



Une approche par relaxation lagrangienne pour l'optimisation d'un réseau de distribution : modèles stochastiques et fiables

Guy Aimé Tanonkou

► To cite this version:

Guy Aimé Tanonkou. Une approche par relaxation lagrangienne pour l'optimisation d'un réseau de distribution : modèles stochastiques et fiables. Automatique / Robotique. Université Paul Verlaine - Metz, 2007. Français. NNT : 2007METZ008S . tel-01775501

HAL Id: tel-01775501

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775501>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN AUTOMATIQUE

Spécialité : Génie des Systèmes Industriels

Présentée par

Guy Aimé TANONKOU

**Une approche par relaxation lagrangienne pour l'optimisation d'un
réseau de distribution : modèles stochastiques et fiables**

Soutenue le 28 Mars 2007

JURY

Rapporteurs

Christian PRINS	Professeur, Université de Technologie de Troyes	(France)
El-Houssaine AGHEZZAF	Professeur, Ghent University	(Belgique)

Examineurs

Jacques TEGHEM	Professeur, Faculté Polytechnique de Mons	(Belgique)
Jean Pierre CAMPAGNE	Professeur, INSA de Lyon	(France)
Lyes BENYOUCEF	Chargé de recherche, INRIA Lorraine	(France)
Raymond BISDORFF	Professeur, Université de Luxembourg	(Luxembourg)
Xiaolan XIE	Professeur, Ecole des Mines de Saint Etienne	(France)

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance envers mes encadrants, le Professeur **Xiaolan XIE** et le Dr. **Lyès BENYOUCEF**, pour leur encadrement régulier, leur rigueur, leurs conseils toujours positifs et constructifs. Leurs compétences ont été une aide précieuse pour la réalisation de ce travail de recherche.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux personnes qui m'ont fait l'honneur de composer le jury de ma thèse :

Monsieur **Jean Pierre CAMPAGNE**, professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon (France), pour avoir bien voulu examiner ce travail et pour l'honneur qu'il m'a fait de présider ce jury.

Monsieur **Jacques TEGHEM**, professeur à la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique), pour avoir bien voulu examiner ce travail et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux de recherche.

Aux rapporteurs de cette thèse monsieur **Christian PRINS**, professeur à l'Université de Technologie de Troyes (France) et monsieur **El-Houssaine AGHEZZAF**, professeur à l'Université de Gand (Belgique), qui m'ont fait le grand honneur d'apporter leur jugement sur cette thèse, et pour leurs commentaires constructifs et leurs remarques pertinentes.

Monsieur **Raymond Bisdorff**, professeur à l'Université de Luxembourg et Directeur des Services de Mathématiques Appliquées (Luxembourg), pour sa confiance et le fait d'avoir pris les engagements nécessaires auprès des autorités luxembourgeoises pour permettre le bon déroulement de cette thèse, et son intérêt manifesté à mes travaux de recherche tout au long des ces années.

Ma profonde gratitude va aussi au Professeur **Pierre SECK** de l'Université de Luxembourg. Je tiens sincèrement à lui dire merci de m'avoir pris sous son aile depuis 2001 et de m'avoir

donné des précieux conseils ainsi que l'opportunité de continuer mes études. Je remercie aussi tous les membres du Rotary Club Luxembourg, pour leur soutien et grande générosité.

Je remercie le gouvernement du Grand Duché de Luxembourg, par son ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche, pour m'avoir accordé une bourse de formation recherche. C'est grâce à cette bourse que ce travail de recherche a pu être réalisé.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres de l'équipe MACSI et plus précisément au Professeur Marie Claude PORTMANN pour m'avoir accepté dans son équipe et Madame Christel WIEMERT du secrétariat de l'INRIA Lorraine, pour ses encouragements et sa disponibilité permanente.

Ma gratitude va aussi aux membres du laboratoire LGIPM de l'Université de Metz, et plus particulièrement son directeur le professeur Nidhal REZG, pour leur soutien pendant toute la période de thèse. Je tiens à partager le plaisir de présenter cette thèse avec eux.

J'adresse ici mes remerciements à tous mes amis, en particulier le Dr. Berthold ULUNGU de la Faculté Polytechnique de Mons, Mlle Aurelie DIDIER et Mlle Carine VYNISALE pour avoir relu ce manuscrit. Ce qui m'a permis d'effectuer des modifications significatives.

Merci à toute ma famille pour son soutien constant et permanent. Je souhaite qu'elle trouve ici l'expression de mon éternel reconnaissance.

*A mon fils Erwann
Et à la mémoire de mon père*

Table des matières

Liste des Figures	4
Liste des Tableaux	5
Introduction Générale.....	6
 Chapitre 1 Revue de la littérature	 11
1.1 Introduction	12
1.2 Etat de l'art	13
1.2.1. Conception des chaînes logistiques : problème de localisation.....	13
1.2.1.1. Modèles déterministes.....	13
1.2.1.2. Modèles stochastiques.....	20
1.2.1.3. Modèles de localisation intégrant l'aspect stockage	22
1.2.2. Modèles fiables de conception des réseaux de distribution.....	24
1.2.3. Conception des chaînes logistiques : modèles de choix des fournisseurs	26
1.2.4. Quelques modèles de conception des chaînes logistiques.....	29
1.3 Relaxation Lagrangienne.....	33
1.3.1 Principes	34
1.3.2 Méthode du sous gradient.....	37
1.3.3 Méthode de recherche de « pas » d'Armijo.....	38
1.3.4 Méthode d'Armijo Subgradient (ASGM)	40
1.3.5 Commentaires.....	40
1.4 Positionnement de la thèse	41
1.5 Conclusion.....	41
 Chapitre 2 Optimisation d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement constants.....	 43
2.1 Introduction	44
2.2 Description du problème	45
2.2.1 Fournisseur	45
2.2.2 Centre de distribution	45
2.2.3 Zone de demande (client)	46
2.2.4 Modèle de Wilson (Quantité Economique de Commande).....	47
2.3 Modélisation mathématique	48
2.3.1 Paramètres et variables de décisions	48
2.3.2 Modélisation des coûts	49
2.3.3 Fonction objectif.....	51
2.4 Approche de résolution par relaxation lagrangienne.....	52
2.4.1 Relaxation lagrangienne et « problème relaxé »	53

2.4.2	Le dual lagrangien « problème dual ».....	54
2.4.3	Recherche d'une borne supérieure.....	54
2.4.4	Algorithme principal.....	55
2.4.5	Résolution des sous problèmes lagrangiens (SP_j).....	56
2.5	Résultats numériques.....	63
2.5.1	Performance de l'algorithme principal.....	63
2.5.2	Etude du cas de 10 zones de demande.....	68
2.6	Conclusions et perspectives.....	69

Chapitre 3 Optimisation d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement aléatoires..... 70

3.1	Introduction.....	71
3.2	Cas mono fournisseur mono produit.....	71
3.2.1	Formulation Mathématique.....	71
3.2.2	Résolution du problème d'optimisation (P).....	74
3.2.3.1	Problème relaxé.....	75
3.2.3.2	Résolution du problème dual lagrangien.....	77
3.2.3.3	Recherche d'une borne supérieure.....	78
3.2.3.4	Algorithme principal pour la résolution du problème (P).....	80
3.2.3.5	Résolution des sous problèmes lagrangiens (SP_j).....	80
3.2.3	Résultats numériques et analyses.....	86
3.2.4.1	Performances de l'algorithme principal.....	87
3.2.4.2	Analyse de sensibilité.....	90
3.3	Cas mono fournisseur multi produit.....	93
3.3.1	Description du problème.....	93
3.3.2	Formulation mathématique.....	94
3.3.3	Résolution du problème (MP).....	96
3.3.4	Résultats numériques et analyses.....	99
3.4	Conclusion et perspectives.....	103

Chapitre 4 Conception d'un réseau de distribution stochastique multi fournisseurs avec délais d'approvisionnement aléatoires..... 104

4.1	Introduction.....	105
4.2	Description du problème.....	105
4.3	Formulation mathématique.....	107
4.4	Résolution du problème d'optimisation (MF).....	110
4.4.1	Relaxation lagrangienne.....	111
4.4.2	Heuristique pour la résolution du problème (MF).....	116
4.5	Résultats numériques et analyses.....	117
4.6	Conclusions.....	121

Chapitre 5 Conception d'un réseau de distribution stochastique avec des sites non fiables	123
5.1. Introduction	124
5.2. Conception d'un réseau de distribution avec indisponibilités des centres de distribution	125
5.2.1 Description du problème	125
5.2.2 Formulation mathématique.....	127
5.2.2.1 Variables et niveaux de décision	127
5.2.2.2 Modèle d'optimisation stochastique.....	128
5.2.3 Approche de résolution	130
5.2.3.1 Approche Monté Carlo	130
5.2.3.2 Résolution du problème d'approximation (SAA)	131
5.2.3.3 Décomposition des sous problèmes $V_j(\lambda, \beta)$	134
5.2.3.4 Résolution du problème dual.....	135
5.2.3.5 Recherche d'une borne supérieure	135
5.2.3.6 Heuristique pour résoudre le problème de conception	136
5.2.4 Résultats numériques et analyses	137
5.3. Conception d'un réseau de distribution avec indisponibilités des fournisseurs	140
5.3.1 Position du problème.....	140
5.3.2 Formulation Mathématique	141
5.3.2.1 Variables de décision.....	141
5.3.2.2 Problème d'optimisation	142
5.3.3 Approche de résolution	144
5.3.4 Résultats numériques et analyses	150
5.4. Conclusions	152
Conclusions et perspectives	154
Références	157

Liste des Figures

Figure 1.1	Relation donneur d'ordres/Fournisseur	27
Figure 2.1	Réseau de distribution étudié (cas d'un fournisseur).....	46
Figure 2.2	Evolution de la borne inférieure : cas $\#RL=40$	65
Figure 2.3	Evolution de la borne inférieure : cas $\#RL=60$	66
Figure 2.4	Evolution de la borne inférieure : cas $\#RL=80$	66
Figure 2.5	Courbe d'Evolution des Bornes LB et UB : cas $\#RL=40$	67
Figure 2.6	Courbe du temps de calcul en fonction de la taille du problème ($\#RL$).	67
Figure 2.7	Estimation du GAP en fonction de la taille du problème ($\#RL$).	68
Figure 3.1	Courbe d'Evolution du GAP en fonction de $\#ITS$: cas $\#RL= 80$	89
Figure 3.2	Courbe d'Evolution de LB et UB en fonction de $\#ITS$: cas $\#RL= 80$	89
Figure 3.3	Nombre de DCs vs. Coût de transport ($\gamma_T=1$).....	92
Figure 3.4	$\#DCs$ vs. coût de stockage ($\gamma_I=1$).	92
Figure 3.5	$\#DCs$ vs. variabilité des aléas de demande et du délai	93
Figure 3.6	GAP vs. Nombre d'itérations (cas multi produit).....	102
Figure 3.7	LB vs. Nombre d'itérations (cas multi produit).....	102
Figure 3.8	LB vs. Taux de service.....	103
Figure 4.1	Réseau de distribution étudié : cas multi fournisseurs.....	106
Figure 4.2	GAP vs. Nombre d'Itérations : Problème (30, 5)	118
Figure 4.3	GAP vs. Nombre d'Itérations : Problème (40, 5)	119
Figure 5.1	Période de conception du réseau de distribution	126
Figure 5.2	Niveaux de décision : Fiabilité des centres de distribution	128
Figure 5.3	Performance du GAP : cas d'indisponibilité des DCs.....	139
Figure 5.4	Niveaux de décision : fiabilité des fournisseurs	142
Figure 5.5	CPU vs. $\#Sc$: cas d'indisponibilité des fournisseurs	151
Figure 5.6	GAP vs. Nombre d'Itérations	152

Liste des Tableaux

Tableau 2.1.	Paramètres du problème	64
Tableau 2.2.	Performance de l'algorithme principal pour $\#RL \leq 100$	64
Tableau 2.3.	Solution optimale pour $\#RL=10$	68
Tableau 3.2.	Performance de l'algorithme ($NBE = 1$)	87
Tableau 3.3.	Performance de l'algorithme ($NBE = 5$).....	88
Tableau 3.4.	Performance de l'algorithme ($\#RL= 80$).....	89
Tableau 3.5.	Impact des coûts de transport et des coûts de stockage.....	90
Tableau 3.6.	Performance de l'algorithme dans le cas multi produit.....	100
Tableau 4.1.	Performance des solutions: cas délai aléatoire	117
Tableau 4.2.	Performance des solutions: cas délai constant.....	120
Tableau 5.1.	Performance des solutions : cas d'indisponibilité des DCs.....	138
Tableau 5.2.	Performance de l'heuristique : cas d'indisponibilité des fournisseurs.	151

Introduction Générale

Dans un contexte économique instable, sous la pression de la globalisation, d'une concurrence croissante, nombreuses sont les entreprises qui constatent les limites de l'optimisation seule de leurs systèmes de production/distribution et cherchent à explorer de nouvelles sources de compétitivité à travers l'optimisation de leurs réseaux logistiques et de leurs relations avec leurs partenaires. Fournir le produit et/ou le service désiré par le client, rapidement, moins cher et plus performant que celui proposé par l'entreprise concurrente sur le marché est de nos jours le souci majeur de chaque entreprise existant dans un marché local et/ou international. La concurrence dans un futur proche ne sera pas entre différentes entreprises mais entre différents réseaux logistiques (supply chain).

Des modèles déterministes et stochastiques d'optimisation des réseaux logistiques ont été développés dans la littérature. A cause de leurs complexités plusieurs méthodes de résolution ne prennent pas en compte simultanément les décisions stratégiques, tactiques et opérationnelles ainsi que les aléas et la dynamique du réseau (fluctuation des demandes clients, niveaux de services, délais de transports, etc.).

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse traitent des problèmes de conception des réseaux de distribution stochastiques. Plus précisément, les réseaux étudiés sont soumis à des aléas liés aux demandes clients, aux délais d'approvisionnement et aux fiabilités des centres de distribution et fournisseurs. Il est important de signaler que l'utilisation de méthodes analytiques pour optimiser ce type de réseau est le plus souvent très complexe. *Notre principal challenge dans cette thèse est de développer une approche analytique innovante pour traiter des problèmes complexes de conception de réseaux de distribution motivés par des besoins industriels.*

Les problèmes de conception de réseaux considérés dans ce travail de recherche ont été motivés par le projet GROWTH ONE (*Optimization methodology of Networked Enterprises*), projet financé par la commission européenne. L'objectif principal de ONE est de développer un outil

d'aide à la décision pour supporter les décisions relatives à la conception, à la simulation et à l'optimisation des chaînes logistiques. La prise simultanée des critères économiques, sociaux et environnementaux est le défi majeur relevé dans le projet ONE. Un outil logiciel (voir [\[Ding, 2004\]](#)) a été conçu pour permettre de :

- Modéliser et simuler les aspects dynamiques d'une chaîne logistique, à savoir la variabilité des demandes, l'incertitude liée au transport, etc.
- Modéliser et simuler les principales activités d'une chaîne logistique, à savoir l'approvisionnement, la production, le stockage et la distribution.
- Etendre les approches d'optimisation simples relatives à un seul site vers une optimisation globale de systèmes complexes avec plusieurs sites.
- Faciliter l'acquisition des données et leur validation en utilisant des méthodes classiques en statistique.
- Faire une optimisation multicritère, en considérant différents types de critères comme les coûts, le niveau de service client, la protection de l'environnement (diminution de la consommation du fuel utilisé lors du transport des matières, etc.).
- Fournir une interface graphique pour faciliter l'utilisation de l'outil.

En complément à l'approche proposée dans le cadre du projet ONE, l'objectif de cette thèse est de proposer des modèles analytiques de conception de réseaux de distribution qui prennent en compte explicitement la vraie structure des coûts de stockage. Ces modèles analytiques intègrent les décisions stratégiques, tactiques et opérationnelles qui, traditionnellement, sont des décisions qui sont prises séparément dans un modèle analytique d'optimisation.

Plus précisément, nous proposons une approche d'optimisation mono critère orientée coût basée sur la technique de relaxation lagrangienne. Cette technique est très efficace pour l'obtention rapide de bonnes bornes inférieures et supérieures lors de la minimisation des fonctions à variables discrètes pour certains problèmes d'optimisation combinatoire NP-difficiles. Le problème dual résultant de la relaxation lagrangienne est résolu par la technique ASGM (*Armijo Subgradient Method*). La technique ASGM est une technique que nous avons développée pour

améliorer la convergence des bornes lagrangiennes. L'utilisation de cette technique s'avère très efficace, et à notre connaissance, elle n'avait jamais été testée dans la littérature pour résoudre un problème d'optimisation. Cette technique permet de guider la recherche des solutions vers l'optimum. Elle est basée sur un couplage de la méthode de recherche de « pas » d'Armijo et la méthode du sous gradient. Le présent rapport est organisé en cinq chapitres.

Le chapitre 1 est dédié principalement à la présentation de notre état de l'art sur les réseaux de distribution. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux problèmes abordés et aux approches de résolution proposées. Avec une attention particulière, nous insistons sur les modèles de conception déterministes, stochastiques, intégrant les coûts de stockage et la fiabilité. Nous terminons le chapitre par le positionnement de notre travail de recherche par rapport aux travaux rapportés.

Dans le chapitre 2, nous décrivons notre approche d'optimisation basée sur la relaxation lagrangienne pour résoudre un problème stochastique de localisation de centres de distribution dans un réseau mono fournisseur. Le problème consiste à intégrer, dans un même modèle d'optimisation, des décisions opérationnelles et des décisions stratégiques. Plus précisément, les décisions stratégiques concernent les localisations des centres de distribution et les affectations des zones de demande (clients) aux centres de distribution localisés. Les décisions opérationnelles traitent les choix des paramètres liés à la politique de gestion de stock adoptée par chaque centre de distribution. L'objectif est la minimisation d'une fonction coût non linéaire incluant les coûts de localisation, les coûts de transport et les coûts de stockage, sous la contrainte de satisfaction des clients. Des résultats numériques et analyses seront présentés afin de démontrer la validité et l'efficacité de l'approche proposée.

Nous abordons dans le chapitre 3 le problème de conception d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement (fournisseur-centre de distribution) aléatoires. Deux cas sont étudiés : le cas mono produit et le cas multi produit. Dans les deux cas, nous proposons une approche de résolution basée sur la relaxation lagrangienne. Pour illustrer la validité et l'efficacité des algorithmes développés, des expériences numériques seront présentées et analysées.

Dans le chapitre 4, nous abordons le cas multi fournisseur. Le problème concerne la conception d'un réseau de distribution stochastique où les décisions de sélection des fournisseurs, de localisation des centres de distribution et d'affectation des zones de demande sont traitées simultanément. *A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature des travaux qui intègrent dans un même modèle analytique d'optimisation ces trois décisions stratégiques.* Traditionnellement, les deux axes de recherche (sélection des fournisseurs et localisation-allocation) sont abordés séparément. Les travaux de recherche sur les problèmes de sélection/choix des fournisseurs considèrent habituellement que les localisations des sites à approvisionner sont fixées à l'avance. De même, les travaux de recherche réalisés sur les problèmes de localisation-allocation considèrent que les fournisseurs sont déjà sélectionnés. L'objectif est de résoudre un problème d'optimisation complexe qui regroupe trois niveaux de décisions : (i) choix des localisations des centres de distribution, (ii) sélection des fournisseurs pour assurer les approvisionnements (en un seul type de produit) et enfin, (iii) affectation des zones de demande aux centres localisés. Une approche de résolution basée sur la relaxation lagrangienne est proposée et des expériences numériques réalisées et analysées dans les cas des délais d'approvisionnement aléatoires et constants.

Le chapitre 5 aborde le problème de prise en compte de la fiabilité dans la conception des réseaux de distribution stochastiques. Plus précisément, nous abordons deux problèmes liés à la fiabilité : la fiabilité des centres de distribution et la fiabilité des fournisseurs. Pour le premier problème, nous nous plaçons dans le cas d'un réseau mono fournisseur où les décisions d'affectation des zones de demande sont prises sous les conditions de fiabilité/disponibilité des centres de distribution localisés. Pour le deuxième problème, le réseau est constitué de plusieurs fournisseurs, chacun avec sa propre fiabilité/disponibilité, et où nous nous sommes confrontés aux choix des fournisseurs les plus fiables. Dans les deux cas, nous formulons le problème comme un modèle de programmation stochastique à deux périodes. Dans la première période, des décisions sur les localisations des centres de distribution/des choix des fournisseurs sont prises ainsi que les affectations des zones de demande. Dans la deuxième période, nous considérons que certains sites (centres de distribution/fournisseurs), disponibles en première période, sont indisponibles en deuxième période. Ainsi, nous nous sommes confrontés à un problème de réaffectation des sites. Une méthode d'optimisation combinant la méthode Monte Carlo avec une

approximation par la moyenne et une heuristique basée sur la relaxation lagrangienne est présentée. Pour les deux problèmes, des expériences numériques sont présentées et analysées.

Nous terminons ce mémoire par quelques remarques et perspectives pour des travaux de recherche futurs sur le problème.

Chapitre 1

Revue de la littérature

Ce chapitre est dédié principalement à la présentation de notre état de l'art sur la conception des réseaux logistiques. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux problèmes abordés et aux approches de résolution proposées. Avec une attention particulière, nous insistons sur les modèles de conception déterministes, stochastiques, modèles intégrant les aspects stockage et fiabilité. Nous rappelons les principes de la technique de relaxation lagrangienne et présentons la technique d'optimisation ASGM (Armijo Subgradient Method) basée sur un couplage de la méthode du sous gradient et d'Armijo développée dans le cadre de cette thèse pour résoudre le problème dual. Nous terminons le chapitre par le positionnement de notre travail de recherche par rapport aux travaux rapportés.

1.1 Introduction

La conception d'un réseau logistique nécessite la prise entre autres de décisions stratégiques avec des impacts majeurs à long terme sur la performance globale du réseau. Les problèmes de conception des réseaux logistiques sont le plus souvent complexes par leur nature et par leurs enjeux économiques, organisationnels et sociaux engendrés. C'est pour cette raison que la conception des réseaux logistiques a reçu depuis ces dernières années une attention particulière de la part des industriels et de la communauté scientifique. Sous ses différentes formes (production-distribution, production-routing, localisation-allocation, localisation-choix des fournisseurs, etc.), plusieurs chercheurs se sont intéressés aux décisions de conception des réseaux logistiques, en proposant des analyses, des modélisations et des approches de résolution. Faire un état de l'art exhaustif sur tous les travaux de recherche existants est une tâche ardue. Ainsi, nous présentons dans ce chapitre les principaux modèles de bases et les contributions significatives apportées dans le domaine de la conception des réseaux logistiques.

Ce chapitre est dédié principalement à la présentation de la revue de la littérature sur les réseaux de logistique et au positionnement de la problématique abordée dans cette thèse. Dans la section 1.2, nous présentons les modèles de conception des réseaux logistiques abordés dans la littérature et les approches de résolution développées. Avec une attention particulière, nous rapportons sur les modèles déterministes, stochastiques, intégrant les aspects stockage et fiabilité, et traitant du problème de choix des fournisseurs. Dans la section 1.3, nous donnons quelques brèves présentations des principes de l'approche de résolution par relaxation lagrangienne, de la méthode du sous gradient et de la méthode de recherche de pas d'Armijo. Développé dans le cadre de cette thèse, la technique d'optimisation ASGM (*Armijo Subgradient Method*) basée sur un couplage de la méthode du sous gradient et d'Armijo sera présentée. La section 1.4 présente le positionnement de la problématique abordée dans la thèse par rapport à l'état de l'art. La section 1.5 conclut le chapitre.

1.2 Etat de l'art

1.2.1 Conception des chaînes logistiques : Problème de localisation

Nous présentons dans cette section certains modèles de localisation-allocation qui constituent la base des problèmes de conception des réseaux de distribution. Tout une ligne de recherche s'est développée autour de l'un des tous premiers pionniers de la théorie de la localisation [Weber, 1909]. Le livre publié par Weber constitue l'un des premiers apports théoriques sur les facteurs clés de localisation des industries/entreprises à l'échelle régionale ou nationale. [Weber, 1909] prend en compte les coûts de transport des produits, les coûts de la main d'œuvre et les économies d'agglomération (réduction des taxes par exemple) que propose un grand marché urbain. A partir de ces facteurs, il définit la localisation optimale pour chaque entreprise qui a pour objectifs de minimiser les coûts de production et satisfaire les demandes du marché. Depuis les travaux de Weber, plusieurs travaux ont été réalisés traitant des problèmes de localisation-allocation.

1.2.1.1 Modèles déterministes

Le problème de localisation-allocation résulte de deux problèmes de prise de décision à différents niveaux : niveau stratégique (décision de localisation) et niveau tactique (décision d'allocation). Dans [Martel, 2001], l'auteur présente un problème de *localisation pure*. L'auteur propose une formulation du problème: soit J sites (centres de distribution, productions, entrepôts, ...etc.) à localiser dans un ensemble S de sites potentiels (emplacements), où $J \subseteq S$. Il se place dans le cas où les flux des produits qui circulent à travers chacun des sites sont connus. Toutefois, les coûts d'implantation et d'opération d'un site dépendent de l'endroit où il se situe. Le problème consiste à chercher la meilleure localisation des J sites de façon à minimiser une fonction coût total linéaire.

A présent, nous considérons les problèmes de localisation-allocation. Le plus souvent, les décisions de localisation et les décisions d'allocation doivent être prises simultanément. Nous présentons ci-dessous les modèles déterministes qui constituent la base de ces problèmes. Nous citons ici à titre d'exemples (i) le problème P médian « *P-median problem* » (ii) le problème de

recouvrement « *set covering problem* » et le problème de couverture maximale « *maximal covering problem* » (iii) le problème du centre « *center problem* ».

Le problème P médian est l'un des tous premiers modèles déterministes du problème de localisation. Ce problème a été introduit par [Hakimi, 1964]. A titre d'exemple, nous citons le cas où nous cherchons à localiser P usines sur P sites afin de minimiser la somme des distances entre les usines et les clients (zones de demande). La modélisation mathématique de ce problème est la suivante :

$$\min_X \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mu_i d_{ij} Y_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (1.1)$$

$$\sum_{j \in J} X_j = P \quad (1.2)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.3)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.4)$$

où J représente l'ensemble des localisations possibles des usines, I l'ensemble des zones de demande (clients), d_{ij} le coût de transport total l'usine j vers le client i (qui peut être la distance entre le client i et l'usine j), μ_i la demande totale du client i , P le nombre d'usines à localiser et enfin X_j et Y_{ij} sont respectivement les décisions de localisation des usines et d'allocation des clients aux usines. Ces décisions sont définies par :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si l'usine } j \text{ est localisée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par l'usine } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes (1.1) et (1.3) indiquent que toutes les demandes du client i doivent être satisfaites par une et une seule usine. La contrainte (1.2) détermine le nombre exact d'usines à localiser et la contrainte (1.4) détermine la nature binaire des variables de décision. Plusieurs méthodes de résolutions ont été proposées pour résoudre ce problème.

[Hakimi, 1964] propose une méthode par simple énumération. [Garey et al., 1979] montre que le problème est NP-difficile. Plusieurs méthodes heuristiques ont été développées. Certaines permettent d'obtenir de bonnes solutions ou bien de calculer des solutions intermédiaires lors d'utilisation des méthodes de séparation et évaluation; les travaux de [Maranzana, 1964] et [Teitz et al., 1968] en sont des exemples. Par ailleurs [Efroyimson et al., 1966] et [Jarvinen et al., 1972] proposent une méthode par séparation et évaluation (Branch & Bound). Dans [Galvão et al., 1989] et [Beasley, 1993], les auteurs proposent également une méthode par séparation et évaluation. Ils proposent aussi une méthode basée sur la relaxation lagrangienne et le problème dual est résolu par la technique d'optimisation par le sous gradient.

Le problème de recouvrement « *set covering problem* » a été formulé pour la première fois par [Toregas et al., 1971]. Différentes versions du problème peuvent être rencontrées dans la littérature. Nous citons l'exemple suivant afin d'illustrer le problème. Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$ un ensemble de sommets d'un graphe G . Considérons $P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ un ensemble de parties de I avec $P_j \subseteq I$ pour $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$. Un sous-ensemble $J^* \subseteq J$ définit un recouvrement de l'ensemble I si et seulement si $\bigcup_{j \in J^*} P_j = I$.

Un coût positif étant associé à chaque $j \in J$, l'objectif est de déterminer un recouvrement de coût minimum. Un exemple d'application est celui de l'ouverture d'un nombre d'entrepôts pour satisfaire les demandes d'un certain nombre de zones de demande. Chaque entrepôt a son coût d'ouverture et ses coûts de connexions aux différentes zones dont il est apte à satisfaire la demande. De plus, chaque entrepôt dispose d'une capacité infinie. Le problème est modélisé comme un problème de programmation mathématique en variables binaires :

$$\min_X \sum_{j \in J} f_j X_j$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in N_i} X_j \geq 1 \quad \forall i \in I \quad (1.5)$$

où $X_j = 1$ si le sous-ensemble P_j est sélectionné pour le recouvrement, 0 sinon. f_j le coût associé à P_j , $\forall j \in J$. N_i représente l'ensemble des sous-ensembles $P_j \in P$ tel que $i \in P_j$. La contrainte (1.5) assure que chaque sommet i est couvert par au moins un sous-ensemble P_j .

Pour résoudre le problème de « *set covering problem* », [Garfinkel et al., 1972] propose un algorithme de Branch & Bound. Celui-ci reprend l'architecture générale d'une méthode de Branch & Bound mais en utilisant des règles d'évaluation et de parcours de l'arbre de recherche bien adaptées. Dans [Feo et al., 1994], les auteurs utilisent une métaheuristique GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*) pour résoudre le problème. Le principe général de GRASP consiste à utiliser plusieurs fois un algorithme glouton choisissant les variables fixées de manière partiellement aléatoire puis à améliorer les différentes solutions ainsi trouvées grâce à une recherche locale. Une approche par relaxation lagrangienne est proposée par [Beasley, 1990]. De même, [Beasley et al., 1996] propose une méthode d'optimisation par les algorithmes génétiques. Pour une analyse plus complète du problème de recouvrement, les articles [White et al., 1974] et [Schilling et al., 1993] sont de bonnes références.

Dans certains cas, les décideurs cherchent à maximiser le nombre de zones de demande qui peuvent être desservies par au maximum P entrepôts. A l'opposé du problème de recouvrement classique, ce problème est connu sous le nom du problème de recouvrement maximal « *maximal covering problem* ». En utilisant les notations l'exemple décrit dans le cas du P -median pour μ , P et la variable de décision X , ce problème peut être formulé comme suit :

$$\max_Y \sum_{i \in I} \mu_i Y_i$$

sous les contraintes :

$$Y_i \leq \sum_{j \in V_i} X_j \quad \forall i \in I \quad (1.6)$$

$$\sum_{j \in J} X_j \leq P \quad (1.7)$$

$$X_j, Y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.8)$$

Avec $Y_i = 1$ si la zone de demande i est couverte (satisfaite), 0 sinon et V_i l'ensemble des zones de localisation connectées à la zone de demande i . La contrainte (1.6) indique que si une zone de demande i est couverte alors forcément une localisation d'un entrepôt de V_i est décidée. La contrainte (1.7) limite le nombre d'entrepôts à localiser. Pour plus de détails sur les méthodes de résolution du problème « *maximal covering problem* » et les différents modèles dérivés, les articles [Church et al., 1974], [Revelle et al., 1976] et [Church et al., 1979] sont de bonnes références.

Le problème du centre est une extension du problème du *P-median*. L'objectif est de minimiser le maximum des distances entre les entrepôts et les clients par exemple. Si nous désignons par W la distance maximale entre une zone de demande et l'entrepôt la plus proche, alors le problème du centre ou encore « *center problem* » est modélisé comme suit :

$$\min W$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in J} X_j = P \quad (1.9)$$

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (1.10)$$

$$Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.11)$$

$$W \geq \sum_{j \in J} d_{ij} Y_{ij} \quad \forall i \in I \quad (1.12)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.13)$$

Les contraintes (1.9), (1.10) et (1.11) sont identiques aux contraintes du problème *P-median*. La contrainte (1.12) définit la distance maximale entre la zone de demande i et l'entrepôt le plus proche j . Plusieurs versions du problème ont été proposées par [Hakimi, 1965], [Mineaka, 1970], et [Francis et al., 1982]. Les auteurs [Kariv et al., 1979] ont montré que le problème est NP difficile.

Les problèmes de recouvrement, de *P-median* et du centre présentés ci dessus constituent une base solide des modèles déterministes rencontrés dans la théorie des problèmes de localisation. Dans la suite, nous présentons d'autres formulations classiques rencontrées dans la littérature dédiée au problème de localisation. En effet, le premier problème classique de localisation est celui de « *Fixed Charge Facility Location Problem* ». Pour ce problème, toutes les données sont connues de manière déterministe. L'objectif consiste à trouver les meilleures localisations des sites (usines/centres de distribution) et les modes de transport à utiliser pour servir les différentes zones de demande tout en minimisant les coûts fixes de localisation et de transport sous la contrainte que toutes les demandes soient satisfaites. Il existe deux versions du problème : (i) le problème où la capacité des sites est illimitée « *uncapacitated fixed charge facility location problem* (UCFLP) » et (ii) le problème où les sites ont une capacité finie (*capacitated plant*

location problem (CPLP)). La modélisation mathématique du problème (UCFLP) est la suivante [Daskin, 1995] :

(UCFLP) :

$$\min_{X,Y} \sum_{j \in J} f_j X_j + \alpha \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \mu_i d_{ij} Y_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (1.14)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.15)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.16)$$

Nous remarquons que pour obtenir le problème (UCFLP), dans la fonction objectif du problème *P*-median le coût fixe total de localisation des sites est rajouté et la contrainte liée à la limitation du nombre de sites à localiser est éliminée. Les contraintes (1.14)-(1.16) sont identiques aux contraintes du problème du *P*-median et α un coefficient lié au coût de transport total (permet de mesurer l'impact du coût de transport par rapport au coût total du réseau lors des choix des localisations et affectation). Ce problème est à la base de plusieurs études liées à la conception des chaînes logistiques. Plusieurs approches et algorithmes de résolution ont été proposés.

[Geoffrion *et al.*, 1974] montrent qu'en utilisant la méthode par séparation et évaluation, la méthode par relaxation lagrangienne est très efficace dans la recherche d'une solution optimale. Dans le même article, les auteurs tiennent compte de l'activité de transport entre les fournisseurs et les centres de distribution. Dans [Daskin, 1995] et [Galvao *et al.*, 1993], les auteurs utilisent des méthodes basées sur la relaxation lagrangienne pour résoudre le problème. Une méthode efficace basée sur la recherche du voisinage utilisée aussi dans la résolution du problème *P*-median est proposée dans [Hansen *et al.*, 1997]. Par ailleurs, [Al-Sultan *et al.*, 1999] proposent une méthode de recherche Tabou pour résoudre le problème. La méthode a été testée avec succès mais sur des problèmes de tailles faibles.

Pour les classes de problèmes (CPLP), une hypothèse restrictive impose que les usines et les centres de distribution ont des capacités limitées. La formulation du problème est identique au

problème (UCFPL) sauf qu'il faudrait ajouter la contrainte liée à la capacité des sites. Le modèle se présente comme suit :

(CPLP) :
$$\min_{X,Y} \sum_{j \in J} f_j X_j + \alpha \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \mu_i d_{ij} Y_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (1.17)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.18)$$

$$\alpha \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \leq MAX_j X_j \quad \forall j \in J \quad (1.19)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad (1.20)$$

où MAX_j désigne la capacité maximale l'usine j . Beaucoup de méthodes ont été proposées pour résoudre le problème (CPLP). Les auteurs [Balinski, 1961] et [Manne, 1964] modélisent le problème en considérant des coûts de transport fixes. Ils cherchent à minimiser le coût total de gestion tout en respectant la contrainte de satisfaction des demandes clients. Le choix des sites à localiser est tiré dans un ensemble de choix possibles. Après la formulation du problème par ces deux auteurs, [Efrosom et Ray, 1966] et [Spielberg, 1969] proposent des méthodes heuristiques et des algorithmes exacts basés sur la méthode de Branch & Bound. D'autres méthodes ont été proposées par [Sridharan, 1995].

Dans [Sridharan, 1995], un état de l'art complet des différentes méthodes utilisées et les algorithmes développés pour résoudre le (CPLP). Dans la plupart des travaux, les chercheurs supposent que chaque client est servi par un et un seul centre de production (usine) ou de distribution. [Klincewicz *et al.*, 1986], [Pirkul, 1987] et [Sridharan, 1995] donnent plus de détails sur les modèles et algorithmes utilisés.

Pour plus de détails sur les modèles et approches de résolution proposées dans l'étude des problèmes de localisation déterministes, les livres [Francis *et al.*, 1974], [Mirchandani *et al.*, 1990], [Francis *et al.*, 1992], [Daskin, 1995] et [Drezner, 1995] sont de bonnes références.

1.2.1.2 Modèles stochastiques

La plupart des travaux rapportés dans la littérature traitant des problèmes de localisation présentent des modèles déterministes connus comme NP-difficiles et par conséquent extrêmement difficiles à résoudre. Malgré la formulation assez convenable des modèles déterministes, ceux-ci ne présentent pas avec fidélité la réalité. C'est la raison pour laquelle, récemment, plusieurs auteurs ont essayé de relâcher certaines des hypothèses simplistes des modèles déterministes en introduisant des aspects liés à l'incertitude comme les demandes clients, les délais d'approvisionnement, l'indisponibilité des sites, ...etc.

[Manne, 1961] est l'un des premiers auteurs à introduire l'incertitude dans les données lors de l'étude des problèmes de localisation. L'auteur s'intéresse au problème d'expansion des capacités des sites sur un horizon infini lorsque les demandes clients suivent une certaine loi de probabilité. Avec l'hypothèse que les demandes non satisfaites sont mises en attente pour une nouvelle commande. Une analyse de sensibilité en perturbant la variance des demandes est proposée. Il montre que lorsque la variance de demande augmente, les coûts d'expansion des sites augmentent. Dans [Bean *et al.*, 1992], les auteurs relaxent certaines hypothèses de [Manne, 1961] en supposant une demande discrète ou continue et considèrent que les demandes non satisfaites sont perdues. Cependant, ils supposent qu'un site de capacité finie est ajouté si un site existant est défaillant.

[Mirchandani, 1980] et [Mirchandani *et al.*, 1979] proposent une extension du problème P -median de Hakimi en supposant une variation des connexions de transport. Les auteurs montrent que la démonstration proposée par Hakimi sur l'existence d'une solution optimale en un point d'un nœud du réseau, peut être généralisée dans le cas des réseaux stochastiques. [Berman *et al.*, 1984] et [Berman *et al.*, 1982] proposent une extension de l'analyse faite par [Mirchandani *et al.*, 1979] en introduisant la possibilité de re-localiser un ou plusieurs de P sites au cas où il y aurait des changements sur le temps de livraison. Ils définissent l'état du système de telle sorte que chaque état est différent des autres par un changement de temps de transport sur une connexion du réseau. Dans tous ces travaux, le problème P -median est modélisé par une matrice de transition de Markov. [Berman *et al.*, 1982] proposent une heuristique de substitution pour

déterminer la localisation ou la re-localisation optimale d'un site dans cet environnement multi variant.

Dans [Aikens, 1985], l'auteur présente une version stochastique du problème (CPLP) où il considère que la demande client est aléatoire. Le modèle permet de localiser de nouveaux sites dans un réseau où il existe déjà des sites localisés. Pour résoudre le problème, l'auteur propose une méthode combinant une méthode de séparation et évaluation développée par [Balachandran *et al.*, 1974] et une méthode heuristique proposées par [LeBlanc, 1977]. De plus, [Aikens, 1985] rapporte sur l'insuffisance et la faiblesse des modèles déterministes existants et propose en perspective d'étendre ces modèles aux problèmes dynamiques multi produits et d'élargir ainsi le champ des contraintes. Dans [França *et al.*, 1982], les auteurs utilisent la méthode de décomposition de Benders pour résoudre une combinaison du problème (CPLP) avec un problème de transport stochastique où la demande client est aléatoire. Dans [Louveaux, 1986], l'auteur présente des versions stochastiques du problème *P*-median et du problème (CPLP). L'auteur considère que la demande des clients, les coûts de production et de transport sont des variables aléatoires. L'objectif est de déterminer la localisation des sites, la capacité des sites et la meilleure allocation des clients aux sites dans le but de maximiser le profit du système.

[Ricciardi *et al.*, 2002] considère un problème de localisation en supposant des coûts aléatoires d'exploitation dans les centres de distribution. L'objectif est de minimiser le coût total de transport entre les centres de production et les centres de distribution et entre les centres de distribution les zones de demande (clients), plus le coût total moyen d'exploitation des centres de distribution. Ils supposent au préalable que la localisation des centres de distribution est connue et s'intéressent aux flux de matière dans le réseau. Le problème est modélisé comme un programme mathématique non linéaire avec variables entières. Pour résoudre le problème, une méthode heuristique passée sur la relaxation lagrangienne est proposée.

Dans [Snyder, 2003] et [Snyder, 2004], l'auteur présent un état de l'art très riche des modèles stochastiques existants ainsi que des méthodes de résolution développées. La plupart des modèles ont comme objectif la minimisation des coûts ou la maximisation du profit de l'ensemble du réseau logistique. Certains modèles sont développés en utilisant des approches probabilistes,

d'autres des approches dynamiques. L'auteur rapporte que les méthodes développées utilisent le plus souvent des heuristiques basées sur la relaxation lagrangienne, la recherche Tabou, les algorithmes génétiques, ...etc. D'autres méthodes utilisent la technique généralisée de programmation stochastique.

Pour certains problèmes frontières, [Eppen *et al.*, 1989] se sont intéressés aux problèmes de localisation avec choix des configurations des usines lorsque le prix des produits et les demandes clients sont aléatoires durant un horizon de planification. [Goetschalckx *et al.*, 1999] ont étudié un problème de localisation des centres de distribution avec des demandes clients saisonnières et deux échelons de production, où chaque production nécessite un choix d'équipement. [Paquet *et al.*, 2001] proposent un modèle de localisation incluant les décisions de configuration des centres de production lorsque la chaîne logistique fabrique des produits avec des nomenclatures complexes.

1.2.1.3 Modèles de localisation intégrant l'aspect stockage

Depuis ces 10 dernières années, certains chercheurs ont montré que pour la conception d'un réseau de distribution plus robuste, les décisions de localisation et les décisions de stockage entre autres doivent être intégrées dans un même modèle d'optimisation. En effet, les décisions de localisation sont fortement liées aux décisions opérationnelles. Traditionnellement, les décisions stratégiques sont prises sans toutefois tenir compte des performances opérationnelles de la chaîne/réseau logistique étudié(e). C'est la raison pour laquelle certains chercheurs (très peu) ont proposé des modèles de localisation qui tiennent compte des coûts liés au maintien des stocks de sécurité dans le réseau afin de garantir un certain niveau de service (garantir un certain pourcentage de demande client satisfaite immédiatement par le stock par exemple). Notre objectif n'est pas de faire un bilan sur la recherche relative à la gestion des stocks ([Zipkin, 2000]), mais de rapporter sur certains travaux où les décisions d'intégration des choix des localisations des sites et celles de stockage sont présentes.

[Barahona *et Jensen*, 1998] traitent le problème d'intégration des coûts de stockage dans un modèle de localisation. Plus précisément, le modèle proposé s'appuie sur le problème (UCFLP), où les coûts de stockage dans des centres de distribution sont considérés. [Nozick *et Turnquist*,

1998] proposent un modèle de localisation où l'objectif est de minimiser un coût global incluant les coûts fixes de localisation des centres de distribution, les coûts de transport et les coûts de stockage dans les centres de distribution. Les auteurs modélisent les coûts de stockage comme une fonction linéaire qui dépend du nombre de centres de distribution à localiser. Par ailleurs le problème est modélisé comme un problème de recouvrement à taux de service constant. En se basant sur la couverture maximale de toutes les zones de demande, une extension du modèle proposée dans [Nozick et Turnquist, 1998] est présentée dans [Nozick et Turnquist, 2001].

Dans [Erlebacher et Meller, 2000], les auteurs proposent un modèle intégrant les coûts de stockage et localisation de sites. Les auteurs supposent une demande client aléatoire et une distance rectiligne entre les centres de distribution et les clients. La gestion des stocks dans les centres de distribution est effectuée en utilisant '*continuous review inventory system*'. Le problème est formulé comme un programme mathématique non linéaire en variables entières. Il consiste à déterminer le nombre des centres de distribution et leurs localisations optimales, et à trouver la meilleure affectation des clients aux centres de distribution localisés. Dans le but de minimiser les coûts fixes de localisation, les coûts de transport et les coûts de stockage. Les auteurs montrent que le problème est NP difficile et proposent une approche analytique sous certaines hypothèses simplificatrices.

