



**HAL**  
open science

# Modélisation analytique et étude numérique de l'écoulement d'une tôle le long d'un jonc de retenue

Ludovic Courvoisier

► **To cite this version:**

Ludovic Courvoisier. Modélisation analytique et étude numérique de l'écoulement d'une tôle le long d'un jonc de retenue. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paul Verlaine - Metz, 2001. Français. NNT : 2001METZ001S . tel-01775482

**HAL Id: tel-01775482**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775482>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

---

**THESE**

---

Présentée à



---

**UNIVERSITE DE METZ**

---

Par

**Ludovic COURVOISIER**

Pour l'obtention du grade de :

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ****SPECIALITE :** *Sciences de l'ingénieur***OPTION :** *Mécanique des Matériaux*

**Modélisation analytique et étude numérique  
de l'écoulement d'une tôle le long d'un jonc  
de retenue**

Soutenance le 23 février 2001 à 14h15 à la SALLE DES ASSEMBLEES  
devant le jury composé de :

<b>D. DUDZINSKI</b>	Professeur à l'Université de Metz	Président du jury
<b>G. FERRON</b>	Professeur à l'Université de Metz	Directeur de thèse
<b>P. CHABRAND</b>	Chargé de recherches à l'Université de Marseille	Rapporteur
<b>J.P. PONTHOT</b>	Chef de travaux à l'Université de Liège	Rapporteur
<b>M. MARTINY</b>	Maître de conférences à l'Université de Metz	Examineur
<b>F. MOUSSY</b>	Expert Matériaux Métalliques chez Renault	Examineur

# REMERCIEMENTS

Le présent travail a été effectué au sein du *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux* de l'Université de Metz.

Ma gratitude et ma reconnaissance s'adressent tout d'abord à Monsieur le Professeur **Gérard FERRON** qui a accepté de diriger cette thèse. Sa rigueur et son aide efficace m'ont permis de mener à bien ces travaux. Je le remercie également pour le soutien qu'il m'a apporté dans la rédaction de ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements à Madame **Marion MARTINY**, Maître de Conférence à l'Université de Metz, pour ses encouragements et sa motivation quant à ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur **Daniel DUDZINSKI** de m'avoir fait l'honneur d'être le président de ce jury de thèse. Je remercie également Monsieur **Patrick CHABRAND** et Monsieur **Jean-Philippe PONTHOT**, d'avoir accepté de faire partie de ce jury et d'avoir examiné et porté un jugement sur ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur **François MOUSSY** pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et d'avoir montré envers ce travail un intérêt industriel.

Je remercie les membres du LPMM et particulièrement mes collègues de bureau pour avoir cohabité avec moi tout ce temps.

Je remercie ma famille et mes amis pour leurs encouragements et en particulier Monsieur **Hervé BULLIER** pour sa patience et ses conseils avisés et Madame **Marie-Noëlle BULLIER** pour sa grande maîtrise de la langue française.

# TABLE DES MATIÈRES

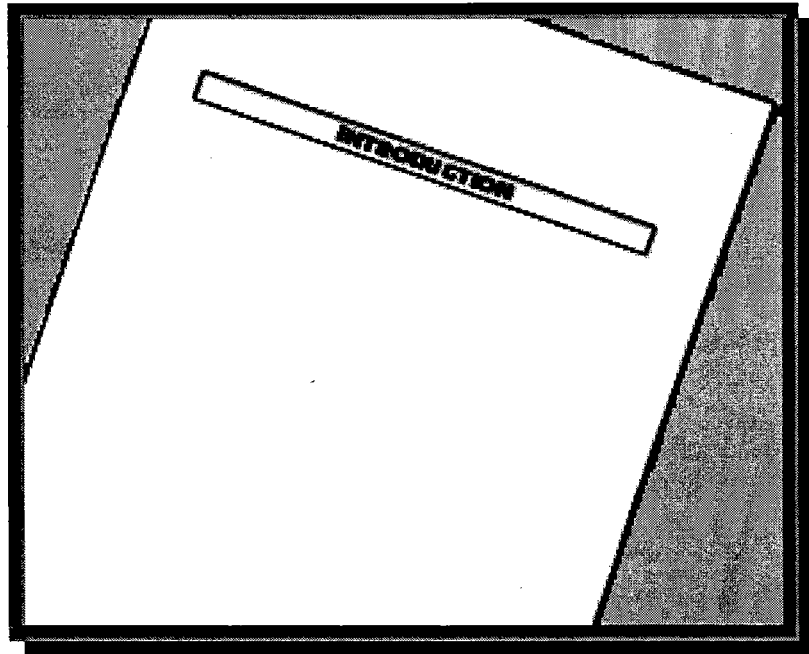
	<b>Table des ma</b>
	<b>Introduction</b>
	<b>Chapitre 1 : Étude bibliographique</b>
I-	<b>Introduction</b>
II-	<b>Présentation des joncs de retenue</b>
II-1-	Principe d'un jonc de retenue conventionnel
II-2-	Joncs de retenue améliorés
	<b>Résultats expérimentaux</b>
1-	Simulateurs de joncs avec et sans frottement
2-	Influence de la géométrie et des inserts sur la fr
2-1-	Joncs à fond plat
2-2-	Joncs à fond creux
	Influence de l'anisotropie du
	Calculations numériques
	Stabilisation

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 : Étude bibliographique</b>	<b>12</b>
<b>I - Introduction</b>	<b>12</b>
<b>II - Présentation des joncs de retenue</b>	<b>12</b>
II - 1 - Principe d'un jonc de retenue conventionnel	12
II - 2 - Joncs de retenue améliorés	15
<b>III - Résultats expérimentaux</b>	<b>16</b>
III - 1 - Simulateurs de joncs avec et sans frottement	16
III - 2 - Influence de la géométrie et des inserts sur la force de retenue	17
III - 2 - 1 - Joncs de retenue conventionnels	18
III - 2 - 2 - Joncs à fond plat	19
III - 3 - Influence de l'anisotropie du matériau	20
<b>IV - Simulations numériques</b>	<b>20</b>
IV - 1 - Stabilisation de la force de retenue, comparaison simulations / expériences	20
IV - 2 - Influence de la pénétration sur la force de retenue	22
IV - 3 - Modèles de joncs équivalents	23
IV - 4 - Influence des joncs sur le comportement global en emboutissage	24
<b>V - Modélisations analytiques</b>	<b>25</b>
V - 1 - Écoulement le long d'un outil semi-cylindrique	25
V - 2 - Estimation du coefficient de frottement	26
V - 3 - Modélisations basées sur l'équilibre	27
V - 4 - Modélisations basées sur le principe des travaux virtuels	28
V - 5 - Modélisation de l'évolution des déformations et des efforts en pliage-étrage	29
<b>VI - Conclusion</b>	<b>30</b>
<b>Chapitre 2 : Simulations numériques</b>	<b>32</b>
<b>I - Introduction</b>	<b>32</b>
<b>II - Définition des essais simulés</b>	<b>32</b>
II - 1 - Géométrie	32
II - 2 - Loi de comportement du matériau	33
II - 3 - Contact avec les outils	33
<b>III - Mise au point des simulations numériques</b>	<b>34</b>
III - 1 - Programmation des différentes étapes de chargement	34
III - 2 - Modélisation par éléments finis	34
<b>IV - Analyse des résultats</b>	<b>35</b>
IV - 1 - Comportement transitoire	36
IV - 1 - 1 - Cas d'un fort enfoncement	36
IV - 1 - 2 - Cas d'un faible enfoncement	40
IV - 2 - Comportement stationnaire	41
IV - 2 - 1 - Cas d'un fort enfoncement	42
IV - 2 - 2 - Cas d'un faible enfoncement	48
IV - 2 - 3 - Influence du frottement	54
<b>V - Conclusion</b>	<b>56</b>
<b>Chapitre 3 : Modélisation analytique</b>	<b>58</b>
<b>I - Introduction</b>	<b>58</b>
<b>II - Étude de l'équilibre de la tôle</b>	<b>58</b>
II - 1 - Équations locales d'équilibre	58
II - 2 - Équilibre des différentes zones de la tôle	59

I - 3 - Chapitre III	123
I - 4 - Chapitre IV	124
I - 5 - Annexes	124
<b>II - Tableaux</b>	<b>125</b>
II - 1 - Chapitre II	125
II - 2 - Chapitre III	125
II - 3 - Chapitre IV	125
<b>Annexes</b>	<b>127</b>
<b>I - Géométrie de la tôle</b>	<b>127</b>
<b>II - Calcul des forces - Cas général avec frottement</b>	<b>129</b>
II - 1 - Zone d'entrée	129
II - 2 - Zone d'entrée étendue au brin libre amont	130
II - 3 - Zone de brin libre aval	131
II - 4 - Rayon du jonc	132

# INTRODUCTION





## Introduction

Les simulations numériques des procédés d'emboutissage ont pris une grande importance industrielle. Elles permettent en effet de réaliser à un moindre coût un nombre important d'“essais”, ceux-ci autorisant à valider avec un bon degré de confiance la faisabilité d'une pièce. Dans le cas où des difficultés surviennent au niveau d'un embouti, les simulations numériques constituent un outil précieux : d'abord pour en appréhender les causes, puis pour analyser les modifications de formes de l'outillage permettant de remédier au problème rencontré.

Les conditions aux limites extrêmes au niveau du contour d'un flan à emboutir sont les conditions de “flan bloqué”, -où toute la déformation de la tôle consiste en une expansion sous le poinçon (par exemple, l'essai de poinçonnement hémisphérique à flan bloqué)-, et les conditions où l'avalement de la tôle est privilégié (par exemple, l'essai d'emboutissage profond d'une coupelle). Entre ces conditions extrêmes, les joncs de retenue sont depuis longtemps utilisés en emboutissage afin de réguler le flux de métal entre matrice et serre-flan, et afin de “doser” la part relative d'expansion sous le poinçon et d'avalement entre la matrice et le serre-flan. Ce “dosage” peut être conséquent, en particulier pour éviter une striction de la tôle résultant d'un avalement insuffisant, ou au contraire un plissement dû à un avalement trop important. Dans les emboutis complexes, il convient en outre de réaliser des conditions d'avalement variables sur le pourtour du flan, et donc d'introduire des joncs à des endroits judicieusement choisis.

Un jonc de retenue consiste en une protubérance de forme semi-cylindrique située sur le serre-flan, s'adaptant à une partie creusée, et pourvue d'épaulements sur la partie externe de la matrice. Au moment de la “descente” du serre-flan, la tôle se trouve forcée à épouser plus ou moins étroitement la forme des différents rayons d'outillage constituant le jonc. Lors du procédé d'emboutissage, réalisé généralement par l'action d'un poinçon, la tôle s'écoule le long du jonc. Cet écoulement est plus ou moins important selon la géométrie du jonc, celui-ci contrôlant l'intensité des séquences de pliage/dépliage/pliage inverse subies par la tôle. Les

joncs de retenue sont particulièrement efficaces pour obtenir des conditions bien définies et reproductibles pour l'avalement de la tôle. En effet, la force de retenue exercée par le jonc peut être considérée comme incluant deux composantes : la force de déformation ou de pliage associée au trajet de déformation imposé à la tôle, et la force de frottement associée aux contacts avec le jonc et les épaulements de la matrice. La composante de déformation étant significativement plus grande que la composante de frottement (Nine, 1978), la force de retenue, et donc l'avalement de la tôle, seront beaucoup moins sensibles à des variations du frottement, résultant par exemple d'une évolution des conditions de lubrification, qu'elles ne le seraient si le contrôle de l'avalement était assuré par un simple serrage entre une matrice et un serre-flan lisses.

La prise en compte directe de la présence de joncs de retenue dans la simulation numérique d'un processus complet d'emboutissage a des effets très néfastes sur le temps de calcul. Tout d'abord, le maillage dans la zone subissant le passage le long du jonc doit être très raffiné en raison des faibles rayons de courbure locaux. En même temps, l'incrément de déplacement de l'outil " moteur ", correspondant par exemple à un poinçon (ou l'incrément de temps dans les codes explicites), sera très fortement réduit afin de pouvoir gérer des évolutions locales de contraintes et de déformations importantes.

Au niveau des simulations numériques de l'emboutissage, les utilisateurs de codes de calculs, et particulièrement les industriels, ont introduit des modèles de jonc de retenue équivalents afin de s'affranchir de l'augmentation inacceptable du temps de calcul, celle-ci étant liée à la prise en compte directe des joncs dans la simulation du procédé global de mise en forme. Ces modèles consistent généralement en la définition d'une ligne au niveau de laquelle agit une force de retenue, supposée représenter l'effet du jonc.

*L'objet de cette étude est d'examiner le comportement de la tôle lorsqu'elle s'écoule le long d'un jonc de retenue, et d'en déduire les influences de la géométrie du jonc, des caractéristiques du matériau et du frottement sur la déformation de la tôle, et les efforts ainsi mis en jeu.*

Le Chapitre 1, consacré à une étude bibliographique, rappelle tout d'abord les essais qui ont été développés pour étudier le comportement de la tôle et les efforts mis en jeu au niveau d'un jonc de retenue. Les résultats de ces essais ont été utilisés par différents auteurs comme base de comparaison pour valider les modélisations de joncs qu'ils ont développées. Les modélisations que nous présentons s'appuient sur des simulations numériques par éléments finis, ou sur des traitements analytiques spécifiques, basés soit sur le principe des puissances virtuelles, soit sur des considérations d'équilibre. On notera que les essais sont réalisés sur des bandes de tôle s'écoulant le long d'outils cylindriques, et correspondent donc à des conditions de déformation quasi-plane. De même les modélisations sont le plus souvent effectuées dans l'hypothèse de déformation plane. En dehors de l'avantage de la simplicité, ce choix peut être justifié si l'on considère que, dans la pratique, les joncs sont souvent positionnés le long de bords relativement rectilignes dans des emboutis de grande dimension, tels les éléments de carrosserie automobile. C'est aussi dans le cadre de l'hypothèse de déformation plane que sera développée cette étude.

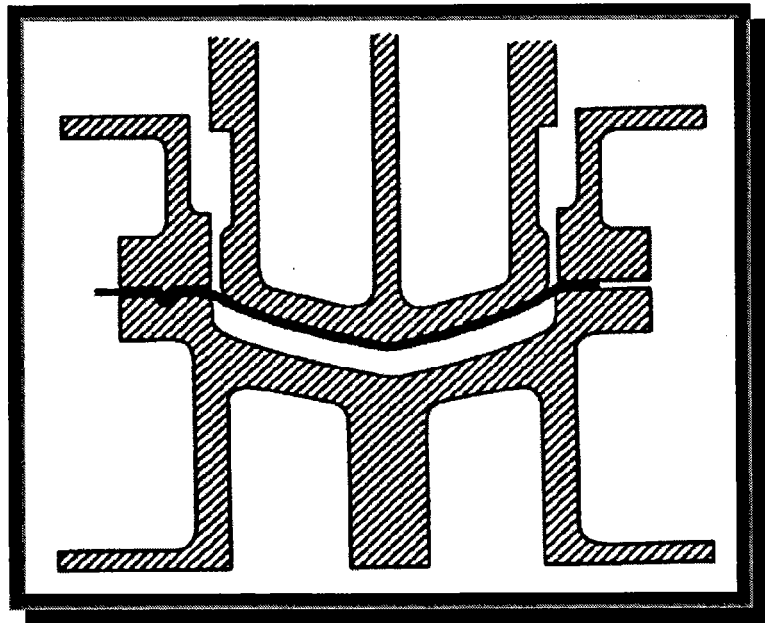
Le Chapitre 2 présente les simulations numériques qui ont été réalisées à l'aide du code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard. Ces simulations ont pour but de mettre en évidence les influences de l'enfoncement du jonc et du frottement le long des outils sur le comportement de la tôle, et les efforts mis en jeu. Nous avons principalement orienté l'analyse des résultats sur l'étude de l'écoulement stationnaire, et nous nous sommes particulièrement concentrés sur l'histoire de contraintes et de déformations suivie par des points situés à différentes positions dans l'épaisseur de la tôle. Nous aurons également l'occasion de constater que le type d'éléments choisis peut être déterminant sur les résultats, en raison sans doute de la sévérité de la séquence de pliage/dépliage/pliage inverse subie par la tôle. La gestion de conditions de contact évoluant de façon permanente, celle-ci peut également être la source d'erreurs cumulées. Ces observations sont importantes : la qualité des résultats de simulations par éléments finis de l'écoulement le long du seul jonc n'est en effet pas assurée sans précautions particulières. Aussi, le développement de méthodes analytiques alternatives, fiables et robustes, nous semble-t-il pleinement justifié.

La partie centrale de ce travail, développée au Chapitre 3, consiste en une modélisation analytique du processus de pliage/étirage d'une tôle, et en son application à l'histoire suivie par la tôle s'écoulant le long d'un jonc de retenue. Une analyse de la flexion/traction d'une coque cylindrique est ainsi mise en œuvre dans le cadre de l'hypothèse de Love Kirchhoff, elle-même assortie d'une prise en compte des variations d'épaisseur associées à l'hypothèse d'incompressibilité du matériau. Les évolutions couplées de l'effort normal et du moment de flexion permettent de déterminer l'histoire suivie par tout point dans l'épaisseur de la tôle, et finalement d'estimer les efforts exercés par les outils à partir de considérations sur l'équilibre. L'hypothèse d'écrouissage isotrope et un modèle d'écrouissage cinématique non linéaire sont envisagés pour décrire le comportement de la tôle. Une validation de ce modèle est réalisée, par comparaison à la fois avec les résultats des simulations numériques du Chapitre 2 et avec des résultats expérimentaux de la littérature.

Le Chapitre 4 a pour objet de dégager les influences de la géométrie du jonc, des caractéristiques mécaniques de la tôle et du frottement, sur les grandeurs importantes pour le développement d'un modèle de jonc équivalent. Ces grandeurs sont les efforts exercés par l'outillage, la déformation en épaisseur en sortie de jonc, mais aussi la déformation équivalente en sortie. Celle-ci est en effet très importante sur les bords de la tôle, et elle est susceptible d'influencer grandement la suite du processus d'emboutissage si par exemple la matière ayant subi l'écoulement le long du jonc vient ensuite à s'écouler le long du rayon de matrice.

# CHAPITRE I

## ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE



## Chapitre 1 : Étude bibliographique

### I - Introduction

Ce chapitre présente les joncs de retenue utilisés dans les procédés d'emboutissage, et ayant pour but de réguler (ou éventuellement d'empêcher) l'écoulement de la tôle entre matrice et serre-flan. Les modélisations de cet élément de l'outillage d'emboutissage, et en particulier la détermination des efforts mis en jeu au niveau du jonc, ont fait l'objet d'études relativement succinctes dans la littérature.

Nous présentons tout d'abord dans cette étude les réalisations expérimentales et leurs différentes variantes. Les influences de la géométrie, ainsi que celles de l'insertion de films de polymère entre la tôle et les outils, sont ensuite analysées, de même que les prévisions correspondantes, obtenues soit par des simulations numériques réalisées à l'aide de codes de calcul par éléments finis, soit à partir de modélisations analytiques. Le rôle de la présence de joncs sur les résultats globaux d'un processus d'emboutissage est également rappelé. Nous mentionnons enfin une étude de la flexion-traction d'une tôle, qui a été utilisée pour analyser le développement d'instabilités dans des conditions de pliage-étirage, et dont nous reprenons le principe dans la modélisation analytique développée dans la suite de ce travail.

### II - Présentation des joncs de retenue

#### II - 1 - Principe d'un jonc de retenue conventionnel

Le schéma de la Figure I - 1, emprunté à Nine (1978), présente le principe de fonctionnement d'une presse double action. La première action consiste à maintenir en position la tôle en effectuant une descente du serre-flan. La seconde action consiste à descendre le poinçon de façon à réaliser la pièce souhaitée. La tôle épouse progressivement la forme imposée, l'écoulement entre la partie externe de la matrice et le serre-flan étant contrôlé par la force de serrage exercée par le serre-flan. La force radiale associée, appelée force de retenue, est due au frottement, et varie en fonction de la force de serrage du serre-flan (cas de la partie droite de la Figure I - 1).

Pour un meilleur contrôle du flux radial de métal, des joncs de retenue sont parfois insérés entre la partie externe de la matrice et le serre-flan. Un jonc de retenue consiste en un demi-cylindre positionné sur le serre-flan, en correspondance avec une rainure ayant des épaulements en quart de cylindre, sur la face opposée de la partie externe de la matrice. La

force de retenue associée au jonc désigne la force de traction nécessaire pour assurer l'écoulement de la tôle. Elle est alors considérée comme présentant deux composantes : la « force de déformation », ou « force de pliage », due aux pliages successifs lorsque la tôle s'écoule le long du jonc de retenue, et la « force de frottement », provenant du frottement de la tôle contre les surfaces du jonc et des épaulements de la matrice. La présence d'un jonc de retenue est visualisée sur la partie gauche de la Figure I - 1.

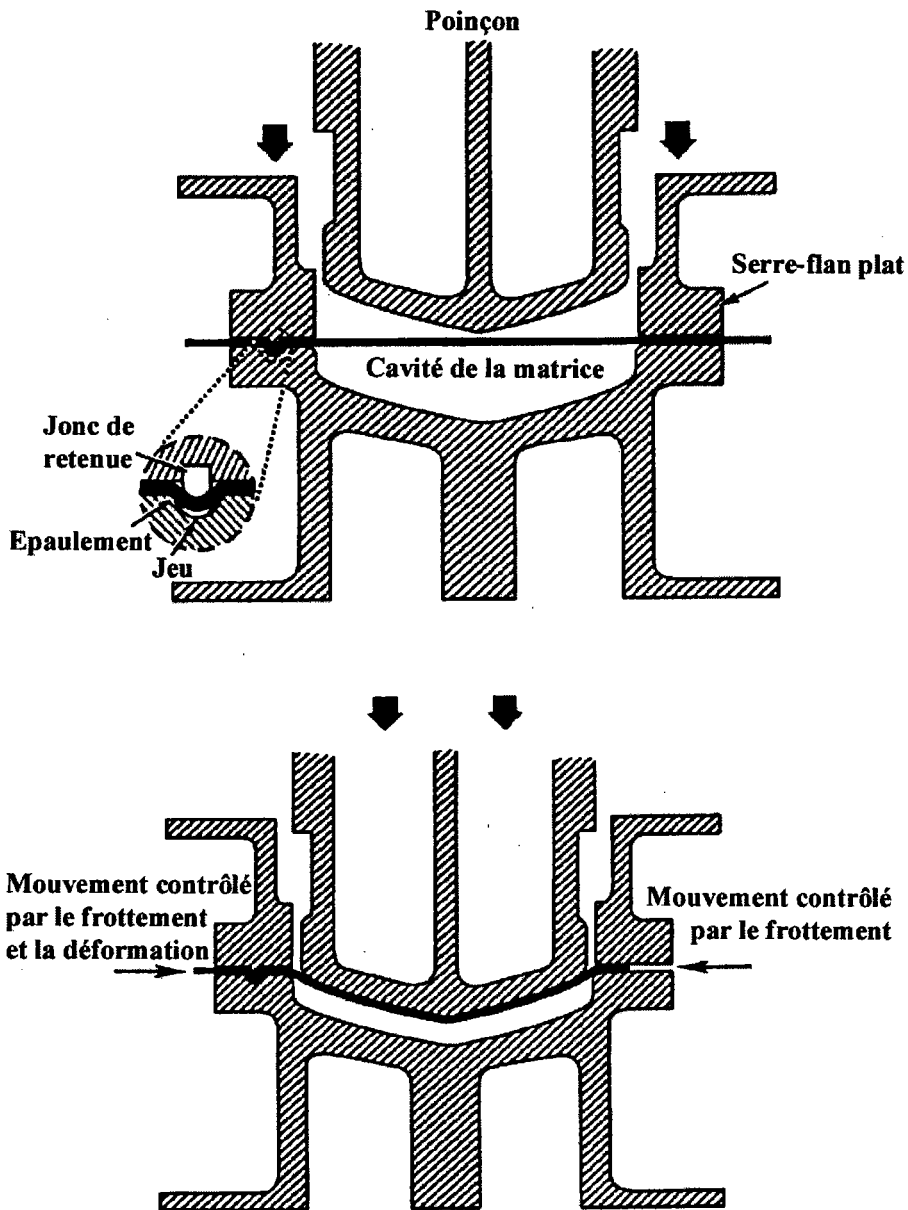


Figure I - 1 : Schéma d'une presse double action.

action 1 : descente du serre-flan et maintien en position de la tôle (ou flan) avant emboutissage.

action 2 : descente du poinçon avec étirage (avalement) de la tôle et formage de la pièce.

(d'après Nine, 1978)

Un tel jonc, dit conventionnel, est représenté sur la Figure I - 2. Les zones 1, 2-3 , 4-5 et 6 sont celles où intervient une flexion de la tôle. Lorsque le métal se plie sur le rayon du premier épaulement (A) au point 1, cela génère une force de déformation. Le contact avec glissement sur l'épaulement (A) entre les points 1 et 2 génère une force de frottement. La surface de la tôle opposée à l'épaulement est une surface libre, c'est-à-dire sans frottement. Au niveau de la position 2, le métal se redresse (dépliage) et quitte le contact avec le rayon de l'épaulement (A). Cette suite de pliage (déformation), glissement (frottement), et redressement (déformation), entre en jeu pour la force de retenue du premier épaulement. Cette séquence génératrice de force est répétée sur le jonc (B), puis sur le second épaulement (C). La force totale de retenue du jonc découle de la déformation et du frottement le long de ces trois rayons. Dans une presse, une force de frottement supplémentaire est produite par le serre-flan en lui-même, de part et d'autre du jonc. Cette force n'entre cependant pas en compte dans la discussion, celle-ci se limitant au jonc de retenue.

L'ampleur de chacun des deux types de forces, déformation (pliage) et frottement, est déterminée tout d'abord par les rayons de pliage, puis par le coefficient de frottement ( $\mu$ ), et enfin par la pression de contact à l'interface tôle/outils. La force de déformation varie en sens inverse des rayons de pliage de la tôle, et la force de frottement est directement proportionnelle au frottement ( $\mu$ ) et à la pression.

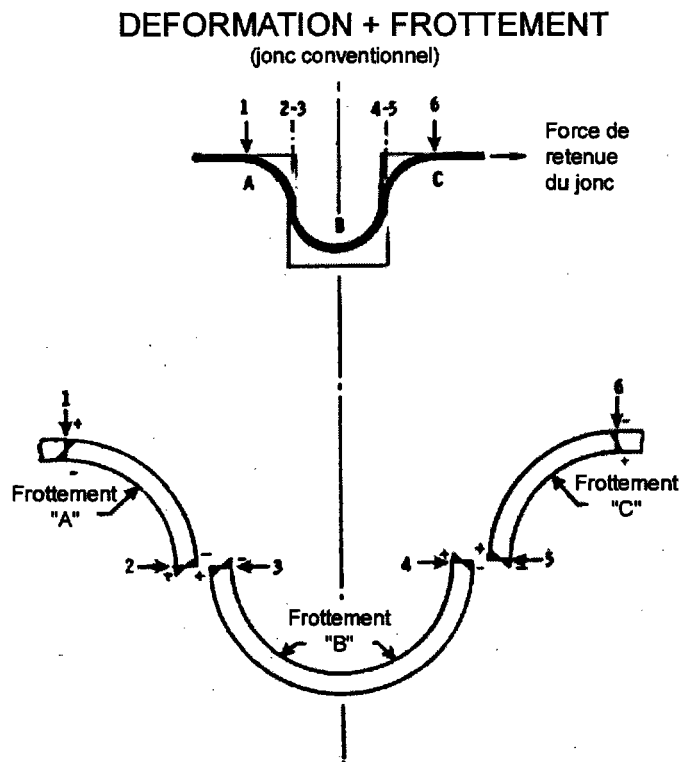


Figure I - 2 : Jonc de retenue conventionnel, avec mise en évidence des composantes de pliage et de frottement de la force de retenue (Nine, 1978).



Il est important de noter que le rayon de courbure effectif de la tôle n'est pas nécessairement le même que celui des outils (épaulements et jonc). En effet, si la descente du jonc (c'est-à-dire la distance de pénétration du jonc dans la cavité) est petite, ou si le jeu entre le jonc et les épaulements est fort, le rayon effectif de la tôle devient considérablement plus grand que les rayons d'outils. En revanche, si la pénétration du jonc est profonde, le métal est forcé d'épouser plus étroitement les rayons du jonc, ce qui diminue alors le rayon effectif, et augmente la force de déformation. La force de frottement augmente également avec la pénétration du jonc, l'augmentation de la déformation provoquant une augmentation des forces de contact.

Pour un jeu minimum, la force de retenue atteint ainsi son maximum quand le jonc pénètre dans la cavité jusqu'au point où les centres des deux épaulements de la matrice et celui du jonc sont alignés. A ce niveau de pénétration, le métal est plié aux rayons minimums possibles, ceux-ci correspondant aux rayons des outils. Une pénétration plus forte n'augmente pas la force de retenue, tant que le métal ne se retrouve pas pincé.

## II - 2 - Joncs de retenue améliorés

Nine (1982) a déterminé que la force de pliage est plus grande que la force de frottement, et qu'elle représente de 65 à 85 % de la force totale de retenue dans des conditions normales de frottement. Pour augmenter la force de retenue, une façon de procéder est d'augmenter la force de déformation, ce qui revient, avec un jonc conventionnel, à augmenter la profondeur du jonc ou à minimiser le jeu. Ces deux solutions sont difficiles à réaliser pour des raisons pratiques. En effet, des tolérances de moins de 0,5 mm ne sont pas réalistes pour des emboutissages de grandes dimensions, et des profondeurs de pénétration importantes peuvent causer des plissements inacceptables.

Mais il existe deux autres possibilités (Nine, 1982) pour augmenter la force de déformation :

- soit ajouter une bande d'uréthane dans la rainure en opposition au jonc. La bande permet alors d'augmenter les composantes de déformation et de frottement de la force de retenue. Dans le cas d'une pénétration peu profonde, cette bande permet à la tôle d'épouser plus étroitement le jonc. L'uréthane augmente également le frottement en ajoutant une surface de frottement sur la face opposée au jonc. Il est possible par ailleurs d'ajuster rapidement la force de retenue en insérant, en enlevant ou en modifiant l'épaisseur de l'insert en uréthane.
- soit augmenter le nombre de pliages sur le passage de la bande de métal (sans ajouter de jonc de retenue). Une méthode simple consiste ainsi à ajouter un méplat sur un jonc de retenue conventionnel. Ce jonc à bord plat ajoute une quatrième séquence de pliage/dépliage au jonc de retenue, ce qui augmente alors la composante de déformation de la force de retenue d'à peu près un tiers.

La Figure I - 3 et la Figure I - 4 représentent schématiquement ces deux possibilités.

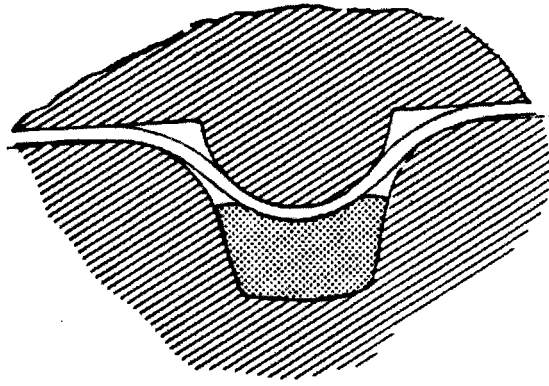


Figure I - 3 : Jonc de retenue conventionnel avec adjonction d'un insert en uréthane (Nine, 1982).

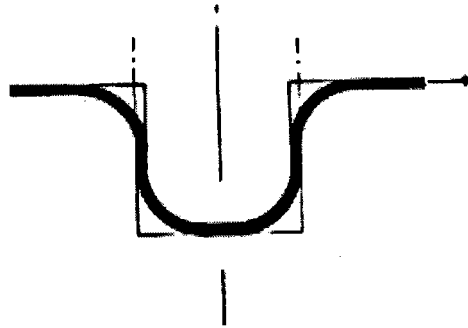


Figure I - 4 : Jonc de retenue amélioré à fond plat, ajoutant une quatrième séquence de pliage/dépliage (Nine, 1982).

### III - Résultats expérimentaux

#### III - 1 - Simulateurs de joncs avec et sans frottement

Un des éléments-clés de la modélisation des joncs de retenue a été de scinder les contributions relatives des forces de déformation et de frottement. Expérimentalement, cela a été réalisé par Nine (1978) : il a conçu un dispositif de simulation d'un jonc de retenue sans frottement, dans lequel les épaulements de la rainure et le bossage du jonc ont été remplacés par des rouleaux supportés par des roulements (Figure I - 5). Ces rouleaux sont en outre soutenus sur leur longueur par un ensemble de roulements à billes disposés à l'arrière. Puisque les rouleaux sont libres de tourner lors de l'écoulement de la plaque de métal, les forces de frottement peuvent être considérées comme négligeables, même si le système n'est pas, bien sûr, totalement sans frottement, puisqu'une légère force est requise pour entraîner les roulements. Le coefficient de frottement des roulements est d'à peu près 0,001 à 0,002, selon les conditions de lubrification (Nine, 1978). Le frottement est par conséquent négligeable, comparé à celui d'un jonc de retenue conventionnel. Ce dispositif est utilisé en parallèle avec un simulateur possédant des épaulements fixes, dans lequel le frottement est

contrôlé par différents lubrifiants. L'utilisation combinée de ces deux simulateurs permet d'isoler les forces de déformation des forces de frottement.

Les pièces de support maintenant les rouleaux de la rainure sont conçues afin que la distance entre les épaulements puisse être ajustée par des cales. Ce système permet alors de maintenir constant le jeu lorsque l'on teste des plaques de métal de différentes épaisseurs. De plus, des rouleaux ajustables en hauteur maintiennent la partie amont de la bande de métal dans le plan initialement occupé par celle-ci lorsque le serre-flan pénètre dans la matrice. Ces guides de positionnement sont nécessaires pour obtenir une forme de référence bien définie pour le mouvement du métal, afin d'avoir une comparaison valide entre les forces et les déformations mesurées et calculées.

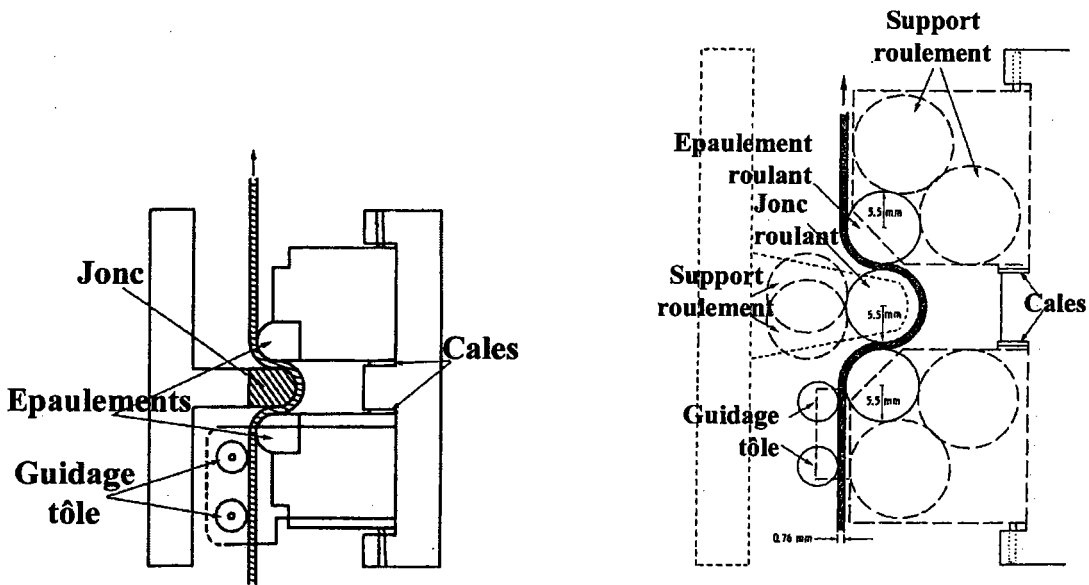


Figure I - 5 : Simulateurs de jonc de retenue (Nine, 1978).

(a) avec frottement (jonc et épaulements fixes)

(b) sans frottement (jonc et épaulements mobiles en rotation)

### III - 2 - Influence de la géométrie et des inserts sur la force de retenue

Une étude expérimentale détaillée a été effectuée par Nine en 1982. Il a réalisé des essais sur des bandes d'acier calmé à l'aluminium, de dimensions  $400\text{ mm} \times 50\text{ mm} \times 0,76\text{ mm}$ , traversant le jonc sur une longueur de  $120\text{ mm}$  à la vitesse de  $85\text{ mm/s}$ . Des cellules de force mesurent les forces de serrage et de retenue (traction). Les forces sont mesurées pour un jonc conventionnel, et pour un jonc à fond plat de rayon  $4,75\text{ mm}$ , avec et sans insert en uréthane. Pour les mesures avec l'insert en uréthane, celui-ci est dimensionné de telle façon qu'il soit comprimé de  $0,5\text{ mm}$  à chaque pénétration. Des inserts en acier sont aussi utilisés pour le jonc à fond plat. Un jeu de plus de  $\sim 0,05\text{ mm}$  est alors laissé sous la partie plate du jonc pour éviter tout pincement du métal.

Une large gamme de pénétrations du jonc de retenue a été testée : 4,6 mm, 7,7 mm, et 10,3 mm. On remarque que la plus grande pénétration donne le maximum de la force de retenue, mais ce n'est pourtant pas celle qui est la plus couramment utilisée. La plupart du temps, la pénétration utilisée industriellement se situe dans une valeur moyenne. En effet, une pénétration trop importante risque d'altérer le matériau du fait d'une déformation cyclique trop importante.

Les forces sont mesurées avec des jeux différents entre le jonc et les épaulements pour analyser le rôle du jeu. Les jeux les plus faibles obligent en effet la tôle à épouser la forme du jonc, ce qui augmente la force de retenue. Les jeux testés sont 0,15 mm, 0,3 mm, 0,46 mm, et 0,76 mm, même si le plus petit jeu n'est pas réalisable pour des applications en production. Toutefois, ce jeu est intéressant à étudier car il nous donne des indications sur la force maximale atteinte pour un rayon et une pénétration donnés. Un jeu de 0,76mm est typique des applications en production.

Les forces obtenues expérimentalement (Nine, 1982) ont été normalisées par une conversion en contraintes (c'est-à-dire en divisant par l'aire de la section de l'échantillon) puis en divisant par la limite élastique du matériau utilisé, de sorte que les forces adimensionnelles obtenues sont directement comparables pour des échantillons de dimensions différentes.

### III - 2 - 1 - Joncs de retenue conventionnels

La tendance générale prévue pour les joncs de retenue est vérifiée, c'est-à-dire que la force de retenue augmente avec la profondeur de pénétration et diminue avec l'augmentation du jeu. Ces paramètres affectent tous deux la force de retenue en contrôlant la conformation de la bande de métal sur le rayon du jonc et donc le rayon effectif de pliage. Il est clair que la profondeur de pénétration joue un rôle plus important dans la force de retenue que le jeu.

Pour les joncs de retenue conventionnels avec un insert en uréthane, l'augmentation de la force de retenue avec un jonc conventionnel varie de 22 % avec une pénétration minimale (4,3 mm) et un jeu maximal (0,76 mm), à 4 % avec une pénétration maximale (10,3 mm) et un jeu minimal (0,15 mm). L'augmentation relative la plus importante est donc observée avec un grand rayon effectif. Dans les cas de fortes pénétrations, la bande de métal est déjà pliée sur les rayons d'outils : l'ajout d'un insert n'augmente pas la force de déformation. Seul le frottement peut être augmenté dans ce cas.

Puisque seul le frottement change pour les grandes pénétrations, il est possible d'estimer la contribution relative des forces de déformation et de frottement quant à l'augmentation de la force de retenue dans le cas des faibles pénétrations. En effet, puisque la compression de l'uréthane est gardée constante dans tous les cas, l'effet du frottement doit rester à peu près le même. Ainsi, Nine (1982) trouve que chaque composante contribue approximativement à part égale à l'augmentation de la force due à l'addition de l'insert en uréthane dans le cas des faibles pénétrations. La plus grande part de la force de retenue est toujours due à la déformation.

L'utilisation d'un insert en uréthane est profitable à plusieurs égards. Premièrement cela permet d'augmenter la force de retenue sans jouer sur la profondeur de pénétration du jonc. De plus, il est possible de modifier l'épaisseur de l'insert. Il est donc aisé de changer la force de retenue en remplaçant ou en enlevant la bande en uréthane, ce qui permet de diminuer la période de mise au point du jonc.

Il est bien entendu possible d'augmenter considérablement la force de retenue en ajoutant plusieurs inserts qui plaqueraient la tôle sur tout le pourtour des outils, et non plus sur le jonc uniquement. Cependant, cette méthode complique la conception et provoque une usure rapide des inserts en uréthane.

### III - 2 - 2 - Joncs à fond plat

Ce type de joncs peut augmenter la composante de déformation de la force de retenue d'un tiers, si on considère qu'une quatrième séquence de pliage/dépliage s'ajoute aux trois séquences obtenues avec un jonc conventionnel. En outre, puisque la composante de déformation est à peu près égale à 75 % de la force totale de retenue avec un jonc conventionnel, et que le jonc à fond plat n'a aucun effet spécifique sur la composante de frottement, on peut prévoir une augmentation de la force totale de retenue d'environ un quart (Nine, 1982).

*Mais pour qu'il y ait une réelle augmentation, il faut que la tôle soit plaquée sur le jonc. Ainsi, dans le cas d'une faible pénétration ou d'un fort jeu, la tôle n'épouse pas parfaitement le jonc et la zone plate du jonc n'intervient pas, éliminant de ce fait le rayon de pliage supplémentaire, ce qui donne finalement une force de retenue plus faible que pour un jonc conventionnel. Dans le cas d'une forte pénétration et d'un jeu faible, la bande de métal est forcée à se conformer au jonc. La force de retenue n'augmente alors que de 20 %, car la tôle n'épouse toujours pas totalement le jonc.*

Pour permettre à la bande de s'adapter correctement au jonc, des inserts en acier et en uréthane peuvent être placés dans la cavité du jonc. Toutefois, les inserts en acier provoquent une augmentation considérable de la force de retenue. Ils ne sont pas applicables en production, du fait du faible jeu entre le jonc et l'insert. Les inserts en uréthane 95A donnent quant à eux d'excellents résultats. La comparaison entre jonc classique et jonc à fond plat avec inserts en uréthane est aisée, puisque la tôle épouse totalement les joncs dans les deux cas. Nine (1982) observe alors une augmentation de la force de 28 %.

Une plus grande augmentation relative est mesurée pour de plus faibles pénétrations. A titre d'exemple, une pénétration de 4,6 mm et 0,76 mm de jeu avec un jonc à fond plat et insert en uréthane, génère la même force qu'une pénétration de 10,3 mm et un jeu de 0,15 mm pour un jonc classique.

*Certains auteurs ont fait appel aux valeurs des forces de retenue et de serrage obtenues par Nine (1978, 1982), afin de tester leurs modélisations (Levy, 1983), ou leurs simulations numériques (Cao et Boyce, 1993).*

### III - 3 - Influence de l'anisotropie du matériau

Un premier effet de l'anisotropie porte sur l'intensité des contraintes en déformation plane, et donc sur l'intensité des forces mises en jeu. La loi de comportement identifiée en traction uniaxiale et servant à définir les quantités équivalentes (contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  et déformation équivalente  $\bar{\varepsilon}$ ) doit évidemment être convertie pour le calcul de la contrainte  $\sigma_x$  et de l'incrément de déformation  $d\varepsilon_x$  en déformation plane. En utilisant le critère de plasticité quadratique de Hill (1948), avec l'hypothèse d'une anisotropie normale et d'un écrouissage isotrope, cette conversion est obtenue par les relations :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1+R}{\sqrt{1+2R}} \bar{\sigma} \cdot \text{sgn}(d\varepsilon_x) \\ d\varepsilon_x &= \frac{\sqrt{1+2R}}{1+R} d\bar{\varepsilon} \cdot \text{sgn}(d\varepsilon_x)\end{aligned}\tag{I-1}$$

où R désigne le coefficient d'anisotropie normale du matériau.

Dans les essais réalisés sur une bande de tôle, les conditions de déformation plane ne sont pas rigoureusement vérifiées. Ferran et al. (1998) ont étudié la diminution de largeur de bandes d'aciers à bas carbone très minces au cours de passages successifs dans le dispositif expérimental de pliage-étirage qu'ils ont mis au point. Ils ont observé une corrélation étroite avec le coefficient d'anisotropie initial des tôles. Les auteurs estiment alors que cette mesure de la diminution de largeur des bandes en pliage-étirage pourrait être utilisée pour caractériser l'anisotropie de tôles très minces, pour lesquelles les essais de traction conduisent à une rupture quasi immédiate en raison de leur fort écrouissage.

## IV - Simulations numériques

Une alternative moins onéreuse et plus rapide pour l'étude des joncs de retenue est la simulation numérique. Cette méthode permet d'avoir un plus large échantillon de résultats que la méthode expérimentale, à condition toutefois de valider les résultats des simulations.

### IV - 1 - Stabilisation de la force de retenue, comparaison simulations / expériences

Cao & Boyce (1993) ont modélisé l'écoulement le long d'un jonc conventionnel pour un matériau élasto-plastique, en utilisant le critère quadratique de Hill (1948), avec une anisotropie normale dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope. Les calculs sont effectués à l'aide du code de calcul Abaqus, la tôle ( $85 \times 50 \times 1 \text{ mm}^3$ ) étant modélisée avec deux couches de 120 éléments de déformation plane à 8 nœuds à intégration réduite (CPE8R), et les outils par des surfaces rigides. Les rayons d'outils sont de 5,5 mm (valeurs utilisées par Nine (1978)), et le jeu de chaque côté du jonc est de 0,08 mm.

La force de retenue a une stabilisation d'allure exponentielle (Figure I - 6). Cette force résulte à chaque instant des conditions de contraintes et de déformations courantes de toutes

les particules matérielles de la bande de métal. En début de traction, certaines particules ne sont pas passées entièrement dans le jonc et sont donc moins écrouies. La force de retenue est alors moindre. On atteint une stabilisation lorsque la section droite située à l'entrée de l'épaulement amont, avant traction, est passée à travers tout le jonc, c'est-à-dire pour un déplacement d'environ  $2\pi.R_j$  dans le cas d'un fort enfoncement avec le même rayon pour le jonc( $R_j$ ) et les épaulements.

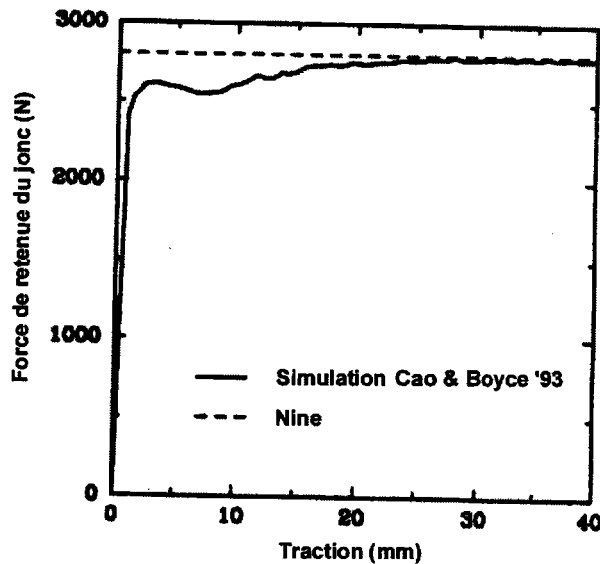


Figure I - 6 : Évolution de la force de retenue en fonction du déplacement imposé (Cao et Boyce, 1993).

La force de retenue stabilisée prévue dans les simulations est plus forte que la force expérimentale pour l'alliage d'aluminium 2036-T4. Cette différence entre simulations et expériences augmente lorsque l'épaisseur de la tôle augmente ou que le rayon de jonc diminue. Une cause possible invoquée par Cao & Boyce (1993) est l'effet Bauschinger, non inclus dans la modélisation. L'effet Bauschinger diminue ainsi le niveau des contraintes cycliques et donc la force de déformation, et ce d'autant plus que les déformations superficielles sont élevées, ce qui est le cas pour de fortes épaisseurs ou de faibles rayons d'outils.

Les simulations sous-estiment en revanche la force de retenue pour l'acier, ce qui pourrait être dû à l'influence de la vitesse de déformation : les caractéristiques de comportement du matériau utilisées dans les simulations correspondent à des vitesses de déformation beaucoup plus faibles que celles rencontrées dans les essais. Cette influence est à mettre en correspondance avec l'observation expérimentale de Nine (1978), selon laquelle la force de traction augmente de 25 % lorsque la vitesse de déformation passe de  $0,035 \text{ s}^{-1}$  à  $35 \text{ s}^{-1}$ .

Les simulations numériques montrent en outre qu'il existe de forts gradients de contraintes résiduelles en sortie de jonc.

#### IV - 2 - Influence de la pénétration sur la force de retenue

La force de déformation dépend directement du rayon de pliage effectif déterminé par le rayon du jonc de retenue, la pénétration du jonc de retenue, l'épaisseur de la bande de métal et le jeu entre les surfaces des outils.

Ainsi, la pénétration affecte l'évolution de la force de retenue et sa valeur finale stabilisée (Figure I - 7). Dans le cas d'une faible pénétration, la tôle ne se plaque pas à la géométrie du jonc à la fin du serrage. Mais pendant la traction, la bande est obligée d'épouser plus étroitement la forme du jonc, ce qui nécessite une plus grande force de traction. Ces aspects géométriques peuvent expliquer la croissance progressive de la force de retenue pour les faibles pénétrations, et le pic de force précédant la stabilisation.

