



**HAL**  
open science

# Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes et diamètre transfini entier

Qiang Wu

► **To cite this version:**

Qiang Wu. Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes et diamètre transfini entier. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2000. Français. NNT : 2000METZ011S . tel-01775498

**HAL Id: tel-01775498**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775498>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**

présentée à

**L'UNIVERSITE DE METZ**

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**Spécialité: **Mathématiques**

par

**Qiang WU****MESURE D'INDEPENDANCE LINEAIRE  
DE LOGARITHMES ET  
DIAMETRE TRANSFINI ENTIER**

Soutenue le 15 juin 2000 devant le jury composé de

<b>Monsieur L. HABSIEGER</b>	Université de Bordeaux 1	Rapporteur
<b>Monsieur M. HUTTNER</b>	Université de Lille 1	Examineur
<b>Monsieur M. MIGNOTTE</b>	Université Louis Pasteur	Examineur
<b>Monsieur G. RHIN</b>	Université de Metz	Directeur de thèse
<b>Monsieur C. J. SMYTH</b>	Université d'Edimbourg	Rapporteur

Laboratoire des Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes (LMMAS)

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 318097 6



6 164730 S/M<sub>2</sub> 00/11  
000225

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité: Mathématiques

par

**Qiang WU**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2000 0955
Cote	S/M <sub>2</sub> 00/11
Loc	Magasin

**MESURE D'INDEPENDANCE LINEAIRE  
DE LOGARITHMES ET  
DIAMETRE TRANSFINI ENTIER**

Soutenue le 15 juin 2000 devant le jury composé de

<b>Monsieur L. HABSIEGER</b>	Université de Bordeaux 1	Rapporteur
<b>Monsieur M. HUTTNER</b>	Université de Lille 1	Examinateur
<b>Monsieur M. MIGNOTTE</b>	Université Louis Pasteur	Examinateur
<b>Monsieur G. RHIN</b>	Université de Metz	Directeur de thèse
<b>Monsieur C. J. SMYTH</b>	Université d'Edimbourg	Rapporteur

Laboratoire des Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes (LMMAS)



**A YUN et NANXI**





# Remerciements

Qu'il me soit permis ici d'exprimer toute ma gratitude à Georges Rhin pour avoir accepté de guider mes premiers pas dans la recherche et m'avoir toujours soutenu et encouragé. Sa gentillesse et sa disponibilité m'ont été une aide très précieuse. J'espère pouvoir travailler encore avec lui.

Mes chaleureux remerciements vont à Messieurs Laurant Habsieger et Christopher Smyth qui ont bien voulu être rapporteurs.

Je remercie Messieurs Maurice Mignotte et Marc Huttner qui ont accepté d'être membres du jury.

Pour terminer, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenu et encouragé.

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I: Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes de nombres rationnels (I) et comparaison de la méthode analytique et de la méthode arithmétique</b> .	8
1-Introduction .....	9
2-Mesure d'indépendance linéaire de	
$1, \log(1 - \frac{1}{a}), \log(1 + \frac{1}{a})$ .....	12
2.1-Définitions .....	12
2.2-Quelques résultats connus .....	13
2.3-Mesure d'indépendance linéaire de	
$1, \log(1 - \frac{1}{a}), \log(1 + \frac{1}{a})$ .....	16
3-Préliminaires .....	19
4-Démonstrations des théorèmes .....	36
5-Comparaison de la méthode analytique et de la méthode arithmétique .....	41
6-Généralisation au cas de	
$1, \log(1 - \frac{1}{a}), \log(1 + \frac{1}{a}), \log(1 + \frac{2}{a})$ .....	48

<b>Chapitre II:      </b> Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes de nombres rationnels (II) et programmation linéaire semi-infinie .....	50
1-Introduction .....	51
2-Mesures d'indépendance linéaire de 1, $\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$ , ..., $\log\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$ .....	52
2.1-Quelques lemmes sur les idéaux .....	52
2.2-Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes de nombres rationnels et de nombres premiers .....	60
3-Programmation linéaire semi-infinie .....	70
3.1-Programmation linéaire semi-infinie .....	71
3.2-La forme de la programmation linéaire .....	73
 <b>Chapitre III:      </b> Une généralisation du diamètre transfini entier et les polynômes de Müntz-Legendre généralisés .....	79
1-Introduction .....	80
2-Rappels .....	84
3-Polynômes de Müntz-Legendre généralisés (MLG) .....	89
3.1-Polynômes de Müntz-Legendre .....	89
3.2-Polynômes de MLG sur $[0, 1]$ .....	91
3.3-Polynômes de MLG sur $[0, \frac{1}{4}]$ .....	99
3.3.1-Le facteur $x$ .....	100
3.3.2-Le facteur $1 - 4x$ .....	103
4-Résolution de systèmes d'inéquations linéaires et application à la recherche de polynômes de petite norme sur un intervalle .....	107
4.1-La borne initiale .....	107
4.2-Les facteurs nécessaires .....	108
4.3-La résolution d'un système d'inéquations linéaires ...	109

4.3.1-Majoration de formes linéaires .....	110
4.3.2-Changement de base et résolution du système d'inéquations linéaires .....	111
5-Application à $T_{\mathbb{Z}, (\frac{1}{\sqrt{x}}, 12)}([2, 4])$ .....	113
5.1-Calcul d'une borne initiale .....	113
5.2-Les facteurs nécessaires .....	114
5.3-Exhaustion .....	118
5.4-Tableau des "meilleurs" polynômes .....	120
6-Application à $T_{\mathbb{Z}}([0, \frac{1}{4}])$ .....	123
<b>Bibliographie</b> .....	<b>126</b>

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

Nous rappelons tout d'abord que  $\mu$  est une mesure d'irrationalité du nombre réel irrationnel  $\alpha$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $q_0(\varepsilon) > 0$  telle que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > q^{-\mu-\varepsilon}$$

pour tous les entiers  $p$  et  $q$  avec  $q > q_0(\varepsilon)$ . Le minimum des  $\mu$  est noté  $\mu(\alpha)$ .

On définit de même (voir définition I-2.2) une mesure d'indépendance linéaire de  $n + 1$  nombres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Depuis les travaux de A. Baker [BA1] on sait minorer des formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques du type

$$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$$

où les  $\beta_i$  et  $\alpha_j$  sont des nombres algébriques ( $\alpha_j \neq 0$  pour  $1 \leq j \leq n$ ). On a le théorème suivant,

### **Théorème 0-1**

*Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des nombres algébriques non-nuls avec les degrés au plus  $d$  et les hauteurs au plus  $A$ . Soient  $\beta_0, \dots, \beta_n$  des nombres algébriques avec les degrés au plus  $d$  et les hauteurs au plus  $B (\geq 2)$ , soit*

$$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$$

*alors, on a  $\Lambda = 0$  ou  $|\Lambda| > B^{-C}$ , où  $C$  est un nombre effectivement calculable ne dépendant que de  $n, d, A$ .*

Les résultats de A. Baker et G. Wüstholz ou M. Waldschmidt donnent des valeurs explicites de la constante  $C$  (qui est en général très grande).

Nous nous intéressons ici au cas particulier où les  $\beta_i$  et  $\alpha_j$  sont des nombres entiers ou rationnels.

Dans le cas particulier d'un seul logarithme d'autres méthodes permettent d'obtenir un résultat avec une constante  $C$  plus petite. R. Apéry (cf [PO]) a montré que l'on a

$$\left| \log 2 - \frac{p}{q} \right| > q^{-4,622\dots}$$

pour  $q > q_0$  et pour tout  $p$ , c'est-à-dire que  $\log 2$  a une mesure d'irrationalité  $\mu(\log 2)$  inférieure ou égale à  $4,622\dots$

Ces résultats ont été généralisés par Alladi et Robinson [AR] pour  $\log(r/s)$  où  $r/s$  est un rationnel assez proche de 1 en utilisant les approximations de Padé. Des travaux ultérieurs de F. Amoroso [AM1] [AM2] utilisant la notion de f-diamètre transfini entier d'un intervalle ont permis d'obtenir une mesure d'irrationalité de  $\log 2$  inférieure à 3,991. Nous dirons que ces démonstrations sont de type analytique. En 1987 E. A. Rukhadze [RU] puis M. Hata [HA1] en 1990 ont montré que  $\mu(\log 2) \leq 3,8914\dots$ . Cette méthode que nous appellerons de type arithmétique considère les facteurs premiers du numérateur et du dénominateur des approximations successives de  $\log 2$ . On pourra aussi se reporter à l'article de C. Viola [VI] pour une présentation utilisant les fonctions hypergéométriques.

En 1987 G. Rhin [RH2] démontre que

$$\Lambda = b_0 + b_1 \log 2 + b_2 \log 3$$

vérifie

$$|\Lambda| > B^{-7,616\dots}$$

par une méthode de type analytique pour  $B \geq B_0$ . Pour cette démonstration on considère des intégrales d'une suite de fonctions rationnelles

$$\int_2^3 \frac{P_n(x)}{x^{n+1}} dx \quad \text{et} \quad \int_3^4 \frac{P_n(x)}{x^{n+1}} dx$$

où le polynôme  $P_n(x)$  contient les facteurs  $x - 2$ ,  $x - 3$ ,  $x - 4$ ,  $5x - 12$ ,  $17x^2 - 102x + 144$ ,  $19x^2 - 108x + 144$ . Nous donnerons au chapitre III des justifications théoriques de l'utilisation de ces polynômes.

Deux méthodes distinctes, la méthode analytique et la méthode arithmétique, sont donc en présence pour fournir des mesures d'indépendance linéaire de nombres du type  $1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$  où les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des nombres rationnels.

Dans le premier chapitre nous nous proposons de comparer les résultats de ces deux méthodes dans le cas où on considère une forme

$$\Lambda = b_0 + b_1 \log\left(1 - \frac{1}{a}\right) + b_2 \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

où l'entier  $a \geq 2$  tend vers l'infini. En nous restreignant à n'utiliser comme facteurs des polynômes  $P_n$  qui interviennent dans les intégrales que  $(x - (a - 1))$ ,  $(x - a)$ , et  $(x - (a + 1))$ , c'est-à-dire que en étudiant les intégrales

$$\int_{a-1}^a \frac{((x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1)))^n}{x^{n+1}} dx$$

et

$$\int_a^{a+1} \frac{((x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1)))^n}{x^{n+1}} dx$$

ou

$$\int_{a-1}^a \frac{((x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1)))^{2n}}{x^{3n+1}} dx$$

et

$$\int_a^{a+1} \frac{((x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1)))^{2n}}{x^{3n+1}} dx,$$

nous constaterons aux théorèmes I-2.8 et I-2.11 que si  $a$  est petit ( $a \leq 5$ ) la méthode arithmétique fournit les meilleurs résultats et que



si  $a \geq 6$  c'est la méthode analytique qui donne la plus petite mesure d'indépendance linéaire.

On remarque que dans le tableau de comparaison des mesures d'indépendance linéaire que nous donnons à la fin du chapitre I on obtient par la méthode arithmétique une mesure d'indépendance linéaire de  $1, \log 2, \log 3$  inférieure ou égale à  $10, 14 \dots$ . Cependant, comme l'a montré G. Rhin, une étude plus poussée de la méthode analytique faisant intervenir des facteurs supplémentaires permet d'obtenir une meilleure mesure. Dans les chapitres suivants nous n'étudierons que la méthode analytique.

Dans le chapitre II on donne, après deux propositions sur certaines propriétés des produits d'idéaux dans  $\mathbb{Z}[x]$ , au théorème II-2.5 un résultat général sur la mesure d'indépendance linéaire de

$$1, \log \frac{a_2}{a_1}, \dots, \log \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

où les  $a_i$  sont une suite croissante d'entiers positifs. Nous donnons en corollaire les résultats suivants,

$$|p + q_1 \log 2 + q_2 \log 3 + q_3 \log 5| \geq H^{-15,3577-\varepsilon}$$

au théorème II-2.6, et

$$|p + q_1 \log 2 + q_2 \log 3 + q_3 \log 5 + q_4 \log 7| \geq H^{-256,865-\varepsilon}$$

au théorème II-2.7.

Dans le chapitre III nous commençons par reformuler le théorème II-2.5 en utilisant une nouvelle notion de diamètre transfini entier d'un intervalle réel  $[a, b]$ ,

$$t_{\mathbb{Z},(f,\Delta)}([a, b]) = \inf_{p \in (x,\Delta)^n \mathbb{Z}[x]} \left| |p(x)|^{1/2n} f(x) \right|_{1,[a, b]}$$

où  $\deg p(x) = 2n$  et  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Ceci montre l'intérêt de trouver des majorations explicites du diamètre transfini entier afin de fournir de bonnes minoration de formes linéaires  $\Lambda$  dans le cas où les  $\beta_i$  et  $\alpha_j$  sont entiers.

Nous introduisons au paragraphe 3 les polynômes de Müntz-Legendre généralisés. Dans le cas classique (Borwein et Erdelyi [BE]) si le polynôme  $p_n$  de  $\mathbb{R}[x]$  de degré  $n$  s'écrit  $p_n(x) = x^k q(x)$  alors on a

$$|q(0)| \leq \sqrt{2k+1} \binom{n+1+k}{n-k} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_n(x)|.$$

Nous démontrons la proposition III-3.3 suivante

Soit  $Q(x)$  un polynôme de  $\mathbb{R}_{n+q}[x]$  qui s'écrit  $Q(x) = x^k(1-x)^q R(x)$  où  $R(x) \in \mathbb{R}_{n-k}[x]$ . Alors

$$|R(0)| \leq \sqrt{(2k+1) \binom{n+1+k}{n-k} \binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}} \max_{0 \leq x \leq 1} |Q(x)|.$$

Nous rappelons ([FRS]) la définition de polynôme critique d'un intervalle réel  $I$ . Soit un polynôme irréductible  $p(x) = a_d x^d + \dots \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $a_d > 0$  dont tous les zéros sont dans l'intervalle  $I$  et pour lequel la valeur critique  $C_p = a_d^{-1/d}$  est supérieure au diamètre transfini entier de  $I$

$$t_{\mathbb{Z}}(I) = \inf_{\substack{p \in \mathbb{Z}[s] \\ \deg p \geq 1}} |p|_{1,I}^{1/\deg p}.$$

On dit qu'un tel polynôme est un polynôme critique. On sait alors que si un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{Z}[x]$  de degré  $n$  vérifie

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |Q(x)|^{1/n} \leq 0,42353115 \dots$$

et si  $P$  est un polynôme critique pour  $[0, 1]$  alors il existe une constante positive  $\gamma_p$  telle que  $P^k$  divise  $Q$  avec  $k \geq \gamma_p n$ . On sait que ([FRS])

pour  $p = x$  et  $p = x - 1$  on a  $\gamma_p = 0,264151$ . En utilisant la proposition III-3.3, nous démontrons que l'on peut prendre pour ces polynômes  $\gamma_p = 0,28948$ .

De même nous montrons que pour les polynômes critiques  $p = x$  et  $p = 4x - 1$  de l'intervalle  $[0, 1/4]$  on peut prendre  $\gamma_p = 0,591725$  et  $0,094995$  respectivement (au lieu de  $0,57896$  et  $0,07563$  respectivement obtenus par l'inégalité de Müntz-Legendre classique).

Dans les paragraphes qui suivent on se propose de déterminer pour des degrés petits les polynômes de plus petite norme de façon à obtenir une majoration du diamètre transfini entier d'un intervalle  $[a, b]$ . Pour cela nous utilisons les polynômes de Müntz-Legendre généralisés, l'algorithme LLL et une méthode de résolution des systèmes d'inéquations linéaires adaptée de la méthode du simplexe.

Nous appliquons tout d'abord cette méthode à l'étude de  $t_{\mathbb{Z}, (\frac{1}{\sqrt{x}}, 12)}([2, 4])$  et nous déterminons la table des polynômes de plus petite norme jusqu'au degré 40 (ces polynômes sont appelés polynômes de Chebyshev dans [BE]). Nous obtenons comme facteurs de ces polynômes, les polynômes  $5x - 12$ ,  $17x^2 - 102x + 144$  et  $19x^2 - 108x + 144$  qui ont été utilisés par G. Rhin pour donner la meilleure mesure d'indépendance linéaire connue de  $1, \log 2, \log 3$ . Les autres facteurs ne permettent pas d'améliorer cette mesure. D'autre part le facteur  $7x^2 - 48x + 72$  a une racine réelle hors de l'intervalle  $[2, 4]$  et le facteur  $93x^3 - 764x^2 + 2016x - 1728$  a deux racines complexes, phénomène analogue à celui qui avait été constaté par Habsieger et Salvy [HS] pour le diamètre transfini entier de  $[0, 1]$ .

Nous étudions ensuite de la même manière  $t_{\mathbb{Z}}([0, 1/4])$  et nous donnons les meilleurs polynômes jusqu'au degré 53. Nous constatons que le facteur  $4921x^5 - 4594x^4 + 1697x^3 - 310x^2 + 28x - 1$  trouvé par Habsieger et Salvy [HS] pour le degré 35 et qui a des racines complexes n'apparaît pas pour les degrés 36 à 53.

# CHAPITRE I

Mesure d'indépendance linéaire  
de logarithmes  
de nombres rationnels (I)  
&  
comparaison de la méthode analytique  
et de la méthode arithmétique

## 1-Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les définitions d'une mesure d'irrationalité et d'une mesure d'indépendance linéaire de plusieurs irrationnels. Nous améliorons les mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans le cas particulier de

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right),$$

et nous généraliserons jusqu'à

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{2}{a}\right).$$

D'autre part, nous comparerons dans ce chapitre deux méthodes qu'on appelle méthode analytique et méthode arithmétique. On explique ces deux méthodes par un exemple de mesure de  $\log 2$ . Quand on observe l'histoire de la mesure d'irrationalité de  $\log 2$ , la méthode de Baker de minoration de formes linéaires de logarithmes [BA1] fournit  $\mu(\log 2) \leq 10^{22}$  ; en 1978, Apéry (cf [PO]) obtient  $\mu(\log 2) \leq 4,622 \dots$  par une méthode d'accélération de la convergence de la série définissant  $\log 2$  ; en 1980 K. Alladi et M. L. Robinson [AR] donnent la même valeur avec une méthode analytique. Les approximations de  $\log 2$  obtenues sont liées aux approximants de Padé de la fonction  $\log(1 - \frac{1}{z})$ . Cette méthode avait déjà permis à Baker [BA2] de donner en 1964  $\mu(\log 2) \leq 12,5$ . On peut citer encore Danilov [DA] qui donne un résultat équivalent à celui d'Apéry. En 1982, Chudnovsky [CHU] annonce  $\mu(\log 2) \leq 4,269 \dots$  et  $\mu(\log 2) \leq 4,134 \dots$ . En 1985, G. Rhin [RH1] démontre simplement les deux résultats de Chudnovsky et il donne la valeur  $\mu(\log 2) \leq 4,079 \dots$ . En 1993, F. Amoroso [AM] obtient  $\mu(\log 2) \leq 3,991 \dots$  en utilisant la méthode analytique avec le diamètre transfini. Et en 1990, M. Hata [HA]

donne  $\mu(\log 2) \leq 3,8914 \dots$  avec la méthode arithmétique. Ce résultat avait déjà été donné de façon moins précise par E. A. Rukhadze[RU] en 1987. C'est la meilleure mesure de  $\log 2$  actuellement connue. Pour expliquer les deux méthodes, analytique et arithmétique, on considère l'intégrale suivante:

$$I_n = \int_0^1 \left( \frac{x(1-x)}{1+x} \right)^n \frac{dx}{1+x} = a_n - b_n \log 2$$

On peut démontrer qu'il existe  $d_n \in \mathbb{Z}$  ( $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$ ) tel que  $b_n \in \mathbb{Z}$ ,  $d_n a_n \in \mathbb{Z}$ . On obtient (cf [PO])  $\mu(\log 2) = 4,622 \dots$ . Si on pose

$$I'_n = \int_0^1 \frac{H_n(x)}{(1+x)^n} \frac{dx}{1+x}$$

où  $H_n \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $\deg H_n \leq 2n$ ,  $H_n \in ((1+x, 2)\mathbb{Z}[x])^n$ . on a

$$d_n I'_n = d_n a'_n - d_n b'_n \log 2$$

où  $d_n a'_n \in \mathbb{Z}$ ,  $b'_n \in \mathbb{Z}$ .

La méthode analytique consiste à chercher un bon polynôme pour améliorer la mesure, c'est-à-dire à chercher  $H_n(x)$  tel que

$$\max_{0 < x < 1} \frac{|H_n(x)|}{(1+x)^n} < \max_{0 < x < 1} \left| \frac{x(1-x)}{1+x} \right|^n.$$

Par exemple, Chudnovsky [CHU] trouve  $\mu(\log 2) \leq 4,269 \dots$  et  $\mu(\log 2) \leq 4,134 \dots$  avec cette méthode. F. Amoroso utilise cette méthode avec le diamètre transfini et trouve  $\mu(\log 2) \leq 3,999 \dots$ . En 1985 G. Rhin donne avec cette méthode  $\mu \leq 7,616 \dots$  qui est la meilleure mesure actuellement connue pour  $1, \log 2, \log 3$ .

La méthode arithmétique, introduite par Siegel, considère les coefficients du binôme, c'est-à-dire, par exemple que dans l'intégrale

$$I_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{k_1} (x-2)^{k_2}}{x^n} \frac{dx}{x} = e_n - f_n \log 2$$

où  $k_1, k_2$  sont entiers et  $k_1 + k_2 = 2n$ , on cherche  $d_n^* \in \mathbb{Z}$ , un facteur commun à  $d_n e_n$  et  $d_n f_n$ , le plus grand que possible tel que

$$\frac{d_n e_n}{d_n^*} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{d_n f_n}{d_n^*} \in \mathbb{Z},$$

ce qui permet d'améliorer la mesure. Par exemple M. Hata en 1990 donne  $\mu(\log 2) \leq 3,891 \dots$  avec cette méthode. Par ailleurs, G. Rhin et C. Viola développent cette méthode, et viennent de trouver  $\mu(\zeta(3)) \leq 5,514 \dots$ . Nous nous proposons ici de comparer les deux méthodes, analytique et arithmétique, dans des cas différents.

## 2-Mesure d'indépendance linéaire de

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

### 2.1-Définitions

#### Définition I-2.1

Soit  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . On dit que le réel  $\mu$  est une mesure d'irrationalité de  $\alpha$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $q_0(\varepsilon) > 0$ , tel que pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $q \geq q_0(\varepsilon)$ , on a

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}.$$

Si  $q_0(\varepsilon)$  est effectivement calculable, on dit que l'on a une mesure effective d'irrationalité.

Le minimum de ces nombres  $\mu$  est noté  $\mu(\alpha)$ .

#### Définition I-2.2

Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  des réels linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . On dit que  $\nu$  est une mesure d'indépendance linéaire de  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $H_0(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $(p, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ ,

$$H = \max\{|q_1|, \dots, |q_n|\} \geq H_0(\varepsilon),$$

on ait

$$|p\alpha_0 + q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n| \geq H^{-\nu-\varepsilon}.$$

Si  $H_0(\varepsilon)$  est effectivement calculable, on dit que l'on a une mesure effective d'indépendance linéaire.

Le minimum de ces nombres  $\nu$  est noté  $\nu(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . On remarque que, avec ces notations, on a  $\mu(\alpha) = \nu(1, \alpha) + 1$ .



## 2.2-Quelques résultats connus

Les mesures d'irrationalité d'un logarithme d'un nombre rationnel ont été beaucoup étudiées (Apéry, Alladi et Robinson, Rukhadze, Hata, Rhin...). Nous nous intéresserons ici aux mesures d'indépendance linéaire de plusieurs logarithmes de nombres rationnels et nous en déduirons plus particulièrement des mesures d'indépendance linéaire de

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

et de

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{2}{a}\right).$$

En fait, K. Alladi et M. L. Robinson [AR] ont bien étudié les mesures d'irrationalité de  $\log(1 + \frac{1}{a})$  pour  $a \in \mathbb{N}$  ; ils ont trouvé:

### **Théorème I-2.3**

Soit  $K$  le corps des nombres rationnels ou un corps quadratique imaginaire et  $R$  l'anneau des entiers de  $K$ . On pose pour un nombre complexe  $z$

$$\alpha(z) = \max \left\{ \left| \frac{(1 \pm \sqrt{1-z})^2}{z} \right| \right\}, \quad \beta(z) = \min \left\{ \left| \frac{(1 \pm \sqrt{1-z})^2}{z} \right| \right\}.$$

Soient  $r$  et  $s$  deux éléments non nuls de  $R$  qui satisfont aux conditions suivants:

$$(i) \frac{r}{s} \notin [1, \infty[ \quad (ii) \beta\left(\frac{r}{s}\right) \cdot |r| \cdot e < 1$$

Alors

$$\log\left(1 - \frac{r}{s}\right) \notin K$$

et pour  $\forall \varepsilon$ , il existe  $b_0(\varepsilon)$  tel que si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|b| > b_0$ , on a

$$\left| \log \left( 1 - \frac{r}{s} \right) - \frac{a}{b} \right| > \frac{1}{|b|^{\mu+\varepsilon}}$$

où

$$\mu = 1 + \frac{\log \left( \alpha \left( \frac{r}{s} \right) |r| \right) + 1}{\log \left( \frac{\alpha \left( \frac{r}{s} \right)}{|r|} \right) - 1}.$$

En particulier,  $\log \left( 1 - \frac{r}{s} \right)$  est un nombre irrationnel avec une mesure d'irrationalité au plus égale à  $\mu$ .