[Daskin *et al.*, 2001] et [Shen *et al.*, 2003] représentent les premiers travaux où les aspects localisation et stockage sont introduits d'une manière explicite dans des modèles stochastiques de types (UCFLP). Le réseau de distribution considéré est constitué d'un unique fournisseur approvisionnant un ensemble de centres de distribution en un seul type de produit. Les centres de distribution à leur tour servent un ensemble de zones de demandes (clients). Les demandes clients sont considérées comme aléatoires où seules la variance et la demande moyenne sont connues. Pour la gestion de leurs stocks, les centres de distribution utilisent la politique de quantité économique. Les auteurs proposent un modèle d'optimisation non linéaire en variables entières où la non linéarité est due principalement à la modélisation explicite des coûts de stockage et maintiens des stocks de sécurité. Afin de réduire la complexité du modèle, les auteurs considèrent que les délais d'approvisionnement entre le fournisseur et les centres de distribution sont constants, mais dépendants de la localisation du centre. Aussi, pour tous les clients, ils

considèrent que le rapport entre la demande moyenne et la variance de la demande est constante. Suite à ces hypothèses simplificatrices, les auteurs ([Daskin *et al.*, 2001]) proposent un algorithme polynomial basé sur une approche de relaxation lagrangienne pour résoudre le problème.

Dans [Snyder, 2003], [Snyder *et al.*, 2004], [Snyder, 2004], les auteurs s'appuient sur le même modèle de [Daskin *et al.*, 2001] et proposent différentes approches de résolution basées sur la technique de Branch & Price et la méthode de génération de colonnes. Ils introduisent aussi l'aspect fiabilité du réseau, en présentant un modèle de localisation où certains centres de distribution sont indisponibles. Une approche de résolution basée sur l'analyse par scénario est proposée. [Snyder, 2004] présente un état de l'art complet sur les modèles stochastiques de localisation et rapporte sur certains modèles développés où la fiabilité des sites est prise en compte.

1.2.2 Modèles fiables de conception des réseaux de distribution

De nos jours, les réseaux/chaînes logistiques et plus particulièrement les réseaux de distribution sont exposés à une grande variété de risques, qui sans doute compromettent leur bon fonctionnement. Ces risques font référence à des événements incertains ou imprédictibles affectant un ou plusieurs sites/partenaires (fournisseurs, centres de production, centres de distribution, etc.) du réseau ou ses processus, et influencent par conséquent la réalisation des objectifs fixés.

Ces risques incluent par exemple, les catastrophes naturelles, les grèves du personnel, les actes terroristes ou sabotages, etc. Une fois la structure du réseau fixée, suite à l'apparition d'un ou plusieurs événements incertains un ou plusieurs sites (centres de production, entrepôts, centres de distribution, etc.) peuvent être indisponibles (tombent en panne) pour une durée souvent aléatoire. L'indisponibilité d'un centre de distribution, d'un fournisseur, etc., entraîne entre autres des pertes des demandes clients et a un impact important sur la rentabilité et la profitabilité du réseau. Une chose certaine : l'indisponibilité des sites obligera les décideurs à redéfinir une nouvelle conception du réseau logistique en utilisant de stratégies robustes permettant de remédier à ce problème de perte (clients, profits, crédibilité, etc.).

La littérature dédiée aux problèmes de prise en compte de la fiabilité des sites lors de la conception et pilotage des réseaux logistiques est très maigre. Néanmoins, certains auteurs se sont intéressés au problème. Les articles de [Sheffi, 2001], [Martha et Vratimos, 2002], [Simchi-Levi *et al.*, 2002], [Lynn, 2002] et [Navas, 2003] présentent les différentes vulnérabilités des réseaux/chaînes logistiques et suggèrent des approches qualitatives pour la résolution des problèmes résultants. Par contre, aucun de ces articles ne propose une méthode quantitative pour résoudre le problème de fiabilité du réseau logistique étudié. Nous avons constaté que la plupart des chercheurs soulignent que la programmation stochastique pouvait apporter des solutions face à des problèmes de fiabilité. Pour plus de détails sur la méthode, les articles de [Zimmermann, 1991], [Wallace et Kall, 1994], [Prékopa, 1995], [Bertsekas et Tsitsiklis, 1996] et [Louveaux et Birge, 1997] sont de bonne référence. De plus, le site Web <http://stoprog.org/> est un lien d'information très important pour la communauté des chercheurs en programmation stochastique. La méthode de programmation stochastique est un outil efficace pour la résolution de certains problèmes de localisation sous incertitude.

Dans son article, [Ball, 1979] montre que l'étude de la fiabilité pour l'optimisation des systèmes logistiques est un problème très compliqué. [Sheffi, 2001] suggère l'utilisation des stocks stratégiques (stocks d'urgence) pour pallier aux événements incertains comme par exemple une attaque terroriste. [Marlin, 2002] propose un modèle pour quantifier la fiabilité des réseaux logistiques. Son modèle s'appuie sur la théorie de la fiabilité des systèmes en général. Dans [Marcus *et al.*, 2003], les auteurs proposent un modèle intégrant robustesse et fiabilité pour la conception stratégique des réseaux/chaînes logistiques. Le problème consiste à choisir les meilleurs fournisseurs pour que le réseau soit fiable.

[Snyder et Daskin, 2003] et [Snyder et Daskin, 2005] étudient l'aspect fiabilité des centres de distribution dans réseau logistique mon fournisseur où l'objectif est la minimisation des coûts de transport après indisponibilité de certains centres de distribution. Les auteurs proposent une stratégie d'allocation des clients aux centres de distribution disponibles basée sur une classification d'ordre de priorité des centres de distribution. Le modèle proposé est une reformulation du modèle P -median et (UCFLP) où une approche par relaxation lagrangienne est proposée pour résoudre le problème.

Le problème de prise en compte de la fiabilité lors de la conception d'un(e) réseau/chaîne logistique est difficile et complexe à résoudre. Cela est dû, entre autres, aux aspects combinatoires et stochastiques des variables de décision. Cette situation a incité les chercheurs à développer des méthodes approchées pour résoudre ce problème. Toutefois, la majorité des approches développées ont été validées sur des problèmes de tailles très faibles (nombre de scénarios très faible par exemple).

1.2.3 Conception des chaînes logistiques : Modèles de choix des fournisseurs

La décision de choix des fournisseurs est une décision très importante lors de la conception des réseaux de distribution. Généralement, le problème se pose de la façon suivante : étant donné un donneur d'ordres (entreprise, usine de production, centre de distribution, etc.) et n fournisseurs potentiels ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$) dans la chaîne logistique (voir la figure 1.1). Suivant sa politique de stockage qui peut être (R, Q) , (s, S) , (s, Q) , EOQ (politique de la quantité économique de commande), etc., où R est le point de commande, Q la quantité fixe à commander par période de commande, S le niveau de recomplètement du stock, le donneur d'ordres envoie des ordres d'approvisionnement. Dépendant du fournisseur, entre autres, le délai d'approvisionnement peut être aléatoire ou déterministe.

L'idée principale est de trouver les fournisseurs et les quantités à approvisionner de chaque fournisseur dans le but de minimiser la somme des coûts (coûts de commande, coûts de perte, coûts de transport et autres coûts) sous la contrainte de la satisfaction des clients (pourcentage des demandes clients satisfaites sans retard). Cette sélection des fournisseurs dépendra de plusieurs critères qui peuvent être « *qualitatifs ou quantitatifs* ». Pour la plupart des cas, les paramètres de première ligne sont la demande client, le délai de livraison et le nombre de fournisseurs potentiels.

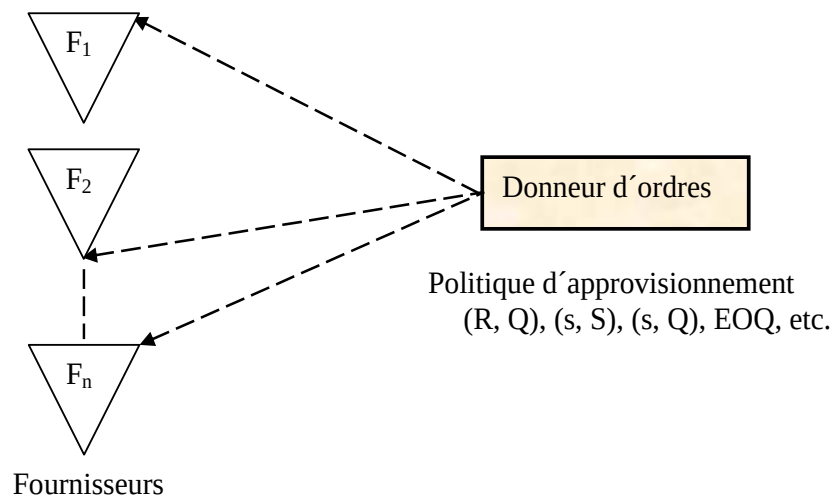


Figure 1.1 Relation donneur d'ordres/Fournisseur

Beaucoup de travaux ont été effectués depuis les années 80. Ces travaux peuvent être classés à deux niveaux : « niveau microscopique et niveau macroscopique ». Au niveau microscopique, les études se sont focalisées sur les perspectives de modélisation et d'optimisation des coûts totaux de possession, de perte et de commande. A ce niveau, une première étude a été faite dans le cas de 2 fournisseurs par [Sculli et Wu, 1981] où la demande client est déterministe et les délais d'approvisionnement suivant une loi de distribution uniforme. Dans [Hayya et al., 1987]), les auteurs considèrent le cas 2 fournisseurs avec une demande client suivant une loi normale et délais d'approvisionnement suivant la loi Gamma. Dans le cas de plusieurs fournisseurs, [Kelle et Silver, 1990] considèrent le cas où la demande est aléatoire suivant une loi de poisson/une loi normale et les délais d'approvisionnement aléatoires suivant une variable loi normale. De même, [Sculli et Shum, 1990]) s'intéressent au cas où la demande constante et où les délais d'approvisionnement sont aléatoires et suivent une loi de weibull.

Pour le cas d'une demande constante et plusieurs fournisseurs, [Pan et al., 1991] s'intéressent au cas où les délais d'approvisionnement sont aléatoires et suivent la loi uniforme, exponentielle, et normale. A l'échelle macroscopique, l'étude du problème de choix des fournisseurs a concerné l'avantage des coûts à différents niveaux, l'analyse du bénéfice et du rendement apporté, en considérant différentes politiques d'approvisionnement. Ce niveau d'étude a été examiné dans [Ramashesh, 1991] et [Ramashesh et al., 1991] (resp. [Hayya et al., 1987]) dans le cas de deux

fournisseurs, une demande constante et un délai d'approvisionnement aléatoire de lois uniforme et normale respectivement (resp. lois uniforme et exponentielle).

Les décisions de choix des fournisseurs sont compliquées du fait que divers critères doivent être considérés dans le processus décisionnel. L'analyse de tels critères et leur mesure de performance ont été le centre de recherche des scientifiques et praticiens depuis plusieurs années. Dans la littérature, certaines méthodes sont appliquées pour résoudre le problème de choix des fournisseurs multicritère. La méthode AHP (Analytic Hierarchy Process) est l'une des méthodes les plus utilisées ([Narasimhan, 1983], [Barbarosoglu et Yazgac, 1997] et [Ghodsypour et O'Brien, 1998]). Dans ces articles, les auteurs définissent la méthode AHP comme une méthode de décomposition d'un problème de choix de fournisseurs complexe en un système hiérarchique. La méthode AHP détermine les poids des critères et procède par comparaison paire par paire de chaque niveau hiérarchique. Par ailleurs, elle est appliquée dans une portée limitée et se concentre seulement sur chaque fournisseur sans toutefois prendre en compte d'autres participants dans la chaîne logistique.

Les méthodes de programmation mathématique sont aussi utilisées pour résoudre le problème de choix de fournisseur. [Gaballa, 1974] a modélisé le problème du postier Australien comme cas pratique d'un problème de choix des fournisseurs en utilisant la programmation mathématique en variables mixtes. L'objectif est le choix des meilleurs fournisseurs dans le but de minimiser le prix escompté des articles sous la contrainte des capacités de production des fournisseurs et la satisfaction de la demande client. [Jayaraman *et al.*, 1999] propose aussi un modèle mixte de programmation mathématique en variables entières en déterminant la quantité optimale de commande allouée à chaque fournisseur choisi.

Les problèmes de choix des fournisseurs posent d'énormes difficultés aux décideurs du fait que beaucoup de critères souvent en conflit (prix et délai par exemple) sont considérés dans le processus de décision. Chercheurs et industriels se sont intéressés à l'analyse des critères et des mesures de performance des fournisseurs pour mieux guider leur choix. Une étude assez intéressante sur laquelle s'appuie la plupart des travaux a été proposée par [Dickson, 1966]. L'étude faite par Dickson fut basée sur un questionnaire envoyé à 273 clients et managers choisis

parmi la liste des membres adhérents à la « *National Association of Purchasing Managers* ». 23 critères de performance ont été choisis. Les critères les plus importants étaient sur « la qualité du produit », le « délai de livraison », les « performances passées du fournisseur » et « la garantie » donnée par le fournisseur.

[Weber *et al.*, 1991] fait une classification de tous les travaux publiés depuis 1966 en fonction des critères de choix. Les résultats de son analyse sur 74 articles montrent que « le prix, le délai de livraison, la qualité, la capacité de production et le lieu de localisation du fournisseur » sont les critères le plus souvent retenus dans la littérature et en pratique. De façon générale, les 23 critères présentés par Dickson couvrent toujours la majorité des critères présentés dans la littérature et jusqu'à nos jours. Par ailleurs, l'évolution de l'environnement industriel a modifié les degrés d'importance relative de ces critères. Certains auteurs, présentent des critères quantitatifs tels que le relevé de compte financier (voir [Ellram, 1990]), la stratégie organisationnelle, et la puissance technologique du fournisseur. Dans [Ding *et al.*, 2003], les auteurs classent les méthodes existantes en trois principales catégories : (i) les méthodes par élimination et comparaison ([Crow *et al.*, 1980]), (ii) les méthodes d'optimisation mathématique et (iii) les méthodes probabilistes.

Nous remarquons qu'aucun des travaux rapportés à notre connaissance n'a abordé le sujet de l'intégration du problème de choix de fournisseurs et le problème de localisation dans un modèle d'optimisation pour la conception d'un réseau de distribution. Notre challenge dans cette thèse est d'intégrer les deux décisions stratégiques dans un seul modèle de conception. Dans ce travail de recherche, des critères quantitatifs de choix sont utilisés et où une méthode d'optimisation des coûts globaux est proposée.

1.2.4 Quelques modèles de conception des chaînes logistiques

Dans [Geoffrion et Graves, 1974], les auteurs proposent l'un des premiers modèles de conception de réseaux logistiques multi produits. Le but principal du modèle est d'optimiser les flux annuels des produits finis. Le réseau modélisé est constitué de trois niveaux: les sites de production, les centres de distribution et les clients. Les sites de production sont supposés à capacités finies et la demande prévisionnelle d'un client est satisfaite à partir d'un seul centre de distribution. Le problème d'optimisation consiste à identifier les centres de distribution à localiser, leurs tailles et

quels clients chaque centre de distribution doit approvisionner en produits finis. Ce problème est modélisé sous la forme d'un programme linéaire mixte (MIP). La fonction objectif à minimiser regroupe les différents coûts fixes et variables des sites de production, des centres de distribution et des activités de transport. Les contraintes concernent le respect des capacités disponibles dans chaque site de production, la satisfaction des demandes clients, un client étant livré par exactement un centre de distribution, les contraintes de flux. Une extension de ce modèle en considérant une deuxième fonction objectif pour maximiser le profit est proposée par [Geoffrion *et al.*, 1978]. Le même modèle est décrit dans [Geoffrion *et al.*, 1982] mais cette fois-ci non linéaire en raison de la présence des contraintes non linéaires de consommation de matières dans les sites de production. Enfin, plusieurs applications industrielles de ces modèles avec des résultats expérimentaux sont discutées dans [Geoffrion et Powers, 1993].

[Van Roy, 1983, 1986] proposent une extension du premier modèle de [Geoffrion et Graves, 1974] pour le problème de localisation de sites de production à capacités finies. Pour la résolution du problème, une méthode de décomposition hybride regroupant la décomposition primale de Benders et la décomposition duale de type relaxation Lagrangienne est proposée. Pour illustrer la méthode de résolution, l'auteur présente un cas d'étude d'une entreprise de liquéfaction de gaz qui commercialise deux produits, le propane et le butane. Le réseau de l'entreprise est conçu sur un ensemble de deux raffineries (fournisseurs), dix usines de remplissage des bouteilles (sites de production), quarante dépôts (centres de distribution) et deux cents clients.

Sur la base du premier modèle de [Geoffrion et Graves, 1974], [Cohen et Lee, 1985] proposent un modèle de conception des réseaux production/distribution multi produits appelé PILOT. Le réseau considéré compte quatre niveaux : les fournisseurs, les sites de production, les centres de distribution et enfin les clients. PILOT est un modèle de programmation mathématique déterministe et dynamique où l'objectif est de minimiser une fonction coût non linéaire. Les variables de décisions utilisées décrivent les décisions d'ouverture ou de fermeture des sites de production et de distribution, les flux intermédiaires des produits et la disponibilité des matières premières chez les fournisseurs.

Des problèmes intégrant les aspects localisation des sites de production et de distribution, ainsi que les facteurs internationaux sont proposés dans la littérature. Le caractère international du problème de localisation de sites a été introduit par [Hodder et Dincer, 1986]. Le modèle proposé tient compte des fluctuations des taux de change, des variations des prix des marchés, des coûts fixes ainsi que des coûts stochastiques. Il est considéré comme l'un des premiers modèles développés qui tient compte des aspects financiers dans la localisation des sites. Une formulation en un programme non linéaire en variables mixtes est proposée. L'objectif consiste à maximiser la différence entre le profit après le paiement des taxes et la variance du profit pondéré avec un facteur d'aversion aux risques. Les contraintes regroupent les limitations des capacités de production, les bornes supérieures de la demande, les contraintes financières et les bornes sur les variables de décision. Le modèle mathématique proposé est complexe à résoudre et des approximations sont suggérées.

[Brown *et al.*, 1987] présentent un modèle de programmation mathématique mixte multi produits qui permet la prise de décisions d'ouverture/de fermeture des sites et d'affectation des produits et d'équipements aux différents sites de production ouverts. La fonction objectif est une combinaison de coûts variables et fixes de production et de transport sous les contraintes de satisfaction des demandes clients, de conservation des flux de matières et des capacités de production des sites et des équipements. Pour résoudre le problème, les auteurs proposent une méthode de décomposition, en ajoutant des contraintes supplémentaires au modèle initial pour avoir une convergence vers une meilleure solution avec moins d'itérations. Ces contraintes peuvent être violées. En effet, à chaque fois qu'une contrainte est violée, une pénalité, calculée sur la base d'un coût, est rajoutée à la valeur finale de la fonction objectif.

[Cohen *et al.*, 1989] proposent un modèle de programmation linéaire en variables mixtes pour la conception d'un réseau de distribution et production à l'échelle internationale. C'est un modèle dynamique où la demande est déterministe sur une période donnée. L'objectif est de maximiser le profit total de gestion après le paiement des taxes. Le modèle prend en compte les coûts d'ouverture des sites, les coûts de production, de transport et de stockage.

Dans [Goetschalckx *et al.*, 1994], les auteurs développent un modèle déterministe et statique pour traiter le problème de conception des réseaux logistiques. C'est un modèle multi produits, multi échelons, avec plusieurs connexions de transport. Chaque site de production est identifié par une localisation et une capacité maximale de production. Chaque centre de distribution est caractérisé par sa localisation et sa capacité maximale de stockage. Les liens de transport entre les différents sites sont assurés par un ou plusieurs modes de transport. Chaque lien permet le transport d'une capacité finie de produits. Un modèle de programmation en variables entières complexe est proposé. Pour le résoudre, un outil logiciel, offrant à l'utilisateur une interface graphique, est proposé. Cet outil est composé d'une bibliothèque d'heuristiques, d'un module d'optimisation et d'un ensemble d'algorithmes d'analyse de sensibilité et de simulation.

Un modèle multi périodes/multi produits pour la localisation des sites dans une chaîne logistique est proposé [Arntzen *et al.*, 1995]. C'est un modèle de programmation linéaire en variables mixtes qui intègre les volumes d'activités des différents sites, les coûts de production, de stockage et de transport. Ce modèle tient compte des données liées à la gamme de produits et des taxes douanières.

Les travaux de [Geoffrion et Powers, 1995] retracent l'évolution des modèles de conception des systèmes de distribution stratégique au cours des vingt dernières années et cela depuis le premier modèle de [Geoffrion et Graves, 1974]. Les auteurs discutent les différentes définitions de la chaîne logistique, de l'impact d'intégration des TIC (Technologies de l'Information et de la Communication) dans la gestion d'une chaîne logistique et les différentes techniques de modélisation et algorithmes de résolution. Les modèles associés aux problèmes analysés sont complexes et de grandes tailles. Ils appliquent des méthodes de type décomposition de Benders pour la recherche d'une solution optimale. Ce sont des méthodes extrêmement difficiles et leur implémentation dans des solveurs commerciaux est très coûteuse.

L'intégration des problèmes de planification des capacités dans les problèmes de localisation est introduite par [Verter et Dincer, 1995]. Les auteurs observent que très peu de modèles de conception des réseaux de production et distribution considèrent les aspects internationaux. Ils

montrent par ailleurs l'importance et l'impact des aspects stochastiques tels que la variation des prix du marché et les taux de changes.

Une étude pour Renault qui consiste à déterminer les localisations des unités de production flexibles de manière à satisfaire les demandes de plusieurs types de véhicules (une dizaine) dans différentes zones géographiques (42 localisations) est présentée dans [Bel et al., 1996a]. Les auteurs proposent une modélisation du problème comme un programme linéaire en variables mixtes (MIP) contenant plus de 17 000 variables dont 462 entières. La résolution de ce MIP permet d'obtenir les configurations des réseaux de production/distribution minimisant la somme des coûts de production et de distribution pour une répartition donnée des demandes.

Dans [Bel et al., 1996b], les auteurs proposent un modèle de programmation linéaire en variables mixtes multi produits pour la localisation des lignes d'assemblages. C'est un modèle multicritère où les objectifs sont de minimiser les coûts de production et de transport, et de maximiser la robustesse du réseau. Les auteurs définissent un indicateur de robustesse et pour chaque critère, ils proposent une méthode de résolution basée sur les algorithmes génétiques. Selon les résultats obtenus, ils concluent que les algorithmes génétiques représentent un outil efficace pour la résolution de certains problèmes d'optimisation combinatoire.

Dans [Ding, 2004] et [Ding et al., 2006], une approche d'optimisation basée sur la simulation SIM-OPT est développée pour la conception et le pilotage des chaînes logistique. L'approche est composée d'un module d'optimisation utilisant les algorithmes génétiques multicritère (MOGA) et d'un module de simulation permettant l'évaluation de la chaîne étudiée au cours de l'optimisation. Deux applications industrielles tirées respectivement des industries automobile et textile sont présentées et l'approche validée.

1.3 Relaxation Lagrangienne

Dans cette section, nous présentons un bref rappel sur la théorie de la relaxation lagrangienne. Nous exposons les principes, la méthode du sous gradient et l'algorithme d'Armijo que nous utilisons pour mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange. Nous présentons par la suite l'intérêt

du couplage de l'algorithme du sous gradient et de l'algorithme d'Armijo que nous proposons pour améliorer la convergence de la fonction objectif lors de la résolution du problème dual résultant de la relaxation.

1.3.1 Principes

Pour certains problèmes d'optimisation combinatoire connus comme NP-difficile où les fonctions à minimiser sont à variables discrètes, l'enjeu d'obtention rapide de bonnes bornes inférieures est considérable pour garantir la qualité des solutions réalisables. Dans ce cadre, la relaxation lagrangienne est un outil puissant et abondamment employé par les chercheurs. Cette notion peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes d'optimisation, qu'ils soient quadratiques, linéaires ou simplement convexes, etc. Elle se base sur la maximisation d'une fonction duale du problème, concave, en général non différentiable, mais dotée d'un sous gradient en chaque point du domaine où la fonction est définie. A chaque itération de l'algorithme de résolution du problème dual, un appel du problème relâché doit être fait (en général plus facile à résoudre que le problème initial et traitable en utilisant des algorithmes simples) fournissant à la fois un sous gradient du dual et une borne inférieure pour le problème combinatoire traité. Dans cette section, nous abordons la relaxation lagrangienne uniquement dans le cadre de la minimisation d'une fonction (pas nécessairement linéaire).

Considérons le problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$ suivant

$$(P) \quad J^* = \min_{x \in X} f(x) \quad (1.21)$$

$$\text{sous les contraintes} \quad Ax \leq b \quad (1.22)$$

$$Cx \leq d \quad (1.23)$$

où X est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie dans X et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, Ax et Cx les fonctions définies de $X \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec $p \leq n$. Le problème (P) est appelé le problème primal. Supposons que la contrainte $Ax \leq b$ complique la résolution du problème (P) dans le sens où sans cette contrainte, on dispose d'un bon algorithme pour résoudre le problème (P). Nous supposons que la contrainte d'inégalité $Cx \leq d$ ne complique pas la résolution du problème (P). L'idée consiste à relaxer la contrainte $Ax \leq b$ et à l'introduire dans la fonction objectif sous forme d'une

pénalité par une combinaison linéaire de coefficients appelés variables duales (multiplicateurs de Lagrange) associées à la relaxation lagrangienne. Cette opération est aussi dite dualisation des contraintes $Ax \leq b$. Nous en déduisons la définition suivante :

Définition 1.1 : Soit λ un vecteur de poids non négatif appelé multiplicateur de Lagrange. Le problème relaxé (LR_λ) du problème primal (P) est défini par :

$$(LR_\lambda) \quad L(\lambda) = \min_{x \in X} \{ f(x) + \lambda(Ax - b) / Cx \leq d \} \quad (1.24)$$

Par $FS(P)$, nous désignons la suite des solutions admissibles au problème primal (P). Nous remarquons que (LR_λ) est bien une relaxation du problème (P) puisque :

- (i) $FS(LR_\lambda) \subseteq FS(P)$
- (ii) $\forall x$ solution admissible du problème (P) et $\forall \lambda \geq 0$, $f(x) + \lambda(Ax - b) \leq f(x)$ (puisque nous sommes en présence d'un problème de minimisation). Donc, il s'en suit qu'une solution optimale au problème relaxé est inférieure à J^* ($\forall \lambda \geq 0$, $L(\lambda) \leq J^*$). Ainsi, $L(\lambda)$ est une borne inférieure à la valeur optimale du problème (P).

Remarque 1.1: Supposons que pour un multiplicateur de Lagrange λ , x^λ est la solution optimale au problème relaxé (LR_λ) appelé « solution lagrangienne ». Si la solution x^λ satisfait la condition $\lambda(Ax^\lambda - b) \leq 0$, alors x^λ est solution optimale au problème primal (P). Par contre, si x^λ n'est pas une solution admissible au problème (P), alors des méthodes heuristiques sont souvent utilisées pour modifier la solution inadmissible à (P) pour la rendre admissible. Généralement, les solutions obtenues des sous problèmes lagrangiens sont des solutions approximées. Ainsi, une méthode heuristique de relaxation pour générer de bonnes solutions est adoptée.

Deux questions se posent dans le principe de relaxation lagrangienne : (i) Comment choisir le vecteur des multiplicateurs pour obtenir la meilleure borne inférieure? (ii) Quelles contraintes doit-on relâcher? Répondre à la première question revient à résoudre un problème appelé *Problème dual lagrangien* donné par la définition suivante.

Définition 1.2 : Le problème « Dual Lagrangien » consiste à chercher la meilleure borne inférieure L^* telle que :

$$(DL) \quad L^* = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in X} \{ f(x) + \lambda(Ax - b) / Cx \leq d \} \quad (1.25)$$

La fonction objectif du problème dual lagrangien (DL) est généralement concave et partout non différentiable. Les techniques de programmation non linéaire pour la résolution des problèmes d'optimisation différentiable sont alors inopérantes et des méthodes adaptées doivent par conséquent être mises au point pour traiter les problèmes de type (1.25). Donc, malgré la simplicité de l'écriture du problème (DL), résoudre ce problème est souvent une tâche très difficile. Nous exposons (sans toutefois entrer dans les détails) quelques techniques permettant de rechercher le meilleur vecteur des multiplicateurs de Lagrange solution de (1.25) et déterminer la valeur optimale L^* . Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes permettant la résolution du problème (1.25). Les méthodes diffèrent par la structure de la fonction objectif, et pour la plupart des cas, beaucoup de chercheurs ont trouvé certaines méthodes plus efficaces que d'autres. La méthode des faisceaux développée par [\[Lemaréchal et al., 1997\]](#) et la méthode du sous gradient sont les plus utilisées.

Pour ces méthodes, l'idée principale est de mettre à jour itérativement le vecteur des multiplicateurs λ en fonction, notamment, de la valeur de $L(\lambda)$. A chaque itération de l'algorithme dual, l'idée des deux méthodes évoquées ci haut est de résoudre jusqu'à l'optimalité les problèmes (LR_λ) . Ceci présuppose que les problèmes relaxés (LR_λ) peuvent être résolus très rapidement. Le choix des contraintes relaxées est donc guidé par cette première observation. De plus, en pratique, il est important de préserver une taille raisonnable au vecteur des multiplicateurs. Par conséquent, nous sommes souvent contraints de limiter le nombre des contraintes à relaxer. Ce choix doit tenir compte de la qualité des bornes inférieures que nous allons obtenir. Il est connu que, quelles que soient les contraintes relaxées, la valeur maximale de $L(\lambda)$ est supérieure ou égale à la borne inférieure que nous aurions obtenue à l'aide de la relaxation de (P). Ainsi, trouver une réponse à la deuxième question n'est pas évidente.

Dans ce qui suit, nous donnons un bref rappel de la méthode du sous gradient adaptée pour la résolution du problème dual rencontré dans cette thèse.

1.3.2 Méthode du sous gradient

La méthode du sous gradient est proposée pour maximiser des fonctions concaves (ou minimiser des fonctions convexes) non nécessairement différentiables pour lesquelles il est possible de déterminer un sous gradient en un point donné de l'espace des solutions réalisables. C'est le cas typique des fonctions duales que nous rencontrons dans les chapitres suivants. C'est une méthode itérative où le multiplicateur de Lagrange est mis à jour à chaque itération k de l'algorithme principal de calcul de la manière suivante:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta_k \nabla L(\lambda^k) \quad (1.26)$$

où θ_k est le pas et $\nabla L(\lambda^k)$ est la direction du sous gradient au point λ^k choisie a priori afin d'améliorer la solution à l'étape $(k-1)$. Dans [Polyak, 1967] et [Polyak, 1969], l'auteur montre que la suite $L(\lambda^k)$ converge vers un optimum $L(\lambda^*)$ sous les seules conditions : $\theta_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ et $\sum_k \theta_k \rightarrow \infty$. Mais, rien ne peut être dit sur la vitesse de convergence. Par ailleurs, la suite $L(\lambda^k)$ obtenue n'est généralement pas monotone croissante. Par contre, si à chaque itération k , nous choisissons des valeurs pour θ_k définies par :

$$\theta_k = \nu_k \frac{L(\lambda^*) - L(\lambda^k)}{\|\nabla L(\lambda^k)\|^2} \quad (1.27)$$

où le coefficient ν_k appelé « coefficient de relaxation » vérifie $\varepsilon < \nu_k \leq 2 \quad \forall k$ ($\varepsilon > 0$ fixé), alors la convergence est géométrique. Remarquons que ce résultat a principalement un intérêt théorique, puisque nous ne connaissons $L(\lambda^*)$. Si dans la formule (1.27), $L(\lambda^*)$ est remplacée par une estimation par défaut $\underline{L} \leq L(\lambda^*)$, alors [Polyak, 1969] montre que soit la séquence $L(\lambda^k)$ converge vers $\underline{L}$, soit un vecteur λ^k , vérifiant $\underline{L} \leq L(\lambda^k) \leq L(\lambda^*)$ est obtenu en un nombre fini d'itérations. Ceci se produit en particulier quand $\nu_k = 2 \quad \forall k$. Pour plus de détails sur la théorie de convergence de la méthode du sous gradient, les articles [Wolfe et al., 1974] et [Fisher, 1981] sont des bonnes références.

1.3.3 Méthode de recherche de « pas » d'Armijo

Dans certains cas, lorsque le gradient de la fonction est trop coûteux à calculer à chaque itération k , la règle d'Armijo [Armijo, 1966] ou la règle de Wolfe [Wolfe, 1971] sont utilisées pour déterminer les pas θ_k qu'il faudra utiliser pour assurer une bonne convergence. Nous décrivons dans cette section l'algorithme de recherche de « pas d'Armijo ». Le pas θ_k est déterminé le long de la direction du gradient. L'algorithme de recherche du « pas » a double objectifs :

(i) il permet de faire croître $L(\lambda^k)$ suffisamment. Cela se traduit par la réalisation d'une inégalité de la forme

$$L(\lambda^k + \theta_k \nabla L(\lambda^k)) \geq L(\lambda^k) + N_k^+ \quad (1.28)$$

où N_k^+ est un terme positif qui joue un rôle très important dans la convergence de l'algorithme d'Armijo. S'il existe une constante C telle que $L(\lambda^k) \leq C$ alors $N_k^+ \rightarrow 0$. Ceci n'est pas intéressant puisque notre objectif n'est pas d'imposer $L(\lambda^k + \theta_k \nabla L(\lambda^k)) \geq L(\lambda^k)$. De ce fait, N_k^+ doit prendre une forme bien particulière si nous cherchons à en tirer de l'information.

(ii) le second objectif est d'empêcher le pas θ_k d'être «*trop petit*», trop proche de zéro. Une condition naturelle est de demander que $L(\lambda)$ croît pour une valeur $\tau \in]0, 1[$. Cela conduit à l'inégalité suivante parfois appelée « condition d'Armijo » ou « condition de croissance linéaire » :

$$L(\lambda^k + \theta_k \nabla L(\lambda^k)) \geq L(\lambda^k) + \tau \theta_k \|\nabla L(\lambda^k)\| \quad (1.29)$$

D'autres parts, nous avons mentionné qu'il est dangereux d'accepter des pas trop petits, cela conduit assez souvent à des fausses convergences. Il faut donc trouver un mécanisme supplémentaire qui empêche le pas d'être trop petit. Par conséquent, la technique de rebroussement ([Armijo, 1966]) ou celle de [Goldstein, 1965] est utilisée. La technique de rebroussement ou « backtracking » consiste à prendre $\theta_k = \gamma^{m_k}$, où la constante $\gamma \in]0, 1[$ et m_k le plus petit entier naturel ($m_k \in \mathbb{N}$) tel que :

$$L(\lambda^k + \theta_k \nabla L(\lambda^k)) \geq L(\lambda^k) + \tau \gamma^{m_k} \|\nabla L(\lambda^k)\| \quad (1.30)$$

En conclusion, c'est le fait de prendre pour θ_k le plus grand réel dans $\{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \dots\}$ vérifiant (1.30) qui garantit que ce « pas » ne sera pas trop petit. $\theta_k = 1$ est essayé initialement; si ce « pas » n'est pas acceptable, nous rebroussons chemin en essayant des pas plus petits $\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \dots$ etc. L'algorithme suivant dit « Algorithme de recherche de pas d'Armijo » permet la détermination de θ_k afin d'assurer une bonne convergence.

Algorithme de recherche de « pas » d'Armijo

Algorithme 1.1 : Détermination du pas

Etape 1. Choisir un pas $\theta_k^i \geq 0, \gamma \in]0, 1/2[, \tau \in]0, 1[, i = 1$.

Etape 2. Tant que $L(\lambda^k + \theta_k \nabla L(\lambda^k)) \geq L(\lambda^k) + \tau \theta_k \|\nabla L(\lambda^k)\|$ n'est pas vérifié avec $\theta_k = \theta_k^i$

2.1 Choisir $\theta_k^{(i+1)} \in [\gamma \theta_k^i, (1 - \gamma) \theta_k^i]$

2.2 $i \rightarrow i + 1$

Etape 3. $\theta_k = \theta_k^i$

Une autre méthode efficace est celle des faisceaux. Elle s'appuie sur une propriété fondamentale de la relaxation lagrangienne qui est la concavité de la fonction $L(\lambda)$. La théorie sur cette méthode est trop complexe. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de [\[Lemaréchal et al., 1997\]](#). La singularité de cette méthode par rapport à celle du sous gradient est de garder un historique des solutions lagrangiennes. Le nouveau vecteur lagrangien λ^{k+1} est en effet calculé à l'aide non seulement du point λ^k et du gradient $\nabla L(\lambda^k)$, mais aussi de tous les vecteurs λ^u et $\nabla L(\lambda^u)$ définis précédemment ($\forall u \leq k$). La puissance de la méthode des faisceaux réside dans sa convergence rapide, mais son implémentation s'avère très compliquée et c'est l'une des raisons pour laquelle nous ne l'avons pas couplée avec la méthode du sous gradient pour résoudre nos problèmes d'optimisation.

1.3.4 Méthode d'Armijo Subgradient (ASGM)

Dans cette thèse, nous développons une technique d'optimisation que nous avons appelé ASGM (Armijo Subgradient Method) pour améliorer la convergence des bornes lagrangiennes. *L'utilisation de la méthode ASGM s'avère très efficace, et n'avait jamais, à ce qui semble, été testée dans la littérature pour résoudre un problème d'optimisation.*

Cette méthode est basée sur les observations faites ci haut. Lors de la résolution du problème dual, nous procédons en deux phases comme suit : (i) tout d'abord, nous utilisons la méthode de recherche de « pas d'Armijo » afin d'obtenir le meilleur « pas » pour le calcul du vecteur des multiplicateurs de Lagrange (cf. **Algorithme 1.1**), (ii) le vecteur obtenu est ensuite amélioré par la méthode du sous gradient (procédure de la sous section 1.2.2.). La méthode du sous gradient est très sensible à la qualité du vecteur des multiplicateurs de Lagrange. Le travail effectué par la phase du sous gradient est donc très intéressant, non seulement pour la qualité du gradient, mais assure assez rapidement une bonne convergence des coûts. Cependant, il est important de ne pas s'attarder dans la première phase, car lorsque le pas θ_k est très petit, la portée des améliorations fournies par l'algorithme d'Armijo est très limitée, alors que la phase du sous gradient qui la suit est certainement plus efficace pour augmenter la qualité de la borne inférieure.

1.3.5 Commentaires

Nous venons de décrire les phases principales de l'approche lagrangienne que nous allons développer dans cette thèse. Le but de cette approche est double : obtenir une borne inférieure (la meilleure possible), et construire une solution réalisable de (LR_λ) de très bonne qualité. Nous avons exposé les différentes méthodes permettant d'atteindre le premier objectif. L'utilisation de la méthode ASGM est l'une des originalités de la thèse qui à notre connaissance, *n'a jamais été prise en compte par les chercheurs pour résoudre les problèmes d'optimisation des fonctions concaves*. Par conséquent, la méthode ASGM sera adoptée comme partie intégrante de notre approche pour la résolution des problèmes stochastiques de conception des réseaux de distribution.

1.4 Positionnement de la thèse

D'après notre étude bibliographique, nous avons constaté : (i) manque de travaux sur l'intégration *effective* des coûts de stockage dans l'étude des problèmes de conception des réseaux de distribution, (ii) absence complète de travaux de recherche avec *approches analytiques* traitant le problème d'intégration des choix des fournisseurs avec les décisions de localisation-allocation lors de la conception des réseaux de distribution et (iii) faible *prise en compte explicite de la fiabilité* des sites dans l'étude des chaînes logistiques et en particulier les réseaux de distribution même si la problématique est très intéressante et des besoins industriels sans cesse exprimés.

De ce fait, notre challenge principal dans cette thèse est d'intégrer les décisions stratégiques et tactiques (localisation-allocation-choix de fournisseurs) dans un seul modèle de conception avec prise en compte explicite des aspects stochastiques, stockage et fiabilité. Via des modèles de programmation mathématiques non linéaires avec variables de décisions binaires, ces aspects seront étudiés.

Dans leurs travaux, [Daskin *et al.*, 2001] utilisent deux principales hypothèses restrictives à savoir :

- (1) le rapport entre la variance et la moyenne de la demande est *constant* pour tous les clients
- (2) le délai d'approvisionnement du fournisseur au centre de distribution est constant..

Dans ce travail de recherche, ces deux hypothèses, entre autres, sont relâchées. Une approche par relaxation lagrangienne efficace est développée permettant de trouver de bonnes bornes inférieures et supérieures au problème initial. Cette efficacité est due principalement au couplage de la méthode de recherche de pas d'Armijo et la méthode du sous gradient pour résoudre le problème dual résultant.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rapporté les principaux travaux de recherche réalisés traitant du problème de conception des réseaux de distribution. Plus particulièrement, nous nous sommes

intéressés aux problèmes déterministes, stochastiques, intégrant localisation et stockage et aux approches de résolution développées. Nous avons ensuite rappelé les principes de la technique de relaxation lagrangienne. Développée dans le cadre de cette thèse pour résoudre le problème dual, la technique d'optimisation ASGM (*Armijo Subgradient Method*) basée sur un couplage de la méthode du sous gradient et d'Armijo a été présentée. Pour terminer, les principales motivations et les différents challenges à relever dans le cadre de cette thèse sont décrits.

Chapitre 2

Optimisation d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement constants

Dans ce chapitre, nous décrivons une approche d'optimisation basée sur la relaxation lagrangienne pour résoudre un problème stochastique de localisation de centres de distribution dans un réseau mono fournisseur. Le problème consiste à intégrer, dans un même modèle d'optimisation, des décisions opérationnelles et des décisions stratégiques. Plus précisément, les décisions stratégiques concernent les localisations des centres de distribution et les affectations des zones de demande (clients) aux centres de distribution localisés. Les décisions opérationnelles concernent la politique de gestion de stock de chaque centre de distribution. L'objectif est la minimisation d'une fonction coût non linéaire incluant les coûts de localisation, les coûts de transport, les coûts de stockage, sous la contrainte de taux de satisfaction des clients. Les résultats numériques obtenus attestent de la validité et de l'efficacité de l'approche proposée.

Publication: [Tanonkou et al., 2006a].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle stochastique de conception d'un réseau de distribution mono fournisseur mono produit. Le modèle est une extension du modèle présenté dans [Daskin *et al.*, 2001]. En effet, les auteurs proposent un modèle stochastique de localisation-allocation intégrant les coûts de localisation, les coûts de transport et les coûts de stockage dans une même fonction objectif non linéaire. Ils considèrent une demande client aléatoire pour laquelle la moyenne et la variance sont connues et des délais d'approvisionnement constants entre le fournisseur et les centres de distribution localisés. Le modèle obtenu est non linéaire et le problème associé est connu comme NP-difficile. Pour résoudre le problème, les auteurs utilisent une hypothèse restrictive à savoir: le rapport entre la variance et la moyenne de la demande est constant pour tous les clients. Cette hypothèse leur a permis de résoudre le problème efficacement via un algorithme polynomial basé sur la relaxation lagrangienne.

Dans ce chapitre, nous relaxons cette hypothèse simplificatrice et proposons un algorithme basé sur la relaxation lagrangienne pour résoudre le problème dans sa généralité (le rapport entre la variance et la moyenne de la demande est différent pour tous les clients). L'algorithme que nous proposons prend en compte la structure 'spéciale' du problème relaxé. De plus, le problème dual est résolu en utilisant l'algorithme du sous gradient présenté dans le chapitre 1 et permet la détermination d'une borne inférieure de la fonction objectif du problème original. La qualité de l'algorithme développé est estimée en évaluant un *gap de dualité* défini comme étant l'erreur relative entre les bornes des solutions lagrangiennes. Les résultats numériques obtenus attestent de l'efficacité de notre algorithme.

Le reste du chapitre est organisé comme suit: la section 2.2 donne une description détaillée du problème abordé. La formulation mathématique du problème est proposée dans la section 2.3. Dans la section 2.4, nous proposons une approche de résolution du modèle d'optimisation obtenu et étudions la complexité des algorithmes développés. Ces algorithmes constituent le noyau algorithmique de l'ensemble des modèles d'optimisation que nous allons rencontrer tout au long de cette thèse. Les résultats numériques et leurs analyses, permettant la validation de nos

algorithmes, sont présentés dans la section 2.5. La section 2.6 conclut le chapitre par quelques remarques et perspectives pour les travaux futurs.

2.2 Description du problème

Le réseau de distribution étudié dans ce chapitre est composé d'un seul fournisseur et d'un ensemble de zones de demande. Chaque client est identifié par la zone de demande où il est localisé. Sans perte de généralité, nous supposons que chaque zone de demande est une zone potentielle de localisation d'un centre de distribution (DC). Donc pour N zones de demandes, nous avons N centres de distribution potentiels à localiser. Comme dans tout problème d'optimisation, nous commençons par donner les différentes caractéristiques des composantes du réseau.