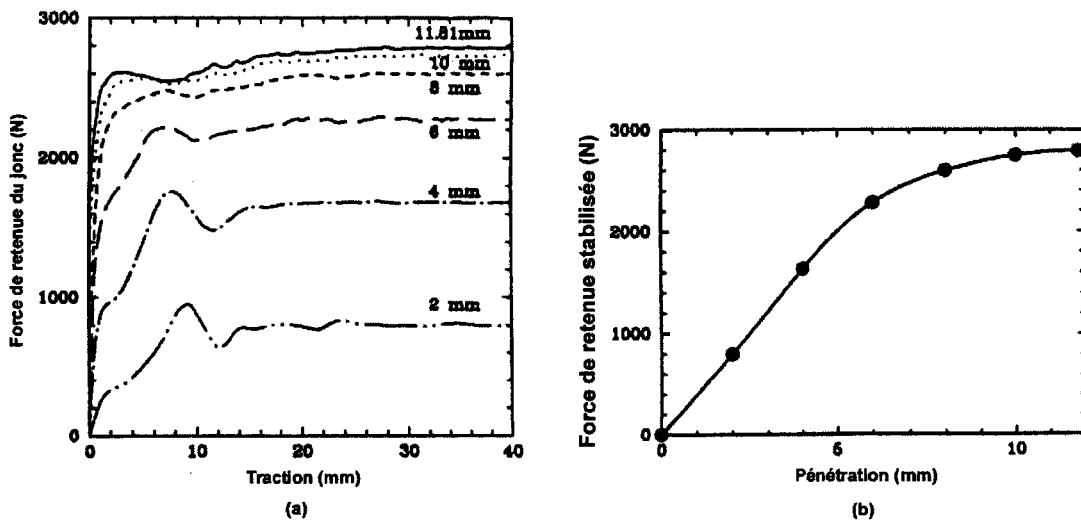


Figure I - 7 : Évolution de la force de retenue : (Cao & Boyce, 1993)

(a) en fonction du déplacement imposé (pour différentes valeurs de pénétration) .

(b) stabilisée en fonction de la pénétration.

Les résultats indiquent que la pénétration est un paramètre ayant une forte influence sur la force de retenue. Cao & Boyce (1993) ont utilisé les simulations numériques pour analyser la possibilité de contrôle de la force par la pénétration. La Figure I - 8 montre les résultats obtenus par utilisation d'une boucle ouverte, où on change la pénétration du jonc de retenue durant le procédé. La force de retenue dépendant de l'histoire de déformation de chaque élément matériel, on observe un comportement transitoire long avant de rejoindre la valeur de force stationnaire associée à la nouvelle valeur de pénétration.



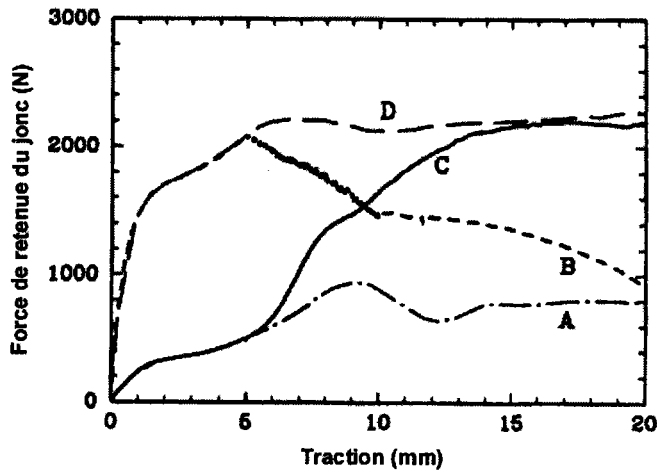


Figure I - 8 : Influence d'un saut de pénétration sur la force de retenue.

A : pénétration constante 2 mm    B : pénétration 6 mm → 2 mm

C : pénétration 2 mm → 6 mm    D : pénétration constante 6 mm

( Cao & Boyce, 1993)

Le contrôle par boucle ouverte est plus particulièrement destiné aux cas où la répétabilité de fabrication est très stable. Cao & Boyce (1993) ont également envisagé la possibilité d'un contrôle par boucle fermée, afin de suivre une évolution prédéfinie de la force de retenue.

#### IV - 3 - Modèles de joncs équivalents

Afin de gérer la présence de joncs de retenue dans les simulations de procédés d'emboutissage (sans toutefois introduire la modélisation géométrique de ces joncs ni la résolution numérique de l'écoulement le long de ceux-ci, très coûteuse en temps de calcul), différents modèles de joncs équivalents ont été développés.

Un jonc de retenue équivalent consiste généralement en une ligne au niveau de laquelle agit une force de retenue, avec une extension égale à celle qui serait observée avec le jonc réel. Les forces de retenue introduites correspondent aux forces stationnaires obtenues expérimentalement ou par des simulations numériques de l'écoulement le long du jonc pris isolément. L'amincissement de la tôle a été inclus dans le modèle de jonc équivalent développé par Carleer et al. (1994). Des raffinements ont été proposés par Kawka et al. (1994) qui considèrent une force de retenue augmentant linéairement en fonction du déplacement le long du jonc, avant d'atteindre la valeur stationnaire de force, selon une analogie avec un matériau élasto-plastique parfait.

Dans d'autres études, les joncs de retenue sont modélisés en introduisant une pression locale et un coefficient de frottement spécifique sur une bande étroite, permettant de reproduire la force de retenue (Honecker et Mattiasson, 1989).

#### IV - 4 - Influence des joncs sur le comportement global en emboutissage

Wouters et al. (1994) ont étudié expérimentalement et numériquement l'essai de formage en U de tôles d'acier, avec et sans jonc de retenue, et dans des conditions de frottement fort et faible. Le schéma des essais est présenté sur la Figure I - 9.

L'influence du frottement sur la force d'emboutissage mesurée apparaît loin d'être négligeable devant celle du jonc (Figure I - 10). Il convient toutefois de remarquer que la modification des conditions de lubrification concerne l'ensemble des surfaces. Les conditions de faible frottement sont obtenues par interposition de feuilles de polyéthylène et lubrification par une huile de haute viscosité, conduisant à un coefficient de frottement  $\mu = 0,03$ . Une faible quantité d'huile anticorrosion est utilisée pour obtenir un frottement fort, estimé égal à  $\mu = 0,17$ . Les simulations numériques, effectuées à l'aide du code de calcul Abaqus/Standard, utilisent des éléments de déformation plane CPE4, et sont réalisées en modélisant l'ensemble de la géométrie. Les résultats expérimentaux et numériques montrent en particulier la forte différence de déformations radiales et en épaisseur, selon que l'élément de tôle considéré est passé ou non au travers du jonc.

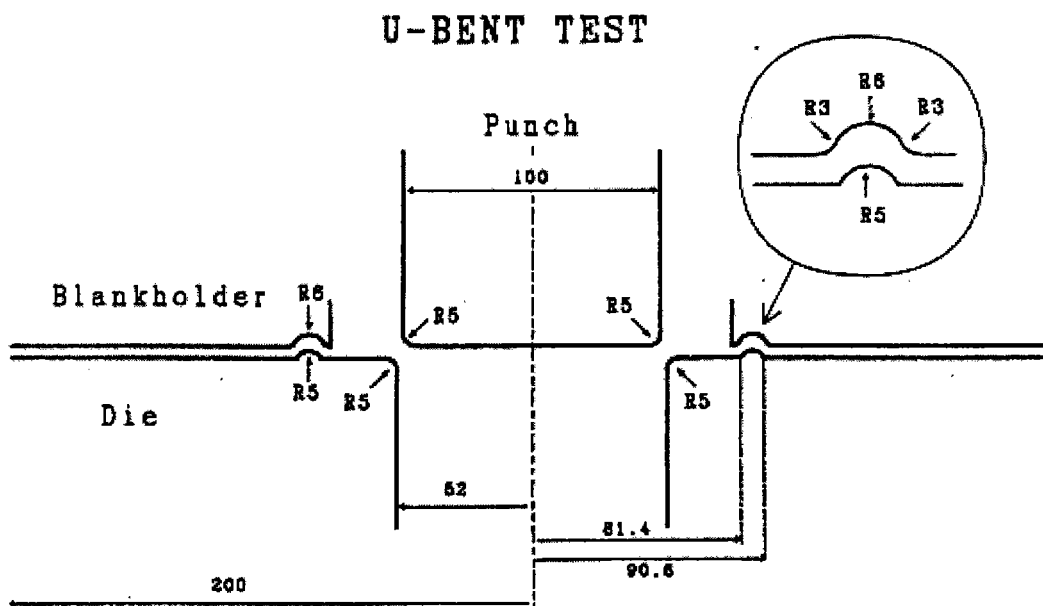


Figure I - 9 : Géométrie des essais de formage en U de tôles d'acier (Wouters & al., 1994).

Chabrand et al. (1996) ont par ailleurs étudié numériquement d'une part le simulateur de jonc proposé par Nine (1978, 1982), et d'autre part l'emboutissage profond en présence de

joncs. Les simulations mettent en évidence de façon détaillée la complexité des problèmes de contact intervenant dans ces procédés, ainsi que par exemple les variations de distance intervenant entre la matrice et le serre-flan lors de l'emboutissage profond.

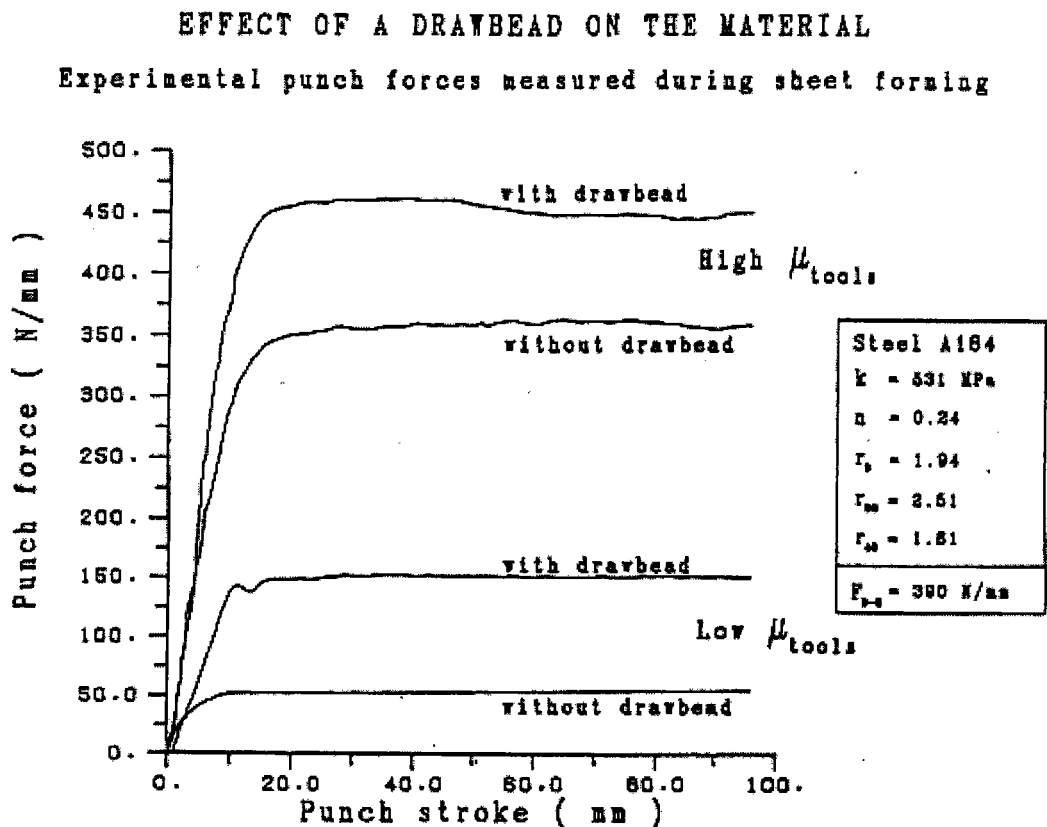


Figure I - 10 : Influence de la présence d'un jonc et des conditions de lubrification sur la force de poinçon (Wouters & al., 1994).

Les actes de Congrès rapportent un certain nombre d'études modélisant des simulations d'emboutissages complexes faisant intervenir des joncs de retenue. Les résultats tendent à montrer le bon accord global entre simulations et résultats expérimentaux (Mattiasson et al., 1999; Meinders et al., 1999; Peng et al., 1999).

## V - Modélisations analytiques

### V - 1 - Écoulement le long d'un outil semi-cylindrique

Swift (1948) semble avoir été le premier à étudier un problème en relation avec l'écoulement le long d'un jonc de retenue, à savoir celui de l'écoulement le long d'un outil semi-cylindrique (Figure I - 11). L'évolution de la force de traction le long de l'outil, la distribution angulaire de pression et l'influence du frottement sont analysés par Swift, à partir des équations d'équilibre d'une tranche angulaire de tôle.

Wang (1982) reprend une analyse du même problème, assortie des simulations numériques correspondantes, et examine la relation entre tension d'entrée et tension de sortie en fonction de la valeur du coefficient de frottement, ainsi que le pourcentage d'amincissement de la tôle liée au processus. Wang trouve un recoupement satisfaisant avec les résultats expérimentaux de Swift (1948).

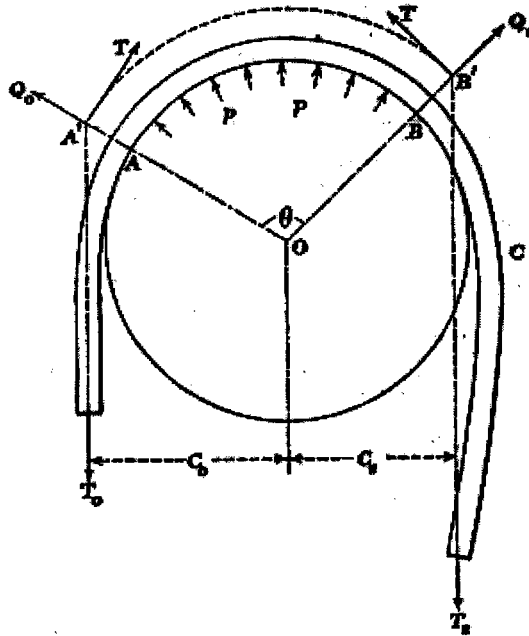


Figure I - 11 : Schéma d'une tôle soumise à un pliage-étirage lors de l'écoulement le long d'un outil semi-cylindrique (Swift, 1948).

## V - 2 - Estimation du coefficient de frottement

Nine (1978) a obtenu, à partir d'essais réalisés avec et sans frottement (cf. § III-1), une estimation du coefficient de frottement selon des considérations basées sur l'équilibre. En considérant le cas d'un fort enfoncement pour lequel le contact entre la tôle et le jonc est réalisé sur un demi cylindre, et en supposant que la pression de contact est uniforme, Nine obtient le résultat suivant :

$$\mu = \frac{D_{d+f} - D_d}{\pi C_{d+f}} \quad (I-2)$$

où  $D_d$  et  $D_{d+f}$  désignent respectivement la force de traction sans et avec frottement, et  $C_{d+f}$  la force de serrage du jonc avec frottement.

### V - 3 - Modélisations basées sur l'équilibre

Sanchez et Weinmann (1996) ont développé une modélisation analytique de type coque, consistant à rechercher de manière itérative la solution vérifiant à la fois l'équilibre et les conditions aux limites de contact avec les outils. Les résultats de cette analyse fournissent la géométrie déformée, les efforts intérieurs, les évolutions de contraintes et de déformation ainsi que les forces globales de retenue et de serrage. Une des difficultés importantes de l'analyse consiste à déterminer la forme de la tôle, en particulier pour de faibles pénétrations. Ce travail a été étendu par Sanchez (2000) au cas d'un matériau présentant un comportement d'écroutissage mixte (isotrope et cinématique).

Yellup et Painter (1985) ont observé expérimentalement que sur le rayon d'entrée, la tôle a sensiblement une forme circulaire qui peut être approximée par le plus grand rayon assurant un contact tangent avec les outils. Au contraire, sur le rayon de sortie, le rayon de courbure minimum de la tôle présente une valeur intermédiaire entre le rayon d'outil et le rayon géométriquement maximum. Cette dissymétrie doit être attribuée à l'effort de traction plus fort supporté par la tôle dans la zone de sortie du jonc. Ainsi, le brin libre en amont du jonc est fortement courbé, tandis que le brin libre en aval est beaucoup plus rectiligne. Ce résultat est reproduit dans les simulations de l'écoulement. A titre d'exemple, la Figure I - 12 montre un profil de tôle déterminé analytiquement par Sanchez et Weinmann (1996).

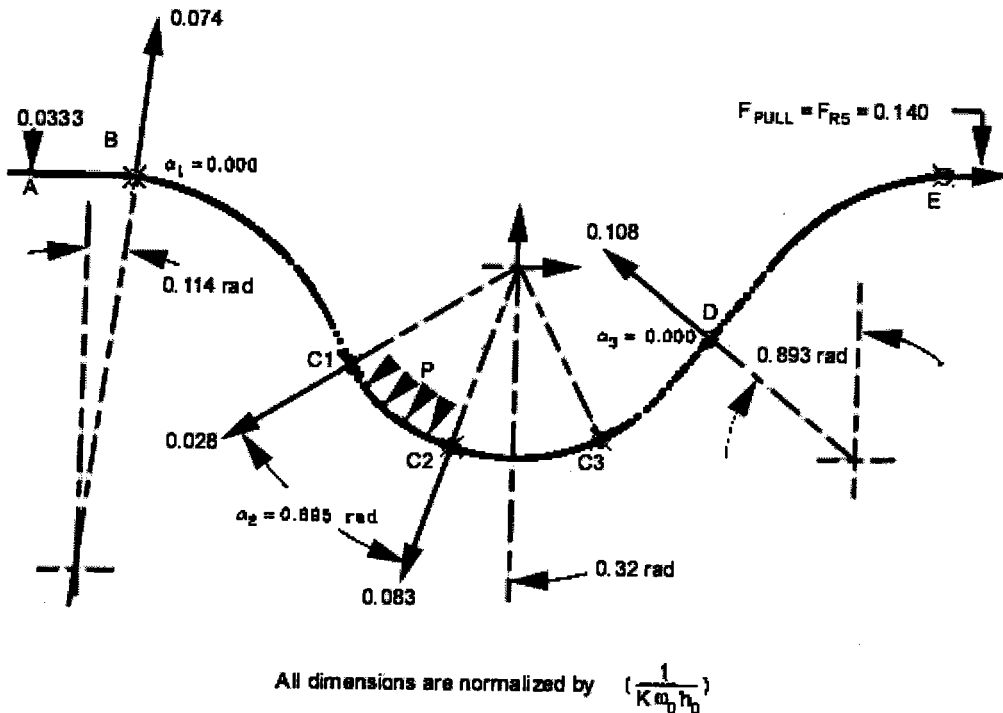


Figure I - 12 : Efforts et géométrie de la ligne moyenne déterminée analytiquement (Sanchez & Weinmann, 1996).

#### V - 4 - Modélisations basées sur le principe des travaux virtuels

Un certain nombre d'auteurs (Levy, 1983 ; Stoughton (1988) ; Meinders et al., 1999) ont développé des modélisations basées sur l'utilisation du principe des travaux virtuels, en égalant le travail des forces intérieures et extérieures. Les aspects analytiques du calcul sont souvent peu détaillés. Nous reprenons ici le calcul de la force de pliage développé par Meinders et al. (1999). Le moment nécessaire pour fléchir une bande d'épaisseur  $t$  le long d'un rayon  $R$  (Figure I - 13) est obtenu en intégrant les contraintes dans l'épaisseur :

$$M = 2 \int_0^{\frac{1}{2}t} \sigma_x y dy \quad (I-3)$$

La contrainte en déformation plane est donnée par :

$$\sigma_{ps} = \frac{2}{\sqrt{3}} C \varepsilon^n \quad (I-4)$$

où la déformation  $\varepsilon$  est donnée en fonction de la distance moyenne  $y$  à la surface moyenne par :

$$\varepsilon = \frac{u}{x} = \frac{y\theta}{\left(R + \frac{1}{2}t\right)\theta} \quad (I-5)$$

En combinant les équations (I-3), (I-4) et (I-5), le moment  $M$  est trouvé égal à :

$$M = \frac{4C}{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(R + \frac{1}{2}t\right)^n} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{2}t\right)^{n+2} \quad (I-6)$$

Le travail des forces intérieures,  $W_{int} = M\theta$ , est égal au travail de la force de pliage,  $W_{ext} = Fx$ , ce qui donne, avec la courbure  $\kappa = \theta/x = 1/(R + t/2)$ :

$$F = \frac{M\theta}{x} = \frac{4C}{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(R + \frac{1}{2}t\right)^{n+1}} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{2}t\right)^{n+2} \quad (I-7)$$

Le travail le plus explicite semble être celui de Stoughton (1988). Cet auteur a développé un modèle permettant de prévoir la force de serrage et la force de retenue à partir de la connaissance des propriétés mécaniques du matériau, de la géométrie du jonc et du coefficient de frottement avec les outils. Le principe de la modélisation consiste à égaliser le

travail de traction de la tôle à travers l'outillage, au travail de flexion de la tôle, augmenté du travail associé aux forces de frottement.

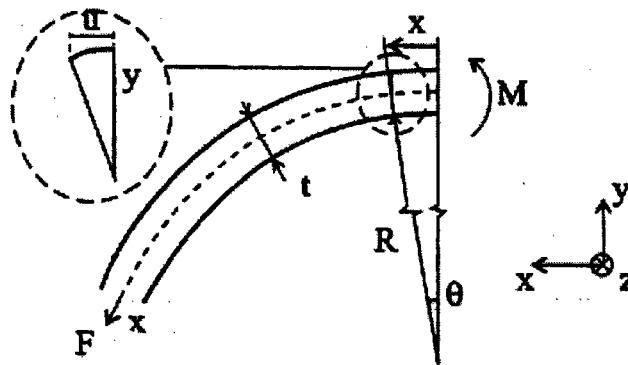


Figure I - 13 : Schéma du pliage d'une tôle servant au calcul de la force de flexion (Meinders & al., 1999).

### V - 5 - Modélisation de l'évolution des déformations et des efforts en pliage-étirage

Mc Clintock et al. (1993) ont analysé, à l'aide d'une modélisation de type coque, l'instabilité d'une plaque sous l'action d'un moment de flexion croissant et d'un effort de traction constant. L'atteinte d'un moment de flexion maximum donne lieu, selon les cas, à une instabilité en rotation ou à une striction.

Les calculs sont développés par Mc Clintock et al. (1993) dans l'hypothèse de déformation plane. Ces calculs s'appuient sur une description cinématique d'un incrément de flexion-traction, celui-ci donnant lieu à un incrément de courbure et à un incrément de déformation longitudinale de la fibre supérieure d'un élément de longueur de plaque (Figure I - 14). La plaque est discrétisée en un certain nombre de couches dans l'épaisseur. En s'appuyant sur l'hypothèse de Love-Kirchoff, il est alors possible de déterminer les incréments de déformation des différentes couches, tout en tenant compte de la variation d'épaisseur de ces dernières au travers de l'hypothèse d'incompressibilité élasto-plastique du matériau. Les efforts intérieurs (effort normal et moment de flexion) sont déterminés par intégration des contraintes dans l'épaisseur.

Nous reprendrons au Chapitre 3 le principe de la description cinématique utilisée par Mc Clintock et al. (1993) pour décrire l'histoire de chargement le long d'un jonc de retenue.

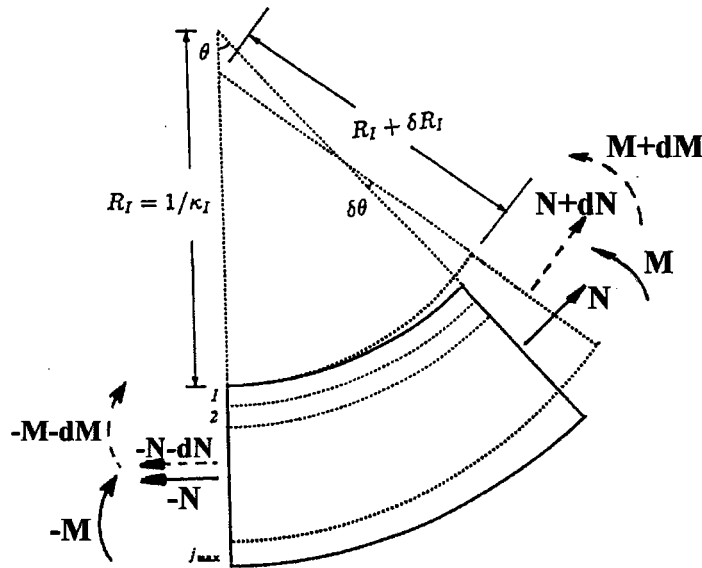


Figure I - 14 : Schéma d'un incrément de déformation plane pour une plaque en flexion-traction (Mc Clintock et al., 1993).

## VI - Conclusion

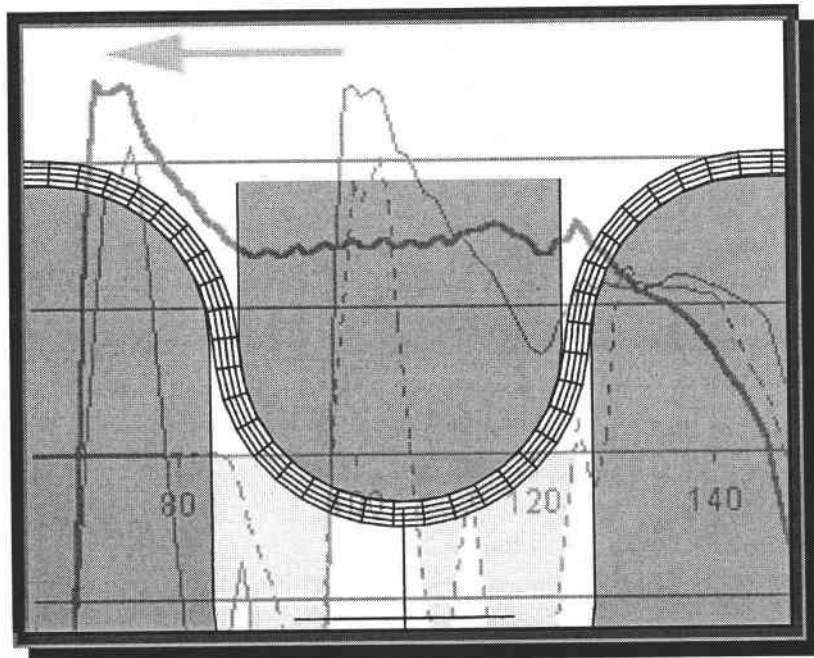
Les joncs de retenue constituent le moyen le plus simple d'assurer un contrôle de l'avancement de la tôle lors d'un emboutissage. De plus en plus d'études sont menées afin de faciliter son implantation dans des simulations numériques de grande envergure, ou plus simplement afin de comprendre ses effets sur la tôle elle-même.

Les modélisations des joncs de retenue, considérés isolément, apparaissent indispensables pour aboutir à des modèles de joncs équivalents susceptibles de diminuer de façon très importante les temps de calcul dans les simulations numériques de processus complets d'emboutissage. Deux ensembles de modélisations, associées soit à des simulations par éléments finis, soit à des approches analytiques spécifiques, ont été développés. Les validations de ces modélisations s'appuient largement sur les résultats expérimentaux obtenus grâce aux " simulateurs de joncs " proposés initialement par Nine (1978), et qui permettent de découpler les forces exercées par l'outillage, et particulièrement la force de retenue, en une composante de déformation et une composante de frottement. Il apparaît que les approches analytiques continuent à être développées, et n'ont donc pas été supplantées par les simulations par éléments finis. Le développement de programmes de calculs fiables, rapides et robustes, associés à des modélisations basées sur le principe des travaux virtuels ou sur des considérations d'équilibre, restent donc d'actualité.



## CHAPITRE II

### SIMULATIONS NUMÉRIQUES DE L'ÉCOULEMENT LE LONG D'UN JONC DE RETENUE



## Chapitre 2 : Simulations numériques de l'écoulement le long d'un jonc de retenue

### I - Introduction

Ce chapitre a pour but d'analyser, à l'aide de simulations numériques, le processus d'écoulement le long d'un jonc de retenue. Nous nous intéressons à l'ensemble des variables locales (contraintes, déformations) et globales (forces), ainsi qu'à l'histoire de chargement subie par les différents points dans l'épaisseur de la tôle au cours de l'écoulement.

Les simulations numériques sont effectuées à l'aide du code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard. Nous analysons particulièrement les influences de l'enfoncement du jonc et du frottement, ce qui nous conduit à comparer les résultats de quatre simulations : deux valeurs d'enfoncement différentes et deux cas de contact avec les outils (sans et avec frottement). Les résultats de ces simulations, coûteuses en temps de calcul, serviront en particulier d'éléments de comparaison pour la mise au point et la validation des modélisations analytiques développées au Chapitre 3.

### II - Définition des essais simulés

#### II - 1 - Géométrie

Les outils se composent d'une matrice fixe, d'un serre-flan et d'un jonc de retenue (Figure II - 1). Le rôle du serre-flan, dans notre cas, consiste uniquement à empêcher le soulèvement de la tôle à son extrémité, et non pas à y appliquer un serrage quelconque. Il n'y a d'ailleurs pas de matière en vis-à-vis au niveau de la matrice, ce qui évite tout problème de ce genre.

La géométrie reprend la valeur de rayon pour le jonc et les épaulements ( $R = 5,5$  mm) utilisée par Nine (1978). La distance entre les rayons d'épaulement est de 24 mm, ce qui correspond à un jeu de 1 mm laissé au passage de la tôle dans le cas de l'enfoncement maximum ( $H = 11$  mm).

La tôle a une épaisseur de 0,84 mm pour une largeur de 50 mm. Sa longueur doit être suffisante pour permettre aux points matériels de la tôle situés à l'entrée du premier épaulement de la matrice, après descente du jonc, de passer complètement à travers les outils, de façon à étudier le régime d'écoulement stationnaire. Nous avons utilisé une longueur de 150 mm.

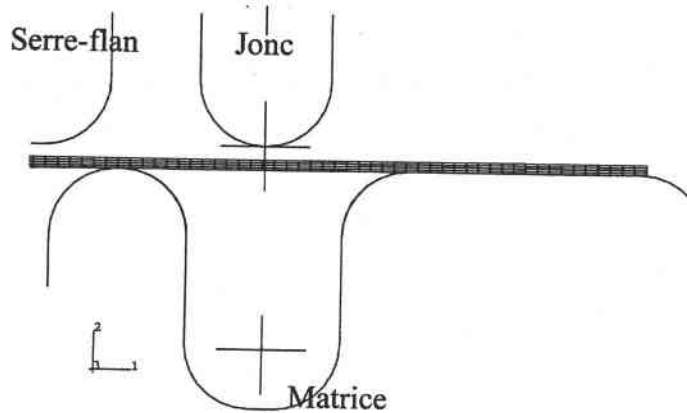


Figure II - 1 : Schéma de la géométrie de l'outillage.

## II - 2 - Loi de comportement du matériau

Nous considérons un matériau élastiquement et plastiquement isotrope. Nous choisissons des valeurs des constantes mécaniques caractéristiques d'un acier. Les caractéristiques élastiques sont les suivantes:

Module d'Young :  $E = 211000$  MPa ; coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$ .

Le critère de plasticité choisi est celui de von Mises. Il est utilisé avec l'hypothèse d'écrouissage isotrope. Le matériau satisfait la relation de Ramberg-Osgood:  $\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{K}\right)^{1/n}$ , où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}$  désignent respectivement la contrainte et la déformation équivalentes, et  $n$  l'exposant d'écrouissage. Les valeurs numériques utilisées sont :  $n = 0,223$  ;  $K = 513$  MPa.

La valeur de limite élastique en traction ou compression uniaxiale est définie par l'intersection des deux lois :  $\varepsilon = \sigma / E$  et  $\varepsilon = (\sigma / K)^{1/n}$ . Elle est de 91,3 MPa.

## II - 3 - Contact avec les outils

Le frottement tôle/outils est de type Coulomb. Nous prendrons  $\mu = 0$  dans le cas de l'étude sans frottement, et  $\mu = 0,1$  dans celui de l'étude avec frottement. Dans ce dernier cas, seul le frottement entre la tôle et le jonc et entre la tôle et les épaulements de la matrice est pris en compte. Nous prenons un frottement nul au contact avec le serre-flan, considéré comme extérieur à l'élément d'outillage étudié.

### III - Mise au point des simulations numériques

#### III - 1 - Programmation des différentes étapes de chargement

Le processus d'emboutissage s'effectue en plusieurs étapes successives :

- Étape 1 : Le serre-flan descend au contact de la tôle. Il a pour unique rôle de guider celle-ci en l'empêchant de se relever pendant tout le processus.
- Étape 2 : Le jonc descend et déforme la tôle, alors que l'extrémité droite de cette dernière est maintenue fixe. Le jonc sera ensuite maintenu en position durant tout le processus.
- Étape 3 : La tôle passe à travers les outils par un déplacement imposé de l'extrémité droite de la tôle. Le déplacement imposé est de 60 mm, ce qui permet aisément d'atteindre l'état d'écoulement stationnaire de la tôle.

Les calculs sont effectués dans l'hypothèse d'un processus quasi-statique, aussi bien pour la descente des outils que pour la traction de la tôle. Nous ne prenons donc pas en compte les effets de la masse, de la vitesse ou de l'accélération de la tôle.

Pendant le calcul, nous obtenons les résultats suivants :

- Au niveau de la tôle: les déformations, les déformations plastiques cumulées, les contraintes, la contrainte de von Mises, les coordonnées de chaque nœud et les forces de traction exercées à l'extrémité droite de la tôle.
- Au niveau des outils: les forces exercées sur le jonc et sur le serre-flan.

La troisième étape nous intéressera plus particulièrement, puisque nous y récupérerons toutes les données concernant la tôle tout au long de son parcours.

#### III - 2 - Modélisation par éléments finis

Les outils sont modélisés par des surfaces rigides, indéformables. La tôle est définie par plusieurs rangées d'éléments dans son épaisseur. Quant à la direction longitudinale, nous y avons placé un nœud tous les millimètres.

Nous supposons que le processus d'écoulement a lieu dans des conditions de déformation plane. Nous utiliserons donc des éléments gérant celle-ci.

Nous avons testé trois types d'éléments quadrangulaires pour le maillage de la tôle : les éléments CPE4, qui sont des éléments bilinéaires à 4 nœuds ; les éléments bilinéaires à 4 nœuds et à modes incompatibles CPE4I ; et les éléments quadratiques à 8 nœuds et à intégration réduite CPE8R.

Le Tableau II - 1 montre les valeurs de force de retenue et de force de serrage obtenues avec, soit 149 x 4 éléments CPE4 ou CPE4I selon la longueur de la tôle, soit 75 x 2 éléments CPE8R. Nous obtenons des valeurs de forces proches avec les éléments CPE4I et CPE8R ; elles sont en revanche beaucoup plus élevées avec les éléments CPE4. Après recoupement avec des résultats expérimentaux de la littérature correspondant à des géométries et des caractéristiques de matériau proches de celles utilisées ici, il apparaît très clairement que les résultats obtenus avec les éléments CPE4 sont erronés. Ceci recoupe la remarque faite dans les manuels Abaqus Standard (1998), selon laquelle un raidissement artificiel des éléments CPE4 risque d'être obtenu en flexion, en raison de contraintes de cisaillement parasites générées dans ces éléments.

Éléments	Force de retenue	Force de serrage
CPE4	4100 N	4000 N
CPE4I	3100 N	2700 N
CPE8R	2900 N	2700 N
Force de retenue expérimentale (Nine) : 3100 N		

Tableau II - 1 : Forces obtenues avec différents éléments, en fort enfoncement, sans frottement.

Notre choix s'est donc finalement porté sur les simulations avec des éléments CPE4I. Le nombre de rangées d'éléments en épaisseur a été choisi égal à 4. En effet, les résultats ne varient pratiquement pas de 3 à 4 rangées, mais dans ce dernier cas, nous avons l'avantage d'avoir directement des résultats au milieu de la tôle.

#### IV - Analyse des résultats

Nous reportons ici les résultats des simulations pour quatre cas de conditions aux limites :

- pour un fort enfoncement du jonc de retenue, où la tôle épouse complètement le rayon des outils. L'enfoncement choisi est  $H = 11$  mm. Il correspond à un alignement des centres du jonc et des épaulements de la matrice. C'est le cas de figure conduisant aux déformations et aux efforts les plus importants.
- pour un faible enfoncement du jonc de retenue ( $H = 5,5$  mm), où la tôle est beaucoup moins déformée, et les efforts sensiblement moins importants.

Ces deux cas sont étudiés dans les hypothèses de contacts sans frottement ( $\mu = 0$ ) et avec frottement ( $\mu = 0,1$ ).

Sur tous les schémas représentant la géométrie de l'ensemble tôle/outils, les numéros portés près de la tôle correspondent aux numéros de nœuds de la face inférieure de la tôle. Cette numérotation est commune aux courbes de résultats exposées, ce qui nous permet un repérage aisé tout le long de la tôle.

#### IV - 1 - Comportement transitoire

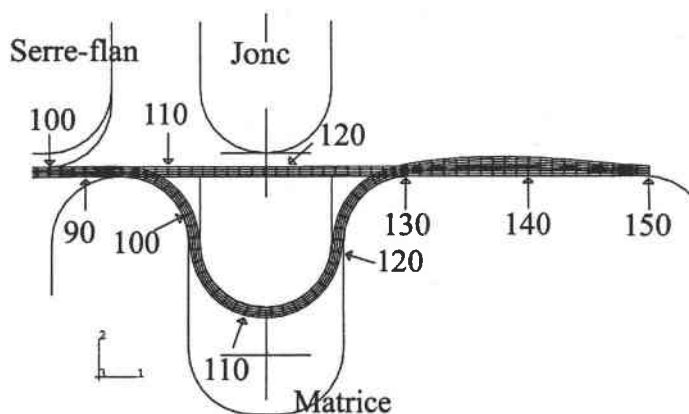
Nous étudierons ici les évolutions constatées au cours de la troisième étape de chargement : après la descente du jonc, la tôle subit alors un déplacement à travers l'outillage. La partie correspondant à l'établissement du régime stationnaire est analysée ici.

##### IV - 1 - 1 - Cas d'un fort enfoncement

C'est le cas le plus contraignant pour la tôle. Les centres des épaulements de la matrice sont alignés avec le centre du jonc. Le jeu tôle/outil est très faible (0,16 mm) : la tôle est obligée d'épouser complètement le contour des outils.

#### Géométrie

La Figure II - 2 montre les outils et la tôle avant et après la descente du jonc. La tôle est maintenue à son extrémité droite lors de la descente du jonc. La double numérotation des nœuds sur cette figure nous permet d'estimer le déplacement de la tôle pendant la descente du jonc. Les chiffres sur la partie supérieure correspondent aux numéros de nœuds de la tôle en position initiale, ceux sur la partie inférieure à la position après enfoncement. Nous pouvons aussi noter une légère élévation de la tôle au niveau de sa partie droite, due aux forces en présence.



**Figure II - 2 : Géométrie de la tôle et des outils avant et après descente du jonc.**

**La tôle est bloquée à son extrémité droite pendant la phase de descente du jonc.  
Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.**

La Figure II - 3 représente la tôle à la fin de la troisième étape, après la traction de la tôle. La remontée de la tôle à ce niveau est beaucoup plus faible en raison de l'effort de traction important appliqué en sortie de jonc. Les résultats en fin de traction ne seront donc pas différents de ceux que nous aurions avec un serre-flan en sortie d'outillage.

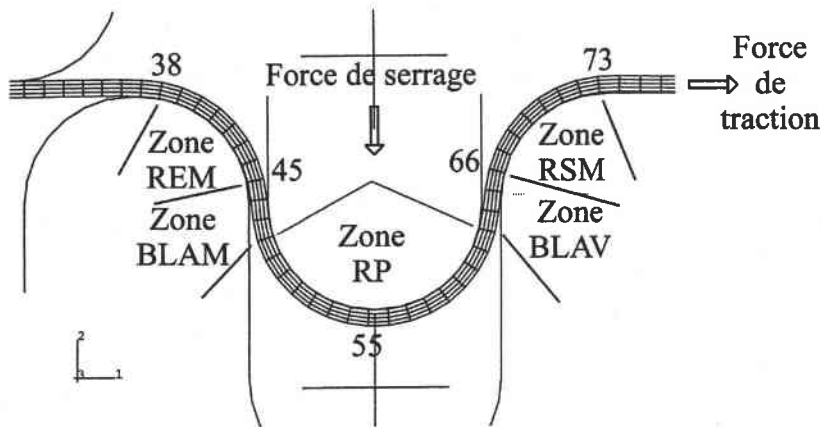


Figure II - 3 : Géométrie de la tôle et des outils en fin de traction de la tôle.

Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.

Nous distinguons sur la Figure II - 3 plusieurs zones utiles pour l'analyse des résultats, zones que nous noterons de la façon suivante :

Zone d'Entrée	
Zone de Rayon d'Entrée Matrice	(REM)
Zone de Brin Libre Amont	(BLAM)
Zone du Rayon du Jonc	(RJ)
Zone de Brin Libre Aval	(BLAV)
Zone de Rayon de Sortie Matrice	(RSM)
Zone de Sortie	

### Forces

La Figure II - 4 montre les évolutions des forces de traction, de serrage et du serre-flan pendant la phase de traction de la tôle, dans le cas de contacts sans frottement. La force de traction est la force nécessaire à appliquer à la tôle pour la faire circuler le long du jonc. Elle équivaut donc à la force de retenue lors d'un emboutissage. Les forces de serrage et de serre-flan permettent respectivement au jonc et au serre-flan de rester au même niveau tout au long du processus (ceux-ci étant bloqués en déplacement).

La force de traction augmente rapidement pour atteindre environ 2900 N en début de traction, puis parvient à la valeur stabilisée  $D_s \approx 3100$  N à partir de 25 mm de déplacement. De même, la force de serrage arrive à une valeur stabilisée,  $C_s$ , d'environ 2800 N vers 25 mm de déplacement. On notera que le déplacement prévu pour atteindre un état d'écoulement stationnaire est égal à  $2\pi R \approx 34,5$  mm, ce qui est cohérent par rapport aux simulations. En ce qui concerne la force au niveau du serre-flan, elle est constante et sensiblement égale à 350 N.

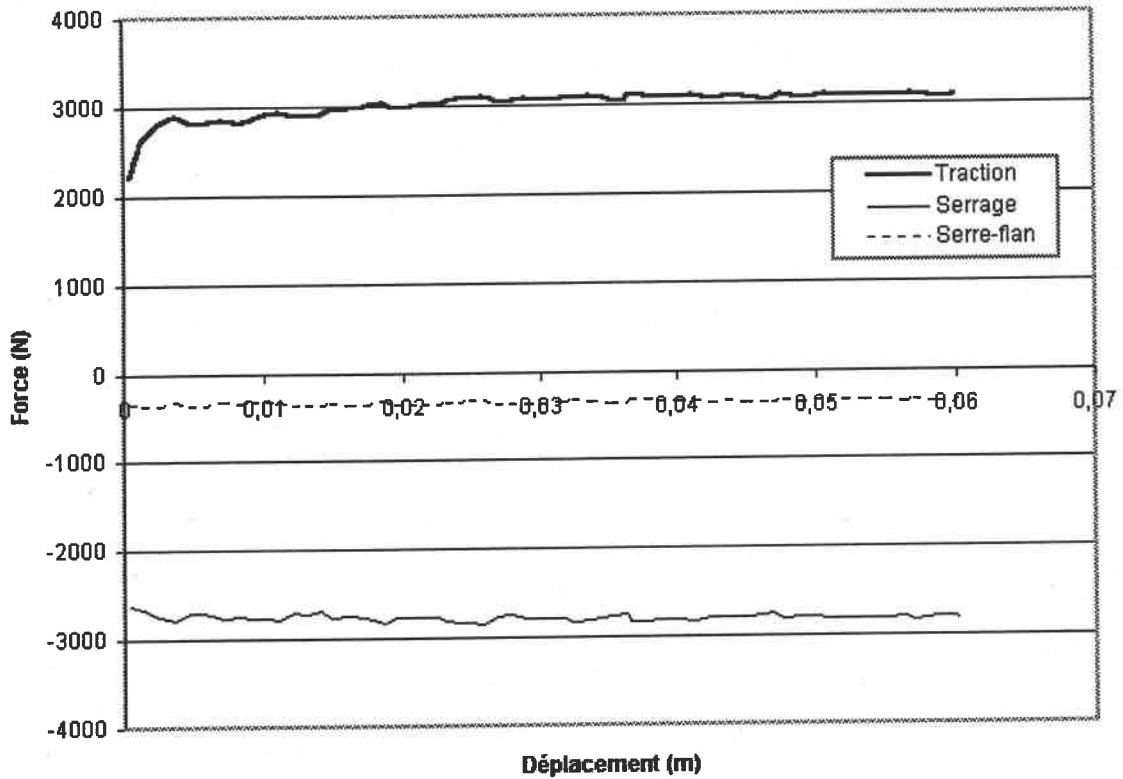


Figure II - 4 : Évolution des forces de traction, de serrage et de serre-flan pendant la traction de la tôle. Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.

### Contraintes/Déformations

La Figure II - 5 et la Figure II - 6 montrent l'évolution des contraintes et des déformations le long de la tôle pour la fibre inférieure pendant la phase de traction.

Chaque courbe correspond à un état de contrainte ou de déformation le long de la tôle à un moment donné de la traction (0,3 ; 30 et 60 mm). Nous avons là des figures nous renseignant sur l'évolution des variables pour une position donnée le long de l'outillage. A cette fin, et dans un souci de clarté, nous avons mis en grisé sur les Figure II - 5 et Figure II - 6 une zone facilement identifiable, correspondant sensiblement au contact avec le jonc. Nous retrouvons cette zone grisée tout au long du processus. Nous nous apercevons que les contraintes dans cette zone sont légèrement plus faibles en début de traction, et qu'une fois l'écoulement stationnaire atteint, elle n'évolue plus mais "glisse" le long du graphe. Le domaine transitoire se termine dans notre cas après une traction d'environ 30 mm. L'évolution des déformations (Figure II - 6) est nettement moins sensible que celle des contraintes durant la phase transitoire.



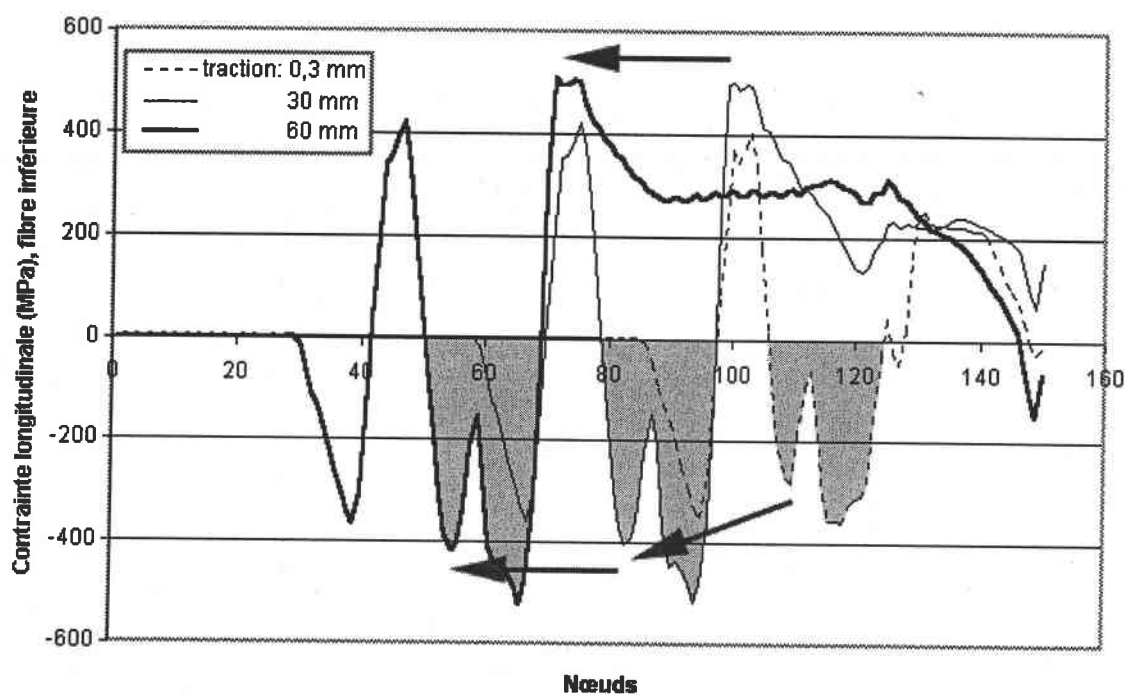


Figure II - 5 : Évolution de la contrainte longitudinale pendant la traction de la tôle.  
Fibre inférieure - Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.

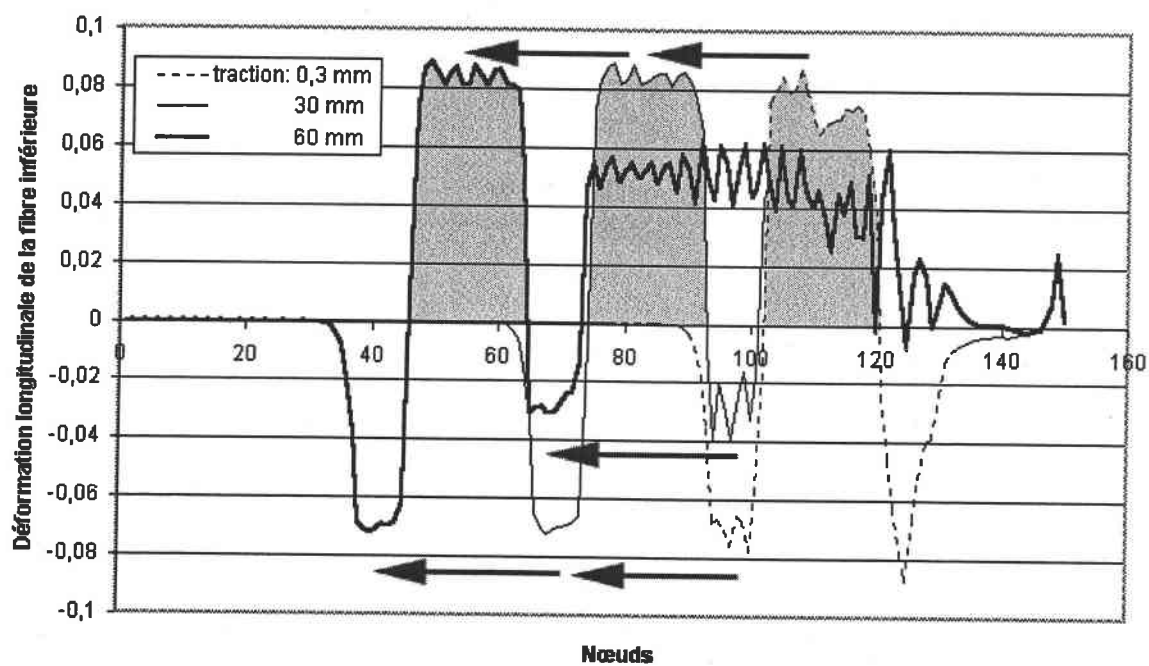


Figure II - 6 : Évolution de la déformation longitudinale pendant la traction de la tôle.  
Fibre inférieure - Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.

