



HAL
open science

Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich

Joël Landier

► **To cite this version:**

Joël Landier. Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich. Matériaux. Université Paul Verlaine - Metz, 1993. Français. NNT : 1993METZ027S . tel-01775471

HAL Id: tel-01775471

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775471v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

S/MZ
93/104

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES DES MATERIAUX

- GENIE PHYSIQUE ET MECANIQUE -

par

Joël LANDIER

**MODELISATION ET ETUDE EXPERIMENTALE DES
PROPRIETES AMORTISSANTES DES TÔLES SANDWICH**

Soutenue le 4-11-1993 devant la commission d'examen:

M. M. Berveiller, Directeur de thèse
Mme J. Lecourtier, Rapporteur
M. R. Schirrer, Rapporteur
M. M. Potier-Ferry
M. P. Lipinski
M. H. Guyon

**-Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux URA CNRS 1215 -
-Institut Supérieur de Génie Mécanique -
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01**

S.C.D.U. METZ : Section Technopole



022 210938 1

b 130012

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES DES MATERIAUX

- GENIE PHYSIQUE ET MECANIQUE -

par

Joël LANDIER

MODELISATION ET ETUDE EXPERIMENTALE DES PROPRIETES AMORTISSANTES DES TÔLES SANDWICH

Soutenue le 4-11-1993 devant la commission d'examen:

M. M. Berveiller, Directeur de thèse
Mme J. Lecourtier, Rapporteur
M. R. Schirrer, Rapporteur
M. M. Potier-Ferry
M. P. Lipinski
M. H. Guyon

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19930855
Cote	S/M3 93/27
Loc	Magasin

-Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux URA CNRS 1215 -
-Institut Supérieur de Génie Mécanique -
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01

SOMMAIRE

Chapitre I: Introduction	6
Chapitre II : Loi de comportement de matériaux:	
- élastique,	
- viscoélastique linéaire non vieillissant, homogène anisotrope.	14
I. Introduction	14
II Loi de comportement d'un matériau élastique linéaire homogène	15
II-1 Cas de l'anisotropie	15
II-2 Cas de l'orthotropie	17
II-3 Cas de l'isotropie transverse	17
II-4 Cas de l'isotropie	18
II-5 Hypothèses de comportement adoptées pour l'acier utilisé dans les tôles sandwich.	19
III Loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant homogène	19
III-1 La viscoélasticité	19
III-1-1 Le fluage	19
III-1-2 La relaxation	20
III-1-3 La recouvrance	21
III-2 La viscoélasticité linéaire	22
III-3 Le principe de superposition de Boltzmann	23
III-4 Matériau non vieillissant	25
III-5 La transformée de Carson	25
III-6 Le principe de correspondance	26
III-7 Loi de comportement d'un matériau homogène viscoélastique linéaire non vieillissant	26
III-7-1 Cas de l'anisotropie	26
III-7-2 Cas de l'orthotropie	27
III-7-3 Cas de l'isotropie transverse	27
III-7-4 Cas de l'isotropie	27
III-8 Cas des sollicitations harmoniques d'un corps viscoélastique linéaire non vieillissant homogène	28
III-9 Le frottement interne	31

III-10 Le principe de superposition fréquence (ou temps)/température - La loi W.L.F.	32
III-10-1 Le principe de superposition fréquence (temps)/température	32
III-10-2 Loi W.L.F.	33
III-11 Le théorème de la représentation spectrale - Application à un corps viscoélastique linéaire non vieillissant répondant au principe de superposition fréquence (temps)/température	34
III-11-1 Modèle de Maxwell généralisé.	34
III-11-2 Méthode de calcul des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé.	36
III-11-2-1 Position du problème	36
III-11-2-2 Détermination des paramètres du modèle de Maxwell généralisé	36
III-11-2-3 Validation	40
III-11-3 Loi de comportement des polymères utilisés dans les tôles sandwich	45
IV Conclusion	46
 Chapitre III : Loi de comportement et équation du mouvement de flexion d'une plaque viscoélastique linéaire non vieillissante homogène isotrope et isotrope transverse soumise à des solicitations harmoniques de traction - flexion - torsion - cisaillement.	 47
I Introduction	47
II Loi de comportement et équation du mouvement de flexion d'un élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope.	48
II-1 Rappel- Problème de la mécanique des solides élastiques déformables	48
II-2 Hypothèses	49
II-3 Champ de déformation	50
II-4 Relation: Efforts, Moments résultants/ variables cinématiques	51
II-5 Équation du mouvement de flexion	56
III Loi de comportement et équation du mouvement de flexion d'un élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope transverse avec prise en compte des effets du cisaillement transverse	57
III-1 Introduction	57

III-2 Le cisaillement transverse dans la théorie des plaques stratifiés	58
III-3 Hypothèses	60
III-4 Relation entre efforts, moments résultants et variables cinématiques	60
III-5 Équation du mouvement de flexion	64
III-6 Paramètres à identifier	66
Chapitre IV : Évaluation des paramètres par une méthode d'homogénéisation.	68
I- Introduction	68
II Loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant homogène équivalent à un matériau sandwich soumis à un chargement harmonique de membrane	70
II-1 Loi de comportement locale	70
II-2 Loi de comportement globale	71
II-3 Théorème généraux	72
II-4 Conditions aux limites	74
II-4-1 Conditions en contraintes	74
II-4-2 Conditions en déformations	75
II-5 Expression des tenseurs de localisation des contraintes globales	75
II-6 Expression des tenseurs de localisation des déformations globales	79
II-7 Tenseurs des modules et des complaisances équivalents	82
II-8 Conclusion	85
III Évaluation des paramètres spécifiques au cas de la flexion harmonique	86
III-1 Hypothèses	86
III-2 Expressions des modules de flexion complexes équivalents dans le plan de la plaque homogène équivalente à la plaque sandwich	86
III-3 Expression de la masse volumique équivalente	88
III-4 Expressions des coefficients correctifs $k_1^*(p)$ - $k_2^*(p)$	88
III-4-1 Expression de $k_1^*(p)$	89
III-4-1-1 Contrainte normale :	89
III-4-1-2 Contrainte de cisaillement transverse	89
III-4-1-3 Énergie de cisaillement transverse	89
III-4-1-4 Énergie de cisaillement transverse d'un matériau V.E.L.N.V. équivalent isotrope transverse avec prise en compte du coefficient de correction	90
III-4-1-5 Expression de $k_1^*(p)$	90
III-4-2 Expression de $k_2^*(p)$	91

IV- Conclusion	91
Chapitre V : Application au cas de la flexion Oberst	92
I Introduction	92
II Présentation de la flexion Oberst - Mesures d'amortissement	92
II-1 Dispositif expérimental	92
II-2 Mesure de l'amortissement	93
III- Équation du mouvement d'une poutre sandwich en flexion harmonique	95
IV- Résolution de l'équation du mouvement de la poutre équivalente en flexion Oberst	96
V- Courbe de résonance - Amortissement simulés.	99
VI Applications - résultats	101
VI-1 Étude paramétrique - comparaison avec les résultats obtenus par Blanchard	101
VI-2 comparaison avec les résultats expérimentaux	110
VI-2-1 Sandwich F13' ("0,35/0,05/0,35")	110
VI-2-2 Etude paramétrique du sandwich F13': influence des épaisseurs d'acier et de polymère	117
VII Conclusion	137
Conclusion générale	138
Bibliographie	141

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Pour les constructeurs de véhicules automobiles ou d'appareils électroménager, le confort acoustique est devenu l'une des préoccupations majeures.

Les solutions techniques actuelles consistent à appliquer ou à poser des produits insonorisant (feutres, produits bitumeux). Ces solutions ont les désavantages d'entraîner des opérations de fabrication supplémentaires et des inconvénients technologiques (volume et masse plus grands, automatisation difficile...).

Actuellement, les sidérurgistes tentent de mettre au point des tôles antivibratoires appelées tôles sandwich qui intègrent la fonction amortissante. Ces produits sont destinés à l'industrie automobile [1,2] (carter, passage de roue) à la construction mécanique [3] (couvercle antibruit), au bâtiment (escalier, plancher de gymnase), à la construction navale [4], à l'aéronautique [5] et à l'électroménager.

Ces tôles sandwich sont constituées de 2 parements d'acier entre lesquels est inséré un film de polymère (figure 1)

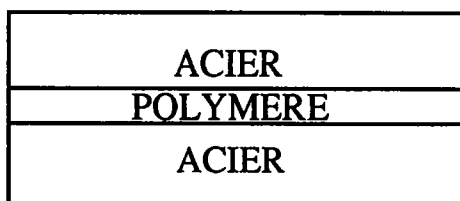


figure 1: structure d'une tôle sandwich

Le procédé de fabrication, utilisé sur une ligne pilote de laboratoire SOLLAC est schématisé sur la figure 2 [6]. Tout d'abord, les deux parements d'acier sont préchauffés dans des fours à infrarouges distincts. Le polymère est dévidé entre les 2 fours. L'opération suivante est le calandrage des 3 couches entre 2 cylindres. Ensuite un maintien en température favorise l'adhérence. Enfin le sandwich est refroidi à l'air avant d'être bobiné.

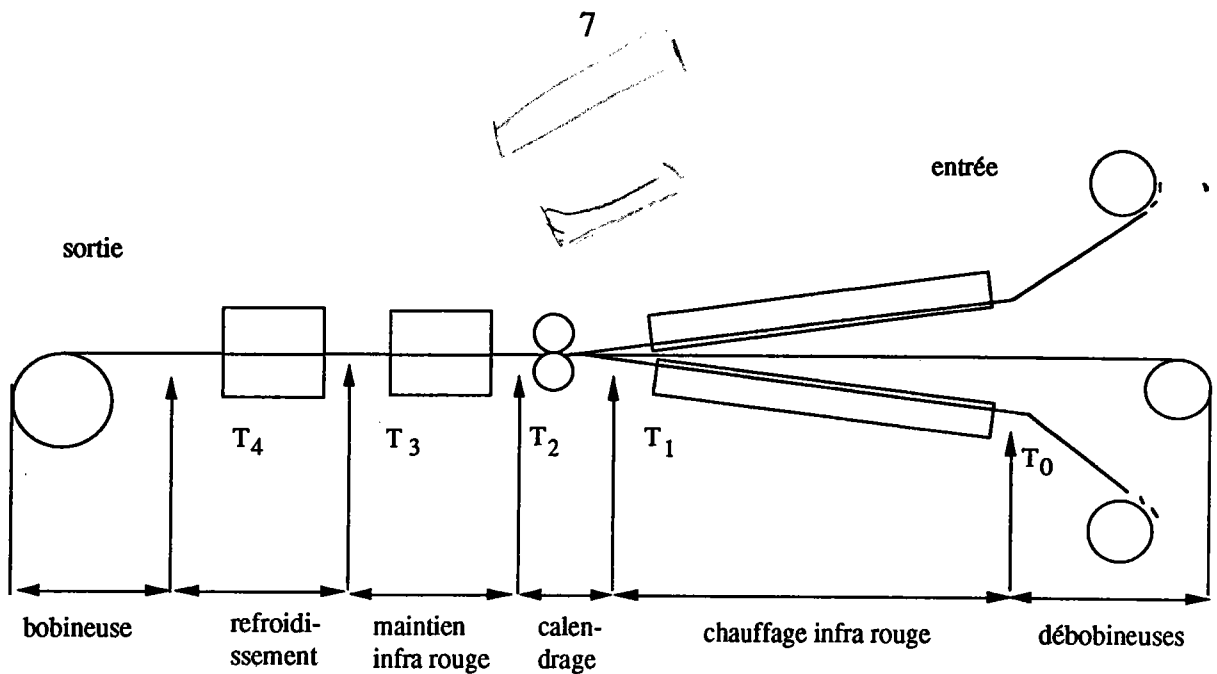


figure 2: ligne pilote de fabrication de tôle sandwich [6]

Ces tôles possèdent un pouvoir amortissant intéressant (figure 3) tout en conservant un poids, des dimensions et des propriétés physiques et mécaniques satisfaisantes pour fabriquer des structures [7].

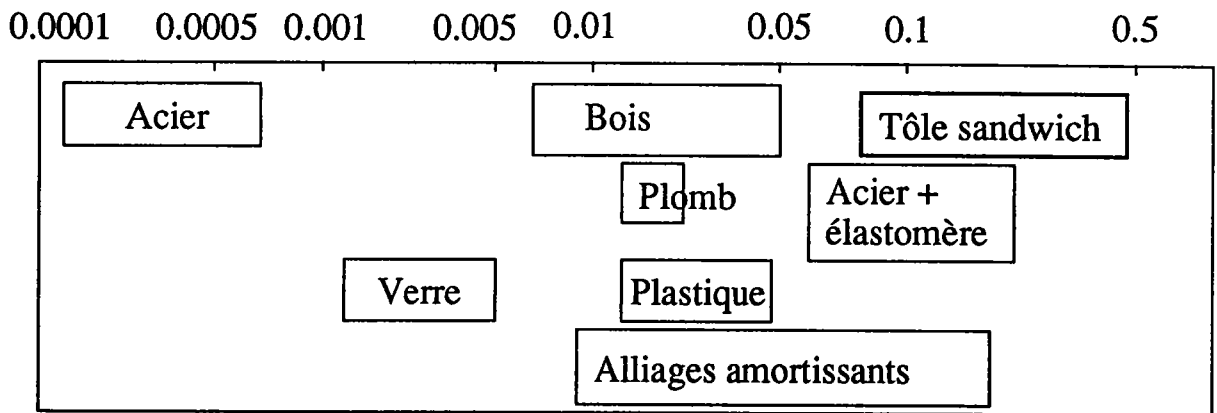


figure 3: amortissement comparé de différents matériaux

La configuration symétrique donne un amortissement plus important que celui avec la configuration dissymétrie [8,9].

Aux propriétés classiques d'une tôle (emboutissabilité, soudabilité), le polymère apporte la fonction amortissante [7]. Le mouvement d'un corps en vibration (on parlera d'un corps soumis à des sollicitations dynamiques à l'opposé d'un corps soumis à des sollicitation statiques : fluage ou relaxation [10]), s'amortit au bout d'un certain temps [11]. La propriété que possède un solide en vibration de dissiper de l'énergie sous forme de chaleur est désignée sous le nom de frottement intérieur ou frottement interne ou capacité

d'amortissement [11]. La perte d'énergie est mesurée par l'aire du cycle décrit dans le diagramme contrainte- déformation. La capacité d'amortissement est définie par le rapport entre cette perte d'énergie et l'énergie potentielle du solide lors de la déformation maximale (coefficient de frottement interne) [12].

Les caractéristiques dynamiques du polymère sont influencées par la fréquence et surtout par la température, mais excepté pour de très grandes déformations ($> 10^{-4}$ pour les matériaux caoutchoutiques [13]), elles sont indépendantes de l'amplitude de vibration [42,43,54].

Outre ces paramètres, les épaisseurs des 3 couches ainsi que les propriétés mécaniques des deux parements d'acier vont influencer l'amortissement de la tôle sandwich [12].

L'entreprise sidérurgique française, SOLLAC, devra maîtriser tous ces paramètres afin d'industrialiser à la fin de l'année 1993 des tôles sandwich amortissantes des vibrations dans une large gamme de fréquence - température :

- . quelques hertz à 250 Hertz,
- . -20°C à 150°C

L'invention du sandwich déformable mécaniquement en vue de la fabrication d'emboutis insonorisés n'est pas récente (1971, [14]). Mais un certain nombre de problèmes ont longtemps ralenti le développement de ces produits [44] : formulation du polymère, faible épaisseur de celui-ci, bonne qualité d'adhésion entre l'acier et le polymère, aptitude au soudage, aptitude au pliage, tenue en température, tenue en fatigue, tenue à la corrosion, niveau d'amortissement élevé dans le domaine fréquence - température désiré.

Ces problèmes sont pris en charge par le Laboratoire d'Études et de Développement des Produits Plats (L.E.D.E.P.P.) de SOLLAC et par des laboratoires universitaires dans le cadre d'un groupement de recherche.

D'autre part, afin de proposer des produits amortissants dans le domaine de fréquence - température désiré, il est indispensable de posséder un outil permettant de prédire le comportement et les capacités amortissantes d'une telle tôle.

La présente étude est restreinte à la modélisation et à l'étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich après colaminage et avant emboutissage. Les produits finis sont étudiés par ailleurs.

Les structures plaques et coques (épaisseurs faibles) sont soumises à des sollicitations dynamiques telles que :

- la traction
 - la flexion
 - le cisaillement
 - la torsion
- ou leurs combinaisons

Il convient, dans ces conditions, d'établir la loi de comportement et l'équation du mouvement d'un élément de plaque sandwich afin de prédire ses capacités d'amortissement.

L'analyse des plaques permet également, dans le cadre de calcul par élément finis, de modéliser les structures coques [52].

Un certain nombre d'études ont été développées depuis les années cinquante sur la vibration de plaques ou de poutres sandwich.

Kerwin [15] présenta la première analyse du problème. Il fut suivi par Yu [16], Mead [17], Di Taranto [18], Yim, Kelly et Barry [19] et Mead et Markus [20].

Leurs études, exceptée celle de Yu, sont basées sur les mêmes hypothèses:

- Le polymère est considéré viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope.
- Les parements d'acier sont élastiques isotropes et ne subissent pas de déformation de cisaillement.
- Les forces d'inerties du mouvement de flexion transverse sont prépondérantes alors que les inerties longitudinale et rotationnelle sont négligeables.
- Tous les points sur une normale à la plaque ont un mouvement dont le déplacement transverse est identique.
- Il n'y a pas de glissement aux interfaces.

Mead [21] conclut que toutes ces modélisations conduisent aux mêmes résultats.

En se basant sur ces hypothèses et en incluant les effets du cisaillement transverse et les inerties rotationnelle et longitudinale dans les parements d'acier, Di Taranto, Mead et Markus (modèle de D.T.M.M.) ont obtenus une

équation différentielle gouvernant le mouvement transverse d'une plaque et d'une poutre du 6^{ème} ordre (du 8^{ème} ordre dans le cas de la dissymétrie).

Yan et Dowell [22] ont obtenu à partir des mêmes hypothèses une équation du 4^{ème} ordre.

La différence entre les 2 approches provient de la prise en compte du cisaillement:

- Yan et Dowell supposent une distribution uniforme des contraintes de cisaillement selon l'épaisseur du sandwich.

- D.T.M.M. obtiennent une distribution parabolique des contraintes de cisaillement mais non continues aux interfaces.

Les propriétés amortissantes sont obtenues à partir de la résolution de ces équations. Di Taranto [18] a obtenu l'amortissement d'une poutre en appui à ses extrémités. Mead et Markus ont résolu le problème d'une poutre encastree à chaque extrémité.

Dans des cas plus compliqués (chargement non symétrique), la méthode de perturbation est utilisée pour obtenir approximativement l'amortissement, ainsi, Oravsky et al [23] ont étudié une poutre encastree-libre. Markus, Oravsky, Simkova [24,25] ont étudié d'autres conditions. Rao [26] utilise une approche énergétique pour obtenir et résoudre, dans de nombreux cas de chargement, l'équation du mouvement d'une poutre sandwich en vibration.

D'autres chercheurs ont étudié le comportement de plaques multicouches élastiques (stratifiés), en dehors donc du cas particulier sandwich.

Reissner et Stavsky [27] ont repris l'hypothèse classique en théorie des plaques de Love Kirchhoff : contrainte de cisaillement nulles. Yan, Norris et Stavsky [28] ont introduit l'effet du cisaillement et ont montré son importance. L'inconvénient de ces approches est qu'elles ne respectent pas la condition de continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces.

Des études plus compliquées [29] et [30] ont été élaborées pour vérifier ces conditions, mais elles nécessitent un grand nombre de paramètres à prendre en compte.

Chow [31], Chou et Carléone [32] ont formulé des théories de plaques incluant le cisaillement transverse et l'inertie rotationnelle en se basant sur la théorie des poutres de Timoshenko [33] qui a été étendue au cas des plaques isotropes par Reissner [34,35] et Mindlin [36].

Dans leur travaux, les contraintes de cisaillement sont supposées constantes selon l'épaisseur du stratifié. La déformation de cisaillement moyenne est introduite, la relation de comportement reliant ces 2 dernières grandeurs est pondérée par un coefficient correctif qui dépend des caractéristiques de chacun des constituants du stratifié. Ce coefficient permet de prendre en compte le caractère quadratique des contraintes de cisaillement transverse.

Toutes ces approches traitent le matériau sandwich élément par élément en tant qu'une structure. La voie de l'homogénéisation est très peu utilisée pour des structures composites à faible nombre de couche (10 au maximum). Pourtant, il est intéressant de faire des parallèles avec les structures homogènes [37]. Gentchenko et Stasi [38] ont obtenus les modules de flexion et de torsion de panneau sandwich, à partir d'une technique d'homogénéisation, qui sont proches des résultats expérimentaux.

Dans cette étude, le comportement du matériau sandwich est identifié au comportement d'un matériau macrohomogène équivalent viscoélastique linéaire non vieillissant isotrope transverse.

Le processus d'homogénéisation d'un matériau composite nécessite de connaître le comportement de chacun de ces constituants. Le chapitre II est consacré à la description des lois de comportement des matériaux présents dans le sandwich:

- Élastique linéaire (an)isotrope (tel que l'acier)
- Viscoélastique linéaire non vieillissant (an)isotrope répondant au principe de superposition fréquence (ou temps) / température (tel que le polymère).

Le principe de superposition fréquence / température permet de réduire en une seule variable les 2 paramètres qui influencent le comportement dynamique du polymère: la fréquence et la température [39]. Ce principe s'applique très bien aux polymères dans le domaine de la viscoélasticité linéaire [40]. Plazek [41] a montré qu'il n'était applicable que pour des domaines limités de temps (ou fréquence) et température.

Dans ces conditions, il est possible à partir du théorème de la représentation spectrale, de représenter une caractéristique dynamique d'un tel matériau par un assemblage de modèles rhéologiques simple (ressort-amortisseur) [10].

Une méthode d'identification de ces modèles rhéologiques a été développée et est présentée dans ce chapitre.

Le chapitre III présente la loi de comportement et l'équation du mouvement de flexion transverse d'un élément d'une plaque viscoélastique linéaire non vieillissant, homogène isotrope transverse soumis aux sollicitations dynamiques décrites plus haut, avec prise en compte des effets du cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle. Ces effets ont une influence prédominante sur le comportement des stratifiés sujets à des chargements statiques ou dynamiques [45]. En particulier, pour les sandwich, le cisaillement est responsable de l'amortissement des vibrations [46]. Cette étude est une extension de la théorie de Mindlin [36] restreinte aux plaques élastiques isotropes.

La résolution de l'équation du mouvement obtenue permet de déterminer la déformés dans des cas relativement simples (poutre encastree par exemple). Pour des cas plus complexes (cas de structures étudiées par ailleurs), il est indispensable d'utiliser un logiciel de code de calcul par éléments finis disposant dans sa bibliothèque d'éléments dont le comportement est identifié dans ce chapitre.

Les caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique linéaire non vieillissant homogène équivalent sont obtenus par homogénéisation à partir:

- des caractéristiques mécaniques de l'acier et du polymère (chapitre II),
- des conditions aux interfaces (la cohésion entre le polymère et l'acier est supposée parfaite),
- de la prise en compte du cisaillement transverse dans le plan de la tôle par des coefficients correctifs de la même manière que Chow [31].

Ce processus d'homogénéisation est présenté au chapitre IV.

La sollicitation de flexion Oberst (poutre encastree à une extrémité et soumise à un effort dynamique de flexion à l'autre) est largement utilisé pour caractériser le frottement interne d'un matériau. Des éprouvettes sandwich de différentes géométries ont subis cette sollicitation à différentes températures afin d'acquérir leurs capacités d'amortissement. Cette sollicitation a été simulée à partir de la résolution de l'équation du mouvement obtenue au chapitre III, pour une poutre homogène équivalente à une poutre sandwich (chapitre IV) en flexion Oberst. La comparaison entre les résultats expérimentaux et calculés a permis de valider la démarche suivie.

Cette étude est présentée au chapitre V .

En parallèle, des logiciels informatiques ont été développés. Ils permettent de:

- représenter le comportement de polymère au moyen de modèles rhéologiques,
- modéliser le comportement de matériau équivalent,
- simuler la sollicitation de flexion Oberst d'une poutre sandwich.

Ces logiciels offrent la possibilité aux utilisateurs d'optimiser les propriétés acoustiques en fonction des conditions de fonctionnement (fréquence-température) par un choix maîtrisé de l'acier et surtout du polymère et de la géométrie du sandwich.

CHAPITRE II :

LOIS DE COMPORTEMENT DE MATERIAUX:

- ELASTIQUE LINEAIRE,
- VISCOELASTIQUE LINEAIRE NON VIEIELLISSANT,
- HOMOGENE ANISOTROPE

I Introduction

La recherche du comportement homogène d'un stratifié (ou d'un composite), nécessite la connaissance du comportement mécanique de chacun des constituants du stratifié (ou du composite) [51].

Pour l'étude des matériaux sandwich, il importe de connaître les caractéristiques mécaniques de l'acier et du polymère.

L'objet de ce chapitre est de présenter les lois de comportements de matériaux :

- élastique linéaire anisotrope ou isotrope (tel que l'acier)
- viscoélastique linéaire non vieillissant anisotrope- isotrope transverse - isotrope (tel que le polymère).

Les structures en matériaux sandwich, obtenues par emboutissage, seront utilisées pour amortir des vibrations d'une automobile ou d'un appareil électroménager dans un domaine de fréquence-température de quelque Hertz à 250 Hertz et de -20°C à $+150^{\circ}\text{C}$. Dans ce domaine, les amplitudes des vibrations sont relativement faibles, elles n'occasionnent que de petites déformations.

Il est généralement admis pour de telles déformations que le comportement de l'acier est purement élastique anisotrope (cas général) ou isotrope (hypothèse reprise par beaucoup d'auteur dans l'étude des plaques et poutres sandwich [21]).

La partie II de ce chapitre présentera les caractéristiques mécaniques intervenant dans la description de la loi de comportement de l'acier.

Le polymère a un comportement plus complexe que celui de l'acier. Un échantillon de polymère soumis à des vibrations, voit ses caractéristiques varier avec la fréquence d'excitation mais aussi avec sa température.

Le principe de superposition fréquence/température (principe valable également dans l'espace temporel) permet de ramener ces 2 variables en une seule variable réduite [39].

Tant que la sollicitation dynamique imposée à cet échantillon de polymère reste inférieure à une certaine valeur, les déformations occasionnées sont élastiques [42,43] mais elles mettent en jeu des phénomènes dissipatifs [55] liés aux mouvements des chaînes moléculaires constituant le polymère. Ces phénomènes dissipatifs sont responsable de l'amortissement des vibrations. Le polymère a alors un comportement viscoélastique.

Les hypothèses de comportement linéaire et non vieillissant permettent d'obtenir une loi de comportement du polymère écrite dans l'espace de Carson (cas de sollicitations quelconques) ou dans l'espace des nombres complexes (cas de sollicitations dynamiques), relativement aisée à exploiter [56] de par le principe de correspondance [57].

Dans cette étude, le comportement du polymère est considéré comme étant viscoélastique linéaire non vieillissant anisotrope (cas général) ou isotrope, répondant au principe de superposition fréquence/température. Dans ce cas, selon le théorème de la représentation spectrale, une caractéristique complexe du polymère, fonction de la variable réduite, peut-être représentée par une association de modèles rhéologiques [58].

La partie III de ce chapitre présente :

- la théorie de la viscoélasticité linéaire non vieillissant (voir par exemple [57,60]),
- le principe de superposition fréquence/température [39,61],
- une méthode de calcul des paramètres d'une association de modèles rhéologiques représentant une caractéristique complexe en variable réduite.

II Loi de comportement d'un matériau élastique linéaire homogène

II-1 Cas de l'anisotropie

La loi de comportement d'un matériau élastique s'écrit d'une manière générale:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

II-1

Les tenseurs des contraintes et des déformations sont symétriques :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}\end{aligned}$$

Ils contiennent donc chacun 6 termes distincts. Les tenseurs de modules élastiques possèdent alors les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

soit 36 composantes indépendantes

D'autre part, l'application du théorème des travaux virtuels pour des états particuliers de contrainte permet de montrer que :

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Il reste donc 21 composantes indépendantes.

Sous forme matricielle, la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxxxy} & C_{xxxyz} & C_{xxzxx} \\ & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyyz} & C_{yyzxx} \\ & & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzyz} & C_{zzzxx} \\ & & & C_{xyxy} & C_{xyyz} & C_{xxzxx} \\ \text{symétrie} & & & & C_{yzyz} & C_{yzzxx} \\ & & & & & C_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix}$$

La plupart des matériaux possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries.

Les propriétés de symétries matérielles réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau.

II-2 Cas de l'orthotropie

Un matériau orthotrope (tel que l'acier laminé ou le bois [53]) possède 3 plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. La forme de la matrice des modules élastiques n'est pas modifiée lorsque l'on effectue les changements de base par rapport à deux de ces plans. L'exploitation des changements de base conduit à une matrice à 9 composantes indépendantes:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{xxxx} & c_{xxyy} & c_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{yyyy} & c_{yyzz} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{xyxy} & 0 & 0 \\ \text{symétrie} & & & & c_{yzyz} & 0 \\ & & & & & c_{zxzx} \end{bmatrix}$$

II-3 Cas de l'isotropie transverse (ou orthotropie de révolution)

Un matériau est isotrope transverse (tel qu'un composite fibreux unidirectionnel - figure 1) si un plan passant par un axe privilégié est un plan de symétrie mécanique

Si l'axe privilégié est l'axe z, un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe, ne modifie pas la matrice. Dans ce cas, la loi de comportement ne fait intervenir que 5 composantes indépendantes :

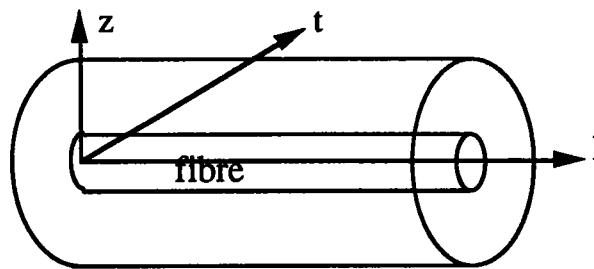


figure 1: matériau composite unidirectionnel

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{11zz} & c_{11zz} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{zzzz} & c_{tzzz} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2(c_{zzzz} - c_{tzzz}) & 0 & 0 \\ & \text{symétrie} & & & c_{z1z1} & 0 \\ & & & & & c_{z1z1} \end{bmatrix}$$

Ainsi, un matériau sandwich symétrique sur le plan de la géométrie et des propriétés physiques de ses constituants est un matériau isotrope transverse.

II-4 Cas de l'isotropie

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes des axes de référence. Le tenseur des modules d'élasticité est invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété conduit à une loi de comportement à 2 coefficients indépendants (par exemple le module d'Young E et le rapport de Poisson ν) :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{II-2}$$

La formule duale s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{II-3}$$

avec $\delta_{ij} = 1$ pour $i=j$

$\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

II-5 Hypothèses de comportement adoptées pour l'acier utilisé dans les tôles sandwich

L'acier utilisé dans la fabrication des tôles sandwich SOLLAC est considéré élastique homogène isotrope. Ses caractéristiques (voir par exemple [51]) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} E^a &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ \nu^a &= 0.3 \\ \rho^a &= 7800 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

III Loi de comportement d'un matériau ViscoElastique Linéaire Non Vieillissant (V.E.L.N.V.)

III-1 La viscoélasticité

Un certain nombre d'essais tels que le fluage, la relaxation, la recouvrance permettent de mettre en évidence le caractère visqueux [56] de certains matériaux tels que les polymères.

Les conséquences de hypothèses de linéarité du comportement et de non vieillissement de matériau seront exposés plus loin (§III 2 et §III 3 de ce chapitre).

III-1-1 Le fluage

Si l'on applique à un polymère, à un instant t_0 , une contrainte uniaxiale dans la direction k_1 maintenue constante dans le temps (figure 2-a) (les autres composantes σ_{ij} étant nulles), une évolution des déformations ϵ_{ij} dans le temps est observée.

Au temps t_0 , on observe les déformations instantanées ϵ^0_{ij} qui correspondent à l'élasticité instantanée de matériau, puis pour $t > t_0$, les déformations croissent (l'évolution de ϵ_{11} est présentée à titre d'exemple figure 2-b).

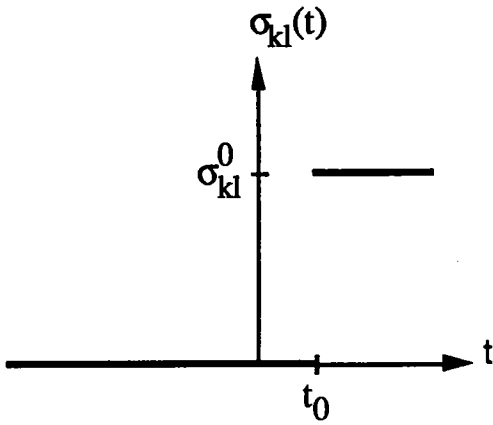


figure 2-a

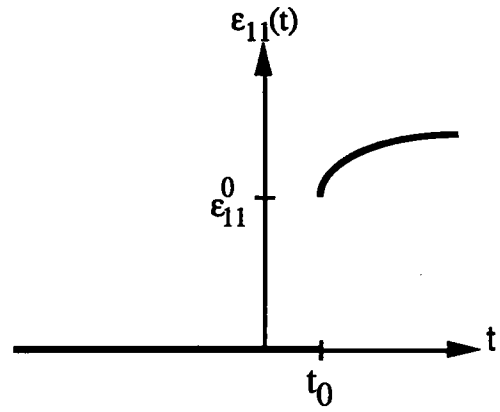


figure 2-b

figure 2: essai de fluage

mathématiquement :

$$\sigma_{kl}(t) = Y(t-t_0) \sigma_{kl}^0 \quad \text{II-4}$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = f_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0) \sigma_{kl}^0 \quad \text{II-5}$$

avec : $Y(t)$: fonction d'Heaviside ou fonction échelon telle que :

$$Y(x) = 0 \text{ pour } x < 0,$$

$$Y(x) = 1 \text{ pour } x \geq 0,$$

$f_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0)$: composantes du tenseur des fonctions de fluage,

$f_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0) = 0$ pour $t < t_0$,

$f_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0)$: fonction croissante pour $t \geq t_0$.

III-1-2 La relaxation

Si une déformation uniaxiale dans la direction kl maintenue constante dans le temps (figure 3-a) (les autres ε_{ij} étant nulles) est appliquée à un instant t_0 , il y a une évolution des contraintes σ_{ij} dans le temps (figure 3-b).

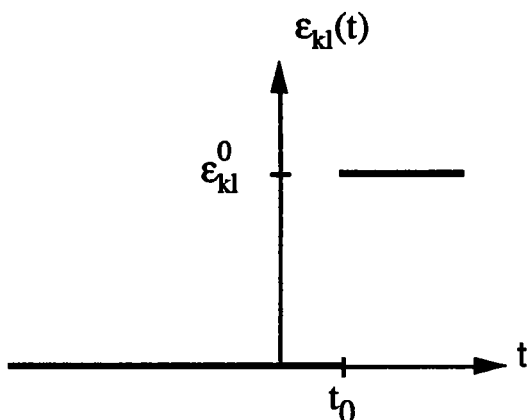


figure 3-a

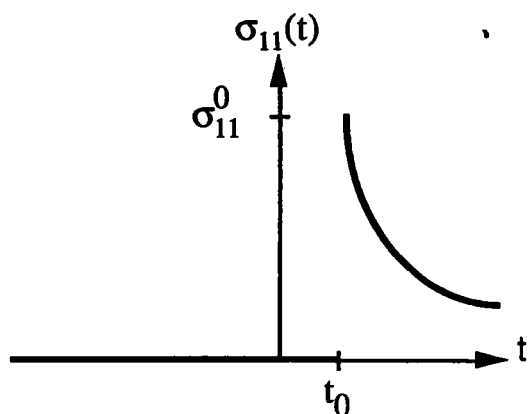


figure 3-b

figure 3: essai de relaxation

mathématiquement :

$$\epsilon_{kl}(t) = Y(t-t_0) \epsilon_{kl}^0 \quad \text{II-6}$$

$$\sigma_{ij}(t) = r_{ijkl}(t, t_0, \epsilon_{kl}^0) \epsilon_{kl}^0 \quad \text{sans sommation d'indice} \quad \text{II-7}$$

avec:

$r_{ijkl}(t, t_0, \epsilon_{kl}^0)$: composantes du tenseur des fonctions de relaxation ,

$r_{ijkl}(t, t_0, \epsilon_{kl}^0) = 0$ pour $t < t_0$,

$r_{ijkl}(t, t_0, \epsilon_{kl}^0)$: fonction décroissante pour $t \geq t_0$.

III-1-3 La recouvrance

On applique un créneau de contrainte d'amplitude σ_{kl}^0 (figure 4-a), les déformations évoluent dans le temps (figure 4-b)

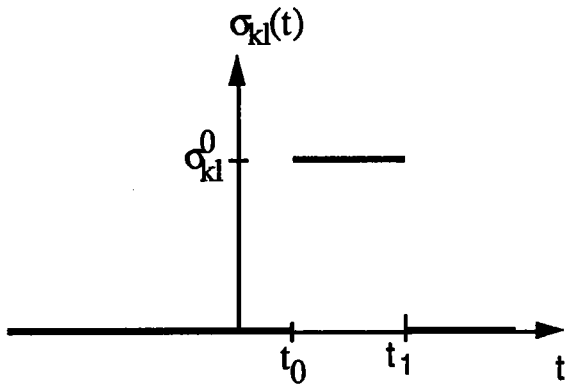


figure 4-a

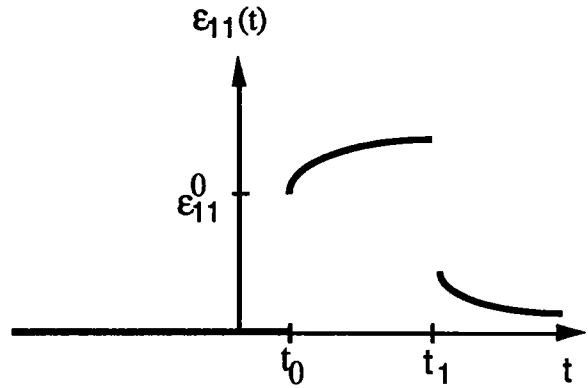


figure 4-b

figure 4: essai de recouvrance

Pour $t < t_1$: on retrouve l'expérience de fluage,

Pour $t = t_1$ (relachement de la contrainte), il y a un retour instantané d'amplitude égale au saut observé en $t = t_0$ (si l'élasticité instantanée est invariable).

Pour $t > t_1$, les déformations décroissent et reviennent à l'état initial ($\epsilon_{ij} = 0$). Un corps qui ne présente pas de déformation permanente (les déformations ne revenant pas à l'état initial) est un corps viscoélastique. A l'opposé, un corps qui présente des déformations permanentes est un corps viscoélastoplastique [56].

remarque: L'expérience d'effacement est une expérience "duale" de la recouvrance: un créneau de déformation est imposé. Pour $t = t_1$, la valeur absolue de la contrainte σ va en diminuant, il y a un effacement des contraintes qui peut-être total (viscoélasticité) ou partiel (viscoélastoplasticité).

III-2 La viscoélasticité linéaire

En viscoélasticité, la loi de comportement s'écrit d'une manière générale:

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{F} \left[\epsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t) \right] \text{ sans sommation}$$

à chaque instant t la contrainte $\sigma_{ij}(t)$ dépend de l'histoire de la déformation $\varepsilon_{kl}(\tau)$ jusqu'à cet instant t .

Le comportement est linéaire si la fonctionnelle \mathcal{F} est linéaire, c'est à dire:

$$\cdot \mathcal{F} \left[\varepsilon_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t) + \varepsilon_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t) \right] = \mathcal{F} \left[\varepsilon_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t) \right] + \mathcal{F} \left[\varepsilon_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t) \right] \quad \text{II-8}$$

$$\cdot \mathcal{F} \left[\lambda \varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t) \right] = \lambda \mathcal{F} \left[\varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t) \right] \quad (\lambda \in \text{Re}) \quad \text{II-9}$$

Ainsi, pour l'expérience de fluage, la réponse $\varepsilon_{ij}(t)$ doit être proportionnelle à σ_{ij}^0 , donc la fonction de fluage est indépendante de σ_{ij}^0 . De même, pour l'expérience de relaxation, la fonction de relaxation est indépendante de ε_{ij}^0 .

$$\text{soit: } \varepsilon_{ij}(t) = f_{ijkl}(t, t_0) \sigma_{kl}^0 \quad \text{pour l'expérience de fluage} \quad \text{II-10}$$

$$\sigma_{ij}(t) = r_{ijkl}(t, t_0) \varepsilon_{kl}^0 \quad \text{pour l'expérience de relaxation} \quad \text{II-11}$$

(sans sommation d'indice)

L'application de la linéarité, permet d'écrire la réponse pour toute expérience de fluage ou de relaxation de manière plus générale. Ainsi, on peut considérer l'expérience de fluage définie par $\sigma_{ij}(t) = Y(t, t_0) \sigma_{ij}^0$. Cette histoire du tenseur $\sigma(t)$ peut-être considérée comme la superposition des histoires correspondant à une expérience de fluage simple telle que celle présentée en III-1-1. Il résulte de par l'application de la linéarité, que pour chaque $\varepsilon_{ij}(t)$, la réponse s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}(t) = f_{ijkl}(t, t_0) \sigma_{kl}^0 \quad \text{avec sommation} \quad \text{II-12}$$

et de la même manière, la formule duale s'écrit :

$$\sigma_{ij}(t) = r_{ijkl}(t, t_0) \varepsilon_{kl}^0 \quad \text{avec sommation (ceci ne sera plus précisé dans la suite: convention générale)} \quad \text{II-13}$$

III-3 Le principe de superposition de Boltzmann

Une histoire de contrainte $\sigma_{kl}(t)$ peut-être considérée comme la superposition d'échelons infiniment petits : $d\sigma_{kl}(\tau).Y(t, \tau)$ et éventuellement des

sauts notés $[\sigma_{kl}]_i$ aux instants τ_i (figure 5). La réponse $\epsilon_{ij}(t)$ sera alors selon la définition de la linéarité, la superposition des réponses $d\epsilon_{ij}(t)$ produites par ces échelons [56].

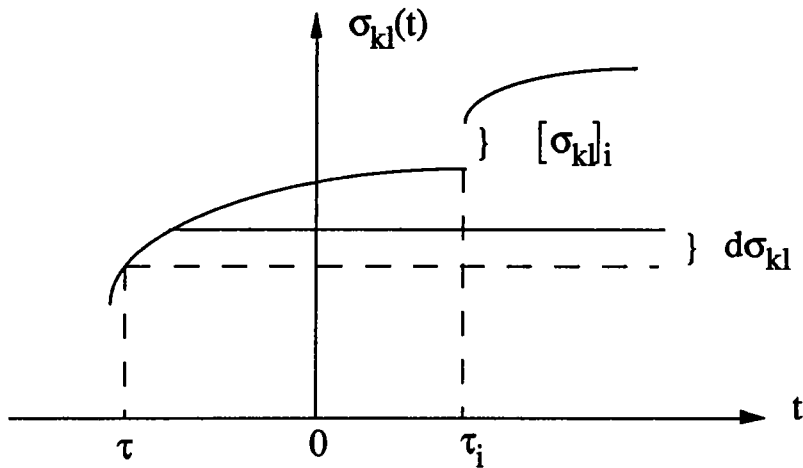


figure 5: histoire de la contrainte

$d\sigma_{kl}(\tau)$ produit une déformation $d\epsilon_{ij}(t)$ à un instant t postérieur à τ . On peut ainsi écrire la relation qui relie $d\epsilon_{ij}(t)$ à $d\sigma_{kl}(\tau)$:

$$d\epsilon_{ij}(t) = f_{ijkl}(t, \tau) d\sigma_{kl}(\tau)$$

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t f_{ijkl}(t, \tau) d\sigma_{kl}(\tau) + \sum_i f(t, \tau_i) [\sigma_{kl}]_i$$

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t f_{ijkl}(t, \tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) dt \quad \text{II-14}$$

où les sauts de σ_{kl} correspondent à des fonctions de Dirac $[\sigma_{kl}]_i \delta_i$ pour la dérivée $\dot{\sigma}_{kl}$.

