



**HAL**  
open science

# La fiabilité des arbres entaillés dans les machines agricoles : Applications sur les arbres clavetés

Nawar Kadi

► **To cite this version:**

Nawar Kadi. La fiabilité des arbres entaillés dans les machines agricoles : Applications sur les arbres clavetés. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paul Verlaine - Metz, 2001. Français. NNT : 2001METZ013S . tel-01775502

**HAL Id: tel-01775502**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775502>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

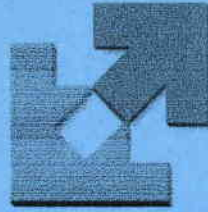
## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



**UNIVERSITE DE METZ**

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

Discipline : Mécanique

Présentée Par

**Nawar KADI**

Titre :

***LA FIABILITE DES ARBRES ENTAILLES  
DANS LES MACHINES AGRICOLES :  
APPLICATIONS SUR LES ARBRES CLAVETES***

*Soutenue publiquement le 21 septembre 2001 devant la commission d'Examen :*

<b>G. PLUVINAGE</b>	:	Professeur à l'Université de Metz (France)	(Président)
<b>H. P. LIEURADE</b>	:	CETIM, Senlis (France)	(Rapporteur)
<b>I. DMYTRAKH</b>	:	Karpenko Physico-Mechanical Institute. Lviv (Ukraine)	(Rapporteur)
<b>Z. AZARI</b>	:	Professeur à l'Université d'Amiens (France)	(Examineur)
<b>K. DANG VAN</b>	:	Professeur à l' Ecole Polytechnique, Palaiseau (France)	(Examineur)
<b>M. N. ABDUL WAHED</b>	:	Professeur à l'Université d'Alep (Syrie)	(Examineur)
<b>A. ZEGHLOUL</b>	:	Professeur à l'Université de Metz (France)	(Examineur)



UNIVERSITE DE METZ

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Discipline : Mécanique

Présentée Par

**Nawar KADI**

Titre :

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20010385
Cote	S/M3 01/13
Loc	Magasin

***LA FIABILITE DES ARBRES ENTAILLES  
DANS LES MACHINES AGRICOLES :  
APPLICATIONS SUR LES ARBRES CLAVETES***

*Soutenue publiquement le 21 septembre 2001 devant la commission d'Examen :*

<b>G. PLUVINAGE</b>	:	Professeur à l'Université de Metz (France)	(Président)
<b>H. P. LIEURADE</b>	:	CETIM, Senlis (France)	(Rapporteur)
<b>L. DMYTRAKH</b>	:	Karpenko Physico-Mechanical Institute. Lviv (Ukraine)	(Rapporteur)
<b>Z. AZARI</b>	:	Professeur à l'Université d'Amiens (France)	(Examineur)
<b>K. DANG VAN</b>	:	Professeur à l' Ecole Polytechnique, Palaiseau (France)	(Examineur)
<b>M. N. ABDUL WAHED</b>	:	Professeur à l'Université d'Alep (Syrie)	(Examineur)
<b>A. ZEGHLOUL</b>	:	Professeur à l'Université de Metz (France)	(Examineur)

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur Guy PLUVINAGE, Directeur du laboratoire de Fiabilité Mécanique, pour la confiance, les enseignements et les encouragements permanents.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Zitouni AZARI qui a été d'un support scientifique et humain considérable.

J'associe également à ces remerciements Messieurs Philippe JODIN et Joseph GILGERT qui m'ont éclairé de tout leur savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Messieurs H. P. LIEURADE, I DMYTRAKH, K. DANG VAN, M. N. ABDUL WAHED et A. ZEGHLOUL de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

Mes remerciements vont enfin à tout ceux qui ont participé, de près ou de loin, à ce travail, en particulier à tous mes amis et collègues du laboratoire de Fiabilité Mécanique et de l'université d'Alep.

A mes parents pour tous les sacrifices

A ma famille

A mes amis

# SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE

<b>I</b>	<b>ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>11</b>
<i>I.1</i>	<i>Généralités .....</i>	<i>11</i>
<i>I.2</i>	<i>Effet d'entaille .....</i>	<i>14</i>
<b>I.2.1</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>14</b>
<b>I.2.2</b>	<b>Facteur de concentration de contrainte.....</b>	<b>15</b>
<b>I.2.3</b>	<b>Facteur de concentration de contrainte en fatigue .....</b>	<b>17</b>
<b>I.2.4</b>	<b>Facteur de sensibilité à l'entaille en fatigue .....</b>	<b>18</b>
<b>I.2.5</b>	<b>Coefficient d'adaptation dynamique <math>\delta_f</math> .....</b>	<b>19</b>
<b>I.2.6</b>	<b>Détermination des durées de vie des arbres entaillés en fatigue .....</b>	<b>19</b>
I.2.6.1	Peterson.....	19
I.2.6.2	Neuber.....	20
I.2.6.3	Kuhn et Hardraht.....	21
I.2.6.4	Switech et Bush.....	21
I.2.6.5	Approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture .....	22
I.2.6.6	Gradient de contrainte (Brand).....	23
I.2.6.7	Stieler et Siebel.....	26
I.2.6.8	Méthode de Neuber .....	26
I.2.6.9	Approche de Ye Du-yi et Wang.....	29
I.2.6.10	Approche de la couche critique .....	30
I.2.6.11	Modèle de Weixing .....	33
I.2.6.12	Méthode du volume fortement contraint .....	34
I.2.6.13	Critère de fatigue dépendant du gradient.....	35
I.2.6.14	Méthode de la distance critique.....	36

I.2.6.15 Conclusion .....	38
<b>I.3 Application aux arbres clavetés .....</b>	<b>40</b>
<b>I.3.1 Introduction.....</b>	<b>40</b>
I.3.1.1 Rôle de la clavette .....	40
I.3.1.2 Types des rainures de clavettes .....	41
I.3.1.3 Dimensionnement des arbres clavetés.....	42
<b>I.3.2 Facteur de concentration de contrainte <math>k_t</math> pour les arbres clavetés</b>	<b>43</b>
I.3.2.1 Norme française : .....	44
I.3.2.2 Autres normes .....	45
I.3.2.3 Fessler et al.....	47
I.3.2.4 Peterson.....	50
<b>I.3.3 Détermination des durées de vie des arbres clavetés en fatigue.....</b>	<b>54</b>
I.3.3.1 Gradient de contrainte.....	54
I.3.3.2 Autres informations .....	54
I.3.3.3 Lignes d'amorçage en fatigue .....	54
<b>I.3.4 Conclusion.....</b>	<b>56</b>
<b>II ETUDE EXPERIMENTALE .....</b>	<b>59</b>
<b>II.1 Matériau .....</b>	<b>59</b>
<b>II.1.1 Loi de comportement statique .....</b>	<b>59</b>
<b>II.1.2 Loi de comportement cyclique (courbes d'érouissage cyclique) ...</b>	<b>61</b>
<b>II.2 Essai de fatigue.....</b>	<b>64</b>
<b>II.2.1 ESSAIS DE FLEXION ROTATIVE .....</b>	<b>64</b>
II.2.1.1 Machine .....	64
II.2.1.2 Eprouvtes.....	66
II.2.1.2.1 Eprouvtes lisses .....	66
II.2.1.2.2 Eprouvtes clavetés .....	66
II.2.1.3 Résultats et discussions.....	68
<b>II.2.2 ESSAIS DE TORSION .....</b>	<b>71</b>
II.2.2.1 Machine .....	71
II.2.2.2 Eprouvtes.....	74



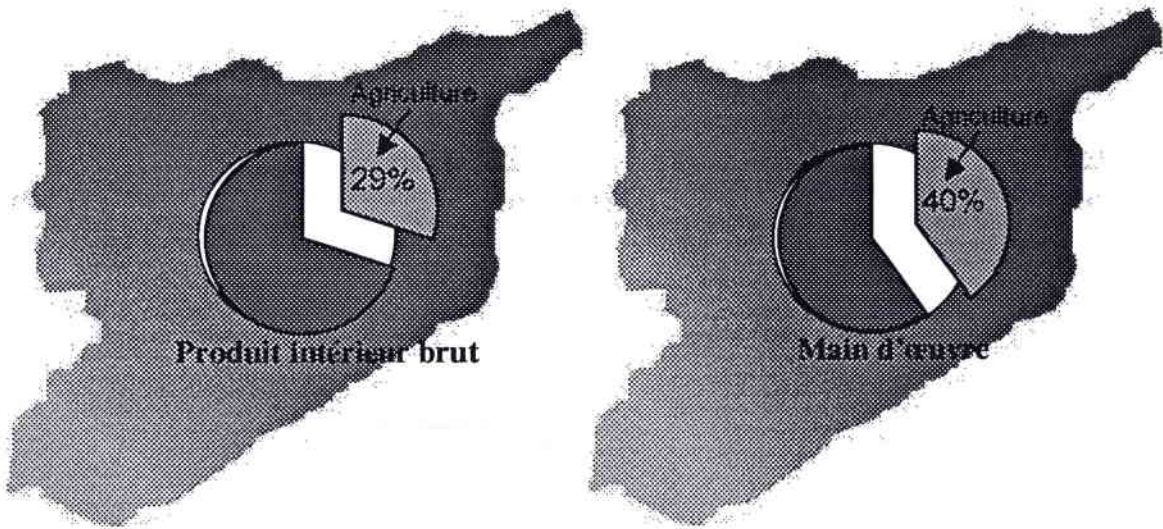
II.2.2.3 Résultats et discussions.....	76
II.3 Conclusion.....	79
<b>III MODELISATION ELASTIQUE ET ELASTO-PLASTIQUE DES ARBRES CLAVETES.....</b>	<b>81</b>
III.1 Introduction.....	81
III.2 Modélisation d'un arbre claveté.....	82
III.3 Calcul élastique.....	86
<b>III.3.1 Rainure à bout rond.....</b>	<b>87</b>
III.3.1.1 Flexion.....	87
III.3.1.2 Torsion.....	98
<b>III.3.2 Rainure à bout droit.....</b>	<b>108</b>
III.3.2.1 En flexion.....	108
III.3.2.2 En torsion.....	115
III.4 Calcul élasto-plastique.....	122
III.5 Conclusion.....	125
<b>IV MODELISATION DE LA DUREE DE VIE DES ARBRES PAR L'APPROCHE VOLUMETRIQUE. APPLICATION AUX ARBRES CLAVETES.....</b>	<b>127</b>
IV.1 Principe.....	127
IV.2 Distribution des contraintes.....	129
IV.3 Gradient de contrainte.....	134
IV.4 Contrainte pondérée.....	139
IV.5 Contrainte effective.....	143
IV.6 Conclusion.....	146
<b>V APPLICATIONS ET DISCUSSIONS.....</b>	<b>148</b>

<i>V.1</i>	<i>Volume effectif</i> .....	<i>150</i>
<i>V.2</i>	<i>Comparaison des résultats en flexion rotative</i> .....	<i>153</i>
<i>V.3</i>	<i>Comparaison des résultats en torsion</i> .....	<i>155</i>
<i>V.4</i>	<i>Conclusion</i> .....	<i>158</i>
	<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>160</b>
	<b>REFERENCES</b> .....	<b>163</b>
	<b>ANNEXE</b> .....	<b>172</b>

## **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

La Syrie est un pays où l'agriculture est le secteur essentiel de son économie. Ce secteur présente 29% du produit intérieur brut et 40% de la main d'œuvre. Il faut noter que le coton présente 50% de recette, suivi par l'huile d'olive (la Syrie est le sixième pays exportateur mondial).



Dans le domaine agricole, les machines jouent un rôle essentiel dans l'augmentation de la productivité. Mais elles sont soumises à de dures conditions de fonctionnement qui causent des problèmes de fiabilité. Un point essentiel pour le développement de ce secteur est donc l'amélioration de la fiabilité de ces machines.

Plusieurs problèmes de fiabilité se posent tels le cas d'un arbre de roue (Figure 1) ou des arbres cannelés (CLAAS). Mais en général, on constate plusieurs cas de rupture par fatigue des arbres clavetés soumis à un chargement de torsion (figure 2, 3) ou à un chargement de flexion (figure 4).

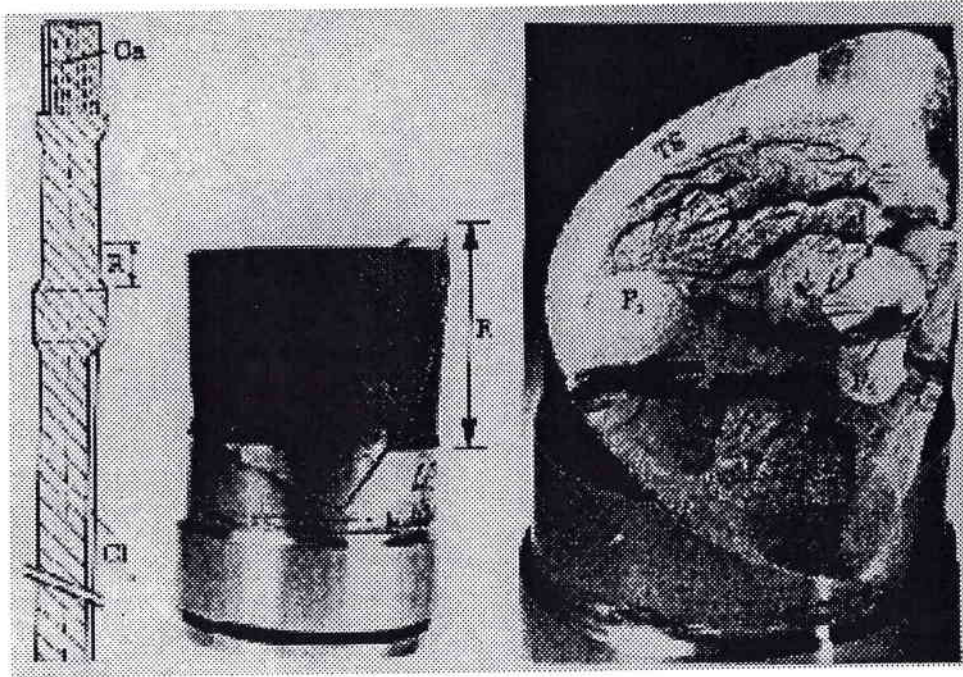


Figure 1 : Exemple d'un arbre de roue de machine agricole<sup>1</sup>.

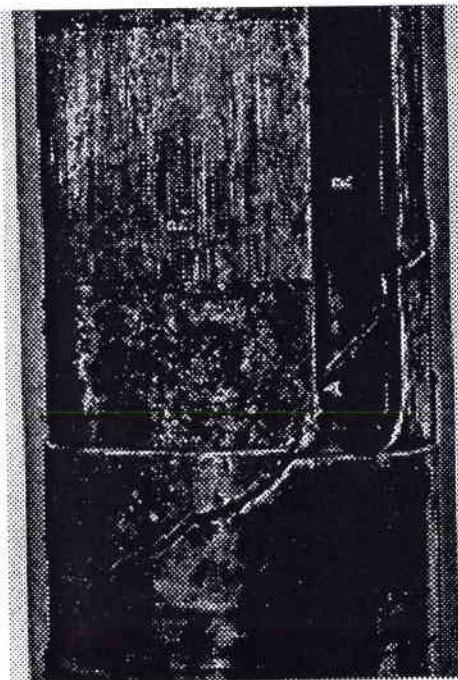
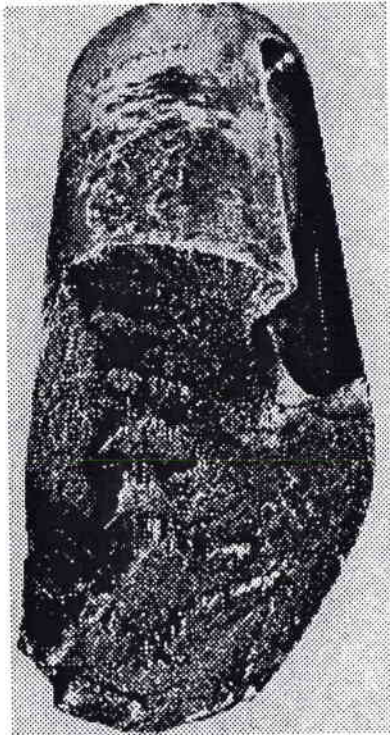


Figure 2 : Exemples de rupture par fatigue des arbres clavetés soumis à un chargement de torsion.

<sup>1</sup> Cetim information, .n°100 – Avril 1987.

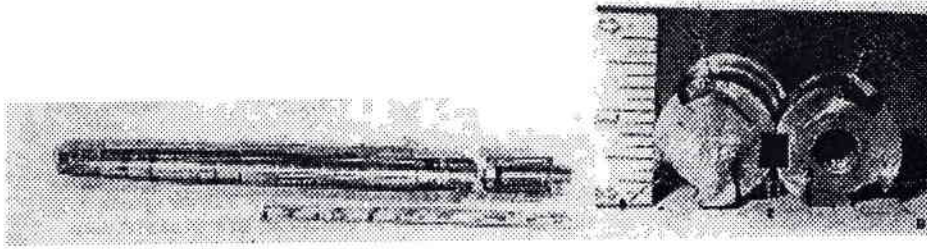


Figure 3 : Exemple d'un axe de turbine rompu par fatigue.

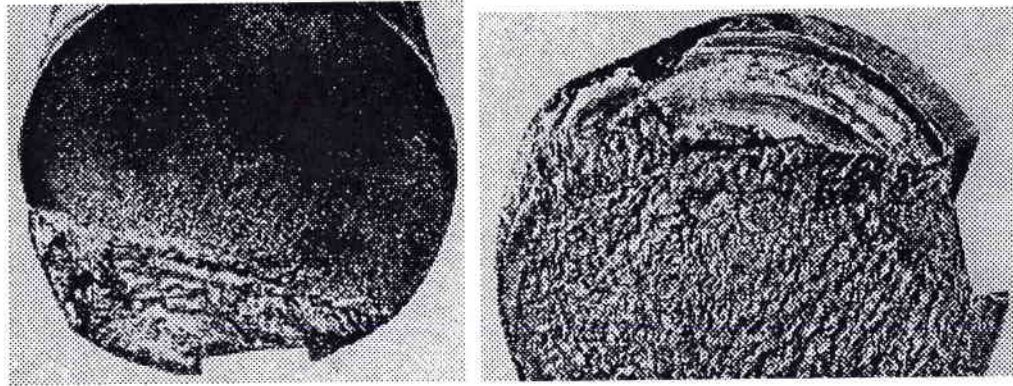


Figure 4 : Exemples de rupture par fatigue des arbres clavetés soumis à un chargement de flexion.

Le but de ce mémoire est d'étudier la fiabilité des arbres clavetés, et mieux comprendre le phénomène de rupture par fatigue. La stratégie adoptée consiste à mener deux types d'essais de fatigue :

- Flexion rotative.
- Torsion.

Ces essais seront réalisés sur plusieurs types d'éprouvettes, comportant des rainures différentes. L'influence de la géométrie de la tête de rainure est étudiée.

Une simulation par éléments finis complète les données expérimentales. Ceci permet l'analyser les mécanismes de rupture par fatigue à chaque sollicitation. En plus, cette simulation donne des informations sur l'influence des paramètres géométriques sur la fiabilité des arbres clavetés.

Une nouvelle méthode, pour l'estimation de la durée de vie des arbres, est basée sur un calcul par éléments finis. Une comparaison entre cette méthode et les résultats expérimentaux est réalisée, afin de valider cette nouvelle approche.

Cette étude illustrée dans ce mémoire est composée de six chapitres :

- Chapitre I : Etude bibliographique.

Ce chapitre parcourt les bases de l'effet d'entaille en fatigue et présente les travaux effectués sur les thèmes abordés.

- Chapitre II : Etude expérimentale.

Ce chapitre présente les divers types d'essais mis en œuvre après une description du dispositif expérimental. Il comprend les résultats bruts des essais et une conclusion.

- Chapitre III : Modélisation élastique et élasto-plastique des arbres clavetés.

Une simulation par éléments finis en élasticité a été réalisée pour étudier l'influence des paramètres géométriques. Elle comprend un calcul élasto-plastique, qui permet d'analyser la contrainte au point d'amorçage.

- Chapitre IV : Modélisation de la durée de vie des arbres par l'approche volumétrique. Application aux arbres clavetés.

Une nouvelle méthode est proposée dans ce chapitre. Cette approche permet l'estimation de la durée de vie des arbres, en réalisant le calcul dans un volume, et en prenant en compte le gradient de contrainte.

- Chapitre V : Applications et discussions.

Des comparaisons entre les résultats expérimentaux, les résultats des approches existantes et notre nouvelle approche ont été réalisées. Les résultats nous ont permis de valider notre approche.

- Chapitre VI : Conclusion générale.

Dans cette conclusion, nous présentons une synthèse des travaux effectués et nos réflexions sur les résultats obtenus.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre de collaboration entre les deux gouvernements Syrien et Français. Elle a pour but de former de futurs enseignants spécialistes dans plusieurs domaines concernant les machines agricoles.

## **CHAPITRE 1**

### **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**



# I ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

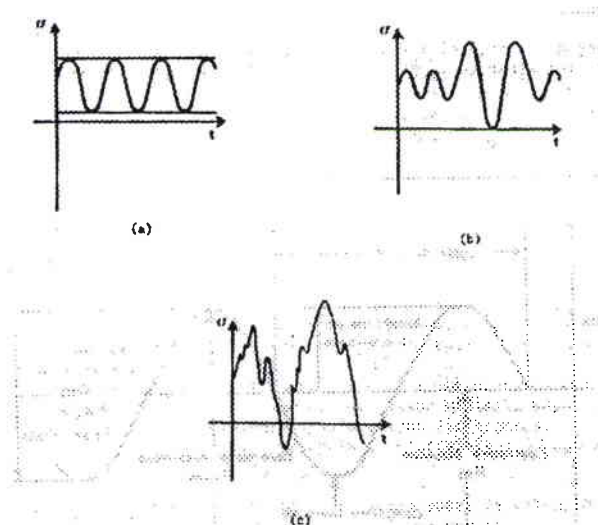
## I.1 Généralités

L'expérience montre que des pièces de machines telles les machines agricoles sont soumises à des efforts variables et répétés un grand nombre de fois. Elles se rompent brusquement, et sans déformation permanente annonciatrice de la rupture. Les mêmes pièces soumises à des efforts constants, souvent plus importants, mais appliqués de façon continue, résistent correctement. Ainsi, du fait que les efforts sont variables, leurs actions sont plus dangereuses.

On appelle «fatigue» la cause en apparence mystérieuse, de cette défaillance à laquelle n'échappe aucun matériau sous l'action des efforts variables.

En service ou au cours d'essais de laboratoire, les efforts appliqués peuvent être des sollicitations de types simples (traction – compression, flexion ou torsion), ou de types combinés de deux ou plusieurs. Quelque soit le mode de sollicitation, l'effort appliqué varie en fonction du temps de façon aléatoire ou sinusoïdale, avec une amplitude variable ou constante (Figure I. 1).

Dans le cadre de ce travail, on étudie le cas de sollicitations de types simples sinusoïdales à amplitude constante.



a) contrainte sinusoïdale à amplitude constante

b) contrainte sinusoïdale à amplitude variable

c) contrainte aléatoire.

**Figure I. 1 : Différents types de sollicitations**

Pour présenter les résultats d'essais de fatigue de manière facilement utilisable, il existe la courbe de Wöhler (courbe «  $S. N.$  » dans les pays anglo-saxons). Cette courbe représente l'amplitude de la contrainte  $\sigma_a$  en fonction du nombre de cycles à rupture (reportés sur échelle logarithmique), où chaque essai correspond à un point du plan de coordonnées  $(\text{Log } N, \sigma_a)$ .

Sur cette courbe (Figure I. 2), on peut distinguer trois domaines :

- Une Zone de fatigue oligocyclique, sous forte contrainte, où la rupture survient après un très petit nombre d'alternance, et est précédée d'une déformation plastique notable ;
- Une zone de fatigue (ou d'endurance limitée), correspondant à un nombre de cycles qui croît quand la contrainte décroît ;
- Une zone d'endurance illimitée ou zone de sécurité, sous faible contrainte, pour laquelle la rupture ne se produit pas avant un nombre donné de cycles,  $10^7$ ,  $3 \cdot 10^7$  et même  $10^8$  ou  $10^9$ , supérieur à la durée de vie envisagée pour la pièce.

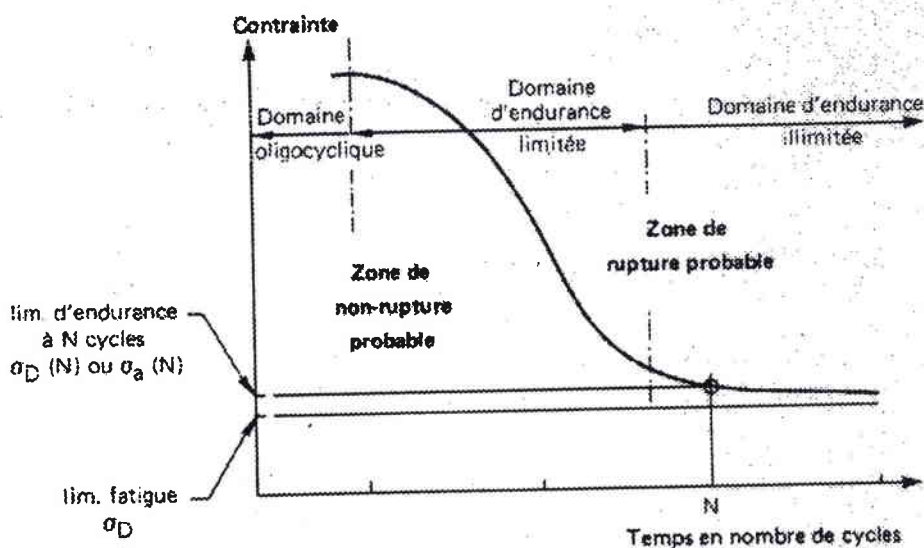


Figure I. 2 : Allure de la courbe de Wöhler.

La dispersion des résultats des essais de fatigue nécessite un dépouillement statistique et la recherche de toute méthode tendant à diminuer le nombre d'essais coûteux. Les courbes d'équiprobabilité de rupture, dont la courbe de Wöhler constitue un cas particulier ( $p = 50\%$  de rupture), sont tracées autour de la valeur moyenne pour une certaine valeur de la probabilité de rupture recherchée et du nombre d'essais (Figure I. 3).

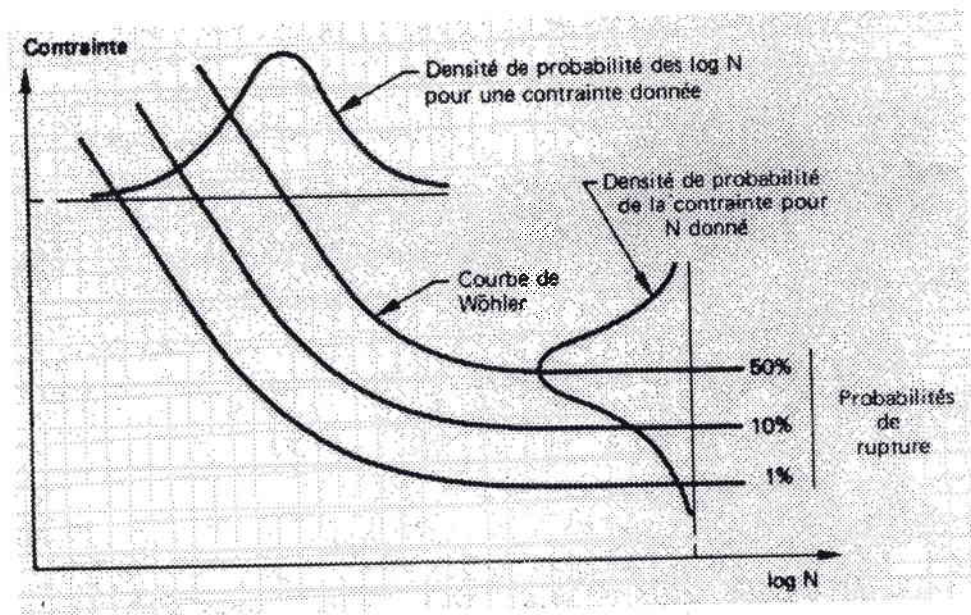


Figure I. 3 : Courbe d'équiprobabilité de rupture en fatigue.

## I.2 Effet d'entaille

### I.2.1 Introduction

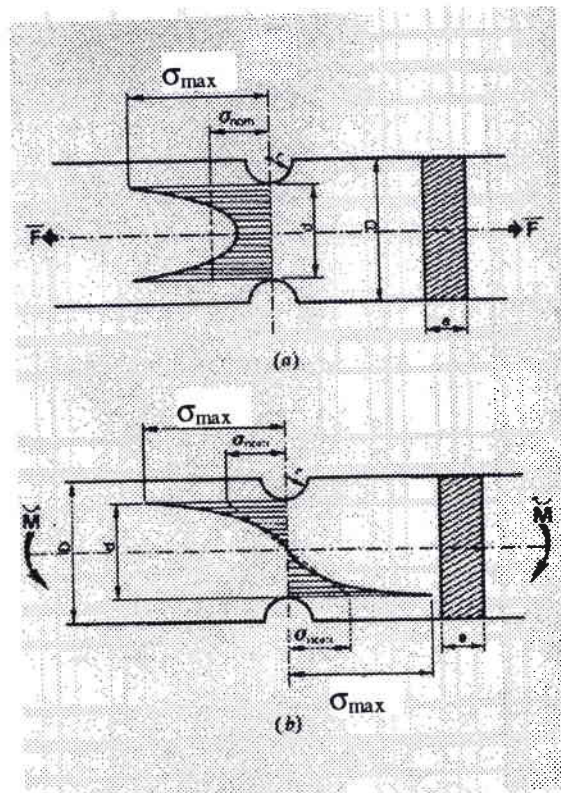
D'une manière générale, on appelle «entaille» une discontinuité imposée ou accidentelle de la forme de la pièce ou une non-homogénéité du matériau qui la constitue.

Les entailles peuvent être de trois types :

- métallurgiques,
- mécaniques (conception),
- de service (se formant durant l'utilisation).

Ces discontinuités (qui peuvent être un trou, un clavetage, ....) conduisent à la modification du champ de contrainte (Figure I. 4). C'est à dire à la création de zones dans lesquelles les contraintes sont nettement supérieures à la contrainte nominale ou à la contrainte globale résultante des efforts appliqués.

On appelle cette localisation élevée de la contrainte "*concentration de contrainte*". Ces concentrations de contrainte associées aux discontinuités géométriques réduisent les résistances statiques et cyclique des structures.



a) Epreuve soumise à un effort de traction

b) Epreuve soumise à un moment de flexion.

**Figure I. 4 : Champs de contrainte dans un arbre entaillé.**

### I.2.2 Facteur de concentration de contrainte

Dans le domaine élastique, Peterson [1] définit le facteur de concentration de contrainte de deux manières différentes :

- La première est le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte nominale :

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion).} \quad (\text{I. 1})$$

$$k_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{nom}}} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion).}$$

$\sigma_{\max}$  et  $\tau_{\max}$  sont les contraintes maximales en fond d'entaille, calculées par éléments finis ou évoluées par photoélasticimétrie.

$\sigma_{\text{nom}}$  et  $\tau_{\text{nom}}$  sont les contraintes nominales en fond d'entaille, calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

- La seconde est le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte globale (contrainte loin de la zone perturbée).

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_g} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion).} \quad (\text{I. 2})$$

$$k_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_g} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion).}$$

$\sigma_{\max}$  et  $\tau_{\max}$  sont les contraintes maximales en fond d'entaille.

$\sigma_g$  et  $\tau_g$  sont les contraintes globales, calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

On constate que ce facteur dépend de la géométrie locale de la pièce et du type de sollicitation.

Plusieurs auteurs (Peterson [1], Warren[2],...) ont proposé des formules analytiques pour des géométries particulières. Toutes ces formules dépendent du rayon de fond d'entaille.

Une autre définition du facteur de concentration de contrainte apparaît dans le domaine élasto-plastique [9], c'est le facteur de concentration de contrainte élasto-plastique. Ce facteur est défini de deux façons :

- La première est le rapport de la contrainte locale et la contrainte nominale à fond d'entaille :

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_l}{\sigma_{nom}} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion).}$$

(I. 3)

$$k_{\sigma_s} = \frac{\tau_l}{\tau_{nom}} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion).}$$

$\sigma_l$  et  $\tau_l$  sont les contraintes locales.

$\sigma_{nom}$  et  $\tau_{nom}$  sont les contraintes nominales en fond d'entaille, calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

- La seconde est le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte globale (contrainte loin de la zone perturbée).

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_l}{\sigma_g} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion).}$$

(I. 4)

$$k_{\sigma_s} = \frac{\tau_l}{\tau_g} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion).}$$

$\sigma_g$  et  $\tau_g$  sont les contraintes globales, calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

On constate que ce facteur ne dépend pas seulement de la géométrie locale de la pièce et du type de sollicitation, mais de la nature du matériau et de la charge.

### I.2.3 Facteur de concentration de contrainte en fatigue

Selon Peterson [1], le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  représente le rapport entre la limite d'endurance d'une éprouvette lisse et la limite d'endurance d'une éprouvette entaillée.

$$k_f = \frac{\sigma_{D,L}}{\sigma_{D,n}} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion)} \quad (\text{I. 5})$$

$$k_{fs} = \frac{\tau_{D,L}}{\tau_{D,n}} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion)}$$

$\sigma_{D,L}$  et  $\tau_{D,L}$  sont les limites d'endurance d'éprouvette lisse.

$\sigma_{D,n}$  et  $\tau_{D,n}$  sont les limites d'endurance d'éprouvette entaillée.

D'autres définitions présentent ce facteur comme le rapport de l'amplitude de contrainte d'une éprouvette lisse et l'amplitude de contrainte d'une éprouvette entaillée.

$$k_{f(Nr)} = \frac{\sigma_L}{\sigma_n} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion)} \quad (\text{I. 6})$$

$$k_{fs(Nr)} = \frac{\tau_L}{\tau_n} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion)}$$

$\sigma_L$  et  $\tau_L$  sont les amplitudes de contrainte d'éprouvette lisse.

$\sigma_n$  et  $\tau_n$  sont les amplitudes de contrainte d'éprouvette entaillée.

Ce facteur est donc un coefficient expérimental, calculé à partir d'essais de fatigue. Il prend une valeur comprise entre 1 et  $k_t$ .

$$1 \leq k_f < k_t \quad (\text{I. 7})$$

Autrement dit, la réduction de la limite d'endurance est plus faible à ce qu'on pourrait en attendre théoriquement à partir du facteur de concentration de contrainte  $k_t$ ; à cela deux explications sont possibles, selon Brand [3] :

- Soutien résultant du gradient de contrainte, qui soulage le cœur de la pièce et qui est fonction de la géométrie de l'éprouvette.
- Soutien résultant de l'écrouissage cyclique (l'entaille amenant très vite le matériau à l'état plastique en fond d'entaille), qui est fonction des caractéristiques du matériau.

#### I.2.4 Facteur de sensibilité à l'entaille en fatigue

Dans le cas de la rupture par fatigue, on notera que pour un matériau donné, la limite d'endurance diminue quand le facteur de concentration de contrainte  $k_t$  augmente. Cette diminution est d'autant plus forte que le matériau possède des caractéristiques mécaniques élevées. D'autre part, pour les fortes valeurs de  $k_t$ , on observe que la limite d'endurance est sensible aux variations de la résistance statique de l'acier. Ces observations ont amené Peterson [1] à définir un coefficient de sensibilité à l'entaille  $q$ , qui s'exprime par :

$$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion)} \quad (\text{I. 8})$$

$$q = \frac{k_{fs} - 1}{k_{ts} - 1} \quad \text{Pour le cisaillement (torsion)}$$

$k_f$  et  $k_{fs}$  sont les facteurs de concentration de contrainte en fatigue.

$k_t$  et  $k_{ts}$  sont les facteurs de concentration de contrainte élastique.

La connaissance du paramètre  $q$ , fonction des caractéristiques mécaniques du matériau et en particulier de sa charge à la rupture, permet d'estimer le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  de ce matériau entaillé ( $k_t$  connu), et conduit à la connaissance de la limite d'endurance sous entaille sans avoir à réaliser d'essais.



### I.2.5 Coefficient d'adaptation dynamique $\delta_f$

Un autre coefficient qui lie  $k_t$  et  $k_f$  est présenté par Brand [3]. Ce coefficient d'adaptation dynamique est défini par :

$$\delta_f = \frac{k_t}{k_f} \quad (\text{I. 9})$$

Les travaux de Brand ont montré que l'utilisation du facteur de sensibilité à l'entaille  $q$ , proposé par Peterson, conduit à une plus grande dispersion comparé au coefficient d'adaptation dynamique.

### I.2.6 Détermination des durées de vie des arbres entaillés en fatigue

#### I.2.6.1 Peterson

La variation du facteur de sensibilité à l'entaille en fatigue  $q$ , fonction du rayon en fond d'entaille  $\rho$  (Figure I. 5), est donnée par une relation empirique :

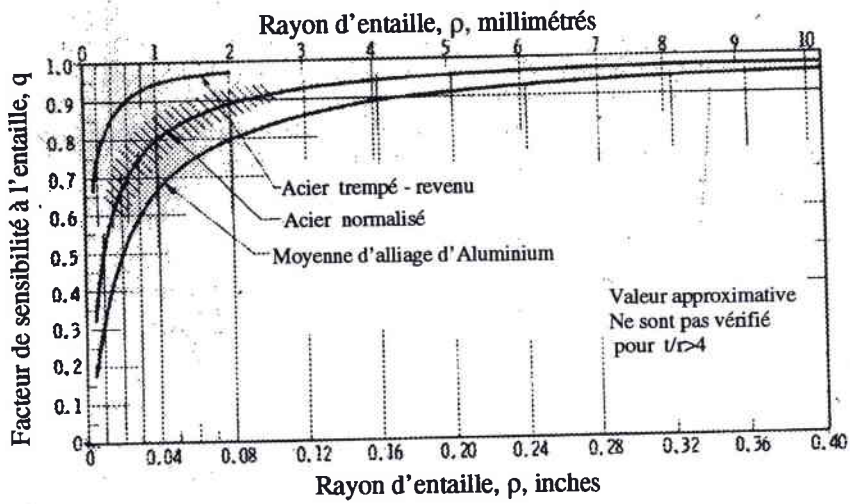
$$q = \frac{1}{1 + \frac{a_p}{\rho}} \quad (\text{I. 10})$$

$\rho$  est le rayon de l'entaille en mm.

$a_p$  est une constante qui évolue en fonction du  $R_m$  (résistance ultime), et est donnée par la relation :

$$a_p = \left( \frac{270}{R_m} \right)^{1,8} \quad (\text{I. 11})$$

Où  $a_p$  est en mm et  $R_m$  en MPa.



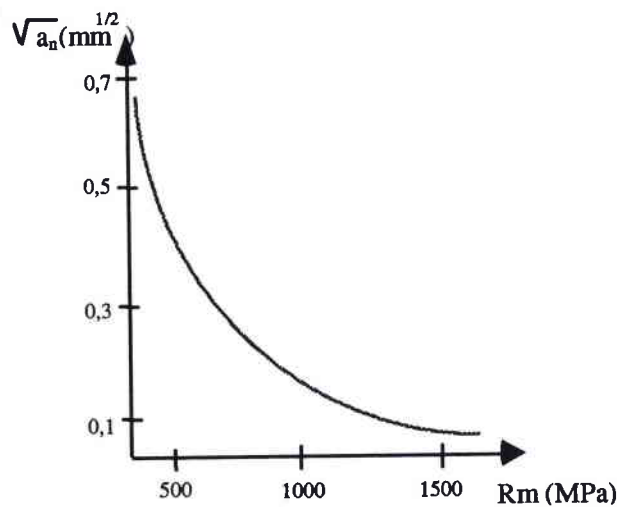
**Figure I. 5 : Variation du facteur de sensibilité à l'entaille en fatigue q en fonction du rayon en fond d'entaille  $\rho$  selon Peterson [1].**

### I.2.6.2 Neuber

Neuber [4] a proposé une autre relation pour calculer le coefficient de sensibilité à l'entaille :

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a_n}{\rho}}} \quad (\text{I. 12})$$

Où  $a_n$  est un paramètre caractéristique, donné sur la Figure I. 6.



**Figure I. 6 : Variation de la grandeur caractéristique  $\sqrt{a_n}$  dans la formule de Neuber.**

### I.2.6.3 Kuhn et Hardraht

Pour tenir compte de l'effet de l'angle d'entaille  $\omega$ , Kuhn et Hardraht [5] ont modifié l'équation (I.10) et proposent :

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{a_{nk}}{\rho}}} \quad (\text{I. 13})$$

$\rho$  est le rayon d'entaille, et  $a_{nk}$  est une constante qui dépend de la résistance ultime. Elle prend des valeurs comprises entre 0,025 et 0,51 mm,  $\omega$  est l'angle d'ouverture de l'entaille.

### I.2.6.4 Switech et Bush

Switech et Bush [6] ont proposé une relation à deux paramètres pour calculer le facteur de concentration de contrainte :

$$\frac{k_f}{k_t} = f(\rho, A, h) \quad (\text{I. 14})$$

Où :  $\rho$  est le rayon en fond d'entaille.

A et h sont des constantes qui dépendent du matériau et du type d'éprouvette.

Ils ont supposé que la rupture par fatigue se produit si la contrainte  $\sigma_k$ , sur la couche critique de profondeur h du fond d'entaille, est égale ou supérieure à une valeur critique  $\sigma_c$ .

$$\sigma_k = \sigma_c = A\sigma_{D,L} \quad (\text{I. 15})$$

Où  $\sigma_{D,L}$  est la limite d'endurance d'une éprouvette lisse.

En supposant que A et h sont des constantes, le gradient de la contrainte s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_k)}{h} \quad (\text{I. 16})$$

Mais on peut écrire :

$$\frac{d\sigma}{dx} = B \frac{\sigma_{\max}}{\rho} \quad (\text{I. 17})$$

Où B est un facteur de proportionnalité déterminé à partir de la solution élastique de la distribution des contraintes. Dans ce cas :

$$\frac{(\sigma_{\max} - \sigma_k)}{h} = B \frac{\sigma_{\max}}{\rho} \quad (\text{I. 18})$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_k}{\left(1 - B \frac{h}{\rho}\right)} = \frac{A \sigma_{D,L}}{\left(1 - B \frac{h}{\rho}\right)} \quad (\text{I. 19})$$

En considérant que la contrainte nominale  $\sigma_{\text{nom}}$  est égale à la limite d'endurance de l'éprouvette entaillée  $\sigma_{D,n}$ , on peut écrire :

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{A \sigma_{D,L}}{\sigma_{D,n} \left(1 - B \frac{h}{\rho}\right)} \quad (\text{I. 20})$$

Et quand :

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad \text{et} \quad k_f = \frac{\sigma_{D,L}}{\sigma_{D,n}}$$

On obtient :

$$k_f = \frac{k_t}{A} \left(1 - B \frac{h}{\rho}\right) \quad (\text{I. 21})$$

Où A, h et B sont des constants qui dépendent du matériau et du type de l'éprouvette.

#### I.2.6.5 Approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture

Topper et El Haddad [7] calculent le facteur de concentration de contrainte en fatigue par la relation suivante :

$$k_f = \frac{1}{F_\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{a_0}{I_0}}\right) \quad (\text{I. 22})$$

- Où :
- $a_0$  est la profondeur de l'entaille.
  - $F_\sigma$  est un facteur géométrique.
  - $I_0$  est une constante qui dépend du matériau.

Ils ont défini le facteur de sensibilité à l'entaille par les relations suivantes :

$$q = \frac{1}{F_\sigma} \sqrt{\frac{\rho}{4I_0}} \quad \text{Pour } \rho \leq 4I_0 \quad (\text{I. 23})$$

$$q = 1 \quad \text{Pour } \rho > 4I_0$$

#### I.2.6.6 Gradient de contrainte (Brand)

Selon Brand [3], l'effet d'échelle est pris en compte correctement en utilisant le gradient de contrainte  $\chi$  :

$$\chi = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{d\sigma}{dx} \quad (\text{I. 24})$$

- Où :
- $\hat{\sigma}$  est la contrainte maximale réelle en fond d'entaille.
  - $\chi$  est le gradient de contrainte, s'exprime en  $\text{mm}^{-1}$ .

Deux éprouvettes entaillées ont la même section nette en fond d'entaille et sont soumises au même moment de flexion. L'une présente une entaille à faible  $k_t$ , et l'autre une entaille à fort  $k_t$  (Figure I. 7). On constate que les pentes de la tangente, au champ de contrainte en fond d'entaille, sont différentes.

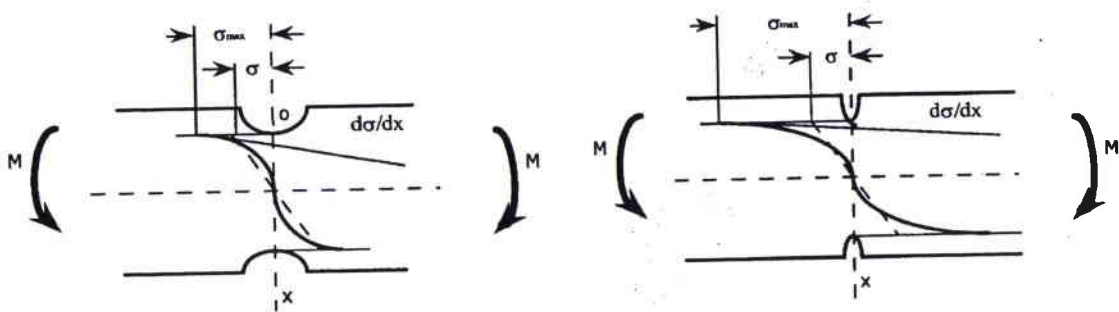


Figure I. 7 : Evolution du champ de contrainte et de la tangente.

Les valeurs de gradients de contrainte peuvent être calculées, dans certain cas, à l'aide du Tableau I. 1.

Après avoir analysé un grand nombre de données de fatigue obtenues sur des éprouvettes lisses et entaillées, Brand propose la relation suivante, pour déterminer la limite d'endurance.

$$\hat{\sigma}_D = k_t \cdot \sigma_D = a \cdot \log \chi + b \quad (\text{I. 25})$$

$\hat{\sigma}_D$  est la limite d'endurance réelle.

$\sigma_D$  est la limite d'endurance nominale pour une probabilité de 90%.

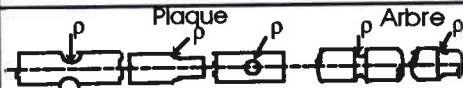
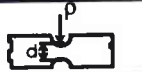

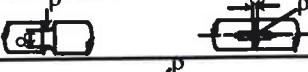
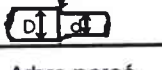
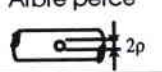
a et b sont des constantes du matériau données dans le tableau I.2.

Pour le tracé prévisionnel d'une courbe de Wöhler en présence d'entaille, Brand a proposé la relation suivante :

$$\hat{\sigma}_{DNr} = c_2 + b_2 \cdot \log N + a_2 \cdot \log \chi \quad (\text{I. 26})$$

$\hat{\sigma}_{DNr}$  est la limite d'endurance réelle à N nombre de cycles.

$a_2$ ,  $b_2$  et  $c_2$  sont fonctions de la résistance maximale  $R_m$  (Figure I. 8).

Sollicitation	Types de pièces	$\chi$
Traction		$\frac{2}{p}$
Flexion		$\frac{2}{p} + \frac{2}{d}$
		$\frac{2}{p} + \frac{4}{d+D}$
Torsion		$\frac{1}{p} + \frac{2}{d}$
		$\frac{1}{p} + \frac{4}{d+D}$
Flexion	Arbre percé	$\frac{4}{p}$
Torsion		$\frac{3}{p}$

**Tableau I. 1 Formules permettant le calcul du gradient  $\chi$ .**

Classe acier (Rm en MPa)	a	b
Rm ≥ 1400	100/3	655
1200 ≤ Rm < 1400	110/3	585
1000 ≤ Rm < 1200	120/3	520
900 ≤ Rm < 1000	130/3	465
800 ≤ Rm < 900	130/3	430
700 ≤ Rm < 800	135/3	390
600 ≤ Rm < 700	135/3	335
500 ≤ Rm < 600	140/3	295
400 ≤ Rm < 500	140/3	245
Rm < 400	140/3	195
Classe acier moulé (Rm en MPa)	a	b
350 ≤ Rm < 500	140/3	180
Rm < 350	140/3	135

Tableau I. 2 Valeurs des coefficients a et b dans la relation de Brand  $\sigma_D=f(\chi)$ .

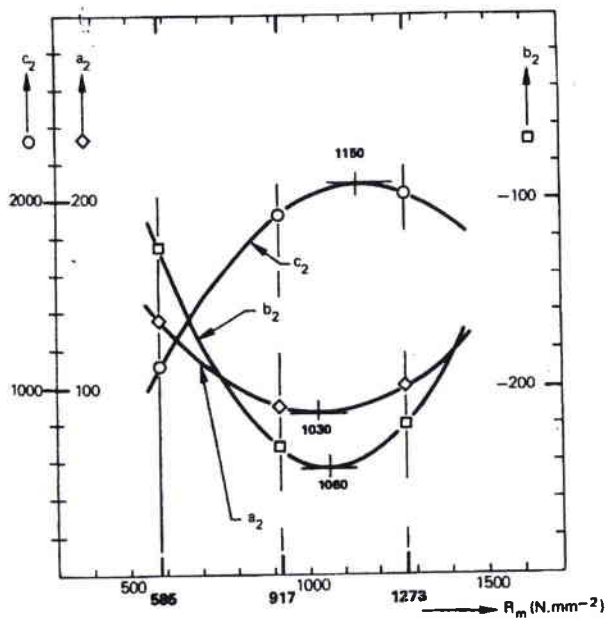


Figure I. 8 : Variation des coefficients  $a_2$ ,  $b_2$  et  $c_2$  en fonctions en de  $R_m$ .

### I.2.6.7 Stieler et Siebel

Stieler et Siebel [8] ont calculé le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  en fonction du gradient de contrainte  $\chi$ :

$$k_f = \frac{k_t}{1 + \sqrt{1 + S_g \chi}} \quad (\text{I. 27})$$

Où  $S_g$  est une constante du matériau, calculée en fonction de la limite d'élasticité.

$$S_g = f(Re) \quad (\text{I. 28})$$

$\chi$  est le gradient de contrainte en fond d'entaille.

$Re$  est la limite d'élasticité.

### I.2.6.8 Méthode de Neuber

En prenant le cas d'un solide entaillé, sollicité en cisaillement pur, Neuber [9] a démontré que :

$$k_t^2 = k_\sigma \cdot k_\varepsilon \quad (\text{I. 29})$$

Où :

$k_t$  est le facteur de concentration de contrainte dans le domaine élastique.

$k_\sigma$  et  $k_\varepsilon$  sont les facteurs de concentration dans le domaine élasto-plastique définis par les relations :

$$k_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_{nom}} \quad (\text{I. 30})$$

$$k_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{nom}} \quad (\text{I. 31})$$

$\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement l'amplitude de la contrainte et de la déformation locale.  $\sigma_{nom}$  et  $\varepsilon_{nom}$  l'amplitude de la contrainte et de la déformation nominale.

A partir des relations I. 29, I. 30 et I. 31, on peut écrire :



$$\sigma \cdot \varepsilon = k_t^2 \cdot \sigma_{nom} \cdot \varepsilon_{nom} \quad (\text{I. 32})$$

Plus tard, Neuber a proposé [10] d'étendre cette relation à tous les autres types de chargement.

Pour l'applications à la fatigue, on fait varier les valeurs de la contrainte nominale appliquée à l'éprouvette entaillée. On écrit :

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = k_t^2 \cdot \Delta\sigma_{nom} \cdot \Delta\varepsilon_{nom} \quad (\text{I. 33})$$

La variation de l'amplitude de la déformation est régie par la loi de comportement suivante :

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + m \left( \frac{\Delta\sigma}{E} \right)^{1/n'} \quad (\text{I. 34})$$

avec :

E : module de Young

m' : Coefficient de la loi d'érouissage cyclique.

n' : exposant de la loi d'érouissage cyclique.

Dans le cas d'un chargement d'amplitude constante, on peut écrire :

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = \text{Constante} \quad (\text{I. 35})$$

Par des essais de simulation sur des éprouvettes lisses Morrow et al [11] ont montré que le produit  $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon$  en fond d'entaille détermine le comportement en fatigue des éprouvettes entaillées. Un critère d'amorçage basé sur la relation I. 33 est proposé :

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = k_f^2 \cdot \Delta\sigma_{nom} \cdot \Delta\varepsilon_{nom} \quad (\text{I. 36})$$

Si le chargement nominal est élastique, on a :

$$\Delta\varepsilon_{nom} = \frac{\Delta\sigma_{nom}}{E} \quad (\text{I. 37})$$

Et on écrit :

$$\sqrt{E \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon} = k_f \cdot \Delta\sigma_{nom} \quad (\text{I. 38})$$

La courbe de base donnant la résistance à la fatigue du matériau peut être caractérisée par la loi de Manson-Coffin :

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \quad (\text{I. 39})$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2Nr)^b \quad ; \quad \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2Nr)^c$$

Où :  $\sigma'_f$  est le coefficient de la contrainte en fatigue.

$b$  est l'exposant de la contrainte en fatigue.

$\varepsilon'_f$  est le coefficient de la ductilité en fatigue.

$c$  est l'exposant de la ductilité en fatigue.

$E$  est le module de Young.