#### IV - 1 - 2 - Cas d'un faible enfoncement

C'est le cas le plus usité en emboutissage industriel (un enfoncement trop fort risque d'endommager la tôle alors qu'un trop faible ne justifie pas l'utilisation d'un jonc de retenue). L'enfoncement du jonc dépend de la force de retenue voulue en sortie de jonc. Dans notre cas, nous utilisons un enfoncement de 5,5 mm, c'est-à-dire deux fois moins important que dans le cas précédent.

##### *Géométrie*

La Figure II - 7 montre la géométrie de la tôle après descente du jonc et après traction de la tôle. L'absence de serre-flan en sortie, associée à une force de traction moins importante que dans le cas d'un fort enfoncement, impliquerait une remontée de la tôle en sortie de jonc importante après traction. C'est pourquoi nous avons effectué les simulations définitives en plaçant également un serre-flan en sortie d'outillage.

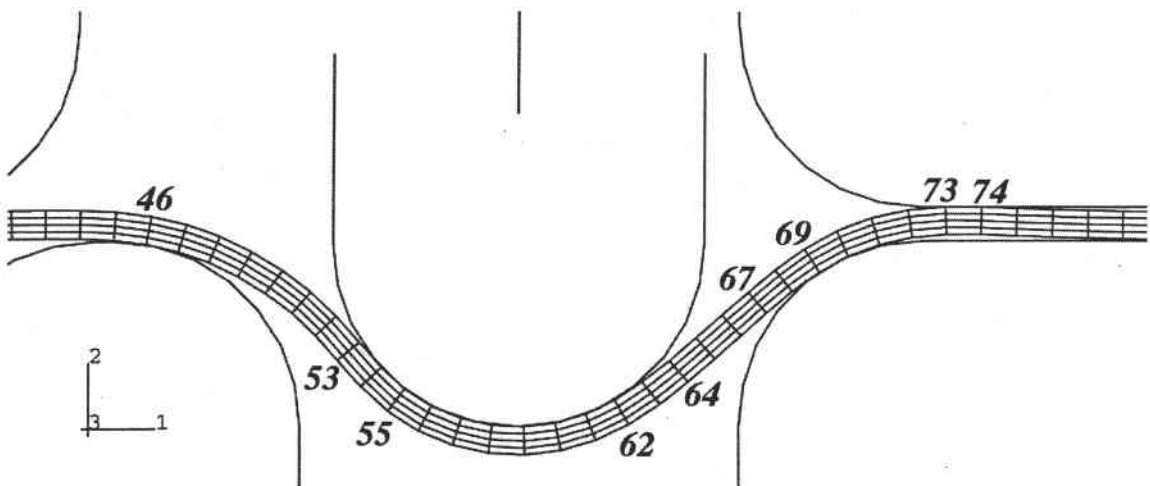


Figure II - 7 : Géométrie de la tôle et des outils en fin de traction de la tôle en faible enfoncement.

Cas d'un faible enfoncement, contacts sans frottement.

##### *Forces*

Les évolutions de la force de traction et de la force de serrage exercée par le jonc pendant la phase de traction de la tôle sont reportées sur la Figure II - 8. La stabilisation des forces est observée après environ 33 mm de déplacement. On note alors un pic de force avant stabilisation (vers 5 mm de déplacement), comme cela avait été observé par Cao et Boyce (1993) pour les faibles enfoncements. L'atteinte de la stabilisation est aussi plus lente que dans le cas d'un fort enfoncement. L'évolution de la forme de la tôle, et donc des rayons de courbure effectifs, doit jouer un rôle dans le comportement transitoire. La Figure II - 7 confirme d'ailleurs une forte dissymétrie du profil de la tôle après traction, alors que la symétrie est quasi parfaite avant le processus de traction. On observe en effet un Brin Libre AVAl de forme beaucoup plus rectiligne que le Brin Libre AMont, en raison de la force de traction plus importante agissant sur le Brin Libre AVAl.

Les valeurs stabilisées de la force de traction, de serrage, du serre-flan d'entrée et du serre-flan de sortie sont respectivement de 2450 N, 1775 N, 350 N et 1900 N.

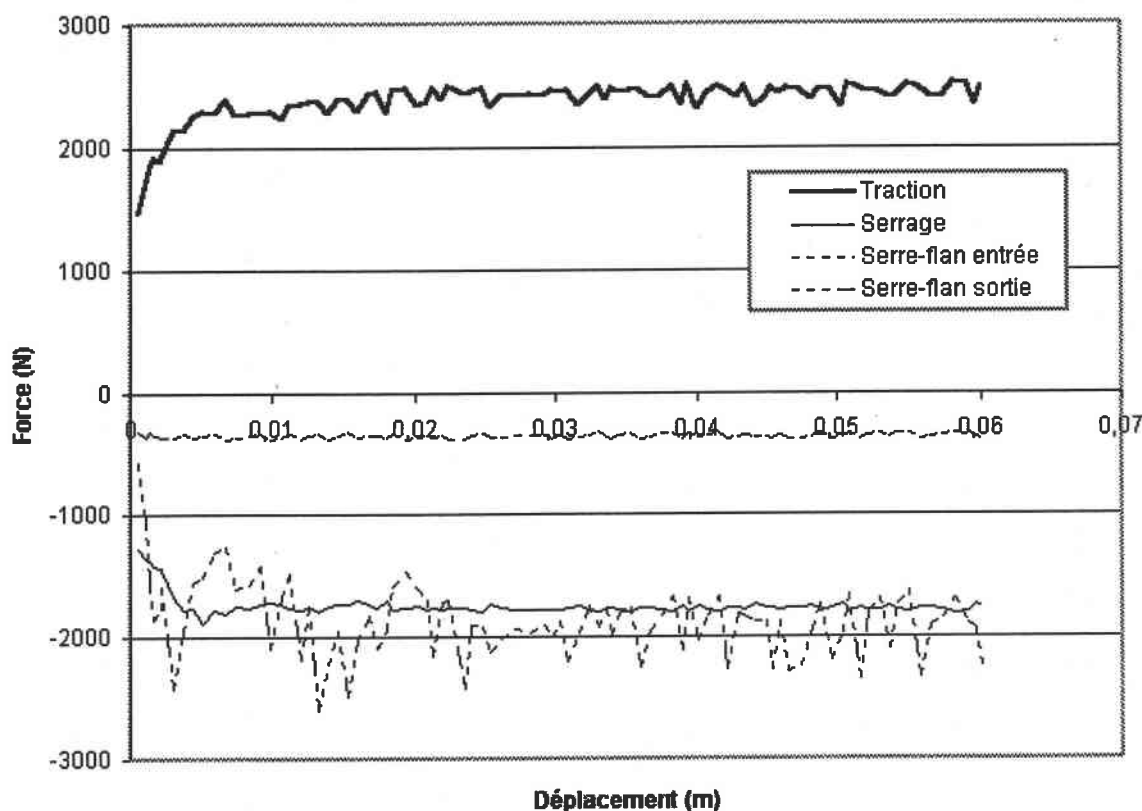


Figure II - 8 : Évolution des forces de traction, de serrage et de serre-flan pendant la phase de traction de la tôle, en faible enfoncement sans frottement.

### Contraintes/Déformations

L'évolution des contraintes et des déformations en faible enfoncement suivent le même processus qu'en fort enfoncement : c'est-à-dire une augmentation des contraintes et des déformations dans la phase transitoire, puis une stagnation en phase stationnaire.

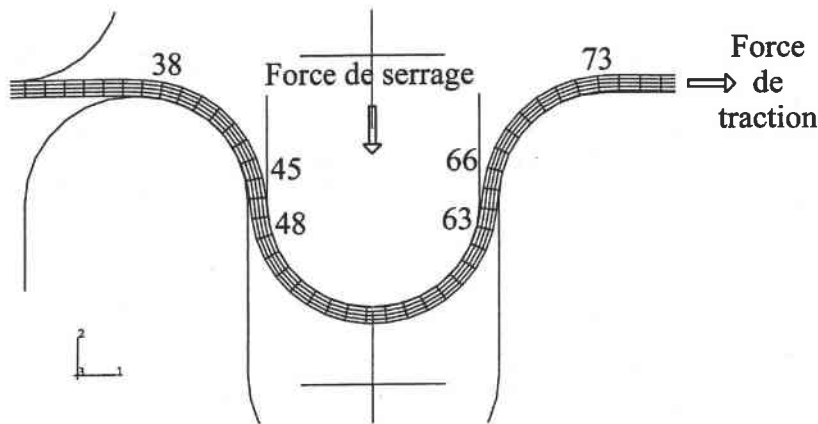
## IV - 2 - Comportement stationnaire

L'écoulement est devenu stationnaire en fin de traction de la tôle. Nous pouvons alors nous contenter d'examiner les valeurs obtenues en fin de traction aux différents nœuds le long de la tôle. Ces valeurs représentent de façon équivalente l'évolution temporelle pour un point matériel subissant le parcours le long des outils, et cela pour chaque position dans l'épaisseur de la tôle.

#### IV - 2 - 1 - Cas d'un fort enfoncement

##### *Géométrie*

La Figure II - 9 montre la géométrie de l'ensemble outillage plus tôle en fin de traction de la tôle. Nous avons repéré sur cette figure les numéros de nœuds définissant les différentes zones déterminées précédemment. Du fait du faible jeu laissé entre les outils, la tôle est contrainte d'épouser complètement les rayons d'outils.



**Figure II - 9 : Géométrie du maillage déformé après traction de la tôle.  
Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.**

##### *Déformations*

La Figure II - 10 représente les déformations longitudinales  $\varepsilon_{11}$  obtenues pour les fibres extrêmes et la fibre médiane de la tôle.

Les pliages et dépliages successifs de la tôle sont clairement visibles. Nous pouvons observer une succession de déformations importantes, suivies de paliers où la déformation est stabilisée. La fibre médiane a pour particularité de subir des déformations s'accumulant toujours dans le même sens. Ceci traduit un allongement monotone, alors que les autres fibres subissent en plus une succession de tractions et de compressions le long de la tôle.

Les zones de déformation importante s'identifient alors à la zone d'entrée (entre les nœuds 36 et 38), à la zone BLAM (entre les nœuds 45 et 48), à la zone BLAV (entre les nœuds 63 et 66) et à la zone de sortie (entre les nœuds 73 et 75) (voir Figure II - 9 pour l'emplacement des nœuds). Les valeurs successives des paliers de déformations pour la fibre médiane sont égales à  $\varepsilon_{11} \approx 0,0046$  (zone REM) ; 0,020 (zone RJ) ; 0,043 (zone RSM), et 0,052 en sortie de jonc.

Entre ces zones de forte variation des déformations, nous observons une quasi stabilité des déformations sur les zones de contact avec les outils (zones REM, RJ et RSM). L'amplitude du gradient de déformation en épaisseur dans ces zones est quasiment constant ( $\Delta\varepsilon_{11} \approx 0,14$  ; 0,14 et 0,13 respectivement), ce qui traduit le fait que la tôle épouse les rayons d'outils. Un calcul simple prenant en compte les déformations logarithmiques permet de vérifier ce résultat.

Les points d'inflexion de la tôle sont également clairement visibles au niveau des nœuds 46 (zone BLAM) et 64 (zone BLAV), où les déformations sont uniformes dans l'épaisseur. De même, un allongement uniforme est retrouvé en sortie des outils.

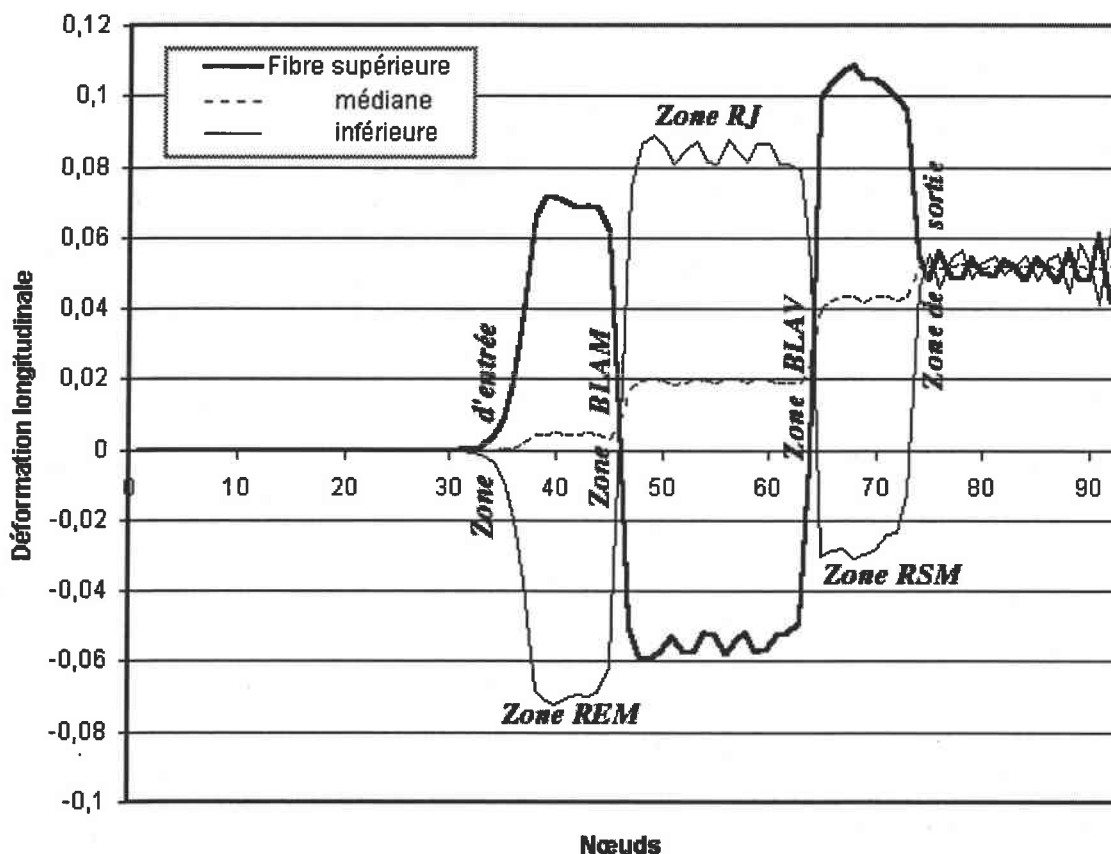


Figure II - 10 : Déformation longitudinale en fin de traction de la tôle, en fort enfoncement sans frottement.

Sur la Figure II - 11 sont portées les déformations plastiques équivalentes des fibres extrêmes et médiane. Nous observons que la déformation plastique a lieu dans des zones bien délimitées, correspondant à la zone d'entrée (entre les nœuds 36 et 38), à la zone BLAM (entre les nœuds 45 et 48), à la zone BLAV (entre les nœuds 63 et 66) et à la zone de sortie (entre les nœuds 73 et 75). Ces zones coïncident exactement avec les zones de forte variation des déformations longitudinales préalablement identifiées.

Ainsi, les zones correspondant aux contacts avec les outils ne subissent pas de déformation plastique. Les « quasi paliers » de déformation totale observés au niveau des

outils (Figure II - 10) correspondent en fait à des zones de décharge/recharge élastique dans le cyclage élasto-plastique subi par la tôle, comme nous allons le voir ci-après.

On peut noter que la déformation équivalente de la fibre médiane au niveau des paliers de déformation (respectivement  $\bar{\varepsilon} \approx 0 ; 0,0076 ; 0,021$  et  $0,026$ ) est très largement inférieure aux valeurs de déformation longitudinale correspondantes (respectivement  $\varepsilon_{11} \approx 0,0046 ; 0,020 ; 0,043$  et  $0,052$ ). On s'attendrait en fait, compte tenu de la monotonie de la déformation subie par la fibre médiane, à une déformation équivalente en traction plane égale à :  $\bar{\varepsilon} = (2/\sqrt{3}) \varepsilon_{11} \approx 0,06$  en sortie de jonc au lieu de  $0,026$ . Le résultat concernant la déformation équivalente de la fibre médiane est manifestement erroné, mais nous n'avons pas trouvé d'explication à ce résultat. Inversement, la déformation équivalente de la fibre médiane est beaucoup trop forte lorsqu'on utilise des éléments CPE4 classiques ( $\bar{\varepsilon} \approx 0,19$ ), alors que par ailleurs, les déformations équivalentes des fibres extrêmes sont proches avec les deux types d'éléments.

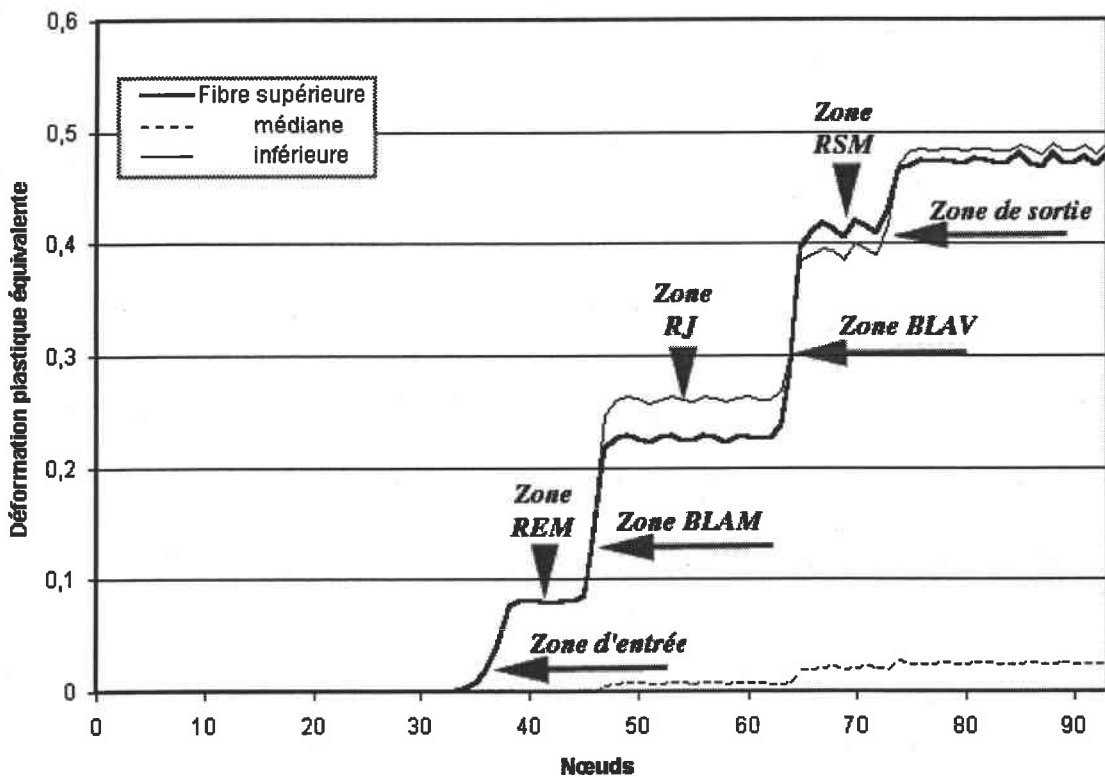


Figure II - 11 : Déformation plastique équivalente en fin de traction, en fort enfoncement sans frottement.

Les déformations de glissement  $\varepsilon_{12}$  se situent entre des valeurs allant de  $-0,02$  à  $0,02$ . Les contraintes de cisaillement  $\sigma_{12}$  restent inférieures à  $20$  MPa, sauf au niveau de la zone d'entrée où un pic d'environ  $40$  MPa est observé, et au niveau du Rayon Sortie Matrice où l'on atteint un pic d'environ  $55$  MPa. Ces contraintes considérées isolément sont inférieures à la limite élastique du matériau.

### Contraintes – cycles contraintes déformations

Les contraintes longitudinales  $\sigma_{11}$  pour les fibres extrêmes et médiane sont reportées sur la Figure II - 12. Si l'on néglige l'influence des contraintes  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$ , il est possible d'identifier les zones de chargement élasto-plastique sur cette figure, sachant que la limite élastique de traction plane est égale à :  $(2/\sqrt{3})\sigma_E \approx 105$  MPa, et que l'écroutissage du matériau est supposé isotrope. Nous retrouvons à nouveau les quatre zones correspondant à la zone d'entrée, à la zone BLAM, à la zone BLAV et à la zone de sortie. Nous notons également un comportement de décharge/recharge élastique non monotone sur le rayon du jonc, au voisinage des nœuds 55-60. Nous n'avons cependant pas d'explication sur ce comportement.

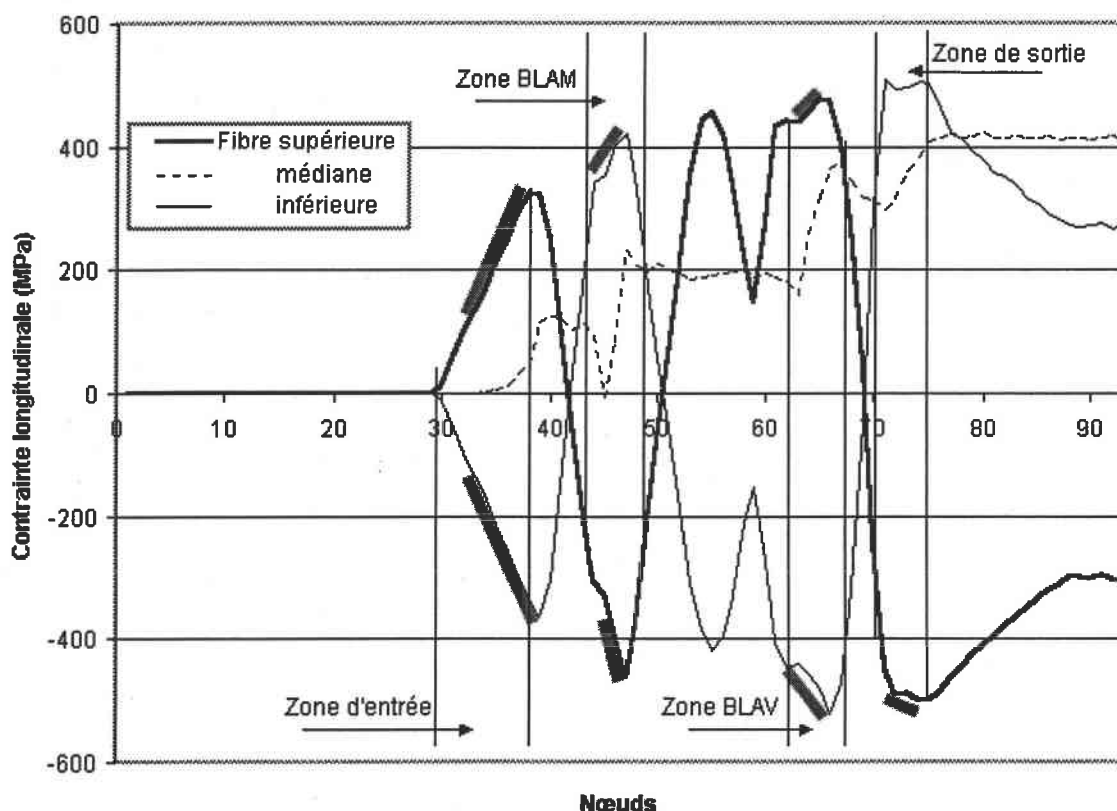


Figure II - 12 : Contrainte longitudinale en fin de traction, en fort enfoncement sans frottement.

Les portions de courbes grisées représentent les zones de chargement élasto-plastique.

Il est intéressant de tirer profit de la stationnarité de l'écoulement pour analyser le cyclage subi par les différentes fibres de la tôle, et ceci en reportant les couples de valeurs  $(\sigma_{11}, \varepsilon_{11})$  obtenus pour les différents nœuds en fin de traction. Les Figure II - 13, Figure II - 14 et Figure II - 15 représentent les courbes ainsi obtenues pour les différentes fibres. Ces courbes résument parfaitement les séquences de chargement subies par la tôle, et serviront d'élément de comparaison pour la validation de la modélisation analytique.

En dépit de la qualité moyenne des graphes obtenus en joignant les points représentatifs des nœuds successifs, il apparaît très clairement pour les fibres extrêmes que les zones situées sur les rayons d'outils subissent une décharge élastique suivie d'une recharge de signe opposé. Ce processus correspond à un passage progressif de l'état de contraintes en fin de la zone élasto-plastique amont à celui en début de la zone élasto-plastique aval. Les zones en chargement plastique sont alors retrouvées, en accord avec les analyses précédentes. Notons que nous retrouvons sur cette figure le comportement de décharge/recharge élastique non monotone sur le rayon du jonc, au voisinage des nœuds 55-60. La fibre moyenne subit quant à elle un chargement de traction, avec quelques zones de décharge élastique partielle.

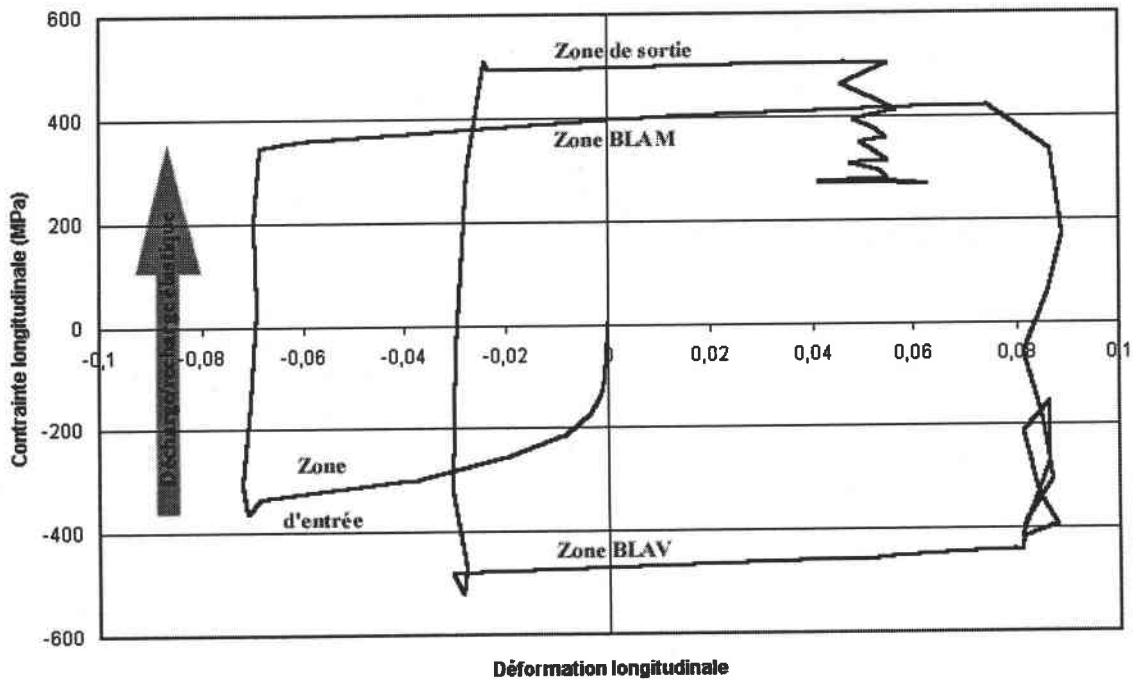


Figure II - 13 : Cycle  $(\sigma_{11}, \varepsilon_{11})$  en fin de traction pour la fibre inférieure, cas d'un fort enfoncement sans frottement.

Une autre manière de visualiser l'évolution du chargement de la tôle consiste à porter la contrainte équivalente de von Mises,  $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ , en fonction de la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}$  (Figure II - 16). Ainsi, l'enveloppe supérieure des points représente la courbe d'écroutissage  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ . Seuls les nœuds dont les points représentatifs sont situés sur cette courbe (en pratique, à proximité de cette courbe, compte tenu des erreurs sur le calcul des contraintes) correspondent à des zones en chargement plastique. On vérifie encore qu'il s'agit des zones précédemment identifiées. On s'aperçoit à nouveau que les résultats de déformation équivalente pour la fibre médiane sont erronés, la courbe  $(\sigma_{VM}, \bar{\varepsilon})$  étant largement au dessus de la courbe d'écroutissage  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  définie pour le matériau.



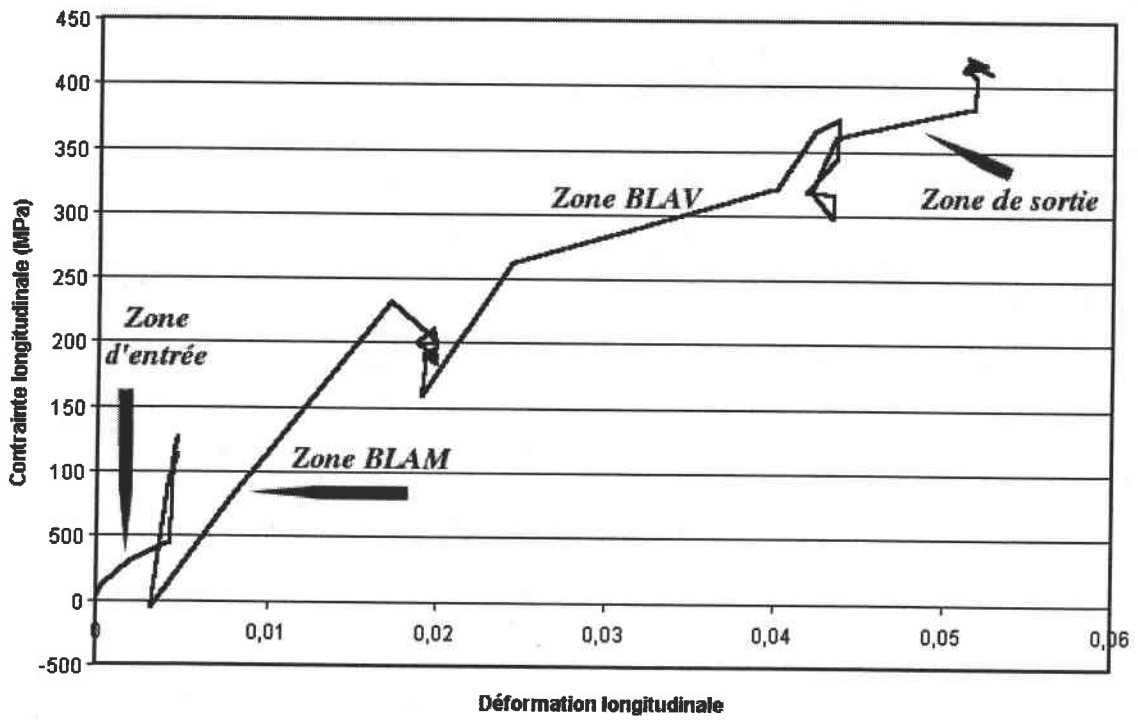


Figure II - 14 : Cycle ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) en fin de traction pour la fibre médiane, cas d'un fort enfoncement sans frottement.

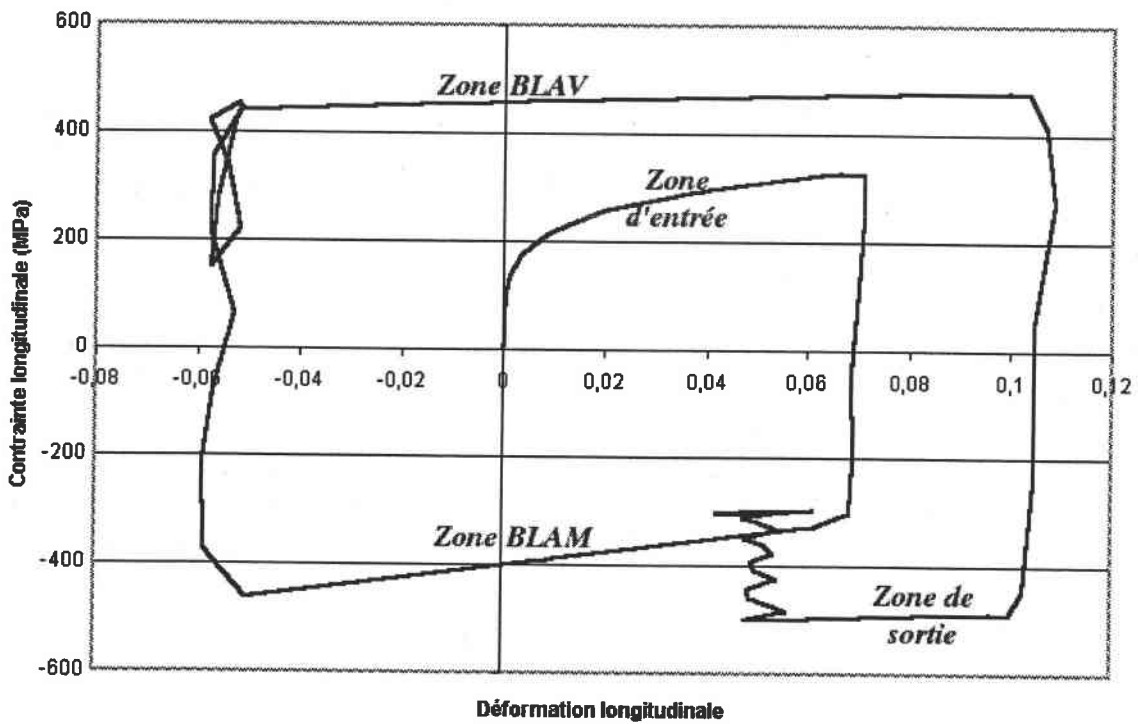


Figure II - 15 : Cycle ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) en fin de traction pour la fibre supérieure, cas d'un fort enfoncement sans frottement.

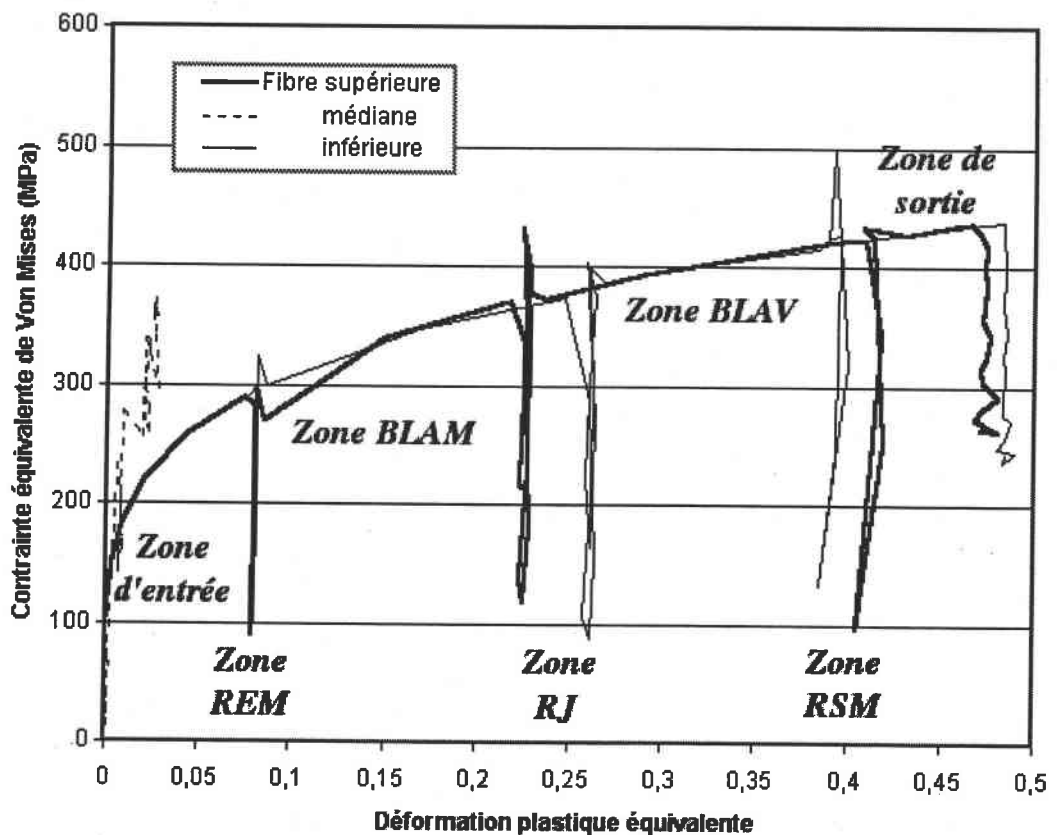


Figure II - 16 : Courbes  $(\sigma_{VM}, \bar{\varepsilon})$  en fin de traction, en fort enfoncement sans frottement.

#### IV - 2 - 2 - Cas d'un faible enfoncement

##### Géométrie

Dans ce cas, la descente du jonc de retenue est deux fois moins importante que dans le cas d'un fort enfoncement. La tôle est alors libre de ne pas épouser complètement le jonc, et le jeu tôle/outil est important. Un serre-flan est placé à la sortie du jonc, permettant d'obtenir un plaquage de la tôle sur l'épaulement de la matrice, et ceci afin d'éviter un soulèvement trop important de la tôle.

Nous observons sur la Figure II - 17 une dissymétrie au niveau des zones BLAM et BLAV qui n'était pas visible en fort enfoncement. La zone allant des nœuds 46 à 53 est en arc de cercle, alors que la zone médiane du brin libre (nœuds 64 à 67) est quasiment rectiligne du fait de la force de traction plus importante vers la sortie.

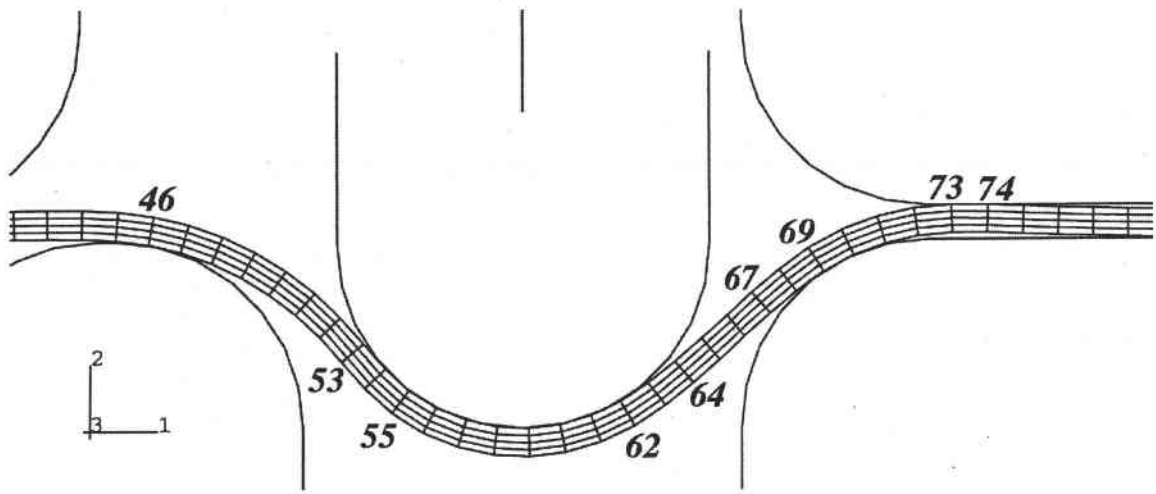


Figure II - 17 : Géométrie du maillage déformé après traction de la tôle. Cas d'un faible enfoncement, contacts sans frottement.

### Déformations

Sur la Figure II - 18, représentant l'évolution des déformations longitudinales  $\varepsilon_{11}$ , nous retrouvons aisément les différentes zones identifiées dans le cas d'un fort enfoncement. Nous observons en outre l'apparition d'un nouveau palier au voisinage des nœuds 64-67, celle-ci correspondant à la partie quasi rectiligne de la tôle au milieu du Brin Libre AVAl. L'existence de cette zone s'explique par la longueur importante du brin libre.

L'amplitude des gradients de déformation en épaisseur au niveau des outils varie selon les zones ( $\Delta\varepsilon_{11} \approx 0,09$  en zone REM ;  $\Delta\varepsilon_{11} \approx 0,14$  en zone RJ ; et  $\Delta\varepsilon_{11} \approx 0,11$  en zone RSM), ce qui implique des rayons de courbure de la tôle nettement différents. En fait, la tôle n'épouse complètement que la forme du jonc, et présente des contacts quasi ponctuels avec les épaulements de la matrice. Les rayons de courbure effectifs estimés au niveau des épaulements sont alors respectivement de 9 mm pour la zone REM, et de 8,5 mm pour la zone RSM. Ainsi, les zones de déformation quasi-constante correspondent maintenant à la partie arrière de la zone BLAM où le rayon de courbure de la tôle est pratiquement constant (entre les nœuds 45 et 52), à la zone RJ (entre les nœuds 55 et 61) où le contact avec le jonc est effectivement établi, et à la zone de sortie (entre les nœuds 69 et 73) où le rayon de courbure de la tôle est également pratiquement constant. Le contact tôle/outils s'effectuant sur une longueur moins importante, les zones de stabilisation de la déformation sont moins étendues par rapport au cas en fort enfoncement, et les zones de pliage/dépliage sont moins abruptes entre les paliers.

Les paliers de déformation  $\varepsilon_{11}$  de la fibre moyenne sont successivement égaux à :  $\varepsilon_{11} \approx 0,002$  en zone REM ; 0,015 en zone RJ ; 0,022 en milieu de zone BLAV ; 0,030 en zone RSM ; et 0,037 en sortie de jonc.

Le fait d'avoir placé un serre-flan en sortie du jonc augmente bien sûr les déformations au niveau du dernier épaulement. Sans celui-ci, la déformation  $\varepsilon_{11}$  de la tôle en sortie de jonc

correspondrait à peu près à  $\varepsilon_{11} = 0,027$ , c'est-à-dire à la moitié de la valeur obtenue avec un fort enfoncement.

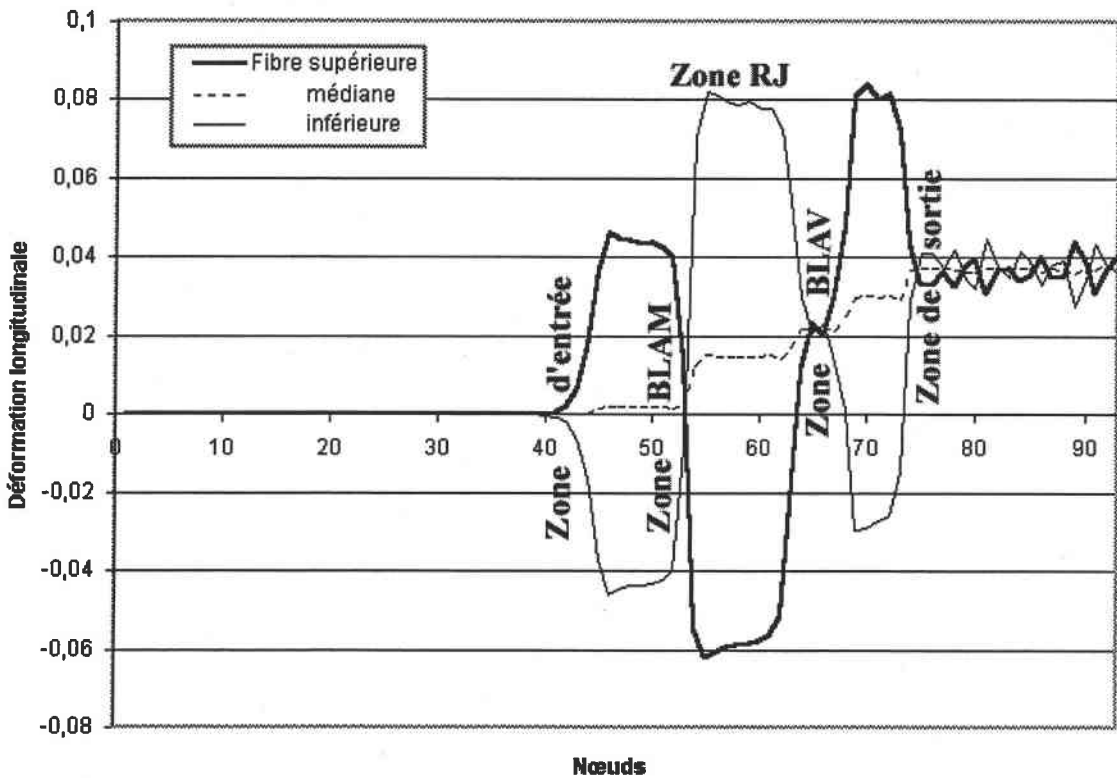


Figure II - 18 : Déformation longitudinale en fin de traction de la tôle, en faible enfoncement, sans frottement.

Nous visualisons sur la Figure II - 19 les déformations plastiques équivalentes des fibres extrêmes et médiane dans le cas du faible enfoncement. La déformation plastique a lieu dans les zones correspondant à la zone d'entrée (entre les nœuds 43 et 46), à la partie avant de la zone BLAM (entre les nœuds 52 et 55), à la zone BLAV (entre les nœuds 62 et 64, ainsi qu'entre les nœuds 67 et 69) et à la zone de sortie (entre 73 et 75). Ces zones coïncident toujours avec les zones de variation des déformations longitudinales identifiées sur la Figure II - 18.

Les déformations plastiques équivalentes ont une allure similaire dans le cas du fort et du faible enfoncement. Nous retrouvons toutefois des zones de déformation plastique plus étendues entre les paliers du Rayon du Jonc, du Rayon de Sortie Matrice et la zone de sortie, ce qui correspond à des brins libres de longueur plus importante. Un palier supplémentaire le long du Brin Libre Aval est en outre observé, palier qui correspond, comme nous l'avons déjà signalé, à une zone quasi rectiligne de ce dernier.

Comme en fort enfoncement, on peut remarquer que la déformation équivalente de la fibre médiane ( $\bar{\varepsilon} \approx 0$ , puis se stabilisant à 0,011~0,013) est très largement inférieure aux valeurs de déformation longitudinale correspondantes (de 0,002 à 0,037), ce qui concorde avec une anomalie des résultats de la simulation.

Les déformations de glissement  $\varepsilon_{12}$  se situent entre des valeurs allant de 0,005 à -0,015. Les contraintes de cisaillement  $\sigma_{12}$  restent inférieures à 20 MPa, sauf au niveau du rayon de sortie où nous observons un pic d'environ 80 MPa, et au niveau du Rayon du Jonc où l'on atteint un pic d'environ 40 MPa.

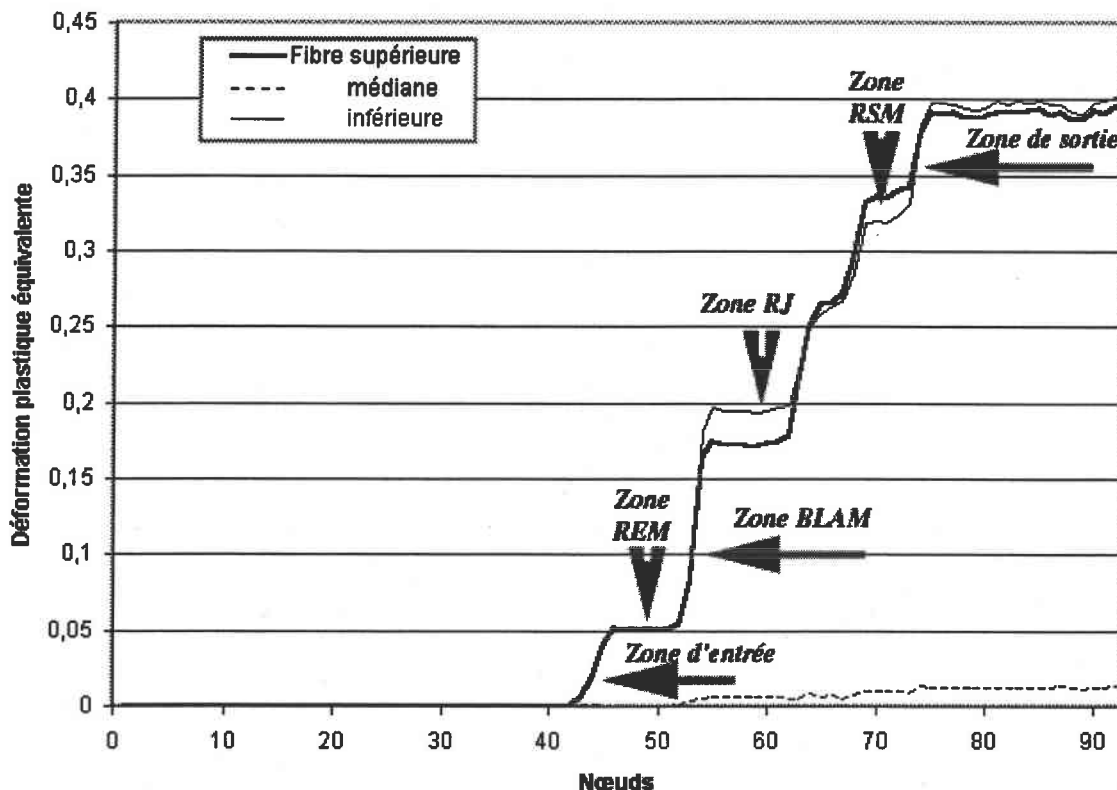
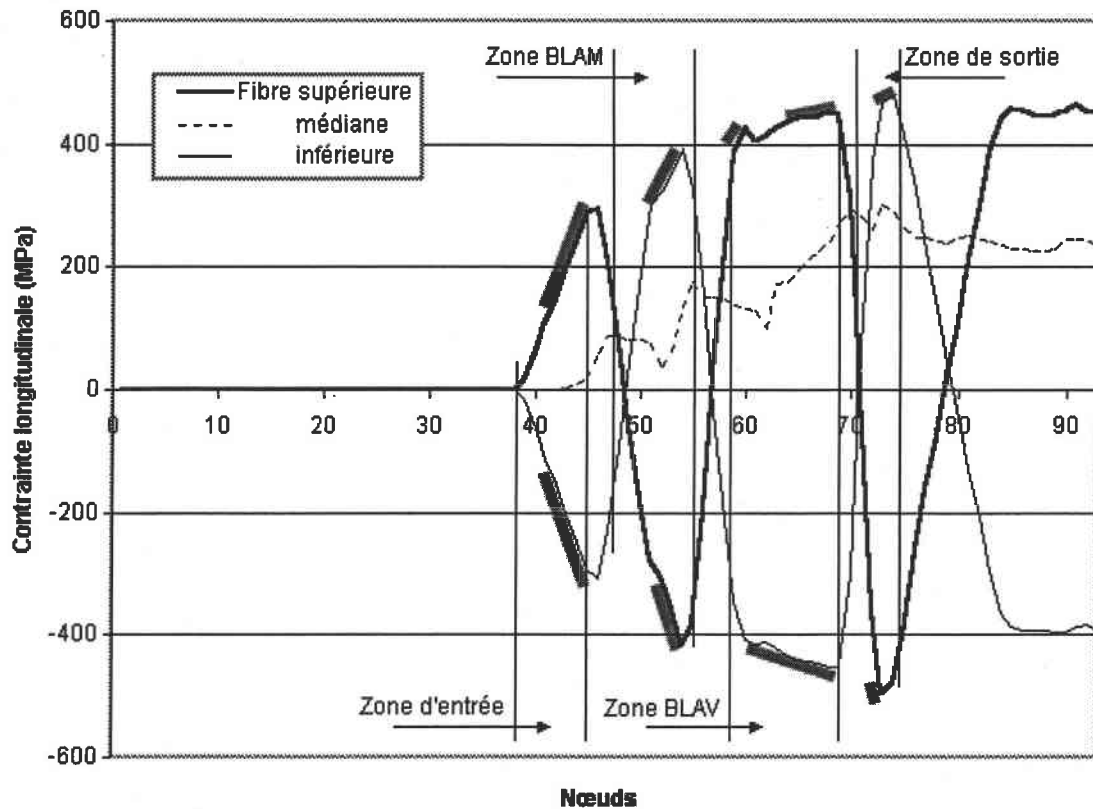


Figure II - 19 : Déformation plastique équivalente en fin de traction, en faible enfoncement sans frottement.

