



HAL
open science

Sur la déformation d'un fil élastique et sur l'étude d'une équation intégral-différentielle

Amel Aïssani

► **To cite this version:**

Amel Aïssani. Sur la déformation d'un fil élastique et sur l'étude d'une équation intégral-différentielle. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2000. Français. NNT : 2000METZ036S . tel-01775418

HAL Id: tel-01775418

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775418>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE METZ
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

en mathématiques appliquées

par

Amel AISSANI

Titre

**SUR LA DÉFORMATION D'UN FIL ÉLASTIQUE
ET
SUR L'ÉTUDE D'UNE ÉQUATION INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLE**

Soutenue le 12 décembre 2000
devant la commission d'examen:

J. Bemelmans: Université de Aachen. Allemagne
B. Brighi: Université de Mulhouse. France
M. Chipot: Université de Zürich. Suisse
K. Lendi: Université de Zürich. Suisse
M. Moussaoui: Ecole centrale de Lyon. France

Rapporteur
Examinateur
Directeur de thèse
Examinateur
Rapporteur

*A mes parents
et
mon futur époux*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2000 0445
Cote	S/M3 00/36
Loc	Magasin

Remerciements

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au professeur Michel Chipot de m'avoir permis d'effectuer sous sa direction ce travail de thèse, il a su orienter mes recherches grâce à ses discussions fructueuses et sa compétence dans le domaine.

Je remercie particulièrement le professeur Karl Lendi de m'avoir aidée à travailler sur la seconde partie de ce manuscrit, je le remercie vivement pour sa confiance et sa collaboration et je le remercie également d'être membre du jury.

Je suis reconnaissante aux professeurs Josef Bemelmans et Mohand Mousaoui d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail . Mes remerciements s'adressent aussi au professeur Bernard Brighi d'avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique algérien ainsi que le fond national suisse de la recherche scientifique pour leur soutien financier.

Enfin, merci à tous ceux qui m'ont soutenue dans ce travail de thèse famille ou amis.

Mots-Clés

Inéquation variationnelle, disque rigide, carré rigide,
fil élastique, problème d'obstacle, position d'équilibre.

Équation intégró-différentielle, solution bornée,
solution exacte, solution numérique.

SOMMAIRE

Notations

Avant-propos

Partie I: Sur la déformation d'un fil élastique

Introduction.....6

Chapitre 1: Résultats antérieurs

1. Résultats concernant une boule rigide.....10

2. Résultats concernant deux boules rigides.....14

Chapitre 2: Sur la déformation d'un fil élastique par un ou deux disques

rigides

1. Introduction.....19

2. Le cas d'un disque23

3. Le cas de deux disques27

Chapitre 3: Sur la déformation d'un fil élastique par trois disques rigides

1. Introduction.....	39
2. Formulation du problème	40
3. Existence d'un minimum	42
4. Calcul du minimum de l'énergie	50

Chapitre 4: Sur la position d'équilibre d'un carré sur un fil élastique

1. Introduction.....	61
2. Existence d'un minimiseur	65
3. Calcul des minimiseurs	75

Conclusion et questions ouvertes.....91

Bibliographie.....92

Partie II: Sur l'études d'une équation intégro-différentielle

Introduction.....95

1. Formulation du problème.....97

2. Méthodes classiques.....98

2.1. Applications en dimensions 2 et 3.....102

3. Méthodes numériques

3.1. En dimensions 2108

3.1.1. Applications111

3.2. En dimensions 3	
3.1.1. Cas particulier.....	113
3.1.2. Cas général	116
Conclusion et questions ouvertes.....	128
Appendices.....	130
Bibliographie.....	136

Notations

\square	signale la fin d'une preuve
cf	ce qui à faire
i.e.	c'est à dire
e.g.	par exemple
\emptyset	ensemble vide
\vee	ou
Ω	domaine borné de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2
$\Gamma = \partial\Omega$	la frontière de Ω
$B_r(x)$	boule ouverte de centre x et de rayon r
$x = (x_1, x_2)$	les coordonnées cartésiennes de x dans \mathbb{R}^2
$ x = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$	la norme euclidienne de x
$dx = dx_1 dx_2$	la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2
(x, y)	le produit scalaire du vecteur x et y
\mathcal{N}	l'ensemble des entiers naturels
$E \times F$	le produit cartésien de l'ensemble E et F
$E \setminus F$	le complémentaire de F dans E
$G \otimes K$	le produit tensoriel de deux espaces vectoriels G et K
$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$	la matrice A d'éléments a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$
$ A = \left(\sum_{i, j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	norme de Frobenius de la matrice A
I	matrice identité
A^T	matrice transposée de A , $A^T = (a_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}$

e^A	exponentielle de la matrice, $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$
\tilde{g}	transformée de Laplace de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$g'(a)$	dérivée de $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en a
f_{x_i}	la dérivée partielle de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ (X espace de Banach) par rapport à la variable x_i
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	la dérivée partielle de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ (X espace de Banach) par rapport à la variable x_i
$f_{x_i x_i}$	la dérivée partielle d'ordre 2 de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ (X espace de Banach) par rapport à la variable x_i
$Df(a)$	la dérivée de Fréchet de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ (X espace de Banach) au point $a : f(a+h) = f(a) + Df(a).h + o(h)$
$D^k f(a)$	la dérivée de Fréchet d'ordre k de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ (X espace de Banach) au point a
∇f	le gradient de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$
Δf	le Laplacien de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} :$ $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$
$C(\Omega)$	l'espace des fonctions continues sur Ω
$C^m(\Omega)$	l'espace des fonctions m fois continuellement dérivables dans Ω
$C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), 0 < \lambda \leq 1$	l'espace des fonctions höldériennes d'ordre λ sur $\bar{\Omega}$, c'est à dire l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ telles que $\sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{ f(x) - f(y) }{ x - y ^\lambda} < +\infty$
$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions $f \in C^m(\Omega)$ telles que

	$D^j f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad \forall j, j \leq m$
\mathcal{D}	l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans Ω
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables sur Ω telles que $x \mapsto f(x) ^p$ soit intégrable sur Ω , muni de la norme: $\ f\ _{p,\Omega} = \ f\ _{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega f ^p)^{\frac{1}{p}}$
$H^1(\Omega)$	l'espace des fonctions f telles que $f \in L^2(\Omega), Df \in L^2(\Omega)$ (au sens des distributions), muni de la norme: $\ f\ _{2,\Omega} = \ f\ _{H^1(\Omega)} = (\ f\ _{1,\Omega} + \ \nabla f\ _{1,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de \mathcal{D} dans $H^1(\Omega)$
$\cosh(x)$	fonction définie par: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sinh(x)$	fonction définie par: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\operatorname{sech}(x)$	fonction définie par: $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$
$\operatorname{Si}(x)$	fonction définie par: $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$
$\operatorname{Ci}(x)$	fonction définie par: $\operatorname{Ci}(x) = \gamma + \log(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt$
	$(\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \log m))$
$J_0(t)$	fonction de Bessel définie par: $J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{4}t^2)^k}{k! \Gamma(k+1)}$
	où $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$

Avant-propos

Ce manuscrit est divisé en deux parties indépendantes, la première partie traite des problèmes d'obstacle relatifs à la déformation d'un fil élastique et dans la deuxième partie, on s'intéresse à une équation intégral-différentielle de Volterra de type convolutif, relative à la théorie quantique.

PARTIE

I

SUR LA DÉFORMATION D'UN FIL ÉLASTIQUE

Introduction

Le calcul des variations est un sujet classique des mathématiques. De nombreux mathématiciens et parmi les plus célèbres ont contribué à son étude au cours des siècles, il reste, à l'heure actuelle, un sujet très vivant et en pleine évolution. L'une des théories qui a eu une grande influence sur le développement du calcul des variations est la théorie des inéquations variationnelles (née en Italie dans les années 60). Outre son importance purement mathématique et son lien avec les autres branches des mathématiques (comme par exemple les équations différentielles et la géométrie), il faut mentionner ses nombreuses applications à la physique. Les problèmes d'obstacle - telle est une grande partie de mon travail de thèse - représentent une application importante de la théorie des inéquations variationnelles. Ces problèmes ont envahi un domaine très large des mathématiques appliquées notamment la mécanique et la théorie du control optimal. L'étude des inéquations variationnelles a été introduite par le problème d'obstacle suivant:

Trouver la position d'équilibre

$$u = u(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

d'une membrane élastique contrainte de rester au dessus d'un obstacle donné ψ . Ce problème a été résolu en le formulant en un problème de minimisation

$$\min_{u \in K} \int_{\Omega} |\nabla v(x)| dx,$$

où K est un ensemble convexe de fonctions admissibles supérieures ou égales à ψ . En effet, on a donné une forme équivalente à ce problème, c'est à dire l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} u \in K, \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla (v - u)(x) dx \geq 0, \end{cases} \quad \forall v \in K.$$

Comme à tous problèmes du calcul des variations, on peut associer au problème d'obstacle (pour u régulier) une équation différentielle

$$(u - \psi)\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

avec $u \geq \psi$, $-\Delta u \geq 0$ sur Ω

et on définit un sous ensemble de Ω appelé ensemble de coïncidence

$$\Lambda = \{x \in \Omega / u(x) = \psi(x)\}.$$

Pour plus de détails dans le domaine des inéquations variationnelles et ses applications, une vaste littérature existe et nous recommandons, pour de plus amples développements, entre autres, les références [8], [9], [16], [19].

L'étude faite en dimensions 2 (i.e. membrane élastique) a permis de donner de nouvelles pistes de réflexion. Cependant, on a pensé à étudier le cas scalaire (i.e. la déformation d'un fil élastique) car ce cas est plus simple et on peut tout calculer explicitement du moins pour les cas étudiés dans ce manuscrit.

Venons en maintenant au contenu de cette présente partie de thèse. Elle comprend quatre chapitres qui peuvent être lus plus au moins indépendamment. Dans le premier chapitre, j'ai rappelé sans entrer dans les détails des preuves quelques résultats relatifs à un problème modèle étudié par [3], [4], [9]. J'ai tenu à commencer par ce chapitre pour donner une idée sur l'origine des problèmes étudiés dans cette partie du mémoire et pour marquer une continuité d'une série de résultats relatifs à la déformation d'une membrane ou d'un fil élastique.

Le deuxième chapitre comprend un article fait en collaboration avec mon professeur Chipot et Fouad (ancien doctorant). Dans cet article, on s'intéresse à la déformation d'un fil élastique par un ou deux disques rigides identiques, roulant librement sur ce fil. D'abord, on étudie la position d'équilibre d'un seul disque rigide en donnant une formulation autre que dans le cas d'une boule roulant sur une membrane élastique (cf [4]). Le problème se révèle être équivalent à un problème de minimisation de la fonction d'énergie sur un sous ensemble compact de \mathbb{R}^2 . Ensuite, on étudie le même problème pour deux disques rigides identiques. On pourrait penser que ces deux disques vont prendre une position d'équilibre telle que chacun d'eux soit situé à une même altitude au centre du fil. Ceci s'avère faux lorsque les poids des disques dépassent une valeur critique.

Du point de vue mathématique, si on désigne par r le rayon, (ζ_1, h_1) , (ζ_2, h_2) les coordonnées des centres des deux disques, le problème est équivalent à minimiser sur un sous ensemble compact de \mathbb{R}^4 la fonction

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2$$

où la partie intégrale correspond à l'énergie élastique du fil, l'autre partie représente l'énergie potentielle du système (G est le poids des disques, h_i leur altitude).

u est la solution de l'inéquation variationnelle correspondante à notre problème c'est à dire

$$u \in K, \quad \int_0^1 u_x(v_x - u_x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

où $K = \{v \in H_0^1(0, 1) / \text{le graphe de } v \text{ soit situé sous les deux disques}\}$.

Dans le troisième chapitre, nous étudierons la position d'équilibre de trois disques identiques rigides par un raisonnement analogue à celui de deux disques identiques.

Dans le dernier chapitre, sont présentés divers résultats relatifs à la déformation d'un fil élastique par un carré solide. En effet, le problème étudié nous entraîne à un problème de minimisation sur \mathbb{R}^4 par rapport aux coordonnées de deux des sommets du carré. Etonnement, la solution à notre problème dépend de l'intensité du poids du carré. On a démontré que dans l'état d'équilibre, le carré n'adopte pas toujours une position telle qu'il soit situé au milieu du fil. En effet, le carré peut atteindre son minimum d'énergie pour deux positions symétriques en s'inclinant sur le côté du fil élastique. Enfin, une discussion générale des résultats suivie de quelques questions et perspectives est présentée.

CHAPITRE 1

RÉSULTATS ANTÉRIEURS

1. Résultats concernant une boule rigide

1.1. Formulation et étude du problème

L'idée des travaux effectués dans cette présente partie du mémoire découle d'un problème modèle étudié par Bandle et Flucher [3], Bemelmans et Chipot [4], Elliot et Friedman [9].

Dans ce problème, on suppose qu'une boule rigide de rayon r et de poids G est posée sur membrane élastique, cette dernière est représentée par un domaine borné Ω et dont le bord Γ est supposé fixe.

Sachant que cette boule roule librement sur la membrane, on veut étudier sa position d'équilibre .

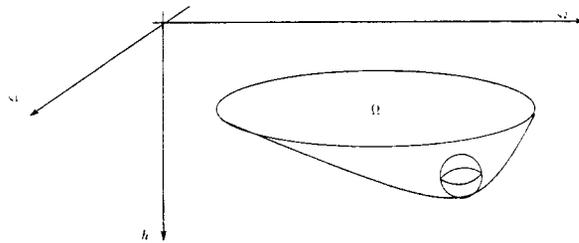


Figure 1

En désignant par $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, h les coordonnées du centre de la boule dans un repère orthonormal dont l'axe des h est dirigé vers le bas, l'énergie du système est donnée par

$$E(u; \zeta, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - Gh,$$

où la partie intégrale correspond à l'énergie élastique de la membrane et l'autre partie représente l'énergie potentielle, u est la fonction décrivant la déformation de la membrane, elle vérifie les conditions suivantes

$$u(x) = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

et

$$u(x) \geq \psi_{\zeta, h}(x) \quad \text{pp sur } B_r(\xi),$$

où $\psi_{\zeta,h}$ est la fonction d'obstacle donnée par

$$\psi_{\zeta,h}(x) = h + \sqrt{r^2 - |x - \zeta|^2}, \quad x \in B_r(\zeta).$$

Du point de vu mathématique, le problème est équivalent à un problème de minimisation

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\zeta_0, h_0) \in \Omega_r \times \mathbb{R}, \quad u_0 \in K_{\zeta_0, h_0}, \\ \text{où } \Omega_r = \{\zeta \in \Omega, \text{dist}(\zeta, \Gamma) > r\} \\ \text{et} \\ K_{\zeta_0, h_0} = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq \psi_{\zeta_0, h_0}(x) \text{ pp sur } B_r(\zeta_0)\}, \\ \text{tels que} \\ E(u_0; \zeta_0, h_0) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - Gh : (\zeta, h) \in \Omega_r \times \mathbb{R}, u \in K_{\zeta, h} \right\}. \end{cases}$$

Il est bien évident que u_0 est solution du problème auxiliaire

$$(P_0) \quad \begin{cases} \text{Etant données } (\zeta, h) \in \Omega_r \times \mathbb{R}, \text{ trouver } u \in K_{\zeta, h} \\ \text{telle que} \\ \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx : v \in K_{\zeta, h} \right\}. \end{cases}$$

u_0 est donc solution de l'inéquation variationnelle correspondante au problème, c'est à dire

$$(P'_0) \quad \begin{cases} u \in K_{\zeta, h}, \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla (v - u)(x) dx \geq 0, \quad \forall v \in K_{\zeta, h}. \end{cases}$$

et du fait que (P'_0) admet une solution unique pour (ζ, h) données (voir [16]), on a déduit l'existence d'une solution pour le problème (P) pour Ω convexe.

Il a été démontré (voir [11]) que si u_0 est solution de (P) alors elle vérifie les propriétés suivantes

(i) $u_0 \in C^{1,1}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus \Lambda),$

(ii)

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = 0 & \text{pp sur } \Omega \setminus \Lambda \\ -\Delta u_0 \geq 0 & \text{pp sur } \Omega \\ u_0 - \psi_{\zeta_0, h_0} \geq 0 & \text{pp sur } B_r(\xi_0) \\ u_0 = \psi_{\zeta_0, h_0} & \text{pp sur } \Lambda \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

(voir [11] ou [16])

où Λ est l'ensemble de coïncidence défini par

$$\Lambda = \{x \in B_r(\xi) : u(x) = \psi_{\zeta, h}(x)\}.$$

On est arrivé à formuler le problème en un problème de minimisation sur un compact en démontrant que

- Si $|h|$ est assez grande, il en est de même pour l'énergie du système (cf lemme 4 [4]).
- L'infimum de l'énergie ne peut être atteint dans le cas où la boule touche le bord, pour cela, on a démontré que l'énergie décroît quand la boule se déplace vers l'intérieur de Ω (cf théorème 6 [4]).

En plus de la compacité du sous domaine où le problème a été réduit, on a la continuité de la fonction d'énergie E (cf [4]), d'où, on a pu déduire l'existence d'un infimum sur ce compact.

1.2. L'étude du problème sur des domaines particuliers

On a démontré que si Ω est un disque, la position d'équilibre de la boule est unique et située au centre du disque et on a pu déterminer exactement les coordonnées du centre de la boule (voir [4]), et donc, dû aux arguments de réflexion on a déduit que pour un convexe ayant deux axes de symétrie orthogonaux, la position d'équilibre du centre de la boule doit être l'intersection de ces deux axes, et pour un convexe qui admet un seul axe de symétrie, alors le centre de la boule dans l'état d'équilibre appartient à cet axe.

Dans [4], les auteurs ont démontré qu'en général on a pas l'unicité de la solution pour des domaines non convexes, en effet, ils ont donné un contre exemple en choisissant le domaine suivant

$$\Omega_R = (-S, S) \times (-1, 1) \cup B_R(S) \cup B_R(-S) \quad \text{avec} \quad S = R + 1, r < 1 < R,$$

pour R assez grand, la solution n'est pas unique, le problème (P) admet au moins deux solutions symétriques ($\zeta_1, \zeta_2 \in -S, +S$), on pu démontrer que l'origine O est un maximum ou minimum local relatif à l'énergie (cf [10]).

Dans [10] l'auteur a démontré que si Ω n'est pas convexe, cela n'implique pas que la solution de (P) n'est pas unique, il a donc choisit le domaine composé suivant

$$\Omega = B_R(O) \cup ([-S - 1, S + 1] \times [-1, 1]) \quad S = R + 1, r < 1 < R$$

1.3. Etude faite par Elliot et Friedman

Passons maintenant aux travaux faits par Elliott et Friedman, en effet, ils ont étudié le problème autrement

Pour ζ fixé, ils ont considéré le problème auxiliaire suivant

$$(P_\zeta) \begin{cases} \text{Trouver } (u, h) \in K_\zeta \\ \text{tel que} \\ \eta_r(\zeta) = \inf\{\eta_r(v, l) : (v, l) \in K_\zeta\} = \eta_r(u, h) \end{cases}$$

où

$$\eta_r(v, l) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - Gl$$

et

$$K_\zeta = \{(v, l) : l \in \mathbb{R}, v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi_{\zeta, l} \text{ pp sur } B_r(\xi)\}.$$

(P_ζ) admet une solution unique (u_ζ, h_ζ) (cf [9]).

Ensuite, ils ont considéré le problème

$$(Z) \begin{cases} \text{Trouver } \zeta_r^* \in \Omega_r \\ \text{telle que} \\ \eta_r(\zeta_r^*) = \inf \eta_r(\zeta) \end{cases}$$

Il est clair que si ζ_r^* est solution du problème (Z) alors (u^*, ζ_r^*, h^*) est solution du problème (P).

On est arrivé à démontrer que ζ_0 solution optimale est le point où la partie régulière h de la fonction de Green (fonction de Green pour l'opérateur $\Delta : G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} - h(x, y)$) dite fonction de Robin atteint son infimum (cf [9]).

Soit C l'ensemble des centres harmoniques

$$C = \{x^* : h(x^*, x^*) = \min_{\Omega} h(x, x)\}.$$

Dans le cas où Ω est convexe, cet ensemble est un singleton $C = \{x^*\}$, on a (pour r assez petit)

$$|\zeta_0 - x^*| \leq c(r \log \frac{1}{r})^\gamma, \quad (\text{cf [9]})$$

c, γ sont deux constantes.

Dans [3], les auteurs ont amélioré ce résultat en démontrant que

$$|\zeta_0 - x^*| \leq c\sqrt{r} \implies \xi_0 \in [x^* - c\sqrt{r}, x^* + c\sqrt{r}].$$

Vu l'importance des centres harmoniques, il est indispensable de les localiser, on a pu donc les localiser dans certains domaines particuliers

- Pour un domaine Ω convexe qui admet un seul axe de symétrie. il existe un seul centre harmonique appartenant à cet axe et se trouvant évidemment à l'intérieur du domaine Ω .
- Pour un domaine Ω convexe qui admet deux axes de symétrie le centre harmonique est unique et coïncide avec l'intersection de ces deux axes.
- Pour le domaine Ω_R , on a mentionné précédemment que le problème (P) dans ce cas admet au moins deux solutions symétriques, par ailleurs, l'ensemble des centres harmoniques vérifie la propriété suivante

Il existe $x^* \in C$ tel que $-x^* \in C$ et $x^* \in [-S, S], -x^* \in [-S, S]$.

2. Résultats concernant deux boules rigides

L'étude de la déformation d'une membrane élastique par une boule rigide a conduit à l'idée d'étudier le cas de deux boules rigides, en effet, dans [10] l'auteur a procédé d'une façon analogue que dans le cas d'une seule boule (cf [4]).

Soit une membrane élastique occupant un domaine Ω dans le plan horizontal $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = 0\}$, sur cette membrane on laisse rouler librement deux boules de poids G_1, G_2 et de rayon r_1, r_2 respectivement, on veut déterminer la position d'équilibre de ces deux boules ainsi que la déformation de la membrane.

Dans ce cas l'énergie du système est donnée par

$$E(u; \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - G_1 h_1 - G_2 h_2,$$

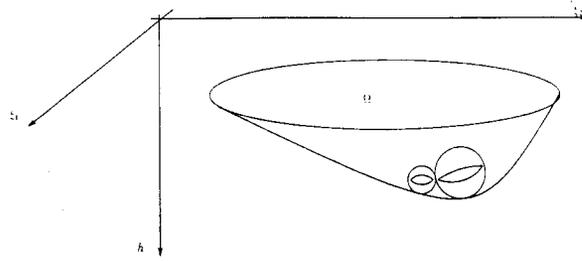


Figure 2

où $(\zeta_i, h_i), i = 1, 2$ sont les coordonnées des centres des deux boules, u est la déformation de la membrane, elle vérifie les conditions suivantes

$$u(x) \geq \psi_{\zeta_i, h_i}^i(x), \quad x \in B_{r_i}(\zeta_i) \quad i = 1, 2$$

ψ_{ζ_i, h_i}^i : fonction d'obstacle représentée par

$$\psi_{\zeta_i, h_i}^i(x) = h_i + \sqrt{r^2 - |x - \zeta_i|^2}, \quad x \in B_{r_i}(\zeta_i) \quad (\text{avec } \bar{B}_{r_i}(\zeta_i) \subset \Omega),$$

$i = 1, 2$

On suppose que les deux boules sont rigides i.e.

$$|\zeta_2 - \zeta_1|^2 + (h_2 - h_1)^2 \geq (r_1 + r_2)^2. \quad (2.1)$$

On pose

$$\Omega_{r_i} = \{\zeta_i \in \Omega : \text{dist}(\zeta_i, \Gamma) > r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

On introduit l'ensemble fermé et convexe des fonctions admissibles

$$K_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2} = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq \psi_{\zeta_i, h_i}^i(x) \text{ pp sur } B_{r_i}(\zeta_i), i = 1, 2\},$$

on a donc pu donner la formulation suivante du problème

$$(Q) \begin{cases} \text{Trouver } u; \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2 \\ \zeta_i \in \Omega_{r_i}, h_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \\ \text{tels que} \\ |\zeta_2 - \zeta_1|^2 + (h_2 - h_1)^2 \geq (r_1 + r_2)^2, \\ u \in K_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2} \\ \text{et} \\ E(u; \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \min_W E(v; \zeta, h, \zeta', h') \end{cases}$$

où

$$W = \{(v; \zeta, h, \zeta', h'), h, h' \in \mathbb{R}, (\zeta, \zeta') \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2} / \\ |\zeta' - \zeta|^2 + (h' - h)^2 \geq (r_1 + r_2)^2, v \in K_{\zeta, h, \zeta', h'}\},$$

en utilisant le problème auxiliaire suivant

$$(Q_0) \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \doteq K_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2} \\ \text{telle que} \\ \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \inf_{v \in K} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \end{cases}$$

On est arrivé donc à reformuler le problème (Q) au problème

$$(S) \begin{cases} \text{Trouver } \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2 \\ \text{tels que } \zeta_i \in \Omega_{r_i}, h_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \\ |\zeta_2 - \zeta_1|^2 + (h_2 - h_1)^2 \geq (r_1 + r_2)^2, \\ \text{et} \\ E(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \min_{W'} E(\zeta, h, \zeta', h'), \end{cases}$$

$$W' = \{(\zeta, h, \zeta', h'), h, h' \in \mathbb{R}, (\zeta, \zeta') \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2} / |\zeta' - \zeta|^2 + (h' - h)^2 \geq (r_1 + r_2)^2\}.$$

Par analogie au cas d'une seule boule, si u est une solution de (S), on est arrivé à déduire qu'elle vérifie

(i) $u \in C^{1,1}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)),$

(ii)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{pp sur } \Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \\ -\Delta u \geq 0 & \text{pp sur } \Omega \\ u - \psi^i \geq 0 & \text{pp sur } B_{r_i}(\zeta_i) \\ u = \psi^i & \text{pp sur } \Lambda_i \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$i = 1, 2$

Λ_i : ensemble de coïncidence relatif à la fonction d'obstacle ψ^i défini par

$$\Lambda_i = \{x \in B_{r_i}(\zeta_i) : u(x) = \psi^i(x)\}, i = 1, 2.$$

Le problème des deux boules reste actuellement ouvert car malheureusement on n'est pas parvenu à restreindre le problème sur un sous domaine compact comme dans le cas d'une seule boule, par ailleurs, on a pu généraliser les résultats trouvés dans [4].

- En effet, on a démontré qu'il est suffisant de considérer le problème (S) sur un sous domaine où $|(h_1, h_2)| < \infty$ (cf lemme IV 3.1 [10]).
- On a pu déduire qu'en général, le problème (S) n'admet pas une solution unique car si on prend deux boules identiques ($G_1 = G_2 = G, r_2 = r_1 = r$), alors si $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est solution du problème (S) , $(\zeta_2, h_2, \zeta_1, h_1)$ l'est aussi.
- On a étudié le problème pour des domaines particulier
 - (1) Pour un domaine qui admet au moins deux axes de symétrie, si $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est solution du problème (S) alors la condition (2.1) est saturée i.e.

$$|\zeta_2 - \zeta_1|^2 + (h_2 - h_1)^2 = (r_1 + r_2)^2,$$

autrement dit, dans l'état d'équilibre les deux boules se touchent.

- (2) $\Omega = B_R(O)$, si $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est solution du problème (S) alors la condition (2.1) est saturée (puisque $B_R(O)$ admet au moins deux axes de symétrie) et on a aussi que ζ_1, ζ_2 appartiennent à un même axe passant par O .
- (3) Si on prend l'exemple précédent avec $G_1 = G_2 = G, r_2 = r_1 = r$, alors les deux boules sont en état d'équilibre quand elles se trouvent au même niveau ($h_1 = h_2$) si $\bar{B}_r(\zeta_1) \cap \bar{B}_r(\zeta_2) = \{O\}$ (cf théorème IV 8.3 [10]).
- (4) On peut appliquer la formulation du problème utilisée par [9] pour trouver des estimations relatives aux centres harmoniques, analogues au cas d'une seule boule pour des domaines particuliers convexes.

CHAPITRE 2

SUR LA DÉFORMATION D'UN FIL
ÉLASTIQUE PAR UN OU DEUX DISQUES
RIGIDES

ON THE DEFORMATION OF AN ELASTIC WIRE BY ONE OR TWO HEAVY DISKS

A. Aissani¹, M. Chipot², S. Fouad¹

¹ Département de Mathématiques, Université de Metz, Ile du Saulcy, F-57045 Metz cedex 0

² Mathematisches Institut der Universität Zürich, Winterthurerstr 190, CH-8057 Zürich.

Abstract

In this paper, we consider the deformation of an elastic wire that supports two identical heavy disks rolling freely on it. One can expect that the equilibrium position of these two disks is such that we have them stabilized in the middle of the wire at the same level. In fact, we show that this result fails when the weight of the disks is large.

Mathematics Subject Classification: 49J40

1. Introduction

We consider an elastic wire that in an undeformed configuration occupies the interval $\Omega = (0, 1)$. We suppose we let roll on it a disk of radius r and weight G . The disk will settle at some position that we would like to determine (see figure 1).

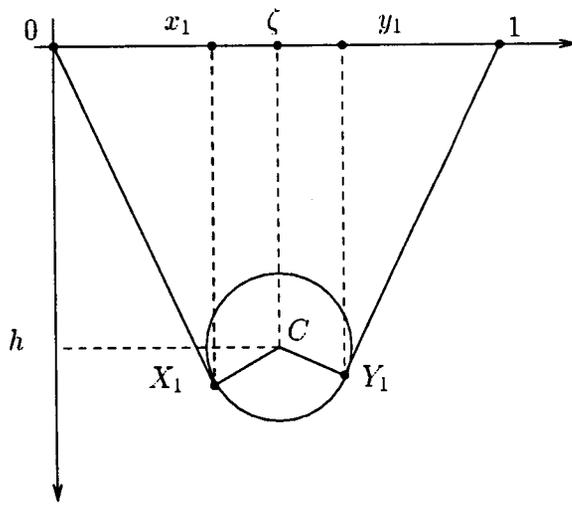


Figure 1

First we will assume that the disk can fit between the points 0, 1. In other words we will choose

$$0 < r < \frac{1}{2}. \quad (1.1)$$

Next, it is clear that the position of the disk is completely determined by the position of its center C that we will denote by

$$C = (\zeta, h). \quad (1.2)$$

For convenience we will choose coordinate axes such that h is pointing downward. Then, an admissible deformation u of the wire is a function from Ω into \mathbb{R} such that

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (1.3)$$

and such that u is located above the heavy disk. In other words, if we denote by $\psi^{\zeta h}$ the function defined by

$$\psi^{\zeta h} = \psi(x) = h + \sqrt{r^2 - (x - \zeta)^2} \quad \forall x \in B(\zeta, r) \quad (1.4)$$

where $B(\zeta, r)$ denotes the interval $(\zeta - r, \zeta + r)$ an admissible deformation is a function $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying (1.3) and such that

$$u(x) \geq \psi^{\zeta h}(x) \quad \forall x \in B(\zeta, r). \quad (1.5)$$

A configuration corresponds to a choice of C , center of the disk, and to a choice of u . Then its energy is given by - we denote by u_x the derivative:

$$E(u; \zeta, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh \quad (1.6)$$

where the integral part corresponds to the elastic energy stored in the wire and the second part to the potential energy of the system.