Connaissant les caractéristiques du matériau et  $k_f$ , on peut prévoir le nombre de cycles à l'amorçage correspondant à un chargement nominal donné, en utilisant les relations I.34, I.38 et I.39 (Figure I. 9) [12]

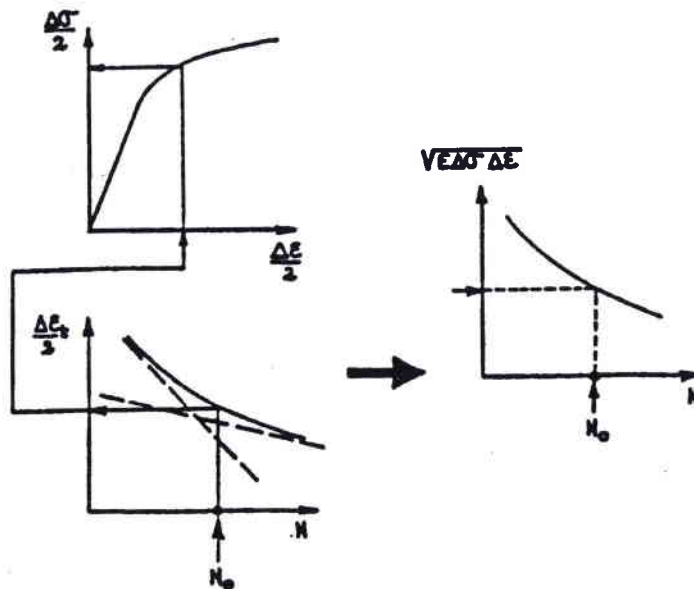


Figure I. 9 : Application de la règle de Neuber.

### I.2.6.9 Approche de Ye Du-yi et Wang

Ye Du-yi et Wang [13] ont proposé de calculer le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$ , en fonction du matériau, du facteur de concentration de contrainte  $k_t$  et de la déformation plastique en se basant sur la règle de Neuber.

$$k_f = \frac{k_t}{\sqrt{1 + \frac{1-n'}{1+n'} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\epsilon_e}{\Delta\epsilon_p}}}} \quad (\text{I. 40})$$

Où :  $n'$  est le coefficient d'érouissage cyclique.

$\Delta\epsilon_e$  l'amplitude de la déformation élastique.

$\Delta\epsilon_p$  l'amplitude de la déformation plastique.

En remplaçant  $\Delta\epsilon_e$  et  $\Delta\epsilon_p$  par leurs valeurs estimées des équations de Manson – Coffin (I.39), on peut écrire :

$$k_f = \frac{k_t}{\sqrt{1 + \frac{1-n'}{1+n'} \left[ 1 + \frac{\sigma'_f}{E\epsilon'_f} (2Nr)^{b-c} \right]^{-1}}} \quad (\text{I. 41})$$

On utilise quelques approximations pour relier les exposants  $b$  et  $c$  avec le coefficient d'érouissage cyclique  $n'$  :

$$b \approx \frac{-n'}{(1+5n')} \quad ; \quad c \approx \frac{-1}{(1+5n')} \quad (\text{I. 42})$$

De la même manière, on relie le coefficient de la contrainte en fatigue  $\sigma'_f$  et le coefficient de la ductilité en fatigue  $\epsilon'_f$ , aux caractéristiques de la traction monotone :

$$\sigma'_f \approx \sigma_f \quad ; \quad \epsilon'_f \approx \epsilon_f \quad (\text{I. 43})$$

En intégrant les équations (I.40) et (I.41) dans l'équation (I.39), on obtient :

$$k_f = \frac{k_t}{\sqrt{1 + \frac{1-n'}{1+n'} \left[ 1 + \frac{\sigma_f}{E \mathcal{E}_f} (2Nr)^{\frac{1+n'}{1+5n'}} \right]^{-1}}} \quad (\text{I. 44})$$

Le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  peut être calculée en fonction du nombre de cycles à la rupture  $Nr$ , en utilisant les relations (I.41) ou (I.44) qui sont basées sur la connaissance des caractéristiques du matériau et de la géométrie de l'entaille.

#### I.2.6.10 Approche de la couche critique [14, 15 et 16]

Ce critère d'amorçage est basé sur le raisonnement suivant : pour qu'il y ait une déformation plastique ou un glissement à la surface du matériau, il est nécessaire que la contrainte de cisaillement dépasse sa valeur critique sur une certaine épaisseur parfaitement déterminée du matériau.

Selon les auteurs, la notion de couche critique a une justification physique évidente. Les matériaux n'étant pas parfaitement homogènes mais constitués de grains, on imagine assez bien que le premier glissement qui conduira à l'amorçage d'une fissure de fatigue doit intéresser au moins un grain du matériau, dans lequel s'effectuera en bloc le glissement. Il est donc bien nécessaire, dans ce cas de figure, que la contrainte critique soit dépassée sur une épaisseur égale à taille du grain.

Les auteurs ont montré, pour plusieurs courbes et éprouvettes à différents niveaux de concentration de contraintes, que les points expérimentaux suivent une relation linéaire entre le cisaillement alterné  $\tau_a$  et la pression hydrostatique maximale  $P_{max}$  (Figure I. 10). L'examen des résultats obtenus pour diverses profondeurs, montrent que les points  $\tau_a$ ,  $P_{max}$  s'alignent sur la droite obtenue sur des éprouvettes lisses (Figure I. 11). Par conséquent, l'épaisseur de la couche critique est alors la profondeur pour laquelle on obtient le meilleur alignement des points sur la courbe des éprouvettes lisses.

Le tableau I. 3 montre les valeurs de l'épaisseur de couche critique pour quelques matériaux.

Matériaux	Etat	R <sub>m</sub>	CC(μm)
XC 38	Recuit	585	70
35 CD 4	Trempe-revenu	915	50
		1000	
		1500	
35 NCD 16	Trempe-revenu	1270	50
TA 6V	Recuit 2h à 730°C	1020	180
TA 6 VE2	Trempe-revenu	1190	120
AU 4 GI	Trempe-revenu	480	40

**Tableau I. 3 : Valeurs de l'épaisseur de couche critique (CC).**

Ce critère est défini de la manière suivante :

- Pour un matériau, il est possible de définir une épaisseur de couche critique, caractéristique du matériau et de son état structural au regard de sa tenue à la fatigue. Cette épaisseur de couche critique est liée à la structure métallurgique et correspond au volume élémentaire de matière intervenant dans le processus d'endommagement.
- Pour qu'un matériau se rompe par fatigue, il faut que dans l'épaisseur de la couche critique le cisaillement alterné, calculé sur le plan de cisaillement le plus défavorisé, dépasse une valeur critique.
- La valeur de ce cisaillement critique est fonction de la pression hydrostatique maximale calculée dans la profondeur de la couche critique. Ce cisaillement critique admissible, pour une géométrie ou un chargement donnés, peut être calculé à l'aide d'une courbe  $\tau_a, P_{max}$  caractéristique du matériau.
- La courbe intrinsèque, reliant le cisaillement alterné maximal à la pression hydrostatique maxi, est une relation linéaire de la forme :

$$\tau_a + \alpha P_{max} = \beta \quad (\text{I. 45})$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent s'exprimer à partir des résultats d'essais de fatigue.

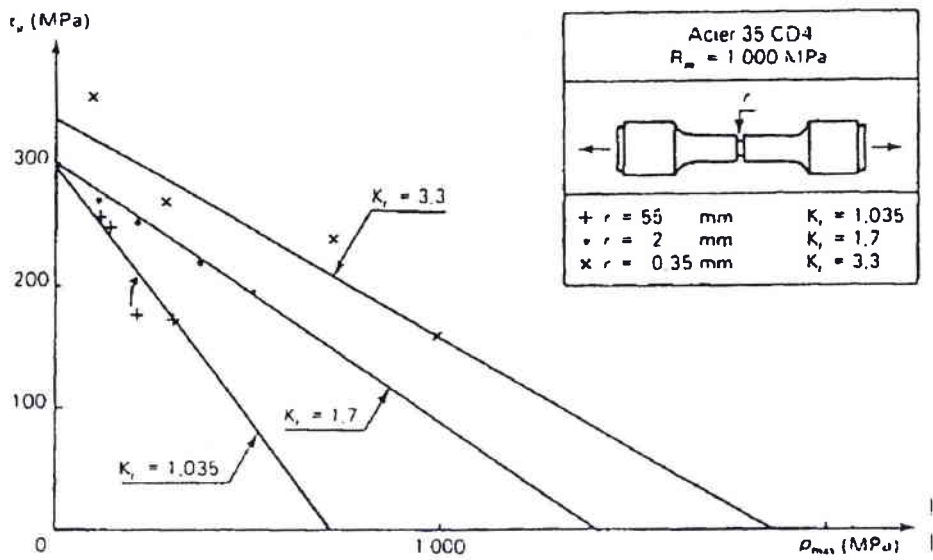


Figure I. 10 : Evolution du cisaillement alterné  $\tau_a$  et la pression hydrostatique maximale  $P_{max}$ , pour différents niveaux de concentration de contraintes.

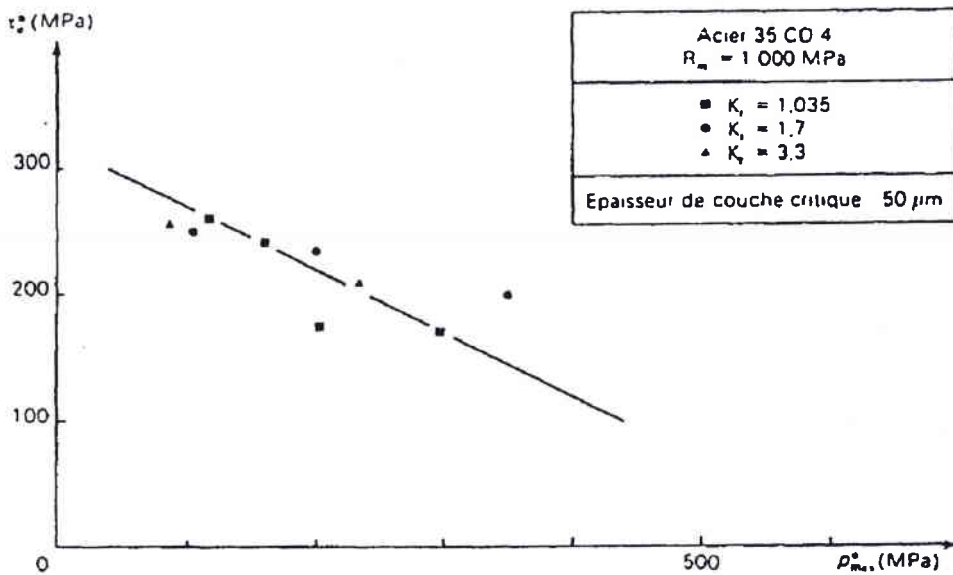


Figure I. 11 : Evolution du cisaillement alterné  $\tau_a^*$  et la pression hydrostatique maximale  $P_{max}^*$ , calculés à une profondeur de  $50\ \mu\text{m}$  pour diverses géométries et chargements.

### I.2.6.11 Modèle de Weixing

Selon Weixing [17, 18], la rupture par fatigue se produit en raison de l'accumulation d'endommagement de fatigue dans une zone du processus en fatigue, et la rupture par fatigue ne dépend pas seulement de la contrainte en fond d'entaille, mais de l'intensité du champ de contrainte dans la zone d'endommagement.

On définit l'intensité du champ de contrainte par la relation suivante :

$$\sigma_{Fl} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} f(\sigma_{ij}) \cdot \varphi(\vec{r}) dv \quad (\text{I. 46})$$

Où :  $\Omega$  est la région du processus de rupture par fatigue,

$V$  est le volume de  $\Omega$ ,

$\varphi(r)$  est une fonction poids,

$f(\sigma_{ij})$  est la fonction de la distribution de contrainte.

Weixing suppose que  $\Omega$  est une constante du matériau, de taille de quelques grains, déterminée expérimentalement.

Pour utiliser cette méthode, on considère que l'intensité du champ de contrainte d'une éprouvette lisse est égale à sa limite d'endurance :

$$\sigma_{Fl} = \sigma_L \quad (\text{I. 47})$$

On peut écrire que :

$$\sigma_{Fl} = \sigma_L = \frac{\sigma_{nom}}{V} \int_{\Omega} f(\hat{\sigma}_{ij}) \cdot \varphi(\vec{r}) dv \quad (\text{I. 48})$$

Où :  $f(\sigma_{ij}) = \sigma_n \cdot f(\hat{\sigma}_{ij})$ , et  $\sigma_{nom}$  la contrainte nominale appliquée sur l'éprouvette entaillée.

Dans le cas d'une géométrie plane avec un chargement dans le même plan, on peut écrire que le facteur de concentration de contrainte en fatigue est :

$$k_f = \frac{\sigma_L}{\sigma_n} = \frac{1}{S_D} \int f(\hat{\sigma}_{ij}) \cdot \varphi(\vec{r}) ds \quad (\text{I. 49})$$

Où : D est la région du processus en fatigue dans le plan, et S la surface de D.

Pour simplifier le calcul, on réduit la zone de processus de fatigue à une ligne, Dans ce cas :

$$k_f = \frac{1}{l} \int_L f(\hat{\sigma}_{ij}) \cdot \varphi(\vec{r}) dl \quad (\text{I. 50})$$

L est la ligne de longueur l.

#### I.2.6.12 Méthode du volume fortement contraint [19,20]

Selon les auteurs, les discontinuités du matériau amorçant la rupture ne sont pas limitées à la surface mais intéressent également une région sous la surface. Le volume de matière le plus déformé  $V_{90\%}$  est défini comme le volume dans lequel la contrainte locale est supérieure à 90% à la contrainte maximale. La distance  $t_{90\%}$ , où les contraintes décroissent de 10% de la valeur maximale et où les déformations maximales agissent, peut être déterminée par la relation :

$$t_{90\%} = \frac{0.1}{\chi} \quad (\text{I. 51})$$

$\chi$  est le gradient de contrainte en  $\text{mm}^{-1}$ , donné par la relation (I. 16).

La connaissance simultanée de la surface dans laquelle la contrainte maximale décroît de 10%, et la zone d'amorçage de fissure permet de calculer le volume de matière le plus sollicité  $V_{90\%}$ .

Les amplitudes de limites d'endurance, pour l'acier 37Cr 4 V trempé-revenu avec plusieurs valeurs de concentration de contrainte, peuvent être décrites par :

$$\frac{\sigma_{eq,a,2}}{\sigma_{eq,a,1}} = \left( \frac{V_{90\%,1}}{V_{90\%,2}} \right)^{0.05} \quad (\text{I. 52})$$

$\sigma_{eq,a}$  est l'amplitude de la contrainte équivalente (selon Von-Mises).



### I.2.6.13 Critère de fatigue dépendant du gradient [21]

Crossland [22], propose le critère suivant :

$$\sqrt{J_{2,a}} + \alpha P_{\max} \leq \gamma \quad (\text{I. 53})$$

Où :

$\alpha$  et  $\gamma$  sont des paramètres du matériau

$\sqrt{J_{2,a}}$  est la racine de l'amplitude de deuxième invariant du tenseur des contraintes.

$P_{\max}$  est la valeur maximale de la contrainte hydrostatique.

En prenant le gradient de la contrainte hydrostatique maximale qui est un scalaire, on obtient un vecteur :

$$G = \left[ \frac{\partial P_{\max}}{\partial x}, \frac{\partial P_{\max}}{\partial y}, \frac{\partial P_{\max}}{\partial z} \right] \quad (\text{I. 54})$$

La norme de ce vecteur est donnée par l'équation :

$$G = \sqrt{\left( \frac{\partial P_{\max}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_{\max}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_{\max}}{\partial z} \right)^2} \quad (\text{I. 55})$$

Le critère de fatigue, dépendant du gradient proposé, est :

$$\sqrt{J_{2,a}} + \alpha P_{\max} \left( 1 - \beta \left\langle \frac{G}{P_{\max}} \right\rangle^n \right) \leq \gamma \quad (\text{I. 56})$$

Où  $\beta$  et  $n$  sont de paramètres du matériau.

McCauley définit les domaines suivants :

$$\left\langle \frac{G}{P_{\max}} \right\rangle = \frac{G}{P_{\max}} \quad \text{si} \quad \left\langle \frac{G}{P_{\max}} \right\rangle > 0 \quad (\text{I. 57})$$

$$\left\langle \frac{G}{P_{\max}} \right\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \left\langle \frac{G}{P_{\max}} \right\rangle \leq 0 \quad (\text{I. 58})$$

En plus McCauley définit :

$$\left\langle \frac{G}{P_{\max}} \right\rangle = 0 \quad \text{si} \quad P_{\max} = 0 \quad (\text{I. 59})$$

#### I.2.6.14 Méthode de la distance critique

Taylor et al [23, 24] ont proposé un critère basé simultanément sur la mécanique élastique de la rupture et sur une constante du matériau  $a_0$ .

Selon ElHaddad [25], la constante du matériau  $a_0$  est calculée par la relation :

$$a_0 = \left( \frac{1}{\pi} \right) \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_D} \right)^2 \quad (\text{I. 60})$$

Où :

$\Delta K_{th}$  est le seuil du facteur d'intensité de contrainte pour la propagation de fissure.

$\Delta \sigma_D$  est la limite de fatigue pour une éprouvette pleine.

Cette constante est choisie comme une distance critique. Trois solutions, pour déterminer la limite d'endurance, sont proposées :

- En prenant la valeur de la contrainte élastique à la distance  $r = a_0/2$ .
- En calculant la moyenne de la contrainte sur une ligne de longueur  $r = 2a_0$
- En calculant la moyenne de la contrainte principale maximale, dans une surface semi-circulaire de rayon  $r = a_0$ .

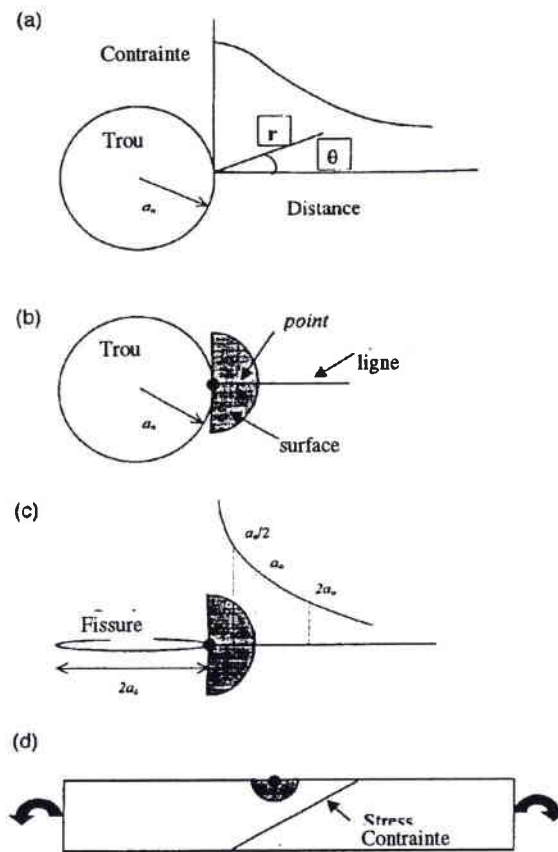


Figure I. 12 : Définition géométrique de la méthode de la distance critique.

Une comparaison entre les résultats expérimentaux, les trois solutions et la méthode de Peterson (en utilisant le facteur de concentration de contrainte élastique), pour différents rayons d'entailles, est présentée sur la figure (I. 12).

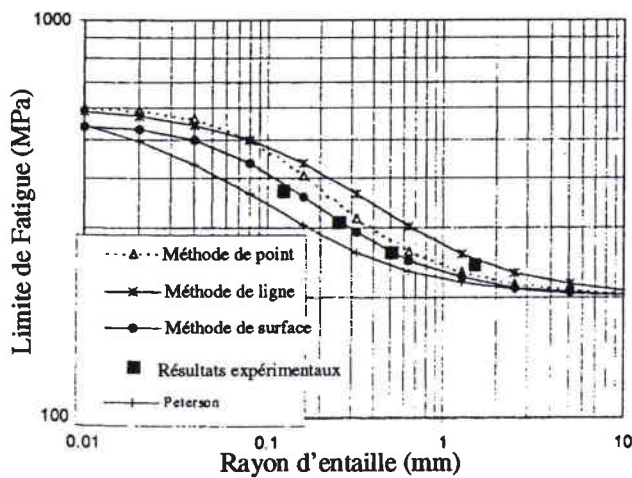


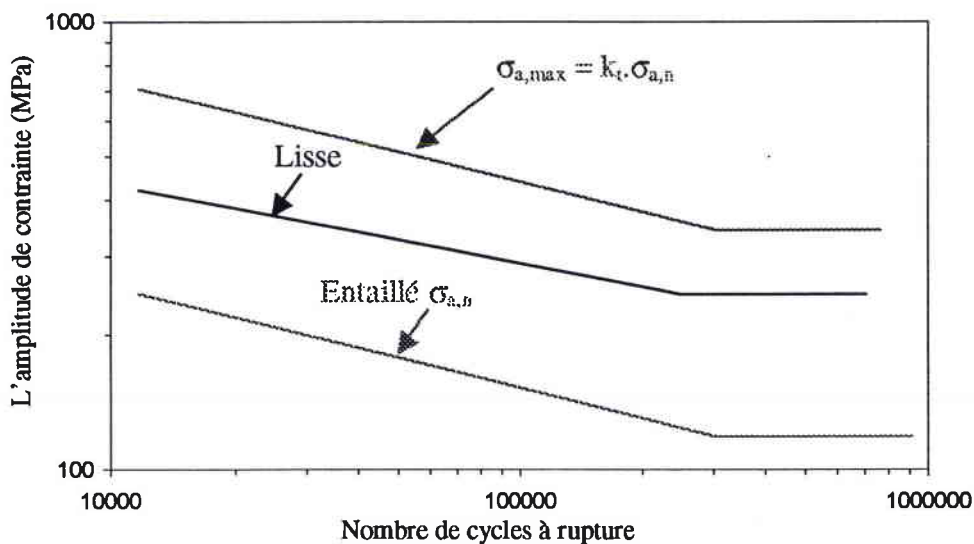
Figure I. 13 : Comparaison entre les résultats expérimentaux, la méthode de la distance critique et Peterson, pour un trou circulaire.

### I.2.6.15 Conclusion

La durée de vie d'un arbre entaillé, influencée par la présence d'une entaille, cause une diminution importante de la durée de vie. Cette diminution peut être exprimée par le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$ . Ce facteur est inférieur au facteur de concentration de contrainte élastique  $k_t$ , c'est-à-dire que l'amplitude de la contrainte maximale  $\sigma_{a, max}$  en fond d'entaille, obtenue en utilisant  $k_t$ , est supérieure à celle d'un arbre lisse (figure I. 14).

L'estimation de la durée de vie d'un arbre entaillé est effectuée selon deux types d'approches :

- Les approches du "point chaud" (traditionnelles), utilisées généralement.
- Les approche volumétriques.

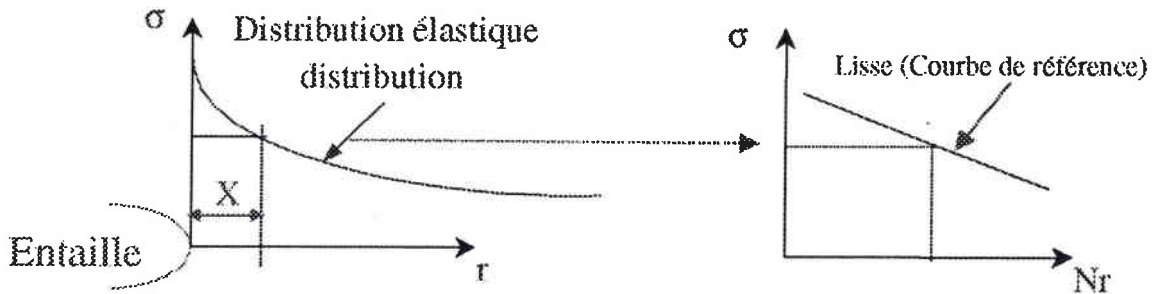


**FigureI. 14 : Comparaison entre l'amplitude de la contrainte d'un arbre lisse et l'amplitude de la contrainte maximale,  $\sigma_{a,max}$  obtenue à partir du facteur de concentration de contrainte  $k_t$ .**

L'estimation de la durée de vie, par les approches du point chaud (traditionnelles), peut être effectuée de deux manières :

- Par des relations empiriques (Peterson, Neuber, ..... ) basées sur le facteur de concentration de contrainte  $k_t$  et le rayon de fond d'entaille. Ces paramètres sont utilisés pour déterminer le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$ .

- En définissant une certaine distance  $X$ , caractéristique du matériau (couche critique, distance critique.....), où la contrainte à cette distance est calculée. Cette contrainte est ramenée sur la courbe de Wöhler, d'une éprouvette lisse, pour avoir une estimation de la durée de vie (figure I. 15).



**Figure I. 15 : Estimation de la durée de vie par les approches traditionnelles en utilisant une distance  $X$ .**

Les approches volumétriques considèrent que le phénomène de fatigue nécessite un certain volume physique dans lequel règne une contrainte moyenne, utilisée pour calculer le facteur de concentration de contrainte en fatigue (modèle de Weixing,...) .

Les approches du point chaud sont faciles à appliquer, mais ne peuvent expliquer ni le mode de chargement, ni l'effet d'échelle, ni la prise en compte de l'état de contraintes près de l'entaille.

La distance, qui limite le volume, ne peut être une constante du matériau seulement. Elle est différente pour une grande ou une petite structure.

L'importance du gradient de contrainte est signalée par plusieurs auteurs (Brand, Stieler, Sonsino....), mais ce gradient ne doit pas être une valeur dépendant seulement de la géométrie et du mode de chargement. La nature du matériau et le niveau de chargement influencent fortement l'état des contraintes en fond d'entaille.

Enfin, l'utilisation de la loi de comportement cyclique (Neuber,...) permet de prendre en compte l'effet d'écrouissage cyclique et la relaxation plastique.

## I.3 Application aux arbres clavetés

### I.3.1 Introduction

#### I.3.1.1 Rôle de la clavette

On définit la clavette comme étant l'élément rapporté d'une liaison encastrement ou d'une liaison glissière assurant la transmission d'un couple. Ces liaisons sont destinées à rendre solidaires en rotation un élément de machine et un arbre.

Les tolérances et les matières associées aux différents clavetages sont définies dans les normes :

<i>Clavetages par clavettes parallèles</i>	<i>La Norme Française[26]</i>	<i>ISO*</i>
Dimensions et tolérance des logements	NF E 22-175	ISO/R 773 & ISO 2491
Clavettes parallèles :		
• Désignation, dimensions et tolérances, matières	NF E 22-177	ISO 2491
Clavettes parallèles fixées par vis :	NF E 22-181	
• Désignation, dimensions et tolérances, matières		
<i>Clavetages forcés par clavettes inclinées</i>		
Dimensions et tolérance des logements	NF E 22-176	ISO/R 774 & ISO 2491
Clavettes inclinées pour clavetages forcés.	NF E 22-178	ISO/R 774 & ISO 2492
<i>Clavetages par clavettes-disques</i>		
Clavettes-disques :		
• Désignation, dimensions et tolérances.	NF E 22-179	ISO 3912
• Ebauches laminées.	NF E 22-180	
<i>Clavetages par clavettes tangentielles</i>		
• Désignation, dimensions et tolérances, matières.	NF E 22-182	ISO 3117

Nous nous limitons à l'étude de la rainure de clavette, et à son effet sur la fiabilité des arbres.

---

\* ISO : International Organization For Standardization. <http://www.iso.ch/>

### I.3.1.2 Types des rainures de clavettes.

La fabrication de rainure de clavette est effectuée par fraisage, selon la norme française E 66 – 202 [27], qui correspond à la recommandation ISO/R 240 et ISO 12197.

Ce fraisage peut être effectué par deux types de fraise (Figure I. 16) :

- Fraise à queue (Figure I. 16 a), qui permet de réaliser le fraisage en bout,
- Fraise à trou (Figure I. 16 b), qui permet de réaliser le fraisage en roulant.

Ce type de fabrication donne deux types de rainures (Figure I. 17 et I. 18) :

- Rainure à bout rond, qui correspond au fraisage en bout,
- Rainure à bout droit, qui correspond au fraisage en roulant.

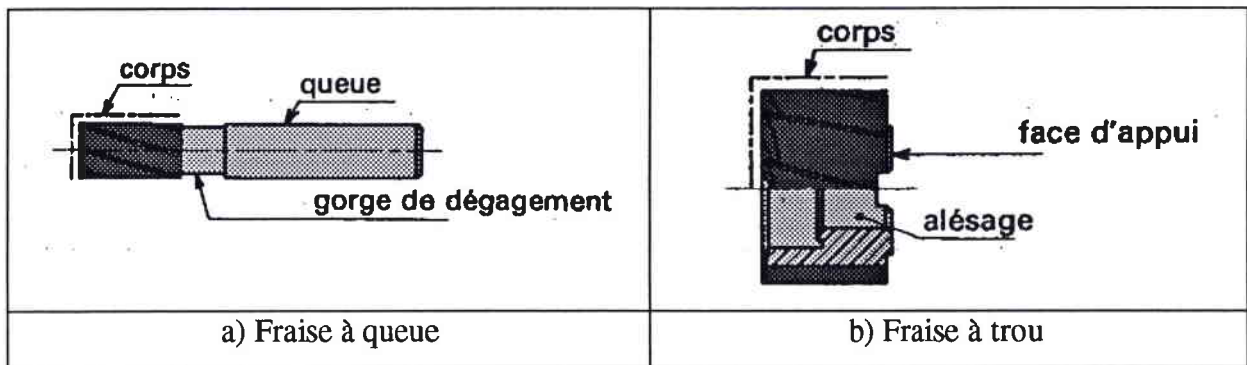


Figure I. 16 : Types de fraises utilisées pour la fabrication des rainures de clavettes.

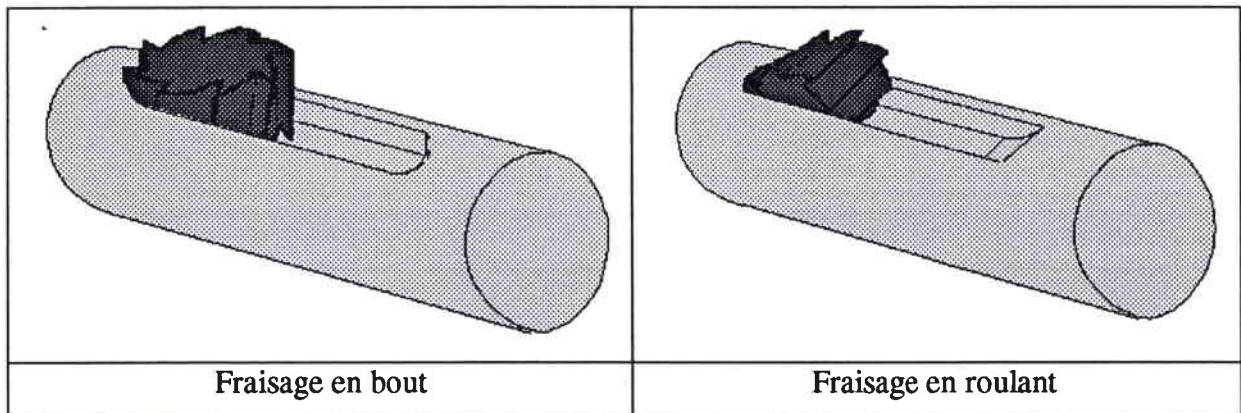
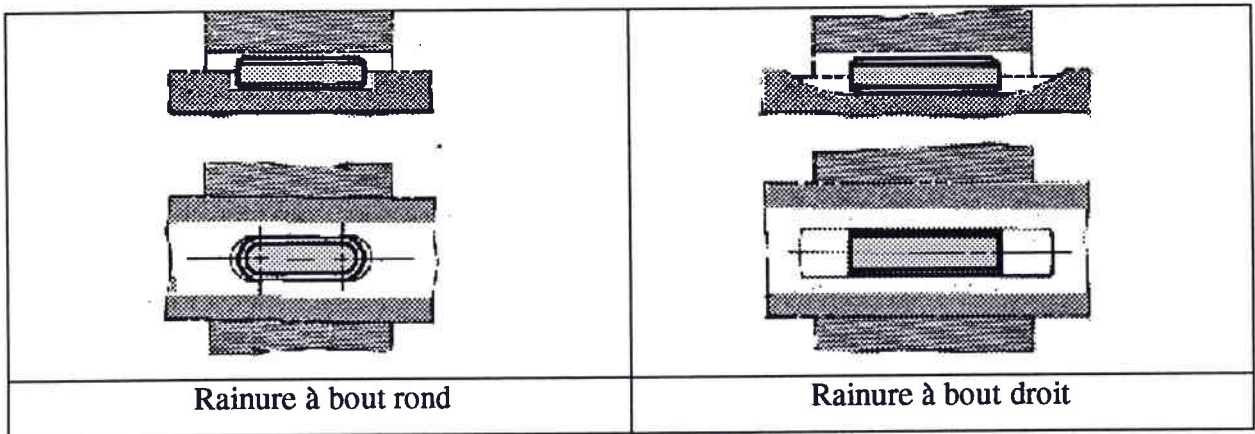


Figure I. 17 : Types de fraisage des arbres.



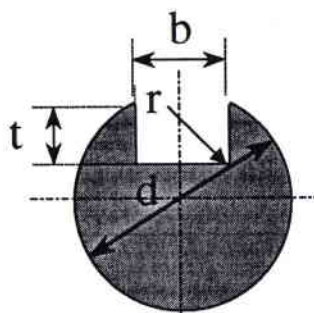
**Figure I. 18 : Types de rainures de clavettes.**

### I.3.1.3 Dimensionnement des arbres clavetés

Selon M. Aublin [28] et D. Spenlé [29], le comportement sous charge d'un clavetage dépend de nombreux paramètres associés aux conditions de service (chocs, vibrations, précisions,.....), de fabrication et de montage (jeux et tolérances).

Il devient alors très délicat de prévoir un modèle de comportement de la liaison, et de vérifier sa validité.

Pour choisir une clavette, les dimensions transversales (Figure I. 19) sont normalisées en fonction des diamètres des arbres (tableau I. 4). La condition du non-montage détermine la longueur minimale de la clavette. Pour assurer cette condition, la pression est calculée sur le flanc de la clavette (la surface de liaison clavette /moyeu), et comparée à la pression admissible normalisée. Enfin les tolérances sont définies par normes.

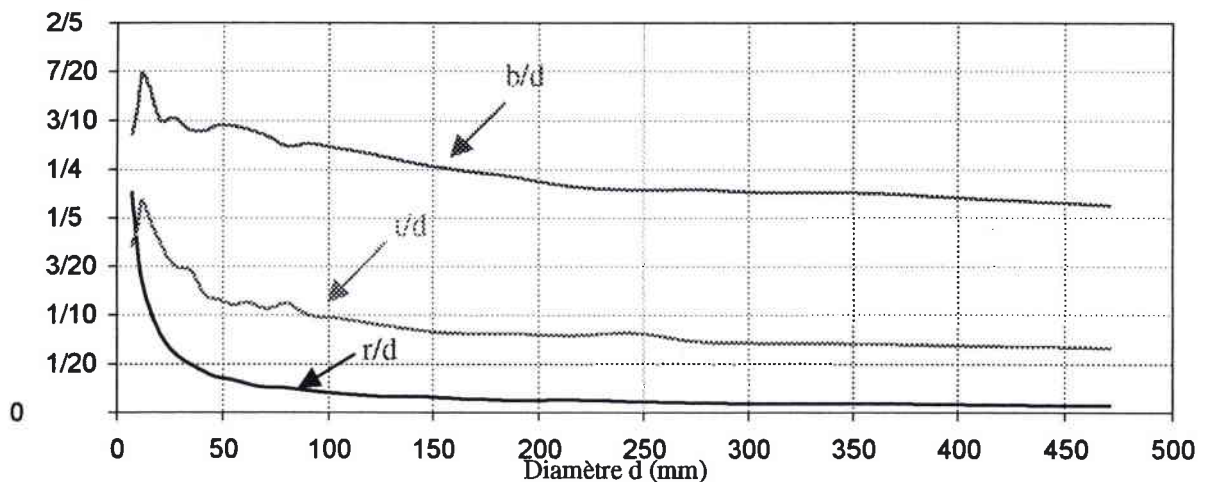


**Figure I. 19 : Définition géométrique transversales d'arbre claveté.**



Norme	d	b/d	t/d	r/d
U.S.A [30]	inférieure à 6,5 in (165,1 mm)	1/4	1/8	0,0208
ANSI 1967	supérieure à 6,5 in (165,1 mm)	1/4	0,09	0,0156
U.K.	inférieure à 6,5 in (165,1 mm)	1/4	1/12	0,0208
	supérieure à 6,5 in (165,1 mm)	1/4	0,09	0,0156
Française	Figure I. 20			

**Tableau I. 4 : Valeurs approximatives de dimensions transversales de la rainure de la clavette.**



**Figure I. 20 : Dimensions transversales de rainure, selon la norme française.**

### I.3.2 Facteur de concentration de contrainte $k_t$ pour les arbres clavetés

Le facteur de concentration de contrainte a été défini dans le paragraphe 1.2.2. Ce facteur est calculé pour chaque type de chargement, en fonction de la contrainte nominale en fond d'entaille, ou en fonction de la contrainte globale (contrainte loin de la zone perturbée).

Dans le cas des arbres clavetés, le point de la contrainte maximale dépend du type de rainures et des paramètres ( $r$  le rayon de raccordement, la profondeur  $t$ , .....).

Le changement du point de la contrainte maximale et la géométrie d'arbre claveté non axisymétrique rendent difficile le calcul du moment quadratique dans le cas de la flexion, et le moment polaire dans le cas de la torsion.

Le facteur de concentration de contrainte est calculé non pas en fonction de la contrainte nominale, difficile à déterminer, mais en fonction de la contrainte globale.

I.3.2.1 Norme française :

La norme française E22-060 [26] permet de déterminer, dans le cas de la torsion, le facteur de concentration de contrainte :

$$k_{ts} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,263k_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,843k_q}\right)^2}} + 1 \tag{I. 61}$$

$k_p$  et  $k_q$  sont des constantes qui dépendent de la dimension des rainures de la clavette, et sont calculées par les relations :

$$k_p = \sqrt{\frac{t}{r} \times \frac{d/D}{1-d/D} + 1} - 1 \tag{I. 62}$$

$$k_q = \frac{1}{\sqrt{r/t}} \tag{I. 63}$$

$D$ ,  $d$  sont respectivement le diamètre de l'arbre et le diamètre en fond de la rainure.

$r$  est le rayon de raccordement et  $t$  la profondeur.

La figure I. 21 présente ces paramètres.

La figure I. 22 présente les valeurs de  $k_t$  en fonction de  $d/D$  pour chaque valeur de  $r/t$ .

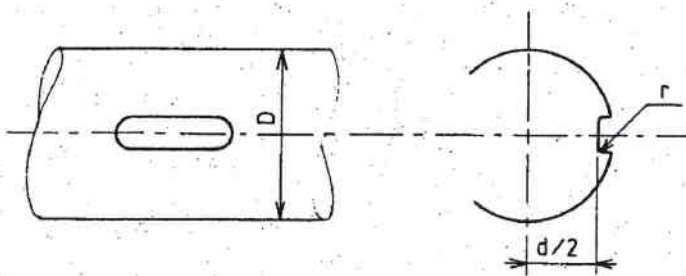


Figure I. 21 : Arbre avec rainure de clavette.

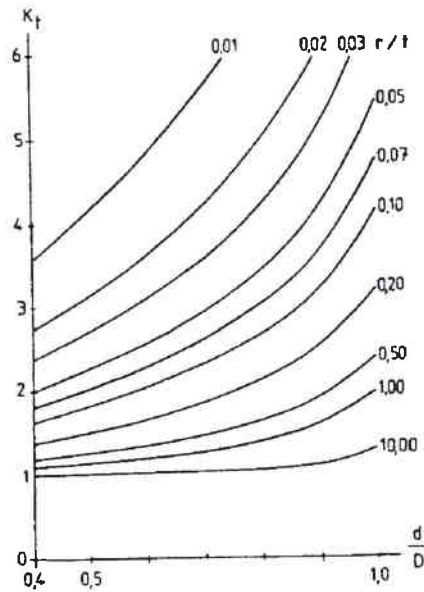


Figure I. 22 : Valeurs de  $k_t$  selon la norme française.

La norme française détermine le facteur de concentration de contrainte  $k_{ts}$  en fonction de la contrainte de cisaillement nominale en fond de la rainure :

$$\tau_n = \frac{16M}{\pi d^3} \tag{I. 64}$$

$M$  est le couple de torsion.

$d$  est le diamètre d'arbre en fond de rainure (Figure I. 21).

### I.3.2.2 Autres normes

Pour la rainure à bout rond, et pour le cas de la flexion, les normes anglaises et américaines utilisent la même valeur du facteur de concentration de contrainte en surface pour le point A (Figure I. 23),  $k_{tA}=1.6$  et  $b/d = 1/4$ . En notant que  $k_{tA}$  est indépendant de  $r/d$ , donc du rayon de raccordement  $r$ .

Pour la valeur de  $k_t$  en fond de la rainure, la norme U.S.A ( $t/d = 0.125$ ) donne  $k_{tB}= 2.7$ . Selon Peterson [1] ( $t/d = 1/12$ ), la valeur de  $k_t$ , pour la norme anglaise, peut être extrapolée de la norme d'U.S.A en utilisant le diagramme de la figure I. 24.

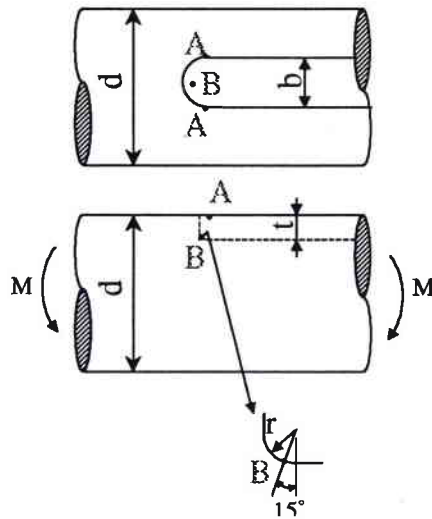


Figure I. 23 : Localisation des points, où les contraintes sont maximales :

Cas des arbres avec des rainures à bout rond.

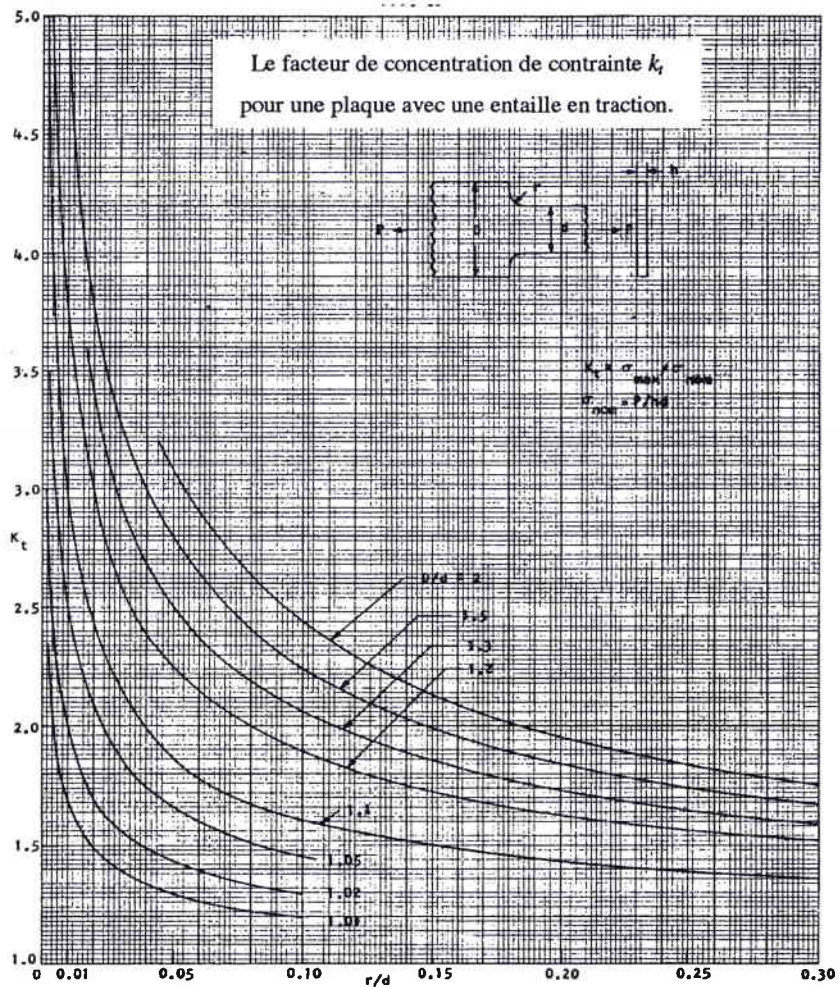
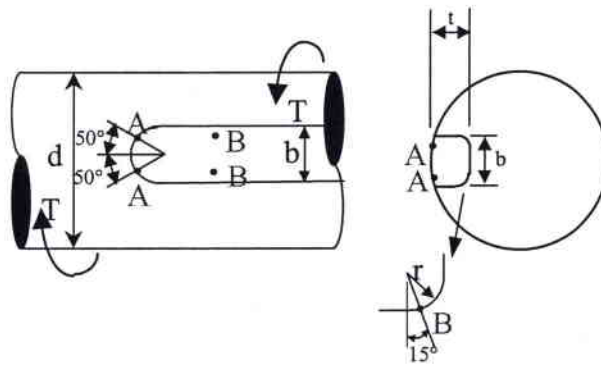


Figure I. 24 : Facteur de concentration de contrainte pour une plaque soumise à une charge de traction (Peterson [1]).

Dans le cas de la torsion, les investigateurs de la norme anglaise et les travaux de Leven [31] proposent  $k_{tA} = \sigma_{max}/\tau = 3.4$ . Cette valeur a été calculée pour une contrainte de traction tangentielle à la surface (Figure I. 25). Ce point est situé à  $50^\circ$  de la direction axiale, et sa valeur est indépendante de  $r/d$ . La contrainte de cisaillement maximale se trouve à  $45^\circ$  de la contrainte de tension, et sa valeur est égale à  $k_{tsA} = \tau_{max}/\tau = 1.7$ .

Pour la norme U.S.A,  $k_{tA} = 3.4$ ,  $k_{tsa} = 1.7$  et  $k_{tsB} = 2.62$ . Les points A et B sont présentés dans la Figure I. 25.



**Figure I. 25 : Localisation des points, où les contraintes sont maximales :**

**Cas des arbres avec des rainures à bout droit.**

**I.3.2.3 Fessler et al**

Fessler et al. [32] ont réalisé une étude pour la norme anglaise (B.S.) en utilisant la photoélasticimétrie. Les éprouvettes de rainure à bout rond sont choisies.

Les principaux résultats de cette étude sont la localisation du point de la contrainte maximale selon le type de chargement :

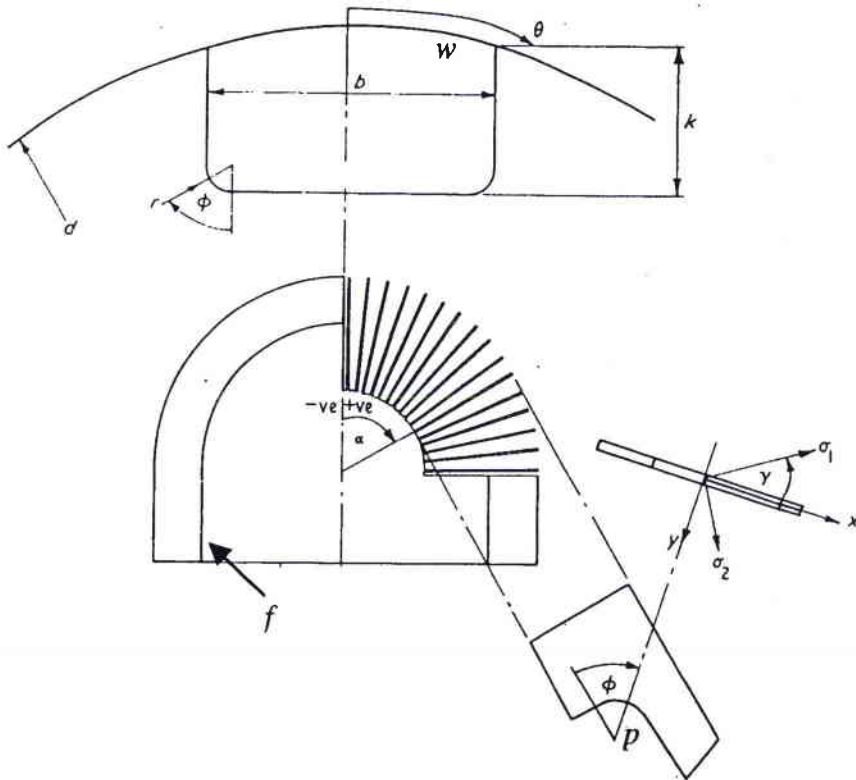
- Pour un chargement de traction ou de flexion, le point de la contrainte maximale se trouve au fond de la rainure, dans le rayon de raccordement où  $\alpha=0^\circ$  et  $\phi=15^\circ$  (Figure I. 26).
- Pour la torsion, le point de la contrainte maximale dépend de la valeur  $r/d$  ( $r$  est le rayon de raccordement et  $d$  le diamètre). Trois points sont définis :
  1. Point  $w$  qui se trouve dans la tête de la rainure sur la surface où  $\alpha=50^\circ$ . Dans ce point, la valeur de la contrainte maximale ne dépend pas du rayon de raccordement  $r$ .

2. Point  $f$  qui se trouve dans la tête de la rainure, sur le rayon de raccordement où  $\alpha=50^\circ$  et  $\phi=15^\circ$ .
3. Point  $p$  dans le cœur de la rainure, sur le rayon de raccordement où  $\phi=15^\circ$ .

Les résultats sont donnés pour le point maximal de concentration de contrainte en torsion :

$$r/d > 0.012, k_{rw} > k_{if} > k_{tp}$$

$$r/d < 0.012, k_{tp} > k_{if} > k_{rw}$$



**Figure I. 26 : Définition géométrique de Fessler.**

Fessler et al [32] ont étudié l'influence du rayon de raccordement sur le facteur de concentration de contrainte élastique pour la norme anglaise :

- Dans le cas de la traction,  $k_t$  augmente de 2.75 à 4.30 quand le  $r/d$  diminue de 0.0208 à 0.07.
- Dans le cas de la torsion,  $k_t$  augmente de 3.39 à 4.00 quand le  $r/d$  diminue de 0.011 à 0.07.

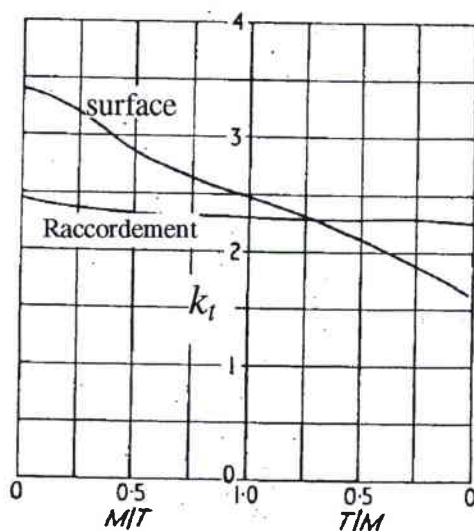
La figure I. 27 présente la valeur du facteur de concentration contrainte en tête de la rainure en fonction de taux de chargement combiné (flexion M et Torsion T) pour  $r/d = 0.0208$ . On constate que cette concentration de contrainte est plus petite que celle en torsion ( $k_t = 3.39$ ). La position de cette contrainte maximale, dans la tête de la clavette, est présentée dans la figure I. 28. En notant que la contrainte nominale est calculée par la relation :

$$\sigma_{nom} = \frac{16M}{\pi d^3} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{T^2}{M^2}} \right] \quad (I. 65)$$

T est le moment de Torsion.

M est le moment de flexion.

Les auteurs ont proposé l'utilisation du facteur de concentration de contrainte de torsion le plus grand (sur la surface ou dans le rayon de raccordement) dans la tête de la rainure, pour  $r/d > 0.012$  (figure I. 27). Pour  $r/d < 0.011$ , le point de la contrainte maximale est situé au cœur de la rainure, et le facteur de concentration de contrainte de torsion, dans le rayon de raccordement, peut être utilisé.



**Figure I. 27 : Valeur de concentration de contrainte dans la tête de la rainure dans le cas d'une charge combinée (flexion M –torsion T) pour  $r/d = 0.0208$  (B.S).**

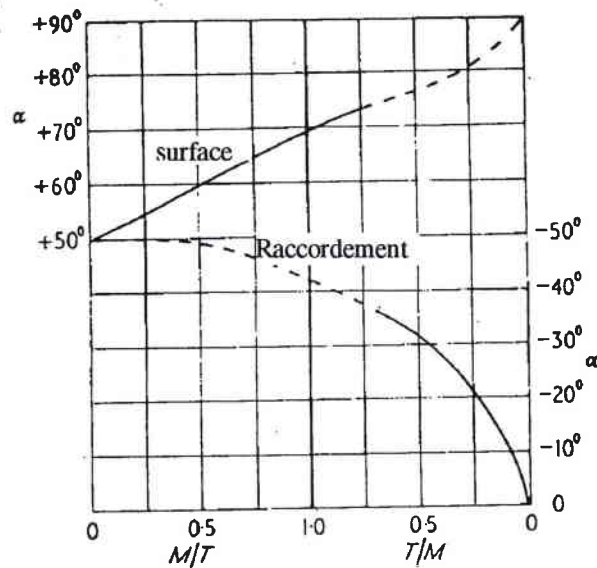


Figure I. 28 : Position du point de la contrainte maximale dans le cas d'une charge combinée (flexion M –torsion T) pour  $r/d = 0.0208$  (B.S).