### Contraintes – cycles contraintes déformations

Nous avons porté les contraintes longitudinales  $\sigma_{11}$  pour les fibres extrêmes et médiane sur la Figure II - 20. Celles-ci sont légèrement plus faibles qu'en fort enfoncement. A nouveau, les portions de courbe grisées indiquent les zones de chargement élasto-plastique, qui sont en correspondance avec les zones de forte variation des déformations longitudinales. Dans le cas présent, nous observons un comportement monotone de décharge/recharge élastique sur le rayon du jonc.



**Figure II - 20 : Contraintes longitudinales en fin de traction, en faible enfoncement sans frottement. Les portions de courbes grisées représentent les zones de chargement élasto-plastique.**

La Figure II - 21, Figure II - 22 représentent les couples de valeurs  $(\sigma_{11}, \varepsilon_{11})$  pour les fibres extrêmes de la tôle. Nous y retrouvons, comme en fort enfoncement, les zones de décharge élastique suivie d'une recharge de signe opposé au niveau des rayons d'outils, et les différentes zones en chargement plastique.

Par rapport au cas d'un fort enfoncement (Figure II - 13 et Figure II - 15), les niveaux de déformation sur les outils et les amplitudes de déformation subies par les fibres le long des brins libres, sont fortement modifiés, ceci en raison des rayons de courbure effectifs plus grands sur les épaulements de la matrice.

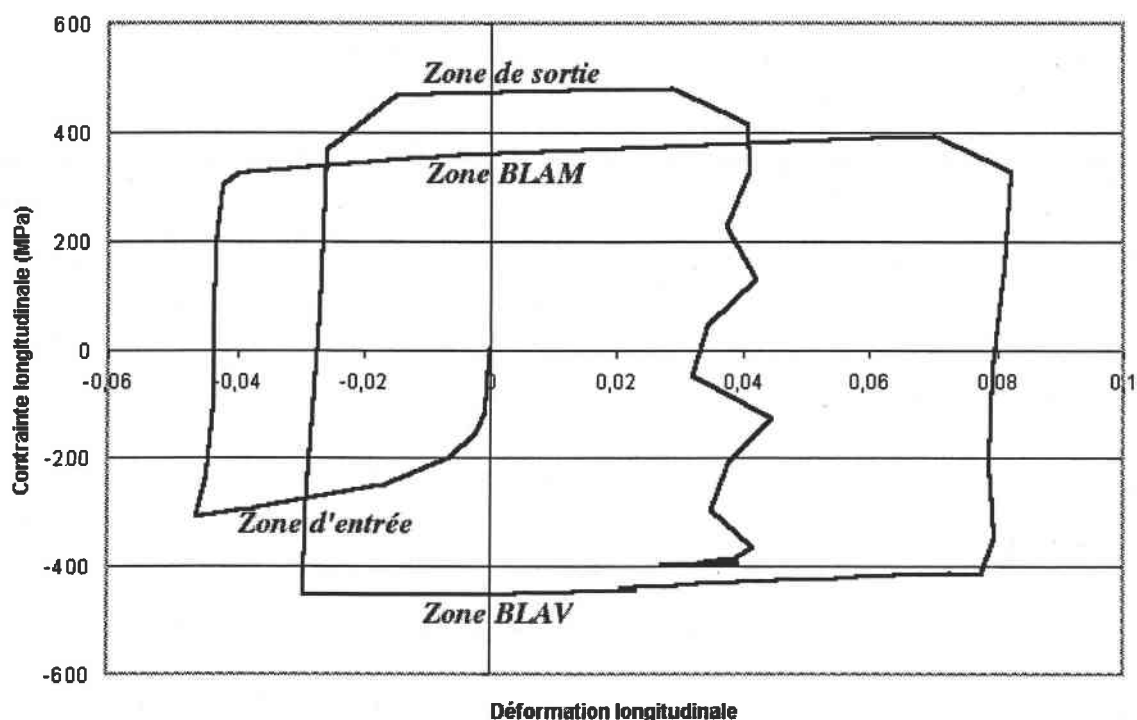


Figure II - 21 : Cycle  $(\sigma_{11}, \varepsilon_{11})$  en fin de traction pour la fibre inférieure, cas d'un faible enfoncement sans frottement.

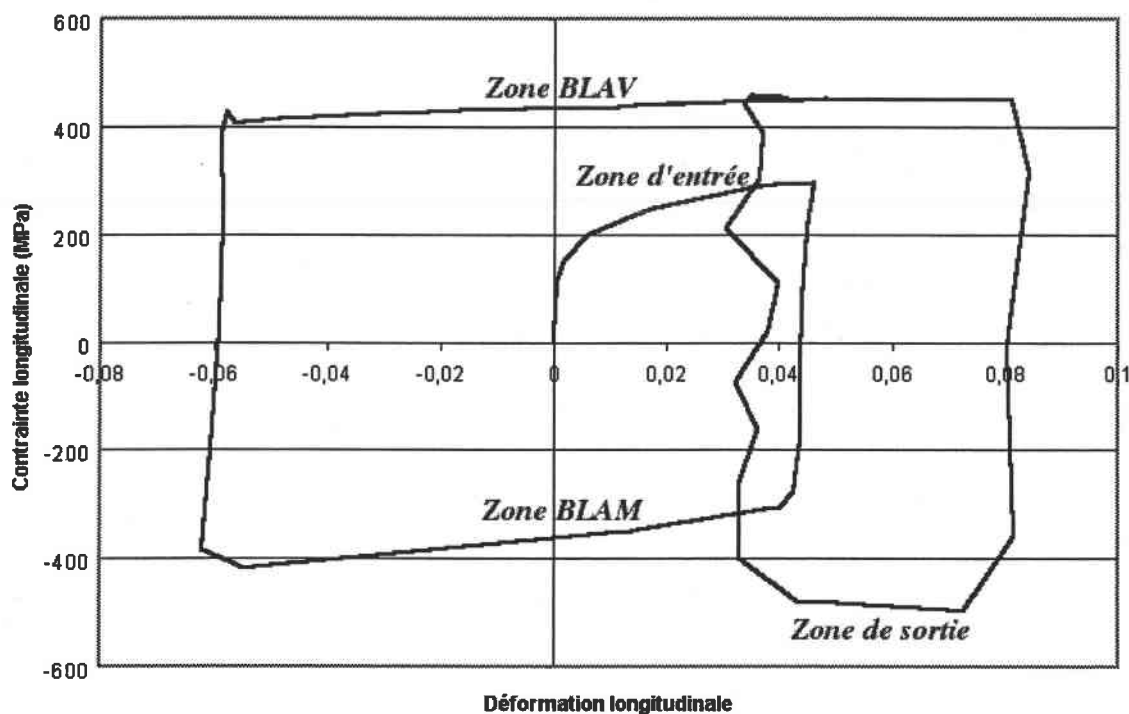


Figure II - 22 : Cycle  $(\sigma_{11}, \varepsilon_{11})$  en fin de traction pour la fibre supérieure, cas d'un faible enfoncement sans frottement.

#### IV - 2 - 3 - Influence du frottement

D'un point de vue géométrique, la longueur de contact entre les outils et la tôle est bien plus importante dans le cas d'une pénétration plus forte du jonc. De plus, les forces de frottement sont directement proportionnelles aux forces en présence pour la déformation de la tôle, et augmentent donc avec la profondeur de pénétration.

La Figure II - 23 montre les zones de contact déduites de l'examen visuel du maillage déformé. La longueur de ces zones est peut-être d'ailleurs surdimensionnée. En effet, nous avons noté dans le cas du faible enfoncement que les amplitudes de déformations en épaisseur au niveau des contacts avec les rayons de matrice conduisaient à des rayons de courbure effectifs supérieurs aux rayons de matrice, et donc compatibles avec des contacts ponctuels.

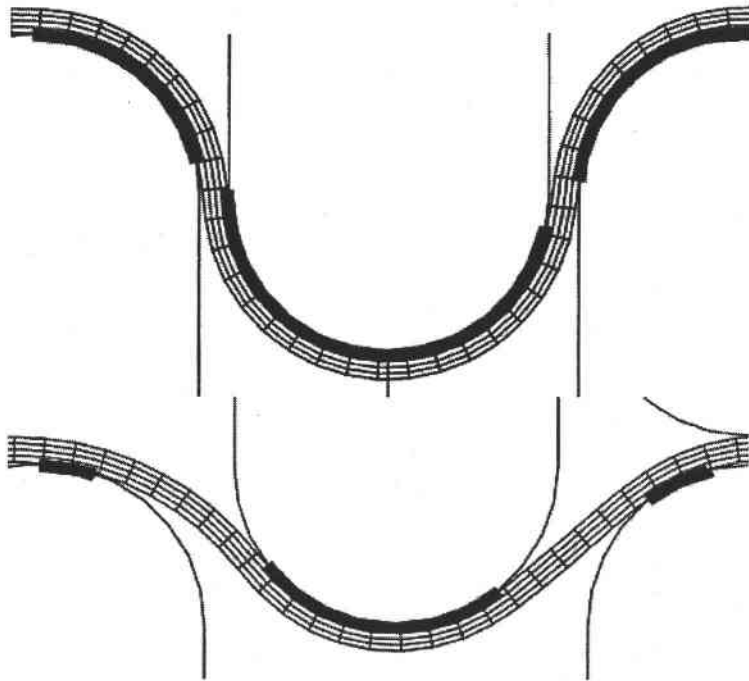


Figure II - 23 : Zones de contact avec les outils en fort et faible enfoncements.

Les aspects qualitatifs du comportement de la tôle le long du jonc restent les mêmes que ceux que nous avons décrits dans le cas sans frottement. Quantitativement, nous observons une augmentation des efforts et des déformations. Le Tableau II - 2 reporte les forces de traction et de serrage avec et sans frottement, le pourcentage d'augmentation des forces dû au frottement, ainsi que le coefficient de frottement calculé à partir de l'expression de Nine (1978) (équation I-2, Chapitre 1), expression que nous rappelons ici :



$$\mu = \frac{D_{d+f} - D_d}{\pi C_{d+f}}, \text{ où } D_d \text{ et } D_{d+f} \text{ désignent la force de traction sans et avec frottement,}$$

et  $C_{d+f}$  la force de serrage du jonc avec frottement.

Dans le cas du fort enfoncement qui correspond aux hypothèses de Nine, cette expression fournit un excellent recouplement avec le coefficient de frottement utilisé dans nos simulations qui est de 0,1. Son utilisation est cependant inadaptée au cas d'un faible enfoncement.

		$\mu = 0$	$\mu = 0,1$	Augmentation de	$\mu$ calculé
Fort enfoncement	Traction	3075 N	4215 N	37,07%	0,099
	Serrage	2800 N	3650 N	30,36%	
Faible enfoncement	Traction	2450 N	3310 N	35,10%	0,133
	Serrage	1775 N	2060 N	16,06%	

**Tableau II - 2 : Influence du frottement sur les forces de traction et de serrage.**

On observe sur le Tableau II - 2 une augmentation relative de la force de traction en présence de frottement qui dépend peu de l'enfoncement. En revanche, la force de serrage augmente beaucoup moins fortement en faible enfoncement.

Le Tableau II - 3 présente l'influence du frottement sur les différentes déformations en sortie d'outillage :

La déformation longitudinale augmente de 20 à 30 % en présence de frottement.

La déformation plastique équivalente des fibres extrêmes est peu sensible au frottement : en effet, la contribution de l'allongement de la tôle est relativement faible par rapport aux déformations cumulées résultant des séquences de pliage-dépliage subies par la tôle.

		$\varepsilon_{11}$ en sortie	$\overline{\varepsilon_{eq}}$ en sortie		
			Sup.	Med.	Inf.
Fort enfoncement	$\mu = 0$	0,052	0,47	0,026	0,48
	$\mu = 0,1$	0,069	0,47	0,050	0,50
Faible enfoncement	$\mu = 0$	0,037	0,39	0,012	0,40
	$\mu = 0,1$	0,044	0,39	0,022	0,40

**Tableau II - 3 : Influence du frottement sur les déformations.**

Le Tableau II - 4 récapitule les déformations longitudinales de la fibre médiane au niveau des différents paliers de déformation, pour les divers enfoncements et frottements. Nous observons que l'influence du frottement se fait sentir tout le long de la tôle. Mais bien entendu, les effets du frottement se cumulant, ils atteignent leur maximum au niveau de la sortie de la tôle. Les amplitudes reportées dans le Tableau II - 4 correspondent aux différences des déformations des fibres extrêmes sur les différents rayons d'outillage (RE, RJ et RS). Ces amplitudes sont en relation directe avec les rayons effectifs de la tôle, et se trouvent être identiques dans les deux cas, avec et sans frottement. Ce résultat corrobore le fait que nous n'avons pas observé de différence sur la forme de la tôle après traction, avec ou sans frottement.

		REM	RJ	RSM	Sortie	Ampli 1	Ampli 2	Ampli 3
$H = 11$	$\mu = 0$	0,0046	0,019	0,043	0,052	0,14	0,14	0,13
mm	$\mu = 0,1$	0,0047	0,021	0,048	0,069	0,14	0,14	0,13
$H = 5,5$	$\mu = 0$	0,002	0,014	0,029	0,037	0,08	0,14	0,11
mm	$\mu = 0,1$	0,002	0,015	0,031	0,044	0,09	0,14	0,11

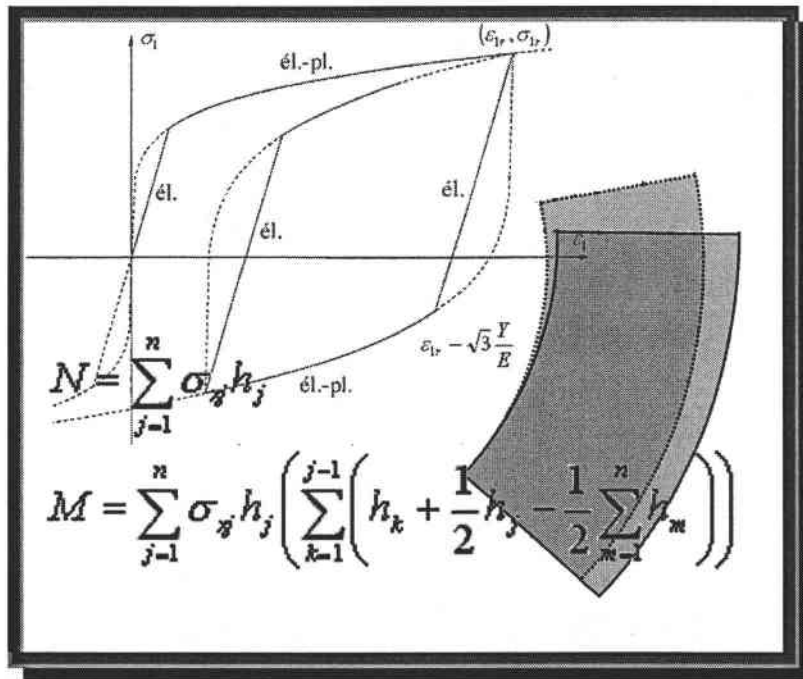
Tableau II - 4 : Déformation longitudinale de la fibre médiane pour les différents enfoncements, avec et sans frottement.

## V - Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les résultats de simulations par éléments finis du processus d'écoulement le long d'un jonc de retenue, et ceci dans différents cas d'enfoncement et de frottement. Dans un premier temps, nous avons analysé la phase de stabilisation des forces de traction, de serrage et de serre-flan pendant le déplacement de la tôle. Nous nous sommes ensuite concentrés sur le régime d'écoulement stationnaire, et nous avons analysé les résultats sous l'angle de l'histoire des contraintes et des déformations subie par les points matériels situés à différentes positions dans l'épaisseur de la tôle. Nous avons pu ainsi identifier clairement des zones de chargement élasto-plastique, associées à une flexion-traction de la tôle, et correspondant à des portions de brins libres de la tôle, alternant avec des zones de décharge-recharge élastique sur les rayons d'outillage (ou après les points de contacts avec les rayons d'épaulement de la matrice dans le cas d'un faible enfoncement). Les résultats de cette analyse en termes d'histoire de déformation seront utilisés comme éléments de comparaison avec les résultats de la modélisation développée au Chapitre 3, en plus des résultats globaux concernant les forces exercées par les outils. Nous retiendrons également de cette étude numérique les résultats concernant la forme, très dissymétrique, du profil de la tôle en régime stationnaire.

## CHAPITRE III

# MODÉLISATION ANALYTIQUE DE L'ÉCOULEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE



## Chapitre 3 : Modélisation analytique de l'écoulement élasto-plastique en régime stationnaire

### I - Introduction

Ce chapitre a pour objet, dans une première étape, de mettre au point la modélisation analytique qui nous servira à décrire l'histoire de chargement élasto-plastique pour un élément de longueur de tôle occupant les positions successives de l'entrée à la sortie du jonc. Il s'agit, dans ces calculs, de rendre compte de l'aspect cinématique associé à l'histoire de flexion-traction subie par l'élément de tôle, tout en respectant les équations d'évolution des efforts intérieurs (effort normal, effort tranchant et moment de flexion). Ces équations d'évolution se déduisent de façon immédiate des équations locales d'équilibre.

L'évolution des efforts intérieurs ainsi obtenue pour un élément de tôle effectuant le parcours allant de l'entrée à la sortie du jonc sera ensuite utilisée pour déterminer, en régime stationnaire, les efforts intérieurs à tout instant aux positions successives le long du jonc. Compte tenu des hypothèses de type Love-Kirchhoff que nous adopterons pour décrire la transformation de la tôle, seules les évolutions de l'effort normal et du moment de flexion pourront être reliées à la cinématique de la déformation par l'intermédiaire de la loi de comportement du matériau. Toutefois, l'analyse de l'équilibre de différents tronçons de la tôle, associée à la connaissance de l'effort normal et du moment de flexion en différents points remarquables (points de contact avec les outils et points d'inflexion), nous permettra de déterminer également l'effort tranchant en ces différents points.

Une estimation des efforts extérieurs (force de serrage, force de retenue) sera finalement déduite de la modélisation. La pertinence de cette dernière sera estimée par comparaison avec les résultats des simulations numériques par éléments finis, et avec des résultats expérimentaux de la littérature.

### II - Étude de l'équilibre de la tôle

#### II - 1 - Équations locales d'équilibre

La tôle est assimilée à une plaque mince, transformée par déformation plane en une coque cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe  $\vec{z}$ . Les efforts intérieurs se composent de forces agissant dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  dans lequel est défini le profil de la coque,

et d'un moment de flexion dirigé selon  $\bar{z}$ . Les efforts intérieurs (définis par unité de longueur selon  $\bar{z}$ ) vérifient des équations d'équilibre identiques à celles d'une poutre plane curviligne. Ces équations sont données par :

$$\text{Résultante selon } \bar{t} \quad \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} + p_t = 0 \quad (\text{III-1})$$

$$\text{Résultante selon } \bar{n} \quad \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} + p_n = 0 \quad (\text{III-2})$$

$$\text{Moment de flexion selon } \bar{z} \quad \frac{dM}{ds} + T = 0 \quad (\text{III-3})$$

où  $N$ ,  $T$  et  $M$  sont respectivement l'effort normal (dirigé selon la tangente  $\bar{t}$  au profil de la coque), l'effort tranchant (dirigé selon la normale  $\bar{n}$  au profil de la coque), et le moment fléchissant (dirigé selon l'axe  $\bar{z}$ ) ; où  $p_t$  et  $p_n$  sont respectivement les densités surfaciques de force selon  $\bar{t}$  et  $\bar{n}$ . Ces densités surfaciques correspondent aux forces de frottement et à la pression exercées par les outils, et sont nulles pour les brins libres de la tôle ;  $R$  est le rayon de courbure de la tôle, mesuré algébriquement dans le plan  $(O, \bar{x}, \bar{y})$  orienté par  $\bar{z}$ .

La Figure III - 1 schématise les efforts agissant sur un élément de longueur  $ds$  de la tôle.

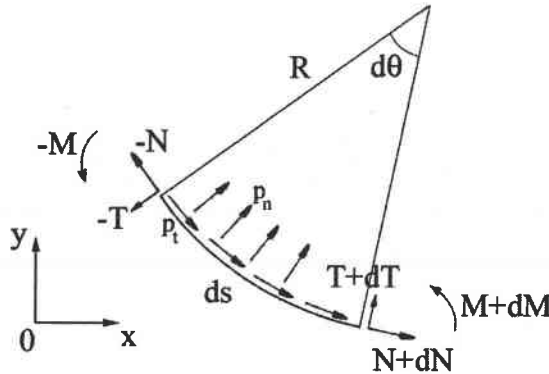


Figure III - 1 : Schéma des efforts agissant sur un élément de longueur de tôle (cas général).

## II - 2 - Équilibre des différentes zones de la tôle

Nous examinons maintenant plus précisément les différentes zones que nous avons été amené à définir à partir de l'analyse des simulations numériques. La Figure III - 2 rappelle ainsi les différentes zones que nous avons identifiées le long du jonc.

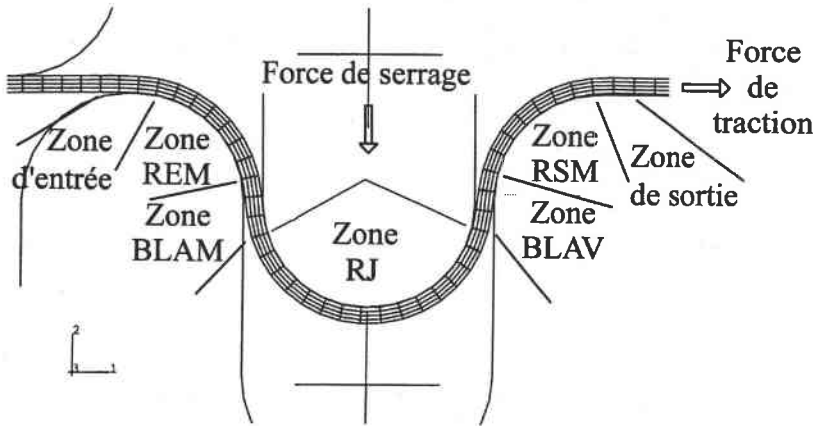


Figure III - 2 : Schéma de la tôle le long du jonc, et dénomination des différentes zones.

### II - 2 - 1 - Cas de contacts sans frottement

#### Zone d'entrée :

La portion de la tôle ici concernée va de l'extrémité gauche de celle-ci jusqu'au premier point de contact E avec le rayon d'entrée matrice. La Figure III - 3 schématise les efforts sur cette zone.

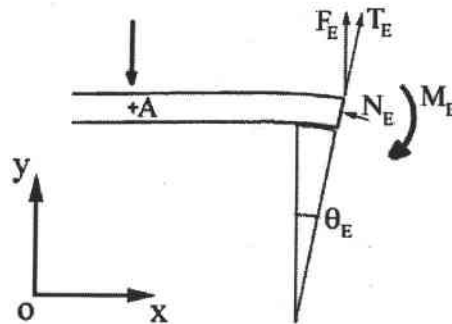


Figure III - 3 : Schéma des efforts agissant sur la zone d'entrée.

Le serre-flan applique au niveau du point A une force  $\vec{F} = -F\vec{y}$ , et l'équilibre global de la zone entraîne des efforts intérieurs en E définis par :

$$\vec{F}_E = F\vec{y}$$

$$\text{soit } T_E = F \cos \theta_E > 0$$

$$N_E = -F \sin \theta_E < 0$$

$$\vec{M}_E = \vec{EA} \wedge \vec{F}$$

$$\text{soit } M_E = -F(l_E + (R_E + \frac{h}{2}) \sin \theta_E) < 0$$

(III-4)

On peut également noter que la zone d'entrée constitue un brin libre, et vérifie donc l'équation d'équilibre :

$$dM + R.dN = 0 \quad (\text{III-5})$$

Cette équation est obtenue en combinant (III-1) et (III-3), avec  $p_t = 0$ .

Compte tenu de la faible valeur de l'angle  $\theta_E$  définissant l'entrée en contact de la tôle avec le rayon d'entrée de la matrice (équation III-4), on pourrait considérer avec une bonne approximation que l'élément de tôle effectuant le parcours de A à E subit une flexion sans application conjointe d'effort normal. L'application de l'équation (III-5) doit permettre de vérifier que l'effort normal garde une valeur négative faible jusqu'au point E.

**Zone Rayon d'Entrée Matrice (REM) :**

Il convient ici, conformément aux résultats des simulations numériques, d'envisager deux cas. Premièrement, dans le cas d'un fort enfoncement, la tôle épouse le rayon d'entrée matrice. Et deuxièmement, dans le cas d'un faible enfoncement, le contact entre la tôle et le rayon d'entrée matrice est quasi ponctuel, et cette zone est inexistante. La tôle entre alors directement dans la zone BLAM (Brin Libre AMont).

Analysons dans le premier cas, l'équilibre de la tôle dans la zone REM. La Figure III - 4 montre les efforts qui agissent sur cette zone, les indices  $E$  et  $E'$  notant respectivement les points d'entrée et de sortie de cette zone.

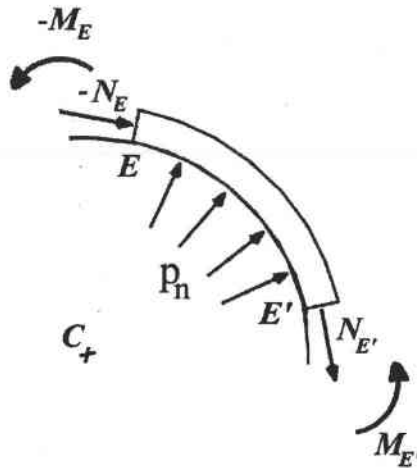


Figure III - 4 : Schéma des efforts agissant sur la zone REM.

L'équation d'équilibre relative au moment, exprimée au centre C du cercle définissant le rayon d'entrée matrice, se traduit en l'absence de frottement par :

$$M_{E'} - M_E - (N_{E'} - N_E)(R_E + \frac{h}{2}) = 0 \quad (\text{III-6})$$

avec, dans la pratique,  $M_{E'} > 0$  ;  $M_E < 0$  ;  $N_{E'} - N_E > 0$ . Le rayon  $R_E + \frac{h}{2}$  est défini positivement dans l'équation (III-6).

Cette équation s'applique en fait non seulement entre les points  $E$  et  $E'$ , mais entre deux points quelconques de la zone REM. Elle n'est pas différente de l'équation d'équilibre pour un brin libre,  $dM + R.dN = 0$ , appliquée avec un rayon de courbure  $R = -(R_E + \frac{h}{2})$ , qui reste constant au cours de l'évolution de  $M$  et  $N$ . Nous savons à partir des simulations numériques que cette zone correspond pour l'essentiel à la décharge élastique précédant la recharge élasto-plastique qui a lieu dans la zone BLAM.

**Zone Brin Libre AMont (BLAM) :**

La zone BLAM entre les points de perte de contact avec le rayon d'entrée matrice et le point d'entrée en contact avec le rayon du jonc obéit à une histoire de chargement vérifiant l'équation d'équilibre d'un brin libre,  $dM + R.dN = 0$ .

Le rayon de courbure  $R$  varie de la valeur négative  $-R_{effE}$ , obtenue au point de perte de contact avec le rayon entrée matrice, à la valeur positive  $R_J + \frac{h}{2}$ . Les simulations numériques ont en effet montré que la tôle épouse le rayon du jonc, aussi bien pour un faible enfoncement que pour un fort enfoncement.

**Zone Rayon du Jonc (RJ) :**

Comme dans le cas de la zone REM avec un fort enfoncement, la zone située sur le rayon du jonc est assujettie, en l'absence de frottement, à une évolution de  $M$  et  $N$  vérifiant :

$$dM + R.dN = 0, \text{ avec ici : } R = R_J + \frac{h}{2}.$$

**Zone Brin Libre AVal (BLAV) :**

Comme la zone BLAM, la zone BLAV entre les points de perte de contact avec le rayon du jonc et le point d'entrée en contact avec le rayon de sortie matrice obéit à l'équation d'équilibre  $dM + R.dN = 0$ . Le rayon de courbure  $R$  varie de la valeur positive  $R_J + \frac{h}{2}$ , au point de perte de contact avec le rayon du jonc, à la valeur négative,  $-R_{effS}$ , observée au contact avec le rayon de sortie matrice.

**Zone Rayon de Sortie Matrice (RSM) :**

Les conditions d'enfoncement du jonc, ainsi que les conditions aux limites appliquées en sortie de jonc, influent fortement sur la courbure prise par la tôle en sortie de jonc. Pour les forts enfoncements, le contact sur le rayon de sortie matrice est établi le long d'un certain secteur angulaire, et l'équation d'équilibre  $dM + R.dN = 0$  est vérifiée en l'absence de frottement avec  $R = -(R_S + \frac{h}{2})$ . Pour les faibles enfoncements, cette zone est pratiquement inexistante.



Zone de sortie :

La zone de sortie étant un brin libre tant qu'un contact n'est pas établi avec le serre-flan, elle sera traitée comme un brin libre vérifiant l'équation d'équilibre  $dM + R.dN = 0$ , et pour lequel le rayon de courbure atteint des valeurs négatives très grandes.

Conclusion: toutes les zones peuvent être traitées en utilisant l'équation  $dM + R.dN = 0$ , les valeurs du rayon de courbure pour lesquelles un changement de sens de variation est observé étant connues (cas d'un fort enfoncement) ou à déterminer (cas d'un faible enfoncement). La détermination des rayons effectifs de courbure sur les rayons d'entrée et de sortie matrice,  $R_{effE}$  et  $R_{effS}$ , a été effectuée en se basant sur les allures de profils de tôles obtenus par simulations numériques en fin de traction. Les valeurs de  $R_{effE}$  et  $R_{effS}$  obtenues sont explicitées dans l'Annexe 1.

Il est par ailleurs utile d'anticiper sur le fait qu'une théorie de type coque, telle que celle que nous utiliserons ici, ne permet pas de rendre compte d'une évolution des contraintes, et donc des efforts intérieurs, tout en respectant l'équation d'évolution des efforts intérieurs,  $dM + R.dN = 0$ , avec un rayon de courbure  $R$  supposé rester constant. Autrement dit, le contact entre la tôle et les éléments d'outillage sur un arc de longueur non nulle ( $R = \text{constante}$ ) correspondrait à des contraintes, déformations et efforts intérieurs n'évoluant pas le long de l'arc de contact ( $dM = dN = 0$ ), ce qui est en contradiction avec les décharges élastiques observées par simulations numériques le long des outils. Les contacts avec les outils résultant de la modélisation que nous allons mettre en place seront donc des contacts ponctuels dans le plan du profil de la tôle, les zones de décharge élastique étant associées à des évolutions faibles, mais non nulles, du rayon de courbure.

Bilan de l'évolution du rayon de courbure et des efforts intérieurs le long du jonc

E l'absence de frottement, toutes les zones vérifient l'équation d'équilibre d'un brin libre :  $dM + R.dN = 0$ .

Zone d'entrée :

$R$  évolue de  $-\infty$  jusqu'à la valeur  $-R_{effE}$

Remarque : on doit vérifier que  $N$  reste faible dans cette zone.

Zone REM :

zone considérée comme inexistante  
(contact ponctuel dans le plan du profil de la tôle).

Zone BLAM :

$R$  évolue jusqu'à  $R = R_j + \frac{h}{2}$

Zone RJ :

zone considérée comme inexistante  
(contact ponctuel dans le plan du profil de la tôle).

Zone BLAV :

$R$  évolue jusqu'à  $-R_{effS}$ .

Zone RSM : zone considérée comme inexistante  
(contact ponctuel dans le plan du profil de la tôle).

Zone de sortie :  $R$  évolue jusqu'à  $-\infty$

### II - 2 - 2 - Cas de contacts avec frottement

Nous choisissons de supposer, comme dans le cas de contacts sans frottement, que le contact entre la tôle et les éléments d'outillage est ponctuel dans le plan du profil de la tôle. Ainsi, au point de contact E avec le rayon d'entrée matrice intervient, en plus de l'action normale  $F_E$  exercée par la matrice, une force tangentielle  $\mu F_E$  qui conduit à une discontinuité de l'effort normal au franchissement du point E. Cette discontinuité est définie par  $N_E^+ - N_E^- = \mu F_E$ . De la même façon, au point de contact J avec le rayon du jonc intervient une force tangentielle  $\mu F_J$  conduisant à une discontinuité de l'effort normal définie par  $N_J^+ - N_J^- = \mu F_J$ ; et au point de contact S avec le rayon de sortie matrice intervient une discontinuité de l'effort normal définie par  $N_S^+ - N_S^- = \mu F_S$ . Le moment de flexion subit quant à lui une discontinuité associée au fait que la force tangentielle  $\mu F$  est appliquée, selon les cas, sur la face supérieure ou inférieure de la tôle, et donc à  $\pm h/2$  de la fibre moyenne, ce qui donne, respectivement :  $M_E^+ - M_E^- = \mu F_E h/2$ ;  $M_J^+ - M_J^- = -\mu F_J h/2$ ;  $M_S^+ - M_S^- = \mu F_S h/2$  (Figure III - 5). Les discontinuités  $\Delta M$  et  $\Delta N$  sont ainsi liées par des relations du type :  $\Delta M \pm \frac{h}{2} \Delta N = 0$ .

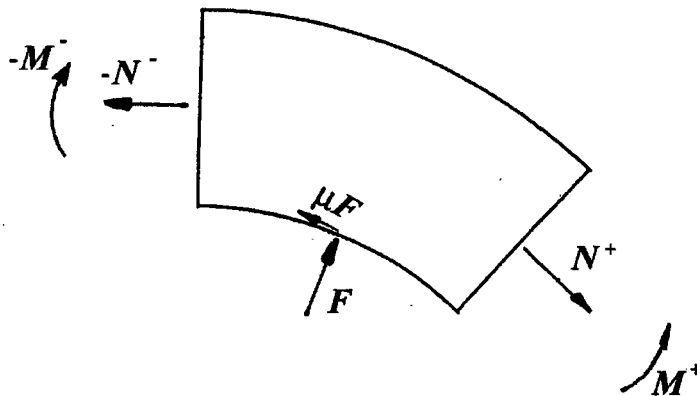


Figure III - 5 : Schéma d'une tranche de tôle subissant une force normale et une force tangentielle concentrée au niveau d'un élément d'outillage.

### Bilan de l'évolution des efforts intérieurs le long du jonc

Les rayons de courbure suivent la même évolution que celle que nous avons détaillée dans le cas sans frottement. En revanche, l'évolution des efforts intérieurs pour un élément de tôle effectuant le parcours allant de l'entrée à la sortie du jonc sera gérée de la façon suivante :

<u>Zone d'entrée :</u>	$dM + R.dN = 0$
<u>Zone BLAM :</u>	$dM - (h/2)dN = 0$ jusqu'à $N_E^+ - N_E^- = \mu F_E$ ; puis $dM + R.dN = 0$
<u>Zone BLAV :</u>	$dM + (h/2)dN = 0$ jusqu'à $N_J^+ - N_J^- = \mu F_J$ ; puis $dM + R.dN = 0$
<u>Zone de sortie :</u>	$dM - (h/2)dN = 0$ jusqu'à $N_S^+ - N_S^- = \mu F_S$ ; puis $dM + R.dN = 0$

### **II - 3 - Efforts tranchants, forces de contact avec les outils, forces de serrage et de retenue**

La modélisation de la flexion-traction d'un élément de tôle que nous allons développer au paragraphe IV nous permettra de déterminer les efforts intérieurs  $M$  et  $N$  en fonction du rayon de courbure courant de la tôle. Ainsi, nous serons à même de connaître ces efforts intérieurs en un certain nombre de points particuliers :

- E : point de contact avec le Rayon d'Entrée Matrice où est atteinte la valeur  $R = -R_{effE}$
- I<sub>1</sub> : point d'inflexion sur le Brin Libre AMont ( $R = 0$ )
- J : point de contact avec le Rayon du Jonc où est atteinte la valeur  $R = R_J + \frac{h}{2}$
- I<sub>2</sub> : point d'inflexion sur le Brin Libre AVAl ( $R = 0$ )
- S : point de contact avec le Rayon de Sortie Matrice où est atteinte la valeur  $R = -R_{effS}$
- D : extrémité droite de la tôle

Connaissant les valeurs de  $M$  et  $N$  aux différents points ci-dessus, l'étude de l'équilibre par tronçons de la tôle nous permet de déterminer les angles de contact  $\theta_E$ ,  $\theta_J$  et  $\theta_S$  avec les éléments d'outillage, ainsi que les efforts tranchants aux différents points définis ci-dessus et les forces exercées par les outils. Nous obtenons en particulier la force de serrage et les forces de serre-flan, la force de retenue étant par contre directement connue, et égale  $N_D$ . Ces calculs sont détaillés dans l'Annexe, paragraphe II.

### III - Loi de comportement du matériau en traction plane

#### III - 1 - Comportement en chargement monotone

Le comportement du matériau en traction ou compression uniaxiale monotone est schématisé sur la Figure III - 6. Le comportement élasto-plastique est décrit par la loi puissance :

$$\sigma = \sigma_0 |\varepsilon|^n \cdot \text{sgn}(\varepsilon) \quad (\text{III-7})$$

où  $\sigma_0$  est une constante,  $n$  l'exposant d'écrouissage,  $\sigma$  la contrainte de Cauchy, et  $\varepsilon$  la déformation (élasto-plastique) logarithmique.

Un domaine élastique linéaire initial est introduit, sous la forme :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{III-8})$$

où  $E$  est le module d'Young. Le comportement étant élastique pour des contraintes d'intensité inférieure au seuil élastique  $Y$ ,  $\sigma_0$  et  $Y$  sont liés par la condition de raccordement des deux lois pour  $|\sigma| = Y$ , soit :

$$\sigma_0 = E(Y/E)^{1-n} \quad (\text{III-9})$$

Les déformations élastique et plastique sont supposées incompressibles. La déformation équivalente  $\bar{\varepsilon}$  est définie ici comme une déformation élasto-plastique, donnée par  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \text{sgn}(\varepsilon) = |\varepsilon|$ . Compte tenu de la faible valeur des déformations élastiques, la définition de déformation élasto-plastique équivalente adoptée conduit à des écarts non significatifs par rapport à la définition habituelle d'une déformation *plastique* équivalente.

Si l'on envisage maintenant le comportement élasto-plastique du matériau en traction ou compression plane monotone ( $d\varepsilon_3 = 0$ ), les incréments de déformations longitudinale ( $d\varepsilon_1$ ) et en épaisseur ( $d\varepsilon_2$ ) d'un élément de tôle sont opposés. En utilisant le critère de Von Mises, les contraintes vérifient alors la relation :  $\sigma_3 = \sigma_1 / 2$  et  $\sigma_1 = (2/\sqrt{3})\bar{\sigma} \cdot \text{sgn}(\sigma_1)$ , où  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente, identifiée à la contrainte de traction uniaxiale.

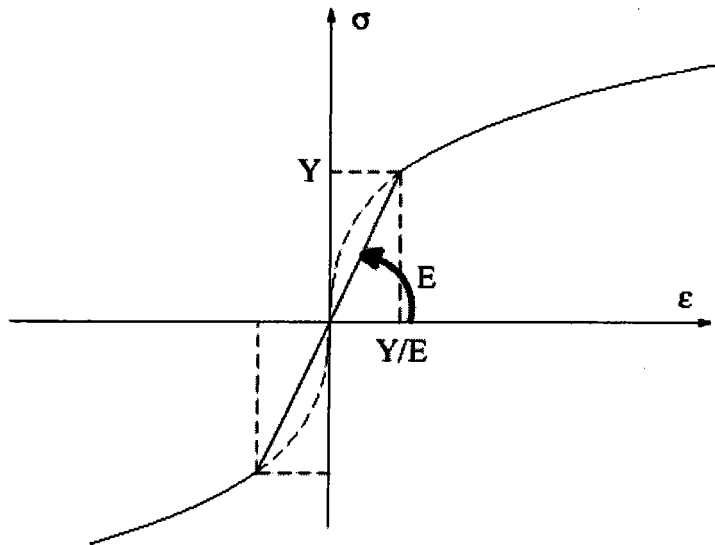


Figure III - 6 : Schéma du comportement élasto-plastique du matériau en traction ou compression uniaxiale monotone.

La déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$  est liée à la déformation longitudinale  $\epsilon_1$  en chargement monotone par  $\epsilon_1 = (\sqrt{3}/2)\bar{\epsilon} \cdot \text{sgn}(\epsilon_1)$ . Nous avons donc comme loi de comportement en déformation plane :

$$\sigma_1 = \frac{4}{3} E \epsilon_1 \quad \text{pour } |\epsilon_1| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Y}{E}$$

(III-10)

$$\sigma_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \sigma_0 |\epsilon_1|^n \cdot \text{sgn}(\epsilon_1) \quad \text{pour } |\epsilon_1| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Y}{E}$$

De façon équivalente, nous pouvons exprimer la contrainte  $\sigma_1$  en déformation plane en fonction de la déformation équivalente  $\bar{\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} E \bar{\varepsilon} \cdot \text{sgn}(\varepsilon_1) && \text{pour } \bar{\varepsilon} \leq \frac{Y}{E} \\ \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \bar{\varepsilon}^n \cdot \text{sgn}(\varepsilon_1) && \text{pour } \bar{\varepsilon} \geq \frac{Y}{E} \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

Le schéma du comportement en traction ou compression plane monotone est illustré sur la Figure III - 7.

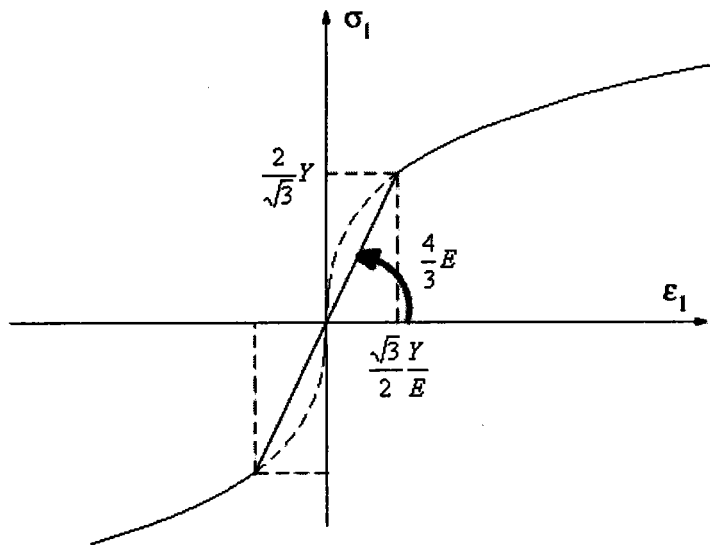


Figure III - 7 : Schéma du comportement élasto-plastique du matériau en traction ou compression plane monotone.

### III - 2 - Comportement en chargement cyclique

Deux hypothèses seront considérées pour rendre compte de l'histoire de chargement de la tôle s'écoulant le long du jonc de retenue : l'hypothèse d'écrouissage isotrope, et l'hypothèse d'écrouissage cinématique non linéaire.

#### III - 2 - 1 - Écrouissage isotrope

Le comportement cyclique avec écrouissage isotrope est représenté sur la Figure III - 8. Les domaines successifs sont numérotés de façon croissante.

Les relations contrainte-déformation associées sont définies ci-après :

Domaine 1 : domaine élastique initial

$$\sigma_1 = \frac{4}{3} E \varepsilon_1 \text{ pour } |\varepsilon_1| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Y}{E} \quad (\text{III-12})$$

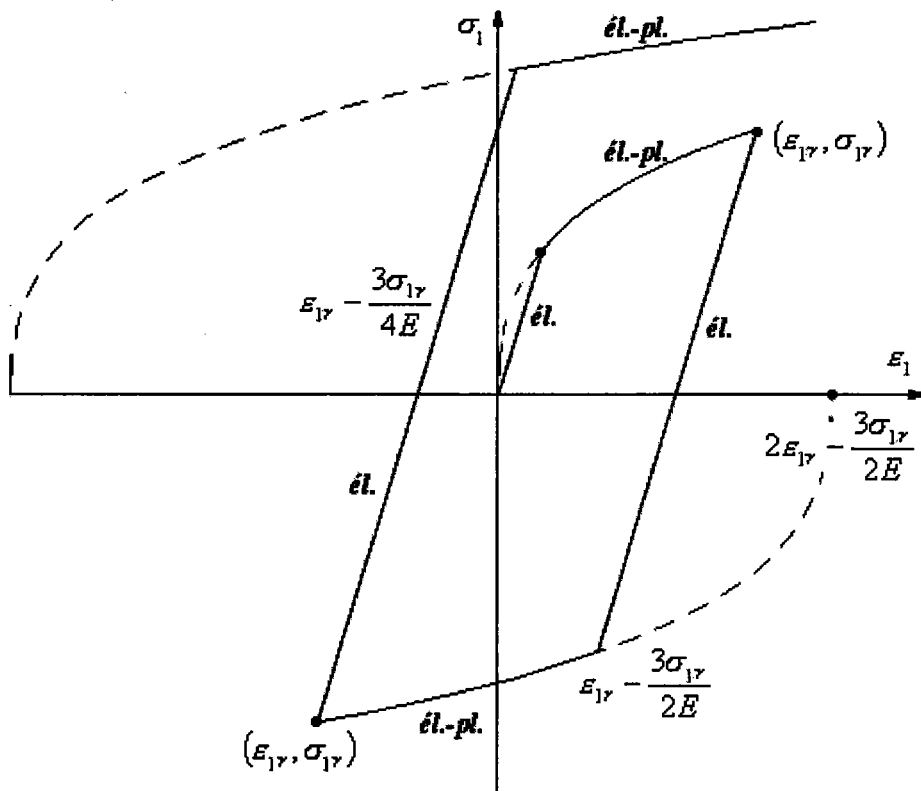


Figure III - 8 : Schéma du comportement élasto-plastique du matériau en déformation plane cyclique – Hypothèse d'un écrouissage isotrope.

**Domaine 2** : première zone élasto-plastique

$$\sigma_1 = K|\varepsilon_1|^n \cdot \text{sgn}(\varepsilon_1) \text{ avec } K = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \sigma_0 \quad (\text{III-13})$$

**Domaine 3** : première zone de décharge élastique

$$\sigma_1 = \sigma_{1r} + \frac{4}{3}E(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}) \text{ pour } |\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}| \leq \frac{3}{2} \frac{|\sigma_{1r}|}{E} \quad (\text{III-14})$$

le point de rebroussement de la déformation étant repéré par  $(\varepsilon_{1r}, \sigma_{1r})$ .

**Domaine 4** : première zone de recharge élasto-plastique

$$\sigma_1 = K \left| 2\varepsilon_{1r} - \frac{3\sigma_{1r}}{2E} - \varepsilon_1 \right|^n \text{sgn}(d\varepsilon_1) \quad (\text{III-15})$$

le point de recharge élasto-plastique étant défini dans ce cas par  $\left(\varepsilon_{1r} - \frac{3\sigma_{1r}}{2E}; -\sigma_{1r}\right)$ .

**Domaine 5** : deuxième zone de décharge élastique

Le comportement est défini par la même relation que pour le domaine 3, en utilisant les nouvelles valeurs  $(\varepsilon_{1r}, \sigma_{1r})$  qui définissent le point de rebroussement de la déformation.

**Domaine 6** : deuxième zone de recharge élasto-plastique

$$\sigma_1 = K|\varepsilon_1 - \alpha|^n \text{sgn}(d\varepsilon_1) \quad (\text{III-16})$$

où  $\alpha$  est défini par la condition d'appartenance du point  $\left(\varepsilon_{1r} - \frac{3}{2E}\sigma_{1r}; -\sigma_{1r}\right)$  à la courbe de recharge élasto-plastique. On trouve :

$$\alpha = \varepsilon_{1r} - \frac{3}{2E}\sigma_{1r} - \left(\frac{|\sigma_{1r}|}{K}\right)^{1/n} \text{sgn}(d\varepsilon_1) \quad (\text{III-17})$$

On vérifie aisément que le domaine 4 entre dans le cadre de cette loi de recharge élasto-plastique, avec, pour la première zone de recharge :  $|\sigma_{1r}| = K|\varepsilon_{1r}|^n$  et  $\varepsilon_{1r} = -|\varepsilon_{1r}| \cdot \text{sgn}(d\varepsilon_1)$ , où  $d\varepsilon_1$  est mesuré lors de la recharge.

**Domaines suivants :**

Les domaines successifs de décharge élastique et de recharge élasto-plastique obéissent aux lois trouvées pour les domaines 5 et 6, en prenant soin toutefois d'identifier les nouveaux points de rebroussement de la déformation. En pratique, le cyclage subi par la tôle lors de l'écoulement le long du jonc de retenue va jusqu'au domaine de décharge élastique numéro 9, ce qui représente près de 2 cycles.