Clearly for (1.6) to make sense one can choose

$$u \in K(\zeta, h) = \{v \in H_0^1(\Omega) / v(x) \geq \psi^{\zeta h}(x) \text{ a.e } x \in \Omega\}. \quad (1.7)$$

Assuming that the disk can take any position in the strip $(0, 1) \times \mathbb{R}$, the problem that we would like to address is to find if there exists a point $(u_0; \zeta_0, h_0)$ such that

$$\begin{cases} (\zeta_0, h_0) \in (r, 1 - r) \times \mathbb{R}, & u_0 \in K(\zeta_0, h_0) \\ E(u_0; \zeta_0, h_0) \leq E(u; \zeta, h) & \forall (u; \zeta, h) \text{ such that} \\ (\zeta, h) \in (r, 1 - r) \times \mathbb{R}, & u \in K(\zeta, h) \end{cases} \quad (1.8)$$

i.e. minimizing E over all the possible configurations or positions of the disk.

Assuming that such a point (ζ_0, h_0) exists, u_0 will be such that

$$\begin{cases} u_0 \in K(\zeta_0, h_0), \\ E(u_0; \zeta_0, h_0) \leq E(u; \zeta_0, h_0) \quad \forall u \in K(\zeta_0, h_0). \end{cases} \quad (1.9)$$

In other words u_0 will be the solution of the variational inequality

$$\begin{cases} u_0 \in K(\zeta_0, h_0), \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{0x}^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx \quad \forall u \in K(\zeta_0, h_0) \end{cases} \quad (1.10)$$

which can be also expressed (see [KS] or [C]) as

$$\begin{cases} u_0 \in K(\zeta_0, h_0), \\ \int_{\Omega} u_{0x}(v_x - u_{0x})(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\zeta_0, h_0). \end{cases} \quad (1.11)$$

This remark in mind for any $(\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}$ one can introduce $u = u(\zeta, h)$ the solution to

$$\begin{cases} u \in K(\zeta, h), \\ \int_{\Omega} u_x(v_x - u_x)(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\zeta, h). \end{cases} \quad (1.12)$$

Then, clearly, (1.8) is equivalent to

$$\begin{cases} \text{Find } (\zeta_0, h_0) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R} \text{ minimizing} \\ F(\zeta, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh \text{ on } (r, 1-r) \times \mathbb{R} \quad (u = u(\zeta, h)). \end{cases} \quad (1.13)$$

Let us first note that one has

Proposition 1.1. *Let $(\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}$. The solution u to (1.12) is given by*

$$u = 0 \quad \text{if} \quad h \leq -r, \quad (1.14)$$

u = the curve drawn on figure 1 when $h > -r$ i.e. - with the notation of this figure

$$u(x) = \begin{cases} x\psi_x(x_1) & \text{for } x \in (0, x_1), \\ \psi(x) & \text{for } x \in (x_1, y_1), \\ (x-1)\psi_x(y_1) & \text{for } x \in (y_1, 1). \end{cases} \quad (1.15)$$

Proof. In the case where $h \leq -r$, $\psi \leq 0$ and $u = 0$ satisfies clearly (1.12).

In the case where $h > -r$ - i.e. when the disk touches the wire - it holds if u denotes the function in (1.15):

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_x(v_x - u_x)(x)dx &= \psi_x(x_1) \int_0^{x_1} (v_x - u_x)(x)dx + \int_{x_1}^{y_1} \psi_x(v_x - u_x)(x)dx \\ &+ \psi_x(y_1) \int_{y_1}^1 (v_x - u_x)(x)dx. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Integrating by part one has

$$\int_{x_1}^{y_1} \psi_x(x)(v_x - u_x)(x)dx = - \int_{x_1}^{y_1} \psi_{xx}(v - \psi)(x)dx + \psi_x(x)(v - \psi)(x)|_{x_1}^{y_1}.$$

Reporting in (1.16) one obtains

$$\int_0^1 u_x(v_x - u_x)(x)dx = - \int_{x_1}^{y_1} \psi_{xx}(v - \psi)(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\zeta, h)$$

since clearly $\psi_{xx} \leq 0$, this completes the proof of the proposition. \square

Remark 1.1: The interval $[x_1, y_1]$ is called the coincidence set of the variational inequality (1.12) -i.e. this is the set where

$$u = \psi.$$

In the next section we will show that the problem (1.8) has a unique solution. Next we will consider the case of two disks rolling on a wire. Of course one can consider the case of balls rolling on an elastic membrane (see for instance [EF], [BC], [F]). However, the case of disks is more simple in the sense that everything can be computed almost explicitly. It provides also a nice application of the theory of variational inequalities and we hope it could open the way to the two dimensional case.

2. The case of one disk

Let for $(\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}$ consider the function F defined in (1.13). Then one has:

Proposition 2.1. *The function F is differentiable on $(r, 1-r) \times \mathbb{R}$ and it holds if $h > -r$*

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) = \frac{1}{2}\{\psi_x(y_1)^2 - \psi_x(x_1)^2\}, \quad \frac{\partial F}{\partial h}(\zeta, h) = \psi_x(x_1) - \psi_x(y_1) - G, \quad (2.1)$$

if $h \leq -r$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial h}(\zeta, h) = -G. \quad (2.2)$$

Before to give the proof of the position let us establish the following lemma:

Lemma 2.1. *Assume that the center of the disk is located in (ζ, h) with $h > -r$ then it holds if (x_1, y_1) denotes the coincidence set (see figure 1)*

$$x_1 = x_1(\zeta, h) = \zeta - \frac{r^2\zeta + rh\sqrt{h^2 + \zeta^2 - r^2}}{h^2 + \zeta^2}, \quad (2.3)$$

$$y_1 = y_1(\zeta, h) = \zeta + \frac{r^2(1-\zeta) + rh\sqrt{h^2 + (1-\zeta)^2 - r^2}}{h^2 + (1-\zeta)^2}. \quad (2.4)$$

Proof. With the notation of the figure 1 using the orthogonality of OX_1, X_1C we get easily

$$x_1(x_1 - \zeta) + \psi(x_1)(\psi(x_1) - h) = 0.$$

This reads by (1.4)

$$x_1(x_1 - \zeta) + \{h + \sqrt{r^2 - (x_1 - \zeta)^2}\}\sqrt{r^2 - (x_1 - \zeta)^2} = 0,$$

i.e.

$$\zeta(x_1 - \zeta) + r^2 + h\sqrt{r^2 - (x_1 - \zeta)^2} = 0.$$

Setting $X = \zeta - x_1$, we get squaring everything:

$$h^2(r^2 - X^2) = (r^2 - \zeta X)^2,$$

this leads, since $X \geq 0$, easily to (2.3). the derivation of (2.4) is similar. Note that x_1, y_1 are differentiable in ζ, h . □

Proof of the proposition 2.1. If $h \leq -r$ one has by (1.13), (1.14) $F = -Gh$ and (2.2) follows.

So, let us assume that $h > -r$, then - see figure 1 and (1.15) - one has

$$F(\zeta, h) = \frac{1}{2}x_1\psi_x^2(x_1) + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1}\psi_x^2(x)dx + \frac{1}{2}(1-y_1)\psi_x^2(y_1) - Gh, \quad (2.5)$$

where x_1, y_1 are given by the formulae (2.3), (2.4). Using the chain rule one has clearly with obvious notation for $x_{1\zeta}, y_{1\zeta}$:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1}\psi_x^2(x)dx\right) = -\frac{1}{2}\psi_x^2(x_1)x_{1\zeta} + \int_{x_1}^{y_1}\psi_x\psi_{x\zeta}(x)dx + \frac{1}{2}\psi_x^2(y_1)y_{1\zeta}.$$

Since

$$\psi_{x\zeta} = -\psi_{xx},$$

one obtains

$$A = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1}\psi_x^2(x)dx\right) = -\frac{1}{2}\psi_x^2(x_1)x_{1\zeta} + \frac{1}{2}\psi_x^2(x_1) - \frac{1}{2}\psi_x^2(y_1) + \frac{1}{2}\psi_x^2(y_1)y_{1\zeta}. \quad (2.6)$$

Differentiating (2.5) in ζ one gets

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}x_{1\zeta}\psi_x^2(x_1) + x_1\psi_x(x_1)\frac{\partial\psi_x(x_1)}{\partial\zeta} + A - \frac{1}{2}y_{1\zeta}\psi_x^2(y_1) + (1-y_1)\psi_x(y_1)\frac{\partial\psi_x(y_1)}{\partial\zeta}.$$

Using (2.6) it comes

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta}(\zeta, h) = x_1\psi_x(x_1)\frac{\partial\psi_x(x_1)}{\partial\zeta} + (1-y_1)\psi_x(y_1)\frac{\partial\psi_x(y_1)}{\partial\zeta} + \frac{1}{2}\psi_x^2(x_1) - \frac{1}{2}\psi_x^2(y_1). \quad (2.7)$$

Differentiating the equality

$$x_1\psi_x(x_1) = \psi(x_1)$$

we obtain:

$$x_{1\zeta}\psi_x(x_1) + x_1\frac{\partial\psi_x(x_1)}{\partial\zeta} = \psi_\zeta(x_1) + \psi_x(x_1)x_{1\zeta},$$

hence

$$\frac{\partial \psi_x(x_1)}{\partial \zeta} = \frac{\psi_\zeta(x_1)}{x_1} = -\frac{\psi_x(x_1)}{x_1}. \quad (2.8)$$

Similarly, differentiating

$$-(1 - y_1)\psi_x(y_1) = \psi(y_1),$$

one gets

$$\frac{\partial \psi_x(y_1)}{\partial \zeta} = \frac{\psi_x(y_1)}{(1 - y_1)}. \quad (2.9)$$

Combining (2.7), (2.8), (2.9) the first equality of (2.1) follows.

To get the second one, one proceeds similarly. One has this time

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{2} \int_{x_1}^{y_1} \psi_x^2(x) dx \right) = -\frac{1}{2} \psi_x^2(x_1) x_{1h} + \int_{x_1}^{y_1} \psi_x \psi_{xh}(x) dx + \frac{1}{2} \psi_x^2(y_1) y_{1h} \\ &= -\frac{1}{2} \psi_x^2(x_1) x_{1h} + \frac{1}{2} \psi_x^2(y_1) y_{1h} \end{aligned}$$

since $\psi_{xh} = \psi_{hx} = 0$ - recall that $\psi_h = 1$.

Differentiating (2.5) with respect to h one has

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial h}(\zeta, h) &= \frac{1}{2} x_{1h} \psi_x^2(x_1) + x_1 \psi_x(x_1) \frac{\partial \psi_x(x_1)}{\partial h} + B - \frac{1}{2} y_{1h} \psi_x^2(y_1) \\ &\quad + (1 - y_1) \psi_x(y_1) \frac{\partial \psi_x(y_1)}{\partial h} - G \\ &= x_1 \psi_x(x_1) \frac{\partial \psi_x(x_1)}{\partial h} + (1 - y_1) \psi_x(y_1) \frac{\partial \psi_x(y_1)}{\partial h} - G \end{aligned}$$

Proceeding as in (2.8), (2.9) one derives easily, recall that $\psi_h = 1$

$$\frac{\partial \psi_x(x_1)}{\partial h} = \frac{1}{x_1}, \quad \frac{\partial \psi_x(y_1)}{\partial h} = -\frac{1}{(1 - y_1)}$$

and the second equality of (2.1) follows. Note that all the above differentiations are justified easily. This completes the proof of proposition 2.1. □

Then we can show:

Theorem 1.1. *Under the assumption (1.1) the problem (1.8) or (1.13) admits a unique solution u_0 given by (1.15) with*

$$\zeta = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{G}{4} - r\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}} \quad (2.10)$$

and x_1, y_1 given by (2.3), (2.4)

Proof. Suppose $h > -r$ fixed. Then, by (2.1) one has

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) < 0 \text{ for } \zeta < \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) > 0 \text{ for } \zeta > \frac{1}{2}.$$

So, taking also (2.2) into account, for h fixed F admits a minimum for $\zeta = \frac{1}{2}$ and then

$$\psi_x(x_1) = -\psi_x(y_1).$$

Then, from (2.1) we get

$$\frac{\partial F}{\partial h}\left(\frac{1}{2}, h\right) = 2\psi_x(x_1) - G$$

and $F(\frac{1}{2}, h)$ has a unique minimum when

$$\psi_x(x_1) = \frac{G}{2}.$$

If θ denotes the measure of the angle Ox, OX_1 one has

$$\tan \theta = \frac{G}{2}.$$

Hence, it follows easily that

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}}, \quad \sin \theta = \frac{G}{2\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}},$$

and also

$$\zeta - x_1 = r \sin \theta, \quad \frac{Gx_1}{2} - h = r \cos \theta.$$

Taking $\zeta = \frac{1}{2}$ one derives that

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{rG}{2\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}}, \quad h = \frac{G}{4} - r\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}.$$

This completes the proof of the theorem. □

3. The case of two identical disks

We consider again a wire occupying in the underformed configuration the interval $\Omega = (0, 1)$. Then, we let roll on it two disks of the same radius r and the same weight G . We suppose that when a disk sits on the wire we can always fit another one i.e. we will assume

$$r < \frac{1}{6}. \quad (3.1)$$

Then, we would like to determine the equilibrium position of these two disks. Intuitively one could expect them to stabilize in the middle of the wire at the same level. However, surprisingly, this is not the case when their weight is too large, this is what we would like to analyse now.

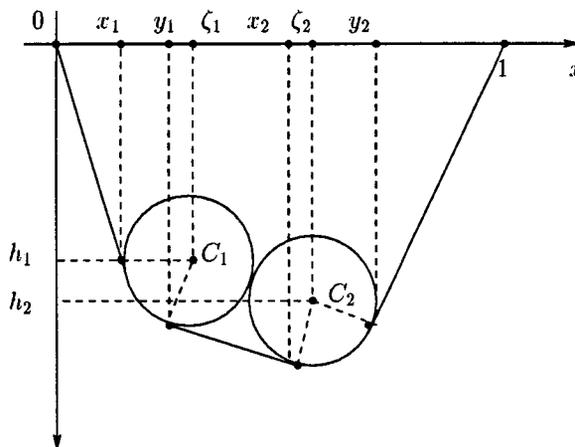


Figure 2

One will denote by

$$C_i = (\zeta_i, h_i) \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

the centers of the two disks. Moreover, we set for $i = 1, 2$

$$\psi^i = \psi^{\zeta_i h_i}(x) = h_i + \sqrt{r^2 - (x - \zeta_i)^2} \quad \forall x \in B(\zeta_i, r). \quad (3.3)$$

Then, an admissible deformation is a function $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.4)$$

and

$$u(x) \geq \psi^i(x) \quad \forall x \in B(\zeta_i, r), \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

A possible configuration is defined by (ζ_i, h_i) , $i = 1, 2$ and an admissible deformation. Its energy is given by

$$E = E(u; \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2. \quad (3.6)$$

As in the case of one disk we will suppose that

$$\zeta_i \in (r, 1 - r), \quad h_i \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

However, in the new situation that we are investigating the two disks cannot penetrate each other and one thus must have

$$(\zeta_2 - \zeta_1)^2 + (h_2 - h_1)^2 \geq 4r^2. \quad (3.8)$$

We will denote by D_r the set

$$D_r = \{(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) / (3.7), (3.8) \text{ hold}\} \quad (3.9)$$

and by $K(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ the convex set defined by

$$K(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \{u \in H_0^1(\Omega) / u(x) \geq \psi^i(x) \quad \forall x \in B(\zeta_i, r), i = 1, 2\}. \quad (3.10)$$

Then, the question we would like to adress is to find out if there exists a solution (u_0, ζ_0) of the problem:

$$\begin{cases} \xi_0 \in D_r, u_0 \in K(\xi_0) \\ E(u_0, \xi_0) \leq E(u, \xi) \quad \forall (u, \xi) \text{ such that } \xi \in D_r, u \in K(\xi). \end{cases} \quad (3.11)$$

Arguing as in the introduction for $\xi \in D_r$ one can introduce $u = u(\xi)$ the solution to the variational inequality

$$\begin{cases} u = u(\xi) \in K(\xi) \\ \int_{\Omega} u_x(v_x - u_x)(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\xi). \end{cases} \quad (3.12)$$

Then, clearly, if (u_0, ξ_0) is solution to (3.11) one has necessarily

$$u_0 = u(\xi_0)$$

(see the introduction). Thus, setting

$$F(\xi) = E(u, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2, \quad (3.13)$$

where

$$u = u(\xi) = u(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2),$$

the problem (3.11) reduces to find a solution to

$$\begin{cases} \xi_0 \in D_r, \\ F(\xi_0) \leq F(\xi) \quad \forall \xi \in D_r. \end{cases} \quad (3.14)$$

So, we have to minimize F on D_r .

Remark 3.1. As in the case of one disk the set where we are minimizing F is not compact. So, even if F is continuous one cannot conclude directly to the existence of a minimum.

It is easy to show that $u(\xi)$ is obtained as in proposition one, that is to say its graph is obtained by drawing the tangent to the circles passing through 0, 1 and by drawing the tangent to both circles (see figure 2 and recall that when $u(x) \neq \psi^i(x)$ then $u_{xx} = 0$).

Let us first start by the following proposition:

Proposition 3.1. *Let us assume F given by (3.13) defined on \mathbb{R}^4 i.e. when the disks eventually interpenetrate each other. Then for $h_i \geq -r$ $i = 1, 2$, F is differentiable and with the notation of the figure 2 it holds:*

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{2} \{ \psi_x^1(y_1)^2 - \psi_x^1(x_1)^2 \}, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{2} \{ \psi_x^2(y_2)^2 - \psi_x^2(x_2)^2 \}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial h_1} = \psi_x^1(x_1) - \psi_x^1(y_1) - G, \quad \frac{\partial F}{\partial h_2} = \psi_x^2(x_2) - \psi_x^2(y_2) - G. \quad (3.16)$$

(Recall that ψ^i is given by (3.3)).

Proof. It is an easy adaptation of the proof of proposition 2.1. To convince breafly the reader let us give a short formal proof. Consider for instance the first formula (3.15). One has

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2.$$

Differentiating in ζ_1 and assuming that one can differentiate under the integral it comes

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \int_{\Omega} u_x u_{x\zeta_1}(x) dx.$$

Since $u \equiv 0$ on the boundary of Ω one has also $u_{\zeta_1} = 0$ there. Thus integrating by parts it comes

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = - \int_{\Omega} u_{xx} u_{\zeta_1}(x) dx = - \int_{x_1}^{y_1} \psi_{xx}^1 \psi_{\zeta_1}^1(x) dx$$

since $u_{xx} = 0$ outside of the coincidence set and $\psi_{\zeta_1}^2 = 0$.

Using the fact that

$$\psi_{\zeta_1}^1 = -\psi_x^1,$$

it comes

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) &= \int_{x_1}^{y_1} \psi_{xx}^1 \psi_x^1 dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \psi_x^1(y_1)^2 - \psi_x^1(x_1)^2 \} \end{aligned}$$

this complete the proof of the proposition

□

Let us then prove the following lemma:

Lemma 3.1. *To minimize F on D_r one can restrict ourselves to the case where*

$$-r < h_i < C, \quad i = 1, 2 \tag{3.17}$$

C being some constant.

Proof. Suppose that $h_1, h_2 \leq -r$. Since the corresponding u vanishes one has

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = -Gh_1 - Gh_2 \geq 2rG. \tag{3.18}$$

Consider then the configuration where

$$h_1 = h_2 = h, \quad \zeta_1 = \frac{1}{2} - r, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} + r$$

i.e. the two disks are sitting at the same level in the middle of the wire. One has (see (3.16))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} F\left(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h\right) &= \left(\frac{\partial F}{\partial h_1} + \frac{\partial F}{\partial h_2}\right)\left(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h\right) \\ &= 2(\psi_x^1(x_1) - G) \end{aligned}$$

(recall that $\psi_x^1(x_1) = -\psi_x^2(y_2)$, $\psi_x^1(y_1) = \psi_x^2(x_2) = 0$).

So, $F(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h)$ has a strict minimum for $\psi_x^1(x_1) = G$ i.e. for a h such necessarily $h > -r$. For this h one has

$$F\left(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h\right) < F\left(\frac{1}{2} - r, -r, \frac{1}{2} + r, -r\right) = 2Gr.$$

So, by (3.18) one can assume

$$h_1 > -r \quad \text{or} \quad h_2 > -r.$$

Suppose for instance

$$h_1 > -r$$

the case $h_2 > -r$ being similar. Suppose also without loss the generality that $\zeta_1 \leq \frac{1}{2}$. If $h_2 \leq -r$ then the second disk does not touch the wire but then, moving it on the right of the first disk until it touches the first disk and the wire (see figure 3) lowers its energy. We can thus assume that both h_1, h_2 are greater than $-r$.

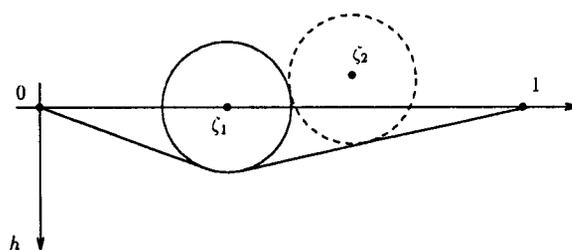


Figure 3

(Note that one can fit the second disk on the right of the first by (3.1)). Next, due to the Poincaré inequality, it holds

$$\begin{aligned}
F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2 \\
&\geq \int_{\Omega} u^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2 \\
&> 2rh_i^2 - Gh_1 - Gh_2, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

since $u(x) \geq \psi^i(x) > h_i$ on $B(\zeta_i, r)$.

This implies

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \geq r(h_1^2 + h_2^2) - Gh_1 - Gh_2$$

and F goes to $+\infty$ when $h_1^2 + h_2^2$ does. This completes the proof of the lemma. \square

Then we have:

Lemma 3.2. *To minimize F on D_r one can restrict ourselves to the case where (3.17) holds and to the case where the constraint (3.8) is saturated i.e. to the case*

$$(\zeta_2 - \zeta_1)^2 + (h_2 - h_1)^2 = 4r^2. \quad (3.19)$$

Proof. Suppose that we are in the situation where (3.17) holds and where (3.19) is not saturated. Then, if one of the derivatives in (3.15), (3.16) does not vanish moving one disk or the other around will decrease the energy. Assuming all derivatives equal to 0 forces

$$\psi_x^1(x_1) = -\psi_x^2(y_2) = G = \pm\alpha$$

which is impossible. This completes the proof of the lemma. \square

Then we can prove:

Theorem 3.1. *Under the assumption (3.1) the problem (3.11) or (3.14) admits a solution.*

If $G \leq \sqrt{2}$, F admits two minima given by

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - r, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} + r, \quad h_1 = h_2 = G\left(\frac{1}{2} - r\right) - r\sqrt{1 + G^2} \quad (3.20)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} - r, \quad \zeta_1 = \frac{1}{2} + r, \quad h_1 = h_2 = G\left(\frac{1}{2} - r\right) - r\sqrt{1 + G^2}; \quad (3.21)$$

this corresponds to the configuration of two disks sitting at the same level (see figure 5).

If $G > \sqrt{2}$, F admits four minima given by

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sqrt{G^2-1}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{G^2-2}}{G} \right\}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} + \frac{r}{\sqrt{G^2-1}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{G^2-2}}{G} \right\} \quad (3.22)$$

$$h_1 = \frac{G}{2} - \frac{rG}{\sqrt{G^2-1}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{G^2-2}}{G} \right\} - r\sqrt{1+G^2},$$

$$h_2 = \frac{G}{2} - \frac{rG}{\sqrt{G^2-1}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{G^2-2}}{G} \right\} - r\sqrt{1+G^2} \quad (3.23)$$

and the points obtained by symmetry along the axis $x = \frac{1}{2}$ and exchanging the roles of $\zeta_1, \zeta_2, h_1, h_2$ (see figure 6).

So, in this case the two disks do not remain at the same level and one has two possible symmetric deformations of the wire

Proof. Consider two disks such that

$$h_1, h_2 \text{ are fixed, } \zeta_2 = \zeta_1 + \delta$$

where δ is some constant and suppose that (3.17), (3.19) holds. One has

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} F(\zeta_1, h_1, \zeta_1 + \delta, h_2) &= \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} \right) (\zeta_1, h_1, \zeta_1 + \delta, h_2) \\ &= \frac{1}{2} \{ \psi_x^2(y_2)^2 - \psi_x^1(x_1)^2 \}. \end{aligned}$$

Thus, F as a function of ζ_1 , admits a strict minimum when

$$\psi_x^2(y_2) = -\psi_x^1(x_1).$$

Thus for such a position of the disks it is enough to look for a minimum of F when the two disks are tangent to the straight lines

$$h = x\psi_x^1(x_1), \quad h = -(x-1)\psi_x^1(x_1)$$

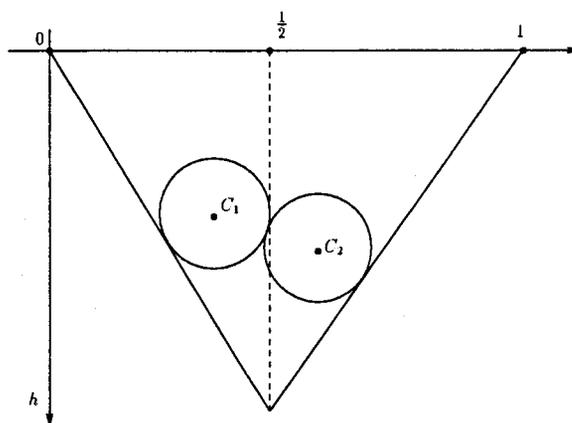


Figure 4

Assuming C_1 on the left of C_2 (see figure 4) this imposes to C_2 to be on the right of the line $x = \frac{1}{2}$ and C_1 on the left i.e. this imposes

$$\zeta_1 + \delta \geq \frac{1}{2}, \quad \zeta_2 - \delta \leq \frac{1}{2}$$

and thus since $\delta \leq 2r$

$$\zeta_1 \geq \frac{1}{2} - \delta > r, \quad \zeta_2 \leq \frac{1}{2} + \delta < 1 - r$$

(see(3.1)). Let a, b be two numbers such that

$$r < a < \frac{1}{2} - \delta, \quad \frac{1}{2} + \delta < b < 1 - r.$$

It is clear from above that to minimize F on D_r it is enough to minimize it on the set of ζ_i, h_i satisfying (3.19) and

$$-r < h_i < C, \quad a \leq \zeta_i \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (3.24)$$

Thus one has to minimize F on a compact set. Now, clearly F is continuous on this set (even Lipschitz continuous thanks to the proposition 3.1 since the partial derivatives are uniformly bounded) and thus F admits a minimum. By what is above the minimum of F is achieved in the interior of the set defined by (3.24) thus minimizing F under the constraint (3.19) at a minimum there exists a Lagrange

multiplier λ such that

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \psi_x^1(x_1)^2) = 2\lambda(\zeta_1 - \zeta_2), \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{2}(\psi_x^2(y_2)^2 - \alpha^2) = -2\lambda(\zeta_1 - \zeta_2), \\ \frac{\partial F}{\partial h_1} = \psi_x^1(x_1) - \alpha - G = 2\lambda(h_1 - h_2), \\ \frac{\partial F}{\partial h_2} = \alpha - \psi_x^2(y_2) - G = -2\lambda(h_1 - h_2), \end{cases} \quad (3.25)$$

where we have set $\alpha = \psi_x^1(y_1) = \psi_x^2(x_2) = \frac{h_1 - h_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$.

Adding the two first equations and the two last ones, one deduces easily

$$\psi_x^1(x_1) = -\psi_x^2(y_2) = G. \quad (3.26)$$

Thus one derives also reporting this in (3.25)

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - G^2) = -2\lambda(\zeta_2 - \zeta_1), \quad -\alpha = 2\lambda(h_1 - h_2).$$

Suppose $h_1 - h_2 \neq 0$. Then, since $\lambda = -\frac{\alpha}{2(h_1 - h_2)}$ one gets

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - G^2) = -1 \iff \alpha^2 = G^2 - 2.$$

Since $\alpha \neq 0$ this is only possible when

$$\sqrt{2} < G. \quad (3.27)$$

Thus for $G \leq \sqrt{2}$ one has $h_1 = h_2$ and the two disks are tangent to the straight line of slope G and $-G$.

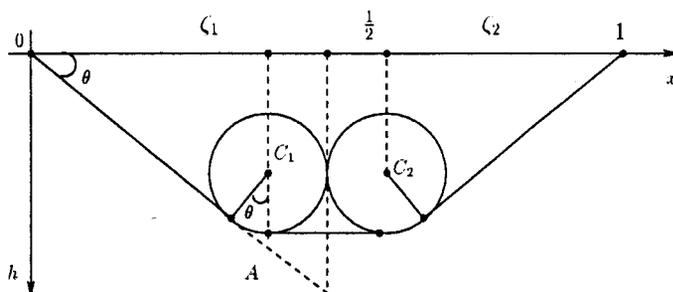


Figure 5

Since a minimum is known to exist this is the only possibility. Denoting by d the distance AC_1 (see figure 5), one has clearly

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - r, \quad \frac{r}{d} = \cos \theta, \quad \tan \theta = G, \quad \frac{h+d}{\zeta_1} = G. \quad (3.28)$$

Since $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+G^2}}$ one derives easily (3.20), (3.21).

