation sont regroupées dans le tableau III.1 :

Chargement	monotone	$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}$
Comportement élastique	$\mu = 80000 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$	
Limites d'écoulement	$Y_c^0 = 210 \text{ MPa}$	
Ecrouissage	$L_1 = 10 \text{ MPa}^2$ $L_2 = 1.5 \cdot 10^6 \text{ MPa}^2$ $L_3 = 5.0$ $s = 0.7$	
Forme initiale de l'ellipsoïde	$a = 1.0 \text{ e-6 m}$ $b = 2.0 \text{ e-6 m}$ $c = 3.0 \text{ e-6 m}$	
Orientation initiale de l'ellipsoïde	$\varphi_1 = 27.0^\circ$ $\phi = 36.0^\circ$ $\varphi_2 = 63.0^\circ$	
Seuil de résistance morphologique	$\tau_c^{a\mu} = 13.5 \text{ MPa}$ $\tau_c^{\alpha\mu} = 0.01 \text{ MPa}$	

Tableau III.1 : Paramètres initiaux pour la première simulation

La valeur choisie pour les paramètres d'écrouissage découle de l'application numérique directe des relations II.113, II.116 et II.115.

Les valeurs initiales des demi-axes correspondent à des cellules faiblement allongées comme celles que l'on peut observer sur la figure I.6 [S86]. On considère deux seuils de propagation de l'interface cellule-paroi : le premier pour le calcul des forces critiques associées aux demi-axes et le deuxième pour celles relatives à l'orientation. Le nombre de cellules par unité de volume est ajusté pour avoir une fraction volumique égale à 0.8 (valeur estimée expérimentalement par Schmitt [S86]).

L'orientation initiale de la microstructure (les trois angles d'Euler) est prise aléatoirement et son seuil de propagation est choisi faible pour que la microstructure prenne son orientation d'équilibre durant les premiers pas de la plasticité. On suppose ainsi que la microstructure de dislocation apparaît avec une orientation correspondant pratiquement à son minimum d'énergie libre. L'aspect non elliptique de l'énergie libre soulevé au chapitre précédent empêche de procéder de la même façon pour les demi-axes.

Les réponses contrainte – déformation plastique pour le matériau et chacune des phases sont représentées sur la figure III.1. On constate que la contrainte interne dans les murs de dislocation correspond environ à trois fois la limite d'écoulement macroscopique, ce qui est

conforme aux observations expérimentales de Mughrabi [M88]. La contrainte interne dans les cellules reste faible tout au long du chargement.

Les résultats concernant les densités de dislocations (figure III.2) découlent directement de la loi de Taylor et montrent une densité de dislocations dans les parois beaucoup plus forte qu'à l'intérieur des cellules.

Le contraste entre les déformations plastiques des deux phases n'est pas aussi prononcé que celui observé par Mughrabi [M88]. L'écart relatif obtenu est très important au début de l'hétérogénéisation du matériau mais se réduit considérablement au cours du chargement. Sur la figure III.3 on voit que l'écart entre les déformations plastiques équivalentes des deux phases augmente rapidement au début du chargement et tend à se stabiliser ensuite.

Muller et Lemoine [M94,L95] ont introduit dans leur modèle un coefficient d'accommodation dans le calcul des contraintes internes (paragraphe II.1.2 b). Celui-ci leur permet d'obtenir, pour un même saut de contrainte interne, un saut de déformation plastique plus important que celui obtenu ici. En annexe A2, sont présentés les résultats obtenus avec un coefficient d'accommodation de 0.1 (valeur prise par Muller) pour les conditions du tableau III.1.

Il est intéressant de se pencher plus attentivement sur les premiers pas de la plasticité (figures III.4a et II.4b) pour observer comment s'opère l'hétérogénéisation du matériau.

Initialement, le matériau est homogène, c'est-à-dire que le comportement élastique et la limite d'écoulement initiale des deux phases sont identiques. Au cours du chargement les seuils de plasticité de la phase molle et de la phase dure sont atteints en même temps. Du fait de l'écroutissage non local, seule la plasticité de la phase molle est réellement active. La plasticité de la phase dure n'arrivera que plus tard après quelques dixièmes de pour-cent de déformation plastique macroscopique. La mise en régime plastique des différentes phases ne s'opère pas simultanément malgré l'égalité des limites d'écoulement initiales. Par la suite, toujours sous l'effet de l'écroutissage non local, l'écart entre les contraintes internes et des déformations plastiques des deux phases continue à se creuser.

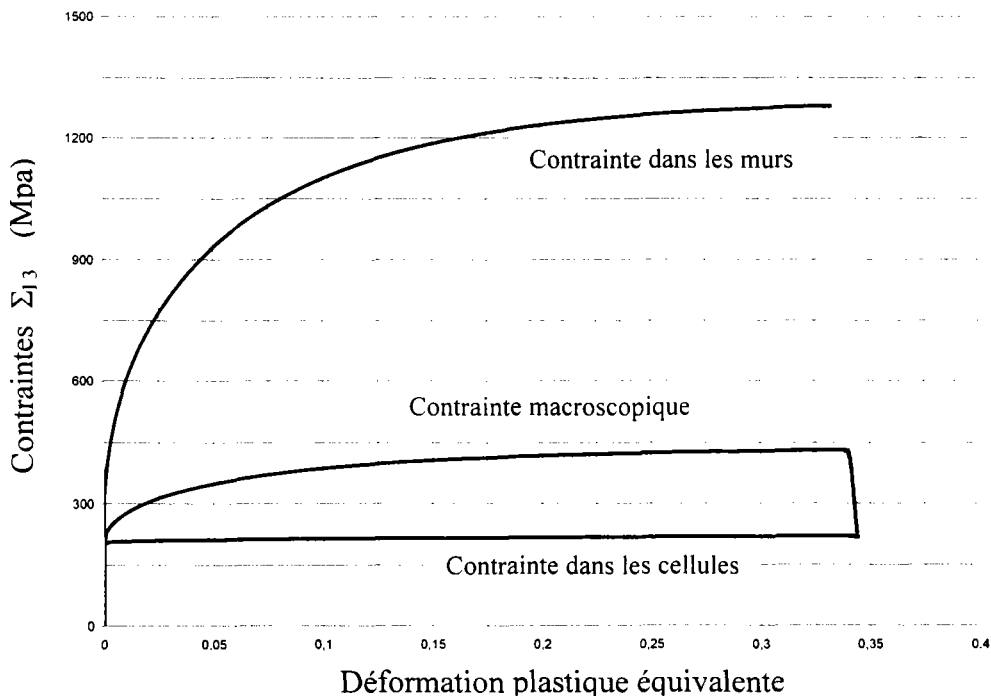


Figure III.1 : Réponses contrainte-déformation plastique

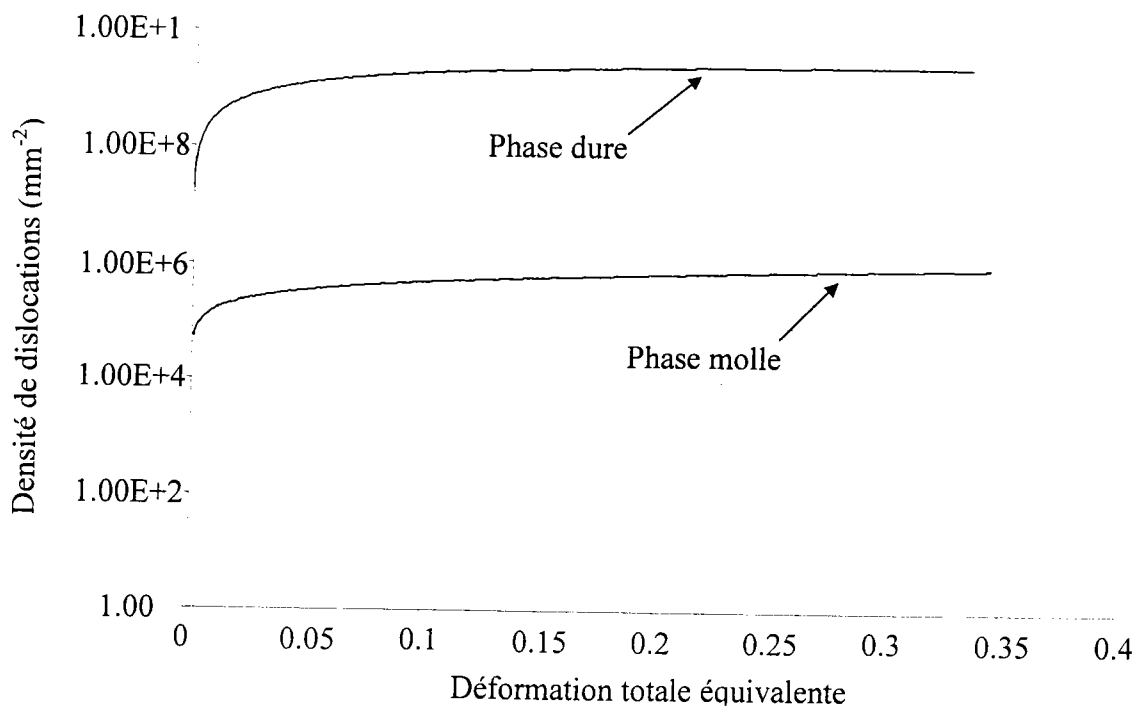


Figure III.2 : Densité de dislocations dans les deux phases.

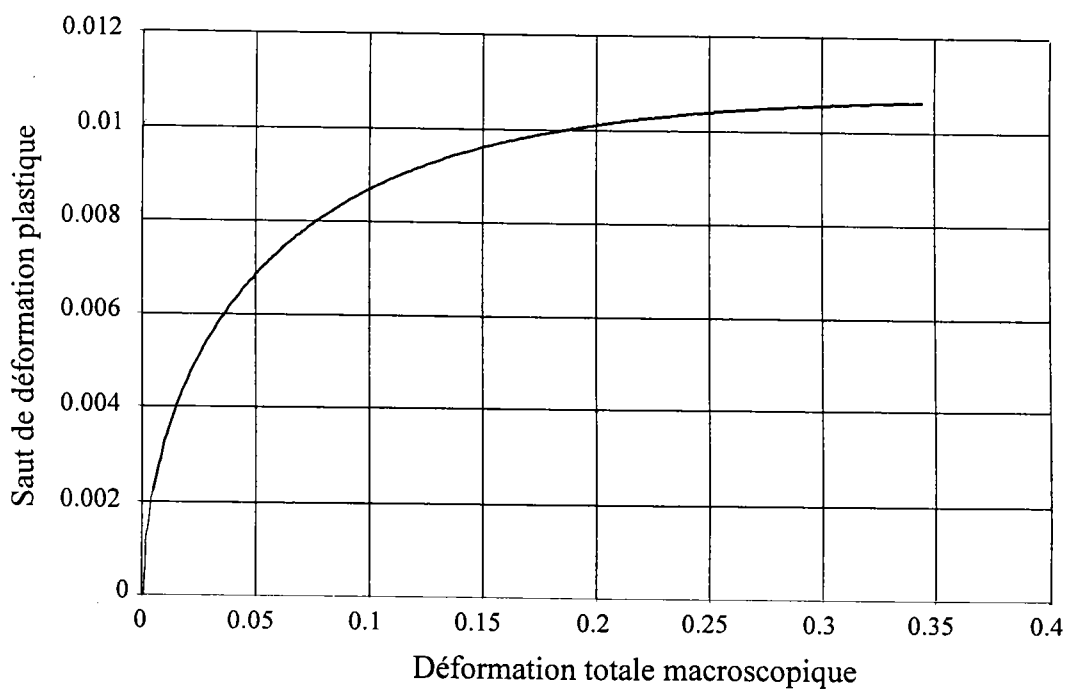


Figure III.3 : Saut de déformation plastique équivalente entre les deux phases.

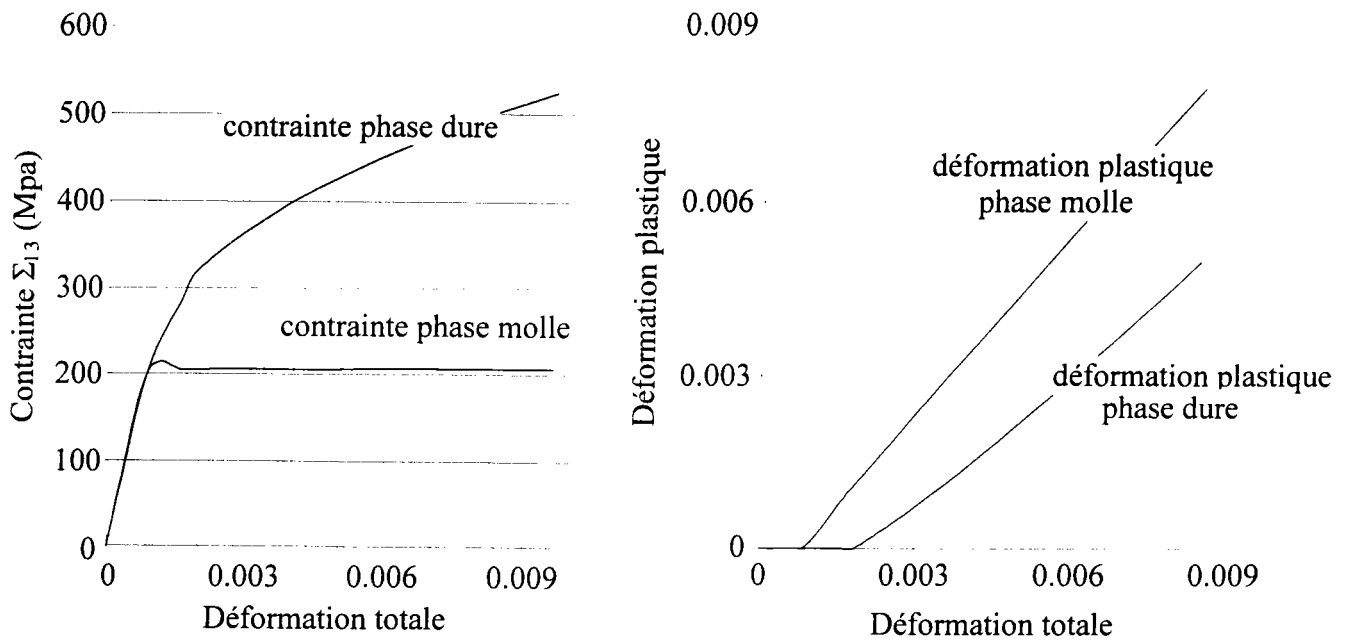


Figure III.4 : Hétérogénéisation du matériau au début du chargement
a) contrainte-déformation, b) déformations plastiques-déformation

Sur la figure III.1, on constate un adoucissement brutal aux alentours de 35% de déformation plastique macroscopique.

Cet adoucissement est obtenu par l'activation des demi-axes (figure III.5). En effet, lorsque leur critère d'évolution est vérifié, les trois demi-axes croissent simultanément, augmentant ainsi la fraction volumique de phase molle. Le troisième terme de la relation II.57 donnant le taux de déformation plastique macroscopique devient non nul.

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{E}_{kl} - \dot{E}_{kl}^p) \quad [\text{III.1}]$$

L'influence de ce terme sur le taux de contrainte macroscopique (équation III.1) devient prépondérant et contribue en majeure partie à l'adoucissement violent du matériau constaté numériquement.

L'adoucissement ainsi obtenu ne provient pas de l'adoucissement local de l'une des phases dû, par exemple, à l'effet de l'écroutissage non local. Ses origines se situent à une échelle supérieure : celle de la microstructure de dislocation et des interactions globales cellule-paroi. Il provient d'une déstabilisation de la microstructure de dislocations (mouvement d'ensemble des dislocations) et non d'une chute de la densité de dislocations dans les parois provoquée par un renforcement des mécanismes d'annihilation. La déstabilisation obtenue n'est pas issue des mécanismes dissipatifs intervenant dans la matrice d'écroutissage mais provient du calcul même de l'énergie libre et des forces motrices comme dans le travail de David [D96].

Quel que soit le type de chargement, la localisation de la déformation plastique se produit par l'activation des demi-axes. La force motrice équivalente qui leur est associée apparaît alors comme un critère d'instabilité du matériau.

Dans ce travail, le comportement du matériau après la localisation de la déformation plastique macroscopique n'est pas abordé. Seul le point de départ de l'adoucissement constitue un objectif accessible par le modèle.

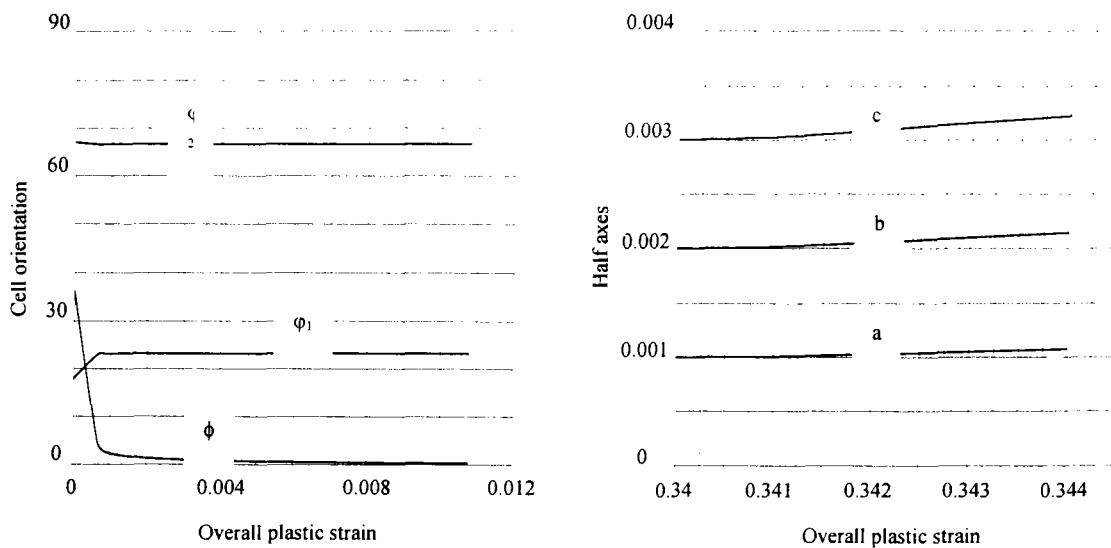


Figure III.5 : Evolution de la microstructure de dislocations (demi-axes et angles d'Euler)

Conformément aux intentions fixées, la microstructure s'oriente très rapidement après quelques pas de déformation. Les forces critiques qui lui sont associées étant faibles, la position obtenue est très proche de l'orientation donnant le minimum d'énergie libre.

On suppose que c'est avec cette orientation que la microstructure de dislocations apparaît dans le matériau. Le fait qu'elle s'oriente très rapidement au début du chargement permet de ne pas influencer la réponse globale du matériau (voir Annexe A3).

L'orientation obtenue correspond bien à celle observée expérimentalement [S86], [FS83]. En effet les deux plus grands axes de l'ellipsoïde figurant les cellules se trouvent dans un plan parallèle au plan de glissement, le plus grand axe étant perpendiculaire à la direction de cisaillement.

Il est nécessaire de rappeler ici que le modèle étant formulé en petites déformations, la déformation pilote E_{ij} correspond à deux cisaillements possible ayant des plans et des directions de cisaillement perpendiculaires.

Pour identifier de façon plus précise les influences de chacun des paramètres du modèle sur les résultats macroscopiques et microscopiques, la partie suivante est consacrée à une étude paramétrique. Dans cette étude, les effets des termes d'écrouissage et des données relatives à la microstructure initiale sont plus particulièrement étudiés.

III.1.2 Etude paramétrique

L'étude paramétrique menée dans ce chapitre est divisée en trois parties :

- Etude des effets des termes de la matrice d'écroissage

L'expression de la matrice d'écroissage est basée sur des considérations concernant la cinématique des dislocations. L'évolution de la densité de dislocations dans les murs et les cellules résulte de la compétition entre les mécanismes de création et d'annihilation des dislocations dont l'étude a permis de calculer la valeur des paramètres L_1 , L_2 et L_3 . L'étude paramétrique sur ces trois paramètres permet de comprendre l'influence des différents mécanismes qu'ils représentent sur le comportement macroscopique du matériau.

La figure III.6 rappelle les principaux mécanismes intervenant dans la matrice d'écroissage et le paramètre qui leur est associé.

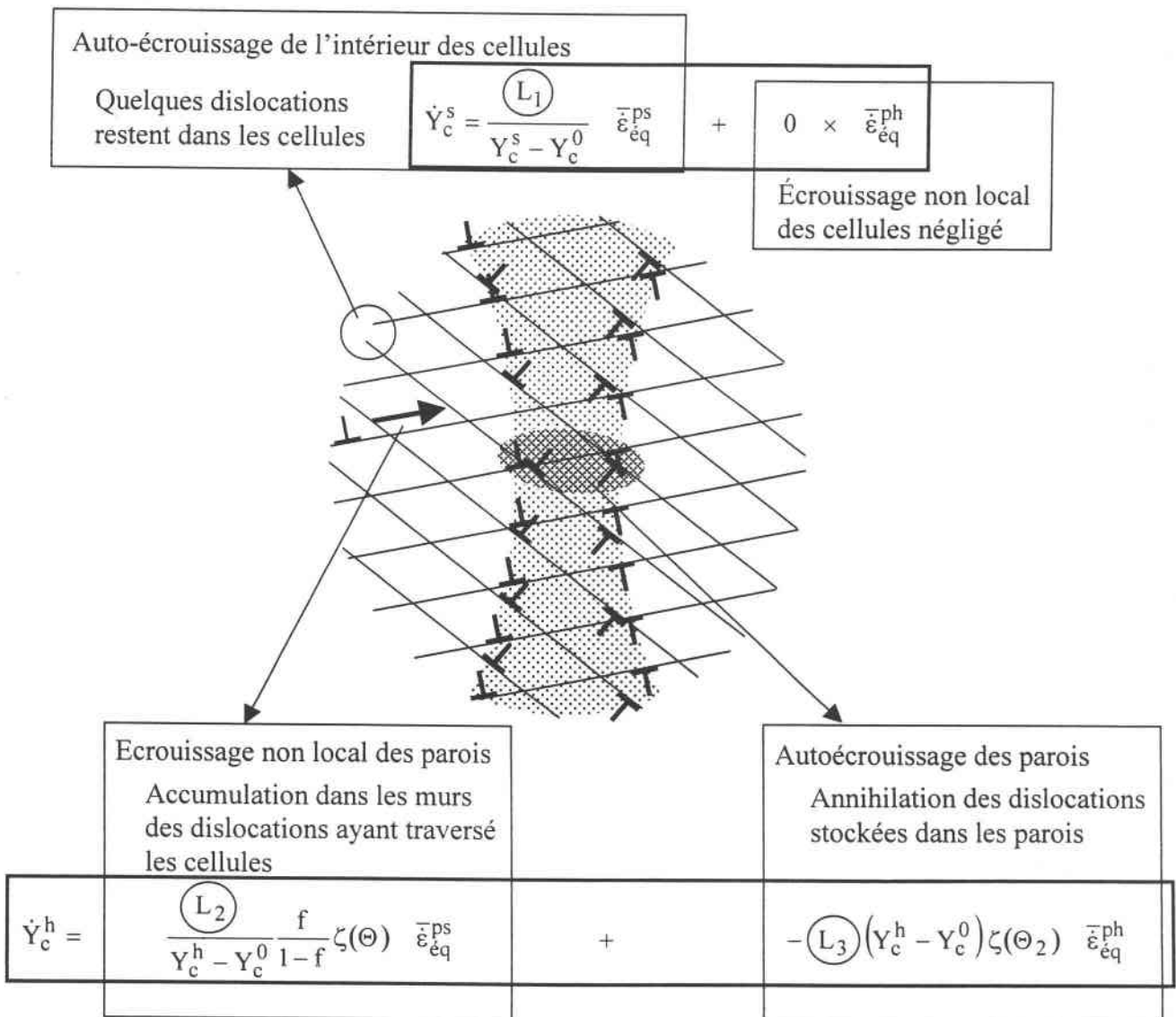


Figure III.6 : Rappel des différents mécanismes d'écroissage et des paramètres associés

- Etude de la morphologie initiale de la microstructure et du seuil de propagation de l'interface cellule-paroi

Les cellules de dislocations sont représentées par des ellipsoïdes dont les trois demi-axes et les trois angles d'Euler définissant leur orientation dans le repère global de chargement sont des variables internes.

L'homogénéité initiale du matériau est assurée par l'homogénéité du comportement élastique et l'égalité entre les limites d'écoulement initiales des deux phases. Il est toutefois nécessaire d'introduire une microstructure initiale définissant a priori la forme et l'orientation des cellules qui vont se former.

La forme initiale choisie pour la microstructure de dislocations joue un rôle essentiel sur le calcul des contraintes internes et donc sur le comportement macroscopique du matériau. Du fait de la non-convexité de l'énergie libre par rapport à la fraction volumique, il n'est pas possible de trouver une forme (a, b, c) finie correspondant à un équilibre de la microstructure. Ceci a motivé la dissociation qui a été faite au chapitre II entre les variables d'orientation et celle de forme. La forme initiale introduite s'inspire des observations expérimentales et ne constitue pas réellement un paramètre ajustable du modèle.

- Etude de l'influence du type de chargement

La forme et l'orientation de la microstructure résultent d'un effet global du chargement. Il est donc intéressant de comparer, pour différents chargements, les morphologies obtenues numériquement à celles observées expérimentalement.

a. Matrice d'écroissage :

Pour cette étude, exceptés pour le paramètre d'écroissage étudié, les valeurs du tableau III.1 sont conservées.

- Ecroissage non local

Dans un premier temps, l'étude porte sur l'effet de l'écroissage non local.

Les figures III.6 montrent les principaux résultats macroscopiques et microscopiques obtenus pour les valeurs de L_2 (en Mpa^2) répertoriées dans le tableau qui suit :

L_2	$0.5 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$
	Courbes (1)	Courbes (2)	Courbes (3)

En augmentant L_2 , on accentue le mécanisme cellule-paroi d'accumulation des dislocations. L'effet direct de l'augmentation de L_2 est l'augmentation du taux de densité de dislocations des parois (figure III.6b) qui se traduit par une limite d'écoulement des murs plus forte (figure III.6c) et une contrainte macroscopique plus élevée (figure III.6a).

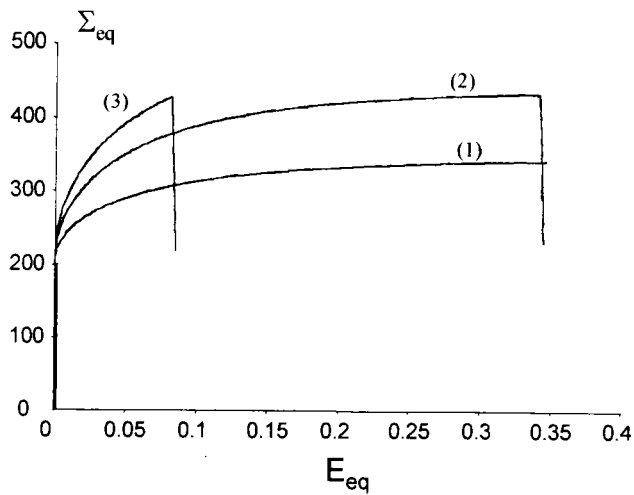


Figure III.6a:
Contrainte-déformation macroscopiques

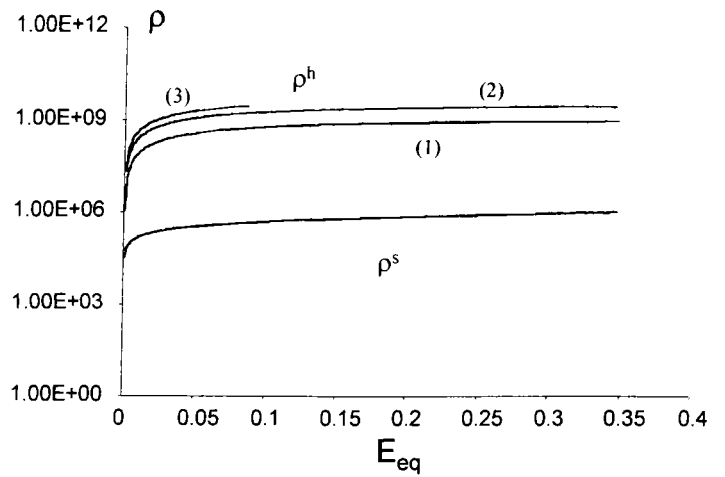


Figure III.6b:
Densités de dislocations

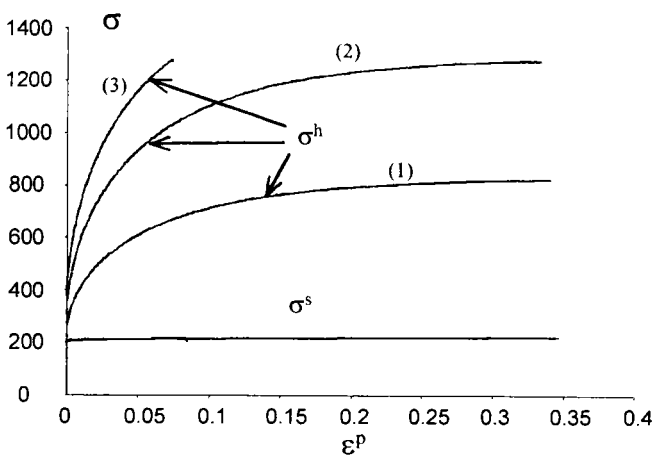


Figure III.6c:
Contrainte interne-déformation plastique

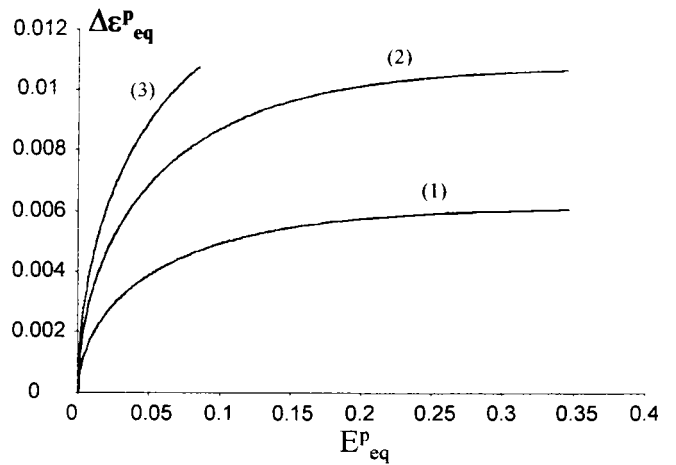


Figure III.6d:
Saut de déformation plastique équivalente

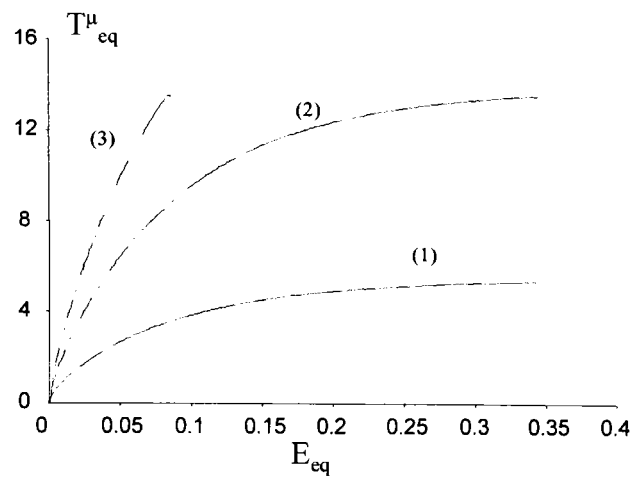


Figure III.6e:
Force motrice morphologique équivalente

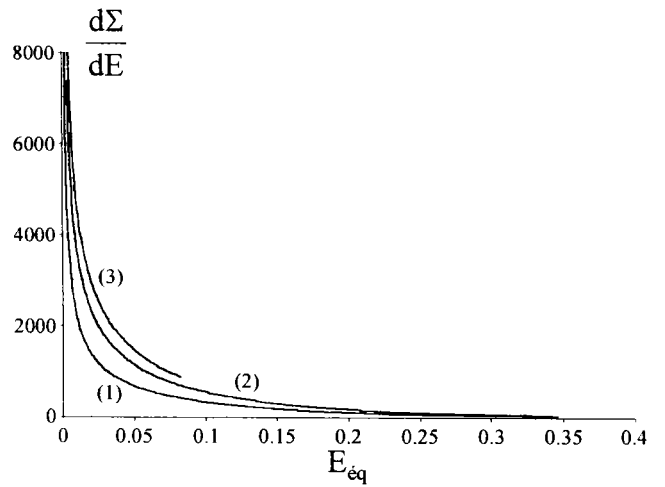


Figure III.6f:
Taux de consolidation

La limite d'écoulement des parois étant plus importante, la déformation plastique des murs diminue avec L_2 alors que celle des cellules reste quasi identique. Le saut de déformation plastique augmente donc avec le terme d'écroutissage non local (figure III.6.d).

