HAL
open science

Application du modèle d'écrouissage cinématique à la mise en forme : influence de la température sur limite de formage

Daniel Dudzinski

To cite this version:

Daniel Dudzinski. Application du modèle d'écrouissage cinématique à la mise en forme : influence de la température sur limite de formage. Matériaux. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ019S . tel-01775524

HAL Id: tel-01775524

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775524v1

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

T H E S E

D E D O C T O R A T D E L'U N I V E R S I T E D E M E T Z

E N M E C A N I Q U E

---

présentée à l'Université de Metz

pour obtenir le grade de

d o c t e u r e n m é c a n i q u e

par

Daniel BUDZINSKI

APPLICATION DU MODELE D'ECROUISSAGE
CINEMATIQUE A LA MISE EN FORME

INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LA
LIMITE DE FORMAGE

Soutenue publiquement le 24 juin 1986 devant le jury
composé :

Mr	F.SIDOROFF	Ecole Centrale de Lyon	Président
Mr	G.FERRON	Université de Metz	Rapporteur
Mr	A.MOLINARI	Université de Metz	
Mr	M.POTIER-FERRY	Université de Metz	
Mr	F.RONDE OUSTEAU	SOLLAC	
Mr	J.D. WEBER	Université de Metz	

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv. 1986068 S

Cote S/M3 86/19

Loc Magasin

A la Mémoire de mon

grand-père

Ce travail a été effectué dans le laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz (Unité Associé au CNRS n° 1215 et au GRECO Grandes Déformations et Endommagement).

Je suis heureux d'exprimer ici ma sincère gratitude et ma profonde reconnaissance au professeur Alain MOLINARI qui a dirigé cette recherche pour les encouragements et l'aide qu'il ma apportés. Son enthousiasme, l'immense intérêt qu'il porte à la recherche, l'amitié qu'il me témoigne ont été pour moi un exemple et un soutien permanent.

Je remercie tous les membres du jury en particulier Monsieur François SIDOROFF professeur à l'Ecole Centrale de Lyon qui a accepté de présider le jury et se charger avec Monsieur Gerard FERRON de la lourde tache de rapporteur.

Je remercie tous mes collègues du laboratoire et toute l'équipe d'enseignants de la maîtrise de Technologie et de la préparation à l'Agrégation de Mécanique pour leur aide et leur amitié. Mes remerciements s'adressent également à ma femme et mes enfants pour les encouragements et la patience qu'ils m'ont témoignés au cours de ce travail.

Alain BILOCQ s'est chargé des figures et de l'édition de cette thèse, je lui en suis reconnaissant.

Je remercie enfin Madame MARCELET pour son aide au cours de la frappe du manuscrit.

SOMMAIRE

I. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE — PAGES

1. Introduction - La courbe limite de formage détermination expérimentale 3

2. Détermination analytique 8

3. Les courbes limites de formage en chemins complexes. 39

II LE MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE

1. Théorie de la plasticité 46

2. Extension du modèle d'écrouissage cinématique aux grandes déformations 52

3. Comportement en cisaillement simple 60

4. Sollicitations combinées. 68

III APPLICATION DU MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE A LA MISE EN FORME.

1. Introduction 84

2. Formulation du problème à deux zones 85

3. Remarques à propos de la loi d'écrouissage utilisée 96

4. Résultats et discussions 104

5. Conclusions 114

Annexe. 122

IV .INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LA LIMITE DE FORMAGE

1. Introduction 126

2. Etude de l'instabilité en cisaillement simple 127

3. Influence de l'adoucissement thermique sur les courbes limites de formage 139

4. Influence de la température avec le modèle d'écrouissage cinématique 142

5. Conclusions. 147

V. CONCLUSIONS. 150

I - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1 - INTRODUCTION - LA COURBE LIMITE DE FORMAGE DETERMINATION EXPERIMENTALE

2 - DETERMINATION ANALYTIQUE DES C.L.F

21 - Le critère de Swift

22 - Le critère de Hill

23 - L'analyse Marciniak - Kuszynski

24 - L'analyse de la bifuration de Stören et Rice

25 - Effet de l'écrouissage cinématique sur la localisation de l'écoulement.

26 - Influence de l'endommagement

27 - L'approche linéarisée

3 - LES COURBES LIMITES DE FORMAGE EN CHEMINS COMPLEXES

1 - INTRODUCTION - LA COURBE DE FORMAGE

Les opérations d'emboutissage sont toujours d'une grande complexité. Une forme donnée de pièce n'est pas forcèment réalisable en une seule opération, il existe un ou plusieurs préformages, de sorte qu'en un point de la pièce, le mode de déformation peut varier au cours du formage. La trajectoire de déformation sera en ce point directe s'il n'y a pas modification du mode de déformation ou complexe s'il y a passage d'un mode de déformation à un autre.

Une définition simple de l'enboutissabilité est obtenu en reportant dans le diagramme (ε_1 , ε_2) des déformations logarithmiques principales dans le plan de la tôle, les points d'instabilités pour des trajectoires directes de déformation.

Les différents mode de déformation rencontrés en emboutissage sont :

Pour un matériau isotrope

- l'expansion biaxiale symétrique, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$
- la déformation plane ou traction plane $\varepsilon_2 = 0$
- la traction uniaxiale $\varepsilon_1 = -2\varepsilon_2$
- le cisaillement $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ (fig 1)

On caractérise le chemin de déformation par le rapport :

$$R = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad (1.1)$$

R = 1	correspond	à l'expansion biaxée symétrique
R = 0		à la déformation plane
R = - 1/2		à la traction uniaxiale
R = - 1		au cisaillement

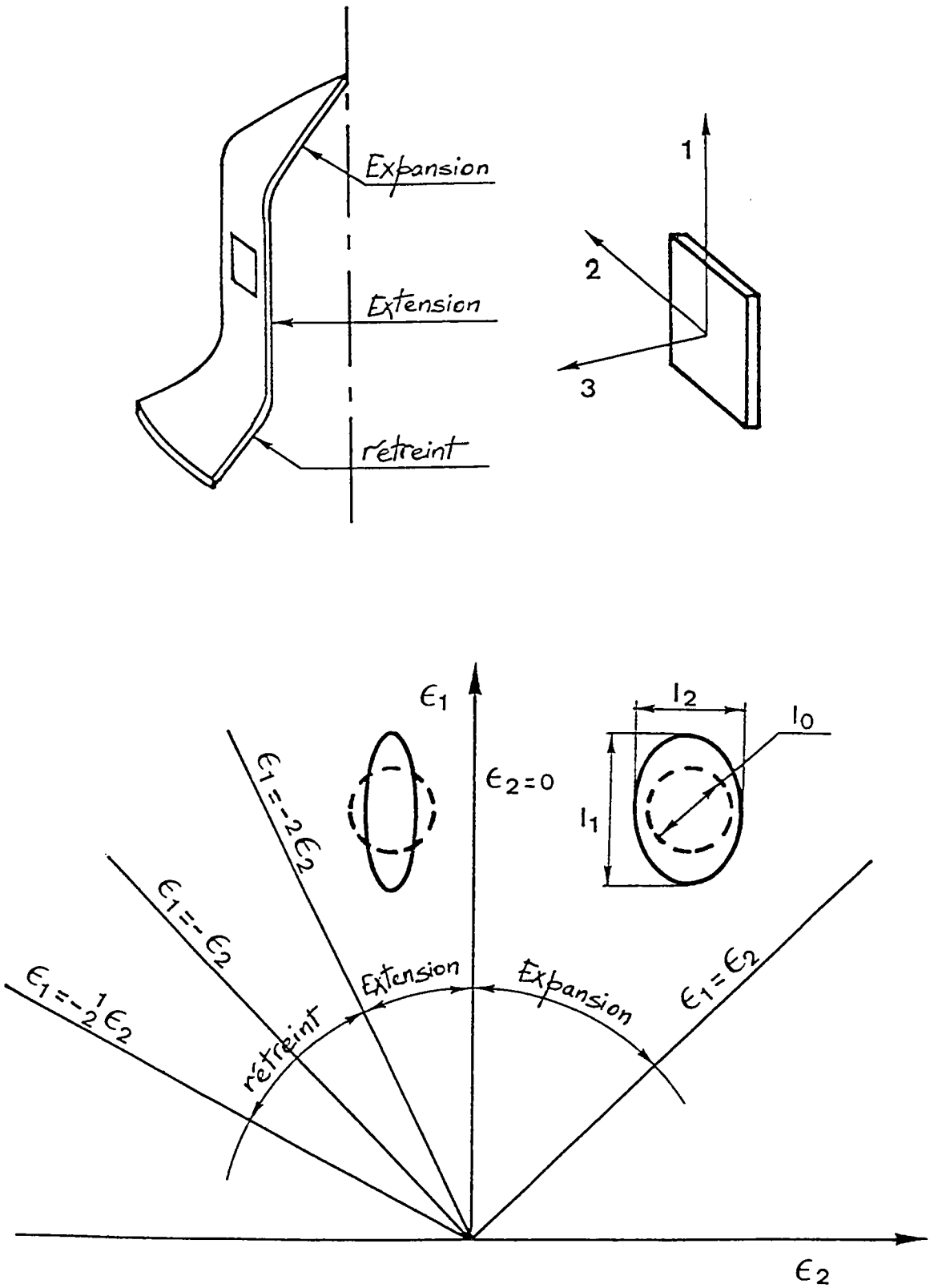


Fig. 1 : Modes de déformation rencontrés en emboutissage

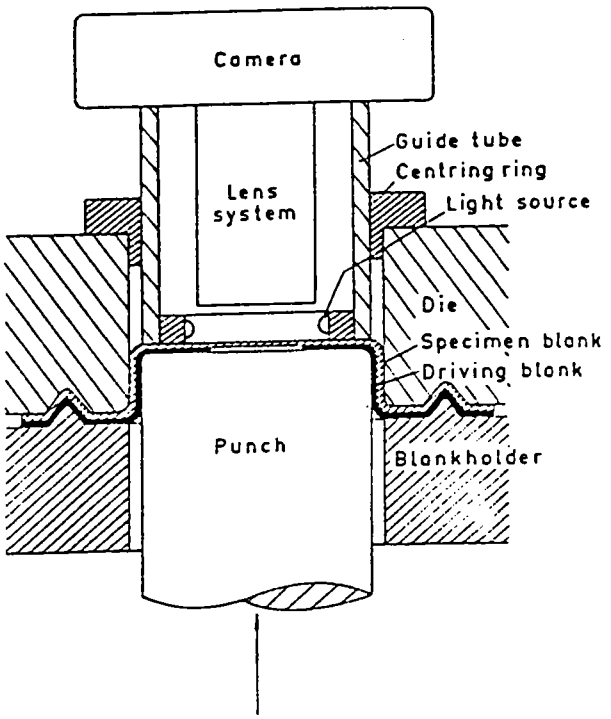


Fig. 2 : Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé par KLEEMOLA KUMPALAINEN /1/

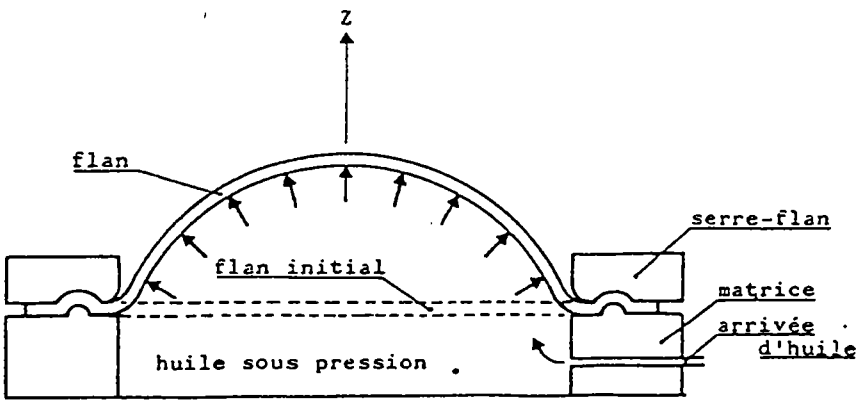


Fig. 3 : Essai de gonflement hydraulique

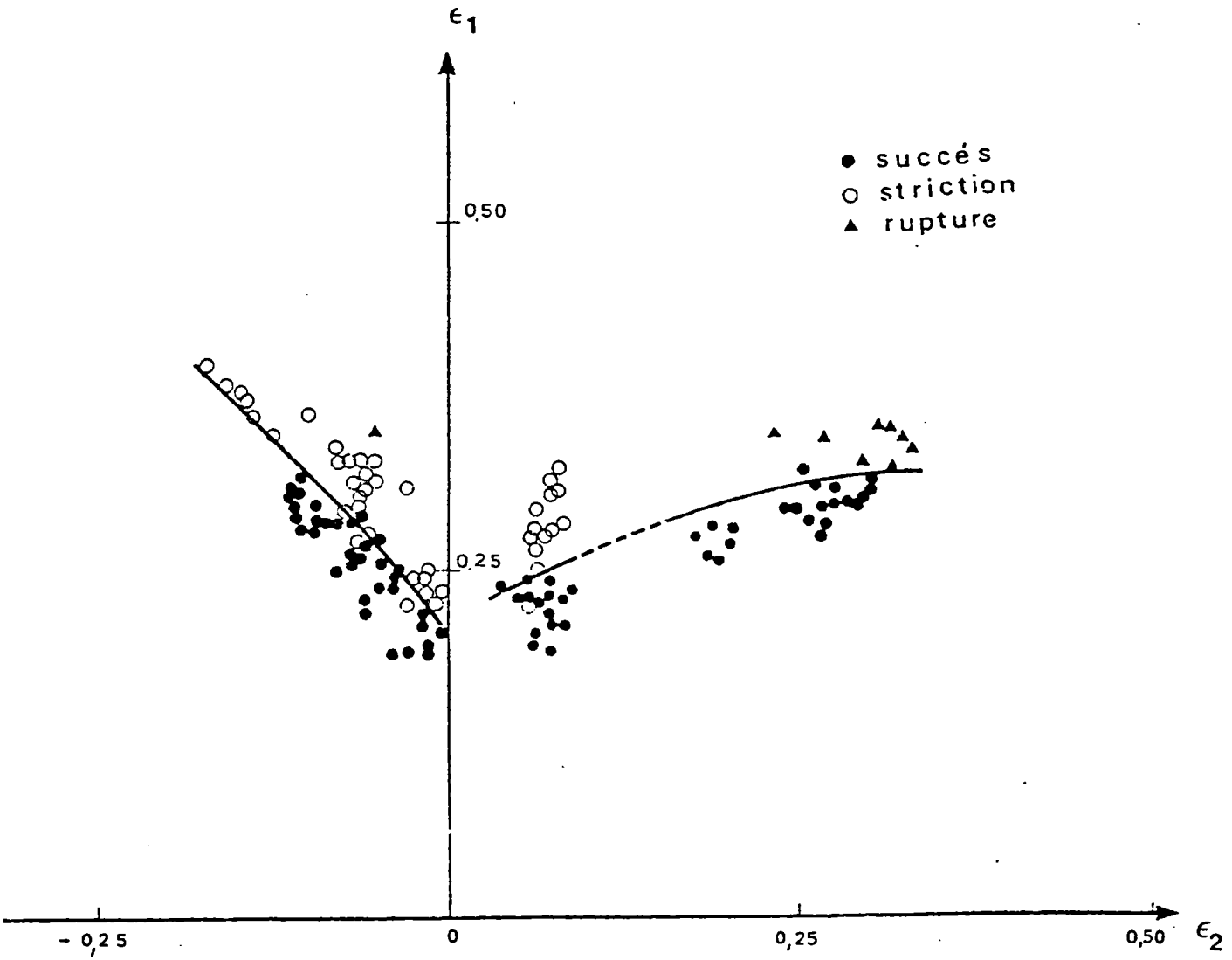


Fig. 4 : Courbe limite de formage de l'AU2G /2/, méthode HECKER

détermination expérimentale des courbes limites de formage

Pour obtenir les déformations sur les emboutis on utilise généralement des grilles à maille circulaire déposées sur les toles par procédé photographique. En mesurant les longueurs l_1 et l_2 des axes de l'ellipse issue d'un cercle de diamètre initial l_0 on calcule les déformations principales ε_1 et ε_2 :

$$\varepsilon_1 = \log \frac{l_1}{l_0} \qquad \varepsilon_2 = \log \frac{l_2}{l_0} \tag{1.2}$$

ε_1 étant par convention la plus grande déformation principale.

Ces essais sont réalisés sur une machine de traction ou par poinçonnage avec des éprouvettes plus ou moins larges et pour les chemins allant de la traction uniaxiale à la déformation plane. En ce qui concerne le domaine du biaxé (R > 0) on utilise le gonflement hydraulique ou le poinçonnage (fig 2.fig 3)

Le dépouillement des résultats s'effectue suivant plusieurs méthodes (VERMAN, BRAGARD, KOBAYASHI, HECKER, ...) nous développons ici la méthode HECKER qui consiste à distinguer sur un embouti, 3 sortes de cercles :

- les cercles rompus
- les cercles présentant une striction localisée
- les cercles non rompus et ne présentant pas de striction localisée

Les deux premiers correspondent à l'échec, les derniers à la réussite. On reporte les déformations correspondantes sur un diagramme(ε_1, ε_2) pour un nombre important d'emboutis. La courbe limite de formage est la frontière entre la zone d'échec et la zone de réussite figure 4.

2 - DETERMINATION ANALYTIQUE DES COURBES LIMITES DE FORMAGE

Nous exposons dans ce chapitre les différentes approches théoriques permettant la prévisions des courbes limites de formage. Les hypothèses communes aux différentes théories sont :

- l'épaisseur est supposée suffisamment petite pour permettre l'approximation d'un état plan des contraintes, toutes les composantes des vitesses et des contraintes sont alors supposées uniformes dans l'épaisseur de la tôle.

- le matériau est supposé incomprenssible initialement isotrope et obéit au critère de Von Misès.

21 - Le critère de SWIFT 1952 /3/

SWIFT applique le critère de force maximum aux deux composantes F_1 et F_2 de la sollicitation (fig 5)

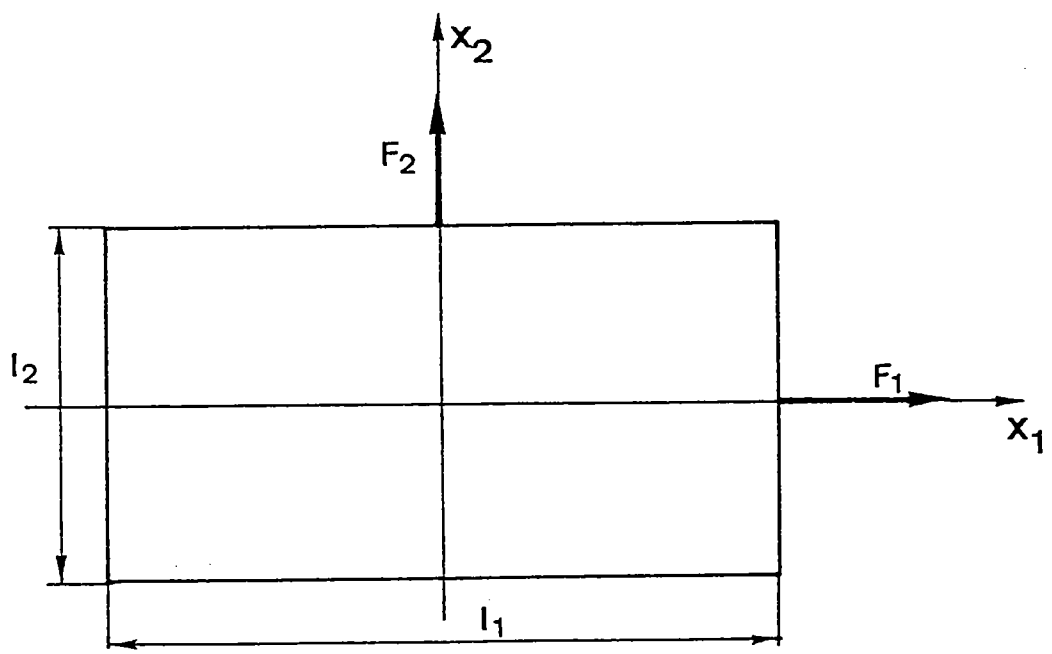


fig 5 - plaque mince soumise à un chargement biaxial

On a :

$$F_1 = \sigma_1 l_2 h$$
$$F_2 = \sigma_2 l_1 h \tag{2.1}$$

F_1 et F_2 atteignent un maximum lorsque :

$$\frac{dF_1}{F_1} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + \frac{dl_2}{l_2} + \frac{dh}{h}$$
$$\frac{dF_2}{F_2} = \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} + \frac{dl_1}{l_1} + \frac{dh}{h} \tag{2.2}$$

avec :

$$\frac{dl_1}{l_1} = d\varepsilon_1 \qquad \frac{dl_2}{l_2} = d\varepsilon_2 \qquad \frac{dh}{h} = d\varepsilon_3 \tag{2.3}$$

et la condition d'incompressibilité

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \tag{2.4}$$

on obtient :

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1$$
$$\frac{d\sigma_2}{\sigma_2} = d\varepsilon_2 \tag{2.5}$$

Le chargement imposé aux extrémités de la tôle est tel que :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \alpha = cte \tag{2.6}$$

En plasticité isotrope et en contraintes planes, la contrainte équivalente $\overline{\varepsilon}$ est définie par la relation :

$$\overline{\sigma}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \tag{2.7}$$

Le matériau est supposé rigide-plastique et les relations de LEVY-MISES permettent d'écrire :

$$\frac{d\varepsilon_1}{2-\alpha} = \frac{d\varepsilon_2}{2\alpha-1} = -\frac{d\varepsilon_3}{1+\alpha} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \tag{2.8}$$

où $d\bar{\varepsilon}$ est l'incrément de déformation plastique équivalente.

A l'incrément $d\bar{\varepsilon}$ correspond l'incrément de contrainte $d\bar{\sigma}$

$$d\bar{\sigma} = \frac{(2-\alpha)d\sigma_1 + (2\alpha-1)d\sigma_2}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \tag{2.9}$$

en combinant les relation (2.5) (2.7) (2.8) et (2.9) on obtient :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{4\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+4}{4(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\, d\bar{\varepsilon} \tag{2.10}$$

Si l'on suppose que le matériau a un comportement qui suit la loi d'Hollomon :

$$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^N \tag{2.11}$$

On a alors :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4N(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}}{4\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+4} \tag{2.12}$$

Ou

$$\varepsilon_1 = \frac{2N(1-\alpha+\alpha^2)(2-\alpha)}{4\alpha^3-2\alpha^2-3\alpha+4} \tag{2.13}$$

$\varepsilon_1 = N$ pour $\alpha = 0$ traction
$\alpha = 1/2$ traction plane
$\alpha = 1$ expansion biaxée symétrique

La figure 7 donne la courbe limite de formage obtenue avec le critère de striction diffuse de SWIFT.

22 - Le critère de HILL (1952) /4/

Hill fait l'hypothèse que la stiction localisée se développe suivant une ligne d'extension nulle dans le plan de la tôle (fig 6) :

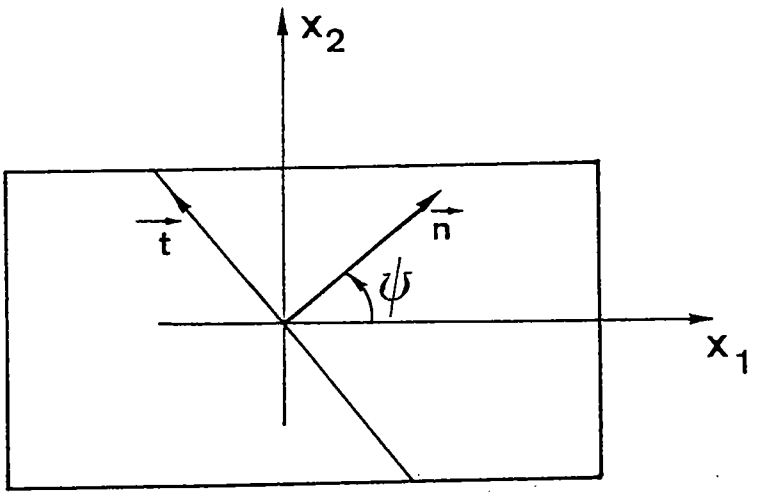


Fig 6 - la striction localisées se développe suivant une ligne d'extension nulle
$\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont respectivement la normale et la tangente à la ligne d'extension nulle.

En introduisant les directions n et t , calculons l'extension suivant une ligne caractérisée par l'angle

$$d\varepsilon_{tt} = d\varepsilon_1 \sin^2\psi + d\varepsilon_2 \cos^2\psi \tag{2.14}$$

$d\varepsilon_{tt}$ sera nulle pour :

$$\tan^2\psi = -\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = -R \tag{2.15}$$

c'est-à-dire pour $\psi = \operatorname{Arctan}\sqrt{-R}$ (2.16)

cette ligne d'extension nulle n'existe alors que pour R < 0.

La striction le long de la direction ψ se produit lorsque la force normale F_n à cette direction passe par un maximum. Cela se traduit par la relation :

$$\frac{dF_n}{F_n} = \frac{d\sigma_{nn}}{\sigma_{nn}} + \frac{dS_\psi}{S_\psi} \tag{2.17}$$

où σ_{nn} est la contrainte normale dans la direction n
S_ψ la section de la tôle suivant la direction

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 \cos^2\psi + \sigma_2 \sin^2\psi \tag{2.18}$$

à l'apparition de la striction, l'état de contrainte dans la tôle est encore supposé uniforme :

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 \left(\cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi\right)$$

et

$$\frac{d\sigma_{nn}}{\sigma_{nn}} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \tag{2.19}$$

la striction se développe suivant une ligne d'extension nulle et par conséquent :

$$\frac{dS_\psi}{S_\psi} = \frac{dh}{h} = d\varepsilon_3 \tag{2.20}$$

Les relations de LEVY-MISES donnent :

$$d\varepsilon_3 = -\frac{d\bar{\varepsilon}\,(1+\alpha)}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \tag{2.21}$$

et si l'on adopte la loi de comportement d'Hollomon $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^N$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = N\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \tag{2.22}$$

on obtient en substituant les résultats précédents dans la relation (2.17) :

$$\frac{(1+\alpha)\,\bar{\varepsilon}}{(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} = N$$

ou plus simplement

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = N \tag{2.23}$$

En traction uniaxiale, la déformation critique vaut $\varepsilon_1 = 2N$ et la ligne d'extension nulle est caractérisée par l'angle ψ = 0.615 radians

En traction plane $\varepsilon_1 = N$ et $\psi = 0$.

La courbe de limite de formage obtenue avec ce critère est une droite (fig 7).

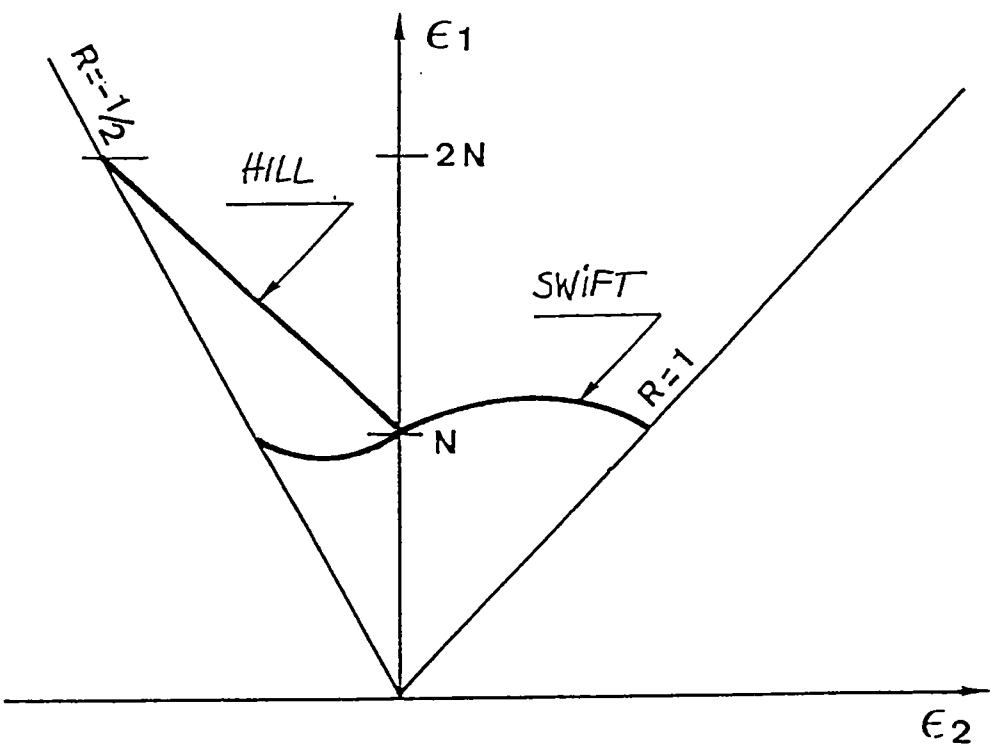


fig 7 - courbes limites de formage obtenues avec les critères de SWIFT et de HILL

23 - L'analyse MARCINIAK - KUCZYNSKI (1967) /5,6)

231 - Pour R > 0, il n'existe pas de ligne d'extension nulle et on ne peut prévoir la localisation de la déformation avec le critère précédent. Dans ce cas, la formation et le développement de la striction peuvent être amorcès par des défauts dans le matériau (distribution non uniforme des impuretés, variation de l'épaisseur...). La somme de ces défauts dans l'épaisseur de la tôle peut être assimilée à un seul défaut géométrique de surface (fig. 8) c'est l'hypothèse de l'analyse MARCINIAK-KUCZYNSKI.

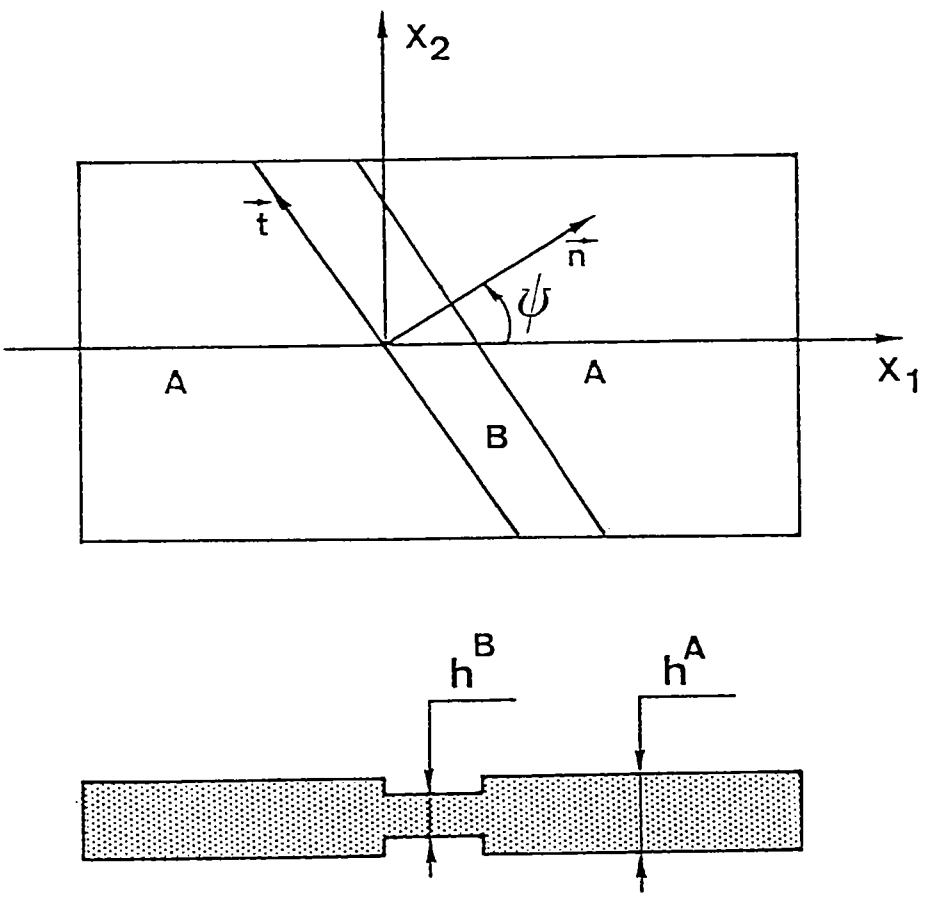


fig 8 - tôle présentant un défaut géométrique initial sous la forme d'une bande de sous-épaisseur

La tôle est alors décomposée en deux zones :

- la zone A, d'épaisseur h , de valeur initiale h ( )
- la zone B, d'épausseur h , de valeur initiale h ( )

Le défaut géométrique initial est caractérisé par :

$$\xi = \frac{h^A(0) - h^B(0)}{h^A(0)} \geqslant 0 \qquad (2.24)$$

Marciniak et Kuszynski ont d'abord effectué des calculs, avec ce modèle, dans le domaine du biaxé (R > 0).

Le défaut étant alors choisi perpendiculaire à la direction 1

Hutchinson et Neale /6/ ont étendu l'analyse à tout le domaine allant de la traction uniaxiale à l'expansion biaxée symétrique $\left(-\frac{1}{2} \leqslant R \leqslant 1\right)$ en supposant le défaut incliné d'un angle initial $\psi(0)$. Nous développons les calculs relatifs à cette dernière application.

On impose aux extrémités de la tôle un chargement tel que :

$$R = \frac{d\varepsilon_2^A}{d\varepsilon_1^A} = \frac{\varepsilon_2^A}{\varepsilon_1^A} = cte \qquad (2.25)$$

ε_1^A et ε_2^A sont les déformation logarithmiques, les axes 1 et 2 sont les axes principaux des déformations et des contraintes.

La rotation de la bande est donnée par la relation suivante :

$$\tan\psi = \frac{\lambda_1^A}{\lambda_2^A} \tan\psi(0) = \exp\left[(1-R)\,\varepsilon_1^A\right] \tan\psi(0) \qquad (2.26)$$

où et sont les dilatations principales dans les directions 1 et 2 respectivement.

et $$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\lambda}_1^A}{\lambda_1^A} \qquad \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\lambda}_1^A}{\lambda_1^A} \; ; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\lambda}_2^A}{\lambda_2^A} \qquad (2.27)$$

En notant n et t les directions normale et tangentielle à la bande, les conditions d'équilibre de la bande s'écrivent :

$$\sigma_{nn}^A h^A = \sigma_{nn}^B h^B \quad ; \quad \sigma_{nt}^A h^A = \sigma_{nt}^B h^B \qquad (2.28)$$

Avec :

$$\sigma_{nn}^{A} = \sigma_1^{A} \cos^2\psi + \sigma_2^{A} \sin^2\psi$$

$$\sigma_{tt}^{A} = \sigma_1^{A} \sin^2\psi + \sigma_2^{A} \cos^2\psi$$

$$\sigma_{nt}^{A} = \left(-\sigma_1^{A} + \sigma_2^{A}\right) \cos\psi \sin\psi \qquad (2.29)$$

De plus la compatibilité de la déformation des deux zones s'écrit :

$$d\varepsilon_{tt}^{A} = d\varepsilon_{tt}^{B} \qquad (2.30)$$

En utilisant les équations précédentes, les relations contraintes-déformations données par la théorie de l'écoulement et une loi d'écrouissage du type

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^{N} \dot{\bar{\varepsilon}}^{M} \qquad (2.31)$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$

$\bar{\varepsilon}$ la déformation plastique cumulée définie par :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \qquad \bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} \, d\tau$$

N coefficient d'écrouissage

M coefficient de sensibilité à la vitesse

on obtient les équations de la localisation :

$$(1-B-G)^{1/2} H \left[1 - B\left(\frac{d\bar{\varepsilon}^{A}}{d\bar{\varepsilon}^{B}}\right)^2\right]^{1/2} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}^{A}}{d\bar{\varepsilon}^{B}}\right)^{M} =$$

$$(1-\xi) \left(\frac{\bar{\varepsilon}^{B}}{\bar{\varepsilon}^{A}}\right)^{N} \exp\left(C\,\bar{\varepsilon}^{A} + \varepsilon_3^{B}\right) \qquad (2.32)$$

avec

$$\frac{d\varepsilon_3^{B}}{d\bar{\varepsilon}^{A}} = -\frac{A}{H}\left[1 - B\left(\frac{d\bar{\varepsilon}^{A}}{d\bar{\varepsilon}^{B}}\right)^2\right]^{1/2} - D\,\frac{d\bar{\varepsilon}^{A}}{d\bar{\varepsilon}^{B}} \qquad (2.33)$$

où les paramètres A B C D G et H dépendent uniquement du rapport R et de l'inclinaison courante de la bande

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B = \frac{3(\sin^2\psi + R\cos^2\psi)^2}{4(1+R+R^2)}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}(1+R)}{2\sqrt{1+R+R^2}} \qquad D = \frac{\sqrt{3}(\sin^2\psi + R\cos^2\psi)}{4\sqrt{1+R+R^2}}$$

$$G = \frac{(R-1)^2 \sin^2\psi \cos^2\psi}{1+R+R^2} \tag{2.34}$$

$$H = \left\{ 1 + \left[\frac{2(R-1)\sin\psi\cos\psi}{(R+2)\cos^2\psi + (2R+1)\sin^2\psi} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Pour ψ = 0 les équations se réduisent à celles proposées par MARCINIAK et Coll (1973) /7/

La résolution numérique de ces 2 équations donne la déformation plastique annulée dans la bande en fonction de la déformation dans la zone homogène A. Il y a localisation de la déformation quand tend vers l'infini, la valeur correspondante de la déformation est la limite de formage. L'angle initial est choisi de façon à minimiser la limite de formage.

Avec la <u>théorie de la déformation</u>

$$\varepsilon_{ij} = \mu s_{ij} \tag{2.35}$$

où μ est défini par la relation : $\mu = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}$

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$$ déformation plastique équivalente

(2.36

avec

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$ contrainte équivalente

et la loi d'écrouissage isotrope

$$\sigma_e = K \varepsilon_e^N \dot{\varepsilon}_e^M$$

on obtient les équations de la localisation sous la forme suivante :

$$\frac{(R+2)\cos^2\psi + (2R+1)\sin^2\psi}{\sqrt{3(1+R+R^2)}} \quad \frac{d\varepsilon_e^A}{d\varepsilon_e^B} = \frac{(1-\xi)}{\lambda_1^B \lambda_2^B} \left(\frac{\varepsilon_e^A}{\varepsilon_e^B}\right)^N \exp\left(C\varepsilon_e^A\right) \frac{Y}{\varepsilon_e^B} \tag{2.37}$$

$$Y = \ln\left(\lambda_1^B \lambda_2^B\right) + \frac{1}{3}\cos 2\theta \ln \frac{\lambda_1^B}{\lambda_2^B} \tag{2.38}$$

définit l'orientation des axes principaux des déformations dans la bande, les dilatations principales correspondantes sont et

Les résultats des calculs précédents sont reportés sur les figures 9 et 11 pour deux matériaux, l'un faiblement écrouissable : N = 22 (caractéristique de certains aciers et alliages d'aluminium), l'autre fortement écrouissage N = 50 (caractéristique du laiton, de l'acier inoxydable).

