



**HAL**  
open science

# Solutions périodiques de systèmes différentiels périodiques de dimension trois avec symétries

Mohamed Kurdi

► **To cite this version:**

Mohamed Kurdi. Solutions périodiques de systèmes différentiels périodiques de dimension trois avec symétries. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1987. Français. NNT : 1987METZ003S . tel-01775523

**HAL Id: tel-01775523**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775523>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

présentée  
A LA FACULTE DES SCIENCES DE  
L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le

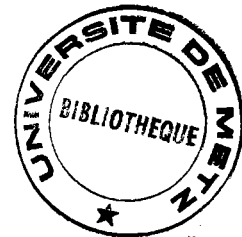
GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Equations Différentielles et Contrôle Optimal  
Mention : Mathématiques Appliquées

par

Mohamed KURDI



SOLUTIONS PERIODIQUES  
DE SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES  
DE DIMENSION TROIS AVEC SYMETRIES

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE  
- METZ

N° inv 19870065

Cote

SM<sub>3</sub> 87/3

Loc

Magasin

JURY

M. J.L. MAWHIN, professeur de l'Université de Louvain, président  
M. B. SCHMITT, professeur de l'Université de Metz, examinateur  
M. C. GODBILLON, professeur de l'Université de Strasbourg, rapporteur  
M. M. POTIER-FERRY, professeur de l'Université de Metz, rapporteur

Année Universitaire 1986-1987.

## AVANT-PROPOS

*Le travail exposé dans ce mémoire a été réalisé au Département de Mathématiques de l'Université de METZ.*

*J'exprime ma respectueuse gratitude envers Monsieur le professeur J. L. MAHWIN de l'Université de Louvain - La-Neuve (Belgique), qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et a accepté de présider le Jury.*

*Je suis profondément reconnaissant envers Monsieur Le professeur B. V. SCHMITT de la Faculté des Sciences de Metz, responsable scientifique et directeur de cette thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de ma gratitude pour ses conseils et l'aide qu'il m'a apportée tout au long de mon travail.*

*Monsieur C. GODBILLON de l'Université de Strasbourg, a bien voulu accepter d'être rapporteur et membre du Jury. Je lui adresse l'expression de mes sincères remerciements.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur le professeur M. POTIER-FERRY de la Faculté des Sciences de METZ, rapporteur du Jury.*

*C'est également avec plaisir que je remercie le Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de METZ et ses membres qui m'ont permis de préparer ce Mémoire dans d'excellentes conditions.*

*Madame Dautriche a dactylographié ce texte. Je lui en suis très reconnaissant.*

*A ma famille*

## TABLE DES MATIÈRES

---

### INTRODUCTION

### PREMIÈRE PARTIE : GENERALITES

---

Chapitre 1 : Définition et propriétés générales des systèmes différentiels périodiques avec symétries.

- § 1. Définition et propriétés des systèmes différentiels avec symétries.
- § 2. Propriétés de certaines solutions de systèmes différentiels possédant une symétrie.
- § 3. Systèmes différentiels P-périodiques avec symétries.

Chapitre 2 : Etude des systèmes différentiels linéaires avec symétries.

- § 1. Systèmes différentiels linéaires P-périodiques avec symétries.
- § 2. Solutions P-périodiques d'un système différentiel linéaire P-périodique avec symétries.
- § 3. Systèmes différentiels linéaires autonomes avec symétries.
- § 4. Stabilité.
- § 5. Equations aux variations associées à une solution périodique symétrique.

### DEUXIÈME PARTIE : RECHERCHE DE CRITERE PERMETTANT D'AFFIRMER QU'UN SYSTEME DIFFERENTIEL NON LINEAIRE AVEC SYMETRIE ADMET DES SOLUTIONS PERIODIQUES.

---

Chapitre 1 : Perturbation de système linéaire.

- § 1. Introduction et définition.
- § 2. Méthode de Malkin.
- § 3. Méthode de Hale.
- § 4. Méthode des symétries.

Chapitre 2 : Existence des solutions périodiques d'un système différentiel périodique non linéaire admettant une symétrie.

- § 1. Introduction.
- § 2. Existence de solutions périodiques d'un système différentiel périodique non linéaire admettant une symétrie par rapport à un plan.
- § 3. Existence d'une solution périodique d'un système différentiel périodique non linéaire admettant une symétrie par rapport à l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

## I N T R O D U C T I O N

---

L'étude des équations différentielles périodiques présente un intérêt théorique considérable et correspond à des problèmes pratiques importants pour tout ce qui concerne les phénomènes de vibration, résonance.

Considérons le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (f)$$

En faisant les deux hypothèses sur (f)

1. (f) est P-périodique (c'est à dire,  $\exists P \in \mathbb{R}$  tel que  $f(t+P,x) = f(t,x)$ )
2. (f) admet certaines symétries; on dit que (f) possède par exemple, une symétrie par rapport au plan  $\bar{\sigma}_i$  ( $0 \leq x_j \leq x_k$ ) au temps  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si :

$$f(\alpha+t, S(x)) = S(-f(\alpha-t,x))$$

où  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est la symétrie autour de  $\bar{\sigma}_i$  parallèlement à  $\sigma_i$  ( $0 \leq x_j$ ),  $(i,j,k) \in \{1,2,3\}$ , on peut obtenir des résultats intéressants comme on l'a vu en dimension deux dans [3] sur le plan théorique, mais aussi sur le plan numérique lorsque l'on cherche à localiser numériquement des solutions périodiques avec symétries (par exemple en dimension trois; voir [4]).

Le but de notre travail consiste à étudier un système différentiel P-périodique de dimension trois ayant certaines symétries et à chercher ses solutions périodiques symétriques.

Cette thèse comprend deux parties.

La première partie contient deux chapitres. Dans le premier chapitre on trouve des définitions et propriétés de symétries soit pour les systèmes différentiels, soit pour leurs solutions; on termine ce chapitre en traitant les systèmes différentiels P-périodiques avec symétries.

Dans le deuxième chapitre on a étudié les systèmes différentiels périodiques linéaires avec symétries. On a obtenu un résultat remarquable, à savoir que tout système différentiel linéaire P-périodique avec symétrie par rapport à un plan ou à un axe au temps  $\alpha$ , admet toujours une solution périodique non triviale dont l'orbite est symétrique par rapport à l'espace de symétrie, ce qui veut dire que tout système



différentiel linéaire P-périodique avec symétrie est toujours critique; nous finissons par une structuration déterminée par l'intermédiaire de la demi application de Poincaré  $X(P/2)$  de  $L_i^j(P)$ , (c'est l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques avec symétrie par rapport à l'axe  $\sigma_i$  ou plan  $\bar{\sigma}_i$  au temps  $\alpha$ , et où  $j$  est la dimension de l'espace des solutions P-périodiques). Enfin, nous étudions la stabilité d'un tel système  $(A) \in L_i(P)$  et l'équation aux variations associée à une solution périodique symétrique; signalons que cette partie du travail figure dans [4].

La deuxième partie contient également deux chapitres. Nous avons exploité l'acquis de la première partie pour fournir une nouvelle méthode dite "Méthode des Symétries" pour répondre au problème d'existence de solutions périodiques d'un système différentiel perturbé critique avec symétrie, c'est à dire un système différentiel ayant la forme

$$\dot{x} = A(t)x + \lambda G(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

tel que

$$\dot{x} = A(t)x$$

possède au moins une solution périodique non identiquement nulle. On sait que dans ce cas critique, le théorème de prolongement de Poincaré ne permet pas de prouver l'existence d'une solution périodique pour le système perturbé; nous introduisons alors la notion de "système linéaire non singulier (resp. singulier) par rapport à la symétrie  $\bar{\sigma}_i$ ", dans le cas où l'image par la demi-application de Poincaré  $X(P/2)$  de l'espace  $\bar{\sigma}_i$  est transverse (resp. non transverse) à  $\bar{\sigma}_i$  lui-même. Dans ce cas, par perturbation d'un système différentiel linéaire périodique non singulier par rapport à la symétrie  $\bar{\sigma}_i$ , la propriété de transversalité de l'image de  $\bar{\sigma}_i$  par la demi-application de Poincaré du système non linéaire associé subsiste, ce qui nous permet d'affirmer l'existence d'une infinité de solutions périodiques du système différentiel non linéaire perturbé.

Bien entendu, la perturbation d'un système différentiel linéaire critique a été étudiée dans la littérature; ainsi, Malkin [11] sans faire aucune hypothèse de symétries, a montré à l'aide d'un théorème des fonctions implicites que certains systèmes différentiels perturbés possèdent une solution périodique; malheureusement il semble que, dans de nombreux cas où l'hypothèse de symétrie est présente, la condition de transversalité permettant d'utiliser le théorème des fonctions implicites n'est pas satisfaite, et donc la méthode de Malkin est inapplicable. Nous établirons pourtant (voir I.4.4.) sur certains exemples, le caractère "non singulier" de certains de ces systèmes différentiels et donc, par la méthode des symétries, l'existence de solutions périodiques du système perturbé.

De même dans le cas où le système différentiel possède une symétrie (plan ou origine), J.K. HALE [8] a montré que si toutes les solutions du système différentiel linéaire (non perturbé) sont périodiques et si certaines conditions sont satisfaites (si "l'équation aux bifurcations" a des solutions), le système perturbé a des solutions périodiques; mais la méthode de Hale, en pratique, est très complexe et souvent inextricable dans l'étude des systèmes différentiels explicites. Nous verrons sur un exemple (I.4.7.) que la méthode des symétries permet par contre de conclure sans difficulté.

---

L'objectif principal du deuxième chapitre est de chercher quelques critères permettant de prouver l'existence d'une ou d'une infinité de solution périodique d'un système différentiel périodique non linéaire avec symétrie, de la forme

$$\dot{x} = B x + G(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

où aucun petit paramètre n'est donc présent.

On sait en général qu'il est difficile de répondre à ce problème, mais malgré tout on a pu trouver une réponse pour certains systèmes différentiels périodiques avec symétries. Dans le § 2 et pour la symétrie par rapport à un plan, nous avons pu conclure dans le cas où  $G$  est borné, et le cas où  $G$  satisfait certaines conditions de majoration de type affine ou linéaire, à l'existence d'une infinité de solutions périodiques (voir proposition (18,19,20)). Dans le § 3 nous avons fait une étude similaire dans le cas d'une symétrie par rapport à l'origine.-

---

# **PREMIERE PARTIE**

*GENERALITES*

## PREMIER CHAPITRE

### DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES

#### DES SYSTEMES DIFFERENTIELS

#### PERIODIQUES AVEC SYMETRIES

#### I.1. Définition et propriétés des systèmes différentiels avec symétries

=====  
 Ce paragraphe débute par la définition et une interprétation géométrique de symétries d'un système différentiel d'ordre trois; ensuite nous donnons quelques exemples de systèmes différentiels avec symétries; enfin nous étudierons des systèmes différentiels avec deux symétries en deux temps égaux ou différents.

On considère le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad (f)$$

où  $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , est de classe  $C^1$  en  $x$ , et continue par morceaux en  $t$ ; on notera  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées de  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Pour tout  $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , on désigne par  $V_t(x)$  le vecteur  $f(t,x)$  issu de  $x$  à l'instant  $t$ .

##### I.1.1. Définition 1

=====

On dira que  $(f)$  admet une symétrie par rapport à l'axe  $o x_i$  (resp. au plan  $o x_j x_k$ ) au temps  $t = \alpha$ , si la relation suivante est satisfaite :

$$V_{\alpha+t}(S(x)) = S(-V_{\alpha-t}(x)), \quad (1)$$

où  $S(x)$  est la symétrie par rapport à cet axe (resp. ce plan).

Par rapport aux coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ , si l'espace de symétrie est l'axe  $o x_1$ , alors la relation (1) s'exprime par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = -f_1(\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3) \\ f_k(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = f_k(\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3) \end{cases} \quad k = (2, 3).$$

De même si l'espace de symétrie est le plan  $o x_2 x_3$ , alors nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = f_1(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3) \\ f_k(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = -f_k(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (k = 2, 3);$$

on désigne dans la suite l'ensemble de tous les espaces de symétries par  $E = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\}$  où  $\sigma_1$  est l'axe  $o x_1$ , et où  $\bar{\sigma}_1$  est le plan  $o x_2 x_3$ ; dans la suite, nous noterons  $\sigma$  un élément de  $E$ ;  $\bar{\sigma}$  représente alors  $\bar{\sigma}_i$  si  $\sigma = \sigma_i$ , et  $\sigma_i$  si  $\sigma = \bar{\sigma}_i$ . On notera  $F_\sigma^\alpha$  l'ensemble des systèmes différentiels admettant une symétrie par rapport à l'espace  $\sigma$  au temps  $t = \alpha$ , où  $\sigma \in E$ .

Remarque 1

Il est possible que le système (f) possède une symétrie par rapport à un espace  $\sigma$  au temps  $\alpha$ , et une autre par rapport à l'espace  $\sigma'$  au temps  $\beta$ ; on a alors :

$$(f) \in F_\sigma^\alpha \cap F_{\sigma'}^\beta \quad (\sigma, \sigma') \in E$$

I.1.2. Quelques exemples

=====

Exemple 1 : Soit l'équation différentielle d'ordre trois :

$$y''' + g(t, y, y', y'') = 0 \quad (2)$$

où  $y \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . Procédons au changement de variables suivant :

$$y' = x_1, \quad y'' = x_2, \quad y = x_3 \quad (3)$$

on obtient un système équivalent à l'équation (2) :

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -g(t, x_1, x_2, x_3) \\ x'_3 = x_1 \end{cases} \quad (4)$$

le système (4) admet une symétrie par rapport à l'axe  $\sigma_1$  (resp. plan  $\bar{\sigma}_1$ ) au temps  $t=0$  si la fonction  $g$  satisfait les conditions suivantes :

$$g(t, x_1, x_2, x_3) = g(-t, x_1, -x_2, -x_3), \text{ (resp. } g(t, x_1, x_2, x_3) = -g(-t, -x_1, x_2, x_3))$$

Ainsi l'équation

$$y''' + y y' y'' + 2y'^3 = \cos 2t$$

se transforme, par le changement de variables (3), en un système différentiel

appartenant à  $F_{\sigma_1}^0 \cap F_{\sigma_1}^{\pi/4}$

Exemple 2 : Soit l'équation d'Euler

$$x''' + a_1 t^{-2} x'' + a_2 t^{-3} x = 0 \quad (E)$$

en procédant au changement de variables :

$$x = x_1, x' = x_2, x'' = x_3$$

on obtient un système différentiel appartenant à  $F_{\sigma_2}^0$

Exemple 3 : Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin t \\ \dot{x}_2 = \cos t \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases} \quad (b)$$

on a ici l'exemple d'un système différentiel non linéaire  $2\pi$  périodique

appartenant à  $F_{\sigma_1}^0 \cap F_{\sigma_1}^{\pi/2} \cap F_{\sigma_2}^{\pi/2} \cap F_{\sigma_2}^0$

Exemple 4 : Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 x_3 \end{cases} \quad (c)$$

on vérifie que (c) appartient à  $F_{\sigma_1}^{\alpha_1} \cap F_{\sigma_2}^{\alpha_2} \cap F_{\sigma_3}^{\alpha_3}$  où  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}$ .

Pour toutes les démonstrations qui vont suivre, et sauf précision contraire, par symétrie axiale on sous entend la symétrie par rapport à l'axe  $\sigma_1$  et par symétrie par rapport à un plan on sous entend le plan  $\bar{\sigma}_1$ .

I.1.3. Nous examinons dans ce paragraphe des systèmes différentiels quelconques avec deux symétries; on montrera qu'un système différentiel avec deux symétries par rapport à deux espaces de symétrie ou un seul, en deux temps différents est toujours périodique.

Proposition 1

1. Si  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma}^{\beta}$  où  $(\sigma \in E)$  et  $\alpha \neq \beta$ , alors  $(f)$  est périodique de période  $2(\beta-\alpha)$ .
2. Si  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma'}^{\beta}$  où  $(\sigma \neq \sigma', \sigma \in E, \sigma' \in E)$  et  $\alpha \neq \beta$ , alors  $(f)$  est périodique de période  $4(\beta-\alpha)$ .

Démonstration

1. D'après la définition (1) on a :

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^i f_1(2\alpha-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) = \\ &= f_1(2(\beta-\alpha)+t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k(t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^{1-i} f_k(2\alpha-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) = \\ &= f_k(2(\beta-\alpha)+t, x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

où  $(k=2,3)$  et où  $(i=0 \text{ ou } 1)$  pour  $\bar{\sigma}_1, \sigma_1$  respectivement.

2. On prend  $\sigma = \sigma_1, \sigma' = \bar{\sigma}_1$ , d'après la définition (1) on a :

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, x_3) &= -f_1(2\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3) = f_1(4\alpha-2\beta-t, -x_1, x_2, x_3) = \\ &= f_1(2\beta-(4\beta-4\alpha+t), -x_1, x_2, x_3) = f_1(4\beta-4\alpha+t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k(t, x_1, x_2, x_3) &= -f_k(2\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3) = -f_k(2\beta-2\alpha+t, -x_1, -x_2, -x_3) = \\ &= f_k(2\beta-(4\beta-4\alpha+t), -x_1, x_2, x_3) = f_k(4\beta-4\alpha+t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

où  $k=(2,3)$ , ce qui achève la démonstration.

Dans la proposition précédente on s'est limité à étudier des systèmes différentiels admettant des symétries par rapport à deux espaces (deux axes, deux plans, un axe et un plan) car l'étude des systèmes différentiels admettant plus de deux symétries se ramène à l'étude des systèmes différentiels admet-

tant deux symétries en effet si  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma}^{\beta} \cap F_{\sigma}^{\gamma}$  alors d'après

la proposition (1)(f) est périodique de période  $P = \min(2(\beta-\alpha), 2(\beta-\gamma), 2(\gamma-\alpha))$ .

I.2. Propriétés de certaines solutions de systèmes différentiels possédant  
=====  
une symétrie  
=====

On a vu dans (I.1) les propriétés des systèmes différentiels avec symétries. Nous allons voir dans ce paragraphe une propriété de certaines de leurs solutions; on démontrera que lorsque le système (f) possède une symétrie par rapport à l'espace  $\sigma(\sigma \in E)$  au temps  $\alpha$ , alors l'orbite de la solution issue au temps  $\alpha$  d'un point de l'espace  $\sigma$  de symétrie, est symétrique par rapport à cet espace.

On notera  $S(f)$  l'ensemble des solutions de (f), on désigne par  $I(\varphi) \subset \mathbb{R}$ , l'ensemble de définition maximal de la solution  $\varphi \in S(f)$  ( $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ).

I.2.1. Proposition 2  
=====

Soit  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}$  où  $(\sigma \in E)$ , et soit  $\varphi \in S(f)$  tel que  $\alpha \in I(\varphi)$ ; si  $\varphi(\alpha) \in \sigma$  alors on a :

1.  $I(\varphi)$  est centré en  $\alpha$
2.  $\varphi_k(\alpha+t) = (-1)^{v_k} \varphi_k(\alpha-t)$ ,  $v_k \in \{0,1\}$ ,  $k \in \{1,2,3\}$

où  $v_k=0$  si l'indice  $k$  est le même que l'indice de l'espace de symétrie, sinon  $v_k=1$ .

L'orbite de  $\varphi$  dans l'espace des phases est alors symétrique par rapport à l'espace de symétrie  $\sigma$ .



Démonstration

Puisque l'ouvert  $I(\varphi)$  contient  $\alpha$ , il existe un ouvert contenu dans  $I(\varphi)$  et centré en  $\alpha$ . Soit  $J \subset I(\varphi)$  le plus grand intervalle centré en  $\alpha$ , soit  $t \in J$  alors  $(2\alpha - t) \in J$ .

Posons :

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_\ell(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_1(2\alpha - t) \\ \varphi_\ell(2\alpha - t) \end{pmatrix} \quad \ell = (2, 3);$$

alors

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_\ell(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(2\alpha - t) \\ -\varphi_\ell(2\alpha - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(2\alpha - t), \varphi_1(2\alpha - t), \varphi_2(2\alpha - t), \varphi_3(2\alpha - t) \\ -f_\ell(2\alpha - t), \varphi_1(2\alpha - t), \varphi_2(2\alpha - t), \varphi_3(2\alpha - t) \end{pmatrix}$$

et d'après la définition (1) on obtient

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_\ell(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \\ f_\ell(t, w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \end{pmatrix} \quad (\ell = 2, 3)$$

Donc  $w(t)$  est solution de (f); de plus  $w(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , ceci entraîne, d'après le théorème d'unicité que les deux solutions coïncident pour tout  $t \in J(\varphi)$ .

Pour démontrer que  $I(\alpha)$  est centré en  $\alpha$  on va distinguer deux cas

1.  $I(\varphi)$  est égale à  $\mathbb{R}$ , alors il est centré en  $\alpha$
2.  $I(\varphi)$  est borné soit  $m, M$  borne inférieure, supérieure respectivement; alors on raisonne par l'absurde :

$$\text{si } \alpha \neq \frac{M + m}{2}, \quad \alpha > \frac{m + M}{2} \text{ par exemple, } (J = ]M', M[).$$

Comme  $M' \in J$ , la solution  $\varphi$  est définie et prolongeable dans un intervalle centré en  $M'$ , grace aux propriétés de symétrie de  $\varphi(\varphi_k(\alpha + t) = (-1)^k \varphi_k(\alpha - t))$ ,  $\varphi$  est aussi prolongeable sur un intervalle ouvert centré en  $M$ , et donc  $M$  n'est pas la borne supérieure de  $J$  ni de  $I(\varphi)$ .

Nous avons vu en proposition (1) que les systèmes différentiels admettant deux symétries par rapport à un espace ou deux espaces en deux temps différents sont des systèmes périodiques; on peut énoncer une proposition semblable concernant les orbites des solutions :

I.2.2. Proposition 3

=====

Soit  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma'}^{\beta}$ , où  $\sigma \in E$ ,  $\sigma' \in E$ , et  $\beta \neq \alpha$ ; soit  $\varphi \in S(f)$  telle que :

$\alpha \in I(\varphi)$ ,  $\beta \in I(\varphi)$ ; si  $\varphi(\alpha) \in \sigma$ ,  $\varphi(\beta) \in \sigma'$  alors on a :

1.  $\varphi$  est définie pour tout  $t$
2. Si  $\sigma' = \sigma$  (resp.  $\sigma' \neq \sigma$ )  $\varphi$  est périodique de période  $2(\beta-\alpha)$ , (resp.  $4(\beta-\alpha)$ ).