#### Corollaire I-2.4

Soient  $p, q$  deux entiers positifs satisfaisant

$$\left( 1 - \sqrt{1 + \frac{p}{q}} \right)^2 \cdot q \cdot e < 1,$$

alors  $\log \left( 1 + \frac{p}{q} \right)$  est un nombre irrationnel avec une mesure d'irrationalité inférieure ou égale à

$$\mu_{p,q} = 1 + \frac{\log \left( q \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{p}{q}} \right)^2 \right) + 1}{\log \left( \frac{q}{p^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{p}{q}} \right)^2 \right) - 1}.$$

#### Corollaire I-2.5

$\log 2$  est un nombre irrationnel avec une mesure d'irrationalité inférieure ou égale à  $4,622\dots$ .

#### Corollaire I-2.6

Soit  $m \in \mathbb{Z}^+$ , alors  $\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$  a une mesure d'irrationalité

$$\mu_{1,m} = 2 + \frac{2}{\log m} + O\left(\frac{1}{\log^2 m}\right)$$

et on a  $\mu_{1,m} \rightarrow 2$  quand  $m \rightarrow \infty$ .

Bien sûr, une meilleure mesure d'irrationalité de  $\log 2$  a déjà été proposée, mais cette méthode nous permet de calculer une mesure d'irrationalité de  $\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$  pour tout  $m$  entier positif.

D'autre part, dans le cas de plusieurs logarithmes G. Rhin et P. Toffin ont donné les approximants de Padé de  $1, \log(1 + \alpha_1), \dots, \log(1 + \alpha_r)$ . On a le résultat [RT] d'approximation suivant:

### **Théorème I-2.7**

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$   $r$  ( $r \geq 2$ ) nombres rationnels non nuls,  $Q$  un entier positif tel que pour  $1 \leq i \leq r$ ,  $Q\alpha_i \in \mathbb{Z}$  et

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq r} |\alpha_i| \leq \frac{1}{r+2}.$$

Il existe deux constantes positives  $\theta, \gamma$  ne dépendant que de  $r$  et de  $\alpha$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$ , si

$$\omega = \theta \alpha^{r+1} Q^r e^{r(1+\varepsilon)} < 1,$$

on a

$$|u_0 + u_1 \log(1 + \alpha_1) + \dots + u_r \log(1 + \alpha_r)| \geq c H^{-\mu},$$

où  $u_0, u_1, \dots, u_r$  sont entiers,  $H = \max_{1 \leq i \leq r} |u_i| > 0$ ,

$$\mu = -\frac{r(1 + \varepsilon + \log Q) + \log \gamma}{\log \omega}$$

et  $c = c(\alpha, r, \varepsilon)$ .

On obtient par exemple que

$$\left| u_0 + u_1 \log \frac{3}{4} + u_2 \log \frac{5}{4} \right| \geq H^{-88} e^{-196}.$$

Alors que la méthode de Baker qui propose des minoration des formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques [BA1] donne dans ce cas particulier une moins bonne estimation (on trouve  $3.10^{21}$  au lieu de 88).

On a donc un problème d'approximation simultanée, la question est de savoir si on peut trouver des mesures d'indépendance linéaire de

$$1, \log \left( 1 - \frac{1}{a} \right), \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right)$$

pour  $a \geq 2$  entier. On a trouvé le résultat suivant:

### 2.3-Mesure d'indépendance linéaire de $1, \log(1 - \frac{1}{a}), \log(1 + \frac{1}{a})$

#### **Théorème I-2.8**

Soit  $a$  un nombre positif  $a \geq 4$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$  tel que

$$\left| p + q_1 \log \left( 1 - \frac{1}{a} \right) + q_2 \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right| \geq H^{-\mu_1 - \varepsilon}$$

pour tous entiers  $p, q_1, q_2$  avec

$$H = \max\{ |q_1|, |q_2| \} \geq H_0(\varepsilon),$$

où une mesure d'indépendance linéaire  $\mu_1$  est donné par

$$\mu_1 = - \frac{K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_1)|}{K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_2)|}$$

où

$$K_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 2$$

avec  $D_n = \text{ppcm}[1, 2, \dots, 2n]$  et

$$\mathcal{F}_1(x) = \frac{(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))}{x}$$

$\xi_1 \notin ]a - 1, a + 1[$ ,  $\xi_2, \xi_3 \in ]a - 1, a + 1[$  sont les zéros de  $\mathcal{F}_1'(x)$  avec

$$|\mathcal{F}_1(\xi_2)| > |\mathcal{F}_1(\xi_3)|.$$

On a aussi les corollaires suivants (à comparer avec le théorème 2.7)

### Corollaire I-2.9

$$\left| p + q_1 \log \frac{3}{4} + q_2 \log \frac{5}{4} \right| \geq H^{-36,86-\varepsilon}.$$

### Corollaire I-2.10

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mu_1 = 2.$$

Donc, on remplace la mesure ( $\mu = 88$ ) de G. Rhin et P. Toffin par  $\mu = 36,83$ .

Avec la méthode arithmétique, on a le théorème suivant:

### Théorème I-2.11

Soit  $a$  un nombre impair positif  $a \geq 3$ . Pour  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$  tel que

$$\left| p + q_1 \log \left( 1 - \frac{1}{a} \right) + q_2 \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right| \geq H^{-\mu_2 - \varepsilon}$$

pour tous entiers  $p, q_1, q_2$  avec

$$H = \max\{ |q_1|, |q_2| \} \geq H_0(\varepsilon),$$

où une mesure d'indépendance linéaire  $\mu_2$  est donné par

$$\mu_2 = -\frac{K_2 + \log |\mathcal{F}_2(\xi'_1)|}{K_2 + \log |\mathcal{F}_2(\xi'_2)|}$$

où

$$K_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 3 + \frac{1}{2} \left( -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log \frac{27}{16} \right) = 2,354 \dots$$

avec

$$D_n = \frac{\text{ppcm}[1, 2, \dots, 3n]}{\prod_{p \in T_n} p}$$

où

$$T_n = \left\{ p : \text{premier} \mid \frac{1}{2} \leq \left\{ \frac{n}{p} \right\} < \frac{2}{3} \right\}$$

si on définit  $\left\{ \frac{n}{p} \right\} = \frac{n}{p} - \left[ \frac{n}{p} \right]$ ,  $\left[ \frac{n}{p} \right]$  étant la partie entier de  $\frac{n}{p}$ , et

$$\mathcal{F}_2(x) = \frac{(x - (a - 1))^2 (x - a)^2 (x - (a + 1))^2}{x^3} Q$$

où  $Q = \frac{(a^2 - 1)a}{8}$ , et  $\xi'_1 \notin ]a - 1, a + 1[$ ,  $\xi'_2, \xi'_3 \in ]a - 1, a + 1[$  sont les zéros de  $\mathcal{F}'_2(x)$  avec

$$|\mathcal{F}_2(\xi'_2)| > |\mathcal{F}_2(\xi'_3)|.$$

Ces deux théorèmes nous donnent donc des mesures différentes, nous les comparons dans le paragraphe suivant.

### 3-Préliminaires

On démontre d'abord quelques lemmes qu'on va utiliser dans les démonstrations des théorèmes précédents et le chapitre suivant.

#### Lemme I-3.1

Soient  $m \geq 1$  un entier positif et  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$   $m$  nombres réels. Supposons que pour tout  $n \geq 1$  il existe des entiers  $r_n, p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$  tels que en posant

$$\varepsilon_n^{(1)} = r_n \gamma_1 - p_n^{(1)},$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = r_n \gamma_2 - p_n^{(2)},$$

...

$$\varepsilon_n^{(m)} = r_n \gamma_m - p_n^{(m)},$$

on ait les propriétés  $r_n > 0, \varepsilon_n^{(i)} \neq 0$  pour  $1 \leq i \leq m$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|r_n|) \leq \sigma$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|\varepsilon_n^{(i)}|) = -\tau^{(i)} \quad 1 \leq i \leq m$$

où  $\sigma, \tau^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) sont des nombres positifs. Posons

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq m} (\tau^{(i)}).$$

Si pour tout  $i \neq j, \tau^{(i)} \neq \tau^{(j)}$ , alors,  $1, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  et, pour tout  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < \tau$ ), il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$  tel que

$$|p + q_1 \gamma_1 + \dots + q_m \gamma_m| \geq H_0^{-\frac{\sigma}{\tau} - \varepsilon}$$

pour tout entiers  $p, q_i, (1 \leq i \leq m)$  avec

$$H = \max_{1 \leq i \leq m} \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon).$$

### Démonstration:

Posons  $\Lambda_m = p + q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 + \cdots + q_m\gamma_m$  pour des entiers fixés arbitraires. On peut supposer, quitte à remplacer  $m$  par un entier plus petit, que  $q_1, q_2, \cdots, q_m$  sont tous non nuls. On a

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= p + \sum_{i=1}^m q_i \left( \frac{p_n^{(i)} + \varepsilon_n^{(i)}}{r_n} \right) \\ &= \frac{pr_n + \sum_{i=1}^m q_i p_n^{(i)}}{r_n} + \frac{\sum_{i=1}^m q_i \varepsilon_n^{(i)}}{r_n} \\ &= \frac{A_n}{r_n} + \frac{\omega_n}{r_n} \end{aligned}$$

où

$$A_n = pr_n + \sum_{i=1}^m q_i p_n^{(i)} \quad \text{et} \quad \omega_n = \sum_{i=1}^m q_i \varepsilon_n^{(i)}.$$

On démontre que  $1, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  par récurrence sur  $m$ .

Pour  $m = 1$  c'est le lemme 3.1 de Hata[HA2].

Pour  $m \geq 2$ , on suppose que le lemme soit vrai pour  $m - 1$ , alors

$$\Lambda_{m-1} = p + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{m-1}\gamma_{m-1} \neq 0.$$

a) s'il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$

$$A_n \neq 0; \quad A_n \in \mathbb{Z}^*$$



on a

$$\left| \frac{A_n}{r_n} \right| \geq \frac{1}{r_n}.$$

Puisque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il exist  $n_0(\varepsilon)$  tel que pour  $n \geq n_0(\varepsilon)$ , on a  $|\omega_n| \leq mHe^{(-\tau+\varepsilon)n}$ , alors on peut donc choisir  $n_1(\varepsilon)$  tel que  $n \geq n_1(\varepsilon)$ ,  $|\omega_n| \leq \frac{1}{2}$ , on a donc

$$|\Lambda_m| \geq \left| \frac{A_n}{r_n} \right| - \left| \frac{\omega_n}{r_n} \right| \geq \frac{1}{2r_n}$$

et donc  $1, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

b) supposons que  $A_n = 0$  pour une infinité de  $n$ ,

$$\Lambda_m = \frac{\omega_n}{r_n}.$$

On a  $\Lambda_m = 0$ , car  $r_n$  est un entier positif et  $\omega_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , d'où  $\omega_n = 0$ , i.e.

$$\sum_{i=1}^m q_i \varepsilon_n^{(i)} = 0.$$

On pose  $\tau = \tau^{(l)} = \min_i(\tau^{(i)})$ , on a donc

$$\sum_{i \neq l} q_i \frac{\varepsilon_n^{(i)}}{\varepsilon_n^{(l)}} + q_l = 0,$$

de plus, pour tout  $i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n^{(i)}| = -\tau^{(i)},$$

on a donc, pour tout réel  $\theta > 0$  et  $n \geq n(\theta)$ ,

$$e^{(-\tau^{(i)}+\theta)n} \geq |\varepsilon_n^{(i)}| \geq e^{(-\tau^{(i)}-\theta)n},$$

par conséquent pour tout  $i \neq l$ , il existe un entier  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ ,

$$\left| \frac{\varepsilon_n^{(i)}}{\varepsilon_n^{(l)}} \right| \leq e^{(\tau - \tau^{(i)} + 2\theta)n}$$

avec  $2\theta < -\min_{i \neq l}(\tau - \tau^{(i)})$ , et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon_n^{(i)}}{\varepsilon_n^{(l)}} \right| = 0$$

pour tout  $i \neq l$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i \neq l} q_i \frac{\varepsilon_n^{(i)}}{\varepsilon_n^{(l)}} + q_l \right) = q_l$$

et donc  $q_l = 0$ . On obtient alors

$$\Lambda_{m-1} = \sum_{i \neq l} q_i \gamma_i + p = 0,$$

c'est-à-dire que  $1, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$  ne sont pas linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . On a une contradiction. Par conséquent, quelque soit l'entier  $m$ , si  $\tau^{(i)} \neq \tau^{(j)}$  pour  $i \neq j$ , alors  $1, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

Il est clair, d'après b), que l'ensemble  $\Omega = \{n \geq 1 ; A_n \neq 0\}$  est infini. Donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut définir un  $\delta$  suffisamment petit  $\delta \equiv \delta(\varepsilon) \in ]0, \tau/6[$  satisfaisant

$$\frac{\sigma + \delta}{\tau - 3\delta} < \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2},$$

donc il existe un entier  $n(\varepsilon) \geq n_0$  tel que

$$e^{(\sigma - \delta)n} \leq |r_n| \leq e^{(\sigma + \delta)n}$$

$$\max\{|\varepsilon_n^{(i)}| \mid 1 \leq i \leq m\} \leq e^{-(\tau-\delta)n}.$$

Pour tout  $n \geq n(\varepsilon)$ , on définit

$$H_0(\varepsilon) = \min\left\{N \geq 1 \mid N^{\frac{\varepsilon}{2}} \geq 2e^{\sigma+\delta}(2m)^{\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta}} \text{ et } N^{\frac{\varepsilon\tau}{4}} \geq (2e^{\sigma+\delta})^{\tau+\sigma} m^{\sigma+\delta}\right\}$$

et

$$N(H) = \min\left\{N > n(\varepsilon) \mid 2mH < e^{(\tau-\delta)N}\right\}$$

pour tout  $H > H_0(\varepsilon)$ . Parce que  $|\omega_n| \leq mHe^{-(\tau-\delta)n}$  pour tout  $n > n(\varepsilon)$ , on a  $|\omega_n| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \geq N(H)$ , donc

$$|\Lambda| = \left| \frac{A_n + \omega_n}{r_n} \right| \geq \frac{1 - |\omega_n|}{|r_n|} > \frac{1}{2|r_n|} \geq \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)n} \quad (*)$$

pour tout  $n \in \Omega$  avec  $n \geq N(H)$  (on a  $|A_n| \geq 1$  si  $A_n \neq 0$ , car  $A_n \in \mathbb{Z}$ ).

Maintenant, on considère les deux cas suivants (1)  $N(H) \in \Omega$  et (2)  $N(H) \notin \Omega$ . Dans le cas (1), avec la définition de  $N(H)$ , on a

$$2mH \geq e^{(\tau-\delta)(N(H)-1)} \implies e^{N(H)} \leq e(2mH)^{\frac{1}{\tau-\delta}}$$

on remplace  $n$  par  $N(H)$  dans (\*), on a toujours  $A_n \neq 0$ , donc on a

$$\begin{aligned} |\Lambda| &\geq \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)N(H)} \\ &\geq \frac{1}{2} e^{-\sigma-\delta} (2m)^{\frac{-\sigma-\delta}{\tau-\delta}} H^{\frac{-\sigma-\delta}{\tau-\delta}} \\ &\geq (H_0(\varepsilon))^{\frac{-\varepsilon}{2}} H^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \geq H^{\frac{-\sigma}{\tau}-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dans le cas (2), soit  $M(H)$  le plus petit entier satisfaisant  $M(H) > N(H)$  et  $M(H) \in \Omega$ . Parce que  $A_{M(H)-1} = 0$ , on a

$$|\Lambda| = \left| \frac{\omega_{M(H)-1}}{r_{M(H)-1}} \right| \leq mHe^{-(\sigma+\tau-2\delta)(M(H)-1)}$$

d'où

$$e^{M(H)} \leq e \left( \frac{mH}{|\Lambda|} \right)^{\frac{1}{(\sigma+\tau-2\delta)}}.$$

En prenant  $n = M(H)$  dans (\*), on obtient

$$|\Lambda| \geq \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)M(H)} \geq \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)} \left( \frac{|\Lambda|}{mH} \right)^{\frac{\sigma+\delta}{\sigma+\tau-2\delta}}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\Lambda| &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\tau+\sigma-2\delta}{\tau-3\delta/6}} (e^{-\sigma-\delta})^{\frac{\tau+\sigma-2\delta}{\tau-3\delta/6}} m^{\frac{-\sigma-\delta}{\tau-3\delta/6}} H^{\frac{-\sigma-\delta}{\tau-3\delta/6}} \\ &\geq 2^{\frac{-\tau-\sigma}{\tau-3\tau/6}} (e^{\sigma+\delta})^{\frac{-\tau-\sigma}{\tau-3\tau/6}} m^{\frac{-\sigma-\delta}{\tau-3\tau/6}} H^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\geq \left(2^{\tau+\sigma} (e^{\sigma+\delta})^{\tau+\sigma} m^{\sigma+\delta}\right)^{-\frac{2}{\tau}} H^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\geq (H_0(\varepsilon))^{\frac{-\varepsilon}{2}} H^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\geq H^{\frac{-\sigma}{\tau}-\varepsilon}. \end{aligned} \quad \square$$

### Remarque

La conclusion du lemme 3.1 reste vraie si on remplace la condition "pour tout  $i \neq j$ ,  $\tau^{(i)} \neq \tau^{(j)}$ " par " $1, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ ".

### Lemme I-3.2

Soit  $m \geq 1$  entier et soient  $k_0, k_1, \dots, k_m$   $m+1$  entiers positifs tels que  $\sum_{i=1}^m k_i > k_0$ . Soient  $l_1, l_2, \dots, l_m$  des entiers positifs tels que  $l_i \leq k_i n$  et

$$\sum_{i=1}^m l_i \neq k_0 n,$$

alors pour tout  $n \geq 1$ , il existe un entier positif  $D_n$ , tel que

$$\frac{D_n}{\sum_{i=1}^m l_i - k_0 n} \prod_i \binom{k_i n}{l_i} \in \mathbb{Z}$$

où

$$D_n = \frac{\text{ppcm}[1, 2, \dots, \max(k_0 n, ((\sum_i k_i) - k_0) n)]}{D_n^*}$$

et  $D_n^*$  est un entier ne dépendant que de  $k_0, k_1, \dots, k_m$  et  $n$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n^* = \sum_i (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))$$

où

$$\psi(t_i) = \frac{\Gamma'(t_i)}{\Gamma(t_i)},$$

et où  $\Gamma(z)$  est la fonction Gamma et  $(t_i)_{1 \leq i \leq l}$  la suite ordonnée de tous les nombres rationnels de  $[0, 1]$  dont les dénominateurs sont  $k_0, k_1, \dots, k_m$  ou  $\sum_s k_s - k_0$ ;

$$t_i \in E = \left\{ \frac{j}{k_l}, \frac{h}{\sum_s k_s - k_0} \mid j \in \mathbb{Z}^+ \quad 0 \leq j < k_l \text{ pour } 0 \leq l \leq m, \right.$$

$$\left. \text{et } h \in \mathbb{Z}^+ \quad 0 \leq h \leq \sum_s k_s - k_0 \right\}.$$

### Démonstration :

La première partie du lemme est facile à démontrer. On a

$$\prod_i \binom{k_i n}{l_i} \in \mathbb{Z},$$

et si on prend  $D_n^* = 1$ , on obtient

$$\frac{D_n}{\sum_{i=1}^m l_i - k_0 n} \in \mathbb{Z}.$$

Mais on désire que  $D_n^* \in \mathbb{Z}$  soit le plus grand possible. On calcule  $D_n^*$  selon la méthode suivante :

On pose

$$A = \prod_{i=1}^m \binom{k_i n}{l_i}; \quad M = \max \left( k_0, \sum_i k_i - k_0 \right),$$

on veut trouver les  $p$  assez grands  $> \sqrt{Mn}$  tel que  $\frac{A}{p} \in \mathbb{Z}$ , i.e.  $p|A$  et

$$\sum_{i=1}^m l_i - k_0 n \equiv 0 \pmod{p}.$$

On a

$$\binom{k_i n}{l_i} = \frac{(k_i n)!}{(l_i)!(k_i n - l_i)!}$$

et on sait que pour tout nombre premier  $p$  l'exposant de  $p$  dans  $A$  est égal, puisque  $p > \sqrt{Mn}$ , à

$$J = \sum_{i=1}^m \left( \left[ \frac{k_i n}{p} \right] - \left[ \frac{l_i}{p} \right] - \left[ \frac{k_i n - l_i}{p} \right] \right)$$

où le symbole  $[a]$  est la partie entière du réel  $a$  et  $\{a\} = a - [a]$ , donc, on veut trouver les  $p$  tels que  $J \geq 1$ .

On pose

$$\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\}, \quad \theta_i = \left\{ \frac{l_i}{p} \right\},$$

on a

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{i=1}^m \left( \left[ k_i \left( \left[ \frac{n}{p} \right] + \omega \right) \right] - \left[ \frac{l_i}{p} \right] - \left[ k_i \left[ \frac{n}{p} \right] + k_i \omega - \left[ \frac{l_i}{p} \right] - \theta_i \right] \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left( k_i \left[ \frac{n}{p} \right] + [k_i \omega] - \left[ \frac{l_i}{p} \right] - \left( k_i \left[ \frac{n}{p} \right] - \left[ \frac{l_i}{p} \right] \right) - [k_i \omega - \theta_i] \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m ([k_i \omega] - [k_i \omega - \theta_i]).
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^m l_i - k_0 n \equiv 0 \pmod{p}$$

on a, pour  $q$  un entier et  $r \geq 0$  un entier ,

$$k_0 n = \sum_{i=1}^m l_i + pq \implies k_0 \frac{n}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{p} + q$$

$$k_0 \left( \left[ \frac{n}{p} \right] + \omega \right) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{l_i}{p} \right] + \sum_{i=1}^m \theta_i + q$$

donc

$$\{k_0 \omega\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \theta_i \right\}$$

et

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = \left\{ \sum_{i=1}^m \theta_i \right\} + r = \{k_0 \omega\} + r = k_0 \omega - [k_0 \omega] + r.$$

Puisque  $[\alpha] + [\beta] \leq [\alpha + \beta]$  on a

$$\sum_{i=1}^m [k_i \omega - \theta_i] \leq \left[ \omega \sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^m \theta_i \right]$$

d'où

$$\begin{aligned}
 J &\geq \sum_{i=1}^m [k_i \omega] - \left[ \omega \sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^m \theta_i \right] \\
 &\geq \sum_{i=1}^m [k_i \omega] - \left[ \omega \sum_{i=1}^m k_i - k_0 \omega + [k_0 \omega] - r \right] \\
 &\geq \sum_{i=1}^m [k_i \omega] - \left[ \left( \sum_{i=1}^m k_i - k_0 \right) \omega \right] - [k_0 \omega] + r.
 \end{aligned}$$

Donc le problème de trouver  $D_n^*$ , i.e. chercher les  $p$  tels que

$$\frac{A}{p} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m l_i - k_0 n \equiv 0 \pmod{p}$$

est équivalent au problème suivant :

En posant

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^m [k_i \omega] - \left[ \left( \sum_{i=1}^m k_i - k_0 \right) \omega \right] - [k_0 \omega],$$

trouver les intervalles inclus dans  $[0, 1[$  sur lesquels

$$f(\omega) \geq 1$$

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{j}{k_l}, \frac{h}{\sum_s k_s - k_0} \mid j \in \mathbb{Z}^+ \quad 0 \leq j < k_l \quad \text{pour} \quad 0 \leq l \leq m, \right.$$

$$\left. \text{et} \quad h \in \mathbb{Z}^+ \quad 0 \leq h \leq \sum_s k_s - k_0 \right\}$$



$$= \left\{ t_i \mid 0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq 1, \quad 1 \leq i \leq N \right\}$$

Sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $f$  est constante. Le domaine que l'on cherche est  $\Omega = \bigcup_i [t_i, t_{i+1}[$  où  $f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \geq 1$  et

donc  $D_n^* = \prod_{p \in T_n} p$  où

$$T_n = \left\{ p : \text{nombre premier} \mid \left\{ \frac{n}{p} \right\} = \omega \in \Omega \right\}.$$

Ensuite, on a besoin de calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n^*$ .