La présentation des relations contrainte-déformation se simplifie considérablement en utilisant la déformation élasto-plastique équivalente définie par  $\bar{\varepsilon} = (2/\sqrt{3})|\varepsilon_1|$  dans le



domaine élastique initial. Les incréments sont donnés par  $d\bar{\varepsilon} = (2/\sqrt{3})|d\varepsilon_1|$  dans les domaines de chargement élasto-plastique, et par  $d\bar{\varepsilon} = 0$  dans les domaines de décharge élastique successifs. On obtient alors :

Domaine élastique initial :

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} E\bar{\varepsilon} \text{sgn}(\varepsilon_1) \quad (\text{III-18})$$

Domaines de chargement élasto-plastique :

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \bar{\varepsilon}^n \text{sgn}(d\varepsilon_1) \quad (\text{III-19})$$

Domaines de décharge élastique :

$$\sigma_1 = \sigma_{1r} + \frac{4}{3} E(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}) \quad (\text{III-20})$$

### III - 2 - 2 - Écrouissage cinématique non linéaire

Le modèle d'écrouissage cinématique non linéaire envisagé a le comportement prévu par le modèle de Saint Venant généralisé. Ce modèle rhéologique est constitué d'un ensemble de modèles élémentaires (ressort + amortisseur en série), montés en parallèle. Le passage à une distribution continue conduit au schéma de comportement cyclique schématisé sur la Figure III - 9.

Le domaine élastique initial, et la première zone élasto-plastique obéissent aux lois de chargement monotone (équations (III-12) et (III-13) respectivement). Le comportement après rebroussement de la déformation est obtenu en envisageant des variations de la contrainte  $(\sigma_1 - \sigma_{1r})$  et de la déformation  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r})$  doubles de celles observées pour la courbe monotone. Il en résulte que les décharges élastiques successives sont toutes définies par une amplitude de déformation égale à  $\sqrt{3}Y/E$  (inférieure à celle obtenue dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope), et que les taux de consolidation dans les domaines de recharge élasto-plastique sont plus importants qu'avec un écrouissage isotrope. On obtient ainsi :

Domaines de décharge élastique :

$$\sigma_1 = \sigma_{1r} + \frac{4}{3} E(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}) \text{ pour } |\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}| \leq \sqrt{3} \frac{Y}{E} \quad (\text{III-21})$$

Domaines de recharge élasto-plastique :

$$\sigma_1 = \sigma_{1r} + 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \sigma_0 |\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}|^n \text{sgn}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}) \quad \text{pour } |\varepsilon_1 - \varepsilon_{1r}| \geq \sqrt{3} \frac{Y}{E} \quad (\text{III-22})$$

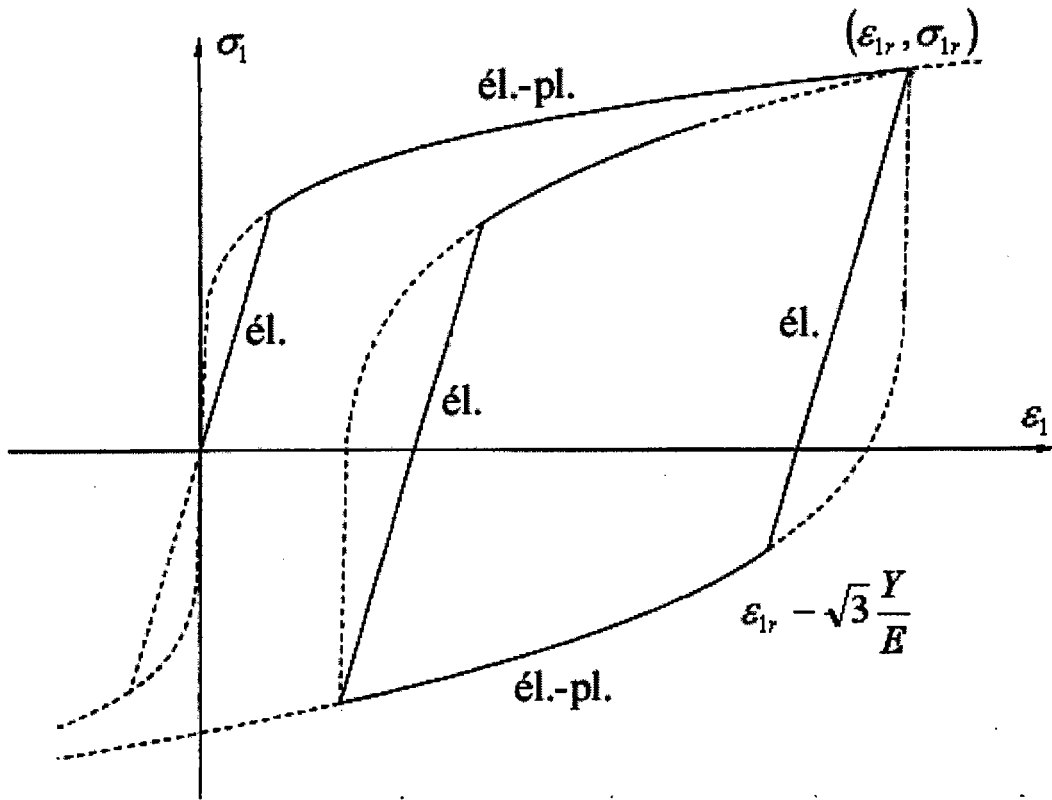


Figure III - 9 : Schéma du comportement élasto-plastique du matériau en déformation plane cyclique – Hypothèse d'un écrouissage cinématique non linéaire.

#### IV - Analyse incrémentale de la flexion-traction d'un élément de tôle

##### IV - 1 - Cinématique de la déformation

La description cinématique utilisée reprend les bases du calcul développé par Mc Clintock et al. (1993) pour analyser les instabilités en flexion-traction d'une plaque. On considère un élément de longueur de tôle, de largeur unité, divisé en  $n$  couches repérées par l'indice  $i$  ( $i=1, n$ ). La déformation est supposée telle que les sections droites restent perpendiculaires aux fibres matérielles longitudinales (hypothèse de Love-Kirchhoff). A l'instant  $t$ , la fibre supérieure a une courbure algébrique  $K_0$  (ou un rayon de courbure  $R_0 = 1/K_0$ ), et elle a subi une déformation d'extension  $\varepsilon_{x0}$ . La couche  $i$  a une courbure  $K_i$  (ou un rayon de courbure  $R_i = 1/K_i$ ), une longueur  $l_i$ , une épaisseur  $h_i$  et elle a subi une déformation d'extension  $\varepsilon_{1i}$ . Les valeurs affectées à la couche  $i$  sont celles que l'on détermine pour la fibre située au milieu de cette couche. Le calcul incrémental envisage un incrément de

courbure  $dK_0$  et un incrément de déformation  $d\varepsilon_{10}$  de la fibre supérieure. La cinématique de la déformation est alors complètement définie, en supposant en outre que le matériau respecte une condition d'incompressibilité élasto-plastique, que nous avons déjà supposée vérifiée dans la description du comportement.

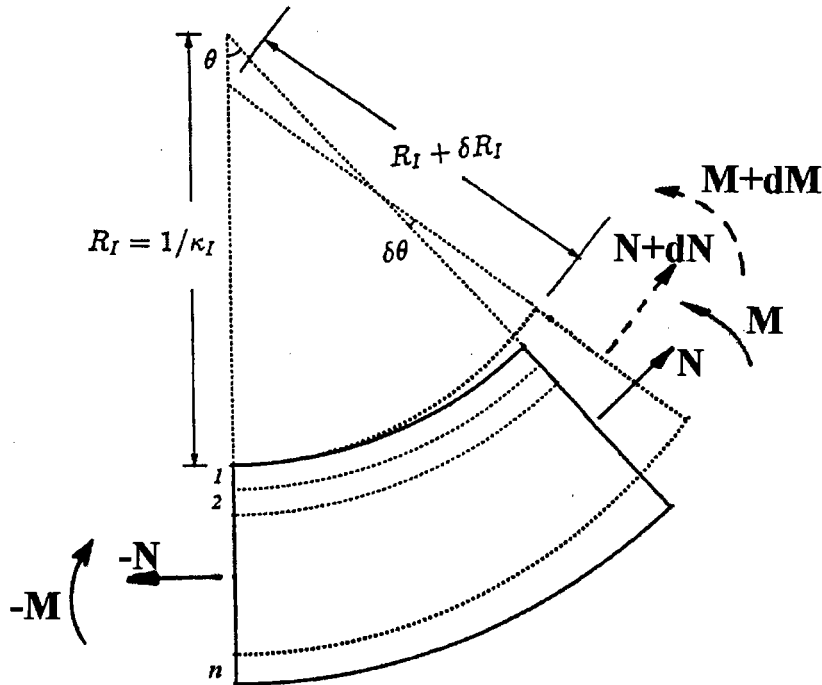


Figure III - 10 : Schéma d'un incrément de déformation subi par un élément de longueur de tôle sous sollicitation de flexion-traction. La tôle est divisée en  $n$  couches ( $i = 1, n$ ) selon son épaisseur.

La Figure III - 10 montre l'élément de tôle, aux instants  $t$  et  $t + dt$ .  $\theta$  définit l'angle entre les plans des deux sections droites extrêmes de l'élément de tôle. L'objet du calcul consiste à déterminer les incréments de déformation des couches successives de la tôle, en allant de proche en proche de la couche supérieure ( $i = 1$ ) à la couche inférieure ( $i = n$ ). La fibre supérieure, repérée par l'indice 0, peut-être considérée comme une couche d'épaisseur nulle.

Partant de la relation  $\theta = l_{i+1} \cdot K_{i+1}$ , les incréments d'angle ( $d\theta$ ), de courbure ( $dK_{i+1}$ ) et de déformation ( $d\varepsilon_{i+1}$ ) sont liés par :

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dK_{i+1}}{K_{i+1}} + \frac{dl_{i+1}}{l_{i+1}} = \frac{dK_{i+1}}{K_{i+1}} + d\varepsilon_{i+1} = -\frac{dR_{i+1}}{R_{i+1}} + d\varepsilon_{i+1} \quad (\text{III-23})$$

Les rayons de courbure de deux couches adjacentes sont liés par la relation :  $R_{i+1} = R_i + (h_{i+1} + h_i)/2$ , et donc, les incréments vérifient :

$$dR_{i+1} = dR_i + (dh_{i+1} + dh_i)/2 = -\frac{dK_i}{K_i^2} + (dh_{i+1} + dh_i)/2 \quad (\text{III-24})$$

Enfin, l'incrément d'épaisseur de la couche  $i + 1$  vérifie :

$$\frac{dh_{i+1}}{h_{i+1}} = d\varepsilon_{2i+1} = -d\varepsilon_{1i+1} \quad (\text{III-25})$$

d'après l'hypothèse de déformation plane. Après élimination de  $R_{i+1}$ , et des incréments  $d\theta/\theta$ ,  $dR_{i+1}$  et  $dh_{i+1}$ , on détermine l'incrément de déformation  $d\varepsilon_{1i+1}$  en fonction des valeurs des variables  $K_i, h_i$  et  $h_{i+1}$  en début de pas, et des incréments  $d\varepsilon_{1i}$  et  $dK_i$  préalablement déterminés pour la couche  $i$ . La relation de récurrence obtenue est donnée par :

$$d\varepsilon_{1i+1} = d\varepsilon_{1i} + \frac{[(h_{i+1} + h_i)/2][dK_i - K_i \cdot d\varepsilon_{1i}]}{1 + K_i [h_{i+1} + h_i / 2]} \quad (\text{III-26})$$

De plus, la relation de récurrence définissant l'incrément de courbure  $dK_{i+1}$  est donnée par :

$$dK_{i+1} = K_{i+1} \left( \frac{dK_i}{K_i} + d\varepsilon_{1i} - d\varepsilon_{1i+1} \right) \quad (\text{III-27})$$

L'incrément d'épaisseur est donné par (III-25), et toutes les variables cinématiques peuvent être réactualisées.

## IV - 2 - Détermination des contraintes et des efforts intérieurs $N$ et $M$

### IV - 2 - 1 - Détermination des contraintes en fin de pas

Le comportement élasto-plastique cyclique a été décrit au paragraphe III. Chaque couche de la tôle fait l'objet d'un repérage du domaine de comportement (élastique ou élasto-plastique) dans laquelle elle se situe. Nous disposons pour chaque couche des valeurs de contrainte ( $\sigma_{1i}$ ) et de déformations ( $\varepsilon_{1i}$  et  $\bar{\varepsilon}_i$ ) en début de pas, et nous conservons les valeurs de l'incrément de déformation du pas précédent ( $d\varepsilon_{1ipp}$ ).

Lorsque la couche  $i$  est en comportement élastique, le test qui est effectué consiste à vérifier si le seuil élastique est dépassé ou non avec la nouvelle valeur de déformation. Si non, la loi élastique est appliquée. Si oui, la couche est considérée en chargement élasto-plastique et la loi élasto-plastique est utilisée.

Lorsque la couche  $i$  est en régime élasto-plastique, on s'assure de la monotonie de la déformation. Si  $d\varepsilon_{1i} \cdot d\varepsilon_{1ipp}$  est positif, le comportement reste élasto-plastique. Si  $d\varepsilon_{1i} \cdot d\varepsilon_{1ipp}$  est négatif, la couche entre en décharge élastique. On définit alors les valeurs de contrainte ( $\sigma_{1i}$ ) et de déformation ( $\varepsilon_{1i}$ ) en début de pas comme les valeurs de rebroussement ( $\sigma_{1ri} = \sigma_{1i}$  et  $\varepsilon_{1ri} = \varepsilon_{1i}$ ), qui sont les valeurs à utiliser dans la loi de comportement élastique.

#### IV - 2 - 2 - Détermination des efforts intérieurs $N$ et $M$

L'effort normal  $N$  et le moment de flexion  $M$ , à mi-épaisseur de la tôle, sont déterminés par les sommations sur l'épaisseur de la tôle définies par :

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{j=1}^n \sigma_{xj} h_j \\
 M &= \sum_{j=1}^n \sigma_{xj} h_j \left( \sum_{k=1}^{j-1} \left( h_k + \frac{1}{2} h_j - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n h_m \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{III-28}$$

#### IV - 3 - Prise en compte de l'équilibre

Les conditions d'équilibre se traduisent par une évolution couplée de  $N$  et  $M$ , décrite au paragraphe II. L'incrément de déformation de la tôle étant complètement défini par les incréments de courbure  $dK_0$  et de déformation  $d\varepsilon_{10}$  de la fibre supérieure, il convient pour chaque incrément de rechercher le couplage entre  $dK_0$  et  $d\varepsilon_{10}$ , conduisant au respect de l'équilibre.

En pratique, nous avons supposé pour des raisons numériques que la tôle présente à l'entrée une courbure négative de la fibre supérieure de très faible valeur absolue,  $K_0 = -0,25 \cdot 10^{-3} / h_0$ . L'état initial des différentes couches est l'état naturel. Notons que pour une plaque qui serait plane à l'état naturel, cette courbure correspondrait à une déformation des fibres extrêmes égale à  $|\varepsilon_1| = h_0 |K_0| / 2 = 0,125 \cdot 10^{-3}$ , soit environ 5 % de la limite élastique pour le matériau utilisé. Les incréments de courbure sont fixés en valeur absolue à  $|dK_0| = 0,5 \cdot 10^{-3} / h_0$ , de sorte que la limite élastique serait atteinte sous flexion pure en une dizaine d'incrémentes.

Le couplage entre  $dK_0$  et  $d\varepsilon_{10}$  permettant de satisfaire l'équilibre ( $dM + R \cdot dN = 0$  ou  $dM \pm \frac{h}{2} dN = 0$ ) est recherché de manière itérative, sachant que la fibre neutre reste tout au long de l'histoire de chargement dans l'épaisseur de la tôle. L'itération utilise donc les valeurs extrêmes  $d\varepsilon_{10} = 0$  et  $d\varepsilon_{10} = -dK_0 \cdot h / (1 + K_0 \cdot h)$ , valeurs qui correspondent, à la fibre neutre supposée coïncider, respectivement, avec la fibre supérieure et la fibre inférieure de la tôle.

#### IV - 4 - Prise en compte du frottement

Dans ce cas, l'équation d'évolution, qui doit être vérifiée par les efforts appliqués à l'élément de tôle, est donnée par :  $dM + R.dN = 0$ . Mais pas au niveau des points de contact avec les outils, où il convient de prendre en compte les discontinuités d'effort normal, définies respectivement par :  $N_E^+ - N_E^- = \mu F_E$  ;  $N_J^+ - N_J^- = \mu F_J$  ;  $N_S^+ - N_S^- = \mu F_S$ , et qui sont gérées par l'équation d'évolution :  $dM \pm \frac{h}{2}dN = 0$  jusqu'à ce que la discontinuité d'effort normal  $\Delta N$  recherchée soit obtenue. Évidemment, les forces normales de contact  $F_E$ ,  $F_J$  et  $F_S$  qui seront obtenues avec frottement ne sont pas connues avant calcul. C'est pourquoi nous proposons le mode de calcul suivant : nous simulons tout d'abord le processus dans le cas sans frottement, puis nous effectuons le calcul de pliage-étirage avec frottement en utilisant les valeurs de  $F_E$ ,  $F_J$  et  $F_S$  obtenues sans frottement pour définir les discontinuités d'effort normal  $\Delta N$ . Les efforts exercés par les outils étant ensuite recalculés, une itération peut ainsi être réalisée. Nous avons observé numériquement que quatre itérations sont suffisantes pour obtenir des résultats stabilisés.

## V - Analyse des résultats

Le programme de calcul consiste tout d'abord à estimer, à partir de la géométrie étudiée, les rayons de courbure  $R_{effE}$  et  $R_{effS}$  au niveau des points de contact E et S, respectivement, avec les rayons d'entrée et de sortie matrice (cf. Annexe 1). Les rayons de courbure imposés à la fibre supérieure varient donc depuis la très forte valeur négative imposée à l'entrée (-5 m) jusqu'à  $-(R_{effE} + h/2)$  (point E), puis  $(R_J + h/2)$  (point J),  $-(R_{effS} + h/2)$  (point S) et enfin (-5 m) en sortie. Le programme consiste ensuite à effectuer l'incrémentatation cinématique avec recherche de l'équilibre. Enfin, les angles de contact avec les outils, les efforts tranchants en un certain nombre de points remarquables, et les efforts exercés par les outils sont déterminés à partir des relations d'équilibre rappelées dans l'Annexe 2.

Les résultats seront discutés dans le cas d'un écrouissage isotrope aux paragraphes V-1 et V-2. L'influence d'un écrouissage cinématique est analysée au paragraphe V-3. Enfin, le paragraphe V-4 présente des comparaisons avec des résultats de la littérature.

### V - 1 - Cas du contact sans frottement

Dans ce cas, l'équation d'évolution, devant être vérifiée par les efforts appliqués à l'élément de tôle, est toujours donnée par :  $dM + R.dN = 0$ .

#### V - 1 - 1 - Cas d'un fort enfoncement

La Figure III - 11, la Figure III - 12 et la Figure III - 13 montrent les évolutions obtenues pour les fibres médiane et extrêmes, respectivement en ce qui concerne les déformations longitudinales  $\varepsilon_{11}$ , les déformations équivalentes  $\bar{\varepsilon}$ , et les contraintes  $\sigma_{11}$ . Ces figures sont à comparer avec les figures correspondantes obtenues dans les simulations par éléments finis (Figure II - 10, Figure II - 11 et Figure II - 12, Chapitre 2). Sur les figures précédentes, les abscisses correspondent aux numéros d'incrément. L'incrémentatation étant ici effectuée linéairement par rapport à la courbure, les zones de comportement élasto-plastique sont évidemment fortement dilatées, et les zones de comportement élastique fortement contractées par rapport à l'évolution spatiale utilisée au Chapitre 2, où les numéros de nœuds sont portés en abscisse.

La comparaison est par contre immédiate au niveau des courbes reportant les contraintes de Von Mises  $\sigma_{VM}$  en fonction de la déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$  et les cycles contrainte/déformation ( $\sigma_{11}, \epsilon_{11}$ ). Les Figure III - 14 à Figure III - 16 montrent un très bon accord sur le cyclage ( $\sigma_{11}, \epsilon_{11}$ ) subi par les fibres supérieure et inférieure. Nous pouvons remarquer en particulier une très bonne concordance des déformations au niveau du contact tôle/outils (rayon du jonc pour la fibre supérieure, et rayons d'entrée et de sortie pour la fibre inférieure). Les surfaces opposées aux contacts présentent une différence pouvant atteindre  $|\epsilon_{11}| = 0,01$  entre la modélisation analytique et le calcul par éléments finis. La fibre médiane, qui subit un chargement de traction plane modérée avec quelques zones de décharge élastique, est assez mal analysée dans le calcul par éléments finis (Figure III - 15).

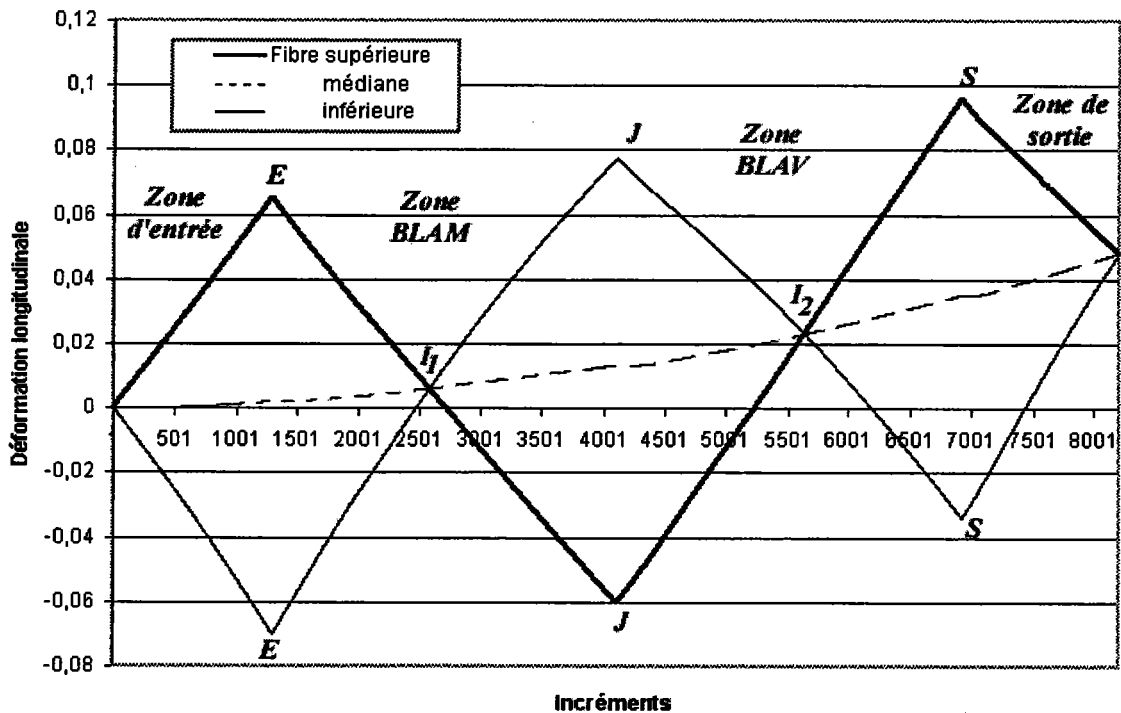


Figure III - 11 : Évolution des déformations longitudinales, en fort enfoncement sans frottement.



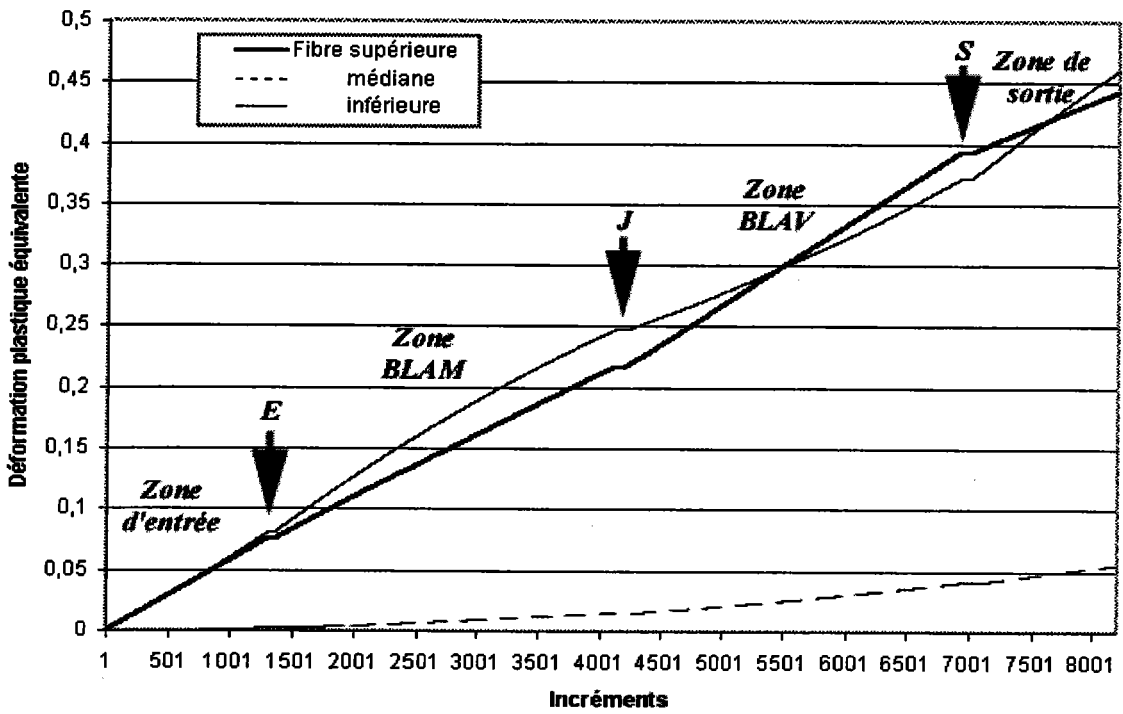


Figure III - 12 : Évolution des déformations plastiques équivalentes, en fort enfoncement sans frottement.

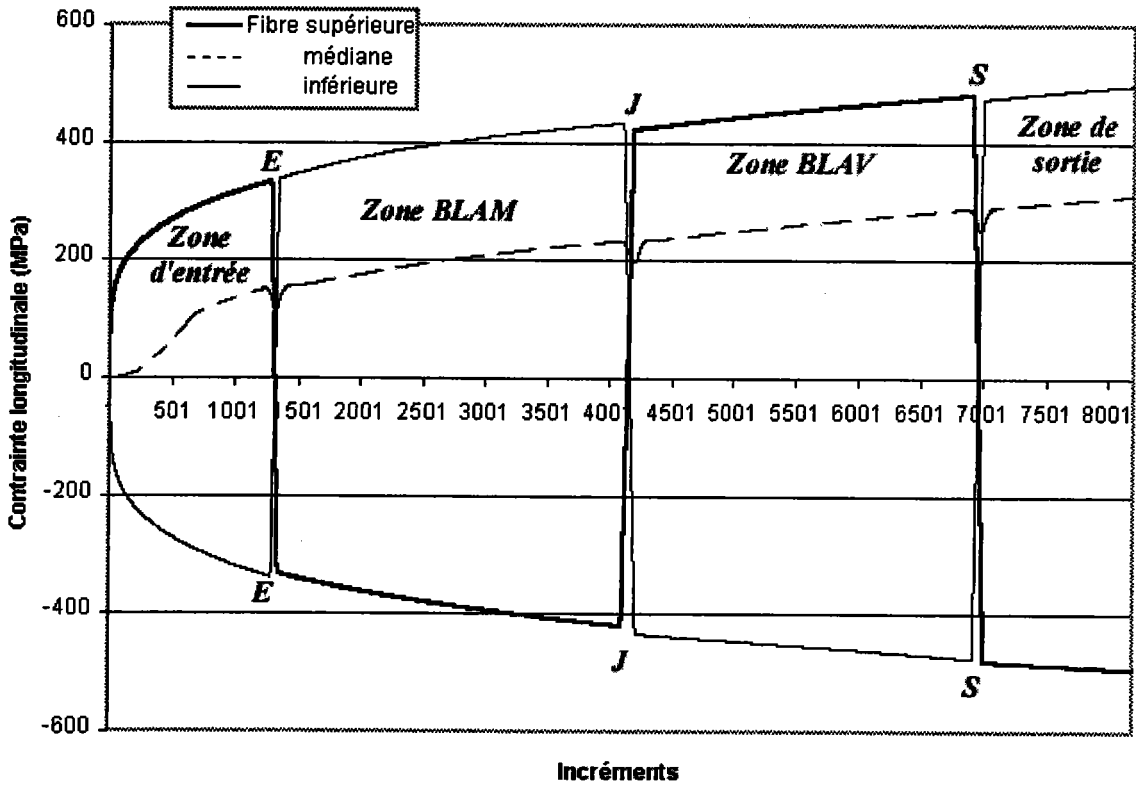


Figure III - 13 : Évolution des contraintes longitudinales. Cas d'un fort enfoncement sans frottement.

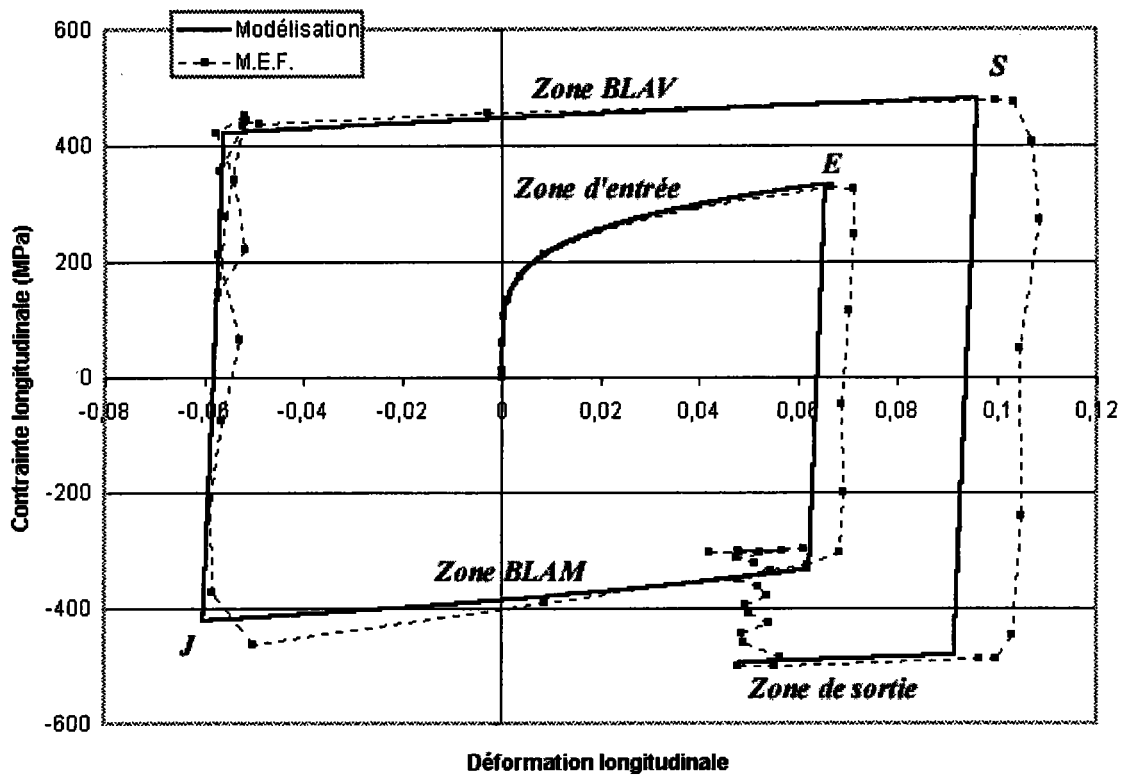


Figure III - 14 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre supérieure, en fort enfoncement sans frottement.

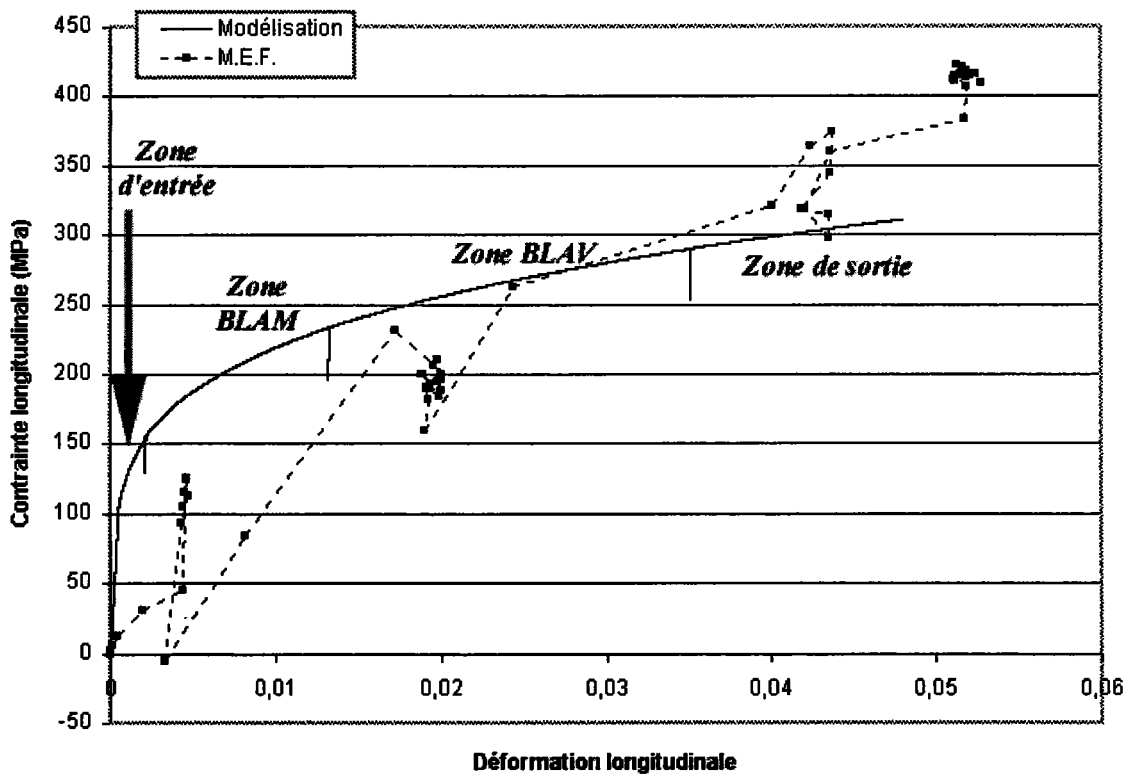


Figure III - 15 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre médiane, en fort enfoncement sans frottement.

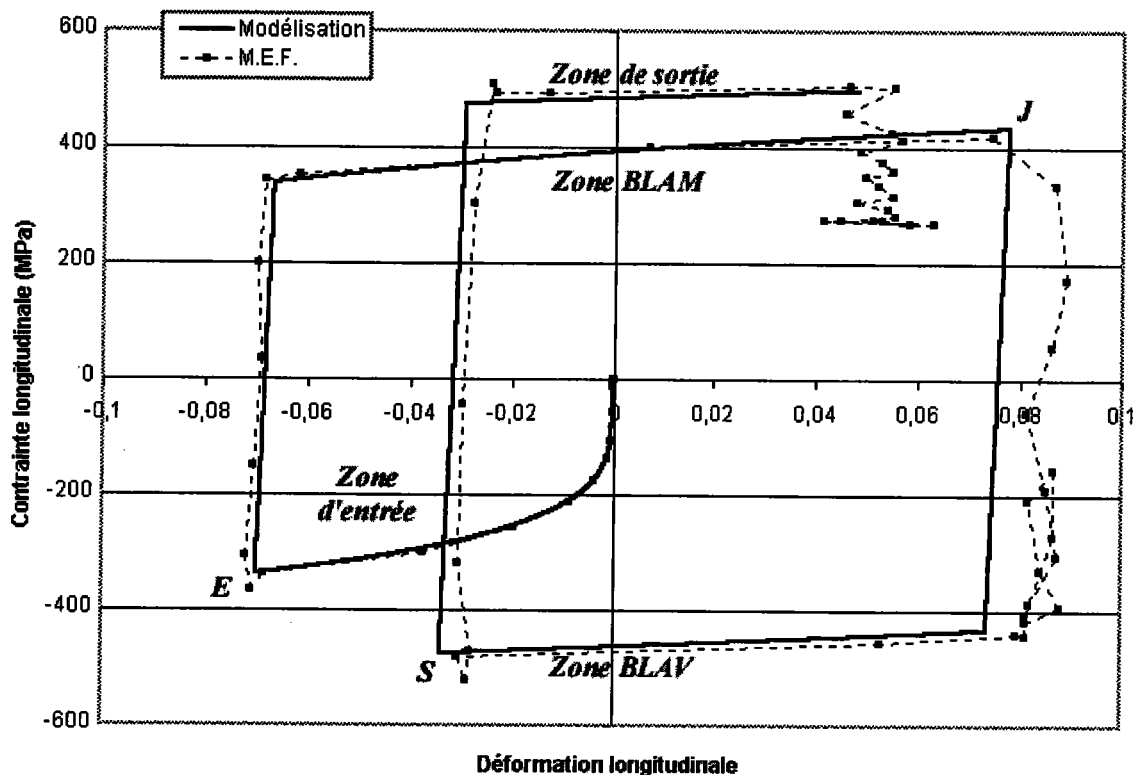


Figure III - 16 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre inférieure, en fort enfoncement sans frottement.

Afin de mieux comparer les résultats de la simulation par éléments finis et de la modélisation analytique, le Tableau III - 1 résume les valeurs obtenues par les deux types de calcul, concernant :

- les déformations  $\varepsilon_{11}$  des différentes fibres au niveau des zones de décharge élastique correspondant aux rayons d'outils, et en sortie d'outillage, ainsi qu'au niveau des points d'inflexion le long des brins libres. Les points d'inflexion de la tôle sont facilement identifiés par le fait que les déformations  $\varepsilon_{11}$  sont alors égales pour toutes les fibres.
- les déformations équivalentes  $\bar{\varepsilon}$  au niveau de ces mêmes zones.

Déformation longitudinale	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,07	0,008	-0,054	0,028	0,104	0,052
Fibre sup. modélisation.	0,065	0,006	-0,060	0,023	0,096	0,048
Fibre inf. M.E.F.	-0,07	0,008	0,084	0,028	-0,030	0,052
Fibre inf. modélisation.	-0,07	0,006	0,077	0,023	-0,034	0,048
Fibre med. M.E.F.	0,0046	0,008	0,020	0,028	0,043	0,052
Fibre med. modélisation.	0,0022	0,006	0,013	0,023	0,035	0,048

Déformation équivalente	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,080	0,15	0,22	0,33	0,41	0,47
Fibre sup. modélisation.	0,075	0,14	0,22	0,31	0,39	0,44
Fibre inf. M.E.F.	0,08	0,17	0,26	0,33	0,39	0,48
Fibre inf. modélisation.	0,08	0,16	0,25	0,30	0,37	0,46
Fibre med. M.E.F.	0	0,001	0,008	0,012	0,021	0,026
Fibre med. modélisation.	0,002	0,007	0,015	0,027	0,041	0,055

**Tableau III - 1 : Comparaison entre la MEF et la méthode analytique pour les déformations longitudinale et équivalente. Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.**

On note un très bon accord sur les déformations  $\varepsilon_{11}$ , avec toutefois des valeurs de déformation pour la fibre médiane légèrement plus faibles dans le cas de la modélisation analytique. On obtient ainsi en sortie d'outillage  $\varepsilon_{11} = 0,048$ , au lieu de 0,052 avec la simulation par éléments finis.

L'accord est également très bon pour les déformations équivalentes des fibres extrêmes dans les deux types de calcul (les écarts étant de l'ordre de 6 % pour la fibre supérieure et de 4 % pour la fibre inférieure). En revanche, les déformations équivalentes de la fibre médiane obtenues par la méthode des éléments finis ne peuvent être prises comme élément de comparaison. Nous avons en effet signalé au Chapitre 2 que les valeurs de  $\bar{\varepsilon}$  obtenues pour cette fibre sont beaucoup trop faibles, et ne sont pas compatibles avec l'intensité des déformations de traction plane  $\varepsilon_{11}$  de cette fibre. Cependant, les valeurs obtenues par calcul analytique correspondent correctement à ce que nous attendions pour la fibre moyenne ( $\approx 0,06$ ).

La modélisation analytique fournit également les évolutions de l'effort normal  $N$  et du moment fléchissant  $M$ . Les évolutions devant être vérifiées par  $N$  et  $M$  sont résumées dans le Tableau III - 2. En effet, le sens de ces évolutions découle de façon obligatoire de l'équation d'équilibre,  $dM + R.dN = 0$ , du signe, connu, de  $R$  et du signe, également connu, de  $dM$  compte tenu de l'évolution de  $R$ . Le sens de variation des déformations  $\varepsilon_{sup}$  et  $\varepsilon_{inf}$  est également reporté dans ce Tableau.

Zone	R	$dM$	$dN$	$d\varepsilon_{sup}$	$d\varepsilon_{inf}$
Entrée	< 0	< 0	< 0	> 0	< 0
REM	< 0	> 0	> 0	< 0	> 0
BLAM	< 0 puis > 0	> 0	> 0 puis < 0	< 0	> 0
RJ	> 0	< 0	> 0	> 0	< 0
BLAV	> 0 puis < 0	< 0	> 0 puis < 0	> 0	< 0
RSM	< 0	> 0	> 0	< 0	> 0
Sortie	< 0	> 0	> 0	< 0	> 0

Tableau III - 2 : Récapitulatif du signe du rayon de courbure et des sens d'évolution des moments fléchissant  $M$ , de l'effort normal  $N$  et des déformations  $\varepsilon_{sup}$  et  $\varepsilon_{inf}$  des fibres supérieure et inférieure.

Les évolutions de  $N$  et  $M$  obtenues à partir des simulations issues de la modélisation sont représentées sur la Figure III - 17 et la Figure III - 18. L'effort normal et le moment fléchissant vérifient bien le sens des évolutions résumé dans le Tableau III - 2. On note que l'évolution de  $N$  est très faible dans les zones de comportement élasto-plastique (zones d'entrée, de sortie et sur les brins libres), et très forte dans les zones de comportement élastique correspondant au contact avec les outils. Le moment fléchissant présente une évolution qui reproduit le cyclage subi par la tôle, avec des zones de raccordement « arrondies » lors des recharges élasto-plastiques, en raison d'une replastification non simultanée des différentes fibres.

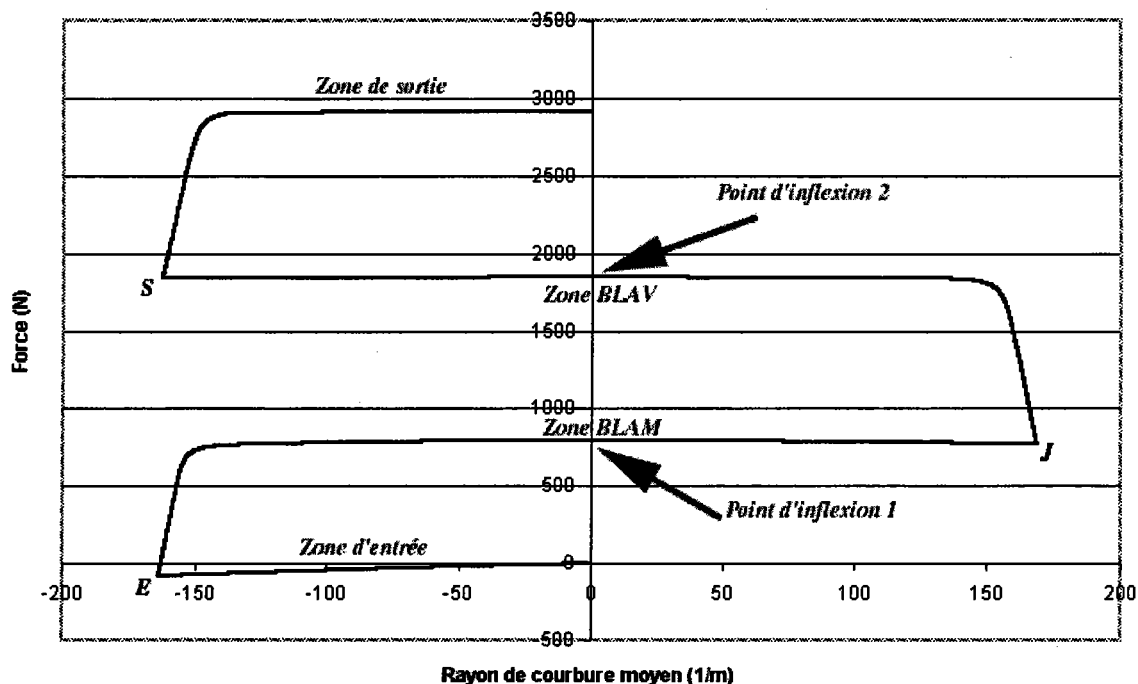


Figure III - 17 : Évolution de l'effort normal le long de la tôle, en fonction du rayon de courbure. Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottements.

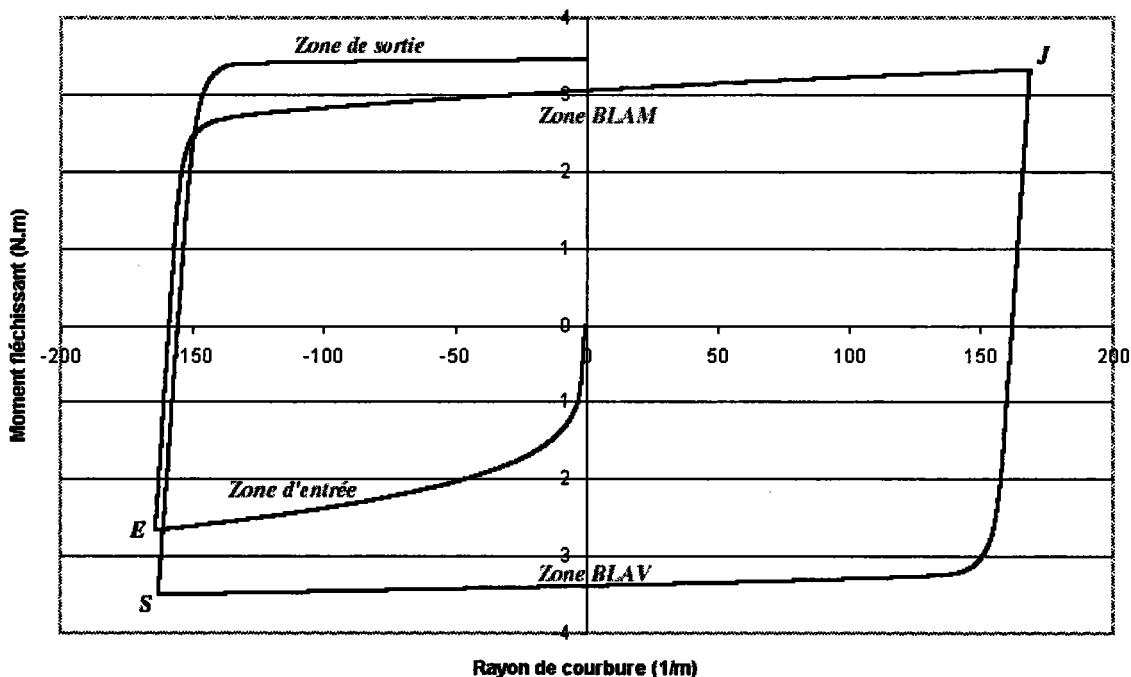


Figure III - 18 : Évolution du moment fléchissant le long de la tôle, en fonction du rayon de courbure. Cas d'un fort enfoncement, contact sans frottement.

La force de traction est directement obtenue comme étant égale à l'effort normal à la sortie. Compte tenu de l'équilibre du jonc, la force de serrage du jonc, calculée à partir des équations détaillées dans l'Annexe 2, est ici très peu différente de la somme des efforts

normaux au niveau des points d'inflexion sur les brins libres, où l'on peut considérer que, pour un fort enfoncement, la tangente à la tôle est pratiquement verticale. Le Tableau III - 3 compare les forces obtenues avec la simulation par éléments finis et avec la modélisation analytique. On note des forces de traction et de serrage légèrement inférieures à celles obtenues par la méthode des éléments finis (de l'ordre de 5% pour la force de traction). Les valeurs de la force du serre-flan sont très proches dans les deux types de calcul.

	Traction	Serrage $\bar{x}$	Serrage $\bar{y}$	Serre-flan
Modélisation	2917 N	-510 N	-2630 N	-370 N
M.E.F.	3070 N	-585 N	-2800 N	-330 N

**Tableau III - 3 : Comparaison des forces de traction, de serrage et de serre-flan entre modélisation et M.E.F. Cas d'un fort enfoncement, contacts sans frottement.**

#### V - 1 - 2 - Cas d'un faible enfoncement

La qualité des comparaisons entre les simulations par éléments finis et les simulations issues de la modélisation analytique est comparable à celle obtenue dans le cas d'un fort enfoncement. C'est pourquoi nous nous contentons ici de comparer les cycles contraintes/déformations ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) pour les fibres extrêmes (Figure III - 19 et Figure III - 20) et les valeurs de déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\bar{\varepsilon}$  en un certain nombre de points remarquables (Tableau III - 4).

L'accord sur le cyclage ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) des fibres extrêmes est à nouveau satisfaisant. Les différences sensibles observées par rapport aux résultats obtenus en fort enfoncement reflètent les différences de rayons de courbure effectifs obtenus dans les deux cas.

On note un assez bon accord en ce qui concerne les déformations  $\varepsilon_{11}$  (Tableau III - 4). Les déformations équivalentes des fibres extrêmes sont légèrement plus faibles avec la modélisation analytique (de l'ordre de 3 % pour la fibre supérieure, et de 6 % pour la fibre inférieure). A nouveau, les déformations équivalentes de la fibre médiane obtenues par la méthode des éléments finis ne sont pas compatibles avec l'intensité des déformations de traction plane  $\varepsilon_{11}$  de cette fibre, et ne peuvent être utilisées comme élément de comparaison.