If now $G > \sqrt{2}$ one has

$$\alpha = \pm \sqrt{G^2 - 2}$$

and up to a symmetry through the axis $x = \frac{1}{2}$ the position of the disks is given by the figure below:

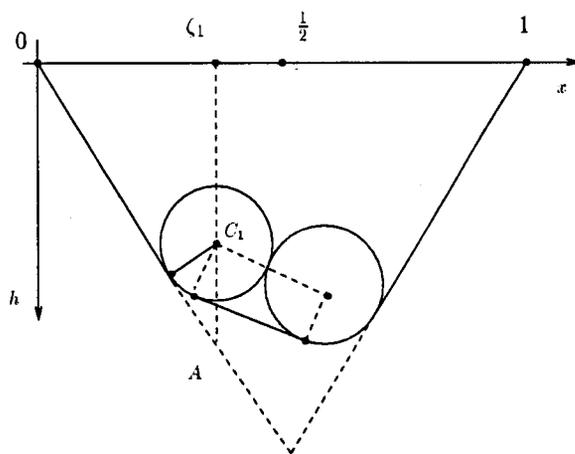


Figure 6

Arguing as in (3.28) one derives easily

$$d = r\sqrt{1+G^2}, \quad h_1 = G\zeta_1 - r\sqrt{1+G^2}$$

$$h_2 = G(1 - \zeta_2) - r\sqrt{1 + G^2}, \quad h_1 - h_2 = \sqrt{G^2 - 2}(\zeta_1 - \zeta_2).$$

Noting θ' the angles such that: $\tan \theta' = \sqrt{G^2 - 2} = \alpha$ one has

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 2r \cos \theta' = \frac{2r}{\sqrt{G^2 - 1}}.$$

It is then not difficult to derive (3.22), (3.23). □

ACKNOWLEDGEMENT

The work of the second author has been supported by the Swiss National Science Foundation under the contract #21 - 49278.96.

REFERENCES

- [A] A. Aissani: Thesis. University of Metz - in preparation.
- [BC] J. Bemelmans - M. Chipot: On a variational problem for an elastic membrane supporting a heavy ball. *Cal. Var* 3, 1995, p 447-473.
- [C] M. Chipot: Variational inequalities and fluid flows in porous media. Applied Math Sciences Series #52 Springer Verlag, 1984.
- [EF] C. M. Elliott - A. Friedman: The contact set of a rigid body partially supported by a membrane. *Nonlin. Anal.* 10, 1986, p 251-276.
- [KS] D. Kinderlehrer - G. Stampacchia: An introduction to variational inequalities and their applications. Acad. Press, 1980.
- [F] S. Fouad: Thesis. University of Metz, 1999.

CHAPITRE 3

SUR LA DÉFORMATION D'UN FIL
ÉLASTIQUE PAR TROIS DISQUES
RIGIDES

1. Introduction

Dans ce qui suit, on propose d'étudier la position d'équilibre de trois disques identiques rigides ($D_i, 1 \leq i \leq 3$) roulant sur un fil élastique.

Comme dans le cas de deux disques identiques, on se place dans un repère orthonormal dont l'axe des ordonnées est dirigé vers le bas. On représente par l'intervalle $\Omega = (0, 1)$ la position initiale du fil élastique (voir figure 1).

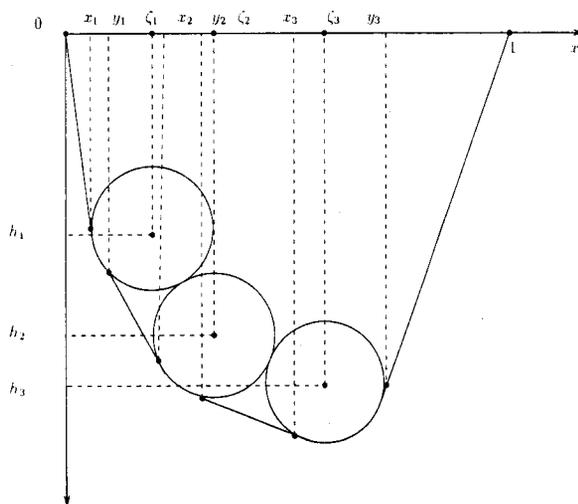


Figure 1

Ces trois disques sont de poids G et de rayon r chacun, soient $(\zeta_i, h_i), 1 \leq i \leq 3$ les coordonnées du centre du disque D_i , on suppose qu'il n'y a pas d'interpénétration entre les disques, autrement dit, ces coordonnées vérifient les inéquations suivantes

$$(h_2 - h_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 \geq 4r^2, \quad (1.1)$$

$$(h_3 - h_2)^2 + (\zeta_3 - \zeta_2)^2 \geq 4r^2, \quad (1.2)$$

$$(h_3 - h_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2 \geq 4r^2. \quad (1.3)$$

On suppose également que ces trois disques se déplacent sur le fil élastique en gardant un mouvement libre entre les points 0 et 1, pour cela on suppose

$$r < \zeta_i < 1 - r, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.4)$$

avec

$$0 < r < \frac{1}{10}. \quad (1.5)$$

Il est bien clair que la position d'équilibre des trois disques est bien déterminée par les coordonnées des centres.

Soit u la fonction décrivant la déformation du fil, elle satisfait donc la condition suivante

$$\begin{aligned} u &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

L'énergie du système est donnée sous la forme

$$E(u; (\zeta_i, h_i), 1 \leq i \leq 3) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3. \quad (1.7)$$

Comme dans le cas de deux disques identiques, il est nécessaire de noter que la fonction u vérifie

$$u(x) \geq \psi^i(x), \quad \forall x \in B(\zeta_i, r), \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.8)$$

avec

$$\psi^i(x) = h_i + \sqrt{r^2 - (x - \zeta_i)^2}, \quad \forall x \in B(\zeta_i, r). \quad (1.9)$$

2. Formulation du problème

la position d'équilibre de ces trois disques correspond à l'énergie minimale du système, on procèdera donc de la même manière que dans le cas de deux disques identiques.

Soit D_r l'ensemble donné par

$$D_r = \{(\zeta_i, h_i), 1 \leq i \leq 3 \mid (1.1) - (1.4) \text{ sont vérifiées}\}. \quad (2.1)$$

On pose $\xi = (\zeta_i, h_i; 1 \leq i \leq 3)$, on désigne par $K(\xi)$ l'ensemble convexe défini par

$$K(\xi) = \{u \in H_0^1(\Omega) / u(x) \geq \psi^i(x) \forall x \in B(\zeta_i, r), 1 \leq i \leq 3\}. \quad (2.2)$$

On voudrait savoir s'il existe une solution (u_0, ξ_0) au problème:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \xi_0 \in D_r, u_0 \in K(\xi_0) \\ E(u_0, \xi_0) \leq E(u, \xi) \quad \forall (u, \xi) \text{ tel que } \xi \in D_r, u \in K(\xi). \end{cases} \quad (2.3)$$

Par analogie au cas de deux disques, on peut donc introduire pour $\xi \in D_r$ la solution $u = u(\xi)$ de l'inéquation variationnelle:

$$\begin{cases} u = u(\xi) \in K(\xi) \\ \int_{\Omega} u_x(v_x - u_x)(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\xi). \end{cases} \quad (2.4)$$

Alors, si (u_0, ξ_0) est solution de (2.3) on a

$$u_0 = u(\xi_0).$$

Ainsi, on pose

$$F(\xi) = E(u, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x)dx - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3 \quad (2.5)$$

où

$$u = u(\xi),$$

et le problème se réduit à trouver une solution à

$$\begin{cases} \xi_0 \in D_r \\ F(\xi_0) \leq F(\xi) \quad \forall \xi \in D_r. \end{cases} \quad (2.6)$$

Afin de déterminer le minimum de l'énergie, on va suivre le même procédé que pour deux disques identiques, c'est à dire, on va d'abord démontrer que les conditions (1.1) et (1.2) sont saturées, ensuite on démontrera que la minimisation de l'énergie se réduit à une minimisation sur un ensemble compact et du fait que la fonction d'énergie est continue, on peut conclure à l'existence d'un minimum sur ce compact et en tenant compte des contraintes qui seront vérifiées par les coordonnées (ζ_i, h_i) $1 \leq i \leq 3$, on déterminera explicitement le minimum de l'énergie en appliquant le théorème de Lagrange (i.e. multiplicateurs de Lagrange).

Dans le cas de trois disques, on a trois ensembles de coïncidence correspondants à l'inéquation variationnelle (2.4), ces ensembles sont donnés par les intervalles : $\Lambda_1 = [x_1, y_1]$, $\Lambda_2 = [x_2, y_2]$ et $\Lambda_3 = [x_3, y_3]$ (voir figure 1) tels que

$$x_1 = \zeta_1 - \frac{r^2 \zeta_1 + r h_1 \sqrt{h_1^2 + \zeta_1^2 - r^2}}{h_1^2 + \zeta_1^2}, \quad (2.7)$$

$$y_1 = \zeta_1 + r \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}}, \quad (2.8)$$

$$x_2 = \zeta_2 + r \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}}, \quad (2.9)$$

$$y_2 = \zeta_2 + r \frac{h_2 - h_3}{\sqrt{(h_2 - h_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2}}, \quad (2.10)$$

$$x_3 = \zeta_3 + r \frac{h_2 - h_3}{\sqrt{(h_2 - h_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2}}. \quad (2.11)$$

$$y_3 = \zeta_3 + \frac{r^2(1 - \zeta_3) + rh_3\sqrt{h_3^2 + (1 - \zeta_3)^2 - r^2}}{h_3^2 + (1 - \zeta_3)^2}. \quad (2.12)$$

Remarque 2.1.

Pour x_1 et y_3 on peut les déduire facilement par analogie au cas d'un disque, par ailleurs, on détermine x_2, x_3, y_1 et y_2 en se référant directement à la figure 1 (interprétation géométrique).

Remarque 2.2.

Il n'est pas toujours le cas d'avoir trois ensembles de coïncidence, en effet, on peut aussi avoir le cas où les trois disques se positionnent de sorte que l'un des trois disques soit sur les deux autres. Dans cette présente étude, on va seulement traiter le cas où on a trois ensembles de coïncidence, autrement dit, on va déterminer l'énergie minimale de la configuration correspondante au cas où les trois disques touchent le fil élastique. On supposera donc dans ce qui suit que $\Lambda_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq 3$.

3. Existence d'un minimum

Avant de procéder au calcul des dérivées de la fonction d'énergie, énonçons la proposition suivante

Proposition 3.1. *Avec les notations déjà posées précédemment, pour $h_i \geq -r$, $1 \leq i \leq 3$ la fonction d'énergie est donnée par*

$$F = \frac{h_1}{2} \psi_x^1(x_1) - \frac{h_3}{2} \psi_x^3(y_3) + \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{\zeta_2 - \zeta_1} + \frac{1}{2} \frac{(h_3 - h_2)^2}{\zeta_3 - \zeta_2} + \frac{r}{4} \log \frac{r + y_3 - \zeta_3}{r - y_3 + \zeta_3} - \frac{r}{4} \log \frac{r + x_1 - \zeta_1}{r - x_1 + \zeta_1} - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3. \quad (3.1)$$

Preuve. On sait que

$$\text{pour } u(x) \neq \psi^i(x), \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{on a } u_{xx}(x) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3, \\
&= -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{y_1} \psi_{xx}^1(x) \psi^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_2}^{y_2} \psi_{xx}^2(x) \psi^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_3}^{y_3} \psi_{xx}^3(x) \psi^3(x) dx \\
&\quad - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3, \\
&= -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{y_1} \frac{-r^2}{(r^2 - (x - \zeta_1)^2)^{\frac{3}{2}}} (h_1 + \sqrt{r^2 - (x - \zeta_1)^2}) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{x_2}^{y_2} \frac{-r^2}{(r^2 - (x - \zeta_2)^2)^{\frac{3}{2}}} (h_2 + \sqrt{r^2 - (x - \zeta_2)^2}) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{x_3}^{y_3} \frac{-r^2}{(r^2 - (x - \zeta_3)^2)^{\frac{3}{2}}} (h_3 + \sqrt{r^2 - (x - \zeta_3)^2}) dx - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3, \\
&= -\frac{h_1}{2} \{ \psi_x^1(y_1) - \psi_x^1(x_1) \} - \frac{h_2}{2} \{ \psi_x^2(y_2) - \psi_x^2(x_2) \} - \frac{h_3}{2} \{ \psi_x^3(y_3) - \psi_x^3(x_3) \} \\
&\quad + \frac{r}{4} \left[\log \frac{r+x-\zeta_1}{r-x+\zeta_1} \right]_{x_1}^{y_1} + \frac{r}{4} \left[\log \frac{r+x-\zeta_2}{r-x+\zeta_2} \right]_{x_2}^{y_2} \\
&\quad + \frac{r}{4} \left[\log \frac{r+x-\zeta_3}{r-x+\zeta_3} \right]_{x_3}^{y_3} - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

En tenant compte des formules (2.8) - (2.11) ou en se référant directement à la figure 1, on peut trouver facilement que

$$\psi_x^1(y_1) = \psi_x^2(x_2) = \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1}, \tag{3.3}$$

et

$$\psi_x^2(y_2) = \psi_x^3(x_3) = \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2}, \tag{3.4}$$

d'où on a

$$F = \frac{h_1}{2} \psi_x^1(x_1) - \frac{h_3}{2} \psi_x^3(y_3) + \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{\zeta_2 - \zeta_1} + \frac{1}{2} \frac{(h_3 - h_2)^2}{\zeta_3 - \zeta_2} + \frac{r}{4} \log \frac{r + y_3 - \zeta_3}{r - y_3 + \zeta_3}$$

$$-\frac{r}{4} \log \frac{r+x_1-\zeta_1}{r-x_1+\zeta_1} - Gh_1 - Gh_2 - Gh_3.$$

□

Proposition 3.2. *La fonction de l'énergie F considérée comme une fonction sur \mathbb{R}^6 est différentiable pour $h_i \geq -r$, $1 \leq i \leq 3$ et ses dérivées partielles sont données par*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \psi_x^1(x_1)^2, \\ \frac{\partial F}{\partial h_1} &= -\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} + \psi_x^1(x_1) - G, \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} \right)^2, \\ \frac{\partial F}{\partial h_2} &= \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} - \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} - G, \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta_3} &= \frac{1}{2} \psi_x^3(y_3)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} \right)^2, \\ \frac{\partial F}{\partial h_3} &= \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} - \psi_x^3(y_3) - G. \end{aligned}$$

Preuve. Pour les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}$, $\frac{\partial F}{\partial \zeta_3}$, $\frac{\partial F}{\partial h_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial h_3}$ on les déduit facilement par analogie au cas de deux disques identiques (voir chapitre 2), quant aux dérivées $\frac{\partial F}{\partial \zeta_2}$ et $\frac{\partial F}{\partial h_2}$ on les calcule facilement à partir de la formule de l'énergie (3.1).

□

Avant de procéder à la détermination des coordonnées des centres des disques dans l'état d'équilibre, il nous faut d'abord établir un résultat préliminaire:

Lemme 3.1. *Le minimum de l'énergie est atteint pour*

$$\psi_x^1(x_1) = -\psi_x^3(y_3). \quad (3.5)$$

Preuve. On suppose que: $h_1, h_2,$ et h_3 sont fixes,

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \delta. \quad \zeta_3 = \zeta_2 + \gamma.$$

δ et γ sont constantes.

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_1 + \delta, h_2, \zeta_1 + \delta + \gamma, h_3) &= \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_3} \right)(\zeta_1, h_1, \zeta_1 + \delta, h_2, \zeta_1 + \delta + \gamma, h_3) \\ &= \frac{1}{2}(\psi_x^3(y_3)^2 - \psi_x^1(x_1)^2). \end{aligned}$$

Puisque le choix de ζ_1 est arbitraire, on en déduit donc que dans le cas d'équilibre (3.5) est vérifiée.

□

Lemme 3.2. *Pour minimiser F sur D_r , il suffit de se restreindre à un compact tel que*

$$(i) \quad -r < h_i < C,$$

$$(ii) \quad M_1 \leq \zeta_i \leq M_2,$$

$$1 \leq i \leq 3.$$

Preuve.

(i) Si $h_i \leq -r$, $1 \leq i \leq 3$ alors on a

$$F(\zeta_i, h_i; 1 \leq i \leq 3) = -Gh_1 - Gh_2 - Gh_3 \geq 3Gr. \quad (3.6)$$

On considère le cas où

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - \rho, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2} + \rho, \quad h_1 = h_3 = h, \quad h_2 = h + \sqrt{4r^2 - \rho^2},$$

(ρ : constante)

Ce cas correspond à la figure où le premier et le troisième disque sont au même niveau et le second se trouve au milieu et à un niveau plus bas que les deux autres (voir figure 2).

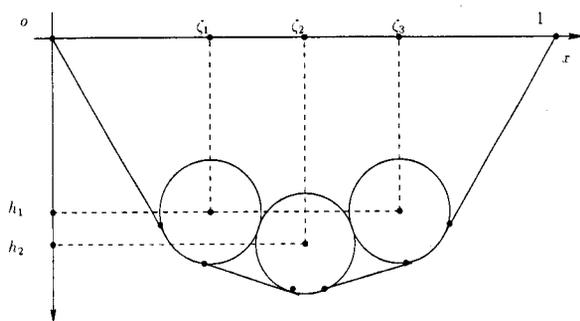


Figure 2

On a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial h} F\left(\frac{1}{2} - \rho, h, \frac{1}{2}, h + \sqrt{4r^2 - \rho^2}, \frac{1}{2} + \rho, h\right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial h_1} + \frac{\partial F}{\partial h_2} + \frac{\partial F}{\partial h_3}\right)\left(\frac{1}{2} - \rho, h, \frac{1}{2}, h + \sqrt{4r^2 - \rho^2}, \frac{1}{2} + \rho, h\right) = 2\psi_x^1(x_1) - 3G. \end{aligned}$$

On en déduit que $F\left(\frac{1}{2} - \rho, h, \frac{1}{2}, h + \sqrt{4r^2 - \rho^2}, \frac{1}{2} + \rho, h\right)$ admet un minimum strict pour

$$\psi_x^1(x_1) = \frac{3G}{2}$$

et ceci pour $h > -r$.

Il est bien clair que pour ce h on a

$$F\left(\frac{1}{2} - \rho, h, \frac{1}{2}, h + \sqrt{4r^2 - \rho^2}, \frac{1}{2} + \rho, h\right) < F\left(\frac{1}{2} - 2r, -r, \frac{1}{2}, -r, \frac{1}{2} + 2r, -r\right) = 3Gr.$$

De (3.6) on peut conclure que

$$h_1 > -r \quad \vee \quad h_2 > -r \quad \vee \quad h_3 > -r.$$

On suppose que

$$h_1 > -r,$$

(les autres cas sont similaires).

Sans perdre de généralité on suppose que

$$\zeta_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Si $h_2 \leq -r$, alors le disque D_2 ne touche pas le fil, dans ce cas on va le laisser rouler jusqu'à ce qu'il touche le disque D_1 et le fil. ainsi l'énergie diminue et donc on peut supposer que

$$h_1 > r, \quad h_2 > -r.$$

Si $h_3 \leq -r$, alors le disque D_3 ne touche pas le fil, et de même, on laisse rouler ce dernier jusqu'à ce qu'il touche le disque D_2 et le fil, dans ce cas aussi l'énergie diminue, on peut finalement supposer que

$$h_i > r, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

(Notons que le disque D_2 (resp D_3) peut rouler jusqu'à ce qu'il touche le fil et le disque D_1 (resp D_2) d'après la condition (1.5)).

D'autre part, on peut facilement démontrer que $h_i < \infty$, $1 \leq i \leq 3$ en appliquant l'inégalité de Poincaré (voir lemme 3.1 du chapitre 2), d'où (i) découle.

Maintenant on suppose que h_1, h_2, h_3 sont fixes,

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \delta, \quad \zeta_3 = \zeta_2 + \gamma.$$

(δ, γ sont deux constantes)

D'après le lemme 3.1, les trois disques sont en état d'équilibre pour

$$\psi_x^1(x_1) = -\psi_x^3(y_3),$$

ceci nous entraîne à déduire que

$$\zeta_1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \zeta_3 \geq \frac{1}{2}.$$

En combinant (1.5) et le fait que

$$\delta \leq 2r, \quad \gamma \leq 2r,$$

on aura

$$\zeta_1 \geq \frac{1}{2} - \delta - \gamma > r, \quad \zeta_3 \leq \frac{1}{2} + \delta + \gamma < 1 - r.$$

Puisque

$$\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3,$$

on peut donc déduire facilement l'existence de M_1, M_2 tels que

$$M_1 \leq \zeta_i \leq M_2, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

où

$$\frac{1}{2} - \delta - \gamma > M_1 > r,$$

et

$$\frac{1}{2} + \delta + \gamma < M_2 < 1 - r.$$

□

Lemme 3.3. *L'énergie du système diminue si les contraintes (1.1) et (1.2) sont saturées i.e.*

$$(h_2 - h_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 = 4r^2, \quad (3.7)$$

$$(h_3 - h_2)^2 + (\zeta_3 - \zeta_2)^2 = 4r^2. \quad (3.8)$$

Preuve. On procèdera en deux étapes.

Première étape

On considère les disques D_1 et D_3 fixes et on fait translater le disque D_2 (voir figure 3).

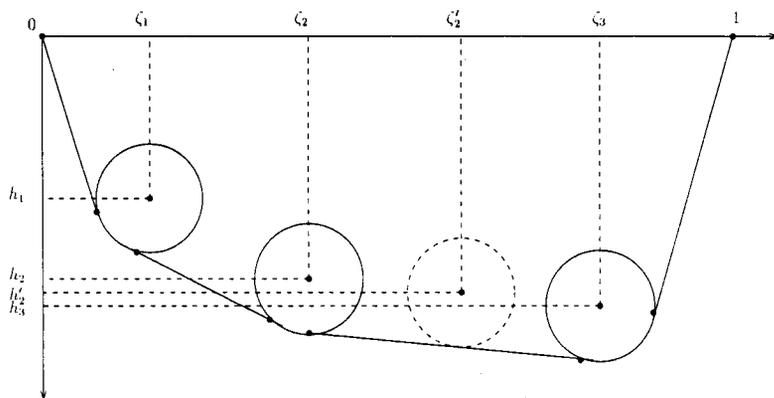


Figure 3

Soit $m(\zeta'_2, h'_2)$ un point du segment $[\eta_2\eta_3]$ tel que

$\zeta'_2 > \zeta_2$, η_2 et η_3 sont deux points de coordonnées (ζ_2, h_2) , (ζ_3, h_3) respectivement. On va démontrer que

$$F' = F(\zeta_1, h_1, \zeta'_2, h'_2, \zeta_3, h_3) < F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2, \zeta_3, h_3). \quad (3.9)$$

On a

$$h'_2 = h_3 - \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2}(\zeta_3 - \zeta'_2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial \zeta'_2} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_2} + \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} \frac{\partial F}{\partial h_2} \right) (\zeta_1, h_1, \zeta'_2, h'_2, \zeta_3, h_3) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{h'_2 - h_1}{\zeta'_2 - \zeta_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_3 - h'_2}{\zeta_3 - \zeta'_2} \right)^2 + \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} \left(\frac{h'_2 - h_1}{\zeta'_2 - \zeta_1} - \frac{h_3 - h'_2}{\zeta_3 - \zeta'_2} - G \right). \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{h_3 - h'_2}{\zeta_3 - \zeta'_2} = \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2},$$

alors on a $\frac{\partial F'}{\partial \zeta'_2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h'_2 - h_1}{\zeta'_2 - \zeta_1} - \frac{h_3 - h'_2}{\zeta_3 - \zeta'_2} \right)^2 - G \frac{h_3 - h'_2}{\zeta_3 - \zeta'_2} < 0$. (car $h_3 > h'_2$).

On en déduit donc que (3.9) est bien vérifiée.

Deuxième étape:

On peut conclure de la première étape que l'énergie diminue quand les disques D_2 et D_3 se touchent (rapprochement optimal). Pour cette étape, on va considérer que ces deux disques sont fixes et on fera translater dans ce cas le disque D_1 (voir figure 4).

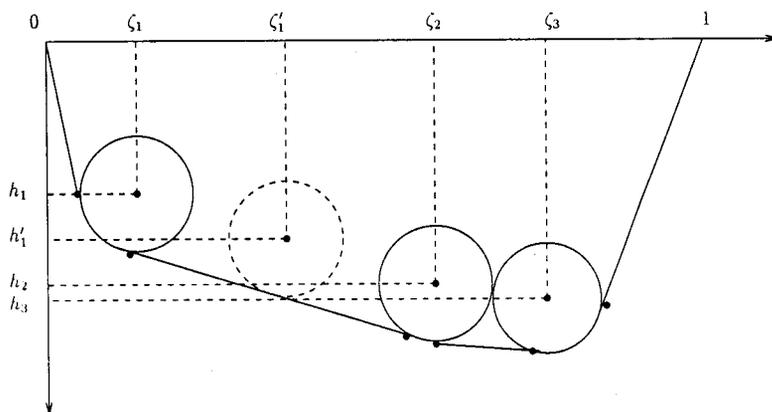


Figure 4

Soit $n(\zeta'_1, h'_1)$ un point du segment $[\eta_1\eta_2]$ tel que

$\zeta'_1 > \zeta_1$ et η_1 est le point représenté par les coordonnées (ζ_1, h_1) .

On va démontrer que

$$F'' = F(\zeta'_1, h'_1, \zeta_2, h_2, \zeta_3, h_3) < F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2, \zeta_3, h_3). \quad (3.10)$$

On a

$$\begin{aligned} h'_1 &= h_2 - \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1}(\zeta_2 - \zeta'_1), \\ \frac{\partial F''}{\partial \zeta'_1} &= \left(\frac{\partial E}{\partial \zeta_1} + \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \frac{\partial E}{\partial h_1} \right) (\zeta'_1, h'_1, \zeta_2, h_2, \zeta_3, h_3) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} - \psi_x^1(x'_1) \right)^2 - G \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} < 0, \end{aligned}$$

d'où (3.10) est vérifiée.

On en déduit donc de la première et seconde étape que dans le cas où (3.7), (3.8) sont vérifiées, l'énergie du système décroît.

□

4. Calcul du minimum de l'énergie

Maintenant, on peut déterminer explicitement le minimum de l'énergie. Enonçons la proposition

Proposition 4.1. *La fonction de l'énergie F admet un minimum donné par les coordonnées (ζ_i, h_i) , $1 \leq i \leq 3$*

(i) Si $G \neq \frac{2\sqrt{3}}{27}(2\sqrt{34} - 1)$, on a

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - \frac{2r}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2} + \frac{2r}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$h_1 = h_3 = \frac{3G}{4} - \frac{3Gr}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{r}{2}\sqrt{4+9G^2},$$

$$h_2 = \frac{3G}{4} + \frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}}(2\alpha - 3G) - \frac{r}{2}\sqrt{4+9G^2},$$

où α est la racine positive du polynôme:

$$x^3 + x\left(2 - \frac{9}{4}G^2\right) - G.$$

Dans ce cas la position d'équilibre des trois disques est représentée par la figure 2.

(ii) Si $G = \frac{2\sqrt{3}}{27}(2\sqrt{34} - 1)$, on a

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{2} - r, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2} + r, \\ h_1 = h_3 &= \frac{3G}{4} - \frac{3Gr}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{4 + 9G^2}, \\ h_2 &= \frac{3G}{4} + r\sqrt{3} - \frac{3Gr}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{4 + 9G^2}.\end{aligned}$$

Dans ce cas, les trois disques se positionnent comme dans la figure 5

Remarque 4.1. Dans les deux cas (i), (ii), il ne faut pas omettre les points obtenus par la symétrie par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$.

Preuve de la proposition. Puisque on a supposé que (3.7), (3.8) sont vérifiées, alors ceci nous permet de déduire l'existence de deux multiplicateurs de Lagrange λ_1, λ_2 tels que les coordonnées (ζ_i, h_i) $1 \leq i \leq 3$ dans l'état d'équilibre sont des solutions du système:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \psi_x^1(x_1)^2 = -2\lambda_1(\zeta_2 - \zeta_1), \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} \right)^2 = 2\lambda_1(\zeta_2 - \zeta_1) - 2\lambda_2(\zeta_3 - \zeta_2), \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta_3} &= \frac{1}{2} \psi_x^3(y_3)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} \right)^2 = 2\lambda_2(\zeta_3 - \zeta_2), \\ \frac{\partial F}{\partial h_1} &= -\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} + \psi_x^1(x_1) - G = -2\lambda_1(h_2 - h_1), \\ \frac{\partial F}{\partial h_2} &= \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} - \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} - G = 2\lambda_1(h_2 - h_1) - 2\lambda_2(h_3 - h_2), \\ \frac{\partial F}{\partial h_3} &= \frac{h_3 - h_2}{\zeta_3 - \zeta_2} - \psi_x^3(y_3) - G = 2\lambda_2(h_3 - h_2). \end{aligned} \right. \quad (4.1)$$

En combinant la somme des trois premières équations et la somme des trois dernières, on trouve

$$\psi_x^1(x_1) = -\psi_x^3(y_3) = \frac{3G}{2}. \quad (4.2)$$

Puisque

$$\psi_x^1(x_1) = \frac{3G}{2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\zeta_1 - x_1}{\sqrt{r^2 - (\zeta_1 - x_1)^2}} = \frac{3G}{2},$$

alors

$$x_1 = \zeta_1 - \frac{3Gr}{\sqrt{4 + 9G^2}},$$

et sur le fait que

$$h_1 + \sqrt{r^2 - (\zeta_1 - x_1)^2} = \psi^1(x_1) = x_1 \psi_x^1(x_1),$$

on a donc

$$h_1 = \frac{3G}{2} \zeta_1 - \frac{r}{2} \sqrt{4 + 9G^2} \quad (4.3)$$

et de la même manière, on trouve

$$h_3 = \frac{3G}{2} (1 - \zeta_3) - \frac{r}{2} \sqrt{4 + 9G^2}. \quad (4.4)$$

De la première et troisième équation de (4.1) on a

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4} \frac{(h_2 - h_1)^2}{(\zeta_2 - \zeta_1)^3} + \frac{9G^2}{16(\zeta_2 - \zeta_1)},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4} \frac{(h_3 - h_2)^2}{(\zeta_3 - \zeta_2)^3} + \frac{9G^2}{16(\zeta_3 - \zeta_2)}.$$

En remplaçant λ_1 et λ_2 dans les autres équations, on obtient

$$\left(\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right)^3 + \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \left(2 - \frac{9}{4}G^2\right) - G = 0, \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2}\right)^3 + \frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2} \left(2 - \frac{9}{4}G^2\right) - G = 0. \quad (4.6)$$

On pose

$$\alpha = \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1}, \quad \beta = \frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2}.$$

On considère l'équation :

$$x^3 + x \left(2 - \frac{9}{4}G^2\right) - G = 0. \quad (4.7)$$

Rappelons dans le lemme qui va suivre la résolution d'une équation de la forme:

$$x^3 + px + q = 0, \quad (p, q) \in \mathbb{R}^{*2}.$$

Lemme 4.1. *Soit*

$$x^3 + px + q = 0, \quad (p, q) \in \mathbb{R}^{*2}. \quad (4.8)$$

On pose

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

alors

(i) si $\Delta > 0$, l'équation (4.8) admet une racine réelle et deux imaginaires conjuguées,

(ii) si $\Delta = 0$, les racines de l'équation (4.8) sont réelles et l'une d'elles au moins est multiple,

(iii) si $\Delta < 0$, toutes les racines de l'équation sont réelles et distinctes.