L'orbite de  $\varphi$  dans l'espace des phases  $(ox_1, ox_2, ox_3)$  est symétrique par rapport aux deux espaces de symétries  $\sigma, \sigma'$ , en particulier à leur intersection.

Démonstration

1. On démontre tout d'abord que  $I(\varphi)$  est égale à  $\mathbb{R}$

En effet, d'après la proposition (2),  $I(\varphi)$  est un intervalle centré en  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\alpha \neq \beta$ , donc  $I(\varphi) = \mathbb{R}$ .

2. Pour la démonstration on prendra  $\sigma' = \sigma = \sigma_1$  (resp.  $\sigma = \sigma_1, \sigma' = \bar{\sigma}_1$ ), les autres cas se traitant de manière semblable.

D'après la proposition (2) on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi_1(2\alpha-t) = \varphi_1(2(\beta-\alpha)+t) \\ \varphi_\ell(t) = -\varphi_\ell(2\alpha-t) = \varphi_\ell(2(\beta-\alpha)+t); \end{cases} \quad \ell = (2,3)$$

respectivement :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi_1(2\beta-(2\beta-2\alpha+t)) = -\varphi_1(2(\beta-\alpha)+t) = \varphi_1(4(\beta-\alpha)+t) \\ \varphi_\ell(t) = -\varphi_\ell(2\beta-(2\beta-2\alpha+t)) = -\varphi_\ell(2(\beta-\alpha)+t) = \varphi_\ell(4(\beta-\alpha)+t) \end{cases}$$

ce qui prouve la périodicité de  $\varphi$ ; d'après la proposition (2) on en déduit que l'orbite est symétrique par rapport à l'espace de symétrie.

Remarque 2

Dans le cas (b), si  $\sigma, \sigma'$  sont deux espaces supplémentaires, alors la solution  $\varphi$  est  $2(\beta-\alpha)$  antipériodique (i.e.  $\varphi(2(\beta-\alpha)+t) = -\varphi(t)$ ); son orbite dans l'espace des phases est symétrique par rapport à l'origine.

I.3. Systèmes différentiels P-périodiques avec symétries

=====

Dans ce qui précède, on a vu qu'un système différentiel avec deux symétries en deux temps différents est périodique, et qu'avec des conditions supplémentaires, certaines de ses solutions sont périodiques.

Nous étudions ici des systèmes différentiels périodiques, à priori, et avec symétries.

On notera par  $F_{\sigma}^{\alpha}(P) \subset F_{\sigma}^{\alpha}$  l'ensemble des systèmes différentiels (f) avec symétrie par rapport à l'espace de symétrie  $\sigma \in E$  au temps  $\alpha$  et de période P, c'est à dire tels que :

$$f(t+P, x) = f(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad \forall x \in \mathbb{R}^3;$$

Il ne sera pas supposé, sauf mention explicite, que P est la période minimale de (f); on désigne par P(f) l'ensemble des périodes de (f).

On va voir maintenant qu'un système différentiel périodique avec une symétrie possède alors d'autres symétries.

#### I.3.1. Proposition 4

=====

Si (f)  $\in F_{\sigma}^{\alpha}(P)$  où ( $\sigma \in E$ ) alors pour tout  $P' \in P(f)$  on a :

$$(f) \in F_{\sigma}^{\alpha+P'/2}$$

#### Démonstration

D'après la définition (1), au temps  $t+P'/2$  on a :

$$\begin{aligned} f_1(\alpha+P'/2+t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^i f_1(\alpha-P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) \\ &= (-1)^i f_1(\alpha+P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\ell}(\alpha+P'/2+t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^{1-i} f_{\ell}(\alpha-P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) \\ &= (-1)^{1-i} f_{\ell}(\alpha+P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) \end{aligned}$$

où ( $i = 0, 1$ ) pour  $\bar{\sigma}_1, \sigma_1$  respectivement, et ( $\ell = 2, 3$ )

Ce qui prouve que (f)  $\in F_{\sigma}^{\alpha+P'/2}(P)$ .

Corollaire 1

Soit  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap F_{\sigma'}^{\beta}(P)$  où  $(\sigma, \sigma') \in E$ ,  $\beta \neq \alpha$ ; alors il existe

$P' \in P(f)$  tel que :

a.  $\beta \equiv \alpha \pmod{P'/2}$  pour  $\sigma = \sigma'$

b.  $\beta \equiv \alpha \pmod{P'/4}$  pour  $\sigma \neq \sigma'$

Démonstration

Pour (a) d'après la proposition (1), on a :  $2(\beta - \alpha) \in P(f)$ , et de la même façon pour (b) on a :  $4(\beta - \alpha) \in P(f)$ .

I.3.2. Solutions P-périodiques symétriques d'un système différentiel

=====

P-périodique avec symétrie

=====

Dans notre étude des systèmes différentiels périodiques avec symétries on s'intéresse particulièrement aux solutions périodiques dont les orbites sont symétriques; les propositions (1) et (3) précédentes nous permettent d'énoncer :

Corollaire 2

a. Soit  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P)$ ,  $\sigma \in E$ ; notons par  $S_{\sigma}^{\alpha}(P)$  l'ensemble des solutions

$(\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$  de  $(f)$  qui vérifient :

$$\varphi(\alpha) \in \sigma \text{ et } \varphi(\alpha + P/2) \in \sigma$$

si  $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$ , alors  $\varphi$  est P-périodique, son orbite est symétrique par rapport à l'espace de symétrie  $\sigma$ .

b. Soit  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap F_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$  où  $\sigma \in E$ ,  $\bar{\sigma} \in E$ ; notons par  $S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$

l'ensemble des solutions  $(\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$  qui vérifient

$$\varphi(\alpha) \in \sigma \text{ et } \varphi(\alpha + P/4) \in \bar{\sigma}$$

## DEUXIEME CHAPITRE

### ETUDE DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES AVEC SYMETRIES.

#### II.1. Systèmes différentiels linéaires P-périodiques avec symétries =====

Nous allons étudier dans ce paragraphe les systèmes linéaires périodiques avec symétries; cette étude est liée au chapitre précédent; nous verrons que si un système linéaire périodique admet une symétrie par rapport à un espace  $\sigma \in E$ , il admet aussi une symétrie par rapport à l'espace supplémentaire  $\bar{\sigma} \in E$ , au même temps. Nous donnerons une caractérisation matricielle d'un système linéaire périodique admettant une symétrie et nous verrons également une propriété de sa solution matricielle fondamentale.

##### II.1.1. Notation =====

Soit  $L(P)$  l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques de dimension trois

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A)$$

avec  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , et où  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(3, \mathbb{R})$  est continue par morceaux et P-périodique ( $A(t+P)=A(t)$ ).

Définition 2 : On dit que  $(A) \in L(P)$  admet une symétrie par rapport à l'espace  $\sigma \in E$  au temps  $\alpha$  si  $(A) \in L(P) \cap F_{\sigma}^{\alpha}(P)$ . On notera  $L_{\sigma}^{\alpha}(P)$  l'ensemble des systèmes linéaires P-périodiques avec symétrie par rapport à l'espace  $\sigma \in E$  au temps  $\alpha$ .

II.1.2. Proposition 5

=====

Si (A) appartient à  $L_{\sigma}^{\alpha}(P)$ , où  $\sigma \in E$ , alors (A) appartient à  $L_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(P)$ .

Démonstration : Pour la démonstration, on prend  $\sigma = \sigma_1$ , on considère  $A(t) = (a_{mn}(t))$ , ( $m, n = 1, 2, 3$ ), les autres cas se traitant de manière similaire.

En effet, (A)  $\in L_{\sigma}^{\alpha}(P)$ , entraîne d'après la définition (I.1.1.) que

$$\begin{aligned} a_{mm}(t) &= -a_{mm}(-t) & a_{12}(t) &= a_{12}(-t) & a_{21}(t) &= a_{21}(-t) \\ a_{23}(t) &= -a_{23}(-t) & a_{13}(t) &= a_{13}(-t) & a_{31}(t) &= a_{31}(-t) \\ a_{32}(t) &= -a_{32}(-t) \end{aligned}$$

Ce sont les mêmes conditions pour que (A)  $\in L_{\bar{\sigma}_1}^{\alpha}(P)$ . Nous allons identifier

ces deux ensembles  $L_{\sigma}^{\alpha}(P)$ ,  $L_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(P)$ , on notera  $L_i^{\alpha}(P)$  l'ensemble de

$$L_{\bar{\sigma}_i}^{\alpha}(P) = L_{\sigma_i}^{\alpha}(P), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

II.1.3. Proposition 6

=====

Soit (A)  $\in L_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap L_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$ , où  $\sigma \in E$ , alors (A) est périodique de période  $P/2$ , et (A)  $\in L_i^{\alpha}(P/2)$ .

Démonstration : En effet soit (A)  $\in L_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap L_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$ , alors d'après la proposition (5), (A)  $\in L_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap L_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$ , et de la proposition (1) on a

déduit que  $P/2$  est une période de la matrice A, [ $A(t+P/2) = A(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ]; de plus (A) admet une symétrie par rapport à l'espace  $\sigma \in E$  au temps  $\alpha$  c'est à dire (A)  $\in L_{\sigma}^{\alpha}(P/2)$ .

Nous supposons, sans restriction de la généralité que  $\alpha = 0$ ; en effet soit  $(A) \in L_i^\alpha(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , posons  $\tau = t - \alpha$  et  $y(\tau) = x(t)$ ; on vérifie que  $y(\tau)$  est une solution du système :

$$\frac{dy}{d\tau} = B(\tau)y \quad (B),$$

avec  $B(\tau) = A(t - \alpha)$  et que  $(B) \in L_i^0(P)$ , nous noterons  $L_i(P)$  l'ensemble  $L_i^0(P)$ ; on considère dans la suite le système  $(A)$  avec  $A(t) = (a_{mn}(t))$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ).

#### II.1.4. Caractérisation matricielle de $(A) \in L_i(P)$

=====

Nous allons donner dans la proposition suivante une caractérisation matricielle de  $(A) \in L_i(P)$ , et aussi par un système  $(A)$  avec plusieurs symétries.

#### Proposition 7

=====

a) un système  $(A) \in L(P)$  est dans  $L_i(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , si et seulement si on a :

1.  $a_{mm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m=1,2,3)$  est une fonction impaire
2.  $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m=i, n \neq m, n=i, m \neq n)$  est une fonction paire
3.  $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m \neq i, n \neq i)$  est une fonction impaire.

b) un système  $(A) \in L(P)$  est dans  $[L_i(P) \cap L_j(P)]$  où  $i \neq j, (i,j) \in \{1,2,3\}$  si et seulement si on a

1.  $a_{mm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m=1,2,3)$  est une fonction impaire
2.  $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m=i, j, n=j, i)$  est une fonction paire
3. toutes les autres fonctions sont nulles.

c) un système (A) e  $L(P)$  est dans  $[L_1(P) \cap L_2(P) \cap L_3(P)]$  c'est à dire (A) avec trois symétries (trois axes et trois plans), si et seulement si on a :

1.  $a_{mm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m=1,2,3)$  est une fonction impaire
2.  $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m \neq n)$  est une fonction nulle.

Démonstration : On va démontrer (a) pour  $i=1$  c'est à dire

(A) e  $L_1(P) = L_{\sigma_1}(P) = L_{\bar{\sigma}_1}(P)$ ; si (A) e  $L_1(P)$  alors d'après la définition (I.1.1.) on a :

$$A(-t) = \begin{pmatrix} a_{11}(-t) & a_{12}(-t) & a_{13}(-t) \\ a_{21}(-t) & a_{22}(-t) & a_{23}(-t) \\ a_{31}(-t) & a_{32}(-t) & a_{33}(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & -a_{22}(t) & -a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & -a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}$$

ce qu'il faut démontrer.

De la même façon on démontre (b) et (c).

Exemple : Soit l'équation linéaire à coefficient P-périodique

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0 \quad (L);$$

en procédant au changement de variables  $y=y_1, y'=y_2, y''=y_3$  on obtient un système différentiel P-périodique appartenant à  $L_2(P)$ , si et seulement si  $a(t)$  et  $c(t)$  sont fonctions impaires et  $b(t)$  est fonction paire.

La proposition précédente (7) nous montre que si (A) e  $L_i(P)$ , alors la

trace de la matrice  $A(\sum_{m=1}^3 a_{mm}(t))$  est toujours une fonction impaire par

rapport à  $t$ . Notons  $X : \mathbb{R} \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$  la solution matricielle fondamentale en  $t=0$  de (A)



Corollaire 3

Si  $(A) \in L_i(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , alors l'application de Poincaré  $X(P)$  est conservative.

Démonstration : D'après le théorème de Liouville, voir [11], on a :

$$\det X(P) = \exp \int_0^P \text{trace } A(t) dt$$

et d'après la proposition (7) on déduit que :

$$\det X(P) = 1.$$

Ce qui prouve que  $X(P)$  est conservative, c'est à dire qu'elle conserve les volumes; on en déduit qu'un système linéaire  $P$ -périodique appartenant à  $L_i(P)$  ne peut pas être asymptotiquement stable.

II.1.5. Propriétés de la solution matricielle fondamentale d'un système  
===== linéaire  $P$ -périodique appartenant à  $L_i(P)$ .  
=====

On sait pour tout système  $(A) \in L(P)$  que, si  $X(t)$  est sa solution fondamentale, alors  $X(t+P)$  est aussi solution de  $(A)$ , voir [9] de plus,  $X(t)$  a alors les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) \in GL^+(3, \mathbb{R}) \\ X(0) = I \text{ matrice d'identité} \\ X(t+P) = X(t) X(P) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (5)$$

On va examiner dans la proposition suivante une propriété concernant la solution matricielle fondamentale d'un système linéaire  $P$ -périodique avec symétries.

Proposition 8  
=====

Un système (A)  $\in L(P)$  de solution matricielle fondamentale  $X(t)$ , est dans  $L_i(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , si et seulement si on a :

$$X(-t) = M_i X(t) M_i \quad (6)$$

où  $M_i = (a_{mm})$  est une matrice constante diagonale (3x3) telle que :

$$(a_{ii} = 1, a_{mm} = -1 \text{ où } m \neq i).$$

Démonstration : On va démontrer la relation (6) pour (i=1).

Soit (A)  $\in L_1(P) = L_{\sigma_1}(P) \cap L_{\bar{\sigma}_1}(P)$ ,

$$\text{et soit } X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & \xi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) & \xi_2(t) \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix}$$

la solution matricielle fondamentale de (A); d'après la proposition (2) on a  $(\varphi_1, \psi_2, \psi_3, \xi_2, \xi_3)$  sont des fonctions paires par rapport à t, tandis que  $(\varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \xi_1)$  sont des fonctions impaires, d'où

$$X(-t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & -\psi_1(t) & -\xi_1(t) \\ -\varphi_2(t) & \psi_2(t) & \xi_2(t) \\ -\varphi_3(t) & \psi_3(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & \xi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) & \xi_2(t) \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$X(-t) = M_1 X(t) M_1$  ce qu'il faut démontrer.

Corollaire 4

Si (A)  $\in L_i(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , alors on a :

$$X(t+P/2) = M_i X(P/2-t) X^{-1}(P/2) M_i X(P/2) \quad t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Démonstration : En effet, d'après la proposition (8) et la formule (5) on a :

$$X(t+P) = X(t) X(P) \quad t \in \mathbb{R} \quad (a)$$

$$X(-t) = M_i X(t) M_i \quad t \in \mathbb{R} \quad (b)$$

en prenant dans (b)  $t = -t-P/2$  on obtient

$$X(t+P/2) = M_i X(-t-P/2) M_i = M_i X(-t+P/2) X^{-1}(P) M_i \quad (c)$$

d'autre part on a :

$$X^{-1}(P) = X^{-1}(P/2) M_i X(P/2) M_i \quad (d)$$

en utilisant (d) dans (c) on obtient la relation (7).

La relation (7) permet d'exprimer  $X(t)$  pour  $t \in [P/2, P]$  connaissant  $X(t)$  pour  $t \in [0, P/2]$ .

Et même à chaque application

$$[0, P/2] \rightarrow GL^+(3, \mathbb{R})$$

$$t \rightarrow X(t)$$

avec  $X(0) = I$ , la matrice d'identité, différentiable continument, par morceaux, on peut associer une matrice  $A(t)$  continue par morceaux, telle que

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X,$$

c'est à dire  $A(t) = \frac{dX(t)}{dt} X^{-1}(t)$ .

Si  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , vérifie la relation (c) pour  $t \in [0, P/2]$ ; et la relation (a) pour  $t \in \mathbb{R}$ , alors on obtient un système  $(A) \in L_i(P)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . On obtient ainsi tous les systèmes différentiels linéaires  $P$ -périodiques avec symétrie, par l'intermédiaire de la solution matricielle fondamentale sur  $[0, P/2]$ , si celle-ci parcourt l'ensemble des applications continument différentiable par morceaux

$$[0, P/2] \rightarrow GL^+(3, \mathbb{R})$$

telles que  $X(0) = I$

II.2. Solutions P-périodiques d'un système différentiel linéaire  
=====

P-périodique avec symétrie  
=====

Nous avons vu dans (II.1.) des propriétés concernant les systèmes différentiels linéaires périodiques avec symétries par rapport à l'espace  $\sigma \in E$ .

Nous nous intéresserons ici à leurs solutions périodiques; leur ensemble, c'est évident, forme un espace vectoriel dont la dimension va de zéro (seulement la solution nulle est périodique) à trois (toutes les solutions sont périodiques). On notera  $L_i^j(P)$  l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques, avec symétrie  $\sigma_i \in E$  admettant un espace de solution P-périodiques de dimension j. Il est clair que

$$L_i(P) = L_i^0(P) \cup L_i^1(P) \cup L_i^2(P) \cup L_i^3(P).$$

Une telle décomposition existe également si aucune hypothèse de symétrie n'a été faite; nous allons voir (proposition 9) que du fait des symétries, on a :

$$L_i^0(P) = \emptyset, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

D'autre part, il serait intéressant de pouvoir faire apparaître une structuration de  $L_i^j(P)$  dans  $L_i(P)$ , de caractère topologique (par exemple quelles sont les composantes connexes par arcs de  $L_i^j(P)$  dans  $L_i(P)$ , et comment peut-on les caractériser); comme les solutions périodiques de (A) sont déterminées par la matrice de Poincaré  $X(P)$ , et que celle-ci est déterminée (d'après la relation 7), par la demi-application de Poincaré  $X(P/2)$ , la structuration est déterminée par l'ensemble des matrices  $X(P/2)$ , qui sont des matrices d'ordre trois, régulières à déterminant positif, sans autre contrainte.

La suite du (II.2.) se propose alors de déduire de la forme de  $X(P/2)$ , la dimension j de l'espace vectoriel des solutions P-périodiques de (A).

II.2.1. Proposition 9 :

=====

Un système différentiel linéaire P-périodique avec symétrie par rapport à l'espace  $\sigma \in E$ , admet toujours une solution P-périodique non triviale dont l'orbite est symétrique par rapport au plan de symétrie dans l'espace de phases  $(ox_1, ox_2, ox_3)$ .

Démonstration : Pour la démonstration, on prendra  $\sigma = \sigma_1$ , les autres cas se traitant de manière similaire;

Soit  $(A) \in L_1(P)$  on suppose que

$$X(t) = (\xi_k(t), \psi_k(t), \eta_k(t)), (k=1,2,3),$$

est la solution matricielle fondamentale de  $(A)$  au temps  $t$ ; une solution issue de  $(0, x_2^0, x_3^0) \in \bar{\sigma}_1$  au temps  $t=0$  s'écrit

$$\varphi(t) = x_2^0 \psi_k(t) + x_3^0 \eta_k(t).$$

Pour que l'orbite de la solution  $\varphi(t)$ , symétrique par rapport au plan  $\bar{\sigma}_1$ , (car  $\varphi(0) \in \sigma_1$ ), soit P-périodique, d'après le corollaire (2) du chapitre (I), il faut et il suffit que :

$$\varphi(P/2) = (X_A(P/2))(\varphi(0)) \in \bar{\sigma}_1 \quad (8),$$

c'est à dire :

$$x_2^0 \psi_1(P/2) + x_3^0 \eta_1(P/2) = 0 \quad (8').$$

Comme  $\psi_1(P/2)$  et  $\eta_1(P/2)$  sont indépendants dans  $\mathbb{R}^3$  (puisque  $X(P/2)$  est régulière), il existe au moins un espace vectoriel de dimension un de conditions initiales  $(0, x_2^0, x_3^0)$ , solution de (8).

Donc  $(A)$  admet un espace vectoriel de solutions P-périodiques, dont les orbites sont symétriques par rapport à  $\bar{\sigma}_1$ , de dimension au moins égale à un; cet espace est inclus dans  $\bar{\sigma}_1$ .

On en déduit donc  $L_1^j(P) = \emptyset$  ( $j=0$ ), ou plus généralement  $L_i^j(P) = \emptyset$ , ( $j=0$ ),  $i \in \{1,2,3\}$ .

Définition 3 : Un système  $(A) \in L_i(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , est dit critique pour la période  $P$  si et seulement si

$$\det [X(P) - I] = 0$$

où  $I$  est la matrice d'identité.

Corollaire 5

Tout système  $(A) \in L_i(P)$  est critique pour la période  $P$ .

Démonstration : En effet, d'après la proposition (9),  $(A)$  possède au moins une solution  $P$ -périodique, et donc la matrice  $X(P)$  admet au moins une valeur propre valant un, d'où

$$\det [X(P) - I] = 0.$$

II.2.2. Proposition 10 :

=====

Soit  $(A) \in L_1(P)$  de solution matricielle fondamentale  $X(t)$ , alors il existe un changement de base, laissant les espaces de symétrie invariante, tel que dans la nouvelle base on ait :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base dans  $\mathbb{R}^3$ ; choisissons dans le plan  $\bar{\sigma}_1, (ox_2, ox_3)$ , le vecteur  $e_3$  dans le sous-espace (de dimension un au moins d'après la proposition 9), de conditions initiales de solutions  $P$ -périodiques (et symétriques par rapport à  $\bar{\sigma}_1$ , on a donc

$$X(P/2)(e_3) \in \bar{\sigma}_1.$$

Si donc on écrit :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

on a  $c_1 = 0$ .