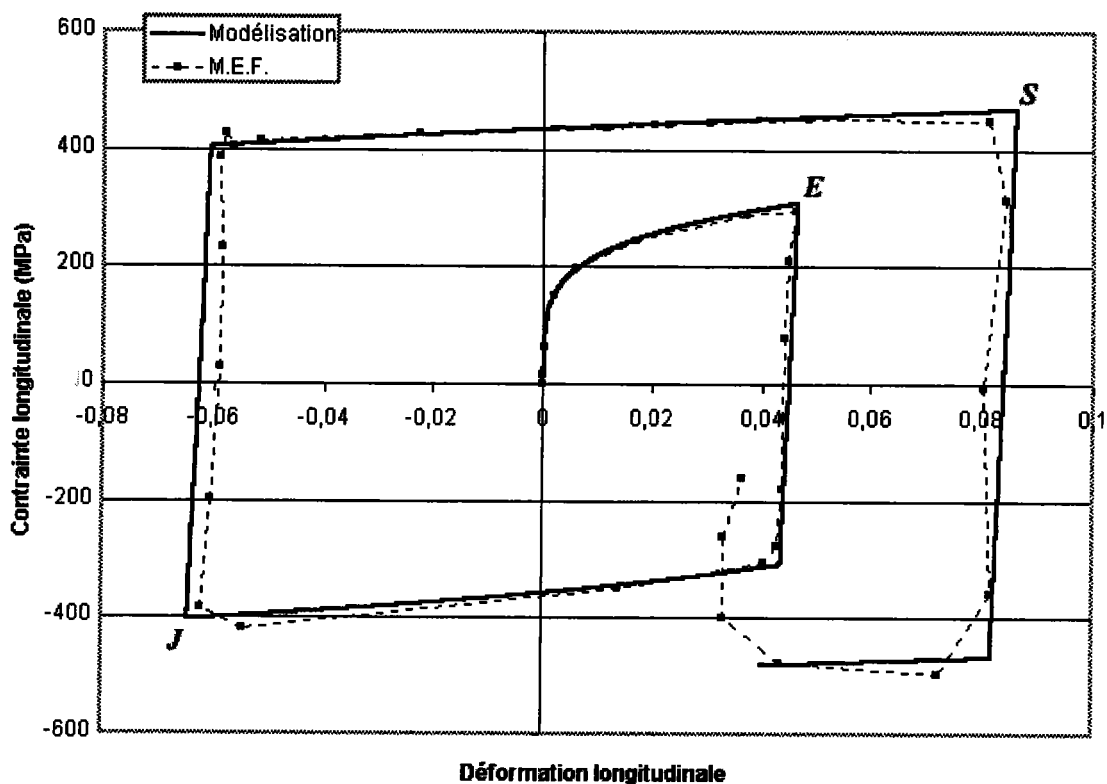


Figure III - 19 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre supérieure, en faible enfoncement, sans frottement.

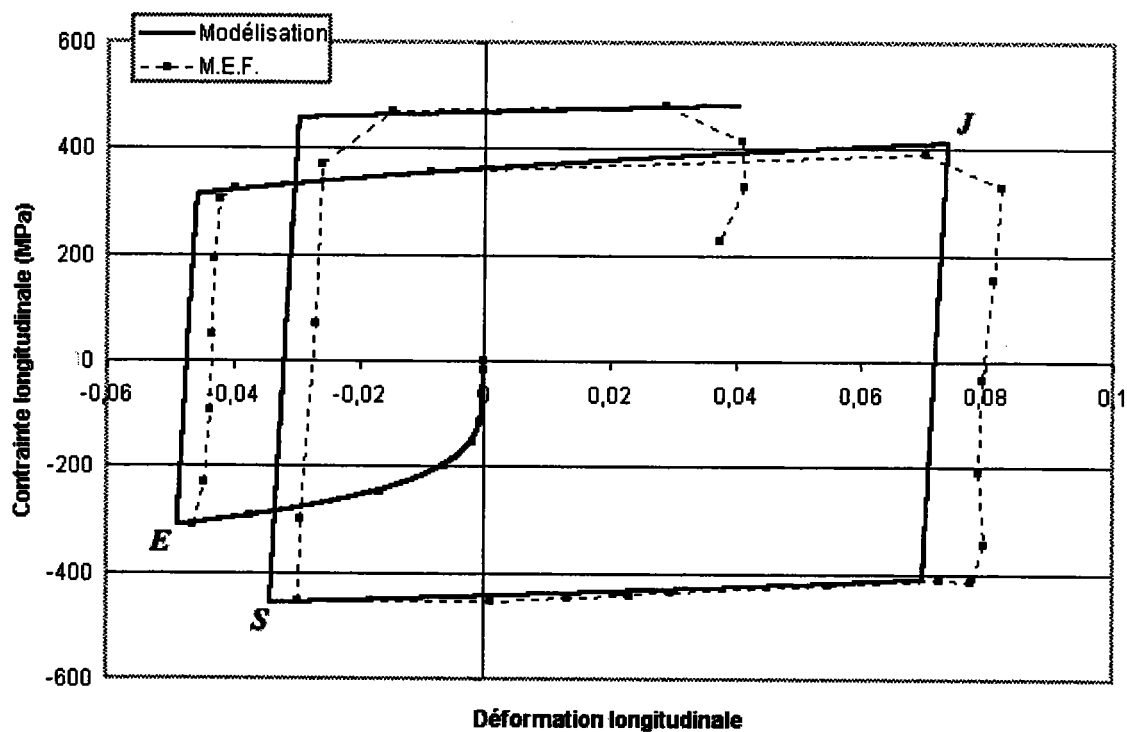


Figure III - 20 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre inférieure, en faible enfoncement, sans frottement.



Déformation longitudinale	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,044	0,004	-0,060	0,022	0,080	0,037
Fibre sup. modélisation.	0,046	0,003	-0,065	0,017	0,084	0,038
Fibre inf. M.E.F.	-0,044	0,004	0,079	0,022	-0,029	0,037
Fibre inf. modélisation.	-0,049	0,003	0,075	0,017	-0,036	0,038
Fibre med. M.E.F.	0,002	0,004	0,015	0,022	0,030	0,037
Fibre med. modélisation.	0,001	0,003	0,009	0,017	0,027	0,038

Déformation équivalente	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,051	0,10	0,17	0,27	0,34	0,39
Fibre sup. modélisation.	0,054	0,10	0,18	0,27	0,35	0,39
Fibre inf. M.E.F.	0,051	0,11	0,194	0,26	0,32	0,39
Fibre inf. modélisation.	0,056	0,11	0,194	0,255	0,32	0,40
Fibre med. M.E.F.	0,0003	0,003	0,007	0,006	0,0097	0,012
Fibre med. modélisation.	0,0011	0,003	0,010	0,020	0,031	0,044

**Tableau III - 4 : Comparaison entre la MEF et la méthode analytique pour les déformations longitudinale et équivalente, en faible enfoncement, sans frottement.**

Le Tableau III - 5 compare les forces obtenues dans les deux types de simulations. Nous pouvons noter des écarts plus faibles que ceux observés en fort enfoncement (inférieurs à 5 %) pour la plupart des forces, sauf pour le serre-flan de sortie (46 %). L'estimation de cette force est toutefois d'importance moindre que celle de la force de traction.

	Traction	Serrage $\bar{x}$	Serrage $\bar{y}$	Serre-flan 1	Serre-flan 2
Modélisation	2505 N	-1334 N	-1717 N	-365 N	-1034 N
M.E.F.	2450 N	-1365 N	-1775 N	-380 N	-1900 N

**Tableau III - 5 : Comparaison des forces de traction, de serrage et de serre-flan entre modélisation et M.E.F. Cas d'un faible enfoncement, contacts sans frottement.**

## V - 2 - Cas du contact avec frottement

Dans ce cas, l'équation d'évolution devant être vérifiée par les efforts appliqués à l'élément de tôle est donnée par :  $dM + R.dN = 0$  du cas général, sauf au niveau du contact avec les outils où l'équation  $dM \pm \frac{h}{2} dN = 0$  doit être utilisée jusqu'à obtenir la discontinuité d'effort normal imposée par le frottement.

### V - 2 - 1 - Validation de la méthode de calcul

Comme nous l'avons vu, la détermination de l'histoire de déformation et des forces extérieures sont dans ce cas le résultat d'un calcul itératif. La Figure III - 21 et la Figure III - 22 reportent l'évolution des forces de traction et de serrage lors de quatre itérations successives.

Les deux cas présentés sont tout à fait stabilisés à partir de la troisième itération. Nous avons gardé tout de même un calcul avec quatre itérations pour l'obtention des forces de frottement dans l'ensemble des simulations. Nous pouvons en effet nous le permettre vu le faible temps de calcul de l'ensemble.

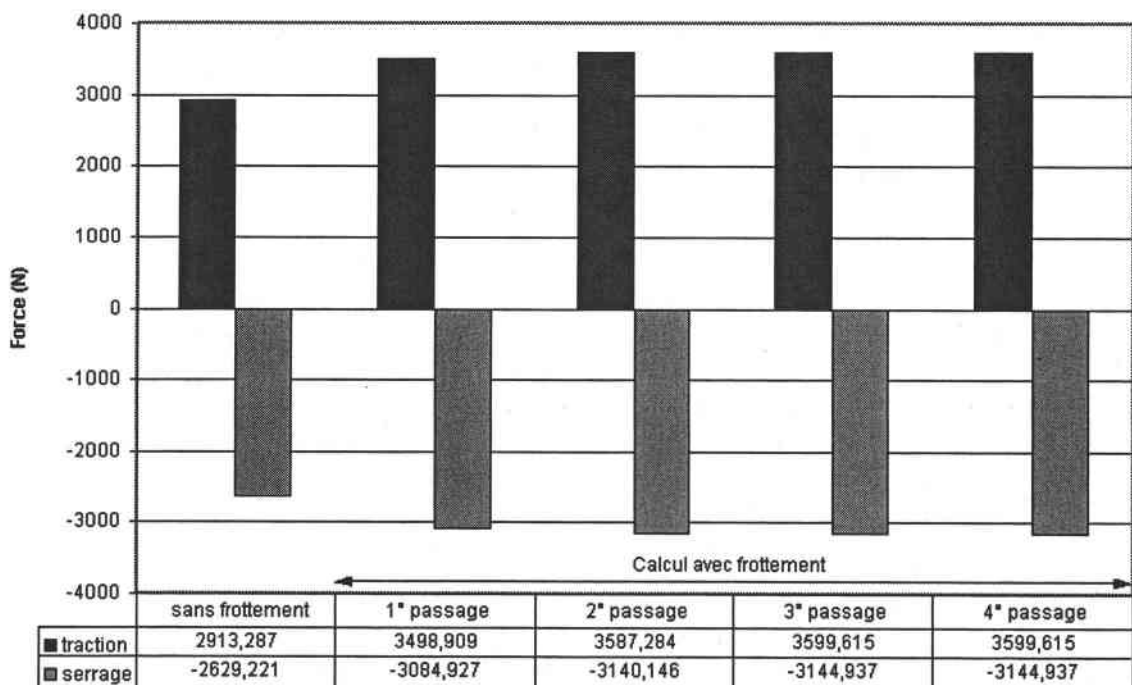


Figure III - 21 : Évolution des forces en fort enfoncement.

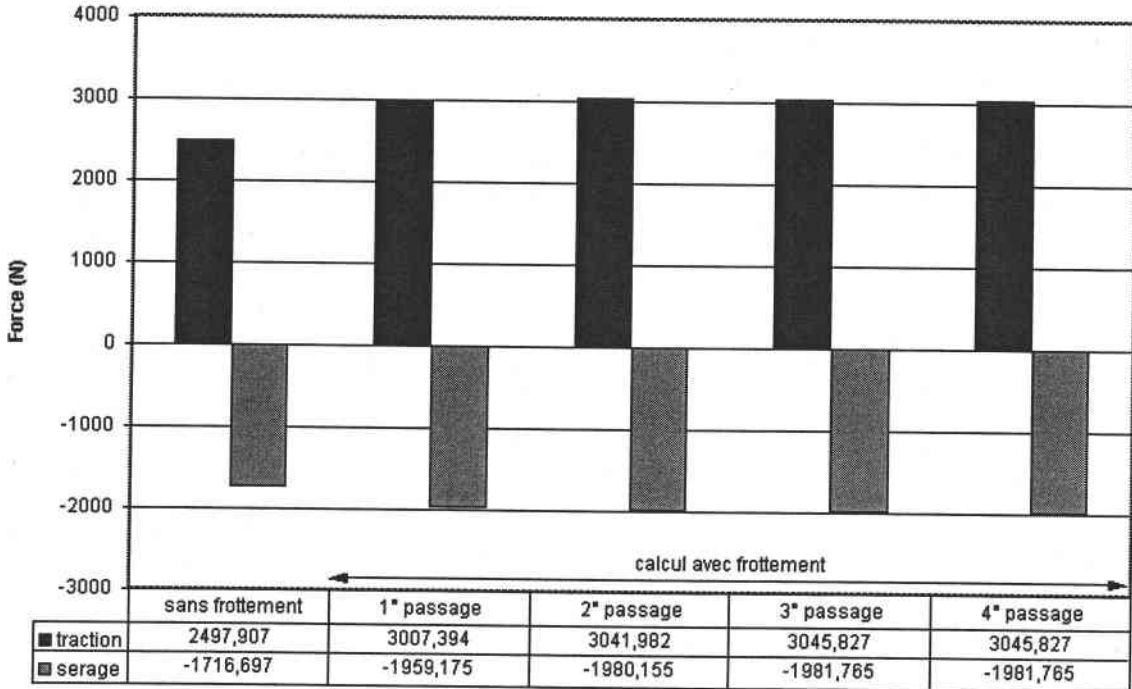


Figure III - 22 : Évolution des forces en faible enfoncement.

### V - 2 - 2 - Cas d'un fort enfoncement

Sur la Figure III - 23, nous avons porté l'évolution de la déformation longitudinale tout au long du calcul. Nous y retrouvons la même allure que dans le cas sans frottement. Nous apercevons néanmoins les zones de contact ponctuel avec les outils, où les discontinuités d'effort normal sont prises en compte. Elles se traduisent par des paliers situés au niveau des rayons d'outils. Ceci est dû au fait que le calcul est géré pour ces zones avec des incréments de courbure dix fois plus faibles que dans le cas général.

Les déformations longitudinales sont plus importantes dans le cas du calcul avec frottement. Nous passons en sortie de  $\varepsilon_{11} = 0,048$  à  $\varepsilon_{11} = 0,056$ , soit une augmentation d'environ 17 %.

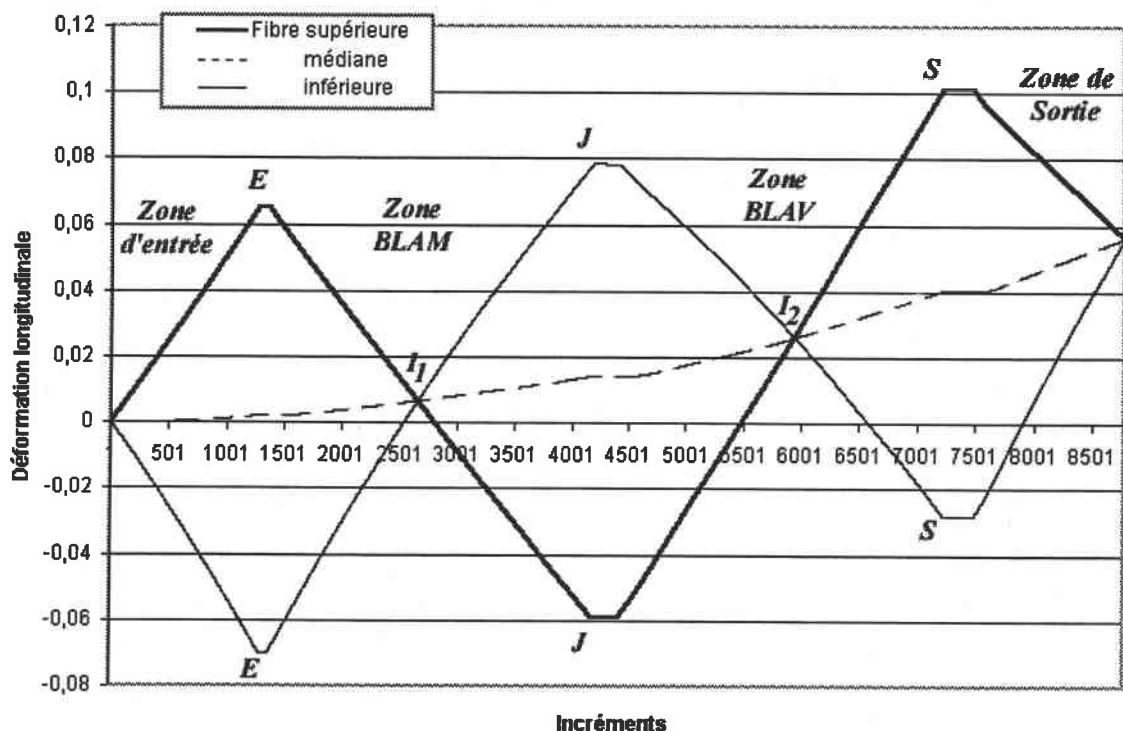


Figure III - 23 : Évolution des déformations longitudinales, en fort enfoncement avec frottement.

La comparaison de l'évolution de la déformation longitudinale de la fibre médiane dans les différents cas de frottement (Figure III - 24) met en évidence l'influence du frottement sur l'évolution de la déformation tout au long du processus. Les déformations avec et sans frottement sont identiques au niveau du rayon d'entrée. Nous pouvons observer une légère augmentation au niveau du rayon du jonc. L'augmentation est alors très nette en arrivant au rayon sortie et, bien sûr, au niveau de la sortie elle-même ( $\varepsilon_{11}$  passe de 0,048 à 0,056). La présence du frottement augmente ainsi les déformations tout au long de l'outillage. Nous observons la même évolution quel que soit l'enfoncement effectué.

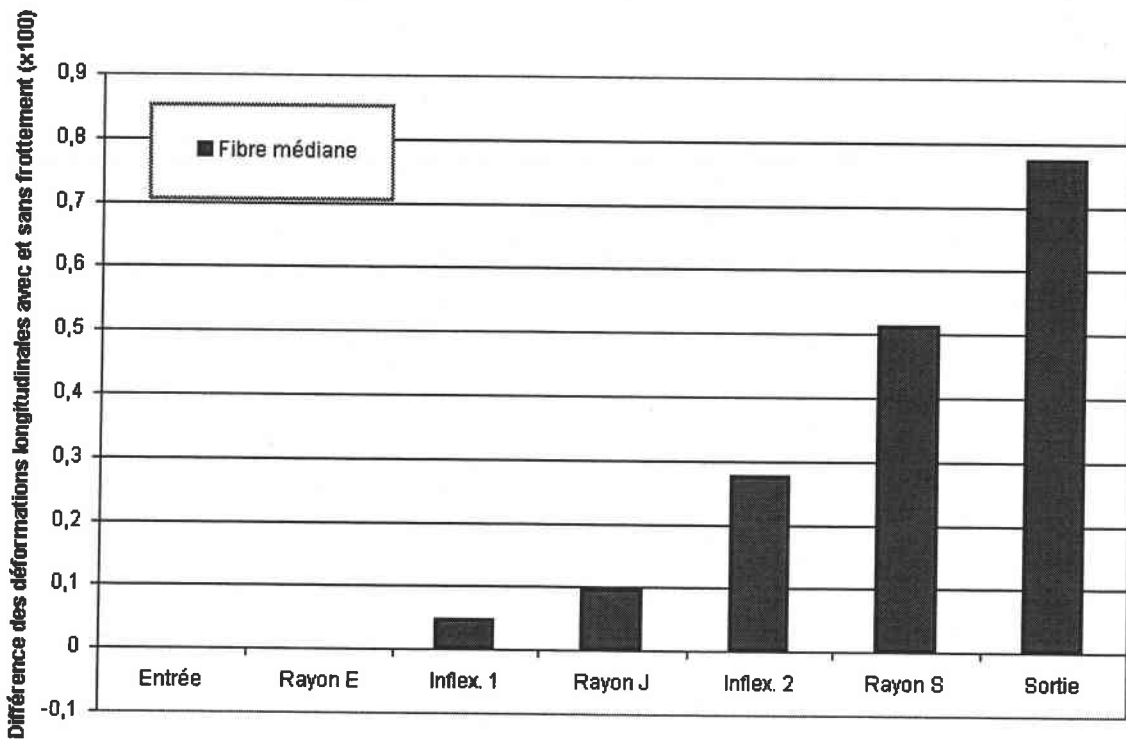


Figure III - 24 : Influence du frottement sur l'évolution de la déformation longitudinale de la fibre médiane en fort enfoncement.

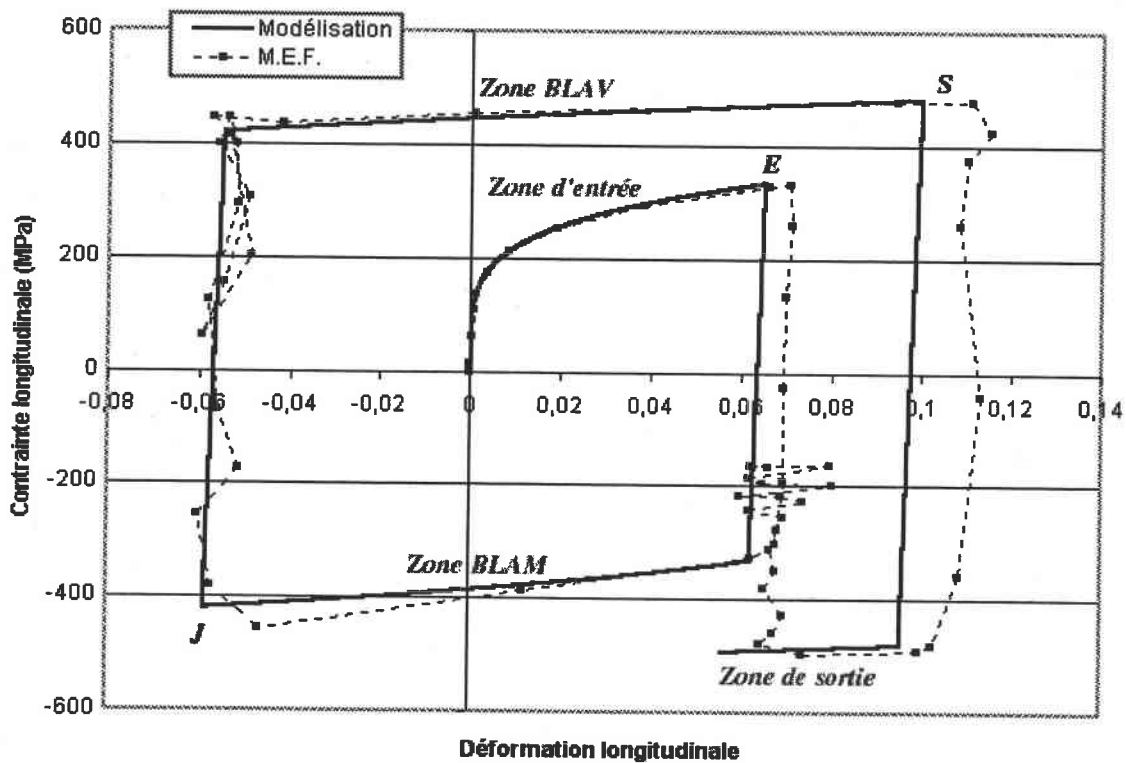


Figure III - 25 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre supérieure, en fort enfoncement avec frottement.

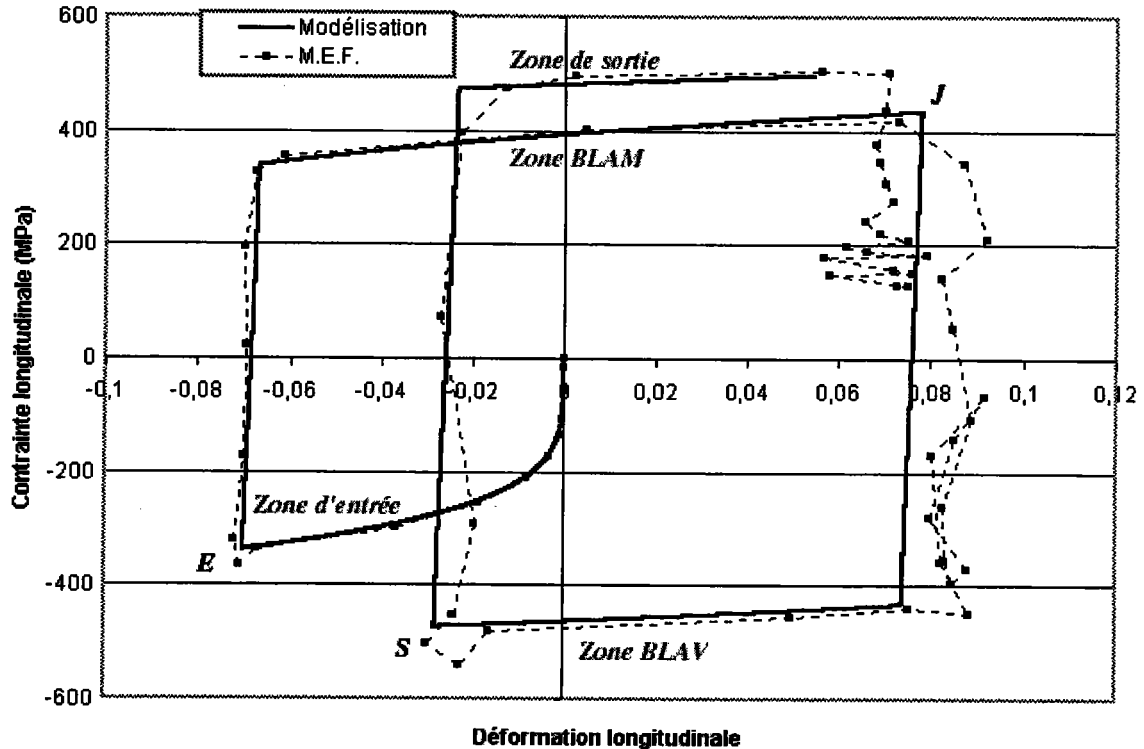


Figure III - 26 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre inférieure, en fort enfoncement avec frottement.

Sur la Figure III - 25 et la Figure III - 26, nous avons reporté les cycles contrainte/déformation ( $\sigma_{11} / \epsilon_{11}$ ) obtenus dans les deux types de calcul. Comme dans le cas sans frottement, nous retrouvons globalement une bonne concordance entre les résultats du calcul par éléments finis et ceux de la modélisation analytique. Et comme précédemment, les résultats sont excellents au niveau des fibres au contact tôle/outils, et légèrement moins bons au niveau de la fibre directement opposée. La différence de comportement est en fait très faible si l'on compare ces résultats avec ceux obtenus dans le cas sans frottement (Figure III - 14 et Figure III - 16).

Le Tableau III - 6 reporte les déformations longitudinales et les déformations équivalentes obtenues par les deux types de calcul. La comparaison est bonne, même si les déformations longitudinales en sortie d'outillage présentent un écart d'environ 0,01. L'augmentation de déformation longitudinale est de 0,017 avec la méthode des éléments finis, alors qu'elle n'est que de 0,010 avec la modélisation.

Nous avons toujours un bon accord pour les déformations équivalentes en ce qui concerne les fibres extrêmes.

Le Tableau III - 7 compare les forces obtenues avec la simulation par éléments finis et avec la modélisation analytique. La sous-estimation des forces de traction et de serrage par rapport à celles obtenues par la méthode des éléments finis (de l'ordre de 14 % jusqu'à 33 %

pour le serrage suivant la direction  $\bar{x}$ ) est plus marquée que dans le cas sans frottement. Quant à la force du serre-flan, elle reste inchangée par rapport au calcul avec frottement.

Déformation longitudinale	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,070	0,009	-0,056	0,030	0,113	0,069
Fibre sup. modélisation.	0,065	0,007	-0,059	0,026	0,101	0,056
Fibre inf. M.E.F.	-0,070	0,009	0,088	0,030	-0,026	0,069
Fibre inf. modélisation.	-0,070	0,007	0,078	0,026	-0,028	0,056
Fibre med. M.E.F.	0,005	0,009	0,020	0,030	0,048	0,069
Fibre med. modélisation.	0,002	0,007	0,014	0,026	0,040	0,056

Déformation équivalente	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,08	0,15	0,23	0,33	0,42	0,47
Fibre sup. modélisation.	0,075	0,139	0,215	0,31	0,40	0,44
Fibre inf. M.E.F.	0,08	0,17	0,26	0,32	0,39	0,50
Fibre inf. modélisation.	0,08	0,165	0,25	0,30	0,37	0,46
Fibre med. M.E.F.	0,00	0,0007	0,007	0,01	0,03	0,05
Fibre med. modélisation.	0,002	0,0075	0,016	0,03	0,046	0,06

**Tableau III - 6 : Comparaison entre la M.E.F. et la méthode analytique pour les déformations longitudinale et équivalente. Cas d'un fort enfoncement, contacts avec frottements.**

	Traction	Serrage $\bar{x}$	Serrage $\bar{y}$	Serre-flan
Modélisation	3599 N	-482 N	-3145 N	-370 N
M.E.F.	4200 N	-720 N	-3600 N	-330 N

**Tableau III - 7 : Comparaison des forces de traction, de serrage et de serre-flan entre modélisation et M.E.F. Cas d'un fort enfoncement, contacts avec frottement.**

## V - 2 - 3 - Cas d'un faible enfoncement

Ici encore, la comparaison du cycle contrainte/déformation ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) entre les simulations par éléments finis et les simulations issues de la modélisation analytique est correcte au niveau des fibres extrêmes (Figure III - 27 et Figure III - 28), et les différences sont faibles par rapport au cas de contacts sans frottement (Figure III - 19 et Figure III - 20).

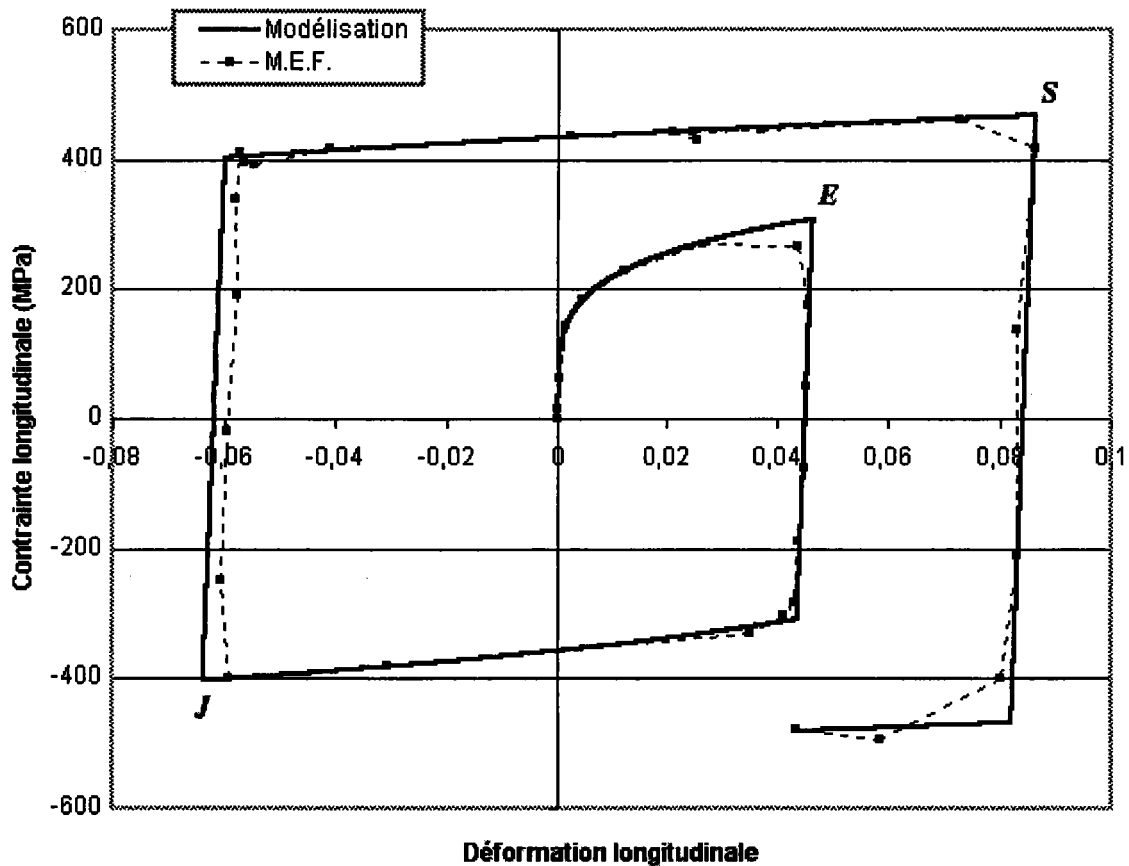


Figure III - 27 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre supérieure, en faible enfoncement avec frottement.



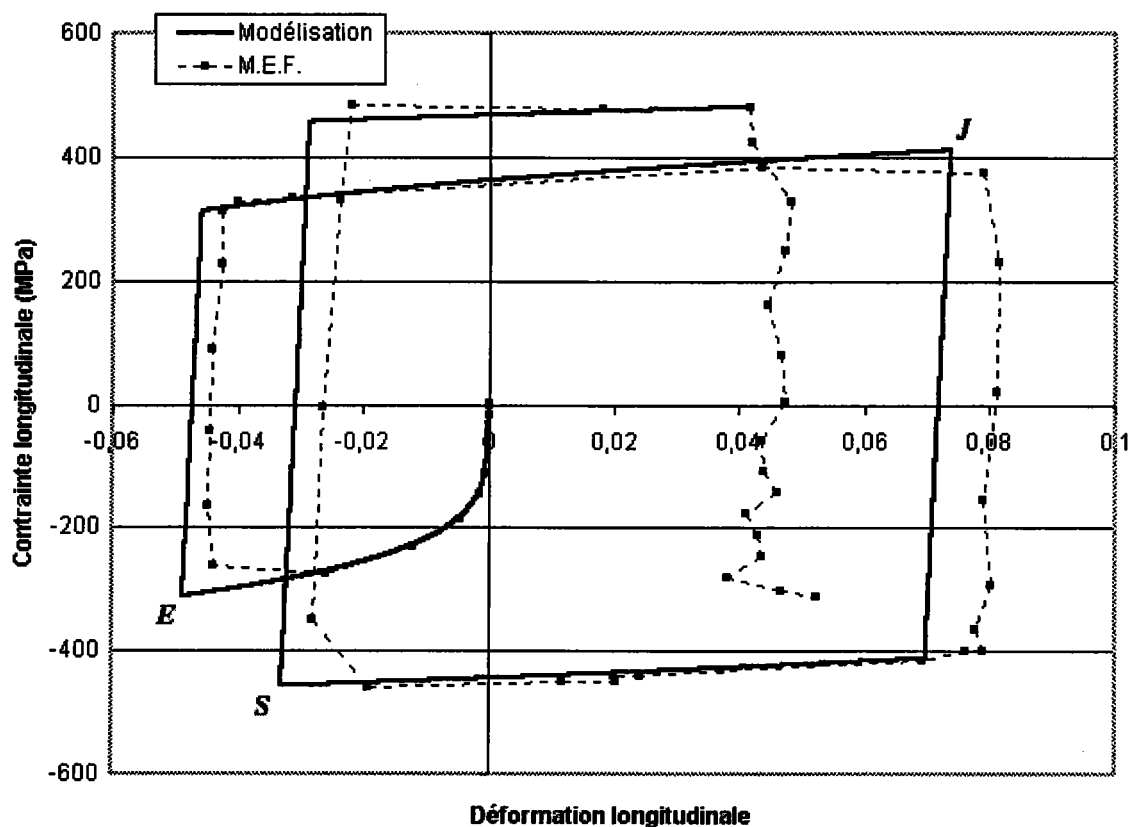


Figure III - 28 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre inférieure, en faible enfoncement avec frottement.

Nous retrouvons une très bonne concordance pour les déformations, tant au niveau de  $\varepsilon_{11}$  que de  $\bar{\varepsilon}$ , sauf évidemment pour la déformation équivalente de la fibre moyenne obtenue par la méthode des éléments finis, dont la valeur est erronée.

Déformation longitudinale	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,045	0,005	-0,060	0,022	0,085	0,044
Fibre sup. modélisation.	0,046	0,003	-0,064	0,020	0,087	0,043
Fibre inf. M.E.F.	-0,044	0,005	0,080	0,022	-0,026	0,044
Fibre inf. modélisation.	-0,049	0,003	0,074	0,020	-0,033	0,043
Fibre med. M.E.F.	0,0022	0,005	0,015	0,022	0,031	0,044
Fibre med. modélisation.	0,0011	0,003	0,010	0,020	0,030	0,043

Déformation équivalente	REM	Inflexion BLAM	RJ	Inflexion BLAV	RSM	Sortie
Fibre sup. M.E.F.	0,05	0,09	0,17	0,27	0,34	0,39
Fibre sup. modélisation.	0,054	0,10	0,18	0,27	0,35	0,39
Fibre inf. M.E.F.	0,05	0,106	0,195	0,26	0,32	0,40
Fibre inf. modélisation.	0,056	0,113	0,195	0,25	0,314	0,397
Fibre med. M.E.F.	0,0002	0,003	0,006	0,010	0,011	0,022
Fibre med. modélisation.	0,0011	0,003	0,011	0,023	0,035	0,050

**Tableau III - 8 : Comparaison entre la M.E.F. et la méthode analytique pour les déformations longitudinale et équivalente. Cas d'un faible enfoncement, contacts avec frottement.**

Le Tableau III - 9 récapitule les forces obtenues pour les deux cas de simulations. Dans le cas du faible enfoncement avec frottement, la correspondance entre la modélisation analytique et la méthode de calcul par les éléments finis est légèrement moins bonne au niveau de la force de traction que dans le cas sans frottement. Autrement dit, l'accroissement de force dû au frottement semble sous-estimé. Les valeurs restent tout de même satisfaisantes (différence inférieure à 10 % , sauf pour la force du second serre-flan).

	Traction	Serrage $\bar{x}$	Serrage $\bar{y}$	Serre-flan 1	Serre-flan 2
Modélisation	3046 N	-1484 N	-1982 N	-364 N	-763 N
M.E.F.	3300 N	-1520 N	-2060 N	-360 N	-1600 N

**Tableau III - 9 : Comparaison des forces de traction, de serrage et de serre-flan entre modélisation et M.E.F. Cas d'un faible enfoncement, contacts avec frottements.**

### V - 3 - Influence de l'anisotropie d'écrouissage

L'influence de l'anisotropie d'écrouissage a été étudiée à l'aide du modèle d'écrouissage cinématique non linéaire décrit au paragraphe III-2-2. On se place dans le cas d'un fort enfoncement ( $H = 11\text{mm}$ ) sans frottement.

La Figure III - 29 et la Figure III - 30 montrent les cycles ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) des fibres externes. Le modèle d'écrouissage cinématique non linéaire conduit évidemment à des niveaux de contraintes moins élevés. Le matériau modèle étudié présentant une forte consolidation, les contraintes cycliques « plafonnent » à 340 MPa en écrouissage cinématique (Figure III - 29), alors qu'elles atteignent 500 MPa en écrouissage isotrope (Figure III - 14). Les allongements

de la fibre moyenne sont également beaucoup moins importants, en raison d'efforts extérieurs nettement plus faibles. On obtient ainsi en sortie une déformation  $\varepsilon_{11} = 0,011$  au lieu de 0,048 avec l'hypothèse d'écroutissage isotrope (Tableau III - 10).

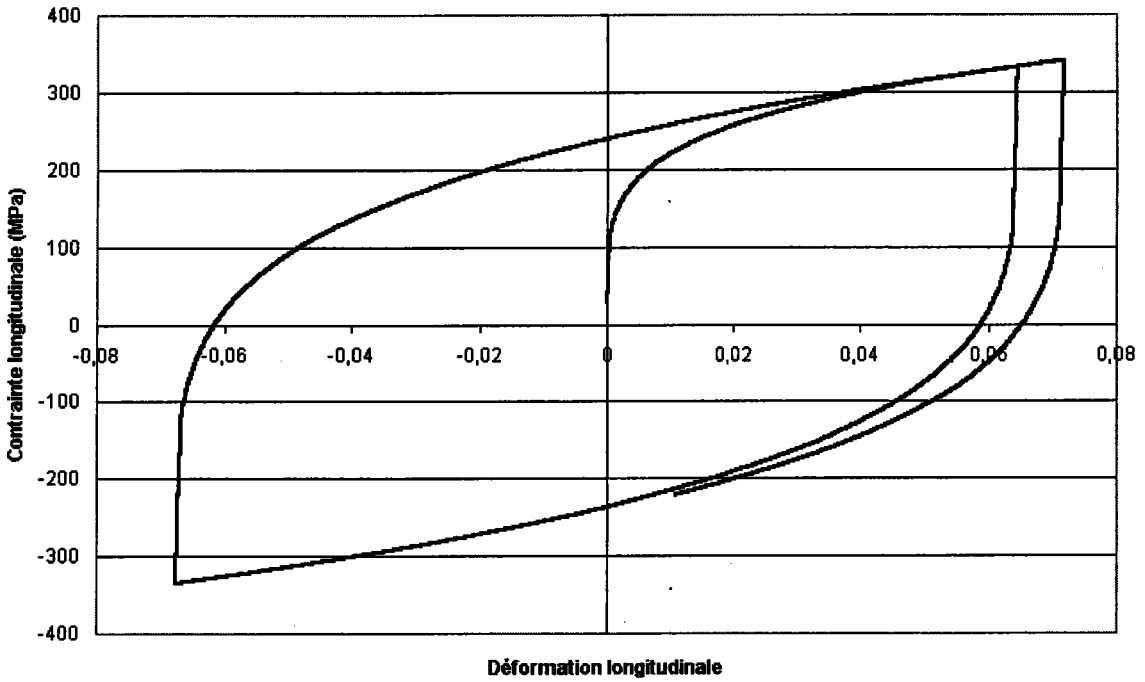


Figure III - 29 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre supérieure, en fort enfoncement sans frottement (loi d'écroutissage cinématique).

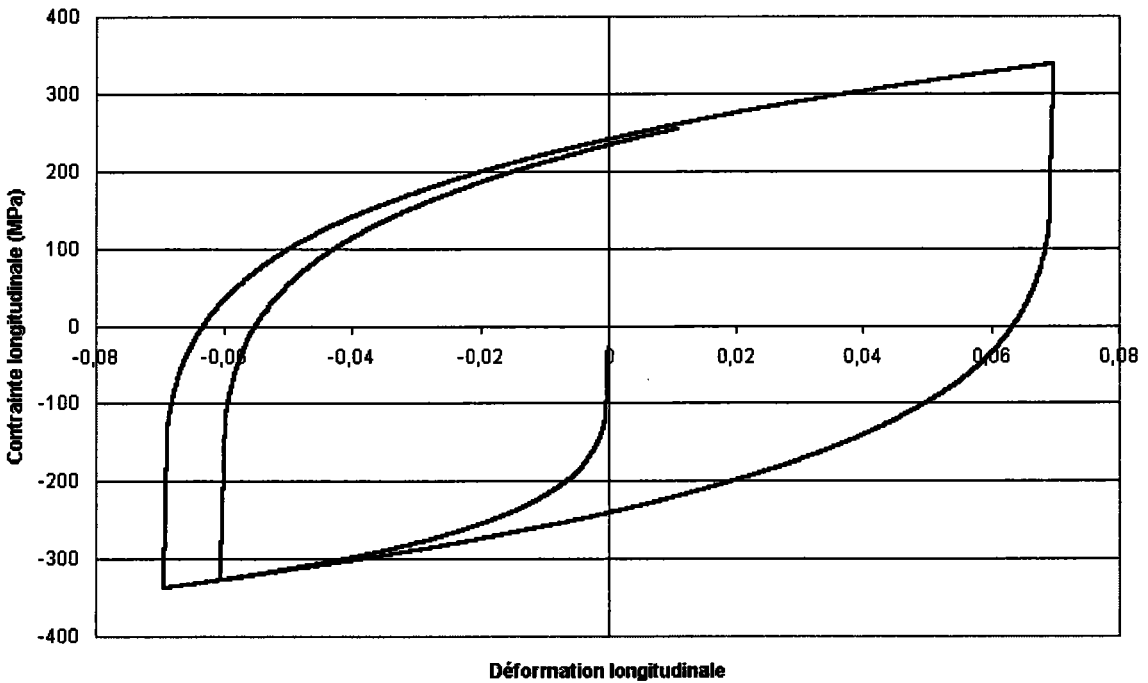


Figure III - 30 : Contraintes/Déformations longitudinales pour la fibre inférieure, en fort enfoncement sans frottement (loi d'écroutissage cinématique).

L'évolution du moment de flexion (Figure III - 31) traduit de façon logique le résultat attendu de la loi d'érouissage utilisée, avec, en sortie, un moment pratiquement moitié de celui obtenu en érouissage isotrope. L'effort normal (Figure III - 32) présente des évolutions plus marquées le long des brins libres, et, en sortie, une valeur à peine supérieure à la moitié de celle obtenue en érouissage isotrope.

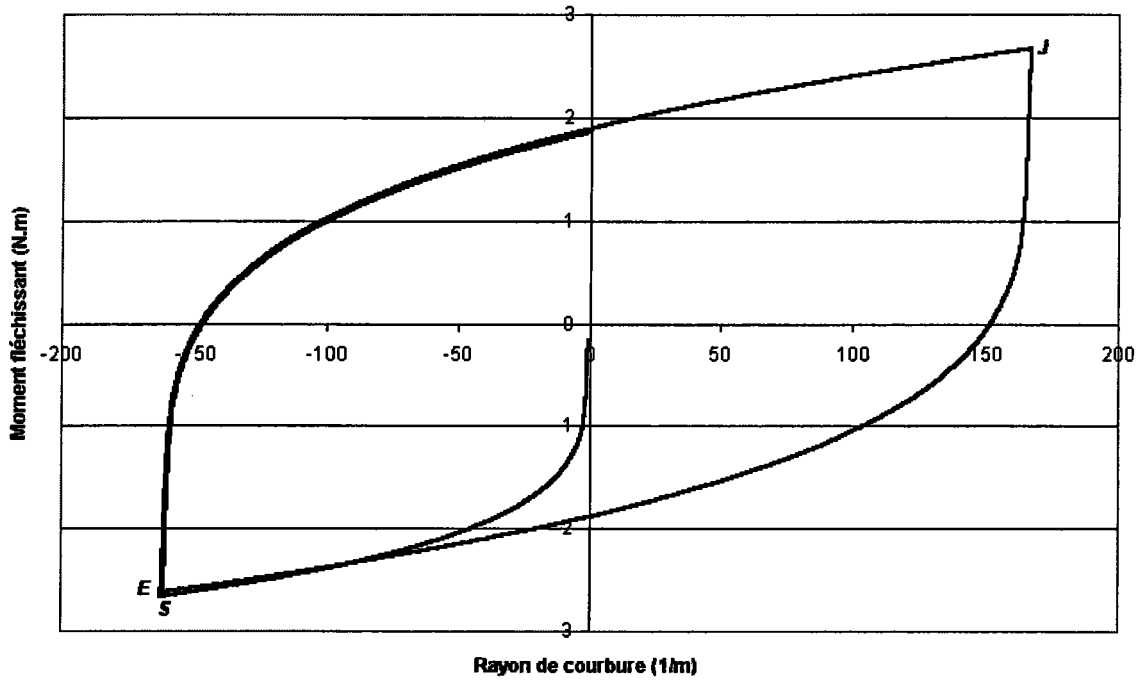


Figure III - 31 : Évolution du moment fléchissant le long de la tôle, en fonction du rayon de courbure. Cas d'un fort enfoncement, contact sans frottement, loi d'érouissage cinématique.

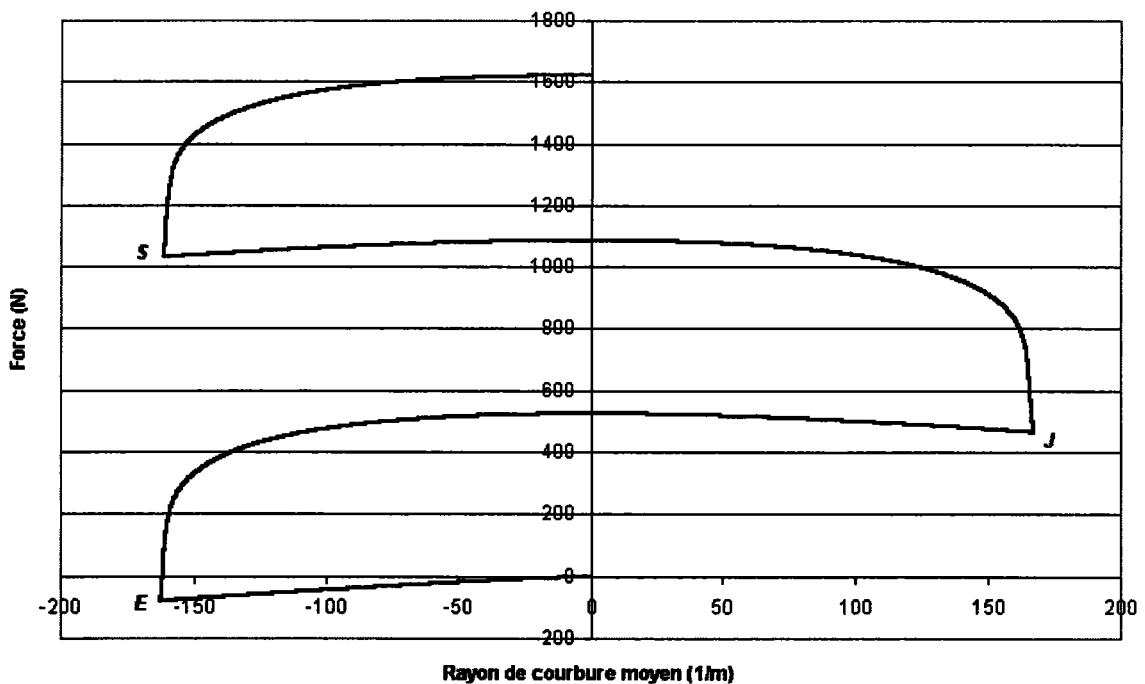


Figure III - 32 : Évolution de l'effort normal le long de la tôle, en fonction du rayon de courbure. Cas d'un fort enfoncement, contact sans frottement, loi d'érouissage cinématique.