On prend les extrémités des intervalles  $[t_i, t_{i+1}[$  dans le domaine  $\Omega$ , on pose  $t_i = \frac{p_i}{q_i}$  avec  $\text{pgcd}(p_i, q_i) = 1$ , et

$$B_i^{(l)} = \frac{q_i}{q_i l + p_i}$$

et

$$S_i^{(l)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{\frac{p}{n} \in ]B_{i+1}^{(l)}, B_i^{(l)}]} \log p$$

pour  $l \geq 0$ , alors

$$\frac{1}{n} \log D_n^* = \sum_i \sum_{l=0}^{\infty} S_i^{(l)}(n)$$

D'après le théorème des nombres premiers [LV], si

$$D_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n),$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 1$$

et donc pour  $1 \leq a \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_{na} = a$$

De même ici on a  $S_i^{(l)}(n) \rightarrow B_i^{(l)} - B_{i+1}^{(l)}$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $l \geq 0$ , et puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \prod_{p < \sqrt{Mn}} p = 0,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n^* &= \sum_i \sum_{l=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_i^{(l)}(n) \\ &= \sum_i \sum_{l=0}^{\infty} (B_i^{(l)} - B_{i+1}^{(l)}) \\ &= \sum_i \left( \frac{\Gamma' \left( \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \right)}{\Gamma \left( \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \right)} - \frac{\Gamma' \left( \frac{p_i}{q_i} \right)}{\Gamma \left( \frac{p_i}{q_i} \right)} \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{\Gamma'(t_{i+1})}{\Gamma(t_{i+1})} - \frac{\Gamma'(t_i)}{\Gamma(t_i)} \right). \quad \square \end{aligned}$$

On peut réaliser ces calculs par ordinateur. Par exemple, dans le cas particulier où  $m = 3$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ ,  $k_0 = 3$ , on a le lemme suivant (M.Hata[HA2]).

### Lemme I-3.3

*Il existe un entier positif  $D_n$  tel que*

$$\frac{D_n}{j+k+l-3n} \binom{2n}{j} \binom{2n}{k} \binom{2n}{l} \in \mathbb{Z}$$

pour tous les entiers  $0 \leq j, k, l, \leq 2n$  avec  $j+k+l \neq 3n$  et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n^* = 3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log \frac{27}{16} \right) = 2,35472 \dots$$

### Démonstration :

On prend

$$f(\omega) = 3[2\omega] - 2[3\omega]$$

et on trouve  $\Omega = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n^* = \frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log \frac{27}{16} \right) = 0,64528 \dots$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n^* = 3 - 0,64528 = 2,35472 \dots \quad \square$$

### Lemme I-3.4

Soit

$$f(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\alpha_i} \frac{1}{x^{\alpha_0}}$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i > \alpha_0$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a_i = \prod_{j=1}^m p_j^{\beta_{ij}}$ ,  $\beta_{ij} \in \mathbb{N}$ .

On définit

$$\Delta = \text{ppcm}(a_i \mid 1 \leq i \leq k) = \prod_{j=1}^m p_j^{\mathcal{B}_j}$$

où  $\mathcal{B}_j = \max_{1 \leq i \leq k} (\beta_{ij})$ . Soit

$$Q = \prod_{j=1}^m p_j^{C_j}$$

$$\text{où } C_j = \max \left( 0, \alpha_0 \mathcal{B}_j - \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_{ij} \right).$$

Alors pour  $I \neq J$

$$I_n = \int_{a_I}^{a_J} (Qf(x))^n \frac{dx}{x} \in \frac{1}{D_n} \left( \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \log \frac{a_J}{a_I} \right)$$

où  $D_n$  est défini comme dans le lemme 3.2.

### Démonstration :

Pour  $I \neq J$  ( $1 \leq I, J \leq k$ )

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{a_I}^{a_J} \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\alpha_i n} Q^n \frac{dx}{x^{\alpha_0 n + 1}} \\ &= \sum_{l_1=0}^{\alpha_1 n} \sum_{l_2=0}^{\alpha_2 n} \cdots \sum_{l_k=0}^{\alpha_k n} B_l \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i n}{l_i} \int_{a_I}^{a_J} x^{S-1} dx \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B_l &= (-1)^{\sum l_i} Q^n \prod_{i=1}^k a_i^{\alpha_i n - l_i} \\ &= (-1)^{\sum l_i} \prod_{j=1}^m p_j^{C_j n} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^m p_j^{\beta_{ij} (\alpha_i n - l_i)} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{\sum l_i} \prod_{j=1}^m p_j \quad (c_j n + \sum_{i=1}^k \beta_{ij} (\alpha_i n - l_i))$$

et  $S = \sum_{i=1}^k l_i - \alpha_0 n$

$$I_n = \sum_{\sum_{i=1}^k l_i \neq \alpha_0 n} \frac{\prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i n}{l_i}}{\sum_{i=1}^k l_i - \alpha_0 n} B_l(a_J^S - a_I^S)$$

$$+ \sum_{\sum_{i=1}^k l_i = \alpha_0 n} \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i n}{l_i} B_l \int_{a_I}^{a_J} \frac{dx}{x}.$$

D'après le lemme 3.2, on a

$$D_n \sum_{\sum_{i=1}^k l_i \neq \alpha_0 n} \frac{\prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i n}{l_i}}{\sum_{i=1}^k l_i - \alpha_0 n} \in \mathbb{Z}$$

et

$$D_n \sum_{\sum_{i=1}^k l_i = \alpha_0 n} \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i n}{l_i} \in \mathbb{Z}.$$

Il reste à démontrer que

$$B_l(a_J^S - a_I^S) \in \mathbb{Z}.$$

Il suffit de démontrer que  $\forall I \quad 1 \leq I \leq k$

$$B_l a_I^S \in \mathbb{Z}$$

où

$$a_I^S = \prod_{j=1}^m p_j^{\beta_{Ij} S}.$$

Donc cela revient à prouver que pour tout  $j$ ,

$$C_j n + \sum_{i=1}^k \beta_{ij} (\alpha_i n - l_i) + \beta_{Ij} \left( \sum_{i=1}^k l_i - \alpha_0 n \right) \geq 0.$$

Si  $\sum_{i=1}^k l_i - \alpha_0 n \geq 0$  c'est évident, sinon

$$\left( \alpha_0 n - \sum_{i=1}^k l_i \right) (\mathcal{B}_j - \beta_{Ij}) \geq 0$$

où  $\mathcal{B}_j = \max_{1 \leq i \leq k} (\beta_{ij})$ . On a

$$\alpha_0 n (\mathcal{B}_j - \beta_{Ij}) \geq \sum_{i=1}^k l_i (\mathcal{B}_j - \beta_{Ij}) \geq \sum_{i=1}^k l_i (\beta_{ij} - \beta_{Ij})$$

donc

$$n \left( \alpha_0 \mathcal{B}_j - \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_{ij} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_{ij} - \beta_{Ij} \alpha_0 \right) \geq \sum_{i=1}^k l_i (\beta_{ij} - \beta_{Ij})$$

$$n \left( C_j + \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_{ij} - \beta_{Ij} \alpha_0 \right) \geq \sum_{i=1}^k l_i (\beta_{ij} - \beta_{Ij}).$$

Donc

$$nC_j + n \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_{ij} - n\beta_{Ij} \alpha_0 - \sum_{i=1}^k l_i \beta_{ij} + \beta_{Ij} \sum_{i=1}^k l_i \geq 0$$

i.e.

$$C_j n + \sum_{i=1}^k \beta_{ij} (\alpha_i n - l_i) + \beta_{1j} \left( \sum_{i=1}^k l_i - \alpha_0 n \right) \geq 0. \quad \square$$

### Lemme I-3.5

Soit

$$f = \prod_{i=1}^k (z - a_i)^{\alpha_i} \frac{1}{z^{\alpha_0}},$$

où  $a_i$ ,  $\alpha_i$  sont définis comme dans le lemme 3.4. Soient  $\xi_i$   $1 \leq i \leq k-1$  les zéros de  $f'$ , tels que  $a_1 < \xi_1 < a_2 < \xi_2 < \dots < a_{k-1} < \xi_{k-1} < a_k$ .

Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(z))^n \frac{dz}{z} = \log |f(\xi_i)|$$

### Démonstration :

On pose  $g(z) = \frac{1}{z}$  et

$$h(z) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \log |z - a_i| - \alpha_0 \log |z|.$$

D'après le résultat de [DI], on a donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(z))^n \frac{dz}{z} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(z) e^{nh(z)} dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \Gamma \left( \frac{1}{2} \right) g(\xi_i) e^{nh(\xi_i)} \sqrt{\frac{2}{-nh''(\xi_i)}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \log \Gamma \left( \frac{1}{2} \right) + \log g(\xi_i) + nh(\xi_i) + \log \sqrt{\frac{2}{-nh''(\xi_i)}} \right) \\ &= h(\xi_i) \\ &= \log |f(\xi_i)|. \end{aligned} \quad \square$$

## 4-Démonstrations des théorèmes

Dans ce paragraphe, on va démontrer les Théorèmes I-2.8, I-2.11 en utilisant les lemmes du paragraphe précédent.

### Démonstration du théorème I-2.8 :

On prend

$$\mathcal{F}_1(x) = \frac{(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))}{x}$$

et on considère l'intégrale

$$\begin{aligned} I_n(a - 1, a) &= \int_{a-1}^a (\mathcal{F}_1(x))^n \frac{dx}{x} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n B_{jkl} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l} \int_{a-1}^a x^{j+k+l-n-1} dx \end{aligned}$$

où

$$B_{jkl} = (-1)^{j+k+l} (a - 1)^{n-j} a^{n-k} (a + 1)^{n-l}.$$

$$I_n(a - 1, a) =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j+k+l \neq n} \frac{B_{jkl}}{j+k+l-n} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l} (a^{j+k+l-n} - (a-1)^{j+k+l-n}) \\ &+ \sum_{j+k+l=n} B_{jkl} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l} \int_{a-1}^a \frac{dx}{x} \\ &\equiv U_n(a - 1, a) + V_n \int_{a-1}^a \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$



De la même façon

$$I_n(a, a+1) \equiv U_n(a, a+1) + V_n \int_a^{a+1} \frac{dx}{x}$$

où

$$U_n(a-1, a) =$$

$$\sum_{j+k+l \neq n} \frac{B_{jkl}}{j+k+l-n} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l} (a^{j+k+l-n} - (a-1)^{j+k+l-n})$$

$$U_n(a, a+1) =$$

$$\sum_{j+k+l \neq n} \frac{B_{jkl}}{j+k+l-n} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l} ((a+1)^{j+k+l-n} - a^{j+k+l-n})$$

et

$$V_n = \sum_{j+k+l=n} B_{jkl} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l}.$$

D'après le lemme 3.2, on a  $D_n^* = 1$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 2.$$

D'après le lemme 3.4, on a  $Q = 1$ , donc on a

$$(D_n U_n(a-1, a), D_n U_n(a, a+1), D_n V_n) \in \mathbb{Z}^3,$$

$$D_n I_n(a-1, a) = D_n U_n(a-1, a) + D_n V_n \log \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

et

$$D_n I_n(a, a+1) = D_n U_n(a, a+1) + D_n V_n \log \left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

On pose

$$p_n = D_n I_n(a-1, a) \quad q_n = D_n V_n \quad \text{et} \quad r_n = D_n I_n(a, a+1).$$

On a donc

$$p_n + q_n \log \left(1 - \frac{1}{a}\right) = D_n I_n(a-1, a) = \varepsilon_n$$

$$r_n + q_n \log \left(1 + \frac{1}{a}\right) = D_n I_n(a, a+1) = \delta_n$$

et avec le lemme 3.5, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n| = K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_2)| = -\tau$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\delta_n| = K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_3)| = -\tau'$$

où

$$K_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 2,$$

et  $a-1 < \xi_2 < a$ ,  $a < \xi_3 < a+1$  où  $\xi_2$  et  $\xi_3$  sont les zéros de  $\mathcal{F}'_1$  avec  $|\mathcal{F}_1(\xi_2)| \geq |\mathcal{F}_1(\xi_3)|$ .

D'autre part avec le théorème de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{j+k+l=n} B_{jkl} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (f(x))^n \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

où  $C$  est une courbe orientée fermée autour de l'origine passant par le point  $\xi_1$ , donc d'après le lemme I-3.5, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |q_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n V_n = K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_1)| = \sigma$$

où  $\xi_1$  un zéro de  $\mathcal{F}'_1$  et  $\xi_1 \notin [a-1, a+1]$ . D'après le lemme 3.1, on a

$$\left| p + q_1 \log \left( 1 - \frac{1}{a} \right) + q_2 \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right| \geq H^{-\mu_1 - \varepsilon}$$

où

$$\mu_1 = -\frac{K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_1)|}{K_1 + \log |\mathcal{F}_1(\xi_2)|}. \quad \square$$

### Démonstration du théorème I-2.11 :

On prend

$$\mathcal{F}_2(x) = \frac{(x - (a - 1))^2 (x - a)^2 (x - (a + 1))^2 Q}{x^3}$$

et on prend  $D_n$  comme dans le lemme 3.3 i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 2,35472 \dots$$

D'après le lemme 3.4, on a

$$Q = \frac{(a^2 - 1)a}{8}.$$

De la même façon que dans la démonstration du théorème 2.7, on considère l'intégrale

$$I_n = \int D_n (\mathcal{F}_2(x))^n \frac{dx}{x}$$

donc on a

$$\left| p + q_1 \log \left( 1 - \frac{1}{a} \right) + q_2 \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right| \geq H^{-\mu_2 - \varepsilon}$$

où une mesure d'indépendance linéaire  $\mu_2$  est donné par

$$\mu_2 = \frac{-(K_2 + \log |\mathcal{F}_2(\xi'_1)|)}{K_2 + \log |\mathcal{F}_2(\xi'_2)|}$$

où  $\xi'_1 \notin [a-1, a+1]$ ,  $\xi'_2, \xi'_3 \in [a-1, a+1]$  sont les zéros de  $\mathcal{F}'_2$  avec  $|\mathcal{F}_2(\xi'_2)| \geq |\mathcal{F}_2(\xi'_3)|$  et

$$K_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 2,35472 \dots$$

□

## 5-Comparaison de la méthode analytique et de la méthode arithmétique

Les deux théorèmes précédents (Th I-2.8, Th I-2.11) nous permettent de trouver des mesures d'indépendance linéaire de

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

dans le cas  $a \geq 4$  pour le premier théorème,  $a$  impair et  $a \geq 3$  pour le second mais il y a des différences de mesure dans les deux cas. Quand  $a$  est assez petit, les mesures du deuxième cas sont meilleures que celles du premier cas, par contre, pour  $a$  assez grand, le premier cas est meilleur que le deuxième. Ci-dessous on donne un tableau comparatif des deux méthodes :

<b>a</b>	2	3	4	5	6	7
$\mu_1$	—	—	36,86	16,221	11,625	9,58
$\mu_2$	—	10,14	—	10,83	—	11,55
<b>a</b>	8	9	...	10333	...	$10^{15} + 1$
$\mu_1$	8,41	7,64	...	2,73	...	2,179
$\mu_2$	—	12,17	...	36,635	...	129,46

Les choix  $a = 10333$  et  $a = 10^{15} + 1$  sont des choix arbitraires pour  $a$  impair assez grand.

Dans le cas  $a = 3$ , on trouve  $\mu_2 \leq 10, 14 \dots$ . Cela montre que

$$\left| p + q_1 \log \frac{2}{3} + q_2 \log \frac{4}{3} \right| \geq H^{-10,14-\epsilon}$$

pour tous entiers  $p, q_1, q_2$  avec  $H = \max\{|q_1|, |q_2|\} \geq H_0(\varepsilon)$ . On peut donc en déduire une mesure de  $1, \log 2, \log 3$  inférieure ou égale à  $10, 14 \dots$  par la méthode arithmétique. Mais on sait déjà que cette mesure inférieure ou égale à  $7, 616 \dots$  par la méthode analytique dans [RH2] (on la présentera dans le Chapitre III). On constate que la méthode arithmétique convient bien pour la mesure d'un seul logarithme (par exemple  $\mu(\log 2) \leq 3, 891 \dots$  [HA1]) mais pas aussi bien que la méthode analytique pour une mesure d'indépendance linéaire de plusieurs logarithmes. Par conséquent on n'utilisera que la méthode analytique dans les chapitres suivants.

On trouve aussi dans le tableau, sur la première ligne, la mesure  $\mu_1 \rightarrow 2$  quand  $a \rightarrow \infty$  et  $\mu_2 \rightarrow \infty$  sur la seconde. En effet, on peut le démontrer par la méthode suivante :

### Démonstration du corollaire I-2.10 :

Pour estimer les mesures  $\mu$ , il faut estimer  $|\mathcal{F}_1(\xi_1)|$  et  $|\mathcal{F}_1(\xi_2)|$ . D'abord, on va voir l'estimation de  $|\mathcal{F}_1(\xi_2)|$ , où  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sont les zéros de  $\mathcal{F}'_1 = \frac{d\mathcal{F}_1}{dx}$  différents de  $a, a-1, a+1$ . Si

$$\mathcal{F}_1 = \frac{(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))}{x}$$

$$\frac{d\mathcal{F}_1}{dx} = \frac{2x^3 - 3ax^2 + (a^3 - a)}{x^2}$$

et les  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont donc les racines du polynôme

$$P_1(x) = 2x^3 - 3ax^2 + (a^3 - a).$$

On considère le polynôme  $P_1(x)$  dans l'intervalle  $[-\frac{a}{2} - 1, -\frac{a}{2} + 1]$  pour  $a \geq 2$ , on a :

$$P_1\left(-\frac{a}{2} - 1\right) P_1\left(-\frac{a}{2} + 1\right) = a^2 \left(-\frac{81}{4}a^2 + 31\right) - 4 < 0$$

$$P_1'(x) = 6x^2 - 6ax > 0$$

$$P_1''(x) = 12x - 6a < 0.$$

Il existe donc une seule racine  $\xi_1$  de  $P_1(x)$  dans cet intervalle. Si on remplace  $\xi_1$  par  $-\frac{a}{2}$ , on trouve

$$\left| -\frac{a}{2} - \xi_1 \right| \leq \frac{1}{m} \left| P_1 \left( -\frac{a}{2} \right) \right|$$

où

$$m = \min_{-\frac{a}{2}-1 \leq x \leq -\frac{a}{2}+1} \{|P_1'(x)|\} = \left| P_1' \left( -\frac{a}{2} + 1 \right) \right| = \frac{9}{2}a^2 - 12a + 6$$

et

$$\left| P_1 \left( -\frac{a}{2} \right) \right| = a$$

donc

$$\left| -\frac{a}{2} - \xi_1 \right| \leq \frac{1}{\frac{9}{2}a - 12 + \frac{6}{a}} \leq \frac{2}{9a}$$

$$\xi_1 = -\frac{a}{2} + O\left(\frac{1}{a}\right)$$

et on sait bien que  $\mathcal{F}_1(x)$  est continue dans cet intervalle.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} |\mathcal{F}_1(\xi_1)| = \lim_{a \rightarrow \infty} \left| \mathcal{F}_1 \left( -\frac{a}{2} \right) \right|$$

Donc pour  $a$  assez grand, on a  $|\mathcal{F}_1(\xi_1)| \sim \left| \mathcal{F}_1 \left( -\frac{a}{2} \right) \right| \sim \frac{27a^2}{4}$ .

D'autre part, pour estimer  $|\mathcal{F}_1(\xi_2)|$ , on a

$$\mathcal{F}_1(\xi_2) = \max_{a-1 \leq x \leq a+1} \left| \frac{(x - (a-1))(x - a)(x - (a+1))}{x} \right|$$

$$\leq \frac{\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))|}{a - 1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\xi_2) &\geq \max_{a-1 \leq x \leq a+1} \left| \frac{(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))}{a + 1} \right| \\ &\geq \frac{\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))|}{a + 1} \end{aligned}$$

donc on a besoin de calculer

$$\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))|.$$

On pose

$$G_1(x) = (x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))$$

$$G_1'(x) = 3x^2 - 6ax + (3a^2 - 1)$$

donc  $x_{1,2} = a \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  sont les zéros de  $G_1'(x)$  d'où

$$\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |G_1(x)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

donc

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{1}{a + 1} \leq |\mathcal{F}_1(\xi_2)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{1}{a - 1}$$

et pour  $a$  assez grand

$$|\mathcal{F}_1(\xi_2)| \sim \frac{2\sqrt{3}}{9a}.$$

Par conséquent

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mu_1 = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-(K_1 + \log \frac{27}{4} a^2)}{K_1 + \log \frac{2\sqrt{3}}{9} a} = 2$$

□



De la même façon, si  $Q = \frac{(a^2-1)a}{8}$  et

$$\mathcal{F}_2 = \frac{(x - (a - 1))^2(x - a)^2(x - (a + 1))^2}{x^3} Q$$

$$\frac{d\mathcal{F}_2}{dx} =$$

$$\frac{(x - a + 1)(x - a)(x - a - 1)(3x^3 - 3ax^2 + (-3a^2 + 1)x + 3a^3 - 3a)}{x^4} Q$$

donc les  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont les racines du polynôme

$$P_2(x) = 3x^3 - 3ax^2 + (-3a^2 + 1)x + (3a^3 - 3a).$$

Si on considère le polynôme dans l'intervalle  $[-a - 1, -a + 1]$ , on trouve

$$P_2(-a - 1)P_2(-a + 1) < 0$$

$$P_2' > 0 \quad \text{et} \quad P_2'' < 0$$

donc il existe une seule racine  $\xi_1$  de  $P_2(x)$  dans l'intervalle  $[-a - 1, -a + 1]$  et

$$\begin{aligned} |-a - \xi_1| &\leq \frac{1}{\min_{-a-1 \leq x \leq -a+1} \{|P_2'(x)|\}} |P_2(-a)| \\ &\leq \frac{-4a}{12a^2 - 24a + 10} \\ &\leq \frac{1}{3a} \end{aligned}$$

et

$$\xi_1 = -a + O\left(\frac{1}{a}\right)$$

donc, pour  $a$  assez grand

$$\log |\mathcal{F}_2(\xi_1)| \sim \log |\mathcal{F}_2(-a)|.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\xi_2) &= \max_{a-1 \leq x \leq a+1} \left| \frac{(x - (a-1))^2 (x-a)^2 (x - (a+1))^2}{x^3} \right| Q \\ &\leq \frac{\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |(x - (a-1))^2 (x-a)^2 (x - (a+1))^2|}{(a-1)^3} Q. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\xi_2) &\geq \max_{a-1 \leq x \leq a+1} \left| \frac{(x - (a-1))^2 (x-a)^2 (x - (a+1))^2}{(a+1)^3} \right| Q \\ &\geq \frac{\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |(x - (a-1))^2 (x-a)^2 (x - (a+1))^2|}{(a+1)^3} Q. \end{aligned}$$

En posant

$$G_2(x) = (x - (a-1))^2 (x-a)^2 (x - (a+1))^2$$

$$G_2'(x) = (x - (a-1))(x-a)(x - (a+1))(6x^2 - 12ax + 6a^2 - 2)$$

on trouve  $x_{1,2} = a \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  comme les zéros de  $G_2'$  différents des points  $a-1$ ,  $a$ ,  $a+1$ , donc

$$\max_{a-1 \leq x \leq a+1} |G_2(x)| = \left| G_2 \left( a \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right| = \frac{4}{27}$$

d'où

$$\frac{4}{27} \frac{1}{(a-1)^3} \frac{(a^2-1)a}{8} \leq |\mathcal{F}_2(\xi_2)| \leq \frac{4}{27} \frac{1}{(a-1)^3} \frac{(a^2-1)a}{8}.$$

Donc

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \log |\mathcal{F}_2(\xi_2)| = \log \frac{1}{54}.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \mu_2 &= -\frac{K_2 + \lim_{a \rightarrow \infty} \log |\mathcal{F}_2(\xi_1)|}{K_2 + \lim_{a \rightarrow \infty} \log |\mathcal{F}_2(\xi_2)|} \\ &= \frac{2,354 + \lim_{a \rightarrow \infty} \log \frac{(a^2 - 1)(4a^2 - 1)^2}{2}}{-2,354 + \log 54} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

## 6-Généralisation au cas de 1, $\log(1-\frac{1}{a})$ , $\log(1+\frac{1}{a})$ , $\log(1+\frac{2}{a})$

Le théorème 2.7 (G. Rhin[RT]) nous permet de calculer des mesures d'indépendance linéaire de

$$1, \log\left(1 - \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{1}{a}\right), \log\left(1 + \frac{2}{a}\right)$$

pour un nombre  $a$  suffisamment grand, précisément, on peut trouver des mesures, si  $3 \nmid a$  et  $a \geq 1014$ , ou si  $3|a$  et  $a \geq 42$ .

