



**HAL**  
open science

## Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Amadou Ouane

► **To cite this version:**

Amadou Ouane. Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique. Matériaux. Université Paul Verlaine - Metz, 2000. Français. NNT : 2000METZ005S . tel-01775490

**HAL Id: tel-01775490**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775490v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

6 164731 S/172 00/5



Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
UMR 7554

**----- Thèse -----**

Présentée à



----- Université de Metz -----

Par

**Amadou OUANE**

Pour l'obtention du grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

**SPECIALITE : Science de l'Ingénieur**

**OPTION : Mécanique des matériaux**

**Simulation du phénomène TRIP  
par une voie phénoménologique  
et numérique**

Date de soutenance : 16 Juin 2000

devant le jury composé de :

Directeur de thèse : M. BERVEILLER, Professeur ENSAM -Metz

Rapporteurs : H. BIAUSSER, Professeur Ecole Centrale - Paris

G. CAILLETAUD, Professeur Ecole des Mines - Evry

Examineurs : S. DENIS, Professeur Ecole des Mines - Nancy

P. LIPINSKI, Professeur Université de Metz

U KI OCKER, Chargé de recherche Ecole des Mines - Saint Etienne

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ

T



031 432452 2

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	2000158S
Cote	SI/M <sub>3</sub> 00/5
Loc	Magasin TEC

## **AVANT-PROPOS**

Assistant à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Bamako (Mali), j'ai eu la possibilité d'effectuer un séjour doctoral au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux afin d'approfondir mes connaissances en :

- Science des Matériaux
- Mécanique des Matériaux
- Mécanique des Solides
- Mécanique des Structures (Eléments finis)

Le sujet qui a été proposé m'a permis de découvrir tous ces domaines de manière synthétique. Je me sens donc capable d'utiliser les techniques acquises pour développer des projets de recherche. Je suis conscient que les programmes développés ou modifiés auraient pu être exploités de manière plus systématique, mais cela ne correspondait pas à l'objectif de mon séjour en France.

Monsieur le Professeur M. Berveiller m'a, en sa qualité de Directeur de thèse, accompagné tout au long de ces années de ses conseils. Je lui exprime ma profonde gratitude pour son aide constante qui m'a permis de mener à bien l'élaboration et la rédaction de ce travail.

Mes remerciements s'adressent à Monsieur le Professeur H. Biauxser et à Monsieur le Professeur Cailletaud pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs.

Les conseils de Monsieur le Professeur P. Lipinski nous ont été très précieux dans la phase d'élaboration du code des éléments finis. Je souhaite lui exprimer toute ma gratitude pour tout son aide et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être un des membres du jury.

Monsieur Cherkaoui, chargé de recherches au CNRS, m'a accompagné tout au long de ces années de ses conseils. Je le remercie pour l'aide qu'il nous a apporté tout au long de ce travail.

Nos remerciements à Madame le Professeur S. Denis et Monsieur H. KLOCKER pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant de se joindre aux autres membres du jury.

Je remercie La Direction de L'ENSAM de Metz et tout le personnel du dit établissement pour leur gentillesse et l'aide qu'ils nous ont apportée lors des développements du code des éléments finis.

J'adresse mes remerciements aux autres chercheurs et membres du LPMM pour leur soutien tout au long de ces années.

Mes remerciements à la Coopération Française pour le financement de la présente thèse.

# SOMMAIRE

<b>LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS .....</b>	<b>1</b>
<b>I INTRODUCTION .....</b>	<b>3</b>
<b>II. RAPPELS SUR LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE.....</b>	<b>6</b>
II.1 TRANSFORMATIONS POLYMORPHES.....	8
II.2 DÉFINITION DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE.....	9
II.3 TRANSFORMATION MARTENSITIQUE DANS LES ACIERS.....	10
II.3.1 <i>Microstructure et comportement mécanique des martensites</i> .....	12
II.3.2 <i>Cinétique de la transformation martensitique</i> .....	14
II.3.3 <i>Types de transformations</i> .....	16
II.4 CARACTÉRISTIQUES DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE .....	18
II.4.1 <i>Caractéristiques macroscopiques</i> .....	19
II.4.2 <i>Caractéristiques microscopiques</i> .....	20
II.4.4 <i>Relation d'orientation entre les phases</i> .....	21
II.4.4 <i>Théorie mathématique de Weschler- Lieberman-Read ( WLR )</i> .....	23
II.4.5 <i>Types de martensites</i> .....	26
II.5 MARTENSITE INDUITE PAR LA CONTRAINTE ET MARTENSITE INDUITE PAR LA DÉFORMATION .....	27
II.5.1 <i>Plasticité induite par transformation - transformation induced plasticity (TRIP)</i> .....	29
II.5.2 <i>Origines de la plasticité de transformation</i> .....	31
II.6 BIBLIOGRAPHIE .....	33
<b>III. THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS.....</b>	<b>35</b>
III.1 CONSERVATION DE LA MASSE.....	37
III.1.1 <i>Equation de continuité</i> .....	37
III.1.2 <i>Dérivation par rapport au temps de l'intégrale de volume</i> .....	38
III.2 PREMIER PRINCIPE : LOI DE CONSERVATION.....	39
III.2.1 <i>Energie du système</i> .....	40
III.2.2 <i>Energie cinétique</i> .....	41
III.2.3 <i>Entropie</i> .....	41
III.2.4 <i>Densité de l'énergie interne</i> .....	41
III.2.5 <i>Taux de chaleur</i> .....	42
III.3 SECOND PRINCIPE .....	43
III.4 CONCLUSION .....	45
III.5 BIBLIOGRAPHIE.....	46
<b>IV. APPROCHE THERMOMICROMECHANIQUE DES FRONTIERES MOBILES.....</b>	<b>47</b>
IV.1 CHAMP DES DÉFORMATIONS .....	50
IV.2 CONDITIONS À L'INTERFACE.....	50
IV.3 ENERGIE LIBRE D'HELMHOLTZ.....	52
IV.4 PUISSANCE DES EFFORTS INTÉRIEURS.....	56
IV.5 PUISSANCE DISSIPÉE.....	58
V.6 FORCE MOTRICE .....	59
V.7 CARACTÉRISTIQUES DE LA MAILLE.....	60
V.7.1 <i>Transformation orthogonale</i> .....	61
V.7.2 <i>Angles d'Euler</i> .....	62
V.7.3 <i>Déformation de transformation</i> .....	64
V.8 CONCLUSION .....	66
V.9 BIBLIOGRAPHIE.....	67

# SOMMAIRE

<b>V. SIMULATION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE-BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>68</b>
V.1 MODELES SIMULANT L'ARRANGEMENT STRUCTURAL .....	71
V.1.1 <i>Modèle de Ganghoffer et al [GA91]</i> .....	71
V.1.2. <i>Modèle de Simonsson et al [SI95]</i> .....	73
V.1.3. <i>Modèle de Marketz et al [MA94]</i> .....	74
V.1.4. <i>Modèle de Xu et al [XM92-93]</i> .....	75
V.1.5. <i>Modèle de Wen et al [WE97]</i> .....	76
V.2. MODÈLE SIMULANT L'ÉVOLUTION DE L'INTERFACE AUSTÉNITE - MARTENSITE : MODÈLE DE LEVITAS ET AL [LIS97] .....	78
V.3 EVOLUTION DE LA MICROSTRUCTURE LORS D'UNE TRANSFORMATION ISOTHERME [YW83] .....	80
V.4. CONCLUSION .....	83
V.5. BIBLIOGRAPHIE .....	84
<b>VI. IMPLANTATION SUR ABAQUS ET RESULTATS OBTENUS.....</b>	<b>85</b>
VI.1 COMPORTEMENT GLOBAL .....	89
V.1.1 <i>Approche cristallographique</i> .....	90
V.1.2 <i>Approche phénoménologique</i> .....	95
VI.2 PROGRAMMATION .....	100
VI.2.1 <i>Loi incrémentale pour écrouissage isotrope [ZI71]</i> .....	100
VI.2.2 <i>Méthode de résolution incrémentale</i> .....	101
VI.2.3 <i>Programme principal</i> .....	103
VI.3 TEST DE VALIDATION .....	106
VI.4 INFLUENCE ET CHOIX DU MAILLAGE .....	107
VI.5 DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DU MATÉRIAU .....	110
VI.5.1 <i>Écrouissage de la phase austénitique</i> .....	110
VI.5.2 <i>Écrouissage de la phase martensitique</i> .....	111
VI.5.3 <i>Comportement expérimental avec transformation</i> .....	112
VI.6 RESULTATS OBTENUS .....	113
VI.6.1 <i>Evolution de la microstructure</i> .....	113
VI.6.2 <i>Evolution des isovaleurs</i> .....	117
VI.6.3 <i>Courbes caractéristiques</i> .....	119
VI.7 CONCLUSION .....	125
VI.8 BIBLIOGRAPHIE .....	126
<b>CONCLUSIONS .....</b>	<b>127</b>
I. CONCLUSIONS .....	128
II. PERSPECTIVES .....	130
<b>ANNEXES .....</b>	<b>A1</b>
<b>A.1 EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.....</b>	<b>A2</b>
A1.1 TENSEUR DES CONTRAINTES .....	A3
A1.2 TENSEUR DES DEFORMATIONS .....	A3
A1.3 ELASTOPLASTICITÉ BIDIMENSIONNELLE .....	A5
<b>A2. ELEMENTS FINIS .....</b>	<b>A19</b>
A2.1 FONDEMENTS DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS .....	A20
A2.2 PRINCIPES GÉNÉRAUX .....	A20
A2.3 BIBLIOGRAPHIE .....	A25

$C_{ijkl}$	constantes élastiques du matériau
$dW^P$	incrément de travail plastique
$d\varepsilon_{ij}$	incrément de déformation
$d\varepsilon_{ij}^{in}$	incrément de déformation inélastique
$d\varepsilon_{ij}^P$	incrément de déformation plastique
$d\varepsilon_{ij}^e$	incrément de déformation élastique
$d\lambda$	scalaire positif
$d\sigma_{ij}$	tenseur incrément de contrainte
$F^e, F$	vecteurs des forces connues élémentaire et global
$J_2$	deuxième invariant du déviateur des contraintes
$k$	paramètre
$K^e, K$	matrices de rigidité élémentaire et globale
$N$	vecteur des fonctions d'interpolation
$S_{ij}$	tenseur déviatorique des contraintes
$t^i$	composantes du vecteur traction nominale
$u, u_i$	vecteur déplacement
$\tilde{u}$	vecteur déplacement virtuel
$W^P$	travail plastique par unité de volume
$\varepsilon_{ij}$	tenseur des déformations
$\varepsilon_{ij}^P$	tenseur des déformations plastiques
$\varepsilon_{ij}^e$	tenseur des déformations élastiques
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	composantes du tenseur des déformations
$\varepsilon_{ij}^{in}$	tenseur des déformations inélastiques
$\lambda$	module de Lamé
$\mu$	module de cisaillement

$\nu$	rapport de Poisson
$\sigma(\varepsilon)$	courbe contrainte - déformation
$\{\sigma\}, \sigma_{ij}$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes principales
$\sigma_0$	limite du comportement linéaire élastique
$\rho$	densité du matériau
$\frac{\rho}{\sigma}$	contrainte équivalente
$\varepsilon_p, \varepsilon^{-P}$	déformation plastique effective
$u(x, t)$	déplacement
$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, t)$	tenseur des contraintes
$f = f(x, t)$	forces par unité de masse exercées sur le milieu par les chargements extérieurs
$e = e(x, t)$	énergie interne spécifique
$h = h(x, t)$	apport de chaleur par unité de masse et de temps
$q = q(x, t)$	flux de chaleur au travers de la frontière
$\eta = \eta(x, t)$	entropie spécifique
$T(x, t) (T > 0)$	température locale

## I INTRODUCTION

# I. INTRODUCTION

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

L'homme a toujours cherché à transformer les matériaux pour en faire des objets qui servent ses ambitions. Pour atteindre ses objectifs, il a élaboré des méthodes de transformation et de mise au point de matériaux nouveaux. Au fur et à mesure que de nouveaux besoins se font sentir, les méthodes de transformation et de mise au point deviennent plus complexes et plus performantes. La complexité de la situation représente pour les chercheurs un défi à relever. Ainsi, si nous prenons l'exemple de la fabrication des panneaux de la carrosserie d'automobile ou même des pare-chocs, nous constatons que certaines exigences comme le poids de la matière, la résistance mécanique etc.. deviennent de plus en plus sévères. Les exigences, comme celles précitées plus haut, poussent les chercheurs à mettre au point de nouveaux matériaux et à les caractériser. La caractérisation du comportement de tous ces nouveaux matériaux est indispensable avant la mise en forme, car la plupart des procédés de mise en forme se font avec des trajets de chargement très complexes. Pour caractériser le matériau, le chercheur modélise son comportement.

Il existe deux philosophies ou approches de la modélisation :

- l'approche cristalline ou mécanique physique
- l'approche phénoménologique

Dans l'approche phénoménologique, on établit une relation entre les contraintes macroscopiques appliquées et la déformation résultante sans tenir compte explicitement des mécanismes de déformation microscopiques. Cette approche est « facile » à mettre en œuvre, mais demande qu'on effectue de nombreux essais pour chaque matériau considéré.

Dans l'approche cristalline, on s'intéresse à l'influence de la structure interne et du comportement des constituants du matériau sur la réponse globale.

Tout au long de notre étude, nous utiliserons les notions de phase et structure. On appelle phase les parties homogènes d'un système ayant la même composition, le même état d'agrégation et qui sont délimitées par rapport aux autres par les surfaces de séparation ou interfaces. On utilisera le terme structure pour désigner la forme, les dimensions et la disposition des phases. On distingue la macrostructure (structure discernable à l'œil nu ou avec un grossissement ne dépassant pas 30 à 40 fois) et la microstructure (structure observée au microscope sous des grossissements importants).

Dans l'étude de l'influence de la structure interne sur le comportement global du matériau, un élément joue un rôle prépondérant : les contraintes internes.

Traiter un problème relatif aux contraintes internes revient à traiter un problème du type mécanique des milieux continus (contraintes et déformations dans un solide) en prenant en compte un ensemble de phénomènes relevant essentiellement de la métallurgie (changement de phase). Des études menées dans le cadre des changements de phase ont montré que la morphologie des produits formés est modifiée et que la plasticité induite, dite de transformation, affecte très fortement le comportement thermomécanique du matériau.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

L'objectif de notre travail est de poser les jalons d'un code d'éléments finis permettant de modéliser de façon synthétique tous les phénomènes se produisant lors du changement de phase martensitique. Certains phénomènes comme la localisation des zones transformées lors d'un impact sur un pare-chocs d'un véhicule ou toute autre structure de sécurité peut-être une future application de cette modélisation. Une micrographie de la zone transformée, en introduisant la microstructure, montrera la disposition relative des phases, leurs formes et dimensions. Une des applications d'une telle modélisation pourra être l'étude de la mise en forme des tôles en acier TRIP.

Pour atteindre notre objectif, nous avons fait une étude bibliographique en trois parties, une étude thermomicromécanique et une simulation numérique. Pour le calcul de la loi de comportement contrainte – déformation, un critère énergétique a été développé. Nous avons considéré que la martensite se formait à l'intérieur d'une matrice entièrement austénitique et que l'énergie gouvernant ce changement de phase est l'énergie libre d'Helmholtz. La sollicitation macroscopique est soit un cisaillement simple ou soit une traction uniaxiale et la courbe de traction est obtenue expérimentalement au LPMM sur un acier fourni par l'IRSID (Institut de Recherche de la SIDérurgie).

En nous appuyant sur les travaux de plusieurs auteurs, nous avons donné dans le chapitre II, quelques explications sur les phénomènes qui gouvernent la transformation martensitique.

La formulation de la loi de comportement se fera à partir d'une étude thermodynamique des systèmes irréversibles présentée au chapitre III et d'une étude thermomicromécanique présentée au chapitre IV. Nous donnerons une équation de la dissipation utilisable pour la détermination de la vitesse à l'interface et nous définirons toute la méthodologie utilisée.

Le chapitre VI se rapportera à nos travaux, nous y étudierons la germination des plaquettes, l'avancement de la transformation et le comportement mécanique.

Une partie de ce travail sera consacrée à la conclusion de nos travaux et surtout aux perspectives d'avenir.

La deuxième partie de l'étude bibliographique se rapportera à l'élastoplasticité. Elle est l'objet d'une annexe. Dans ce chapitre, nous verrons que la fonction de charge doit être une fonction strictement convexe du déviateur des contraintes et que le champ de contraintes statiquement admissible doit être aussi plastiquement admissible en tout point. Nous définirons tous les paramètres devant nous permettre de faire une analyse numérique de la loi de comportement et sa mise en œuvre par la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis sera l'objet du second annexe.

## II. RAPPELS SUR LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

**OBJET :**

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur les connaissances actuelles dans le domaine de la transformation martensitique. Pour ce faire, nous avons utilisé les résultats des travaux effectués par : E.C. Bain [BA24], Bunshah et Mehl [BM53], Christian et Bilby [CB56], Cohen - Olson et Clapp [COC79], De Jong et Rathenau [DJR61], Entwisle [EN71], Fisher et Turnbull [FT53], Guenin et Gobin [GG79], Greenwood et Johnson [GJ65], Guillet et Poupeau [GP73], Gautier – Simon – Beck et Gavaille [GSBG87], Habraken et De Brouwer [HDB68], Izumiyama – Tsuchiya et Imai [ITI70], Jena et Chaturvedi [JC92], Kajiwarra [KA84], Krauss et Marder [KM71], Kelly et Nutting [KN60], Kurdjumov et Sachs [KS30], Lakhhtine [LA77], Magee [MA66], Nishiyama [NI34], Olson et Cohen [OC72], Philibert – Vignes – Bréchet et Combrade [PH98], Scheil [SC32], Shewmon [SH69], Tamura [TA82], Ullakko – Sunqvist et Pietikäinen [UL90], Wayman [WA90], Weschler – Lieberman et Read [WLR53], Wakasa et Wayman [WW81] et Zackay – Parker – Fahr et Busch [ZA67]

Afin de mieux définir le cadre de notre travail, nous allons décrire quelques phénomènes physiques et métallurgiques se produisant lors des changements de phase et dire comment ils seront pris en compte dans notre étude.

Notre travail commencera par une définition de la transformation martensitique et finira par une tentative d'explication des origines de la plasticité de transformation.

**Grandes étapes :**

- Définition de la transformation
- Transformation dans les aciers
- Types de transformations
- Morphologie des martensites
- Caractéristiques des martensites
- Origines de la plasticité de transformation

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Pour faire une étude sur les changements de phase, nous devons distinguer les deux aspects fondamentaux suivants :

- l'aspect thermodynamique
- l'aspect cinétique.

La thermodynamique permet de prévoir l'état d'équilibre, alors que la cinétique régit la vitesse à laquelle le système évolue par rapport à l'état d'équilibre ( stable ou métastable ).

A l'état d'équilibre, plusieurs états ou phases sont possibles en fonction de la température :

- solide
- liquide
- vapeur

Lorsqu'un changement de température engendre un changement de phase, nous dirons que nous sommes en présence d'une transformation structurale. Lorsque cette transformation structurale concerne un corps simple, elle est dite *allotropique*. Lorsque c'est un corps composé, la transformation est dite *polymorphique*.

Dans l'approche globale des transformations en vue d'une étude par simulation, une classification a été retenue :

- les transformations par remplacement
- les transformations par déplacement
- les transformations par restitution

Les transformations par remplacement s'opèrent par substitution d'atomes entre les sites.

Les transformations par déplacement ou paramorphismes s'opèrent par un déplacement coordonné des atomes

Dans les transformations par reconstruction, le réseau de la phase fille est reconstruit par des processus élémentaires à l'interface : la solidification, la cristallisation des amorphes ou la précipitation avec changement du groupe de symétrie ponctuel etc.

Notre étude portera sur les transformations par déplacement.

## II.1 Transformations polymorphes

Les formes cristallines de nombreux métaux sont fonctions de la température à laquelle ils sont soumis. Les atomes d'un corps cristallin ayant un certain type de réseau peuvent se regrouper pour former un réseau d'un autre type. Ce type de transformation est dit « transformation polymorphe ». Pour la plupart des métaux, la modification polymorphe stable à la température la plus basse est désignée par la lettre  $\alpha$ , puis avec la montée de la température, par les lettres  $\beta$ ,  $\gamma$  etc.

La transformation polymorphe de l'alliage Fer-carbone ( cémentite ) est illustrée par son diagramme d'équilibre. Ce diagramme traduit la composition des phases et la structure des alliages dont la concentration varie du fer pur à la cémentite ( 6,67% C ).

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Le point A ( 1528° C ) du diagramme correspond au point de fusion du fer pur, alors que les points N ( 1401° C ) et G ( 906° C ) marquent la transformation polymorphe  $\delta \leftrightarrow \gamma$  et  $\alpha \leftrightarrow \gamma$

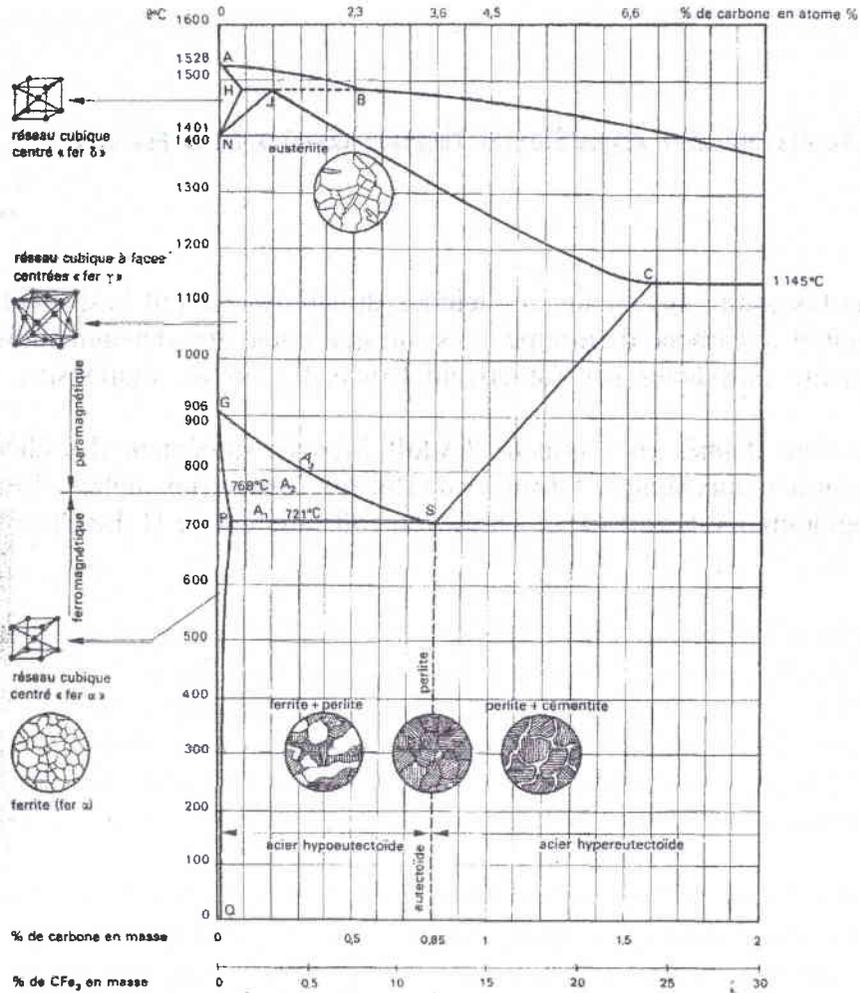


Figure II.1 : diagramme de transformation polymorphe fer - carbone

## II.2 Définition de la transformation martensitique

La définition proposée par M. Cohen, G.B. Olson et P.C. Clapp [COC79] et généralement adoptée est la suivante :

*C'est un changement de structure, virtuellement sans diffusion, caractérisé par une déformation homogène du réseau avec une composante déviatorique dominante et un changement de forme associé tel que l'énergie de déformation mise en jeu gouverne la cinétique et la morphologie de la transformation*

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

La transformation martensitique est donc une transition displacive de phase structurale. Cette transition se fait par déplacement coopératif des atomes au cours de la reconstitution du réseau. Ce déplacement est  $\cong 1/10$  de la distance interatomique. Tous les atomes gardent leurs voisins. La transformation martensitique ne modifie pas la composition chimique du matériau.

## II.3 Transformation martensitique dans les aciers

### *Historique :*

En 1895, Floris Osmond - ingénieur aux aciéries du Creusot- a fait la distinction entre le carbone de recuit et le carbone de trempe. C'est lui qui ajouta aux dénominations de ferrite, cémentite et perlite introduites par l'américain Howe, les noms martensite, austénite et troostite.

Ces trois noms sont donnés en l'honneur d'Adolf Martens (ingénieur des chemins de fer prussien, il se consacra aux alliages ferreux), de Roberts Austen (un anglais, il fut le premier à établir un diagramme Fe-C correct) et Troost (un collaborateur de H. Le Chatelier à l'école des mines)

La transformation martensitique a lieu seulement lorsqu'un refroidissement rapide produit la surfusion de l'austénite jusqu'à de basses températures. Ces basses températures rendent impossible la diffusion et la transformation se poursuit avec la formation d'autres cristaux de martensite. La transformation débute au refroidissement à la température  $M_s$  ( Martensite Start ) et se termine à la température  $M_f$  (Martensite final ). La vitesse de germination et de croissance des cristaux de martensite est très grande :  $\geq 10^3$  m/s.

La martensite obtenue par trempe est une solution solide saturée d'insertion du carbone dans le fer  $\alpha$ . C'est une phase métastable. Dans le réseau de fer  $\gamma$ , les atomes de carbone occupent les interstices octaédriques dans la direction  $[001]$  et produisent une forte distorsion du réseau. Le réseau devient tétragonal et son axe  $c$  est plus grand que l'axe  $a$ .

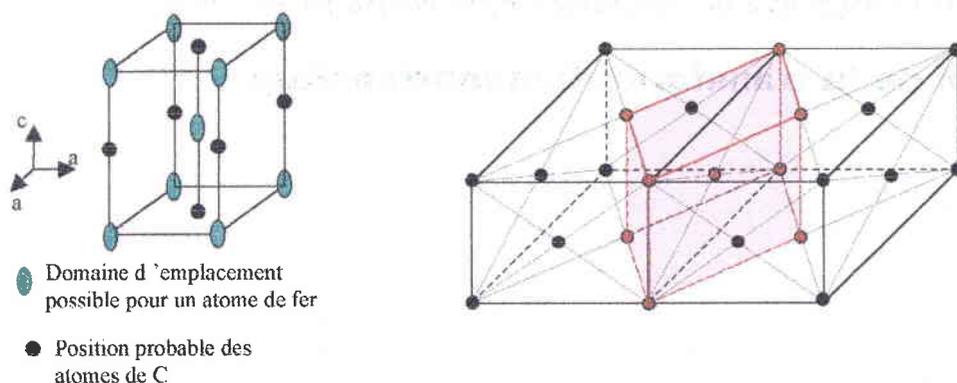


Figure II.2 : maille élémentaire [BA24]

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Les paramètres de la maille suivent la relation suivante :

$$\frac{c}{a} = 1 + 0,045\%C(\text{masse}) \quad [\text{II.1}]$$

### Remarques :

Tous les éléments (à l'exception du carbone, de l'azote, de l'hydrogène et en partie le bore) forment avec le fer des solutions solides de substitution. Leur dissolution dans le fer influe fortement sur la position des points  $A_3$  et  $A_4$ . Ces points déterminent le domaine des températures d'existence du fer  $\gamma$  et du fer  $\alpha$ .

Le nickel abaisse le point  $A_3$  et élève le point  $A_4$ . Il en résulte que le diagramme fer-nickel enregistre une extension du domaine de la phase  $\gamma$  et une réduction de la phase  $\alpha$ .

Le nickel en abaissant la fragilité à froid de la ferrite, la rend plus résistante en accroissant sa résilience. Ce qui explique la ductilité élevée des aciers au nickel.

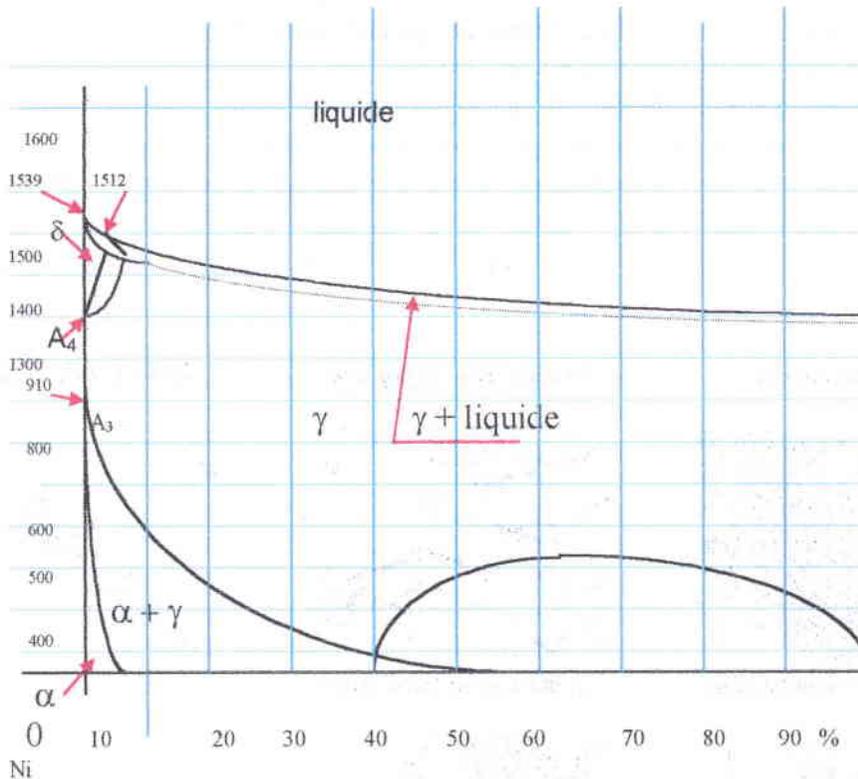


Figure II.3 : Diagramme d'équilibre Fe-Ni [LA 78]

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

La martensite n'est pas le seul produit de décomposition de l'austénite. Selon la température de traitement ou la vitesse de refroidissement, nous avons :

- la transformation perlitique
- la transformation eutectoïde
- la transformation bainitique
- la transformation martensitique

### II.3.1 Microstructure et comportement mécanique des martensites

L'orientation des cristaux de martensite est liée au réseau de l'austénite. Il en résulte leur constitution sous forme de lamelles régulièrement orientées dans l'austénite initiale.

La structure des cristaux de martensite, ainsi que leur morphologie varient en fonction de la composition de l'acier et de la température de leur formation.

Dans les alliages ferreux, nous pouvons distinguer trois types de martensites, qui sont :

- les martensites  $\alpha'$  : cubique centré ou quadratique centré
- les martensites  $\epsilon$  : hexagonale centré
- les martensites tétraogonales à faces centrées

Les martensites  $\alpha'$  sont les plus répandues. On les rencontre dans les alliages Fe-C, Fe-Ni, etc. Lorsque l'énergie de faute d'empilement est faible, cas des alliages Fe-Cr-Ni, la martensite formée est du type  $\epsilon$ .

La martensite  $\alpha'$  peut se présenter sous plusieurs variantes morphologiques. Les principales sont :



Figures II.4 : variantes de martensites

Les différentes morphologies rencontrées dans les alliages Fe-Ni sont les suivantes :

Composition en % de Nickel	morphologie
< 10%	Martensite en lattes ou de la ferrite massive
< 29%	Martensite en lattes
Entre 29 et 34 %	Martensite en plaquettes

Tableau II.1 : morphologies de martensite

### II.3.1.1 Martensite en lattes

La structure est morcelée en blocs. Elle est constituée de plaquettes de dimension  $a > b \gg c$ . Ces plaquettes sont appelées lattes. Elles sont généralement de faible épaisseur (0,1 à 0,2  $\mu\text{m}$ ) et sont observées dans les alliages Fe-Ni, Fe-C, Fe-Mn, Fe-W, Fe-V, Fe-Mo.

Dans les aciers contenant moins de 0,4%C massique, la martensite apparaît sous forme de lattes empilées en paquets.



Figure II.5 : Micrographie d'une plaquette de martensite en latte . Observation au MET (alliage FE-0,4%C) [WA90]

La majorité des martensites  $\alpha'$  rencontrées dans le domaine des aciers se présentent soit sous la forme de lattes ou soit sous une forme lenticulaire.

Pour les alliages de Fe-C, la morphologie en latte se rencontre lorsque le pourcentage en carbone est < 0,6%. Tandis que cette même morphologie est courante dans les alliages Fe-Ni pour une composition en Ni < 28% . La taille de la latte est proche de  $0,3 \times 3 \times 100 \mu\text{m}$  [WW81].

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### II.3.1.2 Martensite en plaquettes

C'est un enchevêtrement de plaquettes ou lentilles individualisées et orientées selon des angles définis au sein de chaque grain d'austénite. Elle se distingue de la morphologie en latte par le fait que les plaquettes adjacentes ne sont pas parallèles les unes des autres.

On suppose que cette morphologie est gouvernée par les effets d'accommodation élastique ou plastique des contraintes développées lors de la formation de chaque plaquette dans la matrice d'austénite.

### II.3.2 Cinétique de la transformation martensitique

La transformation est instantanée : à chaque température, elle atteint en un temps très court un état défini par une **proportion déterminée de martensite** et la transformation est alors freinée.

- La température  $M_s$  indique la température à partir de laquelle on décèle les premières traces de la transformation. Au fur et à mesure que la température baisse au-dessous de la température  $M_s$ , la transformation progresse et la quantité de martensite formée croît.
- La température  $M_f$  désigne la température à laquelle la totalité de la phase mère est transformée par réaction martensitique.
- Cette transformation par cisaillement entraîne le basculement des plans en surface que l'on peut observer au microscope sur un échantillon préalablement poli avant trempé, même si la surface n'a subi aucune attaque chimique.
- La transformation martensitique est très sensible aux contraintes et une déformation de l'austénite peut déclencher des transformations même aux températures supérieures à  $M_s$ .

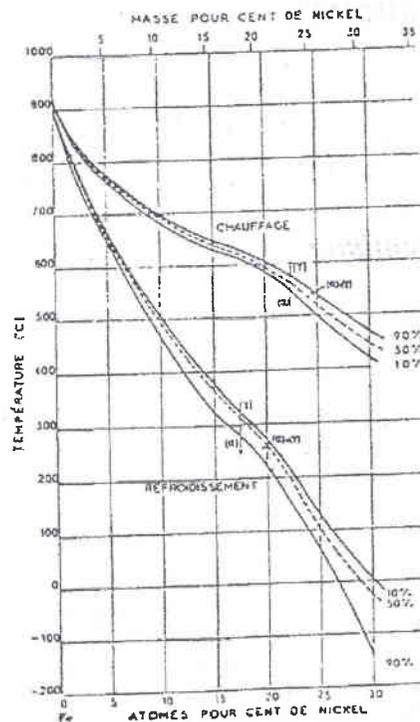


Figure II.6 :  $M_s$  et  $M_f$  en fonction du % de Ni dans un alliage Fe-Ni

Les principaux phénomènes ayant une influence sur  $M_s$  sont les suivants :

- la vitesse de refroidissement
- la température d'austénisation
- la taille du grain
- la limite d'élasticité de l'austénite
- la composition chimique de l'alliage

Facteurs	Influence
Vitesse de refroidissement	D'après [ITI70], La vitesse critique de refroidissement est de l'ordre de $20 \cdot 10^3$ °C/s pour les aciers à très bas carbone. L'augmentation de la vitesse entraîne une diminution de $M_s$ .
Température d'austénisation	Si la température d'austénisation augmente, $M_s$ diminue
Taille du grain	Dans la majorité des cas, $M_s$ augmente avec la taille des grains
Limite d'élasticité	La consolidation de l'austénite gêne la transformation martensitique
Composition chimique	C'est un paramètre très important. La majorité des éléments d'addition entraîne une chute de $M_s$

Tableau II.2 : facteurs ayant une influence sur  $M_s$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### II.3.3 Types de transformations

Il existe essentiellement deux types de transformations martensitiques :

- la transformation athermique
- et la transformation isotherme

#### II.3.3.1 Transformation athermique

La transformation est très limitée et rendant ordinairement impossible l'observation in situ . Elle a son  $M_s$  bien définie et la quantité de martensite formée ne dépend que de la température.

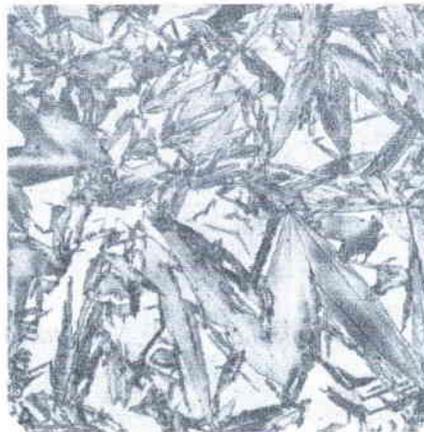


Figure II.7 : martensite athermal obtenue à la température  $T_q = 150^\circ\text{K}$  [UL90]

#### II.3.3.2 Transformation isotherme

Très intense dans certains alliages spéciaux ( Fe-Ni-Mn, Fe-Cr-Ni ), cette transformation dépend beaucoup :

- de la température
- du temps

La transformation commence toujours après un temps d'incubation lors d'un maintien isotherme à une température critique (température à partir de laquelle la transformation isotherme peut se produire).