Dans les différents cas cités, ces trois racines sont données sous la forme:

$$a_1 = a + b, \quad a_2 = -\frac{1}{2}(a + b) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b),$$

$$a_3 = -\frac{1}{2}(a + b) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b),$$

avec

$$a = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad b = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Remarque 4.2. En particulier si q est négatif, il est facile de démontrer que l'équation admet une seule racine positive et cette racine est donnée par a_1 .

Revenons maintenant à notre démonstration:

On a

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{G^2}{4} + \frac{(2 - \frac{9}{4}G^2)^3}{27}, \\ &= -\frac{27}{64}G^6 + \frac{9}{8}G^4 - \frac{3}{4}G^2 + \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

En étudiant les variations de Δ , on trouve

$$\Delta > 0 \quad \text{si } G < \omega,$$

$$\Delta = 0 \quad \text{si } G = \omega,$$

$$\Delta < 0 \quad \text{si } G > \omega.$$

avec

$$\omega = \frac{2}{3} \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + 1}{(3 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}}.$$

On suppose que $G < \omega$, alors l'équation (4.7) admet une seule racine positive, elle s'écrit sous la forme:

$$a_1 = \left(\frac{G}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{G}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}},$$

de (4.5) et (4.6), on a

$$\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = \frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2} = \alpha = a_1, \quad (4.9)$$

en combinant (3.7), (3.8) avec (4.9), on aura

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \zeta_3 - \zeta_2, \quad (4.10)$$

$$h_2 - h_1 = h_2 - h_3,$$

d'où

$$h_1 = h_3. \quad (4.11)$$

De (4.3) et (4.4), on obtient

$$\zeta_1 = 1 - \zeta_3,$$

et de (3.7) on a

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \frac{2r}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (4.12)$$

Ainsi, de (4.3), (4.4), (4.10), (4.11) et (4.12), on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \frac{1}{2} - \frac{2r}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \\ \zeta_2 = \frac{1}{2}, \\ \zeta_3 = \frac{1}{2} + \frac{2r}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \\ h_1 = h_3 = \frac{3G}{4} - \frac{3Gr}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - \frac{r}{2} \sqrt{4 + 9G^2}, \\ h_2 = \frac{3G}{4} + \frac{r}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (2\alpha - 3G) - \frac{r}{2} \sqrt{4 + 9G^2}. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Puisque le système (4.1) admet une solution unique pour $G < \omega$ et puisque le minimum de l'énergie existe, alors on peut conclure que le minimum de l'énergie dans ce cas correspond aux coordonnées représentées par le système (4.13) (voir figure 2).

Si $\alpha = \sqrt{3}$, les trois disques se touchent en même temps, autrement dit, on est dans le cas où (1.1), (1.2), (1.3) sont saturées (voir figure 5).

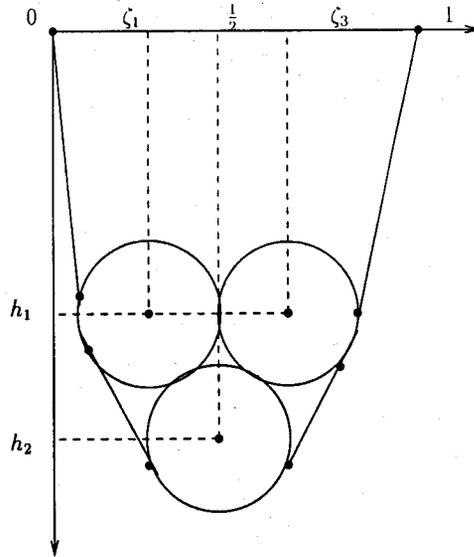


Figure 5

Ainsi pour $\alpha = \sqrt{3}$, (4.13) se réduit à

$$\begin{cases} \zeta_1 = \frac{1}{2} - r, \zeta_2 = \frac{1}{2}, \zeta_3 = \frac{1}{2} + r, \\ h_1 = h_3 = \frac{3G}{4} - \frac{3Gr}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{4 + 9G^2}, \\ h_2 = \frac{3G}{4} + r\sqrt{3} - \frac{3Gr}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{4 + 9G^2}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Dans ce cas, la valeur de G est la solution positive de l'équation:

$$3\sqrt{3} + \left(2 - \frac{9}{4}G^2\right)\sqrt{3} - G = 0$$

$$\text{i.e. } G = \frac{2\sqrt{3}}{27}(2\sqrt{34} - 1).$$

On suppose maintenant que $G \geq \omega$ et on suppose également que $h_1 \neq h_3$, on pose comme hypothèse:

$$\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = \alpha = a_1, \quad \frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2} = \beta$$

(pour des raisons de symétrie on peut remplacer cette hypothèse par $\frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2} = \alpha = a_1, \frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = \beta$).

On a vu que dans ce cas l'équation (4.7) admet une seule racine positive (i.e. α) et les deux autres sont négatives, autrement dit, β peut prendre deux valeurs négatives a_2 ou a_3 . Pour déterminer laquelle des deux valeurs réalise la plus petite énergie, on va comparer les deux énergies correspondantes à ces deux valeurs.

Notons que

$$x_1 = \zeta_1 - \frac{3Gr}{\sqrt{4 + 9G^2}}$$

et

$$y_3 = \zeta_3 + \frac{3Gr}{\sqrt{4 + 9G^2}},$$

alors on peut écrire (3.1) sous une autre forme:

$$F = -\frac{G}{4}h_1 - \frac{G}{4}h_3 - Gh_2 + \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{\zeta_2 - \zeta_1} + \frac{1}{2} \frac{(h_3 - h_2)^2}{\zeta_3 - \zeta_2} + f(G, r) \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned} f(G, r) &= \frac{r}{4} \log \frac{r + y_3 - \zeta_3}{r + y_3 - \zeta_3} - \frac{r}{4} \log \frac{r + x_1 - \zeta_1}{r + x_1 - \zeta_1} \\ &= \frac{r}{2} \log \frac{r + y_3 - \zeta_3}{r + y_3 - \zeta_3}. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{h_2 - h_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{h_2 - h_3}{\zeta_3 - \zeta_2} = \beta,$$

on va écrire F comme étant une fonction de β et on étudiera ses variations.

De (3.7) et (3.8) on a

$$\frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{\zeta_2 - \zeta_1} = \frac{r\alpha^2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{(h_3 - h_2)^2}{\zeta_3 - \zeta_2} = \frac{r\beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}},$$

on a également:

$$\zeta_3 - \zeta_1 = \frac{2r}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{2r}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} h_2 - h_1 = \alpha(\zeta_2 - \zeta_1), \\ h_3 - h_2 = -\beta(\zeta_3 - \zeta_2), \end{cases}$$

\Rightarrow

$$h_3 - h_1 = \frac{2r\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - \frac{2r\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \quad (4.17)$$

De (4.3), (4.4), (4.16) et (4.17) on a

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3G} \left(\frac{2r\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - \frac{2r\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right) - r \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right).$$

En remplaçant chaque terme de (4.15) en fonction de α , β , on obtient

$$F = \left\{ \frac{9}{4} \frac{G^2 r}{\sqrt{1 + \beta^2}} - \frac{rG\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \frac{r\beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right\} + \left\{ \frac{9}{4} \frac{G^2 r}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - \frac{rG\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{r\alpha^2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right\} \\ - \frac{9G^2}{8} + \frac{3Gr}{4} \sqrt{4 + 9G^2} + f(G, r).$$

Soit

$$F = F(\beta) = \frac{r}{4\sqrt{1 + \beta^2}} (4\beta^2 - 4G\beta + 9G^2) + k(G, r, \alpha).$$

On pose

$$\Phi(x) = \left(\frac{4x^2 - 4Gx + 9G^2}{\sqrt{1 + x^2}} \right),$$

on a

$$\Phi'(x) = 4 \left(\frac{x^3 + (2 - \frac{9G^2}{4})x - G}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Il est clair que l'équation: $\Phi'(x) = 0$ est similaire à celle de (4.7).

On suppose que

$$a = \left(\frac{G}{2} + i\sqrt{-\Delta} \right)^{\frac{1}{3}} = x_0 + iy_0. \quad (4.18)$$

On sait que

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}(a+b) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) \\ &= -x_0 - y_0\sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2}(a+b) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) \\ &= -x_0 + y_0\sqrt{3} < 0, \end{aligned}$$

sachant que $x_0 > 0$ (puisque $\alpha = a + b > 0$), on en déduit facilement que

$$x_0 > y_0\sqrt{3} > 0$$

d'où

$$a_2 < a_3.$$

Puisque $F(\beta)$ est croissante sur l'intervalle $[a_2, a_3]$, par conséquence on a

$$F(a_2) < F(a_3).$$

Dans ce qui suit, on va démontrer que l'énergie minimale pour $G \geq \omega$ ne correspond pas au cas où $h_1 \neq h_3$, on va démontrer donc que

$$F(a_2) > F(\alpha). \quad (4.19)$$

Il est bien clair que

$$F(a_2) - F(\alpha) = \frac{r}{4\sqrt{1+a_2^2}}(4a_2^2 - 4Ga_2 + 9G^2) - \frac{r}{4\sqrt{1+\alpha^2}}(4\alpha^2 - 4G\alpha + 9G^2),$$

puisque on sait que $\alpha = 2x_0$, alors on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_2^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

d'où

$$F_1(a_2) - F_1(\alpha) > \frac{r}{4\sqrt{1+a_2^2}}\{4(\alpha - a_2)(G - (\alpha + a_2))\}.$$

On a

$$\alpha + a_2 = x_0 - y_0\sqrt{3}.$$

Pour $G \geq \omega$, on peut facilement vérifier à partir de (4.18) que

$$x_0 - y_0\sqrt{3} < G$$

(cela provient du fait que $x_0(x_0^2 - 3y_0^2) = \frac{G}{2}$).

On en déduit donc que (4.19) est vérifiée. On peut donc donner la conclusion suivante

Dans le cas où $\Lambda_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq 3$, l'énergie minimale des trois disques - soit F_0 - est donnée par

$$\text{Si } G \neq \frac{2\sqrt{3}}{27}(2\sqrt{34} - 1),$$

$$F_0 = \frac{r}{2\sqrt{1+\alpha^2}}(4\alpha^2 - 4G\alpha + 9G^2) - \frac{9G^2}{8} + \frac{3Gr}{4}\sqrt{4+9G^2} + f(G, r)$$

et la position d'équilibre est représentée par la figure 2 (cf (4.13)).

$$\text{Si } G = \frac{2\sqrt{3}}{27}(2\sqrt{34} - 1),$$

$$F_0 = \frac{9G^2r}{4} - rG\sqrt{3} + 3r - \frac{9G^2}{8} + \frac{3Gr}{4}\sqrt{4+9G^2} + f(G, r),$$

dans ce cas la position d'équilibre des trois disques correspond à la figure 5 (cf (4.14)).

□

Remarque 4.3. Comme on l'avait déjà mentionné précédemment, on peut avoir le cas où l'un des trois ensembles de coïncidence est vide, c'est à dire le cas où l'un des trois disques qui ne touche pas le fil soit sur les deux autres. Une fois le minimum de l'énergie déterminé dans ce cas, on peut déterminer la position d'équilibre de ces trois disques dans le cas général en comparant ce minimum avec F_0 .

CHAPITRE 4

SUR LA POSITION D'ÉQUILIBRE
D'UN CARRÉ SUR UN FIL
ÉLASTIQUE

1. Introduction

On considère un carré rigide sur un fil élastique susceptible d'y bouger librement et on voudrait déterminer sa position d'équilibre (voir figure 1).

On désignera par $2r$, $r > 0$ la longueur d'un côté du carré et par G son poids.

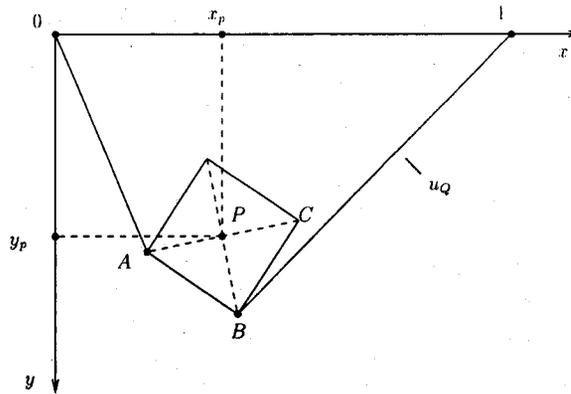


Figure 1

On désignera aussi par $P = (x_p, y_p)$ le barycentre du carré et on supposera que le fil dans sa position initiale (indéformé) occupe l'intervalle $\Omega = (0, 1)$.

Si u est une déformation admissible du fil et si $P = (x_p, y_p)$ est la position du centre du carré, alors, l'énergie totale correspondante à cette configuration est donnée par

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(x) dx - Gy_p, \quad (1.1)$$

où u_x désigne la dérivée de la fonction u en x . Le premier terme dans l'expression ci-dessus est l'énergie élastique, le second est l'énergie potentielle.

Si on désigne par Q l'ensemble fermé des points occupés par le carré on supposera toujours que

$$Q \subset \Omega \times \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

et on imposera dans ce qui suit

$$r < \frac{1}{4}. \quad (1.3)$$

Alors, pour un carré fixé dans une position telle que (1.2) soit vérifiée, une admissible déformation u est une fonction

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad (1.4)$$

telle que

$$Q \subset C_u = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} / y \leq u(x)\}. \quad (1.5)$$

Notons que l'axe y est dirigé vers le bas.

En ayant choisi r tel que (1.3) soit vérifiée, on voudrait minimiser (1.1) sur l'ensemble de tous les couples admissibles (Q, u) vérifiant (1.5). (rappelons que Q est l'ensemble des points occupés par le carré et on admet que cet ensemble décrit toute la bande $\Omega \times \mathbb{R}$). Ainsi, le problème dont on voudrait formuler est donné par

Trouver

$$\inf_{(Q, u)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - G y_p^Q, \quad (1.6)$$

où Q est un carré de barycentre y_p^Q , situé dans la bande $\Omega \times \mathbb{R}$ et u est une fonction vérifiant (1.4), (1.5). Plus précisément, on voudrait démontrer que ce problème admet un minimum (Q_0, u_0) , unique, à une symétrie près.

On minimise sur un ensemble des carrés isométriques et déformations admissibles, ainsi le problème semble un petit peu original à première vue. Toutefois, on démontre tout d'abord que ce problème peut être reformuler en un problème de minimisation sur \mathbb{R}^4 . En effet, on suppose que la position du carré Q est fixée dans la bande $\Omega \times \mathbb{R}$. Désignons par $I_Q = \Pi_x(Q)$ le sous-intervalle de $(0, 1)$, projection de Q parallèle à l'axe y (Π_x est l'usuelle projection orthogonale sur l'axe x).

Pour $x \in I_Q$, on pose

$$\psi_Q(x) = \text{Sup}\{y / (x, y) \in Q\}. \quad (1.7)$$

Il est bien clair que la fonction ψ_Q décrit la frontière inférieure de Q et elle est constante si les côtés du carré sont parallèles à l'axe, sinon une fonction chapeau. Par conséquence, les contraintes (1.4), (1.5) seront vérifiées pour

$$u \in C_Q = \{u \in H_0^1(\Omega) / u(x) \geq \psi_Q(x) \text{ sur } I_Q\}. \quad (1.8)$$

(Rappelons encore une fois que l'axe y est dirigé vers le bas).

Alors, Q étant fixé avec le centre $P = (x_p, y_p)$, il est bon de chercher d'abord $u = u_Q$ la solution du problème

$$\min_{v \in C_Q} \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_x^2(x) dx - G y_p^Q \quad (1.9)$$

ou d'une façon équivalente puisque y_p^Q est fixé

$$\text{Min}_{v \in C_Q} \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_x^2(x) dx. \quad (1.10)$$

On sait que (voir [8], [16], [19]) que ce problème admet une unique solution et qui est aussi solution de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} u \in C_Q, \\ \int_{\Omega} u_x(v_x - u_x)dx \geq 0 \quad \forall v \in C_Q. \end{cases} \quad (1.11)$$

Il est facile de démontrer - voir les références ci-dessus - que

$$-u'' \geq 0 \text{ in } \Omega \quad (1.12)$$

- i.e. la fonction u est concave - et en dehors de l'ensemble de coïncidence

$$\Lambda = \{x \in \Omega / u(x) = \psi_Q(x)\} \quad (1.13)$$

on a

$$u'' = 0 \quad (1.14)$$

i.e. u est une droite.

Observons que $u = u_Q$ est parmi les cas suivants

- Si $Q \subset \Omega \times (-\infty, 0]$, $u = u_Q = 0$, i.e. le carré ne touche pas le fil.
- L'ensemble de coïncidence est réduit à un point (voir figure 2).

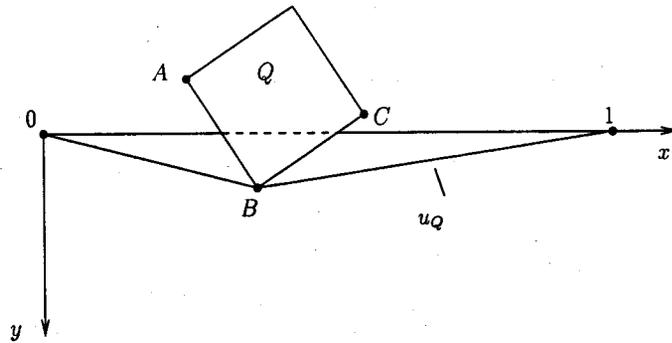


Figure 2

- L'ensemble de coïncidence est la projection d'un seul côté du carré (voir figure 1).
- L'ensemble de coïncidence est I_Q (voir figure 3).

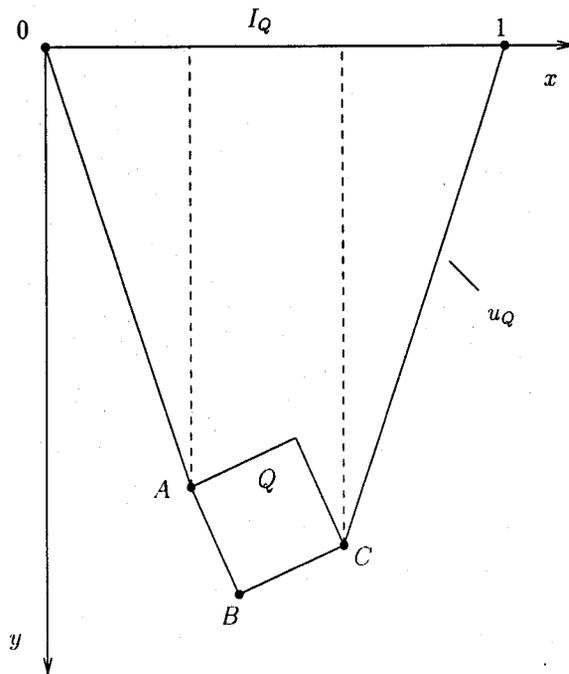


Figure 3

Pour voir ceci, il est suffisant de noter que u est affine par morceaux - i.e. $u'' = 0$ par morceaux - et d'intégrer par parties dans (1.11) sur chaque intervalle où $u'' = 0$. Ayant pris ça en considération, (1.6) est équivalent à

$$\inf_{Q \subset \Omega \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_Q'^2(x) dx - Gy_p^Q \quad (1.15)$$

i.e. on minimise seulement sur Q . (On a désigné $(u_Q)_x$ par u_Q' pour u_Q la solution de (1.11)).

Maintenant, le carré Q est parfaitement défini par deux de ses sommets - soient A , B dans les figures ci-dessus - A étant le sommet le plus situé à gauche, B le plus situé vers le bas à droite de A tels que

si

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B) \quad (1.16)$$

on peut toujours supposer que

$$x_A < x_B, \quad y_A \leq y_B. \quad (1.17)$$

Notons que les deux points A , B ne peuvent pas bouger librement, par ailleurs, ils vérifient toujours la contrainte

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 4r^2. \quad (1.18)$$

Puisque Q est déterminé sans ambiguïté par A et B on a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_Q'^2(x) dx - Gy_p^Q = F(x_A, y_A, x_B, y_B) \quad (1.19)$$

i.e. le problème devient un problème de minimisation d'une fonction sur \mathbb{R}^4 dépendante de la contrainte (1.18). C'est ce qu'on veut formuler maintenant (voir [ACF], [BC]).

Notre travail est divisé comme suit. Dans la prochaine section on démontrera que la fonction définie par (1.19) est une fonction C^1 . On démontrera également par un argument de compacité que le problème (1.6) admet un minimiseur, finalement, dans la dernière section, on déterminera explicitement ce minimiseur.

Etonnament, le résultat trouvé dépend de l'intensité de G . Pour G petit le minimum de l'énergie est atteint quand le carré est centré au milieu du fil et ses côtés sont parallèles à l'axe. La valeur de G devenant plus grande, le carré s'incline sur le côté et le minimum de l'énergie est atteint pour deux positions symétriques. Une progression supplémentaire en poids entraînera le carré à atteindre son minimum d'énergie quand il est centré une autre fois mais dans ce cas là avec ses côtés faisant un angle de 45° avec l'axe des coordonnées. Finalement, quand G est suffisamment grand, le carré s'incline encore une fois pour atteindre son minimum d'énergie pour deux positions symétriques.

2. Existence d'un minimiseur

On considère $A, B \in \Omega \times \mathbb{R}$ deux points vérifiant (1.17), (1.18). Si $R_{\frac{\pi}{2}}$ désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, le point $C = (x_C, y_C)$ est tel que

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$$

i.e. le point C est tel que

$$x_C = x_B - (y_A - y_B) \quad , \quad y_C = y_B + (x_A - x_B) \quad (2.1)$$

C est le troisième sommet du carré Q et la contrainte

$$Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$$

est interprétée maintenant par

$$A, B, C \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Pour $(x_A, y_A), (x_B, y_B)$ tels que (2.2) soit vérifiée, on voudrait donner une expression pour la fonction F définie dans (1.19). Comme on a vu précédemment, différents cas sont possibles.

- Le carré ne touche pas le fil.

Dans ce cas $B \in \Omega \times (-\infty, 0]$ et on a $u = u_Q = 0$ et

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = -Gy_p^Q. \quad (2.3)$$

Il est clair que

$$y_p^Q = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_A + y_B + x_A - x_B}{2}. \quad (2.4)$$

Ainsi, dans ce cas

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = -\frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B). \quad (2.5)$$

Dans le cas où $B \in \Omega \times (0, \infty]$ - i.e. quand $y_B > 0$ - on a différentes situations - à une symétrie près - correspondantes à l'une des figures précédentes.

- L'ensemble de coïncidence est réduit à un point.

On est dans le cas de la figure 2. Ceci impose les contraintes

$$y_B > 0, \quad \frac{y_B}{x_B} < \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \frac{y_B}{1 - x_B} < \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad (2.6)$$

et on a clairement

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_B^2}{x_B} + \frac{y_B^2}{1 - x_B} \right\} - \frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B). \quad (2.7)$$

- L'ensemble de coïncidence est réduit à $\Pi_x([AB])$.

C'est à dire que si $[AB]$ désigne le segment entre les points A, B on suppose qu'on est dans le cas de la figure 1. Ceci nous entraîne à imposer

$$y_B > 0, \quad \frac{y_B}{x_B} \geq \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \frac{y_B}{1 - x_B} < \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad (2.8)$$

et on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_A^2}{x_A} + \frac{(y_B - y_A)^2}{x_B - x_A} + \frac{y_B^2}{1 - x_B} \right\} - \frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B). \quad (2.9)$$

• L'ensemble de coïncidence réduit à $\Pi_x([BC])$.

C'est la situation symétrique de celle qui précède. Ceci impose

$$y_B > 0, \quad \frac{y_B}{x_B} < \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \frac{y_B}{1 - x_B} \geq \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad (2.10)$$

et on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_B^2}{x_B} + \frac{(x_B - x_A)^2}{y_B - y_A} + \frac{y_C^2}{1 - x_C} \right\} - \frac{G}{2} (y_A + y_B + x_A - x_B), \quad (2.11)$$

où x_C, y_C sont données par (2.1). Notons que si $T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est la pente du segment $[AB]$, la pente de $[BC]$ en valeur absolue est $\frac{1}{T} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

• L'ensemble de coïncidence est $\Pi_x(Q)$.

Ce cas correspond à la figure 3. Ceci impose

$$y_B > 0, \quad \frac{y_B}{x_B} \geq \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \frac{y_B}{1 - x_B} \geq \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad (2.12)$$

et on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_A^2}{x_A} + \frac{(y_B - y_A)^2}{x_B - x_A} + \frac{(x_B - x_A)^2}{y_B - y_A} + \frac{y_C^2}{1 - x_C} \right\} - \frac{G}{2} (y_A + y_B + x_A - x_B), \quad (2.13)$$

où x_C, y_C sont données par (2.1). Utilisons (2.5) pour $y_B \leq 0$ et (2.11) pour $y_B > 0$, il est bien clair qu'on peut prolonger F par continuité pour $x_A = x_B$. Ainsi, pour tout r vérifiant (1.3), on a défini une fonction sur le domaine

$$D_r = \{(x_A, y_A, x_B, y_B) / x_A, x_B, x_C \in (0, 1), x_A \leq x_B, y_A \leq y_B, (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 4r^2\}. \quad (2.14)$$

Alors, on peut démontrer:

Théorème 2.1. *La fonction F définie ci-dessus est continue sur*

$$D = \{(x_A, y_A, x_B, y_B) / x_A, x_B, x_C \in (0, 1), x_A \leq x_B, y_A \leq y_B,$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 < \frac{1}{4}. \quad (2.15)$$

Preuve. A, B étant fixés, le carré Q est fixé et ainsi sont y_p^Q, u_Q , on a

$$\begin{aligned} F(x_A, y_A, x_B, y_B) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'_Q)^2 dx - Gy_p^Q \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'_Q)^2 dx - \frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B). \end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que quand $A, B \rightarrow \bar{A}, \bar{B}$ la dérivée $u'_Q \rightarrow u'_{\bar{Q}}$ uniformément sur $(0, 1)$.

($u_{\bar{Q}}$ est la fonction qui correspond à \bar{Q} le carré défini par \bar{A}, \bar{B}). La continuité de F est donc claire. □

De plus on a

Théorème 2.2. *La fonction F est C^1 sur*

$$D^0 = \{(x_A, y_A, x_B, y_B) / x_A < x_B, y_A < y_B, (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 < \frac{1}{4}\}. \quad (2.17)$$

Preuve. Il est clair que F est C^1 sur tout sous-domaine de D^0 où (2.5) ou (2.7), (2.9), (2.11), (2.13) est vérifiée. Il est ainsi suffisant de démontrer que les premières dérivées partielles s'accordent régulièrement sur la frontière de ces domaines. Tout d'abord on considère $\frac{\partial F}{\partial x_A}$.

Sur les différents sous-domaines on a clairement

$$\frac{\partial F}{\partial x_A} = -\frac{G}{2} \quad \text{dans le cas de (2.5),} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_A} = -\frac{G}{2} \quad \text{dans le cas de (2.7),} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_A} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas de (2.9),} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_A} = \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{(x_A - x_B)}{y_B - y_A} + 2\frac{y_C}{1 - x_C} \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas de (2.11),} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_A} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + 2\frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} + 2\frac{y_C}{1 - x_C} \right\} - \frac{G}{2}$$

dans le cas de (2.13), (2.22)

avec $x_C = x_B - (y_A - y_B)$, $y_C = y_B + (x_A - x_B)$.

Quand $y_B > 0$, $y_B \rightarrow 0$ la seule possibilité pour définir $\frac{\partial F}{\partial x_A}$ est (2.19), (2.20) ou

(2.21) et $\frac{\partial F}{\partial x_A}$ est continue sur la droite $y_B = 0$.

Quand on passe de la formule (2.9) à (2.13) on a

$$\frac{y_C}{1 - x_C} - \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \rightarrow 0 \quad (\text{et } \frac{y_C}{1 - x_C} - \frac{y_B}{1 - x_B} \rightarrow 0)$$
(2.23)

et la formule (2.22) converge vers (2.20).

Quand on passe de la formule (2.11) à (2.13) on a

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \frac{y_A}{x_A} \rightarrow 0 \quad (\text{et } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \frac{y_B}{x_B} \rightarrow 0)$$
(2.24)

et la formule (2.22) converge vers (2.21).

Finalement, quand on passe des formules (2.9), (2.11) à (2.7) on a

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \frac{y_A}{x_A} \rightarrow 0, \quad (\text{et } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \frac{y_B}{x_B} \rightarrow 0)$$

ou

$$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - \frac{y_C}{1 - x_C} \rightarrow 0, \quad (\text{et } \frac{y_C}{1 - x_C} - \frac{y_B}{1 - x_B} \rightarrow 0)$$
(2.25)

et les formules (2.20), (2.21) convergent vers (2.19).

On procède d'une façon similaire pour les autres dérivées. On a

$$\frac{\partial F}{\partial x_B} = \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.5),}$$
(2.26)

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{1 - x_B}\right)^2 \right\} + \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.7),}$$
(2.27)

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{1 - x_B}\right)^2 \right\} + \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.9),}$$
(2.28)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + 2\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - 2\frac{y_C}{1 - y_C} + \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} + \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.11), (2.29)} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + 2\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - 2\frac{y_C}{1 - y_C} + \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} + \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.13).} \\
 & \hspace{15em} (2.30)
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.23)-(2.25) on peut voir facilement que la transition s'effectue également dans ce cas.

On a maintenant

$$\frac{\partial F}{\partial y_A} = -\frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.5),} \quad (2.31)$$

$$= -\frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.7),} \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_A}{x_A} + 2\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.9),} \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 - \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.11),} \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_A}{x_A} + 2\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} + \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 - \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.13).} \quad (2.35)$$

De même, il découle de (2.23)-(2.25) que la transition s'effectue aussi dans ce cas.