II.2.3. Proposition 11  
=====

Soit  $(A) \in L_1(P)$ , de solution matricielle fondamentale  $X(t)$ , et soit

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ où } \Delta = \det X(P/2) > 0;$$

soit  $\alpha = b_2 c_3 - c_2 b_3$ ,  $\beta = a_2 c_3 - c_2 a_3$ ,  $\gamma = b_2 a_3 - a_2 b_3$ ,  $u = a_2^2 + a_3^2$ ;

alors on a :

1. a.  $(A) \in L_1^1(P) \Leftrightarrow b_1 \cdot u \neq 0$   
 b.  $(A) \in L_1^1(2P) \Leftrightarrow b_1 \cdot a_1 \cdot \alpha \cdot u \neq 0$
2. a.  $(A) \in L_1^2(P) \Leftrightarrow [(b_1=0 \text{ et } u \neq 0) \text{ ou } (u=0 \text{ et } b_1 \neq 0)]$   
 b.  $(A) \in L_1^2(2P) \Leftrightarrow (a_1=0, b_1 u \alpha \neq 0) \text{ ou } (b_1=0, b_1 u \alpha \neq 0) \text{ ou } (u=0, a_1 b_1 \alpha \neq 0) \text{ ou } (\alpha=0, a_1 b_1 u \neq 0)$
3. a.  $(A) \in L_1^3(P) \Leftrightarrow (b_1, u) = (0, 0)$   
 b.  $(A) \in L_1^3(2P) \Leftrightarrow (a_1, \alpha) = (0, 0), \text{ ou } (b_1, u) = (0, 0)$

Démonstration : D'après le corollaire (4) on a :

$$X(P) = M_1 X^{-1}(P/2) M_1 X(P/2) \text{ où } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

en calculant d'abord  $X^{-1}(P/2)$ , puis en remplaçant dans la relation précédente on obtient :

$$X(P) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2a_1\alpha}{\Delta} & \frac{2b_1\alpha}{\Delta} & 0 \\ \frac{2a_1\beta}{\Delta} & 1 + \frac{2b_1\beta}{\Delta} & 0 \\ \frac{2a_1\gamma}{\Delta} & \frac{2b_1\gamma}{\Delta} & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\Delta \det X(P/2) = a_1\alpha - b_1\beta > 0$ , (9)

et de la relation (5) on déduit pour  $t=P$  que,  $X(2P) = X(P)X(P)$ , et donc

$$X(2P) = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} \Delta^2 + 8a_1b_1\alpha\beta & 4b_1\alpha(a_1\alpha + b_1\beta) & 0 \\ 4a_1\beta(a_1\alpha + b_1\beta) & \Delta^2 + 8a_1b_1\alpha\beta & 0 \\ 4a_1\gamma(a_1\alpha + b_1\beta) & 8a_1b_1\alpha\gamma & \Delta^2 \end{pmatrix};$$

d'autre part

$$\left| X(P) - \lambda I \right| = (1-\lambda)Q(\lambda)$$

où  $Q(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{\Delta}(a_1\alpha + b_1\beta)\lambda + 1$ , et où  $I$  est la matrice d'identité,

d'où

$$\begin{cases} Q(1) = -4 \frac{b_1\beta}{\Delta} \\ Q(-1) = 4 \frac{a_1\alpha}{\Delta} \end{cases} \quad (10)$$



$$1. \quad a. \quad (A) \in \mathbb{L}_1^1(P) \Rightarrow Q(1) \neq 0 \Rightarrow b_1\beta \neq 0 \Rightarrow b_1u \neq 0;$$

réciroquement si

$$b_1u \neq 0,$$

alors deux cas se posent que l'on va étudier séparément :

$$1. \quad (b_1 \neq 0, u \neq 0, \beta \neq 0) \Rightarrow Q(1) \neq 0 \Rightarrow (A) \in \mathbb{L}_1^1(P)$$

$$2. \quad (b_1 \neq 0, u \neq 0, \beta = 0) \Rightarrow \gamma \neq 0$$

(car si  $\gamma = 0$ , alors  $\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3}$ , donc  $\Delta = 0$ ); d'après (9)  $a_1\alpha$  est non nul

et donc la matrice  $X_A(P)$  a la forme :

$$X(P) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2b_1}{a_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\gamma}{\alpha} & \frac{2b_1\gamma}{a_1\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas diagonalisable, et donc  $(A) \in \mathbb{L}_1^1(P)$ .

$$b. \quad (A) \in \mathbb{L}_1^1(2P) \Rightarrow Q(1)Q(-1) \neq 0 \Rightarrow a_1b_1\alpha\beta \neq 0 \Rightarrow a_1b_1\alpha u \neq 0;$$

réciroquement si

$$a_1b_1\alpha u \neq 0,$$

alors deux cas se posent :

$$1. \quad (a_1b_1\alpha \neq 0, u \neq 0, \beta \neq 0), \text{ et quel que soit } \gamma, \text{ la matrice } (X_A(2P) - I)$$

admet un seul vecteur nul (le dernier), donc  $(A) \in \mathbb{L}_1^1(2P)$

$$2. \quad (a_1b_1\alpha \neq 0, u \neq 0, \beta = 0) \Rightarrow \gamma \neq 0;$$

la matrice  $(X(2P) - I)$  admet un seul vecteur nul (le dernier) et

donc  $(A) \in \mathbb{L}_1^1(2P)$ .

2. a.  $(A) \in L_1^2(P) \Rightarrow Q(1) = 0 \Rightarrow b_1\beta = 0;$

trois cas se posent que l'on va étudier séparément :

1.  $(b_1=0, \beta \neq 0) \Rightarrow (b_1=0, u \neq 0)$

2.  $(b_1 \neq 0, \beta = 0);$  cela entraîne deux cas :

1'.  $(b_1 \neq 0, \beta = 0, u \neq 0) \Rightarrow b_1 u \neq 0,$

d'après (1.a.) on en déduit que  $(A) \in L_1^1(P),$  ce qui est contradictoire, donc le cas (1) ne peut pas être.

2'.  $(b_1 \neq 0, \beta = 0, u = 0)$

3.  $(b_1 = 0, \beta = 0),$  deux cas se posent

1''.  $(b_1 = 0, \beta = 0, u \neq 0)$

2''.  $(b_1 = 0, \beta = 0, u = 0) \Rightarrow \gamma = 0$  et  $\frac{b_2}{b_3} \neq \frac{c_2}{c_3};$

donc la matrice  $(X(P)-I)$  admet trois vecteurs nuls et donc

$(A) \in L_1^3(P)$  ce qui est contradictoire; réciproquement si :

1.  $(b_1 = 0, u \neq 0)$

alors d'après (9)  $a_1\alpha$  est non nul, et  $\gamma = \beta = 0$  n'est pas possible donc la matrice  $(X(P)-I)$  admet deux vecteurs nuls (le deuxième et le dernier) et donc  $(A) \in L_1^2(P)$

2.  $(b_1 \neq 0, u = 0) \Rightarrow \beta = 0,$  et  $\gamma = 0;$

d'après (9)  $a_1\alpha$  est non nul, cela entraîne que  $\frac{b_2}{b_3} \neq \frac{c_2}{c_3},$  la matrice

$(X(P)-I)$  admet deux vecteurs nuls (le premier et le troisième)

donc  $(A) \in L_1^2(P).$

$$b. (A) \in \mathcal{L}_1^2(2P) \Rightarrow Q(1) Q(-1) = 0,$$

trois cas se posent et que l'on va étudier séparément :

$$1. [Q(1)=0 \text{ et } Q(-1) \neq 0] \Rightarrow [b_1 \beta = 0 \text{ et } a_1 \alpha \neq 0];$$

d'après (2.a.) on obtient :

$$[(b_1 = 0, a_1 \alpha u \neq 0) \text{ ou } (u = 0, a_1 b_1 \alpha \neq 0)]$$

$$2. [Q(1) \neq 0, Q(-1) = 0] \Rightarrow (b_1 \beta \neq 0 \text{ et } a_1 \alpha = 0) \Rightarrow (b_1 u \neq 0 \text{ et } a_1 \alpha = 0);$$

trois cas se posent :

$$1. (b_1 u \alpha \neq 0 \text{ et } a_1 = 0)$$

$$2. (b_1 u a_1 \neq 0 \text{ et } \alpha = 0)$$

$$3. (b_1 u \neq 0 \text{ et } a_1 = \alpha = 0), \text{ la matrice } (X(2P) - I) \text{ admet trois vecteurs nuls ce qui est contradictoire à l'hypothèse que}$$

$$(A) \in \mathcal{L}_1^2(2P)$$

$$3. [Q(-1) = 0 \text{ et } Q(1) = 0] \Rightarrow (a_1 \alpha = 0 \text{ et } b_1 \beta = 0),$$

d'après (9) ceci est impossible car  $\Delta > 0$ , donc la condition est nécessaire.

Pour la réciproque on a d'après (2.a) :

$$(A) \in \mathcal{L}_1^2(2P) \Leftrightarrow [(b_1 = 0, a_1 \alpha u \neq 0) \text{ ou } (u = 0, b_1 a_1 \alpha \neq 0)]$$

et il nous reste à démontrer que si

$$[(a_1 = 0, \alpha b_1 u \neq 0) \text{ ou } (\alpha = 0, a_1 b_1 u \neq 0)] \Rightarrow (A) \in \mathcal{L}_1^2(P).$$

$$1. (a_1 = 0, \alpha b_1 u \neq 0) \Rightarrow Q(-1) = 0 \Rightarrow (A) \in \mathcal{L}_1^2(2P).$$

car la matrice  $(X(2P) - I)$  admet deux vecteurs nuls (le premier et le troisième).

$$2. (\alpha = 0, a_1 b_1 u \neq 0) \Rightarrow \text{d'après (9), } \beta \neq 0, \gamma \neq 0 \Rightarrow (A) \in \mathcal{L}_1^2(2P) \text{ donc la matrice } (X(2P) - I) \text{ admet deux vecteurs nuls (le deuxième et le troisième).}$$

3. a.  $(A) \in \mathbb{L}_1^3(P) \Rightarrow Q(1)=0$ , d'après (2.a) on obtient  $(b_1, u)=(0,0)$  réciproquement si  $(b_1, u)=(0,0)$ , alors  $\beta=0, \gamma=0$  et d'après (9)

$\frac{b_2}{b_3} \neq \frac{c_2}{c_3}$ , la matrice  $(X(P)-I)$  est nulle, donc  $(A) \in \mathbb{L}_1^3(P)$ .

b. tout d'abord  $(A) \in \mathbb{L}_1^3(P) \Rightarrow (A) \in \mathbb{L}_1^3(2P) \Leftrightarrow (b_1, u)=(0,0)$ , il nous reste à démontrer  $(A) \in \mathbb{L}_1^3(2P) \Leftrightarrow (a_1, \alpha)=(0,0)$ .

$$(A) \in \mathbb{L}_1^3(2P) \Rightarrow Q(-1)=0;$$

d'après (2.b.) on en déduit  $(a_1, \alpha)=(0,0)$ ; réciproquement si

$$(a_1, \alpha)=(0,0) \Rightarrow \text{la matrice } (X(2P)-I) \text{ est nulle donc } (A) \in \mathbb{L}_1^3(2P)$$

ce qui achève la démonstration.

#### II.2.4. Structuration de $\mathbb{L}_i^j(P)$ dans $\mathbb{L}_i(P)$ , $(i,j) \in \{1,2,3\}$ .

Etant donné  $i \in \{1,2,3\}$ , l'ensemble  $\mathbb{L}_i(P)$  est connexe par arc dans l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques; en effet, soient  $(A_1), (A_2)$  deux systèmes différentiels appartenant à  $\mathbb{L}_i(P)$ , alors  $\frac{dx}{dt} = (\theta A_1 + (1-\theta)A_2)$  est une déformation faisant passer de l'un à l'autre dans  $\mathbb{L}_i(P)$ , où  $0 \leq \theta \leq 1$ , car les symétries sont respectées.

D'autre part, nous avons vu plus haut que l'appartenance ou la non appartenance de  $(A)$  à l'un des ensembles  $\mathbb{L}_i^j(P)$  est déterminée par  $X(P/2)$ , qui dépend de huit paramètres réels soumis à la seule condition

$$\det X(P/2) = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) > 0.$$

Il serait intéressant de pouvoir faire apparaître une structuration de  $\mathbb{L}_i^j(P)$  dans  $\mathbb{L}_i(P)$ , de caractère topologique (par exemple quelles sont les composantes connexes de  $\mathbb{L}_i^j(P)$  dans  $\mathbb{L}_i(P)$ ), parce que le passage d'une composante connexe

à l'autre, entraîne le changement de la dimension de l'espace des solutions P-périodiques; nous allons indiquer dans la proposition suivante un minorant du nombre de composantes connexes dans chaque ensemble

$$L_1^j(P), L_1^j(2P), j \in \{1,2,3\}.$$

Proposition 12

=====

1. a. L'ensemble  $L_1^1(P) \subset L_1(P)$  admet au moins deux composantes connexes.  
b. L'ensemble  $L_1^1(2P) \subset L_1(2P)$  admet au moins huit composantes connexes.
2. a. L'ensemble  $L_1^2(P) \subset L_1(P)$  admet au moins six composantes connexes.  
b. L'ensemble  $L_1^2(2P) \subset L_1(2P)$  admet au moins quatorze composantes connexes.
3. a. L'ensemble  $L_1^3(P)$  admet au moins deux composantes connexes.  
b. L'ensemble  $L_1^3(2P)$  admet au moins quatre composantes connexes.

Démonstration

1.a. D'après la proposition (11), (A) appartient à  $L_1^1(P)$  si et seulement si  $b_1 u \neq 0$ ; si donc  $(A_1) \in L_1^1(P)$  (resp.  $(A_2) \in L_1^1(P)$ ) est un système tel que le coefficient  $b_1$  de la matrice  $X_{A_1}(P/2)$  (resp.  $X_{A_2}(P/2)$ ) est positif (resp. négatif), alors  $(A_1)$  et  $(A_2)$  appartiennent à deux composantes connexes différentes : pour tout chemin joignant l'une à l'autre il existe nécessairement un système  $(A) \in L_1^1(P)$  tel que le coefficient  $b_1$  de la matrice  $X_A(P/2)$  soit nul.

Les deux ensembles  $L_1^{1+}(P)$  et  $L_1^{1-}(P)$ , où  $L_1^{1+}(P)$  est l'ensemble des  $(A) \in L_1(P)$ , tels que  $X(P/2)$  vérifie  $b_1 > 0$  et  $u \neq 0$ , et où  $L_1^{1-}(P)$  est l'ensemble des  $(A) \in L_1(P)$ , tels que  $X(P/2)$  vérifie  $b_1 < 0$  et  $u \neq 0$ , sont donc dans des composantes connexes différentes; ces ensembles ne sont pas vides; en effet

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A) \in \mathcal{L}_1^+(P), \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A) \in \mathcal{L}_1^-(P).$$

1.b. D'après la proposition (11), (A) appartient à  $\mathcal{L}_1^1(2P)$  si et seulement si  $a_1 b_1 \alpha u \neq 0$ ; de même que dans (a),  $a_1 = 0$  partage l'espace  $\mathbb{R}^7$  des coefficients de  $X(P/2)$  en deux composantes; de même pour  $b_1 = 0$ , et  $\alpha = 0$ ; par contre  $u = 0$  ne partage pas  $\mathbb{R}^7$  en deux composantes, puisque  $u = 0$  si et seulement si  $a_2 = a_3 = 0$ . Donc  $\mathcal{L}_1^1(2P)$  est la réunion de 8 composantes connexes au moins, non vides. Ces ensembles ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ -9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha > 0$      
  $a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha < 0$      
  $a_1 < 0, b_1 > 0, \alpha < 0$      
  $a_1 < 0, b_1 < 0, \alpha > 0$

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha < 0$      
  $a_1 > 0, b_1 < 0, \alpha > 0$      
  $a_1 < 0, b_1 > 0, \alpha > 0$      
  $a_1 < 0, b_1 < 0, \alpha < 0$

alors (A)  $\in \mathcal{L}_1^1(2P)$ .

2.a. D'après la proposition (11), (A) appartient à  $\mathcal{L}_1^2(P)$  si et seulement si  $[(b_1 = 0, u \neq 0) \text{ ou } (b_1 \neq 0, u = 0)]$ .

Si  $b_1 = 0$ , alors  $a_1 \neq 0$  car  $\Delta$  est nécessairement positif, donc la condition  $a_1 = 0$  partage l'ensemble des (A)  $\in \mathcal{L}_1^2(P)$ , tels que  $X(P/2)$  vérifie  $(b_1 = 0, u \neq 0)$ , en

deux composantes connexes, non vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

alors (A)  $\in L_1^2(P)$ .

Si  $b_1 \neq 0$  et  $u=0$ , alors nécessairement  $a_1\alpha = 0$  car  $\Delta$  est positif, donc les hyperplans dans  $\mathbb{R}^7$   $b_1 = 0$  et  $a_1 = 0$  partagent l'espace en quatre composantes connexes non vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors (A)  $\in L_1^2(2P)$ .

2.b. D'après la proposition (11), (A) appartient à  $L_1^2(2P)$  si et seulement si  $(a_1 b_1 \alpha u) = 0$ , (un seul des facteurs du produit vaut zéro).

Si  $a_1 = 0$ , alors  $b_1 \neq 0$ , car  $\Delta$  est positif; donc les hyperplans  $b_1 = 0, \alpha = 0$ , partagent l'espace  $\mathbb{R}^6$  des coefficients de  $X(P/2)$  en quatre composantes connexes, ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

alors (A)  $\in L_1^2(2P)$ .

Si  $b_1 = 0$ , alors  $a_1 \neq 0$ , car  $\Delta$  est positif, donc l'hyperplan  $a_1 = 0$ , partage l'espace  $\mathbb{R}^6$  des coefficients de  $X(P/2)$  en deux composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

alors  $(A) \in L_1^2(2P)$ .

Si  $\alpha = 0$ , alors  $b_1 \neq 0$ , car  $\Delta > 0$ , donc les hyperplans  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ , partagent l'espace  $\mathbb{R}^6$  des coefficients de  $X(P/2)$  en quatre composantes connexes, ne sont pas vides; en effet, si  $(A)$  est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors  $(A) \in L_1^2(2P)$ .

Si  $u = 0$ , alors  $a_1 \alpha \neq 0$ , car  $\Delta > 0$ ; donc on a quatre composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si  $(A)$  est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

alors  $(A) \in L_1^2(2^\circ)$ .

3.a. D'après la proposition (11),  $(A)$  appartient à  $L_1^3(P)$  si et seulement si  $(b_1, u) = (0, 0)$ ; cela entraîne nécessairement que le signe de  $a_1$  est le même que le signe de  $\alpha$  (car  $a_1 \alpha = \Delta > 0$ ); donc on a deux composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si  $(A)$  est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors  $(A) \in L_1^3(P)$ .



3.b. D'après la proposition (11), (A) appartient à  $L_1^3(2P)$  si et seulement si  $[(a_1, \alpha) = (0, 0) \text{ ou } (b_1, u) = (0, 0)]$ .

Si  $(a_1, \alpha) = (0, 0)$ , alors  $b_1 \neq 0$ , car  $\Delta > 0$ ; donc l'hyperplan  $b_1 = 0$  partage l'espace  $\mathbb{R}^5$  des coefficients de  $X(P/2)$  en deux composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors (A)  $\in L_1^3(2P)$ .

Si  $(b_1, u) = (0, 0)$ , alors  $a_1 = 0$ , car  $\Delta > 0$ ; donc les hyperplans  $a_1 = 0$ ,  $\alpha = 0$ , partagent l'espace  $\mathbb{R}^5$  des coefficients de  $X(P/2)$  en deux composantes connexes qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

alors (A)  $\in L_1^3(2P)$ .

Cette proposition met en évidence la grande complexité de la structuration de  $L_i^j(P)$  dans  $L_i(P)$ , complexité qu'on peut opposer à la simplicité de la structure obtenue pour  $n = 2$ , voir [3].

### II.3. Systèmes différentiels linéaires autonomes avec symétrie

Les systèmes différentiels autonomes constituent une classe importante de systèmes différentiels linéaires, et ceci pour deux raisons : contrairement aux systèmes linéaires non autonomes, on sait calculer explicitement leurs solutions; d'autre part ils sont périodiques, de période  $P$ , quel que soit  $P \in \mathbb{R}^+$ . Nous allons ici faire une étude de ces systèmes différentiels linéaires autonomes dans le cadre des symétries, étude à rapprocher, en tant qu'exemple concret, de (II.1.) et (II.2.) et en tant qu'étude préliminaire, de (I.4.4.) de la deuxième partie.

II.3.1. Considérons le système différentiel linéaire autonome  $P$ -périodique

$$\frac{dx}{dt} = Bx \quad (B)$$

où  $B$  est une matrice réelle constante (3.3),  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $P \in \mathbb{R}^+$ ; d'après la proposition (7), le système (B) possède une symétrie par rapport à l'espace  $\sigma \in E$  au temps  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), si et seulement si la matrice  $B$  a l'une des formes suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_1^\alpha(P), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_2^\alpha(P), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_3^\alpha(P)$$

On supposera dans la suite que  $\alpha=0$  et  $(B) \in \mathcal{L}_1(P)$ , les autres cas s'étudient de manière similaire; tout ce que nous avons dit au paragraphe (II.1., II.2.) est valable pour le système (B); de plus, nous allons voir qu'on peut déterminer la dimension de l'espace des solutions périodiques du système (B) à partir des coefficients de la matrice  $B$ ; remarquons que tout point de  $\text{Ker } B$  est une solution périodique constante de (B).