Figure II.8 martensite "isotherme" obtenue à  $T_h = 150^\circ\text{K}$  sous  $p_{\max} = 1,5\text{GPa}$  [UL90]

Pour évoquer la transformation par maintien isotherme au-dessous de  $M_s$ , nous devons distinguer deux cas :

- le cas des aciers au carbone
- le cas des alliages Fe-Ni

### II.3.3.2.1 Cas des aciers au carbone

La martensite peut progresser au cours d'un maintien isotherme, quoiqu'en quantité limitée. On a pu mettre en évidence une progression de la transformation martensitique à température constante. La quantité d'austénite qui se transforme de cette manière est sans doute faible.

### II.3.3.2.2 Cas des alliages Fe-Ni

KAJIWARA [ KA84 ] a fait des observations in situ pour un alliage Fe - 23% Ni - 3,9%Mn à basse température. Ses conclusions sont les suivantes :

- une germination de la martensite isolée
- un glissement intensif dans l'austénite au cours de la formation de la martensite
- une absence d'effet auto catalytique dans les phénomènes de germination

( Effet auto-catalytique : la formation d'une plaquette de martensite crée des contraintes internes qui peuvent induire la formation d'autres plaquettes, phénomène possible pour les aciers avec plus de 1,4% de carbone [EN71] )

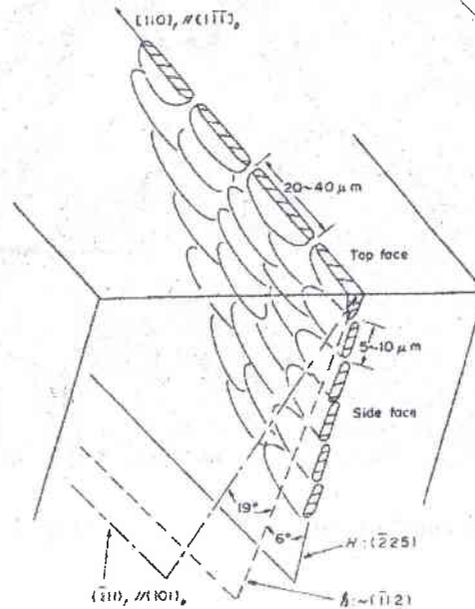


Figure II.9 : schéma de la formation des plaquettes de martensite d'après les observations de KAJIWARA

## II.4 Caractéristiques de la transformation martensitique

Pour définir les caractéristiques des plaquettes de martensite, nous allons nous intéresser aux quatre aspects suivants :

- macroscopiques
- microscopiques
- relation entre les phases
- cristallographiques ( théorie mathématique de Weschler – Lieberman – Read )

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

### II.4.1 Caractéristiques macroscopiques

Dans le cas des précipitations avec cohérence dans les solides, trois types de configurations sont possibles :

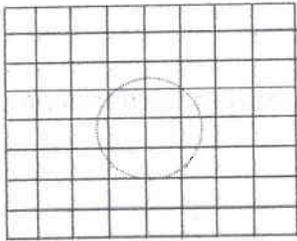


Figure II.10 : précipitation avec cohérence parfaite sans distorsion

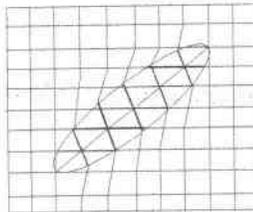


Figure II.11: précipitation avec cohérence avec distorsion due à un cisaillement

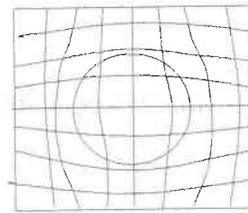


Figure II.12: précipitation avec cohérence avec distorsion due à une variation de volume

L'exemple n°2 illustre un changement de structure du réseau obtenu par cisaillement. Des déformations additionnelles d'accommodation réduisent les contraintes élastiques dues au changement de forme en laissant invariant le réseau de la phase fille. Ce cas correspond à celui de la transformation martensitique.

La phase mère et les plaquettes de martensite sont séparées par une interface appelée : plan d'habitat. En général, ce plan invariant en dimensions et en orientation n'est pas un plan cristallographique simple. Dans une phase mère, diverses orientations de la martensite peuvent coexister : les variantes.

La surface transformée reste plane, mais elle est inclinée à partir de son intersection avec le plan d'accolement. La forme lenticulaire des plaquettes des zones formées serait due aux contraintes que produit la transformation dans la matrice environnante, exactement comme dans le cas des macles mécaniques.

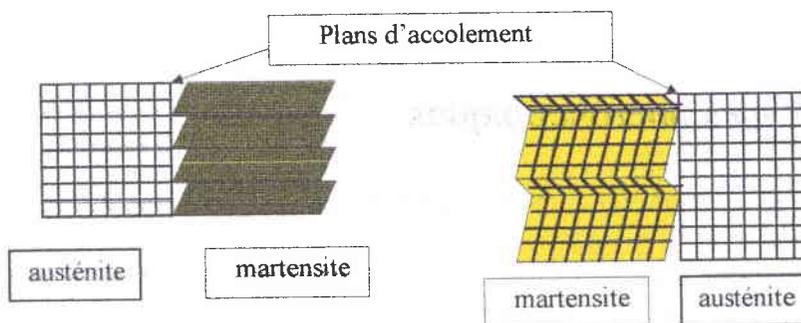


Figure II.13: position du plan d'accolement

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

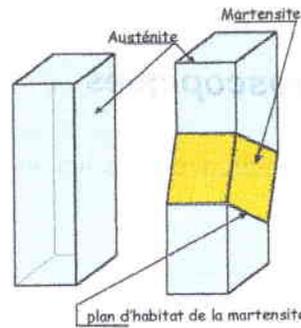


Figure II.14: changement de forme et de volume associé à la transformation martensitique

La différence entre les volumes unitaires de la martensite et de l'austénite fait que la croissance d'une plaquette de martensite détermine le renforcement des contraintes élastiques dans le domaine de l'interface, ce qui conduit finalement à une déformation plastique et à la formation d'un plan d'habitat.

Une région de discontinuités apparaît parfois dans le plan central, parallèle au plan d'habitat, cette région est appelée « midrib » (de l'anglais *middle ribbon* : bande médiane).

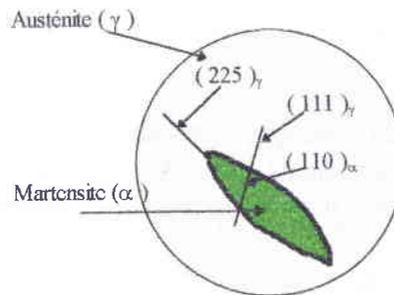


Figure II.15: schémas de la transformation martensitique et formation du midrib

### II.4.2 Caractéristiques microscopiques

La déformation totale d'un matériau ayant subi une transformation de phase peut être considérée comme la somme :

- d'une déformation élastique :  $\epsilon^e$
- et d'une déformation inélastique :  $\epsilon^{in}$

La déformation inélastique peut résulter de plusieurs phénomènes. Les plus connues sont :

- la température
- le mouvement de dislocations (plasticité)
- le changement de phase

Ainsi, la déformation inélastique est composée d'une déformation plastique et/ou d'une déformation de Bain et/ou d'une déformation à réseau invariant .

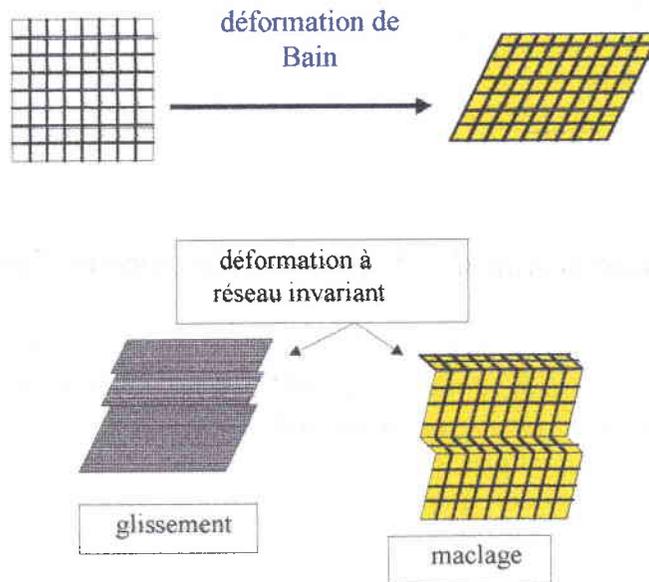


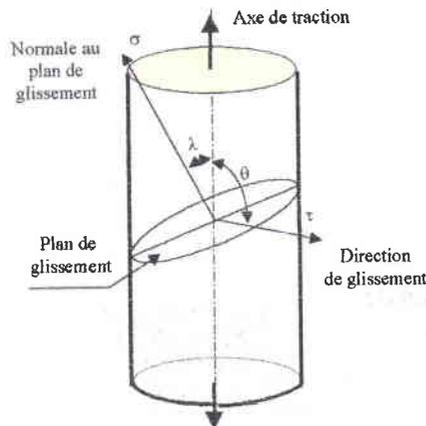
Figure II.16: déformation du réseau

- Le *glissement* résulte du déplacement des dislocations au sein du cristal. Un des mécanismes générateurs du déplacement des dislocations est le moulin de Frank et Read.
- Quant au *maclage*, il consiste en un changement d'orientation d'une partie du cristal. Il s'accompagne aussi d'une migration de dislocations.

#### II.4.4 Relation d'orientation entre les phases

Dans tous les matériaux ductiles, le glissement est de loin le mécanisme de déformation le plus important.

La loi de Schmidt (1931) détermine la cission résolue dans le plan de cisaillement en fonction de l'orientation de ce plan.



$$\tau_r = \sigma \cos \lambda \cos \theta \quad [\text{II.2}]$$

Figure II.17: orientation du plan de glissement par rapport à l'axe de traction

Lorsque la cission résolue atteint une valeur critique  $\tau_c$ , un glissement se produit dans un certain plan et suivant une certaine direction cristallographique. Le système formé par ce plan et cette direction est appelé *système de glissement*. C'est Taylor qui formula en 1934 le concept de *dislocation* pour expliquer le glissement relatif des parties d'un monocristal. Mais, depuis le XIX<sup>e</sup> siècle, on savait que les matériaux cristallins se déformaient par cisaillement et cela suite à l'observation des bandes de glissement à la surface des métaux déformés plastiquement.

Dans la déformation plastique, le glissement cristallin a lieu suivant les plans et les directions de l'empilement le plus compact des atomes.

Dans les métaux et alliages à réseau cubique à faces centrés (CFC), en distinguant les deux sens de glissement, nous obtenons 24 systèmes de glissement se produisant suivant les plans d'un octaèdre (111) et dans les directions cristallographiques  $\langle 110 \rangle$  du cube. Tandis que dans un réseau cubique centré (CC), les mécanismes de glissement peuvent être décrits par la direction  $\langle 111 \rangle$  du cube et par les deux familles de plans (110) et (112). En distinguant les deux sens de glissement, nous obtenons un ensemble de 24 + 24 systèmes de glissement.

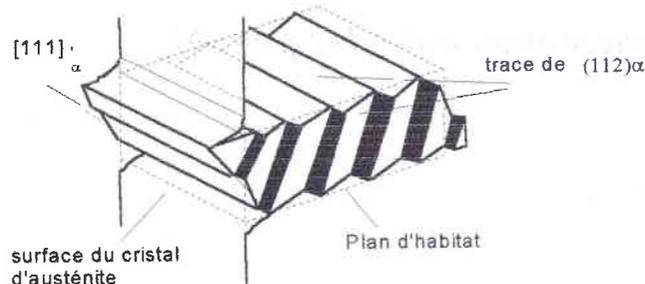


Figure II.18: glissement dans une plaquette de martensite

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Il existe une relation d'orientation entre les deux réseaux. Cette relation découle du caractère particulier de cette transformation :

- existence d'un plan d'habitat.
- existence d'une direction et d'une amplitude de cisaillement correspondant au mouvement coopératif des atomes

Cette relation d'orientation dépend du type d'alliage étudié. Le tableau ci-dessous nous en donne quelques exemples :

Alliage	Composition	Transformation ou refroidissement	Relation entre les plans cristallographiques	Relation entre les directions	Plan limite de la phase mère
Fe-C	0,4 à 1,5% de C	C.F.C → Q.C	(111) → (110)	$[\bar{1}\bar{1}0] \rightarrow [1\bar{1}1]$	(225)
Fe-Ni	27 à 34% de Ni	C.F.C → C.C	(111) → (110)	$[\bar{2}11] \rightarrow [1\bar{1}0]$	(259) avec grande dispersion
Fe-Ni-Cr	18% Cr 8% Ni	C.F.C → C.C	(111) → (110)	$[\bar{1}\bar{1}0] \rightarrow [1\bar{1}1]$	(111)

Tableau II.3: relation d'orientation entre le réseau d'austénite et celui de la martensite

#### II.4.5 Théorie mathématique de Weschler- Lieberman-Read ( W.L.R )

La théorie de ces auteurs conduit à la détermination des caractéristiques cristallographiques de la déformation qui permet de passer de la maille de la phase mère à celle de la phase martensitique, en se fondant uniquement sur les valeurs expérimentales des paramètres de ces deux phases.

Cette théorie est purement phénoménologique et le calcul repose sur les deux axiomes suivants :

- Parmi toutes les déformations géométriquement possibles permettant de passer de la phase mère à la martensite, celle qui se produira effectivement est celle qui minimisera l'énergie.
- Le plan d'habitat est un plan invariant.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

*La déformation due au changement de réseau cristallin (déformation de Bain) s'accompagne de contraintes internes très importantes dues à la coexistence de deux phases et au changement de forme, d'où la nécessité d'une accommodation pour relaxer les contraintes internes induites. Cette accommodation peut se faire soit dans l'austénite, soit dans la martensite ou soit dans les deux.*

*Ainsi, la déformation totale associée au plan invariant s'écrit :*

$$D = R.P.B$$

*B : représente la déformation de Bain*

*P: représente le cisaillement (glissement ou maclage)*

*R: la rotation qui laisse invariant le plan d'habitat*

Dans la théorie de W.L.R, pour ajuster la déformation totale, deux solutions sont proposées :

- *La martensite est constituée d'un empilement de macles, dont l'épaisseur relative est calculée de telle manière que la déformation macroscopique totale conduise à l'existence d'un plan invariant.*
- *Un cisaillement homogène est combiné à une déformation par glissement, dont l'amplitude est calculée de telle manière que la déformation macroscopique totale laisse un plan invariant.*

L'intérêt de cette théorie réside dans le fait qu'il est possible, à partir de la condition du plan invariant et la diagonalisation de B.P, de calculer pour chaque transformation martensitique :

- la normale au plan d'habitat
- la direction de cisaillement
- l'amplitude de cisaillement
- l'orientation relative entre les deux phases

La théorie étant purement phénoménologique, elle ne décrit pas obligatoirement les mécanismes réels subis par les atomes au cours de la transformation.

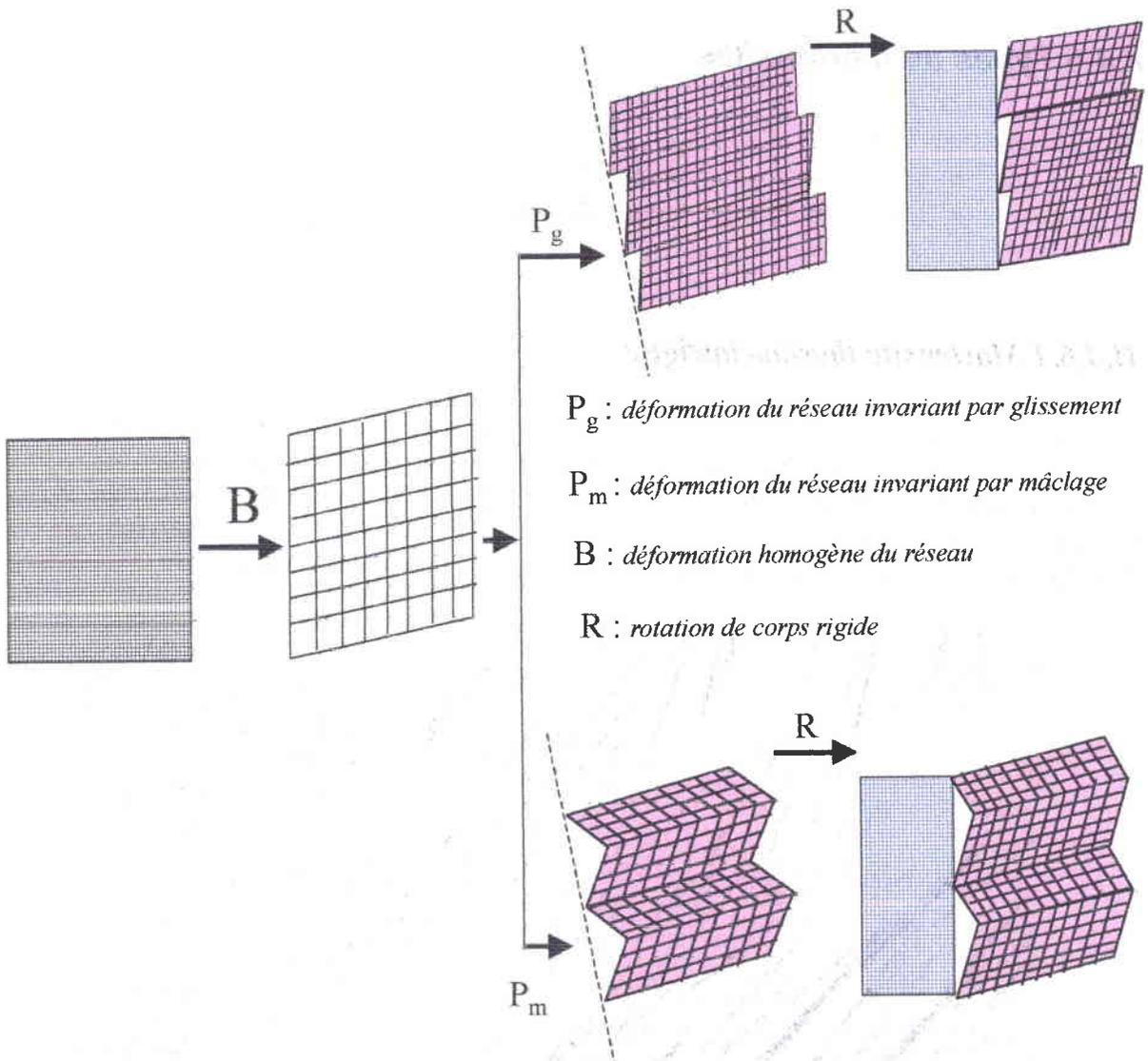


Figure II.19: les trois étapes de la transformation martensitique (la déformation de Bain, la déformation à réseau invariant et la rotation)

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

### II.4.6 Types de martensites

On distingue deux types de martensites :

- les martensites thermoélastiques
- les martensites non thermoélastiques

#### II.4.6.1 Martensite thermoélastique

L'accommodation élastique due au changement de forme et de volume au niveau de l'interface austénite martensite rend cette transformation totalement réversible.

Les martensites thermoélastiques sont appelées : Alliages à mémoire de Forme A.M.F (alliages CuZnAl, NiTi, ..... )

Les déformations mises en jeu dans cette transformation peuvent atteindre 10%.

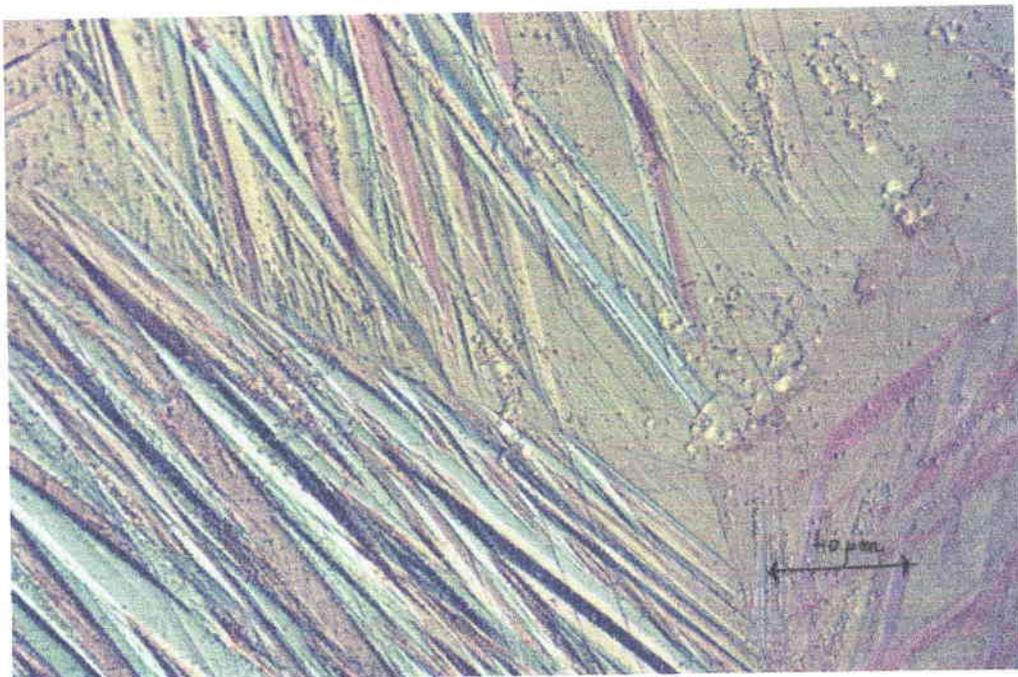


Figure II.20: transformation martensitique dans un polycristal de Cu Al Be (photo Sophia Farah Lpmm - Metz)

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### II.4.6.2 Martensite non thermoélastique

A l'interface austénite/martensite, il se produit une accommodation plastique. Cette accommodation rend la transformation inverse impossible. S'il y a transformation inverse, elle se produit par germination et croissance dans la martensite et la nouvelle phase austénitique est différente de la phase initiale.

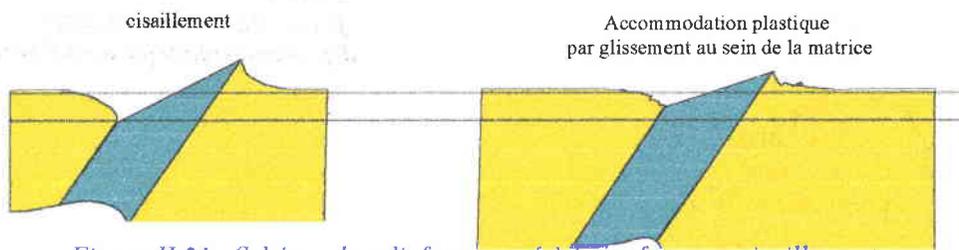


Figure II.21 : Schéma du relief provoqué à la surface par cisaillement homogène

Les aciers TRIP font partie de cette famille.

## II.5 Martensite induite par la contrainte et martensite induite par la déformation

L'application d'une contrainte peut relever le point  $M_s$ . En effet, l'excès d'enthalpie libre  $\Delta G(M_s)$  peut fournir une partie de contrainte convenable sous forme de travail :

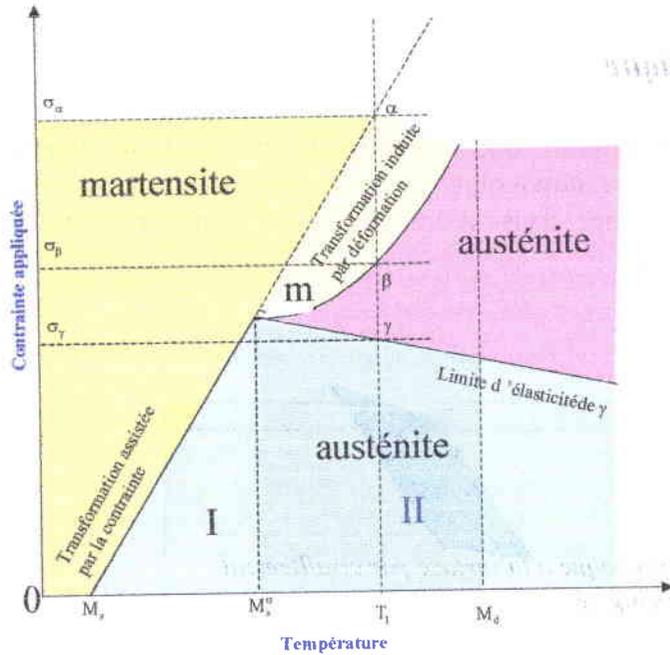
$$W = \tau\gamma_0 + \sigma\varepsilon_0 \quad [\text{II.3}]$$

$\gamma_0$  et  $\varepsilon_0$  représentent les composantes de la distorsion de la martensite.

Le premier à prédire la formation de la martensite lorsqu'une contrainte est appliquée au-delà de  $M_s$  fut Scheil [SC32]. Selon lui, la contrainte de cisaillement nécessaire pour l'activation de la transformation diminue avec la température.

Des observations faites par plusieurs auteurs montrent que la contrainte critique nécessaire pour la transformation croît linéairement avec la température à partir de  $M_s$  jusqu'à  $M_s^\sigma$  (température au-delà de laquelle la martensite se forme après une déformation plastique dans l'austénite). En plus de  $M_s$  et  $M_s^\sigma$ , il existe une troisième température caractéristique appelée  $M_d$ . Au-delà de cette température, la martensite ne peut plus être induite mécaniquement.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**



Le schéma ci-contre proposé par [OC72], illustre la formation de la martensite sous contrainte en fonction de la température

0 à  $\gamma$  : déformation élastique  
 $\gamma$  à  $\beta$  : déformation plastique dans l'austénite  
 $\beta$  à  $\alpha$  : transformation après déformation plastique dans l'austénite

Figure II.22: formation de la martensite sous contrainte en fonction de la température [OC72]

En fonction de la température  $T_1$ , nous constatons :

- qu'il aurait fallu  $\sigma_\alpha$  pour obtenir un changement de phase
- qu'avec l'influence de la déformation plastique, la contrainte devient  $\sigma_\beta$  avec

$$\sigma_\beta < \sigma_\alpha$$

En fonction de la contrainte, la courbe fait apparaître deux domaines :

- un domaine I compris entre  $M_s$  et  $M_s^\sigma$
- un domaine II compris entre  $M_s^\sigma$  et  $M_d$

Le premier domaine correspond à la zone où la transformation est assistée par la contrainte. La contrainte est en dessous du seuil d'écoulement plastique de la phase mère. Il en résulte une réponse élastique. La germination est assistée par la contrainte et les germes préexistants sont simplement aidés mécaniquement.

Le second domaine correspond à la zone où la transformation est induite par la déformation plastique. La contrainte critique dans cette zone augmente très rapidement avec la température d'essai.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Avant  $M_s^\sigma$ , la transformation commence alors que la limite d'élasticité de l'austénite n'est pas atteinte. Après  $M_s^\sigma$ , l'austénite est déformée plastiquement avant que la transformation ne débute.

$M_d$  est la température au-delà de laquelle la transformation ne peut plus se produire.

### ***II.5.1 Plasticité induite par transformation - transformation induced plasticity (TRIP)***

La terminologie de TRIP a été proposée par Zackay et al [ZA67] pour les martensites des aciers.

L'expérience de [TA82] montre que l'effet TRIP apparaît à une température légèrement supérieure à  $M_s^\sigma$ . Elle se manifeste par :

- une augmentation de la résistance à la rupture quand la température chute
- un pic de l'allongement à la rupture pour une température située entre  $M_s$  et  $M_d$ , ce phénomène résulte de l'apparition de la plasticité de transformation.

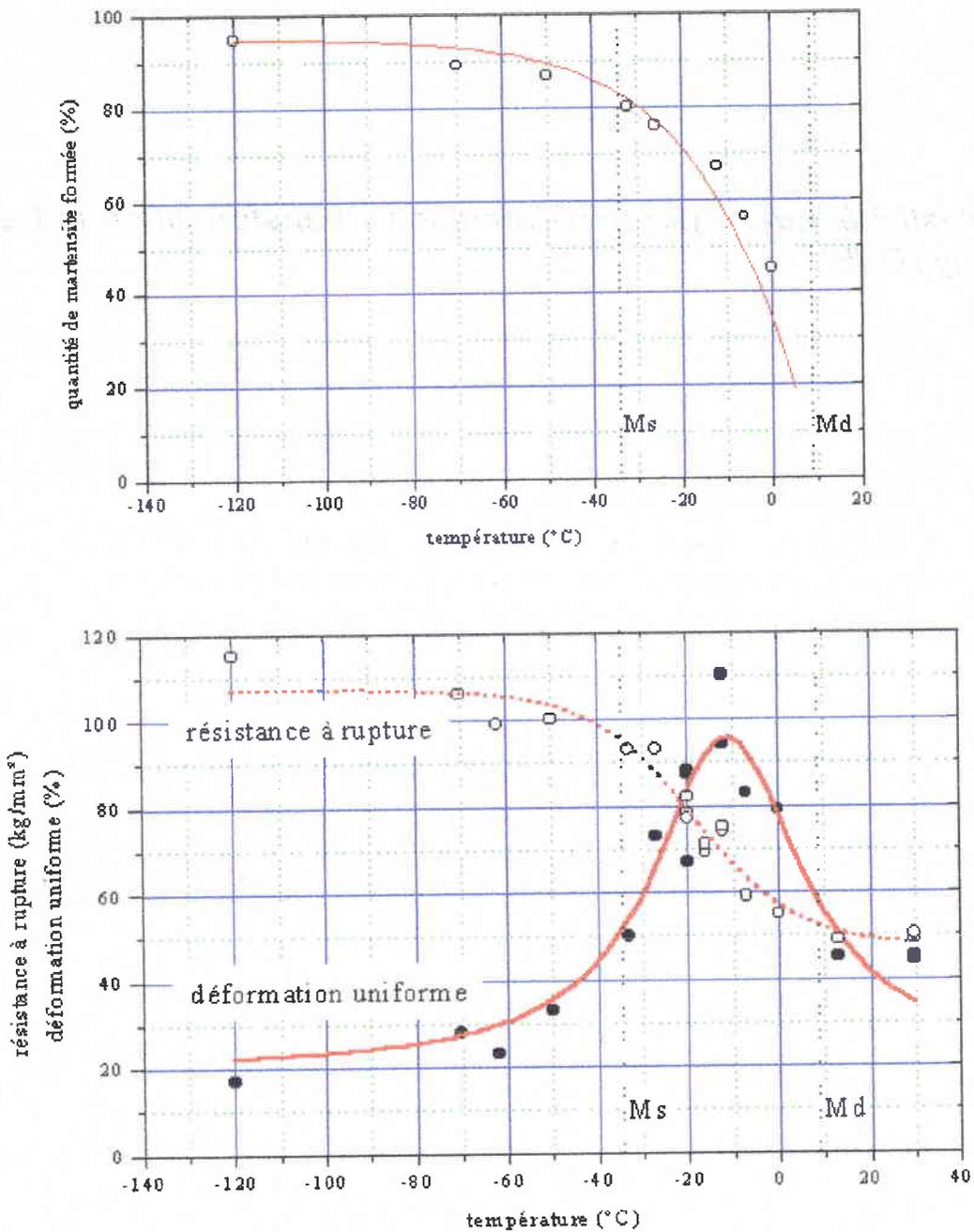


Figure II.23 : variation de la quantité de martensite formée et des propriétés mécaniques en fonction de la température (Fe-0,26C-29Ni) [ TA82]

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

### II.5.2 Origines de la plasticité de transformation

Lorsqu'on applique une contrainte à un alliage métallique au cours de la transformation de phase, il se produit une déformation supérieure à celle due à la variation volumique même pour des contraintes inférieures à la limite d'élasticité. Cette plasticité de transformation est reliée à la contrainte appliquée et à l'avancement de la transformation.

Deux mécanismes sont utilisés pour expliquer les origines de la plasticité de transformation : le mécanisme de Magee et le mécanisme de Greenwood-Johnson. Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de ces deux phénomènes.

#### II.5.2.1 Mécanisme de Greenwood-Johnson

[GJ65] [DJR61] [KW70]

La plasticité de transformation est liée à la variation de volume. De Jong et Rathenau furent les premiers à considérer une variation de volume au cours de la transformation.

Greenwood et Johnson ont étudié la plasticité de transformation à 910°C lors du passage du fer  $\alpha$  au fer  $\gamma$  pour un alliage Fe-0,39%C.

Selon eux, l'amplitude de la plasticité de transformation dépend de trois facteurs qui sont :

- l'amplitude de la variation volumique de transformation
- le niveau de la contrainte appliquée
- les propriétés mécaniques des phases en présence au cours de la transformation.

La transformation est irréversible car elle résulte d'une déformation plastique.

Nous avons un écoulement plastique supplémentaire dans le sens de la contrainte appliquée. Elle est la résultante de la superposition du champ de contraintes internes lié à la déformation de transformation et du champ de contraintes externes appliquées

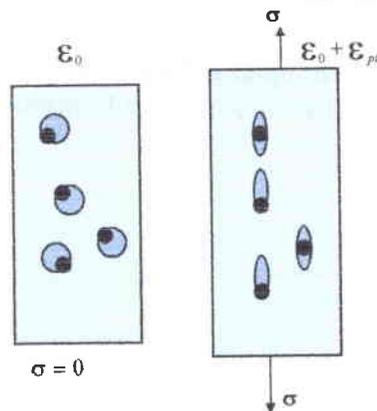


Figure II.24 : écoulement plastique supplémentaire dans le sens de la contrainte appliquée

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### II.5.2.2 Mécanisme de Magee

[M66]

La plasticité de transformation est due à l'orientation préférentielle des plaquettes de martensite formées du fait de la contrainte appliquée. En effet, la transformation peut-être considérée comme un mode de déformation comprenant une expansion  $\epsilon_0$  et un cisaillement  $\gamma_0$ . Sans contrainte appliquée, l'orientation des plaquettes créée est « isotrope » et la contribution macroscopique de  $\gamma_0$  disparaît, du fait de la « compensation » entre les plaquettes. Lorsqu'une contrainte est appliquée, elle va orienter préférentiellement les plaquettes de martensite, d'où l'apparition de la contribution de  $\gamma_0$ .

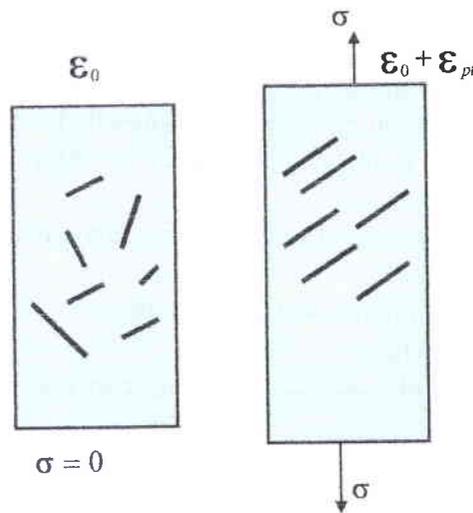


Figure II.25 : orientation des plaquettes de martensite

Le mécanisme à la base du modèle de Magee intervient pour les transformations par cisaillement. Il permet à lui seul d'expliquer la plasticité de transformation avec une variation volumique nulle mais est insuffisant pour expliquer la plasticité de transformation dans tous les alliages.