Finalement

$$\frac{\partial F}{\partial y_B} = -\frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.5),} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_B}{x_B} + 2\frac{y_B}{1 - x_B} \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.7),} \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + 2\frac{y_B}{1 - x_B} \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.9),} \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_B}{x_B} - \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 + 2\frac{y_C}{1 - x_C} + \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.11),} \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 + 2\frac{y_C}{1 - x_C} + \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} \quad \text{dans le cas (2.13),} \quad (2.40)$$

et là également la transition s'applique régulièrement. Ceci termine la preuve du théorème. □

On peut maintenant établir le théorème principal de cette section - à savoir

Théorème 2.3. *Le problème (1.6) admet un minimiseur.*

Preuve. Dû à notre précédente analyse, il est suffisant de démontrer que $F(x_A, y_A, x_B, y_B)$ admet un minimiseur sur D_r .

Etape 1. On peut supposer

$$-2r \leq y_A \leq y_B \leq C \quad (2.41)$$

pour une certaine constante C .

En effet, pour $y_A < -2r$ on a $y_B < 0$ et

$$\begin{aligned} F(x_A, y_A, x_B, y_B) &= -\frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B) \\ &= \frac{G}{2}(x_B - x_A - y_B - y_A) \\ &\geq rG = F(x_A, -2r, x_A, 0). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ainsi, on peut supposer

$$-2r \leq y_A \leq y_B. \quad (2.43)$$

Dû à l'inégalité de Poincaré, on a pour une constante C

$$\begin{aligned} F(x_A, y_A, x_B, y_B) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'_Q)^2 dx - \frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B) \\ &\geq \frac{C}{2} \int_{\Omega} u_Q^2 dx - Gy_B. \end{aligned}$$

Maintenant pour $y_B > 2r$ on a $y_A, y_C \in \Omega \times (0, +\infty)$,

$$u_Q \geq y_B - 2r \quad \text{sur } I_Q$$

et l'inégalité ci-dessus devient

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) \geq C(y_B - 2r)^2 r - Gy_B.$$

Puisque la partie à droite de l'inégalité converge vers $+\infty$ quand $y_B \rightarrow +\infty$ on peut supposer que y_B est borné - i.e. (2.41).

Etape 2. L'infimum (1.6) ne peut être atteint par une suite de points $(x_A, y_A) \rightarrow (0, 0)$.

Si $x_A = x_B$, alors quand $(x_A, y_A) \rightarrow 0, y_B > 0$, on applique la formule (2.11) et $F \rightarrow +\infty$ et ceci est impossible.

Si $x_A < x_B$ alors il est clair qu'on peut prolonger F par continuité en $(0, 0, x_B, y_B)$. En suivant la position de B , on a deux configurations possibles décrites par les figures ci-dessus



Figure 4

Dans le cas (I) quand on déplace toute la figure vers la droite, la fonction F sera donc définie par (2.7)

$$F(x_A, 0, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_B^2}{x_B} + \frac{y_B^2}{1-x_B} \right\} - \frac{G}{2} (y_B + x_A - x_B).$$

On a $x_B = x_A + cst$, $y_A = 0$, y_B fixé. Ainsi

$$\frac{d}{dx_A} F(x_A, 0, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{y_B^2}{x_B^2} + \frac{y_B^2}{(1-x_B)^2} \right\} < 0 \quad \text{puisque } x_B < 1-x_B$$

qui rend incompatible un minimum en 0. ($x_B < 1-x_B$ puisque $2x_B \leq 4r < 1$).

D'une façon similaire, dans le cas (II), pour $x_A > 0$ on aura F définie par (2.11) i.e.

$$F(x_A, 0, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_B^2}{x_B} + \frac{(x_B - x_A)^2}{y_B} + \frac{y_C^2}{1-x_C} \right\} - \frac{G}{2} (y_B + x_A - x_B).$$

Cela entraîne comme précédemment au fait qu'on ne peut pas avoir un minimum en 0 puisque

$$\frac{d}{dx_A} F(x_A, 0, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{1-x_C}\right)^2 \right\} < 0,$$

pour x_A suffisamment petit. Pour voir ceci, on note que quand $A = 0$, il est suffisant de démontrer que

$$\begin{aligned} \frac{y_B}{x_B} > \frac{y_B - x_B}{1 - x_B - y_B} &\Leftrightarrow (1 - x_B - y_B)y_B > x_B(y_B - x_B) \\ &\Leftrightarrow y_B - x_B y_B - y_B^2 > x_B y_B - x_B^2 \\ &\Leftrightarrow y_B - 2x_B y_B - y_B^2 + x_B^2 > 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie puisque

$$\begin{aligned} y_B - 2x_B y_B - y_B^2 + x_B^2 &\geq y_B - x_B^2 - y_B^2 - y_B^2 + x_B^2 \\ &= y_B(1 - 2y_B) \geq y_B(1 - 4r) > 0 \quad \text{par (1.3)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Etape 3. Fin de la preuve.

On sait que F est continue sur D_r . Si on démontre que le minimum de F est atteint sur un sous-ensemble compact de D_r alors ceci termine notre démonstration. Grâce à (2.41) et pour des raisons de symétrie si on démontre qu'on peut supposer que

$$x_A \geq \delta \quad (2.46)$$

pour une certaine constante δ , on sera en mesure de conclure (puisque par symétrie on voudrait avoir aussi $x_B \leq 1 - \delta$).

Si on cherche un minimum dans la région

$$y_B \leq 0$$

alors on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = -\frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B).$$

Le déplacement du carré horizontalement ne changera pas l'énergie, ainsi on peut supposer dans ce cas que (2.46) est vérifiée.

On considère maintenant $y_B > 0$. Si $y_A \leq 0$ alors pour $x_A > 0$, F sera définie par la formule (2.7) ou (2.11) si $y_A > 0$ (2.9) or (2.13) pour x_A suffisamment petit.

Considérons les différents cas:

- F est définie par (2.7)

C'est le cas de la figure 2. Le fait de laisser le carré tourner jusqu'à ce qu'il touche le fil va diminuer son énergie (u ne change pas mais y_p^Q croît). Ainsi, ce cas peut être inclus dans le cas de (2.9) ou (2.11) et on n'a pas à le considérer.

- F est définie par (2.9)

Alors, en déplaçant horizontalement le carré on obtient

$$\frac{d}{dx_A} F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{1-x_B}\right)^2 \right\}.$$

Cette dérivée est positive pour

$$\frac{|y_A|}{x_A} \leq \frac{y_B}{1-x_B} \Leftrightarrow x_A \geq \frac{1-x_B}{y_B} |y_A| \geq \frac{1-2r}{C} |y_A| \quad (2.47)$$

où C est la constante dans (2.41). De cette façon on peut imposer (2.47).
S'il n'existe pas δ telle que

$$x_A \geq \delta \quad \text{ou} \quad |y_A| \geq \delta \quad (2.48)$$

alors l'infimum est "atteint" pour $A = 0$ et ceci est impossible. Ainsi, (2.48) est vérifiée et également (2.46) par (2.47) pour une autre valeur δ éventuellement.

- F est définie par (2.11)

Dans ce cas on a

$$\frac{d}{dx_A} F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{1-x_C}\right)^2 \right\} < 0$$

pour x_A suffisamment petit (voir (2.45) et noter que $\frac{y_C}{1-x_C} = \frac{y_B - x_B + x_A}{1-x_B - y_B + y_A} \geq \frac{y_B - x_B + x_A}{1-x_B - y_B}$ puisque on est dans le cas où $y_A \leq 0$).

Ainsi, dans ce cas on peut supposer que (2.46) est vérifiée aussi

- F est définie par (2.13).

Alors, on a

$$\frac{d}{dx_A} F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{1-x_C}\right)^2 \right\}.$$

Cette quantité est positive pour

$$\begin{aligned} x_A &\geq \frac{1-x_C}{y_C} y_A \geq \frac{1-x_B + y_A - y_B}{C} y_A \\ &> \frac{1-4r}{C} y_A \end{aligned}$$

puisque $y_A > 0$.

Alors on conclut comme pour F définie par (2.9). Ceci démontre qu'on peut toujours supposer (2.46) d'où se termine la preuve du théorème.

□

3. Calcul des minimiseurs

Comme on avait déjà vu précédemment, on doit minimiser F sur D_r - ou, en d'autres termes F sur D avec la contrainte (1.18) -

Tout d'abord on note que pour $y_B \leq 0$ on a

$$\begin{aligned} F(x_A, y_A, x_B, y_B) &= -\frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B) \\ &\geq \frac{G}{2}(y_A + x_A - x_B) = F(x_A, y_A, x_B, 0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

et on peut toujours supposer que $y_B \geq 0$. Alors - rappelons que F est C^1 - on peut supposer F donnée par l'une des formules (2.7), (2.9), (2.11), (2.13). En fait, dû à la symétrie du problème, un minimiseur trouvé à partir de (2.11) doit conduire à un minimiseur trouvé à partir de (2.9) et inversement. Ainsi, on peut se restreindre aux cas de (2.7), (2.9), (2.13). De plus, comme on a vu dans la partie d'existence, on peut éviter le cas (2.7) en déplaçant le carré de la figure 2 jusqu'à ce qu'il touche le fil. Toutefois, on peut juste se restreindre aux cas (2.9) et (2.13).

Cas 1: Un minimiseur de F est à l'intérieur de D sur l'ensemble des points où F est donnée par (2.9).

Dû à la théorie usuelle des multiplicateurs de Lagrange (voir (1.18)), on a pour une certaine valeur λ

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_A} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} = 2\lambda(x_A - x_B), \\ \frac{\partial F}{\partial x_B} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{1 - x_B}\right)^2 \right\} + \frac{G}{2} = 2\lambda(x_B - x_A), \\ \frac{\partial F}{\partial y_A} = \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_A}{x_A} + 2\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \right\} - \frac{G}{2} = 2\lambda(y_A - y_B), \\ \frac{\partial F}{\partial y_B} = \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + 2\frac{y_B}{1 - x_B} \right\} - \frac{G}{2} = 2\lambda(y_B - y_A). \end{cases} \quad (3.2)$$

En additionnant les deux premières équations et les deux dernières, on obtient facilement

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{1 - x_B} = \frac{G}{2}. \quad (3.3)$$

En gardant aussi la première et la troisième équation, on aura

$$-\frac{G^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 - \frac{G}{2} = 2\lambda(x_A - x_B), \quad (3.4)$$

$$\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = 2\lambda(y_A - y_B), \quad (3.5)$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 4r^2. \quad (3.6)$$

Puisque un est supposé être à l'intérieur de D on a $y_A < y_B$, $x_A < x_B$ et donc par (3.5) λ est différent de 0 et donnée par

$$\lambda = \frac{1}{2(x_B - x_A)}.$$

En remplaçant λ dans (3.4) on aura

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 &= \frac{G^2}{4} + G - 2 = \frac{1}{4}\{G^2 + 4G - 8\} \\ &= \frac{1}{4}\{(G + 2)^2 - 12\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ainsi, ce cas est seulement possible quand (rappelons que $y_A < y_B$)

$$(G + 2)^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow G > 2(\sqrt{3} - 1). \quad (3.8)$$

En combinant (3.6), (3.7) on obtient

$$y_B - y_A = \frac{\sqrt{G^2 + 4G - 8}}{2}(x_B - x_A)$$

alors

$$x_B - x_A = \frac{4r}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}}, \quad y_B - y_A = 2r \frac{\sqrt{G^2 + 4G - 8}}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}}. \quad (3.9)$$

Il est commode d'écrire (3.3) sous la forme

$$y_A = \frac{G}{2}x_A, \quad y_B = \frac{G}{2}(1 - x_B)$$

on en déduit

$$y_A + y_B = \frac{G}{2} + \frac{G}{2}(x_A - x_B) = \frac{G}{2} - \frac{2Gr}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}} \quad (3.10)$$

d'où

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{G}{4} - \frac{r}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}}(G + \sqrt{G^2 + 4G - 8}), \\ y_B &= \frac{G}{4} - \frac{r}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}}(G - \sqrt{G^2 + 4G - 8}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}}\left(2 + \frac{2\sqrt{G^2 + 4G - 8}}{G}\right), \\ x_B &= \frac{1}{2} + \frac{r}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}}\left(2 - \frac{2\sqrt{G^2 + 4G - 8}}{G}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si on désigne par E la valeur de F à ce moment là on a - voir (2.9), (3.3), (3.7), (3.9), (3.10) -

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{G}{2}(y_A + y_B) + \frac{(y_B - y_A)^2}{x_B - x_A} \right\} - \frac{G}{2}(y_A + y_B) - \frac{G}{2}(x_A - x_B) \\ &= -\frac{G}{4}(y_A + y_B) + \frac{G}{2}(x_B - x_A) + \frac{1}{2} \frac{(y_B - y_A)^2}{x_B - x_A} \\ &= -\frac{G}{4} \left\{ \frac{G}{2} - \frac{2rG}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}} \right\} + \frac{2rG}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}} + \frac{1}{2} \frac{r(G^2 + 4G - 8)}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}} \\ &= -\frac{G^2}{8} + \frac{r}{\sqrt{G^2 + 4G - 4}} \left\{ \frac{G^2}{2} + 2G + \frac{G^2}{2} + 2G - 4 \right\} \\ &= -\frac{G^2}{8} + r\sqrt{G^2 + 4G - 4}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Remarque 3.1. En fait, pour que $[AB]$ soit le seul segment touchant le fil on a besoin d'une condition supplémentaire à savoir

$$\begin{aligned} \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} &= \frac{2}{\sqrt{G^2 + 4G - 8}} > \frac{G}{2} \\ \Leftrightarrow 4 &> G\sqrt{G^2 + 4G - 8} \\ \Leftrightarrow 0 &> G^4 + 4G^3 - 8G^2 - 16 \\ \Leftrightarrow 0 &> (G - 2)(G^3 + 6G^2 + 4G + 8) \\ \Leftrightarrow G &< 2. \end{aligned}$$

On considère maintenant le second cas - i.e.

Cas 2. Un minimiseur de F est à l'intérieur de D sur l'ensemble des points où F est donnée par (2.13).

A ce moment là, le système des multiplicateurs de Lagrange est donné sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_A} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + 2\frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} + 2\frac{y_C}{1 - x_C} \right\} - \frac{G}{2} = 2\lambda(x_A - x_B), \\ \frac{\partial F}{\partial x_B} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + 2\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - 2\frac{y_C}{1 - x_C} + \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} + \frac{G}{2} \\ \qquad \qquad \qquad = 2\lambda(x_B - x_A), \\ \frac{\partial F}{\partial y_A} = \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_A}{x_A} + 2\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} + \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 - \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} = 2\lambda(y_A - y_B), \\ \frac{\partial F}{\partial y_B} = \frac{1}{2} \left\{ 2\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 + 2\frac{y_C}{1 - x_C} + \left(\frac{y_C}{1 - x_C}\right)^2 \right\} - \frac{G}{2} \\ \qquad \qquad \qquad = 2\lambda(y_B - y_A). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

En additionnant les deux premières équations et les deux dernières on déduit

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_C}{1 - x_C} = \frac{G}{2}. \quad (3.15)$$

En gardant la première et la troisième équation de (3.14) on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 - \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - \frac{G^2}{8} = 2\lambda(x_A - x_B), \quad (3.16)$$

$$-\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)^2 - \frac{G^2}{8} = 2\lambda(y_A - y_B). \quad (3.17)$$

On pose $T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Notons que $T, \frac{1}{T} \neq 0$ puisque un est à l'intérieur de D .

On suppose que λ est nécessairement différent de 0. En effet, dans le cas contraire on a

$$\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{T} = -T + \frac{1}{2T^2} = \frac{G^2}{8}. \quad (3.18)$$

Des deux premières équations on déduit

$$\frac{1}{2}(T^2 - \frac{1}{T^2}) = -(T - \frac{1}{T}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(T - \frac{1}{T})(T + \frac{1}{T}) = -(T - \frac{1}{T})$$

D'où, on a impérativement $T = 1$ mais alors (3.18) est impossible. Ainsi $\lambda \neq 0$. En divisant (3.17) par (3.16) on obtient

$$\begin{aligned}
 T &= (-T + \frac{1}{2T^2} - \frac{G^2}{8}) / (\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{T} - \frac{G^2}{8}) \\
 \Leftrightarrow T(\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{T} - \frac{G^2}{8}) &= -T + \frac{1}{2T^2} - \frac{G^2}{8} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2}T^3 - \frac{1}{2T^2} + (T-1) - \frac{G^2}{8}(T-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{T^5 - 1}{T^2} + (T-1) - \frac{G^2}{8}(T-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{(T-1)}{2} \left\{ \frac{1+T+T^2+T^3+T^4}{T^2} + 2 - \frac{G^2}{4} \right\} &= 0.
 \end{aligned}$$

on a donc

$$T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1 \quad (3.19)$$

ou

$$\frac{1+T+T^2+T^3+T^4}{T^2} + 2 - \frac{G^2}{4} = 0. \quad (3.20)$$

On note tout d'abord que (3.19) est la seule possibilité - dû à (3.15) et pour qu'on soit dans le cas de la formule (2.13) - soit

$$G \geq 2. \quad (3.21)$$

On peut écrire l'équation (3.20) sous la forme

$$\frac{1}{T^2} + T^2 + 1 + T + \frac{1}{T} + 2 - \frac{G^2}{4} = 0.$$

En posant $u = T + \frac{1}{T}$ et en notant que $u^2 = T^2 + 2 + \frac{1}{T^2}$ on obtient

$$\begin{aligned}
 u^2 + u + 1 - \frac{G^2}{4} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{G^2 - 3}{4}. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une solution de (3.22), on doit imposer

$$G \geq \sqrt{3}. \quad (3.23)$$

On obtient alors (rappelons que u doit être positive !)

$$\begin{aligned} u + \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{G^2 - 3}}{2} \\ \Leftrightarrow T^2 - T\left(\frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{2}\right) + 1 &= 0. \\ \Leftrightarrow \left(T - \frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4}\right)^2 - 1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Afin que cette équation soit résoluble on doit avoir

$$\sqrt{G^2 - 3} - 1 \geq 4 \Leftrightarrow G \geq 2\sqrt{7}. \quad (3.25)$$

On aura alors

$$T = \frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4}\right)^2 - 1}. \quad (3.26)$$

Il est clair que les solutions de (3.22) sont T et $\frac{1}{T}$, ainsi une seule parmi ces racines doit être considérée - pour l'instant on va considérer celle avec le signe + - en effet, l'autre racine correspond à la position symétrique du carré.

Maintenant on calcule x_A , x_B , y_A , y_B et F qui correspondent à ces différentes valeurs de T .

Tout d'abord

- Le cas $T = 1$ ($G \geq 2$).

En écrivant (3.15) sous la forme

$$y_A = \frac{G}{2}x_A, \quad y_B - (x_B - x_A) = \frac{G}{2}(1 - x_B + y_A - y_B)$$

et en la combinant avec (3.19), (1.18) on obtient

$$y_B - y_A = x_B - x_A = \sqrt{2}r.$$

Alors, on en déduit facilement

$$x_A = \frac{1}{2} - \sqrt{2}r, \quad x_B = \frac{1}{2}, \quad y_A = \frac{G}{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}r\right), \quad y_B = \frac{G}{4} + \sqrt{2}r\left(1 - \frac{G}{2}\right). \quad (3.27)$$

Dans ce cas la valeur E de F est donnée par

$$E = -\frac{G^2}{8} + \sqrt{2}r\left(\frac{G^2}{4} + 1\right). \quad (3.28)$$

• Le cas où $T = S + \sqrt{S^2 - 1}$, $S = \frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4}$, ($G \geq 2\sqrt{7}$).

Dans ce cas on a par (3.15) et la définition de T

$$y_A = \frac{G}{2}x_A, \quad y_C = y_B - (x_B - x_A) = \frac{G}{2}(1 - x_B + y_A - y_B) \quad (3.29)$$

$$y_B - y_A = T(x_B - x_A) \quad (3.30)$$

$$(1 + T^2)(x_B - x_A)^2 = 4r^2 \quad (\text{voir (1.18)}).$$

Il s'ensuit

$$x_B - x_A = \frac{2r}{\sqrt{1 + T^2}}, \quad y_B - y_A = \frac{2rT}{\sqrt{1 + T^2}}. \quad (3.31)$$

En additionnant les équations de (3.29) on obtient

$$y_A + y_B = \frac{G}{2} - \frac{Gr}{\sqrt{1 + T^2}} - \frac{GrT}{\sqrt{1 + T^2}} + \frac{2r}{\sqrt{1 + T^2}}. \quad (3.32)$$

On aura donc

$$y_A = \frac{G}{4} + \frac{r}{\sqrt{1 + T^2}}\left\{(1 - T) - \frac{G}{2}(1 + T)\right\}, \quad (3.33)$$

$$y_B = \frac{G}{4} + \frac{r(1 + T)}{\sqrt{1 + T^2}}\left\{1 - \frac{G}{2}\right\}, \quad (3.34)$$

$$x_A = \frac{1}{2} + \frac{r}{\sqrt{1 + T^2}}\left\{\frac{2}{G}(1 - T) - (1 + T)\right\}, \quad (3.35)$$

$$x_B = \frac{1}{2} + \frac{r(1 - T)}{\sqrt{1 + T^2}}\left\{\frac{2}{G} + 1\right\} \quad (3.36)$$

avec T donnée ci-dessus.

Pour la valeur E de F à ce moment là on a de (2.13), (3.29)

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \frac{G}{2}(y_A + y_C) + T(y_B - y_A) + \frac{1}{T}(x_B - x_A) \right\} - \frac{G}{2}(y_A + y_B + x_A - x_B).$$

En utilisant le fait que $y_C = y_B - (x_B - x_A)$ on aura

$$\begin{aligned} E &= -\frac{G}{4}(y_A + y_B - (x_B - x_A)) + \frac{1}{2} \left\{ T(y_B - y_A) + \frac{1}{T}(x_B - x_A) \right\} \\ &= -\frac{G}{4} \left(\frac{G}{2} - \frac{Gr}{\sqrt{1+T^2}} - \frac{GrT}{\sqrt{1+T^2}} \right) + \frac{rT^2}{\sqrt{1+T^2}} + \frac{r}{T\sqrt{1+T^2}} \\ &= -\frac{G^2}{8} + \frac{r}{\sqrt{1+T^2}} \left\{ \frac{G^2}{4}(1+T) + T^2 + \frac{1}{T} \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

On considère aussi le cas où l'infimum de F est atteint sur la frontière de D_r - i.e. pour $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$ - puisque ceci correspond à un carré dont ses côtés sont parallèles à l'axe, on peut donc sans perdre de généralité supposer que $y_A = y_B$. Ainsi, considérons

Cas 3. Un minimiseur appartient à la frontière de D - i.e. est tel que $y_A = y_B$ - puisque on peut supposer que $y_B \geq 0$ on est dans le cas de la formule (2.9) et on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_A^2}{x_A} + \frac{y_A^2}{1-x_B} \right\} - \frac{G}{2}(2y_A + x_A - x_B).$$

Puisque $x_B = x_A + 2r$ on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{y_A^2}{2} \left\{ \frac{1}{x_A} + \frac{1}{1-x_A-2r} \right\} - Gy_A + rG.$$

On veut minimiser cette dernière sur $x_A \in (0, 1)$, $y_A \geq 0$. Il est facile de constater que pour y_A fixée le minimum de cette fonction est atteint pour

$$\frac{1}{x_A} = \frac{1}{1-x_A-2r} \Leftrightarrow x_A = \frac{1}{2} - r.$$

Alors pour cette valeur on a

$$F(x_A, y_A, x_B, y_B) = \frac{y_A^2}{\frac{1}{2} - r} - Gy_A + rG$$

et le minimum est atteint pour $y_A = \frac{G}{2}(\frac{1}{2} - r)$.

Ainsi, dans ce cas on a

$$x_A = \frac{1}{2} - r, \quad x_B = \frac{1}{2} + r, \quad y_A = y_B = \frac{G}{2}(\frac{1}{2} - r) \quad (3.38)$$

et la valeur E de F à ce moment là est donnée par

$$\begin{aligned} E &= \frac{G^2}{4}(\frac{1}{2} - r) - \frac{G^2}{2}(\frac{1}{2} - r) + rG \\ &= -\frac{G^2}{8} + r(\frac{G^2}{4} + G). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Après ces préliminaires décrivons la situation. Tout d'abord on a

Théorème 3.1. *On suppose que*

$$G \leq 2(\sqrt{3} - 1). \quad (3.40)$$

Alors, le problème de minimisation (1.6) admet une solution unique donnée par un carré centré au milieu du fil avec A, B donnés par (3.38).

Preuve. On sait que le problème admet un minimiseur. Dû aux contraintes (3.8), (3.21), (3.25) la seule possibilité doit être dans le cas 3 ci-dessus. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Quand (3.40) est vérifiée, la position minimale en énergie est représentée par la figure ci-dessous

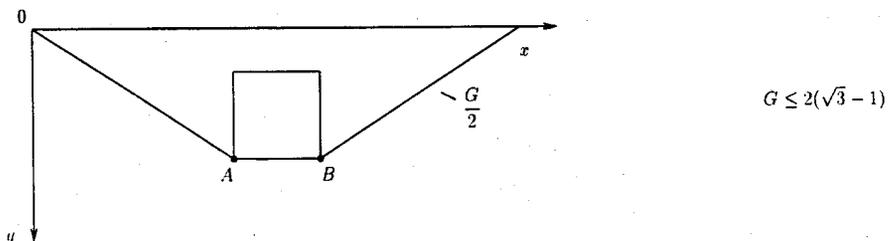


Figure 5

En laissant croître le poids du carré, on aura

Théorème 3.2. *On suppose que*

$$2(\sqrt{3} - 1) < G < 2 \tag{3.41}$$

Alors, le problème (1.6) admet deux solutions. L'une des solutions est telle que A, B sont donnés par (3.11), (3.12) l'autre est obtenue par la réflexion par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$.

Preuve. Dû à (3.21), (3.25) un minimiseur peut seulement se trouver dans le cas 1 ou dans le cas 3.

En Considérant (3.13) et (3.39) on remarque que

$$\sqrt{G^2 + 4G - 4} \leq \frac{G^2}{4} + G$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u - 4} \leq \frac{1}{4}u \quad \text{où on a posé} \quad u = G^2 + 4G$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 16u + 64 = (u - 8)^2 \geq 0. \tag{3.42}$$

Ceci est toujours vrai - avec l'égalité seulement pour $u = 8$ - i.e. $G = 2(\sqrt{3} - 1)$. Ainsi, l'énergie donnée par (3.13) est la plus petite et A, B sont donnés par (3.11), (3.12). D'où se termine la preuve du théorème. □

Quand (3.41) est vérifiée alors le minimum de l'énergie est atteint pour deux configurations symétriques représentées par le figure ci-dessous

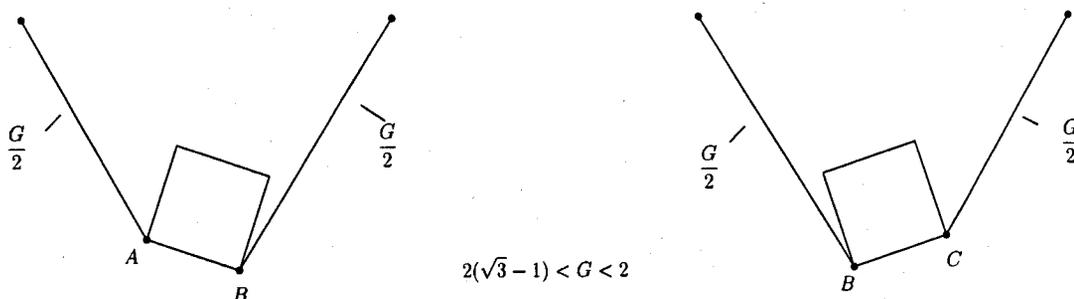


Figure 6

Passons maintenant à un poids plus grand.

Théorème 3.3. *On suppose que*

$$2 \leq G \leq 2\sqrt{7}. \tag{3.43}$$

Alors, le problème (1.6) admet un unique minimiseur donné par un carré centré au milieu du fil ayant ses côtés faisant un angle de 45° avec l'axe des coordonnées et où A, B sont deux points donnés par (3.27).

Preuve . Dû à la remarque 3.1, la seule possibilité pour le minimiseur doit être dans le cas 2 - avec $T = 1$ - ou le cas 3 (notons que pour $G = 2\sqrt{7}$ il existe une seule solution $T = 1$ dans le cas 2). Ainsi, ceci nous conduit à comparer les énergies données par (3.28) et (3.39).

Notons que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\frac{G^2}{4} + 1\right) &\leq \frac{G^2}{4} + G & (3.44) \\ \Leftrightarrow \frac{G^2}{4}(\sqrt{2} - 1) - G + \sqrt{2} &\leq 0. \end{aligned}$$

Le minimum de cette parabole est atteint pour $G = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \in (2, 2\sqrt{7})$.

Puisque pour $G = 2, G = 2\sqrt{7}$ cette expression quadratique est négative, il s'ensuit que (3.44) est vérifiée et ceci termine la preuve du résultat requis. □

Dans le cas où (3.43) est vérifiée la configuration de l'énergie minimale est illustrée par la figure suivante

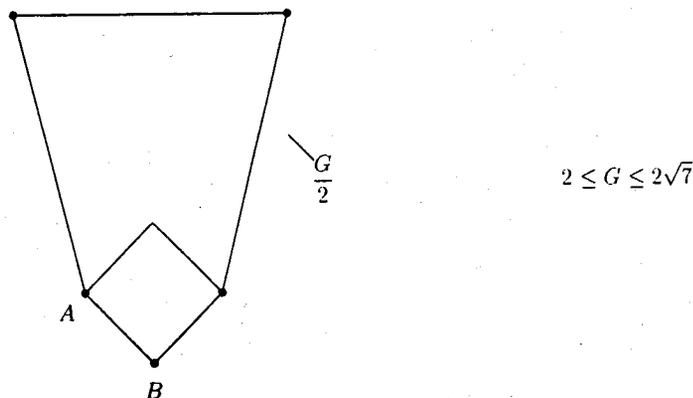


Figure 7

Finalement, supposons que G est plus grand que $2\sqrt{7}$. On a donc

Théorème 3.4. *On suppose que*

$$G > 2\sqrt{7}. \quad (3.45)$$

Alors, le problème (1.6) admet deux solutions symétriques, l'une est celle donnée par A, B définis dans (3.33)-(3.36).