En effet :

$$\text{Ker } B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{pmatrix} b_{12} x_1 + b_{13} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix} \right\}$$

L'ensemble de ces points constitue un espace de solutions périodiques constantes, de dimension un (resp. deux) si  $b_{12} b_{13} \neq 0$  (resp.  $b_{12}=b_{13}=0$ ); l'espace de dimension un (resp. deux) est une droite dans le plan  $ox_2x_3$  de vecteur directeur  $\vec{v}(0, -b_{13}, b_{12})$  (resp. c'est le plan  $ox_2x_3$ ),  $B$  étant une matrice supposée non nulle.

Prenons le cas général c'est à dire  $b_{12} b_{21} b_{13} b_{31} \neq 0$ , (dans le cas où  $b_{12} b_{21} b_{13} b_{31} = 0$ , on résoud le système  $B$  directement; l'espace des solutions P-périodiques constantes est situé sur les axes ou les plans); choisissons une nouvelle base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  telle que :

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2; \vec{e}'_3 = -b_{13} \vec{e}_2 + b_{12} \vec{e}_3$$

la matrice de passage  $N$  de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  à la base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  a la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_{13} \\ 0 & 0 & b_{12} \end{pmatrix} \text{ et } N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b_{13}}{b_{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_{12}} \end{pmatrix}$$

et la matrice  $B$  se transforme en la matrice  $B^* = (N^{-1}BN)$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ \frac{1}{b_{12}}(b_{21}b_{12} + b_{13}b_{31}) & 0 & 0 \\ \frac{b_{31}}{b_{12}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le système  $\frac{dx}{dt} = B^*x$  ( $B^*$ )

appartient aussi à  $L_1(P)$ .

II.3.2. Proposition 13

Soit  $(B^*) \in L_1(P)$ , où  $b_{12}b_{21}b_{13}b_{31} \neq 0$ ; soit  $\omega = \sqrt{|b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}|}$ ; alors on a :

1. Si  $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) \geq 0$  alors  $(B^*) \in L_1^1(P)$ ,
2. Si  $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) < 0$  et  $P = \frac{2\pi}{\omega}$ , alors  $(B^*) \in L_1^3(P)$
3. Si  $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) < 0$  et  $P \neq \frac{2\pi}{\omega}$ , alors  $(B^*) \in L_1^1(P)$

Démonstration

On sait que l'existence des solutions P-périodiques de  $(B^*)$  dépend uniquement des valeurs propres de la matrice  $B^*$ , qui sont déterminées par les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda [\lambda^2 - b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}] = 0 \quad (11)$$

1. a. Si  $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) > 0$ , alors la matrice B admet trois valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \omega, \lambda_3 = -\omega$$

et la solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} \text{ch } \omega t & \frac{b_{12}}{\omega} \text{sh } \omega t & 0 \\ \frac{\omega}{b_{12}} \sin \omega t & \text{ch } \omega t & 0 \\ \frac{b_{31}}{\omega b_{12}} \text{sh } \omega t & \frac{b_{13}}{\omega^2} (-1 + \text{ch } \omega t) & 1 \end{pmatrix}$$

donc  $(B^*)$  admet des solutions P-périodiques constantes de la forme  $(0,0,c)$  où  $c \in \mathbb{R}$ ; ce sont les seules solutions P-périodiques; elles appartiennent au plan  $ox_2x_3$  dans l'espace des phases  $(ox_1,ox_2,ox_3)$ ; donc  $(B^*) \in L_1^1(P)$ .

b. Si  $(b_{12}b_{21}+b_{13}b_{31}) = 0$ , alors la matrice  $B^*$  admet trois valeurs propres nulles.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

et la solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} 1 & b_{12}t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{b_{31}}{b_{12}}t & -\frac{b_{31}}{2}t^2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc  $(B^*)$  admet des solutions P-périodiques constantes de la forme  $(0,0,c)$  où  $c \in \mathbb{R}$ , ce sont les seules solutions P-périodiques; elles sont les mêmes que dans le cas (a); donc  $(B^*) \in L_1^1(P)$ .

2. Si  $b_{12}b_{21}+b_{13}b_{31} < 0$  et  $P = \frac{2\pi}{\omega}$ , alors la matrice  $B^*$  admet une valeur propre nulle et deux autres imaginaires pures

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\omega, \lambda_3 = -i\omega$$

et la solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{b_{12}}{\omega} \sin \omega t & 0 \\ -\frac{\omega}{b_{12}} \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\frac{b_{31}}{\omega b_{12}} \sin \omega t & -\frac{b_{31}}{\omega^2} (-1 + \cos \omega t) & 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $(B^*)$  admet trois solutions  $P$ -périodiques, deux solutions non constantes, et une solution constante de la forme  $(0,0,c)$  où  $c \in \mathbb{R}$ ; une d'entre les solutions non constantes appartient à  $S_{\sigma_1,0}^0(2\pi/\omega)$ , et l'autre appartient à  $S_{\sigma_1}^{\pi/\omega}(2\pi/\omega)$ ; et donc  $(B^*) \in L_1^3(2\pi/\omega)$ .

3. Si  $P \neq 2\pi/\omega$  alors d'après (2), le système  $(B^*)$  admet des solutions  $P$ -périodiques constantes de la forme  $(0,0,c)$ , où  $c \in \mathbb{R}$ , ce sont les seules solutions  $P$ -périodiques et donc  $(B^*) \in L_1^1(P)$ .

#### II.4. Stabilité

##### II.4.1. Stabilité de la solution $(x=0)$ d'un système linéaire autonome homogène avec symétrie.

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = Bx \quad (B)$$

un système différentiel linéaire autonome homogène, où la forme de la matrice  $B$  est définie dans (II.3.1.).

#### Proposition 14 :

Soit  $(B) \in L_1(P)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ ; la solution triviale  $x=0$ , est stable au sens de Liapounov si :

$$b_{ik} b_{ki} + b_{kj} b_{jk} = -\omega^2 \quad (\omega \in \mathbb{R}) \quad (11)$$

où  $[(i \neq k, k \neq j, i \neq j), (i,j,k) \in \{1,2,3\}]$ , sinon elle est instable.

Démonstration : En effet d'après (II.3.1.), et la relation (11), l'une des valeurs propres est nulle, les deux autres imaginaires conjuguées pures, et la solution matricielle fondamentale est bornée quand  $(t \rightarrow \infty)$ . D'après un théorème

général (la solution nulle d'un système différentiel autonome homogène, est stable si et seulement si, la solution matricielle fondamentale est bornée quand  $t \rightarrow \infty$ ; voir [1] pour la démonstration), on obtient donc que  $x=0$  est stable.

II.4.2. Etude de stabilité de systèmes différentiels linéaires P-périodiques non autonomes avec symétrie.

Soit

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A)$$

un système différentiel linéaire P-périodique appartenant à  $L_1(P)$ , de solution matricielle fondamentale  $X(t)$ , telle que :

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Proposition 15

1.  $(A) \in L_1^1(2P)$  est stable au sens de Liapounov si  $a_1 b_1 \alpha \beta < 0$ , sinon il est instable, où  $\alpha = b_2 c_3 - c_2 b_3$ , et  $\beta = a_2 c_3 - c_2 a_3$ .
2.  $(A) \in L_1^2(2P)$  est instable au sens de Liapounov
3.  $(A) \in L_1^3(2P)$  est stable au sens de Liapounov.

Démonstration

1. Supposons  $(A) \in L_1^1(P) \subset L_1^1(2p)$ , alors  $X(P)$  admet une valeur propre valant un, et les deux autres sont déterminées, d'après la proposition (11), par les racines de  $Q(\lambda)$ , où

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{\Delta}(a_1 \alpha + b_1 \beta) \lambda + 1 = 0 ;$$

a. si  $a_1 b_1 \alpha \beta = 0$ , alors les valeurs propres de  $X(P)$  sont

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + 2i \sqrt{-a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta - 2i \sqrt{-a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta};$$

La matrice  $X(P)$  dans ce cas, a une forme normale réelle, on obtient

$$X(P) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta}{\Delta} & -\frac{2}{\Delta} \sqrt{a_1 b_1 \alpha \beta} & 0 \\ \frac{2}{\Delta} \sqrt{-a_1 b_1 \alpha \beta} & \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient :

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3, \text{ et } |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

on en déduit donc la stabilité de (A).

b. Si  $a_1 b_1 \alpha \beta = 0$  et  $(A) \in L_1^1(P)$ , alors on en déduit que  $\beta = 0$ , et  $u = a_2^2 + a_3^2 \neq 0$  et les valeurs propres de  $X(P)$  sont  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ; la matrice  $X(P)$  n'est pas diagonalisable, donc (A) est instable.

c. Si  $a_1 b_1 \alpha \beta > 0$  alors les valeurs propres de  $X(P)$  sont :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + 2 \sqrt{a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta - 2 \sqrt{a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta};$$

comme leur produit vaut un, l'une des valeurs propres est plus grande que un, donc (A) est instable.



Ce résultat paraît étonnant car  $(A) \in \mathcal{L}_1^1(2p)$  peut être stable ( $\text{sgn } \beta \neq \text{sgn } a_1 b_1 \alpha$ ) ou instable ( $\text{sgn } \beta = \text{sgn } a_1 b_1 \alpha$ ), et on peut trouver dans une région à la fois, stabilité et instabilité, et le changement de stabilité à instabilité, n'entraîne pas nécessairement le changement de la dimension de l'espace des solutions P-périodiques, c'est le cas où le changement de signe de  $a_1 b_1 \alpha \beta$  vient du signe de  $\beta$ .

2. Soit  $(A) \in \mathcal{L}_1^2(2P)$  d'après la proposition (11) la matrice  $X(2P)$  possède deux valeurs propres valant un, et donc la troisième vaut également un; comme la matrice  $X(P)$  n'est pas diagonalisable, on en déduit donc que le système  $(A)$  est instable.
3. Si  $(A) \in \mathcal{L}_1^3(2P)$ , alors toutes les solutions sont périodiques; donc  $(A)$  est stable.

II.5. Equation aux variations associée à une solution périodique symétrique.  
 =====

Nous allons montrer le lien qui existe entre une solution périodique symétrique d'un tel système et les symétries de l'équation aux variations associée; cela nous permet ensuite d'étudier les systèmes différentiels dépendant de paramètre en utilisant les résultats des systèmes différentiels linéaires périodiques avec symétries.

II.5.1. Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad (f)$$

un système différentiel d'ordre trois, où  $x \in \mathbb{R}^3$ , et  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ; soit  $\varphi$  une solution de (f); effectuant le changement de variable :

$$x = \varphi(t) + y, \quad y \in \mathbb{R}^3$$

dans le système (f), en prenant en considération le fait que  $\varphi$  est une solution du système (f) et en développant les seconds membres en  $y$ , nous obtenons le système

$$y' = A(t) y + R(t,y)$$

où le terme  $R(t,y)$  est infiniment petit du deuxième ordre par rapport à  $y$ , et où  $A(t)$  est une matrice d'ordre trois telle que

$$A(t) = \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \varphi(t)) \right) \quad (k,j) \in \{1,2,3\}.$$

Linearisant ce système, c'est à dire négligeant le terme  $R(t,y)$ , on obtient un système linéaire, appelé l'équation aux variations associée à  $\varphi$ ; on notera ce système par  $(A_\varphi)$ ; on a donc :

$$y' = A(t) y \quad (A_\varphi).$$

Il est évident que si le système (f) est P-périodique et si la solution  $\varphi$  est aussi P-périodique, alors l'équation aux variations  $(A_\varphi)$ , est P-périodique; nous allons montrer dans ce paragraphe que, si le système (f)  $\in F_\sigma^\alpha(P)$  (resp.  $F_{\sigma,0}^\alpha(P)$ )

et si  $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$ , (resp.  $S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$ ), alors l'équation aux variations  $(A_{\varphi})$  admet la même symétrie que la solution  $\varphi$ .

II.5.2.. Proposition 16

=====

Soit  $\varphi: (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$  une solution de  $(f)$  et soit  $(A_{\varphi})$  l'équation aux variations associée à  $\varphi$ , on a :

1. Si  $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P)$  et si  $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$ , ( $\sigma \in E$ ), alors  $(A_{\varphi})$  appartient à  $L_i^{\alpha}(P)$  où  $i \in \{1,2,3\}$  est tel que  $\sigma = \sigma_i$  ou  $\sigma = \bar{\sigma}_i$
2. Si  $(f) \in F_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$  et si  $\varphi \in S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$ , alors  $(A_{\varphi})$  est périodique de période  $P/2$ ; et  $(A_{\varphi}) \in L_i^{\alpha}(P/2)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ .

Démonstration

Pour la démonstration de (1) et (2), on prend  $\sigma = \sigma_1$ , et  $\alpha = 0$ , les autres cas se traitant de manière semblable.

1. Puisque  $(f) \in F_{\sigma_1}^0(P)$  et  $\varphi \in S_{\sigma_1}^0(P)$ , d'après le corollaire (2),  $\varphi$  est  $P$ -périodique et donc  $(A_{\varphi})$  est aussi  $P$ -périodique; il nous reste à montrer que  $(A_{\varphi})$  admet une symétrie par rapport à  $\sigma_1$  au temps  $\alpha = 0$  :

En effet;

$$\begin{aligned} A(-t) &= \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(-t, \varphi_1(-t), \varphi_2(-t), \varphi_3(-t)) \right) \\ &= \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(-t, \varphi_1(t), -\varphi_2(t), -\varphi_3(t)) \right) \end{aligned}$$

d'après la proposition(I.2.1.)

D'autre part ;  $(f) \in F_{\sigma_1}^{\alpha}(P)$ , entraîne d'après la définition (1) que :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, x_3) = -f_1(-t, x_1, -x_2, -x_3) \\ f_l(t, x_1, x_2, x_3) = f_l(-t, x_1, -x_2, -x_3) \end{cases} \quad l = (2,3)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j = 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j = \ell \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j \neq \ell \end{cases}$$

d'après la proposition (7) dans le chapitre (II), on déduit que  $(A_\varphi) \in L_1(P)$ .

2. Puisque  $(f) \in \mathbb{F}_{\sigma_1, 0}^0(P)$  d'après la définition (1) on a :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, x_3) = -f_1(-t, x_1, -x_2, -x_3) = f_1(-t+P/2, -x_1, x_2, x_3) \\ f_\ell(t, x_1, x_2, x_3) = f_\ell(-t, x_1, -x_2, -x_3) = -f_\ell(-t+P/2, -x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad \ell = (2, 3)$$

d'où

$$f_k(t+P/2, -x_1, -x_2, -x_3) = -f_k(t, x_1, x_2, x_3) \quad (12)$$

où  $k = (1, 2, 3)$ .

Grace à (1), il suffit de montrer que  $(A_\varphi)$  est de période  $P/2$ ; par hypothèse

la solution  $\varphi \in S_{\sigma_1, 0}^0(P) = S_{\sigma_1}^0(P) \cap S_{\sigma_1}^{P/4}(P)$ , est  $P/2$  anti-périodique.

$$\begin{aligned} A(t+P/2) &= \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t+P/2, \varphi_1(t+P/2), \varphi_2(t+P/2), \varphi_3(t+P/2)) \right) \quad t \in \mathbb{R} \\ &= \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t+P/2, -\varphi_1(t), -\varphi_2(t), \varphi_3(t)) \right) \end{aligned}$$

en décrivant la relation (12) par rapport à  $x_1, x_2, x_3$ , on obtient

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t+P/2, -x_1, -x_2, -x_3) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3) \quad k = (1, 2, 3)$$

donc on a

$$A(t+P/2) = \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \right) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui prouve que  $(A\varphi)$  est  $P/2$ -périodique et donc appartient à  $L_1(P/2)$ .

II.5.3.. Corollaire 6

L'équation aux variations  $(A\varphi)$  associée à la solution  $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$  (resp.  $S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$ ) est toujours critique pour la période  $P$ .  
-----

Démonstration

D'après la proposition précédente (16) et la définition (3) on déduit que :

$$\det [X_{(A\varphi)}(P) - I] = 0$$

ce qui prouve que  $(A\varphi)$  est critique.

II.5.4. Equations aux variations associées à une solution d'un système différentiel autonome possédant une symétrie par rapport au plan  
=====

Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (f_a)$$

où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , est de classe  $c^1$ .

Pour un système différentiel autonome, qui est un cas particulier de système périodique, on sait que l'équation aux variations associée à une solution périodique non constante du système  $(f_a)$ , admet une solution périodique, voir [6].

Nous allons démontrer dans la proposition suivante, que si  $(f_a)$  possède une symétrie par rapport à  $\bar{\sigma}_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , et si la solution périodique  $\omega$  appartient à  $S_{\bar{\sigma}_1}^\alpha(P)$ , alors l'équation aux variations  $(A\omega)$  de  $(f_a)$  admet au moins deux solutions périodiques linéairement indépendantes.

Proposition 17

=====

Soit  $(f_a) \in F_\sigma^\alpha(P)$ ; si  $\omega \in S_\sigma^\alpha(P)$  n'est pas constante, où  $\sigma = \bar{\sigma}_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$  alors l'équation aux variations associée à  $\omega, (A\omega)$ , admet au moins deux solutions P-périodiques linéairement indépendantes.

Démonstration

Prenons  $\sigma = \bar{\sigma}_1$ , et  $\alpha = 0$ , d'après la proposition précédente (16),  $(A\omega)$  appartient à  $L_1(P)$ , et donc admet au moins une solution P-périodique issue de l'espace  $\bar{\sigma}_1$  au temps  $t = 0$ .

D'autre part, on démontre que la fonction  $\psi(t) = \dot{\omega}(t) \neq 0$ , est une solution de  $(A\omega)$ ; en effet, on a :

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = f(\omega(t))$$

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \omega''(t) = \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\omega(t)) \right) \psi(t) \quad , \quad (k,j) \in \{1,2,3\}$$

ce qui prouve que  $\psi(t)$  est une solution de  $(A\omega)$ ; de plus elle est P-périodique (car la fonction  $\omega$  est P-périodique non constante); on démontre aussi qu'elle est issue de l'espace  $\sigma_1(ox_1)$  au temps  $t = 0$ . En effet, puisque  $\omega \in S_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$  et d'après la proposition (2) on déduit que :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = -\varphi_1(-t) \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(-t) \\ \varphi_3(t) = \varphi_3(-t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) \neq 0 \\ \psi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \\ \psi_3(0) = \dot{\varphi}_3(0) = 0 \end{cases}$$

Ce qui prouve que  $\psi(t)$  est une solution P-périodique non nulle, issue de l'espace  $\sigma_1$  (axe  $ox_1$ ) et donc  $(A\varphi)$  admet au moins deux solutions P-périodiques linéairement indépendantes.

EXEMPLE : Soit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (f_a)$$

un système différentiel autonome appartenant à  $F_{\sigma_1}^\alpha(P)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $P \in \mathbb{R}^*$ ; supposons que  $\alpha = \pi/2$ , et  $P = 2\pi$ , alors  $(f_a)$  admet  $\varphi$  comme une solution, où

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\frac{1}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}$$

solution  $2\pi$ -périodique non constante appartenant à  $S_{\sigma_1}^{\pi/2}(2\pi)$ ; l'équation aux variations associée à  $\varphi$ ,  $(A\varphi)$ , est définie par la relation :

$$\dot{y}_i = \left( \frac{\partial f_i(\varphi(t))}{\partial x_j} \right) y_j \quad (A\varphi)$$

où  $(i,j) \in \{1,2,3\}$ , on a donc l'équation linéaire non autonome

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (A\varphi)$$

on vérifie que  $(A\varphi) \in L_1^{\pi/2}(2\pi)$ , et  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ , est une solution de  $(A\varphi)$  dont la matrice fondamentale au temps  $t = \pi/2$  a la forme

$$Y(t, \pi/2) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & \sin t & 0 \\ \frac{1}{2}\sin^2 t & \cos^2 t & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation aux variations (A $\varphi$ ) possède deux solutions  $2\pi$ -périodiques non constantes, et une troisième constante.



## **DEUXIEME PARTIE**

***RECHERCHE DE CRITERES PERMETTANT D'AFFIRMER QU'UN  
SYSTEME DIFFERENTIEL NON LINEAIRE AVEC SYMETRIES  
ADMET DES SOLUTIONS PERIODIQUES***

## PREMIER CHAPITRE

### PERTURBATION DE SYSTEME LINEAIRE

#### I.1. Introduction et Définition

=====

Soient  $q \in \mathbb{N}$  et  $\Lambda$  un domaine de  $\mathbb{R}^q$ , et soit

$$F : \Lambda \rightarrow F(P)$$

une application continue, dite famille continue de systèmes différentiels p-périodiques paramétrés par  $\lambda \in \Lambda$ ; on note  $F(\lambda)$  par  $({}^\lambda f)$ , par  ${}^\lambda \varphi$  une solution de  $({}^\lambda f)$  et par  ${}^\lambda \varphi(., t_0, x^0)$  la solution de  $({}^\lambda f)$  telle que

${}^\lambda \varphi(t_0, t_0, x^0) = x^0 [{}^\lambda \varphi(., t_0, x^0)$  est une solution vectorielle de composantes  $({}^\lambda \varphi_1, {}^\lambda \varphi_2, {}^\lambda \varphi_3)$  et dépend analytiquement de tous ses arguments,  $x^0$  est une variable vectorielle].

Le système différentiel p-périodique

$$\dot{x} = A(t)x + \lambda G(t, x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

est un cas particulier de système  $({}^\lambda f)$ .

#### I.1.1. Définition (4)

-----

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = A(t)x + \lambda G(t, x, \lambda) \quad ({}^\lambda A)$$

où

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}(3, \mathbb{R})$$

est continue par rapport à  $t$  et p-périodique, et où

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (0 \in \Lambda \subset \mathbb{R})$$

est p-périodique par rapport à  $t$  et de classe  $C^1$  par rapport à  $x$  et  $\lambda$ .

Lorsque  $\lambda \neq 0$ , on dit que  $({}^\lambda A)$  est une perturbation du système linéaire

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad ({}^0A)$$

ou on dit  $({}^\lambda A)$  est un système perturbé, et  $({}^0A)$  est un système non perturbé ou encore  $({}^\lambda A)$  est un système quasi-linéaire p-périodique; cette perturbation est dite non critique si  $({}^0A)$  n'a pas d'autre solution p-périodique que la solution identiquement nulle; sinon (i.e  $({}^0A)$  possède au moins une solution p-périodique non nulle) on dit que c'est une perturbation critique.