La contrainte macroscopique et le saut de déformation plastique étant plus forts, la force motrice équivalente suivant les demi-axes est elle aussi plus élevée (figure III.6.e), ce qui induit une localisation de la déformation plastique macroscopique plus précoce pour des L_2 élevées (figure III.6a).

La figure III.6.f montre que l'effet du terme d'écroutissage non local est surtout sensible au début de la déformation. En fait, une valeur plus élevée de L_2 amplifie le phénomène d'hétérogénéisation du matériau en début de chargement (figure III.6.c). En considérant, l'écroutissage non local seul, le taux de limite d'écoulement des murs s'écrit :

$$\dot{Y}_c^h = \frac{L_2}{Y_c^h - Y_c^0} \frac{f}{1-f} \zeta(\Theta) \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} = H_{hs} \bar{\epsilon}_{eq}^{ps} \quad [III.2]$$

Le terme H_{hs} de la matrice d'écroutissage diminue avec la limite d'écoulement Y_c^h ce qui fait que son effet est surtout sensible au début du chargement quand Y_c^h est encore « faible ».

- Auto écroutissage des parois de dislocations

Ce terme est très important dans la mesure où il contient les mécanismes d'annihilation des dislocations présents au cours des chargements monotones.

Les figures III.7 donnent les principaux résultats obtenus pour les valeurs de L_3 répertoriées dans le tableau qui suit :

L_3	0.0	5.0	10.0
	Courbes (1)	Courbes (2)	Courbes (3)

Quand on augmente la valeur de L_3 , la densité de dislocations dans les murs diminue (figure III.7b). Ceci induit une limite d'écoulement et une contrainte macroscopique plus faible (figures III.7c et III.7a).

La phase dure ayant une limite d'écoulement plus faible, la déformation plastique des murs est plus forte. Le saut de déformation plastique diminue donc avec L_3 (figure III.7d).

La contrainte macroscopique et le saut de déformation plastique étant plus faibles, la localisation de la déformation plastique apparaît plus tard avec des L_3 élevées.

La figure III.7.f montre que, contrairement à L_2 , l'effet des mécanismes d'annihilation représentés par L_3 est sensible à partir d'un certain taux de déformation plastique. La pente des courbes au cours des premiers pas de plasticité n'est pas affectée par la valeur de L_3 .

En considérant l'auto écroutissage des murs seul, le taux de limite d'écoulement de la phase dure est donné par :

$$\dot{Y}_c^h = -L_3 (Y_c^h - Y_c^0) \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} = H_{hh} \bar{\epsilon}_{eq}^{ph} \quad [III.3]$$

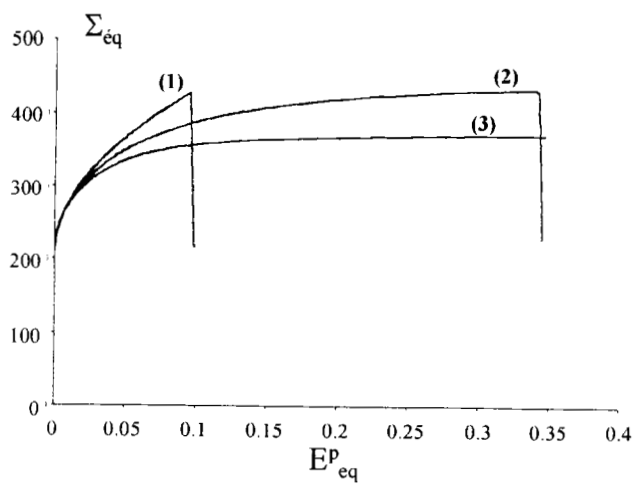


Figure III.7a:
contrainte-déformation macroscopique

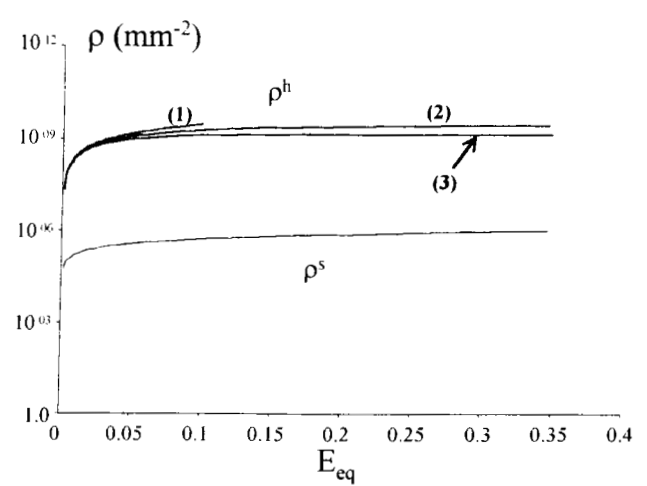


Figure III.7b:
densités de dislocations

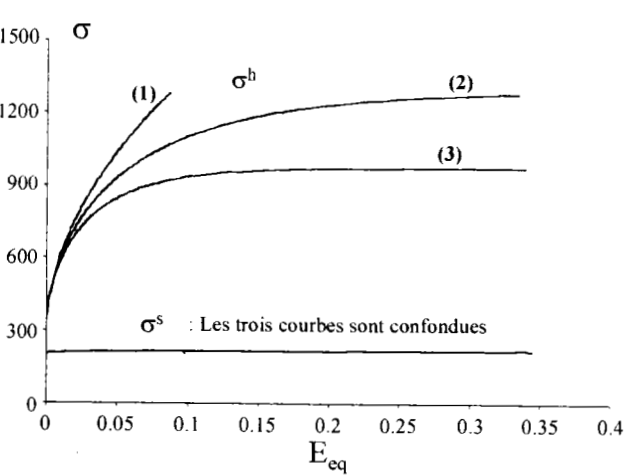


Figure III.7c:
contrainte interne-déformation plastique

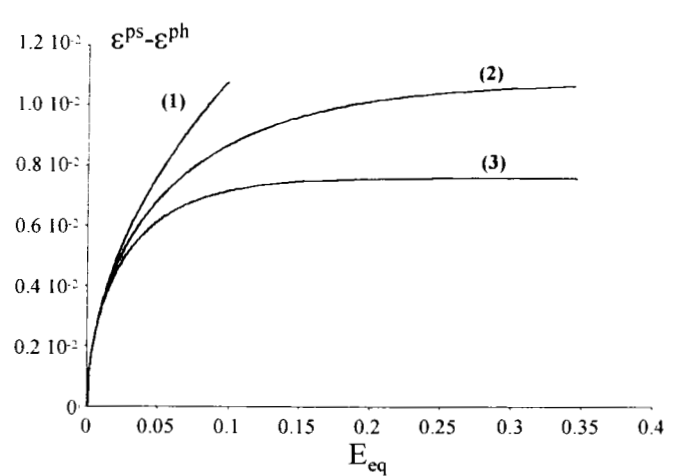


Figure III.7d:
saut de déformation plastique équivalente

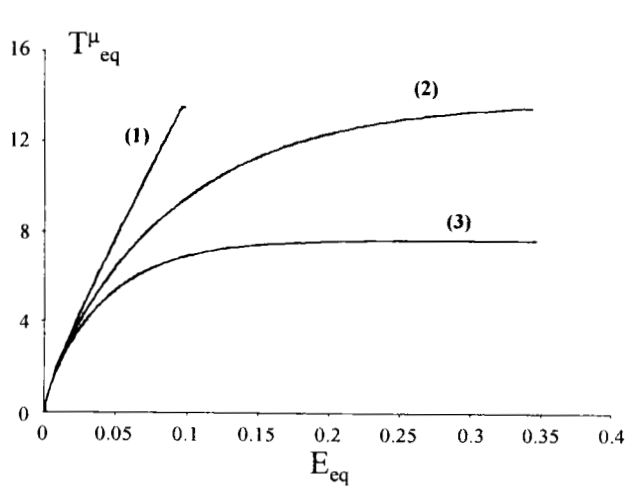


Figure III.7e:
force motrice morphologique équivalente

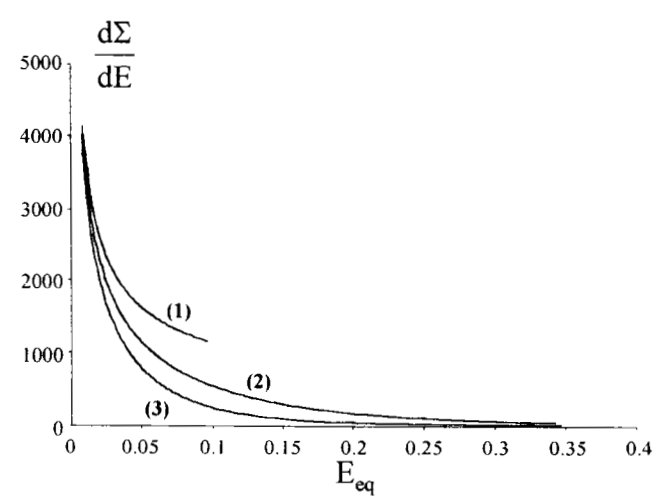


Figure III.7f:
taux de consolidation

Le terme H_{hh} de la matrice d'écrouissage est proportionnel à la limite d'écoulement des murs. Ce terme a donc un effet quasi nul au début du chargement quand la limite d'écoulement des murs est proche de sa valeur initiale. Par contre, ce terme devient non négligeable après quelques pour-cent de déformation plastique quand la limite d'écoulement des murs sous l'action de l'écrouissage non local s'est éloignée de sa valeur initiale.

De façon générale, l'action combinée de l'écrouissage non local et de l'auto-écrouissage des parois conduit à une saturation des densités de dislocations. Après un certain taux de déformation (dépendant des valeurs de L_2 et L_3), la réponse macroscopique possède un écrouissage faible tendant même vers zéro pour une valeur de L_1 nulle (Annexe B1).

L'étude de l'influence du terme d'auto écrouissage de l'intérieur des cellules est présentée en Annexe B1.

b. Morphologie initiale de la microstructure :

Dans un premier temps, sont étudiés les effets de la forme des cellules de dislocations (les trois demi-axes). Pour cette étude, nous prenons des cellules de révolution dont les demi-axes sont donnés dans le tableau suivant :

(a, b, c) en μm	(1, 3, 3) Courbes (1)	(1, 1, 1) Courbes (2)	(3, 1, 1) Courbes (3)
-------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

Le nombre de cellules par unité de volume est ajusté pour garder la fraction volumique de cellule égale à 0.8.

Les figures III.9 montrent que le niveau des contraintes et les densités de dislocations sont très faiblement touchés par la forme des cellules. Seul de saut de déformation plastique est affecté. Le nombre de cellules par unité de volume étant ajusté pour obtenir une fraction volumique constante de 0.8, la forme des cellules n'affecte que le calcul du tenseur d'Eshelby. La relation entre les contraintes internes et le saut de déformation plastique est ainsi modifiée.

Cette modification du tenseur d'Eshelby se répercute également sur le calcul de la force motrice équivalente suivant les demi-axes. On note effectivement que la localisation apparaît beaucoup plus tôt pour la forme oblate (1,3,3) et allongée (3,1,1) que pour des cellules sphériques.

L'orientation finale de la microstructure dépend de la forme des cellules. De façon générale, le plus grand axe des cellules se retrouve dans le plan de glissement et perpendiculaire à la direction de glissement.

Les figures III.10 montrent les effets de la fraction volumique de mur choisie initialement. Les valeurs prises pour f dans cette étude sont :

f	0.9 Courbes (1)	0.8 Courbes (2)	0.7 Courbes (3)
---	--------------------	--------------------	--------------------

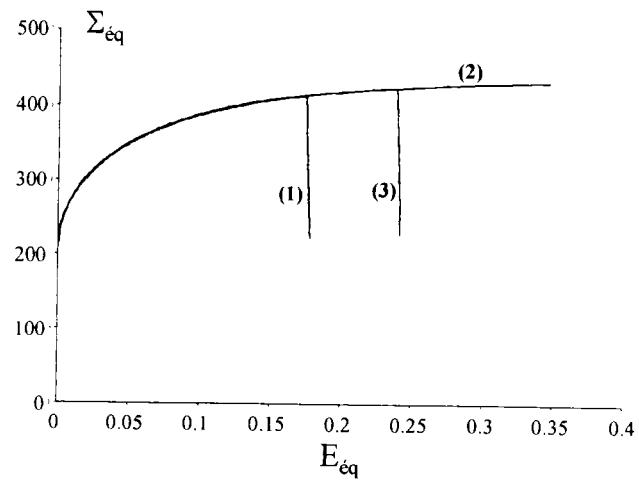


Figure III.9a:
contrainte déformation macroscopique

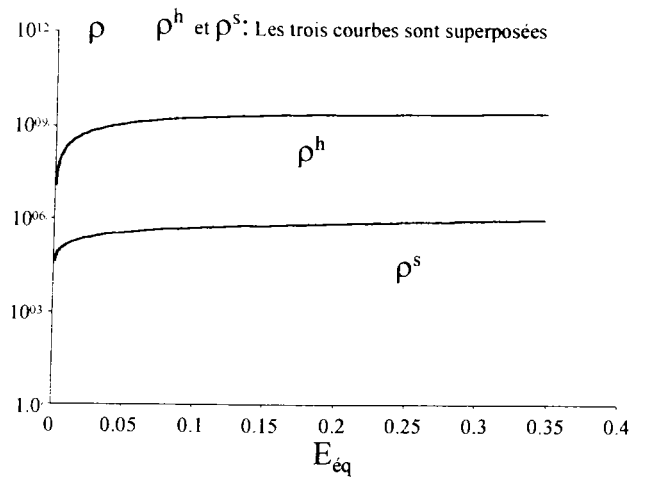


Figure III.9b:
densités de dislocations

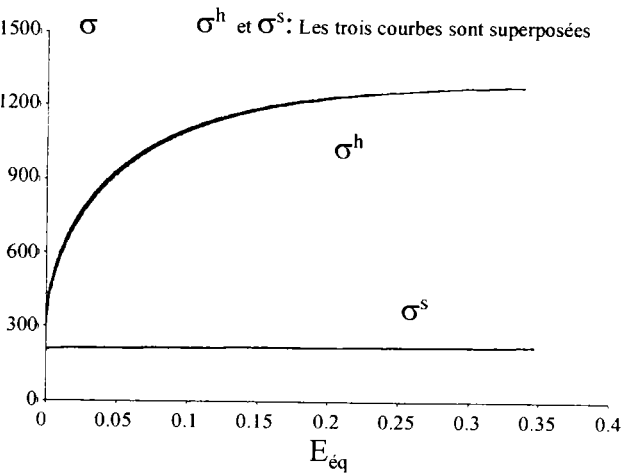


Figure III.9c:
contrainte interne-déformation plastique

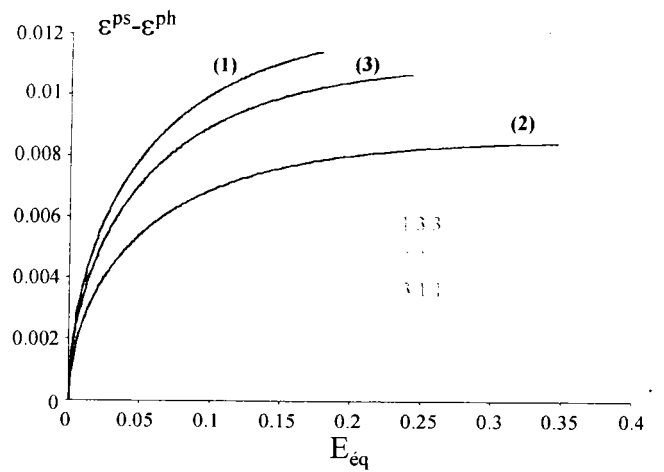


Figure III.9d:
saut de déformation plastique équivalente

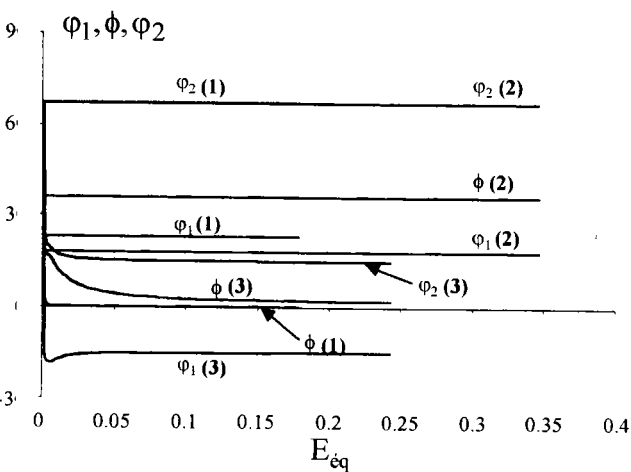


Figure III.9e:
angles d'Euler

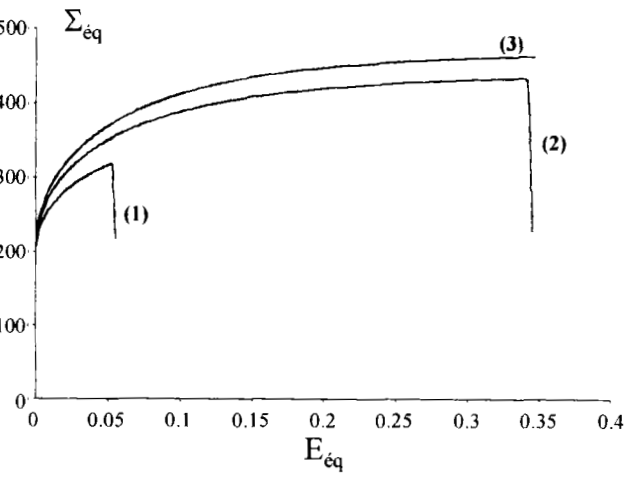


Figure III.10a:
contrainte-déformation macroscopique

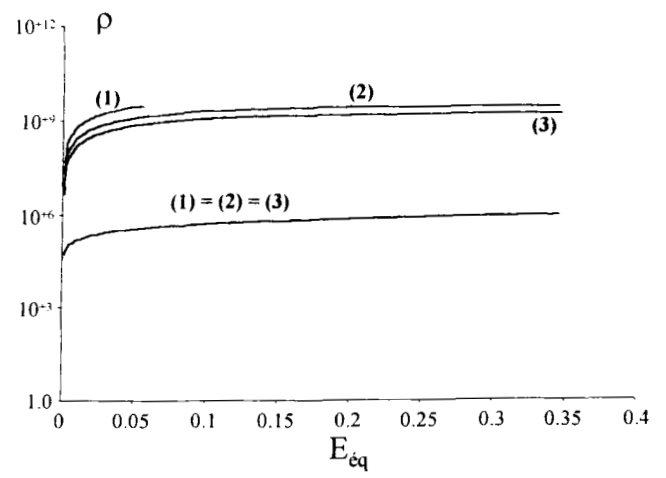


Figure III.10b:
densités de dislocations

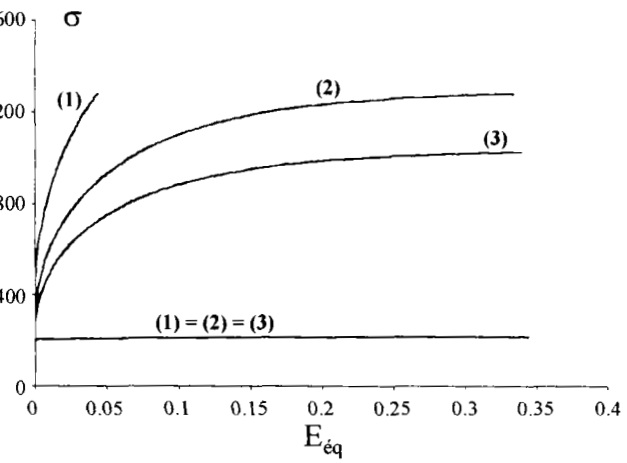


Figure III.10c:
contrainte interne-déformation plastique

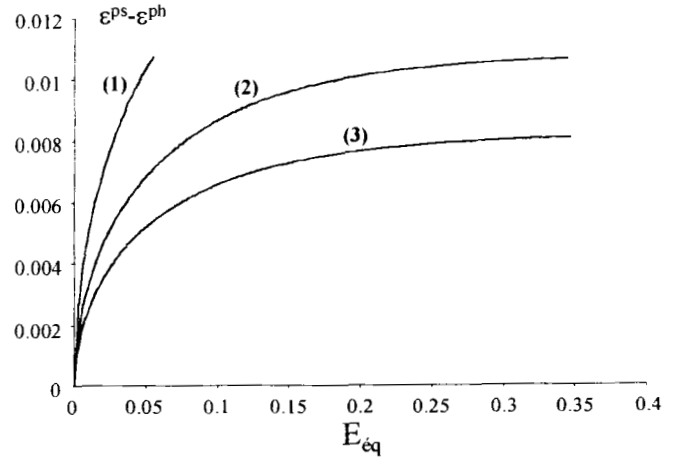


Figure III.10d:
saut de déformation plastique équivalente

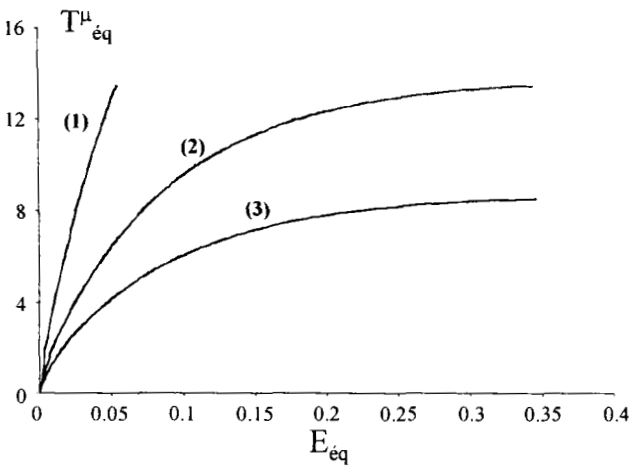


Figure III.10e:
forme motrice morphologique équivalente

Malgré une contrainte macroscopique plus faible, la localisation de la déformation plastique se produit plus tôt pour une fraction volumique plus forte. Avec la fraction volumique, la contrainte interne et la densité de dislocations dans les murs ainsi que le saut de déformation plastique sont plus importants.

L'effet sur la densité de dislocations est surtout dû à la présence de f dans l'expression de l'écroutissage non local. Les dislocations produisant la déformation plastique dans les cellules se stockent dans une zone de volume faible.

c. Type de chargement

L'étude de l'influence du type de chargement a été réalisée en considérant les sollicitations répertoriées dans le tableau ci-dessous et en considérant des cellules de forme oblate (3 3 1).

E_{ij}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$
	Courbes (1)	Courbes (2)

Le type de chargement a surtout une influence sur l'orientation finale de la microstructure. En effet les courbes III.11 montrent que les effets sur les contraintes internes, la contrainte macroscopique et le saut de déformation plastique sont minimes.

Pour le second chargement, les cellules se placent dans un plan faisant un angle de 55° par rapport à la direction de traction. La direction exacte de ce plan dépend de la valeur initiale des angles d'Euler.

La figure III.11a montre une influence assez marquée du type de chargement sur l'apparition de la localisation de la déformation plastique macroscopique. La valeur obtenue pour la traction est plus importante que celle obtenue pour le cisaillement. Ceci est contraire aux nombreuses mesures expérimentales.

Ceci vient de ce qu'en chargement monotone, la localisation obtenue n'est pas due à une déstabilisation de la microstructure de dislocations comme celle que nous décrivons par nos résultats. Il n'y a pas apparition de microbandes de cisaillement en chargement monotone pour des faibles taux de déformation.

D'après Hoc [H99], la localisation de la déformation plastique macroscopique est obtenue en traction quand les conditions du critère de Considère sont réunies. Ces conditions concernent l'état des contraintes dans le matériau et son module tangent, ce dernier contenant l'effet du comportement du matériau sur l'instabilité.

Dans notre cas, le taux de contrainte macroscopique dans le matériau est donné par la relation suivante :

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{E}_{kl} - \dot{E}_{kl}^p \right) \quad \text{[III.4]}$$

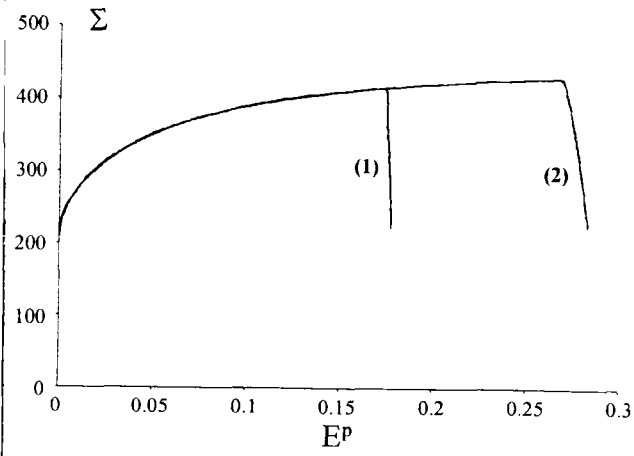


Figure III.11a:
contrainte déformation macroscopique

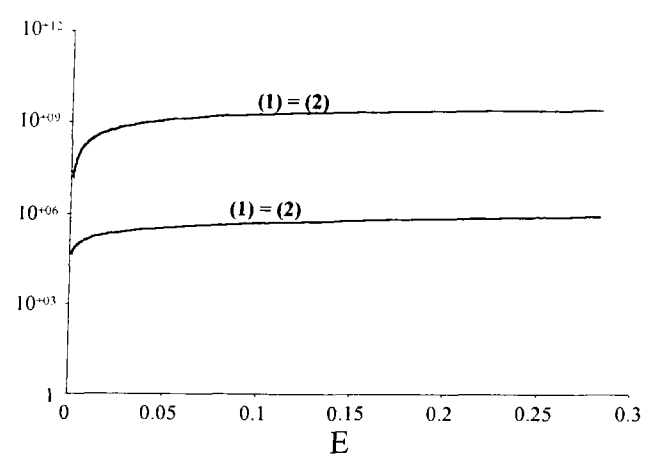


Figure III.11b:
densités de dislocation

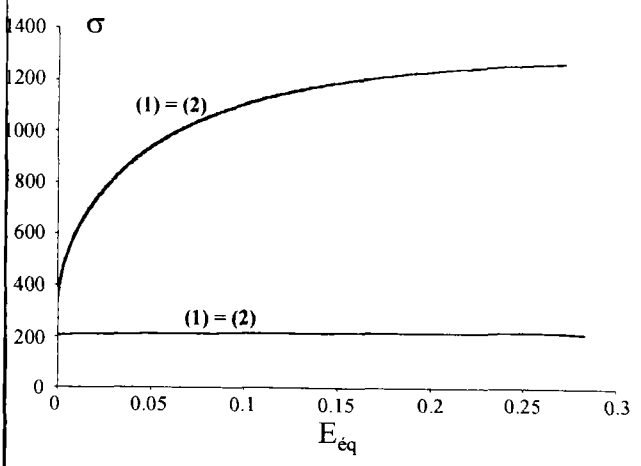


Figure III.11c:
contrainte interne-déformation plastique

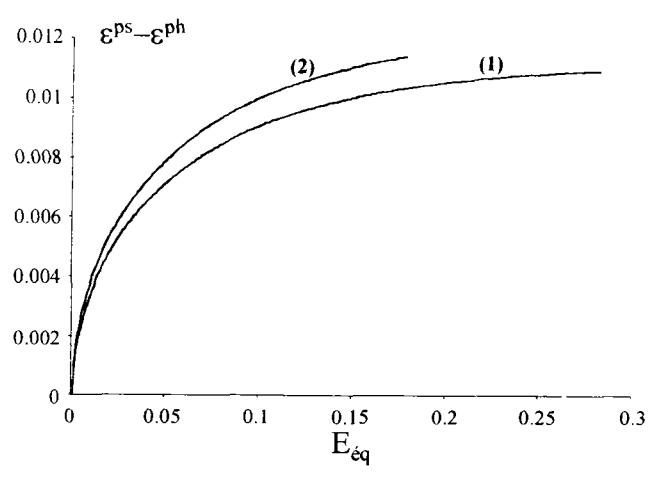


Figure III.11d:
saut de déformation plastique équivalente

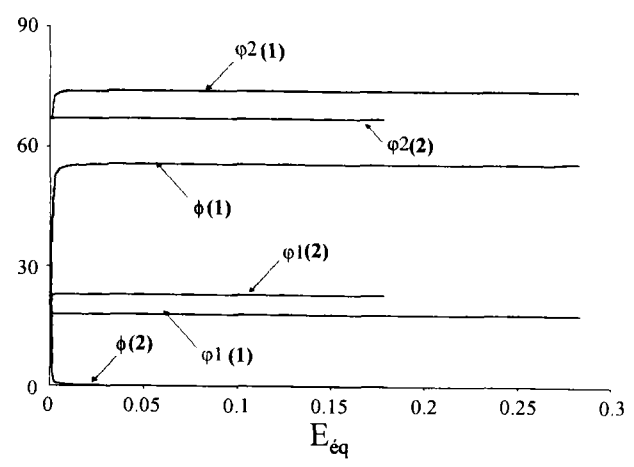


Figure III.11e:
contrainte interne-déformation plastique

En introduisant II.57 dans III.4, on obtient :

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{\bar{\epsilon}}_{kl} - f \dot{\bar{\epsilon}}_{kl}^{ps} - (1-f) \dot{\bar{\epsilon}}_{kl}^{ph} - \dot{f} (\bar{\epsilon}_{kl}^{ps} - \epsilon_{kl}^{ph}) \right) \quad \text{[III.5]}$$

En regardant la relation III.5, il apparaît clairement que la chute du module tangent peut être provoquée de deux façons différentes : l'une provenant de la déformation plastique locale classique des deux phases, l'autre provenant de l'évolution de la morphologie des cellules de dislocations (par l'intermédiaire de la fraction volumique). Les couplages entre les variables morphologiques et les déformations plastiques peuvent aussi jouer un rôle non négligeable.

Dans le cas d'un essai de traction monotone, la localisation de la déformation plastique ne pouvant pas être attribuée à un phénomène de déstabilisation de la microstructure de dislocations, elle correspond à une chute du module d'écrouissage sous l'effet des mécanismes d'annihilation des dislocations (compensation entre accumulation (L_2) et annihilation (L_3)).

Au cours d'un essai de cisaillement, le critère d'instabilité de Considère n'étant pas valide, la chute de module tangent liée à la saturation de la densité de dislocations ne provoque pas de localisation de la déformation plastique (aux faibles taux de déformation).

Pour tenir compte de ces aspects, le seuil de propagation de l'interface cellule-paroi doit être fixé à une valeur supérieure à celle atteinte par la force motrice équivalente au cours du chargement monotone.

d. Conclusion

Les termes de la matrice d'écrouissage introduite au chapitre II, ont un effet important sur le comportement du matériau obtenu. De façon générale, on peut noter que le terme d'écrouissage non local, qui en chargement monotone ne traduit qu'un effet d'accumulation des dislocations dans les parois, amplifie le processus d'hétérogénéisation du matériau, ceci étant surtout sensible durant les premiers pas de déformation. Le contraste entre les densités de dislocations, les déformations plastiques et les contraintes internes est d'autant plus marqué que L_2 est grand. En contre partie, le terme d'auto écrouissage des murs à qui il n'a été associé qu'un effet d'annihilation, contribue à limiter l'hétérogénéité au sein du matériau. Son effet est surtout important après quelques pour-cent de déformation plastique quand la densité de dislocations des parois est suffisamment importante. L'effet combiné de l'écrouissage non local et de l'auto écrouissage des parois amène une saturation de la densité de dislocations dans les murs ce qui dans le cas d'un auto écrouissage nul de l'intérieur des cellules amène une saturation des contraintes internes et donc de la contrainte macroscopique.

L'influence de la morphologie des cellules de dislocations concerne surtout l'orientation finale de la microstructure et l'apparition de la localisation de la déformation plastique.

L'influence du type de chargement sur l'apparition de la localisation de la déformation plastique ne correspond pas du tout avec ce qui est communément observé expérimentalement. Les déformations à rupture en traction et en cisaillement obtenues par le modèle sont quasi identiques. Expérimentalement, on observe au contraire une limite beaucoup plus importante en cisaillement qu'en traction. Ce problème vient de ce que l'apparition de microbandes de cisaillement n'est pas observée pour des chargements continus à des taux de déformation plastique faibles. L'origine de la localisation en traction n'est pas à chercher dans une déstabilisation de la microstructure de dislocations mais dans une saturation de la densité de dislocations engendrant un module tangent du matériau suffisamment faible pour que les conditions du critère d'instabilité géométrique de Considère

soient réunies. Le seuil de propagation de l'interface cellule-paroi, que nous avons choisi de garder constant tout au long du chargement, doit être fixé à une valeur supérieure à celle obtenue en chargement monotone.

III.1.3 Conclusion

Comme pour le modèle simplifié de David [D96], la localisation de la déformation plastique macroscopique peut être atteinte par une déstabilisation de la microstructure de dislocations liée à un terme non convexe de l'énergie libre d'Helmholtz. L'adoucissement brutal du matériau obtenu numériquement est provoqué par une croissance rapide de la taille des cellules, c'est-à-dire une disparition des murs de dislocations.