#### I.3.2.4 Peterson

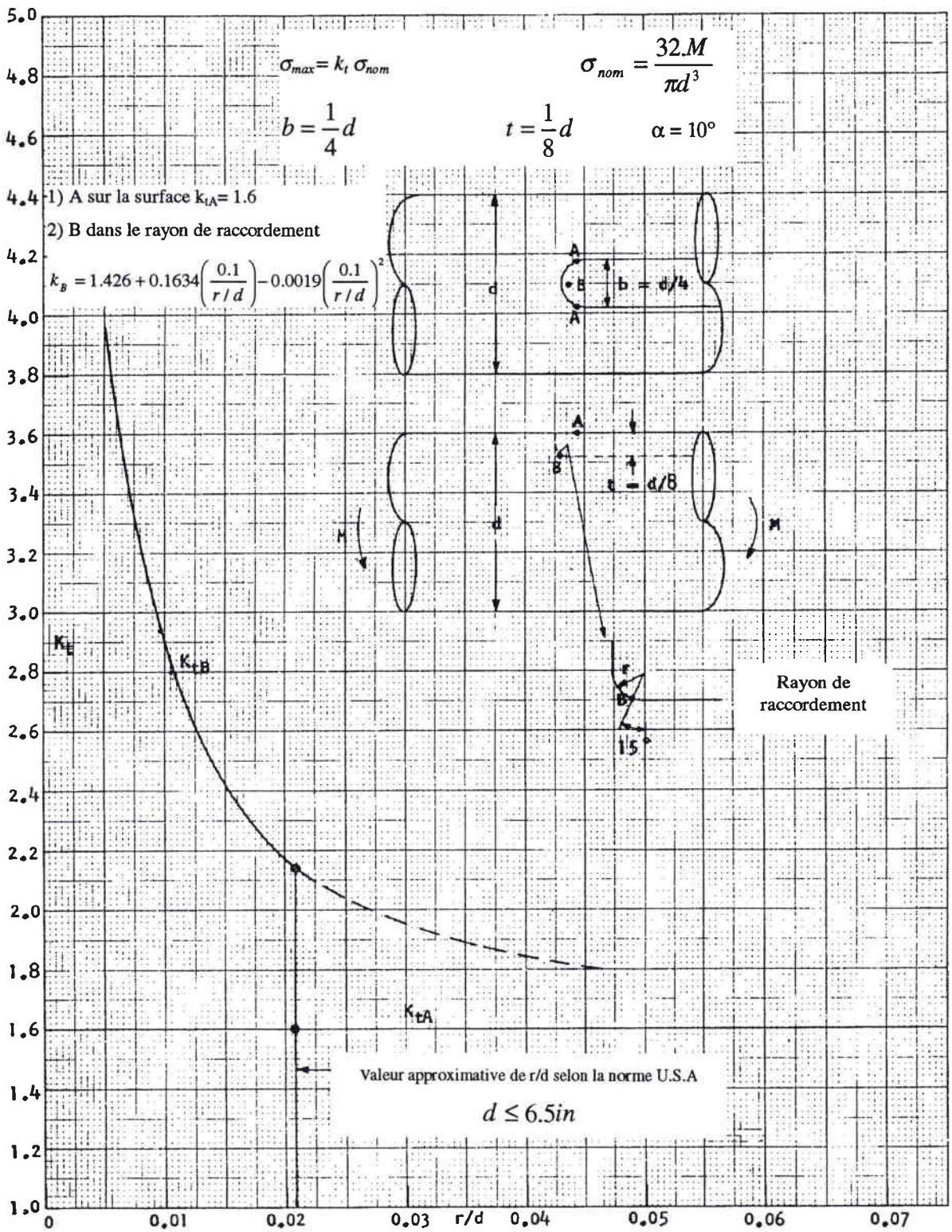
Peterson [1] présente des abaques permettant de déterminer le facteur de concentration de contrainte :

- En flexion et en flexion-torsion, en se basant sur les travaux de Fessler et al [32], (figures I. 29 et I. 31)
- En torsion, en se basant sur les travaux d'Okubo et al [33] (figure I. 30).

En notant que ces courbes sont prévues pour une rainure à bout rond.

Pour la rainure à bout droit, Peterson a noté que la concentration de contrainte diminue dans le cas d'un chargement de flexion.





**Figure I. 29 : Facteur de concentration de contrainte pour des arbres clavetés :  
 cas d'une rainure à bout rond en flexion.**

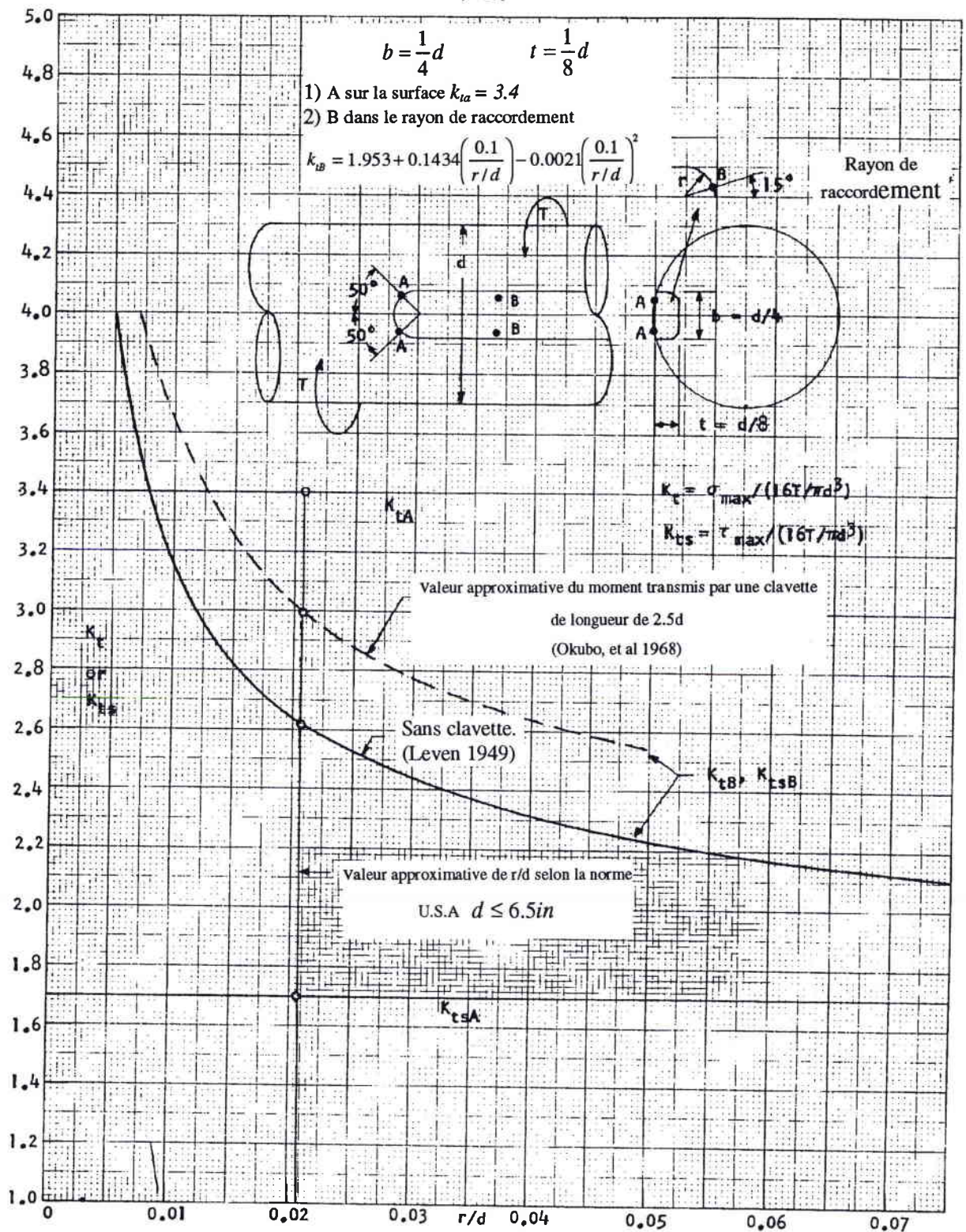


Figure I. 30 : Facteur de concentration de contrainte pour des arbres clavetés : cas d'une rainure à bout rond en torsion.

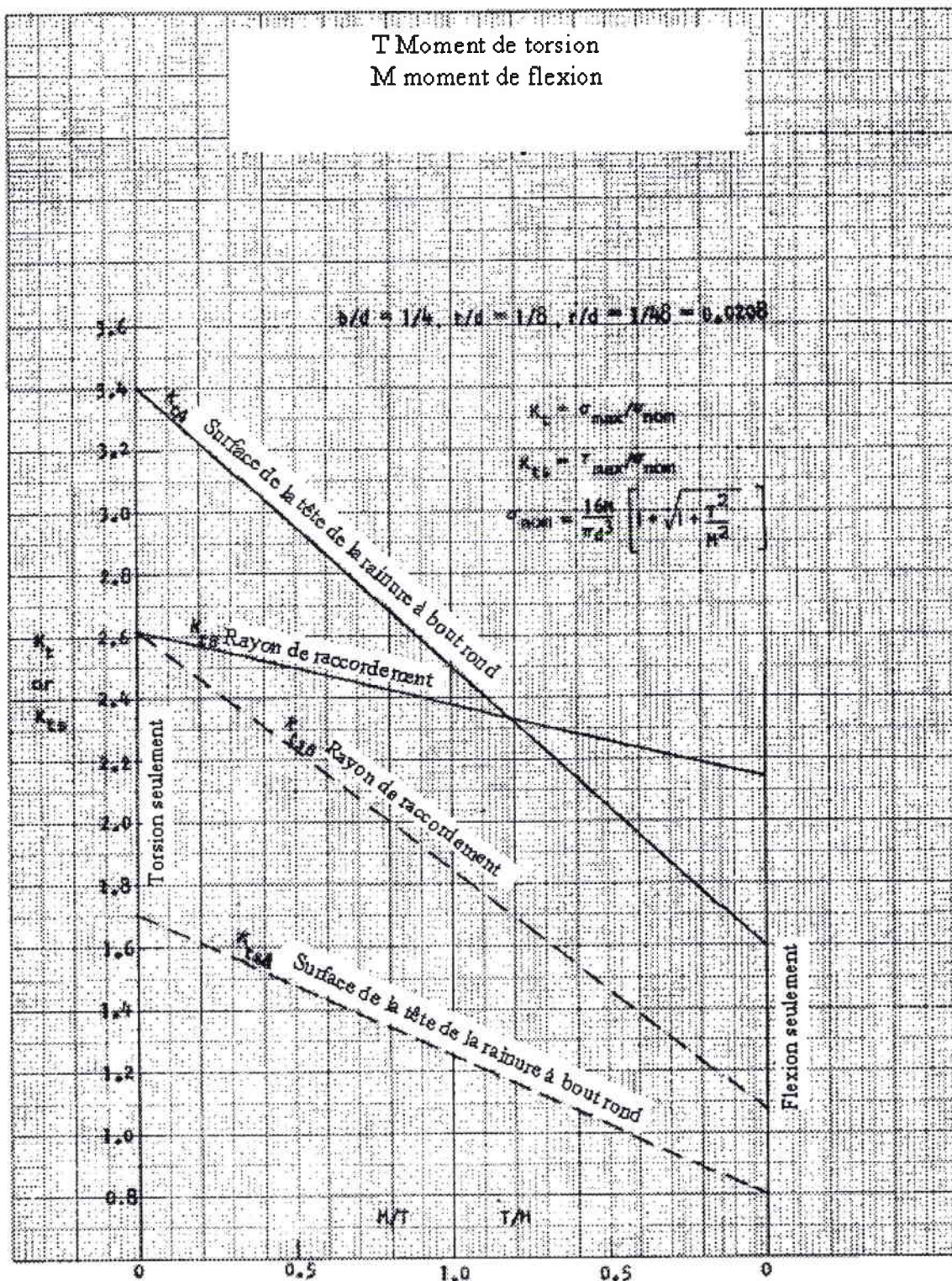


Figure I. 31 : Facteur de concentration de contrainte pour des arbres claveté : cas d'une rainure à bout rond en flexion-torsion.

### I.3.3 Détermination des durées de vie des arbres clavetés en fatigue

#### I.3.3.1 Gradient de contrainte

La norme française (E 22-060) [26] est basée sur la méthode de gradient de contrainte (I.2.6.6), pour l'estimation de la durée de vie des arbres clavetés à bout rond en torsion. Le gradient de contrainte est donné par la relation :

$$\chi = \frac{1}{r} + \frac{2}{d} \quad (\text{I. 66})$$

$\chi$  le gradient de contrainte ( $\text{mm}^{-1}$ ).

$r$  et  $d$  les dimensions présentées sur la figure (I. 32).



Figure 32 : définition de géométrie d'arbre claveté à bout rond, selon la méthode du gradient.

#### I.3.3.2 Autres informations

Peterson [34] trouve la valeur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  à un même pourcentage que la valeur de  $k_t$  trouvée par Hetényi [35] ( $k_t = 1.79$  pour la rainure à bout rond,  $k_t = 1.38$  pour la rainure à bout droit, où  $b/d = 0.313$ ,  $t/d = 0.156$ ).

#### I.3.3.3 Lignes d'amorçage en fatigue

Selon Peterson[1], l'amorçage est dû à la contrainte de cisaillement, et la propagation est due normalement à la contrainte normale. Pour le cas d'une rainure à bout rond, et d'après les figures I. 29, I. 30 et I. 31, deux points sont concernés par l'apparition de l'amorçage. Le premier est dans le rayon de raccordement, le deuxième est sur le rayon de fraisage (grand rayon : trois fois supérieur au rayon de raccordement).

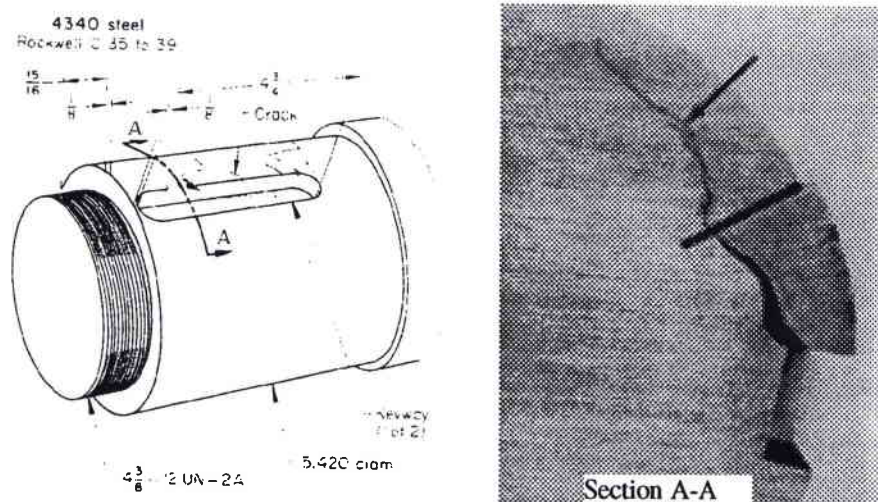
L'amorçage et la propagation dépendent du gradient de contrainte qui est fonction du rayon de fond d'entaille. Le gradient doit être donc pris en considération pour la localisation

du point d'amorçage par fatigue. Mais il est possible que l'amorçage n'apparaisse pas à partir du rayon de raccordement (le rayon le plus petit).

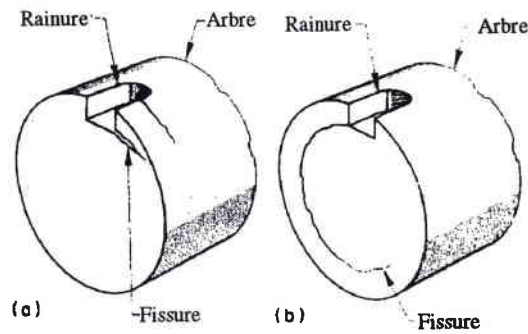
De la figure I. 31, et dans le cas de la torsion pure ( $M/T=0$ ), on estime que l'amorçage apparaît à partir du rayon de raccordement. Le gradient de contrainte doit être très important pour que l'amorçage commence à partir de la surface. La direction de la propagation est déterminée par la contrainte de surface en association avec  $k_{tA}$ . Dans le cas de la flexion pure ( $T/M=0$ ), l'amorçage se fait à partir de la surface.

Un exemple d'une rupture en service a été présenté en ASM [59]. Un arbre de compresseur est sujet à une rupture par fatigue à partir du rayon de raccordement (figure I. 33). Cette rupture, due à un mauvais serrage, conduit à une transmission occasionnelle du moment de torsion (figure I. 34a). La propagation de la rupture autour de l'arbre est présentée dans la figure I. 34b. Le champ de contrainte, correspondant à un chargement de torsion, est présenté dans les cas suivants :

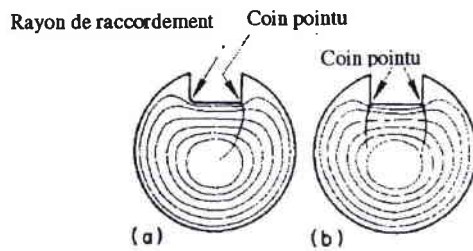
- Cas d'un petit rayon, situé d'un seul côté, conduisant à une seule fissure (figure I. 35a).
- Cas d'un petit rayon, situé des deux côtés, conduisant à deux fissures (figure I. 35b).



**Figure I. 33 : Arbre claveté d'un compresseur rompu en fatigue.**



**Figure I. 34 : Rupture par fatigue d'un arbre claveté en torsion alternée.**



**Figure I. 35 : Champ de contrainte d'un arbre claveté en torsion.**

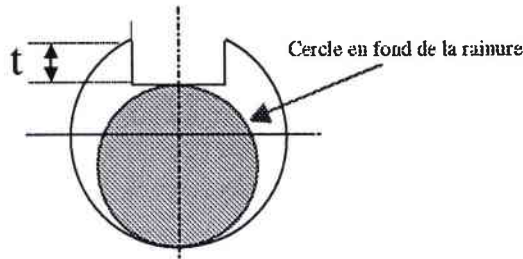
### I.3.4 Conclusion

La fabrication de rainure de clavette est effectuée par fraisage. Ce fraisage peut être réalisé par deux types de fraise donnant deux types de rainures : à bout rond et à bout droit.

Les dimensions transversales de la rainure de la clavette sont normalisées en fonction des diamètres des arbres.

La norme française donne des valeurs au facteur de concentration de contrainte  $k_t$  pour le cas de la torsion et sans précision sur le type de rainure. Selon la figure I. 21, on peut conclure que ce cas correspond à une rainure à bout rond. En plus, la norme française calcule la contrainte nominale en prenant la section circulaire en fond de la rainure (figure I. 36), inférieure à la surface totale de l'arbre. La valeur du moment polaire, obtenu par cette méthode, n'est pas la valeur à considérer.

La norme française ne donne aucune information sur le facteur de concentration de contrainte  $k_t$  en flexion.



**Figure I. 36 : Cercle de la contrainte nominale selon la norme française.**

Par contre, des informations sont données sur le facteur de concentration de contrainte (Peterson[1], Fessler[32]...), dans le cas des rainures à bout rond, mais aucune pour le cas de rainure à bout droit.

L'estimation de la durée de vie est réalisée uniquement par la méthode du gradient, pour le cas d'un arbre claveté à bout rond en torsion. L'application des méthodes du point chaud (traditionnelles), a été proposée par plusieurs auteurs (Neuber [9], Peterson [1],.....) à partir des relations empiriques pour estimer la durée de vie des arbres entaillés en se basant sur deux paramètres : le rayon en fond d'entaille  $\rho$  et le facteur de concentration de contrainte. Le rayon de raccordement peut être assimilé à un rayon de fond d'entaille, mais cela nous conduit à appliquer cette méthode pour le cas d'amorçage ne correspondant pas au rayon de raccordement (I.1.3.3). Les méthodes de la distance critique sont applicables dans la mesure où l'amorçage a eu lieu au point de la contrainte maximale. Selon Peterson, le gradient de contrainte est un paramètre très important pour la détermination du point d'amorçage.

On constate un manque important d'informations sur l'estimation de la durée de vie des arbres clavetés. Ceci justifie le besoin d'établir une nouvelle méthode qui prenne en compte le gradient de contrainte dans un certain volume afin d'avoir une estimation de la durée de vie et une indication précise sur le lieu d'amorçage.





## **CHAPITRE 2**

### **ETUDE EXPERIMENTALE**



## II ETUDE EXPERIMENTALE

### II.1 Matériau

Le matériau utilisé est l'acier 42CD4, trempé-revenu (trempé à 850°/huile pendant ½h, revenu à 550°/air pendant 1h30). La composition chimique est donnée par le tableau II. 1 :

C %	Si %	Mn%	P %	S%	Cr %	Mo %
0,42	0,3	0,8	0,035	0,035	1,1	0,25

Tableau II. 1 : Composition chimique de l'acier 42CD4.

#### II.1.1 Loi de comportement statique

Les propriétés mécaniques du matériau sont déterminées par des essais de traction réalisés sur une machine de type « ZWICK », selon la norme française (NF EN 10002-1) [36].

L'éprouvette utilisée est présentée dans la figure II. 1.

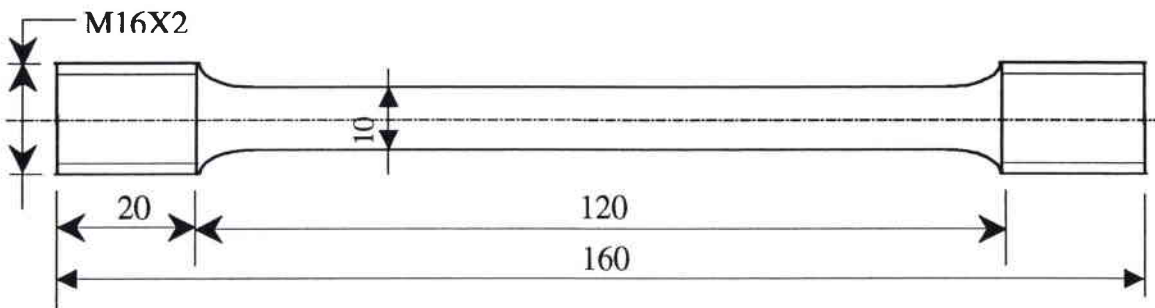


Figure II. 1 : Eprouvette d'essai de traction.

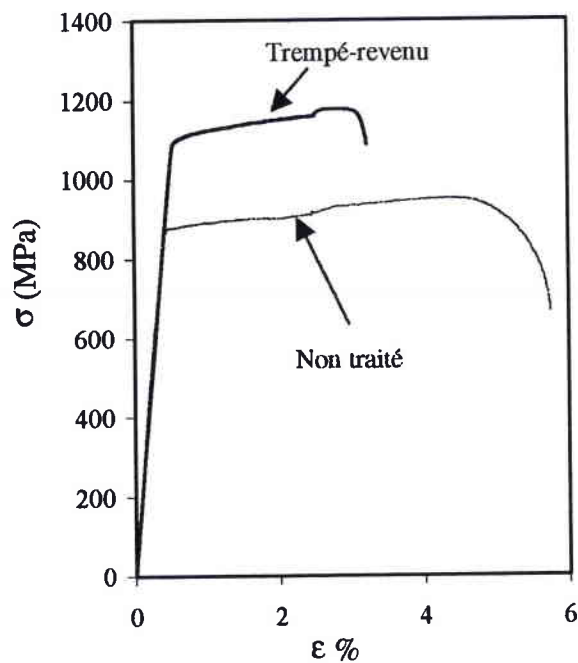
La loi de comportement monotone, déterminée à partir des essais, est présentée dans la figure II. 2. Les caractéristiques mécaniques obtenues sont :

	Résistance ultime Rm (MPa)	Limite d'élasticité Re (MPa)	Module de Young E (MPa)
Non traité	950	878	208000
Traité	1170	1080	210000

Les coefficients de la relation de Ludwick ( $\sigma = K\varepsilon^n$ ) sont présentés dans le tableau II. 2.

	n	K (MPa)
Non traité	0.0409	884.54
traité	0.0364	1121.2

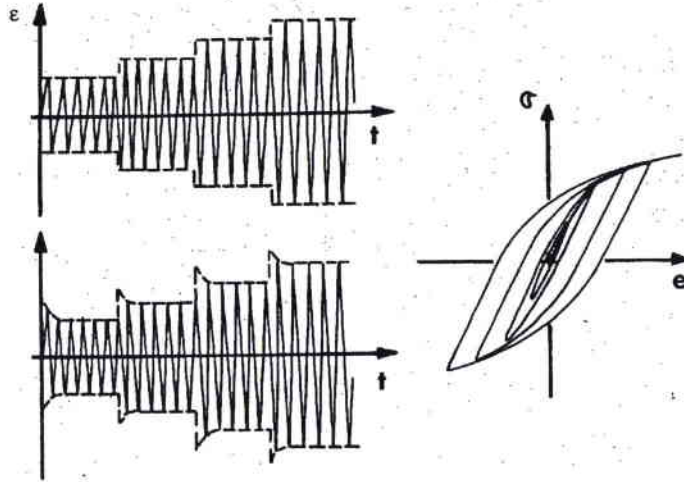
**Tableau II. 2 : Coefficients de la relation de Ludwick de la loi  
(comportement statique).**



**Figure II. 2 : Courbes de traction monotone.**

### II.1.2 Loi de comportement cyclique (courbes d'écroutissage cyclique)

Le tracé de la courbe cyclique permet de déterminer les caractéristiques cycliques stables du matériau. Plusieurs méthodes existent dans la littérature [37]. La méthode par paliers a été choisie pour réaliser les essais. Cette méthode consiste à solliciter une seule éprouvette à différents paliers croissants de déformation (Figure II. 3). A chaque palier, le cycle est enregistré, après stabilisation de la contrainte.



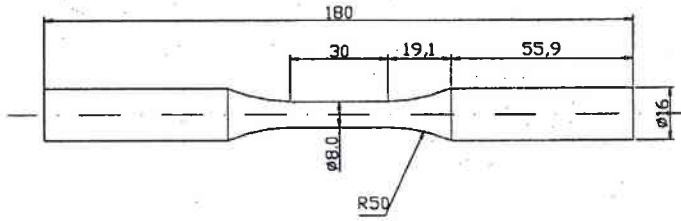
**Figure II. 3 : Détermination de la loi de comportement cyclique : méthode d'essai par paliers successifs.**

Les essais sont effectués sur la machine « SHENCK » du laboratoire de Fiabilité Mécanique (Figure II. 4). La géométrie de l'éprouvette utilisée est présentée dans la figure II.

5.



**Figure II. 4 : Photo de la machine de fatigue.**



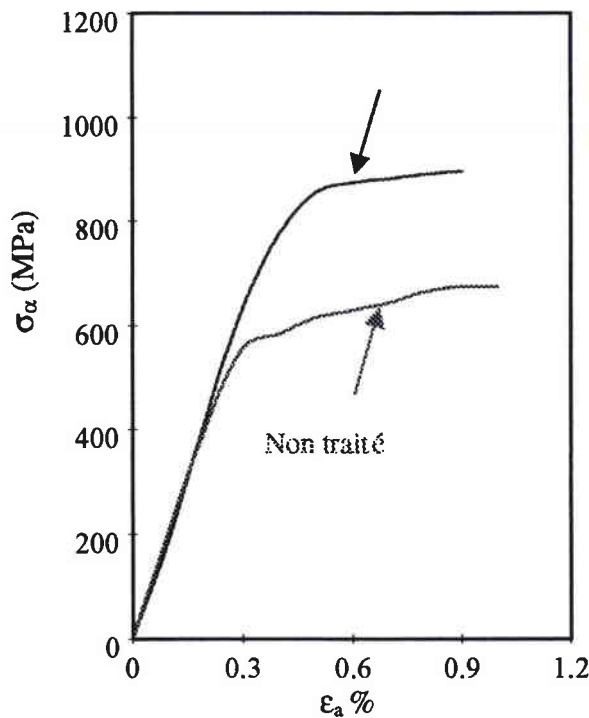
**Figure II. 5 : Shéma d'éprouvette d'essais pour la détermination de la loi comportement cyclique.**

Les essais et les traitements des résultats obéissent à la norme française NF A03-403 [38].

La loi de comportement cyclique du matériau et les coefficients de la relation de Ludwick ( $\sigma_a = K' \varepsilon_a^{n'}$ ) sont présentés simultanément dans la figure II. 6 et le tableau II. 3.

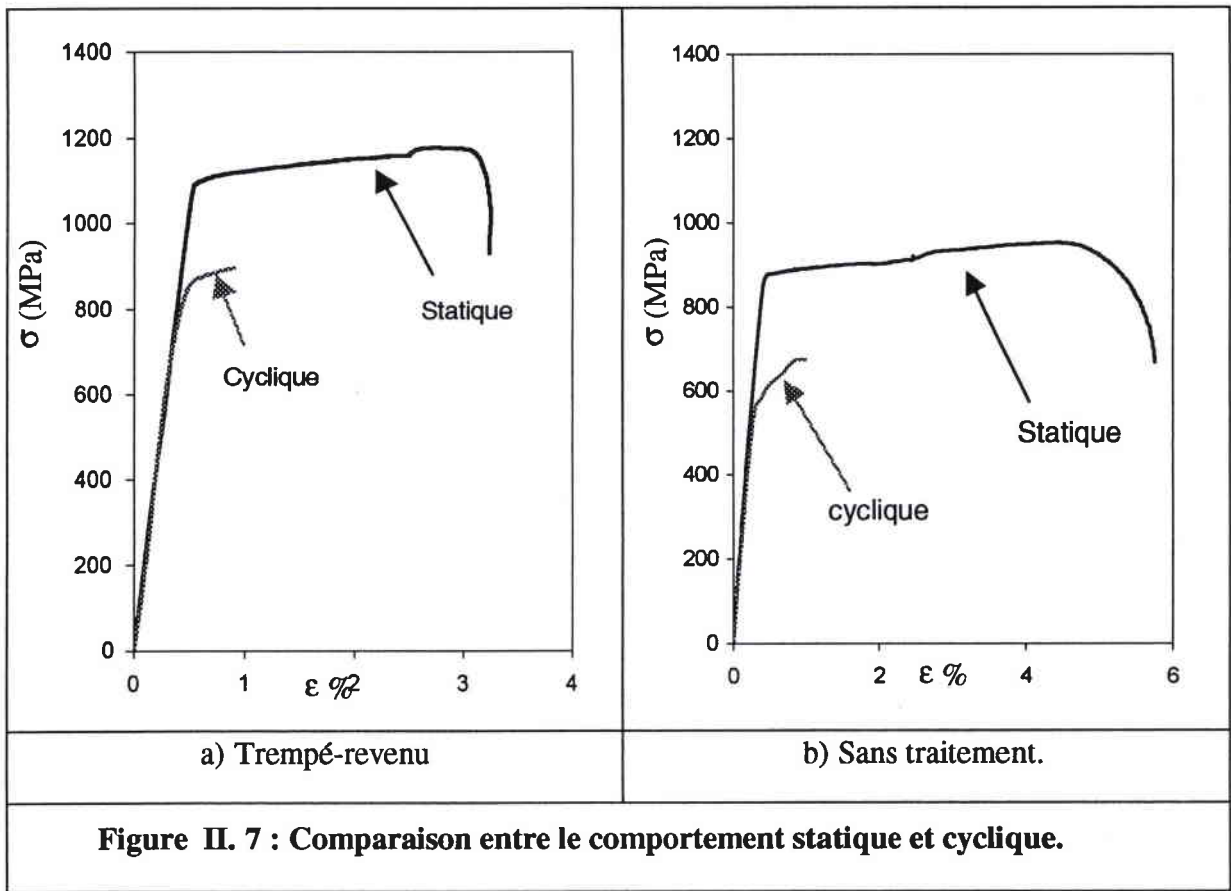
	$n'$	$K'$ (MPa)
Non traité	0,09	700
traité	0,023	920

**Tableau II. 3 : Coefficients de la relation de Ludwick (comportement cyclique).**



**Figure II. 6 : Courbes d'écrouissage cyclique.**

La comparaison entre les lois de comportement statique et cyclique montre que le matériau utilisé s'adoucit (Figure II. 7).



## **II.2 Essai de fatigue**

### **II.2.1 ESSAIS DE FLEXION ROTATIVE**

#### **II.2.1.1 Machine**

Le principe de l'essai consiste à appliquer un moment de flexion sur une éprouvette cylindrique qui tourne à une vitesse constante. Le type de chargement obtenu est sinusoïdale à amplitude constante.

La machine de flexion rotative utilisée est composée (Figure II. 8) :

1. d'une boîte de roulements : Ce boîtier a pour fonction de maintenir l'éprouvette, et de transmettre le moment de flexion appliqué.
2. d'une éprouvette.
3. d'un moteur.
4. d'un compteur.
5. d'une barre graduée reliée au boîtier maintenant l'éprouvette. L'utilisateur peut faire varier la position d'une masse sur le bras de levier gradué, et appliquer ainsi le moment de flexion désiré sur l'éprouvette.
6. de masses.
7. d'un capteur d'arrêt : Ce capteur a pour fonction d'arrêter le moteur lorsque l'éprouvette est rompue.

Nous avons apporté quelques modifications aux machines d'essais de flexion rotative.

Ces modifications consistent :

- en un changement du système électronique, en ajoutant un appareil de commande de vitesse de rotation,
- en une modification sur la boîte de roulement pour permettre un chargement plus important,
- en un remplacement du compteur mécanique à 5 chiffres par un compteur électronique à 8 chiffres,
- à la fabrication du nouveau système de liaison moteur-éprouvette, pour garantir la tenue axiale de l'éprouvette, et éviter que le moment de flexion soit transmis au moteur.



La figure II. 9 montre les deux machines après la mise à neuf et modification.

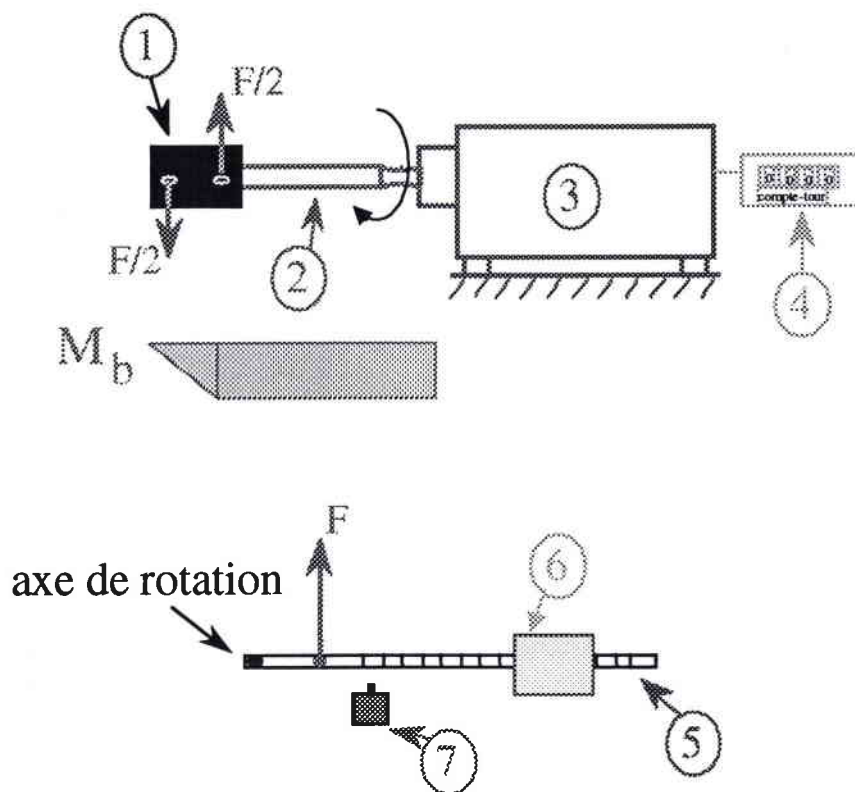


Figure II. 8 : Schéma de la machine de flexion rotative.

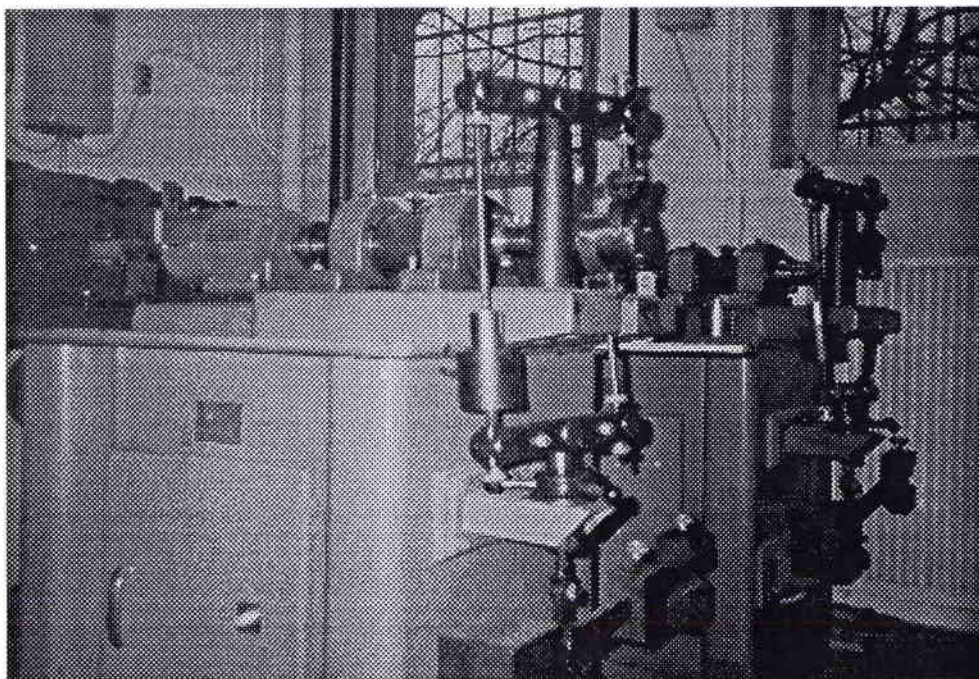
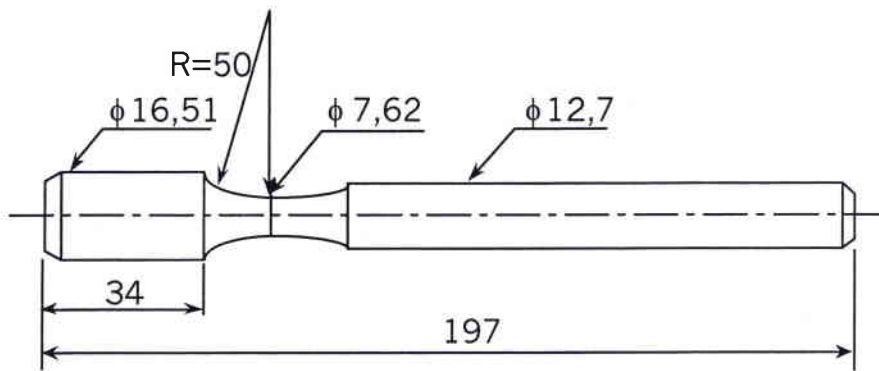


Figure II. 9 : Photo d'une machine de flexion rotative.

## II.2.1.2 Eprouvettes

### II.2.1.2.1 Eprouvettes lisses

Afin d'obtenir des conditions d'essais reproductibles, les éprouvettes lisses ont été usinées avec une faible entaille en forme d'arc de cercle. Cette faible entaille ( $k_t=1.09$ ) localise la rupture des éprouvettes. Cette géométrie d'éprouvette (Figure II. 10), proposée par l'Institut de Recherches de Sidérurgie (IRSID), tient compte en même temps de la plage d'utilisation de la machine d'essais en flexion rotative (35 éprouvettes).



**Figure II. 10 : Schéma des éprouvettes lisses.**

### II.2.1.2.2 Eprouvettes clavetées

De la même manière, la géométrie des éprouvettes clavetées a été déterminée en tenant compte de la plage d'utilisation de la machine de flexion rotative. Les dimensions transversales du clavetage ont été choisies selon la norme française NF E 22-175 [15]. Trois types d'éprouvettes ont été testés : éprouvettes clavetées avec une rainure à bout rond (Figure II. 11) et éprouvettes clavetées à bout droit comportant deux rayons de fraisage  $R = 5$  et  $R = 7,5$  mm (Figure II. 12). Le choix du rayon de fraisage des éprouvettes clavetées à bout droit a été réalisé après un calcul par éléments finis afin d'obtenir une concentration de contrainte proche de celle des éprouvettes clavetées à bout rond. Le deuxième rayon a été augmenté de 50%, pour étudier l'effet du rayon de fraisage sur la résistance en fatigue en flexion rotative (35 éprouvettes de chaque type).

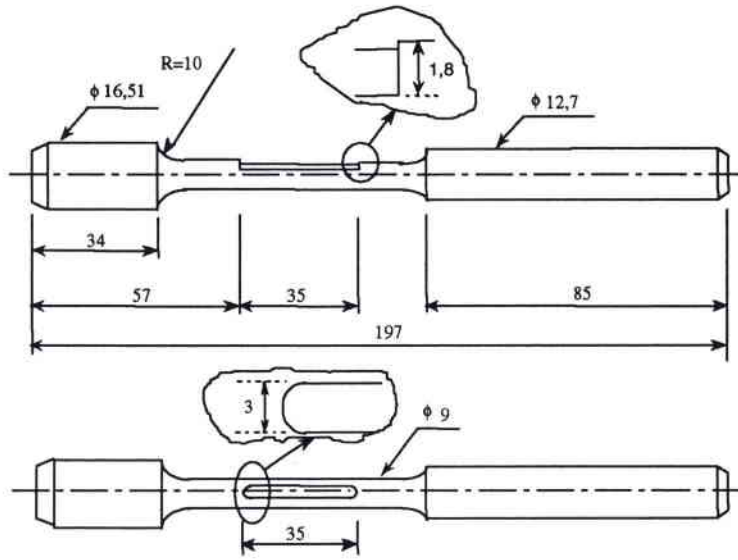


Figure II. 11 : Schéma des éprouvettes clavetées : rainures à bout rond.

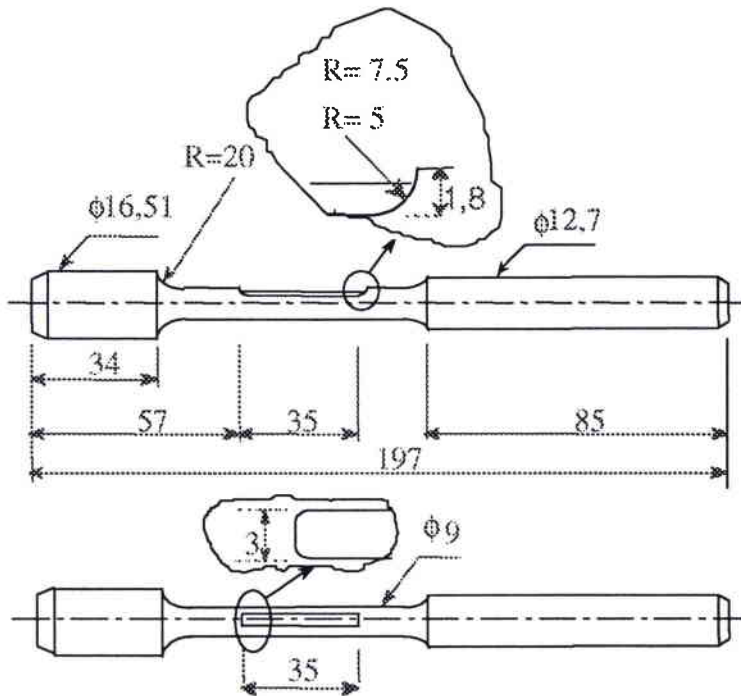


Figure II. 12 : Schéma des éprouvettes clavetées : rainures à bout droit.

### II.2.1.3 Résultats et discussions

Des essais de flexion rotative sur les éprouvettes lisses et clavettées ont été réalisés. Les courbes de Wöhler, qui résument ces résultats, sont présentées dans la figure II. 13. Ces résultats sont exprimés en fonction de la contrainte globale.

Les coefficients de la loi de Basquin  $\sigma = \sigma'_f \cdot (Nr)^b$  sont présentés dans le tableau (II.

4).  $\sigma'_f$  est la résistance en fatigue et  $b$  l'exposant de la loi de Basquin.

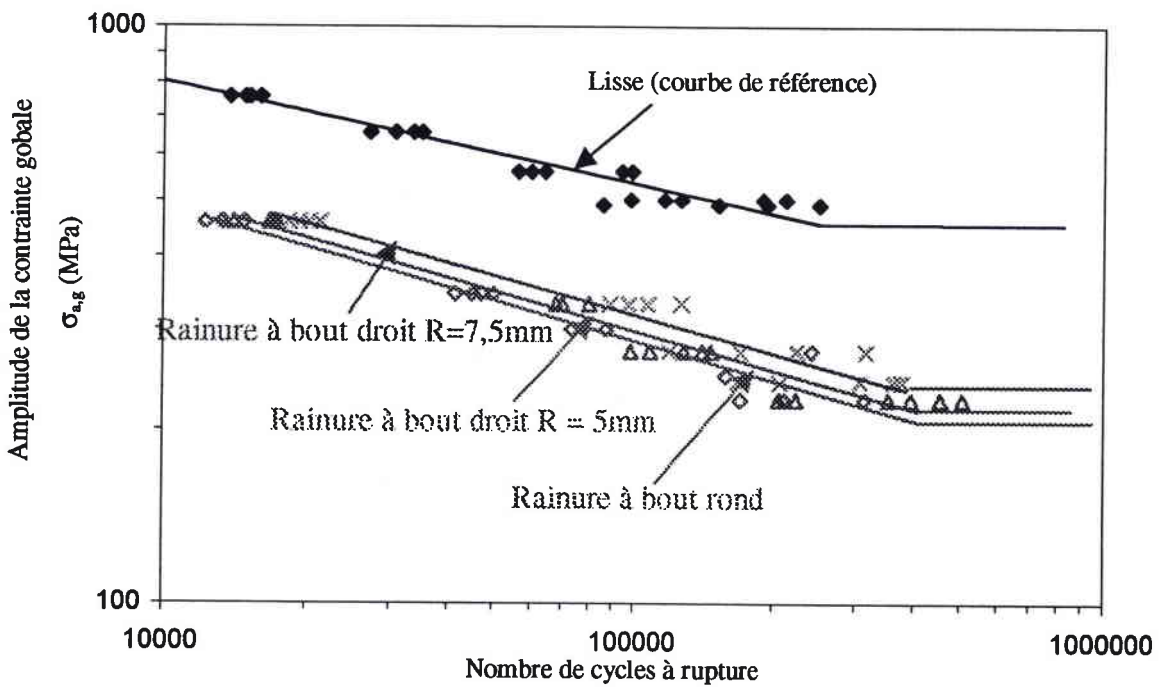
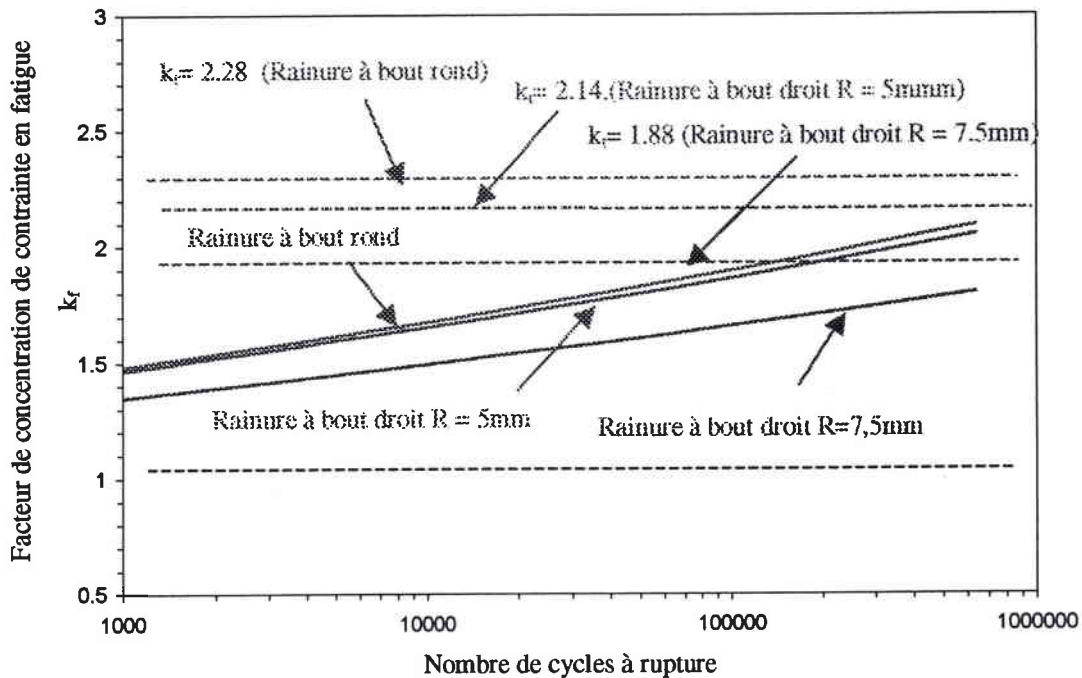


Figure II. 13 : Courbes de Wöhler pour les éprouvettes lisses et clavettées en flexion.

Type	$\sigma'_f$ (MPa)	$b$
Lisse	4072.4	-0.1775
Rainure à bout rond	3980.8	-0.229
Rainure à bout droit R = 5 mm	4022.9	-0.227.5
Rainure à bout droit R = 7.5 mm	4131.3	-0.2206

Tableau II. 4 : Coefficients de la loi Basquin pour les éprouvettes lisses et clavettées.

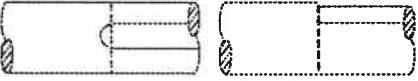



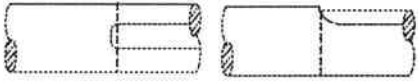





Le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  est déterminé expérimentalement en utilisant l'équation (I.6). En traçant ce facteur en fonction de nombre de cycles à rupture, on constate qu'il prend des valeurs entre 1 et  $k_t$ . (figure II. 14).



**Figure II. 14 : Facteur de concentration de contrainte en fatigue en fonction du nombre de cycles à rupture.**

Des résultats expérimentaux, montrent que les éprouvettes à bout droit résistent légèrement mieux à la fatigue en flexion rotative. L'augmentation du rayon de fraisage  $R$  croît la résistance à la fatigue. Dans notre cas, l'augmentation du rayon de fraisage  $R$  de 50% améliore la limite d'endurance d'environ 15%. Cette limite d'endurance est supérieure d'environ 23% pour la rainure à bout droit  $R = 7.5$  à celle d'une rainure à bout rond.

La localisation des plans de rupture dépend du type de rainure et du niveau de chargement (tableau II. 5).

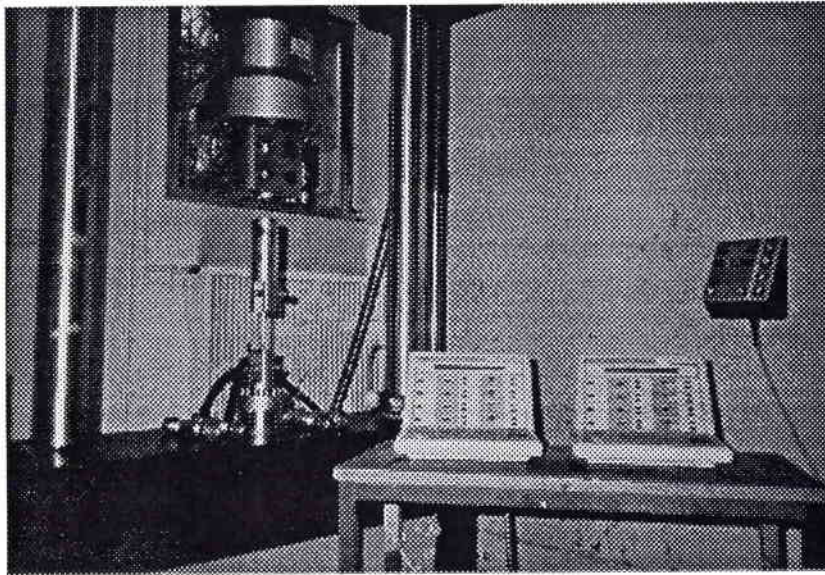
Type d'éprouvette	Charge			Ligne d'amorçage	Photo
	faible	Moyenne	Elevée		
A bout rond	X	X			
			X		
A bout droit R = 5mm	X	X	X		
A bout droit R = 7.5mm	X	X	X		
	X				

**Tableau II. 5 : Plans de ruptures, cas d'un chargement de flexion rotative**

## II.2.2 ESSAIS DE TORSION

### II.2.2.1 Machine

Pour les essais de torsion, une machine de type INSTRON 1343 comportant un système de pilotage INSTON 8500 (Figure II. 15) est utilisée. Cette machine, à deux cellules de charge (pour la torsion et la traction), est équipée de deux servo-valves et de deux tours de contrôle qui permettent de réaliser des essais de torsion, de traction ou biaxiaux (traction – torsion).



**Figure II. 15 : Machine d'essais INSTRON 1343 avec le système de pilotage 8500.**

La machine a été équipée d'un système de montage traditionnel, basé sur l'utilisation du métal de Wood afin d'assurer une erreur d'alignement inférieur à 5% (Figure II. 16). Ce système d'amarrage a quelques inconvénients :

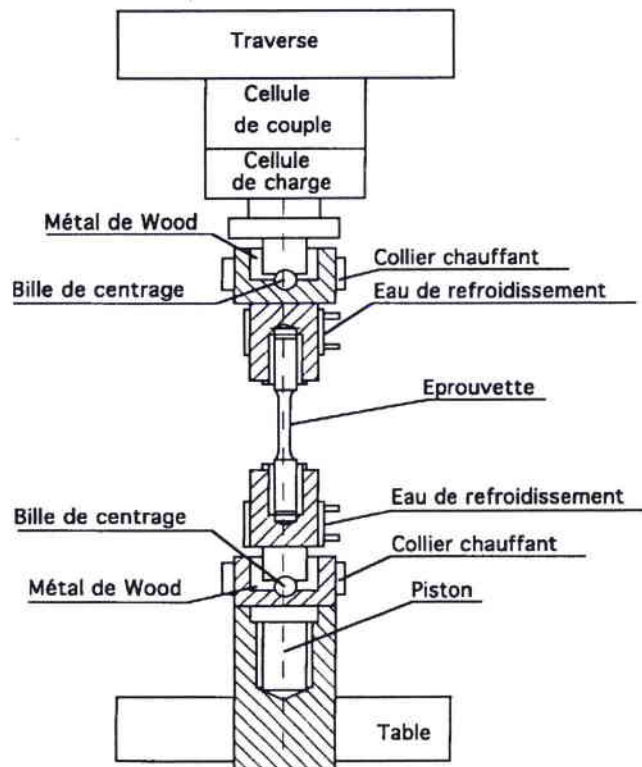
- L'alignement de l'éprouvette passe par la fusion suivie du refroidissement du métal de Wood. Cette procédure, réalisée deux fois (partie supérieure et partie inférieure), est longue, dangereuse et présente des risques pour l'avenir (interdiction de métal).
- En raison des caractéristiques mécaniques faibles du métal de Wood, ce système n'est utilisé que dans le cas des essais de la fatigue oligocyclique.