Preuve. La seule possibilité pour un minimiseur doit être dans le cas 2 ou 3. Ainsi, on a à comparer les énergies données par (3.28), (3.37), (3.39). On va démontrer que celle dans (3.37) est la plus petite et ceci complètera la preuve du théorème.

• Comparaison de (3.28), (3.37)

On voudrait démontrer que

$$\sqrt{2}\left(\frac{G^2}{4} + 1\right) > \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}\left\{\frac{G^2}{4}(1+T) + T^2 + \frac{1}{T}\right\}. \quad (3.46)$$

Comme précédemment on pose

$$S = \frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4} \quad (3.47)$$

donc

$$T = S + \sqrt{S^2 - 1}. \quad (3.48)$$

On a aussi

$$T = S + \sqrt{S^2 - 1} \cdot \frac{S - \sqrt{S^2 - 1}}{S - \sqrt{S^2 - 1}} = \frac{1}{S - \sqrt{S^2 - 1}}$$

d'où

$$T + \frac{1}{T} = 2S \Leftrightarrow T^2 + 1 = 2ST. \quad (3.49)$$

Avec cette expression, il est bien clair que (3.46) est équivalent à

$$\begin{aligned} 4ST\left(\frac{G^2}{4} + 1\right)^2 &> \left\{\frac{G^2}{4}(1+T) + 2ST - 1 + 2S - T\right\}^2 \\ &= (1+T)^2 \left\{\frac{G^2}{4} + 2S - 1\right\}^2 \\ \Leftrightarrow 4S\left(\frac{G^2}{4} + 1\right)^2 &> \frac{1+2T+T^2}{T} \left\{\frac{G^2}{4} + 2S - 1\right\}^2 \\ &= \left(\frac{1}{T} + 2 + T\right) \left\{\frac{G^2}{4} + 2S - 1\right\}^2 = (2S + 2) \left\{\frac{G^2}{4} + 2S - 1\right\}^2. \end{aligned}$$

Ainsi on voudrait démontrer que

$$2S\left(\frac{G^2}{4} + 1\right)^2 > (S + 1)\left\{\frac{G^2}{4} + 2S - 1\right\}^2. \quad (3.50)$$

On a $4S = \sqrt{G^2 - 3} - 1$, d'où

$$16S^2 = G^2 - 2 - 2\sqrt{G^2 - 3} = G^2 - 4 - 2(\sqrt{G^2 - 3} - 1) = G^2 - 4 - 8S, \quad (3.51)$$

i.e. on a une relation entre S^2 et S , en développant (3.50) et en utilisant l'expression de S^2 en fonction de S , on aura après des simplifications:

$$\begin{aligned} 2S\left(\frac{G^2}{4} + 1\right)^2 &> (S + 1)\left\{\left(\frac{G^2}{4} - 1\right)^2 + 4S\left(\frac{G^2}{4} - 1\right) + 4S^2\right\} \\ &= (S + 1)\left\{\left(\frac{G^2}{4} - 1\right)^2 + 4S\left(\frac{G^2}{4} - 1\right) + \frac{G^2}{4} - 1 - 2S\right\} \\ &= (S + 1)\left\{\left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2}{4} + S(G^2 - 6)\right\} \\ &= S\left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2}{4} + S^2(G^2 - 6) + \left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2}{4} + S(G^2 - 6) \\ &= S\left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2}{4} + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{G^2}{4} - 1\right) - \frac{S}{2}\right)(G^2 - 6) + \left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2}{4} \\ &\quad + S(G^2 - 6) \\ &= S\left\{\left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2}{4} + \frac{1}{2}(G^2 - 6)\right\} + \left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\left(\frac{G^2}{2} - \frac{3}{2}\right) \\ &= S\left\{\frac{G^4}{16} + \frac{G^2}{4} - 3\right\} + \left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\frac{G^2 - 3}{2}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ainsi (3.52) est réduit à

$$2S\left(1 + \frac{G^2}{2} + \frac{G^4}{16}\right) - S\left(\frac{G^4}{16} + \frac{G^2}{4} - 3\right) > \frac{(G^2 - 4)(G^2 - 3)}{8}$$

⇔

$$S(G^4 + 12G^2 + 80) > 2(G^2 - 4)(G^2 - 3). \quad (3.53)$$

On pose $X = G^2 > 28$. Alors (3.53) est équivalent à

$$(\sqrt{X - 3} - 1)(X^2 + 12X + 80) > 8(X - 4)(X - 3)$$

⇔

$$\sqrt{X-3}(X^2 + 12X + 80) > 9X^2 - 44X + 176$$

⇔

$$\begin{aligned} \sqrt{X-3} - 5 &> \frac{9X^2 - 44X + 176 - 5(X^2 + 12X + 80)}{X^2 + 12X + 80} \\ &= \frac{4X^2 - 104X - 224}{X^2 + 12X + 80} = \frac{4(X-28)(X+2)}{X^2 + 12X + 80}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\sqrt{X-3} - 5 = \frac{X-28}{\sqrt{X-3} + 5},$$

il est donc commode d'écrire l'inégalité ci-dessus - après une division par $X-28$ - sous la forme

$$X^2 + 12X + 80 > 4(X+2)(\sqrt{X-3} + 5)$$

⇔

$$X^2 - 8X + 40 > 4(X+2)\sqrt{X-3}$$

⇔

$$(X^2 - 8X + 40)^2 > 16(X-3)(X^2 + 4X + 4)$$

⇔

$$X^4 - 32X^3 + 128X^2 - 512X + 1792 = (X-28)(X^3 - 4X^2 + 6X - 64) > 0.$$

Ainsi, tout le problème est réduit à démontrer que pour $X > 28$

$$P(X) = X^3 - 4X^2 + 16X - 64 > 0$$

On a $P'(X) = 3X^2 - 8X + 16 = 3\{(X - \frac{4}{3})^2 + \frac{32}{9}\} > 0$ et $P(28) > 0$. Ceci termine la preuve de (3.46).

• Comparaison de (3.37) et (3.39)

On voudrait démontrer que

$$\left(\frac{G^2}{4} + G\right) > \frac{1}{\sqrt{1+T^2}} \left\{ \frac{G^2}{4}(1+T) + T^2 + \frac{1}{T} \right\}. \quad (3.55)$$

On procède comme avant pour avoir au lieu de (3.50) l'expression

$$S\left(\frac{G^2}{4} + G\right)^2 > (S+1)\left\{\frac{G^2}{4} + 2S - 1\right\}^2.$$

Alors, au lieu de (3.52) on a

$$S\left(\frac{G^2}{4} + G\right)^2 > S\left\{\frac{G^4}{16} + \frac{G^2}{4} - 3\right\} + \left(\frac{G^2}{4} - 1\right)\left(\frac{G^2 - 3}{2}\right)$$

i.e.

$$S\left(\frac{G^4}{16} + \frac{G^3}{2} + G^2\right) > S\left(\frac{G^4}{16} + \frac{G^2}{4} - 3\right) + \frac{(G^2 - 4)(G^2 - 3)}{8}$$

\Leftrightarrow

$$S\left(\frac{G^3}{2} + \frac{3G^2}{4} + 3\right) > \frac{(G^2 - 4)(G^2 - 3)}{8}$$

\Leftrightarrow

$$S(4G^3 + 6G^2 + 24) > (G^2 - 4)(G^2 - 3).$$

En remplaçant S par sa valeur - $S = \frac{\sqrt{G^2 - 3} - 1}{4}$ - on a à démontrer que

$$(\sqrt{G^2 - 3} - 1)(2G^3 + 3G^2 + 12) > 2G^4 - 14G^2 + 24$$

\Leftrightarrow

$$\sqrt{G^2 - 3}(2G^3 + 3G^2 + 12) > 2G^4 + 2G^3 - 11G^2 + 36.$$

On a

$$\sqrt{G^2 - 3} - G = -\frac{3}{\sqrt{G^2 - 3} + G},$$

d'où l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$G(2G^3 + 3G^2 + 12) > 2G^4 + 2G^3 - 11G^2 + 36 + \frac{3(2G^3 + 3G^2 + 12)}{G + \sqrt{G^2 - 3}}$$

\Leftrightarrow

$$G^3 + 11G^2 + 12G - 36 > \frac{3}{G + \sqrt{G^2 - 3}}(2G^3 + 3G^2 + 12)$$

puisque $\sqrt{G^2 - 3} > 5$ il est suffisant de démontrer que

$$(G + 5)(G^3 + 11G^2 + 12G - 36) > 6G^3 + 9G^2 + 36$$

\Leftrightarrow

$$G^4 + 10G^3 + 58G^2 + 24G - 216 > 0$$

qui est évidemment vérifiée pour $G^2 \geq 28$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

□

Ainsi, les positions d'équilibre sont représentées par les figures suivantes

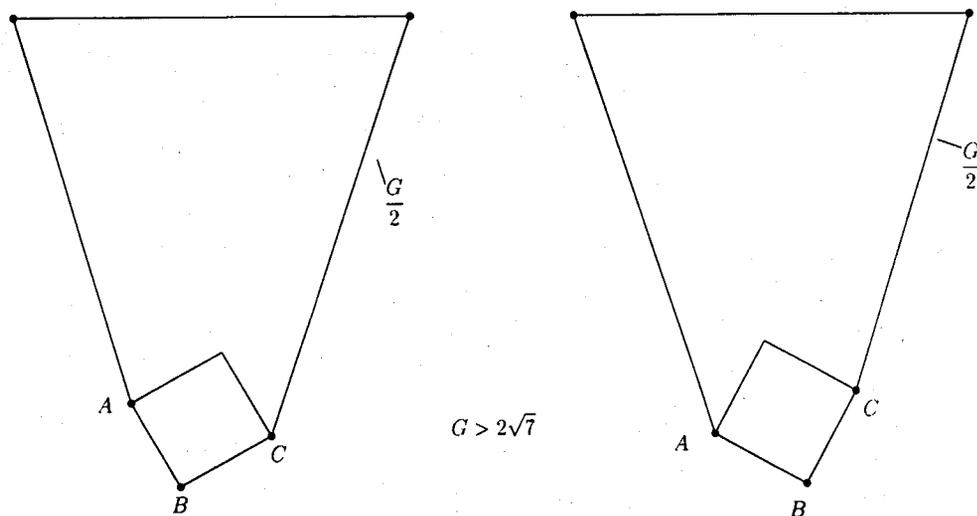


Figure 8

Remarque 3.2. On constate d'après (3.35), (3.36) que $x_A, x_B \rightarrow \frac{1}{2} - r$ quand $G \rightarrow +\infty$. Dans ce cas le carré a tendance à avoir ses côtés parallèles à l'axe à l'infini.

Conclusion et questions ouvertes

Contrairement à ce qu'on s'attendait intuitivement, les résultats de cette partie nous ont permis de parvenir entre autres au fait que la position d'équilibre de deux disques identiques rigides roulant sur un fil élastique ne correspond pas toujours au cas où les deux disques adoptent une position symétrique au milieu du fil. Concernant un carré, aussi un résultat inattendu a été démontré. En effet, on a vu que dans l'état d'équilibre, le carré ne se stabilise pas toujours au milieu du fil pour une position symétrique, et cela dépend de la valeur du poids du carré.

Pour compléter l'étude du problème de trois disques identiques, on doit traiter le cas où l'un des trois disques qui ne touche pas le fil élastique et soit sur les deux autres et voir si le minimum de l'énergie est atteint dans ce cas.

On propose également d'étudier le cas de quatre disques identiques ou plus.

Enfin, il est intéressant d'étudier la position d'équilibre dans le cas d'une ellipse.

Bibliographie

- [1] Aissani. A - Chipot. M: On the equilibrium position of a square on an elastic wire, à paraître dans *Journal of Convex Analysis*.
- [2] Aissani. A - Chipot. M - Fouad. S: On the deformation of an elastic wire by one or two heavy disks, à paraître dans *Archiv der Mathematik*.
- [3] Bandle. C - Flucher. M: Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouville's equation $\Delta u = e^u$ and $\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}$ (Preprint).
- [4] Bemelmans. J - Chipot. M: On a variational problem for an elastic membrane supporting a heavy ball. *Cal. Var* 3, 447–473, 1995.
- [5] Brezis. H: Problèmes unilatéraux. *J. Math. Pures Appl* 51, 1–168, 1972.
- [6] Brezis. H - Kinderlehrer. D: The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities, *Indiana Univ. Math. J.* 23, 831–844, 1974.
- [7] Caffarelli. L.A : A remark on the Hausdorff measure of a free boundary and the convergence of coincidence sets, *Boll. U.M.I.* 18.A (5), 109–113, 1981.
- [8] Chipot. M: Variational inequalities and flow in porous media. *Applied Math Sciences series* # 52 Springer Verlag, 1984.
- [9] Elliott. C.M - Friedman. A: The contact set of a rigid body partially supported by a membrane. *Nonlin. Ana.* 10, 251–276, 1986.
- [10] Fouad. S: Sur quelques problèmes relatifs à la déformation d'une membrane élastique par deux boules rigides, thèse. Université de Metz, 1999.
- [11] Friedman. A: Variational principles and free boundary problems. New York, Wiley, 1982.
- [12] Gilbarg. D - Trudinger. N.S: Elliptic partial differential equations of second order. Springer Verlag. Berlin, New York, 1977.

- [13] Gustaffson. B: On the convexity of a solution of Liouville's equation. *Duke Math. J.* 60, 303–311, 1990.
- [14] Kawohl. B: When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex? *Comm. P.D.E.* 10, 1213–1225, 1985.
- [15] Kinderlehrer. D: How a minimal surface leaves an obstacle. *Acta Math.* 130, 221–242, 1973.
- [16] Kinderlehrer. D - Stampacchia. G: An introduction to variational inequalities and their applications. (Pure and applied mathematics 88) New York. Academic Press, 1980.
- [17] Lelong Ferrand. J - Arnaudiés. J: Cours de mathématiques, tome 1. Algèbre, Dunod, Paris, 1971.
- [18] Lions. J.L - Stampacchia. G: Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.* 20, 493–515, 1967.
- [19] Rodrigues. J.F: Obstacle problems in mathematical physics. (North Holland Mathematics Studies) Amsterdam: North Holland.
- [20] Weisstein. E.W: CRC concise encyclopedia of mathematics. CRC press, 1999.

PARTIE

II

**SUR L'ÉTUDE D'UNE ÉQUATION
INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE**

Introduction

As a motivation, we would like to briefly sketch the origin in physics of the problem studied in the following.

In nonrelativistic quantum theory a closed physical system is described by a Schrödinger equation

$$\dot{\psi}(x, t) = -iH\psi(x, t), \quad (0.1)$$

(the dot denotes a partial derivative with respect to t)

where the so-called wave functions ψ are elements of a Hilbert space \mathcal{H} . x denotes some degrees of freedom other than time and H is a selfadjoint operator in \mathcal{H} generating a unitary one-parameter group of time-evolution. Time only will be of interest to us in the following. In real physical situations one rarely has to do with closed systems but rather with open ones as subsystems to which a space \mathcal{H}_S is associated and \mathcal{H} decomposes into $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ where \mathcal{H}_R belongs to the complementary system ("reservoir"). It is in this way that well-defined concepts of nonunitary dynamics, energy dissipation and irreversible processes, as naturally observed in reality, become meaningful and accessible.

By straightforward derivations [1] one then shows that in \mathcal{H}_S equation (0.1) must be replaced by

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \int_0^t K(t-s)\rho(s)ds + J(t), \quad (0.2)$$

where ρ is a so-called selfadjoint, positive density operator in \mathcal{H}_S with normalized trace, i.e.,

$$\rho \geq 0, \quad Tr(\rho) = 1, \quad 0 \leq t < +\infty. \quad (0.3)$$

The trace is defined by $Tr(\rho) = \sum_i (\varphi_i, \rho\varphi_i)$, $\{\varphi_i\}$ an arbitrary orthonormal basis in \mathcal{H}_S , $[H, \rho]$ denotes a commutator and K appears as a very complicated kernel operator acting, in general, in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, the space of all bounded operators in \mathcal{H}_S . The inhomogeneity $J(t)$ arises from the restriction of the initial condition for ψ to the open subsystem, usually called "entanglement".

Now, for a practical mathematical treatment, it is most convenient to transform (0.2) into coupled equations for real functions of time by taking matrixelements of all operators in an orthonormal basis in \mathcal{H}_S and separating real and imaginary components. Of course, the lengthy procedures will not be given here (see [1]) but we mention as a result that (0.2) reappears in form of a Volterra integro-differential equation

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = A\mathbf{v}(t) + \int_0^t C(t-s)\mathbf{v}(s)ds + \mathbf{f}(t), \quad (0.4)$$

where for $\dim(\mathcal{H}_S) = N$, we have $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\} \in \mathbb{R}^n$ with $n = N^2 - 1$, $\{A, C\}$ are real $(n \times n)$ - matrices and, in particular, $A^T = -A$.

Most important is the consequence of properties (0.3) which in this representation are found to be equivalent to a bound on the Euclidean norm of $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$,

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2(t) \leq 1 - \frac{1}{N}. \quad (0.5)$$

In a first attempt we will try to localize some special kernel functions which might be useful in physical applications. Except for general bound estimates we restrict ourselves to the lowest dimensions $n = 2, 3$ whereas $n = 2$ helps to get acquainted with the mathematical problems and, finally, $n = 3$ is the lowest dimension of real physical importance and interest.

1. Formulation of the problem.

We consider the integro-differential equation

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = A\mathbf{v}(t) + \int_0^t C(t-s)\mathbf{v}(s)ds + \mathbf{f}(t), \quad 0 \leq t < +\infty \quad (1.1)$$

with A being a constant $(n \times n)$ - matrix satisfying $A^T = -A$ (skew symmetric). We suppose that $\mathbf{f} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous and $C(t-s)$ is an $(n \times n)$ - matrix of continuous functions for $0 \leq s \leq t < +\infty$.

Our aim is to determine conditions fulfilled by A , C , \mathbf{f} such that the norm of the solution of (1.1) is bounded by a certain constant.

Existence and uniqueness of the solution are proven in [2]. Let us start with the following lemma.

Lemma 1.1.

Equation (1.1) can be transformed into

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{F}(t) + \int_0^t H(t-s)\mathbf{v}(s)ds, \quad 0 \leq t < +\infty \quad (1.2)$$

where $\mathbf{F} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous and $H(t-s)$ is an $(n \times n)$ - matrix of continuous functions for $0 \leq s \leq t < +\infty$.

Proof.

Integrating equation (1.1), one has

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(u)du + \int_0^t A\mathbf{v}(u)du + \int_0^t \int_0^u C(u-s)\mathbf{v}(s)dsdu.$$

We interchange the order of integration in the last term (see appendix A1) to obtain

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(u)du + \int_0^t \left(A + \int_0^{t-s} C(u)du \right) \mathbf{v}(s)ds.$$

Set

$$\mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(u)du = \mathbf{F}(t),$$

$$A + \int_0^{t-s} C(u)du = H(t-s).$$

Again, F and H are continuous, such that (1.2) holds.

□

Remarks 1.1.

- Equations (1.1) and (1.2) are equivalent.
- Since F , H are continuous, equation (1.2) admits one and only one solution $\mathbf{v}(t)$ ([2]).

2. Classical method.

Let us introduce the function

$$G(t-s) = - \int_{t-s}^{+\infty} C(u)du, \quad (2.1)$$

well defined and continuous for $0 \leq s \leq t < \infty$.

Define now a constant matrix Q by

$$Q = A + \int_0^{+\infty} C(u)du = A - G(0). \quad (2.2)$$

We suppose that there exist positive constants α , M , k_1 , γ , L such that

$$|e^{Q(t-u)}| \leq Me^{-\alpha(t-u)}, \quad \text{for } 0 \leq u \leq t < +\infty, \quad (2.3)$$

$$\int_0^t |\mathbf{f}(u)|du \leq k_1, \quad (2.4)$$

and

$$|G(t-s)| \leq Le^{-\gamma(t-s)}, \quad \text{for } 0 \leq u \leq t < +\infty. \quad (2.5)$$

We can now establish the following proposition.

Proposition 2.1.

Under the assumptions above, the solution of (1.1) or, equivalently, of (1.2) is bounded.

Proof.

Inserting the identity

$$\frac{d}{dt} \int_0^t G(t-s)\mathbf{v}(s)ds = -\mathbf{v}(t) \int_0^{+\infty} C(u)du + \int_0^t C(t-s)\mathbf{v}(s)ds$$

and (2.2) in (1.1) yields

$$\dot{\mathbf{v}} - Q\mathbf{v} = \mathbf{f}(t) + \frac{d}{dt} \int_0^t G(t-s)\mathbf{v}(s)ds.$$

After left-multiplication by e^{-tQ} we obtain

$$\frac{d}{dt}(e^{-tQ}\mathbf{v}(t)) = e^{-tQ} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^t G(t-s)\mathbf{v}(s)ds + \mathbf{f}(t) \right\}.$$

Integrate the last equation from 0 to t ,

$$e^{-tQ}\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{-uQ}\mathbf{f}(u)du + \int_0^t e^{-uQ} \left\{ \frac{d}{du} \left(\int_0^u G(u-s)\mathbf{v}(s)ds \right) \right\} du,$$

and use integration by parts of the last term above. We then have

$$\begin{aligned} e^{-tQ}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{-uQ}\mathbf{f}(u)du + \left[e^{-uQ} \int_0^u G(u-s)\mathbf{v}(s)ds \right]_0^t \\ &\quad + \int_0^t \int_0^u Qe^{-uQ}G(u-s)\mathbf{v}(s)dsdu \\ &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{-uQ}\mathbf{f}(u)du + e^{-tQ} \int_0^t G(t-s)\mathbf{v}(s)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^u Qe^{-uQ}G(u-s)\mathbf{v}(s)dsdu. \end{aligned}$$

$$|\mathbf{v}(t)| \leq M(|\mathbf{v}(0)| + k_1) + L \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |\mathbf{v}(s)| ds \\ + \frac{M|Q|L}{\alpha - \gamma} \int_0^t \{e^{-\gamma(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)}\} |\mathbf{v}(s)| ds .$$

If $\alpha = \gamma$ we have

$$\int_0^t \int_0^u e^{-\alpha(t-u)} |G(u-s)| |\mathbf{v}(s)| ds du \leq L \int_0^t (t-s) e^{-\alpha(t-s)} |\mathbf{v}(s)| ds ,$$

Thus, we have an inequality of the form

$$|\mathbf{v}(t)| \leq M(|\mathbf{v}(0)| + k_1) + \int_0^t \varphi(t-s) |\mathbf{v}(s)| ds$$

where

$$\varphi(t-s) = \begin{cases} \varphi_1(t-s) & \text{for } \alpha \neq \gamma \\ \varphi_2(t-s) & \text{for } \alpha = \gamma \end{cases}$$

with

$$\varphi_1(t-s) = Le^{-\gamma(t-s)} + \frac{M|Q|L}{\alpha - \gamma} (e^{-\gamma(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)}), \\ \varphi_2(t-s) = Le^{-\alpha(t-s)} + M|Q|L(t-s)e^{-\alpha(t-s)}.$$

By using Gronwall's inequality (see appendix A2) this can be rewritten as

$$|\mathbf{v}(t)| \leq M(|\mathbf{v}(0)| + k_1) e^{\int_0^t \varphi(t-s) ds} . \tag{2.8}$$

Now, in order to conclude that $|\mathbf{v}(t)|$ is bounded it is sufficient to show that the integral $\int_0^t \varphi(t-s) ds$ is bounded. The explicit form is given in the two cases.

• For $\alpha \neq \gamma$,

$$\int_0^t \varphi_1(t-s) ds = Le^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} ds + \frac{M|Q|L}{\alpha - \gamma} \left\{ e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} ds - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ds \right\} \\ = \frac{Le^{-\gamma t}}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) + \frac{M|Q|L}{\alpha - \gamma} \left\{ \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \right\} \\ = \frac{L}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{M|Q|L}{\gamma(\alpha - \gamma)} (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{M|Q|L}{\alpha(\alpha - \gamma)} (1 - e^{-\alpha t}) \\ = \psi_1(t) ,$$

Multiplying the last equation from left by e^{tQ} yields

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= e^{tQ} \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{(t-u)Q} \mathbf{f}(u) du + \int_0^t G(t-s) \mathbf{v}(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^u Q e^{(t-u)Q} G(u-s) \mathbf{v}(s) ds du . \end{aligned}$$

Upon using the bound (2.3) the norm estimate of this expression is given by

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &\leq M |\mathbf{v}(0)| e^{-\alpha t} + \int_0^t M e^{-\alpha(t-u)} |\mathbf{f}(u)| du + \int_0^t |G(t-s)| |\mathbf{v}(s)| ds \\ &\quad + M |Q| \int_0^t \int_0^u e^{-\alpha(t-u)} |G(u-s)| |\mathbf{v}(s)| ds du . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Now, we interchange the order of integration in the last term and obtain

$$\int_0^t \int_0^u e^{-\alpha(t-u)} |G(u-s)| |\mathbf{v}(s)| ds du = e^{-\alpha t} \int_0^t \left(\int_s^t e^{\alpha u} |G(u-s)| du \right) |\mathbf{v}(s)| ds .$$

By taking into account (2.5) we find

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^u e^{-\alpha(t-u)} |G(u-s)| |\mathbf{v}(s)| ds du &\leq L e^{-\alpha t} \int_0^t \left\{ \int_s^t e^{\alpha u - \gamma(u-s)} du \right\} |\mathbf{v}(s)| ds \\ &= L e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\gamma s} \left\{ \int_s^t e^{(\alpha-\gamma)u} du \right\} |\mathbf{v}(s)| ds . \end{aligned}$$

If we assume $\alpha \neq \gamma$ we have

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^u e^{-\alpha(t-u)} |G(u-s)| |\mathbf{v}(s)| ds du &\leq \frac{L}{\alpha - \gamma} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\gamma s} \{ e^{t(\alpha-\gamma)} - e^{s(\alpha-\gamma)} \} |\mathbf{v}(s)| ds \\ &\leq \frac{L}{\alpha - \gamma} \int_0^t \{ e^{-\gamma(t-s)} - e^{-\alpha(t-s)} \} |\mathbf{v}(s)| ds . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Inserting (2.7) in (2.6) and using $e^{-\alpha t} \leq 1$ in the first 2 terms then gives us

with nonnegative derivative

$$\psi_1'(t) = Le^{-\gamma t} + \frac{M|Q|L}{\alpha - \gamma}(e^{-\gamma t} - e^{-\alpha t}) \geq 0.$$

ψ_1 is monotonously increasing towards a constant value for $t \rightarrow +\infty$,

$$\int_0^t \varphi_1(t-s)ds \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1(t) = \frac{L}{\gamma} + \frac{M|Q|L}{\alpha\gamma}.$$

• For $\alpha = \gamma$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi_2(t-s)ds &= Le^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ds + M|Q|L \int_0^t (t-s)e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &= \frac{L}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + M|Q|L \left(\frac{1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}}{\alpha^2} \right) \\ &= \psi_2(t), \end{aligned}$$

where we have again

$$\psi_2'(t) = Le^{-\alpha t} + M|Q|Lte^{-\alpha t} > 0,$$

then

$$\int_0^t \varphi_2(t-s)ds \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2(t) = \frac{L}{\alpha} + \frac{M|Q|L}{\alpha^2}.$$

The final result can now be summarized as

$$|\mathbf{v}(t)| \leq M(|\mathbf{v}(0)| + k_1)e^{\gamma t} + \frac{L}{\alpha} + \frac{M|Q|L}{\alpha\gamma}, \quad (2.9)$$

(valid also for $\gamma = \alpha$). This completes the proof of the proposition. □

2.1. Applications in 2 and 3 dimensions.

Example 1.

For $n = 2$ we require, e.g., $|\mathbf{v}(t)| \leq \frac{1}{2}$ in the following.

For matrix A we set

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

and choose the kernel $C(t)$ in the form

$$C(t) = h(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h(t)I. \quad (I : \text{identity matrix})$$

According to (2.2) we have

$$Q = A + \int_0^{+\infty} C(u)du = \begin{pmatrix} b & a \\ -b & a \end{pmatrix} = bI + aJ,$$

where

$$b = \int_0^{+\infty} h(u)du, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

and the Frobenius norm results in

$$|Q| = \{2(a^2 + b^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

For the exponential form we get

$$e^{tQ} = e^{tb} e^{atJ}$$

and note that

$$J^2 = -I, J^3 = -J, J^4 = I, \dots$$

Finally, by power expansion one finds

$$\begin{aligned} e^{tQ} &= e^{tb} \left(I + atJ + \frac{(at)^2}{2!} J^2 + \frac{(at)^3}{3!} J^3 + \frac{(at)^4}{4!} J^4 + \dots \right) \\ &= e^{tb} \left\{ I \left(1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots \right) + J \left(at - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \dots \right) \right\} \\ &= e^{tb} (I \cos(at) + J \sin(at)) \\ &= e^{tb} \begin{pmatrix} \cos(at) & \sin(at) \\ -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

with norm

$$|e^{tQ}| = \sqrt{2} e^{tb}.$$

This shows that in view of (2.3) b must be negative. Set

$$\int_0^{+\infty} h(u) du = -\omega, \quad \omega > 0,$$

with a suitable choice, e.g.,

$$h(u) = -\omega(1 + \omega)e^{-(1+\omega)u}.$$

From (2.1) one has

$$G(t - s) = - \int_{t-s}^{+\infty} C(u) du = I\omega e^{-(1+\omega)(t-s)},$$

with norm given by

$$|G(t - s)| = \sqrt{2}\omega e^{-(1+\omega)(t-s)},$$

such that the parameters in (2.3) and (2.5), respectively, can be set to

$$M = \sqrt{2}, \quad \alpha = \omega, \quad L = \sqrt{2}\omega, \quad \gamma = 1 + \omega.$$

Furthermore, in order to have only one adjustable parameter, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ is chosen proportional to ω ,

$$f_1(t) = f_2(t) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{-t}, \quad k_1 = \omega,$$

and, finally, we set

$$a = \frac{\sqrt{21}}{10}\omega.$$

With the above parameter definitions, inequality (2.9) as a function of initial condition $|\mathbf{v}(0)|$ and ω reads

$$|\mathbf{v}(t)| \leq \sqrt{2}(|\mathbf{v}(0)| + \omega)e^{\frac{16\sqrt{2}\omega}{5(1+\omega)}}.$$

From numerical estimates one finds for $|\mathbf{v}(0)| = \frac{1}{4}$, for instance, that the range $0 < \omega \leq \frac{1}{25}$ is admitted, whereas for $|\mathbf{v}(0)| = \frac{1}{3}$ the corresponding range shrinks to $0 < \omega \leq \frac{1}{135}$, approximately.