La formule duale qui correspond à l'effet d'une histoire de déformation est :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t r_{ijkl}(t, \tau) \dot{\epsilon}_{kl}(\tau) d\tau \quad \text{II-15}$$

Les formules II 14 et II 15 sont les formules de Boltzmann.

III-4 Matériau non vieillissant

Un matériau est non vieillissant si ses propriétés n'évoluent pas avec le temps [61]. C'est à dire que la réponse à un instant t pour une sollicitation à un instant τ (antérieur à t) est la même que celle à un instant $t+\Delta\tau$ pour une sollicitation à un instant $\tau+\Delta\tau$.

D'après cette définition, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent que d'une seule variable : $t - \tau$ (le temps séparant l'effet de la cause). Les formules de Boltzmann se réécrivent de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t f_{ijkl}(t-\tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau \quad \text{II 16}$$

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t r_{ijkl}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau \quad \text{II 17}$$

Ces 2 intégrales sont des produits de convolution de Riemann notée * :

$$\varepsilon_{ij}(t) = f_{ijkl}(t) * \dot{\sigma}_{kl}(t) \quad \text{II 18}$$

$$\sigma_{ij}(t) = r_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \quad \text{II 19}$$

III-5 La transformée de Carson

Les formules (II 18) et (II 19) montrent que les calculs concernant un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant se font dans une algèbre de convolution.

La transformation de Carson de la fonction $x(t)$ notée $x^*(p)$ est définie par:

$$\begin{aligned} x^*(p) &= p \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-pt} dt \\ &= p \mathcal{L}(x(t)) \end{aligned} \quad \text{II 20}$$

où $\mathcal{L}(x(t))$ est la transformée de Laplace de la fonction $x(t)$.

Les propriétés principales de la transformée de Laplace sont (voir par exemple [62]) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x(t)*y(t)) &= \mathcal{L}(x(t))\mathcal{L}(y(t)), \\ \mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= p\mathcal{L}(x(t))\end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de la transformée de Carson et des propriétés ci-dessus, les formules II 18 et II 19 deviennent dans l'espace de Carson:

$$\varepsilon_{ij}^*(p) = f_{ijkl}^*(p)\sigma_{kl}^*(p) \quad \text{II-21}$$

$$\sigma_{ij}^*(p) = r_{ijkl}^*(p)\varepsilon_{kl}^*(p) \quad \text{II-22}$$

$f_{ijkl}^*(p)$: composantes du tenseur d'ordre 4 des modules opérationnels

$r_{ijkl}^*(p)$: composantes du tenseur d'ordre 4 complaisances opérationnels

L'hypothèse de non vieillissement permet de ramener des calculs intégrales à des calculs opérationnels.

III-6 Le principe de correspondance

Les équations II-20 et II-21 sont analogues aux lois de Hooke généralisées en élasticité, ce qui conduit au principe de correspondance [57], [63]: "Dans l'hypothèse des changements de géométrie négligeables et selon le principe d'Onsager [56], la résolution de la plupart des problèmes pour un système constitué d'un matériau V.E.L.N.V. anisotrope se ramène à la résolution du problème homologue pour le même système constitué d'un matériau élastique linéaire anisotrope".

III-7 Loi de comportement d'un matériau homogène viscoélastique linéaire non vieillissant.

III-7-1 Cas de l'anisotropie

Selon le principe de correspondance défini ci-dessus, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant anisotrope homogène, s'écrit de la même manière que celle d'un matériau élastique linéaire anisotrope homogène, ramenée dans l'espace de Carson :

$$\sigma_{ij}^*(p) = c_{ijkl}^*(p) \varepsilon_{kl}^*(p) \quad \text{II-23}$$

$$\varepsilon_{ij}^*(p) = s_{ijkl}^*(p) \sigma_{kl}^*(p) \quad \text{II-24}$$

$$\text{avec: } s_{ijkl}^*(p) = \left[c_{ijkl}^*(p) \right]^{-1} \quad \text{II-25}$$

Les tenseurs $s^*(p)$ et $c^*(p)$ possèdent, comme en élasticité, les symétries au niveau des indices i et j , h et l liées aux symétries des tenseurs σ et ε . Par contre, la symétrie des groupes ij et hl ne peut-être démontrée dans le cas général, elle est posée par le principe de Onsager [56].

La loi de comportement ne fait intervenir que 21 composantes opérationnelles indépendantes. Les symétrie des matériaux réduisent ce nombre.

III-7-2 Cas de l'orthotropie

Dans ce cas, le tenseur $c^*(p)$ s'écrit avec 9 composantes opérationnelles indépendantes (voir le §11-2 de ce chapitre).

III-7-3 Cas de l'isotropie transverse

Un matériau sandwich symétrique sur le plan de la géométrie et des propriétés physiques de ses constituants est un matériau isotrope transverse dont la loi de comportement s'écrit en fonction de 5 composantes opérationnelles indépendantes (voir le § II-3 de ce chapitre).

III-7-4 Cas de l'isotropie

Sans qu'il soit nécessaire de faire appel au principe de Onsager, on démontre que le tenseur $c^*(p)$ ne fait intervenir que 2 composantes indépendantes: Par exemple un module opérationnel ($E^*(p)$) et un rapport de Poisson opérationnel ($\nu^*(p)$) :

$$\sigma_{ij}^*(p) = \frac{E^*(p)}{1+\nu^*(p)} \varepsilon_{ij}^*(p) + \frac{E^*(p)\nu^*(p)}{(1+\nu^*(p))(1-2\nu^*(p))} \varepsilon_{kk}^*(p) \delta_{ij} \quad \text{II-26}$$

et réciproquement :

$$\varepsilon_{ij}^*(p) = \frac{1+\nu^*(p)}{E^*(p)} \sigma_{ij}^*(p) - \frac{\nu^*(p)}{E^*(p)} \sigma_{kk}^*(p) \delta_{ij} \quad \text{II-27}$$

III-8 Cas des sollicitations harmoniques

Un corps viscoélastique linéaire non vieillissant homogène, est soumis à des sollicitations harmoniques de la forme: $\sigma_{ij}(t) = \text{Re} \left[\sigma_{ij}^0 e^{j\omega t} \right]$ (exemple: $\sigma_{11}(t)$: figure 6) où $j^2 = -1$.

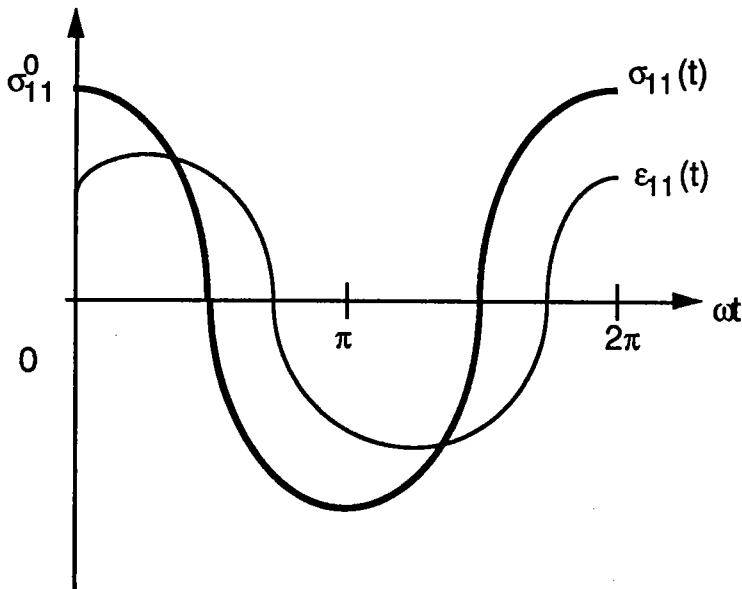


figure 6: contrainte et déformation harmoniques d'un corps viscoélastique linéaire non vieillissant

Les déformations occasionnées (exemple $\varepsilon_{11}(t)$) seront d'après la formule de Boltzmann II 16:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \int_{-\infty}^t f_{ijkl}(t-\tau) \cdot \text{Re} \left[j\omega \cdot e^{j\omega\tau} \right] \cdot d\tau$$

en posant $u = t - \tau$, il vient:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \operatorname{Re} \left[j\omega \cdot e^{j\omega t} \cdot \int_0^\infty f_{ijkl}(u) e^{-j\omega u} \cdot du \right]$$

en identifiant avec la transformée de Carson II 20 :

$$j\omega = p,$$

$$f_{ijkl}^*(j\omega) = j\omega \int_0^\infty f_{ijkl}(t) e^{-j\omega t} \cdot dt$$

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant homogène soumis à un changement harmonique s'écrit en complexe:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \operatorname{Re} \left[f_{ijkl}^*(j\omega) e^{j(\omega t)} \right] \quad \text{II-28}$$

avec: $f_{ijkl}^*(j\omega)$: composantes du tenseur des complaisances complexes

$$= f'_{ijkl}(\omega) + j f''_{ijkl}(\omega) \quad \text{II-29}$$

$f'_{ijkl}(\omega) = \operatorname{Re} \left[f_{ijkl}^*(j\omega) \right]$ composantes du tenseur des complaisances de stockage II-30

$f''_{ijkl}(\omega) = \operatorname{Im} \left[f_{ijkl}^*(j\omega) \right]$: composantes du tenseur des complaisances de pertes II-31

L'amplitude maximale de la déformation $\varepsilon_{ij}(t)$ vaut $\sigma_{kl}^0 \left| f_{ijkl}^*(j\omega) \right|$.

La loi de comportement duale de II-28 correspondant à des sollicitations harmoniques en déformations s'écrit:

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \operatorname{Re} \left[r_{ijkl}^*(j\omega) \cdot e^{j(\omega t)} \right] \quad \text{II-32}$$

avec: $r_{ijkl}^*(j\omega)$: composantes du tenseur des modules complexes

$$= r'_{ijkl}(\omega) + j r''_{ijkl}(\omega) \quad \text{II-33}$$

$r'_{ijkl}(\omega) = \operatorname{Re} \left[r_{ijkl}^*(j\omega) \right]$: composantes du tenseur des modules de stockage II-34

$$\ddot{r}_{ijkl}(\omega) = \text{Im} \left[r_{ijkl}^*(j\omega) \right]: \text{composantes du tenseur des modules de pertes} \quad \text{II-35}$$

L'amplitude maximale de la contrainte $\sigma_{ij}(t)$ vaut: $\epsilon_{kl}^0 \left| r_{ijkl}^*(j\omega) \right|$.

Les formules II 29, II 30, II 31, II 32, II 33, II 34, II 35, ne sont pas indépendantes, d'après II 25 :

$$r_{ijkl}^*(j\omega) = \left[f_{ijkl}^*(j\omega) \right]^{-1} \quad \text{II-36}$$

$$\text{ainsi: } \dot{r}_{ijkl}(\omega) = \frac{\dot{f}_{ijkl}(\omega)}{\left| f_{ijkl}^*(j\omega) \right|} \quad \text{II-37}$$

$$\ddot{r}_{ijkl}(\omega) = \frac{-\ddot{f}_{ijkl}(\omega)}{\left| f_{ijkl}^*(j\omega) \right|} \quad \text{II-38}$$

Des relations inverses (intégrales de Mellin Fourier voir [61] par exemple) permettent à partir des composantes complexes de calculer les fonctions de fluage ou de relaxation:

$$f_{ijkl}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int e^{j\omega t} \frac{f_{ijkl}^*(j\omega)}{\omega} d\omega$$

$$r_{ijkl}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int e^{j\omega t} \frac{r_{ijkl}^*(j\omega)}{\omega} d\omega$$

Ainsi, à partir d'expériences dynamiques, il est possible d'obtenir les caractéristiques statiques (fonctions de fluage et de relaxation) par le biais de transformation mathématique qui ne sont pas solubles simplement, ce qui conduit à la recherche de méthode d'inversion approchées [10].

III-9 Le frottement interne

Pour un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant soumis à un chargement harmonique, la contrainte et la déformation sont déphasées d'un angle φ :

$$\sigma(t) = \sigma^0 \operatorname{Re}[e^{j\omega t}],$$

d'après III-28:

$$\varepsilon(t) = \sigma^0 |f^*(j\omega)| \operatorname{Re}[e^{(j\omega t + \varphi(\omega))}],$$

avec: $\operatorname{tg} \varphi(\omega) = f''(\omega)/f'(\omega)$

Dans le plan σ - ε , cela se traduit par une hystérèse (figure 7) dont l'aire représente la travail dissipé au cours d'un cycle. Cette quantité rapportée à l'énergie potentielle maximale définit le frottement interne ψ [59,61]:

$$\psi = \frac{\int_0^{2\pi} \sigma(t) d\varepsilon(t)}{\frac{1}{2} \sigma_{\max} \varepsilon_{\max}} = 2\pi \sin \varphi \quad \text{II-39}$$

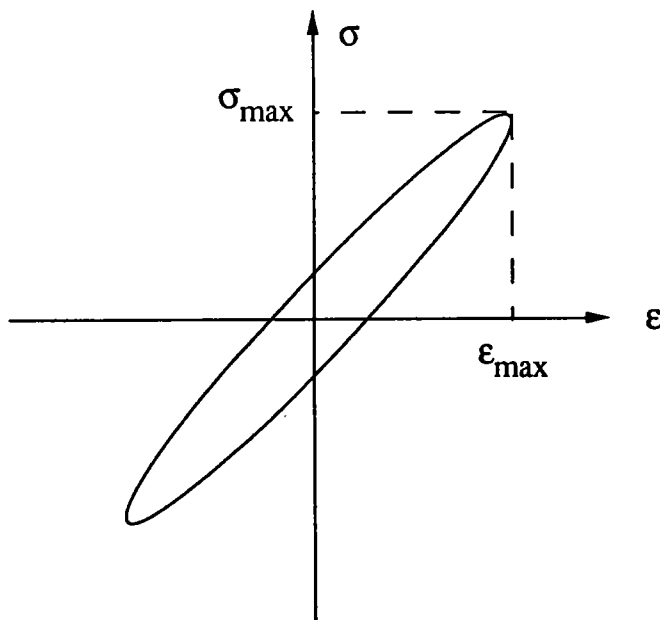


figure 7: hystérèse contrainte / déformation

Pour le cas dual (déformation appliquée):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^0 \operatorname{Re}[e^{j\omega t}],$$

d'après III-32: $\sigma(t) = \varepsilon^0 |r^*(j\omega)| \operatorname{Re}[e^{(j\omega t + \delta(\omega))}],$

avec: $\operatorname{tg} \delta(\omega) = r''(\omega)/r'(\omega) = -\operatorname{tg} \varphi(\omega)$ (d'après II-36 et II-37),

le frottement interne s'écrit :

$$\psi = -2\pi \sin\delta = 2\pi \sin\varphi \quad \text{II-40}$$

Notons que pour un matériau à comportement non linéaire (domaine dans lequel les formules de Boltzmann sont fausses) la relation II 40 n'est pas valable car les relations de comportement II 28 et II 32 ne sont pas valables.

Le coefficient de frottement interne caractérise la capacité d'un matériau à dissiper sous forme de chaleur, une partie de l'énergie vibratoire reçue.

Pratiquement, c'est souvent la tangente de l'angle φ qui caractérise la capacité d'un matériau à amortir des vibrations.

III-10 Le principe de superposition fréquence (ou temps) / température - La loi W.L.F.

III-10-1 Le principe de superposition fréquence (ou temps) / température [60,39].

Si l'on effectue sur un échantillon d'un polymère des expériences de relaxations à différentes températures, on obtient des fonctions de relaxations qui dépendent non seulement du temps mais également de la température (figure 8 - courbes de gauche [65]).

Néanmoins, ces fonctions de relaxations peuvent, en les déplaçant selon l'axe des temps, se superposer comme le montre la partie droite de la figure 8. La superposition donne une courbe unique appelée courbe maîtresse, fonction de la variable réduite ta_T , t étant le temps et a_T un facteur de déplacement fonction de la température. C'est le principe de superposition temps/température. Ce principe s'applique très bien aux polymères dans le domaine de la viscoélasticité linéaire [40]. cependant, Plazek [41] a montré qu'il n'était applicable que pour des domaines limités de temps et température.

Ce principe s'applique également pour des sollicitations harmoniques. Il est d'ailleurs davantage utilisé dans ce cas que dans celui des sollicitations statiques, les transformées inverse permettent de calculer les caractéristiques fonctions du temps à partir des caractéristiques dynamiques.

Ce principe exprime le fait que ce qui se passe à un temps t_1 à une température T_1 doit se passer à un temps $t_2 < t_1$ à une température $T_2 > T_1$.

L'effet d'un changement de température est ainsi le même que si l'on applique à l'échelle des temps un facteur multiplicatif (ou additif en échelle logarithmique).

Ce principe est largement utilisé dans l'étude des polymères. Notons que comme l'ont montré les équipes des laboratoires de Strasbourg (EAHP) et de Mulhouse (centre de recherche sur la physico-chimie des surfaces solides), ce principe s'applique très bien aux polymères envisagés pour la construction des tôles sandwich.

Il permet d'obtenir les caractéristiques d'un polymère dans le domaine des temps longs, difficilement accessible, en faisant varier la température.

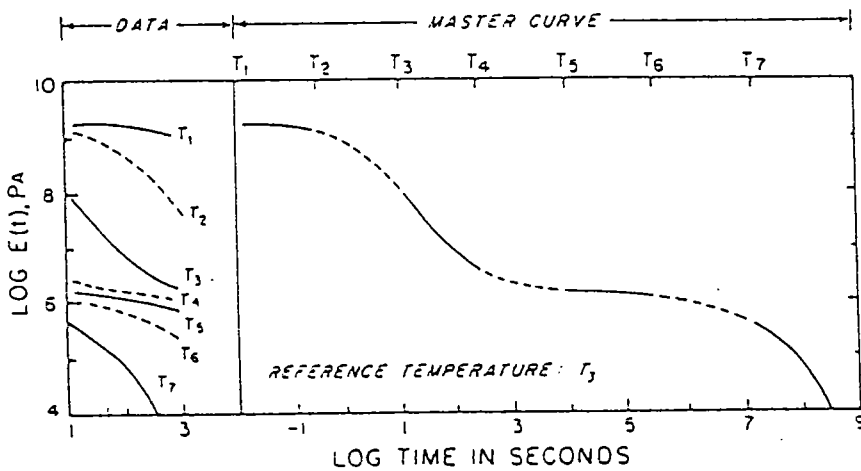


figure 8: préparation d'une courbe maîtresse de relaxation à partir de mesures expérimentales du module de relaxation à différentes températures.

remarque : Pour superposer les courbes de base, il faut quelques fois apporter une correction verticale (qui est généralement très faible et souvent négligée) [60] pour obtenir la courbe maîtresse.

III-10-2 Loi W.L.F.

Williams Landel Ferry ont proposé une équation empirique (dite loi W.L.F.) modélisant l'évolution du facteur de déplacement (a_T) [64]:

$$\text{Log } a_T = \frac{c_1(T-T_0)}{c_2+T-T_0}$$

avec C_1, C_2 : constantes
 T_0 : température de référence
 T : Température
 a_T : facteur de déplacement

C_1, C_2 ont été prévus initialement comme étant des constantes universelles :

$$C_1 = 17,44$$

$$C_2 = 51,6^\circ\text{C}$$

Mais, ces valeurs varient suivant le type de polymère (voir le tableau de Ferry [39]).

III-11 Le théorème de la représentation spectrale - Application à un corps viscoélastique linéaire non vieillissant répondant au principe de superposition fréquence (temps)/Température.

III-11-1 Modèle de Maxwell généralisé.

Le module opérationnel d'un corps viscoélastique linéaire non vieillissant peut-être représenté par un groupement en parallèle d'un certain nombre de modèle de Maxwell et d'un modèle de Kelvin [58,59,65] appelé modèle de Maxwell généralisé (figure 9)

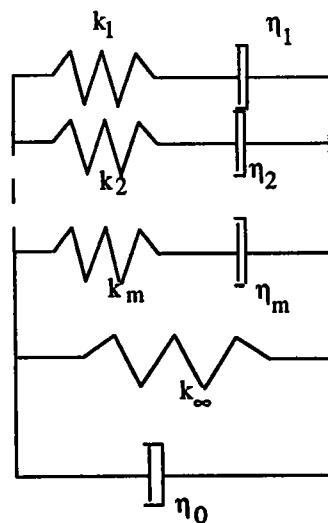


figure 9: modèle de Maxwell généralisé

Le module opérationnel de ce modèle de Maxwell généralisé s'écrit :

$$r^*(p) = \eta_0 \cdot p + k_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{p \cdot \eta_i \cdot k_i}{p \cdot \eta_i + k_i} \quad \text{II-41}$$

la transformation de Carson inverse donne la fonction à relaxation :

$$r(t) = \eta_0 \cdot \delta(t) + k_\infty + \sum_{i=1}^m k_i e^{-t/\tau_i} \quad \text{II-42}$$

avec $\tau_i = \eta_i/k_i$: temps de relaxation

Un seul temps de relaxation ne suffit pas à représenter le comportement d'un polymère observé expérimentalement (exemple figure 8) ce qui conduit à un grand nombre de temps de relaxation (modèle de Maxwell généralisé).

Pour une sollicitation harmonique, selon le paragraphe III-8, le module complexe, les modèle de stockage et de perte s'écrivent respectivement :

$$r^*(j\omega) = \eta_0 \cdot j\omega + k_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{j\omega \cdot \eta_i \cdot k_i}{j\omega \cdot \eta_i + k_i} \quad \text{II-43}$$

$$r'(\omega) = k_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{\omega^2 k_m}{\omega^2 + \tau_i^2} \quad \text{II-44}$$

$$r''(\omega) = \eta_0 \cdot \omega + \sum_{i=1}^m \frac{\omega k_i \tau_i}{\omega^2 + \tau_i^2} \quad \text{II-45}$$

$$\tan \varphi = \frac{r''(\omega)}{r'(\omega)}$$

Inversement, la complaisance opérationnelle d'un corps viscoélastique linéaire non vieillissant peut-être représentée par un groupement en séries d'un certain nombre de modèle de Kelvin et d'un modèle de Maxwell (modèle de Kelvin généralisé). La complaisance opérationnelle est l'inverse du module opérationnel II 41.

Ainsi, une courbe maîtresse représentant une caractéristique d'un polymère viscoélastique linéaire non vieillissant répondant au principe de superposition temps (fréquence)/ température peut-être représentée par une fonction analytique.

III-11-2 Méthode de calcul des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé.

III-11-2-1 Position du problème

Les courbes maîtresses de stockage ($R'(\omega a_T)$) et de perte ($R''(\omega a_T)$) en fonction de la variable réduite (ωa_T) d'un polymère viscoélastique linéaire non vieillissant, sont disponibles à la suite d'expériences.

Le problème est de trouver un fonction analytique permettant de modéliser ces modules.

Différents auteurs ont développés des méthodes pour résoudre ce problème. N.P. Vinh [66] fait le point sur ces différentes méthodes.

Citons par exemple la technique du contour approché de Bode développée par N.P. Vinh [66] ou celle de Jouendeau et Duperray [10] basée sur l'exploitation du diagramme de Cole-Cole. Si ces méthodes sont relativement aisées à mettre en oeuvre [66] et nécessitent un nombre restreint de paramètres [10], elles demandent de calculer l'intégrale de Mellin Fourier pour obtenir les fonctions dans l'espace temps.

La technique présentée ici permet de calculer les paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé dont l'inversion pour obtenir la fonction de relaxation est connue (II 42). Les fonctions analytiques notées $R'_a(\omega a_T)$ et $R''_a(\omega a_T)$ obtenues à partir de ces paramètres (formules II 44 et II 45) permettent de modéliser les courbes maîtresses des modules de stockage et de perte du polymère étudié.

III-11-2-2 Détermination des paramètres du modèle de Maxwell généralisé

Les paramètres du modèle de Kelvin sont obtenue à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{\omega a_T \rightarrow 0} [r'(\omega a_T)] = k_\infty : \text{module d'élasticité asymptotique}$$

$$\lim_{\omega a_T \rightarrow \infty} [r''(\omega a_T)] = \eta_0 = 0, \text{ ce qui traduit le fait qu'à l'état vitreux, c'est à}$$

dire à température faible ou a pulsation réduite importante ($\omega a_T \rightarrow \infty$), le polymère peut être considéré comme élastique (la partie imaginaire du module étant alors nulle).

Pour obtenir les paramètres des modèles de Maxwell, considérons la fonction $\frac{\omega a_T^2 k_i}{\omega a_T^2 + \tau_i^2}$ de la relation II-43 (partie réelle du module).

Cette fonction se réécrit $\frac{k_i}{1 + \frac{\tau_i^2}{\omega a_T^2}}$. L'allure de cette fonction divisée par k_i est

représentée figure 10.

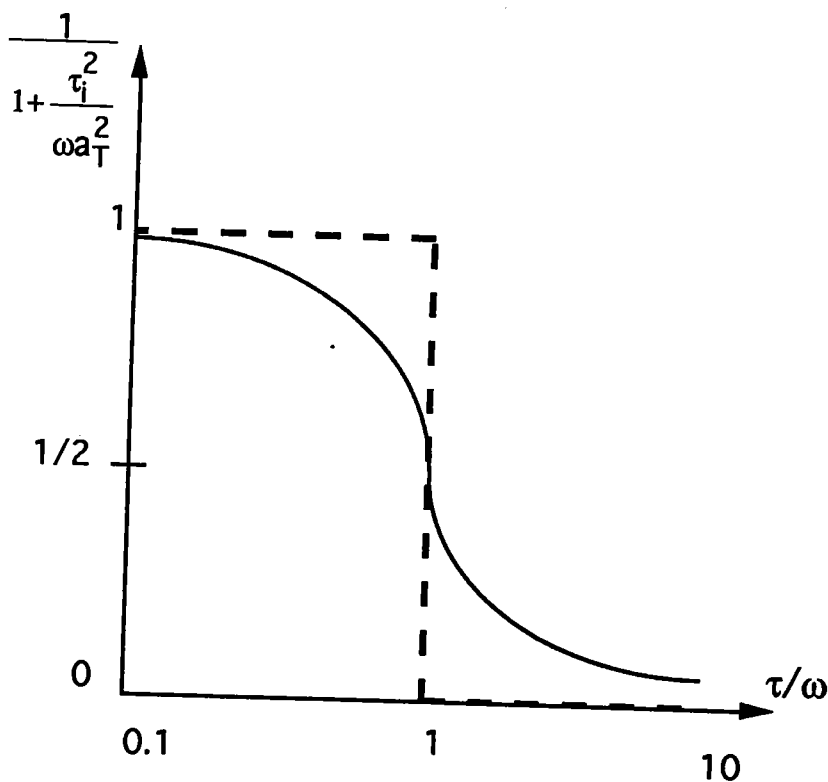


figure 9

figure 10: - : fonction $\frac{1}{1 + \frac{\tau_i^2}{\omega a_T^2}} = f(\tau/\omega a_T)$; --: représentation

Cette fonction divisée par k_i peut-être remplacée par :

0 pour $\tau/\omega a_T > 1$,
 1 pour $\tau/\omega a_T < 1$,
 1/2 pour $\tau/\omega a_T = 1$

En se basant sur les hypothèses écrites ci-dessus (II-46), entre 2 points expérimentaux de la courbe maîtresse du module de stockage $(\omega a_{T_i}, R'_i(\omega a_{T_i}))$ et $(\omega a_{T_{i+1}}, R'_{i+1}(\omega a_{T_{i+1}}))$, le $i^{\text{ème}}$ module de Maxwell peut être calculer de la même manière suivante :

Pour $j > i$, on suppose $\tau_j \gg \omega a_{T_i}$ et $\tau_j \gg \omega a_{T_{i+1}}$, soit compte tenu de II-46 :

$$\frac{(\omega a_{T_i})^2 k_j}{(\omega a_{T_i})^2 + k_j^2} = \frac{k_j}{1 + \left[\frac{\tau_j}{\omega a_{T_i}} \right]^2} = 0,$$

$$\frac{(\omega a_{T_{i+1}})^2 k_j}{(\omega a_{T_{i+1}})^2 + k_j^2} = \frac{k_j}{1 + \left[\frac{\tau_j}{\omega a_{T_{i+1}}} \right]^2} = 0,$$

Ce qui signifie que les modèles de Maxwell j ($j > i$) n'interviennent pas dans la réponse entre les pulsations réduites ωa_{T_i} et $\omega a_{T_{i+1}}$.

pour $j < i$, on suppose $\tau_j \ll \omega a_{T_i}$ et $\tau_j \ll \omega a_{T_{i+1}}$, soit compte tenu de II-46

$$\frac{(\omega a_{T_i})^2 k_j}{(\omega a_{T_i})^2 + k_j^2} = \frac{k_j}{1 + \left[\frac{\tau_j}{\omega a_{T_i}} \right]^2} \approx k_j,$$

$$\frac{(\omega a_{T_{i+1}})^2 k_j}{(\omega a_{T_{i+1}})^2 + k_j^2} = \frac{k_j}{1 + \left[\frac{\tau_j}{\omega a_{T_{i+1}}} \right]^2} \approx k_j,$$

Ce qui signifie que les modèles de Maxwell j ($j < i$) interviennent dans la réponse entre les pulsations réduites ωa_{T_i} et $\omega a_{T_{i+1}}$.

pour $j = i$, on suppose $\omega a_{T_i} \ll \tau_i = \tau_j \ll \omega a_{T_{i+1}}$, soit :

$$\frac{(\omega a_{T_i})^2 k_j}{(\omega a_{T_i})^2 + k_j^2} = \frac{k_j}{1 + \left[\frac{\tau_j}{\omega a_{T_i}} \right]^2} = 0,$$

$$\frac{(\omega a_{T_{i+1}})^2 k_j}{(\omega a_{T_{i+1}})^2 + k_j^2} = \frac{k_j}{1 + \left[\frac{\tau_j}{\omega a_{T_{i+1}}} \right]^2} \approx k_j,$$

A partir de ces hypothèses, le système à résoudre s'écrit :

$$R_i'(\omega a_{T_i}) = k_\infty + \sum_{j=1}^{i-1} k_j$$

$$R_{i+1}'(\omega a_{T_{i+1}}) = k_\infty + \left[\sum_{j=1}^{i-1} k_j \right] + k_i$$

$$\text{soit: } k_i = R_{i+1}'(\omega a_{T_{i+1}}) - R_i'(\omega a_{T_i})$$

Le point d'inflexion du module de stockage d'un modèle de Maxwell étant en $\omega a_T = \tau$ (voir figure 10), on écrit que le point d'inflexion du i ème modèle de Maxwell se trouve au centre du segment $[\omega a_{T_i}, \omega a_{T_{i+1}}]$:

$$\tau_i = \frac{\omega a_{T_i} + \omega a_{T_{i+1}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta_i = \frac{2k_i}{\omega a_{T_i} + \omega a_{T_{i+1}}}$$

Un logiciel informatique à été développé permettant de calculer les paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé selon la technique présenté ci-dessus, l'organigramme de ce programme se trouve page 41.

Une procédure permet de calculer l'erreur commise entre les courbes expérimentale et calculée (indice a) basée sur la formule suivante :

$$\text{erreur} = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{R_i'(\omega a_{T_i}) - R_{ai}'(\omega a_{T_i})}{R_i'(\omega a_{T_i})} \right| + \left| \frac{R_i''(\omega a_{T_i}) - R_{ai}''(\omega a_{T_i})}{R_i''(\omega a_{T_i})} \right| + \left| \frac{\text{tg}_i(\omega a_{T_i}) - \text{tg}_{ai}(\omega a_{T_i})}{\text{tg}_i(\omega a_{T_i})} \right| \right)$$

II-47

avec n: nombre de points expérimentaux.

III-11-2-3 Validation

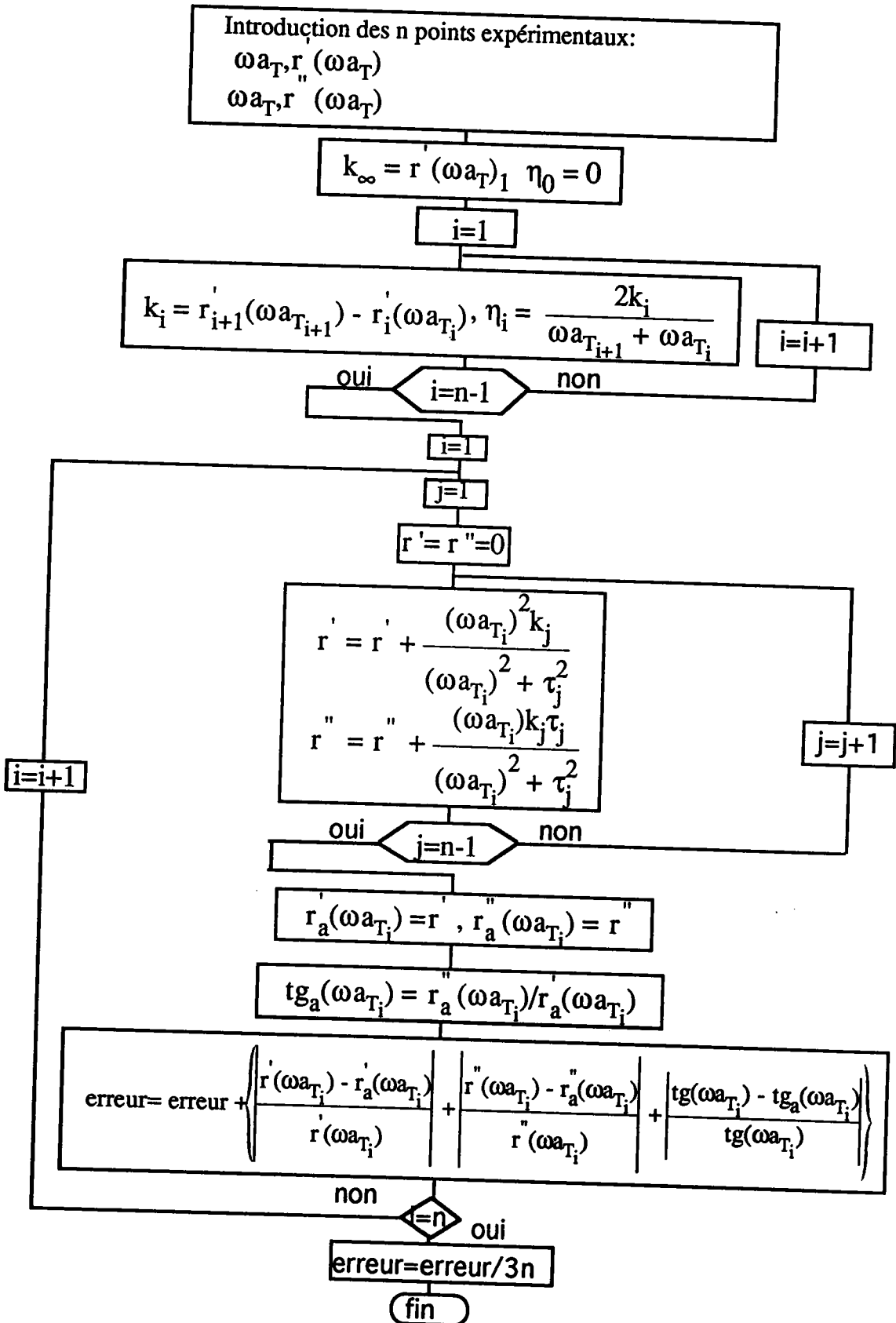
La technique présentée au paragraphe précédent a été mise en oeuvre pour modéliser des caractéristiques complexes de différents polymères supposés viscoélastiques linéaires non vieillissant homogènes isotropes répondant au principe de superposition temps fréquence/température. Ces polymères ont été utilisés la construction de tôles sandwich. Le tableau 1 ci-dessous recense la modélisation des polymères M50 et F13'.

Dénomination du polymère	M50	F13'
Expérimentateur	E.A.H.P. (Strasbourg)	Atochem
Caractéristiques mesurées	module de cisaillement complexe	module de traction complexe
Courbes analytiques/ expérimentales	figures: 11,12	figures: 13,14 15

tableau 1 : polymères modélisés

Les figures (11 à 15) montrent un bon accord entre expérience et théorie ce qui permet de valider la technique présentée.

Organigramme de la méthode de calcul des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé



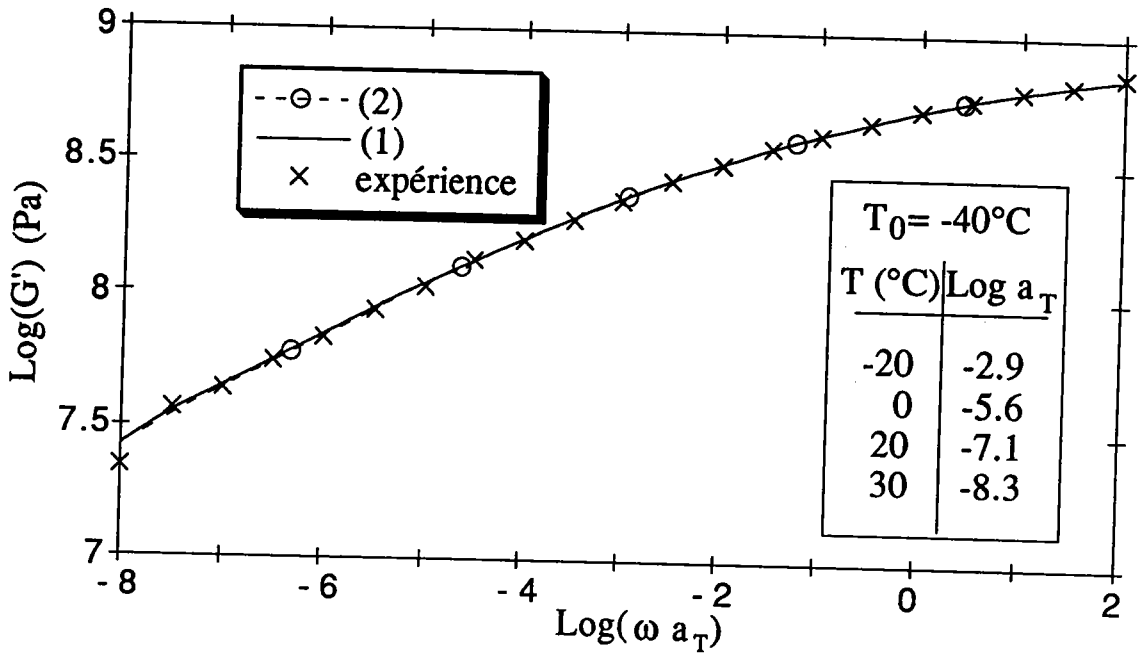


figure 11 : courbe maîtresse: partie réelle (expérimentale et simulée) du module complexe du polymère M50 et tableau d'évolution du facteur a_T

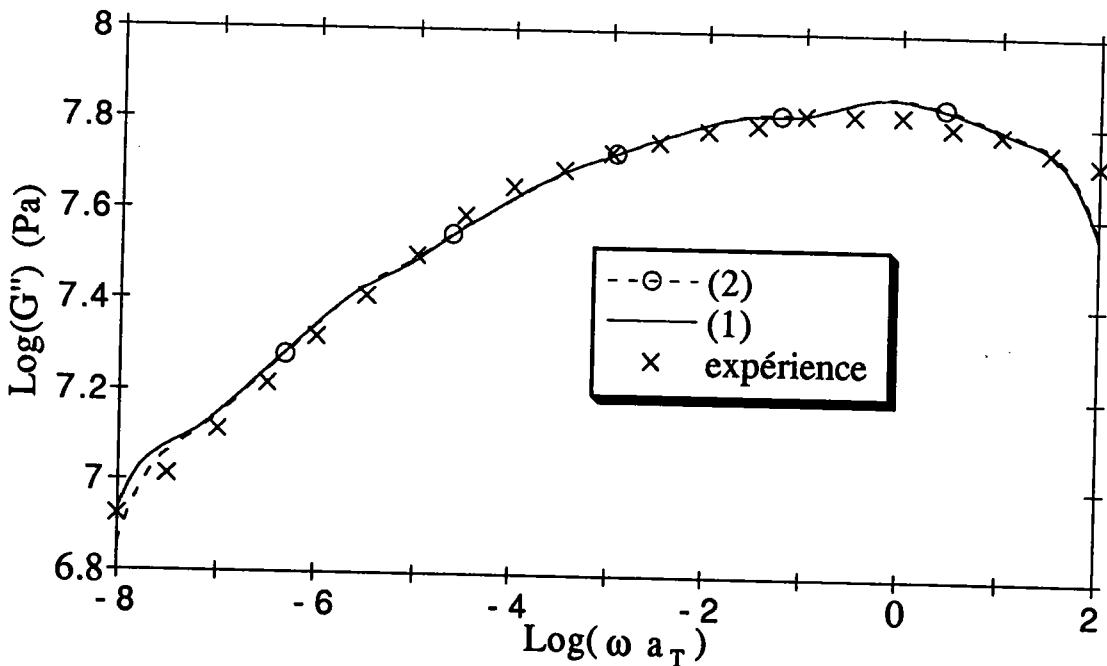


figure 12 : courbe maîtresse: partie imaginaire (expérimentale et simulée) du module complexe du polymère M50

- (1): méthode du modèle de Maxwell généralisé,
 (2): méthode du contour approché de Bode.

