



HAL
open science

Analyse numérique de problèmes non convexes à donnée au bord non linéaire

Wei Li

► **To cite this version:**

Wei Li. Analyse numérique de problèmes non convexes à donnée au bord non linéaire. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1993. Français. NNT : 1993METZ010S . tel-01775433

HAL Id: tel-01775433

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775433v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UB 7853

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ
pour l'obtention du
Doctorat de l'Université de Metz
en Mathématiques

mention : Mathématiques Appliquées,
par Mr Wei LI.

Titre de la thèse :

ANALYSE NUMERIQUE DE PROBLEMES NON CONVEXES
A DONNEES AU BORD NON LINEAIRES

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19930295
Cote	SM3 93/10
Loc	Magan

Soutenue le 8 juillet 1993 devant le jury composé de :

- S. BENACHOUR, professeur à l'Université de Nancy II. Rapporteur.
- M. CHIPOT, professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.
- F. CONRAD, professeur à l'Université de Nancy II. Rapporteur.
- P.A. VUILLERMOT, professeur à l'IUFM de Lorraine.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur M. Chipot, qui a su au cours de ces dernières années, me guider, m'encourager et me faire confiance.

Je voudrais remercier Messieurs les Professeurs S. Benachour et F. Conrad qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie également Monsieur le Professeur P. A. Vuillermot qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury.

Merci aussi au Docteur B. Brighi et au Monsieur le Professeur M. Chipot de m'avoir toujours, si gentiment, consacré du temps pour corriger le français de cette thèse .

D'autre part, je voudrais dire qu'il m'a été très agréable de travailler au sein du département de Mathématiques de l'Université de Metz, où les contacts ont été chaleureux et enrichissants.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé au cours de ce travail.

A mes parents,
à ma femme,
et à mon fils.

ANALYSE NUMERIQUE DE PROBLEMES NON CONVEXES

A DONNEES AU BORD NON LINEAIRES

NOTATIONS

Dans toute la suite, les notations utilisées sont, dans la plupart des cas, définies dans le texte. Néanmoins, quelques notations ou définitions "standards" ont été volontairement omises. Nous les rappelons ci-dessous.

– Pour $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, on note

$\partial\Omega$ la frontière de Ω ,

$|\Omega|$ la mesure (de Lebesgue) de Ω ,

et on dit que Ω est un domaine de \mathbf{R}^n , si Ω est un ouvert 1-régulier de \mathbf{R}^n (cf. [R.T.] def. 1.3-1 p.22).

– Pour $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$, $co\mathcal{A}$ désigne l'enveloppe convexe de \mathcal{A} . C'est-à-dire

$$Co\mathcal{A} = \left\{ y = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \mid y_i \in \mathcal{A} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \quad k \text{ est un entier} \right\}.$$

– Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$, $d(A, B)$ est la distance de A à B , i.e.

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b|$$

en particulier, si $x \in \mathbf{R}^n$, on note $d(x, A) = d(\{x\}, A)$.

– Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon)$ et $\bar{B}(x, \epsilon)$ sont respectivement la boule ouverte et la boule fermée de centre x et de rayon ϵ .

TABLE DES MATIERES

0. Introduction.....	4
1. Position du problème.....	7
2. Estimation de l'énergie	10
3. Analyse des mesures de Young associées aux problèmes.....	22
4. Analyse probabiliste.....	28
REFERENCES	41

ANALYSE NUMERIQUE DE PROBLEMES NON CONVEXES

A DONNEES AU BORD NON LINEAIRES

0. INTRODUCTION

Durant les dernières années, les problèmes de calcul des variations ont suscité un intérêt considérable. Ceci est dû au fait que, d'une part, certains problèmes physiques (par exemple en élasticité, mécanique etc.) font appel au calcul des variations, d'autre part du point de vu mathématique, les méthodes constituent un outil puissant. De plus les méthodes variationnelles sont bien adaptées au traitement numérique.

Sous forme générale, le problème est le suivant:

$$\min\{E(v) \mid v \in X \text{ et } v = v_0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (0.1)$$

où par exemple

$$E(v) = \int_{\Omega} \varphi(x, v(x), \nabla v(x)) dx. \quad (0.2)$$

Ω est un domaine borné de R^n , φ est une fonction

$$\varphi : \Omega \times R^m \times R^{n \times m} \rightarrow R^+ = [0, +\infty)$$

v_0 est une fonction fixée, et X un certain espace de Banach, par exemple un espace de Sobolev $W^{1,q}(\Omega)$.

Le problème qui nous intéresse est lorsque la fonction $\varphi(x, v(x), \cdot)$ (par exemple une certaine certaine énergie) possède des puits de potentiels : $w_i(x)$ c'est-à-dire que

$$\varphi(x, v, w_i(x)) = 0 \quad x \in \Omega \quad i \in I(x)$$

où $I(x)$ est un ensemble d'indice. On s'intéressera en particulier aux problèmes suivants:

$$\inf \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx \quad (I)$$

$$\inf \int_{\Omega} [\varphi(\nabla v(x)) + \Psi(v(x) - A(x))] dx \quad (II)$$

où les infima sont pris sur un certain espace de Sobolev, par exemple inclus dans $W^{1,p}(\Omega)$

Le problème de ce type a été considéré par C. Collins, D. Kinderlerer, M. Luskin en dimension un. Le problème était le suivant:

$$(A) \quad \inf_{H^1} \int_0^1 [\varphi(v'(x)) + (v(x) - A(x))^2] dx$$

où $\varphi(s)$ est une fonction continue d'une variable telle que pour $s_l < \bar{s} < s_u$, $0 < \bar{\alpha} < (s_u - s_l)/2$ et $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, on ait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(s) > \varphi(s_l) = \varphi(s_u) = 0 & \text{pour } s \neq s_l, s_u, \\ \varphi(s) \geq \lambda_1(s - s_l)^2 & \text{pour } |s - s_l| \leq \bar{\alpha}, \\ \varphi(s) \geq \lambda_1(s - s_u)^2 & \text{pour } |s - s_u| \leq \bar{\alpha}, \\ \varphi(s) \geq \lambda_1(\bar{\alpha})^2 & \text{pour } s_l + \bar{\alpha} < s < s_u - \bar{\alpha}, \\ \varphi(s) \geq \lambda_2(s - \bar{s})^2 & \text{pour } s < s_l - \bar{\alpha} \text{ ou } s > s_u + \bar{\alpha}. \end{array} \right.$$

et où

$$A(x) = \bar{s} \cdot x + b$$

et $v \in H^1(\Gamma), \Gamma = (0, 1)$.

Ensuite, des problèmes en dimension supérieure ont été considérés par M. Chipot et C. Collins (voir [C.2], [C.C]). Leurs problèmes étaient

$$(B) \quad \inf_{v \in W_a^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx$$

$$(C) \quad \inf_{v \in W_a^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - a \cdot x) + \varphi(\nabla v(x)) dx$$

$$(D) \quad \inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) dx$$

où

$$W_a^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) | v(x) = a \cdot x \text{ sur } \partial\Omega\},$$

et Ω est un domaine borné, et φ possède des puits w_i $i = 1, \dots, k$ tels que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

$$\varphi(w) > 0 \quad \forall w \neq w_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Récemment, les résultats de problème (B),(C) ont été généralisés dans le cas vectoriel par M. Chipot, C.Collins, D. Kinderlerer.

Dans tous les problèmes avec des puits de potentiels, les difficultés résident dans le fait que la densité d'énergie φ est non convexe, par conséquent les fonctionnelles suivantes

$$E_1(v) = \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx$$

$$E_2(v) = \int_{\Omega} [\varphi(\nabla v(x)) + \Psi(v(x) - A(x))] dx$$

ne sont pas en général semicontinues inférieurement faiblement. Pour tous les problèmes précédents, les minima n'existent pas en général. Néanmoins, une description des solutions approchées peut être réalisée à l'aide du concept de mesure de Young, qui explique les comportements des suites minimisantes.

De tels problèmes interviennent en élasticité par exemple pour des cristaux, etc. (voir par exemple [B.J.₁], [B.J.₂], [Er.], [F.₁], [F.₂], [J.₁], [J.₂], [J.K.], [K.], [Ko.]). $E_i(v)$, $i = 1, 2$ représente l'énergie de déformation de matériaux. D'un point de vue physique, l'énergie diminue d'une certaine manière. Donc, il est intéressant de savoir à quelle vitesse et de quelle façon l'énergie décroît vers son infimum. Dans la Section 2, nous donnerons une estimation de l'énergie à l'aide de la méthode des éléments finis. Et dans la Section 3 nous obtiendrons un résultat d'unicité concernant les mesures de Young associées aux problèmes qui explique le comportement de la déformation. Les rapports entre (B) et (D) sont exposés dans [B.M] et pour toute notion sur les espace de Sobolev, Nous renvoyons à [G.T] ou [H.B].

1. POSITION DU PROBLEME

Soit Ω un domaine borné de \mathbf{R}^n , $n \geq 2$, de frontière Γ . Pour simplifier, nous le supposons polygonal. Soient ensuite $w_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, ($k \geq 2$) et $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad (1.1)$$

$$\varphi(w) > 0 \quad \forall w \neq w_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.2)$$

De telles fonctions interviennent souvent en physique, et plus particulièrement en mécanique des matériaux. Par exemple, φ peut être une densité d'énergie qui s'annule aux puits w_i .