## II.6 BIBLIOGRAPHIE

Référence	Auteurs	Titre	Pages	Edition	Année
BA24	E.C. Bain		25	Trans.Aime, 70	1924
BM53	R.F.Bunshah R.F.Mehl		1251	Trans. Aime, 197	1953
CB56	B.A Bilby J.W Christian	<b>The mecanism of phase transformations in metals</b>	121	London : the institution of metals	1956
COC79	M.Cohen G.B.Olson P.C.Clapp			Int.Mart.Transf. MIT Cambridge	1979
DJR61	M. De Jong G.W. Rathenau		714	Acta metall. ,9	1961
EN71	A.R Entwisle		2395	Metall. Trans ,2	1971
FT53	J.C.Fisher D.Turnbull		310	Acta Met. ,1	1953
GG79	G.Guenin P.F. Gobin	<b>Les transformations martensitiques</b>	536-575	Soc. Française de minéralogie et de Cristallographie : Les transformations de phases dans les solides minéraux, vol 2	1979
GJ65	G.W Greenwood R.H Johnson		403-422	Proc.R.Soc.London, 283A	1965
GP73	Guillet P. Poupeau	<b>Transformations à l'état solide des métaux et alliages métalliques</b>		Dunod - Bordas Paris	1973
GSBG87	Gautier Simon Beck G. Gavoille	<b>Application de la dilatométrie et des mesures magnétiques à l'étude de la transformation martensitique sous contrainte d'un alliage FE-20 Ni-0,5C</b>	1371-1379	Revue Phys.Appl.22	1987
HDB68	Habraken J.L De Brouwer	<b>Bases de la métallographie</b>		Presses académiques européennes Bruxelles	1968
ITI70	Izumiyama Tsuchiya Y. Imai		286	J. Jpn. Inst. Met. 34	1970
JC92	A.K. Jena M.C. Chaturvedi	<b>Phase transformations in materials</b>		Prentice Hall	1992
KA84	S. Kajiwara	<b>Continuos observation of isothermal martensite formation in Fe-Ni-Mn alloys</b>	407-413	Acta metall. Vol 32, N°3	1984

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

KM71	G.Krauss A.R.Marder		2343	Met. Trans. , 2	1971
KN60	P.M.Kelly J.Nutting		45	Proc.R.Soc.London, 259A	1960
KS30	G.Kurdjumov, G.Sachs		325	Z. Physik, 64	1930
LA77	I. Lakhhtine	<b>Métallographie et traitements thermiques des métaux</b>		Mir	1978
MA66	C.L.Magee	<b>Ph.D Thesis</b>		Carnegie Institute of Technology, college of Engineering and Science, Pittsburgh, PA	1966
NI34	Z.Nishiyama		637	Sci. Rep. Tohoku Univ., 23	1934
OC72	G.B. Olson M. Cohen		107	J. Less Common Metals Vol. 28	1972
PH98	J. Philibert Vignes Y. Bréchet P. Combrade	<b>Métallurgie Du minéral au matériau</b>		Masson	1998
SC32	E. Scheil		21	Z. Anorg. Chem Vol. 207	1932
SH69	P. Shewmon	<b>Transformations in Metals</b>		Université de Carnegie mellon Mac Graw Hill	1969
TA82	I. Tamura	<b>Deformation-induced martensitic transformation and transformation-induced plasticity in steels</b>	245 - 249	Metals Sciences, Vol. 16	1982
UI90	K. Ullakko Sunqvist J. Pietikäinen	<b>Isothermal Martensite Transformation Of Fe-Ni-C Alloys as a Function of Hydrostatic Pressure</b>	197 - 200	Mate. Science Forum Vol.56-58	1990
WA90	C.M. Wayman	<b>The growth of Martensite Since E.C Bain (1924) - Some Milestones</b>	1-32	Mate. Science Forum Vol. 56-58	1990
WLR53	M.S.Weschler, D.S.Lieberman, T.A.Read		1503	J. Of Metals, 5	1953
WW81	K. Wakasa C.M. Wayman		973 991 1013	Acta Mect. Vol. 29	1981
ZA67	V.F. Zackay E.R. Parker Fahr R. Busch		252	Trans. ASM	1967

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et  
numérique

### III. THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

**OBJET :**

Dans le chapitre II, nous avons exposé les différents mécanismes conduisant à la transformation martensitique à savoir : une variation de température par refroidissement très rapide et/ou une sollicitation mécanique.

La déformation de transformation est induite dans le premier cas par la variation de la température, alors que dans le second cas la déformation s'accompagne normalement d'effets thermiques. Dans le cas spécifique des TRIP, le processus étant irréversible, nous ne pouvons étudier le comportement d'un milieu en faisant fi des interactions thermomécaniques dont il est le siège. Pour tenir compte de tous les phénomènes intervenant dans le processus thermodynamique, nous allons faire appel aux notions suivantes : la température absolue, l'entropie, énergie interne et flux de chaleur. En effet,

*« Un processus thermodynamique est défini comme une évolution au cours du temps de la configuration du système, de l'ensemble des forces, de la température, de l'énergie interne, de l'entropie, de l'apport et du flux de chaleur »* d'après [CN63]

Dans ce chapitre, nous utiliserons le premier principe de la thermodynamique pour introduire la quantité de chaleur reçue et l'énergie interne. Avec l'inégalité du second principe de la thermodynamique, nous introduirons la température absolue et l'entropie.

En utilisant la loi de conservation de l'énergie et en formulant les lois générales qui relient l'énergie interne, la quantité de chaleur reçue, la température absolue et l'entropie, nous allons formuler l'équation des puissances dissipées lors du changement de phase. A partir de cette formulation, nous pouvons déterminer la variation de certains paramètres liés à l'évolution de la microstructure.

Pour réaliser ce chapitre, nous nous sommes inspirés des travaux de Paul Germain [ PG73 ] , Georges Duvaut [ DU98 ] et A.J.M Spencer [SP92].

**Situation réelle :** Discontinuités et singularités créées dans la structure d'un milieu continu

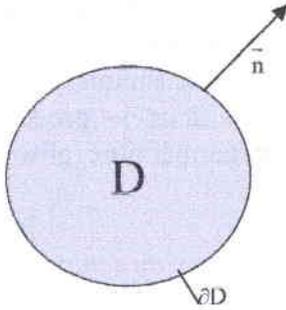
**Grandes étapes :**

- Rappel des deux principes de la thermodynamique
- Etude des différentes formes de dissipations
- Calcul de la force thermodynamique exercée sur une singularité quelconque

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### III.1 Conservation de la masse

#### III.1.1 Equation de continuité



Considérons un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  et de normale extérieure  $\vec{n}$

La conservation de masse peut être exprimée comme suit :

*L'accroissement de la masse du domaine  $D$  est égale au flux de masse qui traverse la frontière  $\partial D$ .*

Le flux de masse à travers  $\partial D$  est égale à  $\int_{\partial D} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ . L'équation de conservation s'écrit :

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial D} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{[III.1]}$$

En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface, nous obtenons :

$$\int_D \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \quad \text{[III.2]}$$

Le domaine étant arbitraire, l'équation [III.2] est nulle pour tout sous-domaine. Ceci conduit à l'équation dite *équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{[III.3]}$$

Nous pouvons développer cette équation sous les deux formes suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho + \rho \text{div } (\vec{v}) = 0 \quad [\text{III.4}]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad [\text{III.5}]$$

La dérivation temporelle [PG73] se présente comme suit :

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \vec{v} \cdot \text{grad } (\cdot) \quad [\text{III.6}]$$

L'équation de continuité [III.5] devient alors :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad [\text{III.7}]$$

Si le matériau est incompressible, alors :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ et } \text{div } (\vec{v}) = 0 \quad [\text{III.8}]$$

### III.1.2 Dérivation par rapport au temps de l'intégrale de volume

Soit  $\phi$  une certaine quantité physique associée aux particules du domaine et  $\varphi$  la densité par unité de masse de  $\phi$ . La densité volumique de  $\phi$  est  $\rho\varphi$ .

La quantité de  $\phi$  contenu dans un domaine  $D$  à l'instant  $t$  est :

$$\phi = \int_D \varphi \rho \, dV \quad [\text{III.9}]$$

La dérivée totale de cette quantité a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \int_D \varphi \rho \, dV = \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \rho) \, dV - \int_{\partial D} \varphi \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \quad [\text{III.10}]$$

L'application du théorème de la divergence donne :

$$\frac{d}{dt} \int_D \varphi \rho \, dV = \int_D \left( \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho) + \operatorname{div} (\varphi \rho \vec{v}) \right) dV \quad [\text{III.11}]$$

En développant le second membre de cette égalité. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho) + \operatorname{div} (\varphi \rho \vec{v}) = \varphi \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \right) + \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right) \quad [\text{III.12}]$$

L'équation de continuité étant nulle, l'équation [III.12] devient :

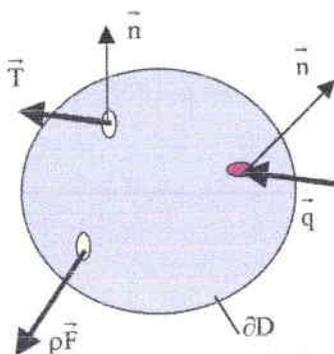
$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho) + \operatorname{div} (\varphi \rho \vec{v}) = \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right) \quad [\text{III.13}]$$

En utilisant les équations [III.6] et [III.13], nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_D \varphi \rho \, dV = \int_D \frac{d\varphi}{dt} \rho \, dV \quad [\text{III.14}]$$

Ce résultat sera utilisé dans les paragraphes suivants.

### III.2 Premier principe : loi de conservation



Soit un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  intérieur au milieu matériel considéré.

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Soit :

- $A$  : la densité volumique de la quantité à laquelle on s'intéresse ( masse, quantité de mouvement, énergie ..) { la densité d'énergie  $A = \rho(e + \frac{1}{2} v_i \cdot v_i)$  }
- $a$  : le taux de densité volumique de ce qui est fourni par l'extérieur { les forces volumiques + la densité volumique du taux de chaleur :  $a = f_i v_i + r$  }
- $\alpha$  : taux de densité surfacique de ce qui est perdu à travers la frontière de  $D$  { la densité surfacique du taux de chaleur :  $\alpha = -(T_i v_i + q) = -(\sigma_{ij} n_j v_i + q)$  }

L'équation du bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_D A_i \cdot dv + \int_{\partial D} \alpha_i \cdot d\sigma = \int_D a_i \cdot dv \quad \text{[III.15]}$$

L'équation du bilan devient :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho(e + \frac{1}{2} v_i v_i) dV = \int_{\partial D} (\sigma_{ij} n_j v_i) dS + \int_D f_i v_i dV + \int_{\partial D} q dS + \int_D r dV \quad \text{[III.16]}$$

Enoncé du premier principe :

A chaque instant,

*La dérivée particulière de l'énergie du système = Puissance des efforts extérieurs + taux de chaleur reçue*

$$E_{\text{sys}} = P_{\text{ext}} + Q \quad \text{[III.17]}$$

### III.2.1 Energie du système

Par définition :

*l'énergie du système est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne*

$$E_{\text{sys}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}} \quad \text{[III.18]}$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

En dérivant cette équation et en introduisant la dérivée ainsi obtenue dans l'équation [III.17], nous obtenons :

$$\dot{E}_{\text{cin}} + \dot{E}_{\text{int}} = P_{\text{ext}} + Q \quad \text{[III.19]}$$

### III.2.2 Energie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'énonce comme suit :

*La dérivée de l'énergie cinétique est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance des efforts intérieurs*

$$\dot{E}_{\text{cin}} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} \quad \text{[III.20]}$$

La combinaison des équations [III.19] et [III.20] donne :

$$\dot{E}_{\text{int}} = -P_{\text{int}} + Q \quad \text{[III.21]}$$

Nous allons maintenant expliciter cette équation en fonction des différents paramètres thermodynamiques.

### III.2.3 Entropie :

Soit M une particule d'un système en mouvement, à chaque instant t, on peut lui associer une fonction à valeurs scalaires  $s(x,t)$  appelée entropie spécifique de la particule M. L'entropie du système s'écrit :

$$S = \int_V \rho s \, dV \quad \text{[III.22]}$$

Cette définition nous permet d'aborder l'évaluation de l'énergie interne

### III.2.4 Densité de l'énergie interne

L'énergie libre spécifique est définie comme suit :

$$\psi = e - Ts \quad \text{[III.23]}$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

En multipliant les termes de cette égalité par la masse volumique, nous obtenons l'équation de la densité de l'énergie interne :

$$\rho e = \omega + \rho sT \quad [\text{III.24}]$$

avec

$\omega = \psi\rho$ : densité d'énergie libre  
 $s$  : entropie spécifique  
 $T$  : température absolue

### III.2.5 Taux de chaleur

Le taux de chaleur  $\dot{Q}$  se compose :

- d'une conduction à la frontière :  $-\int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$

- d'un apport volumique de chaleur extérieur :  $\int_V \rho h \cdot dV$

Compte tenu des équations de l'énergie libre et du taux de chaleur, nous pouvons reformuler l'équation du premier principe comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e \cdot dV = -P_{\text{int}} + \int_V \rho h \cdot dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad [\text{III.24}]$$

L'utilisation de l'équation [III.14] nous permet d'écrire que :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e \cdot dV = \int_V \frac{d}{dt} (\rho e) dV = \int_V \frac{d}{dt} (\omega + \rho sT) \cdot dV \quad [\text{III.25}]$$

Application du théorème de la divergence nous permet de transformer le terme de flux surfacique en intégration de volume. L'équation du premier principe devient :

$$\int_V \frac{d}{dt} (\omega + \rho sT) \cdot dV = -P_{\text{int}} + \int_V (\rho h - \text{div} \mathbf{q}) \cdot dV \quad [\text{III.26}]$$

### III.3 Second principe

Le second principe postule qu'à chaque instant, *Le taux de production de l'entropie  $\geq$  taux de chaleur reçue*

Ce qui se traduit par :

$$\frac{d}{dt}S \geq \int_V \rho \frac{h}{T} .dV - \int_{\partial V} \frac{1}{T} q .n .dS \quad \text{[III.27]}$$

Compte tenu des équations [III.14] et [III.25], nous pouvons écrire que :

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} (\rho s) .dV \quad \text{[III.28]}$$

Le développement de l'équation [III.27] après application du théorème de la divergence et compte tenu de l'équation [III.28] donne :

$$\int_V (\rho s T - \rho h + \text{div} q + \frac{q}{T} \text{grad} T) .dV \geq 0 \quad \text{[III.29]}$$

L'expression de l'intégrale  $\int_V \text{div} q .dV$  est donnée par l'équation du premier principe. En la combinant avec l'équation [III.27] nous obtenons :

$$\int_V -\rho T s .dV - P_{\text{int}} - \int_V \frac{d}{dt} \omega .dV - \int_V \frac{q}{T} \text{grad} T .dV \geq 0 \quad \text{[III.30]}$$

Cette équation représente *la puissance dissipée*. Elle est composée d'une puissance intrinsèque dissipée  $D_V$  et d'une puissance thermique  $D_T$  avec :

$$D_V = \int_V -\rho T s .dV - P_{\text{int}} - \int_V \frac{d}{dt} \omega .dV \geq 0 \quad \text{[III.31]}$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

et

$$D_T = - \int_V \frac{q}{T} \text{grad} T \cdot dV \geq 0 \quad [\text{III.32}]$$

**Remarque :**

Dans la littérature, la puissance dissipée est très souvent présentée sous la formulation suivante :

$$D_V = P_{\text{ext}} + \int_V \rho T s \cdot dV - \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV \geq 0 \quad [\text{III.33}]$$

### III.4 CONCLUSION

Nous avons décrit un potentiel thermodynamique qui conduit aux équations d'état et un potentiel dissipatif qui fournit les lois complémentaires d'évolution décrivant les processus irréversibles.

Nous avons démontré l'équation dite équation des puissances dissipées. Nous utiliserons cette équation dans le cadre de l'étude de l'évolution de l'interface austénite-martensite.

Une approche thermomicromécanique sera utilisée pour expliciter l'expression de la puissance intrinsèque dissipée.

## III.5 BIBLIOGRAPHIE

Référence	Auteurs	Titre	Pages	Edition	Année
CN63	B.D Coleman W. Noll	<b>The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity</b>	167 - 178	Arch. Rat. Rech. Anal. ,vol.13	1963
DU98	Georges Duvaut	<b>Mécanique des milieux continus</b>		Dunod Paris	1998
PG73	Paul Germain	<b>Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1 : théorie générale</b>	44	Masson Paris	1973
SP92	A.J.M Spencer	<b>Continuum mechanics</b>		Logman Scientic & Technical	1992

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

## **IV. APPROCHE THERMOMICROMECHANIQUE DES FRONTIERES MOBILES**

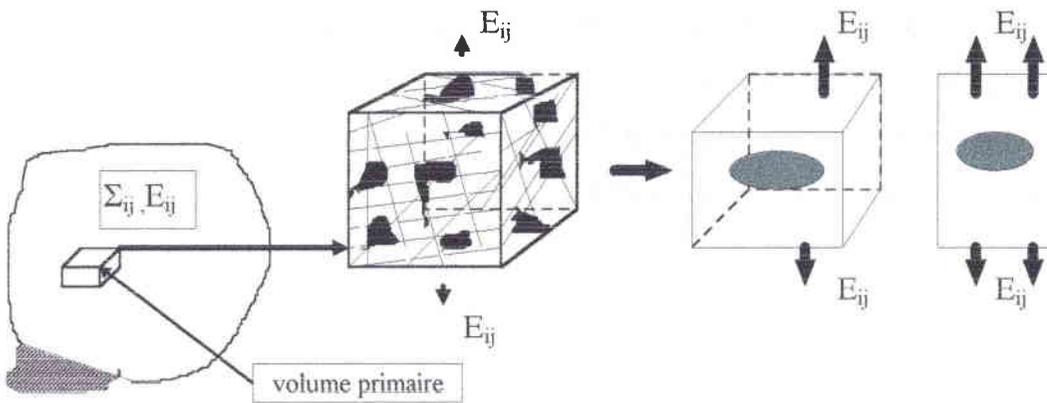
## **IV. APPROCHE THERMOMICROMECHANIQUE**

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

**OBJET :**

Avant de développer tous les aspects liés au mouvement de l'interface, nous allons caractériser le milieu en définissant le volume élémentaire représentatif (V.E.R).

*Le milieu considéré est un milieu microhétérogène et macrohomogène. La taille des hétérogénéités est très petite par rapport au volume élémentaire considéré. Ce volume élémentaire doit être assez grand pour qu'il soit représentatif (V.E.R) du matériau, c'est-à-dire statistiquement équivalent d'une zone à l'autre d'un matériau considéré comme macroscopiquement homogène.*



*Figure IV.1 : modélisation du V.E.R*

Après cette modélisation du milieu, nous allons exprimer toutes les conditions de compatibilité en particulier celle d'Hadamard pour prendre en considération les discontinuités à l'interface austénite-martensite. Nous utiliserons l'équation de la puissance virtuelle des efforts intérieurs que nous appliquerons au mouvement réel et nous ferons des hypothèses sur l'énergie libre d'Helmholtz.

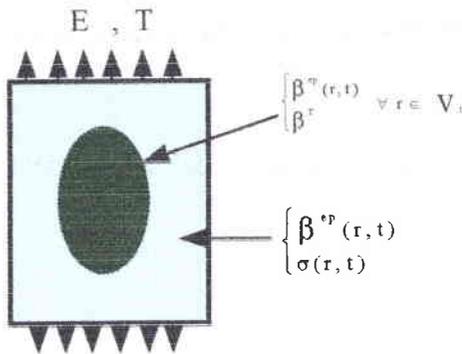
Toutes ces hypothèses et conditions vont nous permettre expliciter l'équation de la puissance dissipée associée à la progression de la déformation plastique et au mouvement de l'interface  $\Sigma$ . Le potentiel dissipatif sera utilisé en simulation numérique pour le calcul de la vitesse à l'interface austénite - martensite, alors que le critère de Patel et Cohen régira la formation de la plaquette de martensite.

Pour réaliser ce chapitre, nous nous sommes inspirés des travaux de Berveiller – Patoor et Buisson [BPB91], Cherkaoui et Berveiller [CB99], Guillet et Poupeau [GP73], Hadamard [HA03], Hill [HI83], Kaufman et Cohen [KC55], Lemoine [LE95], Ortin et Planes [OP88], Paul Germain [PG73] et Sabar [SA90].

**Grandes étapes :**

- Description du champ des déformations
- Développement des aspects liés au mouvement de l'interface
- Détermination de l'énergie libre
- Détermination de la puissance des efforts intérieurs
- Mise en équation de la puissance intrinsèque dissipée

## IV.1 Champ des déformations



L'étude se limite aux cas des déformations et rotations infinitésimales. La loi fondamentale de la dynamique impose au champ des contraintes d'obéir aux équations d'équilibre. Nous allons travailler dans un système de coordonnées cartésiennes, où

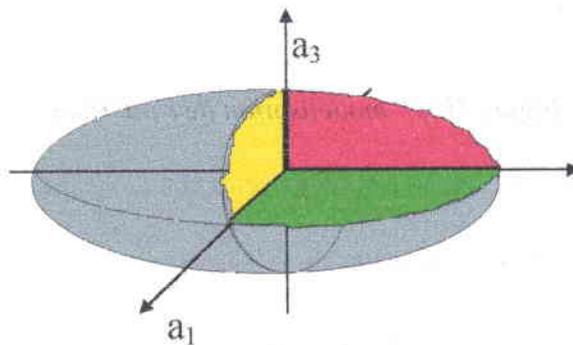
$x_1, x_2, x_3$  désignent les coordonnées d'un point  $r$  du milieu.

$\vec{u}$  de coordonnées  $u_1, u_2, u_3$  désigne le champ du déplacement d'un point.

Figure IV.2 : modélisation du milieu

## IV.2 Conditions à l'interface

Dans les études phénoménologiques, la martensite est considérée comme une inclusion ellipsoïdale à frontière mobile  $\Sigma$ , de volume  $V_1$ , plongée dans l'austénite. Elle est définie par ses trois demi-axes ( $a_1, a_2, a_3$ )



L'orientation des cristaux de martensite est liée au réseau de l'austénite. Du fait de cette particularité, la vitesse de croissance des cristaux est non uniforme dans les différentes directions cristallographiques.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

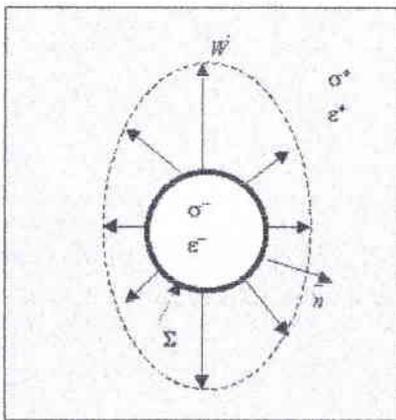
D'après [GP73], la détermination de la vitesse de croissance des plaquettes de martensite se fait expérimentalement par des mesures de résistivité. Dans les alliages Fe-Ni :

- Chaque plaquette atteint sa taille limite en  $10^{-7}$ s.
- La vitesse de déplacement de l'interface est de  $10^5$ cm/s, quelle que soit la température. Cette vitesse est environ le  $\frac{1}{3}$  de la vitesse du son dans le métal et est égale à la vitesse de propagation des fissures.

Nous allons faire une série d'hypothèses afin de passer du problème réel au modèle mathématique.

*Première hypothèse 1* : sur la modélisation de l'interface

Le schéma adopté est le suivant :



$\vec{n}$  : normale extérieure à l'interface  $\Sigma$   
 $\vec{w}$  : vitesse de l'interface  
 $[\epsilon^{in}] = \epsilon^{in+} - \epsilon^{in-}$  : saut de la déformation inélastique  
 $[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^-$  : saut de la contrainte

Figure IV.3 : modélisation de l'interface

*Deuxième hypothèse 2* : sur la continuité du déplacement à l'interface

La continuité du déplacement se traduit par :

$$[u_i] = u_i^+ - u_i^- = 0 \quad [IV.1]$$

ce qui entraîne la condition, sur les déformations :

$$[\epsilon_{ij}] = \epsilon_{ij}^+ - \epsilon_{ij}^- = \lambda_i n_j \quad [IV.2]$$

$\lambda_j$  : vecteur arbitraire fonction de l'interface

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

La condition d'équilibre à l'interface s'écrit :

$$[\sigma_{ij} n_j] = 0 \quad [IV.3]$$

Ces différents résultats seront utilisés dans la formulation énergétique.

### IV.3 Energie libre d'Helmholtz

L'énergie chimique de la transformation martensitique est seulement fonction de la température [OP88].

D'après [GP73], le diagramme relatif à un alliage Fe-Ni à 29% de Ni peut se présenter comme suit :

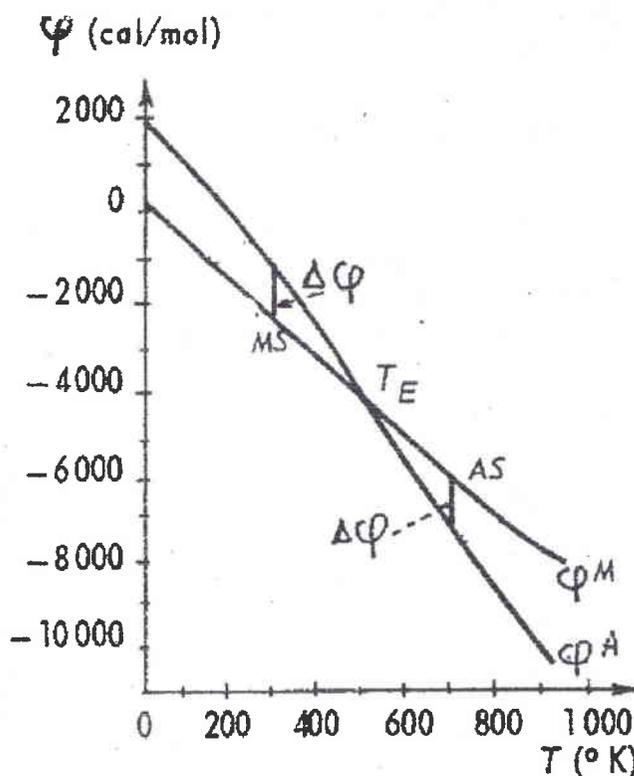


Figure IV.4: diagramme de l'énergie chimique de la transformation martensitique pour un alliage Fe-29Ni [GP73], cas non linéaire

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

En adoptant une approximation linéique, le schéma ci-dessus devient :

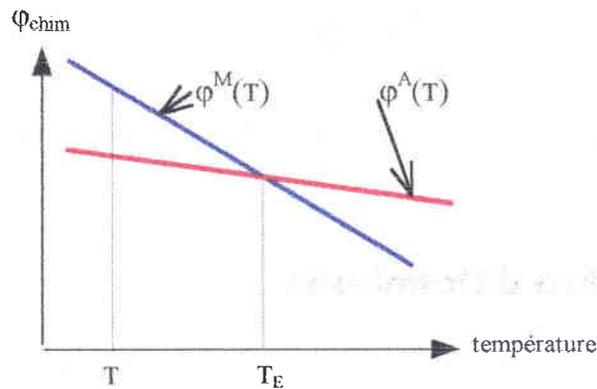


Figure IV.5: diagramme de l'énergie chimique de la transformation martensitique, cas linéaire

Il est important de noter que la transformation martensitique ne peut s'effectuer que lorsque la force motrice est suffisante c'est-à-dire

$$\Delta \varphi = \varphi^M(T) - \varphi^A(T) < 0 \quad [\text{IV.4}]$$

Pour les alliages et aciers, la différence entre  $T_E$  et  $M_S$  est de l'ordre de quelques centaines de °K. Elle augmente avec le pourcentage de carbone.

Pour les alliages Fe-Ni, [KC55] ont proposé une table de valeurs de  $M_S$  en fonction du % en masse et en volume du nickel. La table se présente comme suit :

Nickel % en masse	Nickel % en volume	$M_s$	
		°C	°K
29,0	28,0	7	280
30,4	29,3	-30	243
30,8	29,7	-40	233
31,8	30,7	-72	201
32,8	31,7	-115	158
33,5	32,4	-146	127
33,8	32,7	-180	93
34,1	33,0	-223	40
34,4	33,2	Pas de martensite à 4 °K	

Tableau IV.1 : valeurs de  $M_s$  en fonction du pourcentage de Nickel

L'énergie libre est la somme de toutes les énergies intervenants dans le processus :

- l'énergie élastique
- l'énergie chimique
- l'énergie interfaciale

L'énergie interfaciale étant très faible par rapport à l'énergie élastique, nous n'en tiendrons pas compte au cours de la modélisation.

En tenant compte de l'ensemble de toutes les hypothèses simplificatrices que nous avons faites, nous pouvons définir l'énergie comme suit :

*L'énergie libre est la somme de l'énergie élastique et de l'énergie chimique*

$$\Phi = \Phi_w + \Phi_{ch} \quad [IV.5]$$

La densité d'énergie chimique  $\varphi$  sera prise proportionnelle à la différence entre la température d'essai et la température d'équilibre, à un coefficient près :

$$\varphi = B(T - T_0) = B\theta \quad [IV.6]$$

L'énergie libre chimique du système s'obtient en intégrant cette densité

$$\Phi_{ch} = \int_V \varphi \cdot dV \quad [IV.7]$$

Par définition, l'énergie élastique a pour expression:

$$\Phi_w = \int_V \omega(r) \cdot dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^e(r) \cdot dV \quad [IV.8]$$

L'équation de l'énergie libre d'Helmholtz s'écrit :

$$\Phi = \int_V \omega(r) \cdot dV + \int_V \varphi \cdot dV \quad [IV.9]$$

La mobilité de l'interface est prise en compte en se plaçant dans le cas de l'inclusion à frontière mobile et en utilisant la technique de dérivation temporelle [PG73]. Nous avons :

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \underline{w} \cdot \underline{\text{grad}}(\cdot)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V (\cdot) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) dV - \int_{\Sigma} [W_{\alpha} n_{\alpha}] d\Sigma \quad [\text{IV.10}]$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV - \int_{\Sigma} [\varphi + \omega] W_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \quad [\text{IV.11}]$$

avec :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^e \right) = \boldsymbol{\sigma}_{ij}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e$$

en effet,  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \right) = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$

En utilisant la symétrie du tenseur d'élasticité pour un milieu homogène et en nous référant à [BPB91] et à [CB99], nous pouvons écrire que :

$$\frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}_{ij}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e] = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{e+} \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{e+} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{e-} \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{e-}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^+ + \boldsymbol{\sigma}_{ij}^-) [\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e] \quad [\text{IV.12}]$$

Par la suite, nous adopterons la notation suivante :

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^+ + \boldsymbol{\sigma}_{ij}^-) = \{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\} \quad [\text{IV.13}]$$

L'équation devient:

$$\Phi = \int_V \mathbf{B} \dot{\mathbf{T}} dV - \int_{\Sigma} [\mathbf{B}\theta] W_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma - \int_{\Sigma} \{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\} [\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e] W_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma + \int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e dV \quad [\text{IV.14}]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

#### IV.4 Puissance des efforts intérieurs

Un système  $S$  en mouvement dans un repère  $R$  est soumis à l'action des forces extérieures définies par :

- la densité volumique  $f$  dans  $S$
- la densité surfacique  $F$  sur  $\partial S$

on désigne par  $\rho$  : la masse volumique  
 $\gamma$  : l'accélération d'une particule

A l'instant  $t$  fixé, on définit un mouvement virtuel de  $S$  dans  $R$  par la donnée d'un champ de vitesses virtuelles  $\hat{U}$  défini sur  $S$ , continûment dérivable par morceaux.

La puissance des efforts intérieurs  $\hat{P}_{\text{int}}$  dans ce mouvement doit être égale à :

$$\hat{P}_{\text{int}} = \int_S \rho \gamma \hat{U} \cdot dV - \int_S f \hat{U} \cdot dV - \int_{\partial S} F \hat{U} \cdot d\sigma \quad [\text{IV.15}]$$

avec

$$\int_{\partial S} F \hat{U} \cdot d\sigma = \int_{\partial S} \sigma_{ij} \hat{U}_i n_j d\sigma \quad [\text{IV.16}]$$

L'équation d'équilibre est de la forme :

$$\rho \gamma_i = f_i + \sigma_{ij,j} \quad [\text{IV.17}]$$

En introduisant cette équation dans celle de la puissance des efforts intérieurs, nous obtenons :

$$\hat{P}_{\text{int}} = \int_V \sigma_{ij,j} \cdot \hat{U}_i \cdot dV - \int_{\partial S} \sigma_{ij} \cdot \hat{U}_i \cdot n_j d\sigma \quad [\text{IV.18}]$$

$\sigma_{ij}$  et  $\hat{U}_i$  sont continûment dérivables par morceaux.

En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface, la puissance devient :

$$\hat{P}_{int} = - \int_V \sigma_{ij} \cdot \hat{U}_{i,j} dV - \int_{\Sigma} [T_i(N) \hat{U}_i] d\sigma \quad [IV.19]$$

Pour passer du mouvement virtuel au mouvement réel, nous allons remplacer  $\hat{U}$  par  $v_i$ . Nous obtenons avec cette condition :

$$\hat{P}_{int} = - \int_V \sigma_{ij} \cdot v_{i,j} dV - \int_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j v_i] d\Sigma \quad [IV.20]$$

La condition de compatibilité d'Hadamard [HA03] s'écrit :

$$[v_i] = - [u_{i,j} \cdot n_j] w_{\alpha} n_{\alpha} \quad [IV.21]$$

En introduisant cette condition dans la deuxième partie de  $P_{int}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j v_i] d\Sigma &= \int_{\Sigma} [v_i] \sigma_{ij} n_j d\Sigma \\ \int_{\Sigma} [v_i] \sigma_{ij} n_j d\Sigma &= - \int_{\Sigma} [u_{i,k}] \sigma_{ij} n_j w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \end{aligned}$$

avec  $[u_{i,j}] = \lambda_i n_k$  nous avons :

$$\int_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j v_i] d\Sigma = - \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \lambda_i \overbrace{n_k n_k}^1 w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma$$

En utilisant la condition d'équilibre et l'équation [IV.13], nous pouvons écrire que :

$$\sigma_{ij} n_j = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ n_j + \sigma_{ij}^- n_j) = \{\sigma_{ij}\} n_j \quad [IV.22]$$

$\int_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j v_i] d\Sigma$  devient :

$$\int_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j v_i] d\Sigma = - \int_{\Sigma} \{\sigma_{ij}\} n_j \lambda_i W_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \{\sigma_{ij}\} [\epsilon_{ij}] W_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \quad [IV.23]$$

Finalement l'équation de la puissance des efforts intérieurs devient :

$$P_{int} = - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Sigma} \{\sigma_{ij}\} [\epsilon_{ij}] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \quad [IV.24]$$

#### IV.5 Puissance dissipée

La puissance dissipée  $D = -P_{int} - \Phi - \int_V s T dV$  devient dans le cas d'une transformation quasi statique :

$$D = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{\Sigma} \{\sigma_{ij}\} [\epsilon_{ij}] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma + \int_{\Sigma} [B\theta] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \\ + \int_{\Sigma} \{\sigma_{ij}\} [\epsilon_{ij}^e] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e dV$$

après arrangement, nous obtenons :

$$D = \int_V \sigma_{ij}^{\text{in}} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{\Sigma} \{\sigma_{ij}\} [\epsilon_{ij}^{\text{in}}] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma + \int_{\Sigma} B\theta w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \geq 0 \quad [IV.25]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

La puissance intrinsèque dissipée est formée de deux entités :

$$1. \quad D_V = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} dV : \text{puissance dissipée tenant compte de la vitesse de déformation inélastique.}$$

$$2. \quad D_\Sigma = \int_\Sigma (\{\sigma_{ij}\} [\varepsilon_{ij}^{in}] - B\theta) \cdot w_\alpha n_\alpha \cdot d\Sigma : \text{puissance dissipée tenant compte du saut de la déformation inélastique à l'interface, du saut de l'énergie chimique à l'interface et de la vitesse de l'interface.}$$

Le terme  $\{\sigma_{ij}\} [\varepsilon_{ij}^{in}] - B\theta$  apparaît comme la force motrice pour le développement de la frontière.

## IV.6 Force motrice

Soit  $F_c$  la force critique et  $F$  la force motrice, nous pouvons définir une fonction telle que :

$$g = \text{force motrice } F - \text{force critique } F_c$$

Le mouvement de l'interface est lié à la fonction de charge  $g$ .

$$g \geq 0 \Rightarrow F - F_c \geq 0 \quad [\text{IV.26}]$$

Utilisant le critère de Patel et Cohen [FBTO94] ont déterminé l'expression de la force motrice pour la formation d'une variante  $j$  de martensite. Cette expression est de la forme :

$$\Delta G_j^V = \Delta \phi_c + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_j^T \quad [\text{IV.27}]$$

Cette force motrice s'écrit encore :

$$F_M = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^T - B(T - T_0) \quad [IV.28]$$

Pour la formation de la martensite, nous devons comparer à chaque instant cette force à une force critique  $F_c$ . Si la force motrice est supérieure à la force critique, nous avons transformation martensitique.

La détermination de la vitesse à l'interface se fera avec l'utilisation de la dissipation. Si nous considérons que la dissipation est nulle, nous pouvons calculer la vitesse  $w_\alpha \mathbf{n}_\alpha$

### IV.7 Caractéristiques de la maille

Un paramètre important dans la transformation martensitique est la plasticité de transformation. Elle se manifeste par l'apparition d'une déformation inélastique additionnelle aux autres déformations pour un matériau se transformant sous un champ de contrainte appliquée. La formation de variantes de martensite est associée à une déformation de transformation anisotrope. Cette déformation est composée d'un changement de volume  $\varepsilon_0$  et d'un cisaillement  $\gamma_0$ . La déformation résultant de la formation d'une variante dans la direction de la contrainte appliquée a pour expression :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} \{ \gamma_0 \sin 2\theta \cos \alpha + \varepsilon_0 (1 + \cos 2\theta) \} \quad [IV.29]$$

où  $\theta$  est l'angle entre la normale au plan de la variante et de la contrainte appliquée et  $\alpha$  l'angle entre la direction de cisaillement et la direction de cisaillement maximum  $S_m$

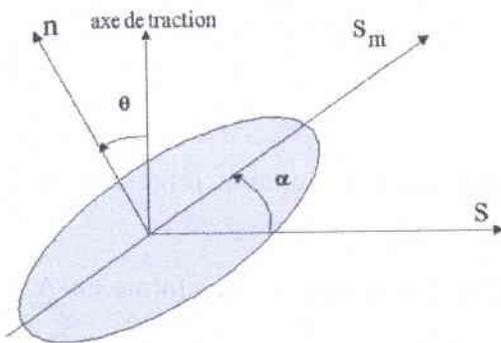


Figure IV.6 : détermination de la déformation liée à la transformation de phase dans la direction de la contrainte

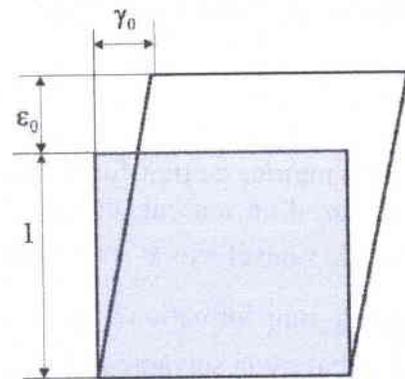


Figure IV.7 : description cinématique de la transformation martensitique

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Pour un monocristal, on observe la formation d'une seule variante, la déformation de transformation est constante et la valeur maximale est obtenue pour  $\alpha = 0$  et  $\text{tg}2\theta = \gamma_0 / \epsilon_0$ .