2.2.1 Fournisseur

Le réseau dispose d'un unique fournisseur qui approvisionne, en un seul type de produit, les différents centres de distribution. Nous supposons que le fournisseur dispose d'une capacité d'approvisionnement illimitée (c'est-à-dire pas de contrainte de capacité maximale chez le fournisseur). Le délai d'approvisionnement est par hypothèse constant dépendant de la localisation de chacun des centres de distribution. Ce délai est indépendant de la quantité demandée. De plus, nous nous plaçons dans le cas où pour chaque opération de transport vers un centre de distribution, en plus d'un coût unitaire par produit transporté, un coût fixe est engendré.

2.2.2 Centre de distribution

Chaque zone de demande (client) est une zone potentielle de localisation d'un centre de distribution. Un centre de distribution localisé a pour rôle de satisfaire les demandes générées par les différentes zones de demande qui lui sont affectées. Pour la gestion de son stock, chaque centre de distribution utilise la politique de la quantité économique de commande (voir section 2.2.4). Et pour garantir un certain niveau de service (c'est à dire un certain pourcentage de demandes satisfaites immédiatement sur stock), un stock de sécurité est maintenu. Nous supposons qu'il n'y a pas de contrainte de capacité dans un centre de distribution. La localisation d'un centre de distribution engendre un coût fixe dépendant de la zone de localisation. De plus, à chaque demande d'approvisionnement lancée par un centre de distribution est associée un coût

fixe dépendant de la zone de localisation. Aussi, à chaque unité de produit stockée, on associe un coût annuel de stockage dépendant de la zone de localisation du centre de distribution.

2.2.3 Zone de demande (client)

Nous supposons que chaque zone de demande (clients) génère une demande aléatoire. Cette demande suit une loi de probabilité de distribution normale caractérisée par sa moyenne et sa variance. Les différentes zones de demandes sont connectées entre elles par des connexions de transport. Sans perte de généralité, nous nous plaçons dans le cas où seule une connexion (liaison) de transport existe entre deux sites. Par conséquent, nous nous plaçons dans le cas d'un graphe complet. Dans cette étude, les délais de livraison entre les centres de distribution et les zones de demande ne sont pas considérés. En effet, seul le coût de transport (dépendant de la connexion) est pris en compte. La figure 2.1 illustre la structure du réseau de distribution considéré.

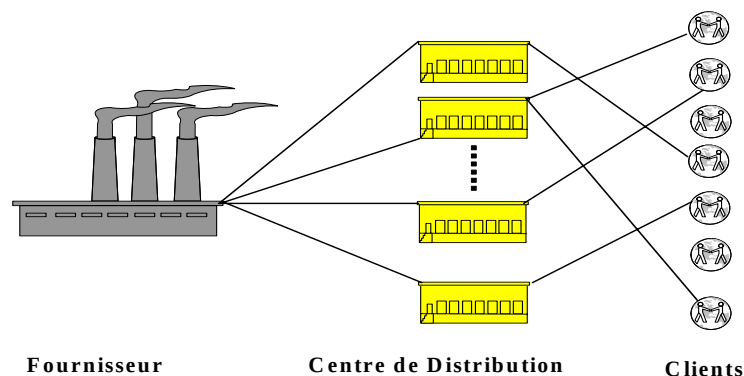


Figure 2.1 Réseau de distribution étudié (cas d'un fournisseur)

Notre problème consiste à déterminer les meilleures localisations des centres de distribution, dont le nombre n'est pas fixé, et les meilleures affectations des clients à ces centres de distribution. Pour une économie d'échelle, nous nous limitons au cas où chaque client est servi exactement par un et un seul centre de distribution. L'approvisionnement du centre de distribution est assuré par le fournisseur et nous nous plaçons dans le cas où cet approvisionnement ne peut pas être assuré par un autre centre de distribution. Le problème est formulé comme un programme mathématique non linéaire à variables binaires. L'objectif est de minimiser une fonction non linéaire incluant les coûts fixes de localisation, les coûts de transport, les coûts d'approvisionnement et de stockage et

enfin les coûts de maintien des stocks de sécurité. Avant de présenter en détails la modélisation mathématique, nous rappelons dans la section qui suit les points importants du modèle de Wilson pour la détermination de la quantité économique de commande dans le centre de distribution.

2.2.4 Modèle de Wilson (Quantité Economique de Commande)

Ce modèle suppose un horizon infini avec une demande déterministe et connue. Il s'agit de trouver quelle quantité à commander selon une période à prévoir pour minimiser les coûts de commande et de stockage. Pour ce modèle, nous décrivons le contexte décisionnel et les hypothèses de modélisation ainsi que les coûts intervenants dans la prise de décision. Nous présentons la démarche permettant de déterminer analytiquement la quantité optimale de commande dite *economic order quantity (EOQ)* dans la littérature anglophone.

L'équation qui résulte de la modélisation décrit le rapport entre les coûts de passation d'une commande, les coûts de stockage et la quantité à commander. La modélisation permet d'exprimer la quantité de commande comme fonction des coûts de commande, des coûts de stockage et de la demande sur la période d'étude. La quantité à commander « *EOQ* » sera la même chaque fois que le donneur d'ordre « DO » passe une commande. L'intervalle de temps (ΔT) entre deux commandes reste constante et peut aussi être déterminé. Les hypothèses de la modélisation sont :

- (i) la demande est déterministe, constante et connue ;
- (ii) les coûts demeurent fixes tout au long de la période d'étude ;
- (iii) pas de restriction concernant la capacité d'approvisionnement et de stockage.

Soit Q la quantité de commande chez le donneur d'ordre (dans notre cas il s'agit du centre de distribution). Si Q est trop grande alors les coûts de stockage tout au long de la période d'étude seront trop élevés (le DO va dépenser trop d'argent en immobilisation car il stockera les produits en attendant leur commande). Il s'agit donc de trouver un équilibre entre les coûts totaux de commande et de stockage. Afin de présenter le modèle, nous supposons que l'horizon de temps est d'une année. Soit D la demande annuelle du centre de distribution reçue par le fournisseur, K étant le coût fixe de commande, h le coût de stockage par unité de produit. Rappelons que les coûts totaux de commande sont égaux au coût de passation de commande multiplié par le nombre de commande (D/Q). Par ailleurs, le coût de stockage annuel est égal à la quantité moyenne dans

le stock ($Q/2$) multipliée par le coût de stockage unitaire. Le modèle mathématique de Wilson (EOQ) est donné par:

$$(EOQ) \quad W^* = \min_{Q \geq 0} \left\{ \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} \right\}$$

Par conséquent, on trouve la quantité optimale de commande $Q^* = \sqrt{2KD/h}$.

2.3 Modélisation mathématique

2.3.1 Paramètres et variables de décisions

Dans ce chapitre, nous considérons les notations suivantes :

I ensemble des zones de demande (clients) indexés par i .

DC_j centre de distribution localisé dans la zone de demande j .

Demande

μ_i demande moyenne générée par jour par le client i .

σ_i^2 variance de demande générée par jour par le client i .

Coût

f_j coût fixe de localisation du DC_j .

d_{ij} coût de transport unitaire du DC_j vers le client i .

K_j coût fixe de commande placée par le DC_j auprès du fournisseur.

ε_j coût fixe de transport (par livraison) du fournisseur vers le DC_j .

a_j coût de transport unitaire du fournisseur vers le DC_j .

h_j coût de stockage annuel (par unité du produit) dans le DC_j .

Autres paramètres

L_j délai d'approvisionnement constant (en jours) du fournisseur au DC_j .

χ nombre de jours travaillés par an.

α taux de service dans les centres de distribution.

z_α coefficient de sécurité.

Les décisions de localisation et d'allocation sont définies respectivement par les variables X et Y .

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est localisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3.2 Modélisation des coûts

Nous présentons une description de la structure des coûts de la fonction objectif à minimiser. En effet, nous nous plaçons dans le cas où l'horizon d'étude est une année. Soit D_j la demande annuelle reçue par le DC_j et Q_j la quantité à commander par le DC_j . Comme initialement mentionné en section 2.2.4, les coûts totaux de commande sont égaux au coût de passation de commande multiplié par le nombre de commande (D_j/Q_j). Ainsi, le coût total de commande du DC_j est donné par l'expression

$$\frac{K_j D_j}{Q_j}. \quad (2.1)$$

Le coût total de transport du fournisseur vers le DC_j est donné par

$$\frac{(\varepsilon_j + a_j Q_j) D_j}{Q_j}. \quad (2.2)$$

Par ailleurs, le coût total de stockage annuel est égal à la quantité moyenne dans le stock ($Q_j/2$) multipliée par le coût de stockage unitaire. Soit :

$$\frac{h_j Q_j}{2} \quad (2.3)$$

Par conséquent, les coûts totaux annuels de commande, de stockage et de transport (fournisseur- DC_j) associés à DC_j sont donnés par la sommation des expressions (2.1), (2.2) et (2.3) :

$$C_j(Q_j) = \frac{K_j D_j}{Q_j} + \frac{\varepsilon_j D_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} + a_j D_j \quad (2.4)$$

La détermination de la quantité optimale de commande qui minimise le coût total de commande et de stockage est donné par la formule de Wilson de la section 2.2.4. Il s'agit de trouver le couple $(C_j^{\min}, Q_j^*)$ tel que $C_j^{\min} = C_j(Q_j^*)$ et

$$C_j^{\min} = \min_{Q_j \geq 0} C_j(Q_j). \quad (2.5)$$

Le problème (2.5) n'est rien d'autre que le modèle (EOQ) présenté en section 2.2.4. Par conséquent, on en déduit la valeur Q_j^* :

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2(K_j + \varepsilon_j)D_j}{h_j}} \quad (2.6)$$

En remplaçant Q_j^* dans la fonction coût (2.4), nous avons le coût total égal à

$$C_j^{\min} = \sqrt{2h_j D_j (K_j + \varepsilon_j)} + a_j D_j. \quad (2.7)$$

Comme D_j est par hypothèse la demande annuelle moyenne reçue par le DC_j , alors nous pouvons écrire

$$D_j = \chi \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}.$$

Par conséquent, la fonction des coûts totaux (2.7) devient

$$C_j^{\min} = \sqrt{2h_j (K_j + \varepsilon_j) \chi \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}} + a_j \chi \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}. \quad (2.8)$$

Remarque 2.1 : Le problème (2.5) reflète bien le modèle de Wilson de la quantité économique de commande tel qu'il est exposé dans [Dupont, 1998]. Et d'après [Dupont, 1998], la période ΔT entre deux commandes consécutives est calculée en divisant la quantité économique de commande par la demande annuelle moyenne, soit :

$$\Delta T = \sqrt{\frac{2(K_j + \varepsilon_j)}{D_j h_j}}$$

Etant donné que nous avons supposé l'horizon de temps l'année, celle ci sera divisée en période de durée ΔT . Au début de chaque période, le DC_j commande au fournisseur une quantité Q_j donnée par (2.6) pour répondre à une demande pendant la durée ΔT .

Nous avons fait l'hypothèse du maintien des stocks de sécurité dans le DC_j . Ces stocks sont maintenus pour limiter les ruptures dues aux aléas (prévisions non conformes à la demande, délai d'approvisionnement plus long que prévu, etc.). Ces stocks de sécurité dépendent de l'importance relative des coûts de stockage, des aléas (plus les aléas sont importants, plus le niveau du stock de sécurité est élevé) et du niveau de service souhaité (plus on recherche une qualité de service

importante, plus le niveau de stock sera élevé). Ce stock dépend donc de la distribution de la loi de la demande reçue par le DC_j durant le délai d'approvisionnement L_j . Nous notons par $(LTD)_j$ la variable aléatoire caractérisant cette demande. Etant donné que nous avons supposé un délai d'approvisionnement constant (L_j) , $(LTD)_j$ est une variable aléatoire [Minner, 2000] de moyenne $L_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$ et de variance $L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}$. Ainsi le niveau du stock de sécurité (SS_j) à maintenir dans le DC_j pour assurer un niveau de service égal à α est donné par

$$SS_j = z_\alpha \sqrt{L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}},$$

où le coefficient de sécurité z_α dépend du taux de service ciblé. z_α est déterminé en utilisant le tableau de la loi normale. Par exemple, si on souhaite un taux de service de 99%, on a un coefficient de sécurité égal à 2,326. On en déduit que le coût de maintien du stock de sécurité dans DC_j est donné par

$$h_j z_\alpha \sqrt{L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}}. \quad (2.9)$$

2.3.3 Fonction objectif

En utilisant les expressions (2.8) et (2.9) et en tenant compte des coûts de localisation et de transport, notre problème consiste à :

$$(P) \quad J^* = \min_{X,Y} J(X,Y) \quad (2.10)$$

avec $J(X,Y)$ définie par :

$$J(X,Y) = \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} D_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij}} \quad (2.11)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (2.12)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, j \in I \quad (2.13)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in I \quad (2.14)$$

où les paramètres

$$D_{ij} = \chi\mu_i(d_{ij} + a_j), \quad c_{ij} = 2h_j\chi(K_j + \varepsilon_j)\mu_i, \quad \alpha_{ij} = L_j\sigma_i^2(h_jz_\alpha)^2.$$

La fonction objectif $J(X,Y)$ à minimiser représente la somme des différents coûts suivants : le premier terme correspond au coût fixe de localisation des centres de distribution. Le second terme représente le coût total de transport du produit du fournisseur vers les centres de distribution et des centres de distribution vers les zones de demande. Le troisième terme représente le coût total d'approvisionnement et de stockage. Enfin, le quatrième terme est le coût de maintien des stocks de sécurité. La contrainte (2.12) assure que chaque client est servi exactement par un seul centre de distribution. La contrainte (2.13) indique que si le client i est servi par un DC_j ($Y_{ij} = 1$) alors forcément, nous avons décidé de localiser ce DC_j ($X_j = 1$). La nature binaire des différentes variables de décisions est exprimée par la contrainte (2.14).

Nous sommes en présence d'un problème d'optimisation combinatoire et la résolution de ce dernier pose de nombreux problèmes du fait de la non linéarité de la fonction objectif entre autres. La détermination de la solution optimale est un problème NP-difficile et ceci fera l'objet de la section suivante. Remarquons qu'en l'absence des deux derniers termes de $J(X,Y)$, le problème (P) devient le problème (UCFPL) qui est reconnu comme problème de classe NP-difficile.

Dans la section suivante, nous proposons une approche de résolution basée sur la relaxation lagrangienne pour résoudre le problème (P).

2.4 Approche de résolution par relaxation lagrangienne

L'approche de résolution par relaxation lagrangienne que nous proposons consiste à : (i) relaxer (via les multiplicateurs de Lagrange) les contraintes qui rendent le problème plus complexe à résoudre et introduire le coût de pénalisation obtenu par relaxation dans la fonction objectif du problème (P), (ii) résoudre le problème relaxé pour chaque multiplicateur de Lagrange afin d'obtenir une borne inférieure, (iii) trouver une solution admissible (solution réalisable au problème (P)) pour déterminer une borne supérieure, (iv) résoudre le problème dual en utilisation la méthode du sous gradient. L'efficacité de la méthode de relaxation lagrangienne est assurée

par: (i) des bonnes bornes inférieures, (ii) la qualité des solutions admissibles du problème initial (P) obtenues des solutions du problème relaxé. Les sous sections 2.4.1 à 2.4.4 développées ci-dessous décrivent les différentes étapes de l'algorithme de relaxation lagrangienne pour résoudre (P).

2.4.1 Relaxation lagrangienne et « problème relaxé »

Pour résoudre (P), la méthode de relaxation lagrangienne consiste à relaxer la contrainte (2.12) en introduisant le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_i) \forall i \in I$. Nous multiplions (2.12) par les multiplicateurs de Lagrange λ_i et nous introduisons la fonction résultante dans la fonction objectif de (P). On obtient donc le problème relaxé :

$$L(\lambda) = \min_{X,Y} \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} (D_{ij} - \lambda_i) Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij}} + \sum_{i \in I} \lambda_i \quad (2.15)$$

sous les contraintes (2.13) et (2.14).

La suppression de la contrainte (2.12) (c'est-à-dire que le client i doit être affecté à un seul DC) rendent indépendantes les décisions de localisation des différents centres de distribution. Par conséquent, le problème relaxé (2.15) devient :

$$L(\lambda) = \sum_{j \in I} L_j(\lambda) + \sum_{i \in I} \lambda_i \quad (2.16)$$

où le sous problème $L_j(\lambda)$ est défini par :

$$(\text{SP}_j) \quad L_j(\lambda) = \min_{X,Y} f_j X_j + \sum_{i \in I} (D_{ij} - \lambda_i) Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij}} \quad (2.17)$$

sous les contraintes (2.13) et (2.14).

Nous pouvons donc en déduire les propriétés suivantes :

Propriété 2.1 :

- (a) $L(\lambda) \leq J^*$ pour tout multiplicateur de Lagrange λ .
- (b) Si la solution (X_λ, Y_λ) du problème relaxé (2.15) est une solution admissible du problème initial (P) alors (X_λ, Y_λ) est une solution optimale au problème (P).

2.4.2 Le dual lagrangien « problème dual »

Comme nous l'avons vu (Propriété 2.1 (a)), le problème relaxé $L(\lambda)$ donne une borne inférieure au problème original, c'est-à-dire $L(\lambda) \leq J^*$ où J^* est le coût optimal du problème (P). Le problème « dual lagrangien » consiste à déterminer le vecteur multiplicateur de Lagrange optimal λ^* qui donne la meilleure borne inférieure. Il s'agit de trouver la valeur L^* telle que:

$$(DL) \quad L^* = \max_{\lambda \geq 0} L(\lambda). \quad (2.18)$$

La fonction objectif $L(\lambda)$ est une fonction concave et linéaire par morceaux. Le problème (DL) est un problème d'optimisation non linéaire de fonction non différentiable partout. Les techniques de programmation non linéaire pour les problèmes d'optimisation différentiable sont alors inopérantes. C'est pourquoi, nous adaptons la méthode du sous gradient ([Fisher, 1981]) pour résoudre (DL). A chaque itération n de l'algorithme du sous gradient, les multiplicateurs de Lagrange sont actualisés tels que :

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n + \theta \frac{L^* - L(\lambda)}{\langle \nabla L(\lambda_i^n), \nabla L(\lambda_i^n) \rangle} \nabla L(\lambda_i^n) \quad (2.19)$$

où ∇ est l'opérateur du gradient défini par:

$$\nabla L(\lambda_i) = 1 - \sum_{j \in I} Y_{ij}. \quad (2.20)$$

Notons que nous ne connaissons pas à priori la valeur optimale L^* . Par conséquent, elle est remplacée par le critère de la meilleure solution admissible trouvée. Le paramètre θ permet de contrôler la variation du multiplicateur de Lagrange λ . Dans les expériences numériques, nous prenons $\theta = 2$ et nous le réduisons si nous n'observons aucun changement de la borne inférieure $L(\lambda)$ après quelques itérations.

2.4.3 Recherche d'une borne supérieure

A chaque itération de l'algorithme du sous gradient lors de la résolution du problème dual, une solution admissible et une borne supérieure du problème original peuvent être obtenues via les solutions du problème relaxé (2.15). Pour toute solution (X, Y) du problème relaxé $L(\lambda)$ la contrainte (2.12) peut être violée. Si cette contrainte est satisfaite, alors la solution est optimale.

Sinon, elle n'est pas optimale et on peut la corriger ou modifier de façon à obtenir une solution admissible. La modification est effectuée de la façon suivante :

1. Si $X_j = 0 \quad \forall j \in I$, c'est-à-dire aucun centre de distribution n'est localisé. Alors, nous décidons de localiser un unique centre de distribution qui servira l'ensemble de tous les clients. La localisation de ce centre de distribution est choisie, en faisant un balayage de toutes les localisations possibles, de façon à minimiser l'ensemble de tous les coûts du réseau.
2. Si $X_j = 1$, c'est-à-dire au moins un DC_j est localisé. Nous vérifions la contrainte (2.12) pour chaque client i . Si cette contrainte n'est pas satisfaite, alors pour chaque client i nous avons deux possibilités :
 - Si $\sum_{j \in I} Y_{ij} \geq 1$ (c'est-à-dire que le client i est affecté à au moins deux centres de distribution) alors le client i est affecté au centre de distribution avec $Y_{ij} = 1$ pour lequel le coût global $J(X,Y)$ est minimum.
 - Si $\sum_{j \in I} Y_{ij} = 0$ (c'est-à-dire que le client i n'est affecté à aucun centre de distribution dont nous avons décidé de la localisation) alors nous décidons de servir ce client par un DC_k localisé ($X_k=1$) et pour lequel le coût global $J(X,Y)$ est minimum.

Avec cette nouvelle solution réalisable (X,Y) , nous trouvons une borne supérieure (UB)= $J(X,Y)$.

2.4.4 Algorithme principal

Nous présentons ici l'algorithme principal utilisé pour résoudre le problème (P). Nous ferons souvent appel à cet algorithme pour résoudre la plupart des problèmes stochastiques de localisation que nous rencontrerons dans cette thèse.

Algorithme 2.1 : (Algorithme principal)

Initialisation : Choisir $J^* = \text{INFINI}$, $\varepsilon_0 = 0.0001$ (précision), poser $n = 0$, $\lambda = 0$,
 $\text{INFINI} = 10^{20}$.

Répéter de l'Etape 1-6

Etape1. Résoudre tous les sous problèmes relaxés **(SP_j)** (voir section 2.4.5) et calculer

$$L_j(\lambda), \forall j \in I.$$

Etape2. Déterminer $L(\lambda)$ en utilisant l'équation (2.16).

Etape3. Calculer une solution admissible (X, Y) et déterminer la borne supérieure

$$UB = J(X, Y) \text{ (voir section 2.4.3).}$$

Etape4. Calculer $J^* = \min\{J^*, J(X, Y)\}$ et mémoriser la solution (X, Y) associée à J^* .

Etape5. Mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange λ^{n+1} (équation (2.19)).

Etape6. $n = n + 1$

Jusqu'à $\|\lambda^{n+1} - \lambda^n\| < \varepsilon_0$.

L'étape la plus importante dans cet algorithme est celle de la résolution des sous problèmes **(SP_j)**. Le problème **(SP_j)** est spécifique au DC_j et l'objectif est de déterminer la variable d'affectation Y_{ij} des clients au DC_j qui minimise l'ensemble des coûts associé à ce DC. Nous présentons dans la section suivante, la méthode que nous utilisons pour résoudre le problème **(SP_j)** et déterminer $L_j(\lambda)$.

2.4.5 Résolution des sous problèmes lagrangiens (SP_j)

L'objectif de cette section est de proposer un algorithme polynomial pour résoudre le problème **(SP_j)**. Nous rappelons qu'il s'agit de déterminer $L_j(\lambda)$ tel que :

$$(\text{SP}_j) \quad L_j(\lambda) = \min_{X, Y} f_j X_j + \sum_{i \in I} (D_{ij} - \lambda_i) Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij}}$$

sous les contraintes (2.13) et (2.14).

Pour chaque sous problème **(SP_j)**, nous considérons deux cas selon la localisation ou non localisation des DC_j :

- Si le DC_j n'est pas localisé ($X_j=0$), alors la contrainte (2.13) implique que $Y_{ij} = 0 \forall i \in I$ et $L_j(\lambda) = 0$.
- Si le DC_j est localisé ($X_j=1$), alors la contrainte (2.13) devient redondante et l'affectation des clients à ce DC_j est déterminée en résolvant le second sous problème :

$$(\mathbf{SPP}_j) \quad V_j(\lambda) = \min_{Z_i \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i} \quad (2.21)$$

où la variable d'affectation Y_{ij} est remplacée par la variable de décision Z_i et le paramètre réel

$$b_{ij} = D_{ij} - \lambda_i \quad (2.22)$$

avec c_{ij} et α_{ij} définis comme précédemment. Dans ce cas, $L_j(\lambda) = f_j + V_j(\lambda)$.

Pour conclure, la solution du sous problème $(\mathbf{SP}_j)$ est :

- $X_j=0$ et $Y_{ij} = 0$, et $L_j(\lambda) = 0$ si $f_j + V_j(\lambda) \geq 0$,
- $X_j=1$, $Y_{ij} = Z_i$, et $L_j(\lambda) = f_j + V_j(\lambda)$ si $f_j + V_j(\lambda) < 0$.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$L_j(\lambda) = \min\{0, f_j + V_j(\lambda)\}. \quad (2.23)$$

Déterminer $L_j(\lambda)$ revient donc à résoudre le sous problème $(\mathbf{SPP}_j)$. D'après [Daskin et al., 2001], le problème $(\mathbf{SPP}_j)$ peut être transformé en un problème d'optimisation de fonction sous modulaire et par conséquent, peut être résolu par des algorithmes généraux de minimisation des fonctions sous modulaires [Schriber, 2000]. Dans [Daskin et al., 2001], les auteurs ont développé un algorithme polynomial pour résoudre le problème $(\mathbf{SPP}_j)$ dans le cas où la fonction objectif de (2.21) a une seule racine. Le sous problème présenté par ces auteurs résulte de l'hypothèse de rapport constant entre la moyenne de la demande et sa variance. Dans notre cas, nous ne faisons aucune hypothèse sur les aléas de demande et par conséquent on a $c_{ij} \neq 0$ et $\alpha_{ij} \neq 0$. Ainsi, nous proposons un algorithme polynomial qui tient compte de la vraie structure du problème $(\mathbf{SPP}_j)$.

Propriété 2.2 : Si $b_{ij} \geq 0$ pour un i donné, alors la solution optimale du problème $(\mathbf{SPP}_j)$ est telle que $Z_i=0$.

Preuve : La preuve est évidente car $b_{ij} \geq 0$ implique que la fonction objectif du problème **(SPP_j)** est croissant en Z_i (notons que les paramètres c_{ij} et α_{ij} sont par définitions non négatifs). ■

Grâce à la Propriété 2.2, sans perte de généralité, nous assumons dans la suite que le paramètre b_{ij} est strictement négatif ($b_{ij} < 0$).

Pour résoudre le problème **(SPP_j)**, au lieu de considérer que le DC_j utilise la quantité optimale de commande pour son approvisionnement (développée en section 2.3), notre idée de base est de considérer une quantité fixe de commande Q pour DC_j et d'optimiser simultanément Z et Q . Comme le second terme de la fonction objectif du problème (2.21) (qui dépend de la quantité de commande Q) représente le coût total d'approvisionnement et le coût de stockage, c'est-à-dire :

$$\sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} = \sqrt{\sum_{i \in I} 2h_j \chi(K_j + \varepsilon_j) \mu_i Z_i}, \quad (2.24)$$

Nous remplaçons ce terme (2.24) par la fonction de coût

$$\sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} = \inf_{Q > 0} \left\{ \left(\frac{(K_j + \varepsilon_j) \sum_{i \in I} \chi \mu_i Z_i}{Q} \right) + \frac{h_j Q}{2} \right\}. \quad (2.25)$$

En remplaçant l'expression (2.25) dans la fonction objectif du problème (2.21), alors le problème **(SPP_j)** devient :

$$\textbf{(SPP}_j\textbf{)'} \quad V_j(\lambda) := \inf_{Q > 0} \left\{ \min_{Z_i \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} B_i(Q) Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i} + \frac{h_j Q}{2} \right\} \quad (2.26)$$

où

$$B_i(Q) = b_{ij} + \frac{k_{ij}}{Q}, \quad k_{ij} = (K_j + \varepsilon_j) \chi \mu_i.$$

Avec la nouvelle formulation **(SPP_j)'**, l'objectif est de résoudre (2.26) en déterminant simultanément la variable d'allocation Z (j étant fixé) et la quantité fixe de commande Q .

Pour résoudre le problème (2.26), nous définissons le problème

$$U_j(\lambda, Q) = \min_{Z_i \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} B_i(Q) Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i}. \quad (2.27)$$

Le sous problème (2.27) contient une seule racine. Dans [Daskin et al., 2001], les auteurs ont proposé un algorithme polynomial pour trouver une solution optimale $U_j(\lambda, Q)$. Cet algorithme peut se résumer de la façon suivante :

Algorithme 2.2 : (Détermination de $U_j(\lambda, Q)$)

Etape1. Classer l'ensemble des clients I en trois sous ensemble:

$$I^+(Q) = \{i : B_i(Q) > 0\}, \quad I^0(Q) = \{i : B_i(Q) \leq 0 \text{ et } \alpha_{ij} = 0\}, \quad I^-(Q) = \{i : i \notin I^+(Q) \cup I^0(Q)\}$$

Sans perte de généralité, on pose $I^-(Q) = \{1, 2, \dots, N\}$ avec $N = |I^-(Q)|$.

Etape2. Trier et classer les éléments de $I^-(Q)$ dans un ordre croissant:

$$\frac{B_1(Q)}{\alpha_{1j}} \leq \frac{B_2(Q)}{\alpha_{2j}} \leq \dots \leq \frac{B_N(Q)}{\alpha_{Nj}} \text{ et } \frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} \geq \frac{k_{(i+1)j}}{\alpha_{(i+1)j}} \text{ si } \frac{B_i(Q)}{\alpha_{ij}} = \frac{B_{(i+1)}(Q)}{\alpha_{(i+1)j}}$$

Etape3. Calculer

$$U_j(\lambda, Q) = \min_{Z \in \Omega(Q)} \sum_{i \in I} B_i(Q) Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i}$$

où $\Omega(Q)$ est l'ensemble des solutions Z telles que $Z_i = 0, \forall i \in I^+(Q), Z_i = 1, \forall i \in I^0(Q), Z_1 = \dots = Z_k = 1, \text{ et } Z_{k+1} = \dots = Z_N = 0 \text{ pour } k \geq 0$.

Ceci nous permet d'écrire

$$V_j(\lambda) := \inf_{Q > 0} \left\{ U_j(\lambda, Q) + \frac{h_j Q}{2} \right\}. \quad (2.28)$$

Nous observons qu'à partir de l'**Algorithme 2.2** et de (2.28), la détermination de $V_j(\lambda)$ peut se faire de la manière suivante: (i) en faisant un balayage de toutes les valeurs possibles des quantités fixe de commande, (ii) déterminer $\Omega(Q)$ l'ensemble des solutions Z pour chaque Q , (iii) déterminer ensuite $V_j(\lambda)$ en utilisant la relation (2.21), mais en se limitant aux Z dans $\Omega(Q)$ calculé en phase (ii), c'est-à-dire que la quantité fixe de commande Q est remplacée par la quantité optimale de commande pour chaque Z .

En combinant l'**Algorithme 2.2** pour le calcul de $U_j(\lambda, Q)$, avec les expressions (2.21), (2.27) et (2.28), nous écrivons

$$V_j(\lambda) := \inf_{Q>0} \left\{ \min_{Z \in \Omega(Q)} \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i} \right\}. \quad (2.29)$$

Nous déterminons par la suite les valeurs possibles de $V_j(\lambda)$ en modifiant successivement les valeurs de Q . Les propriétés suivantes permettent de restreindre la quantité fixe de commande dans un intervalle, c'est à dire la détermination de $Q_{\inf}$, et $Q_{\sup}$.

Propriété 2.3 : Pour le sous problème (SP_j) si $Y_{ij} = 0$ pour tout i , alors $X_j = 0$ et $L_j(\lambda) = 0$.

Propriété 2.4 : Pour le sous problème (SP_j) si $Y_{ij} \neq 0$ pour certain i , alors $X_j = 1$ et il existe deux réels positifs $Q_{\inf}$ et $Q_{\sup}$ tels que la quantité optimale de commande Q^* du DC_j donné par (2.6) soit :

$$Q_{\inf} = \sqrt{\frac{2 \min_{i \in I} k_{ij}}{h_j}} \leq Q^* \leq Q_{\sup} = \sqrt{\frac{2 \sum_{i \in I} k_{ij}}{h_j}}.$$

Preuve: La preuve des deux propriétés est évidente. En effet, pour tout sous problème (SP_j), si $Y_{ij} = 0$, alors $L_j(\lambda) = \min_X f_j X_j$ et par conséquent $X_j = 0$ est solution optimale car $f_j > 0$. De plus, $L_j(\lambda) = 0$, d'où la Propriété 2.3. Par contre, si $Y_{ij} \neq 0$ pour certain i , alors il suffit de constater que la quantité optimale de commande est

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i \in I} k_{ij} Y_{ij}}{h_j}}$$

et nous pouvons aisément en déduire $Q_{\inf}$ et $Q_{\sup}$ de la Propriété 2.4. ■

Compte tenu des Propriétés 2.3 et 2.4 et de la relation (2.29), le sous problème (SP_j) ou (2.23) devient

$$L_j(\lambda) = \min \left\{ 0, \inf_{Q \in [Q_{\inf}, Q_{\sup}]} \left\{ \min_{Z \in \Omega(Q)} \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i} \right\} \right\}. \quad (2.30)$$

Remarque 2.2: L'**Algorithme 2.2** et la relation (2.30) permettent de déterminer $L_j(\lambda)$. Le

balayage continue de Q n'est pas nécessaire dans l'intervalle $]Q_{\inf}, Q_{\sup}[$ puisque lorsque Q croit, l'ensemble $\Omega(Q)$ déterminé par l'**Algorithme 2.2** ne change pas de manière continue. Ceci est dû au fait que la partition de l'ensemble I à l'Etape 1 et l'ordre des éléments à l'Etape 2 ne changent pas tout de suite.

Afin de présenter l'algorithme de résolution du problème (SP_j), nous rappelons que l'ensemble $\Omega(Q)$ est l'ensemble des solutions Z telles que $Z_i = 0, \forall i \in I^+(Q), Z_i = 1, \forall i \in I^0(Q)$, et $Z_1 = \dots = Z_k = 1$, et $Z_{k+1} = \dots = Z_N = 0$ pour $k \geq 0, N = |I^-(Q)|$. L'algorithme repose sur la propriété suivante :

Propriété 2.5 : $\Omega(q) = \Omega(Q), \forall q$ tel que $Q \leq q < H(Q)$ où l'ensemble $\Omega(\cdot)$ est déterminé par l'**Algorithme 2.2** et la fonction $H(Q)$ donnée par :

$$H(Q) = \min \left\{ q^+, \min_{i \in I^-(Q) / q_i > Q} q_i \right\},$$

$$q^+ \equiv \min_{i \in I^+(Q)} \{ q : B_i(q) = 0 \} = \min_{i \in I^+(Q)} \left\{ -\frac{k_{ij}}{b_{ij}} \right\},$$

$$q_i \equiv \inf \left\{ q : \frac{B_i(q)}{\alpha_{ij}} > \frac{B_{(i+1)}(q)}{\alpha_{(i+1)j}} \right\} = \begin{cases} \frac{k_{ij}\alpha_{(i+1)j} - k_{(i+1)j}\alpha_{ij}}{b_{(i+1)j}\alpha_{ij} - b_{ij}\alpha_{(i+1)j}} & \text{si } \frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} < \frac{k_{(i+1)j}}{\alpha_{(i+1)j}} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Preuve: La fonction $B_i(Q) = b_{ij} + \frac{k_{ij}}{Q}$, est une fonction strictement décroissante en Q . Par conséquent, le partition de l'ensemble I à l'Etape1 de l'**Algorithme 2.2** ne change pas si $Q \leq q < q^+$. A partir de l'Etape2 de l'**Algorithme 2.2**, pour tout couple $(i, i') \in I \times I$ tel que $\frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} \leq \frac{k_{i'j}}{\alpha_{i'j}}$,

nous avons :

$$\frac{B_i(q)}{\alpha_{ij}} \leq \frac{B_{i'}(q)}{\alpha_{i'j}} \quad \text{si } q \leq S,$$

$$\frac{B_i(q)}{\alpha_{ij}} \geq \frac{B_{i'}(q)}{\alpha_{i'j}} \quad \text{si } q \geq S,$$

où $S = \frac{k_{i'j}\alpha_{ij} - k_{ij}\alpha_{i'j}}{b_{ij}\alpha_{i'j} - b_{i'j}\alpha_{ij}}.$

Ainsi, nous pouvons en déduire que si $\frac{B_i(Q)}{\alpha_{ij}} = \frac{B_{(i+1)}(Q)}{\alpha_{(i+1)j}}$, alors puisque $\frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} \geq \frac{k_{(i+1)j}}{\alpha_{(i+1)j}}$, nous avons

$$\frac{B_i(q)}{\alpha_{ij}} \leq \frac{B_{(i+1)}(q)}{\alpha_{(i+1)j}} \quad \forall q > Q.$$

Par ailleurs si $\frac{B_i(Q)}{\alpha_{ij}} < \frac{B_{(i+1)}(Q)}{\alpha_{(i+1)j}}$ et $\frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} \geq \frac{k_{(i+1)j}}{\alpha_{(i+1)j}}$, alors $\frac{B_i(q)}{\alpha_{ij}} < \frac{B_{(i+1)}(q)}{\alpha_{(i+1)j}}$, $\forall q > Q$.

Si $\frac{B_i(Q)}{\alpha_{ij}} < \frac{B_{(i+1)}(Q)}{\alpha_{(i+1)j}}$ et $\frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} < \frac{k_{(i+1)j}}{\alpha_{(i+1)j}}$, alors l'ordre entre les éléments (i) et (i+1) changera lorsque $q =$

q_i . Ceci conclut la preuve. ■

Nous présentons ci-dessous l'algorithme que nous venons de développer pour résoudre le problème (SP_j).

Algorithme 2.3 : (Détermination de $L_j(\lambda)$)

Etape1. Initialisation $Q \leftarrow Q_{\inf}$, $Y = 0$, $X = 0$ et $L_j(\lambda) = 0$.

Etape2. Résoudre le sous problème $U_j(\lambda, Q)$ pour déterminer l'ensemble $\Omega(Q)$.

Etape3. Pour toute solution $Z \in \Omega(Q)$,

3.1. Calculer $V(Z) = \sum_{i \in I} b_{ij}Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}Z_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}Z_i}$

3.2. Si $V(Z) + f_j < L_j(\lambda)$, $L_j(\lambda) = V(Z) + f_j$, $X = 1$, $Y = Z$

Etape4. Calculer le prochain $H(Q)$ (comme définie dans la Propriété 2.5) tel que la suite $\Omega(Q)$ change.

Etape5. Si $H(Q) > Q_{\sup}$ alors STOP. Sinon $Q = H(Q)$ et Aller à l'Etape2.

Comme nous l'avons précédemment mentionné, l'**Algorithme 2.2** est polynomial (d'après [Daskin et al., 2001]). Nous pouvons en déduire (d'après la propriété 2.5 et l'**Algorithme 2.2**) que l'**Algorithme 2.3** est aussi polynomial si le nombre d'itérations effectuées pour l'obtention d'une

solution optimale est polynomial. Ceci est évident puisque le nombre d'ensembles $\Omega(Q)$ à considérer est égal au nombre de changement de l'ensemble $I^+(Q)$, qui est borné supérieurement par $|I|$ plus le nombre de changement de l'ordre des éléments de l'ensemble $I(Q)$ qui est borné supérieurement par $|I|(|I|-1)$. Ceci est dû au fait que l'ordre des couples $(i, i') \in I \times I$ change une seule fois sous les conditions de la Propriété 2.5.

Remarquons qu'en faisant varier Q de $[0, \infty[$, l'**Algorithme 2.3** peut aussi être utilisé pour résoudre le problème (**SPP_j**) en vue de déterminer $V_j(\lambda)$. De plus, en définissant convenablement les aléas (moyenne et variance) de la demande des clients, l'**Algorithme 2.3** peut être utilisé pour résoudre le problème (**SPP_j**) pour des paramètres arbitraires b_{ij} , c_{ij} et α_{ij} .

2.5 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section les résultats numériques pour valider notre approche et évaluer notre algorithme principal de calcul. Les différents algorithmes ont été programmés en langage C++ et les résultats numériques obtenus en utilisant un ordinateur PC Pentium IV, 2.80 Ghz et 512 de RAM.

2.5.1 Performance de l'algorithme principal

Considérons un réseau de distribution composé d'un seul fournisseur et un ensemble de 100 zones de demande. C'est-à-dire un réseau de 100 centres de distribution potentiels à localiser. Les paramètres du problème sont présentés de la façon suivante :

- **Nombre de zones de demande (#RL):** nous avons considéré différents problèmes constitués de 10, 20, 30, 40, 60, 80 et 100 zones de demande (clients). Nous rappelons que chaque zone de demande est une zone potentielle de localisation d'un centre de distribution.
- **Demande :** la demande des différents clients suit une loi de distribution normale de moyenne μ_i générée uniformément avec $\mu_i \sim U[100, 1600]$ et d'écart type σ_i généré uniformément avec $\sigma_i \sim U[50, 100]$.
- **Délai d'approvisionnement (L_j):** le délai de livraison entre le fournisseur et le centre de distribution est constant et généré uniformément avec $L_j \sim U[10, 30]$.
- **Taux de service (α):** $\alpha = 97.5\%$, soit un coefficient de sécurité $z_\alpha = 1.96$.

- **Le coût fixe de localisation (f_j), les coûts de transport (a_j) et (d_{ij}):** ces coûts sont générés uniformément de la façon suivante: $f_j \sim U[4500, 10000]$, $a_j \sim U[1, 5]$ et $d_{ij} \sim U[1, 5]$.

Le Tableau 2.1 résume le reste des paramètres du problème.

Tableau 2.1. Paramètres du problème

Paramètre	Description	Valeur
K_j	coût fixe de commande placée par le DC_j auprès du fournisseur	50
ε_j	coût fixe de transport (par livraison) du fournisseur vers le DC_j	$U[1, 5]$
h_j	coût de stockage annuel (par unité du produit) dans le DC_j	1
χ	nombre de jours travaillés par an	250

Le Tableau 2.2 présente les performances de l'algorithme principal avec une borne inférieure (LB) et une borne supérieure (UB) du coût total exprimé en millions de dollars. L'estimation des résultats est évaluée en terme de gap de dualité (GAP) qui est la différence relative entre le coût total d'une solution admissible et la borne inférieure, c'est-à-dire $GAP = (UB - LB) / UB$. Nous notons par ($\#DCs$) le nombre de centres de distribution localisés pour chaque instance du problème et CPU le temps de calcul pour obtenir une solution.

Tableau 2.2. Performance de l'algorithme principal pour $\#RL \leq 100$.

# RL	$LB(\$) \times 10^7$	$UB(\$) \times 10^7$	GAP	# DCS	CPU (S)
10	0.53344	0.53709	0.00680263	5	3
20	1.28745	1.29716	0.00748387	7	8
30	1.81158	1.82655	0.00819515	9	10
40	2.25715	2.27796	0.00913458	12	20
50	2.90419	2.93305	0.00984173	12	40
60	3.71149	3.74669	0.00939453	10	70
70	3.80477	3.84335	0.0100368	15	81
80	4.48281	4.53004	0.0104246	15	99
100	5.33902	5.39491	0.0103606	19	125

Nous observons (voir Tableau 2.2 et Figure 2.7) que le gap de dualité (GAP) est compris entre 0 et 1.2% pour différentes tailles du problème. Nous avons un gap de dualité inférieure à 1% lorsque $\#RL \leq 70$ et une estimation du gap de dualité compris entre 1 et 1.2% lorsque $70 < \#RL \leq 100$. Le nombre de centres de distribution localisés augmente lorsque le nombre de zones de demande ($\#RL$) augmente. Le temps de calcul augmente avec la taille du problème (voir Figure 2.6) et nous avons un CPU =125 secondes pour le cas où nous avons $\#RL = 100$ zones de demande. Tout ceci montre l'efficacité de notre approche. Pour les problèmes avec $\#RL = 40, 60, 80$, les figures (Figure 2.2, Figure 2.3, et Figure 2.4) donnent l'évolution des bornes inférieures et supérieures en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme principal. Ces courbes montrent que l'algorithme converge vers une solution optimale au bout d'un nombre fini d'itérations. Et pour tous les problèmes considérés le nombre d'itérations ne dépasse pas 150 itérations.