Nous désignons par Ψ une fonction non-négative et continue telle que, pour certains réels $q > 0$, $c > 0$, et $M > 0$, on ait

$$0 \leq \Psi(\xi) \leq c|\xi|^q \quad \forall \xi \in (-M, M). \quad (1.3)$$

Soit $A(x)$ une fonction Lipschitzienne i.e.

$$A \in W^{1,\infty}(\Omega). \quad (1.4)$$

Nous définissons $W_A^{1,\infty}(\Omega)$ comme l'ensemble :

$$W_A^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma\}. \quad (1.5)$$

Les problèmes auxquels nous nous intéressons sont les suivants

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) \, dx \quad (1.6)$$

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \quad (1.7)$$

$$\inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) dx \quad (1.8)$$

Plus précisément, nous envisagerons d'étudier ceux-ci lorsque

$$\nabla A(x) \in Co(w_i) \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \quad (1.9)$$

Pour préciser les choses, nous dirons qu'une triangulation de Ω i.e. $\{\mathcal{T}_h : h > 0\}$ est régulière si

$$\forall h > 0 \quad \begin{cases} \forall K \in \mathcal{T}_h, K \text{ est un } n\text{-simplexe,} \\ \max_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K) = h, \\ \exists \nu > 0 \text{ tel que } \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \nu, \end{cases} \quad (1.10)$$

où h_K est le diamètre de K et ρ_K est la rondeur de K , c'est-à-dire ρ_K est le diamètre maximum des sphères (cercles lorsque $n = 2$) contenues dans K . Soit $P_1(K)$ l'espace des polynômes de degré ≤ 1 sur K . Notons

$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue, } v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.11)$$

et désignons \hat{A} l'interpolé affine de A sur τ_h qui est déterminé uniquement par A et τ_h .

Remarque 1.1 : Si $\nabla A \in Co(w_i)$, en général, on n'a pas nécessairement

$$\nabla \hat{A} \in Co(w_i).$$

Ensuite, désignons par

$$V_h^{\hat{A}} = \{v : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue} \mid v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v = \hat{A} \text{ sur } \Gamma\}. \quad (1.12)$$

Notre but est d'obtenir une estimation des infima

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx \quad (1.13)$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) dx \quad (1.14)$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) dx \quad (1.15)$$

en terme de la taille h . Il est évident que les infima de (1.13)-(1.15) sont des approximations des problemes (1.6), (1.7) et (1.8).

Remarque 1.2 : Dans le cas où A est affine sur chaque face de Γ , alors on a $\hat{A} = A$. Signalons que pour les problemes (1.13),(1.14) et (1.15) il n'y a pas d'hypothèse à imposer sur φ . cependant, pour (1.6)-(1.8) on peut supposer que φ est Borel-mesurable.

Dans notre problème, le fait que A soit non-linéaire introduit des difficultés nécessitant de nouvelles techniques pour le résoudre.

Signalons d'abord que l'on peut toujours supposer sans perdre de généralité que

$$0 \in \text{ri}(Co(w_i)) \quad (1.16)$$

où $\text{ri}(Co(w_i))$ désigne l'intérieur relatif de $Co(w_i)$ -i.e. l'intérieur de $Co(w_i)$ dans le sous-espace engendré par les vecteurs $w_i - w_1$. En effet, soit $w \in \text{ri}(co(w_i))$, on peut faire une translation,

$$v = u + w \cdot x \quad (1.17)$$

où $w \cdot x$ désigne le produit scalaire de w et x . Ainsi, elle nous entraîne à minimiser

$$\int_{\Omega} \Psi(u(x) - (A(x) - w \cdot x)) + \varphi(w + \nabla u(x)) dx \quad (1.18)$$

sur un certain espace. Donc, si nous notons

$$\tilde{\varphi}(w) = \varphi(w + \xi) \quad , \quad \tilde{A}(x) = A(x) - w \cdot x \quad (1.19)$$

alors, on est ramené au même probleme avec des puits $w_i - w$ qui verifient

$$0 \in \text{ri}(Co(w_i - w)) \quad , \quad \nabla \tilde{A}(x) \in Co(w_i - w) \text{ a.e. } x \in \Omega. \quad (1.20)$$

Donc, dans la suite, nous supposons toujours que (1.16) est vrai. Nous noterons $W = L(w_i)$ le sous espace engendré par les w_i . On peut toujours trouver $p+1$ vecteurs: w_i , $i = 0, 1, \dots, p$ tels que

$$0 = \sum_{i=0}^p \alpha_i w_i \quad , \quad \alpha_i \in (0, 1). \quad (1.21)$$

et

$$w_i - w_0, i = 1, \dots, p, \text{ indépendants linéairement} \quad (1.22)$$

où $p = \dim L(w_i)$. Les coefficients α_i sont determinés de façon unique par le choix des w_i .

2. ESTIMATION DE L'ENERGIE

Notre résultat principal est le suivant :

Theorem 2.1 : *Supposons que*

(1) Ω est convexe et borné,

(2) φ est une fonction bornée sur les bornés de \mathbf{R}^n qui vérifie (1.1) et (1.2),

(3) Ψ est une fonction continue satisfaisant (1.3).

Si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie

$\exists K$ compact contenu dans $\text{ri}(\text{Co}(w_i))$ tel que

$$\nabla A(x) \in K \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (2.1)$$

alors, il existe une constante C , indépendante de $h \in (0,1)$, telle que

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^A} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^A} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) dx \leq Ch^{\frac{r}{r+1}}, \quad (2.3)$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_{\Omega} \Psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) dx \leq Ch^{\frac{q}{q+1}} \quad (2.4)$$

où $r = q \wedge 1$, (\wedge désigne l'infimum de deux nombres).

Pour prouver le Theoreme 2.1, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 2.1 : *Supposons que $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (1.9). Alors, si le segment $[x, x']$ est contenu dans Ω on a :*

$$\bigwedge_i w_i \cdot (x - x') \leq A(x) - A(x') \leq \bigvee_i w_i \cdot (x - x') \quad (2.5)$$

Remarque 2.2 : Une conséquence immédiate de Lemme 2.1 est que

$$A(x) - A(x') = 0$$

sur chaque segment $[x, x']$ tel que $x - x' \in W^\perp$, où W^\perp désigne l'espace orthogonal de W , qui est réduit à zéro lorsque $w_i, i = 1, \dots, k$ engendrent tout l'espace.

Maintenant, nous désignons par v_1, v_2, \dots, v_p une base de W et par x_z les points du réseau de taille h^α , ($\alpha \in (0, 1)$ sera choisi plus loin) engendré par les v_i i.e. pour $z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbf{Z}^p$ quelconque

$$x_z = \sum_{i=1}^p z_i h^\alpha v_i. \quad (2.6)$$

Nous définissons ensuite la fonction Λ par

$$\Lambda(x) = \bigwedge_{\{z | x_z \in \Omega\}} \{A(x_z) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z)\}. \quad (2.7)$$

Signalons que Λ est constante dans la direction W^\perp , (voir Remarque 2.2), et nous la considérerons comme une fonction de $x \in W$ aussi bien qu'une fonction de $x \in \mathbf{R}^n$. Par définition une cellule unitaire du réseau engendré par $h^\alpha v_i$, sera

$$x_z + \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i h^\alpha v_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \right\}$$

où x_z est défini par (2.6). Ensuite, car (2.1) est vrai, on a pour un certain $\lambda \in (0, 1)$

$$\nabla \frac{A}{\lambda} \in Co(w_i). \quad (2.8)$$

En vertu du Lemme 2.1, on déduit

$$A(x) - A(y) \leq \lambda \bigvee_i w_i \cdot (x - y) \quad (2.9)$$

pour tout segment $[x, y]$ contenu dans Ω . Ainsi, nous avons :

Lemma 2.2 : *Supposons que Ω est convexe. Sous les hypothèses précédentes. notons C une cellule unitaire engendrée par les $h^\alpha v_i$. Alors, il existe une constante C indépendante de C et $\lambda, h \in (0, 1)$, telle que pour tout $x \in C$, le nombre de z pour lequel on doit prendre l'infimum dans (2.7) est uniformément borné par*

$$\frac{C}{(1 - \lambda)^p} \quad (2.10)$$

i.e.

$$\begin{aligned}\Lambda(x) &= \bigwedge_{\{z|x_z \in \Omega\}} \{A(x_z) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z)\} \\ &= \bigwedge_{z_i} \{A(x_{z_i}) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_i})\}\end{aligned}$$

où le nombre des z_i est borné par (2.10).