M = 0 pas de sensibilité à la vitesse

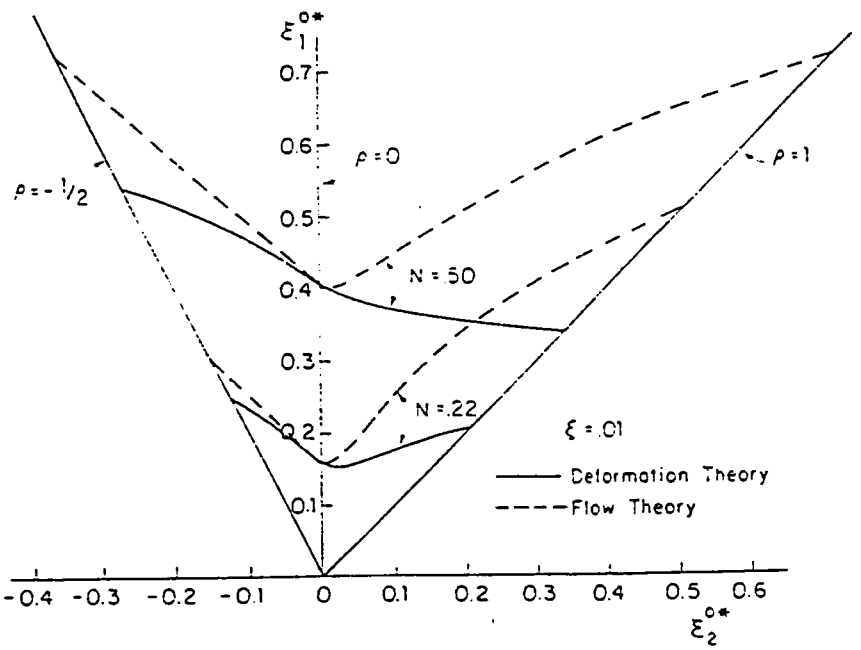


fig 9 - comparaison entre les deux théories de la plasticité.
Le défaut initial est choisi égal à = 0.001d'après HUTCHINSON et NEALE /6/

Dans le domaine $R < 0$ et pour des matériaux faiblement écrouissables, il est généralement reconnu que la droite de Hill est satisfaisante. Dans ce cas, la théorie de l'écoulement et la théorie de la déformation sont peu différentes et proches de la droite de Hill. Pour le matériau fortement écrouissable ($N = 50$) l'écart entre les deux théories est plus prononcé.

Dans le domaine du biaxé positif ($R > 0$) l'expérience (fig 10) montre que pour un matériau faiblement écrouissable (Aluminium, acier d'emboutissage). La déformation critique croît avec R. Cette tendance est observée avec les deux théories, néanmoins le niveau des déformations critiques obtenues avec la théorie de l'écoulement est trop important. Pour un matériau fortement écrouissable la courbe limite expérimentale est sensiblement plate ou légèrement décroissante avec R. Seule la théorie de la déformation traduit cette tendance/

<u>$M \neq 0$ sensibilité à la vitesse de déformation</u>

L'effet stabilisateur de la sensibilité à la vitesse de déformation est présenté sur les figures 11. On notera le changement de forme obtenu avec la théorie de la déformation, dans le domaine $R > 0$.

En résumé, seule la théorie de la déformation permet d'obtenir des C.L.F dont le niveau et la forme sont proches de ceux observés expérimentalement, toutefois l'extension de cette théorie aux chemins complexes de déformation est inacceptable.

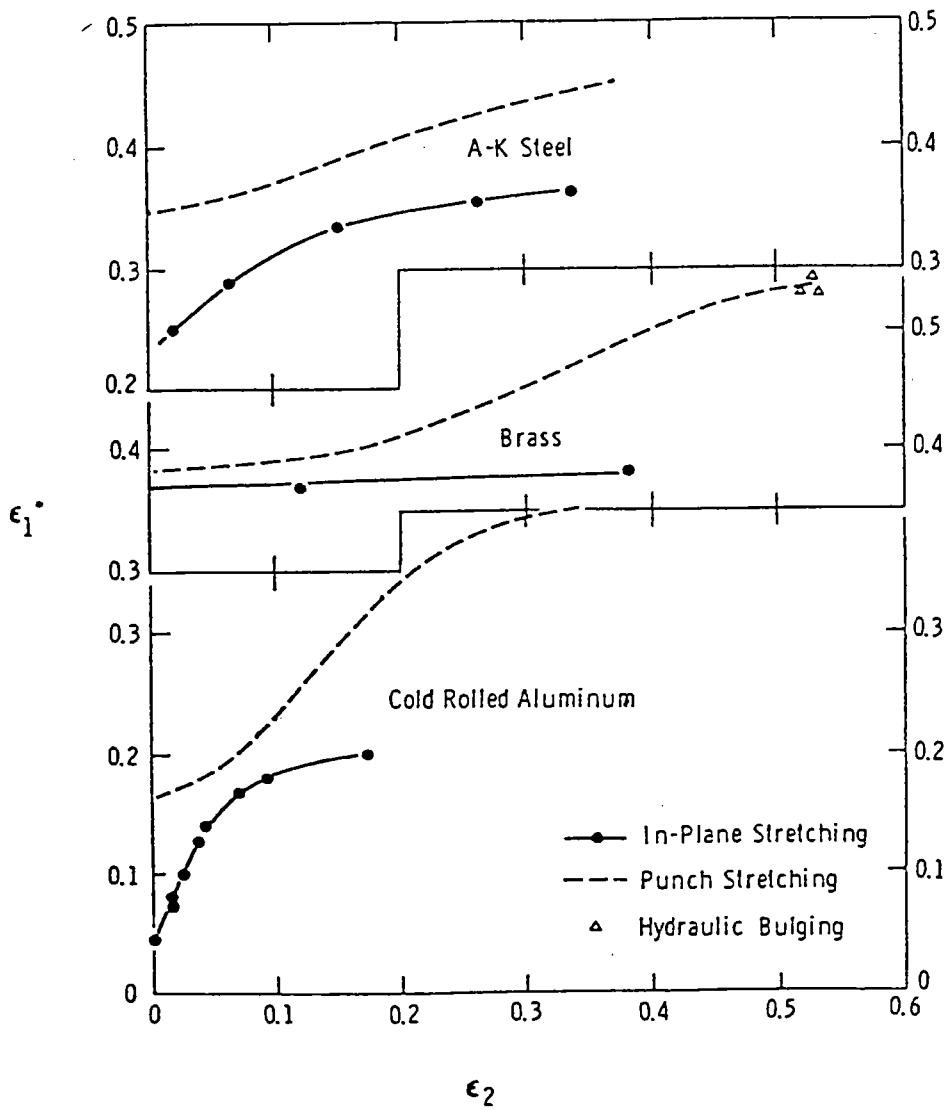
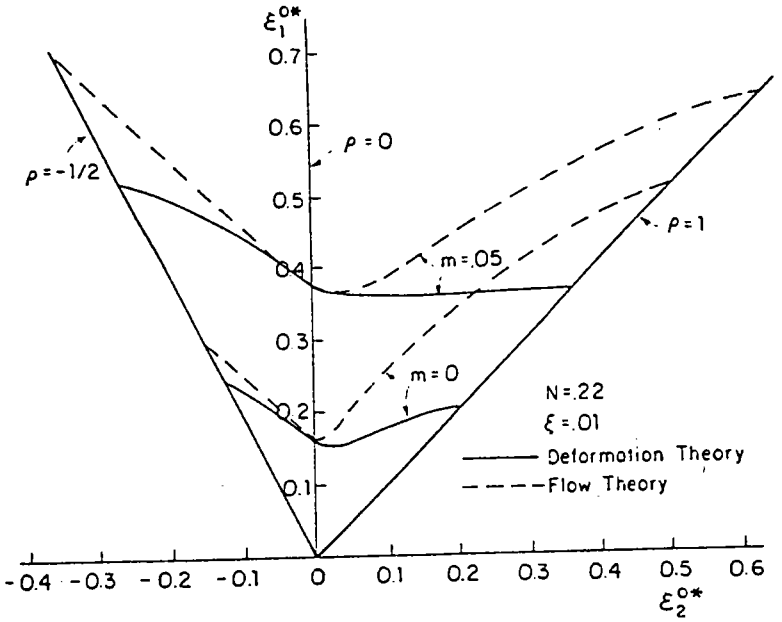


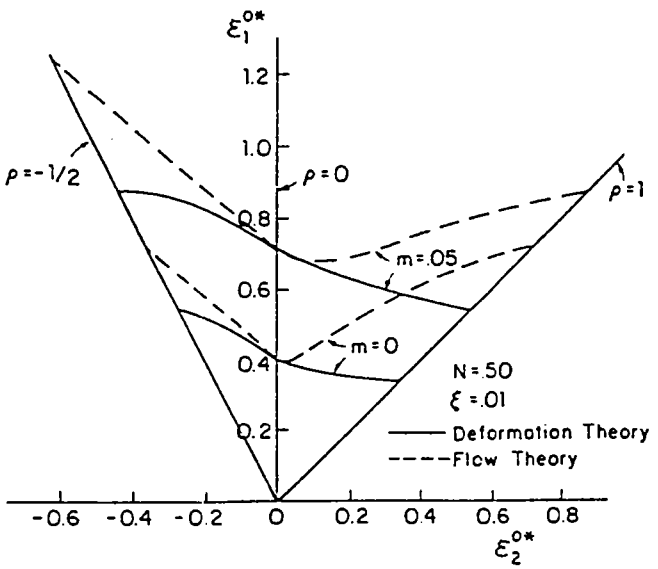
fig 10 - Courbes limites de formage obtenues à partir de 3 essais différents et pour 3 matériaux :

- A.K. Steel : Acier calmé aluminium N = .21
- Brass : Laiton n = .47
- Aluminum n = .04

a)



b)



<u>fig 11</u> - sensibilité à la vitesse de déformation

a) Matériau faiblement écrouissable N = .22

b) Matériau fortement écrouissabe N = .50

24 - l'analyse de la bifurcation de S. STOREN et J.R. RICE (1975) /8/

Dans cette analyse la tôle est supposée d'épaisseur uniforme h et soumise à un champ de contraintes uniforme :

$$\sigma_{11} = \sigma_1 \qquad \sigma_{22} = \sigma_2$$

avec

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \text{constante}$$

On note v_i le champ des vitesses uniformes à l'instant $t \leqslant t_o$. A l'instant $t = t_o$, il y a bifurcation, le champ des vitesses varie à travers une bande inclinée d'un angle ψ par rapport à la direction 1 (fig 12).

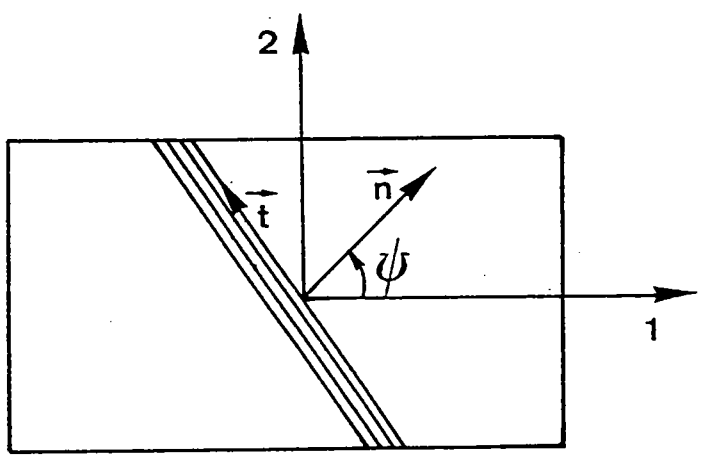


fig 12 - bande de localisation de la déformation

On désigne par Δv_i la discontinuité de vitesse observée à la bifurcation :

$$\Delta v_i = v_i^B - v_i^A = f_i\,(x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi) = f_i(n_j x_j) \qquad (2.39)$$

Δv_i est une fonction $f_i\,(n_j x_j)$

Le champ de gradients correspondant aux différences Δv_i est :

$$\Delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(\Delta v_i)}{\partial x_j} = f_i' n_j = g_i n_j \qquad (2.40)$$

Le champ des vitesses de déformation est donné par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \qquad (2.41)$$

avec

$$D_{33} = -\left(D_{11} + D_{22}\right) \text{ (incompressibilité)} \qquad (2.42)$$

La conservation de la quantité de mouvement conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(h\,\sigma_{ij}\right)\right] = 0 \qquad (2.43)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\dot{h}}{h}\,\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\right] = 0 \qquad (2.44)$$

$$D_{33} = \frac{\dot{h}}{h} \qquad (2.45)$$

à la bifurcation, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\Delta D_{33}\,\sigma_{ij} + \Delta\dot{\sigma}_{ij}\right] = 0 \qquad (2.46)$$

D_{33} et $\dot{\sigma}_{ij}$ varient uniquement à travers la bande, cela donne alors :

$$\Delta D_{33}\,\sigma_{ij} + \Delta\dot{\sigma}_{ij} = \text{constante} = 0 \qquad (2.47)$$

Supposons les relations linaires :

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \left(\partial v_k / \partial x_l\right)$$
$$D_{33} = M_{kl} \left(\partial v_k / \partial x_l\right) \tag{2.48}$$

Les coefficients L_{ijkl} et M_{kl} sont des fonctions de l'état de contrainte et des paramètres du matériau. Les coefficients sont les mêmes en tout point.

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \, \Delta \left(\partial v_k / \partial x_l\right)$$
$$= L_{ijkl} \, g_k n_l \tag{2.49}$$

et

$$\Delta D_{33} = M_{kl} \, \Delta \left(\partial v_k / \partial x_l\right) = M_{kl} \, g_k n_l$$

En substituant (2.49) dans (2.47), on obtient un système d'équations linéaires homogènes en g_1 et g_2 .

$$\left(n_i L_{ijkl} n_l + n_i \sigma_{ij} M_{kl} n_l\right) g_k = 0 \tag{2.50}$$

Ce système admet des solutions non nulles si :

$$\det \left(n_i L_{ijkl} n_l + n_i \sigma_{ij} M_{kl} n_l\right) = 0 \tag{2.51}$$

équation de la bifurcation.

Stören et Rice ont utilisé la théorie de la déformation écrite sous la forme :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = \frac{2h_t}{N} \left[D_{ij} - (1-N) \left(s_{ij} / 2\sigma_e^2\right) \left(\sigma_{kl} D_{kl}\right) \right] \tag{2.52}$$

où $\overset{\nabla}{s}_{ij}$ représente la dérivée de Jaumann de sij composantes du déviateur des contraintes.

$$h_t = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} \qquad \text{module tangent}$$

N coefficient d'écrouissage supposé constant

Les C.L.F. obtenues sont présentées sur les figures 13 et 14 où elles sont comparées aux résultats expérimentaux de l'acier et du laiton /9/.

Sur la figure 13 il s'agit d'un acier faiblement écrouissable (acier calmé aluminium - A.K. Steel, N = 0.24). La courbe obtenu par l'analyse de STOREN et RICE est sous la courbe expérimentale. Toutefois dans le domaine du biaxé positif, la forme de la courbe calculée est la même que celle de la courbe expérimentale. POur R 0, la courbe calculée chute vers R =.1 ce qui conduit à un écart important avec les résultats expérimentaux.

La figure 14 donne les résultats pour le laiton (N = .56). L'analyse STOREN et RICE prévoit une CLF légèrement décroissante avec R dans le biaxé positif ceci traduit correctement la tendance expérimentale (in- plane stretching). Par contre pour R 0 la courbe présente un maximum en contradiction avec l'expérience.

Pour un matériau fortement écrouissable et dans le domaine du biaxé les résultats de STOREN et RICE sont meilleurs que ceux obtenus avec la théorie de l'écoulement et un écrouissage isotrope. STOREN et RICE montrent que les équations de la théorie de la déformation qu'ils utilisent, permettent de modéliser l'apparition d'un point anguleux sur la surface d'écoulement (théorie du Vertex). La différence entre les deux approches est alors expliquée par le fait qu'au point anguleux le vecteur vitesse de déformation est libre de tourner dans le cône des normales (fig 15). Par contre en un point d'une surface d'écoulement sans vertex (théorie de l'écoulement avec écrouissage isotrope), le vecteur vitesse de déformation doit respecter la normalité (fig 15).

Le développement d'un point anguleux ou d'une zone de forte courbure sur la surface d'écoulement déstabilise l'écoulement dans le domaine du biaxé positif, il conduit plus rapidement le matériau à un état de déformation plane correspondant à l'instabilité.

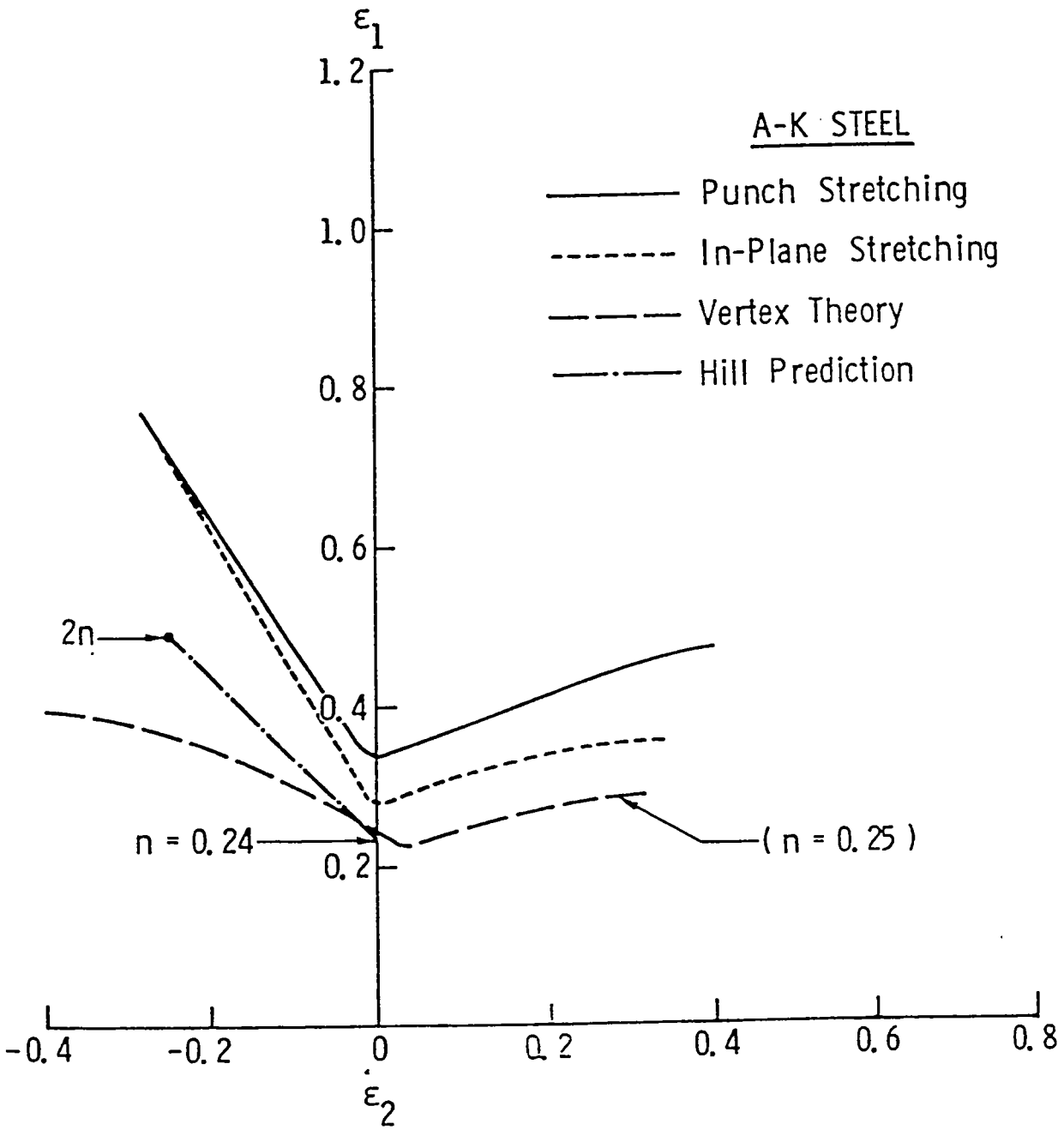


fig 13 - Courbes limites de formage calculées avec le modèle du vertex de STOREN et RICE et le critère de Hill, comparées aux résultats expérimentaux de l'acier, d'après GOSH /9/

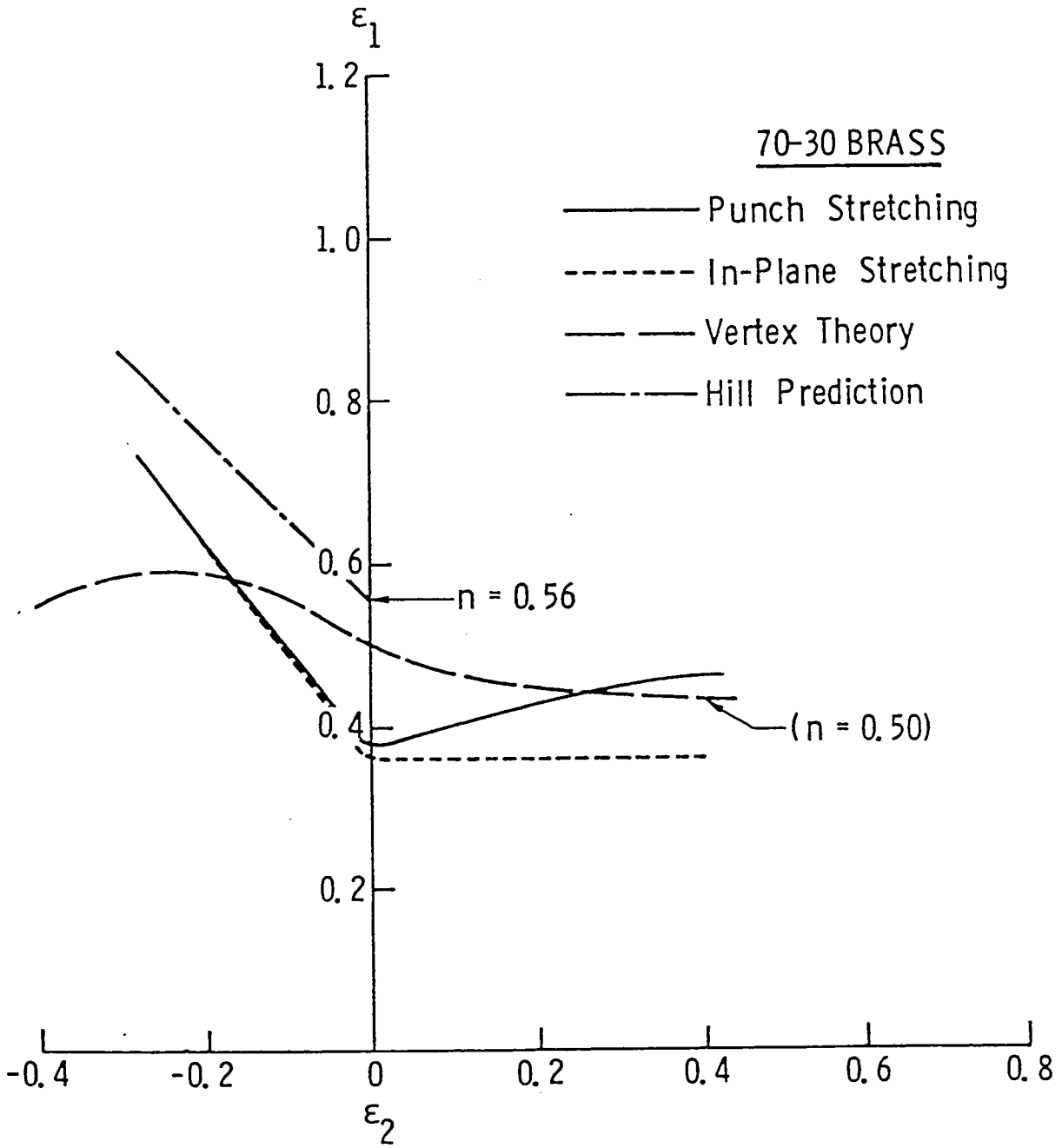


fig 14 - Courbes limites de formage obtenues avec le modèle du Vertex de STOREN et RICE et le critère de HILL comparées aux résultats expérimentaux du Laiton, d'après GOSH /9/

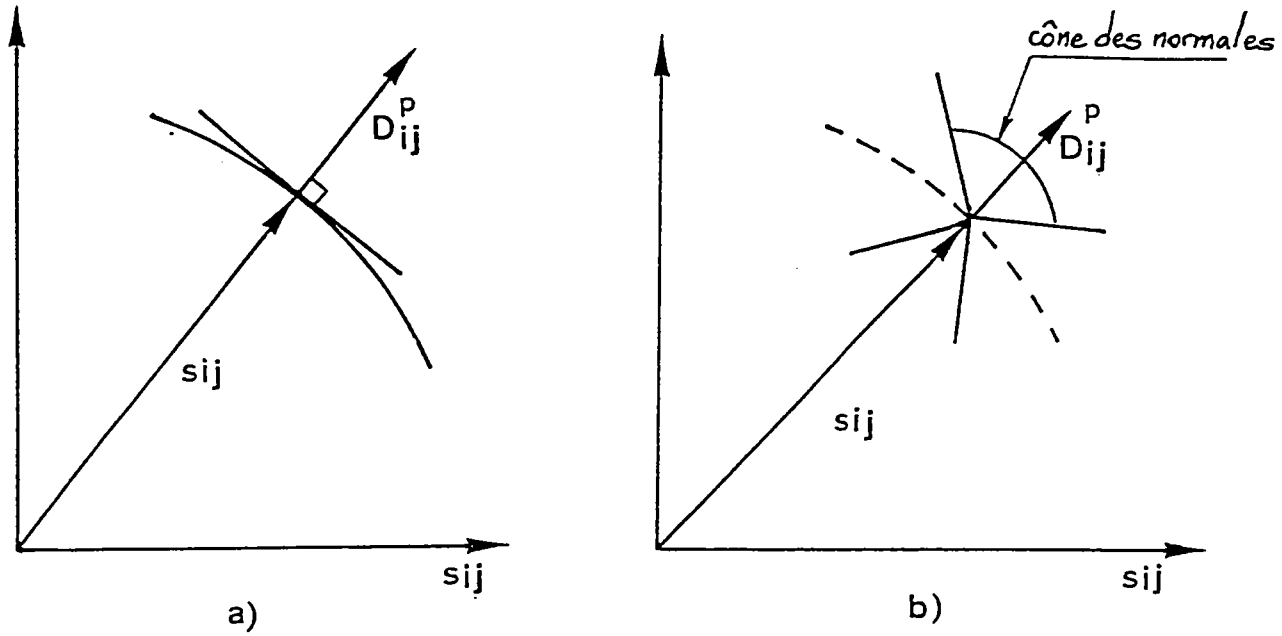
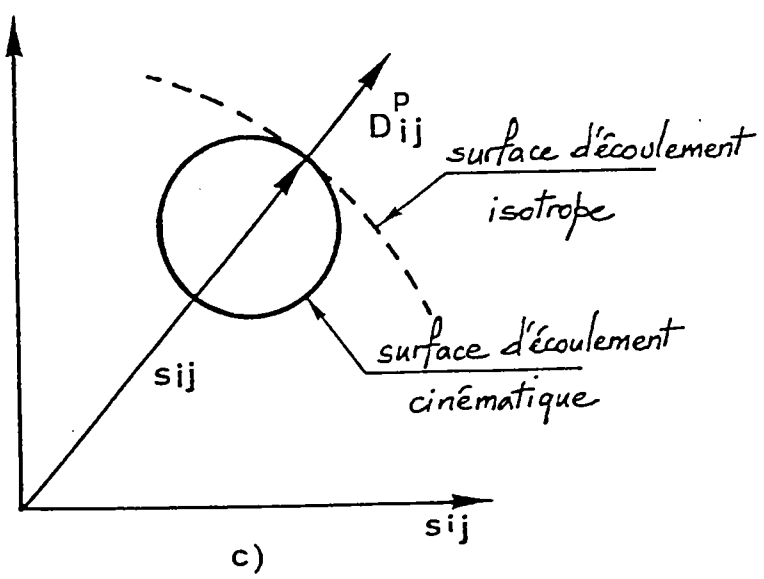


fig 15 - Représentation schématique des surfaces d'écoulement dans dans l'espace du déviateur montrant les directions des vecteurs vitesse de déformation pour :

a) une surface d'écoulement sans point anguleux
b) une surface d'écoulement avec point anguleux (vertex)
c) une surface d'écoulement avec une forte courbure au voisinage du point de charge (écrouissage cinématique).



25 - Effet de l'écrouissage cinématique sur la localisation de l'écoulement. TVERGAARD (1978) /10/ et NEEDLEMAN-TVERGAARD (1983) /11/.

Tvergaard a d'abord étudié la striction localisée dans le domaine R O pour un matériau elasto-plastique en utilisant un écrouissage cinématique. La fonction seuil s'écrit alors :

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \text{Constante} \tag{2.53}$$

α_{ij} représente la translation du centre de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes (fig 15 c).

Avec l'hypothèse état plan des contraintes son expression est :

$$\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 = \sigma_y^2 \tag{2.54}$$

avec $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i - \alpha_i$

où la constante σ_y représente la contrainte initiale d'écoulement en traction uniaxiale.

La loi d'écrouissage s'écrit :

$$\dot{\alpha}_i = (\sigma_i - \alpha_i)\dot{\mu} \qquad \dot{\mu} > 0 \tag{2.55}$$

La condition $(\sigma_y^2)^{\bullet} = 0$ permet de calculer $\dot{\mu}$

$$\dot{\mu} = \left[(2\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2)\dot{\sigma}_1 + (2\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1)\dot{\sigma}_1\right] / 2\sigma_y^2 \tag{2.56}$$

Les relations contraintes-déformations sont écrites sous la forme :

$$\dot{\sigma}_i = L_{ij}\,\dot{\varepsilon}_j \tag{2.57}$$

TVERGAARD a ensuite utilisé l'approche MARCINIAK avec défaut géométrique initial. Les chemins de déformations sont proportionnels :

$$R = \frac{\varepsilon_2^A}{\varepsilon_1^A} = \frac{\dot{\varepsilon}_2^A}{\dot{\varepsilon}_1^A} \tag{2.58}$$

l'équilibre à travers la bande impose :

$$\sigma_1^B h^B = \sigma_1^A h^A$$

ou (2.59)

$$h^B\left(\dot{\sigma}_1^B + \sigma_1^B \frac{\dot{h}^B}{h^B}\right) = h^A\left(\dot{\sigma}_1^A + \sigma_1^A \frac{\dot{h}^A}{h^A}\right)$$

le matériau est supposé incompressible :

$$\frac{\dot{h}^B}{h^B} = -\left(\dot{\varepsilon}_1^B + \dot{\varepsilon}_2^B\right) \qquad \frac{\dot{h}^A}{h^A} = -\left(\dot{\varepsilon}_1^A + \dot{\varepsilon}_2^A\right) \tag{2.60}$$

Avec les relations de comportement (2.57) et les équations (2.58) et (2.59), on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_1^B = \frac{\dot{\varepsilon}_1^A}{L_{11}^B - \sigma_1^B}\left[\frac{h^A}{h^B}\left(L_{11}^A - \sigma_1^A\right) + R\frac{h^A}{h^B}\left(L_{12}^A - \sigma_1^A\right) - R\left(L_{12}^B - \sigma_1^B\right)\right] \tag{2.61}$$

Il y a localisation de l'écoulement lorsque $\dot{\varepsilon}_1^B / \dot{\varepsilon}_1^A \to \infty$ c'est-à-dire lorsque σ_1^B tend vers L_{11}^B. La résolution numérique de (2.61) permet d'obtenir les déformation ε_1^A et ε_2^A à la localisation et de tracer les courbes limites correspondantes. NEEDLEMAN et TEVERGAARD ont completé cette étude en considérant les chemins $R < 0$ et en introduisant la sensibilité à la vitesse. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 16. Ils montrent qu'une théorie de l'écoulement avec un écrouissage cinématique permet d'obtenir des résultats satisfaisants. Pour le matériau fortement écrouissable, la courbe est légèrement décroissante avec R ($R \geqslant 0$) comme celle obtenue par STOREN et RICE, l'explication est le fort déplacement de la surface d'écoulement, pemettant ainsi de modéliser une zone de forte courbure au point de charge conduisant à la déstabilisation de l'écoulement plastique (fig 15 c). Il faut toutefois remarquer que la loi d'écrouissage cinématique utilisée par NEEDLEMAN et TVERGAARD peut s'écrire sous la forme :

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij} = B(\bar{\varepsilon}) D_{ij} \tag{2.62}$$

ou $\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}$ est la dérivée de Jauman de α_{ij}

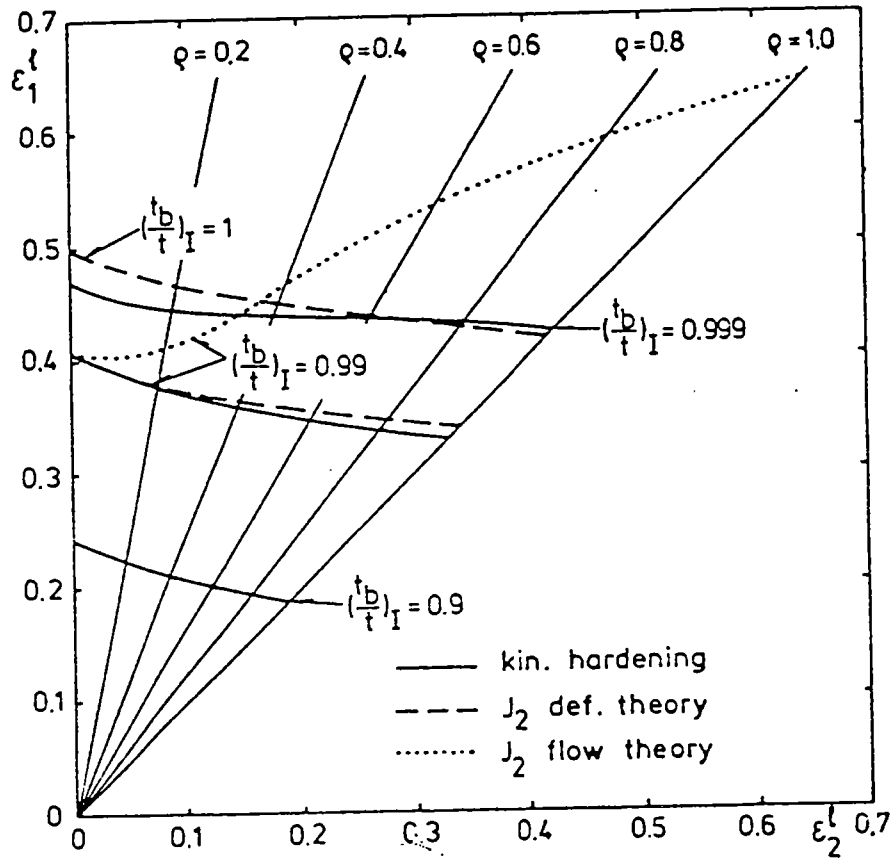
B est une fonction de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$, calculée de manière à obtenir une loi puissance.

$$\bar{\sigma} = k\,\bar{\varepsilon}^{N} \tag{2.63}$$

Il est prouvé expérimentalement que pour de nombreux matériaux, l'hypothèse d'un coefficient d'écrouissage

$$N = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \Big/ \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \tag{2.64}$$

constant n'est pas vérifiée. De plus, pour un matériau présentant une saturation de l'écrouissage, le coefficient B tend vers zéro, ce qui limite le déplacement de la surface d'écoulement notamment lors des chemins complexes de déformation.



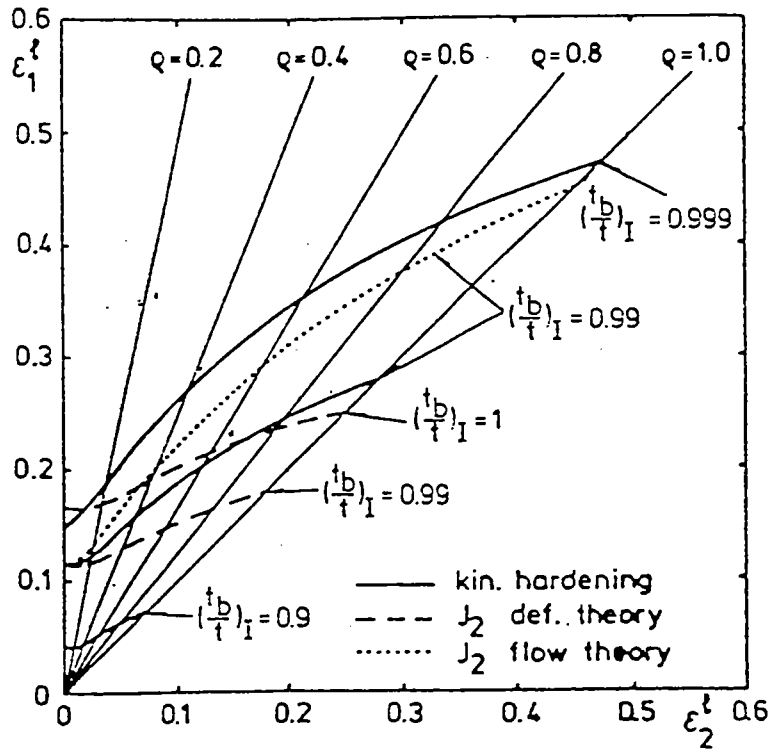


fig 16 - Courbes limites de formage obtenues par TVERGAARD

a) pour un matériau théorique fortement écrouissable

b) pour un matériau faiblement écrouissable

26 - Influence de l'endommagement

Lors de la déformation (laminage, mise en forme) des aciers doux, des alliages d'aluminium... les précipités durs et les inclusions présents dans le matériau se fissurent et créent des cavités. La naissance et la croissance de ces cavités constituent l'endommagement qui est un élément préjudiciable à l'aptitude au formage du matériau. NEEDLEMAN et TRIANTAFYLLIDIS (1978) /12/ ont étudié l'influence de l'endommagement sur l'apparition de la striction localisée en utilisant une fonction seuil proposée par GURSON pour les matériaux poreux :

$$\phi = \frac{\sigma_e^2}{Y_m^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{2Y_m}\right) - f^2 - 1 = 0 \qquad (2.65)$$

où σ_e est la contrainte équivalente

f la fraction volumique des cavités

Y_m la contrainte d'écoulement de la matrice

Les σ_i sont les contraintes principales de Cauchy dans l'agrégat (matrice + cavités)

La variation de la fraction volumique de cavités f est donnée par la relation :

$$\dot{f} = (1-f)(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3) \qquad (2.66)$$

qui traduit la croissance des cavités. CHU et NEEDLEMAN (1980) /13/ ont complété cette équation en y ajoutant des termes permettant de modéliser la germination de cavités au cours de formage.

Les relations contraintes-déformations s'écrivent sous la forme :

$$\dot{\sigma}_i = L_{ij}\,\dot{\varepsilon}_j \quad (i,j=1,2) \qquad (2.67)$$

on a de plus :

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{h}}{h} = \gamma_i\,\dot{\varepsilon}_i \qquad (2.68)$$

Si le matériau est incompressible $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$, mais du fait de la croissance et de la naissance de cavités le matériau subit une variation de volume.

Les calculs sont ensuite menés comme au paragraphe précédent avec l'approche MARCINIAK, une plus grande concentration de cavités dans une bande B joue le rôle de défaut initial. Il y a localisation de l'écoulement plastique quand :

$$L_{11}^{B} + \sigma_1^{B} \gamma_1^{B} = 0 \qquad (2.69)$$

Les courbes limites de formage obtenues sont qualitativement satisfaisantes.

Une autre approche du problème est celle de JALINIER /14/ qui après avoir étudié et suivi l'endommagement par des mesures de densité relative et des observations microscopiques, a modélisé l'endommagement en fonction du taux de déformation et du trajet de chargement.

La détermination de la CLF est ensuite effectuée avec l'analyse MARCINIAK en considérant un défaut d'endommagement dont l'amplitude va croître d'une part du fait de la localisation de l'écoulement et d'autre part du fait de la croissance de l'endommagement. Les calculs sont réalisés dans le cadre de la théorie de la déformation et de la théorie de l'écoulement avec un écrouissage isotrope.

