



**HAL**  
open science

## Cohomologie bigraduée de certains feuilletages

Az-Eddine Tihami

► **To cite this version:**

Az-Eddine Tihami. Cohomologie bigraduée de certains feuilletages. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1984. Français. NNT : 1984METZ001S . tel-01775527

**HAL Id: tel-01775527**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775527v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

3<sup>e</sup> CYCLE

d'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ERA - CNRS 040399

S/Mz  
84/1  
lex

# THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

Az - Eddine TIHAMI

## COHOMOLOGIE BIGRADUÉE DE CERTAINS FEUILLETAGES

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19840025
Cote	S/M <sub>3</sub> 84/1
Loc	Mapasik

soutenue le 18 juin 1984 , devant la Commission d'Examen

Président : M. J. MARTINET

Membres : M. A. ELKACIMI - ALAOUI  
M. C. ROGER

*Ce travail a été réalisé sous la direction de M. le Professeur Claude RÔGER, à qui je dois l'essentiel de ma formation en géométrie différentielle et topologie algébrique ; qu'il trouve ici, pour la bienveillance et l'aide incessante qu'il m'a toujours prodiguées, pour les conseils judicieux et les encouragements qu'il m'a donnés, l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude.*

*Je remercie très vivement M. le Professeur Jean MARTINET et mon ami Aziz EL KACIMI-ALAOUI qui ont bien voulu participer à mon travail, l'examiner et me faire l'honneur de faire partie du jury de cette thèse.*

*Je tiens aussi à remercier Mme DRIQUERT, qui a assuré, avec beaucoup de soin et de gentillesse, la frappe de ce mémoire.*

## INTRODUCTION

Le présent travail a fait l'objet d'un article paru sous le titre "COHOMOLOGIE BIGRADUÉE DE CERTAINS FEUILLETAGES" et écrit en collaboration avec A. EL KACIMI-ALAOUI.

C'est REINHART qui a introduit cette cohomologie en 1958.

La cohomologie bigraduée est en quelque sorte aux variétés feuilletées ce que la cohomologie de DERHAM est aux variétés.

Divers auteurs ont étudié cette cohomologie dont EL KACIMI [3] et ROGER [16].

D'une manière générale, nous nous intéressons en premier lieu au calcul de la cohomologie bigraduée de certains feuilletages linéaires du tore  $\mathbf{T}^N$ .

Ensuite on définit un complexe de CECH-DERHAM pour  $(V, \mathcal{F})$  qui nous donne une suite spectrale convergeant vers la cohomologie bigraduée de  $(V, \mathcal{F})$ .

En particulier, on calcule le terme  $E_2$  de cette suite spectrale pour un feuilletage suspendu comme étant la cohomologie d'une variété à valeur dans un fibré plat localement trivial.

Le chapitre I est consacré à des rappels sur la théorie des feuilletages.

Dans le chapitre II, nous définissons la cohomologie bigraduée  $H^{p,q}(V, \mathbb{R}) = H^q(V, \Omega^p)$ . C'est celle du complexe  $(\Lambda^{*,*}(V, \mathcal{F}), d'')$  où  $\Lambda^{p,q}(V, \mathcal{F})$  est l'espace des formes différentielles de type  $(p,q)$  et  $d''$  est la différentielle le long des feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Le chapitre III est un rappel assez complet des propriétés de cette cohomologie. Celle-ci est invariante par une homotopie dite intégrable et vérifie un théorème de Mayer-Vietoris ([3]). Ce théorème combiné à cette homotopie nous sera très utile pour établir certains de nos résultats importants.

L'objet du chapitre IV est la définition d'un complexe double de CECH-DERHAM pour les variétés feuilletées  $(V, \mathcal{F})$ . Nous obtiendrons ainsi un principe généralisé du théorème de Mayer-Vietoris pour  $(V, \mathcal{F})$  et une suite spectrale  $E_n^{k,q}(p)$  qui converge vers la cohomologie bigraduée de  $(V, \mathcal{F})$ .

Dans le chapitre V nous calculons la cohomologie bigraduée de feuilletages linéaires "diophantiens"  $\mathcal{F}_m$  sur le tore  $\mathbb{T}^{n+m}$  défini par des champs de vecteurs constants. Le résultat essentiel est donné dans le théorème V.3.2.1 par la relation :  $H^{p,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \cong \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^q(\mathbb{R}^m)$  ( $m$  est la dimension du feuilletage).