Démonstration : Supposons que

$$\mathcal{C} = x_{z_0} + \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i h^\alpha v_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \right\}.$$

Dans (2.7) en fait, on ne prend pas l'infimum sur les z tels que

$$A(x_{z_0}) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq A(x_z) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z). \quad (2.11)$$

Or, ceci est équivalent à

$$A(x_{z_0}) - A(x_z) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z) \quad (2.12)$$

et grâce au Lemme 2.1, (voir (2.9)), (2.12) est vrai si

$$\lambda \bigvee_i w_i \cdot (x_{z_0} - x_z) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z)$$

ou

$$\lambda \bigvee_i \{w_i \cdot (x_{z_0} - x) + w_i \cdot (x - x_z)\} + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z). \quad (2.13)$$

Tenant compte de l'inégalité qui est toujours vraie

$$\bigvee_i \{w_i \cdot (x_{z_0} - x) + w_i \cdot (x - x_z)\} \leq \bigvee_i w_i \cdot (x_{z_0} - x) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z)$$

(2.13) est vrai si

$$\lambda \bigvee_i w_i \cdot (x_{z_0} - x) + \lambda \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq \bigvee_i w_i \cdot (x - x_z). \quad (2.14)$$

Puisque

$$\lambda \bigvee_i w_i \cdot (x_{z_0} - x) \leq \bigvee_i w_i \cdot (x_{z_0} - x)$$

(2.14) est vrai si

$$\bigvee_i w_i \cdot (x_{z_0} - x) + \bigvee_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq (1 - \lambda) \bigvee_i w_i \cdot \frac{(x - x_z)}{|x - x_z|} \cdot |x - x_z|. \quad (2.15)$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}$, $x - x_{z_0}$ appartient à la cellule

$$\left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i h^\alpha v_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \right\}$$

et pour une certaine constante C on a ,

$$\forall_i w_i \cdot (x_{z_0} - x) + \forall_i w_i \cdot (x - x_{z_0}) \leq Ch^\alpha \quad \forall x \in \mathcal{C}. \quad (2.16)$$

Maintenant,

$$\frac{(x - x_z)}{|x - x_z|} \in S(0, 1)$$

où $S(0, 1)$ désigne la sphère unitaire de W . D'autre part, nous savons que

$$\forall_i w_i \cdot v > 0 \quad \forall v \in W, v \neq 0. \quad (2.17)$$

En effet, sinon, pour tout i , nous aurions $w_i \cdot v \leq 0$ et en vertu de (1.21), nous aurions

$$\sum_i \alpha_i w_i \cdot v = 0,$$

soit

$$w_i \cdot v = 0.$$

Puisque les w_i engendrent l'espace W , on aurait alors nécessairement $v = 0$, et ceci entraîne une contradiction. Donc, (2.17) est vrai. Il en résulte par un argument de compacité qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$\forall_i w_i \cdot v \geq \eta > 0 \quad \forall v \in S(0, 1).$$

ainsi, tenons compte de (2.16), (2.15) est vrai si

$$Ch^\alpha \leq (1 - \lambda) \eta |x - x_z|.$$

En particulier, pour l'infimum (2.7) nous ne devons tenir compte que des x_z pour lesquels

$$|x - x_z| < \frac{Ch^\alpha}{(1 - \lambda)\eta}.$$

Il est clair que le nombre de ces x_z satisfait (2.10). La démonstration du lemme est maintenant complète .

Montrons maintenant:

Lemma 2.3 : *Supposons que Ω soit convexe. Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$A(x) \leq \Lambda(x) \leq A(x) + C.h^\alpha. \quad (2.18)$$

Démonstration : Puisque Ω est convexe on obtient en utilisant le Lemme 2.1

$$A(x) \leq A(x_z) + \bigvee_i w_i \cdot x - x_z \quad \forall x_z \in \Omega$$

qui donne

$$A(x) \leq \Lambda(x).$$

Ensuite, pour $x \in \Omega$, notons par x_z le point le plus proche de x parmi les points x_z . Il est clair que

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &\leq A(x_z) + \bigvee_i w_i \cdot x - x_z \\ &\leq A(x) + A(x_z) - A(x) + \bigvee_i w_i \cdot x - x_z \\ &\leq A(x) + C.h^\alpha. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration.

Démonstration du Théorème 2.1 :

Preuve de (2.4) : Soit \hat{u}_h l'interpolé de la fonction $\Lambda(x)$ définie en (2.7). Il est clair que $\hat{u}_h \in V_h$. Ensuite, puisque

$$\nabla \Lambda(x) = w_i \quad \text{p.p.}$$

Λ est une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz bornée uniformément. Il en est de même pour \hat{u}_h (voir, par exemple [B.C.] ou [Br.]). Puis, grâce au théorème des accroissements finis (voir Lemme 2.1), on a

$$|\Lambda(x) - \hat{u}_h(x)| \leq Ch$$

pour une certaine constante C . Lorsque $\alpha \in (0, 1)$ on déduit de (2.18) que

$$\begin{aligned} |A(x) - \hat{u}_h(x)| &\leq |A(x) - \Lambda(x)| + |\Lambda(x) - \hat{u}_h(x)| \\ &\leq Ch^\alpha + Ch \leq Ch^\alpha. \end{aligned} \tag{2.19}$$

En vertu de (1.3), ceci entraîne que

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) dx \leq C|\Omega|h^{\alpha q} \tag{2.20}$$

(où $|\Omega|$ désigne la mesure de Ω).

Ensuite, nous allons estimer

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx.$$

D'abord, notons que

$$\nabla \hat{u}_h = w_i$$

sauf peut-être sur l'ensemble I où l'on a interpolé. Néanmoins, sur cet ensemble I , $\nabla \hat{u}_h$ reste borné, donc

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq C|I|. \quad (2.21)$$

où $|I|$ désigne la mesure de Lebesgue de I . Or, l'interpolation a lieu seulement sur un h -voisinage de l'ensemble où le gradient de Λ n'est pas continu. Il est clair que $\Lambda(x)$ a un saut dans son gradient sur chaque cellule unitaire engendré par $h^\alpha v_i$ quand une des fonctions:

$$A(x_z) + w_i \cdot (x - x_z)$$

est égale à une autre. Deux telle fonctions sont égales sur un ensemble, de $(p-1)$ -dimension, de mesure bornée par $C(h^\alpha)^{p-1}$ (intersection d'un hyperplan et d'une cellule de diamètre borné par Ch^α). Donc, il est clair que

$$|I| \leq C(h^\alpha)^{p-1} \cdot h \cdot N \quad (2.22)$$

où N est le nombre de cellules contenues dans $P_W(\Omega)$ (P_W désignant la projection de Ω sur W). Clairement on a,

$$N \cdot (h^\alpha)^p \leq C.$$

ainsi (2.22) s'écrit

$$|I| \leq Ch^{1-\alpha}. \quad (2.23)$$

reunissons (2.20), (2.21) et (2.23) on obtient,

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq C(h^{\alpha q} + h^{1-\alpha}).$$

l'exposant est optimal dans l'inégalité précédente lorsque $\alpha q = 1 - \alpha$ i.e. quand $\alpha = \frac{1}{q+1}$. Ceci complète la preuve de (2.4).

Remarque 2.3 : L'estimation (2.4) est optimale (voir [C.M.]).

Preuve de (2.2), (2.3) : En ayant défini $\Lambda(x)$ comme précédemment, remarquons que cette fonction n'est pas nécessairement égale à $A(x)$ sur la frontière de Ω . Donc, son interpolé n'appartient pas en général à V_h^A . Afin de corriger ceci, on pose

$$u_h = \Lambda(x) \wedge (A(x) + \text{dist}(x, \Gamma)).$$

Il est évident que $u_h = A(x)$ sur Γ . Puis, définissons

$$\hat{u}_h = \text{l'interpolé de } u_h \text{ sur } \tau_h.$$

ainsi, on a $\hat{u}_h \in V_h^A$.

Comme plus haut, on a

$$|\hat{u}_h(x) - A(x)| \leq Ch^\alpha$$

En vertu de (1.3) et (2.20), on aboutit à

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) dx \leq Ch^{\alpha q}. \quad (2.24)$$

Ensuite, comme dans la partie 1,

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq C|I| \quad (2.25)$$

où I désigne l'ensemble où l'interpolation a lieu. Remarquons que lorsque

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h$$

où C est la constante de (2.18), on a

$$\Lambda(x) \leq A(x) + \text{dist}(x, \Gamma)$$

autrement dit

$$u_h(x) = \Lambda(x).$$

ainsi

$$\hat{u}_h = \text{l'interpolé de } \Lambda(x).$$

En posant

$$I_1 = \{x \mid \text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h\},$$

par une estimation comme celle de la Preuve de (2.4), on obtient,

$$\int_{I_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq Ch^{1-\alpha}. \quad (2.26)$$

Ensuite, on estime

$$\int_{\Omega \setminus I_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx. \quad (2.27)$$

Puisque le gradient de \hat{u}_h reste borné uniformément sur $\Omega \setminus I_1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus I_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx C \cdot |\Omega \setminus I_1| &\leq C \cdot |\Gamma|_{n-1} \cdot (Ch^\alpha + h) \\ &\leq Ch^\alpha. \end{aligned} \quad (2.28)$$

On obtient finalement

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq C(h^{\alpha q} + h^{1-\alpha} + h^\alpha), \quad (2.29)$$

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \, dx \leq C(h^{1-\alpha} + h^\alpha). \quad (2.30)$$

Dans (2.30), l'estimation est optimale lorsque $\alpha = 1 - \alpha$ i.e. quand $\alpha = \frac{1}{2}$. Ceci complète la preuve de (2.2).

Si $q \geq 1$ alors $h^{\alpha q} \leq h^\alpha$ et (2.29) s'écrit

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \, dx \leq C(h^{1-\alpha} + h^\alpha) \quad (2.31)$$

et on obtient encore

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \, dx \leq Ch^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas $q < 1$, $h^\alpha \leq h^{\alpha q}$ et on a

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \, dx \leq C(h^{\alpha q} + h^{1-\alpha}),$$

qui est optimal lorsque $\alpha = \frac{1}{q+1}$. Ces deux dernières inégalités complètent la preuve de (2.3).