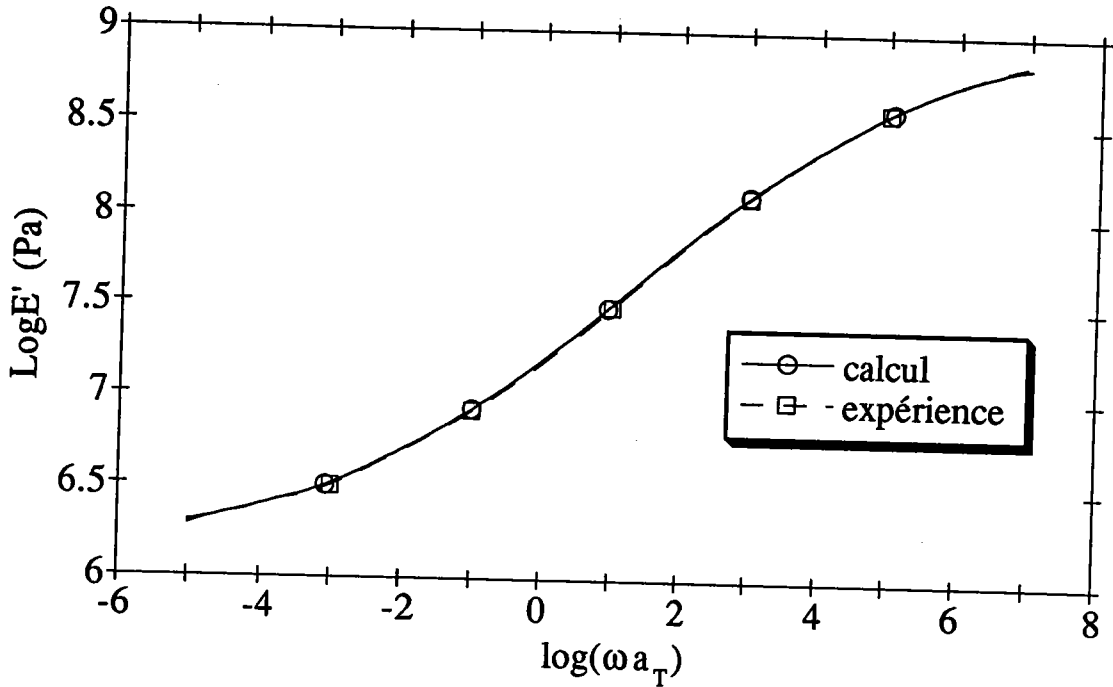


figure 13 : courbe maîtresse: partie réelle (expérimentale et simulée) du module complexe du polymère F13'

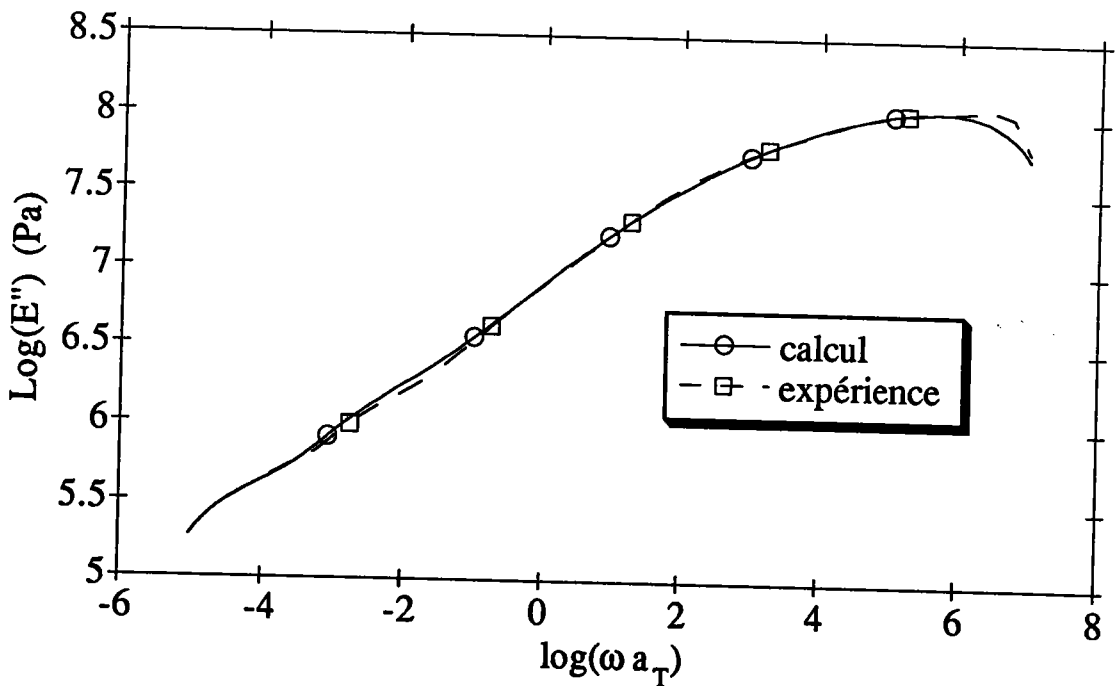


figure 14 : courbe maîtresse: partie imaginaire (expérimentale et simulée) du module complexe du polymère F13'

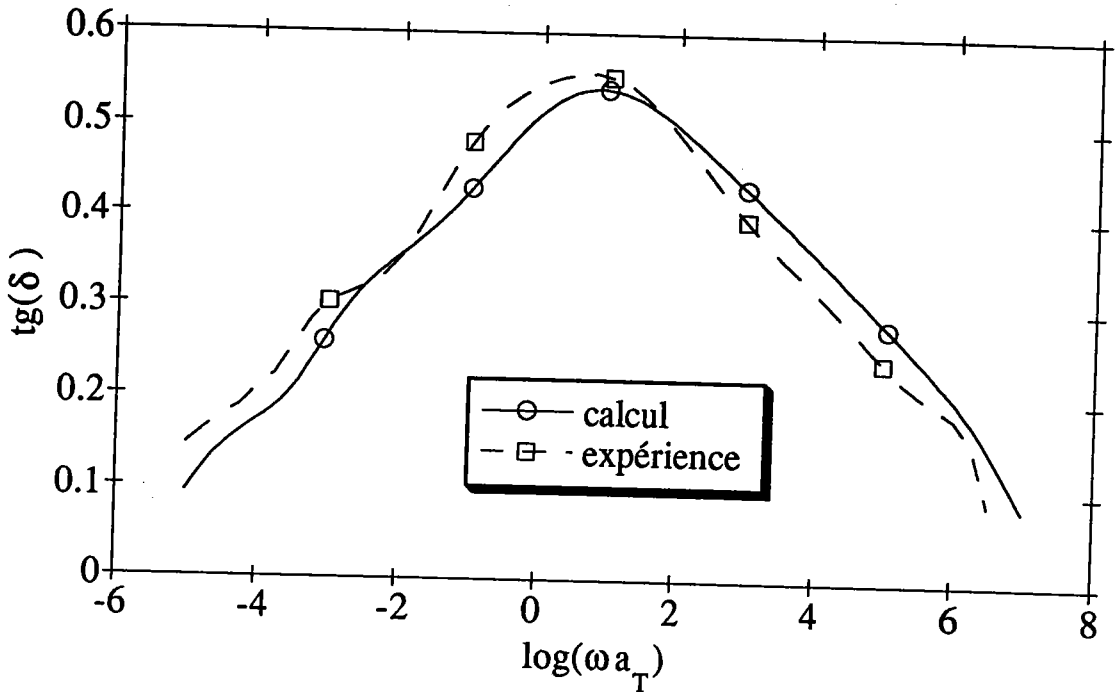


figure 15 : courbe maîtresse: tangente de l'angle de perte (expérimentale et simulée) du module complexe du polymère F13'

avec, pour les paramètres de la loi W.L.F. de ce polymère F13':

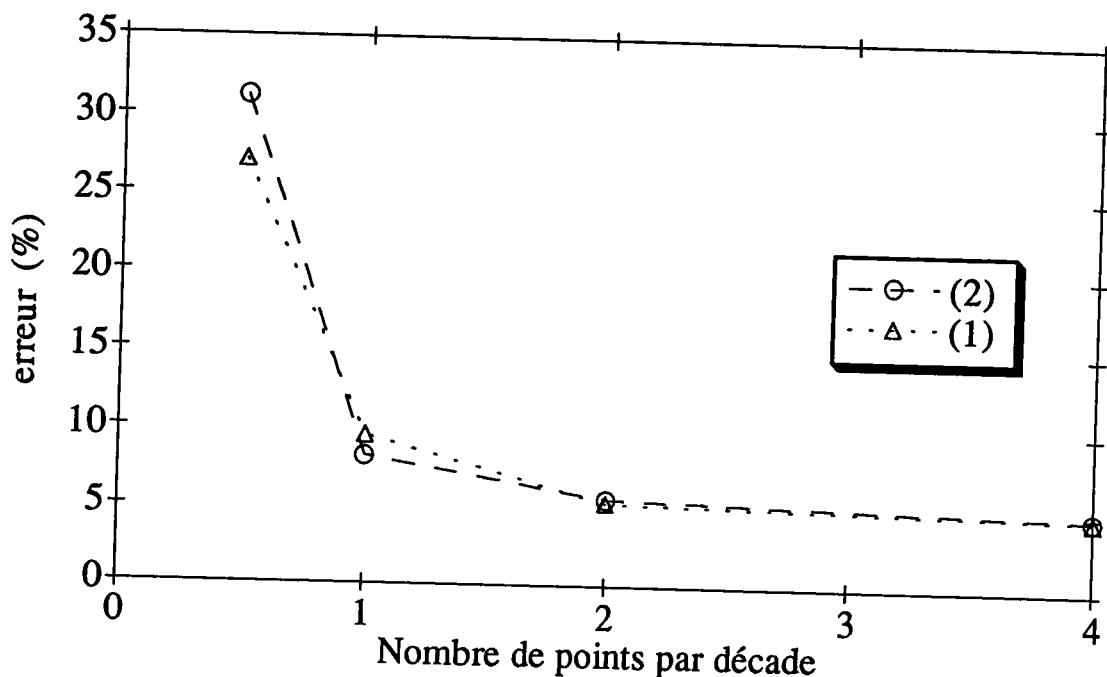
$$T_0 = -0.3^\circ\text{C}$$

$$C_1 = -12.21$$

$$C_2 = 86,96^\circ\text{C}$$

Cette technique a été également comparée à celle du contour approché de Bode [67] sur le polymère M50. La figure 16 montre l'erreur commise (formule II-47) avec les 2 techniques en fonction du nombre de point expérimentaux par décade.

On constate que les deux méthodes donnent des résultats similaires. D'autre part, 2 points expérimentaux par décade suffisent pour donner un bon modèle (erreur < 10 %).



(1) : présente méthode,
 (2) : méthode du contour approché de Bode

figure 16 : erreur entre expérience et calculs obtenus par les 2 méthodes (modèle de Maxwell généralisé et contour approché de Bode)

III-11-3 Loi de comportement des polymères utilisés dans les tôles sandwich

Les polymères utilisés dans la constitution des tôles sandwich sont supposés viscoélastiques linéaires non vieillissant homogènes isotropes répondant au principe de superposition temps/température

Le rapport de Poisson est considéré réel et constant, ce qui signifie que la déformation longitudinale est en phase avec la déformation transverse [67]. C'est une hypothèse qui est souvent adoptée [56,68,69], mais il existe peu de données expérimentales définissant ce rapport du fait de la difficulté de mesure [39,70]. Cependant, Huet [70] a montré que pour les matériaux hydrocarburés, il était raisonnable de retenir cette hypothèse.

La loi du comportement s'écrit dans ce cas :

$$\sigma_{ij}^*(p) = \frac{E^*(p)}{1+\nu} \varepsilon_{ij}^*(p) + \frac{E^*(p)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk}^*(p) \delta_{ij}$$

réciroquement:

$$\varepsilon_{ij}^*(p) = \frac{1+\nu}{E^*(p)} \sigma_{ij}^*(p) - \frac{\nu}{E^*(p)} \sigma_{kk}^*(p) \delta_{ij}$$

IV Conclusion

Dans la gamme d'effort, température, fréquence envisagée pour l'application des tôles sandwich, l'acier et le polymère utilisés sont considérés respectivement comme étant homogène élastique linéaire isotrope et homogène viscoélastique linéaire non vieillissant répondant au principe de superposition temps/ température. La loi de comportement du polymère s'écrit alors dans l'espace de Carson. Pour des sollicitations dynamiques, les caractéristiques du polymère s'écrivent en complexe et peuvent être représentées par des assemblages de modèles rhéologiques. Une technique a été développée pour modéliser une caractéristique complexe du polymère par des modèles rhéologiques (modèle de Maxwell généralisé). Cette technique permet un passage simple entre l'espace des nombres complexes et l'espace temps.

CHAPITRE III

LOI DE COMPORTEMENT ET EQUATION DU MOUVEMENT DE FLEXION D'UNE PLAQUE VISCOELASTIQUE LINEAIRE NON VIEILLISSANTE HOMOGENE ISOTROPE ET ISOTROPE TRANSVERSE SOUMISE A DES SOLLICITATIONS HARMONIQUES DE TRACTION - FLEXION - TORSION - CISAILLEMENT.

I Introduction

Les tôles sandwich développées par SOLLAC apportent la fonction amortissante des vibrations rencontrées dans les appareils électroménager, dans les automobiles. Ces vibrations proviennent de sollicitations dynamiques qui peuvent être décomposées en:

effets de membrane:

- cisaillement.

- traction simple ou biaxée dans le plan de la tôle,

effets de flexion:

- flexion,

- torsion,

Dans le but de réaliser des calculs de structures en matériau sandwich, il convient d'établir un modèle de comportement d'un élément d'une plaque sandwich dans les conditions ci-dessus.

L'originalité de la méthode proposée est de remplacer la plaque sandwich à 3 couches par une plaque homogène équivalente viscoélastique linéaire non vieillissante anisotrope (dont les caractéristiques sont calculées par homogénéisation au chapitre IV). Cette technique d'homogénéisation permet de traiter le matériau sandwich comme un matériau traditionnel homogène.

D'une manière générale, la loi de comportement d'un matériau relie l'état tridimensionnel des contraintes à celui des déformations. Dans le cas de plaques stratifiées, pour simplifier, le problème tridimensionnel (x,y,z) est ramené à un problème à 2 dimensions (x,y) par l'introduction des efforts et des moments résultants (définis au paragraphe II-4 de ce chapitre) qui s'appliquent sur un élément de la plaque. La loi de comportement d'un élément de plaque relie alors ces résultantes aux variables cinématiques.

La partie II de ce chapitre présente la loi de comportement et l'équation du mouvement de flexion d'un élément de cette plaque équivalente (supposée isotrope) soumis aux sollicitations décrites ci-dessus lorsque le cisaillement transverse est négligé (théorie classique de flexion). La partie III de ce chapitre présente la loi de comportement et l'équation du mouvement de flexion d'un élément de cette plaque équivalente (isotrope transverse) avec prise en compte du cisaillement transverse qui est essentiel dans le phénomène d'amortissement [46]. Les caractéristiques nécessaires à l'étude de cette plaque équivalente sont recensées à la fin de ce chapitre.

II Loi de comportement et équation du mouvement de flexion d'un élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope.

II-1 Rappel - Problème de la mécanique des solides élastiques déformables

Le problème standard de mécanique du solide élastique consiste à rechercher le champ de déplacement \vec{u} et le champ de contrainte σ en tout point r du solide, vérifiant:

- les relations d'équilibre :

$$\sigma_{ij}(r)_{,j} + f_i(r) = \rho \dot{u}_i(r) \quad (\text{en dynamique}) \quad \text{III-1}$$

$$\sigma_{ij}(r)_{,j} + f_i(r) = 0 \quad (\text{en statique}) \quad \text{III-2}$$

($f_i(r)$): forces volumique)

- les relations déformations- déplacement :

$$\varepsilon_{ij}(r) = \frac{1}{2} \left[u_i(r)_{,j} + u_j(r)_{,i} \right] \quad \text{III-3}$$

- la loi de comportement du matériau :

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r) \varepsilon_{kl}(r) \quad \text{III-4}$$

- les conditions aux limites (forces de surface ou déplacements imposés).

Remarque : Pour un stratifié (figure 1), ces conditions s'écrivent aux interfaces (supposées parfaites) :

- continuité du vecteur contrainte :

$$\sigma_{iz}^I(h/2) = \sigma_{iz}^{II}(h/2) \quad i=1 \text{ à } 3 \quad \text{c-1}$$

- continuité du vecteur déplacement : cette condition se traduit en terme de déformation à partir de la relation de compatibilité des déformations: $\epsilon_{ikm}\epsilon_{jkm}\Delta\epsilon_{kl}n_m n_n = 0$, soit:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^I(h/2) &= \epsilon_{xx}^{II}(h/2) \\ \epsilon_{yy}^I(h/2) &= \epsilon_{yy}^{II}(h/2) \\ \epsilon_{xy}^I(h/2) &= \epsilon_{xy}^{II}(h/2) \end{aligned} \quad \text{c-2}$$

avec: $\epsilon_{ijk} = 0$ si 2 indices au moins sont identiques,
 $\epsilon_{ijk} = 1$ si permutation paire (ex.:1,2,3),
 $\epsilon_{ijk} = -1$ si permutation impaire (ex.:1,3,2),

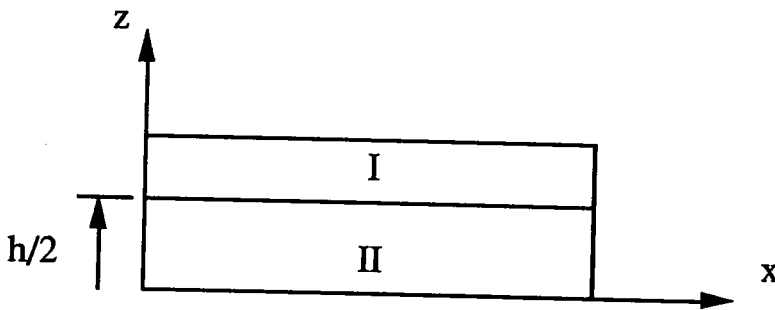


figure 1 : condition à l'interface

Dans l'analyse des plaques, pour simplifier, on ramène le problème à 3 dimensions à un problème à 2 dimensions en intégrant les contraintes selon l'épaisseur. Cette intégration conduit à introduire des efforts et des moments résultants qui seront définis au §III-4.

II-2 Hypothèses.

L'hypothèse de viscoélasticité linéaire non vieillissante (V.E.L.N.V.) permet d'utiliser le principe de correspondance (chapitre II, § III-6) et de résoudre ainsi le problème dynamique dans l'espace de Carson [65].

On se place dans une théorie classique de flexion d'une plaque d'une épaisseur (h) faible vis-à-vis des autres dimensions (figure 2).

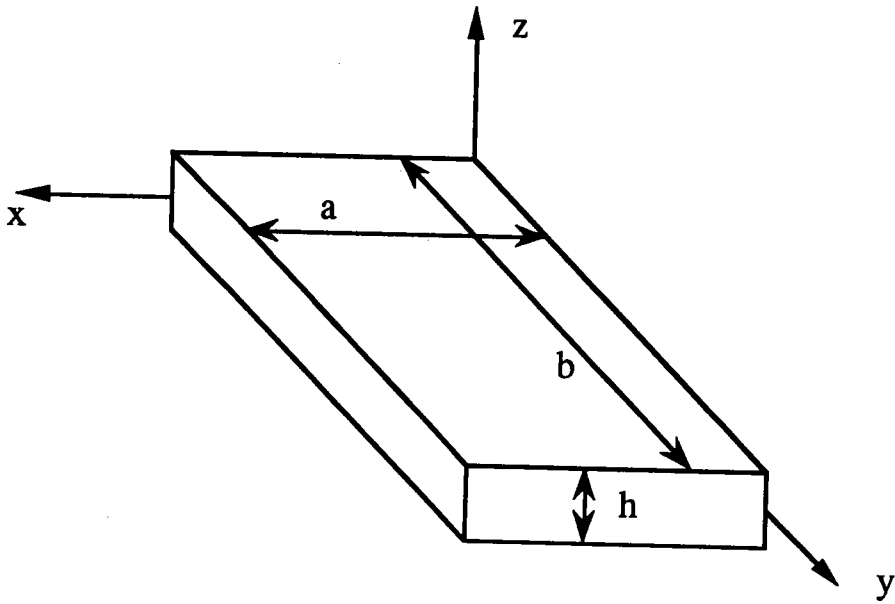


figure 2 : plaque homogène

On adopte un champ de déplacement de type Mindlin: une ligne perpendiculaire au plan moyen avant déformation, demeure une ligne perpendiculaire à la surface moyenne transformée du plan moyen dans la configuration fléchie (figure 3).

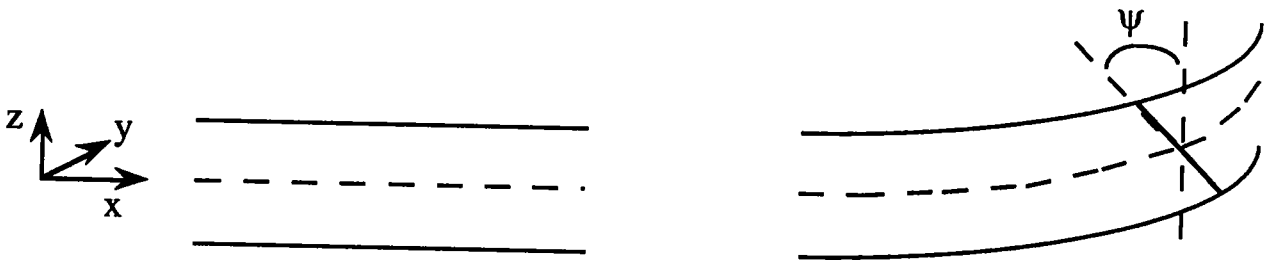


figure 3 : déformation de flexion

De plus, un élément dans l'épaisseur, ne s'étend et ne se rétrécit pas, il subit simplement une translation et une rotation, Sloan [47] a montré que la dépendance selon l'épaisseur de la composante transverse du déplacement peut être négligée.

Dans ce cas le champ de déplacement s'écrit (en transformée de Carson):

$$\begin{aligned}
 u^*(x,y,z,p) &= u_0^*(x,y,p) - z\psi_x^*(x,y) \\
 v^*(x,y,z,p) &= v_0^*(x,y,p) - z\psi_y^*(x,y) \\
 w^*(x,y,z,p) &= w^*(x,y,p)
 \end{aligned}
 \tag{III-5}$$

Compte tenu de la faible épaisseur devant les autres dimensions, on se place dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes :

$$\sigma_{iz}^*(x,y,z,p) = 0 \tag{III-6}$$

II-3 Champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu à partir de la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij}^*(x,y,z,p) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^*(x,y,z,p) + u_{j,i}^*(x,y,z,p) \right) \tag{III-7}$$

Pour un matériau homogène isotrope, la loi de comportement s'écrit (voir le chapitre II, §III 7-2-4):

$$\varepsilon_{ij}^*(x,y,z,p) = \left[\frac{1+\nu^*(p)}{E^*(p)} \right] \sigma_{ij}^*(x,y,z,p) - \left[\frac{\nu^*(p)}{E^*(p)} \right] \sigma_{kk}^*(x,y,z,p) \delta_{ij} \tag{III-8}$$

et compte tenu de III-6:

$$\varepsilon_{xz}^*(x,y,z,p) = \varepsilon_{yz}^*(x,y,z,p) = \varepsilon_{zz}^*(x,y,z,p) = 0 \tag{III-9}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \psi_x^*(x,y,p) &= w^*(x,y,p)_{,x} \text{ et} \\
 \psi_y^*(x,y,p) &= w^*(x,y,p)_{,y}
 \end{aligned}
 \tag{III-10}$$

Le cisaillement transverse est donc négligé.

II-4 Relation : Efforts. Moments résultants/variables cinématiques

Les efforts résultants par unité de largeur sont définis par l'intégration des composants du tenseur des contraintes selon l'épaisseur :

$$N_x^*(x,y,p), N_y^*(x,y,p), N_{xy}^*(x,y,p), N_{xz}^*(x,y,p), N_{yz}^*(x,y,p) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx}^*(x,y,p), \sigma_{yy}^*(x,y,p), \tau_{xy}^*(x,y,p), \tau_{xz}^*(x,y,p), \tau_{yz}^*(x,y,p) \right) dz \quad \text{III-11}$$

compte tenu de III-5: $N_{xz}^*(x,y,p) = N_{yz}^*(x,y,p) = 0$

Les moments resultants par unité de largeur sont définis de la manière suivante:

$$M_{xx}^{t*}(x,y,p), M_{yy}^{t*}(x,y,p), M_{xy}^{t*}(x,y,p) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx}^*(x,y,p), \sigma_{yy}^*(x,y,p), \tau_{xy}^*(x,y,p) \right) z dz \quad \text{III-12}$$

Leurs interprétations est présentée sur la figure 4.

$N_x^*(x,y,p)$ et $N_y^*(x,y,p)$: représentent les efforts de traction (compression),

N_{xy}^* représente le cisaillement,

N_{xz}^* et N_{yz}^* représentent le cisaillement transverse,

M_x^{t*} et M_y^{t*} représentent la flexion,

M_{xy}^{t*} représente la torsion.

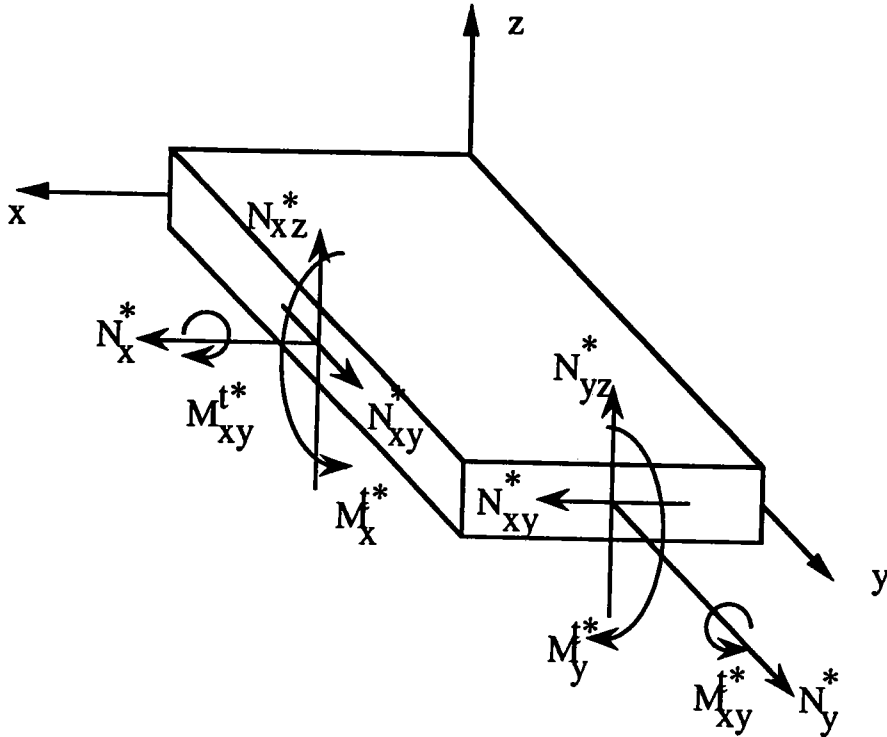


figure 4 : plaque homogène soumise à des sollicitations de membrane - flexion - cisaillement - torsion

En intégrant $\epsilon_{xx}^*(x,y,z,p)$ et $\epsilon_{xx}^*(x,y,z,p)z$ sur l'épaisseur et en utilisant la loi de comportement III-8, on obtient :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xx}^*(x,y,z,p) dz = hu_0^*(x,y,p)_{,x} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{E^*(p)} \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) \right] dz$$

$$\Leftrightarrow hu_0^*(x,y,p)_{,x} = \frac{1}{E^*(p)} N_x^*(x,y,p) - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} N_y^*(x,y,p) \quad \text{III-13}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xx}^*(x,y,z,p) z dz = \frac{-h^3}{12} \psi_x^*(x,y,p)_{,x} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{E^*(p)} \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) \right] z dz$$

$$\Leftrightarrow \frac{-h^3}{12} \psi_x^*(x,y,p)_{,x} = \frac{1}{E^*(p)} M_x^{t*}(x,y,p) - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} M_y^{t*}(x,y,p) \quad \text{III-14}$$

en procédant de la même manière avec $\varepsilon_{yy}^*(x,y,z,p)$ et $\varepsilon_{yy}^*(x,y,z,p)z$:

$$h v_0^*(x,y,p)_{,y} = \frac{1}{E^*(p)} N_y^*(x,y,p) - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} N_x^*(x,y,p) \quad \text{III-15}$$

$$\text{et } \frac{-h^3}{12} \psi_y^*(x,y,p)_{,y} = \frac{1}{E^*(p)} M_y^{t*}(x,y,p) - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} M_x^{t*}(x,y,p) \quad \text{III-16}$$

III-13, III-15 et III-14, III-16 se réécrivent compte tenu de III-10

$$N_x^*(x,y,p) = \frac{E^*(p) h}{1-v^*(p)} u_0^*(x,y,p)_{,x} + \frac{E^*(p) v^*(p) h}{1-v^*(p)} v_0^*(x,y,p)_{,y} \quad \text{III-17}$$

$$N_y^*(x,y,p) = \frac{E^*(p) h}{1-v^*(p)} v_0^*(x,y,p)_{,y} + \frac{E^*(p) v^*(p) h}{1-v^*(p)} u_0^*(x,y,p)_{,x} \quad \text{III-18}$$

$$M_x^{t*}(x,y,p) = \frac{-h^3 E^*(p)}{12 [1-v^*(p)]^2} w^*(x,y,p)_{,xx} - \frac{h^3 E^*(p) v^*(p)}{12 [1-v^*(p)]^2} w^*(x,y,p)_{,yy}$$

III-19

$$M_y^{t*}(x,y,p) = \frac{-h^3 E^*(p)}{12 [1-v^*(p)]^2} w^*(x,y,p)_{,yy} - \frac{h^3 E^*(p) v^*(p)}{12 [1-v^*(p)]^2} w^*(x,y,p)_{,xx}$$

III-20

$N_{xy}^*(x,y,p)$ et $M_{xy}^{t*}(x,y,p)$ sont obtenus à partir de leur définition III-11 et III-12, et en utilisant la loi de comportement III-8 :

$$N_{xy}^*(x,y,p) = \frac{E^*(p)}{1+\nu^*(p)} \frac{1}{2} \left[u_0^*(x,y,p)_{,y} + v_0^*(x,y,p)_{,x} \right] h \quad \text{III-21}$$

$$M_{xy}^*(x,y,p) = \frac{-E^*(p)}{1+\nu^*(p)} \frac{h^3}{12} \left[w^*(x,y,p)_{,xy} \right] \quad \text{III-22}$$

Les relations entre les efforts, les moments resultants et les variables cinématiques peuvent se mettre sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} N_x^*(x,y,p) \\ N_y^*(x,y,p) \\ N_{xy}^*(x,y,p) \\ M_x^{t*}(x,y,p) \\ M_y^{t*}(x,y,p) \\ M_{xy}^{t*}(x,y,p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^*(p) & \nu^*(p)A^*(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu^*(p)A^*(p) & A^*(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*(p)}{2}A^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^*(p) & \nu^*(p)B^*(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu^*(p)B^*(p) & B^*(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu^*(p)}{2}B^*(p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^*(x,y,p)_{,x} \\ v_0^*(x,y,p)_{,x} \\ u_0^*(x,y,p)_{,y} + v_0^*(x,y,p)_{,x} \\ w^*(x,y,p)_{,xx} \\ w^*(x,y,p)_{,yy} \\ 2w^*(x,y,p)_{,xy} \end{pmatrix} \quad \text{III-23}$$

$$\text{avec: } A^*(p) = \frac{E^*(p)h}{1-\nu^*(p)}$$

$$B^*(p) = \frac{-E^*(p)}{1-\nu^*(p)} \frac{h^3}{12}$$

Ce système matriciel est la loi de comportement d'un élément d'une plaque homogène viscoélastique linéaire non vieillissant isotrope sans prise en compte des effets du cisaillement transverse. Ce système montre que les effets de membrane sont indépendant de ceux de flexion.

III-5 Équation du mouvement de flexion :

Les équations d'équilibre en dynamique (III-1) s'écrivent dans l'espace de Carson (en absence des forces de volume):

$$\sigma_{ij}^*(x,y,z,p)_{,j} = \rho u_i^*(x,y,z,p) \cdot p^2 \quad \text{III-24}$$

(il est supposé qu'il n'y a pas de variation de masse au cours du temps)

Les équations d'équilibre en terme d'efforts résultants sont obtenues par l'intégration des équations III-24 selon l'épaisseur :

$$N_x^*(x,y,p)_{,x} + N_{xy}^*(x,y,p)_{,y} = \rho u_0^*(x,y,p) p^2 h \quad \text{III-25}$$

$$N_{xy}^*(x,y,p)_{,x} + N_y^*(x,y,p)_{,y} = \rho v_0^*(x,y,p) p^2 h \quad \text{III-26}$$

$$N_{xz}^*(x,y,p)_{,x} + N_{yz}^*(x,y,p)_{,y} = \rho w^*(x,y,p) p^2 h \quad \text{III-27}$$

La multiplication par z des équations III-24 et leurs intégrations sur l'épaisseur en négligeant les termes d'inertie de rotation, donnent les équations d'équilibre en terme de moments :

$$M_x^{t*}(x,y,p)_{,x} + M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,y} - N_{xz}^*(x,y,p) = 0 \quad \text{III-28}$$

$$M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,x} + M_y^{t*}(x,y,p)_{,y} - N_{yz}^*(x,y,p) = 0 \quad \text{III-28}$$

en dérivant les équations III-28 et III-29 respectivement par rapport à x et y , et en les ajoutant :

$$M_x^{t*}(x,y,p)_{,xx} + 2M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,xy} + M_y^{t*}(x,y,p)_{,yy} - [N_{xz}^*(x,y,p)_{,x} - N_{yz}^*(x,y,p)_{,y}] = 0$$

puis, en remplaçant dans cette dernière équation, les moments et les efforts par leurs expressions en terme de variables cinématiques (III-23 et III-27) :

$$B^*(p) [w^*(x,y,p)_{,xxxx} + w^*(x,y,p)_{,yyyy}] + 2 [v^*(p)B^*(p) + (1 - v^*(p))B^*(p)] w^*(x,y,p)_{,xxyy} - \rho p^2 h w^*(x,y,p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B^*(p) \nabla^4 (w^*(x,y,p)) - \rho p^2 h w^*(x,y,p) = 0} \quad \text{III-30}$$

il s'agit de l'équation du mouvement d'une plaque homogène viscoélastique linéaire non vieillissante isotrope en flexion en négligeant les effets de cisaillement et les forces volumiques. Cette équation est similaire à celle obtenue dans l'étude classique des plaques élastiques (équation de Lagrange).

III Loi de comportement et équation du mouvement de flexion d'un élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope transverse avec prise en compte des effets du cisaillement transverse.

III-1 Introduction

Les effets de cisaillement transverse ont une importance primordiale dans le comportement des stratifiés [45] et dans le phénomène d'amortissement des vibrations des sandwichs [46].

La figure 5 qui représente les déplacements, obtenus à partir d'un calcul par éléments finis, d'une poutre sandwich élastique (avec un noyau ayant un très faible module par rapport à celui des 2 parements) encastée à une extrémité et soumise à un effort de flexion à l'autre montre l'importance de cet effet.

L'étude présentée dans ce chapitre, prend en compte cet effet en plus de celui de l'inertie rotationnelle de la même manière que celle proposée par Mindlin [36] par une plaque isotrope élastique homogène.

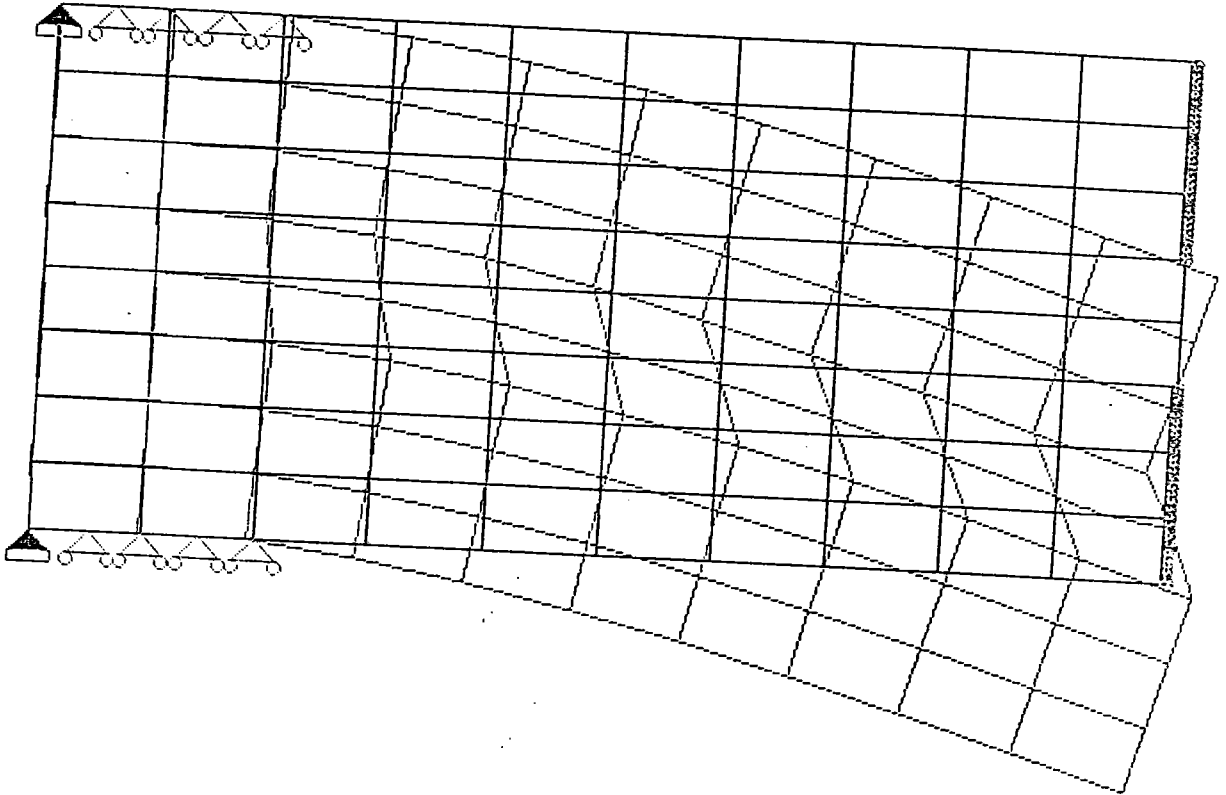


figure 5 : déplacements d'une poutre sandwich élastique.
Résultats obtenus par un calcul éléments fins

III-2 Le cisaillement transverse dans la théorie des plaques stratifiées

Withney, Pagano [48] et Yang, Norris, Stavsky [28] proposent une approche basée sur un champ de déplacement du type III-5 avec des déformations de cisaillement transverse ϵ_{xz} et ϵ_{yz} supposées uniformes selon l'épaisseur. Pour un stratifié hétérogène, les conditions c-1 ne sont pas vérifiées.

Chou et Carléone [32] considèrent que les contraintes de cisaillement transverse sont uniformes selon l'épaisseur (les conditions c-1 étant ainsi vérifiées). En outre, ils supposent que le champ de déplacement (du type III-1) représente la moyenne des déplacements de la plaque.

Ainsi, les moyennes des déformations de cisaillement transverse sont reliées aux variables cinématiques (écrites dans le cas élastique) de la manière suivante:

$$\Gamma_{xz}(x,y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz}(x,y,z) dz = w(x,y)_{,x} + \psi_x(x,y) \quad \text{III-31}$$

$$\Gamma_{yz}(x,y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{yz}(x,y,z) dz = w(x,y)_{,y} + \psi_y(x,y) \quad \text{III-32}$$

Pour tenir compte du gradient de ϵ_{xz} et ϵ_{yz} selon l'épaisseur, les coefficients correctifs (k_1 , k_2) sont introduits entre les moyennes des efforts de cisaillement et les déformations :

$$\begin{aligned} N_{xz}(x,y) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(x,y,z) dz \\ &= k_1 A_{xzxz} \Gamma_{xz}(x,y) \end{aligned} \quad \text{III-33}$$

$$\text{de même: } N_{yz}(x,y) = k_2 A_{yzyz} \Gamma_{yz}(x,y) \quad \text{III-34}$$

$$A_{ijkj} = h^2 \left[\int_{-h/2}^{h/2} s_{ijkl} dz \right]^{-1}$$

(h: épaisseur du stratifié)

Ces coefficients correctifs sont obtenus dans le cadre des hypothèses de la statique et de l'unidirectionnel [31,50] en calculant les énergies de cisaillement:

- dans le cas où il y a un gradient de cisaillement
- dans le cas où ϵ_{xz} et ϵ_{yz} sont considérées égales aux déformations moyennes.

L'égalité des expressions obtenues permet d'identifier ces coefficients.

Pour le cas d'un matériau homogène, ils valent 5/6.

Une comparaison avec les résultats de la solution exacte de Pagano [49] pour le cas d'une plaque en appui simple sur ses côtés soumise à une charge transverse a permis de valider cette approche [32].

III-3 Hypothèses

L'approche de Chou-Carléone est reprise dans le cas de la viscoélasticité linéaire non vieillissante pour un matériau isotrope transverse homogène (voir la loi de comportement au chapitre II, §II.3).

Les expressions de $k_1^*(p)$ et $k_2^*(p)$ pour le cas du matériau sandwich sont étudiées au chapitre suivant. On montrera alors que $k_1^*(p) = k_2^*(p)$. Ce résultat est repris dans les développements de ce chapitre.

Les contraintes de cisaillement transverse sont supposées nulles en peau ($\pm h/2$) et si l'on suppose que le stratifié est de faible épaisseur vis à vis des autres dimensions :

$$\sigma_{zz}^*(x,y,z,p) = 0 \quad \text{III-35}$$

III-4 Relation entre efforts, moments résultants et variables cinématiques

De la même manière qu'au paragraphe III-4, les relations entre efforts résultants et les variables cinématiques sont obtenues :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xx}^*(x,y,z,p) dz = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xxxx}^*(p) \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) dz + \int_{-h/2}^{h/2} S_{xxyy}^*(p) \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) dz$$

$$\Leftrightarrow hu_0^*(x,y,z,p) = S_{xxxx}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) dz + S_{xxyy}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) dz$$

(matériau homogène isotrope transverse)

$$\text{soit: } hu_0^*(x,y,p)_{,x} = S_{xxxx}^*(p) N_x^*(x,y,p) + S_{xxyy}^*(p) N_y^*(x,y,p)$$

$$\text{de même: } hv_0^*(x,y,p)_{,y} = S_{xxxx}^*(p) N_y^*(x,y,p) + S_{xxyy}^*(p) N_x^*(x,y,p)$$

$$\Leftrightarrow N_x^*(x,y,p) = \alpha^*(p) u_0^*(x,y,p)_{,x} - \beta^*(p) v_0^*(x,y,p)_{,y} \quad \text{III-37}$$

$$\text{et } N_y^*(x,y,p) = \alpha^*(p) v_0^*(x,y,p)_{,y} - \beta^*(p) u_0^*(x,y,p)_{,x} \quad \text{III-38}$$

$$\text{avec: } \alpha^*(p) = \frac{h S_{xxxx}^*(p)}{S_{xxxx}^*(p)^2 - S_{xyxy}^*(p)^2}$$

$$\beta^*(p) = \frac{\alpha^*(p) s_{xyxy}^*(p)}{s_{xxxx}^*(p)}$$

$$N_{xy}^*(x,y,p) = \frac{h}{2} C_{xyxy}^*(p) \left[u_0^*(x,y,p)_{,y} + v_0^*(x,y,p)_{,x} \right] \quad \text{III-39}$$

$$N_{xz}^*(x,y,p) = \frac{h}{2} C_{xyxy}^*(p) k^*(p) \left[w^*(x,y,p)_{,x} - \psi_x^*(x,y,p) \right] \quad \text{III-40}$$

$$N_{yz}^*(x,y,p) = \frac{h}{2} C_{xyxy}^*(p) k^*(p) \left[w^*(x,y,p)_{,y} - \psi_y^*(x,y,p) \right] \quad \text{III-41}$$

$$\text{avec: } C_{xyxy}^*(p) = \frac{1}{S_{xyxy}^*(p)}$$

Ces deux dernières relations introduisent les effets de cisaillement transverse négligés au paragraphe II puisque les hypothèses de contraintes planes induisent : $\omega_{,x}^* = \psi_x^*$ et $\omega_{,y}^* = \psi_y^*$.

Les relations entre les moments résultants et les variables cinématiques sont obtenues de la même manière qu'au paragraphe II-4:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{xx}^*(x,y,z,p) z dz = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xxxx}^*(p) \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) z dz +$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} S_{xxyy}^*(p) \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) dz$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^3}{12} \psi_x^*(x,y,p)_{,x} = S_{xxxx}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) dz + S_{xxyy}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) dz$$

de même:

$$\frac{h^3}{12} \psi_y^*(x,y,p)_{,y} = S_{xxxx}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}^*(x,y,z,p) dz + S_{xxyy}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^*(x,y,z,p) dz$$

soit:

$$M_x^{t*}(x,y,p) = \gamma^*(p) \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,x} - \delta^*(p) \psi_y^*(x,y,p)_{,y} \right] \quad \text{III-42}$$

$$M_y^{t*}(x,y,p) = \gamma^*(p) \left[\psi_y^*(x,y,p)_{,y} - \delta^*(p) \psi_x^*(x,y,p)_{,x} \right] \quad \text{III-43}$$

$$\text{et } M_{xy}^{t*}(x,y,p) = -\frac{h^3}{24} C_{xyxy}^*(p) \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,y} + \psi_y^*(x,y,p)_{,x} \right] \quad \text{III-44}$$

$$\text{avec: } \gamma^*(p) = \frac{-S_{xxxx}^*(p)}{S_{xxxx}^*(p)^2 - S_{xxyy}^*(p)^2} \frac{h^3}{12}$$

$$\delta^*(p) = \frac{S_{xxyy}^*(p)}{S_{xxxx}^*(p)}$$

$\gamma^*(p)$, $\delta^*(p)$, $C_{xyxy}^*(p)$ étant les caractéristiques du matériau V.E.L.N.V. homogène isotrope transverse en flexion - torsion.