On the other hand, the problem has an exact solution. If we denote the Laplace transform of a function $g(t)$ by

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} dt,$$

equation (1.2) is transformed into

$$s\tilde{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{v}(0) + A\tilde{\mathbf{v}}(s) + \tilde{C}(s)\tilde{\mathbf{v}}(s) + \tilde{\mathbf{f}}(s),$$

or, in terms of the components $\mathbf{v}(t) = (x(t), y(t))^T$,

$$\begin{aligned} (s - \tilde{h}(s))\tilde{x}(s) - a\tilde{y}(s) &= x(0) + \tilde{f}_1(s), \\ a\tilde{x}(s) + (s - \tilde{h}(s))\tilde{y}(s) &= y(0) + \tilde{f}_2(s), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

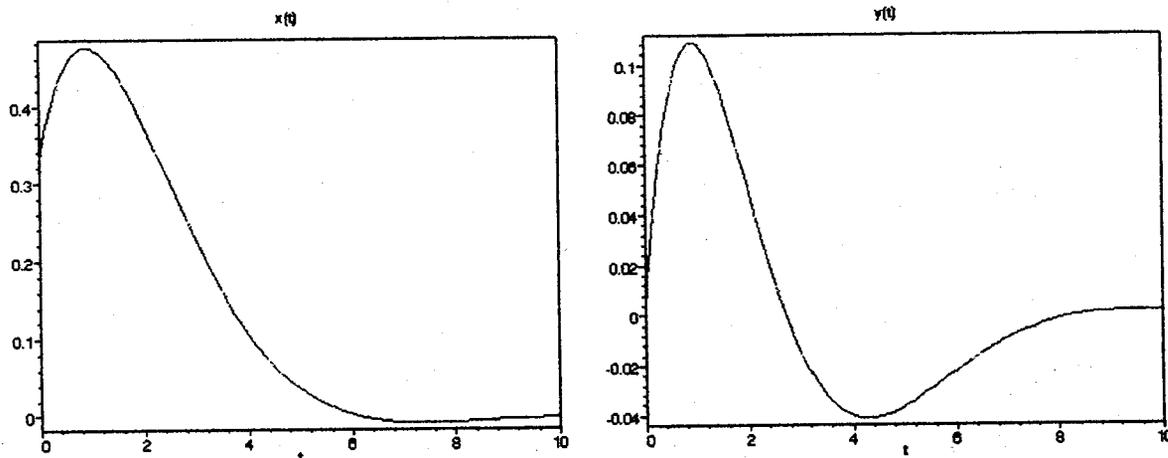
where

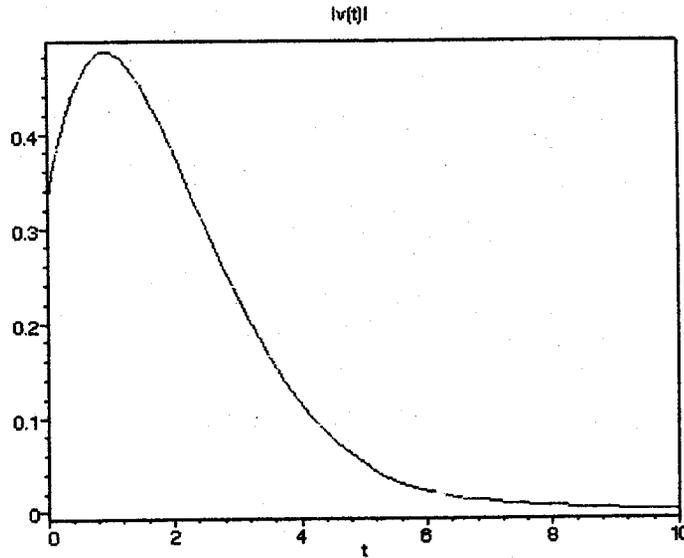
$$\tilde{h}(s) = -\frac{\omega(1+\omega)}{s+1+\omega}, \quad \tilde{f}_1(s) = \tilde{f}_2(s) = \frac{\omega}{\sqrt{2}(s+1)}.$$

The solutions of (2.1.1) are given by

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s) &= \frac{(\tilde{f}_1(s) + x(0))s - (\tilde{f}_1(s) + x(0))\tilde{h}(s) + (\tilde{f}_2(s) + y(0))a}{s^2 + \tilde{h}(s)(\tilde{h}(s) - 2s) + a^2}, \\ \tilde{y}(s) &= \frac{(s - \tilde{h}(s))(\tilde{f}_2(s) + y(0)) - a(\tilde{f}_1(s) + x(0))}{s^2 + \tilde{h}(s)(\tilde{h}(s) - 2s) + a^2}. \end{aligned}$$

In principle, the backtransforms can be given analytically. In view of the lengthy expressions we prefer to give the plots for $x(t)$, $y(t)$ and $|\mathbf{v}(t)| = (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}}$ below, for the choice $\mathbf{v}(t) = (\frac{1}{3}, 0)^T$, $\omega = \frac{1}{2}$.





Obviously, $|v(t)| \leq \frac{1}{2}$ is fulfilled. This puts in evidence that the norm estimate (2.9) may be too strong. It yields conditions which are sufficient but not always necessary.

Example 2.

The lowest - dimensional case of real physical interest is for $n = 3$, i.e., for quantum dynamics of so-called 2 - level systems occurring in atomic and molecular physics, as mentioned in the introduction.

Consider a very simple choice by

$$A = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = h(t) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h(t) = \omega(1 + \omega)e^{-(1+\omega)t}, \quad \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T = \omega e^{-t}(0, 0, 1)^T.$$

We then have

$$Q = A + \int_0^{+\infty} C(u)du = -\omega I, \quad |Q| = \sqrt{3}\omega,$$

$$e^{Qt} = e^{-\omega t} I, \quad |e^{Qt}| = \sqrt{3}e^{-\omega t},$$

$$G(t-s) = - \int_{t-s}^{+\infty} C(u)du = -\omega e^{-(1+\omega)(t-s)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$|G(t-s)| = 3\omega e^{-(1+\omega)(t-s)},$$

$$\int_0^t |\mathbf{f}(u)| du \leq \omega.$$

The appropriate constants in (2.9) are thus obtained as

$$M = \sqrt{3}, \alpha = \omega, L = 3\omega, \gamma = 1 + \omega, k_1 = \omega,$$

leading to the final estimate

$$|\mathbf{v}(t)| \leq \sqrt{3}(|\mathbf{v}(0)| + \omega)e^{\frac{12\omega}{1+\omega}t}.$$

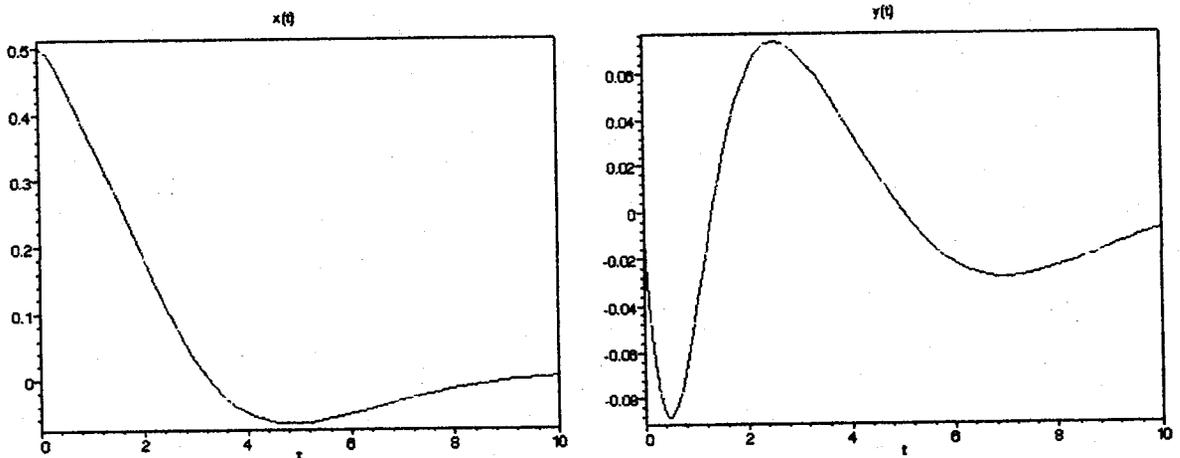
Requiring again $|\mathbf{v}(t)| \leq \frac{1}{2}$, an upper limit is found for $|\mathbf{v}(0)| = \frac{1}{4}$ and $\omega = 9 \cdot 10^{-3}$ and, probably, larger values of the initial condition do not seem to be reasonable. In any case, $|\mathbf{v}(0)| = \frac{1}{2}$ is definitely ruled out. Again, the corresponding Laplace-transformed equations for $\mathbf{v}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ read

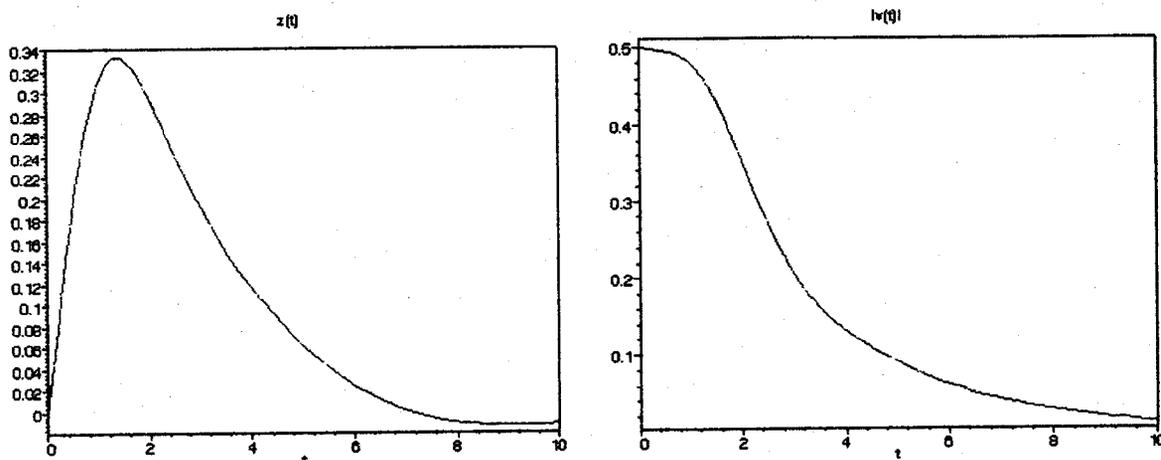
$$\begin{aligned} (s + \tilde{h}(s))\tilde{x}(s) + (\tilde{h}(s) - \omega)\tilde{y}(s) + (\tilde{h}(s) - \omega)\tilde{z}(s) &= x(0), \\ (\omega - \tilde{h}(s))\tilde{x}(s) + (s + \tilde{h}(s))\tilde{y}(s) + (\tilde{h}(s) - \omega)\tilde{z}(s) &= y(0), \\ (\omega - \tilde{h}(s))\tilde{x}(s) + (\omega - \tilde{h}(s))\tilde{y}(s) + (s + \tilde{h}(s))\tilde{z}(s) &= z(0) + \tilde{f}_3(s), \end{aligned}$$

where

$$\tilde{h}(s) = \frac{\omega(1+\omega)}{s+\omega+1}, \quad \tilde{f}_3 = \frac{\omega}{s+1}.$$

Instead of giving the very lengthy backtransforms, the time-behavior of the components and the length of \mathbf{v} are displayed in the figures below, for the choice $\mathbf{v}(0) = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T, \omega = 0,8$.





The results show that even for $|\mathbf{v}(0)| = \frac{1}{2}$ and $\omega = 0,8$ the bound $|\mathbf{v}(t)| \leq \frac{1}{2}$ is preserved whereas larger ω values start violating this desired condition.

After these exploratory simple examples we will envisage more general cases. Since in most situations it will be hard or impossible to find analytic solutions by Laplace-transform or Picard's approximation and other available methods we have to resort to numerical procedures.

3. Numerical methods.

3.1. n=2

In the following, we consider equation (1.2) in 2 dimensions with

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(0) = (x_0, y_0)^T, \mathbf{f} = (f_1(t), f_2(t))^T.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} H(t-s) &= \begin{pmatrix} \int_0^{t-s} C_{11}(u)du & a + \int_0^{t-s} C_{12}(u)du \\ -a + \int_0^{t-s} C_{21}(u)du & \int_0^{t-s} C_{22}(u)du \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_{11}(t-s) & H_{12}(t-s) \\ H_{21}(t-s) & H_{22}(t-s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\mathbf{F}(t) = \left(x_0 + \int_0^t f_1(u)du, y_0 + \int_0^t f_2(u)du \right)^T = (F_1(t), F_2(t))^T.$$

For a sequence $\{t_i\}$, $i \in \mathcal{N}$, $t_i = i\Delta t$, $\Delta t > 0$ a small time-increment, a corresponding sequence $\{\mathbf{v}_i\}$ will be constructed where we have abbreviated $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(t_i)$. Supposing that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i\}$ are known, the next value \mathbf{v}_{i+1} will be determined successively.

In a first step we then have

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{F}(t_{i+1}) + \int_0^{t_{i+1}} H(t_{i+1} - s)\mathbf{v}(s)ds \\ &= \mathbf{F}(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} H(t_{i+1} - s)\mathbf{v}(s)ds. \end{aligned}$$

By the trapezoidal rule one obtains

$$\mathbf{v}_{i+1} \approx \mathbf{F}(t_{i+1}) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^{i+1} \{H(t_{i+1} - t_j)\mathbf{v}_j + H(t_{i+1} - t_{j-1})\mathbf{v}_{j-1}\},$$

or, else,

$$\mathbf{v}_{i+1} - \frac{\Delta t}{2} A\mathbf{v}_{i+1} \approx \mathbf{F}(t_{i+1}) + \frac{\Delta t}{2} H(t_{i+1} - t_0)\mathbf{v}_0 + \Delta t \sum_{j=1}^i H(t_{i+1} - t_j)\mathbf{v}_j. \quad (3.1)$$

Denoting $\mathbf{v}_j = (v_j^1, v_j^2)^T$, then, the equations for the single components read

$$\left\{ \begin{aligned} v_{i+1}^1 - \frac{\Delta t}{2} a v_{i+1}^2 &= F_1(t_{i+1}) + \frac{\Delta t}{2} \{x_0 H_{11}(t_{i+1}) + y_0 H_{12}(t_{i+1})\} \\ &\quad + \Delta t \sum_{j=1}^i v_j^1 H_{11}(t_{i+1} - t_j) + v_j^2 H_{12}(t_{i+1} - t_j), \\ \frac{\Delta t}{2} a v_{i+1}^1 + v_{i+1}^2 &= F_2(t_{i+1}) + \frac{\Delta t}{2} \{x_0 H_{21}(t_{i+1}) + y_0 H_{22}(t_{i+1})\} \\ &\quad + \Delta t \sum_{j=1}^i v_j^1 H_{21}(t_{i+1} - t_j) + v_j^2 H_{22}(t_{i+1} - t_j). \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

After replacing F, H we get

$$\begin{aligned}
 v_{i+1}^1 = & \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2 t}{4} a^2} \left(x_0 + ay_0 \Delta t - \frac{\Delta^2 t}{4} a^2 x_0 + \int_0^{t_{i+1}} f_1(u) du + a \frac{\Delta t}{2} \int_0^{t_{i+1}} f_2(u) du \right. \\
 & \frac{\Delta t}{2} \left\{ x_0 \int_0^{t_{i+1}} C_{11}(u) du + y_0 \int_0^{t_{i+1}} C_{12}(u) du \right\} \\
 & + \frac{\Delta^2 t}{4} a \left\{ x_0 \int_0^{t_{i+1}} C_{21}(u) du + y_0 \int_0^{t_{i+1}} C_{22}(u) du \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^i \left\{ \Delta t \int_0^{t_{i+1}-t_j} C_{11}(u) du - \frac{\Delta^2 t}{4} a^2 + \frac{\Delta^2 t}{4} a \int_0^{t_{i+1}-t_j} C_{21}(u) du \right\} v_j^1 \\
 & + \sum_{j=1}^i \left\{ a \Delta t + \Delta t \int_0^{t_{i+1}-t_j} C_{12}(u) du + \frac{\Delta^2 t}{4} a \int_0^{t_{i+1}-t_j} C_{22}(u) du \right\} v_j^2 \Big), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{i+1}^2 = & -\frac{\Delta t}{2} a v_{i+1}^1 + y_0 - a x_0 \frac{\Delta t}{2} + \int_0^{t_{i+1}} f_2(u) du + \frac{\Delta t}{2} \left\{ x_0 \int_0^{t_{i+1}} C_{21}(u) du \right. \\
 & + y_0 \int_0^{t_{i+1}} C_{22}(u) du \Big\} + \Delta t \sum_{j=1}^i \left\{ -a + \int_0^{t_{i+1}-t_j} C_{21}(u) du \right\} v_j^1 \\
 & + \Delta t \sum_{j=1}^i v_j^2 \int_0^{t_{i+1}-t_j} C_{22}(u) du, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

where the starting values for $i = 0$ are given by

$$\begin{aligned}
 v_1^1 = & \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2 t}{4} a^2} \left(x_0 + ay_0 \Delta t - \frac{\Delta^2 t}{4} a^2 x_0 + \int_0^{\Delta t} \left\{ f_1(u) + a \frac{\Delta t}{2} f_2(u) \right\} du \right. \\
 & + \int_0^{\Delta t} \left\{ x_0 \frac{\Delta t}{2} C_{11}(u) + y_0 \frac{\Delta t}{2} C_{12}(u) + \frac{\Delta^2 t}{4} a x_0 C_{21}(u) + \frac{\Delta^2 t}{4} a y_0 C_{22}(u) \right\} du \Big), \\
 v_1^2 = & -\frac{\Delta t}{2} a v_1^1 + y_0 - a x_0 \frac{\Delta t}{2} + \int_0^{\Delta t} f_2(u) du + \frac{\Delta t}{2} \int_0^{\Delta t} \left\{ x_0 C_{21}(u) + y_0 C_{22}(u) \right\} du.
 \end{aligned}$$

Now, we are able to compute $\{v_i^1\}$, $\{v_i^2\}$ by using the following Maple program.

```

Sol:=proc(n)
local v1, v2, v, xo, yo, a, t, i, f1, f2, C11, C12, C21, C22;
t:=(); xo:=(); yo:=(); a:=(); f1:=x- >(); f2:=x- >(); C11:=x- >();
C12:=x- >(); C21:=x- >(); C22:=x- >();
v1[1]:=();
v2[1]:=();
v[1]:=sqrt(v1[1]^2 + v2[1]^2);
print ([t,v[1]]);
if n<=1 then
RETURN (eval (v))
fi;
for i from 1 to n-1 do
v1[i+1]:=();
v2[i+1]:=();
v[i+1]:=sqrt(v1[i+1]^2 + v2[i+1]^2);
print ([t*(i+1),v[i+1]]);
od;
RETURN (eval (v))
end;

```

Above, v_i^j has been denoted by $v_j[i]$, ($j = 1, 2$), and t is used in place of Δt . Later on, this program will be used as input to obtain plots for the single components of \mathbf{v} as well as of its norm.

3.1.1 Application.

Example 1.

Let us choose, e.g.,

$$C(t) = -te^{t^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = -te^{t^2} (1, 0)^T, \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \frac{1}{4} (1, 0)^T.$$

For examples of this type, owing to a particular relationship between A and $C(t)$ one can give a more direct estimate than the one in (2.9) by just using the integrated form (1.2).

For positive constants k , M and

$$|\mathbf{F}(t)| \leq k, \quad \int_0^t |H(t-s)| ds \leq M, \quad (3.1.1)$$

Gronwall's inequality yields directly

$$|\mathbf{v}(t)| \leq ke^M. \quad (3.1.2)$$

Note, however, that the second bound in (3.1.1) may not exist in general even if (2.9) guarantees boundedness.

For the present example we get

$$k = \frac{1}{4}, \quad M = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

If we increase the initial value of \mathbf{v} to $\mathbf{v}(0) = \frac{1}{2}(1, 0)^T$ this estimate is violated but, as shown in the figure below (graph of $|\mathbf{v}(t)|$ in both cases), the numerical calculations still respect the requirement $\mathbf{v}(t) \leq \frac{1}{2}$.

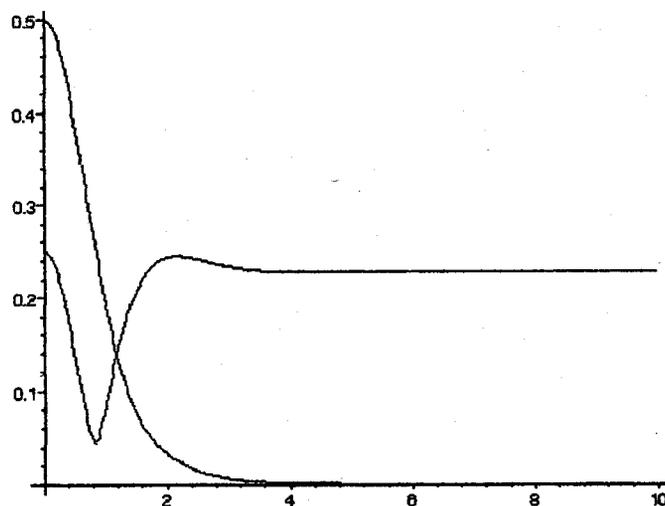


Figure 3.1

Example 2.

A different choice is

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \frac{t}{4(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = -e^{-3t}(1, 0)^T.$$

Here again, we find

$$k = \frac{1}{3}, \quad M = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}, \quad \text{for } \mathbf{v}(0) = \frac{1}{3}(1, 0)^T,$$

but $\mathbf{v}(0) = \frac{1}{2}(1, 0)^T$ would not be admitted by (3.1.2). Nevertheless, the displayed figures show the desired boundedness in both cases.

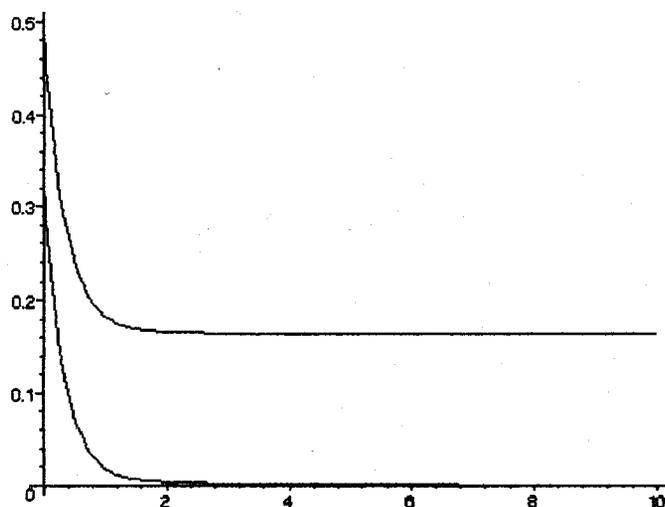


Figure 3.2

Working out an essential improvement of bound estimates will be extremely demanding and has to be postponed for later investigations.

3.2. $n=3$

3.2.1. A special case.

First, we consider a simple example motivated by physics [1], and given by

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$C(t) = h(t)I, \quad \mathbf{f}(t) = \left(0, 0, \frac{1}{2} \int_0^t h(u) du\right)^T,$$

at the moment for a suitably general kernel $h(t)$. Vector and initial condition are denoted by

$$\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T, \quad \mathbf{v}(0) = (x_0, y_0, z_0)^T.$$

Hence

$$H(t-s) = \begin{pmatrix} \int_0^{t-s} h(u) du & -c & b \\ c & \int_0^{t-s} h(u) du & -a \\ -b & a & \int_0^{t-s} h(u) du \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(t) = (x_0, y_0, z_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s h(u) du ds)^T.$$

We apply the same method as used in 2 dimensions and obtain

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2}c & -\frac{\Delta t}{2}b \\ -\frac{\Delta t}{2}c & 1 & \frac{\Delta t}{2}a \\ \frac{\Delta t}{2}b & -\frac{\Delta t}{2}a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i+1}^1 \\ v_{i+1}^2 \\ v_{i+1}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}(t) + \frac{\Delta t}{2} H(t_{i+1}-0) \mathbf{v}(0) + \Delta t \sum_{j=1}^i H(t_{i+1}-t_j) \mathbf{v}_j,$$

equivalent to the system of equations

$$\left\{ \begin{aligned} v_{i+1}^1 + \frac{\Delta t}{2}cv_{i+1}^2 - \frac{\Delta t}{2}bv_{i+1}^3 &= \frac{\Delta t}{2}\{x_0H_{11}(t_{i+1}) + y_0H_{12}(t_{i+1}) + z_0H_{13}(t_{i+1})\} \\ &+ F_1(t_{i+1}) + \Delta t \sum_{j=1}^i v_j^1 H_{11}(t_{i+1}-t_j) + v_j^2 H_{12}(t_{i+1}-t_j) + v_j^3 H_{13}(t_{i+1}-t_j) = a_1, \\ -\frac{\Delta t}{2}cv_{i+1}^1 + v_{i+1}^2 + \frac{\Delta t}{2}av_{i+1}^3 &= \frac{\Delta t}{2}\{x_0H_{21}(t_{i+1}) + y_0H_{22}(t_{i+1}) + z_0H_{23}(t_{i+1})\} \\ F_2(t_{i+1}) + \Delta t \sum_{j=1}^i v_j^1 H_{21}(t_{i+1}-t_j) + v_j^2 H_{22}(t_{i+1}-t_j) + v_j^3 H_{23}(t_{i+1}-t_j) &= a_2, \\ \frac{\Delta t}{2}bv_{i+1}^1 - \frac{\Delta t}{2}av_{i+1}^2 + v_{i+1}^3 &= \frac{\Delta t}{2}\{x_0H_{31}(t_{i+1}) + y_0H_{32}(t_{i+1}) + z_0H_{33}(t_{i+1})\} \\ F_3(t_{i+1}) + \Delta t \sum_{j=1}^i v_j^1 H_{31}(t_{i+1}-t_j) + v_j^2 H_{32}(t_{i+1}-t_j) + v_j^3 H_{33}(t_{i+1}-t_j) &= a_3. \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

The solutions are found to be

$$v_{i+1}^1 = \frac{(ac\Delta^2t + 2b\Delta t)a_3 + (ab\Delta^2t - 2c\Delta t)a_2 + (a^2\Delta^2t + 4)a_1}{4 + \Delta^2t(a^2 + b^2 + c^2)}, \tag{3.6}$$

$$v_{i+1}^2 = \frac{(bc\Delta^2t - 2a\Delta t)a_3 + (b^2\Delta^2t + 4)a_2 + (2c\Delta t + ab\Delta^2t)a_1}{4 + \Delta^2t(a^2 + b^2 + c^2)}, \tag{3.7}$$

$$v_{i+1}^3 = \frac{(c^2\Delta^2t + 4)a_3 + (cb\Delta^2t + 2a\Delta t)a_2 + (ac\Delta^2t - 2b\Delta t)a_1}{4 + \Delta^2t(a^2 + b^2 + c^2)}. \tag{3.8}$$

By analogy, for the calculation of the numerical solution of (1.2) we can use the kind of program developed previously. As a test we use an analytically solvable case and set

$$h(t) = -e^{-3t}, \quad x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad a = b = c = 0.$$

The associated Laplace-transformed equations read

$$\begin{cases} (s - \tilde{h}(s))\tilde{x}(s) = x_0, \\ (s - \tilde{h}(s))\tilde{y}(s) = y_0, \\ (s - \tilde{h}(s))\tilde{z}(s) = z_0 + \frac{1}{2s}\tilde{h}(s), \end{cases}$$

with solutions

$$\tilde{x}(s) = \tilde{y}(s) = \frac{x_0}{s - \tilde{h}(s)}, \quad \tilde{z}(s) = \frac{z_0}{s - \tilde{h}(s)} + \frac{\tilde{h}(s)}{2s(s - \tilde{h}(s))},$$

and back transforms

$$x(t) = y(t) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left\{ \frac{3}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) + e^{-\frac{3}{2}t} \cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) \right\},$$

$$z(t) = x(t) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}t} \cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) + \frac{3}{2\sqrt{5}} e^{-\frac{3}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right).$$

A comparison between the analytical and numerical results have shown excellent agreement, and a plot of the norm $|\mathbf{v}(t)|$ is given in figure 3.3.

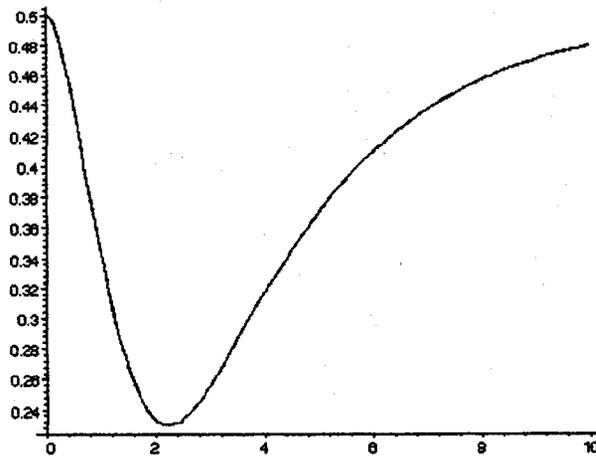


Figure 3.3

In addition, figure 3.4 shows the behavior obtained from numerical evaluation for some different conditions,

$$a = c = 1, b = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \frac{1}{2}(1, 0, 0)^T.$$

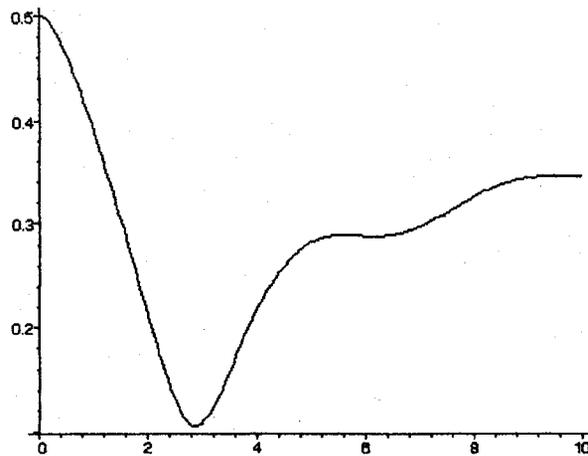


Figure 3.4

3.2.2. General case.

For $n = 3$ the most general real representation of the dynamical equations for a quantum-mechanical 2-level system in Markovian (or weak coupling) limit are given by ordinary differential equations of the form

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (A + B)\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}, \quad (3.9)$$

where A is real skew-symmetric, B real-symmetric and \mathbf{w} a constant vector. The correct bound required by quantum theory is then

$$|\mathbf{v}(t)|^2 \leq \frac{1}{2},$$

and can be shown to be guaranteed by a set of inequalities fulfilled by the matrix elements of B and the components of \mathbf{w} . The corresponding derivations are well-described in the literature [1].