Remarque 2.4 : Dans le cas où Ω n'est pas convexe, lorsque $q \geq 1$, et sous les hypothèses du Théorème 2.1, nous avons, pour une certaine constante C

$$E_h^i \leq Ch^{\frac{1}{2}} \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.32)$$

En effet, grâce à (1.3), on a

$$E_h^1 \leq E_h^2$$

et puisque $V_h^A \subset V_h$

$$E_h^3 \leq E_h^2.$$

Donc, il suffit à démontrer (2.32) pour $i = 2$. Or, il est évident qu'un domaine polygonal peut être décomposé en plusieurs domaines Ω_i , $i = 1, \dots, N$, qui sont convexes. Puis, sur chaque sous-domaine nous construisons une fonction u_h comme dans la démonstration du Théorème 2.1, avec la condition au bord de Ω_i . Nous appelons alors \hat{u}_h l'interpolé de cette fonction sur τ_h . Donc

$$\int_{\Omega} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \Psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \, dx$$

le résultat se déduit comme plus haut. Dans le cas $q < 1$, on peut arriver de la même manière à

$$E_h^2, E_h^3 \leq Ch^{\frac{q}{q+1}}.$$

Remarque 2.5 Dans le cas où $\nabla A = \text{constante} \neq w_i$ et $\nabla A \in \text{Co}(w_i)$, on a toujours

$$\nabla A \in \text{ri}(\text{Co}(w_i))$$

pour certains w_j . Donc, nos résultats généralisent ceux de [C.C], [C.M] et [C₂].

On donne maintenant des condition pour que (2.2)-(2.4) admettent un minimizer.

Theoreme 2.2 *Supposons que φ et Ψ soient continues et que*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = +\infty \quad \text{dans les cas (2.2), (2.3)} \quad (2.33)$$

ou

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \Psi(\xi) = +\infty \quad \text{dans les cas (2.3), (2.4)} \quad (2.34)$$

alors, les infima (2.2)-(2.4) sont atteints. i.e. il existe $u_h^1 \in V_h^A$, $u_h^2 \in V_h^A$, $u_h^3 \in V_h$ telles que

$$E_h^1 = \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_h^1(x)) dx \quad (2.35)$$

$$E_h^2 = \int_{\Omega} \Psi(u_h^2(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u_h^2(x)) dx \quad (2.36)$$

$$E_h^3 = \int_{\Omega} \Psi(u_h^3(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u_h^3(x)) dx. \quad (2.37)$$

Démonstration En fait, toute fonction de V_h^A ou V_h est déterminée uniquement par ses valeurs sur les noeuds de τ_h . Notons

$$X = \{x = (u_h(n_1), u_h(n_2), \dots, u_h(n_N)) | u_h \in V_h\}$$

où n_k sont les noeuds de τ_h et N est le nombre de noeuds de la triangulation. Donc on peut écrire

$$F_i(x) = E_h^i(u_h) \quad i = 1, 2, 3,$$

avec une définition evidente pour $E_h^i(v)$. Puisque Ψ et φ sont continues, F_i est continue en $x \in X$. Donc, le problème revient à minimiser F_i sur X . Si on peut montrer que $F_i(x) \rightarrow +\infty$, quand $|x| \rightarrow +\infty$ alors, on aura immédiatement que le minimum de chaque F_i est atteint grâce à un argument de compacité.

D'abord, nous montrons ce résultat sous l'hypothèse (2.33). En fait, si $|x| \rightarrow +\infty$ alors, il y a au moins une de ses composantes, par exemple $x_j = u_h(n_j)$ qui va tendre vers $\pm\infty$. Puisque que $|u_h(n_j)| \rightarrow +\infty$, n_j est nécessairement un point interieur de la triangulation. Soit $x \in \Gamma$ tel que

$$\text{dist}(n_j, \Gamma) = \text{dist}(n_j, x)$$

(on suppose pour simplifier que Ω est convexe). Soit \mathfrak{R} l'ensemble des simplexe de τ_h traversés par le segment $[n_j, x]$. Appliquant le théorème des accroissements finis à chaque segment contenu dans un simplexe de \mathfrak{R} on vérifie sans peine que

$$|u_h(n_j) - \hat{A}(x)| \leq \max_{K \in \mathfrak{R}} |\nabla(u_h - \hat{A})|_K |dist(n_j, x)|.$$

D'où pour un certain $K \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} |u_h(n_j) - \hat{A}(x)| &\leq |\nabla u_h|_K - \nabla \hat{A}|_K |dist(n_j, \Gamma)| \\ &\leq (|\nabla u_h|_K + |\nabla \hat{A}|_K) |dist(n_j, \Gamma)|. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\frac{|u_h(n_j) - \hat{A}(x)|}{|dist(n_j, \Gamma)|} - |\nabla \hat{A}|_K \leq |\nabla u_h|_K \rightarrow +\infty. \quad (2.38)$$

De sorte que

$$\begin{aligned} F_i(x) &\geq \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_h(x)) dx \geq \int_K \varphi(\nabla u_h(x)) dx \\ &\geq |K| \varphi(|\nabla u_h|_K) \rightarrow +\infty \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

d' où existence de minima dans ce cas.

Ensuite, supposons que (2.34) soit vraie; on va montrer que $F_2(x)$, $F_3(x)$ tendent vers $+\infty$. Comme on l'a fait plus haut, si $x_j = u_h(n_j)$, (n_j étant un sommet de K) on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Psi(u_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u_h(x)) dx \\ &\geq \int_K \Psi(u_h(x) - A(x)) dx \\ &\geq \inf_{|u_h| \geq \frac{1}{2}|u_h(n_j)|} \Psi(u_h(x) - A(x)) \text{mes}\{x \in K, |u_h(x)| > \frac{1}{2}u_h(n_j)\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Supposons un instant que

$$\text{mes}\{x \in K, |u_h(x)| \geq \frac{1}{2} |u_h(n_j)|\} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^n |K| \quad (2.41)$$

où $|K|$ désigne la mesure de K . Alors, (2.40) s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Psi(u_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u_h(x)) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{3}\right)^n |K| \inf_{|u_h| \geq \frac{1}{2}|u_h(n_j)|} \Psi(u_h(x) - A(x)) \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.42)$$

car $A(x)$ est borné. Autrement dit, $F_i(x) = E_h^i(u_h) \rightarrow +\infty$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. ce qui termine.

Afin de montrer (2.41), sans perdre de généralité, on peut supposer que $n_j = 0$ et

$$u_h(x) = a.x + b \quad x \in K$$

où $b = u_h(n_j)$. Donc, le problème revient à montrer que

$$mes\{x \in K; |a.x + b| \geq \frac{1}{2} |b|\} \geq (\frac{1}{3})^n |K| \quad (2.43)$$

et ceci est un résultat prouvé par M. Chipot et C. Collins dans [C.C]. Donc, la démonstration du Théorème 2.2 est entièrement terminée.

3. ANALYSE DES MESURES DE YOUNG

ASSOCIEES AUX PROBLEMES

On s'attend à ce que la suite \hat{u}_h converge vers un point réalisant le minimum de (1.6), (1.7) ou (1.8). Cependant, il est possible que de tels problèmes n'admettent pas de "minimizer". Autrement dit, il est possible que l'infimum de (1.6), (1.7), (1.8) ne soit jamais atteint. Pour voir ceci, il suffit de remarquer que

$$v_h = \Lambda(x) \wedge (A(x) + \text{dist}(x, \Gamma))$$

fournit dans les trois cas une suite de $W_A^{1,\infty}(\Omega)$ telle que toutes les intégrandes dans (1.6), (1.7), (1.8) tendent vers 0. Par conséquent, les infima de (1.6), (1.7), (1.8) sont égaux à 0.

Si maintenant dans les cas (1.7) et (1.8) on suppose

$$0 < \Psi(\xi) \quad \forall \xi \neq 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla A(x) \neq w_i \quad \text{sur un ensemble de mesure positive,} \quad (3.2)$$

alors, ces problèmes n'admettent aucun minimizer. En effet, si u un tel minimizer, alors

$$\int_{\Omega} \Psi(u(x) - A(x)) \, dx = 0$$

entraîne $u = A$ p.p. . Par suite, on a $\nabla u = \nabla A$ p.p. Mais ceci est impossible car on aurait alors

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla u(x)) \, dx \neq 0.$$

D'où la contradiction puisque on sait déjà que l'infimum est zéro.

Dans le cas (1.6), supposons en plus de (3.2), que l'on fasse l'hypothèse suivante

$$w_i - w_1 \quad \text{engendrent un sous-espace propre de } \mathbf{R}^n. \quad (3.3)$$

Là aussi il n'y a pas de minimizer. En effet, soit u un tel minimizer, alors

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla u(x)) dx = 0.$$

Il en résulte que $\nabla u(x) = w_i$ p.p.. Si ν désigne un vecteur unitaire orthogonal au sous-espace W engendré par $w_i - w_1$, on a

$$(\nabla A - \nabla u) \perp \nu$$

ainsi, on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(A - u) = 0.$$

En vertu de la condition au bord, ceci entraîne

$$u = A$$

puis

$$\nabla u = \nabla A = w_i$$

qui n'est pas possible d'après (3.2).

Nous remarquons d'ailleurs, dans ce cas-là, qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $0 \in Co(w_i)$.