Avec la méthode précédente on peut trouver des mesures pour  $a \geq 21$  en utilisant les fonctions

$$f = \frac{(x - (a - 1))(x - a)(x - (a + 1))(x - (a + 2))}{x}.$$

De plus, si on utilise la méthode analytique pour chercher les meilleurs exposants des polynômes, on peut trouver des mesures d'indépendance linéaire avec par exemple la fonction

$$f = \frac{(x - (a - 1))^7(x - a)^{10}(x - (a + 1))^{10}(x - (a + 2))^6}{x^{10}}.$$

Pour  $a = 10$ , donc

$$\left| p + q_1 \log\left(\frac{9}{10}\right) + q_2 \log\left(\frac{11}{10}\right) + q_3 \log\left(\frac{12}{10}\right) \right| \geq H^{-3370,308-\epsilon}.$$

Si on prend

$$f = \frac{(x - (a - 1))^{958}(x - a)^{802}(x - (a + 1))^{1000}(x - (a + 2))^{791}}{x^{1000}} Q$$

où  $Q = 2 * 5^{42}$  pour  $a = 16$ , on a

$$\left| p + q_1 \log\left(\frac{15}{16}\right) + q_2 \log\left(\frac{17}{16}\right) + q_3 \log\left(\frac{18}{16}\right) \right| \geq H^{-67,251-\epsilon}.$$

Il semble raisonnable d'espérer que l'on pourra améliorer les résultats du théorème 2.7 pour tous les cas particuliers de

$$p + q_1 \log \left( 1 - \frac{1}{a} \right) + q_2 \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) + \cdots + q_k \log \left( 1 + \frac{k-1}{a} \right)$$

pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

## CHAPITRE II

Mesure d'indépendance linéaire  
de logarithmes  
de nombres rationnels (II)  
&  
programmation linéaire  
semi-infinie

## 1-Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter le théorème avec les idéaux pour des mesures d'indépendance linéaire des logarithmes, et deux mesures d'indépendance linéaire  $\mu \leq 15,3577$  et  $\mu \leq 256,865$  des logarithmes des nombres premiers  $1, \log 2, \log 3, \log 5$  et  $1, \log 2, \log 3, \log 5, \log 7$  respectivement. On va présenter la programmation linéaire semi-infinie pour chercher les "meilleurs" exposants des polynômes, c'est-à-dire, chercher les exposants des polynômes de la fonction tels que le maximum de la valeur absolue de la fonction associée à ces polynômes soit la plus petite possible ou que la mesure d'indépendance linéaire de logarithmes associée à ces polynômes soit la plus petite possible. De même nous retrouvons les bons exposants des polynômes de G. Rhin pour la meilleure mesure d'indépendance linéaire actuellement connue de  $1, \log 2, \log 3$ .

## 2-Mesures d'indépendance linéaire de 1, $\log\left(\frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2}\right)$ , $\dots$ , $\log\left(\frac{\mathbf{a}_{n-1}}{\mathbf{a}_n}\right)$

### 2.1-Quelques lemmes sur les idéaux

Nous démontrons ici deux propositions que nous allons utiliser dans ce chapitre et le chapitre suivant :

#### Proposition II-2.1 (Propriété du produit)

Soient  $p_1, p_2, \dots, p_r$ ,  $r$  nombres premiers distincts. Soient

$$\Delta = \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j} \quad \Delta_i = \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_{i,j}} \quad 1 \leq i \leq s$$

où  $\beta_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ),  $\alpha_{i,j}$  sont des entiers positifs ou nuls. Soient  $H_i(x)$  ( $1 \leq i \leq s$ )  $s$  polynômes à coefficients entiers avec  $\deg H_i = h_i$ ,  $H_i \in (\Delta_i, x)^{n_i}$  où  $(\Delta_i, x)$  désigne l'idéal engendré par  $\Delta_i$  et  $x$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ , i.e.  $\Delta_i \mathbb{Z}[x] + x \mathbb{Z}[x]$ . On suppose que  $\Delta_i | \Delta$  pour tout  $i$ . Soient  $n, n_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) des entiers positifs. Si

$$\Delta^n \mid \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i}$$

alors

$$H(x) = \prod_{i=1}^s H_i(x) \in (\Delta, x)^n.$$

#### Remarque

La condition  $\Delta_i | \Delta$  i.e.  $\alpha_{i,j} \leq \beta_j$  est nécessaire. En effet le polynôme

$$x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$$



appartient à  $(6, x)$  mais n'appartient pas à  $(6, x)^2$ .

### Démonstration

$$H_i(x) \in (\Delta_i, x)^{n_i}$$

donc il existe des polynômes  $Q_{ik_i}(x) \in \mathbb{Z}[x]$  tels que,

$$H_i = \sum_{k_i=0}^{n_i} Q_{ik_i}(x) x^{k_i} \Delta_i^{n_i-k_i}$$

et donc

$$\begin{aligned} H(x) &= \prod_{i=1}^s H_i(x) = \prod_{i=1}^s \sum_{k_i=0}^{n_i} Q_{ik_i}(x) x^{k_i} \Delta_i^{n_i-k_i} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq n_i \\ 1 \leq i \leq s}} \left( \prod_{i=1}^s (Q_{ik_i}(x) x^{k_i} \Delta_i^{n_i-k_i}) \right) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq n_i \\ 1 \leq i \leq s}} \left( \prod_{i=1}^s Q_{ik_i}(x) \right) (x^{k_1+\dots+k_s}) \left( \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i-k_i} \right). \end{aligned}$$

On a

$$\prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i-k_i} = \prod_{i=1}^s \left( \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_{ij}} \right)^{n_i-k_i} = \prod_{j=1}^r p_j^{\sum_{i=1}^s \alpha_{ij}(n_i-k_i)}.$$

Sachant que l'on a  $\Delta^n \mid \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i}$ , c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^s \alpha_{ij} n_i \geq \beta_j n \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\alpha_{ij} \leq \beta_j \quad 1 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq s$$

donc

$$\sum_{i=1}^s \alpha_{ij}(n_i - k_i) \geq \beta_j n - \sum_{i=1}^s \alpha_{ij} k_i \geq \beta_j \left( n - \sum_{i=1}^s k_i \right).$$

Donc pour tout  $\sum_{i=1}^s k_i \leq n$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i - k_i} &= \prod_{j=1}^r p_j^{\sum_{i=1}^s \alpha_{ij}(n_i - k_i)} \\ &= \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j(n - \sum_{i=1}^s k_i)} Q_j \\ &= \Delta^{(n - \sum_{i=1}^s k_i)} Q_j \end{aligned}$$

où  $Q_j$  est un entier.

Si on pose, en notant  $\underline{k} = (k_1, \dots, k_s)$ ,

$$\prod_{i=1}^s Q_{ik_i}(x) = Q_{\underline{k}}(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

alors

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq n_i \\ 1 \leq i \leq s}} Q_{\underline{k}}(x) x^{k_1 + \dots + k_s} \left( \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i - k_i} \right) \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_s \leq n} Q_{\underline{k}}(x) x^{k_1 + \dots + k_s} \Delta^{(n - \sum k_i)} Q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1 + \dots + k_s \geq n+1} Q_{\underline{k}}(x) x^{k_1 + \dots + k_s} \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i - k_i} \\
= & \sum_{k_1 + \dots + k_s \leq n} Q_{\underline{k}}(x) x^{k_1 + \dots + k_s} \Delta^{(n - \sum k_i)} Q_j \\
& + x^{n+1} \sum_{k_1 + \dots + k_s \geq n+1} Q_{\underline{k}}(x) x^{k_1 + \dots + k_s - n - 1} \prod_{i=1}^s \Delta_i^{n_i - k_i} \\
= & \sum_{k_1 + \dots + k_s} R_{\underline{k}}(x) x^{k_1 + \dots + k_s} \Delta^{n - (k_1 + \dots + k_s)} \\
\in & (\Delta, x)^n
\end{aligned}$$

où  $R_{\underline{k}}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .  $\square$

On a la proposition suivante dont nous aurons besoin dans le chapitre III :

**Proposition II-2.2** (Propriété du quotient)

Soient  $p_1, p_2, \dots, p_r$   $r$  nombres premiers distincts. Soient

$$\Delta = \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j} \quad \Delta_i = \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_{i,j}} \quad 1 \leq i \leq s$$

où  $\beta_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) et  $\alpha_{i,j}$  sont des entiers positifs ou nuls avec  $\beta_j \geq \alpha_{i,j}$  pour tout  $i, j$ . Soient  $H_i(x)$  ( $1 \leq i \leq s$ )  $s$  polynômes à coefficients entiers tels que  $H_i \in (\Delta_i, x)^{n_i}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) où les  $n_i$  sont des entiers positifs et  $H_i(0) = \varepsilon_i \Delta_i^{n_i}$  où  $\varepsilon_i = \pm 1$ . On pose

$$H = \prod_{i=1}^s H_i.$$

Si  $P, Q$  sont des polynômes de  $\mathbb{Z}[x]$  tels que  $P = HQ$  et  $P \in (\Delta, x)^d$ , où  $d$  est un entier positif, alors on a

$$Q \in (\Delta, x)^\delta$$

où

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq r} \left( \max \left( \left[ \frac{d - \sum_{i=1}^s \alpha_{ij} n_i}{\beta_j} \right], 0 \right) \right).$$

On démontre cette proposition en utilisant les deux lemmes suivants:

### Lemme II-2.3

Posons  $\Delta$  défini comme ci-dessus. Soient  $\Delta_0, d$  des entiers positifs.

On définit  $\delta$  par  $\Delta^\delta \parallel \frac{\Delta^d}{\Delta_0}$ , c'est-à-dire

$$\text{si } \frac{\Delta^d}{\Delta_0} \notin \mathbb{Z} \quad \delta = 0$$

$$\text{si } \frac{\Delta^d}{\Delta_0} \in \mathbb{Z} \quad \delta \text{ est le plus grand entier tel que } \Delta^\delta \mid \frac{\Delta^d}{\Delta_0}.$$

Soient  $P, H$  et  $Q$  des polynômes de  $\mathbb{Z}[x]$  tels que

$$P = HQ, \quad P \in (\Delta, x)^d$$

et

$$H = \varepsilon \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\deg H} a_i x^i$$

où  $\varepsilon = \pm 1$ , avec la propriété

$$\Delta_0 \mid \Delta^i a_i \quad 1 \leq i \leq \delta.$$

Alors on a

$$Q \in (\Delta, x)^\delta.$$

**Démonstration**

Le lemme est évident pour  $\delta = 0$ . On suppose donc dans la suite que  $\delta > 0$ . (Ce qui entraîne que, dans la proposition II-2.2, si on pose

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^s \Delta_i^{n_i}, \text{ on a } d - \sum_{1 \leq i \leq s} \alpha_{ij} n_i \geq \beta_j \quad 1 \leq j \leq r.)$$

On pose

$$P = c_0 \Delta^d + c_1 \Delta^{d-1} x + \cdots + c_{d-1} \Delta x^{d-1} + P_1(x) x^d$$

où  $c_i \in \mathbb{Z}$ ,  $P_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$  et

$$Q = \sum_{j=0}^{\deg Q} b_j x^j.$$

Donc

$$\begin{aligned} HQ &= \left( \varepsilon \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\deg H} a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\deg Q} b_j x^j \right) \\ &= \varepsilon b_0 \Delta_0 + \varepsilon \Delta_0 \sum_{j=0}^{\deg Q} b_j x^j + \sum_{i+j=1}^{\deg H + \deg Q} a_i b_j x^{i+j} \end{aligned}$$

Si  $P = HQ$ , alors on a

$$\begin{cases} c_0 \Delta^d = \varepsilon b_0 \Delta_0 \\ \dots \\ c_k \Delta^{d-k} = b_0 a_k + b_1 a_{k-1} + \cdots + b_k \varepsilon \Delta_0 \quad 1 \leq k \leq d. \end{cases}$$

On sait que

$$\Delta^d = \Delta^\delta \Delta_0 v \quad v \in \mathbb{Z}$$

donc

$$c_0 \Delta^\delta \Delta_0 v = \varepsilon b_0 \Delta_0$$

et

$$b_0 = \Delta^\delta b'_0$$

où  $b'_0 \in \mathbb{Z}$ .

On sait que  $\Delta_0 | \Delta^i a_i$ , c'est-à-dire  $\Delta^i a_i = \Delta_0 u_i$ , où  $u_i \in \mathbb{Z}$  pour  $1 \leq i \leq \delta$ .

Il est clair que  $\delta \leq d$ . Supposons que  $k \leq \delta$  et  $b_i = \Delta^{\delta-i} b'_i$   $0 \leq i \leq k-1$ , où  $b'_i \in \mathbb{Z}$ , alors

$$\begin{aligned} & c_k \Delta^{\delta-k} \Delta_0 v \\ &= \Delta^\delta b'_0 a_k + \Delta^{\delta-1} b'_1 a_{k-1} + \cdots + \Delta^{\delta-(k-1)} b'_{k-1} a_1 + b_k \varepsilon \Delta_0 \\ &= \Delta^{\delta-k} b'_0 \Delta_0 u_k + \Delta^{\delta-k} b'_1 \Delta_0 u_{k-1} + \cdots + \Delta^{\delta-k} b'_{k-1} \Delta_0 u_1 + b_k \varepsilon \Delta_0 \end{aligned}$$

donc on a

$$b_k = \Delta^{\delta-k} b'_k.$$

Donc par récurrence on obtient

$$Q = \Delta^\delta b'_0 + \Delta^{\delta-1} b'_1 x + \cdots + \Delta b'_{\delta-1} x^{\delta-1} + Q_1(x) x^\delta \in (\Delta, x)^\delta \quad \square$$

#### Lemme II-2.4

Supposons que l'on ait  $\Delta_i = \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_{ij}}$  avec  $\alpha_{ij} \leq \beta_j$  pour  $1 \leq j \leq r$  et que les  $H_i$   $1 \leq i \leq s$  soient définis comme dans la proposition II-2.2. Posons  $\Delta_0 = \prod_{i=1}^s \varepsilon_i \Delta_i^{n_i}$  et  $\delta, d$  sont définis comme dans le lemme précédent.

Alors  $H = \prod_{i=1}^s H_i$  vérifie les conditions du lemme II-2.3.

#### Démonstration

$H_i \in (\Delta_i, x)^{n_i}$ , donc  $H_i$  peut s'écrire sous la forme

$$H_i = a_{0i}\Delta_i^{n_i} + a_{1i}\Delta_i^{n_i-1}x + \cdots + a_{n_i-1i}\Delta_i x^{n_i-1} + a_{n_i i}x^{n_i}$$

où  $a_{k_i} \in \mathbb{Z}$  pour  $0 \leq k_i \leq n_i - 1$  et  $a_{0i} = \varepsilon_i$ ,  $a_{n_i i} \in \mathbb{Z}[x]$ . Donc

$$\begin{aligned} H &= \prod_{i=1}^s H_i = \prod_{i=1}^s \sum_{k_i=0}^{n_i} a_{k_i i} \Delta_i^{n_i-k_i} x^{k_i} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq n_i \\ 1 \leq i \leq s}} \prod_{i=1}^s (a_{k_i i} \Delta_i^{n_i-k_i} x^{k_i}) \\ &= \prod_{i=1}^s a_{0i} \Delta_i^{n_i} + \sum_{k_1+\cdots+k_s \geq 1} \prod_{i=1}^s a_{k_i i} \Delta_i^{n_i-k_i} x^{k_i} \\ &= \varepsilon \Delta_0 + \sum_{t=1}^N A_t x^t \end{aligned}$$

si on pose  $t = \sum_{1 \leq i \leq s} k_i$ ,  $N = \sum_{1 \leq i \leq s} n_i$  et

$$A_t = \sum_{k_1+\cdots+k_s=t} \prod_{i=1}^s a_{k_i i} \Delta_i^{n_i-k_i}.$$

On a

$$\begin{aligned} A_t \Delta^t &= \sum_{k_1+\cdots+k_s=t} \prod_{i=1}^s a_{k_i i} \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_{ij}(n_i-k_i)} \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j t} \\ &= \sum_{k_1+\cdots+k_s=t} \left( \prod_{i=1}^s a_{k_i i} \right) \prod_{j=1}^r p_j^{\sum_{i=1}^s \alpha_{ij}(n_i-k_i) + t\beta_j} \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^s p_j^{\sum_{i=1}^s \alpha_{ij} n_i} \sum_{k_1 + \dots + k_s = t} \left( \prod_{i=1}^s a_{k_i} \right) \prod_{j=1}^r p_j^{(\beta_j - \alpha_{ij}) t}.$$

Mais

$$\Delta_0 = \prod_{i=1}^s p_j^{\sum_{i=1}^s \alpha_{ij} n_i}$$

donc puisque  $\beta_j \geq \alpha_{ij}$  pour  $1 \leq j \leq r$  et  $1 \leq i \leq s$ , on a

$$\Delta_0 | A_t \Delta^t$$

pour  $t \geq 1$ . Donc  $H = \prod_{i=1}^s H_i$  vérifie les conditions du lemme II-2.3.  $\square$

### Démonstration de la proposition II-2.2

Il suffit d'appliquer les deux lemmes précédents.  $\square$

## 2.2-Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes de nombres rationnels et de nombres premiers

En utilisant les propositions et les lemmes précédents, on obtient donc

### Théorème II-2.5

Soient  $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$   $m$  entiers positifs et  $\Delta = \text{ppcm}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Soit pour tout  $n \geq 0$ ,  $H_n$  un polynôme à coefficients entiers,  $H_n \in (\Delta, x)^n \mathbb{Z}[x]$ . Soit pour tout  $a_i$   $1 \leq i < m$

$$I_n(a_i, a_{i+1}) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{H_n(x) dx}{x^n x}.$$

Alors si  $D_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, \max(n, \deg H_n - n))$ , on a en posant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = K$$



$$D_n I_n(a_i, a_{i+1}) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right).$$

On suppose qu'il existe des nombres positifs  $\tau^{(i)}$   $1 \leq i < m$  tels que

$$-\tau^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \max_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} \frac{|H_n(x)|}{x^n} \right),$$

distincts deux à deux. On suppose qu'il existe un nombre réel  $\rho > 0$  et un nombre réel  $\tau^{(0)} > 0$  tels que

$$\tau^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \max_{|z|=\rho} \left| \frac{H_n(z)}{z^n} \right| \right).$$

Si

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq m-1} (\tau^{(i)}) > K,$$

alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$  tel que

$$\left| p + q_1 \log \left( \frac{a_2}{a_1} \right) + \dots + q_i \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \dots + q_{m-1} \log \left( \frac{a_m}{a_{m-1}} \right) \right| \geq H^{-\mu-\varepsilon}$$

pour tous entiers  $p$  et  $q_i$   $1 \leq i \leq m-1$  avec  $H = \max_i \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon)$  ( $H_0(\varepsilon)$  effectivement calculable) et  $\mu$  est un nombre réel positif donné par

$$\mu = \frac{\tau^{(0)} + K}{\tau - K}.$$

### Remarque :

1) Il est clair que  $\mu$  dépend du nombre  $\rho$  qui sera choisi en fonction de la suite  $(H_n)$ .

2) Le résultat est identique si on remplace la suite  $\frac{H_n(x)}{x^n}$  par une sous suite  $\frac{H_{dn}(x)}{x^{dn}}$  avec  $d$  entier et  $d > 1$ .

**Démonstration**

On note

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\deg H_n} B_j x^j$$

$$I_n = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{H_n(x) dx}{x^n x}$$

$$= \sum_{j=0}^{\deg H_n} B_j \int_{a_i}^{a_{i+1}} x^{j-n-1} dx$$

$$= B_n \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{B_j}{j-n} (a_{i+1}^{j-n} - a_i^{j-n}) + \sum_{j=n+1}^{\deg H_n} \frac{B_j}{j-n} (a_{i+1}^{j-n} - a_i^{j-n}).$$

On a donc pour  $j \neq n$

$$B_j (a_{i+1}^{j-n} - a_i^{j-n}) \in \mathbb{Z}$$

car  $H_n(x) \in (\Delta, x)^n \mathbb{Z}[x]$  et  $\Delta = \text{ppcm}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

On a donc

$$D_n I_n(a_i, a_{i+1}) = D_n B_n \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + D_n \left( \sum_{j \neq n} \frac{B_j}{j-n} (a_{i+1}^{j-n} - a_i^{j-n}) \right) \\ \in \mathbb{Z} \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, on a les relations

$$D_n I_n(a_i, a_{i+1}) = p_{n,i} + D_n B_n \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \quad 1 \leq i \leq m-1$$

avec  $p_{n,i} \in \mathbb{Z}$ . On pose  $D_n I_n(a_i, a_{i+1}) = \varepsilon_n^{(i)}$ ,  $D_n B_n = r_n$ .

On a

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{|H_n(z)| dz}{z^n z}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |r_n| = \tau^{(0)} + K$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n^{(i)}| = K - \tau^{(i)}.$$

Si  $H_n$  vérifie la condition du théorème, i.e. si tous les  $\tau^{(i)}$  sont strictement positifs et distincts deux à deux, et si

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq m-1} (\tau^{(i)}) > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = K,$$

d'après le lemme I-3.1, il existe pour tout  $\varepsilon > 0$ , un entier positif  $H_0(\varepsilon)$  tel que

$$\left| p + q_1 \log \left( \frac{a_2}{a_1} \right) + \cdots + q_i \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \cdots + q_{m-1} \log \left( \frac{a_m}{a_{m-1}} \right) \right| \geq H^{-\mu-\varepsilon}$$

pour tous  $p, q_i$  entiers avec

$$H = \max_{1 \leq i \leq s} \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon),$$

où

$$\mu = -\frac{\tau^{(0)} + K}{K - \tau}. \quad \square$$

### Remarque :

Dans le cas où le polynôme  $H_n(x)$  est assez simple, on peut améliorer l'entier  $D_n$  par le lemme I-3.2, et donc améliorer la mesure d'indépendance linéaire.

G.Rhin [RH2] a trouvé une mesure d'indépendance linéaire de  $1, \log 2, \log 3$  avec  $\mu \leq 7,616\dots$ . C'est la meilleure mesure actuellement connue.

Nous donnons ici des mesures d'indépendance linéaire de  $1, \log 2, \log 3, \log 5$  et de  $1, \log 2, \log 3, \log 5, \log 7$  :

### **Théorème II-2.6**

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$ , tel que*

$$|p + q_1 \log 2 + q_2 \log 3 + q_3 \log 5| \geq H^{-15,3577-\varepsilon}$$

*pour tous entiers  $p, q_1, q_2, q_3$  avec  $H = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon)$  ( $H_0(\varepsilon)$  effectivement calculable).*

### **Théorème II-2.7**

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$ , tel que*

$$|p + q_1 \log 2 + q_2 \log 3 + q_3 \log 5 + q_4 \log 7| \geq H^{-256,865-\varepsilon}$$

*pour tous entiers  $p, q_1, q_2, q_3, q_4$  avec  $H = \max_{1 \leq i \leq 4} \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon)$  ( $H_0(\varepsilon)$  effectivement calculable).*

### **Démonstration du Théorème II-2.6 :**

On remarque tout d'abord que l'on peut remplacer dans la démonstration du théorème II-2.5 la suite  $\frac{H_n(x)}{x^n}$  par une sous suite  $\frac{H_{kn}(x)}{x^{kn}}$  avec l'entier  $k > 1$ .

On pose ici la suite

$$(\mathcal{F}_3(x))^n = \left( \frac{(x-15)^{1178}(x-16)^{1435}(x-18)^{2209}(x-20)^{1622}}{x^{2798}} \right)^n.$$

Compte tenu de la remarque ci-dessus on pourra supposer que l'entier  $n$  est toujours pair de façon à ce que  $(\mathcal{F}_3(x))^n$  soit positive.