Le Tableau III - 10 récapitule les résultats importants obtenus avec les deux types d'écrouissage. Les diminutions des forces et de la déformation en sortie obtenues en écrouissage cinématique sont d'autant plus fortes que les paramètres du matériau correspondent à une forte consolidation.

L'écrouissage purement cinématique envisagé semble être ici une hypothèse excessive, puisque la contrainte de rechargement plastique lors d'une inversion de la déformation après traction est positive (). Un modèle d'écrouissage mixte (isotrope + cinématique) pourrait être plus adapté à la description de certains matériaux, dès lors que des données fiables seraient disponibles pour décrire un tel comportement. Les études antérieures de la littérature montrent toutefois que les prévisions numériques avec écrouissage isotrope sont généralement proches des résultats expérimentaux, et que l'hypothèse d'écrouissage isotrope est convenable vis-à-vis de l'objectif fixé d'estimation des forces extérieures de l'outillage.

Enfoncement	Fort ( $H = 11\text{mm}$ )		Faible ( $H = 5,5\text{mm}$ )	
	Isotrope	Cinématique	Isotrope	Cinématique
Écrouissage				
Eps11 sortie	0,0479	0,0109	0,0376	0,0084
F traction	2917	1622	2505	1384
F serrage x	-510	11	-1334	-742
F serrage y	-2630	-1662	-1717	-1163

Tableau III - 10 : Comparaison des résultats obtenus en écrouissage isotrope et en écrouissage cinématique.

#### V - 4 - Comparaison avec des résultats de la littérature

Nous nous proposons ici d'effectuer une comparaison de nos résultats avec différentes simulations ou résultats expérimentaux tirés de la littérature. Les résultats des simulations par éléments finis ne constituent pas en effet une référence incontestable du résultat devant être obtenu, compte tenu des hypothèses géométriques et des lois de comportement adoptées. Ainsi, nous avons pu constater des différences significatives lorsque les simulations sont effectuées avec différents types d'éléments. La comparaison avec des résultats expérimentaux peut en outre mettre en évidence des insuffisances de la modélisation du comportement. Nous choisissons ici d'utiliser le modèle d'écrouissage isotrope, qui donnera des résultats convenables par rapport aux résultats expérimentaux disponibles.

V - 4 - 1 - Comparaison avec les résultats expérimentaux de Nine et les simulations numériques de Cao et Boyce

Cao et Boyce (1993) ont repris les résultats expérimentaux de Nine (1978,1982) et ont effectué des simulations numériques de ces essais à l'aide du code de calcul Abaqus/Standard, en utilisant deux rangées d'éléments CPE8R (à intégration réduite) dans l'épaisseur.

Le Tableau III - 11 liste les caractéristiques de quatre matériaux utilisés par Nine (1978) pour ses expérimentations. Celles-ci sont effectuées pour plusieurs épaisseurs de tôle avec des rayons d'outils différents. La largeur de la tôle est fixée à 50 mm et le jeu avec les outils est de 0,08 mm. Les expérimentations sont toutes réalisées avec un enfoncement maximal, c'est-à-dire égal à deux fois le rayon du jonc.

Matériau	K (MPa)	n	R	m
2036-T4 Aluminium	643	0,25	0,68	0
5182-O Aluminium	506	0,29	0,63	0
Rimmed Steel	551	0,2	1,1	0,01
A-K Steel	529	0,23	1,61	0,02

Tableau III - 11 : Propriétés des matériaux testés par Nine (1978).

Nous avons tenu compte du coefficient d'anisotropie normale R fourni par Nine pour obtenir les caractéristiques du comportement en traction plane. La contrainte de traction plane  $\sigma_1$  et la déformation de traction plane  $\varepsilon_1$  sont liées aux valeurs de traction uniaxiale  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}$  par des relations de la forme :  $\sigma_1 = \alpha \bar{\sigma}$  et  $\varepsilon_1 = (1/\alpha) \bar{\varepsilon}$ . Nous avons pris la valeur de  $\alpha$  fournie par le critère quadratique de Hill :  $\alpha = (1 + R) / \sqrt{1 + 2R}$ . De plus, nous avons pris le module d'Young égal à  $E = 211\ 000$  MPa pour les aciers, et  $E = 70\ 000$  MPa pour les alliages d'aluminium.

Le Tableau III - 12 reporte les différents résultats ainsi que ceux de nos simulations pour les mêmes conditions.

En comparant les résultats, nous nous apercevons que nos simulations, sauf pour l'aluminium 2036-T4 d'épaisseur 0,81 mm, fournissent des résultats plutôt plus proches des résultats expérimentaux que les simulations de Cao & Boyce. Les différences avec les résultats expérimentaux n'excèdent pas les 10 % (sauf dans le cas de l'acier d'épaisseur de 0,76 mm où l'on atteint 15 %).

Matériau	Épaisseur de la tôle (mm)	Rayon jonc (mm)	$\mu$	Résultats de Nine (KN)	Simulation Cao et Boyce (KN)	Modélisation analytique (KN)
Al 2036-T4	0,81	5,50	0	2,80	2,80	2,77
			0,044	3,00	3,20	3,03
			0,184	4,70	5,10	4,19
	0		0,89	3,20	3,40	3,40
			0,97	3,70	4,00	4,09
			0,81	4,75	2,90	3,20
Al 5182-O	0,82	4,75	0	2,30	2,40	2,51
		5,50		1,90	2,10	2,12
Rimmed Steel	0,76	5,50	0	3,30	2,70	2,79
A-K Steel	0,97	5,50	0	5,00	4,40	4,63

Tableau III - 12 : Comparaison des forces de retenue calculées avec les résultats des expérimentations de Nine et des simulations de Cao & Boyce.

#### V - 4 - 2 - Comparaison avec les résultats expérimentaux de Sanchez et Weinmann (1996)

Les caractéristiques du matériau utilisé (acier calmé à l'aluminium) pour les expérimentations de Sanchez et Weinmann (1996) sont les suivantes :  $K = 506$  MPa,  $n = 0,228$  et  $R = 1,77$ . La tôle a une épaisseur de 0,86 mm pour une largeur de 50,8 mm. Les rayons des outils sont identiques pour le jonc et la matrice, et sont de 5,56 mm. Le jeu entre les outils et la tôle est de 0,163 mm en fort enfoncement. La vitesse d'avance de la tôle est de 0,034 mm/s. Sanchez et Weinmann ont par ailleurs effectué des simulations basées sur une modélisation analytique, dont les résultats sont également reportés dans le Tableau III - 13.

$H$ (mm)	$\mu$	S & W Expérimental		S & W Calculé		Modélisation	
		Traction	Serrage	Traction	Serrage	Traction	Serrage
12	0	3545 N	2757 N	3451 N	2895 N	3451 N	2892 N
	0,16	5609 N	3865 N	5462 N	4190 N	4787 N	3870 N
8,64	0	2802 N	2179 N	3091 N	2415 N	3279 N	2579 N
	0,16	4256 N	2566 N	4687 N	2949 N	4486 N	3368 N

Tableau III - 13 : Comparaison des forces de retenue et de serrage calculées avec les résultats expérimentaux et calculés de Sanchez & Weinmann.

La comparaison de nos prévisions avec les résultats expérimentaux tend à montrer une surestimation des forces en faible enfoncement. En revanche, le fort enfoncement est correctement modélisé, malgré une légère sous-estimation des forces avec frottement..

## VI - Conclusion

La modélisation que nous avons développée dans ce Chapitre nous a conduit à la mise au point d'un programme de calcul rapide et robuste, fournissant des résultats complets sur l'histoire de chargement suivie par tout point matériel dans l'épaisseur de la tôle, et sur les efforts extérieurs en régime stationnaire. Les calculs prennent en considération soit un écrouissage isotrope, soit un écrouissage cinématique non linéaire qui pourrait être, pour certains matériaux, mieux adapté à la description du cyclage élasto-plastique subi par la tôle. Le frottement avec les outils a également été pris en compte dans le modèle.

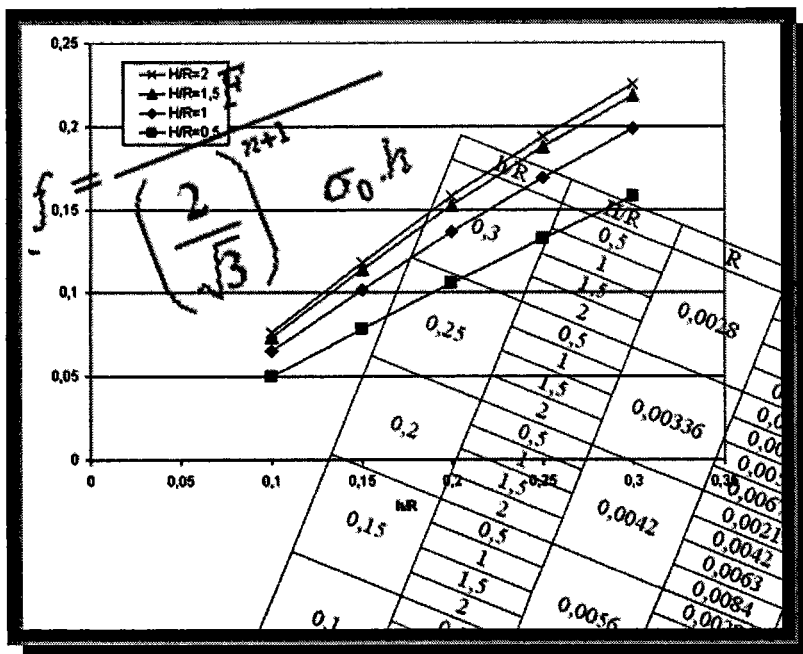
Contrairement à certaines modélisations analytiques de la littérature, les hypothèses de calcul prennent également en compte les variations d'épaisseur de la tôle par le biais de l'hypothèse d'incompressibilité du matériau. En revanche, l'hypothèse de coque utilisée conduit à ne pas considérer les contraintes de cisaillement, ce qui pourrait expliquer une sous-estimation des forces extérieures. En effet, dans un raisonnement qui serait basé sur le principe des puissances virtuelles, ceci revient à négliger la puissance des efforts intérieurs associée aux contraintes de cisaillement. Au vu des résultats obtenus au Chapitre 2, nous ne pensons toutefois pas que ce terme soit important par rapport au terme associé aux contraintes normales de traction-compression.

Les comparaisons avec les résultats du Chapitre 2 et avec des résultats expérimentaux de la littérature sont globalement satisfaisants, avec toutefois une tendance à sous-estimer l'augmentation de la force de traction associée à des contacts avec frottement avec les outils.



# CHAPITRE IV

## ÉTUDE PARAMÉTRIQUE



## **Chapitre 4 : Étude paramétrique de l'influence de la géométrie, du frottement et des caractéristiques du matériau**

### **I - Introduction**

Sur la base de la modélisation développée au Chapitre 3, nous sommes à même d'effectuer de nombreuses simulations. Nous présentons donc dans ce court chapitre une étude paramétrique des influences de la géométrie du jonc, des caractéristiques mécaniques de la tôle et du frottement sur les grandeurs importantes pour le développement d'un modèle de jonc équivalent. Ces grandeurs sont la force de retenue, la déformation en épaisseur en sortie de jonc et la déformation équivalente superficielle en sortie. En effet, cette dernière grandeur atteint des valeurs importantes. Un pliage ultérieur de la tôle sera donc fortement influencé par le durcissement superficiel subi par la tôle.

### **II - Mise en place de l'étude paramétrique**

Les paramètres à considérer concernent la géométrie, le comportement du matériau et le frottement.

#### **II - 1 - Géométrie de l'ensemble tôle/outillage**

Nous rappelons les notations de dimensions caractérisant le processus étudié (voir Figure A - 1).

$R_E$  : rayon d'épaulement d'entrée de la matrice.

$R_S$  : rayon d'épaulement de sortie de la matrice.

$R_J$  : rayon du jonc.

$D$  : entraxe entre les centres des rayons d'épaulement de la matrice.

$H$  : enfoncement du jonc.

$H_S$  : jeu pour le passage de la tôle en sortie d'outillage.

Nous nous limitons au cas de rayons égaux pour les épaulements et le jonc ( $R_E = R_S = R_J = R$ ). De plus, nous supposons que concernant l'enfoncement maximum du jonc ( $H = 2R$ ), le jeu pour le passage de la tôle entre matrice et jonc est faible. Ainsi, nous avons pris précédemment un jeu de 0,16 mm, que nous conserverons dans les simulations ci-dessous. L'entraxe  $D$  pour une tôle d'épaisseur 0,84 mm sera donc égal à :

$D = R_E + R_S + 2R_J + 2 = 4R + 2$  (en mm). Le jeu  $H_S$  en sortie d'outillage sera également pris égal à 0,16 mm. Ainsi, 3 dimensions caractérisent la géométrie : le rayon des outils  $R$ , l'enfoncement  $H$  du jonc et l'épaisseur  $h$  de la tôle.

## II - 2 - Comportement du matériau

Nous rappelons que le comportement élasto-plastique du matériau en compression plane monotone est décrit par la loi puissance :

$$\sigma_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \sigma_0 |\varepsilon_1|^n \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) \quad (\text{IV-1})$$

où  $\sigma_0$  est une constante,  $n$  l'exposant d'écroutissage,  $\sigma_1$  et  $\varepsilon_1$  désignent la contrainte et la déformation longitudinale en déformation plane.

Un domaine élastique linéaire initial est introduit, sous la forme :

$$\sigma_1 = \frac{4}{3} E \varepsilon_1 \quad (\text{IV-2})$$

où  $E$  est le module d'Young.

Les trois paramètres utiles pour caractériser le matériau sont donc  $E$ ,  $\sigma_0$  et  $n$ .

## II - 3 - Définition des résultats recherchés

Les forces ( $F$ ) étant définies par unité de largeur, il est clair qu'une modification proportionnelle des dimensions  $R$ ,  $H$  et  $h$  va induire une modification proportionnelle des forces. Ainsi, les forces normées par l'épaisseur de la tôle ( $F/h$ ) dépendent des deux paramètres :

- $h/R$ , qui définit l'épaisseur relative de la tôle, et qui caractérise l'intensité de la flexion imposée à la tôle sur le rayon du jonc pour un enfoncement relatif donné.
- $H/R$ , qui caractérise l'enfoncement relatif du jonc (valeur maximale :  $H/R = 2$ ).

Du point de vue géométrique, nous pouvons donc considérer pour l'étude paramétrique que les forces par unité d'épaisseur ( $F/h$ ) dépendent des deux variables adimensionnelles  $h/R$  et  $H/R$ .

De plus, les forces sont proportionnelles à  $\sigma_0$ . Ainsi, nous définissons finalement la variable de force adimensionnelle :

$$f = \frac{F}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \sigma_0 \cdot h} \quad (\text{IV-3})$$

Cette force adimensionnelle dépend donc des deux variables géométriques  $h/R$  et  $H/R$ , du module d'Young  $E$ , de l'exposant d'érouissage  $n$  et du coefficient  $\mu$  entre la tôle et les outils :

$$f = f(h/R, H/R, E, n, \mu) \quad (\text{IV-4})$$

De la même manière, les déformations  $\varepsilon$  dépendent uniquement des cinq variables préalablement définies :

$$\varepsilon = \varepsilon(h/R, H/R, E, n, \mu) \quad (\text{IV-5})$$

La seule force dont nous allons analyser les variations de cette manière est la force de retenue. Nous examinerons également les variations de la déformation longitudinale  $\varepsilon_1$  en sortie d'outillage, ainsi que les déformations équivalentes  $\bar{\varepsilon}$  des fibres extrêmes en sortie.

### III - Analyse des résultats

#### III - 1 - Domaines de variation des paramètres

Nous avons choisi d'effectuer toutes les simulations en conservant la valeur d'épaisseur de la tôle préalablement utilisée,  $h = 0,84$  mm. Pour l'étude de l'influence de la géométrie et du frottement, les paramètres du matériau sont fixés aux valeurs :  $n = 0,2$  ;  $\sigma_0 = 513$  MPa et  $E = 211\ 000$  MPa, représentatives d'un acier.

Le Tableau IV - 1 résume les vingt conditions géométriques qui ont été simulées, et qui combinent cinq valeurs de l'épaisseur relative  $h/R$  de la tôle (caractérisant l'intensité de la flexion imposée à la tôle ;  $h/R$  variant de 0,1 à 0,3) et quatre valeurs de l'enfoncement relatif  $H/R$  du jonc (allant de 0,5 à 0,2).

Les simulations associées à ces vingt cas de configuration géométrique ont été réalisées avec trois valeurs du coefficient de frottement :  $\mu = 0$  ;  $\mu = 0,1$  et  $\mu = 0,2$ . L'influence de l'exposant d'érouissage  $n$  a été examinée en utilisant les valeurs  $n = 0,10$  ; 0,20 et 0,30.

h/R	H/R	R	H	D
0,3	0,5	0,0028	0,0014	0,0132
	1		0,0028	
	1,5		0,0042	
	2		0,0056	
0,25	0,5	0,00336	0,00168	0,01544
	1		0,00336	
	1,5		0,00504	
	2		0,00672	
0,2	0,5	0,0042	0,0021	0,0188
	1		0,0042	
	1,5		0,0063	
	2		0,0084	
0,15	0,5	0,0056	0,0028	0,0244
	1		0,0056	
	1,5		0,0084	
	2		0,0112	
0,1	0,5	0,0084	0,0042	0,0356
	1		0,0084	
	1,5		0,0126	
	2		0,0168	

Tableau IV - 1 : Ensemble des valeurs géométriques utilisées dans l'étude paramétrique.

### III - 2 - Influence des paramètres géométriques

Les résultats analysés ici sont obtenus dans le cas sans frottement.

#### III - 2 - 1 - Influence de l'épaisseur relative $h/R$ de la tôle

La RENVFigure IV - 1 montre l'évolution de la force adimensionnelle  $f$  en fonction de l'épaisseur relative  $h/R$ . Pour un enfoncement relatif  $H/R$  donné, nous obtenons des pliages imposés croissant en fonction de  $h/R$ , et donc des forces de retenue croissantes. La variation de  $f$  présente une légère courbure vers le bas. Ainsi, pour une tôle d'épaisseur donnée, nous pouvons calibrer la force souhaitée en jouant sur le rayon des outils.

La déformation longitudinale en sortie de jonc (de valeur opposée à la déformation en épaisseur) présente de façon similaire une augmentation en fonction de  $h/R$ , la courbe présentant cette fois-ci une courbure vers le haut (Figure IV - 2).

Enfin, les déformations équivalentes en sortie de jonc (Figure IV - 3) présentent également le même type d'évolution, avec une très légère courbure vers le bas. Les déformations des fibres supérieure et inférieure étant peu différentes, nous avons porté uniquement les résultats pour la fibre supérieure. Nous notons les fortes valeurs de déformation équivalente qui peuvent être atteintes lors du processus de pliage/étirage.

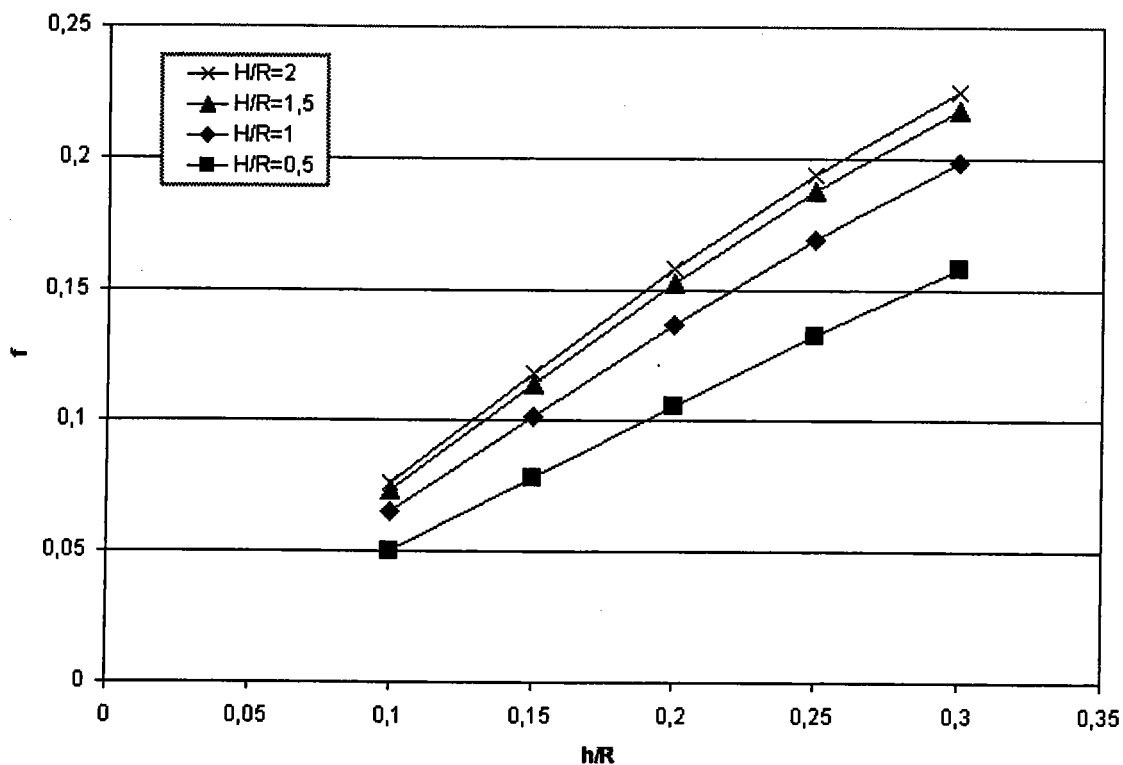


Figure IV - 1 : Influence de l'épaisseur relative  $h/R$  de la tôle sur la force de retenue adimensionnelle  $f$ , pour différents enfoncements relatifs  $H/R$ .

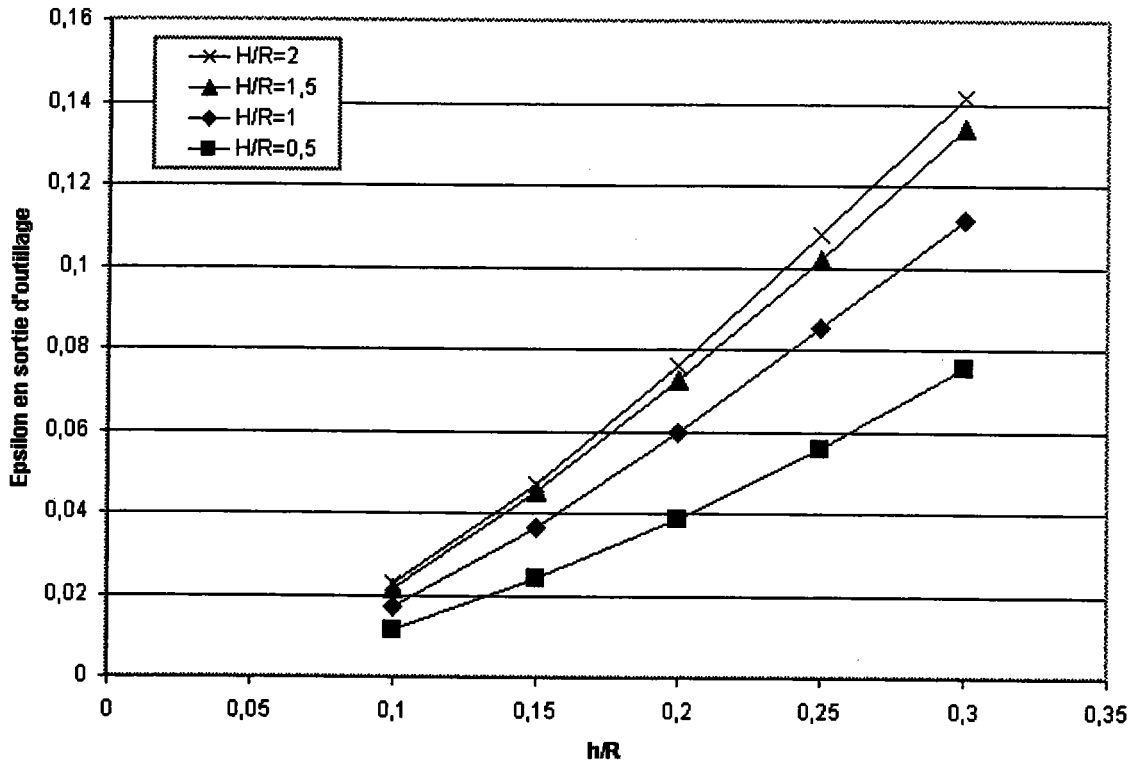


Figure IV - 2 : Influence de l'épaisseur relative  $h/R$  de la tôle sur la déformation longitudinale en sortie d'outillage, pour différents enfoncements relatifs  $H/R$ .

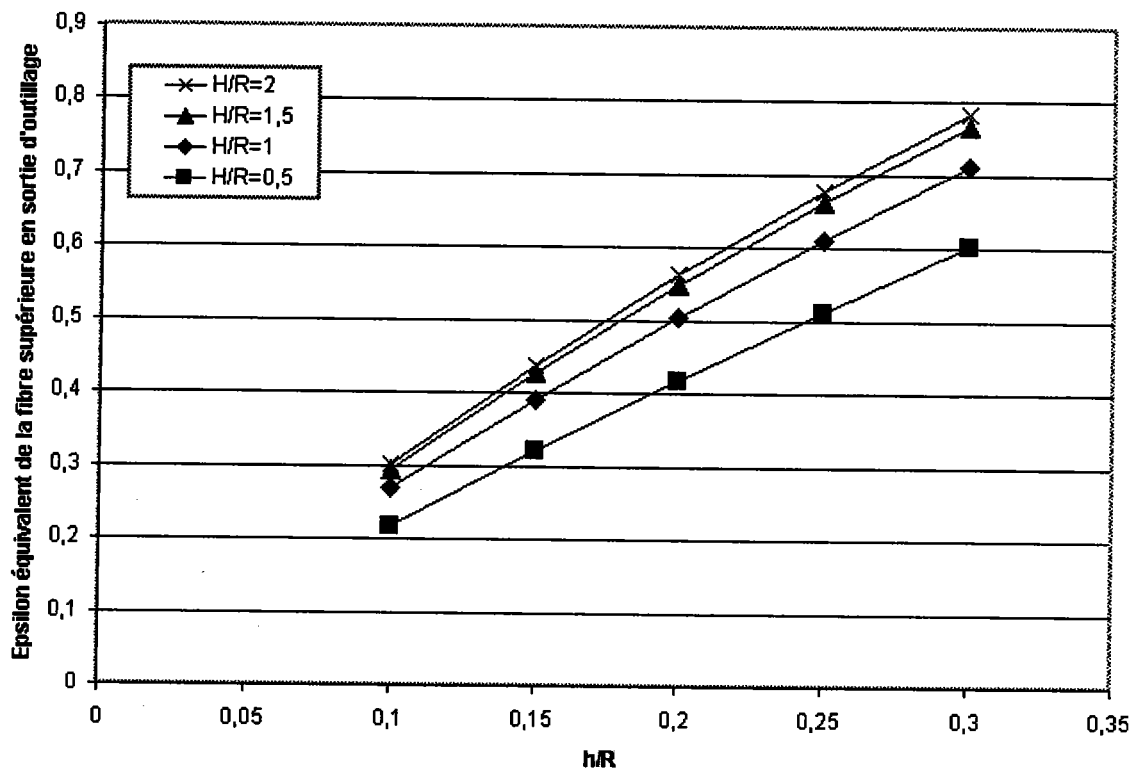


Figure IV - 3 : Influence de l'épaisseur relative  $h/R$  de la tôle sur la déformation équivalente en sortie d'outillage, pour différents enfoncements relatifs  $H/R$ .

### III - 2 - 2 - Influence de l'enfoncement relatif $H/R$ de la tôle

Les Figure IV - 4, Figure IV - 5 et Figure IV - 6 reprennent les résultats précédents, en les présentant en fonction de l'enfoncement relatif  $H/R$  du jonc. Ces figures permettent de visualiser la tendance à la saturation des différentes variables pour des valeurs croissantes de  $H/R$ . Cette tendance, déjà visible sur les figures précédentes, s'explique par l'atteinte d'un pliage maximal pour une valeur de l'enfoncement égale à  $H/R=2$ .

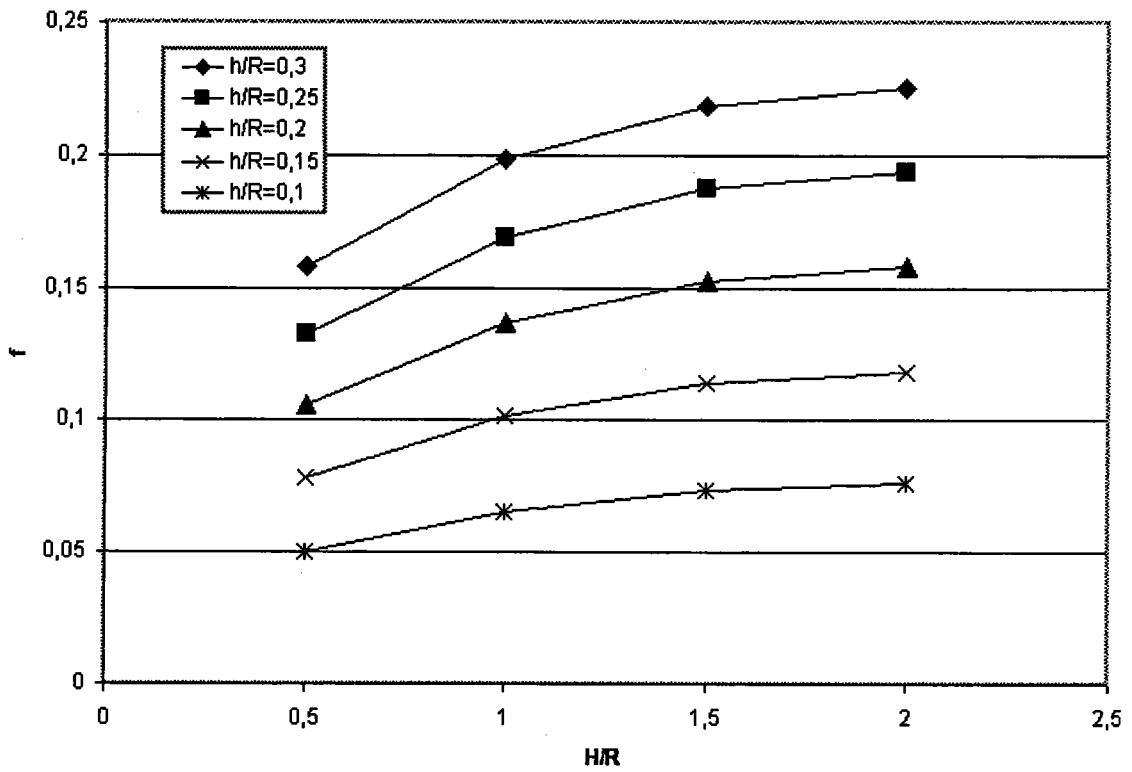


Figure IV - 4 : Influence de l'enfoncement relatif  $H/R$  sur la force de retenue adimensionnelle  $f$ , pour différentes épaisseurs relatives.

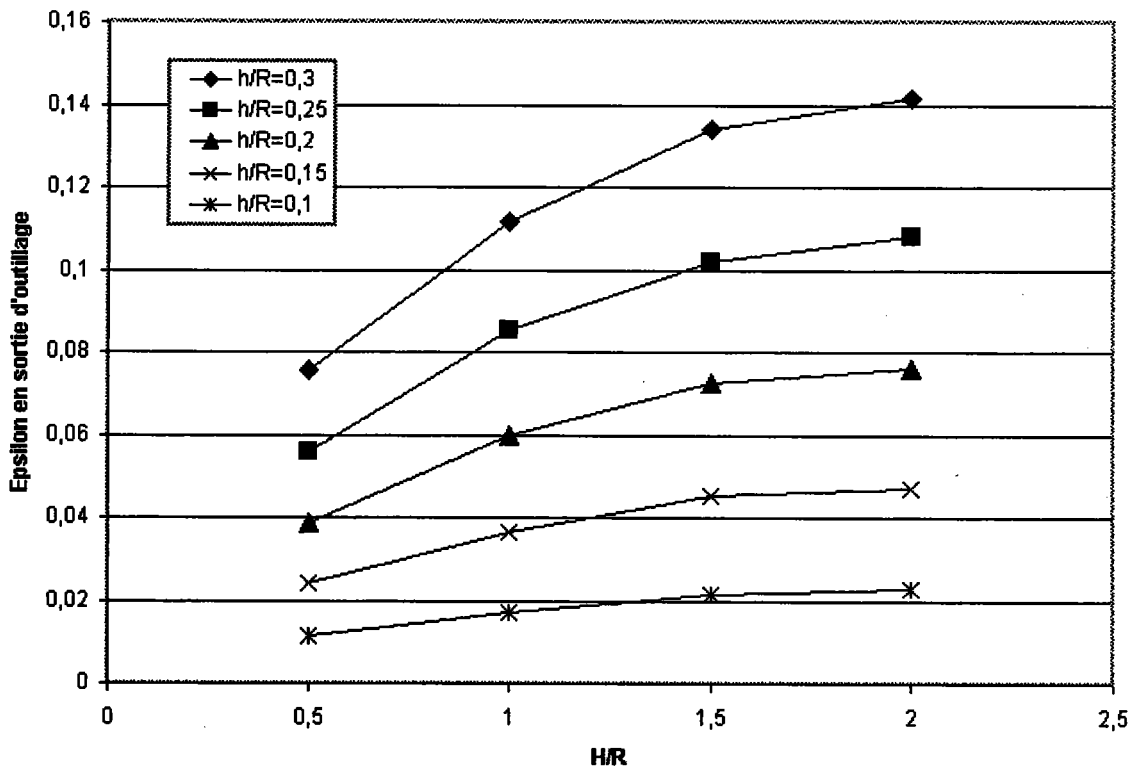


Figure IV - 5 : Influence de l'enfoncement relatif  $H/R$  sur la déformation longitudinale en sortie d'outillage, pour différentes épaisseurs relatives  $h/R$ .



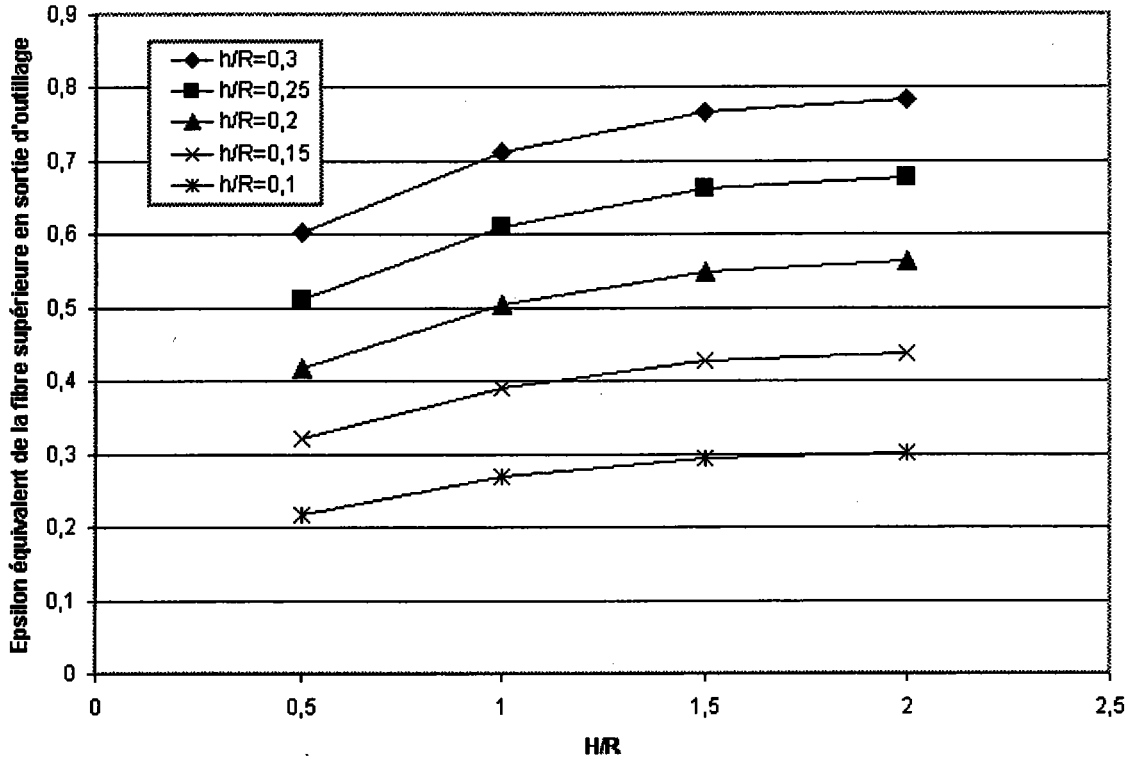


Figure IV - 6 : Influence de l'enfoncement relatif  $H/R$  sur la déformation équivalente en sortie d'outillage, pour différentes épaisseurs relatives  $h/R$ .

### III - 3 - Influence du coefficient de frottement $\mu$

L'influence du frottement est représentée sur la Figure IV - 7, où est portée la force adimensionnelle  $f$  en fonction de  $\mu$ , et ceci pour l'ensemble des configurations géométriques envisagées. Les autres paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :  $E = 211\ 000$  MPa ;  $n = 0,2$  ;  $\sigma_0 = 513$  MPa.

On observe bien évidemment pour toutes les géométries une augmentation de  $f$  en fonction de  $\mu$ . L'augmentation relative est toutefois moins importante lorsque la sévérité du pliage, et donc la composante de « force de déformation » imposée à la tôle, augmente. Pour le couple de valeurs ( $h/R = 0,3$  ;  $H/R = 2$ ) correspondant au pliage le plus sévère, l'augmentation relative de force  $\Delta f/f$  obtenue avec  $\mu = 0,2$  est égale à 20,2% par rapport au cas sans frottement, alors qu'elle atteint 42,3% pour le pliage le moins sévère ( $h/R = 0,1$  ;  $H/R = 0,5$ ).

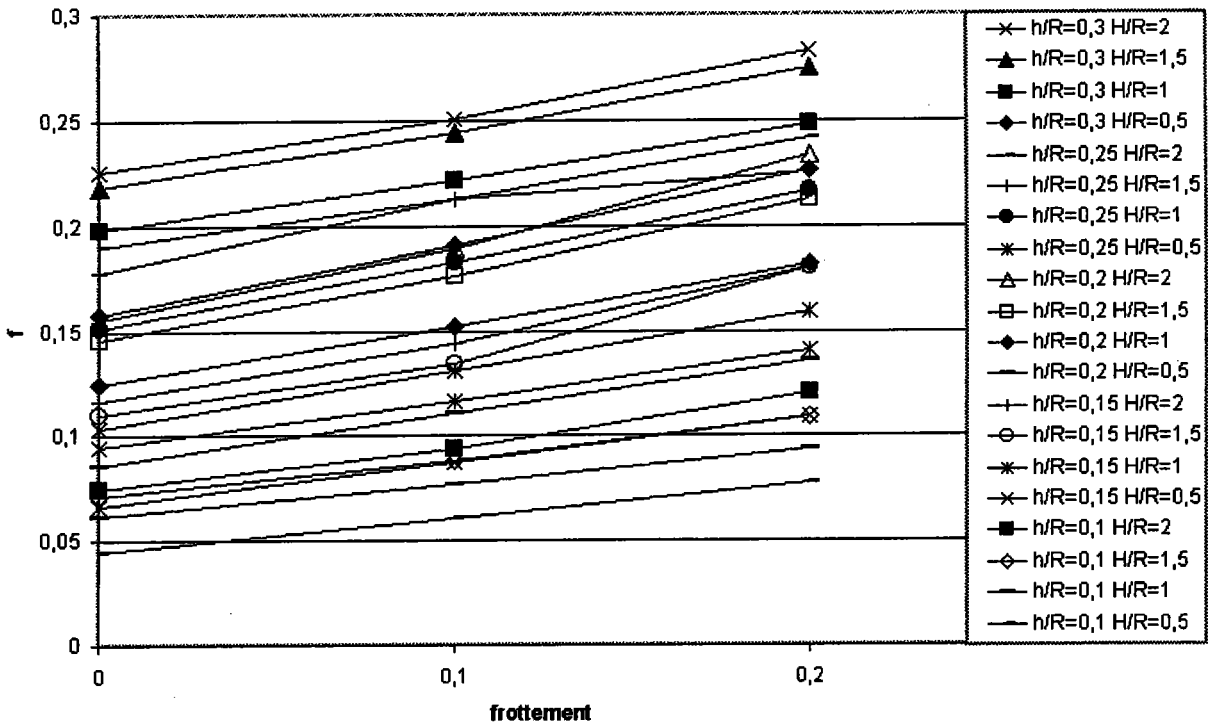


Figure IV - 7 : Influence du frottement sur la force adimensionnelle pour différentes épaisseurs et enfoncements relatifs.

### III - 4 - Influence des paramètres du matériau

#### III - 4 - 1 - Influence du module d'Young $E$

La partie élastique du comportement a un effet non négligeable sur les résultats. Des simulations ont été effectuées pour deux valeurs du module d'Young,  $E = 211\ 000$  MPa et  $E = 70\ 000$  MPa, correspondant par exemple à un acier et un alliage d'aluminium qui auraient par ailleurs le même comportement élasto-plastique. Les simulations ont été effectuées pour l'ensemble des configurations géométriques. Les autres paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :  $n = 0,2$  ;  $\sigma_0 = 513$  MPa ; et  $\mu = 0$ .

La Figure IV - 8 montre l'évolution de la force adimensionnelle  $f$  pour l'ensemble des configurations géométriques envisagées. Nous observons une influence de  $E$  appréciable lorsque le pliage de la tôle est faible. Ainsi, l'augmentation de  $f$  pour ( $h/R = 0,1$  ;  $H/R = 0,5$ ) est de 14,1% lorsque le module passe de 70 000 à 211 000 MPa. Les déformations plastiques sont alors relativement petites, et l'influence de l'élasticité se fait donc sentir. L'augmentation de  $f$  devient faible dans le cas de forts pliages (4,6% pour  $h/R = 0,3$  ;  $H/R = 2$ ).

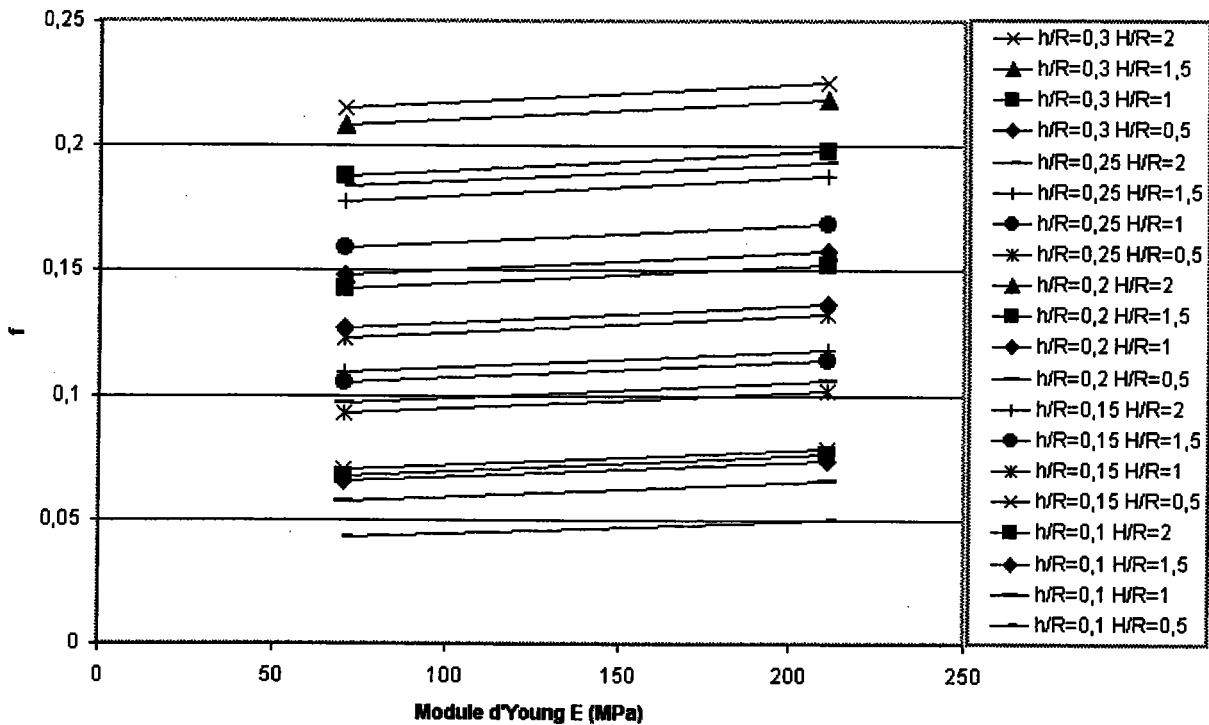


Figure IV - 8 : Influence du module d'Young sur la force adimensionnelle pour différentes épaisseurs et enfoncements relatifs.

### III - 4 - 2 - Influence de l'exposant d'érouissage $n$

Trois valeurs de  $n$  sont envisagées ( $n = 0,1 ; 0,2 ; 0,3$ ). Les autres paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :  $E = 211\ 000\text{MPa}$  ;  $\sigma_0 = 513\ \text{MPa}$  et  $\mu = 0$ . La force adimensionnelle étant normalisée par  $\sigma_0$ , la *contrainte équivalente adimensionnelle associée*  $\bar{\sigma} / \sigma_0 = \bar{\varepsilon}^n$  présente des valeurs plus faibles (pour  $\bar{\varepsilon} < 1$ ) lorsque  $n$  est grand. Ainsi,  $f$  est une fonction décroissante de  $n$ , comme on peut le voir sur la Figure IV - 9. Cette influence de  $n$  diminue lorsque les déformations équivalentes atteintes sont plus fortes, c'est-à-dire pour les pliages les plus sévères. On obtient ainsi, pour  $n$  prenant les valeurs 0,1 et 0,3 :  $\Delta f/f = 27,6\ \%$  pour  $(h/R = 0,3 ; H/R = 2)$ , et  $\Delta f/f = 41,6\ \%$  pour  $(h/R = 0,1 ; H/R = 0,5)$ .

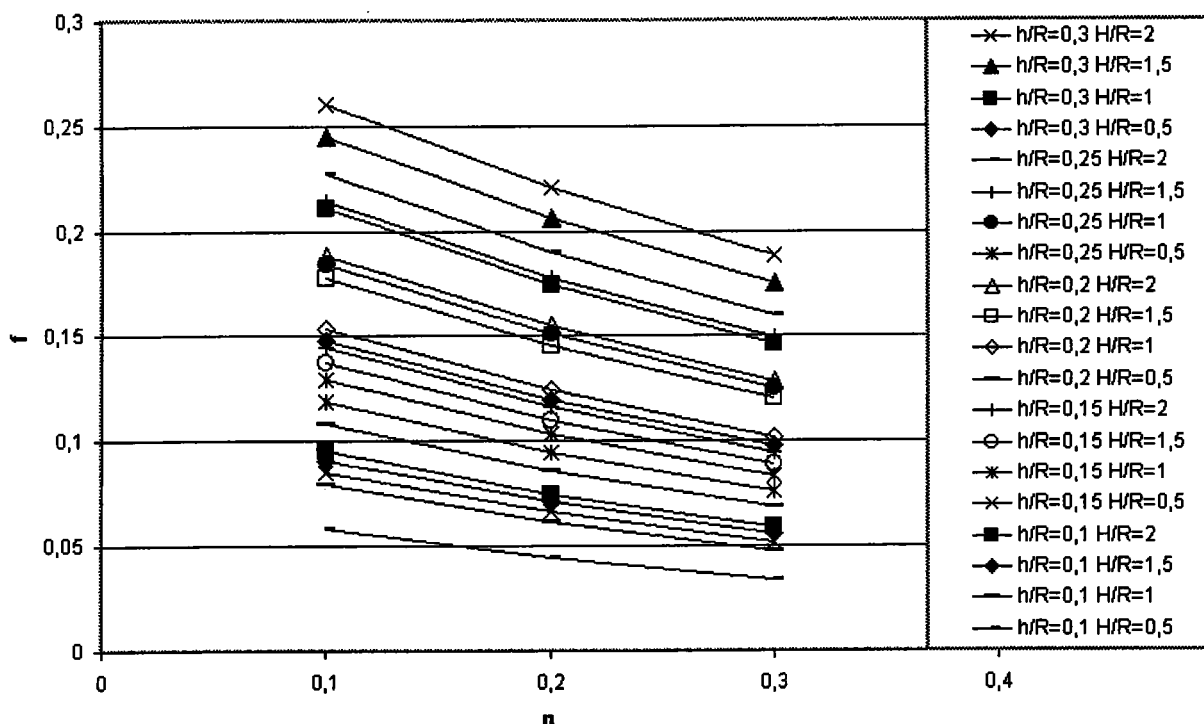


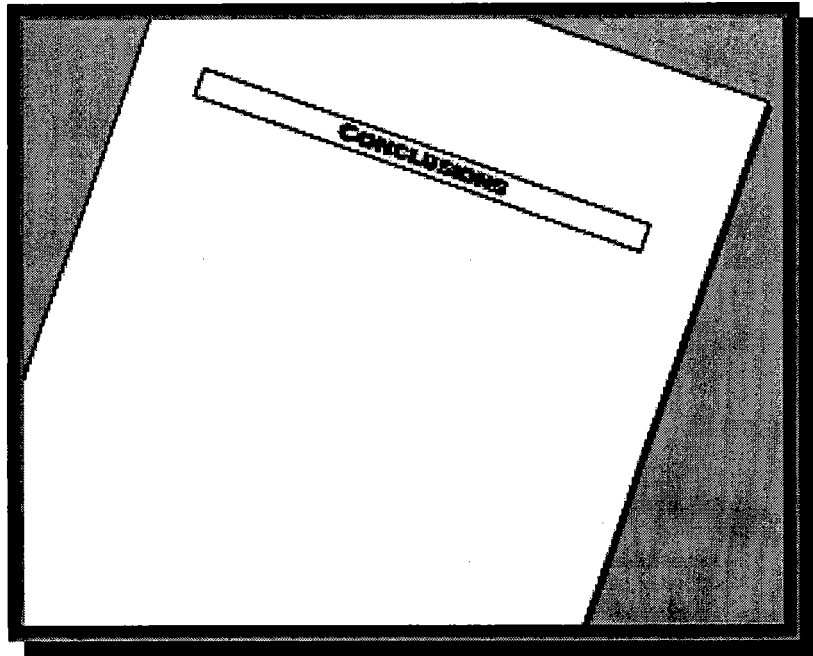
Figure IV - 9 : Influence du coefficient d'écroutissage sur la force adimensionnelle pour différentes épaisseurs et enfoncements relatifs.