Remarque 3.1 Il est évident que la condition (3.3) est satisfaite automatiquement s'il y a moins de n puits de potentiels w_i $i = 1, \dots, k$.

Malgré l'absence de minimizer, l'énergie décroît jusqu'à son infimum. Donc il est utile d'étudier les suites minimisantes pour voir si elles possèdent des caractéristiques communes. Cela peut être fait à l'aide du concept de mesure de Young.

Dans ce paragraphe, nous supposons que

$$w_i - w_1 \quad i = 2 \dots k \quad \text{sont linéairement indépendants.} \quad (3.4)$$

Comme nous l'avons vu, sous les hypothèses (3.1), (3.2) et (3.3) les problèmes (1.6) (1.7) ou (1.8) ne possèdent aucun minimizer.

Rappelons que

$$\nabla A(x) \in Co(w_i) \quad \text{p.p } x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Ainsi, il existe $\alpha_i(x)$ tel que $\alpha_i \in [0, 1]$

$$\nabla A(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) w_i \quad , \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) = 1. \quad (3.6)$$

De plus, on sait que les α_i sont uniques grâce à (3.4). On sait aussi que, $\alpha_i(x)$ est mesurable (voir Remarque 3.2).

Rappelons ensuite un théorème qui est bien connu (voir par exemple [T.], [B.], [D.], [Ev.]):

Lemme 3.1 Toute suite $u_h \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant

$$\|\nabla u_h\|_\infty \leq C,$$

(où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme usuelle dans $L^\infty(\Omega)$, et $|\nabla u_h|$ la norme euclidienne de ∇u_h) détermine une mesure de Young. Plus précisément, il existe une sous-suite, notée encore ∇u_h et une mesure paramétrée de probabilité ν_x sur \mathbf{R}^n telle que pour toute fonction de Carathéodory bornée F

$$\lim_h \int_\Omega F(x, \nabla u_h(x)) dx = \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^n} F(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx. \quad (3.7)$$

Puisque ∇u_h est uniformément borné (3.7) est vrai également pour toute fonction de Carathéodory $F(x, \xi)$ localement bornée en ξ .

Nous avons le résultat principal suivant

Théorème 3.1 *Supposons que φ soit continue et:*

- 1) (3.1) (3.2), (3.4) et (3.5) soient satisfaites ;
- 2) dans le cas de (1.6), (3.3) est vraie;
- 3) u_h est une suite minimisante de (1.6), (1.7) ou (1.8); ou u_h est une suite telle que

$$\begin{cases} u_h \in V_h^A, & \int_\Omega \varphi(\nabla u_h(x)) dx \rightarrow 0 \quad \text{dans le cas (1.6)} \\ u_h \in V_h^A, & \int_\Omega \Psi(u_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u_h(x)) dx \rightarrow 0 \quad \text{dans le cas (1.7)} \\ u_h \in V_h, & \int_\Omega \Psi(u_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u_h(x)) dx \rightarrow 0 \quad \text{dans le cas (1.8)} \end{cases} \quad (3.8)$$

si

$$\|u_h\|_\infty, |\nabla u_h|_\infty \leq C \quad (3.9)$$

alors, ∇u_h détermine une mesure de Young unique donnée par

$$\nu_x = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) \delta_{w_i} \quad (3.10)$$

où δ_{w_i} désigne la masse de Dirac au point w_i et α_i les coefficients de (3.6).

Démonstration Grâce à (3.9), il existe une sous-suite notée encore u_h , telle que

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u \quad \text{uniformément} \\ \nabla u_h &\rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans } (L^\infty(\Omega))^n \text{ faible-}^* . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour un certain $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Soit ν_x la mesure de Young déterminée par $\nabla u_h(x)$. D'après le Lemme 3.1, pour tous les cas considérés, on a pour une sous-suite

$$\lim_h \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_h(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx = 0,$$

(l'égalité précédente est claire si u_h est une suite minimisante car les infima sont tous nuls dans (1.6)-(1.8)).

Ainsi on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

d'où ν_x est supportée seulement par les puits w_i . Donc, on a

$$\nu_x = \sum_{i=1}^k \beta_i(x) \delta_{w_i} \quad (3.12)$$

pour certaines fonctions mesurables β_i , telle que

$$\sum_{i=1}^k \beta_i(x) = 1.$$

Cas (1.7) et (1.8)

Si u_h est une suite minimisante ou satisfaisant (3.8) d'après le Théorème de convergence de Lebesgue, on a

$$\int_{\Omega} \Psi(u_h(x) - A(x)) dx \rightarrow \int_{\Omega} \Psi(u(x) - A(x)) dx = 0$$

et en vertu de (3.1), il en résulte

$$u(x) = A(x). \quad (3.13)$$

Puisque la limite de u_h est unique, on déduit de (3.11) et (3.13) que

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla A \quad \text{dans } (L^\infty(\Omega))^n \text{ faible-}^* . \quad (3.14)$$

Soit B une boule quelconque contenue dans Ω . D'après (3.7), on a d'une part

$$\begin{aligned} \int_B \nabla u_h(x) dx &\rightarrow \int_B \int_{R^n} \lambda d\nu_x(\lambda) dx \\ &= \sum_{i=1}^k \int_B \beta_i(x) dx \cdot w_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

D'autre part

$$\int_B \nabla u_h(x) dx \rightarrow \int_B \nabla A(x) dx. \quad (3.16)$$

Ainsi on obtient

$$\int_B \nabla A(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_B \beta_i(x) dx \cdot w_i.$$

Puisque

$$\nabla A(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) w_i$$

après division par $|B|$ on a

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{|B|} \int_B \beta_i(x) dx \right) \cdot w_i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{|B|} \int_B \alpha_i(x) dx \right) \cdot w_i,$$

En vertu de (3.4) on sait que les coefficients sont uniques par rapport aux w_i , ainsi on a

$$\frac{1}{|B|} \int_B \beta_i(x) dx = \frac{1}{|B|} \int_B \alpha_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

D'après le théorème de différentiation de Lebesgue, on a finalement

$$\beta_i(x) = \alpha_i(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Cas (1.6)

Puisque nous avons supposé que les $w_i - w_1$ engendrent un sous-espace propre de R^n . Soit ν un vecteur unitaire orthogonal au $L(w_i - w_1)$ ($L(w_j)$ désigne l'espace engendré par les w_j). on pose

$$F(x, \lambda) = |\{\lambda - \nabla A(x)\} \cdot \nu|$$

où $a \cdot b$ désigne le produit de a et b . En utilisant (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\{\nabla u_h(x) - \nabla A(x)\} \cdot \nu| dx &\rightarrow \int_{\Omega} \int_{R^n} |\{\lambda - \nabla A(x)\} \cdot \nu| d\nu_x(\lambda) dx \\ &= \int_{\Omega} |\{\sum_{i=1}^k \beta_i(x) w_i - \nabla A(x)\} \cdot \nu| dx = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \{u_h(x) - A(x)\} \right| dx \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Par l'inégalité de Poincaré

$$\int_{\Omega} |u_h - A| dx \leq C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \{u_h(x) - A(x)\} \right| dx$$

Ainsi,

$$u_h \rightarrow A \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

D'après l'unicité de la limite, et en tenant compte de (3.11), on a

$$u_h \rightarrow A \quad \text{uniformément}$$

d'où on retrouve

$$\nabla u_h \rightarrow \nabla A \quad \text{dans } (L^\infty(\Omega))^n \text{ faible } *.$$

On conclut alors comme précédemment.

Lorsque u_h est une suite dans (3.8), nous déduisons par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger que

$$\int_{\Omega} |u_h - A - (u_h - A)_{\Omega}| dx \leq C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \{u_h - A\} \right| dx \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

où v_{Ω} désigne la valeur moyenne sur Ω . Il résulte de (3.18) et (3.11) que

$$(u_h - A) \rightarrow (u_h - A)_{\Omega} \rightarrow (u - A)_{\Omega} = C$$

ainsi,

$$u_h \rightarrow A + C \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

D'où par (3.11),

$$u = A + C$$

mais puisque,

$$u_h \rightarrow u \quad \text{uniformément sur } \bar{\Omega}$$

$$u_h = \hat{A} \quad \text{sur } \Gamma$$

on a sur Γ

$$u_h = \hat{A} \rightarrow A = u$$

par conséquent, $C = 0$. Ainsi, on est ramené au cas précédent, c'est-à-dire que $u = A$. La preuve du Théorème 3.1 est donc complètement terminée.

Remarque 3.2 On peut démontrer que $\alpha_i(x)$ est mesurable. En effet

$$\alpha_i(x) = (\nabla A(x) - w_i, \nu)$$

où $\nu \in (L_i)^\perp$ est un vecteur unitaire et

$$L_i = L(w_2 - w_1, \dots, w_{i-1} - w_1, w_{i+1} - w_1, \dots, w_k - w_1).$$

4. ANALYSE PROBABILISTE

Dans la Section 3, on a obtenu un résultat d'unicité de la mesure de Young associée aux problèmes (1.6)-(1.8). En fait, cette unicité indique une cohérence des oscillations des suites minimisantes. Plus précisément, si v_n est une suite minimisante pour un point $x \in \Omega$ quelconque la probabilité pour que $\nabla v_n(x)$ soit dans le voisinage de w_i tend vers $\alpha_i(x)$. Nous précisons ceci dans les Théorèmes 4.1 et 4.2.