27 Approche linéarisée G. FERRON M. MLIHA-TOUATI /15, 16/

La modélisation du processus de localisation de la déformation s'appuie sur l'étude de la croissance d'un défaut initial qui se présente sous la forme d'une bande initialement inclinée d'un angle par rapport aux directions principales de sollicitations :

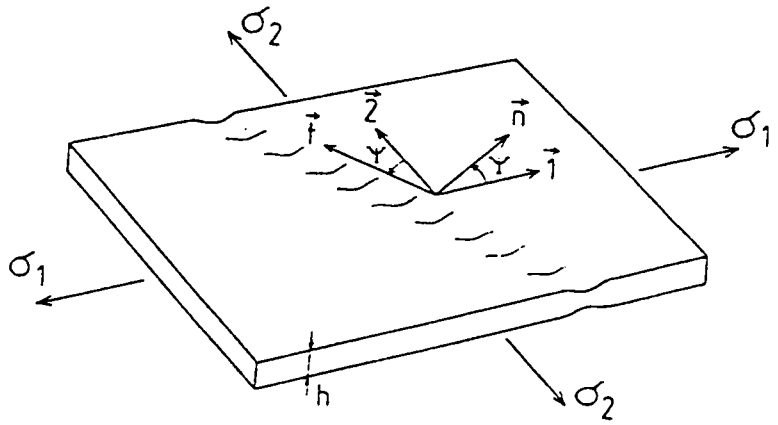


fig 17 : tôle présentant un défaut linéaire d'épaisseur

L'inclinaison courante du défaut est lié à l'inclinaison initiale $\psi(o)$ par :

$$\tan\psi = \left[\exp\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\right] \tan\psi(o) \tag{2.70}$$

L'opérateur δ sera utilisé dans la suite pour exprimer les différences lagrangiennes entre les 2 régions de la tôle. Nous avons alors en utilisant la définition de la déformation logarithmique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \ln\left(h/h(o)\right) \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{h}/h \\ \delta\varepsilon_3 &= \delta \ln h - \delta \ln h(o) \\ \delta\dot{\varepsilon}_3/\dot{\varepsilon}_3 &= \delta \dot{h}/h \quad \delta \ln h \end{aligned} \tag{2.71}$$

où ε_3 désigne la déformation suivant l'épaisseur
h et h (o) sont respectivement l'épaisseur courante et l'épaisseur initiale

Le défaut peut être mécanique ou géométrique. Un défaut mécanique correspond à une prédéformation locale de la tôle. Le gradient d'épaisseur associé à cette prédéformation et alors inclus dans δ ln h (o) et l'hétérogénéité mécanique est définie par $\delta \bar{\varepsilon}(0)$.

L'égalité des vitesses de déformation tangentielles (condition de compatibilité) suivant la direction t dans le défaut et dans la zone homogène s'écrit :

$$\delta \ln \dot{\varepsilon}_{tt} = 0 \tag{2.72}$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} &\delta \ln \sigma_{nn} + \delta \ln h = 0 \\ &\delta \ln |\sigma_{nt}| + \delta \ln h = 0 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Le chemin de déformation est imposé par le rapport :

$$R = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} \tag{2.74}$$

On suppose le matériau soumis à un état plan de contraintes et une loi de comportement thermo-viscoplastique (HART 1970-1976) dont l'expression différentielle est :

$$d \ln \bar{\sigma} = \gamma d\bar{\varepsilon} + \vartheta \ln \dot{\bar{\varepsilon}} - \frac{\vartheta Q}{kT} d \ln T \tag{2.75}$$

γ est le coefficient d'écrouissage instantané
ϑ est le coefficient de sensibilité à la vitesse
Q est l'énergie d'activation apparente

intégrée et écrite en termes de différences Lagrangiennes entre les 2 régions de la tôle elle donne :

$$\delta \ln \bar{\sigma} = \gamma (\delta \bar{\varepsilon} + \delta \bar{\varepsilon}_o) + m \ln \dot{\bar{\varepsilon}} - \frac{mQ}{kT} \delta \ln T \tag{2.76}$$

m est le coefficient moyen de sensibilité à la vitesse
$\delta \bar{\varepsilon}_o$ caractérise le défaut initial mécanique

La fonction seuil est d'abord celle décrite par le nouveau critère de HILL (1977). Cette description apparait comme un cas particulier de la formulation proposée par BUDIANSKY (1982 - 1984) pour un matériau à anisotropie transverse sollicitée dans un plan. C'est donc cette formulation plus générale qui est retenue, la surface d'écoulement est alors décrite sous la forme paramétrique :

$$x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_b} = g(\theta)\cos\theta$$

$$y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_s} = g(\theta)\sin\theta \qquad \text{(fig 18)} \qquad (2.77)$$

$g(\theta)$ représente le rayon polaire d'un point de la surface d'écoulement

θ est l'angle polaire

σ_b σ_s sont respectivement les contraintes d'écoulement en expansion biaxée symétrique et en cisaillement.

La combinaison des relations précédentes permet d'obtenir l'équation de la localisation .

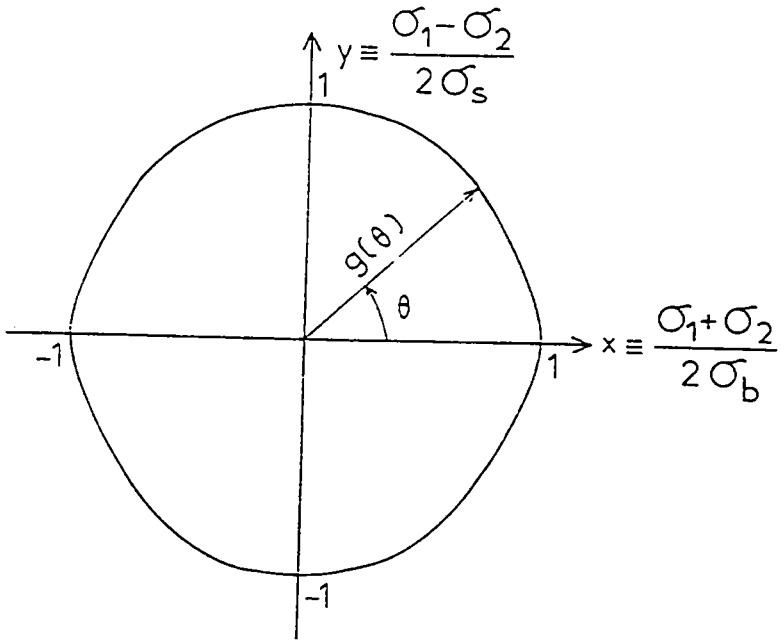


fig 18 - description de la surface d'écoulement
d'après BUDIANSKY /14/

FERRON et MLIHA TOUATI montrent alors le rôle essentiel joué par la courbure de la surface d'écoulement au point de charge dans la localisation de la déformation. Une forte courbure favorise la localisation. Pour l'aluminium et le laiton, leur analyse permet de prévoir correctement la forme de la courbe limite de formage.

3 - LES COURBES LIMITES DE FORMAGE EN CHEMINS COMPLEXES

Au cours des processus d'emboutissage, la trajectoire de déformation en un point de l'embouti est rarement linéaire. Les pièces de formes complexes sont souvent réalisées en plusieurs opérations, les trajectoires de déformation sont alors des lignes brisées dans le plan

De nombreux travaux expérimentaux /17, 18, 19, 20, 21/ ont montré que le niveau et la forme des courbes limites de formage sont très largement influencés par les trajectoires de déformations.

GRUMBACH et SANZ /17/ puis MUCHENBORN et SONNE /18/ ont proposé des méthodes empiriques permettant de construire les courbes limites de formage en chemins complexes d'après les CLF en chemins directs. Ces méthodes supposent que la courbe en chemin complexe ne dépend que de la prédéformation et de la courbe limite en chemins directs. Ces modèles font appel à une relation d'équivalence et une courbe d'équivalence entre déformations.

La relation d'équivalence est définie par l'égalité des vecteurs déformations $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{HA}$ (fig 19).

Les modèles proposés diffèrent par le choix de la courbe d'équivalence :

- une famille d'ellipses $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \text{Constante}$ pour le modèle proposé par GRUMBACH et SANZ
- une famille de droites parallèles à la 2è bissedrice du repère $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, dans le modèle proposé par MUCHENBORN et SONNE.

Par le point de prédéformation I on fait passer la courbe d'équivalence. Cette courbe coupe la trajectoire directe en H, on applique la relation d'équivalence $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{HA}$ pour obtenir le point K de la nouvelle courbe (fig 19).

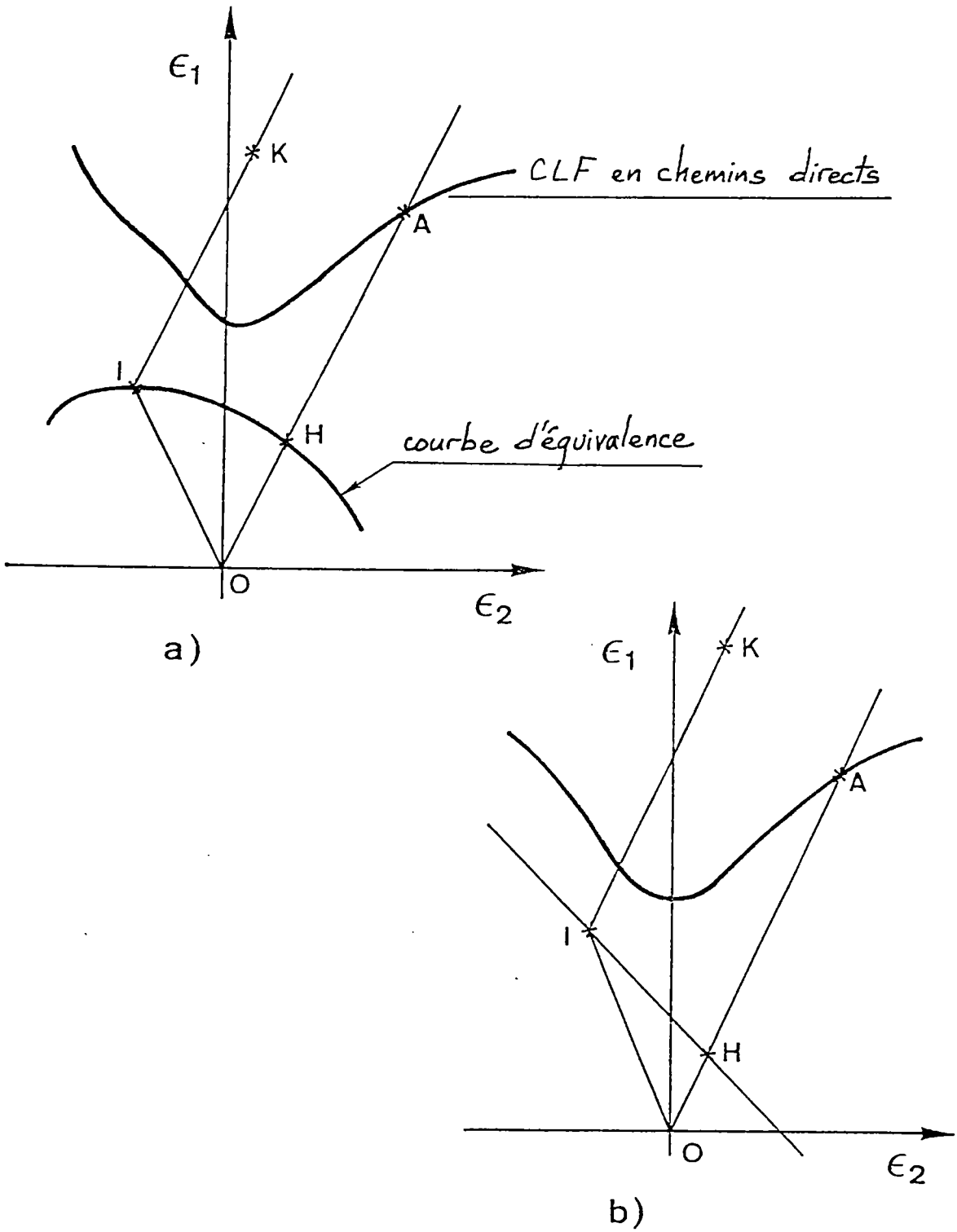


fig 19 - CLF en chemins complexes
détermination à partir des méthodes empiriques proposées par
GRUMBACH et SANZ (a)
et MUCHENBORN et SONNE (b)

1 - KLEEMOLA and J.O KUMPALAINEN
Factors influencing the forming limit diagram
Part I - The experimental détermination of the forming limits of sheet steel
J. of Mech Working Technology, 3 (1980) pp 289 - 302

2 - RONDE OUSTEAU F.
Courbes limites d'emboutissage microstructure et chemins de déformation
Thèse de docteur-ingénieur, Metz (1977)

3 - SWIFT H.W.
Plastic instability under plane stress
J. of Mech and Phys Solids Vol 1 (1952), pp 1618

4 - HILL R
On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets
J. Mech. Phys. solids Vol 1 (1952), pp 19-30

5 - MARCINIAK Z. KUCZYNSKI K.
Limit otrains in the processus of stretch-forming sheet metal
Int. J. Mech Sci. Vol 9 (1967) pp 609-620

6 - HUTCHINSON J.W. NEALE K.W.
Sheet necking
part I,II and III
Mechanics of sheet metal forming Plennon Press N.Y. (1978)

7 - MARCINIAK Z. , KUCZUNSKI K. , POKORA T.
Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension
Int. J. Mech sci. Vol 15 (1973) pp 789 - 805

8 - S. STOREN and RICE J.R.
Localized necking in thin streets
J. Mech. Phys. Solids, 23, pp 421 - 441 (1975)

9 - A.K GOSH
Plastic flow properties in relation to localized necking in sheets
Mechanics of Sheet Metal forming pp 287 - 312
Plenuum Press, New York (1978)

10 - TVECGAARD V.
Effect of kinematic hardening on localized necking in biaxiallly stretched sheets
Int J. Mech Sci ; 20 ; pp 651- 658 (1978)

11 - A. NEEDLEMAN A. TVERGAARD V.
Limits to formality in rate sensitive sheets
Proceeding ICM4, stockholm, pp 51-65, Pergamon Press (1983)

12 - NEEDLEMAN A. TRIANTAFYLLIDIS N.
Void growth and local necking in biaxially stretched streets
Journal of Engineering Materials and Technology
Vol 100 pp 164 - 169 (1978)

13 - CHU CC. - NEEDLEMAN A.
Void nucleation effects in biaxially stretched streets
Journal of Engineering Materials and Technology
Vol 102 pp 249 - 256 (1980)

14 - JALINIER
Mise en forme et endommagement
thèse d'Etat Université de Metz (1981)

15 - FERRON G. MLIHA TOUATI M.
Determination of the forming limits in planar isotropic and temperature sensitive sheet metals
Int. J. Mech. Sci. Vol. 27 N°3 pp 121 - 133 (1985)

16 - MLIHA TOUATI M.
Etude des lois de comportements plastique des métaux
sous sollicitation uniaxiale ou biaxiale
Application à l'analyse de la striction et à la détermination
des limites de formage des toles
thèse d'Etat - Université de Poitiers (1985)

17 - GRUMBACH M. SANZ G.
Influence des trajectoires de déformation sur les Courbes limites
d'emboutissage à striction et à rupture
Mémoires Scientifiques de la Revue de Métallurgie, novembre (1974)
71, N°11 pp 659 - 671

18 - MUSCHENBORN W. SONNE H.M.
Einfluss des formänderungsweges auf die Grenzformänderungen
des Feinblechs
Arch. Eisenhüttenwes 46 (1975) Nr 9 September

19 - DEGUEN M. PARNIERE P. SANZ G.
Effets des trajectoires de déformation sur les courbes limites
d'emboutissage
Etude de l'influence de la microstructure sur cet effet
Compte rendu de fin d'Etude DGRST N°7571271 (1979)

20 - RASMUSSEN S.N.
Theorical Prediction of strainpath dependence of limit strains
in sheet materials
Annals of the CIRP Vol.30/1 (1981)

21 - ARRIEUX R. BEDRIN C. BOIVIN M.
Determination of the strain path influence of the forming limit
diagrams, from the limit stress curve
Annals of the CIRP Vol 34/1 (1985)

II - LE MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE

1 - THEORIE DE LA PLASTICITE

la fonction seuil de Von Misès
le potentiel plastique
l'écrouissage
écrouissage cinématique
écrouissage mixte

2 - EXTENSION DU MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE AUX GRANDES DEFORMATIONS

principe d'objectivité
dérivations objectives
extension du modèle cinématique aux grandes déformations

3 - COMPORTEMENT EN CISAILLEMENT SIMPLE

formulation du problème du cisaillement simple
écrouissage cinématique corotationnel
écrouissage cinématique en rotation propre

4 - SOLLICITATIONS COMBINEES

formulation du problème
écrouissages cinématiques

1 - THEORIE DE LA PLASTICITE /1, 2, 3, 4/

L'écoulement plastique d'un matériau souvent en chargement uniaxial lorsque la contrainte atteint une valeur seuil (limite élastique), l'ensemble de ces valeurs limites fournit dans l'espace des contraintes la surface seuil ou surface d'écoulement plastique définit par la fonction seuil :

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.1}$$

Le comportement du matériau est alors élastique si :

$$f(\sigma_{ij}) < 0 \qquad f(\sigma_{ij}) = 0 \qquad \dot{f} < 0$$

et plastique si :

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \qquad \dot{f} \geqslant 0 \tag{1.2}$$

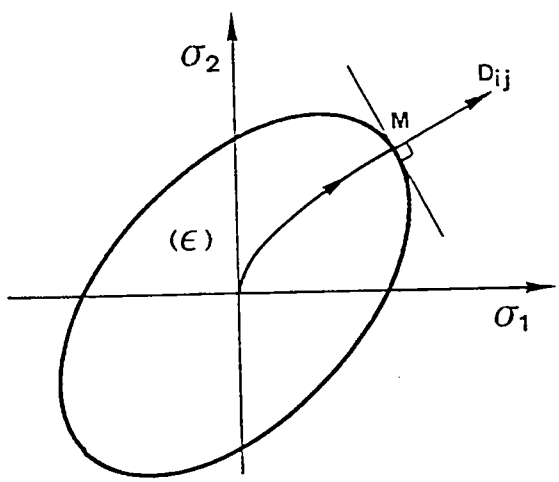


fig 1 - surface seuil, loi de normalité

Le domaine est le domaine des déformations élastiques. Un matériau rigide-plastique est un matériau pour lequel l'élasticité est supposée nulle, dans ce cas le domaine s'appelle domaine de rigidité et la déformation plastique est confondue avec la déformation totale. Dans la suite on se limitera au cas d'un matériau rigide plastique.

la fonction seuil de Von Misès

Comme fonction seuil on peut choisir la condition d'écoulement de Von Misès établie pour les matériaux isotropes

$$f(\sigma_{ij}) = 3J_2 - \sigma_y^2 = 0 \tag{1.3}$$

où J est le 2è invariant du déviateur des contraintes

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \tag{1.4}$$

et σ_y est la contrainte initiale d'écoulement en traction uniaxiale.

potentiel plastique

Le principe du travail maximum permet d'établir d'importantes propriétés :

- la fonction seuil est le potentiel plastique, ce qui se traduit par les relations

$$D_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.5}$$

relations qui montrent que le vecteur vitesse de déformation plastique D_{ij} est normal à la surface seuil (loi de normalité)

- la surface seuil est convexe

Ecrouissage

En chargement uniaxial, la contrainte seuil évolue avec la déformation plastique, ce phénomène est appelée écrouissage. Dans le cas tridimensionnel, la surface seuil est modifiée par l'écrouissage.

Avec l'hypothèse d'un écrouissage isotrope, la surface seuil se dilate uniformément autour de l'origine des contraintes (fig 2). Cette dilatation de la surface seuil est contrôlée par un seul paramètre dépendant de la déformation plastique subie par le matériau.

Avec le choix du critère de Von Misès, on pose :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \tag{1.6}$$

$\bar{\sigma}$ caractérise la dimension de la surface d'écoulement, est la contrainte effective ou contrainte équivalente ou encore contrainte de Von Misès.

On définit alors la vitesse de déformation équivalente par :

$$\sigma_{ij} D_{ij} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{1.7}$$

où $\sigma_{ij} D_{ij}$ est la puissance de déformation plastique et $\dot{\bar{\varepsilon}}$ est la vitesse de déformation plastique équivalente.

Les relations (1.6) et (1.7) conduisent à :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} D_{ij} D_{ij}} \tag{1.8}$$

On appelle déformation plastique cumulée la quantité :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} \, d\tau \tag{1.9}$$

c'est le paramètre choisi pour contrôler la dilatation de la surface seuil :

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}) \tag{1.10}$$

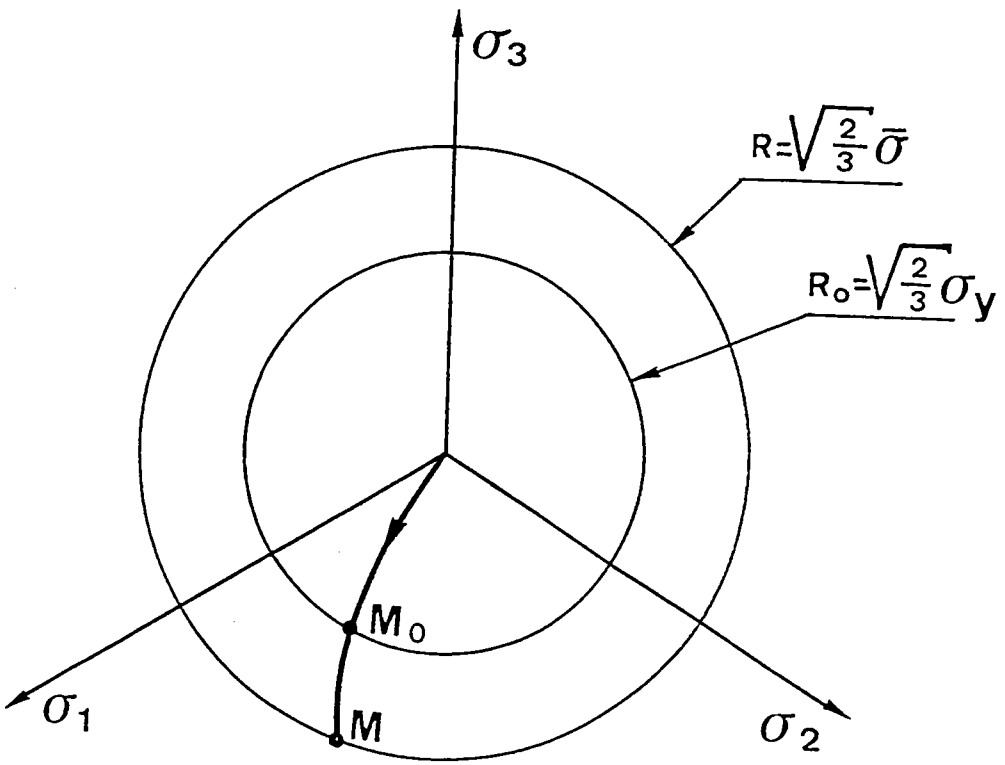


fig 2 - Ecrouissage isotrope $\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon})$

σ_y contrainte initiale d'écoulement

De nombreuses études expérimentales /12, 13, 14, 15, 16/ sur l'évalusation de la surface seuil ont été effectuées, elles ont montré que le modèle d'écrouissage isotrope n'est pas satisfaisant. En effet, la surface seuil se dilate, se déforme et se déplace dans l'espace des contraintes, l'écrouissage est anisotrope.

Ecrouissage cinématique

PRAGER /5/ a proposé un modèle d'écrouissage pour lequel la surface seuil ne change ni de forme ni de dimension mais se déplace dans l'espace des contraintes. Ce déplacement est paramétré par une variable tensorielle de composantes α_{ij} , la fonction seuil s'écrit :

$$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=0 \tag{1.11}$$

et dans le cas d'un matériau isotrope avec la condition d'écoulement de Von Misès :

$$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=\frac{3}{2}(s_{ij}-\alpha_{ij})(s_{ij}-\alpha_{ij})-\sigma_y^2=0 \tag{1.12}$$

α_{ij} représente la position du centre de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes

σ_y représente la dimension de la surface seuil (fig 3)

$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})$ est le potentiel plastique de l'écoulement

$$D_{ij}=\lambda\frac{\partial f}{\partial(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})}=\frac{\lambda(s_{ij}-\alpha_{ij})}{\sigma_y} \tag{1.13}$$

avec

$$\lambda=\frac{3}{2}\dot{\bar{\varepsilon}} \qquad \dot{\bar{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{2}{3}D_{ij}D_{ij}} \tag{1.14}$$

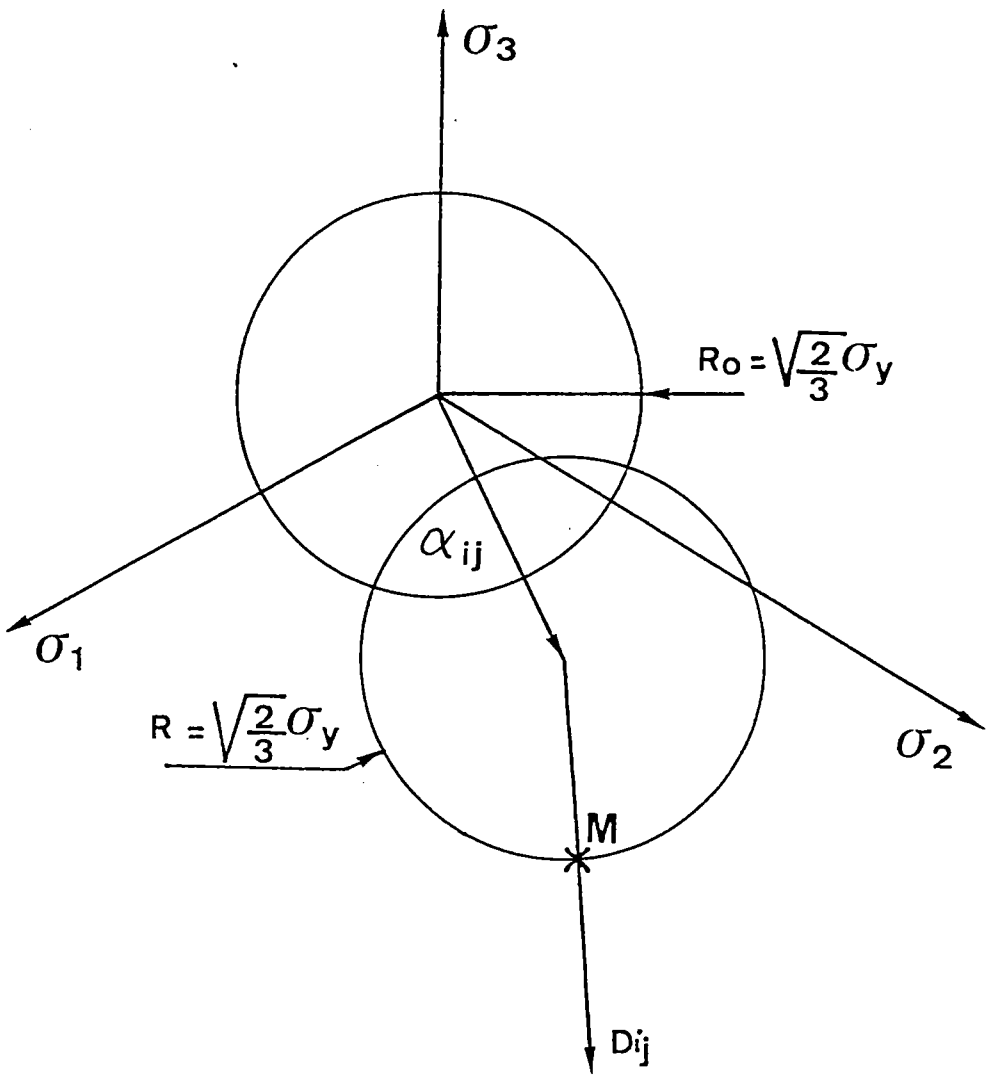


Fig 3 - Ecrouissage cinématique

L'évolution de la variable tensorielle α_{ij} est régie par la loi de PRAGER - ZIEGLER /5, 6/ :

$$\dot{\alpha}_{ij} = B(\bar{\varepsilon})\, D_{ij} \tag{1.14}$$

où B est une fonction linéaire de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$; $\dot{\alpha}_{ij}$ est la dérivée particulaire de α_{ij}, elle est colinéaire au tenseur vitesse de déformation plastique

AMSTRONG et FREDERICK /7/ puis CHABOCHE /8/ ont modifié cette loi d'évolution en y ajoutant un terme de mémoire

$$\dot{\alpha}_{ij} = B(\bar{\varepsilon})\, D_{ij} - A(\bar{\varepsilon})\, \dot{\bar{\varepsilon}}\, \alpha_{ij} \tag{1.15}$$

A est également fonction de la déformation plastique cumulée

Ecrouissage mixte

Les deux modèles précédents peuvent être associés pour traduire la dilatation et le déplacement de la surface seuil. Le potentiel plastique peut s'écrire :

$$f\left[(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}),\, \bar{\varepsilon}\right] = \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \left[\sigma_y(\bar{\varepsilon})\right]^2 = 0 \tag{1.16}$$

la dimension σ_y est fonction de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$

2 - EXTENSION DU MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE AUX GRANDES DEFORMATIONS

La dérivée particulaire n'étant pas objective, l'extension de la relation (1.15) aux grandes déformations n'est pas possible sous cette forme. C. FRESSENGEAS et A. MOLINARI /9, 10/ ont proposé des modèles d'écrouissage cinématique en grande déformation plastique basés sur différentes dérivées objectives.

Principe d'objectivité /2, 11/

Les équations traduisant le comportement du matériau doivent être invariantes dans tout changement de référentiel.

Si x (t) est la position, à l'instant t, d'une particule matérielle dans un premier référentiel :

$$\vec{x'}(t) = \vec{c}(t) + Q(t).\vec{x} \tag{2.1}$$

définit un changement de référentiel

c (t) caractérise une translation
Q (t) une rotation, Q est un tenseur orthogonal

$$Q(t)\, Q^t(t) = Q^t(t)\, Q(t) = 1 \tag{2.2}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(Q\, Q^t\right) = \dot{Q}\, Q^t + Q\, \dot{Q}^t = 0 \tag{2.3}$$

Considérons le tenseur gradient de déformation F, en considérant que les deux référentiels ont même orientation à l'instant initial t = 0 (dX' = dX), on a :

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= F.\,\vec{dX} \\ \vec{dx'} &= F'.\vec{dX} \end{aligned} \tag{2.4}$$

en combinant les relations (2.1) et (2.4)

$$\begin{aligned} \vec{dx'} &= Q(t).\vec{dx} \\ &= Q(t).\left[F.\vec{dX}\right] \\ &= \left[Q(t).F\right].\vec{dX} \end{aligned} \tag{2.5}$$

on obtient :

$$F' = Q(t)\,.\,F \tag{2.6}$$

Un tenseur du second ordre défini par u = T. v est transformé en :

$$T' = Q(t) . T . Q^t(t) \tag{2.7}$$

Un tenseur est dit objectif s'il se transforme selon les relations (2.6) ou (2.7).

Le tenseur gradient des vitesses L défini par :

$$\dot{\vec{dx}} = \dot{F} . \vec{dX} = L . \vec{dx} \qquad L = \dot{F} . F^{-1} \tag{2.8}$$

s'écrit dans le nouveau réf érentiel

$$L' = \dot{F}' F'^{-1} \tag{2.9}$$

avec la relation (2.6) on calcule F' et F'

$$\dot{F}' = \dot{Q} . F + Q . \dot{F}$$

$$F'^{-1} = F^{-1} . Q^{-1} \tag{2.10}$$

En reportant dans (2.9), on obtient :

$$L' = Q . L . Q^t + A \tag{2.11}$$

en posant :

$$A = \dot{Q}(t) . Q^t(t) \tag{2.12}$$

A est un tenseur symétrique, c'est le tenseur vitesse de rotation du nouveau référentiel par rapport à l'ancien référentiel.

La relation (2.11) montre que le tenseur gradient des vitesses n'est pas objectif.

La décomposition de L en partie symétrique et partie antisymétrique permet de définir le tenseur taux de déformation D et le tenseur taux de rotation W.

$$D = L^s = \frac{1}{2}(L + L^t)$$

$$W = L^A = \frac{1}{2}(L - L^t) \qquad (2.13)$$

En utilisant l'équation (2.11) l'expression de ces deux tenseurs dans le nouveau référentiel est :

$$D' = Q.D.Q^t$$

$$W = Q.W.Q^t + A \qquad (2.14)$$

Expressions qui montrent que D est un tenseur objectif et que W ne l'est pas.

<u>dérivations objectives</u>

Soit T un tenseur objectif c'est-à-dire qui se transforme en :

$$T' = Q.T.Q^t \qquad (2.15)$$

dérivons par rapport au temps

$$\dot{T}' = Q.\dot{T}.Q^t + \dot{Q}.T.Q^t + Q.T.\dot{Q}^t \qquad (2.16)$$

Les relations (2.3) et (2.12) conduisent à :

$$A.T' = \dot{Q}.T.Q^t \quad - T'.A = Q.T.\dot{Q}^t \qquad (2.17)$$

En remplaçant dans (2.16), on obtient :

$$\dot{T}' = Q.\dot{T}.Q^t + A.T' - T'.A \qquad (2.18)$$

Ainsi la dérivée par rapport au temps n'est pas objective. Pour construire des dérivées objectives, l'idée consiste à éliminer les rotations parasites en dérivant le tenseur T dans un repère convenablement choisi.

<u>la dérivée de Jaumann</u>

Cherchons à éliminer Q et Q de la relation (2.16), utilisons pour ceci la relation (2.14)

$$W' = Q.W.Q^t + A \quad \text{avec } A = \dot{Q}.Q^t$$

$$W'.Q = Q.W + \dot{Q}$$

$$\dot{Q} = W'.Q - Q.W \tag{2.19}$$

et le transposé $\dot{Q}^t$

$$\dot{Q}^t = -Q^t.W' + W.Q^t \tag{2.20}$$

obtenu en utilisant le fait que W et W' sont antisymétriques $W^t = -W$

En remplaçant dans (2.16), il vient :

$$\dot{T}' - W'.T' + T'.W' = Q.(\dot{T} - W.T + T.W).Q^t \tag{2.21}$$

On pose :

$$\overset{\nabla}{T} = \dot{T} - W.T + T.W \tag{2.22}$$

On a alors :

$$\overset{\nabla}{T}' = Q.\overset{\nabla}{T}.Q^t \tag{2.23}$$

$\overset{\nabla}{T}$ est une dérivée objective. L'équation (2.22) montre que le référentiel choisi pour calculer cette dérivée est le référentiel lié à la particule et tournant avec elle à la vitesse angulaire défini par le tenseur vitesse de rotation W. Ce référentiel est appelé référentiel co-rotationnel.

En ajoutant la quantité objective D. T + T.D à $\overset{\nabla}{T}$ on obtient une autre dérivée objective : la dérivée convective :

$$T_c = \overset{\nabla}{T} + D.T + T.D \tag{2.24}$$

compte tenu des relations

$$L = D + W \qquad L^t = D - W \tag{2.25}$$

il en résulte :

$$T_c = \dot{T} + L^t.T + T.L \tag{2.26}$$

<u>dérivée en rotation propre</u>

On définit une nouvelle dérivée objective en choisissant un référentiel tournant défini par la rotation R tirée de la décomposition polaire du gradient de déformation F :

$$F = R.U = V.R \tag{2.27}$$

R est le tenseur rotation ; il est orthogonal R. R = 1

U et V sont les tenseurs déformation pure droit et gauche respectivement.

Le tenseur vitesse de rotation du référentiel en rotation propre par rapport au référentiel Lagrangien est :

$$\Omega = \dot{R}.R^t \tag{2.28}$$

et la dérivée en rotation propre s'écrit :

$$\overset{\circ}{T} = \dot{T} - \Omega . T + T . \Omega \tag{2.29}$$

Les équations (2.22) et (2.29) peuvent se mettre sous la forme générale

$$\overset{*}{T} = \dot{T} - \Omega^{*} . T + T . \Omega^{*} \tag{2.30}$$

avec $\overset{*}{T}$ qui représente une dérivée objective du tenseur T et Ω^{*} qui est un tenseur vitesse de rotation.

$\Omega^{*} = W$ dans le cas de la dérivée de Jaumann

$\Omega^{*} = \dot{R} R^{t}$ dans le cas de la dérivée en rotation propre

<u>une famille de dérivée objectives</u> /11/

Reprenons la décomposition polaire du gradient de déformation F

$F = R . U = V . R$ relation (2.27)

Le tenseur gradient des vitesses est défini par :

$$L = \dot{F} F^{-1}$$

$$L = \dot{R} R^{t} + \dot{R} \dot{U} U^{-1} R^{t} \tag{2.31}$$

en utilisant la décomposition polaire de F.

La partie antisymétrique de L correspond au tenseur vitesse de rotation W :

$$W = \frac{1}{2} \left(L - L^{t} \right) \tag{2.32}$$

soit :

$$W = \dot{R} R^{t} + \frac{1}{2} R . \left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U} \right) . R^{t} \tag{2.33}$$

le tenseur vitesse de rotation propre est :

$$\Omega = \dot{R} R^t \tag{2.34}$$

On définit alors une famille de dérivées objectives en posant :

$$\Omega^* = W - \frac{\nu}{2} R.(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U}).R^t \tag{2.35}$$

lorsque $\nu = 0$ $\Omega^* = W$ et la dérivée correspondante est la dérivée de Jaumann

lorsque $\nu = 1$ $\Omega^* = \Omega$ et la dérivée correspondante est la dérivée en rotation propre

et une dérivée objective de T s'écrit :

$$\overset{*}{T} = \dot{T} - \Omega^*.T + T.\Omega^* \tag{2.36}$$

$\overset{*}{T}$ correspond à la dérivée $\dot{T}$ évaluée par rapport à un repère animé d'un mouvement de rotation défini par le tenseur vitesse de rotation

<u>Extension du modèle d'écrouissage cinématique aux grandes déformations</u>

La loi d'écrouissage (1.15) est écrite en grandes déformations en remplaçant la dérivée particulaire de α_{ij} par une dérivée objective :

$$\overset{*}{\alpha}_{ij} = B(\bar{\varepsilon}).D_{ij} - A(\bar{\varepsilon}).\dot{\bar{\varepsilon}}.\alpha_{ij} \tag{2.37}$$

où $\overset{*}{\alpha}_{ij}$ est une dérivée objective de α_{ij}

3 - COMPORTEMENT EN CISAILLEMENT SIMPLE /9, 10/

Dans les calculs de mise en forme, on introduit un défaut géométrique initial sous la forme d'une bande de sous-épaisseur inclinée d'un angle par rapport à la direction de la plus grande contrainte. Cette bande de sous-épaisseur sera soumise à une contrainte de cisaillement. Le comportement en cisaillement simple du modèle d'écrouissage cinématique est alors d'un grand intérêt.

31 - formulation du problème-cinématique du glissement simple

On considère une couche d'épaisseur h constante déformée en cisaillement simple :

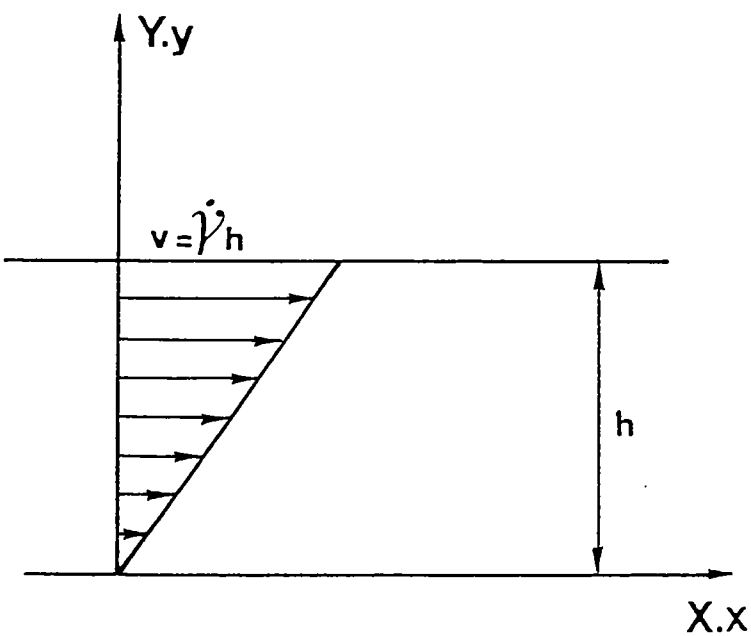


fig 4 - cisaillement simple

La position à l'instant t, d'une particule est donnée en fonction de sa position initiale (X,Y,Z) par les relations :

$$\left| \begin{array}{l} x = X + \gamma Y \\ y = Y \\ z = Z \end{array} \right. \tag{3.1}$$

de sorte que le tenseur gradient de déformation s'écrit :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

et le tenseur gradient des vitesses $L = \dot{F} F^{-1}$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

on en déduit les composantes du tenseur vitesse de déformation D et du tenseur vitesse de rotation W définis par :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\left(L + L^t\right) \\ W &= \frac{1}{2}\left(L - L^t\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

cela donne :

$$D_{xy} = D_{yx} = \dot{\gamma}/2 \tag{3.5}$$

$$W_{xy} = -W_{yx} = \dot{\gamma}/2$$

les autres composantes sont toutes nulles.