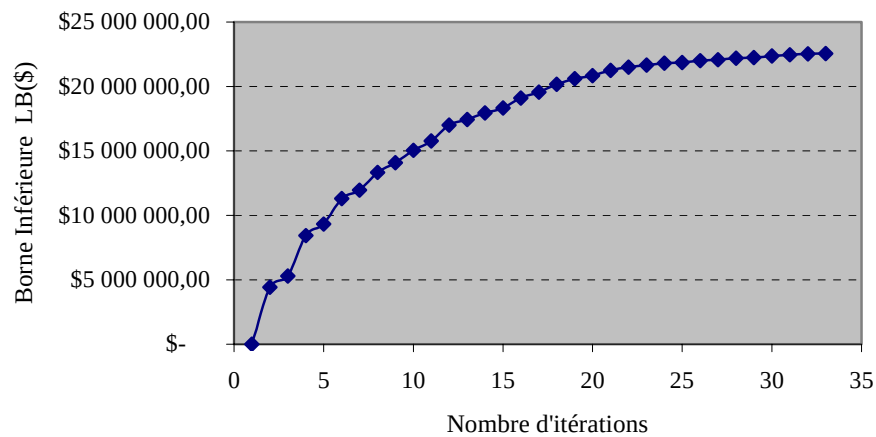


Figure 2.2 Evolution de la borne inférieure : cas $\#RL=40$

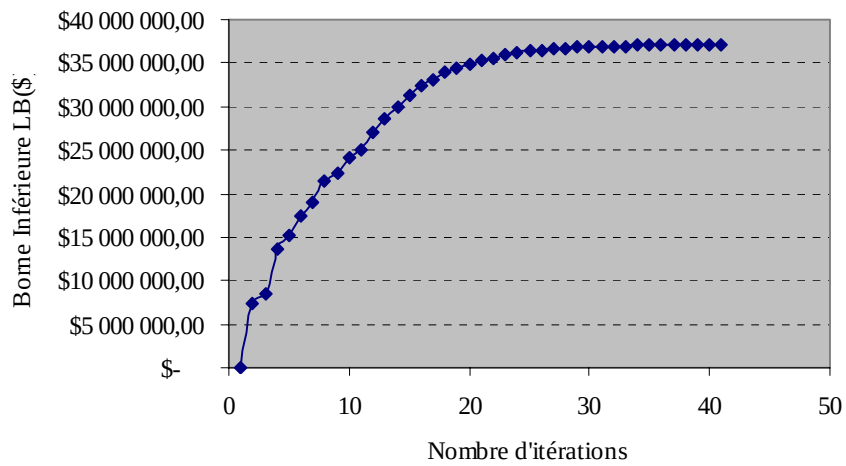


Figure 2.3 Evolution de la borne inférieure : cas #RL=60

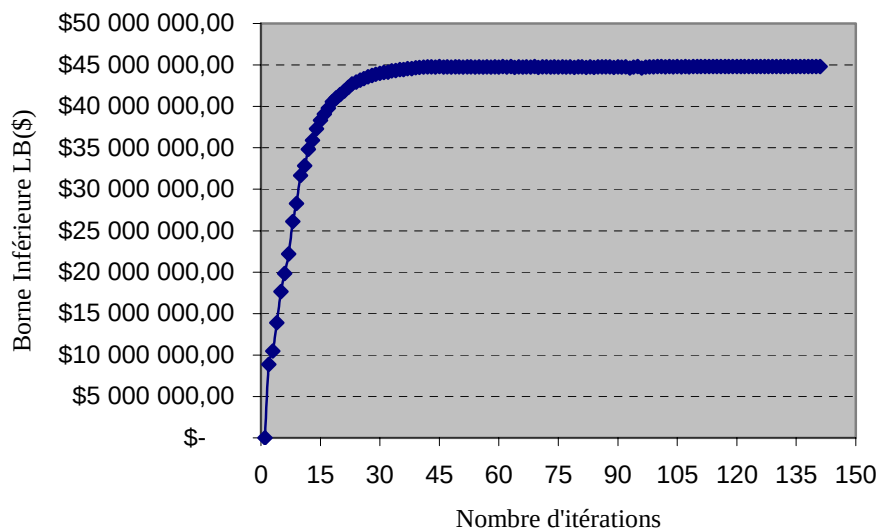


Figure 2.4 Evolution de la borne inférieure : cas #RL=80

La Figure 2.5 montre les courbes d'évolution des bornes inférieures et supérieures. Nous observons qu'à chaque itération, les bornes lagrangiennes deviennent de plus en plus serrées et convergent au bout de 33 itérations vers la valeur optimale de la fonction objectif. Ce qui montre une fois de plus l'efficacité de notre approche.

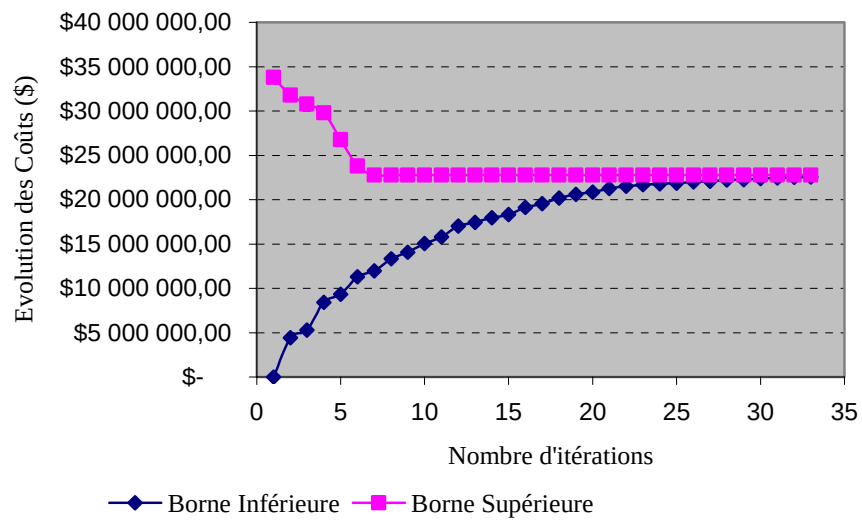


Figure 2.5 Courbe d'Evolution des Bornes LB et UB : cas $\#RL=40$

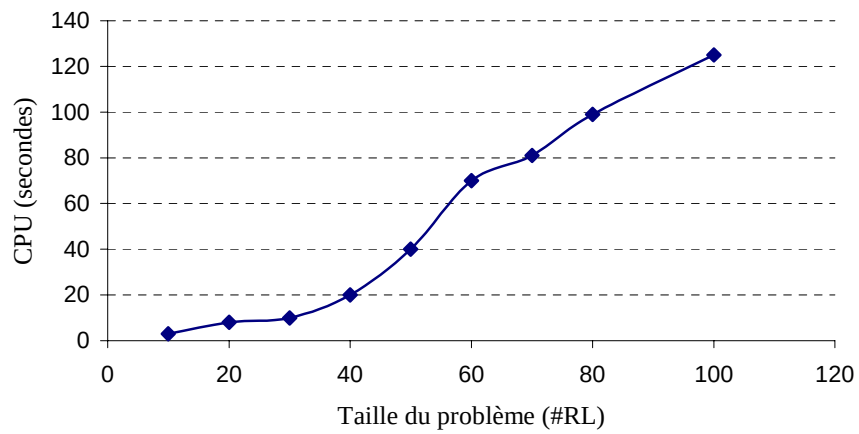


Figure 2.6 Courbe du temps de calcul en fonction de la taille du problème ($\#RL$).

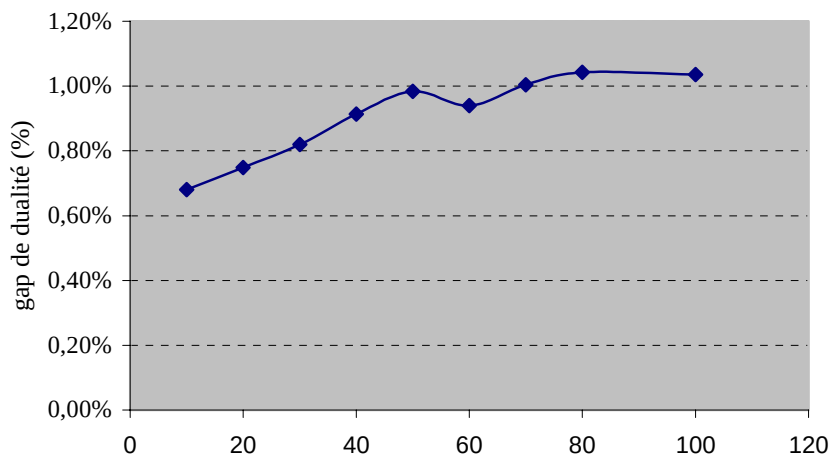


Figure 2.7 Estimation du GAP en fonction de la taille du problème (#RL).

2.5.2 Etude du cas de 10 zones de demande

Nous étudions en détails le cas de 10 zones de demande. Pour ce cas, l'algorithme converge et les résultats sont obtenus au bout de 17 itérations pour un CPU =3 secondes. Une borne inférieure $LB = 0.533444 \times 10^7$ et une borne supérieure $UB = 0.537098 \times 10^7$ sont obtenues. Le gap de dualité ne dépasse pas 0.68%, ce qui donne une bonne estimation de la qualité de la solution optimale. Par ailleurs, l'algorithme nous suggère de localiser 5 centres de distribution. Le Tableau 2.3 présente les solutions obtenues. Nous observons qu'un centre de distribution sera ouvert dans la zone de demande 1 et servira la zone de demande 6. De même, un centre de distribution sera ouvert dans la zone de demande 2 et servira les zones de demande 2, 4, 9 et 10. Par ailleurs, un centre de distribution sera ouvert dans la zone de demande 7 et servira la zone de demande 1. Enfin, un centre de distribution sera ouvert dans la zone de demande 9 et servira les zones de demande 7 et 8. Toutes les contraintes du problème sont respectées.

Tableau 2.3. Solution optimale pour #RL=10.

CENTRES DE DISTRIBUTION OUVERTS	ZONES DE DEMANDE SERVIES
$X_1 = 1$	$Y_{61} = 1$
$X_2 = 1$	$Y_{22} = Y_{42} = Y_{92} = Y_{102} = 1$
$X_4 = 1$	$Y_{34} = Y_{54} = 1$

$X_7 = 1$	$Y_{17} = 1$
$X_9 = 1$	$Y_{79} = Y_{89} = 1$
$X_3 = X_5 = X_6 = X_8 = X_{10} = 0$	$Y_{ij} = 0 \forall i \text{ et } \forall j \neq 1, 2, 4, 7, 9$

2.6 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche de résolution basée sur la technique de relaxation lagrangienne pour traiter un problème de localisation de centres de distribution dans un réseau logistique stochastique. Nous avons considéré le cas où la demande, en un seul type de produit, est aléatoire et où les délais de livraison sont constants. La difficulté du problème réside essentiellement dans l'introduction de coûts de stockage non linéaires dans un modèle de localisation. L'objectif étant la minimisation du coût total incluant les coûts fixes de localisation, les coûts de transport et les coûts de stockage dans les centres de distribution.

L'algorithme que nous avons développé permet de déterminer les localisations possibles des différents centres de distribution et les affectations des zones de demande (clients) aux centres localisés. Des expériences numériques ont été réalisées et analysées, et les résultats obtenus attestent de la validité de l'approche et démontrent l'efficacité de l'algorithme principal de calcul.

Comme perspective, le cas où le délai d'approvisionnement est aléatoire représente une extension assez naturelle au problème traité. Cela fera l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 3

Optimisation d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement aléatoires

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de conception d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement (fournisseur-centre de distribution) aléatoires. Deux cas sont étudiés : le cas mono produit et le cas multi produit. Dans les deux cas, nous proposons une approche de résolution basée sur la relaxation lagrangienne. Pour illustrer la validité et l'efficacité des algorithmes développés, des expériences numériques sont présentées et analysées.

Publications : [Tanonkou et al., 2005], [Tanonkou et al., 2006b].

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de conception d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement aléatoires. C'est une extension du problème déjà abordé au chapitre précédent où nous avons considéré le cas de délais d'approvisionnement constants. Il est important de signaler que même si les deux problèmes, en terme de description sont les mêmes à l'exception des délais constants et aléatoires, l'approche développée dans ce chapitre est plus complexe et plus complète que celle présenté au chapitre précédent.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 3.2 est dédiée au cas où le fournisseur approvisionne les centres de distribution en un seul type de produit (cas mono produit). La section 3.3 s'adresse au cas multi produit. Pour ce cas, nous supposons que pour chaque zone de demande et pour chaque type de produit, un et un seul centre de distribution assure la livraison. Aussi, nous nous plaçons dans le cas où pour chaque type de produit, les demandes générées par les différentes zones de demande sont indépendantes. Les algorithmes présentés dans le cas mono produit seront réadaptés pour traiter le cas multi produit. Des expériences numériques et analyses sont présentées pour illustrer la validité de l'approche proposée. Nous terminons par la section 3.4 où quelques remarques et perspectives sont présentées.

3.2 Cas mono fournisseur mono produit

3.2.1 Formulation Mathématique

Le réseau de distribution considéré dans cette section est identique au réseau déjà présenté au chapitre précédent. Il est composé d'un fournisseur approvisionnant un ensemble de zones de demande (clients) via un ensemble de centres de distribution à localiser. Le problème est caractérisé par les notations suivantes :

I ensemble des zones de demande (ou clients) indexées par i .

DC_j centre de distribution localisé dans la zone de demande j .

Demande

- μ_i demande moyenne générée par jour par le client i .
 σ_i^2 variance de demande générée par jour par le client i .

Coût

- f_j coût fixe de localisation du DC_j .
 d_{ij} coût de transport unitaire du DC_j vers le client i .
 K_j coût fixe de commande placée par le DC_j auprès du fournisseur.
 e_j coût fixe de transport (par livraison) du fournisseur vers le DC_j .
 a_j coût de transport unitaire du fournisseur vers le DC_j .
 h_j coût de stockage annuel (par unité du produit) dans le DC_j .

Autres paramètres

- L_j délai moyen d'approvisionnement (en jours) du fournisseur au DC_j .
 A_j^2 variance du délai d'approvisionnement du fournisseur au DC_j .
 χ nombre de jours travaillés par an.
 α taux de service dans le centre de distribution.
 z_α coefficient de sécurité.

Variables de décision :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est localisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme le problème est similaire au problème du chapitre 2 à l'exception des délais d'approvisionnement aléatoires, seul le coût de stocks de sécurité est différent, les autres coûts sont identiques à ceux définis au chapitre 2 et sont rappelés ici:

- le coût total de localisation :

$$\sum_{j \in I} f_j X_j \quad (3.1)$$

- le coût total de transport du fournisseur aux centres de distribution et des centres de distribution aux clients :

$$\sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \chi \mu_i (d_{ij} + a_j) Y_{ij} \quad (3.2)$$

- le coût total d'approvisionnement en quantité économique :

$$\sum_{j \in I} \sqrt{2h_j (K_j + \varepsilon_j) \chi \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}} \quad (3.3)$$

Considérons à présent le coût de maintien du stock de sécurité dans le DC_j . Ce stock de sécurité dépend du niveau de service et de la distribution de demande pendant le délai d'approvisionnement. Nous supposons que chaque client i génère une demande aléatoire suivant une loi de distribution normale de moyenne μ_i et d'écart type σ_i . Par conséquent, la demande dans le DC_j pendant le délai d'approvisionnement est une variable aléatoire de moyenne :

$$\bar{\mu}_j = L_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \quad (3.4)$$

et de variance

$$\bar{\sigma}_j^2 = L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij} + \Lambda_j^2 \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right)^2 \quad (3.5)$$

Le niveau du stock de sécurité à maintenir dans le DC_j pour assurer un niveau de service égal à α est :

$$z_\alpha \bar{\sigma}_j \quad (3.6)$$

Le coût annuel de maintien des stocks de sécurité dans tous les centres de distribution est donné par :

$$\sum_{j \in I} h_j z_\alpha \bar{\sigma}_j \quad (3.7)$$

Compte tenu des expressions (3.1), (3.2), (3.3) et (3.7), comme dans le chapitre 2 pour le cas de

délais constants, le problème d'optimisation combinatoire (P) présenté dans cette section est formulé comme suit :

$$(P) \quad J^* = \min_{X,Y} J(X,Y) \quad (3.8)$$

avec la fonction objectif $J(X,Y)$ définie par:

$$J(X,Y) = \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} M_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right)^2} \quad (3.9)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (3.10)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, j \in I \quad (3.11)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in I \quad (3.12)$$

où les paramètres dans $J(X,Y)$ sont définis par :

$$M_{ij} = \chi \mu_i (d_{ij} + a_j), \quad c_{ij} = 2h_j \chi F_j \mu_i, \quad \alpha_{ij} = L_j \sigma_i^2 (h_j z_\alpha)^2, \quad e_j = (\Lambda_j h_j z_\alpha)^2, \quad F_j = K_j + \varepsilon_j.$$

Remarque 3.1 : si nous supposons $e_j = 0$ c'est-à-dire que la variance du délai d'approvisionnement est nulle pour tout DC_j , alors le problème (3.8) est équivalent au problème d'optimisation présenté au chapitre 2 dans le cas d'un délai d'approvisionnement constant. En présence de délais aléatoires, l'approche relaxation lagrangienne du chapitre 2 ne s'applique pas ici car les sous problèmes relaxés ne sont plus polynomiaux. Nous développons une nouvelle approche dans ce chapitre.

3.2.2 Résolution du problème d'optimisation (P)

Pour résoudre le problème (P), nous introduisons une **nouvelle variable de décision D_j** représentant la demande moyenne dans le DC_j . Avec l'introduction de cette nouvelle variable de décision et compte tenu des notations précédentes, le problème (P) est équivalent au problème (P*) défini par :

$$(P^*) \quad J^{**} = \min_{X,Y,D} J(X,Y,D) \quad (3.13)$$

avec la fonction objectif $J(X,Y,D)$ définie par:

$$J(X, Y, D) = \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} M_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j D_j^2} \quad (3.14)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (3.15)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, j \in I \quad (3.16)$$

$$\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \leq D_j, \quad \forall j \in I \quad (3.17)$$

$$D_j \geq 0, \quad X_j, Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in I \quad (3.18)$$

En effet (P) et (P*) sont équivalents du fait que : (i) toute solution réalisable de (P) est une solution réalisable de (P*) avec $D_j = \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$ et (ii) pour toute solution optimale de (P*), l'inégalité de contraintes (3.17) devient égalité, c'est-à-dire $\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} = D_j$, ce qui est aussi solution optimale de (P).

Dans la suite, l'objectif est de résoudre le problème (P*) sous les contraintes (3.15) – (3.18). Pour cela, nous proposons une approche par relaxation lagrangienne. Les sous sections 3.2.3.1 à 3.2.3.5 décrivent les différentes étapes de notre algorithme principal de résolution.

3.2.3.1 Problème relaxé

L'approche de résolution par relaxation lagrangienne que nous proposons consiste à : (i) relaxer les contraintes (3.15) et (3.17) qui initialement rendent le problème plus compliqué à résoudre et introduire les coûts de pénalisation obtenus par relaxation dans la fonction objectif du problème (P*), (ii) résoudre le problème relaxé afin d'obtenir une borne inférieure, (iii) trouver une solution admissible pour déterminer une borne supérieure, (iv) maximiser la borne inférieure en utilisant le couplage de la méthode d'Armijo et la technique du sous gradient.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre 2, l'efficacité de la méthode de relaxation lagrangienne est assurée par : (i) des bornes inférieures serrées et (ii) la qualité des solutions admissibles du problème (P*) obtenues des solutions du problème relaxé. Les vecteurs des multiplicateurs de

Lagrange $\lambda = (\lambda_i) \forall i \in I$ et $\beta = (\beta_j) \forall j \in I$ sont associés respectivement aux contraintes (3.15) et (3.17). Le problème relaxé est défini par :

$$(RP) \quad L(\lambda, \beta) = \min_{X,Y,D} J(X,Y,D) + \sum_{i \in I} \lambda_i \left(1 - \sum_{j \in I} Y_{ij} \right) + \sum_{j \in I} \beta_j \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} - D_j \right) \quad (3.19)$$

sous les contraintes (3.16) et (3.18) et la fonction $J(X,Y,D)$ est définie par (3.14).

La relaxation de la contrainte (3.15) rend les décisions d'ouverture et de fermeture des centres de distribution indépendantes. Par conséquent, le problème relaxé peut être décomposé de la façon suivante :

$$L(\lambda, \beta) = \sum_{j \in I} L_j(\lambda, \beta) + \sum_{i \in I} \lambda_i \quad (3.20)$$

où le sous problème $L_j(\lambda, \beta)$ est défini par :

$$(SP_j) \quad L_j(\lambda, \beta_j) = \min_{X,Y,D} f_j X_j + \sum_{i \in I} b_{ij} Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j D_j^2} - \beta_j D_j \quad (3.21)$$

avec le paramètre b_{ij} défini par :

$$b_{ij} = M_{ij} + \beta_j \mu_i - \lambda_i \quad \forall i, j \in I \quad (3.22)$$

Compte tenu de la structure du sous problème **(SP_j)**, il résulte les propriétés suivantes :

Propriété 3.1 :

- (a) $L(\lambda, \beta) \leq J^{**}$ pour tout multiplicateur de Lagrange (λ, β) .
- (b) Pour un DC_j tel que $\beta_j > \sqrt{e_j}$, on a $L_j(\lambda, \beta) = -\infty$.
- (c) Pour tout DC_j tel que $\beta_j = \sqrt{e_j}$, $L_j(\lambda, \sqrt{e_j}) = \min_{X,Y} f_j X_j + \sum_{i \in I} b_{ij} Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}}$.
- (d) Si la solution (X, Y, D) du problème relaxé **(RP)** est une solution admissible du problème initial (P^*) alors (X, Y, D) est une solution optimale au problème (P^*) .

Preuve : La propriété 3.1 (a) résulte du fait que le problème relaxé $L(\lambda, \beta)$ donne une borne inférieure au problème original (P^*) . La propriété 3.1 (d) est un résultat de la théorie de la

relaxation lagrangienne. Pour un DC_j tel que $\beta_j > \sqrt{e_j}$, considérons le cas $X_j = 0$ ce qui implique $Y_{ij} = 0$ et nous obtenons

$$L_j(\lambda, \beta) \leq \inf_{D_j \geq 0} \sqrt{e_j} D_j - \beta_j D_j = -\infty$$

ce qui conclut la propriété 3.1 (a). Considérons maintenant le cas $\beta_j = \sqrt{e_j}$.

$$L_j(\lambda, \beta_j) = \min_{X, Y, D} f_j X_j + \sum_{i \in I} b_{ij} Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j D_j^2} - \sqrt{e_j} D_j$$

et

$$\sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j D_j^2} - \sqrt{e_j} D_j \geq 0 \text{ et } \lim_{D_j \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j D_j^2} - \sqrt{e_j} D_j = 0$$

ce qui prouve la propriété 3.1 (c). ■

3.2.3.2 Résolution du problème dual lagrangien

Le problème dual lagrangien consiste à déterminer les multiplicateurs de Lagrange optimaux $\pi^* = (\lambda^*, \beta^*)$ qui donnent la meilleure borne inférieure. Il s'agit de trouver la valeur L^* telle que :

$$(DL) \quad L^* = \max_{\lambda, \beta \geq 0} L(\lambda, \beta) \quad (3.23)$$

La fonction objectif $L(\lambda, \beta)$ est une fonction concave et le problème (DL) est un problème d'optimisation non linéaire de fonction non différentiable partout (la preuve est facile à obtenir). Pour résoudre (DL), nous utilisons une méthode itérative du sous gradient qui consiste à mettre à jour à chaque itération n les multiplicateurs de Lagrange (λ, β) de la façon suivante :

$$\pi^{n+1} = \pi^n + \theta_n \nabla L(\pi^n)$$

où $\pi^n = (\lambda^n, \beta^n)$ sont les vecteurs multiplicateurs de Lagrange à l'itération n , θ_n le « pas » et ∇ l'opérateur gradient définit par :

$$\nabla L(\pi^n) = \left(1 - \sum_{j \in I} Y_{ij}, \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} - D_j \right).$$

Lors de la résolution du problème dual, nous utilisons deux procédures algorithmiques. La première procédure utilise l'algorithme de Armijo ([\[Armijo, 1966\]](#) et [\[Djuranivic, 1992\]](#))

présenté au chapitre 1. Cet algorithme permet la détermination du « pas » $\theta_n = \gamma^m$ où m est le plus petit entier naturel tel que :

$$L(\pi^n + \gamma^m \nabla L(\pi^n)) - L(\pi^n) \geq \tilde{\alpha} \gamma^m \|\nabla L(\pi^n)\|^2$$

avec le paramètre $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 1)$.

La seconde procédure utilise la méthode du sous gradient [Fisher, 1981], où le pas est défini par :

$$\theta_n = s_n \|\nabla L(\pi^n)\|^{-2} (L(\pi^*) - L(\pi^n)).$$

Le couplage des deux procédures algorithmiques est motivé par *nos expériences numériques*. Lors de la réalisation des expériences numériques, nous avons observé une instabilité numérique sur la convergence des bornes inférieures. Le « pas » utilisé par la méthode du sous gradient ne produisait pas une bonne qualité des solutions lagrangiennes. C'est la raison pour laquelle nous commençons par l'utilisation de l'algorithme de recherche de pas d'Armijo pour le « meilleur pas » qui permettra d'éviter les problèmes d'instabilité numérique. Ensuite, nous utilisons l'algorithme du sous gradient qui est un très conservateur et assure une bonne convergence des coûts.

Nous commençons donc par l'algorithme de Armijo jusqu'à ce que la fonction $L(\lambda, \beta)$ soit nettement améliorée. Par la suite, nous basculons vers la méthode du sous gradient avec

$$s_n = \gamma^m (L(\pi^*) - L(\pi^n))^{-1} \|\nabla L(\pi^n)\|^2$$

et où le paramètre γ^m est le dernier « pas » d'Armijo.

Etant donné que $L(\pi^*)$ est inconnu, nous le remplaçons par la meilleure borne supérieure rencontrée pendant le processus lagrangien et le paramètre s^n est réduit si nous n'observons aucune amélioration de la borne inférieure $L(\pi)$ au bout d'un certains nombre d'itérations.

3.2.3.3 Recherche d'une borne supérieure

A chaque itération de l'algorithme pour la résolution du problème dual (DL), une solution admissible et une borne supérieure du problème original (P*) peuvent être obtenues via les

solutions du problème relaxé (RP). Pour toute solution (X, Y, D) du problème relaxé $L(\lambda, \beta)$ les contraintes (3.15) et (3.17) sont vérifiées. Si ces contraintes sont satisfaites, alors la solution est optimale. Sinon, la solution (X, Y, D) n'est pas admissible et il est possible de la corriger ou la modifier de façon à obtenir une solution admissible. La contrainte (3.17) peut être facilement renforcée en remplaçant la variable de décision D_j par $\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$. La modification pour la violation de la contrainte (3.15) est effectuée comme celle décrite en section 2.4.3 du chapitre précédent :

3. Si $X_j = 0 \quad \forall j \in I$, c'est-à-dire aucun centre de distribution n'est ouvert. Alors, nous décidons d'ouvrir un unique centre de distribution qui servira l'ensemble de tous les clients. La localisation de ce centre de distribution est choisie, en faisant un balayage de toutes les localisations possibles, de façon à minimiser l'ensemble de tous les coûts du réseau.
4. Si $X_j = 1$, c'est-à-dire un DC_j est localisé. La contrainte (3.15) est vérifiée pour chaque client i . Si cette contrainte n'est pas satisfaite, alors pour chaque client i nous avons deux possibilités :
 - Si $\sum_{j \in I} Y_{ij} \geq 1$ (c'est-à-dire que le client i est affecté à au moins deux centres de distribution) alors le client i est affecté au centre de distribution pour lequel le coût global $J(X, Y)$ est minimum.
 - Si $\sum_{j \in I} Y_{ij} = 0$ (c'est-à-dire que le client i n'est affecté à aucun centre de distribution) alors nous décidons de servir ce client par un DC_k dont nous avons décidé la localisation ($X_k = 1$) et pour lequel le coût global $J(X, Y, D)$ est minimum.

Avec cette nouvelle solution réalisable (X, Y) , nous déterminons une borne supérieure (UB) égale à :

$$UB = \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} M_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right)^2}$$

3.2.3.4 Algorithme principal pour la résolution du problème (P)

L'algorithme ci-dessous permet de résoudre le problème (P). Il est structuré identiquement que l'**Algorithme 2.1** présentée au chapitre 2. L'étape la plus importante est celle de la résolution des sous problèmes (**SP_j**) obtenus de la décomposition du problème relaxé. Il s'agit de l'Etape1.

Algorithme 3.1 : Algorithme principal

Initialisation

- Poser $L^* = \text{INFINI}$, $n = 0$, $\pi = (\lambda, \beta)$, $\pi = 0$, $\varepsilon_0 = 0.0001$ (précision).

Répéter de l'Etape1 à l'Etape7

Etape1. Résoudre tous les problèmes relaxés (**SP_j**) et calculer $L_j(\lambda, \beta)$ (l'algorithme pour résoudre ces sous problèmes est décrit dans la section suivante).

Etape2. Calculer $L(\lambda, \beta)$ en utilisant l'équation (3.20).

Etape3. Calculer une solution admissible (X, Y, D) et déterminer la borne supérieure (UB) correspondante.

Etape4. Calculer $L^* = \min(L^*, UB)$ et mémoriser la solution (X, Y, D) correspondant à L^*

Etape5. Déterminer le « pas » θ_n « Algorithme AGSM »

Etape6. Mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange π^{n+1}

Etape7. $n = n + 1$.

Jusqu'à ce que $\|\pi^{n+1} - \pi^n\| < \varepsilon_0$

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme de résolution des sous problèmes (**SP_j**) pour la calcul de $L_j(\lambda, \beta)$.

3.2.3.5 Résolution des sous problèmes lagrangiens (**SP_j**)

L'objectif de cette section est de proposer un algorithme polynomial pour résoudre le problème (**SP_j**). Rappelons qu'il s'agit de trouver $L_j(\lambda, \beta_j)$ telle que :

$$(\text{SP}_j) \quad L_j(\lambda, \beta_j) = \min_{X, Y, D} f_j X_j + \sum_{i \in I} b_{ij} Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Y_{ij}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Y_{ij} + e_j D_j^2} - \beta_j D_j$$

Compte tenu de la Propriété 3.1 (b), nous considérons dans cette section les valeurs du multiplicateur de Lagrange β_j tel que :

$$0 \leq \beta_j \leq \sqrt{e_j}$$

Pour résoudre le sous problème (SP_j) et déterminer $L_j(\lambda, \beta_j)$, deux cas sont considérés :

- Si le DC_j n'est pas localisé alors $X_j = 0$, et la contrainte (3.16) implique que $Y_{ij} = 0 \forall i \in I$.
 $L_j(\lambda, \beta) = \min_{D_j} (\sqrt{e_j} - \beta_j) D_j = 0$ et $D_j = 0$ puisque $0 \leq \beta_j \leq \sqrt{e_j}$.
- Si le DC_j est localisé, c'est-à-dire $X_j = 1$, la contrainte (3.16) devient redondante et l'affectation des clients à ce DC_j est déterminée en résolvant le second sous problème :

$$V_j(\lambda, \beta) = \min_{Z_i, D_j \geq 0} \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} - \beta_j D_j + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i + e_j D_j^2} \quad (3.24)$$

où la variable d'affectation Y_{ij} est remplacée par la variable de décision Z_i (j étant fixé), le paramètre réel b_{ij} défini comme en (3.22), $c_{ij} > 0$, $\alpha_{ij} > 0$ et $e_j > 0$ définis comme précédemment.

Pour résumer, la solution du sous problème (SP_j) est :

- $X_j = 0, Y_{ij} = 0, D_j = 0, L_j(\lambda, \beta_j) = 0$ si $f_j + V_j(\lambda, \beta) \geq 0$.
- $X_j = 1, Y_{ij} = Z_i, L_j(\lambda, \beta_j) = f_j + V_j(\lambda, \beta)$ si $f_j + V_j(\lambda, \beta) \leq 0$.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$L_j(\lambda, \beta_j) = \min \{0, f_j + V_j(\lambda, \beta)\} \quad (3.25)$$

Résoudre (SP_j) revient donc à déterminer $V_j(\lambda, \beta_j)$, c'est-à-dire résoudre le problème (3.24). Si nous négligeons la variable de décision D_j , alors le problème (3.24) peut être transformé en un problème de minimisation de fonction sous modulaire et donc peut être résolu en un temps polynomial par les algorithmes généraux de minimisation de fonction sous modulaire [Schriver, 2000]. Comme nous l'avons indiqué plus haut en remarque 3.1, si $e_j = 0$, D_j n'est plus considérée comme une variable de décision. Alors l'**Algorithme 2.2** proposé au chapitre 2 résout le problème (3.24). Nous décrivons dans la suite l'algorithme de calcul de $V_j(\lambda, \beta_j)$ pour le cas $e_j > 0$.

Propriété 3.2 : Pour un j fixé, le problème d'optimisation (3.24) est équivalent au problème :

$$V_j(\lambda, \beta) = \inf_{D_j \geq 0} \left\{ \min_{Z_i \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} - \beta_j D_j + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i + e_j D_j^2} \right\} \quad (3.26)$$

Preuve: Elle est évidente puisque l'ensemble de Z est fini. ■

Considérons le problème

$$U_j(D_j) = \min_{Z_i \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i + e_j D_j^2} - \beta_j D_j. \quad (3.27)$$

Alors d'après la propriété 3.2, nous pouvons écrire

$$V_j(\lambda, \beta) = \inf_{D_j \geq 0} \{U_j(D_j)\}. \quad (3.28)$$

Pour résoudre (3.27), nous adoptons l'approche développée au chapitre 2. Cette approche est basée sur le fait qu'au lieu d'utiliser la politique de la quantité économique de commande, nous utilisons la quantité de commande fixe Q du DC_j . Par conséquent, lors de la résolution de (3.27) non seulement nous sommes à la recherche des variables de décisions Z , D_j , mais aussi de la quantité de commande fixe Q du DC_j . Nous remplaçons le second terme de (3.27) (qui dépend de Q et représente le coût total d'approvisionnement du DC_j) par :

$$\sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} = \inf_{Q > 0} \left\{ \frac{F_j \sum_{i \in I} \chi \mu_i Z_i}{Q} + \frac{h_j Q}{2} \right\} \quad (3.29)$$

En introduisant l'expression (3.29) dans (3.27) le problème devient :

$$U_j(D_j) = \inf_{Q > 0} \left\{ \min_{Z_i \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} B_i(Q) Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i + e_j D_j^2} - \beta_j D_j + h_j Q / 2 \right\} \quad (3.30)$$

où

$$B_i(Q) = b_{ij} + \frac{F_j \chi \mu_i}{Q}.$$

Considérons le problème d'optimisation obtenu de (3.30) :

$$W(D_j, Q) = \min_{Z \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} B_i(Q) Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i + e_j D_j^2} - \beta_j D_j + \frac{h_j}{2} Q. \quad (3.31)$$

Pour un D_j fixé et un Q constant, le sous problème $W(D_j, Q)$ est un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte de variables binaires. La structure est la même que celui du problème d'optimisation (2.27) défini en chapitre 2. L'obtention d'une solution optimale au problème (3.31) repose sur la propriété suivante dont la preuve est similaire à la preuve de la propriété 4.2 dans [Shen et al., 2003] :

Propriété 3.3: Il existe une solution optimale de $W(D_j, Q)$ dans un ensemble $\Omega(Q)$ des variables de décisions Z telles que :

$$\begin{aligned} Z_i &= 0, \quad \forall i \in I^+(Q), \\ Z_i &= 1, \quad \forall i \in I^0(Q), \\ Z_1 &= \dots = Z_k = 1, \quad Z_{k+1} = \dots = Z_N = 0 \text{ pour } k \geq 0 \end{aligned}$$

où l'ensemble des clients I est partitionné comme au chapitre 2 :

$$I^+(Q) = \{i : B_i(Q) > 0\} \quad I^0(Q) = \{i : B_i(Q) \leq 0 \text{ et } \alpha_{ij} = 0\} \quad I^-(Q) = \{i : i \notin I^+(Q) \cup I^0(Q)\}$$

avec sans perdre de généralité, $I^-(Q) = \{1, 2, \dots, N\}$, $N = |I^-(Q)|$ et les éléments de l'ensemble $I^-(Q)$ classés par ordre suivant:

$$\frac{B_1(Q)}{\alpha_{1j}} \leq \frac{B_2(Q)}{\alpha_{2j}} \leq \dots \leq \frac{B_N(Q)}{\alpha_{Nj}}, \quad \frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} \geq \frac{k_{(i+1)j}}{\alpha_{(i+1)j}} \text{ si } \frac{B_i(Q)}{\alpha_{ij}} = \frac{B_{(i+1)}(Q)}{\alpha_{(i+1)j}}.$$

Il résulte de la Propriété 3.3 que $U_j(D_j)$ peut être déterminé en suivant les trois étapes suivantes: (i) en variant toutes les valeurs possibles de la quantité de commande Q , (ii) en déterminant l'ensemble $\Omega(Q)$ des solutions réalisables Z pour chaque Q , (iii) en déterminant $U_j(D_j)$ en utilisant la relation (3.30) mais en faisant une restriction sur l'ensemble des Z calculé en (ii), c'est-à-dire que la quantité de commande fixe Q est remplacée par la quantité optimale de commande pour chaque solution Z .

L'algorithme ci-dessous détermine l'ensemble $\Omega = \bigcup_{Q>0} \Omega(Q)$ de toutes les solutions optimales Z pour toutes les valeurs possibles de Q .

Algorithme 3.2: Détermination de l'ensemble Ω

- Etape1. Initialiser $Q \leftarrow 0, \Omega = \emptyset$
- Etape2. Déterminer $\Omega(Q)$ selon la Propriété 3.3 et faire $\Omega = \Omega \cup \Omega(Q)$
- Etape3. Calculer la prochaine valeur de Q en augmentant Q tel que l'ensemble $\Omega(Q)$ change, (c'est à dire que l'ensemble $I^+(Q)$ change ou bien l'ordre défini dans l'ensemble $I^-(Q)$ change).
- Etape4. S'il n'existe pas de Q qui crée le changement, alors STOP. Sinon, Aller à l'Etape 2.

Remarque 3.2 : De la Propriété 3.3, il découle que chaque ensemble contient au plus $(|I|+1)$ éléments qui peuvent être déterminés en un temps polynomial. De plus, le nombre d'ensembles $\Omega(Q)$ à considérer est égal au nombre de changements de l'ensemble $I^+(Q)$ qui est borné supérieurement par $|I|$ plus le nombre de changements de l'ordre de l'ensemble $I(Q)$ qui est borné supérieurement par $|I|(|I|-1)$. Ceci est dû au fait que l'ordre des couples $(i, i') \in I \times I$ bascule une seule fois. Par conséquent, l'ensemble Ω contient au plus $(|I|+1)|I|^2(|I|-1)$ éléments qui peuvent être déterminés en un temps polynomial.

Remarque 3.3 : De la Propriété 3.3 et de l' **Algorithme 3.2**, il découle que l'ensemble Ω dépend seulement de la fonction $B_i(Q)$ des quantités de commande et du paramètre α_{ij} et il est indépendant de la variable de décision D_j .

Remarque 3.4: A l'Etape3 de l' **Algorithme 3.2**, la prochaine valeur de Q telle que l'ensemble $\Omega(Q)$ change est égale à : $\min\{q^+, q_1, q_2 \dots q_N\}$ où

$$q^+ \equiv \min_{i \in I} \{q > Q : B_i(q) = 0\} = \min_{i \in I^+} \left\{ \frac{-k_{ij}}{b_{ij}}, b_{ij} < 0 \right\},$$

$$q_i = \inf \left\{ q : \frac{B_i(q)}{\alpha_{ij}} > \frac{B_{i+1}(q)}{\alpha_{(i+1)j}} \right\} = \begin{cases} Q_i^0 & \text{si } \frac{k_{ij}}{\alpha_{ij}} < \frac{k_{ij}}{\alpha_{(i+1)j}} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases},$$

avec

$$Q_i^0 = \frac{k_{ij}\alpha_{(i+1)j} - k_{(i+1)j}\alpha_{ij}}{b_{(i+1)j}\alpha_{ij} - b_{ij}\alpha_{(i+1)j}}, \quad k_{ij} = F_j\chi\mu_i.$$

En combinant tous les résultats que nous venons de présenter et compte tenu des relations (3.27), (3.28) et (3.30) alors le problème de détermination de $V_j(\lambda, \beta)$ devient :

$$V_j(\lambda, \beta) = \inf_{D_j \geq 0} \inf_{Q > 0} \left\{ \min_{Z \in \Omega} \sum_{i \in I} B_i(Q)Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}Z_i + e_j D_j^2} - \beta_j D_j + h_j Q / 2 \right\} \quad (3.32)$$

Comme Ω est fini, nous pouvons écrire

$$V_j(\lambda, \beta) = \min_{Z \in \Omega} \left\{ \inf_{Q > 0} \sum_{i \in I} B_i(Q)Z_i + h_j Q / 2 + \inf_{D_j \geq 0} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}Z_i + e_j D_j^2} - \beta_j D_j \right\} \quad (3.33)$$

Nous posons

$$\varphi_j(Q) = \sum_{i \in I} B_i(Q)Z_i + \frac{h_j Q}{2}, \quad \psi_j(D_j) = \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}Z_i + e_j D_j^2} - \beta_j D_j.$$

Alors

$$V_j(\lambda, \beta) = \min_{Z \in \Omega} \left\{ \inf_{Q > 0} \varphi_j(Q) + \inf_{D_j \geq 0} \psi_j(D_j) \right\}. \quad (3.34)$$

Trouver les valeurs Q et D_j qui minimisent respectivement les fonctions $\varphi_j(Q)$ et $\psi_j(D_j)$ est trivial puisque ce sont des fonctions à une variable réelle d'un problème d'optimisation sans contrainte. En appliquant la méthode du gradient (dérivation par rapport au variable), nous obtenons pour chaque Z et sous la condition $0 \leq \beta_j^2 \leq e_j$ les solutions optimales :

$$Q_j(Z) = \sqrt{\frac{2F_j\chi \sum_{i \in I} \mu_i Z_i}{h_j}} \quad (3.35)$$

$$D_j(Z) = \beta_j \sqrt{\frac{\sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i}{e_j(e_j - \beta_j^2)}} \quad (3.36)$$

En remplaçant respectivement les solutions (3.35) et (3.36) dans les fonctions respectives $\varphi_j(Q)$ et $\psi_j(D_j)$, nous avons :

$$V_j(\lambda, \beta) = \min_{Z \in \Omega} T(Z) \quad (3.37)$$

où

$$T(Z) = \sum_{i \in I} b_{ij} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij} Z_i} + \sqrt{\frac{e_j - \beta_j^2}{e_j} \sum_{i \in I} \alpha_{ij} Z_i} \quad (3.38)$$

En rappel, comme nous l'avons déjà mentionné, la solution du sous problème (SP_j) est :

- $X_j = 0, Y_{ij} = 0, D_j = 0, L_j(\lambda, \beta) = 0$ si $f_j + V_j(\lambda, \beta) \geq 0$.
- $X_j = 1, Y_{ij} = Z_i, L_j(\lambda, \beta) = f_j + V_j(\lambda, \beta)$ si $f_j + V_j(\lambda, \beta) \leq 0$.

Donc si $f_j + V_j(\lambda, \beta) \leq 0$, un DC_j est localisé et au moins un client sera affecté à ce DC_j . Lors du calcul de $V_j(\lambda, \beta)$, Q est bornée comme mentionné au chapitre 2 par $Q_{\inf} \leq Q \leq Q_{\sup}$ où

$$Q_{\inf} = \sqrt{2 \min_{i \in I} F_j \chi \mu_i / h_j} \quad \text{et} \quad Q_{\sup} = \sqrt{2 \sum_{i \in I} F_j \chi \mu_i / h_j}$$

Pour conclure, nous présentons l'algorithme pour résoudre les sous problèmes (SP_j) :

Algorithme 3.3: Détermination de $L_j(\lambda, \beta)$

- Etape1. Initialiser $Q \leftarrow Q_{\inf}$, $Y = 0$, $X = 0$, $D_j = 0$ et $L_j(\lambda, \beta) = 0$.
- Etape2. Déterminer $\Omega(Q)$ en tenant compte de la Propriété 3.3.
- Etape3. Pour chaque solution $Z \in \Omega(Q)$,
 - 3.1 Calculer $D_j(Z)$ et $T(Z)$ avec les équations (3.36) et (3.38).
 - 3.2 Si $T(Z) + f_j < L_j(\lambda, \beta)$, $L_j(\lambda, \beta) = T(Z) + f_j$, $X = 1$, et $Y = Z$, $D_j = D_j(Z)$.
- Etape4. Calculer la prochaine valeur de Q en augmentant Q tel que l'ensemble $\Omega(Q)$ change c'est à dire l'ensemble $I^+(Q)$ change ou l'ordre des éléments dans l'ensemble $I^-(Q)$ change.
- Etape5. Si $Q > Q_{\sup}$, STOP. Sinon Aller à l'Etape2.

3.2.3 Résultats numériques et analyses

Nous présentons dans cette section les résultats numériques. Deux analyses expérimentales ont été réalisées pour (i) évaluer les performances de notre algorithme principal de calcul et (ii) effectuer une étude de sensibilité pour montrer les impacts des différents paramètres sur la structure du réseau étudié.

Nous avons utilisé les mêmes données que celles présentées au chapitre 2 pour générer les différentes classes de problème. Quant aux délais d'approvisionnement L_j , ce sont des variables aléatoires de moyenne L_j générée uniformément : $L_j \sim U[10,30]$ et d'écart type A_j généré uniformément : $A_j \sim U[5, 10]$. Les notations suivantes sont utilisées :

<i>NBE</i>	nombre d'instances générées aléatoirement pour chaque ensemble de paramètres du problème.
<i># RL</i>	nombre de zones de demande (zones potentielles de localisation d'un DC).
<i># DC</i>	nombre de centres de distribution localisés.
<i># ITS</i>	nombre total d'itérations de l'algorithme principal.
<i>LB</i>	borne inférieure.
<i>UB</i>	borne supérieure (solution admissible trouver par l'algorithme principal).
<i>GAP</i>	gap de dualité défini par $(UB - LB)/UB$
<i>CPU</i>	temps de calcul en secondes pour l'obtention d'une solution.