Les relations III-36 à III-43 se réécrivent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} N_x^*(x,y,p) \\ N_y^*(x,y,p) \\ N_{xy}^*(x,y,p) \\ N_{xz}^*(x,y,p)_{,x} \\ N_{yz}^*(x,y,p)_{,y} \\ M_x^{t*}(x,y,p) \\ M_y^{t*}(x,y,p) \\ M_{xy}^{t*}(x,y,p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^*(p) - \beta^*(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^*(p) & \alpha^*(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^*(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega^*(p) & 0 & \Omega^*(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega^*(p) & 0 & \Omega^*(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^*(p) & -\gamma^*(p)\delta^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^*(p)\delta^*(p) & \gamma^*(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta^*(p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^*(x,y,p)_{,x} \\ v_0^*(x,y,p)_{,x} \\ u_0^*(x,y,p)_{,y} + \\ v_0^*(x,y,p)_{,x} \\ \psi_x^*(x,y,p)_{,x} \\ \psi_y^*(x,y,p)_{,y} \\ w^*(x,y,p)_{,xx} \\ w^*(x,y,p)_{,yy} \\ \psi_x^*(x,y,p)_{,y} + \\ \psi_y^*(x,y,p)_{,x} \end{pmatrix}$$

III-45

$$\begin{aligned}
 \text{avec: } \Phi^*(p) &= C_{xyxy}^*(p) \frac{h}{2} \\
 \Omega^*(p) &= C_{xzxz}^*(p) \frac{hk^*(p)}{2} \\
 \theta^*(p) &= -C_{xyxy}^* \frac{h^3}{24}
 \end{aligned}$$

Ce système matriciel représente la loi de comportement d'un élément d'une plaque viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope transverse soumis à des sollicitations de:

- traction-compression ($N_x^*(x,y,p)$, $N_x^*(x,y,p)$),
- cisaillement ($N_{xy}^*(x,y,p)$),
- cisaillement transverse ($N_{xz}^*(x,y,p)$, $N_{yz}^*(x,y,p)$),
- flexion ($M_x^{t*}(x,y,p)$, $M_y^{t*}(x,y,p)$),
- torsion ($M_{xy}^{t*}(x,y,p)$).

Remarque : Le comportement de membrane ($N_x^*(x,y,p)$, $N_y^*(x,y,p)$, $N_{xy}^*(x,y,p)$) est indépendant du comportement de flexion - torsion - cisaillement transverse ($N_{xz}^*(x,y,p)$, $N_{yz}^*(x,y,p)$),

$M^{t*}_x(x,y,p)$, $M^{t*}_y(x,y,p)$, $M^{t*}_{xy}(x,y,p)$) ce qui est le cas pour tout stratifié possédant la symétrie miroir (symétrie sur le plan de la géométrie et des propriétés mécaniques des constituants ([53,54])).

III-5 Équation du mouvement de flexion :

Les équations d'équilibre s'écrivent en dynamique :

$$\sigma_{ij}^*(x,y,z,p)_{,j} = \rho u_i^*(x,y,z,p) \cdot p^2 \quad \text{III-46}$$

en intégrant ces équations sur l'épaisseur, on obtient

$$N_x^*(x,y,p)_{,x} + N_{xy}^*(x,y,p)_{,y} = \rho u_0^*(x,y,p) p^2 h \quad \text{III-47}$$

$$N_{xy}^*(x,y,p)_{,x} + N_y^*(x,y,p)_{,y} = \rho v_0^*(x,y,p) p^2 h \quad \text{III-48}$$

$$N_{xz}^*(x,y,p)_{,x} + N_{yz}^*(x,y,p)_{,y} = \rho w^*(x,y,p) p^2 h \quad \text{III-49}$$

L'intégration selon l'épaisseur des équations III-46 multipliées par z donne :

$$M_x^{t*}(x,y,p)_{,x} + M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,y} - N_{xz}^*(x,y,p) = -\rho \psi_x^*(x,y,p) p^2 \frac{h^3}{12} \quad \text{III-50}$$

$$M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,x} + M_y^{t*}(x,y,p)_{,y} - N_{yz}^*(x,y,p) = -\rho \psi_y^*(x,y,p) p^2 \frac{h^3}{12} \quad \text{III-51}$$

en dérivant les équations III-50 et III-51 respectivement par x et y et en les ajoutant on obtient :

$$M_x^{t*}(x,y,p)_{,xx} + 2M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,xy} + M_y^{t*}(x,y,p)_{,yy} - \left(N_{xz}^*(x,y,p)_{,x} + N_{yz}^*(x,y,p)_{,y} \right) = -\rho p^2 \frac{h^3}{12} \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y} \right] \quad \text{III-52}$$

Cette équation devient en substituant les termes en effort par III-49:

$$M_x^{t*}(x,y,p)_{,xx} + 2M_{xy}^{t*}(x,y,p)_{,xy} + M_y^{t*}(x,y,p)_{,yy} - \rho p^2 h w^*(x,y,p) =$$

$$-\rho p^2 \frac{h^3}{12} \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y} \right] \quad \text{III-53}$$

soit en remplaçant dans les relations III-52 et III-49, les efforts et les moments résultants par les variables cinématiques :

$$\begin{aligned} & \gamma^*(p) \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,xxx} - \delta^*(p) \psi_y^*(x,y,p)_{,xxy} \right] - \\ & T^*(p) \frac{h^3}{12} \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,xyy} - \psi_y^*(x,y,p)_{,xxy} \right] + \\ & \gamma^*(p) \left[\psi_y^*(x,y,p)_{,yyy} - \delta^*(p) \psi_x^*(x,y,p)_{,xyy} \right] - \rho p^2 h w^*(x,y,p) = \\ & \quad -\rho p^2 \frac{h^3}{12} \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y} \right] \\ & \Leftrightarrow \gamma^*(p) \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,xxx} + \psi_y^*(x,y,p)_{,yyy} + \psi_x^*(x,y,p)_{,xyy} + \psi_y^*(x,y,p)_{,xxy} \right] + \\ & \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,xyy} + \psi_y^*(x,y,p)_{,xxy} \right] \left[-\gamma^*(p) \delta^*(p) - 2\theta^*(p) - \gamma^*(p) \right] + \\ & \rho p^2 \frac{h^3}{12} \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y} \right] - \rho p^2 h w^*(x,y,p) = 0 \quad \text{III-54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } -C_{xzxz}^*(p) k^*(p) \frac{h}{2} \left[\psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y} - w^*(x,y,p)_{,xx} - w^*(x,y,p)_{,yy} \right] \\ = \rho p^2 h w^*(x,y,p) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y} = w^*(x,y,p)_{,xx} + w^*(x,y,p)_{,yy} \\ - \frac{2}{C_{xzxz}^*(p) k^*(p) h} \rho p^2 h w^*(x,y,p) \end{aligned} \quad \text{III-55}$$

en posant : $\Phi^*(x,y,p) = \psi_x^*(x,y,p)_{,x} + \psi_y^*(x,y,p)_{,y}$

$$\text{et } H^*(x,y,p) = \frac{-2}{C_{xzxz}^*(p) h k^*(p)}$$

En remplaçant III-55 dans III-54 (le terme $-\gamma^*(p) \delta^*(p) - 2\theta^*(p) - \gamma^*(p)$ étant nul pour un matériau isotrope transverse- voir le chapitre suivant-), on obtient:

$$\gamma^*(p) \nabla^2 \left[H^*(p) \rho p w^*(x,y,p) + \nabla^2 w^*(x,y,p) \right] + \rho \frac{h^3 p^2}{12} \left[H^*(p) \rho p w^*(x,y,p) + \nabla^2 w^*(x,y,p) \right] - \rho p^2 h w^*(x,y,p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\nabla^2 + \rho h H^*(p) p^2 \right] \left[\gamma^*(p) \nabla^2 + \rho \frac{h^3 p^2}{12} \right] w^*(x,y,p) - \rho p^2 h w^*(x,y,p) = 0$$

III-57

C'est l'équation du mouvement d'une plaque homogène viscoélastique linéaire non vieillissante isotrope transverse en flexion avec prise en compte des effets du cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle. Elle est similaire à celle obtenue par Mindlin [36] pour le cas d'une plaque homogène élastique isotrope.

Remarque : pour le cas de sollicitations harmoniques, la formule III-54 se réécrit en substituant p par $j\omega$.

III-6 Paramètres à identifier

Une plaque viscoélastique linéaire non vieillissante homogène isotrope transverse soumise aux sollicitations décrites en a un comportement décrit par la relation matricielle III-38 qui est la loi de comportement de cette plaque.

Les équations III-46, III-47, III-54 permettent de décrire son mouvement, elles font appel à la loi de comportement III-44.

Afin de résoudre ces équations, il importe de connaître la matrice reliant les effort et les moments résultant aux variables cinématique, donc de connaître les termes suivant:

$$S_{xxxx}^*(p),$$

$$\begin{aligned} S_{xxyy}^*(p), \\ C_{xyxy}^*(p) , \\ C_{xzzz}^*(p), \\ k^*(p), \\ \gamma^*(p), \\ \delta^*(p), \\ \theta^*(p), \\ \rho. \end{aligned}$$

L'objet du chapitre suivant est de déterminer ces termes pour un matériau homogène viscoélastique linéaire non vieillissant isotrope transverse équivalent à un matériau sandwich.

CHAPITRE IV :

ÉVALUATION DES PARAMETRES PAR UNE METHODE D'HOMOGENEISATION

I Introduction

une structure hétérogène a pour caractéristique d'être une association d'éléments différents par le style, la forme, la taille ou la nature en vue d'obtenir une propriété mécanique, thermique, électrique, acoustique, ou autre, performante [51].

Compte tenu du nombre important de constituants, les propriétés de cette structure varient avec la position (figure 1).

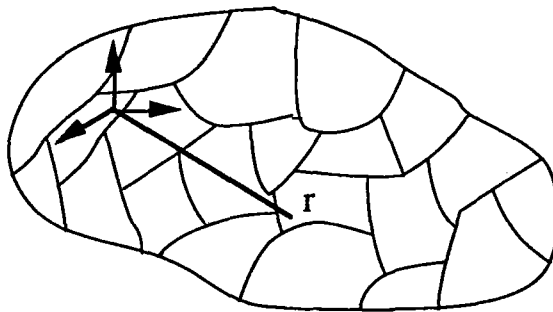


figure 1 : matériau hétérogène

Ces variations font que l'on répertorie ces structures en 4 catégories :

- microhétérogène - macrohétérogène (figure 2)
- microhomogène - macrohétérogène (figure 3)
- microhétérogène - macrohomogène (figure 4)
- microhomogène - macrohomogène (figure 5)

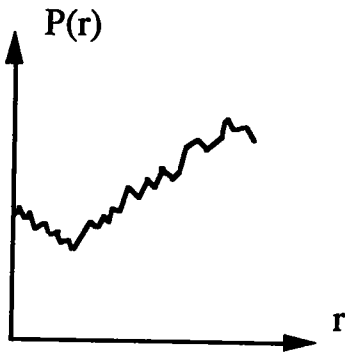


figure 2 : matériau
microhétérogène -macrohétérogène

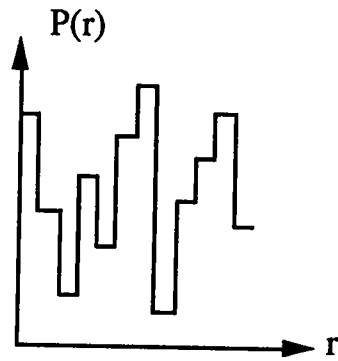


figure 3 : matériau
microhomogène -macrohétérogène

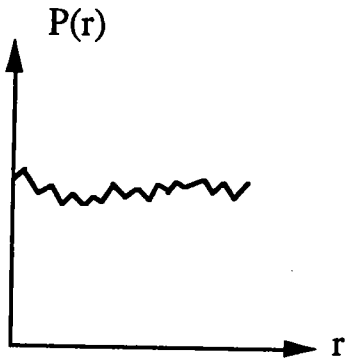


figure 4 : matériau
microhétérogène -microhomogène

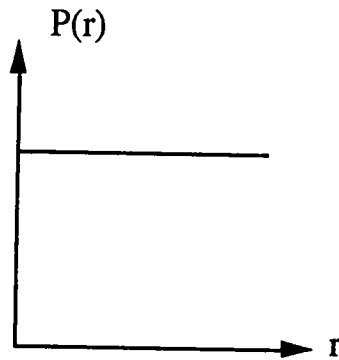


figure 5 : matériau
microhomogène -microhomogène

Dans le cas des matériaux microhétérogènes - macrohétérogènes, il existe une échelle intermédiaire (entre l'échelle microscopique des éléments et l'échelle de la structure) à laquelle les propriétés peuvent être moyennées avec une bonne approximation [52]. Elles sont déterminées sur un élément de volume représentatif défini à cette échelle intermédiaire. Mais pour cela, il est nécessaire d'imposer des contraintes et des déformations (macro) homogène à la frontière de ce volume pour vérifier la condition de macro-homogénéité de Hill. C'est le concept de l'homogénéisation. Dans le cas de structures sandwichs qui peuvent être considérées comme microhomogènes - macrohétérogènes, l'homogénéisation est peu utilisée car elles peuvent être étudiées éléments par éléments. Il est cependant intéressant et pratique de faire des parallèles avec des structures homogènes. Les pièces sandwich homogénéisées peuvent être étudiées de la même manière que les pièces "classiques" (viscoélastiques linéaires non vieillissantes anisotropes homogènes).

L'objet de ce chapitre est d'identifier un matériau sandwich à un matériau équivalent homogène viscoélastique linéaire non vieillissant isotrope transverse soumis aux sollicitations harmoniques de membrane-flexion.

Les caractéristiques décrivant le comportement de ce matériau équivalent ont été recensées au chapitre précédent. Elles sont obtenues par homogénéisation dans l'espace de Carson.

Le paragraphe IV 3 du chapitre III a permis de montrer que le comportement en membrane était indépendant de celui en flexion.

La sollicitation de membrane est un cas particulier de sollicitation macrohomogène vérifiant la condition de Hill.

Dans la première partie, les caractéristiques de ce matériau équivalent seront identifiées pour le cas de sollicitations harmoniques macrohomogènes à partir :

- des lois de comportement locales (polymère-acier),
- des relations de moyennes,
- des relations de localisations,
- des conditions aux interfaces.

Ce problème est résolu dans le cas d'un sandwich constitué de deux matériaux viscoélastiques non vieillissants homogène anisotrope. Dans la seconde partie, les caractéristiques de ce matériau seront identifiées pour le cas de sollicitations harmoniques de flexion (qui ne sont pas macrohomogènes) à partir :

- des lois de comportement locales,
- d'un champ de déplacement cinématiquement admissible,
- des coefficients de cisaillement correctifs.

Remarque : le passage de l'espace de Carson à l'espace des nombres complexes sera à chaque fois mentionné.

II Loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant homogène équivalent à un matériau sandwich à un chargement harmonique de membrane.

II-1 Loi de comportement locale

En un point r , la loi de comportement locale d'un matériau V.E.L.N.V. anisotrope s'écrit selon le principe de correspondance :

$$\sigma_{ij}^*(r,p) = c_{ijkl}^*(r,p) \varepsilon_{kl}^*(r,p) \quad \text{IV-1}$$

$$\varepsilon_{ij}^*(r,p) = s_{ijkl}^*(r,p) \sigma_{kl}^*(r,p) \quad \text{IV-2}$$

avec: - $c^*s^* = I$ (I: tenseur identité) IV-3
 - Les tenseurs $\sigma^*(r,p)$, $\varepsilon^*(r,p)$, $c^*(r,p)$, $s^*(r,p)$ sont symétriques.

L'acier et le polymère utilisés dans les tôles sandwich sont ici considérés viscoélastiques linéaires non vieillissants homogènes, leur loi de comportement s'écrivent respectivement :

$$\sigma_{ij}^{a*}(r,p) = c_{ijkl}^{a*}(r,p) \varepsilon_{kl}^{a*}(r,p) \quad \text{IV-4}$$

$$\sigma_{ij}^{p*}(r,p) = c_{ijkl}^{p*}(r,p) \varepsilon_{kl}^{p*}(r,p) \quad \text{IV-5}$$

Ces relations, dans le cas de l'isotropie, s'écrivent :

$$\sigma_{ij}^{a*}(r,p) = \frac{E^{a*}(p)}{1+\nu^{a*}(p)} \varepsilon_{ij}^{a*}(r,p) + \frac{E^{a*}(p)\nu^{a*}(p)}{[1+\nu^{a*}(p)][1-2\nu^{a*}(p)]} \varepsilon_{kk}^{a*}(r,p)\delta_{ij} \quad \text{IV-6}$$

$$\sigma_{ij}^{p*}(r,p) = \frac{E^{p*}(p)}{1+\nu^{p*}(p)} \varepsilon_{ij}^{p*}(r,p) + \frac{E^{p*}(p)\nu^{p*}(p)}{[1+\nu^{p*}(p)][1-2\nu^{p*}(p)]} \varepsilon_{kk}^{p*}(r,p)\delta_{ij} \quad \text{IV-7}$$

II-2 Loi de comportement globale

Le comportement du matériau homogène équivalent reliant les contraintes globales ($\Sigma^*(p)$) aux déformations globales ($E^*(p)$) s'écrit sous la forme :

$$\Sigma_{ij}^*(p) = C_{ijkl}^{eq*}(p) E_{kl}^*(p) \quad \text{IV-8}$$

$$E_{ij}^*(p) = S_{ijkl}^{eq*}(p) \Sigma_{kl}^*(p) \quad \text{IV-9}$$

$C_{ijkl}^{eq*}(p)$ et $S_{ijkl}^{eq*}(p)$ sont les propriétés équivalentes du matériau homogène équivalent au matériau sandwich microhomogène.

Ces propriétés équivalentes vérifient la relation:

$$\left[C_{ijkl}^{eq*}(p) \right] = \left[S_{ijkl}^{eq*}(p) \right]^{-1} \quad \text{IV-10}$$

II-3 Théorèmes généraux

Pour le cas de sollicitations de membrane, les contraintes et les déplacements sont homogènes en surface (S):

$$\sigma_{ij}^*(r,p) n_j = \Sigma_{ij}^*(p) n_j = T^{d*}(p) \quad \text{IV-11}$$

$$u_i^*(r,p) = E_{ij}^*(p) x_j = u_i^{d*}(p) \quad (r \in S) \quad \text{IV-12}$$

L'intégration des relations d'équilibre locales en absence de force volumique et compte tenu des conditions IV-11 et IV-12 conduisent aux 2 relations de moyennes suivantes:

$$\Sigma_{ij}^*(p) = \frac{1}{v} \int_V \sigma_{ij}^*(r,p) dv = \overline{\sigma_{ij}^*(r,p)} \quad \text{IV-13}$$

$$E_{ij}^*(p) = \frac{1}{v} \int_V \varepsilon_{ij}^*(r,p) dv = \overline{\varepsilon_{ij}^*(r,p)} \quad \text{IV-14}$$

Le comportement local est relié au comportement global à partir de deux relations de localisations :

$$\sigma_{ij}^*(p) = A_{ijkl}^*(r,p) \Sigma_{kl}^*(p) \quad \text{IV-15}$$

$$\varepsilon_{ij}^*(p) = B_{ijkl}^*(r,p) E_{kl}^*(p) \quad \text{IV-16}$$

$A^*(r,p)$ et $B^*(r,p)$ sont respectivement les tenseurs de localisation des contraintes et des déformations.

En remplaçant IV-15 et IV-16 dans IV-2 et IV-1 puis en calculant leur moyenne sur le volume v (relation IV-13, IV-14), il vient:

$$E_{ij}^*(p) = \overline{s_{ijkl}^*(r,p) A_{klmn}^*(r,p) \Sigma_{mn}^*(r,p)} \quad \text{IV-17}$$

$$\Sigma_{ij}^*(p) = \overline{c_{ijkl}^*(r,p) B_{klmn}^*(r,p) E_{mn}^*(r,p)} \quad \text{IV-18}$$

Puis, en identifiant IV-17 et IV-18 à IV-8 et IV-9, il vient:

$$C_{ijmn}^{eq*}(p) = \overline{c_{ijkl}^*(r,p) B_{klmn}^*(r,p)} \quad \text{IV-19}$$

$$S_{ijmn}^{eq*}(p) = \overline{s_{ijkl}^*(r,p) A_{klmn}^*(r,p)} \quad \text{IV-20}$$

La relation IV-10 montre que les tenseurs de localisations ne sont pas indépendants:

En substituant respectivement les relations IV-15 et IV-16 dans IV-13 et IV-14, il vient:

$$\overline{A_{klmn}^*(r,p)} = I_{ijkl} \quad \text{IV-21}$$

$$\overline{B_{klmn}^*(r,p)} = I_{ijkl} \quad \text{IV-22}$$

$$\text{avec: } I_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad \text{IV-23}$$

Les relations IV-19 et IV-20 montrent que pour obtenir les caractéristiques équivalentes il faut d'abord déterminer les tenseurs de localisations.

En ce qui concerne le matériau sandwich, dans le cas de la sollicitation de membrane, les contraintes et les déformations dans l'acier et dans le polymère sont supposées homogènes, soit:

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^*(r,p) &= A_{ijkl}^{a*}(p) \quad (r \in a) \\ &= A_{ijkl}^{p*}(p) \quad (r \in p) \end{aligned} \quad \text{IV-24}$$

$$\begin{aligned} B_{ijkl}^*(r,p) &= B_{ijkl}^{a*}(p) \quad (r \in a) \\ &= B_{ijkl}^{p*}(p) \quad (r \in p) \end{aligned}$$

Les relations IV-21 et IV-22 deviennent alors:

$$f A_{ijkl}^{a*}(p) + (1-f) A_{ijkl}^{p*}(p) = I_{ijkl} \quad \text{IV-25}$$

$$f B_{ijkl}^{a*}(p) + (1-f) B_{ijkl}^{p*}(p) = I_{ijkl} \quad \text{IV-26}$$

avec f : fraction volumique d'acier.

Remarque : les tenseurs $\Sigma^*(p)$, $E^*(p)$ comme les tenseurs $\sigma^*(p)$ et $\varepsilon^*(p)$ sont symétriques. Les tenseurs $A^*(p)$, $B^*(p)$, $C^{eq*}(p)$, $S^{eq*}(p)$ possèdent, compte tenu des relations IV-15 à IV-18, les symétries suivantes:

$$X_{ijkl}^*(r,p) = X_{ijlk}^*(r,p) = X_{jilk}^*(r,p) = X_{jikl}^*(r,p)$$

$$(X^*(p) = A^*(p), B^*(p), C^{eq*}(p), S^{eq*}(p))$$

II-4 Conditions aux limites

II-4-1 Conditions en contraintes

La continuité du vecteur contrainte à l'interface repérée par la normale n_z (figure 6) conduit à :

$$\Delta \sigma_{ij}^*(r,p) n_j = 0$$

$$r = \text{interface}, j=3 \quad \text{IV-27}$$

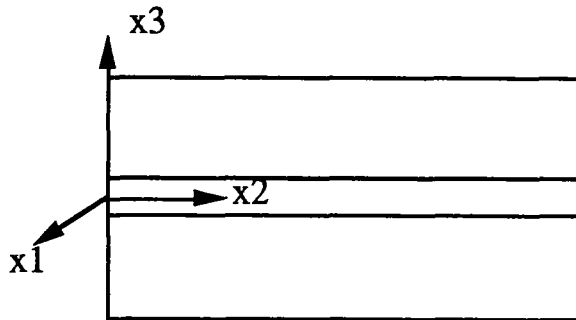


figure 6 :condition aux interface du sandwich

Compte tenu de l'homogénéité des contraintes dans l'acier et dans le polymère, cette relation IV-27 s'écrit :

$$\sigma_{i3}^{a*}(p) = \sigma_{i3}^{p*}(p) \quad \text{IV-28}$$

en utilisant la relation de localisation des contraintes et la relation de moyenne IV-25, l'équation IV-28 devient :

$$\left[A_{i3kl}^{a*}(p) - I_{i3kl} \right] \frac{\Sigma_{kl}^*(p)}{1-f} = 0 \quad \text{IV-29}$$

ou encore en utilisant:

- les lois de comportement locales du polymères et de l'acier,
- la relation de localisation des déformations globale IV-17,
- la relation de moyenne IV-26,

$$\left[(1-f)c_{i3kl}^{a*}(p) + fc_{i3kl}^{p*}(p) \right] B_{klmn}^{a*}(p) - c_{i3kl}^{p*}(p) I_{klmn} \left] \frac{E_{mn}^*(p)}{1-f} = 0 \quad \text{IV-30}$$

II-4-2 Conditions en déformations

La relation d'Hadamard (équations de compatibilité) s'écrit :

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Delta \epsilon_{kl}^*(r,p) n_m n_n = 0 \quad (\text{pour } r=\text{interface})$$

elle donne pour le cas du sandwich :

$$\Delta \epsilon_{ij}^*(r=\text{interface}, p) = 0 \quad \text{pour } i \text{ et } j \neq 3 \quad \text{IV-31}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{i3}^{a*}(p) = \epsilon_{i3}^{p*}(p) \quad i \text{ et } j \neq 3 \quad \text{IV-32}$$

(les déformations dans l'acier et le polymère étant homogènes)

IV-31 se réécrit en utilisant la relation de localisation des déformations globales IV-17 et la relation de moyenne IV-26:

$$\left[B_{ijkl}^{a*}(p) - I_{ijkl} \right] \frac{E_{kl}^*(p)}{1-f} = 0 \quad \text{pour } i \text{ et } j \neq 3 \quad \text{IV-33}$$

ou encore en utilisant :

- les lois de comportement locales (acier-polymère),
- la relation de location des contraintes globales IV-16,
- la relation de moyenne IV-25,

$$\left[(1-f)s_{ijkl}^{a*}(p) + fc_{iskl}^{p*}(p) \right] A_{klmn}^{a*}(p) - s_{ijkl}^{p*}(p) I_{klmn} \left] \frac{\Sigma_{mn}^*(p)}{1-f} = 0 \quad \text{IV-34}$$

II-5 Expression des tenseurs de localisation des contraintes globales

la relation IV-28 : $\sigma_{33}^{a*}(p) = \sigma_{33}^{p*}(p)$, se réécrit compte tenu de IV-29:

$$\Leftrightarrow A_{3311}^{a^*}(p)\Sigma_{11}^*(p) + A_{3322}^{a^*}(p)\Sigma_{22}^*(p) + [A_{3333}^{a^*}(p) - 1]\Sigma_{33}^*(p) + 2A_{3312}^{a^*}(p)\Sigma_{12}^*(p) + 2A_{3323}^{a^*}(p)\Sigma_{23}^*(p) + 2A_{3331}^{a^*}(p)\Sigma_{31}^*(p) = 0$$

le matériau sandwich ayant un comportement linéaire :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{3311}^{a^*}(p) = 0 \\ A_{3322}^{a^*}(p) = 0 \\ A_{3333}^{a^*}(p) = 1 \\ A_{3312}^{a^*}(p) = 0 \\ A_{3323}^{a^*}(p) = 0 \\ A_{3331}^{a^*}(p) = 0 \end{pmatrix}$$

en complexe et compte tenu de la relation de moyenne en $A^*(p)$ (IV-25)

$$A_{33ij}^{a'}(\omega) = A_{33ij}^{p'}(\omega) = I_{33ij} \quad \text{IV-35}$$

$$A_{33ij}^{a''}(\omega) = A_{33ij}^{p''}(\omega) = 0 \quad \text{IV-36}$$

de la même manière, $\sigma_{23}^{a^*}(p) = \sigma_{23}^{p^*}(p)$ (relations IV-28) donnent :

$$\sigma_{31}^{a^*}(p) = \sigma_{31}^{p^*}(p)$$

$$A_{23ij}^{a'}(\omega) = A_{23ij}^{p'}(\omega) = I_{23ij} \quad \text{IV-37}$$

$$A_{23ij}^{a''}(\omega) = A_{23ij}^{p''}(\omega) = 0 \quad \text{IV-38}$$

$$A_{31ij}^{a'}(\omega) = A_{31ij}^{p'}(\omega) = I_{31ij} \quad \text{IV-39}$$

$$A_{31ij}^{a''}(\omega) = A_{31ij}^{p''}(\omega) = 0 \quad \text{IV-40}$$

Les conditions IV-32: $\epsilon_{11}^{a^*}(p) = \epsilon_{11}^{p^*}(p)$ se ramènent, compte tenu de

$$\epsilon_{12}^{a^*}(p) = \epsilon_{12}^{p^*}(p)$$

$$\epsilon_{22}^{a^*}(p) = \epsilon_{22}^{p^*}(p)$$

IV-34 et de la linéarité du comportement, à la résolution d'un système en écriture complexe de 36 équations à 36 inconnues que l'on peut mettre sous la forme :

$$[M(\omega)][S^a(\omega)] = [D(\omega)]$$

IV-41

$$[M(\omega)] = \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} M_{11}^*(j\omega) \\ M_{21}^*(j\omega) \\ M_{31}^*(j\omega) \\ M_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & -\text{Im} \begin{bmatrix} M_{11}^*(j\omega) \\ M_{21}^*(j\omega) \\ M_{31}^*(j\omega) \\ M_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} M_{12}^*(j\omega) \\ M_{22}^*(j\omega) \\ M_{32}^*(j\omega) \\ M_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & -\text{Im} \begin{bmatrix} M_{12}^*(j\omega) \\ M_{22}^*(j\omega) \\ M_{32}^*(j\omega) \\ M_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} M_{13}^*(j\omega) \\ M_{23}^*(j\omega) \\ M_{33}^*(j\omega) \\ M_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} & -\text{Im} \begin{bmatrix} M_{13}^*(j\omega) \\ M_{23}^*(j\omega) \\ M_{33}^*(j\omega) \\ M_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{aligned} M_{11}^*(j\omega) &= (1-f)s_{1111}^{a*}(j\omega) + fs_{1111}^{p*}(j\omega) \\ M_{21}^*(j\omega) &= (1-f)s_{2211}^{a*}(j\omega) + fs_{2211}^{p*}(j\omega) \\ M_{31}^*(j\omega) &= (1-f)s_{1211}^{a*}(j\omega) + fs_{1211}^{p*}(j\omega) \\ M_{12}^*(j\omega) &= (1-f)s_{1122}^{a*}(j\omega) + fs_{1122}^{p*}(j\omega) \\ M_{22}^*(j\omega) &= (1-f)s_{2222}^{a*}(j\omega) + fs_{2222}^{p*}(j\omega) \\ M_{32}^*(j\omega) &= (1-f)s_{1222}^{a*}(j\omega) + fs_{1222}^{p*}(j\omega) \\ M_{13}^*(j\omega) &= (1-f)s_{1112}^{a*}(j\omega) + fs_{1112}^{p*}(j\omega) = M_{31}^*(j\omega) \\ M_{23}^*(j\omega) &= (1-f)s_{2212}^{a*}(j\omega) + fs_{2212}^{p*}(j\omega) = M_{32}^*(j\omega) \\ M_{33}^*(j\omega) &= (1-f)s_{1212}^{a*}(j\omega) + fs_{1212}^{p*}(j\omega) \end{aligned}$$

$$[D(\omega)] = \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} d_{11}^*(j\omega) \\ d_{21}^*(j\omega) \\ d_{31}^*(j\omega) \\ d_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} d_{12}^*(j\omega) \\ d_{22}^*(j\omega) \\ d_{32}^*(j\omega) \\ d_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} d_{31}^*(j\omega) \\ d_{23}^*(j\omega) \\ d_{33}^*(j\omega) \\ d_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} d_{14}^*(j\omega) \\ d_{24}^*(j\omega) \\ d_{34}^*(j\omega) \\ d_{34}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} d_{15}^*(j\omega) \\ d_{25}^*(j\omega) \\ d_{35}^*(j\omega) \\ d_{35}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} d_{16}^*(j\omega) \\ d_{26}^*(j\omega) \\ d_{36}^*(j\omega) \\ d_{36}^*(j\omega) \end{bmatrix} \\ \text{Im} \begin{bmatrix} d_{11}^*(j\omega) \\ d_{21}^*(j\omega) \\ d_{31}^*(j\omega) \\ d_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} d_{12}^*(j\omega) \\ d_{22}^*(j\omega) \\ d_{32}^*(j\omega) \\ d_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} d_{31}^*(j\omega) \\ d_{23}^*(j\omega) \\ d_{33}^*(j\omega) \\ d_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} d_{14}^*(j\omega) \\ d_{24}^*(j\omega) \\ d_{34}^*(j\omega) \\ d_{34}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} d_{15}^*(j\omega) \\ d_{25}^*(j\omega) \\ d_{35}^*(j\omega) \\ d_{35}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} d_{16}^*(j\omega) \\ d_{26}^*(j\omega) \\ d_{36}^*(j\omega) \\ d_{36}^*(j\omega) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{aligned}
d_{11}^*(j\omega) &= s_{1111}^{p*}(j\omega) \\
d_{12}^*(j\omega) &= s_{1122}^{p*}(j\omega) \\
d_{13}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{1133}^{p*}(j\omega) - s_{1133}^{a*}(j\omega)] \\
d_{14}^*(j\omega) &= s_{1112}^{p*}(j\omega) \\
d_{15}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{1123}^{p*}(j\omega) - s_{1123}^{a*}(j\omega)] \\
d_{16}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{1131}^{p*}(j\omega) - s_{1131}^{a*}(j\omega)] \\
d_{21}^*(j\omega) &= s_{2211}^{p*}(j\omega) = d_{12}^*(j\omega) \\
d_{22}^*(j\omega) &= s_{2222}^{p*}(j\omega) \\
d_{23}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{2233}^{p*}(j\omega) - s_{2233}^{a*}(j\omega)] \\
d_{24}^*(j\omega) &= s_{2212}^{p*}(j\omega) \\
d_{25}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{2223}^{p*}(j\omega) - s_{2223}^{a*}(j\omega)] \\
d_{26}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{2231}^{p*}(j\omega) - s_{2231}^{a*}(j\omega)] \\
d_{31}^*(j\omega) &= s_{1211}^{p*}(j\omega) = d_{14}^*(j\omega) \\
d_{32}^*(j\omega) &= s_{1222}^{p*}(j\omega) = d_{24}^*(j\omega) \\
d_{33}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{1233}^{p*}(j\omega) - s_{1233}^{a*}(j\omega)] \\
d_{34}^*(j\omega) &= s_{1212}^{p*}(j\omega) \\
d_{35}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{1223}^{p*}(j\omega) - s_{1223}^{a*}(j\omega)] \\
d_{36}^*(j\omega) &= (1-f) [s_{1231}^{p*}(j\omega) - s_{1231}^{a*}(j\omega)]
\end{aligned}$$

$$[S^a(\omega)] = \begin{bmatrix}
A_{1111}^{a'}(\omega) & A_{1112}^{a'}(\omega) & A_{1133}^{a'}(\omega) & A_{1112}^{a''}(\omega) & A_{1123}^{a''}(\omega) & A_{1131}^{a''}(\omega) \\
A_{1111}^{a''}(\omega) & A_{1112}^{a''}(\omega) & A_{1133}^{a''}(\omega) & A_{1112}^{a'}(\omega) & A_{1123}^{a'}(\omega) & A_{1131}^{a'}(\omega) \\
A_{2211}^{a'}(\omega) & A_{2222}^{a'}(\omega) & A_{2233}^{a'}(\omega) & A_{2212}^{a''}(\omega) & A_{2223}^{a''}(\omega) & A_{2231}^{a''}(\omega) \\
A_{2211}^{a''}(\omega) & A_{2222}^{a''}(\omega) & A_{2233}^{a''}(\omega) & A_{2212}^{a'}(\omega) & A_{2223}^{a'}(\omega) & A_{2231}^{a'}(\omega) \\
A_{1211}^{a'}(\omega) & A_{1222}^{a'}(\omega) & A_{1233}^{a'}(\omega) & A_{1212}^{a''}(\omega) & A_{1223}^{a''}(\omega) & A_{1231}^{a''}(\omega) \\
A_{1211}^{a''}(\omega) & A_{1222}^{a''}(\omega) & A_{1233}^{a''}(\omega) & A_{1212}^{a'}(\omega) & A_{1223}^{a'}(\omega) & A_{1231}^{a'}(\omega)
\end{bmatrix}$$

Les relations IV-35 à IV-40 et la résolution du système IV-41 permettent ainsi d'obtenir les composantes du tenseur complexe de localisation des contraintes dans l'acier. L'utilisation de la relation IV-25 permet d'obtenir les composantes du tenseur complexe de localisation des contraintes dans le polymère.

II-6 Expression des tenseurs de localisation des déformations globales:

($B^{a*}(j\omega)$ et $B^{P*}(j\omega)$).

Par une démarche similaire à celle présentée en II-6, les composantes des tenseurs $B^{a*}(j\omega)$ et $B^{P*}(j\omega)$ sont obtenues :

La relation IV-32: $\epsilon_{11}^{a*}(p) = \epsilon_{11}^{P*}(p)$ se réécrit compte tenu de IV-33 et de la linéarité du comportement:

$$B_{11ij}^{a*}(p) - I_{11ij} = 0$$

$$\text{en complexe: } B_{11ij}^{a'}(\omega) = B_{11ij}^{P'}(\omega) = I_{11ij} \quad \text{IV-42}$$

$$B_{11ij}^{a''}(\omega) = B_{11ij}^{P''}(\omega) = 0 \quad \text{IV-43}$$

de même: $\epsilon_{22}^{a*}(p) = \epsilon_{22}^{P*}(p)$ devient: $B_{22ij}^{a*}(p) - I_{22ij} = 0$

$$\text{en complexe: } B_{22ij}^{a'}(\omega) = B_{22ij}^{P'}(\omega) = I_{22ij} \quad \text{IV-44}$$

$$B_{22ij}^{a''}(\omega) = B_{22ij}^{P''}(\omega) = 0 \quad \text{IV-45}$$

et: $\epsilon_{12}^{a*}(p) = \epsilon_{12}^{P*}(p)$ se réécrit: $B_{12ij}^{a*}(p) - I_{12ij} = 0$

$$\text{en complexe: } B_{12ij}^{a'}(\omega) = B_{12ij}^{P'}(\omega) = I_{12ij} \quad \text{IV-46}$$

$$B_{12ij}^{a''}(\omega) = B_{12ij}^{P''}(\omega) = 0 \quad \text{IV-47}$$

Les conditions en contrainte II-28 écrites sous la forme IV-30 (en terme de localisation des déformations) se ramènent compte tenu de la linéarité du comportement, à un système en écriture complexe, de 36 équations à 36

$$\text{inconnues: } [N(\omega)] [T^a(\omega)] = [E(\omega)] \quad \text{IV-48}$$

$$[N(\omega)] = \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} N_{11}^*(j\omega) \\ N_{11}^*(j\omega) \\ N_{21}^*(j\omega) \\ N_{21}^*(j\omega) \\ N_{31}^*(j\omega) \\ N_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & -\text{Im} \begin{bmatrix} N_{11}^*(j\omega) \\ N_{11}^*(j\omega) \\ N_{21}^*(j\omega) \\ N_{21}^*(j\omega) \\ N_{31}^*(j\omega) \\ N_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} N_{12}^*(j\omega) \\ N_{12}^*(j\omega) \\ N_{22}^*(j\omega) \\ N_{22}^*(j\omega) \\ N_{32}^*(j\omega) \\ N_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & -\text{Im} \begin{bmatrix} N_{12}^*(j\omega) \\ N_{12}^*(j\omega) \\ N_{22}^*(j\omega) \\ N_{22}^*(j\omega) \\ N_{32}^*(j\omega) \\ N_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} N_{13}^*(j\omega) \\ N_{13}^*(j\omega) \\ N_{23}^*(j\omega) \\ N_{23}^*(j\omega) \\ N_{33}^*(j\omega) \\ N_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} & -\text{Im} \begin{bmatrix} N_{13}^*(j\omega) \\ N_{13}^*(j\omega) \\ N_{23}^*(j\omega) \\ N_{23}^*(j\omega) \\ N_{33}^*(j\omega) \\ N_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{11}^*(j\omega) &= (1-f)c_{3333}^{a*}(j\omega) + fc_{3333}^{p*}(j\omega) \\ N_{12}^*(j\omega) &= 2 \left[(1-f)c_{3323}^{a*}(j\omega) + fc_{3323}^{p*}(j\omega) \right] \\ N_{13}^*(j\omega) &= 2 \left[(1-f)c_{3331}^{a*}(j\omega) + fc_{3331}^{p*}(j\omega) \right] \\ N_{21}^*(j\omega) &= (1-f)c_{2333}^{a*}(j\omega) + fc_{2333}^{p*}(j\omega) = N_{12}^*(j\omega) \\ N_{22}^*(j\omega) &= 2 \left[(1-f)c_{2323}^{a*}(j\omega) + fc_{2323}^{p*}(j\omega) \right] \\ N_{23}^*(j\omega) &= 2 \left[(1-f)c_{2331}^{a*}(j\omega) + fc_{2331}^{p*}(j\omega) \right] \\ N_{31}^*(j\omega) &= (1-f)c_{3133}^{a*}(j\omega) + fc_{3133}^{p*}(j\omega) = N_{13}^*(j\omega) \\ N_{32}^*(j\omega) &= 2 \left[(1-f)c_{3123}^{a*}(j\omega) + fc_{3123}^{p*}(j\omega) \right] = N_{23}^*(j\omega) \\ N_{33}^*(j\omega) &= 2 \left[(1-f)c_{3131}^{a*}(j\omega) + fc_{3131}^{p*}(j\omega) \right] \end{aligned}$$

$$[E(\omega)] = \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} E_{11}^*(j\omega) \\ E_{11}^*(j\omega) \\ E_{21}^*(j\omega) \\ E_{21}^*(j\omega) \\ E_{31}^*(j\omega) \\ E_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} E_{12}^*(j\omega) \\ E_{12}^*(j\omega) \\ E_{22}^*(j\omega) \\ E_{22}^*(j\omega) \\ E_{32}^*(j\omega) \\ E_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} E_{13}^*(j\omega) \\ E_{13}^*(j\omega) \\ E_{23}^*(j\omega) \\ E_{23}^*(j\omega) \\ E_{33}^*(j\omega) \\ E_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} E_{14}^*(j\omega) \\ E_{14}^*(j\omega) \\ E_{24}^*(j\omega) \\ E_{24}^*(j\omega) \\ E_{34}^*(j\omega) \\ E_{34}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} E_{15}^*(j\omega) \\ E_{15}^*(j\omega) \\ E_{25}^*(j\omega) \\ E_{25}^*(j\omega) \\ E_{35}^*(j\omega) \\ E_{35}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} E_{16}^*(j\omega) \\ E_{16}^*(j\omega) \\ E_{26}^*(j\omega) \\ E_{26}^*(j\omega) \\ E_{36}^*(j\omega) \\ E_{36}^*(j\omega) \end{bmatrix} \\ \text{Im} \begin{bmatrix} E_{11}^*(j\omega) \\ E_{11}^*(j\omega) \\ E_{21}^*(j\omega) \\ E_{21}^*(j\omega) \\ E_{31}^*(j\omega) \\ E_{31}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} E_{12}^*(j\omega) \\ E_{12}^*(j\omega) \\ E_{22}^*(j\omega) \\ E_{22}^*(j\omega) \\ E_{32}^*(j\omega) \\ E_{32}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} E_{13}^*(j\omega) \\ E_{13}^*(j\omega) \\ E_{23}^*(j\omega) \\ E_{23}^*(j\omega) \\ E_{33}^*(j\omega) \\ E_{33}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} E_{14}^*(j\omega) \\ E_{14}^*(j\omega) \\ E_{24}^*(j\omega) \\ E_{24}^*(j\omega) \\ E_{34}^*(j\omega) \\ E_{34}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} E_{15}^*(j\omega) \\ E_{15}^*(j\omega) \\ E_{25}^*(j\omega) \\ E_{25}^*(j\omega) \\ E_{35}^*(j\omega) \\ E_{35}^*(j\omega) \end{bmatrix} & \text{Im} \begin{bmatrix} E_{16}^*(j\omega) \\ E_{16}^*(j\omega) \\ E_{26}^*(j\omega) \\ E_{26}^*(j\omega) \\ E_{36}^*(j\omega) \\ E_{36}^*(j\omega) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{aligned} E_{11}^*(j\omega) &= (1-f) \left[c_{3311}^{p*}(j\omega) - c_{3311}^{a*}(j\omega) \right] \\ E_{12}^*(j\omega) &= (1-f) \left[c_{3322}^{p*}(j\omega) - c_{3322}^{a*}(j\omega) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{13}^* &= c_{3333}^{p*}(j\omega) \\
E_{14}^* &= (1-f) [c_{3312}^{p*}(j\omega) - c_{3312}^{a*}(j\omega)] \\
E_{15}^* &= c_{3323}^{p*}(j\omega) \\
E_{16}^* &= c_{3331}^{p*}(j\omega) \\
E_{21}^* &= (1-f) [c_{2311}^{p*}(j\omega) - c_{2311}^{a*}(j\omega)] \\
E_{22}^* &= (1-f) [c_{2322}^{p*}(j\omega) - c_{2322}^{a*}(j\omega)] \\
E_{23}^* &= c_{2333}^{p*}(j\omega) = E_{15}^*(j\omega) \\
E_{24}^* &= (1-f) [c_{2312}^{p*}(j\omega) - c_{2312}^{a*}(j\omega)] \\
E_{25}^* &= c_{2323}^{p*}(j\omega) \\
E_{26}^* &= c_{2331}^{p*}(j\omega) \\
E_{31}^* &= (1-f) [c_{3111}^{p*}(j\omega) - c_{3111}^{a*}(j\omega)] \\
E_{32}^* &= (1-f) [c_{3122}^{p*}(j\omega) - c_{3122}^{a*}(j\omega)] \\
E_{33}^* &= c_{3133}^{p*}(j\omega) = E_{16}^*(j\omega) \\
E_{34}^* &= (1-f) [c_{3112}^{p*}(j\omega) - c_{3112}^{a*}(j\omega)] \\
E_{35}^* &= c_{3123}^{p*}(j\omega) = E_{26}^*(j\omega) \\
E_{36}^* &= c_{3131}^{p*}(j\omega)
\end{aligned}$$

$$\left[T^a(\omega) \right] = \begin{bmatrix}
B_{3311}^{a'}(\omega) & B_{3322}^{a'}(\omega) & B_{3333}^{a'}(\omega) & B_{3312}^{a'}(\omega) & B_{3323}^{a'}(\omega) & B_{3331}^{a'}(\omega) \\
B_{3311}^{a''}(\omega) & B_{2322}^{a''}(\omega) & B_{3333}^{a''}(\omega) & B_{3312}^{a''}(\omega) & B_{2323}^{a''}(\omega) & B_{3331}^{a''}(\omega) \\
B_{2311}^{a'}(\omega) & B_{2322}^{a'}(\omega) & B_{2333}^{a'}(\omega) & B_{2312}^{a'}(\omega) & B_{2323}^{a'}(\omega) & B_{2331}^{a'}(\omega) \\
B_{2311}^{a''}(\omega) & B_{2322}^{a''}(\omega) & B_{2333}^{a''}(\omega) & B_{2312}^{a''}(\omega) & B_{2323}^{a''}(\omega) & B_{2331}^{a''}(\omega) \\
B_{3111}^{a'}(\omega) & B_{3122}^{a'}(\omega) & B_{3133}^{a'}(\omega) & B_{3112}^{a'}(\omega) & B_{3123}^{a'}(\omega) & B_{3131}^{a'}(\omega) \\
B_{3111}^{a''}(\omega) & B_{3122}^{a''}(\omega) & B_{3133}^{a''}(\omega) & B_{3112}^{a''}(\omega) & B_{3123}^{a''}(\omega) & B_{3131}^{a''}(\omega)
\end{bmatrix}$$

Les relations IV-42 à IV-47 et la résolution du système IV-48 permettent ainsi d'obtenir les composantes du tenseur complexe de localisation des déformations dans l'acier. La relation IV-26 permet d'obtenir les composantes du tenseur complexe de localisation des déformations dans le polymère.

