



**HAL**  
open science

# Flambage plastique des coques de révolution sous pression interne

Khaled Hatem

► **To cite this version:**

Khaled Hatem. Flambage plastique des coques de révolution sous pression interne. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paul Verlaine - Metz, 1993. Français. NNT : 1993METZ029S . tel-01775425

**HAL Id: tel-01775425**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775425v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITE DE METZ

# THESE

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MECANIQUE

Présentée à l'Université de METZ

par:

KHALED HATEM

Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique de l'Université des Sciences  
et de la Technologie d'ORAN (Algérie)

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

spécialité: Génie Mécanique

## FLAMBAGE PLASTIQUE DES COQUES DE REVOLUTION SOUS PRESSION INTERNE

à soutenir le 29 juin 1993 devant la commission d'examen, composée de MM:

<b>G. Ferron</b>	<b>Examineur</b>
<b>J. F. Jullien</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Potier-Ferry</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>C. Stolz</b>	<b>Rapporteur</b>

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420789 4

et Mécanique des Matériaux  
N.R.S. n° 1215  
Saulcy 57045 Metz Cedex 01

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITE DE METZ

# THESE

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

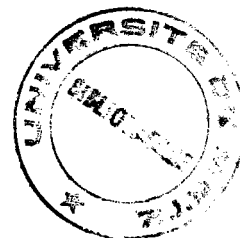
BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1993092 S
Cote	S/M <sub>3</sub> 93/29
Loc	Magasin

EN MECANIQUE

Présentée à l'Université de METZ

par:

KHALED HATEM



Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique de l'Université des Sciences  
et de la Technologie d'ORAN (Algérie)

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

spécialité: Génie Mécanique

## FLAMBAGE PLASTIQUE DES COQUES DE REVOLUTION SOUS PRESSION INTERNE

à soutenir le 29 juin 1993 devant la commission d'examen, composée de MM:

G. Ferron	Examineur
J. F. Jullien	Rapporteur
M. Potier-Ferry	Directeur de thèse
C. Stolz	Rapporteur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
U.A. au C.N.R.S. n° 1215  
Faculté des Sciences Ile du Saulcy 57045 Metz Cedex 01

## AVANT-PROPOS

*Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'université de Metz sous la direction du professeur, M. Michel POTIER-FERRY, directeur du Laboratoire. Je voudrais particulièrement le remercier ici. Son aide a été précieuse sur le plan théorique et plus précisément sur l'analyse et l'interprétation des problèmes d'instabilité. Etant Ingénieur de formation, j'ai acquis auprès de lui, une solide formation en calculs de structures et plus particulièrement dans le cas des structures minces.*

*M. Jean-François JULLIEN professeur à l'université de Lyon I, me fait l'honneur de rapporter ce travail et je lui en suis très reconnaissant.*

*M. Claude STOLZ chercheur au C.N.R.S, Laboratoire de mécanique des solides, Ecole Polytechnique de Palaiseau, a également accepté de rapporter ce travail, qu'il en soit ici remercié.*

*Mes remerciements vont également à M. Gerard FERRON, professeur à l'université de Metz, d'avoir accepté d'examiner ma thèse.*

*Que mes collègues et amis du Laboratoire trouvent ici, l'expression de mes sincères remerciements, en particulier N. DAMIL pour les fructueuses discussions que j'ai pu avoir avec lui.*

*Cette formation postgraduée, je la dois en partie à notre défunte coordonnatrice du Centre Universitaire de Tiaret (Algérie), avec laquelle j'ai travaillé en collaboration sur le plan administratif et pédagogique. A cette occasion, je lui présente ici mes hommages et qu'elle repose en paix!*

*Ma reconnaissance, la plus sincère et la plus profonde va à Moulkheir mon épouse et mes parents, sans qui tout cela n'aurait été possible. Enfin je profite de ces quelques lignes, pour partager ma joie avec mes enfants.*

## **RESUME**

Les coques de révolution et en particulier les coques de type torisphérique ou elliptique flambent localement, sous une pression interne. Pour prévoir correctement les charges critiques de flambage, le calcul de ce flambage est effectué en plasticité. Les pressions critiques sont ainsi déterminées numériquement sur des modèles classiques de la plasticité, en utilisant un code de calculs. Souvent cette étude de dimensionnement au flambage, prendra un temps calcul important. Le mieux est d'avoir une bonne estimation de la pression critique de flambage en utilisant des équations analytiques. C'est pour cela qu'une nouvelle méthode simplifiée de calcul de flambage a été introduite et développée.

## **ABSTRACT**

Shells of revolution and in particular, torispherical or elliptical shells present a local buckling under internal pressure. To predict correctly the critical loads, the plastic buckling has been considered. Thus, the critical pressure has been determined numerically, using classical models of plasticity and numerical code. Often this computation (torispherical or elliptical shells), takes a long numerical time. That is why it is better to have accurate analytical estimations of the buckling load. In this respect a new simplified buckling analysis has been introduced and worked out.

# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION GENERALE

### CHAPITRE I Etude bibliographique

#### I- Flambage élastique

- I-1 Un modèle élémentaire de flambage
- I-2 Critère de stabilité élastique
- I-3 Quelques exemples de contraintes critiques

#### II-Flambage plastique

- II-1 Modèle de flambage plastique
- II-2 Critère de plasticité de Hill

#### III-Théorie des coques minces

- III-1 Introduction
- III-2 Déformation d'une coque mince
  - III-2-1 géométrie de la coque mince
  - III-2-2 Tenseurs associés à la surface moyenne
  - III-2-3 Relations déformations déplacements
- III-3 Diverses équations de coques
- III-4 Conclusion

#### IV-Lois élastoplastiques

- IV-1 Théorie incrémentale
- IV-2 Théorie de déformation
- IV-3 Différence entre les deux lois
- IV-4 Exemples de calculs de flambage plastique

#### V-Conclusion

### CHAPITRE II Calcul numérique de la pression critique de flambage plastique des coques de révolution

#### Introduction

#### I-Géométrie des coques torisphérique et elliptique

- I-1 Coque torisphérique
- I-2 Coque elliptique

## II-Flambage local des coques de révolution sous pression interne

### II-1 Origine du flambage local

#### II-1-1 Flambage local d'une coque torisphérique

#### II-1-2 Flambage local d'une coque elliptique

## III-Lois plastiques utilisées pour les coques de révolution étudiées

### III-1 Courbe de traction uniaxiale

### III-2 Expression des modules tangents selon le modèle de plasticité

#### III-2-1 La théorie incrémentale (flow theory)

#### III-2-2 La théorie de déformation du $J_2$ ( $J_2$ theory)

## IV-Formulation du problème de flambage plastique

### IV-1 Cinématique de D.M.V.

### IV-2 Introduction du comportement plastique dans le critère

### IV-3 Formulation en éléments finis du problème de flambage

#### IV-3-1 Approximation de la géométrie

#### IV-3-2 Approximation du champ de déplacement $\{u\}$

#### IV-3-3 Mise en équations en éléments finis

#### IV-3-4 Maillage des coques torisphérique et elliptique

#### IV-3-5 Algorithme de résolution des problèmes aux valeurs propres

## V-Résultats numériques

### V-1 Flambage élastique des coques simples sous pression hydrostatique

### V-2 Flambage des coques torisphérique et elliptique

#### V-2-1 Coque torisphérique

#### V-2-2 Coque elliptique

### V-3 Conclusion

### V-4 Résultats numériques avec modification de la contrainte circonférentielle, de la coque torisphérique

## VI Conclusion

# CHAPITRE III Méthode simplifiée de calcul de la pression critique d'une coque torisphérique

## Introduction



- I-Équations de flambage
- I-1 Première équation de flambage en utilisant la loi de compatibilité
- I-2 Deuxième équation de flambage

## II-Fondements de la méthode simplifiée

- II-1 Calculs approchés du mode flambage
- II-1-1 Modèle très simplifié avec prise en compte d'une seule courbure
- II-1-2 Modèle simplifié avec méthode de Ritz en conservant les deux courbures
- II-1-3 modèle simplifié avec méthode de Ritz et en ne conservant qu'une seule courbure

## III-Forme pratique de la formule simplifiée

- III-1 Validation sur le cas élastique
- III-2 Forme pratique de la formule simplifiée
- III-2-1 Paramètres adimensionnels intervenant dans la formule simplifiée
- III-2-2 Principe de résolution
- III-3 Applications de la formule simplifiée au flambage plastique de la coque torisphérique
- III-3-1 Les paramètres qui influent sur la solution simplifiée
- III-3-1-1 Influence du comportement sur la courbe  $f(\lambda)$
- III-3-1-2 Influence du comportement sur la solution du problème simplifié
- III-3-1-3 Influence de la minceur de la coque
- III-3-2 Calculs de la pression critique de flambage de la coque torisphérique, par la méthode simplifiée

## IV-Conclusion

### CONCLUSION GENERALE

## NOTATIONS GENERALES

### NOTATION DES DEPLACEMENTS ET DES GRANDEURS TENSORIELLES

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \chi = 1, 2$

$i, j, k, l = 1, 3$

[ ] matrice

{ } colonne vecteur

$\underline{v}$  représentation d'un vecteur

$u_\alpha$  déplacements tangentiels covariants

$u^\alpha$  déplacements tangentiels contravariants

$w$  déplacement normal

$\sigma^{\alpha\beta}$  tenseur des contraintes (contravariant)

$\varepsilon_{\alpha\beta}$  tenseur des déformations (covariant) de Green-Lagrange

$M_{\alpha\beta\gamma\delta}$  tenseur du quatrième ordre (covariant) des souplesses

$H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  tenseur du quatrième ordre (contravariant) des coefficients de comportement

$\gamma_{\alpha\beta}$  tenseur des déformations de membrane

$\kappa_{\alpha\beta}$  tenseur des déformations de flexion

$\delta^i_j$  symbole de Kronecker (=1, pour  $i=j$  et = 0, pour  $i \neq j$ )

$S_{ij}$  déviateur des contraintes ( $S_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma^k_k \delta^i_j$ )

( $\alpha\beta$ ) coordonnées physiques donnant les composantes physiques ((1)=s, (2)=r $\theta$ )

$\sigma_e$  contrainte équivalente ( $\sigma_e^2 = 3/2 S_{ij} S^{ij}$ )

$\varepsilon_e$  déformation équivalente

| dérivée covariante

$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  symbole de Christoffel sur la surface moyenne de la coque de révolution

CARACTERISTIQUES MECANIQUES ET CHARGEMENT

$\sigma_y$  limite élastique des contraintes

$\epsilon_y$  limite élastique des déformations

$\nu$  coefficient de Poisson ( $\nu=0.3$ )

$E$  module d'Young

$\mu$  module de cisaillement

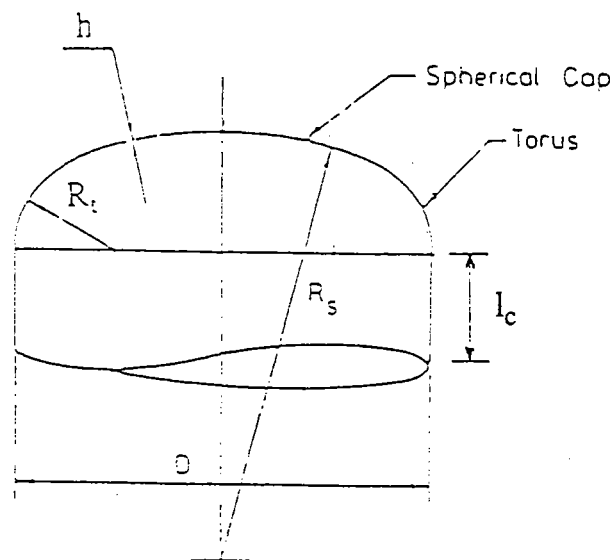
$E_t$  module tangent

$E_s$  module sécant

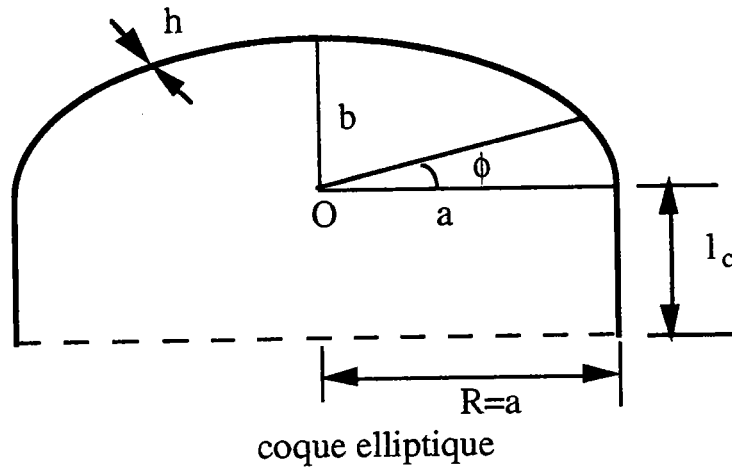
$p$  pression interne

$n$  nombre d'ondes circonférentiel

GEOMETRIE DES COQUES ETUDIEES



coque torisphérique



- h épaisseur de la coque de révolution
- a grand axe de l'ellipse
- b petit axe de l'ellipse
- R rayon du cylindre de base (diamètre  $D=2R$ )
- $R_t$  rayon du tore
- $R_s$  rayon de la calotte sphérique
- $l_c$  longueur du cylindre de base
- $\phi$  angle de l'ellipse
- s abscisse curviligne
- $\theta$  angle de rotation autour de l'axe de révolution
- $\dot{(\ )}$  dérivée temporelle
- $_{,1}$  dérivée partielle :  $\partial/\partial s$
- $_{,2}$  dérivée partielle :  $\partial/\partial \theta$
- $(\prime)$  dérivée par rapport à la variable de référence  $\xi$ :  $\partial/\partial \xi$
- $\sigma_s$  contrainte méridienne
- $\sigma_\theta$  contrainte circonférentielle

- $\alpha(s)$  rapport des contraintes:  $\sigma_s(s)/\sigma_\theta(s)$  ( voir aussi (III-11) chapitre II)
- $N_s$  contrainte résultante méridienne
- $N_\theta$  contrainte résultante circonférentielle
- $C_\alpha$  courbures principales des structures étudiées (voir tab. I-1 et tab. I-2 du chapitre II)

## INTRODUCTION GENERALE

La théorie des coques minces est largement utilisée pour la modélisation de nombreuses structures industrielles. Ces structures sont rencontrées dans la plupart des domaines du nucléaire, de l'aéronautique, de l'aérospatial, aussi dans certaines constructions mécaniques et civiles. Du fait de l'importance de ces structures, beaucoup d'études ont été menées depuis le début du siècle dernier pour appréhender la stabilité de ces structures sous divers chargements.

Une grande partie de ces structures est composée d'assemblages de coques de révolution simples: cylindre, sphère, ellipse ou cône. On peut citer par exemple: les réservoirs, les réacteurs, les missiles etc... Il apparaît sur ces coques un phénomène d'instabilité local ou global dû au chargement et au changement de géométrie surtout pour les coques composées. Cette instabilité provoque, le plus souvent la ruine de ces structures, ce qui impose un dimensionnement au flambage. Cet aspect a fait l'objet de plusieurs études théoriques et expérimentales, [G3], [A3]. On constate que les résultats obtenus par ces différentes études présentent des écarts entre elles et entre les valeurs expérimentales. On s'aperçoit que le dimensionnement au flambage élastique surestime la charge critique. Pour se rapprocher au mieux des tests expérimentaux, généralement on fait un calcul en plasticité.

Au delà de la limite élastique le comportement du matériau n'obéit plus à la loi de Hooke, et les interprétations de ce phénomène sont diverses et controversées. Dès 1889, Engesser [E2], avait remplacé dans la formule d'Euler donnant la charge de flambage, d'une poutre comprimée, le module d'Young par le module tangent. Il fut plus tard critiqué, car il avait négligé la décharge élastique qui peut se produire sur une portion de cette poutre en compression. Pour corriger son erreur, il introduit un module dit réduit, qui tient compte des parties élastique et plastique. Cette théorie était considérée comme exacte pendant plusieurs décennies.

A partir de 1947, Shanley [S2], a clarifié le problème de bifurcation sur un exemple simple. Ensuite Hill[H1], a donné une formulation précise pour caractériser les états critiques. Actuellement, la position du problème est clairement exposée dans les traités fondamentaux en ce qui concerne la charge et le mode de bifurcation et le post-flambage[L3], voir Hutchinson[H2] par exemple.

La difficulté de la plasticité réside dans la modélisation des lois appropriées, pour le comportement élastoplastique. L'exemple le plus convaincant est l'étude de l'éprouvette cruciforme. Ces lois dépendent généralement de la modélisation des courbes de contraintes-déformations du matériau obtenues par l'essai de traction. Le plus souvent en pratique, on utilise des lois populaires à savoir: la théorie de la déformation du  $J_2$  et la théorie incrémentale, qui décrivent la plasticité classique.

Le dimensionnement au flambage plastique reste un problème difficile. Nous

proposons dans ce mémoire des méthodes simplifiées pour le calcul des charges de flambage des coques de révolution sous pression interne. Pour étudier ce problème, on adopte ces lois classiques (la déformation et l'incrémentale), faciles à manipuler, tout en donnant des résultats concrets et facilement exploitables. On se place dans le contexte des petites déformations et des rotations modérées. Le plan de la thèse se compose de trois parties.

La première partie est une étude bibliographique dans laquelle sont rappelées les études du flambage élastique et plastique et les critères qui leur sont associés. Il nous semble utile de mettre l'accent sur le critère de Hill, car il donne la plus petite charge critique de flambage plastique. Ceci va dans le sens de la sécurité de la structure. On définit aussi les déformations de ces coques minces, qui sont établies à partir de la théorie des surfaces. Il ressort qu'à partir de certaines hypothèses relatives aux types de déformations et à la géométrie de la structure on établit diverses équations de coques. Pour modéliser le comportement élastoplastique on a cité diverses lois dont l'utilisation est plus ou moins complexe. Pour montrer l'importance du calcul de bifurcation, on donne quelques exemples de modèles simples dans les domaines élastique et plastique.

Dans la deuxième partie, on applique la formulation de Hill à des coques de Donnell[D2] pour déterminer la pression critique, par un calcul en éléments finis. On pourra utiliser une discrétisation en éléments filiformes à cause de la symétrie de révolution des structures étudiées: coques torisphérique et elliptique.

L'outil numérique utilisé est un programme appelé COQ relatif au calcul de vibration, existant au L.P.M.M., qu'on a largement modifié et validé sur ces types de structures. Les modes et les valeurs propres que nous avons calculé ont été effectués dans les deux cas suivants:

- l'état fondamental est un état de membrane (on néglige les rotations dans la phase de préflambage).
- on introduit le préflambage en corrigeant l'allure de la contrainte circonférentielle par une certaine fonction.

Les résultats obtenus dans les deux cas considérés, sont confrontés à ceux de la littérature[G3],[B7].

On développe dans la troisième partie des méthodes simplifiées de flambage de coques de révolution. On propose une analyse simplifiée pour le flambage plastique de ces coques sous pression interne. Pour cela, nous allons utiliser une méthode asymptotique similaire à celle introduite par Abdelmoula [A1], pour étudier l'influence des conditions aux limites sur la pression de flambage élastique de coques cylindriques sous pression externe. Ainsi, nous donnons des formules analytiques simplifiées pour le calcul de la pression critique et le nombre d'ondes critique circonférentiel associé.

L'intérêt de ces formules simplifiées, est qu'on peut séparer nettement l'influence du comportement et l'influence de la géométrie sur la pression critique

de flambage des coques de révolution étudiées. Il en résulte que la méthode analytique simplifiée nous permet une discussion intéressante sur le modèle de plasticité choisi. Son application sur des coques torisphériques donnent des résultats qui montrent le rôle dominant de certains paramètres géométriques de ce type de coques. Ces formules simplifiées peuvent être utilisées à l'élaboration d'abaques pour le dimensionnement au flambage plastique de ces coques.



CHAPITRE I ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I FLAMBAGE ELASTIQUE

II FLAMBAGE PLASTIQUE

III THEORIE DES COQUES MINCES

IV LOIS DE COMPORTEMENTS ELASTOPLASTIQUES

V CONCLUSION

## I- FLAMBAGE ELASTIQUE

La connaissance du flambage est très ancienne, en effet au 18<sup>e</sup> siècle, la première théorie du flambage fut donnée par Euler, ensuite elle a été développée par Lagrange.

Actuellement, le flambage élastique est parfaitement connu, il existe diverses théories perfectionnées, données par plusieurs auteurs, qui décrivent ce phénomène. On peut citer par exemple celle, formulée par Koiter, Budiansky, Potier-Ferry, [K1],[B4],[P1].

Dans les théories d'instabilité, en particulier le flambage élastique, des modèles très simples peuvent illustrer certaines caractéristiques essentielles des systèmes structurels plus complexes. Ainsi, nous rappelons des charges critiques de flambage élastiques des structures couramment utilisées: poutre, plaque, coque.

### **I-1 Un modèle élémentaire de flambage[P1]**

Pour illustrer, le phénomène de flambage élastique, nous considérons une barre, fig. I-1, verticale de longueur  $l$ , dont l'extrémité supérieure est soumise à une force constante, qui reste dans la direction verticale (charge conservative). A la base, un ressort élastique exerce un moment de rappel  $f(a)$  non-linéaire:

$$f(a)=K_1a+K_2a^2+K_3a^3+\dots \quad (I-1)$$

avec  $K_1>0$ ,

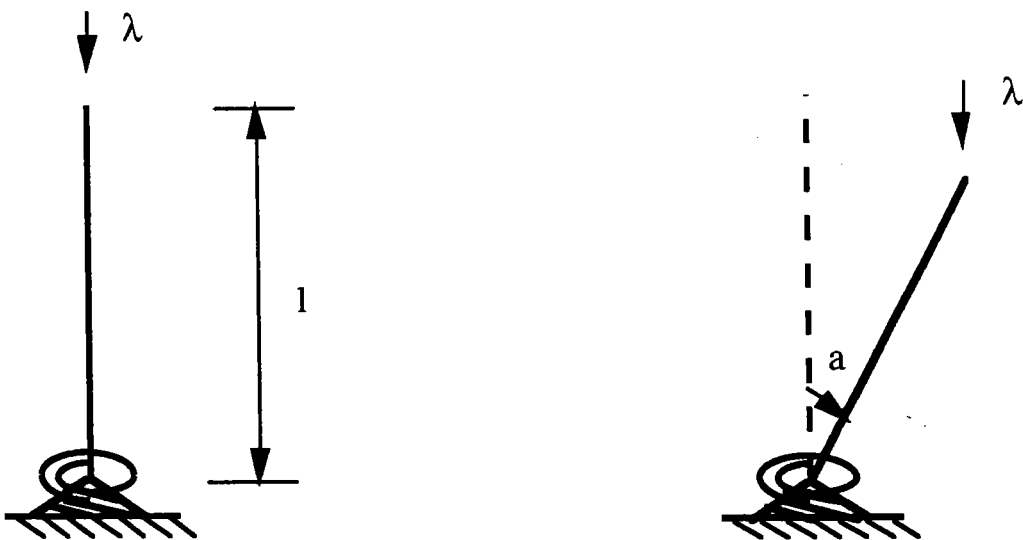


fig.I-1 Modèle simple

$\lambda$ : charge  
 $a$  : angle de rotation de la barre  
 $I$  : son moment d'inertie

L'équation du mouvement de la barre s'écrit sous la forme :

$$I\ddot{a} + f(a) - \lambda l \sin a = 0 \quad (\text{I-2})$$

Dans tout ce qui suit, on ne considère que le cas statique de (I-2). Donc, (I-2) se réduit à:

$$f(a) - \lambda l \sin a = 0 \quad (\text{I-3})$$

Pour  $a=0$ , l'équation (I-3) est vérifiée, ( $f(a)=0$ , voir (I-1)). Cette solution correspond à l'état fondamental. On injecte l'expression (I-1) du moment de rappel, dans la relation ci-dessus. Ensuite, on dérive la relation (I-3) par rapport à  $a$  au point  $a=0$ . On obtient ainsi, une valeur de la charge notée par  $\lambda_c$ , qui caractérise la limite de la position verticale ( $a=0$ ) de la barre. Cette valeur est:

$$\lambda_c = K_1/l \quad (\text{I-4})$$

et est appelée charge critique de flambage (ou charge d'Euler). Pour des valeurs de  $\lambda < \lambda_c$  la position verticale est stable, et est instable pour des valeurs de  $\lambda > \lambda_c$ . Donc, le point ( $a=0, \lambda=\lambda_c$ ) est la limite de stabilité.

Cependant, il existe d'autres solutions d'équilibre ( $a \neq 0$ ) qu'on se contente de décrire brièvement. En faisant un développement de Taylor de l'expression (I-3), au voisinage de  $(0, \lambda_c)$ , on obtient après arrangement des termes de ce développement le paramètre de charge sous la forme:

$$\lambda(a) = \lambda_c + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{I-5})$$

où les constantes  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont respectivement égales à  $K_2/l$  et  $K_3/l + \lambda_c/6$ . Sur la fig. I-2, on présente la solution fondamentale  $a=0$  et la courbe  $\lambda(a)$  dans le cas où  $\beta_1 > 0$  et  $\beta_2 = 0$ . Ces deux courbes solutions se coupent au point  $(0, \lambda_c)$ . Ce point est appelé point de bifurcation. Ainsi la courbe  $a=0$  est la branche fondamentale et  $\lambda(a)$  est une branche bifurquée. Enfin, on remarque que le point de bifurcation, coïncide avec la limite de stabilité.

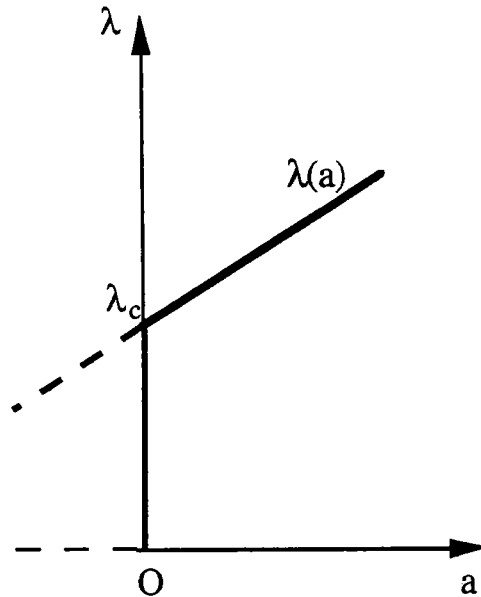


fig.I-2 Point de bifurcation ou limite de stabilité

### I-2 Critère de stabilité élastique [K1], [P1]

L'énergie potentielle  $P$  d'une structure élastique, soumise à une charge conservative  $\lambda$ , peut être exprimée comme une fonction du déplacement  $u$  et de la charge  $\lambda$ . On suppose que cette fonctionnelle est dérivable autant de fois qu'il est nécessaire, de telle sorte que le développement de Taylor au voisinage d'un état fondamental  $u^0$  s'écrit:

$$P(\lambda, u^0 + u) = P_0(u^0) + P_1(\lambda, u^0, u) + P_2(\lambda, u^0, u) + \dots + P_n(\lambda, u^0, u) \quad (I-6)$$

où  $P_0(u^0)$  est l'énergie potentielle à l'état fondamental,  $P_n$  est une fonction homogène de degré  $n$  par rapport à son dernier argument. Tout équilibre  $u$  est solution de l'équation variationnelle:

$$\delta P = 0 \quad (I-7)$$

quel que soit  $\delta u$  champ de déplacements admissibles.

De la même manière nous pouvons ainsi effectuer la dérivée seconde  $\delta^2 P(\lambda, u, \delta u) \dots$  etc.

Un état d'équilibre  $u$  est dit stable s'il réalise un minimum local de l'énergie potentielle (théorème de Lejeune Dirichlet, pour les systèmes discrets). En pratique on utilise le critère de la seconde variation:

un état d'équilibre  $u$  est dit stable si  

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2(\lambda, u^0, u) > 0 \text{ quel que soit } u \text{ admissible} \end{array} \right. \quad (\text{I-8})$$
ou

Il est dit instable si:  

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } u \text{ différent de } 0 \text{ admissible, tel que } P_2(\lambda, u^0, u) < 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-9})$$

Si on suppose qu'il existe un équilibre fondamental  $u^0$ , on a :

$$P_1(\lambda, u^0, u) = 0 \text{ quel que soit } u \text{ admissible} \quad (\text{I-10})$$

A la limite de stabilité ( $P_2(\lambda, u^0, u) \geq 0$ ),  $P_2$  admet un minimum en  $u_1$  non nul. La valeur de  $u_1$  sera donc obtenue par:

$$\begin{array}{l} \delta P_2(\lambda, u^0, u_1, \delta u) = 0 \\ \text{quel que soit } \delta u \text{ admissible} \end{array} \quad (\text{I-11})$$

$u_1$  est appelé mode de flambage.

### I-3 Quelques exemples de contraintes critiques

La contrainte critique de la barre élastique, de la fig. I-1 en compression est :

$$\sigma^c = \pi^2 E / (l/r)^2 \quad (\text{I-12})$$

où  $r$  est le rayon de giration de la section  $S$ ; il est défini par  $r = (I/S)^{1/2}$  avec  $I$  moment d'inertie de la section.  $E$  est le module d'Young.

Nous donnons ci-après les formules classiques des contraintes critiques d'une plaque, dont le comportement peut être isotrope ou orthotrope [B3].

Pour une plaque fig. I-3, sur appui simple, chargée dans son plan par une force compressive uniformément répartie  $p_x$ , la contrainte critique est donnée par la formule:

$$\sigma_x^c = k_c (\pi h / b)^2 E / (12(1-\nu^2)) \quad (\text{I-13})$$

avec  $k_c = (mb/a + a/mb)^2$ , où  $m$  est le nombre d'ondes longitudinal,  $a$ ,  $b$  et  $h$  sont respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque.  $E$  est le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

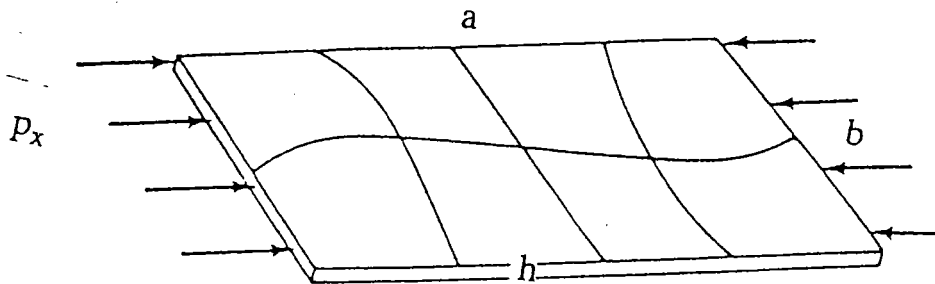


fig. I-3 Flambage d'une plaque comprimée sur appuis simples

Dans le cas d'un comportement orthotrope de cette plaque, la contrainte critique est donnée par la formule suivante:

$$\sigma^c = 1/h(\pi a/m)^2[(m/a)^4 C_{44} + 2(m/ab)^2(C_{45} + C_{66}) + (1/b)^4 C_{55}] \quad (I-14)$$

où  $C_{44}$ ,  $C_{45}$ ,  $C_{55}$  et  $C_{66}$  sont les coefficients de comportement en flexion.

Dans le cas d'une coque cylindrique de rayon  $R$ , fig. I-4 d'épaisseur  $h$  et sans défaut, soumise à une compression axiale la contrainte critique est donnée par [E1]:

$$\sigma^c = (Eh/R)[3(1-\nu^2)]^{-1/2} \quad (I-15)$$

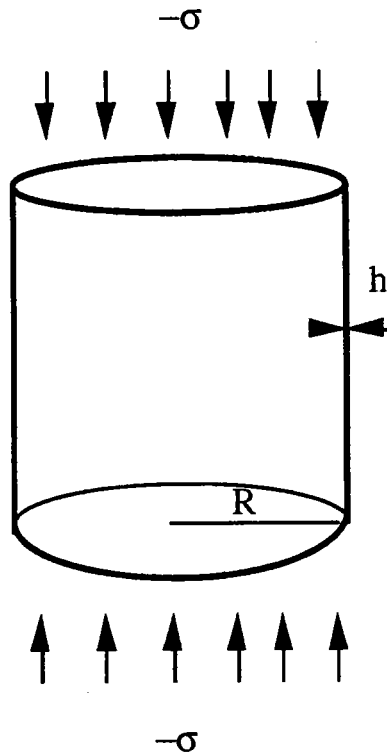


fig. I-4 Cylindre en compression axiale

Enfin, pour une coque sphérique, fig. I-5, de rayon  $r$  et d'épaisseur  $h$ , sous pression hydrostatique  $p$ , soumise à un état biaxial, la contrainte critique de flambage élastique est donnée par[E1],[Z2]:

$$\sigma^c = (Eh/r)[3(1-\nu^2)]^{-1/2} \quad (I-16)$$

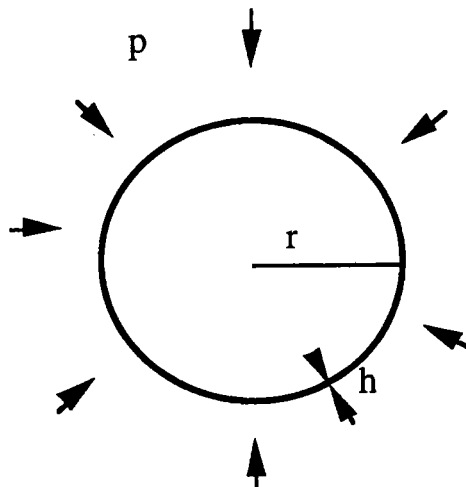


fig. I-5 Sphère sous pression externe

## **II- FLAMBAGE PLASTIQUE**

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que du flambage élastique. Pour ce genre de problème, aussi bien la détermination de la charge critique que l'analyse après flambage est complètement formulée [A5].

La situation est bien différente en présence des déformations plastiques conduisant à des non linéarités matérielles. La différence majeure se manifeste dans la dissociation entre la notion d'instabilité et de bifurcation à l'inverse du cas élastique où les deux coïncident. En plus de l'interaction des non linéarités géométrique et matérielle, s'ajoute le délicat problème du choix de la loi constitutive appropriée pour modéliser le comportement plastique.

Les études sur la poutre comprimée ont marqué l'histoire de la théorie du flambage plastique. Dès 1889, Engesser [E2] avait remplacé le module d'Young par le module tangent dans la formule d'Euler (I-11).

Cette idée fut plus tard critiquée, car une portion de la partie convexe de la poutre déformée peut être soumise à un déchargement élastique. Ainsi, la contrainte critique sera fonction du module tangent et du module réduit, que l'on associe souvent au nom de Considère [C2]. Cette formulation fit autorité pendant plusieurs décennies.

Ce n'est qu'en 1947 que Shanley [S2] montra sur un modèle simple et discret qu'une bifurcation à charge croissante (et non constante) pouvait avoir lieu sans décharge élastique à partir de la charge critique du module tangent. Alors, le critère du module tangent fut définitivement établi.

### **II-1 Modèle de flambage plastique[Q1]**

Le modèle utilisé, appelé "tige de Shanley", fig.II-1 est constitué de deux tiges rigides AB et CD perpendiculaires qui forment un solide indéformable. B est le milieu de CD, les deux tiges CF et DE articulées en C et D sont maintenues dans la position verticale par des glissières coulissantes dans la direction OE. Les tiges CF et DE sont représentées par un système constitué de patins et de ressorts élastoplastiques, fig. II-1(b).



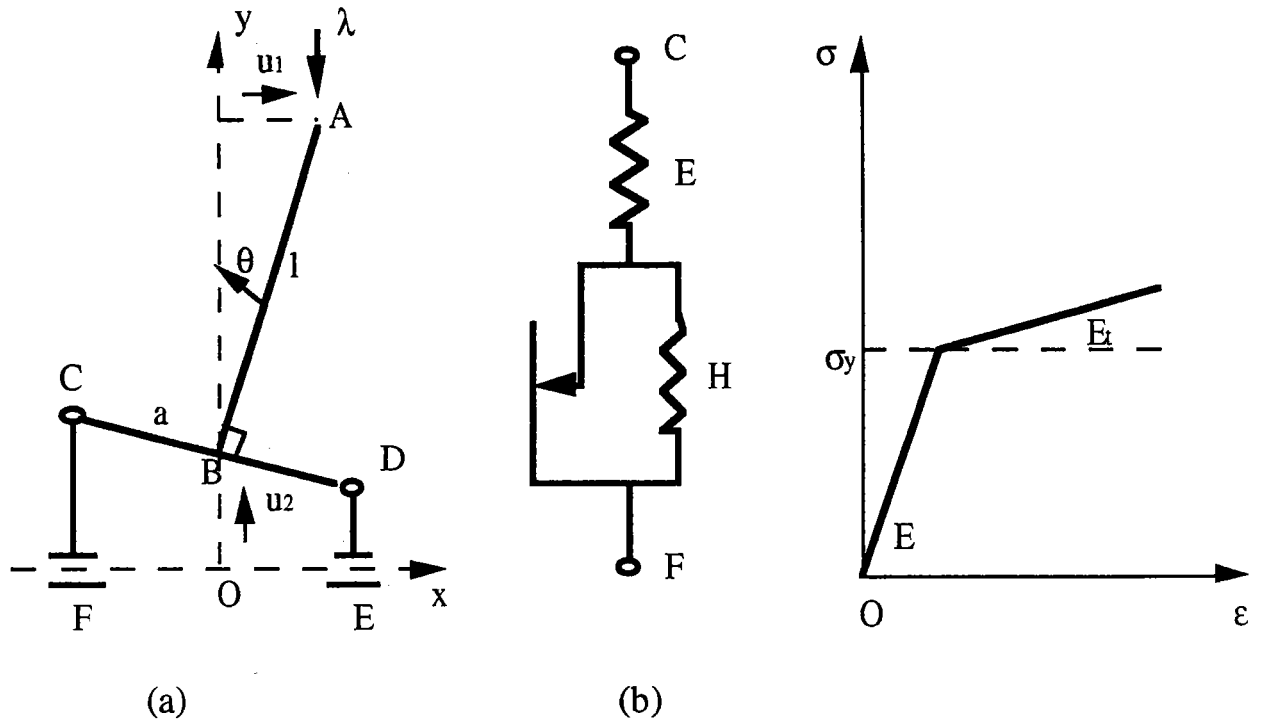


fig. II-1 Modèle élastoplastique de Shanley

La charge critique du module tangent est donnée par la formule suivante:

$$\lambda_t = (EH)/(E+H)(2a^2/l) = E_t(2a^2/l) \quad (\text{II-1})$$

La charge du module réduit est donnée par:

$$\lambda_r = (2EH)/(E+2H)(2a^2/l) = E_r(2a^2/l) \quad (\text{II-2})$$

où

E: module élastique

H: module d'écroûissage et est lié avec  $E_t$  par:  $1/E_t = 1/E + 1/H$

l: longueur de la tige AB

a: longueur de la tige BC

Si on compare ces deux charges à la charge critique élastique, ( $\lambda_e = E2a^2/l$ ), on a l'inégalité suivante entre les différentes charges:

$$\lambda_t < \lambda_r < \lambda_e \quad (\text{II-3})$$

## II-2 Critère de plasticité de Hill

Une discussion satisfaisante du critère de bifurcation a été donnée par Hill [H1] et reprise ensuite par Hutchinson[H2], que nous rappelons ci-après. Elle se base sur la formulation du problème en vitesses de déplacement. A partir du tenseur de déformation de Green-Lagrange qui a pour expression

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{ij} + u_{ji} + u^k_{,i}u_{kj})$$

où le symbole  $\dot{\phantom{x}}$  indique la dérivée covariante, on écrit le principe des travaux virtuels, sous une forme incrémentale:

$$\int_V (\dot{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma^{ij} u^k_{,i} \delta u_{kj}) dV = \int_S T^i \delta u_i dS \quad (II-4)$$

où  $\sigma^{ij}$  désigne le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff.  $dV$  et  $dS$  sont respectivement le volume et la surface élémentaires du solide non déformé.  $T^i$  représente les composantes du vecteur force par unité de surface.

L'analyse de bifurcation se fait en considérant l'évolution des deux solutions:  $(\dot{u}_i^a, \dot{\sigma}^{ij}_a)$  et  $(\dot{u}_i^b, \dot{\sigma}^{ij}_b)$  du problème (II-4). On introduit pour cela les différences:  $\dot{u}_i = \dot{u}_i^b - \dot{u}_i^a$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^b - \dot{\varepsilon}_{ij}^a$  et  $\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij}_b - \dot{\sigma}^{ij}_a$  en écrivant (II-4) pour  $\dot{\sigma}^{ij}_a$  et  $\dot{\sigma}^{ij}_b$ , puis en effectuant la différence membre à membre des deux équations obtenues, il vient en choisissant  $\delta u_{kj} = \dot{u}_{kj}$ :

$$H = \int_V (\dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_0^{ij} u^k_{,i} \dot{u}_{kj}) dV = 0 \quad (II-5)$$

où  $\sigma_0^{ij}$  est l'état de contraintes du chargement fondamental.

L'idée de Hill consiste à minorer cette fonctionnelle  $H$  par une autre fonctionnelle  $F$  quadratique telle que:

$$H \geq F \quad (II-6)$$

Cette fonctionnelle  $F$  est alors établie pour un milieu satisfaisant les mêmes conditions aux limites, mais pour lequel la loi de comportement est remplacée par une loi élastique non linéaire qui est identique à la loi élastoplastique lorsque le matériau est en charge. Cette loi définit alors, un milieu dit "solide de comparaison". Sous forme incrémentale, une loi de comportement élastoplastique associée à une seule fonction seuil, se formule de la manière suivante:

$$\dot{\sigma}^{ij} = L^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (II-7)$$

où

$$L^{ijkl} = \begin{cases} \mathcal{L}^{ijkl} - g^{-1} n^{ij} n_{kl} & \text{dans la zone plastique} \\ \mathcal{L}^{ijkl} & \text{dans la zone élastique} \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

$n^{ij}$  désigne la normale unitaire extérieure au convexe d'élasticité (surface seuil renfermant le domaine élastique).  $g$  est le déterminant du tenseur métrique de la surface du solide, il dépend de l'histoire des déformations et de l'état actuel du taux des contraintes.