1.1.2. De la définition (4), on déduit que  $({}^\lambda A)$  est dit critique ou non critique, selon la dimension de l'espace des solutions p-périodiques de  $({}^0A)$ ; leur ensemble forme un espace vectoriel dont la dimension va de zéro (seulement la solution nulle est p-périodique) à trois (toutes les solutions sont p-périodiques). On notera  $L^m(p)$  l'ensemble des systèmes différentiels linéaires p-périodiques dont l'espace vectoriel des solutions p-périodiques est de dimension m; on peut écrire

$$({}^\lambda A) \text{ est critique} \Leftrightarrow ({}^0A) \in L^m(p), m \in \{1,2,3\}$$

$$({}^\lambda A) \text{ est non critique} \Leftrightarrow ({}^0A) \in L^m(p), \text{ avec } m = 0$$

Malheureusement l'intégration analytique de  $({}^0A)$ , en général, n'est pas possible pour connaître la dimension de l'espace des solutions p-périodiques de  $({}^0A)$ ; néanmoins on fait souvent l'hypothèse qu'il existe une ou plusieurs solutions p-périodiques de  $({}^0A)$ , c'est le cas de plusieurs auteurs (Poincaré, Malkin, Hale, Mawhin, ...) qui ont étudié l'existence des solutions p-périodiques de  $({}^\lambda A)$ , pour  $\lambda$  assez petit, dans l'un des deux cas (non critique, critique) par des méthodes ou critères différents (point fixe, analyse fonctionnelle); voir [8], [9].

Lorsqu'on connaît une solution  $\delta\varphi$  de  $(\delta f)$  pour  $\lambda = \delta$  (resp.  $\varphi$  de  $({}^0A)$ ), la réponse quant au problème d'existence d'une solution p-périodique de  $({}^\lambda f)$  (resp.  $({}^\lambda A)$ ) -  $\lambda$  assez petit - peut être apportée et enrichie en répondant aux deux questions suivantes :

Q1 : Etant donnée une solution p-périodique  $\delta\varphi$  de  $({}^\lambda f)$  (pour  $\lambda = \delta$ ), (resp.  $\varphi$  de  $({}^0A)$ ), celle-ci est-elle isolée dans l'ensemble des solutions p-périodiques de  $(\delta f)$ , (resp.  $({}^0A)$ ) [c'est-à-dire existe t-il un voisinage  $V \subset \mathbb{R}^3$  de la condition initiale  $x^0 \in \mathbb{R}^3$ , tel qu'aucune solution issue de  $\tilde{x} \in V(\tilde{x} \neq x^0)$  à cet instant ne soit p-périodique] ?

Q2 : La solution  $\delta\varphi$  (resp.  $\varphi$ ) est-elle prolongeable à une famille  $\lambda\varphi$  de solutions p-périodiques de  $({}^\lambda f)$  (resp.  $({}^\lambda A)$ ) ? [c'est-à-dire existe t-il un voisinage  $W$  de  $\delta$  (resp.  $W$  de 0) dans  $\Lambda$  tel que pour tout  $\lambda \in W$ , il existe une solution  $\lambda\varphi$  p-périodique de  $({}^\lambda f)$  (resp.  $({}^\lambda A)$ ), et une seule qui tend, par

l'intermédiaire de sa condition initiale au temps  $t_0=0$ , vers  $\delta\varphi$  (resp.  $\varphi$ ), si  $\lambda$  tend vers  $\delta$  [(resp.  $\lambda$  tend vers 0)].

Une réponse partielle à ces questions est donnée par le théorème de continuité de Poincaré [ 6 ]:

Si l'équation aux variations  $(A_{\delta\varphi}^{\delta})$  associée à  $\delta\varphi$  (resp.  $({}^0A)$ ) est non critique alors la réponse est positive à chacune des deux questions. Mais le problème reste entier si  $(A_{\delta\varphi}^{\delta})$  (resp.  $({}^0A)$ ) est critique, toutes les situations peuvent alors se produire :

$\delta\varphi$  est non isolée,  $\delta\varphi$  est isolée mais non prolongeable,  $\delta\varphi$  est isolée et prolongeable (resp.  $\varphi$  est non isolée,  $\varphi$  est isolée mais non prolongeable,  $\varphi$  est isolée et prolongeable).

I.1.3. Le but de notre travail dans ce chapitre est d'apporter, dans le cadre de symétries, une réponse aux questions Q1 et Q2; ceci à l'aide d'une part, d'une méthode (qu'on va appeler dans la suite la méthode des symétries) permettant d'affirmer l'existence de solutions p-périodiques de  $({}^\lambda A)$  pour  $\lambda$  assez petit, même dans des situations où il était impossible de le faire; d'autre part d'un outil plus simple à utiliser que les méthodes précédentes.

Proposition 18

-----  
Tout système  $({}^\lambda A) \in F_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(p)$ ,  $\bar{\sigma} \in E$ , est un système perturbé critique.

#### Démonstration

Prenons  $\sigma = \bar{\sigma}_1$ ; alors d'après la proposition (9),  $({}^0A)$  possède au moins une solution p-périodique non identiquement nulle, et d'après (I.1.2.) de ce chapitre, on déduit que  $({}^\lambda A)$  est un système critique.

I.1.4. De la proposition précédente, on déduit que le théorème de Poincaré, dans le cadre de symétries, est inapplicable; et notre travail sera consacré uniquement au cas critique (pour le cas non critique et donc sans symétries, on peut donner au lecteur une référence. Voir [ 8 ]); dans un système perturbé critique avec symétrie, deux cas se posent :

1°. le système  $({}^\lambda A)$  appartient à  $F_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(p)$  et la dimension de l'espace des solutions p-périodiques de  $({}^0A)$  est strictement inférieure à trois, c'est à dire : soit  $({}^0A)$  possède une famille de solutions p-périodiques dépendant linéairement d'un paramètre  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ , soit  $({}^0A)$  possède une famille de solutions p-périodiques

dépendant linéairement des deux paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ .

2°. Le système  $(^\lambda A)$  appartient à  $F_{\mathcal{G}}^\alpha(p)$  et la dimension de l'espace des solutions p-périodiques de  $(^0A)$  est égale à trois, c'est à dire toutes les solutions de  $(^0A)$  sont p-périodiques.

Nous rappelons que les premier et deuxième cas ont été étudiés par Malkin, mais sans aucune hypothèse de symétrie faite sur  $(^\lambda A)$ , c'est à dire  $(^\lambda A) \in F(p)$ ; le deuxième cas a été étudié par Hale avec l'hypothèse de symétrie faite sur  $(^\lambda A)$ .

### I.2. Méthode de Malkin =====

Nous allons énoncer dans ce paragraphe le théorème de Malkin (pour la démonstration voir [11]); ce théorème concerne le premier cas de (I.1.4.) puis nous allons donner trois exemples pour lesquels ce théorème n'apporte aucune réponse (affirmative ou négative) à l'existence de leurs solutions p-périodiques.

#### I.2.1. Théorème (1) de Malkin -----

Soit

$$\dot{x} = A(t)x + \lambda G(t, x, \lambda) \quad (^\lambda A)$$

un système différentiel p-périodique perturbé critique, où la fonction G est continue, p-périodique, et possède des dérivées partielles par rapport à tous ses arguments, et soit

$$\dot{x} = A(t)x \quad (^0A)$$

le système non perturbé de  $(^\lambda A)$ , qui possède m ( $1 \leq m \leq 3$ ) solutions p-périodiques  $\varphi^m$ ; on pourra présenter la solution générale p-périodique de  $(^0A)$  par

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi^k(t) \quad \varphi^k(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$$

et donc le système adjoint de  $(^0A)$

$$\dot{x} + A^*(t)x = 0 \quad (D)$$

possède également m ( $1 \leq m \leq 3$ ) solutions p-périodiques linéairement indépendantes  $\psi^m$

On définit les fonctions

$$h_k(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \int_0^p \sum_{j=1}^3 \psi_{kj}(s) G_j(s, x(s), 0) ds, \quad k=1, \dots, m \quad (13)$$

où  $x(t)$  est la solution générale  $p$ -périodique de  $({}^0A)$ ; soit  $\alpha_m^* (1 \leq m \leq 3)$  l'ensemble des valeurs réelles tel que :

$$h_k(\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) = 0, \quad 1 \leq k \leq m \quad (14)$$

avec

$$\det \left[ \frac{\partial (h_1, \dots, h_m)}{\partial (\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \right]_{\alpha_m = \alpha_m^*} \neq 0 \quad (15)$$

Alors le système  $({}^\lambda A)$  possède pour  $\lambda$  assez petit une solution  $p$ -périodique qui lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , tend vers

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k^* \varphi^k(t)$$

Appliquons le résultat de ce théorème aux trois exemples suivants.

### I.2.2. EXEMPLE 1

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & 1 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \sin t \\ x_3 & \sin t & \\ x_1 & \cos t & \end{pmatrix} \quad (16)$$

où  $\lambda$  est assez petit, lorsque  $\lambda = 0$ , le système linéaire non perturbé :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & 1 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

possède une solution matricielle fondamentale

$$X(t,0) = \frac{1 - \cos t}{e} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

donc (17) possède deux solutions  $2\pi$ -périodiques linéairement indépendantes

$$\varphi^1(t) = \frac{1-\cos t}{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi^3(t) = \frac{1-\cos t}{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on peut représenter la solution générale  $2\pi$ -périodique de (17) par

$$x(t) = \alpha_1 \varphi^1(t) + \alpha_3 \varphi^3(t).$$

Le système adjoint de (17) possède une solution matricielle fondamentale

$$\chi(t,0) = \frac{-1+\cos t}{e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc on a deux solutions  $2\pi$ -périodiques linéairement indépendantes :

$$\psi^2(t) = \frac{-1+\cos t}{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi^3(t) = \frac{-1+\cos t}{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$h_k(\alpha_1, \alpha_3) = \int_0^{2\pi} \frac{-1+\cos s}{e} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \frac{1-\cos s}{e} & \sin s \\ \alpha_1 \frac{1-\cos s}{e} & \cos s \end{pmatrix} ds, \quad k=1,3$$

d'où

$$h_1(\alpha_1, \alpha_3) = \alpha_3 \int_0^{2\pi} \sin s ds = 0 \cdot \alpha_3 = 0, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_1 \in \mathbb{R},$$

$$h_3(\alpha_1, \alpha_3) = \alpha_1 \int_0^{2\pi} \cos s ds = 0 \cdot \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R};$$

donc les fonctions  $h_1, h_3$  sont identiquement nulles et par conséquent on a :

$$\det \left[ \frac{\partial(h_1, h_3)}{\partial(\alpha_1, \alpha_3)} \right]_{\substack{\alpha_1 = \alpha_1^* \\ \alpha_3 = \alpha_3^*}} = 0, \quad \forall (\alpha_1^*, \alpha_3^*) \in \mathbb{R}^2$$

et d'après le théorème (1) on ne peut pas conclure l'existence des solutions  $2\pi$ -périodiques de (16), pour  $\lambda$  assez petit, car la condition (15) n'est pas satisfaite.

### I.2.3. EXEMPLE 2

Soit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & 1 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 1 & \sin t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_3 \cos t \\ x_2 \sin t \\ x_1 x_3 \cos t \end{pmatrix} \quad (19)$$

un système différentiel d'ordre trois  $2\pi$ -périodique, qui est la perturbation du système linéaire non autonome :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & 1 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 1 & \sin t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

sa solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X(t,0) = \frac{1 - \cos t}{e} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 1 + \frac{t^2}{2} - \cos t & 1 \end{pmatrix}$$

donc (20) possède une famille de solutions  $2\pi$ -périodiques dépendant linéairement d'une constante  $\alpha_3$ , qu'on peut représenter par

$$x(t) = \alpha_3 \frac{1 - \cos t}{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Le système adjoint de (20) possède une solution matricielle fondamentale :

$$\chi(t,0) = e^{-1+\cos t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -t \\ -t & 1 & -1 + \frac{t^2}{2} + \cos t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc on a une seule solution  $2\pi$ -périodique

$$\psi^2(t) = e^{-1+\cos t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$h_3(\alpha_3) = \int_0^{2\pi} e^{-1+\cos s} \begin{pmatrix} \alpha_3 & 1-\cos s & \cos s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ds,$$

$$h_3(\alpha_3) = \alpha_3 \int_0^{2\pi} \cos s ds = \alpha_3 \cdot 0 = 0;$$

donc

$$h_3(\alpha_3) = 0, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

d'où

$$\det \left[ \frac{\partial(h_3)}{\partial \alpha_3} \right]_{\alpha_3 = \alpha_3^*} = 0$$

Comme la condition (15) du théorème (1) n'est pas satisfaite, alors on ne peut conclure l'existence d'une solution  $2\pi$ -périodique de (19) pour  $\lambda$  assez petit.

#### I.2.4. EXEMPLE 3

Soit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sin t \\ x_1 & x_2 & \sin t \\ x_1 & x_2 & \sin t \end{pmatrix}$$

un système différentiel d'ordre trois  $2\pi$ -périodique, qui est la perturbation du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ;$$

sa solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \frac{1}{2} \sin 2t & 0 \\ -2 \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2t & \frac{1}{4}(1-\cos 2t) & 1 \end{pmatrix}$$

Donc toutes les solutions de système linéaire non perturbé sont  $2\pi$ -périodiques, (elles sont même  $\pi$ -périodiques) et on peut représenter la solution générale qui est  $2\pi$ -périodique, par

$$x(t) = \alpha_1 \varphi^1(t) + \alpha_2 \varphi^2(t) + \alpha_3 \varphi^3(t),$$

d'où

$$x(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos 2t + \frac{\alpha_2}{2} \sin 2t \\ -2 \alpha_1 \sin 2t + \alpha_2 \cos 2t \\ \frac{\alpha_1}{2} \sin 2t + \frac{\alpha_2}{4}(1-\cos 2t) + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Le système adjoint du système linéaire non perturbé possède une solution matricielle fondamentale

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 2 \sin 2t & -\frac{1}{2} \sin 2t \\ -\frac{1}{2} \sin 2t & \cos 2t & \frac{1}{4}(1-\cos 2t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc, on a trois solutions  $2\pi$ -périodiques linéairement indépendantes :

$$\psi^1(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\frac{1}{2} \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \psi^2(t) = \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \psi^3(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2t \\ \frac{1}{4}(1-\cos 2t) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ainsi,}$$

$$h_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos 2s & -\frac{1}{2} \sin 2s & 0 \\ 2 \sin 2s & \cos 2s & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2s & \frac{1}{4}(-\cos 2s) & 1 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} \sin s \\ (-\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{4}) \sin s \sin 4s + \alpha_1 \alpha_2 \cos 4s \sin s \\ (-\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{4}) \sin 4s \sin s + \alpha_1 \alpha_2 \cos 4s \sin s \end{pmatrix} ds, k = 1, 2, 3$$

il découle :

$$h_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_0^{2\pi} \cos 2s \sin s \, ds - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{4}) \int_0^{2\pi} \sin 2s \sin s \sin 4s \, ds - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2s \cos 4s \sin s \, ds = 0, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$h_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \int_0^{2\pi} \sin 2s \sin s \, ds + (-\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{4}) \int_0^{2\pi} \cos 2s \sin s \sin 4s \, ds + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^{2\pi} \cos 2s \cos 4s \sin s \, ds = 0, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$h_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2s \sin s \, ds + \frac{1}{4}(-\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{4}) \int_0^{2\pi} (1-\cos 2s) \sin s \sin 4s \, ds + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4} \int_0^{2\pi} (1-\cos 2s) \cos 4s \sin s \, ds = 0, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

d'où les fonctions  $h_1, h_2$  et  $h_3$  sont identiquement nulles et par conséquent on a :

$$\det \left[ \frac{\partial (h_1, h_2, h_3)}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \right]_{\alpha_i = \alpha_i^*} = 0, \quad \alpha_i^* \in \mathbb{R}, \quad i = (1, 2, 3)$$

et d'après le théorème (1), on ne peut conclure à l'existence des solutions  $2\pi$ -périodiques du système linéaire perturbé, pour  $\lambda$  assez petit, car la condition (15) n'est pas satisfaite. Ainsi, les exemples (1), (2) et (3) montrent bien qu'il existe une grande variété de cas où le théorème de Malkin ne peut nous assurer de l'existence ou non existence des solutions  $p$ -périodiques de  $(^\lambda A)$ ; nous verrons dans le paragraphe (IV) de ce chapitre qu'avec la méthode des symétries on peut apporter une réponse précise à chacun des trois exemples.

Nous allons maintenant exposer la méthode de Hale concernant le deuxième cas, c'est à dire : la dimension de l'espace des solutions  $p$ -périodiques de  $(^0 A)$  est égale à trois.

### I.3. Méthode de Hale

=====

Considérons le système différentiel  $p$ -périodique d'ordre trois

$$\dot{x} = A(t)x + \lambda G(t, x, \lambda) \quad (^\lambda A)$$

où  $G$  est une fonction  $p$ -périodique de classe  $C^1$  par rapport à  $x$  et  $\lambda$ ; on suppose que toutes les solutions de  $(^0 A)$  sont  $p$ -périodiques; si on note par  $X(t)$  la solution matricielle fondamentale de  $(^0 A)$ , alors on a :

$$X(t+p) = X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$X(0) = I, \text{ la matrice d'identité}$$

Effectuons dans  $(^\lambda A)$  le changement de variables périodique

$$x(t) = X(t) y(t), \quad (21)$$

on obtient alors

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t) y(t) + X(t) \dot{y}(t) = A(t) X(t) y(t) + \lambda G(t, X(t) y(t), \lambda)$$

et comme

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t)$$

on a

$$X(t) \dot{y}(t) = \lambda G(t, X(t) y(t), \lambda)$$

donc

$$\dot{y}(t) = \lambda X^{-1}(t) G(t, X(t)y(t), \lambda) = \lambda f(t, y, \lambda) \quad (22)$$

où  $f$  est  $p$ -périodique; si  $y \in \mathbb{R}^3$  est solution  $p$ -périodique de (22), alors  $x(t) = X(t)y(t) \in \mathbb{R}^3$  est solution  $p$ -périodique de  $(\lambda A)$ .

On ramène ainsi les problèmes d'existence de solutions  $p$ -périodiques de certains systèmes critiques (ceux dont toutes les solutions du système non perturbé sont  $p$ -périodiques) à des problèmes relatifs à des équations d'un type particulier.

Nous verrons que la méthode de Hale fait appel à des notions très complexes, non constructives (c'est à dire impossible à expliciter en pratique, dans la plupart des cas), comme par exemple la notion de "fonction  $p$ -périodique associée à  $\lambda f$ "; ou d' "équation de bifurcation".

### I.3.1. Définition 5

-----

Soit le système différentiel d'ordre trois

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \lambda f(t, x) \quad (\lambda f^*)$$

où,  $\lambda f(t+p, x) = \lambda f(t, x)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , et où  $0 \in \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$

alors on dit que  $(\lambda f^*)$  est une perturbation critique sous forme standard; c'est une perturbation du système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

dont les solutions sont des constantes, donc des fonctions  $p$ -périodiques  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Il est alors naturel de se demander si  $(\lambda f^*)$  possède pour  $\lambda \neq 0$  des solutions  $p$ -périodiques; la réponse à ce problème dépend essentiellement de la forme de  $f$  comme le montre l'exemple très simple du système non perturbé scalaire

$$\dot{x} = 0$$

qui admet la famille à un paramètre

$$x(t) = a; \quad a \in \mathbb{R}$$

de solutions  $p$ -périodiques alors que les systèmes perturbés

$$\dot{x} = \lambda b$$

$$\dot{x} = \lambda \sin \frac{2\pi}{p} t$$

admettent respectivement zéro, une famille à un paramètre de solutions p-périodiques quelque soit  $\lambda \neq 0$ ; d'autre part on sait que si la fonction f ne dépend pas de x,  $(\lambda f^*)$  n'a de solution périodique que si

$$\int_0^p \lambda f(t, \lambda) dt = 0$$

### I.3.2. Notation

-----

Nous notons par  $\mathcal{E}(p)$  l'ensemble des  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ , dont  $x(t)$  est une fonction continue p-périodique; pour toute fonction  $x(t)$  de  $\mathcal{E}(p)$  on notera

$$\|x\|_p = \sup_{0 \leq t \leq p} |x(t)|,$$

la norme de x pour la convergence uniforme, et alors  $\mathcal{E}(p)$  est un espace de Banach.

### I.3.3. Existence d'une fonction p-périodique associée à $(\lambda f^*)$

-----

Nous allons énoncer un théorème qui permettra, lorsque  $\lambda \neq 0$ , de trouver ce que J.K. Hale appelle la "fonction p-périodique associée à  $(\lambda f^*)$ "; le résultat de ce théorème sera important dans toute la suite du paragraphe.