Dans les alliages Fe-Ni-C, pour lesquels  $\epsilon_0 = 0.024$  et  $\gamma_0 = 0.19$ , la valeur de  $\epsilon_t$  est de 0.11. Ces valeurs traduisent l'effet de l'état de la contrainte externe sur les mécanismes de transformation.

Les caractéristiques de la déformation de transformation sont définies dans le repère local. Il est souvent nécessaire de ramener cette écriture dans le repère global. Cela nécessite une opération de changement de repère. Pour le faire, nous utiliserons la technique de la transformation orthogonale et la manipulation des angles d'Euler.

### IV.7.1 Transformation orthogonale

Soit  $R1(X1, X2, X3)$  repère local et  $R2(Y1, Y2, Y3)$  repère global, un vecteur  $\vec{X}$  du premier référentiel de coordonnées

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad [\text{IV.30}]$$

est transformé en un autre vecteur  $\vec{Y}$  du second référentiel de coordonnées

$$\vec{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad [\text{IV.31}]$$

Par une rotation globale du système d'origine, le second vecteur s'écrit alors :

$$\vec{Y} = R \vec{X} \quad [\text{IV.32}]$$

où  $R$  est la matrice de transformation.

Dans le cas d'un tenseur, chaque élément de la matrice de rotation représente le cosinus directeur du nouvel axe  $y_i$  par rapport l'axe d'origine  $x_i$ .

La règle de transformation d'un tenseur  $\underline{\underline{A}}$  dans le repère local se transforme en  $\underline{\underline{A}}$  dans le repère global est la suivante :

Si  $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{U}}' \underline{\underline{V}}'^T$  et  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}}^T$ , alors

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}'(\underline{\underline{R}}\underline{\underline{V}}')^T = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}'\underline{\underline{V}}'^T\underline{\underline{R}}^T \quad [\text{IV.33}]$$

ce qui donne :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{R}}^T \quad [\text{IV.34}]$$

puisque  $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{V}}'$  et  $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}'$  avec :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \text{ les } \Gamma_{ij} \text{ représentent les cosinus directeurs}$$

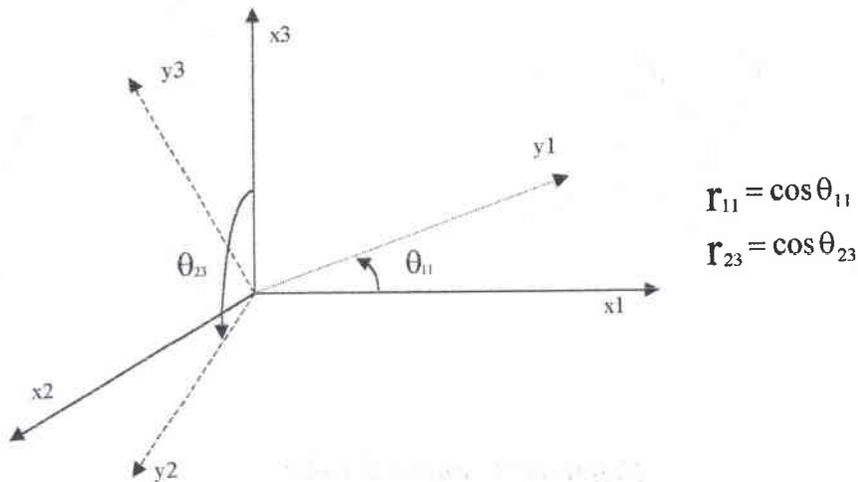


Figure IV.8 : détermination des cosinus directeurs

### IV.7.2 Angles d'Euler

Considérons le mouvement d'un trièdre  $R_s(O, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$  dans un référentiel d'observation  $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Trois paramètres sont nécessaires pour définir l'orientation du trièdre dans ce référentiel. Ces trois paramètres sont les angles d'Euler :

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

- l'angle de *précession*  $\psi$ , mesuré autour de l'axe  $(O, \vec{k}_0)$ , transforme le référentiel  $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  en un référentiel  $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$
- l'angle de *mutation*  $\theta$ , mesuré autour de l'axe  $(O, \vec{u})$ , transforme le référentiel  $R_1$  en un référentiel  $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_s)$
- l'angle de *rotation propre*  $\phi$ , mesuré autour de l'axe  $(O, \vec{k}_s)$ , transforme le référentiel  $R_2$  en un référentiel  $R_s(O, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$

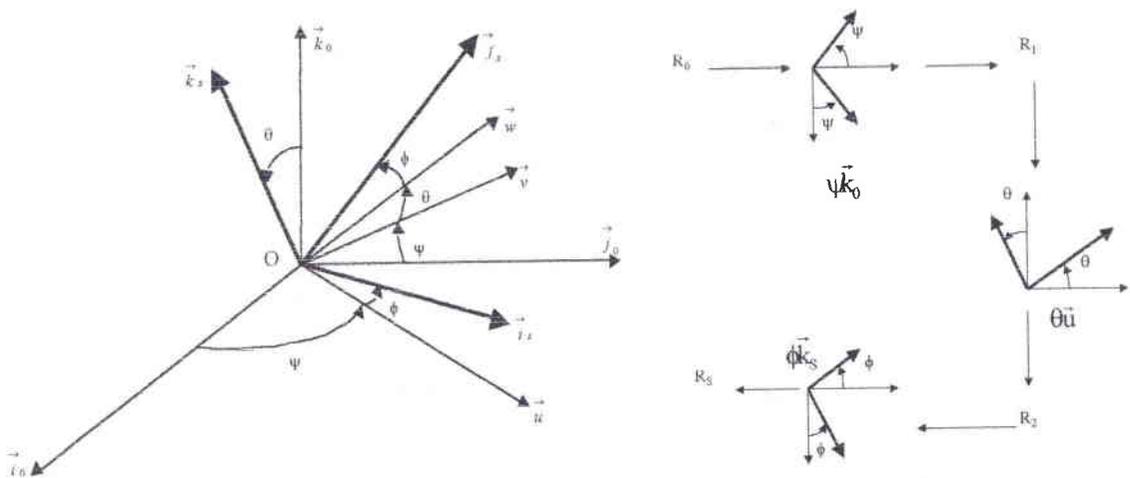


Figure IV.9 : angles d'Euler

En utilisant les trois angles d'Euler, nous obtenons :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

[IV.35]

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

En supposant que nous avons des rotations du type ( $\phi = \pm\pi/2$  et  $\psi = \pm\pi/2$ ), nous avons :

$$\cos\phi = \cos\psi = 0$$

Dans ces conditions,  $\underline{\underline{R}}$  devient :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \sin\psi \cos\theta & 0 & \sin\psi \sin\theta \\ 0 & -\sin\phi \sin\psi & 0 \\ \sin\phi \sin\theta & \cos\phi \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad [\text{IV.36}]$$

### IV.7.3 Déformation de transformation

En utilisant la théorie de Wescheler – Lieberman et Read [WLR53], nous allons considérer la déformation de transformation  $\epsilon^T$  comme étant le résultat d'une déformation homogène du réseau - *déformation de Bain* - et d'une déformation à réseau invariant - *glissement* ou *maclage*.

Soit  $\vec{n}$  la normale au plan de l'habit,  $\vec{m}$  la direction de transformation et  $\gamma$  l'amplitude de cisaillement dans la direction  $\vec{m}$ , nous pouvons représenter schématiquement la formation d'une variante de martensite dans le repère  $(x_1, x_2)$  de l'austénite par le croquis ci-dessous.

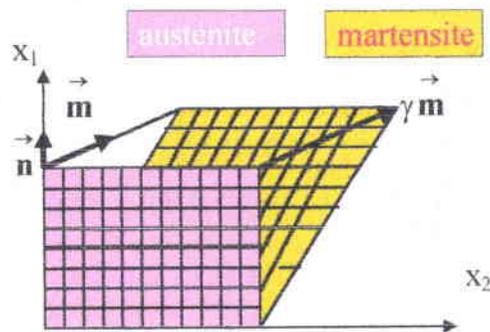


Figure IV.10 : détermination d'un élément de volume d'austénite lors de la transformation (d'après Patoor [PA86])

La déformation de transformation  $\underline{\varepsilon}^{T_i}$  associée à la formation de la variante **I** s'obtient par la formule suivante :

$$\varepsilon_{ij}^{T_i} = \frac{1}{2} \gamma (m_i n_j + m_j n_i) = \gamma R_{ij}^I \quad [\text{IV.37}]$$

où :

$R_{ij}^I$  est le tenseur d'orientation de la variante **I** de martensite .  
et  $\gamma$  représente l'amplitude de cisaillement

Dans le repère global, ce tenseur devient :

$$\underline{\varepsilon}_T = \underline{R} \underline{\varepsilon}_T' \underline{R}_T \quad [\text{IV.38}]$$

avec :

$$\varepsilon_{ij}^{Tn} = \underline{\varepsilon}_T'$$

La théorie phénoménologique de la cristallographie dans la transformation martensitique des alliages **Fe-Ni** prédit la formation de 24 variantes de normale se situant aux alentours de  $\{3 \ 14 \ 10\}_{\text{CFC}}$ . En application à la théorie de [W.L.R53] et en prenant comme référence les travaux de [NI71], nous pouvons déterminer les variantes de martensite à partir des systèmes suivants :

- Famille de normale  $\{0.1848 \ 0.7823 \ 0.5948\} \approx \{3 \ 14 \ 10\}$  indices de Miller
- Direction  $(0.0472 \ 0.1601 \ 0.1521)$  NISHIYAMA

En application de la théorie de Wesler – Lieberman – Red [WLR53], nous utiliserons les directions  $(0.2090 \ 0.7090 \ 0.6736)$

## IV.8 CONCLUSION

A l'aide d'hypothèses simplificatrices et des conditions de compatibilité à l'interface austénite- martensite, nous avons donné une expression de l'énergie libre d'Helmholtz.

En appliquant le principe des puissances virtuelles au mouvement réel, nous avons explicité les différents termes de l'équation de la puissance efforts intérieures.

En introduisant les résultats ainsi obtenus dans l'équation de la puissance dissipée, nous avons déterminé deux nouvelles entités qui sont :

- la puissance volumique dissipée tenant compte de la vitesse de la déformation inélastique
- la puissance surfacique dissipée associée au mouvement de l'interface austénite – martensite.

En utilisant les angles d'Euler, nous avons déterminé l'expression de la déformation de transformation par rapport au repère global. Nous avons adopté cette nouvelle expression à notre problème et déterminé l'équation de la force motrice. Cette force sera calculée à chaque point de Gauss lors de la simulation numérique et sera comparée à une force critique  $K(f)$ .

L'utilisation des résultats que nous venons d'obtenir nous permettra de simuler la croissance de la plaquette de martensite.

Avant de passer à la simulation numérique, nous allons dans le prochain chapitre proposer un résumé des travaux effectués par les autres équipes dans le domaine de la simulation des changements de phase.

## IV.9 BIBLIOGRAPHIE

Référence	Auteurs	Titre	Pages	Edition	Année
BPB91	M. Berveiller E. Patoor M. Buisson	<b>Thermodynamical constitutive equations for shape memory alloys</b>	387-396	J. de phy. IV, colloque C4, supp. au J. de physique III, vol.1	1991
CB99	M. Cherkaoui M. Berveiller	<b>Moving inelastic discontinuities and applications to martensitic phase transition</b>		Archive Of Applied Mech. 69 Springer-Verlag	1999
GP73	Guillet P. Poupeau	<b>Transformations à l'état solide des métaux et alliages métalliques</b>		Dunod - Bordas Paris	1973
HA03	J. Hadamard	<b>Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique</b>		Cours du collège de France Paris	1903
HI83	R. Hill	<b>Interfacial operators in the mechanics of composite media</b>	347 - 357	J. Mech. Phys. Solids, vol.31 n°4	1983
KC55	L. Kaufman M. Cohen	<b>Homogeneous versus heterogeneous nucleation in the martensitic transformation</b>	187-191	Trans. Amer. Inst. Min. Met. Eng. , 1640	1955
LE95	X. Lemoine	<b>Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers</b>		Thèse Université de Metz	1995
OP88	J. Ortin A. Planes		1873-1889	Acta. Metall.36	1988
PA86	E. Patoor			Thèse de Docteur – ingénieur Université de Metz	1986
PG73	Paul Germain	<b>Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1 : théorie générale</b>	44	Masson Paris	1973
NI71	Z. Nishiyama	<b>Martensitic transformation</b>		Academic Press, New York	1971
SA90	H. Sabar	<b>Problèmes de l'inclusion à frontières mobiles et applications</b>		Thèse Université de Metz	1990
WLR53	M.S. Wescheler D.S Lieberman T.A. Read		1503-1515	J. of Metals, AIME, vol.197	1953

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

## V. SIMULATION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE - BIBLIOGRAPHIE

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et  
numérique

Différents travaux portent sur la modélisation du comportement mécanique des aciers TRIP. Cette analyse ne s'intéresse qu'à ceux qui font appels aux éléments finis et aux observations *in situ*.

Par la méthode des éléments finis, il est possible de prendre en charge la déformation de transformation : cisaillement (facteur prépondérant dans le comportement du matériau au cours de la transformation) et variation de volume.

Les différents modèles proposés dans la littérature sont les suivants :

Ganghoffer et al [GA91]

Simonsson et al [SI95]

Marketz et al [MA94]

Xu et al [XM92-93]

Wen et al [WE97]

Levitas et al [LIS97]

Il est important d'expliquer les idées directrices qui ont conduit chaque équipe à travailler dans une direction plutôt que dans une autre. Ce choix est simplement dû à la nature de la transformation martensitique elle-même. En effet, la transformation martensitique se traduit par un cisaillement macroscopique  $\gamma_0$  dans le plan d'accrolement et d'une variation de volume  $\varepsilon_0$  dans la direction normale au plan d'accrolement. Ces deux déformations conduisent à deux origines différentes de plasticité de transformation. Avec ces deux origines, nous avons la possibilité de faire trois types de simulations :

1. une simulation ne tenant compte que du cisaillement
2. une simulation ne tenant compte que de la variation de volume
3. une simulation tenant compte des deux phénomènes

Dans le cas d'une étude de transformation sans contrainte appliquée, la microstructure est telle que les déformations de cisaillement s'annulent. Dans ce cas de figure, la simulation se fera en tenant compte de la variation de volume. Si la transformation se produisait sous une contrainte appliquée, la moyenne des déformations dues au cisaillement n'est pas nulle. La simulation se fera en tenant compte du cisaillement.

Pour faire la simulation, il faut tenir compte du type de milieu sur lequel nous travaillons.

En effet, la simulation dans le cas du monocristal est différente de celle du polycristal.

Dans le cas du monocristal, Patoor et al [PEB93] ont démontré que la déformation associée à la transformation est peu dépendante du niveau des contraintes appliquées. Elle est fonction de l'orientation du monocristal par rapport à la direction de la contrainte appliquée. Si l'énergie d'interaction entre plaquettes est faible devant la force motrice de transformation sous contrainte, il est possible d'obtenir une seule orientation.

Dans le cas du polycristal, la déformation de transformation et l'orientation de la plaquette sont fonction de chaque grain, effet Magee [MA66]. En plus de l'effet Magee, il faut tenir compte de deux nouveaux phénomènes :

- les incompatibilités de déformations entre plaquettes et aussi entre les plaquettes et le joint de grain
- les contraintes locales

Ces nouveaux phénomènes conduisent à une orientation des plaquettes tenant compte non seulement des contraintes externes, mais aussi et surtout des contraintes locales. Les travaux de Kosenko et al [KRK79], Pankova et al [PAR84] ont montré que la distribution de macles à l'intérieur des plaquettes est modifiée pour la transformation martensitique induite sous contrainte. Cette modification est une source supplémentaire de plasticité de transformation.

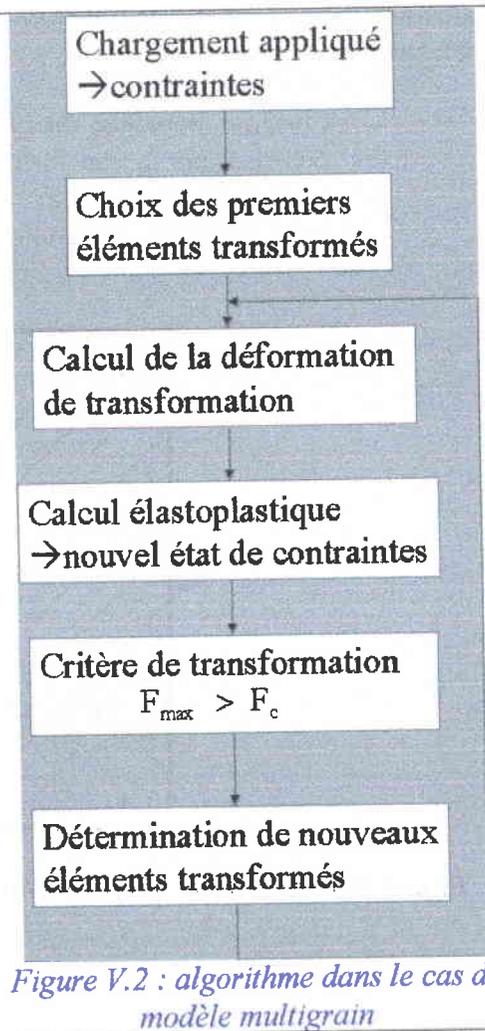
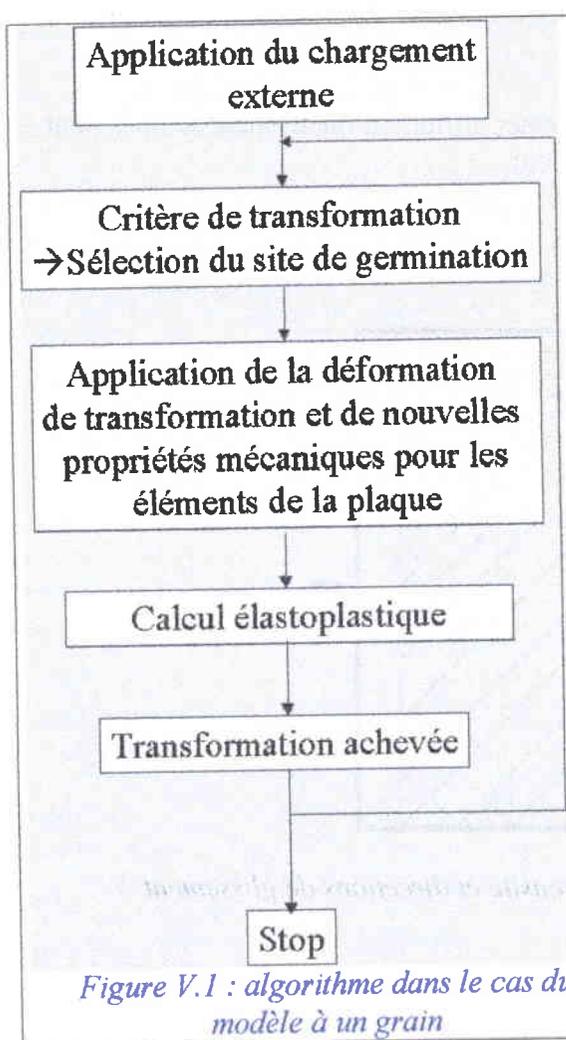
Compte tenu de toutes ces réalités, les différents simulateurs ont proposé des modèles très différents. Nous allons dans ce qui suit faire une brève présentation de certains modèles.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

## V.1 Modèles simulant l'arrangement structural

### V.1.1 Modèle de Ganghoffer et al

Ganghoffer et al ont développé deux modèles en 2D. Le premier se rapporte au multigrain et le second à un monocristal. Les deux algorithmes suivants montrent comment les simulations ont été effectuées.



Le modèle d'avancement de la transformation est le suivant :

La formation successive de variantes de martensite se fait à l'intérieur du maillage. L'ordre de transformation des variantes et de leur plan d'habitat sont déterminés en considérant que le point de germination est celui qui a la plus grande force motrice mécanique  $\Delta W = \sigma_n \varepsilon_0 + \tau \gamma_0$ .

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Le choix qu'ils ont adopté sur la progression est la formation instantanée de la plaquette dans sa grande longueur jusqu'à la frontière du grain ou d'une autre variante déjà formée.

Chaque fois qu'une variante est activée, l'ensemble des éléments qui la constituent se transforme alors de manière groupée et ils reçoivent la déformation de transformation de façon simultanée.

Les plaquettes de martensite sont formées d'éléments géométriquement prédéfinis. La séquence de calcul est obtenue par un calcul pas à pas. Les plaquettes formées sont celles qui ont une force motrice mécanique maximale. Le test d'arrêt du processus de calcul est effectué par rapport au taux de martensite formée.

En considérant comme critère de transformation la force motrice mécanique, ils sont arrivés aux conclusions suivantes :

- Certains éléments, en particuliers ceux formés d'un triangle simple sont favorisés par la transformation : 2,3 etc.
- Lorsque les contraintes externes sont faibles, nous avons une orientation très importante de certains éléments : 1,7,30 etc.

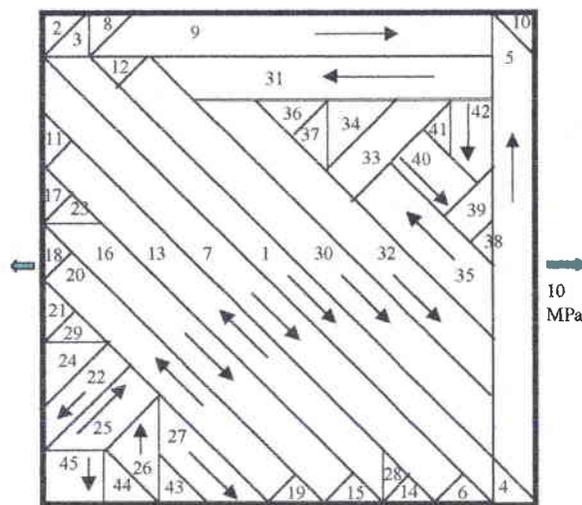


Figure V.3 : formation des plaquettes de martensite et directions de glissement

### V.1.2. Modèle de Simonsson et al

Le modèle développé est en 3D de  $7 \times 7 \times 7$  éléments. Leur objectif est de prendre en compte la distribution des plaquettes de martensite et aussi différentes orientations des grains d'austénite. Chaque élément représente un grain. Pour éviter un effet de texture, une orientation aléatoire est donnée à chaque grain. Dans chaque grain, 24 variantes de martensite sont susceptibles de se former. Le critère de formation est basé sur la force motrice mécanique et la force chimique. L'état de contrainte locale permet de déterminer la variante qui va se transformer.

Le calcul prend en compte l'énergie d'interaction en considérant une valeur constante en fonction du taux de martensite formée. Lorsque la contrainte appliquée est faible comparée à la limite d'élasticité des phases, la formation d'une unité auto-accommodante est une bonne approximation, car les contraintes internes générées sont élevées et l'auto-accommodation est favorable dans ce cas.

Ce modèle présente deux avantages :

- Il est en 3D
- Il calcule l'avancement de la transformation

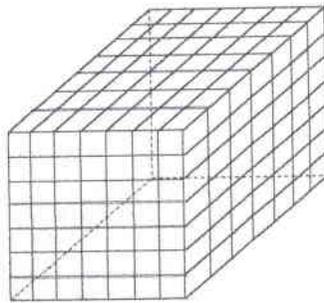


Figure V.4 : maillage en 3D proposé [SI95]

### V.1.3. Modèle de Marketz et al

Marketz et al ont également établi un modèle bi-dimensionnel. La croissance d'une plaquette de martensite débute par un «midrib» et est contrôlée par de forces thermodynamiques.

$$\Delta G_j^v = \Delta \phi_c^v + \Delta G_{\sigma,j}^v \geq W_{N,crit}^v$$

Critère de Patel et Cohen

$$\Delta G_{\sigma}^v = \sum_{\tau,j} \varepsilon = \sum_{\tau,j} \varepsilon' \tau_{,j}$$

$\Delta G_j^v$  : force motrice pour une germination assistée par la contrainte

$W_{N,crit}^v$  : force critique d'activation de la croissance

$\Delta \phi_c^v$  : énergie chimique libre par unité de volume

$\Delta G_{\sigma,j}^v$  : force motrice mécanique pour la variante j

$$\Delta G_{\sigma}^v = \tau \gamma + \sigma_n \delta$$

$\tau$  : cission résolue

$\sigma_n$  : contrainte normale au plan d'habitat

$\gamma$  : cisaillement

$\delta$  : trace du tenseur de déformation

Ils ont montré que la croissance est fortement dépendante des conditions aux limites. Ils ont considéré un maillage très fin au voisinage du midrib, ce qui conduit à un temps de calcul très long.

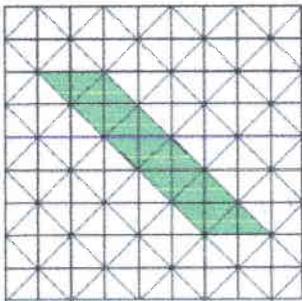


Figure V.5 : Position du «midrib» avant sollicitation

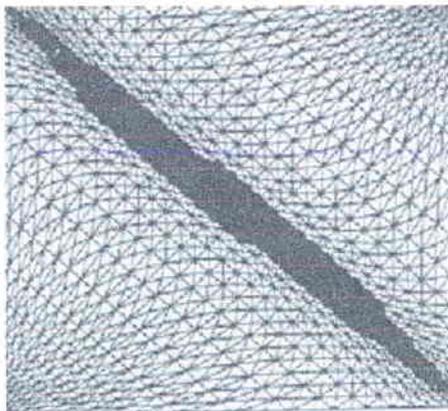


Figure V.6 : Morphologie prévue par le calcul pour une variante de martensite qui croît à partir du midrib sous une contrainte uniaxiale de 125 MPa

#### V.1.4. Modèle de Xu et al



Figure V.7 : Morphologie en « papillon »

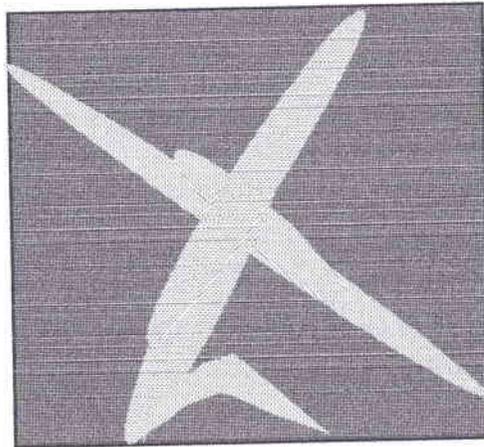


Figure V.8 : intersection de deux plaquettes

Ping XU et J.W.Morris ont simulé l'évolution microstructurale durant la transformation martensitique d'un monocristal. La surface est entourée d'une matrice qui ne se transforme pas. L'ensemble est soumis à une contrainte interne. Un tenseur caractéristique est associé à la zone pouvant se transformer. La présence d'une matrice non transformable conduit à la formation de microstructures composées de plusieurs variantes. L'effet d'une contrainte est analysé en décomposant cette contrainte en part déviatorique et hydrostatique. Les auteurs ont montré que la part hydrostatique modifie la température  $M_s$  sans modifier la microstructure ou  $\Delta M_s$ . La part déviatorique conduit à une microstructure présentant une plus grande proportion de variantes favorables.  $\Delta M_s$  est également changé.

La transformation est obtenue par minimisation à chaque pas de l'énergie élastique et en calculant la force motrice chimique nécessaire pour maintenir l'équilibre thermodynamique, en faisant l'hypothèse qu'elle est proportionnelle à l'écart à la température d'équilibre ( pour le refroidissement)

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

### V.1.5. Modèle de Wen et al

Ils ont proposé un modèle bidimensionnel pour décrire le comportement d'un grain au cours de sa transformation. Ils décrivent la manière dont le grain se remplit de plaquettes de martensite. La géométrie des plaquettes est prédéfinie par le maillage aux éléments finis.

L'avancement de la transformation est gouverné par un critère thermodynamique qui prend en compte à la fois les forces motrices chimique et mécanique et l'énergie résistive associée aux incompatibilités de déformation de transformation.

Le critère complet s'écrit :

$$\delta(\Delta G^{A-M}) = [-\delta(\Delta G_{ch}^{A-M}) - \delta W + \delta E] / V_b$$

$\delta(\Delta G_{ch}^{A-M})$  : variation de la différence d'énergie libre chimique associée à la transformation d'une nouvelle bande de volume  $V_b$

$$\delta(\Delta G^{A-M}) = (\Delta G_{ch}^{A-M}) V_b = \Delta S^{A-M} * (T - T_0) * V_b$$

$\Delta S^{A-M}$  : variation de l'entropie, T température de l'essai,  $T_0$  température d'équilibre

$\delta W$  : force motrice mécanique (MDF)

Arrangements structuraux obtenus à partir du critère de transformation complet

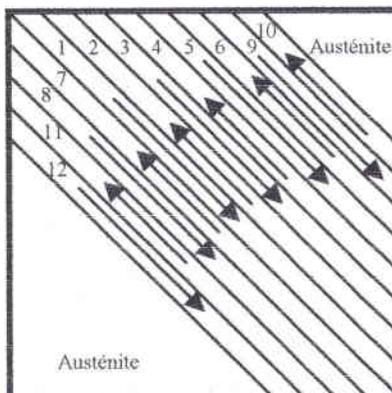


Figure V.9 : cas sans contrainte

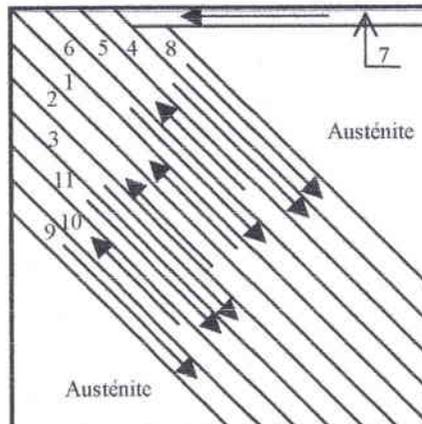


Figure V.10 : cas avec une contrainte appliquée de 500 MPa

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

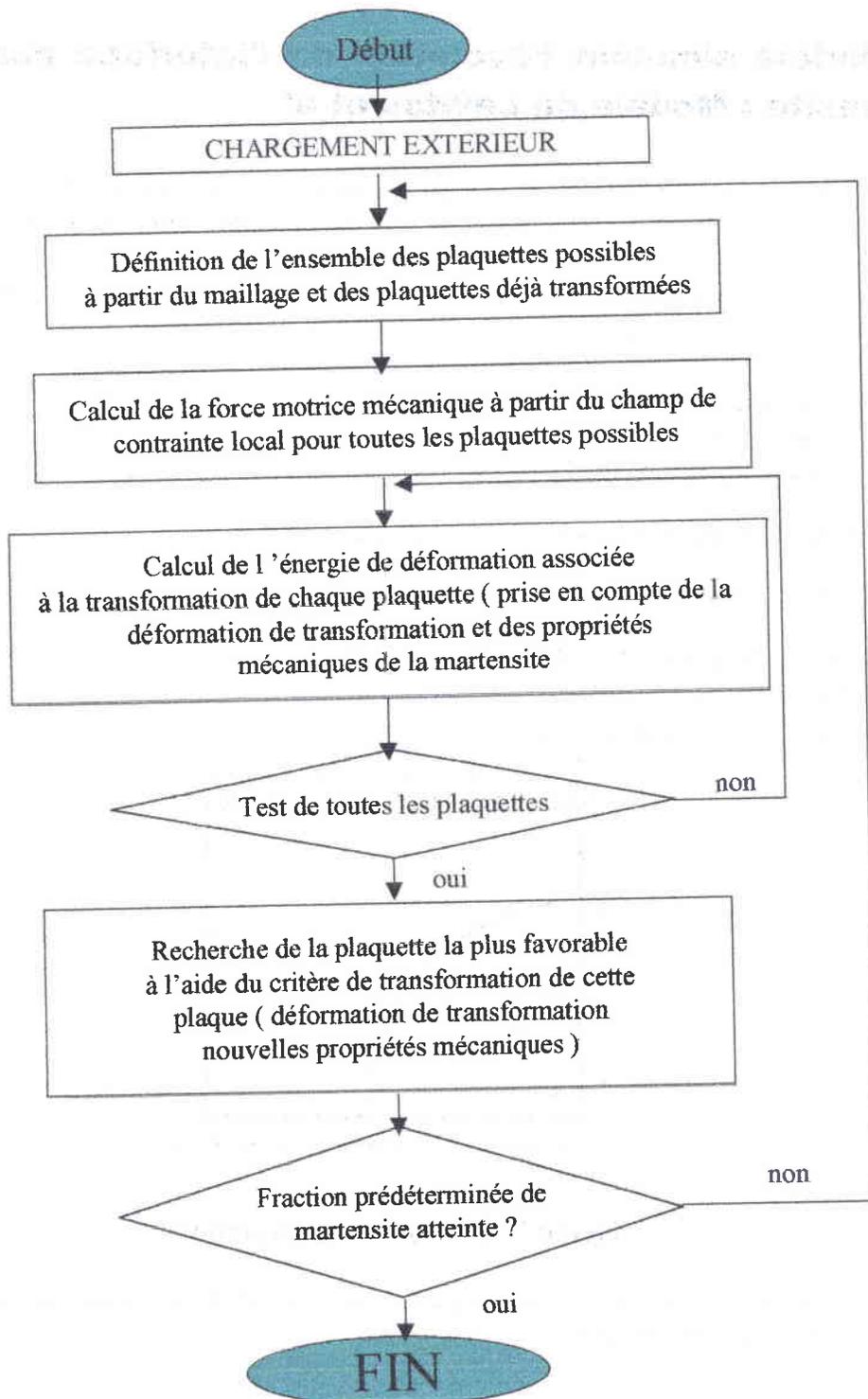


Figure V.11 : algorithme de simulation de la transformation

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

## V.2 Modèle simulant l'évolution de l'interface austénite – martensite : Modèle de Levitas et al

Ils ont proposé un modèle en 2D. Ce modèle est soumis à la compression. Le milieu de départ est biphasé et en fonction des valeurs de certains critères, ils ont défini trois types d'interface :

- une interface cohérente
- une interface non cohérente : discontinuités de part et d'autre de l'interface
- des fissures

Les critères de transformation sont les suivantes :

- $\tau_s$  = scission critique
- $\sigma_c$  = contrainte normale critique
- $u_{s1}$  : composante tangente de la vitesse à l'interface
- $u_{21}$  : composante tangente de la vitesse à la matrice
- $u_{22}$  : composante tangente de la vitesse à l'inclusion
- $\tau$  = contrainte tangente à l'interface
- $\sigma_n$  = contrainte normale à l'interface

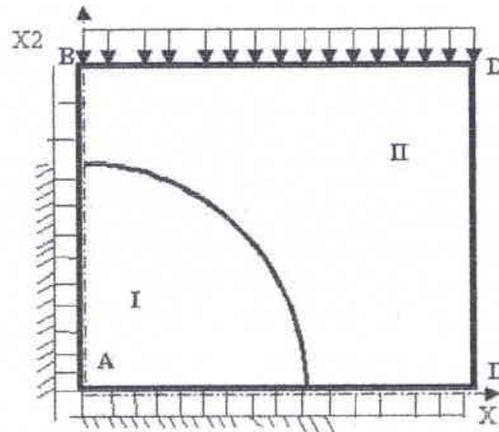


Figure V.12 : disposition des phases

Lorsque la matrice est élastique, nous sommes en présence d'une interface cohérente. L'interface devient non cohérente si :

$$|\tau| < \tau_s \Rightarrow u_{21} - u_{s1} = 0$$

$$\text{et } |\tau| = \tau_s \Rightarrow u_{s2} - u_{22} \neq 0$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Il y a fissure :

$$\text{si } |\sigma_n| < \sigma_c \Rightarrow \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 = 0, \text{ alors } \sigma_n = \tau = 0$$

$$|\sigma_n| = \sigma_c \Rightarrow \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 \neq 0$$