$\mathcal{L}^{ijkl}$  et  $L^{ijkl}$  sont respectivement les modules instantanés élastique et plastique. Les modules  $L^{ijkl}$  sont calculés selon le chemin fondamental au point de bifurcation. On peut donc supposer qu'ils ne dépendent pas de la vitesse de déformation. Un choix naturel pour la fonctionnelle quadratique  $F$  et la condition suffisante d'unicité sont:

$$\begin{cases} F = \int_V (L^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma_o^{ij} \dot{u}_{k|i} \dot{u}_{k|j}) dV \\ F > 0 \end{cases} \quad (\text{II-9})$$

Cette condition donne le critère de non bifurcation au sens de Hill.

### III- THEORIE DES COQUES MINCES

#### III-1 Introduction

Les hypothèses fondamentales dans la théorie des coques supposent que l'effet des contraintes normales à la surface de la coque est nul et que les déplacements parallèles à la surface de la coque varient linéairement dans l'épaisseur de la coque. Ce sont les hypothèses de Love-Kirchoff.

On se place dans le cas des coques dites minces, c'est à dire des structures dont l'épaisseur  $h$  mesurée sur la normale à la surface, est très petite par rapport au plus petit des rayons de courbure principaux. L'étude de telles structures est basée sur la théorie des surfaces [G7], [S1], [K2], [N2].

L'analyse théorique des coques fondée sur les hypothèses de Love-Kirchoff et sur la minceur de la coque permet de réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Le comportement de la coque mince en déformation est alors décrit par l'étude de sa surface moyenne.

### III-2 Déformations d'une coque mince

On considère successivement la coque mince dans son état initial et dans son état déformé, puis on décrit l'évolution d'un point appartenant à la surface moyenne dans les deux configurations considérées. On définit ensuite, les déformations relatives à cette surface moyenne.

#### III-2-1 Géométrie de la coque mince

Dans un état non déformé, on exprime le vecteur position  $\underline{R}$  d'un point M de la surface, fig. III-1, de la façon suivante:

$$\underline{R} = \underline{r} + a^3 \underline{n} \quad (\text{III-3})$$

où

$\underline{r}$  est une fonction seulement de  $a^\alpha$

$$\underline{r} = \underline{r}(a^\alpha)$$

$\underline{n}$  normale unitaire qui dépend aussi de  $a^\alpha$

$$\underline{n} = \underline{n}(a^\alpha) \quad (\text{III-4})$$

$a^\alpha$  sont les coordonnées de ligne de la surface

$a^3$  représente la coordonnée de ligne suivant la normale à la surface de la coque.

La coordonnée  $a^3$  dans le cas d'une coque mince, définit la variation de  $h$  le long de la normale à la surface de la coque. Ses limites sont données par la relation suivante:

$$-h/2 \leq a^3 \leq h/2 \quad (\text{III-5})$$

L'équation de la surface moyenne est définie par :

$$a^3 = 0. \quad (\text{III-6})$$

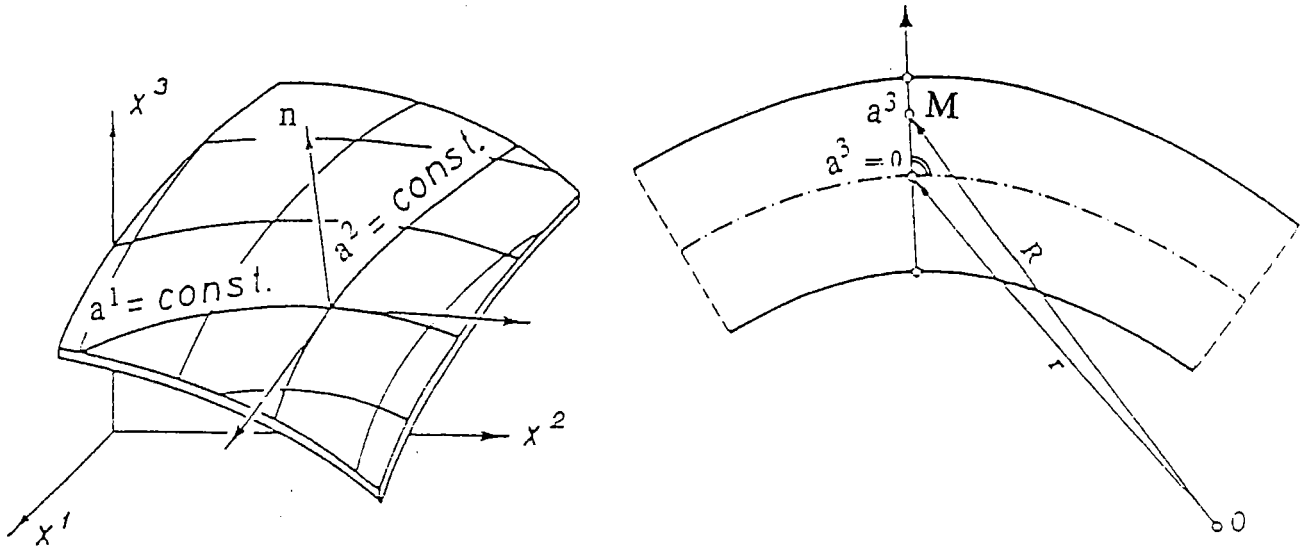


fig. III-1 Géométrie d'une coque mince

Les composantes de  $\underline{R}$  dans le repère  $(O, x^i)$ , sont notées par  $x^i$ . Comme nous ne nous intéresserons qu'à la surface moyenne, le vecteur position  $\underline{R}$  sera identique à  $\underline{r}$ .

### III-2-2 Tenseurs associés à la surface moyenne

A l'état non déformé, le tenseur métrique de la surface (ou de première forme) est défini par :

$$a_{\alpha\beta} = \underline{r}_{,\alpha} \cdot \underline{r}_{,\beta} \quad a = \det (a_{\alpha\beta}) \quad (\text{III-7})$$

Le tenseur de deuxième forme est défini par:

$$b_{\alpha\beta} = \underline{n} \cdot \underline{r}_{,\alpha\beta} \quad (\text{III-8})$$

où le vecteur normal  $\underline{n}$  est donné par la relation:

$$\underline{n} = (1/2) \cdot \epsilon^{\alpha\beta} \cdot \underline{r}_{,\alpha} \wedge \underline{r}_{,\beta} \quad (\text{III-9})$$

avec

$\epsilon^{\alpha\beta}$  est le tenseur de permutation (tenseur de Ricci) défini comme suit:

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{cases} \epsilon^{12} = 1/\sqrt{a}, & \epsilon^{21} = -\epsilon^{12} \\ 0 & \alpha = \beta \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

Enfin le tenseur de troisième forme de la surface est défini par:

$$c_{\alpha\beta} = b^\lambda_{\alpha} b_{\lambda\beta}. \quad (\text{III-11})$$

Le tenseur de deuxième forme  $b_{\alpha\beta}$  peut se mettre sous une forme contravariante ou mixte par les formules de passage:

$$\begin{aligned} b^\alpha_{\beta} &= a^{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda} = a_{\alpha\lambda} b^{\alpha\lambda} \\ b^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\lambda} b^{\beta}_{\lambda} \\ b_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\lambda} b^{\lambda}_{\beta} \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

A l'état déformé le nouveau vecteur position  $\underline{r}^d$  s'écrit en fonction du vecteur position  $\underline{r}$  et du déplacement  $\underline{u}$ :

$$\underline{r}^d = \underline{r} (a^\alpha) + \underline{u}(a^\alpha) \quad (\text{III-13})$$

Dans la configuration déformée, le point M de la surface s'est déplacé d'un vecteur  $\underline{u}$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire d'un déplacement tangentiel  $u^\alpha$  et d'un déplacement normal  $w$ :

$$\underline{u} = u^\alpha \underline{r}_{,\alpha} + w \underline{n} \quad (\text{III-14})$$

On définit comme précédemment, les tenseurs correspondant à la surface moyenne déformée:

$$a^d_{\alpha\beta} = \underline{r}^d_{,\alpha} \cdot \underline{r}^d_{,\beta} \quad a^d = \det(a_{\alpha\beta}) \quad (\text{III-15})$$

$$b^d_{\alpha\beta} = \underline{n}^d \cdot \underline{r}^d_{,\alpha\beta} \quad (\text{III-16})$$

$$\underline{n}^d = \epsilon^d \alpha\beta \underline{r}^d_{,\alpha} \wedge \underline{r}^d_{,\beta} \quad (\text{III-17})$$

où

$$\epsilon^d \alpha\beta = (a/a^d)^{1/2} \epsilon^{\alpha\beta} \quad (\text{III-18})$$

L'indice (d) indique l'état déformé.

### III-2-3 Relations déformations déplacements

On utilise les hypothèses de Love-Kirchoff, qui conduisent à établir l'expression du déplacement d'un point quelconque de la coque en fonction des caractéris-

tiques de la surface moyenne, et qui permettent de réduire l'étude des déformations à celles des déformations de la surface moyenne.

Le tenseur de déformation de membrane est défini par l' expression suivante:

$$\gamma_{\alpha\beta} = (1/2)(a^d_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \quad (\text{III-19})$$

et le tenseur de déformation de flexion est défini par:

$$\kappa_{\alpha\beta} = b^d_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad (\text{III-20})$$

La déformation à l'intérieur de la coque s'écrit :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + a^3\kappa_{\alpha\beta} + (a^3)^2\psi_{\alpha\beta} \quad (\text{III-21})$$

$\psi_{\alpha\beta}$  représente les coefficients des termes quadratiques en  $a^3$ . L'expression complète de la déformation est difficile à manipuler. Dans le cas des coques minces le vecteur déplacement  $\underline{u}$  est linéaire en  $a^3$ , alors on peut négliger le dernier terme dans (III-21). Ainsi on obtient la déformation linéaire en  $a^3$ .

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + a^3\kappa_{\alpha\beta} \quad (\text{III-22})$$

Les expressions de  $\gamma_{\alpha\beta}$  et  $\kappa_{\alpha\beta}$  contiennent des termes linéaires et non linéaires en déplacement. Le plus souvent on prend le tenseur des déformations de flexion  $\kappa_{\alpha\beta}$  linéaire en faisant l'approximation des petites déformations, ce qui revient à écrire.

$$(a/a^d) \approx 1 \quad (\text{III-23})$$

### III-3 Diverses équations de coques

Ces équations ont été établies par plusieurs auteurs [K2],[N2],[T3]. L'écriture la plus complète des déformations est celle de Koiter, par exemple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + 1/2a^{\chi\lambda}(\theta_{\chi\alpha} - \omega_{\chi\alpha})(\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta}) + 1/2\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} \\ \kappa_{\alpha\beta} = 1/2[(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) + b^{\chi}_{\alpha}(\theta_{\chi\beta} - \omega_{\chi\beta}) + b^{\chi}_{\beta}(\theta_{\chi\alpha} - \omega_{\chi\alpha})] \end{array} \right. \quad (\text{III-24})$$

les quantités ci-dessus représentent:

$\theta_{\alpha\beta}$ : partie linéaire de déformation de la surface moyenne

$\omega_{\alpha\beta}$ : tenseur de rotation de la surface moyenne (antisymétrique)

$\varphi_{\alpha}$ : rotation de la normale de la surface moyenne.

Ces quantités sont respectivement définies à partir des composantes du vecteur

déplacement  $u_\alpha$  et  $w$  par les expressions suivantes:

$$\theta_{\alpha\beta} = 1/2(u_{\beta|\alpha} + u_{\alpha|\beta}) - b_{\alpha\beta}w \quad (\text{III-25})$$

$$\omega_{\alpha\beta} = 1/2(u_{\alpha|\beta} - u_{\beta|\alpha}) \quad (\text{III-26})$$

$$\varphi_\alpha = w_{,\alpha} + b^\chi_\alpha u_\chi \quad (\text{III-27})$$

On introduit la rotation autour de la normale notée par:  $\Omega$ , dont l'expression est donnée par:

$$\Omega = 1/2\epsilon^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} \quad (\text{III-28})$$

Si on néglige dans les deux expressions donnant les déformations de membrane et de flexion (III-24) les produits tensoriels:  $\theta.\theta$ ,  $\omega.\theta$  et  $b.\theta$ , on obtient les coques de Koiter-Sanders:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + 1/2\varphi_\alpha\varphi_\beta + 1/2a_{\alpha\beta}\Omega^2 \\ \kappa_{\alpha\beta} = 1/2(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) - 1/2b^\chi_\alpha\omega_{\chi\beta} - 1/2b^\chi_\beta\omega_{\chi\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{III-29})$$

Si on suppose que la rotation autour de la normale  $\Omega$  et le tenseur rotation:  $\omega_{\alpha\beta}$  sont négligeables devant les courbures  $b^\alpha_\beta$  dans (III-29), on obtient les équations de coques de Sanders[S1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + 1/2\varphi_\alpha\varphi_\beta \\ \kappa_{\alpha\beta} = 1/2(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) \end{array} \right. \quad (\text{III-30})$$

Dans les relations (III-30), si on retient uniquement les termes non linéaires en  $w$  et on néglige les termes en  $u_\alpha$  devant les courbures, on obtient ce qu'on appelle les équations de Donnell Musthari Vlasov [D2],[M1],[V1] (en abrégé, on écrit D.M.V.):

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + 1/2w_{,\alpha}w_{,\beta} \\ \kappa_{\alpha\beta} = w|_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (\text{III-31})$$

### III-4 Conclusion

Tous ces modèles d'équations sont difficiles à manipuler pour les structures complexes (coques torisphérique et elliptique). Le plus souvent la théorie la plus



simple (D.M.V), donne des résultats satisfaisants. L'exception la plus connue, est le cas des petits nombres d'ondes circonférentiel ( $n=1,2,3,4$ ).

#### IV- LOIS ELASTOPLASTIQUES

En élastoplasticité la déformation notée par  $\epsilon_{ij}$  est considérée comme la somme d'une partie élastique et d'une partie plastique:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon^e_{ij} + \epsilon^p_{ij} \quad (IV-1)$$

où

$\epsilon^e_{ij}$  est le tenseur des déformations élastiques  
 $\epsilon^p_{ij}$  est le tenseur des déformations plastiques.

Les théories qui permettent de décrire les modèles élastoplastiques sont la théorie d'écoulement ou la théorie incrémentale, la théorie de la déformation [B1],[K3],[H2] et récemment la théorie du vertex [S5],[C1],[N1],[T3].

Dans la résolution des problèmes de flambage plastique, on a souvent recours aux deux premières théories citées ci-dessus. Ces théories s'adaptent mieux à la modélisation numérique et donnent généralement des résultats satisfaisants.

##### **IV-1 Théorie incrémentale**

En petites déformations, la loi de comportement plastique en théorie incrémentale, s'écrit sous la forme:

$$\dot{\sigma}^{ij} = L^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (IV-2)$$

où  $\dot{\sigma}^{ij}$  est l'incrément de contraintes et  $\dot{\epsilon}_{ij}$  est l'incrément des déformations totales.  $L^{ijkl}$  est le module instantané défini par les relations (II-8). On choisit ensuite comme fonction seuil, celle qui est associée au critère de Von-Mises et qui est utilisée par de nombreux auteurs, [H2],[K3]. Dans ce cas, le tenseur  $L^{ijkl}$  définissant le milieu "solide de comparaison" et associé à la théorie incrémentale est donné par la relation suivante:

$$L^{ijkl} = E/(1+\nu)[1/2(\delta^{ik}\delta_{jl} + \delta^{il}\delta_{jk}) + (\nu/(1-2\nu))\delta^{ij}\delta_{kl} - h_1 S^{ij}S_{kl}/(1+\nu+2h_1J_2)] \quad (IV-3)$$

où E est le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker,  $S^{ij}$  est le déviateur des contraintes, ( $S^{ij} = \sigma^{ij} - 1/3\sigma^k_k\delta_{ij}$  et  $\sigma^{kk}$  est la trace du tenseur  $\sigma^{\alpha\beta}$ ).  $J_2$  est le second invariant, ( $J_2 = 1/2S^{ij}S_{ij}$ ).  $h_1$  est une fonction dépendant de  $J_2$  et est déterminée par la courbe contraintes-déformations obtenue, à partir d'un essai de traction uniaxial. L'expression de  $h_1$  sera donnée plus loin.

## IV-2 Théorie de la déformation

Cette théorie fait associer au matériau élastoplastique considéré, un matériau fictif dont le comportement est caractérisé par une loi élastique non linéaire. La théorie de déformation la plus utilisée [H2], [K3], est celle associée au critère de Von-Mises et est appelée "théorie de déformation du  $J_2$ ". La déformation totale  $\varepsilon_{ij}$  est alors exprimée en fonction de la contrainte  $\sigma^{ij}$  (ou  $S^{ij}$ ) et de la fonction seuil (critère de Von-Mises) par:

$$\varepsilon_{ij} = 1/E[(1+\nu)\sigma^{ij} - \nu\sigma^{kk}\delta_{ij} + h_2 S^{ij}] \quad (IV-4)$$

$h_2$  est une fonction dépendant du second invariant  $J_2$  qui peut être déterminée par un test de traction uniaxial. Le module instantané correspondant à cette loi de déformation du  $J_2$  est donnée par la relation:

$$L^{ijkl} = E/(1+\nu+h_2)[1/2(\delta^{ik}\delta_{jl} + \delta^{il}\delta_{jk}) + (3\nu+h_2)/(3(1-2\nu))\delta^{ij}\delta_{kl} - h_2' S^{ij} S_{kl} / (1+\nu+2h_2' J_2)] \quad (IV-5)$$

où  $h_2' = dh_2/dJ_2$ .

La détermination de la charge critique de flambage plastique au sens de Hill, nécessite le calcul des composantes des modules instantanés des relations (IV-3) ou (IV-5), (suivant le modèle plastique utilisé pour le calcul du flambage). En pratique, ces composantes sont déterminées à partir des composantes des tenseurs des souplesses (l'inverse des tenseurs  $L^{ijkl}$ ) correspondant à ces lois cités ci-dessus.

## IV-3 Différence entre les deux lois

Les expériences montrent que la théorie de déformation semble donner de meilleurs résultats que la théorie incrémentale pour les problèmes de stabilité. L'exemple le plus célèbre est celui de l'éprouvette cruciforme qui, sous compression axiale, flambe en torsion [G5], fig. IV-2.

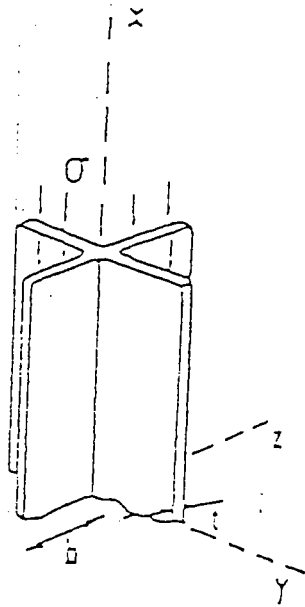


fig. IV-2 Epreuve cruciforme en compression axiale

Une analyse de cette éprouvette en théorie incrémentale, montre que la contrainte critique est la même qu' en élasticité, [L2] ,[H2]. L'expression de cette contrainte critique de torsion, dans le cas élastique est:

$$\sigma^c = \mu (t/b)^2 \quad (IV-6)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement élastique,  $t$  et  $b$  sont respectivement l'épaisseur et la largeur de l'une des plaques (identiques) qui forment l'éprouvette cruciforme.

L'étude de flambage plastique de cette même éprouvette (en compression), en théorie de déformation fournit la même relation (IV-6) de la contrainte critique, en remplaçant  $\mu$  par un module de cisaillement dit sécant, noté  $\mu_s$  et défini par:

$$\mu_s = \mu / [1 + 3\mu(1/E_s - 1/E)] \quad (IV-7)$$

où  $E$  et  $E_s$  sont respectivement le module d'Young et le module sécant.

La contrainte critique ainsi obtenue est inférieure à celle trouvée à partir de la théorie d'écoulement. Comme le montre la fig. IV-3, citée par plusieurs auteurs [L2],[H2], la théorie de déformation conduit à une meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux, en dépit du fait qu'elle est physiquement inacceptable.

Pour expliquer cet aspect néanmoins paradoxal, deux raisons sont souvent évoquées. En premier, la théorie incrémentale est très sensible aux imperfections. La deuxième est que la surface seuil du critère est régulière (en chaque point de la surface seuil, il existe une seule normale à cette surface).

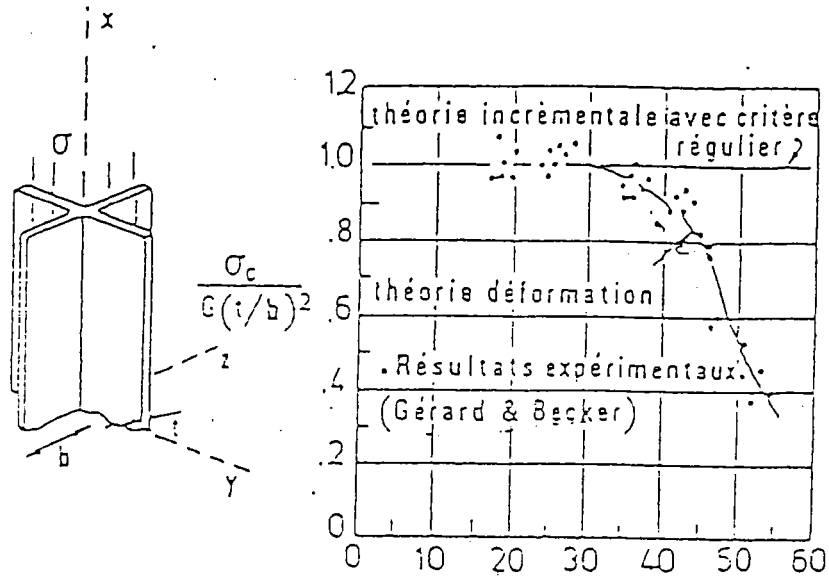


fig. IV-3 Comparaison entre les résultats des deux théories de la plasticité et les résultats expérimentaux, du flambage plastique de l'éprouvette cruce en compression axiale.

Pour tenir compte de l'aspect phénoménologique de la plasticité, certains auteurs[S5],[C1],[N1],[T3], proposent des modèles plastiques où la surface seuil (convexe d'élasticité), présente un coin.

#### IV-4 Exemples de calculs de flambage plastique

Nous donnons ici quelques formules donnant la contrainte critique de flambage plastique de structure, fréquemment utilisée.

La contrainte critique pour une poutre comprimée est donnée par:

$$\sigma^c = \pi^2 E_t / (l/r)^2 \quad (IV-10)$$

En utilisant la théorie incrémentale, sur un modèle de plaque carrée[A4], de côté a et d'épaisseur h, fig. IV-4, on trouve que l'expression de la contrainte critique est donnée par:

$$\sigma^c = (\pi h/a)^2 (2\mu/12) [2\mu(19+v) + 24H] / [4(2\mu(5-4v) + 6H(1-v))] \quad (IV-11)$$

où H est le module d'écrouissage ( $H = \dot{\sigma}^{ij} / \dot{\epsilon}^p_{ij}$ ),  $\mu$  est le module de cisaillement élastique et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

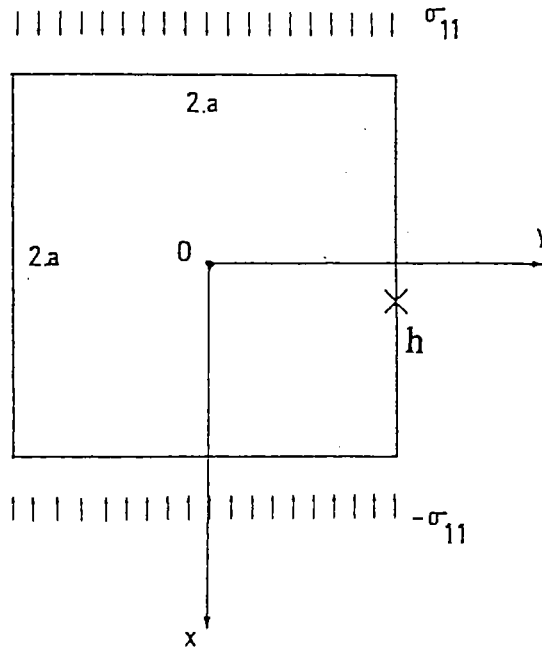


fig. IV-4 Flambage plastique d'une plaque carrée en compression

Soit un cylindre en compression axiale de rayon R, d'épaisseur h et de longueur L, fig. IV-5. Partant de la charge critique élastique, Timoshenko [T1], détermine pour des coques épaisses et pour un mode axisymétrique, l'expression de la contrainte critique plastique du cylindre:

$$\sigma^c = [EE_t/3(1-\nu^2)]^{1/2} \cdot (h/R) \quad (IV-12)$$

où E et  $E_t$  sont respectivement le module d'Young et le module tangent.

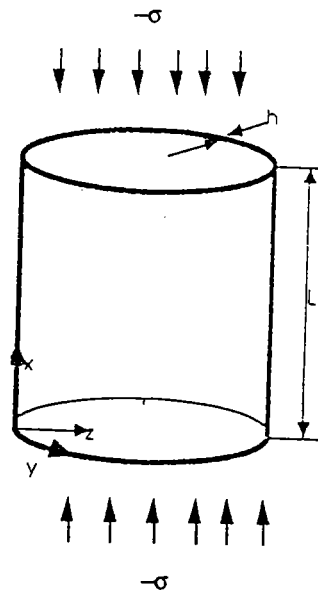


fig. IV-5 Flambage plastique d'un cylindre en compression axiale

Gérard[G5], dans son étude adopte la théorie de déformation et propose

pour le même cylindre, la formule:

$$\sigma^c = 3/2 (E_t E_s)^{1/2} (h/R) \quad (IV-13)$$

avec  $E_s$  module sécant.

## **V- CONCLUSION**

Tous ces résultats montrent que le modèle du comportement et les paramètres géométriques jouent un rôle prépondérant dans la modélisation du flambage de telles structures. La modélisation réelle de la plasticité est très difficile. L'influence du comportement plastique sur le flambage plastique reste un problème mal compris. A cela s'ajoute le choix du critère de plasticité. Cependant, il existe diverses lois théoriques plus ou moins complexes avec lesquelles on essaie de modéliser au mieux le flambage plastique.

Pour étudier le flambage plastique des structures complexes (coques de révolution, exemple: coques torisphérique ou elliptique), deux lois sont souvent utilisées. Ce sont la théorie incrémentale et la théorie de déformation. Ces théories dites lois classiques de plasticité, sont le plus souvent en pratique, associées au critère de Von-Mises et sont utilisées dans le contexte du critère de Hill, pour le calcul de flambage de ces structures. L'avantage de ces lois est que l'on peut facilement les introduire dans des codes de calculs numériques. Néanmoins l'influence de la géométrie de ces coques de révolution n'est pas très différente du cas élastique et peut être facilement prise en compte dans ces codes de calculs de structures.

## CHAPITRE II

# CALCUL NUMERIQUE DE LA PRESSION CRITIQUE DE FLAMBAGE PLASTIQUE DES COQUES DE REVOLUTION

### INTRODUCTION

- I - GEOMETRIE DES COQUES TORISPHERIQUE ET ELLIPTIQUE
- II - FLAMBAGE LOCAL DES COQUES DE REVOLUTION SOUS PRESSION INTERNE
- III - LOIS PLASTIQUES UTILISEES POUR LES COQUES DE REVOLUTION ETUDIEES
- IV - FORMULATION DU PROBLEME DE FLAMBAGE PLASTIQUE
- V - RESULTATS NUMERIQUES
- VI - CONCLUSION

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre on calcule, la pression critique de flambage plastique d'une coque de révolution de type torisphérique ou elliptique, en utilisant la méthode des éléments finis. La modélisation de ces coques de révolution est décrite par un choix adéquat des coordonnées relatives à leur surface moyenne. Sous une pression interne, ces types de coques donnent naissance à un état biaxial de contraintes, en théorie de membrane. L'une de ces deux contraintes, peut être compressive et provoquer un flambage local. La détermination numérique de la pression critique est faite en prenant le modèle théorique, des coques de D.M.V. Le comportement plastique est décrit par deux théories différentes: la théorie incrémentale et la théorie de déformation.

Dans ce chapitre nous allons commencer par donner une description géométrique des coques torisphériques et elliptiques.



## I- GEOMETRIE DES COQUES TORISPHERIQUE ET ELLIPTIQUE

On considère dans un repère global  $(O, x^1, x^2, x^3)$ , une coque de révolution autour de l'axe  $Ox^3$ , dont la surface moyenne est décrite par les coordonnées locales  $s$  et  $\theta$  du repère local  $(O', a^1, a^2, a^3)$ , fig. I-1 où  $a^1, a^2, a^3$  sont respectivement identifiées à  $s, \theta$  et  $z$  (on rappelle que  $z$  est l'ordonnée suivant la normale de la surface moyenne). Tout point  $A$  appartenant à cette surface est caractérisé par les composantes du vecteur  $\underline{OA}$ :

$$\begin{aligned} x^1 &= r(s)\cos\theta \\ x^2 &= r(s)\sin\theta \\ x^3 &= A'A = q(s) \end{aligned} \quad (I-1)$$

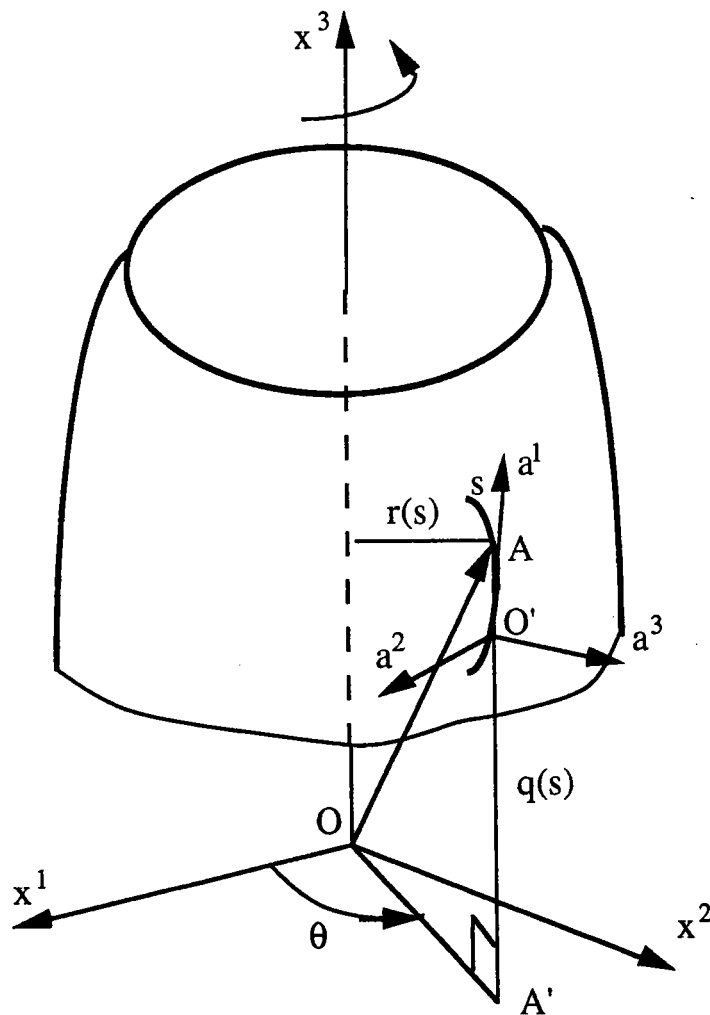


fig. I-1 Géométrie d'une coque de révolution

A partir de ces coordonnées intrinsèques: (l'abscisse curviligne  $s$  et l'angle  $\theta$ ), on cherche le tenseur de la première forme  $a_{\alpha\beta}$  de la surface et le tenseur de la seconde forme  $b_{\alpha\beta}$  de la surface, qui nous donne les différentes courbures  $b^{\alpha}_{\beta}$  relatives à la coque de révolution.

Les tenseurs covariant  $a_{\alpha\beta}$  ou contravariant  $a^{\alpha\beta}$  dits de première forme sont donnés par:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2(s) \end{bmatrix} \quad a^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2(s) \end{bmatrix} \quad (I-2)$$

Le tenseur covariant  $b_{\alpha\beta}$  dit de deuxième forme et sa forme mixte associée  $b^{\alpha}_{\beta}$  sont donnés par:

$$b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{d^2q}{dsdr} & 0 \\ 0 & rdq/ds \end{bmatrix} \quad b^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{d^2q}{dsdr} & 0 \\ 0 & (1/r)(dq/ds) \end{bmatrix} \quad (I-3)$$

On rappelle, que le lien entre  $b^{\alpha}_{\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$  est donné par l'expression tensorielle:

$$b^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma} \quad (I-4)$$

Vu que,  $b^{\alpha}_{\beta} = 0$  pour  $\alpha \neq \beta$ , les directions circonférentielles et méridiennes sont les directions principales de courbure. Les directions relatives à  $s$  et  $\theta$  sont aussi des directions principales du tenseur de première forme, car les composantes des tenseurs  $a_{\alpha\beta}$  et  $a^{\alpha\beta}$  sont nulles pour  $\alpha \neq \beta$ .

Nous allons appliquer ces relations à une coque de révolution, de géométrie connue. On s'intéressera par la suite aux coques torisphériques et elliptiques.

### I-1 Coque torisphérique

C'est une coque de révolution d'épaisseur  $h$ , composée par un assemblage d'un cylindre, d'un tore et d'une calotte sphérique fig I-2, [A3],[G1],[G3],[G4], [L1]. Le raccordement géométrique entre la partie torique et la calotte sphérique, est donné par l'angle de raccordement  $\varphi_r$ ,

défini par la relation suivante:

$$\varphi_r = \arccos[(R-R_t)/(R_s-R_t)] \quad (I-5)$$

où  $R$  est le rayon du cylindre de base  
 $R_t$  est le rayon du tore  
 $R_s$  est le rayon de la calotte sphérique  
 $l_c$  est la longueur de la partie cylindrique.

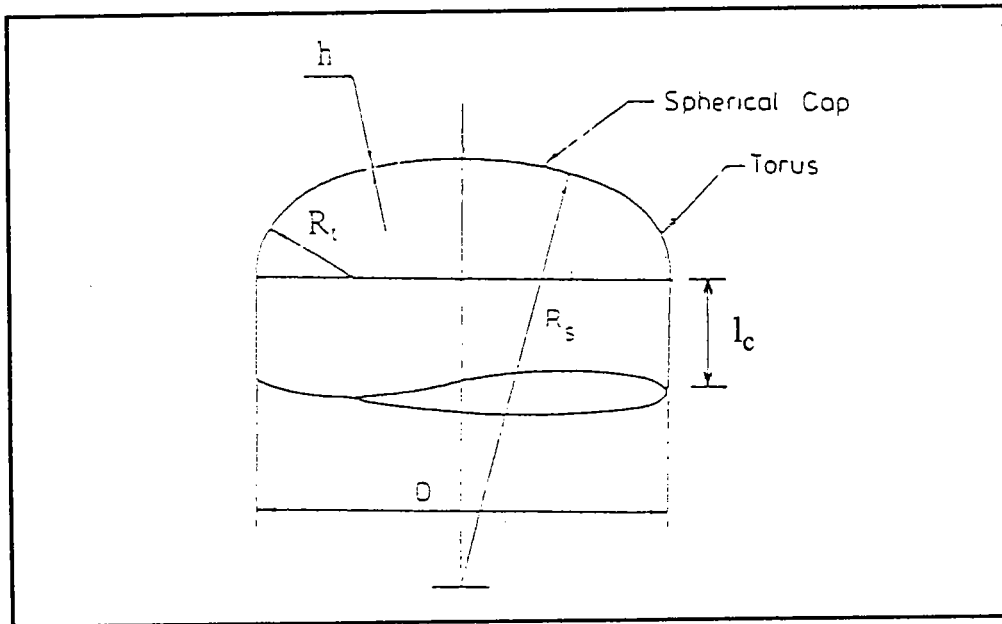


fig. I-2 Coque torisphérique

Pour les différents éléments de cette coque torisphérique le tenseur  $b^{\alpha}_{\beta}$  est de la forme suivante:

$$b^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

(I-6)

Dans toute la suite, on adoptera les notations suivantes pour les composantes du tenseur  $b^{\alpha}_{\beta}$ :

$$C_1 = b^1_1 \text{ et } C_2 = b^2_2 \quad (I-7)$$

où  $C_1$  est la courbure principale dans la direction méridienne et  $C_2$  est la

courbure principale dans la direction circonférentielle.

D'après ces notations, les composantes du tenseur  $b^{\alpha}_{\beta}$  dans le cas de la coque torisphérique sont donné par tab. I-1. On remarque que la seconde courbure principale  $C_2$  varie (dans la direction méridienne) en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  sur la partie torique. Pour cela on la note par  $C_2(s)$ .

	cylindre	tore	calotte sphérique
$C_1$	0	$1/R_t$	$1/R_s$
$C_2$	$1/R$	$C_2(s)$	$1/R_s$

tab. I-1 Courbures principales de la coque torisphérique

### I-2 Coque elliptique

C'est aussi une coque de révolution,[G2],[B6],[B8], d'épaisseur  $h$ , composée seulement de deux parties raccordées entre elles: un cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $l_c$  et une ellipse, de demi axes notés  $a$  et  $b$ , fig.I-3.

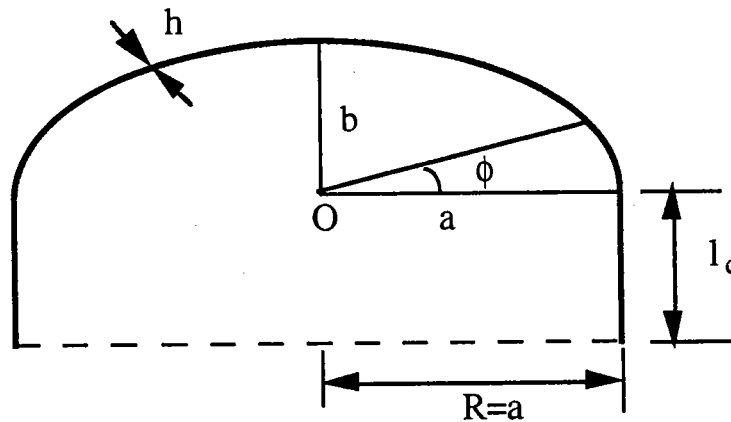


fig. I-3 Coque elliptique

En gardant le même système de coordonnées locales que précédemment  $(s,\theta)$  et connaissant les équations paramétriques de l'ellipse, on peut déterminer facilement les expressions des courbures principales  $C_{\alpha}$ . On trouve:

$$C_1=ab/t^{3/2}$$

$$C_2=(b/a)t^{-1/2}$$

où

$$t = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi. \quad (\text{I-9})$$

où  $\phi(s)$  est l'angle paramétrique de l'ellipse variant de 0 à  $\pi/2$ .

Il en résulte, que le tenseur  $b^{\alpha}_{\beta}$  sur chaque élément de cette coque elliptique est donné par:

$$b^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I-10})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont données sur chaque partie de la coque elliptique par le tableau suivant:

	cylindre	ellipse
$C_1$	0	$ab/t^{3/2}$
$C_2$	$1/R$	$b/at^{1/2}$

tab. I-2 Courbures de la coque elliptique

On remarque que les deux courbures principales varient, le long des lignes méridiennes au lieu d'une seule, dans le cas de la coque torisphérique.

## II- FLAMBAGE LOCAL DES COQUES DE REVOLUTION SOUS PRESSION INTERNE

### II-1 Origine du flambage local

A partir de la théorie linéaire de membrane, les forces de membrane notées par  $N_s$  et  $N_\theta$ , d'une coque de révolution sous pression interne  $p$ , sont données par les relations suivantes[T2]:

$$N_s = p/2C_2 \quad (\text{II-1})$$

$$N_\theta = (p/C_2)(1-C_1/2C_2) \quad (\text{II-2})$$

En introduisant, l'épaisseur  $h$  de cette coque, dans les relations ci-dessus, on obtient les expressions des contraintes de membrane:

$$\sigma_s = p/2hC_2 \quad \sigma_\theta = (p/2hC_2)(2-C_1/C_2) \quad (\text{II-3})$$

où  $\sigma_s$  est la contrainte méridienne,  $\sigma_\theta$  est la contrainte circonférentielle. On rappelle que les courbures principales ont été présentées aux tab. I-1 et tab. I- 2.

Les courbures principales  $C_\alpha$ , l'épaisseur  $h$  et la pression  $p$  sont des grandeurs positives. Il apparaît clairement que  $\sigma_\theta$  peut devenir négative, si le rapport des courbures principales dépasse la valeur 2. Donc, la contrainte  $\sigma_\theta$  peut être compressive. La condition  $C_1/C_2 > 2$  est remplie, pour certaines coques de révolution, dont au moins l'une des courbures principales est variable. Alors, il peut y avoir un flambage circonférentiel sur ce genre de coques, mais cette possibilité dépend de plusieurs facteurs: de géométrie, de propriétés du matériau etc...[G3].

Nous allons examiner dans la suite, cette question dans le cas des coques à géométrie simple et présentant, au moins, la variation d'une seule courbure principale.

#### II-1-1 Flambage local d'une coque torisphérique

Les valeurs attribuées au tenseur  $b^\alpha_\beta$  de cette structure, voir tab. I-1, nous montrent, que le rapport des courbures principales  $C_1/C_2$  prend les valeurs successives: 0 sur la partie cylindrique, 1 sur la calotte sphérique et  $1/(R_t C_2(s))$  sur la partie torique. Comme  $C_2(s)$  varie de  $1/R$  à  $1/R_s$ , alors  $C_1/C_2$  prend les valeurs  $R/R_t$  à  $R/R_s$ . Par construction géométrique, on a généralement  $R_t < R < R_s$ . En choisissant une forme donnée, de coque torisphérique exprimée par un rapport:  $R/R_t > 2$ , le rapport des courbures principales  $C_1/C_2$  est aussi supérieur à 2 sur l'ensemble du tore. Il en résulte alors que la contrainte  $\sigma_\theta$  est compressive sur cette zone, d'après les

relations (II-3).

Nous avons présenté, sur la fig. II-1, les deux contraintes  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  pour cette coque de révolution, susceptible de flamber, sous l'action de  $\sigma_\theta$ .