#### Théorème 2

-----

1. Soit

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \lambda f(t, x) \quad (\lambda f^*)$$

un système différentiel d'ordre trois, où  $(\lambda f^*) \in F(p)$ , tel que :

$$\begin{array}{lcl} \lambda f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \Lambda & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t, x, \lambda) & \rightarrow & \lambda f(t, x) \end{array}$$

est de classe  $C^1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  avec  $0 \leq \|x\| \leq \rho$ ,  $\lambda \in \Lambda$  avec  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ ; alors

pour  $\rho^* \leq \rho$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $0 \leq \|x^0\| \leq \rho_0 \leq \rho^*$ , il existe  $\lambda_1 > 0$  tel que :

pour  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $0 \leq |\lambda| \leq \lambda_1$  il existe une fonction  $\lambda \varphi^*(t, x^0)$ , p-périodique [que

l'on appelle la fonction p-périodique associée à  $(\lambda f^*)$  telle que :

$$\frac{d}{dt} \lambda \varphi^*(t, x^0) = \lambda \lambda f(t, \lambda \varphi^*(t, x^0)) - \frac{\lambda}{p} \int_0^p \lambda f(u, \lambda \varphi^*(u, x^0)) du \quad (23)$$

et

$$\|\lambda \varphi^*(\cdot, x^0)\|_p \leq \rho^* \quad , \quad \int_0^p \lambda \varphi^*(s, x^0) ds = 0, \quad {}^0\varphi^*(t, x^0) = x^0.$$

2. La fonction  $\lambda \varphi^*(\cdot, x^0)$  est continûment différentiable par rapport à  $x^0$  et  $\lambda$  et peut être construite par approximations successives de la façon suivante :

Soit  $\varphi \in \mathcal{E}(p)$  et soit l'équation différentielle

$$\frac{dn(t)}{dt} = \lambda [\lambda f(t, \varphi(t)) - \frac{1}{p} \int_0^p \lambda f(u, \varphi(u)) du] \quad (24)$$

Cette équation admet une et une seule solution notée par  $n(t)$   $p$ -périodique et de moyenne nulle; on définit  $H$  par

$$[H\varphi](t) = x^0 + n(t).$$

La suite  $\varphi^0 = x^0, \varphi^1 = H\varphi^0, \dots, \varphi^n = H\varphi^{n-1}$  converge uniformément vers  $\lambda \varphi^*(t, x^0)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

### Démonstration

La technique de la démonstration est basée sur le principe du point fixe appliqué à un opérateur  $H$  sur  $\mathcal{E}(p)$ ; nous allons définir cet opérateur sur  $\mathcal{E}(p)$  puis on démontrera qu'il est contractant; il possèdera donc un point fixe limite d'une suite convergente pour la norme définie sur  $\mathcal{E}(p)$ .

Construisons d'abord l'opérateur  $H$ ; notons le second membre de (24) par

$$F(t) = \lambda [\lambda f(t, \varphi(t)) - \frac{1}{p} \int_0^p \lambda f(u, \varphi(u)) du];$$

Comme

$$\int_0^p F(t) dt = 0;$$

alors il existe une et une seule solution  $p$ -périodique de (24) de moyenne nulle et l'on peut écrire cette solution sous forme vectorielle par

$$n(t) = n(0) + \lambda \int_0^t F(s) ds,$$

Si  $n(t)$  est de moyenne nulle, alors il existe  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  avec  $0 < \theta_i < p$ , tel que :

$$n_i(\theta_i) = 0, \quad i = (1, 2, 3)$$

c'est à dire :

$$\eta_i(\theta_i) = \eta_i(0) + \lambda \int_0^{\theta_i} F_i(s) ds = 0$$

d'où

$$\eta_i(0) = -\lambda \int_{\theta_i}^0 F_i(s) ds$$

que nous convenons d'écrire sous la forme

$$\eta(t) = \lambda \int_{\theta}^t F(s) ds,$$

et l'opérateur H peut s'écrire sous la forme

$$[H\varphi](t) = x^0 + \lambda \int_{\theta}^t [\lambda f(s, \varphi(s)) - \frac{1}{p} \int_0^p \lambda f(u, \varphi(u)) du] ds \quad (25).$$

Considérons l'ensemble

$$B_{\rho^*} = \{ \varphi \in \mathcal{C}(p) : \|\varphi\|_p \leq \rho^* \} \subset \mathcal{C}(p)$$

et montrons que :

$$H\varphi \in B_{\rho^*}, \quad \forall \varphi \in B_{\rho^*};$$

en effet on a :

$$\begin{aligned} \|H\varphi\|_p &\leq \|x^0\| + |\lambda| \int_{\theta}^t \left\| \left[ \lambda f(s, \varphi(s)) - \frac{1}{p} \int_0^p \lambda f(u, \varphi(u)) du \right] \right\| ds \\ &\leq \|x^0\| + |\lambda| (PM+M) \leq \|x^0\| + |\lambda| N, \end{aligned}$$

où

$$M = \sup_{|\lambda| \leq \lambda_0} \int_0^p \|\lambda f(u, x)\| du, \quad \forall \|x\| \leq \rho^*$$

et  $N = PM+M$  (indépendant de  $\varphi$ );



Soit

$$\|x^0\| = \rho_0 \leq \rho^*, \text{ et si } |\lambda| \leq \frac{\rho^* - \rho_0}{N}, \text{ alors on a :}$$

$$\|H\varphi\|_p \leq \rho^*, \text{ et donc, } H\varphi \in B_{\rho^*}, \quad \forall \varphi \in B_{\rho^*}.$$

Montrons que H est contractant, c'est à dire

$$\|H\varphi - H\psi\|_p \leq \alpha \|\varphi - \psi\|_p, \quad \alpha < 1$$

pour  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}(p) \times \mathcal{E}(p)$ , tels que  $\|\varphi\|_p \leq \rho^*, \|\psi\|_p \leq \rho^*$

en effet on a :

$$\|H\varphi - H\psi\|_p \leq |\lambda| \int_0^p \left[ \|\lambda f(s, \varphi(s)) - \lambda f(s, \psi(s))\| + \frac{1}{p} \int_0^p \|\lambda f(u, \varphi(u)) - \lambda f(u, \psi(u))\| du \right] ds,$$

Comme  $\lambda f$  est de classe  $C^1$  sur  $\|x\| \leq \rho^*$  alors on a :

$$\|\lambda f(s, x) - \lambda f(s, y)\| \leq c \|x - y\|$$

donc il existe un nombre fini A tel que :

$$\|H\varphi - H\psi\| \leq |\lambda| A \|\varphi - \psi\|_p.$$

Soit  $\lambda_1 = \frac{1}{A}$  alors  $\forall \lambda$  tel que  $|\lambda| \leq \lambda_1$  on a :

$$\|H\varphi - H\psi\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|_p, \text{ où } \alpha < 1$$

ainsi H qui dépend de  $x^0$  et  $\lambda$ , est une contraction dans  $B_{\rho^*}$ , donc il possède un point fixe, ce point fixe est la limite dans  $\mathcal{E}(p)$  de la suite

$$\varphi^0 \equiv x^0, \varphi^1 = H\varphi^0, \dots, \varphi^n = H\varphi^{n-1},$$

qui converge si  $n \rightarrow \infty$  vers  $\lambda \varphi^*(t, x^0)$  et la convergence est uniforme, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n - \lambda \varphi^*\|_p = 0;$$

il existe donc pour tous  $x^0$  et  $\lambda$  un point fixe  ${}^\lambda\varphi^*(t, x^0)$  de  $H$ , et on vérifie immédiatement que si  ${}^\lambda\varphi(t, x^0) \in B_{\rho^*}$  est de classe  $C^1$ ,  $H{}^\lambda\varphi$  est aussi de classe  $C^1$  (il suffit de justifier une dérivation sous le signe d'intégration). Dans ces conditions, le point fixe  ${}^\lambda\varphi^*(t, x^0)$  est de classe  $C^1$  du fait de l'uniformité.

Ainsi nous avons trouvé  ${}^\lambda\varphi^*(t, x^0)$  de classe  $C^1$ ,  $p$ -périodique de moyenne nulle [que l'on appelle la fonction  $p$ -périodique associée à  $({}^\lambda f^*)$ ] et vérifiant

$$\frac{d}{dt} {}^\lambda\varphi^*(t, x^0) = \frac{d}{dt} H({}^\lambda\varphi^*(t, x^0)) = \lambda [{}^\lambda f(t, {}^\lambda\varphi^*(t, x^0)) - \frac{1}{p} \int_0^p {}^\lambda f(u, \varphi(u)) du]$$

avec

$${}^0\varphi^*(t, x^0) \equiv x^0, \quad \text{et} \quad \|{}^\lambda\varphi^*(t, x^0)\|_p \leq \rho^*,$$

ce qui achève la démonstration.

#### I.3.4. Remarque (4)

1. On a vu que  ${}^\lambda\varphi^*(t, x^0)$  est la limite de la suite

$$\varphi^0 \equiv x^0, \varphi^1, H\varphi^0, \dots, \varphi^n = H\varphi^{n-1}$$

et pour obtenir chaque terme de cette suite on calcule  $\varphi^0 \equiv x^0$ , et  $\varphi^1(t)$  de l'équation

$$\varphi^1(t) = H\varphi^0(t) = x^0 + \lambda \int_0^t [{}^\lambda f(s, x^0) - \frac{1}{p} \int_0^p {}^\lambda f(u, x^0) du]$$

jusqu'au premier ordre en  $\lambda$ ; à partir de celui-ci le terme  $\varphi^2$  jusqu'au terme d'ordre 2 en  $\lambda$ , puis de  $\varphi^n$  jusqu'au terme d'ordre  $n$  en  $\lambda$ . On peut montrer, voir [8] que cette suite de fonctions  $\varphi^n$  tronquées à l'ordre  $n$  converge encore vers  ${}^\lambda\varphi^*(t)$

2. On voit dans le théorème (2) qu'en modifiant le second membre de  $({}^\lambda f^*)$  on a pu trouver une suite de fonctions périodiques ayant une limite  ${}^\lambda\varphi^*(t, x^0)$ , qui est une solution  $p$ -périodique de

$$\frac{d}{dt} {}^\lambda\varphi^*(t, x^0) = \lambda {}^\lambda f(t, {}^\lambda\varphi^*(t, x^0)) - \frac{\lambda}{p} \int_0^p {}^\lambda f(u, {}^\lambda\varphi^*(u, x^0)) du$$

et si

$$\int_0^p {}^\lambda f(u, {}^\lambda\varphi^*(u, x^0)) du = 0$$

alors  ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0)$  est solution p-périodique de  $({}^\lambda f^*)$ ; ceci est l'objet du théorème suivant (voir [8] pour la démonstration).

### I.3.5. Théorème (3)

-----

Soit

$$\frac{dx}{dt} = \lambda {}^\lambda f(t, x) \quad ({}^\lambda f^*);$$

On suppose que les conditions du théorème (2) sont satisfaites; soit  ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0)$  la fonction p-périodique associée à  $({}^\lambda f^*)$ .

S'il existe une fonction  $x^0(\lambda) \in \mathbb{R}^3$  définie pour  $0 \leq |\lambda| \leq \lambda_1$  vérifiant

$$\int_0^p {}^\lambda f(t, {}^\lambda \varphi^*(t, x^0(\lambda))) dt = 0 \quad (26),$$

alors dans  $\|x\| \leq \rho$   ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0(\lambda))$  est solution p-périodique de  $({}^\lambda f)$ . Réciproquement s'il existe dans  $0 \leq \|x\| \leq \rho^* < \rho$  une solution  ${}^\lambda x(t)$  p-périodique définie et continue pour  $0 < |\lambda| \leq \lambda_1$ , de  $({}^\lambda f^*)$  alors

$${}^\lambda x(t) = {}^\lambda \varphi^*(t, x^0(\lambda)).$$

### I.3.6. Définition (6)

-----

L'équation (26) dans le théorème (3) s'appelle équation déterminante ou équation de bifurcation.

Cette équation de bifurcation est, en général, très difficile à résoudre (et rien ne permet d'ailleurs d'affirmer qu'elle admet des solutions).

Cependant, Hale a pu grâce à la propriété de symétrie satisfaite par le système  $({}^\lambda f^*)$ , réduire le nombre d'équations scalaires équivalentes à celle-ci; ceci est l'objet du théorème suivant :

### I.3.7. Théorème (4)

-----

Soit

$$\frac{dx}{dt} = \lambda {}^\lambda f(t, x) \quad ({}^\lambda f^*)$$

où  $x \in \mathbb{R}^3$ ; et soit  $({}^\lambda f^*) \in F_{\bar{\sigma}}^\alpha(p)$ , (resp.  $({}^\lambda f^*) \in F_{\bar{\sigma}}^\alpha(p)$ ),  $(\sigma, \bar{\sigma}) \in E$ , on suppose que les conditions du théorème (2) sont satisfaites, donc la fonction p-périodique associée à  $({}^\lambda f^*)$  existe, nous la noterons par  ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0)$ , où  $x^0 \in \mathbb{R}^3$ , tel que  $\|x^0\| \leq \rho^* < \rho$ , et nous noterons par

$$\phi(x^0, \lambda) = \int_0^p \lambda f(t, \lambda \varphi^*(t, x^0)) dt = 0,$$

l'équation de bifurcation correspondante.

Alors, pour tout  $x^0 \in \bar{\sigma}$  (resp.  $x^0 \in \sigma$ ) on a

$$\phi(x^0, \lambda) \in \sigma, \text{ (resp. } \phi(x^0, \lambda) \in \bar{\sigma})$$

et l'équation de bifurcation sera réduite à une (resp. deux) composantes scalaires.

Démonstration

Prenons  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$  (resp.  $\sigma = \sigma_1$ ), et  $\alpha = 0$ , et soit  $\varphi \in \mathcal{C}(p)$  tel que

$$\|x^0\|_p \leq \rho^*;$$

D'après le théorème (2) la fonction p-périodique associée  $\lambda \varphi^*(t, x^0)$  au système  $(\lambda f^*)$  existe et si  $x^0$  est tel que

$$\phi(x^0, \lambda) = \int_0^p f(t, \lambda \varphi^*(t, x^0)) dt = 0$$

d'après la remarque (4),  $\lambda \varphi^*(t, x^0)$  est une solution p-périodique de  $(\lambda f^*)$ ; or le système  $(\lambda f^*)$  appartient à  $F_{\bar{\sigma}_1}^0(p)$  (resp.  $F_{\sigma_1}^0(p)$ ) et la solution p-périodique  $\lambda \varphi^*(t, x^0)$  est telle que

$$\varphi^*(0, x^0) = \varphi^0 = x^0 \in \bar{\sigma}_1 \text{ (resp. } \sigma_1);$$

d'après la proposition (2) on a donc :

$$S \lambda \varphi^*(-t, x^0) = -\lambda \varphi^*(t, x^0)$$

d'où

$$\lambda f(-t, S \lambda \varphi^*(-t, x^0)) = -S \lambda f(t, \lambda \varphi^*(t, x^0))$$

et en intégrant 0 à p :

$$\phi(x^0, \lambda) = \int_0^p \lambda f(-t, S \lambda \varphi^*(-t, x^0)) dt = - \int_0^p S \lambda f(t, \lambda \varphi^*(t, x^0)) dt$$

Comme  $f_2$  et  $f_3$  (resp.  $f_1$ ) sont impaires et de moyennes nulles, alors on déduit que :

$$\phi(x^0, \lambda) \in \sigma_1 \text{ (resp. } \phi(x^0, \lambda) \in \bar{\sigma}_1)$$

ce qui achève la démonstration.

### I.3.8. Conclusion

-----

La réponse à la question d'existence de solution p-périodique du système  $({}^\lambda A)$  admettant une symétrie par rapport à un plan ou un axe par la méthode de Hale, est affirmative si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. toutes les solutions de  $({}^0 A)$  sont p-périodiques,
2. il existe une fonction p-périodique associée à  $({}^\lambda f^*)$ ,
3. l'équation (26) admet une solution.

Mais cette méthode reste difficile à appliquer car l'obtention de la fonction p-périodique associée à  $({}^\lambda f^*)$  fait appel à des calculs complexes; de plus rien ne permet d'affirmer que l'équation (26), (l'équation de bifurcation) possède une solution.

Pour illustrer la méthode et montrer la complexité des calculs nous exposons maintenant un exemple d'application de la méthode de recherche de solutions p-périodiques de Hale :

### I.3.9. Exemple

-----

Soit

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sin t \\ y_1 & y_2 & \sin t \\ y_1 & y_2 & \sin t \end{pmatrix} \quad (27)$$

un système différentiel  $2\pi$ -périodique appartenant à  $F_{\sigma_1, 0}^0(2\pi) = F_{\sigma_1}^0(2\pi) \cap F_{\sigma_1}^{\pi/2}(2\pi)$

(on rappelle que  $F_{\sigma_1, 0}^0(p)$  est l'ensemble des systèmes différentiels p-périodiques possédant une symétrie par rapport à l'origine), dont la solution matricielle fondamentale du système non perturbé  $({}^0 A)$  s'écrit :

$$Y(t,0) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \frac{1}{2} \sin 2t & 0 \\ -2 \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2t & \frac{1}{4}(1-\cos 2t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Toutes les solutions du système non perturbé sont  $2\pi$ -périodiques et les hypothèses du théorème (2) sont satisfaites; étudions si (27), pour  $\lambda$  assez petit possède une solution  $2\pi$ -périodique issue au temps  $t=0$ , du point  $y^0 \in \sigma_1$ ; pour cela effectuons le changement de variables

$$y(t) = Y(t)x(t), \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

nous obtenons le système ( ${}^\lambda f^*$ ) sous forme standard correspondant à (27)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \sin t \cos 2t - \frac{1}{2} z(t) \sin 2t \\ 2 \sin 2t \sin t + z(t) \cos 2t \\ -\frac{1}{2} \sin 2t \sin t + \frac{1}{4} z(t)(1-\cos 2t) + z(t) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\text{où } z(t) = \sin t \left[ (-x_1^2 + \frac{x_2^2}{4}) \sin 4t + x_1 x_2 \cos 4t \right].$$

On vérifie d'abord que (28) appartient à  $F_{\sigma_1}^0(2\pi)$ , donc d'après le théorème (4) l'équation déterminante se réduit à deux équations.

$$\phi_2(x^0, \lambda) = \int_0^{2\pi} \lambda \tilde{r}_2(t, {}^\lambda \varphi^*(t, x^0)) dt = 0 \quad (29)$$

$$\phi_3(x^0, \lambda) = \int_0^{2\pi} \lambda \tilde{r}_3(t, {}^\lambda \varphi^*(t, x^0)) dt = 0 \quad (30)$$

où  ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0)$  est la fonction  $2\pi$ -périodique associée à (28); cherchons  ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0)$  et  $x^0(\lambda)$  pour lequel les équations (29) et (30) sont satisfaites donc, il faut calculer d'abord par approximations successives jusqu'à l'ordre  $n$  et puis faire tendre  $n \rightarrow \infty$ , la fonction  ${}^\lambda \varphi^*(t, x^0)$  or, ceci demande d'immenses calculs difficiles et même impossibles à mener explicitement.

### I.4. Méthode des symétries

=====

Nous avons vu dans (I.2.) que la méthode de Malkin, pour certains systèmes, ne permet pas de donner une réponse au problème de l'existence de leurs solutions p-périodiques et on a vu également dans (I.3.) que la méthode de Hale étudie des systèmes très particuliers (toutes les solutions des systèmes non perturbés sont p-périodiques); et fait appel à certaines notions (fonction p-périodique associée au système et résolution de l'équation de bifurcation) très difficiles à manier et à résoudre en pratique.

Dans ce paragraphe nous allons présenter une méthode dite méthode des symétries; cette méthode sera appliquée lorsque le système  $(\lambda f)$  (resp.  $(\lambda A)$ ) admet une symétrie par rapport à un plan, ou deux symétries (par rapport à l'origine).

On débutera ce paragraphe par la définition d'un système différentiel singulier (resp. non singulier) par rapport à la symétrie donnée; nous essaierons à travers les deux théorèmes (5) et (6) d'apporter une réponse précise aux deux questions  $Q_1$  et  $Q_2$  posées en (I.1.2.); enfin nous appliquerons le résultat du théorème (5) aux exemples (I.2.2.), (I.2.3.), (I.2.4.) et (I.3.9.).

#### I.4.1. Définition (7)

-----

Soit

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A)$$

un système différentiel linéaire p-périodique appartenant à  $L_i^j(p)$ , (resp.  $L_i^j(p/2)$ ), où  $(i,j) \in \{1,2,3\}$ . Rappelons ici que  $L_i^j(p)$  est l'ensemble des systèmes linéaires p-périodiques possédant une symétrie par rapport à l'espace  $\sigma_i$  ou  $\bar{\sigma}_i$ , dont la dimension de l'espace des solutions p-périodiques est égale à j.

1. On dit que (A) est singulier par rapport à la symétrie  $\bar{\sigma}_i$ , si l'image du plan  $\bar{\sigma}_i$  par la demi-application de Poincaré, qui est représentée par la matrice  $X(p/2)$  choisie en respectant la symétrie (voir proposition (9)), est le plan lui même, sinon (A) est non singulier par rapport à la symétrie  $\bar{\sigma}_i$ .
2. On dit que (A) est non singulier par rapport à la symétrie 0 (symétrie par rapport à l'origine) si l'image de l'axe  $\sigma_j$  par la quart-application de Poincaré qui est représentée par la matrice  $X(p/4)$ , est transverse au plan  $\bar{\sigma}_i$ ; sinon (A) est singulier par rapport à 0.

Dans ce qui suit, nous allons étudier le problème que ce soit dans le cas d'une symétrie par rapport à un plan ou dans le cas d'une symétrie par rapport à l'origine.

I.4.2. Cas d'une symétrie par rapport à un plan

-----

Théorème 5

-----

Soit

$$\frac{dx}{dt} = {}^\lambda f(t, x) \quad ({}^\lambda f)$$

un système différentiel appartenant à  $F_\sigma^0(p)$ , et soit  ${}^\delta \varphi \in S_\sigma^0(p)$  une solution de  $({}^\delta f)$  (pour  $\lambda = \delta \in \Lambda$ ), où  $\sigma = \bar{\sigma}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  et soit (pour  $\sigma = \bar{\sigma}_1$ )

$$X(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

la matrice de demi-application de Poincaré de l'équation aux variations  $(A_\varphi^\delta)$  associée à  ${}^\delta \varphi$  écrite dans une base bien choisie; alors si  $(A_\varphi^\delta)$  est non singulier par rapport à  $\bar{\sigma}_i$ , et en considérant le cas  $(A_\varphi^\delta) \in L_1^1(p)$  il découle :

1. la solution  ${}^\delta \varphi$  est non isolée dans l'ensemble des solutions p-périodiques appartenant à  $S_\sigma^0(p)$  de  $({}^\delta f)$ ; de manière plus précise, il existe un chemin  $c : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \sigma$ , où  $J = ]-1, +1[$ , paramétré par  $\mu \in J$ , tel que  $c(0) = {}^\delta \varphi(0)$  et tel que pour tout point  $c(\mu) \in \sigma$ , la solution  ${}^\mu \varphi$  issue au temps  $\alpha$  de  $c(\mu)$  soit p-périodique appartenant à  $S_\sigma^0(p)$ .
2. la famille  ${}^\mu \varphi$  de solutions périodiques de  $({}^\delta f)$  peut être prolongée à tout un voisinage  $V$  de  $\delta$  dans  $\Lambda$ , de manière unique et continue en  $\lambda$ .