Un nouveau système d'amarrage\* est conçu. Ce système est composé de trois parties principales (figures II. 17 et II. 18) :

- Logement.
- Quatre coins coniques.
- Adaptateur.

Son principe est d'assurer un parfait alignement de l'éprouvette par les quatre coins coniques placés entre le logement et l'adaptateur.

Les dessins de conception sont présentés dans l'annexe.



**Figure II. 16 : Principe de fixation par métal de Wood.**

---

\* Ce système a été conçu en collaboration avec Mr. Genti QILAFKU.



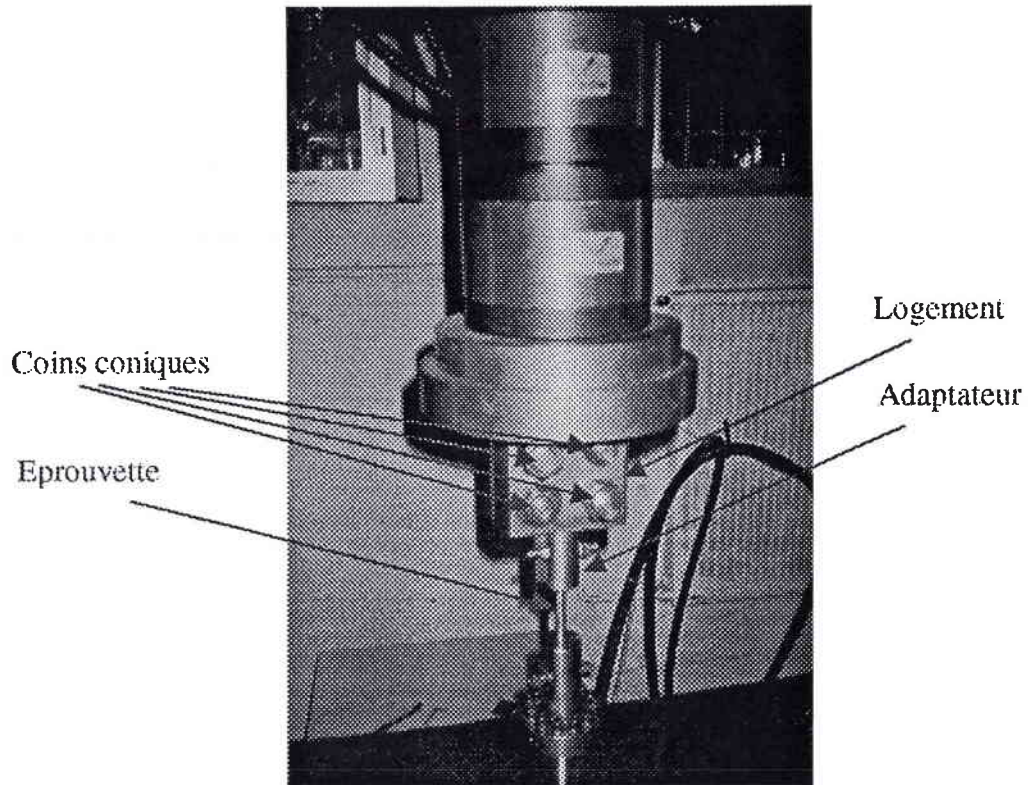


Figure II. 17 : Photo générale du nouveau système mécanique de fixation de l'éprouvettes.

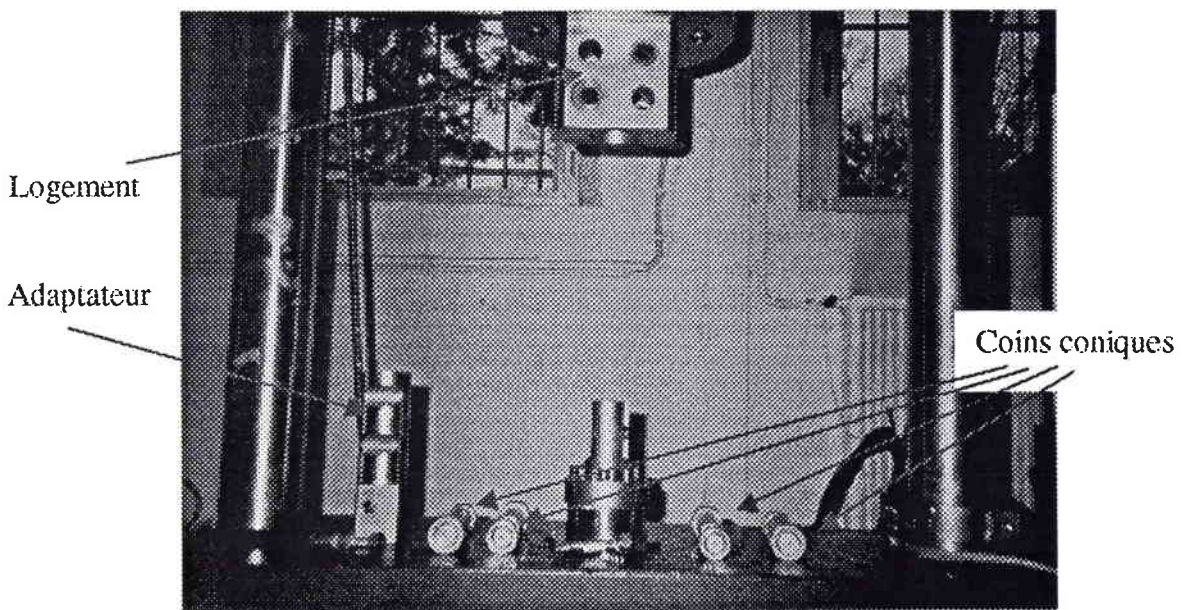
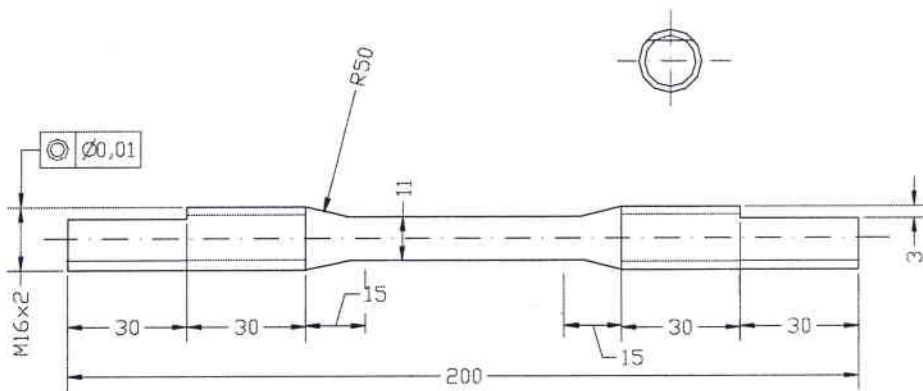


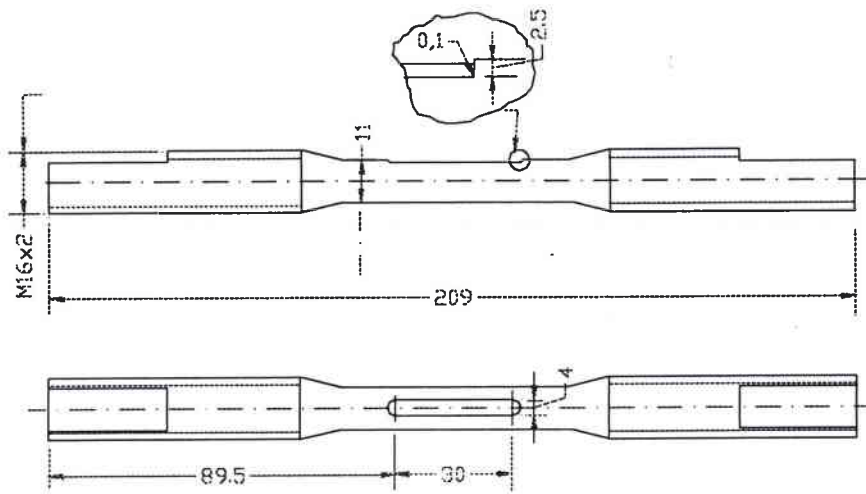
Figure II. 18 : Photo de toutes les pièces du nouveau système mécanique de fixation de l'éprouvette.

### II.2.2.2 Eprouvettes

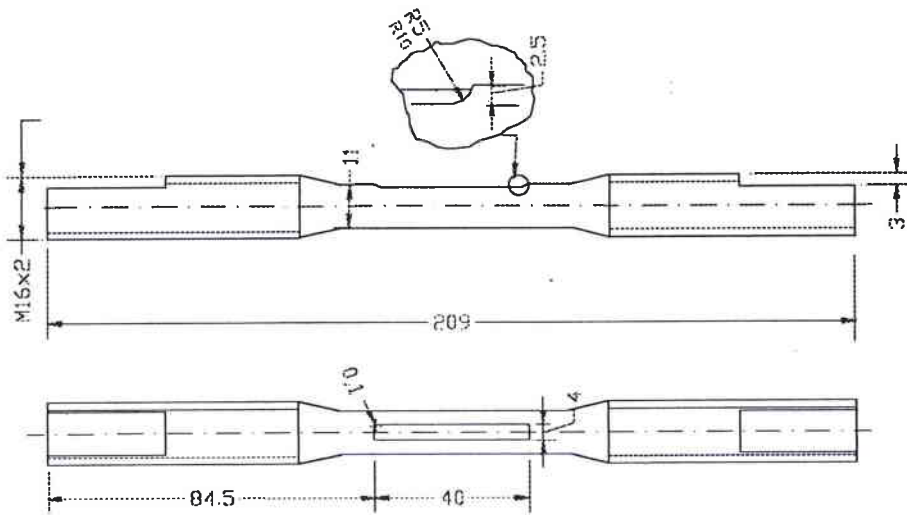
La conception des éprouvettes lisses et clavettées prend en compte l'utilisation du nouveau système d'amarrage. Les dimensions transversale de la rainure de clavette ont été choisies selon la norme française NF E 22-175 [26]. Trois types d'éprouvettes clavettées ont été testés : éprouvettes clavettées avec une rainure à bout rond et éprouvettes clavettées à bout droit comportant deux rayon de fraisage  $R = 5\text{mm}$  et  $R = 10\text{mm}$ . Les éprouvettes sont présentées dans les figures II. 19, II. 20 et II. 21 (35 éprouvettes de chaque type).



**Figure II. 19 : Schéma des éprouvettes lisses de torsion.**



**Figure II. 20 : Schéma des éprouvettes clavettées, rainures à bout rond soumises à la torsion.**



**Figure II. 21 : Schéma des éprouvettes clavettées, rainures à bout droit soumises à la torsion.**

### II.2.2.3 Résultats et discussions

Des essais de torsion sur les éprouvettes lisses et clavettées ont été réalisés. Les courbes de Wöhler, qui résument ces résultats, sont présentées dans la figure (II. 22). Ces résultats sont exprimés en fonction de la contrainte globale.

Les coefficients de la loi de Basquin  $\tau = \tau'_f \cdot (Nr)^b$  sont présentés dans le tableau (II. 6), où  $\tau'_f$  est la résistance en fatigue et  $b$  est l'exposant de la loi de Basquin.

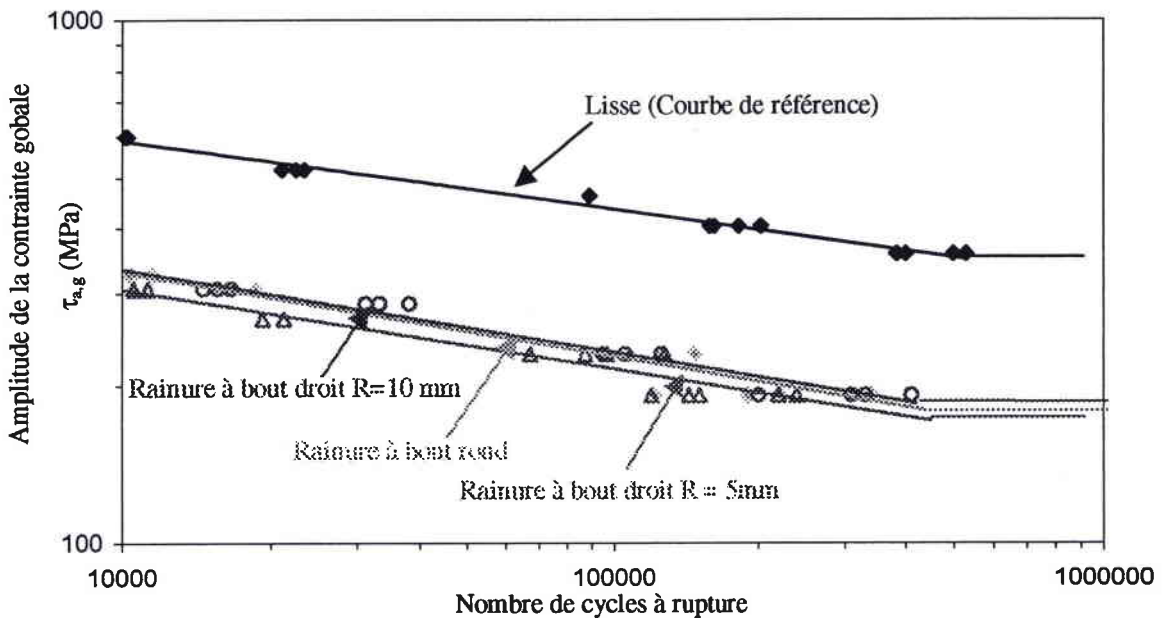
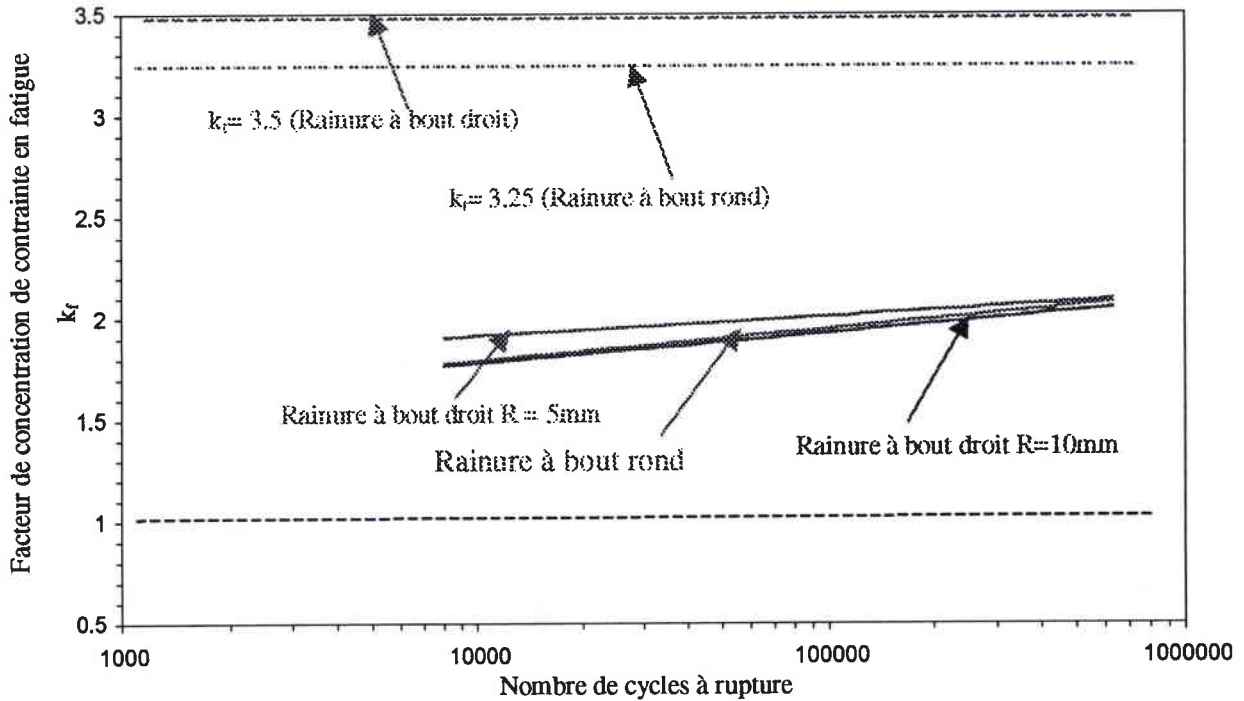


Figure II. 22 : Courbes Wöhler pour les éprouvettes lisses et clavettées en torsion.

Type	$\tau'_f$ (MPa)	$b$
Lisse	1917.9	-0.1284
Rainure à bout rond	1495.3	-0.1646
Rainure à bout droit R = 5 mm	1230.8	-0.1505
Rainure à bout droit R = 10 mm	1483.2	-0.163

Tableau II. 6 : Coefficients de la loi Basquin pour les éprouvettes lisses et clavettées.

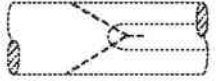

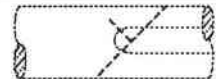

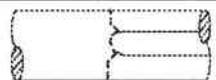

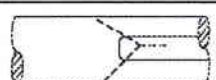

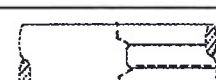

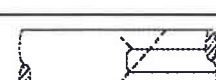

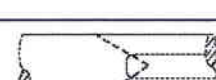



Le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $k_f$  est déterminé expérimentalement en utilisant l'équation (I.6). En traçant ce facteur en fonction de nombre de cycles à rupture, on constate qu'il prend des valeurs entre 1 et  $k_t$ . La différence entre  $k_t$  et  $k_f$  est  $\approx 68\%$  près de la limite d'endurance.



**Figure II. 23 :Facteur de concentration de contrainte en fatigue en fonction de nombre de cycles à rupture**

On note une légère différence de la résistance en fatigue entre les deux types de clavettes. Le rayon de fraisage a une légère influence sur la résistance à la fatigue. L'augmentation de 100% du rayon de fraisage, pour les éprouvettes à bout droit, a augmenté la limite d'endurance d'environ 6% seulement. La différence entre la rainure à bout droit  $R = 10$  et la rainure à bout rond est d'environ 2%.

La localisation des plans de ruptures dépend du type de rainure et du niveau chargement comme le montre le tableau II. 7.

Type d'éprouvette	Charge			Ligne d'amorçage	Photo
	faible	Moyenne	Elevée		
A bout rond	X	X			
	X				
			X		
A bout droit R = 5	X	X			
			X		
A bout droit R = 10	X				
	X	X			
			X		

**Tableau II. 7 : Plans de ruptures, cas d'un chargement de torsion.**

### II.3 Conclusion

Les deux types d'essais, flexion rotative et torsion alternée réalisés sur des éprouvettes clavetées (rainure à bout rond et rainure à bout droit), montrent que le mode de chargement influence le choix de la rainure. La rainure à bout droit, à grand rayon de fraisage, résiste mieux à la flexion rotative. Dans le cas de la torsion alternée, une augmentation du rayon de fraisage de 100%, permet d'avoir une légère amélioration de la limite d'endurance. Pour ces raisons, Il semble que la rainure à bout rond est technologiquement supérieure.

La localisation du plan d'amorçage, d'un arbre claveté, donne des informations sur le mode et le niveau de chargement.

La grande différence entre les facteurs  $k_t$  et  $k_f$ , notamment dans le cas de la torsion (d'environ 68%), montre l'importance de la prise en compte de l'effet d'entaille en fatigue pour le dimensionnement de la rainure des clavettes.

## **CHAPITRE 3**

# **MODELISATION ELASTIQUE ET ELASTO- PLASTIQUE DES ARBRES CLAVETES**



### **III MODELISATION ELASTIQUE ET ELASTO-PLASTIQUE DES ARBRES CLAVETES**

#### **III.1 Introduction**

Pour déterminer les distributions des contraintes, le logiciel Castem 2000 a été utilisé.

Castem 2000 est un code de calcul basé sur la méthode des éléments finis, 3D, conçu pour l'analyse des structures. A l'origine, ce code a été développé par le département des Etudes Mécaniques et Thermique (DEMT) du Commissariat français de L'Energie Atomique (CEA).

Il permet de traiter des problèmes d'élasticité linéaire, des problèmes non linéaires (élasto - visco - plastique), des problèmes dynamiques pas-à-pas, etc.....

Pour effectuer un calcul, ce logiciel passe par les trois stades suivants :

- Stade 1 : définition du modèle mathématique :

I - Discrétisation géométrique du domaine étudié.

II - Définition des données caractérisants le modèle, parmi lesquelles le type de contrainte (déformation ou contrainte plane), l'axisymétrie, le type d'éléments (poutres, coques, etc.....), les propriétés du matériau, les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites.

- Stade 2 : résolution du problème discrétisé :

I - Assemblage des matrices de rigidité et de masse de la structure complète.

II - Application des conditions limites.

III - Application des chargements externes.

IV - Résolution du système d'équations linéaires d'équilibre.

- Stade 3 : analyse et post-traitement des résultats qui peuvent être, soit des quantités locales comme les déplacements, les contraintes et les déformations. Soit des quantités globales, telle l'énergie de déformation.

### III.2 Modélisation d'un arbre claveté

Un programme de préparation de données, pour le calcul par éléments finis, a été réalisé. Plusieurs variables permettent de réaliser un arbre claveté avec différentes dimensions souhaitées.

Au début de ce programme, il faut choisir :

- Le type de rainure :
  - Rainure à bout droit.
  - Rainure à bout rond.
- Le rayon de fraise.
- Les dimensions transversales de rainure.
- Le rayon de raccordement.
- Le mode et la valeur du chargement. Les conditions limites seront appliquées automatiquement par le programme en fonction du mode de chargement choisi.
- Le type de calcul (élastique ou élasto-plastique).

La figure III. 1 présente toutes les informations indispensables au programme.

Le type d'élément utilisée est TET4 (tétraèdre à 4 nœuds massif). Le maillage a été réalisé en deux étapes. Pour la tête de la rainure, on a réalisé la surface et le maillage automatique de volume à l'intérieur ; Suivi d'une translation des deux surfaces.

Deux types de chargement ont été appliqués : flexion et torsion. La charge a été appliquée sur deux lignes pour avoir un moment constant sur la rainure.

Pour le cas de flexion, Les conditions limites sont :

- blocage de surface selon Y (figures III. 2 et III. 3),
- encastrement selon X Y et Z d'un point du centre de cette surface.

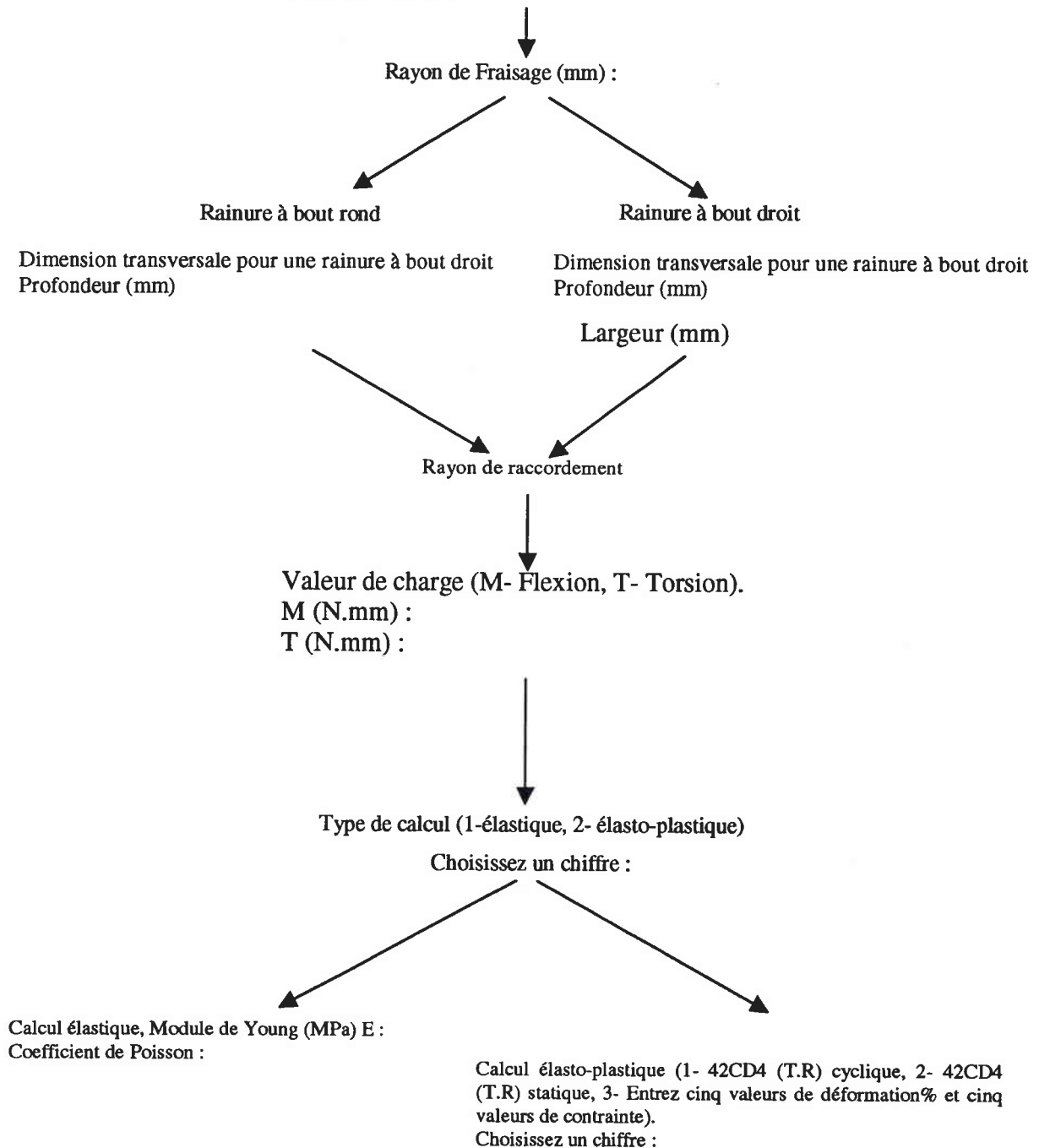
Pour le cas de torsion, un encastrement selon X, Z et Y pour la surface de blocage est réalisé (figure III. 4 et III. 5).

En notant que certaines distances, entre la surface de blocage et la tête de la rainure, sont prises pour éviter l'effet de l'encastrement aux points des contraintes maximales.

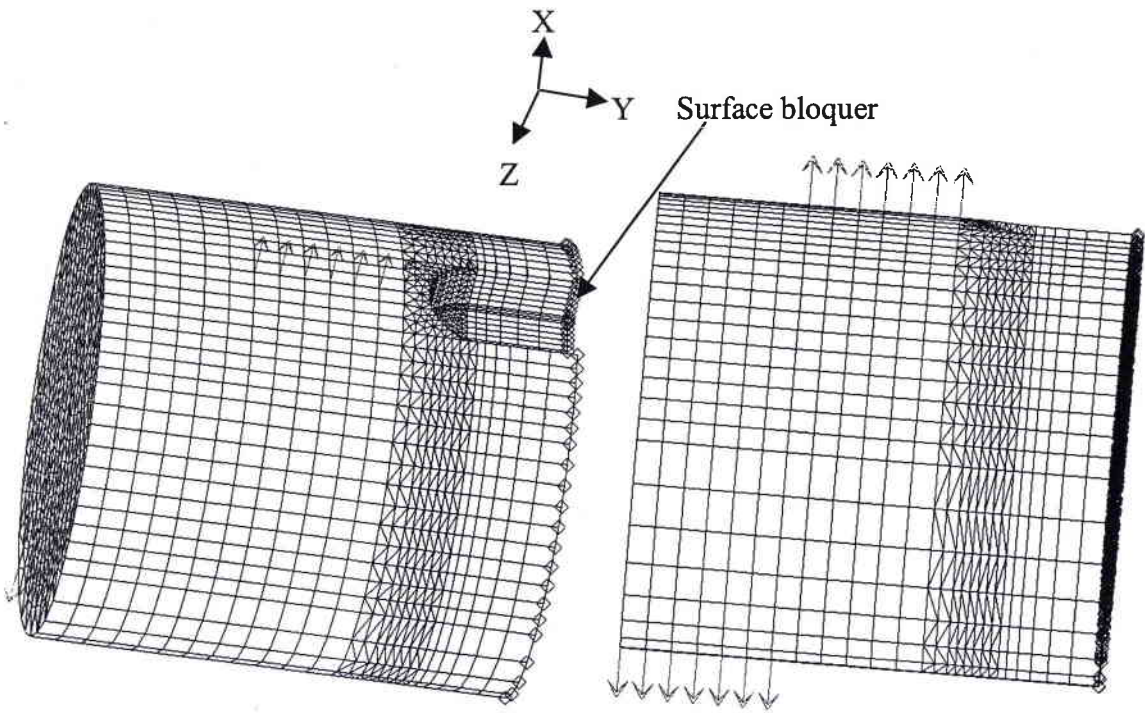
```

*****
*   Programme de Calcul d'un arbre claveté
*
*   CASTEM 2000
*****
* Choix de type de Rainure      D : pour rainure à bout droit.
*                               R : rainure à bout rond.
Entrez votre choix (D ou R) ?

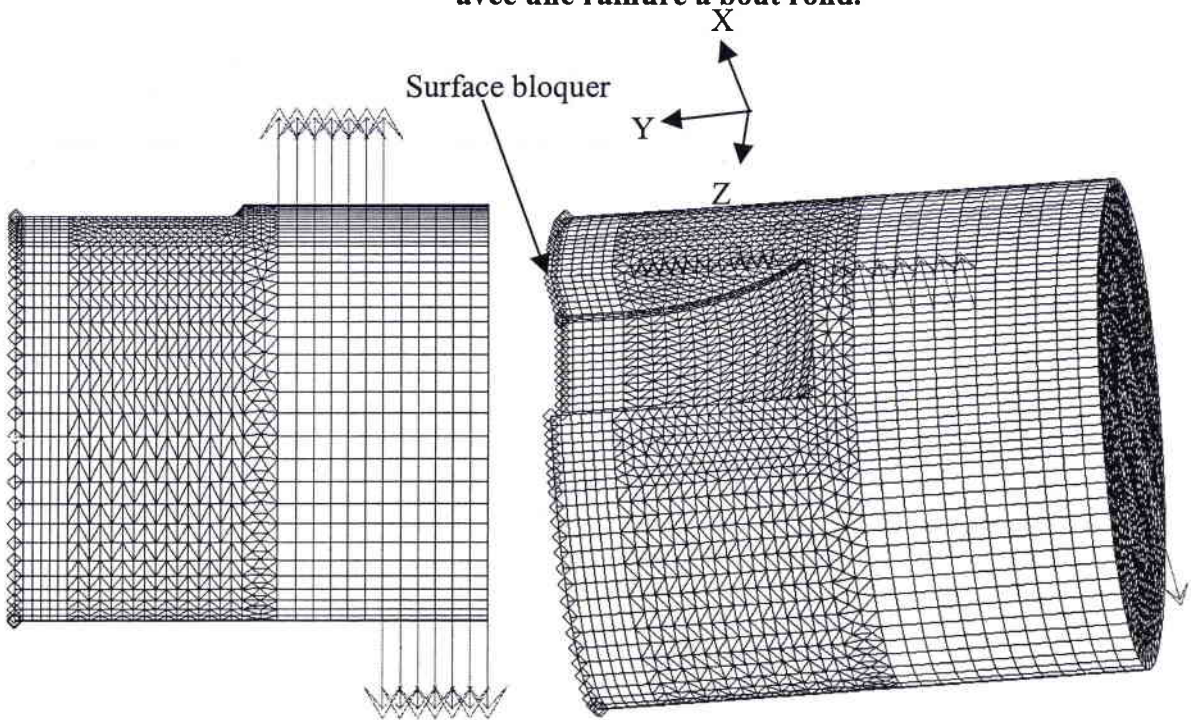
```



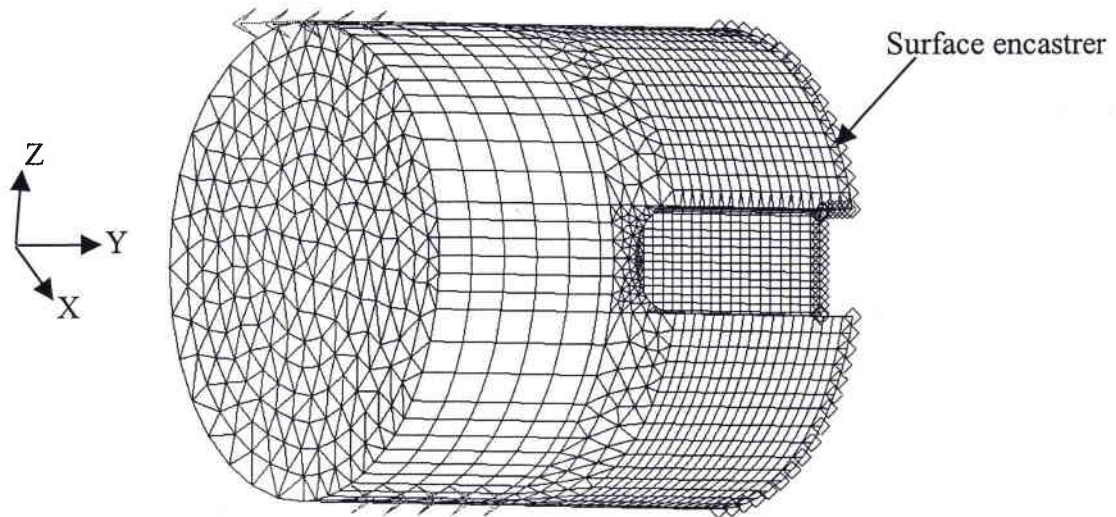
**Figure III. 1 : Présentation du programme de calcul d'un arbre claveté.**



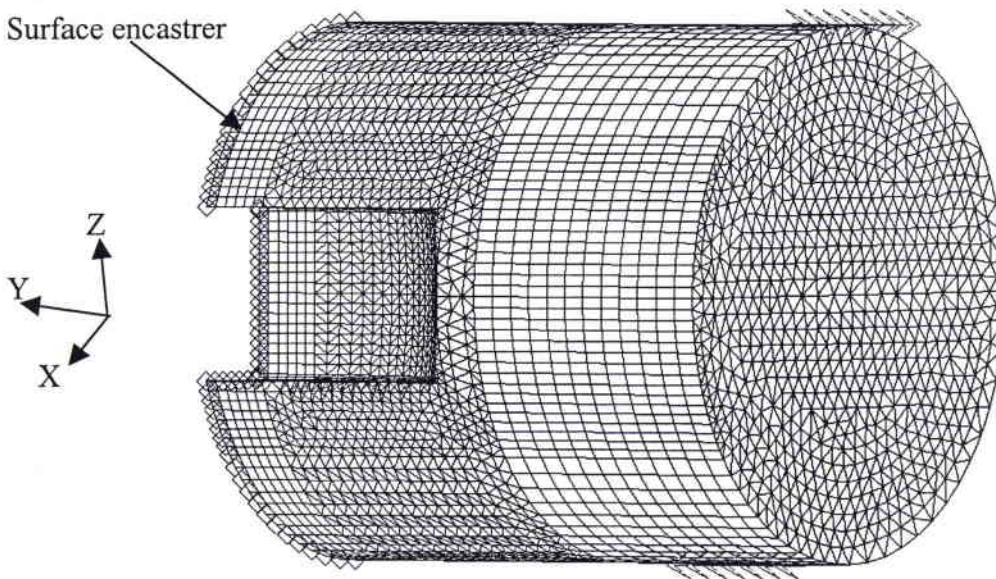
**FigureIII. 2 : Modélisation d'un arbre claveté, dans le cas d'un chargement de flexion avec une rainure à bout rond.**



**FigureIII. 3 : Modélisation d'un arbre claveté, dans le cas d'un chargement de flexion avec une rainure à bout droit.**



**Figure III. 4 : Modélisation d'un arbre claveté, dans le cas d'un chargement de torsion avec une rainure à bout rond.**



**Figure III. 5 : Modélisation d'un arbre claveté, dans le cas d'un chargement de torsion avec une rainure à bout droit.**

### III.3 Calcul élastique

Le calcul élastique réalisé détermine les points de la contrainte maximale, l'influence des paramètres géométriques sur la position de ces points et la valeur de la contrainte maximale. La connaissance de la contrainte globale appliquée permet de calculer le facteur de concentration de contrainte élastique  $k_t$ .

Le but essentiel de ces calculs est de déterminer ce facteur selon les dimensions transversales données par la norme française. Pour cela, une analyse des dimensions transversales (Figure III. 7) de la clavette selon la norme française NF E 22-175 [27] a été réalisée. Dans la figure (III. 6), on distingue quatre zones :

- Zone I :  $6 \leq d < 51$ , les valeurs de  $b/d$ ,  $t/d$  et  $r/d$  ne sont pas constantes.
- Zone II :  $51 \leq d < 110$ , les dimensions transversales sont :  $b/d = 7/25$ ,  $t/d = 10/91$  et  $r/d = 2/77$ .
- Zone III :  $111 \leq d < 200$ , les dimensions transversales sont :  $b/d = 1/4$ ,  $t/d = 1/12$  et  $r/d = 1/65$ .
- Zone IV :  $201 \leq d < 500$ , les dimensions transversales sont :  $b/d = 11/49$ ,  $t/d = 4/57$  et  $r/d = 1/115$ .

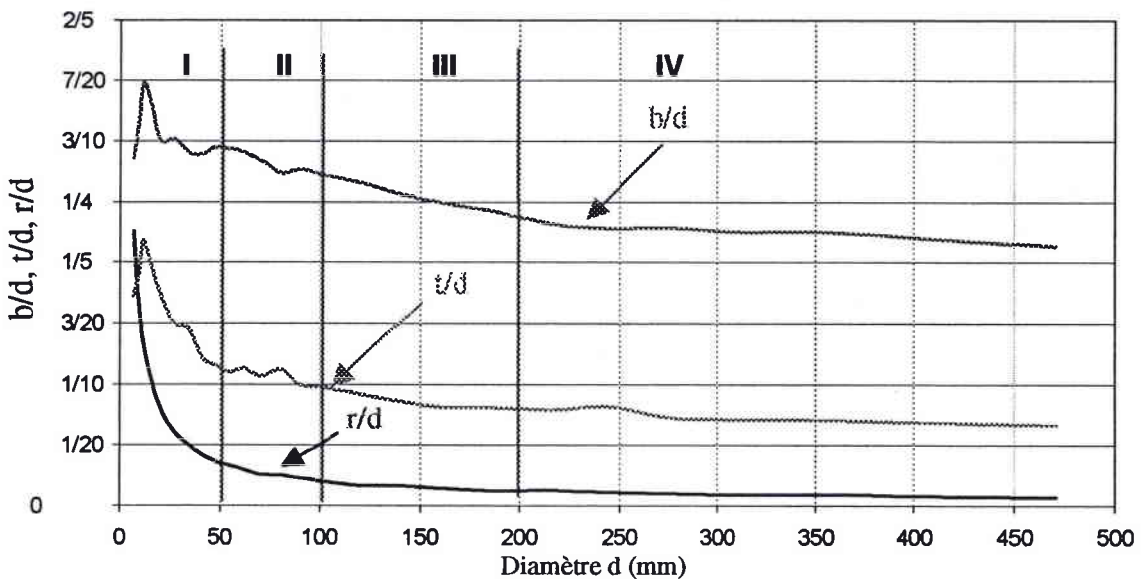


Figure III. 6 : Dimensions transversales de la rainure, selon la norme française NF E 22-175.

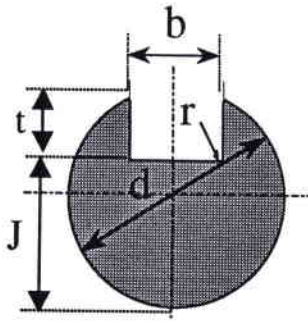


Figure III. 7 : Définitions géométriques selon la norme française pour un arbre claveté.

### III.3.1 Rainure à bout rond

#### III.3.1.1 Flexion

En utilisant les paramètres géométriques donnés par Peterson [1], plusieurs calculs ont été réalisés. Le facteur de concentration de contrainte est calculé par la relation :

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_g} \quad (\text{III. 1})$$

$\sigma_{max}$  est la contrainte normale maximale.

$\sigma_g$  est la contrainte globale calculés par la relation :

$$\sigma_g = \frac{M.32}{\pi d^3} \quad (\text{III. 2})$$

$M$  est le moment de flexion (N.mm).

$d$  diamètre de l'arbre (Figure III. 8)

Les résultats de calcul du facteur de concentration de contrainte (Figure III. 10), et les positions des points des contraintes maximales A, B (Figure III. 8 et III. 9) obtenues, sont en bonne corrélation avec celles donnés par Peterson [1]. ( $b/d = 1/4$ ,  $t/d = 1/8$ ).

Pour les éprouvettes utilisées dans les essais, où les dimensions sont données dans la Figure II. 11, les valeurs du facteur de concentration de contrainte sont :  $k_{tA} = 1.9$  et  $k_{tB} = 2.28$ .

Les valeurs du facteur concentration de contrainte, pour les dimensions transversales données par la norme française, ont été calculées dans les quatre zones (Tableaux III. 1 et III. 2).

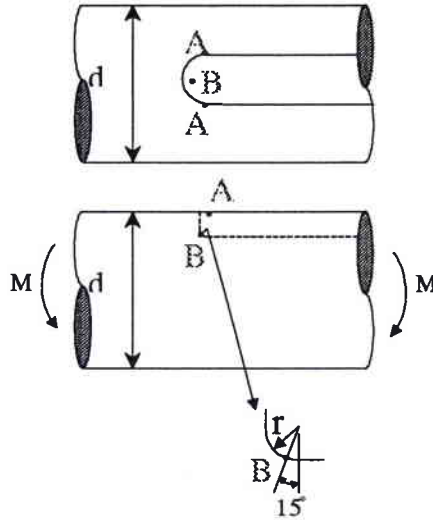
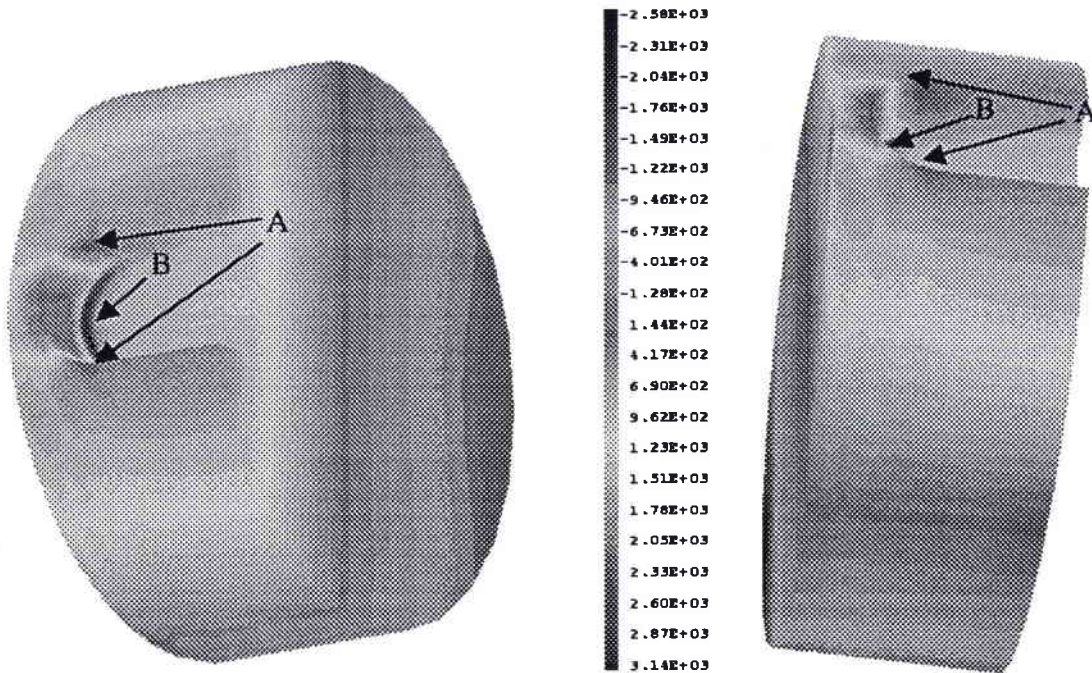


Figure III. 8 : Localisation des points où les contraintes sont maximales en flexion :

Cas des arbres avec des rainures à bout rond.



$$D=9, t=1.8, b=3, \text{ et } r=0.1$$

Figure III. 9 : Résultats de calcul d'un arbre claveté, dans le cas d'un chargement de flexion pour une rainure à bout rond.



	$d^*$	b	$j=d-t$	r		$k_{TA}$	$k_{IB}^{**}$	
				min	max		min	max
Zone I	6 à 8	2	$d - 1.2$	0.08	0.16	1.9	1.8	2.12
						1.8	2	2.5
	9 à 10	3	$d - 1.8$	0.08	0.16	1.9	1.98	2.38
						1.8	2.03	2.45
	11 à 12	4	$d - 2.5$	0.08	0.16	1.95	2.08	2.8
						1.9	2.2	2.9
	13 à 17	5	$d - 3$	0.16	0.25	2.1	1.9	2.24
						1.8	2.22	2.61
	18 à 22	6	$d - 3.5$	0.16	0.25	1.9	2.15	2.33
						1.75	2.41	2.88
	23 à 30	8	$d - 4$	0.16	0.25	1.8	2.6	3.02
						1.7	2.8	3.31
	31 à 38	10	$d - 5$	0.25	0.4	1.8	2.4	2.9
						1.65	2.55	3.13
	39 à 44	12	$d - 5$	0.25	0.4	1.65	2.81	3.42
						1.7	2.6	3.5
	45 à 50	14	$d - 5.5$	0.25	0.4	1.75	2.71	3.42
						1.65	2.66	3.2

\*Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

\*\* Les valeurs maximales et minimales correspondent respectivement aux valeurs minimales et maximales du rayon de raccordement r.

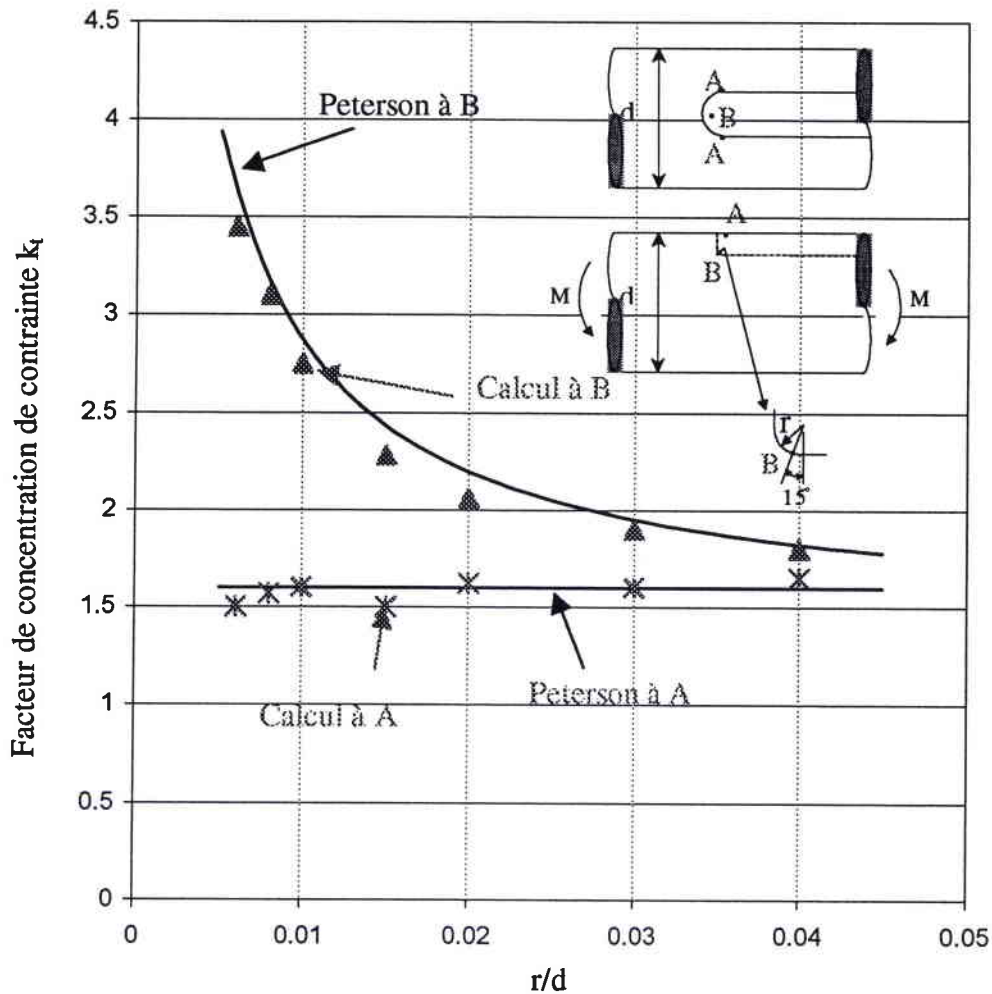
**Tableau III. 1 : Valeurs calculées des facteurs de concentration de contrainte : Application à la norme française de la zone I en flexion pour une rainure à bout rond**

	$d^*$	$k_{IA}$	$k_{IB}^{**}$	
			min	max
Zone II	51 à 110	$1.6 \pm 0.07$	$2.48 \pm 0.08$	$2.77 \pm 0.08$
Zone III	111 à 200	$1.54 \pm 0.03$	$2.64 \pm 0.07$	$2.89 \pm 0.07$
Zone IV	201 à 500	$1.56 \pm 0.03$	$2.63 \pm 0.18$	$2.78 \pm 0.12$

\*Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

\*\* Les valeurs maximales et minimales correspondent respectivement aux valeurs minimales et maximales du rayon de raccordement r.

**Tableau III. 2 : Valeurs calculées des facteurs de concentration de contrainte : Application à la norme française des zones II, III et IV en flexion pour une rainure à bout rond**



**Figure III. 10 : Comparaison de l'évolution de  $k_t$  en fonction de la rayon de raccordement selon Peretson [1] et par le calcul ( $b=d/4$  et  $t=d/8$ ).**

L'influence du rayon de raccordement donnée par Peterson [1] (Figure III. 10), est limitée au point maximal situé sur le rayon de raccordement B. La profondeur  $t$  et la largeur  $b$  ont des rôles importants sur la position de la contrainte maximale entre les points A et B. Les influences des ces deux paramètres sont présentées dans les figures III. 11 et III. 12

On constate sur la figure III. 10 que la contrainte maximale au point A ne dépend pas du rayon de raccordement  $r$ , résultat logique dans la mesure où ce point se trouve à une certaine distance  $t$  (non négligeable) de ce rayon. L'augmentation de la profondeur  $t$  accroît la contrainte à ce point. L'équation (III. 3) présente l'évolution de la concentration de contrainte en fonction de la profondeur :

$$k_{tA,1} = -5 \cdot \left(\frac{t}{d}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{t}{d}\right) + 1.3 \quad \text{Pour } b/d = 1/3 \quad (\text{III. 3})$$

L'influence de la largeur  $b$  sur la valeur de la concentration de contrainte au point de contrainte maximale  $A$  est particulière avec un point minimal situé à  $b/d = 1/3$  pour  $t/d = 1/5$ . L'équation (III. 4) présente l'évolution de la concentration de contrainte en fonction de la largeur :

$$k_{tA,2} = 13.5 \left(\frac{b}{d}\right)^3 - 5.4 \left(\frac{b}{d}\right)^2 + 2 \quad \text{Pour } t/d = 1/5 \quad (\text{III. 4})$$

Le facteur de concentration de contrainte au point  $A$  dépend donc de  $b/d$  et de  $t/d$  :

$$k_{tR,A} = f\left(\frac{b}{d}, \frac{t}{d}\right) \quad (\text{III. 5})$$

Pour calculer ce facteur de concentration de contrainte, on propose l'équation empirique suivante:

$$k_{tR,A} = \frac{k_{tA,1} \cdot k_{tA,2}}{(k_{tA,1(t/d)} + k_{tA,2(b/d)}) / 2} \quad (\text{III. 6})$$

Les équations III.3 et III.4 sont calculées pour les valeurs  $t/d = 1/5$  et  $b/d = 1/3$ , et donnent une valeur de  $k_{tA,1} = k_{tA,2} = 1.9$ . On peut donc écrire :

$$k_{tR,A} = \frac{k_{tA,1} \cdot k_{tA,2}}{1.9} \quad (\text{III. 7})$$

Le tableau (III. 3) présente simultanément les résultats obtenus par l'équation (III.7) et les résultats obtenus par calculs aux éléments finis. La valeur donnée par Peterson ( $b/d=1/4$  et  $t/d=1/8$ ) est  $k_{tA} = 1.6$ , et l'application de l'équation (III.7) donne  $k_{tR,A} = 1.69$ .