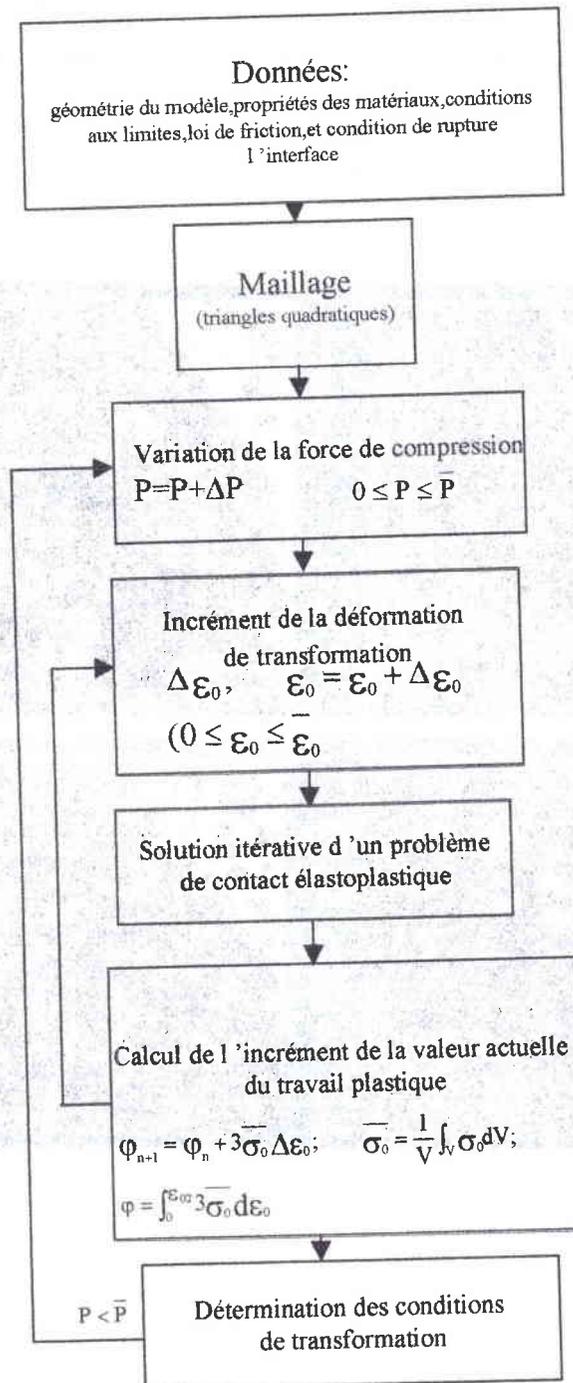


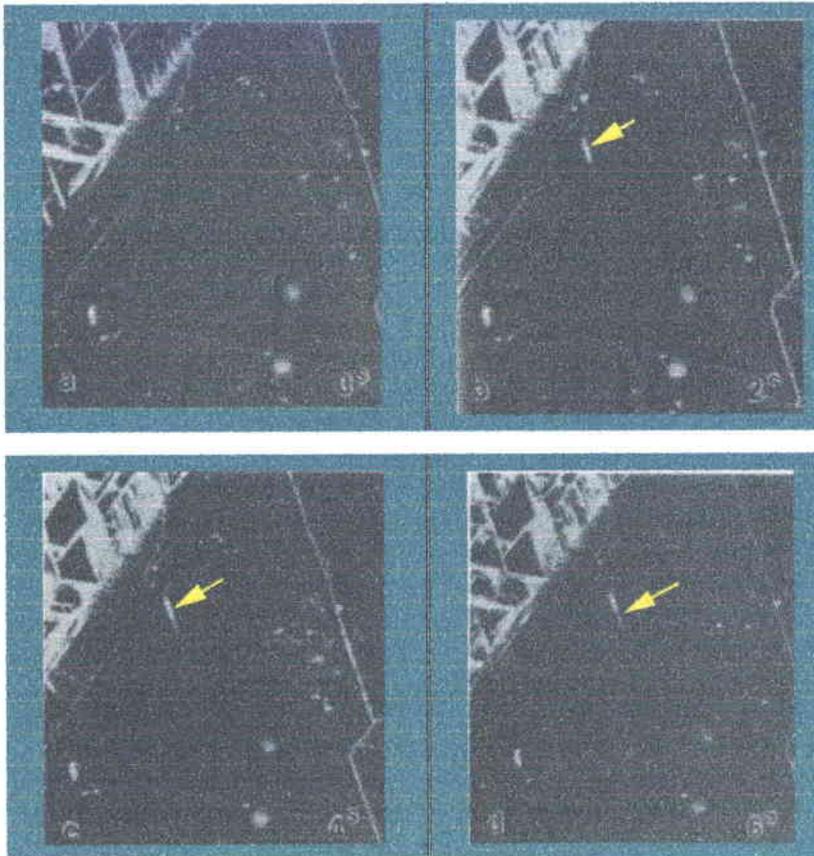
Figure V.13 : algorithme de la simulation

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

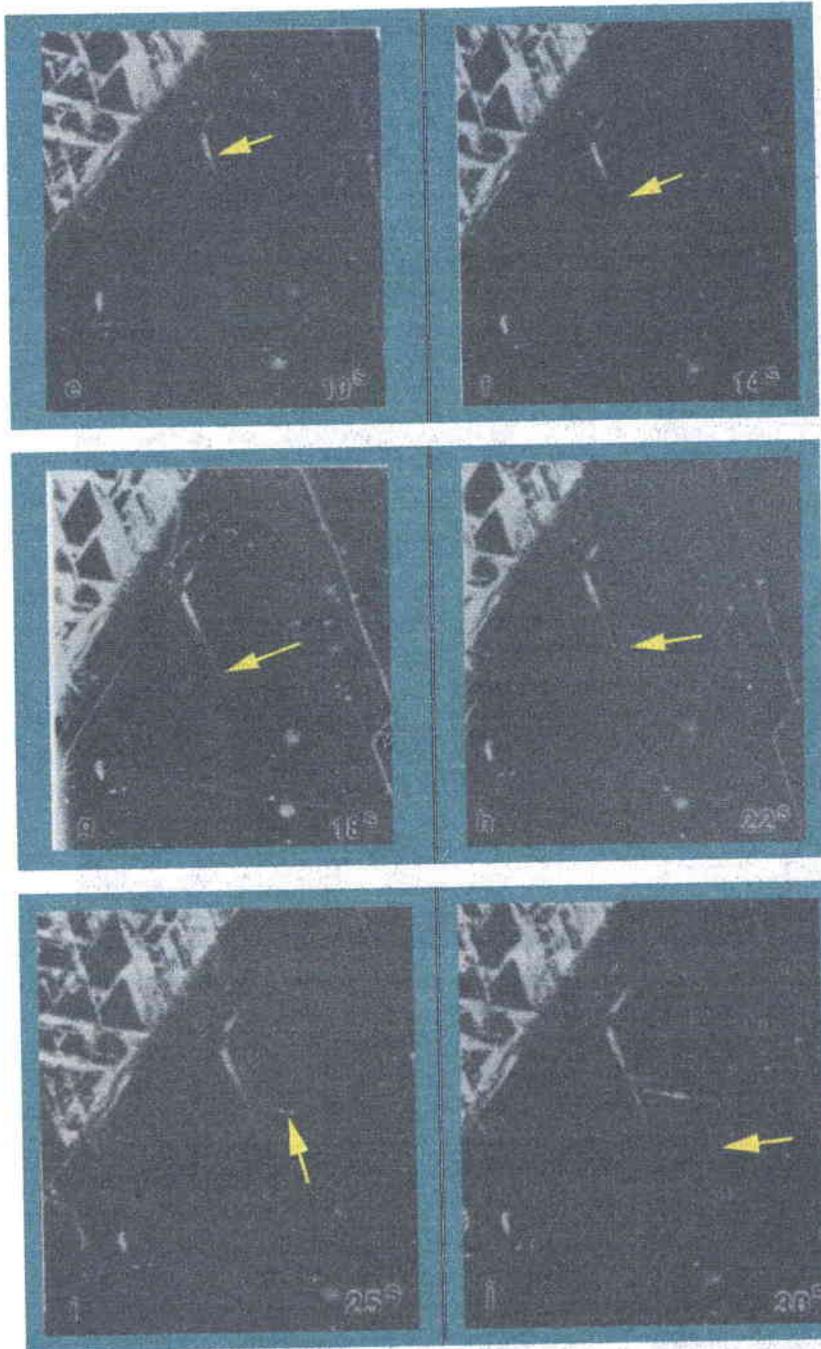
### V.3 EVOLUTION DE LA MICROSTRUCTURE LORS D'UNE TRANSFORMATION ISOTHERME [ YW84 ]

Yang et Wayman ont observé la formation de plaquettes de martensite en lattes dans un alliage Fe – 21Ni – 4Mn de manière isotherme à  $-80^{\circ}\text{C}$ , avec une vitesse de croissance très lente :  $2,53 \cdot 10^{-3}$  cm/s soit  $10^{-8}$  fois la vitesse de formation dans le cas d'un refroidissement. Les micrographies suivantes sont les résultats de leurs observations :

*La flèche indique selon le cas une zone de germination ou une zone de croissance de la plaquette en formation.*



Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique



Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

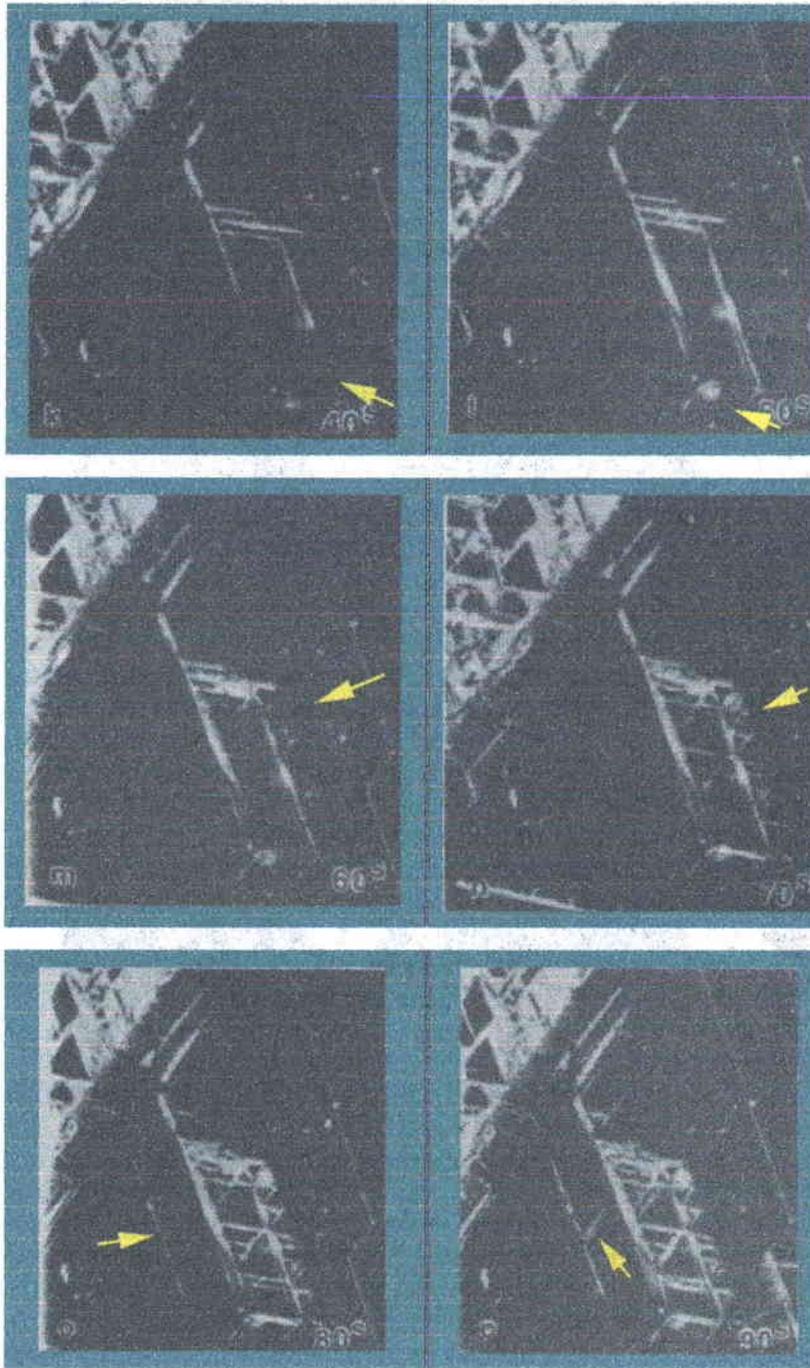


Figure V. 14 : micrographie de l'avancement de la transformation martensitique

Cette évolution de la transformation sera utilisée comme base de comparaison qualitative avec les résultats de notre modèle..

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

## V.4 CONCLUSION

Nous avons présenté deux types de modèles :

1. des modèles simulant un arrangement structural
2. un modèle simulant le comportement de l'interface austénite - martensite.

L'objectif principal des modèles simulant un arrangement structural est le calcul mécanique associé à la transformation. La plupart de ces modèles utilisent la force motrice de Patel et Cohen pour simuler la transformation. En effet, ils se basent sur le fait qu'un couplage entre la contrainte externe et le tenseur de déformation locale conduit à la formation d'une plaquette favorable.

Avec le modèle proposé par Levitas et al, nous avons une simulation de l'évolution de l'interface austénite - martensite. Le type d'interface est déterminé principalement par l'intensité de la contrainte et la composante tangente de la vitesse à l'interface.

Les observations in situ faites par Yang et Wayman montrent que la formation de la plaquette de martensite est progressive lorsque  $T = \text{constante}$ .

Pour notre simulation, en lieu et place du couplage contrainte externe - tenseur des déformations locales, nous utiliserons le couplage contraintes internes - tenseur des déformations de transformation au travers de la force motrice. Comme pour les travaux de Yang et Wayman, notre simulation se fera dans les conditions isothermes avec  $T > M_s$ .

## V.5 BIBLIOGRAPHIE

Référence	Auteurs	Titre	Pages	Edition	Année
ER86	Erickssen J.L		951	Int. J. Solids and Structures, ,vol.22	1986
GA91	J.F.Ganghofferr, S.Denis, E.Gautier, A.Simon, K.Simonsson S.Sjöström		C477	J.Physique IV, Colloque C4,, vol.1	1991
KRK79	N.S.Kosenko, A.L.Roytburg L.G.Khandros		48-56	Phys.Met.Metall.,vol.4 4	1979
LIS97	V.I. Levitas, A.V. Idesmann E.Stein	Finite element simulation of martensitic phase transitions in elastoplastic materials			1997
MA66	Magee			PhD Thesis ,Carnegie Institute of Technologie,Colege of Engineering and Science, Pittsburg,PA	1966
MA94	F.Marketz F.D.Fischer	A micromechanical study on the coupling effect between microplastic deformation and martensitic transformation.	307	Comput. Mater. Science 3	1994
PAR84	M.Pankova A.L. Roytburg		81-90	Phys.Met.Metall.,vol.5 8	1984
PEB93	E.Patoor, A.Eberhardt, M.Bervellier		38-54	Research Notes in Mathematics Series. PITMAN,vol.296	1993
SI95	Simonsson			PhD Thesis, Linköping University	1995
WE97	Wen Youhai	Approche micromécanique et simulation numérique par éléments fins de la transformation martensitique sous contrainte		Thèse,INPL de Nancy	1997
XM92-93	Ping Xu J.W. Morris Jr	micromechanical modelling of stress-assisted martensitic transformation. Modelling Simul.,	2999- 3012 1281- 1294	Met.Trans.A, vol 23A vol.24A Mater. Sci. Eng. 2	1992 1993
YW84	D.Z. Yang C.M. Wayman	Slow growth of isothermal lath martensite in an Fe-21Ni-4Mn alloy	949 – 945	Acta metall. Vol.32, N°6	1984

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et  
numérique

## VI. IMPLANTATION SUR ABAQUS ET RESULTATS OBTENUS

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Au chapitre II, nous avons montré que la transformation martensitique est très sensible aux contraintes et qu'une déformation de l'austénite pouvait déclencher des transformations même pour des températures supérieures à  $M_s$ . La présente simulation se fera dans ces conditions c'est-à-dire :  $T > M_s$  et dans un chargement en traction uniaxiale.

En utilisant la méthode des éléments finis (MEF), nous montrerons la relation qui existe entre la microstructure de transformation et les variables internes.

La méthode des éléments finis (MEF) est un outil de discrétisation. Le domaine, dans lequel on désire effectuer la simulation, est découpé en "éléments" ou sous-domaines.

L'application des conditions d'équilibre et des lois de comportement de la mécanique permet de construire des équations approchées. Les inconnues sont les valeurs de la solution en un ensemble bien choisi de points appelés les nœuds de la discrétisation. Les fonctions sont continues sur chaque sous-domaine et vérifient certaines conditions à la frontière. L'équation intégrale ainsi obtenue, appliquée à tout le système, est transformée en une somme d'intégrales : l'énergie totale est la somme des énergies calculées dans chacun des sous-domaines.

Une simulation réaliste peut exiger des centaines de milliers de nœuds et d'éléments. Les systèmes à résoudre sont donc énormes et demandent l'emploi d'ordinateurs puissants. Les codes commerciaux très performants sont par ailleurs limités du point de vue de la recherche. Pour la résolution de problèmes spécifiques, nous sommes souvent obligés de modifier toute la partie loi de comportement et rajouter des modules aux codes existants, ce qui n'est malheureusement pas toujours possible. Beaucoup de codes sont de ce point de vue des codes fermés.

Pour notre étude, nous avons utilisé le code commercial ABAQUS [AB5.8]. Vu la spécificité du problème que nous avons à résoudre, il aurait fallu un code ouvert, modifiable à volonté. Malheureusement ce type de code n'est pas disponible au LPMM.

Les travaux de Johnson et Mellor [JM62], Batoz et Dhatt [BD90], Zienkiewicz et Taylor [ZT89] et Hinton et Owen [HO80], nous ont beaucoup aidé dans la réalisation de la présente étude.

Dans la première partie (paragraphe VI.1.1), nous avons discrétisé un monocristal d'austénite ayant les caractéristiques suivantes :

- L'élasticité est supposée isotrope (modules  $\lambda, \mu$ )
- La plasticité de l'austénite est décrite par un critère de Von Mises, la loi d'écoulement associée est un écrouissage isotrope
- La plasticité de la martensite est décrite de manière identique
- La transformation martensitique est décrite pour chaque élément par l'intermédiaire des variantes pour lesquelles la déformation de transformation est donnée
- La variante active dans l'élément sera celle qui possède la force motrice  $F_M^1$  la plus élevée.

Les résultats obtenus (paragraphe VI.6) concernent :

- Le développement des variantes
- L'évolution de la fraction volumique
- L'évolution des contraintes internes

Dans la seconde partie (paragraphe VI.1.2), nous présentons uniquement une autre méthode de résolution dans laquelle la transformation martensitique est décrite par une déformation moyenne de transformation pour chaque élément en fonction (linéaire ou non) de l'état de contrainte dans l'élément. La progression de la transformation est décrite comme au paragraphe VI.1.1. Faute de temps, ce modèle n'a pas été implanté dans le code numérique.

**Grandes étapes :**

- Programmation
- Résultats des simulations

Nous avons utilisé le sous-programme UMAT (User MATerial) pour introduire la loi de comportement.

Les courbes de traction sont l'œuvre de Frédéric BUMBIELER [BU99].

## VI.1 COMPORTEMENT GLOBAL

Pour étudier l'évolution de la microstructure, nous devons déterminer l'évolution des variables internes suivantes :

- La déformation totale
- La déformation élastique
- La déformation de transformation
- La déformation plastique
- La contrainte

La détermination de la déformation de transformation est fonction du milieu modélisé. Si nous utilisons une structure fine pour modéliser le milieu, nous pouvons considérer que nous n'avons qu'une variante par point de Gauss. Pour ce cas, l'approche cristallographique sera utilisée pour la détermination de la déformation de transformation. Lorsque nous avons plusieurs variantes par point de Gauss, nous utiliserons l'approche phénoménologique pour la détermination de la déformation moyenne de transformation.

### VI.1.1 Approche cristallographique

L'incrément de la déformation totale a pour expression :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^P + \varepsilon_{ij}^T \quad [VI.1]$$

En appliquant la loi de Hooke, nous allons définir le champ des incréments de contraintes internes locales comme suit :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \quad [VI.2]$$

$$\text{si } \mathbf{r} \in V_{\text{Austénite}} \quad C_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^A \quad [VI.3]$$

$$\text{si } \mathbf{r} \in V_{\text{Martensite}} \quad C_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^M \quad [VI.4]$$

En combinant les équations [VI.2] et [VI.3], nous obtenons :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r})(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T - \varepsilon_{kl}^P) \quad [\text{VI.5}]$$

Les deux milieux (austénite et martensite) ont les mêmes constantes élastiques :

$$C_{ijkl}^A = C_{ijkl}^M \quad [\text{VI.6}]$$

En appliquant la loi de la normalité et la règle d'écoulement plastique associée (annexe A1.3.3.7), nous avons défini l'incrément de la déformation plastique :

$$\varepsilon_{ij}^P(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad [\text{VI.7}]$$

L'écrouissage est fonction du milieu :

$$\text{si } \mathbf{r} \in V_{\text{Austénite}} \quad \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^{PA} \quad [\text{VI.8}]$$

$$\text{si } \mathbf{r} \in V_{\text{Martensite}} \quad \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^{PM} \quad [\text{VI.9}]$$

Dans la suite du problème, nous utiliserons le critère de Von Misès en considérant que le milieu est isotrope et incompressible.

La figure VI.1 illustre l'évolution de l'écrouissage (isotrope) dans les deux phases que nous avons décrit par une loi puissance.

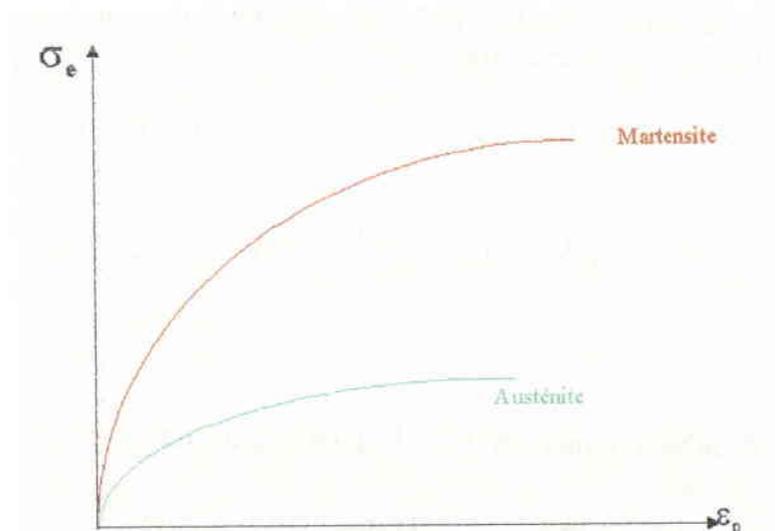


Figure VI.1 écouissage dans la phase austénitique et dans la phase martensitique

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Comme dans le cas du monocristal, nous n'avons qu'une variante par élément de volume. La détermination de cette variante a été étudiée au chapitre IV. Nous avons écrit son expression sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{1}{2} \gamma (m_i n_j + m_j n_i) = \gamma R_{ij} \quad [\text{VI.10}]$$

Plusieurs investigations ont été effectuées ([WLR53], [NI71] et [OOT78]) pour la détermination des plans et les directions de cisaillement permettant de quantifier la déformation de transformation dans les alliages Fe – Ni.

En utilisant la théorie de Weschler – Lieberman – Read [WLR53] et en nous référant à Nishiyama [NI71], nous obtenons les systèmes suivants pour définir les différentes variantes de martensite et quantifier leurs déformations de transformation :

$$\begin{aligned} \vec{n} [0,1848 \quad 0,7823 \quad 0,5948] &\approx [4 \quad 17 \quad 13] \\ \vec{m} [0,2090 \quad 0,7090 \quad 0,6736] &\approx [8 \quad 27 \quad 26] \end{aligned} \quad [\text{VI.11}]$$

Ceci génère 24 variantes possibles d'un point de vue cristallographique.

L'évolution de la déformation de transformation pendant la phase de transition austénite - martensite est liée à l'évolution de la fraction volumique de la martensite transformée :

$$\varepsilon_{ij}^T = \gamma R_{ij} \cdot f \quad [\text{VI.12}]$$

Il reste donc à définir le critère de sélection de la variante active et de calculer l'évolution de la fraction volumique correspondante à partir des équations de la thermodynamique mettant en jeu la force critique et la force motrice.

Au chapitre IV, nous avons démontré que la puissance dissipée à la frontière mobile a pour expression :

$$D_{\Sigma} = \int_{\Sigma} (\{\sigma_{ij}\} \{\varepsilon_{ij}^{in}\} - B\theta) \cdot w_{\alpha} n_{\alpha} \cdot d\Sigma \quad [\text{VI.13}]$$

La force motrice déduite de l'équation [VI.13] a pour expression :

$$F_M^I = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_i} - B(T - T_0) \quad [\text{VI.14}]$$

La variante active par élément sera celle qui possède la plus grande force motrice. Nous allons maintenant comparer cette force motrice à la force critique  $K(f)$  dépendant de la variable interne  $f$ . L'évolution de la fraction volumique  $f$  est alors donnée par :

$$f = 0 \quad \text{si} \begin{cases} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_I} - B(T - T_0) - K(f) = 0 & \text{(a)} \\ \text{et } \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_I} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_{II}} - B\dot{T} - \dot{K}(f) < 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad [\text{VI.15}]$$

$$f > 0 \quad \text{si} \begin{cases} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_I} - B(T - T_0) - K(f) = 0 & \text{(a)} \\ \text{et } \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_I} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_{II}} - B\dot{T} - \dot{K}(f) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad [\text{VI.16}]$$

La condition de consistance (équation [VI.16.b]) permet d'obtenir l'évolution de la fraction volumique de la variante I. Nous avons :

$$\dot{f}_M = \dot{K}(f) \quad [\text{VI.17}]$$

Avec

$$\dot{K}(f) = \frac{\partial K}{\partial f} \dot{f} \quad [\text{VI.18}]$$

Nous obtenons finalement :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_I} + \sigma_{ij} \gamma R_{ij}^I \dot{f} - B\dot{T} = \frac{\partial K}{\partial f} \dot{f} \quad [\text{VI.19}]$$

De l'équation [VI.19] nous déduisons  $\dot{f}$  :

$$\dot{f} = (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{T_I} - B\dot{T}) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial K}{\partial f} - \sigma_{ij} \gamma R_{ij}^I\right)} \quad [\text{VI.20}]$$

Nous avons rajouté la contrainte évidente  $0 < f < 1$  dépendant de l'état de transformation dans les équations.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

La combinaison des équations [VI.12] et [VI.20] donne :

$$\varepsilon_{ij}^{T_I} = \gamma R_{ij}^I (\sigma_{kl} \gamma R_{kl}^I - B T) \frac{1}{a} \quad [\text{VI.21}]$$

Avec

$$a = \frac{\partial K}{\partial f} - \sigma_{kl} \gamma R_{kl}^I$$

Nous considérons que la loi qui lie la force critique à la fraction volumique de martensite est du type linéaire. Nous avons :

$$K(f) = a_0 + a_1 \cdot f \quad [\text{VI.22}]$$

Le tableau VI.1 résume les caractéristiques du matériau .

Paramètres	Valeurs
B	-0,904 MPaK <sup>-1</sup>
a <sub>0</sub>	72 MPa
a <sub>1</sub>	20 MPa
T <sub>0</sub>	7°C = 280°K
γ	0,2

*Tableau VI.1 : caractéristiques du matériau*

Pour la simulation, nous avons établi l'algorithme représenté par la figure VI.2 . Les résultats obtenus sont présentés dans la paragraphe VI.6.

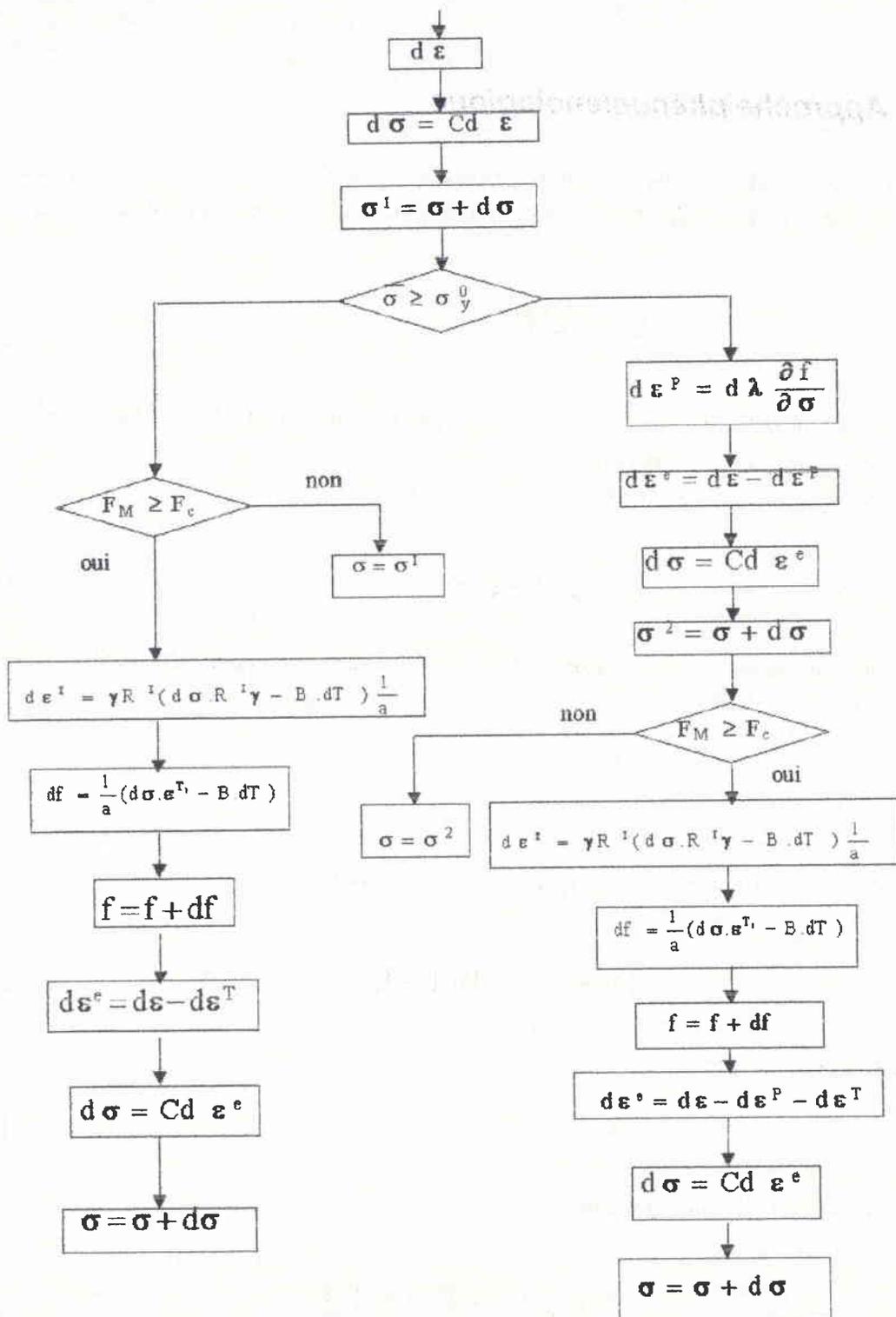


Figure VI.2 : algorithme de résolution dans le cas de l'approche cristallographique

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

### VI.1.2 Approche phénoménologique

L'approche précédente requière la connaissance des orientations des réseaux cristallins pour définir les déformations de transformation des variantes actives. Ici, on écrira  $\epsilon^T$  sous la forme :

$$\epsilon_{ij}^T = e_{ij}^T f \quad [\text{VI.23}]$$

$e_{ij}^T$  est maintenant la déformation moyenne de transformation sur le volume transformé et  $f$  la fraction volumique de martensite. Lors d'une évolution, nous avons :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T = \dot{e}_{ij}^T f + e_{ij}^T \dot{f} \quad [\text{VI.24}]$$

et si nous supposons que le mécanisme de réorientation est inactif (hypothèse raisonnable pour les aciers), il subsiste :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T = \dot{e}_{ij}^T \cdot f \quad [\text{VI.25}]$$

La dissipation s'écrit si on suppose que  $\sigma$  est la force motrice mécanique :

$$D = \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^T - B(T - T_0) \dot{f} \quad [\text{VI.26}]$$

et avec l'hypothèse que :

$$e_{kk}^T = 0 \quad [\text{VI.27}]$$

l'équation de la dissipation devient :

$$D = s_{ij} \cdot \dot{e}_{ij}^T f - B(T - T_0) \dot{f} \quad [\text{VI.28}]$$

La déformation de transformation moyenne est fonction du déviateur des contraintes :

$$e_{ij}^T = k(s_{ij}) \quad [VI.29]$$

La relation existant entre  $e_{ij}^T$  et  $s_{ij}$  peut être régie par deux types de lois :

- Une loi linéaire
- Une loi non linéaire ( valable pour des faibles contraintes appliquées)

Dans le **cas linéaire**, la déformation de transformation a pour expression :

$$e_{ij}^T = \frac{k}{2} s_{ij} \quad [VI.30]$$

La combinaison des équations [VI.28 ] et [VI.30 ] donne :

$$D = \left[ s_{ij} \frac{k}{2} s_{ij} - B(T - T_0) \right] f \quad [VI.31]$$

en utilisant  $J_2$  nous écrivons :

$$D = [k.J_2 - B(T - T_0)] f \quad [VI.32]$$

En introduisant une force critique  $K(f)$ , nous obtenons l'équation pour le seuil de transformation :

$$k.J_2 - B(T - T_0) - K(f) = 0 \quad [VI.33]$$

L'équation d'évolution de  $\varepsilon^T$  s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{k}{2} s_{ij} f \quad [VI.34]$$

avec

$$k \frac{dJ_2}{dt} - B \frac{dT}{dt} = \frac{\partial K}{\partial f} \cdot \frac{df}{dt} = H \dot{f} \quad [\text{VI.35}]$$

nous obtenons finalement l'équation de l'incrément de la déformation de transformation :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{k}{2} s_{ij} \frac{1}{H} (k \cdot \dot{J}_2 - B \dot{T}) \quad [\text{VI.36}]$$

$k$ ,  $H$ , et  $B$  sont des paramètres du matériau.

L'algorithme de calcul correspondant est représenté par la figure VI.3.

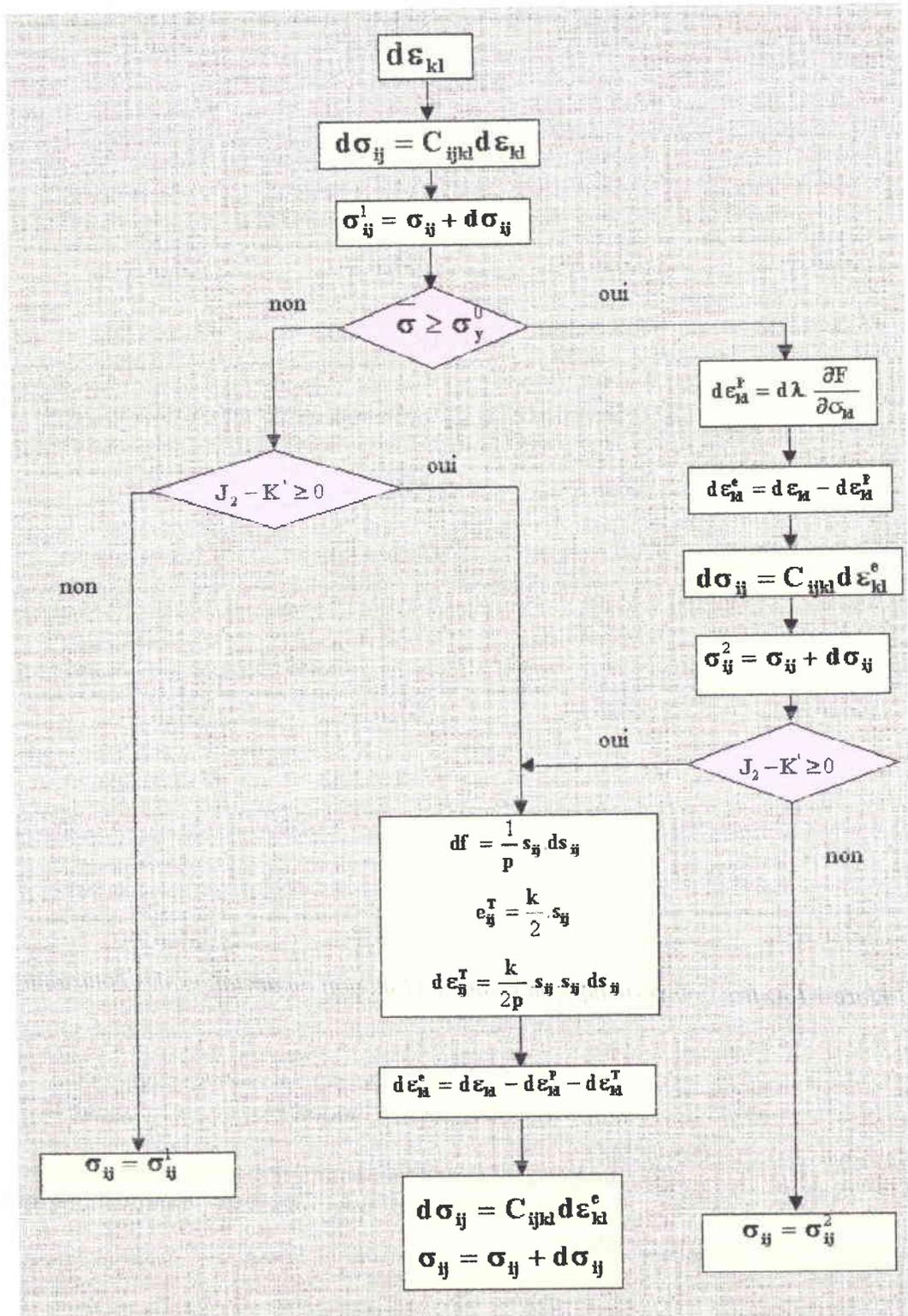


Figure VI.3 : algorithme de résolution dans le cas linéaire

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Dans le **cas non linéaire**, il s'agit de prendre en compte la saturation de l'effet Magee avec les contraintes. Nous écrivons :

$$\varepsilon_{ij}^T = e_{ij}^T \cdot f \quad [VI.37]$$

et

$$e_{ij}^T = k(J_2) \cdot s_{ij} \quad [VI.38]$$

L'allure de l'évolution de la déformation de transformation moyenne par rapport au déviateur des contraintes est illustrée par la figure VI.4

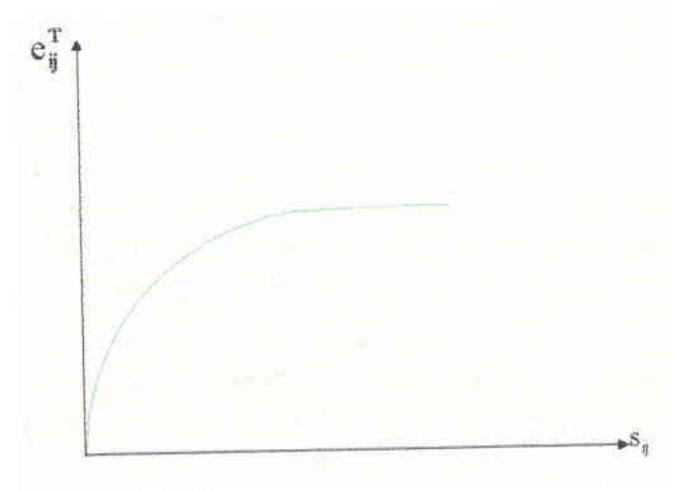


Figure VI.4: fraction volumique moyenne en fonction du déviateur des contraintes

La simulation que nous avons effectuée ne porte que sur la première approche. Dans les paragraphes suivants, nous allons détailler la méthodologie de la programmation en élastoplasticité avec changement de phase.