Dans toute la suite nous ferons les mêmes hypothèses que dans la Section 3. C'est-à-dire nous supposons que (3.1)-(3.5) sont vérifiés.

Tout d'abord, introduisons la fonction :

$$\Pi(\xi) = w_i \tag{4.1}$$

où i est le plus petit entier tel que

$$|\xi - w_i| = \min_j |\xi - w_j| \tag{4.2}$$

Il est clair que Π est une fonction Borel-mesurable. Par conséquent, si $\xi(x)$ est une fonction mesurable, alors $\Pi(\xi(x))$ est aussi mesurable.

Puis, supposons que

$$R < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |w_i - w_j| \tag{4.3}$$

et considérons B un sous-ensemble de Ω . Posons alors

$$B_i^R(v) = B_i^R = \{x \in B; \nabla v(x) \in B(w_i, R)\} \tag{4.4}$$

$$B(w_i, R) = \{w \in R^n; |w - w_i| < R\} \tag{4.5}$$

$$B_e^R = B \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i^R.$$

Dans la Section 3, on a prouvé que les mesures associées aux problèmes (1.6)-(1.8) sont uniques et données par

$$\nu_x = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) \delta_{w_i}. \quad (4.6)$$

Posons

$$E_1(v) = \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx \quad (4.7)$$

$$E_2(v) = \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) + \Psi(v(x) - A(x)) dx \quad (4.8)$$

et supposons qu'il existe des constantes λ_1 $p > 1$ telles que

$$\varphi(\xi) \geq \lambda_1 |\xi - \Pi(\xi)|^p = \lambda_1 \min_j |\xi - w_j|^p. \quad (4.9)$$

Lemme 4.1 *Supposons que*

$$w_j - w_1 \quad j = 2, 3, \dots, k \quad \text{indépendants linéairement.}$$

Si

$$M = \begin{pmatrix} w_1 - V & w_2 - V & \dots & w_k - V \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où $V \in R^n$, alors, on a $M^T M$ est inversible.

Démonstration Il est clair que par une opération matricielle élémentaire, i.e. en soustrayant la première colonne de toutes les autres colonnes de la matrice M , on obtient

$$M \iff \begin{pmatrix} w_1 - V, & w_2 - w_1, & \dots, & w_k - w_1, \\ 1, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix}$$

où \iff désigne une équivalence matricielle. Puisque $(w_i - w_1; i = 2, \dots, k)$ sont indépendants, $\text{Rang} M = k$. Par conséquent, $M^T M$ est inversible. En effet, supposons que

$$M^T M x = 0$$

on a

$$(M^T M x, x) = 0$$

c'est-à-dire

$$\|Mx\| = 0.$$

Ceci entraîne

$$Mx = 0$$

comme $\text{Rang}M = k$ il est nécessaire que $x = 0$, d'où le résultat.

Lemme 4.2 Soient $B \subset \Omega$ un domaine Lipschitzien et $1 \leq r \leq p$. Alors, il existe une constante $C = C(B, r, p, \lambda_1)$ telle que

$$\int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v)|^r dx \leq CE_1(v)^{\frac{r}{p}}. \quad (4.10)$$

Preuve La démonstration est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder. En effet

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla v - \Pi \nabla v|^r dx &\leq \left(\int_B |\nabla v - \Pi \nabla v|^{r \cdot \frac{p}{r}} dx \right)^{\frac{r}{p}} \cdot |B|^{1 - \frac{r}{p}} \\ &\leq C \cdot \left[\int_B \frac{\varphi(\nabla v)}{\lambda_1} dx \right]^{\frac{r}{p}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

On notera W l'espace engendré par les vecteurs $w_i - w_1$ et par W^\perp son orthogonal que l'on supposera dans ce théorème non réduit à 0.

Théorème 4.1 Supposons que

$$(1) \quad \nabla A(x) \in Co(w_i), \quad \nabla A(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) w_i,$$

(2) la condition (4.9) est réalisée,

(3) B est un domaine Lipschitzien tel que

$$\int_{\partial B} |v(x)| d\sigma(x) \leq C \cdot \int_B (|v| + |\nabla_\nu v(x)|) dx \quad \forall v \in W^{1,1}(\Omega) \quad (4.12)$$

où $\nabla_\nu = (\partial/\partial\nu_1, \partial/\partial\nu_2, \dots, \partial/\partial\nu_r)$ et $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ est une base orthonormale de W^\perp . Alors, il existe une constante $C = C(\lambda_1, p, B, w_i, A, R, \Omega)$ telle que

$$|\bar{\alpha}_i - \frac{|B_i^R(x)|}{|B|}| \leq C \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}} \quad i = 1, \dots, k \quad (4.13)$$

pour toute $v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)$ où $\bar{\alpha}_i$ est la valeur moyenne de α_i , c'est-à-dire

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{|B|} \int_B \alpha_i(x) dx.$$

Remarque Il est clair que (4.12) est vrai par exemple si B est un domaine Lipschitzien tel que

$$|\vec{n}(x) \cdot \nu_i| > c > 0 \quad p.p. x \in \partial B$$

où $\vec{n}(x)$ désigne la normale extérieure de ∂B et $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ est une base orthogonale de W^\perp (voir [C₂]).

Démonstration Puisque

$$B = B_e^R \cup \left(\bigcup_i B_i^R \right)$$

on a

$$\sum |B_i^R| + |B_e^R| = |B|.$$

Puis en posant

$$\bar{\nabla} A = \frac{1}{|B|} \int_B \nabla A(x) dx$$

on a

$$\begin{aligned} \sum |B_i^R| (w_i - \bar{\nabla} A) &= \sum \int_{B_i^R} (w_i - \bar{\nabla} A) dx \\ &= \sum \int_{B_i^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \\ &= \int_B [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx - \int_{B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \quad (4.14) \\ &= \int_B [\Pi(\nabla v(x)) - \nabla v(x)] dx + \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A(x)] dx \\ &\quad - \int_{B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A(x)] dx \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Tout d'abord, le Lemme 4.2 entraîne

$$|I_1| \leq C \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.15)$$

Ensuite, estimons I_2 . On a

$$\int_B (\nabla v(x) - \bar{\nabla} A(x)) dx = \int_B \nabla v dx - \int_B \bar{\nabla} A dx$$

$$\begin{aligned}
&= |B|(\bar{\nabla}v - \bar{\nabla}A) \\
&= \int_B (\nabla v(x) - \nabla A(x)) dx.
\end{aligned}$$

Grâce au Théorème de la divergence, on a

$$\int_B (\nabla v(x) - \nabla A(x)) dx = \int_{\partial B} (v(x) - A(x)) \cdot \vec{n} d\sigma$$

où \vec{n} désigne la normale extérieure à ∂B . Alors il est clair que par (4.12) on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} |v - A| d\sigma &\leq C \cdot \int_{\Omega} (|v - A| + |\nabla_{\nu}(v(x) - A(x))|) dx \\
&\leq C \cdot \int_{\Omega} |\nabla_{\nu}(v(x) - A(x))| dx.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

D'autre part, puisque

$$\xi - \nabla A = P_W(\xi - \nabla A) + P_{W^\perp}(\xi - \nabla A)$$

on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) &\geq \lambda_1 \min |\xi - w_i|^p \\
&= \lambda_1 \min |(\xi - \nabla A) - (w_i - \nabla A)|^p \\
&= \lambda_1 \min |P_W(\xi - \nabla A) + P_{W^\perp}(\xi - \nabla A) - (w_i - \nabla A)|^p \\
&\geq \lambda_1 |P_{W^\perp}(\xi - \nabla A)|^p \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n.
\end{aligned}$$

(On remarquera que $w_i - \nabla A = w_i - w_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (w_i - w_1) \in W$). Puisque

$$\begin{aligned}
P_{W^\perp}(\nabla(v(x) - A(x))) &= \sum_{i=1}^r (\nabla(v(x) - A(x)) \cdot \nu_i) \cdot \nu_i \\
&= \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial \nu_i} (v(x) - A(x)) \cdot \nu_i.
\end{aligned}$$

Pour presque tout x on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(\nabla v(x)) &\geq \lambda_1 |P_{W^\perp}(\nabla v - \nabla A)|^p \\
&= \lambda_1 |P_{W^\perp} \nabla(v - A)|^p \\
&= \lambda_1 |\nabla_\nu(v(x) - A(x))|^p.
\end{aligned}$$

Donc (4.16) s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} |v - A| dx &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\varphi(\nabla v(x))}{\lambda_1} \right|^{\frac{1}{p}} dx \\
&\leq C \cdot \lambda_1^{-\frac{1}{p}} \int_{\Omega} |\varphi(\nabla v(x))|^{\frac{1}{p}} dx \\
&\leq C \cdot \lambda_1^{-\frac{1}{p}} \cdot |\Omega|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\varphi(\nabla v(x))| dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Maintenant, estimons I_3

$$\begin{aligned}
&\int_{B_e^R} |(\Pi \nabla v(x) - \bar{\nabla} A(x))| dx \\
&\leq \int_{B_e^R} (|(\Pi \nabla v(x) - \nabla v(x))| + |\nabla v(x) - \bar{\nabla} A(x)|) dx \\
&\leq C_1 \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}} + C_2 \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_3 \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