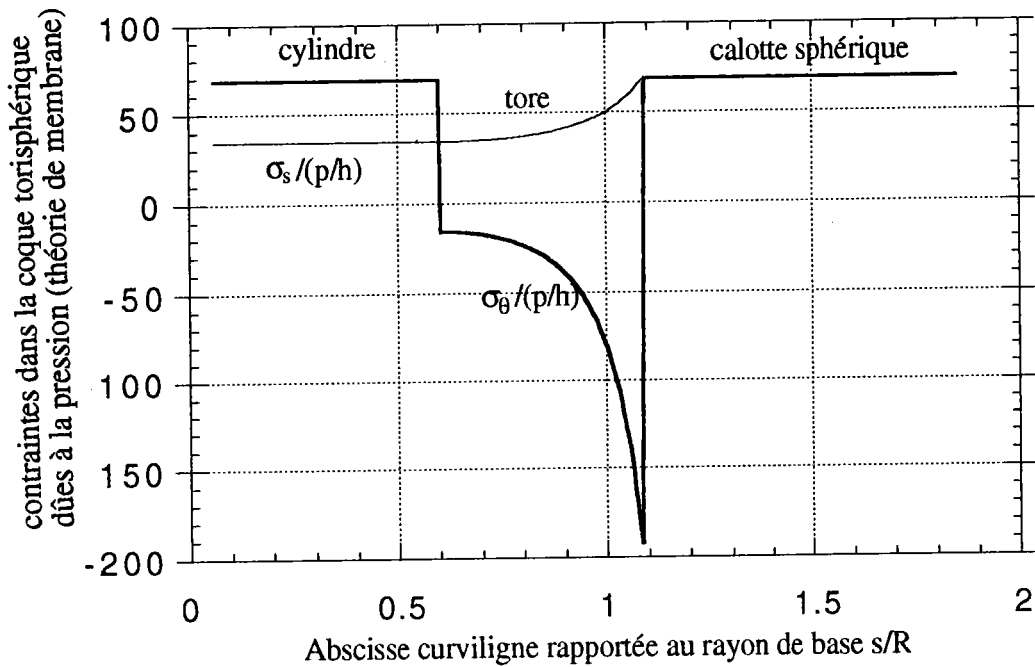


fig. II-1 Etat de contraintes dans la coque torisphérique de géométrie:  
 $R=68.58\text{mm}$ ,  $R_t=27.94\text{mm}$ ,  $R_s=137.16\text{mm}$  et  $l_c=41.148\text{mm}$

Le phénomène d'instabilité qui apparaît sur ce type de coque, est un flambage circonférentiel local. On remarque que  $\sigma_\theta$  est compressive sur tout le tore. Son maximum en valeur absolue se situe au niveau de la jonction tore-sphère.

### II-1-2 Flambage local d'une coque elliptique

Comme nous l'avons vu précédemment, l'instabilité de ce type de structure dépend aussi du rapport des courbures  $C_1/C_2$ . En particulier, pour la coque elliptique, le rapport des axes de l'ellipse  $a/b$  joue un rôle important dans l'instabilité de cette structure. En effet, le rapport  $C_1/C_2$  dépendant de la géométrie de l'ellipse est donné par la relation:

$$C_1/C_2 = (a/b)^2 / [\cos^2\phi + (a/b)^2 \sin^2\phi] \quad (\text{II-4})$$

A partir de l'expression ci-dessus, on peut connaître la région où  $\sigma_\theta$  devient compressive. Cette région correspond à différentes valeurs de l'angle  $\phi$ , vérifiant la relation suivante:

$$\sin\phi < \pm [((a/b)^2-2)/2((a/b)^2-1)]^{1/2}. \quad (\text{II-5})$$

Cette expression n'a un sens, que si on choisit un rapport d'axes  $a/b \geq \sqrt{2}$ . On remarque que, pour  $a/b = \sqrt{2}$ , la contrainte  $\sigma_\theta$  n'est négative qu'au point de raccordement entre les parties cylindrique et elliptique.

Les modèles de coques étudiées par la suite, auront un rapport  $a/b \geq 2$ . Tenant compte de cette condition, tout en ne s'intéressant qu'à la partie elliptique, on peut évaluer les limites du rapport  $C_1/C_2$ , sachant que l'angle  $\phi$  appartient à l'intervalle  $[0, \pi/2]$ . En effet, pour un rapport  $a/b$  donné, on obtient les situations suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \phi=0 & C_1/C_2=(a/b)^2 > 2 \\ \text{pour } \phi=\pi/2 & C_1/C_2=1 \end{array} \quad (\text{II-6})$$

Il en résulte que la contrainte  $\sigma_\theta$  n'est compressive que sur une portion de la partie ellipse, donc le flambage ne se manifesterà que sur une portion de l'élément ellipse. On a aussi dans ce cas une instabilité locale. Pour illustrer ce phénomène, on a représenté fig. II-2, une coque elliptique de rapport d'axes  $a/b=2$ , et de rayon de base R. On s'aperçoit, que  $\sigma_\theta$  est compressive à partir du point de raccord (cylindre-ellipse), et devient un "peu" positive, en étant toujours sur la partie elliptique. La partie intéressante est celle correspondant à  $\sigma_\theta < 0$ , et son maximum se situe au niveau de la jonction cylindre-ellipse.



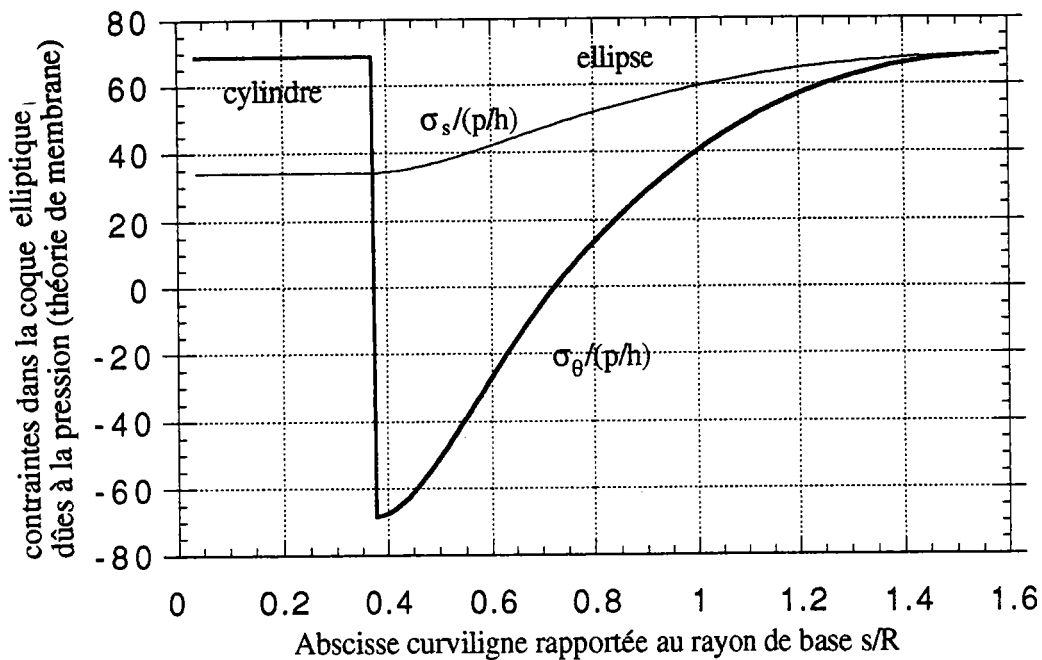


fig.II-2 Etat de contraintes dans une coque elliptique  $a/b=2$  avec  $R=a=68.58\text{mm}$ ,  $l_c=25.4\text{mm}$

### III- LOIS PLASTIQUES UTILISEES POUR LES COQUES DE REVOLUTION ETUDIEES

Le dimensionnement au flambage plastique d'une structure, nécessite en plus des données géométriques de cette structure, l'utilisation d'une loi de comportement plastique. Pour modéliser la plasticité, on considère les deux lois plastiques suivantes: la théorie incrémentale et la théorie de déformation du  $J_2$ , toutes les deux étant associées au critère de Von-Mises. Pour caractériser complètement le comportement il suffit alors de connaître le coefficient de Poisson et la courbe de traction uniaxiale.

A cause des hypothèses de Love-Kirchoff et de la minceur de ces coques de révolution, on peut ne considérer que la partie bidimensionnelle du tenseur des déformations  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Dans le contexte des petites déformations, on peut décomposer  $\epsilon_{\alpha\beta}$  en deux parties: une partie élastique  $\epsilon^e_{\alpha\beta}$  et une autre plastique  $\epsilon^p_{\alpha\beta}$ :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^e_{\alpha\beta} + \epsilon^p_{\alpha\beta} . \quad (\text{III-1})$$

Nous considérons par la suite, que le comportement plastique est traduit par une relation entre les déformations  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  et les contraintes bidimensionnelles  $\sigma^{\alpha\beta}$  de la forme suivante:

$$\dot{\sigma}^{\alpha\beta} = E \cdot H^{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta} \quad (\text{III-2})$$

où  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  est le tenseur adimensionnalisé des modules instantanés en contraintes planes,  $E$  est le module d'Young.

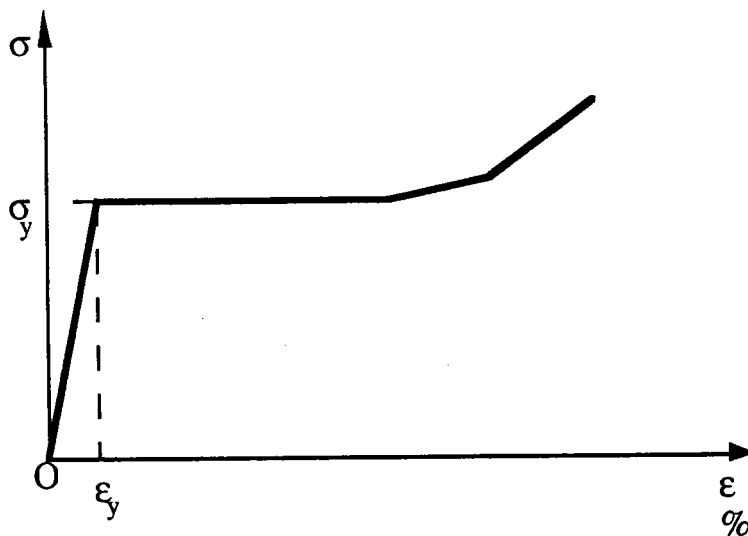
Les composantes du tenseur  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , peuvent être déterminées à partir des composantes du tenseur des souplesses  $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , défini par la relation suivante:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = (1/E) \cdot M_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\sigma}^{\gamma\delta} \quad (\text{III-3})$$

Les composantes de  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  seront alors calculées, par inversion de la matrice associée à  $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

### III-1 Courbe de traction uniaxiale

La courbe utilisée[G2] par la suite, est celle donnée par la fig. III-1.



acier  $\nu=0.3$

$(\sigma/E) \times 10^2$	$\varepsilon$ (%)
0.1180	0.1180
0.1200	1.30
0.1267	1.50
0.1333	1.80

fig. III-1 Allure de la courbe contraintes-déformations

On distingue deux régions:

-une partie élastique linéaire définie par:

$$E = \sigma / \varepsilon \quad \forall \quad \varepsilon \leq \varepsilon_y \quad (\text{III-4})$$

-une autre région caractérisée par des segments de droite reliés entre eux, et définis par leurs pentes, obtenues par:

$$E_t = \dot{\sigma} / \dot{\varepsilon} \quad \forall \quad \varepsilon > \varepsilon_y \quad (\text{III-5})$$

où  $E_t$  est appelé le module tangent et  $\varepsilon_y$  est la limite élastique. On définit dans les mêmes conditions, une autre pente notée par  $E_s$  et appelée module sécant, comptée à partir de l'origine des axes  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , sa définition est donnée par:

$$E_s = \sigma / \varepsilon \quad \forall \quad \varepsilon > \varepsilon_y \quad (\text{III-6})$$

On remarque que dans le cas élastique, les relations (III-5) et (III-6) deviennent identiques à (III-4). Il en ressort, qu'on peut lier les différents modules ( $E$ ,  $E_t$  et  $E_s$ ), quelle que soit la déformation dans le cas de la courbe contrainte-déformation que nous avons décrit:

$$E/E_s = \begin{cases} 1 & \forall \quad \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ E/E_t - (E/E_t - 1)\sigma_y/\sigma_e & \forall \quad \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

où  $\sigma_y$  est la limite élastique en contraintes et  $\sigma_e$  est la contrainte équivalente du chargement considéré (pression interne).

### III-2 Expressions des modules tangents selon le modèle de plasticité

Nous allons procéder en détail, au calcul des modules tangents autour d'un état de contraintes plan et biaxé, en particulier de l'état de contraintes de membranes donné par (II-3). Ce calcul sera réalisé par les deux types de lois de comportement considérées, la loi incrémentale et la loi de la déformation.

#### III-2-1 La théorie incrémentale (flow theory)

On rappelle qu'en théorie incrémentale, le taux de déformation total  $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  est donné par la relation suivante:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = (1/E) [(1+\nu)\dot{\sigma}^{\alpha\beta} - \nu\dot{\sigma}^{\gamma\delta}\delta_{\beta}^{\alpha} + h(J_2)\dot{S}^{\alpha\beta}S_{kl}S^{kl}] \quad (\text{III-8})$$

où  $\dot{\sigma}^{\gamma\gamma}$  est la trace du taux de contraintes  $\dot{\sigma}^{\alpha\beta}$ ,  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  est le symbole de Kronecker,  $J_2$  est le second invariant du déviateur des contraintes. On rappelle que le lien entre  $J_2$  et la contrainte équivalente  $\sigma_e$  est:  $J_2 = \sigma_e^2/3$ .  $h(J_2)$  est une fonction scalaire définie par:

$$h(J_2) = (3/4J_2)(E/E_t - 1) \quad (\text{III-9})$$

On rappelle que les coques torisphérique et elliptique, sous la pression interne  $p$ , développent des contraintes de membrane, dont le rapport a un rôle important dans l'élaboration des expressions des modules plastiques. Pour cela, nous allons exprimer la contrainte équivalente  $\sigma_e$  en fonction de la pression. Connaissant que  $\sigma_e = (3/2)S^{ij}S_{ij}$  ( $S^{ij}$  est le déviateur des contraintes) et l'expression des contraintes  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$ , on obtient:

$$\sigma_e = (p/(2C_2h))[\alpha^2 - \alpha + 1]^{1/2} \quad (\text{III-10})$$

où  $\alpha$  est le rapport:  $\sigma_\theta/\sigma_s$ , il peut aussi être formulé, à partir des courbures principales  $C_\alpha$ , des coques de révolution:

$$\alpha(s) = 2 - C_1 / C_2. \quad (\text{III-11})$$

Dans toute la suite, on adoptera la notation ci-dessus.

En tenant compte des relations (III-3), (III-7) et de (III-9) à (III-11), la matrice  $[M]$  de ce modèle, associée au tenseur  $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$  définie par la relation:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = (1/E) M_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\sigma}^{\gamma\delta} \quad (\text{III-12})$$

a pour composantes:

$$\begin{aligned} M_{1111} &= 1 + (1/4)(E/E_t - 1)e_1^2 \\ M_{2222} &= 1 + (1/4)(E/E_t - 1)e_2^2 \\ M_{1122} &= -\nu + (1/4)(E/E_t - 1)e_1e_2 = M_{2211} \\ M_{1212} &= 2(1 + \nu). \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

Les facteurs  $e_\alpha$  sont obtenues à partir des contraintes de membrane (II-3) et de la contrainte équivalente (III-10). Leurs expressions sont:

$$e_1 = (2 - \alpha)/\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1} \quad \text{et} \quad e_2 = (2\alpha - 1)/\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1} \quad (\text{III-14})$$

La loi de comportement du modèle incrémental est alors:

$$\dot{\sigma}^{\alpha\beta} = E H^{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\epsilon}_{\gamma\delta} \quad (\text{III-14})$$

On détermine les composantes de la matrice [H] associée au tenseur  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  en inversant la matrice [M], on obtient:

$$\begin{aligned} H^{1111} &= M_{2222} / [M_{1111}M_{2222} - M_{1122}^2] \\ H^{1122} &= -M_{1122} / [M_{1111}M_{2222} - M_{1122}^2] \\ H^{2222} &= M_{1111} / [M_{1111}M_{2222} - M_{1122}^2] \\ H^{1212} &= 1 / [2(1+\nu)] \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

Pour alléger l'écriture des composantes des tenseurs d'ordre quatre,  $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , on adoptera dans toute la suite, les notations habituelles en calcul des structures:

$$\begin{aligned} M_{1111} &= M_{11} & M_{2222} &= M_{22} \\ M_{1122} &= M_{12} & M_{1212} &= M_{33} \\ H^{1111} &= H^{11} & H^{2222} &= H^{22} \\ H^{1122} &= H^{12} & H^{1212} &= H^{33} \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

On remarque que le module sécant  $E_s$  n'intervient pas dans tous les coefficients de comportement plastique. Par contre le module tangent  $E_t$  est présent partout, sauf au niveau du dernier coefficient:  $H^{33}$ . On constate que le module de cisaillement  $H^{33}$  de cette loi, est identique à celui de l'élasticité.

Généralement, c'est ce coefficient qui rend cette loi peu réaliste pour les calculs de flambage. Par contre on note une chute sensible des autres coefficients (inférieurs à l'unité), au delà de la limite élastique. Ils dépendent seulement de  $E_t$  (voir courbe contraintes-déformations considérée) et de la géométrie de la structure: ce dernier point peut paraître surprenant, mais ces modules instantanés ne dépendent que de la direction du champ de contrainte qui dans l'approximation de membrane est une fonction connue de la géométrie de la coque; on a reporté l'expression de ces contraintes de membrane pour obtenir les relations (III-13).

### III-2-2 La théorie de déformation du $J_2$ ( $J_2$ theory)

Dans ce cas, on formule le taux de déformation total  $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$ , en introduisant deux fonction scalaires:  $h(J_2)$  et sa dérivée par rapport au deuxième invariant  $J_2$ , notée par  $h'(J_2)$ . La relation relative à cette loi est donnée par:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = (1/E) [(1+\nu)\dot{\sigma}^{\alpha\beta} - \nu\dot{\sigma}^{\gamma\gamma}\delta^{\alpha\beta} + h(J_2)\dot{S}^{\alpha\beta} + h'(J_2)\dot{S}^{\alpha\beta}S_{kl}S^{kl}] \quad (\text{III-18})$$

où les fonctions scalaires  $h(J_2)$  et  $h'(J_2)$  sont données par:

$$h(J_2) = 3/2 (E/E_s - 1) \quad \text{et} \quad h'(J_2) = (3/4J_2)(E/E_t - E/E_s). \quad (\text{III-19})$$

On détermine les composantes de la matrice [H], associée au tenseur  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  relatif à ce modèle plastique par le même procédé, utilisé dans la première loi plastique. Ainsi, on obtient les composantes de [M], données par:

$$\begin{aligned} M_{11} &= E/E_s + 1/4(E/E_t - E/E_s)e_1^2 \\ M_{22} &= E/E_s + 1/4(E/E_t - E/E_s)e_2^2 \\ M_{12} &= -\nu + 1/2 - E/2E_s + 1/4(E/E_t - E/E_s)e_1e_2 \\ M_{33} &= 2(1+\nu) + 3(E/E_s - 1) \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

les facteurs  $e_\alpha$  sont identiques à ceux de la loi incrémentale, voir relations (III-14).

On retrouve comme dans le modèle précédent la matrice [H] par inversion de la matrice [M]. On constate, l'influence de deux modules tangent  $E_t$  et sécant  $E_s$  en plus du module d'Young E. On remarque que tous les coefficients de comportement de ce modèle plastique, chutent au delà de la limite élastique. En particulier, le module de cisaillement  $H^{33}$ , qui était constant (égal à celui de l'élasticité) dans le modèle plastique décrit précédemment, présente ici une diminution sensible. En effet, sa valeur est donnée par:

$$H^{33} = 1/[2(1+\nu) + 3(E/E_s - 1)] \quad (\text{III-21})$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

On peut alors évaluer le rapport des coefficients de comportement  $H^{33}$  relatifs aux deux lois plastiques. Pour cela, on introduit le module de cisaillement élastique  $\mu$  (on rappelle:  $\mu = E/2(1+\nu)$ ) et on définit un module de cisaillement sécant  $\mu_s$  ( $\mu_s = EH^{33}$  où  $H^{33}$  est celui donné par la loi de dé-

formation du  $J_2$ ). En évaluant le rapport entre les deux modules de cisaillement (sécant et élastique), on obtient:

$$\mu_s/\mu = 1+3\mu(1/E_s-1/E_t) \quad (\text{III-22})$$

Ce rapport est mentionné dans de nombreuses publications[H2], [M1] et [T3].

Pour une comparaison globale des coefficients de comportement plastique des deux lois étudiées, on remarque que les modules de comportement associés à la théorie de déformation du  $J_2$  sont inférieurs à ceux associés à la théorie incrémentale. Ceci est dû à l'inégalité ( $E_t < E_s < E$ ) qui existe entre les trois modules: le module tangent, le module sécant et le module d'Young et à leur apparition dans ces lois plastiques. En effet, dans la première loi on retrouve deux modules seulement ( $E$  et  $E_t$ ), par contre dans la seconde loi, les trois modules ( $E_t$ ,  $E_s$  et  $E$ ) interviennent dans ces expressions. Dans notre étude du flambage plastique, on a gardé  $E_t$  constant, par contre  $E_s$  varie en fonction du chargement (pression interne  $p$ ). Il en résulte que ces coefficients de comportement vont influencer sur l'étude du flambage plastique des coques de révolution (coques torisphérique et elliptique sous la pression interne).

#### IV- FORMULATION DU PROBLEME DE FLAMBAGE PLASTIQUE

Pour établir l'équation du flambage plastique, des coques de révolution sous pression interne  $p$  (coques torisphérique et elliptique), on applique le critère de Hill. Dans le contexte des coques minces, de surface moyenne  $\Omega$ , d'élément de cette surface noté  $d\Omega$  et dans le cas des coques de D.M.V, la formulation variationnelle du critère (voir relation II-9) du chapitre I), s'écrit:

$$\int_{\Omega} [\dot{N}^{(\alpha\beta)} \delta\gamma_{(\alpha\beta)} + \dot{M}^{(\alpha\beta)} \delta\kappa_{(\alpha\beta)} + N_o^{(\alpha\beta)} \dot{w}_{,\alpha} \delta w_{,\beta}] d\Omega = 0 \quad (\text{IV-1})$$

Nous allons par la suite définir, tous les termes intervenant dans l'équation variationnelle (IV-1).

##### **IV-1 Cinématique de D.M.V.**

On rappelle, que le tenseur des déformation  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , dans le contexte

des coques minces et les hypothèses de Love-Kirchoff, est fonction de la déformation de membrane  $\gamma_{\alpha\beta}$  et de déformation de flexion  $\kappa_{\alpha\beta}$ . La relation entre  $\epsilon_{\alpha\beta}$  et les tenseurs  $\gamma_{\alpha\beta}$  et  $\kappa_{\alpha\beta}$  est donnée par:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + z\kappa_{\alpha\beta} \quad (\text{IV-2})$$

où  $z$  est la coordonnée suivant la normale à la coque, mesurant la variation dans l'épaisseur de ces coques de révolutions. En théorie de D.M.V., les expressions des tenseurs  $\gamma_{\alpha\beta}$  et  $\kappa_{\alpha\beta}$  en fonction du déplacement sont:

$$\gamma_{11} = u_{1,1} - C_1 w + 1/2 w_{,1}^2$$

$$\gamma_{22} = u_{2,2} - \Gamma^1_{22} u_1 - b_{22} w + 1/2 w_{,2}^2 \quad \text{avec } b_{22} = r^2(s)$$

$$2\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2\Gamma^2_{12} u_2 + w_{,1} w_{,2}$$

$$\kappa_{11} = w_{,11}$$

$$\kappa_{22} = w_{,22} - \Gamma^1_{22} w_{,1}$$

$$2\kappa_{12} = 2w_{,12} - 2\Gamma^2_{12} w_{,2} \quad (\text{IV-3})$$

où  $u_1$ ,  $u_2$  sont respectivement les déplacements dans les directions méridienne et circonférentielle,  $w$  est le déplacement normal à la surface moyenne de la coque.  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  est le symbole de deuxième espèce de Christoffel sur la surface moyenne de la coque de révolution (voir ses valeurs en Annexe, (A-1)). Une représentation de ces déplacements fig. IV-1, sur l'une des coques étudiée, est celle de la coque elliptique.



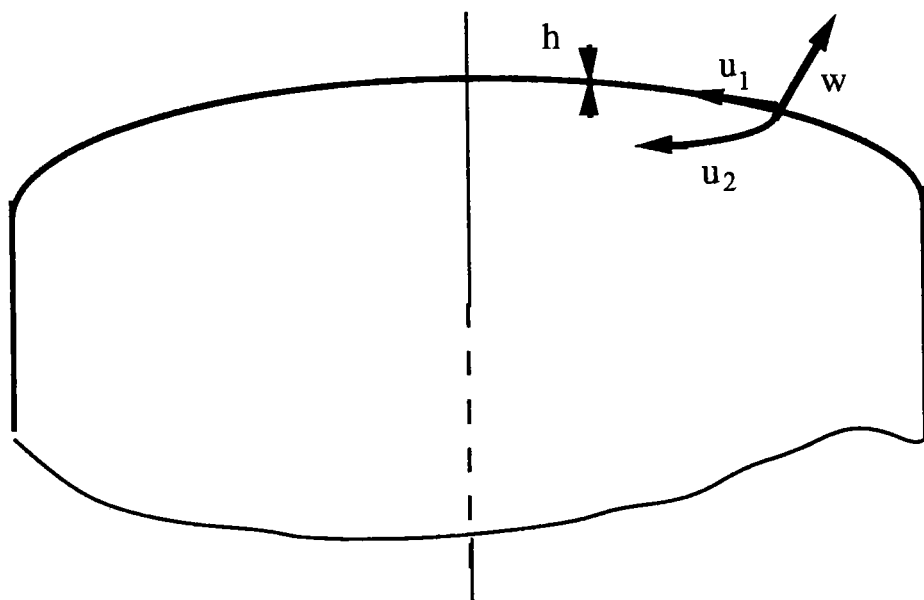


fig. IV-1 Représentation des déplacements dans la coque elliptique

Pour appliquer le critère de Hill, on a besoin des quantités incrémentales associées aux tenseurs de déformation de membrane  $\gamma_{\alpha\beta}$  et celui de déformation de flexion  $\kappa_{\alpha\beta}$ . Ces quantités sont données par:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{11} &= \dot{u}_{1,1} - C_1 \dot{w} + w^0_{,1} \dot{w}_{,1} \\ \dot{\gamma}_{22} &= \dot{u}_{2,2} - \Gamma^1_{22} \dot{u}_1 - b_{22} \dot{w} + w^0_{,2} \dot{w}_{,2} \\ 2\dot{\gamma}_{12} &= \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2\Gamma^2_{12} \dot{u}_2 + w^0_{,1} \dot{w}_{,2} + w^0_{,2} \dot{w}_{,1} \\ \dot{\kappa}_{11} &= \dot{w}_{,11} \\ \dot{\kappa}_{22} &= \dot{w}_{,22} - \Gamma^1_{22} \dot{w}_{,1} \\ 2\dot{\kappa}_{12} &= 2\dot{w}_{,12} - 2\Gamma^2_{12} \dot{w}_{,2} \end{aligned} \quad (IV-4)$$

où on note par  $w^0$  le préflambage de la coque étudiée.

On suppose que la variation de l'incrément est nulle, c'est à dire que les variations des déplacements virtuels sont constantes. Sachant que la déformation de flexion est linéaire en déplacements, alors les variations des composantes du taux de déformation de flexion sont nulles. On obtient alors, en négligeant les rotations avant flambage exprimées par le terme  $w^0_{,\alpha}$ , seulement les variations incrémentales relatives au tenseur de déformation de membrane qui sont non nulles:

$$\begin{aligned}\dot{\delta\gamma}_{11} &= \dot{w}_{,1}\delta w_{,1} \\ \dot{\delta\gamma}_{22} &= \dot{w}_{,2}\delta w_{,2} \\ 2\dot{\delta\gamma}_{12} &= \dot{w}_{,1}\delta w_{,2} + \dot{w}_{,2}\delta w_{,1}\end{aligned}\quad (\text{IV-5})$$

## IV-2 Introduction du comportement plastique dans le critère

A partir de la modélisation utilisée pour le comportement plastique, on introduit les contraintes incrémentales résultantes, notées par  $N^{(\alpha\beta)}$  et  $M^{(\alpha\beta)}$  respectivement de membrane et de flexion. Pour une épaisseur  $h$  constante dans le cas des coques étudiées, on peut donner les expressions de ces tenseurs en fonction du comportement plastique:

$$\begin{aligned}\dot{N}^{(\alpha\beta)} &= EhH^{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{\gamma}_{(\gamma\delta)} \\ \dot{M}^{(\alpha\beta)} &= (Eh^3/12)H^{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{\kappa}_{(\gamma\delta)}\end{aligned}\quad (\text{IV-6})$$

où  $(\alpha\beta)$  désignent les composantes physiques qui sont définies en Annexe (voir A-11),  $E$  est le module d'Young et  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  est le tenseur de comportement associé aux deux lois plastiques décrites précédemment.

Dans la relation (IV-1), le tenseur  $N_o^{(\alpha\beta)}$  caractérise le chargement fondamental, dont ses deux composantes  $N_o^{(11)}$  et  $N_o^{(22)}$ , sont identifiées respectivement à  $N_s$  et  $N_\theta$ , (voir expression (II-3)), les autres composantes  $N_o^{(12)}$  et  $N_o^{(21)}$ , sont nulles car il n'y a pas de torsion dans la coque avant flambage.

En injectant les relations (IV-6), les expressions de  $N_s$  et de  $N_\theta$ , dans (IV-1) et en divisant par  $E$ , les deux membres, de l'équation variationnelle, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \{hH^{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{\gamma}_{(\gamma\delta)}\delta\gamma_{(\alpha\beta)} + h^3/12H^{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{\kappa}_{(\alpha\beta)}\delta\kappa_{(\gamma\delta)} + \\ (p/E)[1/2C_2\dot{w}_{,(1)}\delta w_{(1)} + 1/2C_2\dot{w}_{,(2)}\delta w_{(2)}]\}d\Omega = 0\end{aligned}\quad (\text{IV-7})$$

On trouve bien un problème de valeurs propres en  $p/E$ , où la plus petite représente la charge critique, au sens de Hill. La recherche des  $p/E$ , analy-

tiquement est quasi impossible. On utilise donc, une des méthodes numériques, par exemple on opte dans notre cas, pour la méthode des éléments finis, pour déterminer la pression critique du flambage plastique, des coques torisphérique et elliptique.

### IV-3 Formulation en éléments finis du problème de flambage

Le principe de la méthode des éléments finis, [Z1], [B2], consiste à remplacer les équations générales d'un milieu continu, par celle d'un milieu discrétisé en un nombre fini d'éléments. Ces éléments sont connectés entre eux par une série de points appelés noeuds. Ainsi, le problème variationnel du flambage plastique (IV-7), peut être écrit sous une forme matricielle (milieu discret), de la façon suivante:

$$\sum_{i=1}^{\text{éls}} \int_{\Omega_e} \left[ \{h[H]\{\dot{\gamma}\}\}^T \{\delta\gamma\} + \{h^3/12 [H]\{\dot{\kappa}\}\}^T \{\delta\kappa\} + \right. \\ \left. (p/E)[(1/2C_2) \dot{w}_{,(1)} \delta w_{,(1)} + (1/2C_2) \alpha \dot{w}_{,(2)} \delta w_{,(2)}] \right] d\Omega_e = 0 \quad (\text{IV-8})$$

où  $d\Omega_e$  est un incrément de la surface moyenne englobant l'élément de la coque, le symbole  $\{ \}$  est un vecteur colonne et  $\{ \}^T$  est son transposé.

La résolution par la méthode des éléments finis se fait par approximation, soit sur le champ de contraintes, c'est le modèle "force", soit sur le champ de déplacement, il s'agit alors du modèle "déplacement". Dans notre étude, nous allons opter pour le second modèle de résolution. Pour cela on cherche à déterminer le champ de déplacement  $\{u\}$  aux noeuds en utilisant des fonctions polynômes d'interpolation. Elles sont aussi nécessaires, pour l'approximation des courbures principales variables, pour les coques étudiées (coques torisphérique et elliptique). La symétrie de révolution et du chargement (pression interne), dans ces structures nous permet de considérer des éléments filiformes à deux noeuds.

#### V-3-1 Approximation de la géométrie

Chaque élément, fig. IV-2, de la coque de révolution est construit à partir de noeuds notés par 1 et 2, dont les coordonnées dans un repère global  $(O,x,y)$  sont représentées par les couples  $(x_1,y_1)$  et  $(x_2,y_2)$ . On note par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  respectivement les pentes de la tangente à l'élément, à la sortie des noeuds 1 et 2. L'utilisation de trois coordonnées  $x_\alpha, y_\alpha$  et  $\varphi_\alpha$  en chaque noeud permet une meilleure approximation de la courbe à décri-

re, en particulier de sa longueur et de ses courbures.

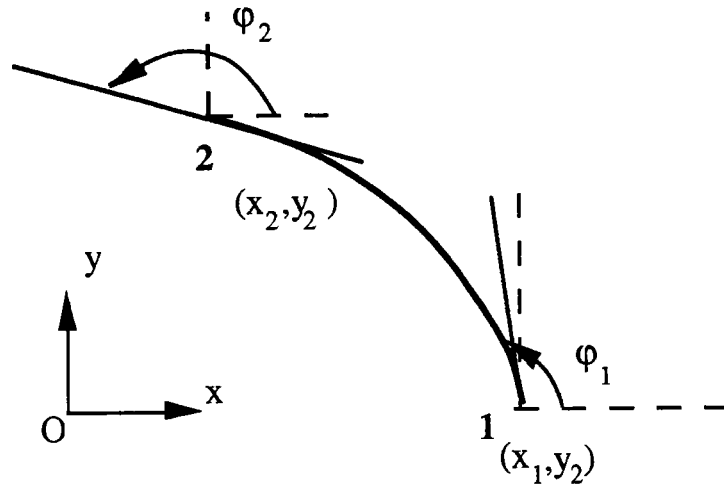


fig. IV-2 Représentation dans le plan d'un élément de la coque

On considère une variable de référence notée  $\xi$ , appartenant à l'intervalle  $[-1,+1]$ , elle prend la valeur  $-1$  au noeud 1 et  $+1$  au noeud 2. Par rapport à une approximation classique par éléments finis, nous avons d'abord le problème d'une géométrie qui n'est complètement caractérisée par les données nodales  $(x_\alpha, y_\alpha, \varphi_\alpha)$ . Nous proposons de réaliser une estimation de cette géométrie par approximations successives. Dans un premier temps, nous supposons que l'élément de coque est rectiligne, donc la longueur de l'élément est donnée par une combinaison linéaire entre les coordonnées des noeuds. On obtient alors l'arc de courbe  $ds$  au premier ordre 1, en fonction de la variable de référence:

$$(ds/d\xi)^2_1 = 1/4[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2] = s'_1{}^2 \quad (\text{IV-9})$$

Ensuite on essaie d'approcher l'équation de la courbe grâce à une interpolation par polynôme d'Hermite à partir des valeurs nodales de  $x(\xi)$ ,  $x'(\xi)$ ,  $y(\xi)$ ,  $y'(\xi)$  en sachant que:

$$x' = dx/d\xi = \cos\varphi \cdot ds/d\xi \quad \text{et} \quad y' = dy/d\xi = \sin\varphi \cdot ds/d\xi \quad (\text{IV-10})$$

Comme  $ds/d\xi$  n'est pas connue exactement, on reportera son approximation à l'ordre 1. On construit aussi successivement les valeurs nodales de  $x'(\xi)$ ,  $y'(\xi)$ , puis la première approximation de la courbe et la seconde approximation de  $ds/d\xi$ :

$$x'_\alpha = \cos\varphi_\alpha s'_1 \quad y'_\alpha = \sin\varphi_\alpha s'_1 \quad (\text{IV-11})$$

$$x_I(\xi) = 1/4(N_1x_1 + N_2x'_1 + N_3x_2 + N_4x'_2), \quad y_I(\xi) = 1/4(N_1y_1 + N_2y'_1 + N_3y_2 + N_4y'_2) \quad (IV-12)$$

$$(ds/d\xi)_{II}^2 = (dx_I/d\xi)^2 + (dy_{II}/d\xi)^2 = s'_{II}{}^2 \quad (IV-13)$$

où  $N_i$  ( $i=1,4$ ) sont des fonctions d'Hermite (voir Annexe, (A-2)). On arrête le processus à l'ordre III, et on accepte la longueur de l'élément donnée par l'expression de ds:

$$(ds/d\xi)_{III}^2 = (dx_{II}/d\xi)^2 + (dy_{II}/d\xi)^2 = s'_{III}{}^2 \quad (IV-14)$$

où  $x_{II}$  et  $y_{II}$  sont de même nature que (IV-12), seulement il faut remplacer dans (IV-11),  $s'_I$  par  $s'_{II}$ . Dans la suite de notre étude, on identifie  $x_{II}$ ,  $y_{II}$  et  $s'_{III}$  respectivement à  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$  et  $s'(\xi)$ . Ceci permet d'avoir une approximation des courbures principales en fonction de la variable de référence  $\xi$ . On rappelle que les expressions explicites des deux courbures principales pour une coque de révolution sont les suivantes:

$$C_1 = (y''x' - y'x'') / (x'^2 + y'^2)^{3/2} \quad C_2 = 1/x [y' / (x'^2 + y'^2)^{1/2}] \quad (IV-15)$$

Ces approximations nous permettent de mettre en oeuvre l'intégration numérique. En effet, une surface moyenne élémentaire  $d\Omega_e$  fig. IV-3, de l'une des coques de révolution étudiées ayant pour frontière la longueur de l'élément s'écrit:

$$d\Omega_e = r ds d\theta = x(\xi) s' d\xi d\theta \Rightarrow \Omega_e = 2\pi \int_{-1}^{+1} x(\xi) s' d\xi \quad (IV-16)$$

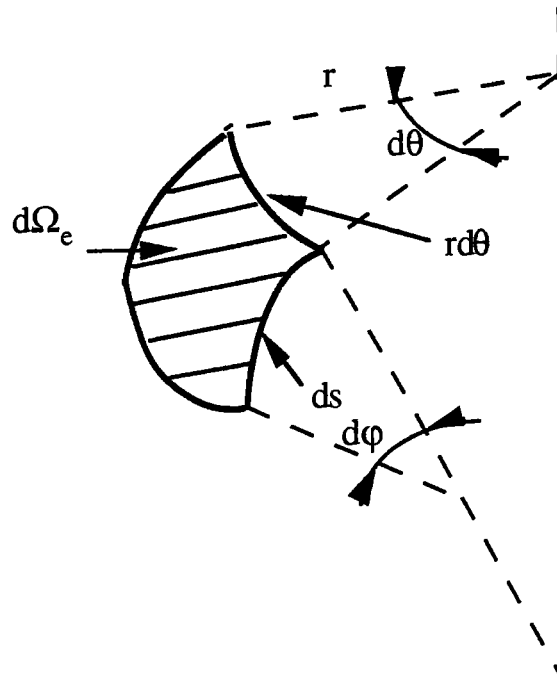


fig. IV-3 Surface moyenne englobant un élément de discrétisation de la coque de révolution

#### IV-3-2 Approximation du champ de déplacement $\{u\}$

A cause de la symétrie de révolution existant dans les structures étudiées, on suppose le mode de flambage  $\{u\}$  de la forme:

$$u_1 = U_1(s)e^{in\theta} \quad u_2 = iU_2(s)e^{in\theta} \quad \text{et } w = W(s)e^{in\theta} \quad (\text{IV-17})$$

où  $U_1$ ,  $U_2$  et  $W$  ne dépendent que de l'abscisse curviligne  $s$ , et où  $n$  est le nombre d'ondes circonférentiel. On prend des variations du champ de déplacement  $\{\delta u\}$ , telles que le produit  $\{\delta u\}^T \{u\}$  soit réel et ne dépend que de  $s$ . On obtient alors:

$$\delta u_1 = \delta U_1(s)e^{-in\theta} \quad \delta u_2 = -i\delta U_2(s)e^{-in\theta} \quad \text{et } w = \delta W(s)e^{-in\theta} \quad (\text{IV-18})$$

On considère que les composantes tangentielles du champ de déplacement  $\{U\}$ , donné par  $U_1$  et  $U_2$  sont combinaisons linéaires des déplacements respectifs aux noeuds. Par contre le déplacement suivant la normale à la surface moyenne,  $W$ , est représenté par des fonctions d'Hermite des déplacements normaux aux noeuds. A partir de ces deux hypothèses, le champ de déplacement  $\{U\}$  aux noeuds est interpolé par les fonctions polynômes:

$$U_1 = [(1-\xi)/2] U_{11} + [(1+\xi)/2] U_{12} \quad U_2 = [(1-\xi)/2] U_{21} + [(1+\xi)/2] U_{22}$$

$$W = (1/4)[N_1W_1 + N_2s'W_{1,1} + N_3W_2 + N_4s'W_{2,1}] \quad (IV-19)$$

où  $U_{\alpha\beta}$  est le déplacement  $U_\alpha$  au noeud  $\beta$ ,  $W_\alpha$  représente le déplacement normal à la surface moyenne de la coque, au noeud  $\alpha$ , fig. V-4. Les grandeurs  $N_1, N_2, N_3$ , et  $N_4$  définissent les fonctions d'Hermite, données en Annexe, relation (A-2), et  $s'$  est la dérivée par rapport à la variable de référence  $\xi$  de l'arc de courbes (IV-14).