Démonstration :

Nous allons démontrer le théorème pour  $\sigma = \bar{\sigma}_1$ , les autres cas démontrant de manière similaire soit  ${}^\delta \varphi \in S_{\bar{\sigma}_1}^0(p)$  [ ${}^\delta \varphi(0) \in \bar{\sigma}_1, {}^\delta \varphi(p/2) \in \bar{\sigma}_1$ ] une solution de  $({}^\delta f)$  et soit

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



l'application de classe  $c^1$  qui à  $x^0 \in \bar{\sigma}_1$  associe  $T(x^0) = \hat{\varphi}(p/2, 0, x^0)$ , où  $\hat{\varphi}$  est la solution de  $(\delta f)$  issue au temps  $\alpha=0$  du point  $x^0$ ; on a donc :

$$T(\delta\varphi(0)) = \delta\varphi(p/2) \in \bar{\sigma}_1,$$

D'après le corollaire (2), la solution  $\delta\varphi$  est p-périodique, et d'après le corollaire (6) l'équation aux variations associée à  $\delta\varphi(A\delta\varphi)$  appartient au moins à  $L_1^1(p)$ ; soit  $T^*$  l'application linéaire tangente de  $T$  au point  $\delta\varphi(0)$ ,  $T^*$  est représentée par la matrice

$$X(p/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

dans une base choisie respectant la symétrie (voir la proposition (9) dans le chapitre (II)).

Le coefficient  $b_1$  est non nul, donc  $T^*(\bar{\sigma}_1)$  est transverse à  $\bar{\sigma}_1$ , et donc  $T(\bar{\sigma}_1)$  est transverse aussi à  $\bar{\sigma}_1$  au point  $\delta\varphi(p/2) \in \bar{\sigma}_1$ ; cela entraîne que la surface  $T(V)$ , où  $V \subset \bar{\sigma}_1$  est un voisinage de  $\delta\varphi(0)$ , est transverse à  $\bar{\sigma}_1$  et coupe donc  $\bar{\sigma}_1$  au voisinage de  $\delta\varphi(p/2)$ , selon un arc de courbe de classe  $C^1$ . Donc l'image réciproque de cet arc par  $T$ , est un chemin  $c : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{\sigma}_1$ , où  $J = ]-1, +1[$ , passant de  $\delta\varphi(0) = c(0)$ , tel que pour tout point  $c(\mu) \in \bar{\sigma}_1$ , où  $\mu \in J$ , la solution  ${}^\mu\varphi$  issue au temps  $t=0$  de  $c(\mu)$ , et de plus

$${}^\mu\varphi(0) \in \bar{\sigma}_1 \text{ et } {}^\mu\varphi(p/2) \in \bar{\sigma}_1;$$

d'après le corollaire (2)  ${}^\mu\varphi$  est p-périodique appartenant à  $S_{\bar{\sigma}_1}^0(p)$ , ce qui prouve que la solution  $\delta\varphi$  n'est pas isolée dans l'ensemble des solutions p-périodiques appartenant à  $S_{\bar{\sigma}_1}^0(p)$ .

#### I.4.3. Remarque (5)

Le théorème (5) s'applique au système  $({}^\lambda A)$ , voir (I.1.1.) appartenant à  $F_{\bar{\sigma}_i}^\alpha(p)$ ; en effet on connaît la solution nulle  $\varphi$  du système non perturbé  $({}^0 A)$  p-périodique; elle appartient à  $S_{\bar{\sigma}_i}^0(p)$ ; l'équation aux variations associée à la solution nulle est alors  $\dot{x} = A(t)x$  c'est à dire le système non perturbé  $({}^0 A)$ .

I.4.4. Applications

Nous allons appliquer le résultat de ce théorème aux exemples exposés dans (I.2.) :

1°) Existence de solutions  $2\pi$ -périodiques du système (16) exposé dans (I.2.2.)

Nous vérifions d'abord que le système décrit en (16) appartient à  $F_{\bar{\sigma}_1}^0(2\pi)$

et que le système non perturbé décrit en (17) de solutions

$\varphi^1(t) \in S_{\bar{\sigma}_1}^0(2\pi)$  et  $\varphi^3(t) \in S_{\bar{\sigma}_1}^0(2\pi)$  appartient à  $L_1^2(2\pi)$ , ceci en écrivant la matrice  $X(\pi)$  dans une base choisie respectant la symétrie (voir la proposition (9)); on obtient :

$$X(\pi) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour tout  $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1$ , on a  $X(\pi)(x^0) = e^2 \begin{pmatrix} x_2^0 \pi \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

donc :

$\Gamma^*(\bar{\sigma}_1) = X(\pi)(\bar{\sigma}_1)$  est transverse à  $\bar{\sigma}_1$ , par conséquent le système (17) est non singulier par rapport à la symétrie  $\bar{\sigma}_1$ ; d'après le théorème (5) on en déduit que (16) possède une infinité de solutions  $2\pi$ -périodiques, pour  $\lambda$  assez voisin de zéro.

2°) Existence de solutions  $2\pi$ -périodiques du système (19) exposé dans (I.2.3.) :

De même on vérifie que le système décrit en (19) appartient à  $F_{\bar{\sigma}_1}^0(2\pi)$  et que le système non perturbé (20) de solution :

$$\varphi(t) = e^{1-\cos t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_{\bar{\sigma}_1}^0(2\pi)$$

appartient à  $L_1^1(2\pi)$ , en écrivant la matrice  $X(\pi)$  dans une base respectant la symétrie, on obtient :

$$X(\pi) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pi & 2 + \frac{\pi^2}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi :

$\Gamma^*(\bar{\sigma}_1) = X(\pi) (\bar{\sigma}_1)$  est transverse à  $\bar{\sigma}_1$ , par conséquent le système (20) est non singulier par rapport à la symétrie  $\bar{\sigma}_1$ , et d'après le théorème (5) on déduit que (19) possède une infinité de solutions  $2\pi$ -périodiques pour  $\lambda$  assez voisin de zéro.

3°) Comme autre application du théorème (5) nous pouvons démontrer l'existence de solutions  $p$ -périodiques pour le système

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \lambda G(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (31)$$

où  $A$  est une matrice réelle constante d'ordre trois définie comme dans (II.3.1.) de la première partie, et  $G$  est une fonction de classe  $C^1$  en  $x$ ,  $p$ -périodique en  $t$ , tels que

1. le système non perturbé ( ${}^0A$ ) de (29) appartient à  $L_i^1(p)$
2. pour un certain  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le système (31) appartient à  $F_{\bar{\sigma}_i}^\alpha(p)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$

Alors (31) admet pour  $\lambda$  petit ( $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ ) une famille à un paramètre de solutions  $p$ -périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à l'espace  $\bar{\sigma}_i$  dans l'espace des phases  $(ox_1, ox_2, ox_3)$ .

#### Démonstration

---

Prenons  $i=1$  et  $\alpha=0$  (on peut remarquer que le système non perturbé ( ${}^0A$ ) est autonome et que le choix du "temps"  $\alpha$  de la symétrie n'importe pas); alors étant donné que ( ${}^0A$ ) est autonome, on connaît explicitement toutes ses solutions et puisque ( ${}^0A$ )  $\in L_1^1(p)$ ,  $(X(p/2)) (\bar{\sigma}_1)$  est transverse à  $\bar{\sigma}_1$  selon une droite (c'est l'espace des solutions  $p$ -périodiques constantes) et d'après le théorème (5) le système (31) admet des solutions  $p$ -périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à l'espace  $\bar{\sigma}_1(ox_2, ox_3)$ .

#### I.4.5. Cas d'une symétrie par rapport à l'origine

---

Nous allons énoncer un théorème d'existence de solutions p-périodiques d'un système admettant une symétrie par rapport à l'origine; et nous verrons que la solution p-périodique de  $(\delta f)$ , (resp.  $(\delta A)$ ) est isolée dans l'ensemble des solutions p-périodiques appartenant à  $S_{\sigma,0}^{\alpha}(p)$ .

#### Théorème (6)

Soit

$$\frac{dx}{dt} = {}^{\lambda}f(t,x) \quad ({}^{\lambda}f)$$

un système différentiel appartenant à  $F_{\sigma,0}^{\alpha}(p)$ ,  $\sigma \in \{\sigma_i\}$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , et soit  $\delta\varphi \in S_{\sigma,0}^{\alpha}(p)$  une solution p-périodique de  $({}^{\lambda}f)$  pour la valeur  $\lambda = \delta \in \Lambda$  de paramètre  $\lambda$ , et soit (pour  $\sigma = \sigma_1$ )

$$X(P/4) = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

la matrice de la quart-application de Poincaré de l'équation aux variations  $(A^{\delta}\varphi)$  associée à  $\delta\varphi$  écrite dans une base bien choisie; alors si  $(A^{\delta}\varphi)$  est non singulier par rapport à l'origine, et en considérant le cas  $(A^{\delta}\varphi) \in L_i^1(p)$  il découle :

1. la solution  $\delta\varphi$  p-périodique est isolée dans l'ensemble des solutions p-périodiques avec symétrie  $S_{\sigma,0}^{\alpha}(p)$
2. la solution  $\delta\varphi$  p-périodique est prolongeable à une famille  ${}^{\lambda}\varphi \in S_{\sigma,0}^{\alpha}(p)$  de solutions p-périodiques isolées de  $({}^{\lambda}f)$ .

#### Démonstration

1. La démonstration sera très semblable à la démonstration du théorème précédent. Prenons :

$\sigma = \sigma_1$ ,  $\alpha = 0$ , soit  ${}^\delta \varphi \in S_{\sigma_1, 0}^0(P)$   ${}^\delta \varphi(0) \in \sigma_1$ ,  ${}^\delta \varphi(P/4) \in \bar{\sigma}_1$  une solution de  $({}^\delta f)$  pour  $\lambda = \delta$ , et soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application de classe  $C^1$  qui a  $x^0 \in \sigma_1 \subset \mathbb{R}^3$  associe  $T(x^0) = \hat{\varphi}(P/4, 0, x^0)$ , où  $\hat{\varphi}$  est la solution de  $({}^\delta f)$  issue au temps  $\alpha = 0$  du point  $x^0$ , on a donc

$$T({}^\delta \varphi(0)) = {}^\delta \varphi(P/4) \in \bar{\sigma}_1$$

Soit  $T^*$  l'application linéaire tangente représentée par la matrice

$$X(P/4) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

dans une base choisie respectant la symétrie; le coefficient  $a_1$  est non nul donc  $T^*(\sigma_1)$  est transverse à  $\bar{\sigma}_1$ , et donc  $T(\sigma_1)$  est transverse aussi à  $\bar{\sigma}_1$  au point  $T({}^\delta \varphi(0)) = {}^\delta \varphi(P/4) \in \bar{\sigma}_1$ ; il en résulte que la solution  ${}^\delta \varphi$  est isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques appartenant à  $S_{\sigma_1, 0}^0(P)$ .

2. Etant donné que l'application  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dépend continûment de  $\lambda \in \Lambda$ , alors il existe un voisinage  $W$  dans  $\delta$  tel que la solution  ${}^\lambda \varphi(t)$  appartient à  $S_{\sigma_1, 0}^0(P)$ , où  $\lambda \in W(\delta)$ ; cette solution est issue d'un voisinage de la condition initiale de la solution  ${}^\delta \varphi(t)$  [c'est à dire de  ${}^\delta \varphi(0)$ ] et elle tend vers  ${}^\delta \varphi(t)$  quand  $\lambda$  tend vers  $\delta$ .

#### I.4.6. Remarque (6)

-----

La remarque faite dans (I.4.3.) reste valable ici; par conséquent on peut appliquer le théorème (6) pour démontrer l'existence de solutions P-périodiques du système perturbé  $({}^\lambda A)$ .

#### I.4.7. Application

-----

Nous allons appliquer le résultat de ce théorème à l'exemple (I.3.9.); nous vérifions d'abord que (27) appartient à  $F_{\sigma_1, 0}^0(2\pi) = F_{\sigma_1}^0(2\pi) \cap F_{\bar{\sigma}_1}^{\pi/2}(2\pi)$ ; et ensuite que toutes les solutions du système non perturbé sont  $2\pi$ -périodiques et on a :

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

donc pour tout  $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma_1$ , on a  $Y(\pi/2)(y^0) = \begin{pmatrix} -y_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma_1$

ainsi :

$\Gamma^*(\sigma_1) = Y(\pi/2)(\sigma_1) = \sigma_1$  est transverse à  $\bar{\sigma}_1$ , par conséquent le système non perturbé est non singulier par rapport à l'origine et d'après le théorème (6) on déduit que (27) possède une solution  $2\pi$ -périodique pour  $\lambda$  assez voisin de zéro.

## DEUXIEME CHAPITRE

### EXISTENCE DES SOLUTIONS PERIODIQUES D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL PERIODIQUE NON LINEAIRE ADMETTANT UNE SYMETRIE.

#### II.1. INTRODUCTION =====

Le problème principal qui nous préoccupe quand nous avons affaire à un système différentiel p-périodique est la recherche de ses solutions P-périodiques; on s'est efforcé tout d'abord de résoudre ou, comme il est admis de dire, d'intégrer les systèmes différentiels par quadrature c'est à dire que l'on a cherché à écrire la solution à l'aide des fonctions élémentaires et de leurs intégrales et à vérifier si elle satisfait la condition de périodicité.

Cependant on sait qu'il y a beaucoup de systèmes différentiels qui ne peuvent pas être intégrés, à savoir, la plupart des systèmes différentiels non linéaires mais aussi les systèmes linéaires non autonomes. On a alors tenté par d'autres moyens de prouver l'existence de solutions périodiques, par exemple, des techniques de point fixe, la méthode de la moyenne, l'analyse fonctionnelle, voir [8], [9].

Dans la littérature des systèmes différentiels périodiques non linéaires, on peut distinguer deux cas :

- 1°. systèmes différentiels périodiques non linéaires contenant un petit paramètre, on les appelle faiblement non linéaires
- 2°. systèmes différentiels périodiques non linéaires ne contenant aucun petit paramètre.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode des symétries a pu nous apporter une réponse précise à la question d'existence de solutions périodiques d'un système différentiel périodique faiblement non linéaire admettant une ou deux symétries.

Lorsque le système différentiel périodique ne possède pas un petit paramètre alors il est difficile, en général, de répondre à la question d'existence de solutions périodiques surtout si celui-ci est de dimension supérieure à deux. Dans ce chapitre nous allons répondre à cette question pour un certain type de systèmes différentiels périodiques non linéaires possédant une ou deux symétries, en utilisant la méthode des symétries.-



II.2. Existence de solutions périodiques d'un système différentiel périodique  
 =====  
 non linéaire admettant une symétrie par rapport à un plan  
 =====

Dans ce paragraphe nous allons exposer deux propositions permettant de démontrer, dans chacune d'elles, l'existence d'une infinité de solutions p-périodiques du système différentiel suivant :

$$\dot{x} = Bx + G(t,x) \tag{G}$$

où  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , et B est une matrice réelle constante, ayant l'une des

formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et où :

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t,x) \rightarrow G(t,x) = \begin{pmatrix} g_1(t,x) \\ g_2(t,x) \\ g_3(t,x) \end{pmatrix}$$

est une fonction continue P-périodique de classe  $C^1$  par rapport à x satisfaisant à certaines conditions; dans (II.2.1.) on suppose G(t,x) borné, alors que dans (II.2.3.) G(t,x) satisfait une majoration de type affine; nous donnons dans (II.2.2.) une application de la première proposition à une équation différentielle "bornée" p-périodique d'ordre trois.

Remarquons ici que Reissig voir [10], a traité de systèmes de la forme (G) où la matrice B dépend du temps, mais où le système linéaire

$\frac{dx}{dt} = B(t)x$  est non critique, et où G(t,x) est localement Lipschitzienne tel que :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|G(t,x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \text{ uniformément par rapport à } t.$$

II.2.1. Proposition

Soit  $(G) \in F_0^\alpha(P)$ , où  $\sigma = \bar{\sigma}_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , tel que :

$$\|G(t,x)\| \leq a \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4, \quad a \in \mathbb{R}^{*+}$$

Alors le système  $(G)$  possède une infinité de solutions P-périodiques appartenant à  $S_0^\alpha(P)$ .

Démonstration

Nous allons démontrer la proposition pour  $\sigma = \bar{\sigma}_1$ , les autres cas se démontrent de manière similaire (en faisant un changement de variables  $x = Ay$ , où  $A$  est la matrice de passage de  $\bar{\sigma}_j$  à  $\bar{\sigma}_1$ ,  $j \in \{2,3\}$ ); la démonstration peut être décomposée en deux étapes :

1°. Nous montrons que toutes les solutions de  $(G)$  sont définies au moins sur un intervalle  $[0, P/2]$  et donc, nous pouvons définir la demi-application de Poincaré  $T$ .

2°. Nous prouvons l'existence de points  $x^0 \in \bar{\sigma}_1$  tels que :

$$T(x^0) = x_1(P/2) \in \bar{\sigma}_1, \text{ (c'est à dire } x_1(P/2) = 0)$$

où  $x(t)$  est une solution du système  $(G)$  issue de  $x^0 \in \bar{\sigma}_1$ , au temps  $t_0 = 0$

Démonstration de 1°.

Nous allons établir d'abord que toute solution de  $(G)$   $\left[ x: J \subset [0, P/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ où } J \text{ est un intervalle} \right]$  peut être prolongée en une solution  $x: [0, P/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; en effet on a :

$$\begin{aligned} \|Bx + G(t,x)\| &\leq \|B\| \cdot \|x\| + \|G(t,x)\| \leq \|B\| \cdot \|x\| + a \\ &\leq \gamma(\|x\|+1), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

où  $\gamma = \sup(\|B\|, a)$ ; soit  $D(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x-x^0\| \leq r\}$ , et soit

$$M(r) = \sup_{x \in D(x^0, r)} [\|Bx + G(t,x)\|] \leq \gamma (1 + r + \|x^0\|);$$

étant donné  $x^0 \in \bar{\sigma}_1 \subset \mathbb{R}^3$ , nous choisissons  $r$  tel que  $r \geq 1 + \|x^0\|$ , et donc

$$M(r) \leq 2 \gamma r;$$

en appliquant le théorème d'existence des solutions ( si  $f(t,x)$  est une application continue de  $[t_0, t_0 + \beta] \times \bar{\Omega}$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , alors pour tout élément  $x^0 \in \Omega$ , il existe une application différentiable  $x(t)$  ( $x : [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) solution de  $\dot{x} = f(t,x)$  telle que  $x(t_0) = x^0$ , avec

$$h = \inf\left(\beta, \frac{r}{M}\right), \quad M = \sup_{(t,x) \in [t_0, t_0 + h] \times \bar{\Omega}} \|f(t,x)\|$$

et  $r$  est la distance de  $x^0$  à la frontière de  $\Omega$ ) voir [11], la solution de (G) peut être définie dans l'intervalle  $0 \leq t \leq \frac{1}{2\gamma}$ , et puisqu'il est possible d'itérer en partant de  $\tilde{x} = \tilde{x}(t_1)$  à l'époque  $t_1 = \frac{1}{2\gamma}$ , on voit que la solution est définie pour tout  $t$ , en particulier pour  $t \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$ .

Soit

$$x : [0, p/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

une solution de (G) définie dans  $[0, p/2]$ , issue de  $x^0 \in \bar{\sigma}_1$  au temps  $t_0 = 0$ , et soit

$$T : \bar{\sigma}_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^0 \rightarrow T(x^0) = x_1(p/2)$$

la demi-application de Poincaré définie dans  $\mathbb{R}^3$  est continue.

### Démonstration de 2°.

L'idée principale de la démonstration de (2) est de démontrer d'abord qu'il existe au moins un point  $m_1 \in \bar{\sigma}_1$ , tel que :

$$T(m_1) = x_1(p/2) > 0, \quad (32)$$

et au moins un autre point  $m_2 \in \bar{\sigma}_1$ , tel que

$$T(m_2) = x_1(p/2) < 0; \quad (33)$$

d'après la continuité de l'application  $T$ , on en déduit que sur chaque chemin continu dans  $\bar{\sigma}_1$  joignant  $m_1$  et  $m_2$ , il existe un point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  tel que :

$$T(m^*) = x_1(p/2) = 0, \quad (\text{c.a.d. } T(m^*) \in \bar{\sigma}_1).$$

Démontrons l'existence d'un point  $m_1 \in \bar{\sigma}_1$ , vérifiant la relation (32); en effet

soit  $a$  le majorant de  $G(t,x)$ , et soit  $m_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1$  tel que :

$$x_2^0 > a + \frac{ap}{2};$$

Comme  $x_2^0$  est supérieur à  $a$ , et que  $x_2(t)$  est continue, on a donc  $x_2(t) > a$ , pendant un certain temps; supposons qu'il existe  $\beta > 0$  tel que :

$$\begin{cases} x_2(\beta) = a \\ x_2(t) > a, \text{ pour tout } t \in [0, \beta[ \end{cases}$$

et montrons que  $x_2(t)$  est positif, pour tout  $t \in [0, P/2]$ ; en effet il nous suffit de démontrer que  $\beta > P/2$ .