Remarque : les tenseurs de localisation $B^{a*}(j\omega)$ et $B^{p*}(j\omega)$ peuvent également être obtenus à partir de la relation IV-11:

$$C^{eq*}(j\omega) = S^{eq*-1}(j\omega)$$

$$\Leftrightarrow c^*(r, j\omega) B^*(r, j\omega) = s^*(r, j\omega) A^*(r, j\omega)$$

II-7 Tenseurs des modules et des complaisances équivalents

Les composantes des tenseurs complexes équivalents s'écrivent en fonction des composantes des tenseurs de localisations :

$$\begin{aligned} \cdot C_{ijmn}^{eq*}(j\omega) &= \overline{c_{ijkl}^*(r, j\omega) B_{klmn}^*(r, j\omega)} \\ &= f c_{ijkl}^{a*}(j\omega) B_{klmn}^{a*}(j\omega) + (1-f) c_{ijkl}^{p*}(j\omega) B_{klmn}^{p*}(j\omega) \\ &= f \left[c_{ijkl}^{a*}(j\omega) - c_{ijkl}^{p*}(j\omega) \right] B_{klmn}^{a*}(j\omega) + c_{ijkl}^{p*}(j\omega) I_{klmn} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C_{ijmn}^{eq'}(\omega) = f \left[c_{ijkl}^{a'}(\omega) - c_{ijkl}^{p'}(\omega) \right] B_{klmn}^{a'}(\omega) - f \left[c_{ijkl}^{a''}(\omega) - c_{ijkl}^{p''}(\omega) \right] B_{klmn}^{a''}(\omega) + c_{ijkl}^{p'}(\omega) I_{klmn} \quad \text{IV-49}$$

$$\text{et } C_{ijmn}^{eq''}(\omega) = f \left[c_{ijkl}^{a''}(\omega) - c_{ijkl}^{p''}(\omega) \right] B_{klmn}^{a''}(\omega) + f \left[c_{ijkl}^{a'}(\omega) - c_{ijkl}^{p'}(\omega) \right] B_{klmn}^{a'}(\omega) + c_{ijkl}^{p''}(\omega) I_{klmn} \quad \text{IV-50}$$

$$\begin{aligned} \cdot S_{ijmn}^{eq*}(j\omega) &= \overline{s_{ijkl}^*(r, j\omega) A_{klmn}^*(r, j\omega)} \\ &= f s_{ijkl}^{a*}(j\omega) A_{klmn}^{a*}(j\omega) + (1-f) s_{ijkl}^{p*}(j\omega) A_{klmn}^{p*}(j\omega) \\ &= f \left[s_{ijkl}^{a*}(j\omega) - s_{ijkl}^{p*}(j\omega) \right] A_{klmn}^{a*}(j\omega) + s_{ijkl}^{p*}(j\omega) I_{klmn} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S_{ijmn}^{eq'}(\omega) = f \left[s_{ijkl}^{a'}(\omega) - s_{ijkl}^{p'}(\omega) \right] A_{klmn}^{a'}(\omega) - f \left[s_{ijkl}^{a''}(\omega) - s_{ijkl}^{p''}(\omega) \right] A_{klmn}^{a''}(\omega) + s_{ijkl}^{p'}(\omega) I_{klmn} \quad \text{IV-51}$$

$$\text{et } S_{ijmn}^{eq''}(\omega) = f \left[s_{ijkl}^{a''}(\omega) - s_{ijkl}^{p''}(\omega) \right] A_{klmn}^{a'}(\omega) + f \left[s_{ijkl}^{a'}(\omega) - s_{ijkl}^{p'}(\omega) \right] A_{klmn}^{a''}(\omega) + s_{ijkl}^{p''}(\omega) I_{klmn}$$

IV-52

Remarque : Cette approche permet d'obtenir les caractéristiques complexes d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant anisotrope équivalent à un matériau sandwich constitué de 2 matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants homogènes anisotropes soumis à des sollicitations harmoniques de membrane.

Cas de l'isotropie des matériaux constituant le sandwich :

les matrices $[M(\omega)]$, $[D(\omega)]$, $[N(\omega)]$, $[E(\omega)]$ se simplifient :

$$M_{31}^*(j\omega) = M_{13}^*(j\omega) = M_{32}^*(j\omega) = M_{23}^*(j\omega) = 0$$

$$M_{21}^*(j\omega) = M_{12}^*(j\omega)$$

$$M_{22}^*(j\omega) = M_{11}^*(j\omega)$$

$$d_{14}^*(j\omega) = d_{31}^*(j\omega) = d_{15}^*(j\omega) = d_{16}^*(j\omega) = d_{24}^*(j\omega) = d_{32}^*(j\omega) =$$

$$d_{25}^*(j\omega) = d_{26}^*(j\omega) = d_{33}^*(j\omega) = d_{35}^*(j\omega) = d_{36}^*(j\omega) = 0,$$

$$d_{22}^*(j\omega) = d_{11}^*(j\omega),$$

$$d_{23}^*(j\omega) = d_{13}^*(j\omega)$$

$$N_{12}^*(j\omega) = N_{21}^*(j\omega) = N_{13}^*(j\omega) = N_{31}^*(j\omega) = N_{23}^*(j\omega) = N_{32}^*(j\omega) = 0$$

$$E_{11}^*(j\omega) = E_{12}^*(j\omega)$$

$$E_{14}^*(j\omega) = E_{15}^*(j\omega) = E_{16}^*(j\omega) = E_{21}^*(j\omega) = E_{22}^*(j\omega) = E_{23}^*(j\omega) = E_{24}^*(j\omega) =$$

$$E_{26}^*(j\omega) = E_{31}^*(j\omega) = E_{32}^*(j\omega) = E_{33}^*(j\omega) = E_{34}^*(j\omega) = E_{35}^*(j\omega) = 0$$

$$E_{36}^*(j\omega) = E_{25}^*(j\omega)$$

$$\text{avec: } s_{1111}^{i*}(j\omega) = \frac{1}{E^{i*}(j\omega)}, s_{1122}^{i*}(j\omega) = \frac{-v^{i*}(j\omega)}{E^{i*}(j\omega)}, s_{1212}^{i*}(j\omega) = \frac{1+v^{i*}(j\omega)}{E^{i*}(j\omega)},$$

$$c_{1111}^{i*}(j\omega) = \frac{E^{i*}(j\omega)[1-v^{i*}(j\omega)]}{[1+v^{i*}(j\omega)][1-2v^{i*}(j\omega)]}, c_{1122}^{i*}(j\omega) = \frac{E^{i*}(j\omega)v^{i*}(j\omega)}{[1+v^{i*}(j\omega)][1-2v^{i*}(j\omega)]},$$

$$c_{1212}^{i*}(j\omega) = \frac{E^{i*}(j\omega)}{[1+v^{i*}(j\omega)]}$$

(avec i = a: acier, p: polymère)

Dans ce cas, les tenseurs de localisations des contraintes et des déformations se simplifient :

$$A_{1112}^{i*}(j\omega) = A_{1123}^{i*}(j\omega) = A_{1131}^{i*}(j\omega) = A_{2212}^{i*}(j\omega) = A_{2223}^{i*}(j\omega) =$$

$$A_{2231}^{i*}(j\omega) = A_{1211}^{i*}(j\omega) = A_{1222}^{i*}(j\omega) = A_{1233}^{i*}(j\omega) =$$

$$A_{1223}^{i*}(j\omega) = A_{1231}^{i*}(j\omega) = 0$$

$$A_{2211}^{i*}(j\omega) = A_{1122}^{i*}(j\omega)$$

$$A_{2233}^{i*}(j\omega) = A_{1133}^{i*}(j\omega)$$

$$B_{3312}^{i*}(j\omega) = B_{3323}^{i*}(j\omega) = B_{3331}^{i*}(j\omega) = B_{2311}^{i*}(j\omega) =$$

$$B_{2322}^{i*}(j\omega) = B_{2333}^{i*}(j\omega) = B_{2312}^{i*}(j\omega) = B_{2331}^{i*}(j\omega) = B_{3111}^{i*}(j\omega)$$

$$= B_{3122}^{i*}(j\omega) = B_{3133}^{i*}(j\omega) = B_{3112}^{i*}(j\omega) = B_{3123}^{i*}(j\omega) = 0$$

$$B_{3322}^{i*}(j\omega) = B_{3311}^{i*}(j\omega)$$

$$B_{2323}^{i*}(j\omega) = B_{3131}^{i*}(j\omega)$$

Les tenseurs des modules et des complaisances complexes équivalents s'écrivent alors sous la forme matricielle en fonction de 5 composantes indépendantes (cas de l'isotrope transverse) :

$$[C^{eq*}(j\omega)] = \begin{bmatrix} C_{1111}^{eq*}(j\omega) & C_{1122}^{eq*}(j\omega) & C_{1133}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111}^{eq*}(j\omega) & C_{1133}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 \\ & \text{symétrie} & & & C_{1212}^{eq*}(j\omega) & 0 \\ & & & & & C_{1111}^{eq*}(j\omega) - C_{1122}^{eq*}(j\omega) \end{bmatrix}$$

IV-53

$$[S^{eq*}(j\omega)] = \begin{bmatrix} S_{1111}^{eq*}(j\omega) & S_{1122}^{eq*}(j\omega) & S_{1133}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ & S_{1111}^{eq*}(j\omega) & S_{1133}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{3333}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{1212}^{eq*}(j\omega) & 0 & 0 \\ & \text{symétrie} & & & S_{1212}^{eq*}(j\omega) & 0 \\ & & & & & S_{1111}^{eq*}(j\omega) - S_{1122}^{eq*}(j\omega) \end{bmatrix}$$

IV-54

II-8 Conclusion

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant homogène anisotrope et isotrope transverse équivalent à un matériau sandwich microhomogène soumis à des sollicitations harmoniques macrohomogène (en particulier de membrane) a été identifiée en fonction des caractéristiques de l'acier, du polymère et de la géométrie (fraction volumique).

Une partie de la matrice de la relation III-38 du chapitre III est ainsi identifiée. Pour le cas de sollicitations harmoniques de flexion où les champs de contraintes et de déformations ne sont plus comme dans le cas de membrane, homogènes par couche, il convient d'évaluer les paramètres d'une autre manière.

III Évaluation des paramètres spécifiques au cas de la flexion harmonique.

III-1 Hypothèses

Hypothèses de comportement:

- acier : élastique linéaire homogène isotrope.
- polymère : viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope.
- le sandwich : viscoélastique linéaire non vieillissant isotrope transverse.

hypothèses sur le champ de déplacement:

dans chacune des couches (i), le champ de déplacement s'écrit:

$$u^{i*}(x,y,z,j\omega) = z\psi_x^*(x,j\omega)$$

$$v^{i*}(x,y,z,j\omega) = z\psi_y^*(y,j\omega)$$

$$w^{i*}(x,y,z,j\omega) = w^*(x,j\omega)$$

Les conditions aux interfaces en terme de déformation (IV-31) sont respectées.

III-2 Expression des modules de flexion complexes équivalents dans le plan de la plaque homogène équivalente à la plaque sandwich.

Les moments de flexion $M_x^{t*}(j\omega)$, $M_y^{t*}(j\omega)$ et de torsion $M_{xy}^{t*}(j\omega)$ s'écrivent (par unité de longueur) :

$$M_x^{t*}(j\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^*(r,j\omega)zdz$$

$$M_y^{t*}(j\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}^*(r,j\omega)zdz$$

$$M_{xy}^{t*}(j\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}^*(r,j\omega)zdz$$

soit en tenant compte des lois de comportement de l'acier, du polymère et du champs de déplacement:

$$\begin{aligned}
 M_x^{t*}(j\omega) &= - \left[Q_{1111}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1111}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \psi_{x,x}^*(j\omega) - \left[Q_{1122}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1122}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \psi_{y,y}^*(j\omega) \\
 M_y^{t*}(j\omega) &= - \left[Q_{1111}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1111}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \psi_{y,y}^*(j\omega) - \left[Q_{1122}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1122}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \psi_{x,x}^*(j\omega) \\
 M_{xy}^{t*}(j\omega) &= \frac{-1}{2} \left[Q_{1212}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1212}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] [\psi_{x,y}^*(j\omega) + \psi_{y,x}^*(j\omega)]
 \end{aligned}$$

en identifiant ces 3 dernières relations avec les formules III-42, III-43 et III-44 du chapitre III, il vient:

$$\gamma^*(j\omega) = - \left[Q_{1111}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1111}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \quad \text{IV-55}$$

$$\delta^*(j\omega) = \frac{1}{\gamma^*(j\omega)} \left[Q_{1122}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1122}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \quad \text{IV-56}$$

$$\theta^*(j\omega) = \frac{-1}{2} \left[Q_{1212}^a \frac{h^3 - h^{p^3}}{12} + Q_{1212}^{p*}(j\omega) \frac{h^{p^3}}{12} \right] \quad \text{IV-57}$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec: } Q_{1111}^a &= \frac{E^a}{1 - \nu^a} , & Q_{1111}^{p*}(j\omega) &= \frac{E^{p*}(j\omega)}{1 - \nu^{p*2}(j\omega)} , \\
 Q_{1122}^a &= \frac{-\nu^a E^a}{1 - \nu^a} , & Q_{1122}^{p*}(j\omega) &= \frac{-\nu^{p*}(j\omega) E^{p*}(j\omega)}{1 - \nu^{p*2}(j\omega)} , \\
 Q_{1212}^a &= \frac{E^a}{1 + \nu^a} , & Q_{1212}^{p*}(j\omega) &= \frac{E^{p*}(j\omega)}{1 + \nu^{p*}(j\omega)} .
 \end{aligned}$$

III-3 Expression de la masse volumique équivalente :

La masse volumique de la plaque homogène viscoélastique linéaire non vieillissante isotrope transverse équivalente à la plaque sandwich, est obtenue par la relation de moyenne des masses volumiques pondérées par les fraction volumiques :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{v} = \frac{m^a + m^p}{v} \\ &= \frac{m^a}{v^a} \frac{v^a}{v} + \frac{m^p}{v^p} \frac{v^p}{v} \\ &= \rho^a f + \rho^p (1-f)\end{aligned}\quad \text{IV-59}$$

III-4 Expressions des coefficients correctifs $k_1^*(p)$ - $k_2^*(p)$

Les effets du cisaillement transverse sont pris en compte par une formulation basée sur la théorie des poutres de Timoshenko [33] qui a été étendue au cas des plaques isotropes par Reissner [34,35] et Mindlin [36] et au cas des plaques anisotropes par Chow [31].

Le comportement transverse est déterminé par 2 constantes : $k_1^*(p)$ et $k_2^*(p)$. Ces constantes sont définies de la même façon. Les calculs présentés ici sont ceux qu'ont développé Chow [31] et Vinh [50].

Le principe de calcul d'une constante est d'identifier l'énergie de cisaillement lorsque la contrainte de cisaillement transverse est homogène dans les couches (mais continue aux interfaces) à l'énergie de cisaillement lorsque la contrainte de cisaillement transverse est supposée homogène pondérée par le coefficient correctif cherché.

III-4-1 Expression de $k_1^*(p)$

III-4-1-1 Contrainte normale :

On suppose que la contrainte normale dans le sandwich (qui n'est plus homogène comme dans la partie II) $\sigma_{xx}^*(x,z,p)$ s'écrit de la même manière que dans le cas unidirectionnel :

$$\sigma_{xx}^*(x,z,p) = M_x^{t*}(x,p) \frac{c_{xxxx}^*(z,p)z}{D_{11}^*(p)} \quad \text{IV-60}$$

$$\text{avec: } D_{11}^*(p) = \int_{-h/2}^{h/2} c_{xxxx}^*(z,p)z^2 dz$$

III-4-2-1 Contrainte de cisaillement transverse $\sigma_{xz}^*(x,z,p)$:

La contrainte de cisaillement est obtenue à partir des équations d'équilibre en l'absence de l'inertie rotationnelle qui est négligeable vis à vis de l'effet du cisaillement transverse [30]:

$$\sigma_{xz}^*(x,z,p) = - \int_{-h/2}^z \sigma_{xx}^*(x,\xi,p)_{,x} d\xi \quad \text{IV-61}$$

en remplaçant IV-60 dans IV 61, il vient :

$$\sigma_{xz}^*(x,z,p) = -M_x^{t*}(x,p)_{,x} \frac{g_1^*(z,p)}{D_{11}^*(p)} \quad \text{IV-62}$$

$$\text{avec: } g_1^*(z,p) = - \int_{-h/2}^z c_{xxxx}^*(\xi,p)\xi d\xi$$

notons que IV-62 vérifient les conditions aux interfaces IV-28.

III-4-1-3 Energie de cisaillement transverse

Compte tenu du fait que l'acier et le polymère sont isotropes, l'énergie de cisaillement par unité d'aire:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^*(x,z,p) \gamma_{xz}^*(x,z,p) dz$$

s'écrit compte tenu de IV-62 :

$$\frac{\left[M_x^{t*}(x,p) \right]_x^2}{D_{11}^{*2}(p)} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^{*2}(z,p)}{c_{xzxz}^*(z,p)} dz \quad \text{IV-63}$$

III-4-1-4 Énergie de cisaillement transverse d'un matériau V.E.L.N.V. équivalent isotrope transverse avec prise en compte du coefficient de correction .

L'énergie de cisaillement par unité d'air s'écrit encore compte tenu de la définition du facteur correctif (III-2 du chapitre précédent).

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^*(x,z,p) \gamma_{xz}^*(x,z,p) dz \\ &= \frac{N_{xz}^*(x,p)}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz}^*(x,z,p) dz \\ &= N_{xz}^*(x,p) \Gamma_{xz}^*(x,z,p) \\ &= \frac{N_{xz}^{*2}(x,p)}{k_1^*(p) A_{xzxz}^*(p)} \end{aligned}$$

avec, dans le cas d'une poutre en statique (équation III-49) :

$$N_{xz}^*(x,p) = M_x^{t*}(x,p)_{,x}$$

finalement l'énergie de cisaillement s'écrit :

$$\frac{\left[M_x^{t*}(x,p) \right]_x^2}{k_1^*(p) A_{xzxz}^*(p)} \quad \text{IV-64}$$

III-4-1-5 Expression de k_1^* (p)

En identifiant IV-64 à IV-63, il vient :

$$k_1^*(p) = \frac{[D_{11}^*(p)]^2}{A_{xzxz}^*(p) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^{*2}(z,p)}{c_{xzxz}^*(z,p)} dz} \quad \text{IV 65}$$

$$\text{avec: } A_{xzxz}^*(p) = h^2 \left[\int_{-h/2}^{h/2} s_{xzxz}^*(z,p) dz \right]^{-1}$$

III-4-2-1 Expression de k_2^* (p)

Selon la même démarche, k_2^* (p) est obtenu. Et compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe z, il vient :

$$k_2^*(p) = k_1^*(p) = k^*(p)$$

Ainsi, les paramètres de la flexion sont identifiés. Pour les obtenir dans le cas de sollicitations harmoniques, il suffit de remplacer dans les calculs : p par $j\omega$.

IV Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre a permis d'identifier les caractéristiques de la loi de comportement (relation III-44 du chapitre III) d'un élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissant homogène isotrope transverse équivalent à un matériau sandwich soumis à un chargement harmonique de membrane et de flexion.

Cette loi de comportement permettra une étude d'une structure en matériau sandwich à partir d'un code de calcul d'une structure viscoélastiques linéaire non vieillissante homogène isotrope transverse. Il s'agit maintenant de valider cette loi de comportement en particulier dans le cas de la flexion.

CHAPITRE V APPLICATION AU CAS DE LA FLEXION OBERST

I Introduction

Le L.E.D.E.P est équipé d'un appareil de flexion Oberst. Cet appareil permet de visualiser la courbe de résonance d'une éprouvette (en forme de poutre) en flexion, en fonction de la fréquence.

L'exploitation de cette courbe, permet de calculer l'amortissement de l'éprouvette aux fréquences de résonance.

L'éprouvette étant placée dans une enceinte thermostatée, les résultats sont obtenus en fonction de la fréquence et de la température.

Cet appareil a permis d'obtenir l'amortissement de poutres sandwich de différentes géométries, constitué du polymère F13' (présenté au chapitre II). Les résultats sont présentés dans ce chapitre.

De nombreuses études ont été menées afin de prédire l'amortissement d'une poutre sandwich. Cependant, aucune n'a proposé de résoudre le problème d'une poutre homogène équivalente à une poutre sandwich en flexion avec prise en compte des effets de cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle.

Dans ce chapitre, l'équation du mouvement de flexion d'une poutre homogène viscoélastique linéaire non vieillissante isotrope transverse équivalente à une poutre sandwich, est établie à partir de l'équation III-56. La résolution de cette équation dans le cas de la flexion Oberst conduit à la simulation de la courbe de résonance et de l'amortissement.

Récemment, L.Blanchard [73] a simulé la flexion Oberst d'une poutre sandwich par des calculs effectués par la méthode des éléments finis. Son approche consiste à créer un élément fini incorporant les 3 couches. Chacune des couches est supposée avoir un champ de déplacement de type Mindlin (différent dans les 3 couches) avec prise en compte des effet de cisaillement transverse et de l'inertie rotationnelle.

Il a mené une étude paramétrique de l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst. Cette étude a été reprise dans l'approche développée ici.

La comparaison entre les résultats issus des simulations et ceux issus des expériences ou de la littérature est présentée dans ce chapitre.

II Présentation de la flexion Oberst - Mesures d'amortissement

II-1 Dispositif expérimental

Une éprouvette est encastrée à une extrémité et soumise à l'autre à des vibrations forcées allant de quelques Hertz à 1600 Hertz environ. Ce dispositif est placé dans une enceinte thermostatée (figure 1).

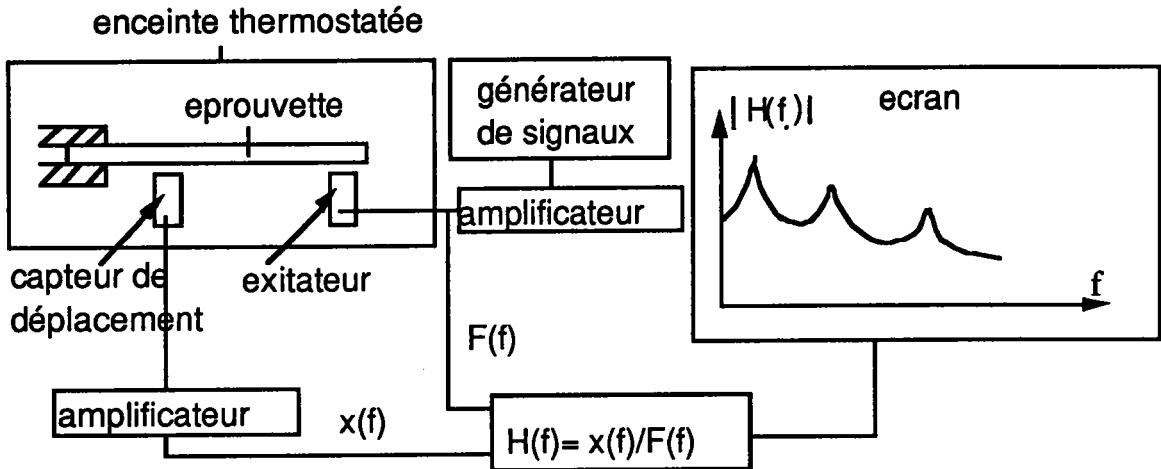


figure 1 : appareil de flexion Oberst

La courbe de réponse (dite courbe de résonance) qui est le module du rapport: déplacement (en transformée de Fourier) sur la force imposée (en transformée de Fourier), en fonction de la fréquence, est visualisée à l'écran.

II-2 Mesure de l'amortissement

Expérimentalement, l'amortissement (η) est obtenu en calculant le rapport: largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance (Δf) sur la fréquence de résonance (f_0) (figure 2-a) [71].

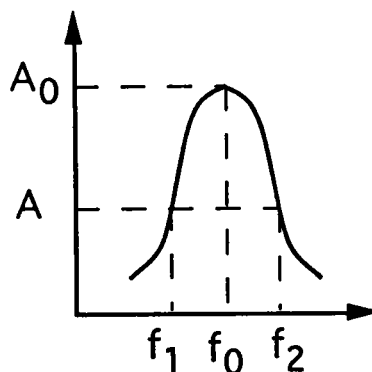


figure 2-a : courbe de résonance au voisinage d'une fréquence de résonance

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_0}$$

V-1

avec Δf : largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance, c'est la grandeur mesurée aux amplitudes $A = A_0 / 2^{1/2}$ de la courbe de résonance.

($A = A_0 - 3$ dB en échelle décibel)

A_0 : amplitude de résonance.

f_0 : fréquence de résonance

Ce résultat repose sur le fait que le système étudié est considéré comme un système linéaire à un degré de liberté schématisé figure 2-b.

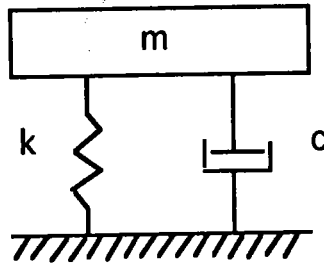


figure 2-b : système amortissant: masse, ressort, amortisseur

l'amortissement de ce système : $\eta = Q^{-1} = c/\sqrt{km}$ est obtenu par la formule (V-1) (voir par exemple [72]) avec f_1 et f_2 qui vérifient l'équation :

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= \frac{1}{2} |H(f_0)|^2 \text{ en supposant:} \\ c^2/4 km &\ll 1 \\ \eta &\ll 1 \end{aligned}$$

Le système à 1 seul degré de liberté ne donne qu'un pic de résonance alors qu'en réalité il y en a une multitude. Le système devrait contenir une multitude de système de type de la figure 2-b. Dans ce cas, la formule (V-1) n'est plus valable.

Néanmoins, si le couplage entre les différentes masses est faible tel que le mouvement d'une masse n'influence pas celui des autres, alors la formule (V-1) reste utilisable [72].

III- Équation du mouvement d'un poutre sandwich en flexion harmonique

La poutre sandwich est identifiée à une poutre viscoélastique linéaire non vieillissante isotrope transverse homogène.

L'équation du mouvement de cette poutre équivalente est déduite de l'équation du mouvement (III-57) de la plaque homogène viscoélastique linéaire non vieillissante isotrope transverse en négligeant les effets selon l'axe y (Figure 3).

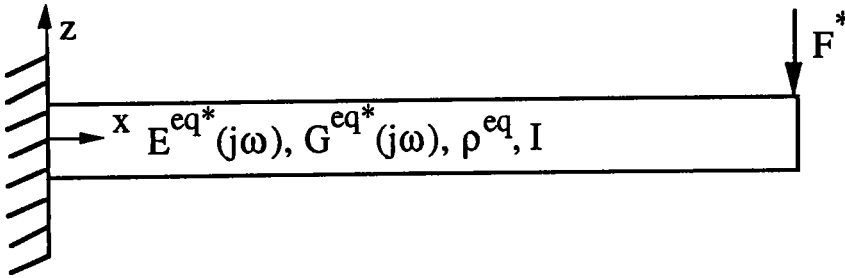


figure 3 : poutre homogène viscoélastique linéaire non vieillissante en flexion Oberst

$$E^{eq*}(j\omega)I \frac{\partial^4 w^*(j\omega, x)}{\partial x^4} - \rho^{eq} S \omega^2 w^*(j\omega, x) + \frac{\rho^{eq^2} I}{G^{eq*}(j\omega)k^*(j\omega)} \omega^4 w^*(j\omega, x) + \left[\frac{\rho^{eq} I E^{eq*}(j\omega)}{G^{eq*}(j\omega)k^*(j\omega)} + \rho^{eq} I \right] \omega^2 \frac{\partial^2 w^*(j, x)}{\partial x^2} = 0 \quad V-2$$

Il s'agit de l'équation de Timoshenko [33] réécrite dans l'espace des nombres complexes.

avec: $E^{eq*}(j\omega)$: module de flexion complexe équivalent,
 $G^{eq*}(j\omega)$: module de cisaillement complexe équivalent,
 $k^*(j\omega)$: coefficient correctif complexe de Timoshenko,
 ρ^{eq} : masse volumique du matériau équivalent,
 I : moment d'inertie du matériau équivalent,
 $w^*(j\omega, x)$: déplacement transverse.

Ces caractéristiques ont été établies au chapitre précédent. En négligeant les effets selon l'axe y :

$$E^{eq*}(j\omega) = E^a \frac{h^3 - h^{p3}}{h^3} + E^{p*}(j\omega) \frac{h^{p3}}{h^3}$$

$$\frac{1}{G^{eq*}(j\omega)} = \frac{h^a}{G^a h} + \frac{h^p}{G^{p*}(j\omega) h}$$

$$\text{et : } \rho^{eq} = \frac{\rho^a h^a + \rho^p h^p}{h},$$

$$I = bh^3/12$$

$$k^*(p) = \frac{[E^{eq*}(p)I]^2}{h G^{eq*}(p) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^{*2}(p)}{G^*(p)} dz}$$

IV- Résolution de l'équation du mouvement de la poutre équivalente en flexion Oberst.

La solution de l'équation V-2 s'écrit sous la forme suivante (séparation des variables):

$$w^*(j\omega, x) = w_j^*(j\omega) e^{\beta_j^*(j\omega)x/l} \quad \text{V-3}$$

avec $w_j^*(j\omega)$: amplitude complexe

$\beta_j^*(j\omega)$: nombre d'onde complexe

en remplaçant V-3 dans V-2, l'équation caractéristique est obtenue :

$$\beta^{*4}(j\omega) + T^*(j\omega)u_1[1+u_2^*(j\omega)]\beta^{*2}(j\omega) + T^*(j\omega)[u_1^2u_2^*(j\omega) - 1] = 0$$

$$\text{avec: } T^*(j\omega) = \frac{\omega^2 \rho S l^4}{I E^{eq*}(j\omega)},$$

$$u_1 = \frac{I}{SI^2},$$

$$u_2^*(j\omega) = \frac{E^{eq*}(j\omega)}{G^{eq*}(j\omega) k^*(j\omega)}.$$

les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\beta_1^{*2}(j\omega) = \frac{1}{2} \left[-T^*(j\omega)[1 + u_2^*(j\omega)]u_1 + \left[T^{*2}(j\omega)u_1^2[1 - u_2^*(j\omega)]^2 + 4T^*(j\omega) \right]^{1/2} \right]$$

$$\beta_2^{*2}(j\omega) = \frac{1}{2} \left[-T^*(j\omega)[1 + u_2^*(j\omega)]u_1 - \left[T^{*2}(j\omega)u_1^2[1 - u_2^*(j\omega)]^2 + 4T^*(j\omega) \right]^{1/2} \right]$$

en remplaçant dans V-3, la déformée s'écrit sous la forme :

$$w^*(j\omega, x) = A^*(j\omega)\text{ch}[\beta_1^*(j\omega)x/l] + B^*(j\omega)\text{sh}[\beta_1^*(j\omega)x/l] + C^*(j\omega)\text{cos}[\beta_2^*(j\omega)x/l] + D^*(j\omega)\text{sin}[\beta_2^*(j\omega)x/l] \quad \text{V-4}$$

Compte tenu de la relation III-55 reliant $w^*(j\omega, x)$ à l'angle de cisaillement $\psi_x^*(j\omega, x)$, on a:

$$\psi_x^*(j\omega, x) = A_1^*(j\omega)\text{ch}[\beta_1^*(j\omega)x/l] + B_1^*(j\omega)\text{sh}[\beta_1^*(j\omega)x/l] + C_1^*(j\omega)\text{cos}[\beta_2^*(j\omega)x/l] + D_1^*(j\omega)\text{sin}[\beta_2^*(j\omega)x/l] \quad \text{V-5}$$

$$\text{avec: } A_1^*(j\omega) = r^*(j\omega)A^*(j\omega)$$

$$B_1^*(j\omega) = r^*(j\omega)B^*(j\omega)$$

$$C_1^*(j\omega) = s^*(j\omega)C^*(j\omega)$$

$$D_1^*(j\omega) = s^*(j\omega)D^*(j\omega)$$

$$r^*(j\omega) = \frac{\beta_1^{*2}(j\omega) + T^*(j\omega)u_2^*(j\omega)u_1}{l\beta_1^*(j\omega)}$$

$$s^*(j\omega) = \frac{-\beta_2^{*2}(j\omega) + T^*(j\omega)u_2^*(j\omega)u_1}{l\beta_2^*(j\omega)}$$

Les constantes $A^*(j\omega)$, $B^*(j\omega)$, $C^*(j\omega)$, $D^*(j\omega)$ sont obtenues à partir des 4 conditions suivantes :

$w^*(j\omega, x) = 0$: la déformée est nulle à l'encastrement,

$\psi_x^*(j\omega, x=0) = 0$: le cisaillement est nul à l'encastrement,

$M_x^{\uparrow*}(j\omega, x=1) = 0 \Leftrightarrow \psi_x^*(j\omega, x=1) = 0$: le moment fléchissant est nul à l'extrémité $x = 1$,

$N_{xz}^{\uparrow*}(j\omega, x=1) = -F^*(j\omega)$

$\Leftrightarrow SG^{eq*}(j\omega)k^*(j\omega) \left[w^*(j\omega, x=1)_{,x} - \psi_x^*(j\omega, x=1) \right] = -F^*(j\omega)$ l'effort tranchant est égal à la force appliquée à l'extrémité $x = 1$

Ces 4 conditions conduisent à :

$$C^*(j\omega) = -A^*(j\omega)$$

$$D^*(j\omega) = \frac{r^*(j\omega)}{s^*(j\omega)} B^*(j\omega)$$

$$B^*(j\omega) = -A^*(j\omega) \frac{r^*(j\omega) \beta_1^*(j\omega) \operatorname{ch}[\beta_1^*(j\omega)] - s^*(j\omega) \beta_2^*(j\omega) \cos[\beta_2^*(j\omega)]}{r^*(j\omega) \beta_1^*(j\omega) \operatorname{sh}[\beta_1^*(j\omega)] + r^*(j\omega) \beta_2^*(j\omega) \sin[\beta_2^*(j\omega)]}$$

$$A^*(j\omega) = -F^*(j\omega) \frac{r^*(j\omega) \beta_1^*(j\omega) \operatorname{sh}[\beta_1^*(j\omega)] + \beta_2^*(j\omega) \sin[\beta_2^*(j\omega)]}{l S k^*(j\omega) G^{eq*}(j\omega)} \frac{1}{X^*(j\omega)}$$

avec:

$$X^*(j\omega) = -r^*(j\omega) \frac{\beta_1^*(j\omega)}{1} \left[\frac{\beta_1^*(j\omega)}{1} - r^*(j\omega) \right] + r^*(j\omega) \frac{\beta_2^*(j\omega)}{1} \left[\frac{\beta_2^*(j\omega)}{1} + s^*(j\omega) \right] + r^*(j\omega) \sin[\beta_2^*(j\omega)] \operatorname{sh}[\beta_1^*(j\omega)]$$

$$\left[\frac{\beta_2^*(j\omega)}{1} \left[\frac{\beta_1^*(j\omega)}{1} - r^*(j\omega) \right] + \frac{\beta_1^*(j\omega)}{1} \left[\frac{\beta_2^*(j\omega)}{1} + s^*(j\omega) \right] \right] \\ + \cos[\beta_2^*(j\omega)] \operatorname{ch}[\beta_2^*(j\omega)] \\ \left[s^*(j\omega) \frac{\beta_2^*(j\omega)}{1} \left[\frac{\beta_1^*(j\omega)}{1} - r^*(j\omega) \right] + \frac{r^{*2}(j\omega)\beta_1^*(j\omega)}{s^*(j\omega)1} \left[\frac{\beta_2^*(j\omega)}{1} + s^*(j\omega) \right] \right]$$

La déformée $w^*(j\omega, x)$ est ainsi identifiée.

V Courbe de résonance - Amortissement simulés

La courbe de résonance (c.r.) est donnée par l'expression suivante

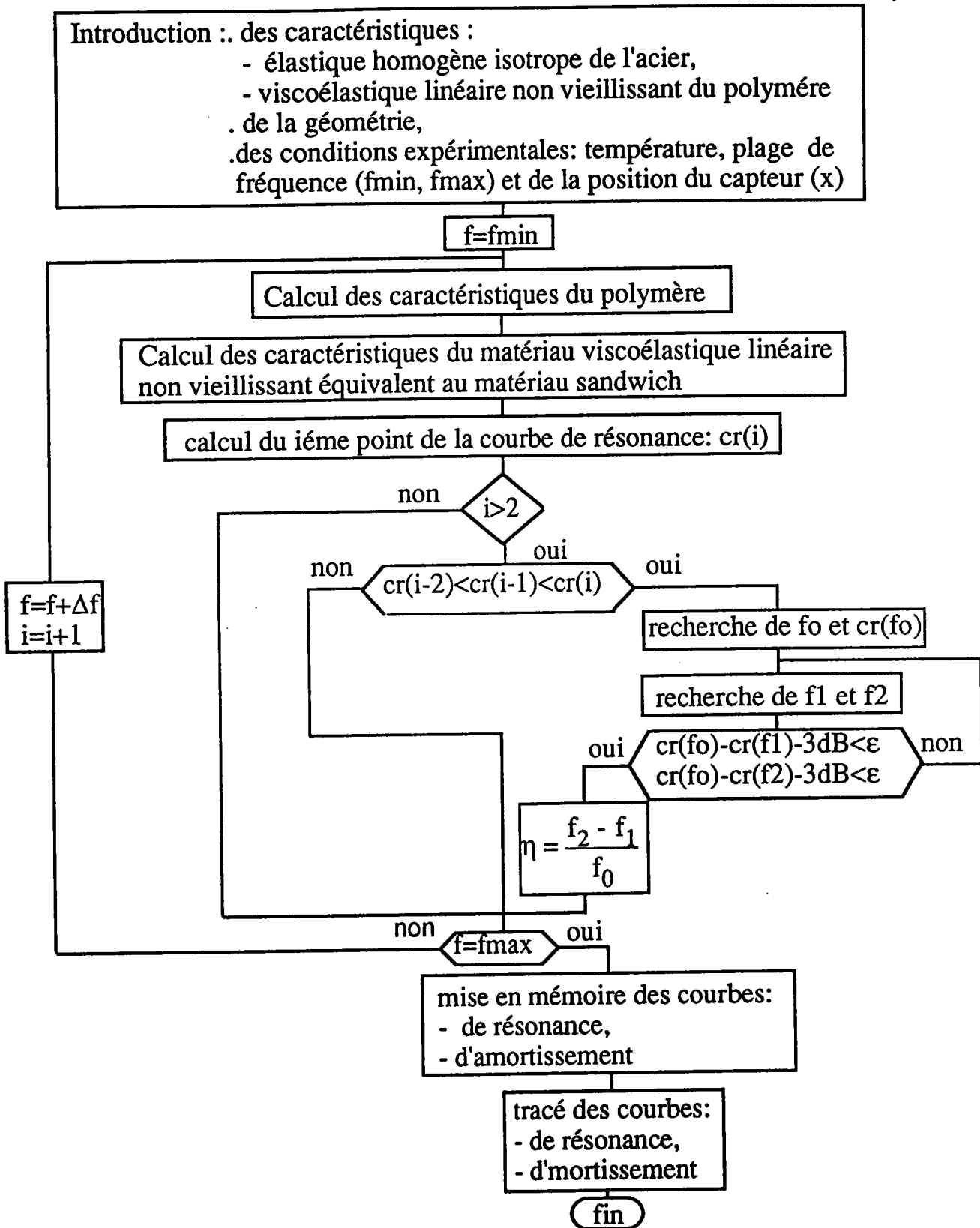
$$cr(f) = 20 \operatorname{Log} \left| \frac{w^*(x_1, jf)}{F^*(jf)} \right|$$

avec x_1 : position du capteur

f: fréquence

A partir de cette courbe de résonance simulée, il est possible de calculer l'amortissement aux fréquences de résonances à partir de l'équation V-1. Un programme informatique a été développé pour simuler la courbe de résonance et l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst. L'organigramme de ce programme est présenté à la page suivante.

Organigramme de simulation de la flexion Oberst:

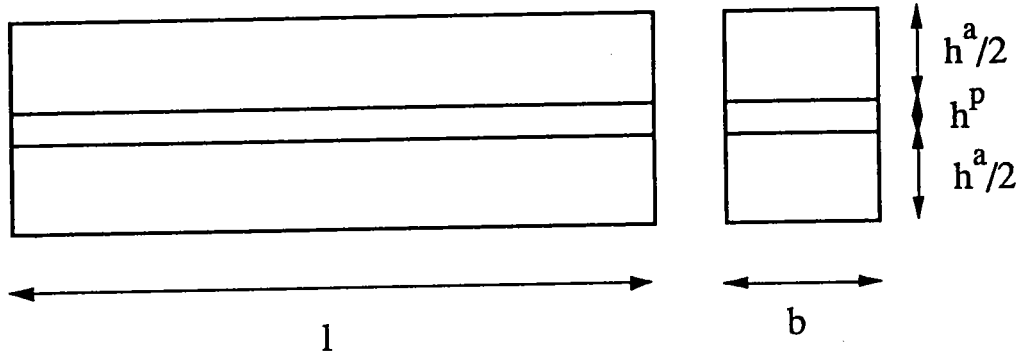


VI Applications - résultats

VI-1 Etude paramétrique - comparaison avec les résultats obtenus par Blanchard [73].