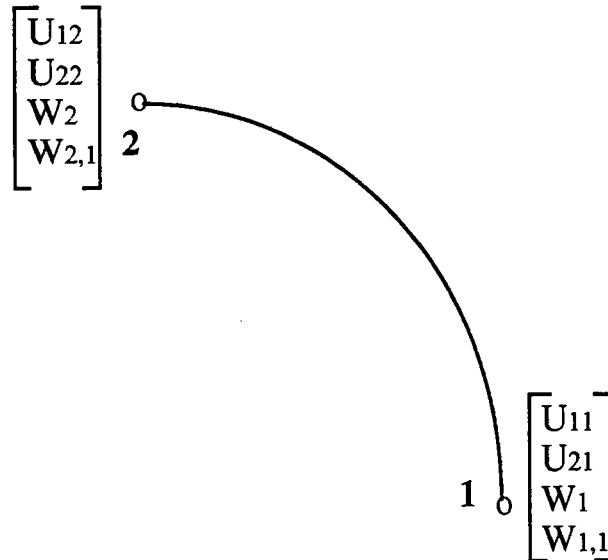


fig. IV-4 Représentation des déplacements au niveau de chaque noeud de l'élément issu de la discrétisation de la coque de révolution

Dans les relations de la théorie de D.M.V, (voir relation (IV-3)), apparaissent les dérivées première et seconde (ici seulement par rapport à  $s$ , d'après (IV-17) et (IV-18)), des déplacements  $U_\alpha$  et  $W$ . On détermine donc, ces dérivées de  $U_\alpha$  et  $W$  (IV-19) par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ , en fonction des déplacements aux noeuds  $U_{\alpha\beta}$  et  $W_\alpha$  par des fonctions polynômes en effectuant leurs dérivées successives par rapport à la variable  $\xi$ . On obtient, ainsi les dérivées successives de  $U_\alpha$  et  $W$  par rapport à  $s$ :

$$U_{1,1} = (-1/2s')U_{11} + (1/2s')U_{12} \quad U_{2,1} = (-1/2s')U_{21} + (1/2s')U_{22}$$

$$W_{,1} = (1/4)[B_1W_1 + B_2W_{1,1} + B_3W_2 + B_4W_{2,1}]$$

$$W_{,11} = (1/4)[D_1W_1 + D_2W_{1,1} + D_3W_2 + D_4W_{2,1}] \quad (IV-20)$$

On remarque qu'en effectuant les dérivées successives du déplacement normal  $W$ , on obtient des polynômes en  $\xi$  longs à écrire. On pose et on

note par  $B_1, B_2, B_3, B_4, D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  des fonctions de  $\xi$ , qui sont contenues dans les deux dernières expressions de (IV-20). Ces fonctions sont:

$$\begin{aligned} B_1 &= N_1'/s' & B_2 &= N_2' + N_2 s''/s' & B_3 &= N_3'/s' & B_4 &= N_4' + N_4 s''/s' \\ D_1 &= N_1''/s'^2 - N_1' s''/s'^3 & D_2 &= N_2''/s' + N_2' s''/s'^2 + N_2 s'''/s'^2 - N_2 s''^2/s'^3 \\ D_3 &= N_3''/s'^2 - N_3' s''/s'^3 & D_4 &= N_4''/s' + N_4' s''/s'^2 + N_4 s'''/s'^2 - N_4 s''^2/s'^3 \end{aligned} \quad (IV-21)$$

Les quantités  $N_i'$  et  $N_i''$  ( $i=1,4$ ) sont les dérivées première et seconde des fonctions d'interpolation d'Hermite  $N_i$  (voir Annexe, (A-3)).  $s', s''$  et  $s'''$  sont les dérivées successives de  $s$  par rapport à  $\xi$ . Sachant que  $s' = [x'^2 + y'^2]^{1/2}$ , (expression (IV-13)), on obtient les expressions de  $s''$  et  $s'''$ :

$$s'' = (x'x'' + y'y'')/s' \quad \text{et} \quad s''' = (x''^2 + y''^2 + x'x''' + y'y''' - s''^2)/s' \quad (IV-22)$$

où  $x', x'', x''', y', y''$  et  $y'''$  sont les dérivées successives de  $x$  et  $y$  par rapport à la variable de référence  $\xi$ .

Pour garder une notation courante, dans le calcul éléments finis, on note par  $\{q\}^e$  le champ de déplacement élémentaire aux noeuds dont ses composantes sont définies par:

$$\{q\}^e = \{U_{11}, U_{21}, W_1, W_{1,1}, U_{12}, U_{22}, W_2, W_{2,1}\}^T \quad (IV-23)$$

où la partie de gauche du second membre de la relation ci-dessus, concerne le noeud n° 1 et celle de droite, le noeud n°2.

### IV-3-3 Mise en équations en éléments finis

Le calcul du flambage plastique en éléments finis sur le modèle de déplacement fait intervenir le lien entre le champ de déplacement le long de l'élément  $\{U\}^e$ , le champ de déplacement élémentaire aux noeuds  $\{q\}^e$  et la loi de comportement plastique sous une forme discrétisée au niveau d'un seul élément de la coque de révolution. D'après les approximations faites précédemment sur le déplacement on peut écrire ce lien sous la forme:  $\{U(\xi)\}^e = [B^d(\xi)]\{q\}^e$  où  $[B^d]$  est la matrice de passage faisant intervenir les polynômes d'interpolation (voir Annexe, tab. A-2). Dans notre étude, c'est la formulation en vitesses de déplacement élémentaire  $\{U\}^e$  et en variation de déplacement élémentaire  $\{\delta U\}$  donnée en Annexe (formules (A-4) et (A-5)), qui nous intéresse. Pour cela on formule ces relations en fonction du champ élémentaire de vitesses aux noeuds  $\{q\}^e$  et de la variation du champ de déplacement élémentaire aux noeuds  $\{\delta q\}^e$ , (voir



(A-6) et (A-7)), de la manière suivante:

$$\{\dot{U}\}^e = [B^d]\{\dot{q}\}^e \quad \text{et} \quad \{\delta U\}^e = [B^d]\{\delta q\}^e \quad (\text{IV-24})$$

On peut aussi lier le taux de déformation élémentaire  $\{\dot{\varepsilon}\}^e$ , défini par:

$$\{\dot{\varepsilon}\}^e = \{\dot{\gamma}_{11}, \dot{\gamma}_{22}, 2\dot{\gamma}_{12}, \dot{\kappa}_{11}, \dot{\kappa}_{22}, 2\dot{\kappa}_{12}\}^T \quad (\text{IV-25})$$

avec le champ  $\{\dot{q}\}^e$  par une autre matrice de passage notée par:  $[B]$ , dont les composantes (voir Annexe, tab. A-1), sont d'autres coefficients dépendant de la variable  $\xi$ . Il en est de même pour le vecteur variation des déformations  $\{\delta\varepsilon\}$ . Cette liaison est:

$$\{\dot{\varepsilon}\}^e = [B]\{\dot{q}\}^e \quad \text{et} \quad \{\delta\varepsilon\}^e = [B]\{\delta q\}^e \quad (\text{IV-26})$$

Le comportement plastique du matériau peut se mettre sous une forme matricielle, pour un élément de la coque, à partir des théories de la plasticité décrites précédemment. En effet, en notant par  $\{\dot{\sigma}\}^e$  le vecteur taux de contrainte élémentaire, défini par:

$$\{\dot{\sigma}\}^e = \{\dot{N}^{(11)}, \dot{N}^{(22)}, \dot{N}^{(12)}, \dot{M}^{(11)}, \dot{M}^{(22)}, \dot{M}^{(12)}\}^T \quad (\text{IV-27})$$

on trouve une relation entre les vecteurs  $\{\dot{\sigma}\}^e$  et  $\{\dot{\varepsilon}\}^e$  en utilisant les expressions (IV-6) du comportement en membrane et en flexion, qui est :

$$\{\dot{\sigma}\}^e = E[C]\{\dot{\varepsilon}\}^e \quad (\text{IV-28})$$

où  $E$  est le module de Young et  $[C]$  est une matrice décrivant le comportement du couple membrane flexion; cette matrice dépend de l'épaisseur  $h$  de la coque et des modules instantanés bidimensionnels adimensionnalisés  $[H]$ . L'expression de  $[C]$  est:

$$[C] = \begin{bmatrix} h[H] & [0] \\ [0] & h^3/12[H] \end{bmatrix} \quad (\text{IV-29})$$

On a vu que la caractérisation de la charge critique se ramène à l'annulation de la forme bilinéaire (IV-8). Cette forme bilinéaire sur la structure se décompose sur les éléments de la manière suivante:

$$\int_{\Omega_e} \left[ \{h[H]\{\dot{\gamma}\}\}^T \{\delta\gamma\} + \{h^3/12 [H]\{\dot{\kappa}\}\}^T \{\delta\kappa\} + \right. \\ \left. (p/E)[(1/2C_2) \dot{w}_{,(1)} \delta w_{,(1)} + (1/2C_2) \alpha \dot{w}_{,(2)} \delta w_{,(2)}] \right] d\Omega_e = 0 \quad (IV-30)$$

En utilisant les définitions attribuées aux vecteurs taux de contrainte et à la variation des déformations, les deux termes qui constituent cette expression, peuvent être respectivement réécrits sous forme matricielle:

$$\{\delta\gamma\}^T \{h[H]\{\dot{\gamma}\} + \{\delta\kappa\}^T \{(h^3/12)[H]\{\dot{\kappa}\}\} = 1/E \{\delta\varepsilon\}^T \{\dot{\sigma}\} \\ (1/2C_2) \delta w_{,(1)} \dot{w}_{,(1)} + (1/2C_2) \alpha \delta w_{,(2)} \dot{w}_{,(2)} = (1/2C_2) \delta\dot{\gamma}_{(1)} + \\ (1/2C_2) \alpha \delta\dot{\gamma}_{(2)} \quad (IV-31)$$

où les quantités  $\delta\dot{\gamma}_{(1)}$  et  $\delta\dot{\gamma}_{(2)}$  sont obtenues en remplaçant dans la relation (IV-5)  $w$  et  $\delta w$  par leurs expressions respectives données par les formules (IV-17) et (IV-18). En fonction du champ de déplacement élémentaire  $\{U\}^e$ , ces quantités peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\delta\dot{\gamma}_{(1)} = \{\delta U\}^e T [D^0_1] \{\dot{U}\}^e \\ \delta\dot{\gamma}_{(2)} = \{\delta U\}^e T [D^0_2] \{\dot{U}\}^e \quad (IV-32)$$

où les matrices  $[D^0_1]$ ,  $[D^0_2]$  sont construites à partir de la théorie des coques utilisée (théorie de D.M.V.) et la nature du chargement de la structure. Les composantes de ces deux matrices sont définies en Annexe.

A l'aide des égalités (IV-31) puis en introduisant les relations (IV-24) à (IV-29), l'expression (IV-30) peut se mettre sous la forme ci-dessous:

$$\{\delta q\}^T \left( \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega_e \{\dot{q}\}^e + [(p/E)(1/2C_2) [B^d]^T [D^0_1] [B^d] d\Omega_e \{\dot{q}\}^e + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e} (1/2C_2) \alpha [B^d]^T [D^0_2] [B^d] d\Omega_e \{\dot{q}\}^e \right) \quad (IV-33)$$

A cause de la symétrie de révolution de la structure et du chargement la forme intégrale de surface peut être réduite à une intégrale de ligne. En introduisant l'expression (IV-15) dans (IV-30), on peut effectuer cette intégrale de ligne par une méthode numérique. On note par  $[k^t]^e$  la matrice de rigidité tangente élémentaire de la structure étudiée et par  $[k^\sigma]^e$  sa matrice de rigidité géométrique élémentaire, on obtient les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
 [k^t]^e &= \int_{-1}^{+1} [B]^T [C] [B]_x(\xi) s'(\xi) d\xi \\
 [k^\sigma]^e &= \int_{-1}^{+1} (1/2C_2) [B^d]^T [D^0_1] [B^d]_x(\xi) s'(\xi) d\xi + \\
 &\quad \int_{-1}^{+1} (1/x^2) (1/2C_2) \alpha [B^d]^T [D^0_2] [B^d]_x(\xi) s'(\xi) d\xi \quad (IV-34)
 \end{aligned}$$

Pour étendre le problème à toute la structure étudiée, on assemble les matrices de rigidité tangente et géométrique élémentaires de tous les éléments de la structure. On définit ainsi, une rigidité globale tangente  $[K^t]$  et une rigidité géométrique globale  $[K^\sigma]$  de cette structure auxquelles on associe un champ vecteur vitesse total noté  $\{\dot{Q}\}$ , relatif à l'ensemble des éléments de la structure. La résolution du problème de flambage plastique de la coque de révolution sous une pression interne  $p$ , par la méthode des éléments finis s'écrit:

$$([K^t] + (p/E) [K^\sigma]) \{\dot{Q}\} = 0 \quad (IV-35)$$

#### V-3-4 Maillage des coques torisphérique et elliptique

Nous avons vu, précédemment que ces coques sous pression interne flambent localement, pour cela nous allons mailler finement sur les parties où aura lieu l'instabilité, (une centaine d'éléments au niveau des zones torique, sphérique et elliptique). Par contre sur la partie cylindrique on conserve quelques éléments (une dizaine). C'est le maillage donné par la fig. IV-5.

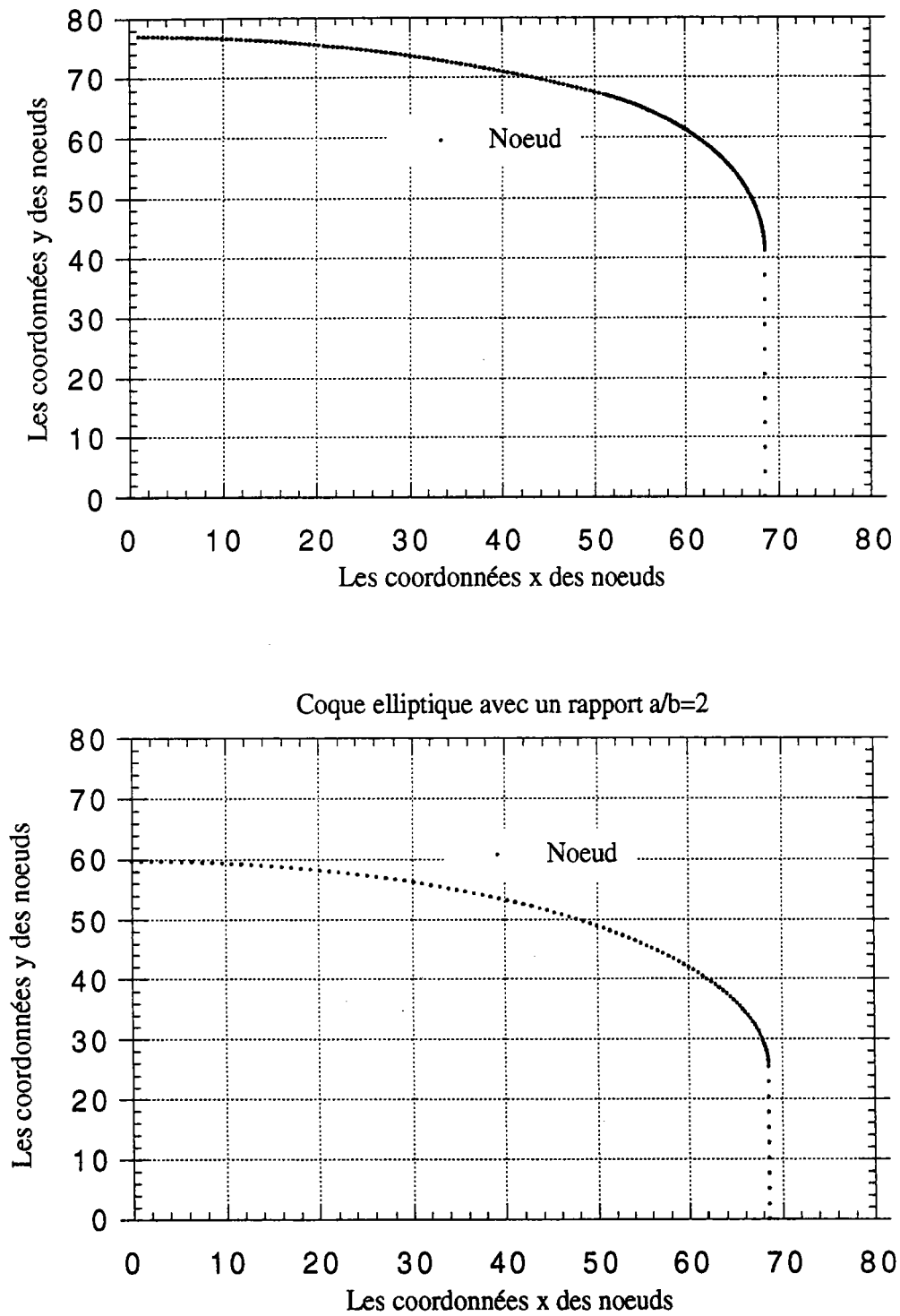


fig. IV-5 Maillage des coques torisphérique (a) et elliptique (b)

### IV-3-5 Algorithme de résolution des problèmes aux valeurs propres

L'équation (IV-35) à résoudre est un problème de valeurs propres en  $p/E$  et de vecteurs propres associés. Les matrices  $[K^t]$  et  $[K^o]$  dépendent du nombre d'ondes circonferentiel  $n$ . De plus, la matrice de comportement  $[C]$  (voir relation (IV-29)), dépend du chargement, donc la matrice tangente globale  $[K^t]$  en dépend aussi. Ceci permet de dire, que le problème (IV-35) est un problème de valeurs propres non-linéaire. A cela, s'ajoute l'effet de la plasticité (évolution de la matrice de comportement en fonction de la pression) et de la complexité de la géométrie des structures à étudier: coques torisphérique et elliptique. Ainsi, on a à résoudre l'équation (IV-35), à chaque étape du chargement (à chaque incrément de pression). On aura donc, à effectuer une série de calculs numériques de valeurs propres non-linéaires et vecteurs propres associés de (IV-35), qui nécessitera un temps machine important, pour la résolution.

L'outil numérique, qu'on utilisera pour cette résolution des problèmes (IV-35) est un programme COQ, qui existe dans notre Laboratoire. L'existence de l'instabilité locale au niveau de ces structures nous a amené à modifier un certain nombre de routines dans notre programme d'origine COQ, qui était destiné exclusivement à la résolution des problèmes de vibration où la matrice de rigidité géométrique est toujours définie positive. Cette difficulté a été contournée tout en conservant l'ossature principale du programme, en introduisant dans l'équation numérique un décalage spectral (encore appelé shift)  $sh^o$ , ce qui permet de rendre la matrice de rigidité globale définie positive. A partir de cette considération la relation (IV-35) peut se mettre sous la forme:

$$([K^t] + (p/E)[K^o] + sh^o[I] - \lambda[I]) \{\dot{Q}\} = 0 \quad (IV-36)$$

où  $[I]$  est la matrice unité. Pour chaque nombre d'ondes  $n$ , la pression critique  $p(n)$  sera obtenue lorsque la plus petite valeur propre  $\lambda$  sera proche du décalage spectral  $sh^o$ . On peut ensuite tracer la courbe de stabilité neutre  $(n, p(n))$  dont le minimum donnera la pression critique. En pratique, on a choisi comme valeur de  $sh^o$ , la plus petite valeur propre de  $\lambda$  obtenue à partir de l'équation ci-dessus, pour  $p/E=0$  et un nombre d'ondes circonferentiel arbitrairement choisi:  $n_o=20$ , ( $sh^o=\min\lambda(0, n_o)$ ).

## V- RESULTATS NUMERIQUES

Pour valider le programme COQ on a calculé la charge critique de flambage élastique de certaines structures connues (cylindre, cône et sphère sous une pression hydrostatique  $p$ ), et nous avons comparé avec des ré-

sultats connus dans la littérature [S3], [S4], [Z2].

Le plus important pour notre étude, ce sont les résultats obtenus dans le flambage local des coques torisphérique et elliptique, que nous allons analyser dans le prochain paragraphe. Ces résultats relatifs à chaque type de structure, permettent de discuter l'influence de la géométrie et du comportement plastique utilisé. On a aussi fait un calcul de flambage élastique de ces coques de révolution sous pression interne afin de comparer le dimensionnement de ces structures dans les deux cas: élastique et plastique.

### V-1 Flambage élastique des coques simples sous pression hydrostatatique

On prend comme premier cas, une coque cylindrique de rayon  $R$  de longueur  $l_c$  et d'épaisseur constante  $h$ , sous une pression hydrostatatique  $p$ , fig. V-1.

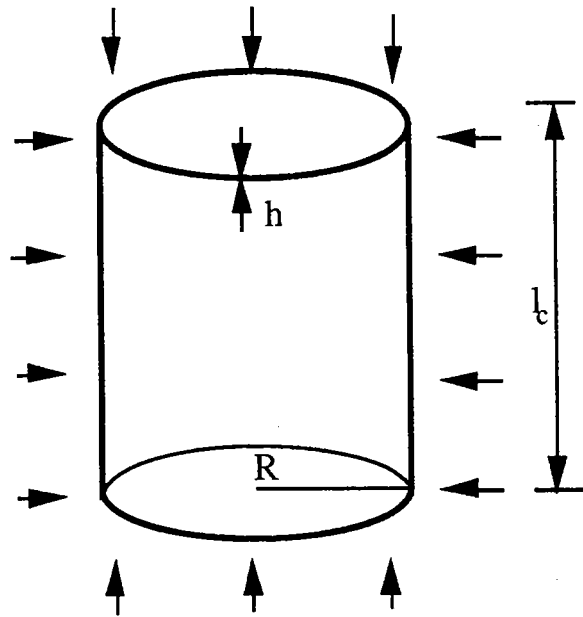


fig. V-1 Coque cylindrique sous pression hydrostatatique

On rappelle que la première courbure principale  $C_1$  est nulle et la seconde  $C_2$  vaut  $1/R$ . Cette pression développe un état de membrane défini par les contraintes  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  de valeurs respectives  $p/2hC_2$  et  $p/hC_2$ . Pour des données géométriques à savoir les rapports:  $R/h$  et  $l_c/R$ , et certaines conditions aux limites imposées, on obtient les valeurs de la pression critique, voir tab. V-1, qui collent parfaitement avec les valeurs de référence. Un exemple de mode de flambage élastique est donné fig. V-2.

$(p/E)x(h/R)x10^{**3}$		avec $R/h=100$		
Conditions aux limites				
$W=W_{,11}=U_2=0$		$W=W_{,1}=U_1=U_2=0$		
$l_c/R$	COQ	SOBEL	COQ	SOBEL
0.5	2.1057930 (11)	2.1063 (11)	2.8506328 (12)	2.851 (12)
0.6	1.7147183 (10)	1.715 (10)	2.2821941 (11)	2.282 (11)
1.	0.98392315 (8)	0.9838 (8)	1.3062210 (9)	1.306 (9)
1.5	0.64176064 (7)	0.6417 (7)	0.86890341 (8)	0.8688 (8)
2.	0.47449438 (6)	0.4744 (6)	0.65537903 (7)	0.6552 (7)
3.	0.31327886 (5)	0.3132 (5)	0.44458537 (6)	0.4444 (6)
4.	0.23962296 (4)	0.2395 (4)	0.33525458 (5)	0.3351 (3)
6.	0.16791238 (4)	0.1679 (4)	0.22902351 (4)	0.2288 (4)
8.	0.11586503 (3)	0.1158 (3)	0.17590300 (4)	0.1758 (4)
10.	0.096813744 (3)	0.09678 (3)	0.14469288 (3)	0.1445 (3)

(-) est le nombre d'ondes

tab. V-1 Comparaison des résultats entre Sobel[S3] et COQ

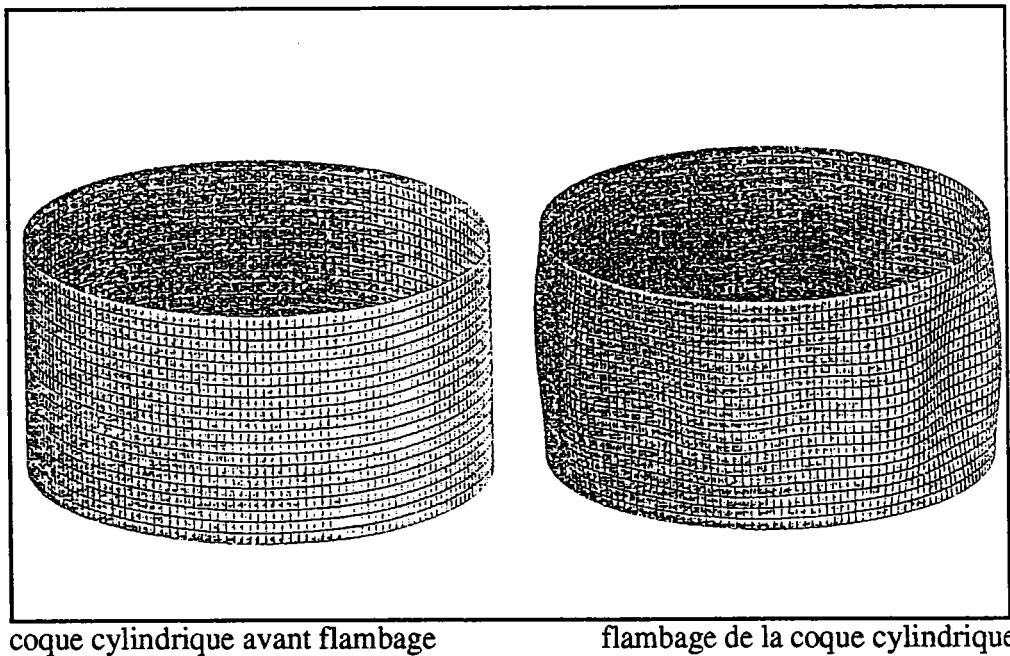


fig. V-2 Mode de flambage élastique d'une coque cylindrique sous pression hydrostatique

Dans le cas d'une coque tronconique de géométrie décrite par la fig. V-3, d'épaisseur constante  $h$ , et se trouvant dans les mêmes conditions de charge que la première structure, il existe aussi un état de membrane dé-





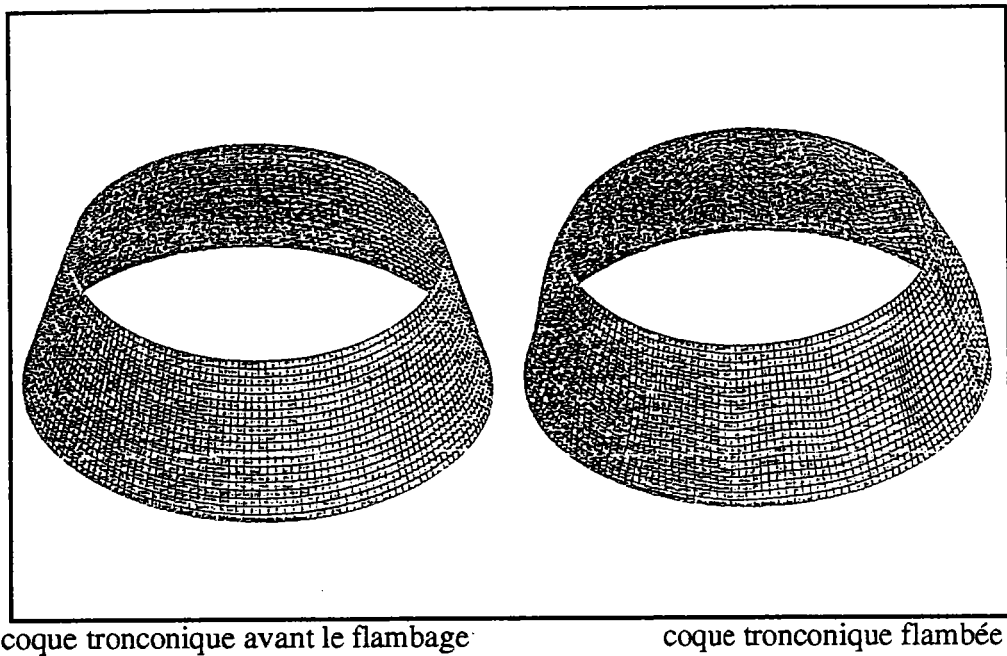


fig. V-4 Mode de flambage élastique d'une coque tronconique sous pression hydrostatique

Enfin la dernière structure testée par notre programme COQ est une sphère, de rayon  $R$ , d'épaisseur constante  $h$  qui sous pression externe  $p$ , développe aussi un état de membrane où les contraintes  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  sont égales ( $\sigma_s = p/2hC_2$  car les deux courbures principales sont égales:  $C_1 = C_2 = 1/R$ ). Le calcul de la pression critique élastique donnée par COQ a pour expression, pour un nombre d'ondes circonférentiel critique égal à 6:  $p/E = 1.21(h/R)^2$ . Ce résultat est le même que celui donné dans la référence [Z2]. Le mode critique correspondant est dessiné en fig. V-5.

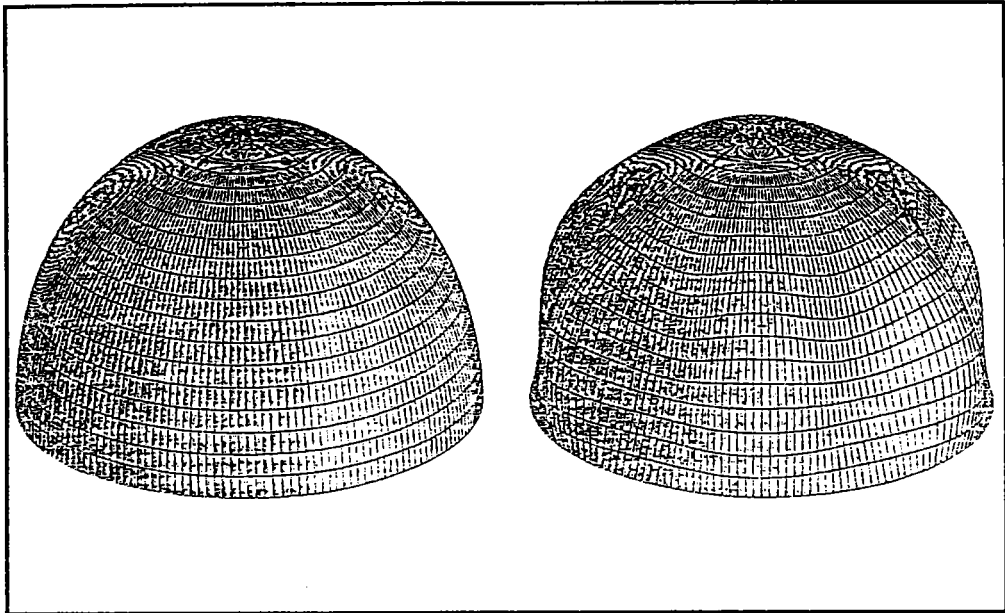


fig. V-5 Flambage de la coque sphérique sous pression externe[Z2]

On remarque que tous ces résultats sont établis en identifiant les modules tangent  $E_t$  et sécant  $E_s$  au module élastique  $E$  dans la matrice des coefficients  $[H]$  du comportement plastique.

## V-2 Flambage des coques torisphérique et elliptique

Ayant validé notre programme éléments finis COQ en élasticité, on s'intéresse alors aux résultats du flambage élastique et plastique des coques torisphérique et elliptique sous la pression interne  $p$ . Ces résultats sont obtenus à partir d'un état de contrainte calculé en théorie de membrane. La géométrie de ces coques est la même que dans l'article de Galletly[G1].

### V-2-1 Coque torisphérique

Le calcul élastique de la pression critique de flambage est obtenu, en prenant un comportement élastique du matériau. Dans ce cas les composantes de la matrice  $[H]$  gardent des valeurs constantes et les paramètres qui varient sont la pression et le rapport lié aux deux courbures principales  $\alpha$ . Le graphe de la fonction  $p/E(n)$  représentant la courbe de stabilité neutre fig. V-6, nous donne la pression critique élastique et le nombre d'ondes circonférentiel critique associé. Le mode de flambage correspondant à ce résultat élastique fig. V-7, s'étend sur la partie torique et atteint son maximum près de la jonction tore-sphère. Ceci explique le phénomène d'instabilité locale sur ce type de structure. Cet aspect est mis en évidence par la représentation spatiale de ce mode fig. V-8.

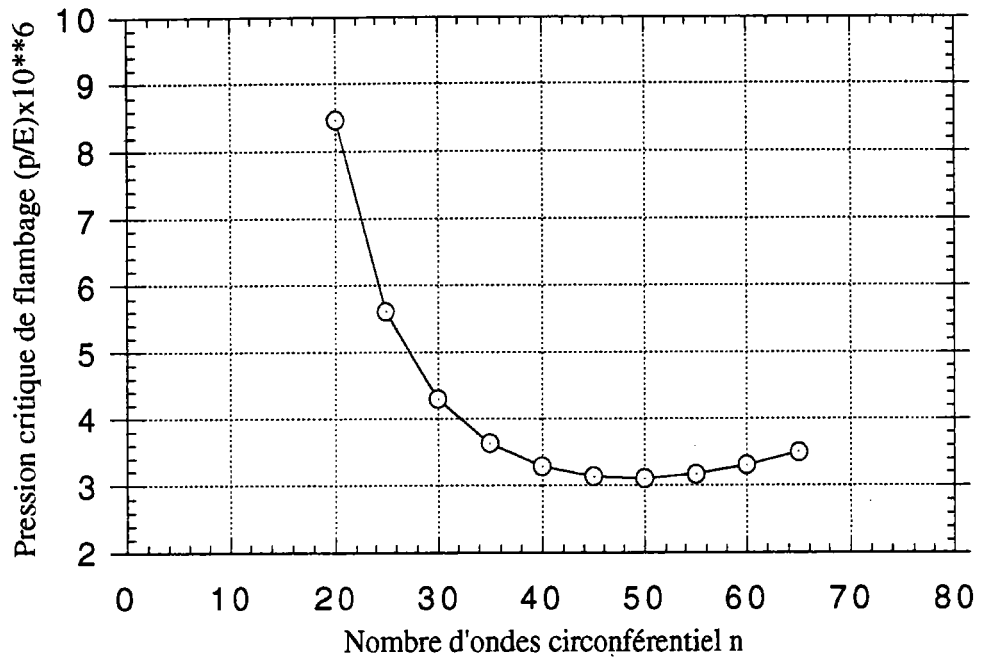
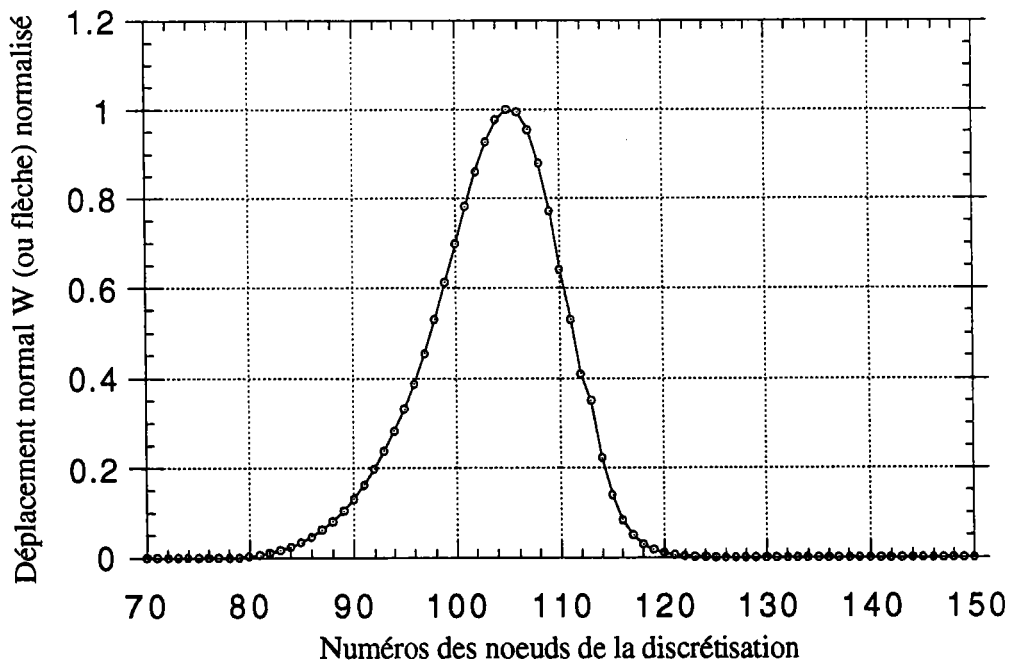


fig. V-6 Courbe de stabilité neutre élastique ( $\nu=0.3$ ) d'une coque torisphérique de géométrie:  $R=68.58\text{mm}$ ,  $l_c=41,148\text{mm}$ ,  $R_t=27.94$ ,  $R_s=137.16\text{mm}$  et  $h=0.127\text{mm}$  et sous pression interne  $p$



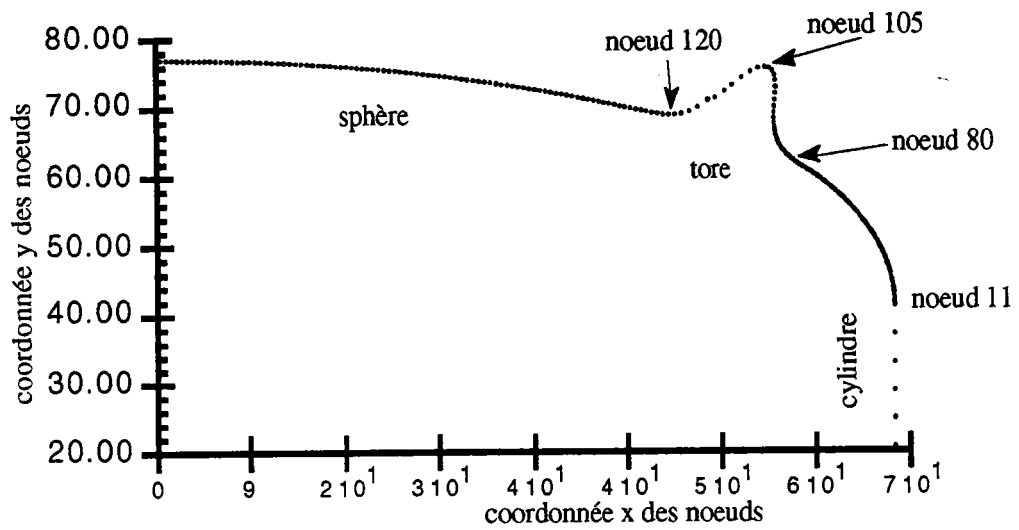


fig. V-7 Allure du mode de flambage élastique de la coque torisphérique

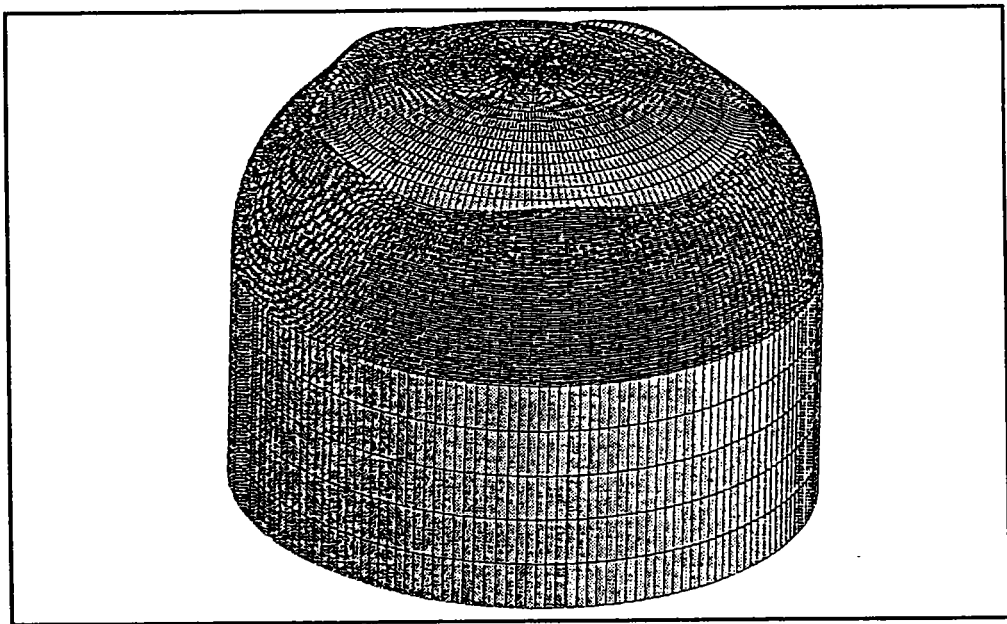


fig. V-8 Représentation dans l'espace du mode de la coque torisphérique

Dans le cas du flambage plastique, on a deux types de résultats, car on utilise les deux lois de plasticité décrite dans le début de ce chapitre. La matrice [H] n'a plus ses composantes constantes lorsque la pression croît et donne une déformation  $\epsilon$  supérieure à la déformation élastique imposée  $\epsilon_y$ . On voit alors apparaître le module tangent  $E_t$  et le module sécant  $E_s$  en plus de l'influence de la géométrie de la structure mesurée par le rapport

$\alpha(s)$ .

En traitant le flambage plastique sur le modèle de la théorie incrémentale, on constate qu'il y a seulement la géométrie de la structure et le module tangent  $E_t$  interviennent dans le comportement [H]. On rappelle que  $E_t$  garde une valeur constante d'après la courbe contraintes-déformations utilisée. On s'aperçoit que lorsqu'on dépasse la limite  $\epsilon_y$ , les composantes de la matrice des coefficients de comportement [H] commencent à diminuer et deviennent ainsi inférieures à celles du cas élastique, sauf pour la composante représentée par  $H^{33}$  qui conserve sa valeur élastique. En particulier le coefficient de la rigidité de la structure dans la direction circonférentielle (direction de la compression):  $H^{22}$ , voit sa valeur inférieure à  $1/(1-\nu^2)$ . Cette chute de modules débute quand en un point de la structure le rapport  $\epsilon_y/\epsilon$  devient inférieur à l'unité. Ce point correspond à la valeur maximale en valeur absolue du rapport  $\alpha$  entre les contraintes circonférentielle et radiale. Cette réalité est confirmée par la courbe de stabilité neutre fig. V-9, donnant une pression critique plus petite que celle relative à l'élasticité. Le mode de flambage plastique reste aussi local avec ce modèle de plasticité.