Pour un point de vue dual et avec le même type d'arguments que dans le chapitre V, nous donnons une proposition dans le chapitre VI concernant les feuilletages des tores  $\mathbb{T}^N$  définis par une 1-forme différentielle à coefficients constants.

Dans le chapitre VII, nous construisons un feuilletage qui dans un cas particulier se ramène à une suspension. Nous calculons les termes  $E_1$  et  $E_2$  de la suite spectrale.

Enfin, en application, nous donnons des calculs explicites de  $E_1(p)$  et  $E_2(p)$  pour des feuilletages linéaires du tore que nous avons appelé  $\mathbb{T}_A^n$ .

## TABLE DES MATIÈRES

<u>INTRODUCTION</u> .....	1
<u>CHAPITRE I : RAPPELS SUR LES FEUILLETAGES</u> .....	3
I.1.- Feuilletages .....	3
I.2.- Structures transverses .....	4
<u>CHAPITRE II : COHOMOLOGIE BIGRADUEE DES VARIETES FEUILLETEES</u> .....	6
II.1.- Définition de la cohomologie bigraduée ...	6
II.2.- Suite spectrale .....	10
<u>CHAPITRE III : PROPRIETES DE LA COHOMOLOGIE BIGRADUEE</u> ..	11
III.1.- Invariance par homotopie intégrable .....	11
III.2.- Théorie de Mayer-Vistoris .....	14
<u>CHAPITRE IV : PRINCIPE GENERALISE DU THEOREME DE MAYER VIO-</u> <u>TORIS</u> .....	16
<u>CHAPITRE V : COHOMOLOGIE BIGRADUEE DE FEUILLETAGES LINEAIRES</u> <u>SUR LE TORE <math>T^n</math> DEFINIS PAR DES CHAMPS DE VEC-</u> <u>TEURS CONSTANTS</u> .....	22
V.1.- Construction des feuilletages .....	22
V.2.- Description des formes de type $(p,q)$ .....	22
V.3.- Calcul de $H^{oq}(T^{n+m}, \mathcal{F}_m)$ .....	24
<u>CHAPITRE VI : AUTRES FEUILLETAGES LINEAIRES</u> .....	33
VI.1.- Cas où $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$	33
VI.2.- Cas où $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont dépendants sur $\mathbb{Q}$	35
<u>CHAPITRE VII : AUTRES EXEMPLES DE FEUILLETAGES</u> .....	36
VII.1.- Construction de ces feuilletages .....	36
VII.2.- Suite spectrale .....	37
VII.3.- Cohomologie bigraduée des suspensions ....	38
VII.4.- Un calcul explicite .....	39
<u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	46

## I - RAPPELS SUR LES FEUILLETAGES

### I.1.- FEUILLETAGES

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $m+n$ , de classe  $C^\infty$ , connexe Hausdorff et paracompacte. Soit par ailleurs une variété différentiable  $N$ , de dimension  $n$  jouissant des mêmes propriétés topologiques que  $M$ .

#### I.1.1.- DEFINITION

Un feuilletage  $\mathcal{F}$ , de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n$  sur  $M$  est la donnée d'une famille  $(U_i, \delta_i)_{i \in I}$  de submersions de classe  $C^\infty$ .

$$\delta_i : U_i \rightarrow N$$

vérifiant :

- 1)  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ .
- 2) Pour tout  $(i, j)$  appartenant à  $I^2$  et pour tout  $x$  appartenant à  $U_i \cap U_j$ , il existe un difféomorphisme  $\gamma_{ji}(x)$  de classe  $C^\infty$  d'un voisinage de  $\delta_i(x)$  dans un voisinage de  $\delta_j(x)$  tel que

$$\delta_j = \gamma_{ji}(x) \circ \delta_i$$

dans un voisinage de  $\delta_i(x)$ .

- 3)  $\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad \gamma_{ki}(x) = \gamma_{kj}(x) \circ \gamma_{ji}(x)$  dans un voisinage de  $\delta_i(x)$ .

#### I.1.2.- DEFINITIONS

Pour chaque submersion  $\delta_i : U_i \rightarrow N$  définissant le feuilletage  $\mathcal{F}$  de la variété  $M$ , les composantes connexes de chaque fibre  $\delta_i^{-1}(z)$  sont



des sous-variétés de  $M$  de dimension  $m$  appelées les plaques de  $\mathcal{F}$ . Les feuilles sont alors les variétés immergées connexes obtenues en recollant les plaques. Elles forment une partition de  $M$ .