Au chapitre II, l'accent a été mis sur l'aspect biphasé de la microstructure et sur les interactions particulières qui existent entre les deux phases. Notamment, en ce qui concerne l'érouissage, l'essentiel des mécanismes d'accumulation et d'annihilation des dislocations a été concentré respectivement dans le terme d'érouissage non local et d'auto érouissage des murs. L'étude paramétrique sur ces deux termes a permis de mettre en évidence leurs effets sur le comportement macroscopique du matériau.

La microstructure de dislocations est considérée mobile. L'aspect non elliptique de l'énergie libre ne permet pas, pour un saut de déformation plastique donné, de trouver une forme de cellule représentant un équilibre. Ceci nous sert au contraire pour obtenir la localisation de la déformation plastique macroscopique.

La « minimisation » de l'énergie libre (force critique faible) permet par contre d'obtenir les bonnes orientations de cellules (comme dans le travail d'Aubert [I98]).

Dans la partie qui suit, le modèle biphasé à structure évolutive et érouissage non local est appliqué au cas de chargement complexe. Cette partie est fondamentale dans la mesure où elle représente l'objectif primordial de ce travail.

III.2 Chargements complexes

L'un des objectifs principaux de ce modèle est l'obtention des réponses contraintes déformation des métaux soumis à des chargements complexes. Les aspects fondamentaux des chargements complexes étudiés sont :

- les régimes transitoires : limite d'écoulement à la recharge, seuil de microplasticité, présence ou non d'un plateau, pic de contrainte...
- la localisation de la déformation plastique : comment s'opère-t-elle ? Est-elle due à une saturation des densités de dislocations ou à une instabilité géométrique ?

Dans un premier temps un cas de chargement complexe sert de prétexte pour mettre en évidence les différentes caractéristiques obtenues par le modèle.

III.2.1 Un cas de chargement complexe.

Le modèle de matériau biphasé à structure évolutive et écoulement non local est appliqué dans un cas de chargement en cisaillement complexe tel que celui décrit par la figure suivante.

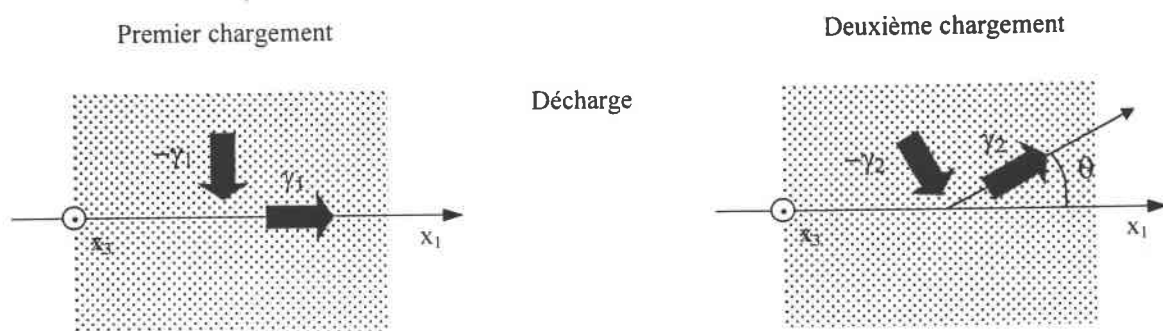


Figure III.12 : Description du premier chargement

Le tenseur de déformation pilote des deux chargements ainsi que les paramètres du modèle sont donnés par le tableau III.6.

Pour les figures III.12, III.13 et III.14, Γ est définie par :

- premier chargement : $\Gamma = \frac{\gamma_1}{2}$
- deuxième chargement : $\Gamma = E_{\text{pré}} + \frac{\gamma_2}{2}$

où $E_{\text{pré}}$ est le taux de prédéformation.

T désigne la contrainte tangentielle du chargement considéré.

Chargement	complexe $E_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 \end{bmatrix}$ $E_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \gamma_2 \cos 2\theta & 0 & -\gamma_2 \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 \sin 2\theta & 0 & -\gamma_2 \cos 2\theta \end{bmatrix}$
Comportement élastique	$\mu = 80000 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$
Limites d'écoulement	$Y_c^0 = 200 \text{ MPa}$
Ecrouissage	$L_1 = 10 \text{ MPa}^2$ $L_2 = 1.5 \cdot 10^6 \text{ MPa}^2$ $L_3 = 5.0$ $s = 0.7$
Forme initiale de l'ellipsoïde	$a = 3.0 \text{ e-6 m}$ $b = 3.0 \text{ e-6 m}$ $c = 1.0 \text{ e-6 m}$
Orientation initiale de l'ellipsoïde	$\varphi_1 = 27.0^\circ$ $\phi = 36.0^\circ$ $\varphi_2 = 63.0^\circ$
Seuil de résistance morphologique	$\tau_c^{a\mu} = 6.5 \text{ MPa}$ $\tau_c^{\alpha\mu} = 0.01 \text{ MPa}$

Tableau III.6 : Valeur des paramètres du modèle

Le nombre de cellules par unité de volume est ajusté pour avoir une fraction volumique de phase molle égale à 0.8.

Le taux de prédéformation est fixé à 0.1 et l'angle θ entre les deux directions de cisaillement est de 30° .

a. Caractéristiques fondamentales des chargements complexes

La réponse macroscopique tracée sur la figure III.13 fait apparaître trois points fondamentaux repérés A, B et C.

- A- Seuil de microplasticité : Lors du second chargement, pour une contrainte plus faible que la limite d'écoulement atteinte à la fin du premier chargement, le matériau quitte le domaine élastique. Cette transition correspond à l'entrée en plasticité de la phase molle. Sous l'effet du chargement macroscopique et des contraintes résiduelles, l'intérieur des cellules atteint sa limite élastique plus rapidement que les parois.
- B- Limite d'écoulement macroscopique : Ce point correspond au moment où les deux phases sont en plasticité. Entre le point A et B, seule la phase molle subit une déformation plastique.
- C- Localisation de la déformation plastique macroscopique : Comme pour les chargements monotones, elle correspond à l'activation des variables internes morphologiques (demi-

axe). La localisation apparaît au moment où le critère d'évolution des demi-axes est atteint.

On note ici que sous l'effet combiné de l'écroutissage non local, actif durant la phase de micro plasticité, et des contraintes internes existant à la fin du premier chargement, le seuil de plasticité macroscopique pour le second trajet de chargement est supérieur à celui atteint à la fin du premier chargement.

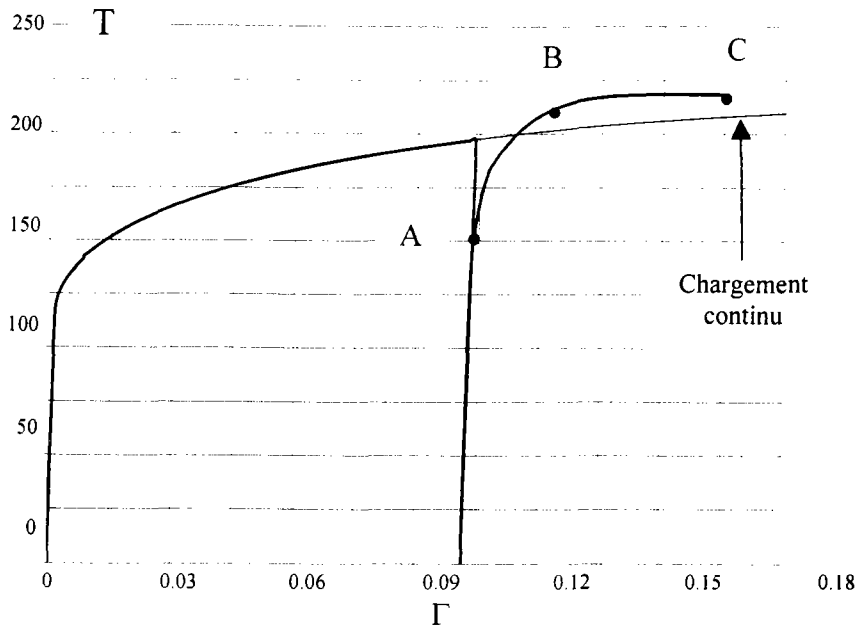


Figure III.13 : Réponse contrainte macroscopique-déformation macroscopique.

b. Forces motrice équivalente suivant les demi-axes

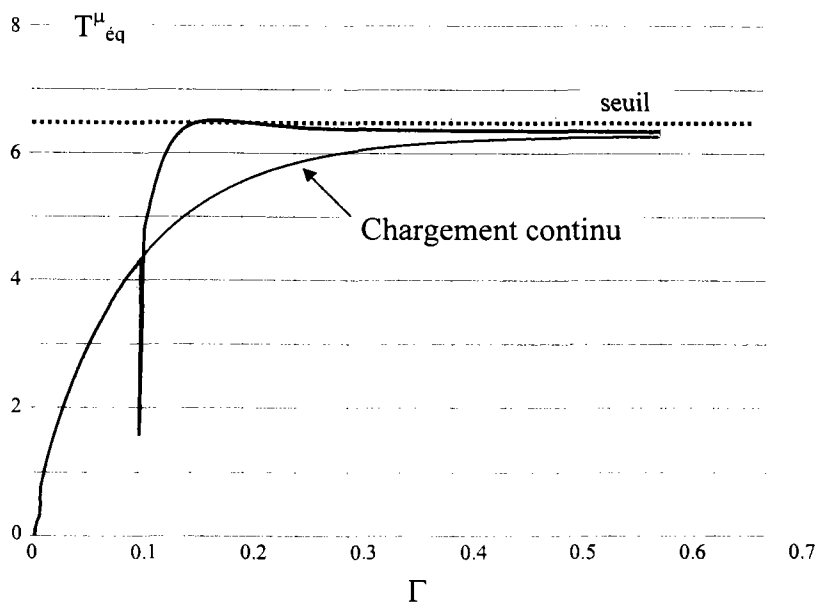


Figure III.14 : Evolution de la force thermodynamique morphologique équivalente

La figure III.14 montre l'évolution de la force motrice morphologique équivalente. Cette courbe a été tracée en relevant le seuil de propagation de l'interface cellule-paroi pour voir son évolution complète au cours du changement de trajet.

On note que la force thermodynamique associée à l'évolution des demi-axes des cellules passe par un maximum au cours du régime transitoire. Ce maximum provient à la fois de la montée de la contrainte macroscopique, de l'accroissement du saut de déformation plastique (provoqué par l'écroutissage non local) (figure III.15) et indirectement de la rotation des cellules (figure III.16).

Le maximum de $T_{\text{éq}}^{\mu}$ pour un θ de 30° est supérieur à sa valeur limite en chargement continu.

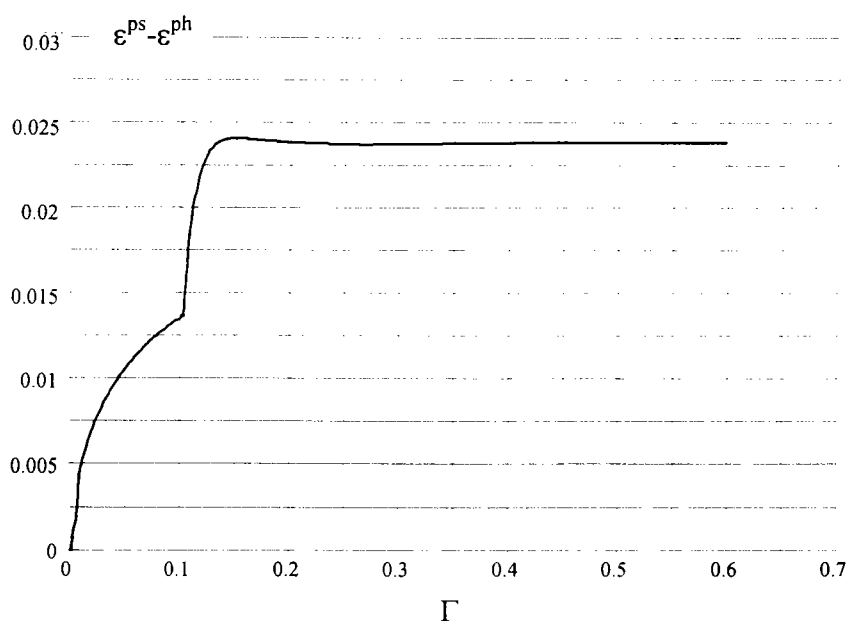


Figure III.15 : Evolution du saut de déformation plastique

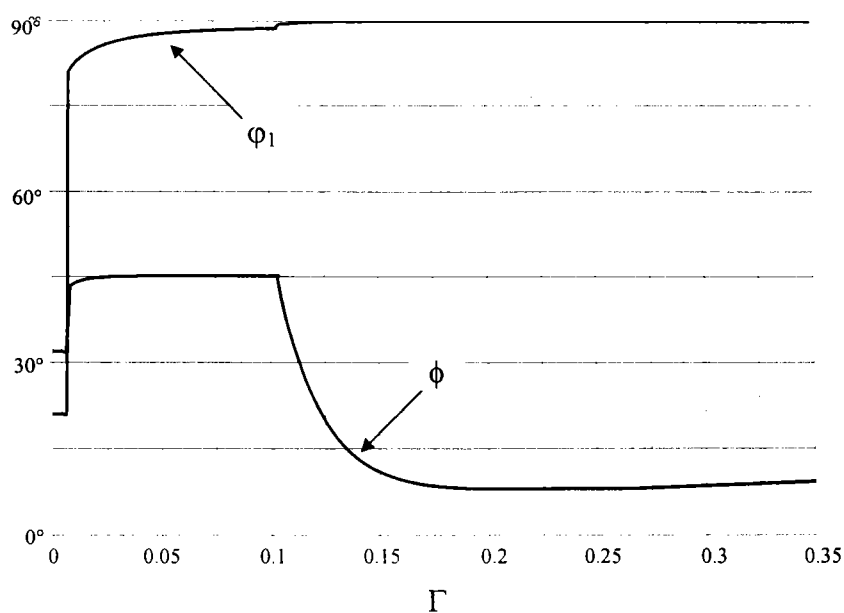


Figure III.16 : Evolution de l'orientation des cellules de dislocations.

c. Evolution de la microstructure

La figure III.16 donne l'évolution de l'orientation des cellules au cours du chargement. L'angle φ_2 n'est pas représenté dans la mesure où les cellules choisies ont une symétrie cylindrique autour de leur axe z et qu'une rotation de φ_2 ne change pas la configuration de la microstructure de dislocations ($F^{\varphi_2} = 0$).

A la fin du premier chargement, les cellules sont parallèles au plan de cisaillement. Au cours du régime transitoire, les cellules quittent cette position pour se placer parallèlement au plan de cisaillement du second chargement.

Du fait de la présence d'un champ de contraintes résiduelles issu du premier chargement et malgré la faible valeur du seuil $\tau_c^{\alpha\mu}$, l'évolution de l'orientation de la microstructure est beaucoup plus lente durant le régime transitoire qu'au début du premier chargement. La rotation progressive des cellules vient de ce que le matériau perd lentement la mémoire de son chargement antérieur. Ceci est vrai dans le cas effectivement où le seuil de propagation $\tau_c^{\alpha\mu}$ a été suffisamment relevé. Dans le cas contraire, la réorientation des cellules est initiée mais ne peut s'achever à cause de l'apparition de la localisation de la déformation plastique.

d. Conclusion

Nous venons d'étudier en détail les résultats donnés par le modèle dans le cas d'un chargement complexe caractérisé par $\Theta = 0.5$ (figure I.3).

Dans la partie qui suit, nous regardons ce que deviennent les caractéristiques obtenues pour les changements de trajets pour différentes valeurs de Θ . Pour cela nous étudions des chargements en cisaillement comme celui présenté ici mais pour différentes valeurs de θ .

III.2.2 Différentes directions pour le second chargement.

Dans un premier temps, sont étudiés des cas de chargement en cisaillement tels que celui décrit par la figure III.12 pour différentes valeurs de θ . Les valeurs de Θ correspondantes sont rassemblées dans le tableau suivant :

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°
Θ	1	0.866	0.5	0	-0.5	-0.866

Le taux de prédéformation est fixé à 0.05. Les valeurs des paramètres du modèle sont celles du tableau précédent (tableau III.7). Le seuil de propagation de l'interface cellule paroi a toutefois été baissé : $\tau_c^{\alpha\mu} = 4.5$ MPa.

a. Caractéristiques des chargements complexes

- microplasticté

La figure III.16 montre les réponses contrainte-déformation obtenues pour les différentes orientations du second chargement.

On note que plus l'angle est important entre les deux chargements, plus le seuil de microplasticté est faible. La pente correspondant au régime de microplasticté reste inchangée.

- contrainte à la recharge

Sous l'effet de l'érouissage non local et avec le fait que le seuil de microplasticté chute avec l'angle, pour θ compris entre 0° et 45° , la contrainte à la recharge augmente avec θ . Au-delà de 45° , une partie de l'érouissage non local change de signe. Son effet est moins important, la contrainte à la recharge chute. Pour un angle de 75° , l'effet de l'érouissage non local donne même une contrainte à la recharge plus faible que la limite d'écoulement obtenue à la fin du premier trajet.

- localisation de la déformation plastique

On a fixé le seuil de propagation de l'interface cellule-paroi à 4.5 pour observer dans quel ordre se produisent les localisations de la déformation plastique macroscopique. On note, de la même façon que pour la contrainte à la recharge, le moment d'apparition de la localisation ne cesse de décroître avec l'angle jusqu'à un angle de 45° . Ensuite, la localisation apparaît de plus en plus tard. Pour un angle de 75° , la limite à la localisation est même plus importante que pour le trajet continu.

- remarque

L'allure du régime transitoire, pour un angle de 75° , montre déjà un plateau identique à ceux observés expérimentalement [HRT92].

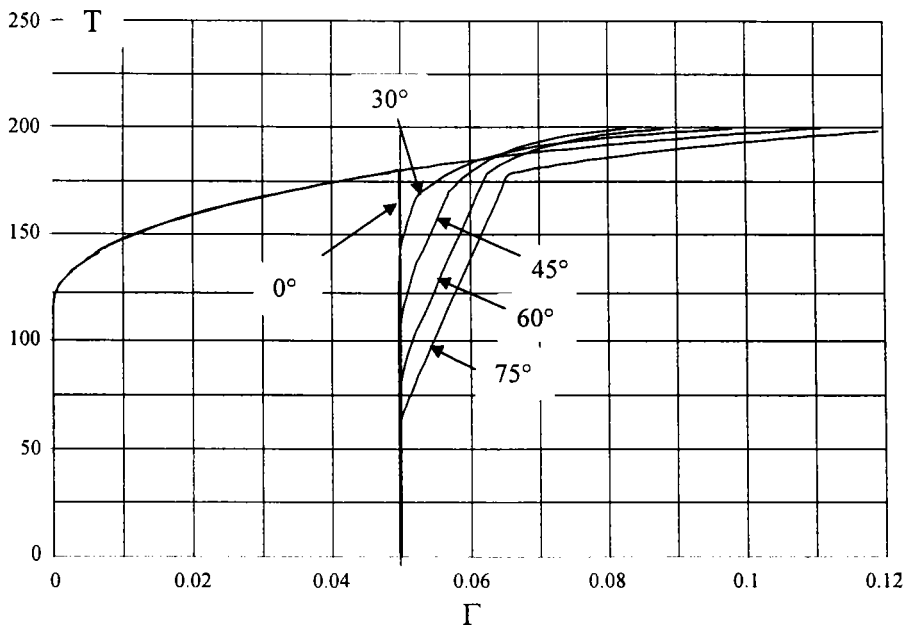


Figure III.17 : Réponse contrainte-déformation pour différentes valeurs de θ .

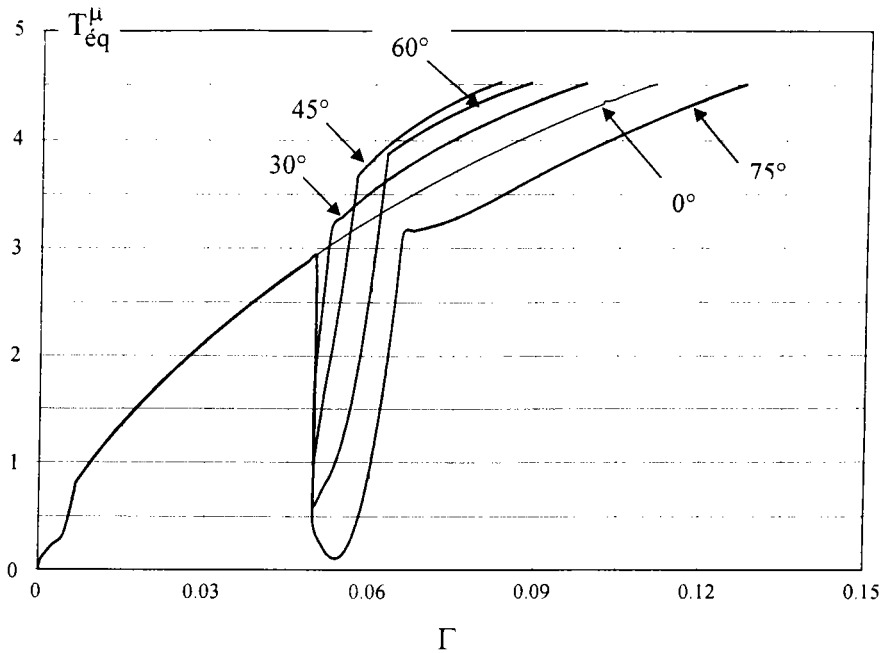


Figure III.18 : Evolution de la force motrice morphologique équivalente pour différentes valeurs de θ

b. Force motrice équivalente suivant les demi-axes

La figure III.18 montre l'évolution des forces motrices équivalentes suivant les demi-axes en ayant préalablement relevé le seuil de propagation de l'interface cellule-paroi au-dessus de 6.5.

On note ici, que contrairement au cas isolé étudié au début du chapitre III.2, aucune des forces motrices équivalentes ne possède de maximum supérieur à la valeur atteinte en chargement monotone. Quelle que soit la valeur fixée pour le seuil, on obtient une localisation de la déformation plastique macroscopique sous la forme d'une instabilité géométrique de la microstructure. Au-delà d'une certaine valeur (environ 6.5), les forces motrices équivalentes n'atteignent plus le seuil. On n'obtient aucune localisation de la déformation plastique.

III.2.3 Différentes valeurs de prédéformation

On étudie maintenant le même type de chargement complexe mais pour un taux de prédéformation de 0.1 et pour un seuil de microplasticité de 6.5, on obtient les réponses macroscopiques de la figure III.19.

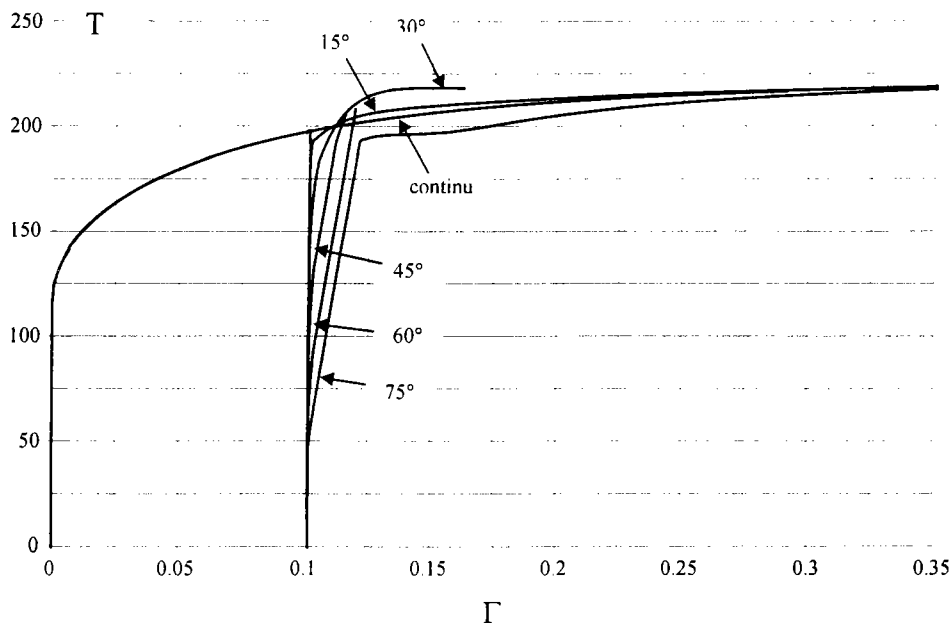


Figure III.19 : Réponse contrainte-déformation avec un seuil de propagation de 6.5

a. Caractéristiques des chargements complexes

- seuil de microplasticité

On note que pour toutes les directions du second chargement, le seuil de microplasticité chute avec la prédéformation. Ceci vient en partie de ce que le contraste entre les contraintes internes et les déformations plastiques de chaque phase augmentent avec la déformation.

- localisation de la déformation plastique

Nous avons vu que pour un seuil de propagation de l'interface cellule paroi fixé à 6.5, aucune des réponses macroscopiques pour une prédéformation de 5%, ne présente de localisation (figure III.18).

Pour une prédéformation de 10%, on note trois types de réponses :

- La courbe continue ou 15° : Il n'y a pas localisation de la déformation plastique sous forme d'instabilité géométrique. Après une déformation égale au taux de prédéformation la courbe de la réponse pour 15° a rejoint la courbe continue. La figure III.20 montre que la force motrice équivalente suivant les demi-axes possèdent les mêmes caractéristiques concernant sa monotonie que celle obtenue pour une prédéformation de 5%.
- Les courbes entre 30° et 60° : Il y a localisation de la déformation plastique sous la forme d'une instabilité de la microstructure de dislocations. La force motrice équivalente possède un maximum supérieur à sa valeur limite en chargement continu. Ayant

arbitrairement fixé la valeur du seuil de propagation en dessous de ce maximum, nous obtenons effectivement la localisation de la déformation plastique macroscopique.

- La courbe 75° : La contrainte à la recharge est inférieure à la limite d'écoulement atteinte en fin de préchargement. La courbe possède un plateau de la même façon que pour la prédéformation de 5%. La force motrice morphologique équivalente se trouve en dessous de celle en chargement continu. Il n'y a donc pas de localisation de la déformation plastique macroscopique.

Contrairement au cas précédent, pour une prédéformation de 10%, il existe trois possibilités en fonction de la valeur du seuil fixée.

- Si le seuil est pris suffisamment bas, toutes les réponses contiennent une localisation de la déformation plastique macroscopique.
- Si le seuil est suffisamment fort, comme dans le premier cas, pour aucune des valeurs des angles on n'observe de localisation de la déformation plastique.
- Pour une valeur comprise entre la limite en chargement continu et le maximum de la force motrice morphologique équivalente pour le trajet le plus astreignant, une partie des chargements contient un effet de localisation par déstabilisation de la microstructure. Ces chargements correspondent au cas où $|\Theta|$ est faible, c'est-à-dire aux trajets de types dur suivant la classification de Schmitt.

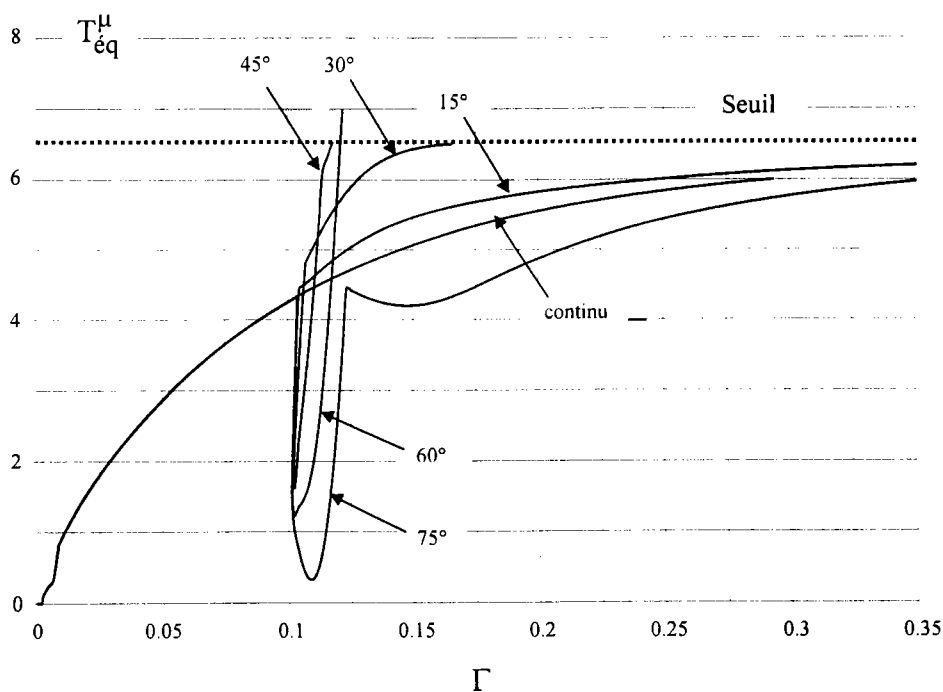


Figure III.20 : Evolution de la force motrice équivalente suivant les demi-axes

b. Allure des régimes transitoires

Pour les chargements de type pseudo-continus, on peut voir que la microstructure, au cours de la phase transitoire, s'oriente progressivement suivant la direction caractéristique du second chargement seul. La durée de mise en place de cette nouvelle orientation est lente par rapport à celle opérant au début du premier chargement à cause du champ de contrainte interne issue du premier chargement. La microstructure oublie petit à petit les effets du premier chargement au profit du second. Ces constatations sont aussi valables pour la réponse contrainte déformation que pour l'évolution de la force motrice équivalente suivant les demi-axes.

La durée pendant laquelle l'orientation des cellules évolue semble peu influencée par le taux de prédéformation (figure III.21) ce qui représente une différence notable avec les observations expérimentales de Schmitt et Fernandes [FS83]. En effet, ils estiment que la durée du régime transitoire pour la microstructure équivaut à la prédéformation. Pour les trajets durs, l'orientation de la microstructure est initiée mais ne peut atteindre son terme à cause de l'apparition de la localisation de la déformation plastique.

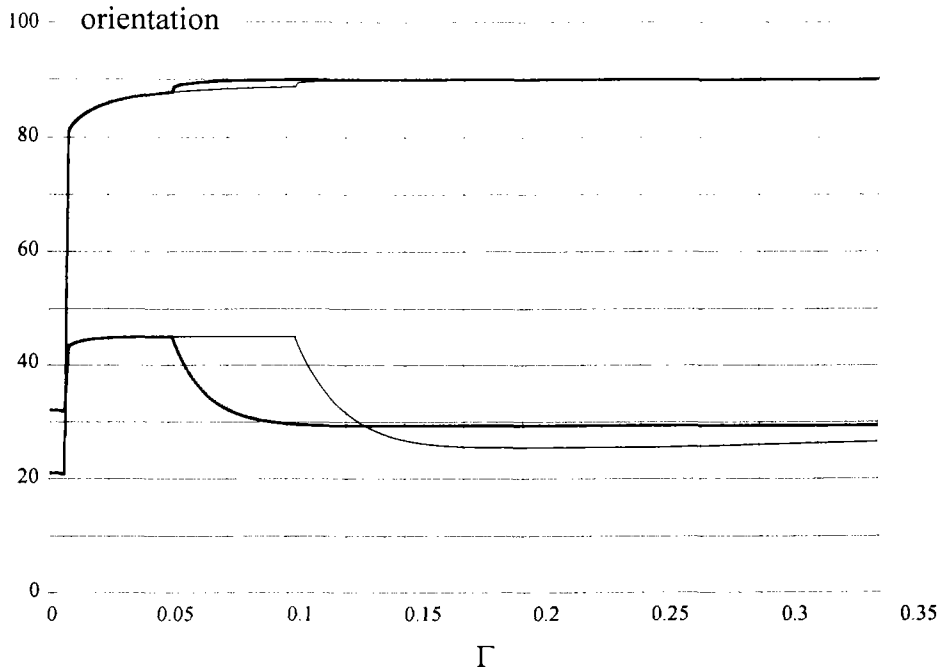


Figure III.21 : Evolution de l'orientation des cellules pour 5% et 10% de prédéformation pour un angle de 15°.

c. Résumé

Les figures III.22, montrent les réponses caractéristiques obtenues pour une prédéformation de 5% et 10% et pour un angle de 15° (pseudo-continus), 30° (trajet dur) et 75° (pseudo Bauschinger).