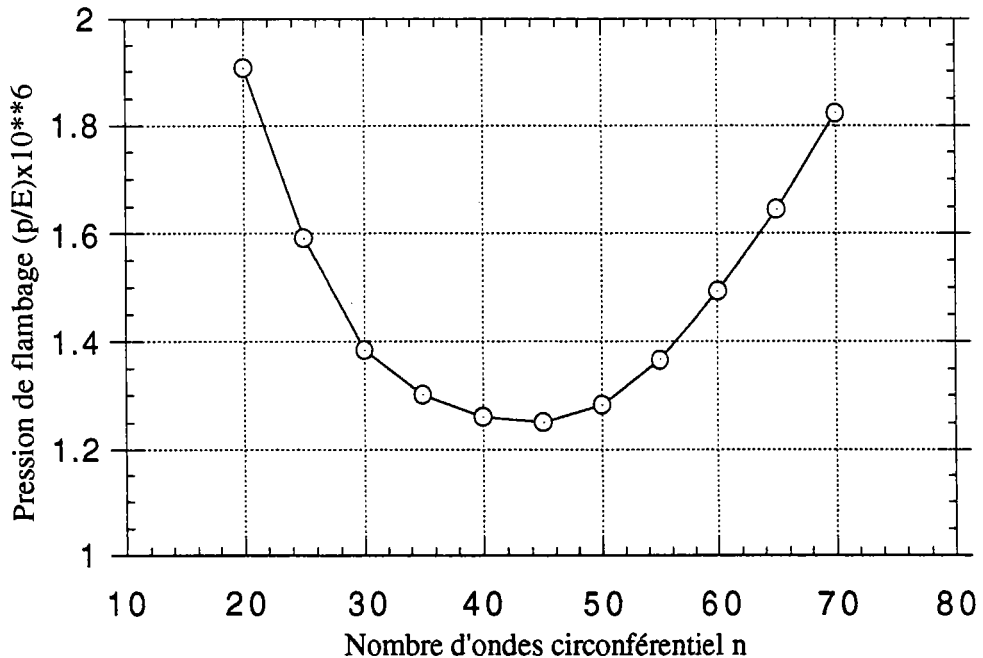


fig. V-9 Courbe de stabilité neutre en théorie incrémentale,  $E/E_t=591$ ,  $\epsilon_y=1.18 \times 10^{-3}$ , dans le cas de la coque torisphérique de géométrie:  $R=68.58\text{mm}$ ,  $l_c=41,148\text{mm}$ ,  $R_t=27.94\text{mm}$ ,  $R_s=137.16\text{mm}$  et  $h=0.127\text{mm}$

Lorqu'on passe au second modèle de plasticité à savoir la théorie de dé-

formation du  $J_2$ , on rappelle que les deux modules  $E_t$  et  $E_s$  interviennent dans le comportement décrit par  $[H]$ , en plus du rapport lié aux deux courbures principales  $\alpha$ . L'inégalité existante entre ces deux modules et le module d'Young (voir paragraphe III-2-2) montre que le terme  $H^{22}$  est plus petit que celui de la loi incrémentale, ce qui explique que la valeur de la pression critique de flambage fig. V-10 obtenue par ce modèle est plus basse.

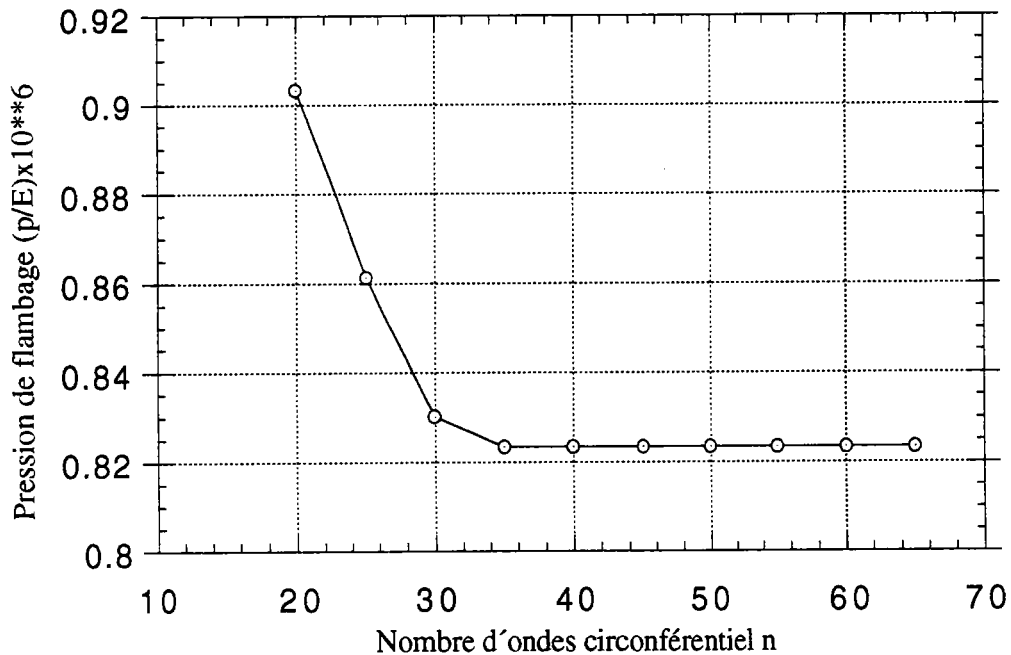


fig. V-10 Courbe de stabilité neutre en théorie de déformation du  $J_2$   $E/E_t=591$ ,  $\epsilon_y=1.18 \times 10^{-3}$ , dans le cas de la coque torisphérique de géométrie:  $R=68.58\text{mm}$ ,  $l_c=41,148\text{mm}$ ,  $R_t=27.94\text{mm}$ ,  $R_s=137.16\text{mm}$  et  $h=0.127\text{mm}$

Il est nécessaire de remarquer que dans la deuxième loi de la plasticité, le module sécant dépend de la pression  $p$ . Par conséquent  $[H]$  en dépend aussi. Par contre dans la première loi, seule la géométrie de la structure intervient dans  $[H]$ . L'effet de la plasticité sur la structure est aussi le même dans les deux lois (début de plastification et ruine de la structure).

En regroupant sur la fig. V-11, les résultats élastique et plastique du flambage de la coque torisphérique sous la pression interne  $p$ , on a l'inégalité suivante des pressions critiques relatives aux trois théories:

$$(p/E)^{\text{éla}} > (p/E)^{\text{inc}} > (p/E)^{\text{déf}} \quad (\text{V-1})$$

où les exposants  $\epsilon_{la}$ ,  $\epsilon_{inc}$  et  $\epsilon_{def}$  désignent respectivement les théories: élastique, incrémentale et de déformation.

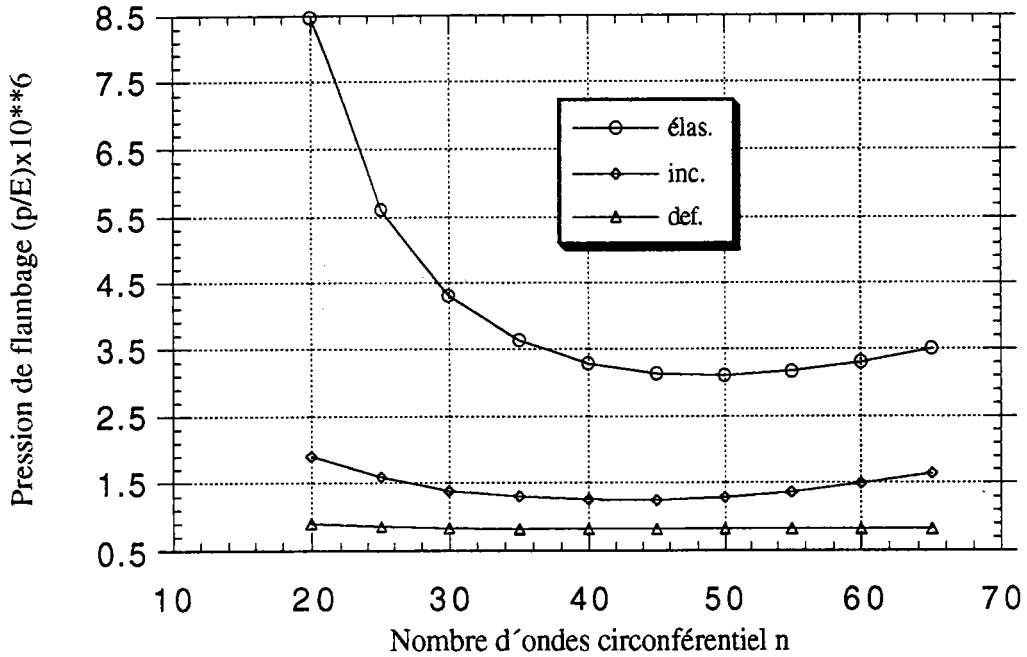


fig. V-11 Les courbes de stabilité neutre dans le cas d'un comportement élastique ( $\nu=0.3$ ) et plastique: loi incrémentale (fig. V-9) et loi de déformation (fig. V-10), de la coque torisphérique sous pression interne  $p$  et de géométrie donnée précédemment.

Dans notre étude, on s'est intéressé à un seul spécimen parmi les coques torisphériques, testées par Galletly[G1],[B7], tab. V-3, en gardant l'épaisseur  $h$  constante sur toute la structure et égale à sa valeur nominale:  $h=0.127\text{mm}$ . Or dans les résultats donnés dans tab. V-4, on tient compte du fait que l'épaisseur  $h$  est variable, comme indiqué à la fig. V-12. Il en résulte que notre analyse n'est pas parfaitement comparable avec les calculs de Galletly.

Specimen	Tested by	Material	Geometry					Buckling test results ( $p_{cr}/E$ ) $\times 10^6$	BOSORS buckling predictions			
			$t_n$ (mm)	$R_c/t_n$	$R_t/t_r$	$R_g/t_n$	$L_c/R_c$		Elastic-plastic		Elastic	
									Flow theory	Deformation theory	Linear	Nonlinear
A1	Galletly	Aluminum	0.127	540	220	1080	0.6	8.25	8.93 (45) <sup>a</sup>	8.93 (45)	5.7 (50)	13.7 (50)
A2	Galletly	Aluminum	0.254	270	110	540	0.6	20.87	21.36 (21)	20.90 (25)		
A3	Galletly	Aluminum	0.254	270	110	540	0.6	21.84	22.91 (25)	21.34 (29)	24.0 (37)	No buckling
MS1	Galletly	Mild Steel	0.127	540	220	1080	0.6	4.23	1.47 (30-40)		4.0 (55)	6.9 (55)
MS2	Galletly	Mild Steel	0.127	540	220	1080	0.6	2.60	1.17 (30-40)		1.67 (65)	4.3 (55)
MS3	Galletly	Mild Steel	0.127	540	220	1080	0.6	2.73	2.00 (27)	1.73 (27)	5.01 (50)	10.77 (50)
MS4	Galletly	Mild Steel	0.127	540	220	1080	0.6	2.50	1.77 (28)		3.4 (55)	8.3 (50)

tab. V-3 Coques torisphériques testées par Galletly[G1],[B7]

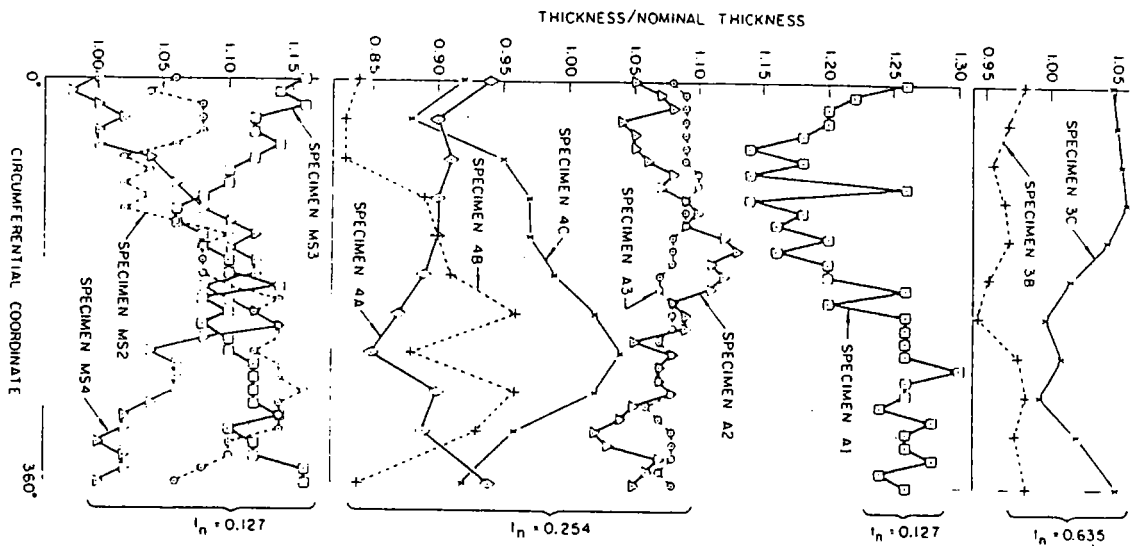


fig. V-12 Variation de l'épaisseur dans les spécimens de coques torisphériques testés par Galletly[G1]



CODE	Valeurs de $(p/E) \times 10^6$ et le nombre d'ondes circonférentiel (n)		
	Elasticité	Théorie incrémentale	Théorie de déformation du J 2
Programme COQ	3.105(50)	1.251(45)	0.83(35)
	3.16(55)	1.384(30)	
Bosor5	3.4(55)	1.77(28)	pas de résultat donné

tab. V-4 Pressions critiques de la coque torisphérique en théorie de membrane comparés à ceux d'une coque type MS4.

On s'aperçoit qu'il y a effectivement un écart entre nos résultats et ceux de Galletly. Cet écart est d'environ 10% en élasticité, ce qui est raisonnable compte tenu de cette variation d'épaisseur ainsi que des incertitudes sur les données du calcul effectué par le code Bosor5. En plasticité l'écart est un peu plus grand, mais le flambage plastique des coques testées ici est très sensible par rapport aux données. Des écarts analogues[G3], ont souvent été observés entre des codes sérieux, comme on le voit sur le tableau V-4, car les facteurs de géométrie influent beaucoup.

Saclay model No.	Material of shell wall	Approx. $\sigma_{yp}$ , MPa	$p_{ci}$ = internal buckling pressure, MPa			$\frac{p_{expt} - p_{BOSOR 5}}{p_{expt}}$
			CEASEMT	BOSOR 5	Expt.	
Head 1	Carbon steel	235	0.28	0.37 (36)*	0.48	+ 23%
Head 2	Carbon steel	305	0.59	0.74 (32)	0.80	+ 8.1%
Head 14	Stainless steel	≈ 350 (curved stress-strain diagram)	0.26	0.30 (62)	0.36	+ 16.7%

\* Figures in parentheses are the predicted number of circumferential waves at buckling.

tab. V-5 Modèles de coques elliptiques du C.E.A. analysés par les codes CEASEMT(Saclay) et Bosor5(Liverpool)

### V-2-2 Coque elliptique

On analyse cette structure tout en gardant le même rayon  $R$  et la même épaisseur de la coque précédente, où  $R$  devient la longueur du grand axe  $a$ , de l'ellipse. On se contente de donner les pressions critiques de flambage plastique relatives aux lois plastiques utilisées, concernant un type de coque elliptique dont le rapport entre le grand axe  $a$  et le petit axe  $b$ , de l'ellipse est égal à 2.

En effectuant un calcul de flambage élastique, de cette structure, on trouve la courbe de stabilité neutre  $p/E(n)$ , donnant la pression critique de flambage, fig. V-12.

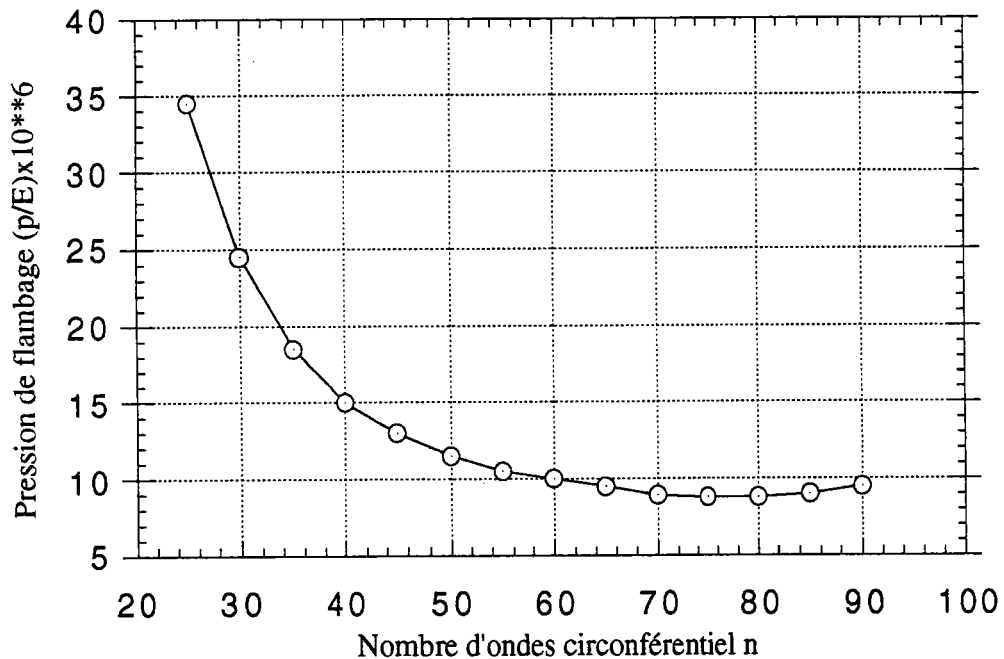


fig. V-12 Courbe de stabilité neutre élastique ( $\nu=0.3$ ), de la coque elliptique sous pression interne et de géométrie:  $a/b=2$ ,  $R=68.58\text{mm}$ ,  $h=0.127\text{mm}$  et  $l_c=25.4\text{mm}$

Le mode de flambage correspondant à cette pression critique élastique est représenté par la fig. V-13-(a). Son allure nous montre, que ce mode s'étend seulement sur une partie de la région elliptique. Ceci est dû à la variation des deux courbures principales  $C_1$  et  $C_2$  dans cette région. La valeur maximale du mode se situe près de la jonction cylindre-ellipse. Une autre étude similaire sur le flambage local de ce type de structure[B7], montre que le mode de flambage de la coque elliptique, s'étend aussi sur la même région fig. V-13-(b). La fig. V-14, nous illustre l'aspect du

mode local pour ce type de structure.

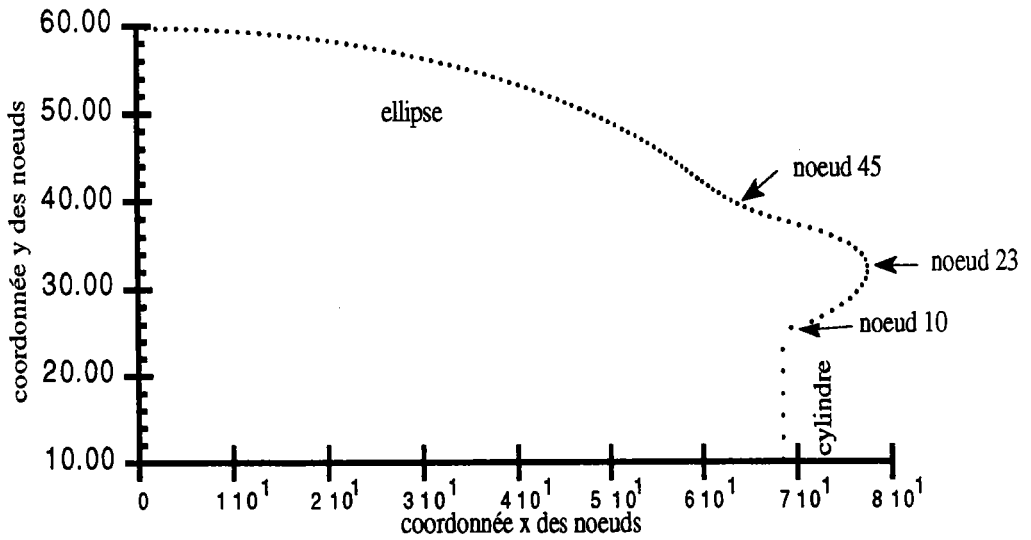
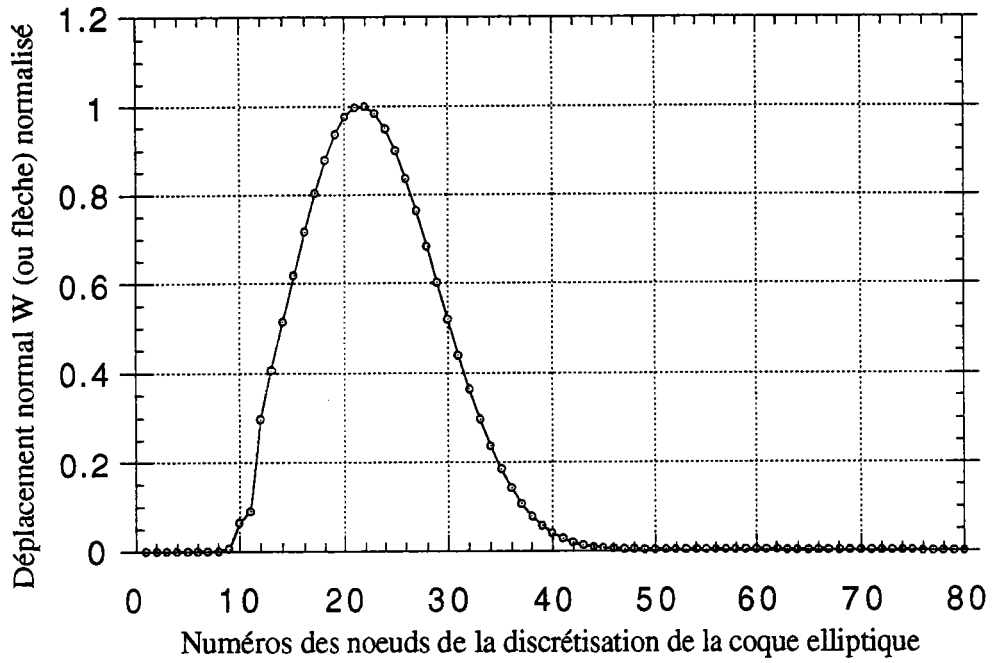


fig. V-13-(a) Mode de flambage élastique d'une coque elliptique sous pression interne, donné par COQ

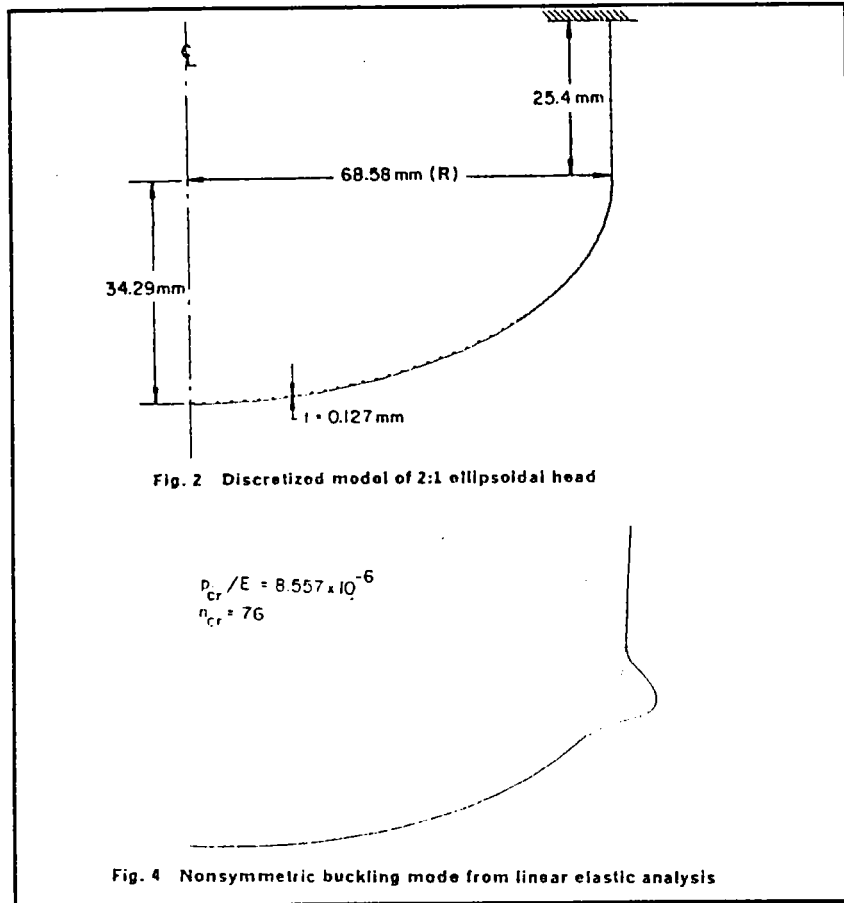


fig. V-13-(b) Mode de flambage élastique de la même coque, calculé par Bosor5[B7] (ici t est l'épaisseur)

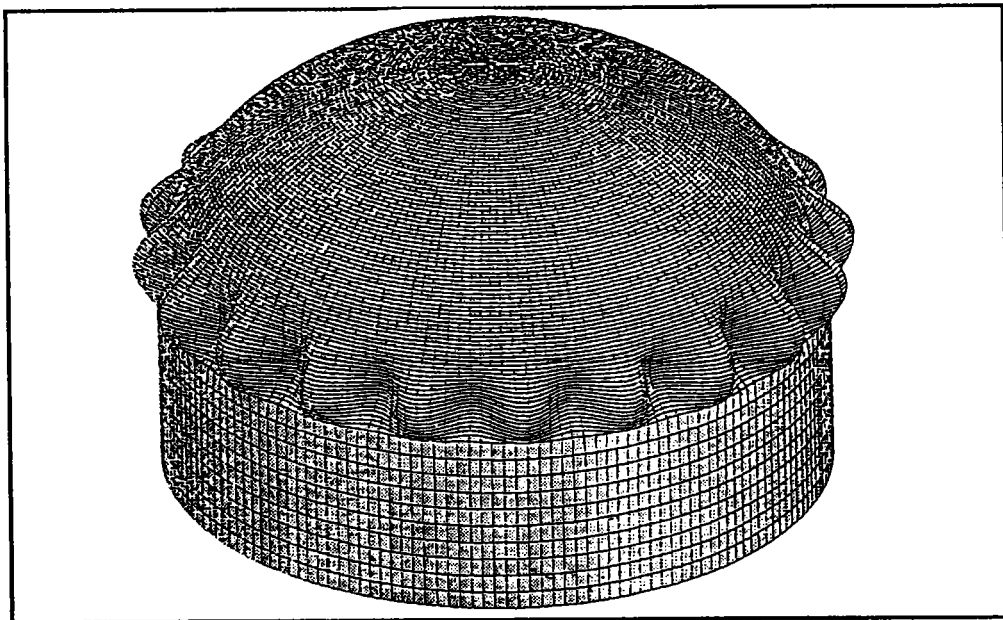


fig. V-14 Représentation spatiale du mode de flambage élastique

Pour la coque elliptique, on peut faire les mêmes remarques que dans le cas du flambage plastique de la coque torisphérique. En effet on note aussi une diminution des coefficients de comportement en utilisant la théorie incrémentale ou la théorie de déformation du  $J_2$  par rapport au cas élastique. On trace les courbes de stabilité neutre correspondantes aux deux modèles plastiques utilisés fig. V-15 et V-16, en utilisant la limite élastique  $\epsilon_y$  de la courbe contraintes-déformations considérée (fig. V-III, paragraphe III-1) en choisissant un module tangent  $E_t$ , donné par le rapport:  $E/E_t=6$ [B6].

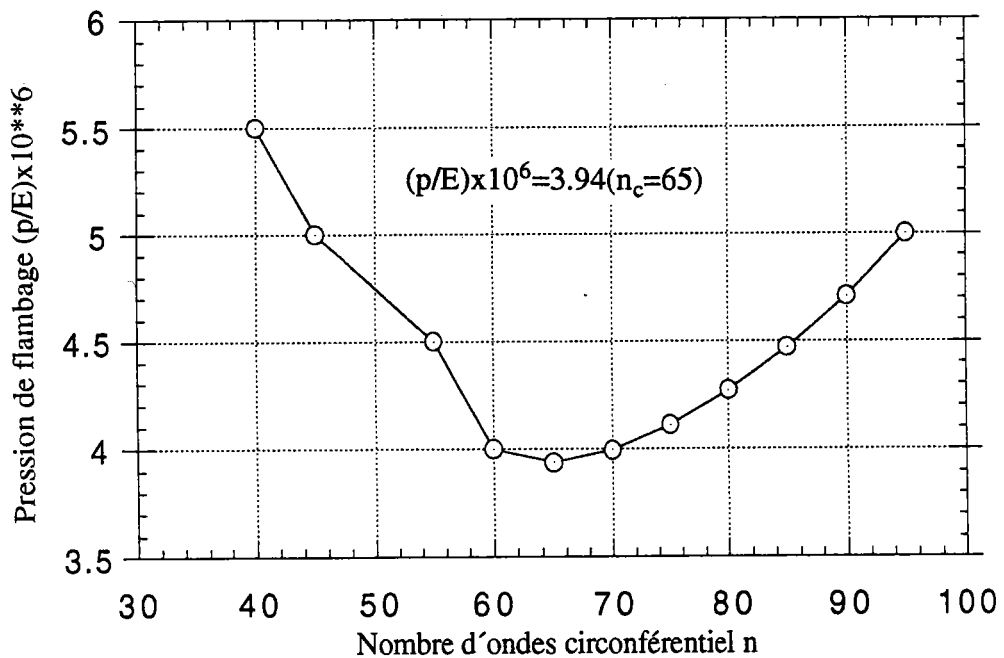


fig. V-15 Courbe de stabilité neutre en théorie incrémentale avec  $E/E_t=6$ , d'une coque elliptique  $a/b=2$  et sous pression interne

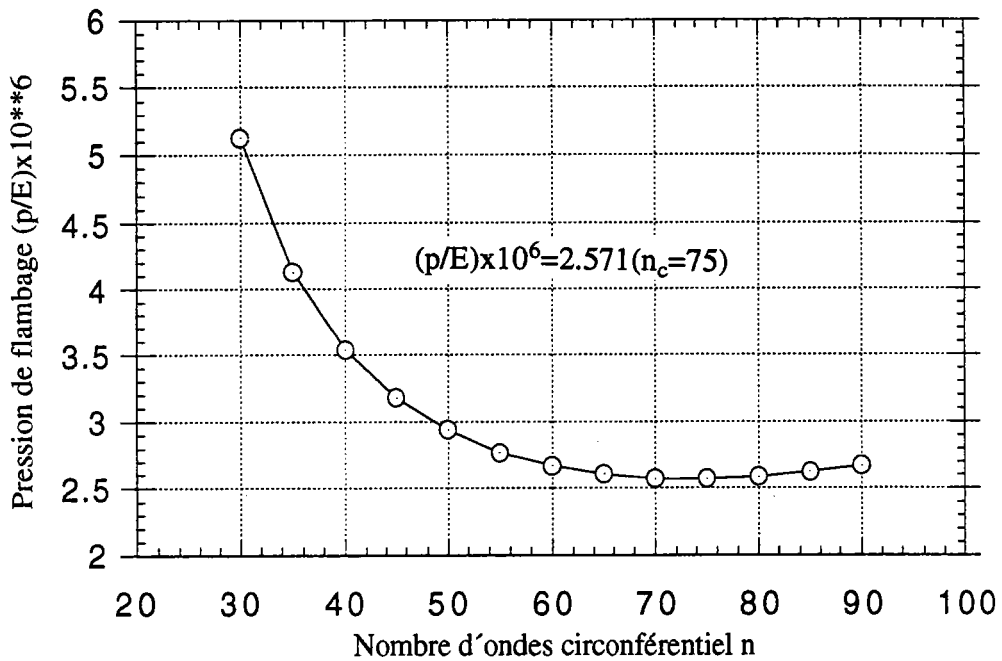


fig. V-16 Courbe de stabilité neutre en théorie de déformation du  $J_2$  avec  $E/E_t=6$  d'une coque elliptique  $a/b=2$  et sous pression interne

A la valeur de la pression critique de flambage plastique, on a tracé fig. V-17, l'évolution des deux composantes  $H^{11}$  et  $H^{22}$  de la matrice des coefficients de comportement  $[H]$ , le long de la partie plastifiée du méridien de la coque elliptique. On s'aperçoit, quand  $H^{22}$  croît,  $H^{11}$  décroît. Le point d'intersection des courbes  $H^{11}(s/R)$  et  $H^{22}(s/R)$  situe le lieu où le mode de flambage atteint sa valeur maximale. Cette variation inverse entre  $H^{11}$  et  $H^{22}$  est aussi signalé dans la littérature[B6]. Cette évolution est dûe à la variation des courbures principales dans les expressions de  $H^{11}$  et  $H^{22}$  (voir par exemple: relation (III-13)).

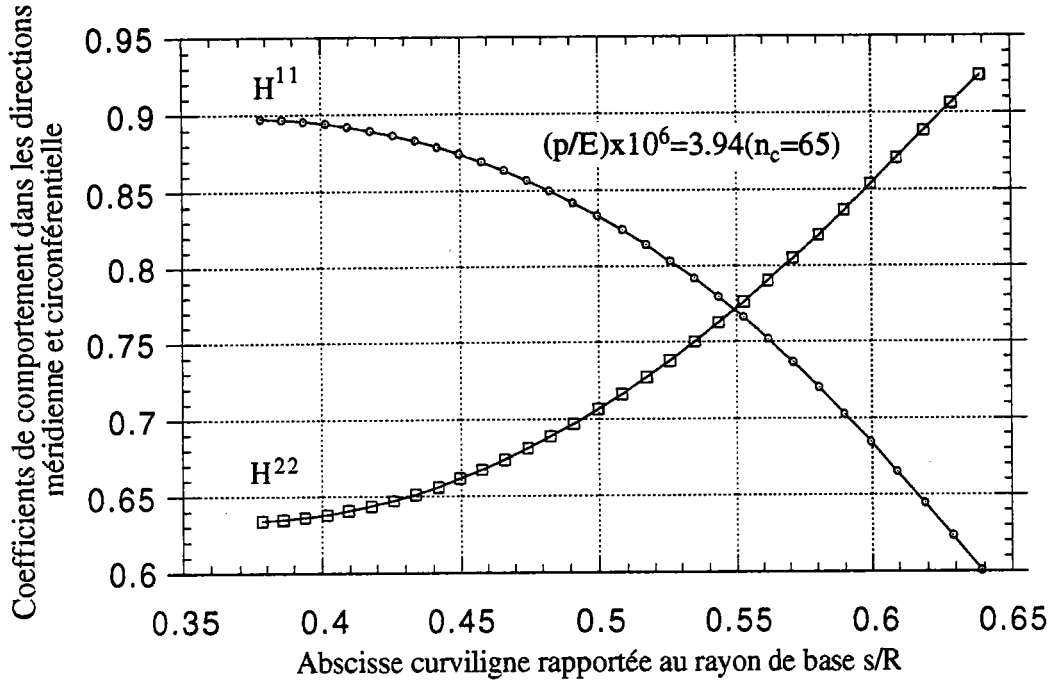


fig. V-17 Evolution des coefficients  $H^{11}$  et  $H^{22}$  à la pression critique de flambage plastique, le long de la zone plastifiée, en théorie incrémentale avec  $E/Et=6$ ,  $\nu=0.3$ ; d'une coque elliptique sous pression interne et de géométrie:  $a/b=2$ ,  $l_c=25.4\text{mm}$ ,  $h=0.127\text{mm}$ ,  $a=R$  et  $R=68.58\text{mm}$

En étudiant la coque elliptique, on s'est intéressé à l'influence de sa géométrie sur la pression critique de flambage. On rappelle, que cette géométrie est définie par le rapport  $a/b$ , des axes de l'ellipse. On effectue alors, un calcul de flambage élastique en prenant deux valeurs consécutives du rapport  $a/b$ , fig. V-18. On remarque que la pression critique diminue, lorsque le rapport  $a/b$  augmente. On a vu précédemment que la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$  qui dépend des courbures principales de l'ellipse et par conséquent de  $a/b$ , (voir relations (II-3) et (II-6)). Ce résultat est donc dû, à l'augmentation de  $\sigma_\theta$  qui croît en valeur absolue pour des valeurs de  $a/b$  de plus en plus grandes.

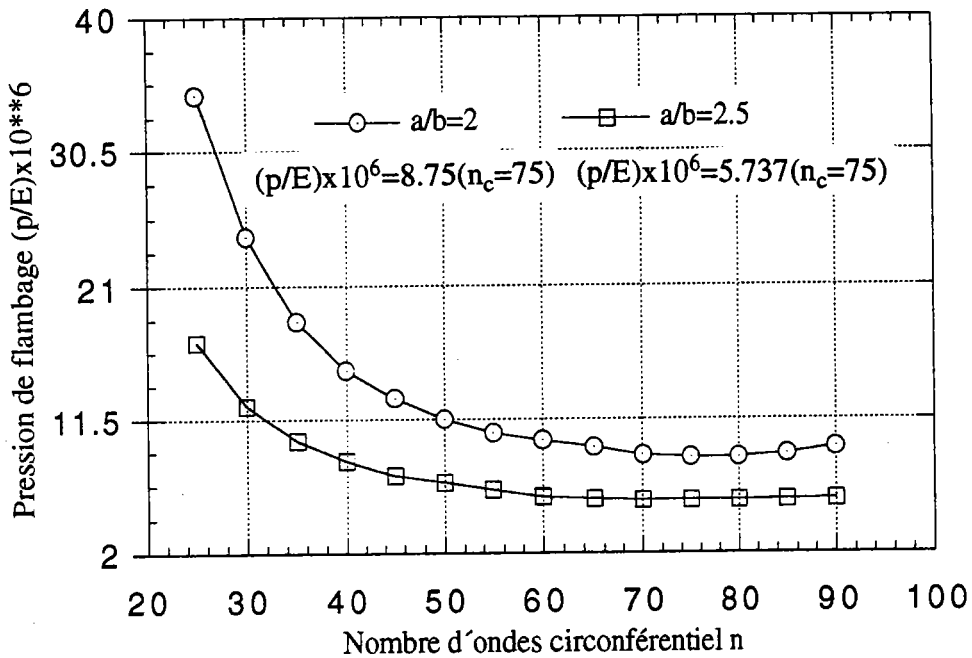


fig. V-18 Courbe de stabilité neutre élastique en fonction de la forme de l'ellipse (rapport a/b des axes de l'ellipse où a=R, R=68.58mm, l<sub>c</sub>=25.4mm et h=0.127mm avec ν=0.3)

### V-3 Conclusion

Les résultats numériques du flambage des coques étudiées, en éléments finis, avec un état précritique obtenu de membrane, montrent qu'un dimensionnement de telles structures sous pression interne, ne peut se faire que dans le domaine plastique. En effet, la valeur numérique dans le cas élastique, surestime la pression critique, mais il semble que la théorie de déformation du J<sub>2</sub> se rapproche davantage des résultats expérimentaux que la théorie incrémentale. Du point de vue de la résistance au flambage sous pression interne, la coque elliptique s'adapte mieux à ce type de sollicitation que la coque torisphérique, le tab. V-6, nous montre sur un exemple de flambage des deux coques de même géométrie de base (ici mêmes épaisseur h et rayon de base R), les pressions critiques respectives.



COQUE	Valeur de $(p/E) \times 10^6$ (n) est le nombre d'ondes circonférentiel
torisphérique avec: $l_c = 41.148 \text{mm}$	3.10 (50)
elliptique avec: $l_c = 25.4 \text{mm}$	8.77 (75)

tab. V-6 Pressions critiques élastiques des coques étudiées sous pression interne avec  $R=68.58 \text{mm}$ ,  $h=0.127 \text{mm}$  et  $a/b=2$

En général, ces coques présentent un nombre d'ondes circonférentiel élevé, par rapport aux coques classiques: cylindre, sphère ou cône. A cause de la complexité géométrique des structures étudiées, on peut admettre une certaine marge d'erreur. Dans tout qui suit, on n'étudie que la coque torisphérique. On a vu que cette coque sous pression interne, présentait un flambage local. Ce flambage était dû à la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$ , obtenue en théorie de membrane, (voir (II-3)).

Nous allons dans la suite apporter une modification au niveau de  $\sigma_\theta$  et on conservera l'autre contrainte  $\sigma_s$ , calculée aussi en théorie de membrane. On effectuera le même calcul éléments finis (équation (IV-36)), pour déterminer la pression critique de flambage dans le cas élastique et plastique, tout en tenant compte de cette modification. On commentera ensuite, les résultats numériques obtenus, avec ceux déjà connus (résultats précédents: sans modification de  $\sigma_\theta$ ).

#### V-4 Résultats numériques avec modification de la contrainte circonférentielle, de la coque torisphérique

Vu la complexité géométrique des coques torisphérique et elliptique, on a choisi de traiter le problème avant flambage en théorie de membrane, mais il s'avère que cette théorie seule, ne suffit pas à analyser ces structures. L'effet de la flexion a une grande influence sur ce type de structure et la plupart des auteurs[G1], [G6], en tiennent compte. En effet, l'exemple fig. V-19[G6], sur l'étude d'une coque torisphérique, montre que l'influence de la flexion a tendance à diminuer la grandeur de la contrainte circonférentielle de membrane "au voisinage" de la jonction tore-sphère.

Généralement, le calcul de la flexion est effectué par un calcul nonlinéaire en préflambage, mais pour ce type de coque, sa formulation va

compliquer davantage nos expressions de flambage. Pour cela on propose une manière de tenir compte de la flexion en évitant ce calcul de préflambage. Nous nous intéressons donc dans tout ce qui suit qu'à la coque torisphérique décrite dans les paragraphes précédents. Nous introduisons donc ce phénomène de flexion par le biais d'une fonction  $f(s)$ , seulement dans la contrainte de membrane  $\sigma_\theta$ , de manière à réduire sa grandeur au "voisinage" de la jonction tore-sphère, sans modifier la géométrie de départ de la coque. En ajustant cette contrainte  $\sigma_\theta$  par  $f(s)$ , on obtient une contrainte circonférentielle corrigée qu'on note  $\sigma_\theta^{\text{corr}}$ .