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 3646.$$

En considérant l'intégrale

$$I_n(a, b) = \int_a^b (\mathcal{F}_3(x))^n \frac{dx}{x}$$

de la même façon que dans les démonstrations précédentes, on a

$$\begin{cases} D_n I_n(15, 16) = D_n U_n(15, 16) + D_n V_n \log \frac{16}{15} \\ D_n I_n(16, 18) = D_n U_n(16, 18) + D_n V_n \log \frac{18}{16} \\ D_n I_n(18, 20) = D_n U_n(18, 20) + D_n V_n \log \frac{20}{18} \end{cases}$$

avec

$$U_n(a, b) = \sum_{\sum_i l_i \neq \alpha_0 n} \frac{B_l \prod_i \binom{\alpha_i}{l_i}}{\sum_i l_i - \alpha_0 n} \left( b^{\sum_i l_i - \alpha_0 n} - a^{\sum_i l_i - \alpha_0 n} \right),$$

$$V_n = \sum_{\sum_i l_i = \alpha_0 n} B_l \prod_i \binom{\alpha_i}{l_i},$$

$$B_l = (-1)^{\sum_i l_i} (15)^{\alpha_1 n - l_1} (16)^{\alpha_2 n - l_2} (18)^{\alpha_3 n - l_3} (20)^{\alpha_4 n - l_4}$$

et

$$(D_n U_n(15, 16), D_n U_n(16, 18), D_n U_n(18, 20), D_n V_n) \in \mathbb{Z}^4.$$

On a donc

$$\begin{cases} p_n^{(1)} + r_n \log \frac{16}{15} = \varepsilon_n^{(1)} \\ p_n^{(2)} + r_n \log \frac{18}{16} = \varepsilon_n^{(2)} \\ p_n^{(3)} + r_n \log \frac{20}{18} = \varepsilon_n^{(3)}. \end{cases}$$

Si on pose

$$(p_n^{(1)}, p_n^{(2)}, p_n^{(3)}) = (D_n U_n(15, 16), D_n U_n(16, 18), D_n U_n(18, 20)) \in \mathbb{Z}^3$$

$$(\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}, \varepsilon_n^{(3)}) = (D_n I_n(15, 16), D_n I_n(16, 18), D_n I_n(18, 20))$$

$$r_n = D_n V_n \in \mathbb{Z},$$

on a

$$-\tau = \max_{1 \leq i \leq 3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n^{(i)}| \right) = K + \log |\mathcal{F}_3(\xi)| = -1203,3567$$

où

$$|\mathcal{F}_3(\xi)| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |\mathcal{F}_3(\xi_i)| \},$$

et  $\xi_i$  sont les zéros de  $\mathcal{F}'_3$ ,  $\xi_1 \in ]15, 16[$ ,  $\xi_2 \in ]16, 18[$ ,  $\xi_3 \in ]18, 20[$ , et  $K = 3646$ .

D'après le théorème des résidus, on a

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |r_n| = K + \log |\mathcal{F}_3(\xi_0)| = 18483,1185 \dots$$

où  $\xi_0$  est le zéro de  $\mathcal{F}'_3$  tel que  $\xi_0 \notin [15, 20]$ .

Donc, d'après le lemme I-3.2, on a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\left| p' + q_1' \log \frac{16}{15} + q_2' \log \frac{18}{16} + q_3' \log \frac{20}{18} \right| \geq H'^{-\mu-\varepsilon}$$

où  $\mu$  est donné par

$$\mu = \frac{\sigma}{\tau} = 15,3577$$

et  $H' = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |q_i'| \} \geq H'_0(\varepsilon)$ ,  $H'_0(\varepsilon)$  effectivement calculable, pour tout entier  $p'$ ,  $q_i'$  ( $1 \leq i \leq 3$ ).

Donc on obtient

$$\begin{aligned} & |p' + (4q_1' - 3q_2' + q_3') \log 2 + (-q_1' + 2q_2' - 2q_3') \log 3 \\ & + (-q_1' + q_3') \log 5| \geq H'^{-\mu-\varepsilon} \end{aligned}$$

Si on pose  $p = p'$  et

$$\begin{cases} q_1 = 4q_1' - 3q_2' + q_3' \\ q_2 = -q_1' + 2q_2' - 2q_3' \\ q_3 = -q_1' \quad + q_3' \end{cases}$$

on a

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Cela entraîne que pour tous entiers  $p$ ,  $q_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ),

$$|p + q_1 \log 2 + q_2 \log 3 + q_3 \log 5| \geq H^{-15,3577-\varepsilon}$$

où  $H = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon)$ ,  $H_0(\varepsilon)$  effectivement calculable.  $\square$

### Démonstration du Théorème II-2.7 :

On pose ici la suite

$$(\mathcal{F}_4(x))^n = \left( \frac{(x-35)^{93}(x-36)^{139}(x-40)^{183}(x-42)^{274}(x-45)^{91}}{x^{367}} \right)^n.$$

On a

$$K_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = 413$$

et

$$-\tau = \max_{1 \leq i \leq 4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n^{(i)}| = K_4 + \log |\mathcal{F}_4(\xi)| = K_4 - 422,634 = -9,634$$

où

$$|\mathcal{F}_4(\xi)| = \max_{1 \leq i \leq 4} \{ |\mathcal{F}_4(\xi_i)| \},$$

et  $\xi_i$  sont les zéros de  $\mathcal{F}'_4$ ,  $\xi_1 \in ]35, 36[$ ,  $\xi_2 \in ]36, 40[$ ,  $\xi_3 \in ]40, 42[$ ,  $\xi_4 \in ]42, 45[$ , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |q_n| = K_4 + \log |\mathcal{F}_4(\xi_0)| = \sigma = 2474,86$$

où  $\xi_0$  est le zéro de  $\mathcal{F}'_4$  tel que  $\xi_0 \notin [35, 45]$ .

De même façon que dans la démonstration précédente, on a pour tous entiers  $p$ ,  $q_i (1 \leq i \leq 3)$

$$|p + q_1 \log 2 + q_2 \log 3 + q_3 \log 5 + q_4 \log 7| \geq H^{-\mu-\varepsilon}$$

où  $\mu$  est donné par

$$\mu = \frac{\sigma}{\tau} = 256,865$$

et  $H = \max_{1 \leq i \leq 4} \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon)$ ,  $H_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$ .  $\square$

### Remarque

Les deux fonctions  $\mathcal{F}_3(x)$  et  $\mathcal{F}_4(x)$  n'utilisent au numérateur que les facteurs  $(x - a_i)$  où  $a_1, \dots, a_m$  sont précisément les extrémités des intervalles sur lesquels ont fait l'intégration de ces fonctions.



Dans les paragraphes 3 et 4 nous explicitons l'algorithme qui permet de trouver les meilleurs exposants possibles, c'est-à-dire ceux qui fournissent la meilleure mesure d'indépendance linéaire.

Dans le chapitre suivant nous donnerons un algorithme qui permet de trouver d'autres facteurs que les facteurs  $x - a_i$  que l'on fera intervenir au numérateur de  $\mathcal{F}_3(x)$  et  $\mathcal{F}_4(x)$  et qui pourront donner de meilleures mesures d'indépendance linéaire.

### 3-Programmation linéaire semi-infinie

Soit

$$F(x) = \frac{(x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_k)^{\alpha_k}}{x^{\alpha_0}}$$

une fonction que nous désirons utiliser pour calculer une mesure d'indépendance linéaire de  $1, \log p_1, \dots, \log p_m$  avec l'ensemble des exposants  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . Si la mesure d'indépendance linéaire existe, on a

$$\mu = - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} D_n Q_n F^n(z) \frac{dz}{z} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D_n Q_n) + \log \left( \max_i \max_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} |F(x)| \right)}$$

où  $D_n$  et  $Q_n$  sont définis comme dans le paragraphe précédent. Notre but est de chercher le minimum de  $\mu$ . On sait que le dénominateur de  $\mu$  est négatif (si  $\mu$  existe) i.e.

$$- \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D_n Q_n) + \log \left( \max_{a_1 \leq x \leq a_k} |F(x)| \right) \right) > 0$$

Donc, pour arriver au but, soit on augmente la valeur absolue du dénominateur, soit on diminue le numérateur. La première méthode convient bien parce que le numérateur ne change pas beaucoup quand on augmente la valeur absolue du dénominateur. Donc on pose

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D_n Q_n) + \log \left( \max_{a_1 \leq x \leq a_k} |F(x)| \right)$$

On a besoin de trouver  $\max(-f)$  et de vérifier si la mesure d'indépendance linéaire existe avec  $F(x)$  ou d'améliorer la mesure d'indépendance linéaire si elle existe. Pour avoir un programme associé

à l'algorithme du simplexe, on ne considère que le problème analytique, c'est-à-dire, que l'on fixe  $D_n^* = 1$  dans le calcul, où  $D_n^*$  est défini dans chapitre I. Dans ce cas, les meilleurs exposants de  $F(x)$  que l'on trouve ne sont peut-être pas les meilleurs pour calculer la mesure  $\mu$  à cause du numérateur de  $\mu$  et de  $D_n$ , mais cela nous permet de vérifier si  $\mu$  existe (i.e.  $\mu > 0$ ) avec  $F(x)$  et alors de trouver la meilleure mesure d'indépendance linéaire que l'on peut obtenir en n'utilisant que les facteurs  $(x - a_1), \dots, (x - a_k)$ . Grâce à cela, on a trouvé les fonctions  $\mathcal{F}_3(x)$  et  $\mathcal{F}_4(x)$  pour calculer les mesures d'indépendance linéaire de 1,  $\log 2$ ,  $\log 3$ ,  $\log 5$  et de 1,  $\log 2$ ,  $\log 3$ ,  $\log 5$ ,  $\log 7$ . Pour obtenir la meilleure mesure, on peut utiliser la méthode arithmétique pour améliorer  $D_n$  et diminuer le numérateur en fixant le dénominateur.

On utilise la programmation linéaire semi-infinie comme suit pour chercher les meilleurs exposants dans les fonctions  $\mathcal{F}_3(x)$  et  $\mathcal{F}_4(x)$  tels que la valeur de  $-f$  soit la plus grande possible.

### 3.1-La programmation linéaire semi-infinie

On a à résoudre un problème du type suivant : trouver

$$\max_C \min_{x \in X} g(x, C)$$

où  $g(x, C)$  est une fonction linéaire par rapport à  $C = (c_1, \dots, c_k)$  et  $X$  est un domaine compact de  $\mathbb{C}$ , le maximum étant pris pour  $c_i \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Une solution classique consiste à choisir de très nombreux points de contrôle  $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$  et résoudre le problème de programmation linéaire suivant : trouver

$$\max_C \min_{1 \leq j \leq N} g(x_j, C).$$

Cependant le résultat obtenu dépend des points de contrôle choisis.

L'idée de la programmation linéaire semi-infinie [AN] consiste à répéter le processus précédent en ajoutant à chaque fois de nouveaux points de contrôle et à vérifier que ce procédé converge vers  $m$ , la valeur de la forme linéaire pour un choix de  $C$  optimum, selon l'algorithme suivant:

- (1) On choisit une valeur initiale de  $C$  soit  $C^{(0)}$  et on calcule

$$m'_0 = \min_{x \in X} g(x, C^{(0)}).$$

- (2) On choisit un ensemble de points de contrôle  $X^{(0)}$  dans  $X$ . Il est clair que l'on a  $m'_0 \leq m \leq m_0$  si on note

$$m_0 = \min_{x \in X^{(0)}} g(x, C^{(0)}).$$

- (3) On ajoute à  $X^{(0)}$  les points où  $g(x, C^{(0)})$  admet des minima locaux et l'on obtient un ensemble  $X^{(1)}$  de points de contrôle.  
 (4) On résout le problème de programmation linéaire

$$\max_C \min_{x_j \in X^{(1)}} g(x_j, C).$$

On obtient alors une nouvelle valeur de  $C$  soit  $C^{(1)}$ , et un résultat de la programmation linéaire égal à  $m'_1 = \min_{x \in X} g(x, C^{(1)})$ . On a donc  $m'_0 \leq m'_1 \leq m \leq m_1 \leq m_0$  si on note

$$m_1 = \min_{x \in X^{(1)}} g(x, C^{(1)})$$

- (5) On répète les opérations (2) à (4) et on trouve donc deux suites  $(m_i)$  et  $(m'_i)$  telles que

$$m'_0 \leq m'_1 \leq \dots \leq m'_i \leq m \leq m_i \leq \dots \leq m_1 \leq m_0.$$

On s'arrête dès qu'il y a assez bonne convergence, quand par exemple,  $m_i - m'_i < 10^{-6}$ . Supposons que  $p$  itérations suffisent, alors on prend une approximation de  $m$  égale à  $m_p$ .

### 3.2-La forme de la programmation linéaire

Pour appliquer cette méthode ici, c'est-à-dire pour trouver les meilleurs exposants des polynômes  $P_i$  dans  $F(x)$ , il suffit de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D_n Q_n) + \log \left( \max_{a_1 \leq x \leq a_k} |F(x)| \right)$$

est de la forme voulue.

Nous donnons ici le détail du pas (4).

On a donc la fonction objectif associée à la programmation linéaire

$$\max Z = \max_{\alpha_i} \left( - \left( \max_{a_1 \leq y \leq a_k} \log |F(y)| + d + q \right) \right)$$

où  $d + q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D_n Q_n)$ .

Dans ce qui suit, toutes les variables  $X_i$  sont astreintes à être non-négatives. On pose

$$d + q + \max_{a_1 \leq y \leq a_k} \log |F(y)| = X_{N+3} - X_{N+4}$$

parce qu'on ne sait pas si cette valeur est positive, où  $N = N_1 + N_2$  et  $N_1$  est le nombre de nombres premiers utilisés,  $N_2$  est le nombre de polynômes utilisés.

Donc

$$\max Z = -X_{N_1+N_2+3} + X_{N_1+N_2+4}.$$

Pour les contraintes de ce problème, on a trois parties : les contraintes sur  $d$ , les contraintes sur les nombres premiers et les contraintes sur les points de contrôle.

### Première partie : les contraintes sur $d$

Ici, on ne considère pas l'amélioration par la méthode arithmétique, c'est-à-dire  $D_n^* = 1$ , on a donc

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \text{ppcm} \left( 1, 2, \dots, \max \left( n\alpha_0, n \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \deg P_i - \alpha_0 \right) \right) \right) \right) \\ &= \max \left( \alpha_0, \sum_{i=1}^k \alpha_i \deg P_i - \alpha_0 \right). \end{aligned}$$

On pose  $d = X_1$  et on a

$$X_1 = \max (X_{N_1+2}, X_{N_1+3} \deg P_1 + \dots + X_{N_1+N_2+2} \deg P_{N_2} - X_{N_1+2})$$

où  $\deg P_i$  ( $1 \leq i \leq N_2$ ) est le degré du polynôme  $P_i$ ,  $X_{N_1+2} = \alpha_0$  est l'exposant de  $y$ , le dénominateur de  $F(y)$  et  $X_{i+N_1+2} = \alpha_i$  pour  $1 \leq i \leq N_2$  sont les exposants des polynômes utilisés.

On a donc deux contraintes sur  $d$

$$-X_1 + X_{N_1+2} \leq 0$$

$$-X_1 - X_{N_1+2} + X_{N_1+3} \deg P_1 + \dots + X_{N_1+N_2+2} \deg P_{N_2} \leq 0$$

### Deuxième partie : les contraintes sur les nombres premiers

Par le lemme 3.4 dans chapitre I, on sait que pour

$$F(y) = \prod_{i=1}^{N_2} (y - a_i)^{\alpha_i} \frac{1}{y^{\alpha_0}}$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a_i = \prod_{j=1}^{N_1} p_j^{\beta_{ij}}$ ,  $\beta_{ij} \in N$ , et

$$\Delta = \text{ppcm}(a_i, 1 \leq i \leq N_2) = \prod_{j=1}^{N_1} p_j^{\mathcal{B}_j}$$

où  $\mathcal{B}_j = \max_{1 \leq i \leq N_2} (\beta_{ij})$ , il existe un entier

$$Q = \prod_{j=1}^{N_1} p_j^{C_j}$$

où

$$C_j = \max \left( 0, \alpha_0 \mathcal{B}_j - \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \beta_{ij} \right)$$

tel que pour tout  $I \neq J$

$$I_n = \int_{a_I}^{a_J} (QF(x))^n \frac{dx}{x} \in \frac{1}{D_n} \left( \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \log \frac{a_J}{a_I} \right).$$

Donc pour chaque nombre premier utilisé  $p_j$ , on a

$$0 \leq C_j ; \quad \alpha_0 \mathcal{B}_j - \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_{ij} \leq C_j.$$

Si on remplace  $\alpha_i$  par  $X_{N_1+2+i}$  ( $0 \leq i \leq N_2$ ) les exposants des polynômes, pour tout nombre premier utilisé  $p_i$ , on a le système d'inéquations suivant

$$\mathcal{B}_j X_{N_1+2} - \sum_{i=1}^k X_{N_1+2+i} \beta_{ij} \leq X_{j+1}$$

c'est-à-dire que l'on a  $N_1$  contraintes sur les nombres premiers

$$-X_{j+1} + \mathcal{B}_j X_{N_1+2} - \sum_{i=1}^k X_{N_1+2+i} \beta_{ij} \leq 0$$

pour tout  $1 \leq j \leq N_1$ .

### Troisième partie : les contraintes sur les points de contrôle

On construit un ensemble de points de contrôle avec les zéros de la dérivée de la fonction  $F(x)$  dans l'intervalle considéré avec les exposants initiaux et on ajoute certains points en plus des zéros. On obtient un ensemble initial de points de contrôle. Pour chaque itération, on ajoute aussi quelques points de contrôle parmi les zéros de la dérivée de la fonction  $F(x)$  avec des nouveaux exposants.

Pour chaque point de contrôle  $y_i$ , on a

$$d + q + \log |F(y_i)| \leq d + q + \max_{a_1 \leq y \leq a_{N_2}} \log |F(y)|$$

où  $q = \log Q = \sum_{j=1}^{N_1} X_{j+1} \log p_j$ . On a donc un système d'inéquations

$$\begin{aligned} X_1 + \sum_{j=1}^{N_1} X_{j+1} \log p_j - X_{N_1+2} \log y_i + \sum_{j=1}^{N_2} X_{N_1+2+j} \log |P_j(y_i)| \\ \leq X_{N_1+N_2+3} - X_{N_1+N_2+4} \end{aligned}$$

pour les  $M$  points de contrôle  $y_i$ .



### Remarque

Dans le calcul, pour obtenir une forme linéaire, on pose l'exposant du dénominateur de la fonction  $F(x)$  égal à une variable, mais on a besoin de fixer cet exposant que l'on prendra égal à 1, donc on obtient une contrainte

$$X_{N_1+2} = 1.$$

Donc on obtient un problème de programmation linéaire avec  $N_1 + M + 2$  contraintes :

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq 0 \\ X_{N_1+2} = 1 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

où  $C = (0, \dots, 0, -1, 1)$  est un vecteur ligne,  $X$  est un vecteur colonne à  $N_1 + N_2 + 4$  composantes,  $A$  est la matrice des coefficients des contraintes.

On utilise aussi cette méthode pour diminuer le numérateur en fixant le dénominateur.

Dans [AN] on peut trouver la théorie générale de la programmation linéaire semi-infinie. Tout le calcul est effectué en PASCAL sur micro-ordinateur.

Donc, en théorie, on trouve une méthode pour chercher la fonction qui permet de calculer une mesure d'indépendance linéaire des logarithmes de nombres premiers. On cherche d'abord la meilleure combinaison des polynômes tel que les polynômes soient dans l'idéal  $(\Delta, x)$  où  $\Delta$  est engendré par les nombres premiers utilisés. Ensuite on cherche les meilleurs exposants des polynômes par la programmation linéaire semi-infinie tels que la valeur absolue de  $F(x)$  engendrée par ces polynômes soit la plus petite possible dans un intervalle considéré. Si on obtient une fonction

$F(x)$  qui vérifie les conditions du théorème, c'est-à-dire,

$$- \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D_n Q_n) + \log \left( \max_{a_1 \leq x \leq a_k} |F(x)| \right) \right) > 0$$

alors on trouve une mesure d'indépendance linéaire des logarithmes des nombres premiers associé cette fonction.

En réalité, par cette méthode, on a trouvé les fonctions  $\mathcal{F}_3$  et  $\mathcal{F}_4$  pour calculer les mesures d'indépendance linéaire de 1, log 2, log 3, log 5 et de 1, log 2, log 3, log 5, log 7, et retrouvé aussi les exposants des facteurs polynômes de la fonction de G. Rhin pour calculer une mesure d'indépendance linéaire de 1, log 2, log 3. Autrement, on constate que l'amélioration de la méthode d'arithmétique n'existe plus dans le calcul des mesures d'indépendance linéaire de 1, log 2, log 3, de 1, log 2, log 3, log 5 et de 1, log 2, log 3, log 5, log 7.

## CHAPITRE III

Une généralisation du  
diamètre transfini entier  
&  
polynômes de  
Müntz-Legendre généralisés

## 1-Introduction

Rappelons que dans [RH2], G. Rhin propose la meilleure mesure d'indépendance linéaire connue de 1,  $\log 2$ ,  $\log 3$ . Il généralise la méthode d'Alladi-Robinson [AR] (théorème 2.3 dans le chapitre I). Il remplace le polynôme  $t^n(1-t)^n$  par un polynôme plus général satisfaisant certaines conditions arithmétiques. Plus précisément, soit  $z$  un rationnel ( $z \notin [1, \infty)$ ) et soient  $d$  un entier positif tel que  $dz$  soit entier et  $\Delta = \text{ppcm}(d, d-dz)$ . Soit  $H_n$  un polynôme de  $\mathbb{Z}[X]$ , de degré inférieur ou égal à  $2n$ , appartenant à l'idéal  $((x, \Delta)\mathbb{Z}[X])^n$  et donc de la forme

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^n b_j \Delta^{n-j} x^j + \sum_{j=n+1}^{2n} b_j x^j$$

où les  $b_j$  sont des entiers pour  $0 \leq j \leq 2n$ .

On étudie l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{H_n(d-dzt)}{d^n(1-zt)^{n+1}} dt$$

et

$$\begin{aligned} -zI_n &= b_n \log(1-z) + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{b_j}{j-n} ((d-dz)^{j-n} - d^{j-n}) \\ &= -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{n-j} \left( \left( \frac{\Delta}{d-dz} \right)^{n-j} - \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{n-j} \right). \end{aligned}$$

Alors si  $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$ ,  $-zd_n I_n \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \log(1-z)$ . Sachant que

$$b_n = -\frac{z}{2\pi i} \int_{|u+1/z|=\gamma} \frac{H_n(d-dzu)}{d^n(1-zu)^{n+1}} du,$$

si le polynôme  $H_n$  est assez simple, on obtient des majoration du type

$$0 < |I_n| \leq e^{an} \quad |b_n| \leq e^{bn}$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème des nombres premiers pour majorer  $d_n$  et l'on obtient, si  $a < -1$

$$\mu(\log(1-z)) = -\frac{b+1}{a+1} + 1 = \frac{a-b}{a+1}.$$

Avec différents polynômes  $H_n$ , on peut obtenir les résultats des mesures d'irrationalité de  $\log 2$  de Apéry et de Chudnovsky.

Ensuite G. Rhin généralise la méthode ci-dessus à l'étude de l'indépendance linéaire de plusieurs logarithmes.

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ,  $r$  rationnels non nuls tels que

$$1, \log(1-\alpha_1), \dots, \log(1-\alpha_r)$$

soient  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants.

Soit  $d$  un entier positif tel que  $d\alpha_i$  soit entier pour tout  $i$  et

$$\Delta = \text{ppcm}_{1 \leq i \leq r}(d\alpha_i, d - d\alpha_i).$$

Soit  $H_n$  un polynôme qui vérifie les conditions ci-dessus, alors les intégrales

$$I_n(\alpha_i) = \int_0^1 \frac{H_n(d - d\alpha_i t)}{d^n (1 - \alpha_i t)^{n+1}} dt$$

sont telles que

$$d_n \alpha_i I_n(\alpha_i) = p_{n,i} - d_n b_n \log(1 - \alpha_i)$$

où  $p_{n,i}$  est un entier. G. Rhin donne la proposition suivante en étudiant  $\log(2/3)$  et  $\log(4/3)$  :

**Proposition III-1.1**

Soient  $u_0, u_1, u_2$  trois entiers tels que

$$H = \max(|u_1|, |u_2|) \geq 2.$$

Alors la forme  $\Lambda = u_0 + u_1 \log 2 + u_2 \log 3$  vérifie

$$|\Lambda| \geq H^{-13,3}$$

De plus, pour  $H > H_0$  ( $H_0$  effectivement calculable)

$$|\Lambda| \geq H^{-7,616}.$$

Dans la démonstration, il étudie les deux intégrales

$$\int_2^3 \frac{H_n(x)}{x^{n+1}} dx \quad \text{et} \quad \int_3^4 \frac{H_n(x)}{x^{n+1}} dx$$

où

$$H_n(x) = \prod_{i=1}^6 Q_i(x)^{[b_i n]}$$

avec

$Q_1 = x - 2$	$b_1 = 0,552418$
$Q_2 = x - 3$	$b_2 = 0,704324$
$Q_3 = x - 4$	$b_3 = 0,447582$
$Q_4 = 5x - 12$	$b_4 = 0,109072$
$Q_5 = 17x^2 - 102x + 144$	$b_5 = 0,038934$
$Q_6 = 19x^2 - 108x + 144$	$b_6 = 0,054368.$

Dans son article, il ne donne pas de méthode théorique pour calculer les polynômes. Ici, on va compléter la méthode, et montrer que tous les

---

facteurs donnés sont des “bons facteurs” de  $H_n(x)$ . Pour cela nous introduirons une nouvelle généralisation du diamètre transfini d’un intervalle. Nous montrerons, en généralisant les polynômes de Müntz-Legendre et en introduisant des méthodes de résolution de systèmes d’inégalités, que les polynômes  $Q_j$  ci-dessus appartiennent à une famille de polynômes que l’on peut effectivement déterminer. Nous montrerons l’application des polynômes de Müntz-Legendre généralisés au diamètre transfini sur  $[0, 1]$ . Nous améliorerons les résultats de Flammang, Rhin, Smyth [FRS] et Borwein, Erdelyi [BE] sur les polynômes critiques. Nous donnerons aussi un prolongement de la table de Habsieger-Salvy[HS] sur l’intervalle de  $[0, 1/4]$ .