Avec la décomposition polaire du gradient de déformation F

$$F = V.R \tag{3.6}$$

où V est le tenseur symétrique de déformation pure gauche
R est le tenseur orthogonal (RR = 1) de rotation
on obtient :

$B = V^2 = F.F^t$ où B est tenseur des déformations de Cauchy (3.7)

et

$$R = V^{-1}.F \tag{3.8}$$

Les composantes de B dans le référentiel (X, Y, Z) sont :

$$B = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

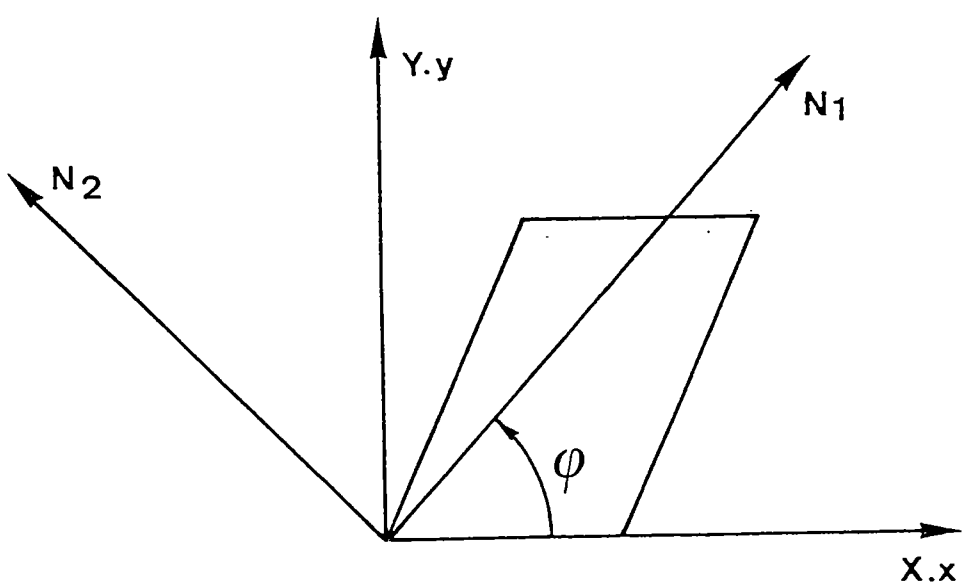


fig 5 - déformation d'un parallélepipède élémentaire
axes principaux du tenseur déformation B = V

Dans les axes principaux on a :

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(2+\gamma^2\right)+\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2\varphi+\gamma\sin 2\varphi$$
$$B_2 = \frac{1}{2}\left(2+\gamma^2\right)-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2\varphi-\gamma\sin 2\varphi \tag{3.10}$$

avec $$\tan 2\varphi = \frac{2\gamma}{\gamma^2} = \frac{2}{\gamma} \tag{3.11}$$

définissant l'orientation des axes principaux par rapport aux axes (X,Y,Z)

On calcule dans les axes principaux les composantes de V et de V^{-1}

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{B_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{B_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Pour obtenir le tenseur rotation R , les composantes de V sont écrites dans le repère initial (X,Y,Z) :

$$R = V^{-1} F \tag{3.13}$$

et

$$\Omega = \dot{R}.R^t \tag{3.14}$$

finalement :

$$\Omega = \frac{2\dot{\gamma}}{4+\gamma^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

on pose :

$$\dot{\theta} = \frac{2\dot{\gamma}}{4+\gamma^2} \tag{3.16}$$

La rotation du repère constationnel par rapport aux axes Lagrangiens (X,Y) est donnée par et la rotation du repère propre par

le tenseur Ω^* définissant la famille de dérivées objectives est calculé à partir de la relation (2.34) :

$$\frac{1}{2} R.(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U}).R^t = \frac{\dot{\gamma}}{2} \frac{\gamma^2}{4+\gamma^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

et

$$\Omega^* = \frac{\dot{\gamma}}{2} \left(1 - \frac{\vartheta \gamma^2}{4+\gamma^2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

on pose :

$$\dot{\theta}^* = \frac{\dot{\gamma}}{2} \left(1 - \frac{\vartheta \gamma^2}{4+\gamma^2}\right) \tag{3.19}$$

$\theta^* = \theta$ pour $\vartheta = 1$

$\theta^* = \gamma$ pour $\vartheta = 0$

32 - écrouissage cinématique

Le comportement du matériau est supposé être rigide-plastique et incompressible. Le critère d'écoulement s'écrit :

$$f(s_{ij}, \alpha_{ij}) = \sqrt{3}\,(\tau - \alpha_{xy}) - \sigma_y = 0$$

ou encore :

$$f(s_{ij}, \alpha_{ij}) = (\tau - \alpha_{xy}) - \tau_y \tag{3.20}$$

avec τ contrainte de cisaillement

τ_y contrainte initiale d'écoulement en cisaillement

et la loi d'écoulement associée (relation 1.13) donne :

$$\dot{\gamma}/2 = \lambda\,(\tau - \alpha_{xy})/\sigma_y = \lambda\,(\tau - \alpha_{xy})/(\sqrt{3}\,\tau_y) \tag{3.21}$$

avec $\lambda = \frac{3}{2}\dot{\bar{\varepsilon}}$ $\quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\gamma}/\sqrt{3}$

L'évolution de la surface d'écoulement est gouvernée par la loi de Prager-Ziegler avec le terme de mémoire, écrite en grandes déformations (relations (2.37)), les coefficients A, B et sont supposés constants :

$$\begin{aligned} \overset{*}{\alpha}_{xx} &= -A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{xx} \\ \overset{*}{\alpha}_{yy} &= -A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{yy} \\ \overset{*}{\alpha}_{xy} &= B\,\dot{\gamma}/2 - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{xy} \end{aligned} \tag{3.22}$$

<u>Ecrouissage cinématique corotationnel</u>

Les relations (2.35) et (3.22) conduisent au système différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{xx}}{d\gamma} &= \alpha_{xy} - \frac{A}{\sqrt{3}}\,\alpha_{xx} \\ \frac{d\alpha_{xy}}{d\gamma} &= -\frac{A}{\sqrt{3}}\,\alpha_{xy} - \alpha_{xx} + \frac{1}{2}\,B \\ \alpha_{yy} &= -\alpha_{xx} \end{aligned} \tag{3.23}$$

qui se réduit à une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2\alpha_{xy}}{d\gamma^2} + \frac{2A}{\sqrt{3}}\,\frac{d\alpha_{xy}}{d\gamma} + \left(1 + \frac{A^2}{3}\right)\alpha_{xy} = \frac{AB}{2\sqrt{3}} \tag{3.24}$$

à l'instant initial $\alpha_{xy} = \alpha_{xx} = 0$

$$\alpha_{xy} = \frac{AB\sqrt{3}}{2(3+A^2)} + 2.\exp\left(-\frac{A}{\sqrt{3}}\,\gamma\right).\left[-\frac{AB\sqrt{3}}{4(3+A^2)}\cos\gamma + \left(\frac{B}{4} - \frac{A^2B}{4(3+A^2)}\right)\sin\gamma\right] \tag{3.25}$$

A la figure 7 nous avons tracé l'évolution de $\alpha_{xy} = \tau - \tau_y$ en fonction de γ

pour A = 0 la contrainte de cisaillement présente des oscillations sinusoïdales, l'introduction du terme de mémoire permet d'atténuer les oscillations.

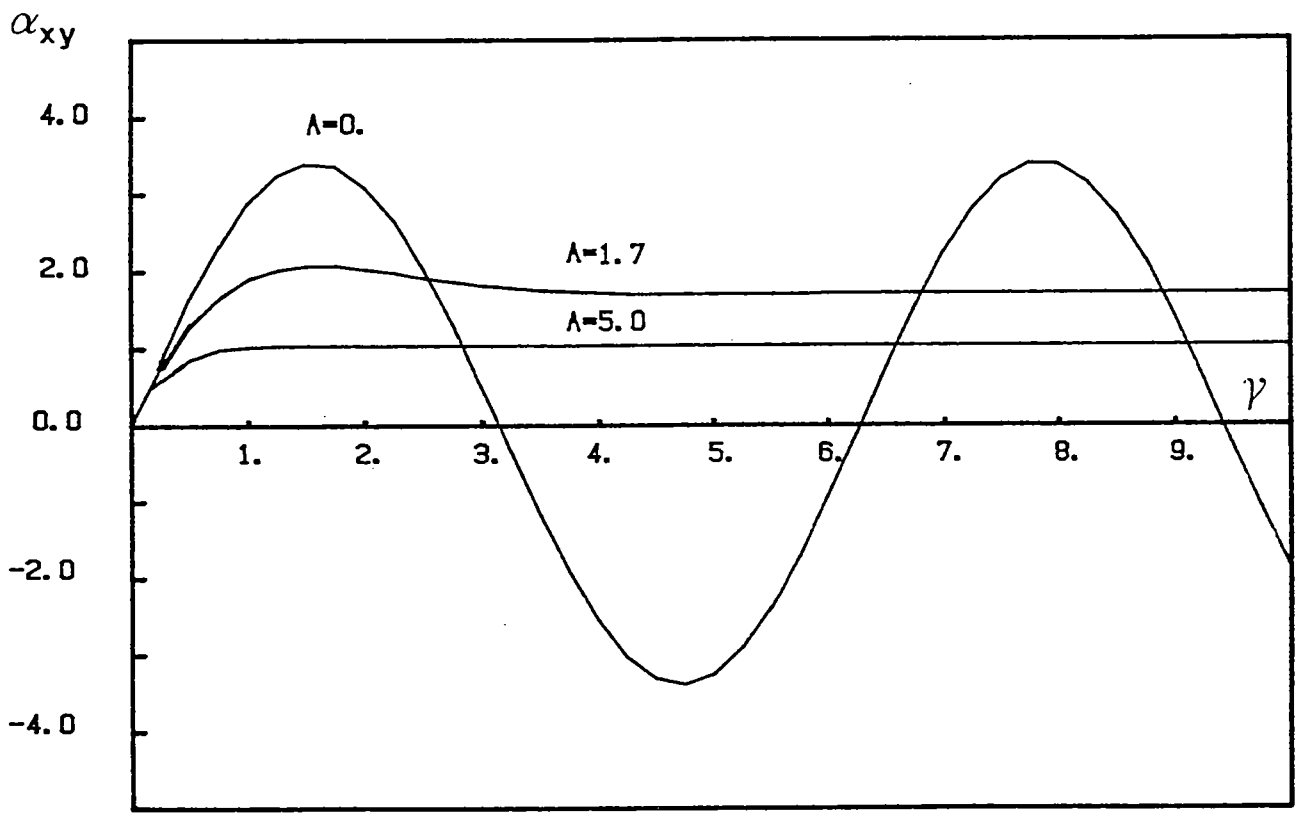


fig 7 - Glissement simple. Influence du terme de mémoire sur la contrainte de cisaillement. Ecrouissage cinématique corotationnel.
B = 850. MP_a

Ecrouissage cinématique en rotation propre

De la même façon, on obtient le système différentiel :

$$\dot{\alpha}_{xx} = -\frac{A}{\sqrt{3}}\,\dot{\gamma}\,\alpha_{xx} + 2\dot{\theta}\,\alpha_{xy}$$

$$\dot{\alpha}_{xy} = -\frac{A}{\sqrt{3}}\,\dot{\gamma}\,\alpha_{xy} + \frac{B\dot{\gamma}}{2} - 2\dot{\theta}\,\alpha_{xx} \qquad (3.26)$$

$$\alpha_{yy} = -\alpha_{xx}$$

Le système différentiel est résolu numériquement. La figure 8 donne l'évolution de la variable d'écrouissage cinématique $\alpha_{xy} = \tau - \tau_y$

Les deux solutions corotationnelle et en rotation propre coïncident aux faibles valeurs du glissement. Les oscillations observées dans la solution corotationnelle sont supprimées (fig 8).

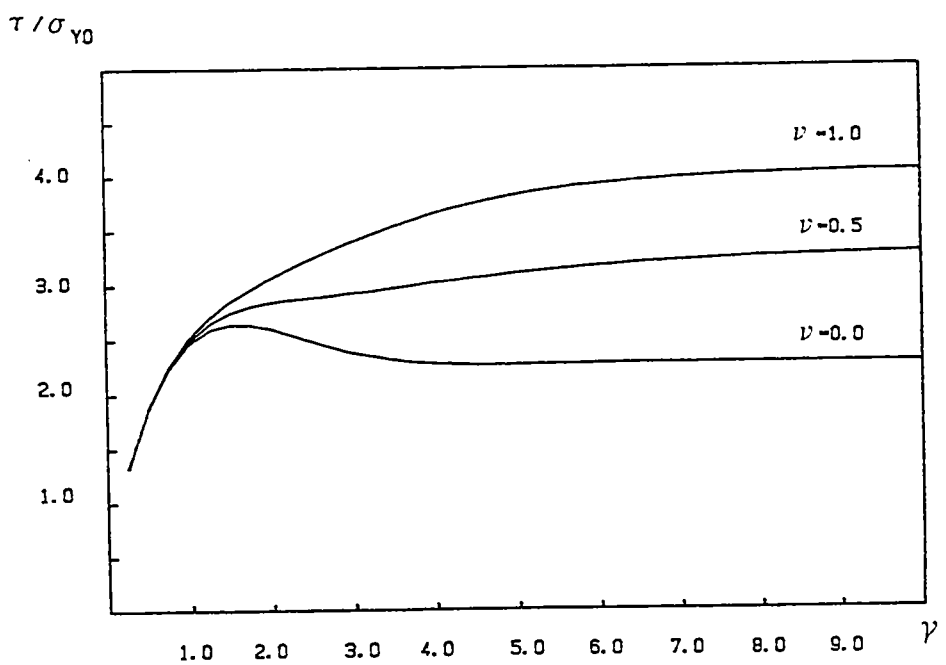


fig 8 - Ecrouissages cinématiques en cisaillement simple
corotationnel
en rotation propre

4 - SOLLICITATIONS COMBINEES

Dans le modèle à deux zones que nous utiliserons au chapitre suivant, la bande représentant le défaut initial géométrique est soumise à du cisaillement. Toutefois le chargement de cette zone n'est pas le cisaillement simple et avant d'aborder l'application à la mise en forme il est utile d'étudier le comportement du modèle cinématique en sollicitations combinées.

41 - formulation du problème

Pour calculer les courbes limites de formage nous utilisons l'approche MARCINIAK. Nous considérons une plaque mince avec un défaut géométrique initial sous la forme d'une bande de sous-épaisseur inclinée d'un angle $\psi(o)$ initial (fig 9).

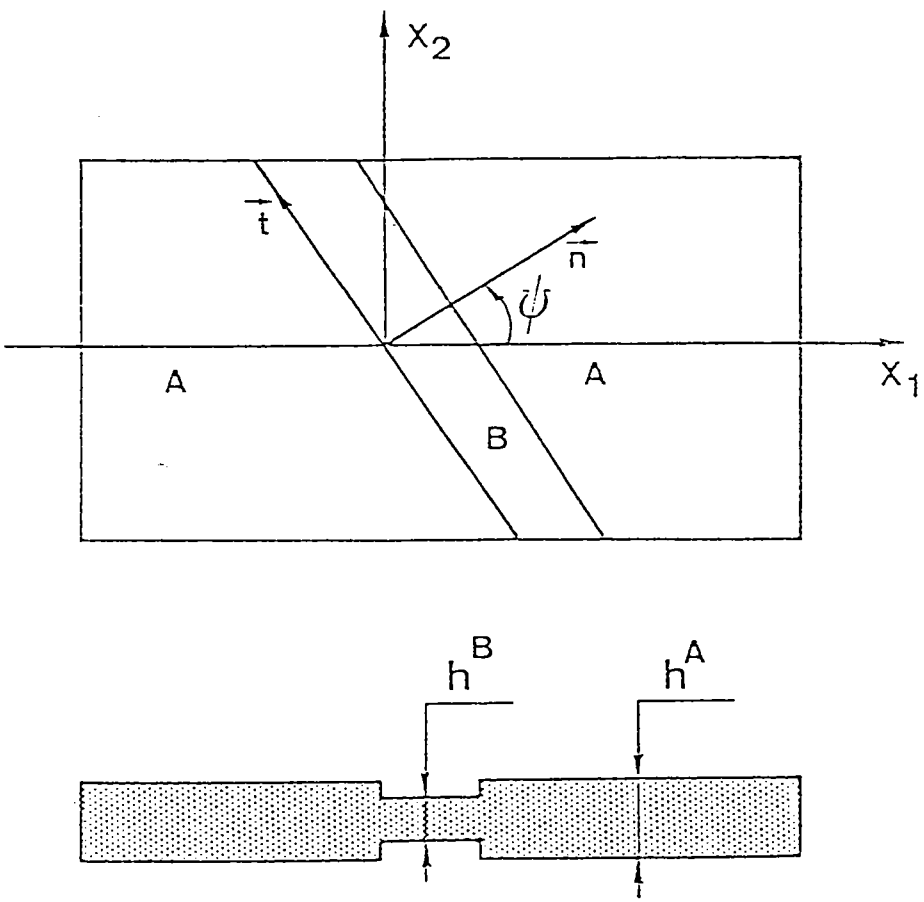


fig 9 - géométrie du problème à deux zones

Dans la bande les composantes du tenseur déformation sont supposées uniformes et le vecteur vitesse v en un point quelconque de cette zone a pour composantes à un instant t quelconque (fig 10)

$$\begin{aligned} v_x &= x.D_{nn}(t) + f(y,t) \\ v_y &= y.D_{tt}(t) + g(x,t) \\ v_z &= z.D_{zz}(t) = -z(D_{nn}+D_{tt}) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

et

$$\frac{\dot{\gamma}}{2} = \frac{1}{2}\left(v_{x,y} + v_{y,x}\right) = \frac{1}{2}\left(f_{,y} + g_{,y}\right) = \text{constante} \qquad (4.2)$$

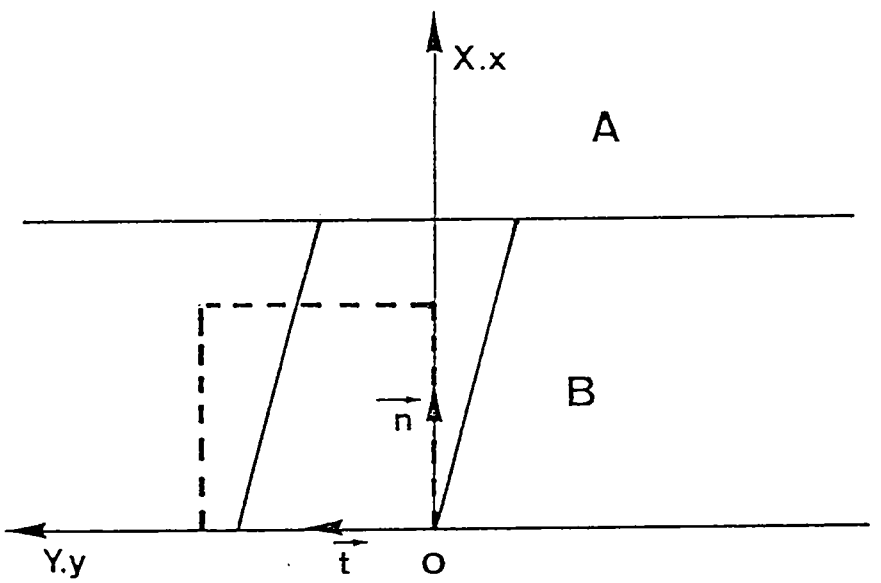


fig 10 - déformation d'un parallélepipède élémentaire dans la bande

Les composantes du tenseur vitesse de déformation D et du tenseur vitesse de notation W sont :

$$D = \begin{pmatrix} D_{nn} & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & D_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & -(D_{nn}+D_{tt}) \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

On déduit de la relation (4.2) que f et g sont des fonctions linéaires de y et x respectivement.

Le point O (o,o) est supposé fixe dans le référentiel choisi et l'axe Y demeure inchangé, on obtient alors :

$$\begin{aligned} v_x &= x.D_{nn} \\ v_y &= y.D_{tt} + \dot{\gamma}x \\ v_z &= -z\,(D_{nn}+D_{tt}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Par intégration on trouve que la position actuelle (x,y,z) d'un point matériel se trouvant dans la position initiale (X,Y,Z) est :

$$\begin{aligned} x &= X \exp\int_0^t D_{nn}(\tau)\,d\tau \\ y &= X \exp\int_0^t D_{tt}(\tau)\,d\tau . \int_0^t \dot{\gamma}(\tau)\left[\exp\int_0^\tau (D_{nn}(\xi)-D_{tt}(\xi))\,d\xi\right]d\tau \\ &\qquad + Y \exp\int_0^t D_{tt}(\tau)\,d\tau \\ z &= Z \exp\int_0^t -(D_{nn}(\tau)+D_{tt}(\tau))\,d\tau \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ces relations nous permettent de calculer les composantes du tenseur gradient de déformation F

$$\begin{aligned} F_{xX} &= \frac{\partial x}{\partial X} = \exp\int_0^t D_{nn}\,d\tau \\ F_{yY} &= \frac{\partial y}{\partial Y} = \exp\int_0^t D_{tt}\,d\tau \\ F_{zZ} &= \frac{\partial z}{\partial Z} = \exp\int_0^t -(D_{nn}+D_{tt})\,d\tau \\ F_{xY} &= \frac{\partial x}{\partial Y} = 0 \\ F_{yX} &= \frac{\partial y}{\partial X} = \exp\int_0^t D_{tt}\,d\tau . \int_0^t \dot{\gamma}\left[\exp\int_0^\tau (D_{nn}-D_{tt})\,d\xi\right]d\tau \end{aligned} \tag{4.6}$$

Avec la décomposition polaire F = V.R où V est le tenseur symétrique de déformation pure gauche et R le tenseur orthogonal de rotation :

$$R.R^t = R^t.R = 1 \tag{4.7}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} B &= FF^t = V^2 \\ R &= V^{-1}F \end{aligned} \tag{4.8}$$

B est le tenseur de Cauchy des déformations, les composantes de B dans le repère (x,y,z) sont :

$$\begin{aligned} B_{xx} &= F_{xX}^2 \\ B_{yy} &= F_{yX}^2 + F_{yY}^2 \\ B_{zz} &= F_{zZ} \\ B_{xy} &= B_{yx} = F_{xX}\,F_{yX} \end{aligned} \tag{4.9}$$

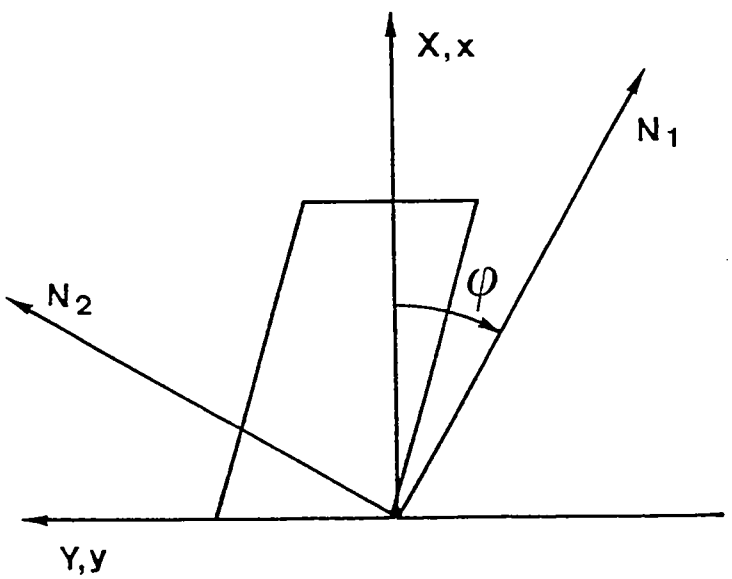


fig 11 - Axes principaux du tenseur déformation $B = V^2$

Les valeurs propres du tenseur de déformation B sont :

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(B_{xx} + B_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(B_{xx} - B_{yy}\right)\cos 2\varphi + B_{xy}\sin 2\varphi$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\left(B_{xx} + B_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(B_{xx} - B_{yy}\right)\cos 2\varphi - B_{xy}\sin 2\varphi \qquad (4.10)$$

$$B_3 = B_{zz}$$

avec l'angle φ qui caractérise la position des axes principaux par rapport au repère (x,y,z), l'angle φ est défini par :

$$\tan 2\varphi = \frac{2B_{xy}}{B_{xx} - B_{yy}} \qquad (4.11)$$

dans les axes principaux (N_1 , N_2 , N_3) il est facile de calculer les composantes de V et de V^{-1}

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{B_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{B_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{B_3} \end{pmatrix} \qquad (4.12)$$

et

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/V_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/V_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/V_3 \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

Pour calculer les composantes du tenseur rotation $R = V^{-1}F$, les composantes de V sont écrites dans le repère initial (x,y,z)

$$V^{-1}_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\cos 2\varphi$$

$$V^{-1}_{yy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\sin 2\varphi$$

$$V^{-1}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\sin 2\varphi \qquad (4.14)$$

$$V^{-1}_{zz} = \frac{1}{V_3}$$

On obtient finalement les composantes du tenseur rotation R

$(R = V^{-1} F)$

$$
\begin{aligned}
R_{xx} &= V^{-1}_{xx} F_{xX} + V^{-1}_{xy} F_{yX} \\
R_{yy} &= V^{-1}_{yy} F_{yY} \\
R_{zz} &= V^{-1}_{zz} V_{zZ} \\
R_{xy} &= V^{-1}_{xy} F_{yY} \\
R_{yx} &= V^{-1}_{xy} F_{xX} + V^{-1}_{yy} F_{yX}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Les composantes du tenseur taux de rotation $\Omega = \dot{R} R^t$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{xx} &= \dot{R}_{xx} R_{xx} + \dot{R}_{xy} R_{xy} = 0 \\
\Omega_{yy} &= \dot{R}_{yx} R_{yx} + \dot{R}_{yy} R_{yy} = 0 \\
\Omega_{zz} &= \dot{R}_{zz} R_{zz} = 0 \\
\Omega_{xy} &= \dot{R}_{xx} R_{yx} + \dot{R}_{xy} R_{yy} \\
\Omega_{yx} &= \dot{R}_{yx} R_{xx} + \dot{R}_{yy} R_{xy}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

et enfin d'après la relation (2.35), en choisissant $\nu = 1$, on a :

$$\frac{1}{2} R \left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U} \right) R^t = W - \Omega$$

et (4.17)

$$\Omega^* = W - \frac{1}{2} R \left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U} \right) R^t$$

42 - écrouissages cinématiques

L'évolution de la surface d'écoulement dans la bande est définie par :

$$\overset{*}{\alpha}_{nn} = B.D_{nn} - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{nn}$$

$$\overset{*}{\alpha}_{tt} = B.D_{nn} - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{tt} \qquad (4.18)$$

$$\overset{*}{\alpha}_{nt} = B.\frac{\dot{\gamma}}{2} - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{nt}$$

avec :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(D_{nn}^{2} + D_{tt}^{2} + D_{nn}D_{tt} + (\dot{\gamma}/2)^{2}\right)^{1/2} \qquad (4.19)$$

et

$$\Omega^{*} = W - \frac{1}{2}R\left(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U}\right)R^{t}$$

(4.20)

On rappelle la relation entre la dérivée particulaire $\dot{\alpha}$ et la dérivée objective $\overset{*}{\alpha}$:

$$\dot{\alpha} = \overset{*}{\alpha} - (\alpha\,\Omega^{*} - \Omega^{*}\alpha) \qquad (4.21)$$

on obtient alors le système differentiel suivant :

$$\dot{\alpha}_{nn} = B\,D_{nn} - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{nn} - \alpha_{nt}\,(\Omega_{tn} - \Omega_{nt})$$

$$\dot{\alpha}_{tt} = B\,D_{tt} - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{tt} - \alpha_{nt}\,(\Omega_{nt} - \Omega_{tn}) \qquad (4.22)$$

$$\dot{\alpha}_{nt} = B\,\dot{\gamma}/2 - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{nt} - \Omega_{tn}\,(\alpha_{tt} - \alpha_{nn})$$

l'intégration de ce système différentiel avec les conditions initiales $\alpha_{ij}(0)$ fournit la position de la surface d'écoulement.

Le comportement du modèle d'écrouissage cinématique en sollicitations combinées est testé en imposant dans la bande les vitesses de déformations. La contrainte de cisaillement $\tau = \sigma_{nt}$ est données par la relation :

$$\dot{\gamma}/2 = \lambda\,(\sigma_{nt} - \alpha_{nt})/\sigma_y \tag{4.23}$$

43 - Résultats

Compte tenu de la rotation de la bande, les composantes de la vitesse de déformation D_{nn} D_{tt} et $\dot{\gamma}$ varient au cours du chargement. Si nous imposons le rapport des vitesses de déformation en dehors de la bande :

$$R = \frac{D^A_{22}}{D^A_{11}} = -1$$

au début du chargement D_{nn} D_{tt} et $\dot{\gamma}$ seront du même ordre de grandeur :

$$D_{nn} = -D_{tt} = -\dot{\gamma}$$

puis $\dot{\gamma}$ augmente alors que D_{nn} et D_{tt} diminuent

Pour tester le modèle d'écrouissage cinématique en sollicitations combinées, nous prenons D_{nn} D_{tt} et $\dot{\gamma}$ constants. La figure 13 montre que, lorsque D_{nn} D_{tt} et $\dot{\gamma}$ sont du même ordre de grandeur, la contrainte de cisaillement passe par un maximum avec les deux dérivées objectives (Jaumann et en rotation propre). Les figures 14 présentent les résultats dans le cas où la vitesse de cisaillement est plus grande en valeur absolue que D_{nn} et D_{tt}. La relation contrainte déformation (τ, γ) se rapproche alors du comportement observé en cisaillement simple. Toutefois les maximums obtenus précédemment avec les deux dérivées objectives pourront conduire à la localisation dans les calculs de mise en forme et pour le chemin R = - 1.

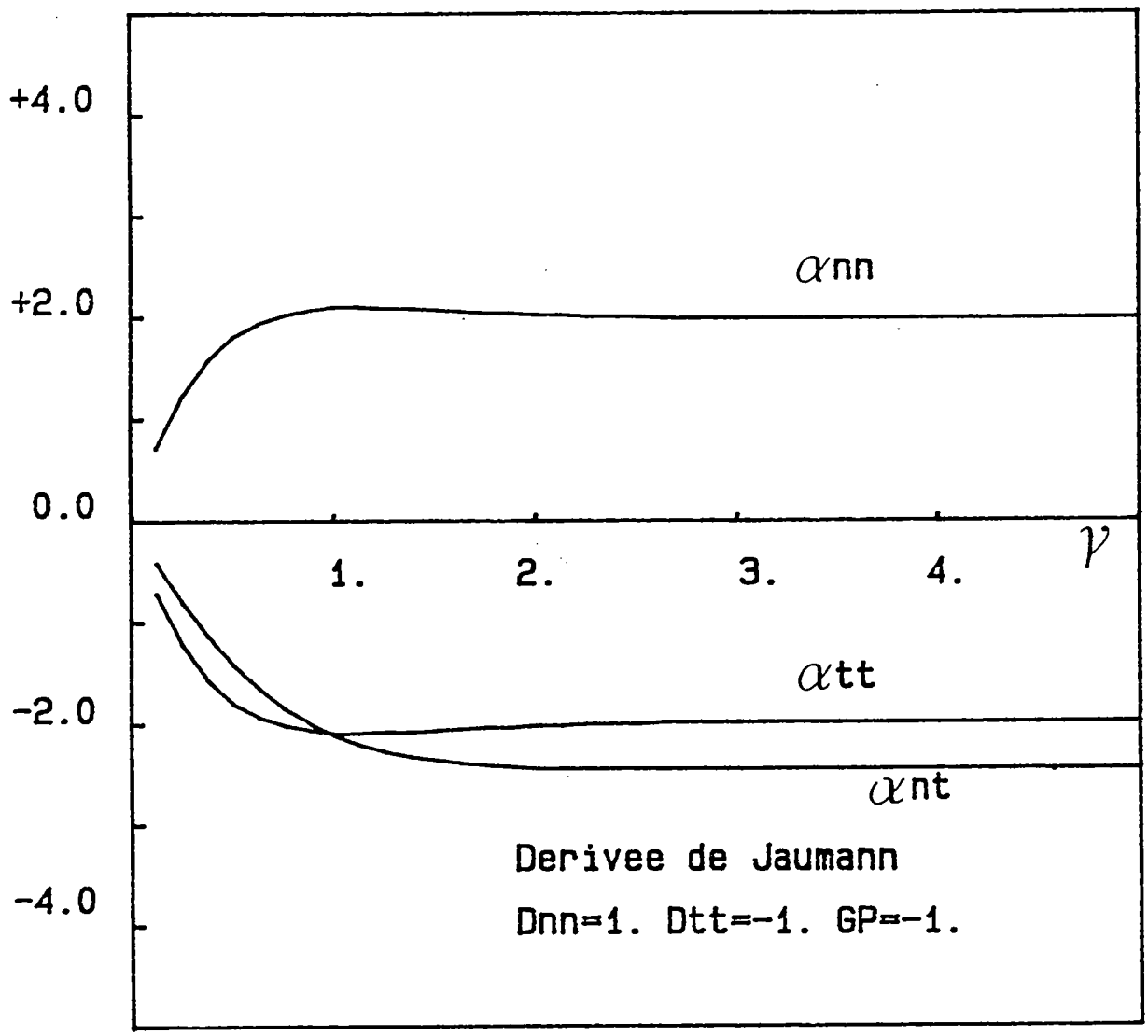


fig 12 a - comportement en sollicitations combinées

Evolution des variables d'écrouissage

A = 1.7 B= 850. MPa σ_y = 125. MPa

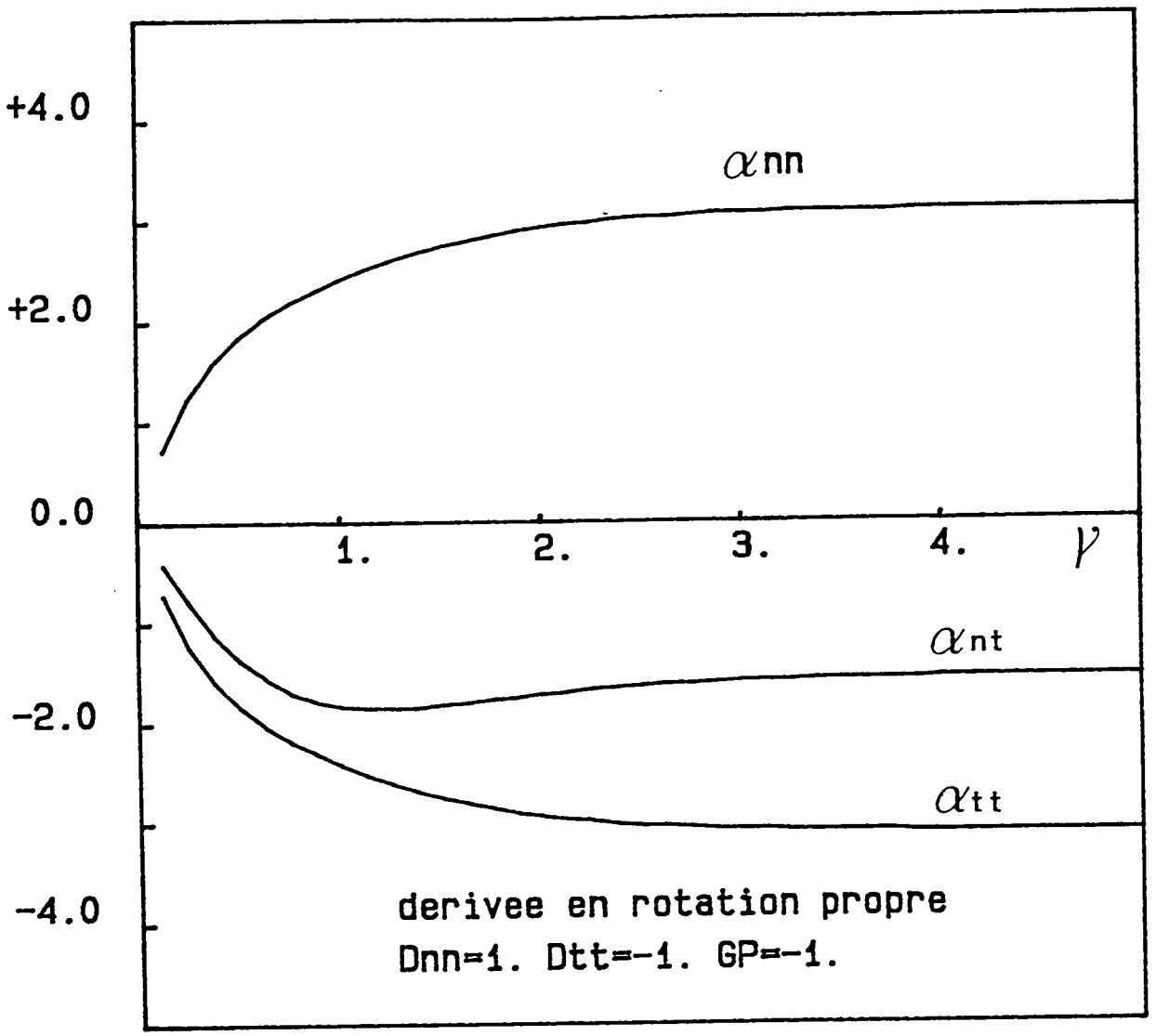


fig 12 b - comportement ou sollicitations combinées.
Evolution des variables d'écrouissage.
A = 1.7 B = 850. MPa σ_y = 125. MPa