3.2.4.1 Performances de l'algorithme principal

Nous avons effectué une première phase d'expériences en considérant le cas où $NBE = 1$. Le Tableau 3.2 présente les performances où les coûts sont exprimés en M\$ (million de dollars). Nous observons que des bornes inférieures et supérieures sont très serrées.

Tableau 3.2. Performance de l'algorithme ($NBE = 1$)

# RL	LB (M\$)	UB(M\$)	GAP (%)	# DCS	CPU(S)
10	5.534	5.577	0.769	5	5
20	10.058	10.160	1.010	7	7
40	24.115	24.342	0.932	10	17
60	34.862	35.196	0.950	15	35
70	40.488	40.889	0.981	14	51
80	46.139	46.607	1.004	15	70
100	57.878	58.448	0.974	20	121
120	68.865	69.594	1.047	17	216
150	80.319	81.250	1.145	18	507

Dans la seconde phase, pour chaque $\#RL$ fixé, nous avons généré 5 instances du problème de façon aléatoire. Pour chaque instance, nous avons calculé la valeur minimale et maximale de la borne inférieure (LB), la borne supérieure (UB), le gap de dualité (GAP %) et déterminé le nombre minimal et maximal des centres de distribution localisés ($\#DCs$). Le Tableau 3.3 ci-dessous présente les résultats obtenus.

Tableau 3.3. Performance de l'algorithme ($NBE = 5$)

$\#RL$	LB (M\$)		UB (M\$)		GAP (%)		$\#DCS$	
	Min	max	min	max	min	max	min	max
10	5.35	9.83	5.40	9.87	0.38	0.85	3	5
20	10.0	17.4	10.1	17.5	0.56	1.05	4	7
40	22.4	25.2	22.7	25.4	0.88	1.49	8	10
60	32.3	37.2	32.7	38.0	0.95	2.07	11	17
70	35.6	43.5	36.2	43.9	0.93	1.56	14	19

A partir des Tableaux 3.2 et 3.3, nous pouvons observer que les solutions admissibles obtenues par l'algorithme de calcul sont très proche de l'optimum avec un gap de dualité qui ne dépasse pas 2.1%. Aussi, le nombre de centres de distribution augmente lorsque le nombre de zones de demande augmente. Ceci est vrai pour la plupart des réseaux de distribution afin de garantir un niveau de service meilleur. Nous observons aussi que le temps de calcul augmente avec la taille du problème et un temps de calcul $CPU = 507$ secondes est nécessaire pour le cas $\#RL = 150$.

Dans la troisième phase de nos expériences, nous nous sommes focalisés sur la résolution d'une instance du problème ($NBE = 1$) pour $\#RL = 80$ zones de demande. Le but est d'examiner la nature de la convergence de notre algorithme. Les Figures 3.1 et 3.2 illustrent respectivement l'évolution du gap de dualité, l'évolution des bornes inférieures (LB) et supérieure (UB) en fonction du nombre d'itérations ($\#ITS$). L'algorithme converge au bout de 152 itérations et fournit une borne inférieure $LB = 46.130.900\$$ et une borne supérieure $UB = 46.607.000\$$.

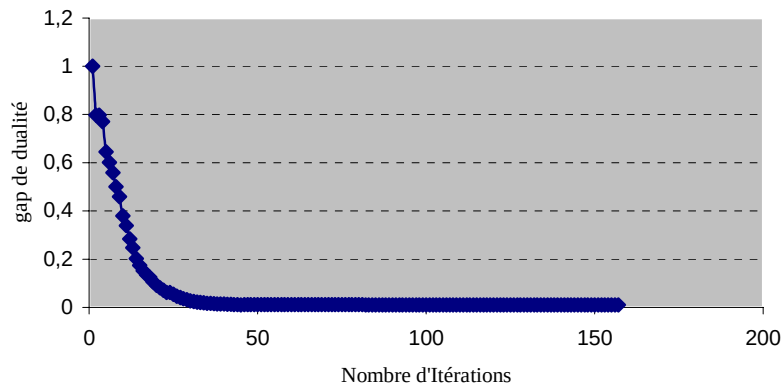


Figure 3.1 Courbe d'Evolution du GAP en fonction de #ITS: cas #RL= 80

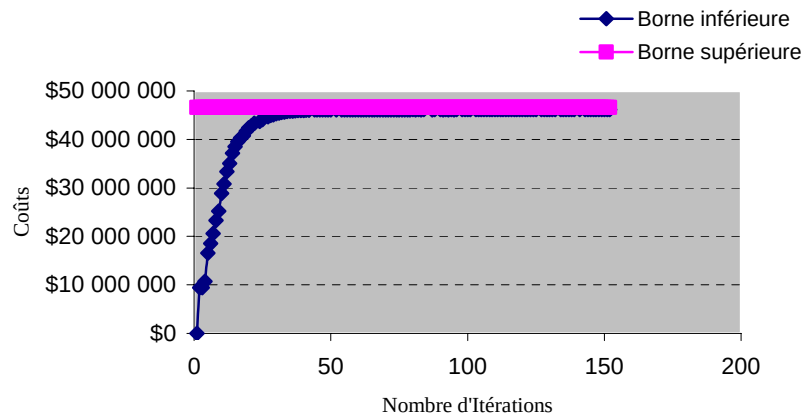


Figure 3.2 Courbe d'Evolution de LB et UB en fonction de #ITS: cas #RL= 80

Afin d'évaluer la robustesse de notre algorithme, pour le cas #RL=80 nous avons généré un maximum de 20 instances du problème (c'est-à-dire NBE varie de 5 à 20). Pour chaque NBE , nous avons déterminé les coûts minimum et maximum observés, les gaps minimum et maximum obtenus, ainsi que les nombres minimum et maximum des centres de distribution localisés. Nous reportons les résultats obtenus dans le Tableau 3.4. Ces résultats montrent que notre algorithme est très robuste avec un gap de dualité qui ne dépasse pas 1%.

Tableau 3.4. Performance de l'algorithme (#RL= 80)

NBE	$LB (M\$)$		$UB(M\$)$		$GAP (\%)$		$\# DCS$	
	min	max	min	max	min	max	min	max
5	41.8	46.5	42.2	47.0	0.93	1	15	18

10	40.0	47.0	40.7	47.5	0.98	1	11	17
15	40.0	49.9	40.5	51.0	0.92	1	13	19
20	38.7	48.6	39.1	49.1	0.91	1	11	20

3.2.4.2 Analyse de sensibilité

Nous étudions ici l'impact de certains paramètres du problème sur la configuration du réseau de distribution. Plus précisément, nous évaluons d'une part l'impact des coûts de transport et de stockage, et d'autre part l'impact des aléas de demande et des délais d'approvisionnement.

Pour l'étude de l'impact des coûts de transport et de stockage, nous introduisons deux paramètres :

γ_T : coefficient multiplicateur des coûts de transport,

γ_I : coefficient multiplicateur des coûts de stockage.

Ainsi, nous remplaçons les coûts de transport par $\gamma_T d_{ij}$, $\gamma_T a_j$ et les coûts de stockage par $\gamma_I h_j$.

Nous faisons varier séparément et indépendamment les paramètres γ_T et γ_I . Nous fixons d'abord $\gamma_T = 1$ et varions γ_I de 0.1 à 5 afin d'étudier l'impact du coût de stockage. Nous fixons ensuite $\gamma_I = 1$ et varions γ_T de 0.1 à 2 pour évaluer l'impact du coût de transport. Le Tableau 3.5 présente les résultats obtenus pour $NBE = 1$ et la Figure 3.3 (resp. Figure 3.4) montre la relation entre le nombre de centres de distribution localisé et le coût de transport total (resp. coût de stockage total).

Tableau 3.5. Impact des coûts de transport et des coûts de stockage

#RL	γ_T	γ_I	LB (M\$)	UB(M\$)	GAP(%)	#DCs
20	0.1	1	1.0845	1.2053	10.00	5
20	0.3	1	3.0872	3.196	3.42	6
20	0.7	1	7.0731	7.1762	1.43	7
20	1	1	10.058	10.160	1.01	7
20	1.5	1	15.032	15.135	0.67	8
20	2	1	20.000	20.109	0.51	10
20	1	0.1	10.016	10.118	1.01	7
20	1	0.3	10.029	10.131	1.01	7
20	1	5	10.161	10.266	1.01	4
40	0.1	1	2.5045	2.8059	10.74	6
40	0.3	1	7.3596	7.5935	3.08	9
40	0.7	1	16.934	17.164	1.33	9

40	1	1	24.115	24.342	0.93	10
40	1.5	1	36.079	36.305	0.62	12
40	2	1	48.042	48.269	0.47	17
40	1	0.1	24.031	24.258	0.93	10
40	1	0.3	24.056	24.283	0.93	8
40	1	5	24.333	24.565	0.94	6
60	0.1	1	3.6906	4.0753	9.43	9
60	0.3	1	10.582	10.993	3.73	11
60	0.7	1	24.488	24.824	1.35	13
60	1	1	34.862	35.196	0.95	15
60	1.5	1	52.150	52.484	0.63	19
60	2	1	69.438	69.772	0.47	24
60	1	0.1	34.728	35.062	0.95	15
60	1	0.3	34.768	35.102	0.95	15
60	1	5	35.118	35.563	1.25	10
80	0.1	1	4.7822	5.3660	10.87	10
80	0.3	1	14.014	14.537	3.59	11
80	0.7	1	30.289	32.864	1.95	13
80	1	1	46.139	46.607	1.04	15
80	1.5	1	69.050	69.513	0.66	17
80	2	1	91.955	92.418	0.50	22
80	1	0.1	45.989	46.453	0.99	16
80	1	0.3	46.008	46.500	1.05	14
80	1	5	46.077	47.003	1.97	8

Le Tableau 3.5 montre que lorsque les coûts de transport et les coûts de stockage augmentent, le coût total de conception du réseau de distribution augmente. Sous les conditions de nos expériences numériques, nous observons que le coût total optimal du réseau de distribution est plus sensible au coût de transport qu'au coût de stockage. Ceci montre que le coût de transport joue un rôle important lors de la conception des réseaux de distribution. De plus, nous observons que le problème devient de plus en plus difficile à résoudre (avec un gap de dualité qui augmente) quand les coûts de transport deviennent petits, c'est-à-dire $\gamma_T = 0.1$, et les coûts de stockage deviennent grands, c'est à dire $\gamma_I = 5$.

La Figure 3.3 montre que lorsque les coûts de transport augmentent, le nombre de centres de distribution localisés augmente. De plus, la relation entre le nombre de centres de distribution localisés et le coût de transport total peut être approximée par une fonction linéaire (voir Figure 3.3). Par ailleurs, plus le nombre de zones de demande augmente, plus nous avons besoin de localiser de centres de distribution.

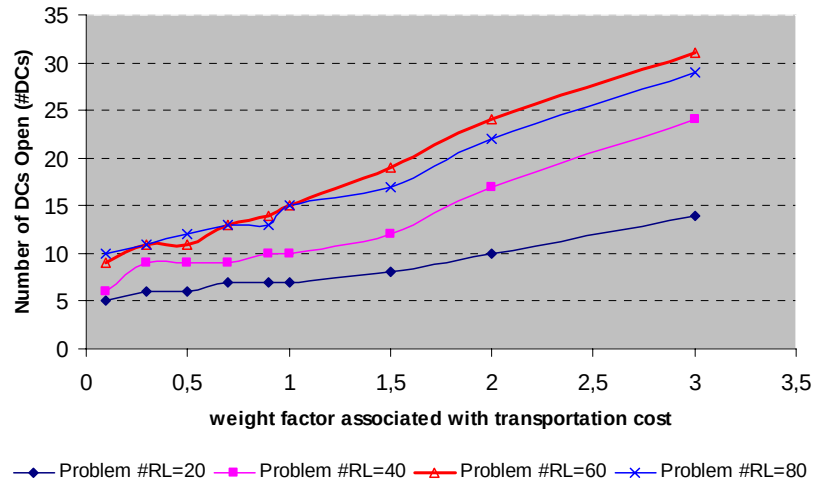


Figure 3.3 Nombre de DCs vs. Coût de transport ($\gamma_I=1$).

La Figure 3.4 montre que lorsque le coût de stockage augmente, le nombre de centres de distribution diminue. Par contre, lorsque le nombre de centres de distribution diminue cela entraîne une réduction des coûts de stockage. Cependant, la relation entre le nombre de centres de distribution à localiser et le coût de stockage est une relation très complexe à déterminer. Par exemple, dans le cas où $\#RL=20$, le nombre de centres de distribution ($\#DCs$) diminue pour $\gamma_I \in [0.1, 0.7[$ et reste constant pour $\gamma_I \in [0.7, 1]$ et ce nombre croit quand $\gamma_I > 1$. De plus, comme dans la Figure 3.3, $\#DCs$ augmente quand $\#RL$ augmente.

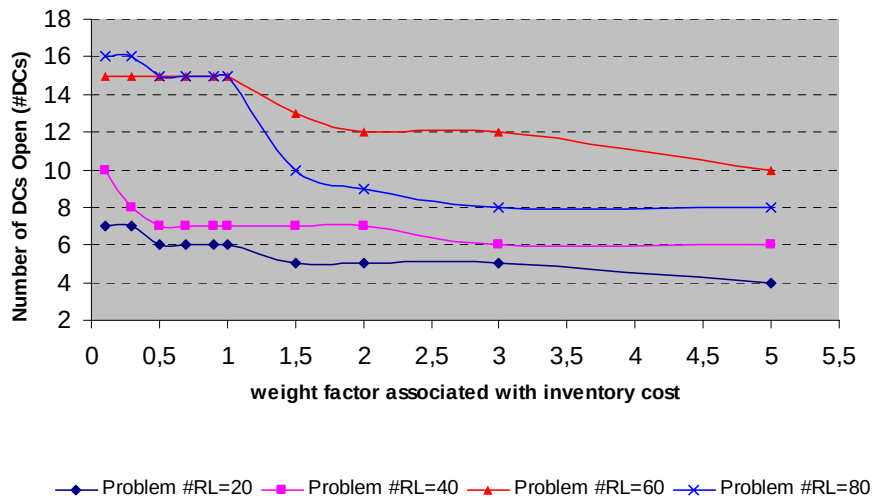


Figure 3.4 $\#DCs$ vs. coût de stockage ($\gamma_I=1$).

Nous étudions à présent les impacts des aléas de demande et des délais d’approvisionnement sur la structure optimale du réseau de distribution. Pour cela, nous introduisons un paramètre u qui caractérise les aléas et nous remplaçons les écarts types de demande σ_i et les écarts du délai de livraison Δ_j par respectivement $u\sigma_i$ et $u\Delta_j$. Nous varions le paramètre u de 0 à 2. La Figure 3.5 montre l’évolution du nombre de centres de distribution à localiser en fonction de u . De façon générale, la variabilité des délais d’approvisionnement et des demandes des clients a un impact significatif sur la configuration du réseau de distribution. Lorsque la variabilité des aléas de demande et des délais d’approvisionnement croît, le nombre de centres de distribution localisés diminue. Ce résultat est conforme au concept de « risk pooling » rencontré dans la théorie sur la conception des réseaux logistiques. Cependant, la relation d’une part entre $\#DC$ et la variabilité des délais d’approvisionnement et d’autre part entre $\#DC$ et la variabilité des aléas de demande est assez complexe à représenter.

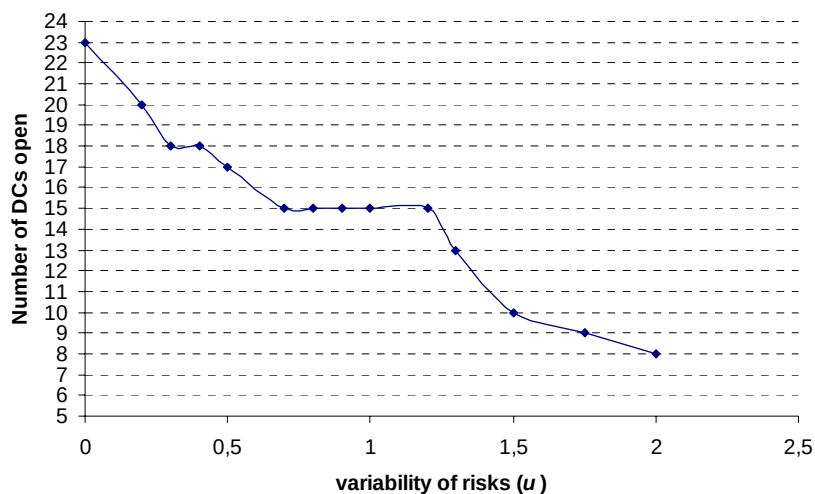


Figure 3.5 $\#DCs$ vs. variabilité des aléas de demande et du délai

3.3 Cas mono fournisseur multi produit

3.3.1 Description du problème

Dans cette section, nous nous intéressons à la conception d’un réseau de distribution multi produit. En terme de structure, le réseau est similaire au réseau étudié au début du chapitre. Plus précisément, nous nous plaçons dans le cas où le fournisseur approvisionne l’ensemble des zones de demande en plusieurs types de produits. La demande générée par une zone de demande est

aléatoire et indépendante pour chaque type de produit. Cette hypothèse d'indépendance nous permet de décomposer le problème produit par produit. Pour une économie d'échelle, nous nous limitons au cas où chaque client est servi exactement par un et un seul centre de distribution pour chaque type de produit. Un centre de distribution ne peut pas être approvisionné par un autre centre de distribution quelque soit le type de produit. Comme dans la section précédente, pour chaque type de produit, nous supposons le maintien d'un stock de sécurité dans les centres de distribution pour garantir un certain niveau de service. Nous supposons que le stock de chaque type de produit est géré de façon indépendante en utilisant la politique de la quantité économique de commande. Suivant cette politique, le centre de distribution envoie les commandes au fournisseur pour chaque type de produit. Les demandes reçues par le fournisseur sont satisfaites (pas de contrainte de capacité) dans des délais d'approvisionnement aléatoires dépendant du type de produit.

L'objectif consiste à chercher les meilleures localisations des centres de distribution, dont le nombre est inconnu, ainsi que les meilleures affectations des clients aux centres de distribution produit par produit. Le but est de minimiser l'ensemble des coûts non linéaires du réseau de distribution.

3.3.2 Formulation mathématique

Dans cette section, nous considérons les notations suivantes :

P ensemble des types de produit indexé par p .

Demande

μ_{ip} demande moyenne générée par jour du produit p par le client i .

σ_{ip}^2 variance de demande générée par jour du produit p par le client i .

Coût

d_{ijp} coût de transport unitaire du produit p du DC_j vers le client i .

K_{jp} coût fixe de commande du produit p placée par le DC_j auprès du fournisseur.

ε_{jp} coût fixe de transport du produit p (par livraison) du fournisseur vers le DC_j .

a_{jp} coût de transport unitaire du produit p du fournisseur vers le DC_j .

ζ_p coût unitaire d'achat du produit p chez le fournisseur.

h_{jp} coût unitaire de stockage annuel du produit p dans le DC_j .

Autres paramètres

L_{jp} délai moyen d'approvisionnement du produit p du fournisseur au DC_j .

Λ_{jp}^2 variance du délai d'approvisionnement du produit p du fournisseur au DC_j .

α^p taux de service dans le réseau pour le produit p .

z_{α}^p coefficient de sécurité pour le produit p .

Les décisions de localisation et d'allocation sont modélisées respectivement par les variables X et Y définies :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est localisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad Y_{ijp} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ demande le produit } p \text{ chez le } DC_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La demande annuelle du produit p au DC_j est donnée par : $D_{jp} = \chi \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} \mu_{ip} Y_{ijp}$. Compte tenu du fait que les demandes sont indépendantes pour chaque type de produit et de gestions indépendantes des stocks dans le DC, la modélisation des coûts (coût fixe de localisation, coût de transport, coût d'approvisionnement et coût de stockage) est identique à la modélisation des coûts présentée dans la section 3.2.2 dans le cas d'un seul type de produit p .

Le problème est modélisé comme un programme non linéaire en variables binaires défini par :

$$(MP) \quad H^* = \min_{X,Y} H(X,Y) \quad (3.39)$$

où

$$H(X,Y) = \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} (M_{ijp} + \mu_{ip} \varsigma_p) Y_{ijp} + \sum_{j \in I} \sum_{p \in P} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Y_{ijp}} + \sum_{j \in I} \sum_{p \in P} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Y_{ijp} + e_{jp} \left(\sum_{i \in I} \mu_{ip} Y_{ijp} \right)^2} \quad (3.40)$$

sous les contraintes

$$\sum_{j \in J} Y_{ijp} = 1, \quad \forall i \in I \quad \forall p \in P \quad (3.41)$$

$$Y_{ijp} \leq X_j, \quad \forall j \in J \quad \forall i \in I \quad \forall p \in P \quad (3.42)$$

$$X_j, Y_{ijp} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad \forall i \in I \quad \forall p \in P \quad (3.43)$$

où

$$M_{ijp} = \chi \mu_{ip} (d_{ijp} + a_{jp}), \quad c_{ijp} = 2h_{jp} \mu_{ip} \chi (K_{jp} + \varepsilon_{jp}), \quad \alpha_{ijp} = L_{jp} \sigma_{ip}^2 (h_{jp} z_\alpha)^2, \quad e_{jp} = (\Lambda_{jp} h_{jp} z_\alpha)^2$$

La fonction objectif $H(X, Y)$ représente la somme des différents coûts suivants : le premier terme correspond au coût fixe pour localiser les centres de distribution dans le réseau, le second terme représente le coût de transport total des produits des centres de distribution vers les zones de demande et du fournisseur vers les centres de distribution, plus le coût total d'achat des produits, le troisième terme représente le coût total d'approvisionnement et de stockage et le quatrième terme est le coût de maintien des stocks de sécurité. La contrainte (3.41) assure que chaque client est servi exactement par un seul centre de distribution et pour un et un seul type de produit. La contrainte (3.42) assure l'affectation des clients aux DC ouverts. La nature binaire des différentes variables de décision est exprimée par la contrainte (3.43).

3.3.3 Résolution du problème (MP)

Pour résoudre le problème (MP), nous adaptons les algorithmes déjà proposés en section 3.2.3 dans le cas où le réseau distribue un seul type de produit. Nous introduisons la variable de décision « D_{jp} » qui représente la demande du produit p dans le DC_j . Avec cette nouvelle variable de décision, le problème (MP) est équivalent au problème suivant :

$$(MPN) \quad H^* = \min_{X,Y,D} H(X, Y, D) \quad (3.44)$$

où

$$H(X, Y, D) = \sum_{j \in J} f_j X_j + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} (M_{ijp} + \mu_{ip} \varsigma_p) Y_{ijp} + \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Y_{ijp}} + \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Y_{ijp} + e_{jp} D_{jp}^2} \quad (3.45)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in J} Y_{ijp} = 1, \quad \forall i \in I \quad \forall p \in P \quad (3.46)$$

$$\sum_{i \in I} \mu_{ip} Y_{ijp} \leq D_{jp}, \quad \forall j \in J \quad \forall p \in P \quad (3.47)$$

$$Y_{ijp} \leq X_j, \quad \forall j \in J \quad \forall i \in I \quad \forall p \in P \quad (3.48)$$

$$D_{jp} \geq 0, \quad X_j, Y_{ijp} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad \forall i \in I \quad \forall p \in P \quad (3.49)$$

Pour résoudre le problème (MPN), nous relaxons les contraintes (3.46) et (3.47) en introduisant respectivement les vecteurs multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_{ip})$ et $\beta = (\beta_{jp}) \quad \forall i, j \in I, \quad \forall p \in P$. La relaxation de ces contraintes permet d'obtenir le problème relaxé :

$$\begin{aligned} L(\lambda, \beta) = \min_{X, Y, D} & \sum_{j \in J} f_j X_j + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} b_{ijp} Y_{ijp} + \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Y_{ijp}} \\ & + \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Y_{ijp} + e_{jp} D_{jp}^2} - \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \beta_{jp} D_{jp} + \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} \lambda_{ip} \end{aligned} \quad (3.50)$$

sous les contraintes (3.48) et (3.49) et le paramètre b_{ijp} est défini par

$$b_{ijp} = M_{ijp} + \mu_{ip} \zeta_p - \lambda_{ip} + \beta_{jp} \mu_{ip}.$$

La relaxation de la contrainte (3.46) rend les décisions de localisation indépendante et permet une décomposition du problème DC_j par DC_j . Ainsi, le problème relaxé (3.50) devient :

$$L(\lambda, \beta) = \sum_{j \in J} L_j(\lambda, \beta) + \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} \lambda_{ip} \quad (3.51)$$

où le sous problème $L_j(\lambda, \beta)$ est défini par:

$$L_j(\lambda, \beta) = \min_{X, Y, D} f_j X_j + \sum_{p \in P} \left\{ \sum_{i \in I} b_{ijp} Y_{ijp} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Y_{ijp}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Y_{ijp} + e_{jp} D_{jp}^2} - \beta_{jp} D_{jp} \right\} \quad (3.52)$$

sous les contraintes (3.48) et (3.49).

Remarque 3.6: Le problème (3.52) ne peut pas être décomposé en produit puisque les coûts fixes de localisation ne dépendent pas du type de produit. Ce qui complique une fois de plus la résolution du problème relaxé. Par contre si la décision de localisation du DC_j est prise, alors le problème (3.52) devient séparable par produit.

Comme pour le cas mono produit, on a la propriété suivante :

Propriété 3.4:

- (a) $\forall j \in I$, si $\exists p^* \in P$ tel que $\sqrt{e_{jp^*}} < \beta_{jp^*}$, alors $L_j(\lambda, \beta) = -\infty$
- (b) $L(\lambda, \beta) \leq H^* \quad \forall (\lambda, \beta)$

Preuve : La propriété 3.4. (b) est évidente. Pour la propriété 3.4 (a), avec $X_j = 0$, $Y_{ij} = 0$ et $D_{jp} = 0$ pour tout $p \neq p^*$, $L_j(\lambda, \beta) \leq \min_{D_{jp^*}} \left(\sqrt{e_{jp^*}} - \beta_{jp^*} \right) D_{jp^*} = -\infty$. Q.E.D. ■

Compte tenu de cette Propriété, nous considérons dans cette section les valeurs du multiplicateur de Lagrange β_{jp} tels que :

$$0 \leq \beta_{jp} \leq \sqrt{e_{jp}}$$

Pour résoudre le problème (MPN), nous adaptons l'**Algorithme 3.1** proposé en section 3.2.3.4. L'étape la plus importante est la résolution des sous problèmes spécifiques au DC_j , c'est-à-dire le problème (3.52). La résolution du problème dual est faite par l'algorithme ASGM présenté au chapitre 1. A chaque itération de l'algorithme dual, une borne supérieure du problème original peut être obtenue via les solutions du problème relaxé (3.51) de manière similaire au cas mono produit.

Pour résoudre le sous problème (3.52) pour un DC_j fixé, deux cas sont possibles :

- Cas $X_j = 0$. La contrainte (3.48) implique que $Y_{ijp} = 0 \quad \forall i \in I, p \in P$. Alors
$$L_j(\lambda, \beta) = \min_D \sum_{p \in P} \left\{ \sqrt{e_{jp}} - \beta_{jp} \right\} D_{jp} = 0 \quad \text{et } D_{jp} = 0 \quad \forall p \in P \text{ puisque } 0 \leq \beta_{jp} \leq \sqrt{e_{jp}}, \quad \forall p \in P.$$
- Cas $X_j = 1$. La contrainte (3.48) devient redondante. L'affectation des clients à ce centre de distribution (pour tout produit) est déterminée en résolvant le sous problème :

$$V_j(\lambda, \beta) = \min_{Y, D} \sum_{p \in P} \left\{ \sum_{i \in I} b_{ijp} Y_{ijp} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Y_{ijp}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Y_{ijp} + e_{jp} D_{jp}^2} - \beta_{jp} D_{jp} \right\} \quad (3.53)$$

La décision X_j ayant été prise dans le sous problème (3.53), les décisions concernant les différents produits deviennent alors indépendantes et :

$$V_j(\lambda, \beta) = \sum_{p \in P} V_{jp}(\lambda, \beta) \quad (3.54)$$

avec

$$V_{jp}(\lambda, \beta) = \min_{Z, D} \sum_{i \in I} b_{ijp} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Z_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Z_i + e_{jp} D_{jp}^2} - \beta_{jp} D_{jp} \quad (3.55)$$

Par conséquent,

$$L_j(\lambda, \beta) = \min \left\{ 0, f_j + V_j(\lambda, \beta) \right\} = \min \left\{ 0, f_j + \sum_{p \in P} V_{jp}(\lambda, \beta) \right\} \quad (3.56)$$

Chaque sous problème (3.55) est identique au sous problème (3.24) au cas mono produit. Par conséquent, selon (3.37),

$$V_{jp}(\lambda, \beta) = \min_{Z \in \Omega_{jp}} \sum_{i \in I} b_{ijp} Z_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijp} Z_i} + \sqrt{\frac{e_{jp} - \beta_{jp}^2}{e_{jp}} \sum_{i \in I} \alpha_{ijp} Z_i} \quad (3.57)$$

où l'ensemble Ω_{jp} peut être déterminé par l'**Algorithme 3.2** (comme au cas mono produit, la quantité de commande Q peut être limitée dans l'intervalle

$\left[\sqrt{2 \min_{i \in I} F_{jp} \chi \mu_{ip} / h_{jp}}, \sqrt{2 \sum_{i \in I} F_{jp} \chi \mu_{ip} / h_{jp}} \right]$). La détermination de $L_j(\lambda, \beta)$ est alors évidente.

Algorithme 3.4: Détermination de $L_j(\lambda, \beta)$

Etape1. Pour chaque produit p ,

2.1 Déterminer Ω_{jp} avec l'**Algorithme 3.2**

2.2 Déterminer $V_{jp}(\lambda, \beta)$, $Y_{ijp}^* = Z_i$, et D_{jp}^* avec la relation (3.57)

Etape2. Si $f_j + \sum_{p \in P} V_{jp}(\lambda, \beta) < 0$, alors $L_j(\lambda, \beta) = f_j + \sum_{p \in P} V_{jp}(\lambda, \beta)$, $X = 1$,

$D_{jp} = D_{jp}^*$ et $Y_{ijp} = Y_{ijp}^*$. Sinon, $Y = 0$, $X = 0$, $D_{jp} = 0$ et $L_j(\lambda, \beta) = 0$.

3.3.4 Résultats numériques et analyses

Nous avons effectué quelques expériences numériques afin de valider notre approche dans le cas

multi produit. Les paramètres liés à la demande (μ_{ip} , σ_{ip}), ceux au délai d'approvisionnement (L_{jp} , A_{jp}) et χ sont les mêmes qu'en section 3.2.4 pour chaque type de produit. De façon analogue, les coûts f_j , a_{jp} , et d_{ijp} ont été générés de façon uniforme comme en section 3.2.4 pour chaque type de produit. Le reste des paramètres du problème est comme suit :

- le coût unitaire de stockage (h_{jp}): généré suivant une loi de distribution uniforme $h_{jp} \sim U [1,2]$.
- coût unitaire d'achat (ζ_p): généré suivant une loi de distribution uniforme $\zeta_p \sim U [1,3]$.
- coût fixe de commande (K_{jp}) et coût fixe de transport (ε_{jp}): générés respectivement suivant une loi de distribution uniforme $K_{jp} \sim U [20,30]$ et $\varepsilon_{jp} \sim U [10, 20]$.
- coefficient de sécurité z_{α^p} : $z_{\alpha^p} = 1.96$ (pour un taux de service $\alpha^p = 97.5\%$) $\forall p$.

Pour mieux évaluer les performances de notre algorithme de calcul, nous avons testé différentes classes de problème ($\#RL$, $\#P$), où $\#RL$ désigne le nombre de zone de demande et $\#P$ le nombre de produits dans le réseau. Pour chaque classe de problème, nous avons généré une seule fois les données du problème ($NBE = 1$). Compte tenu de la taille du problème, nous nous sommes limités à 40 zones de demande et 5 types de produit. Nous avons fixé $\#RL$ et varié $\#P = 3, 4, 5$. Le Tableau 3.6 présente les résultats obtenus.

Tableau 3.6. Performance de l'algorithme dans le cas multi produit

$\#RL$	$\#P$	$LB (M\$)$	$UB(M\$)$	$GAP(\%)$	$\#DCS$	$CPU(S)$	$\#ITS$
10	3	585.107	585.107	0	5	15	34
10	4	838.533	840.983	0.2913	6	20	45
10	5	1220.120	1220.970	0.0692	5	37	125
15	3	1071.93	1071.93	0	10	56	123
15	4	1290.91	1302.91	0.9214	9	89	251
15	5	1694.22	1694.22	0	12	123	354
20	3	1360.30	1360.300	0	11	254	54
20	4	1791.75	1791.75	0	11	354	79
20	5	2255.56	2255.56	0	11	402	101
40	3	2779.25	2782.24	0.1072	23	625	80

40	4	3565.1	3567.44	0.0654	20	854	97
40	5	4197.84	4463.54	5.9526	19	921	225

Nous constatons que l'algorithme résout efficacement le problème. L'algorithme fournit des bornes très serrées avec des gaps de dualité qui ne dépassent pas 1%, à l'exception du cas $\#RL=40$ et $\#P=5$. Il est important de signaler que pour certaines classes de problème nous avons $GAP=0$. Pour $\#RL$ fixé, nous observons qu'il n'y a pas un grand changement dans le nombre de centres de distribution localisés lorsque le nombre de produit varie légèrement. En effet, lorsque $\#P$ augmente de 3 à 5, nous observons soit une augmentation de $\#DCs$, soit une diminution de $\#DCs$. Dans le cas $\#RL=20$, nous avons un $\#DCs$ constant. Par conséquent, la relation entre le nombre de centres de distribution à localiser et le nombre de produits dans le réseau est une relation très complexe à déterminer. Le temps de calcul augmente avec la taille des problèmes et on a un $CPU=921$ secondes pour la classe de problème $\#RL=40$ et $\#P=5$. A ce stade, nous pouvons attester que l'algorithme proposé est efficace (pour des classes de problème de tailles faibles) et nous sommes conscients que des expériences numériques assez poussées sont nécessaires pour mieux juger de son efficacité.

Dans une seconde phase de nos expériences, nous avons considéré les classes de problème (10, 3), (20, 3), et (40, 4). Dans le but d'observer l'évolution des gaps de dualité à chaque itération de l'algorithme lagrangien, la Figure 3.6 illustre la performance de l'algorithme. Nous avons toujours un gap de dualité très faible d'une itération à l'autre. La Figure 3.7 montre l'évolution des bornes lagrangiennes en fonction du nombre d'itérations pour les classes de problème (10, 3), (20, 3), et (40, 3). Le Tableau 3.6 et les Figures 3.6, 3.7 montrent que nous avons une bonne convergence. Ceci montre une fois de plus l'efficacité de notre approche lagrangienne.

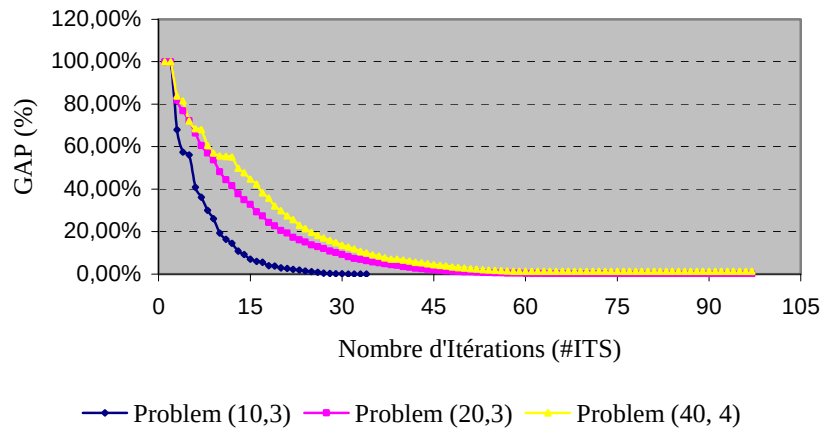


Figure 3.6 GAP vs. Nombre d'itérations (cas multi produit)

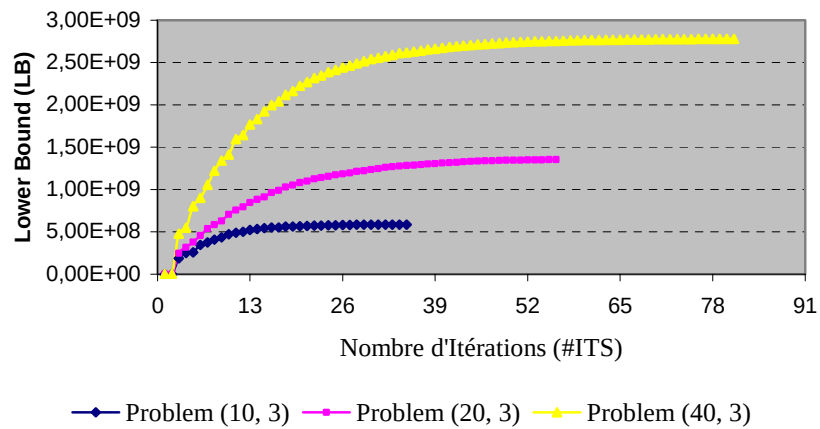


Figure 3.7 LB vs. Nombre d'itérations (cas multi produit)

Dans la troisième phase de nos expériences, l'objectif est d'analyser la variation des coûts en fonction du taux ou niveau de service pour chaque type de produit. Nous avons fait appel à la table de la loi normale pour déterminer les coefficients de sécurité z_{α}^p et le niveau de service α^p correspondant. Pour 4 types de produit, nous avons considéré $z_{\alpha}^p \in \{1.28, 1.64, 1.96, 2.58\}$ qui correspond respectivement à un taux de service $\alpha^p \in \{80\%, 90\%, 97\%, 99\%\}$. La Figure 3.8 montre que lorsque le niveau de service augmente pour un type de produit donné, le coût total du réseau de distribution augmente, ainsi que et le nombre de centres de distribution localisés.

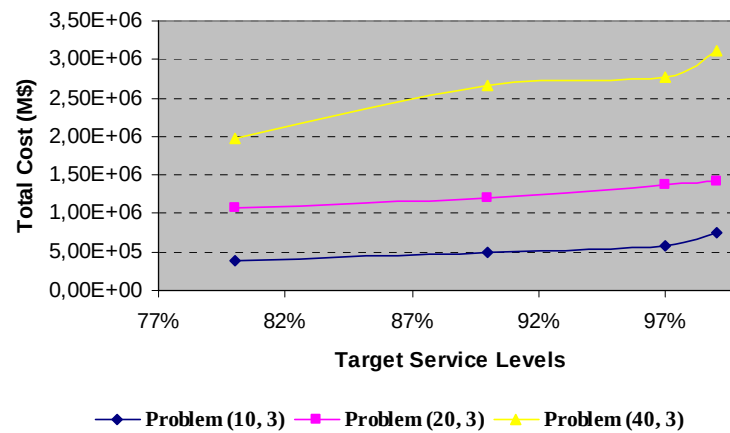


Figure 3.8 *LB* vs. Taux de service

3.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons développé une approche basée sur la technique de relaxation lagrangienne pour la conception d'un réseau de distribution stochastique mono fournisseur avec délais d'approvisionnement aléatoires. Nous avons considéré le cas mono produit et développé un algorithme dont la performance a été validée via des expériences numériques. Une étude de sensibilité liée à certains paramètres du problème (coût de transport et coût de stockage, ainsi que les aléas de demande et des délais d'approvisionnement) a été menée dans le but d'examiner leurs impacts sur la structure du réseau.

Sous certaines hypothèses restrictives, nous avons réadapté les algorithmes développés dans le cas mono produit, pour traiter le cas multi produit. Pour ce cas, des expériences numériques (sur des problèmes de tailles faibles) ont été réalisées et les résultats analysés attestant encore de l'efficacité de l'approche.

Dans le chapitre suivant, nous abordons le cas où le réseau de distribution est composé de plusieurs fournisseurs assurant l'approvisionnement des centres de distribution dans des délais aléatoires. Pour réduire la complexité des modèles obtenus, nous nous limitons à un seul type de produit. L'objectif principal est d'intégrer simultanément les décisions de choix des fournisseurs et de localisation-allocation dans même modèle de conception.

Chapitre 4

Conception d'un réseau de distribution stochastique multi fournisseurs avec des délais d'approvisionnement aléatoires

Dans ce chapitre, nous traitons un problème de conception d'un réseau stochastique de distribution où les décisions stratégiques de choix des fournisseurs, de localisation des centres de distribution et d'affectation des zones de demande sont intégrées dans un même modèle d'optimisation. Le réseau est composé de plusieurs fournisseurs approvisionnant, dans des délais aléatoires, un ensemble de centres de distribution à localiser qui ont pour rôles de satisfaire les demandes (en un seul type de produit) provenant des différentes zones de demande. L'objectif est de choisir les meilleurs fournisseurs, les meilleures localisations des centres de distribution, et les meilleures affectations des zones de demande aux centres de distribution dans le but de minimiser une fonction de coût non linéaire. Pour cela, nous avons développé une méthode basée sur la relaxation lagrangienne. Les résultats numériques obtenus attestent de la validité de la méthode proposée.

Publications : [Tanonkou et al., 2006e], [Tanonkou et al., 2007].

4.1 Introduction

Ce chapitre traite du problème de conception d'un réseau de distribution stochastique où les décisions de sélection des fournisseurs, de localisation des centres de distribution et d'affectation des zones de demande sont traitées simultanément. A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de travaux qui intègrent dans un même modèle d'optimisation ces trois décisions stratégiques. Traditionnellement, les deux axes de recherche (sélection des fournisseurs et localisation-allocation) sont abordés séparément. Les travaux de recherche sur les problèmes de sélection/choix des fournisseurs considèrent habituellement que les localisations des sites à approvisionner sont fixées à l'avance. De même, les travaux de recherche réalisés sur les problèmes de localisation-allocation considèrent que les fournisseurs sont déjà sélectionnés.

Motivé par ce constat, l'objectif de ce chapitre est de résoudre un problème d'optimisation qui regroupe trois niveaux de décisions : (i) localisation des centres de distribution, (ii) sélection des fournisseurs pour assurer les approvisionnements (en un seul type de produit) et enfin, (iii) affectation des zones de demande aux centres localisés. Pour ce problème, la complexité est double : (i) la non linéarité de la fonction objectif (dû à l'introduction des coûts de stockage) et (ii) l'introduction d'une troisième variable de décision binaire liée au choix des fournisseurs. Les hypothèses du chapitre précédent restent les mêmes à l'exception d'une nouvelle décision liée aux choix des fournisseurs.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : la section 4.2 donne une description détaillée du problème étudié. Dans la section 4.3, nous décrivons notre formulation mathématique. Notre approche de résolution ainsi que les différents algorithmes développés font l'objet de la section 4.4. La section 4.5 présente nos différentes expériences numériques et analyses. Enfin, la section 4.6 conclut le chapitre par quelques remarques et perspectives.

4.2 Description du problème

Le réseau de distribution considéré est composé de plusieurs fournisseurs approvisionnant plusieurs zones de demande (Figure 4.1). Chaque zone de demande est une zone potentielle de

localisation de centre de distribution (DC). Elle génère une demande aléatoire en un *seul type de produit*. La structure du réseau (lien de connexion des fournisseurs aux zones de demande, et entre les différentes zones de demande) est identique à la structure déjà présentée aux chapitres 2 et 3. Pour une économie d'échelle, nous nous limitons au cas où chaque DC est servi par un et seul fournisseur et chaque client est servi exactement par un et un seul centre de distribution. Nous supposons qu'un centre de distribution ne peut pas être approvisionné par un autre centre de distribution.

Les demandes de chaque client sont envoyées au centre de distribution en charge de son service. Pour la gestion de son stock, chaque centre de distribution utilise la politique de la quantité économique. Un stock de sécurité est maintenu par chaque centre de distribution pour garantir un certain niveau de service. Suivant sa politique de stockage, le centre de distribution envoie ses commandes au fournisseur en charge de son approvisionnement. Les demandes reçues par le fournisseur sont satisfaites (pas de contrainte de capacité) et nous supposons un délai d'approvisionnement aléatoire. Ce délai est indépendant de la quantité demandée et englobe le délai de préparation des commandes chez le fournisseur ainsi que le délai de transport (fournisseur-DC). Chaque centre de distribution servira les différents clients qui lui sont affectés et nous supposons un coût de transport entre le centre de distribution et le client. Dans cette étude, le délai de transport entre le centre de distribution et le client n'est pas considéré. De plus, nous plaçons dans le cas où il n'y a pas de coût fixe pour le choix de fournisseur.