Une étude paramétrique de l'amortissement d'une éprouvette sandwich à 20°C (constitué du polymère M 50) en flexion Oberst a été menée par Blanchard [73].

La géométrie et les caractéristiques de l'éprouvette sont présentées ci-dessous :



$$l = 178 \text{ mm}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$h^a = 0,7 \text{ mm}$$

$$h^p = 0.221 \text{ mm}$$

$$E^a = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa (module d'Young acier)}$$

$$\nu^a = 0.3 \text{ (rapport de poisson de l'acier)}$$

$$\rho^a = 7800 \text{ kg/m}^3 \text{ (masse volumique de l'acier)}$$

$$E^{p*} (j\omega a_T): \text{ module d'Young complexe du polymère M50 (figures 11,12 du chapitre II)}$$

$$\nu^p = 0.45 \text{ (rapport de poisson du polymère M50)}$$

$$\rho^p = 980 \text{ kg/m}^3 \text{ (masse volumique du polymère M50).}$$

$$x = \text{position du capteur} = l$$

Le tableau 1 indique les figures représentant l'influence de différents paramètres sur les fréquences de résonance et sur l'amortissement.

La figure 4 montre la courbe de résonance obtenue par Blanchard et celle obtenue avec la méthode présentée sans cette étude avec les paramètres ci dessus modifiés ($h^a=0.8\text{mm}$ et $h^p=0.05\text{mm}$) à une température de 20°C . Les 2 courbes sont similaires. C'est à partir de ce type de courbe qu'est obtenu l'amortissement (§ II-2 de ce chapitre).

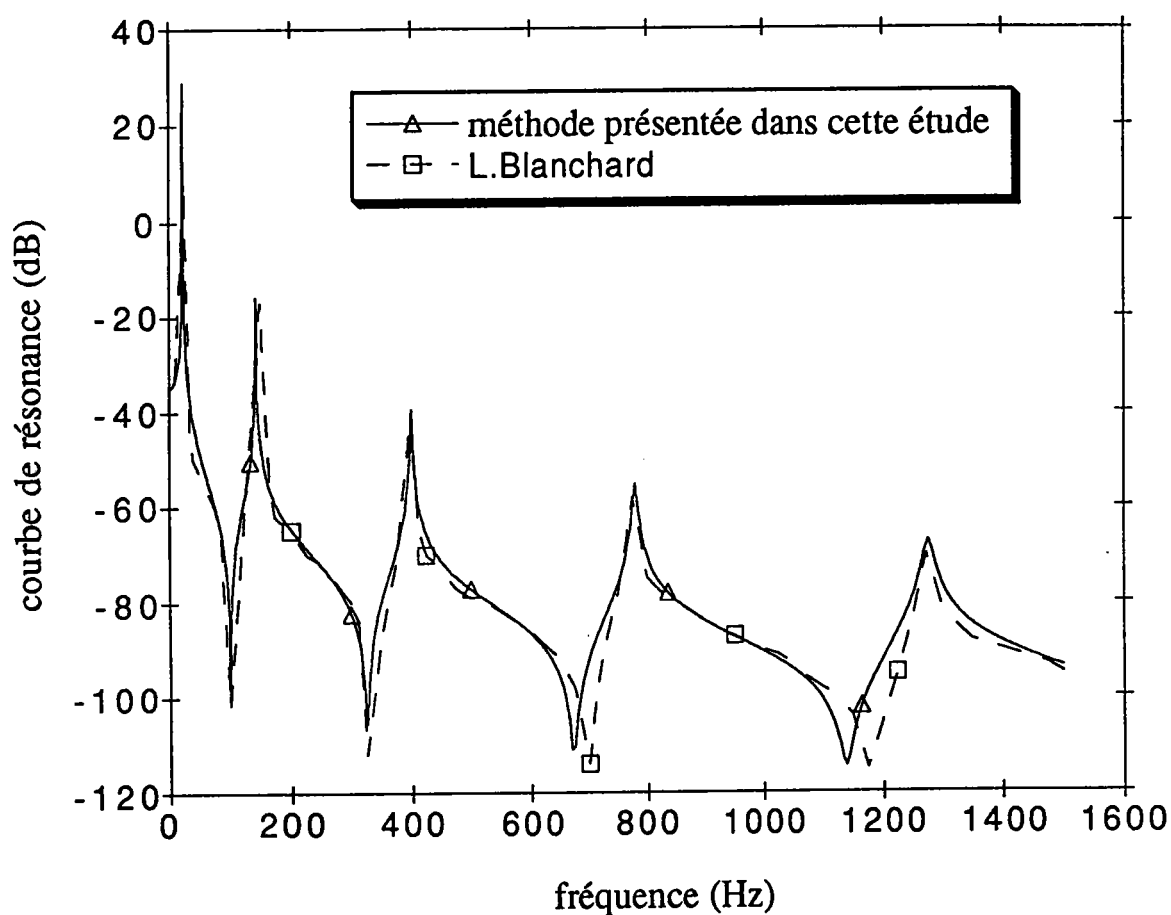


figure 4: courbes de résonances

Le tableau 1 indique les figures représentant l'influence de différents paramètres sur les fréquences de résonance et sur l'amortissement.

Influence de	sur	
	les fréquences de résonance	l'amortissement
E^a	figure 5	figure 6
$h/e = 2h^p/h^a$	figure 7	figure 8
$E^{p''}$	figure 9	figure 10
$G^{p'}$	figure 11	figure 12
$G^{p'}$ et $G^{p''}$ avec $\frac{G^{p'}}{G^{p''}} = \text{cte}$	figure 13	figure 14
ρ^p	figure 15	figure 16
$e (= h^a/4)$	figure 17	figure 18

Tableau 1

Ces figures montrent que le modèle analytique présenté dans cette étude, développé à partir d'un champ de déplacement simple, mais avec prise en compte des effets du cisaillement transverse, permet d'obtenir des résultats semblables à ceux de Blanchard (différence < 10 % sur l'amortissement) obtenus à partir d'un champ de déplacement plus complexe mais en utilisant une voie numérique.

Les figures 5,6,17,18 indiquent une augmentation des fréquences de résonance et de l'amortissement en fonction de E^a et h^a qui est due à l'accroissement de la rigidité (éléments finis) très coûteuse en temps de calcul.

Les fréquences de résonance croissent alors que l'amortissement diminue avec $G^{p'}$ (figures 11 et 12) et $G^{p'}, G^{p''}$ (figures 13 et 14). Dans le premier cas, plus le polymère est rigide ($G^{p'}$ élevé) moins le polymère (donc le sandwich) amorti.

Dans le second cas, plus G_p' et G_p'' sont élevés, plus le cisaillement (donc l'amortissement) diminue.

La variation de E_p'' n'a aucune influence significative sur les fréquences de résonance (figure 9) par contre, son augmentation entraîne une croissance de l'amortissement du polymère (formule II-39) donc de celui du sandwich (figure 10).

La masse volumique du polymère n'a aucune influence significative sur les fréquences de résonance et sur l'amortissement (figures 15 et 16).

Par contre, ceux-ci passent par un maximum en fonction h/e , ce qui signifie qu'il existe une géométrie donnant un amortissement optimum (figures 7 et 8).

L'influence d'autres paramètres (tableau 2) a également été simulée avec l'approche présentée ici :

Influence de	sur	
	les fréquences de résonance	l'amortissement
ν^a	figure 19	figure 20
ρ^a	figure 21	figure 22
ν^p	figure 23	figure 24
x	figure 25	figure 26

Tableau 2

Les figures 19 et 20 montrent que le rapport de Poisson de l'acier n'a aucune influence significative sur les fréquences de résonance et sur l'amortissement.

Le rapport de Poisson du polymère et la position du capteur n'ont aucune influence significative sur les fréquences de résonance (figures 23 et

25). Par contre, leur influence se fait sentir sur l'amortissement à haute fréquence (5^{ème} mode): figures 24 et 26.

Plus ν^P est petit, plus G^{P*} est grand ce qui entraîne une diminution du cisaillement entre l'acier et le polymère d'où une baisse de l'amortissement.

La masse volumique de l'acier à tendance à diminuer les fréquences de résonance (figure 21) et à augmenter l'amortissement (figure 22).

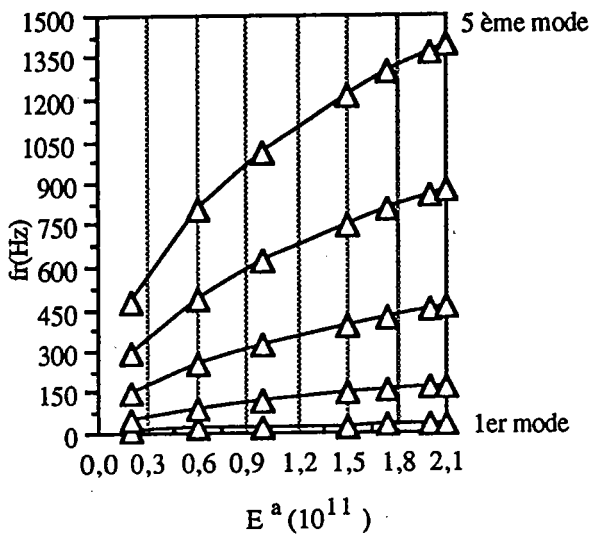
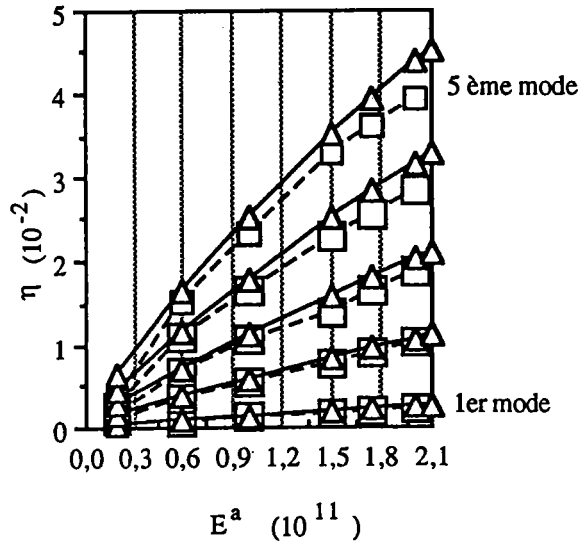


figure 5: influence du module d'Young sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(Δ : présente approche)



figures 6: influence du module d'Young sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(\square : Blanchard, Δ : présente approche)

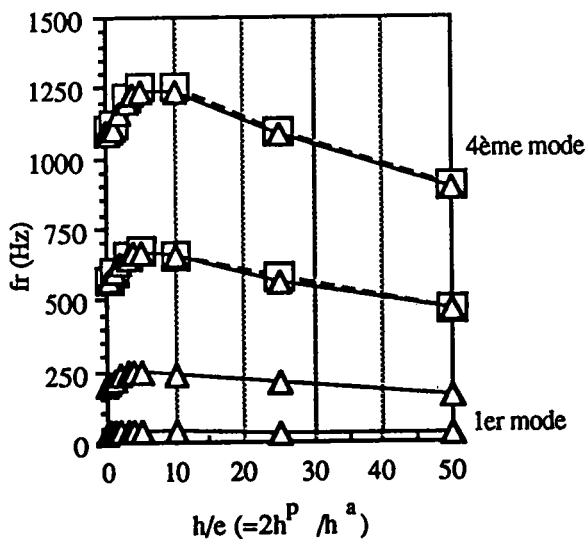
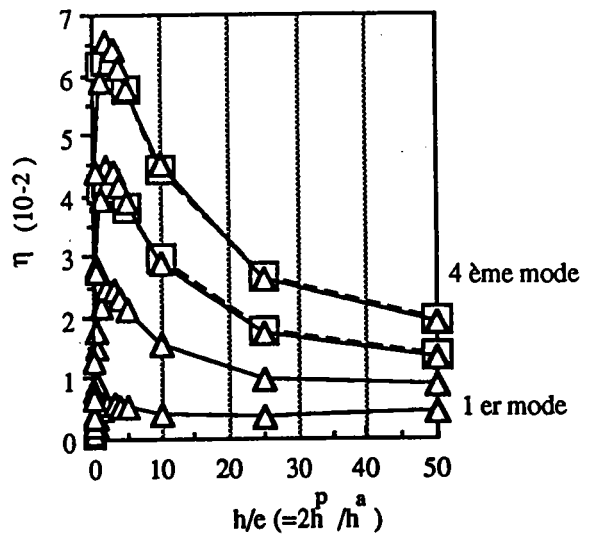


figure 7: influence du rapport h/e sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(\square : Blanchard, Δ : présente approche)



figures 8: influence du rapport h/e sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(\square : Blanchard, Δ : présente approche)

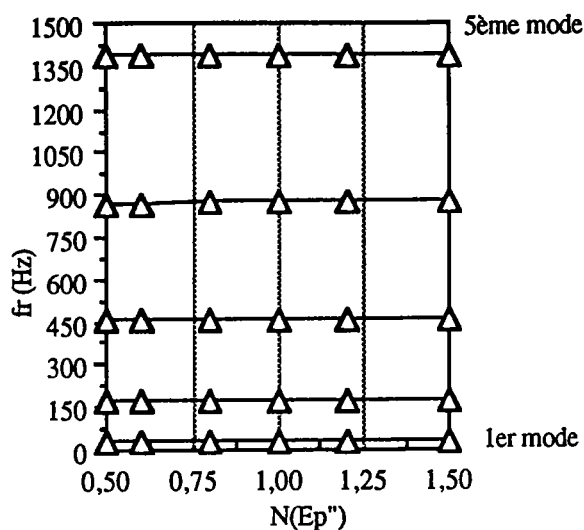
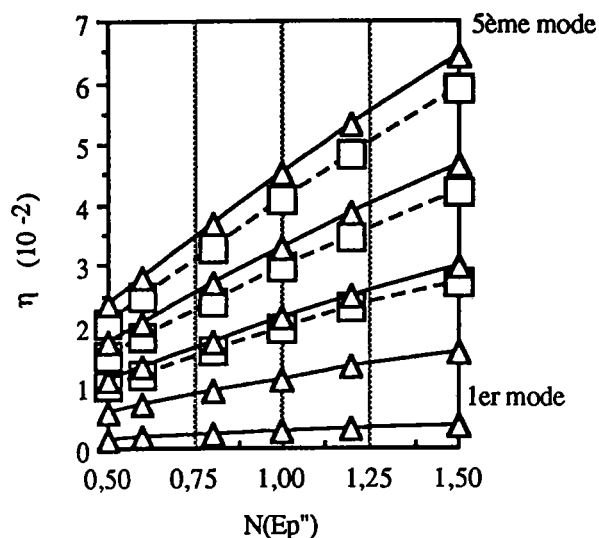


figure 9: influence de la partie imaginaire du module complexe du polymère sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst .

(Δ : présente approche)



figures 10: influence de la partie imaginaire du module complexe du polymère sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(\square : Blanchard, Δ : présente approche)

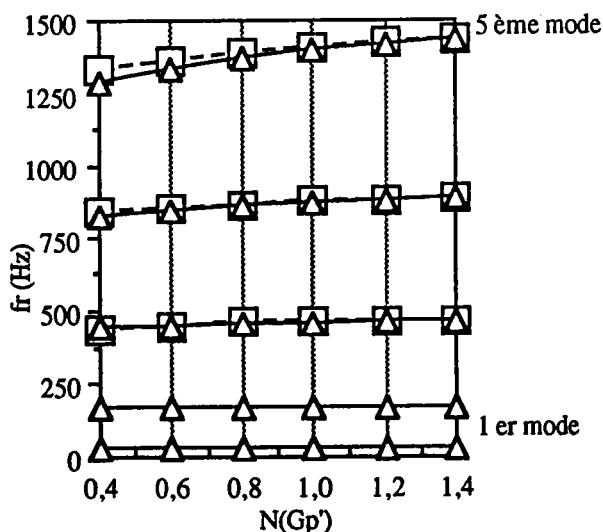
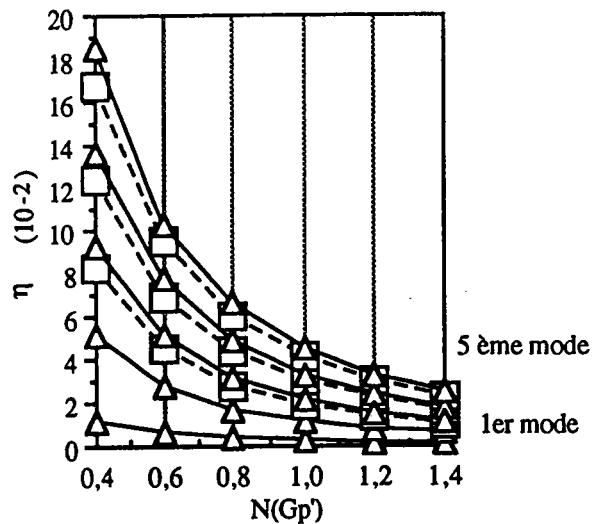


figure 11: influence de la partie réelle du module de cisaillement du polymère sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst .

(\square : Blanchard, Δ : présente approche)



figures 12: influence de la partie réelle du module de cisaillement du polymère sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(\square : Blanchard, Δ : présente approche)

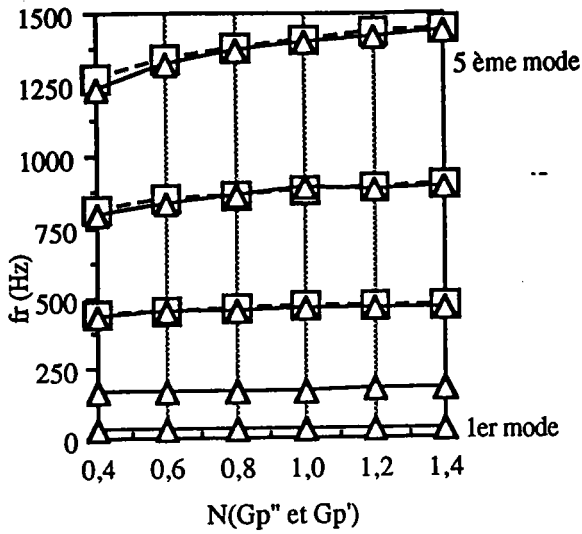
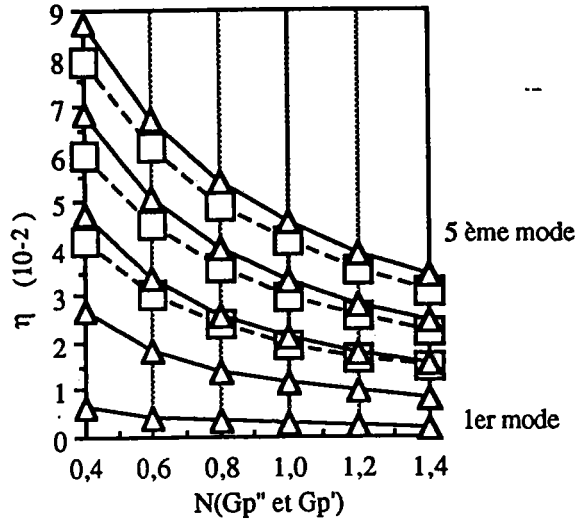


figure 13: influence des caractéristiques du polymère sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst (□: Blanchard, Δ: présente approche)



figures 14: influence des caractéristiques du polymère sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst (□: Blanchard, Δ: présente approche)

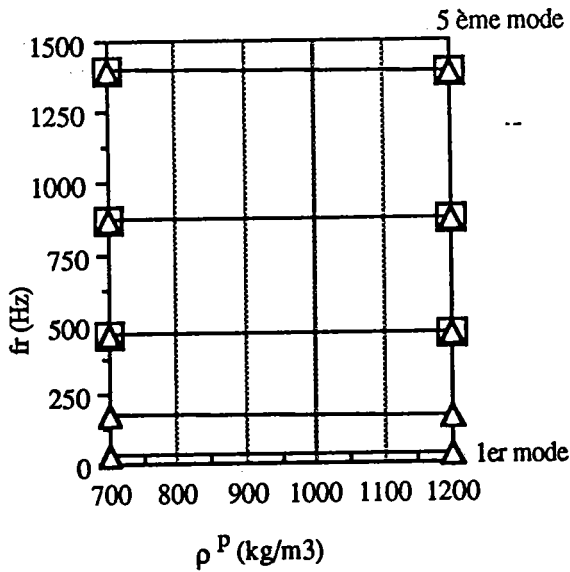
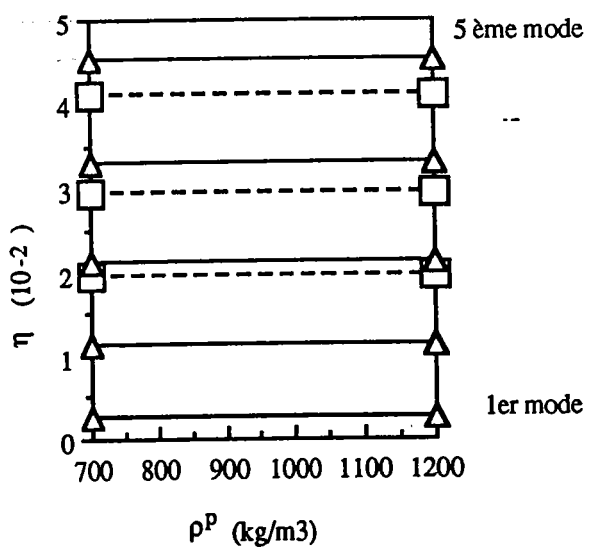


figure 15: influence de la masse volumique du polymère sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst. (□: Blanchard, Δ: présente approche)



figures 16: influence de la masse volumique du polymère sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst (□: Blanchard, Δ: présente approche)

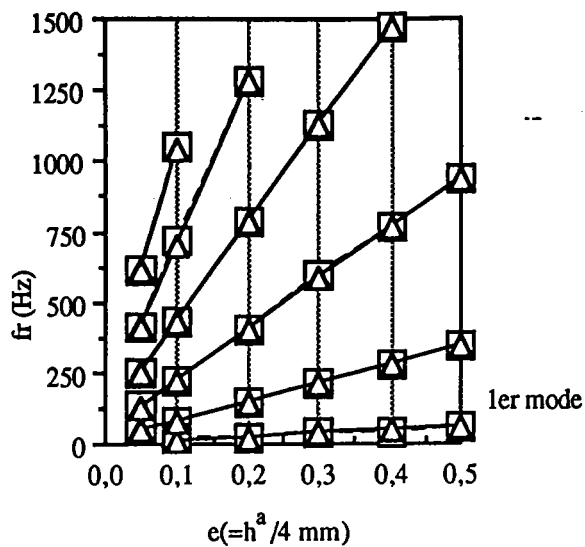
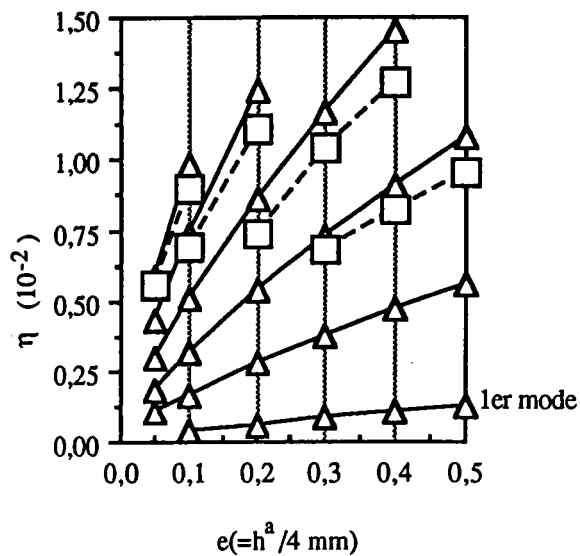


figure 17: influence de l'épaisseur de l'acier sur fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst.

(□: Blanchard, Δ: présente approche)



figures 18: influence de l'épaisseur de l'acier sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst (□: Blanchard, Δ: présente approche).

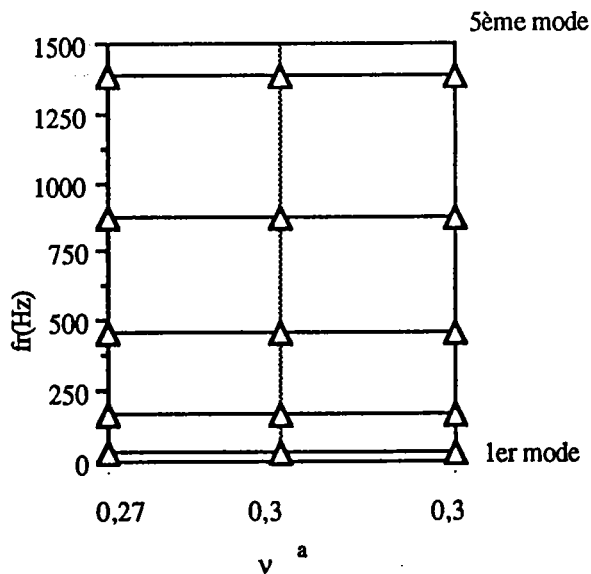
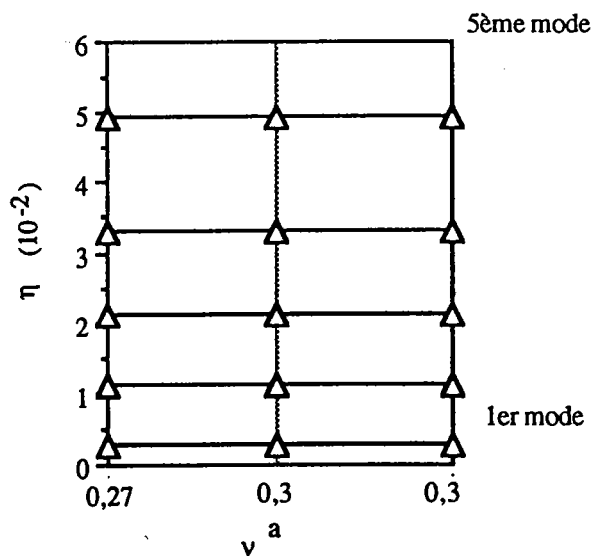


figure 19: influence du rapport de Poisson de l'acier sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst (Δ: présente approche).



figures 20: influence du rapport de Poisson de l'acier sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst (Δ: présente approche).

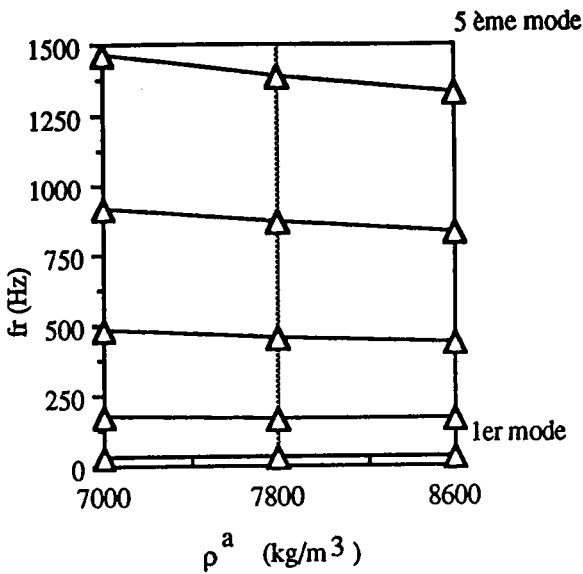
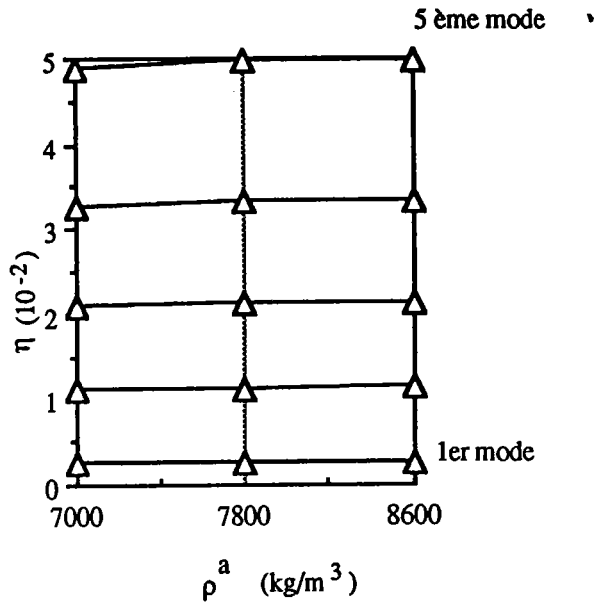


figure 21: influence de la masse volumique de l'acier sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst(Δ : présente approche)



figures 22: influence de la masse volumique de l'acier sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst (Δ : présente approche)

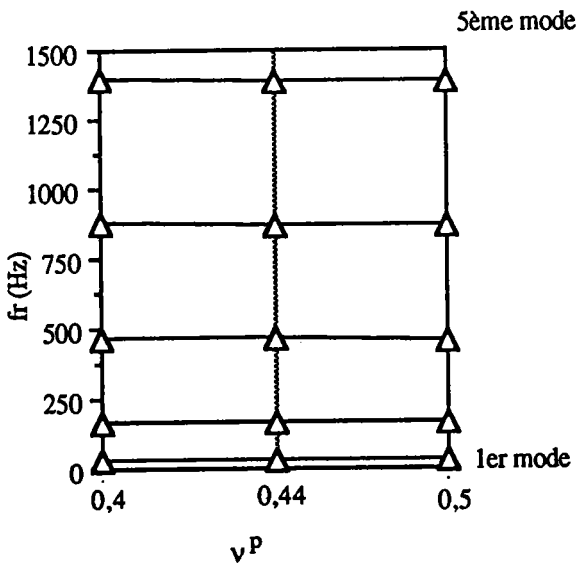
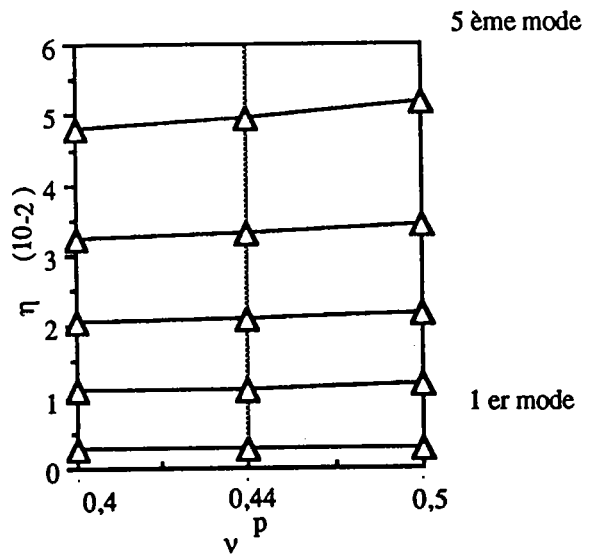


figure 23: influence du rapport de Poisson du polymère sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst(Δ : présente approche)



figures 24: influence du rapport de Poisson du polymère sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst (Δ : présente approche)

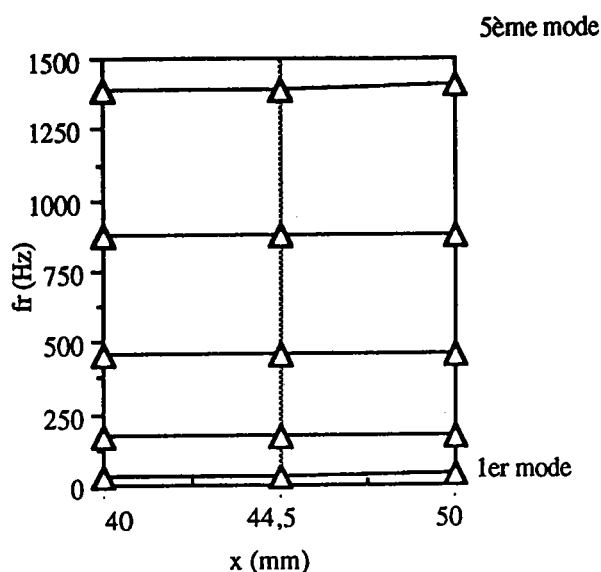
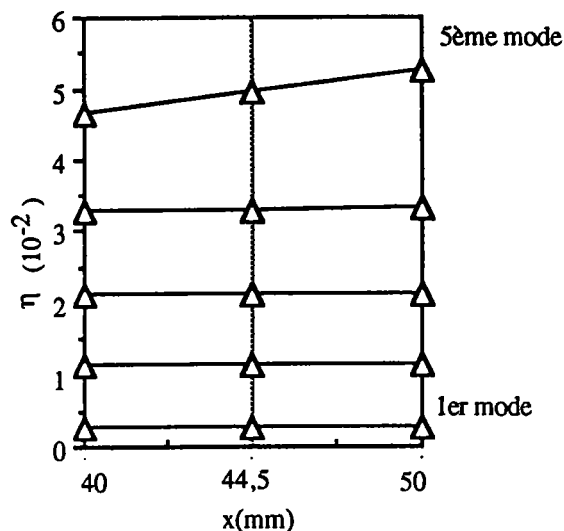


figure 25: influence de la position du capteur sur les fréquences de résonance d'une poutre sandwich en flexion Oberst(Δ : présente approche)



figures 26: influence de la position du capteur sur l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst(Δ : présente approche)

VI-2 Étude paramétrique - comparaison avec les résultats expérimentaux.

VI-2-1 Sandwich F13' ("0,35/0,05/0,35")

Une première campagne d'essai de flexion Oberst a été menée sur un lot de 10 éprouvettes sandwich (prélevées dans une même plaque) constituées du polymère F13' (figures 13,14,15 du chapitre II). Ces essais ont été réalisés pour différentes températures.

Un relevé des épaisseurs des parements d'acier et de la plaque sandwich avant découpe a permis d'obtenir le tableau de mesures suivant:

matériaux \ épaisseurs	moyenne	moyenne de la plus petite des 10 éprouvettes	moyenne de la plus grande des 10 éprouvettes
acier (2 parements)	0.695 mm \pm 5 μ m (écart-type)	0.6884 mm	0.7034 mm
polymère	0.047 mm \pm 8 μ m (écart-type)	38.4 μ m	56.3 μ m

tableau 3: relevé des épaisseurs

Pour chaque éprouvette, à chaque température, l'amortissement et la fréquence de résonance correspondante ont été relevés. L'ensemble de ces résultats a permis d'obtenir un amortissement moyen pour une fréquence moyenne à chaque température.

Ces expériences ont été simulées grâce au logiciel développé dans le cadre de cette étude. L'imprécision sur les épaisseurs mais également celle sur le module d'Young de l'acier et la modification du module complexe du polymère due à la mise en sandwich ont été prise en compte dans les simulations. Ces paramètres sont les plus influents sur l'amortissement et la fréquence de résonance (voir l'étude précédente VII).

Le tableau 4 indiquent les caractéristiques utilisées dans les calculs.

	moyenne colonne A	minimum colonne B	maximum colonne C
longueur des éprouvettes (l) en mm	178	=	=
largeur des éprouvettes (b) en mm	10	=	=
position du capteur (x) en mm	40.5	=	=
E^a en Pa	$2 \cdot 10^{11}$	$1,7 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$
ν^a	0.3	=	=
ρ^a en kg/m^3	7800	=	=
$E^{P*} (j\omega a_T)$	figures 13,14,15 chapitre II	$E^{P''} - 10\%$ $E^{P'} + 10\%$	$E^{P'} - 10\%$ $E^{P''} + 10\%$
ν^P	0.44	=	=
ρ^P en kg/m^3	980	=	=
épaisseur du polymère (mm)	0,047	0,0384	0,0563
épaisseur de l'acier (mm)	0,695	0,6884	0,7034

tableau 4: caractéristiques utilisées pour les simulations

Le tableau 5 indique la légende des courbes d'amortissement, à différentes températures, expérimentales et simulées présentées sur les figures 28 à 34.

amortissement	= f(fréquence de résonance)		
	moyenne	(+ ou -) écart - type sur la fréquence	correspondante
moyen	▲ : expérience △ : simulation		
(+ ou -) écart-type sur l'amortissement		+ (+ écart-type) et × (- écart-type): expérience	
maximal			■ : expérience □ : simulation
minimal			■ : expérience □ : simulation

tableau 5: légendes des figures 28 à 34

La figure 27 montre l'évolution de l'amortissement du polymère F13' en fonction de la fréquence pour différentes températures. Les courbes de cette figure sont tirées de la courbe maîtresse présentée au chapitre II (p 43).

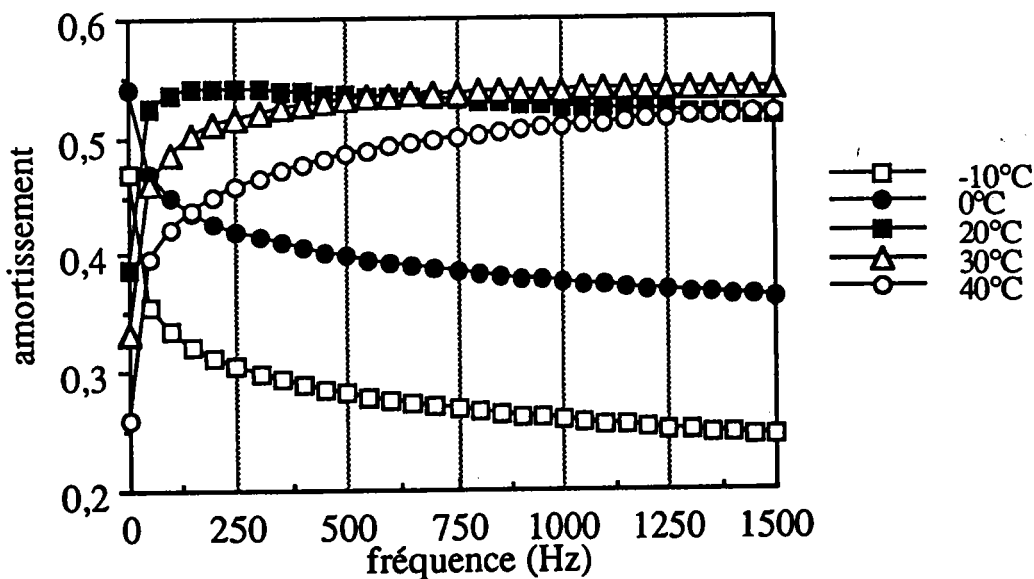


figure 28: évolution de l'amortissement du polymère F13' à différentes températures.