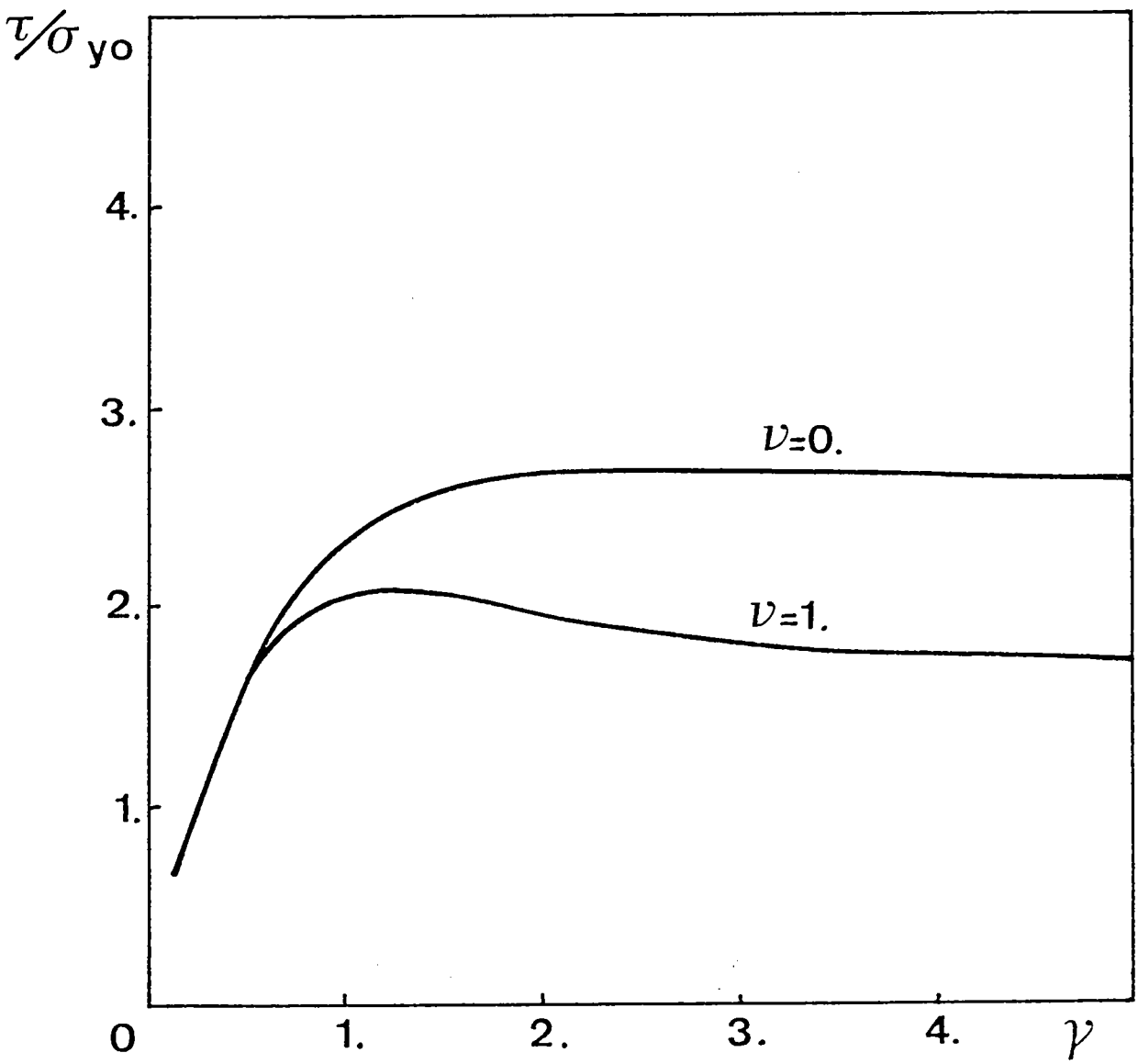
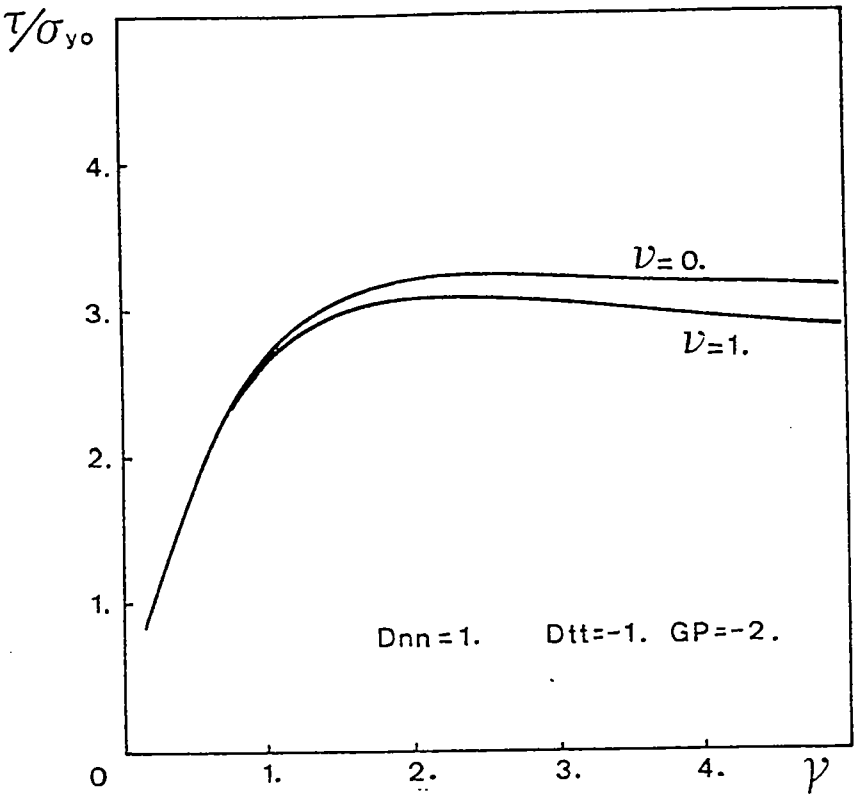


fig 13 - contraintes de cisaillement τ en fonction de la déformation $\gamma = \int_0^t \dot{\gamma}\, d\tau$ $D_{nn} = 1.$ $D_{tt} = 1.$ $\dot{\gamma} = -1.$

ν = 0 dérivée de Jauman

ν = 1 dérivée en rotation propre



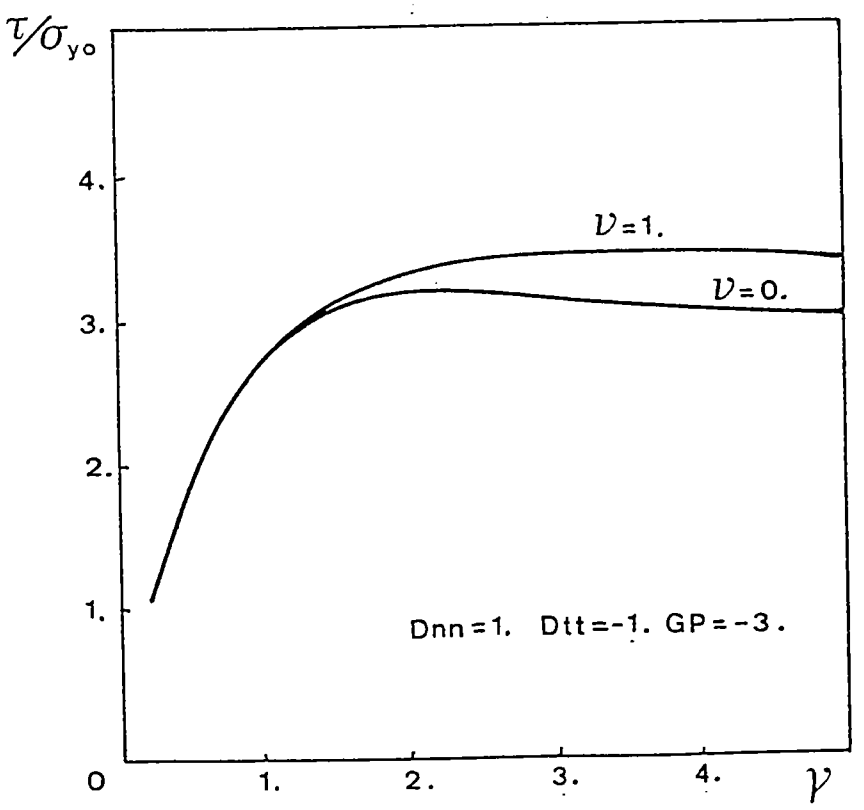


fig 14 - contraintes de cisaillement en fonction de la déformation γ en distorsion

1 - R. HILL
The mathematical theory of plasticity
Oxford University Press (1950)

2 - L.E. MALVERN
Introduction to the Mechanics of o Continuous Medium.
Prentice - Hall lnc. (1969)

3 - A.C. ERINGEN
Mechanics of continua
Robert E. Krieger Publishing Company (1980)

4 - D. MARQUIS
Modélisation et identification de l'écrouissage des Métaux
THèse 3e cycle, LMT Cachan (1979)

5 - N. PRAGER
Recent developments in the mathematical theory of plasticity
J. Applied Phys. Vol 20 N°3 p 235-241 (1949)

6 - H. ZIEGLER
A modification of Prager's hardening rule
Quart. Appl Math Vol 17 pp 55-65 (1959)

7 - P.J. AMSTRONG - C.O. FREDERICK
A mathematical representation of the braxial Baushinger effect
CEGB Report N° RB/B/N 751 (1966)

8 - J.L. CHABOCHE.
Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metalss
Bulletin de l'Ac Polonaise des Sciences, Série Sci et Technique, 25, pp 33-42 (1975)

9 - C. FRESSENGEAS - A. MOLINARI
Modèles d'écrouissage cinématique en grande déformation
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 297 pp 93-96 (1983)

10 - C. FRESSENGEAS - A. MOLINARI
Representations du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations
Arch. Mech., 36, 4, pp 483 - 498 WARSAWA (1983)

11 - F. SIDOROFF
Cours sur les grandes déformations - Ecole d'Eté
Sophia Antipolis 8 - 10 sept. 1982
Rapport GRECO n° 51 / 1982

12 - E SHIRATORI K. IKEGAMI K. KANEKO
Subsequent yield surface determined in consideration of the Banschinger effect
Foundation of Plasticity Edited by A. Sawczuk (1972) pp 477 - 489

13 - K. IKEGAMI
An historical perspective of the experimental study of subsequent yield surfaces for metal - parts I and II
J. Soc. Mat. Sci (1975) 24,(261) pp 491 - 505
24,(263) pp 709 - 719

14 - M. J. MICHNO W.N. FINDLEY
Subsequent yield surfaces for annealed mild steel under dead-weight loading : Aging, Normality, Convexity, Corners, Banslinger, and cross effects.
Transactions of the ASME January (1974) pp 56 - 64

15 - M. J. MICHNO W. N. FINDLEY
An historical perspective of yield surface investigations for metals
J. Non linear Mechanics
(1979) 11, pp 59 - 82

16 - S. S. HECKER
Experimental studies of yield phenomena in biaxial loaded metals
Constitutive Equations in viscoplasticity published by the ASME (1976)

III - APPLICATION DU MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE A LA MISE EN FORME

1 - INTRODUCTION

2 - FORMULATION DU PROBLEME A DEUX ZONES

21 - cinématique du problème à deux zones

22 - contraintes dans la plaque

23 - Résolution du problème

3 - REMARQUES A PROPOS DE LA LOI D'ECROUISSAGE UTILISEE

4 - RESULTATS ET DISCUSSION

41 - Effet de la courbure de la surface d'écoulement

42 - instabilité en cisaillement

43 - comparaison avec les résultats expérimentaux

5 - CONCLUSIONS

1 - INTRODUCTION

La courbure de la surface d'écoulement est certainement un facteur déterminant dans la localisation de l'écoulement au cours des processus de mise en forme des produits plats.

L'apparition d'un point anguleux sur la surface d'écoulement a été évoquée par plusieurs auteurs /1,2,3/ pour expliquer la bifurcation dans le domaine du biaxé positif ($R > 0$). STOREN et RICE ont montré que la théorie de la déformation conduit à des équations incrémentales qui simulent l'effet d'un point anguleux sur la surface d'écoulement /1,2/.

Des résultats intéressant concernant l'écrouissage cinématique en ont alors été déduit /4.5/. FERRON et MLIHA TOUATI /6/, NEALE ET CHATER /7/ ont déterminé les déformations limites pour des tôles initialement anisotropes. Ils ont montré que dans les calculs l'élément décisif était la courbure locale de la surface d'écoulement.

Notre contribution est une discussion de la localisation de l'écoulement dans le cadre de la théorie de l'écrouissage cinématique et de l'analyse MARCINIAK-KUCZINSKI /8/.

Nous utilisons une formulation de l'écrouissage cinématique avec terme de mémoire qui conduit à une relation contraintes-déformations du type Vocé. Des mesures appropriées /9/ de l'écrouissage en traction uniaxiale montrent que le coefficient :

$$n = d \log \bar{\sigma} / d \log \bar{\varepsilon}$$

est une fonction de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$.

La loi puissance pour laquelle on fait l'hypothèse d'un coefficient d'écrouissage constant n'est alors pas la meilleure description de matériaux tels que le laiton, l'acier inoxydable, le cuivre qui présentent un comportement du type Vocé /6,10,11/.

Dans cette étude nous analysons également l'effet de la dérivée objective utilisée dans le modèle d'écrouissage cinématique.

Un autre point intéressant de l'approche choisie est que même s'il y a saturation de l'écrouissage par le terme de mémoire aux grandes déformations et pour des chemins directs, l'écrouissage poursuit son action si un changement de chemin se produit. Cet effet ne peut être obtenu si l'écrouissage est modulé uniquement par le terme B dans (2.23) considéré alors comme une fonction de la déformation plastique $\overline{\varepsilon}$ (formulation employée par TVERGAARD et NEEDLEMANN /4,5/).

Après une présentation des équations nous utilisons notre modélisation pour décrire le comportement du laiton et de l'acier inoxydable. Ensuite nous développons une discussion théorique sur la localisation en trajets proportionnels et nous comparons finalement les résultats obtenues à l'experience.

2 - FORMULATION DU PROBLEME

Pour calculer les courbes limites de formage nous utilisons l'analyse MARCINIAK-KUCZYNSKI /8/. Nous considérons une plaque mince présentant un défaut géométrique sous la forme d'une bande de sous-épaisseur inclinée d'un angle ψ de valeur initiale $\psi(o)$

La plaque se décompose alors en deux zones (fig.1) :

- la bande d'épaisseur initiale $h^B(o)$
- la région en dehors de la bande, d'épaisseur uniforme h^A de valeur initiale $h^A(o)$

Le défaut géométrique initial est défini par :

$$def = \frac{h^B(o)}{h^A(o)} \leqslant 1 \qquad (2.1)$$

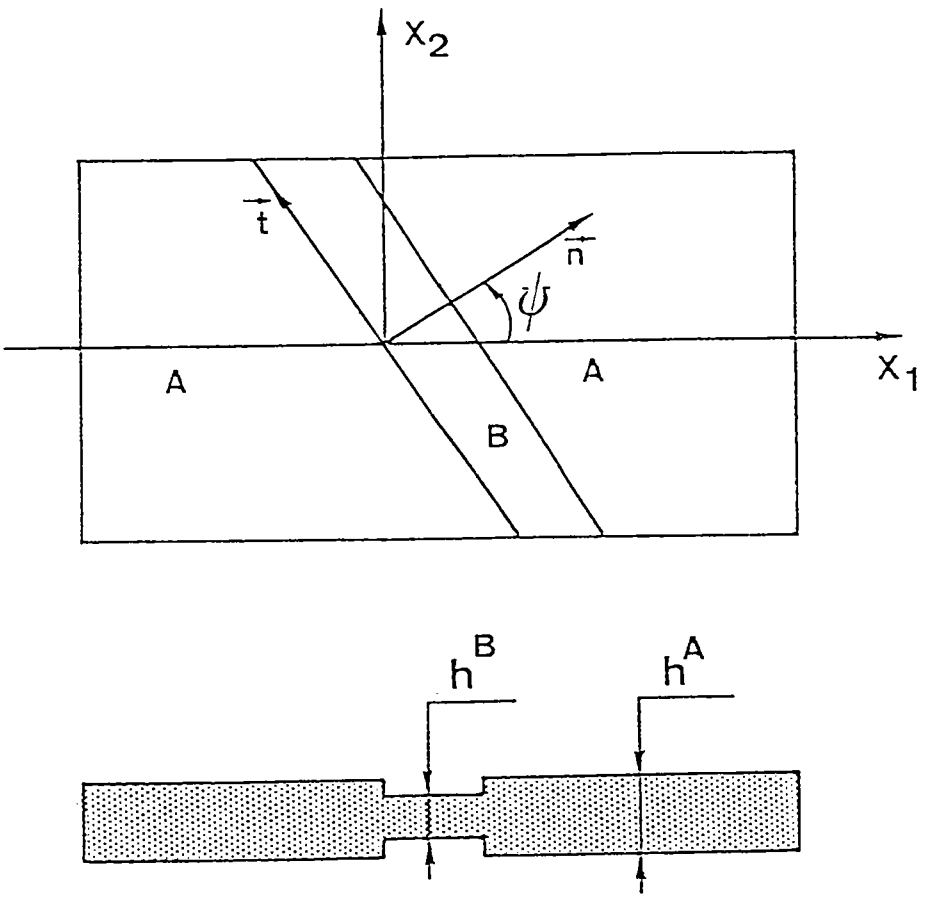


fig 1 - géométrie du problème à deux zones

On fait l'hypothèse d'un état plan des contraintes et on suppose les vitesses de déformation et les contraintes uniformes dans les deux zones.

21 - cinématique du problème à deux zones

Dans la zone homogène A le gradient des vitesses a la forme suivante :

$$L = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

dans le repère (x_1, x_2, x_3)

avec

$$D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \qquad D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \tag{2.3}$$

et la condition d'incompressibilité :

$$D_{33} = -\left(D_{11} + D_{22}\right) \tag{2.4}$$

dans la zone A les vitesses de déformation D_{11} et D_{22} sont confondues avec les vitesses de déformation logarithmiques :

$$D_{11} = \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\lambda}_1 / \lambda_1 \qquad D_{22} = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\lambda}_2 / \lambda_2 \tag{2.5}$$

λ_1 et λ_2 sont les dilatations principales dans les directions x_1 et x_2 respectivement :

$$D_{33} = \dot{\varepsilon}_3 = \dot{h}/h \tag{2.6}$$

l'intégration de cette dernière relation permet d'obtenir l'épaisseur de la zone A à chaque instant :

$$\dot{h}^A = h^A D_{33}^A = -h^A\left(D_{11}^A + D_{22}^A\right) \tag{2.7}$$

Le changement aux extrémités de la plaque est tel que :

$$D_{22}^{A} / D_{11}^{A} = \dot{\varepsilon}_{2}^{A} / \dot{\varepsilon}_{1}^{A} = R = \text{constante} \tag{2.8}$$

la vitesse de déformation D_{11}^{A} et le rapport R des vitesses sont donnés.

<u>Dans la bande</u>, les composantes du tenseur vitesse de déformation sont également supposées uniformes et la vecteur vitesse v en un point quelconque de la bande et à un instant t a pour composantes.

$$\begin{aligned} v_x &= x . D_{nn} \\ v_y &= y . D_{tt} + \dot{\gamma} x \\ v_z &= -z\, D_{ss} = -z\, (D_{nn} + D_{tt}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Les composantes du tenseur vitesse de déforamation et les composantes du tenseur vitesse de rotation sont :

$$D = \begin{pmatrix} D_{nn} & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & D_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & -(D_{nn}+D_{tt}) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

La compatibilité des déformations entre les deux zones imposent :

$$D_{tt}^{B} = D_{tt}^{A} \tag{2.14}$$

avec

$$D_{tt}^{A} = D_{11}^{A} \sin^2\psi + D_{22}^{A} \cos^2\psi \tag{2.15}$$

Les autres composantes de la vitesse de déformation D_{nn}^{B} et $\dot{\gamma}^{B}$ sont des inconnues du problème, elles seront calculées avec les conditions d'équilibre. Enfin l'évolution de l'épaisseur de la bande est obtenue par intégration de :

$$D_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{h}^{B}/h^{B} \qquad \dot{h}^{B} = -h^{B}\left(D_{nn}^{B} + D_{tt}^{B}\right) \tag{2.16}$$

<u>Rotation de la bande au cours du changement</u>

L'inclinaison actuelle de la bande est calculée en fonction de l'inclinaison initiale $\psi(0)$ et de l'état de déformation de la plaque à l'instant considéré.

On a d'après la définition de la déformation logarithmique :

$$\varepsilon_1^A = \log\left(l_1^A / l_1^A(0)\right) = \log \lambda_1^A$$
$$\varepsilon_2^A = \log\left(l_2^A / l_2^A(0)\right) = \log \lambda_2^A \tag{2.17}$$

où l_1 et l_2 sont deux dimensions caractéristiques dans les directions 1 et 2 respectivement

l_1 (0) et l_2 (0) leurs valeurs initiales.

Avec la figure 2, on écrit :

$$\tan\psi = l_1^A / l_2^A \qquad \tan\psi(0) = l_1^A(0) / l_2^A(0) \tag{2.18}$$

En combinant les relations précédentes, on obtient :

$$\tan\psi = \lambda_1^A / \lambda_2^A \ \tan\psi(0) \tag{2.19}$$

Les dilatations λ_1^A et λ_2^A sont obtenues par intégration des relations (2.5) :

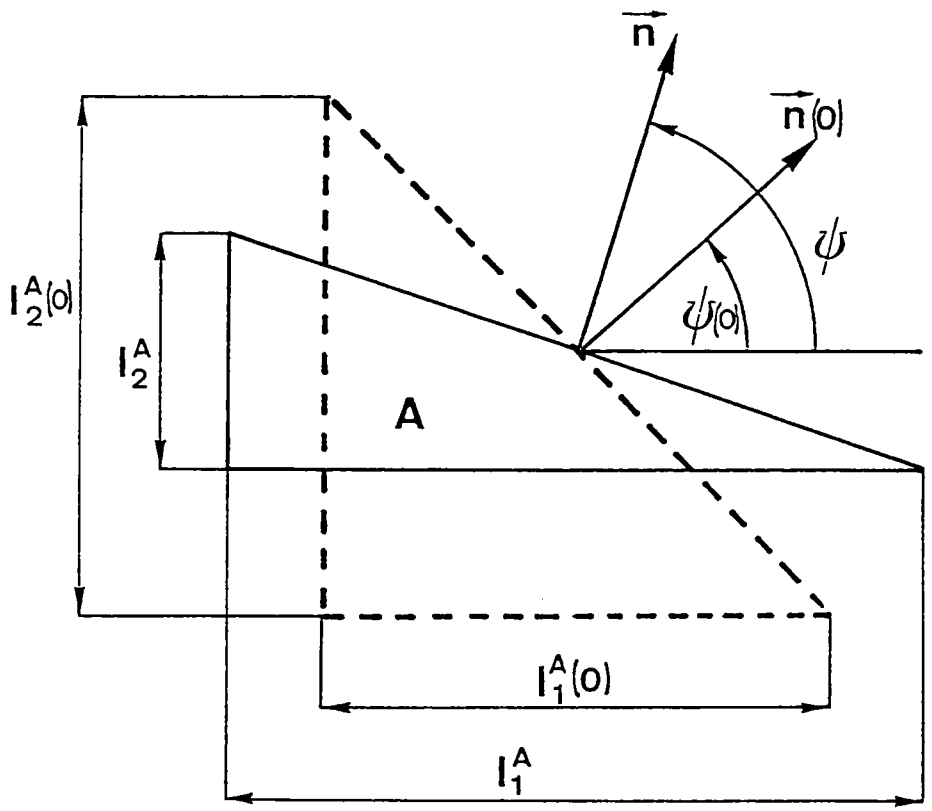


fig 2 - Rotation de la bande

22 - contraintes dans la plaque

Le comportement du matériau est supposé être rigide - plastique est le critère de Von Misès :

$$f(s_{ij}-\alpha_{ij}) = \left[\frac{3}{2}\,(s_{ij}-\alpha_{ij})(s_{ij}-\alpha_{ij})\right]^{1/2} - \sigma_y = 0 \qquad (2.20)$$

On rappelle que α_{ij} représente la fonction de la surface d'écoulement (A l'instant initial α_{ij} (0) = 0)

σ_y représente la dimension de la surface d'écoulement dans l'espace du déviateur

Le tenseur vitesse de déformation est donné par la relation :

$$D_{ij} = \lambda\, \partial f / \partial \sigma_{ij} = \lambda\,(s_{ij}-\alpha_{ij})/\sigma_y \qquad (2.21)$$

avec :

$$\lambda = \frac{3}{2}\,\dot{\bar{\varepsilon}} \qquad \dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\,D_{ij}\,D_{ij}} \qquad (2.22)$$

L'évolution du paramètre d'écrouissage cinématique est gouvernée par :

$$\overset{*}{\alpha}_{ij} = B\,D_{ij} - A\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,\alpha_{ij} \qquad (2.23)$$

où $\overset{*}{\alpha}_{ij}$ représente un dérivée directive de α_{ij} . Les coefficients A et B sont supposés constants. Il en est de même de σ_y , on ne considère que l'écrouissage cinématique.

contraintes dans la zone A

Les relations (2.20) nous conduisent à écrire :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \lambda\,(s_{11}-\alpha_{11})/\sigma_y \\ D_{22} &= \lambda\,(s_{22}-\alpha_{22})/\sigma_y \end{aligned} \qquad (2.24)$$

avec $\lambda = \frac{3}{2}\,\dot{\bar{\varepsilon}}$

et

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \left(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{11} D_{22} \right)^{1/2}$$
$$= \frac{\ell}{\sqrt{3}} D_{11} \left(1 + R + R^2 \right)^{1/2} \tag{2.25}$$

compte tenu de la relation (2.8)

on en déduit les contraintes dans la zone A

$$s_{11} = \sigma_y D_{11} / \lambda + \alpha_{11}$$
$$s_{22} = \sigma_y D_{22} / \lambda + \alpha_{22} \tag{2.26}$$
$$s_{33} = -\left(s_{11} + s_{22} \right)$$

les autres composantes s_{ij} sont nulles

et

$$\sigma_{11} = \ell s_{11} + s_{22}$$
$$\sigma_{22} = s_{11} + \ell s_{22} \tag{2.27}$$

Les composantes du tenseur vitesse de déformation D_{11} et D_{22} sont données, la fonction de la surface d'écoulement définie par le tenseur :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

évolution de la surface d'écoulement dans la zone A

Les composantes des tenseurs vitesse de rotation W et $\Omega = RR^t$ sont nulles, la dérivée de Jauman ou la dérivée en rotation propre s'identifient alors à la dérivée particulaire $\dot{\alpha}_{ij}$ de α_{ij} .

On obtient alors avec (2.23) :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11} &= B D_{11} - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{11} \\ \dot{\alpha}_{22} &= B D_{22} - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{22} \end{aligned} \tag{2.29}$$

l'intégration de ce système avec les conditions initiales donne la position de la surface d'écoulement à l'instant t.

contraintes dans la bande

Les forces normale et tangentielle à la bande restent constantes (conditions d'équilibre). Ces conditions s'expriment par :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^A h^A &= \sigma_{nn}^B h^B \\ \sigma_{nt}^A h^A &= \sigma_{nt}^B h^B \end{aligned} \tag{2.30}$$

Dans la zone homogène A, les contraintes normales et tangentielles dans le repère (n t) sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^A &= \sigma_{11}^A \cos^2\psi + \sigma_{22}^A \sin^2\psi \\ \sigma_{tt}^A &= \sigma_{11}^A \sin^2\psi + \sigma_{22}^A \cos^2\psi \\ \sigma_{nt}^A &= -\left(\sigma_{11}^A - \sigma_{22}^A\right) \sin\psi \cos\psi \end{aligned} \tag{2.31}$$

Les conditions d'équilibre (2.30) permettent de calculer σ_{nn}^B et σ_{nt}^B, σ_{tt}^B est une inconnue du problème.

Evolution de la surface d'écoulement dans la bande

La position de la surface d'écoulement dans la bande est définie par le tenseur de composantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{nn} & \alpha_{nt} & 0 \\ \alpha_{nt} & \alpha_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{ss} \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

L'évolution des composantes α_{ij} est gouvernée par la loi d'écrouissage (2.23).

$$\begin{aligned} \overset{*}{\alpha}_{nn} &= B D_{nn} - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{nn} \\ \overset{*}{\alpha}_{tt} &= B D_{tt} - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{tt} \\ \overset{*}{\alpha}_{nt} &= B \dot{\gamma}/2 - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{nt} \end{aligned} \tag{2.33}$$

avec

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(D_{nn}^2 + D_{tt}^2 + D_{nn} D_{tt} + (\dot{\gamma}/2)^2 \right)^{1/2} \tag{2.34}$$

On note, d'une manière générale Ω le tenseur taux de rotation dans la bande.

$$\Omega^* = W - \frac{1}{2} R \left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U} \right) R^t$$

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{nt}^* & 0 \\ \Omega_{tn}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Les Ω_{ij}^* sont calculés de la même façon qu'au chapitre 2 paragraphe 4.

On rappelle la relation entre la dérivée particulaire et la dérivée objective.

$$\dot{\alpha} = \overset{*}{\alpha} - \left(\alpha \Omega^{*} - \Omega^{*} \alpha \right) \tag{2.36}$$

Les relations (2.45) et (2.48) fournissent alors le système différentiel :

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{nn} &= B D_{nn} - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{nn} - \alpha_{nt} \left(\Omega^{*}_{tn} - \Omega^{*}_{nt} \right) \\
\dot{\alpha}_{tt} &= B D_{tt} - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{tt} - \alpha_{nt} \left(\Omega^{*}_{nt} - \Omega^{*}_{tn} \right) \\
\dot{\alpha}_{nt} &= B \dot{\gamma}/2 - A \dot{\bar{\varepsilon}} \alpha_{nt} - \Omega^{*}_{tn} \left(\alpha_{tt} - \alpha_{nn} \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

l'intégration de ce système avec les conditions initiales (0) = 0 fournit la position de la surface d'écoulement à l'instant t.

23 - Résolution du problème

La formulation du problème a fait apparaître trois inconnues qui sont les composantes D^{B}_{nn} et $\dot{\gamma}$ du tenseur vitesse de déformation dans la bande et la contrainte normale

Exprimons les vitesses de déformations D^{B}_{nn} , D^{B}_{tt} et $\dot{\gamma}$ en fonction des contraintes calculées avec les conditions d'équilibre (2.42) et de la contrainte inconnue :

$$\begin{aligned}
D^{B}_{nn} &= \lambda^{B} \left(2 \sigma_{nn}^{B}/3 - \sigma_{tt}/3 - \alpha^{B}_{nn} \right) / \sigma_{y}^{B} \\
D^{B}_{tt} &= \lambda^{B} \left(- \sigma_{nn}^{B}/3 + 2 \sigma_{tt}^{B}/3 - \alpha^{B}_{tt} \right) / \sigma_{y}^{B} \\
\dot{\gamma}/2 &= \lambda^{B} \left(\sigma_{nt}^{B} - \alpha^{B}_{nt} \right) / \sigma_{y}^{B}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

avec

$$\lambda^{B} = \frac{3}{2} \dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{3} \left(D^{B\,2}_{nn} + D^{B\,2}_{tt} + D^{B}_{nn} D^{B}_{tt} + (\dot{\gamma}/2)^{2} \right)^{1/2} \tag{2.39}$$

Eliminons σ_{tt}^{B} entre les deux premières relations (2.50), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2 D_{nn}^{B} + D_{tt}^{B} &= \lambda^{B} \left(\sigma_{nn}^{B} - 2 \alpha_{nn}^{B} - \alpha_{tt}^{B} \right) / \sigma_{y}^{B} \\ \gamma^{1} / 2 &= \lambda^{B} \left(\sigma_{nt}^{B} - \alpha_{nt}^{B} \right) / \sigma_{y}^{B} \end{aligned} \tag{2.40}$$

La résolution de ce système et l'intégration des équations différentielles (2.5) (2.7) (2.41) (2.49) nous permettent de connaitre à chaque instant la vitesse, les déformations, les contraintes, les épaisseurs, les positions des surfaces d'écoulement dans les deux zones.

3 - REMARQUES A PROPOS DE LA LOI D'ECROUISSAGE UTILISEE

Dans la zone homogène A la contrainte équivalente peut être écrite en fonction des composantes principales du déviateur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} \left(s_1^2 + s_2^2 + s_1 s_2 \right)^{1/2} \tag{3.1}$$

et la vitesse de déformation équivalente a la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_1 \dot{\varepsilon}_2 \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec la condition d'incompressibilité

Pour des changements proportionnels définis par R = $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ $\dot{\bar{\varepsilon}}$ s'écrit :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_1}{\sqrt{3}} \left(1 + R + R^2 \right)^{1/2} \tag{3.3}$$

Les équations (2.38) donnent les contraintes :

$$s_1 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \left(1 + R + R^2 \right)^{1/2}} + \alpha_1 \qquad s_2 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} \left(1 + R + R^2 \right)^{1/2}} + \alpha_2 \tag{3.4}$$

α_1 et α_2 représentent la position de la surface d'écoulement dans l'espace du déviateur. L'évolution de ces paramètres est donnée par les relations (2.41) :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= B\dot{\varepsilon}_1 - A\dot{\bar{\varepsilon}}\alpha_1 \\ \dot{\alpha}_2 &= B\dot{\varepsilon}_2 - A\dot{\bar{\varepsilon}}\alpha_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

et avec (3.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_1}{B - \frac{2A}{\sqrt{3}}\alpha_1\left(1+R+R^2\right)^{1/2}} &= \dot{\varepsilon}_1 \\ \frac{\dot{\alpha}_2}{B - \frac{2A}{\sqrt{3}}\alpha_2\left(1+R+R^2\right)^{1/2}} &= \dot{\varepsilon}_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

en intégrant on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{B\sqrt{3}}{2A\left(1+R+R^2\right)^{1/2}}\left[1 - \exp\left(-A\bar{\varepsilon}\right)\right] \\ \alpha_2 &= R\,\alpha_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

et en remplaçant dans les contraintes s_1 et s_2 (relations (3.4)) il vient :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{\left(1+R+R^2\right)^{1/2}}\left\{\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} + \frac{B\sqrt{3}}{2A}\left[1 - \exp\left(-A\bar{\varepsilon}\right)\right]\right\} \\ s_2 &= R\,s_1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

finalement la contrainte de Von Misès $\bar{\sigma}$ prend la forme suivante, quelque soit le trajet de changement imposé :

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + \frac{3B}{2A}\left[1 - \exp\left(-A\bar{\varepsilon}\right)\right] \tag{3.9}$$

cette relation est indentique à celle de la loi de Vocé

$$\bar{\sigma} = S\left[1 - \alpha \exp\left(\beta \bar{\varepsilon}\right)\right]$$

où S, α et β sont des paramètres caractérisques du matériau.

Cette loi de Vocé a été utilisée par G. FERRON et M. MILHA TOUATI /6, 11/ pour décrire le comportement du laiton et de l'acier inoxydable.

Avec ce type de relation, le coefficient d'écrouissage n défini par :

$$n = d\log\bar{\sigma} / d\log\bar{\varepsilon}$$

est une fonction de la déformation plastique équivalente

Pour le calcul des courbes limites de formage nous considérons trois matériaux théoriques dont le comportement est gouverné par la théorie de l'écoulement associée au critère de Von Misès et le modèle d'écrouissage cinématique présenté précédemment. Les paramètres caractéristiques de ces matériaux sont donnés dans les tables 1, 3 et 3. Le matériau 1 est faiblement écrouissable, les matériaux 2 et 3 ont été choisis de telle sorte que leur comportement soit ajusté sur celui du laiton et de l'acier inoxydable respectivement. Nous avons tracé sur la figure 3 les courbes contraintes-déformations $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$ en traction uniaxiale et sur la figure 4 les valeurs de n en fonction de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$. Comme le montre la figure 4 la loi de Vocé représente assez bien le comportement du laiton et de l'acier inoxydable.

Table 1 - paramètres du modèle d'écrouissage cinématique pour le matériau 1, faiblement écrouissable

(MPa)	A	B (MPa)
65	1	95.

Table 2 - matériau 2 - laiton (70 - 30 brass)

(MPa)	A	B (MPa)
125	1.7	850.

Table 3 - matériau 3 - acier inoxydable (304 Stainless Steel)

(MPa)	A	B (MPa)
200.	1.4	1500.