En réunissant les estimations de I_1, I_2, I_3 , on obtient

$$\begin{aligned}
\sum |B_i^R| |w_i - \bar{\nabla} A| &\leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \\
&\leq C \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

D'autre part

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i(x)(w_i - \nabla A(x)) = 0 \quad (4.20)$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i(x) = 1. \quad (4.21)$$

Or (4.20) s'écrit

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i(x)w_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x)\nabla A(x)$$

et après integration, on a

$$\frac{1}{|B|} \int_B \sum_{i=1}^k \alpha_i(x)w_i dx = \frac{1}{|B|} \int_B \sum_{i=1}^k \alpha_i(x)\nabla A(x) dx$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i w_i = \bar{\nabla} A.$$

Autrement dit

$$\sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i w_i = \sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i \bar{\nabla} A$$

et donc, on a

$$\sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i (w_i - \bar{\nabla} A) = 0 \quad (4.22)$$

$$\sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i = 1. \quad (4.23)$$

Puisque

$$|B| = \sum_{i=1}^k |B_i^R| + |B_e^R|,$$

on déduit

$$\sum_{i=1}^k (\bar{\alpha}_i |B| - |B_i^R|)(w_i - \bar{\nabla} A) = - \sum_{i=1}^k |B_i^R| (w_i - \bar{\nabla} A) \quad (4.24)$$

$$\sum_{i=1}^k (\bar{\alpha}_i |B| - |B_i^R|) = |B_e^R|. \quad (4.25)$$

Sous forme matricielle cela s'écrit

$$My = b \quad (4.26)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} w_1 - \bar{\nabla}A & w_2 - \bar{\nabla}A & \dots & w_k - \bar{\nabla}A \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$y = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 |B| - |B_1^R| \\ \bar{\alpha}_2 |B| - |B_2^R| \\ \dots \\ \bar{\alpha}_k |B| - |B_k^R| \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^k |B_i^R| (w_i - \bar{\nabla}A(x)) \\ |B_e^R| \end{pmatrix}$$

D'après le Lemme 4.1, (4.26) a une solution unique :

$$y = (M^T M)^{-1} M^T b. \quad (4.28)$$

Il en résulte que

$$|y| \leq \| (M^T M)^{-1} M^T \|_2 |b| \quad (4.29)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne et $\|\cdot\|_2$ la norme matricielle correspondante à la norme euclidienne, c'est-à-dire que

$$\|A\|_2 = \sup_{|v|=1} \frac{|Av|}{|v|}.$$

Pour évaluer $|b|$, on doit estimer $|B_e^R|$. Puisque

$$\begin{aligned} R|B_e^R| &\leq \int_{B_e^R} |\Pi(\nabla v(x)) - \nabla v(x)| dx \\ &\leq \int_B |\Pi(\nabla v(x)) - \nabla v(x)| dx \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} |B_e^R| &\leq \frac{1}{R} |B|^{1-\frac{1}{p}} \lambda^{-\frac{1}{p}} |E_1(v)|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \cdot |E_1(v)|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Finalement, il est clair que

$$|\alpha_i|B| - |B_i^R| \leq |y| \leq C \cdot |b| \leq C \cdot (E_1(v))^{\frac{1}{p}}.$$

Ceci complète la preuve de Théorème 4.1.

Théorème 4.2 *Supposons*

(1) la condition (4.9) est vraie et il existe $\lambda_2 > 0$ et $q > 1$ tels que

$$\Psi(t) \geq \lambda_2 |t|^q \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (4.31)$$

(2) B est un domaine Lipschitzien contenu dans Ω .

Alors, pour toute fonction $v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)$, on a

$$|\bar{\alpha}_i|B| - |B_i^R| \leq CE_1(v)^{\frac{1}{p}} + CE_2(v)^{\frac{1}{q+s'}} (E_1(v))^{\frac{s'}{p(q+s')}} + E_2(v)^{\frac{s'}{q(q+s')}} + 1) \quad (4.32)$$

où $C = C(B, p, q, \lambda_1, \lambda_2, w_i, \Omega, A)$ et $s = p \wedge q$, $s' = \frac{s}{s-1}$.

Démonstration Comme dans le Théorème 4.1, on a

$$\sum_{i=1}^k |B_i^R|(w_i - \bar{\nabla}A) = \int_{B-B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla}A] dx \quad (4.33)$$

et

$$\sum_{i=1}^k |B_i^R| = |B| - |B_e^R|. \quad (4.34)$$

(4.33) et (4.34) s'écrivent sous forme matricielle:

$$M \begin{pmatrix} |B_1^R| \\ |B_2^R| \\ \dots \\ |B_2^R| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{B-B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla}A] dx \\ \\ \\ |B| - |B_e^R| \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

où M est donnée par (4.27). D'autre part, on sait que

$$\sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i |B|(w_i - \bar{\nabla}A) = 0 \quad (4.36)$$

$$\sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_i |B| = |B|.$$

Donc, (4.35) peut écrire de la manière suivante

$$M \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 |B| - |B_1^R| \\ \bar{\alpha}_2 |B| - |B_2^R| \\ \dots \\ \dots \\ \bar{\alpha}_k |B| - |B_k^R| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \int_{B-B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \\ \dots \\ |B_e^R| \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Ainsi, pour évaluer $\bar{\alpha}_i |B| - |B_i^R|$, il suffit d'estimer le vecteur situé à droite de (4.37).

D'abord, du Lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned} |B_e^R| &\leq \frac{1}{R} |B|^{1-\frac{1}{p}} \lambda_1^{-\frac{1}{p}} E_1(v)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(\lambda_1, p, B) \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} &\int_{B-B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A(x)] dx \quad (4.38) \\ &= \int_B [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx - \int_{B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 \\ I_1 &= \int_B [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \\ &= \int_B [\Pi(\nabla v(x)) - \nabla v(x)] dx + \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A] dx \end{aligned}$$

puis du lemme 4.2

$$|I_1| \leq C(\lambda_1, p, B) \cdot E_1(v)^{\frac{1}{p}} + \left| \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A] dx \right| \quad (4.39)$$

et

$$\begin{aligned} &\left| \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A] dx \right| \\ &= \left| \int_B [\nabla v(x) - \nabla A(x)] dx \right| \\ &= \left| \int_{\partial B} (v(x) - A(x)) \cdot \bar{n} d\sigma \right| \\ &\leq |\partial B|^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\partial B} |v(x) - A(x)|^r d\sigma \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

où $r > 1$ r' est son conjugué et \vec{n} désigne la normale extérieure à ∂B , $|\partial B|$ est la mesure de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensionnelle. Ensuite il faut estimer

$$\int_{\partial B} |v(x) - A(x)|^r d\sigma$$

Par le Théorème de la trace, on a

$$\int_{\partial B} |u(x)| d\sigma \leq C \int_B (|u(x)| + |\nabla u(x)|) dx$$

en remplaçant $u(x)$ par $|v(x) - A(x)|^r$ on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} |v(x) - A(x)|^r d\sigma \\ & \leq C \int_B [|v - A| |v - A|^{r-1} + r |v - A|^{r-1} |\nabla(v - A)|] dx \\ & \leq C \int_B |v - A| |v - A|^{r-1} dx + C \int_B |v - A|^{r-1} |\nabla(v - A)| dx \\ & \stackrel{\text{def}}{=} C \cdot J_1 + C \cdot J_2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Par l'inégalité de Hölder, pour $s > 1$, et s' son conjugué (on précisera s plus loin) on a

$$\begin{aligned} J_1 & \leq \left(\int_B |v - A|^{s'(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_B |v - A|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \leq \left(\int_B |v - A|^{s'(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \|v - A\|_{1,s,B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 & \leq \left(\int_B |v - A|^{s'(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_B |\nabla(v - A)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \leq \left(\int_B |v - A|^{s'(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \|v - A\|_{1,s,B} \end{aligned}$$

où

$$\|v - A\|_{1,s,B} = \left(\int_B (|v - A|^s + |\nabla(v - A)|^s) dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Donc

$$\int_{\partial B} |v(x) - A(x)|^r d\sigma \leq C \left(\int_B |v - A|^{s'(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \|v - A\|_{1,s,B}. \tag{4.41}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left| \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A] dx \right| &\leq |\partial B|^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{\partial B} |v(x) - A(x)|^r d\sigma \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C(B, r) \left(\int_B |v - A|^{s'(r-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'r}} (\|v - A\|_{1,s,B})^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Puisque dans les inegalités précédentes, r est un réel superieur à un, on peut choisir

$$r = \frac{q + s'}{s'}$$

c'est-à-dire que

$$(r - 1)s' = q.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A] dx \right| &\leq C(B, s, q) \left(\int_B |v - A|^q dx \right)^{\frac{1}{q+s'}} (\|v - A\|_{1,s,B})^{\frac{s'}{q+s'}} \\ &\leq C(B, s, q) \left(\int_B \frac{\Psi(v - A)}{\lambda_2} dx \right)^{\frac{1}{q+s'}} (\|v - A\|_{1,s,B})^{\frac{s'}{q+s'}} \\ &\leq C(B, s, q, \lambda_2) (E_2(v))^{\frac{1}{q+s'}} (\|v - A\|_{1,s,B})^{\frac{s'}{q+s'}}. \end{aligned}$$