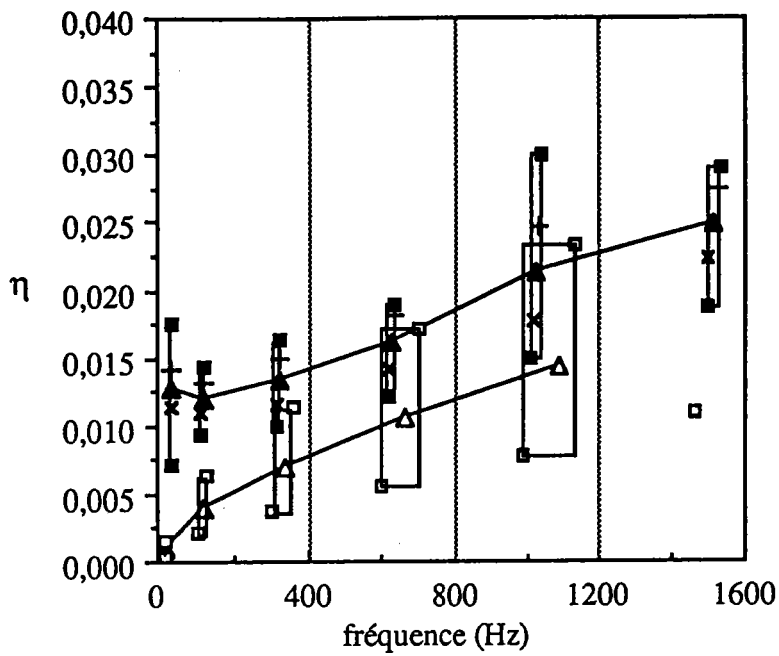


figure 28: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à -10°C (\blacktriangle , $+$, \times , \blacksquare : expériences; \triangle , \square : simulations)

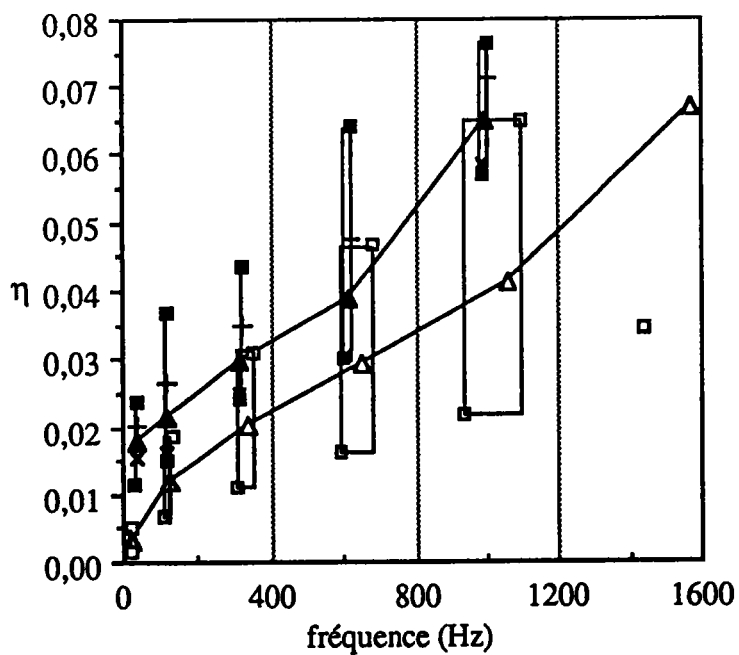


figure 29: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 0°C (\blacktriangle , $+$, \times , \blacksquare : expériences; \triangle , \square : simulations)

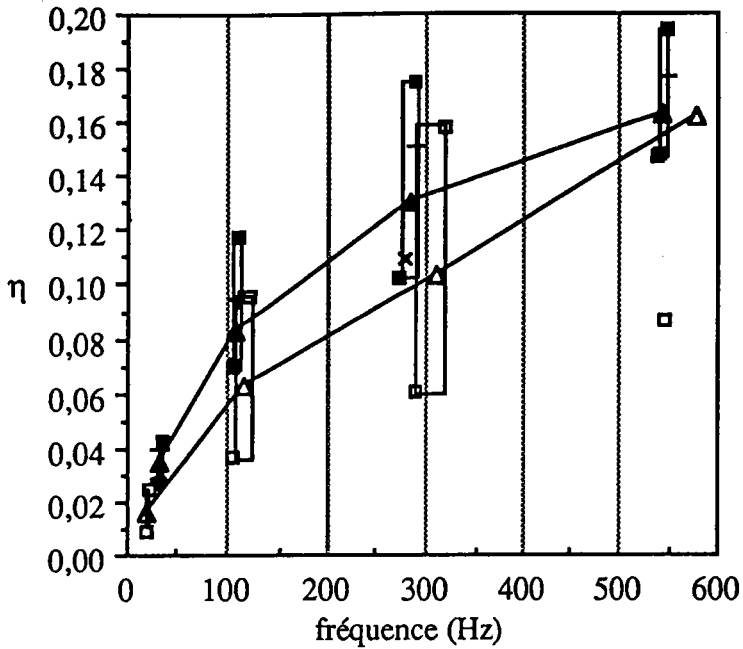


figure 30: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 20°C (▲, +, ×, ■ : expériences; Δ, □ : simulations)

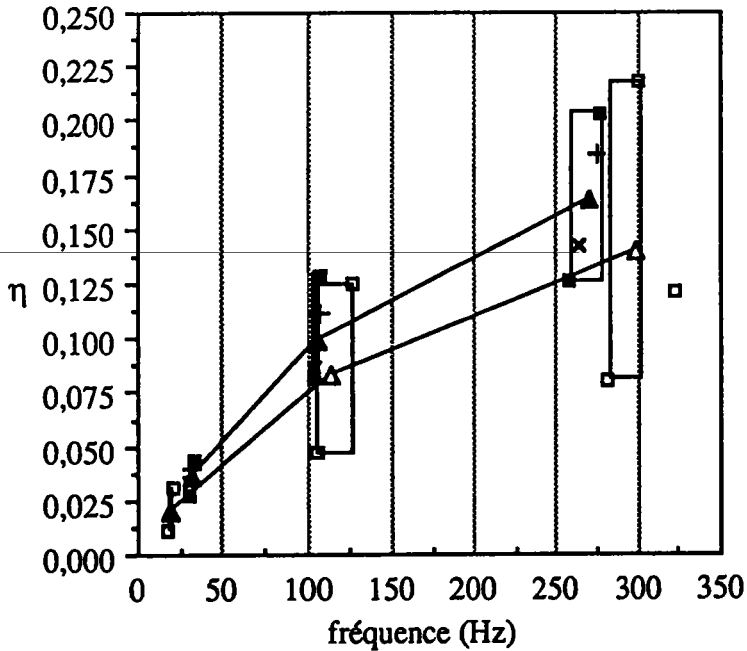


figure 31: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 25°C (▲, +, ×, ■ : expériences; Δ, □ : simulations)

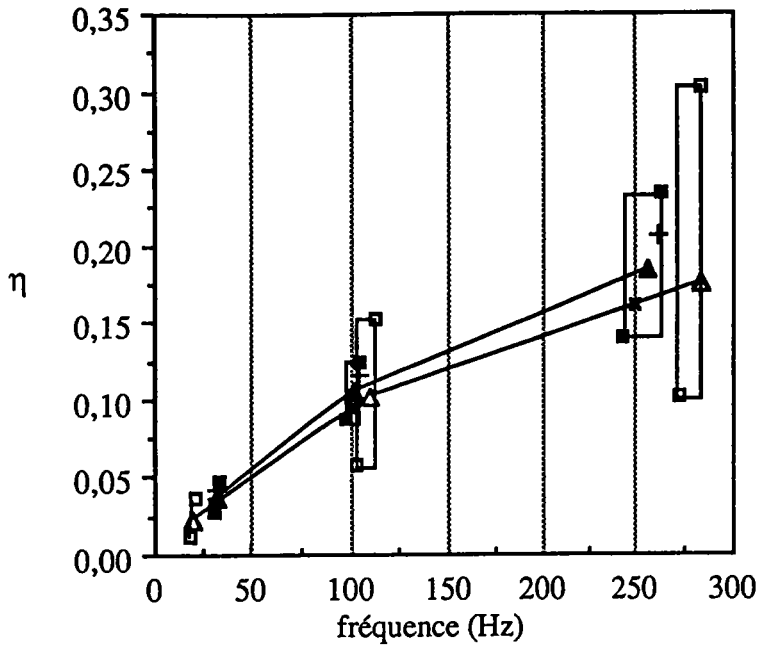


figure 32: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 30°C (\blacktriangle , $+$, \times , \blacksquare : expériences; \triangle , \square : simulations)

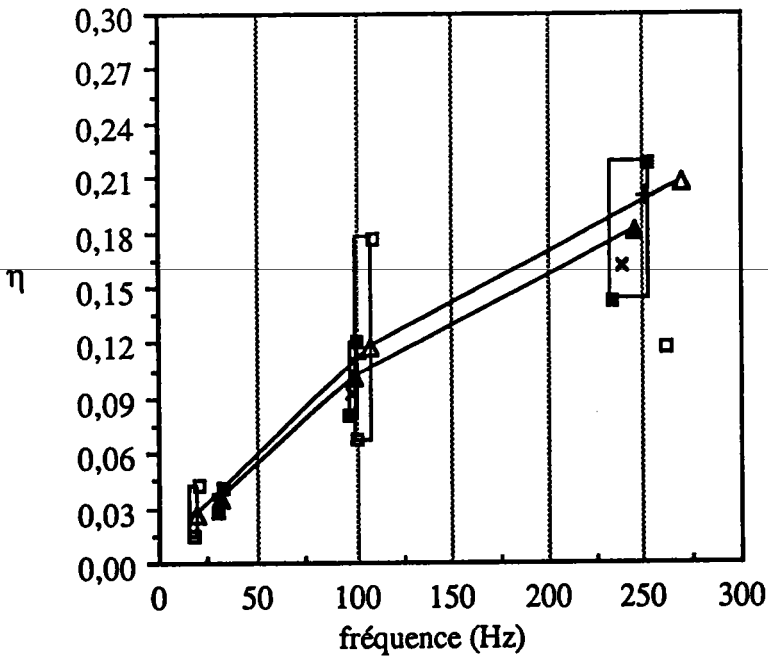


figure 33: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 35°C (\blacktriangle , $+$, \times , \blacksquare : expériences; \triangle , \square : simulations)

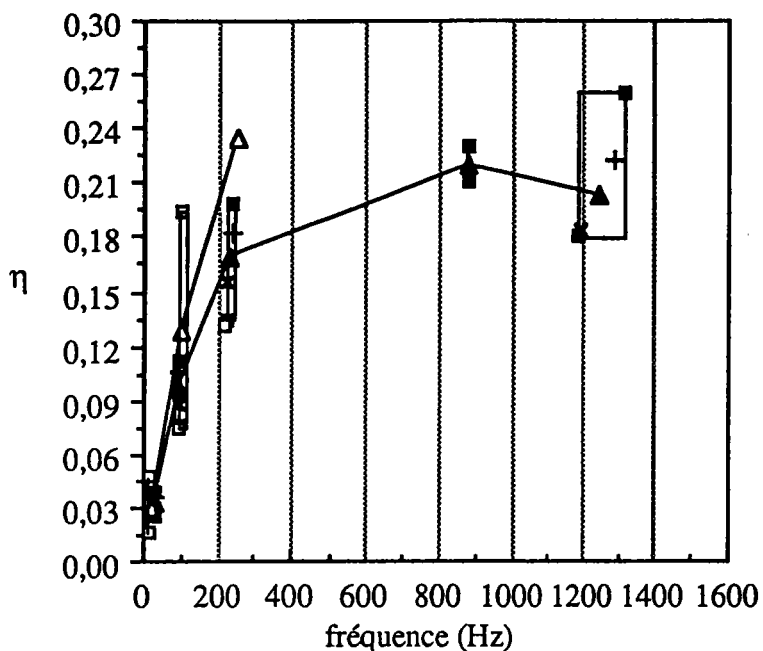


figure 34: évolution de l'amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 40°C (▲, +, ×, ■ : expériences; Δ, □ : simulations)

Ces figures montrent pour chaque température une dispersion de mesures relativement importante due aux irrégularités d'épaisseur des éprouvettes. D'autre part, l'accord entre expérience et simulation est correct entre -10 et 40°C.

Aux faibles fréquences, la cohérence du signal est inférieure à 1 (une valeur de 1 correspond à une bonne qualité de mesure) ce qui donne une mauvaise mesure au premier mode ($f < 50$ Hz).

Les caractéristiques du polymère n'étant pas connues au delà de 40°C (le principe de superposition étant limité pratiquement à un domaine de température de $T_0 \pm 40^\circ\text{C}$), il est impossible de comparer les résultats au dessus de cette température.

Aux températures de -10°C et 0°C, le 6ème mode n'a pu être retrouvé par les calculs avec les caractéristiques moyennes et maximums: les fréquences de résonances se situant au delà de 1600 Hz. Par contre, il a été obtenu avec les caractéristiques minimums.

Les points isolés donnés par les calculs à 20°C, 550 Hz et à 25°C, 525 Hz ont été obtenus avec les caractéristiques minimums. Avec les caractéristiques maximums, la courbe de résonance est tellement aplatie qu'il est impossible d'obtenir l'amortissement.

A 35 et à 40°C, l'amortissement avec les caractéristiques maximums n'a pu être obtenu pour le troisième mode pour la même raison.

A 30°C, au 3ème mode, la fréquence de résonance obtenue avec les caractéristiques moyennes est supérieure à celle avec les caractéristiques maximums. Le rapport épaisseur du polymère sur celle de l'acier est tel qu'une augmentation de ce rapport entraîne une diminution de la fréquence de résonance mais une augmentation de l'amortissement (voir les figures 7 et 8 de l'étude paramétrique du paragraphe précédent).

A 40°C, les points expérimentaux du 4ème mode n'ont été observé expérimentalement que pour une seule éprouvette, alors que ceux du 5ème mode n'ont été obtenus que pour 5 éprouvettes. Ces points n'ont pas été obtenus par calculs, la courbe de résonance étant trop aplatie..

Il est à noter que le maximum d'amortissement est obtenu pour une température d'environ 30°C alors que celui du polymère seul, jusqu'à 300 Hz, se situe à 20°C. Ce décalage a également été observé par Mizumacki [74] (sandwich avec des parements d'aluminium) et par Bourahla [75]. Ce dernier explique ce décalage par le traitement chimique ou électrochimique de la surface de l'acier en contact avec le polymère. Mais si l'on regarde le modèle de Maxwell généralisé (chap. II, § III-11-1), le rajout de ressorts (apport d'un matériau élastique tel que l'acier) modifie la partie réelle mais aussi la partie imaginaire (formules II-44 et II-45) du module complexe, donc modifie l'amortissement en amplitude mais aussi en position (en ωa_T).

D'autre part, l'amortissement du sandwich est dû aux caractéristiques du polymère mais également au cisaillement qui est relié directement aux parements d'acier. Il n'est donc pas étonnant qu'un sandwich ait un maximum d'amortissement décalé par rapport à celui du polymère.

VI-2-2 Etude paramétrique du sandwich F13': influence des épaisseurs d'acier et de polymère.

Une seconde campagne d'essai de flexion Oberst a été menée sur 3 éprouvettes sandwich constituées du polymère F13' avec différentes épaisseurs d'acier et de polymère.

Les épaisseurs ont été relevé tout le long des 3 éprouvettes. Le tableau 6 regroupe ces mesures:

épaisseurs	épreuve 350/35/35		épreuve 350/60/350		épreuve 700/50/700	
	acier	polymère	acier	polymère	acier	polymère
moyenne (mm)	0.702	0.032	0.702	0.062	1.41	0.047
écart - type (μm)	3.12	4.35	1.88	7.07	1.5	6.38

tableau 6: relevé des épaisseurs

Les figures 35 à 48 montrent les résultats expérimentaux de l'influence des épaisseurs de polymère (figures 35 à 41) et d'acier (figures 42 à 48) sur l'amortissement en fonction de la fréquence à différentes températures. Les points de l'éprouvette "350/50/350" sont les points moyens présentés sur les figures précédentes (28 à 34).

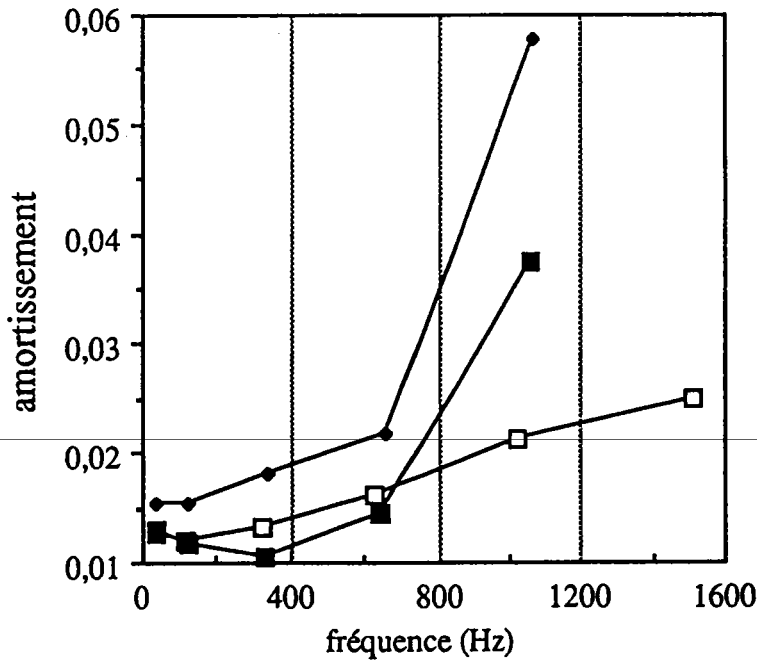


figure 35: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à -10°C (■ : 35 μm , □ : 50 μm , ◆ : 60 μm)

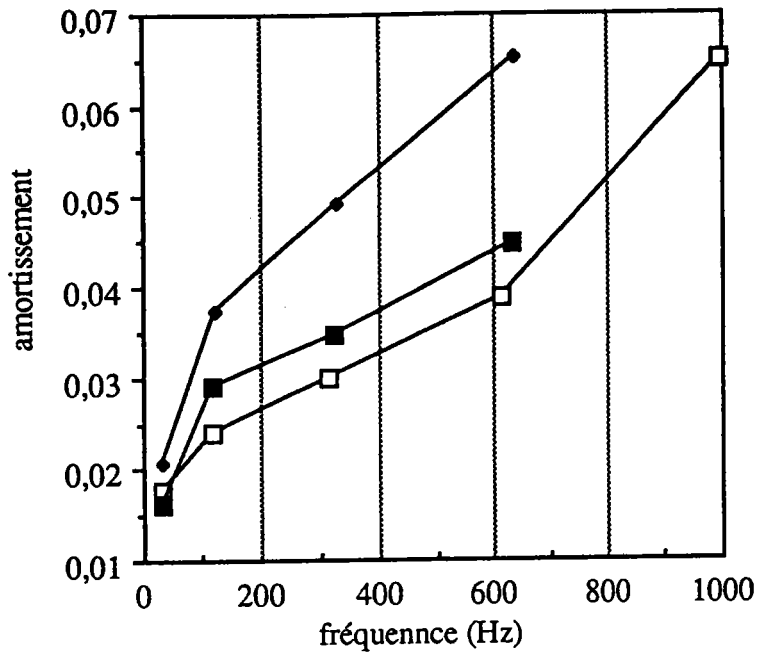


figure 36: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à 0°C
(■ : 35 μm, □ : 50 μm, ◆ : 60 μm)

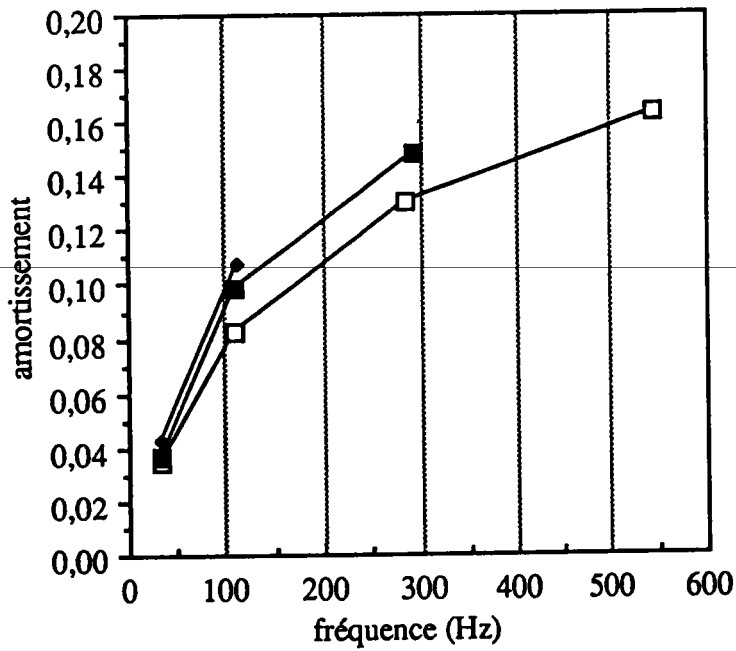


figure 37: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à 20°C
(■ : 35 μm, □ : 50 μm, ◆ : 60 μm)

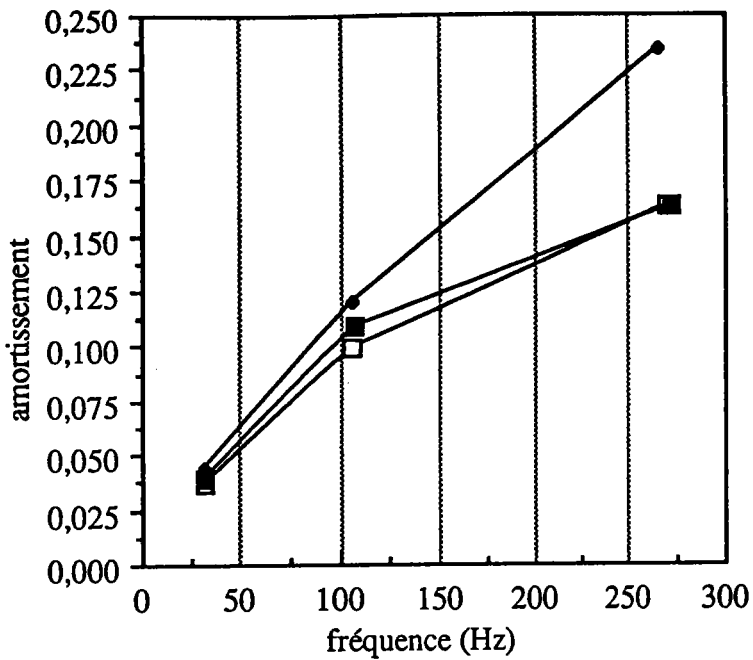


figure 38: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à 25°C
(■ : 35 μm, □ : 50 μm, ◆ : 60 μm)

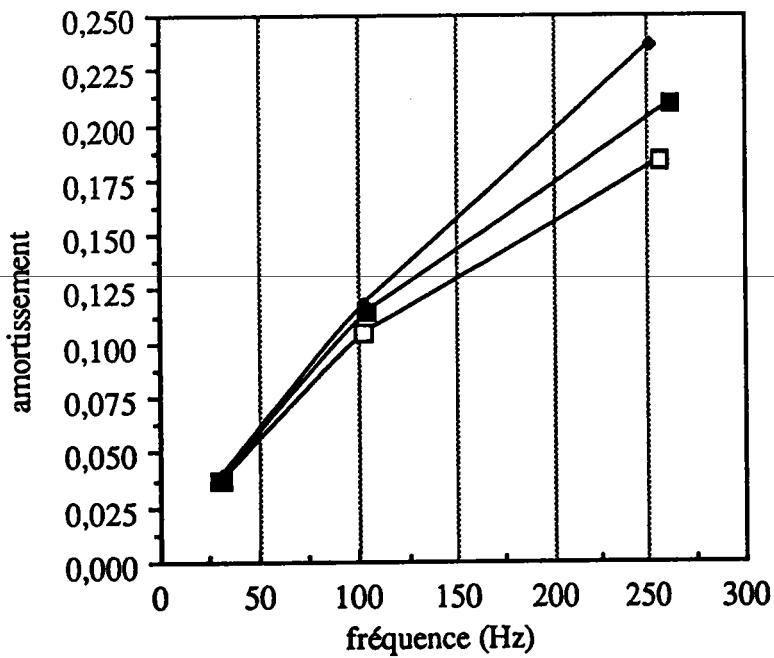


figure 39: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à 30°C
(■ : 35 μm, □ : 50 μm, ◆ : 60 μm)

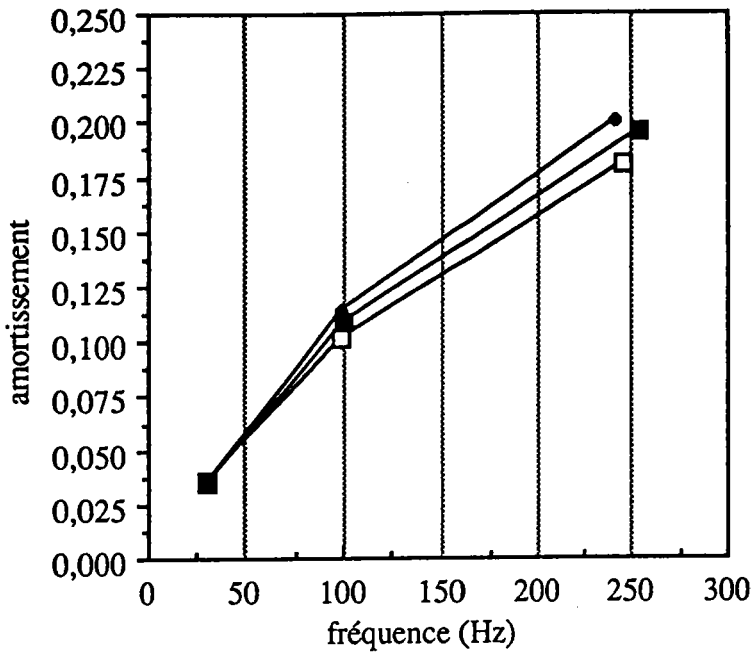


figure 40: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à 35°C
(■ : 35 μm, □ : 50 μm, ◆ : 60 μm)

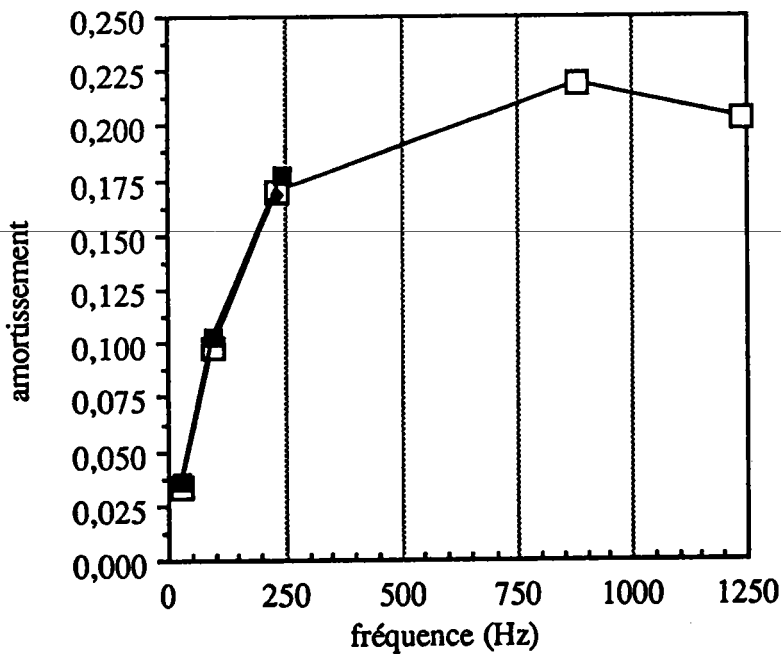


figure 41: influence de l'épaisseur de polymère sur l'amortissement à 40°C
(■ : 35 μm, □ : 50 μm, ◆ : 60 μm)

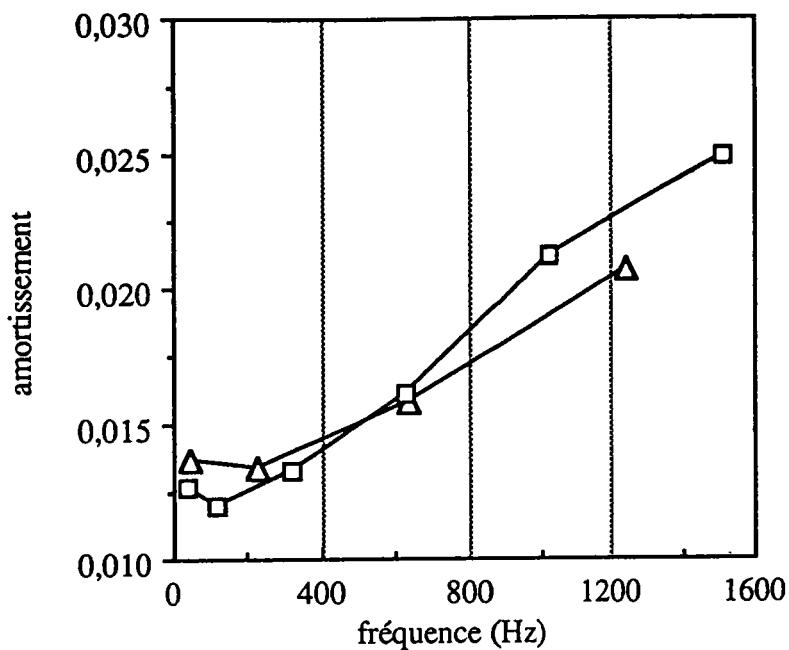


figure 42: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à -10°C (□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

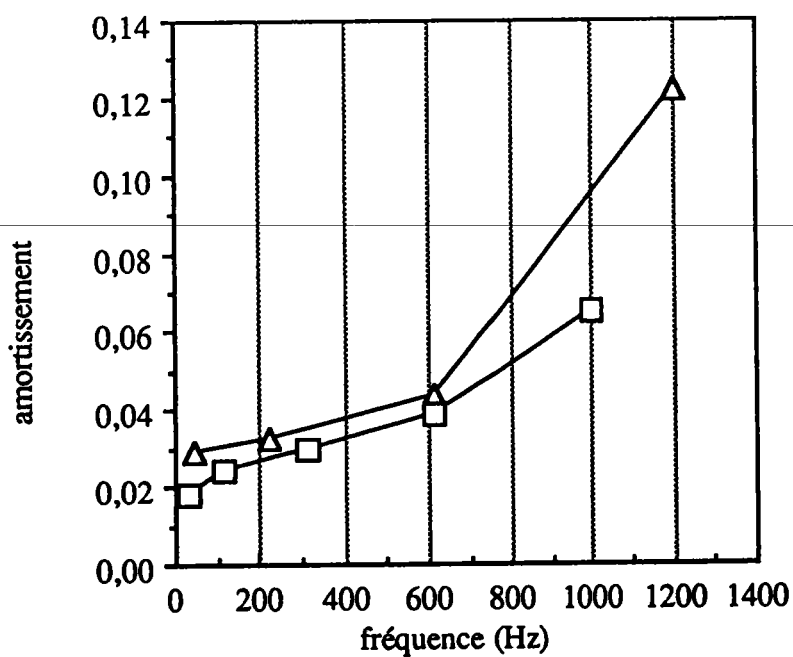


figure 43: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à 0°C (□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

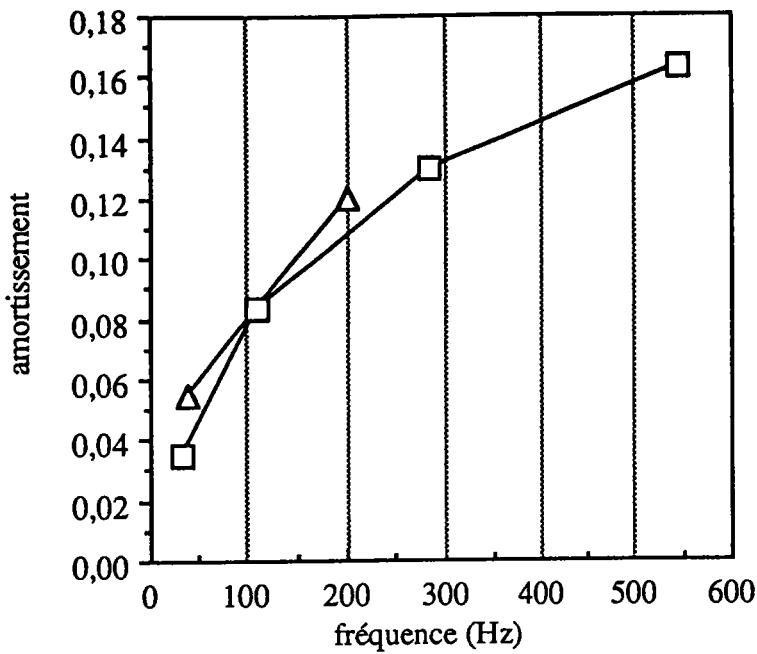


figure 44: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à 20°C(□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

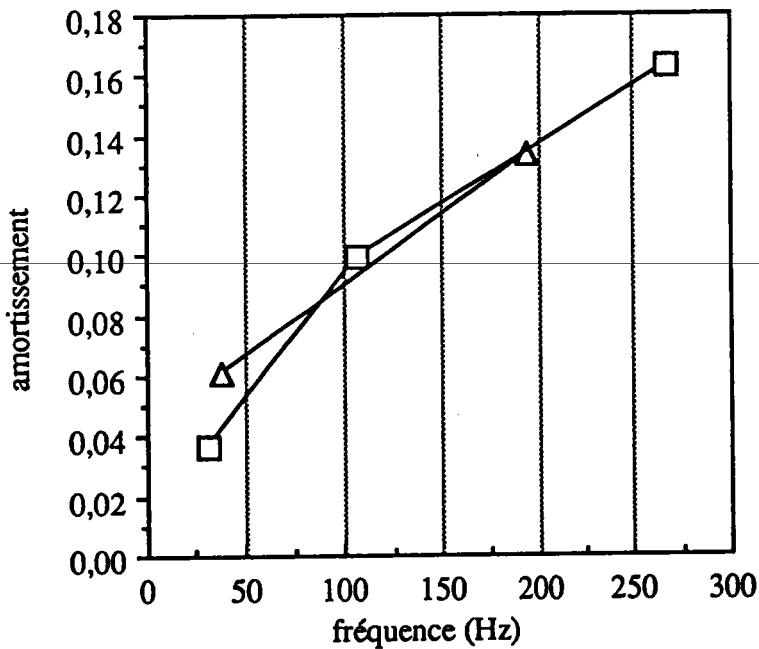


figure 45: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à 25°C(□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

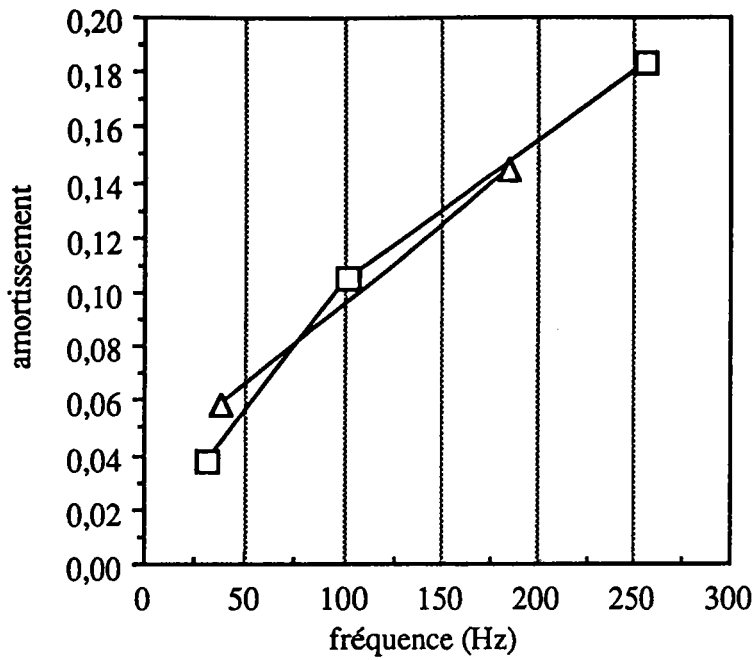


figure 46: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à 30°C(□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

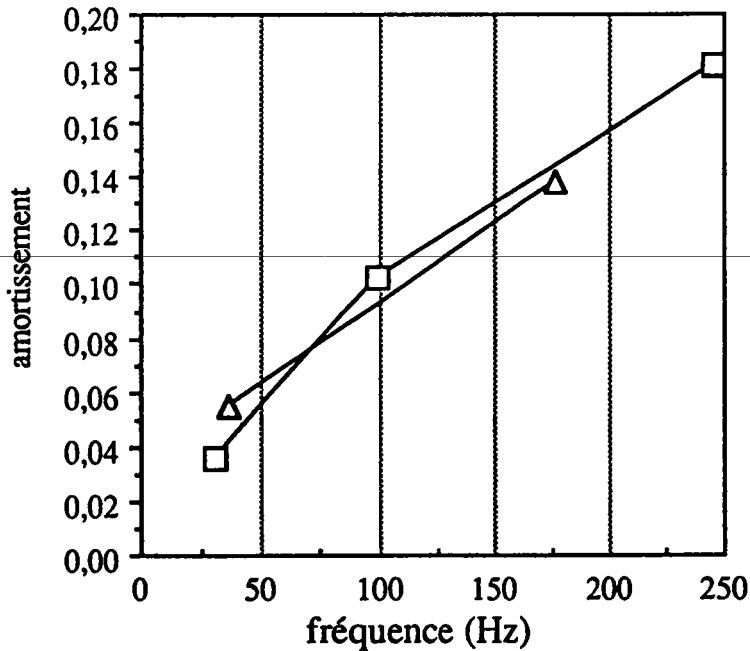


figure 47: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à 35°C(□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

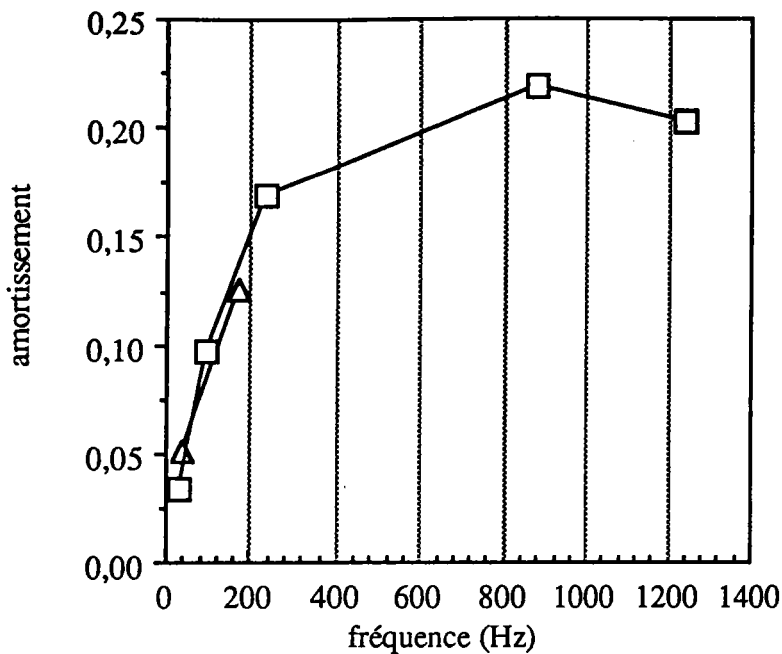


figure 48: influence de l'épaisseur des parements d'acier sur l'amortissement à 40°C (□: "350/50/350", Δ: "700/50/700").

Les courbes avec les éprouvettes "350/35/350"; "350/60/350" et "700/50/700" ont chacune été obtenue avec une seule éprouvette. Il n'apparaît donc pas les dispersions dues à la géométrie. La courbe "350/50/350" étant celle des points moyens de l'étude précédente.

Par conséquent, comme les courbes sont proches les unes des autres, il est difficile de tirer des conclusions sur l'influence des épaisseurs sur l'amortissement, alors qu'une augmentation de ces épaisseurs entraîne une augmentation des fréquences de résonance.

Toutefois, les figures 35 à 41 tendent à montrer qu'une augmentation de l'épaisseur de polymère entraîne une augmentation de l'amortissement: plus il y a de matière amortissante (épaisseur de polymère plus importante) plus l'amortissement est bon.

Il semble également qu'une augmentation de l'épaisseur des parements d'acier entraîne une augmentation de l'amortissement. Les courbes avec l'épaisseur d'acier plus importante présentent moins de points que celle avec 0,695 mm. En effet, les courbes de résonance obtenues sont trop aplaties pour mesurer l'amortissement, ce qui signifie que celui-ci est très bon. Cela s'explique par le fait qu'une augmentation de l'épaisseur d'acier provoque un

accroissement du cisaillement du polymère et de la rigidité donc de l'amortissement.

Ces résultats expérimentaux présentés sur les figures précédentes (35 à 48) ont été simulés en tenant compte des dispersions des épaisseurs sur chaque éprouvette (tableau 5) et de l'imprécision sur le module d'Young de l'acier et sur le module complexe du polymère (tableau 4).

Les figures 49 à 69 montrent la comparaison: expérience/simulation.

Ces courbes montrent que l'accord entre expérience et simulation est correct compte tenu du fait que les dispersions expérimentales pour ces éprouvettes n'ont pas été étudiées.

A certaines températures, le carré d'erreur n'a pu être déterminé par les calculs car l'amortissement avec les caractéristiques maximales et (ou) moyennes n'a pu être relevé (voir l'étude du sandwich "350/50/350").

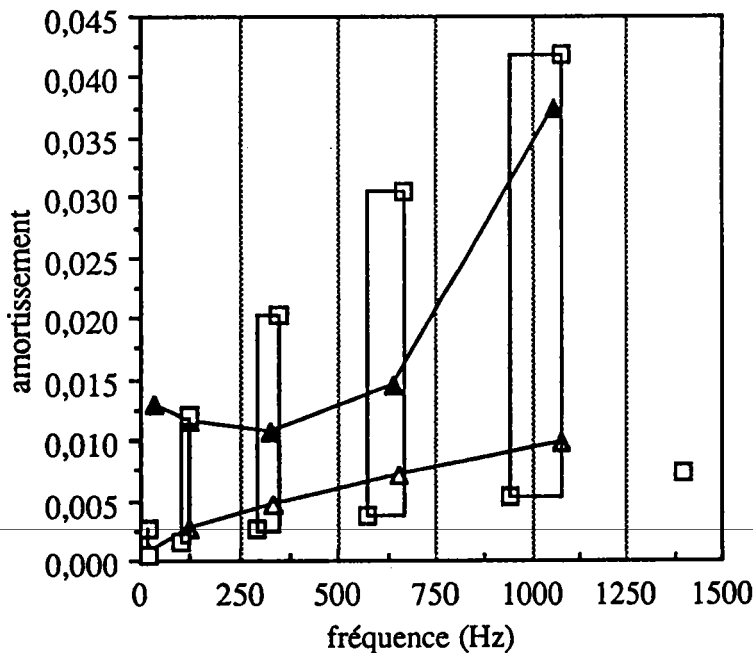


figure 49: amortissement du sandwich "350/35/350" en fonction de la fréquence à -10°C (▲: expérience, Δ, □: simulations)

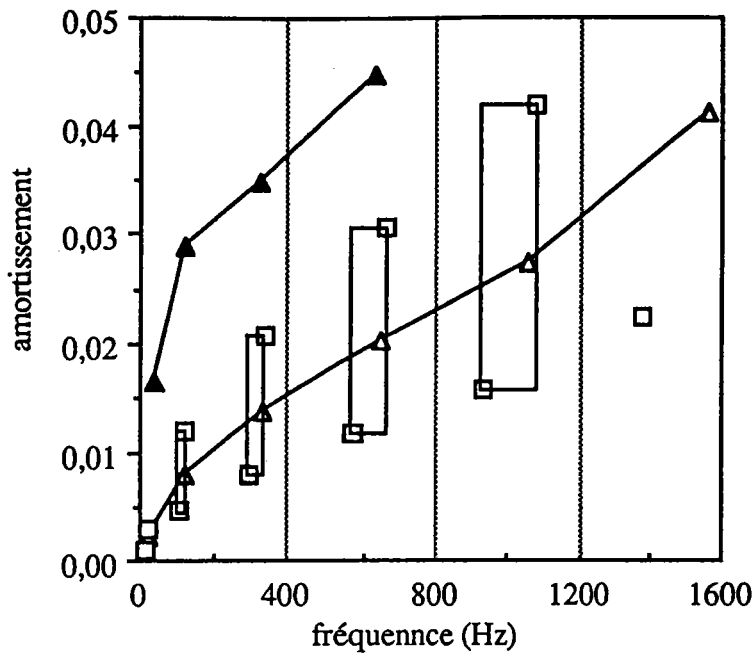


figure 50: amortissement du sandwich "350/50/350" en fonction de la fréquence à 0°C (\blacktriangle : expérience, \triangle , \square : simulations)

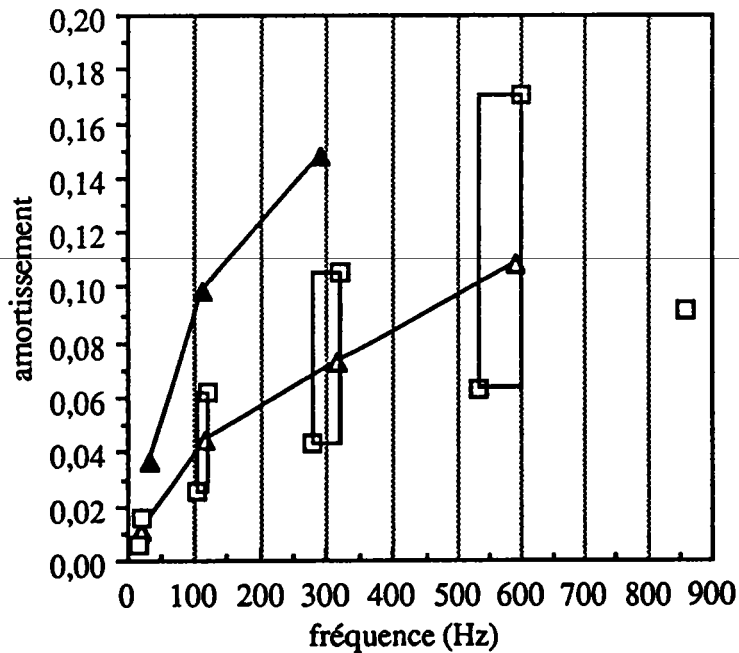


figure 51: amortissement du sandwich "350/35/350" en fonction de la fréquence à 20°C (\blacktriangle : expérience, \triangle , \square : simulations)

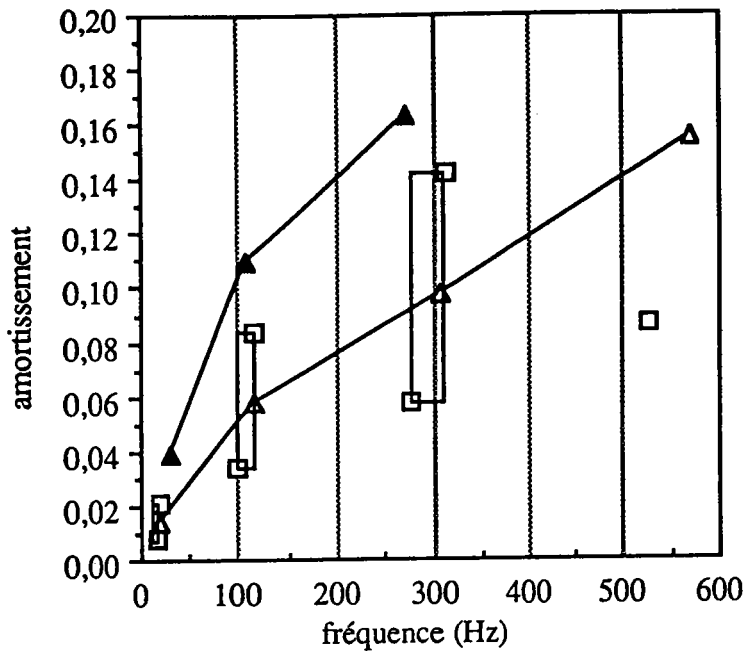


figure 52: amortissement du sandwich "350/35/350" en fonction de la fréquence à 25°C (▲: expérience, △, □: simulations)

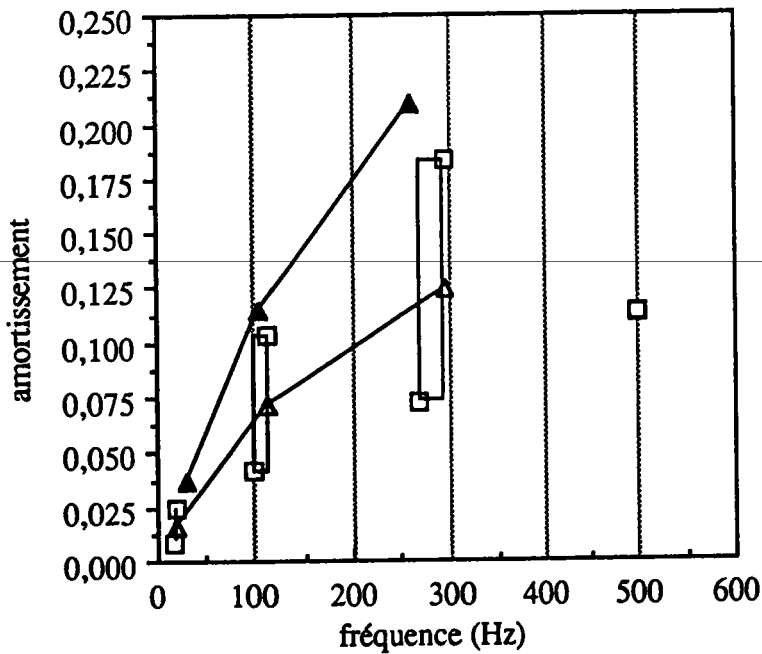


figure 53: amortissement du sandwich "350/35/350" en fonction de la fréquence à 30°C (▲: expérience, △, □: simulations)