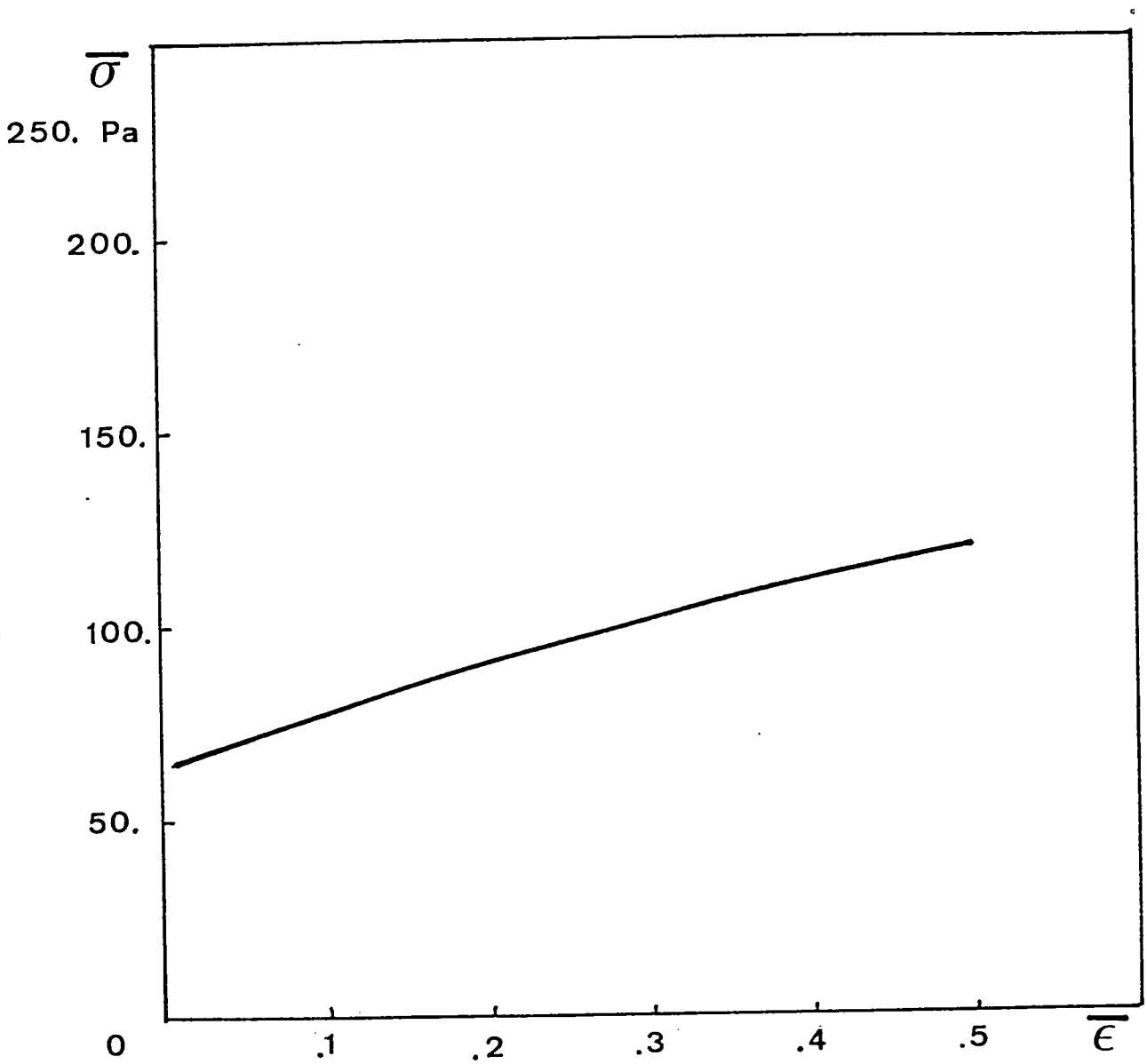


fig 3 a - comportement en traction uniaxiale du matériau 1

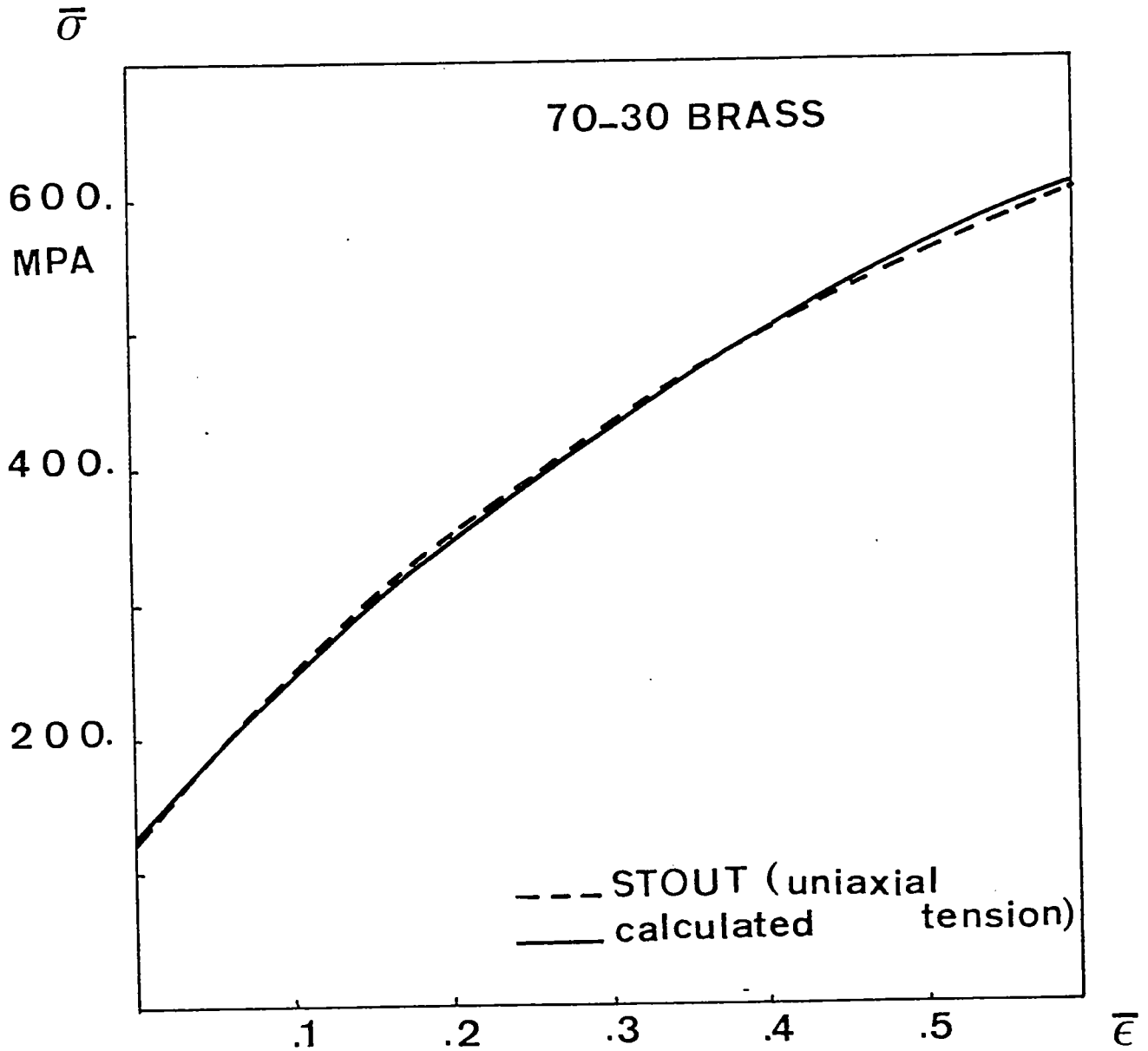


fig 3b - courbe contraintes - déformations
- du laiton d'après GOSH /12/
- calculée avec : $\bar{\sigma} = \sigma_y + \frac{3B}{2A}\left[1 - \exp(-A\bar{\varepsilon})\right]$
matériau 2

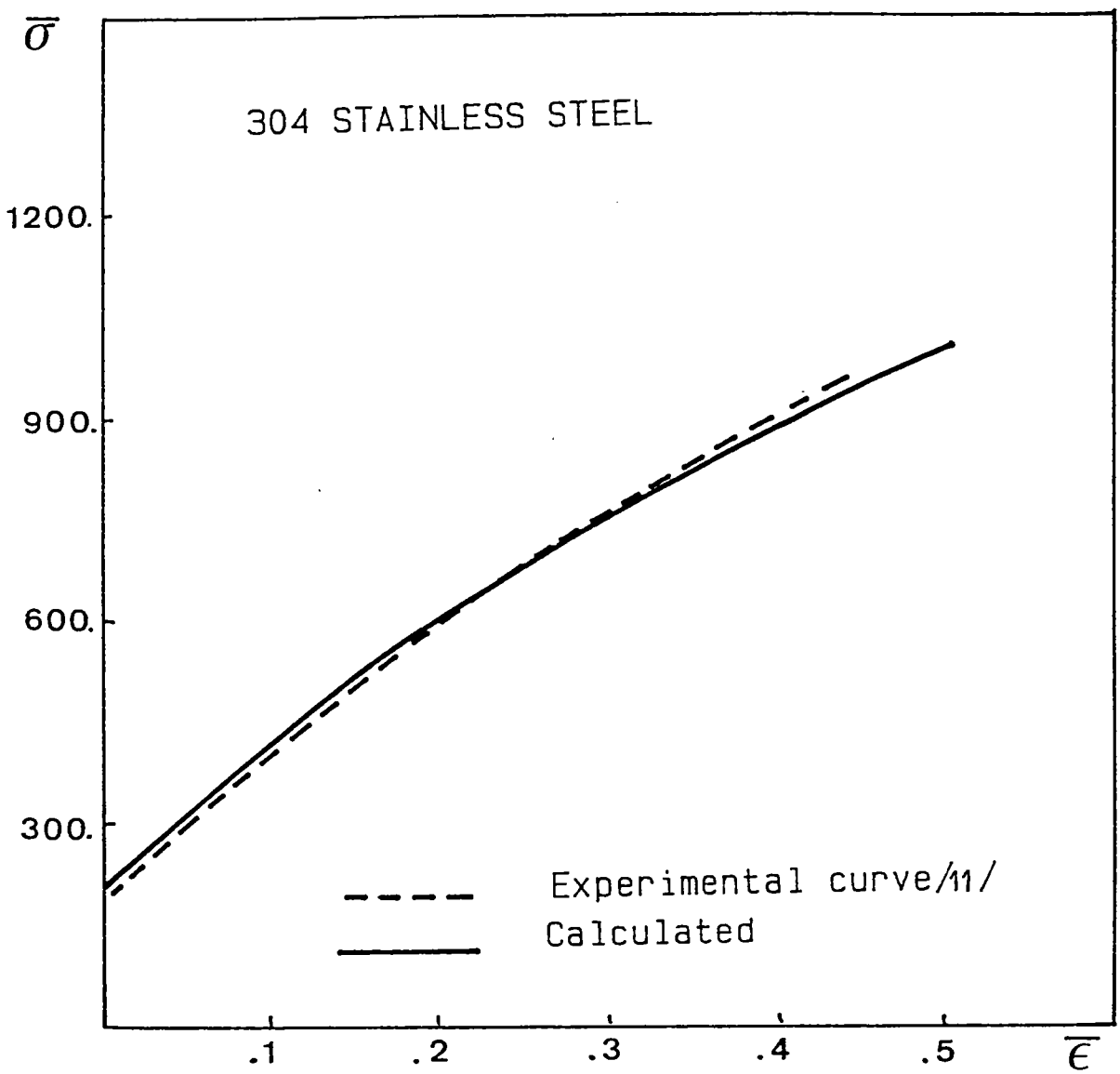


fig 3 c - courbe contraintes - déformations en traction uniaxiale de l'acier inoxydable 304

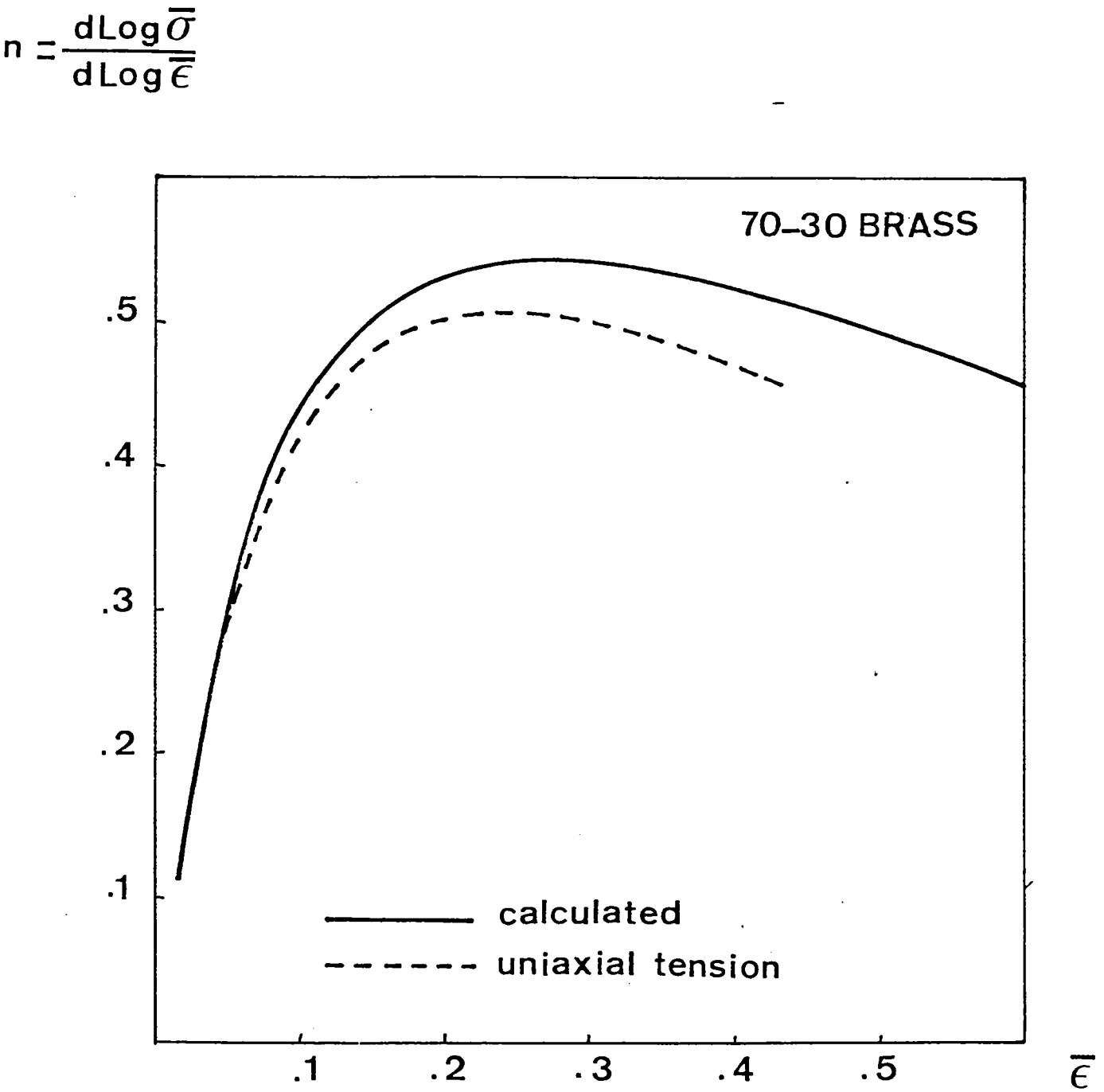


fig 4 - Evolution du coefficient d'écrouissage n en fonction de la déformation $\bar{\varepsilon}$ - Matériau 2 (laiton) d'après /9/ et /12/

4 - RESULTATS ET DISCUSSION

Les courbes limites de formage sont calculées pour des rapports R variant de -1 à + 1 correspondant au cisaillement et à l'expansion biaxée symétrique respectivement. Pour $R < 0$, l'angle ψ (0) définissant l'orientation initiale de la bande est choisi de telle sorte qu'il conduise à la déformation ε_1^A critique la plus faible. Pour $R \geqslant 0$, l'angle ψ (0) est nul.

41 - effet de la courbure de la surface d'écoulement sur l'apparition de l'instabilité.

Le développement d'une forte courbure au point de charge joue un rôle important dans la localisation de l'écoulement pour le rapport des déformations $R > 0$. Plus grande est la courbure de la surface d'écoulement, au voisinage du point de charge, plus instable est la réponse du matériau. Le changement de chemin de déformation dans la bande permet d'expliquer ce phénomène. Par exemple, quand le rapport des déformations imposé en dehors de la bande est R = 1, le chemin de déformation dans la bande varie de l'expansion biaxée symétrique à la déformation plane. En effet à la localisation D_{nn}^B tend vers l'infini quand D_{tt}^B reste constamment égal à D_{tt}^A (condition de compatibilité) et devient alors petit devant D_{nn}^B. Dans une région de forte courbure, la normale à la surface d'écoulement (c'est-à-dire la direction du vecteur vitesse de déformation plastique) tourne plus facilement ce qui favorise la localisation de la déformation (fig 6).

En déformation plane (R = 0) il ne se produit aucun changement de chemin dans la bande, il n'y a donc pas d'effet de courbure pour ce chemin. Si le comportement en déformation plane défini par la relation contraintes - déformations équivalentes ($\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$) est le même pour les matériaux à écrouissage isotrope et les matériaux à écrouissage cinématique alors les déformations critiques (celles obtenues à la localisation) seront identiques pour les deux matériaux. On choisit donc comme loi d'écrouissage isotrope la relation (3.9) que l'on rappelle :

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + \frac{3B}{2A}\left[1 - \exp(-A\bar{\varepsilon})\right]$$

Les courbes limites de formage sont calculées pour les matériaux 1 et 2 avec la dérivée objective de Jaumann.

Les figures 5 donnent les résultats pour les deux théories d'écrouissage (isotrope et cinématique). En déformation plane, les deux prédictions coïncident. Pour les autres trajets de déformation, l'écrouissage cinématique prévoit une courbe limite de formage (C.L.F) plus basse. Les déformations ε_1 et ε_2 sont les déformations logarithmiques principales dans la zone A.

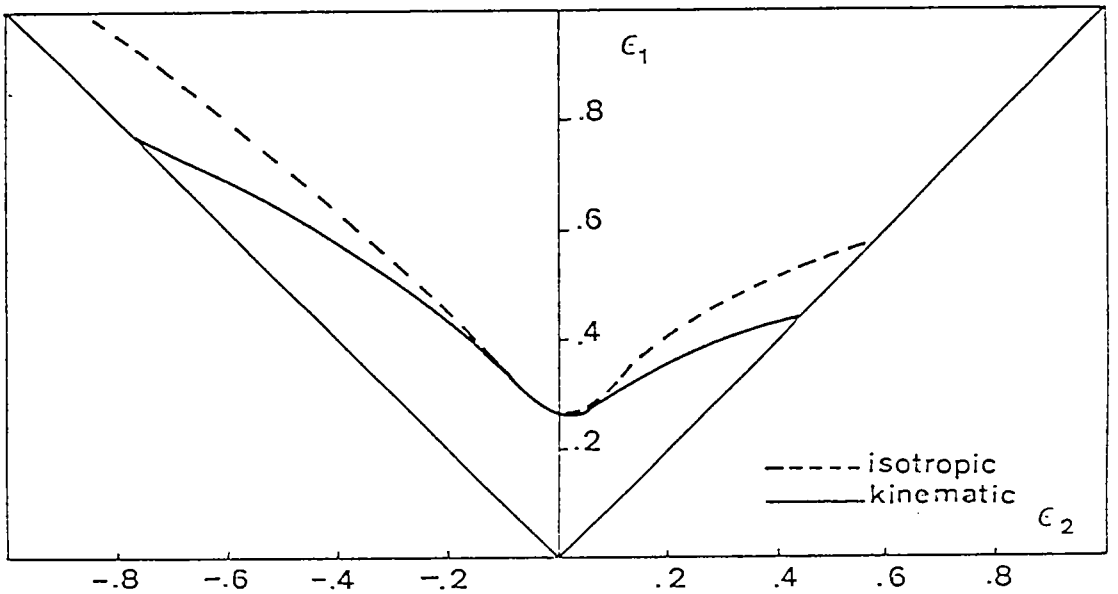
Pour le matériau faiblement écrouissable (fig. 5 a) la forme des C.L.F isotrope et cinématique ne sont pas très différentes, elles présentent un minimum proche de la déformation plane.

Dans la région $R > 0$ la courbe isotrope croît plus rapidement avec R que la courbe cinématique.

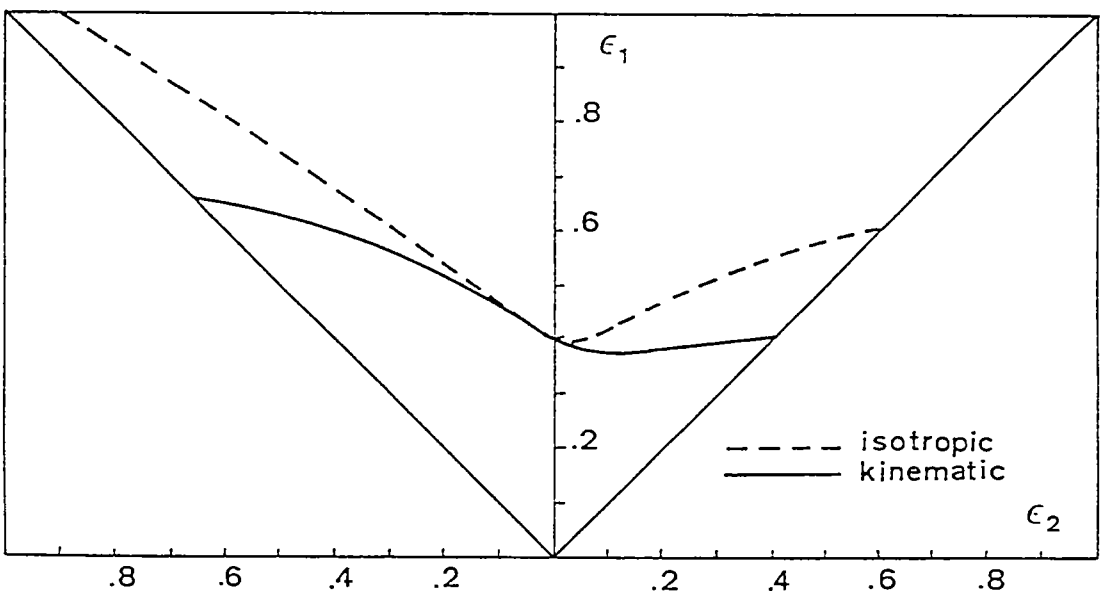
En ce qui concerne le matériau fortement écrouissable (fig 5 b) la courbe isotrope est également croissante dans le domaine du biaxé $R > 0$ alors que la courbe cinématique subit un important changement de forme.

Il apparait que la différence entre les deux théories d'écrouissage est plus prononcée pour le matériau fortement écrouissable. Pour ce matériau, le déplacement de la surface d'écoulement est important et le rapport des courbures des surfaces isotrope et cinématique est grand (figure 6). En résumé, le changement de chemin dans la bande et la courbure de la surface d'écoulement jouent un rôle important et déstabilisent fortement l'écoulement dans la théorie cinématique.

il est intéressant, également, d'analyser l'effet de σ_y qui représente la contrainte initiale d'écoulement et la dimension de la surface d'écoulement. Il est d'abord facile de montrer que la stabilité croît en déformation plane pour des valeurs décroissantes de la contrainte initiale d'écoulement (voir l'annexe en fin de chapitre).



5 a - Matériau 1 - faiblement écrouissable



5 b - Matériau 2 - fortement écrouissable

fig 5 - Courbes limites de formage calculées
avec les deux théories d'écrouissage
- isotrope
- cinématique avec la dérivée de Jaumann. déf = 0.99

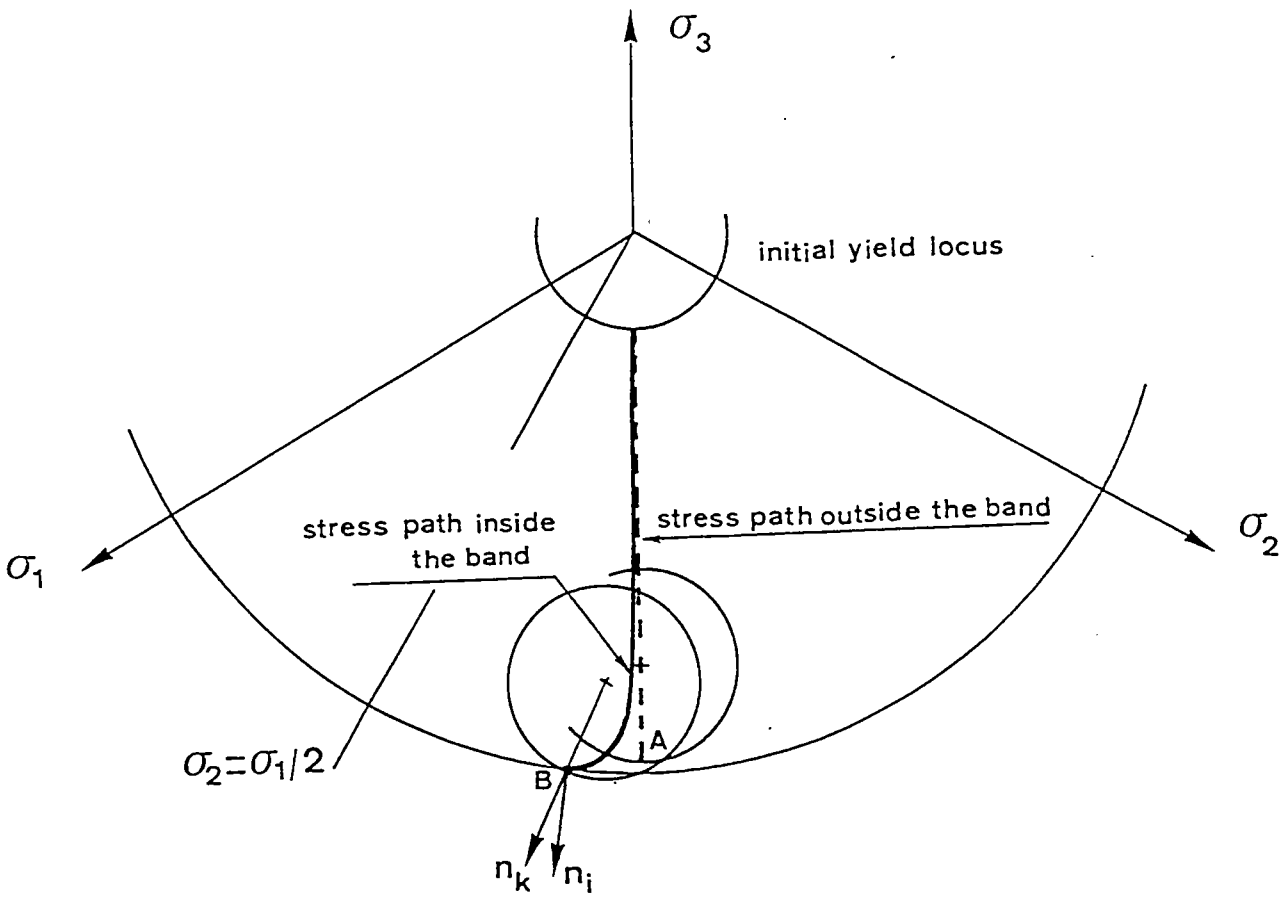
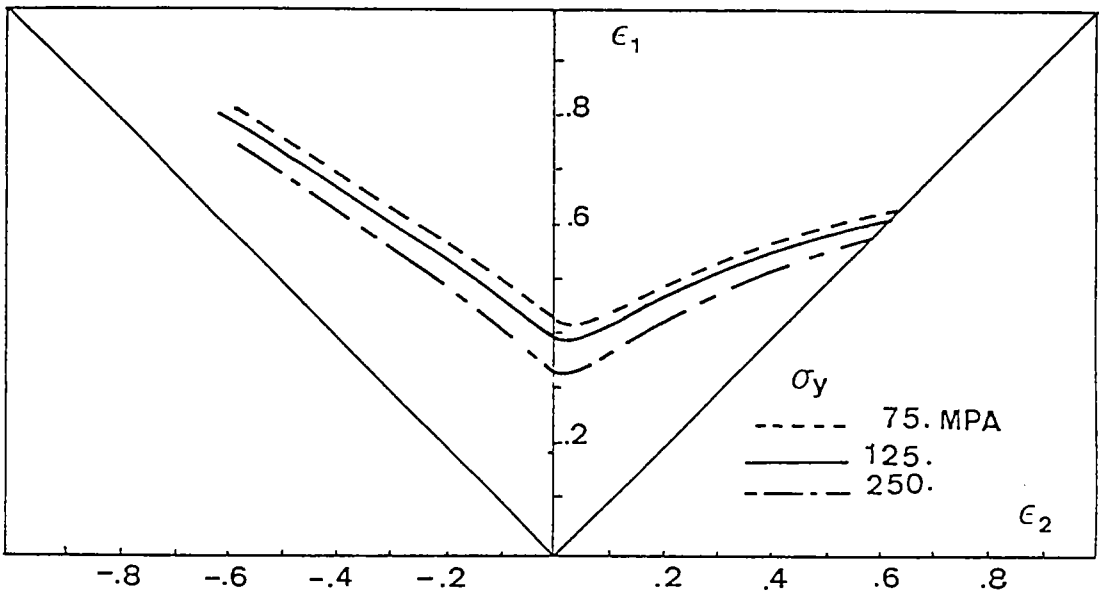
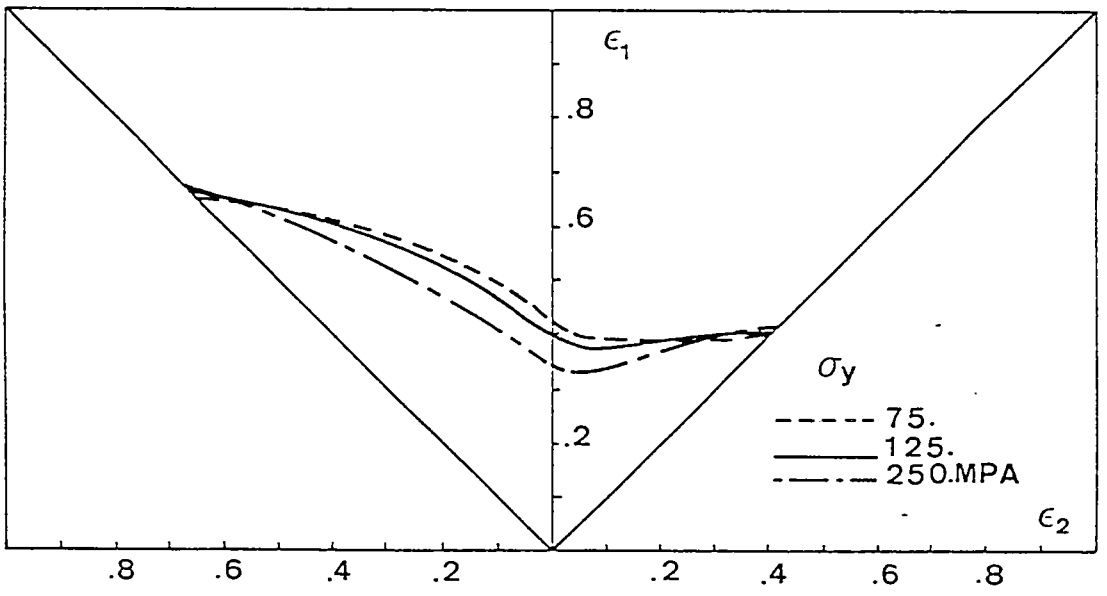


fig 6 - surfaces d'écoulement isotrope et cinématique et chemins de changement à l'intérieur et à l'extérieur de la bande



7 a - Ecrouissage isotrope



7 b - Ecrouissage cinématique

fig 7 - influence de σ_y qui représente la contrainte initiale d'écoulement et la dimension de la surface d'écoulement

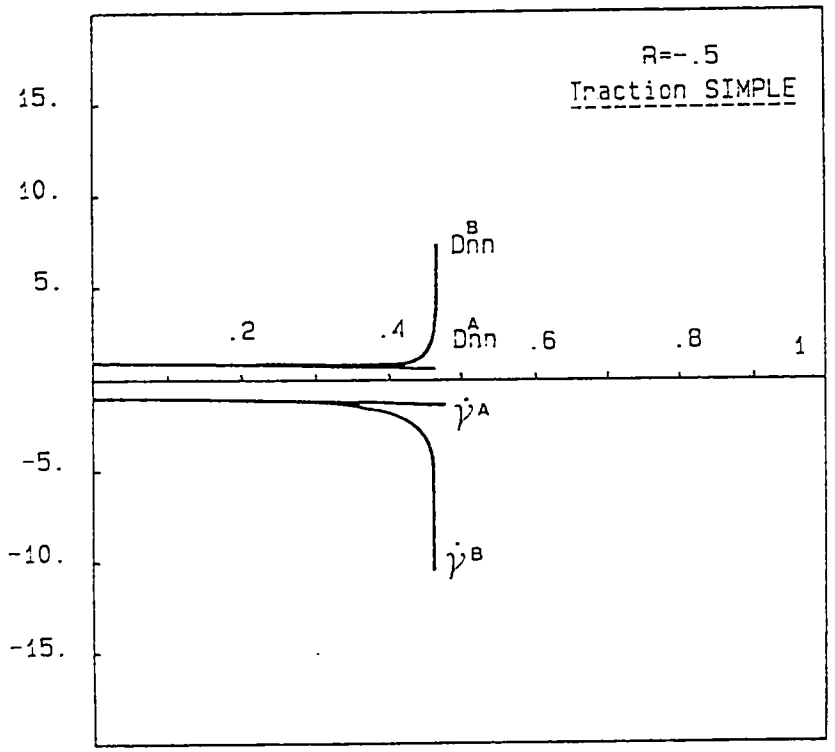
A = 1.7 B = 850. MPa def = .99

Puisque la courbure ne joue aucun rôle pour R = 0 (pas de changement de chemin dans la bande), la variation de la déformation critique avec σ_y est identique pour les deux théories d'écrouissage. Avec l'écrouissage isotrope, ce qui est observé en déformation plane se généralise à tous les autres chemeins ($-1 \leqslant R \leqslant +1$), lorsque décroit la C.L.F se déplace vers le haut (figure 7a). Quand on considère un écrouissage cinématique la situation est plus complexe (figure 76). Diminuer σ_y revient à augmenter la courbure de la surface d'écoulement ce qui déstabilise, pour les trajets $R \neq 0$. Aussi, si nous diminuons σ_y il se produit une compétition entre l'effet stabilisant décrit en annexe et l'effet déstabilisant de la courbure, c'est la raison pour laquelle les courbes limites de formage (fig 7a) se croisent dans la région $R > 0$.

42 - instabilité en cisaillement

Pour les valeurs négatives du rapport R, l'orientation critique de la bande est définie par un angle ψ différent de zéro. Le matériau composant la bande est alors soumis à du cisaillement. On peut alors espérer que le comportement en cisaillement simple du matériau jouera un rôle important dans le domaine $R < 0$. Mais nous avons vu au chapitre précédent comment ce comportement en cisaillement simple était perturbé par la combinaison avec d'autres sollicitations définies par les valeurs prises par D^B_{nn} et D^B_{tt} au cours de la déformation de la plaque. Nous avons alors montré que la courbe (τ , γ) présentait un maximum quelque soit la dérivée objective utilisée (Jaumann ou en rotation propre). On peut finalement croire que cette instabilité en cisaillement favorisera la localisation de l'écoulement pour $R < 0$.

La figure 8 présente les modes de localisation observés pour deux chemins de déformation ($R = -1/2$ et $R = -1$). Il est à noter que pour $R = -1/2$ la localisation en cisaillement $(\dot{\gamma}^B/\dot{\gamma}^A \to \infty)$ et la localisation en striction $(D^B_{nn}/D^A_{nn} \to \infty)$ apparaissent simultanément alors que pour $R = -1$ seule la localisation en cisaillement est significative et ceci pour un angle ψ proche de $\pi/4$. Les déformations critiques, reportées sur les figures 5 et 9 pour les matériaux à écrouissage cinématique et dans le domaine $R < 0$, sont ainsi directement liées au comportement en sollicitations combinées. La figure 9 montre que les deux dérivées objectives (Jaumann et rotation propre) donnent des résultats très proches. La courbe en rotation propre est légèrement au-dessus de celle obtenue avec Jaumann.



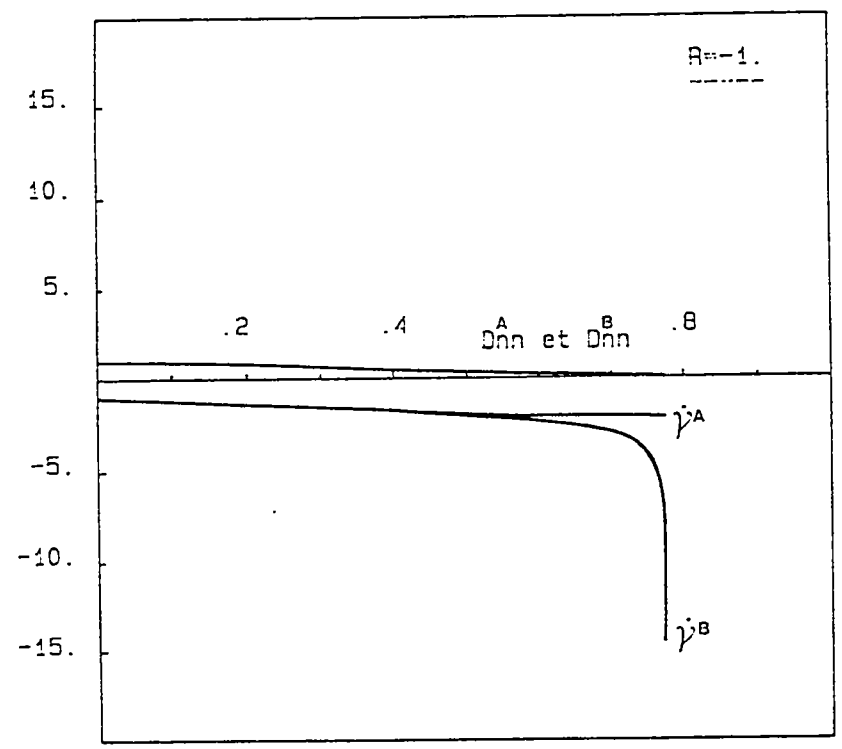


Fig 8 - modes de localisation observés pour deux chemins

R = -1/2 traction uniaxiale

R = - 1 cisaillement

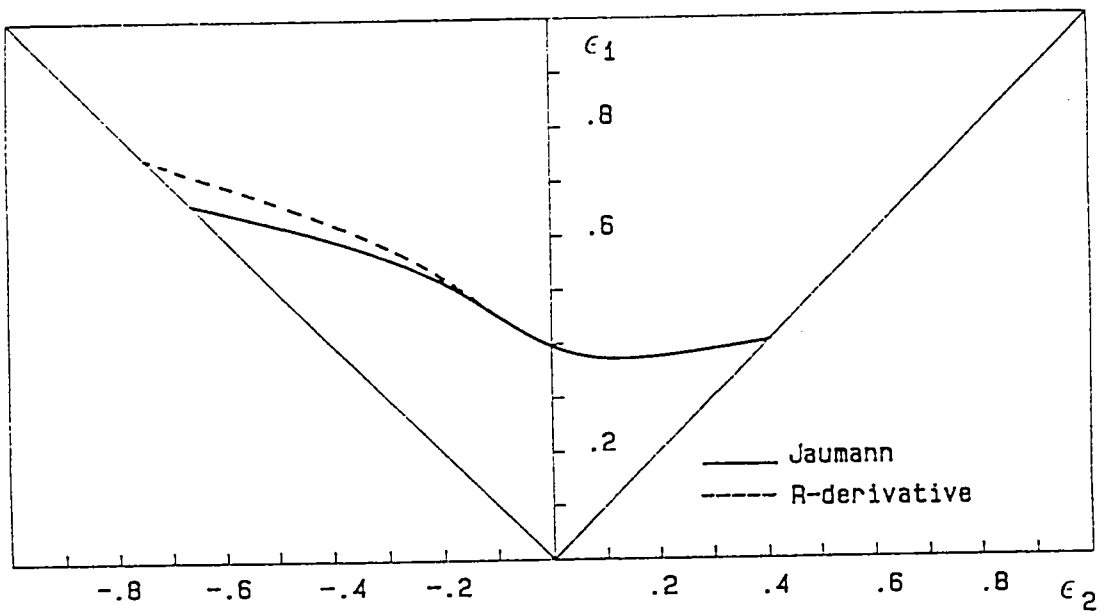


fig 9 - courbes limites de formage obtenues avec les deux dérivées objectives (Jaumann et rotation propre) pour le matériau 2

43 - comparaison avec les résultats expérimentaux

Sur les figures 10 et 11 nous avons reporté les résutats expérimentaux du laiton et de l'acier inoxydable 304 (d'après GOSH /12/ et RYNTAMAA /10/) et les déformations critiques calculées avec la théorie de l'écrouissage cinématique en utilisant la dérivée de Jaumann.

Pour le laiton, l'accord est satisfaisant dans le domaine du biaxé ($R > 0$), par contre dans le domaine $R < 0$ l'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux est important. Pour $R > 0$ notre approche donne une bonne approximation de la courbure locale de la surface d'écoulement et conduit ainsi à des résultats proches de l'expérience. Pour les chemins $R < 0$ le modèle ne permet pas de traduire correctement le comportement du laiton et mêne à des différences importantes avec l'expérience. De plus, dans nos calculs tous les paramètres pouvant influencer la localisation ne sont pas considérés, par exemple nous avons supposé le matériau initialement isotrope.

En ce qui concerne l'acier inoxydable 304 les résultats sont proches de l'expérience aussi bien dans le domaine du biaxé positif que dans la région $R < 0$.

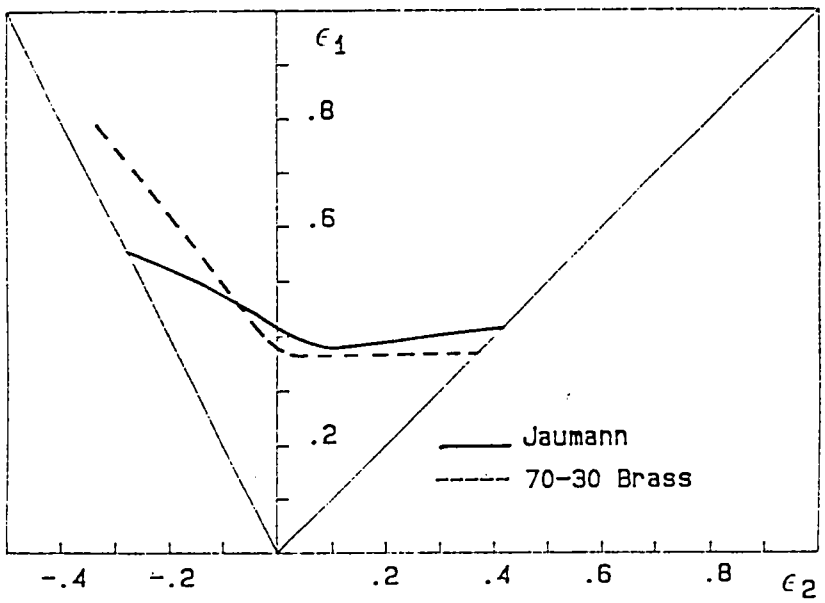


fig 10 - Comparaison entre les résultats des calculs avec la dérivée de Jaumann et l'expérience pour le laiton

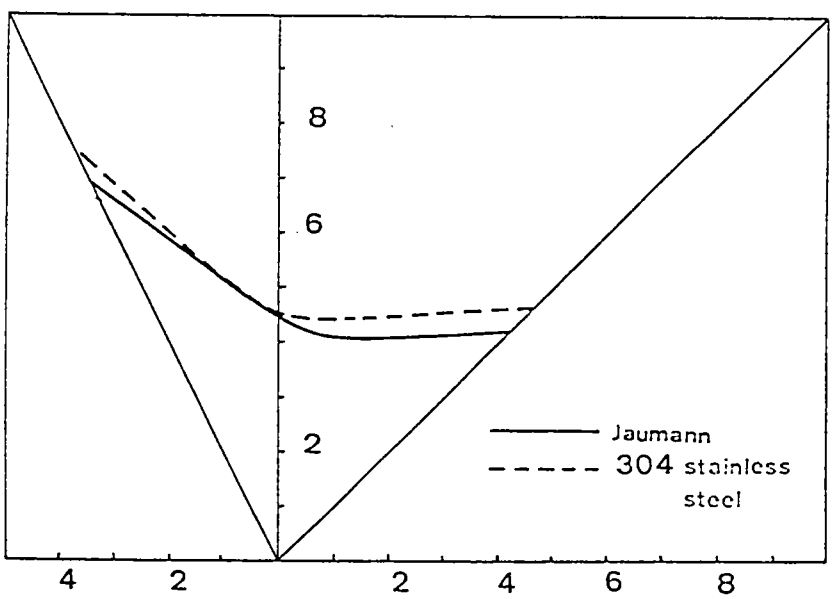


fig 11 - comparaison avec les résultats expérimentaux pour l'acier inoxydable 304

5 - CONCLUSIONS

Pour des matériaux fortement écrouissables tels que le laiton et l'acier inoxydable le modèle d'écrouissage isotrope ne donne pas des résultats satisfaisants dans le domaine du biaxé positif. Nous avons montré que dans cette région la courbure locale de la surface d'écoulement était un facteur déterminant et que l'écrouissage cinématique permettait de modéliser cette courbure locale et d'obtenir des courbes limites de formage très proches des mesures expérimentales.