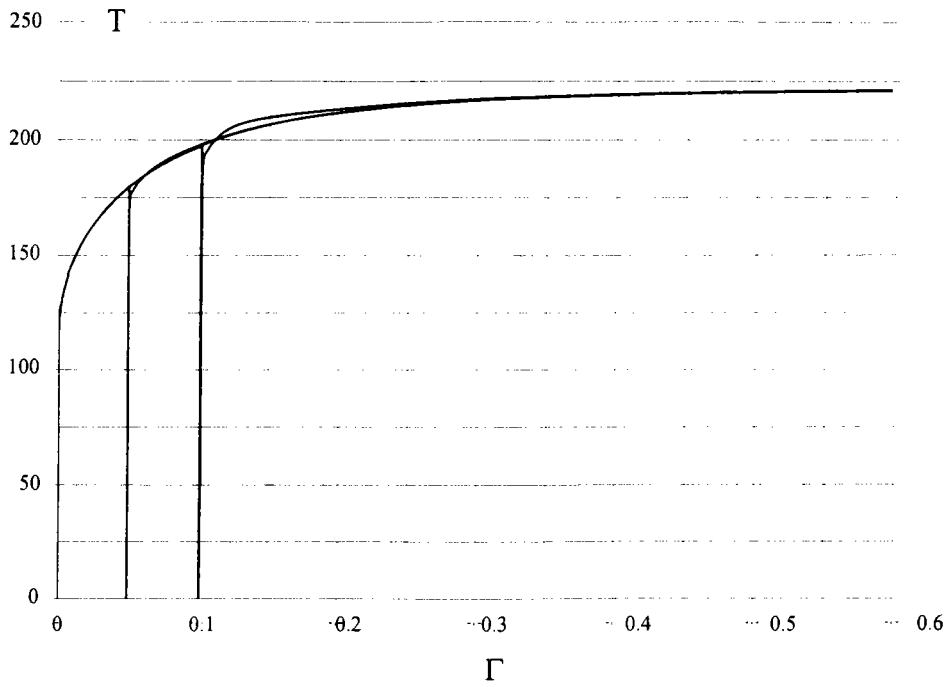


Figure III.22a : Courbes contrainte-déformation pour $\theta = 15^\circ$ et pour une prédéformation de 5% et 10%

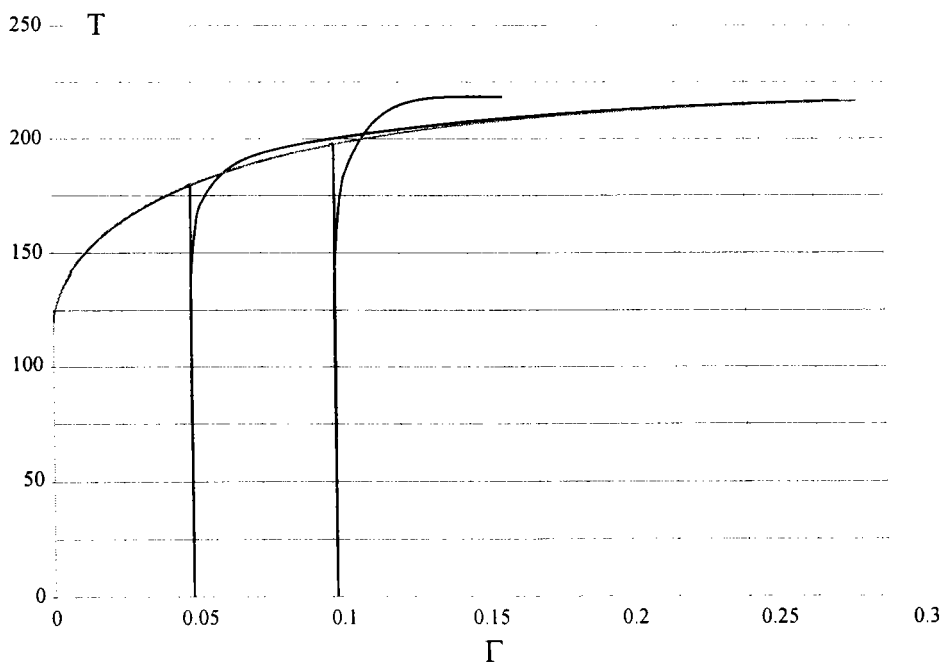


Figure III.22b : Courbes contrainte-déformation pour $\theta = 30^\circ$ et pour une prédéformation de 5% et 10%

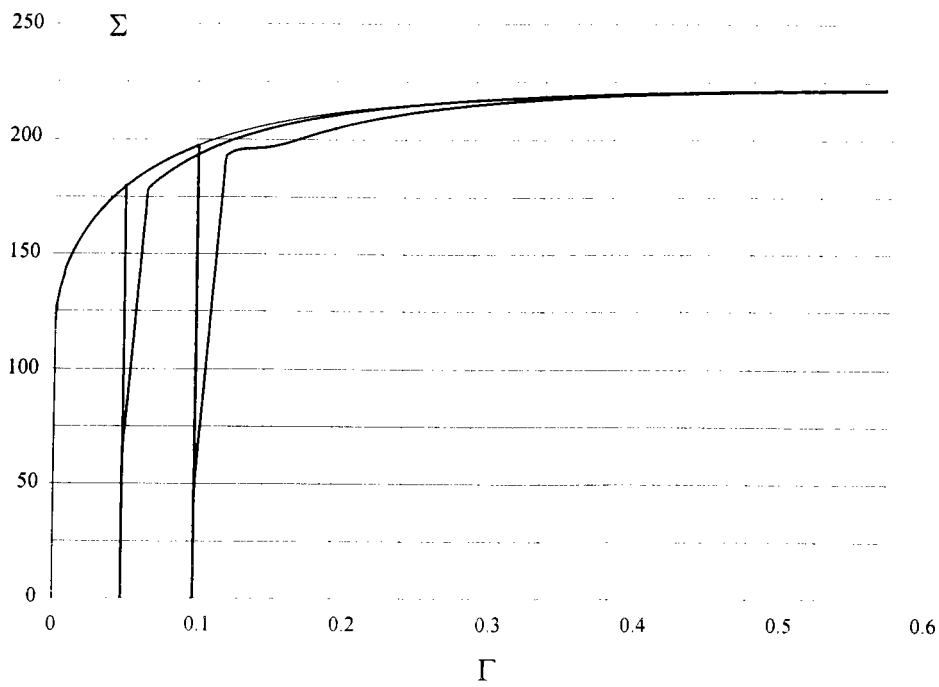


Figure III.22c : Courbes contrainte-déformation pour $\theta = 75^\circ$ et pour une prédéformation de 5% et 10%

III.2.4 Essai Bauschinger

a. Etude paramétrique

Dans cette partie, nous étudions plus particulièrement les réponses du modèle dans le cas d'essai Bauschinger. Ce cas a été délibérément occulté jusque là.

La figure III.23 donne les réponses obtenues en essai de cisaillement Bauschinger pour une valeur de s_1 de 0.7 et des valeurs de s_2 comprise entre 0 et 1.0. Les valeurs des autres paramètres sont données par le tableau précédent (tableau III.6):

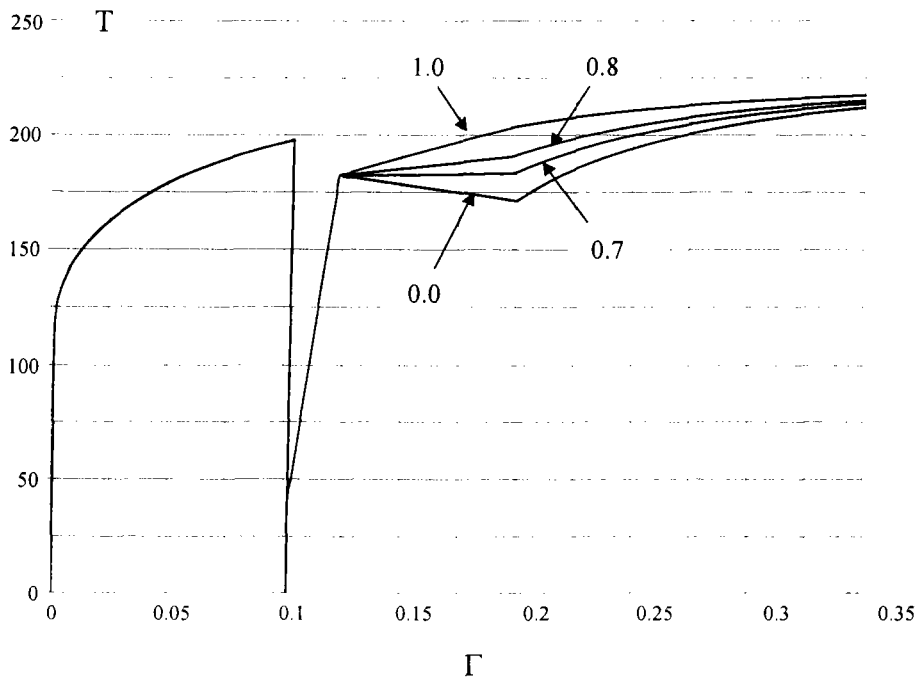


Figure III.23 : Réponse macroscopique simulée pour un essai de cisaillement Bauschinger pour différentes valeurs de s_2

Pour une valeur nulle de s_2 , à la fin du régime de microplasticité, le terme d'écrouissage non local et d'auto écrouissage des murs sont négatifs. La pente de la réponse macroscopique est alors négative. La reprise d'écrouissage (à environ 20% de déformation totale) correspond au changement de signe de l'écrouissage non local.

Expérimentalement, on observe que la pente de la réponse macroscopique au cours du régime transitoire ne devient jamais négatif à cause des mécanismes de réarrangement des dislocations [HRT92].

C'est dans ce but que nous avons introduit au chapitre II une fonction $\zeta(\Theta_2)$. Celle-ci permet de compenser le terme d'écrouissage non local et de traduire le fait que pendant la phase transitoire, la déformation plastique des murs liée à l'inversion de sa polarité ne s'accompagne pas d'annihilation.

En fonction de la valeur du paramètre intervenant dans la fonction $\zeta(\Theta_2)$, les courbes macroscopiques obtenues sont tracées sur la figure III.24. Ce paramètre permet entre autre de relever la pente du plateau.

Les réponses contraintes internes déformations plastiques sont données sur les figures III.25 pour une valeur de s_2 de 0.7.

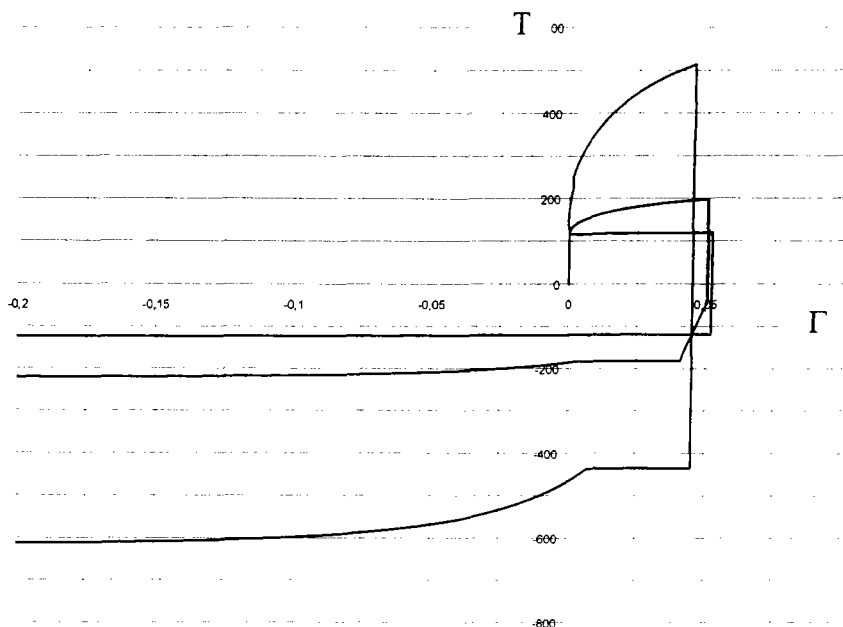


Figure III.25 : Contrainte macroscopique et contraintes internes pour un essai de cisaillement Bauschinger pour $s_2=0.8$

La contrainte interne dans les murs possède un plateau pendant la phase transitoire. Ceci traduit la stagnation de la densité de dislocations dans les parois. L'allure de la contrainte interne dans les cellules n'est pas affectée par le plateau.

La figure n'est pas représentée ici mais l'orientation de la microstructure ne change pas au cours du changement de chargement. Ceci vient du fait que les directions principales de cisaillement pour les deux chargements sont identiques.

b. Comparaison avec l'expérience

La figure III.25 montre les résultats expérimentaux obtenus par Rauch [R99] dans le cas d'un essai de cisaillement continu et de deux essais de cisaillement Bauschinger à 10% et 20% de prédéformation.

Comme Hu le constate, le plateau au début du second chargement possède une pente positive. La reprise d'écrouissage s'opère à peu près à deux fois la prédéformation.

Les paramètres d'écrouissage (L_1 , L_2 et L_3) ont été déterminés par la courbe continue. La fraction volumique de départ ainsi que les demi-axes initiaux des cellules ont été choisis en fonction des observations expérimentales classiques [S86] dans le cas d'essais de cisaillement. Le paramètre s_2 et s_3 sont déterminés par le premier essai à 5% de prédéformation. Avec ces paramètres fixés, le second essai de cisaillement Bauschinger est simulé sans aucun autre ajustement.

Les résultats obtenus sont tracés sur la figure III.26.

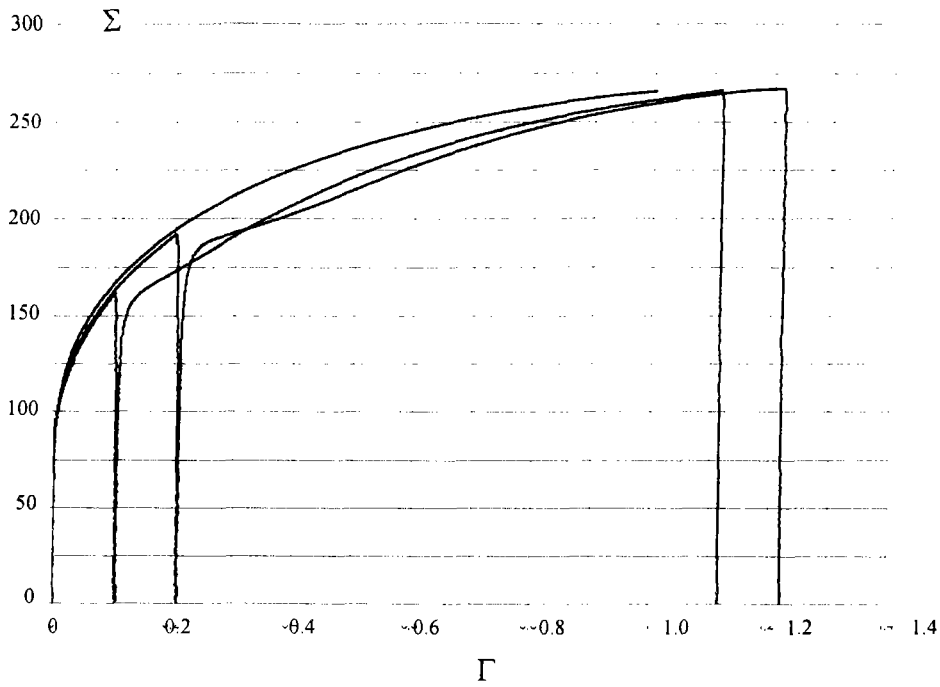


Figure III.26 : Résultats expérimentaux concernant un essai de cisaillement Bauschinger pour 10% et 20% de prédéformation.

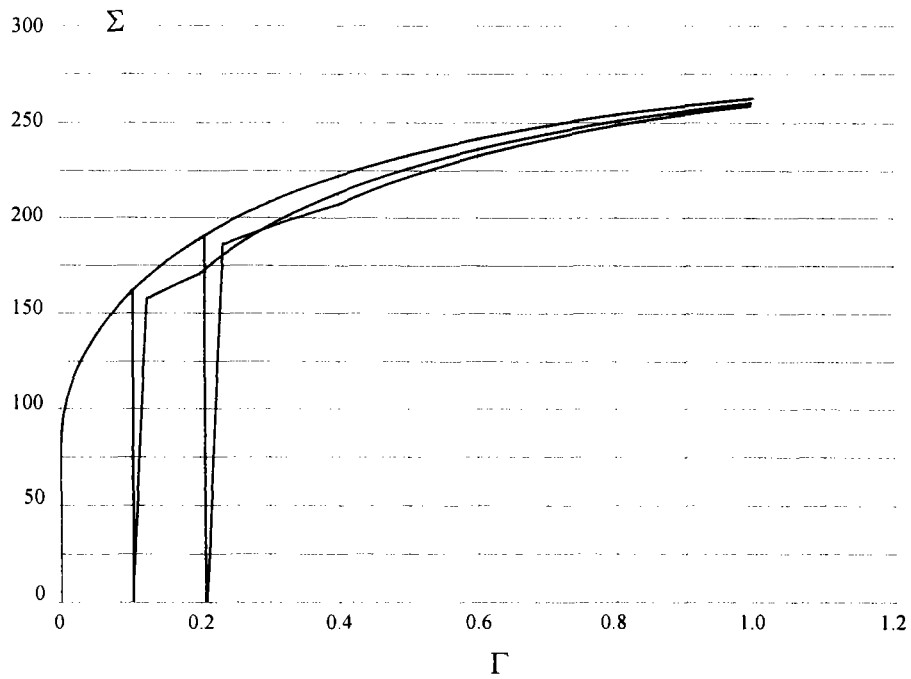


Figure III.27 : Résultats numériques pour deux essais de cisaillement Bauschinger à 10% et 20% de prédéformation.

On note tout de suite que le comportement asymptotique pour les deux essais est bien obtenu. De plus le niveau de contrainte auquel apparaissent les plateaux est lui aussi correct. La reprise de l'écroutissage s'opère pour les bonnes valeurs de déformation.

Par contre, le seuil et la pente du régime de microplasticité sont sous-évalués. En outre, on peut noter que les transitions entre les différents stades du régime transitoire sont anguleuses et non régulières comme les résultats expérimentaux.

Malgré les bons résultats du modèle, il faut noter que la transition de microstructure pendant un essai Bauschinger [HRT92] est très difficile à représenter à partir des variables internes morphologiques employées. La dissolution des murs issus du premier chargement et la reconstruction de nouveaux murs avec une polarité opposée ne peuvent être correctement interprétées en terme de mouvement de frontière. Cette difficulté a nécessité l'introduction de la fonction $\zeta_2(\Theta_2)$ dont il est difficile de donner une signification physique.

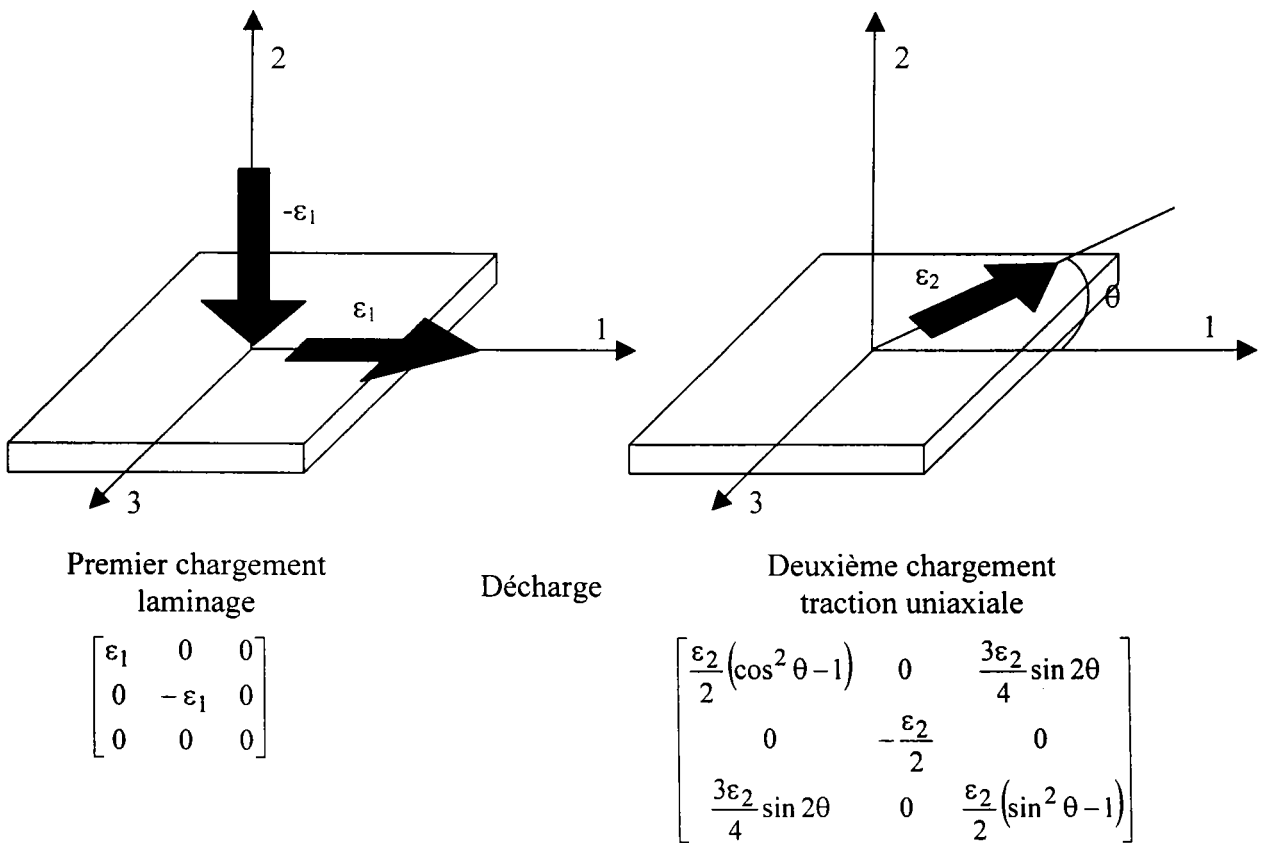
III.2.5 Autres cas de chargement complexes

Dans cette partie, est étudié un autre cas de chargement complexe composé d'un laminage suivi d'un essai de traction dans la direction transverse, longue ou à 45°. Ces essais ont fait l'objet d'une étude expérimentale dont les résultats sont représentés sur la figure III.27.

Il est nécessaire d'étudier ce type de chargement en plus de celui des parties III.2 et III.4 dans la mesure où il représente un vrai cas de chargement en trois dimensions. Les directions principales de cisaillement de chacun des chargement constituant le trajet complexe ne sont pas dans un même plan. Ici notamment, l'aspect tridimensionnel de l'orientation des cellules dans le matériau est fondamental.

a. Etude paramétrique.

Dans un premier temps, ont été simulés les trajets de chargement en laminage suivi de traction uniaxiale dont la figure III.27 donne les différents paramètres.



Ce chargement a été simulé pour quatre valeurs de θ , donnant quatre valeurs de Θ (figure I.3). Ces valeurs sont données dans le tableau suivant :

θ	0°	30°	60°	90°
Θ	0.866	0.649	0.216	0

Le taux de prédéformation en laminage est fixé à 10%.

Les réponses macroscopiques obtenues sont présentées sur la figure III.28.

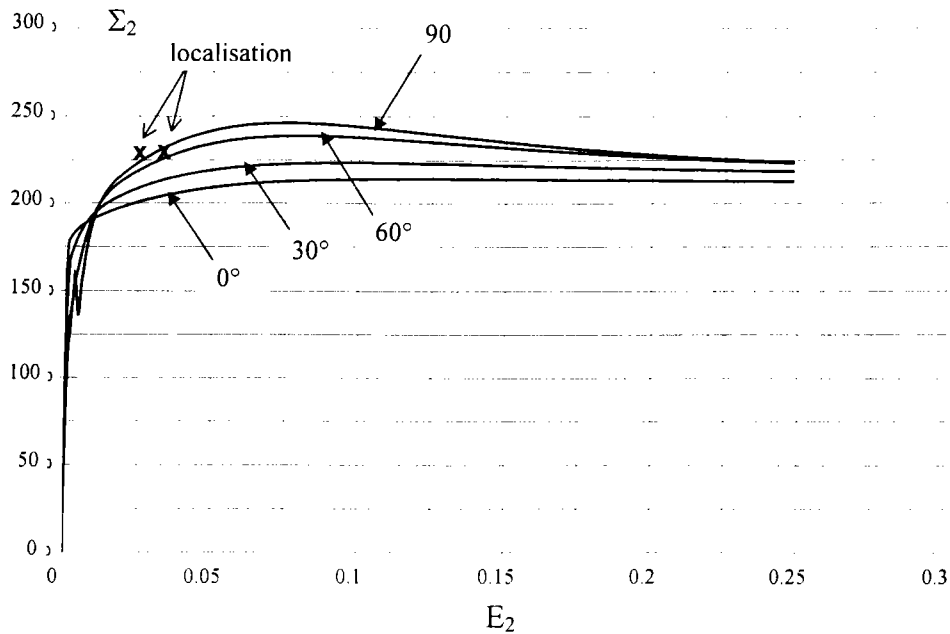


Figure III.28 : Réponses contraintes-déformation simulées pour un essai de laminage suivi d'un essai de traction dans le plan de laminage pour différentes valeurs de θ .

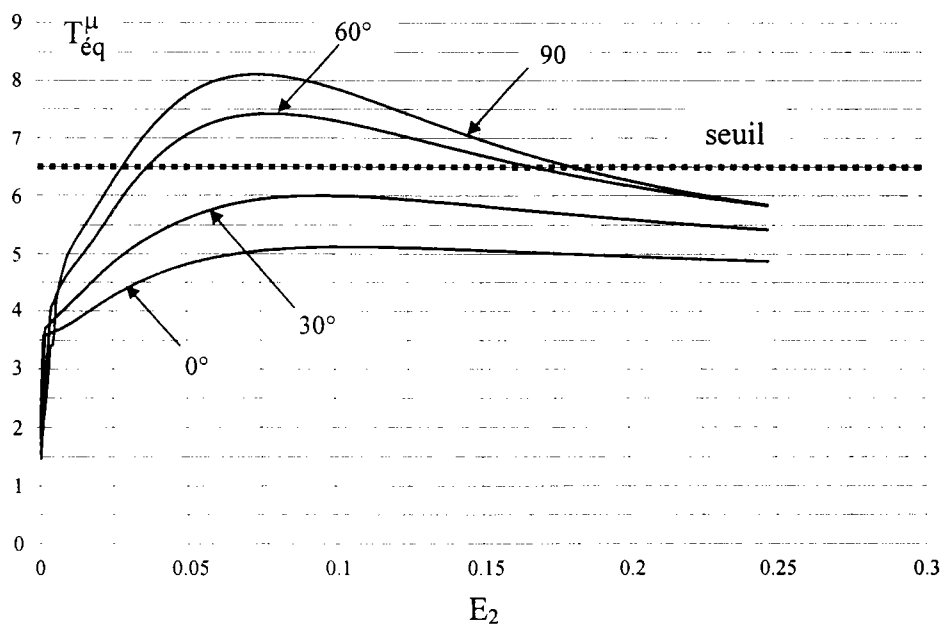


Figure III.29 : Evolution de la force motrice équivalente suivant des demi-axes

Comme dans le cas des essais de cisaillement complexes, le type de réponse obtenu dépend fortement de la direction du second chargement.

Toutes les courbes présentent un maximum de la contrainte entre 5% et 15% de déformation totale suivant le second chargement. Le niveau de contrainte augmente avec θ alors que le seuil de microplasticité diminue.

La force motrice suivant les demi-axes possède les mêmes caractéristiques qu'en cisaillement complexe. En effet, il existe trois domaines pour différentes valeurs du seuil de propagation de l'interface cellule paroi pour lesquels la totalité, une partie ou aucune des réponses macroscopiques ne présente de localisation de la déformation plastique sous forme de déstabilisation de la microstructure.

Sur la figure III.29, le seuil a été placé aux alentours de 6.5. Dans ce cas, les courbes correspondant à $\theta = 60^\circ$ et $\theta = 90^\circ$ présentent une localisation. Plus on augmente le seuil, plus le spectre des réponses macroscopiques présentant des localisations se resserre autour de la valeur $\theta=90^\circ$. Les trajets de déformation les plus contraignants sont les trajets de type dur.

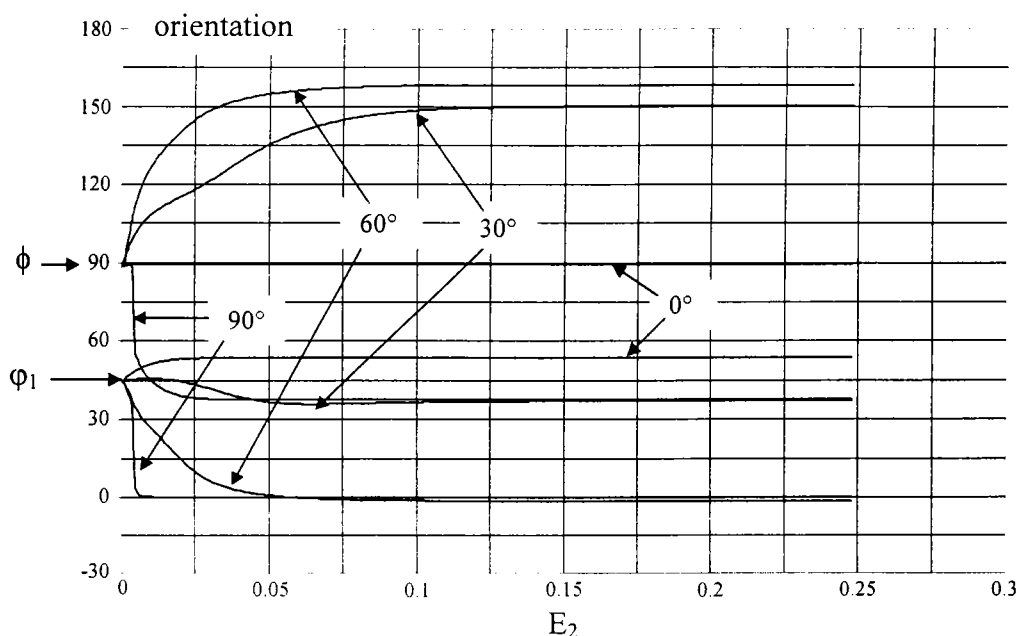


Figure III.30: Evolution de l'orientation de la microstructure simulée au cours du second chargement

La figure III.30 montre l'évolution de l'orientation de la microstructure au cours de l'essai de traction uniaxiale. De la même façon que pour les essais de cisaillement complexe, les cellules quittent l'orientation acquise au cours du premier chargement pour prendre progressivement celle qu'elles auraient eue si seul le second chargement avait été appliqué. Si la transition n'est pas interrompue par la localisation de la déformation, la microstructure du matériau oublie progressivement le premier chargement au profit du second. Cette constatation est aussi valable en ce qui concerne sa contrainte macroscopique et sa force motrice morphologique.

b. Essais expérimentaux

Sur la figure III.31, sont représentées les réponses macroscopiques obtenues expérimentalement pour des essais de traction uniaxiale après 10% de laminage dans le plan de laminage et dans la direction longue, transverse et à 45° .