La première partie de la méthodologie concerne l'implantation du programme dans le cas de l'élastoplasticité simple. Grâce à un algorithme, nous montrerons les modifications apportées pour simuler le changement de phase.

## VI.2 Programmation

La première étape de la programmation consistera à adapter la loi incrémentale prenant en compte la transformation.

### VI.2.1 Loi incrémentale en plasticité classique avec écrouissage isotrope

[ZI71]

$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^p$ [VI.39]	
Avec : $\Delta \epsilon^e = D^{-1} \Delta \sigma$	$D^{-1}$ matrice de souplesse
$\Delta \epsilon^p = F_{,\sigma} \Delta \lambda$	Plasticité non associée et règle de normalité
$f(\sigma, H) = 0$	Critère avec H paramètre d'écrouissage
$\Delta H = \sigma^T \Delta \epsilon^p = \sigma^T F_{,\sigma} \Delta \lambda$ [VI.40]	
$f_{,\sigma}^T \Delta \sigma + f_{,H} \Delta H = 0$ [VI.41]	Règle de consistance
$\Delta \epsilon = D^{-1} \sigma + F_{,\sigma} \Delta \lambda$	Nouvelle écriture de [VI.39]
$f_{,\sigma}^T \Delta \sigma + f_{,H} H_{,\lambda} \Delta \lambda = 0$ [VI.42]	Nouvelle écriture de [VI.41]
En posant : $f_{,\sigma} = 0$	
Et $f_{,H} H_{,\lambda} = -A$ [VI.43]	
Nous obtenons : $\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} & F_{,\sigma} \\ f_{,\sigma}^T & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}$	
$A = -f_{,H} H_{,\lambda} = -f_{,H} \sigma^T F_{,\sigma}$ [VI.44]	En plasticité parfaite A peut être nul. Il faut donc éliminer $\Delta \lambda$ sans multiplier par $A^{-1}$
Multiplions l'équation [VI.39] par $a^T D$ pour obtenir $a^T \Delta \sigma$	$a^T = f_{,\sigma}^T$
$a^T D \Delta \epsilon = a^T \Delta \sigma + a^T D F_{,\sigma} \Delta \lambda$ [VI.45]	$a^T D \Delta \epsilon - a^T D F_{,\sigma} \Delta \lambda = a^T \Delta \sigma$
En reportant $a^T \Delta \sigma$ dans l'équation [VI.42], nous obtenons :	
$0 = a^T D \Delta \epsilon - a^T D F_{,\sigma} \Delta \lambda - A \Delta \lambda$ [VI.46]	
$(A + a^T D F_{,\sigma}) \Delta \lambda = a^T D \Delta \epsilon$ [VI.47]	
$\Delta \epsilon = D^{-1} \Delta \sigma + F_{,\sigma} [A + a^T D F_{,\sigma}]^{-1} a^T D \Delta \epsilon$ [VI.48]	Incrément des déformations
$\Delta \sigma = [D^{élastoplastique}] \Delta \epsilon$ [VI.49]	Incrément des contraintes
$D^{élastoplastique} = D - D F_{,\sigma} [A + a^T D F_{,\sigma}]^{-1} a^T D$ [VI.50]	

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Plasticité « associée » $F = f$	
$A = \frac{E^T}{1 - \frac{E^T}{E}} = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon^p}$	[VI.51] $\sigma_s$ seuil actuel

La seconde étape dans la programmation consistera à utiliser la méthode de résolution incrémentale proposée par Hinton et Owen

### VI.2.2 Méthode de résolution incrémentale

[HO77] et [HO81]



Figure VI.5: schéma monodimensionnel de la résolution incrémentale

Partant d'un point Q représentant l'état actuel de chargement, il s'agit de déterminer par incrémentation le déplacement solution associé au chargement  $F_{final}$ .

Au point Q est associé le point de la courbe de traction du matériau

Le seuil actuel est noté et est associé à la déformation équivalente totale

On cherche dans l'algorithme à passer du stade r-1 au stade r.

[VI.52]	
[VI.53]	Courbe bilinéaire : la plus petite valeur du seuil d'écoulement plastique (noté auparavant)
	et sont des scalaires
[VI.54]	A : vecteur flux
[VI.55]	si

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

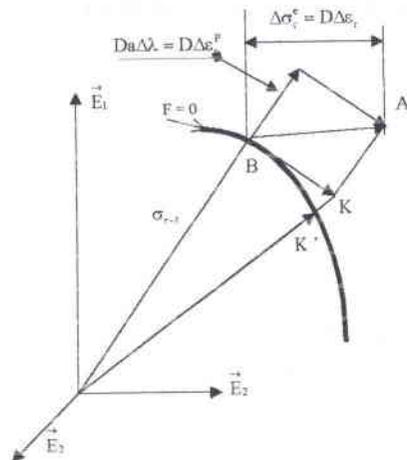


Figure VI.6: position de la surface de charge et valeur de la contrainte seuil

Si la plasticité pour le point de Gauss de l'élément fini considéré est déjà atteinte, le point figuratif doit rester sur la surface seuil. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser un facteur  $w$ .

$$\sigma_{r, \text{final}} = W \sigma_{r, \text{calculé}} \quad [\text{VI.56}]$$

$$\text{Or } \frac{\sigma_{r, \text{calculé}}}{\sigma_r} = \frac{\sigma_{r, \text{vrai}}}{\sigma_{r-1} + H'_Q \Delta \epsilon_r^p}$$

$$W = \frac{\sigma_{r-1} + H'_Q \Delta \epsilon_r^p}{\sigma_r} \quad [\text{VI.57}]$$

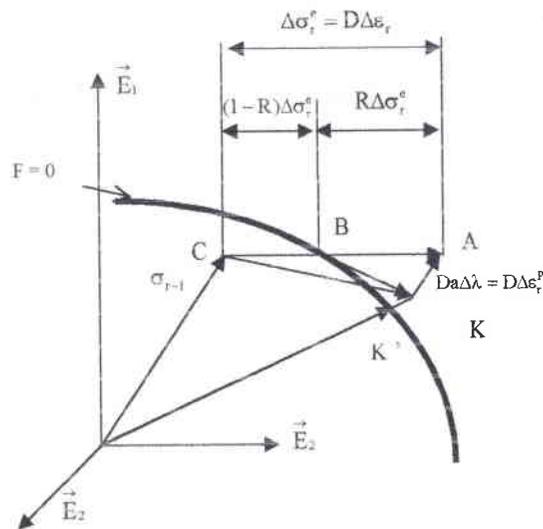


Figure VI.7: la portion de contrainte supérieure à la contrainte seuil doit être réduite

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

La portion de contrainte qui satisfait le critère de seuil au point B est :

[VI.58]

La contrainte au point K s'écrit :

[VI.59]

Pour passer de K à K', nous utilisons W, avec nous pouvons déterminer l'expression de R :

. En utilisant le triangle ABC,

[VI.60]

### VI.2.3 Programme principal avec transformation de phase

Le traitement d'un problème d'équations aux dérivées partielles comprend trois étapes :

- Description géométrique, des caractéristiques physiques et du maillage (module d'entrée)
- Mise en œuvre de la méthode des éléments finis (module de calcul)
- Visualisation et interprétation des résultats de la simulation ( module de sortie des résultats)

L'algorithme ci-dessous décrit avec précision ce qui se passe à chaque étape dans les différents modules.

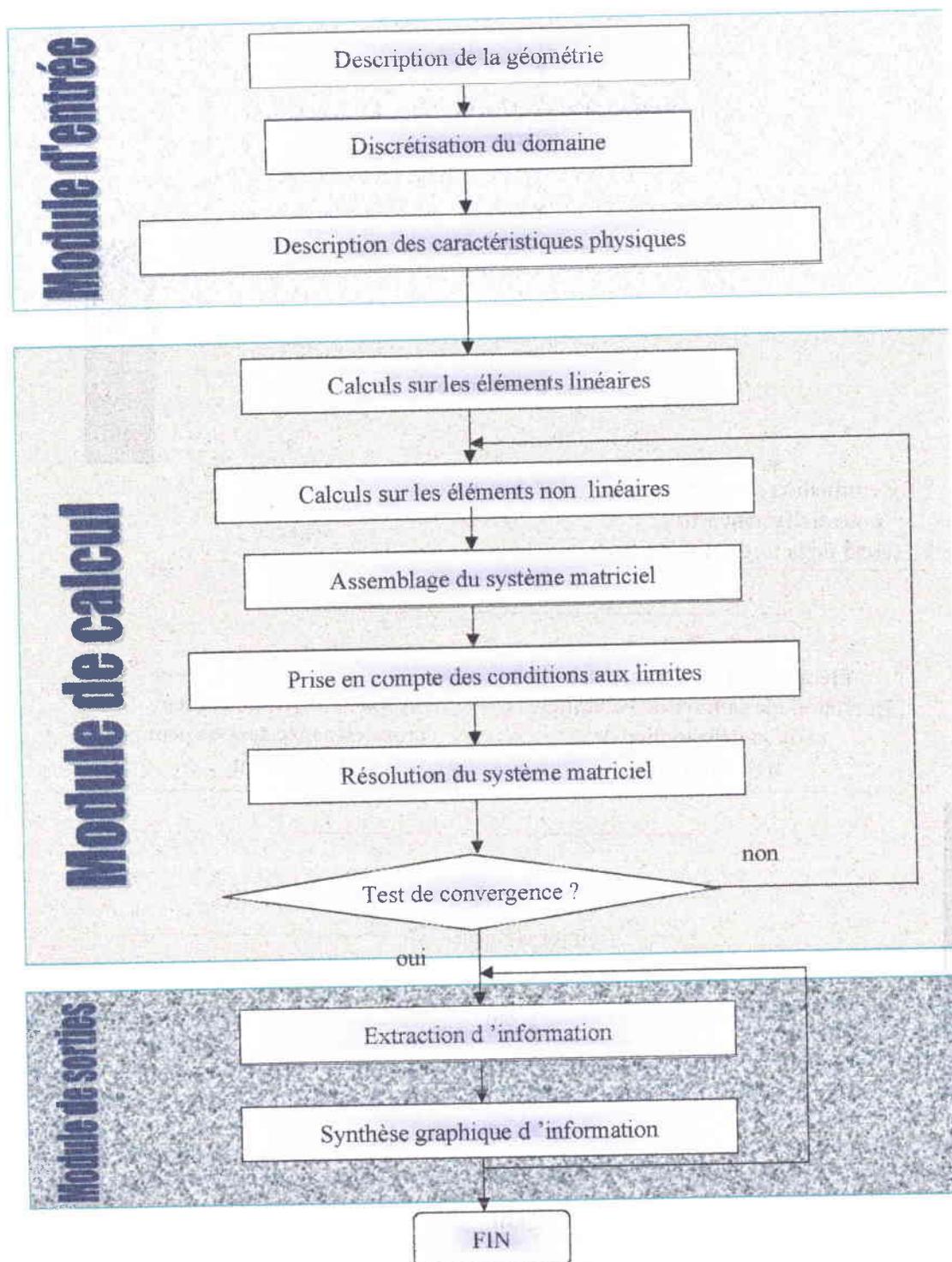


Figure VI.8 : algorithme de la méthode des éléments finis

La figure VI.9 représente l'algorithme modifié traitant le problème de changement de phase.

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

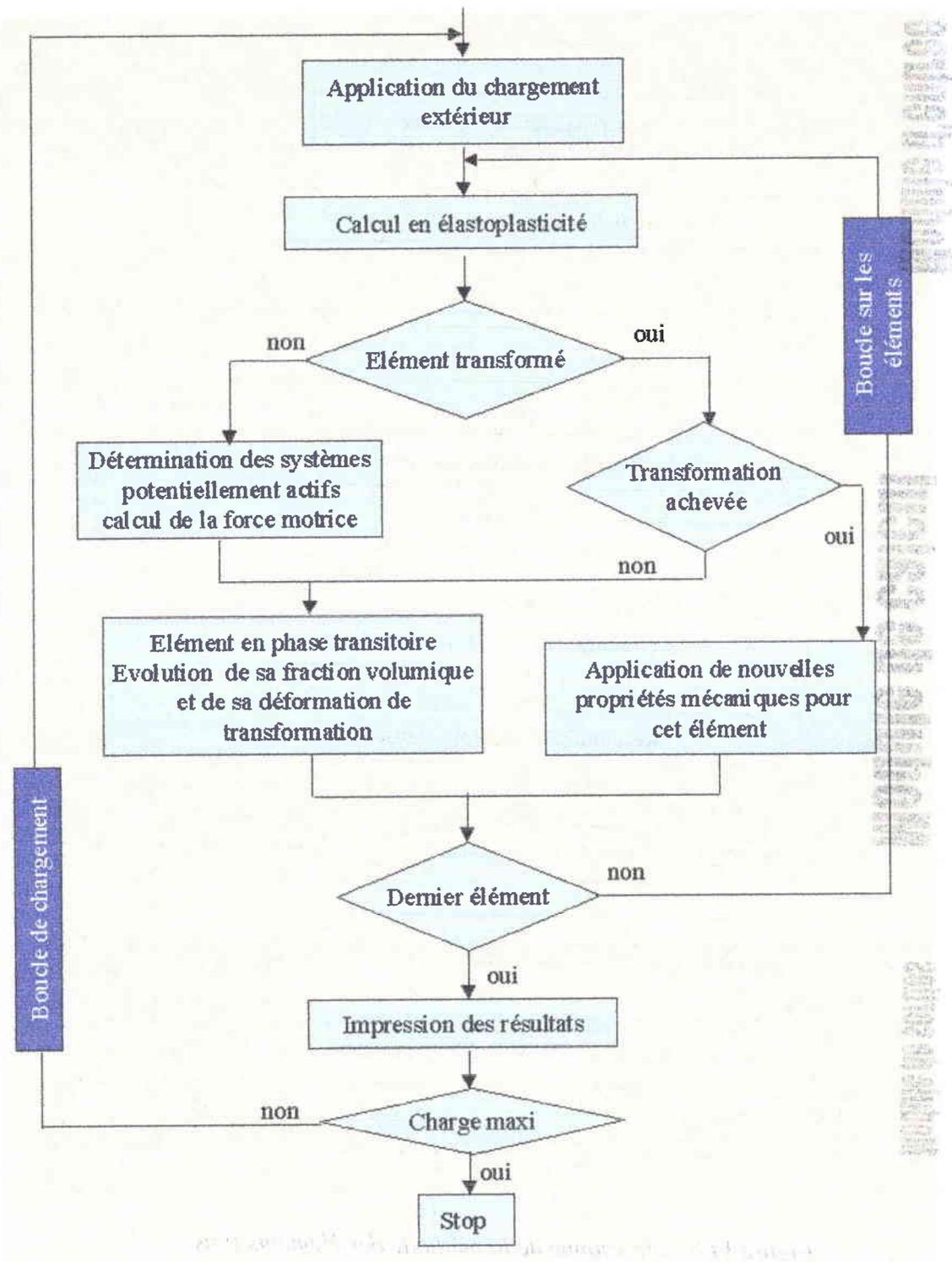


Figure VI.9 : algorithme de la simulation

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Le précédent algorithme suppose que l'évolution de la déformation de transformation est progressive au cours de la phase de transition austénite – martensite. Avec ce choix, la phase de transition sera considérée comme évolutive du point de vue des déformations de transformation et aussi du point de vue des contraintes.

### VI.3 Test de validation

L'acier simulé est fourni par l'IRSID et sa composition est la suivante :



Il a été étudié par F. Bumbieler [BU99] d'un point de vue expérimental.

Pour la validation du programme relatif à la loi de comportement, nous avons comparé la courbe de déformation plastique équivalente – contrainte de Von Mises obtenue lors de l'essai de traction par [BU99] et celle obtenue après simulation par ABAQUS/Standard et UMAT.

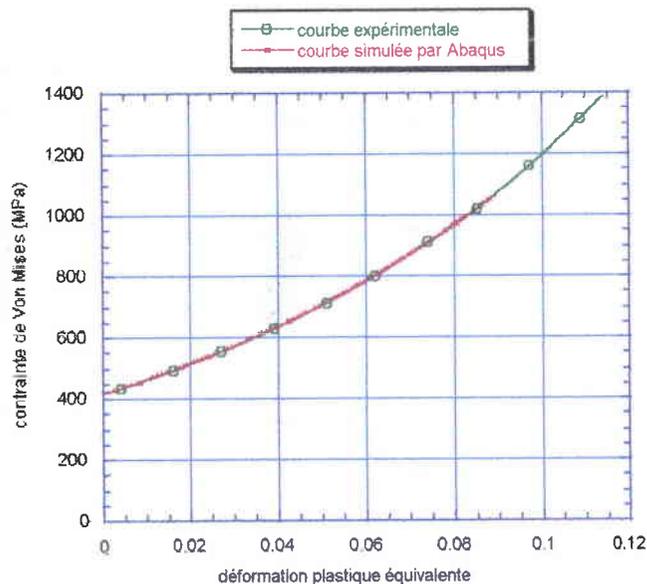


Figure VI.10 : validation de la loi de comportement

Le résultat est une parfaite superposition des deux courbes. Ce résultat très significatif prouve que le sous programme donne des résultats conformes aux données.

L'étape suivante de notre travail a consisté à la définition de la stabilité du maillage.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

## VI.4 INFLUENCE ET CHOIX DU MAILLAGE

L'influence du maillage se manifeste soit au niveau du temps de calcul, soit sur la précision des résultats obtenus. En effet, à l'interface de deux éléments, nous avons une continuité des déplacements et pas celle des contraintes.

Pour notre problème particulier, le maillage peut avoir une très grande influence sur la forme finale de la microstructure de transformation. Un maillage grossier peut conduire à une microstructure de transformation dont le contour ne reflète plus la forme finale.

Pour illustrer ce qui se passe effectivement, nous avons réalisé la micrographie des isovaleurs de Von Misès afin de montrer la variation de la précision en fonction du type de maillage et du nombre d'éléments.

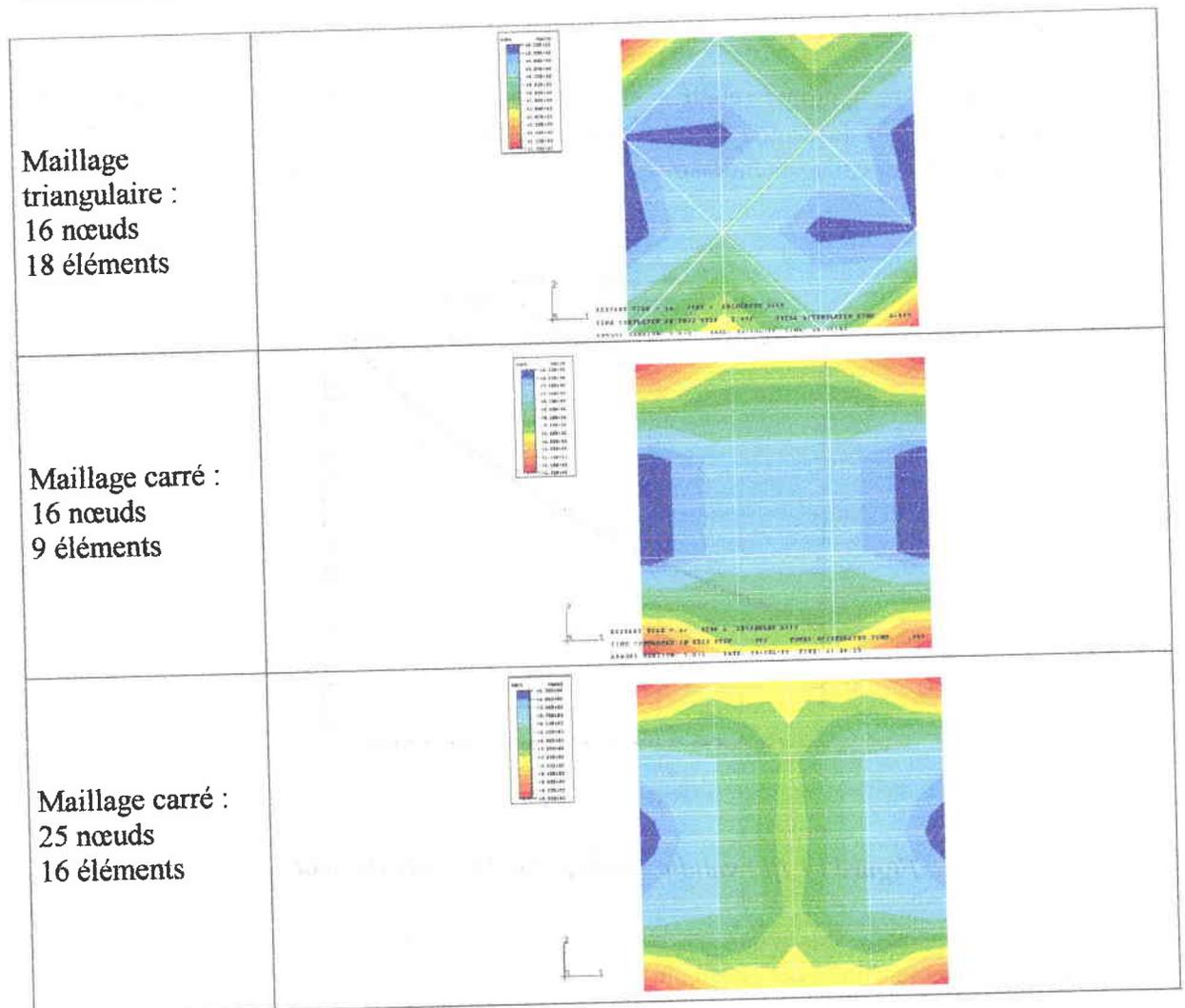


Figure VI.11 : micrographie sur l'influence du maillage sur la précision des résultats

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Nous constatons que la qualité du maillage est fonction des deux critères suivants :

- La forme des éléments (formes idéales : triangles équilatéraux, carrés, tétraèdres équilatéraux, cubes ...), sinon il y a dégradation de la solution
- La taille des éléments : l'erreur introduite par la discrétisation dépend de la dimension des éléments. Il faut une très grande finesse des éléments dans les zones où la solution est très perturbée.

Pour conclure ce paragraphe, nous dirons que plus le nombre d'éléments est grand, meilleure est la précision et plus important devient le temps de calcul. Nous avons testé plusieurs types de maillage. Pour un faible nombre d'éléments, le maillage quadrangulaire donne les meilleurs résultats. Mais lorsqu'on recherche un compromis entre la précision, le temps de calcul, les capacités de stockage et la simplicité de la mise en œuvre, le choix d'un maillage triangulaire est très raisonnable.

Compte tenu de la spécificité de la transformation martensitique : continuité des déplacements et discontinuité des contraintes, nous pouvons dire que le choix d'un élément triangulaire à un point de Gauss est tout à fait acceptable.

Nous avons supposé que les plaquettes formées dans chaque grain pouvaient se présenter sous la forme symétrique suivante :

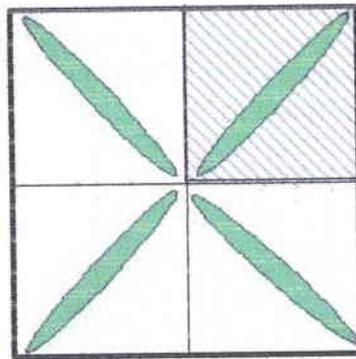


Figure VI.12 : distribution des plaquettes dans une matrice

Avec cette hypothèse, nous pouvons simuler le comportement du quart de l'éprouvette et retrouver le comportement de l'ensemble de l'éprouvette en utilisant l'effet miroir.

Il est actuellement possible de fabriquer de gros grains, mais par souci de conformité avec les observations faites in situ par KAJIWARA [ KA84 ], nous avons adopté les dimensions suivantes pour le quart de l'éprouvette :

$$120 \mu\text{m} * 120 \mu\text{m}$$

La figure VI.13 représente le schéma de l'éprouvette simulée.

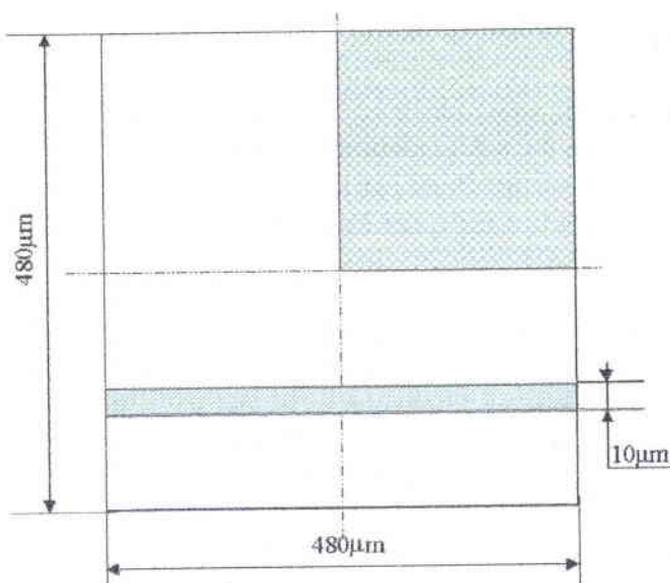


Figure VI.13 : dimensions de l'éprouvette

Le modèle que nous proposons est en 2D. Le maillage est composé de 3200 cellules de types triangulaires et chaque cellule à un seul point de Gauss. Le nombre total de nœuds est égale à 1681.

Nous avons fait ce choix de maillage parce qu'il fallait trouver un compromis entre le temps de calcul et l'espace disponible sur le disque dur.

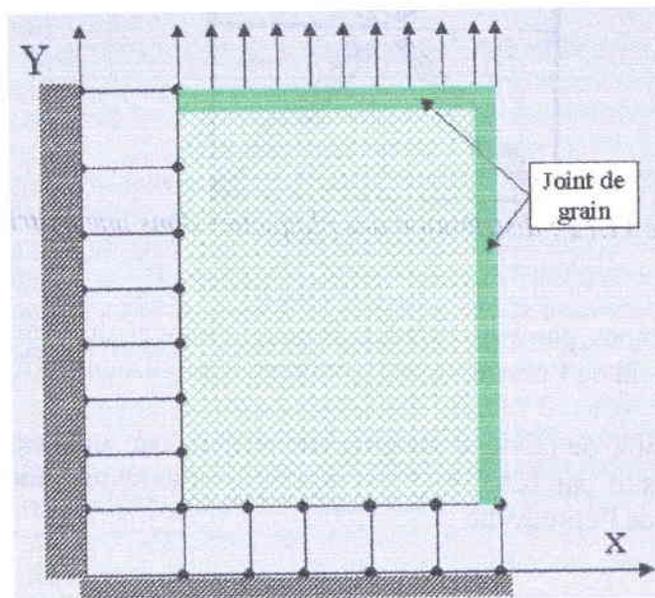


Figure VI.14 : schéma d'implantation du quart de l'élément

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

## VI.5 DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DU MATERIAU

Les courbes contrainte - déformation et résistivité - déformation vont nous permettre de déterminer toutes les caractéristiques du matériau : écrouissage dans la phase austénitique, écrouissage dans la phase martensitique et contrainte de début de transformation. Toutes les courbes ayant servi à la détermination des caractéristiques des différentes phases sont obtenues lors des essais de traction sur l'acier IRSID 100% austénitique.

### VI.5.1 Ecrouissage de la phase austénitique

La détermination des caractéristiques de la phase austénitique se fait à partir de la courbe contrainte - déformation pour un essai à 100°C.

Sur le graphe suivant, nous avons en plus de la courbe de traction conventionnelle, une courbe de résistivité. Une des caractéristiques de la transformation martensitique est la chute de la résistivité lors du changement de phase. En effet, le changement de phase se caractérise par une augmentation de volume de l'ordre de 4%. Cette augmentation de volume entraîne une chute de la masse volumique.

En observant la courbe de résistivité (schéma suivant), nous constatons qu'il n'y a pas chute de résistivité. Nous concluons qu'il n'y a pas de changement de phase.

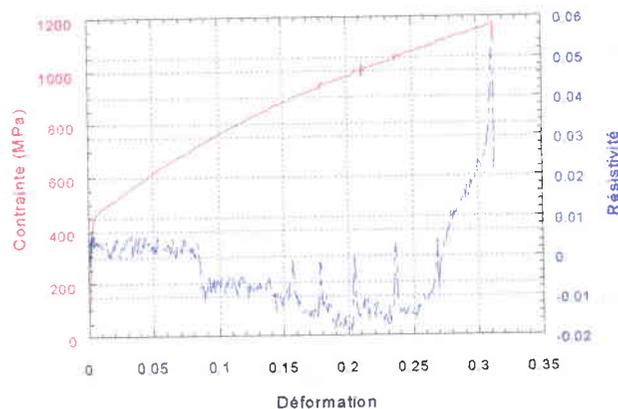


Figure VI.15 : courbe contrainte - déformation et résistivité - déformation pour un essai à 100°C

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

Le tableau VI.2 résume les caractéristiques de la matrice austénitique .

Limite d'élasticité $\bar{\sigma}_0$	428 MPa
Module d'Young E	200 GPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0.3
Equation d'écrouissage	$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + 1783.4 * (\bar{\epsilon}_p)^{0.71265}$

Tableau VI.2 : caractéristiques de la matrice austénitique

### VI.5.2 Ecrouissage de la phase martensitique

La détermination des caractéristiques de la phase martensitique se fait à partir de la courbe Contrainte – déformation pour un essai à  $-40^{\circ}\text{C}$ . Cette température étant inférieure à  $M_s$ , la transformation devrait se produire instantanément. Or, nous constatons sur la courbe de la résistivité que la transformation n'est instantanée. La transformation se produit après une petite déformation élastique de l'éprouvette.

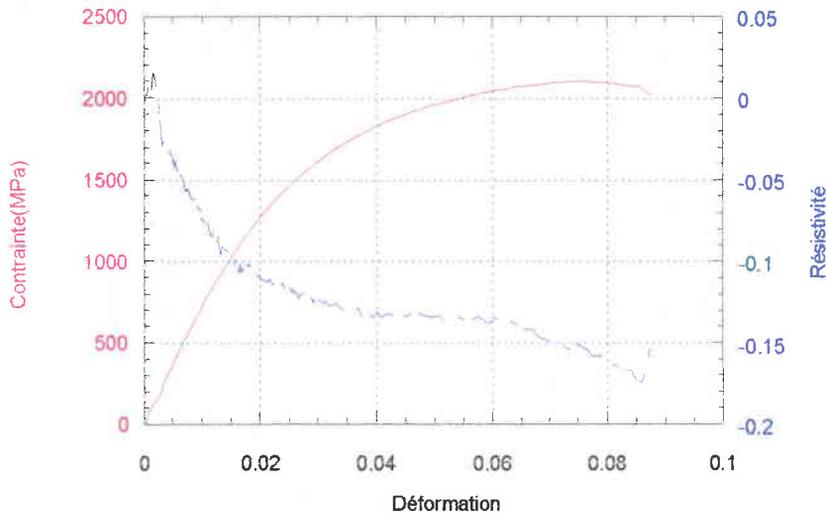


Figure VI.16 : courbe contrainte – déformation et résistivité – déformation pour un essai à  $-40^{\circ}\text{C}$

Comme pour la phase austénitique, nous avons déterminé les caractéristiques de la phase martensitique en utilisant la courbe contrainte équivalente – déformation équivalente déduite de la courbe précédente.

Le tableau VI.3 résume les caractéristiques de la plaquette de martensite .

Limite d'élasticité $\bar{\sigma}_0$	1000 MPa
Module d'Young E	200 GPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0.3
Equation d'écroutissage	$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + 11989 * (\bar{\epsilon}_p)^{0.53768}$

Tableau VI.3 : caractéristiques de l'inclusion martensitique

### VI.5.3 Comportement expérimental avec transformation

Les résultats de la simulation seront comparés à la courbe caractéristique macroscopique obtenue lors d'un essai de traction à la température ambiante. La dite courbe se présente comme suit :

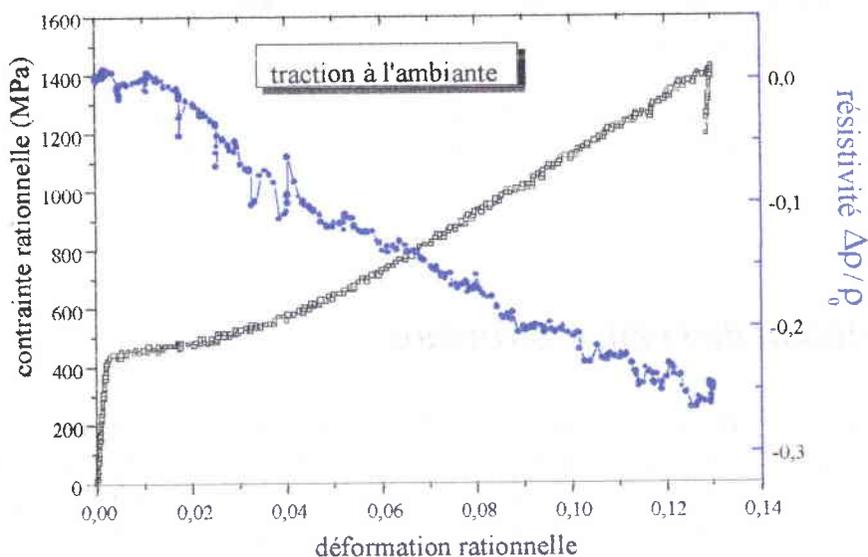


Figure VI.17 : courbe contrainte – déformation et résistivité – déformation pour un essai à la température ambiante

Cette courbe sera comparée aux résultats de la simulation.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

## VI.6 RESULTATS OBTENUS

Les résultats d'une simulation de traction simple classique ne sont généralement pas exploitables. En effet, tous les éléments se transforment en même temps car ils ont exactement les mêmes caractéristiques.

Pour créer une adéquation entre l'expérimentale et le numérique, il est nécessaire de modifier certains paramètres de la simulation. Cette modification portera essentiellement sur le milieu. En effet, plusieurs configurations sont possibles :

- 1° : soit le milieu est monophasé
- 2° : soit le milieu est biphasé ou triphasé ou plus .

Travailler avec un milieu monophasé impose l'introduction d'une condition aux limites génératrice de perturbations, l'effet de bord. Ces perturbations favorisent la germination de la plaquette de martensite, mais la simulation ne reflète plus le cas d'une traction simple.

La seconde approche consistera à utiliser un milieu « biphasé » austénitique en affaiblissant certains éléments (force critique de transformation plus basse). Avec cette approche, nous introduisons une singularité dont le rôle essentiel est de favoriser la germination localisée d'une variante de martensitique.

Pour approcher le comportement réel du grain, nous avons supposé que chaque grain est entouré d'un joint de grain élastique. Ce joint de grain n'est le siège d'aucune transformation martensitique.

### VI.6.1 Evolution de la microstructure

Nous avons effectué plusieurs simulations en utilisant différents cas de figure. Dans le premier cas de figure, nous avons supposé que toutes les variantes pouvaient s'activer. Pour cela, il suffisait que le critère soit atteint. Le résultat fut une transformation anarchique des plaquettes. Nous avons donc simulé le cas où seule la variante qui avait la plus grande force motrice pouvait s'activer. Le résultat fut beaucoup plus intéressant, deux variantes s'activaient :

- la variante (8)
- la variante (18)

Après ces résultats, nous avons décidé de déterminer la variante prépondérante.