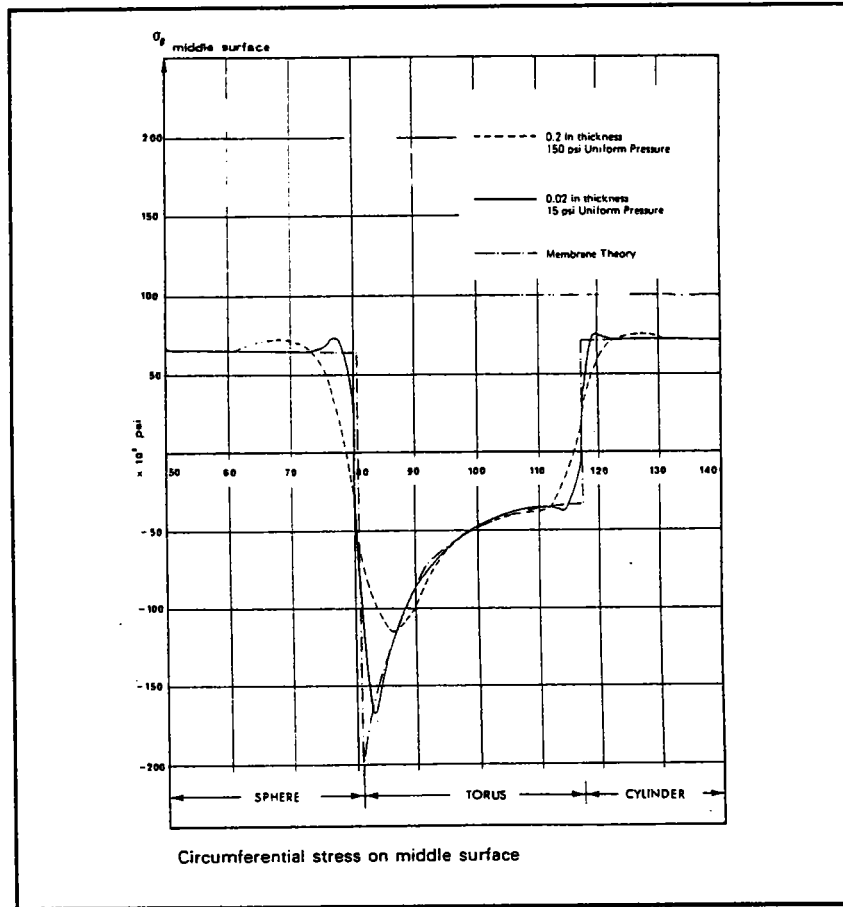


fig.V-19 Effet de la flexion sur la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$  d'une coque torisphérique sous pression interne

Cette contrainte  $\sigma_\theta^{\text{corr}}$  est définie par:

$$\sigma_\theta^{\text{corr}}/(p/h) = \begin{cases} \sigma_\theta/(p/h) & s \leq s_1 \cup s \geq s_2 \\ f(s) & s_1 \leq s \leq s_2 \end{cases} \quad (\text{V-2})$$

où l'intervalle  $[s_1, s_2]$  représente la longueur du "voisinage" de la jonction tore- sphère. On choisit la fonction choisie  $f(s)$  de forme polynômiale et d'expression:

$$f(s) = (s-s_2)(As+B) \quad (V-3)$$

Les constantes A et B sont alors déterminées par le choix des conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} f(s_1) &= \sigma_\theta / (p/h)(s_1) \\ f_{,1}(s_1) &= 0. \end{aligned} \quad (V-4)$$

On obtient les valeurs de A et B:

$$A = f(s_1)(s_1-s_2)^2 \quad \text{et} \quad B = -2As_1 + s_2 \quad (V-5)$$

Cette manière de tenir compte de la flexion, nous amène à représenter l'allure des contraintes circonférentielles  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_\theta^{\text{corr}}$ , fig.V-20 relatives à la coque torisphérique.

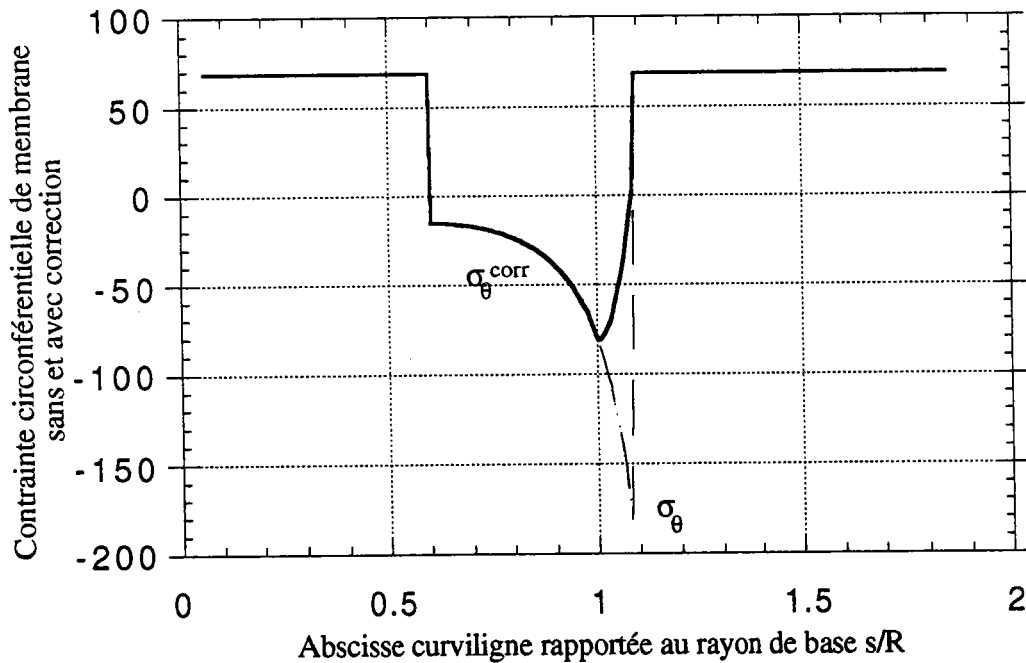


fig. 20 Allure de la contrainte circonférentielle: en membrane pure et avec correction, pour la coque torisphérique ( $s_1/R=1.002$ ,  $s_2/R=1.084$ )

On introduit dans (IV-34), l'expression de la contrainte circonférentiel-

le corrigée définie ci-dessus. On obtient alors, une autre matrice globale géométrique  $[K^\sigma]^{corr}$ , ne différant de  $[K^\sigma]$  que par le facteur qui est multiplié par la matrice  $[D^{\sigma_2}]$ . On utilise ensuite l'équation (IV-36) de l'algorithme de résolution des problèmes aux valeurs propres.

En élasticité, la pression critique de flambage est donné par la courbe de stabilité neutre, fig. V-21. On a tracé, dans le cas plastique, les deux courbes  $p/E(n)$  en théorie incrémentale fig. V-22 et en théorie de déformation du  $J_2$ , fig. V-23, donnant la pression critique de flambage plastique. On remarque que les deux valeurs de la pression critique de flambage plastique, sont aussi plus petites que celle du cas élastique.

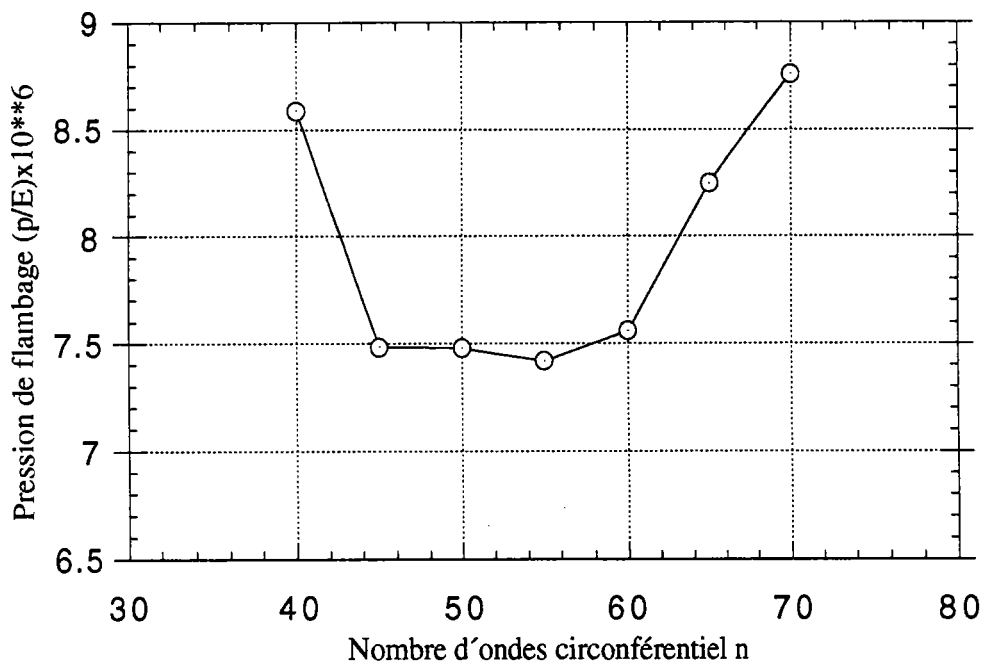


fig. V-21 Courbe de stabilité neutre élastique

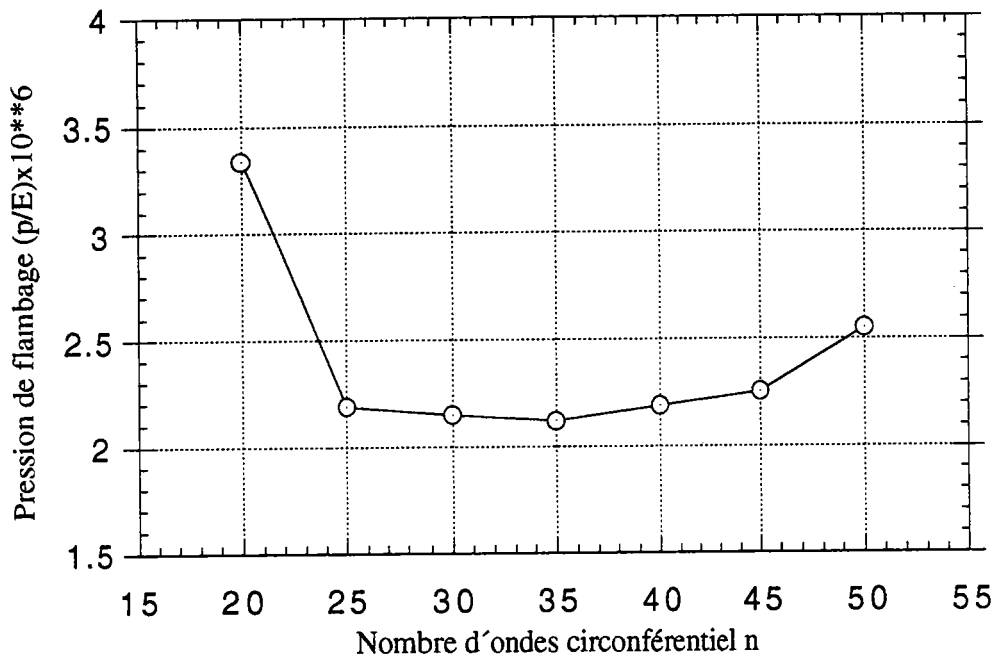


fig. V-22 Courbe de stabilité neutre plastique: théorie incrémentale

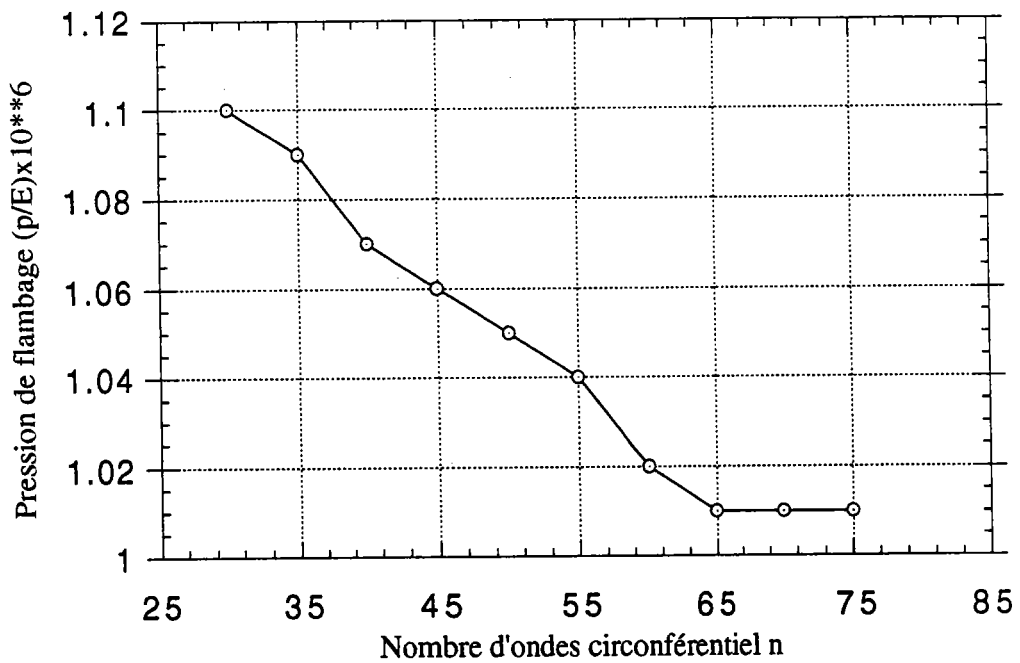


fig. V-23 Courbe de stabilité neutre plastique: théorie de déformation du  $J_2$

Avec la correction ainsi introduite, on retrouve une pression critique élastique proche de celle calculée par Bosor5. Par contre en plasticité, il reste un écart avec les résultats de Bosor5, même si l'introduction de la correction a augmenté nettement la charge critique.

CODE	Valeurs de $(p/E) \times 10^6$ (n est le nombre d'ondes circonférentiel)		
	Elasticité nonlinéaire	Théorie incrémentale	Théorie de la déformation du J <sub>2</sub>
Programme COQ	7.42(55)	2.119(35)	1.01(65)
	7.48(50)	2.149(30)	
Bosor5	8.3(50)	1.77(28)	pas de résultat donné

tab. V-7 Pressions critiques de la coque type MS4, avec modification de  $\sigma_\theta$ , comparées aux résultats de Bosor5[B5]

On reporte l'ensemble des résultats du calcul par éléments finis de la pression critique de flambage de la coque torisphérique tab. V-8. On constate que la valeur de la pression critique de flambage élastique a plus que doublé, comparée à celle de la membrane pure. Il en est aussi de même des pressions critiques de flambage plastique du modèle de la théorie incrémentale ou de celui de la théorie de la déformation du J<sub>2</sub>.

Programme COQ	Valeurs de $(p/E) \times 10^6$ (n est le nombre d'ondes circonférentiel)		
	Elasticité	Théorie incrémentale	Théorie de la déformation du J <sub>2</sub>
Membrane pure	3.105(50)	1.251(45)	0.83(35)
	3.16(55)	1.384(30)	
Membrane avec modification de $\sigma_\theta$	7.42(55)	2.119(35)	1.01(65)
	7.48(50)	2.149(30)	

tab. V-8 Pressions critique de flambage de la coque torisphérique sous pression interne

Le flambage de la coque torisphérique d'épaisseur h et sous pression

interne  $p$ , dépendait en partie de l'allure de la contrainte circonférentielle le long du méridien de la coque. En corrigeant  $\sigma_\theta$  par  $f(s)$ , on a diminué la valeur absolue de  $\sigma_\theta$ , car  $|\sigma_\theta^{\text{corr}}| < |\sigma_\theta|$ . C'est cette inégalité fonction du choix de  $f(s)$ , qui est à l'origine de l'augmentation des valeurs de la pression critique de flambage, indiquées au tableau ci-dessus. On remarque que la différence  $|\sigma_\theta^{\text{corr}}| - |\sigma_\theta|$  est dûe à la flexion, lors du préflambage, que nous avons négligée.

## VI- CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre, que les coques torisphérique et elliptique sous une pression interne présentent un flambage local. Ce flambage peut être relié à l'évolution le long des méridiens du rapport  $\alpha(s)$  des deux contraintes principales  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$ . En théorie des membranes  $\alpha(s)$  est lié aux deux courbures principales de ces structures. C'est donc un facteur de géométrie très important qui influe fortement sur les contraintes avant flambage et donc sur la pression de flambage. A cause de la complexité géométrique de ces coques, on a traité le problème de flambage en théorie de coques de D.M.V. Nous nous sommes limités à certaines structures précédemment étudiées par Galletly[G1], ce qui a permis de valider notre code d'éléments finis.

On a déterminé la pression critique de flambage de ces structures, par un calcul en éléments finis. Le code de calcul était, un programme COQ, dans lequel on avait introduit certaines routines, pour l'adapter au calcul du flambage local.

Les résultats ainsi obtenus pour les coques torisphérique et elliptique, montrent que la valeur de la pression critique élastique est toujours supérieure à celles du cas plastique. Cette diminution est dûe à la variation du comportement des lois plastiques utilisées, qui se traduit par une chute de modules par rapport au cas élastique. Cependant on remarque que la pression critique de flambage de la coque elliptique est plus grande que celle de la coque torisphérique. Cette différence explique que la coque elliptique résiste mieux à ce type de sollicitation (une pression interne). On a comparé nos résultats pour la coque torisphérique à ceux de Galletly, l'écart dans le cas élastique étant raisonnable. Par contre en plasticité cet écart reste assez grand. Le flambage plastique des coques que nous avons testées, est très sensible par rapport aux données de ces coques. D'autre part, la théorie des membranes surestime la contrainte de compression. Il aurait donc fallu faire un calcul non-linéaire pour le comportement avant flambage. Nous nous sommes contenté d'introduire a-priori une correction artificielle de la contrainte circonférentielle, ce qui a permis d'obtenir des résultats identiques à ceux de la littérature en élasticité. En plasticité, il reste toujours un écart avec ces résultats.

La détermination numérique des pressions critiques de flambage des coques torisphérique et elliptique, nous a pris un temps calcul important. Ainsi, l'utilisation de l'outil numérique reste assez coûteux. Nous allons donc proposer une méthode simplifiée analytique, que nous développons dans le prochain chapitre.



## CHAPITRE III

# METHODE SIMPLIFIEE DE CALCUL DE LA PRESSION CRITIQUE DE FLAMBAGE D'UNE COQUE TORIS- PHERIQUE SOUS PRESSION INTERNE

### INTRODUCTION

### I - EQUATIONS DE FLAMBAGE

### II - FONDEMENTS DE LA METHODE SIMPLIFIEE

### III - FORME PRATIQUE DE LA METHODE SIMPLI- FIEE

### IV - CONCLUSION

## INTRODUCTION

Le calcul de la pression critique de flambage des coques complexes (coques torisphérique et elliptique) sous pression interne, par des méthodes analytiques a déjà fait l'objet de diverses études. Certains auteurs[A3],[D1],[G2],[G3] donnent une formulation analytique et parfois semi empirique.

Dans notre cas, on va remplacer le gros calcul numérique relatif au flambage de ces structures, par un procédé analytique, qui dépend de certaines hypothèses et des faits expérimentaux observés sur ces types de structures sous pression interne. On propose, alors une méthode analytique similaire à celle utilisée, pour l'étude de l'influence des conditions aux limites sur le flambage élastique des coques cylindriques sous pression externe[A1]. Nous allons appliquer cette méthode, dite méthode simplifiée[A2], seulement à la coque torisphérique, pour deux raisons: la première est d'avoir moins de paramètres géométriques, exemple: la coque torisphérique présente une seule courbure principale variable, alors que sa consoeur (coque elliptique), compte deux courbures principales variables. La seconde est que la coque torisphérique est un premier test pour cette nouvelle méthode, que nous exposons. Nous allons, ainsi établir des formules permettant de mesurer l'évolution de la géométrie et du comportement lors du chargement, ainsi que leurs effets sur la pression critique de flambage et sur le phénomène de la plasticité au niveau de cette structure.

Le calcul de flambage se fera en théorie de membrane en considérant l'expression exacte de la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta}$  (fig. II-1, chapitre II) et son expression corrigée  $\sigma_{\theta}^{\text{corr}}$  (formule V-2 du chapitre II). Les résultats obtenus par cette méthode simplifiée seront comparés à ceux du chapitre II obtenus par un calcul éléments finis.

Pour introduire cette nouvelle méthode, on utilise les équations d'équilibre et les équations de compatibilité qui en découlent à partir de la formulation bidimensionnelle du critère de Hill: relation IV-1 du chapitre II. On se ramène ainsi, à des équations aux dérivées partielles plus ou moins complexes, qu'on va simplifier en faisant certaines hypothèses de géométrie et de comportement. La plupart des solutions des équations de la méthode simplifiée, sont obtenues par une résolution de type graphique.

## I- EQUATIONS DE FLAMBAGE

On part de la formulation de Hill du problème de flambage plastique établie au chapitre II, formule IV-1. En intégrant par partie cette fonctionnelle, sachant que sur la frontière  $\partial\Omega$ , les déplacements virtuels  $\delta u_\alpha$  et  $\delta w$  sont nuls, on obtient les équations d'équilibre suivantes:

$$\dot{M}^{(\alpha\beta)}|_{(\alpha\beta)} - \dot{N}^{(\alpha\beta)}b_{(\alpha\beta)} + (N_o^{(\alpha\beta)}\dot{w}_{,\alpha})_{,\beta} = 0 \quad (I-1)$$

$$\dot{N}^{(\alpha\beta)}|_{(\beta)} = 0 \quad (I-2)$$

La dernière équation d'équilibre (I-2) peut en général être résolue en introduisant une fonction  $f$  d'Airy, (dite aussi fonction de contraintes), qui vérifie la relation:

$$\dot{N}^{(\alpha\beta)} = \epsilon^{\alpha\lambda}\epsilon^{\lambda\mu}\dot{f}|_{(\mu\beta)} \quad (I-3)$$

où le symbole  $\epsilon$  est le tenseur de permutation de Ricci. Pour résoudre le problème, il faut tenir compte de l'équation (IV-6) du chapitre II, traduisant le comportement plastique de la structure.

### **I-1 Première équation de flambage en utilisant la loi de compatibilité**

Pour établir cette équation de flambage, on aura besoin par la suite de la dérivée du tenseur  $\dot{\gamma}_{(\alpha\beta)}$ . On peut éliminer facilement les vitesses tangentielles  $u_\alpha$ , dans l'expression du taux de déformation de membrane  $\dot{\gamma}_{(\alpha\beta)}$ , (formule (IV-4), chapitre II) en effectuant la dérivée de ce taux par rapport aux indices  $(\alpha\beta)$ . Ceci est possible en théorie de coques de D.M.V, car dans ce cas les dérivées covariantes commutent. Les dérivées du tenseur de deuxième forme de la surface moyenne  $b_{(\alpha\beta)|(\alpha\beta)}$  sont nulles d'après les équations de Coddazi:  $b^\alpha_{\beta\gamma} = b^\alpha_{\gamma\beta}$ . Ainsi il n'apparaît dans la dérivée de  $\dot{\gamma}_{(\alpha\beta)}$  que les dérivées de la vitesse du déplacement normal  $\dot{w}$ . On obtient:

$$\dot{G} = \dot{\gamma}_{(\alpha\beta)|(\alpha\beta)} = -b_{(\alpha\beta)}\dot{w}|_{(\alpha\beta)} \quad (I-4)$$

En inversant la loi de comportement en membrane, le tenseur taux de contrainte  $\dot{N}^{(\alpha\beta)}$  s'écrit en fonction du tenseur de déformation  $\dot{\gamma}_{(\alpha\beta)}$  de la forme suivante:

$$\dot{\gamma}_{(\alpha\beta)} = (1/Eh)M_{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{N}^{(\gamma\delta)} \quad (I-5)$$

On introduit ensuite la fonction de contraintes (I-3), dans la relation ci-dessus, que l'on reporte dans (I-4) et en exprimant explicitement le tenseur  $b_{(\alpha\beta)}$  en fonction des courbures principales  $C_1$  et  $C_2$  de la coque torisphérique, voir tab. I-1, chapitre II. On obtient la relation suivante:

$$\dot{G} + C_1(1/r^2)[\dot{w}_{,22} - \Gamma^1_{22}\dot{w}_{,1}] + C_2\dot{w}_{,11} = 0 \quad (I-6)$$

L'expression ci-dessus est alors appelée loi de compatibilité ou première équation de flambage, où  $r^2(s)$  est la deuxième composante du tenseur de la première forme de la surface  $a_{\alpha\beta}$  et  $\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}$  est le symbole de Christoffel de deuxième espèce. L'expression de  $\dot{G}$  est longue à écrire, voir Annexe (A-12).

## I-2 Deuxième équation de flambage

On introduit comme dans le cas de la membrane, la loi qui lie le taux de déformation de flexion  $\dot{\kappa}_{(\alpha\beta)}$  au taux de contraintes résultantes de flexion  $\dot{M}^{(\alpha\beta)}$  qui est:

$$\dot{M}^{(\alpha\beta)} = (Eh^3/12)H^{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{\kappa}_{(\gamma\delta)} \quad (I-7)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la structure étudiée,  $E$  est le module d'Young,  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  est le tenseur des rigidités tangentes qui a été adimensionnalisé sur le module d'Young. En remplaçant dans la première équation d'équilibre (I-1), le taux de contraintes résultantes de membrane par la fonction de contraintes  $f$ , (I-3) et en effectuant ensuite les dérivées covariantes du tenseur taux de contraintes résultantes de flexion (I-7), on obtient l'expression suivante:

$$\dot{K} + \dot{C} - [C_1((1/r^2)\dot{f}_{,22} - \Gamma^1_{22}\dot{f}_{,1})] - C_2\dot{f}_{,11} = 0 \quad (I-8)$$

où  $\dot{C}$  a pour expression:

$$\dot{C} = (N_o^{(11)}\dot{w}_{,1})_{,1} + N_o^{(22)}(1/r^2)[\dot{w}_{,22} - \Gamma^1_{22}\dot{w}_{,1}] \quad (I-9)$$

et où  $N_o^{(11)}$ ,  $N_o^{(22)}$  sont les contraintes résultantes de membrane de l'état fondamental, et sont respectivement identiques à  $N_s$  et  $N_\theta$ . L'expression de  $\dot{K}$  est aussi longue à écrire, voir Annexe relation (A-13). La relation (I-8) est la deuxième équation de flambage. Le flambage de la structure est déterminé par les deux équations (I-6) et (I-8).

## II- FONDLEMENTS DE LA METHODE SIMPLIFIEE

Les relations (I-6) et (I-8) constituant les équations de flambage, sont difficiles à manipuler. Pour cela nous allons considérer certaines hypothèses de simplification. En effet, les expériences de flambage, faites sur des structures présentant un phénomène d'instabilité locale fig. I-1, montrent que la longueur d'onde circonférentielle mesurée le long du mode de flambage, est plus petite que celle mesurée dans sa direction méridienne.

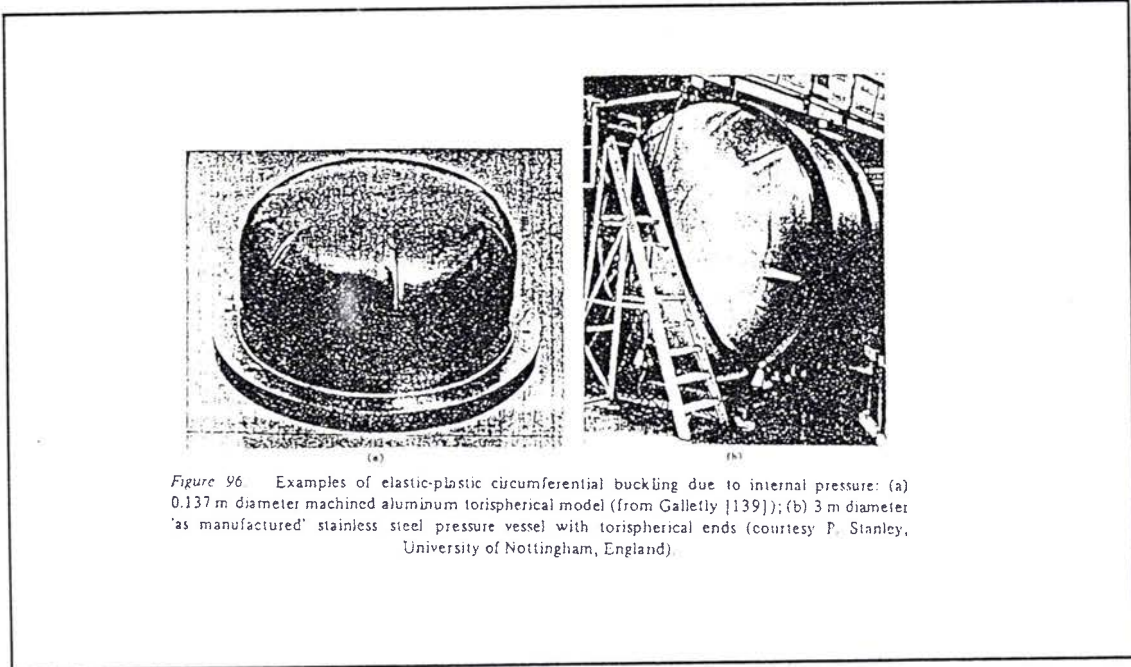


fig. II-1 Expérience sur un flambage local d'une coque torisphérique[G3]

Mathématiquement, cela ressemble donc au cas du flambage des coques cylindriques sous pression externe qui avait été étudié par Abdelmoula[A1]. Nous allons reprendre la méthodologie qu'il avait mise au point pour étudier l'influence des conditions aux limites sur le flambage. Cela revient à dire que  $\partial/\partial s$  est une dérivée partielle lente et  $(1/r)(\partial/\partial \theta)$  est une dérivée partielle rapide. Cette hypothèse nous amène à ne conserver  $\partial/\partial s$  que devant les termes contenant les courbures principales et à la négliger dans les autres termes, dans les équations de flambage (I-6) et (I-8). Cette simplification est l'un des fondements de la nouvelle méthode simplifiée que nous exposons. Ainsi d'après les relations (I-6) et (I-8) et l'hypothèse précédente, on obtient les équations simplifiées du flambage de la structure:

$$(1/r^4)(Eh^3/12)H^{22}\dot{w}_{,2222} + (1/r^2)N_{\theta}\dot{w}_{,22} - (1/r^2)C_1\dot{f}_{,22} - C_2\dot{f}_{,11} = 0 \quad (II-1)$$

$$(1/r^4)(1/Eh)M_{11}\dot{f}_{,2222}+(1/r^2)C_1\dot{w}_{,22}+C_2\dot{w}_{,11} = 0 \quad (\text{II-2})$$

où  $H^{22}$  est le coefficient de raideur dans la direction circonférentielle, tandis que  $M_{11}$  est le coefficient de souplesse dans la direction méridienne et  $h$  est l'épaisseur de la coque torisphérique. Ces formules ont une importance capitale pour la suite de notre analyse de la méthode simplifiée. On voit en particulier que la loi de comportement n'intervient que par l'intermédiaire des deux coefficients  $H^{22}$  et  $M_{11}$ . Pour résoudre ces deux équations aux dérivées partielles à coefficients variables, nous allons émettre d'autres hypothèses simplificatrices.

### II-1 Calculs approchés du mode de flambage

Nous avons vu, que la coque torisphérique présente une symétrie de révolution. On peut donc se limiter à chercher des modes de flambage harmoniques, comme l'ont fait de nombreux auteurs[A7],[B7].

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{W}(s)e^{in\theta} \\ \dot{f} &= \dot{F}(s)e^{in\theta} \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

où  $n$  est le nombre d'ondes circonférentiel.

En substituant les relations (II-3) dans les deux équations simplifiées de flambage (II-1) et (II-2), on obtient une nouvelle expression des deux équations de flambage:

$$[(n^4/r^4)Eh^3H^{22}/12-(n^2/r^2)N_\theta]\dot{W} + (n^2/r^2)C_1\dot{F} - C_2\dot{F}_{,11} = 0 \quad (\text{II-4})$$

$$-(n^2/r^2)C_1\dot{W}+C_2\dot{W}_{,11}+(n^4/r^4)(M_{11}/Eh)\dot{F} = 0 \quad (\text{II-5})$$

On remarque que les équations ci-dessus restent assez compliquées à résoudre parce que leurs coefficients, en particulier les courbures ne sont pas constants.

#### II-1-1 Modèle très simplifié avec prise en compte d'une seule courbure

On se propose alors une autre hypothèse de simplification, dont on va tester la validité par la suite. Elle consiste à négliger une des deux courbures principales de la coque torisphérique. On peut en effet remarquer que la courbure principale  $C_2$  intervient devant des dérivées dans le sens axial

(voir (II-1), (II-2), (II-4) et (II-5)) que l'on s'est proposé de négliger devant les dérivées circonférentielles. Nous proposons donc de négliger cette courbure  $C_2$  et de garder sa consoeur  $C_1$  qui est constante sur cette partie où apparaît l'instabilité. A partir de cette première hypothèse, les termes avec des dérivées axiales disparaissent dans les équations simplifiées de flambage qui deviennent, un système classique de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{bmatrix} (Eh^3/12)H^{22}(n^4/r^4) - N_\theta(n^2/r^2) & +C_1(n^2/r^2) \\ -C_1(n^2/r^2) & (n^4/r^4)M_{11}/Eh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{W} \\ \dot{F} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-6})$$

Ce système admet une première solution à savoir  $\dot{W}=\dot{F}=0$  et une deuxième solution si le déterminant construit sur ces deux inconnues est nul. C'est cette dernière solution qui est intéressante, car elle nous donne l'expression de la contrainte résultante circonférentielle critique  $N_\theta^c$  en fonction du comportement, de la géométrie de la structure et du nombre d'ondes circonférentiel  $n$ , cette expression est la suivante:

$$(N_\theta^c/Eh) = (h^2/12)H^{22}n^2/r^2 + C_1^2r^2/(n^2M_{11}) \quad (\text{II-7})$$

Le fait de négliger la courbure  $C_2$  a transformé les équations différentielles en  $x_1$  (II-4) et (II-5) en un système algébrique (II-6). En conséquence on ne peut plus déterminer la forme du mode de flambage dans la direction méridienne. De plus la formule ci-dessus déterminera une valeur critique en chaque point du méridien. On se contentera donc de prendre la valeur minimum, non seulement par rapport au nombre d'ondes, ce qui est classique, mais aussi par rapport à  $x_1=s$ .

Pour chercher le nombre d'ondes critique  $n_c$ , on prend d'abord le minimum de (II-7), en effectuant la dérivée de  $(N_\theta^c/Eh)$  par rapport à  $n$  qu'on égalise à zéro. Ensuite on minimise en premier par rapport à la pression  $p$  puis par rapport à  $s$ , l'expression du nombre d'ondes qui annule la dérivée:  $\partial/\partial n(N_\theta^c/Eh)$ . On obtient ainsi l'expression du nombre d'ondes critique:

$$n_c = 12^{1/4}(C_1/h)^{1/2} \{ (H^{22}M_{11})^{-1/4} r \}_{\min} \quad (\text{II-8})$$

où  $r$  est le rayon du parallèle et  $h$  est l'épaisseur de la coque torisphérique. En explicitant la pression  $p$  à partir de l'expression de  $N_\theta$  (on rappelle:

$N_\theta = (p/2C_2)\alpha(s)$  et en injectant l'expression (II-8) dans (II-7), on obtient une première formule analytique de la pression de flambage:

$$(p/E)^c = 2h^2C_1/\sqrt{3} \{ [2C_2/\alpha(s)](H^{22}/M_{11})^{1/2} \}_{\min} \quad (\text{II-9})$$

où  $\alpha(s)$  est lié aux rapport des courbures principales de la coque torisphérique, voir relation (III-9) du chapitre II.

On remarque que dans le cas élastique, le minimum de la relation ci-dessus donnant la pression critique élastique, peut être pris seulement par rapport à des grandeurs purement géométriques puisque les coefficients respectifs  $H^{22}$  et  $M_{11}$  deviennent des valeurs constantes. La pression critique de flambage élastique est alors:

$$(p/E)^c_{\text{élas}} = 2h^2C_1/[\sqrt{3}(1-\nu^2)] \{ 2C_2/\alpha(s) \}_{\min} \quad (\text{II-10})$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

### II-1-2 Modèle simplifié avec méthode de Ritz en conservant les deux courbures

On considère une autre hypothèse, qui consiste à garder les deux courbures principales  $C_1$  et  $C_2$  devant la dérivée  $\partial/\partial s$ . Dans ce cas on voit apparaître dans les équations de flambage (II-4) et (II-5) le mode de flambage  $W(s)$  et la fonction de contraintes  $F(s)$  qui sont difficiles à déterminer explicitement. Pour cela, nous allons utiliser la méthode de Ritz, qui consiste à approcher les solutions exactes des équations de flambage, par des fonctions de forme données  $W_0(s)$  et  $F_0(s)$ . Cela revient à reformuler les relations (II-3) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \dot{W}(s) &= W_0(s) \dot{a}_1 & \dot{F}(s) &= F_0(s) \dot{a}_2 \\ \delta W(s) &= W_0(s) & \delta F(s) &= F_0(s) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

où  $W_0(s)$  et  $F_0(s)$  sont respectivement le mode et la fonction de contraintes donnés,  $\dot{a}_1$  et  $\dot{a}_2$  sont des coefficients qui caractérisent l'évolution du mode et de la contrainte. Le fait de conserver  $\partial/\partial s$  devant les courbures nous permet de tenir compte du mode de flambage dans la direction méridienne. Pour cela, on suppose que l'allure de ce mode de flambage est donnée par une seule fonction  $f_0(s)$  que l'on précisera plus loin. On a choisi  $W_0(s) = F_0(s) = f_0(s)$  que l'on injecte dans (II-11), pour établir une expression simple de la pression critique de flambage. Pour cela, on multiplie les expressions (II-4) et (II-5) par  $f_0(s)$  puis on intègre suivant le méridien de



la coque torisphérique. On obtient aussi un système de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{bmatrix} \int_S [(Eh^3/12)H^{22}n^4/r^4 - N_\theta n^2/r^2] f_0^2(s) ds & \int_S [C_1 f_0(s) n^2/r^2 - C_2 f_{o,11}(s)] f_0(s) ds \\ \int_S [-C_1 f_0(s) n^2/r^2 + C_2 f_{o,11}(s)] f_0(s) ds & \int_S [(M_{11}/Eh) n^4/r^4] f_0^2(s) ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-12})$$

La solution intéressante est celle donnée en annulant le déterminant, construit sur ces deux inconnues. En reportant l'expression explicite de  $N_\theta$  dans ce déterminant, on obtient une deuxième formule analytique de la pression de flambage, donnée par:

$$p/E = (h^3/6)n^2(J_1/I_1) + [2h/(n^6 J_2 I_1)] (RR_t)^{-2} [n^4 I_2^2 - 2n^2 RR_t I_2 I_3 + (RR_t)^2 I_3^2] \quad (\text{II-13})$$

où  $R$  est le rayon du cylindre de base de la coque torisphérique,  $R_t$  est le rayon de la partie torique (on rappelle que  $R_t$  est l'inverse de la courbure principale dans la direction méridienne  $C_1$  dans cette zone). On note dans toute la suite:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_S [H^{22} f_0^2(s)/r^4] ds & J_2 &= \int_S [M_{11} f_0^2(s)/r^4] ds \\ I_1 &= \int_S [\alpha(s) f_0^2(s)/(r^2 C_2)] ds & I_2 &= R \int_S [f_0^2(s)/r^2] ds \text{ et} \\ I_3 &= \int_S [C_2 f_{o,11}(s) f_0(s)] ds & & \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Les coefficients  $I_i$  ne dépendent que de la forme de la structure alors que les coefficients  $J_\alpha$  dépendent à la fois de la géométrie et du comportement plastique, en particulier de la pression  $p$ , par l'intermédiaire des coefficients  $H^{22}$  et  $M_{11}$ . On peut remarquer que ces coefficients  $J_\alpha$  peuvent ne pas dépendre de la pression en plasticité: c'est le cas en particulier pour la théorie incrémentale lorsque le module tangent est constant. De

plus les  $J_\alpha$  ne dépendent que de paramètres sans dimension liés au chargement et au comportement:

$$J_\alpha = J_\alpha(p/E, \varepsilon_y, E/E_t, E/E_s, E, \nu) \quad (\text{II-15})$$

où  $E$ ,  $p$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $E_t$  et  $E_s$ , sont respectivement le module d'Young, la pression, la limite élastique en déformation, le module tangent et le module sécant.

Il est en général impossible d'avoir une expression explicite de la pression critique de flambage, mais on peut la déduire d'une résolution graphique, en cherchant  $(p/E)^c$  comme solution de l'équation:

$$p/E - f(J_\alpha(p/E), n^2, I_1) = 0 \quad (\text{II-16})$$

où  $f$  est le second membre de l'équation (II-13). Enfin on s'est arrangé pour que les coefficients  $I_1$  et  $I_2$  soient sans dimension, ainsi que le rapport  $J_1/J_2$ .

### II-1-3 Modèle simplifié avec méthode de Ritz et en ne conservant qu'une seule courbure

En fait, la courbure dans le sens circonférentiel n'est indispensable que pour déterminer la forme du mode de flambage. Comme on a introduit a-priori cette forme, on peut maintenant essayer de négliger cette courbure  $C_2$ , ce qui conduit à une troisième formule analytique déduite de (II-13), plus "sympathique":

$$p/E = (h^3/6)n^2J_1/I_1 + [2h/(n^2J_2R^2R_t^2)]I_2^2/I_1 \quad (\text{II-17})$$

Pour déterminer le nombre d'ondes circonférentiel critique  $n_c$ , on cherche le minimum de (II-17), par rapport au nombre d'ondes circonférentiel  $n$  en dérivant l'expression de  $(p/E)$  ci-dessus, par rapport à  $n$ , puis on met à zéro le résultat obtenu:

$$n_c^4 = 12I_2^2(hRR_t)^{-2}(J_1J_2)^{-1} \quad (\text{II-18})$$

La pression critique de flambage est le minimum de la fonction obtenue en remplaçant le nombre d'ondes circonférentiel  $n$ , de l'expression (II-17) par  $n_c$ , on obtient:

$$(p/E)^c = [2h^2 / (\sqrt{3} \cdot RR_t)] (J_1 / J_2)^{1/2} (I_2 / I_1)$$

(II-19)

où  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $J_1$  et  $J_2$  sont donnés par la relation (II-14). On rappelle que les rapports  $I_1/I_2$  et  $J_1/J_2$  sont des nombres sans dimension.

On remarque, que dans le cas élastique, les fonctions  $I_\alpha$  et  $J_\alpha$  deviennent des fonctions de la forme seulement, car les modules tangent  $E_t$  et sécant  $E_s$  deviennent dans ce cas, respectivement identiques au module d'Young  $E$ . Les trois formules (II-9), (II-16) et (II-17) constituent les équations analytiques de la nouvelle méthode simplifiée du calcul de flambage, que nous avons décrit précédemment. Nous allons dans le prochain paragraphe, calculer les pressions critiques de flambage de la coque torisphérique sous une pression interne, en appliquant les formules de la méthode proposée.