La comparaison entre les résultats obtenus par l'application de l'équation (III.7) et les résultats donnés par Peterson ou par calcul d'éléments finis, montre que la différence maximale entre les résultats est inférieure à 6%.

	d*	b	t	$k_{TA}$ Calcul par éléments finis	$k_{TR,A}$ Equation (III.7)	Ecart
Zone I	6 à 8	2	1.2	1.9	1.9	0%
				1.8	1.76	2%
	9 à 10	3	1.8	1.9	1.9	0%
				1.8	1.84	2%
	11 à 12	4	2.5	1.95	1.99	2%
				1.9	1.92	1%
	13 à 17	5	3	2.1	2.03	3%
				1.8	1.83	2%
	18 à 22	6	3.5	1.9	1.89	1%
				1.75	1.78	2%
	23 à 30	8	4	1.8	1.86	3%
				1.7	1.72	1%
31 à 38	10	5	1.8	1.81	0%	
			1.65	1.71	4%	
39 à 44	12	5	1.65	1.71	4%	
			1.7	1.67	2%	
45 à 50	14	5.5	1.75	1.7	3%	
			1.65	1.66	0%	
Zone II	51	16	6	1.67	1.69	1%
	110	28	10	1.53	1.6	5%
Zone III	111	32	11	1.56	1.63	4%
	200	45	15	1.51	1.56	3%
Zone IV	230	50	17	1.53	1.55	2%
	500	100	31	1.59	1.52	4%

\*Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

**Tableau III. 3 : Comparaison entre les valeurs du facteur de concentration de contrainte obtenues par calcul et selon l'équation (III.7). Cas de flexion pour une rainure à bout rond.**

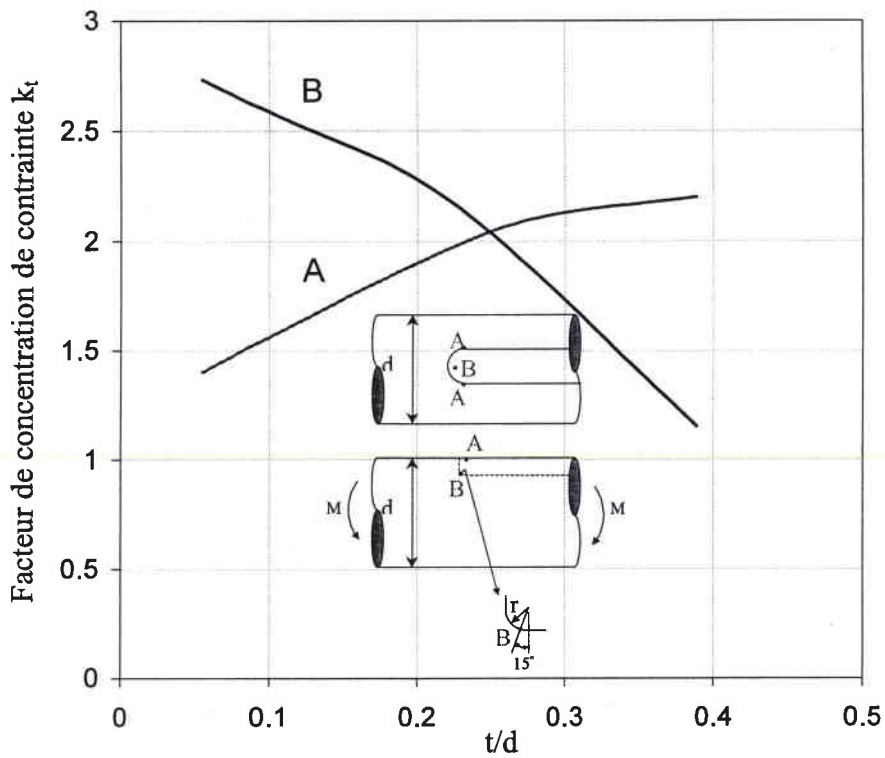


Figure III. 11 : Influence de la profondeur  $t$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout rond.

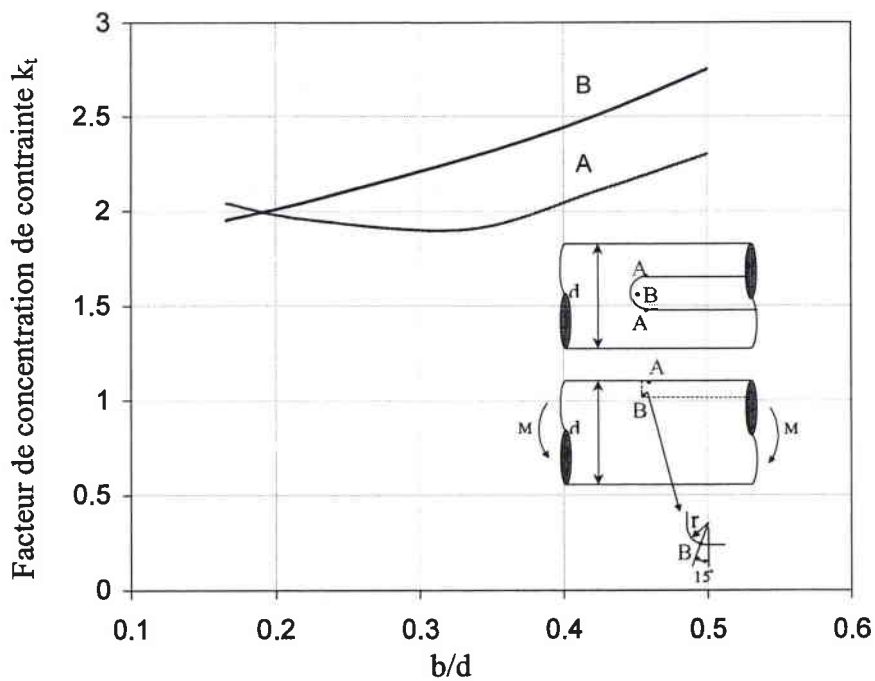


Figure III. 12 : Influence de la largeur  $b$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas  $r/d = 1/90$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout rond.

On constate que la contrainte maximale au point B diminue avec l'augmentation de la profondeur. La valeur du facteur de concentration de contrainte en fonction de la profondeur pour  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$  peut être exprimée par l'équation (III.8) :

$$k_{tB,1} = -6.9 \left( \frac{t}{d} \right)^2 - 1.82 \left( \frac{t}{d} \right) + 2.92 \quad \text{Pour } r/d=1/90 \text{ et } b/d = 1/3 \quad \text{(III. 8)}$$

L'influence de la largeur  $b$  sur la contrainte maximale au point B se traduit par une relation quasi linéaire. La relation entre le facteur de concentration de contrainte et la largeur pour  $r/d = 1/90$  et  $t/d = 1/5$  est de la forme :

$$k_{tB,2} = 2 \left( \frac{b}{d} \right) + 1.62 \quad \text{Pour } r/d=1/90 \text{ et } t/d = 1/5 \quad \text{(III. 9)}$$

Peterson a présenté l'influence du rayon de raccordement pour le cas  $b/d=4$  et  $t/d=8$  (Figure III. 10). Ces valeurs ne correspondent pas à nos conditions. La figure III. 13 présente l'influence de  $r/d$  pour le cas  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Dans ce diagramme, on peut décrire l'évolution de concentration de contrainte en fonction du rayon de raccordement par l'équation (III. 10) :

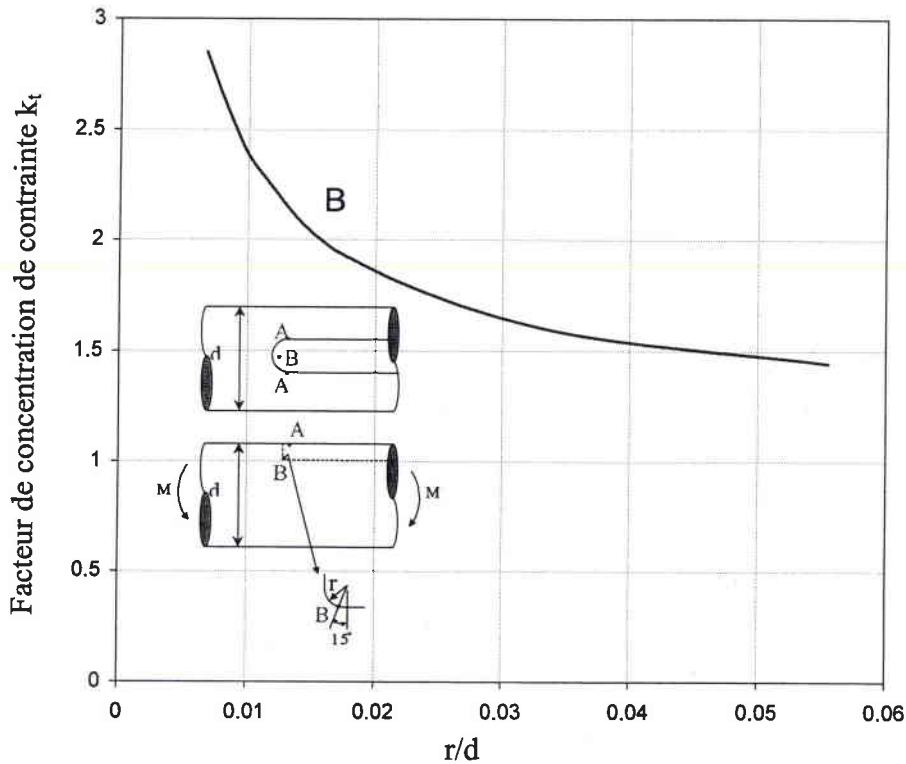
$$k_{tB,3} = -0.002 \left( \frac{0.1}{r/d} \right)^2 + 0.14 \left( \frac{0.1}{r/d} \right) + 1.2 \quad \text{Pour } t/d = 1/5 \text{ et } b/d=1/3 \quad \text{(III. 10)}$$

Le facteur de concentration de contrainte au point B dépend donc de  $b/d$ ,  $t/d$  et  $r/d$  :

$$k_{tR,B} = f \left( \frac{b}{d}, \frac{t}{d}, \frac{r}{d} \right) \quad \text{(III. 11)}$$

Nous proposons une solution empirique pour calculer le facteur  $k_{tR,B}$ . Elle se base sur l'équation III.6 :

$$k_{tR,B} = \frac{k_{tB,1} \cdot k_{tB,2} \cdot k_{tB,3}}{\left( (k_{tB,1(t/d,r/d)} + k_{tB,2(b/d,r/d)} + k_{tB,3(b/d,t/d)}) / 3 \right)^2} \quad \text{(III. 12)}$$



**Figure III. 13 : Influence de rayon de raccordement r sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout rond.**

L'application des équation III.8, III.9 ET III.10, pour  $t/d = 1/5$ ,  $b/d = 1/3$  et  $r/d = 1/90$  donne  $k_{tB,1} = k_{tB,2} = k_{tB,3} = 2.29$ . Donc on peut écrire :

$$k_{tR,B} = \frac{k_{tB,1} \cdot k_{tB,2} \cdot k_{tB,3}}{(2.29)^2} \quad \text{(III. 13)}$$

Le tableau (II. 4) présente les résultats obtenus par l'équation (III.13) et les résultats obtenus par les calculs aux éléments finis. On constate que l'écart est inférieure à 10%.

Pour les valeurs données par Peterson ( $b/d = 1/4$  et  $t/d = 1/8$ ), la figure (III. 14) présente la comparaison entre les résultats obtenus par Peterson et l'équation (III.13). L'écart constatée est de 12%.

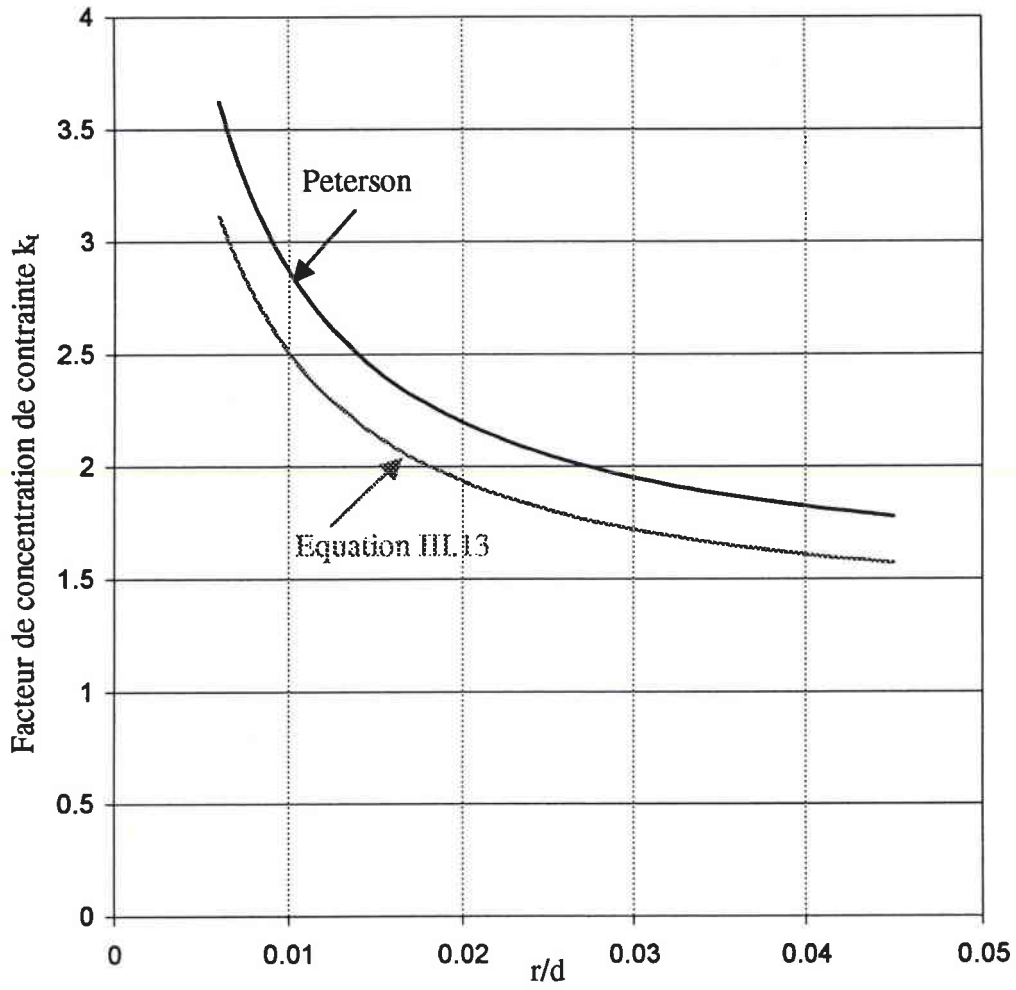
	d*	b	t	r		K <sub>FB</sub> **		K <sub>FLB</sub> **			
				Calcul par éléments finis		Equation (III.)					
				min	max	min	max	Écart	max	Écart	
Zone I	6 à 8	2	1.2	0.08	0.16	1.8	2.12	1.69	7%	2.1	0%
						2	2.5	1.86	7%	2.4	3%
	9 à 10	3	1.8	0.08	0.16	1.98	2.38	1.91	4%	2.5	5%
						2.03	2.45	2	1%	2.6	7%
	11 à 12	4	2.5	0.08	0.16	2.08	2.8	1.99	5%	2.6	6%
						2.2	2.9	2.09	5%	2.8	4%
	13 à 17	5	3	0.16	0.25	1.9	2.24	1.82	4%	2.1	5%
						2.22	2.61	2.07	7%	2.5	6%
	18 à 22	6	3.5	0.16	0.25	2.15	2.33	2.12	2%	2.5	8%
						2.41	2.88	2.31	4%	2.8	3%
	23 à 30	8	4	0.16	0.25	2.6	3.02	2.45	6%	3	2%
						2.8	3.31	2.72	3%	3.3	1%
31 à 38	10	5	0.25	0.4	2.4	2.9	2.29	5%	2.8	4%	
					2.55	3.13	2.46	4%	3	4%	
39 à 44	12	5	0.25	0.4	2.81	3.42	2.6	8%	3.2	8%	
					2.6	3.5	2.71	4%	3.3	6%	
45 à 50	14	5.5	0.25	0.4	2.71	3.42	2.8	3%	3.4	0%	
					2.66	3.2	2.89	8%	3.5	9%	
Zone II	51	16	6	0.4	0.6	2.4	2.7	2.51	4%	3	9%
	110	28	10	0.7	1	2.55	2.85	2.74	7%	3.2	10%
Zone III	111	32	11	0.7	1	2.6	2.9	2.81	7%	3.3	11%
	200	45	15	1.2	1.6	2.7	2.95	2.86	6%	3.2	9%
Zone IV	230	50	17	2	2.5	2.45	2.66	2.5	2%	2.7	3%
	500	100	31	3	3.5	2.8	3	2.99	6%	3.2	6%

\* Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

\*\* Les valeurs maximales et minimales correspondent respectivement aux valeurs minimales et maximales du rayon de raccordement r.

**Tableau II. 4 : Comparaison entre les valeurs du facteur de concentration de contrainte obtenues par calcul et selon l'équation (III.13). Cas de la flexion pour une rainure à bout rond.**





**Figure III. 14 : Comparaison de l'évolution de  $k_t$  en fonction du rayon de raccordement selon Peterson et par l'application de l'équation III.13 ( $b=d/4$  et  $t=d/8$ ).**

### III.3.1.2 Torsion

La figure III. 15 présente la comparaison entre les résultats de calcul et ceux donnés par Peterson [1] pour des dimensions transversales :  $b=d/4$  et  $t=d/8$ . La concentration de contrainte est définie de deux manières :

- Par l'intermédiaire du cisaillement maximal :

$$k_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_g} \quad (\text{III. 14})$$

$\tau_{max}$  est la contrainte de cisaillement maximale.

$\tau_g$  est la contrainte de cisaillement globale calculée par la relation :

$$\tau_g = \frac{T.16}{\pi d^3} \quad (\text{III. 15})$$

$T$  est le moment de torsion (N.mm).

$d$  diamètre de l'arbre.

- Par l'intermédiaire de la contrainte de traction tangentielle maximale :

$$k_t = \frac{\sigma_{\theta\theta max}}{\tau_g} \quad (\text{III. 16})$$

$\sigma_{\theta\theta max}$  est la contrainte tangentielle maximale.

Les valeurs du facteur de concentration de contrainte calculées sont légèrement inférieures à celles données par Peterson, dans le cas d'un cisaillement maximal. Cette différence est plus importante dans le cas de l'utilisation de la contrainte de traction tangentielle maximale.

Les positions des points de contraintes maximales A et B (Figure III. 16 et III. 17) sont en bonne corrélation avec celles données par Peterson [1].

Pour le cas des éprouvettes utilisées dont les dimensions sont données dans la figure II. 20, les valeurs du facteur de concentration de contrainte sont :  $k_{tsA} = 1.9$ ,  $k_{tA} = 3.8$  et  $k_{tsB} = 3.25$ .

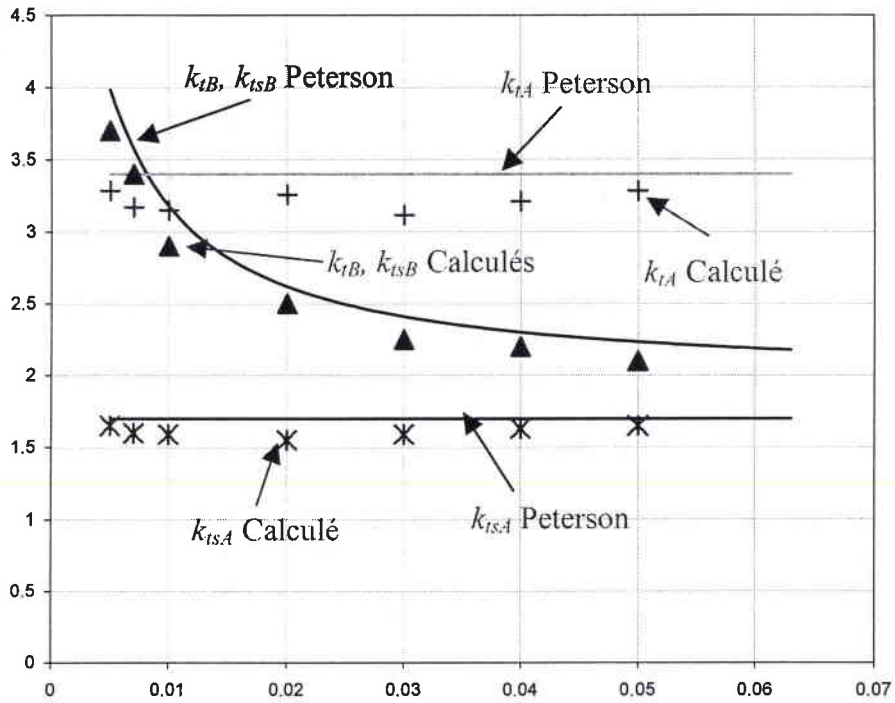


Figure III. 15 : Comparaison de l'évolution de  $k_t$  en fonction du rayon de raccordement selon Peterson [1] et le calcul ( $b=d/4$  et  $t=d/8$ ).

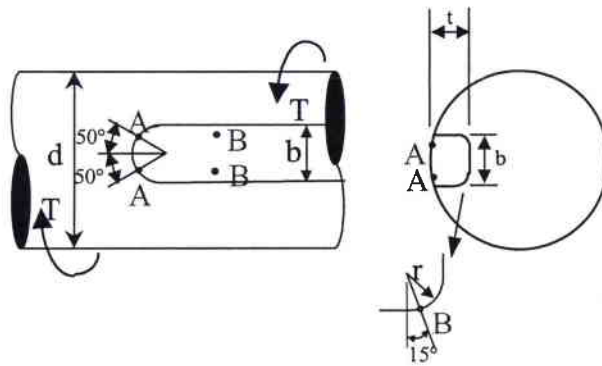
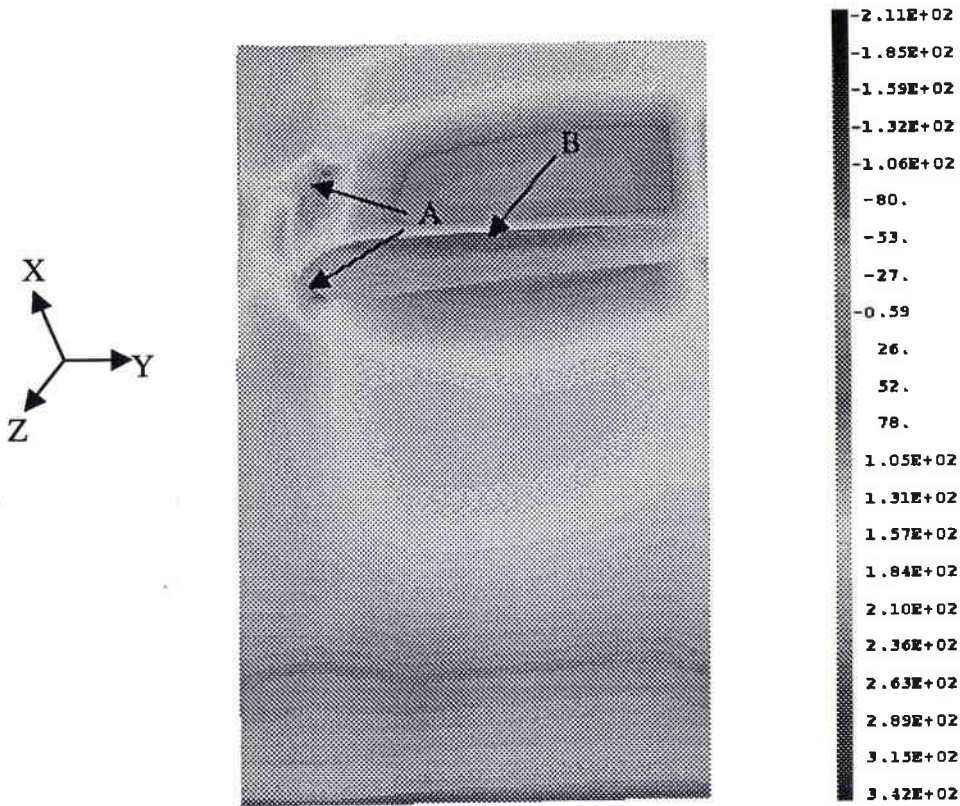


Figure III. 16 : Localisation des points où les contraintes sont maximales en torsion :  
Cas des arbres avec des rainures à bout rond.



**Figure III. 17 : Résultats de calcul d'un arbre claveté, dans le cas d'un chargement de torsion, pour une rainure à bout rond.**

L'influence du rayon de raccordement est présentée par Peterson [1] ( Figure III. 15), elle est limitée au point maximal situé sur le rayon de raccordement B. La profondeur  $t$  et la largeur  $b$  ont des rôles importants sur la position de la contrainte maximale entre les points A, B. Les influences des ces deux paramètres sont présentées dans les figures III. 18 et III. 19.

On constate sur ces diagrammes que la contrainte maximale au point A ne dépend ni du rayon de raccordement  $r$  ni de la largeur  $b$  dans la zone étudiée. L'augmentation de la profondeur  $t$  accroît la contrainte en ce point. L'équation (III. 17) présente cette évolution :

$$k_{tsA,1} = 4.351 \left( \frac{t}{d} \right)^2 + 1.4831 \left( \frac{t}{d} \right) + 1.4084 \quad \text{Pour } b/d = 1/3 \quad \text{(III. 17)}$$

Le facteur de concentration de contrainte au point A dépend donc de  $t/d$  :

$$k_{tsR,A} = f\left(\frac{t}{d}\right) \quad \text{(III. 18)}$$

le facteur de concentration de contrainte au point A pour le cas d'une rainure à bout rond, est donné par :

$$k_{tsA} = k_{tsA,1} = -3.946\left(\frac{t}{d}\right)^2 + 1.6054\left(\frac{t}{d}\right) + 1.4012 \quad \text{(III. 19)}$$

Le tableau (III. 7) présente les résultats obtenus par l'équation (III.19) et les résultats obtenus par les calculs aux éléments finis. La valeur donnée par Peterson pour :  $t/d=1/8$  et  $k_{ts,A} = 1.7$ . L'équation (III.19) donne  $k_{tsR,A} = 1.66$ . On constate donc que l'équation (III.19) donne de bons résultats avec un écart inférieur à 8%.

Pour la contrainte maximale au point B, cette contrainte augmente avec l'accroissement de la profondeur. La valeur du facteur de concentration de contrainte en fonction de la profondeur pour  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$  peut être exprimée par l'équation :

$$k_{tsB,1} = 25.053\left(\frac{t}{d}\right)^2 + 12.359\left(\frac{t}{d}\right) + 1.7112 \quad \text{Pour } r/d=1/90 \text{ et } b/d = 1/3 \quad \text{(III. 20)}$$

L'influence de la largeur sur la contrainte maximale au point B est présentée dans la figure (III. 19). La relation entre le facteur de concentration de contrainte et la largeur pour  $r/d = 1/90$  et  $t/d = 1/5$  est de la forme :

$$k_{tsB,2} = -11.108\left(\frac{b}{d}\right)^2 + 9.2534\left(\frac{b}{d}\right) + 1.344 \quad \text{Pour } r/d=1/90 \text{ et } t/d = 1/5 \quad \text{(III. 21)}$$



Peterson a présenté l'influence du rayon de raccordement, pour le cas  $b/d=4$  et  $t/d=8$  (Figure III. 15), valeurs ne correspondant pas à nos conditions. La figure (III. 21) présente l'influence  $r/d$  pour le cas de  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Dans ce diagramme, l'évolution de concentration de contrainte en fonction du rayon de raccordement est déduite de l'équation (III. 22) :

$$k_{tsB,3} = -0.004 \left( \frac{0.1}{r/d} \right)^2 + 0.14 \left( \frac{0.1}{r/d} \right) + 2.5 \quad \text{Pour } t/d = 1/5 \text{ et } b/d=1/3 \text{ (III. 22)}$$

Le facteur de concentration de contrainte au point B dépend donc de  $b/d$ ,  $t/d$  et  $r/d$  :

$$k_{tsR,B} = f \left( \frac{b}{d}, \frac{t}{d}, \frac{r}{d} \right) \quad \text{(III. 23)}$$

On propose une solution empirique pour calculer ce facteur  $k_{tsR,B}$ , en se basant sur l'équation III.12 :

$$k_{tsR,B} = \frac{k_{tsB,1} \cdot k_{tsB,2} \cdot k_{tsB,3}}{\left( \left( k_{tsB,1(t/d, r/d)} + k_{tsB,2(b/d, r/d)} + k_{tsB,3(b/d, t/d)} \right) / 3 \right)^2} \quad \text{(III. 24)}$$

Les équations III.20, III.21 ET III.22, calculées pour  $t/d = 1/5$ ,  $b/d = 1/3$  et  $r/d = 1/90$ , conduisent à des résultats intégrés dans l'équation (III. 24) :

$$k_{tsR,B} = \frac{k_{tsB,1} \cdot k_{tsB,2} \cdot k_{tsB,3}}{(3.34)^2} \quad \text{(III. 25)}$$

Le tableau (III. 8) présente les résultats obtenus par l'application de l'équation (III.25) et les résultats obtenus par les calculs aux éléments finis. L'erreur est inférieure à 10%.

Pour les valeurs données par Peterson ( $b/d = 1/4$  et  $t/d = 1/8$ ), la figure (III. 21) présente la comparaison entre les résultats obtenus par Peterson et l'application de l'équation (III.25), l'écart maximale est de 8%.

	d*	b	J=d-t	R		k <sub>tsA</sub>	k <sub>tsB</sub> **	
				min	Max		min	max
Zone I	6 à 8	2	d - 1.2	0.08	0.16	1.9	2.65	2.9
						1.8	2.4	3.2
	9 à 10	3	d - 1.8	0.08	0.16	1.9	3.06	3.6
						1.8	3.1	3.7
	11 à 12	4	d - 2.5	0.08	0.16	2.01	3.32	4.2
						2	3.4	4.23
	13 à 17	5	d - 3	0.16	0.25	2.16	3.28	3.62
						1.85	3.15	3.55
	18 à 22	6	d - 3.5	0.16	0.25	1.9	3.2	3.65
						1.8	3.11	3.66
	23 à 30	8	d - 4	0.16	0.25	1.8	3.5	4.02
						1.7	3.2	3.82
	31 à 38	10	d - 5	0.25	0.4	1.75	3.32	3.72
						1.7	3.18	3.6
	39 à 44	12	d - 5	0.25	0.4	1.7	3.22	3.67
						1.65	3.12	3.71
	45 à 50	14	d - 5.5	0.25	0.4	1.6	3.2	3.83
						1.6	3.33	3.92

\*Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

\*\* Les valeurs maximales et minimales correspondent respectivement aux valeurs minimales et maximales du rayon de raccordement r.

**Tableau III. 5 : Valeurs des facteurs de concentration de contrainte : Applications à la norme française dans la zone I en torsion pour une rainure à bout rond**

	d*	k <sub>tsA</sub>	k <sub>tsB</sub> **	
			min	max
Zone II	51 à 110	1.6±0.05	2.8±0.05	3.2±0.2
Zone III	111 à 200	1.65±0.1	2.71±0.2	3.1±0.2
Zone IV	201 à 500	1.45±0.03	2.4±0.07	2.55±0.07

\*Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

\*\* Les valeurs maximales et minimales correspondent respectivement aux valeurs minimales et maximales du rayon de raccordement r..

**Tableau III. 6 : Valeurs des facteurs des concentrations pour la norme française : Application à la norme française dans les zones II, III et IV en torsion pour une rainure à bout rond**

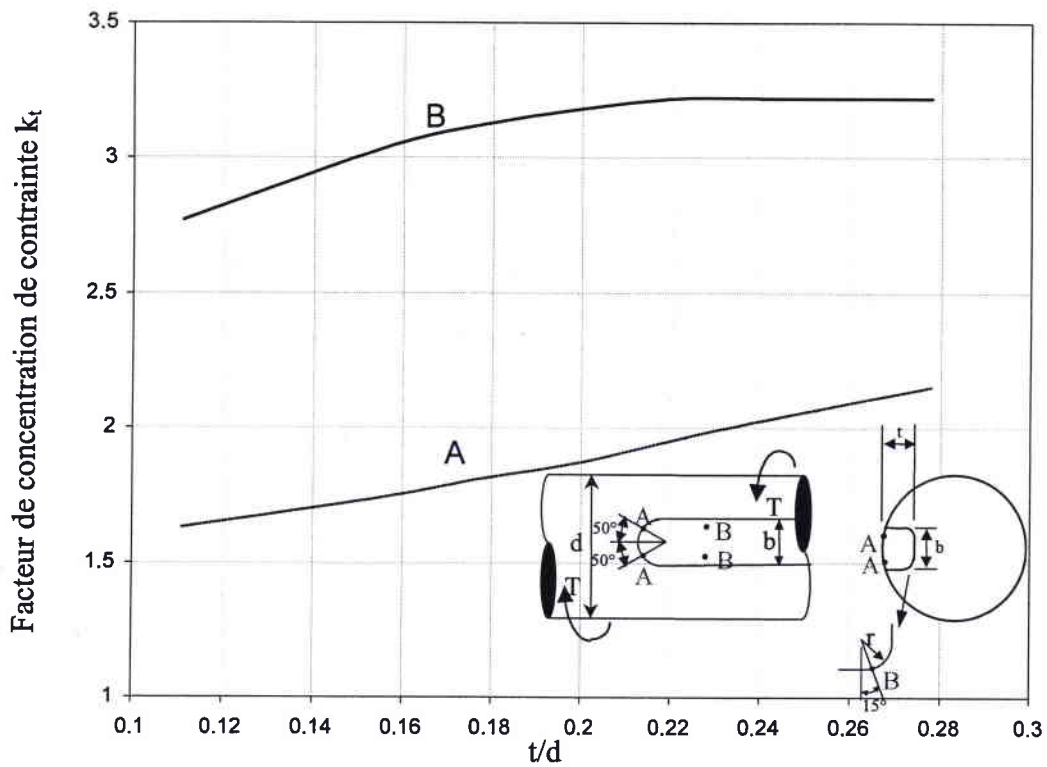


Figure III. 18 : Influence de la profondeur  $t$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$ , Cas de la torsion pour une rainure à bout rond.

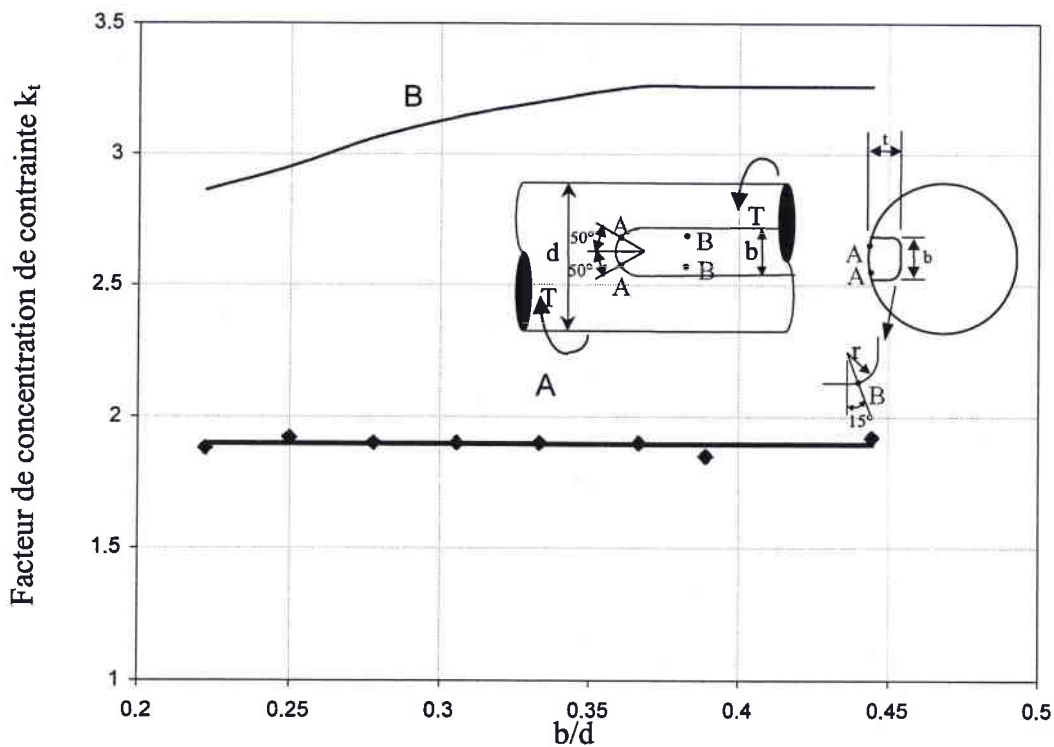


Figure III. 19 : Influence de la largeur  $b$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $r/d = 1/90$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la torsion pour une rainure à bout rond.



	d*	b	t	$k_{TA}$ Calcul par éléments finis	$k_{TR.A}$ Equation (III.19)	Ecart
Zone I	6 à 8	2	1.2	1.9	1.88	1%
				1.8	1.73	4%
	9 à 10	3	1.8	1.9	1.88	1%
				1.8	1.82	1%
	11 à 12	4	2.5	2.01	1.97	2%
				2	1.91	5%
	13 à 17	5	3	2.16	1.98	8%
				1.85	1.81	2%
	18 à 22	6	3.5	1.9	1.86	2%
				1.8	1.75	3%
	23 à 30	8	4	1.8	1.8	0%
				1.7	1.68	1%
31 à 38	10	5	1.75	1.76	1%	
			1.7	1.68	1%	
39 à 44	12	5	1.7	1.67	2%	
			1.65	1.63	1%	
45 à 50	14	5.5	1.6	1.65	3%	
			1.6	1.62	2%	
Zone II	51	16	6	1.65	1.64	0%
	110	28	10	1.6	1.58	1%
Zone III	111	32	11	1.7	1.6	6%
	200	45	15	1.6	1.54	3%
Zone IV	230	50	17	1.47	1.54	5%
	500	100	31	1.42	1.52	6%

\*Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

**Tableau III. 7 : Comparaison entre les valeurs du facteur de concentration de contrainte obtenues par calcul et selon l'équation (III.19). Cas de la torsion pour une rainure à bout rond.**

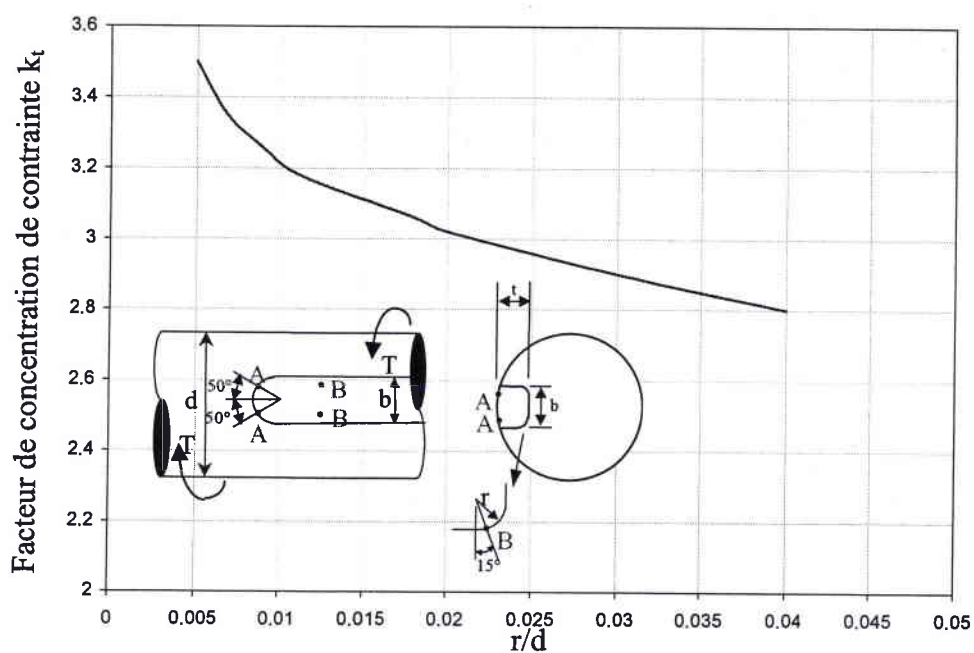


Figure III. 20 : Influence du rayon de raccordement  $r$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la torsion pour une rainure à bout rond.

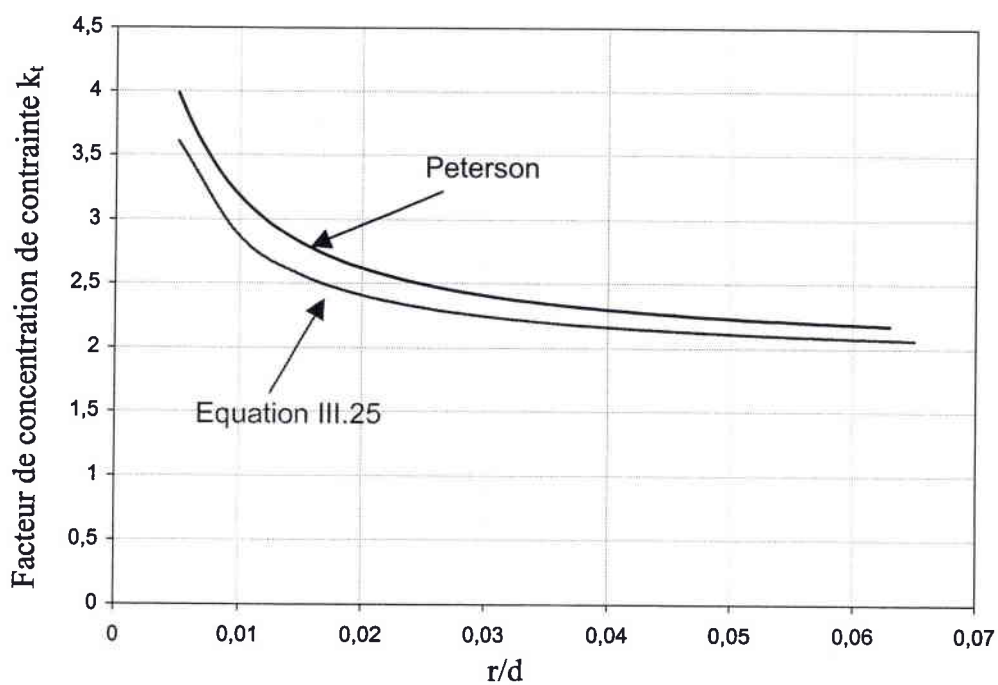


Figure III. 21 : Comparaison de l'évolution de  $k_t$  en fonction du rayon de raccordement selon Peterson et selon l'équation III.25 ( $b=d/4$  et  $t=d/8$ ).

	d*	b	t	r		$K_{T3B}^{**}$		$k_{T3RB}^{**}$			
				Calcul par éléments finis		Equation (III. 25)					
				min	max	min	max	min	Ecart	max	Ecart
Zone I	6 à 8	2	1.2	0.08	0.16	2.65	2.9	2.82	3%	3.16	8%
						2.4	3.2	2.58	5%	2.91	7%
	9 à 10	3	1.8	0.08	0.16	3.06	3.33	2.95	4%	3.55	6%
						3.1	3.7	2.93	7%	3.3	5%
	11 à 12	4	2.5	0.08	0.16	3.32	4.2	3.2	4%	3.59	8%
						3.4	4.23	3.18	7%	3.54	8%
	13 à 17	5	3	0.16	0.25	3.28	3.62	3.07	9%	3.32	8%
						3.15	3.55	2.95	7%	3.19	7%
	18 à 22	6	3.5	0.16	0.25	3.2	3.65	3.12	3%	3.38	3%
						3.11	3.66	2.96	3%	3.18	6%
Zone II	23 à 30	8	4	0.16	0.25	3.5	4.02	3.22	7%	3.44	6%
						3.2	3.82	2.97	2%	3.06	4%
Zone III	31 à 38	10	5	0.25	0.4	3.32	3.72	3.03	9%	3.28	7%
						3.18	3.6	2.84	10%	3.03	7%
Zone IV	39 à 44	12	5	0.25	0.4	3.22	3.67	2.95	6%	3.14	4%
						3.12	3.71	2.82	6%	2.96	8%
Zone V	45 à 50	14	5.5	0.25	0.4	3.2	3.83	2.99	2%	3.12	4%
						3.33	3.92	2.87	9%	2.93	9%
Zone VI	51	16	6	0.4	0.6	3.09	3.46	2.83	8%	3.02	7%
	110	28	10	0.7	1	2.81	3.15	2.6	3%	2.72	3%
Zone VII	111	32	11	0.7	1	2.97	3.36	2.77	3%	2.89	3%
	200	45	15	1.2	1.6	2.7	2.99	2.42	4%	2.49	5%
Zone VIII	230	50	17	2	2.5	2.5	2.66	2.32	8%	2.48	7%
	500	100	31	3	3.5	2.52	2.6	2.47	2%	2.61	0%

\* Dimensions transversales (d, a, j et r) présentées dans la figure III. 6.

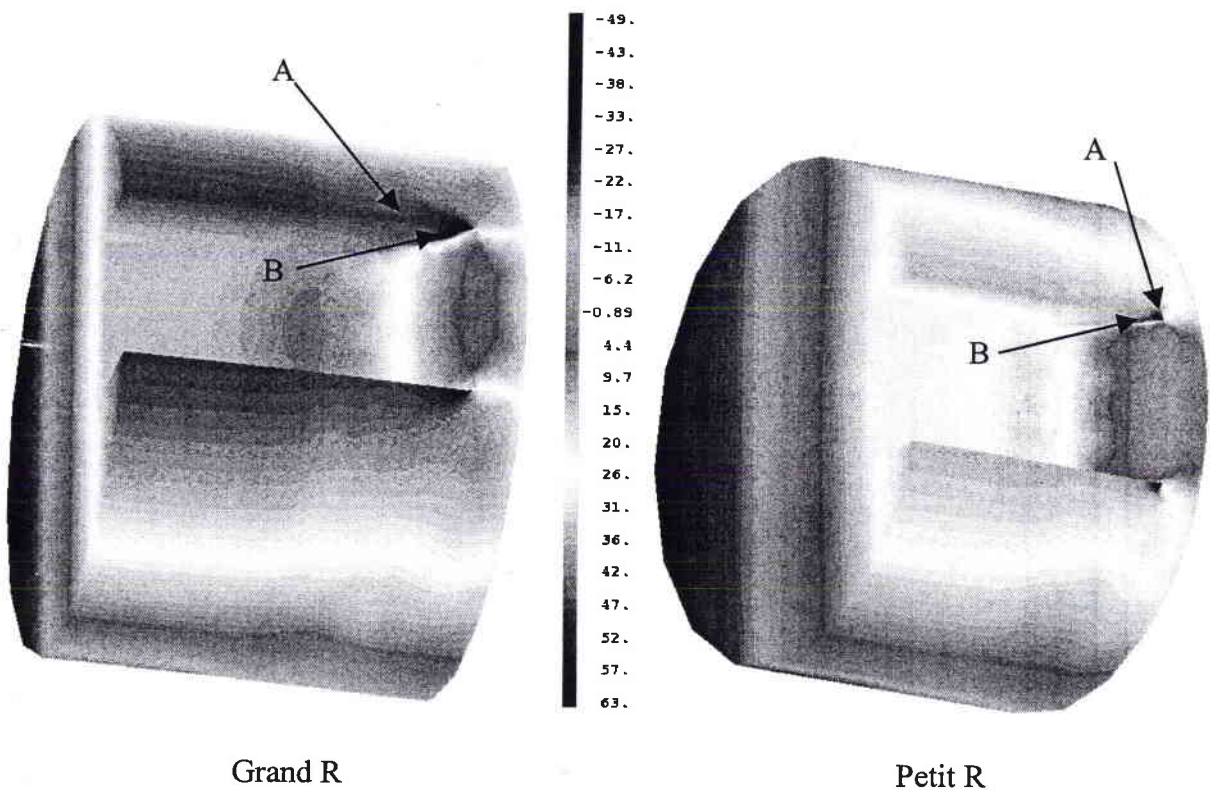
\*\* Les valeurs maximales et minimales correspondent respectivement aux valeurs minimales et maximales du rayon raccordement r.

**Tableau III. 8 : Comparaison entre les valeurs du facteur de concentration de contrainte obtenues par le calcul et selon l'équation (III.25). Cas de la torsion pour une rainure à bout rond.**

### III.3.2 Rainure à bout droit

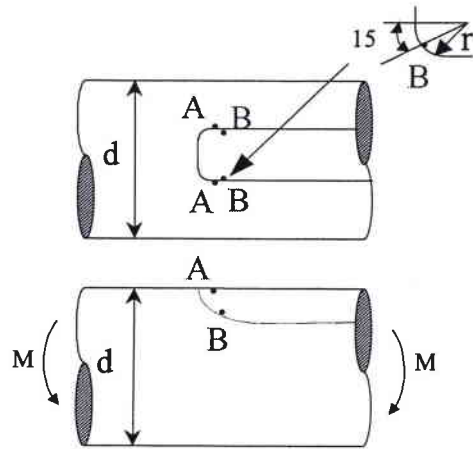
#### III.3.2.1 En flexion

Le calcul par éléments finis montre deux points de contraintes maximales. Les positions des points des contraintes maximales A, B sont présentées dans les figures III. 22 et III. 23. Les positions de ces points sont sensibles au rayon de fraisage. La figure III. 24 montre le changement de ces positions en fonction de l'augmentation du rayon de fraisage R. Ce changement de position a rendu difficile les lectures de la contrainte maximale.



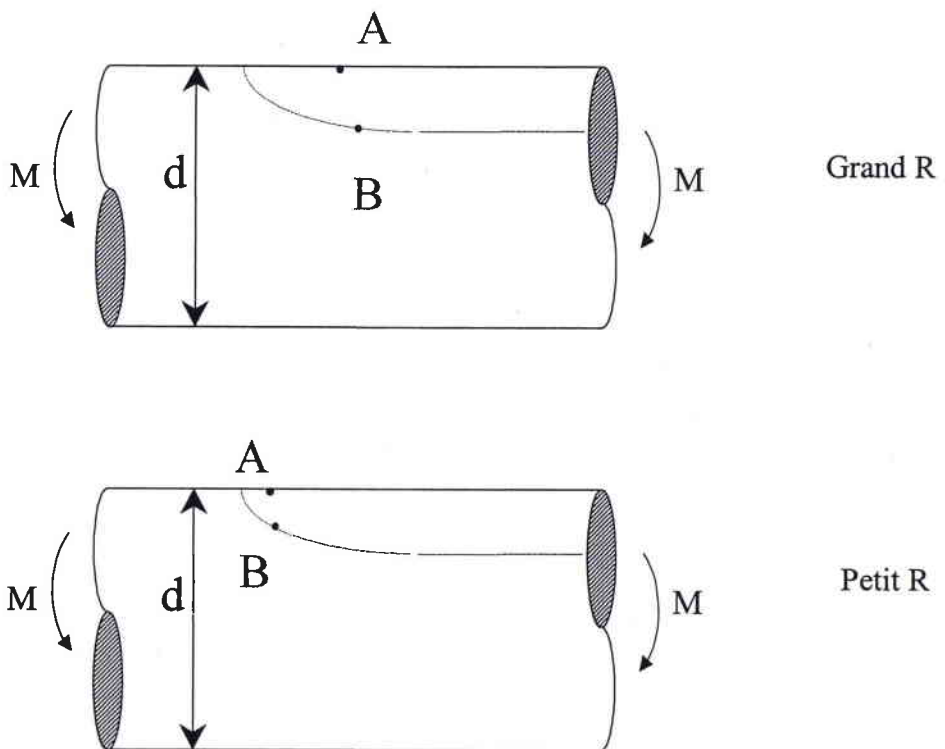
**Figure III. 22 : Arbre claveté dans le cas d'un chargement de flexion pour une rainure à bout droit.**

Pour les éprouvettes utilisées, dont les dimensions sont données par la Figure II. 12, les valeurs du facteur de concentration de contrainte élastique calculées par les équations III.1 et III.2, pour un rayon de fraisage  $R=5\text{ mm}$ , sont :  $k_{tA} = 2$  et  $k_{tB} = 2.14$ . Pour un rayon de fraisage  $R=7.5\text{mm}$ ,  $k_{tA} = 1.84$  et  $k_{tB} = 1.88$ .