## 2-Rappels

On définit ici le diamètre transfini, le diamètre transfini entier et le  $f$ -diamètre transfini entier comme dans les articles de F. Amoroso [AM1] et [AM2]:

Soient  $X$  une partie infinie compacte du plan complexe et  $Q \in \mathbb{C}[s]$  un polynôme ; on note  $\deg Q$  son degré et  $|Q|_{1,X}$  sa norme de la convergence uniforme sur  $X$  définie par

$$|Q|_{1,X} = \max_{s \in X} |Q(s)|$$

On définit le *diamètre transfini*  $t(X)$  comme la borne inférieure des quantités  $|Q|_{1,X}^{1/\deg Q}$  lorsque  $Q$  décrit l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes de degré positif,

$$t(X) = \inf_{\substack{Q \in \mathbb{C}[s] \\ \deg Q \geq 1 \\ Q \text{ unitaire}}} (|Q|_{1,X})^{1/\deg Q}.$$

De même, on définit le *diamètre transfini entier*  $t_{\mathbb{Z}}(X)$  comme la borne inférieure des quantités  $|Q|_{1,X}^{1/\deg Q}$  lorsque  $Q$  décrit l'ensemble des polynômes (non nécessairement unitaires) à coefficients entiers de degré positif

$$t_{\mathbb{Z}}(X) = \inf_{\substack{Q \in \mathbb{Z}[s] \\ \deg Q \geq 1}} |Q|_{1,X}^{1/\deg Q}.$$

Pour toute partie  $X$ , on a  $t(X) \leq t_{\mathbb{Z}}(X)$  avec égalité si  $X$  est une partie symétrique par rapport à l'axe réel telle que  $t(X) \geq 1$ . D'autre part, on sait que, pour un tel  $X$ , si  $t(X) < 1$  alors  $t_{\mathbb{Z}}(X) < 1$  ([LA]).

Dans le cas particulier d'un intervalle  $I$  réel, la valeur de  $t(I)$  est bien connue: elle est égale au quart de sa longueur  $\delta(I)$ . Et donc  $t_{\mathbb{Z}}(I) = \frac{\delta(I)}{4}$



pour  $\delta(I) \geq 4$  ; pour  $\delta(I) < 4$ , on ne possède que des encadrements pour  $t_{\mathbb{Z}}(I)$ .

Pour le *f-diamètre transfini entier*, on définit comme suit :

$$t_{\mathbb{Z},f}(X) = \lim_{n \in \mathbb{N}^*} \inf_{\substack{p \in \mathbb{Z}[x] \\ p \neq 0 \\ \deg p = n}} \left| |p(x)|^{1/n} f(x) \right|_{1,X}$$

où  $f$  est une fonction positive sur  $X$ . Cette notion a été définie par F. Amoroso[AM1].

Il montre aussi que le *f-diamètre transfini entier* est important pour étudier les approximations rationnelles de logarithmes, par exemple, les mesures d'irrationalité de  $\log(l/m)$  où  $l/m$  est un nombre rationnel positif. On pose,  $\alpha = (\sqrt{l} + \sqrt{m})^2$  et  $\beta = (\sqrt{l} - \sqrt{m})^2$ . Si on peut trouver des polynômes à coefficients entiers qui s'approchent de zéro sur l'intervalle  $[0, \beta]$  et qui ne sont pas très grands sur l'intervalle  $[\beta, \alpha]$ , alors on peut trouver les bonnes mesures d'irrationalité de  $\log(l/m)$ . Avec les bonnes estimations de  $t_{\mathbb{Z},f_c}([0, \alpha])$ , où  $f_c : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction réelle définie par

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \beta] \\ \exp(-c) & x \in [\beta, \alpha] \end{cases}$$

Alors il donne les mesures d'irrationalité de  $\log(l/m)$  suivantes

$\xi$	$\log 2$	$\log 3$	$\log 5/3$
$\mu(\xi)$	3,991	16,960	6,851
$\log 2/3$	$\log 3/4$	$\log 4/5$	$\log 7/5$
3,402	3,154	3,017	5,456

et donc il améliore les résultats de G. Rhin de  $\mu(\log 2) \leq 4,0765$  [RH2] et  $\mu(\log(5/3)) \leq 7,224$  [RH3] et de Alladi et Robinson [AR] mais pas de

$\mu(\log 3) \leq 8,616$  [RH2], et  $\mu(\log 2) \leq 3,891$  de Rukhadze [RU] et Hata [HA1].

Dans notre travail, nous introduisons une définition du diamètre transfini qui concerne l'idéal des polynômes qui appartiennent à  $(x, \Delta)^n \mathbb{Z}[x]$  :

### Définition III-2.1

Soit  $X$  un intervalle réel et  $\Delta$  un entier positif. Soit  $f$  une fonction continue sur  $X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ . On définit le  $(f, \Delta)$ -diamètre transfini entier par

$$t_{\mathbb{Z},(f,\Delta)}(X) = \inf_{p \in (x,\Delta)^n \mathbb{Z}[x]} \left| |p(x)|^{1/2n} f(x) \right|_{1,X}$$

où  $\deg p(x) = 2n$ .

De même que le diamètre transfini est important pour étudier les approximations rationnelles de logarithmes, le  $(f, \Delta)$ -diamètre transfini entier est aussi important pour les mesures d'indépendance linéaire de logarithmes. Grace à cela, le théorème II-2.5 peut donc s'écrire comme suit :

### Théorème III-2.2

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$   $m$  entiers positifs et  $\Delta = \text{ppcm}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . On pose

$$D_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, \max([\alpha dn], 2dn - [\alpha dn]))$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n = K.$$

On pose  $t$  le  $(f, \Delta)$ -diamètre transfini entier sur l'intervalle  $[a_1, a_m]$ :

$$t = t_{\mathbb{Z},(f,\Delta)}([a_1, a_m]) = \inf_{\substack{Q \in (x,\Delta)^{[\alpha n]} \mathbb{Z}[x] \\ \deg Q = 2d}} \left| |Q(x)|^{1/2d} f(x) \right|_{1,[a_1, a_m]}$$

où

$$f = \frac{1}{x^{\frac{[\alpha d]}{2d}}}.$$

Si  $t < e^{-K}$ , alors il existe un polynôme  $\mathcal{H}$  de degré  $2d$  et  $\mathcal{H} \in (x, \Delta)^{[\alpha d]} \mathbb{Z}[x]$  tel que

$$\left| |\mathcal{H}|^{1/2d} f \right|_{1, [a_1, a_m]} < e^{-K}.$$

On suppose qu'il existe un nombre réel  $\rho > 0$  et un nombre réel  $\tau^{(0)} > 0$  tels que

$$\tau^{(0)} = \log \left( \max_{|z|=\rho} \left| \frac{\mathcal{H}(z)}{z^{[\alpha d]}} \right| \right)$$

et pour tout  $1 \leq i < m - 1$ , les valeurs de

$$\log \left( \max_{a_i \leq x \leq a_{i+1}} \frac{|\mathcal{H}(x)|}{x^{[\alpha d]}} \right)$$

sont distinctes deux à deux. Alors la suite  $H_n = \mathcal{H}^n$  vérifie les conditions du théorème II-2.5.

Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $H_0(\varepsilon)$  tel que

$$\left| p + q_1 \log \left( \frac{a_2}{a_1} \right) + \cdots + q_i \log \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \cdots + q_{m-1} \log \left( \frac{a_m}{a_{m-1}} \right) \right| \geq H^{-\mu-\varepsilon}$$

pour tous entiers  $p$  et  $q_i$   $1 \leq i \leq m - 1$  avec  $H = \max_i \{ |q_i| \} \geq H_0(\varepsilon)$  ( $H_0(\varepsilon)$  effectivement calculable) et  $\mu$  est un nombre réel positif donné par

$$\mu = \frac{\tau^{(0)} + K}{-\log t - K}.$$

Donc pour chercher une mesure d'indépendance linéaire nous chercherons le  $(f, \Delta)$ -diamètre transfini entier. On trouve certains résultats dans les paragraphes suivants.

Dans la suite nous utiliserons aussi les polynômes de Müntz-Legendre: soit  $\Lambda = (\lambda_i)_{i \geq 0}$  une suite de nombres réel positifs ou nuls tous distincts. On appelle polynôme de Müntz-Legendre une fonction  $P$  telle que

$$P = \sum_{i=0}^n a_i x^{\lambda_i} \quad a_i \in \mathbb{R} \quad 0 \leq i \leq n,$$

$P$  est dit associé à la suite  $\Lambda$ .

Dans le paragraphe suivant, on va utiliser des inégalités sur les polynômes de Müntz-Legendre pour donner de bonnes majorations pour le  $(f, \Delta)$ -diamètre transfini entier d'un intervalle.

### 3-Polynômes de Müntz-Legendre généralisé (MLG)

#### 3.1-Polynômes de Müntz-Legendre

On considère, pour  $0 < a < b$ , le produit scalaire sur les fonctions continues réelles sur l'intervalle  $[a, b]$  défini par

$$(f, g)_\varphi = \int_a^b f(x)g(x)\varphi(x)dx$$

où  $\varphi$  est une fonction réelle positive sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On note

$$\|f\|_{2,[a,b]}^2 = (f, f)_\varphi$$

$$\|f\|_{1,[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)|\sqrt{\varphi(x)})$$

D'après le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on a

#### Proposition III-3.1

*Soit  $(V, ( \cdot, \cdot ))$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $( \cdot, \cdot )$  et soit  $W$  un sous-espace de dimension finie  $n$  de  $V$ . Soit  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  une base de  $W$ . Alors il existe une base  $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  de  $W$  telle que*

*(1) le sous espace vectoriel engendré par  $\{L_1, L_2, \dots, L_i\}$  est égal au sous espace vectoriel engendré par  $\{w_1, w_2, \dots, w_i\}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .*

*(2) les vecteurs  $L_1, L_2, \dots, L_n$  sont orthogonaux deux à deux.*

Dans la suite, soit  $F$  un polynôme fixé non nul de  $\mathbb{R}[x]$  et soient  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels positifs ou nuls tous distincts. On considère  $L_0, L_1, \dots, L_n$  la suite des polynômes orthogonaux relative au produit

scalaire  $(\cdot, \cdot)_\varphi$  construite par le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir des polynômes

$$p_0 = Fx^{\lambda_0}, p_1 = Fx^{\lambda_1}, \dots, p_n = Fx^{\lambda_n}$$

tels que

$$L_i = \sum_{j < i} C_{ij} p_j + p_i$$

et  $L_i$  est orthogonal à  $L_0, L_1, \dots, L_{i-1}$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

Soit  $p$  un polynôme de Müntz-Legendre généralisé,

$$p = \sum_{i=0}^n a_i Fx^{\lambda_i}.$$

On suppose ici que  $a_n \neq 0$ .  $p$  s'écrit aussi

$$p = \sum_{i=0}^n b_i L_i$$

avec  $b_n = a_n$  et

$$\|p\|_{2,[a,b]}^2 = \sum_{i=0}^n b_i^2 \|L_i\|_{2,[a,b]}^2$$

donc

$$\|p\|_{2,[a,b]}^2 \geq b_n^2 \|L_n\|_{2,[a,b]}^2 = a_n^2 \|L_n\|_{2,[a,b]}^2.$$

D'autre part, on a

$$\|p\|_{2,[a,b]} \leq \sqrt{b-a} \|p\|_{1,[a,b]},$$

on obtient donc l'inégalité

$$|a_n| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{\|L_n\|_{2,[a,b]}} \|p\|_{1,[a,b]}.$$

### 3.2-Polynômes de MLG sur $[0, 1]$

Dans les articles de Flammang, Rhin, Smyth [FRS] et Borwein, Erdelyi [BE], ont été étudiés les polynômes de Müntz-Legendre dans l'espace vectoriel de base  $x^n, x^{n-1}, \dots, x^k$  ( $n \geq k \geq 0$ ) et avec le produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Cela donne les polynômes Müntz-Legendre orthogonaux

$$L_i(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+1+j}{n-i} \binom{n-i}{n-j} x^j \quad (k \leq i \leq n)$$

Soit  $P_n$  l'ensemble des polynômes de degré  $n$  à coefficients réels et  $p_n \in P_n$  de la forme

$$p_n(x) = x^k q(x) \quad q(x) \in P_{n-k}, \quad q(x) \neq 0$$

alors on a l'inégalité

$$|q(0)| \leq \sqrt{2k+1} \binom{n+1+k}{n-k} \|p_n\|_{1, [0,1]}.$$

Soit  $T_n$  un polynôme de  $\mathbb{Z}[x]$  de degré  $n$  sur  $[0, 1]$  tel que

$$\|T_n\|_{1, [0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |T_n(x)| \leq 0,42353115^n.$$

Alors

$$T_n(x) = x^k (1-x)^k S_{n-2k} \quad S_{n-2k} \in \mathbb{Z}_{n-2k}[x]$$

où  $k > 0,2641n$  dans [FRS] (et  $k > 0,26n$  pour  $n$  assez grand dans [BE]).

Dans ce paragraphe, on utilise les polynômes de Müntz-Legendre généralisés. Cette méthode améliore les résultats ci dessus. On considère l'espace vectoriel de base

$$x^n(1-x)^q, x^{n-1}(1-x)^q, \dots, x^k(1-x)^q$$

sur l'intervalle  $[0, 1]$ , où  $k, q$  sont entiers positifs. Par le processus d'orthogonalisation de Gram-schmidt, on obtient donc, si l'on pose

$$L_i(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} x^j (1-x)^q,$$

le résultat suivant :

### Lemme III-3.2

Pour  $i$  fixé on a

$$(L_i, x^h(1-x)^q) = 0$$

pour  $n \geq h \geq i+1$  c'est-à-dire  $L_i \perp L_h$ .

### Démonstration

Sachant que

$$\int_0^1 x^{j_1+j_2} (1-x)^{2q} dx = \frac{(2q)!(j_1+j_2)!}{(2q+j_1+j_2+1)!},$$

$$\begin{aligned} & (L_i, x^h(1-x)^q) \\ &= \int_0^1 \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} x^{j+h} (1-x)^{2q} dx \\ &= \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} \frac{(2q)!(j+h)!}{(2q+j+h+1)!} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (2q)! \left( \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \frac{(n+2q+j+1)!}{(n-i+2q)!(i+j+1)!} \right. \\
&\quad \left. \times \binom{n-i}{n-j} \frac{(j+h)!}{(j+h+2q+1)!} \right) \\
&= \frac{(2q)!}{(n-i+2q)!} \left( \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n-i}{n-j} \right. \\
&\quad \left. \times (n+2q+j+1) \cdots (h+1+j+2q+1)(j+h) \cdots (j+i+2) \right) \\
&= \left[ \frac{d^{h-i-1}}{dx^{h-i-1}} \frac{1}{x^{2q+1}} \left( \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}} (1-x)^{n-i} x^{n+i+2q+1} \right) \right]_{x=1} \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

### Proposition III-3.3

Soit  $Q(x) \in \mathbb{R}_{n+q}[x]$

$$Q(x) = a_k x^k (x-1)^q + a_{k+1} x^{k+1} (x-1)^q + \cdots + a_n x^n (x-1)^q$$

On a

$$|a_k| \leq \sqrt{(2k+1) \binom{n+1+k}{n-k} \binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}} \|Q\|_{1,[0,1]}.$$

### Démonstration

$Q(x)$  peut s'écrire sous la forme

$$Q(x) = \lambda_k L_k + \lambda_{k+1} L_{k+1} + \cdots + \lambda_n L_n \quad (k \leq n)$$

avec

$$a_k = (-1)^{n-k} \lambda_k \binom{n+2q+k+1}{n-k+2q}.$$

Par la dernière inégalité du paragraphe précédent

$$|a_k| = |\lambda_k| \binom{n+2q+k+1}{n-k+2q} \leq \frac{\|Q\|_{1,[0,1]}}{\sqrt{(L_k, L_k)}} \binom{n+2q+k+1}{n-k+2q}.$$

On a

$$\begin{aligned} & (L_i, L_i) \\ &= \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} (L_i, x^j(1-x)^q) \\ &= (-1)^{n-i} \binom{n+2q+i+1}{n-i+2q} (L_i, x^i(1-x)^q). \end{aligned}$$

On pose  $S_i = (L_i, x^i(1-x)^q)$ , alors

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} \frac{(i+j)!(2q)!}{(i+j+2q+1)!} \\ &= \frac{(2q)!}{(n-i+2q)!} \\ &\quad \times \left( \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n-i}{n-j} \frac{(n+2q+j+1) \cdots (i+j+2q+2)}{i+j+1} \right) \\ &= \frac{1}{(n-i+2q) \cdots (2q+1)} \\ &\quad \times \left( \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n-i}{n-j} \frac{(n+2q+j+1) \cdots (i+j+2q+2)}{i+j+1} \right). \end{aligned}$$

On considère  $S_i$  comme un élément dans  $\mathbb{Q}(q)$  où  $n, i$  sont des paramètres rationnels et  $q$  est une indéterminée. Le degré du dénominateur

$$(2q + n - i) \cdots (2q + 1)$$

est égal à  $n - i$ . Le degré de chaque numérateur est

$$(n + 2q + j + 1) - (i + j + 2q + 1) = n - i.$$

Donc si on garde le dénominateur sous la forme  $(2q + n - i) \cdots (2q + 1)$ , alors le numérateur est de degré inférieur ou égal à  $n - i$ . On va montrer que  $S_i$  est une constante dans  $\mathbb{Q}(q)$ . Pour cela, on démontre que le dénominateur divise le numérateur. On prend  $q = -l/2$ , un zéro du dénominateur avec  $1 \leq l \leq n - i$ . On calcule

$$\sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n-i}{n-j} \frac{(n-l+j+1) \cdots (i+j-l+2)}{i+j+1}.$$

Le numérateur vaut zéro car il est égal à

$$\left[ \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} \frac{1}{x} \left( \frac{d^{n-i-l}}{dx^{n-i-l}} (x-1)^{n-i} x^{n+i-l+1} \right) \right]_{x=1} = 0,$$

donc  $(2q + n - i) \cdots (2q + 1)$  divise le numérateur de  $S_i$ , c'est-à-dire que  $S_i$  est une constante. Donc pour calculer  $S_i$ , on peut prendre

$$q = -\frac{n+i+2}{2},$$

et donc

$$S_i = S_i \left( -\frac{n+i+2}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n-i} \frac{1}{(-2i-2) \cdots (-n-i-1)} \frac{-1 \cdots (i-n)}{2i+1} \\
&= (-1)^{n-i} \frac{(n-i)!}{(n+i+1) \cdots (2i+2)(2i+1)} \\
&= (-1)^{n-i} \frac{(n-i)!(2i+1)!}{(2i+1)(n+i+1)!}.
\end{aligned}$$

Donc

$$(L_i, L_i) = \binom{n+2q+i+1}{n-i+2q} \frac{(n-i)!(2i+1)!}{(2i+1)(n+i+1)!}$$

et

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq \frac{\binom{n+2q+k+1}{n-k+2q} \|Q\|_{1,[0,1]}}{\sqrt{\binom{n+2q+k+1}{n-k+2q} \frac{(n-k)!(2k+1)!}{(2k+1)(n+k+1)!}}} \\
&\leq \|Q\|_{1,[0,1]} \sqrt{\binom{n+2q+k+1}{n-k+2q} \frac{(2k+1)(n+k+1)!}{(n-k)!(2k+1)!}} \\
&\leq \|Q\|_{1,[0,1]} \sqrt{(2k+1) \binom{n+2q+k+1}{n-k+2q} \binom{n+k+1}{n-k}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Si on pose

$$p_n = a_{k_1} x^{k_1} (1-x)^q + \cdots + a_{n-q} x^{n-q} (1-x)^q \in \mathbb{Z}_n[x]$$

un polynôme de degré  $n$  sur  $[0, 1]$ , on obtient alors

$$|a_{k_1}| \leq \|p_n\|_{1,[0,1]} \sqrt{(2k_1+1) \binom{n+k_1+q+1}{n-k_1+q} \binom{n+k_1-q+1}{n-k_1-q}}$$

On a le théorème suivant

### **Théorème III-3.4**

Si le polynôme  $p_n$  de  $\mathbb{Z}[x]$  de degré  $n$  vérifie

$$\|p_n\|_{1,[0,1]}^{\frac{1}{n}} \leq 0,42353115$$

alors

$$p_n(x) = x^k(1-x)^k S_{n-2k}(x) \quad \text{où} \quad S_{n-2k} \in \mathbb{Z}_{n-2k}[x]$$

et  $k \geq 0.28948n$ .

### **Démonstration**

Soit  $k$  le plus petit des exposants de  $x$  ou de  $1-x$  qui apparaît comme facteur des polynômes  $p_n$  de  $\mathbb{Z}[x]$  de degré  $n$  qui vérifient

$$\|p_n\|_{1,[0,1]}^{\frac{1}{n}} \leq 0,42353115$$

alors  $p_n$  est de la forme

$$p_n = x^k(1-x)^k S_{n-2k}(x)$$

et

$$|a_k| \leq \|p_n\|_{1,[0,1]} \sqrt{(2k+1) \binom{n+1}{n-2k} \binom{n+2k+1}{n}}.$$

Si  $S_{n-2k}(0) \neq 0$ , alors  $|a_k| \geq 1$ , c'est-à-dire

$$\|p_n\|_{1,[0,1]} \sqrt{(2k+1) \frac{(n+1)!}{(n-2k)!(2k+1)!} \frac{(n+2k+1)!}{n!(2k+1)!}} \geq 1$$

et

$$\|p_n\|_{1,[0,1]} \sqrt{\left(\frac{(n+1)(n+2k+1)}{(2k+1)}\right) \frac{(n+2k)!}{(n-2k)!(2k)!^2}} \geq 1.$$

On remarque que

$$((n-2k) + 2k + 2k)^{n+2k} \geq \frac{(n+2k)!}{(n-2k)!(2k)!(2k)!} (n-2k)^{n-2k} (2k)^{4k}$$

c'est-à-dire

$$\frac{(n+2k)^{n+2k}}{(n-2k)^{n-2k} (2k)^{4k}} \geq \frac{(n+2k)!}{(n-2k)!(2k)!^2}.$$

Si on pose  $\alpha = k/n$ , et

$$f(\alpha) = \frac{(1+2\alpha)^{1+2\alpha}}{(1-2\alpha)^{1-2\alpha} (2\alpha)^{4\alpha}}$$

alors

$$f(\alpha) \geq \left(\frac{(n+2k)!}{(n-2k)!(2k)!^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

D'après l'inégalité

$$\|p_n\|_{1,[0,1]} \leq 0,42353115^n$$

on a

$$0,42353115 f(\alpha) \left(\frac{(n+1)(1+2\alpha+\frac{1}{n})}{2\alpha+\frac{1}{n}}\right)^{1/n} \geq 1.$$

Puisque

$$\left(\frac{(n+1)(1+2\alpha+\frac{1}{n})}{2\alpha+\frac{1}{n}}\right)^{1/n} \geq 1$$

il suffit de prendre  $\alpha$  tel que

$$0,42353115 f(\alpha) \geq 1$$

donc  $\alpha \geq 0, 28948$ , i.e.  $k \geq 0, 28948n$ .  $\square$

On améliore donc les résultats de Flammang, Rhin, Smyth [FRS] et Borwein, Erdelyi[BE].

### 3.3-Polynômes de MLG sur $[0, \frac{1}{4}]$

On considère ici l'espace vectoriel engendré par la base

$$x^n(1-4x)^q, x^{n-1}(1-4x)^q, \dots, x^k(1-4x)^q$$

et le produit scalaire

$$(f, g)_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} f(x)g(x)dx.$$

On pose

$$M_i(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} 4^j x^j (1-4x)^q = L_i(4x).$$

On a donc une famille orthogonale.

#### Lemme III-3.5

Pour  $i$  fixé on a

$$(M_i, x^h(1-4x)^q)_2 = 0$$

pour  $n \geq h \geq i+1$  c'est-à-dire  $M_i \perp M_h$ .