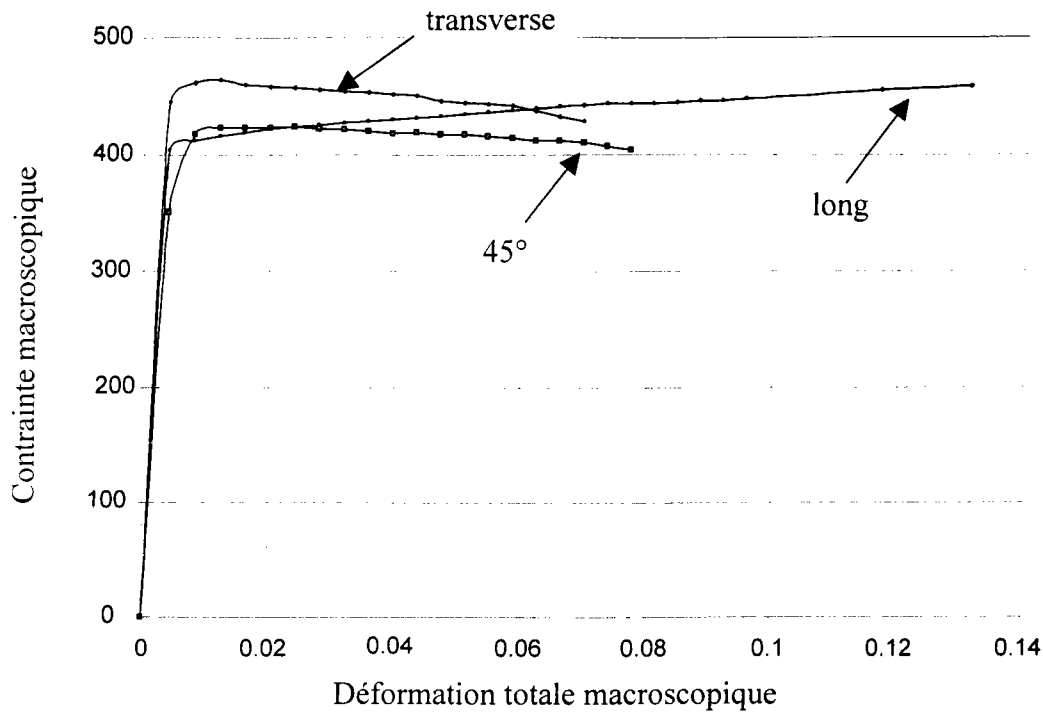


Figure III.31 : résultats expérimentaux concernant un essai de laminage suivi d'essais de traction dans la direction transverse, longue et à 45°

A partir de la réponse à un essai de traction pour un échantillon non prédéformé, les paramètres d'érouissage ont été fixés. La forme des cellules et la fraction volumique ont été fixées comme pour un essai de cisaillement dans la mesure où expérimentalement, on observe le même type de microstructure pour ces deux types d'essai. Les paramètres ainsi obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

Comportement élastique	$\mu = 80000 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$
Limites d'écoulement	$Y_c^0 = 200 \text{ MPa}$
Érouissage	$L_1 = 50 \text{ MPa}^2$ $L_2 = 0.5 \cdot 10^6 \text{ MPa}^2$ $L_3 = 3.0$ $s = 0.7$
Forme initiale de l'ellipsoïde	$a = 3.0 \text{ e-6 m}$ $b = 3.0 \text{ e-6 m}$ $c = 1.0 \text{ e-6 m}$
Orientation initiale de l'ellipsoïde	$\varphi_1 = 27.0^\circ$ $\phi = 36.0^\circ$ $\varphi_2 = 63.0^\circ$
Seuil de résistance morphologique	$\tau_c^{a\mu} = 8 \text{ MPa}$ $\tau_c^{\alpha\mu} = 0.01$

Les valeurs de s_1 et s_2 ont été pris égales à celles déterminées dans la partie III.4. Les résultats numériques obtenus sont les suivants :

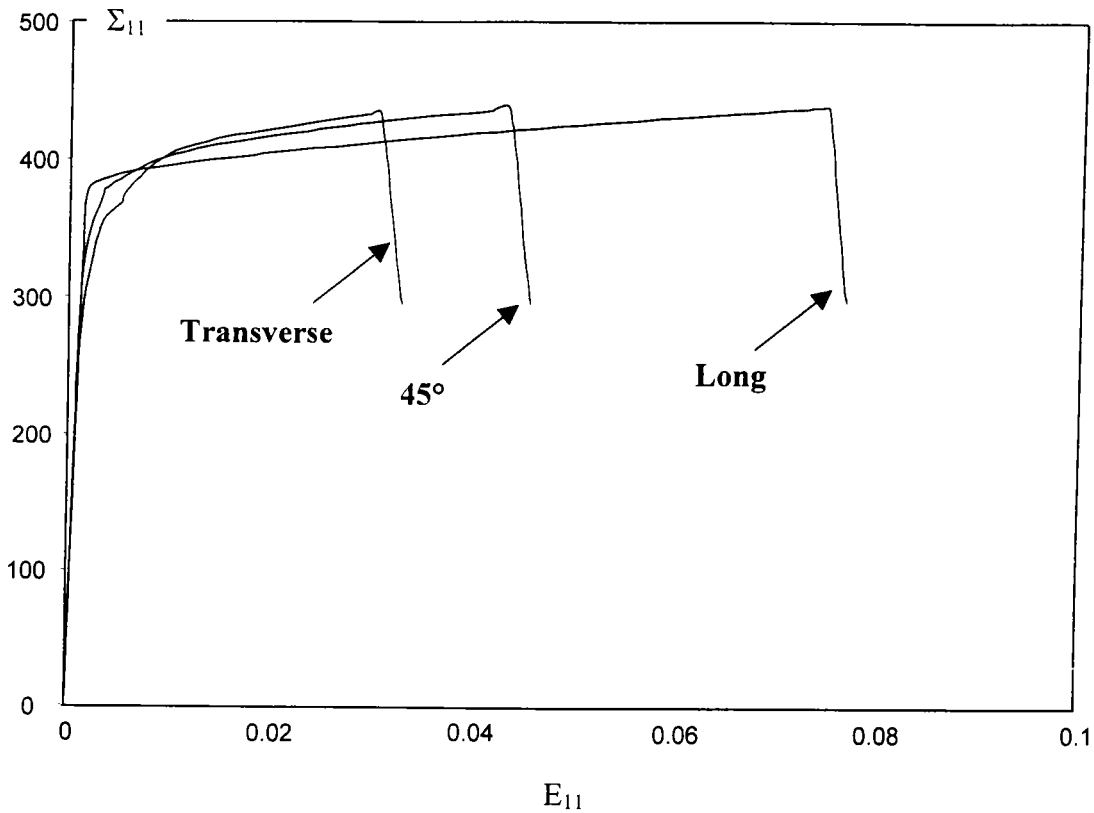


Figure III.32 : Simulation d'un essai de traction après 10% de laminage dans le sens long, transverse et à 45°

Pour la valeur des paramètres d'érouissage obtenue par l'essai de traction monotone, on n'obtient pas les trois cas mentionnés à l'occasion de l'étude paramétrique. En effet, les forces thermodynamiques équivalentes suivant les trois demi-axes sont monotones au cours de chaque traction uniaxiale. L'ordre et la valeur des déformations à localisation sont obtenus sur la figure III.32 pour une valeur du seuil de propagation de 8.0. Malgré de mauvaises valeurs pour les déformations à la localisation, l'ordre d'apparition est respecté. En effet, on obtient la localisation la plus précoce pour les essais de traction à 45° et dans le sens transverse.

Il est à noter aussi que les niveaux de contraintes et l'allure des régimes transitoires pour les deux trajets durs ne sont pas corrects. Les pics de contrainte observés expérimentalement pour ces deux essais ne sont pas reproduits.

III.3 Conclusion

Dans cette partie, nous avons vu que les principaux phénomènes caractéristiques des chargements complexes (seuil de micro plasticité, contrainte à la recharge, localisation) peuvent être abordés par le modèle biphasé à structure évolutive et écrouissage non local que nous avons bâti aux chapitres I et II.

La localisation de la déformation plastique macroscopique peut apparaître sous la forme d'une déstabilisation de la microstructure de dislocations correspondant expérimentalement à la formation de microbandes de cisaillement au sein du matériau. Cette instabilité est régie par le critère d'évolution de la morphologie des cellules. Comme pour les chargements continus, la localisation se produit systématiquement quand la force motrice équivalente suivant les demi-axes atteint son seuil.

Les résultats numériques montrent que cette force motrice prend sa valeur la plus importante pour les trajets de chargement durs. C'est-à-dire que la localisation apparaît plus facilement pour ce type de trajet. Cette force peut même présenter des maxima, qui font qu'après un même chargement la localisation peut apparaître pour certaine direction de chargement et pas d'autres. Dans le cas de cisaillements complexes, les trajets durs présentent cet aspect alors que les trajets continus ou Bauschinger non.

Toutefois, l'allure de la force motrice équivalente est très sensible à la valeur des paramètres des lois d'écrouissage. Ces paramètres ne peuvent pas être ajustés en fonction des résultats en chargement complexe mais exclusivement par les chargements monotones. C'est ce qui fait que pour le cas illustré au chapitre III.5, on obtient également une localisation de la déformation plastique pour le chargement pseudo continu.

Même si les principales caractéristiques des chargements complexes sont obtenues de façon qualitative, les faiblesses du modèle concernent en grande partie deux aspects:

- les régimes transitoires :

Que ce soit en trajet dur ou en trajet Bauschinger ou pseudo Bauschinger, le seuil de microplasticité est très souvent sous-évalué. Les pics de contrainte au début des trajets durs ne sont pas bien reproduits non plus. Ceci vient sans doute en partie de la pauvreté de l'ensemble des variables morphologiques pour décrire les évolutions de la microstructure devant la complexité des mécanismes mis en jeu au cours d'une transition de chargement. L'aspect biphasé de la microstructure n'a pas la même signification en chargement continu, alors que les frontières sont quasi fixes, en chargement pseudo continu où elles évoluent lentement, en trajet dur où elles ne peuvent bouger et se déstabilisent et en trajet Bauschinger où elles se dissolvent complètement pour reformer une autre microstructure « ailleurs » avec une polarité inversée.

Le problème lié à la sous-évaluation de l'anisotropie en début de trajet dur peut être résolu en partie en introduisant l'anisotropie du libre parcours moyen des dislocations inhérente à la forme des cellules. De plus, il faudrait pouvoir rendre compte de l'anisotropie intrinsèque aux densités de dislocations suivant les systèmes de glissement.

- la valeur du seuil de propagation et de son évolution

Le problème essentiel du seuil de propagation de l'interface cellule paroi vient de ce qu'on ne sait ni le mesurer ni le calculer. Le fait de le prendre constant tout au long du chargement, permet de ne pas introduire dans le modèle de nouveaux paramètres à identifier, ce qui lui ferait perdre tout son intérêt. On imagine cependant la possibilité de faire dépendre ce seuil de la densité de dislocations dans les murs ou du saut de déformation plastique.

Une des hypothèses fortes de ce modèle est la non prise en compte de la structure polycristalline du matériau. Les contraintes résiduelles intergranulaires ainsi que l'anisotropie induite par la texture initiale sont négligées. Cette approximation peut aussi avoir des répercussions sur les défauts constatés du modèle.

Au chapitre suivant, nous bâtissons un nouveau modèle dans lequel la structure polycristalline du matériau n'est plus négligée. Ceci permet entre autre de prendre en compte les effets des contraintes internes d'ordre II et de pouvoir considérer des textures initiales anisotropes. L'introduction de la structure granulaire des métaux permet aussi de décrire la plasticité de façon plus physique en introduisant le glissement cristallographique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- D97 DAVID, F., « Modélisation Meso-Macro de la Localisation de la déformation », 1997, thèse de l'Université de Metz, (ETCA).
- FS83 FERNANDES, J.V., SCHMITT, J.H., « Dislocation Microstructures in Steel during Deep Drawing », 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870).
- HRT92 HU, Z., RAUCH, E.F., TEODOSIU, C., « Work-hardening Behavior of Mild Steel under Stress Reversal at Large Strains », 1992, Int. J. of Plasticity, Vol.8, pp(537-856).
- H99 HOC, T., « Etude Expérimentale de la Localisation de la Déformation Plastique dans les Aciers IF au cours d'un Changement de Trajet de la Déformation », 1999, rapport interne SOLLAC Lorraine.
- I98 AUBERT, I., « Effets de l'hétérogénéisation plastique intragranulaire sur le comportement macroscopique des aciers doux lors de chargements complexes », 1998, Thèse de l'Université de Metz.
- L95 LEMOINE, X., « Analyse Micromécanique de la Formation des Cellules de Dislocations et Conséquences sur le Comportement des Aciers », 1995, Thèse de l'Université de Metz.
- M88 MUGHRABI, H., « Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals », 1983, Acta Metall., Vol.31, N°9, pp.(1367-1379).
- M94 MULLER, D., « Influence de l'Ecrouissage Non Local et de l'Hétérogénéité Intragranulaire sur le Comportement des Aciers Polycristallins », 1994, Thèse de l'Université de Metz.
- RS89 RAUCH, E.F., SCHMITT, J.H., « Dislocation Substructures in Mild Steel Deformed in Simple Shear », 1989, Material Science and Engineering, Vol.A113, pp(441-448).
- S86 SCHMITT, J.H., « Contribution à l'Etude de la microplasticité des aciers », 1986, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG).

CHAPITRE IV

Grains Biphases à Structure Evolutive et
Ecrouissage Non Local pour une
Modélisation du Comportement du
Polycristal

CHAPITRE IV

Grains biphasés à structure évolutive et écrouissage non local pour une modélisation du comportement du polycristal

L'objectif de ce chapitre est de construire un modèle polycristallin du matériau dans lequel le grain est représenté par un matériau biphasé à structure évolutive et écrouissage non local.

Au chapitre III, l'adoucissement brutal obtenu correspondant à une déstabilisation de la microstructure de dislocation a été apparenté à la formation de microbandes de cisaillement. Même si l'ensemble des variables internes morphologiques n'est pas suffisamment riche pour décrire géométriquement et cinématiquement l'apparition et la croissance de microbandes, le mécanisme obtenu possède toutefois quelques similitudes avec ce dernier :

- Après déstabilisation, la quasi-totalité de la déformation plastique macroscopique est contenue dans le processus de croissance de la fraction volumique de cellule. En trajet dur par exemple, l'évolution de la fraction volumique de phase molle génère de la plasticité macroscopique qui vient se substituer presque complètement à la plasticité classique.
- En chargement complexe, la force motrice suivant les demi-axes (qui sert de critère d'instabilité microstructurale) prend sa valeur la plus grande pour les trajets de types durs. L'apparition de l'instabilité est plus probable pour ce type de chargement, ce qui est conforme aux observations expérimentales de Thuillier sur la formation des microbandes de cisaillement.

En introduisant ce type de modèle pour le comportement du grain, on désire reproduire de façon plus précise le processus de formation des microbandes au sein du matériau. On souhaite entre autre retrouver les directions associées à la formation de celles-ci. L'incidence sur le comportement macroscopique est aussi l'un des objectifs de cette partie.

Dans le modèle précédent, la déstabilisation de la microstructure de dislocations provoque un adoucissement violent dans la mesure où l'on ne distingue pas la structure polycristalline. En la réintroduisant, on espère pouvoir étaler les endroits du matériau où elle se produit et obtenir ainsi un adoucissement plus progressif associé aux interactions intergranulaires.

Dans leur travail, Thuillier [T92] et Rauch [R93] ont essayé de donner des règles d'apparition des microbandes de cisaillement. Ces règles sont basées essentiellement sur des considérations cristallographiques et cinématiques. Ils formulent leurs règles en terme de systèmes de glissement activés pendant le premier chargement devant ceux activés au cours du second.

Les résultats obtenus numériquement au chapitre III tendent à montrer que ces règles ne sont pas suffisantes. Il semble nécessaire d'introduire un critère énergétique comme celui que le modèle utilise jusqu'à présent. Ce critère ne concerne pas uniquement les systèmes de glissement activés mais l'ensemble des interactions entre les cellules et les parois en distinguant le rôle de la contrainte macroscopique et celui des contraintes internes.

L'approche énergétique est celle qui a été utilisée dans le travail de Lemoine pour obtenir l'orientation des cellules de dislocations au cours d'un chargement alors que dans le travail de Muller, les cellules étaient orientées parallèlement au plan du premier système de glissement activé. Aubert, à partir de l'expression invariante de l'énergie libre contenue dans la

microstructure de dislocation (équation II.72) retrouve l'orientation des cellules de dislocations observées expérimentalement pour différents types de chargement. L'aspect non elliptique de l'énergie libre d'Helmholtz vis à vis des demi-axes n'a pas permis d'obtenir la forme initiale des cellules. Celle-ci est encore issue des observations expérimentales et des quelques règles cristallographiques et cinématiques exposées au chapitre I. Toutefois, la force motrice équivalente associée à la morphologie a fourni un critère d'instabilité permettant d'obtenir un adoucissement du matériau pouvant s'apparenter à la création de microbandes de cisaillement

Le critère de Schmitt [SAB85] pour la définition des trajets de chargement durs continu ou Bauschinger est lui aussi basé uniquement sur des considérations cinématiques où n'apparaît pas le comportement du matériau proprement dit. Son histoire n'apparaît qu'au travers de la direction de son premier chargement. Le taux de prédéformation, le type de structure de dislocations obtenue ... ne sont pas pris en compte par ce critère.

Par rapport au modèle bâti aux chapitres II et III, la structure polycristalline du matériau est prise en considération. Cette levée d'hypothèse permet de prendre en compte les effets des contraintes internes d'ordre II (interaction intergranulaire) et de pouvoir considérer des textures initiales anisotropes (matériau prédéformé ayant subi des traitements thermiques).

Dans une première partie, les hypothèses de base du modèle sont reposées dans le cadre de la plasticité polycristalline. On met l'accent sur la nouvelle interprétation des hypothèses du chapitre I.

Dans une deuxième partie, en nous appuyant sur le chapitre II, nous procédons à la formulation thermomicromécanique du problème posé dans la première partie.

Dans une troisième et dernière partie, pour un ensemble de variables internes morphologiques allégé, on expose quelques résultats mettant en évidence l'importance de la prise en compte de l'aspect évolutif de la microstructure de dislocations et de l'écroutissage non local.

IV.1 Modélisation du comportement élastoplastique d'un matériau polycristallin à grains biphasés à structure évolutive et écrouissage non local.

IV.1.1 A l'échelle du grain

H1 : L'hypothèse d'un matériau biphasé est conservée. Le grain est divisé en deux zones correspondant à l'intérieur des cellules (faible densité de dislocations) et les murs (forte densité de dislocations).

H2 : La structure cristalline du grain est prise en compte. La déformation plastique ε_{ij}^p et la rotation plastique ω_{ij}^p sont décrites en terme de glissements cristallographiques :

$$\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) = R_{ij}^g(\mathbf{r})\gamma^g(\mathbf{r}) \quad [\text{IV.1}]$$

$$\omega_{ij}^p(\mathbf{r}) = P_{ij}^g(\mathbf{r})\gamma^g(\mathbf{r}) \quad [\text{IV.2}]$$

où R_{ij}^g , P_{ij}^g et γ^g sont respectivement les tenseurs de Schmidt et le glissement suivant le système g.

En considérant le fort contraste entre les glissements dans les murs et celui à l'intérieur des cellules, le champ de glissement est pris uniforme par morceau et égal à sa moyenne volumique sur chacune des phases.

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} = \frac{1}{V^s} \int_{V^s} R_{ij}^g(\mathbf{r})\gamma^g(\mathbf{r})dV = R_{ij}^g \bar{\gamma}_s^g \quad [\text{IV.5}]$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} = \frac{1}{V^h} \int_{V^h} R_{ij}^g(\mathbf{r})\gamma^g(\mathbf{r})dV = R_{ij}^g \bar{\gamma}_h^g \quad [\text{IV.6}]$$

Les tenseurs de projection de Schmidt sont considérés uniforme sur tout le grain. On ne prend pas en compte la désorientation qui existe entre l'intérieur des cellules et les parois.

Les relations IV.5 et IV.6 peuvent être appliquées à la rotation plastique (équation IV.2).

H3 : les cellules sont représentées par des inclusions ellipsoïdales noyées dans une matrice figurant les murs. Nous ne considérons qu'une seule famille d'ellipsoïdes représentant la morphologie moyenne des cellules sur tout le grain. Nous supposons ici que la taille des grains est suffisamment petite pour qu'il n'y ait pas de subdivision en zones de glissement homogène (voir chapitre I.3.1).

La géométrie des cellules est donc donnée par un jeu de sept paramètres que sont :

- trois demi-axes définissant la forme des cellules
- trois angles d'Euler donnant l'orientation de la microstructure dans le repère de chargement
- le nombre de cellules par unité de volume

H4 : Le comportement élastique du matériau est considéré homogène et isotrope.

H5 : Le critère d'évolution des glissements est classique. Ils concernent la cission résolue calculée comme la projection de la contrainte interne sur le système de glissement et la cission critique calculée à partir des densités de dislocations par la loi de Taylor.

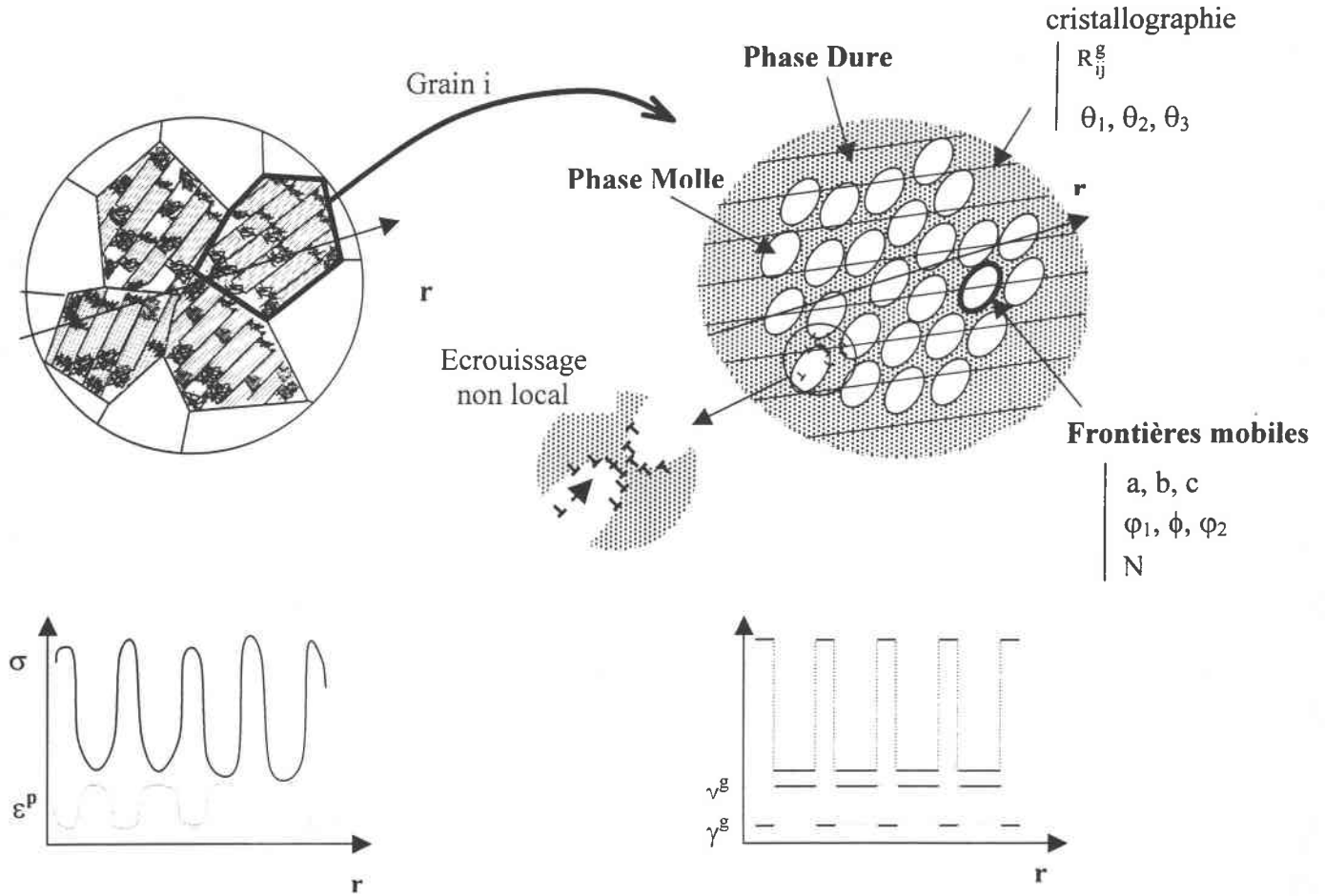


Figure IV.1 : Modèle polycristallin biphasé à structure évolutive et écrouissage non local

H6 : Les lois d'écrouissage sont inspirées de celles utilisées par Muller [M94] ou Lemoine [L95]. Des termes non locaux correspondant aux mécanismes d'accumulation des dislocations traduisent l'influence du glissement plastique dans les cellules sur le taux de cission critique des parois.

Aux termes d'auto-écrouissage des murs on associe essentiellement de l'annihilation. La densité de dislocations à l'intérieur des cellules reste faible, l'auto-écrouissage de cette zone est quasi nul.

H7 : La microstructure de dislocations évolue au cours du temps. Les paramètres définissant la géométrie des cellules sont des variables internes au sens thermodynamique du terme. Comme aux chapitres précédents, la frontière entre les cellules et les parois est considérée parfaite. Elle respecte la continuité du déplacement et du vecteur contrainte normal. Etant animée d'un mouvement propre, il n'y a pas continuité du vecteur vitesse.

H8 : L'ensemble de l'étude est mené dans le cadre des petites perturbations isothermes et indépendantes du temps.

IV.1.2 A l'échelle du polycristal

La transition d'échelle du grain vers le milieu macroscopique est réalisée par l'intermédiaire de la méthode de transition d'échelle auto-cohérente.

Les grains sont représentés par des ellipsoïdes noyés dans une matrice représentant le matériau homogène équivalent au polycristal.

IV.2 Formulation thermomicromécanique.

Dans cette partie, les équations constitutives d'un grain sont mises en places. Dans un premier temps, nous établissons l'expression de l'énergie libre d'Helmholtz correspondant dans le cas isotherme à l'énergie élastique stockée dans le matériau. A partir de cette expression, les forces motrices relatives à chacune des variables internes sont calculées.

Dans un deuxième temps, on calcule la dissipation. On en déduit l'expression des forces critiques. Des considérations sur le mouvement et le stockage des dislocations permettent d'établir l'expression de la matrice d'écroutissage. En s'inspirant des résultats du chapitre II, la dissipation et les forces critiques suivant les variables morphologiques sont ensuite calculées.

IV.2.1 Energie libre d'Helmholtz et forces motrices dans un grain.

Dans le cas de transformations isothermes, l'énergie libre d'Helmholtz se résume à l'énergie élastique stockée.

a. Cinématique

Dans cette partie, la fraction volumique de cellule est désignée par f .

En supposant que l'orientation cristallographique reste uniforme dans le grain et en considérant l'hypothèse d'uniformité par morceaux du champ de déformation plastique, il vient :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} = R_{ij}^u \dot{\gamma}_s^u \quad [IV.7]$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} = R_{ij}^u \dot{\gamma}_h^u \quad [IV.8]$$

où R_{ij}^u , le tenseur de Schmidt, est défini pour un système de glissement u par :

$$R_{ij}^u = \frac{1}{2} (m_i^u n_j^u + m_j^u n_i^u) \quad [IV.9]$$

m_i et n_i désignant la direction de glissement et la normale au plan de glissement u .

$\dot{\gamma}_h^u$ et $\dot{\gamma}_s^u$ sont les taux de glissement moyens sur la phase dure et la phase molle suivant le système de glissement u .

A partir de la relation II.55 la déformation plastique d'un grain devient en fonction des glissements cristallographiques :

$$E_{ij}^p = f R_{ij}^u \dot{\gamma}_s^u + (1-f) R_{ij}^u \dot{\gamma}_h^u \quad [IV.10]$$

Le taux de déformation plastique d'un grain est obtenu par dérivation de IV.10 :

$$\dot{E}_{ij}^p = f R_{ij}^u \dot{\gamma}_s^u + (1-f) R_{ij}^u \dot{\gamma}_h^u + \dot{f} R_{ji}^u (\gamma_s^u - \gamma_h^u) \quad [IV.11]$$

On retrouve dans cette dernière relation un terme contenant les effets cinématiques directes de l'évolution de la morphologie des cellules sur la déformation plastique du grain.

b. Energie libre d'Helmholtz

Le calcul de l'énergie libre d'Helmholtz a été conduit au chapitre II dans le cas du matériau biphasé sans prendre en compte l'aspect cristallographique de la déformation plastique. En appliquant ce résultat à un grain et en introduisant les relations IV.5 et IV.6, on obtient pour l'énergie libre contenue dans un grain l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Phi \left(E, \gamma_s^u, \gamma_h^u, \begin{pmatrix} a & b & c \\ \varphi_1 & \phi & \varphi_2 \end{pmatrix}, N \right) = \\ \frac{1}{2} \left(E_{ij} - f R_{ij}^u \gamma_s^u - (1-f) R_{ij}^u \gamma_h^u \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v \right) \\ + \frac{1}{2} f (1-f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} \left(I_{klmn} - S_{klmn} \right) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \end{aligned} \quad [IV.12]$$

où S_{klmn} désigne le tenseur d'Eshelby relatif à la forme des cellules exprimé dans le repère global de chargement (et non pas dans le repère cristallographique).

c. Dissipation intrinsèque

Depuis la relation II.47, établie dans le cas général d'un solide contenant des frontières de discontinuité de la déformation plastique mobiles, on obtient, en introduisant les équations IV.7 et IV.8 :

$$D = \int_V \sigma_{ij} R_{ij}^u \dot{\gamma}^u dV - \int_{\Delta} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) R_{ij}^u [\dot{\gamma}^u] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [IV.13]$$

En adoptant l'hypothèse d'un glissement uniforme par morceau, la première intégrale de volume se scinde en deux parties. IV.13 devient alors :

$$D = V f \sigma_{ij}^s R_{ij}^u \dot{\gamma}_s^u + V (1-f) \sigma_{ij}^h R_{ij}^u \dot{\gamma}_h^u - \int_{\Delta} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) R_{ij}^u [\dot{\gamma}^u] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad [IV.14]$$

La force thermodynamique associée au glissement $\dot{\gamma}^u$ apparaît comme la projection de la contrainte interne sur le système de glissement. Cette force correspond à la cission résolue calculée pour chacune des phases séparément. La partie relative au mouvement de la microstructure de dislocation peut être développée en introduisant les opérateurs interfaciaux. On obtient la même relation que celle obtenue au chapitre II.

d. Forces motrices

Les forces thermodynamiques associées à chacune des variables internes sont obtenues par dérivation de l'énergie libre par rapport à la variable interne concernée.

L'expression de l'ensemble des forces motrices est donnée par :

- cisssions résolues

$$\begin{aligned}\tau_s^u &= R_{ij}^u \sigma_{ij}^s \\ &= R_{ij}^u C_{ijkl} \left(E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v \right) - (1-f) R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v)\end{aligned}\quad [IV.13]$$

$$\begin{aligned}\tau_h^u &= R_{ij}^u \sigma_{ij}^h \\ &= R_{ij}^u C_{ijkl} \left(E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v \right) + f R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v)\end{aligned}\quad [IV.14]$$

Les cisssions résolues apparaissent comme la projection de la contrainte interne sur le système de glissement.

- forces motrices associées aux demi-axes

$$\begin{aligned}F_a &= \frac{f}{a} R_{ij}^u (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v \right) \\ &\quad - \frac{f}{2a} (1-2f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \\ &\quad + \frac{1}{2} f (1-f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial a} R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v)\end{aligned}\quad [IV.15]$$

$$\begin{aligned}F_b &= \frac{f}{b} R_{ij}^u (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v \right) \\ &\quad - \frac{f}{2b} (1-2f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \\ &\quad + \frac{1}{2} f (1-f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial b} R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v)\end{aligned}\quad [IV.16]$$

$$\begin{aligned}F_c &= \frac{f}{c} R_{ij}^u (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v \right) \\ &\quad - \frac{f}{2c} (1-2f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \\ &\quad + \frac{1}{2} f (1-f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial c} R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v)\end{aligned}\quad [IV.17]$$

- forces motrices associées à l'orientation

$$F_{\varphi_1} = 2f(1-f)\text{sym}\left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \varphi_1} R_{mn}^u P_{jn}\right] (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}^*) P_{pr} R_{rs}^v P_{qs} (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \quad [\text{IV.18}]$$

$$F_{\phi} = 2f(1-f)\text{sym}\left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \phi} R_{mn}^u P_{jn}\right] (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}^*) P_{pr} R_{rs}^v P_{qs} (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \quad [\text{IV.19}]$$

$$F_{\varphi_2} = 2f(1-f)\text{sym}\left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \varphi_2} R_{mn}^u P_{jn}\right] (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}^*) P_{pr} R_{rs}^v P_{qs} (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \quad [\text{IV.20}]$$

où S_{klpq}^* désigne le tenseur d'Eshelby exprimé dans le repère propre de la cellule et P_{in} la matrice de passage entre le repère propre de l'ellipsoïde et le repère global de chargement.

- force motrice associée au nombre de cellules par unité de volume

$$F_N = \frac{f}{N} (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} (E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v) + \frac{f}{N} (1-2f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \quad [\text{IV.21}]$$

Le calcul de l'énergie libre contenue dans un grain fait apparaître les mêmes propriétés que celle calculée au chapitre II. Cette énergie se décompose en deux parties, la première liée au chargement extérieur et l'autre provenant des interactions entre cellules et parois.

On retrouve la non-convexité de l'énergie par rapport à la fraction volumique. Cette propriété peut être source d'instabilité, non pas de l'ensemble du matériau comme aux chapitres précédents, mais du grain.

A chacune des forces motrices, on oppose une force critique représentant l'action des mécanismes dissipatifs. La détermination de ces forces fait l'objet de la partie suivante.

IV.2.2 Dissipation et forces critiques

a. Cissions critiques et écrouissage

Il peut y avoir glissement suivant le système u si sa cission résolue τ^u est égale à sa cission critique τ_c^u :

$$\dot{\gamma}^u = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau^u < \tau_c^u \\ \forall \dot{\tau}^u \end{cases}$$

$$\dot{\gamma}^u = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau^u = \tau_c^u \\ \dot{\tau}^u < \dot{\tau}_c^u \end{cases}$$

$$\dot{\gamma}^u \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau^u = \tau_c^u \\ \dot{\tau}^u = \dot{\tau}_c^u \end{cases}$$

L'expression des cissions critiques et de la matrice d'écrouissage est basée sur les travaux de Muller et de Lemoine [M94], [L95].

De façon générale, en plasticité cristalline, la cission critique locale suivant un système de glissement u , τ_c^u , peut être reliée aux densités de dislocations suivant tous les autres systèmes ρ^v par la relation suivante:

$$\tau_c^u = \tau_c^0 + \mu b \sqrt{a^{uv} \rho^v} \quad [\text{IV.22}]$$

où a^{uv} est une matrice d'interaction donnant l'influence de la densité de dislocations suivant le système v sur la cission critique suivant le système u .