### I.1.3.- DEFINITION

Les vecteurs tangents aux feuilles du feuilletage forment un sous-fibré  $T\mathcal{F}$  du fibré tangent  $TM$ . Soit  $\Gamma T\mathcal{F}$  le  $C^\infty(M)$ -module des sections globales de  $T\mathcal{F}$ .

$T\mathcal{F}$  est dit involutif si

$$\forall (X, Y) \in (\Gamma T\mathcal{F})^2 \quad [X, Y] \in \Gamma T\mathcal{F}$$

Il est bien connu que :

$$T\mathcal{F} \text{ intégrable} \Rightarrow T\mathcal{F} \text{ est involutif.}$$

Réciproquement, un sous fibré involutif de  $TM$  est intégrable (théorème de FRÖBENIUS). Les sous-variétés connexes maximales forment un feuilletage.

Par ailleurs on sait que : Localement, un sous-fibré intégrable  $T\mathcal{F}$  de  $TM$  est défini par la donnée de 1-formes différentielles  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  linéairement indépendantes en chaque point de  $M$  et vérifiant :

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

### I.2.- STRUCTURES TRANSVERSES

Brièvement, une structure transverse pour le feuilletage  $\mathcal{F}$  est la donnée d'une structure sur  $N$  qui est préservée par les difféomorphismes locaux  $\{\gamma_{ji}\}_{i,j \in \mathbb{I}^2}$ . Cette dernière permet souvent d'avoir une information globale sur le feuilletage.

De manière plus précise on a les :

### 1.2.1.- DEFINITIONS

1) Lorsque  $N$  est une variété orientée et lorsque les  $\gamma_{ji}$  préservent cette orientation alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit transversalement orientable.

2) Lorsque les  $\gamma_{ji}$  préservent une mesure de BOREL donnée sur  $N$ , on dit que  $\mathcal{F}$  admet une mesure transverse.

3) Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit Riemannien ou admettant une métrique transverse lorsque  $N$  est une variété Riemannienne et que les  $\gamma_{ji}$  sont des isométries de  $N$ . En d'autres termes, il existe une métrique de Riemann  $g$  invariante dans la direction complémentaire aux feuilles.

4) Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  champs de vecteurs sur  $N$ , linéairement indépendants et invariants par les  $\gamma_{ji}$  alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit transversalement parallélisable.

5) Si  $N = G$  est un groupe de Lie et si chaque  $\gamma_{ji}$  est la restriction d'une translation à gauche de  $G$  alors  $\mathcal{F}$  est dit transversalement de Lie pour le groupe de Lie  $G$ .

Ces feuilletages sont des cas particuliers de feuilletages transversalement homogènes c'est-à-dire des feuilletages tels que  $N = G/K$  où  $G$  est un groupe de Lie et  $K$  un sous-groupe fermé de  $G$  et tels que les  $\gamma_{ji}$  sont les restrictions de  $G$ -translations de  $G/K$ . Les feuilletages transversalement de Lie correspondent au cas  $K = \{e\}$ .

## II - COHOMOLOGIE BIGRADUÉE DES VARIÉTÉS FEUILLETÉES

### II.1.- DEFINITION DE LA COHOMOLOGIE BIGRADUÉE

Soit  $V$  une variété de dimension  $n+m$  munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $n$ . On choisit un supplémentaire  $\nu\mathcal{F}$  du fibré tangent aux feuilles  $T\mathcal{F}$ .

On a donc

$$TV = T\mathcal{F} \oplus \nu\mathcal{F}.$$

On en déduit une décomposition pour les fibrés en algèbres extérieures

$$(1) \quad \Lambda^k T^*V = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ 0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} \Lambda^p T^*\mathcal{F} \otimes \Lambda^q \nu^*\mathcal{F}$$

#### II.1.1.- DEFINITION :

$\Gamma(\Lambda^p T^*\mathcal{F} \otimes \Lambda^q \nu^*\mathcal{F})$  s'appelle l'espace des formes différentielles de type  $(p,q)$  sur la variété  $(V, \mathcal{F})$ .

On note cet espace  $\Lambda^{p,q}(V)$ .