**Figure III. 23 : Localisation des points, où les contraintes sont maximales en flexion :**

**Cas des arbres avec des rainures à bout droit.**



**Figure III. 24 : Changement de position des contraintes maximales en flexion :**

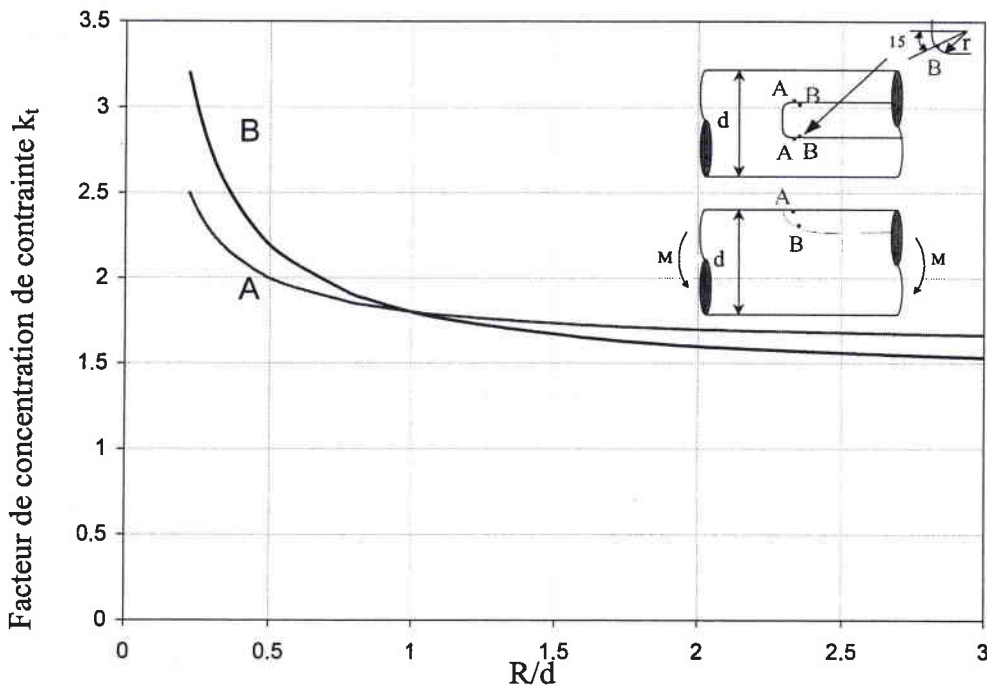
**Cas des arbres avec des rainures à bout droit.**

Le diagramme III. 25 montre l'influence du rayon de fraisage R sur les valeurs de concentration de contrainte aux points A, B. L'équation (III. 26) présente l'évolution de ce facteur au point A :

$$k_{DA,1} = -0.1 \left( \frac{0.0001}{R/d} \right)^2 + \left( \frac{0.2}{R/d} \right) + 1.6 \quad \text{Pour } r/d=1/90, b/d = 1/3 \text{ et } t/d=1/5 \text{ (III. 26)}$$

Pour le point B, l'équation (III. 27) présente cette évolution :

$$k_{DB,1} = -0.1 \left( \frac{0.02}{R/d} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{0.1}{R/d} \right) + 1.4 \quad \text{Pour } r/d=1/90, b/d = 1/3 \text{ et } t/d=1/5 \text{ (III. 27)}$$



**Figure III. 25 : Influence du rayon de fraisage R sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $r/d = 1/90$ ,  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout droit.**

L'influence du rayon de raccordement  $r$  est limitée au point B. Cette influence est présentée dans le diagramme III. 26. Dans ce diagramme, on peut déduire l'équation présentant l'évolution de concentration de contrainte en fonction du rayon de raccordement :

$$k_{DB,2} = -0.0008 \left( \frac{0.1}{r/d} \right)^2 + 0.07 \left( \frac{0.1}{r/d} \right) + 1.9 \quad \text{Pour } R/d = 10/25, t/d=1/5, \text{ et } b/d=1/3 \text{ (III. 28)}$$

L'augmentation de la profondeur  $t$  accroît les contraintes aux points A et B (figure III. 27). L'équation (III. 29) exprime cette augmentation au point A :

$$k_{DA,2} = -393.78 \left( \frac{t}{d} \right)^3 + 245.5 \left( \frac{t}{d} \right)^2 - 42 \left( \frac{t}{d} \right) + 3.71 \quad \text{Pour } R/d = 10/25, r/d=1/90 \text{ et } b/d=1/3 \text{ (III. 29)}$$

Au point B cette équation devient :

$$k_{DB,3} = -388.71 \left( \frac{t}{d} \right)^3 + 240.4 \left( \frac{t}{d} \right)^2 - 39.794 \left( \frac{t}{d} \right) + 3.637 \quad \text{Pour } R/d = 10/25, r/d=1/90 \text{ et } b/d=1/3 \text{ (III. 30)}$$

Le diagramme III. 28 présente l'influence de la largeur  $b$  sur les valeurs des facteurs de concentration de contrainte aux points A et B. Pour le point A, cette évolution peut être déduite par l'équation suivante :

$$k_{DA,3} = 51.786 \left( \frac{b}{d} \right)^3 - 57.9 \left( \frac{b}{d} \right)^2 + 20.562 \left( \frac{b}{d} \right) - 0.309 \quad \text{Pour } R/d = 10/25, r/d=1/90 \text{ et } t/d=1/5 \text{ (III. 31)}$$

L'évolution de ce facteur au point B, peut être présentée par l'équation :

$$k_{DB,4} = 522.9 \left( \frac{b}{d} \right)^4 - 690.61 \left( \frac{b}{d} \right)^3 + 321.36 \left( \frac{b}{d} \right)^2 - 61.113 \left( \frac{b}{d} \right) + 6.3926 \quad \text{Pour } R/d = 10/25, r/d=1/90 \text{ et } t/d=1/5 \text{ (III. 32)}$$

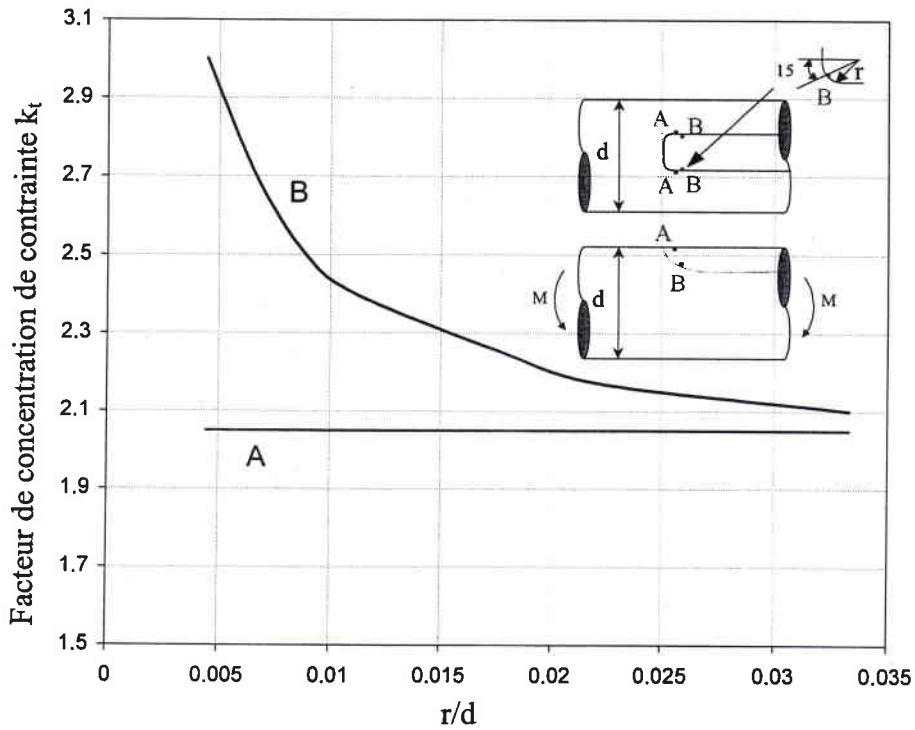


Figure III. 26 : Influence du rayon de raccordement  $r$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $R/d=10/25$ ,  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout droit.

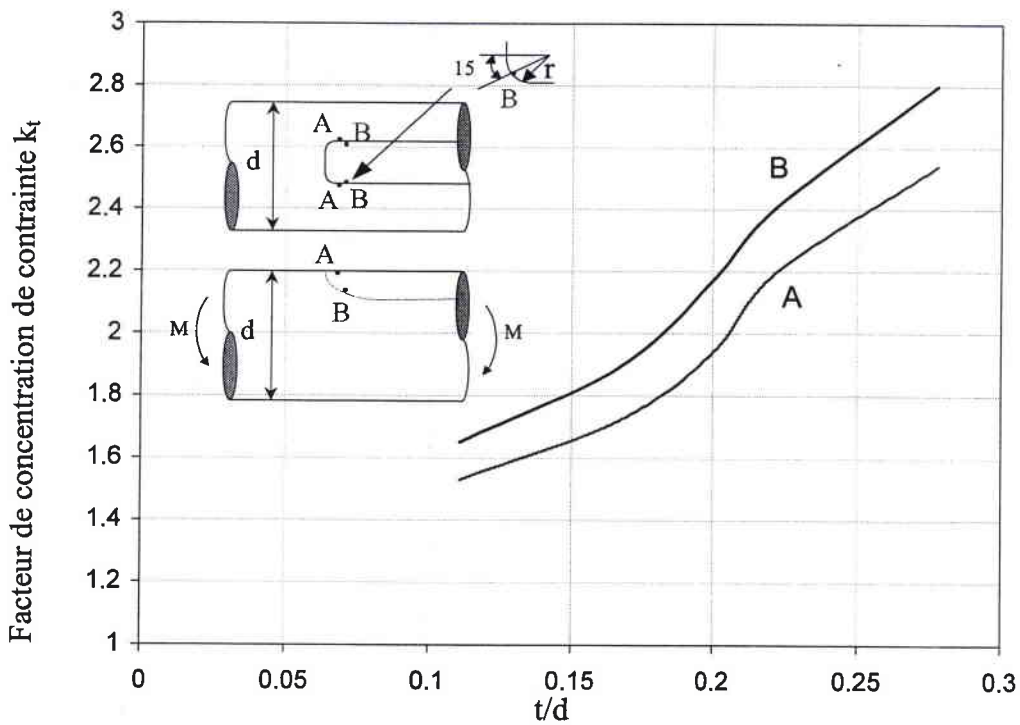
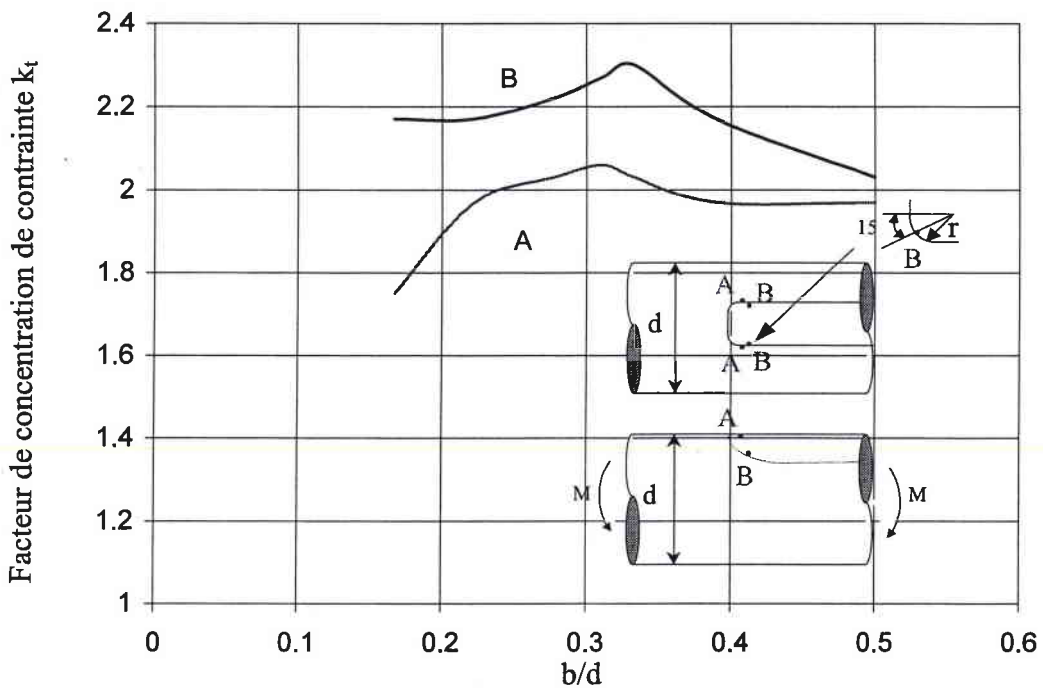


Figure III. 27 : Influence de la profondeur  $t$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $R/d=10/25$ ,  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout droit.





**Figure III. 28 : Influence de la largeur  $b$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $R/d=10/25$ ,  $r/d = 1/90$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la flexion pour une rainure à bout droit.**

Le facteur de concentration de contrainte au point A dépend donc de  $R/d$ ,  $b/d$  et  $t/d$  :

$$k_{t,D,A} = f\left(\frac{R}{d}, \frac{b}{d}, \frac{t}{d}\right) \quad \text{(III. 33)}$$

Et au point B, il dépend de :

$$k_{t,D,B} = f\left(\frac{R}{d}, \frac{b}{d}, \frac{t}{d}, \frac{r}{d}\right) \quad \text{(III. 34)}$$

On propose une solution empirique pour calculer ces facteurs, en se basant sur l'équation III.6 :

$$k_{iD,A} = \frac{k_{iA,1} \cdot k_{iA,2} \cdot k_{iA,3}}{\left( \frac{k_{iA,1(t/d,b/d)} + k_{iA,2(R/d,b/d)} + k_{iA,3(R/d,t/d)} \right) / 3 }^2 \quad (\text{III. 35})$$

$$k_{iD,B} = \frac{k_{iB,1} \cdot k_{iB,2} \cdot k_{iB,3} \cdot k_{iB,4}}{\left( \frac{k_{iB,1(r/d,t/d,b/d)} + k_{iB,2(R/d,t/d,b/d)} + k_{iB,3(R/d,r/d,b/d)} + k_{iB,4(R/d,r/d,t/d)} \right) / 4 }^3 \quad (\text{III. 36})$$

Des équations III.26 jusqu'à III.32, en donnant les valeurs  $R/d = 10/25$ ,  $t/d = 1/5$ ,  $b/d = 1/3$  et  $r/d = 1/90$  respectivement, on obtient :

$$k_{iD,A} = \frac{k_{iA,1} \cdot k_{iA,2} \cdot k_{iA,3}}{(2.08)^2} \quad (\text{III. 37})$$

$$k_{iD,B} = \frac{k_{iB,1} \cdot k_{iB,2} \cdot k_{iB,3} \cdot k_{iB,4}}{(2.3)^3} \quad (\text{III. 38})$$

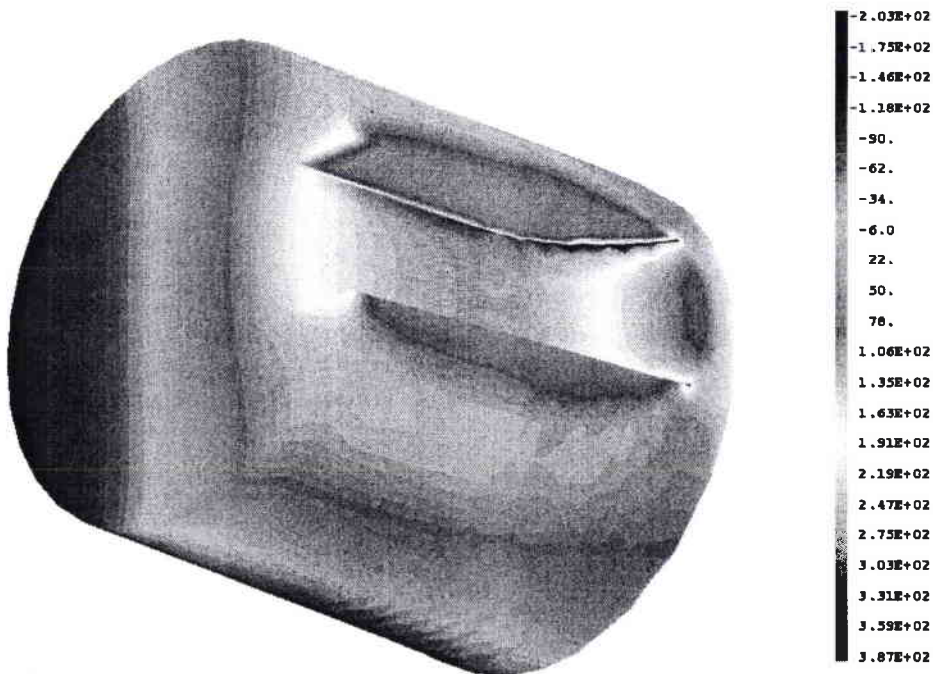
La comparaison des résultats obtenus par les équations III.37 et III.38 et les calculs aux éléments finis, montre que l'écart est inférieur à 8%.

### III.3.2.2 En torsion

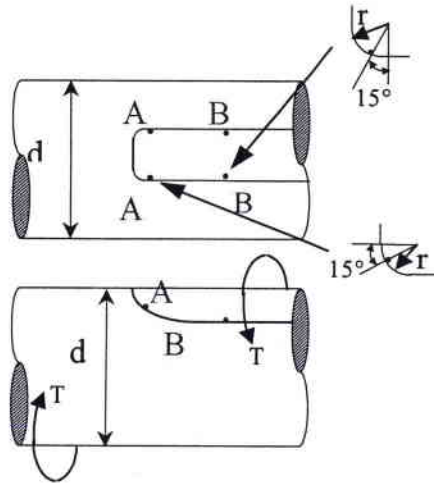
Le calcul par éléments finis montre deux points de contraintes maximales. Les positions des points des contraintes maximales A, B sont présentées dans les figures III. 29 et III. 31.

Les positions de ces points sont sensibles au rayon de fraisage. La figure III. 31 montre le changement de ces positions en fonction de l'augmentation du rayon de fraisage. Ce changement de position de point A et de l'angle où se trouve ce point rendre très difficile les lectures de la contrainte maximale.

Par contre, le changement du rayon de fraisage n'influence pas les valeurs des contraintes maximales. Plusieurs calculs avec diverse types et densité de maillage, et plusieurs manières d'applications de charge ont été réalisés afin de vérifier ces résultats.



**Figure III. 29 : Arbre claveté dans le cas d'un chargement de torsion pour une rainure à bout droit.**



**Figure III. 30 : Localisation des points où les contraintes sont maximales en torsion :**

**Cas des arbres avec des rainures à bout droit.**

Pour les éprouvettes utilisées, dont les dimensions sont données dans la figure II. 21, les valeurs du facteur de concentration de contrainte élastique calculées par les équations III.14 et III.15 sont  $k_{ts,A} = 3.5$  et  $k_{ts,B} = 3.25$ .

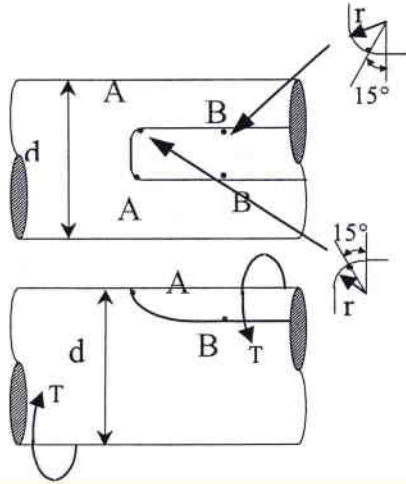
L'augmentation du rayon de raccordement diminue la contrainte aux points A et B (figure III. 32). L'équation (III. 39) présente cette évolution au point A :

$$k_{tsA,1} = 0.0003 \left( \frac{0.1}{r/d} \right)^2 + 0.183 \left( \frac{0.1}{r/d} \right) + 1.7449 \text{ Pour } R/d = 14/45, t/d = 1/5, \text{ et } b/d = 1/3 \text{ (III. 39)}$$

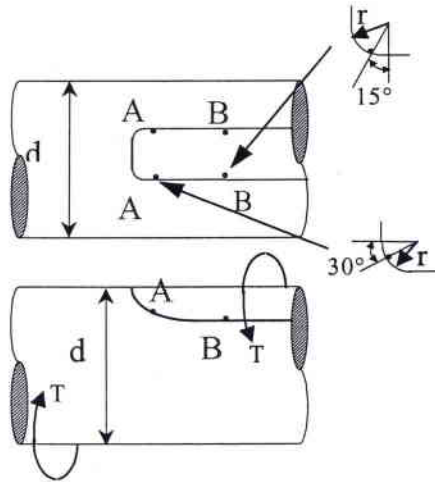
Pour le point B, cette évolution devient :

$$k_{tsB,1} = -0.0002 \left( \frac{0.1}{r/d} \right)^2 + 0.135 \left( \frac{0.1}{r/d} \right) + 2.2233$$

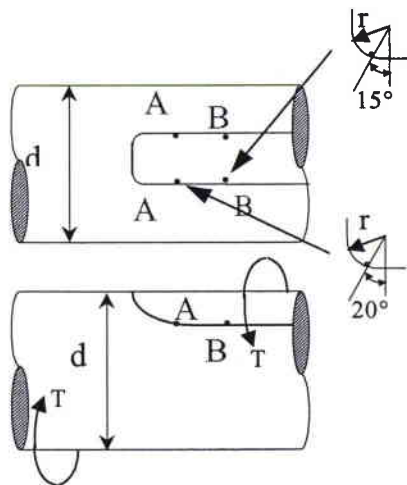
$$\text{Pour } R/d = 14/45, t/d = 1/5, \text{ et } b/d = 1/3 \text{ (III. 40)}$$



Pour  $R/d=1/5$  et  $t/d=1/5$



Pour  $R/d=1$  et  $t/d=1/5$



Pour  $R/d=4$  et  $t/d=1/5$

**Figure III. 31 : Changement de position des contraintes maximales en torsion :  
Cas des arbres avec des rainures à bout droit.**

L'influence de la profondeur sur les contraintes maximales est présentée dans la figure III. 33. Les valeurs des facteurs de concentration de contrainte en fonction de la profondeur pour  $R/d=14/45$ ,  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$  peuvent être exprimées par les équations :

$$k_{tsA,2} = -13612 \left(\frac{t}{d}\right)^4 + 9534.6 \left(\frac{t}{d}\right)^3 - 2317.3 \left(\frac{t}{d}\right)^2 + 236.26 \left(\frac{t}{d}\right) - 5.5324$$

Pour  $R/d = 14/45$ ,  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$  (III. 41)

$$k_{tsB,2} = -24.232 \left(\frac{t}{d}\right)^2 + 16.346 \left(\frac{t}{d}\right) + 1.0782$$

Pour  $R/d = 14/45$ ,  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$  (III. 42)

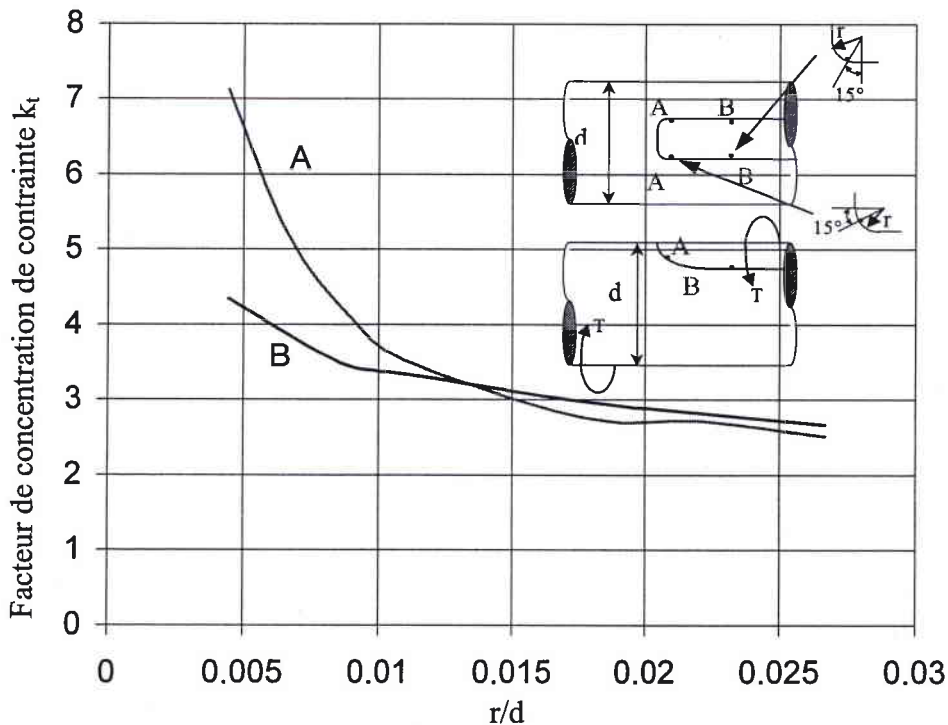


Figure III. 32 : Influence du rayon de raccordement  $r$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $R/d=14/45$ ,  $b/d = 1/3$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la torsion pour une rainure à bout droit.

Le diagramme III. 34 présente l'influence de la largeur sur les contraintes maximales. Dans ce diagramme, on peut déduire les équations présentant les évolutions des facteurs de concentration de contrainte en fonction du rayon et de la largeur :

$$k_{tsA,3} = -38066\left(\frac{b}{d}\right)^5 + 59680\left(\frac{b}{d}\right)^4 - 36923\left(\frac{b}{d}\right)^3 + 11271\left(\frac{b}{d}\right)^2 - 1697.7\left(\frac{b}{d}\right) + 104.51$$

$$\text{Pour } R/d = 14/45, r/d = 1/90 \text{ et } t/d = 1/5 \quad (\text{III. 43})$$

Pour le point B, on a constaté que l'influence de la largeur est différente de celle de bout rond présentée dans la figure III. 19. Cette différence peut être expliquée par l'influence de la contrainte située à la fin de la tête de la rainure constatée par le calcul. L'équation (III. 44) exprime cette évolution :

$$k_{tsB,3} = -3.6946\left(\frac{b}{d}\right)^2 + 0.1386\left(\frac{b}{d}\right) + 3.6911 \quad \text{Pour } R/d = 14/45, r/d = 1/90 \text{ et } t/d = 1/5 \quad (\text{III. 44})$$

Les facteurs de concentration de contrainte aux points A et B dépendent donc de  $b/d$ ,  $t/d$  et  $r/d$  :

$$k_{tsD,A} = f\left(\frac{b}{d}, \frac{t}{d}, \frac{r}{d}\right) \quad (\text{III. 45})$$

$$k_{tsD,B} = f\left(\frac{b}{d}, \frac{t}{d}, \frac{r}{d}\right) \quad (\text{III. 46})$$

On propose une solution empirique pour calculer ce facteur, en se basant sur l'équation III.12 :

$$k_{tsD,A} = \frac{k_{tsA,1} \cdot k_{tsA,2} \cdot k_{tsA,3}}{\left(\frac{k_{tsA,1}(t/d, r/d) + k_{tsA,2}(b/d, r/d) + k_{tsA,3}(b/d, t/d)}{3}\right)^2} \quad (\text{III. 47})$$

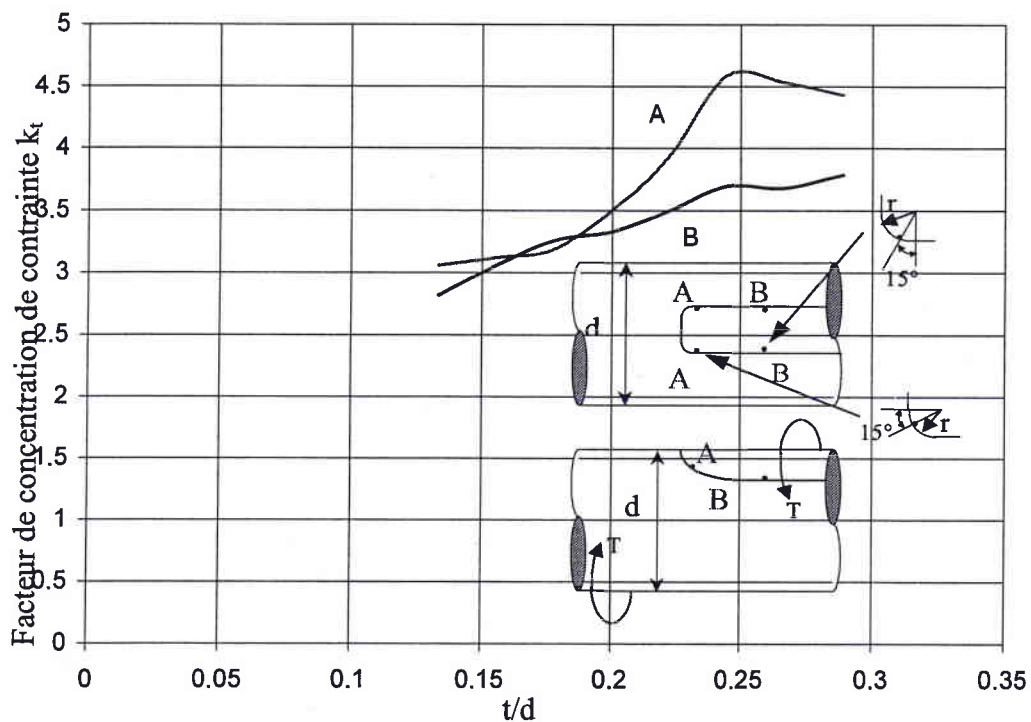


Figure III. 33 : Influence de la profondeur  $t$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $R/d=14/45$ ,  $r/d = 1/90$  et  $b/d = 1/3$ . Cas de la torsion pour une rainure à bout droit.

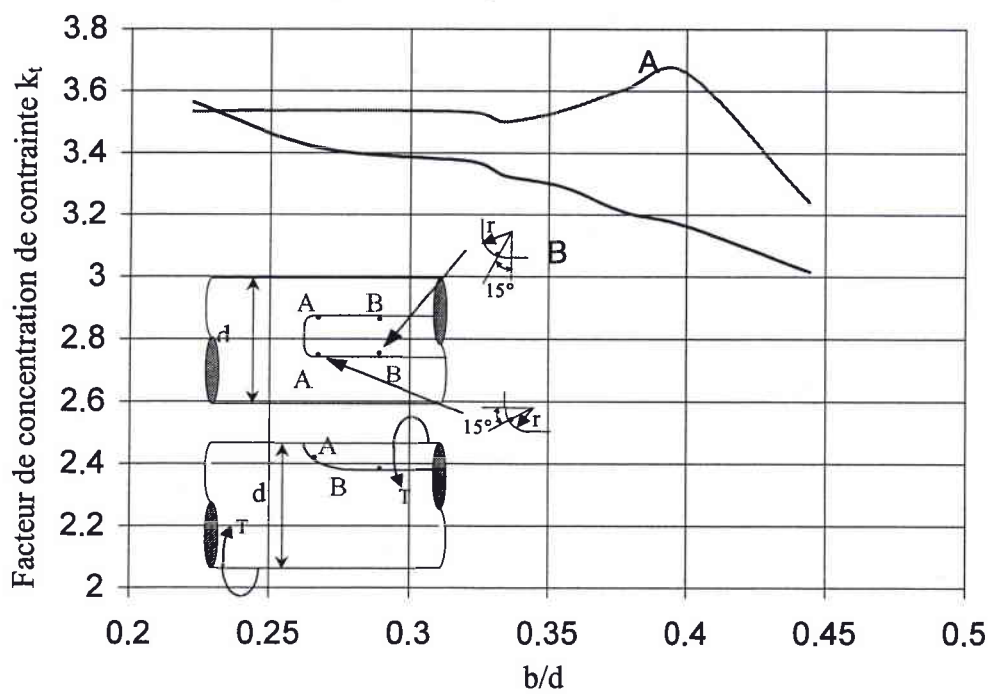


Figure III. 34 : Influence de la largeur  $b$  sur le facteur de concentration de contrainte dans le cas de  $R/d=14/45$ ,  $r/d = 1/90$  et  $t/d = 1/5$ . Cas de la torsion pour une rainure à bout droit.



$$k_{tsD,B} = \frac{k_{tsB,1} \cdot k_{tsB,2} \cdot k_{tsB,3}}{\left( \frac{k_{tsB,1(t/d,r/d)} + k_{tsB,2(b/d,r/d)} + k_{tsB,3(b/d,t/d)}}{3} \right)^2} \quad (\text{III. 48})$$

Les équations, calculées pour  $t/d = 1/5$ ,  $b/d = 1/3$  et  $r/d = 1/90$ , conduisent à des résultats intégrés dans les équations III. 47 et III.48 :

$$k_{tsD,A} = \frac{k_{tsA,1} \cdot k_{tsA,2} \cdot k_{tsA,3}}{(3.49)^2} \quad (\text{III. 49})$$

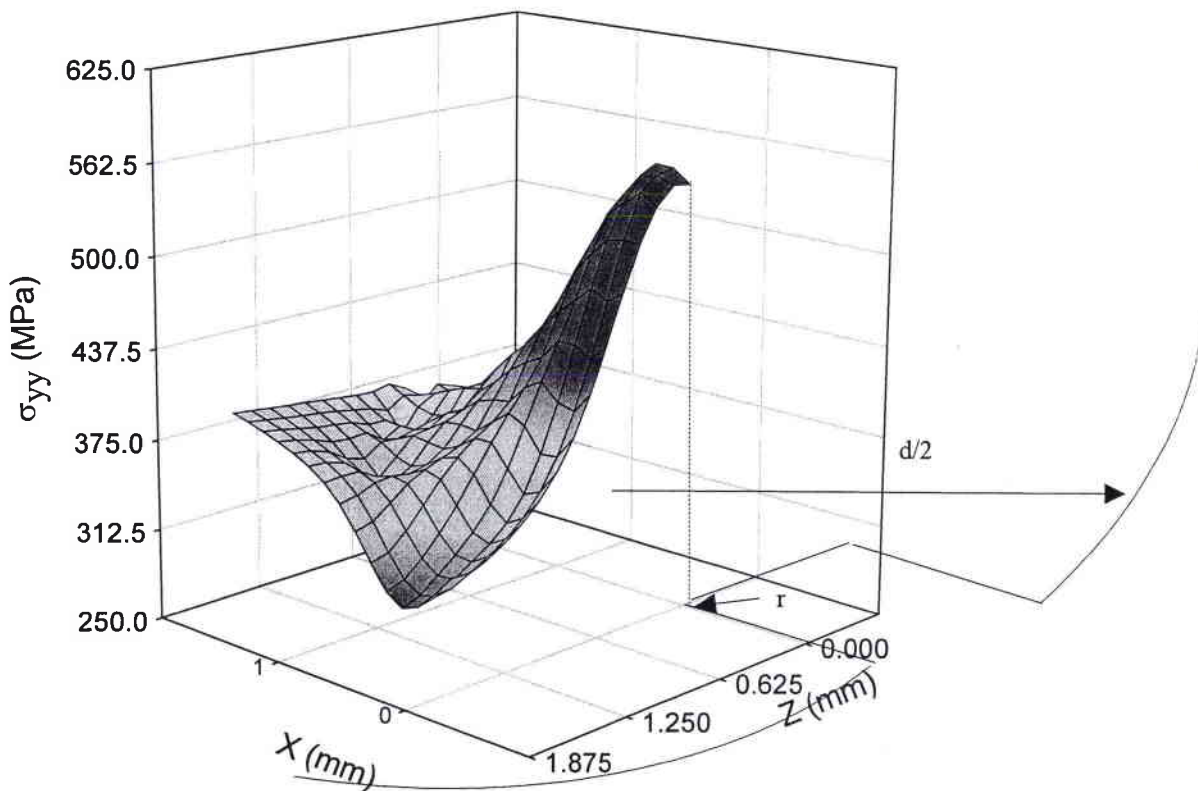
$$k_{tsD,B} = \frac{k_{tsB,1} \cdot k_{tsB,2} \cdot k_{tsB,3}}{(3.26)^2} \quad (\text{III. 50})$$

La comparaison des résultats obtenus par l'application des équations III.49 et III.50 et les calculs aux éléments finis, donne une écart inférieure à 10%.

### III.4 Calcul élasto-plastique

Le calcul élasto-plastique isotrope a été réalisé par la méthode pas-à-pas. Le modèle utilisé est celui de Von Mises à écrouissage isotrope (option par défaut). Le code de calcul CASTEM 2000 a besoin des coordonnées de plusieurs points de la loi de comportement.

Ce calcul permet d'avoir les distributions des contraintes autour de la rainure de clavette. La figure (III. 35) présente les distributions de contraintes dans les plans des contraintes maximales, dans le cas d'un arbre claveté à bout rond.



**Figure III. 35 : Distribution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  dans le plan de la contrainte maximale, pour un arbre claveté à bout droit.**

Le calcul élasto-plastique est réalisé en utilisant la loi de comportement statique ou cyclique. Les diagrammes (III. 36 et III. 37) présentent la distribution de contrainte dans la direction de la contrainte maximale, pour le matériau 42CD4 trempé-revenu (Figure II. 7).

Les résultats montrent que le calcul élasto-plastique cyclique ou statique met en évidence une relaxation des contraintes. Par contre le calcul élastique est caractérisé par une contrainte maximale au point d'amorçage.

Le calcul élastique donne des valeurs plus élevées pour le facteur de concentration de contrainte comparées à celles obtenus par le calcul élasto-plastique (III. 36 et III. 37).

En plus le facteur de concentration de contrainte élasto-plastique est plus élevé en statique qu'en cyclique. Ceci s'explique par l'utilisation du matériau 42CD4 (Trempé-Revenu), qui est un matériau qui s'adoucit pendant le cyclage. Ce phénomène a déjà été constaté par examen de l'allure de la loi de comportement (Figure II. 7).

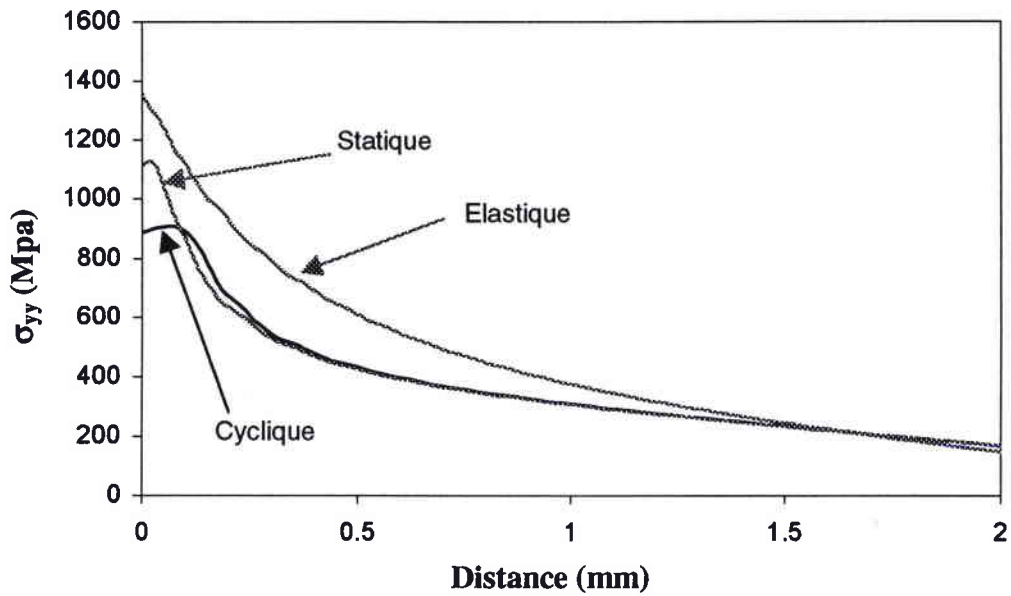
$$k_t > k_\sigma^{St} > k_\sigma^{Cy} \quad \text{(III. 51)}$$

$k_t$  le facteur de concentration de contrainte élastique.

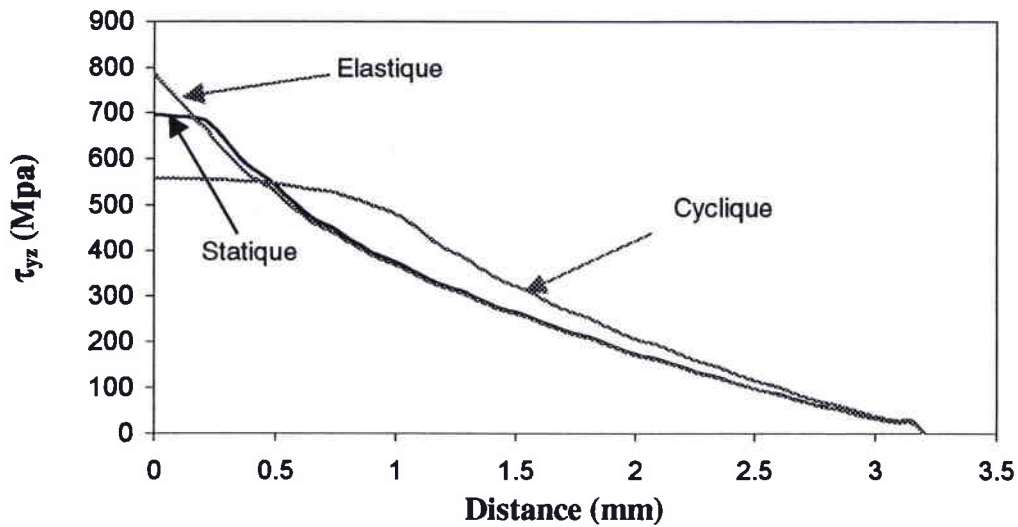
$k_\sigma^{St}$  le facteur de concentration de contrainte élasto-plastique en statique.

$k_\sigma^{Cy}$  le facteur de concentration de contrainte élasto-plastique en cyclique.

Une analyse détaillée concernant la distribution de contrainte sera réalisée dans le chapitre IV.



**Figure III. 36 : Distribution de contrainte  $\sigma_{yy}$  obtenue par la loi de comportement statique et cyclique, dans le cas d'un chargement en flexion.**



**Figure III. 37 : Distribution de contrainte  $\tau_{yz}$  obtenue par la loi de comportement statique et cyclique, dans le cas d'un chargement en torsion.**

### III.5 Conclusion

Le calcul élastique a permis de déterminer les positions des points des contraintes maximales. Ces positions dépendent du type de la rainures de clavettes et du mode de chargement. Pour la rainure à bout droit, ces points changent de position en fonction du rayon de fraisage.

Les paramètres géométriques ont des influences différentes sur les valeurs de la contrainte. Les valeurs du facteur de concentration de contrainte peuvent être calculées en utilisant les équations proposées pour chaque type de rainure et de mode de chargement.

Les résultats des calculs élastiques par éléments finis donnent des résultats pour le facteur de concentration proches de ceux obtenus par Peterson [1]. Cependant les résultats de Peterson sont limités à l'influence du rayon de raccordement, pour une rainure à bout droit, et pour des paramètres géométriques de clavette différents de la norme française. Ce qui confère de l'intérêt à notre étude.

Le calcul élasto-plastique permet d'avoir la distribution de contrainte autour de la rainure en utilisant la loi de comportement cyclique où l'influence des effets de relaxation plastique et d'endommagement sont constatés sur l'allure de l'évolution de distribution de contrainte.

L'utilisation de la loi de comportement cyclique en calcul sera un des éléments de la méthode de prédiction de la durée de vie en fatigue.

## **CHAPITRE 4**

**MODELISATION DE LA DUREE DE VIE DES  
ARBRES PAR L'APPROCHE VOLUMETRIQUE.  
APPLICATION AUX ARBRES CLAVETES**

## **IV MODELISATION DE LA DUREE DE VIE DES ARBRES PAR L'APPROCHE VOLUMETRIQUE. APPLICATION AUX ARBRES CLAVETES**

### **IV.1 Principe**

La rupture en fatigue des arbres entaillés (ou clavetés) est gouvernée par l'amplitude de la contrainte effective. Cette amplitude de contrainte correspond à l'amplitude de la contrainte de rupture d'une éprouvette lisse pour le même nombre de cycles à rupture (Figure IV. 1).

La connaissance de cette amplitude de la contrainte effective, par le calcul, permet d'estimer la durée de vie d'une éprouvette entaillée (ou clavetés), en ramenant cette amplitude de contrainte sur la courbe de Wöhler d'éprouvettes lisses (courbe de référence) pour le même mode de chargement (Figure IV. 2).

Les études montrent que l'amplitude de la contrainte effective est inférieure à l'amplitude de la contrainte maximale. De plus, le calcul de cette amplitude de contrainte doit prendre en compte les effets de relaxation plastique et d'endommagement.

Il faut noter que les méthodes traditionnelles (point chaud, chapitre I), qui calcule l'amplitude de la contrainte effective à partir d'un point, ne sont pas capables d'expliquer ni le mode de chargement, ni l'effet d'échelle, ni l'état de contrainte près de l'entaille. Il est donc nécessaire de calculer cette amplitude de contrainte à partir d'un volume appelé "volume d'élaboration du processus de fatigue".

Cette amplitude de la contrainte effective doit prendre en compte l'état du gradient de contrainte dans le volume d'élaboration du processus de fatigue. L'importance de ce gradient et son rôle sur le point d'amorçage de la rupture par fatigue ont été signalés par divers auteurs (Peterson [1], Brand [3], Stieler [8], Sonsino [19],.....).

La nouvelle approche proposée, appelée "approche volumétrique", calcule l'amplitude de la contrainte effective dans le volume d'élaboration du processus de fatigue à partir de la

loi de comportement cyclique, en prenant en compte le gradient des contraintes dans le volume.

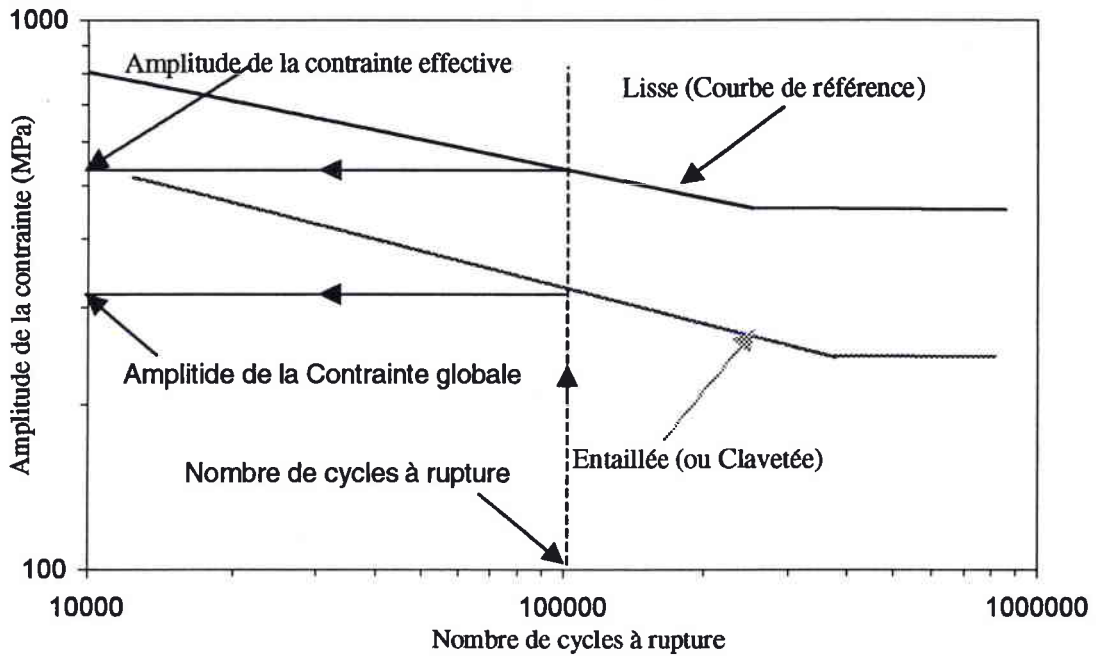


Figure IV. 1 : Définition de la contrainte effective.

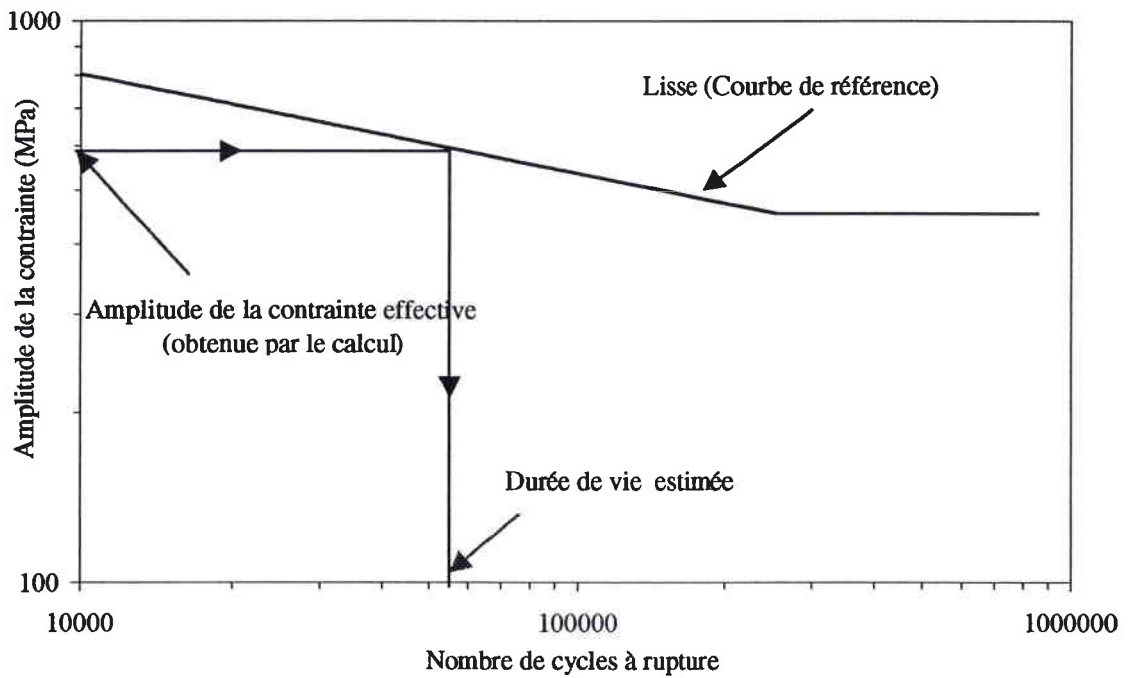


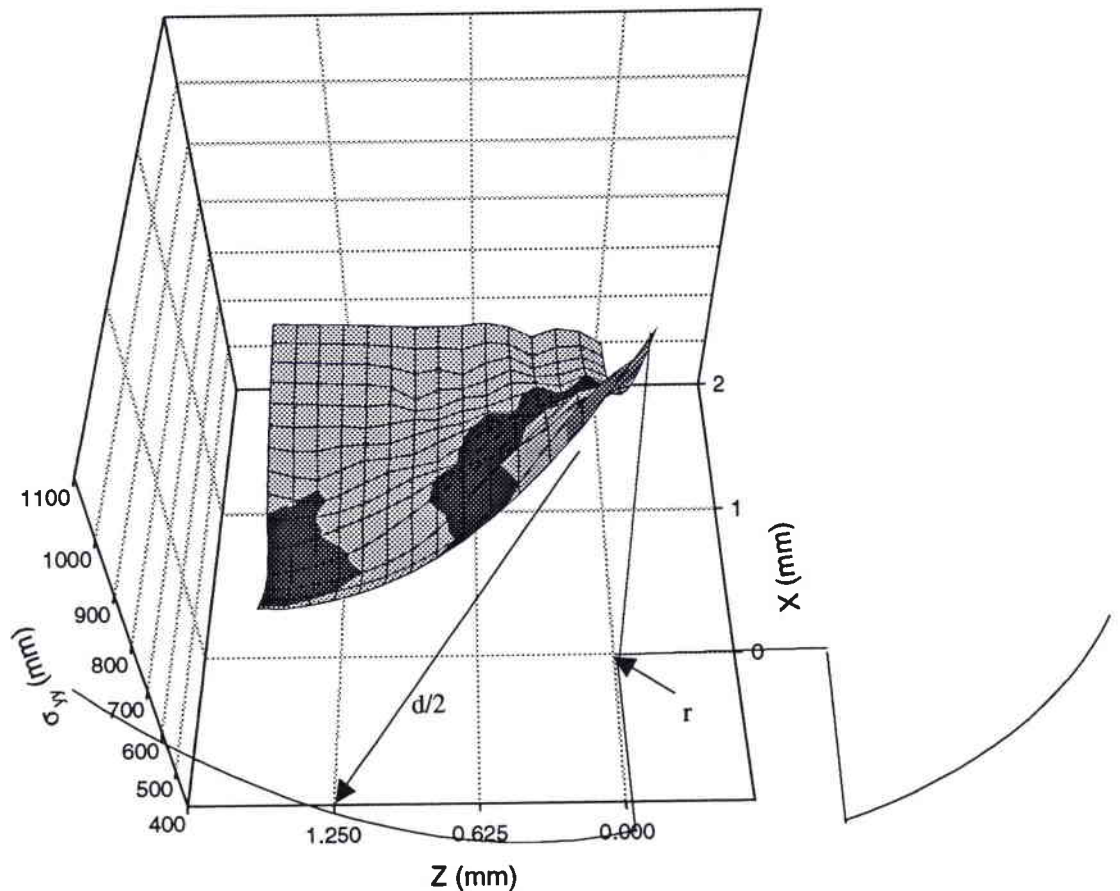
Figure IV. 2 : Estimation de la durée de vie par l'intermédiaire de la contrainte effective.



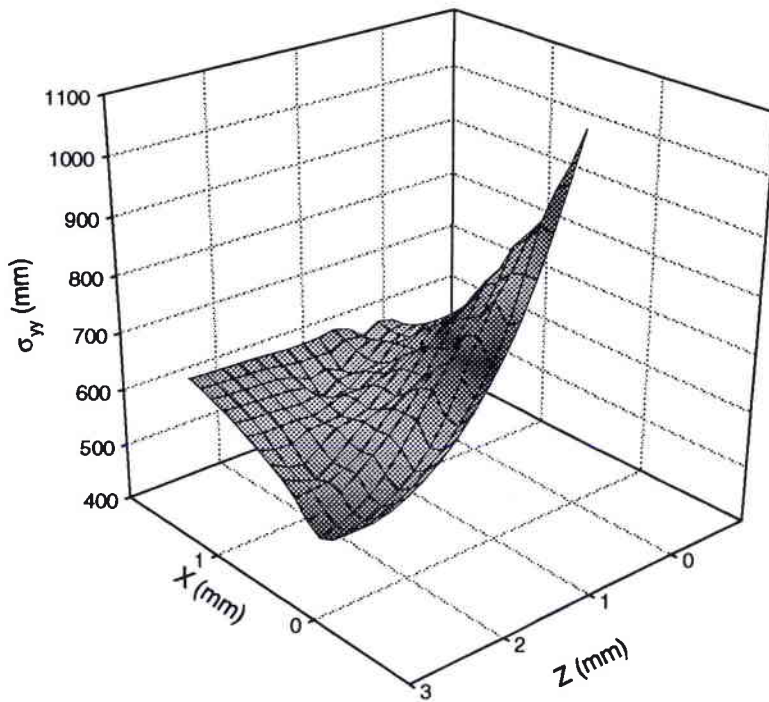
## IV.2 Distribution des contraintes

Le calcul par éléments finis détermine l'état des contraintes en fond d'entaille (autour de la rainure). Dans le cas d'un calcul élastique, on remarque que la distribution est caractérisée par une contrainte maximale en fond d'entaille (Figure IV. 3, IV. 4). Cette contrainte a été utilisée pour calculer l'amplitude de la contrainte effective au point d'amorçage dans les approches traditionnelles (point chaud).