Dans le domaine $R < 0$, notre objectif était de choisir une dérivée objective pour ajuster le comportement en cisaillement simple du modèle sur l'expérience. Par exemple, la figure 12 présente les résultats expérimentaux et théoriques en cisaillement simple du laiton. La dérivée objective correspondant à $\nu = .5$ était celle qui permettait de se rapprocher le mieux de l'expérience. On espérait ainsi, après avoir ajusté les coefficients A et B de la loi d'écrouissage sur un essai de traction et choisi une dérivée objective avec l'essai de cisaillement simple, traduire le comportement du matériau pour tous les chemins. Mais l'analyse des sollicitations combinées a fait apparaitre des instabilités qui perturbent le comportement du modèle de telle sorte que les C.L.F obtenues avec les différentes dérivées objectives sont peu différentes. Finalement l'écrouissage corotationnel donne des résultats intéressants pour l'acier inoxydable 304.

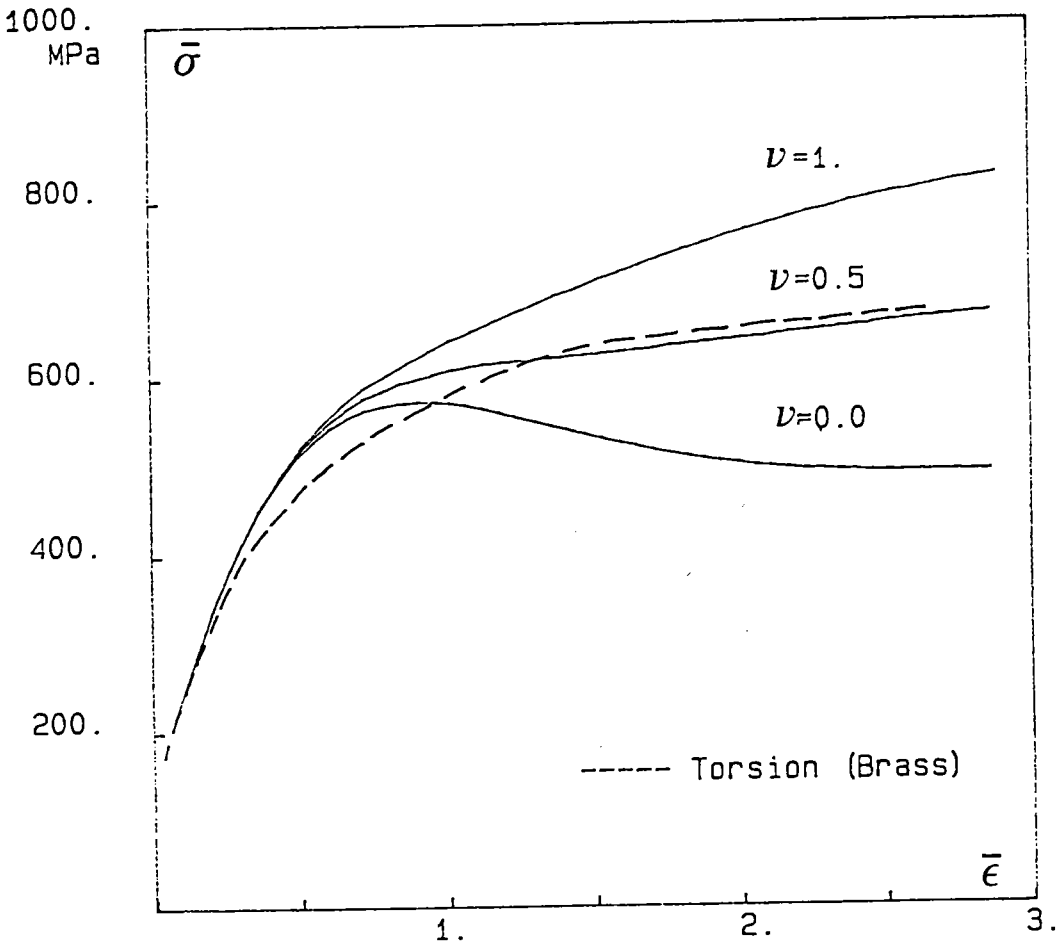


fig 12 - comportement en cisaillement simple du modèle d'écrouissage cinématique (matériau 2)
comparaison avec l'expérience (laiton) d'après HECKER et STOUT /13/
$\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ contrainte et déformation équivalentes de Von Misès

Notre approche permet également d'incorporer la sensibilité à la vitesse de déformation sous la forme suivante :

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0} \right)^m$$

σ_{y_0} est la dimension initiale de la surface d'écoulement

σ_y la dimension actuelle

$\dot{\bar{\varepsilon}}$ est la vitesse de déformation

$\dot{\bar{\varepsilon}}_0$ une vitesse de référence

et m le coefficient de sensibilité à la vitesse

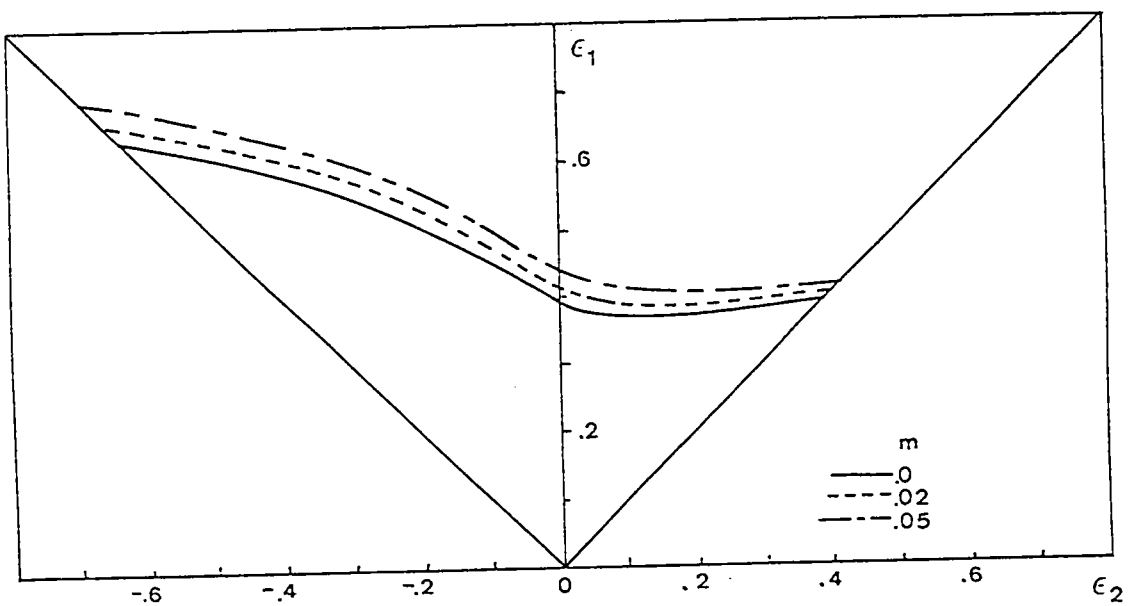


fig 13 - Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation pour un matériau fortement écrouissable

A = 2 B = 1800. MPa σ_y = 200. MPa

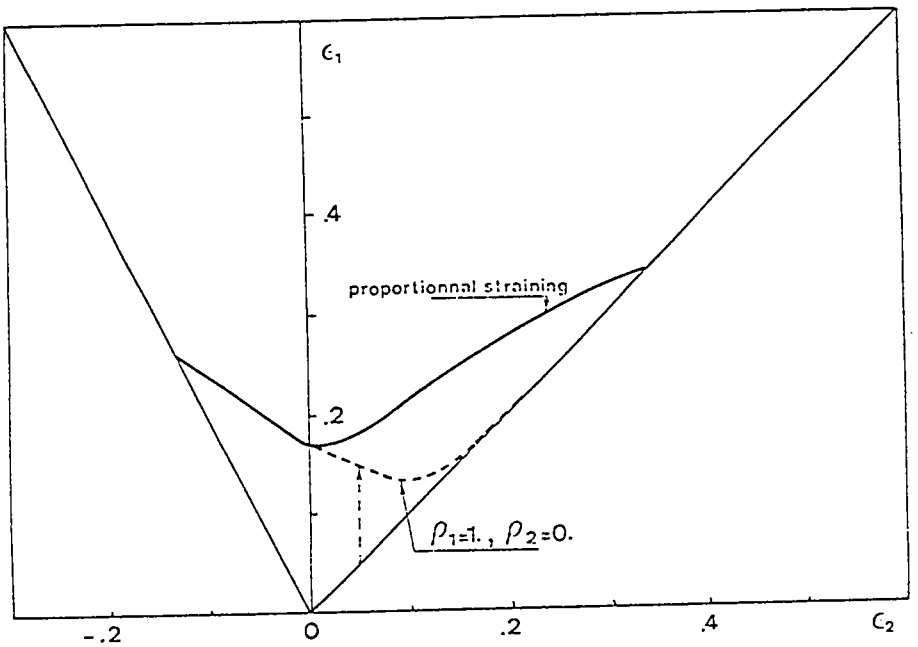
L'effet de la sensibilité à la vitesse est présenté à la figure 13. On observe qu'une sensibilité croissante déplace les courbes limites de formage vers le haut, on remarque de plus un léger changement de forme dans le domaine du biaxé positif. Ceci est dû au niveau de contraintes plus important obtenu avec la plus grande valeur de m, l'effet de courbure est alors plus prononcé.

Enfin nous avons testé notre modèle en chemins complexes. Les calculs ont été effectué dans le cas d'un matériau théorique et pour les deux types de chemins suivants :

1 - $\rho_1 = 1.$; $\rho_2 = 0.$: expansion biaxée symétrique puis traction plane

2 - $\rho_1 = -0.5$; $\rho_2 = 1.$: traction uniaxiale puis expansion biaxée symétrique

Dans le premier changement la courbe limite de formage obtenue (fig 14) se trouve au dessous de la C.L.F en chemins directs, dans le deuxième la courbe limite se place au-dessus de la C.L.F en chemins directs. Ces résultats traduisent bien les tendances expérimentales.



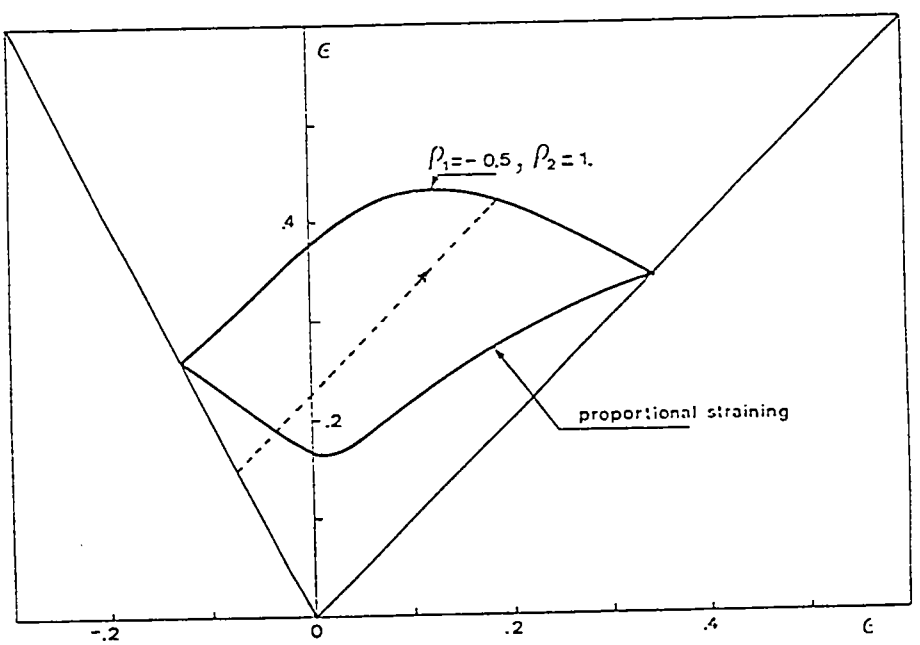


fig 14 - courbes limites de formage en chemins complexes

A = 5 B = 500. MPa σ_y = 150. MPa

1 - S. STOREN et J. R. RICE
Localized necking in thin sheets
J. Mech Phys. Solids, 23, pp 421 - 441 (1975)

2 - J. W. HUTCHINSON et K. W. NEALE
Sheet necking, time independant behavior,
Mechanics of sheet metal forming (Edited bu D.P. Koistenem and N. M. Nang) pp 127 - 150, plenium Press, New York (1978)

3 - J. CRISTOFFERSEN et J. W. HUTCHINSON
A class of phénoménological corner theories of plasticity
J. Mech Phys. Solids, 27 pp 465 - 487 (1979)

4 - V. TVERGAARD
Effect of kinmatic hardeming on localized necking in biaxially stretched sheets
Int J. Mech Sci, 20, pp 651 - 658 (1978)

5 - A. NEEDLEMANN et V. TVERGAARD
Limits to formability in rate sensitive sheets
Proc ICM 4 Stocklolm (Edited by J. Carlson and N.G. Ohlson), pp 51 - 65, Pergamon Press, (1983)

6 - G. FERRON et M. MILHA TOUATI
Détermination of the forming limits in planar isotropic and température sensitive sheet métal
Int. J. Mech. Sci , Vol 27 N° 5 pp 121 - 133 (1985)

7 - K. N. NEALE et E. CHATER
Limit strain predictions for strain rate sensitive anisotropic sheets
Int. J. Mech Sci , 22, 563 - 574 (1980)

8 - MARCINIAK Z. , KUCZYNSKI K.
Limit strains in the processes of stretch - forming sheet metal
Int J. Mech Sci , 9, pp 609-620 (1967)

9 - K. MIYAUCHI et K. YOSHIDA
Experimental studies of material behavior as related to sheet metal forming
Mechanics of sheet metal forming (Edited by D.P. Koistenem and N. M Wang) pp 19 - 52, Plenum Press, New York (1978)

10 - RYNTAMAA R.
Effects of austenite stability on the formability of austenitic stainless steel sheets
Helsinski University of Technology (1981)

11 - M. MILHA TOUATI
Etude des lois de comportement des métaux sous sollicitation uniaxiale ou biaxiale.
Application à l'analyse de la striction et à la détermination des limites de formage des tôles
thèse d'Etat - Université de Poitiers (Juin 1985)

12 - A.K. GOSH
Plastic flow properties in relations to localized necking in sheets
Mechanics of sheet metal forming pp 287, 312 (1978)

13 - HECKER S.S. et M. G. STOUT
Strain hardenning of heavily cold-worked metals
Proceeding of the materials Science Seminar
"Deformation, Processing and Structure" (1982)

ANNEXE

Calcul de la déformation critique ε_{1c} (déformations à la localisation, en déformation plane $(\varepsilon_2 = 0)$

La relation contraintes-déformations équivalentes est donnée par l'équation :

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + \frac{3B}{2A}\left[1 - \exp\left(-A\bar{\varepsilon}\right)\right] \qquad (A.1)$$

En déformation plane $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3}\, s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_1$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\varepsilon_1 \qquad (A.2)$$

On en déduit la relation entre la contrainte σ_1 et la déformation ε_1 :

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_y + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{B}{A}\left[1 - \exp\left(-\frac{2A}{\sqrt{3}}\,\varepsilon_1\right)\right] \qquad (A.3)$$

Pour une tôle sans défaut la localisation de l'écoulement se produit quand la force $F_1 = \sigma_1 h$ atteint un maximum.

Avec la condition d'incompressibilité $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3 = 0$, le critère de force maximum peut s'écrire :

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1 \qquad (A.4)$$

et avec la relation (A - 3), on obtient la déformation critique à la localisation

$$\varepsilon_{1c} = -\frac{\sqrt{3}}{2A} \log \frac{\sigma_y + 3B/2A}{B\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2A}\right)} \qquad \text{(A.5)}$$

Les constantes A, B et σ_y sont tels que ε_{1c} prend une valeur positive. Il apparait alors que ε_{1c} est une fonction décroissante de σ_y

IV - INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LA LIMITE DE FORMAGE

1 - INTRODUCTION

2 - ETUDE DE L'INSTABILITE EN CISAILLEMENT SIMPLE

21 - problème à deux zones

22 - résultats et discussion

3 - INFLUENCE DE L'ADOUCISSEMENT THERMIQUE SUR LES COURBES LIMITES DE FORMAGE

4 - INFLUENCE DE LA TEMPERATURE AVEC LE MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE

5 - CONCLUSIONS

1 INTRODUCTION

Nous développons dans ce chapitre l'influence de l'échauffement engendré par les déformations plastiques. Il est reconnu que la plus grande partie de l'énergie de déformation plastique est dissipée dans le matériau sous forme d'énergie thermique.

Si nous considérons un matériau sans défaut subissant une déformation homogène, la température augmente uniformément, cet échauffement diminue la contrainte d'écoulement dans le cas d'un matériau thermo-adoucissant. Si le matériau présente un défaut géométrique initial il se développera alors des gradients de déformations et de températures conduisant à la localisation.

Dans les processus de mise en forme et pour des matériaux faiblement conducteurs ou pour des vitesses de déformations importantes, les effets thermiques ne sont pas toujours négligeables. L'influence de ces effets a été peu étudiée /1, 2, 3, 4/.

Suite aux travaux de FRESSENGEAS et MOLINARI /5, 6, 7/ sur les instabilités thermoviscoplastiques en cisaillement simple nous étudions l'influence de ces instabilités sur les courbes limites de formage.

Nous rappelons qu'ils ont établi des critères d'instabilité et de localisation. Pour un matériau dont le comportement est traduit par la loi :

$$\tau = \mu \, \gamma^n \dot{\gamma}^m \theta^\nu \tag{1.1}$$

et présentant un défaut géométrique initial, il y aura localisation de la déformation plastique lorsque la somme des exposants est négative :

$$\nu + m + n < 0 \tag{1.2}$$

Enfin dans la dernière partie de ce chapitre nous revenons au modèle d'écrouissage cinématique en y ajoutant un terme de température /8/ conduisant à un adoucissement thermique et nous traçons les courbes limites de formage adiabatique et isotherme.

2 - ETUDE DE L'INSTABILITE EN CISAILLEMENT SIMPLE

21 - problème à deux zones

On considère une couche d'épaisseur H constante déformée en cisaillement simple. La couche est supposée infinie dans la direction x et de largeur l dans la direction z (fig 1). La couche se décompose alors en deux zones :

- la bande de largeur l^B et de hauteur h
- la région en dehors de la bande de largeur l^A et de hauteur (H - h)

On caractérise le défaut par :

$$f = l^B / l^A \qquad \lambda = h / H \tag{2.1}$$

La vitesse est imposée au bord

$$v = V = \text{constante} \text{ , pour } y = H$$
$$v = 0 \text{ , pour } y = 0 \tag{2.2}$$

où v désigne la vitesse suivant l'axe x, les autres composantes sont nulles.

Dans les deux zones, les dérivées de toute quantité par rapport à x et z sont supposées nulles. La vitesse de déformation :

$$\dot{\gamma} = \partial v / \partial y \tag{2.3}$$

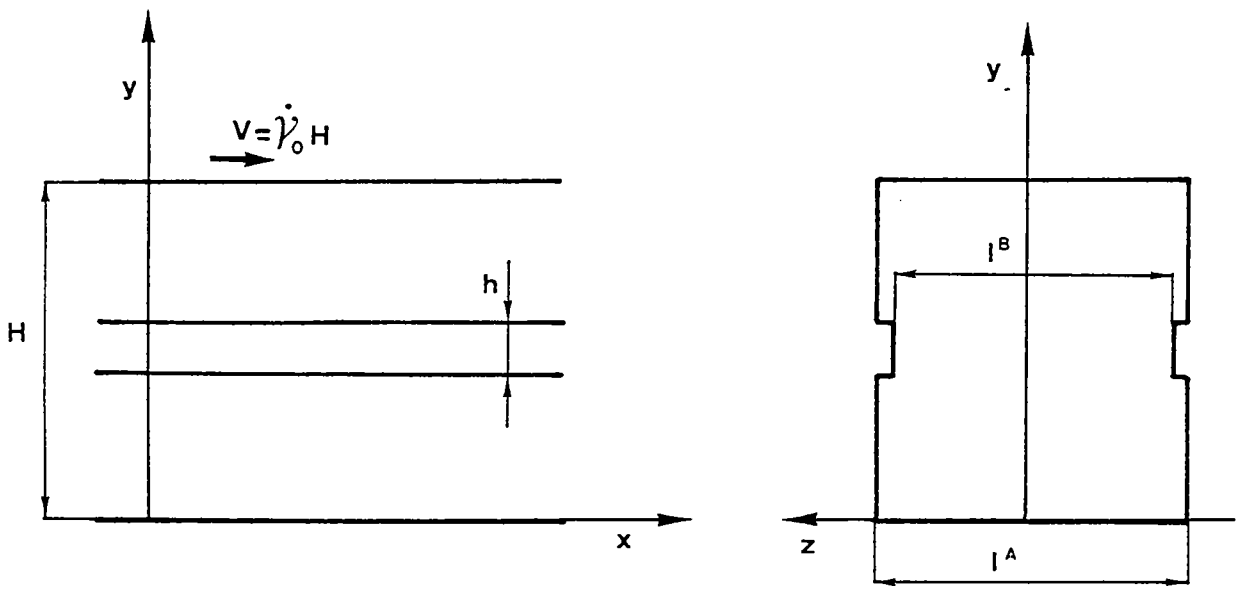


fig 1 - Géométrie du problème de cisaillement simple à deux zones

prend des valeurs uniformes $\dot{\gamma}^B$ et $\dot{\gamma}^A$ dans la bande et en dehors de la bande. La déformation est nulle suivant z.

On pose :

$$\dot{\gamma}_0 = V/H \tag{2.4}$$

les conditions aux limites imposent alors :

$$\dot{\gamma}_0 = \lambda \dot{\gamma}^B + (1-\lambda) \dot{\gamma}^A \tag{2.5}$$

La force tangentielle à la bande reste constante, cette condition s'exprime par :

$$\ell^A \tau^A = \ell^B \tau^B \quad \text{ou} \quad f \tau^B = \tau^A \tag{2.6}$$

Le matériau est incompressible et on admet qu'il obéit à la loi de comportement thermo-viscoplastique suivante :

$$\tau = \mu \gamma^n \dot{\gamma}^m \theta^\nu \tag{2.7}$$

où μ est une constante

Les exposants n m et ν sont respectivement : le coefficent d'écrouissage, le coefficient de sensibilité à la vitesse et ν le coefficient d'adoucissement thermique $(\nu<0)$

Le problème est supposé <u>adiabatique</u> et l'évolution de la température est gouvernée par l'équation de l'énergie :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \tau \dot{\gamma} \tag{2.8}$$

avec ρ masse volumique
c capacité thermique
et β coefficient de Taylor-Quinney que nous supposerons égal à 0.90. Ce coefficient β = 0.90 indique que 90 % du travail de déformation plastique est transformé en chaleur.

Les inconnues du problème sont les vitesses de cisaillement $\dot{\gamma}^A$ et $\dot{\gamma}^B$ nous disposons de deux équations (2.5) et (2.6).

De la relation (2.5) on tire :

$$\dot{\gamma}^A = \frac{\dot{\gamma}_0 - \lambda \dot{\gamma}^B}{1-\lambda} \tag{2.9}$$

que l'on reporte dans la relation d'équilibre s'écrivant sous la forme suivante :

$$\left(\gamma_A^n \theta_A^\nu\right)^{1/m} \dot{\gamma}^A = f^{1/m}\left(\gamma_B^n \theta_B^\nu\right)^{1/m} \dot{\gamma}^B \tag{2.10}$$

on obtient :

$$\dot{\gamma}^B = \frac{\dot{\gamma}_0 \left(\theta_A^\nu \gamma_A^n\right)^{1/m}}{(1-\lambda) f^{1/m}\left(\gamma_B^n \theta_B^\nu\right)^{1/m} + \lambda\left(\gamma_A^n \theta_A^\nu\right)^{1/m}} \tag{2.11}$$

L'intégrale :

$$\gamma = \int_0^t \dot{\gamma}\, d\tau \tag{2.12}$$

désigne la déformation plastique en distorsion.

Les température θ_A et θ_B sont obtenues en intégrant l'équation de l'énergie (2.7).

22 - Résultats et discussion

Dans les calculs, on utilise les valeurs numériques caractéristiques du comportement de deux aciers à faible teneur en carbone, de composition chimique proche mais laminé à froid pour l'un (1018 CRS) et laminé à chaud pour l'autre (1020 HRS).

On considère un défaut géométrique défini par les valeurs suivantes :

$$f = 0.98 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.10$$

La déformation initiale est $\gamma(0) = 0.01$ et la température initiale $\theta(0) = 300°$ K. La vitesse imposée à l'extrémité est telle que $\dot{\gamma}_0 = 10^3 s^{-1}$

Les courbes contraintes-déformations (τ, γ) sont représentées sur la figure 2. On remarque l'instabilité thermique liée à l'échauffement adiabatique : dès que le taux d'adoucissement dû à l'échauffement adiabatique du matériau compense puis dépasse le taux de durcissement dû à l'écrouissage, la contrainte de cisaillement que peut supporter le matériau passe par un maximum et la déformation devient instable.

La contrainte initiale est définie par :

$$\tau_0 = \mu\, \gamma(0)^n\, \dot{\gamma}(0)^m\, \theta(0)^\nu \tag{2.13}$$

τ_0 (MPa)	n	m	ν
436.	0.015	0.019	- 0.38

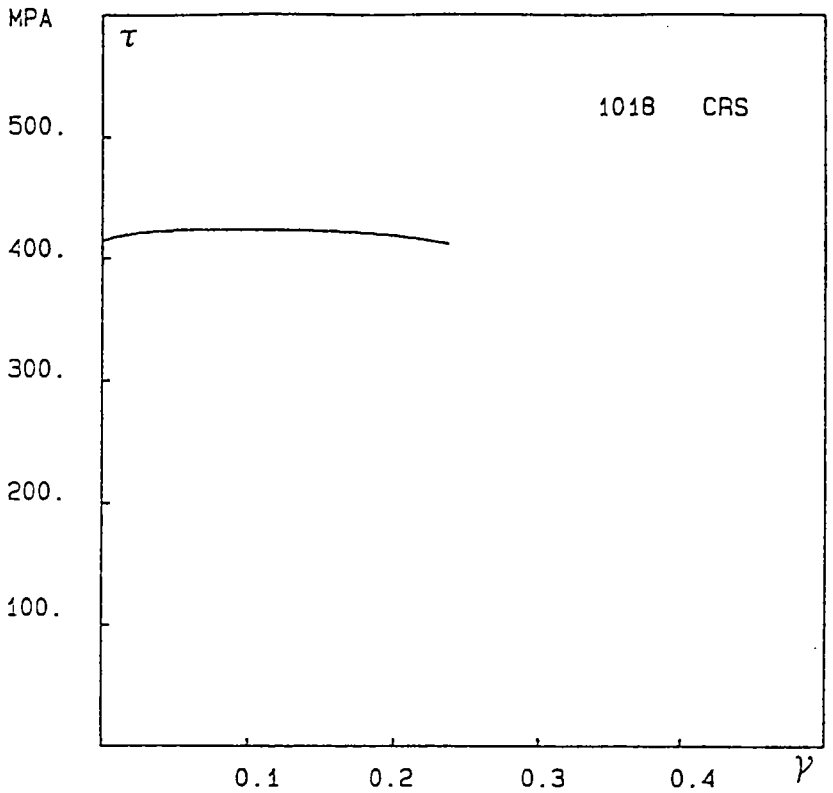
table 1 : valeurs des coefficients caractéristiques de l'acier 1018 CRS

τ_0 (MPa)	n	m	ν
261.	.12	.0133	- .51

table 2 : valeurs de coefficients, caractéristiques de l'acier 1020 HRS

kg/m	C J kg
7800	500

table 3 : masse volumique et capacité thermique des deux aciers étudiés



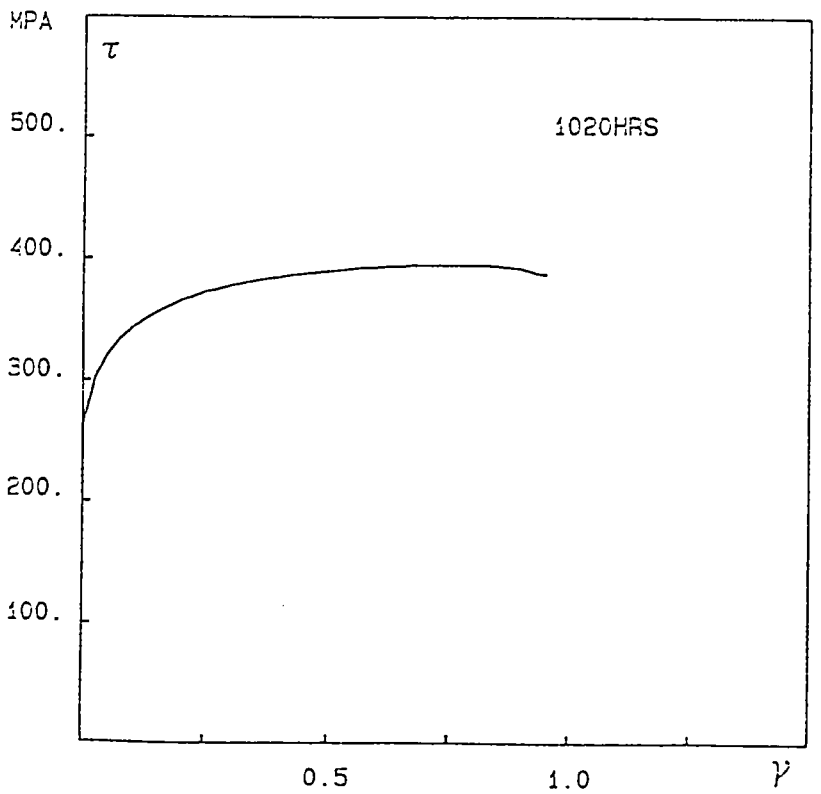


fig 2 - courbes d'écrouissage des deux matériaux
1018 CRS
1020 HRS

Les figures 3 donnent les résultats des calculs pour les deux matériaux. Le modèle à deux zones prédit une localisation de la déformation pour une déformation macroscopique critique :

$$\gamma_c = 0.95 \text{ pour le 1020 HRS}$$
$$\gamma_c = 0.24 \text{ pour le 1018 CRS}$$

ou pour une déformation critique dans la zone A

$$\gamma_c^A = .84 \text{ pour le 1020 HRS}$$
$$\gamma_c^A = .17 \text{ pour le 1018 CRS}$$

Ces résultats sont identiques aux solutions des calculs de CLIFTON et coauteurs /9/ avec un schéma aux différences finies et un bon accord avec les expériences de COSTIN et co. /10/ sur des tubes à paroi mince sollicités à la torsion dynamique jusqu'à une déformation de 0.30. Des bandes de cisaillement sont observées dans le 1018 CRS et pas dans le 1020 HRS.

L'écart entre les deux déformations critiques est dû à l'écrouissage plus important du 1020 HRS qui s'oppose à l'adoucissement thermique et retarde l'apparition de l'instabilité.

Il est utile d'étudier l'influence de la largeur de la bande B sur la localisation. La figure 4 montre que la déformation critique est peu sensible au coefficient λ .

A partir des caractértistique du 1018 CRS il est également intéressant d'analyser l'influence de la sensibilité à la vitesse m et de l'écrouissage n sur la localisation de la déformation. Augmenter m ou n tout en gardant la somme $(m + n + \nu)$ retarde très sensiblement la localisation. Le rôle joué par la sensibilité à la vitesse m est toutefois plus important (figures 5 et 6).

Dans ce qui suit nous analysons l'influence de ce comportement en cisaillement simple sur les courbes limites de formage. Nous pouvons espérer une forte variation des déformations critiques avec m pour R = - 1 alors que cette variation sera plus modérée pour les autres chemins.

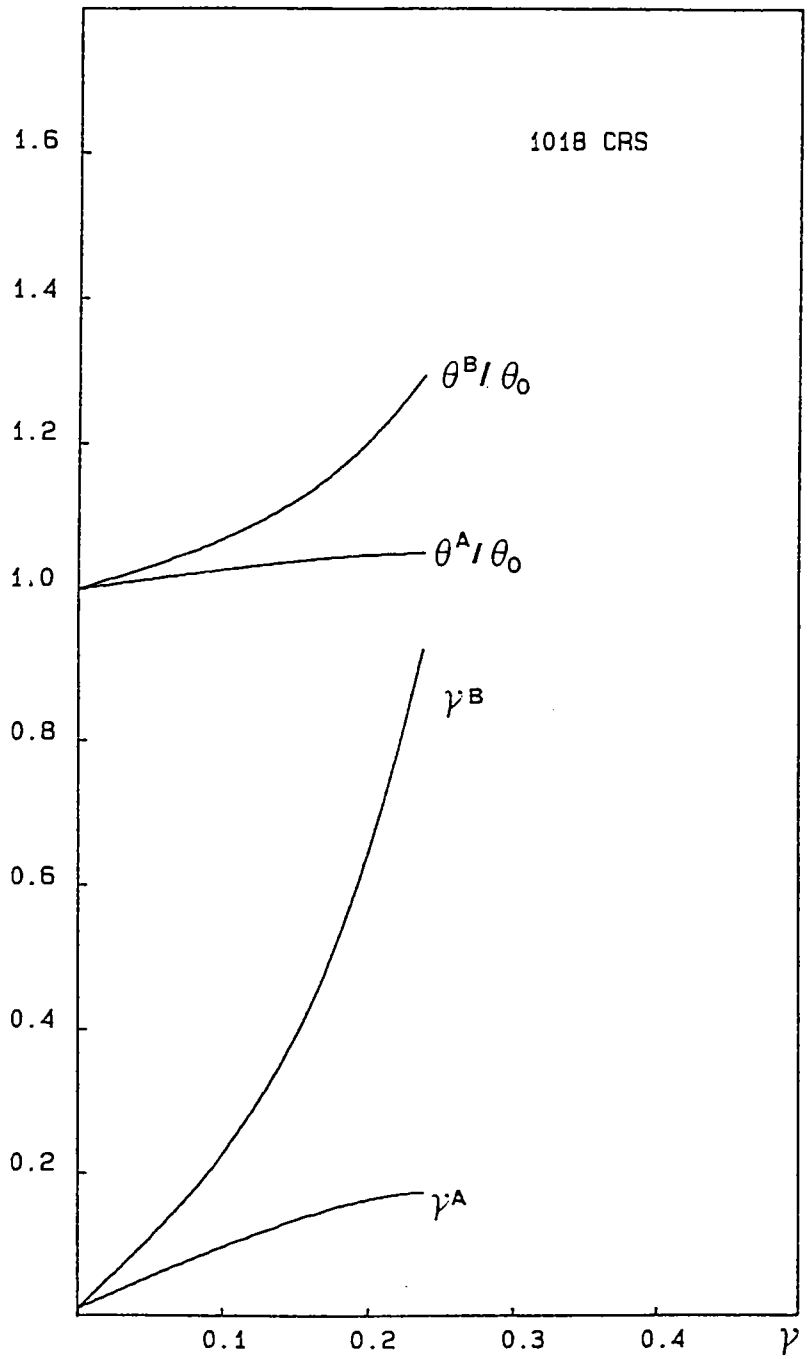


fig 3 a - déformations et températures dans les deux zones pour l'acier 1018 CRS,