#### Démonstration

En posant  $y = 4x$  on voit facilement que l'on a

$$(M_i, x^h(1-4x)^q)_2 = \frac{1}{4^{h+1}} (L_i, y^h(1-y)^q) = 0. \quad \square$$

### 3.3.1-Le facteur $x$

Si on veut déterminer l'exposant du facteur  $x$  en connaissant l'exposant du facteur  $1 - 4x$  (par exemple  $q = 0$ ), alors on prend un polynôme de degré  $n + q$

$$Q = a_k x^k (1 - 4x)^q + a_{k+1} x^{k+1} (1 - 4x)^q + \dots + a_n x^n (1 - 4x)^q$$

$$Q = \lambda_k M_k + \lambda_{k+1} M_{k+1} + \dots + \lambda_n M_n$$

avec

$$|a_k| = 4^k |\lambda_k| \binom{n + k + 2q + 1}{n - k + 2q}$$

alors

$$\lambda_k^2 (M_k, M_k)_2 \leq (Q, Q)_2 \leq \frac{1}{4} \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^2.$$

On a donc

### Lemme III-3.6

$$|a_k| \leq 4^k \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{(2k + 1) \binom{n + k + 2q + 1}{n - k + 2q} \binom{n + k + 1}{n - k}}.$$

### Démonstration

En posant  $y = 4x$ , on vérifie que

$$(M_i, M_i)_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} M_i^2(x) = \int_0^{\frac{1}{4}} L_i^2(4x) = \frac{1}{4} \int_0^1 L_i^2(y) dy = \frac{1}{4} (L_i, L_i)$$

alors

$$(M_i, M_i)_2 = \frac{1}{4} \binom{n + i + 2q + 1}{n - i + 2q} \frac{1}{(2i + 1) \binom{n + i + 1}{n - i}}.$$



Donc

$$\frac{|a_k|}{\binom{n+k+2q+1}{n-k+2q} 4^k} \leq \frac{1}{2} \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{\frac{(2k+1) \binom{n+k+1}{n-k}}{\binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}}}$$

$$|a_k| \leq 4^k \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{(2k+1) \binom{n+k+1}{n-k} \binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}}. \quad \square$$

Si on pose

$$p_n = a_k x^k (1-4x)^q + \dots + a_{n-q} x^{n-q} (1-4x)^q \in \mathbb{Z}_n[x]$$

un polynôme de degré  $n$  sur  $[0, \frac{1}{4}]$ , on obtient alors

$$|a_k| \leq 4^k \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{(2k+1) \binom{n+k+q+1}{n-k+q} \binom{n+k-q+1}{n-k-q}}$$

### Lemme III-3.7

On pose  $p_n, a_i$  comme ci-dessus. Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}^+$ . Si  $\beta = \frac{q}{n}$  est donné, on a  $k \geq \gamma n$ , où  $\gamma$  est la plus petite racine positive de

$$4^\gamma \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^{\frac{1}{n}} f(\gamma, \beta) = 1$$

où

$$f(\alpha, \beta) = \left( \frac{(1+\alpha+\beta)^{1+\alpha+\beta} (1+\alpha-\beta)^{1+\alpha-\beta}}{(1-\alpha+\beta)^{1-\alpha+\beta} (1-\alpha-\beta)^{1-\alpha-\beta} (2\alpha)^{4\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Démonstration**

Comme dans la démonstration du théorème III-3.4, on a

$$((n - k + q) + 2k)^{n+k+q} \geq \binom{n+k+q}{n-k+q} (n-k+q)^{n-k+q} (2k)^{2k}$$

$$((n - k - q) + 2k)^{n+k-q} \geq \binom{n+k-q}{n-k-q} (n-k-q)^{n-k-q} (2k)^{2k}.$$

Si on pose  $\alpha = \frac{k}{n}$  et  $\beta = \frac{q}{n}$ , alors on a

$$f(\alpha, \beta)^{2n} \geq \binom{n+k+q}{n-k+q} \binom{n+k-q}{n-k-q}.$$

On a donc

$$1 \leq |a_k| \leq 4^k \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{\frac{(n+k-q+1)(n+k+q+1)}{2k+1}} f^n(\alpha, \beta)$$

c'est-à-dire

$$1 \leq 4^\alpha \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^{\frac{1}{n}} \left( \frac{n(1+\alpha-\beta+\frac{1}{n})(1+\alpha+\beta+\frac{1}{n})}{2\alpha+\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2n}} f(\alpha, \beta).$$

Puisque le terme

$$\left( \frac{n(1+\alpha-\beta+\frac{1}{n})(1+\alpha+\beta+\frac{1}{n})}{2\alpha+\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2n}} > 1,$$

on a donc

$$1 \leq 4^\alpha \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^{\frac{1}{n}} f(\alpha, \beta). \quad \square$$

Si on prend  $\beta = 0$ , c'est-à-dire l'exposant de  $1 - 4x$  égal à zéro, on a

$$|a_k| \leq 4^k \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{2k+1} \binom{n+k+1}{n-k}$$

et par calcul, on obtient  $k \geq 2 \times 0,28948n$  qui correspond au résultat du théorème III-3.4 pour l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 3.3.2-Le facteur $1 - 4x$

Pour trouver l'exposant du facteur  $1 - 4x$  en supposant l'exposant de  $x$  connu, on considère l'espace vectoriel engendré par la base

$$x^q(1 - 4x)^n, x^q(1 - 4x)^{n-1}, \dots, x^q(1 - 4x)^k$$

et toujours le produit scalaire  $(f, g)_2$ . On pose

$$N_i(x) = \frac{L_i(4x)}{4^q} = \sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} \binom{n+2q+j+1}{n-i+2q} \binom{n-i}{n-j} x^q(1-4x)^j.$$

On a donc

$$(N_i, (1-4x)^h x^q)_2 = 0$$

pour  $n \geq h \geq i+1$ , et

$$(N_i, N_i)_2 = \frac{1}{4^{2q+1}} \binom{n+i+2q+1}{n-i+2q} \frac{1}{(2i+1) \binom{n+i+1}{n-i}}.$$

On prend un polynôme de degré  $n+q$

$$Q = x^q(1-4x)^k R(x)$$

où  $R \in \mathbb{Z}[x]$  et  $\deg R = n-k$ . On veut majorer  $4^{n-k} R(\frac{1}{4})$  qui est un entier. Si on écrit

$$R(x) = b_0 + b_1(1-4x) + \dots + b_{n-k}(1-4x)^{n-k}$$

alors

$$4^{n-k} R\left(\frac{1}{4}\right) = 4^{n-k} b_0$$

Donc on écrit

$$Q = a_n x^q (1-4x)^n + a_{n-1} x^q (1-4x)^{n-1} + \dots + a_k x^q (1-4x)^k$$

et

$$Q = \mu_n N_n + \mu_{n-1} N_{n-1} + \dots + \mu_k N_k.$$

Alors

$$\mu_k^2 (N_k, N_k)_2 \leq (Q, Q)_2 \leq \frac{1}{4} \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^2$$

$$|a_k| = |\mu_k| \binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}$$

$$\frac{|a_k|}{\binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}} \leq \left( \frac{1}{4} \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^2 \frac{4^{2q+1} (2k+1) \binom{n+k+1}{n-k}}{\binom{n+k+2q+1}{n-k+2q}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$4^{n-k} |a_k| \leq 4^{n-k+q} \|Q\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{(2k+1) \binom{n+k+2q+1}{n-k+2q} \binom{n+k+1}{n-k}}.$$

Si on pose

$$p_n = a_k x^q (1-4x)^k + \dots + a_{n-q} x^q (1-4x)^{n-q} \in \mathbb{Z}_n[x]$$

un polynôme de degré  $n$  sur  $[0, \frac{1}{4}]$ , on obtient alors

**Lemme III-3.8**

$$|a_k| \leq 4^q \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]} \sqrt{(2k+1) \binom{n+k+q+1}{n-k+q} \binom{n+k-q+1}{n-k-q}}.$$

On peut estimer l'exposant  $k$  du facteur  $1 - 4x$ , parce que l'on sait que  $4^{n-k-q}a_k$  est un entier. De la même façon que dans le lemme III-3.7, on peut donc démontrer

**Lemme III-3.9**

On pose  $p_n, a_i$  comme ci-dessus. Si  $\beta$  est connu, on a donc  $k \geq \gamma n$ , où  $\gamma$  est la plus petite racine positive de

$$4^{1-\gamma} \|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^{\frac{1}{n}} f(\gamma, \beta) = 1$$

où  $f(\alpha, \beta)$  est défini dans lemme III-3.7.

Donc par le lemme III-3.7, en posant l'exposant de  $1 - 4x$  égal à zéro, on obtient l'exposant de  $x$  égal à  $0,5789n$  au moins, et avec ce résultat on obtient l'exposant de  $1 - 4x$  égal à  $0,0935n$  au moins par le lemme III-3.9. On reporte ce dernier résultat dans le lemme III-3.7, on a donc l'exposant de  $x$  égal à  $0,5912n$  au moins, et on continue ainsi de suite

l'exposant de $x$	l'exposant de $1 - 4x$	l'exposant de $x$	l'exposant de $1 - 4x$
1) 0,5789611265	0	6) 0,5917094810	0,0949938883
2) 0,5789611265	0,0935359768	7) 0,5917245998	0,0949938883
3) 0,5912907720	0,0935359768	8) 0,5917245998	0,0949957056
4) 0,5912907720	0,0949436469	9) 0,5917251469	0,0949957056
5) 0,5917094810	0,0949436469	10) 0,5917251469	0,0949957714

Par ces résultats, on obtient donc

### **Théorème III-3.10**

Soit  $p_n \in \mathbb{Z}_n(x)$  un polynôme de degré  $n$  sur  $[0, \frac{1}{4}]$ , si

$$\|p_n\|_{1, [0, \frac{1}{4}]}^{\frac{1}{n}} \leq 0,17937864,$$

alors

$$p_n(x) = x^k(1 - 4x)^q S_{n-k-q}(x) \quad \text{où} \quad S_{n-k-q} \in \mathbb{Z}_{n-k-q}[x]$$

$k \geq 0.591725n$ , et  $q \geq 0.094995n$ .

Nous utilisons  $0,17937864 \cong 0,42353115^2$  car [AM2]

$$t_{\mathbb{Z}} \left( \left[ 0, \frac{1}{4} \right] \right) = t_{\mathbb{Z}}([0, 1])^2.$$

## 4-Résolution de systèmes d'inéquations linéaires et application à la recherche de polynômes de petite norme sur un intervalle

Dans ce paragraphe, nous noterons, pour un degré  $n$ , par  $p_n$  un polynôme de  $\mathbb{Z}[x]$  de degré  $n$  tel que  $\|p_n\|_{1,[a,b]}$  soit minimum. Nous donnerons un algorithme qui permet de trouver les polynômes de plus petite norme sur un intervalle donné en utilisant les polynômes de Müntz-Legendre généralisés, l'algorithme LLL et une méthode adaptée de la méthode du simplexe. Le processus est le suivant :

- a) trouver une "bonne" borne de  $\|p_n\|_{1,[a,b]}$ .
- b) chercher les facteurs nécessaires en utilisant cette borne.
- c) résoudre le système d'inéquations linéaires qu'on obtient en prenant des valeurs particulières de la variable et donc trouver les facteurs manquants du meilleur polynôme.

On présente ici les étapes en détail.

### 4.1-La borne initiale

Pour un  $n$  fixé, si on a déjà trouvé les meilleurs polynômes de degré inférieur à  $n$ , alors on peut prendre la borne initiale  $c_n$  pour la recherche de  $p_n$  :

$$c_n = \min_{i+j=n} \|p_i p_j\|_{1,[a,b]} \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

On peut aussi utiliser l'algorithme LLL pour calculer une borne initiale. On explique d'abord comment on utilise cet algorithme.

L'algorithme LLL a été introduit par A. K. Lenstra, H. W. Lenstra et L. Lovász en 1982 [LLL]. Soit  $H$  un réseau de base  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ . Alors l'algorithme LLL fournit une nouvelle base  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $H$  LLL-réduite c'est-à-dire telle que la norme (au sens de la norme euclidienne

habituelle) des vecteurs  $f_i$  soit petite et en particulier telle que le vecteur  $f_1$  ne soit pas trop loin d'être le plus petit vecteur non nul de  $H$ .

Par exemple, sur l'intervalle  $[0, 1/4]$ , supposons que le meilleur polynôme  $p_n$  de degré  $n$  admette le facteur

$$F = x^{n_0}(4x - 1)^{n_4}(5x - 1)^{n_5}.$$

Alors  $p_n = FQ$  où

$$Q = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$$

où les  $a_i$  sont entiers et  $k = n - n_0 - n_4 - n_5$ . On considère le réseau  $H$  engendré par les  $k + 1$  vecteurs

$$(F(x_i))_{1 \leq i \leq N}, (F(x_i)x_i)_{1 \leq i \leq N}, \cdots, (F(x_i)x_i^k)_{1 \leq i \leq N}.$$

On applique l'algorithme LLL à ces  $k + 1$  vecteur et on obtient un polynôme  $FQ$  qui est en général un polynôme qui fournit une bonne borne. Nous avons constaté dans nos calculs que cette méthode fournit souvent le meilleur polynôme  $p_n$ .

## 4.2-Les facteurs nécessaires

Dans notre calcul, nous commençons par utiliser la méthode de Müntz-Legendre généralisée. Nous utilisons la méthode décrite à la fin du paragraphe 3 en remplaçant 0,17937864 par  $c_n$  pour donner une minoration des exposants des polynômes de  $\mathbb{Z}[x]$  qui s'annulent aux extrémités de l'intervalle  $[a, b]$  (par exemple pour  $[0, 1/4]$  les polynômes  $x$  et  $1 - 4x$ ). Ensuite pour les autres facteurs, par exemple  $1 - 5x$  dans le cas de l'intervalle  $[0, 1/4]$ , nous calculons explicitement la matrice de Gram de la base

$$F, (1 - 5x)F, \cdots, (1 - 5x)^{n - \deg F} F$$



où  $F$  est de la forme  $x^{k_1}(1-4x)^{k_2}(1-5x)^{k_3}$ . On peut alors, si

$$p_n = a_0F + a_1(1-5x)F + \dots + a_{n-\deg F}(1-5x)^{n-\deg F}F$$

par Gram-Schmidt, majorer  $|a_0|$  et en déduire que  $p_n$  a un zéro d'ordre supérieur à  $k_3$  en  $1/5$ . On répète ensuite l'opération pour  $x$ ,  $1-4x$ ,  $1-5x$  etc  $\dots$  jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de nouveau facteur du premier degré. Nous ne considérerons pas ici le cas des facteurs de degré au moins 2 pour lesquels il faudrait faire intervenir des considérations de résultant.

### 4.3-La résolution d'un système d'inéquations linéaires

Après avoir fini de trouver les facteurs nécessaires, la dernière étape consiste à déterminer le facteur manquant du polynôme  $p_n$ . On note  $F$  le polynôme produit des facteurs nécessaires avec les exposants les plus grands possibles. Donc  $p_n$  s'écrit sous la forme

$$p_n = FQ(x)$$

où  $Q(x)$  est un polynôme de degré  $k = n - \deg F$  dont les coefficients inconnus sont à déterminer.

D'abord on fixe certains points rationnels qui sont différents des racines de  $F(x)$  qu'on appelle "points de contrôle". On considère le système linéaire d'inéquations à  $k+1$  variables :

$$(S) \quad |F(x_i)Q(x_i)| \leq c_n \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m$$

où  $x_i$  est un point de contrôle,  $m \geq k+1$  est le nombre des point de contrôle et

$$Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k.$$

Les coefficients de  $Q$  sont donc les inconnues du système.

Ce système définit un polyèdre dont nous devons déterminer les points entiers.

On résoud ce système d'inéquations avec une méthode adaptée de la méthode du simplexe et en utilisant l'algorithme LLL [CO] comme suit.

### 4.3.1-Majoration de formes linéaires

On se propose d'ajouter au système  $(S)$  de nouvelles inéquations obtenues à partir de la méthode suivante, dérivée de la méthode du simplexe.

Soit  $L$  une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^{k+1}$  que l'on désire majorer sur l'ensemble des solutions de  $(S)$  (par exemple

$$L(a_0, a_1, \dots, a_k) = Q(x_1)$$

où  $x_1$  est un point de contrôle fixé ou bien

$$L(a_0, a_1, \dots, a_k) = Q(t)$$

où  $t$  est un point n'appartenant pas à l'intervalle  $[a, b]$  que nous étudions).

On pose  $(S^{(1)}) = (S)$  constitué des formes linéaires  $L_j^{(1)} = L_j$  pour  $1 \leq j \leq m$  et du second membre  $b_j^{(1)} = c_n$ , et on note  $L_{m+1}^{(1)} = L$ . On note  $M^{(1)}$  la matrice constituée de la matrice identité d'ordre  $m$  à laquelle on ajoute une  $m + 1$  ième ligne identiquement nulle et  $A^{(1)}$  la matrice à  $m + 1$  lignes et  $k + 1$  colonnes dont les lignes sont  $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_m^{(1)}, L_{m+1}^{(1)}$ .

Supposons qu'à l'étape  $s \geq 1$  on ait  $L_{m+1}^{(s)} \neq 0$ . Décrivons comment on obtient le système à l'étape  $s + 1$ . On suppose que chaque ligne  $j \leq m$  de la matrice  $M^{(s)}$  représente les coefficients de  $L_j^{(s)}$  comme combinaison linéaire des formes linéaires  $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_m^{(1)}$ . On choisit alors un

terme de  $L_{m+1}^{(s)}$  de plus grande valeur absolue ( $> 0$  puisque  $L_{m+1}^{(s)} \neq 0$ ) d'indice  $i$ . On choisit un terme de la colonne  $i$  de  $A^{(s)}$  et de ligne  $j \leq m$  dont le quotient par  $b_j^{(s)}$  est maximum.

On effectue alors le pivot de Gauss dans la matrice  $A^{(s)}$  autour de ce terme  $A_{j,i}^{(s)}$ . On obtient  $A^{(s+1)}$ . On effectue les opérations identiques dans la matrice  $M^{(s)}$  de façon à ce que chaque ligne d'indice  $j \leq m$  de la nouvelle matrice  $M^{(s+1)}$  représente les coefficients de  $L_j^{(s+1)}$  comme combinaison linéaire des formes linéaires  $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_m^{(1)}$ . La ligne d'indice  $m+1$  représente les coefficients de la forme linéaire soustraite à  $L_{m+1}^{(1)}$  comme combinaison linéaire des formes  $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_m^{(1)}$ . Si

$$L_j^{(s+1)} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} L_i^{(1)} \quad j \leq m$$

on prend

$$b_j^{(s+1)} = \sum_{i=1}^m |\alpha_{ji}| b_i^{(1)}$$

qui représente bien une majoration de  $L_j^{(s+1)}$ .

Le procédé s'arrête quand  $L_{m+1}^{(s)} \equiv 0$ . La forme linéaire soustraite à  $L$  est donc égale à  $L$  et la dernière ligne de  $M^{(s)}$  donne les coefficients de  $L$  comme combinaison linéaire des formes  $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_m^{(1)}$ . On obtient une majoration de  $L$  comme ci-dessus.

### Remarque

Si  $L$  est à coefficients entiers et si sa majoration est inférieure à 1 alors cela diminue la dimension du système ( $S$ ).

### 4.3.2- Changement de base et résolution du système d'inéquations linéaires

On considère sur la base  $\{x^k F\}$  la matrice  $M_0$  associée au système. On calcule la matrice de Gram des colonnes de  $M_0$ , et on applique

l'algorithme LLL à cette matrice pour avoir une base "meilleure" que la base  $\{x^k F\}$ . On obtient une matrice de changement de base  $P$ , et un nouveau système linéaire avec  $M = M_0 \times P$ .

Par le système du pivot de Gauss avec ordre des colonnes fixé, on obtient un système triangulaire et des bornes pour les coefficients inconnus. Pour les seconds membres, c'est-à-dire pour la majoration des formes linéaires, on procédera comme en 4.3.1. On résout alors le système d'inéquations linéaires et on a donc plusieurs polynômes (il y a peut-être quelques polynômes  $q$  tels que  $\|q\|_{1,[a,b]} \geq \|p_n\|_{1,[a,b]}$  à cause du choix des points de contrôle et des pertes dans la procédure du pivot). On choisit le meilleur polynôme pour  $Q$ , c'est-à-dire qu'on choisit un de ceux dont la norme  $\| * \|_{1,[a,b]}$  est la plus petite. On obtient ainsi un polynôme  $p_n$  qui convient. Tous les calculs sont effectués avec le logiciel Pari.

## 5-Application à $\mathbf{T}_{\mathbb{Z}, \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, 12\right)}([2, 4])$

Dans ce paragraphe tous les polynômes de degré  $2d$  que l'on calcule sont dans l'idéal  $(x, 12)^d \mathbb{Z}[x]$ . On note que l'ensemble des polynômes est  $P^{2d}(x)$  ;

$$\begin{aligned} & P^{2d}(x) \\ &= \left\{ p^{2d}(x) \mid p^{2d}(x) = 12^d a_0 + 12^{d-1} a_1 x + \cdots + 12 a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} \right. \\ & \quad \left. + \cdots + a_{2d} x^{2d} \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq 2d, \quad \text{pgcd}(a_i, 0 \leq i \leq 2d) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

On utilise la méthode présentée dans le paragraphe précédent pour chercher les “meilleurs” polynômes  $p_0^{2d} \in P^{2d}$  avec le degré  $2d$  inférieur ou égal à 40 (à cause de difficultés de calcul sur ordinateur, on s'arrête au degré 40). Le processus est le suivant :

- Avec une majoration du  $(f, \Delta)$ -diamètre transfini entier dans l'intervalle  $[2, 4]$  où  $\Delta = 12$ , on trouve une “bonne” borne de  $\|p\|_{1, [2, 4]}$  et on la considère comme une valeur initiale.
- On en déduit un polynôme  $p(x)$  avec les facteurs nécessaires en utilisant la valeur initiale. Ici on utilise les trois facteurs de base  $x - 2, x - 3, x - 4$ .
- On obtient alors un système d'inéquations linéaires en prenant des valeurs particulières de la variable et on résout le système.

On présente ici les étapes en détail comme suit.

### 5.1-Calcul d'une borne initiale

On se fixe un degré  $2d$ . On veut chercher d'abord un polynôme

$$p_1^{2d} \in (\Delta, x)^d$$

tel que  $\|p_1^{2d}\|_{1, [2, 4]}$  soit “petit” et  $\deg(p_1^{2d}) = 2d$ . On commence par

$d = 3$ , on prend les polynômes initiaux pour  $d = 3, 4, 5$  comme suit :

$$p_1^6(x) = 3(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^2$$

$$p_1^8(x) = 3(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^3$$

$$p_1^{10}(x) = 4(x-2)^2(x-3)^5(x-4)^3.$$

Et leurs normes  $\| * \|_{1,[2,4]}$  respectives sont donc les estimations des bornes initiales des polynômes des degrés 6, 8 et 10 dans l'idéal  $(x, 12)^{2d}\mathbb{Z}[x]$ . On note ici  $p_1^{2d}$  le polynôme initial de degré  $2d$  et  $p_0^{2d}$  le "meilleur" polynôme. Ensuite pour les polynômes de degré plus grand que 10, on fait les produits des "meilleurs" polynômes  $p_0^{2d}$  de degré  $2d$  plus petit qu'eux et on prend le meilleur parmi ces produits. Donc on peut trouver des polynômes initiaux pour tous les degrés, par exemple,

$$p_1^{12} = (p_0^6)^2 ; \quad p_1^{18} = p_0^8 p_0^{10} \quad \text{ou} \quad p_1^{18} = (p_0^6)^3.$$

## 5.2-Facteurs nécessaires

On se place ici dans le cas  $\varphi(x) = \frac{1}{x^d}$ . On utilise la base

$$FC_0, FC_1(x-c), \dots, FC_n(x-c)^n$$

où  $c=2, 3$  ou  $4$ ,  $C_i \in \mathbb{Z}$ , et

$$F = (x-2)^{n_2}(x-3)^{n_3}(x-4)^{n_4}$$

avec  $n_i \in \mathbb{N}$ .

Donc le polynôme  $p_0^{2d}$  est du type

$$p_0^{2d} = FQ_{2d-k}$$

où  $k = n_1 + n_2 + n_3$ , et les coefficients  $C_n, \dots, C_0$  tiennent compte des conditions arithmétiques sur  $p^{2d}(x)$ .

On applique la méthode de Müntz-Legendre généralisée au polynôme  $p_0^{2d}$ .

Algorithme : on commence par  $F = 1$  i.e.  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ , on prend  $c = 2$ , On écrit  $p_0^{2d}$  dans la base  $\{(x-2)^n \mid n \geq 0\}$ , donc

$$p_0^{2d} = Q_{2d}(x).$$

On calcule la matrice de Gram des  $p_i$  relativement au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\varphi$  et on utilise le procédé de Gram-Schmidt sur cette matrice, le dernier terme diagonal obtenu fournit  $\|L_n\|_{2,[2,4]}^2$ .