Comme

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(t, x(t)) > 0, \text{ pour tout } t \in [0, \beta],$$

alors  $x_1(t)$  est croissant positif pour tout  $t \in [0, \beta]$ , car on a initialement  $x_1(0) = x_1^0 = 0$ ;

ainsi

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + g_2(t, x(t)) > g_2(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, \beta],$$

et comme

$$g_2(t, x(t)) \geq -a, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

donc,

$$\dot{x}_2(t) \geq -a, \quad \forall t \in [0, \beta]$$

$$x_2(t) \geq -at + x_2^0 > -at + a + \frac{ap}{2},$$

c'est à dire

$$x_2(t) > a(1-t + \frac{p}{2}), \quad \forall t \in [0, \beta]$$

or,  $x_2(\beta) = a$ , donc  $\beta > \frac{p}{2}$ ; par conséquent  $x_2(t) > a > 0$ , et  $x_1(t)$  est croissant pour tout  $t \in [0, P/2]$ , donc

$$T(m_1) = x_1(P/2) > 0.$$

De même, soit  $m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1$ , tel que :  $x_2^0 < -a - \frac{ap}{2}$ ;

Comme  $x_2^0$  est inférieur à  $-a$ , et que  $x_2(t)$  est continue, on a donc  $x_2(t) < -a$ , pendant un certain temps; supposons qu'il existe  $\beta' > 0$ , tel que :

$$\begin{cases} x_2(\beta') = -a \\ x_2(t) < -a, \text{ pour tout } t \in [0, \beta'[ \end{cases}$$

et montrons que  $x_2(t)$  est négatif pour tout  $t \in [0, P/2]$ ; en effet il nous suffit de démontrer que  $\beta' > P/2$ .

De la première équation du système (G)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(t, x(t)),$$

on a pour tout  $t \in [0, \beta'[$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(t, x(t)) < 0,$$

donc,  $x_1(t)$  est décroissant négatif pour tout  $t \in ]0, \beta']$ , car on a initialement  $x_1(0) = x_1^0 = 0$ ;

ainsi

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + g_2(t, x(t)) < g_2(t, x(t)), \forall t \in [0, \beta'],$$

et comme

$$g_2(t, x(t)) \leq a, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

donc

$$\dot{x}_2(t) \leq a, \text{ pour tout } t \in [0, \beta']$$

$$x_2(t) \leq at + x_2^0 < at - a - \frac{ap}{2}$$

c'est à dire

$$x_2(t) < a(t-1 - \frac{p}{2})$$

or,  $x_2(\beta') = -a$ , donc  $\beta' > P/2$ ; par conséquent  $x_2(t)$  est négatif et  $x_1(t)$  est décroissant, pour tout  $t \in [0, P/2]$ , donc

$$T(m_2) = x_1(P/2) < 0.$$

On vient de démontrer l'existence de deux points  $m_1 \in \bar{\sigma}_1$ ,  $m_2 \in \bar{\sigma}_2$  vérifiant les deux relations (32) et (33);

de ce fait puisque  $T$  est continue, sur tout chemin continu joignant  $m_1$  et  $m_2$  dans  $\bar{\sigma}_1$  il existe un point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  tel que :

$$T(m^*) = x_1(P/2) = 0$$

c'est à dire  $T(m^*) \in \bar{\sigma}_1$ ; le système (G) appartient à  $F_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$  et possède une solution  $x^*(t)$  issue au temps  $t_0=0$ , du point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  vérifiant

$$x_1^*(0) = x_1^*(P/2) = 0,$$

donc, d'après le corollaire (2) de la première partie, on déduit que  $x^*(t)$  appartient à  $S_{\bar{\sigma}_1}^0(p)$ .

### II.2.2. Application

Soit

$$y''' - f(y, y', y'') = g(t) \quad (34)$$

une équation différentielle non autonome  $P$ -périodique, où  $f$  est une fonction continue de classe  $C^1$ , et  $g$  est une fonction continue, tels que :

$$\begin{cases} f(y, y', y'') = -f(y, -y', y'') \\ |f(y, y', y'')| \leq a, \quad \forall (y, y', y'') \in \mathbb{R}^3 \\ g(t+p) = -g(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alors l'équation (34) possède une infinité des solutions  $P$ -périodiques paires par rapport au temps.

#### Démonstration

Effectuons d'abord le changement de variables

$$y' = x = x_1, \quad y'' = x' = x_2, \quad y = x_3$$

l'équation (34) est équivalente au système différentiel

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1, x_2, x_3) + g(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (G_1)$$

en l'écrivant sous forme vectorielle on obtient

$$\dot{x} = Bx + G(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

avec

$$\|G(t,x)\| \leq a_2, \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

$$\text{où } a_2 = a_1 + \sup_{t \in [0,p]} |g(t)|$$

donc le système  $(G_1)$  est un cas particulier du système  $(G)$  de la proposition (18)

on vérifie facilement que  $(G_1)$  appartient à  $F_{\sigma_1}^0(P)$ , donc d'après la proposition (18), on déduit que  $(G_1)$  possède une infinité de solutions  $P$ -périodiques appartenant à  $S_{\sigma_1}^0(P)$ , et d'après la proposition (2) de la première partie on a

$$y_3(-t+p) = x_3(-t+p) = x_3(t) = y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous allons exposer dans la proposition suivante un autre type de système différentiel  $P$ -périodique admettant une symétrie par rapport à un plan et tel que  $G(t,x)$  satisfait une majoration de type affine.

### II.2.3. Proposition (19)

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + g(t, x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = x_1 \end{cases} \quad (G_2)$$

où  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t,x) \rightarrow g(t,x)$  est une fonction continue  $P$ -périodique et de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ , telle que

$$\begin{cases} g(t+p, x_1, x_2, x_3) = -g(-t, -x_1, x_2, x_3) \\ |g(t, x_1, x_2, x_1)| \leq a_1 |x_2| + a_2, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \end{cases} \quad (35)$$

Alors  $(G_2)$  possède une infinité de solutions  $P$ -périodiques appartenant à  $S_{\sigma_1}^0(P)$ .

#### Démonstration

Nous allons démontrer, comme dans la proposition précédente (18), que toute solution  $[x : J \subset [0, P/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , où  $J$  est un intervalle] de  $(G_2)$ , peut être prolongée par rapport au temps, en une solution  $x : [0, P/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; écrivons d'abord le système  $(G_2)$  sous une forme vectorielle :

$$\dot{x} = Bx + G(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

donc on a :

$$\|Bx + G(t,x)\| \leq \|B\| \cdot \|x\| + \|G(t,x)\| \leq \gamma(\|x\| + 1), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

où  $\|x\| = \sup_i |x_i|$ , et où  $\gamma = \sup(a_1 + \|B\|, a_2)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ ;

Soit  $D(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ , et soit

$$M(r) = \sup_{x \in D(x^0, r)} \left[ \|Bx + G(t,x)\| \right] \leq \gamma(r + \|x^0\| + 1);$$

étant donné  $x^0 \in \bar{\sigma}_1 \subset \mathbb{R}^3$ , nous choisissons  $r$  tel que :

$$r \geq 1 + \|x^0\|; \text{ et donc :}$$

$$M(r) \leq 2 \gamma r;$$

en appliquant le théorème d'existence des solutions (voir la démonstration de la proposition (18)), on déduit que les solutions sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en particulier pour  $t \in [0, P/2]$ .

Considérons

$$x : [0, P/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

une solution de (G) définie dans  $[0, P/2]$  issue au temps  $t_0=0$ , du point  $x^0 \in \bar{\sigma}_1 \subset \mathbb{R}^3$ ; donc l'application

$$T : \bar{\sigma}_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^0 \in \bar{\sigma}_1 \rightarrow T(x^0) = x_1(P/2)$$

est définie et continue; pour démontrer l'existence d'une solution ou d'une infinité de solutions périodiques, nous allons suivre la même démarche que dans la démonstration de la proposition (18).

Soient  $a_1$  et  $a_2$  apparaissant dans (35), et soit  $m_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1$

tel que :



$$x_2^0 > A = \left[ \frac{a_2}{a_1} (2e^{\frac{a_1 p}{2}} - 1) + p e^{\frac{a_1 p}{2}} \right] > 0;$$

Comme  $x_2^0$  est supérieur à  $A$ , et que  $x_2(t)$  est continue, on a donc

$$x_2(t) > \frac{a_2}{a_1} \left( e^{\frac{a_1 p}{2}} - 1 \right) + \frac{p}{2} e^{\frac{a_1 p}{2}}$$

pendant un certain temps; supposons qu'il existe  $\beta > 0$ , tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(\beta) = \frac{a_2}{a_1} \left( e^{\frac{a_1 p}{2}} - 1 \right) + \frac{p}{2} e^{\frac{a_1 p}{2}} \\ x_2(t) > \frac{a_2}{a_1} \left( e^{\frac{a_1 p}{2}} - 1 \right) + \frac{p}{2} e^{\frac{a_1 p}{2}}, \quad \forall t \in [0, \beta[ \end{array} \right.$$

et montrons que  $x_2(t)$  est positif pour tout  $t \in [0, p/2]$ ; en effet il nous suffit de démontrer que  $\beta > \frac{p}{2}$ .

Comme

$$\dot{x}_1 = x_2 > 0, \text{ pour tout } t \in [0, \beta[,$$

alors  $x_1(t)$  est croissant positif pour tout  $t \in ]0, \beta]$ , car on a initialement  $x_1(0) = x_1^0 = 0$ ; de la deuxième équation du système  $(G_2)$  on a :

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + g(t, x(t)) \geq g(t, x(t)), \quad t \in [0, \beta],$$

or

$$g(t, x(t)) \geq -a_1 x_2 - a_2, \quad \forall t \in [0, \beta],$$

donc

$$\int_{x_2^0}^{x_2(t)} \frac{dx_2(s)}{a_1 x_2(s) + a_2} \geq - \int_0^t du$$

d'où,

$$x_2(t) \geq -\frac{a_2}{a_1} + \left(\frac{a_2}{a_1} + x_2^0\right) e^{-a_1 t}$$

ainsi pour  $t = \beta$ , on a :

$$\frac{a_2}{a_1} \left(e^{\frac{a_1 \beta}{2}} - 1\right) + \frac{P}{2} e^{\frac{a_1 \beta}{2}} > -\frac{a_2}{a_1} + A e^{-a_1 \beta},$$

donc

$$e^{\frac{a_1 \beta}{2}} \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{P}{2}\right) > 2e^{a_1 \beta} \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{P}{2}\right) e^{-a_1 \beta},$$

d'où

$$e^{a_1 \beta} > 2 e^{\frac{a_1 \beta}{2}}$$

c'est à dire :

$$\beta > \frac{1}{a_1} \log 2 + \frac{P}{2} > \frac{P}{2}$$

on a donc  $x_2(t) > 0$ , et  $x_1(t) > 0$ , pour tout  $t \in [0, P/2]$ , par conséquent :

$$T(m_1) = x_1(P/2) > 0.$$

D'une manière très semblable on démontre l'existence d'un point

$$m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1, \text{ avec } x_2^0 < -A < 0; \text{ et tel que}$$

et tel que :

$$T(m_2) = x_1(P/2) < 0.$$

On déduit puisque  $T$  est continue, que sur tout chemin continu joignant  $m_1$  et  $m_2$  dans  $\bar{\sigma}_1$ , il existe un point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  tel que :

$$T(m^*) = x_1(P/2) = 0, \text{ (c'est à dire } T(m^*) \in \bar{\sigma}_1).$$

Le système  $(G_2) \in \mathbb{F}_{\bar{\sigma}_1}^0(p)$  et possède une solution  $x^*(t)$  issue au temps  $t_0=0$  du point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  vérifiant

$$x_1^*(0) = x_1^*(P/2) = 0,$$

donc  $x^*(t) \in \mathbb{S}_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$ , (d'après le corollaire (2)).

#### II.2.4. Proposition (20)

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + g_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = x_1 + g_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = x_1 + g_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (G_3)$$

un système différentiel p-périodique tel que :

$$\begin{cases} g_1(-t+p, -x_1, x_2, x_3) = g_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ g_\ell(-t+p, -x_1, x_2, x_3) = g_\ell(t, x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad \ell = (2, 3)$$

et tel que pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  on a

$$\begin{cases} |g_1(t, x_1, x_2, x_3)| \leq b|x_2|, \text{ avec } b < 1 \\ |g_2(t, x_1, x_2, x_3)| \leq a|x_2| \\ \|G(t, x)\| \leq a\|x\|, \text{ avec } G(t, x) = \begin{pmatrix} g_1(t, x) \\ g_2(t, x) \\ g_3(t, x) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (36)$$

et  $\|x\| = \sup|x_i|$ .

Alors le système  $(G_3)$  possède une infinité de solutions p-périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à  $\bar{\sigma}_1$ .

Démonstration

Nous écrivons le système  $(G_3)$  sous forme vectorielle

$$\dot{x} = Bx + G(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

ensuite nous allons démontrer que toute solution  $[x : J \subset [0, \frac{p}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , où  $J$  est un intervalle], peut être prolongée en une solution  $x : [0, \frac{p}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; en effet on a :

$$\|Bx + G(t,x)\| \leq \|B\| \cdot \|x\| + \|G(t,x)\| \leq \|x\| (\|B\| + a)$$

$$\leq \gamma \|x\|, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

où  $\gamma = (\|B\| + a)$ ;

en suivant la même démarche que la proposition précédente, on déduit que les solutions sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en particulier pour  $t \in [0, p/2]$ .

Considérons

$$x : [0, p/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

une solution de  $(G_3)$  définie dans  $[0, p/2]$  issue au temps  $t=0$ , du point  $x^0 \in \bar{\sigma}_1$ , donc l'application

$$T : \bar{\sigma}_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^0 \in \bar{\sigma}_1 \rightarrow T(x^0) = x_1(p/2)$$

est définie dans  $\mathbb{R}^3$  et continue; pour démontrer l'existence d'une solution ou d'une infinité de solutions  $p$ -périodiques, nous allons suivre la même démarche que dans la démonstration de la proposition (18).

Soient  $a$  et  $b$  apparaissant dans (36), et soit  $m_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1$

tel que  $x_2^0 > e^{ap} > 0$ ;

Comme  $x_2^0 > e^{ap}$ , et  $x_2(t)$  est continue, on a donc  $x_2(t) > A = e^{\frac{ap}{2}}$ , pendant un certain temps; supposons qu'il existe  $\beta > 0$  tel que :

$$\begin{cases} x_2(\beta) = A \\ x_2(t) > A, \quad \forall t \in [0, \beta[. \end{cases}$$

On a  $x_2(t) > 0$ , pour tout  $t \in [0, \beta]$ , donc

$$0 < 1-b \leq + \frac{g_1(t, x(t))}{x_2(t)} \leq 1+b, \quad \forall t \in [0, \beta]$$

d'où,

$$0 < x_2(1-b) \leq \dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(t, x(t)) \leq x_2(1+b)$$

donc  $\dot{x}_1(t) > 0$ , pour tout  $t \in [0, \beta]$ , par conséquent  $x_1(t) > 0$  pour tout  $t \in ]0, \beta]$ , car  $x_1(0) = x_1^0 = 0$ .

Ainsi

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + g_2(t, x(t)) \geq g_2(t, x(t)), \quad \text{pour tout } t \in [0, \beta]$$

et comme

$$g_2(t, x(t)) \geq -a x_2, \quad \text{pour tout } t \in [0, \beta]$$

donc

$$\dot{x}_2(t) \geq -a x_2$$

$$x_2(t) \geq x_2^0 e^{-at}, \quad \forall t \in [0, \beta]$$

d'où

$$x_2(t) > e^{ap} \cdot e^{-at},$$

or,  $x_2(\beta) = \frac{ap}{e^2}$ , donc  $\beta > P/2$ ; par conséquent  $x_1(t)$  est croissant positif pour

tout  $t \in [0, P/2]$ , et donc

$$T(m_1) = x_1(P/2) > 0.$$

D'une manière très semblable on démontre l'existence d'un point

$$m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \bar{\sigma}_1, \quad \text{avec}$$

$$x_2^0 < -e^{-ap} < 0,$$

et tel que :

$$T(m_2) = x_1(P/2) < 0.$$

On déduit, puisque  $T$  est continue, que sur tout chemin joignant  $m_1$  et  $m_2$  dans  $\bar{\sigma}_1$  il existe un point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  tel que

$$T(m^*) = x_1(P/2) = 0, \text{ (c'est à dire } T(m^*) \in \bar{\sigma}_1);$$

le système  $(G_3) \in F_{\sigma_1}^0(p)$  et possède une solution  $x^*(t)$  issue au temps  $t=0$ , du point  $m^* \in \bar{\sigma}_1$  vérifiant

$$x_1^*(0) = x_1^*(P/2) = 0,$$

donc  $x^*(t) \in S_{\sigma_1}^0(p)$ , (d'après le corollaire (2)).

II.3. Existence d'une solution périodique d'un système différentiel périodique  
=====

non linéaire admettant une symétrie par rapport à l'origine  
=====

Nous avons vu dans (II.2.) quelques propositions permettant de démontrer l'existence de solutions P-périodiques de certains systèmes différentiels P-périodiques admettant une symétrie par rapport au plan; ici nous allons exposer une proposition permettant de démontrer l'existence d'une solution P-périodique de système différentiel (G), ayant la forme précisée dans (II.2.), P-périodique possédant une symétrie par rapport à l'origine.

II.3.1. Proposition (21)  
-----

Soit  $(G) \in F_{\sigma,0}^{\alpha}(p)$ , où  $\sigma = \sigma_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , tel que :

$$\|G(t,x)\| \leq a, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Alors (G) possède une solution P-périodique appartenant à  $S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$ .

Démonstration

La démonstration est très semblable à celle de la proposition précédente (18); prenons  $\sigma = \sigma_1$ ,  $\alpha = 0$ , alors d'après la première étape de la démonstration de (18), on déduit que toutes les solutions de (G) sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en particulier pour  $t \in [0, P/4]$ .

Soit

$$x : [0, P/4] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

une solution de (G) définie dans  $[0, P/4]$ , issue de  $x^0 \in \sigma_1$ , au temps  $t=0$ , et soit

$$T : \sigma_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x^0 \in \sigma_1 \rightarrow T(x^0) = x_1(P/4)$$

la quart d'application de Poincaré définie dans  $\mathbb{R}^3$  et continue.



Montrons qu'il existe au moins un point  $n_1 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma_1$ , tel que :

$$T(n_1) = x_1(P/4) > 0,$$

et un autre point  $n_2 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma_1$ , tel que :

$$T(n_2) = x_1(P/4) < 0.$$

En effet, soit  $a$  le majorant de  $\|G(t,x)\|$ , et soit  $n_1 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma_1$ , tel que

$$x_1^0 > a + \frac{ap}{4} > 0;$$

comme  $x_1^0$  est supérieur à  $a$ , et que  $x_1(t)$  est continue, on a donc  $x_1(t) > a$  pendant un certain temps; supposons qu'il existe  $\beta > 0$  tel que :

$$\begin{cases} x_1(\beta) = a \\ x_1(t) > a, \quad t \in [0, \beta[ \end{cases}$$

et montrons que  $x_1(t)$  est positif pour tout  $t \in [0, P/4]$ ;  
en effet il nous suffit de démontrer que  $\beta > P/4$ .

Comme

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + g_2(t, x(t)) > 0, \quad \forall t \in [0, \beta[,$$

alors  $x_2(t)$  est croissant positif, pour tout  $t \in ]0, \beta]$ , car on a initialement  $x_2(0) = x_2^0 = 0$ ;  
ainsi

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(t, x(t)) > g_1(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, \beta]$$

et comme

$$g_1(t, x(t)) \geq -a, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$



alors on a :

$$\dot{x}_1(t) \geq -a, \quad \forall t \in [0, \beta]$$

donc,

$$x_1(t) \geq -at + x_1^0 > -at + a + \frac{ap}{4},$$

ou encore

$$x_1(t) > a(-t + 1 + \frac{P}{4})$$

et pour  $t = \beta$

$$x_1(\beta) = a > a(-\beta + 1 + \frac{P}{4})$$

d'où

$$\beta > \frac{P}{4}$$

par conséquent on a  $x_1(t) > 0$ , pour tout  $t \in [0, P/4]$  et donc

$$T(n_1) = x_1(P/4) > 0.$$

D'une manière très semblable on démontre l'existence d'un point

$$n_2 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma_1, \text{ avec}$$

$$x_1^0 < -(a + \frac{ap}{4}) < 0,$$

et tel que

$$T(n_2) = x_1(P/4) < 0.$$

On déduit puisque  $T$  est continue, que sur tout chemin continu joignant  $n_1$  et  $n_2$  dans  $\sigma_1$ , il existe un point  $n^* \in \sigma_1$  tel que :

$$T(n^*) = x_1(P/4) = 0, \text{ (c'est à dire } T(n^*) \in \bar{\sigma}_1).$$

Le système (G)  $\in F_{\sigma_1, 0}^0(p)$  et possède une solution  $x^*(t)$  issue au temps  $t=0$ ,

du point  $n^* \in \sigma_1$  telle que :

$$x_2^*(0) = x_3^*(0) = x_1^*(P/4) = 0,$$

donc, d'après le corollaire (2), on déduit que  $x^*(t)$  appartient à

$$S_{\sigma_1, 0}^0(P).$$

BIBLIOGRAPHIE

-----

- [1] V. ARNOLD - "*Equations différentielles ordinaires*"  
Ed. MIR, Moscou, 1974.
- [2] J.K. HALE - "*Ordinary differential equations*"  
Wiley, Interscience, New-York, 1969.
- [3] B. KARR - "*Systèmes différentiels périodiques avec symétries :  
Stabilité et bifurcation; application à l'équation du pendule forcé*"  
Thèse de 3<sup>me</sup> cycle, Univ. de Metz, 1982.
- [4] M. KURDI - "*Systèmes différentiels périodiques avec symétries de  
dimension trois*"  
Thèse de 3<sup>me</sup> cycle, Univ. de Metz, 1984.
- [5] M. KURDI, M.H. TIHAMI et B.V. SCHMITT - "*Perturbation de solutions  
périodiques de systèmes différentiels symétrique de dimension  $n > 2$* ".  
Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, t.299, Série I, n° 8,  
1984.
- [6] S. LEFSCHETZ - "*Differential equations : geometric theory interscience*"  
New-York, 1950.
- [7] L. PONTRIAGUINE - "*Equations différentielles ordinaires*"  
Ed. MIR, Moscou.
- [8] H. REINHARD - "*Equations différentielles*"  
Ed. Gauthier-Villars, 1982.
- [9] N. ROUCHE et J. MAWHIN - "*Equations différentielles ordinaires*"  
T. 1 et 2 - Masson, Paris, 1979.
- [10] R. REISSIG, G. SANSONE et R. CONTI - "*Non-linear differential equations  
of higher order*"  
Leyden : Noordhoff International, Pub. Corp., 1974.
- [11] M. ROSEAU - "*Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*"  
New-York, 1966.