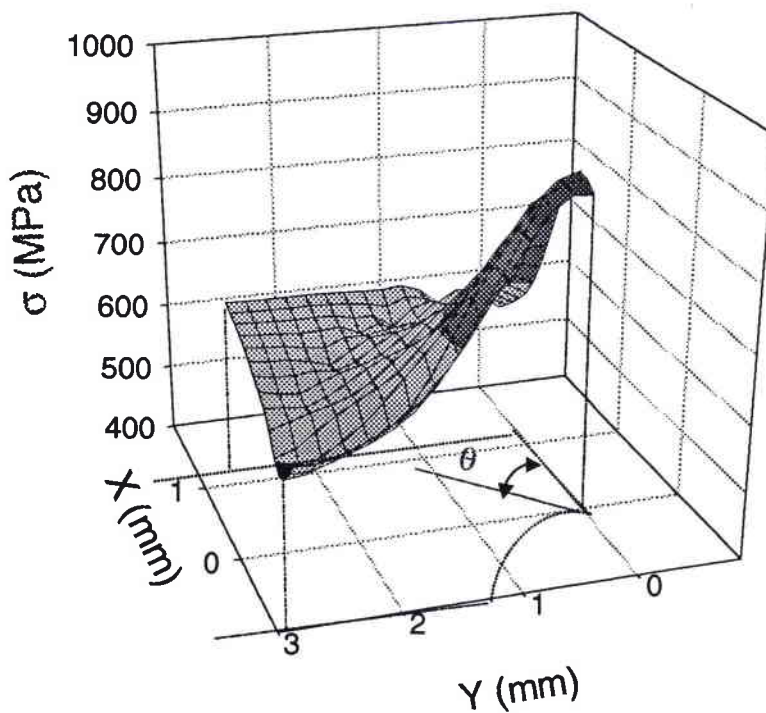
Dans le cas d'un calcul élasto-plastique, on constate que la distribution des contraintes est caractérisée par une relaxation des contraintes, [39, 40]. (Figure IV. 5 et IV. 6).



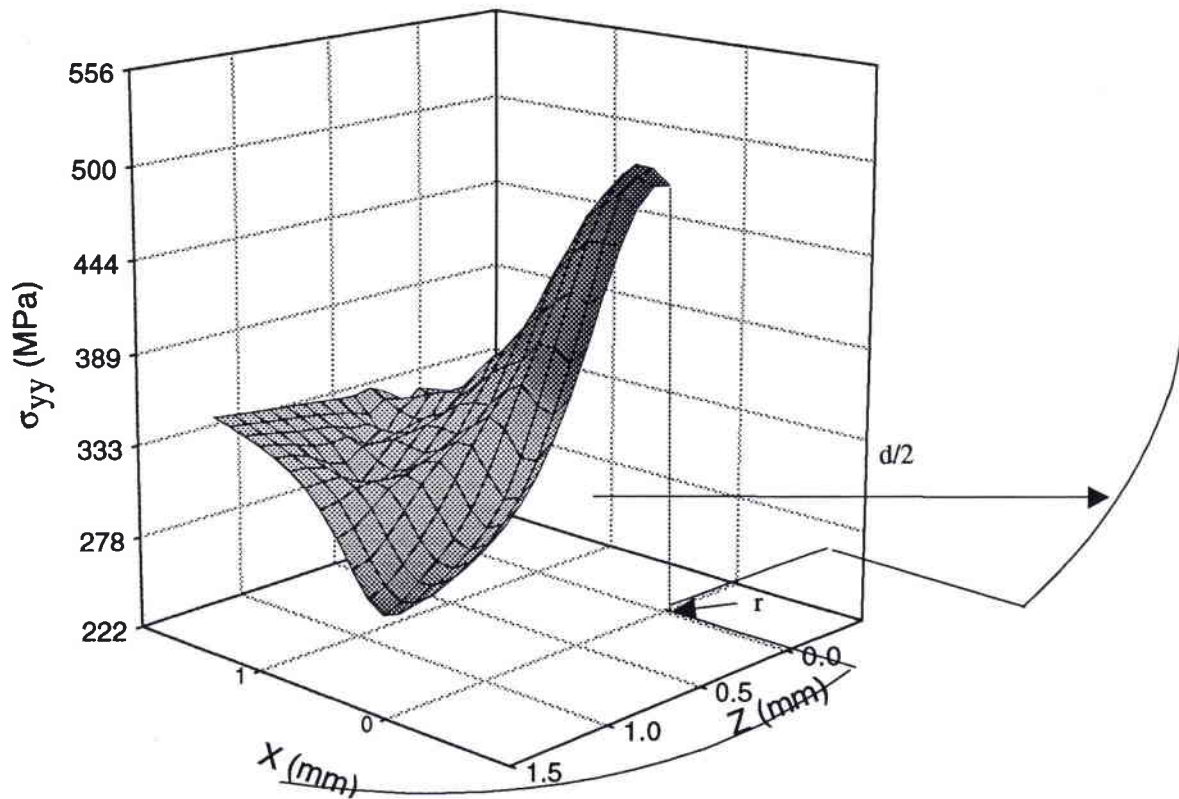
**Figure IV. 3 : Distribution de contrainte, dans le plan de la contrainte maximale, pour une éprouvette clavetée en élasticité. Cas d'une rainure à bout droit en flexion.**



**Figure IV. 4 : Distribution de contrainte, dans le plan de la contrainte maximale, en fond d'entaille en élasticité. Cas d'un arbre entaillé en flexion.**



**Figure IV. 5 : Distribution de contrainte, dans le plan de la contrainte maximale, en fond d'entaille en élasto-plastique. Cas d'un arbre entaillé en flexion.**



**Figure IV. 6 : Distribution de contrainte, dans le plan de la contrainte maximale, pour une éprouvette clavetée en élasto-plastique. Cas de flexion pour une rainure à bout droit.**

En présentant ces distributions dans un diagramme bi-logarithmique [41], on distingue trois zones (Figure IV. 7) :

- Zone I : très proche du point d'amorçage, où les contraintes ont des valeurs élevées.
- Zone II : zone de singularité, gouvernée par le facteur d'intensité de contraintes d'entaille.

$$\sigma_{ij(\theta)} = \frac{K_\rho}{(2\pi r)^\alpha} \cdot f(\theta) \quad \text{(IV. 1)}$$

Où :

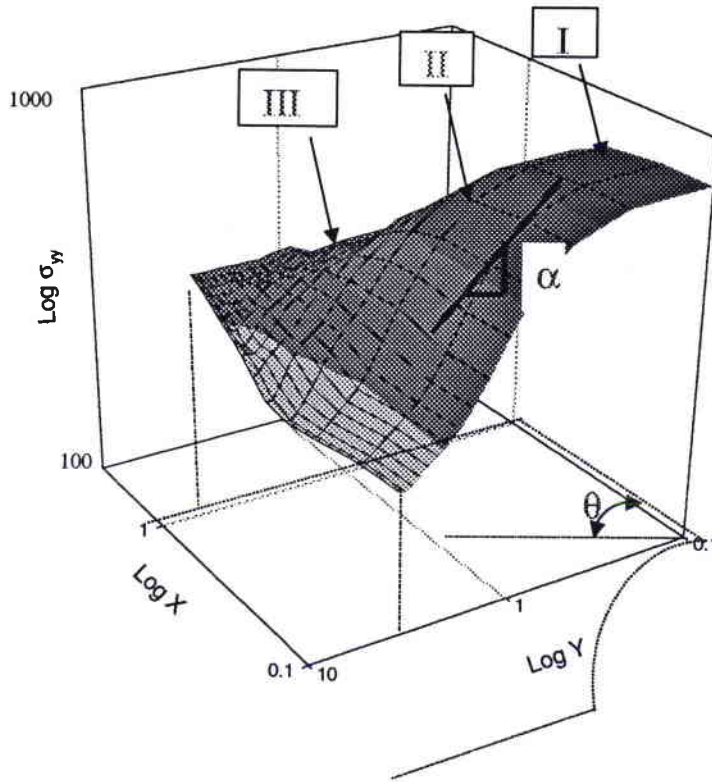
$K_\rho$  : le facteur d'intensité de contraintes.

$r$  : la distance de point d'amorçage.

$\alpha$  : l'exposant.  $\alpha=0.5$  dans le cas d'une fissure.

$\theta$  : l'angle du champ de distribution.

- La zone III : loin du fond d'entaille. Les contraintes, dans cette zone, ne jouent aucun rôle dans le processus de la rupture en fatigue.



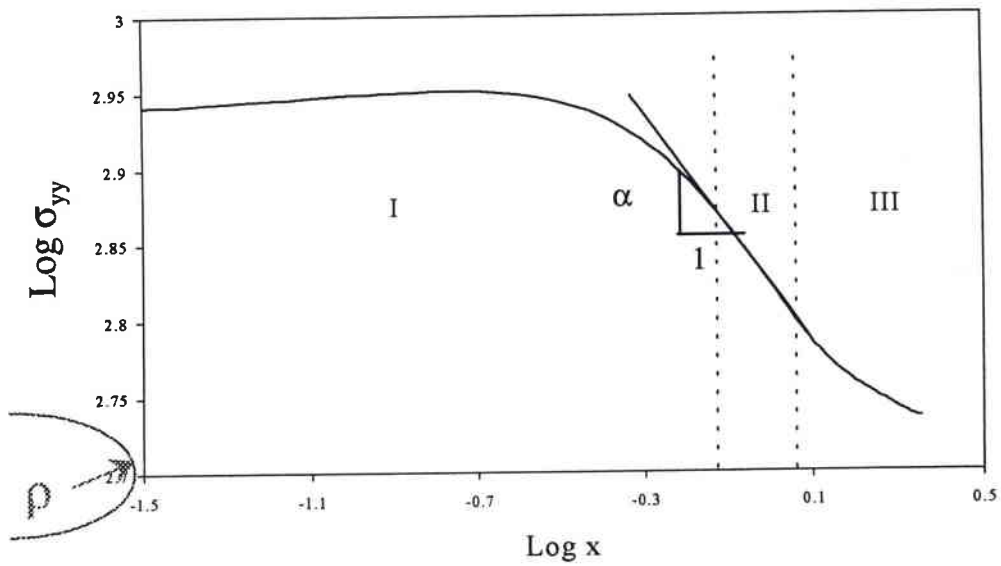
**Figure IV. 7 : Distribution de contrainte dans le plan de la contrainte maximale, près de point d'amorçage, dans un diagramme logarithmique.**

Dans le cas d'une éprouvette entaillée (ou clavetée), soumise à un chargement de flexion ou traction simple, la rupture par fatigue est provoquée par la contrainte d'ouverture  $\sigma_{yy}$  [42, 43, 44, 45, 46]. La distribution de cette contrainte en fond d'entaille, pour  $\theta = 0$ , est présentée dans les figures IV. 8 et IV. 9. La relation entre le facteur d'intensité de contraintes et la contrainte dans la zone II s'écrit :

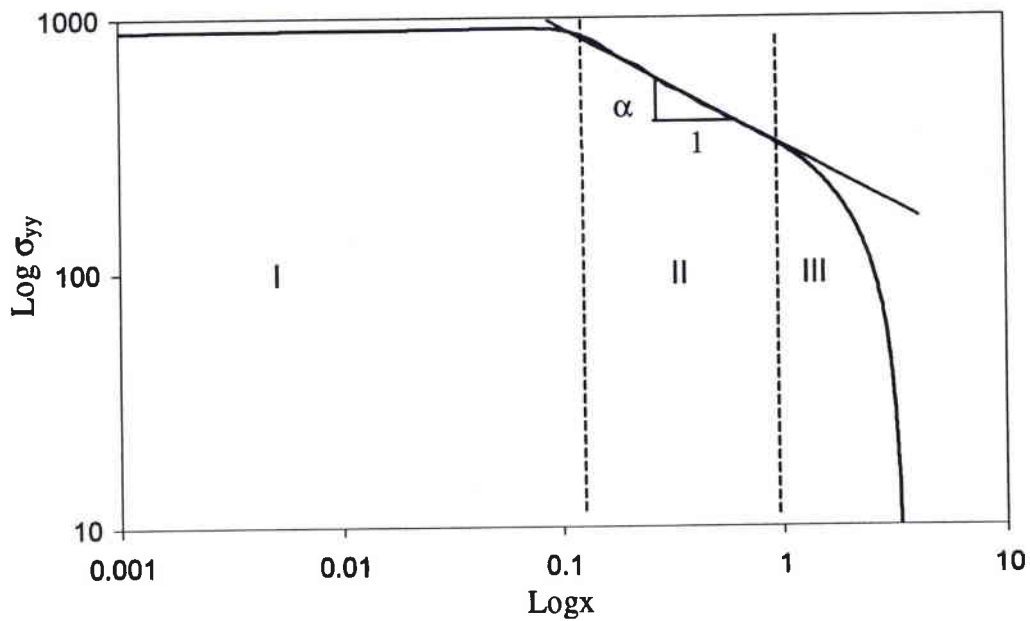
$$\sigma_{yy} = \frac{K_{\rho}}{(2\pi r)^{\alpha}} \quad (\text{IV. 2})$$

Où :

$\sigma_{yy}$  est la contrainte d'ouverture.



**Figure IV. 8 : Distribution de contrainte en fond d'entaille dans un diagramme bi-logarithmique pour le cas d'un chargement de flexion.**



**Figure IV. 9 : Distribution de contrainte dans un diagramme bi-logarithmique pour une éprouvette clavetée. Cas d'une rainure à bout droit en flexion.**

### IV.3 Gradient de contrainte

Le gradient en coordonnées cartésiennes est donné par la relation :

$$gradf = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{IV. 3})$$

Dans le cas des coordonnées polaires, on obtient :

$$gradf = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{IV. 4})$$

En appliquant cette relation aux contraintes :

$$gradf = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z} \right) \quad (\text{IV. 5})$$

Dans le cas de la rupture par fatigue, on ne prend en compte que le gradient selon  $r$  pour exprimer l'influence des points de contraintes sur le point d'amorçage. On écrit :

$$gradf = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \quad (\text{IV. 6})$$

Le gradient relatif de contrainte  $\chi_r$  est défini comme le rapport du gradient de contraintes et la contrainte  $\sigma_{ij}$  :

$$\chi_r = \frac{gradf}{\sigma_{ij}} = \frac{1}{\sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \quad (\text{IV. 7})$$

$\chi_r$  est le gradient relatif de contrainte ( $\text{mm}^{-1}$ ),  
 $r$  la distance de point d'amorçage.

Les figures (IV. 10 et IV. 11) présentent le gradient relatif de contraintes près de l'entaille, qui prend une valeur minimale  $R_{ef}$  à une certaine distance du point d'amorçage. Cette distance est appelée "rayon effectif".

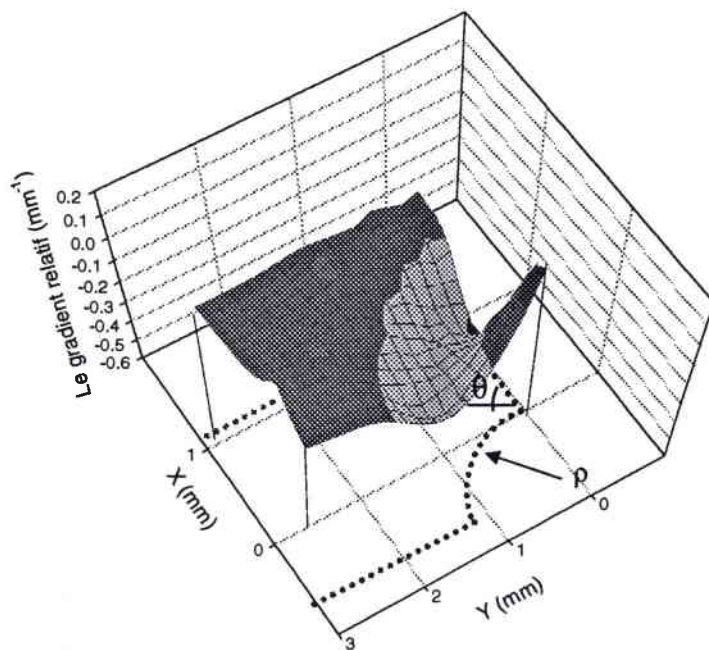


Figure IV. 10 : Gradient relatif de contraintes, dans le plan de la contrainte maximale pour une éprouvette entaillée. Cas d'un chargement de flexion.

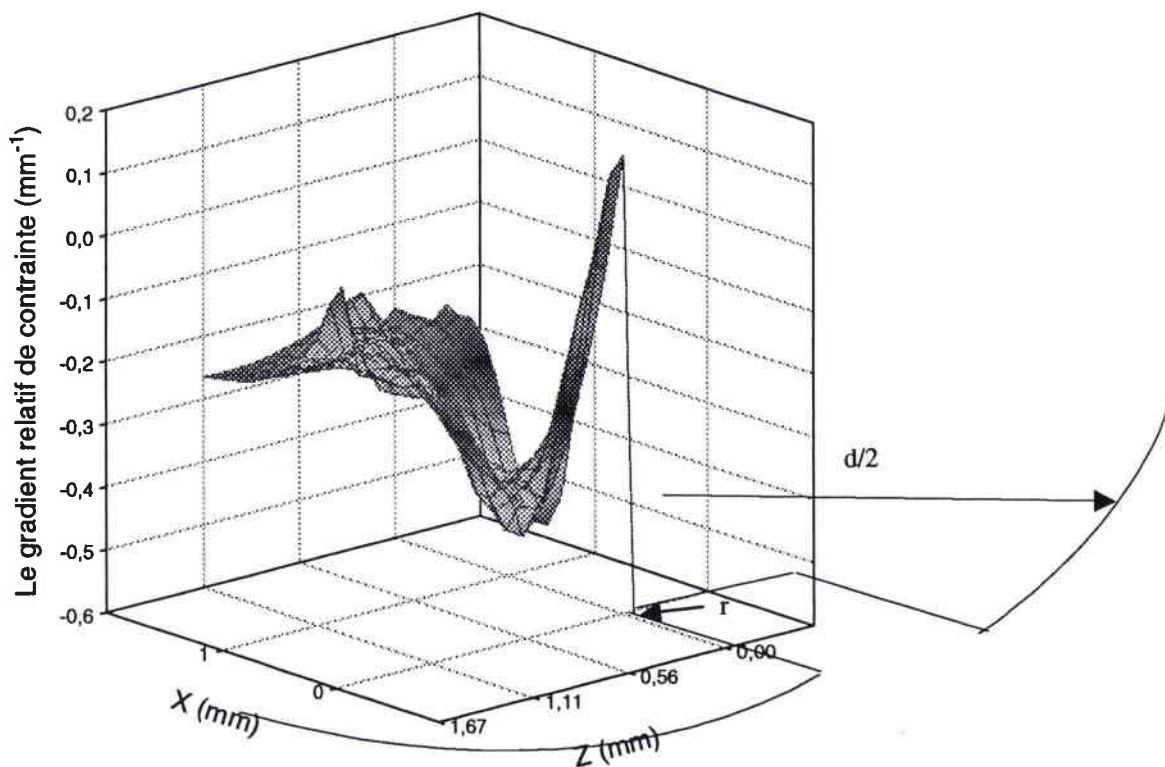


Figure IV. 11 : Gradient relatif de contraintes, dans le plan de la contrainte maximale, pour une éprouvette clavettée. Cas d'une rainure à bout rond en flexion.

Les figures (IV. 12 et IV. 13) présentent le gradient relatif de contrainte en fond d'entaille pour  $\theta = 0$ .

$$\chi_r = \frac{1}{\sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X} \quad (\text{IV. 8})$$

On distingue toujours la valeur minimale à une certaine distance effective  $X_{ef} = R_{ef}(\theta=0)$ .

Le calcul par éléments finis montre que cette distance effective  $R_{ef}$  (où  $X_{ef}$ ) est plus grande que la zone plastique cyclique selon le critère de Von-Mises (Figure IV. 14) et qu'elle correspond à la fin de la zone I.

Cette zone est supposée comme étant la zone d'élaboration du processus de fatigue (Figure IV. 15). Son contour dans le plan est donné par la relation :

$$R_{ef} = X_{ef} \left[ \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \left( 1 + 2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{IV. 9})$$

Cette équation permet, par l'intermédiaire de la distance effective, de déterminer la zone effective de l'élaboration du processus de fatigue dans le plan des contraintes maximales

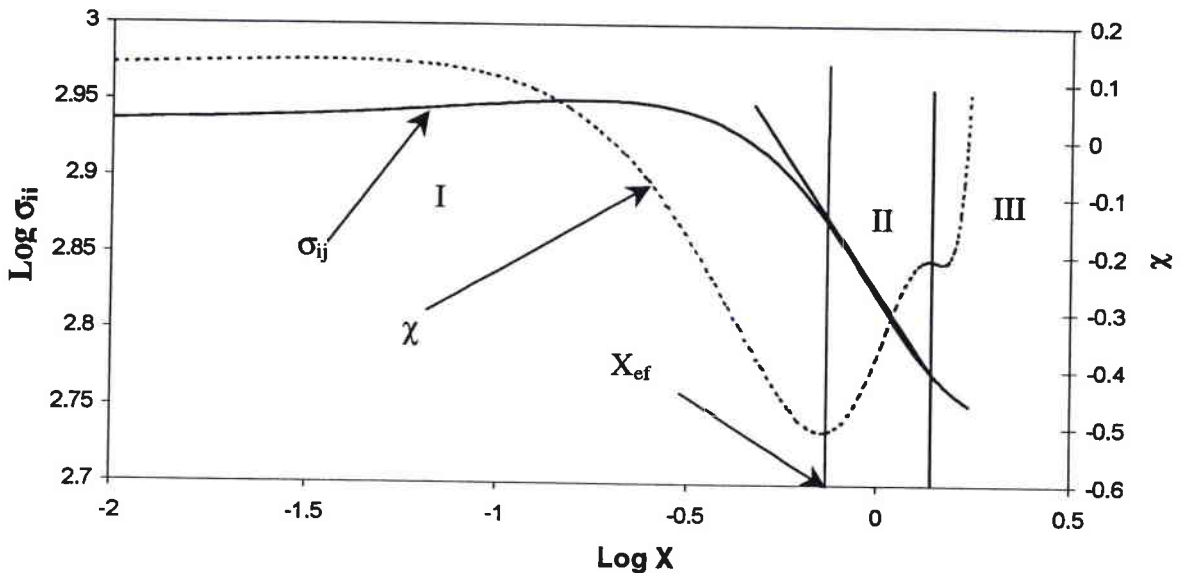


Figure IV. 12 : Gradient relatif de contraintes en fond de point d'amorçage dans le cas d'un chargement de flexion.



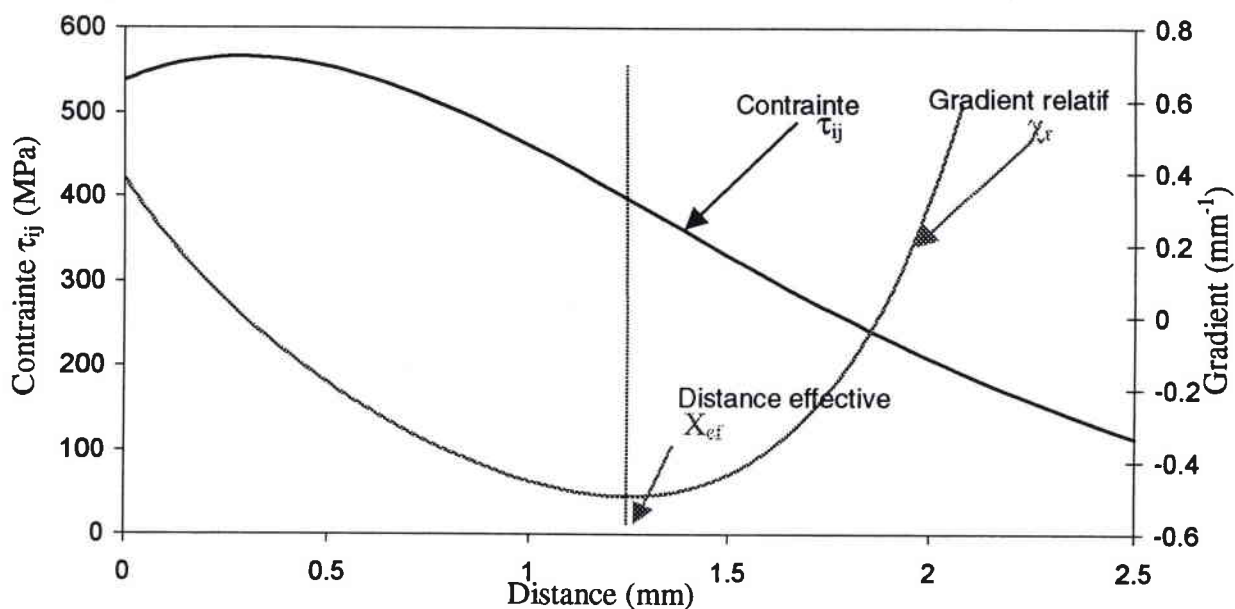


Figure IV. 13 : Gradient relatif de contrainte en fond de point d'amorçage, dans le cas d'un chargement du torsion.

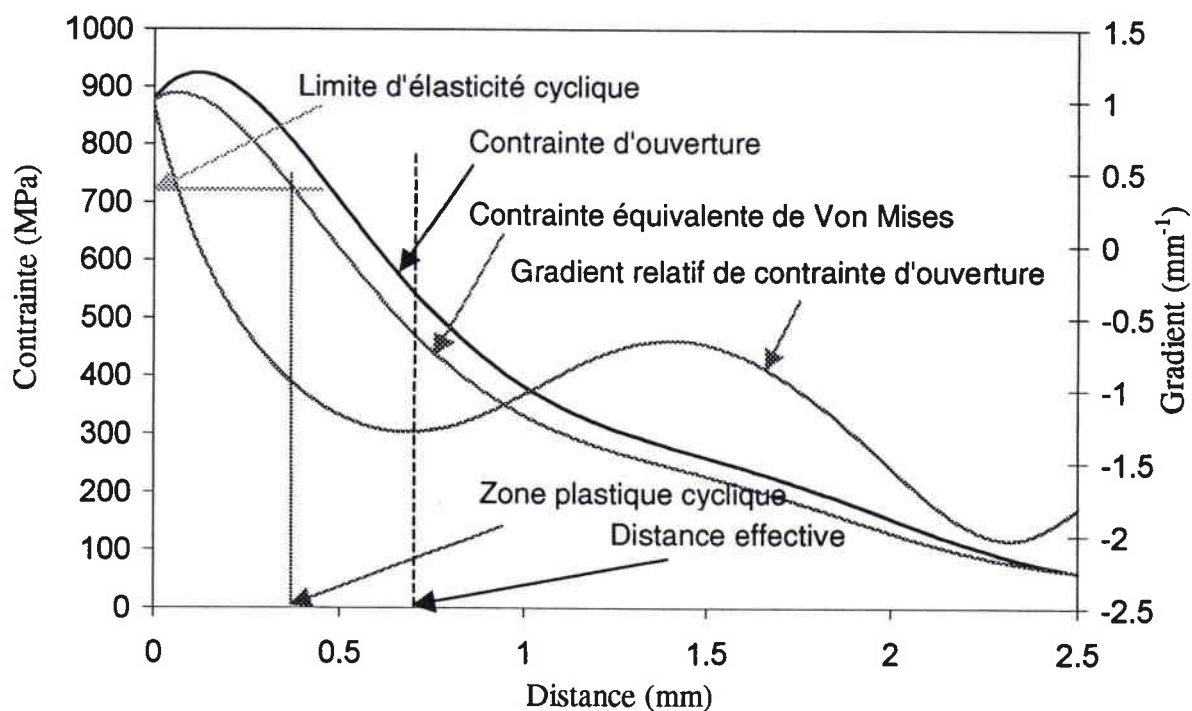
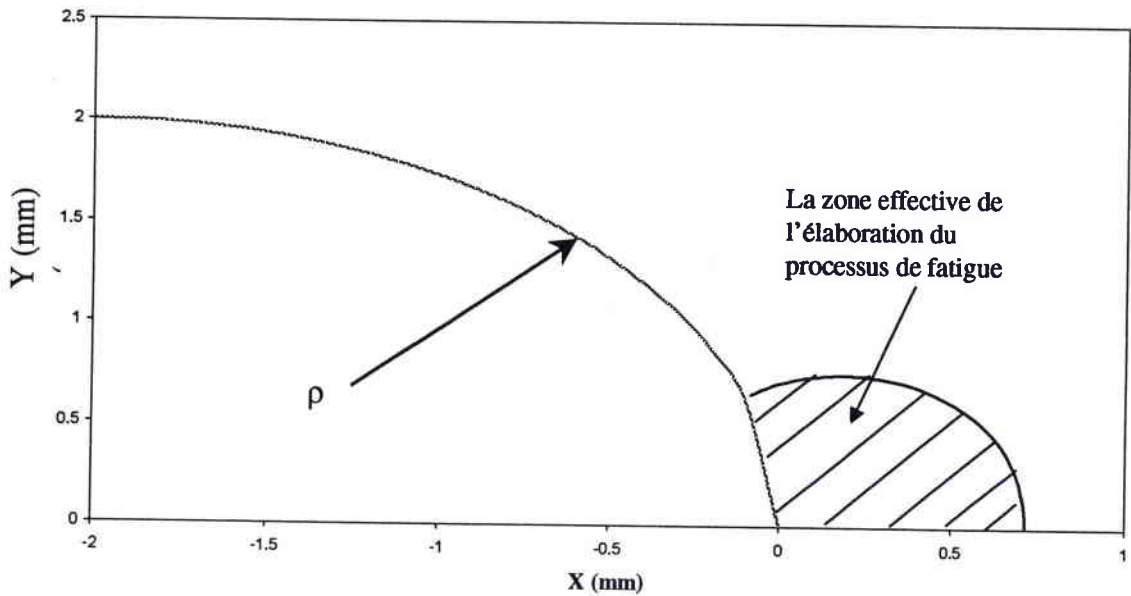


Figure IV. 14 : Comparaison entre la distance  $X_{ef}$  et la zone plastique.



**FigureIV. 15 : Zone effective d'élaboration du processus de fatigue.**

On note que le gradient relatif de contraintes utilisé est différent de celui décrit dans la bibliographique [3,8]. Le gradient, qui a une valeur constante, dépend de la géométrie et du mode de chargement. Ce gradient est calculé au point de contrainte maximale. Par contre le gradient relatif, qu'on vient de définir, a des valeurs variables dans le volume effectif d'élaboration du processus de fatigue. Ces valeurs dépendent de la géométrie, du mode de chargement, de la valeur de charge et en plus du type de matériau.

#### IV.4 Contrainte pondérée

Tous les points des contraintes dans le volume d'élaboration du processus de fatigue jouent un rôle différent. Ce rôle est influencé par la distance entre le point de contrainte et l'entaille, et le gradient relatif de contrainte. On peut définir la contrainte pondérée par :

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} \cdot \varphi(r, \chi_r) \quad (\text{IV. 10})$$

Où  $\varphi(r, \chi_r)$  est la fonction de poids.

Cette fonction doit exprimer les conditions suivantes :

- égale à l'unité au point d'amorçage, où la contrainte joue son rôle ( $r = 0 \Leftrightarrow \varphi(r, \chi_r) = 1$ ).
- égale à l'unité au point de la contrainte maximale ( $\sigma = \sigma_{max} \Leftrightarrow \varphi(r, \chi_r) = 1$ ).
- Le rôle des points de contrainte, dans le volume effectif d'élaboration du processus de fatigue, diminue quand la distance au point d'amorçage augmente.

De manière analytique, et en analysant les résultats, on définit la fonction de poids suivante :

$$\varphi(r, \chi_r) = e^{-\frac{r \cdot \chi_r}{2}} \quad (\text{IV. 11})$$

Où  $r$  est la distance du point d'amorçage, et  $\chi_r$  est le gradient relatif de contrainte.

Des figures ( IV. 16, IV. 17), on constate que cette fonction satisfait aux conditions déjà précisés :

- $r = 0 \Leftrightarrow \varphi(r, \chi_r) = 1$ .
- $\sigma = \sigma_{max} \Leftrightarrow \chi_r = 0 \Leftrightarrow \varphi(r, \chi_r) = 1$ .
- Les valeurs de cette fonction poids diminuent avec l'augmentation de la distance du point d'amorçage, dans la zone  $r_m < r < r_{ef}$  où  $r_m$  est la distance de la contrainte maximale

La nouvelle fonction de poids  $\varphi$  est différente de celle utilisée dans l'approche volumétrique [45, 46], basée sur les travaux de Weixing [17, 18] :

$$\varphi'(r, \chi) = 1 - r \cdot \chi_r \quad (\text{IV. 12})$$

Des figures ( IV. 16, IV. 17), on constate que cette fonction assure les deux premiers points :

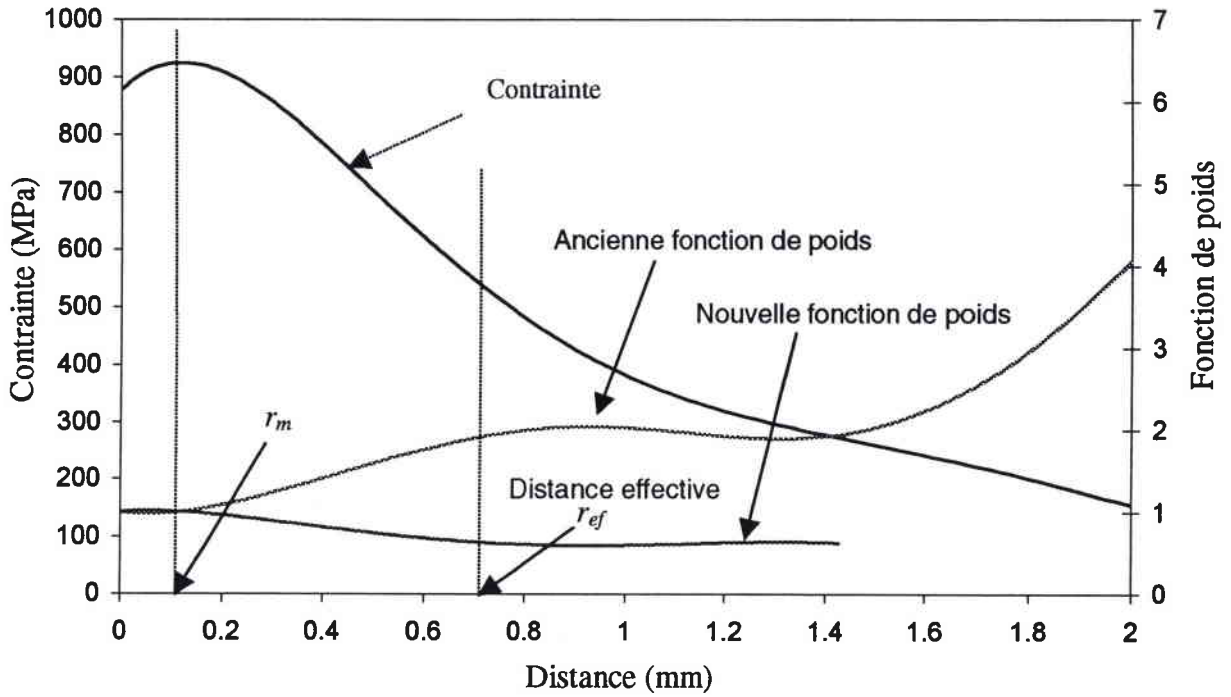
- $r = 0 \Leftrightarrow \varphi(r, \chi_r) = 1.$
- $\sigma = \sigma_{max} \Leftrightarrow \chi_r = 0 \Leftrightarrow \varphi(r, \chi_r) = 1.$

Par contre cette fonction  $\varphi'$  augmente dans la zone  $r_m < r < r_{ef}$ , ce qui ne correspond pas à notre objectif.

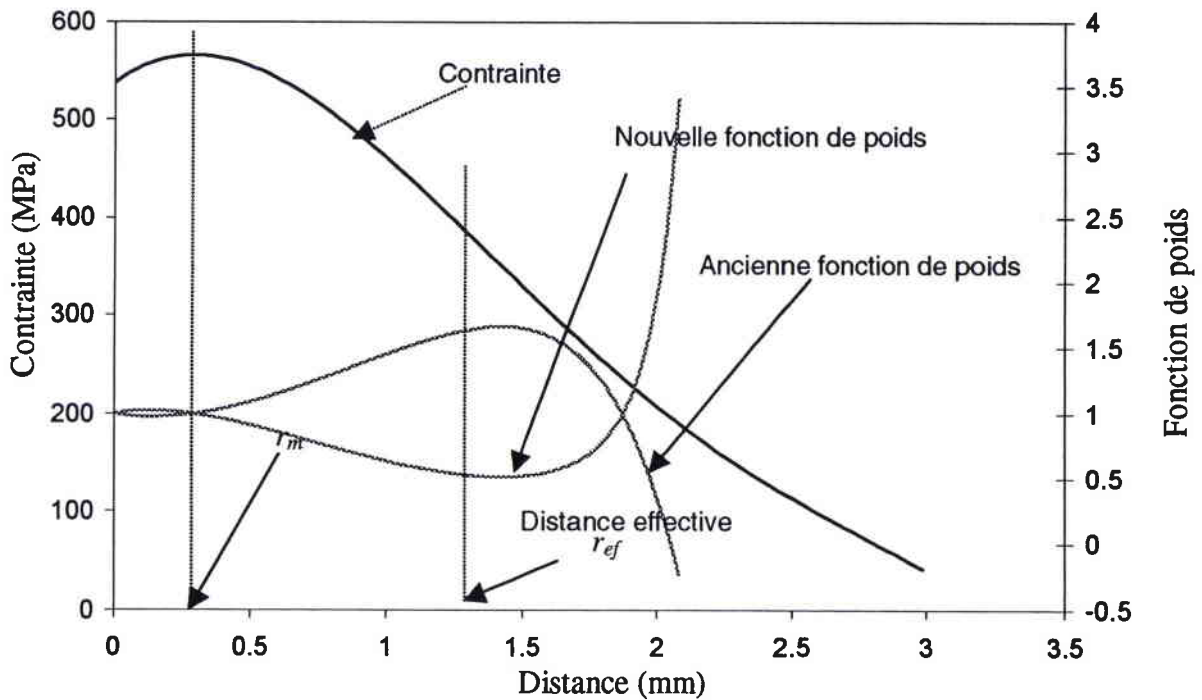
Des équations IV. 10 et IV. 11, on peut écrire :

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} \cdot e^{r \cdot \chi_r / 2} \quad (\text{IV. 13})$$

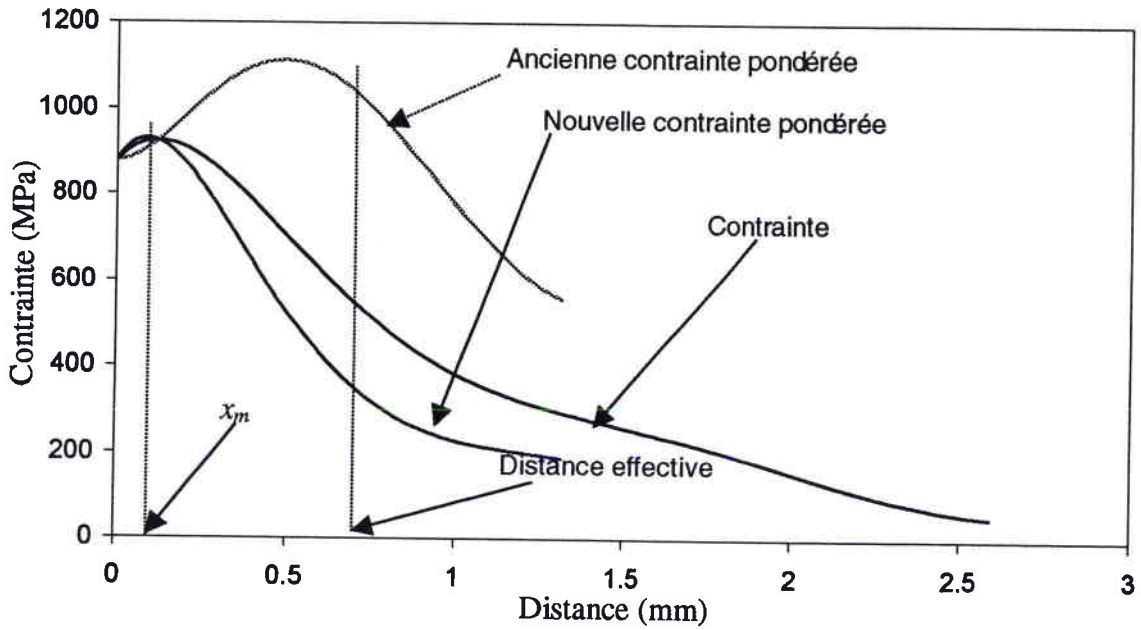
Les figures (IV. 18, IV. 19) présentent l'évolution des contraintes pondérées près du point d'amorçage.



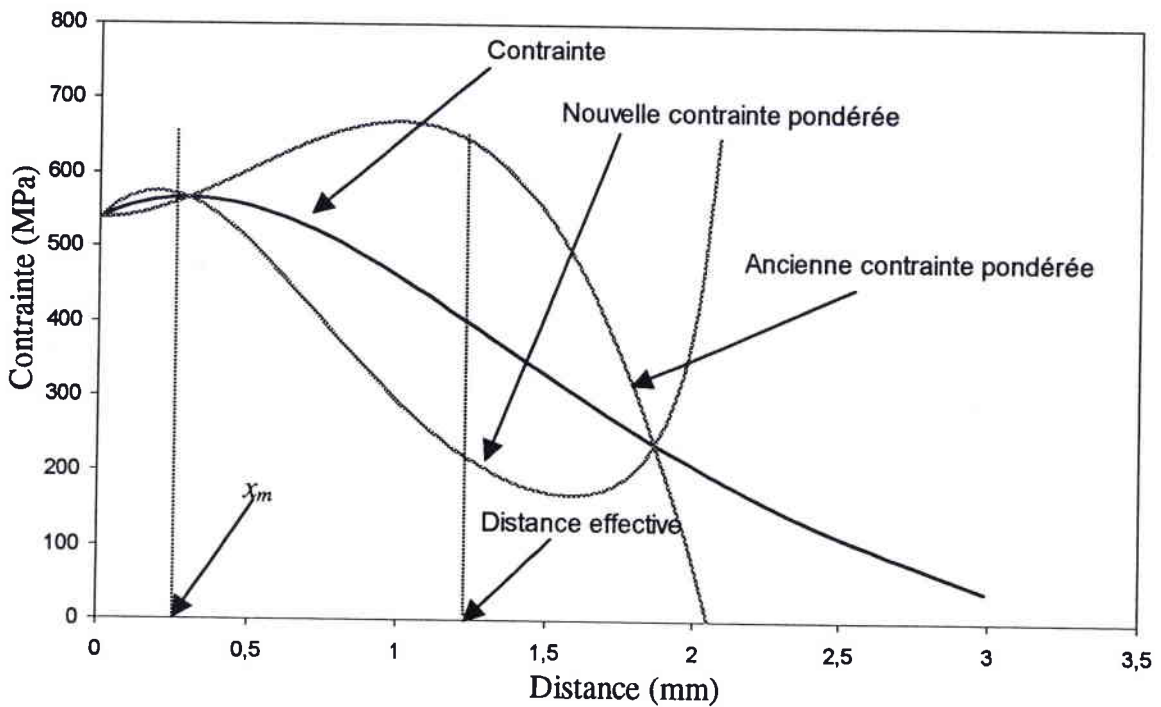
**Figure IV. 16 : Evolution de la contrainte et des fonctions poids en fonction de la distance. Cas d'un chargement de flexion pour une éprouvette à bout droit.**



**Figure IV. 17 : Evolution de la contrainte et des fonctions poids en fonction de la distance. Cas d'un chargement de torsion pour une éprouvette à bout droit.**



**Figure IV. 18 : Evolution de la contrainte et des contraintes pondérées en fonction de la distance. Cas d'un chargement de flexion pour une éprouvette à bout droit.**



**Figure IV. 19 : Evolution de la contrainte et des contraintes pondérées en fonction de la distance. Cas d'un chargement de torsion pour une éprouvette à bout droit.**

#### IV.5 Contrainte effective

La contrainte effective est définie par :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{V_{ef}} \iiint_V \sigma_{ij}^* .dV \quad (\text{IV. 14})$$

En prenant l'effet des contraintes dans le plan de la contrainte maximale, la contrainte effective s'écrit :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{S_{ef}} \int_0^{R_{ef}} \int_0^\theta \sigma_{ij}^* .dS \quad (\text{IV. 15})$$

Pour faciliter le calcul, en se basant sur les travaux de Weixing [17,18] et de Taylor [23, 24], la relation (IV. 14) peut être calculée sur une ligne qui se trouve en fond du point d'amorçage :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{X_{ef}} \sigma_{ij}^* .dx \quad (\text{IV. 16})$$

Dans le cas de la flexion rotative ou de la traction, la contrainte d'ouverture est la cause principale de la rupture par fatigue, les relations (IV. 13, IV. 14 et IV. 15) deviennent :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{V_{ef}} \iiint_V \sigma_{yy}^* .dV \quad (\text{IV. 17})$$

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{S_{ef}} \int_0^{R_{ef}} \int_0^\theta \sigma_{yy}^* .dS \quad (\text{IV. 18})$$

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{X_{ef}} \sigma_{yy}^* .dx \quad (\text{IV. 19})$$

Où :

$\sigma_{yy}^*$  est la contrainte pondérée d'ouverture calculée par l'équation IV. 13

Dans le cas de la torsion simple où la contrainte de cisaillement est la cause principale de la rupture par fatigue, les relations (IV. 13, IV. 14 et IV. 15) deviennent :

$$\tau_{ef} = \frac{1}{V_{ef}} \iiint_V \tau_{yz}^* .dV \quad (\text{IV. 20})$$

$$\tau_{ef} = \frac{1}{S_{ef}} \int_0^{R_{ef}} \int_0^\theta \tau_{yz}^* .dS \quad (\text{IV. 21})$$

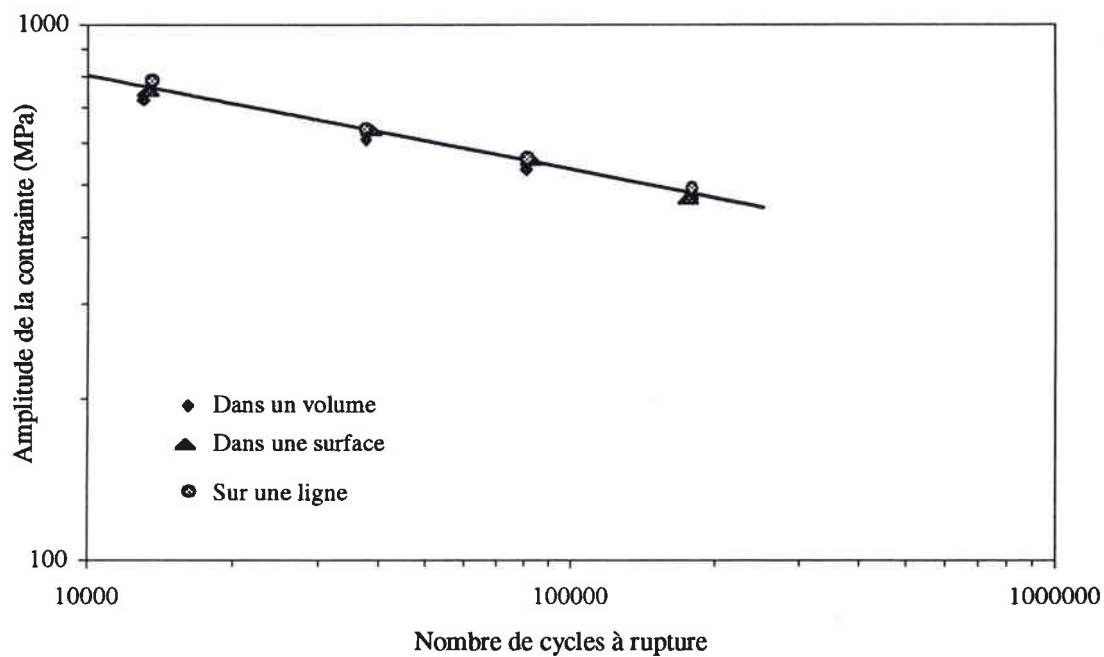
$$\tau_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{X_{ef}} \tau_{yz}^* .dx \quad (\text{IV. 22})$$

Où :

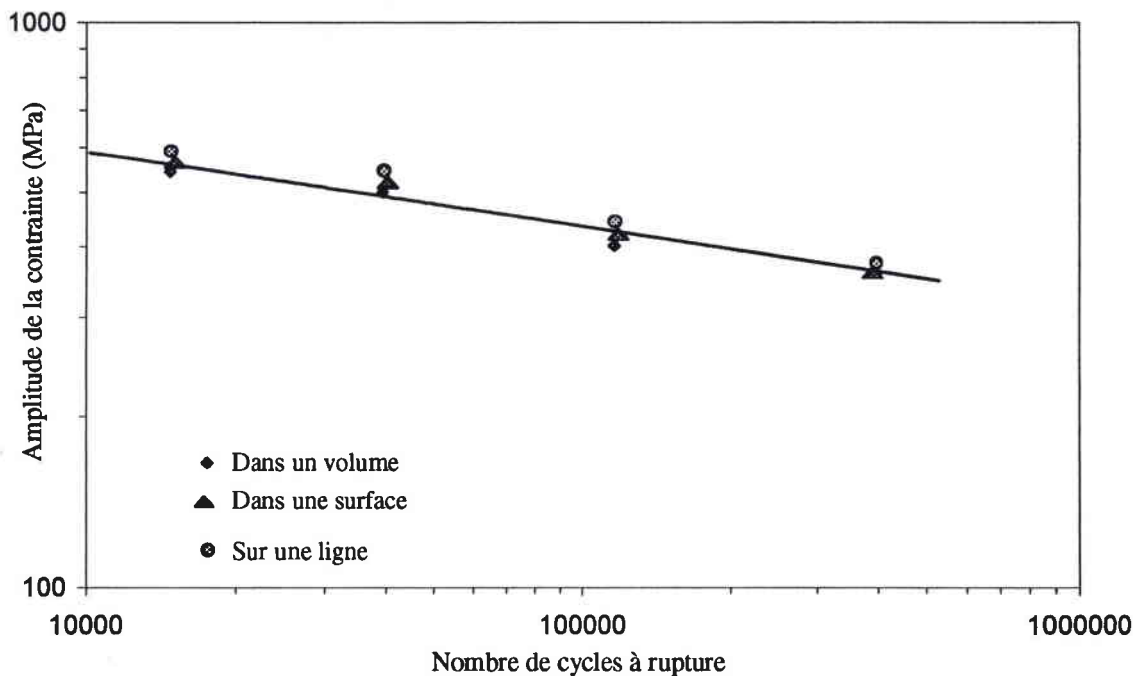
$\tau_{yz}^*$  est la contrainte de cisaillement maximale, calculée par l'équation IV. 13

Les figures (IV. 20, IV. 21), présentent les comparaisons entre les contraintes effectives obtenues par le calcul dans un volume (équations IV. 17), dans une surface (équations IV. 18) ou sur une ligne. On constate que les différences entre les trois méthodes sont presque négligeables (inférieurs à 5%). L'utilisation de la méthode de calcul sur une ligne plus facile à réaliser donne des résultats satisfaisants et peut remplacer le calcul dans un volume, trop difficile à réaliser.





**Figure IV. 20 : Comparaison entre les contraintes effectives obtenues par différentes méthodes de calcul. Cas d'un chargement en flexion pour une éprouvette à bout droit.**



**Figure IV. 21 : Comparaison entre les contraintes effectives obtenues par différentes méthodes de calcul. Cas d'un chargement en torsion pour une éprouvette à bout droit.**

## IV.6 Conclusion

La nouvelle approche proposée, appelée "approche volumétrique" est basée sur l'analyse de la distribution de contrainte en fond du point d'amorçage. Cette distribution est obtenue par un calcul aux éléments finis, en utilisant la loi de comportement cyclique.

Cette nouvelle approche donne une contrainte effective, qui permet d'estimer la durée de vie d'une éprouvette entaillée (ou clavetée), en ramenant cette contrainte sur la courbe de Wöhler d'éprouvettes lisses (courbe de référence), pour le même mode de chargement.

La contrainte effective est calculée dans un volume à partir des points de contraintes, en prenant en compte le gradient de contrainte et la distance entre ce point de contrainte et le point d'amorçage. Le volume effectif de l'élaboration du processus de fatigue est limité par la distance effective. Cette distance est déterminée par le minimum du gradient de contrainte.

Dans le cas de la flexion, la contrainte d'ouverture est la cause principale de la rupture par fatigue. La contrainte effective peut être calculée par l'équation :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \sigma_{yy}^* . dx = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \sigma_{yy} . e^{x_r \cdot x / 2} . dx \quad (\text{IV. 23})$$

$\sigma_{yy}$  est la contrainte d'ouverture.

Dans le cas de la torsion simple, où la contrainte de cisaillement est la cause principale de la rupture par fatigue, la contrainte effective peut être calculée par l'équation :

$$\tau_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \tau_{yz}^* . dx = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \tau_{yz} . e^{x_r \cdot x / 2} . dx \quad (\text{IV. 24})$$

$\tau_{yz}$  est la contrainte de cisaillement maximale.

## **CHAPITRE 5**

### **APPLICATIONS ET DISCUSSIONS**

## V APPLICATIONS ET DISCUSSIONS

Les arbres clavetés sont un cas particulier des arbres entaillés. Des précisions sont à apporter sur le rayon de fond d'entaille et la valeur du facteur de concentration de contrainte élastique utilisé dans les approches traditionnelles (point chaud) Peterson [1], Neuber [9,10].....

Pour l'application de ces approches, et en se basant sur les travaux de plusieurs auteurs [3, 26], on a assimilé le rayon de raccordement  $r$  au rayon de fond d'entaille  $\rho$  (Figure V. 1). Par conséquent, la valeur du facteur de concentration de contrainte sera la valeur au point se trouvant sur le rayon de raccordement  $r$  (Figure V. 2).