Dans la première simulation, nous avons supposé que seule la variante (8) pouvait s'activer lorsqu'elle avait la plus grande force motrice. Le résultat est sans appel : elle ne pouvait s'activer toute seule.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

En appliquant les mêmes conditions à la variante (18), nous obtenons une formation des plusieurs plaquettes. C'est la variante prépondérante. La variante (8) ne s'active que si et seulement si la variante (18) est active. Notre étude par la suite portera exclusivement sur la formation et la croissance de la variante (18).

A chaque valeur de contrainte, nous pouvons associer un état des déformations, une déformation de la structure et un état d'évolution de la microstructure.  
Par évolution de la microstructure, nous entendons la formation et la croissance des plaquettes de martensite.

Les micrographies suivantes sont les résultats de notre simulation et montrent la germination et la croissance de plusieurs plaquettes de martensite.

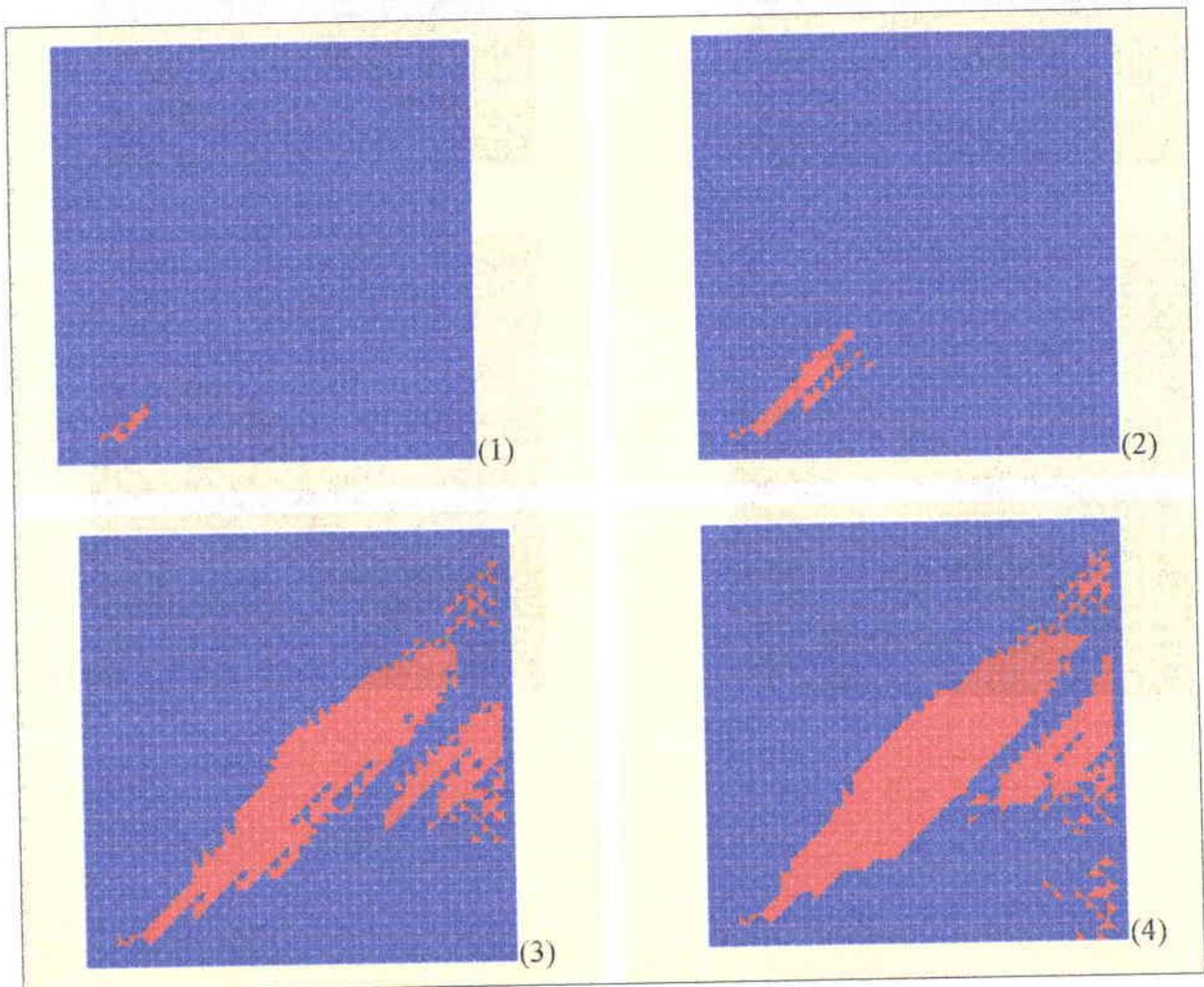
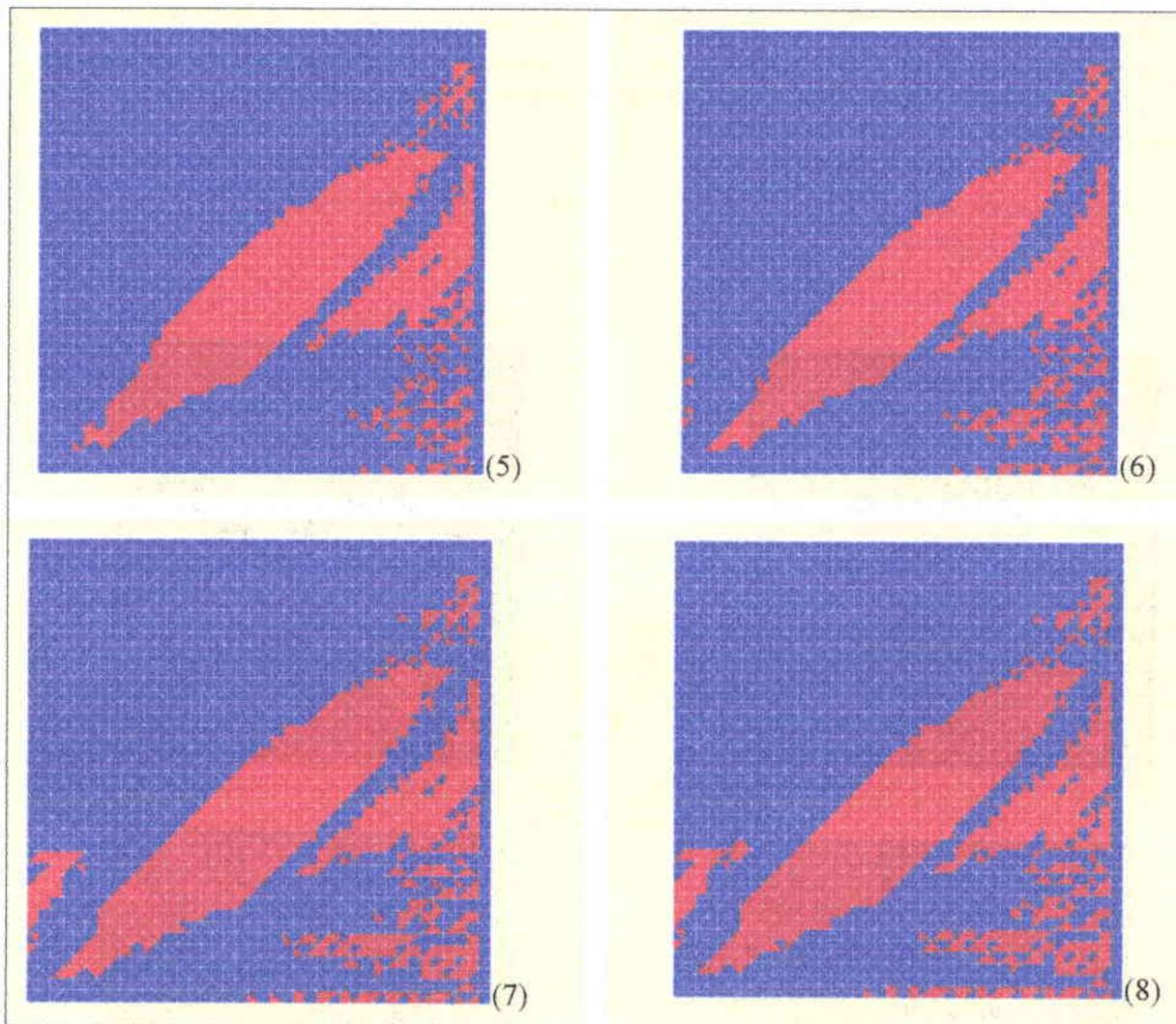


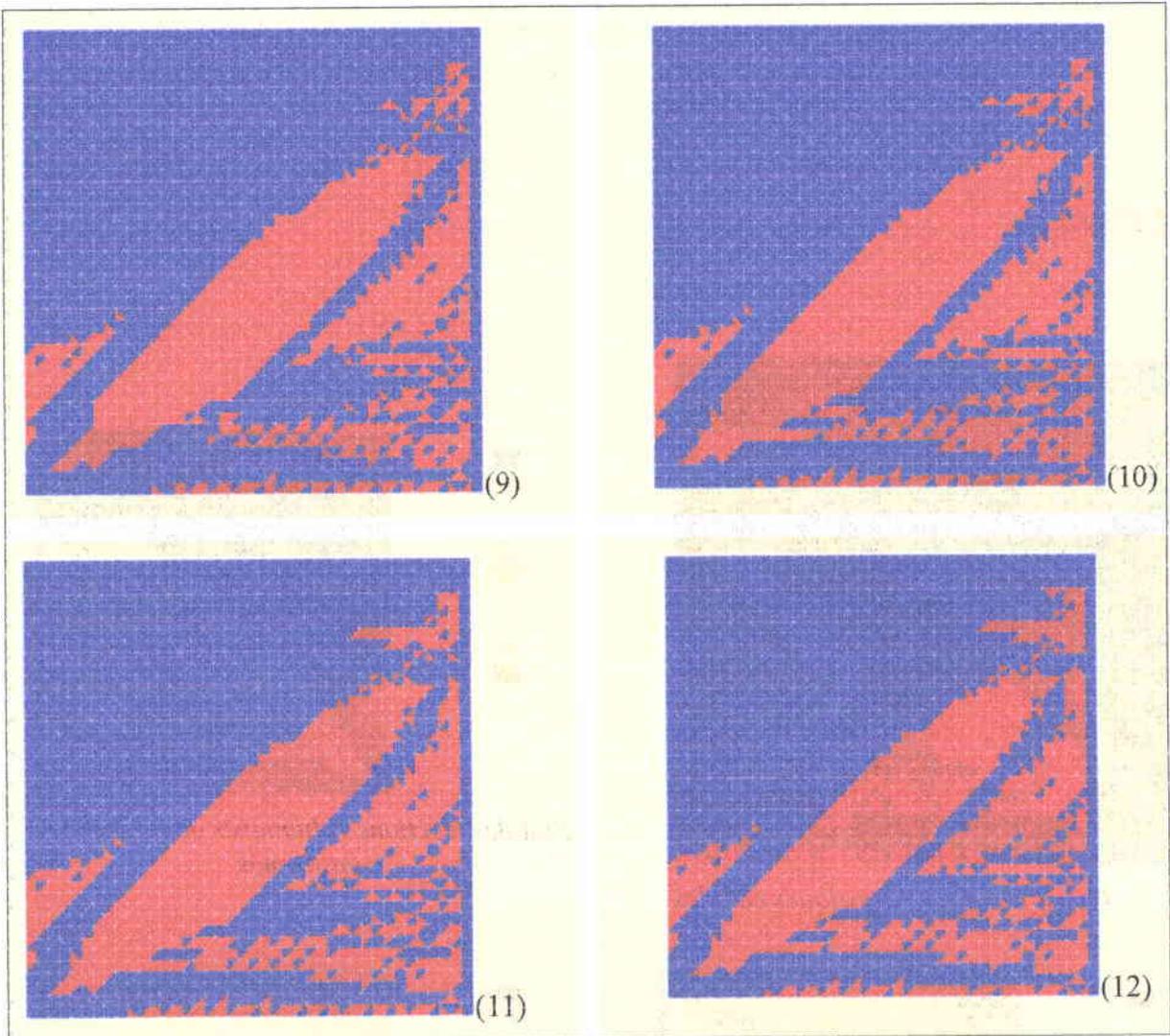
Figure VI.18 : micrographies de la progression de la transformation

(suite )



Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

(suite et fin)



Ces micrographies nous permettent de déterminer la direction de cisaillement dans chaque plaquette et l'influence sur la formation de la plaquette voisine.

Une comparaison entre les résultats expérimentaux et la simulation montre une similitude dans la croissance des plaquettes. Ces résultats prouvent que nos hypothèses bien que simplificatrices ne nous éloignent pas de la réalité physique.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### VI.6.2 Evolution des isovaleurs

A un instant  $t$  donné, il est intéressant de faire des micrographies pour montrer la relation existant entre la contrainte, la déformation et l'avancement de la transformation martensitique. Les micrographies suivantes ont été effectuées pour deux différents incréments des déplacements correspondant à deux temps distincts  $t_1$  et  $t_2$ .

#### Incrément A

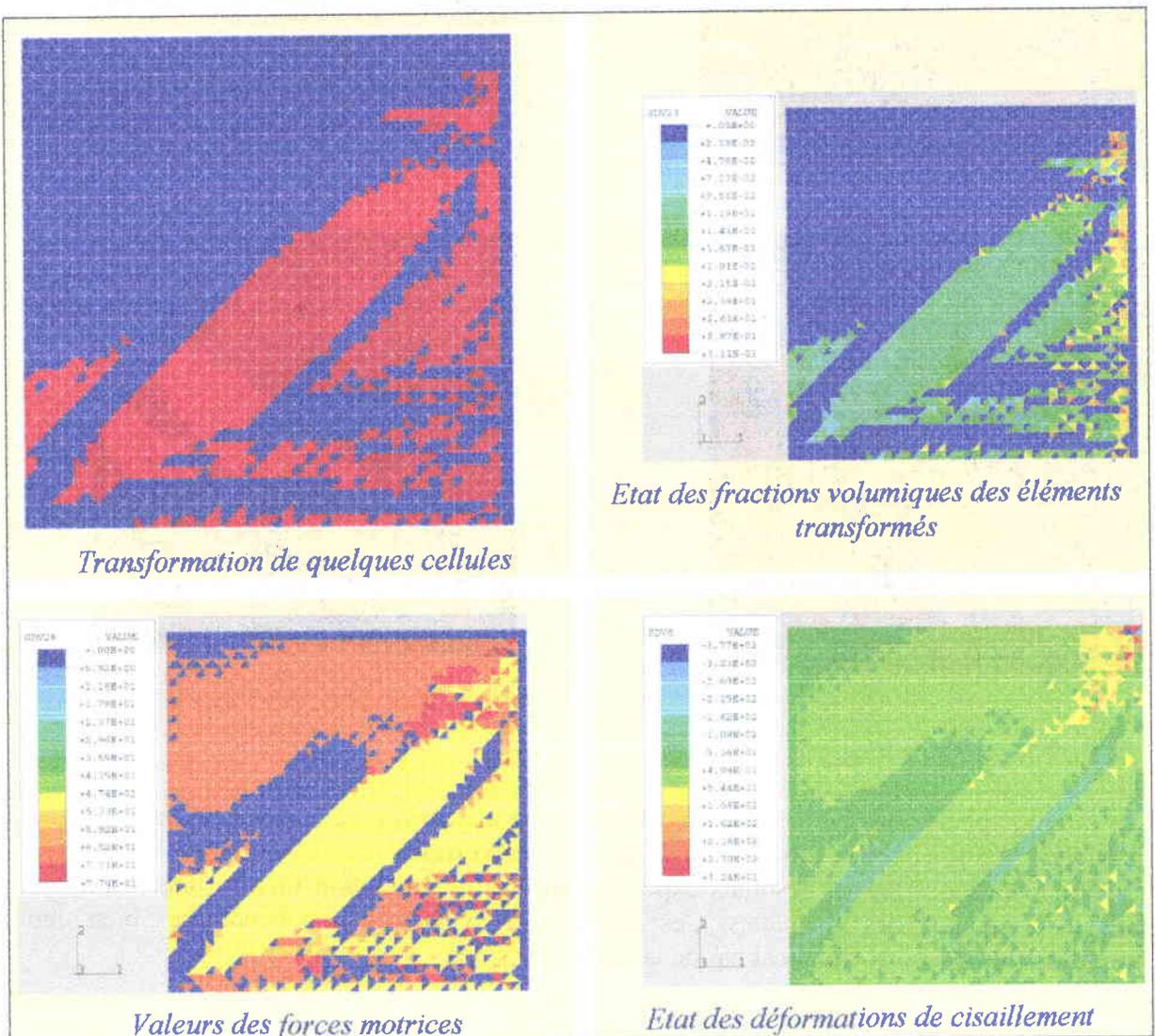


Figure VI.19 : micrographie des isovaleurs à l'instant  $t_1$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

**Incrément B**

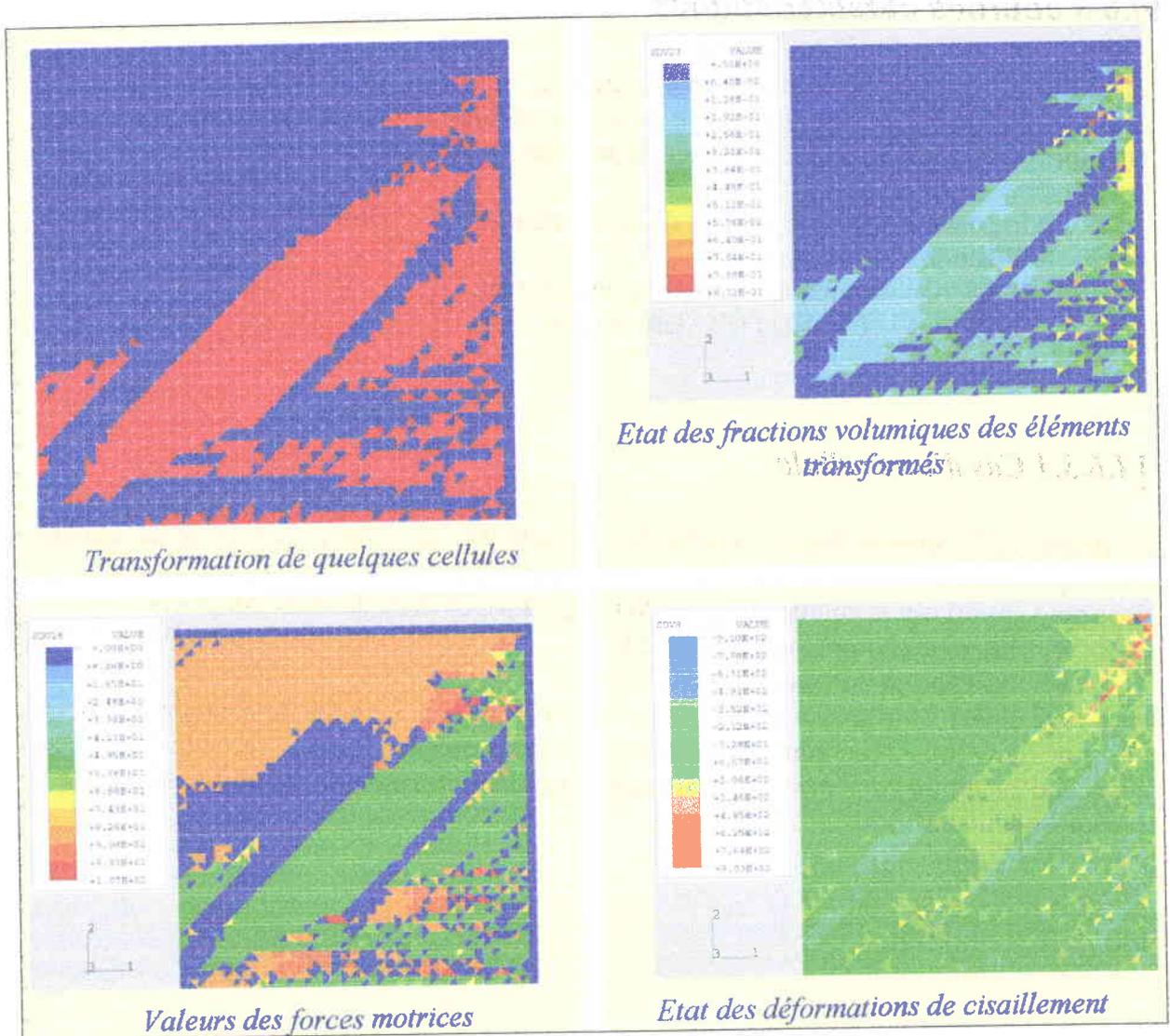


Figure VI.20: micrographie des isovaleurs à l'instant  $t_2$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### VI.6.3 courbes caractéristiques

Pour l'expérimentateur, il est important d'évaluer les valeurs quantitatives d'un matériau afin de le caractériser. C'est pourquoi, pour certaines cellules et pour la structure, nous avons déterminé les différentes courbes caractéristiques suivantes :

- la courbe contrainte dans la direction de traction – déformation dans cette même direction
- la fraction volumique au cours du chargement
- la fraction volumique  $f(F)$ - déformation

#### VI.6.3.1 Cas d'une cellule

La figure VI.21 montre les évolutions de la contrainte de Von Misès et de la fraction volumique d'une cellule en fonction de la déformation dans le sens du chargement.

Nous pouvons diviser la courbe de la fraction volumique en deux domaines distincts :

- une zone comprise entre 0 et 0.22
- une zone située au-delà de 0.22

Dans la première zone nous n'avons pas de transformation. La courbe de contrainte présente une zone élastique et une zone d'écrouissage dans l'austénite. Dans la seconde zone, nous avons une évolution combinée de la contrainte, de la déformation de transformation et de la fraction volumique.

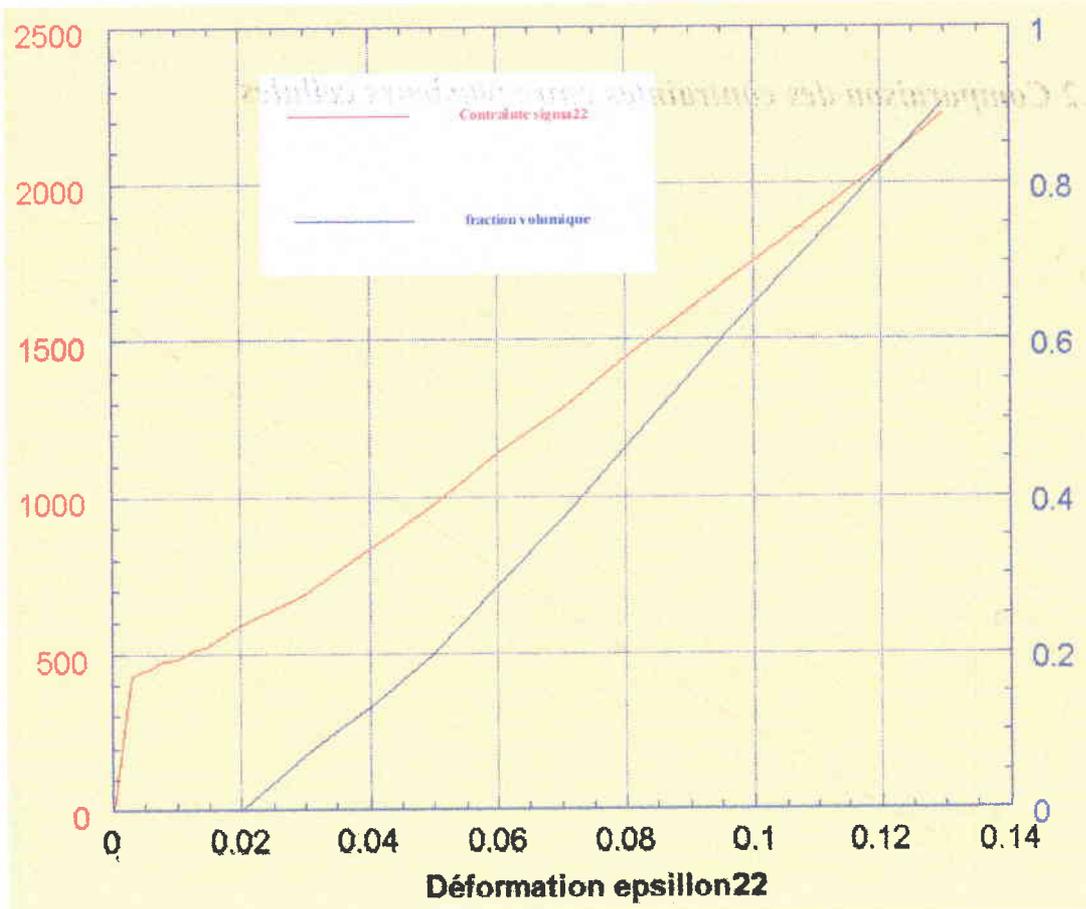


Figure VI.21: évolution de la contrainte  $\bar{\sigma}$  (MPa) et de la fraction volumique en fonction de la déformation  $\epsilon_{22}$

### VI.6.3.2 Comparaison des contraintes entre plusieurs cellules

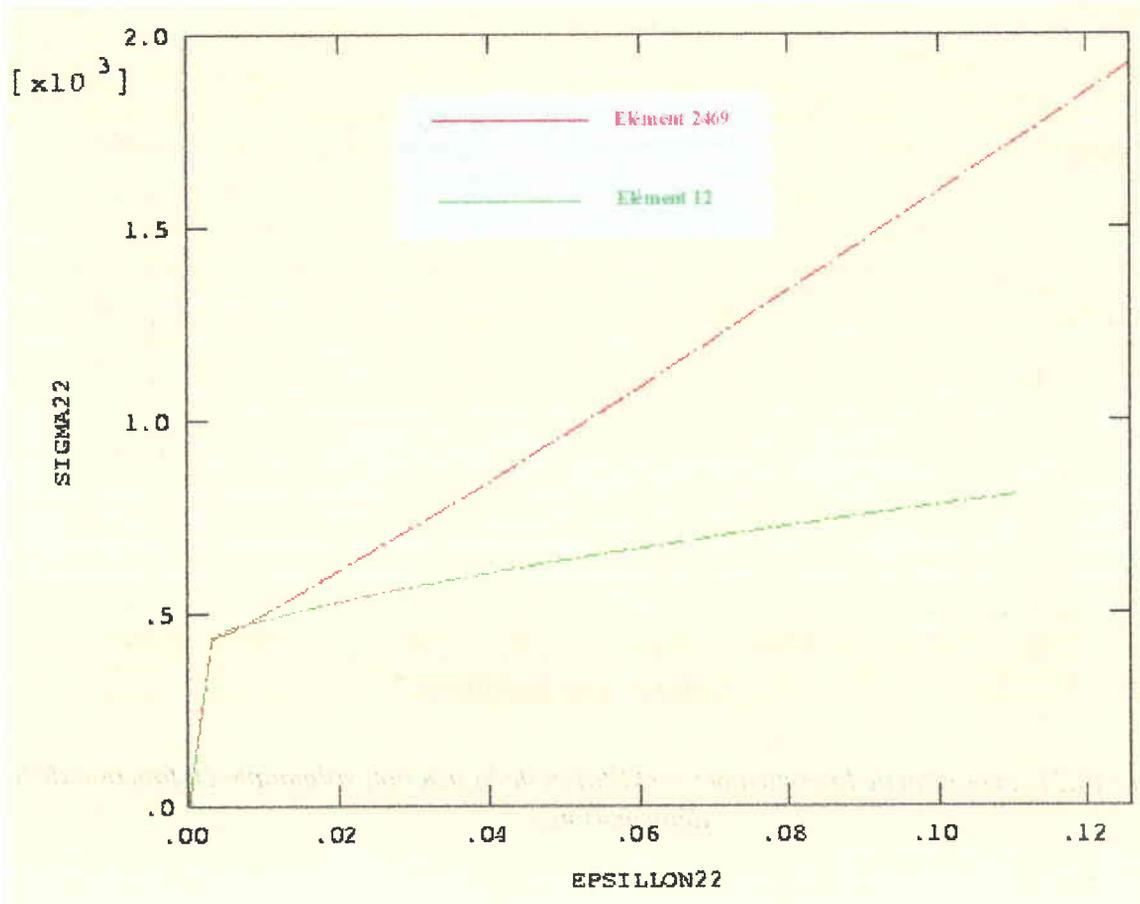


Figure VI.22: évolution de la contrainte de plusieurs cellules en fonction de la déformation totale macroscopique (élément 2469 transformé, élément 12 non transformé)

Pour un chargement donné, la valeur de l'incrément de la contrainte interne varie d'une cellule à une autre et l'incrément de la fraction volumique de l'élément transformé est fonction de cet incrément de contrainte. Ainsi, si nous comparons l'évolution de la fraction volumique transformée de trois cellules au cours du chargement, nous obtenons la figure VI.23.

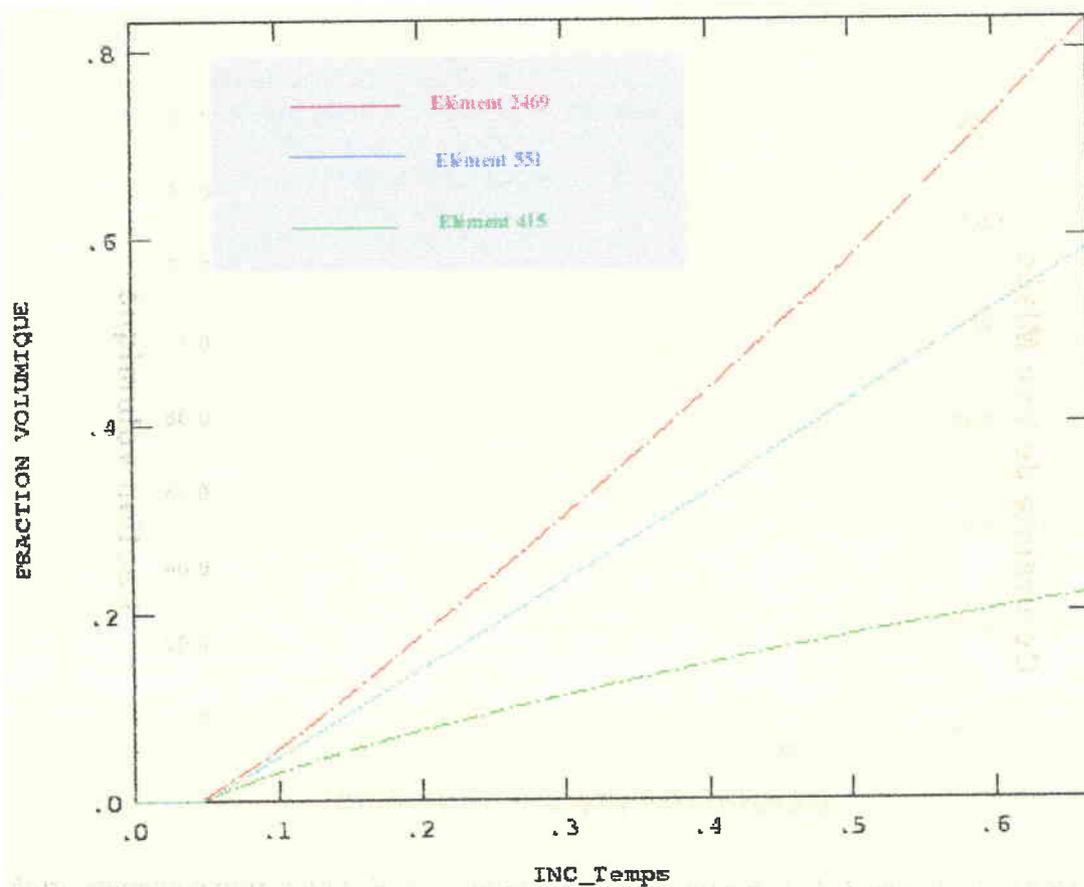


Figure VI.23 : évolution de la fraction volumique transformée de plusieurs cellules au cours du chargement

**VI.6.3.3 Cas de la structure globale**

Nous avons appliqué un calcul de la moyenne pour déterminer la contrainte globale moyenne de Von Misès en fonction de la déformation totale moyenne. Ce même type de calcul a été utilisé pour l'évaluation de la fraction volumique moyenne transformée

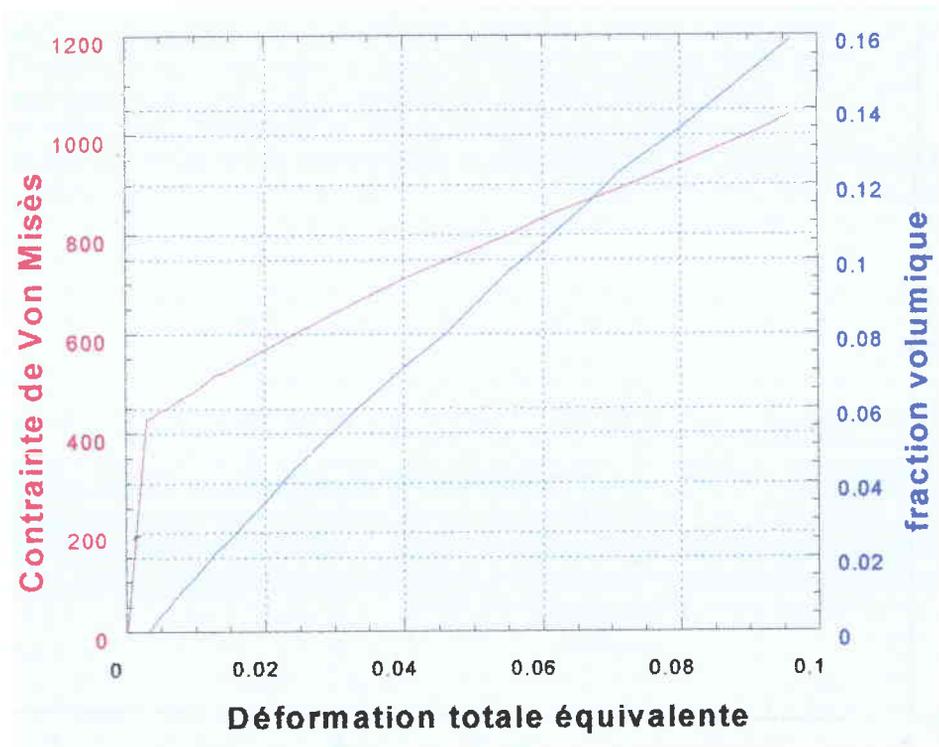


Figure VI.24: évolution de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  et de la fraction volumique globale en fonction de la déformation totale macroscopique  $E$

## VI.6.3.4 Comparaison avec le polycristal

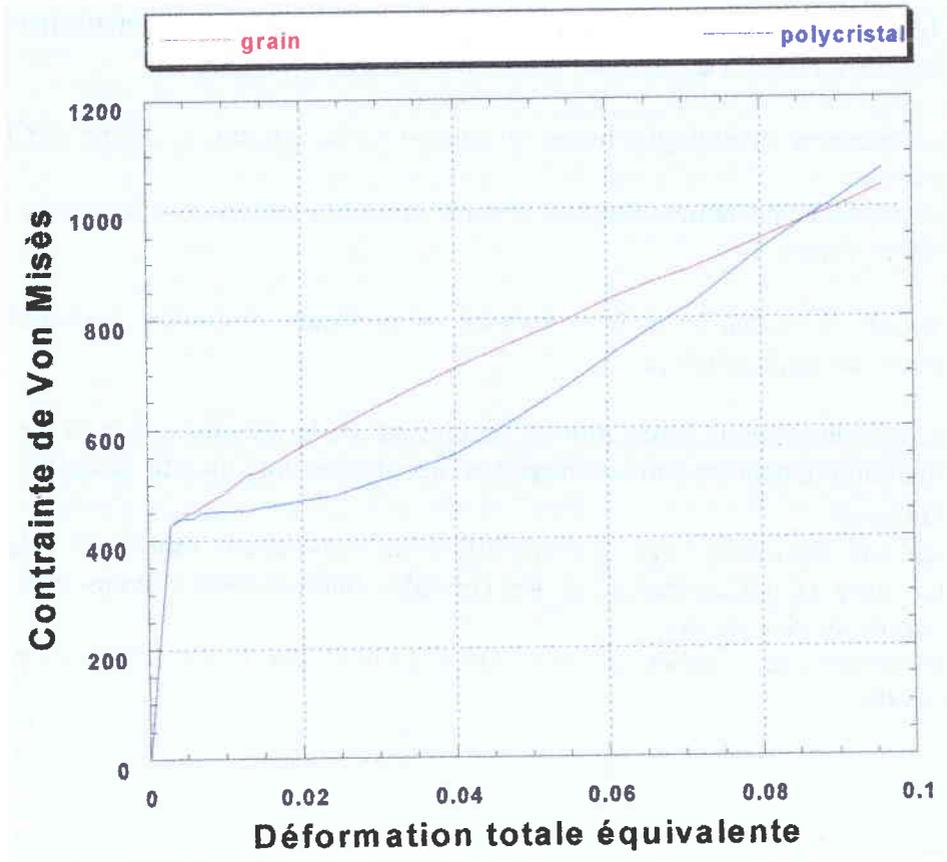


Figure VI.25 : comparaison entre la courbe de contrainte macroscopique d'un grain et la courbe expérimentale du polycristal

La position de la courbe simulée par rapport à celle de l'essai montre la cohérence du résultat obtenu sur le monocristal par rapport au comportement du polycristal. En combinant le comportement de plusieurs grains en transformation et celui des grains non transformés, nous pouvons obtenir un comportement macroscopique comparable à celui du polycristal : [CBL00].