Les coefficients de la matrice a^{uv} ont été déterminés par Franciosi dans le cas d'un matériau CC [F83, F84]. Leur valeur dépend de l'orientation relative des plans et des directions de glissement des deux systèmes considérés. Franciosi définit deux paramètres d'interaction (interaction faible et forte) correspondant aux conditions suivantes :

- interaction faible : les deux systèmes sont coplanaires, colinéaires ou possèdent des directions de glissement perpendiculaires.
- Interaction forte : pour tous les autres cas.

Dans notre cas, pour chaque phase, nous appliquons IV.22. On obtient les cissions critiques suivantes :

$$\tau_{cs}^u = \tau_c^0 + \mu b \sqrt{a^{uv} \rho^v} \quad [\text{IV.23}]$$

$$\tau_{ch}^u = \tau_c^0 + \mu b \sqrt{a^{uv} \rho^v} \quad [\text{IV.24}]$$

Au chapitre II, l'accent a été mis sur le fait que le matériau a un comportement homogène vis à vis de la densité de dislocations. Ceci se traduit ici (outre l'utilisation de deux lois de même type) par l'égalité des cissions critiques initiales τ_c^0 et des matrices d'interaction a^{uv} .

Le taux de cission critique est obtenu en dérivant IV.23 et IV.24. On obtient ainsi :

$$\dot{\tau}_{cs}^u = \frac{1}{2} \frac{(\mu b)^2}{\sqrt{\tau_{cs}^u - \tau_c^0}} a^{uv} \dot{\rho}_s^v \quad [IV.25]$$

$$\dot{\tau}_{ch}^u = \frac{1}{2} \frac{(\mu b)^2}{\sqrt{\tau_{ch}^u - \tau_c^0}} a^{uv} \dot{\rho}_h^v \quad [IV.26]$$

Pour compléter les lois d'érouissage, il faut maintenant relier les taux de densité de dislocations aux glissements plastiques de chacune des phases.

De façon formelle, on peut écrire :

$$\dot{\rho}_s^v = L_{ss}^{vw} \dot{\gamma}_s^w + L_{sh}^{vw} \dot{\gamma}_h^w \quad [IV.27]$$

$$\dot{\rho}_h^v = L_{hs}^{vw} \dot{\gamma}_s^w + L_{hh}^{vw} \dot{\gamma}_h^w \quad [IV.28]$$

La détermination des fonctions L_{ij} est basée sur les observations expérimentales exposées au premier chapitre. On s'intéresse pour cela à la cinématique des dislocations et aux mécanismes d'accumulation et d'annihilation des dislocations au sein de la microstructure.

- taux de densité de dislocations à l'intérieur des cellules.

En considérant que la densité de dislocations dans les cellules reste faible, Muller [M94] propose pour la fonction L_{ss} la loi suivante :

$$L_{ss}^{vw} = L_1 \delta^{uv} \quad [IV.29]$$

avec δ^{vw} désignant la matrice identité.

L'influence du glissement dans les murs sur la densité de dislocations dans les cellules est supposée nulle.

$$L_{sh}^{vw} = 0 \quad [IV.30]$$

En résumé, l'évolution de la densité de dislocations dans les cellules est donnée par la loi suivante :

$$\dot{\rho}_s^u = L_1 \delta^{uv} \dot{\gamma}_s^v \quad [IV.31]$$

- taux de densité de dislocations dans les murs.

Le plus important réside dans l'évolution de la densité de dislocations dans les parois dans la mesure où c'est là que se trouve la majeure partie des dislocations accumulées dans le matériau.

Les lois proposées par Muller pour les deux fonctions L_{hs} et L_{hh} sont les suivantes :

$$L_{hs}^{vw} = \frac{\delta^{vw}}{bl^w} - \frac{y}{b} \rho_h^{(v)} A_{hs}^{(v)w} \quad [IV.32]$$

$$L_{hh}^{vw} = -\frac{y}{b} \rho_h^{(v)} A_{hh}^{(v)w} \quad [IV.33]$$

où l^w est le libre parcours moyen des dislocations du système w , y est la distance d'interaction des dislocations et $A_{hs}^{(v)w}$ et $A_{hh}^{(v)w}$ sont des fonctions donnant l'influence des glissements suivant le système w sur l'annihilation des dislocations stockées suivant le système v . Ces relations sont basées en partie sur l'étude de la configuration simplifiée de la figure II.5. Il faut pour la compléter introduire l'effet de la fraction volumique de cellule f sur le terme d'écroissage non local.

$$L_{hs}^{vw} = \left(\frac{\delta^{vw}}{bl^w} - \frac{y}{b} \rho_h^{(v)} A_{hs}^{(v)w} \right) \frac{f}{1-f} \quad [IV.34]$$

Dans l'équation IV.34, on retrouve le terme classique d'accumulation des dislocations fonction du libre parcours moyen. En plus de ce terme, Muller et Lemoine ajoutent un terme d'annihilation représentant le réarrangement et l'annihilation dans les murs provoqués par le flux de dislocations arrivant des cellules. Ce dernier aspect est surtout présent au cours des chargements complexes de type Bauschinger ou pseudo Bauschinger quand la polarité des dislocations stockées et celle des dislocations traversant les cellules sont opposées.

Dans la relation IV.33, on exprime que le glissement dans les murs est essentiellement associé à de l'annihilation. La matrice A_{hh}^{vw} pondère les effets d'annihilation en fonction des directions relatives des plans et des directions de glissement.

En supposant à nouveau que l'annihilation se produit en majeure partie dans les murs de dislocations et qu'elle est associée au glissement dans les murs, le second terme de IV.32 est négligé. On ne garde que le terme d'accumulation relié au libre parcours moyen des dislocations.

L'absence de résultats expérimentaux ou théoriques sur le calcul des termes de $A_{hh}^{(v)w}$ nous amène à prendre une matrice d'annihilation avec tous ces termes constants et égaux à 1.

$$A_{hh}^{(v),w} = 1 \quad \forall (v, w) \quad [IV.35]$$

En considérant IV.32, IV.33 et IV.34, le taux de densité de dislocations dans les murs devient :

$$\dot{\rho}_h^v = \frac{1}{bl^v} \frac{f}{1-f} \dot{\gamma}^v - \frac{y}{b} \rho_h^v \sum_w \dot{\gamma}^w \quad [IV.36]$$

- loi d'écroissage du grain biphasé

En introduisant IV.31, IV.33, IV.34 dans IV.25 et IV.26 et en tenant compte de IV.35, on obtient les lois d'écroissage suivantes :

$$\dot{\tau}_{cs}^u = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 b^2}{\tau_{cs}^u - \tau_c^o} L_1 a^{uv} \dot{\gamma}_s^v \quad [IV.37]$$

$$\dot{\tau}_{ch}^u = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 b}{\tau_{ch}^{(u)} - \tau_c^o} \frac{1}{l^v} \frac{f}{1-f} a^{(u)v} \dot{\gamma}_s^v - \frac{1}{2} \frac{\mu^2 b}{\tau_{ch}^{(u)} - \tau_c^o} a^{(u)v} y \rho_h^v \sum_w \dot{\gamma}_h^w \quad [IV.38]$$

Les expressions IV.36 et IV.37 étant issues de l'étude d'une configuration simplifiée, les termes suivants :

$$L_{ss} = \mu^2 b^2 L_1 \quad [IV.39]$$

$$L_{hs} = \frac{\mu^2 b}{l^v} \quad [IV.40]$$

$$L_{hh} = y \mu^2 b \quad [IV.41]$$

deviennent des paramètres du matériau dont les relations IV.39, IV.40 et IV.41 donnent un ordre de grandeur.

En introduisant ces nouveaux paramètres, les relations d'érouissage deviennent :

$$\dot{\tau}_{cs}^u = \frac{1}{2} \frac{L_{ss}}{\tau_{cs}^u - \tau_c^o} a^{(u)v} \dot{\gamma}_s^v \quad [IV.42]$$

$$\dot{\tau}_{ch}^u = \frac{1}{2} \frac{L_{hs}}{\tau_{ch}^{(u)} - \tau_c^o} \frac{f}{1-f} a^{(u)v} \dot{\gamma}_s^v - \frac{1}{2} \frac{L_{hh}}{\tau_{ch}^{(u)} - \tau_c^o} a^{(u)v} \rho_h^v \sum_w \dot{\gamma}_h^w \quad [IV.43]$$

L'équation IV.42 impose de suivre l'évolution des densités de dislocations des parois suivant chaque système. L'impossibilité d'inverser la matrice $a^{(u)v}$ ne permet pas à partir des cissions critiques de remonter aux densités de dislocations.

Les hypothèses qui ont permis d'établir les lois d'érouissage au chapitre II et dans celui-ci sont identiques. Elles sont basées sur les mécanismes de stockage et d'annihilation des dislocations présentes au sein de la microstructure. Ces hypothèses sont :

- la majeure partie des dislocations est concentrée dans les parois
- l'accumulation des dislocations est un mécanisme d'interaction entre les cellules et les parois. Les dislocations traversent les cellules et s'accumulent dans les murs.
- L'annihilation est essentiellement due au glissement plastique dans les parois provoquant un réarrangement important des dislocations.

Le fait d'avoir introduit la plasticité cristalline permet de prendre en compte l'anisotropie intrinsèque à la polarité des dislocations.

Le déplacement des dislocations étant connu pour chaque système de glissement au travers du tenseur de Schmid, il serait aussi possible d'introduire l'anisotropie du libre parcours moyen

des dislocations induites par la forme des cellules de dislocations. Ce problème n'est pas abordé dans ce travail.

b. Forces critiques opposées à l'évolution de la morphologie

Les critères d'évolution de la morphologie et de l'orientation des cellules sont établis de la même façon qu'au chapitre II.

L'ensemble des variables internes morphologiques est scindé en deux parties :

- les trois demi-axes
- les trois angles d'Euler

Pour le calcul des forces critiques associées à chacun des groupes, on considère un seuil de résistance locale à la propagation de la surface.

En reprenant le développement du chapitre II, on obtient pour chaque grain deux critères dont on rappelle ici l'expression :

$$\sqrt{G_{\mu}^{*i} A_G^{ij} G_{\mu}^{*j}} = \tau_c^{\alpha\mu} \quad [IV.44]$$

où A_G^{ij} est un tenseur ne dépendant que de la géométrie des cellules. Son expression est donnée par II.151. Le vecteur G_{μ}^{*} est constitué des forces motrices associées aux rotations des cellules autour de leurs axes propres. Par les relations II.153 et II.154, il est possible de l'exprimer en fonction des forces motrices associées aux angles d'Euler.

Pour l'évolution des demi-axes, le critère s'exprime de la façon suivante :

$$\sqrt{T_{\mu}^i A_T^{*ij} T_{\mu}^j} = \tau_c^{a\mu} \quad [IV.45]$$

l'expression de A_T^{*} étant donnée, les équations II.155 et II.156.

La direction d'évolution de la morphologie est donnée par la loi de normalité en prenant comme fonction potentielle le critère lui-même. L'amplitude de l'évolution s'obtient par application de la règle de consistance.

c. Conclusions

Ayant décrit la plasticité par l'intermédiaire des systèmes de glissement, les critères d'écoulement ne portent plus sur la contrainte interne mais sur chaque cission résolue prise indépendamment. La cission critique suivant un système est reliée aux densités de dislocations sur chacun des systèmes au travers d'une matrice d'interaction. Vis à vis de cette variable intermédiaire le comportement du matériau est homogène. Les lois d'écrouissage sont obtenues en interprétant en terme de glissement et de dislocations les phénomènes d'écrouissage non local et d'annihilation liée à l'auto écrouissage des murs.

L'expression du critère d'évolution de la microstructure et des forces critiques associées aux variables internes morphologiques est considérée identique pour chaque grain à celle utilisée au chapitre II.

IV.2.3 Equations constitutives

La représentation du VER par un matériau polycristallin, avec pour chaque grain une représentation biphasée avec structure évolutive et écrouissage non local, permet de prendre en compte les contraintes internes d'ordre II et III. La première transition d'échelle (de la structure de dislocations vers le grain) fait intervenir les effets des contraintes intragranulaires et des mécanismes d'accumulation et d'annihilation des dislocations. L'aspect évolutif des cellules permet aussi de bâtir un critère d'évolution de la microstructure. On accède ainsi à l'orientation des cellules et, comme pour le modèle du chapitre II, on espère atteindre l'instabilité du matériau vis à vis de sa microstructure de dislocations. La deuxième transition d'échelle fait apparaître les effets des contraintes d'ordre II. Elle permet aussi d'introduire des textures initiales. On espère aussi pouvoir répartir la localisation du matériau sur plusieurs grains et obtenir un adoucissement en trajet dur, non pas brutal et généralisé comme dans le premier modèle, mais progressif et issu de la localisation d'un nombre restreint de grain ayant des orientations particulières.

La fin de cette partie est consacrée à l'écriture des équations constitutives du modèle :

a. Variables internes pour un grain

Pour chaque grain, en considérant une seule famille de systèmes de glissement $\{110\}\langle 111 \rangle$ et en considérant le nombre de cellules par unité de volume constant au cours du chargement, 26 variables internes ont été introduites :

$\bar{\gamma}_s^u$: le glissement moyen sur la phase molle suivant le système u.

$\bar{\gamma}_h^u$: le glissement moyen sur les murs suivant le système u.

$\Omega_\mu^i = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \phi \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$: vecteur contenant les trois angles d'Euler donnant l'orientation des cellules dans

le repère global de chargement (et non le repère cristallographique).

$R_\mu^i = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$: vecteur contenant la valeur des trois demi-axes des cellules.

Les forces thermodynamiques associées à ces variables internes sont respectivement :

τ_s^u : la cission résolue dans les cellules suivant le système u.

τ_h^u : la cission résolue dans les murs suivant le système u.

G_μ : un vecteur contenant les forces motrices suivant les angles d'Euler.

T_μ : un vecteur contenant les forces motrices suivant les demi-axes.

b. Critères et lois d'évolution des variables internes

Les critères d'évolution des variables internes sont :

Pour les glissements dans les deux phases, le critère consiste à comparer la cission résolue à la cission critique τ_c^u .

Pour les angles et les demi-axes, la surface de charge est approchée par des ellipsoïdes, ce qui permet d'écrire IV.45 et IV.46.

La direction d'évolution de la microstructure de dislocation est donnée par la loi de normalité en prenant comme fonction potentielle le critère lui-même alors que l'amplitude des évolutions est donnée par la règle de consistance.

Les critères d'évolution des variables internes \dot{x}_j fonctionnent de la façon suivante :

$$\dot{x}_j = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F^i < F_c^i \\ \forall \dot{x}_j \end{cases} \quad (\text{a})$$

$$\dot{x}_j = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F^i = F_c^i \\ \dot{F}^i < \dot{F}_c^i \end{cases} \quad (\text{b}) \quad [\text{IV.46}]$$

$$\dot{x}_j \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F^i = F_c^i \\ \dot{F}^i = \dot{F}_c^i \end{cases} \quad (\text{c})$$

c. Module tangent élastoplastique

L'amplitude de l'évolution des variables internes est donnée par la règle de consistance qui dans notre cas s'exprime de la façon suivante :

$$\dot{x}_j = \left(\frac{\partial F_c^i}{\partial x_j} - \frac{\partial F^i}{\partial x_j} \right)^{-1} \frac{\partial F^i}{\partial E_{kl}} \dot{E}_{kl} = U_{kl}^j \dot{E}_{kl} \quad [\text{IV.47}]$$

où i et j désignent l'ensemble des variables internes actives.

Le taux de déformation plastique total du grain est fonction du taux d'évolution des variables internes :

$$\dot{E}_{kl}^p = f R_{kl}^u \dot{\gamma}_s^u + (1-f) R_{kl}^u \dot{\gamma}_h^u + R_{kl}^u (\dot{\gamma}_s^u - \dot{\gamma}_h^u) \dot{f} = B_{kl}^u \dot{x}_u \quad [\text{IV.48}]$$

Le taux de contrainte du grain est donné par :

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{E}_{kl} - \dot{E}_{kl}^p \right) \quad [\text{IV.49}]$$

En introduisant les relations IV.47 et IV.48 dans IV.49, on peut calculer le module tangent du grain.

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(I_{klmn} - B_{kl}^u U_{mn}^u \right) \dot{E}_{mn} \quad [\text{IV.50}]$$

Ce module est utilisé pour le calcul du tenseur de localisation permettant de passer du taux de déformation macroscopique au taux de déformation totale du grain.

IV.3 Résultats numériques

Cette partie est consacrée aux résultats numériques de la simulation du comportement du matériau polycristallin à grains biphasés évolutifs.

IV.3.1 Modèle simplifié

a. Hypothèses simplificatrices

Les résultats exposés dans ce chapitre sont obtenus pour une configuration simplifiée de la microstructure de dislocations et de la structure polycristalline.

- Dans l'objectif d'introduire les difficultés progressivement, le nombre de variables internes morphologiques est réduit à l'unité : Les cellules sont supposées sphériques et seule leur fraction volumique f est variable.

La force thermodynamique associée à la fraction volumique est la suivante :

$$F^f = R_{ij}^u (\gamma_s^u - \gamma_h^u) C_{ijkl} (E_{kl} - f R_{kl}^v \gamma_s^v - (1-f) R_{kl}^v \gamma_h^v) - \frac{1}{2} (1-2f) (\gamma_s^u - \gamma_h^u) R_{ij}^u C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) R_{mn}^v (\gamma_s^v - \gamma_h^v) \quad [IV.51]$$

La force critique associée à l'évolution de la fraction volumique se calcule à partir de la relation II.119 appliquée au cas des cellules de dislocations:

$$D_\mu = \int_{\Delta} \tau_c^\mu |w_\alpha n_\alpha| dS = \tau_c^\mu \dot{f} \quad [IV.52]$$

On obtient donc :

$$F_c^f = \tau_c^\mu \quad [IV.53]$$

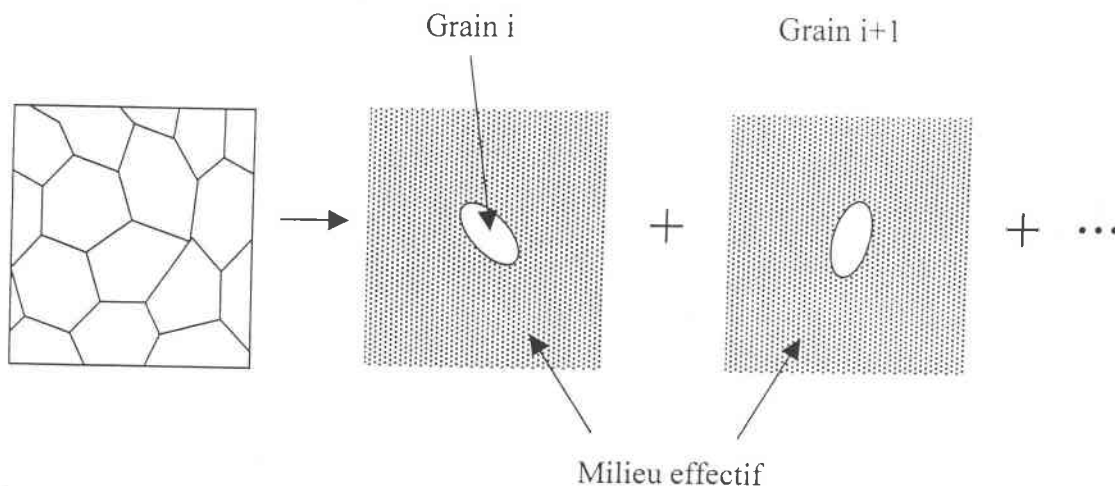
- La déformation plastique n'est décrite que par une famille de systèmes de glissement ($\langle 111 \rangle \{110\}$). Cela permet de réduire les temps de calcul sans interférer de façon significative sur les résultats et les principales caractéristiques recherchées. Dans un développement futur du modèle, il sera bien évidemment nécessaire d'introduire la deuxième famille $\langle 111 \rangle \{112\}$.

- Les grains sont supposés sphériques dans l'état initial.

b. Méthode de transition d'échelle autocohérente et tenseur de localisation

La transition du grain vers le polycristal est réalisée par la méthode de transition d'échelle autocohérente.

La réponse de chaque grain est calculée en le considérant comme une inclusion noyée dans le milieu effectif correspondant au polycristal (figure IV.2).



Dans la méthode utilisée, le module effectif au pas n est le module élastoplastique du polycristal calculé au pas $n-1$. Cette simplification par rapport au schéma autocohérent classique est envisageable dans la mesure où

- au début du chargement le comportement du matériau est élastique homogène (module effectif = tenseur des modules élastiques).
- les pas sont suffisamment faibles pour que le module élastoplastique n'évolue pas beaucoup d'un pas à l'autre.

Le tenseur de localisation reliant la déformation totale macroscopique à la déformation totale du grain i est le suivant :

$$A_{ijkl} = \left(I_{ijkl} - T_{ijmn}^{\text{II}} \Delta l_{mnkl} \right)^{-1}$$

avec

$$\Delta l_{mnkl} = l_{mnkl} - L_{mnkl}^{\text{eff}}$$

l_{mnkl} étant le module élastoplastique du grain considéré et L_{mnkl}^{eff} est le module élastoplastique du polycristal (celui du pas d'avant), et T_{ijmn}^{II} se calcule à partir des tenseurs de Green G_{im} :

$$T_{ijmn}^{\text{II}} = -\frac{1}{2} \int_{V^I} (G_{im,nl} + G_{jm,kn}) dV$$

L'expression du module élastoplastique du grain, explicitée de façon formelle par la relation IV.50, fait intervenir les effets de la microstructure de dislocations (écrouissage cinématique lié aux contraintes d'ordre III, écrouissage isotrope lié en partie à son terme non local, l'évolution de la morphologie...)

IV.3.2 Simulations, chargements monotones et complexes.

a. chargement monotone en traction uniaxiale

On commence par simuler un essai de traction uniaxiale. Pour des raisons liées au temps de calcul, le polycristal est représenté par 100 grains (texture « isotrope »). Les paramètres du matériau choisis pour la simulation sont regroupés dans le tableau suivant.

Chargement	monotone	$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} \end{bmatrix}$
Comportement élastique	isotrope	$\mu = 80000 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$
Cission critique initiale	$\tau_c^0 = 65.0 \text{ MPa}$	
Ecrouissage	$L_{ss} = 900 \text{ MPa}^2$ $L_{hs} = 1.0e + 6 \text{ MPa}^2$ $L_{hh} = 0.05$	
Forme initiale de la cellule	sphère de rayon $1 \mu\text{m}$	
Orientation	-----	
Seuil de résistance morphologique	$\tau_c^\mu = 45 \text{ MPa}$	

Afin de minimiser les problèmes liés à la méthode de transition d'échelle autocohérente, on ajoute à la matrice d'écrouissage un terme H_{ff} correspondant à l'évolution du seuil de propagation τ_c^μ de l'interface en fonction de la fraction volumique f . La loi exacte introduite est la suivante :

$$\dot{\tau}_c^\mu = \frac{L_{ff}}{\tau_c^\mu - \tau_{c0}^\mu} \dot{f}$$

- réponse du polycristal

Sur la figure IV.3, ont été représentées la réponse contrainte – déformation plastique macroscopique du polycristal et la valeur de la contrainte moyenne dans chaque grain après 10% et 20% de déformation.

Sur la figure IV.4, on a tracé l'évolution de la fraction volumique moyenne au cours du chargement ainsi que sa valeur dans chaque grain pour 10% et 20% de déformation.

La localisation de la déformation plastique macroscopique est obtenue par la déstabilisation de la microstructure de dislocations de quelques grains seulement. L'activation de la fraction volumique dans ces grains provoque un adoucissement local qui tend à faire chuter le module élastoplastique du polycristal.

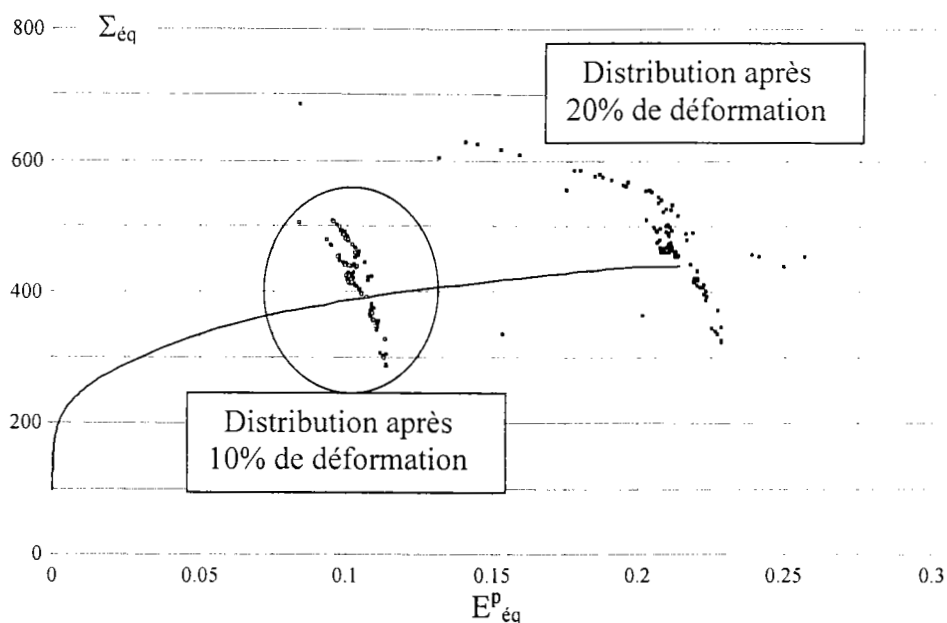


Figure IV.3 : réponse contrainte – déformation macroscopique obtenue pour une traction uniaxiale.

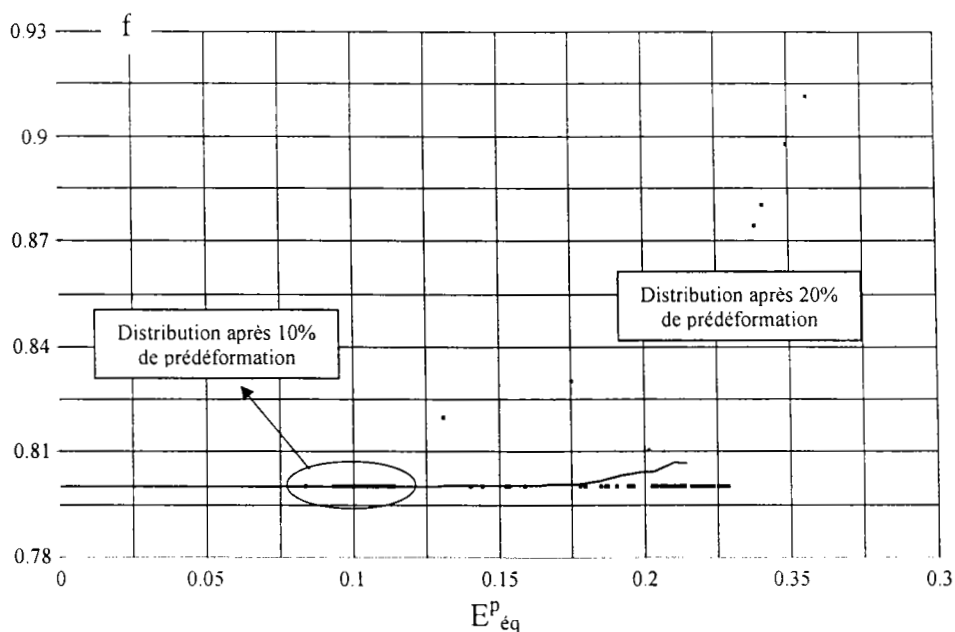


Figure IV.4 : évolution de la fraction volumique moyenne de cellule avec la déformation plastique macroscopique. Valeur de la fraction pour chaque grain pour deux taux de déformation (10% et 20%)

La méthode de transition d'échelle autocohérente ne permet pas de suivre la réponse du polycristal pour des modules élastoplastiques effectifs négatifs. Pour cette raison, la partie des courbes correspondant à un adoucissement macroscopique du matériau ne peuvent pas être obtenues.

Sur la figure IV.5, on représente les contraintes internes moyennes sur le polycristal dans les cellules et dans les murs. On constate que le contraste entre les contraintes internes concordent avec les mesures expérimentales de Mughrabi [M88]. La contrainte dans les murs est supérieure à deux fois la contrainte macroscopique, ce qui correspond à un contraste très supérieur au contraste intergranulaire.

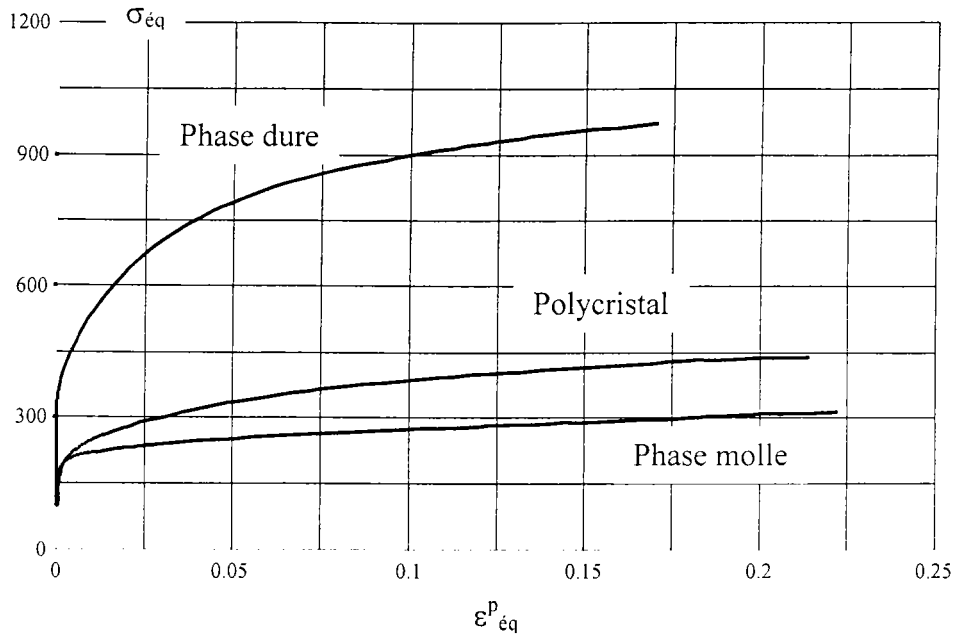


Figure IV.5 : contraintes internes moyennes dans le polycristal

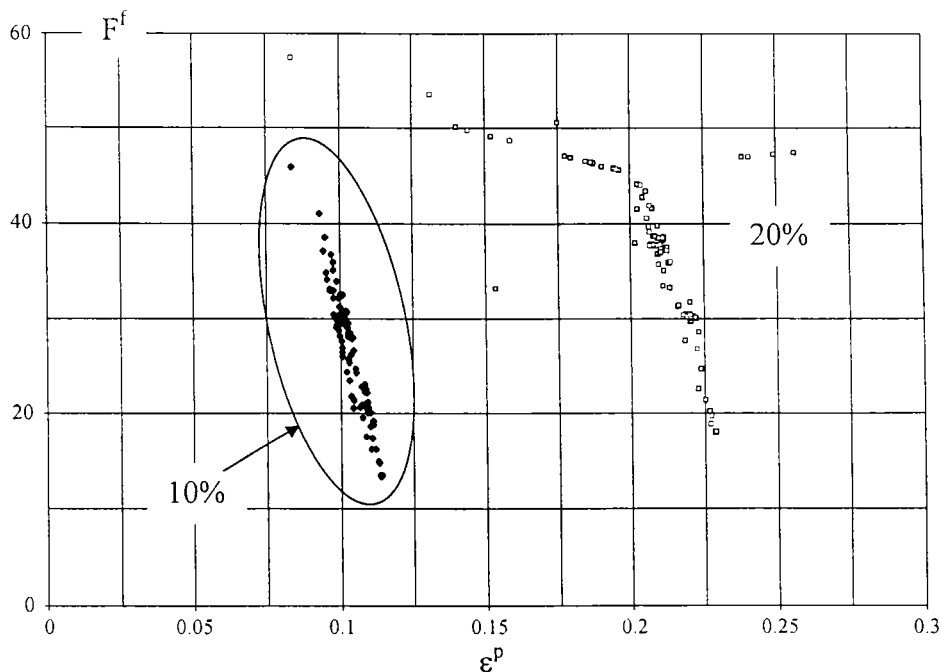


Figure IV.6 : valeur de la force thermodynamique associée à la morphologie dans chaque grain après 10 et 20% de déformation.

La figure IV.6 montre que le contraste concernant la force motrice morphologique de grain à grain croît avec la déformation plastique.

Pour compléter cette étude, il faudrait maintenant refaire la simulation avec un nombre de grains plus conséquent (ex :5000) et voir s'il existe une corrélation entre la déstabilisation de la microstructure et la direction cristallographique des grains concernés.

Pour mieux faire apparaître les effets de la microstructure et les couplages qu'elle entretient éventuellement avec la cristallographie, on doit introduire une forme de cellules ellipsoïdale et libérer son orientation. Ceci semble nécessaire dans la mesure où au chapitre précédent, on a mis l'accent sur les couplages existant entre l'orientation et la forme des cellules d'un côté et l'apparition de la localisation de l'autre.

- comportement d'un grain

Le grain choisi pour cette étude fait partie de ceux dont la fraction volumique s'active au cours du chargement.