### III- FORME PRATIQUE DE LA FORMULE SIMPLIFIEE

Nous allons utiliser la méthode simplifiée de flambage d'abord pour calculer la pression critique de flambage élastique, afin de valider certaines hypothèses de départ, ensuite pour traiter le flambage élastoplastique. Pour cela on étudie en premier, la coque torisphérique sous pression interne  $p$ , dans le cas élastique et en théorie de membrane.

#### III-1 Validation sur le cas élastique

On considère en premier le modèle très simplifié décrit précédemment. On effectue alors, sur ce modèle, un calcul de la pression critique en utilisant la première formule (II-9) de la méthode. On obtient la valeur de cette pression et son nombre d'ondes circonférentiel associé:

$$\begin{aligned} (p/E)^c \times 10^6 &= 1.81 \\ n_c &= 48 \end{aligned} \quad \text{(III-1)}$$

Les deux autres modèles simplifiés avec méthode de Ritz, font intervenir la fonction  $f_0(s)$ . On suppose dans toute la suite, que cette fonction est une forme approchée de l'allure réelle du mode de flambage élastique, (voir fig. V-7 du chapitre II). Pour construire cette fonction, on considère trois points appartenant à l'allure du mode réel. Ces trois points sont situés comme suit: le premier est le début de ce mode, le second est son maximum et le dernier point est la "fin" de ce mode réel. On fait ensuite une approximation polynômiale sur ces trois points à partir de leurs abscisses curvilignes respectives. Ceci permet de choisir la courbe  $f_0(s)$  qui approche le mieux la forme réelle du mode de flambage.

On note par  $s_1$ ,  $s^c$  et  $s_2$  les abscisses curvilignes des trois points pris précédemment, en s'arrangeant de telle manière que l'origine des abscisses curvilignes, soit située au début du tore (plus précisément au point de la



jonction cylindre-tore). On définit alors cette fonction  $f_0(s)$  comme suit:

$$\begin{aligned} f_0(s) &= 0 && \text{si } s \notin [s_1, s_2] \\ 0 \leq f_0(s) &\leq 1 && \text{si } s \in [s_1, s_2] \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

et en lui imposant les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} f_0(s_\alpha) &= f_{0,1}(s_\alpha) = f_{0,1}(s^c) = 0 \\ f_0(s^c) &= 1 \quad s_1 < s^c < s_2 \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

A partir des relations (III-2) et (III-3), l'allure de cette fonction  $f_0(s)$ , est donnée par:

$$f_0(s) = \begin{cases} (s - s_1)^2(E_1s - G_1) & s_1 \leq s \leq s^c \\ (s - s_2)^2(E_2s - G_2) & s^c \leq s \leq s_2 \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

où les valeurs des constantes  $E_\alpha$  et  $G_\alpha$  sont obtenues à partir des conditions aux limites imposées à  $f_0(s)$ . Ces valeurs sont:

$$E_\alpha = -2/(s^c - s_\alpha)^3 \quad G_\alpha = -1/2(3s^c - s_\alpha)E_\alpha \quad (\text{III-5})$$

On a reporté sur le même graphe fig. III-1, le mode réel et le mode de Ritz donné par  $f_0(s)$ , pour mieux distinguer les différentes parties de la coque torisphérique. On rappelle qu'on a discrétisé la partie torique et la partie sphérique en cent éléments chacune. Par contre, on a ignoré ici la partie cylindrique puisque le mode flambage est assez loin de cette zone. On peut remarquer de plus que le mode est concentré près de la jonction tore-sphère, plutôt du côté du tore.

La fonction  $f_0(s)$  est ainsi choisie et définie. On revient maintenant aux deux formules (II-16) et (II-17) du modèle de Ritz de la méthode simplifiée. On rappelle que les coefficients  $J_1$  et  $J_2$  gardent une valeur constante dans ce cas élastique que nous traitons. On trace donc les courbes  $p/E$ -nombre d'ondes  $n$ , relatives aux expressions (II-16) et (II-17), fig. III-2 et III-3.

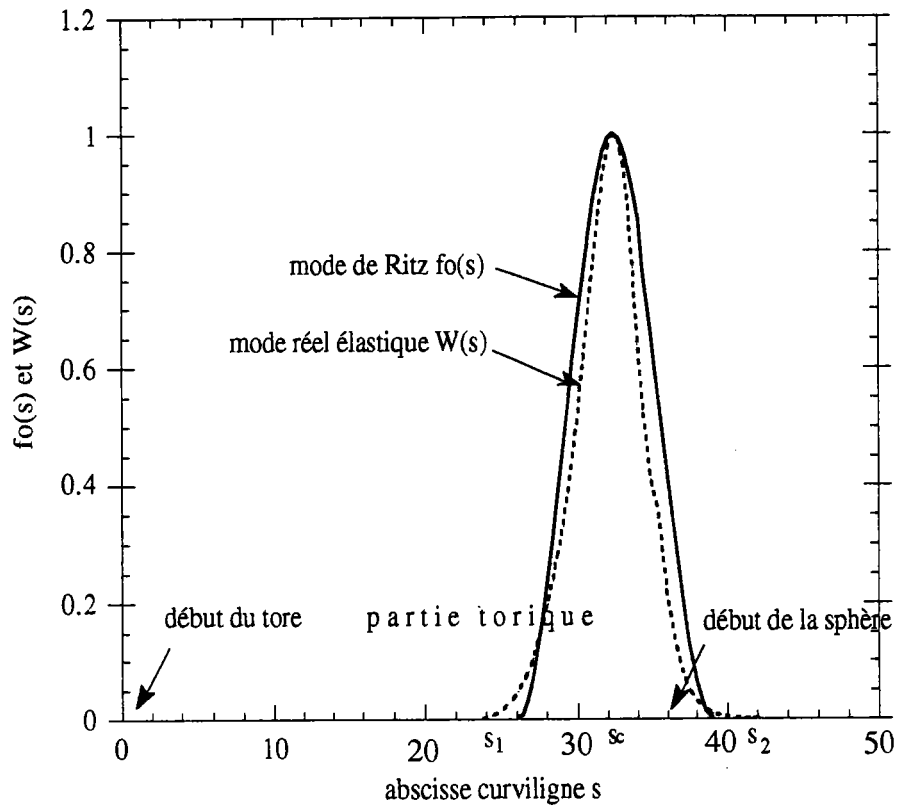


fig. III-1 Superposition du mode réel et du mode approché donné par la fonction  $f_0(s)$  utilisée dans la méthode de Ritz avec  $s_1=28\text{mm}$   $s_2=40\text{mm}$  et  $s^c=34\text{mm}$

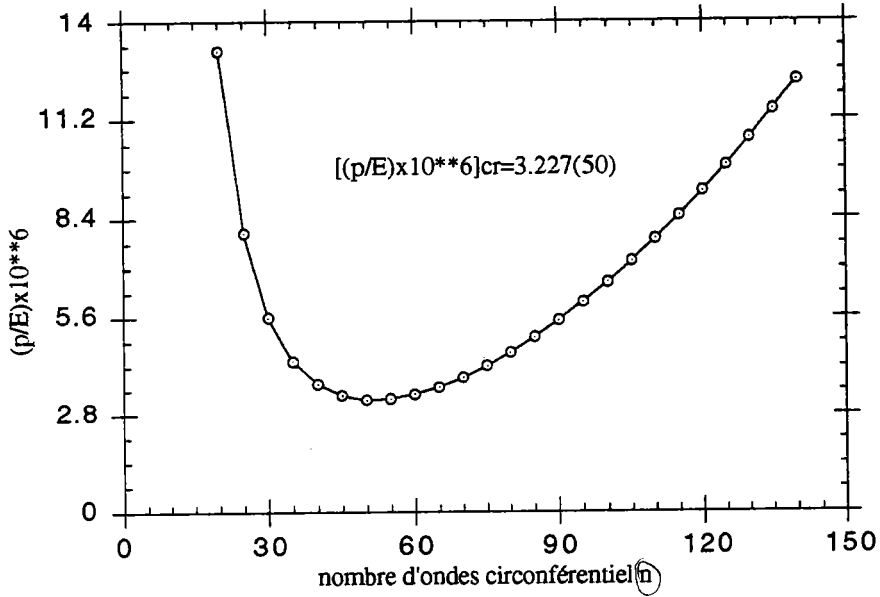


fig. III-2 Calcul de la pression critique de flambage avec  $I_3 \neq 0$

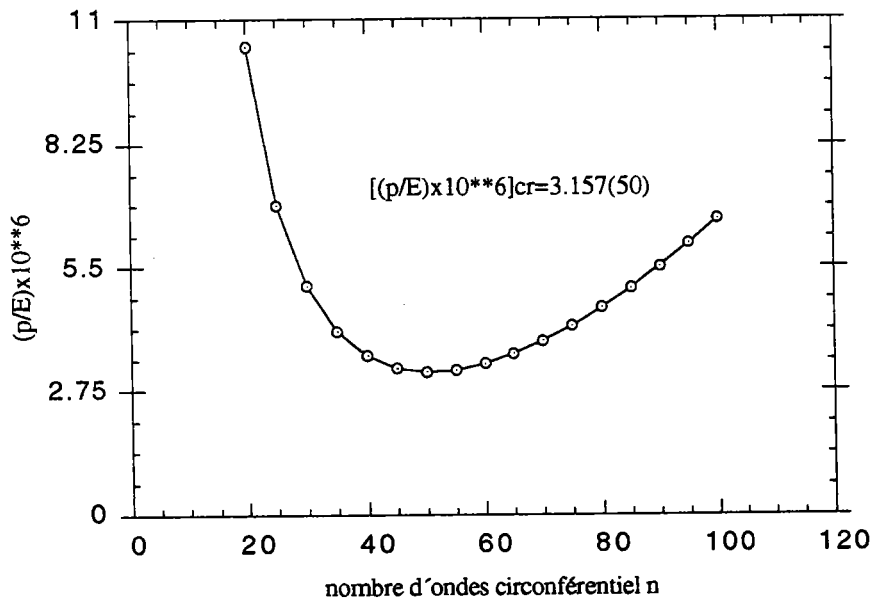


fig. III-3 Calcul de la pression critique avec  $I_3 = 0$  ( $C_2 \ll C_1$ )

On remarque que la seconde courbure principale  $C_2$  (qui est contenue dans le coefficient de forme  $I_3$ ) n'a presque pas d'influence sur la pression critique, ce qui confirme l'hypothèse que  $C_2$  est négligeable devant  $C_1$ . La

courbure  $C_2$  n'intervient que pour définir le mode de flambage, mais sa forme a été posée a-priori.

Les résultats du calcul de flambage élastique, tab. III-1 nous montrent que la méthode de Ritz donne une meilleure approche de la pression critique, car ses valeurs sont proches de celle donnée par le calcul éléments finis. Par contre la première formule (qui ne prenait pas en compte la forme du mode) est assez loin de la valeur réelle de la pression critique, mais elle donne néanmoins une bonne estimation sur la valeur du nombre d'ondes circonférentiel critique, qui est généralement assez grand par comparaison à celui des coques simples: cylindre par exemple.

Valeurs de $(p/E) \times 10^6$ (n) est le nombre d'ondes circonférentiel			
Première formule (II-9)	METHODE DE RITZ		METHODE E.F. chap. II
	Deuxième formule I $\neq 0$ (II-16)	Troisième formule I $_3 = 0$ (II-17)	
1.81(48)	3.227(50)	3.157(50)	3.10(50)

tab. III-1 Pression critique approchée du flambage élastique de la coque torisphérique sous pression interne, les contraintes avant flambage étant obtenues en théorie de membrane

Il ressort de cette analyse, que les trois formules utilisées (II-9), (II-16) et (II-17), peuvent être classées en fonction de leur complexité et leur avantage. La première relation (II-9) est très simple et elle ne présente pas d'intérêt, puisqu'elle donne une mauvaise valeur de la pression critique. Les deux autres formules analytiques (II-16) et (II-17) donnent une bonne valeur de la pression de flambage, mais on a préféré la dernière relation (II-17) à cause de sa simplicité par rapport à (II-16). De plus cette dernière relation est beaucoup plus simple et conduira à des résultats lisibles dans la suite. C'est cette formule analytique de la pression critique (II-17), qu'on utilisera dans la suite pour discuter le flambage plastique.

### III-2 Forme pratique de la formule simplifiée

On rappelle que dans le cas plastique et pour une coque torisphérique de forme donnée, les coefficients  $J_1, J_2$  dépendent de la pression et des modules tangent et sécant adimensionnalisés sur le module d'Young. La pression critique de flambage ne peut être obtenue que par une résolution graphique de la relation (II-17). Donc, on a à résoudre une équation de type: la pression  $p$  est égale une fonction dépendant aussi de  $p$ . On s'intéresse plus particulièrement dans tout qui suit, à la formule finale (II-19)

déduite de (II-17) qu'on avait retenu. On rappelle que dans la relation (II-19) interviennent deux facteurs essentiels de géométrie et de comportement (dû aux coefficients  $H^{22}$  et  $M_{11}$ ). Pour cela nous allons mettre en évidence à partir de (II-19), des paramètres sans dimension qu'on définira dans le prochain paragraphe.

### III-2-1 Paramètres adimensionnels intervenant dans la formule simplifiée

Nous allons dissocier les deux facteurs cités ci-dessus (géométrie et comportement), afin de voir l'influence de chacun d'eux sur la pression critique. Nous utilisons la troisième formule analytique de la pression critique établie précédemment (voir relation (II-19)).

On rappelle que le calcul du flambage plastique dépend de la courbe de contraintes-déformations choisie et de l'évolution du chargement. Nous allons donc introduire un paramètre de charge sans dimension noté par  $\lambda$  et donné par la relation suivante:

$$\lambda = (p/E\varepsilon_y)(R/h) \quad (\text{III-6})$$

qui tient compte de la pression  $p$ , de la limite élastique  $\varepsilon_y$ , du module d'Young  $E$  et de la minceur de la coque, mesurée par le rapport de géométrie  $R/h$ .

Pour faire apparaître le paramètre de charge  $\lambda$  dans la relation (II-19), on injecte la relation ci-dessus dans (II-19) et on la reformule de la manière suivante:

$$\lambda = [2h^2/(\sqrt{3} \cdot RR_t \varepsilon_y)] (J_1/J_2)^{1/2} (I_2/I_1) \quad (\text{III-7})$$

Le second membre de l'équation ci-dessus est composé d'un produit de trois facteurs sans dimension notés par  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  et qu'on les identifie respectivement à:

- $f_1 = 2h^2/(\sqrt{3} \cdot RR_t \varepsilon_y)$  où apparaît la minceur de la coque torisphérique:  $h/R$ ,  $h/R_t$  et la limite élastique  $\varepsilon_y$ .
- $f_2 = I_2/I_1$  n'est une fonction que de la forme de la courbe méridienne, c'est à dire que ce facteur est invariant par homothétie.
- $f_3 = (J_1/J_2)^{1/2}$  est une fonction de la forme de la courbe méridienne (invariant par homothétie) et des paramètres sans dimension traduisant le comportement:  $E/E_t$ ,  $E/E_s$ ,  $\nu$  du paramètre de chargement.



Il apparaît de cette analyse que le facteur essentiel de géométrie est représenté par la minceur et la forme de la courbe méridienne. Le second facteur essentiel dissocié est celui du comportement qui contient les rapports:  $E/E_t$ ,  $E/E_s$  et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Ces rapports dépendent de la limite élastique (allure de la courbe contraintes-déformations utilisée) et du chargement.

En regroupant les facteurs  $f_1$ ,  $f_2$   $f_3$  dans le tab. III-2, on indique l'influence de la géométrie (minceur, courbe méridienne) et celle du comportement ( $E/E_t$ ,  $E/E_s$  et chargement) sur ces trois facteurs qui constituent le second membre de l'équation (III-7).

GEOMETRIE et COMPORTE. dans $f_1$ , $f_2$ $f_3$	minceur de la coque torisphérique	forme de la courbe méridienne	comportement	chargement
1 <sup>er</sup> facteur $f_1$	$h/R$ $h/R_t$	$R/R_t$	$\epsilon_y$	—
2 <sup>ème</sup> facteur $f_2$	—	dépend	—	—
3 <sup>ème</sup> facteur $f_3$	—	dépend	$E/E_t$ $E/E_s$ $\nu$	$\lambda$

tab. III-2 Indication de l'influence de la géométrie, du comportement et du chargement sur la formule analytique proposée

Le rapport  $(J_1/J_2)^{1/2}$  représenté par le facteur  $f_3$ , dépend plus précisément des coefficients  $H^{22}$  et  $M_{11}$ , lorsque la géométrie de la coque à étudier est connue. En effet dans  $J_1$  intervient le coefficient  $H^{22}$  et dans  $J_2$  apparaît le coefficient  $M_{11}$ , voir relations (II-14). De plus ces coefficients dépendent en particulier du rapport de la limite élastique  $\sigma_y$  sur la contrainte équivalente  $\sigma_e$ , qui lui aussi est fonction du paramètre de charge  $\lambda$ , donné par (II-6). Ce rapport dont dépendent  $H^{22}$  et  $M_{11}$  (voir leurs relations respectives (III-15), (III-20) et (III-13), (III-20) du chapitre II), est le suivant:

$$\sigma_y / \sigma_e(s) = 2C_2R / (\lambda \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}) \quad (\text{III-8})$$

où  $C_2$  est la seconde courbure principale qui varie,  $R$  est le rayon du cylindre de base de la coque étudiée et  $\alpha$  est liée au rapport des deux courbures principales. On peut remarquer que dans le domaine élastique,  $H^{22}$  et  $M_{11}$  prennent respectivement les valeurs  $1/(1-\nu^2)$  et 1, où  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

D'après le tableau ci-dessus, on peut mettre ce rapport  $(J_1/J_2)^{1/2}$  (ou  $f_3$ ) comme une fonction de paramètres sans dimension, sous la forme suivante:

$$f_3 = (J_1/J_2)^{1/2} = f(\lambda, E/E_t, E/E_s, \nu) \quad (\text{III-9})$$

où  $E$ ,  $E_t$ , et  $E_s$  sont respectivement le module d'Young, le module tangent et le module sécant. On s'aperçoit que le facteur  $f_3$  ne dépend plus de la minceur:  $h/R$  ou  $h/R_t$ , mais il dépend de la forme de la courbe méridienne caractérisée par le rapport  $R/R_t$  et le paramètre de charge  $\lambda$ .

### III-2-2 Principe de résolution

Le second membre de l'équation (III-7), dépend du paramètre de charge  $\lambda$  par l'intermédiaire du rapport  $f_3 = (J_1/J_2)^{1/2}$ . Pour alléger l'écriture de ce second membre, on le pose dans toute la suite égal à  $f(\lambda)$ . On se ramène donc, à une équation de type  $\lambda = f(\lambda)$ . La résolution par la méthode graphique, consiste à tracer la courbe  $f(\lambda)$  et à porter sur le même graphe la droite d'équation  $\lambda = \lambda$ . La solution de l'équation (III-7) qu'on note par  $\lambda^*$  représente le point d'intersection de ces deux courbes. On peut ainsi déduire de (III-6) l'expression donnant la valeur de la pression critique de flambage, sous les formes suivantes:

$$(p/E)^c = \lambda^* \varepsilon_y (h/R) \quad \text{ou} \quad (p/\sigma_y)^c = \lambda^* (h/R) \quad (\text{III-10})$$

où on rappelle que  $h$  est l'épaisseur de la coque torisphérique,  $R$  est le rayon du cylindre de base,  $\varepsilon_y$  ou  $\sigma_y$  est la limite élastique

### III-3 Applications de la formule simplifiée au flambage plastique de la coque torisphérique

Dans ces applications, nous allons montrer les diverses considérations paramétriques qui influent sur le comportement et sur la solution graphique  $\lambda^*$ . On calculera ensuite les valeurs approchées de la pression critique de flambage de la coque torisphérique, en considérant l'expression exacte de la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$  de la théorie de membrane et son expression corrigée  $\sigma_\theta^{\text{corr}}$ , (voir fig. II-1 et la relation (V-2) du chapitre II) On comparera par la suite, ces valeurs à celles obtenues par le calcul éléments finis. On a donc besoin, des expressions (III-6) à (III-10) pour mettre en oeuvre, les applications de la méthode simplifiée.

### III-3-1 Les paramètres qui influent sur la solution simplifiée

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'influence des paramètres adimensionnels introduits précédemment, sur le comportement (lois plastiques) et sur la solution graphique  $\lambda^*$  du problème simplifié. On aura donc à discuter sur deux types de paramètres: ceux de géométrie (forme de la courbe méridienne et minceur) et ceux traduisant les modèles plastiques utilisés. On pourra ainsi mettre en évidence la plastification progressive de la structure et avoir déjà une idée sur la nature de la solution  $\lambda^*$  à obtenir. Ceci est possible du fait, qu'on avait séparé ces deux paramètres. Enfin dans certains cas de discussion de l'influence de ces paramètres sur le problème simplifié, on discute seulement sur le cas du modèle incrémental. Cependant dans le cas de la théorie de la déformation, on aboutirait aux mêmes conclusions, qu'en incrémental.

#### III-3-1-1 Influence du comportement sur la courbe $f(\lambda)$

Les lois plastiques utilisées agissent directement sur le comportement et en particulier sur ses coefficients  $H^{22}$  et  $M_{11}$ . Pour cela on trace la courbe  $f(\lambda)$  en théorie incrémentale et en théorie de déformation du  $J_2$ . Dans ces deux modèles, on a besoin de  $E/E_t$  et  $\varepsilon_y$  (voir sa valeur, fig. III-1 du chapitre II). Pour illustrer l'évolution de la plasticité dans la structure étudiée, on considère un rapport  $E/E_t$  choisi égal à 10 dans les deux modèles.

Sur la fig. III-4, on a tracé la courbe  $f(\lambda)$  dans le cas de la théorie incrémentale. La courbe  $f(\lambda)$  présente trois paliers où  $f(\lambda)$  est une constante. Le premier palier correspond au chargement élastique, car les rapports  $I_2/I_1$  (ou  $f_2$ ) et  $(J_1/J_2)^{1/2}$  (ou  $f_3$ ) gardent chacun une valeur constante, dans le domaine élastique. Le second palier correspond à une plastification complète de la partie torique de la structure, puisque le rapport  $(J_1/J_2)^{1/2}$  devient constant, car il ne dépend pas du module sécant en théorie incrémentale, mais du rapport  $E/E_t$  qu'on a supposé constant. Enfin le dernier palier est un début d'évolution de la plasticité sur la calotte sphérique de la coque torisphérique. Entre le palier élastique et la plastification complète du tore il y a une zone qui correspond à la plastification progressive du tore.

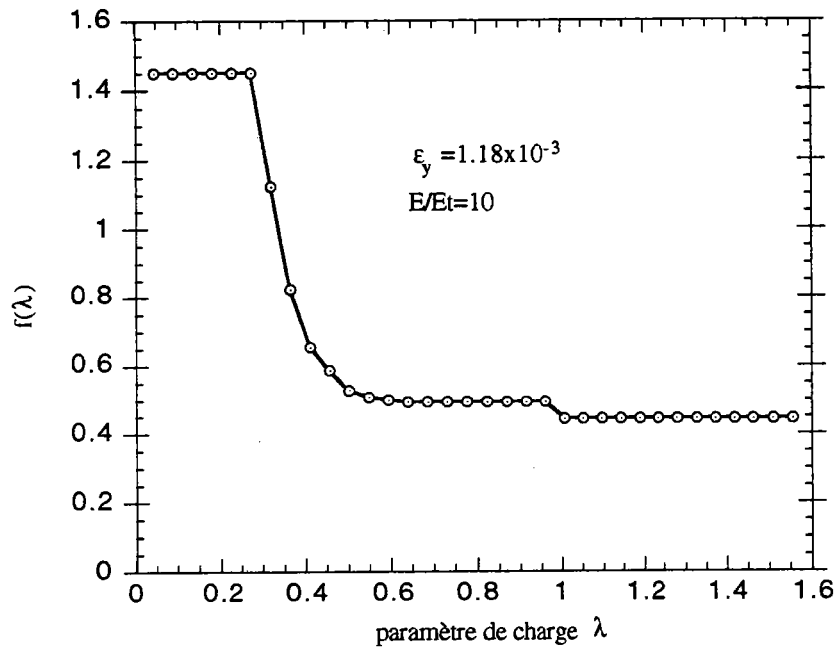


fig. III-4 L'évolution de la plasticité en théorie incrémentale

Sur la fig. III-5, on a tracé la courbe  $f(\lambda)$ , dans le cas de la théorie de déformation du  $J_2$ , pour un même rapport de  $E/E_t$  que dans le modèle plastique précédent et avec la même limite élastique. On observe le même palier élastique que celui établi en théorie incrémentale. Par contre la fonction  $f(\lambda)$  ne garde plus des valeurs constantes au niveau de chaque partie de la coque torisphérique, car dans ce cas intervient le module sécant  $E_s$  qui dépend du paramètre de chargement  $\lambda$ , en particulier de la pression  $p$ .

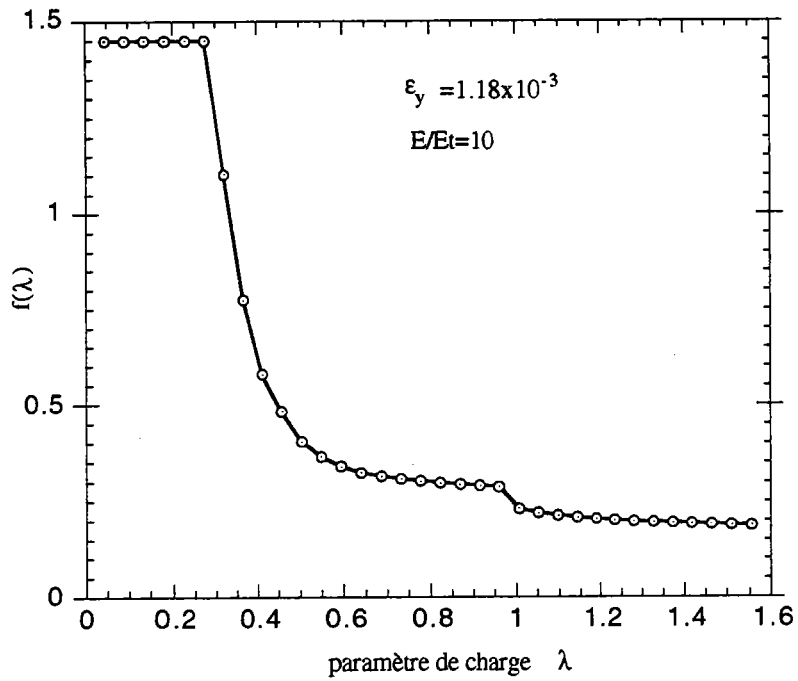


fig. III-5 L'évolution de la plasticité en théorie de la déformation du  $J_2$

### III-3-1-2 Influence du comportement sur la solution du problème simplifié

Dans le cas élastique, la solution élastique  $\lambda^*_E$  donnant la pression critique correspondante est le point d'intersection des courbes  $\lambda = \lambda$  et  $f(\lambda) = \text{constante}$  du palier élastique, fig. III-6. Cette solution  $\lambda^*_E$  ne dépend que de la forme donnée de la coque torisphérique, car les paramètres sans dimension  $E/E_t$ ,  $E/E_s$  sont identiques et ont une valeur commune égale 1.

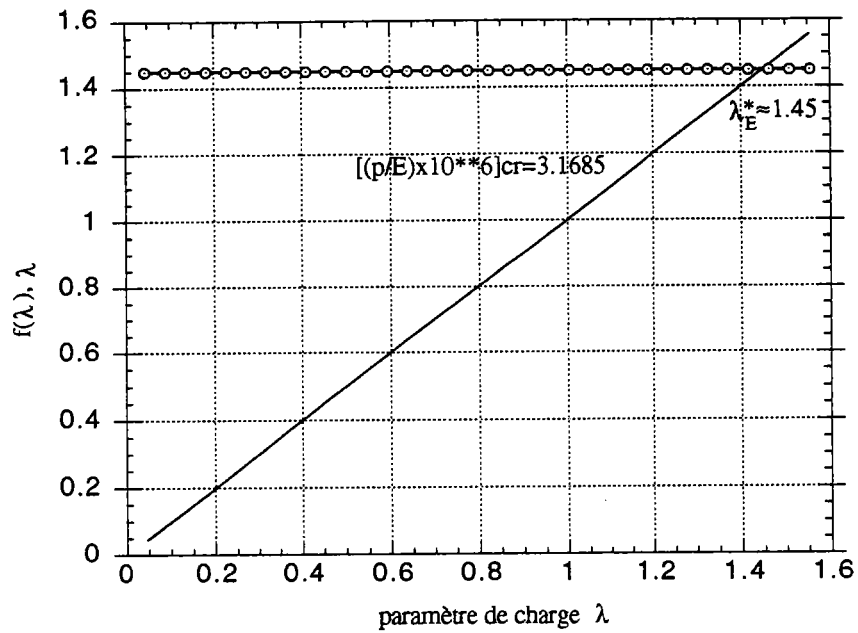


fig . III-6 Solution graphique du cas élastique

En plasticité, la fonction  $f(\lambda)$  dépend de la loi de comportement utilisée. Ainsi  $f(\lambda)$  est fonction seulement de  $E/E_t$  en théorie incrémentale et de  $E/E_t$ ,  $E/E_s$  en théorie de la déformation du  $J_2$ . Pour trouver la solution plastique  $\lambda^*$ , pour les deux modèles plastiques utilisés, on reporte les courbes  $f(\lambda)$  des fig. III-4, III-5 et la droite d'équation  $\lambda=f(\lambda)$  sur un même graphe. On s'aperçoit que les deux solutions  $\lambda^*_1$ ,  $\lambda^*_2$  correspondant respectivement à la théorie incrémentale et à la théorie de déformation du  $J_2$  sont nettement distinctes, fig. III-7.

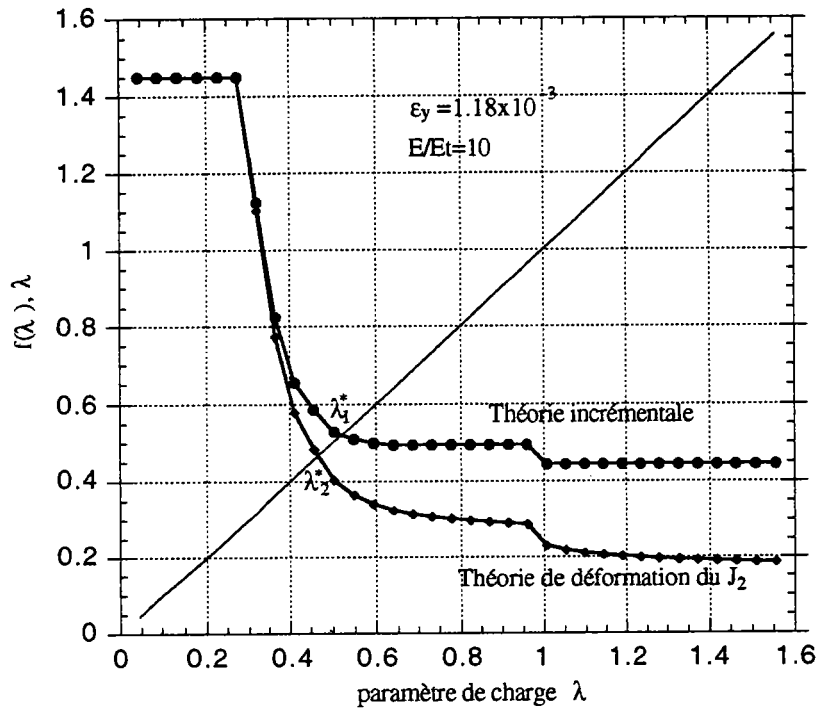


fig. III-7 Solution graphique du cas plastique

On note que le module tangent  $E_t$  joue un rôle important dans le comportement plastique (en particulier les coefficients  $H^{22}$  et  $M_{11}$ ) et aussi sur les solutions graphiques  $\lambda^*$  donnant les pressions critiques de flambage correspondantes. Pour illustrer cela, on lui attribue diverses valeurs allant de l'ordre du module d'Young  $E$  jusqu'au centième de celui-ci, fig. III-8, en considérant la théorie incrémentale. On observe que la courbe  $f(\lambda)$  tend vers une limite, à partir des valeurs de  $E/E_t \geq 100$ . Par contre, ces courbes  $f(\lambda)$  se différencient entre elles pour des rapports de  $E/E_t$  plus petits de 3 à 11. Cela entraîne que les solutions  $\lambda^*$  suivront les mêmes variations que les courbes  $f(\lambda)$ . On peut remarquer qu'on peut obtenir le même aspect des courbes  $f(\lambda)$  avec les mêmes valeurs de  $E/E_t$ , en considérant l'autre loi plastique à savoir la théorie de la déformation du  $J_2$ .

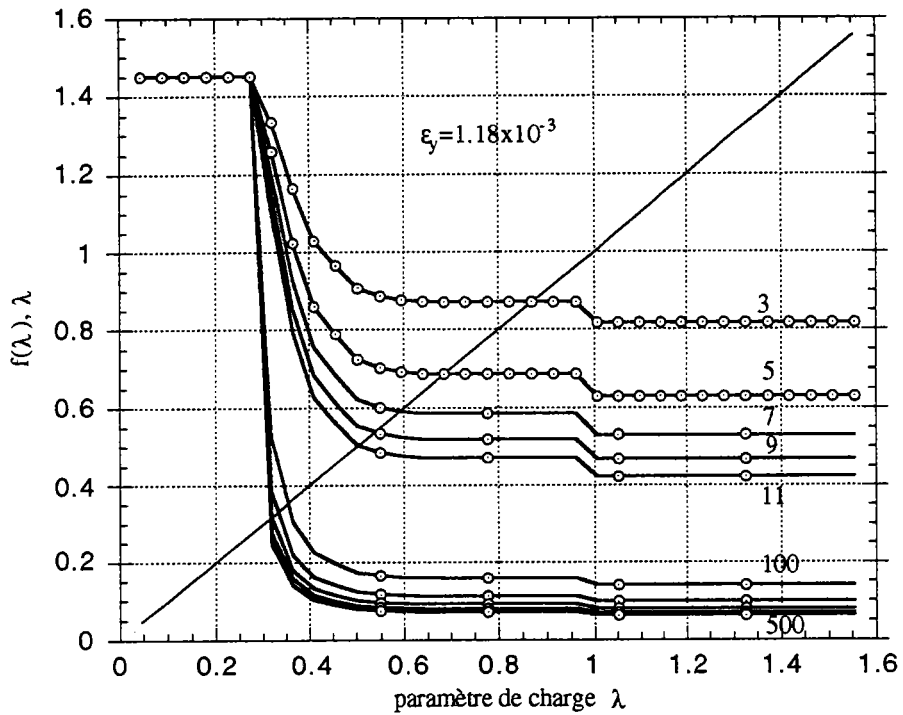


fig. III-8 Effet du module tangent (donné par le rapport  $E/E_t$ ) sur les solutions plastiques  $\lambda^*$  (intersection des courbes  $\lambda$  et  $f(\lambda)$ ), en théorie incrémentale

Ceci nous montre que la pression critique de flambage  $(p/E)^c$ , correspondant à ces solutions plastiques graphiques  $\lambda^*$  croît quand le rapport  $E/E_t$  diminue et garde une valeur constante pour  $E/E_t \geq 100$ , fig. III-9, en théorie incrémentale.



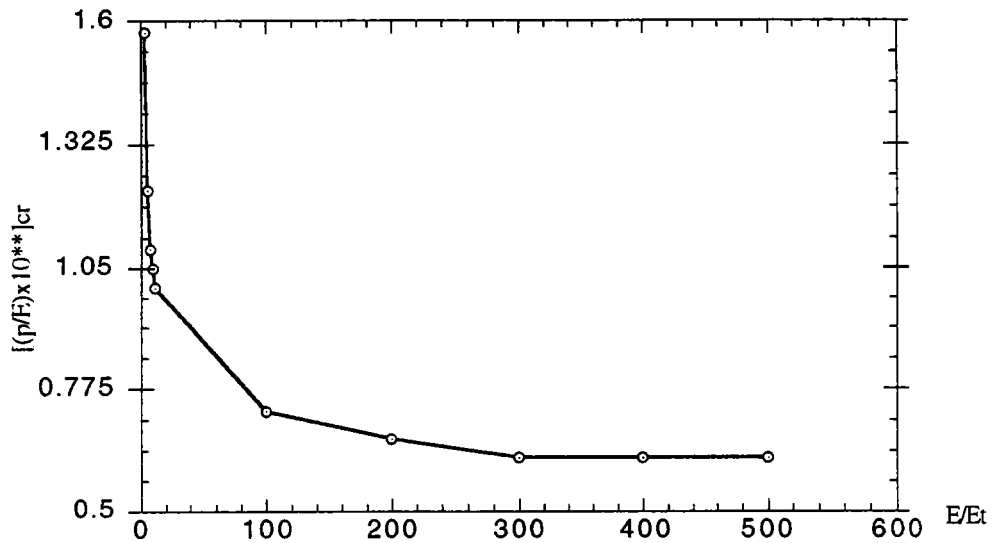


fig. III-9 Effet du rapport  $E/E_t$  sur la pression critique de flambage plastique, en théorie incrémentale

### III-3-1-3 Influence de la minceur de la coque

Pour mettre en évidence l'influence de la minceur  $R/h$  de la coque, on réécrit l'équation (III-7) sous la forme:

$$f_3(\lambda) = [(\sqrt{3}/2)1/f_2 \cdot R_t/R \cdot (R/h)^2 \cdot \epsilon_y] \lambda \quad (\text{III-11})$$

où la fonction  $f_3(\lambda)$  (voir relations (II-14) et (III-7)) dépend du comportement, de la forme courbe méridienne, mais pas de l'épaisseur ni de la limite élastique. Pour une loi de comportement donnée, on a donc une seule fonction  $f_3(\lambda)$  que l'on peut calculer et tracer, fig. III-12. Le second membre de l'équation (III-11) définit l'équation d'une famille de droite dont la pente varie avec la minceur pour une limite  $\epsilon_y$  donnée. Cette pente varie aussi, avec la limite élastique  $\epsilon_y$  pour une minceur  $R/h$  imposée. Ces droites sont représentées sur la même fig. III-12, dont les valeurs prises par leurs pentes sont données par les rapports  $R/h$  allant de 100 à 2000.

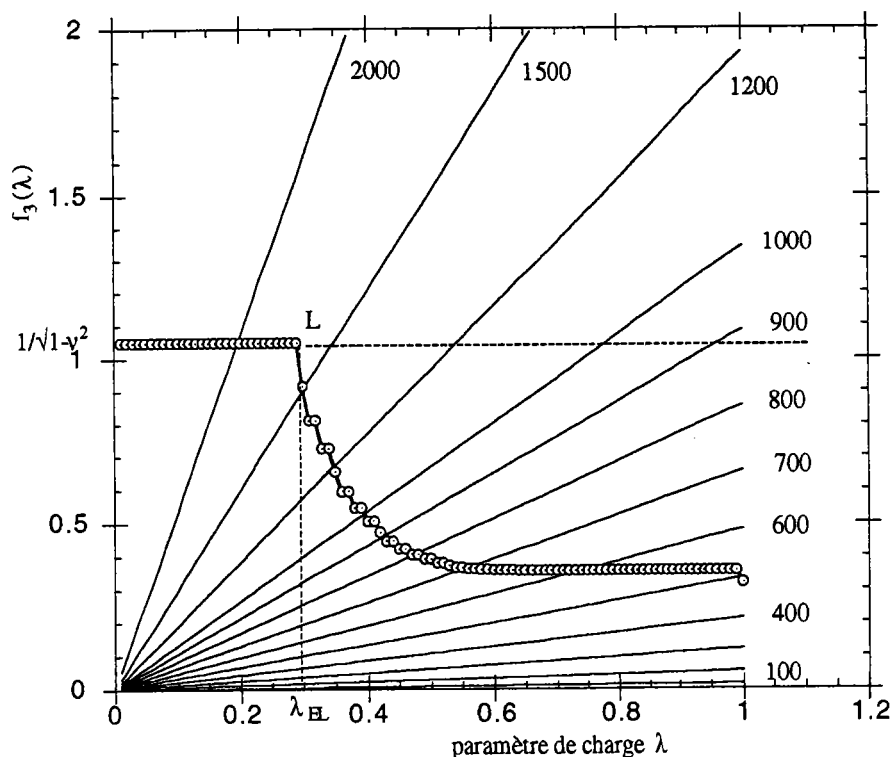


fig. III-12 Effet de la minceur de la coque sur la solution graphique  $\lambda^*$ , en incrémental avec:  $E/E_t=10$ ,  $\epsilon_y=1.18 \times 10^{-3}$  et  $\nu=0.3$

A partir de cette courbe, on peut déterminer la minceur en fonction de la limite élastique  $\epsilon_y$  et de  $R/R_t$ , à partir de laquelle le flambage est élastique. Il suffit pour cela d'écrire que la droite passe par le point L ( $\lambda=\lambda_{EL}$ ,  $f_3=1/\sqrt{1-\nu^2}$ ) qui caractérise la limite du flambage élastique. On a donc l'expression de cette minceur "limite" donnée par la relation suivante:

$$(R/h)^2 = [2/\sqrt{3(1-\nu^2)}] f_2(R/R_t) (1/\epsilon_y \lambda_{EL}) \quad (III-12)$$

Lorsque la minceur  $R/h$  est plus grande que la minceur limite, le flambage a lieu dans le domaine élastique. Lorsqu'elle est plus petite, le flambage se situe dans le domaine plastique. Comme la courbe  $f_3(\lambda)$  est décroissante, on voit que la charge de flambage obtenue en plasticité (ici en théorie incrémentale) est plus faible que celle obtenue en théorie élastique.

### III-3-2 Calculs de la pression critique de flambage de la coque torisphérique, par la méthode simplifiée

Nous allons déterminer les valeurs de la pression critique de flambage de la coque torisphérique, sous pression interne  $p$  en utilisant la formule retenue (voir relation II-17), de la méthode simplifiée. On avait vu qu'un calcul de préflambage en théorie de membrane donnait des résultats très approximatifs. C'est pourquoi nous calculerons la pression de flambage en tenant compte de la correction de la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$  introduite au chapitre II, relation (V-2). Les valeurs de la pression critique ainsi trouvées seront ensuite comparées à celles obtenues par le calcul en éléments finis du chapitre précédent.