## VI.7 CONCLUSION

Pour simuler le phénomène TRIP, nous avons proposé deux méthodes de détermination de la déformation de transformation en utilisant deux approches différentes :

1. Une approche cristallographique lorsqu'une seule variante se forme par point de Gauss
2. Une approche phénoménologique lorsque plusieurs variantes se forment en un seul point de Gauss.

Nous avons simulé la formation et la croissance de plusieurs plaquettes de martensite en utilisant l'approche cristallographique.

Grâce aux micrographies, nous avons montré l'évolution de la transformation et les résultats obtenus sont qualitativement en concordance avec les observations in situ faites par Yang et Wayman sur un acier

Toujours grâce aux microstructures de transformation, nous avons montré la relation qui pouvait exister entre la microstructure et les variables internes. Nous avons montré leurs évolutions au cours du chargement.

Nous avons tracé certaines courbes caractéristiques du matériau. Ces courbes ont permis de valider nos hypothèses.

## VI.8 BIBLIOGRAPHIE

Reference	Auteurs	Titre	Pages	Edition	Année
AB5.6				Hibbit, Karlson and Sorensen Inc	
BA96	K.J. Bathe	<b>Finite element procedures</b>		Prentice Hall	1996
BD90	J.L Batoz G. Dhatt	<b>Modélisation des structures par éléments finis Tome1 : solides élastiques</b>		Hermès	1990
BU99	F. Bumbieler			Thèse – Université de Metz	1999
CBL00	M Cherkaoui M. Berveiller X. Lemoine	<b>couplings between plasticity and martensitic phase transformation : overall behavior of polycrystalline TRIP steels</b>		Int Journal of plasticity (sous presse)	2000
DU98	S. Dubigeon	<b>Mécanique des milieux continus</b>		Technique et Documentation	1998
HO71	E.Hinton D.R.J. Owen	<b>Finite elements programming</b>		Academic press	1971
HO80	E.Hinton D.R.J. Owen	<b>Finite elements in plasticity Theory and practice</b>		Pineridge press	1980
HO81	E.Hinton D.R.J. Owen	<b>An introduction to finite element computations</b>		Pineridge press	1981
KA84	S. Kajiwara	<b>Continuous observation of isothermal martensite formation in Fe-Ni-Mn alloys</b>	407-413	Acta metall. Vol 32, N°3	1984
OOCT78	H. Okamoto M. Oka I. Tamura		674 – 684	Trans. JIM Vol.19	1978
ZAVK69	O.C Zienkiewicz S. Villiappan, I.P. King	<b>Elasto-platic solutions of engineering problems. Initial-stress, finite element approchs</b>	75-100	Int. J. Num. Meth. Ing. Eng,1	1969

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

## I. Conclusions

Nous avons développé une modélisation micromécanique du comportement d'un acier TRIP présentant une évolution microstructurale. Nous avons simulé la formation et la croissance de plusieurs plaquettes de martensite. La sollicitation macroscopique est une traction uniaxiale et l'échelle de la simulation est celle de la microstructure.

Nous avons décrit un potentiel thermodynamique, qui conduit aux équations d'état, et un potentiel de dissipation. Le potentiel de dissipation fournit les lois complémentaires d'évolution décrivant les processus irréversibles.

Nous avons établi l'équation des puissances dissipées que nous avons scindées en deux parties :

- la puissance dissipée tenant compte de la déformation inélastique
- la puissance dissipée tenant compte du saut de la déformation inélastique, du saut de l'énergie chimique et de la vitesse à l'interface austénite – martensite.

Nous avons utilisé la puissance dissipée tenant compte du saut de la déformation inélastique pour déterminer l'expression d'une force motrice mécanique de transformation.

En utilisant les angles d'Euler, nous avons déterminé l'expression de la déformation de transformation par rapport au repère global. Cette nouvelle expression a été introduite dans le programme de la simulation pour le calcul de la force motrice, force déterminée à chaque incrément de chargement et pour chaque élément et comparée à une force critique.

Nous avons proposé deux méthodes de détermination de la déformation de transformation en utilisant deux approches différentes :

1. Une approche cristallographique lorsque nous avons une seule variante par point de Gauss

2. Une approche phénoménologique lorsque plusieurs variantes se forment au point de Gauss.

Pour la simulation, nous avons discrétisé le milieu en éléments triangulaires, chaque élément pouvant être le siège d'une transformation martensitique.

Nous avons effectué un choix judicieux de certains paramètres de simulation. Ainsi, nous avons utilisé l'approche cristallographique pour déterminer la déformation de transformation de la variante active. Ce choix nous a permis d'étudier la transformation martensitique non seulement au point de vue mécanique mais aussi au point de vue morphologique et de suivre son évolution au cours du chargement :

- développement des variantes
- évolution de la fraction volumique
- évolution des contraintes internes

Grâce aux micrographies, nous avons montré le sens d'évolution des domaines de martensite et les résultats obtenus sont en concordance avec les observations faites in situ par Yang et Wayman sur un acier Fe-21Ni-4Mn.

Toujours grâce aux micrographies, nous avons montré la relation qui pouvait exister entre la microstructure et les variables internes.

Nous avons tracé certaines courbes caractéristiques du matériau. Ces courbes ont permis de valider nos hypothèses.

## II. Perspectives

Cette première approche numérique est prête pour simuler d'autres types de chargements et peut être étendue afin

- d'étudier la transformation martensitique pendant le refroidissement
- d'écrire un code de calcul spécifique aux changements de phase. Ce code devra tenir compte de deux paramètres très importants :
  1. La transformation quasi instantanée d'un élément de volume, cette transformation induit une déformation de l'élément donc un déplacement des nœuds.
  2. L'effet auto-catalytique.

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

# ANNEXE 1

## A.1 EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et  
numérique



# PEREMBA

BOONHACHIM A. & SO PRODTAION S.A

RUHITMOO KUBILIM ZOO

*Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a signature or address.*

## A1.1 Tenseur des contraintes

Dans les calculs sur ordinateur, le tenseur symétrique des contraintes dit de Cauchy est considéré comme un vecteur colonne à six composantes. Sa notation matricielle est la suivante :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \left\{ \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx} \right\}^T \quad [A1.1]$$

Pour les applications à la plasticité, il est utile de décomposer le tenseur des contraintes en deux tenseurs : le *tenseur sphérique* et le *tenseur déviateur des contraintes*.

- Le tenseur sphérique :  $\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$  [A1.2]

- Le déviateur des contraintes :  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$  [A1.3]

## A1.2 Tenseur des déformations

L'état déformé d'un milieu continu peut-être décrit par le champ de déplacement

$$\mathbf{u} = \{u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), \dots, (x, y, z)\} \quad [A1.4]$$

Le tenseur des déformations correspondant à cette déformation a pour expression dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [A1.5]$$

Le tenseur des petites rotations s'écrit :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad [A1.6]$$

## A.4

Dans les codes de calcul, les composantes normales sont notées  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  et les déformations de cisaillement sont exprimées en fonction de  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  et  $\gamma_{zx}$ . D'où la nouvelle écriture du tenseur des déformations :

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad [\text{A1.7}]$$

Les six composantes du tenseur des déformations dépendent des trois composantes du tenseur des déplacements. Ainsi, pour un même déplacement, les composantes du tenseur des déformations ne peuvent pas être quelconques. Elles doivent satisfaire à une certaine condition dite de compatibilité. Cette condition a pour expression :

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad [\text{A1.8}]$$

Dans les calculs sur ordinateur, le tenseur des déformations sera considéré comme un vecteur colonne à six composantes. Sa notation matricielle est :

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad [\text{A1.9}]$$

$\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} (i \neq j)$  représente la variation de l'angle droit

Pour les applications à la plasticité, il est utile de décomposer le tenseur des déformations en deux tenseurs : le *tenseur sphérique* ou de *changement de volume* formé des trois dilatations principales et le *tenseur déviateur des déformations*.

- Le tenseur sphérique : 
$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_{kk}}{3} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}}{3} \quad [\text{A1.10}]$$

- Le déviateur des déformations : 
$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_m \delta_{ij} \quad [\text{A1.11}]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**



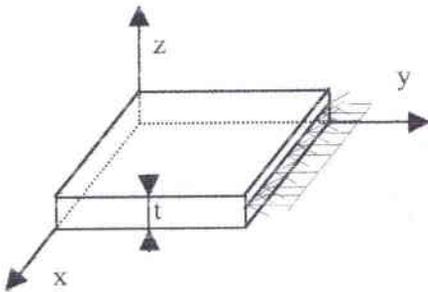
Etant donné que notre problème est bidimensionnel, l'étude suivante se rapportera à l'élastoplasticité dans  $\mathbb{R}^2$ .

### A1.3 Elastoplasticité bidimensionnelle

Dans le cas bidimensionnel, nous avons deux états plans possibles : *l'état plan de contrainte* et *l'état plan de déformation*.

#### A1.3.1 Etat plan de contrainte

L'état plan de contrainte concerne le cas de toutes les pièces minces chargées dans le plan de la hauteur



Dans le cas le plus général, c'est-à-dire avec un champ de température non uniforme, la loi de Hooke s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} + \alpha T \{D_T\} \quad [A1.12]$$

$$\text{avec } \sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = 0$$

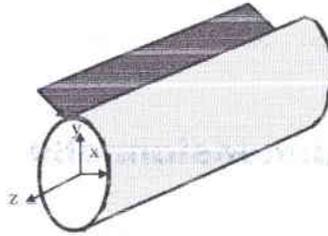
et en notation matricielle la relation [A1.12] s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [A1.13]$$

#### A1.3.2 Etat plan de déformation

Le cas typique de l'état de déformation est celui d'une pièce cylindrique infiniment longue d'axe Oz, bloqué à ses deux bouts, chargée par des forces situées dans les plans xy et indépendantes de z

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**



Nous avons  $u_z = 0$  et toutes les dérivées par rapport à  $z$  sont nulles. Il en résulte :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \quad [\text{A1.14}]$$

Compte tenu de la relation [A1.14], la loi de Hooke devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{A1.15}]$$

avec

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E\alpha T \quad [\text{A1.16}]$$

### A1.3.3 Lois fondamentales de la théorie de la plasticité

[HI50]

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, l'étude du comportement inélastique des métaux a permis d'établir un fondement mathématique et une description phénoménologique de la théorie de la plasticité. La description phénoménologique comporte trois parties qui sont :

- un critère de plasticité
- un critère d'érouissage
- une loi constitutive qui relie contrainte et déformation

Pour qu'un point d'un matériau ductile entre en plasticité, il faut que les contraintes en ce point satisfassent à une certaine condition :

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

$$F(\{\sigma\}, k) = 0 \quad \text{ou} \quad F(J_1, J_2, J_3, k) = 0 \quad [\text{A1.17}]$$

$k$  est un *paramètre d'érouissage*. Cette condition s'appelle le *critère de plasticité*.

Les observations expérimentales de Bridgman [BR52] démontrent que la déformation plastique des métaux est essentiellement indépendante de la pression hydrostatique. La fonction de charge s'exprime alors en fonction du second et du troisième invariant des déviateurs des contraintes  $J_2$  et  $J_3$

Le critère le plus communément adopté pour les métaux ductiles est celui de Von Misès.

### A1.3.3.1 Critère de Von Misès

[VM13]

Von Misès a suggéré que l'écoulement plastique a lieu lorsque  $J_2$  atteint une valeur critique. Dans ces conditions, l'énergie de cisaillement est proportionnelle au second invariant du tenseur déviateur des contraintes. La fonction seuil s'écrit alors :

$$f(J_2) = (J_2)^{1/2} - k \quad [\text{A1.18}]$$

- Pour la traction uniaxiale :  $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$
- Pour la torsion pure :  $k = \tau_0$

Dans la **théorie de la déformation  $J_2$**  la déformation plastique et le déviateur des contraintes sont liés par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = \phi S_{ij} \quad [\text{A1.19}]$$

où  $\phi$  est une fonction scalaire de l'invariant  $J_2$ .

L'équation de la déformation plastique équivalente est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p \quad [\text{A1.20}]$$

Pour la détermination de  $\phi(J_2)$  sur les courbes expérimentales  $\sigma - \varepsilon$ , on introduit la contrainte  $\sigma_e$  (contrainte effective) définie comme suit :

$$\sigma_e = \sqrt{3 J_2} \quad [\text{A1.21}]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

La formulation de l'équation du second invariant  $J_2$  est la suivante :

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{2}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \end{aligned} \quad [A1.22]$$

Le critère de plasticité s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F\{\sigma\} &= \left[ \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right. \\ &\quad \left. + 3\sigma_{xy}^2 + 3\sigma_{yz}^2 + 3\sigma_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad [A1.23]$$

où  $\bar{\sigma}$  est la valeur actuelle de la limite apparente d'élasticité en traction ( la valeur de cette limite modifiée par les déformations antérieures éventuelles)

Ecrite en contraintes principales, l'équation du critère devient :

$$F\{\sigma\} = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma} = 0 \quad [A1.24]$$

En traction uniaxiale, on peut définir le point  $\sigma_0$  début de la déformation plastique. La forme du domaine de plasticité est définie dans le repère des contraintes principales. Il est représenté par une surface d'écoulement. L'évolution de cette surface est fonction du type d'écrouissage. Quelques modèles décrivent cette évolution.

### ***A1.3.3.2 Ecrouissage isotrope***

**(TAYLOR et QUINNEY (1931))**

C'est le modèle le plus simple. Il décrit une surface de charge qui grandit sans changer de forme avec un centre fixe.

La surface est contrôlée par le paramètre d'écrouissage  $k$  ou par la contrainte équivalente  $\sigma_c$ .

$$\phi(\sigma_{ij}) - k^2 = \phi(\sigma_{ij}) - \sigma_c^2 \quad [A1.25]$$

La surface de charge actuelle est celle qui correspond à la plus grande valeur du paramètre d'écrouissage rencontrée pendant l'histoire du chargement. Ce modèle ne décrit pas l'effet de Bauschinger.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

### A1.3.3.3 Ecrouissage cinématique

(PRAGER(1958,1962) )

La translation de la surface de chargement par rapport au centre de coordonnées de la surface de charge est gouvernée par la déformation plastique.

Les coordonnées du centre de la surface de chargement et l'incrément de la déformation sont liées par la loi de Prager :

$$d\alpha_{ij} = c.d\varepsilon_{ij}^P \quad [A1.26]$$

$c > 0$  est une constante du matériau

ou par la loi de Ziegler [ZI59]:

$$d\alpha_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad [A1.27]$$

Le facteur de proportionnalité positif  $d\mu$  dépend de l'histoire de la déformation.

### A1.3.3.4 Ecrouissage mixte

Elle englobe les deux autres cas, c'est-à-dire qu'il y a augmentation uniforme de la surface et sa translation. Le critère proposé par HODGE [H57] s'écrit :

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0 \quad [A1.28]$$

En faisant varier  $\alpha_{ij}$  et  $k$ , il est possible de modéliser le comportement de matériaux dont l'écrouissage se reflète par différentes mesures d'expansion et de translation de la surface de charge.

Notre travail ne portera que sur l'écrouissage isotrope

### A1.3.3.5 Surface de chargement

La surface de chargement peut être définie comme une fonction de  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, k$  paramètre d'écrouissage.

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, k) = 0 \quad [A1.29]$$

La surface de chargement est liée à la surface initiale de plasticité,  $\sigma_0$  par la relation :

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

$$f(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}, 0, 0) \quad [A1.30]$$

### *A1.3.3.6 Chargement critique*

En fonction de l'incrément de contrainte

- chargement :  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$
- chargement neutre :  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$  [A1.31]
- déchargement :  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$

dans le cas du chargement,  $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$

### *A1.3.3.7 Lois d'écoulement*

La théorie de la plasticité repose sur le postulat de DRUCKER, qui stipule que le travail de déformation plastique d'un matériau stable écrouissable est positif.

$$d\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p > 0 \quad [A1.32]$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad [A1.33]$$

Les équations constitutives du matériau s'obtiennent par la loi du potentiel plastique. Pour des accroissements de déformation plastique  $d\varepsilon^p$ ,  $g$  joue le rôle de potentiel plastique.

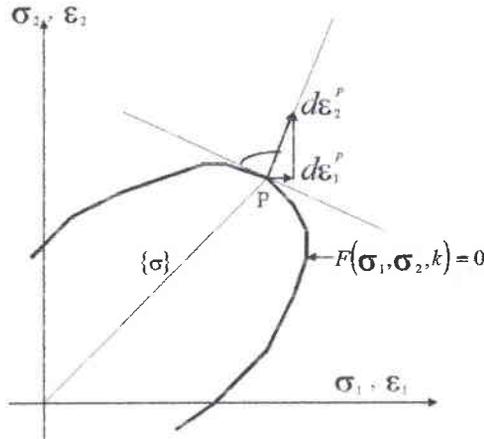
L'équation [A1.33] ne peut-être satisfaite que lorsque la surface d'écoulement est convexe et que l'incrément de déformation plastique  $d\varepsilon^p$  est normal à cette surface :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad [A1.34]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

# A.11

$d\lambda$  est un coefficient de proportionnalité provisoirement inconnu.



$g = g(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k)$ , représente la loi non associative pour les matériaux écrouissables au travail. Elle devient associative lorsque la fonction  $g$  est choisie comme égale à  $f$  d'où :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad [A1.35]$$

La loi du potentiel plastique porte aussi le nom de : *loi de normalité*.

Pour les calculs numériques, nous allons remplacer les neufs équations  $d\epsilon_{ij}^p$  par les six équations  $d\epsilon_i^p$

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \quad [A1.36]$$

La taille de la surface de chargement est contrôlée par le paramètre d'écrouissage  $k$  à travers la fonction  $k^2(K)$

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, k) = F(\sigma_{ij}) - k^2(K) = 0 \quad [A1.37]$$

Pour un matériau de Von Mises, nous avons :

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, k) = \sqrt{3J_2} - \sigma_e(K) \quad [A1.38]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

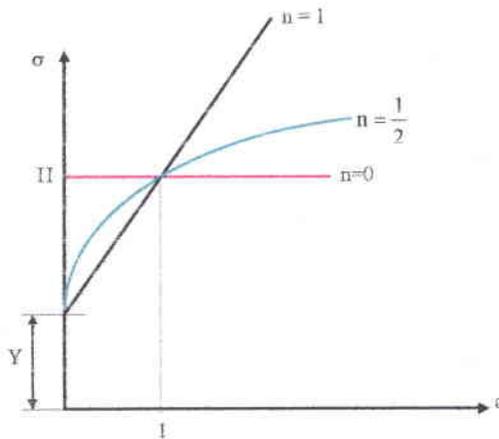
## A1.3.3.8 Lois empiriques

Certains auteurs ont proposé des équations empiriques pour définir la relation entre la contrainte et la déformation. Les plus connus sont :

- LUDWIK
- VOCE
- SWIFT
- PRAGER

### A1.3.3.8.1 Loi de LUDWIK

[LU09]



$$\sigma = Y + H\varepsilon^n \quad [A1.39]$$

En fonction des valeurs de  $n$ , nous avons plusieurs types de courbes. L'exemple suivant illustre le cas pour  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = \frac{1}{2}$

### A1.3.3.8.2 Loi de VOCE

[VO48]

$$\sigma = a + (b - a)(1 - e^{-n\varepsilon}) \quad [A1.40]$$

$a$ ,  $b$  et  $n$  sont des constantes. Cette équation donne une bonne approche de la courbe, mais est difficilement exploitable en analyse théorique.

### A1.3.3.8.3 Loi de SWIFT

[SW46]

$$\sigma = c(a + \varepsilon)^n \text{ avec } 0 \leq n \leq 1 \quad [A1.41]$$

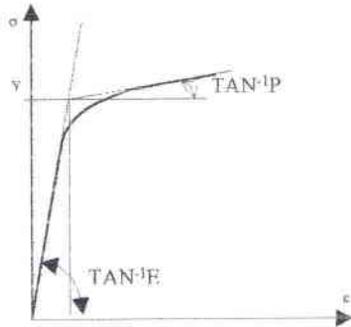
**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

# A.13

a, c et n sont des constantes du matériau. Cette équation est beaucoup plus réaliste que celle de Ludwik.

## A1.3.3.8.4 Loi de PRAGER

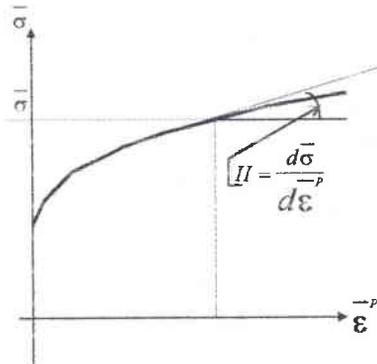
[PR55]



$$\sigma = Y \tanh\left(\frac{E\epsilon}{Y}\right) \quad [A1.42]$$

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon \text{ entre } 0 \text{ et } Y \\ \sigma &= P\epsilon \text{ après } Y \end{aligned}$$

La détermination de la loi d'érouissage se fait expérimentalement à partir d'un essai de traction, en déduisant les déformations élastiques et en remplaçant  $\sigma$  par  $\bar{\sigma}$  et  $\epsilon^p$  par  $\bar{\epsilon}^p$ .



Pour le formalisme numérique, nous utiliserons une loi dérivée de la loi de Swift.

## A1.3.4 Relations entre les contraintes et les déformations totales

[ZAVK69]

Pour analyser les structures élastoplastiques, nous avons besoin de relations donnant les incréments  $d\epsilon_{ij}$  des déformations totales en fonction des incréments  $d\sigma_{ij}$  des contraintes.

L'incrément de la déformation totale s'écrit :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad [A1.43]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

Pour la détermination de la loi de comportement, nous allons adopter la forme d'écriture suivante :

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^e\} + d\{\varepsilon^p\} \quad [A1.44]$$

Appelons [ D ] la matrice symétrique des constantes d'élasticité. Les incréments des déformations élastiques sont liés aux incréments des contraintes par la relation suivante :

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon^e\} \quad [A1.45]$$

En combinant les équations [A1.39], [A1.47] et [A1.48], nous obtenons :

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon\} - [D]d\lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad [A1.46]$$

L'inconnue à déterminer est  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}$ . Cette détermination se fera à partir du critère de Von Misès et le travail plastique sera pris comme mesure de l'écoulement.

Nous pouvons lier l'incrément des contraintes à l'incrément des déformations par le module tangent élastoplastique. L'équation de cette liaison s'écrit :

$$d\{\sigma\} = [D^{ep}]d\{\varepsilon\} \quad [A1.47]$$

Pour la détermination de l'expression du module tangent élastoplastique, nous devons développer l'équation des incréments des contraintes, appliquer la condition de consistance et utiliser la règle de normalité.

Développons l'équation des incréments des contraintes sous la forme suivante :

$$d\{\sigma\} = [D^{ep}](d\{\varepsilon^e\} + d\{\varepsilon^p\}) \quad [A1.48]$$

Développons la condition de consistance et utilisons l'équation [A1.38] pour déterminer l'expression le module tangent élastoplastique .

La condition de consistance s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad [A1.49]$$

cette équation devient :

$$a_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\lambda \cdot c_{kl}) + b_{ij} d\lambda \cdot c_{ij} = 0 \quad [A1.50]$$

avec :

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad a_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad b_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^P} \quad \text{et} \quad c_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

De cette équation nous tirons l'expression de  $d\lambda$  :

$$d\lambda = \frac{a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl} - b_{ij} c_{ij}} \quad [A1.51]$$

L'expression du module tangent s'obtient à partir de l'équation de l'incrément des déformations totales en tenant compte de ce que nous venons de démontrer.

$$d\varepsilon_{kl} = C_{klj}^{-1} d\sigma_{ij} + \frac{a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl} - b_{ij} c_{ij}} c_{kl} \quad [A1.52]$$

Multiplions cette équation par  $C_{ijkl}$ , nous obtenons :

$$C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = C_{ijkl} C_{klj}^{-1} d\sigma_{ij} + C_{ijkl} \frac{a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl} - b_{ij} c_{ij}} c_{kl} \quad [A1.53]$$

Le tenseur  $C_{ijkl}$  étant symétrique, nous obtenons :

$$d\sigma_{ij} = \left( C_{ijkl} - C_{ijkl} \frac{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl}}{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl} - b_{ij} c_{ij}} \right) d\varepsilon_{kl} \quad [A1.54]$$

avec :

$$D_{ij}^{ep} = C_{ijkl} - C_{ijkl} \frac{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl}}{a_{ij} C_{ijkl} c_{kl} - b_{ij} c_{ij}} \quad [A1.55]$$

représente la matrice des constantes élastoplastiques.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

**A1.3.4.1 Expression de la dérivée de la fonction de charge**

La dérivée de la fonction de charge s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left( \left( \frac{1}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left( \left( \frac{1}{2} \sigma_{kl} \sigma_{kl} - \frac{1}{6} \sigma_{kk} \sigma_{kk} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad [A1.56]$$

Cette équation développée devient :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \left( \frac{1}{2} \sigma_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{6} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) * \frac{1}{\left( \frac{1}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) * \frac{1}{\left( \frac{1}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

nous savons que :

$$\bar{\sigma} = (3 J_2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} = \left( \frac{1}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [A1.57]$$

nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \{a\} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma} \{s\} \quad [A1.58]$$

La fonction de charge étant associative, nous avons  $a_{ij} = c_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma} S_{ij}$

**A1.3.4.2 Travail plastique**

S'il y a écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte est situé sur la frontière élastique définie par :

$$F(\sigma, k) = 0 \quad [A1.59]$$

La différentielle de F s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad [A1.60]$$

Sous la forme matricielle nous avons :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} - A \cdot d\lambda = 0 \quad [A1.61]$$

avec :

$$A = -\frac{\partial F}{\partial k} \cdot \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = -b_{ij} \cdot c_{ij} \quad [A1.62]$$

- Le travail plastique absorbé par unité de volume

$$k = W_P = \int \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}^P) \quad [A1.63]$$

que l'on écrira sous la forme matricielle suivante :

$$dk = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon^P\} \quad [A1.64]$$

- La dilatation plastique de comparaison

$$k = \int d\varepsilon^{-P} \quad [A1.65]$$

Les expériences de Schmidt [SC32] en traction, compression et torsion s'accordent bien avec les deux lois d'écouissage. Hill [HI50] a montré théoriquement que pour un matériau de Von Mises, les deux lois sont équivalentes.

Pour la détermination de A[A1.62 ], nous pouvons écrire que :

$$dK = \sigma_1 d\varepsilon_1^P + \sigma_2 d\varepsilon_2^P + \dots = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon^P\} \quad [A1.66]$$

ou sa forme matricielle :

$$dK = d\lambda \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad [A1.67]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

en remplaçant  $dK$  par son expression dans l'équation de A, nous obtenons :

$$A = - \frac{\partial F}{\partial k} \cdot \frac{dk}{d\lambda} = - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad [A1.68]$$

Cette relation est totalement définie si nous connaissons la relation entre F et k.  
De l'équation [ A1.60 ] nous tirons :

$$- \frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial k} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{-P}} \frac{1}{\sigma} = \frac{H}{\sigma} \quad [A1.69]$$

Pour résoudre la seconde partie de [A1.69 ], nous allons faire appel au théorème des fonctions d'états homogènes :

Soit  $f(x)$  une fonction homogène de degré  $n$ , le théorème d'Euler pour les fonctions d'états homogènes s'écrit :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot x = n \cdot f \quad [A1.70]$$

pour  $n=1$  et  $x = \sigma$ , nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \{\sigma\} = \sigma_y(k) \quad [A1.71]$$

La combinaison des équations [A1.68 ], [A1.69 ] et [A1.71 ], nous obtenons l'égalité suivante :

$$A = -H \quad [A1.72]$$

Le résultat final est la nouvelle expression de la matrice des constantes élastoplastiques :

$$[D^{ep}] = [C] - [C] \frac{\{a\}[C]\{a\}^T}{H + \{a\}^T [C]\{a\}} \quad [A1.73]$$

avec :  $H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^{-P}}$

# ANNEXE 2

## A2. ELEMENTS FINIS

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique

## A2.1 Fondements de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode mathématique d'intégration des équations aux dérivées partielles.

Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- 1° l'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués
- 2° les conditions aux limites
- 3° la loi de comportement

Différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments et d'aboutir à des formulations variationnelles compactes mais continues. Il existe plusieurs méthodes de discrétisation de ces formulations, les plus connues sont : la méthode de Galerkin et la méthode de Ritz.

La méthode de Galerkin est adaptée à la formulation variationnelle découlant du principe des puissances virtuelles.

Quant à la méthode de Ritz, elle est utilisée pour :

- une formulation en déplacement : minimisation de la variation de l'énergie potentielle
- une formulation en contrainte : minimisation de la variation de l'énergie potentielle complémentaire
- une formulation mixte en utilisant la fonctionnelle de Hellinger-Reisner

Les problèmes d'équilibre sont définis par une équation du type :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{u} &= \mathbf{f} \text{ dans } V \\ \mathbf{B}_i \mathbf{u} &= \mathbf{g}_i \text{ sur } \partial V \text{ de } V \text{ avec } i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad [\text{A2.1}]$$

$\mathbf{L}$  = opérateur différentiel linéaire

$\mathbf{u}$  : variable physique dont les valeurs sont à trouver

$\mathbf{B}_i$  : opérateurs qui contiennent  $\mathbf{u}$  et ses dérivées jusqu'à un certain ordre

## A2.2 Principes généraux

Le domaine  $D$  à étudier est discrétisé en sous-domaines  $D_e$ , de dimensions finies ou éléments finis de formes géométriques simples. Chaque élément est complètement défini par ses nœuds.

On cherche la meilleure approximation de la fonction  $\mathbf{u}$ , de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

Pour tout point  $M$  du domaine, on définit une approximation :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}) = \sum \mathbf{a}_i \theta_i(\mathbf{M}) \quad [\text{A2.2}]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

# A.21

Les fonctions  $\theta_i$  doivent constituer une base fonctionnelle. Ce sont des fonctions de pondération ou de forme. Les monômes, les polynômes de Lagrange, les polynômes d'Hermite, les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus : décomposition en série de Fourier ) en sont des exemples.

Les coefficients  $a_i$  sont les inconnues du problème et sont appelées coordonnées généralisées.

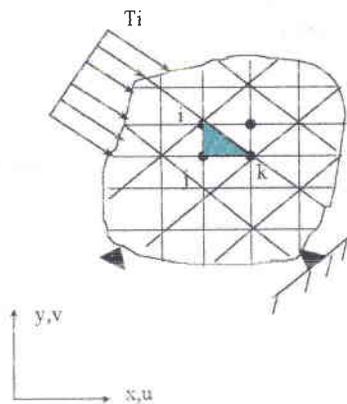
L'erreur commise en remplaçant  $u$  par  $\tilde{u}$  doit être la plus petite possible pour que la solution approchée soit représentative de la réalité.

A l'intérieur de chaque élément, la fonction recherchée (ici le déplacement ) est approximée nodalement à l'aide des valeurs aux nœuds de l'élément et de fonctions d'interpolation  $N$  connues.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad [\text{A2.3}]$$

Pour chaque élément du domaine, on formule un principe variationnel afin d'établir l'équilibre élémentaire.

## A2.2.1 Approximation des déplacements



Un élément triangulaire  $e$  est défini par ses nœuds  $i,j,k$  et ses côtés rectilignes. Nous pouvons représenter les déplacements  $\vec{u}$  en chaque point de l'élément par un vecteur colonne  $\hat{\mathbf{u}}$  tel que :

$$\vec{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum N_i \mathbf{a}_i^e = [\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \mathbf{N}_k] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_k \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{a}}^e \quad [\text{A2.4}]$$

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

où les  $\vec{N}$  représentent les fonctions d'interpolation et les  $\vec{a}$  représentent l'ensemble des déplacements nodaux pour l'élément  $e$ .  
 dans le cas des contraintes planes, nous avons :

$$\underline{\underline{u}} = \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{a}} = \begin{cases} u_i \\ v_i \end{cases} \quad [A2.5]$$

## A2.2.2 Représentation des déformations

La connaissance des déplacements en tout point de l'élément permet de calculer les déformations en utilisant un opérateur linéaire  $S$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{u}} \quad [A2.6]$$

En utilisant l'équation [A2.6], l'équation de la déformation est approchée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}} \quad [A2.7]$$

avec

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{N}} \quad [A2.8]$$

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad [A2.9]$$

ou encore :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad [A2.10]$$

## A2.2.3 Représentation des contraintes

La connaissance des déformations nous permet de calculer le tenseur des contraintes. En utilisant la loi de Hooke, nous obtenons :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} \quad [A2.11]$$

Cette équation s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad [A2.12]$$

## A2.2.4 Approximation de l'énergie potentielle sur un élément

Pour un état d'équilibre stable, les déplacements cinématiquement admissibles qui satisfont les conditions d'équilibre sont ceux qui minimise l'énergie potentielle.

Dans le cas où les forces de surfaces et volumes sont indépendantes de la déformation du solide, l'équation des travaux virtuels s'écrit :

$$\pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_S T_i \delta u_i dS - \int_V f_i \delta u_i dV \quad [A2.13]$$

En adoptant l'écriture matricielle, nous avons :

$$\pi = \int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_S \{\delta u\}^T \{T\} dS - \int_V \{\delta u\}^T \{f\} dV \quad [A2.14]$$

avec  $\{\delta u\}^T = \{\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z\}$

$$\{\delta \epsilon\}^T = \{\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}, \delta \gamma_{xy}\}$$

Introduisant  $\delta u$  et  $\delta \epsilon$  dans l'équation des travaux virtuels, nous obtenons :

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

$$\pi = \int_V \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{L}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV - \int_S \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{T}\} dS - \int_V \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}\} dV \quad [\text{A2.15}]$$

En dérivation cette équation nous obtenons :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta \mathbf{u}} = \int_V [\mathbf{L}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV - \int_S \{\mathbf{T}\} dS - \int_V \{\mathbf{f}\} dV \quad [\text{A2.16}]$$

En considérant une cellule, et compte tenu du fait que  $\{\boldsymbol{\sigma}\}_e = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\delta \mathbf{u}\}_e$ , nous pouvons réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \delta \mathbf{u}_e} = \int_{V_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \delta \mathbf{u}_e dV - \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{p} dV - \int_S [\mathbf{N}]^T \mathbf{q} dS \quad [\text{A2.17}]$$

Cette équation est l'équation du résidu et s'écrit

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \delta \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e \quad [\text{A2.18}]$$

avec :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV \text{ la matrice de rigidité élémentaire}$$

et

$$\mathbf{f}_e = \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{p} dV + \int_S [\mathbf{N}]^T \mathbf{q} dS$$

$\mathbf{p}$  : forces volumiques

$\mathbf{q}$  : forces surfaciques

Par assemblage nous obtenons :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} \quad [\text{A2.19}]$$

avec

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_e \quad [\text{A2.20}]$$

La résolution numérique de ce système fournit la valeur des déplacements ou incréments de déplacements à chaque nœud. Ce qui nous permet de calculer les déformations à l'intérieur de chaque élément. Puis à l'aide des relations constitutives, nous déduisons les contraintes des déformations en chaque point du milieu.

**Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique**

## A2.3 BIBLIOGRAPHIE

Référence	Auteurs	Titre	Pages	Edition	Année
AB56				<i>Hibbit, Karlson and Sorensen Inc</i>	
BA96	K.J. Bathe	<b>Finite element procedures</b>		<i>Prentice Hall</i>	1996
BD90	J.L. Batoz G. Dhatt	<b>Modélisation des structures par éléments finis Tome1 : solides élastiques</b>		<i>Hermès</i>	1990
DU98	S. Dubigeon	<b>Mécanique des milieux continus</b>		<i>Technique et Documentation</i>	1998
HMS56	P.C.Hammer O.P.Marlowe A.H.Stroud	<b>Numerical intergration over simplexes and cones</b>	130-137	<i>Matf.tables aids comp,10</i>	1956
HO71	E.Hinton D.R.J. Owen	<b>Finite elements programming</b>		<i>Academic press</i>	1971
HO80	E.Hinton D.R.J. Owen	<b>Finite elements in plasticity Theory and pratice</b>		<i>Pineridge press</i>	1980
HO81	E.Hinton D.R.J. Owen	<b>An Introduction to finite element computations</b>		<i>Pineridge press</i>	1981
JM62	W. Johnson P.B. Mellor	<b>Plasticity for mechanical engineers</b>		<i>D.Van Nostrand Company ltd</i>	1962
RA80	Radau		283	<i>Journal de math,3</i>	1880
SC86	J.C. Sabonnadière J.L. Coulomb	<b>La méthode des éléments finis Du modèle ...à la CAO</b>		<i>Traité des Nouvelles Technologies Série Assistance par Ordinateur Hermès</i>	1986
ZAVK69	O.C Zienkiewicz S. Villiappan, I.P. King	<b>Eiasto-platic solutions of engineering problems. Initial-stress, finite element approchs</b>	75-100	<i>Int. J. Num. Meth. Ing. Eng,1</i>	1969
ZT89	<b>O.C Zienkiewicz R.L Taylor</b>	<b>The finite Element Method Basic Formulation and linear problems</b>		<i>McGraw Hill</i>	1989

Simulation du phénomène TRIP par une voie phénoménologique et numérique