La figure IV.7 donne l'évolution de la contrainte moyenne et des contraintes internes en fonction de la déformation plastique moyenne et de celle sur chacune des phases.

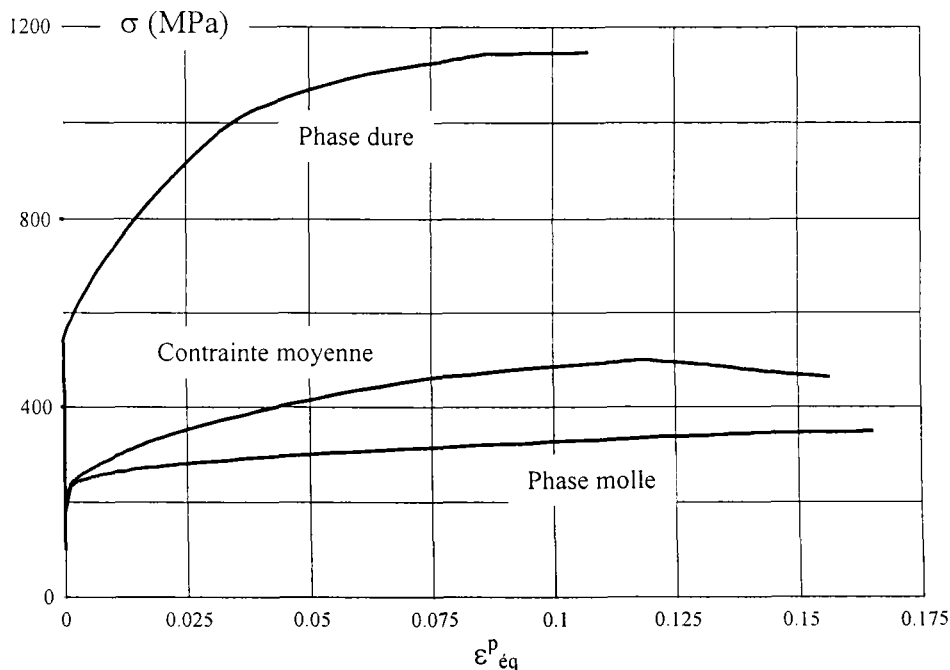


Figure IV.7 : évolution, au cours du chargement, des contraintes internes dans un grain

Les premiers pas des réponses macroscopiques montrent que le processus d'hétérogénéisation du grain sous l'action de l'écroutissage non local s'opère de la même façon que pour le premier modèle (figures III :4a et III.4b).

Aux alentours de 12% de déformation plastique moyenne du grain, commence une phase d'adoucissement. Les contraintes dans chacune des phases ne chutant pas, l'adoucissement provient d'un effet du taux de fraction volumique (troisième terme de l'équation IV.11). On obtient un comportement local très proche de celui obtenu par le modèle du chapitre III. L'aspect plus régulier de l'adoucissement provient de la présence des contraintes internes d'ordre deux et du terme H_{ff} de la matrice d'écroutissage.

De même que pour le polycristal, la contrainte interne dans les murs est supérieure à deux fois la contrainte moyenne du grain.

Les figures IV.7 et IV.8 montrent l'évolution de la fraction volumique et de sa force motrice associée pour le même grain.

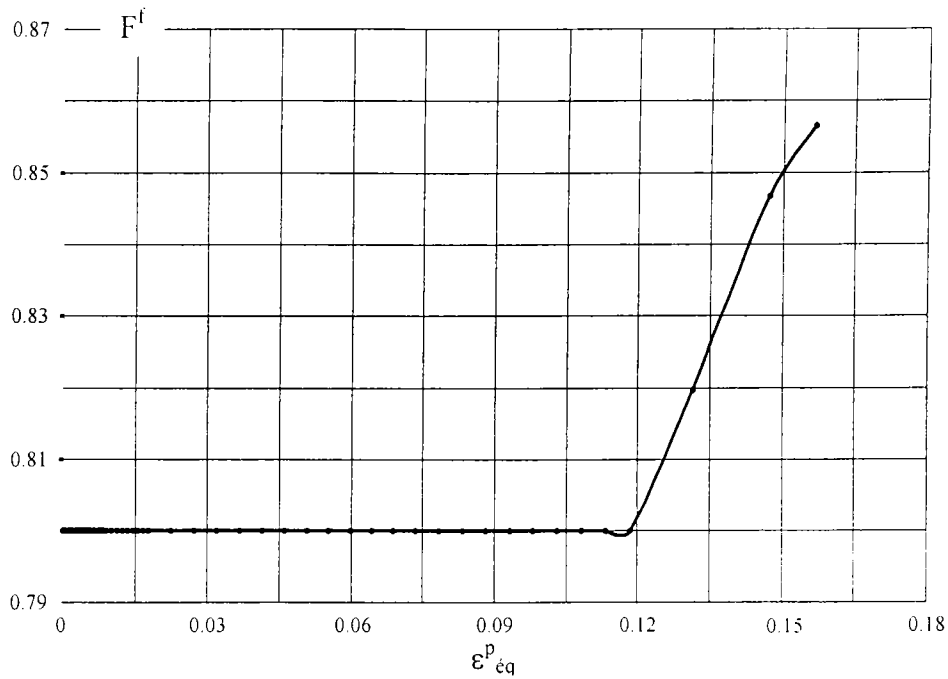


Figure IV.8 : évolution de la fraction volumique dans un grain au cours du chargement.

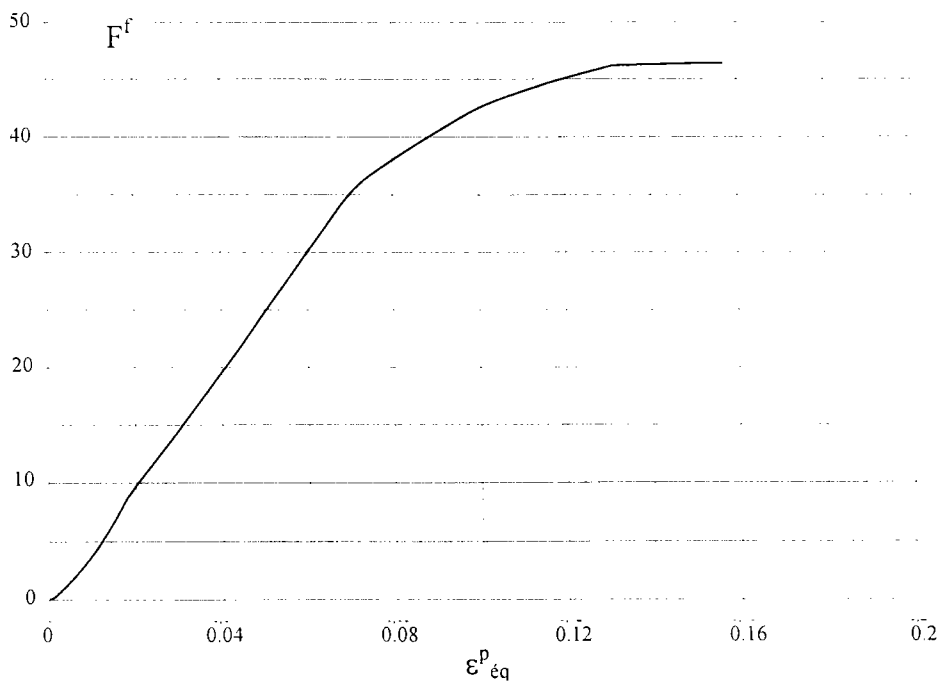


Figure IV.9 : évolution de force motrice associée à la fraction volumique dans un grain au cours du chargement.

Comme pour le premier modèle, on constate que l'adoucissement du grain concorde effectivement avec l'activation de la fraction volumique. Celle-ci débute lorsque sa force motrice atteint le seuil de propagation.

b. Chargements complexes

Dans cette partie, sont étudiés deux chargement complexes :

- un essai de laminage suivi d'une traction uniaxiale dans le sens transverse (type dur)
- un essai de laminage suivi d'une traction uniaxiale dans le sens long (type pseudo continu)

- Chargement complexe de type dur

La figure IV.10 montre la réponse contrainte-déformation obtenue pour un essai de traction uniaxiale après un laminage, la direction de traction étant perpendiculaire à celle du laminage (figure III.27).

Les valeurs du tableau IV.1 sont conservées. Le taux de prédéformation est de 10%.

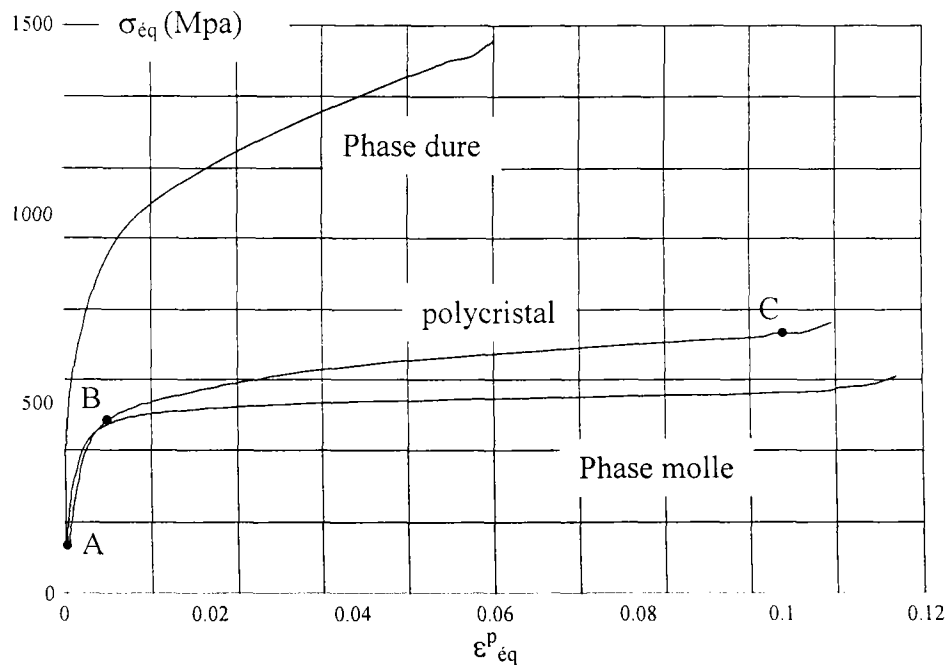


Figure IV.10 : réponse contrainte déformation macroscopique et évolution des contraintes internes moyennes dans les deux phases en fonction des déformations plastiques moyennes.

Comme au chapitre III, on retrouve les trois points caractéristiques des chargements complexes.

- A- seuil de microplasticité : La réponse macroscopique quitte prématurément le domaine élastique pour un régime élastoplastique avec un module fort.
- B- la contrainte à la recharge correspondant en fait à la fin du régime de microplasticité.

C- la localisation de la déformation plastique apparaissant avec la déstabilisation de la microstructure de dislocation de quelques grains du polycristal.

On peut noter dès à présent que la prise en compte des contraintes internes d'ordre deux n'a pas permis d'améliorer l'allure des régimes transitoires pour les trajets durs. Le seuil de microplasticité semble toujours sous-estimé et le pic de contrainte précédent la localisation de la déformation plastique macroscopique n'apparaît pas.

L'adoucissement macroscopique du polycristal est provoqué par la déstabilisation de la microstructure de dislocations dans quelques grains.

Les figures IV.12 et IV.13 montrent l'évolution des contraintes internes et moyennes dans un grain ainsi que l'évolution de la fraction volumique.

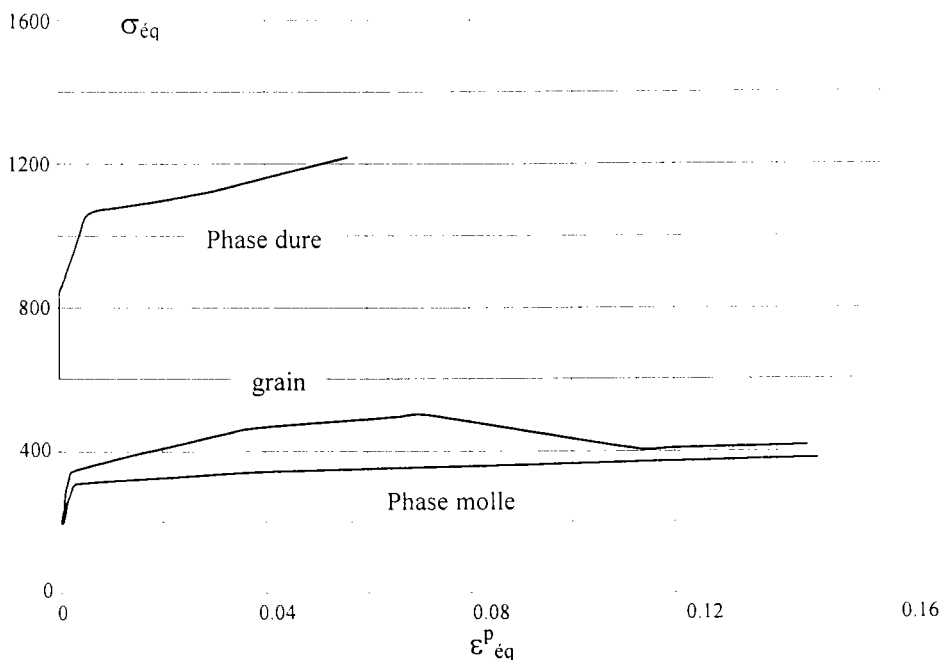


Figure IV.12 : évolution des contraintes internes et de la contrainte moyenne dans un grain subissant un adoucissement.

Là encore, l'adoucissement est lié à l'activation de la fraction volumique. Au cours de celle-ci, le taux moyen de déformation plastique du grain est dû à l'effet direct de l'évolution de la morphologie (équation IV.11).

Dans le cas illustré ici, le grain subit une transformation complète. La partie de la courbe contrainte déformation plastique macroscopique située après la période d'adoucissement correspond quasiment au comportement de la phase molle seule.

Bien que le terme H_{ff} de la matrice d'écrouissage soit identique, la croissance de la fraction volumique du grain est beaucoup plus rapide ici que dans le cas du chargement continu.

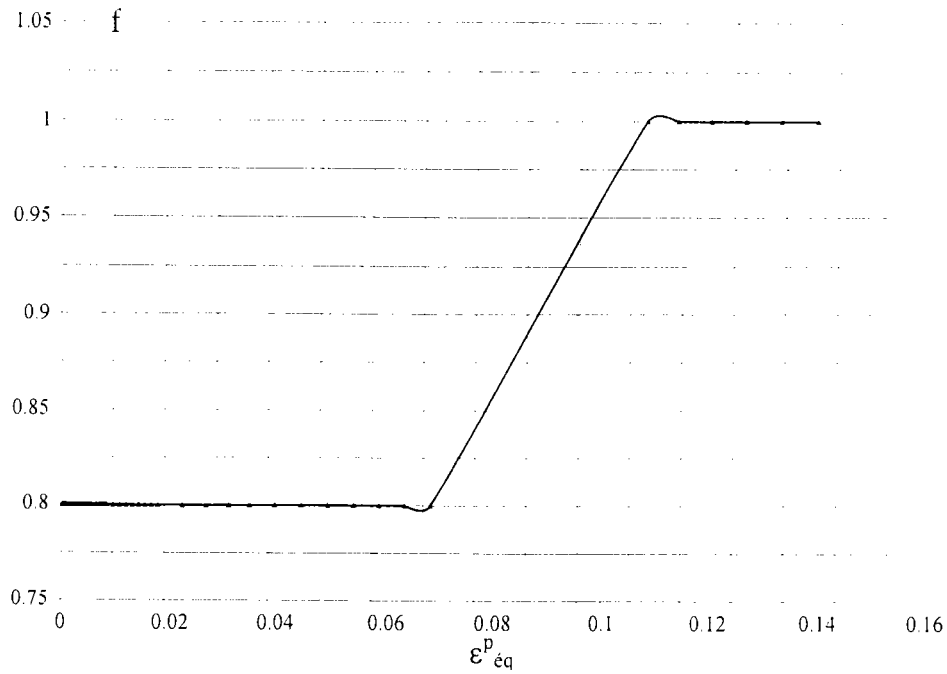


Figure IV.13 : évolution de la fraction volumique pour un grain.

- chargement complexe pseudo continu

Avec le même jeu de paramètres, la figure IV.11 donne les réponses contrainte – déformation moyennes pour chacune des phases et pour le polycristal.

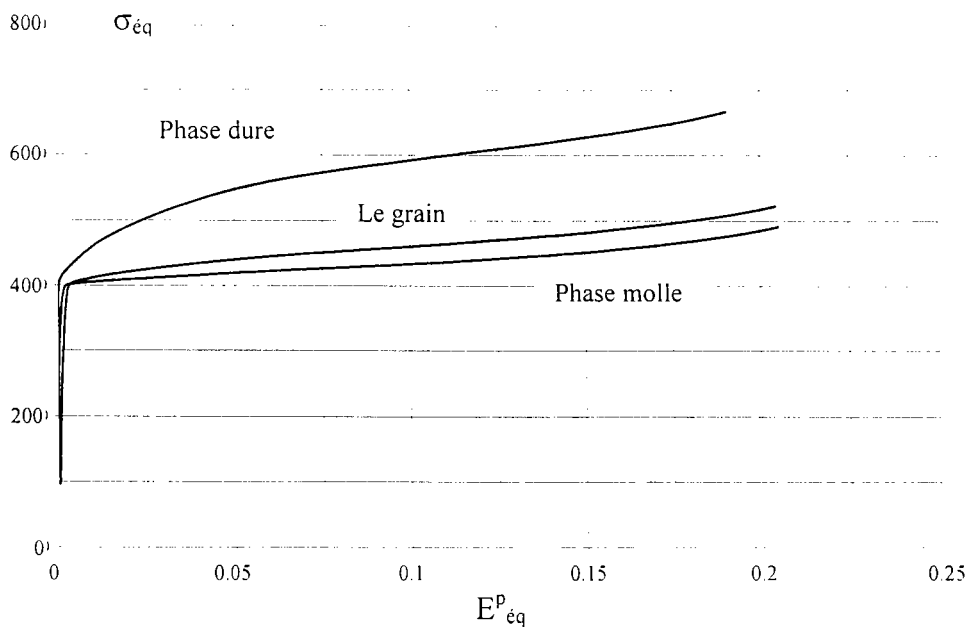


Figure IV.13 : réponse contraintes-déformations pour un essai de traction uniaxiale dans le sens long après 10% de laminage.

Malgré un niveau de contrainte plus élevé que pour le trajet dur, on n'observe pas de localisation de la déformation plastique. La figure IV.14 montre que pour aucun grain, la force motrice morphologique n'atteint son seuil. Sur la figure IV.4, on voit l'évolution des forces motrices associées à la fraction volumique de chaque grain à différentes déformations plastiques macroscopiques et pour les deux chargements (dur et pseudo-continu).

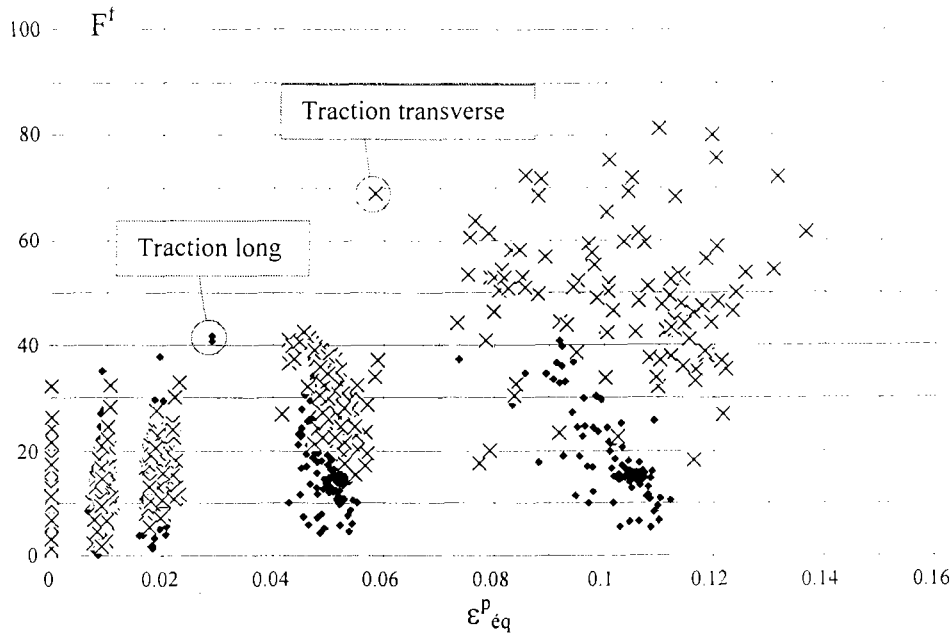


Figure IV.14 : force motrice suivant la fraction volumique pour chaque grain et pour les deux directions de traction à 0%, 1%, 2%, 5% et 10% de déformation

On note que les forces motrices pour le trajet dur augmentent beaucoup plus vite, cette différence étant surtout sensible à partir de 5% de déformation.

c. Conclusion

Nous avons simulé les deux chargements complexes suivants :

- Laminage suivi d'un essai de traction uniaxiale dans le sens transverse correspondant à un chargement de type dur.
- Laminage suivi d'un essai de traction dans le sens long correspondant à un chargement de type pseudo continu.

Qualitativement, on obtient de bons résultats concernant l'apparition de la localisation de la déformation plastique. Celle-ci est provoquée par l'adoucissement de quelques grains dû à l'activation de la fraction volumique de cellule.

L'activation de la fraction volumique dans quelques grains (que l'on peut mettre en parallèle avec l'apparition de microbandes de cisaillement) fait chuter le module élastoplastique macroscopique permettant ainsi d'atteindre les conditions du critère de Considère concernant la localisation de la déformation plastique en traction.

L'allure des régimes transitoires en trajet dur ne sont pas du tout reproduits par le modèle. En effet le seuil de microplasticité est trop faible et le pic de contrainte observé expérimentalement au début du second chargement n'apparaît pas.

La localisation de la déformation plastique est obtenue par l'évolution de la fraction volumique de cellules dans plusieurs grains. Or, le jeu de variables internes morphologiques utilisé est trop pauvre pour décrire correctement ce qui se passe après la déstabilisation de la microstructure. En toute rigueur, il ne devrait pas être possible de suivre, par ce modèle, la réponse du matériau au-delà de la première fraction volumique activée.

Néanmoins, les deux aspects communs entre la déstabilisation obtenue par le modèle et celle observée expérimentalement correspondant à la formation de microbandes, nous amènent à étendre tout de même la simulation jusqu'à la localisation de la déformation plastique macroscopique. Ces deux aspects sont ceux énumérés au début de ce chapitre, c'est-à-dire :

- la quasi-totalité de la déformation plastique est due à l'évolution de la fraction volumique
- la force thermodynamique associée à cette déstabilisation prend sa valeur la plus importante pour les trajets durs.

On peut prétexter aussi le fait que cette localisation est obtenue par déstabilisation d'un faible nombre de grains.

IV.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, on a mis en place un modèle du comportement élastoplastique des métaux polycristallins, en considérant des grains biphasés à microstructure de dislocations évolutives et écrouissage non local. A partir du modèle développé au chapitre II, on a réintroduit la structure polycristalline du matériau. Cela permet de prendre en compte les effets des contraintes internes d'ordre II et de décrire la plasticité par l'intermédiaire des systèmes de glissement cristallographique.

Les résultats obtenus en chargements monotones et complexes montrent que la localisation de la déformation plastique macroscopique du matériau peut être obtenue à partir de la déstabilisation de la microstructure de dislocations de quelques grains seulement.

Qualitativement, on obtient de bonnes tendances concernant la valeur des déformations pour lesquelles apparaissent les localisations. En effet il apparaît une localisation plus précoce en chargement de type dur qu'en chargement de type continu.

La faiblesse du modèle réside dans la mauvaise représentation des régimes transitoires, notamment en trajet dur. Le seuil de microplasticité, lié au niveau de contraintes résiduelles et à la direction du second chargement, est souvent sous-estimé. Le pic de contrainte au début du second chargement n'est pas du tout reproduit.

Dans la suite de ce travail, il s'avère nécessaire d'introduire des cellules de formes ellipsoïdales et de prendre l'orientation de la microstructure de dislocations comme variable interne morphologique supplémentaire (cf chapitre II). Pour mieux représenter ce qui se passe au début des seconds trajets de chargement, il est intéressant de prendre en compte l'anisotropie du libre parcours moyen des dislocations.

Dans un deuxième temps, on doit améliorer la méthode de transition d'échelle du grain vers le polycristal. L'aspect non régulier des lois de comportement des grains :

- adoucissement brutal.
- contrainte et écrouissage non local des murs lorsque que la fraction volumique s'approche de 1.
- etc. ...

peut générer de nombreuses difficultés numériques. De plus, le fait que l'on ne puisse pas suivre la réponse macroscopique du matériau au-delà de l'initiation de l'adoucissement, ne permet pas de simuler certains chargements complexes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- F83 FRANCIOSI, P., « Glide mechanisms in b.c.c. crystals : an investigation of the case α -iron through multislip and latent hardening tests », 1983, Acta Metall., Vol.31, N°9, pp.(1331-1342)
- F84 FRANCIOSI, P., « Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement : modélisation pour un chargement complexe quasi statique », 1984, Thèse de l'Université de Paris-Nord.
- L95 LEMOINE, X., « Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers », 1995, thèse de l'Université de Metz.
- M88 MUGHRABI, H., « Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals », 1983, Revue Phys. Appl., Vol.23, N°9, pp.367-379
- M94 MULLER, D., « Influence de l'écroutissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins ». 1994, thèse de l'Université de Metz.
- R93 RAUCH, H.F., « Etude de l'écroutissage des matériaux, aspects microstructuraux et lois de comportement », 1993, Thèse d'habilitation de l'INPG.
- SAB85 SCHMITT, J.H., AERNOUDT, E., BAUDELET, B., « Yield loci for polycrystalline metals without texture », 1985, Mat. Sci. Eng., Vol. A147, pp.(759-772)
- T92 THUILLIER, S., « Rhéologie et microstructure associée à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux », 1992, Thèse de l'INPG (Grenoble).

CONCLUSION

de la microstructure de dislocations dans une petite partie des grains. L'adoucissement dans un grain est obtenu par activation de la fraction volumique. Malgré l'introduction de la structure cristalline du matériau, l'allure des principaux régimes transitoires obtenue numériquement reste assez éloignée de celle observée expérimentalement. Ce défaut vient en partie de ce que la géométrie et l'évolution des cellules ne sont décrits qu'à partir d'une seule variable interne : la fraction volumique de cellule.

Par la suite, il sera donc nécessaire d'introduire dans le modèle polycristallin des variables internes morphologiques d'orientation de la microstructure.

A plus long terme, la simulation des processus de mise en forme va nous obliger à étendre le modèle aux grandes déformations. L'importance des termes additionnels apportés par la formulation en grandes déformations semble primordiale.

ANNEXES

ANNEXE A1

Etude de l'influence de l'auto-écrouissage des cellules sur les réponses macroscopiques et microscopiques du matériau.

Les figures B1 donnent les résultats obtenus par le modèle pour deux valeurs de L_1 :

L_1	50 (MPa)^2	0 (MPa)^2
	Courbes (1)	Courbes (2)

La valeur des autres paramètres étant celles du tableau III.1.

L_1 est un paramètre permettant de régler l'auto-écrouissage de l'intérieur des cellules. Celui-ci est relié par la relation de Taylor au taux de densité de dislocations $\dot{\rho}^S$ des cellules.

Lorsque ce terme est nul, on néglige les quelques dislocations qui restent à l'intérieur des cellules. La densité de dislocations de la phase molle reste constante pendant tout le chargement, ce qui explique que la contrainte interne dans les cellules reste constante.

Pour les deux valeurs de L_1 , le contrainte dans la phase dure ne change pratiquement pas.

En conséquence, la contrainte macroscopique est plus faible pour L_1 nul.

L'écrouissage de la phase molle étant plus faible, sa déformation plastique ainsi que le saut de déformation plastique est plus important. La force motrice équivalente suivant les demi-axes croît quant L_1 diminue.

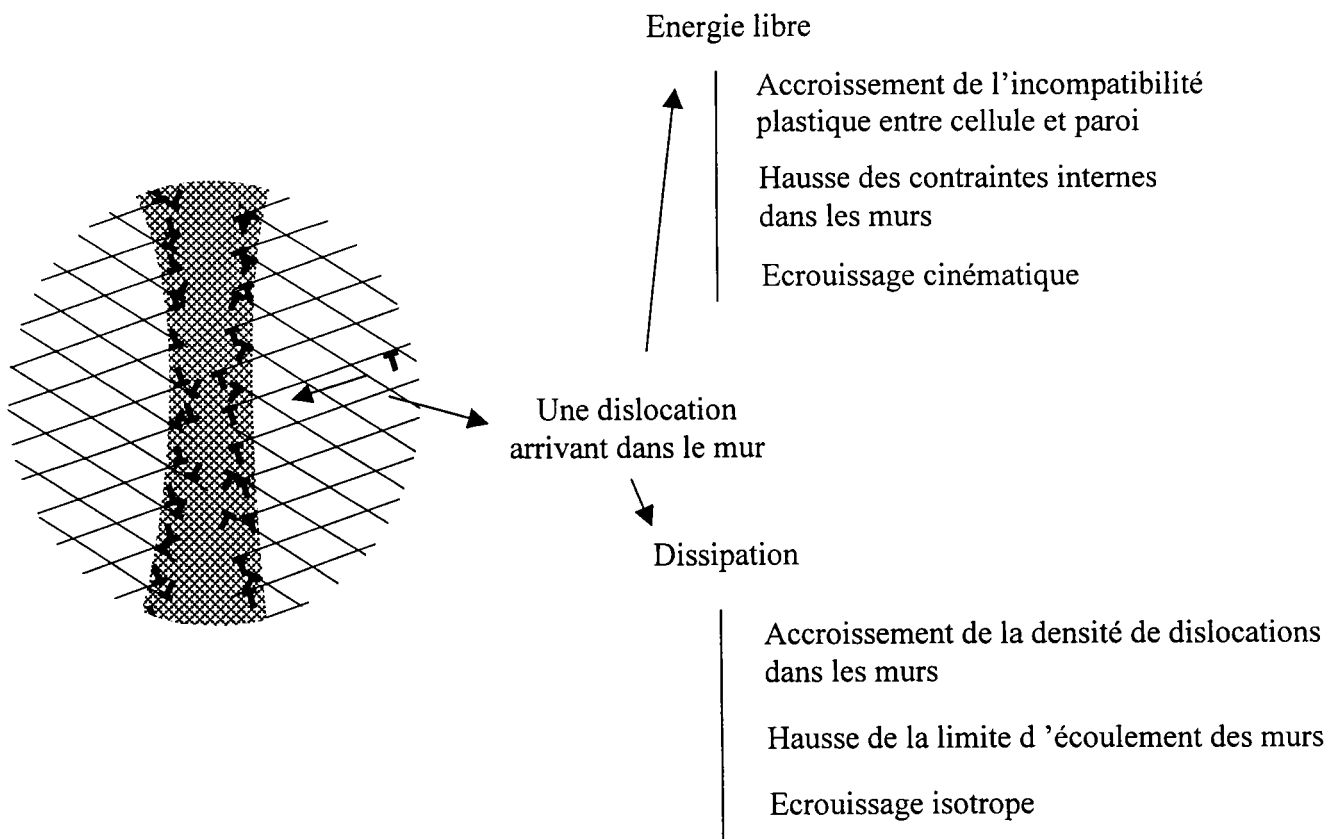


Figure B1f : Effets provoqués par une dislocation arrivant dans les parois.