For the more general non-Markovian case, equations of type (1.1) appear. Consequently, we let us guide by the former results in the sense that the elements of B are replaced by time-dependent kernel functions and allowing for time-dependence of \mathbf{w} as well but maintaining at the same time a time-local version of the inequalities. Tentatively, we suppose that in this way the bound will be preserved but a rigorous proof is still missing. Therefore, it is our aim to select some suitable functions with help of numerical methods such that examples of real physical interest can at least be simulated satisfactorily. Necessarily, this attempt will remain on a semiphenomenological level. On the other hand, on a fundamental level these functions should be derived from the original exact quantum equations but, unfortunately, no progress could ever been made in this direction so far. Physicists

have always tried to circumvent the difficulties by some perturbation techniques, however, the latter will always violate positivity of density operators or, in other words, the required bound.

In the following we will summarize the details using conventions in close analogy to what had been introduced for (3.9) in the earlier literature on the Markovian case. The general parameterization is then given by

$$\begin{aligned}
 A = -A^T &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, & a, b, c \in \mathbb{R}, \\
 C(t) = C(t)^T &= \begin{pmatrix} -\gamma_3(t) & \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha(t) & -\gamma_2(t) & \delta(t) \\ \beta(t) & \delta(t) & -\gamma_1(t) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{f}(t) &= -\sqrt{2}(\lambda(t), -\mu(t), \nu(t))^T,
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

subjected to the inequalities

$$\left\{ \begin{aligned}
 &0 \leq \gamma_i(t) \leq \gamma_k(t) + \gamma_l(t), & (i, k, l) \text{ a cyclic permutation of } (1, 2, 3), \\
 &4(\alpha^2(t) + \nu^2(t)) \leq \gamma_1^2(t) - (\gamma_2(t) - \gamma_3(t))^2, \\
 &4(\beta^2(t) + \mu^2(t)) \leq \gamma_2^2(t) - (\gamma_1(t) - \gamma_3(t))^2, \\
 &4(\delta^2(t) + \lambda^2(t)) \leq \gamma_3^2(t) - (\gamma_1(t) - \gamma_2(t))^2, \\
 &4\beta(\alpha\delta - \nu\lambda) - 4\mu(\alpha\lambda + \nu\delta) \geq (\gamma_3 + \gamma_1 - \gamma_2)(\beta^2 + \mu^2) \\
 &\quad + (\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1)\left\{\alpha^2 + \nu^2 - \frac{1}{4}\gamma_1^2 - \frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_3)^2\right\} + (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3)(\delta^2 + \lambda^2).
 \end{aligned} \right.
 \tag{3.11}$$

This time-local generalization is supposed to force the solutions to satisfy again

$$|\mathbf{v}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \tag{3.12}$$

It must be mentioned that also weaker conditions involving integrals of these functions only may be sufficient. This has been shown in special cases [7] but no general theory is available as yet.

Regarding a numerical implementation, one generalizes the earlier procedures to 3 dimensions and set

$$\mathbf{v}(0) = (x_0, y_0, z_0)^T, \quad \mathbf{v}_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3)^T.$$

Then, we need

$$\begin{aligned} a_1 = & x_0 - \sqrt{2} \int_0^{t_{i+1}} \lambda(u) du + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -cy_0 + bz_0 - x_0 \int_0^{t_{i+1}} \gamma_3(u) du + y_0 \int_0^{t_{i+1}} \alpha(u) du \right. \\ & + z_0 \int_0^{t_{i+1}} \beta(u) du \left. \right\} + \Delta t \sum_{j=1}^i \left\{ -cv_j^2 + bv_j^3 - v_j^1 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \gamma_3(u) du \right. \\ & \left. + v_j^2 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \alpha(u) du + v_j^3 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \beta(u) du \right\}, \\ a_2 = & y_0 + \sqrt{2} \int_0^{t_{i+1}} \mu(u) du + \frac{\Delta t}{2} \left\{ cx_0 - az_0 + x_0 \int_0^{t_{i+1}} \alpha(u) du - y_0 \int_0^{t_{i+1}} \gamma_2(u) du \right. \\ & \left. + z_0 \int_0^{t_{i+1}} \delta(u) du \right\} + \Delta t \sum_{j=1}^i \left\{ cv_j^1 - av_j^3 + v_j^1 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \alpha(u) du \right. \\ & \left. - v_j^2 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \gamma_2(u) du + v_j^3 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \delta(u) du \right\}, \\ a_3 = & z_0 - \sqrt{2} \int_0^{t_{i+1}} \nu(u) du + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -bx_0 + ay_0 + x_0 \int_0^{t_{i+1}} \beta(u) du + y_0 \int_0^{t_{i+1}} \delta(u) du \right. \\ & \left. - z_0 \int_0^{t_{i+1}} \gamma_1(u) du \right\} + \Delta t \sum_{j=1}^i \left\{ -bv_j^1 + av_j^2 + v_j^1 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \beta(u) du \right. \\ & \left. + v_j^2 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \delta(u) du - v_j^3 \int_0^{t_{i+1}-t_j} \gamma_1(u) du \right\}. \end{aligned}$$

Furthermore, one needs $\mathbf{v}_1 = (v_1^1, v_1^2, v_1^3)^T$ which is obtained from (3.6), (3.7), (3.8) by replacing i by 0. The subsequent general program will be used in the following tests.

```

Sol:=proc(n)
local v1, v2, v3, v, xo, yo, zo, a, b, c, t, i, λ, μ, ν, γ1, γ2, γ3, α, β, δ;
t:=(); xo:=(); yo:=(); zo:=(); a:=(); b:=(); c:=();
λ := x- > (); μ := x- > (); ν := x- > (); γ1 := x- > (); γ2 := x- > ();
γ3 := x- > (); α := x- > (); β := x- > (); δ := x- > ();
v1[1]:= ();
v2[1]:= ();
v3[1]:= ();
v[1]:= v1[1]^2 + v2[1]^2 + v3[1]^2;
print ([t,v[1]]);
if n<=1 then
RETURN (eval (v))
fi;
for i from 1 to n-1 do
v1[i+1]:= ();
v2[i+1]:= ();
v3[i+1]:= ();
v[i+1]:= v1[i+1]^2 + v2[i+1]^2 + v3[i+1]^2;
print ([t*(i+1),v[i+1]]);
od;
RETURN (eval (v))
end;

```

3.2.2.1. Applications.

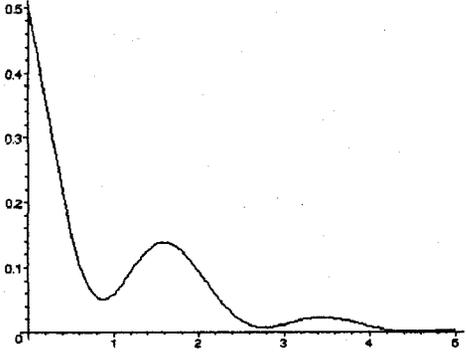
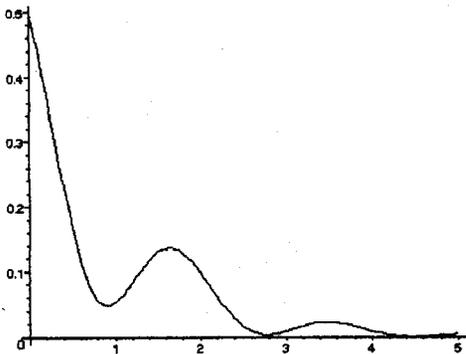
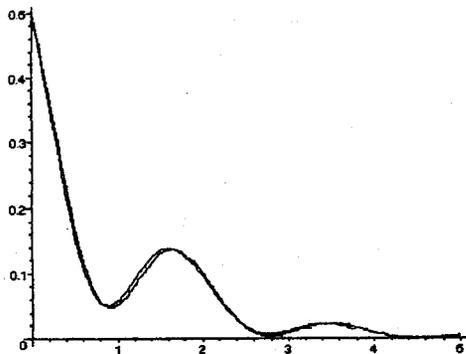
For simplicity, we choose

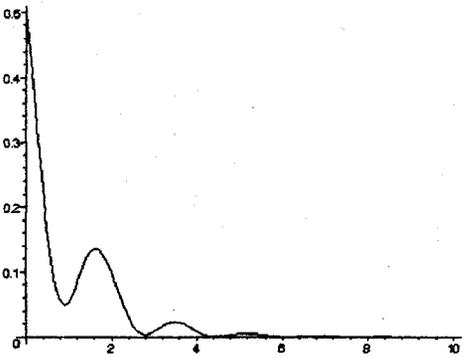
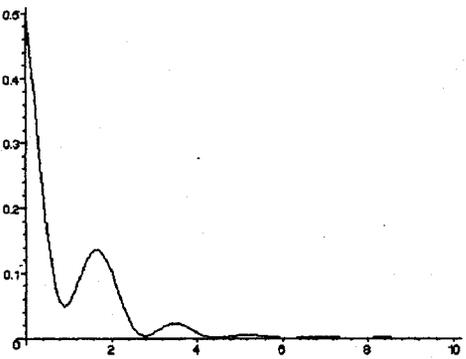
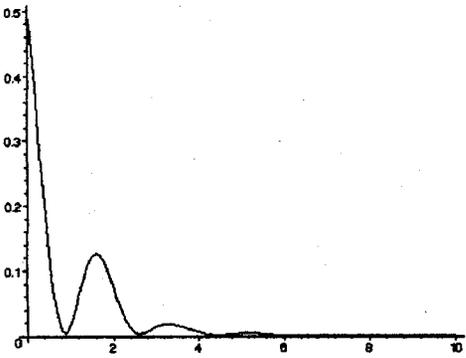
$$\alpha = \beta = \lambda = \mu = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma, \quad (\text{except for example 5}).$$

The conditions (3.11) reduce to

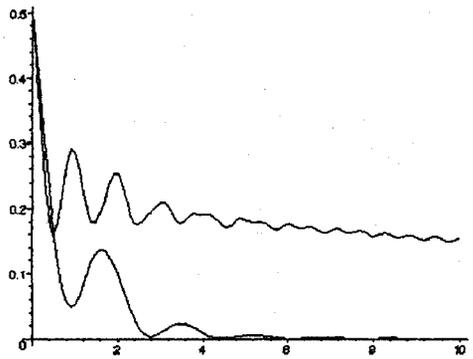
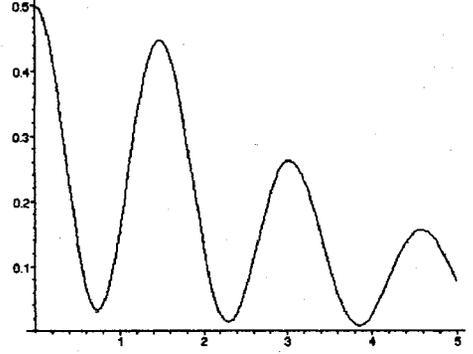
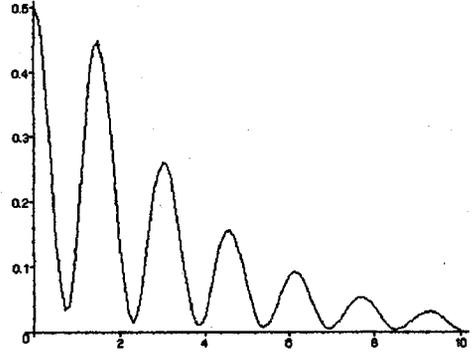
$$\begin{aligned} \gamma(t) &\geq 0, \\ \gamma(t) &\geq 2(\nu^2(t) + \delta^2(t))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

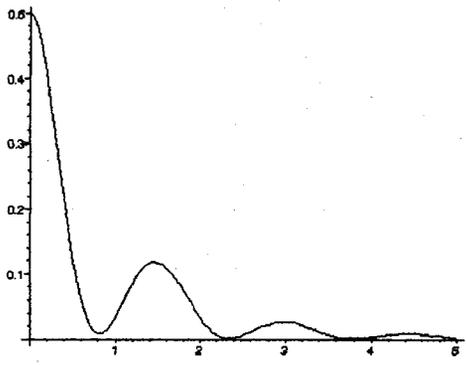
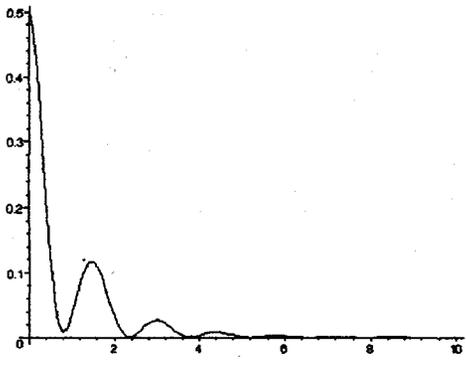
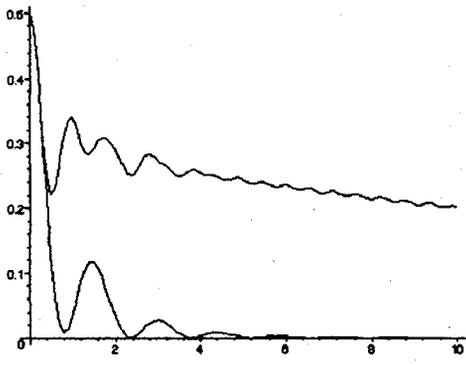
for which it is now straightforward to test a series of admitted kernels as given in the table below.

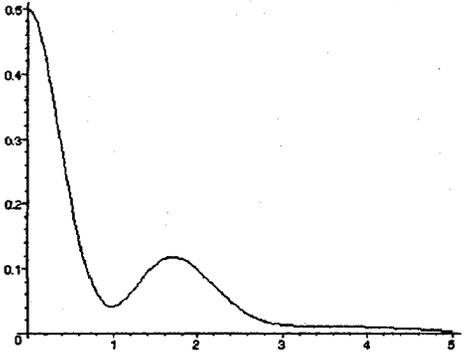
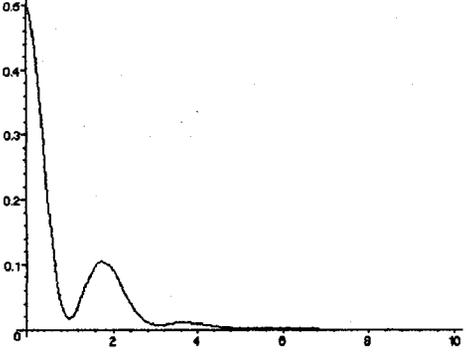
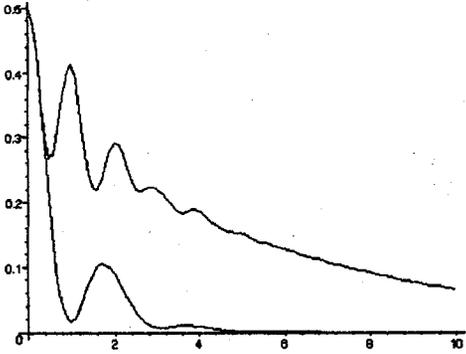
Assumptions	Graph of $ \mathbf{v}(t) ^2$
<p>Example 1.</p> $\gamma(t) = \frac{3}{1+t^2},$ $\nu(t) = \frac{1}{1+e^t},$ $\delta(t) = \frac{1}{1+\cosh(t)},$ <p>(i) $a = b = c = 0,$ $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$</p>	
<p>(ii) $a = b = c = 0,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>Comparison between the two cases (i) and (ii).</p>	

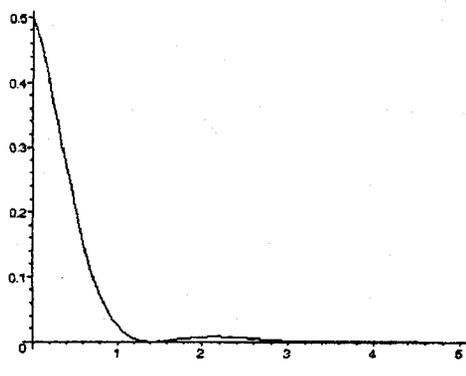
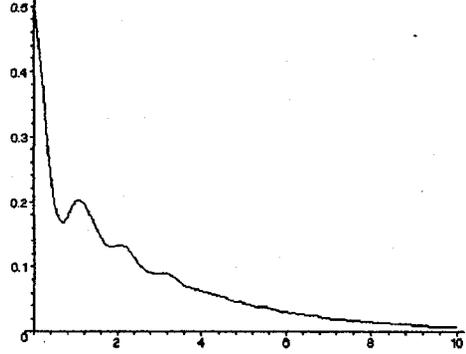
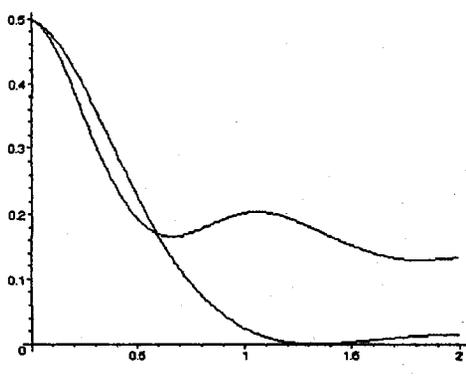
Assumptions	Graph of $ \mathbf{v}(t) ^2$
<p>(iii) $a = b = c = 0,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>(iv) $a = b = c = 1,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>(v) $a = b = c = 2,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	

Assumptions	Graph of $ v(t) ^2$
<p>(vi) $a = b = c = 5,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>Comparison between the four latter cases.</p>	
<p>(vii) $a = 5, b = c = 0,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	

Assumptions	Graph of $ \nu(t) ^2$
<p>Comparison between the two cases (iii) and (vii).</p>	
<p>Example 2. $\gamma(t) = 4\text{sech}(t)$, $\nu(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$, $\delta(t) = e^{-t}$, (i) $a = b = c = 0$, $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}$.</p>	
<p>(ii) $a = b = c = 0$, $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}$.</p>	

Assumptions	Graph of $ v(t) ^2$
<p>Example 3.</p> $\gamma(t) = \frac{4}{1+t^2},$ $\nu(t) = \frac{t}{(1+t^2)^4},$ $\delta(t) = \frac{t}{1+t^4},$ <p>(i) $a = b = c = 0,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>(ii) $a = b = c = 0,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>Comparison between the two cases, (ii) and the case where $a = 5, b = c = 0.$</p>	

Assumptions	Graph of $ v(t) ^2$
<p>Example 4. $\gamma(t) = 2\sqrt{2}e^{-t}$, $\nu(t) = \delta(t) = e^{-t}\sin(t)$, (i) $a = b = c = 0$, $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}$.</p>	
<p>(ii) $a = b = c = 1$, $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}$.</p>	
<p>Comparison between the two cases, (ii) and the case where $a = 5, b = c = 0$.</p>	

Assumptions	Graph of $ v(t) ^2$
<p>Example 5.</p> $\gamma_i(t) = \frac{4}{(1+t)^2}, \quad i = 1, 2, 3$ $\lambda(t) = \mu(t) = \nu(t) = \frac{1}{(t+1)^2(t+2)^2},$ $\alpha(t) = \beta(t) = \delta(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$ <p>(i) $a = b = c = 0,$ $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$</p>	
<p>(ii) $a = 5, b = c = 0,$ $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$</p>	
<p>(iii) Comparison between both cases $a = b = c = 0, a = 5, b = c = 0,$ with $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$</p>	

Since the variations of $|\mathbf{v}(t)|^2$ are relatively smooth within the displayed interval it was sufficient to perform the calculations with a time-step $\Delta t = \frac{1}{20}$ as a first test for each example and $\Delta t = \frac{1}{10}$ for the other cases, only in case (iii) of the last example a step $\frac{1}{100}$ has been necessary.

In appendix A3, we present a variety of admissible kernels and inhomogeneity functions which might be useful in applications.

Conclusion and open questions

In statistical physics quantum dynamics of open systems is the fundamental setting to account for irreversible processes and associated relaxation- and dissipation phenomena. For most applications to very fast microscopic dynamics down to the femtosecond scale the basic equations are known to be given by Volterra integro-differential equations of convolution type. Essentially, quantum theory sets a concrete bound on the solutions and yields a representation of integral kernels. The latter is of such a complexity that no practically useful treatment could be found up to now.

For applications to physical experiments it is often desirable to have available at least some explicit kernel functions. In a first attempt, therefore, we have tried to work out such functions merely with help of bound estimates. A first proof uses standard techniques to yield more detailed restrictions on involved matrices and inhomogeneity functions for arbitrary finite dimension n whereas the further investigations have been restricted to $n = 2$ and $n = 3$. Although examples in 2 dimensions are not yet of physical importance they have been studied in order to get more insight into difficulties of the problem. Simpler cases could analytically be solved by Laplace transform whereas for more general assumptions one had to resort to numerical procedures. As was to be expected, the derived general bound estimates have the drawback of being too restrictive. In other words, kernels which perfectly solve the problem are possibly rejected or accepted only for a limited set of initial conditions. In principle, the numerical treatment may help to improve this situation by showing that the explicit choice is admitted for all initial conditions even when the strong bound estimates would reject it. For this purpose a simple Maple V-program has been set up, however, without any aim at perfection.

A similar strategy is adopted for $n = 3$ which is the lowest-dimensional case of physical importance in that it represents general quantum dynamics of an open 2-level system coupled to an environment, as frequently occurring in atomic or molecular physics. Here, we have taken advantage of a tentative extension of mathematically rigorous results derived in the theory of completely positive quantum dynamical semigroups and associated Markovian master equations. Not quite surprisingly, the

explored time-local generalization of semi-inequalities for the semigroup generators has turned out to provide an efficient tool for the search of suitable kernel-and inhomogeneity functions. At least in this way, and with help of a corresponding Maple V-program one has been able to find a collection of suitable candidates of potential practical use to simulate short-time dynamics of physical systems.

For future investigations there remain essentially the following open questions:

- (1) One should try to improve the general bound estimates towards sharper conditions
- (2) In particular, the effect of the skew-symmetric matrix A has to be clarified in more detail, even for the case of time-dependence. As a result of experience the true bounds are expected to be independent of it.
- (3) Most probably, the time-local version of inequalities can substantially be weakened by relations involving only integrals of single kernel functions or certain products of the latter
- (4) The simple computer codes should be improved regarding numerical stability and fast execution time.

APPENDICES

A1. Interchanging the order of integration

Let f, g be continuous functions respectively on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+$. Then we have:

$$\int_0^t \int_0^u f(u, s)g(s)dsdu = \int_0^t \left\{ \int_s^t f(u, s)du \right\}g(s)ds, \tag{a1}$$

for $t \geq u \geq s \geq 0$.

Proof.

We can see that the integral $\int_0^t \int_0^u f(u, s)g(s)dsdu$ is taken over the triangle in figure a1

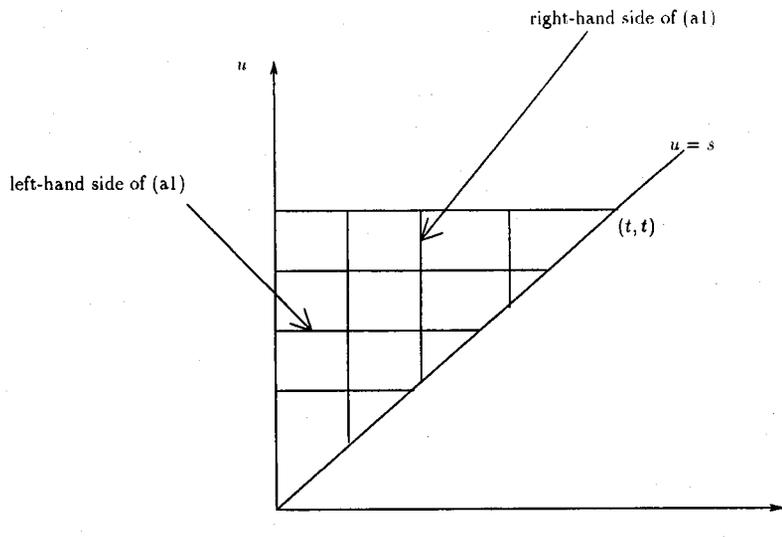


Figure a1

Therefore, we can easily deduce the formula (a1).

□

A2. Gronwall's inequality

Let $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty)$ be continuous and C be a nonnegative number. If

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(s)f(s)ds, \quad 0 \leq t < \alpha,$$

then

$$f(t) \leq C \exp\left\{\int_0^t g(s)ds\right\}, \quad 0 \leq t < \alpha.$$

Proof.

Suppose first that $C > 0$. Divide by $C + \int_0^t g(s)f(s)ds$ and multiply by $g(t)$ to obtain:

$$f(t)g(t)/\left\{C + \int_0^t g(s)f(s)ds\right\} \leq g(t).$$

An integration from 0 to t yields:

$$\log\left\{\left(C + \int_0^t g(s)f(s)ds\right)/C\right\} \leq \int_0^t g(s)ds$$

or

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(s)f(s)ds \leq C \exp\left\{\int_0^t g(s)ds\right\}.$$

If $C = 0$, take the limit as $C \rightarrow 0$ through positive values. This completes the proof.

□

A3. List of admissible kernels and inhomogeneity functions

$k(x)$	$\int_0^t k(x)dx$	$\int_0^\infty k(x)dx$
$ae^{-bx},$ $b > 0$	$\frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$	$\frac{a}{b}$
$\frac{1}{1 + e^x}$	$\log\left(\frac{e^t}{1 + e^t}\right) + \log(2)$	$\log(2)$
$e^{-ax} \sin(mx),$ $a > 0$	$\frac{1}{a^2 + m^2}(m - e^{-at}(m \cos(mt) + a \sin(mt)))$	$\frac{m}{a^2 + m^2}$
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{erf}(at),$ erf: normalized error function	$\frac{1}{a}$
$\frac{1}{1 + x^2}$	$\arctan(t)$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{x}{1 + x^4}$	$\frac{1}{2} \arctan(t^2)$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{x}{(a^2 + x^2)^4}$	$\frac{1}{6a^6} - \frac{1}{6(a^2 + t^2)^3}$	$\frac{1}{6a^6}$

$k(x)$	$\int_0^t k(x)dx$	$\int_0^\infty k(x)dx$
$sech(x)$	$\arctan(\sinh(t))$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\cosh(x) + 1}$	$\tanh\left(\frac{t}{2}\right)$	1
$\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$	$1 - sech(t)$	1
$x^2 e^{-x} \sin x$	see formula (a2)	$\frac{1}{2}$
$\frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2}$, $m, a > 0$	see formula (a3)	$\frac{\pi}{2} e^{-ma}$
$ax e^{-x^2}$	$-\frac{1}{2} a e^{-t^2} + \frac{1}{2} a$	$\frac{1}{2} a$
$ax e^{-x}$	$-ate^{-t} - ae^{-t} + a$	a
$J_0(m\sqrt{x}) \cos x$	no analytical calculation	$\sin\left(\frac{m^2}{4}\right)$

$k(x)$	$\int_0^t k(x)dx$	$\int_0^\infty k(x)dx$
$\frac{1}{(x+1)^{\alpha+1}},$ $\alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha(1+t)^\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$
$\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	1
$axe^{-x^2} J_0(mx),$ $m > 0$	no analytical calculation	$\frac{1}{2}ae^{-\frac{1}{4}m^2}$
$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}$	see formula (a4)	$\frac{3}{2} - 2 \log 2$
$\frac{ax+b}{cx^3+d},$ $(a, b, c, d > 0)$	see formula (a5)	$\frac{2\sqrt{3}\pi(ad^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}+bc)}{9d^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}}}$

$$(a2) = -\frac{1}{2}e^{-t} \cos(t)t^2 - e^{-t} \cos(t)t - \frac{1}{2} \cos(t)e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} \sin(t)t^2 + \frac{1}{2} \sin(t)e^{-t} + \frac{1}{2}.$$

$$(a3) = \frac{1}{2}Si(tm-ima) \cosh(ma) + \frac{1}{2}iCi(tm-ima) \sinh(ma) + \frac{1}{2}Si(tm+ima) \cosh(ma) - \frac{1}{2}iCi(tm+ima) \sinh(ma) - \frac{1}{2} \sinh(ma)\pi.$$

$$(a4) = \frac{5t + 3t^2 - (12t + 4t^2 + 8)(\log(t+1) - \log(2+t) + \log(2))}{2(t+1)(2+t)}.$$

$$\begin{aligned}
(a5) = & \frac{1}{18d^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}}} \left\{ -3bc \log(c) + 6bc \log(tc + c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}}) - 3bc \log(t^2c - tc^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}) \right. \\
& + 6b\sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} \frac{(2tc - c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}})\sqrt{3}}{c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}}}\right)c + 3ac^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} \log(c) - 6ac^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} \log(tc + c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}}) \\
& + 3ac^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} \log(t^2c - tc^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}) + 6a\sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} \frac{(2tc - c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}})\sqrt{3}}{c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}}}\right)c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} \\
& \left. + b\sqrt{3}\pi c + a\sqrt{3}\pi c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{3}} \right\}.
\end{aligned}$$

Bibliography

- [1] Alicki. R - Lendi. K: Quantum dynamical semigroups and applications. Lecture notes in Physics, vol 286, Springer-Verlag Berlin, 1987.
- [2] Burton. T.A: Volterra integral and differential equations. Academic press 1983.
- [3] Corduneanu. C: Principles of differential and integral equations. Chelsea publishing company, 1971.
- [4] Davis. P.J - Rabinowitz. P: Methods of numerical integration. Computer science and applied Mathematics. Academic press New York, 1975.
- [5] Margenau. H - Moseley Murphy. G: The mathematics of physics and chemistry, New Jersey. D Van Nostrand Company, INC, 1956. [6] Monagan. M.B - Gedds K.O - Heal. K.M - Labahn. G - Vorkoetter. S.M: Maple V programming guide. Springer Verlag New York, 1998.
- [7] Van Wonderen. A.J - Lendi. K: Virtues and limitations of Markovian master equations with a time-dependent generator. J Stat Phys 100, issue 3/4, 2000.
- [8] Weisstein. E.W: CRC concise Encyclopedia of Mathematics. CRC press, 1999.