## IV - Conclusion

Cette étude paramétrique a permis de quantifier l'influence des différentes variables intervenant dans les valeurs prises par la force de retenue et les déformations en sortie de jonc. Au niveau de la géométrie, ces influences sont essentiellement liées à l'intensité des séquences de pliage/dépliage subies par la tôle. L'intensité de ces pliages/dépliage dépend linéairement du rapport  $h/R$  (épaisseur/rayons d'outils) pour un enfoncement relatif  $H/R$  (enfoncement/rayon d'outils) donné, alors que cette intensité augmente de moins en moins rapidement en fonction de  $H/R$  pour une géométrie des outils et une épaisseur de tôle données ( $h/R$  donné). Les résultats découlent directement de ces aspects géométriques.

Le frottement a pour effet d'augmenter la force de retenue, mais en valeur relative de moins en moins fortement lorsque  $h/R$  et/ou  $H/R$  augmentent, c'est-à-dire lorsque la sévérité du pliage imposé à la tôle augmente. L'élasticité joue un rôle appréciable sur la force de retenue, dans le cas des faibles enfoncements pour lesquels la déformation plastique est relativement faible. Selon les conditions géométriques, la force de retenue augmente de  $\approx 5-15\%$  lorsque le module passe de 70 000 à 211 000 MPa. Enfin, l'influence de l'exposant d'écroutissage  $n$  résulte de la normalisation effectuée sur les variables. La diminution de la force adimensionnelle  $f$  lorsque  $n$  augmente traduit ainsi de façon logique la diminution du niveau de contrainte adimensionnelle atteint pour des déformations équivalentes inférieures à la valeur 1.

# CONCLUSIONS



## Conclusions

Ce travail se situe dans la ligne des modélisations ou des simulations développées au cours des vingt dernières années pour étudier l'écoulement élasto-plastique d'une tôle le long d'un jonc de retenue, et pour obtenir une prévision des forces exercées par l'outillage. Ces études ont pour but de définir les joncs adaptés au processus d'emboutissage envisagé, dans le cas où on dispose d'une connaissance empirique des forces de retenue souhaitées. Les grandeurs caractérisant la présence du jonc peuvent également être utilisées comme données d'entrée dans des simulations numériques de processus complets d'emboutissage faisant appel à des modèles de jonc équivalent.

Dans ce travail nous avons réalisé, d'une part des simulations numériques par éléments finis, d'autre part une modélisation analytique de l'écoulement le long d'un jonc de retenue. Les simulations numériques ont permis d'analyser en détail l'histoire de chargement élasto-plastique cyclique subie par le matériau s'écoulant le long du jonc, en fonction de la position dans l'épaisseur de la tôle. Nous avons également caractérisé la forme stationnaire prise par la tôle à l'intérieur de l'outillage. L'influence de l'enfoncement relatif du jonc et le rôle du frottement ont été étudiés. L'ensemble de ces résultats a permis de guider la modélisation analytique. Il est toutefois apparu que la fiabilité des résultats des simulations par éléments finis n'était pas assurée a priori, en raison sans doute de la sévérité du processus de pliage/pliage inverse subi par la tôle. Des éléments susceptibles d'accepter de fortes flexions sans introduction d'effets parasites doivent impérativement être utilisés.

La modélisation analytique a pour objectif premier de pouvoir effectuer rapidement et de façon fiable de nombreuses simulations. Cette modélisation a été développée dans le cadre de l'hypothèse de Love-Kirchhoff, avec prise en compte des variations d'épaisseur de la tôle. Le comportement de la tôle est élasto-plastique. L'écrouissage peut être supposé isotrope ou cinématique non linéaire, l'une ou l'autre des deux hypothèses pouvant être mieux adaptée à tel ou tel matériau. Les comparaisons avec les résultats des simulations par éléments finis

montrent que la modélisation analytique fournit des évolutions des différentes variables locales (contraintes, déformations) très proches de celles obtenues par éléments finis.

Notre modélisation fournit, en ce qui concerne les forces exercées par l'outillage, des résultats de qualité comparable à celle des autres modélisations de la littérature, par comparaison avec des résultats expérimentaux. Il est en effet difficile d'établir un classement de qualité entre différentes modélisations, sachant que les résultats des simulations numériques par éléments finis ne constituent pas une référence incontestable, et que des écarts avec des résultats expérimentaux peuvent refléter une connaissance approximative du comportement cyclique du matériau.

Nous avons tiré profit de la rapidité et de la robustesse du programme de calcul pour effectuer une analyse détaillée de l'influence des caractéristiques géométriques du jonc, des paramètres du matériau et du frottement sur les grandeurs importantes que sont la force de retenue, et les déformations en sortie de jonc. Nous avons ainsi effectué une analyse paramétrique complète, qui peut constituer un outil d'aide au choix d'un jonc de retenue.

Un avantage important de notre modélisation analytique consiste dans la prise en compte de l'élasticité de la tôle. Ainsi, le programme peut être adapté à l'analyse du retour élastique. Des études se sont développées au cours des dernières années, qui ont pour but de valider les résultats de codes de calcul, par comparaison avec des résultats expérimentaux. Un cas très simple est celui où une bande de tôle est pliée sur un quart de cylindre avec tension arrière. En dehors du fait que différents codes de calcul sont susceptibles de fournir dans ce type de problèmes des résultats nettement différents, le retour élastique calculé est très sensible au comportement élasto-plastique cyclique introduit dans les calculs. Un modèle analytique tel que celui que nous avons développé dans ce travail, couplé à des expériences, est susceptible d'apporter des renseignements précieux sur le comportement cyclique du matériau testé.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- et metal ...
- erleer B.D., Vreede P.T., Drent P., Louw ...  
drawbeads with finite elements and verification », *J. Mat. Proc.*
- Chabrand P., Chertier O., Dubois F., « Etude du fro  
emboutissage », *AUM Strasbourg* 95, pp. 345-348.
- Chabrand P., Dubois F., Gelin J.C., « Modelling drawb  
*International Journal of Mechanical Sciences*, 38(1):59-77.
- Ferran G., Moreira L.P., DeMoura A.C., Barboza O. Jr.,  
LC and ULC Steels with a Bending-Drawing Test », *Int.*  
*Sheet Steels for Cold Forming : Processing and Properties.*
- Hill R., 1948, « A theory of the yielding and plastic flow  
*Proc. Roy. Soc. London, A* 193, pp. 281-297.
- 1989, « Finite eleme  
pp. 4

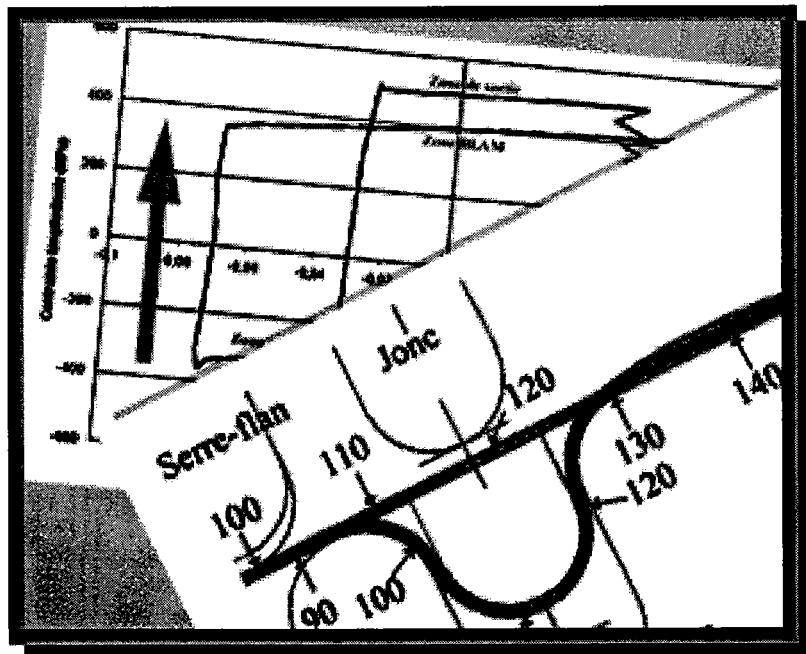


## Références bibliographiques

- Cao J. et Boyce M.C., 1993, « Draw bead penetration as a control element of material flow », *Sheet metal and stamping symposium*, vol. 102, pp. 694-702.
- Carleer B.D., Vreede P.T., Drent P., Louwes M.F.M., Huetink J., 1994, « Modelling drawbeads with finite elements and verification », *J. Mat. Proc. Tech.*, vol. 45/1-4, pp. 63-68.
- Chabrand P., Chertier O., Dubois F., « Etude du frottement dans le contexte de l'emboutissage », *AUM Strasbourg 95*, pp. 345-348.
- Chabrand P., Dubois F., Gelin J.C., « Modelling drawbeads in sheet metal forming », *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(1):59-77, 1996 Jan.
- Ferran G., Moreira L.P., DeMoura A.C., Barboza O. Jr, 1998, « Formability Assessment of LC and ULC Steels with a Bending-Drawing Test », *Int. Symposium, Modern LC and ULC Sheet Steels for Cold Forming : Processing an Properties*, W. Bleck, ed., pp. 395-405.
- Hill R., 1948, « A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals », *Proc. Roy. Soc. London*, A 193, pp. 281-297.
- Honecker A. et Mattiasson K., 1989, « Finite element procedures for 3D sheet forming simulation », *Numiform 89*, Thompson et al., eds., pp. 457-463.
- Kawka M., Wang N. et Makinouchi A., 1994, « Improving drawbeads and friction models in simulations of industrial sheet metal forming processes », *Metal Forming Simulation in Industry*, B. Kröpling and E. Luckey, eds.
- Levy B.S., 1983, « Development of a predictive model for draw bead restraining force utilizing work of Nine and Wang », *J. Applied Metalworking*, vol. 3, n°1, pp. 38-44.
- Mattiasson K., Bernspång L., 1999, « Drawbead modelling in sheet metal stamping simulation », *Numisheet 99*, J.C. Gelin and P. Picart, eds., pp. 235-241.
- Mc Clintock F.A., Zhou Q. et Wierzbicki T., 1992, « Necking in plane strain under bending with constant tension ».
- Meinders T., Geijselaers H.J.M. and Huétink J., 1999, « Equivalent drawbead performance in deep drawing simulations », *Numisheet 99*, J.C. Gelin and P. Picart, eds., pp. 243-248.
- Nine H. D., 1978, « Draw Bead Forces in Sheet Metal Forming », *Mechanics of Sheet Metal Forming*, D. P. Koistinen and N. M. Wang, eds., Plenum Press, New York, NY, pp. 179-211.
- Nine H.D., 1982, « New Drawbead Concepts for Sheet Metal Forming », *J. Applied Metalworking*, vol. 2, n°3, pp. 185-192.

- Peng Y., You Y., Ruan X., 1999, « The new calculation method of drawbead restrain force », *Numisheet 99*, J.C. Gelin and P. Picart, eds., pp. 255-260.
- Sanchez L.R., Weinmann K.J., 1988, « A General Computer Model for Plane Strain Sheet Flow and Its Application to Flow Through Circular Drawbeads », *Proceedings of the 15<sup>th</sup> Biennial Congress of the Int. Deep Drawing Research Group*, Dearborn, MI, May 16-18, pp. 217-226.
- Sanchez L.R., Weinmann K.J., 1996, « An analytical and experimental study of the flow of sheet metal between circular drawbeads », *ASME Journal of Engineering for Industry*, vol.118, 1996, pp. 45-54.
- Sanchez L.R., "A new cyclic anisotropic model for plane strain sheet metal forming", *International Journal of Mechanical Sciences.*, vol. 42/2000, pp. 705-728.
- Stoughton T.B., 1988, « Model of drawbead forces in sheet metal forming », *Proc. 15<sup>th</sup> Biennial IDDRG Congress*, pp. 205-214.
- Swift H.W., 1948, « Plastic bending under tension », *Engineering*, vol. 166, pp. 333-359.
- Wang N.M., 1982, « A mathematical model of drawbead forces in sheet metal forming », *J. Applied Metalworking*, vol. 2, n°3, pp. 193-199.
- Wouters P., Monfort G. et Defourny J., 1994, « Numerical simulation and experimental evaluation of the modifications of material properties in a drawbead », *Proc. 18<sup>th</sup> Biennial IDDRG Congress*, pp. 389-4.
- Yellup J.M. et Painter M.J., 1985, « The prediction of strip shape and restraining force for shallow drawbead systems, », *J. Applied Metalworking*, vol. 4, n°1, pp. 30-38.

# TABLE DES ILLUSTRATIONS



## Table des illustrations

### I - Figures

#### I - 1 - Chapitre I

FIGURE I - 1 : SCHÉMA D'UNE PRESSE DOUBLE ACTION.....	13
FIGURE I - 2 : JONC DE RETENUE CONVENTIONNEL, AVEC MISE EN ÉVIDENCE DES COMPOSANTES DE PLIAGE ET DE FROTTEMENT DE LA FORCE DE RETENUE (NINE, 1978).....	14
FIGURE I - 3 : JONC DE RETENUE CONVENTIONNEL AVEC ADJONCTION D'UN INSERT EN URÉTHANE (NINE, 1982). 16	16
FIGURE I - 4 : JONC DE RETENUE AMÉLIORÉ À FOND PLAT, AJOUTANT UNE QUATRIÈME SÉQUENCE DE PLIAGE/DÉPLIAGE (NINE, 1982).....	16
FIGURE I - 5 : SIMULATEURS DE JONC DE RETENUE (NINE, 1978).....	17
FIGURE I - 6 : ÉVOLUTION DE LA FORCE DE RETENUE EN FONCTION DU DÉPLACEMENT IMPOSÉ (CAO ET BOYCE, 1993).....	21
FIGURE I - 7 : ÉVOLUTION DE LA FORCE DE RETENUE : (CAO & BOYCE, 1993).....	22
FIGURE I - 8 : INFLUENCE D'UN SAUT DE PÉNÉTRATION SUR LA FORCE DE RETENUE.....	23
FIGURE I - 9 : GÉOMÉTRIE DES ESSAIS DE FORMAGE EN U DE TôLES D'ACIER (WOUTERS & AL., 1994). ....	24
FIGURE I - 10 : INFLUENCE DE LA PRÉSENCE D'UN JONC ET DES CONDITIONS DE LUBRIFICATION SUR LA FORCE DE POINÇON (WOUTERS & AL., 1994). ....	25
FIGURE I - 11 : SCHÉMA D'UNE TÔLE SOUMISE À UN PLIAGE-ÉTIRAGE LORS DE L'ÉCOULEMENT LE LONG D'UN OUTIL SEMI-CYLINDRIQUE (SWIFT, 1948). ....	26
FIGURE I - 12 : EFFORTS ET GÉOMÉTRIE DE LA LIGNE MOYENNE DÉTERMINÉE ANALYTIQUEMENT (SANCHEZ & WEINMANN, 1996). ....	27
FIGURE I - 13 : SCHÉMA DU PLIAGE D'UNE TÔLE SERVANT AU CALCUL DE LA FORCE DE FLEXION (MEINDERS & AL., 1999).....	29
FIGURE I - 14 : SCHÉMA D'UN INCRÉMENT DE DÉFORMATION PLANE POUR UNE PLAQUE EN FLEXION-TRACTION (MC CLINTOCK ET AL., 1993). ....	30

#### I - 2 - Chapitre II

FIGURE II - 1 : SCHÉMA DE LA GÉOMÉTRIE DE L'OUTILLAGE. ....	33
FIGURE II - 2 : GÉOMÉTRIE DE LA TÔLE ET DES OUTILS AVANT ET APRÈS DESCENTE DU JONC. ....	36
FIGURE II - 3 : GÉOMÉTRIE DE LA TÔLE ET DES OUTILS EN FIN DE TRACTION DE LA TÔLE.....	37
FIGURE II - 4 : ÉVOLUTION DES FORCES DE TRACTION, DE SERRAGE ET DE SERRE-FLAN PENDANT LA TRACTION DE LA TÔLE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACTS SANS FROTTEMENT. ....	38
FIGURE II - 5 : ÉVOLUTION DE LA CONTRAINTE LONGITUDINALE PENDANT LA TRACTION DE LA TÔLE.....	39
FIGURE II - 6 : ÉVOLUTION DE LA DÉFORMATION LONGITUDINALE PENDANT LA TRACTION DE LA TÔLE.....	39
FIGURE II - 7 : GÉOMÉTRIE DE LA TÔLE ET DES OUTILS EN FIN DE TRACTION DE LA TÔLE EN FAIBLE ENFONCEMENT. ....	40
FIGURE II - 8 : ÉVOLUTION DES FORCES DE TRACTION, DE SERRAGE ET DE SERRE-FLAN PENDANT LA PHASE DE TRACTION DE LA TÔLE, EN FAIBLE ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	41
FIGURE II - 9 : GÉOMÉTRIE DU MAILLAGE DÉFORMÉ APRÈS TRACTION DE LA TÔLE.....	42
FIGURE II - 10 : DÉFORMATION LONGITUDINALE EN FIN DE TRACTION DE LA TÔLE, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	43
FIGURE II - 11 : DÉFORMATION PLASTIQUE ÉQUIVALENTE EN FIN DE TRACTION, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	44
FIGURE II - 12 : CONTRAINTE LONGITUDINALE EN FIN DE TRACTION, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	45
FIGURE II - 13 : CYCLE $(\sigma_{11}, \epsilon_{11})$ EN FIN DE TRACTION POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, CAS D'UN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	46
FIGURE II - 14 : CYCLE $(\sigma_{11}, \epsilon_{11})$ EN FIN DE TRACTION POUR LA FIBRE MÉDIANE, CAS D'UN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	47

FIGURE II - 15 : CYCLE ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) EN FIN DE TRACTION POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, CAS D'UN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	47
FIGURE II - 16 : COURBES ( $\sigma_{VM}, \bar{\varepsilon}$ ) EN FIN DE TRACTION, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	48
FIGURE II - 17 : GÉOMÉTRIE DU MAILLAGE DÉFORMÉ APRÈS TRACTION DE LA TÔLE. CAS D'UN FAIBLE ENFONCEMENT, CONTACTS SANS FROTTEMENT. ....	49
FIGURE II - 18 : DÉFORMATION LONGITUDINALE EN FIN DE TRACTION DE LA TÔLE, EN FAIBLE ENFONCEMENT, SANS FROTTEMENT. ....	50
FIGURE II - 19 : DÉFORMATION PLASTIQUE ÉQUIVALENTE EN FIN DE TRACTION, EN FAIBLE ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	51
FIGURE II - 20 : CONTRAINTES LONGITUDINALES EN FIN DE TRACTION, EN FAIBLE ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	52
FIGURE II - 21 : CYCLE ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) EN FIN DE TRACTION POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, CAS D'UN FAIBLE ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	53
FIGURE II - 22 : CYCLE ( $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ ) EN FIN DE TRACTION POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, CAS D'UN FAIBLE ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	53
FIGURE II - 23 : ZONES DE CONTACT AVEC LES OUTILS EN FORT ET FAIBLE ENFONCEMENTS.....	54

### I - 3 - Chapitre III

FIGURE III - 1 : SCHÉMA DES EFFORTS AGISSANT SUR UN ÉLÉMENT DE LONGUEUR DE TÔLE (CAS GÉNÉRAL).....	59
FIGURE III - 2 : SCHÉMA DE LA TÔLE LE LONG DU JONC, ET DÉNOMINATION DES DIFFÉRENTES ZONES. ....	60
FIGURE III - 3 : SCHÉMA DES EFFORTS AGISSANT SUR LA ZONE D'ENTRÉE. ....	60
FIGURE III - 4 : SCHÉMA DES EFFORTS AGISSANT SUR LA ZONE REM. ....	61
FIGURE III - 5 : SCHÉMA D'UNE TRANCHE DE TÔLE SUBISSANT UNE FORCE NORMALE ET UNE FORCE TANGENTIELLE CONCENTRÉE AU NIVEAU D'UN ÉLÉMENT D'OUTILLAGE.....	64
FIGURE III - 6 : SCHÉMA DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DU MATÉRIAU EN TRACTION OU COMPRESSION UNIAXIALE MONOTONE.....	67
FIGURE III - 7 : SCHÉMA DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DU MATÉRIAU EN TRACTION OU COMPRESSION PLANE MONOTONE.....	68
FIGURE III - 8 : SCHÉMA DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DU MATÉRIAU EN DÉFORMATION PLANE CYCLIQUE – HYPOTHÈSE D'UN ÉCROUISSAGE ISOTROPE. ....	69
FIGURE III - 9 : SCHÉMA DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DU MATÉRIAU EN DÉFORMATION PLANE CYCLIQUE – HYPOTHÈSE D'UN ÉCROUISSAGE CINÉMATIQUE NON LINÉAIRE. ....	72
FIGURE III - 10 : SCHÉMA D'UN INCRÉMENT DE DÉFORMATION SUBI PAR UN ÉLÉMENT DE LONGUEUR DE TÔLE SOUS SOLLICITATION DE FLEXION-TRACTION. LA TÔLE EST DIVISÉE EN N COUCHES ( $i = 1, n$ ) SELON SON ÉPAISSEUR. ....	73
FIGURE III - 11 : ÉVOLUTION DES DÉFORMATIONS LONGITUDINALES, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	78
FIGURE III - 12 : ÉVOLUTION DES DÉFORMATIONS PLASTIQUES ÉQUIVALENTES, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	79
FIGURE III - 13 : ÉVOLUTION DES CONTRAINTES LONGITUDINALES. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT. ....	79
FIGURE III - 14 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	80
FIGURE III - 15 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE MÉDIANE, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	80
FIGURE III - 16 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT.....	81
FIGURE III - 17 : ÉVOLUTION DE L'EFFORT NORMAL LE LONG DE LA TÔLE, EN FONCTION DU RAYON DE COURBURE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACTS SANS FROTTEMENTS. ....	84
FIGURE III - 18 : ÉVOLUTION DU MOMENT FLÉCHISSANT LE LONG DE LA TÔLE, EN FONCTION DU RAYON DE COURBURE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACT SANS FROTTEMENT.....	84
FIGURE III - 19 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, EN FAIBLE ENFONCEMENT, SANS FROTTEMENT. ....	86

FIGURE III - 20 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, EN FAIBLE ENFONCEMENT, SANS FROTTEMENT. ....	86
FIGURE III - 21 : ÉVOLUTION DES FORCES EN FORT ENFONCEMENT.....	88
FIGURE III - 22 : ÉVOLUTION DES FORCES EN FAIBLE ENFONCEMENT.....	89
FIGURE III - 23 : ÉVOLUTION DES DÉFORMATIONS LONGITUDINALES, EN FORT ENFONCEMENT AVEC FROTTEMENT. ....	90
FIGURE III - 24 : INFLUENCE DU FROTTEMENT SUR L'ÉVOLUTION DE LA DÉFORMATION LONGITUDINALE DE LA FIBRE MÉDIANE EN FORT ENFONCEMENT. ....	91
FIGURE III - 25 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, EN FORT ENFONCEMENT AVEC FROTTEMENT. ....	91
FIGURE III - 26 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, EN FORT ENFONCEMENT AVEC FROTTEMENT. ....	92
FIGURE III - 27 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, EN FAIBLE ENFONCEMENT AVEC FROTTEMENT. ....	94
FIGURE III - 28 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, EN FAIBLE ENFONCEMENT AVEC FROTTEMENT. ....	95
FIGURE III - 29 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE SUPÉRIEURE, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT (LOI D'ÉCROUISSAGE CINÉMATIQUE).....	97
FIGURE III - 30 : CONTRAINTES/DÉFORMATIONS LONGITUDINALES POUR LA FIBRE INFÉRIEURE, EN FORT ENFONCEMENT SANS FROTTEMENT (LOI D'ÉCROUISSAGE CINÉMATIQUE).....	97
FIGURE III - 31 : ÉVOLUTION DU MOMENT FLÉCHISSANT LE LONG DE LA TÔLE, EN FONCTION DU RAYON DE COURBURE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACT SANS FROTTEMENT, LOI D'ÉCROUISSAGE CINÉMATIQUE. ....	98
FIGURE III - 32 : ÉVOLUTION DE L'EFFORT NORMAL LE LONG DE LA TÔLE, EN FONCTION DU RAYON DE COURBURE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACT SANS FROTTEMENT, LOI D'ÉCROUISSAGE CINÉMATIQUE. ....	98

#### I - 4 - Chapitre IV

FIGURE IV - 1 : INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR RELATIVE $H/R$ DE LA TÔLE SUR LA FORCE DE RETENUE ADIMENSIONNELLE $F$ , POUR DIFFÉRENTS ENFONCEMENTS RELATIFS $H/R$ .....	108
FIGURE IV - 2 : INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR RELATIVE $H/R$ DE LA TÔLE SUR LA DÉFORMATION LONGITUDINALE EN SORTIE D'OUTILLAGE, POUR DIFFÉRENTS ENFONCEMENTS RELATIFS $H/R$ . ....	108
FIGURE IV - 3 : INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR RELATIVE $H/R$ DE LA TÔLE SUR LA DÉFORMATION ÉQUIVALENTE EN SORTIE D'OUTILLAGE, POUR DIFFÉRENTS ENFONCEMENTS RELATIFS $H/R$ . ....	109
FIGURE IV - 4 : INFLUENCE DE L'ENFONCEMENT RELATIF $H/R$ SUR LA FORCE DE RETENUE ADIMENSIONNELLE $F$ , POUR DIFFÉRENTES ÉPAISSEURS RELATIVES. ....	110
FIGURE IV - 5 : INFLUENCE DE L'ENFONCEMENT RELATIF $H/R$ SUR LA DÉFORMATION LONGITUDINALE EN SORTIE D'OUTILLAGE, POUR DIFFÉRENTES ÉPAISSEURS RELATIVES $H/R$ . ....	110
FIGURE IV - 6 : INFLUENCE DE L'ENFONCEMENT RELATIF $H/R$ SUR LA DÉFORMATION ÉQUIVALENTE EN SORTIE D'OUTILLAGE, POUR DIFFÉRENTES ÉPAISSEURS RELATIVES $H/R$ . ....	111
FIGURE IV - 7 : INFLUENCE DU FROTTEMENT SUR LA FORCE ADIMENSIONNELLE POUR DIFFÉRENTES ÉPAISSEURS ET ENFONCEMENTS RELATIFS. ....	112
FIGURE IV - 8 : INFLUENCE DU MODULE D'YOUNG SUR LA FORCE ADIMENSIONNELLE POUR DIFFÉRENTES ÉPAISSEURS ET ENFONCEMENTS RELATIFS. ....	113
FIGURE IV - 9 : INFLUENCE DU COEFFICIENT D'ÉCROUISSAGE SUR LA FORCE ADIMENSIONNELLE POUR DIFFÉRENTES ÉPAISSEURS ET ENFONCEMENTS RELATIFS. ....	114

#### I - 5 - Annexes

FIGURE A - 1 : GÉOMÉTRIE DE LA TÔLE.....	127
FIGURE A - 2 : ZONE D'ENTRÉE.....	129
FIGURE A - 3 : ZONE DE BRIN LIBRE AMONT ÉTENDUE. ....	130
FIGURE A - 4 : ZONE DE BRIN LIBRE AVAL.....	131
FIGURE A - 5 : RAYON DU JONC.....	132
FIGURE A - 6 : ZONE DE BRIN LIBRE AVAL ÉTENDUE. ....	133

## II - Tableaux

### II - 1 - Chapitre II

TABLEAU II - 1 : FORCES OBTENUES AVEC DIFFÉRENTS ÉLÉMENTS, EN FORT ENFONCEMENT, SANS FROTTEMENT.	35
TABLEAU II - 2 : INFLUENCE DU FROTTEMENT SUR LES FORCES DE TRACTION ET DE SERRAGE.	55
TABLEAU II - 3 : INFLUENCE DU FROTTEMENT SUR LES DÉFORMATIONS.	55
TABLEAU II - 4 : DÉFORMATION LONGITUDINALE DE LA FIBRE MÉDIANE POUR LES DIFFÉRENTS ENFONCEMENTS, AVEC ET SANS FROTTEMENT.	56

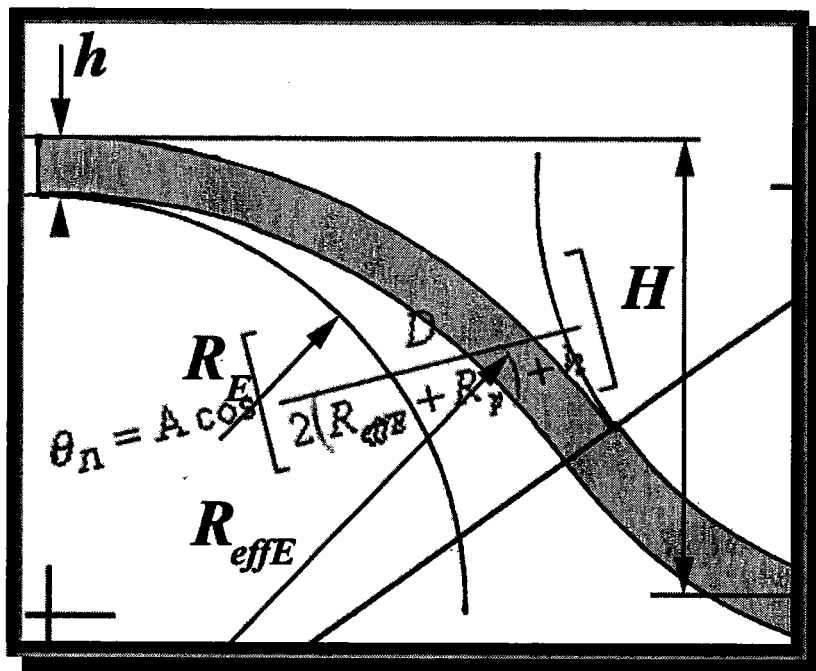
### II - 2 - Chapitre III

TABLEAU III - 1 : COMPARAISON ENTRE LA MEF ET LA MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LES DÉFORMATIONS LONGITUDINALE ET ÉQUIVALENTE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACTS SANS FROTTEMENT.	82
TABLEAU III - 2 : RÉCAPITULATIF DU SIGNE DU RAYON DE COURBURE ET DES SENS D'ÉVOLUTION DES MOMENTS FLÉCHISSANT $M$ , DE L'EFFORT NORMAL $N$ ET DES DÉFORMATIONS $\epsilon_{sup}$ ET $\epsilon_{inf}$ DES FIBRES SUPÉRIEURE ET INFÉRIEURE.	83
TABLEAU III - 3 : COMPARAISON DES FORCES DE TRACTION, DE SERRAGE ET DE SERRE-FLAN ENTRE MODÉLISATION ET M.E.F. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACTS SANS FROTTEMENT.	85
TABLEAU III - 4 : COMPARAISON ENTRE LA MEF ET LA MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LES DÉFORMATIONS LONGITUDINALE ET ÉQUIVALENTE, EN FAIBLE ENFONCEMENT, SANS FROTTEMENT.	87
TABLEAU III - 5 : COMPARAISON DES FORCES DE TRACTION, DE SERRAGE ET DE SERRE-FLAN ENTRE MODÉLISATION ET M.E.F. CAS D'UN FAIBLE ENFONCEMENT, CONTACTS SANS FROTTEMENT.	87
TABLEAU III - 6 : COMPARAISON ENTRE LA M.E.F. ET LA MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LES DÉFORMATIONS LONGITUDINALE ET ÉQUIVALENTE. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACTS AVEC FROTTEMENTS.	93
TABLEAU III - 7 : COMPARAISON DES FORCES DE TRACTION, DE SERRAGE ET DE SERRE-FLAN ENTRE MODÉLISATION ET M.E.F. CAS D'UN FORT ENFONCEMENT, CONTACTS AVEC FROTTEMENT.	93
TABLEAU III - 8 : COMPARAISON ENTRE LA M.E.F. ET LA MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LES DÉFORMATIONS LONGITUDINALE ET ÉQUIVALENTE. CAS D'UN FAIBLE ENFONCEMENT, CONTACTS AVEC FROTTEMENT.	96
TABLEAU III - 9 : COMPARAISON DES FORCES DE TRACTION, DE SERRAGE ET DE SERRE-FLAN ENTRE MODÉLISATION ET M.E.F. CAS D'UN FAIBLE ENFONCEMENT, CONTACTS AVEC FROTTEMENTS.	96
TABLEAU III - 10 : COMPARAISON DES RÉSULTATS OBTENUS EN ÉCROUISSAGE ISOTROPE ET EN ÉCROUISSAGE CINÉMATIQUE.	99
TABLEAU III - 11 : PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX TESTÉS PAR NINE (1978).	100
TABLEAU III - 12 : COMPARAISON DES FORCES DE RETENUE CALCULÉES AVEC LES RÉSULTATS DES EXPÉRIMENTATIONS DE NINE ET DES SIMULATIONS DE CAO & BOYCE.	101
TABLEAU III - 13 : COMPARAISON DES FORCES DE RETENUE ET DE SERRAGE CALCULÉES AVEC LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET CALCULÉS DE SANCHEZ & WEINMANN.	101

### II - 3 - Chapitre IV

TABLEAU IV - 1 : ENSEMBLE DES VALEURS GÉOMÉTRIQUES UTILISÉES DANS L'ÉTUDE PARAMÉTRIQUE.	107
---	-----

# ANNEXES





## Annexes

## I - Géométrie de la tôle

La Figure A - 1 représente la tôle après descente du jonc et traction. Nous supposons ici, pour estimer le rayon de courbure effectif  $R_{effE}$  de la fibre médiane sur le Rayon d'Entrée Matrice, que celui-ci est défini par l'arc de cercle tangent au cercle de rayon  $R_E + h/2$  associé à l'épaulement d'entrée et au cercle de rayon  $R_J + h/2$  associé au jonc. Le point de contact avec ce dernier cercle est supposé définir l'angle  $\theta_{I1}$  au point d'inflexion  $I_1$  sur le Brin Libre AMont.

Le Brin Libre AVal est supposé correspondre au segment tangent au cercle de rayon  $R_J + h/2$  associé au jonc et au cercle de rayon  $R_S + h/2$  associé à l'épaulement de sortie. Ainsi se trouvent définis l'angle  $\theta_{I2}$  associé au Brin Libre AVal, et la longueur  $L$  de ce brin. Nous supposons enfin que le rayon de courbure  $R_{effS}$  est défini de telle sorte que l'arc de cercle de rayon  $R_{effS} + h/2$ , associé à la fibre supérieure, vienne tangenter le serre-flan positionné en sortie d'outillage.

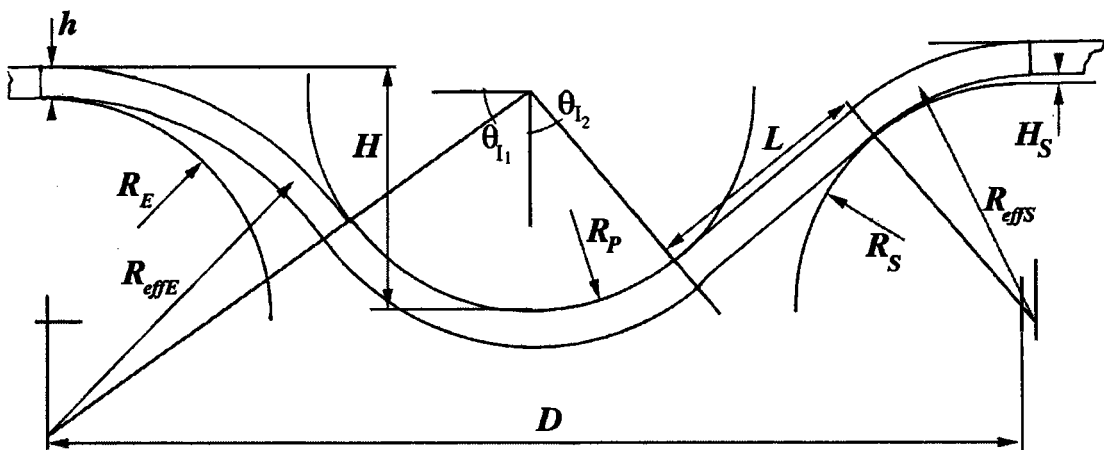


Figure A - 1 : Géométrie de la tôle.

Avec ces hypothèses qui s'appuient sur l'examen des profils obtenus dans les simulations par éléments finis, nous déterminons les valeurs suivantes :

**Rayon effectif d'entrée :**

$$R_{effE} = \frac{H}{2} + \frac{1}{2H} \left( \frac{D}{2} \right)^2 - \left( R_p + \frac{h}{2} \right)$$

**Rayon effectif de sortie :**

$$R_{effS} = R_s + \frac{h}{2} + \frac{H_s}{1 - \cos \theta_{I2}}$$

**Inclinaison de la tôle au point d'inflexion I<sub>1</sub> :**

$$\theta_{I1} = A \cos \left[ \frac{D}{2(R_{effE} + R_p) + h} \right]$$

**Inclinaison de la tôle au point d'inflexion I<sub>2</sub> :**

$$\theta_{I2} = 2 \cdot \arctan \left[ \frac{\frac{C}{A} - \sqrt{\frac{C^2 + B^2}{A^2} - 1}}{1 + \frac{B}{A}} \right], \text{ avec } A = R_s + R_p + h, B = A - H, C = \frac{D}{2}.$$

**Longueur du brin libre aval :**

$$L = \frac{\frac{D}{2} - (R_J + R_S + h) \sin \theta_{I2}}{\cos \theta_{I2}}$$

Les angles de contact  $\theta_E$ ,  $\theta_J$  et  $\theta_S$  avec les outils ne sont pas estimés à partir de considérations géométriques, mais seront déduits de l'étude par zones de l'équilibre de la tôle, que nous développerons dans l'Annexe 2.

## II - Calcul des forces - Cas général avec frottement

### II - 1 - Zone d'entrée

Cette zone s'étend de l'extrémité gauche de la tôle à la section immédiatement à gauche de la force  $F_E$  appliquée au rayon d'entrée. Nous pouvons déduire de l'équilibre de cette zone la force de serre-flan d'entrée  $F$ , l'effort tangentiel  $T_E^-$  immédiatement à gauche du point E, et l'angle de contact  $\theta_E$  avec le rayon d'entrée (Figure A - 2).

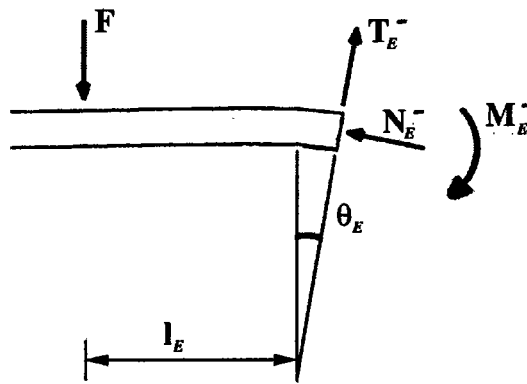


Figure A - 2 : Zone d'entrée.

$$N_E^{-2} + T_E^{-2} = F^2$$

$$\tan \theta_E = \frac{|N_E^-|}{T_E^-}$$

$$-Fl_E - N_E^- \left( R_E + \frac{h}{2} \right) + M_E^- = 0$$

Ainsi :

$$F = \frac{M_E^- - N_E^- \left( R_E + \frac{h}{2} \right)}{l_E}$$

$$T_E^- = \sqrt{F^2 - N_E^{-2}}$$

$$\theta_E = \arctan \frac{|N_E^-|}{T_E^-}$$

## II - 2 - Zone d'entrée étendue au brin libre amont

Cette région englobe la partie analysée précédemment, étendue jusqu'au point d'inflexion  $I_1$  sur le brin libre amont (Figure A - 3). Nous déduisons de l'équilibre la force  $F_E$  au niveau du rayon d'entrée ainsi que la force tangentielle  $T_{I1}$  au premier point d'inflexion.

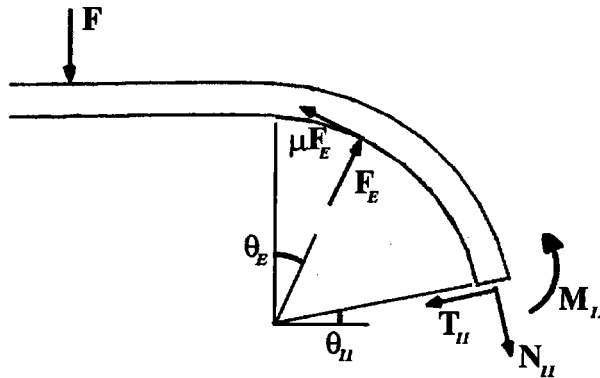


Figure A - 3 : Zone de brin libre amont étendue.

Les équations d'équilibre relatives à la résultante s'expriment :

$$F_E (\sin \theta_E - \mu \cos \theta_E) + T_{I1} \cos \theta_{I1} + N_{I1} \sin \theta_{I1} = 0$$

$$F_E (\cos \theta_E + \mu \sin \theta_E) + T_{I1} \sin \theta_{I1} - N_{I1} \cos \theta_{I1} + F = 0$$

D'où :

$$F_E = \frac{N_{I1} - F \cos \theta_{I1}}{\cos(\theta_E + \theta_{I1}) + \mu \sin(\theta_E + \theta_{I1})}$$

$$T_{I1} = \frac{F(\sin \theta_E - \mu \cos \theta_E) - N_{I1} [\sin(\theta_E + \theta_{I1}) - \mu \cos(\theta_E + \theta_{I1})]}{\cos(\theta_E + \theta_{I1}) + \mu \sin(\theta_E + \theta_{I1})}$$

### II - 3 - Zone de brin libre aval

Cette zone prend en compte la partie s'étendant du second point d'inflexion  $I_2$  sur le brin libre aval à la section immédiatement à gauche du point de contact  $S$  avec le rayon de sortie (Figure A - 4). Nous supposons ici que le point d'inflexion  $I_2$  se situe au milieu du brin libre, dont la longueur  $L$  a été déterminée dans l'Annexe 1.

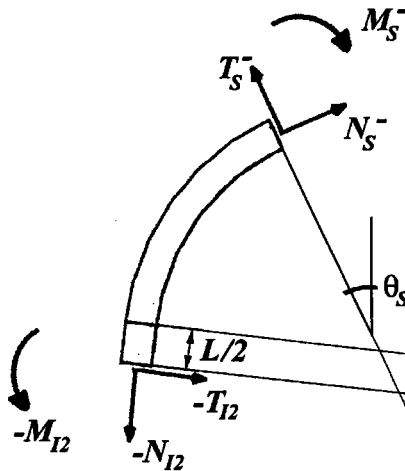


Figure A - 4 : Zone de brin libre aval.

Les équations d'équilibre s'expriment :

$$N_s^- \cos \theta_s - N_{I_2} \cos \theta_{I_2} - T_s^- \sin \theta_s + T_{I_2} \sin \theta_{I_2} = 0$$

$$N_s^- \sin \theta_s - N_{I_2} \sin \theta_{I_2} + T_s^- \cos \theta_s - T_{I_2} \cos \theta_{I_2} = 0$$

$$M_s^- - M_{I_2} + (N_{I_2} - N_s^-) \left( R_s + \frac{h}{2} \right) + T_{I_2} \frac{L}{2} = 0$$

L'équation de moment est exprimée au centre du rayon d'épaulement de sortie. La résolution de ces équations donne :

$$T_{I_2} = -\frac{2}{L} \left( M_s^- - M_{I_2} + (N_{I_2} - N_s^-) \left( R_s + \frac{h}{2} \right) \right)$$

L'angle  $\theta_s$ , puis  $T_s^-$ , sont tirés de la résolution de (1) et (2).

## II - 4 - Rayon du jonc

Une fois les valeurs de  $T_{I_1}$  et  $T_{I_2}$  déterminées, nous avons toutes les données pour obtenir la force de serrage au niveau du jonc. La force de serrage, et sa direction, sont obtenues à partir de l'équilibre de la zone comprise entre les deux points d'inflexion  $I_1$  et  $I_2$  (Figure A - 5).

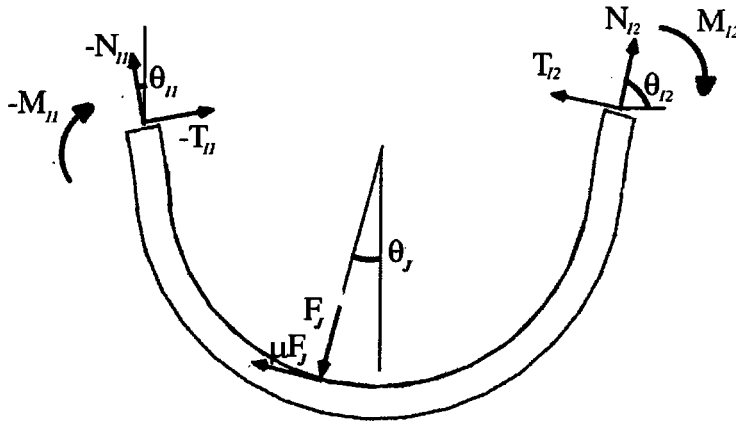


Figure A - 5 : Rayon du jonc.

Les équations d'équilibre relatives à la résultante s'expriment :

$$(1) \quad -N_{I_1} \sin \theta_{I_1} - T_{I_1} \cos \theta_{I_1} + N_{I_2} \cos \theta_{I_2} - T_{I_2} \sin \theta_{I_2} - F_J (\sin \theta_J + \mu \cos \theta_J) = 0$$

$$N_{I_1} \cos \theta_{I_1} - T_{I_1} \sin \theta_{I_1} + N_{I_2} \sin \theta_{I_2} + T_{I_2} \cos \theta_{I_2} - F_J (\cos \theta_J - \mu \sin \theta_J) = 0$$

d'où :

$$-F_J (\sin \theta_J + \mu \cos \theta_J) = N_{I_1} \sin \theta_{I_1} + T_{I_1} \cos \theta_{I_1} - N_{I_2} \cos \theta_{I_2} + T_{I_2} \sin \theta_{I_2} = F_{JX}$$

$$-F_J (\cos \theta_J - \mu \sin \theta_J) = -N_{I_1} \cos \theta_{I_1} + T_{I_1} \sin \theta_{I_1} - N_{I_2} \sin \theta_{I_2} - T_{I_2} \cos \theta_{I_2} = F_{JY}$$

L'analyse de la composition des composantes normale et tangentielle au point  $J$  donne :

$$\theta_J = \arctan \frac{F_{JX}}{F_{JY}} - \arctan \mu$$

$$F_J = \frac{\sqrt{F_{JX}^2 + F_{JY}^2}}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Zone de brin libre aval étendue à la sortie

Afin de déterminer la force  $F_s$  agissant au niveau du rayon de sortie de la matrice et la force  $F_2$  au niveau du serre-flan de sortie, nous reprenons la zone de brin libre aval, étendue jusqu'à l'extrémité droite de la tôle (Figure A - 6).

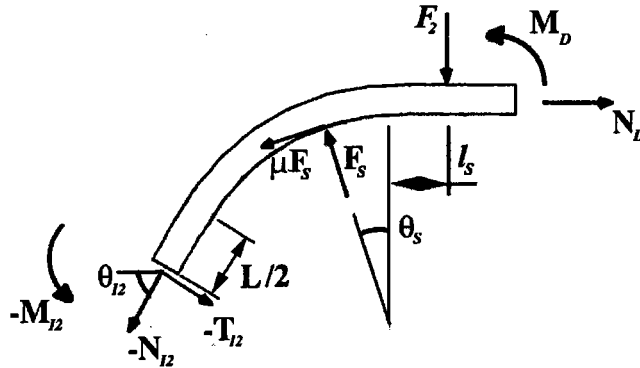


Figure A - 6 : Zone de brin libre aval étendue.

Les équations d'équilibre relatives à la résultante s'expriment :

$$N_D - F_s (\sin \theta_s + \mu \cos \theta_s) + T_{I2} \sin \theta_{I2} - N_{I2} \cos \theta_{I2} = 0$$

$$F_2 + F_s (\cos \theta_s - \mu \sin \theta_s) - T_{I2} \cos \theta_{I2} - N_{I2} \sin \theta_{I2} = 0$$

L'angle  $\theta_s$  ayant été préalablement déterminé, nous obtenons :

$$F_s = \frac{N_D + T_{I2} \sin \theta_{I2} - N_{I2} \cos \theta_{I2}}{\sin \theta_s + \mu \cos \theta_s}$$

$$F_2 = N_{I2} \sin \theta_{I2} - F_s (\cos \theta_s - \mu \sin \theta_s) + T_{I2} \cos \theta_{I2}$$

## *Résumé*

Les simulations numériques ont pris une grande part dans la validation et la faisabilité d'une pièce en emboutissage. Mais certains points, comme les joncs de retenue, sont complexes et coûteux en temps de calcul.

Le but du présent travail est de développer une modélisation analytique du pliage/étirage d'une tôle le long d'un jonc de retenue. L'évolution géométrique d'une longueur élémentaire de tôle est basée sur la théorie des plaques de Love-Kirchhoff associée à une prise en compte des variations d'épaisseur. Nous considérons une loi d'écroutissage aussi bien monotone que cinématique, et un frottement de type Coulomb.

La modélisation proposée, validée par des simulations numériques, nous a permis d'effectuer une analyse paramétrique complète, qui peut constituer un outil d'aide au choix des joncs de retenue.

## *Mots clés*

Jonc de retenue, emboutissage, pliage, étirage, frottement, modélisation analytique

---

## *Abstract*

Numerical simulations take a great place in deep drawing processes. But some parts, like drawbeads, are complex and leads to an unacceptable increase in CPU time.

The purpose of this work is to develop an analytical model for sheet bending/stretching along drawbead. The geometrical evolution of an elementary length of the sheet is described by the Love-Kirchhoff assumption. The thinning of the sheet is taken into account in the calculation. The assumption of either isotropic or kinematic hardening are considered, and Coulomb's friction is assumed.

This model, confirmed by numerical simulations, allowed us to perform a complete parameter analysis, and constitute a tool to choose drawbeads.

## *Key words*

Drawbead, drawing, bending, stretching, friction, analytical modelisation