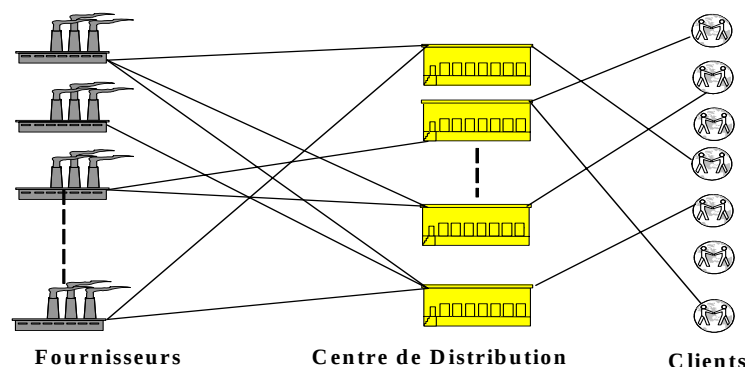


Figure 4.1 Réseau de distribution étudié : cas multi fournisseurs

Le problème considéré dans ce chapitre peut être résumé comme suit : soit I l'ensemble des zones de demande (clients) générant des demandes aléatoires en un seul type de produit et K l'ensemble

des fournisseurs potentiels assurant l'approvisionnement du réseau dans des délais aléatoires. Notre problème consiste à décider simultanément : (i) des localisations des différents centres de distribution (DCs), (ii) des affectations des DCs aux fournisseurs sélectionnés et (iii) des affectations des zones de demande aux DCs. Le but est la minimisation d'une fonction non linéaire incluant les coûts fixes de localisation, les coûts de transport, les coûts d'approvisionnement/stockage et les coûts de maintien des stocks de sécurité.

Le problème est formulé comme programme non linéaire en variables binaires. La section qui suit présente en détails notre formulation mathématique.

4.3 Formulation mathématique

Les notations du chapitre 2 restent valables et nous introduisons les nouvelles les notations suivantes :

K ensemble des fournisseurs indexés par k .

Coût

F_{jk} coût fixe de commande (inclus coût fixe de transport) placée par le DC_j auprès du fournisseur k .

a_{jk} coût de transport unitaire du fournisseur k vers le DC_j .

ζ_k coût unitaire d'achat du produit chez le fournisseur k .

Autres paramètres

L_{jk} délai moyen d'approvisionnement (en jours) du fournisseur k par DC_j .

$\mathcal{A}_{jk}^2$ variance du délai d'approvisionnement du fournisseur k par DC_j .

Les décisions stratégiques de localisation sont modélisées par la variable X et les décisions tactiques d'allocation des clients aux DCs par la variable Y . Les décisions stratégiques de choix des fournisseurs sont représentées par la variable Z . Elles sont définies par :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est localisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$Z_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si le fournisseur } k \text{ est choisi pour approvisionner le } DC_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avant de formuler problème en un modèle de programmation mathématique, nous présentons une description de la structure des coûts de la fonction objectif à minimiser. Compte tenu de la variable de localisation X , le coût total de localisation est donné par :

$$\sum_{j \in I} f_j X_j \quad (4.1)$$

Tenant compte de la variable d'affectation des clients Y , et de la variable de choix des fournisseurs Z , le coût total de transport de l'ensemble des fournisseurs vers les centres de distribution et des centres de distribution vers les zones de demande est :

$$\sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \chi \mu_i \left(d_{ij} + \sum_{k \in K} a_{jk} Z_{jk} \right) Y_{ij} \quad (4.2)$$

Etant donné que les stocks dans les centres de distribution sont gérés en utilisant une politique de la quantité économique de commande, le coût total d'approvisionnement est donné par (cf. chapitre 2) :

$$\sum_{j \in I} \left(\sum_{k \in K} \sqrt{2 h_j F_{jk} \chi \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}} \right) Z_{jk} \quad (4.3)$$

Le coût total d'achat du produit chez les fournisseurs est donné par :

$$\sum_{j \in I} \left(\sum_{k \in K} \varsigma_k \chi \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right) Z_{jk} \quad (4.4)$$

La modélisation des coûts des stocks de sécurité est similaire à la modélisation faite au chapitre 3 dans le cas d'un délai d'approvisionnement aléatoire. Si nous supposons que le fournisseur k approvisionne le DC_j , la demande de DC_j pendant le délai d'approvisionnement chez le fournisseur k est une variable aléatoire de moyenne :

$$\bar{\mu}_{jk} = L_{jk} \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \quad (4.5)$$

et de variance

$$\bar{\sigma}_{jk}^2 = L_{jk} \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij} + \Lambda_{jk}^2 \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right)^2 \quad (4.6)$$

Le niveau du stock de sécurité à maintenir dans le DC_j pour assurer un niveau de service égal à α est :

$$z_\alpha \bar{\sigma}_{jk} \quad (4.7)$$

Par conséquent le coût annuel de maintien des stocks de sécurité dans tous les centres de distribution est donné par :

$$\sum_{j \in I} h_j z_\alpha \left(\sum_{k \in K} \bar{\sigma}_{jk} Z_{jk} \right) \quad (4.8)$$

Compte tenu des expressions (4.1), (4.2), (4.3) et (4.8), le problème d'optimisation combinatoire Multi Fournisseurs (MF) présenté dans ce chapitre est formulé de la façon suivante :

$$(MF) \quad J^* = \min_{X, Y, Z} J(X, Y, Z) \quad (4.9)$$

avec $J(X, Y, Z)$ définie par:

$$\begin{aligned} J(X, Y, Z) = & \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \chi \mu_i \left(d_{ij} + \sum_{k \in K} a_{jk} Z_{jk} \right) Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \chi \mu_i \zeta_k Y_{ij} Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{2 h_j \chi F_{jk} \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}} \right) Z_{jk} \\ & + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} z_\alpha h_j \left(\sqrt{L_{jk} \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij} + \Lambda_{jk}^2 \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right)^2} \right) Z_{jk} \end{aligned} \quad (4.10)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (4.11)$$

$$\sum_{k \in K} Z_{jk} = X_j, \quad \forall j \in I \quad (4.12)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, j \in I \quad (4.13)$$

$$X_j, Y_{ij}, Z_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in I \quad \forall k \in K \quad (4.14)$$

La fonction objectif $J(X,Y,Z)$ à minimiser représente la somme des coûts de localisation (4.1), coûts de transport (4.2), coûts d'approvisionnement (4.3), coûts d'achat du produit chez les fournisseurs (4.4) et enfin les coûts de maintien des stocks de sécurité (4.8). La contrainte (4.11) assure que chaque client est servi exactement par un seul centre de distribution. La contrainte (4.12) garantie que chaque centre de distribution est approvisionné par un et un seul fournisseur. La contrainte (4.13) indique que si la zone de demande i est servie par un DC_j ($Y_{ij} = 1$) alors forcément, nous avons décidé de localiser ce DC_j ($X_j = 1$). La nature binaire des différentes variables de décision est exprimée par la contrainte (4.14).

Le modèle d'optimisation (MF) est un modèle d'optimisation combinatoire non linéaire et sa résolution est très complexe. Notre objectif consiste à adapter notre approche de relaxation lagrangienne développée aux chapitres 2 et 3 pour résoudre (4.9) sous les contraintes (4.10) à (4.14). Pour simplifier les notations, nous considérons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij} &= \chi\mu_i d_{ij}, A_{ijk} = \chi\mu_i a_{jk}, P_{ik} = \chi\mu_i \varsigma_k, c_{ijk} = 2\chi\mu_i h_j F_{jk}, \alpha_{ijk} = L_{jk} \sigma_i^2 (z_\alpha h_j)^2, e_{jk} = (\Lambda_{jk} z_\alpha h_j)^2, \\ W &= (X, Y, Z, D) \end{aligned}$$

4.4 Résolution du problème d'optimisation (MF)

Pour résoudre le problème (MF), nous introduisons une **nouvelle variable de décision D_j** indiquant la demande moyenne dans le centre de DC_j . Compte tenu des notations précédentes et de la nouvelle variable de décision D_j , le problème (MF) est équivalent au problème défini par :

$$\begin{aligned} \min_{X,Y,Z} \quad & \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \tilde{D}_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} A_{ijk} Y_{ij} Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} P_{ik} Y_{ij} Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk} Y_{ij}} \right) Z_{jk} \\ & + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ij} + e_{jk} D_j^2} \right) Z_{jk} \end{aligned} \quad (4.15)$$

sous les contraintes:

$$\sum_{j \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (4.16)$$

$$\sum_{k \in K} Z_{jk} = 1, \quad \forall j \in I \quad (4.17)$$

$$\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \leq D_j, \quad \forall j \in I \quad (4.18)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, j \in I \quad (4.19)$$

$$X_j, Y_{ij}, Z_{jk} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in I \quad \forall k \in K \quad (4.20)$$

Dans toute la suite, nous nous concentrons sur la nouvelle version de notre problème original, c'est à dire le problème (4.15) sous les contraintes (4.16) à (4.20).

Remarque 4.1 : Dans la nouvelle formulation du problème, la contrainte (4.12) a été remplacée par la contrainte (4.17). Cette contrainte indique que chaque centre de distribution est affecté à un unique fournisseur même s'il n'est pas ouvert. En remplaçant la contrainte (4.12) par la contrainte (4.17), nous ne changeons pas les solutions optimales du problème (MF) puisque :

(i) la minimisation du problème (4.15) entraîne que $D_j = \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$,

(ii) $\forall j \in I$ tel que $X_j = 0$, on a $Y_{ij} = 0, \forall i \in I$ et $D_j = 0$.

Remarque 4.2 : Si $e_{jk} = 0 \quad \forall j \in I$ et $\forall k \in K$, alors le problème (4.15) est modélisé comme un problème de conception d'un réseau de distribution composé de plusieurs fournisseurs avec des délais d'approvisionnement constant. Ce modèle est présenté dans [Tanonkou *et al.*, 2006e]. Dans ce chapitre, en plus des résultats numériques avec délais d'approvisionnement aléatoires, nous présentons aussi les résultats numériques dans le cas des délais constants.

4.4.1 Relaxation lagrangienne

L'approche de résolution par relaxation lagrangienne pour résoudre le problème (4.15) consiste à : (i) relaxer les contraintes (4.16) et (4.18) qui rendent le problème difficile à résoudre et introduire les coûts de pénalisation obtenus par relaxation dans la fonction objectif du problème (4.15), (ii) résoudre le problème relaxé pour chaque couple de multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (4.16) et (4.18) afin d'obtenir une borne inférieure, (iii) trouver une solution admissible pour déterminer une borne supérieure, (iv) maximiser la borne inférieure en utilisant la méthode ASGM.

Afin d'obtenir le problème relaxé, nous associons respectivement aux contraintes (4.16) et (4.18) les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_i) \forall i \in I$ et $\beta = (\beta_j) \forall j \in I$. Nous obtenons le problème relaxé suivant :

$$L(\lambda, \beta) = \min_W \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} (\tilde{D}_{ij} - \lambda_i + \beta_j \mu_i) Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} A_{ijk} Y_{ij} Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} P_{ik} Y_{ij} Z_{jk} \\ + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk} Y_{ij}} \right) Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ij} + e_{jk} D_j^2} \right) Z_{jk} + \sum_{i \in I} \lambda_i - \sum_{j \in I} \beta_j D_j \quad (4.21)$$

sous les contraintes (4.17), (4.19) et (4.20) avec $W = (X, Y, Z, D)$.

La relaxation des contraintes (4.16) et (4.18) rend indépendantes les décisions d'ouverture et de fermeture des centres de distribution. Par conséquent, le problème (4.21) est équivalent à :

$$L(\lambda, \beta) = \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{j \in I} L_j(\lambda, \beta) \quad (4.22)$$

où les sous problèmes $L_j(\lambda, \beta)$ sont définis par :

$$L_j(\lambda, \beta) = \min_W f_j X_j + \sum_{i \in I} \tilde{b}_{ij} Y_{ij} + \sum_{k \in K} \tilde{h}_{jk}(Y) Z_{jk} - \beta_j D_j \quad (4.23)$$

avec

$$\tilde{b}_{ij} = \tilde{D}_{ij} - \lambda_i + \beta_j \mu_i, \quad \tilde{\omega}_{ijk} = A_{ijk} + P_{ik} \quad (4.24)$$

$$\tilde{h}_{jk}(Y) = \sum_{i \in I} \tilde{\omega}_{ijk} Y_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk} Y_{ij}} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ij} + e_{jk} D_j^2} \quad (4.25)$$

La fonction objectif du problème (4.23) est une fonction à valeurs réelles. Le paramètre $\tilde{b}_{ij}$ peut être positif ou négatif suivant les valeurs du multiplicateur de Lagrange λ .

Propriété 4.1: $\forall j \in I$ tel que $\beta_j > \min_{k \in K} \sqrt{e_{jk}}$, $L_j(\lambda, \beta) = -\infty$.

Preuve : Considérons le cas $X_j = 0$ et nous obtenons $Y_{ij} = 0$ pour tout i à cause de la contrainte (4.19). En remplaçant la fonction (4.25) dans (4.23) et compte tenu de la contrainte (4.17), nous avons la borne supérieure suivante :

$$\begin{aligned}
L_j(\lambda, \beta) &\leq \inf_{D_j \geq 0} \min_Z \sum_{k \in K} \sqrt{e_{jk}} D_j Z_{jk} - \beta_j D_j \text{ (avec } X_j = 0 \text{ and } Y_{ij} = 0) \\
&= \inf_{D_j \geq 0} \left(\min_{k \in K} \sqrt{e_{jk}} - \beta_j \right) D_j \text{ (avec contrainte (4.17))} \\
&= -\infty
\end{aligned} \tag{4.26}$$

■

Dans la suite, nous nous limitons au cas où les valeurs du multiplicateur de Lagrange β_j sont telles que

$$0 \leq \beta_j \leq \min_{k \in K} \sqrt{e_{jk}} \tag{4.27}$$

Résoudre le problème relaxé (4.22) revient à résoudre les sous problèmes (4.23) pour un DC_j fixé, c'est-à-dire trouver $L_j(\lambda, \beta)$ tel que :

$$L_j(\lambda, \beta) = \min_W f_j X_j + \sum_{i \in I} \tilde{b}_{ij} Y_{ij} + \sum_{k \in K} \tilde{h}_{jk}(Y) Z_{jk} - \beta_j D_j$$

Pour résoudre (4.22), nous considérons deux cas :

Cas 1: $X_j = 0$, c'est-à-dire que le DC_j est fermé. Alors la contrainte (4.19) entraîne que $Y_{ij} = 0 \forall i \in I$ et la fonction (4.25) devient donc :

$$\tilde{h}_{jk}(0) = \sqrt{e_{jk}} D_j \tag{4.28}$$

Dans ce cas, le problème (4.22) devient $L_j(\lambda, \beta) = \min_{Z, D} \left(\sum_{k \in K} \sqrt{e_{jk}} Z_{jk} - \beta_j \right) D_j$ et compte tenu de la condition (4.27), nous avons $L_j(\lambda, \beta) = 0$ (puisque nous sommes en présence d'un problème d'optimisation).

Cas 2: $X_j = 1$, c'est-à-dire que le DC_j est localisé. Dans ce cas, la contrainte (4.19) devient redondante et les décisions d'affectation des zones de demande au DC_j et celles du choix du meilleur fournisseur chargé de son approvisionnement sont déterminées en résolvant le second sous problème :

$$V_j(\lambda, \beta) = \min_{\xi, Z, D_j \geq 0} \sum_{i \in I} \tilde{b}_{ij} \xi_i + \sum_{k \in K} \tilde{h}_{jk}(\xi) Z_{jk} - \beta_j D_j \tag{4.29}$$

sous les contraintes (4.17) et (4.20). Nous avons remplacé la variable d'affectation des clients Y_{ij} par ξ_i puisque le sous problème (4.29) est spécifique au DC_j .

Par conséquent, le problème (4.22) peut s'écrire

$$L_j(\lambda, \beta) = \mathbf{MIN} \{0, f_j + V_j(\lambda, \beta)\} \quad (4.30)$$

Il résulte que déterminer $L_j(\lambda, \beta)$ revient à résoudre le problème (4.29) pour trouver la valeur optimale $V_j(\lambda, \beta)$ pour chaque couple de multiplicateurs de Lagrange λ et β . Compte tenu de la contrainte (4.17) (c'est-à-dire $\sum_{k \in K} Z_{jk} = 1$), (4.29) peut encore s'écrire :

$$V_j(\lambda, \beta) = \mathbf{min}_{\xi, Z, D_j \geq 0} \sum_{k \in K} \left\{ \sum_{i \in I} \tilde{b}_{ij} \xi_i + \tilde{h}_{jk}(\xi) - \beta_j D_j \right\} Z_{jk} \quad (4.31)$$

sous les contraintes $\xi_i, Z_{jk} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in I \forall k \in K$.

Tenant compte de tous les choix possibles de fournisseurs, le problème (4.31) est encore équivalent à :

$$V_j(\lambda, \beta) = \sum_{k \in K} \left\{ \mathbf{min}_{\xi, D_j \geq 0} \sum_{i \in I} \tilde{b}_{ij} \xi_i + \tilde{h}_{jk}(\xi) - \beta_j D_j \right\} Z_{jk} \quad (4.32)$$

sous les contraintes $\xi_i, Z_{jk} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in I \forall k \in K$.

On pose

$$\tilde{V}_{jk}(\lambda, \beta) = \mathbf{min}_{\xi, D_j \geq 0} \sum_{i \in I} \tilde{b}_{ij} \xi_i + \tilde{h}_{jk}(\xi) - \beta_j D_j \quad (4.33)$$

En remplaçant (4.25) dans (4.33) avec $Y = \xi$, (4.33) est équivalent à :

$$\tilde{V}_{jk}(\lambda, \beta) = \mathbf{min}_{\xi, D_j \geq 0} \sum_{i \in I} \tilde{\Omega}_{ijk} \xi_i + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk} \xi_i} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} \xi_i + e_{jk} D_j^2} \quad (4.34)$$

avec le paramètre non négatif $\tilde{\Omega}_{ijk} = \tilde{b}_{ij} + \tilde{\omega}_{ijk}$.

Compte tenu de l'expression (4.32) et (4.34), on peut encore écrire

$$V_j(\lambda, \beta) = \sum_{k \in K} \tilde{V}_{jk}(\lambda, \beta) Z_{jk} \quad (4.35)$$

Si nous combinons les expressions (4.30) et (4.35), nous avons :

$$L_j(\lambda, \beta) = \sum_{k \in K} \min \{0, f_j + \tilde{V}_{jk}(\lambda, \beta)\} Z_{jk} \quad (4.36)$$

Par conséquent, la détermination de $L_j(\lambda, \beta)$ résulte de la résolution des sous problèmes **(SP)_{jk}** avec :

$$\textbf{(SP)}_{jk} \quad \tilde{L}_{jk}(\lambda, \beta) = \min \{0, f_j + \tilde{V}_{jk}(\lambda, \beta)\}$$

et $L_j(\lambda, \beta)$ donné par :

$$L_j(\lambda, \beta) = \sum_{k \in K} \tilde{L}_{jk}(\lambda, \beta) Z_{jk} \quad (4.37)$$

Pour un DC_j fixé et un fournisseur k fixé, le sous problème **(SP)_{jk}** est exactement le sous problème relaxé (3.24) proposée au chapitre 3 précédent dans le cas d'un unique fournisseur. Donc l'algorithme développé en section 3.2.3.1 du chapitre 3 peut être adapté pour résoudre chaque sous problème **(SP)_{jk}** et calculer le coût $\tilde{L}_{jk}(\lambda, \beta)$.

Après avoir calculé tous les coûts $\tilde{L}_{jk}(\lambda, \beta)$ pour tous les fournisseurs k , nous effectuons le choix du meilleur fournisseur qui approvisionnera le DC_j avec un coût minimum. C'est-à-dire que le fournisseur qui approvisionnera le DC_j est le fournisseur k qui minimise la fonction $\tilde{L}_{jk}(\lambda, \beta)$. Ainsi, nous affectons le DC_j au fournisseur k^* , (i.e. $Z_{jk^*}=1$), tel que:

$$k^* = \underset{k \in K}{\operatorname{argmin}} \tilde{L}_{jk}(\lambda, \beta) \quad (4.38)$$

Les variables d'affectation Y_{ij} sont obtenues en résolvant le sous problème **(SP)_{jk*}**.

Après avoir résolu tous les sous problèmes **(SP)_{jk}** $\forall j \in I$ et $\forall k \in K$, nous recherchons la meilleure borne inférieure au problème (MF). Ceci est fait en résolvant le problème dual :

$$L^* \equiv L(\pi^*) = \max_{\pi} L(\pi) \quad (4.39)$$

Il s'agit de trouver les multiplicateurs de Lagrange $\pi^* = (\lambda^*, \beta^*)$ qui donnent la meilleure borne inférieure $LB = L^*$. Pour résoudre (4.39), nous appliquons la méthode ASGM déjà proposé au chapitre 3 en section 3.2.3.1. La méthode permet la détermination du meilleur « pas » de convergence de l'algorithme de calcul ci dessous.

4.4.2 Heuristique pour la résolution du problème (MF)

Dans cette section, nous présentons notre algorithme principal qui permet de résoudre le problème (MF). L'algorithme compte huit étapes.

Algorithme pour la résolution du problème (MF)

Initialisation

Poser $L^* = \text{INFINI}$, $n = 0$, $\pi = (\lambda, \beta)$, $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $\varepsilon_0 = 0.0001$ (précision), $\text{INFINI} = 10^{20}$.

Répéter de l'Etape1 à l'Etape8

Etape1. $\forall j \in I$ et $\forall k \in K$ faire appel à l'algorithme pour le calcul des sous problèmes **(SP)_{jk}** (algorithme développé en section 3.2.3.1 du chapitre 3).

Etape2. $\forall j \in I$ calculer $L_j(\lambda, \beta)$ (expression (4.37)).

Etape3. Calculer la borne inférieure $LB = L(\lambda, \beta)$ (expression (4.22)).

Etape4. Déterminer une solution admissible (X, Y, Z) et calculer la borne supérieure $UB = J(X, Y, Z)$ correspondante (utiliser le même algorithme en section 3.2.3.3 du chapitre 3). La contrainte (4.18) peut être renforcée en remplaçant la demande du DC_j par $D_j = \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$. Donc à chaque itération de l'algorithme ASGM, seule la contrainte (4.16) est vérifiée. Ainsi, nous avons I^*K combinaisons possibles pour les choix des centres de distribution à localiser et les choix des fournisseurs. Ces choix sont effectués sur la base de critère de coût minimum.

Etape5. Calculer $L^* = \min(L^*, UB)$ et mémoriser la solution (X, Y, Z) associée à L^* .

Etape6. Déterminer le pas θ_n (cf. chapitre 3 sur l'algorithme ASGM - section 3.2.3.2).

Etape7. Mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange π^n .

Etape8. Incrémentation $n = n+1$.

Jusqu'à ce que $\|\pi^{n+1} - \pi^n\| < \varepsilon_0$.

4.5 Résultats numériques et analyses

Dans cette section, nous présentons nos résultats numériques pour valider notre approche lagrangienne. Nous effectuons deux phases expérimentales. La première phase est dédiée au cas où le réseau de distribution compte plusieurs fournisseurs avec des délais d'approvisionnement aléatoires. A l'inverse, dans la deuxième phase, nous considérons le cas de délais d'approvisionnement constants. Les données du problème sont identiques à celles utilisées lors des expériences numériques des chapitres 2 et 3. Nous définissons une instance du problème par $(\#RL, \#S)$ où $\#RL$ désigne le nombre de zones de demande (nombre potentiel de localisations possibles de DC) et $\#S$ représente le nombre des fournisseurs potentiels à sélectionner. Nous notons par $\#F \leq \#S$, le nombre des fournisseurs sélectionnés. Pour nos expériences numériques, nous avons considérés $\#RL = 10, 20, 25, 30, 40, 60$, et 80 et $\#S \in [3, 15]$. Le coût unitaire d'achat du produit (c_k) chez le fournisseur k est généré uniformément dans l'intervalle $[1, 5]$.

Les résultats de nos expériences sont reportés au Tableau 4.1 où les bornes inférieures (LB) et bornes supérieures (UB) sont exprimées en M\$ (million de dollars). $\#DC$ désigne le nombre optimal de centres de distribution ouverts, GAP le gap de dualité défini par $(L^* - L(\lambda, \beta))/L^*$, et enfin CPU le temps de calcul pris par l'heuristique.

Tableau 4.1. Performance des solutions: cas délai aléatoire

$\#RL$	$\#S$	$\#DC$	$\#F$	$LB(M\$)$	$UB(M\$)$	GAP	$CPU(s)$
10	3	7	3	319.512	319.551	0.00012	2
10	5	8	4	302.384	316.797	0.04549	2
10	7	6	2	302.562	316.268	0.04333	3
20	3	11	1	688.395	688.511	0.00016	5
20	5	13	3	675.278	688.732	0.01953	6
20	7	15	4	673.677	691.584	0.02588	8
20	10	14	5	654.269	681.205	0.03955	10
25	5	15	4	982.460	993.391	0.01100	11
25	7	16	7	942.934	992.845	0.05027	11
25	10	17	4	945.108	988.548	0.04394	15
30	5	21	5	1266.00	1278.13	0.00948	21
30	7	18	2	1375.56	1387.25	0.00842	35

30	10	19	5	1270.68	1287.60	0.01313	43
40	5	22	3	1693.37	1724.66	0.01814	63
40	7	25	4	1663.35	1746.99	0.04788	76
40	10	24	5	1757.69	1870.87	0.06049	102
60	7	34	6	2323.02	2543.64	0.08673	236
60	10	34	6	2752.92	2782.89	0.01076	562
60	15	32	8	2455.23	2682.42	0.08469	753
80	7	46	5	3444.81	3506.93	0.01771	1740
80	10	36	6	3283.70	3364.47	0.02400	2133
80	15	39	8	3100.61	3186.61	0.02698	2642

A partir du Tableau 4.1, nous constatons que notre approche fournit de bonnes solutions avec des bornes très serrées. Pour chaque classe de problème ($\#RL$, $\#S$), la qualité des bornes lagrangiennes est toujours bonne avec un gap de dualité qui ne dépasse pas 9%. Le temps de calcul augmente avec la taille du problème, c'est pour cette raison que nous nous sommes limités au cas $\#RL=80$ et $\#S=15$ qui correspond à un CPU =45 minutes. Ce temps inclut le temps mis par l'algorithme pour générer tous les paramètres du problème. Nous mesurons la performance de l'algorithme en observant, à chaque itération, l'évolution des gaps de dualité. Les Figures 4.2 et 4.3 montrent la convergence des courbes pour les classes de problème (30, 5) et (40, 5). La décroissance des courbes montre l'efficacité de notre approche.

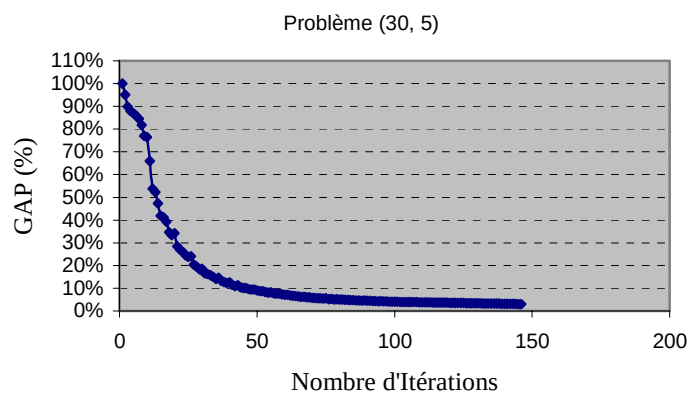


Figure 4.2 GAP vs. Nombre d'itérations : Problème (30, 5)

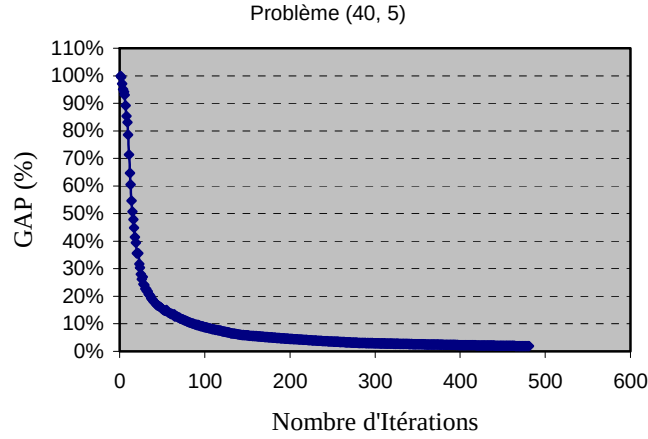


Figure 4.3 GAP vs. Nombre d'itérations : Problème (40, 5)

Il est important de noter que théoriquement, le coût optimal du réseau diminue lors que le nombre de fournisseurs augmente. Ce résultat est perturbé dans le cadre de nos expériences numériques pour la raison suivante : les données du problème ne sont pas fixes pour une instance du problème à l'autre. Nous générons les paramètres de façon aléatoire. Ce qui entraîne une perturbation dans l'obtention du coût optimal quand on passe d'un problème $(\#RL, \#S_1)$ à un problème $(\#RL, \#S_2)$. Par ailleurs, nous observons sur les tableaux que cette perturbation n'est pas affectée pour certains cas et nous avons effectivement une décroissance des coûts lorsque $\#S$ augmente.

Dans la deuxième phase de nos expériences, nous considérons que les fournisseurs approvisionnent les centres de distribution dans des délais constants. Comme nous l'avons mentionné plus haut (cf. Remarque 4.2), l'impact du délai constant aura une influence sur le coût de maintien des stocks de sécurité. Ce coût ne dépendra plus de la variance des délais. Par conséquent $\forall j \in I$ et $\forall k \in K$ $\Lambda_{jk}^2 = 0$ et le paramètre $e_{jk} = 0$.

Pour rappel, le problème est modélisé comme :

$$\begin{aligned}
\min_{X,Y,Z} \quad & \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \tilde{D}_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} A_{ijk} Y_{ij} Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} P_{ik} Y_{ij} Z_{jk} + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk} Y_{ij}} \right) Z_{jk} \\
& + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \left(\sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ij}} \right) Z_{jk}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

sous les contraintes:

$$\sum_{j \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \tag{4.41}$$

$$\sum_{k \in K} Z_{jk} = X_j, \quad \forall j \in I \tag{4.42}$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, j \in I \tag{4.43}$$

$$X_j, Y_{ij}, Z_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in I \quad \forall k \in K \tag{4.44}$$

Nous résolvons le problème (4.40) en relaxant la contrainte (4.41). Par conséquent, l'algorithme présenté dans la section 3.5.2 permet la résolution du problème (4.40) avec $\beta_j = 0$ et $e_{jk} = 0 \quad \forall j \in I$ et $\forall k \in K$.

Le Tableau 4.2 présente les résultats obtenus.

Tableau 4.2. Performance des solutions: cas délai constant

#RL	#S	#DC	#F	LB(M\$)	UB(M\$)	GAP	CPU(s)
10	3	6	2	320.210	320.251	0.00012	2
10	5	7	2	503.254	528.248	0.04731	2
10	7	8	4	405.955	418.422	0.02979	2
20	3	13	3	685.823	685.918	0.00013	5
20	5	13	3	917.638	962.547	0.04665	6
20	7	13	2	913.996	951.454	0.03936	8
20	10	10	4	837.035	1006.95	0.16874	9
30	5	16	4	1261.54	1275.74	0.01113	10
30	7	18	4	1099.25	1110.72	0.01032	11
30	10	19	4	1161.39	1186.06	0.02079	20
40	5	24	3	1648.30	1725.07	0.04450	59
40	7	26	6	1696.51	1748.34	0.02964	74
40	10	22	6	1476.40	1532.65	0.03670	111
60	5	35	5	2508.47	2543.50	0.01377	227

60	7	35	5	2744.12	2884.68	0.04872	499
60	10	37	5	2676.05	2751.38	0.02738	651
80	7	40	5	3425.61	3502.70	0.02201	985
80	10	44	5	3221.51	3299.47	0.02362	1875
80	15	40	8	3377.52	3565.33	0.05267	2156

Nous constatons (voir Tableau 4.2) que le gap de dualité n'excède pas 5% à l'exception de l'instance du problème (20, 10). De plus, nous avons de bonnes convergences des solutions lagrangiennes et nous observons pour certaines instances du problème, que les résultats en terme de gap de dualité sont plus intéressants que dans le cas d'un délai d'approvisionnement aléatoire. A ce stade, nous ne pouvons pas généraliser ce constat, car dans le cas $\#RL=80$, notre approche est aussi performante dans le cas d'un délai aléatoire que dans le cas d'un délai constant. A notre avis, cela est dû principalement à la génération aléatoire des paramètres du problème.

Pour le nombre de fournisseurs sélectionnés, nous avons observé que dans le cas de délai aléatoire, le nombre de fournisseurs choisis varie avec le nombre de centres de distribution à localiser alors que dans le cas de délai constant, le nombre de fournisseurs choisis est presque constant pour chaque classe de problème ($\#RL, \#S$).

4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons adapté notre approche de résolution développée au chapitre 3 pour résoudre un problème de conception de réseau de distribution stochastique multi fournisseurs. L'objectif est de choisir les meilleurs fournisseurs, les meilleures localisations des centres de distribution et la meilleure affectation des zones de demande aux centres de distribution localisés afin de minimiser une fonction coût non linéaire..

L'originalité du problème traité réside essentiellement dans l'intégration des décisions de choix de fournisseurs dans un problème de localisation-allocation. Ce chapitre apporte une contribution dans l'étude des problèmes de conception des réseaux logistiques couplant décisions stratégiques et décisions tactiques. Les résultats numériques obtenus dans les cas de délais d'approvisionnement constant et aléatoire attestent de la validité notre approche.

Comme perspectives, nous aborderons dans le chapitre suivant l'aspect fiabilité du réseau. Une fois la conception du réseau de distribution effectuée, un ou plusieurs de ces sites (fournisseurs choisis ou centres de distribution localisés) peuvent être indisponibles suite à l'apparition d'un événement incertain (catastrophes naturelles, grève du personnel, acte terroriste ou sabotage, etc.). L'indisponibilité d'un site entraîne des pertes de demande, avec des impacts importants sur la rentabilité et la profitabilité du réseau de distribution tout entier.

L'objectif du chapitre suivant est donc de concevoir un réseau de distribution fiable, c'est-à-dire un réseau qui tiendra compte d'un ensemble de stratégies robustes permettant de traiter avec efficacité les problèmes d'indisponibilités des sites. Pour réduire la complexité des problèmes abordés, nous nous limitons à deux configurations du réseau: (i) réseau mono fournisseur/mono produit avec délai d'approvisionnement constant en présence d'indisponibilité des centres de distribution, et (ii) réseau multi fournisseurs/mono produit avec délai constant et indisponibilité des fournisseurs.

Chapitre 5

Conception d'un réseau de distribution stochastique avec des sites non fiables

Dans ce chapitre, nous abordons deux problèmes pour la conception des réseaux de distribution stochastiques avec la prise en compte explicite de la fiabilité des sites. Dans le premier problème, nous considérons un réseau mono fournisseur soumis à des pannes (indisponibilités) de centres de distribution et abordons le problème de conception du réseau où les décisions d'affectation des zones de demande sont prises sous les conditions de disponibilité des centres de distribution. Le deuxième problème est la conception d'un réseau de distribution stochastique multi fournisseurs avec pannes des fournisseurs. Les deux problèmes sont formulés comme des modèles de programmation stochastique à deux périodes. Dans la première période, des décisions sur les localisations des centres de distribution/des choix des fournisseurs sont prises ainsi que les affectations des zones de demande. Dans la deuxième période, certains sites (centres de distribution, fournisseurs) disponibles en première période sont indisponibles et la réaffectation des clients et des fournisseurs est nécessaire. Pour les deux problèmes, l'objectif est de minimiser le coût total moyen du réseau. Une approche basée sur la méthode de relaxation lagrangienne combinée avec la méthode d'optimisation Monte Carlo est proposée. Pour les deux problèmes, des expériences numériques sont présentées et analysées.

Publications : [Tanonkou et al., 2006c], [Tanonkou et al., 2006d].

5.1. Introduction

Dans la plupart des problèmes de conception des réseaux de distribution, les différents risques ou incertitudes pouvant affecter le réseau sont le plus souvent négligés. Ces risques peuvent entraîner l'indisponibilité d'un site (centre de distribution, fournisseurs, etc.) et peuvent être la conséquence d'un événement externe tel qu'une catastrophe naturelle (Tsunami), une épidémie, une guerre (invasion militaire), ou un problème interne tel qu'un incendie. L'indisponibilité d'un ou plusieurs sites logistique a des conséquences désastreuses sur l'ensemble du système et entraîne des pertes liées à la demande des clients et autres pertes telles que le manque des matières premières et des modes de transport moins avantageux. Pour cela, il est indispensable de tenir compte de ces risques et incertitudes lors de la modélisation et résolution des problèmes de conception afin d'approcher le plus possible la réalité.

Ces risques sont donc des événements aléatoires qui pourront affecter le système logistique à n'importe quelle période de son existence. Il est donc difficile de les contrôler. Face à ces incertitudes, les entreprises veulent rester plus compétitives et cherchent à explorer de nouvelles sources de compétitivité à travers l'optimisation de leurs chaînes logistiques. Les entreprises doivent être capables de répondre rapidement et sans erreurs aux besoins de leurs clients malgré l'indisponibilité d'un ou plusieurs des sites de leur réseau logistique. La solution réside dans la conception optimale du réseau de distribution de l'entreprise pour lui assurer force et fiabilité. Tel est l'objectif de ce chapitre.

Le reste du chapitre est organisé en trois sections. La section 5.2 présente un modèle de conception d'un réseau mono fournisseur/mono produit avec délai d'approvisionnement constant en présence des pannes de centres de distribution. La section 5.3 présente un modèle pour un réseau multi fournisseurs/mono produit avec délai d'approvisionnement constant en présence des pannes des fournisseurs. Dans les deux sections, nous déterminons un ensemble de stratégies robustes permettant une conception optimale du réseau. La section 5.4 conclut le chapitre avec quelques remarques et perspectives.

5.2. Conception d'un réseau de distribution avec indisponibilités des centres de distribution

5.2.1 Description du problème

Le problème présenté dans cette section est la prise en compte de la fiabilité dans la conception du réseau de distribution présenté au chapitre 2. Avant de décrire le problème, nous supposons que le réseau de distribution est conçu sur un horizon de temps T (horizon de conception) et que le fournisseur est dans un environnement dit «sûr». La notion d'«environnement sûr» se traduit par le fait de sa capacité d'approvisionner tous les centres de distribution en bonne quantité de produit pendant l'horizon de conception T sans risque affectant l'approvisionnement. Nous subdivisons cette période de conception en deux sous périodes de planification T_1 et T_2 . Le processus de prise de décision au long de l'horizon est le suivant :

- A la période T_1 , le problème consiste à trouver les localisations optimales des centres de distribution et de déterminer les meilleures affectations des clients à ces centres de distribution. Le problème de conception du réseau logistique pendant cette période est désigné par le problème de localisation-allocation.
- A la fin de la période T_1 , c'est-à-dire en début de période T_2 , un évènement non contrôlable rend le système logistique défaillant et entraîne ainsi l'indisponibilité (pannes) de certains centres de distribution localisés en période T_1 . La question qui se pose est de savoir dans quels centres de distribution seront affectés les clients, qui, s'approvisionnaient initialement dans les centres de distribution tombés en pannes ? Quelle stratégie de réaffectation utiliser ? Cette stratégie de réaffectation dépendra du nombre de centres de distribution disponibles en début de période T_2 qui est donc une variable aléatoire.

Nous supposons que la localisation des centres de distribution en période T_1 n'est pas modifiée en période T_2 puisque qu'un coût d'investissement (coût de localisation) est engagé par l'entreprise. On désigne par X la variable de localisation, Y^1 la variable d'affectation (ensemble des clients qui seront affectés aux centres de distribution localisés en T_1). L'ensemble S_1 des centres de

distribution à ouvrir en période T_1 est une variable déterministe et de cardinalité égale $|X|$. Le problème défini en T_1 dépendra ainsi des deux variables de décision (X, Y^1) . Par ailleurs, nous désignons par S_2 l'ensemble des centres de distribution disponibles en période T_2 et Y^2 la variable de réaffectation des clients aux centres de distribution disponibles en période T_2 . Alors Y^2 est fonction de S_2 , qui elle aussi est une variable aléatoire puisqu'on ne connaît pas à priori les centres de distribution indisponibles à la fin de la période T_1 . En pratique, la détermination de l'ensemble S_2 dépend de l'information que nous avons sur la nature de ce qui a causé l'indisponibilité des centres de distribution. Toutefois, on sait que $S_2 \subseteq S_1$. Nous supposons qu'il existe au moins un centre de distribution ouvert en T_1 et toujours disponible en T_2 . Ceci paraît raisonnable puisque si tous les centres de distribution venaient à être indisponibles, ceci entraînerait une défaillance totale de la chaîne de distribution avec un coût de perte maximal.

La Figure ci dessous illustre les deux périodes de conception du problème étudié.

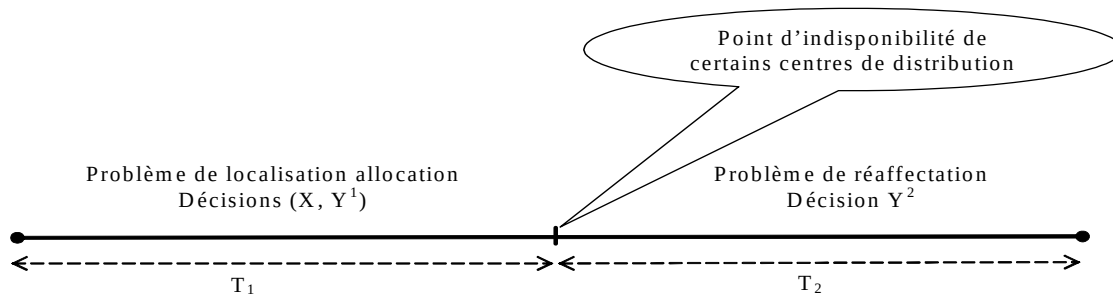


Figure 5.1 Période de conception du réseau de distribution

Ainsi, pour ce problème, nous définissons trois types de décisions liées au problème de fiabilité : (i) décision de la meilleure localisation des centres de distribution (X) , (ii) décision de la meilleure affectation des clients à ces centres de distribution pendant la période T_1 (Y^1), (ii) décision de la meilleure réaffectation des clients aux centres de distribution qui sont disponibles en période T_2 (Y^2).

L'objectif est de minimiser le coût total du système (coût fixe de localisation, coût de transport, coût d'approvisionnement, coût de maintien des stocks de sécurité) tout en respectant la contrainte de satisfaction des clients.

5.2.2 Formulation mathématique

Dans cette formulation, nous tenons compte des paramètres définis au chapitre 2 et nous introduisons les nouvelles notations suivantes :

r_j probabilité de disponibilité du DC_j en période T_2 si ce DC_j est ouvert en T_1 . On suppose $\exists j \in I$ tel que $r_j = 1$.

χ_1 nombre de jours travaillés par an en période T_1 .

χ_2 nombre de jours travaillés par an en période T_2 .