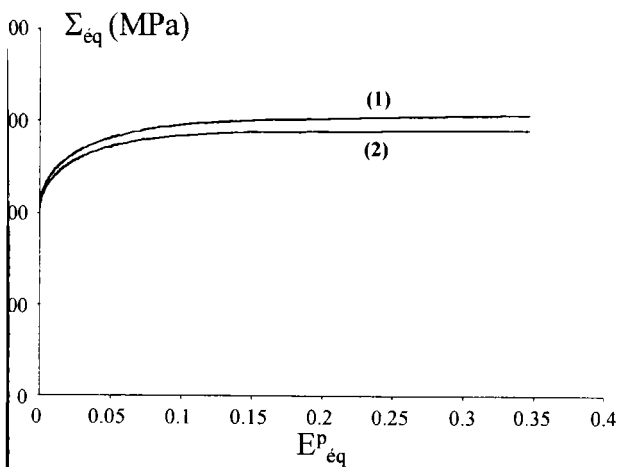


Figure B1a:
contrainte-déformation macroscopiques

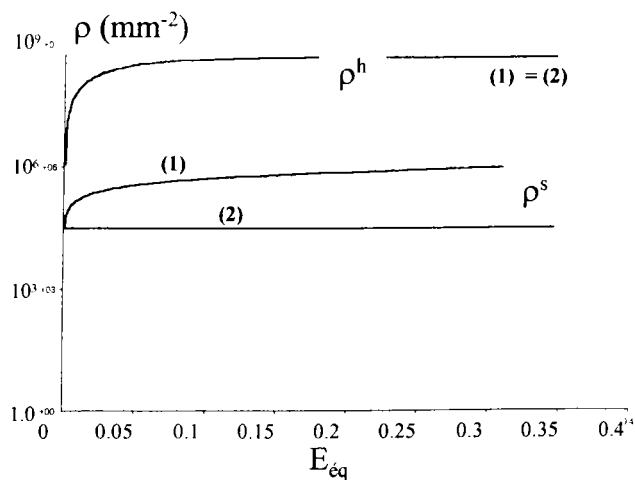


Figure B1b:
densités de dislocations

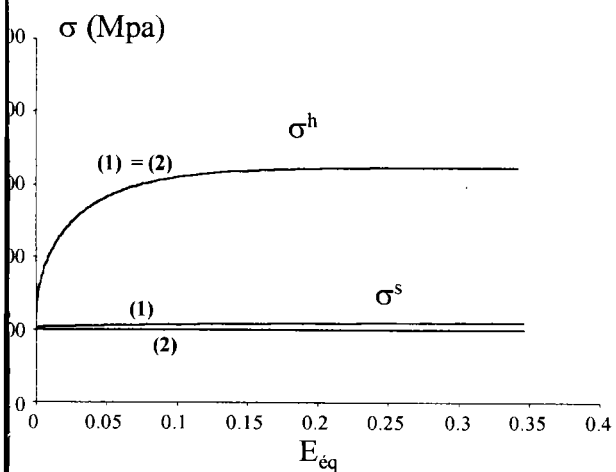


Figure B1c:
contrainte interne-déformation plastique

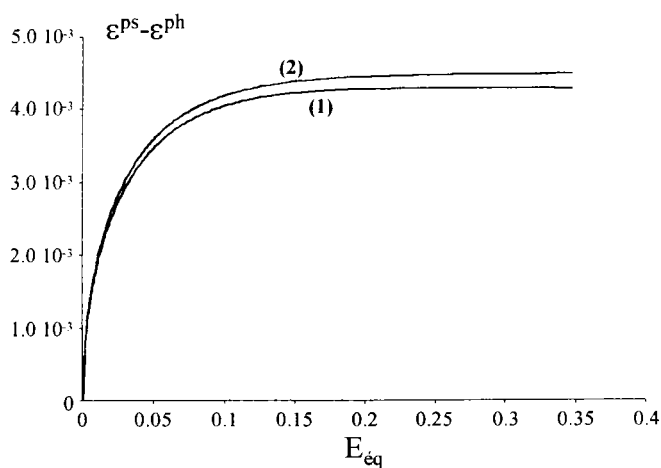


Figure B1d:
saut de déformation plastique

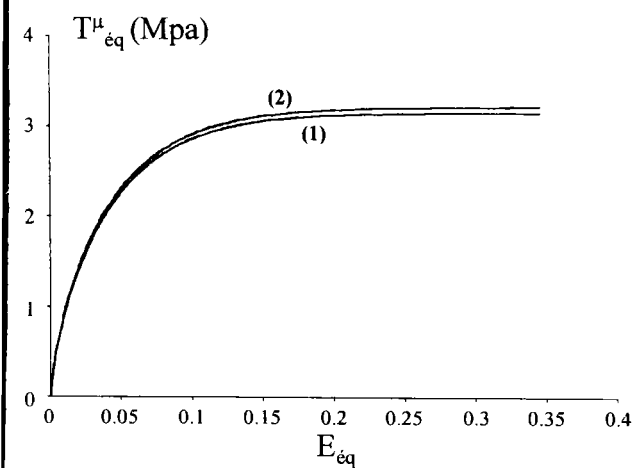


Figure B1e:
force motrice morphologique équivalente

La courbe Contrainte-déformation macroscopique possède une asymptote horizontale. Cette saturation est obtenue par compensation des effets de l'écroutissage non local (accumulation) et de l'auto-écroutissage des murs (annihilation).

La figure B1f montre qu'une dislocation ayant produit du glissement dans les cellules à deux effets :

- Augmentation de la densité de dislocations provoquant un durcissement des parois.
- Accroissement de l'incompatibilité plastique entre les murs et les cellules accentuant les contraintes internes.

Dans le cas où la contrainte macroscopique sature, le taux de contrainte qui en résulte est inadmissible pour les murs. Il en résulte instantanément du glissement dans les murs. A ce glissement est associé une relaxation des contraintes (diminution de l'incompatibilité plastique) et une chute de la densité de dislocations sous l'effet de l'autoécroutissage. La saturation de la contrainte macroscopique est obtenue quand le taux de densité de dislocations dans les murs résultant des différents effets est nul.

ANNEXE A2

Etude de l'effet d'un coefficient d'accommodation dans le calcul du terme d'énergie libre lié aux interactions cellule-paroi

a. Energie libre et forces motrices

A partir de la relation II.72, on introduit un coefficient d'accommodation pour réduire les effets dus aux interactions cellule-paroi. Ce coefficient permet de corriger en partie la surestimation des contraintes internes issues du calcul d'Eshelby Kröner qui suppose un champ de déformation plastique uniforme dans l'inclusion.

La nouvelle expression de l'énergie libre est la suivante :

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{2} \left(E_{ij} - f \bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph} \right) + \\ \frac{1}{2} f (1-f) \left(\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) \end{aligned} \quad [B2.1]$$

A partir de cette relation, on obtient l'expression des forces motrices associées aux variables internes suivantes :

- Contraintes internes

$$\sigma_{ij}^s = \Sigma_{ij} - \alpha (1-f) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) \quad [B2.2]$$

$$\sigma_{ij}^h = \Sigma_{ij} + \alpha f C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) \quad [B2.3]$$

- Forces thermodynamiques associées à l'orientation des cellules

$$F_{\varphi_1} = 2\alpha f (1-f) \text{sym} \left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \varphi_1} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \right] C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}) P_{pr} \left(\bar{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{rs}^{ph} \right) P_{qs} \quad [B2.4]$$

$$F_{\phi} = 2\alpha f (1-f) \text{sym} \left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \phi} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \right] C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}) P_{pr} \left(\bar{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{rs}^{ph} \right) P_{qs} \quad [B2.5]$$

$$F_{\varphi_2} = 2\alpha f (1-f) \text{sym} \left[\frac{\partial P_{im}}{\partial \varphi_2} \left(\bar{\varepsilon}_{mn}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{mn}^{ph} \right) P_{jn} \right] C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}) P_{pr} \left(\bar{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{rs}^{ph} \right) P_{qs} \quad [B2.6]$$

- Forces thermodynamiques associées aux demi-axes

$$F_a = \frac{f}{a} (\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph}) - \frac{f}{2a} \alpha (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} + \frac{1}{2} \alpha f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^{p*} C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial a} \Delta \varepsilon_{mn}^{p*} \quad [B2.7]$$

$$F_b = \frac{f}{b} (\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph}) - \frac{f}{2b} \alpha (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} + \frac{1}{2} \alpha f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^{p*} C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial b} \Delta \varepsilon_{mn}^{p*} \quad [B2.8]$$

$$F_c = \frac{f}{c} (\bar{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (E_{kl} - f \bar{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \bar{\varepsilon}_{kl}^{ph}) - \frac{f}{2c} \alpha (1-2f) \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{p*} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \bar{\varepsilon}_{mn}^{p*} + \frac{1}{2} \alpha f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^{p*} C_{ijkl} \frac{\partial S_{klmn}}{\partial c} \Delta \varepsilon_{mn}^{p*} \quad [B2.9]$$

où P est la matrice de passage du repère propre de l'inclusion vers le repère global de chargement et $\Delta \varepsilon_{ij}^{p*}$ est le saut de déformation plastique exprimé dans le repère propre de l'inclusion.

b. Applications numériques

La figure B2.1 montre les réponses contrainte-déformation macroscopique et dans chaque phase obtenues pour un coefficient d'accommodation de 1.0 et de 0.1.

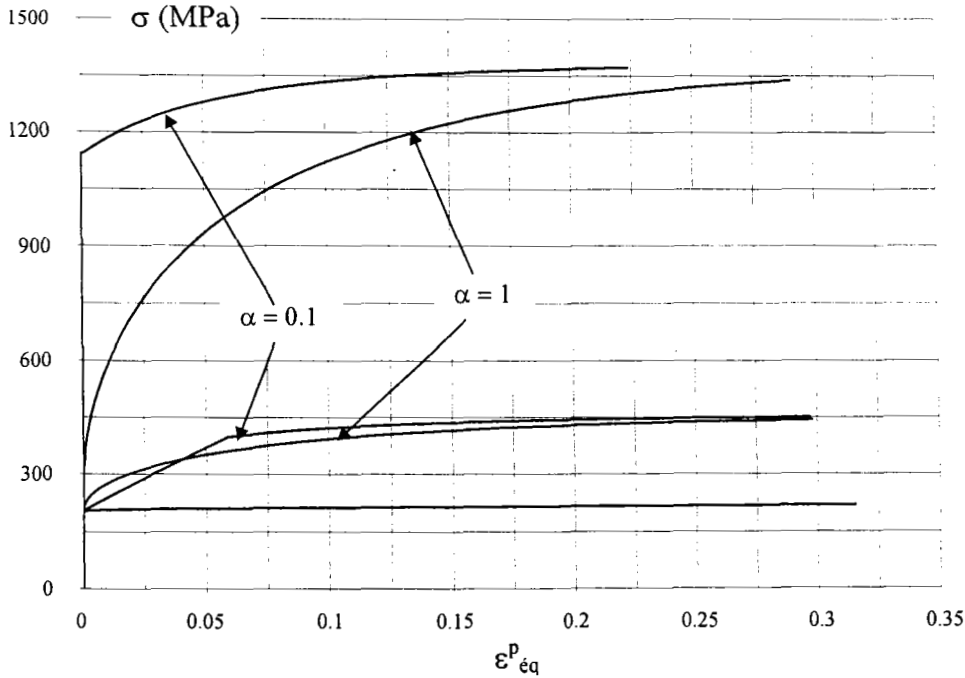


Figure B2.1 : Réponses contrainte-déformation macroscopique et dans chaque phase pour deux valeurs du coefficient d'accommodation.

Ces courbes sont obtenues pour des cellules sphériques. A part la forme des cellules, les paramètres du modèle sont ceux du tableau III.1.

La courbe représentée sur la figure B2.2 montre que le coefficient d'accommodation a surtout une influence sur le saut de déformation plastique. Celui-ci étant plus important on obtient une contrainte macroscopique et surtout une force motrice équivalente associée à la morphologie plus important quant α est petit.

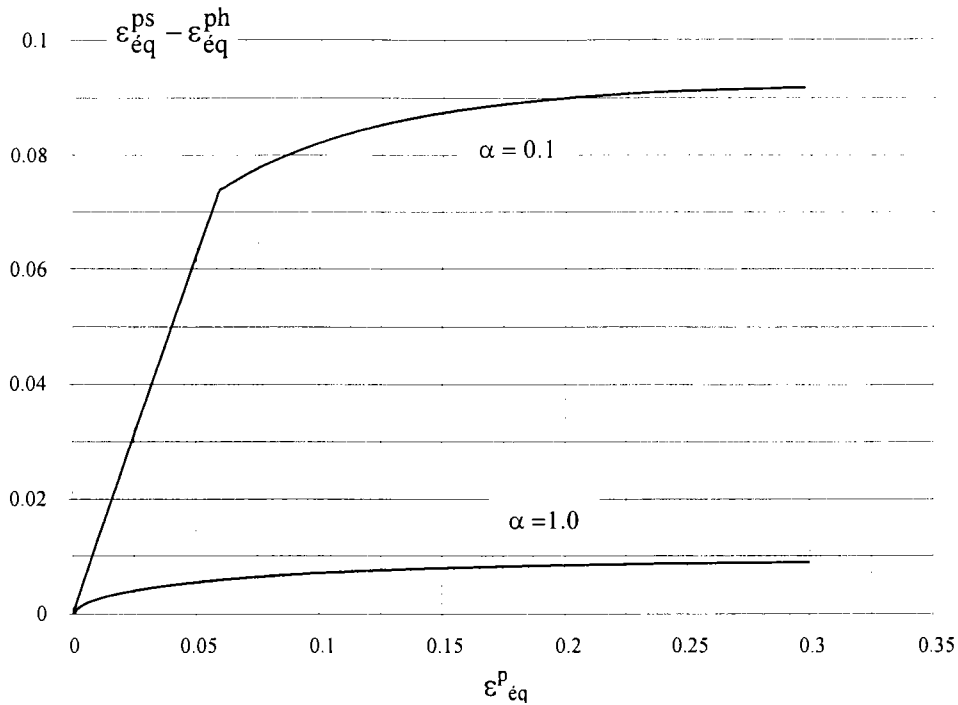


Figure B2.2 : Evolution du saut de déformation plastique en fonction de la déformation plastique macroscopique pour les deux valeurs du coefficient d'accommodation.

Pour $\alpha = 0.1$, on remarque qu'au début du chargement, le stade où seules les cellules sont en plasticité est très marquée.

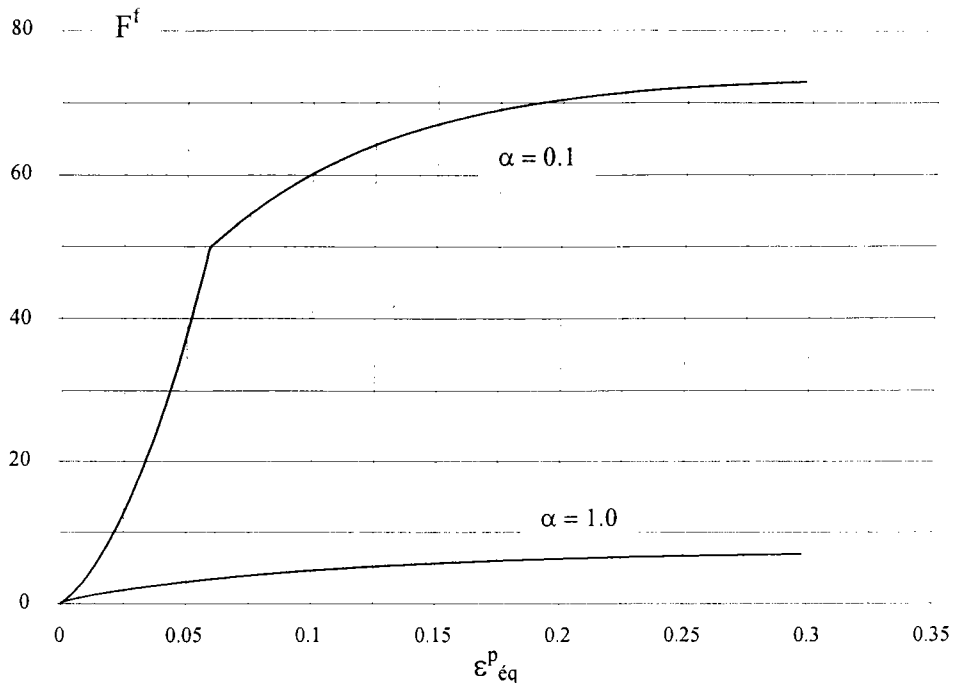


Figure B2.3 : Evolution de la force motrice équivalente suivant la morphologie en fonction de la déformation plastique macroscopique pour les deux valeurs du coefficient d'accommodation.

ANNEXE A3

Effet de l'orientation initiale des cellules de dislocations sur le comportement du matériau obtenu numériquement

Pour débiter une simulation, il nous faut prendre une morphologie et une orientation de cellule initiale. La valeur des demi-axes est issue des observations expérimentales dans la mesure où la non-convexité de l'énergie libre par rapport à la fraction volumique ne nous permet pas de trouver numériquement une configuration représentant un minimum d'énergie. L'orientation des cellules est choisie arbitrairement. Le seuil de propagation de l'interface cellule-paroi associé à la rotation des cellules est choisi faible. Ceci permet aux cellules de prendre très rapidement l'orientation représentant un minimum d'énergie [I98]. Il faut toutefois vérifier que les valeurs initiales choisies n'influencent pas les résultats.

Pour cela, nous simulons un chargement en cisaillement en prenant différentes valeurs initiales pour les angles d'Euler fixant l'orientation de la microstructure.

Les paramètres du modèle utilisés pour cette simulation sont rappelés dans le tableau suivant:

Chargement	monotone	$E_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}$
Comportement élastique	$\mu = 80000 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$	
Limites d'écoulement	$Y_c^0 = 200 \text{ MPa}$	
Ecrouissage	$L_1 = 10 \text{ MPa}^2$ $L_2 = 1.5 \cdot 10^6 \text{ MPa}^2$ $L_3 = 5.0$ $s = 0.7$	
Forme initiale de l'ellipsoïde	$a = 3.0 \text{ e-6 m}$ $b = 3.0 \text{ e-6 m}$ $c = 1.0 \text{ e-6 m}$	
Seuil de résistance morphologique	$\tau_c^{a\mu} = 100 \text{ MPa}$ $\tau_c^{\alpha\mu} = 0.01 \text{ MPa}$	

Tableau B3.1 : Paramètres du modèle, chargement en cisaillement

Les résultats exposés sur les figures B3.1 et B3.2 sont obtenus pour les valeurs des angles d'Euler rassemblés dans le tableau B3.2

$(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$	$(10^\circ, 30^\circ, 70^\circ)$ Courbes (1)	$(40^\circ, 50^\circ, 47^\circ)$ Courbes (2)	$(72^\circ, 22^\circ, 15^\circ)$ Courbes (3)	$(50^\circ, 77^\circ, 38^\circ)$ Courbes (4)
--------------------------------	---	---	---	---

Tableau B3.2 : Triplet d'angle d'Euler utilisés pour l'étude de l'influence de l'orientation initiale de la microstructure

Les résultats montrent que l'orientation initiale des cellules n'a pas d'influence sur le niveau de contrainte macroscopique. On pourrait montrer également qu'elle n'a pas d'effet sur le saut de déformation plastique, le niveau des contraintes internes et la force thermodynamique équivalente suivant la morphologie.

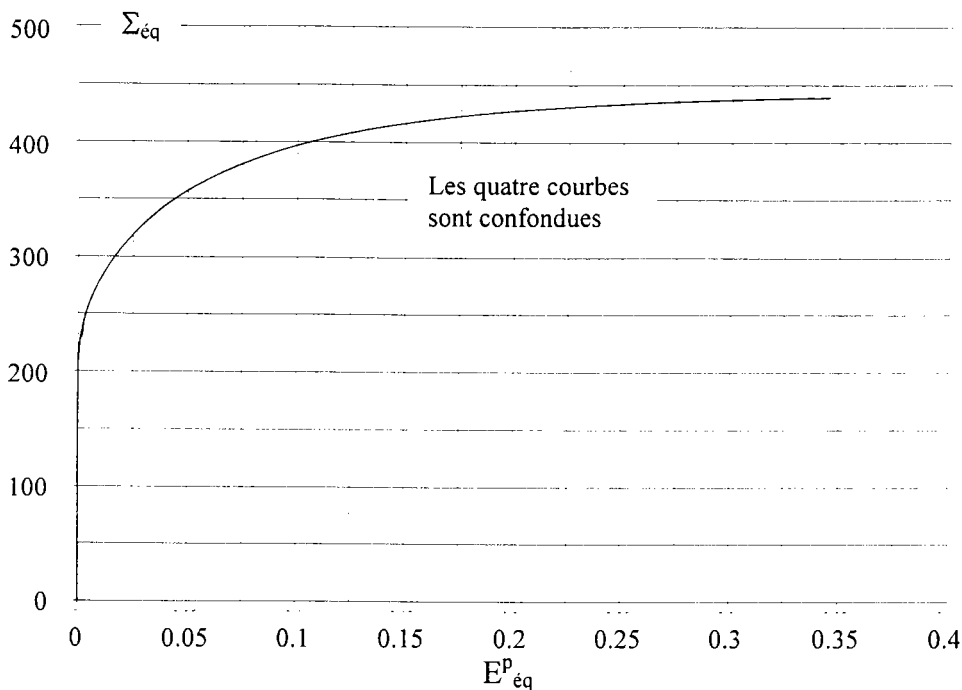


Figure B3.1 : Contrainte macroscopique équivalente pour différentes valeurs de l'orientation initiale des cellules (essai de cisaillement)

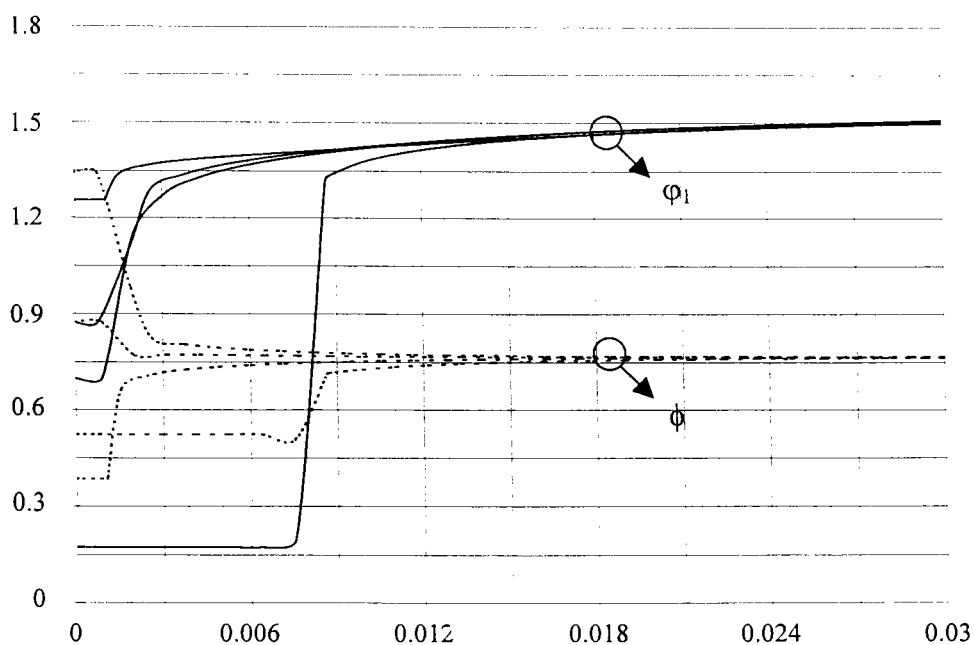


Figure B3.2 : Evolution de l'orientation des cellules sur les premiers pas de plasticité pour différentes valeurs initiales des angles d'Euler (ϕ_1, ϕ, ϕ_2)

Les cellules s'orientent très rapidement suivant leur direction idéale. La valeur initiale de l'orientation n'ayant aucun effet significatif.

Dans les résultats présentés, nous ne traçons pas l'évolution du troisième angle d'Euler dans la mesure où nous avons adopté une forme axi-symétrique pour les cellules.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALH91 ANANTHAN, V.S., LEFFERS, T., HANSEN, N., « Characteristics of second Generation Microbands in Cold-rolled Copper », 1991, Scripta Metallurgica, Vol.25, pp(137-142)
- AS80 ANAND, L., SPITZIG W.A., Initiation of Localized Shear Bands in Plane Strain », 1980, J. Mech. Phys. Solids, Vol.28, pp(113-128)
- BHK89 BAY, B., HANSEN, N., KUHLMANN-WILSDORF D., « Deformation Structures in Lightly Rolled Pure Aluminium », 1989, Materials Sciences and Engineering, Vol.A112, pp(385-397)
- CB99 CHERKAOUI, M., BERVEILLER, M., « Moving inelastic discontinuities and applications to martensitic phase transformation », Arch. Applied Mechanics 1999.
- DB84 DYMECK, S., BLICHARSKI, M.R., « The Structure of Transition Bands in Ferritic Stainless Steels », 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(99-104)
- DHMA88 DEVE, H., HARREN, S., Mac CULLOUGH, C., ASARO, R.J., « Micro and Macroscopic Aspects of Shear Band Formation in Internally Nitrited Single Crystal of Fe-Ti-Mn Alloys », 1988, Acta Met., Vol.36, N°2, pp(341-365)
- D97 DAVID, F., « Modélisation meso-macro de la localisation de la déformation : Etude de la sensibilité au cisaillement adiabatique d'un acier à blindage », 1997, ETCA, Thèse de l'Université de Metz
- E57 ESHELBY, J.D., « The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems », 1957, Proc. Roy. Soc., A241, pp.(376-396).
- FS83 FERNANDES, J.V., SCHMITT, J.H., « Dislocation Microstructures in Steel during Deep Drawing », 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870)
- F83 FRANCIOSI, P., « Glide mechanisms in b.c.c. crystals : an investigation of the case α -iron through multislip and latent hardening tests », 1983, Acta Metall., Vol.31, N°9, pp.(1331-1342)
- F84 FRANCIOSI, P., « Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement :modélisation pour un chargement complexe quasi-statique », 1984, thèse de l'Université de Paris – Nord.
- G73 GERMAIN. P., « Cours de mécanique des milieux continus », 1973, Tome 1, Théorie générale, eds Masson et cie, Paris.
- H03 HADAMARD, J., « Leçon sur l'équation des ondes et les équations de l'hydrodynamique », 1903, Cours du Collège de France, Paris.

- H61 HILL, R., « Discontinuity relations in mechanics of solids », 1961, Progress in Solid Mechanics 2, eds I.N. SNEDDON and R. HILL, North Holland Amsterdam, pp.(245-276).
- H62 HU, H., « Microbands in a Rolled Si-Fe crystal and their role in recrystallization », 1962, Acta Met., Vol.10, pp(1112-1116)
- H72 HILL, R., « an invariant treatment of interfacial discontinuities in elastic composites », 1972, Continuum Mechanics And Related Problem of Analysis, Moscow, pp.(594-604).
- H83 HILL, R., « Interfacial operators in the mechanics of composite media », 1983, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N°4, pp.(347-357).
- HM84 HATHERLY, M., MALIN, S.A., « Shear Bands in Deformed Metals », 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(449-454)
- HK86 HANSEN, N., KUHLMANN-WILSDORF, D., « Low Energy Dislocation Structures due to Unidirectional Deformation at Low Temperatures », 1986, Materials Science and Engineering, Vol.81, pp(141-161)
- HHZ89 HU, H., HWANG, K., ZHOU, C., « Constitutive Relations of Metallic Materials under Cyclic Loading », Acta Mecanica Sinica, Vol.21, 705
- H90 HANSEN, N., « Cold Deformation Microstructures », 1990, Mat. Science and Technology, Vol.6, pp(1039-1046)
- H92 HANSEN N., « Deformation Microstructures », 1992, Scripta Metall. et Mat., Vol.27, pp(1447-1452)
- HRT92 HU, Z., RAUCH, E.F., TEODOSIU, C., « Work-hardening Behavior of Mild Steel under Stress Reversal at Large Strains », 1992, Int. J. of Plasticity, Vol.8, pp(839-856)
- H93 HUGUES, D.A., Microstructural Evolution in a Non Cell Forming Metals Al-Mg », 1993, Acta Met., Vol.41, N°5, pp(1421-1430)
- H99 HOC, T., « Etude Expérimentale de la Localisation de la Déformation Plastique dans les Aciers If au Cours de Changement de Trajet de la Déformation »,
- I89 INAGAKI, H., « Development of Microstructures and Textures during Cold Rolling of Polycrystalline Iron Containing an Excess Amount of Dissolved Carbon », 1989, z. Metalkde, pp(474-483)
- I98 AUBERT, I., « Effets de l'hétérogénéité plastique intragranulaire sur le comportement macroscopique des aciers doux lors de chargements complexes », 1998, Thèse de l'Université de Metz.

- JH90 JUUL JENSEN, D., HANSEN, N., « Flow Stress Anisotropy in Aluminium », 1990, Acta Met., Vol.38, pp(1369-1380)
- K61 KRÖNER, E., « Zur Plastischen Verformung des Vielkristall », 1961, Acta Metall., Vol.9, pp.(155-161).
- KW63 KEH, A.S., WEISSMANN, S., « Deformation in Body-centered Cubic Metals », 1963, In Electron Microscopy and Stength of Crystal, Eds G. THOMAS, J. WASHBURN, pp(231,300)
- KR85 KORBEL, A., RICHEL, M., « Formation of Shear Bands during Cyclic Deformation of Aluminium », 1985, Acta Met., Vol.33, N°11, pp(1971-1978)
- KM86 KORBEL, A., MARTIN, P., « Microscopic versus Macroscopic Aspect of Shear Bands Deofrmation », 1986, acta Met., Vol.34, N°10, pp(1905-1909)
- KM88 KUBIN, L.P., MARTIN, G., « Non Linear Phenomena in Materials Science », 1988, Trans. Tech. Publications Ltd, Suisse.
- K90 KORBEL A., « The Mechanism of Strain Localization in Metals », 1990' Archives of Metallurgy, Vol.35, pp(177-203)
- LS83 LIBOVICKY, S., SESTAK, B., « Development of the dislocation arrangement in Fe-0.9wt% Si single Crystals Deformed in Tension », 1983, Phil. Mag. A, Vol.47, pp(63-78)
- L91 LUFT, A., « microstructural Processes of Plastic Instabilities in Strengthened Metals », 1991, Progress in Materials Science, Vol.35, pp(97-204)
- LKD92 LAN, Y., KLAAR, H.J., DAHL, W., « Evolution of Dislocation Structures and Deformation Behavior of Iron at Different Temperatures : Part I. Strain Hradening Curves and Cellular Structures », 1992, Metall. Trans., Vol.23A, pp(537-544)
- LDY93 LIU, Y.Z., DONG, D.Y., YUAN, K., « Experimental Investigation of Microstructural Damage in an A-K Sheet Subjected to Two-stage Straining », 1993, J. of Mat. Process. Tech., Vol.39, pp(133-143)
- LMB94 LEMOINE, X., MULLER, D., BERVEILLER, M., « Texture of Microstructure in BCC Metals for Various Loading Paths », 1994, Mat. Science Forum, Vol.(157-162), pp(1821-1826)
- L95 LEMOINE, X., « Analyse Micromécanique de la Formation des Cellules de Dislocations et Conséquences sur le Comportement des Aciers », 1995, Thèse de l'université de Metz
- M67 MRÖZ, Z., « On the Description of Anisotropic Work-Hardening », 1967, J. Mech. Phys. Solids, 1967, 15, 163

- MHH81 MALIN, A.S., HATHERLY, M., «The Microstructure of rolled Copper single Crystal», 1981, Z. Metallkde, pp(310-317)
- MKB93 MULLER, D., KRATOCHVIL, J., BERVEILLER, M., « Effets des écrouissages couplés de différentes parties d'un métal sur la réponse globale en traction-compression et sur les contraintes internes », 1993, C. R. Acad. Sci., Vol.316, pp.(435-440).
- M94 MULLER, D., « Influence de l'Écrouissage Non Local et de l'Hétérogénéité Intragranulaire sur le Comportement des Aciers Polycristallins », 1994, thèse de l'Université de Metz
- MLKB MULLER, D., LEMOINE, X., KRATOCHVIL, J., BERVEILLER, M., « Non-local Behavior of Metals », 1994, Trans. Of the ASME, Vol.116, pp(35-36), pp(393-398)
- P49 PRAGER, W, « recent developments in the Mathematical Theory of Plasticity », 1949, J. Appl. Phys. 20, 235.
- RB77 RONDE-OUSTAU F., BAUDELET, B., « Microstructure and Strain Path in Deep Drawing », 1977, Acta. Met., Vol.25, pp(1523-1529)
- R88 REY, C., « Effect of grain Boundaries on the Mechanical Behavior of Grains in Polycrystals », 1988, Revue Phys. Appl., Vol23, pp(491-500)
- R93 RAUCH, E.F., « Etude de l'Écrouissage des Matériaux, Aspects Microstructuraux et Lois de Comportement », 1993, Thèse d'habilitation de l'INPG
- RS89 RAUCH, E.F., SCHMITT, J.H., Dislocation Substructures in Mild Steel Deformed in Simple Shear », 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A113, pp(441-448)
- SAB85 SCHMITT, J.H., AERNOUDT, E., BAUDELET, B., « Yield Loci for Polycrystalline Metals without Texture », 1985, Material Sciences and Engineering, Vol.A147, pp(143-154)
- S86 SCHMITT, J.H., « Contribution à l'Etude de la Microplasticité des Aciers », 1986, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG).
- T70 TAKEUSHI, T., « Work Hardening of Iron Single Crystal between 25°C and 900°C », 1970, Japanese J. of Applied Phys., Vol.9, N°4, pp(391-400)
- TYF78 TABATA, T., YAMANAKA, S., FUJITA, H., « In Situ Deformation of the [111] Aluminium Single Crystals Observed by High Voltage Electron Microscopy », 1978, Acta. Met., Vol.26, N°4, pp(405-411)
- T92 THUILLIER, S., « Rhéologie et microstructure associées à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux », 1992, Thèse de l'INPG (Grenoble)

- W67 WALPOLE, L.J., « The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium », 1967, Proc. Poy. Soc., Vol. A300, pp.(270-289).
- Z59 ZIEGLER, H., « A Modification of Prager's Hardening Rule », 1959, Q. Appl. Math. 17, 55.