Si

$$|C_0| \leq \frac{\sqrt{2}}{\|L_n\|_{2,[2,4]}} \|p_1^{2d}\|_{1,[2,4]} < 1,$$

alors  $C_0 = 0$ , donc

$$(x-2) | p_0^{2d},$$

c'est-à-dire on trouve un facteur  $x-2$  de  $p_0^{2d}$ . On continue jusqu'à ce que

$$p_0^{2d} = (x-2)^{q_2} Q_{2d-q_2}(x)$$

tel que  $q_2$  soit le plus grand possible.

On prend ensuite  $c = 3$ . On écrit  $p_0^{2d}$  dans la base  $\{(x-2)^{q_2}(x-3)^n \mid n \geq 0\}$ ,

$$p_0^{2d} = (x-2)^{q_2} Q_{2d-q_2}(x),$$

et on répète le calcul jusqu'à trouver  $q_3$  le plus grand possible tel que

$$(x-3)^{q_3} | p_0^{2d}.$$

Et puis on prend  $c = 4$ ,

$$p_0^{2d} = (x - 2)^{q_2} (x - 3)^{q_3} Q_{2d - q_2 - q_3}(x),$$

et donc on trouve  $q_4$ . On peut aussi reprendre  $c = 2$  (ou  $c = 3$ ,  $c = 4$ ),

$$p_0^{2d} = (x - 2)^{q_2} (x - 3)^{q_3} (x - 4)^{q_4} Q_{2d - q_2 - q_3 - q_4}(x)$$

jusqu'à ce que  $n'_2, n'_3, n'_4$  soient les plus grands possible tels que

$$(x - 2)^{n'_2} (x - 3)^{n'_3} (x - 4)^{n'_4} | p_0^{2d}.$$

Donc, on écrit  $p_0^{2d}$  dans la base

$$\{(x - 2)^{n'_2} (x - 3)^{n'_3} (x - 4)^{n'_4} x^n, n \geq 0\}$$

Un autre facteur dans  $P^{2d}(x)$  qui nous intéresse est  $5x - 12$ , car il est dans l'idéal  $(x, 12)$  et il a une racine réelle dans l'intervalle  $[2, 4]$ . Après avoir trouvé des facteurs  $x - 2$ ,  $x - 3$ ,  $x - 4$  avec les exposants les plus grands possibles, par la proposition II-2.1 et la proposition II-2.2 on a

$$p_0^{2d} = (x - 2)^{n'_2} (x - 3)^{n'_3} (x - 4)^{n'_4} Q_{2d - k}$$

où  $k = n'_2 + n'_3 + n'_4$  et

$$Q_{2d - k} = b_0 a_0 + b_1 a_1 x + \cdots + b_{2d - k} a_{2d - k} x^{2d - k}$$

où les  $b_i$  sont entiers pour  $0 \leq i \leq 2d - k$  et

$$\begin{aligned} b_i &= 3^{\max(d - i - n'_3, 0)} 2^{\max(2d - 2i - n'_2 - 2n'_4, 0)} \\ &= 12^{m_i} b'_i \end{aligned}$$



avec

$$m_i = \min \left\{ \max \left( d - i - n'_3, 0 \right), \left\lceil \frac{1}{2} \max \left( 2d - 2i - n'_2 - 2n'_4, 0 \right) \right\rceil \right\}$$

et  $b'_i \in \mathbb{Z}$  pour  $0 \leq i \leq 2d - k$ .

Donc on applique Müntz-Legendre au point  $12/5$  :

$$\begin{aligned} & p_0^{2d} \left( \frac{12}{5} \right) \\ &= \left( \frac{12}{5} - 2 \right)^{n'_2} \left( \frac{12}{5} - 3 \right)^{n'_3} \left( \frac{12}{5} - 4 \right)^{n'_4} Q_{2d-k} \left( \frac{12}{5} \right) \\ &= (-1)^{n'_3+n'_4} \left( \frac{2}{5} \right)^{n'_2} \left( \frac{3}{5} \right)^{n'_3} \left( \frac{8}{5} \right)^{n'_4} Q_{2d-k} \left( \frac{12}{5} \right) \\ &= (-1)^{n'_3+n'_4} \frac{3^{n'_3} 2^{n'_2+3n'_4}}{5^{n'_2+n'_3+n'_4}} \left( b_0 a_0 + b_1 a_1 \frac{12}{5} + \cdots + b_{2d-k} a_{2d-k} \frac{12^{2d-k}}{5^{2d-k}} \right). \end{aligned}$$

En raison de la relation

$$b_i a_i \left( \frac{12}{5} \right)^i = \frac{1}{5^{2d-k}} \left( 5^{2d-k-i} 12^{m_i+i} b'_i a_i \right)$$

et  $k = n'_2 + n'_3 + n'_4$ , on a donc

$$\begin{aligned} p_0^{2d} \left( \frac{12}{5} \right) &= (-1)^{n'_3+n'_4} \frac{3^{n'_3} 2^{n'_2+3n'_4}}{5^{2d}} \text{pgcd} \left( b'_i 12^{m_i+i}, 0 \leq i \leq 2d - k \right) \\ &\quad \times \left( 5^{2d-k} b''_0 a_0 + 5^{2d-k-1} b''_1 a_1 + \cdots + b''_{2d-k} a_{2d-k} \right) \end{aligned}$$

où  $b''_i \in \mathbb{Z}$  pour  $0 \leq i \leq 2d - k$ .

On note ici

$$A = 5^{2d-k} b''_0 a_0 + 5^{2d-k-1} b''_1 a_1 + \cdots + b''_{2d-k} a_{2d-k}$$

$$C = \frac{3^{n'_3} 2^{n'_2 + 3n'_4}}{5^{2d}} \text{pgcd} \left( b'_i 12^{m_i + i}, 0 \leq i \leq 2d - k \right).$$

A est donc une forme linéaire en  $a_i \in \mathbb{Z}$  à coefficients entiers.

D'autre part on a

$$\left| \frac{p_0^{2d} \left(\frac{12}{5}\right)^d}{\left(\frac{12}{5}\right)^d} \right| \leq \|p_1^{2d}\|_{1,[2,4]}$$

donc

$$A \leq \frac{1}{C} \left(\frac{12}{5}\right)^d \|p_1^{2d}\|_{1,[2,4]}.$$

Si  $A < 1$ , alors on trouve le facteur  $5x - 12$  de  $p_0^{2d}$ . Une fois que l'on a un exposant pour  $(5x - 12)$ , on continue et on peut aussi reprendre l'étape précédente pour avoir les exposants des facteurs  $(x - 2)$ ,  $(x - 3)$ , et  $(x - 4)$  les plus grands possibles car on a diminué la dimension des espaces vectoriels à étudier. On procède ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus améliorer les exposants. Si nécessaire on peut changer l'ordre des étapes pour calculer les bons exposants des facteurs  $x - 2$ ,  $x - 3$ ,  $x - 4$ ,  $5x - 12$ .

### 5.3-Exhaustion

Après avoir fini de trouver les exposants des facteurs  $x - 2$ ,  $x - 3$ ,  $x - 4$ ,  $5x - 12$  qui sont  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ ,  $n_5$  respectivement,  $p_0^{2d}$  s'écrit donc dans la base

$$\{(x - 2)^{n'_2} (x - 3)^{n'_3} (x - 4)^{n'_4} (5x - 12)^{n'_5} x^n, n \geq 0\},$$

la dernière étape est de déterminer les facteurs manquants du "meilleur" polynôme, c'est-à-dire, déterminer les  $2d + 1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5$  coefficients inconnus de  $Q_{2d - n_2 - n_3 - n_4 - n_5}$ , tels que

$$p_0^{2d} \in (\Delta, x)^d$$

Soit

$$p_0^{2d} = (x-2)^{n'_2}(x-3)^{n'_3}(x-4)^{n'_4}(5x-12)^{n'_5} Q_{2d-n_2-n_3-n_4-n_5}$$

et  $\|p_0^{2d}\|_{1,[a,b]}$  soit le plus petit, où si on pose  $k = n_2 + n_3 + n_4 + n_5$

$$Q_{2d-k} = b_0 a_0 + b_1 a_1 x + \cdots + b_{2d-k} a_{2d-k} x^{2d-k}$$

où les  $a_i, b_i$  sont entiers pour  $0 \leq i \leq 2d-k$  et par la proposition II-2.1 et la proposition II-2.2, on a

$$b_i = 3^{\max(d-i-n'_3-n'_5,0)} 2^{\max(2d-2i-n'_2-2n'_4-2n'_5,0)} = 12^{m_i} b'_i$$

avec

$$m_i = \min \left( \max(d-i-n'_3-n'_5,0), \left[ \frac{1}{2} \max(2d-2i-n'_2-2n'_4-2n'_5,0) \right] \right)$$

et  $b'_i \in \mathbb{Z}$  pour  $0 \leq i \leq 2d-k$ , où  $[x]$  est le symbole de la partie entière du réel  $x$ .

D'abord, on fixe certains points rationnels qu'on appelle "points de contrôle" dans  $]2, 12/5[ \cup ]12/5, 3[ \cup ]3, 4[$ . On considère le système linéaire d'inéquations à  $2d+1-k$  variables :

$$|(x_i-2)^{n_2}(x_i-3)^{n_3}(x_i-4)^{n_4}(5x_i-12)^{n_5} Q_{2d-k}(x_i)| \leq \|p_1^{2d}\|_{1,[2,4]} x_i^d$$

pour  $1 \leq i \leq n$ , où  $x_i$  est un point de contrôle et  $n \geq 2d+1-k$  est le nombre des points de contrôle. Les coefficients  $(a_i)_{0 \leq i \leq 2d-k}$  de  $Q_{2d-k}$  sont donc les inconnues.

On résoud ce système d'inéquations avec la méthode adaptée de la méthode du simplexe que nous avons décrite au paragraphe 4.3 et aussi l'algorithme LLL.

Par le système du pivot de Gauss avec ordre des colonnes fixé, on obtient un système triangulaire. On peut donc estimer le nombre de solutions. Si ce nombre est petit on résout. Si ce nombre est trop grand on passe à l'étape du paragraphe 4.3.1 (On peut aussi tester le même système en remplaçant la borne initiale par une constante plus petite pour obtenir un nombre de solutions plus petit avec le risque de ne pas avoir de solution non triviale). On obtient donc un nouveau système de dimension plus petite. On résout le nouveau système et on peut donc avoir plusieurs polynômes, et on choisit le meilleur polynôme pour  $Q_{2d-k}$ , c'est-à-dire qu'on choisit un de ceux dont la norme  $\| * \|_{1,[2,4]}$  est la plus petite. On trouve donc le meilleur polynôme  $p_0^{2d}$  de degré  $2d$  dans l'intervalle  $[2, 4]$  avec l'idéal  $\Delta = 12$ . On a le tableau suivant :

### 5.4-Tableau des meilleurs polynômes

On donne ici un tableau des meilleurs polynômes calculés par la méthode ci-dessus. on note :

$$A_2 = x - 2$$

$$A_3 = x - 3$$

$$A_4 = x - 4$$

$$A_5 = 5x - 12$$

$$A_6 = 4x - 9$$

$$A_7 = 6x^2 - 35x + 48$$

$$A_8 = 7x^2 - 48x + 72$$

$$A_9 = 17x^2 - 102x + 144$$

$$A_{10} = 19x^2 - 108x + 144$$

$$A_{11} = 93x^3 - 764x^2 + 2016x - 1728$$

$$A_{12} = 8x^4 - 159x^3 + 936x^2 - 2160x + 1728$$

Dans ce tableau, on trouve en dernière ligne, i.e.  $2d = 40$ , une majoration de  $t_{\mathbb{Z}, (\frac{1}{\sqrt{x}}, 12)}([2, 4])$ . On retrouve les mêmes facteurs que ceux de G. Rhin [RH2] pour calculer la mesure d'indépendance linéaire de  $1, \log 2, \log 3$ . Si on utilise la méthode que l'on présente dans le chapitre précédent, on peut trouver les bons exposants des facteurs et donc retrouver la même mesure.

D'autre part, il y a encore un point qui attire l'attention dans ce tableau. Si on étudie les "meilleurs" polynômes de degré par exemple 20, 26, 34, on trouve le facteur  $A_8 = 7x^2 - 48x + 72$  qui a une racine réelle hors de l'intervalle  $[2, 4]$ , et le facteur  $A_{11} = 93x^3 - 764x^2 + 2016x - 1728$  qui a deux racines complexes et une racine réelle dans l'intervalle  $[2, 4]$ . Dans l'article de P. Borwein et T. Erdelyi [BE], on trouve le problème suivant : est-ce que les polynômes de Chebyshev entiers (c'est-à-dire les polynômes de plus petite norme  $\| * \|_1$ ) sur l'intervalle  $[0, 1]$  ont toutes leurs racines incluses dans  $[0, 1]$ ? Ici les polynômes de Chebyshev sont remplacés par les meilleurs polynômes qu'on recherche mais bien sûr avec la condition de  $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$  et  $\Delta = 12$ . On sait que dans le cas classique la réponse est négative [HS] et on constate ici que la réponse est aussi négative pour  $t_{\mathbb{Z}, (f, \Delta)}([2, 4])$ .

\* Tableau des meilleurs polynômes \*

2d	meilleur polynôme	$t_{\mathbb{Z}, (\frac{1}{\sqrt{x}}, 12)}([2, 4]) \leq$	$\  * \ _{1, [2, 4]}$
6	$4A_2^2 A_3^3 A_4$	0, 5391	$2, 47 \times 10^{-2}$
8	$A_2^2 A_3^3 A_4^2 A_5$	0, 4882	$3, 23 \times 10^{-3}$
10	$4A_2^2 A_3^3 A_4^2 A_5 A_7$	0, 4994	$9, 64 \times 10^{-4}$
12	$2A_2^3 A_3^5 A_4^3 A_5$	0, 5044	$2, 71 \times 10^{-4}$
14	$2A_2^3 A_3^5 A_4^3 A_5 A_7$	0, 5038	$6, 78 \times 10^{-5}$
16	$A_2^4 A_3^6 A_4^4 A_5^2$	0, 4882	$1, 04 \times 10^{-5}$
18	$A_2^4 A_3^6 A_4^4 A_5^2 A_7$	0, 4864	$2, 32 \times 10^{-6}$
20	$A_2^5 A_3^7 A_4^5 A_5^2 A_8$	0, 4840	$4, 97 \times 10^{-7}$
22	$A_2^6 A_3^8 A_4^5 A_5^2 A_{10}$	0, 4858	$1, 26 \times 10^{-7}$
24	$3A_2^6 A_3^8 A_4^6 A_5^2 A_7$	0, 4857	$2, 96 \times 10^{-8}$
26	$A_2^6 A_3^{10} A_4^6 A_5 A_{11}$	0, 4837	$6, 28 \times 10^{-9}$
28	$2A_2^7 A_3^{10} A_4^6 A_5 A_{12}$	0, 4832	$1, 43 \times 10^{-9}$
30	$A_2^8 A_3^{11} A_4^7 A_5^2 A_{10}$	0, 4798	$2, 70 \times 10^{-10}$
32	$A_2^8 A_3^{11} A_4^7 A_5^2 A_7 A_{10}$	0, 4807	$6, 60 \times 10^{-11}$
34	$A_2^8 A_3^{13} A_4^8 A_5^2 A_{11}$	0, 4807	$1, 52 \times 10^{-11}$
36	$2A_2^9 A_3^{13} A_4^9 A_5^2 A_6 A_{10}$	0, 4785	$2, 98 \times 10^{-12}$
38	$A_2^{10} A_3^{14} A_4^9 A_5^3 A_{10}$	0, 4777	$1, 04 \times 10^{-13}$
40	$A_2^{11} A_3^{14} A_4^9 A_5^2 A_9 A_{10}$	0, 4649	$4, 95 \times 10^{-14}$

## 6-Application à $T_z\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right)$

Dans l'article de Habsieger et Salvy[HS], on trouve un tableau des meilleurs polynômes entiers de degré inférieur ou égal à 75 sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Ils ont trouvé les bons facteurs comme suit :

$$B'_1 = x(1 - x)$$

$$B'_2 = 1 - 2x$$

$$B'_3 = 5x^2 - 5x + 1$$

$$B'_4 = 6x^2 - 6x + 1$$

$$B'_5 = 29x^4 - 58x^3 + 40x^2 - 11x + 1$$

$$B'_6 = (13x^3 - 20x^2 + 9x - 1)(13x^3 - 19x^2 + 8x - 1)$$

$$B'_7 = (31x^4 - 63x^3 + 44x^2 - 12x + 1)(31x^4 - 61x^3 + 41x^2 - 11x + 1)$$

$$B'_8 = 4921x^{10} - 24605x^9 + 53804x^8 - 67586x^7 + 53866x^6$$

$$-28388x^5 + 9995x^4 - 2317x^3 + 338x^2 - 28x + 1$$

Si on fait le changement de variable  $u = x(1 - x)$ , on obtient donc les bons facteurs dans  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$  :

$$B_1 = B'_1 = u$$

$$B_2 = (B'_2)^2 = 4u - 1$$

$$B_3 = B'_3 = 5u - 1$$

$$B_4 = B'_4 = 6u - 1$$

$$B_5 = B'_5 = 29u^2 - 11u + 1$$

$$B_6 = B'_6 = 169u^3 - 94u^2 + 17u - 1$$

$$B_7 = B'_7 = 961u^4 - 712u^3 + 194u^2 - 23u + 1$$

$$B_8 = B'_8 = 4921u^5 - 4594u^4 + 1697u^3 - 310u^2 + 28u - 1$$

Dans ce paragraphe, on considère l'intervalle  $[0, \frac{1}{4}]$ . On utilise la méthode qu'on a présentée dans le paragraphe 4 et le théorème III-3.10 pour chercher les meilleurs polynômes sur cet intervalle. On trouve un nouveau facteur

$$B_9 = 33u^2 - 12u + 1$$

et aussi le facteur

$$B_{10} = 941u^4 - 703u^3 + 193u^2 - 23u + 1$$

et on prolonge le tableau jusqu'au degré 53 (c'est-à-dire que sur l'intervalle  $[0, 1]$  on peut obtenir les meilleurs polynômes jusqu'au degré 106 si on impose de ne regarder que les polynômes  $Q$  de degré pair tel que  $Q(x) = Q(1 - x)$ ). Le processus est comme suit :

On calcule la borne initiale avec l'algorithme LLL, et trouve l'exposant de  $B_1$  et  $B_2$  par le théorème III-3.10. Pour les exposants du facteur  $B_3$ , on les calcule comme on a procédé pour les facteurs  $x - 2$ ,  $x - 3$ ,  $x - 4$  dans le paragraphe précédent. On résoud le système linéaire d'inéquations avec la méthode adaptée de la méthode du simplexe et l'algorithme LLL.

Pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 37, on a bien sûr retrouvé les mêmes que ceux du tableau de Habsieger et Salvy.

On trouve le tableau comme suit :



\* Meilleurs polynômes sur  $[0, \frac{1}{4}]$  \*

n	meilleur polynôme	$t_z ([0, \frac{1}{4}]) \leq$	$\ p_n\ _{1, [0, \frac{1}{4}]}$
38	$B_1^{24} B_2^5 B_3^4 B_4 B_5 B_9$	0,1829	$9,2393 \times 10^{-29}$
39	$B_1^{26} B_2^5 B_3^4 B_5^2$	0,1831	$1,7537 \times 10^{-29}$
40	$B_1^{27} B_2^5 B_3^4 B_5^2$	0,1828	$3,0269 \times 10^{-30}$
41	$B_1^{27} B_2^6 B_3^3 B_4 B_5^2$	0,1828	$5,4736 \times 10^{-31}$
42	$B_1^{27} B_2^5 B_3^5 B_5 B_6$	0,1833	$1,1261 \times 10^{-31}$
43	$B_1^{28} B_2^5 B_3^5 B_5 B_6$	0,1826	$1,7453 \times 10^{-32}$
44	$B_1^{29} B_2^5 B_3^4 B_5 B_{10}$	0,1826	$3,2170 \times 10^{-33}$
45	$B_1^{28} B_2^5 B_3^3 B_5 B_6 B_{10}$	0,1823	$5,4276 \times 10^{-34}$
46	$B_1^{30} B_2^6 B_3^3 B_4 B_5 B_{10}$	0,1826	$1,0652 \times 10^{-34}$
47	$B_1^{29} B_2^5 B_3^4 B_5 B_6 B_{10}$	0,1821	$1,7128 \times 10^{-35}$
48	$B_1^{32} B_2^7 B_3^4 B_4 B_5^2$	0,1821	$3,1252 \times 10^{-36}$
49	$B_1^{32} B_2^6 B_3^6 B_5 B_6$	0,1823	$6,0179 \times 10^{-37}$
50	$B_1^{34} B_2^6 B_3^4 B_5 B_{10}$	0,1824	$1,1173 \times 10^{-37}$
51	$B_1^{33} B_2^6 B_3^5 B_5^2 B_6$	0,1818	$1,7068 \times 10^{-38}$
52	$B_1^{34} B_2^6 B_3^5 B_5^2 B_6$	0,1823	$3,5822 \times 10^{-39}$
53	$B_1^{34} B_2^6 B_3^4 B_5 B_6 B_{10}$	0,1822	$6,3096 \times 10^{-40}$

## Bibliographie

- [AM1] F. AMOROSO *f-Transfinite diameter and number theoretic applications* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 43, 4(1993), 1179-1198.
- [AM2] F. AMOROSO *Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 40, 4(1990), 885-911.
- [AN] E. J. ANDERSON and P. NASH *Linear programming in infinite-dimensional spaces* Wiley-Interscience Publication (1987).
- [AR] K. ALLADI and M. L. ROBINSON *Legendre polynomials and irrationality* J. Reine Angew Math. 318 (1980) 137-155.
- [BA1] A. BAKER *Transcendence theory* London; New York: Academic Press, 1977.
- [BA2] A. BAKER *Approximation to the logarithms of certain rational numbers* Acta Arith. 10 (1964) 315-323.
- [BE] P. BORWEIN and T. ERDELYI *The integer Chebyshev problem* Math. Comput. 65, No.214(1996) 661-681.
- [CHU] G. V. CHUDNOVSKY and D. V. CHUDNOVSKY *Padé and rational approximation to systems of functions and their arithmetic applications* Lect. Notes in Math. (1982), 1052, 37-84.
- [CO] H. COHEN *A course in computational algebraic number theory* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993.
- [DA] V. DANILOV *Rational approximations of some functions at rational points* Math.Zametki 24(1978) No.4. et Math. Notes

- USSR 24 (1979), 741-744.
- [DI] J. DIEUDONNE *Calcul infinitésimal* Hermann, Paris 1968.
- [FRS] V. FLAMMANG, G. RHIN et C. J. SMYTH *The integer transfinite diameter of intervals and totally real algebraic integers* J. Théorie des Nombres de Bordeaux 9 (1997), 137-168.
- [HA1] M. HATA *Legendre type polynomials and irrationality measures* J. Reine Angew Math. 407 (1990) 99-125.
- [HA2] M. HATA *Rational approximations to  $\pi$  and some other numbers* Acta Arith. 63 No.4(1993) 335-349.
- [HS] L. HABSIEGER and B. SALVY *On integer Chebyshev polynomials* Math. Comput. 66, No. 218, 763-770 (1997).
- [LA] M. LANGEVIN *Calculs explicites de constantes de Lehmer* Publ. Math. Orsay 88/01(1988) 52-68.
- [LLL] A. K. LENSTRA, H. W. LENSTRA and L. LOVASZ *Factoring polynomials with rational coefficients* Math. Ann. 261(1982), 515-534.
- [LV] W. J. LE VEQUE *Topics in number theory* 1 and 2. Reading, Mass. 1956.
- [PO] A. VAN der POORTEN *A proof that Euler missed. Apéry's proof of the irrationality of  $\zeta(3)$ . An informal report* Math. Intelligencer 1 (1979), 195-203.
- [RH1] G. RHIN *Mesures d'irrationalité de  $\log 2$*  Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1984/1985 Exposé No.10.
- [RH2] G. RHIN *Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité* Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1985/1986 Prog. Math. 71(1987) 155-164.

- 
- [RH3] G. RHIN *Diamètre transfini et mesures d'irrationalité de logarithmes* Notes of Lectures Given at the University of Pisa in March 1989 (non publié).
- [RT] G. RHIN et P. TOFFIN *Approximants de Padé simultanés de logarithmes* J. Number Theory 24(1986) 284-297.
- [RU] E. A. RUKHADZE *A lower bound for the approximation of  $\ln 2$  by rational numbers* Vestnik Moskov Univ. Ser 1 Math. Mekh 6(1987) 25-29.
- [VI] C. VIOLA *On Siegel's method in diophantine approximation to transcendental numbers* J. Rend. Semin. Mat., Torino 53, No.4, 455-469 (1995).