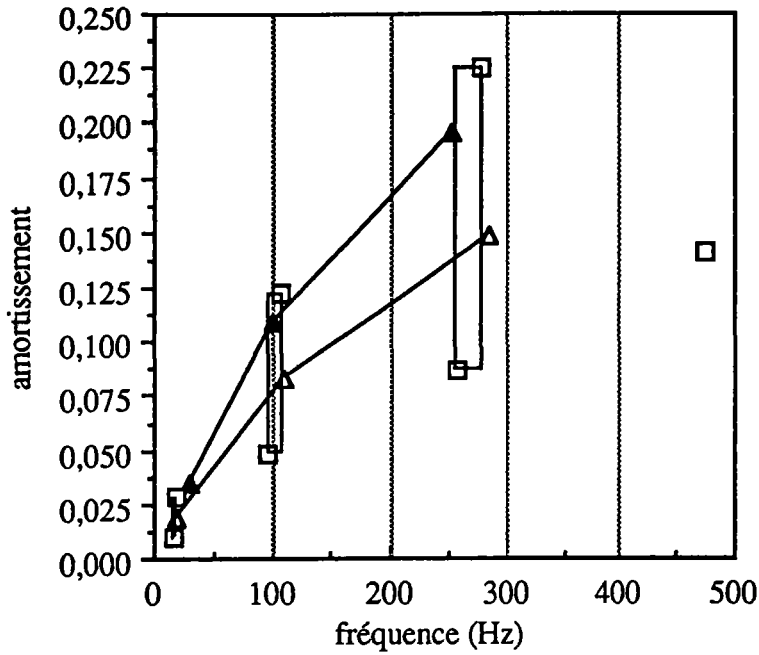


figure 54: amortissement du sandwich "350/35/350" en fonction de la fréquence à 35 °C (Δ : expérience, \square : simulations)

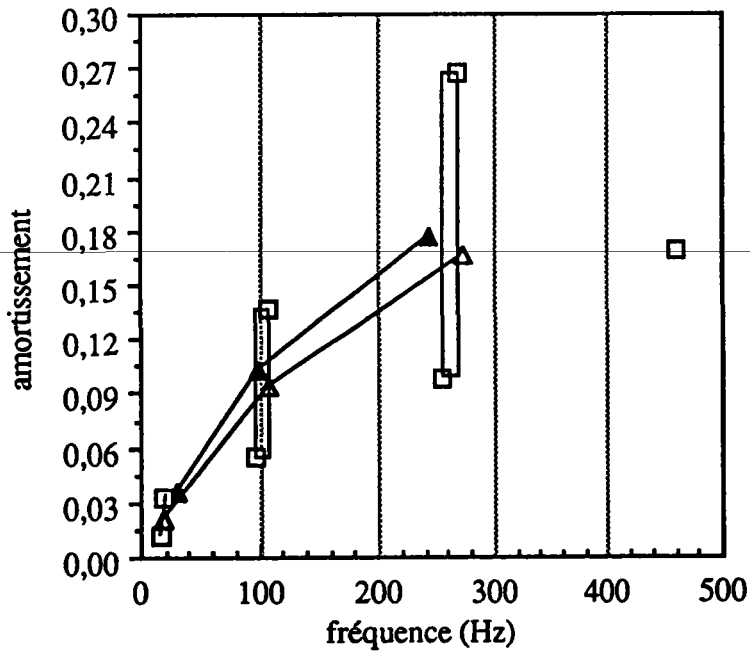


figure 55: amortissement du sandwich "350/35/350" en fonction de la fréquence à 40 °C (Δ : expérience, \square : simulations)

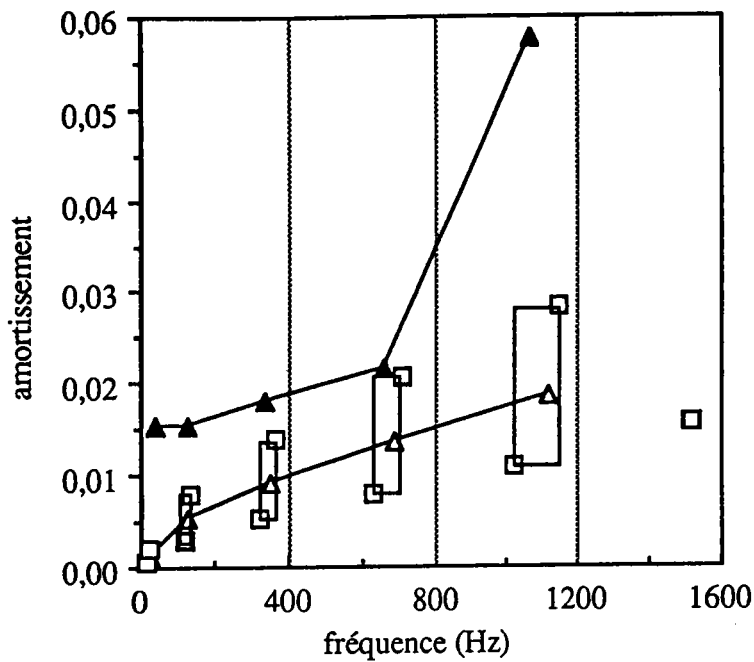


figure 56: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à -10°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

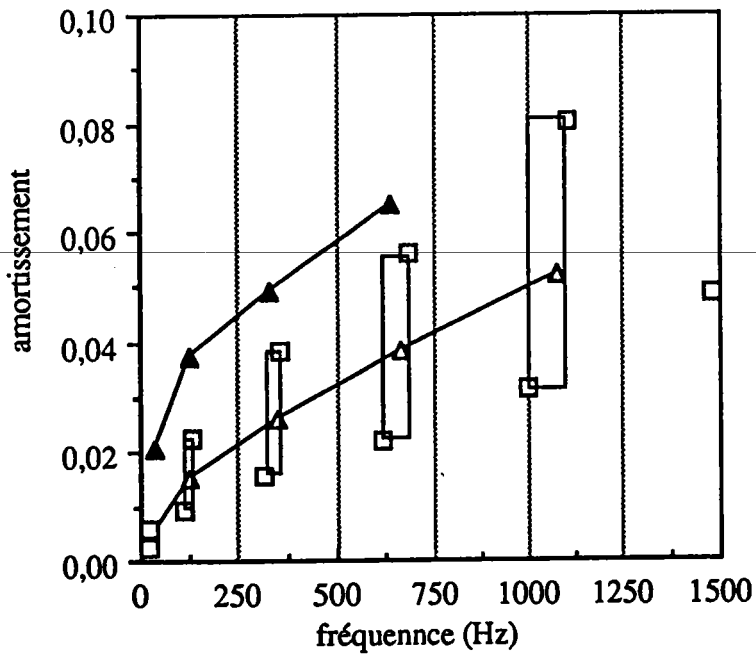


figure 57: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à 0°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

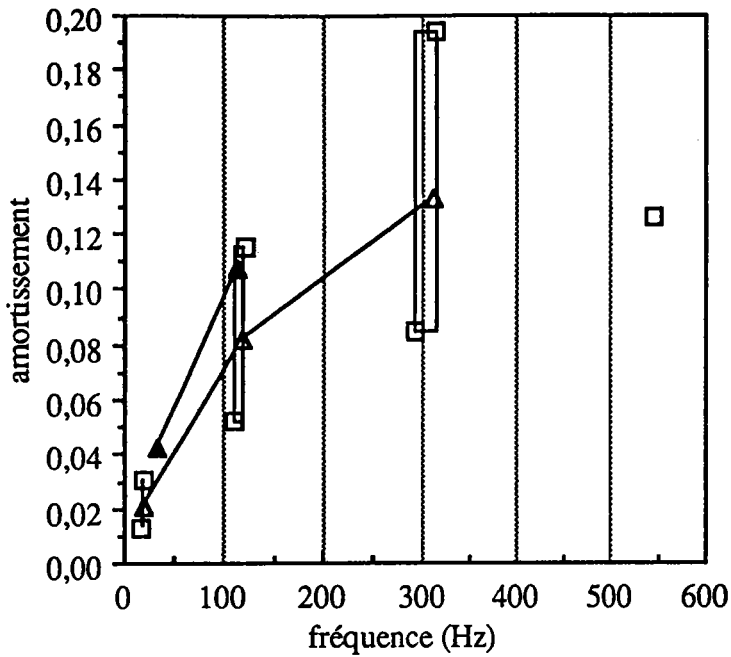


figure 58: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à 20°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

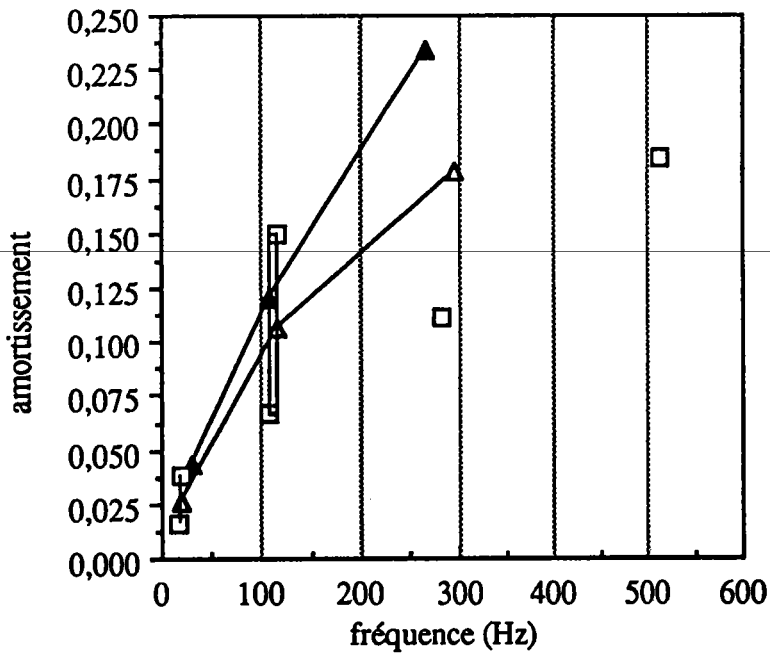


figure 59: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à 25°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

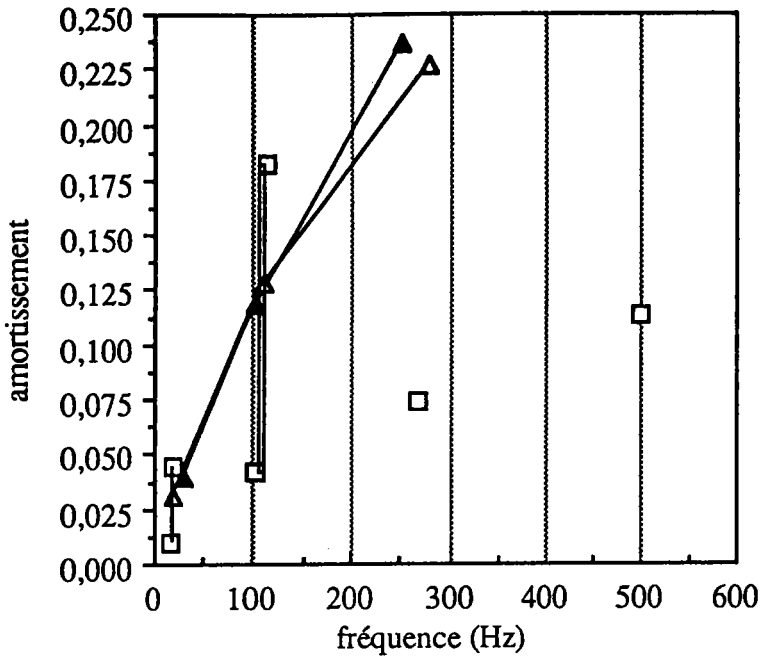


figure 60: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à 30°C (▲: expérience, △, □: simulations)

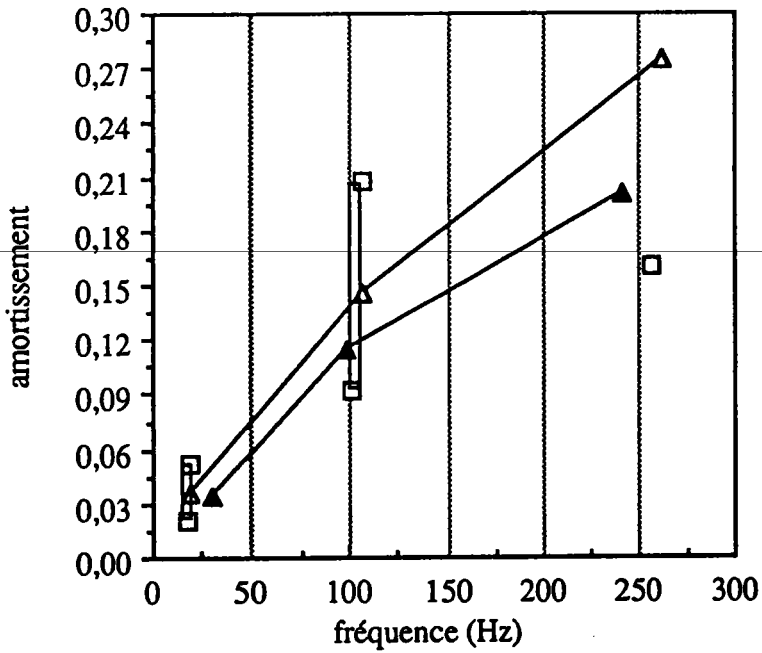


figure 61: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à 35°C (▲: expérience, △, □: simulations)

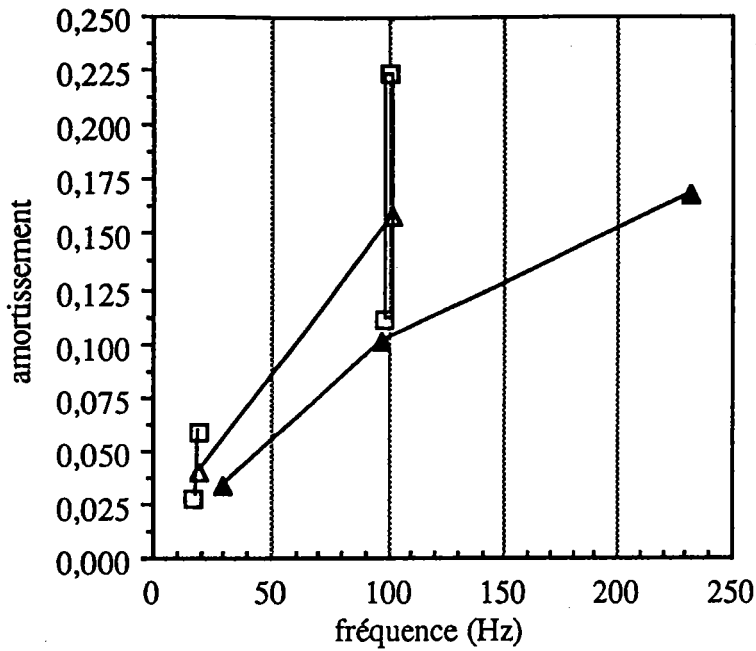


figure 62: amortissement du sandwich "350/60/350" en fonction de la fréquence à 40°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

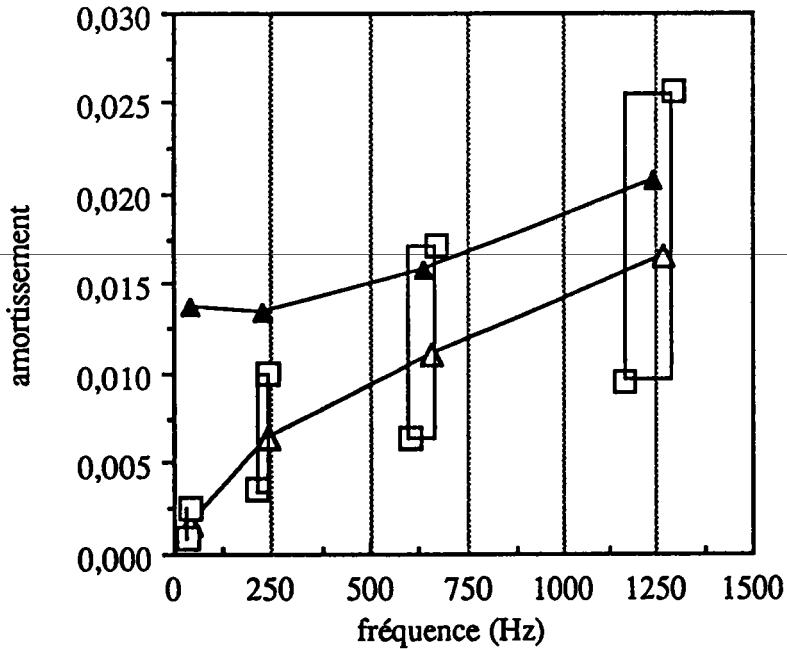


figure 63: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à -10°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

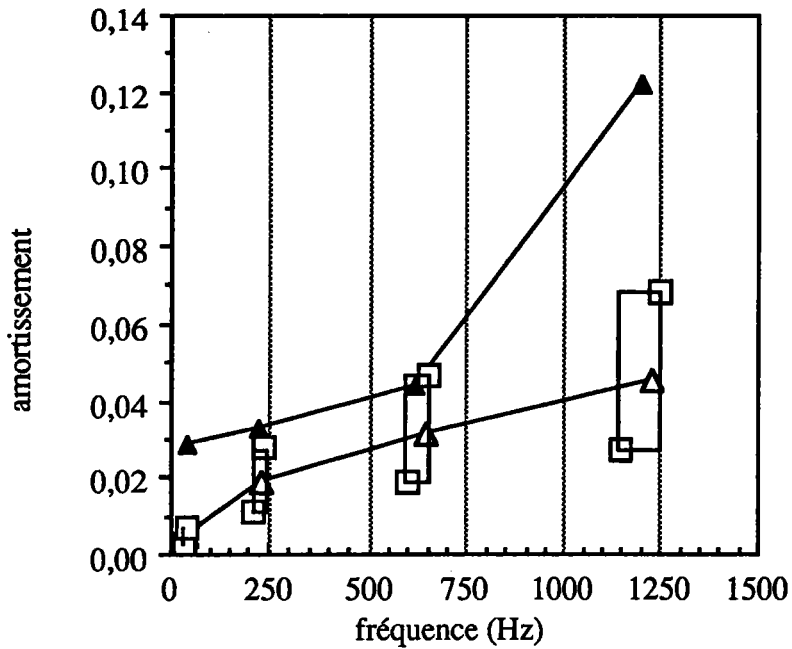


figure 64: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à 0°C (▲: expérience, Δ, □ : simulations)

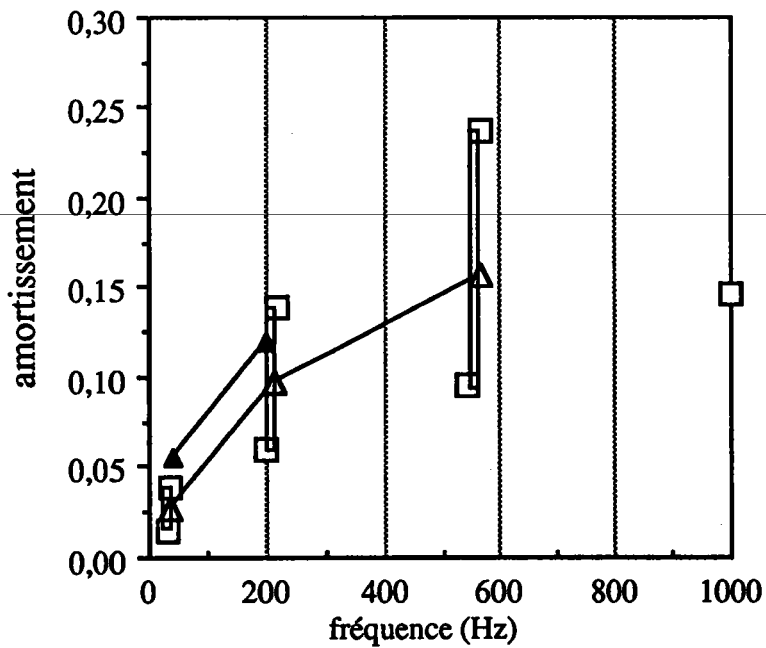


figure 65: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à 20 °C (▲: expérience, Δ, □ : simulations)

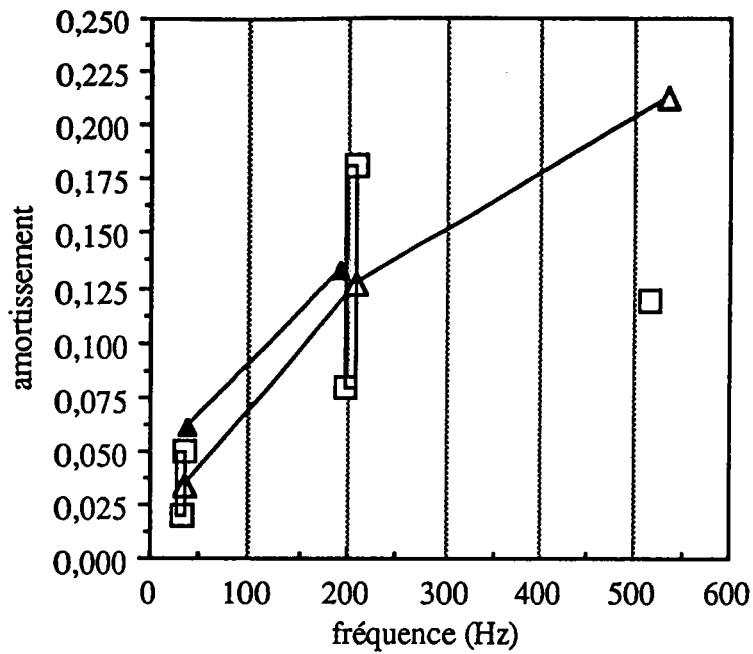


figure 66: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à 25°C (\blacktriangle : expérience, \triangle , \square : simulations)

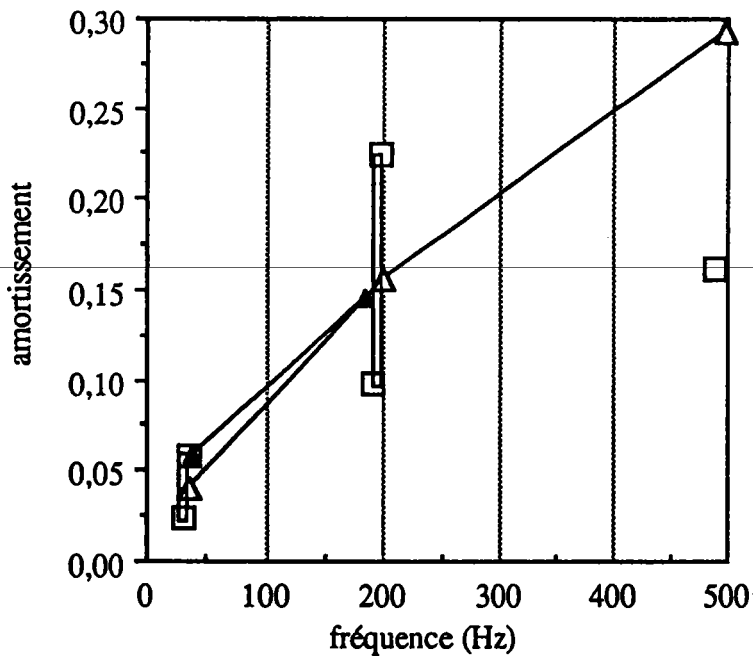


figure 67: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à 30°C (\blacktriangle : expérience, \triangle , \square : simulations)

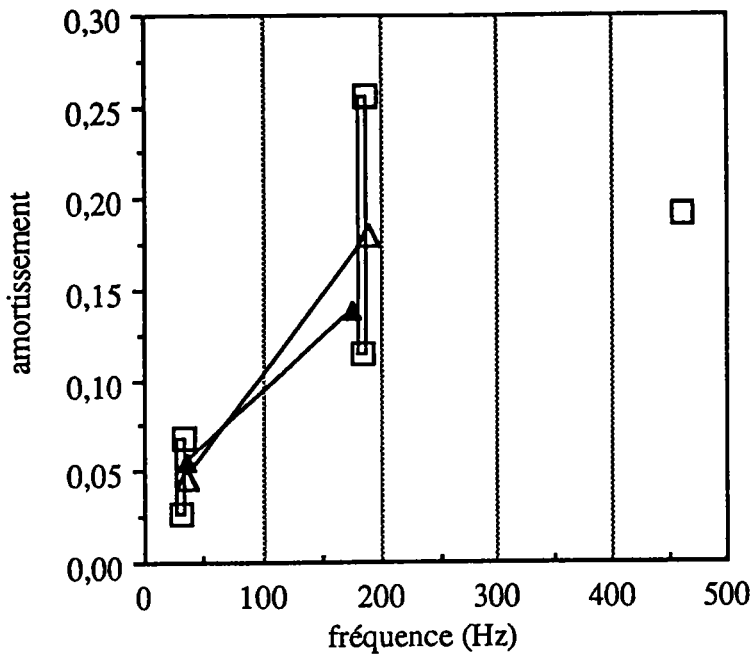


figure 68: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à 35°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

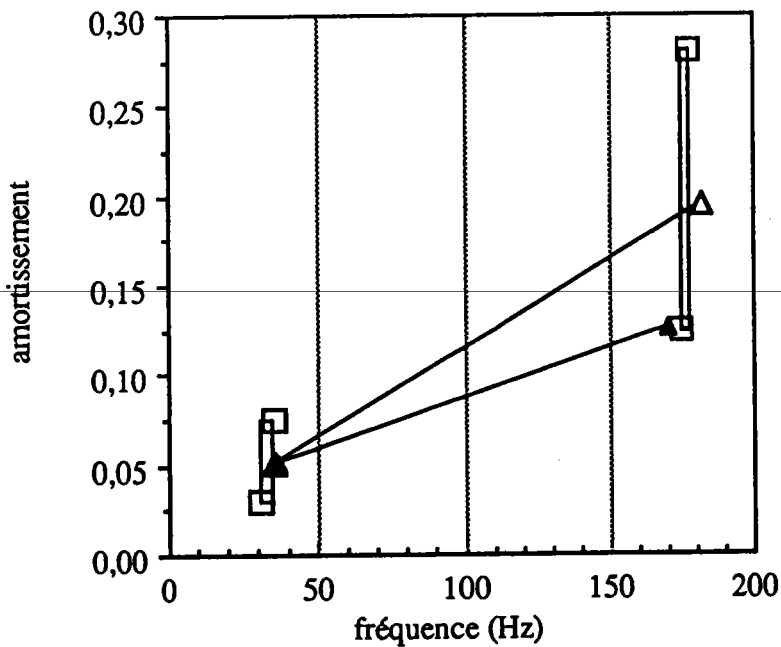


figure 69: amortissement du sandwich "700/50/700" en fonction de la fréquence à 40°C (\blacktriangle : expérience, Δ , \square : simulations)

VI Conclusion

Ce chapitre a permis d'établir l'équation du mouvement d'une poutre homogène viscoélastique linéaire non vieillissante équivalente à une poutre sandwich. Cette équation est déduite de celle d'une plaque obtenue au chapitre III.

Les paramètres de cette équation sont obtenus par homogénéisation. Ce sont ceux identifiés au chapitre III ramenés à un problème unidirectionnel.

A partir de la résolution de cette équation, l'amortissement d'une poutre sandwich en flexion Oberst a été simulé.

La comparaison d'une part avec les résultats obtenus par Blanchard qui procède par une autre méthode et d'autre part avec les résultats expérimentaux permet de valider la démarche présentée dans cette étude.

La voie de l'homogénéisation permet ainsi une étude de l'amortissement des tôles sandwich.

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent de dégager 5 paramètres importants:

- Le module d'Young de l'acier,
- Le module complexe du polymère: parties réelle et imaginaire,
- l'épaisseur des parements d'acier,
- l'épaisseur du film de polymère.

L'ensemble de ces paramètres influencent l'amortissement mais également la position du pic en température du maximum d'amortissement.

La maîtrise de ces paramètres permettra de concevoir une tôle sandwich possédant un bon pouvoir amortissant dans un domaine température- fréquence désiré.

CONCLUSION

L'entreprise sidérurgique SOLLAC développe des tôles sandwich (acier/polymère/acier) pour amortir les vibrations rencontrées dans une automobile ou dans un appareil électroménager ou autre, et améliorer ainsi le confort acoustique.

Le polymère en se cisillant entre les deux parements d'acier va dissiper en chaleur une partie de l'énergie vibratoire de la tôle et créer ainsi la fonction amortissante.

L'objet de ce travail est restreint à la modélisation des propriétés amortissantes des tôles sandwich après colaminage et avant emboutissage. Les produits finis étant étudié par ailleurs.

Pour cela, il est indispensable de connaître les caractéristiques mécaniques des constituants du sandwich. Si celles de l'acier sont relativement bien connues, il en est autrement de celles du polymère. Un échantillon de polymère en sollicitation dynamique a des caractéristiques qui dépendent essentiellement de deux paramètres: sa température et la fréquence d'excitation.

Les polymères utilisés pour la constitution des tôles sandwich sont supposés viscoélastiques linéaires non vieillissants homogènes isotropes avec un rapport de Poisson réel et constant. Dans ce cas, les caractéristiques de tels matériaux s'écrivent dans l'espace de Carson ou dans l'espace des nombres complexes pour le cas particulier des sollicitations dynamiques.

Le principe de superposition fréquence/ température permet de réduire ces deux variables en une seule appelée variable réduite.

Une courbe maîtresse (fonction de la variable réduite) du module de cisaillement ou de traction-compression suffit pour décrire le comportement du polymère. Le théorème de la représentation spectrale permet de modéliser ce module à l'aide d'un modèle de Maxwell généralisé. Une méthode de détermination des paramètres de ce modèle a été mise en oeuvre. Elle permet une bonne modélisation des polymères. d'autre part, cette méthode offre l'avantage d'un passage simple entre l'espace des nombres complexes et l'espace temps. Ce passage étant utile à SOLLAC qui souhaite développer une étude de comportement de tôle sandwich en statique.

La loi de comportement et l'équation du mouvement de flexion transverse d'un élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissante homogène isotrope transverse équivalente à un élément de plaque sandwich soumise à des sollicitations harmoniques de membrane - flexion, ont été établies. Cette étude repose sur un champ de déplacement cinématiquement admissible de type Mindlin. Les effets de l'inertie rotationnelle et du

cisaillement transverse sont pris en compte dans cette formulation de la même manière que Chou et Carléone pour le cas de plaques stratifiées élastiques. Les caractéristiques de cet élément de plaque équivalent sont établies par homogénéisation à partir des caractéristiques de l'acier et du polymère, des conditions de compatibilité et d'équilibre aux interfaces et aussi, pour le cas de la flexion, à partir d'un champ de déplacement de type Mindlin. Cette démarche offre la possibilité d'étudier le comportement de pièces sandwichs, en utilisant par un exemple un code de calcul par éléments finis disposant dans sa bibliothèque d'élément de plaque viscoélastique linéaire non vieillissant travaillant en membrane et en flexion.

Afin de valider cette approche, la flexion d'une poutre Oberst a été simulée. Pour cela, la poutre sandwich a été identifiée à une poutre homogène viscoélastique linéaire non vieillissante équivalente. L'équation du mouvement de flexion transverse de cette poutre équivalente est déduite de celle de la plaque. La résolution de cette équation pour le cas particulier de la flexion Oberst permet d'obtenir la déformée et de simuler ainsi la courbe de résonance et par suite l'amortissement.

Une comparaison des résultats issus de simulations à ceux obtenus par L.Blanchard et par expériences a permis de valider cette démarche. Le choix d'un champ de déplacement de type Mindlin pour les 3 couches permet d'obtenir des résultats semblables à ceux trouvés par Blanchard dont la démarche repose sur le choix de 3 champs de déplacement de type Mindlin (1 par couche).

D'autre part, l'accord entre les résultats expérimentaux et ceux issus des simulations est correct compte tenu:

-des imprécisions sur:

- les épaisseurs des constituants du sandwich,
- le module d'Young de l'acier,
- le module complexe du polymère qui est certainement modifié du fait de sa mise en sandwich. Des études sont en cours pour quantifier cette modification.

- de la non prise en compte de l'effet des interfaces qui semble avoir une influence non négligeable sur les propriétés amortissantes des sandwichs [76].

Ces deux études ont également permis de dégager cinq paramètres importants influençant l'amortissement: le module d'Young et l'épaisseur des parements d'acier, le module complexe du film de polymère (parties réelle et imaginaire) et son épaisseur.

Des logiciels ont été développés pour:

- modéliser le polymère par un modèle de Maxwell généralisé,
- obtenir les caractéristiques en fonction de la température et de la fréquence d'un élément de plaque équivalent,

- simuler l'amortissement d'une poutre équivalente en flexion
Oberst.

Ces logiciels permettront aux utilisateurs de choisir l'acier et surtout le polymère afin de concevoir des tôles sandwich ayant des propriétés amortissantes correctes dans un domaine fréquence-température désiré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Hiroshi, E. Mizuo, Z. Yoshimasa, "The development of vibration damping steel for automotive use", S.A.E. Technical Paper Series, N° 890708, march 1989.
- [2] Y. Shiroi, N. Niwa, T. Iwata, T. Kurata, "Application study of vibration damping composite steel sheet to the car body panels", S.A.E. Technical Paper Series, N° 890613, March 1989.
- [3] "20 dB de moins sur les presses", Machine-Outil N° 329, Avril 1976.
- [4] M. Macé, "Modélisation de structures amorties par film viscoélastique", thèse UPMC, 1991.
- [5] M. Marchetti, F. Morgonti, L. Mucciante, C. Bruno, "Damping of composite plate for space structures : prediction and measurement methods.", Acta astronautica , Vol 15 N° 3, pp 157 - 164, 1987.
- [6] H. Barzoukas, A. Jouet, "les tôles sandwich : procédés de fabrication et propriétés d'emploi" , La revue de métallurgie, mars 1989.
- [7] "Development of laminated composite steel sheet at NKK", United Nations, CEE Steel Committee, seminar on new Application for steel in view of the challenge from substitute materials, Luxembourg, 2-6 May 1988.
- [8] H. Oberst, A. Schommer, "Verbundblechsysteme mit optimal eingestellten schwingungsdämpfen den Kunststoff - zwischenschichten", Kunststoffe, 1965, pp 634-640.
- [9] H. Braunish, "Schwingungsgedämpfte dreischichtige verbundsysteme", Acustica, Vol 22, 1969/70, pp 136-144.
- [10] A. Jouandeau, B. Duperray, "Les modèles rhéologiques en viscoélasticité linéaire", XVII^{ème} congrès Fapitec - LUGANO - 23, 28 Septembre 1984 -, Double liaison chimique des Peintures - Tome XXXI n° 348 - Octobre 1984.

- [11] J. Bernard, A. Michel, J. Philibert, J. Talbot, *Métallurgie générale*, 1969, Editions Masson et Cie.
- [12] E. Bardaud, "les matériaux viscoélastiques et leurs applications à l'atténuation des vibrations", *CETIM informations* n° 58, pp 54-66, 1978.
- [13] M. Salvia, B. Duperray, "Détermination des propriétés dynamiques d'un matériau composite granulaire à matrice organique", *Journal de Physique*, colloque C9, suppléments au n° 12, Tome 44, décembre 1983.
- [14] Brevet d'invention, "sandwich déformable mécaniquement en vue de la fabrication d'emboutis insonorisés et emboutis obtenus", N° 7136458, Octobre 1971.
- [15] E.M. Kerwin, "Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer", *Journal of the Acoustical Society of America*, 31, 952 - 962, 1959.
- [16] Y.Y. Yu, "Damping of flexural vibrations of sandwich plates", 1962, *Journal of Aerospace Sciences* 29, 790 - 803.
- [17] D.J. Mead, "The double skin damping configuration", University of Southampton, Report n° AASU160, 1962.
- [18] R.A. Di Taranto, "Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams", *Transaction of the American Society of mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics* 87, 881-886, 1965.
-
- [19] T.P. Yim, T.J. Kelly and J.E. Barry, "A quantitative evaluation of constrained layer damping", *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Industry* 89, 773-784, 1967.
- [20] D.J. Mead, S. Markus, "The forced vibration of a three layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions", *Journal of sound and vibration* 10, 163-175, 1969.
- [21] D.J. Mead, "A comparaison of some equation for the flexural vibrations of damped sandwich beams", *Journal of Sound and vibration*, 83 (3), pp 363-377, 1982.

- [22] M.J. Yan, E.H. Dowell, "Governing equations for vibrating constrained layer damping of sandwich beams and plates", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 94, 1041-1047, 1972.
- [23] V. Oravsky, S. Markus, O. Sinkova, "A new approximate method of finding the loss factors of a sandwich cantilever", Journal of Sound and Vibration, 33, 3, 335-352, 1974.
- [24] S. Markus, V. Oravsky, O. Sinkova, Acustica, 1974, 31, 132.
- [25] S. Markus, V. Oravsky, O. Sinkova, Acta Technica, 1974, 78, 647.
- [26] D.K. Rao, "Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions", Journal Mechanical Engineering Science, 1978, pp 271-282, Vol 20, N° 5.
- [27] E. Reissner, Y. Stavsky, "Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates", Journal of Applied Mechanics, 28, pp 402-408, 1961.
- [28] P.C. Yang, C.H. Norris, Y. Stavsky, "Elastic wave propagation in heterogeneous plates", International Journal of Solids and Structures, 11, pp 665-684, 1966.
- [29] T. Chao, P.C.Y. Lee, "Discrete continuum theory of periodically layered composite materials", Journal of the Acoustical Society of America 57, pp 78-87, 1975.
- [30] C.T. Sun, J.M. Whitney, "On the theories for the dynamic response of laminated plates", American Institute of Aeronautics Journal 11, pp 178-183, 1973.
- [31] T.S. Chow, "On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load", Journal Composite Materials, vol 5, 1971.
- [32] P.C. Chou, J. Carleone, "Transverse shear in laminated theories", AIAA Journal, vol 11, n° 9, 1973.
- [33] S. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars", Phil. Mag, series 6, vol 41, 1921, p 74.

- [34] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol 67, 1945.
- [35] E. Reissner, "On the bending of elastic plates", *Q. Appl. Math.*, vol 5, 1947.
- [36] R.D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *J. Appl. Mech.*, vol 18, 1951.
- [37] Y. Chevalier, "Micromécanique des composites. Previsions en élasticité, en viscoélasticité et à la rupture", *Micromécanique - matériaux composites. Techniques de l'ingénieur*, A 7780, pp 1-18, A7781, pp 1-11.
- [38] V. Gantchenko, M. Stasi, "Elasticité globale de panneaux sandwich : détermination théorique et expérimentales par une méthode de vibrations propres", *Matériaux et techniques*, Mars - Avril 1986.
- [39] J.D. Ferry. *Viscoélasticité properties of polymers*. 3 rd, ed Wiley, New York, 1980.
- [40] P.T. Weissman, R.P. Chartoff, "Extrapolating viscoelastic data in the temperature- frequency domain", *Sound and vibration damping with polymers - Chap. 7*, 1990 - American Chemical Society.
- [41] D.J. Plazek, *J. Phys. Chem*, 69, 3480, 1965.
- [42] A.W. Nolle, "dynamic Mechanical Properties of Rubberlike Materials", *Journal of Polymer Science*, vol 5, 1950, pp 1-54.
- [43] P. Linéard, "Les mesures d'amortissements des matériaux plastiques ou fibreux", *Annales des Télécommunication*, Vol 12, 1957, pp 350-366.
- [44] E. Hiroshi, E. Mizuo, S. Tohru, M. Jyunichi, "Development of vibration damping steel sheet with superior service performance", *Nippon steel*, Report n° 44 January 1990.
- [45] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski. *The behavieour of structures composed of composite materials*. Editions Martinus Nijhoff, 1987.
- [46] D. Ross, E.E Ungar, E.M. Kerwin Jr, "Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae", New York, American Society of Mechanical Engineers, 1959.

- [47] J.G. Sloan, "The behaviour of rectangular composite materials plates under lateral and hygrothermal loads", MMAE Thesis, University of Delaware, 1979.
- [48] J.M. Witney, N.J. Pagano, "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", transactions of the ASME Ser. E. Journal of Applied Mechanics , vol 37, N° 4 , Décembre 1970.
- [49] N.J. Pagano, "Exact solutions for composite Laminae in cylindrical bending", Journal of Composite Materials, Vol 3, N° 3, July 1969, pp 398-411.
- [50] D. Le Nizerhy, Y. Chevalier, T. Vinh, " Vibrations de flexion des poutres anisotropes en materiau composite. Application à la détermination des modules d'Young", Memorial de l'artillerie française, 1981.
- [51] D. Gay. Matériaux Composites. Editions Hermès, 1987.
- [52] J.M. Berthelot. Matériaux Composites. Comportement mécanique et analyse des structures. Editions Masson, 1992.
- [53] D. Guitard. Le Matériau Bois Propriétés Mécaniques. A.R. BO.LOR., 1983.
- [54] "Matériaux viscoélastiques pour l'amortissement des vibrations et du bruit", SNPE. Département Chimie. PARIS B 712 013 432.
- [55] J. Lemaître, J.L. Caboche. Mécanique des milieux continus. Dunod, 1978.
-
- [56] J. Salençon. Cours de calcul des structures anélastiques. Viscoélasticité. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées. 1983.
- [57] H. Lee, "Stress analysis in viscoelastic bodies", Quart. Appl. Math 13, N° 2, 1955.
- [58] A. Zaoui. Comportement des matériaux. Ecole National Supérieur des Techniques Avancées, 1983.
- [59] B. Persoz. Introduction à l'étude de la rhéologie. Dunod, 1960.
- [60] J.J. Aklonis, W.J. Mac Knight. Introduction to polymer Viscoelasticity. Ed. Wiley, second Edition, 1983.

- [61] B. Persoz. La rhéologie. Masson & Cie, 1969.
- [62] M. Denis Papin, A. Kaufmann. Cours de calcul operationnel appliqué. Albin Michel. PARIS. 1967
- [63] J. Mandel, "Sur les corps viscoélastiques linéaires à comportement linéaire", C.R. As. Sc. Paris, T 241, pp 1910-1912, 1955.
- [64] M.L. Williams, R.F. Landel, J.D. Ferry, J. Amer. Chem. Soc. 77, 3701, 1955.
- [65] J. Mandel. Mécanique des milieux continus. Tome 2, Ann XX1, Gauthiers Villars Paris, 1966.
- [67] N.P. Vinh Tuong, "Sur le passage du régime harmonique au regime transitoire", Paris imprimerie nationale, 1967.
- [66] V.K. Kirra, G.G. Wren, S.P. Rawal, M.S. Mira., "On the influence of ply angle on damping and modules of elasticity of metal matrix composite", Metalurgical Transaction. Vol 22 A, March 1991, pp641-651.
- [67] R.M. Christensen, "Visoélastic properties of heterogeneous media", J. Mech. Phy. Solid 1969. Vol 17, pp 23-41.
- [68] R.G. Ni, R.D. Adams, J. Mater, 1984, Vol 18, p 104-21
- [69] A.D. Nashif, D.I.G. Jones, J.P. Henderson. Vibration damping Ed. Wiley, 1985
-
- [70] C. Huet. Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés. Thèse Paris. Imprimerie Nationale. 1965.
- [71] Détermination des propriétés de l'amortissement et du module complexe au moyen de vibration en flexion, N.F T 51 117, ISO 6721, 1984.
- [72] Brüel Kjaer. Mechanical vibration and schock measurements. 1980.
- [73] L. Blanchard. Rapport annuel, Sollac, 1992.

- [74] H. Mizumacki, "Study of polymer blends as a vibration damper", *J. Adhesion*, vol. 42 (October 1970), pp292-298.
- [75] H.Bourahla, J.Chauchard, J.Lenoir, M.Romand, "Influence de l'épaisseur de l'adhésif et du vieillissement sur les propriétés mécaniques dynamiques d'un assemblage: adhésif structural/ acier inoxydable", *Die Angewandte Makromolekulare Chemie*, 178(1990), 47-62 (Nr 2941).
- [76] S. Bistac, "Rôle des caractéristiques d'interface et d'interphase dans les propriétés de structures amortissantes", Thèse, Mulhouse, 1992.