Puisque par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_B |v - A|^s dx &\leq |B|^{\frac{1-s}{q}} \left(\int_B |v - A|^q dx \right)^{\frac{s}{q}} \\ &\leq C \cdot (E_2(v))^{\frac{s}{q}} \end{aligned} \tag{4.42}$$

et

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla(v - A)|^s dx &\leq C \cdot \left\{ \int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v(x))|^s dx + \int_B |\Pi \nabla v - \nabla A(x)|^s dx \right\} \\ &\leq C \left(\int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v(x))|^p dx \right)^{\frac{s}{p}} + C \\ &\leq C \cdot (E_1(v))^{\frac{s}{p}} + C \end{aligned} \tag{4.43}$$

où $C = C(B, q, w_i, A, s, p, \lambda_1, \Omega)$. de (4.42) et (4.43), on déduit

$$\|v - A\|_{1,s,B}^s \leq C[(E_2(v))^{\frac{s}{q}} + (E_1(v))^{\frac{s}{p}} + 1]$$

où $C = C(A, B, s, p, q, \lambda_1, \lambda_2, w_i, \Omega)$. puis ,

$$(\|v - A\|_{1,s,B})^{\frac{s'}{q+s'}} \leq C[(E_1(v))^{\frac{s'}{p(q+s')}} + (E_2(v))^{\frac{s'}{q(q+s')}} + 1]$$

où $s = p \wedge q$ donc,

$$\left| \int_B [\nabla v(x) - \bar{\nabla} A] dx \right| \leq C E_2(v)^{\frac{1}{q+s'}} [(E_1(v))^{\frac{s'}{p(q+s')}} + (E_2(v))^{\frac{s'}{q(q+s')}} + 1]$$

puis

$$|I_1| \leq C E_1(v)^{\frac{1}{p}} + C E_2(v)^{\frac{1}{q+s'}} [(E_1(v))^{\frac{s'}{p(q+s')}} + (E_2(v))^{\frac{s'}{q(q+s')}} + 1].$$

Finalement

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B-B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \right| \\ & \leq 2 \left| \int_B [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A] dx \right| \\ & \leq C E_1(v)^{\frac{1}{p}} + C E_2(v)^{\frac{1}{q+s'}} [(E_1(v))^{\frac{s'}{p(q+s')}} + (E_2(v))^{\frac{s'}{q(q+s')}} + 1]. \end{aligned}$$

Rappelons que $C = C(B, s, p, q, \lambda_1, \lambda_2, w_i, R, A)$. On a

$$|\bar{\alpha}_i |B| - |B_i^R|| \leq |y| \leq \|A\| |\epsilon|$$

où $A = (M^\perp M)^{-1}$, et

$$\epsilon = \begin{pmatrix} - \int_{B-B_e^R} [\Pi(\nabla v(x)) - \bar{\nabla} A(x)] dx \\ |B_e^R| \end{pmatrix}.$$

Au début de la démonstration, on a déjà déduit du Lemme 4.2 que

$$|B_e^R| \leq C(\lambda_1, p, B) (E_1(v))^{\frac{1}{p}}$$

donc

$$|\epsilon| \leq C E_1(v)^{\frac{1}{p}} + C E_2(v)^{\frac{1}{q+s'}} [(E_1(v))^{\frac{s'}{p(q+s')}} + (E_2(v))^{\frac{s'}{q(q+s')}} + 1].$$

ceci est complète la démonstration de Théorème 4.2 en tenant compte du fait que A est inversible.

REFERENCES

- [B.] J. M. Ball : A version of the fundamental theorem for Young measures.
 In *Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions*, Lecture Notes in Physics # 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-Verlag, (1989), p. 207-215.
- [B.H] H. Brézis : *Analyse Fonctionnelle*, Masson, (1987).
- [B.J.₁] J. M. Ball and R. D. James : Fine phase mixtures as minimizers of energy.
Arch. Rational Mech. Anal., 100, (1987), p. 13-52.
- [B.J.₂] J. M. Ball and R. D. James : Proposed experimental tests of a theory of fine microstructures.
Phil. Trans. Roy. Soc. London (to appear).
- [B.M.] J. M. Ball and F. Murat : $W^{1,p}$ quasiconvexity and variational problems for multiple integrals.
J. Funct. Anal., 58, (1984), p. 255-253.
- [Br.] B. Brighi : *Sur quelques problèmes de Calcul des Variations et l'approximation de leur fonctionnelle relaxée*. Thesis, University of Metz (1991).
- [B.C.₁] B. Brighi and M. Chipot : Approximation in nonconvex problems.
 Proceedings of the First European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Pont-à-Mousson, June 1991. (To appear).
- [B.C.₂] B. Brighi and M. Chipot : Approximated convex envelope of a function.
 A paraître dans *SIAM J of Numerical Analysis*.
- [C.₁] M. Chipot : Hyperelasticity for crystals.
European Journ. of Appl. Math., 1, (1990), p. 113-129.
- [C.₂] M. Chipot : Numerical analysis of oscillations in nonconvex problems.
Numerische Mathematik, 59, (1991), p. 747-767.

- [C.C.] M. Chipot and C. Collins : Numerical approximation in variational problems with potential wells.
SIAM J. of Numerical Analysis, 29, 4, (1992), p. 1002-1019.
- [C.C.K.] M. Chipot, C. Collins and D. Kinderlehrer : Numerical analysis of oscillations in multiple well problems (to appear).
- [C.K.] M. Chipot and D. Kinderlehrer : Equilibrium configurations of crystals.
Arch. Rational Mech. Anal., 103, (1988), p. 237-277.
- [C.M.] M. Chipot and S. Müller : Sharp energy estimates to finite element approximation for nonconvex problems (to appear)
- [Co.] C. Collins : Thesis, University of Minnesota, 1990.
- [C.K.L.] C. Collins, D. Kinderlehrer and M. Luskin : Numerical approximation of the solution of a variational problem with a double well potential.
SIAM J. Numer. Anal., 28, (1991), p. 321-332.
- [C.L.₁] C. Collins and M. Luskin : The computation of the austenitic-martensitic phase transition.
In *Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions*, Lecture Notes in Physics # 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-Verlag, Berlin, New York, (1989), p. 34-50.
- [C.L.₂] C. Collins and M. Luskin : Computational results for phase transitions in shape memory materials.
In *Smart Materials, Structures, and Mathematical Issues*, C. Rogers, ed. Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania, (1989), p. 198-215.
- [C.L.₃] C. Collins and M. Luskin : Numerical modeling of the microstructure of crystals with symmetry-related variants.
In *Proceedings of the ARO US-Japan Workshop on Smart/ Intelligent Materials*, Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania, (to appear).
- [C.L.₄] C. Collins and M. Luskin : Optimal order error estimates for the finite element approximation of the solution of a nonconvex variational problem. Preprint, (1990).
- [C.Li] M. Chipot and W. Li: variational problems with potential wells and nonhomogeneous boundary conditions. (to appear)
- [D.] B. Dacorogna : *Weak continuity and weak lower semicontinuity of nonlinear functionals*.
Springer Lecture Notes # 922, (1982).

- [Er.] J. L. Ericksen : Some constrained elastic crystals.
 In *Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems*, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford, (1987),
 p. 119-137.
- [Ev.] L. C. Evans : *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*.
 A.M.S. Regional Conference Series in Mathematics # 74, (1989).
- [F.₁] I. Fonseca : Variational methods for elastic crystals.
 Arch. Rat. Mech. Anal., 97, (1985), p. 189-220.
- [F.₂] I. Fonseca : The lower quasiconvex envelope of the stored energy function for an elastic crystal.
 J. Math. Pures et Appl., 67, (1988), p. 175-195.
- [G.T.] D. Gilbarg and N.S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*.
 Springer Verlag, (1985).
- [J.₁] R. James : Basic principles for the improvement of shape-memory and related materials.
 In *Smart Materials, Structures, and Mathematical Issues*,
 C. Rogers, ed., Technomic Publishing Co. Lancaster, PA, (1989).
- [J.₂] R. D. James : Microstructure and weak convergence.
 In *Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems*, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford , (1987),
 p. 175-196.
- [J. K.] R. D. James and D. Kinderlehrer : Theory of diffusionless phase transitions. In *Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions*, Lecture Notes in Physics # 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-Verlag, Berlin, New York, (1989), p. 51-84
- [K.] D. Kinderlehrer : Remarks about equilibrium configurations of crystals.
 In *Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems*, J. M. Ball ed., Oxford University Press, Oxford, (1987),
 p. 217-242.
- [K. P.₁] D. Kinderlehrer and P. Pedregal : Characterizations of Young measures generated by gradients.
 Arch. Rat. Mech. Anal., 115, (1991), p. 329-365.
- [K. P.₂] D. Kinderlehrer and P. Pedregal : Weak convergence of integrands and the Young measure representation.

SIAM J. Math. Anal., 23, 1, (1992), p. 1-19.

- [Ko.] R. Kohn : The relationship between linear and nonlinear variational models of coherent phase transitions.
In *Proceedings of the Seventh Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, West Point, June 1989.
- [L.C.B] W. Li, M. Chipot and B. Brighi: Nonhomogeneous variational problems with potential wells in the vectorial case. (to appear)
- [P.] P. Pedregal : Thesis, University of Minnesota, 1989.
- [R.T.] P.A. Raviart and J.M. Thomas : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.
Masson, Paris, (1988).
- [T.] L. Tartar : Compensated compactness and application to partial differential equations
In *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symp IV*, R.J. Knops ed., Pitman, (1979), 136-212.