Pour le cas élastique, on se limitera au calcul des courbes pression-nombres d'ondes données par la formule (II-17).

On rappelle que les paramètres sans dimension de comportement  $E/E_t$ ,  $E/E_s$  utilisés dans les calculs approchés effectués, sont ceux donnés par la courbe contrainte-déformation donnée dans le chapitre II, (voir fig. III-1).

Pour calculer la pression critique de flambage élastique, on préfère utiliser la formule (II-17) puisqu'on obtient directement la valeur de cette pression et son nombre d'ondes circonférentiel critique associé sans passer par une résolution graphique. Cette valeur est représentée par les courbes des fig. III-13 et III-14 en considérant respectivement l'expression exacte de la contrainte circonférentielle de membrane  $\sigma_\theta$  et son expression corrigée  $\sigma_\theta^{corr}$ .

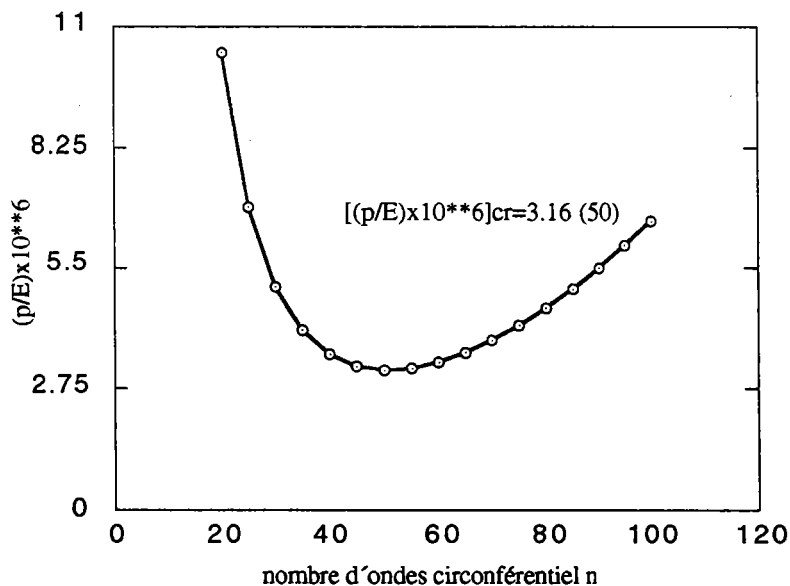


fig. III-13 Pression critique de flambage élastique avec  $\sigma_\theta$

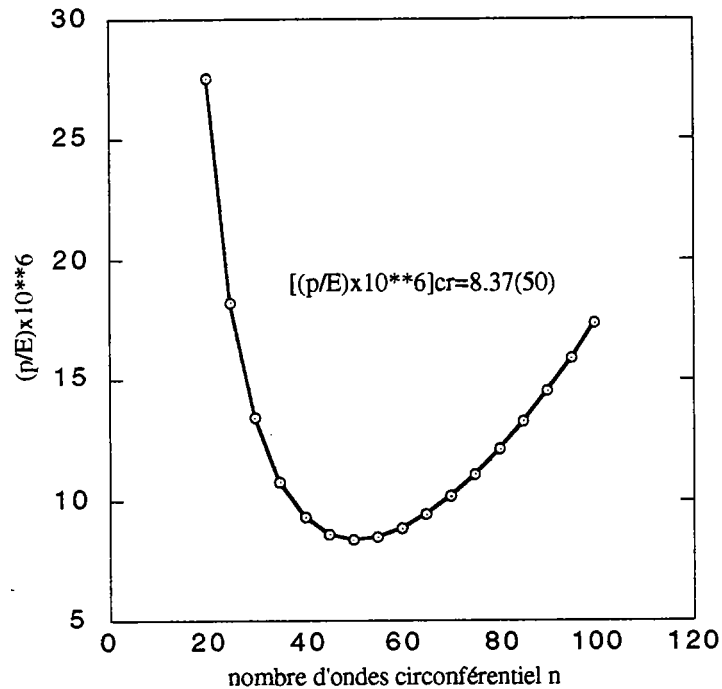


fig. III-14 Pression critique de flambage élastique avec  $\sigma_{\theta}^{corr}$

Dans le cas plastique, on détermine la pression critique de flambage de la coque torisphérique sous la pression interne  $p$ , en résolvant graphiquement l'équation (III-7). On s'aperçoit donc que la solution graphique  $\lambda^*$  obtenue en théorie incrémentale et celle de la théorie de déformation du  $J_2$  coïncident, fig. III-15 et III-16, pour un état fondamental représenté par la contrainte de membrane  $\sigma_{\theta}$ . Ceci est dû à la valeur du rapport  $E/E_t$  donné par la courbe contrainte-déformation (voir fig. III-1 du chapitre II) utilisée, qui a une valeur assez grande. De plus, on avait vu précédemment que pour des valeurs de ce rapport dépassant la centaine, les pressions critiques correspondant à ces valeurs se confondent. Par contre, en calculant les solutions graphiques  $\lambda^*$  respectives au modèle incrémental et au modèle de déformation et en tenant compte de la correction de la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta}$ , on s'aperçoit que ces solutions se différencient. On obtient donc la solution  $\lambda^*$  de la théorie incrémentale fig. III-17 qui est plus grande que celle de la théorie de la déformation du  $J_2$ , fig. III-18.

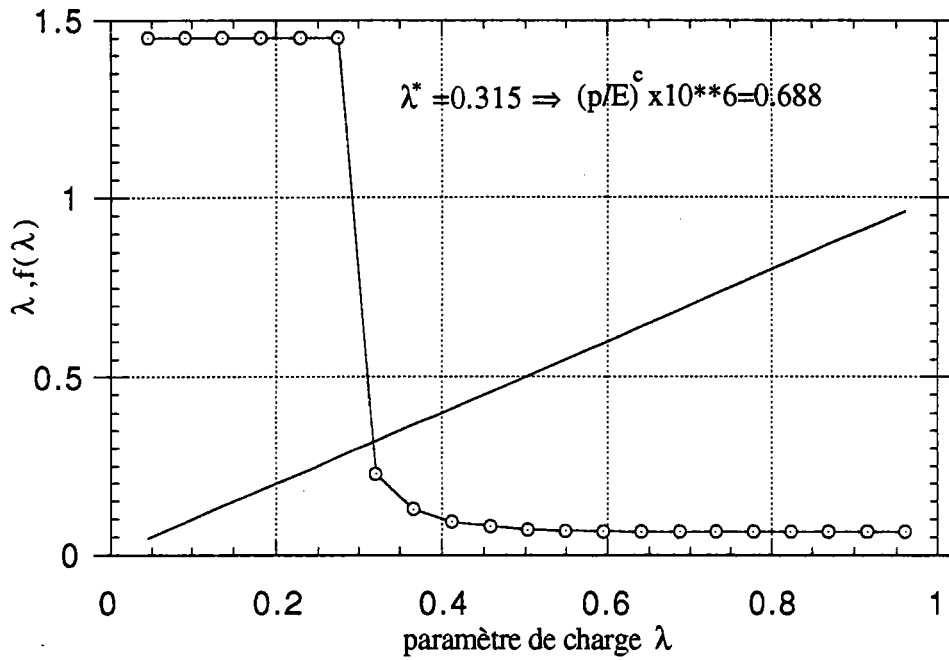


fig. III-15 Pression critique de flambage plastique en incrémental avec  $\sigma_\theta$

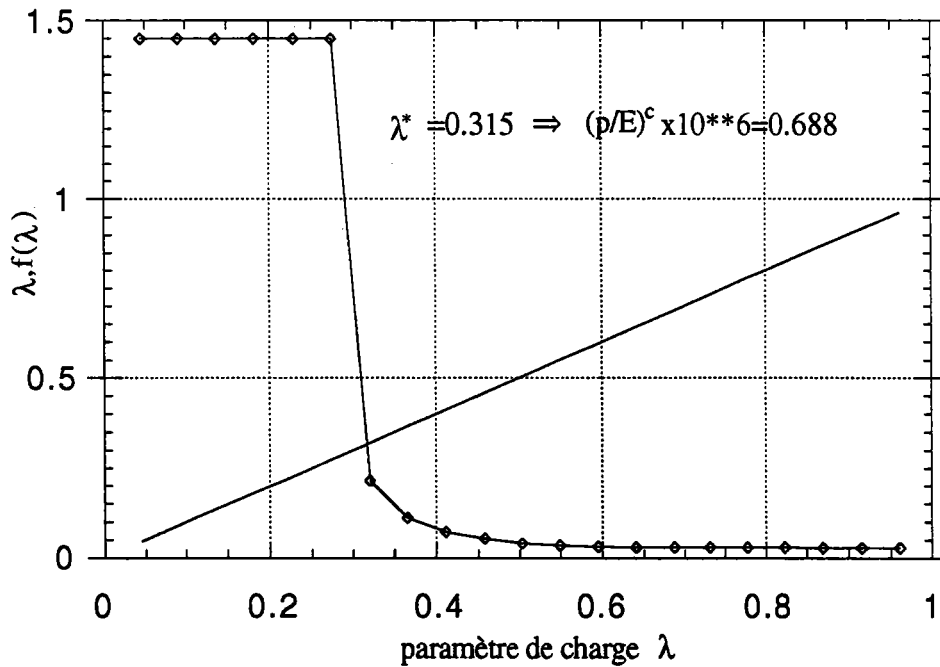


fig. III-16 Pression critique de flambage plastique en déformation avec  $\sigma_\theta$

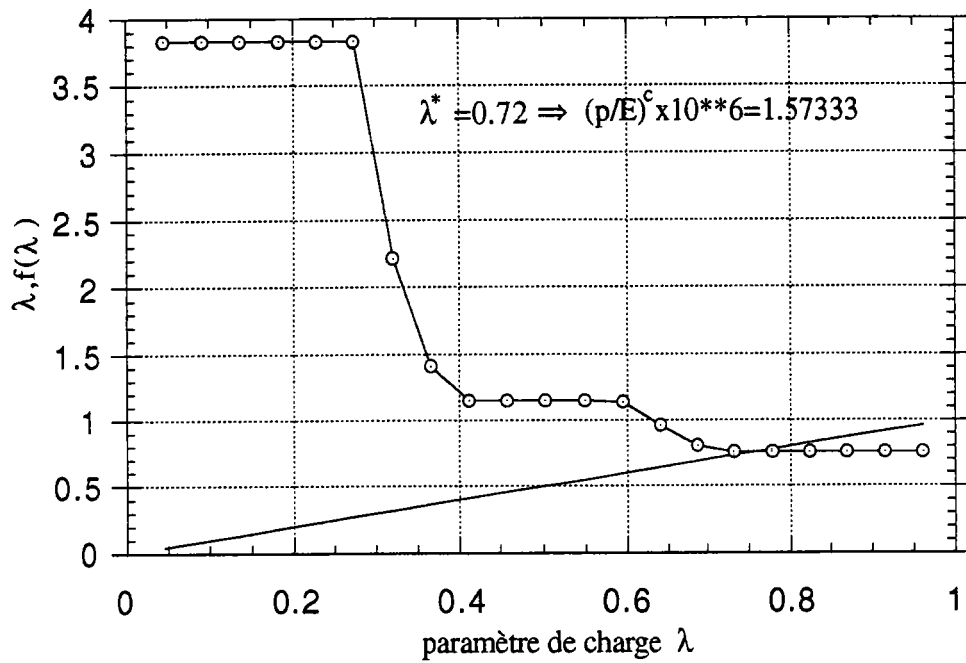


fig. III-17 Pression critique de flambage plastique en incrémental avec  $\sigma_{\theta}^{corr}$

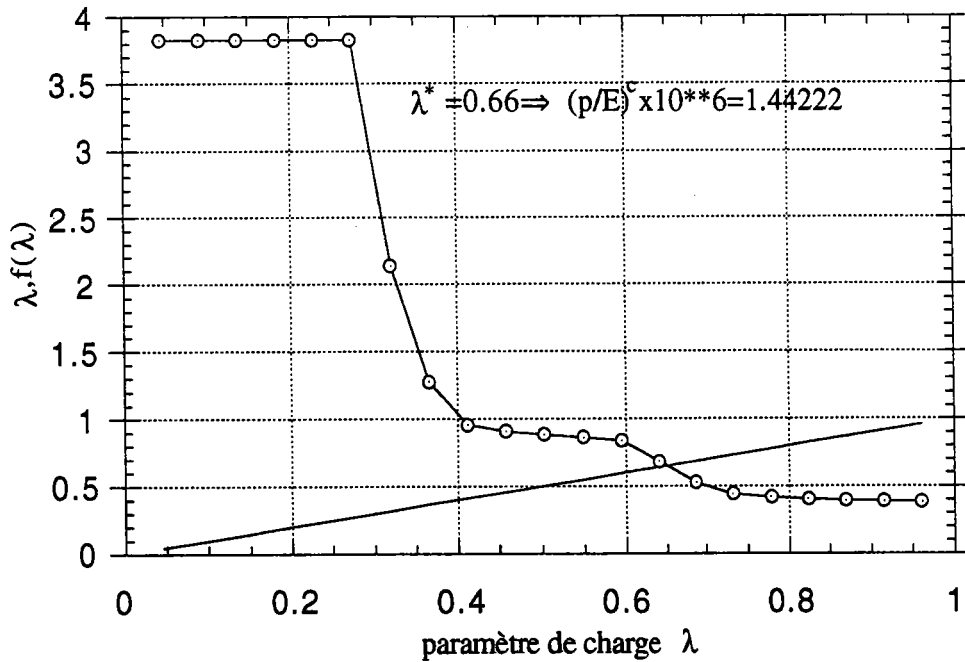


fig. III-18 Pression critique de flambage plastique en déformation avec  $\sigma_{\theta}^{corr}$

On présente l'ensemble de ces résultats de la méthode que nous avons proposé, dans le tab. III-2. On remarque un redressement des valeurs de la pression critique de flambage, en tenant compte de la flexion par l'intermédiaire de l'expression de  $\sigma_{\theta}^{corr}$ .

CONTRAINTES CIRCUMFÉREN- TIELLES	Valeurs de $(p/E) \times 10^6$ et le nombre d'onde circumférentiel (n)		
	Elasticité	Théorie incrémentale	Théorie de déformation du J 2
$\sigma_{\theta}$	3.16(50)	0.688	0.688
$\sigma_{\theta}^{corr}$	8.37(50)	1.573	1.442

tab. III-2 Pressions critiques de flambage par la "méthode simplifiée de calcul de flambage"

Pour tester la fiabilité de cette méthode, on compare ces résultats à ceux du calcul par éléments finis, en calculant l'écart existant entre les valeurs des pressions critiques de flambage de la coque torisphérique sous pression interne p, tab. III-3.

CONTRAINTES CIRCUMFÉREN- TIELLES		Valeurs de $(p/E) \times 10^6$ et le nombre d'onde circumférentiel (n)		
		Elasticité	Théorie incrémentale	Théorie de déformation du J 2
$\sigma_{\theta}$	E.F.	3.105(50)	1.251	0.83
	M.A	3.16(50)	0.688	0.688
	ECART	1.77 %		
$\sigma_{\theta}^{corr}$	E.F.	7.48(50)	2.119	1.01
	M.A.	8.37(50)	1.573	1.442
	ECART	11 %	34 %	42 %

tab. III-3 Pressions critiques par les deux méthodes: calculs en éléments finis et calculs par la méthode approchée

On remarque que la méthode donne des résultats assez bons dans la cas

élastique, mais elle présente des écarts sensibles dans la cas plastique. Ceci est dû à l'effet du comportement et au choix de la forme du mode de Ritz qu'on a supposé représentant le mode réel élastique.

#### **IV- CONCLUSION**

Nous avons développé une nouvelle méthode pour le dimensionnement au flambage des structures de type coques torisphériques sous une pression interne donnée. Elle permet de donner des résultats approchés de la pression critique de flambage en fonction de la géométrie de ces structures et des caractéristiques mécaniques du matériau utilisée. En particulier le comportement du matériau est mesuré seulement par deux coefficients très importants à savoir le module bidimensionnel instantané adimensionnalisé  $H^{22}$  dans le sens circonférentiel et la souplesse adimensionnalisée  $M_{11}$  dans la direction méridienne. La méthode que nous avons proposé est d'un grand intérêt pratique puisque la méthode présente des formules analytiques qu'on peut manipuler.

L'étude de la coque torisphérique montre que la courbure principale dans la direction circonférentielle  $C_2$  de cette structure peut être négligée. Cette hypothèse nous a permis de retenir la dernière formule (relation (II-17)) parmi les trois que nous avons proposées, (relation (II-9), (II-16) et (II-17)). Cette formule nous a permis de mettre en évidence deux facteurs importants à savoir la géométrie (minceur  $R/h$ , forme de la courbe méridienne  $R/R_1$ ) et le comportement (paramètres adimensionnels:  $E/E_t$ ,  $E/E_s$ ,  $\lambda$  et  $\nu$ ), qui influent sur le problème simplifié. Les solutions de ce problème sont obtenues par une résolution graphique. Les solutions donnant les valeurs de la pression critique de flambage sont validés: dans le cas élastique (validation assez bonne) et dans le cas plastique tout en tenant compte du choix du mode de Ritz et de la manière d'introduire le pré-flambage.

Cependant on pourrait étendre cette méthode simplifiée à la coque elliptique. Dans ce cas, il nous semble qu'on peut garder ses deux courbures principales et a formuler des relations analogues en fonction des axes de l'ellipse. En effet, certains auteurs[A3], [G4], [D1] présentent des formules donnant la pression critique de flambage d'une coque elliptique sous pression interne, dans lesquelles apparaît le rapport des axes de l'ellipse.



## CONCLUSION GENERALE

Le flambage des coques de révolution, sous pression interne et en particulier celui des coques torisphérique ou elliptique est un flambage local. Il est dû à une contrainte circonférentielle qui est une compression lorsque la courbe méridienne est assez courbée. Si on la calcule en théorie de membrane, cette contrainte ne dépend que de la géométrie de ces coques et de la pression appliquée.

Pour dimensionner ces structures au flambage, on a opté pour des théories simples à cause des non-linéarités géométrique et matérielle de ces coques. On a donc utilisé, la théorie des coques de D.M.V. avec un comportement avant flambage calculé en théorie des membranes. De plus, le calcul des pressions critiques numériques, nous a amené à considérer les lois classiques de plasticité (la théorie incrémentale et la théorie de déformation du  $J_2$ ). On a appliqué ces lois dans le contexte du critère de Hill qui est classique dans les calculs de flambage plastique. L'outil numérique, que nous avons développé, pour évaluer ces pressions critiques, est un code d'éléments finis COQ. Les éléments des coques utilisés ne sont pas classiques. En partant de la symétrie de révolution et du chargement existant dans ces coques, on a proposé des éléments filiformes "courbes". Ces éléments (arcs de courbes) sont obtenus, par approximations successives sur une variable de référence, afin d'approcher au mieux la géométrie réelle de ces coques, en particulier les courbes méridiennes.

On a calculé les pressions critiques numériques de flambage élastique et plastique pour les coques torisphérique et elliptique. Les valeurs de ces pressions critiques ainsi obtenues dans le cas élastique sont toujours supérieures à celles du cas plastique. Tout au long de cette étude, on a mis l'accent sur le rapport des deux contraintes obtenues en théorie de membrane. On a remarqué qu'il agit fortement sur la pression de flambage. En comparant ces résultats à ceux de la littérature, on a un écart raisonnable dans le cas élastique, mais en plasticité cet écart est assez grand. Il en ressort que les coques étudiées sont très sensibles aux données géométriques. On s'est aussi aperçu que la théorie de membrane donne une pression critique de flambage surestimée. En effet, l'effet de la flexion est loin d'être négligeable dans ces structures. Sans faire un calcul de flexion dû au pré-flambage (assez compliqué), on a introduit l'effet de cette flexion, en modifiant artificiellement la contrainte de membrane causant l'instabilité. Ensuite, on a comparé les résultats obtenus avec ceux de la littérature. Dans le cas élastique ces résultats sont toujours en accord raisonnable avec les résultats connus, mais en plasticité, un écart demeure. Il nous semble donc que la sensibilité aux données géométriques reste assez forte. Cependant le code éléments finis que nous proposons a été complètement validé sur ces structures complexes. Mais le temps de calcul dépend de la puissance de la machine numérique et il reste souvent très coûteux.

Dans le souci de l'utilisateur, on a proposé une nouvelle méthode dite "Méthode simplifiée de calcul de flambage", pour déterminer la pression critique de flambage, à partir de certaines simplifications. On a montré que pour une coque torisphérique, la seconde courbure principale (dans la direction circonférentielle), n'a pratiquement pas d'influence sur la pression critique de flambage. Cette possibilité nous a permis de proposer des formules analytiques faciles à manipuler. On a retenu celle qui dépend du choix d'un mode de Ritz et qui nous a conduit à des résultats importants. On a montré que le comportement agit seulement par deux composantes: la rigidité circonférentielle et la souplesse dans la direction méridienne. Les formules analytiques proposées nous ont permis de dissocier l'influence de la géométrie et celle du comportement.

## A N N E X E

Nous allons développer les relations auxquelles on fait référence en Annexe et qui ont été utilisées lors de notre étude du flambage des coques sous pression interne.

En théorie de surface et en particulier dans le cas des coques de révolution, on a utilisé des dérivées covariantes faisant appel aux symboles de Christoffel. Dans notre choix de coordonnées intrinsèque  $s$  et  $\theta$ , pour décrire la surface moyenne des structures étudiées (coques torisphérique et elliptique), le symbol de Christoffel  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  de deuxième espèce sur la surface moyenne prend seulement deux valeurs, à savoir:

$$\Gamma^2_{12}=r_{,1}/r \quad \text{et} \quad \Gamma^1_{22}=-r_{,1}r \quad (\text{A-1})$$

En calcul éléments finis, l'approximation des déplacements  $U_1$ ,  $U_2$  et  $W$  aux noeuds, consiste à faire une interpolation d'Hermite donnée par les fonctions  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$ . Ces fonctions dépendent de la variable de référence  $\xi$  et ont pour expressions:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)^2(2+\xi) \\ N_2 &= (1-\xi^2)(1-\xi) \\ N_3 &= (1+\xi)^2(2-\xi) \\ N_4 &= (-1+\xi^2)(1+\xi) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

Les dérivées successives de ces fonctions par rapport à la variable de référence sont:

$$\begin{array}{lll} N'_1 = -3(1-\xi^2) & N''_1 = 6\xi & N'''_1 = 6 \\ N'_2 = (-1+\xi)(1+3\xi) & N''_2 = 6\xi-2 & N'''_2 = 6 \\ N'_3 = 3(1-\xi^2) & N''_3 = -6\xi & N'''_3 = -6 \\ N'_4 = (-1-\xi)(1-3\xi) & N''_4 = 6\xi+2 & N'''_4 = 6 \end{array} \quad (\text{A-3})$$

Nous allons expliciter les matrices  $[B]$ ,  $[B^d]$  à partir de leurs expressions vectorielles respectives, tout en raisonnant sur un seul élément de la structure à étudier. Pour cela nous allons spécifier les grandeurs vectoriel-

les utilisées dans les expressions (IV-23), (IV-24) et (IV-25).

Les vecteurs vitesses de déplacement tangentiel  $\dot{U}_\alpha$ , normal  $\dot{W}$  et leurs dérivées par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ , représentées par le vecteur  $\{\dot{U}\}$  champ de vitesses est défini par:

$$\{\dot{U}\}^e = \{\dot{U}_1, \dot{U}_{1,1}, \dot{U}_2, \dot{U}_{2,1}, \dot{W}, \dot{W}_{,1}, \dot{W}_{,11}\}^T \quad (A-4)$$

La variation du champ de déplacement élémentaire  $\{\delta U\}^e$  peut être aussi de la forme:

$$\{\delta U\}^e = \{\delta U_1, \delta U_{1,1}, \delta U_2, \delta U_{2,1}, \delta W, \delta W_{,1}, \delta W_{,11}\}^T \quad (A-5)$$

On rappelle que la méthode des éléments finis consiste à rapprocher le champ de vitesses (A-4) à un champ de vitesses aux deux noeuds de l'élément noté par:

$$\{\dot{q}\}^e = \{\dot{U}_{11}, \dot{U}_{21}, \dot{W}_1, \dot{W}_{1,1}, \dot{U}_{12}, \dot{U}_{22}, \dot{W}_2, \dot{W}_{2,1}\}^T \quad (A-6)$$

Il en est de même pour une variation élémentaire  $\{\delta q\}^e$ :

$$\{\delta q\}^e = \{\delta U_{11}, \delta U_{21}, \delta W_1, \delta W_{1,1}, \delta U_{12}, \delta U_{22}, \delta W_2, \delta W_{2,1}\}^T \quad (A-7)$$

où la partie de gauche dans (A-6) et (A-7) concerne le noeud n°1 et la partie de droite le noeud n°2.

On a introduit un vecteur taux de déformation élémentaire  $\{\dot{\epsilon}\}$  qui lui contient les vitesses de déformation de membranes  $\dot{\gamma}_{\alpha\beta}$  et les vitesses de déformation de flexion  $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ . Ses composantes s'écrivent:

$$\{\dot{\epsilon}\}^e = \{\dot{\gamma}_{11}, \dot{\gamma}_{22}, 2\dot{\gamma}_{12}, \dot{\kappa}_{11}, \dot{\kappa}_{22}, 2\dot{\kappa}_{12}\}^T \quad (A-8)$$

On peut aussi établir les variations élémentaires  $\{\delta \epsilon\}^e$  du vecteur déformation  $\{\epsilon\}$ :

$$\{\delta \epsilon\}^e = \{\delta \gamma_{11}, \delta \gamma_{22}, 2\delta \gamma_{12}, \delta \kappa_{11}, \delta \kappa_{22}, 2\delta \kappa_{12}\}^T \quad (A-9)$$

Enfin, pour utiliser le comportement modélisé pour l'élément de la structure, on a défini un vecteur taux de contrainte  $\{\dot{\sigma}\}$  dans lequel interviennent les contraintes résultantes incrémentales de membrane  $\{\dot{N}^{(\alpha\beta)}\}$  et celles de flexion  $\{\dot{M}^{(\alpha\beta)}\}$ , sous la forme:

$$\{\dot{\sigma}\}^e = \{\dot{N}^{(11)}, \dot{N}^{(22)}, \dot{N}^{(12)}, \dot{M}^{(11)}, \dot{M}^{(22)}, \dot{M}^{(12)}\}^T \quad (A-10)$$

Les composantes physiques du tenseur  $\dot{N}^{(\alpha\beta)}$  sont déterminées par la relation ci-dessous, permettant le passage d'un tenseur  $T^{\alpha\beta}$  de même nature, de coordonnées intrinsèques (s et  $\theta$ ) en un tenseur  $T^{(\alpha\beta)}$  exprimé en coordonnées physiques (s et  $r\theta$ ).

$$T^{(\alpha\beta)} = T^{\alpha\beta} \sqrt{a_{\beta\beta}} / a^{\alpha\alpha} \quad (A-11)$$

où cette fois-ci exceptionnellement  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas des indices muets! On rappelle que les composantes du tenseur de la première forme de la surface  $a_{\alpha\beta}$  ou  $a^{\alpha\beta}$  sont définies dans le chapitre II, voir relations (I-2). Ainsi par exemple  $N^{(22)}$  s'écrira:  $N^{(22)} = N^{22} \sqrt{r^2} / (1/r^2) = r^2 N^{22}$ .

A partir des considérations ci-dessus et l'approximation donnée par les fonctions d'Hermite (A-3), l'écriture complète des deux matrices de passage [B] et [B<sup>d</sup>] sont données par les tableaux respectifs: tab. A-1 et tab. A-2.

$B_{01}$	0	$-C_1 A_1$	$-C_1 A_2$	$B_{02}$	0	$-C_1 A_3$	$-C_1 A_4$
$\Gamma_{12}^2 A_{01}$	$n/r^2 A_{01}$	$-C_2 A_1$	$-C_2 A_2$	$\Gamma_{12}^2 A_{02}$	$n/r^2 A_{02}$	$-C_2 A_3$	$-C_2 A_4$
$n/r A_{01}$	$B_{01}/r - 2/r \Gamma_{12}^2 A_{01}$	0	0	$n/r A_{02}$	$B_{02}/r - 2/r \Gamma_{12}^2 A_{02}$	0	0
0	0	$D_1$	$D_2$	0	0	$D_3$	$D_4$
0	0	$-n^2/r^2 A_1 - \Gamma_{12}^2 B_1$	$-n^2/r^2 A_2 - \Gamma_{12}^2 B_2$	0	0	$-n^2/r^2 A_3 - \Gamma_{12}^2 B_3$	$-n^2/r^2 A_4 - \Gamma_{12}^2 B_4$
0	0	$-2n B_1 / r - 2/r \Gamma_{12}^2 A_1$	$-2n B_2 / r - 2/r \Gamma_{12}^2 A_2$	0	0	$-2n B_3 / r - 2/r \Gamma_{12}^2 A_3$	$-2n B_4 / r - 2/r \Gamma_{12}^2 A_4$

tab. A-1 Les composantes de la matrice [B] avec  $A_{01}=(1-\xi)/2$ ,  
 $A_{02}=(1+\xi)/2$  et  $B_{01}=-1/2s'$

$$\begin{bmatrix} A_{o1} & 0 & 0 & 0 & A_{o2} & 0 & 0 & 0 \\ B_{o1} & 0 & 0 & 0 & B_{o2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{o1} & 0 & 0 & 0 & A_{o2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{o1} & 0 & 0 & 0 & B_{o2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & 0 & 0 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$$

tab. A-2 Les éléments de la matrice [B<sup>d</sup>]

Les matrices de chargement [D<sup>o</sup><sub>1</sub>] et [D<sup>o</sup><sub>2</sub>] sont des matrices carrées 6x6. En théorie de coques de D.M.V., elles sont simples à écrire, car elles comportent chacune un élément non nul, à savoir D<sup>o</sup><sub>1</sub>(1,1)=1 pour [D<sup>o</sup><sub>1</sub>] et D<sup>o</sup><sub>2</sub>(5,5)=n<sup>2</sup>, pour [D<sup>o</sup><sub>2</sub>], avec n représentant le nombre d'ondes circonférentiel. Les valeurs de ces éléments des deux matrices de chargement sont obtenues à partir des dérivées secondes de la vitesse normale w, par rapport aux variables intrinsèques: l'abscisse curviligne s et l'angle de révolution θ. Les autres éléments des deux matrices sont des zéros.

Enfin, on rappelle qu'on a signalé au chapitre III, l'existence de deux relations longues à écrire, leurs expressions sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{G} = & (1/Eh) \{ 1/r^2 [M_{11}(1/r^2 \dot{f}_{,22} + \Gamma^2_{12} \dot{f}_{,1}) + M_{12} \dot{f}_{,11}]_{,22} + \\ & [M_{12}(1/r^2 \dot{f}_{,22} + \Gamma^2_{12} \dot{f}_{,1}) + M_{22} \dot{f}_{,11}]_{,11} + 2/r [2M_{33}(1/r \dot{f}_{,21} - \Gamma^2_{12} 1/r \dot{f}_{,2})]_{,12} \\ & + 2\Gamma^2_{12}/r [2M_{33}(1/r \dot{f}_{,12} - \Gamma^2_{12} 1/r \dot{f}_{,2})]_{,2} - 2(\Gamma^2_{12})^2 [M_{11}(1/r^2 \dot{f}_{,22} \\ & + \Gamma^2_{12} \dot{f}_{,1}) + M_{12} \dot{f}_{,11}] - 2[M_{12}(1/r^2 \dot{f}_{,22} + \Gamma^2_{12} \dot{f}_{,1}) + M_{22} \dot{f}_{,11}] \Gamma^2_{12,11} \\ & - 2\Gamma^2_{12} [M_{12}(1/r^2 \dot{f}_{,22} + \Gamma^2_{12} \dot{f}_{,1}) + M_{22} \dot{f}_{,11}]_{,1} \\ & - 2\Gamma^2_{12} [M_{11}(1/r^2 \dot{f}_{,22} + \Gamma^2_{12} \dot{f}_{,1}) + M_{12} \dot{f}_{,11}]_{,1} \} \quad (A-12) \end{aligned}$$

$$\dot{K} = (Eh^3/12) \{ [H^{11} \dot{w}_{,11} + H^{12}(1/r^2 \dot{w}_{,22} + \Gamma^2_{12} \dot{w}_{,1})]_{,11} +$$

$$\begin{aligned}
 & 2/r[2H^{33}(1/r\dot{w}_{,12}-\Gamma^2_{12}/r\dot{w}_{,2}),_{12}+1/r^2[H^{12}\dot{w}_{,11}+H^{22}(1/r^2\dot{w}_{,22}+\Gamma^2_{12}\dot{w}_{,1})],_{22}+ \\
 & 2\Gamma^2_{12}[(H^{11}-H^{12})\dot{w}_{,11}+(H^{12}-H^{22})(1/r^2\dot{w}_{,22}+\Gamma^2_{12}\dot{w}_{,1})],_{1}+ \\
 & 2(\Gamma^2_{12})^2[(H^{11}-3H^{12})\dot{w}_{,11}+(H^{12}-3H^{22})(1/r^2\dot{w}_{,22}+\Gamma^2_{12}\dot{w}_{,1})]+ \\
 & 6\Gamma^2_{12}1/r[2H^{33}(1/r\dot{w}_{,12}-\Gamma^2_{12}/r\dot{w}_{,2}),_{2}] \tag{A-13}
 \end{aligned}$$

où h est l'épaisseur de la coque étudiée, E est le module d'Young et les matrices [M] et [H] représentent respectivement les coefficients de souplesse et les coefficients du comportement plastique des lois utilisées.

On note que les dérivées covariantes, sont effectuées à partir d'un formulaire mathématique situé dans la référence[G7].

## REFERENCES

### A

- [A1] ABDELMOULA R., Flambage des coques cylindriques sous pression, influence des conditions aux limites et des défauts (Thèse de l'Université de Metz, juin 1989)
- [A2] ABDELMOULA R., DAMIL N., HATEM K., POTIER-FERRY M. and SIAD L., Simplified analyses for the buckling of shells of revolution. Int. Coll. on "Buckling of shell structures, on land, in sea and the air", Elsevier App. sc., Lyon, 17-19 sept. 1991, p.81-82.
- [A3] ADACHI, J. and BENICEK, M. Buckling of torispherical shells under internal pressure, Exp. Mech., 1964, 4, p.217-222.
- [A4] AKEL, S., Flambage élastoplastique des structures (Thèse de l'E.N.P.C., Paris 1987).
- [A5] ALIX, M., COMBESURE, A., HOFFMANN, A., ROCHE, R., "Système Ceasemt: Méthode de flambement plastique des coques, comparaison à des essais." Sémin. C.C.I.C.O., Le flambement des structures, Saint-Rémy lès-Chevreuse (France) du 20 au 22 mai 1980, p. 117-134.

### B

- [B1] BATDORF, S.B., Theories of Plastic Buckling, J. of the Aero. Sci., July 1949, p. 405-408.
- [B2] BATHE, K.J. Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (U.S.A.), 1976.
- [B3] BRUSH. DON. and ALMOROTH. Bo O., Buckling of Bars, Plates and Shells. Mc Graw-Hill Book Company (1975), p.94-108.
- [B4] BUDIANSKY, B. Theory of Buckling and post Buckling behaviour of elastic structures, Adv. in Appl. Mech., 14 (1974), p. 1-65.
- [B5] BUSHNELL, D. "Bosor5 -Program for Buckling of Elastic-Plastic Shells of Revolution Including Large Deflections and Creep.", Computers and Structures, Vol. 6, 1976, p.221-239
- [B6] BUSHNELL, D. "Non symmetric Buckling of Internally Pressurized Ellipsoidal and Torispherical Elastic-Plastic Pressure Vessel Heads", J. of Pressure Vessel Tech., Trans. ASME, February, 1977, p. 54-63.
- [B7] BUSHNELL, D. Computerized buckling analysis of shells, Mec. of elas. stability 9: Buckling of internally pressurized vessel heads, Martinus Nijhoff Publishers, (1985), p. 92-109.
- [B8] BUSHNELL, D., and GALLETLY, G.D., "Comparaison of test and theory for nonsymmetric Elastic-Plastic buckling of shells of Revolution.", Int. J. Solids Struc., 1974, vol.10, p.1271-1286.



C

- [C1] CHRISTOFFERSEN, J. and HUTCHINSON, J.W. (1979) A Class of Phenomenological Corner theories of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids* 27,p.469-490.
- [C2] CONSIDERE A., Résistance des pièces comprimées (Congrès Int. Proc. Construction 3, librairie polytechnique), Paris 1891, p.371.

D

- [D1] DILLISTROM, P. Colloquium on Stability of Plate and Shell Structures, Ghent University, 6-8 April 1987 p.367-384.
- [D2] DONNELL, L.H., (1976), Beams, Plates and Shells, Mc Graw-Hill New York p.325-358.

E

- [E1] ECCS Technical Commite 8, "Structural instability: European Recommendations for steel Construction, Buckling of shells", (1984).
- [E2] ENGESSER F., Ueber die Knickfestigkeit Gerader Stabe (Z. Architektur Ing. Vol., 1889, p.455.

G

- [G1] GALLETLY, G. D. "Internal pressure buckling of very thin torispherical shells comparaison of experiment and theory", 3rd SMiRT Conf., London, Paper G2/3 (1975).
- [G2] GALLETLY, G. D. Plastic Buckling of Torispherical and Ellipsoidal Shells subjected to internal pressure proc. Instn. Mech. Engrs., Vol.195, p.329-345, I-MechE 1981
- [G3] GALLETLY, D. and BLACHUT, J., Plastic Buckling of Internally-Pressurized Torispherical shells. Stability of metal structures Paris 16-17 nov. 1983; final repport.
- [G4] GALLETLY, G.D., and RADHAMOHAN, S.K., "Elastic-Plastic Buckling of Internally-Pressurized Thin Torispherical shells", *J. of Pressure VesselTech., Trans. ASME*, 101,1979, p. 216-225.
- [G5] GERARG, G. and BECKER, H., Hnadbook of Structural Stability: Part. I, buckling of flat plates, *Nat. Adv. Comm. Areronaut.Tech. Note* 3781, 1957.
- [G6] GOULD, P.L., *Finite Element Analysis of Shells of Revolution*, Pitman Press (1985), p. 68-75.
- [G7] GREEN, A.E. and ZERNA, *Theorytical elasticity*, Oxford Press (1954)

## H

- [H1] HILL, R., (1958) A General theory of Uniqueness and Stability in elastic-plastic Solids. *J. Mech. Phys. Solids* 6, p.236-249.  
[H2] HUTCHINSON, J.W. Plastic Buckling *adv. Appl. Mech.* 14, p.67-144(1974).

## K

- [K1] KOITER W.T., General theory of Stability, thin Shell theory, New trends and Applications, Edited by W. Olszak (1980) p.65-76.  
[K2] KOITER, W.T., On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch Ser. B.* 69, (1966), p. 1-54.  
[K3] KOITER, W.T., Stress-Strain relations uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Notes*, vol. XI n°3, 1952, p.350-354.

## L

- [L1] LAGAE, G. and BUSHNELL, D., Elastic-plastic buckling of Internally-Pressurized torispherical vessel heads, *Nuclear Eng. and Design*, Vol. 48, (1978), p. 405-414.  
[L2] LARS, D. Elastic Plastic Buckling of a finite length cruciform column Dpt Of Structural Engineering Technical University of Denmark, Lyngby Denmark may 1984.  
[L3] LEGER, A. et POTIER FERRY, M. , Sur le flambage plastique, *J. de Mec. théo. et appl.* , vol. 7, n°6, 1988, p. 819-857.

## M

- [M1] MUSHTARI, Kh. M. (1938), Certain generalisations of the theories of thin shells, (in Russian), *Izv. Fiz. Mat. Ob. Prikaz.* U.11 (8).

## N

- [N1] NEEDLEMAN, A. and TVERGAARD V., Aspect of Plastic Post-buckling Behaviour *Mechanics of Solids*, the RODNEY HILL 60th Anniversary volume (eds. H.G. HOPKINS and M.J. SWELL), Pergamon Press, Oxford, 1982 p.453-498.  
[N2] NIORDSON, F.I., *Shell theory Appl. Math. and Mech.* vol. 29, North Holland (1985).

P

[P1] POTIER FERRY M., On the mathematical fonctions of Elastic Stability theory (arch. Rat. Mecah. anal., Vol. 18,1982 p.301-320.

Q

[Q1] QUOC SON, N. Bifurcation et stabilité des systèmes réversibles obéissant au principe de la dissipation maximale, J. de Méca. Théo. et Appl., Vol. 3, n°1, 1984, p. 41-61.

S

[S1] SANDERS J.L. (1963) Nonlinear theories for thin shells. Quart. Appl. Math. 21, p.21-36.

[S2] SHANLEY F.R.,(1947) Inelasitic Column theory, J. Aeronat. Sci. 14,p. 261- 267.

[S3] SINGER J.,BARUCH M.,and BEICHENTHAL J.,Influence of In-Plane Boundary Conditions of the Buckling of Clamped Conical Shells, (December,1970)

[S4] SOBEL, L.H. Effet of Boundary Conditions on the Stability of Cylinders Subject to Lateral and Axial Presures A.I.A.A. Journal, 2 (August,1964) p.1437-1440.

[S5] SWELL, M.J., A Plastic flow rule at Yield Vertex J. Mech. Phys. Solids, 1974, vol. 22, p. 469-490.

T

[T1] TIMOCHENKO, S.P. and GERE, J.M. (1961). Theory of Elastic Stability 2nd Ed. Mc Graw-Hill, New York.

[T2] TIMOCHENKO, S. Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, New York, 1940

[T3] TVERGAARD, V. Effet of Plasticity on Post-Buckling Behaviour, Dpt of Solids Mechanics, University of Denmark, Lyngby, Denmark, p. 143-183.

V

[V1] VLASOV, V.Z. (1944) The fundamental differential equations of the general theory of elastic shells (in Russian), Prikl. Mat. Mech. Akad. Nauk S.S.S.R. 8(2).

**Z**

- [Z1] ZIENKIEWICZ, O.C., The finite element method, Mc GrawHill, London, 1977.
- [Z2] ZOELLY, R. Uber ein Knikungs Problem an der Kugelschale Dissertation Zurich 1915.