5.2.2.1 Variables et niveaux de décision

Les décisions (X, Y^1) en période T_1 sont définies par :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est localisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, Y_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \text{ en période } T_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Afin de tenir compte de la fiabilité des centres de distribution ou du réseau de distribution tout entier, nous introduisons la variable de décision z indiquant la disponibilité des centres de distribution en période T_2 . Cette variable est définie par

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est disponible à la période } T_2 \text{ avec la probabilité } X_j r_j \\ 0 & \text{si le } DC_j \text{ est indisponible à la période } T_2 \text{ avec la probabilité } 1 - X_j r_j \end{cases}.$$

La variable $z = (z_j)$ est une variable aléatoire qui est fonction de la probabilité de disponibilité du centre de distribution localisé en période T_1 . Ainsi, la décision de réaffectation (modélisé par la variable Y^2) des clients en période T_2 est une variable aléatoire puisque sa décision est choisie en fonction de la connaissance de la variable de disponibilité z_j . La variable Y^2 est définie par

$$Y_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \text{ en période } T_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les variables déterministes du modèle sont (X, Y^1) et les variables aléatoires du modèle sont (Y^2, z) , avec $Y^2 = Y^2(z)$ et $z = z(X)$. Le problème ainsi présenté est un problème stochastique à deux niveaux de décision représenté par la Figure 5.2 :

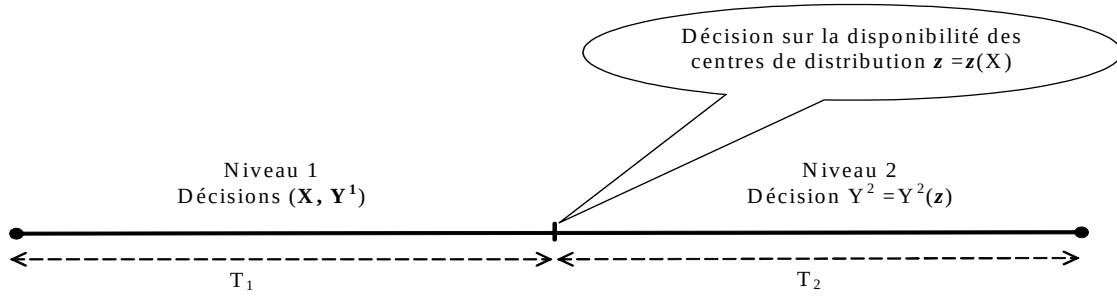


Figure 5.2 Niveaux de décision : Fiabilité des centres de distribution

5.2.2.2 Modèle d'optimisation stochastique

Le coût total en période T_1 est égal aux coûts d'investissement (coûts pour localiser les DC_j $\forall j \in I$), les coûts de transport, les coûts d'approvisionnement et enfin les coûts de maintien des stocks de sécurité. Comme nous avons supposé un coût fixe de localisation pendant la période de planification T , le coût total engagé en période T_2 sont les coûts de transport, les coûts d'approvisionnement et enfin les coûts de maintien des stocks de sécurité. La modélisation et la structure des coûts sont identiques à celles développées au chapitre 2. L'expression du coût total pendant chacune des périodes de conception est représentée par la fonction coût non linéaire $g_t(X, Y^t)$ où $t=1$ correspond à la fonction du coût total à la période T_1 , et $t=2$ la fonction du coût total à la période T_2 . Sans perdre de généralité, cette fonction est définie par :

$$g_t(Y^t) = \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \chi_t(d_{ij} + a_j) \mu_i Y_{ij}^t + \sum_{j \in I} \sqrt{2h_j \chi_t F_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}^t} + z_\alpha \sum_{j \in I} h_j \sqrt{L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}^t} \quad (5.1)$$

Le problème de conception du réseau (PCR) est modélisé comme un problème de programmation stochastique à deux périodes définis par :

$$(PCR) \quad \min_{X, Y^1} \left\{ \tilde{g}(X, Y^1) + \mathbf{E}_z(Q(z)) \right\} \quad (5.2)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij}^1 = 1, \quad \forall i \in I \quad (5.3)$$

$$\sum_{j \in I} Y_{ij}^2 = 1, \quad \forall i \in I \quad (5.4)$$

$$Y_{ij}^1 \leq X_j \quad \forall i, j \in I \quad (5.5)$$

$$Y_{ij}^2 \leq z_j, \quad \forall i, j \in I \quad (5.6)$$

$$\sum_{j \in I / r_j=1} X_j \geq 1 \quad (5.7)$$

$$X_j, Y_{ij}^1, Y_{ij}^2 \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \quad (5.8)$$

où $\mathbf{E}_z(Q(\mathbf{z}))$ désigne le coût moyen total des coûts de gestion de tous les scénarios possibles de conception du réseau de distribution en période T_2 , avec $Q(\mathbf{z})$ égal à la valeur optimale du coût de gestion en période T_2 obtenu en résolvant le problème d'optimisation :

$$Q(\mathbf{z}) = \min_{Y^2} g_2(Y^2(\mathbf{z})) \quad (5.9)$$

et la fonction $\tilde{g}(X, Y^1)$ est égale à la somme des coûts en période T_1 :

$$\tilde{g}(X, Y^1) = \sum_{j \in I} f_j X_j + g_1(Y^1) \quad (5.10)$$

La fonction objectif du problème (PCR) minimise la somme du coût total en période T_1 exprimée par l'expression (5.10) et le coût total moyen en période T_2 exprimé par le second terme de (5.2). La contrainte (5.3) assure qu'en période T_1 , chaque client i est servi par un et un seul DC_j . La contrainte (5.4) indique qu'en période T_2 chaque client i est réaffecté à un seul DC_j disponible pendant cette période. La contrainte (5.5) assure qu'en période T_1 , chaque client i est servi par un DC_j ouvert en période T_1 . La contrainte (5.6) indique que si le DC_j est indisponible en période T_2 alors aucune réaffectation des clients n'est possible à ce DC_j . La contrainte (5.7) impose la fiabilité d'au moins un DC_j dans le réseau de distribution. C'est-à-dire qu'il existe au moins un DC_j tel que $X_j = 1$ et $r_j = 1$. La nature des différentes variables de décision est exprimée par la contrainte (5.8).

Nous sommes en présence d'un problème de programmation stochastique (*two-stage stochastic optimization problem*) à deux niveaux. La résolution de ce problème est très difficile par des algorithmes exacts. Du fait de la nature combinatoire des variables et de la non linéarité de la fonction objectif, le problème est un problème NP difficile de programmation stochastique. Dans la section suivante, nous présentons l'approche de résolution du problème (PCR).

5.2.3 Approche de résolution

5.2.3.1 Approche Monté Carlo

Pour résoudre le problème (PCR) nous utilisons une approche par scénario basée sur la technique d'optimisation Monte Carlo. Cette technique est reconnue très efficace pour résoudre les problèmes de programmation stochastique. Nous générons des scénarios liés à la localisation des centres de distribution (via la variable de disponibilité $\mathbf{z}$). La fonction stochastique $\mathbf{E}_z(Q(\mathbf{z}))$ est approchée par une évaluation de la moyenne de tous les scénarios possibles dérivées de la variable aléatoire $\mathbf{z}$. Soit m le nombre de scénarios de la variable de disponibilité. Nous générons aléatoirement m réalisations (scénarios) du vecteur aléatoire $\mathbf{z}_j$. Compte tenu du fait que la variable de disponibilité $\mathbf{z}_j$ du DC_j est fonction de la variable de localisation X_j , nous introduisons une nouvelle variable aléatoire ξ_j dans le but de rendre indépendante les décisions de localisation et de fiabilité du DC_j . La nouvelle variable de décision est telle que :

$$\mathbf{z}_j = X_j \xi_j \quad (5.11)$$

où la distribution de probabilité de la nouvelle variable aléatoire ξ_j est défini par :

$$\begin{cases} P(\xi_j = 1) = r_j \\ P(\xi_j = 0) = 1 - r_j \end{cases} \quad (5.12)$$

Nous générons ainsi m scénarios $\xi_j(1), \xi_j(2), \dots, \xi_j(m)$ du vecteur aléatoire ξ_j (variable de disponibilité des centres de distribution en période T_2). En utilisant la loi d'approximation simple par la moyenne (*sample average approximation*) basée sur la méthode de Monté Carlo, le second terme de (5.2) devient :

$$\mathbf{E}_z(Q(\mathbf{z})) \approx \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \min_{Y^2(s)/\mathbf{z}=\mathbf{z}(s)} g_2(Y^2(s)) \quad (5.13)$$

où $Y^2(s) = (Y_{ijs}^2) \forall i, j \in I, \forall s = 1, 2, \dots, m$ où les composantes $Y_{ijs}^2 = 1$ si le client i est réaffecté au DC_j au scénario s et 0 sinon.

Nous remplaçons (5.13) dans la fonction objectif du problème (PCR) et nous obtenons le problème d'approximation (SAA) :

$$(SAA) \quad \min_{\substack{X, Y^1, Y^2(s) \\ s=1,2,\dots,m}} \left\{ \tilde{g}(X, Y^1) + m^{-1} \sum_{s=1}^m g_2(Y^2(s)) \right\} \quad (5.14)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij}^1 = 1, \quad \forall i \in I \quad (5.15)$$

$$\sum_{j \in I} Y_{ijs}^2 = 1, \quad \forall i \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m \quad (5.16)$$

$$Y_{ij}^1 \leq X_j \quad \forall i, j \in I \quad (5.17)$$

$$Y_{ijs}^2 \leq X_j \xi_j(s), \quad \forall i, j \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m \quad (5.18)$$

$$\sum_{j \in I / r_j=1} X_j \geq 1 \quad (5.19)$$

$$X_j, Y_{ij}^1, Y_{ijs}^2 \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m \quad (5.20)$$

Le problème (SAA) est un problème stochastique d'optimisation combinatoire et sa résolution est très difficile puisqu'il implique un grand nombre de scénarios et de variables binaires. Dans la sous section suivante, nous présentons une approche basée sur la relaxation lagrangienne pour résoudre (SAA).

5.2.3.2 Résolution du problème d'approximation (SAA)

Les contraintes (5.15), (5.16) et (5.19) rendent le problème (SAA) compliqué à résoudre. Nous relâchons les deux premières contraintes en introduisant respectivement à ces contraintes les vecteurs multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_i), \forall i \in I$ et $\beta = (\beta_{is}), \forall i \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m$. On obtient les fonctions de pénalité suivantes :

$$G(\lambda) = \sum_{i \in I} \lambda_i (1 - \sum_{j \in I} Y_{ij}^1) \quad (5.21)$$

$$\hat{G}(\beta) = \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^m \beta_{is} (1 - \sum_{j \in I} Y_{ijs}^2) \quad (5.22)$$

En introduisant les fonctions $G(\lambda)$ et $\hat{G}(\beta)$ dans la fonction objectif du problème (SAA), nous obtenons le problème relaxé :

$$\begin{aligned}
L(\lambda, \beta) = & \min_{\substack{X, Y^1, Y^2(s) \\ s=1,2,\dots,m}} \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} D_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1 + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1} \\
& + m^{-1} \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} D_{ijs}^{(2)} Y_{ijs}^2 + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}^{(2)} Y_{ijs}^2} + \sum_{j \in I} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}^{(2)} Y_{ijs}^2} \right\} + \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^m \beta_{is}
\end{aligned} \tag{RP} \tag{5.23}$$

sous les contraintes (5.17) – (5.20) et où les paramètres de la fonction objectif sont définis par

$$\begin{aligned}
c_{ij}^{(t)} &= 2h_j \chi_t \mu_i F_j, \quad \alpha_{ij}^{(t)} = (h_j z_\alpha)^2 L_j \sigma_i^2, \quad D_{ij}^{(1)} = \chi_1 (d_{ij} + a_j) \mu_i - \lambda_i, \\
D_{ijs}^{(2)} &= \chi_2 (d_{ij} + a_j) \mu_i - m \beta_{is}, \text{ avec } t=1, 2.
\end{aligned}$$

Pour résoudre le problème relaxé (RP), et déterminer $L(\lambda, \beta)$, on considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_j(Y^1) = \sum_{i \in I} D_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1 + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1} \tag{5.24}$$

$$\psi_{js}(Y^2(s)) = \sum_{i \in I} D_{ijs}^{(2)} Y_{ijs}^2 + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}^{(2)} Y_{ijs}^2} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}^{(2)} Y_{ijs}^2} \tag{5.25}$$

Si nous négligeons la contrainte (5.19) qui assure qu'il existe au moins un DC_j fiable dans le réseau avec $r_j = 1$, alors, les décisions de localisation deviennent indépendantes et le problème relaxé peut s'écrire :

$$L(\lambda, \beta) = \sum_{j \in I} \min_{\substack{X, Y^1, Y^2(s) \\ s=1,2,\dots,m}} \left\{ f_j X_j + \varphi_j(Y^1) + m^{-1} \sum_{s=1}^m \psi_{js}(Y^2(s)) \right\} + \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^m \beta_{is}$$

ou encore

$$L(\lambda, \beta) = \sum_{j \in I} L_j(\lambda, \beta) + \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^m \beta_{is}, \tag{5.26}$$

où le sous problème :

$$L_j(\lambda, \beta) = \min_{\substack{X, Y^1, Y^2(s) \\ s=1,2,\dots,m}} \left\{ f_j X_j + \varphi_j(Y^1) + m^{-1} \sum_{s=1}^m \psi_{js}(Y^2(s)) \right\} \tag{5.27}$$

sous les contraintes (5.17), (5.18) et (5.20).

Pour un DC_j fixé, soit il est localisé (ouvert) en période T_1 , soit il ne l'est pas.

Si le DC_j n'est pas localisé en période T_1 alors les contraintes (5.17) et (5.18) impliquent que $Y_{ij}^1 = 0$ et $Y_{ijs}^2 = 0, \forall i \in I, s = 1, 2, \dots, m$. Et des expressions (5.24) et (5.25) on a $\varphi_j(0) = \psi_{js}(0) = 0$. La valeur optimale du problème relaxé est

$$U_j(\lambda, \beta) = 0$$

Par contre si le DC_j est ouvert en période T_1 ($X_j = 1$) alors la contrainte (5.17) devient redondante. Dans ce cas deux questions se posent : comment déterminer les clients qui seront servis par ce DC_j en période T_1 ? Si ce DC_j est disponible à un scénario donné, quels sont les clients qui seront servis par ce DC_j en période T_2 ? Pour répondre à ces questions afin de déterminer Y_{ij}^1 et Y_{ijs}^2 , il suffit de résoudre le sous problème :

$$(\mathbf{SP})_j \quad V_j(\lambda, \beta) = \min_{\substack{Y^1, Y^2(s) \\ s=1,2,\dots,m}} \left\{ f_j + \varphi_j(Y^1) + m^{-1} \sum_{s=1}^m \psi_{js}(Y^2(s)) \right\} \quad (5.28)$$

sous les contraintes :

$$Y_{ij}^1 \leq 1 \quad \forall i, j \in I \quad (5.29)$$

$$Y_{ijs}^2 \leq \xi_j(s), \quad \forall i, j \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m \quad (5.30)$$

$$Y_{ij}^1, Y_{ijs}^2 \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m \quad (5.31)$$

Etant donné les solutions optimales des sous problèmes $(\mathbf{SP})_j \quad \forall j \in I$, on tient compte de la contrainte (5.19) (que nous avons négligé précédemment), pour déterminer $L(\lambda, \beta)$ en résolvant le problème :

$$L(\lambda, \beta) = \min_X \sum_{j \in I} V_j(\lambda, \beta) X_j + \sum_{i \in I} \left(\lambda_i + \sum_{s=1}^m \beta_{is} \right) \quad (5.32)$$

sous la contrainte : $\sum_{j \in I / r_j = 1} X_j \geq 1$.

Propriété 5.1 : La solution au problème (5.32) est donnée par :

$$(i) \quad X_{j^*} = 1 \text{ avec } j^* = \underset{j \in I}{\operatorname{argmin}} \left\{ V_j(\lambda, \beta) / r_j = 1 \right\}$$

$$(ii) \quad \forall j \neq j^*, X_j = 1 \text{ si } V_j(\lambda, \beta) < 0 \text{ et } X_j = 0 \text{ sinon.}$$

Preuve : On pose l'ensemble $M = \{j \in I / 0 < r_j \leq 1\}$. Le problème d'optimisation (5.32) peut encore s'écrire : $L(\lambda, \beta) = L_0 + \min_{\sum_{j \in I} X_j \geq 1} \sum_{j \in I} V_j(\lambda, \beta) X_j$ où $L_0 = \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^m \beta_{is}$. Donc, on écrit de façon équivalente

$$L(\lambda, \beta) = L_0 + \min_{\sum_{j \in I} X_j \geq 1} \left\{ \sum_{j \in I / r_j = 1} V_j(\lambda, \beta) X_j + \sum_{j \in I / r_j < 1} V_j(\lambda, \beta) X_j \right\}.$$

Or par décomposition, la solution optimale du problème $\min_{\sum_{j \in I / r_j < 1} V_j(\lambda, \beta) X_j}$ est triviale. Cette solution est donnée par $X_j = 1$ si $V_j(\lambda, \beta) < 0$ et $X_j = 0$ sinon. Par ailleurs, deux cas sont possibles lors de la détermination de la solution optimale au problème $\min_{\sum_{j \in I / r_j = 1} V_j(\lambda, \beta) X_j}$:

cas 1 : s'il existe un DC_j avec $r_j = 1$ et $V_j(\lambda, \beta) < 0$, alors $X_j = 1$ si $V_j(\lambda, \beta) < 0$ et $X_j = 0$ sinon.

cas 2 : si $V_j(\lambda, \beta) > 0, \forall j \in I$ avec la probabilité $r_j = 1$, alors on peut écrire

$$\min_{\sum_{j \in I / r_j = 1} V_j(\lambda, \beta) X_j} \geq \min_{r_j = 1} V_j(\lambda, \beta) = V_{j^*}(\lambda, \beta), \text{ avec } DC_{j^*} \text{ le centre de distribution fiable}$$

minimisant l'ensemble des coûts $V_j(\lambda, \beta)$. D'où $X_{j^*} = 1$, et $X_j = 0$ pour tout $j \neq j^*$ et $r_{j^*} = 1$. ■

5.2.3.3 Décomposition des sous problèmes $V_j(\lambda, \beta)$

Pour résoudre le problème (SP)_j, nous remarquons qu'il y a une indépendance entre les différentes contraintes (5.29) et (5.30). La réallocation des clients à la période T_2 ne dépend pas de leur allocation initiale aux centres de distribution localisés à la période T_1 . Ce qui nous permet d'écrire

$$V_j(\lambda, \beta) = f_j + V_j^{(1)}(\lambda) + m^{-1} \sum_{s=1}^m \xi_j(s) V_{js}^{(2)}(\beta) \quad (5.33)$$

où on définit les sous problèmes:

$$(SP)_{j1} \quad V_j^{(1)}(\lambda) = \min_{Y^1 \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} D_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1 + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}^{(1)} Y_{ij}^1}$$

$$(SP)_{j2s} \quad V_{js}^{(2)}(\beta) = \min_{Y^2(s) \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} D_{ijs}^{(2)} Y_{ijs}^2 + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ij}^{(2)} Y_{ijs}^2} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ij}^{(2)} Y_{ijs}^2}.$$

Cette décomposition du problème (SP)_j en sous problèmes (SP)_{j1} et (SP)_{j2s} permet de trouver la solution optimale $V_j(\lambda, \beta)$. En effet, nous remarquons que les sous (SP)_{j1} et (SP)_{j2s}, sont des problèmes d'optimisation sans contraintes à variables discrètes qui peuvent être résolus par les algorithmes dynamiques (*Cf. Algorithmme 2.2, Algorithmme 2.3*) que nous avons développé au chapitre 2. L'existence des solutions optimales à ces problèmes permet de construire une borne inférieure (LB) au problème relaxé qui peut à présent s'écrire sous la forme :

$$LB = \sum_{j \in I} V_j(\lambda, \beta) + \sum_{i \in I} \left(\lambda_i + \sum_{s=1}^m \beta_{is} \right)$$

5.2.3.4 Résolution du problème dual

Soit L^* la valeur optimale au problème (SAA). Le problème dual consiste à déterminer les multiplicateurs de Lagrange $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\beta_{is})_{i \in I, s=1 \dots m}$ qui donne la meilleure borne inférieure. Il s'agit de trouver $\varpi^* = (\lambda^*, \beta^*)$ que:

$$L(\varpi^*) = \max_{\varpi} L(\varpi) \quad (5.34)$$

Pour résoudre (5.34), nous appliquons la méthode ASGM que nous avons proposé pour résoudre les problèmes de maximisation des fonctions concaves rencontrés dans les chapitres précédents. En rappel, à chaque itération n , cette méthode est basée sur le couplage de la procédure du sous gradient donné par :

$$\varpi^{n+1} = \varpi^n + \tau_n \nabla L(\varpi^n) \quad (5.35)$$

et la technique de recherche du meilleur pas de convergence d'Armijo,

$$\tau_n = \tau_0 \frac{L^* - L(\varpi^n)}{\langle \nabla L(\varpi^n), \nabla L(\varpi^n) \rangle}, \quad 1 < \tau_0 < 2$$

où ∇ est l'opérateur du gradient défini par:

$$\nabla L(\varpi^n) = \left(1 - \sum_{j \in I} Y_{ij}^1, 1 - \sum_{j \in I} Y_{ijs}^2 \right) \quad (5.36)$$

5.2.3.5 Recherche d'une borne supérieure

Lors de la résolution du problème relaxé, nous décidons d'abord sur les variables de décisions de premier niveau c'est-à-dire (X, Y^1) . Par la suite nous calculons les scénarios optimaux pour la

réalisation de la variable aléatoire Y^2 . A chaque itération de l'algorithme ASGM pour la résolution du problème dual, une solution admissible et une borne supérieure du problème (SAA) peuvent être obtenues via les solutions du problème relaxé (RP). Pour toute solution (X, Y^1, Y^2) du problème relaxé $L(\lambda, \beta)$ les contraintes (5.15) et (5.16) sont vérifiées. Si ces contraintes sont satisfaites, alors la solution (X, Y^1, Y^2) est optimale. Sinon, elle n'est pas optimale et on peut la corriger ou modifier de façon à obtenir une solution admissible. La modification est effectuée de la façon suivante :

Si $X_j = 0 \ \forall j \in I$, c'est-à-dire qu'aucun centre de distribution n'est ouvert en période T_1 . Il est impossible d'obtenir cette solution puisque nous avons supposé qu'il existe au moins un centre de distribution fiable (cf. contrainte (5.19)).

Si $X_j = 1$ (en période T_1), la modification pour la recherche d'une solution admissible est effectué comme au chapitre 2 (voir section 2.4.3 cas 2).

On pose $X_j = 1$ (c'est-à-dire on ouvre un DC_j en période T_1). Si le DC_j n'est pas disponible en période T_2 alors $Y_{ijs}^2 = 0$ pour tout scénario $s = 1, 2, \dots, m$. Dans ce cas, la solution Y^2 est optimale. Par contre si le DC_j est disponible, alors deux cas sont possibles en période T_2 pour chaque scénario $s = 1, 2, \dots, m$:

- Si $\sum_{j \in I} Y_{ijs}^2 \geq 1$ (c'est-à-dire que le client i est affecté au moins à deux centres de distribution) en période T_2 , alors on affecte le client i au DC_k tel que $Y_{iks}^2 = 1$ et pour lequel le coût global est minimum.
- Si $\sum_{j \in I} Y_{ijs}^2 = 0$ (c'est-à-dire que le client i n'est affecté à aucun centre de distribution en période T_2) alors nous décidons de servir ce client par un DC_k disponible et pour lequel le coût global est minimum.

Avec la nouvelle solution réalisable (X, Y^1, Y^2) , nous trouvons une borne supérieure.

5.2.3.6 Heuristique pour résoudre le problème de conception

Nous présentons ici l'heuristique pour résoudre le problème de conception du réseau de distribution discuté ci dessus.

Heuristique Algorithmique pour résoudre (SAA)

Initialisation

- Poser $L^* = \text{INFINI}$, $n = 0$, $\varpi = (\lambda, \beta)$, $\varpi = 0$, $\varepsilon_0 = 0.0001$ (précision), $\text{INFINI} = 10^{20}$.

Répéter de l'Etape1 à l'Etape6

Etape1. $\forall j \in I$, $\forall s = 1, 2, \dots, m$, résoudre tous les sous problèmes $(\text{SP})_{j1}$ et $(\text{SP})_{j2s}$ et en déduire

$$L_j(\varpi) = V_j(\varpi) \text{ (équation (5.33))}.$$

Etape2. Calculer $L(\varpi)$ en utilisant l'équation (5.26).

Etape3. Calculer une solution admissible (X, Y^1, Y^2) et déterminer la borne supérieure (UB) correspondante.

Etape4. Calculer $L^* = \text{MIN}(L^*, \text{UB})$ et mémoriser la solution (X, Y^1, Y^2) correspondant à L^* .

Etape5. Faire appel à l'Algorithme ASGM.

5.1 Déterminer le « pas » τ_n (algorithme d'Armijo).

5.2 Faire appel à l'algorithme du sous gradient (mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange ϖ^{n+1}).

Etape6. $n = n + 1$ et Aller à l'Etape1.

Jusqu'à ce que $\|\varpi^{n+1} - \varpi^n\| < \varepsilon_0$.

5.2.4 Résultats numériques et analyses

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques pour valider l'heuristique pour résoudre le problème (SAA). Les données du modèle sont identiques à celles proposées lors des expériences numériques des modèles présentées aux chapitres précédents excepté que nous supposons en période T_1 , $\chi_1 = 250$ et en période T_2 , $\chi_2 = 150$. Nous définissons un problème par $(\#RL, \#Sc)$ où $\#RL$ désigne le nombre de zones de demande (nombre potentiel de centres de distribution à localiser en période T_1) et $\#Sc$ le nombre de scénarios liés à la disponibilité des centres de distribution en période T_2 . Pour cette expérience numérique, nous considérons donc $\#RL = 5, 10, 20, 25, 30$ et $\#Sc \in [10, 40]$. Nous nous limitons à 30 zones de demande et 40 scénarios compte tenu du caractère combinatoire des variables entraînant ainsi des temps de calcul trop élevés.

Les résultats de nos expériences sont reportés au Tableau 5.1.

Tableau 5.1. Performance des solutions : cas d'indisponibilité des DCs

#RL	#Sc	#DC	LB(M\$)	UB(M\$)	GAP	CPU(s)
5	10	3	254.247	254.345	0.00038	4
5	20	3	223.644	224.998	0.00601	7
10	10	7	512.809	519.980	0.01379	11
10	20	7	440.190	598.389	0.26437	13
15	10	10	910.751	910.843	0.00010	60
15	20	10	817.316	845.582	0.03342	95
20	10	13	1114.09	1114.74	0.00058	250
20	20	13	1362.01	1368.88	0.00502	452
20	40	13	1297.98	1355.30	0.04229	511
25	10	17	1558.36	1611.69	0.03308	875
25	20	17	1680.35	1682.19	0.00109	991
25	40	17	1207.49	1385.04	0.12819	1244
30	20	19	2114.78	2131.76	0.00796	1561
30	40	19	1835.04	2067.15	0.11228	2548

Le Tableau 5.1 montre que les bornes lagrangiennes $LB \approx UB$ lorsque #RL est proche de #Sc. Avec un gap de dualité qui ne dépasse pas 4%. Excepté le cas des problèmes (10, 20), (25, 40) et (30, 40) où le gap de dualité est respectivement de 26%, 12% et 11%. Par ailleurs, le temps de calcul augmente raisonnablement avec la taille des problèmes. Pour le problème (30, 40), l'heuristique met environ 42 minutes pour trouver la meilleure solution admissible. Ce temps inclus le temps mis par l'heuristique pour générer tous les paramètres du modèle. Cette croissance du temps de calcul provient de ce que nous générons de grandes tailles de variables aléatoires pour estimer une fonction de coût non linéaire.

La Figure 5.3 présente l'évolution du GAP en fonction du nombre d'itération dans le cas du problème (20, 20). Le GAP décroît rapidement pendant l'optimisation. L'algorithme converge vers la valeur optimale au bout de 113 itérations et en un temps de 452 secondes. Nous avons un gap de dualité de 0.5% et 13 centres de distribution ouverts en période T_1 .

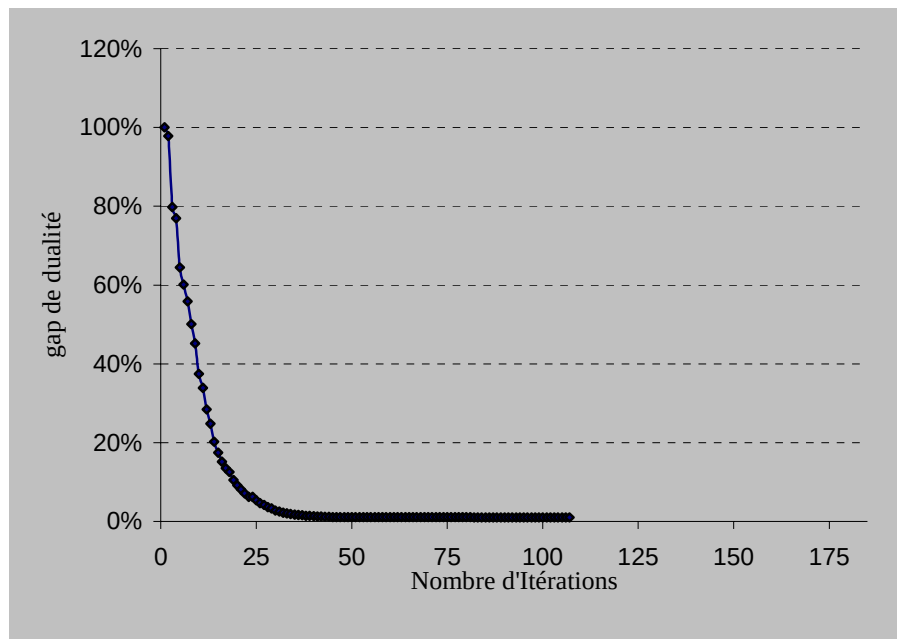


Figure 5.3 Performance du GAP : cas d'indisponibilité des DCs.

5.3. Conception d'un réseau de distribution avec indisponibilités des fournisseurs

5.3.1 Position du problème

Dans cette deuxième section, nous supposons que le réseau de distribution est composé de plusieurs fournisseurs donc certains peuvent être indisponibles pendant l'horizon de conception. Ce problème est similaire au problème de la conception du réseau de distribution multi fournisseurs que nous avons développé au chapitre 4, mais nous nous limitons ici au cas de délais d'approvisionnement constants. Par conséquent, les hypothèses du chapitre 4 restent donc valables.

Nous supposons qu'un événement perturbateur (un risque soudain) affecte le réseau de distribution et entraîne l'indisponibilité de certains fournisseurs. Comme à la section 5.2, il n'est pas opportun d'identifier la nature de ce risque. Par contre, notre objectif est de concevoir un réseau de distribution robuste qui tient compte de plusieurs alternatives de reconception lorsqu'un événement incertain perturbe la configuration du réseau. Nous concevons le réseau sur un horizon de temps T (horizon de conception). Cette période de conception est divisée en deux sous périodes T_1 et T_2 . Les décisions de localisation des centres de distribution sont effectuées en période T_1 et ces décisions ne peuvent pas être modifiées pendant la période T_2 puisqu'un coût d'investissement est engendré pour l'implantation de ces centres. Les décisions de choix de fournisseurs et d'affectation des clients aux centres de distribution sont aussi prises en période T_1 et ces deux décisions sont modifiées en période T_2 et dépendent de la disponibilité du fournisseur en période T_2 .

Hypothèse 5.1 : Nous supposons que sur T , il existe au moins un fournisseur fiable. Cette hypothèse nous permet de garantir une certaine continuité dans la distribution même s'il s'avère que l'indisponibilité de certains fournisseurs entraîne des pertes énormes.

Ainsi, sur l'horizon de conception T , 5 types de décisions doivent être pris : (i) les décisions de localisation des centres de distribution en période T_1 (sur T puisqu'elles ne sont pas modifiées),

(ii) les décisions de choix de fournisseurs en T_1 , (iii) les décisions d'affectation des clients aux centres de distribution en T_1 , (iv) les décisions de réaffectations des centres de distribution aux fournisseurs qui sont disponibles en T_2 , (v) les décisions d'affectation des clients aux centres de distribution T_2 . L'objectif est de minimiser la somme des coûts du réseau de distribution en période T_1 et la moyenne des coûts aléatoires en période T_2 . Le coût total à chaque période est composé du coût de transport, du coût d'approvisionnement et stockage et du coût de maintien des stocks de sécurité. Le but étant de garantir un certain niveau de service de tout le réseau malgré les défaillances de certains fournisseurs.

5.3.2 Formulation Mathématique

Les paramètres du modèle sont ceux présentés au chapitre 4. Nous introduisons le paramètre p_k définit comme la probabilité de disponibilité du fournisseur k en période T_2 (sous la condition que ce fournisseur soit choisi). Compte tenu de l'hypothèse 5.1, il existe au moins un fournisseur k fiable tel que $p_k = 1$.

5.3.2.1 Variables de décision

1. A la période T_1 nous avons la variable de localisation (X), la variable d'affectation des clients (Y^1) et la variable de choix des fournisseurs (Z^1).
2. A la période T_2 , nous avons la variable d'affectation des clients aux centres de distribution (Y^2) et la variable de choix des fournisseurs (Z^2). Ces deux variables dépendent de la disponibilité du fournisseur en fin de période T_1 .

Elles sont modélisées par :

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } DC_j \text{ est localisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, Y_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \text{ en période } T_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est servi par le } DC_j \text{ en période } T_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Z_{jk}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si le fournisseur } k \text{ est choisi pour approvisionner le } DC_j \text{ en période } T_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Z_{jk}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si le fournisseur } k \text{ est choisi pour approvisionner le } DC_j \text{ en période } T_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable de décision Z^2 est une variable aléatoire qui dépend de l'ensemble des fournisseurs disponibles en fin de période T_1). Afin de tenir compte de la fiabilité des fournisseurs, nous introduisons une nouvelle variable aléatoire δ indiquant la disponibilité d'un fournisseur en période T_2 . La variable δ est définie par :

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si le fournisseur } k \text{ est disponible en période } T_2 \text{ avec la probabilité } p_k \\ 0 & \text{si le fournisseur } k \text{ n'est pas disponible en période } T_2 \text{ avec la probabilité } 1 - p_k \end{cases}$$

La variable aléatoire δ dépend du choix des fournisseurs en période T_1 c'est à dire $\delta = \delta(Z^1)$ et la variable de réaffectation des centres de distribution en période T_2 dépend elle aussi de δ , c'est à dire $Z^2 = Z^2(\delta)$. La Figure 5.4 montre les différentes décisions que nous devons prendre à chaque niveau de conception.

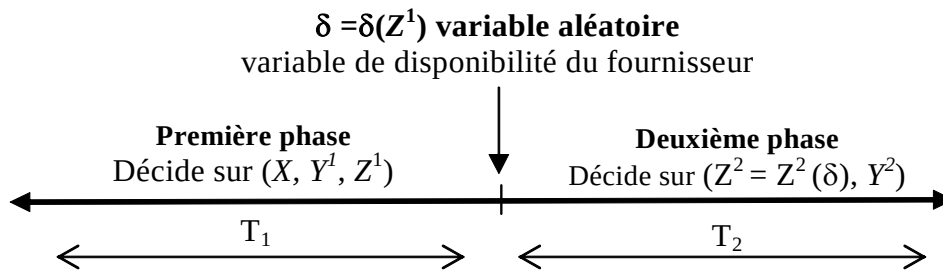


Figure 5.4 Niveaux de décision : fiabilité des fournisseurs

5.3.2.2 Problème d'optimisation

Le problème de conception défini dans cette section est modélisé comme un problème de programmation stochastique à deux périodes défini par :

$$\min_{X, Y^1, Z^1} \left\{ \tilde{h}(X, Y^1, Z^1) + \mathbf{E}_{\delta} (Q(\delta)) \right\} \quad (5.37)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y_{ij}^t = 1, \quad \forall i \in I, t = 1, 2 \quad (5.38)$$

$$Y_{ij}^t \leq X_j \quad \forall i, j \in I \quad t = 1, 2 \quad (5.39)$$

$$\sum_{k \in K} Z_{jk}^t = X_j \quad \forall j \in I \quad t = 1, 2 \quad (5.40)$$

$$Z_{jk}^2 \leq \delta_k, \quad \forall j \in I \quad \forall k \in K \quad (5.41)$$

$$X_j, Y_{ij}^t, Z_{jk}^t \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \quad \forall k \in K \quad t = 1, 2 \quad (5.42)$$

avec le problème d'optimisation :

$$Q(\delta) = \min_{Y^2, Z^2} g_2(Y^2, Z^2(\delta)) \quad (5.43)$$

où $Q(\delta)$ désigne la valeur optimale des coûts engagés à la période T_2 . La fonction $\tilde{h}(X, Y^1, Z^1)$ est égale à la somme des coûts en période T_1 définie par :

$$\tilde{h}(X, Y^1, Z^1) = \sum_{j \in I} f_j X_j + g_1(Y^1, Z^1) \quad (5.44)$$

Sans perdre de généralité, les coûts de transport, coûts d'approvisionnement/stockage et les coûts de maintien des stocks de sécurité en chacune des périodes $t = 1, 2$ sont modélisés comme au chapitre 4. La somme des ces coûts est :

$$g_t(Y^t, Z^t) = \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} D_{ij}^t Y_{ij}^t + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} A_{ijk}^t Y_{ij}^t Z_{jk}^t + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk}^t Y_{ij}^t} Z_{jk}^t + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ij}^t} Z_{jk}^t \quad (5.45)$$

avec

$$D_{ij}^t = \chi_t \mu_i d_{ij}, \quad A_{ijk}^t = \chi_t \mu_i (a_{jk} + \varsigma_k), \quad c_{ijk}^t = 2h_j \chi_t F_{jk} \mu_i$$

$$\alpha_{ijk} = L_{jk} \sigma_i^2 (h_j z_\alpha)^2.$$

La fonction objectif du problème (5.37) minimise la somme du coût total en période T_1 exprimée par l'expression (5.44) et le coût total moyen en période T_2 exprimé par le problème d'optimisation (5.43). La contrainte (5.38) assure que chaque client i est servi par un et un seul DC_j en chacune des périodes T_1 et T_2 . La contrainte (5.39) indique que chaque client i est affecté à un DC_j si et seulement si il est ouvert sur l'horizon de conception T . La contrainte (5.40) indique que chaque centre de distribution est approvisionné par un et un seul fournisseur en

chacune des périodes T_1 et T_2 . La contrainte (5.41) indique que si le fournisseur est indisponible en période T_2 alors aucune réaffectation d'un centre de distribution n'est possible à ce fournisseur. La nature des différentes variables de décision est exprimée par la contrainte (5.42).

Ce problème de programmation stochastique est un problème NP-difficile d'optimisation combinatoire (cf. [Louveaux et Birge, 1999]).

5.3.3 Approche de résolution

Pour résoudre le problème (5.37), nous utilisons la technique d'optimisation Monté Carlo déjà présentée dans la section 5.2. Nous générons ainsi m scénarios sur la variable de disponibilité des fournisseurs en période T_2 qui est représentée par δ . Plus précisément, compte tenu de la variable de décision δ_k , m échantillons $\delta(1)$, $\delta(2)$, ... $\delta(m)$ du vecteur aléatoire δ sont générés, avec $\forall s = 1 \dots m$ $\delta(s) = (\delta_{ks})_{k \in K}$ où $\delta_{ks} = 1$ si le fournisseur k est disponible en période T_2 au scénario s et 0 sinon. Comme les variables de décision (Y^2 , Z^2) en période T_2 dépendent de δ , on en déduit que : $Y^2 = (Y^2_{ijs}) \forall i, j \in I, s = 1 \dots m$ avec $Y^2_{ijs} = 1$ si le client i est réaffecté au DC_j pour le scénario s , et 0 sinon ; $Z^2 = (Z^2_{jks}) \forall j \in I, \forall k \in K, s = 1 \dots m$, avec $Z^2_{jks} = 1$ si le DC_j est réaffecté au fournisseur k (si disponible) au scénario s et 0 sinon. Par conséquent, on peut écrire :

$$\mathbf{E}_\delta(Q(\delta)) \approx \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \min_{Y^2, Z^2 / \delta = \delta(s)} g_2(Y^2(s), Z^2(s)) \quad (5.46)$$

Le problème (5.37) devient :

$$\min_{X, Y^1, Z^1, Y^2(s), Z^2(s)} \left\{ \tilde{h}(X, Y^1, Z^1) + \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m g_2(Y^2(s), Z^2(s)) \right\} \quad (5.47)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j \in I} Y^1_{ij} = 1, \quad \forall i \in I, \quad (5.48)$$

$$\sum_{j \in I} Y^2_{ijs} = 1, \quad \forall i \in I, \quad \forall s = 1 \dots m \quad (5.49)$$

$$Y^t_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j \in I \quad t = 1, 2 \quad (5.50)$$

$$\sum_{k \in K} Z_{jk}^1 = X_j \quad \forall j \in I \quad (5.51)$$

$$\sum_{k \in K} Z_{jks}^2 = X_j \quad \forall j \in I \quad \forall s = 1 \dots m \quad (5.52)$$

$$Z_{jks}^2 \leq \delta_{ks}, \quad \forall j \in I \quad \forall k \in K \quad \forall s = 1 \dots m \quad (5.53)$$

$$X_j, Y_{ij}^1, Y_{ijs}^2, Z_{jk}^1, Z_{jks}^2 \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \quad \forall k \in K \quad \forall s = 1 \dots m \quad (5.54)$$

Pour résoudre le problème (5.47), nous relâchons les contraintes (5.48) et (5.49) en introduisant les multiplicateurs de Lagrange $\bar{\lambda} = \langle \bar{\lambda}_i \rangle$ et $\bar{\beta} = \langle \bar{\beta}_{is} \rangle \forall i \in I \quad \forall s = 1, 2, \dots, m$. Nous obtenons le problème relaxé :

$$\begin{aligned} L(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = \min_{\substack{\bar{\Omega}_s \\ s=1,2,\dots,m}} & \sum_{j \in I} f_j X_j + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} b_{ij}^1 Y_{ij}^1 + \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \bar{\varphi}_{jk}(Y^1) Z_{jk}^1 \\ & + m^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} b_{ijs}^2 Y_{ijs}^2 + m^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \bar{\psi}_{jks}(Y^2) Z_{jks}^2 + \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i + \sum_{s=1}^m \bar{\beta}_{is}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

sous les contraintes (5.50) à (5.54). Les paramètres de (5.55) sont définis par :

$$b_{ij}^1 = D_{ij}^1 - \bar{\lambda}_i, \quad b_{ijs}^2 = D_{ijs}^2 - m \bar{\beta}_{is},$$

$\forall s = 1, 2, \dots, m$, $\bar{\Omega}_s = (X, Y^1, Z^1, Y_s^2, Z_s^2)$ désigne l'ensemble de toutes les variables de décision et les fonctions d'affectation des clients

$$\bar{\varphi}_{jk}(Y^1) = \sum_{i \in I} A_{ijk}^1 Y_{ij}^1 + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk}^1 Y_{ij}^1} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ij}^1} \quad (5.56)$$

$$\bar{\psi}_{jks}(Y^2) = \sum_{i \in I} A_{ijk}^2 Y_{ijs}^2 + \sqrt{\sum_{i \in I} c_{ijk}^2 Y_{ijs}^2} + \sqrt{\sum_{i \in I} \alpha_{ijk} Y_{ijs}^2}. \quad (5.57)$$

Nous appelons (5.56) et (5.57) les fonctions d'affectation des clients parce qu'elles dépendent uniquement des variables de décision d'affectation des clients au centre de distribution (Y^1) en période T_1 et (Y^2) en période T_2 .

Propriété 5.2 : Si $\forall i, j \in I, \forall s = 1, 2, \dots, m$ tel que $b_{ij}^1 \geq 0$ et $b_{ijs}^2 \geq 0$, alors la solution optimale du problème relaxé (55) est $X_j = Y_{ij}^1 = Y_{ijs}^2 = Z_{jk}^1 = Z_{jks}^2 = 0$.

Preuve : La preuve de la Propriété 5.2 est évidente puisque (5.55) est un problème de minimisation de fonction à coefficients positifs. ■

Sans perdre de généralité, cette Propriété, nous suggère donc de considérer pour la résolution du problème (5.55), les valeurs des paramètres b^1_{ij} et b^2_{ijs} tel que $b^1_{ij} < 0$, $b^2_{ijs} < 0$.

La relaxation des contraintes (5.48) et (5.49) rend indépendante les décisions d'ouverture des centres de distribution sur l'horizon de conception T et le problème relaxé devient :

$$L(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = \sum_{j \in I} L_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i + \sum_{s=1}^m \sum_{i \in I} \bar{\beta}_{is} \quad (5.58)$$

où

$$L_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = \min_{\substack{\bar{\Omega}_s \\ s=1,2,\dots,m}} f_j X_j + \sum_{i \in I} b^1_{ij} Y^1_{ij} + \sum_{k \in K} \bar{\varphi}_{jk}(Y^1) Z^1_{jk} + m^{-1} \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{i \in I} b^2_{ijs} Y^2_{ijs} + \sum_{k \in K} \bar{\psi}_{jks}(Y^2) Z^2_{jks} \right\} \quad (5.59)$$

sous les contraintes (5.50) à (5.54).

Pour la résolution du sous problème (5.59) obtenu par relaxation des contraintes (5.48) et (5.49), nous adaptons l'heuristique présentée dans la section 5.2. Considérons un DC_j fixe. Alors deux cas sont possibles, soit il est localisé sur T ($X_j=1$), soit il ne l'est pas ($X_j=0$).