f = .98

θ_0 = 300° K

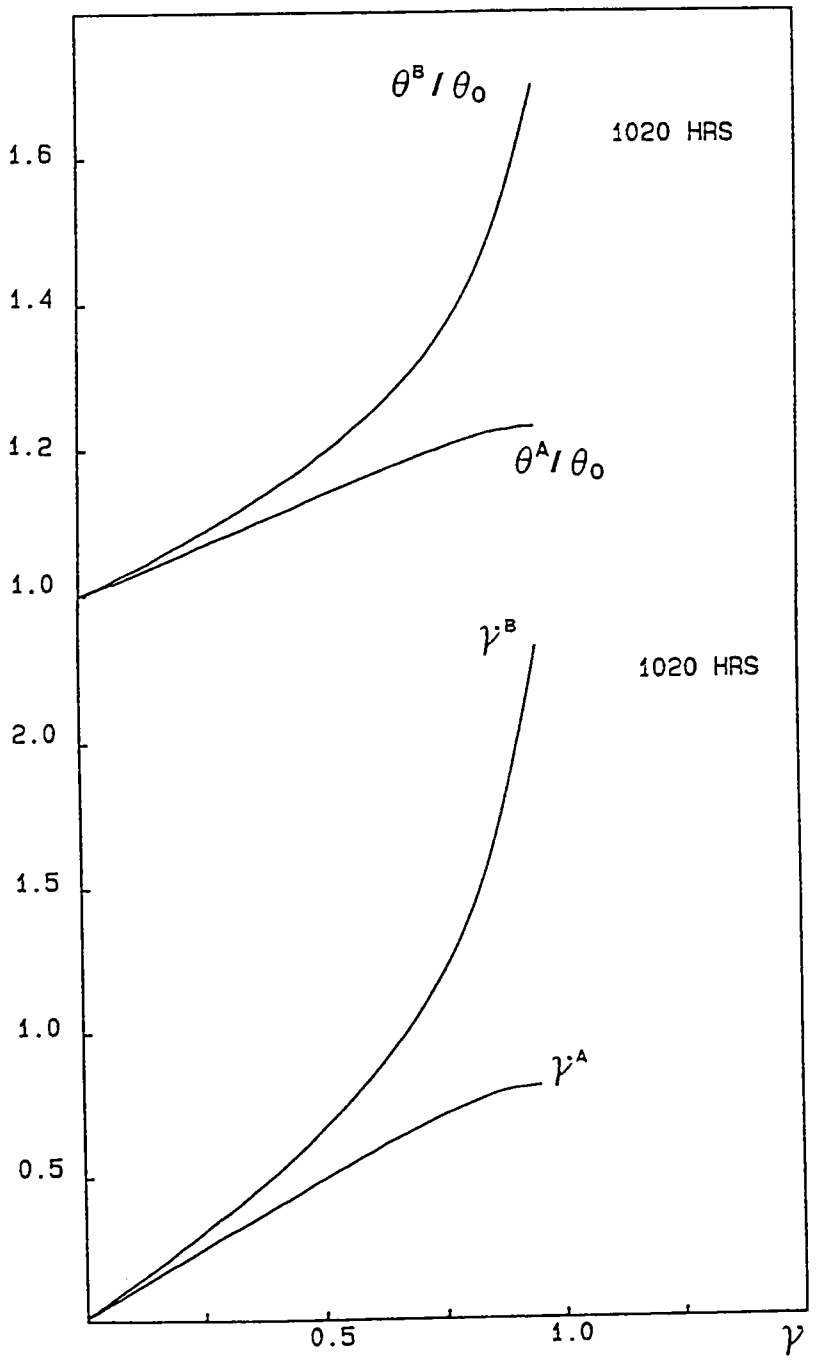


fig 3 b - déformations et températures dans les deux zones pour l'acier 1020 HRS

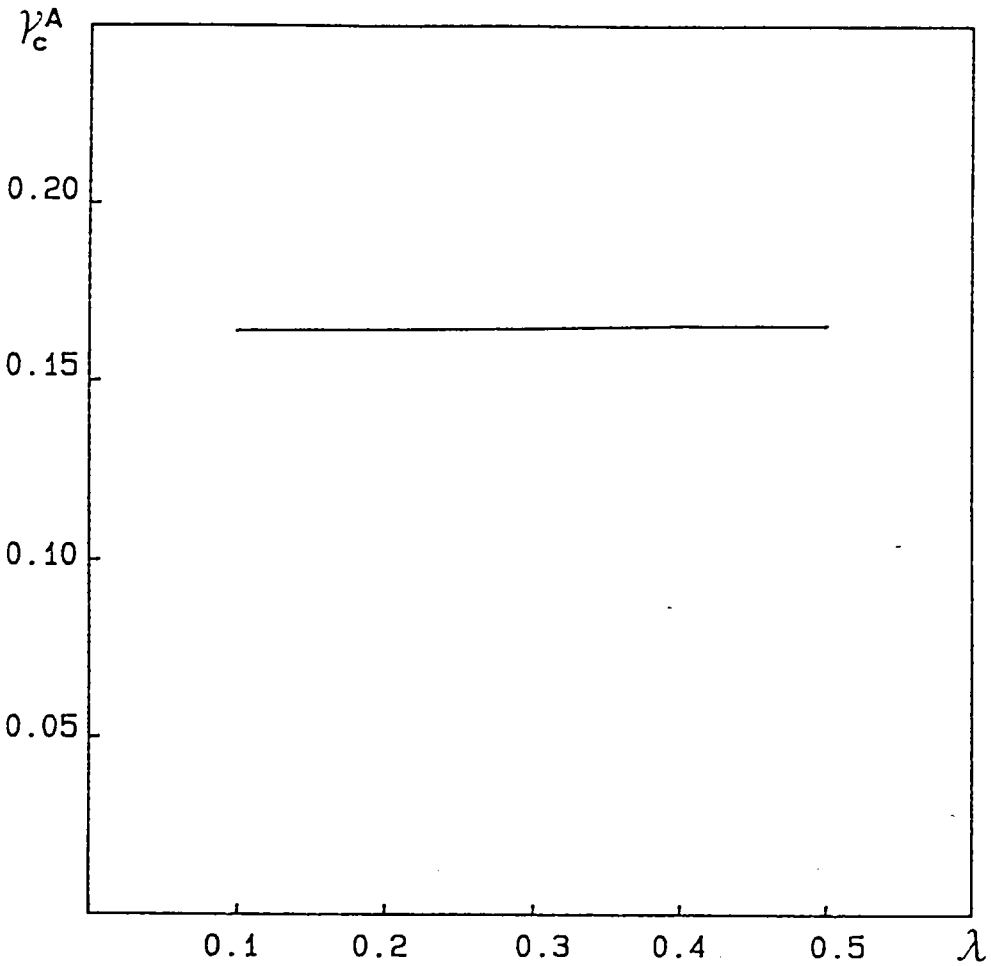


fig 4 - Influence du coefficient λ sur la déformation γ_c^A

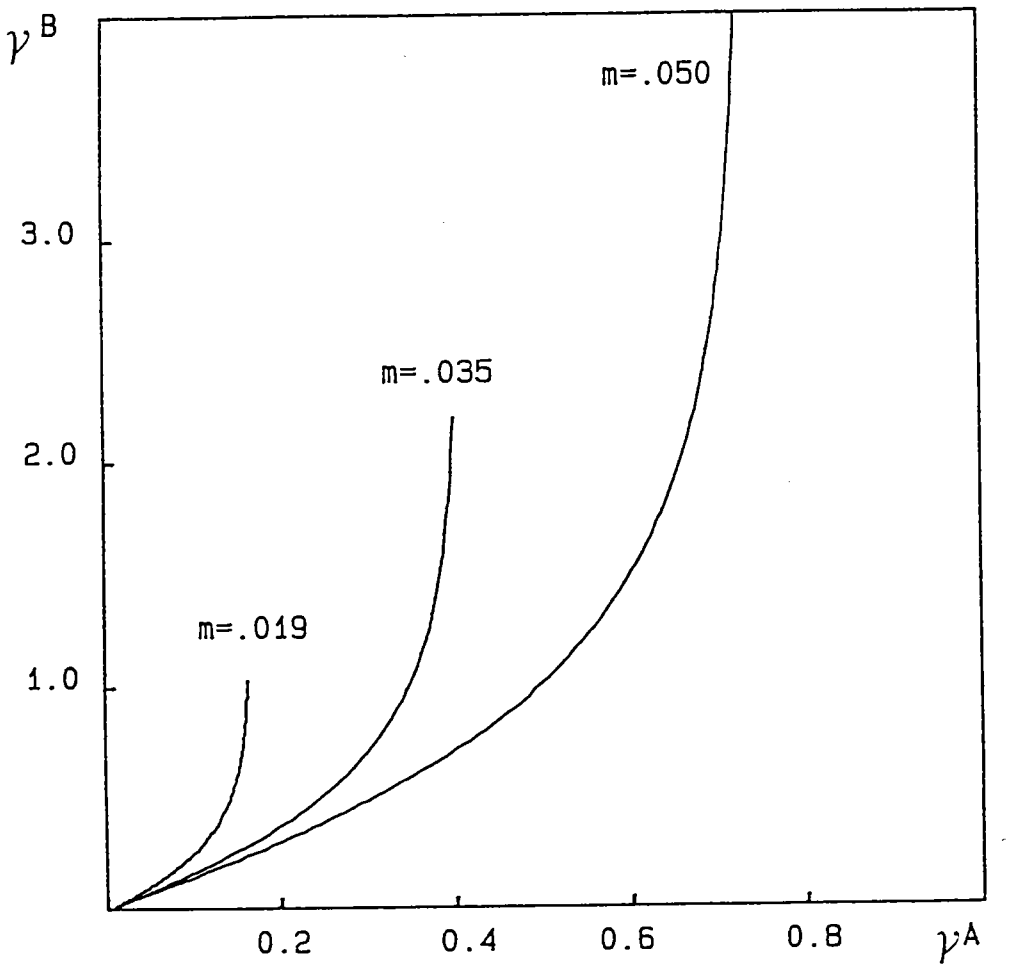


fig 5 - Influence de la sensibilité à la vitesse sur la localisation en cisaillement simple

$n = 0.15$ $\nu = -0.38$ $\tau_o = 436$ MPa

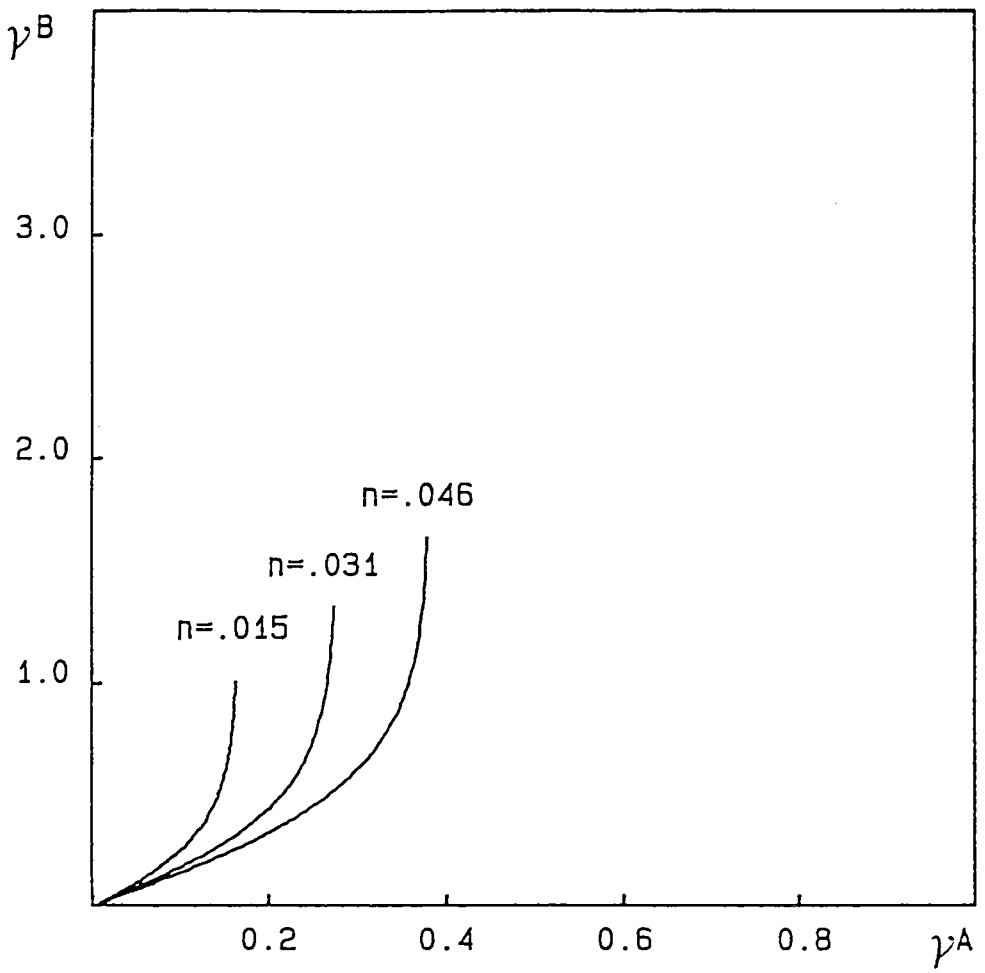


fig 6 - Influence de l'exposant d'écrouissage n sur la localisation en cisaillement simple

m = 0.19 $\qquad \nu = -0.38 \qquad \tau_0 = 436$ MPa

3 - INFLUENCE DE L'ADOUCISSEMENT THERMIQUE EN CISAILLEMENT SIMPLE SUR LES COURBES LIMITES DE FORMAGE

Le calcul des courbes limites de formage est effectué avec le modèle MARCINIAK présenté au chapitre 3. Les équations utilisées sont les mêmes, toutefois nous considérons ici un écrouissage isotrope défini par la loi thermo-viscoplastique :

$$\bar{\sigma} = k\,\bar{\varepsilon}^{n}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{m}\,\theta^{\nu} \tag{3.1}$$

ajustée de façon à obtenir en cisaillement simple la relation (2.7) cela donne :

$$k = (3)^{\frac{1+m+n}{2}}\,\mu \tag{3.2}$$

Il faut ajouter également, dans les deux zones A et B, l'équation de l'énergie qui nous permettra de suivre l'évolution de la température :

$$\rho\, c\, \frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta\, \sigma_{ij}\, D_{ij} \tag{3.3}$$

La vitesse imposée est $D_{11} = 10^{3}\,s^{-1}$ et le problème est supposée adiabatique. Comme dans les calculs en cisaillement simple, le défaut géométrique initial est choisi égal à 0.98.

Les CLF obtenues pour les deux matériaux 1018 CRS et 1020 HRS sont reportées sur la figure 7. Les limites de formage réalisées pour le chemin R = -1 sont, cette fois ci, directement liées au comportement en cisaillement simple de ces deux matériaux. En effet, les déformations :

$$\gamma^{A} = \int_{0}^{t} \dot{\gamma}^{A}\, d\tau$$

observées à la localisation pour R = -1 sont voisines de celles obtenues en cisaillement simple.

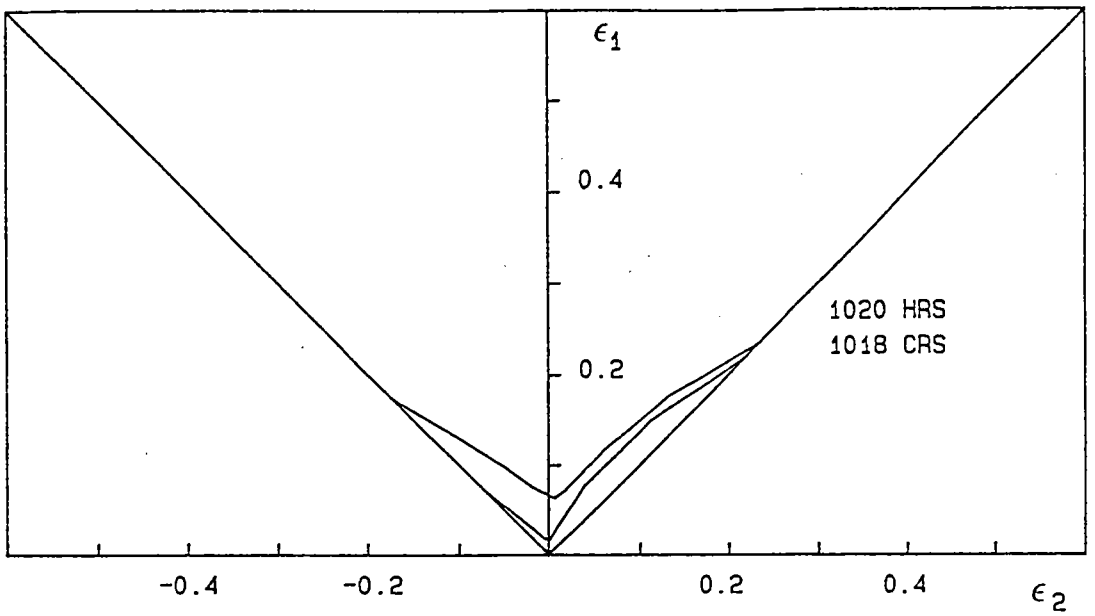


fig 7 - Courbes limites de formage des aciers 1018 CRS et 1020 HRS

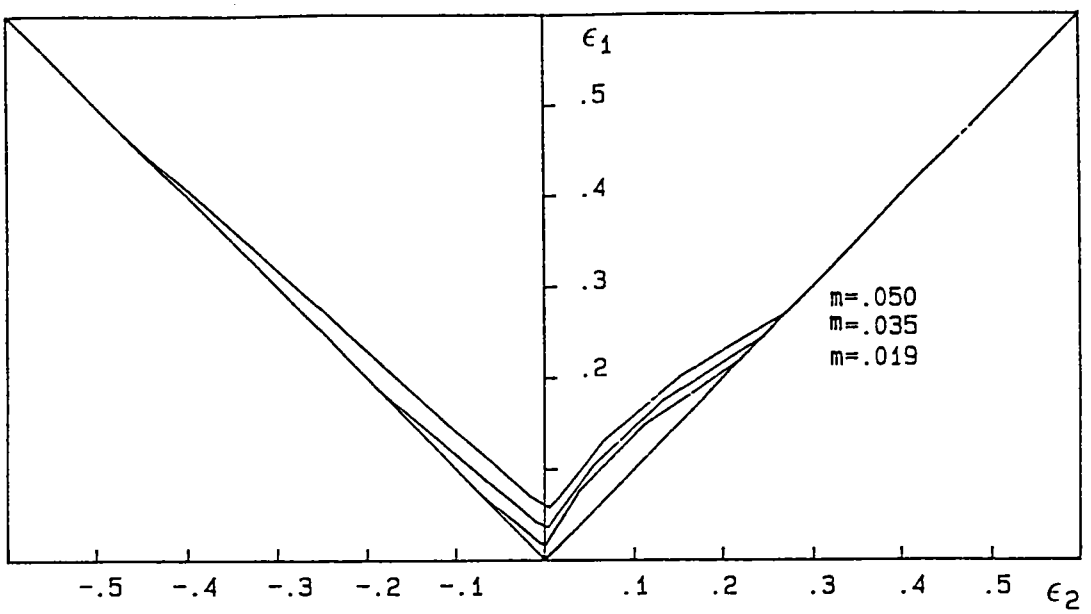


fig 8 - influence de la sensibilité à la vitesse m

n = .015 ν = -.38 f = .98

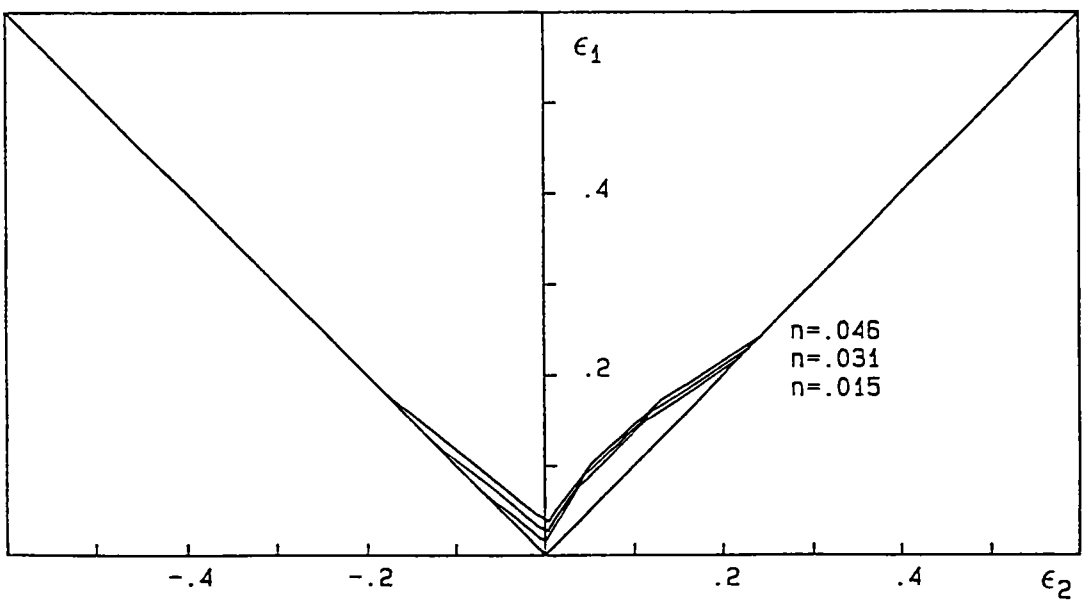


fig 9 - influence de n sur les courbes limites de formage

m = .019 ν = - .38 f = .98

Comme en cisaillement simple, on analyse les influences de la sensibilité à la vitesse m et de l'exposant d'écrouissage n (fig 8 et 9). On observe, pour R = - 1, une forte variation de la limite de formage avec m ou n, alors que cette variation est plus faible pour les autres chemins. Si l'on augmente m ou n de façon à rendre la somme des exposants de la loi thermo-viscoplastique (ν + m + n) positive, il n'y aura plus localisation pour R = - 1 alors que pour les autres trajets de déformation et compte tenue du défaut géométrique la localisation se produira toujours. Ceci explique la forte variation de la limite de formage pour R = - 1 avec m ou n.

4 - INFLUENCE DE LA TEMPERATURE AVEC LE MODELE D'ECROUISSAGE CINEMATIQUE

Les expériences de PHILIPPS /11/ montrent que la position de la surface cinématique dépend de la température (fig. 10). CHABOCHE /8/ traduit cette dépendance en ajoutant un terme à la relation de PRAGER-ZIEGLER que nous écrivons ici en grandes déformations :

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij} = B(\bar{\varepsilon},T)\, D_{ij} - A(\bar{\varepsilon},T)\, \alpha_{ij} - Q(\bar{\varepsilon},T)\, \dot{T}\, \alpha_{ij} \qquad (4.1)$$

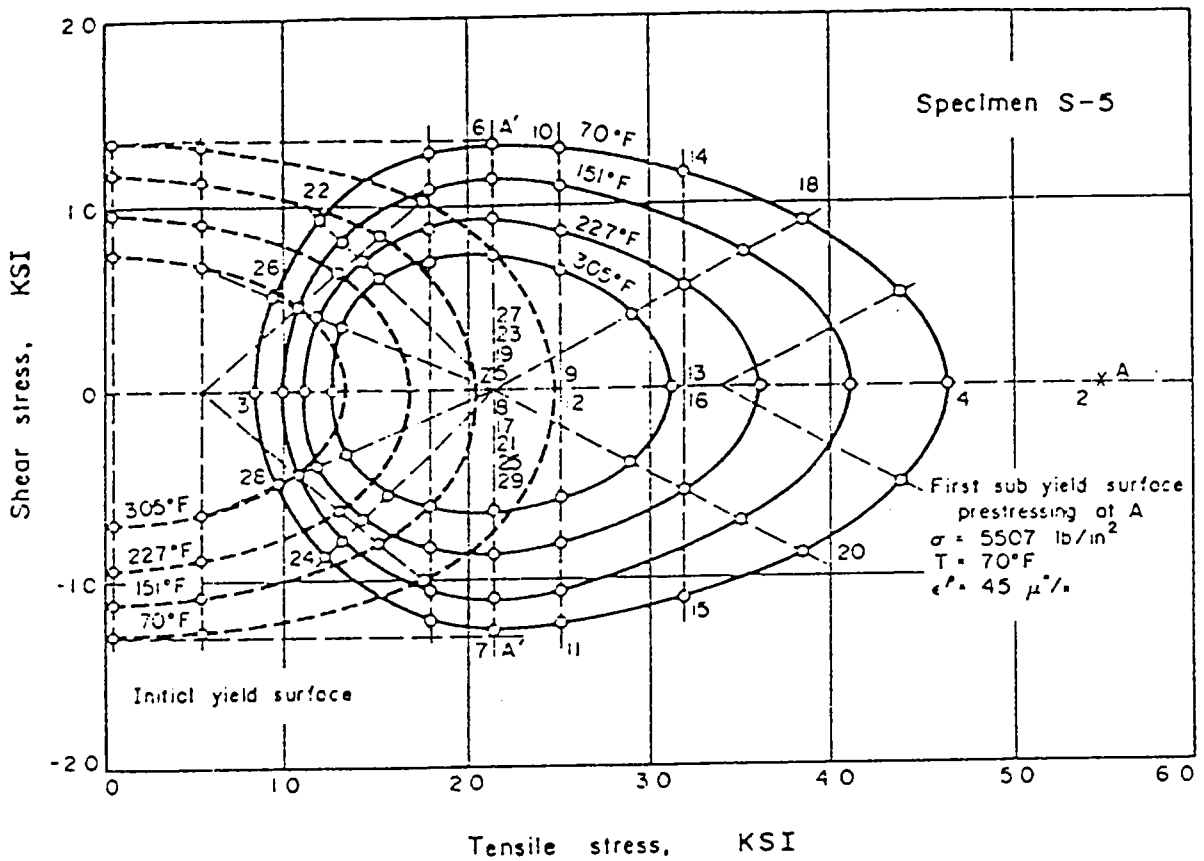
$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}$ représente la dérivée de Jaumann de α_{ij}

$\dot{T}$ est la dérivée par rapport au temps de la température et tous les coefficients A, B, Q peuvent être fonctions de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$ et de la température T.

La dimension σ_y de la surface cinématique peut elle aussi être fonction de $\bar{\varepsilon}$ et T.

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon},T) \qquad (4.2)$$

Toutefois dans une première approche nous considérons que les coefficients A, B, Q et la dimension σ_y sont des constantes.



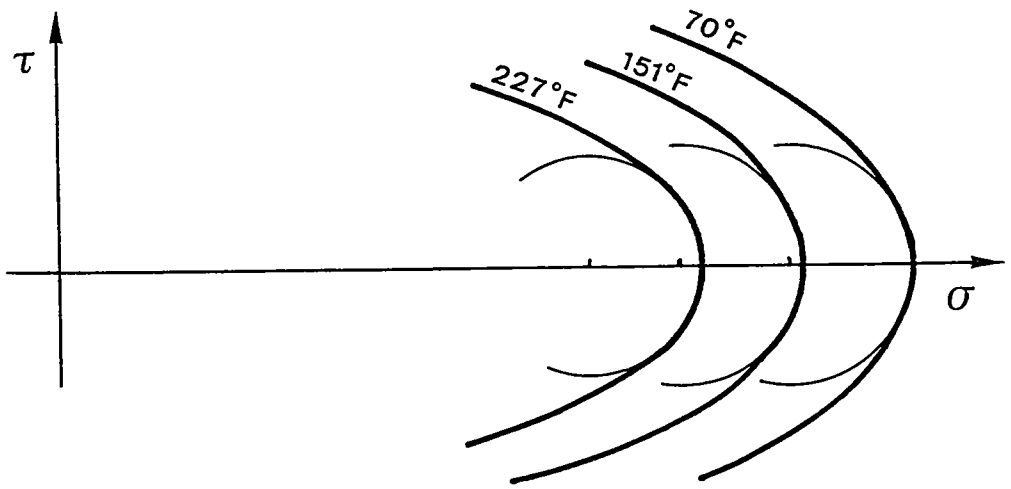


fig 10 - variation de la position du centre de courbure au point de charge avec la température. D'après PHILIPPS /11/

En supposant des conditions adiabatiques de déformations, l'évolution de la température est donnée par l'équation de l'énergie :

$$\rho c \dot{T} = \beta \sigma_{ij} D_{ij} \tag{4.3}$$

Le matériau théorique testé est défini par les coefficients :

A = 1 Q = . 003 $^{\circ}K^{-1}$

B = 1300. MPa

σ_y = 200. MPa c = 3.6 x 10 $Jm^{-3}\ ^{\circ}K^{-1}$

Les courbes d'écrouissage adiabatique et isotherme de ce matériau sont présentées sur la figure 11. Les limites de formage sont reportées sur la figure 12. En déformation plane, l'évolution de la température à l'intérieur et à l'extérieur de la bande est donnée par la figure 13.

$\theta^A_{(o)}$ = 294° K

θ^A = 356° K à la localisation (problème adiabatique)

L'adoucissement thermique déstabilise l'écoulement puisqu'il favorise la localisation dans la région la plus chaude. La ductilité en déformation plane varie de :

ε_1^A = 0.49 dans le cas isotherme

à ε_1^A = 0.38 dans le cas adiabatique

Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par FERRON /1/ pour de l'acier inoxydable. Pour de tels matériaux, faiblement conducteurs (k = 15 W/m° K) et pour des vitesses de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-2} s^{-1}$ le formage peut être considéré comme adiabatique.

A noter enfin le changement de forme de la CLF isotherme par rapport à la CLF adiabatique (figure 12). Ceci est un effet de la courbure, effet qui est plus important aux plus fortes contraintes (la dimension σ_y restant constante).

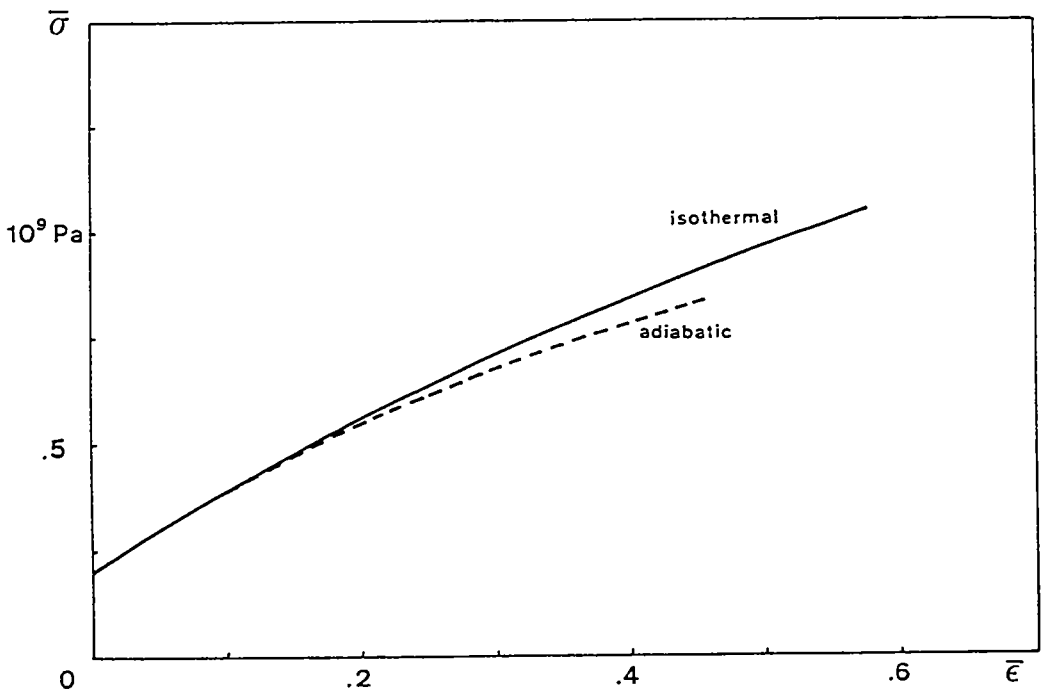


fig 11 - adoucissement thermique obtenu avec le terme de mémoire Q = .003° K^{-1}

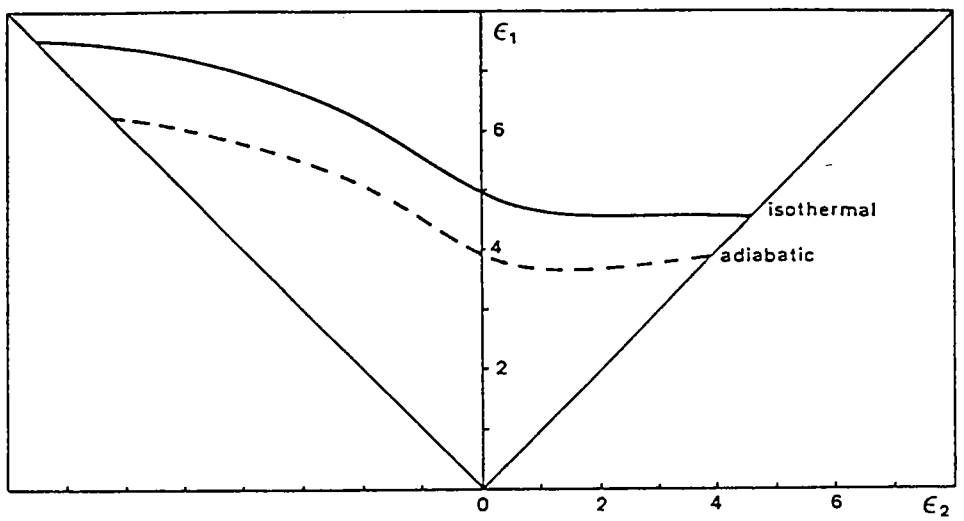


fig 12 - courbes limites de formage adiabatique et isotherme
A = 1. B = 1300. MPa σ_y = 200. MPa

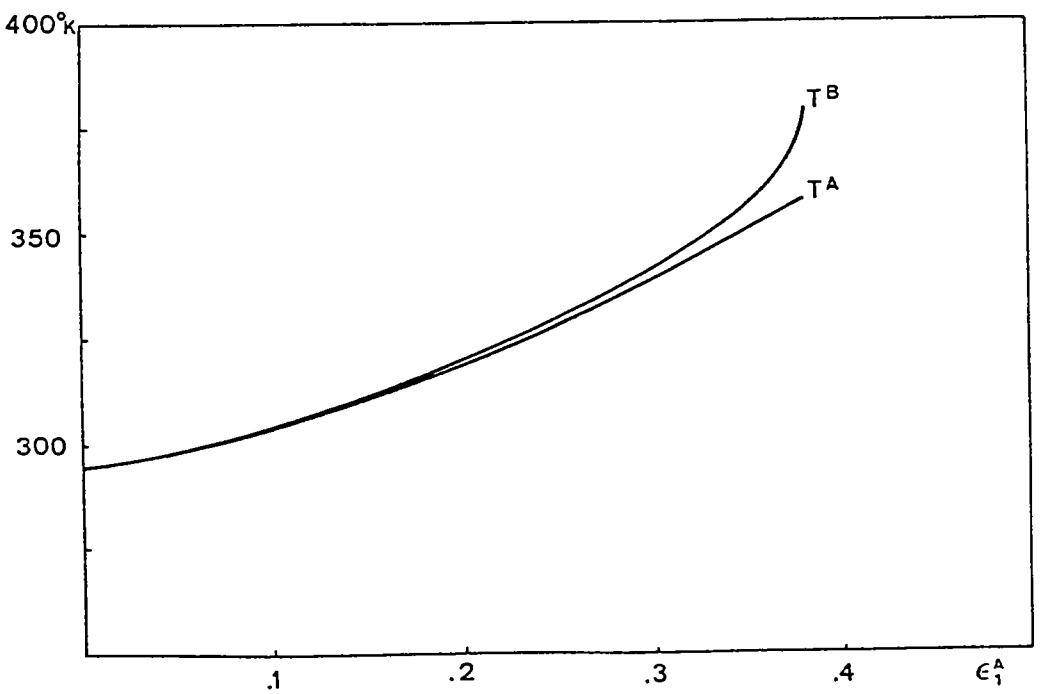


fig 13 - Evolution des températures dans les deux zones

Conclusions

L'instabilité en cisaillement simple d'un matértiau thermo-viscoplastique avec $(\nu+m+n)<0$ est due à l'échauffement adiabatique qui compense puis dépasse le taux d'écrouissage. L'influence des composants m et n est importante puisque lorsque la somme (ν + m + n) devient positive il n'a plus localisation.

Les limites de formage pour R = - 1 sont directement liées au comportement en cisaillement simple du matériau. Pour ce chemin en effet, on observe une instabilité en cisaillement $(\dot{\gamma}^B / \dot{\gamma}^A \rightarrow \infty)$ et les déformations γ^A à la localisation sont du même ordre de grandeur que celles réalisées en cisaillement simple.

Enfin l'adoucissement thermique obtenu en ajoutant un terme de température à la loi d'écrouissage cinématique déstabilise l'écoulement en favorisant la localisation dans la région la plus chaude. Par rapport à la courbe limite de formage isotherme, la courbe adiabatique est déplacée vers le bas d'une quantité sensiblement identique pour tous les chemins.

1 - FERRON G.
Influence of heat generation and conduction on plastic stability under uniaxial tension
Mat. Science and Eng., 49 (1981) 241 - 248

2 - KORHONEN A.S.
12 th Biennal Congress lut, Deep drawing Res. Group., S. Margherita Ligure, Italy, 191 - 196 (1982)

3 - FRESSENGEAS C., MOLINARI A.
Inertia and thermal effects on the localisation of plastic flow
Acta metall. Vol. 33 pp 387 - 396 (1985)

4 - FERRON G. MLIHA-TOUATI M.
Determination of the forming limits in planar isotropic and temperature sensitive sheet metals
Int. J. Mech Sci. Vol 27 N° 3 (1985) 121 - 133

5 - MOLINARI A.
Instabilité thermoviscoplatique en cisaillement simple
Journal de Mécanique théorique et appliquée
Vol 4, N° 5 (1985) 659-684

6 - CLIFTON R., MOLINARI A.
Localisation de la déformation viscoplastique en cisaillement simple : résultats exacts en théorie non linéaire
C.R. Acad Sc. Paris, t. 296 (1983)

7 - FRESSENGEAS C. MOLINARI A.
Instability and localization of plastic flow in shear at high strain-rates

8 - CHABOCHE J.L.
Viscoplastic constitutive équations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metals
Bul de l'Ac Po. des Sc. Vol. XXV N° 1 1977

9 - CLIFTON R.F., DUFFY J., HARTLEY K.A., SHAWKI T.G.
On critical conditions for shear band formation at high strain rates
Scripta metallurgica Vol 18 (1984), 443 - 448

10 - COSTIN L.S., CRISMAN E.E., HAWLEY R.H., DUFFY J.
On the localisation of plastic flow in mild steel tubes under dynamic torsional loading
Report of the division of Engineering BROWN University (1979)

11 - PHILIPS A., TANG J.L.
The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures
Int. J. Solids Structures Vol. 8 (1972) 463 - 474

CONCLUSIONS

La limite de formage d'une tôle dépend des caractéristiques du matériau (écrouissage, sensibilité à la vitesse, à la température, anisotropie initiale et induite, endommagement, ...) et de la trajectoire de déformation. Ce travail a consisté en l'étude de l'influence de plusieurs de ces paramètres.

L'écrouissage isotrope associé à la théorie de l'écoulement ne permet pas d'obtenir des courbes limites de formage en accord avec l'expérience dans le domaine du biaxé positif et pour des matériaux fortement écrouissables. Nous avons proposé l'utilisation d'un modèle d'écrouissage cinématique écrit en grandes déformations avec terme de mémoire. L'objectivité de la loi d'écrouissage est assurée par l'emploi de la dérivée de Jaumann ou de la dérivée en rotation propre.

La formulation choisie conduit à une relation contraintes - déformations $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$ du type VOCE avec un coefficient d'écrouissage fonction de la déformation. Des matériaux tels que le laiton ou l'acier inoxydable présentent ce genre de comportement.

La comparaison entre les deux théories d'écrouissage (isotrope et cinématique) montre que la limite de formage dans le biaxé positif est fortement sensible à la courbure au voisinage du point de charge de la surface d'écoulement. Une forte courbure déstabilise et ceci d'autant plus que le matériau est fortement écrouissable.

Dans la région $R < 0$ nous avons mis en évidence une instabilité en cisaillement qui est d'abord associée à une instabilité en striction (c'est le cas du chemin $R = -1/2$, traction uniaxiale) puis qui semble se développer seule pour le chemin $R = -1$. Cela nous a conduit à étudier le comportement en cisaillement simple de notre modèle. Ce comportement varie suivant la dérivée objective utilisée. Une dérivée objective intermédiaire entre la dérivée de Jaumann et la dérivée en rotation propre permet de modéliser le comportement du laiton en cisaillement simple. Toutefois les limites de formage obtenues pour $R = -1$ avec les deux dérivées (Jaumann et rotation propre) sont peu différentes.

L'influence de la température a été analysée d'abord dans le cadre d'un modèle isotrope et pour des matériaux présentant une instabilité en cisaillement simple due à un adoucissement thermique important, puis avec la théorie cinématique. Dans le premier cas, on retrouve sur les courbes limites de formage et pour le chemin R = - 1 les phénomènes observés en cisaillement simple alors qu'ils sont sensiblement atténués pour les autres chemins. Une petite variation des exposants n ou m de la loi d'écrouissage conduit à une forte élévation de la limite de formage pour R = - 1 alors que cette variation est plus modérée pour les autres chemins. Ces résultats montrent que dans le domaine R 0 le comportement en cisaillement simple est un facteur déterminant dans la localisation de l'écoulement.

Dans le second cas, nous avons introduit dans la loi d'écrouissage cinématique un terme de température qui conduit à un adoucissement thermique et ceci quel que soit le chemin. En supposant la déformation adiabatique nous avons calculé les limites de formage et nous les avons comparées à celles obtenues en supposant la déformation isotherme. L'adoucissement thermique déstabilise l'écoulement, il favorise la localisation dans la région la plus chaude.

Nous avons également considéré la sensibilité à la vitesse de déformation et l'influence du trajet de déformation. Les résultats obtenus pour des chemins complexes traduisent correctement les tendances expérimentales.

Il serait intéressant de prolonger ce travail par l'analyse de l'influence de l'anisotropie initiale associée à un écrouissage cinématique. Cependant il faut noter que l'approche phénoménologique ne permettra pas de traduire tous les comportements observés expérimentalment et c'est la raison pour laquelle nous poursuivons cette étude en y ajoutant une dimension physique. A partir de surfaces d'écoulement calculées sur les bases d'un modèle de la Physique du Matériau nous évaluons la courbure au point de charge, les calculs des limites de formage sont ensuite menés de la même manière que précédemment.

Enfin pour terminer les processus de mise en forme à grande vitesse (magnétoformage, par exemple) mettent un jeu d'autres paramètres tels que les forces d'inertie. Un prolongement important de notre travail serait d'incorporer l'influence de ces paramètres.