On rappelle que la contrainte globale sera utilisée pour calculer le facteur de concentration de contrainte élastique  $k_t$  et le facteur de concentration de contrainte en fatigue expérimental  $k_f$ .

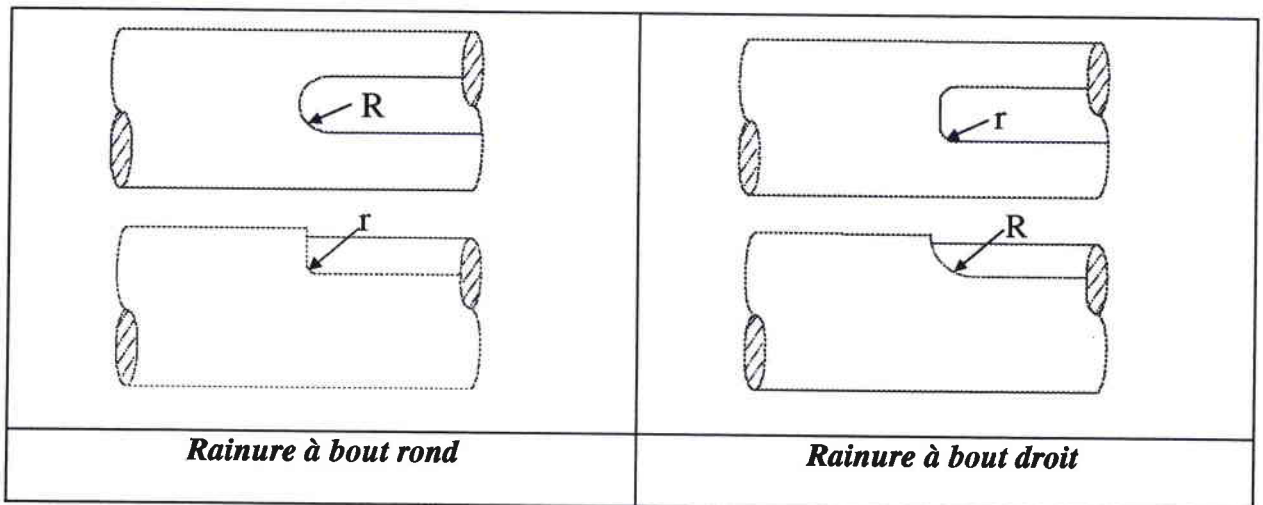


Figure V. 1 : Définition de la géométrie des arbres clavetés.

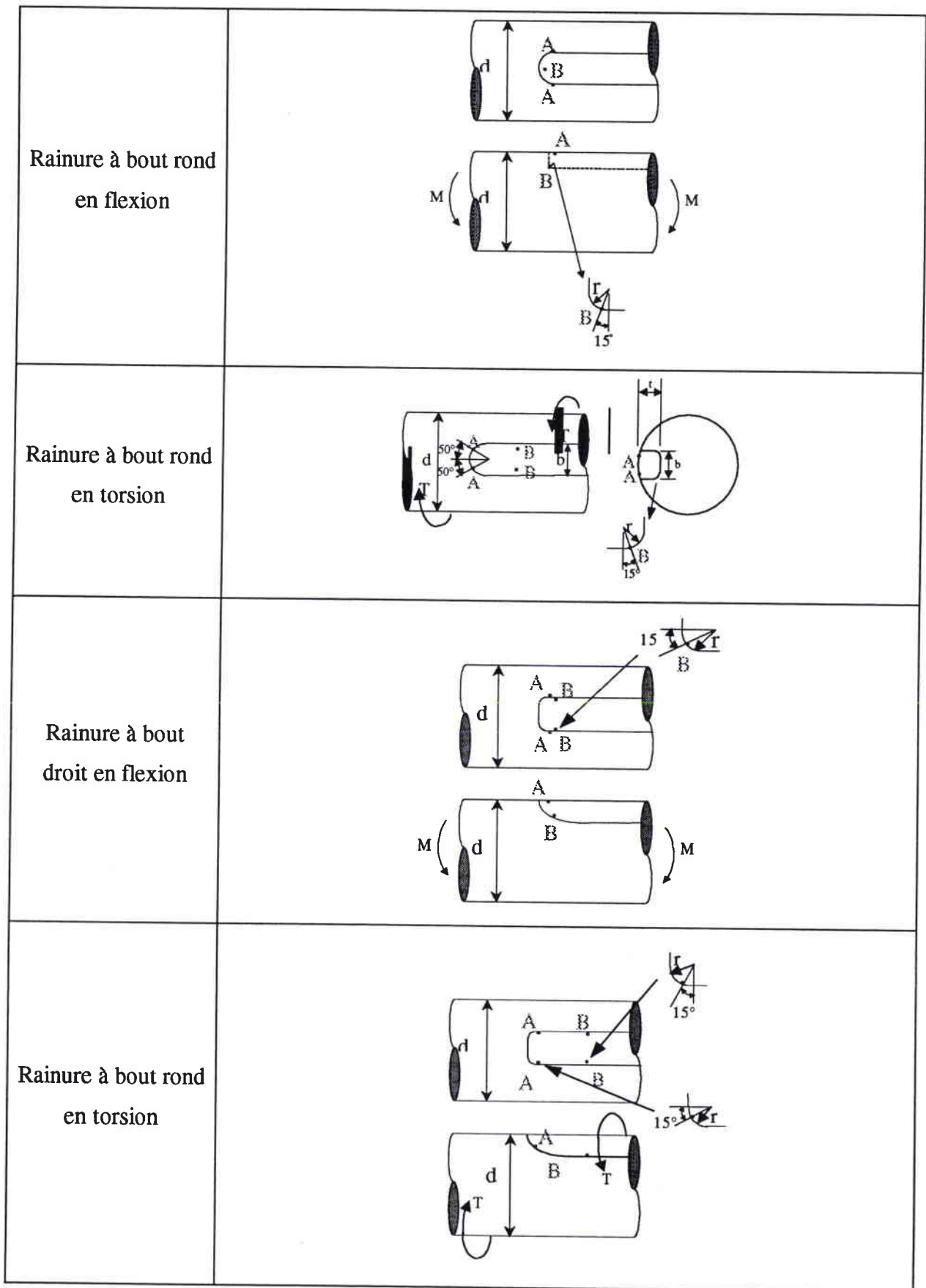


Figure V. 2 : Localisation des points où les contraintes sont maximales.

## V.1 Volume effectif

Pour le définir Lieurade et al [14, 15, 16] ont proposé la méthode de la couche critique, qui est une constante du matériau, tableau (1.3). Pour notre matériau 42CD4 trempé-revenu, on peut utiliser la même valeur que pour l'acier 35CD4 trempé-revenu (même taille du grain), qui est de 50 $\mu$ m.

C. M. Sonsino [19,20] a proposé le volume de matière le plus déformé. Il calcule la largeur de ce volume  $t_{90\%}$  par l'équation :

$$t_{90\%} = \frac{0.1}{\chi} \quad (\text{V. 1})$$

$\chi$  est le gradient de contrainte.

Pour le cas d'un arbre claveté à bout droit en torsion, la valeur du gradient est (tableau I.1)

$$\chi = \frac{1}{\rho} + \frac{2}{d} \quad (\text{V. 2})$$

Pour les éprouvettes utilisées :  $r = 0.1\text{mm}$ ,  $d=9\text{mm}$ ,  $\chi = 10.22 \text{ mm}^{-1}$  et  $t_{90\%} = 9.78\mu\text{m}$ .

Pour la distance critique [23,24] et selon ElHaddad [25], la constante du matériau est calculée par l'équation :

$$a_o = \left( \frac{1}{\pi} \right) \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_D} \right)^2 \quad (\text{V. 3})$$

$\Delta K_{th}$  est le seuil du facteur d'intensité de contrainte pour la propagation de fissure.

$\Delta \sigma_D$  est la limite de fatigue pour une éprouvette pleine (lisse).

Le seuil du facteur d'intensité de contraintes, en fatigue peut être calculé par l'équation [47] :

$$\Delta K_{th} = \sigma_{yc} \cdot \sqrt{\pi \cdot d} \quad (\text{V. 4})$$

$d$  : taille du grain.

$\sigma_{yc}$  : résistance ultime cyclique.

En appliquant sur notre matériau,  $\Delta K_{th} = 8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , on obtient  $a_0 = 0.1 \text{ mm}$  en flexion et  $a_0 = 0.16 \text{ mm}$  en torsion.

Cette constante  $a_0$  est choisie par Taylor [23, 24] comme une distance critique :

- En prenant la valeur de la contrainte élastique à la distance  $r = a_0/2$ .
- En calculant la moyenne de la contrainte sur une ligne de longueur  $r = 2a_0$ .
- En calculant la moyenne de la contrainte principale maximale dans une surface semi-circulaire de rayon  $r = a_0$ .

Pour l'approche volumétrique, la distance effective  $x_{ef}$ , qui est limitée par le minimum du gradient relatif de contrainte dépend du type de matériau, du mode de chargement, du niveau de charge et de la géométrie. La figure [V. 3] présente l'évolution de cette distance en fonction de la contrainte globale, pour un chargement et flexion et en torsion.

La figure (V. 4) présente la comparaison entre les différentes méthodes pour le calcul du volume. On distingue l'influence :

- de la nature du matériau : couche critique, Taylor et notre méthode.
- du mode de chargement : Taylor, Sonsino et notre méthode.
- de la géométrie : notre méthode et Sonsino.

Notre méthode est la seule qui prenne en compte l'influence du niveau de charge, tableau (V. 1).

	Influence de la nature de matériau	Influence du mode de chargement	Influence de la géométrie	Influence du niveau de charge
Couche critique	X			
Volume le plus déformé		X	X	
Distance critique	X	X		
Notre méthode	X	X	X	X

**Tableau V. 1 : Comparaison entre les différentes méthodes.**

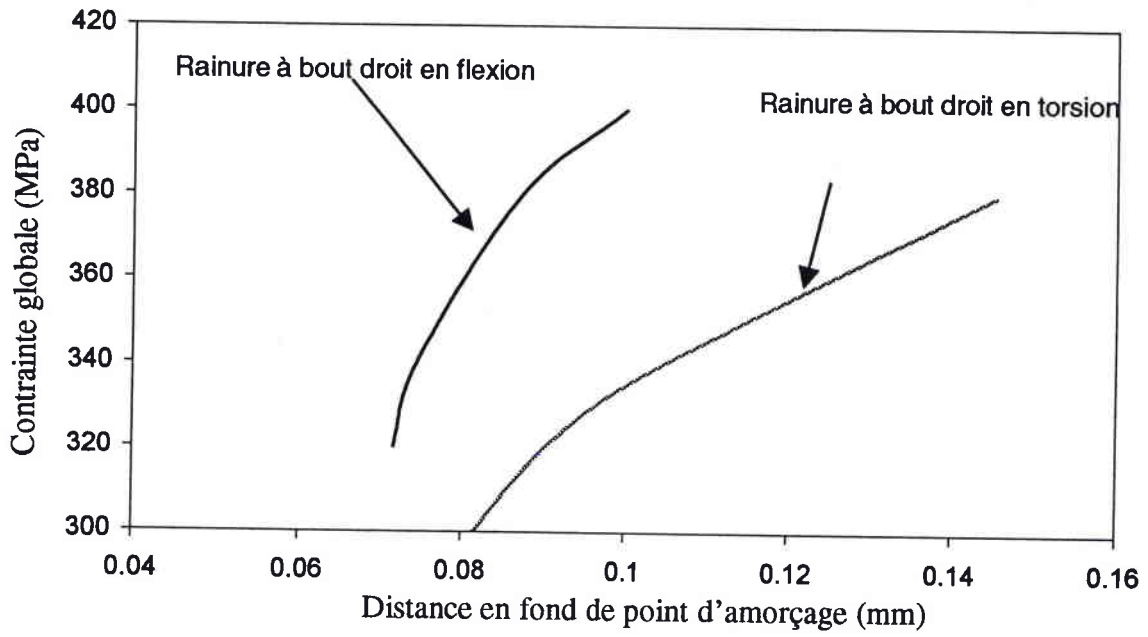


Figure V. 3 : Evolution de la distance effective en flexion et en torsion.

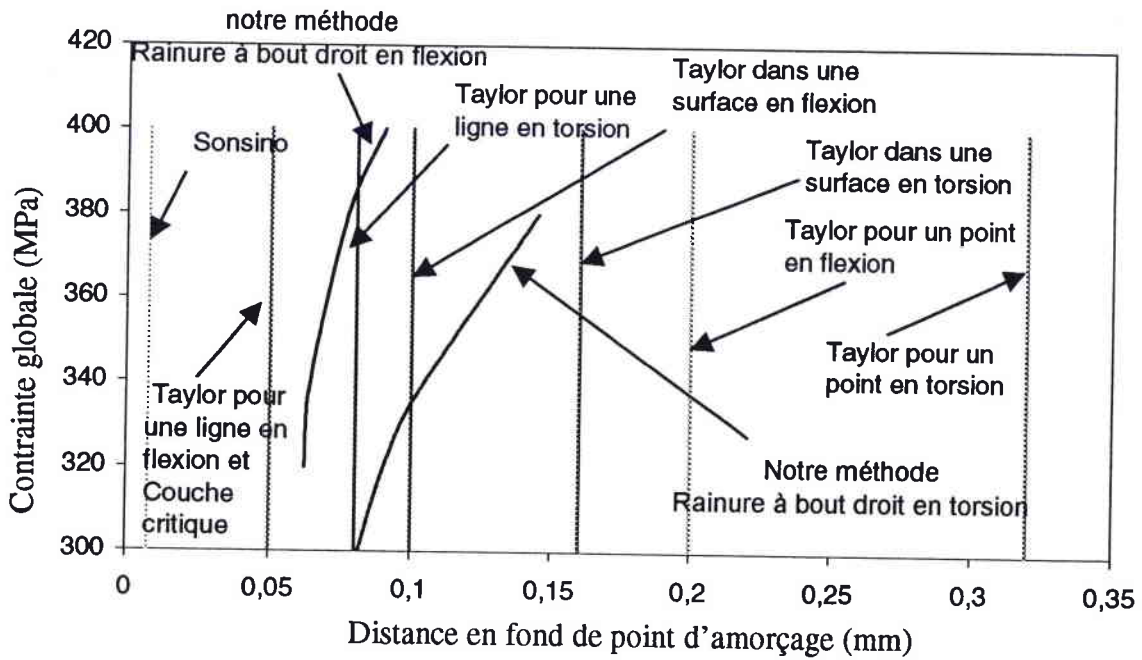


Figure V. 4 : Comparaison entre les différentes méthodes.



## V.2 Comparaison des résultats en flexion rotative

Plusieurs méthodes sont utilisées, au niveau de la limite d'endurance, pour calculer le facteur de concentration de contrainte en fatigue et le comparer aux résultats expérimentaux, tableau (V. 2).

Pour l'application de l'approche de la distance critique de Taylor [23, 24], on a choisi la méthode qui prend en compte la valeur de la contrainte élastique à une distance  $r=a_0/2=0.05\text{mm}$ .

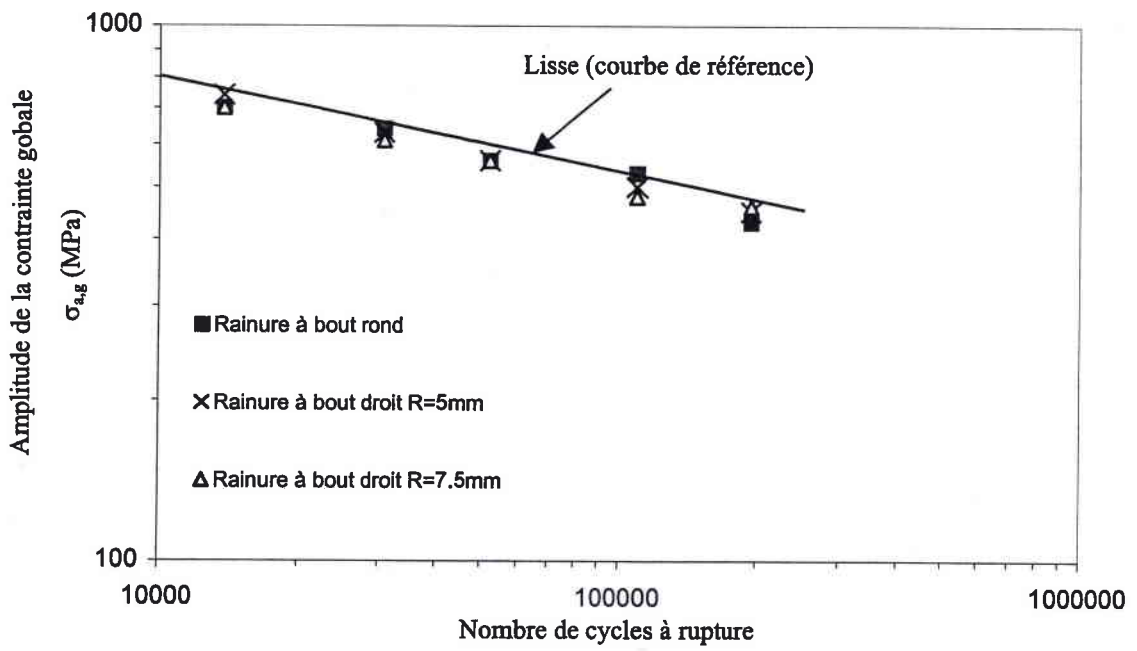
Types d'éprouvettes	Peterson Eq (I.10)	Neuber Eq (I.12)	Kuhn et Hardraht Eq (I.13)	Taylor I.2.6.14	Approche volumétrique Eq (V.23)	Essais
Rainure à bout rond	1.746	1.61	1.478	1.95	1.9	2.1
Rainure à bout droit R= 5mm	1.66	1.544	1.42	1.85	1.94	2.04
Rainure à bout droit R= 7.5 mm	1.51	1.42	1.33	1.64	1.76	1.8

**Tableau V. 2 : Résultats des facteurs de concentration de contraintes obtenus par l'application de plusieurs approches en flexion.**

Les résultats obtenus par les approches traditionnelles (tableau V. 2) ont des valeurs faibles comparées aux essais. C'est-à-dire que les valeurs des limites d'endurance, pour les éprouvettes clavetées obtenues par ces approches, se trouvent au-dessus des valeurs d'expérimental. Donc, ces méthodes prévoient une limite d'endurance supérieure à la valeur réelle. Celle-ci peut constituer un risque émanant d'une rupture par fatigue.

La figure V. 5 présente la comparaison entre les amplitudes de contraintes effectives obtenues par notre modèle et la courbe de référence (courbe de Wöhler d'éprouvette lisse).

On constate que notre modèle donne les valeurs les plus concordantes aux résultats expérimentaux, avec un écart inférieur à 10%.



**Figure V. 5 : comparaison de notre modèle et des résultats expérimentaux obtenus en flexion.**

### V.3 Comparaison des résultats en torsion

Plusieurs méthodes sont utilisées, au niveau de la limite d'endurance, pour calculer le facteur de concentration de contrainte en fatigue et le comparer aux résultats expérimentaux, tableau (V. 3).

Pour l'application de l'approche de la distance critique de Taylor [23, 24], on a utilisé la méthode qui prend en compte la valeur de la contrainte élastique à une distance  $r=a_0/2=0.08\text{mm}$ .

Types d'éprouvettes	Peterson Eq (I.10)	Neuber Eq (I.12)	Luhn et Hardraht Eq (I.13)	Brand* Eq (I. 25)	Taylor I.2.6.14	Approche volumétrique Eq (V.15)	Essais
Rainure à bout rond	2.312	2.07	1.84	2.03	1.95	2.	2.08
Rainure à bout droit R= 5mm	2.45	2.2	1.93	2.18	1.9	2.05	2.1
Rainure à bout droit R= 10 mm	2.45	2.2	1.93	2.18	1.92	1.96	2.04

\*Probabilité de courbe de Wöhler à 90% de survie.

**Tableau 3 : Résultats des facteurs de concentration de contraintes obtenus par l'application de plusieurs approches en torsion**

Les résultats obtenus par les approches traditionnelles (tableau V. 3) ont des valeurs trop variables comparées aux essais. Aucune méthode ne donne des résultats acceptables pour les différents types de rainures.

Rappelons que la méthode de Brand (I.2.6.14) est une méthode à probabilité de 90% de survie. La courbe de Wöhler et la limite d'endurance obtenues par cette méthode, doivent se trouver en dessous de la courbe de Wöhler et la limite d'endurance de probabilité de 50%. Mais les résultats obtenus (tableau V. 3, figure V. 7 et figures V. 8) montrent que la courbe de Wöhler et la limite d'endurance calculées selon la méthode de Brand se trouvent au-dessus des résultats expérimentaux. Donc Brand prévoit un effet de rainure de clavette en fatigue

moins important que la réalité. L'utilisation de cette méthode pour la conception, donne une probabilité de rupture par fatigue en service.

La figure (V. 6) présente la comparaison entre les amplitudes de contraintes effectives obtenues par notre modèle et la courbe de référence (courbe de Wöhler d'éprouvette lisse).

L'ensemble de ces résultats montrent que seul notre modèle donne les valeurs les plus concordantes aux résultats expérimentaux avec un écart inférieur à 15%.

Enfin, on constate que les éprouvettes à bout droit n'ont pas la même durée de vie, bien que la valeur du facteur de concentration de contrainte élastique en torsion  $k_{ts}$  soit la même. Ceci peut être expliqué par le rôle du gradient de contrainte, et que la contrainte à un point ne peut expliquer la rupture par fatigue. En notant que ces deux informations dans la base de notre méthode.

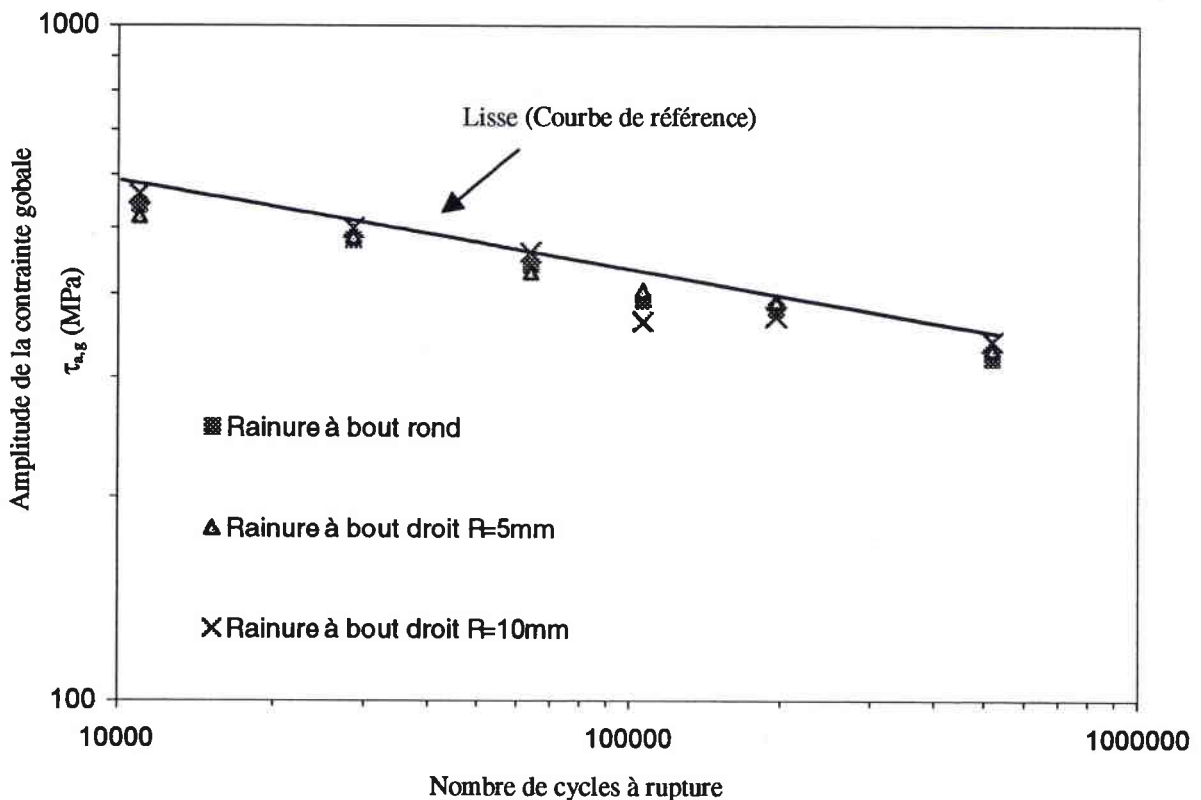
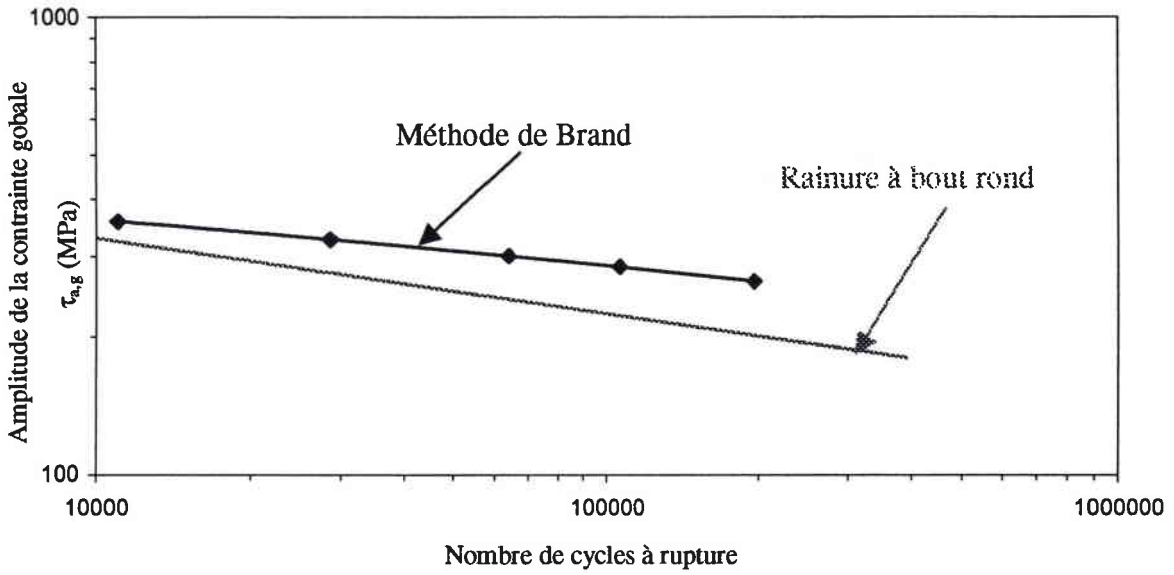
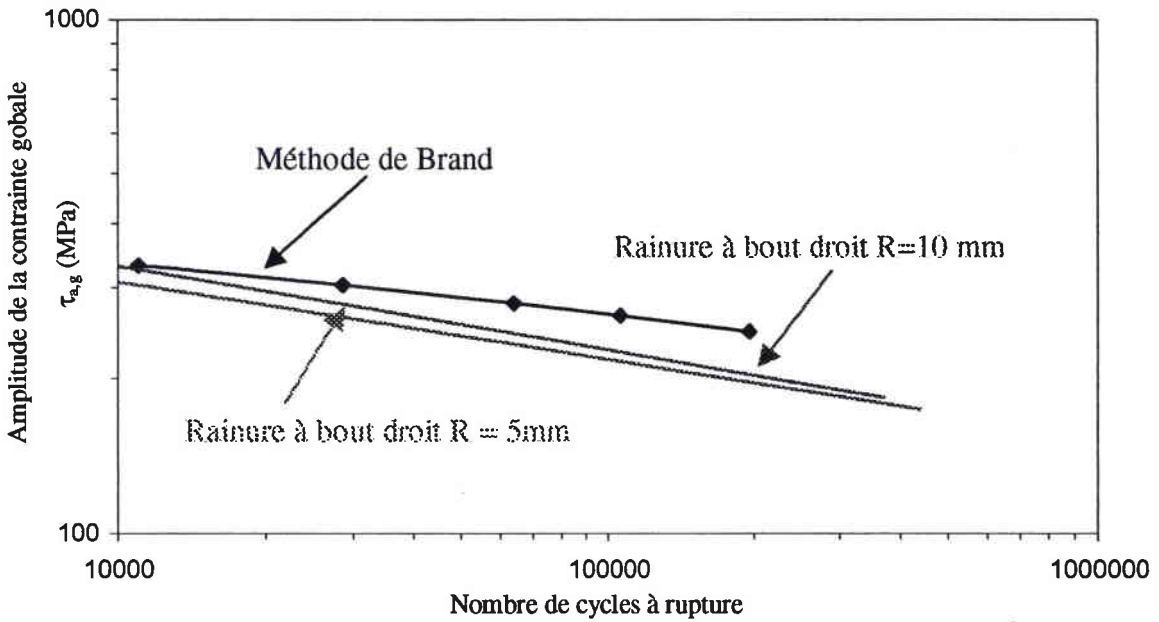


Figure V. 6 : Comparaison de notre modèle et des résultats expérimentaux en torsion.



**Figure V. 7 : Comparaisons entre le modèle de Brand et les résultats expérimentaux. Cas d'une rainure à bout rond en torsion.**



**Figure V. 8 : Comparaisons entre le modèle de Brand et les résultats expérimentaux. Cas d'une rainure à bout droit en torsion.**

## V.4 Conclusion

La distance effective  $x_{ef}$  de l'approche volumétrique est définie par le minimum du gradient relatif de contrainte, est la seule qui dépende du type de matériau, du mode de chargement, du niveau de charge et de la géométrie.

L'utilisation des approches traditionnelles, pour la conception des arbres clavetés soumis à un chargement de flexion, accroît le risque d'une rupture par fatigue.

Aucune de ces méthodes ne donne des résultats acceptables pour les différents types de rainures dans le cas d'un chargement en torsion.

En plus, les résultats expérimentaux montrent que les durées de vie des éprouvettes à bout droit ne sont pas les mêmes en torsion, bien que soit la même valeur du facteur de concentration de contrainte élastique en torsion  $k_{ts}$ . Ces résultats montrent l'importance du rôle du gradient de contrainte et la nécessité de calculer la contrainte effective dans un volume.

La comparaison des résultats expérimentaux et notre approche volumétrique montre que notre méthode donne de bons résultats pour les différents types de rainures soumises à un chargement de flexion ou de torsion.

## **CHAPITRE 6**

### **CONCLUSION GENERALE**

## VI CONCLUSION GENERALE

La rupture par fatigue des arbres entaillés en service reste problématique pour la fiabilité des machines, c'est notamment le cas des arbres clavetés dans les machines agricoles.

L'étude bibliographique montre le manque d'informations concernant les arbres clavetés et spécialement dans la norme française. Ce manque concerne le facteur de concentration de contrainte élastique et l'influence des paramètres géométriques sur ce facteur. En plus, il a été constaté l'absence d'informations sur l'estimation de la durée de vie de ces arbres.

Des calculs par éléments finis ont été réalisés, afin de déterminer l'influence des paramètres géométriques et du type de rainure sur le facteur de concentration de contrainte. Des équations analytiques pour l'évolution du facteur de concentration de contrainte, pour chaque type de rainure et mode de chargement, ont été proposées. Les comparaisons entre les résultats obtenus par calcul aux éléments finis, les valeurs d'équations proposées et les rares résultats de la littérature sont satisfaisantes.

Pour l'estimation de la durée de vie, les approches traditionnelles (points chauds) simplifiées, ne sont pas capables de caractériser la rupture par fatigue, spécialement dans le cas des arbres clavetés. C'est le cas des rainures à bout droit en torsion où les résultats expérimentaux donnent des durées de vie différentes pour deux types éprouvettes malgré la même valeur du facteur de concentration de contrainte élastique et le même rayon d'entaille. En plus, les résultats montrent que la modélisation avec ces approches en flexion peut constituer un vrai danger émanant d'une rupture par fatigue.

Notre approche appelée "approche volumétrique" permet l'estimation de la durée de vie en fatigue de structures par un calcul utilisant les caractéristiques du matériau :

- La courbe de référence (courbe de Wöhler d'éprouvettes lisses).
- La loi de comportement cyclique.



Cette nouvelle approche calcule la contrainte effective dans un volume en prenant en compte le gradient de contrainte et la distance entre chaque point et le point d'amorçage. Le volume effectif de l'élaboration du processus de fatigue est limité par la distance effective. Cette distance est déterminée par le minimum du gradient relatif de contrainte.

Les comparaisons des résultats issus du calcul numérique et les résultats expérimentaux montrent que l'approche volumétrique caractérise bien la rupture par fatigue et donne une bonne estimation de la durée de vie.

En notant que le nouveau système mécanique d'amarrage pour la machine multi-axiale a permis de réaliser les essais de torsion près de la limite d'endurance, en assurant un bon alignement des éprouvettes.

Enfin, les résultats expérimentaux montrent que la localisation du plan d'amorçage d'un arbre claveté, donne des informations sur le mode et le niveau de chargement.

## **REFERENCES**

## REFERENCES

---

1 Peterson, R. E.,

“Stress Concentration Factors”

John Wiley and Sons, New-York (1974).

2 Young Warren C.,

“Roark’s Formulas for stress and strain”

McGraw-hill Book company, New-York (1989).

3 Brand. A. et Sutterin R.,

Calcul des pièces à la fatigue. Méthode de gradient,

Publication Senlis-France CETIM (1980).

4 Neuber H.,

“Theory of Notch Stresses”

JW. Edwards Co., Ann Arbor, Michigan (1946).

5 kuhn P., et Hardraht H. F.,

“An Engineering Method For Estimating Notch Size Effect In Fatigue Tests On Steel”

NACA, Technical Note, 1952, No 2805.

6 Switch, W. and Bush A.,

“The problem of the Maximum Notch Effect in the Case of Flat Components with Transverse Holes”

Proceeding of the 3<sup>rd</sup> Conference on Dimensioning, Budapest (1968).

7 Topper T. H., M. H. El Haddad,

“Fatigue strength prediction of notches based on fracture thresholds”

1<sup>st</sup> Int. Conf., Stockholm, Vol.2, EMAS, Warley, pp 777-797 (1981).

8 Siebel E., and Steiler M.,

“Non –Uniform Sress Distribution During Fatigue loading”,

---

VDI-Z, 97, 1955.

9 Neuber H.,

“Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law”

J. Appl. Mech., Vol. 28, pp 544-551, (1969).

10 Neuber H.,

“Theoretical Determination of Fatigue Strength at Stress Concentration”

Air Force Materials Laboratory. Report AFML-TR-68-20 (Avril 1968).

11 Morrow, J.D., Wetzel R.M., and Topper T.H.

“Laboratory simulation of structural fatigue behavior”,

ASTM STP 42, pp 74-91, (1970).

12 Sanz G. et Truchon M.,

Etude de l’amorçage des fissures de fatigue sur des éprouvettes en acier à très haute résistance possédant des défauts de formes et de dimensions différentes

CIT du CDS (1978) n°1, pp. 161-190.

13 Ye Du-yi and Wang De-jeun.,

« A new approach to the prediction of fatigue notch reduction factor  $k_f$ ”

International Journal of Fatigue 18, 105 – 109, (1996).

14 Flavenot J.F., Skalli N.,

“L’épaisseur de couche critique ou une nouvelle approche du calcul en fatigue des structures soumises à des sollicitations multiaxiales”

Rapport CETIM 12G254, Septembre 1982, pp. 15-25.

15 Flavenot J.F., Skalli N.,

“L’épaisseur de couche critique : Une nouvelle approche du calcul en fatigue à long terme des structures soumises à des chargements multiaxiaux”

CETIM – Information No. 78, Décembre 1982, pp. 57-59.

---

16 Lieurade H.P., Trouchon M., Flavenot J.F.,

“La prévision de l’amorçage des fissures de fatigue à partir d’entaille”

Revue Française de Mécanique, No. 1, 1992, pp. 25-39.

17 Weixing Y., Kaiquan X., Yi G.,

“On the fatigue notch factor,  $k_f$ ”

International Journal of Fatigue, Vol. 17, No. 4, pp245-251 (1995).

18 Weixing Y.,

“Stress field intensity approach for predicting fatigue life”

International Journal of Fatigue, Vol. 15, No. 4, pp243-245 (1993).

19 Sonsino C.M.,

“Multiaxial Fatigue of welded joints under In-Phase and out-of-phase local strains and stresses”

International Journal of Fatigue, Vol. 17, No. 1, pp55-70 (1995).

20 Palin-luc T., kaufmann H., Lasserre S., et Sonsino C.M.,

“Prise en compte de l’influence de la distribution de contraintes et des effets d’échelle pour une utilisation pratique en fatigue”

Les Actes du congrès des 18es Journées de printemps, commission de Fatigue des Matériaux, 2-3 Juin 1999, Paris. Société Française de Métallurgie et de Matériaux, Nanterre, France, pp. 30(1) –30(10).

21 Papadopoulos J. V. and Panoskaltis V. J.,

“Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion”

Engineering Fracture Mechanics, Vol 55, No 4, pp. 513 –528 (1996).

22 Crossland, B.,

“Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel”

Proc. Int. Conf. On fatigue of Metals, I. Mech. E., London, U.K., 1956, pp 138-149.

- 
- 23 Taylor D.,  
“Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model”  
International Journal of Fatigue, Vol. 21, No 5, pp 413-420 (1999).
- 24 Taylor D., Bologna P., Bel Knani K.,  
“Prediction of fatigue failure location on a component using a critical distance method”  
International Journal of Fatigue, Vol. 22, No , pp 735-742 (2000).
- 25 ElHaddad M., Dowling N., Topper T., Smith K.,  
“Integral applications for short fatigue cracks at notches”.  
International Journal of Fracture, Vol. 16, No , pp 15-24 (1980).
- 26 AFNOR – UNM,  
Transmissions Mécanique,  
Tome 2, Chaînes, courroies et éléments de transmission, 3<sup>e</sup> édition, Paris (1990).
- 27 AFNOR – UNM,  
Machines - Outils et Outillage - Machine,  
Tome 5, Outils de fraisage et équipements de machine, 2<sup>e</sup> édition, Paris (1989).
- 28 M. Aublin, R. Boncompai, M. Bulton, D. Caron, E. Jeay, B. Lacage, J. Réa,  
“Eléments Théoriques et Connaissances Associées”,  
( Système Mécaniques Théorie Et Dimensionnement ), pp 251 - 279, Paris, (1992).
- 29 D. Spenlé, R. Gourhant,  
“ Calcul d’une clavette ”,  
( Guide du Calcul en Mécanique ), pp 132 -133, France, (1993 -1994).
- 30 Keys and Keyseats,  
USA Standard ANSI 1976 B17.1, ASME, 1976.
- 31 M. M. Leven,  
“Stress in Keyways by Photoelastic Methods and Comparison with Numerical Solution”,

---

Proc SESA, Vol 7, No. 2 (1949), P 141.

32 H. Fessler, C. C. Rogers and P. Stanley,

“Stress at End milled Keyways in Plain Shafts Subjected to Tension, Bending and Tension”.

Journal of Strain Analyses, Vol 4, No 3, (1969), p. 180.

33 H. Okubo, K. Hosono, and K. Sakaki,

“The Stress Concentration in Keyways when Torque is Transmitted Through Keys”,

Experimental Mechanics, Vol.8, (1968), p. 375.

34 R. E. Peterson,

“Fatigue of shaft having keyways”,

Proc ASTM, Vol 32, Part 2 (1932), p. 413.

35 M. Hetényi,

“The Application of Hardening Resins in Three-Dimensional Photoelastic Studies”

J Appl. Phys., Vol. 10 (1939), P.295.

36 AFNOR – UNM,

Matériaux métalliques,

Essai de traction, 3<sup>e</sup> édition, Paris (1990).

37 H.P. Lieurade ,

“La pratique des essais de fatigue”.

PYC, Paris (1982).

38 AFNOR – UNM,

Matériaux métalliques,

Pratique des essais de fatigue oligocyclique, 3<sup>e</sup> édition, Paris (1990).

39 Carpinteri A., Brighenti R.

“Stress field near a notch root under pure bending”

---

Physicochemical Mechanics of Materials, International Scientific-Technical journal, Vol. 34, 15, 1998, pp 43-48.

40 Zheng M., Niemi E.

“Analysis of the stress concentration factor for shallow notch by the slip line field method”  
International Journal of Fatigue, Vol. 19, No. 3, 1997, pp 191-194.

41 Kadi N.

“Notch effect in high cycle fatigue”,  
NATO Sciences Series II, Kluwer, Vol 11, pp 207-220, 2001

42 Kadi N.

“Rupture par fatigue des arbres clavetés”  
D.E.A., Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz 1997.

43 Kadi N., Gjonaj M., Pluinage G.

“Volumic approach of fatigue failure of notched specimens”,  
Miskolc; Hungary, Porceedings of COPENICUS annual meeting, 1997.

44 Pluinage G., Azari Z, Kadi N, Dlouhy I, Kozak V.

“Effect of ferritic microstructure on local damage zone distance associated with fracture near notch”,  
Theoretical and applied fracture mechanics, ELSEVIER, Vol 31, pp 149-156, 1999.

45 Qylafku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluinage G.

“Application of new model proposal for the fatigue life prediction on notches and key-seats”,  
International Journal of Fatigue, ELSEVIER, Vol 21, pp 753 – 760, 1999.

46 N. Kadi, Z. Azari et G. Pluinage,

“La rupture par fatigue des arbres entaillés”.  
The 38<sup>th</sup> Science Week, 7-12 novembre 1998, Syria.

47 D. Taylor

“Fatigue Thresholds”



---

Butterworths, England, (1989).

48 Brand A., Flavenot J. F., Gregoire R., Tournier C.  
“Recueil de données technologiques sur la fatigue”  
CETIM 1<sup>re</sup> édition, France, 1980.

48 Brand A., Flavenot J. F., Gregoire R., Tournier C.  
“Recueil de données technologiques sur la fatigue”  
CETIM 1<sup>re</sup> édition, France, 1980.

49 Brand A., Flavenot J. F., Gregoire R., Tournier C.  
“Données technologiques sur la fatigue”  
CETIM 2<sup>d</sup> édition, France, 1980.

50 Pluinage G.  
“Fatigue and fracture emanating from notch; the use of the notch stress intensity factor”  
Nuclear Engineering and Design, 185, 1998, pp 173-184.

51 Pluinage G.  
“Hot spot and volumetric approaches to the high cycle fatigue of notched components”  
Technology, Law and insurance, Vol. 4, 1999, pp. 145-153.

52 Pluinage G.  
“Fracture Mechanics from notches”  
Physicochemical Mechanics of Materials, Tome 34, No 6, 1998, pp 7-20.

53 Bomas H, Linkewitz T, Mayr P.  
“Fatigue Limit Prediction of Notched Hard Steel Parts under Uniaxial and Torsional Loading”  
Fifth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, Bedkowski W,  
Lagoda T, editors. Cracow, Poland, 1997, pp. 443-460.

54 Bomas H. et al.  
“Application of the Weakest Link Model to the Fatigue Limit of a Hard Bainitic Steel”.

---

Advances in Fracture Research ICF9, Vol. III, Fatigue of Metallic and Non-metallic Materials and Structures, Sidney, Australia, 1997, pp 1321-1328.

55 Dang Van K.

“High Cycle Fatigue Analysis in Mechanical Design”.

Advances in Fracture Research ICF9, Vol. III, Fatigue of Metallic and Non-metallic Materials and Structures, Sidney, Australia, 1997, pp. 1225-1237.

56 Dang Van K., Cailletaud, Flavenot J. F., Le Douaron, Lieurade H. P.,

“Critère d’amorçage en fatigue à grands nombres de cycles sous sollicitations multiaxiales“, Fatigue 87, Volume II, 3d Int. Conference on fatigue and fatigue Threshold, July 1987.

57 . Sagat S., Shi S. Q., Puls M. P.,

“Crack initiation criterion at notches in Zr-2.5Nb alloys“  
Materials Science Engineering, A176, 1994, pp. 237-247.

58 “Mechanical Testing“

ASM Handbook, Vol. 8, 1992.

59 “Fatigue Failures“

Metals Handbook, Vol. 10, Failure Analysis and Prevention, 8<sup>th</sup> Edition, 1975.

60 Dmytrakh I. M., Akid R., Miller K. J.

“Electrochemistry of deformed smooth surfaces and short corrosion fatigue crack growth behaviour“

British Corrosion Journal, Vol. 32, No. 2, 1997, pp 138-144.

61 “Metals Test Methods and Analytical Procedures“

ASTM Standard.

62 Pluvinage G.

“Notch effect in high cycle fatigue“

---

Advances in Fracture Research, ICF9, Fatigue of Metallic and Non-metallic Materials and Structures, 3

Sindey, Pergamon, 1997, pp 1239-1250.

63 Gouair H., Azari Z., Toth L., Pluinage G.

“Modélisation de la transition rupture fragile-ductile sur des éprouvettes axisymétriques entaillées. Approches statique et dynamique“

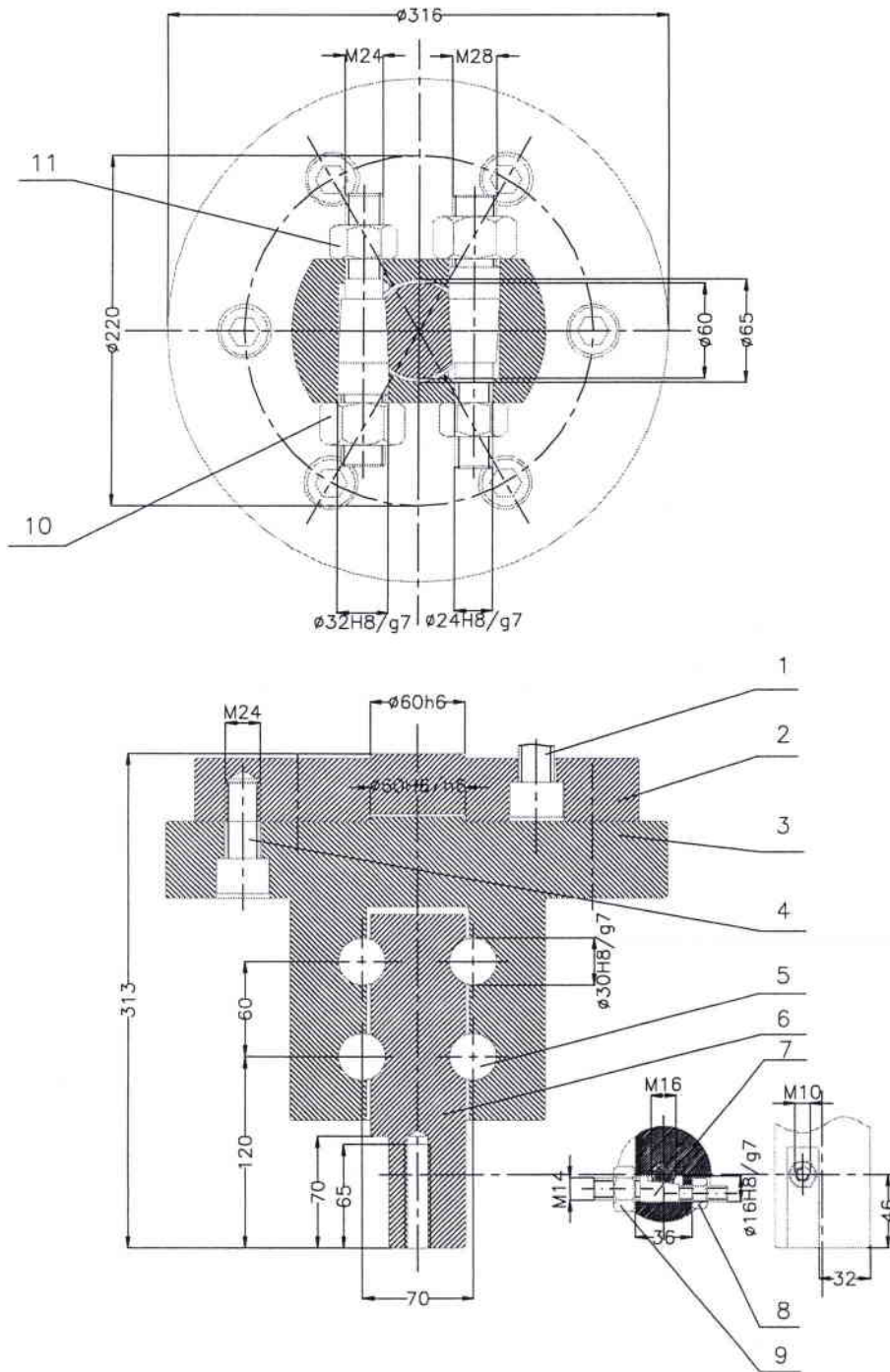
Revue Française de Mécanique, No. 1995-1.

64 G. Qilafku, N. Kadi, Z. Azari, M. Gjonaj and G. Pluinage

“Fatigue of specimens subjected to combined loading: Role of hydrostatic pressure”,

International Journal of Fatigue, Vol23/8, pp 689-701, 2001.

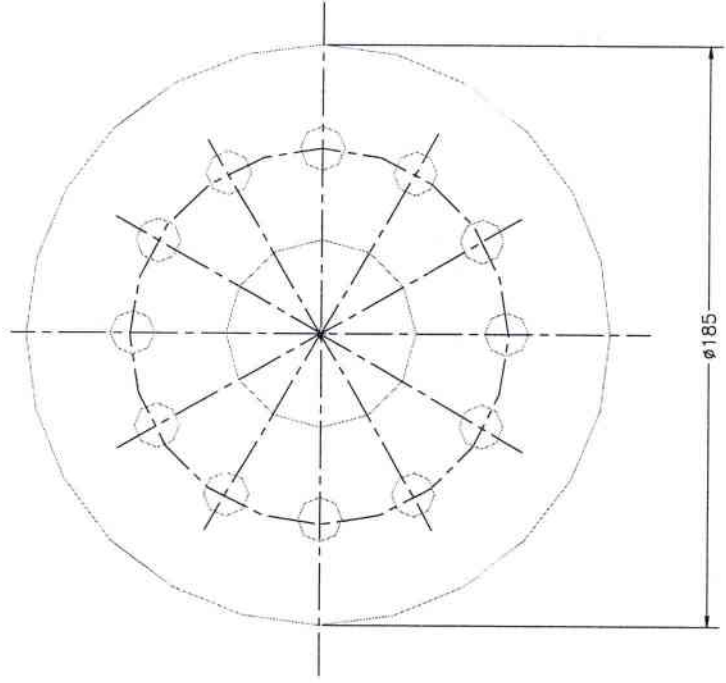
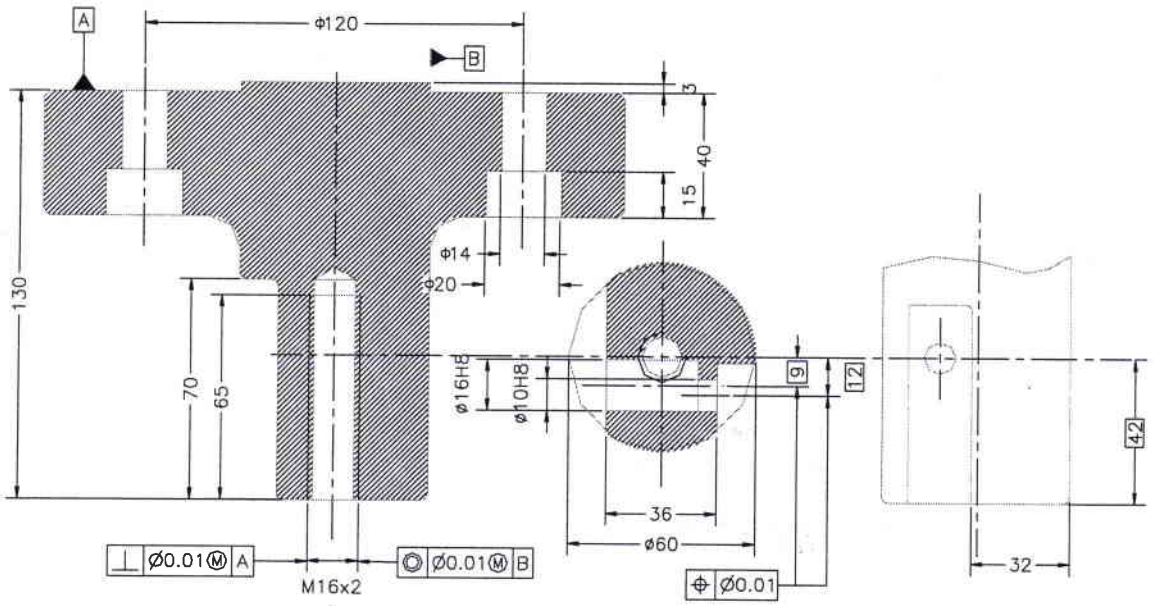
**ANNEXE**



6.	1	PIECE SUPPLEMENTAIRE	35CD4	
5.	4	CLAVETTE CONIQUE	35CD4	
4.	6	BOULON DE LA TETE	35CD4	NFE25-125
3.	1	TETE DU MONTAGE	35CD4	
2.	1	PLAQUE	35CD4	
1.	6	BOULON DE LA MACHINE	35CD4	

REP.	NB.	DESIGNATION	MATIERE	OBS.
ECHELLE	1:2	ENSEMBLE DU MONTAGE DE L'EPROUVETTE D'ESSAIS MULTIAXIAUX		DESSINE PAR: LE
		LFM UNIV. METZ - ENIM		
A2	NUMERO DU DESSIN			00

REP.	NB.	DESIGNATION	MATIERE	OBS.
11.	2	ECROUS	35CD4	NFE25-401
10.	2	ECROUS	35CD4	NFE25-401
9.	1	ECROUS	35CD4	NFE25-401
8.	1	ECROUS	35CD4	NFE25-401
7.	1	CLAVETTE CONIQUE	35CD4	



ECHELLE 1:1	ENSEMBLE DU MONTAGE DE L'EPROUVETTE D'ESSAIS MULTIAXIAUX	DESSINE PAR:	
		LE	
	LFM UNIV. METZ - ENIM		
A2	NUMERO DU DESSIN		06