Si $X_j=0$ (DC_j non localisé) alors les contraintes (5.50), (5.51) et (5.52) impliquent que $Y^1_{ij} = Y^2_{ijs} = 0$ et $Z^1_{jk} = Z^2_{jks} = 0 \forall i, j \in I, \forall k \in K$ et $\forall s = 1, 2, \dots, m$. Et des fonctions d'affectation (5.58) et (5.57) on a :

$$\bar{\varphi}_{jk}(0) = \bar{\psi}_{jks}(0) = 0 \Rightarrow L_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = 0$$

Par contre si $X_j=1$ (DC_j ouvert), alors la contrainte (5.50) devient redondante. Ainsi le problème revient à déterminer en période T_1 le meilleur fournisseur pour approvisionner le DC_j et la meilleure affectation des clients à ce centre de distribution. Si le fournisseur choisi en période T_1 n'est pas disponible en période T_2 , nous devons choisir un **nouveau** fournisseur qui approvisionnera le DC_j et les **nouveaux** clients qui seront affectés au centre de distribution. Ainsi

les quatre variables de décision (variables de choix des fournisseurs Z^1 , Z^2 , et variables d'affectation Y^1 , Y^2) peuvent être déterminées en résolvant le sous problème spécifique au DC_j défini par :

$$\bar{V}_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = \min_{\substack{\Omega_s \\ s=1,2,\dots,m}} f_j + \sum_{i \in I} b_{ij}^1 Y_{ij}^1 + \sum_{k \in K} \bar{\varphi}_{jk}(Y^1) Z_{jk}^1 + m^{-1} \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{i \in I} b_{ijs}^2 Y_{ijs}^2 + \sum_{k \in K} \bar{\psi}_{jks}(Y^2) Z_{jks}^2 \right\} \quad (5.60)$$

sous les contraintes (5.50) à (5.54) avec $X_j=1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Y_{ij}^1 &\leq 1, & \forall i, j \in I. \\ Y_{ijs}^2 &\leq 1, & \forall i, j \in I \quad \forall s = 1 \dots m. \\ \sum_{k \in K} Z_{jk}^1 &= 1 & \forall j \in I. \\ \sum_{k \in K} Z_{jks}^2 &= 1 & \forall j \in I \quad \forall s = 1 \dots m. \\ Z_{jks}^2 &\leq \delta_{ks}, & \forall j \in I \quad \forall k \in K \quad \forall s = 1 \dots m. \end{aligned}$$

Comme les contraintes $Y_{ij}^1 \leq 1$, $Y_{ijs}^2 \leq 1$ ne sont pas liées, il ressort du sous problème (5.60) que les décisions d'affectation des clients au DC_j et du choix du meilleur fournisseur en périodes T_1 et T_2 pour chaque scénario sont indépendantes. Compte tenu des contraintes d'égalité $\sum_{k \in K} Z_{jk}^1 = 1$ et $\sum_{k \in K} Z_{jks}^2 = 1$, nous effectuons une décomposition du sous problème (60) en deux sous problèmes (SP)_{jk1} et (SP)_{jks2} et (5.60) est équivalent à :

$$\bar{V}_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = f_j + \sum_{k \in K} \bar{V}_{jk}^1(\bar{\lambda}) Z_{jk}^1 + m^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{k \in K} \delta_{ks} \bar{V}_{jks}^2(\bar{\beta}) Z_{jks}^2 \quad (5.61)$$

où

$$\text{(SP)}_{jk1} : \quad \bar{V}_{jk}^1(\bar{\lambda}) = \min_{Y^1=\{0,1\}} \sum_{i \in I} b_{ij}^1 Y_{ij}^1 + \bar{\varphi}_{jk}(Y^1) \quad (5.62)$$

$$\text{(SP)}_{jks2} : \quad \bar{V}_{jks}^2(\bar{\beta}) = \min_{Y^2=\{0,1\}} \sum_{i \in I} b_{ijs}^2 Y_{ijs}^2 + \bar{\psi}_{jks}(Y^2) \quad (5.63)$$

On déduit que le problème (5.59) est équivalent à :

$$L_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) = \mathbf{MIN} \{0, \bar{V}_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta})\} \quad (5.64)$$

Les solutions du problème (5.61) pour la détermination de $\bar{V}_j(\bar{\lambda}, \bar{\beta})$ pour chaque multiplicateur de Lagrange $\langle \bar{\lambda}, \bar{\beta} \rangle$ résultent des solutions des sous problèmes $(\mathbf{SP})_{jk1}$ et $(\mathbf{SP})_{jks2}$. Nous observons que, pour un DC_j fixé, un fournisseur k fixé et un scénario donné, les sous problèmes $(\mathbf{SP})_{jk1}$ et $(\mathbf{SP})_{jks2}$ sont exactement les sous problèmes (4.34) considérés au chapitre 4 dans le cas de conception d'un réseau de distribution mono fournisseur avec délai d'approvisionnement constant (cf. chapitre 4 sous problème (4.34) avec $e_{jk}=0$ et $\beta_j=0, \forall j \in I \forall k \in K$). Par conséquent, les sous problèmes $(\mathbf{SP})_{jk1}$ et $(\mathbf{SP})_{jks2}$ peuvent être résolu par les algorithmes dynamiques développés au chapitre 2. On résout ces sous problèmes $\forall k \in K$ et on détermine le meilleur fournisseur et la meilleure affectation de la façon suivante : en période T_1 (niveau 1 de conception) le fournisseur chargé de l'approvisionnement du DC_j est le fournisseur k^* tel que

$$k^* = \mathbf{argmin}_{k \in K} \bar{V}_{jk}(\bar{\lambda}), \text{ avec } \sum_{k \in K} \bar{V}_{jk}(\bar{\lambda}) Z_{jk}^1 = \bar{V}_{jk^*}(\bar{\lambda})$$

et l'affectation des clients Y^1 est déterminée via le sous problème $(\mathbf{SP})_{jk^*1}$. Par ailleurs, en période T_2 (niveau 2 de conception), pour chaque scénario $s=1,2,\dots,m$, le DC_j est affecté au fournisseur k' (sous condition de disponibilité) tel que

$$k' = \mathbf{argmin}_{\substack{k \in K \\ \delta_{ks}=1}} \bar{V}_{jks}(\bar{\beta}), \text{ avec } \sum_{k \in K} \delta_{ks} \bar{V}_{jks}(\bar{\beta}) Z_{jks}^2 = \bar{V}_{jk's}(\bar{\beta}),$$

et l'affectation des clients Y^2 est déterminé via le sous problème $(\mathbf{SP})_{jk's2}$.

D'après la propriété 3.1 (a) (cf. chapitre 3), on sait que $L(\bar{\lambda}, \bar{\beta}) \leq \bar{L}$ où $\bar{L}$ est la valeur optimale du problème original (5.47). Donc pour chaque multiplicateur de Lagrange, $L(\bar{\lambda}, \bar{\beta})$ est une borne inférieure. Après avoir obtenu les solutions $\bar{\Omega}_s = (X, Y^1, Z^1, Y_s^2, Z_s^2)$ du problème relaxé, on détermine la meilleure borne inférieure $L(\bar{\pi}^*)$ en résolvant le problème dual :

$$L(\bar{\pi}^*) = \mathbf{max}_{\bar{\pi}} L(\bar{\pi}) \quad (5.65)$$

avec $\bar{\pi} = (\bar{\lambda}, \bar{\beta})$.

Le problème (5.65) est résolu de façon similaire à la résolution du problème présenté à la section 5.2. Lors de la résolution du problème relaxé, on détermine l'ensemble $\bar{\Omega}_s$ en deux étapes: on détermine d'abord les variables (X, Y^1, Z^1) en période T_1 , et après on détermine les différentes possibilités des variables aléatoires (Y^2, Z^2) . A chaque itération de l'algorithme ASGM pour la résolution du problème dual, les solutions admissibles de l'ensemble $\bar{\Omega}_s$ et une borne supérieure du problème peuvent être obtenues via les solutions du problème relaxé. Pour toute solution de l'ensemble $\bar{\Omega}_s$ du problème relaxé, les contraintes (5.48) et (5.49) sont vérifiées. Si ces contraintes sont satisfaites, alors l'ensemble des solutions de $\bar{\Omega}_s$ est optimale. Sinon, elle n'est pas optimale et on peut les corriger de façon à obtenir des solutions admissibles. La modification de ces solutions est effectuée comme à la section 5.2 en section 5.2.3.5.

Dans ce qui suit, nous présentons l'algorithme pour résoudre le problème de fiabilité présenté dans cette section.

Algorithme pour résoudre le problème (5.47)

Initialisation

- Poser $\bar{L}^* = \text{INFINI}$, $n = 0$, $\bar{\pi} = (\bar{\lambda}, \bar{\beta})$, $\bar{\pi} = 0$, $\varepsilon_0 = 0.001$ (précision), $\text{INFINI} = 10^{20}$.

Répéter de l'Etape1 à l'Etape6

Etape1. $\forall j, k, s=1,2,...m$ résoudre tous les sous problèmes **(SP)_{jk1}** et **(SP)_{ks2}**

Etape2. Calculer $L_j(\bar{\pi})$ en utilisant l'équation (5.64).

Etape3. Calculer $L(\bar{\pi})$ en utilisant l'équation (5.58).

Etape4. Calculer une solution admissible (X, Y^1, Z^1, Y^2, Z^2) et déterminer la borne supérieure (UB) correspondante.

Etape5. Calculer $\bar{L}^* = \min\{\bar{L}^*, \text{UB}\}$ et mémoriser la solution (X, Y^1, Z^1, Y^2, Z^2) correspondant à $\bar{L}^*$.

Etape6. Faire appel à l'Algorithme ASGM pour résoudre le problème dual « actualisation des multiplicateurs de Lagrange $\bar{\pi}^{n+1}$ ».

Etape7. $n = n+1$ et Aller à l'Etape1.

Jusqu'à ce que $\|\bar{\pi}^{n+1} - \bar{\pi}^n\| < \varepsilon_0$.

5.3.4 Résultats numériques et analyses

Compte tenu du nombre de variables binaires à générer, nous validons notre algorithme sur des problèmes de taille faible. Les données sont les mêmes que celles présentées dans la section 5.2.4 de la section 5.2 et au chapitre 4 pour le problème multi fournisseurs. Nous supposons en période T_1 , $\chi_1 = 250$ et en période T_2 , $\chi_2 = 150$. Nous définissons un problème par $(\#RL, \#F, \#Sc)$ où $\#RL$ désigne le nombre de zones de demande $\#Sc$ le nombre de scénarios liés à la disponibilité des fournisseurs et $\#F$ le nombre de fournisseurs dans le réseau de distribution. Pour cette expérience numérique, nous considérons donc $\#RL = 5, 10, 10, 20$ et $\#Sc \in [5, 20]$. Nous nous limitons à 20 zones de demande et 20 scénarios car l'algorithme devient exponentiel pour $\#RL > 20$ et $\#Sc > 20$. $\#Fc$ désigne le nombre de fournisseurs sélectionnés en période T_1 .

Tableau 5.2. Performance de l'heuristique : cas d'indisponibilité des fournisseurs.

# <i>RL</i>	# <i>F</i>	# <i>SC</i>	# <i>DC</i>	# <i>FC</i>	<i>LB</i> (M\$)	<i>UB</i> (M\$)	<i>GAP</i> (%)	<i>CPU</i> (S)
5	2	5	4	1	20.73	20.93	0.95	10
	3	7	4	1	22.91	23.14	0.99	13
10	3	5	4	2	42.29	42.33	0.09	88
	5	20	7	2	34.82	35.16	0.96	139
15	5	20	9	3	48.61	49.10	0.99	682
	7	20	7	4	49.54	50.03	0.97	695
20	7	20	15	5	71.33	72.04	0.98	3626
	10	20	10	6	50.32	50.82	0.98	7264

Le Tableau 5.2 montre que la qualité des bornes lagrangiennes *LB* et *UB* est très bonne, estimé par un gap de dualité qui ne dépasse pas 1%. Par ailleurs, le temps de calcul augmente exponentiellement avec la taille des problèmes. Dans le cas du problème (20, 10, 20), l'heuristique met environ 2 heures de temps pour converger vers la solution optimale. C'est la raison pour laquelle, nous nous sommes arrêtés à cette taille de problème. Cette augmentation rapide du temps de calcul provient de ce que nous générons de grandes tailles de variables aléatoires pour estimer une fonction de coût non linéaire. Lorsque $\#Sc \rightarrow \infty$, $CPU \rightarrow \infty$. La Figure 5.5 ci-dessous montre l'évolution du CPU en fonction de $\#Sc$ dans le cas du problème où on a $\#RL=20$ et $\#F=10$.

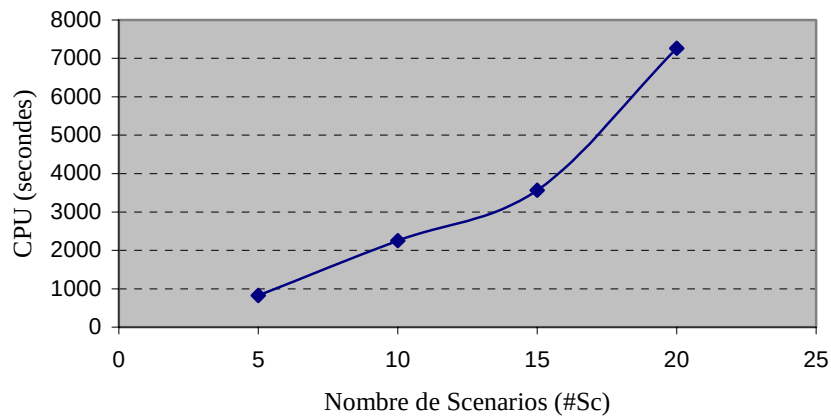


Figure 5.5 CPU vs. $\#Sc$: cas d'indisponibilité des fournisseurs

On considère 3 types de problème. Le problème (10, 3, 5), (10, 5, 10), et (20, 7, 20). Etant donné que nous générons des scénarios de manière aléatoire, nous calculons à chaque itération de l'heuristique lagrangien le gap de dualité moyen de chaque problème. La Figure 5.6 montre les performances de l'algorithme à chaque itération. Le GAP décroît en fonction du nombre d'itération. Ce qui prouve que l'heuristique converge bien vers la solution optimale. Les Figures 5.5 et 5.6 attestent de la validité de l'algorithme de calcul proposé.

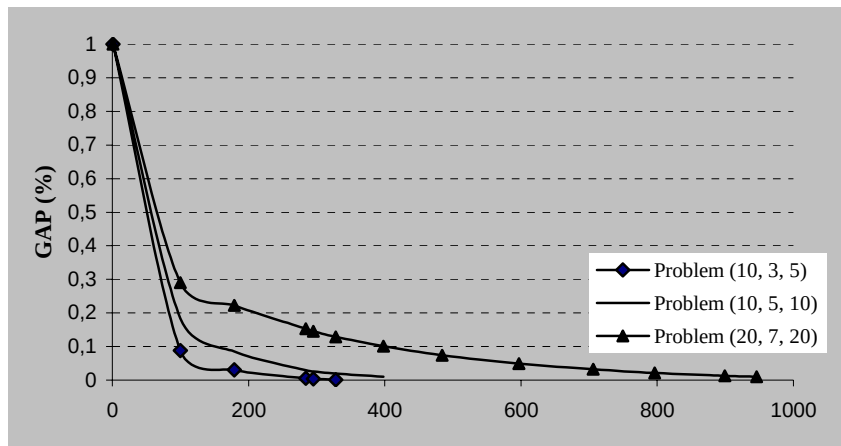


Figure 5.6 GAP vs. Nombre d'Itérations

5.4. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux modèles de fiabilité pour la conception d'un réseau de distribution. Dans le premier modèle (section 5.2) nous avons considéré un réseau à mono fournisseur/mono produit et nous avons introduit la fiabilité du réseau liée à l'indisponibilité de certains centres de distribution. Dans le deuxième modèle (section 5.3), nous avons considéré le cas d'un réseau multi fournisseurs. La fiabilité étant introduite sur les de possibilité de disponibilité des fournisseurs. Les deux problèmes sont modélisés comme des problèmes de programmation stochastiques à deux niveaux. Les problèmes sont reconnus comme problème stochastique NP-difficile. Nous avons présenté une approche de résolution basée sur la technique Monté Carlo et les sous problèmes sont résolus par la technique de relaxation lagrangienne. Les résultats obtenus attestent de l'efficacité de l'algorithme de calcul. Cet algorithme présente en effet les différentes stratégies de conception d'un réseau de distribution à deux niveaux de planification. Notre approche permet au réseau de s'adapter à des chocs soudains et imprévus

entraînant l'indisponibilité soit d'un centre de distribution localisé, soit d'un fournisseur sélectionné.

Comme direction de recherche imminente, il est important d'étendre cette étude sur plusieurs périodes de conception ($t = T_1, T_2, \dots, T_k$ où k est un entier naturel, $k \geq 3$) où la configuration du réseau logistique sera bien définie à chaque période de conception. Compte tenu de la complexité de l'approche de résolution par relaxation lagrangienne, nous pourrions alors utiliser d'autres techniques de résolution telles que la programmation dynamique, la génération par colonnes ou la simulation.

Conclusions et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse concernent les problèmes de conception de réseaux de distribution stochastiques. Nos motivations ont été multiples à savoir : (i) la conception des réseaux de distribution nécessite la prise simultanée de décisions de localisation et de choix des fournisseurs, qui ont sans doute des impacts majeurs à long terme sur la performance globale du réseau, (ii) l'introduction des coûts opérationnels d'approvisionnement et de stockage via des modèles non linéaires entraîne une complexité du problème, (iii) les aléas des demandes et des délais d'approvisionnement sont le plus souvent négligés lors de la résolution des problèmes de localisation-allocation ; tout au long de cette thèse, nous avons considéré des demandes et délais d'approvisionnement aléatoires, (iv) l'intégration des deux décisions stratégiques (choix de fournisseurs et localisation des centres de distribution) couplée avec les décisions tactiques d'allocation est l'une des problématiques importantes dans la conception des réseaux de distribution.

Motivés par ces aspects, nous avons proposé plusieurs modèles analytiques et une approche efficace pour résoudre les problèmes d'optimisation combinatoire rencontrés dans cette thèse. Cette approche est basée sur la technique de la relaxation lagrangienne. Par ailleurs, nous l'avons combiné à la technique d'optimisation Monte Carlo pour résoudre des problèmes de conception de réseaux de distribution en tenant compte la fiabilité des différents sites au chapitre 5. Pour la validation des algorithmes, des expériences numériques ont été réalisées et analysées. Les résultats obtenus attestent de l'efficacité des heuristiques développées.

Nos contributions peuvent être résumées comme suit :

- Formulation via des modèles de programmation mathématique non linéaires en variables binaires de différents problèmes (mono fournisseur/mono produit, mono fournisseur/multi produits, multi fournisseurs/mono produit) avec l'intégration simultanée de décisions stratégiques (localisation des centres de distribution) et de décisions opérationnelles (gestion des stocks dans les centres de distribution) ;

- Développement de deux modèles mathématiques non linéaires avec la prise en compte explicite de la fiabilité des sites du réseau. Plus précisément, le premier modèle s'adresse à un réseau mono fournisseur où la fiabilité des centres de distribution à localiser est considérée. Le deuxième modèle traite un réseau multi fournisseur où la fiabilité des fournisseurs est prise en compte ;
- Proposition de la technique ASGM pour la résolution du problème dual résultant de la relaxation lagrangienne utilisée comme approche dans la résolution des problèmes de conception de réseaux.

Ce travail de recherche nous a permis de dégager plusieurs directions futures. Afin d'évaluer l'efficacité et la robustesse de l'approche par relaxation lagrangienne proposée dans le cadre cette thèse, une extension immédiate est de faire une étude comparative avec d'autres méthodes telles que la méthode de génération de colonnes, utilisées avec succès dans des cas simplistes de réseau de distribution stochastique (ex. fonctions coûts non linéaires avec des hypothèses de concavité). Aussi, l'une des directions la plus immédiate est de considérer d'autres politiques de gestion de stock dans les centres de distribution, différentes de la politique de la quantité économique utilisée dans ce travail. Pour cela, nous envisageons de considérer les politiques « base stock », (R, Q) ou encore (s, S) . L'objectif sera de déterminer les paramètres de ces différentes politiques de gestion des stocks dans les centres de distribution afin de minimiser des fonctions coûts qui seront sans doute complexes. Les modèles mathématiques résultants sont très complexes et nécessitent des hypothèses simplificatrices pour développer des approches analytiques efficaces. A notre avis, l'utilisation de la simulation via des approches hybrides peut aider efficacement dans la résolution des problèmes traités.

La prise en compte des capacités des fournisseurs et des centres de distribution dans la conception des réseaux de distribution est une troisième direction de recherche. La difficulté du modèle obtenu résulte non seulement de l'introduction de la contrainte sur les capacités finies, mais également sur la gestion des stocks dans les différents sites (fournisseurs et centres de distribution). Cela, donnera une autre dimension à la complexité du problème et au développement d'approche de résolution.

Comme quatrième direction de recherche, il est possible d'étendre l'ensemble des modèles étudiés au cas multi produit. Lié à la gestion des stocks dans les différents centres de distribution localisés, un challenge à relever sera de considérer différentes politiques de gestion de stock (c'est-à-dire chaque type de produit avec sa propre politique de stockage) avec des capacités finies.

Comme cinquième direction de recherche, il est aussi envisageable d'étendre l'étude des deux problèmes de fiabilité sur plusieurs périodes de conception ($T_1, T_2, \dots, T_k$ où k est un entier naturel, $k \geq 3$) où la configuration du réseau de distribution sera bien définie à chaque période de conception. Pour chacun des modèles obtenus, il sera intéressant de considérer les cas des délais d'approvisionnement constants et aléatoires.

Une sixième direction de recherche, intéressante mais sans doute très complexe, est d'aborder le cas multicritère linéaire ou non linéaire (selon les modèles), pour la conception des réseaux de distribution stochastiques.

Enfin, notre souhait est de pouvoir valider nos algorithmes de calcul en utilisant des données réelles.

Références

- [Aikens, 1985] C.H. Aikens. Facility location models for distribution planning. *European Journal of Operational Research*, Vol. 22(3), pp. 263-279.
- [Al-Sultan *et al.*, 1999] Al-Sultan et A. Fawzan. A Tabu Search approach to the Uncapacitated Facility Location Problem. *Annals of Operations Research*, pp. 91-103.
- [Armijo, 1966] L. Armijo. Minimization of Functions Having Continuous Partial Derivatives. *Pacific. J. Math.*, 16, pp. 1-3.
- [Arntzen *et al.*, 1995] B.C Arntzen, G.G Brown, T.P Harrisonand et L.L Trafton. Global supply chain management at digital equipment corporation. *Interfaces*. Vol. 25, pp. 69-93.
- [Ball, 1979] M.O. Ball. Computing network reliability. *Operations research*. Vol. 27, 823-838
- [Balinski, 1961] M. L. Balinski. Fixed cost transportation problem. *Naval Research Logistic Quarterly* 8, 41-54.
- [Balachandran *et al.*, 1976] V. Balachandran et S. Jain. Optimal facility location under random demand with general cost structure. *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 23, pp. 421-436.
- [Barahona and Jensen, 1998] F. Barahona et D. Jensen. Plant location with minimum inventory. *Mathematical Programming*, 83:101-111.
- [Barbarosoglu et Yazgac, 1997] G. Barbarosoglu et T. Yazgac. An application of the analytic hierarchy process to the supplier selection problem. *Production and Inventory Management Journal*. Vol. 38(1), 14-21.
- [Brown *et al.*, 1987] G.G. Brown, G.W. Graves et M.D. Honczarenko. Design and operation of a multicommodity production/distribution system using primal goal decomposition. *Management Science*, Vol. 33(11), pp. 1469-1480.
- [Bel *et al.*, 1996a] G. Bel, K. Rota et C. Thierry. Constraint optimization as a tool for business process re-engineering. *International Workshop on Modelling Techniques, Business Process et Benchmarking*, Bordeaux.
- [Bel *et al.*, 1996b] G. Bel, E. Bensana, K. Rota et B. Sarrochi. Strategic decision making in production planning with genetics algorithms. *Proceeding of the fifth Rensselaer International Conference on Computer Integrated Manufacturing & Automation Ttechnology*, Grenoble, France.

- [Beasley, 1993] J.E. Beasley Lagrangean heuristics for location problems. *European Journal of Operational Research*, vol. 65, 1993, pp. 383–399.
- [Beasley, 1990] J.E. Beasley. A Lagrangian heuristic for set-covering problems. *Naval Research Logistics*. vol.37, No.1, 1990, pp151-164.
- [Beasley *et al.*, 1996] J.E. Beasley et P.C Chu. A genetic algorithm for the set covering problem. *European Journal of Operational Research*. vol.94, 1996, pp392-404.
- [Bean *et al.*, 1992] J.C Bean, J.L Hingle et R.L Smith. Capacity expansion under stochastic demand. *Operations Research*. Vol 40, pp. 210-216.
- [Berman *et al.*, 1984] O. Berman et LeBlanc. Location-relocation of mobile facilities on a stochastic network. *Transportation Science*. Vol 18(4), pp. 315-330.
- [Berman *et al.*, 1982] O. Berman et A.R Odoni. Locating mobile facilities on a network with markovians properties. *Networks*. Vol 12. pp. 73-86.
- [Bertsekas et Tsitsiklis, 1996] D.P. Bertsekas et J.N. Tsitsiklis. Neuro-dynamic programming. Belmont. MA: *Athena Scientific*.
- [Cohen *et al.*, 1985] M.A. Cohen, H.L. Lee. Manufacturing strategy: concepts and methods. In P.R. Kleindorfer ed., *The Management of Productivity and Technology in Manufacturing*, Plenum, New York.
- [Cohen *et al.*, 1989] M.A. Cohen et H.L. Lee. Resource deployment analysis of global manufacturing and distribution networks. *Journal of Manufacturing and Operations Management*. Vol. 2, pp. 81-104.
- [Church *et al.*, 1979] R.L Church and M.E. Meadows. Location modelling utilizing maximum service distance criteria. *Geographical Analysis*. Vol 11, pp. 358-373.
- [Church *et al.*, 1974] R.L. Church et C.S. Revelle. The maximal covering location problem. *Papers of the Regional Science Association*. Vol 32, pp. 101-118.
- [Crow *et al.*, 1980] L.E. Crow, R.W. Olshavsky et J.O. Summers. Industrial buyer choice strategies: A protocol analysis. *Journal of marketing research*. Vol. 17, pp. 34-44.
- [Daskin, 1995] M. Daskin. Network et Discrete Location: Models, Algorithms and Applications. *John Wiley and Sons, Inc.*, New York.
- [Daskin *et al.*, 2001] M. Daskin, C. Coullard et Z. Shen. An Inventory-Location Model: Formulation, Solution Algorithms and Computational results. *Annals of Operations Research*, pp. 83-106.
- [Dupont, 1998]. L. Dupont, La Gestion Industrielle. *Hermès*, Paris.

- [Dickson, 1966] G.W Dickson. An analysis of vendor selection : systems and decisions. *Journal of purchasing*. Vol. 1, N° 2, pp. 5-17.
- [Ding *et al.*, 2003] H. Ding, L. Benyoucef et X. Xie. Supplier selection problem: selection criteria and methods. *INRIA Report*. N° 4726 Feb. 2003. ISSN 0249-6399.
- [Ding, 2004] H. Ding. Une approche d'optimisation basée sur la simulation pour la conception des chaînes logistiques : Applications dans les industries automobile et textile. *Thèse de l'université de Metz-France*.
- [Ding *et al.*, 2006] H. Ding, L. Benyoucef et X. Xie (2006). A Simulation-based multi-objective genetic algorithm Approach for Networked enterprises optimization. *EAOI international journal (Engineering Applications of Artificial Intelligence)*, Vol. 19, Issue 6, pp.609-623.
- [Djuranivic, 1992] N.M. Djuranivic. A Generalization of the Cea-Goldstein Step size Algorithm. *European Journal of Operational Research* Vol. 63, pp.1-9.
- [Drezner, 1995] Z. Drezner. Facility location: a survey of applications and methods. *Springer Verlag*, NY.
- [Efroymson *et al.*, 1966] M.A. Efroymson et T.L. Ray. A branch-and-bound algorithm for plant location. *Operations Research*, vol. 14, pp. 361-368.
- [Eppen, 1989] G. Eppen, R. Kipp Martin et L. Schrage. A Scenario Approach to Capacity Planning. *Operational research*, 37-4, 517-527.
- [Erlebacher and Meller, 2000] S. J. Erlebacher et R. D. Meller. The interaction of location and inventory in designing distribution systems. *IIE Transactions*, Vol. 32, pp.155-166.
- [Ellram, 1990] L.M Ellram. The Supplier Selection Decision in Strategic Partnerships. *Journal of Purchasing and Materials Management*, Vol. 26, N° 4, pp. 8-14.
- [Fisher, 1981] M. L. Fisher. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, Vol. 27, 1-18.
- [Feo *et al.*, 1994] T.A. Féo et M.G.C Resende. Greedy randomized adaptative search procedures. *Journal of Global Optimization*, vol. 6, 1994, pp. 109-133.
- [Francis *et al.*, 1982]. R.L. Francis, B.C. Tansel, et T.J. Lowe. A Biobjective Multifacility Minimax Location Problem on a Tree Network. *Transportation Science* 16, 407-429.
- [Francis *et al.*, 1974] R. L Francis et J. A. White. Facility Layout & Location: an Analytical Approach. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ*.

- [Francis *et al.*, 1992] R. L. Francis, L. F. McGinnis et J. A. White. Facility Layout & Location: an Analytical Approach. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ*, 1992 (2nd Ed).
- [França, 1982] P.M. França et H.P.L. Luna. Solving stochastic transportation-location problems by generalized Benders decomposition. *Transportation Science* 16(2), pp.113-126.
- [Gaballa, 1974] A.A. Gaballa. Minimum cost allocation of tenders. *Operational Research Quarterly*. Vol. 25, pp. 389-398.
- [Galvão, 1993] R.D. Galvão. The Use of Lagrangean Relaxation in the Solution of Uncapacitated Facility Location Problem. *Location Science*, pp. 57-79.
- [Galvão *et al.*, 1989] R.D. Galvão et L.A. Raggi. A method for solving to optimality uncapacitated location problems. *Annals of Operations Research*, vol. 18, pp. 225-244.
- [Garfinkel *et al.*, 1972] R.S. Garfinkel et G.L. Nemhauser. *Integer Programming*. John Wiley & Sons. 427 pages.
- [Garey *et al.*, 1979] M.R. Garey et D.S. Johnson. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness”, *W. H. Freeman and Co., San Francisco*.
- [Geoffrion *et al.*, 1978] A.M. Geoffrion et G.W. Graves, S.J. Lee, Strategic distribution system planning: a status report, in A.C. Hax ed., *Studies in Operations Management*, North-Holland, Amsterdam, pp. 179-204.
- [Geoffrion *et al.*, 1982] A.M. Geoffrion, G.W. Graves et S.J. Lee, A management support system for distribution planning, *INFOR*, Vol. 20(4), pp. 287-314.
- [Geoffrion *et al.*, 1974] A.M. Geoffrion et G.W. Graves, Multicommodity distribution system design by Benders decomposition, *Management Science*, Vol. 20(5), pp. 822-844.
- [Geoffrion *et al.*, 1995] A. Geoffrion et R. Powers, Twenty years of strategic distribution system design: an evolutionary perspective, *Interfaces*, Vol. 25, pp. 105-128.
- [Goldstein, 1965] A.A. Goldstein. On steepest descent. *SIAM Journal on Control*, Vol. 3, pp. 147-151.
- [Goetschalckx *et al.*, 1999] Dogan et Goetschalckx. A Primal Decomposition Method for the integrated Design of Multi-period Production-Distribution Systems. *IIE Trans.*, 31, 1027-1036.
- [Ghodsypour et O’Brien, 1998] S.H. Ghodsypour et C. O’Brien. A decision support system for supplier selection using an integrated analytic hierarchy process and linear programming. *International Journal of Production Economics*. Vol. 56, 199-212.

- [Hakimi, 1964] L. Hakimi. Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph, *Operations Research*, 12, 450-459.
- [Hakimi, 1965] S.L. Hakimi. Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. *Operations Research* 13, 462-475.
- [Hansen *et al.*, 1997] P. Hansen et N. Mladenovic. Variable Neighbourhood Search for the P-median Problem. *Location Science*, pp. 207-226.
- [Hayya *et al.*, 1987] J.C. Hayya, D.P Christy, et A.C Pan. Reducing inventory uncertainty: a reorder point system with two vendors. *Production and Inventory Management 2nd Qtr.*, 43-48.
- [Hodder et Dincer, 1986] J.E. Hodder et M.C. Dincer, A multifactor model for international plant location and financing under uncertainty, *Computers and Operations Research*, Vol. 13(5), pp. 601-609.
- [Jarvinen *et al.*, 1972] P.J. Jarvinen et J. Rajala. A branch and bound algorithm for seeking the p -median. *Operations Research*, vol. 20, pp. 173-178.
- [Jayaraman *et al.*, 1999] V. Jayaraman, R. Srivastava et W.C. Benton. Supplier selection and order quantity allocation: A comprehensive model. *The Journal of Supply Chain Management*, 1999, vol. 35, pp. 50-58.
- [Kariv *et al.*, 1979] O. Kariv et S.L. Hakimi. An Algorithmic Approach to Network Location Problems. The P -medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 37, 539-560.
- [Klincewicz *et al.*, 1986] J. Klincewicz et H. Luss. A Lagrangean heuristic for Capacited facility location with single sourcing constraints. *Journal of Operational research society*, 37 495-500.
- [Kelle et Silver, 1990] P. Kelle et E.A Silver. Decreasing Expected Shortages Through Order Splitting. *Engineering Costs and Production Economics*. Vol. 19 pp. 351-357.
- [Laurentie *et al.*, 2000] J. Laurentie, F. Berthélémy, L. Grégoire et C. Terrier. Processus et Méthodes Logistiques – *Supply Chain Management*. AFNOR, Paris.
- [Lee *et al.*, 1993] Lee H.L, Billington C et Carter B. Hewlett-Packard Gains Control of Inventory and Service through Design for Localization. *Interfaces*, Vol 23, N°4, p. 1-11.
- [Lemaréchal *et al.*, 1997] Lemaréchal C. et Sagastizábal C. – Variable metric bundle methods: from conceptual to implementable forms. *Mathematical Programming*, vol. 76, N°3.

- [LeBlanc, 1977] L.J. LeBlanc. A Heuristic approach for large scale discrete stochastic transportation location problem. *Computers and Mathematics with Applications*. Vol 3. pp. 87-94.
- [Louveaux, 1986] F.V. Louveaux. Discrete stochastic location models. *Annals of Operations Research*, Vol. 6, p. 23-34.
- [Louveaux et Birge, 1999] F.V. Louveaux et J.R. Birge. Introduction to Stochastic Programming. *New York, NY : Springer Series in Operational Research*.
- [Lynn, 2002] B. Lynn. Unmade in America: The True cost of a global assembly line. *Haper's*, 33-41.
- [Manne, 1964] A. Manne. Plant Location Under Economy of Scale: decentralisation and Computation. *Management Science*, 11, 213-235.
- [Martel 2001] A. Martel. Un modèle général pour l'optimisation de réseaux logistiques. *Actes du 4ième Congrès International de Génie Industriel*, Aix-en-Provence, France, Juin 2001.
- [Maranzana, 1964] F.E. Maranzana. On the location of supply points to minimize transport costs. *Operations Research Quarterly*, vol. 15, pp. 261-27.
- [Mineaka, 1970] E. Minieka. The m -Center Problem. *SIAM Review* 12, 138–139.
- [Mirchandani *et al.*, 1990] P.B. Mirchandani and R. L. Francis. Discrete Location Theory. *J. Wiley & Sons, NY*, 1990.
- [Mirchandani, 1980] P.B. Mirchandani. Locational decisions on stochastic network. *Geographical Analysis*. Vol. 12(2), pp. 172-183.
- [Mirchandani *et al.*, 1979] P.B. Mirchandani and A.R Odoni. Locations of medians on stochastic networks. *Transportation Science*. Vol 13(2), pp. 85-97.
- [Martha et Vratimos, 2002] J. Martha and E. Vratimos. Creating a just-in-case supply chain for the inevitable next disaster. *Viewpoint (Marsh & McLennan Companies' Journal)*, pp. 44-58.
- [Marcus *et al.*, 2003] B. Marcus, D. Klabjan and D.L. Thurston. Modeling Robust and Reliable Supply Chains. *Optimisation Online e-print*.
- [Marlin, 2002] U.T. Marlin. Supply Chain Reliability for Contingency Operations. *2002 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*.
- [Minner, 2000] S. Minner. Strategy safety stock in supply chains. *Lecture notes in Economics and Mathematical Systems*. Vol 490 Springer.

- [Nozick and Turnquist, 1998] L. K. Nozick and M. A. Turnquist. Integrating inventory impacts into a fixed-charge model for locating distribution centers. *Transportation Research Part E*, 34(3):173-186.
- [Nozick and Turnquist, 2001] L. K. Nozick and M. A. Turnquist. Inventory, transportation, service quality and the location of distribution centers. *European Journal of Operational Research*, 129:362-371.
- [Narasimhan, 1983] R. Narasimhan. An analytical approach to supplier selection. *Journal of Purchasing & Material Management*, 19(1), 27-32.
- [Navas, 2003] D. Navas. Automotive embraces volatility. *Supply Chain Systems*. 12-16.
- [Pan *et al.*, 1991] A.C. Pan, R.V. Ramasesh, J.C. Hayya et J.K. Ord. Multiple sourcing: the determination of lead times. *Operations Research Letters*. Vol. 10, pp. 1–7.
- [Paquet *et al.*, 2001] M. Paquet, A. Martel, et G. Desaulniers. Including Technology Selection Decisions in Manufacturing Network Design Models. *IEPM Conference Proceedings, Quebec*.
- [Pirkul, 1987] H. Pirkul. Efficient Algorithms for the capacitated concentrator location problem. *Computers and Operations research* 14, 197-208
- [Polyak, 1969] B.T. Polyak. Minimization of unsmooth functionals. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol 9, pp. 14–29.
- [Polyak, 1967] B.T. Polyak. Minimization of unsmooth functionals. *Soviet Mathematics*, 8 :593–597.
- [Prékopa, 1995] A. Prékopa. Stochastic Programming. *Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academics Publishers*.
- [ReVelle et Swain, 1970]. C.S ReVelle and R. Swain. Central facilities location. *Geographical Analysis* 2: 30–42
- [Revelle *et al.*, 1976] C.S. Revelle and R.L. Church. Theoretical and computational links between the p-median location set-covering and the maximal covering location problem. *Geographical Analysis*. Vol. 8, pp. 406-415.
- [Ricciardi *et al.*, 2002] N. Ricciardi, R. Tadei et A. Grosso. Optimal facility location with random throughput costs. *Computers & Operations Research*, Vol. 29, pp. 593-607.
- [Ramasesh, 1991] R.V. Ramasesh. Procurement under uncertain supply lead times: a dual-sourcing technique could save costs. *Engineering Costs and Production Economics*. Vol. 21 (1), pp. 59–68.

- [Ramasesh *et al.*, 1991] R.V. Ramasesh, J.K. Ord, J.C. Hayya and A.C. Pan. Sole versus dual sourcing in stochastic lead-times, Q inventory models. *Management Science*. Vol. 37 (4), pp. 428–443.
- [Schilling *et al.*, 1993] D.A Schilling, V. Jayaraman, R. Barkhi. A review of covering problems in facility location. *Location Science*. 1 (1) pp. 25-55.
- [Schriver, 2000] A. Schriver. A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time. *Journal of Combinatorial Theory B*80 (2000) pp. 346-355.
- [Sculli et Wu, 1981] D. Sculli et S.Y Wu. Stock control with two suppliers and normal lead times. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 32 pp.1003-1009.
- [Sculli et Shum, 1990] D. Sculli and Y.W Shum. Analysis of a continuous review stock-control model with multiple suppliers. *Journal of the Operational Research Society*. Vol. 41 (9), pp. 873–877.
- [Sheffi, 2001] Y. Sheffi. Supply Chain Management under the Threat of International Terrorism. *The International Journal of Logistic Management*, **12**, 1-11.
- [Shen *et al.*, 2003] Z. Shen, C. Coullard and M. Daskin. A Joint Location-Inventory Model. *Transportation Science*, 37 (1), pp: 40-55 (2003).
- [Simchi-Levi et Kaminsky, 2000] D. Simchi-Levi, P. Kaminsky. Designing and managing the supply chain – concepts, strategies, and case studies. *Mc Graw-Hill*.
- [Simchi-Levi *et al.*, 2002] D. Simchi-Levi, L.V. Snyder et M. Watson. Strategies for Uncertainty times. *Supply Chain management Review*. Vol. 6 (1), pp. 11-12.
- [Snyder, 2003] L.V. Snyder. Supply chain robustness and reliability: Models and algorithms. *Ph.D. Dissertation, Northwestern University, Evanston. IL (USA)*.
- [Snyder, 2004] L.V. Snyder. Facility location under uncertainty: A review. *Technical report #04T-015, Department of Industrial & System Engineering, Lehigh University, PA, USA*.
- [Snyder *et al.*, 2004] L.V. Snyder et M. Daskin. Stochastic p-Robust Location Problems. *Technical Report 04T-014 Department of Industrial & System Engineering, Lehigh University, PA, USA*.
- [Snyder et Daskin, 2003] L.V. Snyder et M.S. Daskin. Reliability Models for Facility Location. *INFORMS workshop on “Managing Risk in an Uncertain World” Northwestern University, Evanston*.
- [Snyder et Daskin, 2005] L.V. Snyder et M.S. Daskin. Reliability models for facility location: The expected failure cost case. *Transportation Science*. Vol. 39 (3), pp. 400-416.

- [Spielberg, 1969] K. Spielberg. Algorithms for the Simple plant Location problems with some side constraints. *Operational Research*, 17, 85-111.
- [Sridharan, 1995] R. Sridharan. A Lagrangean heuristic for the Capacited Plant Location Problem with single sourcing constraints. *European Journal of Operational research* 66, 305-312.
- [Tanonkou *et al.*, 2005] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. An efficient Lagrangian heuristic for a facility location problem with stochastic demands and lead-times. *Proceeding of IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, August 10-12, Beijing 2005 (China)*. pp. 219 - 224.
- [Tanonkou *et al.*, 2006a] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. A heuristic algorithm based on Lagrangian relaxation for solving a stochastic distribution network design problem. *Submitted to Optimization Letters*, Manuscript number: #OPTL -07-86.
- [Tanonkou *et al.*, 2006b] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. Distribution network design with random demand and supply lead-time: A Lagrangian relaxation approach. *Submitted to IEEE Transaction on Automation Science and Engineering*. Manuscript ID: T-ASE-2006-204.
- [Tanonkou *et al.*, 2006c] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. Distribution network design with random demand and unreliable suppliers. *Proceeding of IEEE Conference on Automation Science and Engineering, October 8-10, Shanghai 2006 (China)*, “keynote presentation”. pp. 13-18.
- [Tanonkou *et al.*, 2006d] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. A Two-Period Stochastic programming Model for Distribution Network Design. *Proceeding of the 12th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, 17-19 May, St Etienne 2006 (France)*. pp. 377-382.
- [Tanonkou *et al.*, 2006e] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. Integrated facility location and supplier selection decisions in a distribution network design. *Proceeding of IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, 21-23 June 2006, Shanghai (China)*. pp. 399 - 404.
- [Tanonkou *et al.*, 2007] G. A. Tanonkou, L. Benyoucef et X. Xie. Joint Facility Location and Supplier Selection problem in a Supply Chain Network Design with Random Supply Lead-Time. *Accepted for publication in the proceeding of International Conference on Industrial Engineering and Systems Management. Beijing 2007 (China)*.
- [Teitz *et al.*, 1968] M.B. Teitz et P. Bart. Heuristic methods for estimating the vertex median of a weighted graph. *Operations Research*, vol. 16, pp. 955-961.
- [Toregas *et al.*, 1971] C. Toregas, R. Swain, C. ReVelle et L. Bergman. The Location of Emergency Service Facilities. *Operations Research* 19, 1363–1373.

- [Van Roy, 1983] T. Van Roy. Cross decomposition for mixed integer programming. *Mathematical Programming*, Vol. 25, pp. 46-63.
- [Verter et Dincer, 1995]. V. Verter et C. Dincer. Facility location and capacity acquisition : An integrated approach. *Naval Research Logistic*, vol. 42, pp. 1141-1160.
- [Wallace et Kall, 1994] S.W. Wallace et P. Kall. Stochastic Programming. *New York, NY : Willey*.
- [Weber, 1909] Alfred Weber. Über den Standort der Industrien. Tübingen, J.C.B. Mohr. Traduction anglaise : The Theory of the Location of Industries. *Chicago University Press*.
- [Weber *et al.*, 1991] C. Weber, J. R Current et W. C. Benton. Vendor Selection Criteria and Methods. *European Journal of Operational Research*. Vol. 50, pp. 2-18.
- [White *et al.*, 1974] J.A White et K.E. Case. On covering problems and the central facilities location problem. *Geographical Analysis* 6, pp. 281-293.
- [Wolfe *et al.*, 1974] P. Wolfe et H.D Crowder. Validation of subgradient optimisation. *Mathematical Programming*. Vol 6 (1974) pp. 62-88.
- [Wolfe, 1971] P. Wolfe. Convergence Condition for the Ascent Method. *SIAM Review*, 13, pp.185-188.
- [Zimmermann, 1991] H.J. Zimmermann. Fuzzy set theory and its applications, (2nd edition). *Boston: Kluwer Academics Publishers*.
- [Zipkin, 2000] P. Zipkin. Fundamentals of Inventory Management. *McGraw Hill – Irwin, Boston, MA*.