#### II.1.2.- REMARQUES

a) La décomposition (1) n'est pas canonique. Elle dépend du choix du supplémentaire  $\nu\mathcal{F}$ . Cependant la cohomologie bigraduée de  $(V, \mathcal{F})$  que nous introduirons est indépendante de ce choix.

b) Une forme différentielle  $\omega$  de type  $(p,q)$  sur  $(V, \mathcal{F})$  est une forme différentielle de degré  $(p+q)$  vérifiant en outre :

$$\omega(X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}) = 0$$

sauf si  $q$  champs de vecteurs sont dans  $\Gamma(T\mathcal{F})$  et  $p$  champs dans  $\Gamma(\nu\mathcal{F})$ .

11.1.3.- LEMME :

La différentielle extérieure se décompose en la somme  $d = d' + d'' + \partial$  de trois opérateurs de bidegrés  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(2,-1)$  respectivement.

Démonstration :

Soit  $\omega$  une forme différentielle de type  $(p,q)$ . Sa différentielle extérieure est une forme de degré  $(p+q+1)$  définie par :

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{p+q+1}) &= \sum_{i=1}^{p+q+1} (-1)^{i+1} X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+q+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+q+1}) \end{aligned}$$

1) Les termes de la première sommation donnent deux types de composantes :

- a) Pour  $X_i$  tangent à  $\mathcal{F}$ ,  $\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+q+1})$  est non nulle si  $(q+1)$  champs sont tangents à  $\mathcal{F}$  et  $p$  champs dans  $\nu\mathcal{F}$ . La composante correspondante de  $d\omega$  est de type  $(p, q+1)$ .
- b) Pour  $X_i$  dans  $\nu\mathcal{F}$ ,  $\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+q+1})$  est non nulle si  $q$  champs sont dans  $T\mathcal{F}$  et  $(p+1)$  champs sont dans  $\nu\mathcal{F}$ . La composante correspondante de  $d\omega$  est de type  $(p+1, q)$ .

2) Les termes de la deuxième sommation donnent trois types de composantes :

- a) Pour  $X_i$  et  $X_j$  dans  $T\mathcal{F}$ ,  $[X_i, X_j]$  est dans  $T\mathcal{F}$ .  $\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+q+1})$  est non nulle si  $(q+1)$  champs sont dans  $T\mathcal{F}$  et  $p$  champs dans  $\nu\mathcal{F}$ . La composante correspondante de  $d\omega$  est de type  $(p, q+1)$ .

- b) Pour  $X_i$  et  $X_j$  dans  $\nu\mathcal{F}$ , on décompose  $[X_i, X_j]$  sous la forme  $(X_{ij}^T + X_{ij}^V)$  où  $X_{ij}^T$  et  $X_{ij}^V$  sont les projections de  $[X_i, X_j]$  sur  $T\mathcal{F}$  et  $\nu\mathcal{F}$  respectivement.

$$\begin{aligned} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+q+1}) = \\ \omega(X_{ij}^T, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+q+1}) \\ + \omega(X_{ij}^V, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+q+1}). \end{aligned}$$

Le second terme fournit une composante de  $d\omega$  de type  $(p+1, q)$  et le premier une composante de type  $(p+2, q-1)$ . Remarquons que si  $\nu\mathcal{F}$  est intégrable alors  $[X_i, X_j]$  est dans  $\nu\mathcal{F}$  et cette dernière composante est nulle (car  $X_{ij}^T = 0$ ). L'opérateur  $\partial$  est donc identiquement nul si et seulement si  $\mathcal{F}$  admet un feuilletage supplémentaire.

- c) Pour  $X_i$  tangent à  $\mathcal{F}$  et  $X_j$  dans  $\nu\mathcal{F}$ , on décompose  $[X_i, X_j]$  comme précédemment. On obtient deux composantes de  $d\omega$  : l'une de type  $(p, q+1)$  et l'autre de type  $(p+1, q)$ . ■

#### II.1.4.- LEMME

L'opérateur  $d''$  vérifie les propriétés

$$1) d''(\alpha \wedge \beta) = d''\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d''\beta$$

$$2) d''^2 = 0.$$

#### Démonstration

1) On a d'une part  $d = d' + d'' + \partial$  et donc  $d(\alpha \wedge \beta) = d'(\alpha \wedge \beta) + d''(\alpha \wedge \beta) + \partial(\alpha \wedge \beta)$

D'autre part

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

Soit encore

$$d(\alpha \wedge \beta) = d'\alpha \wedge \beta + d''\alpha \wedge \beta + \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d'\beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d''\beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \partial\beta.$$

En identifiant les composantes de même type on obtient 1).

2)  $d^2 = 0$  implique les relations

$$\underline{d''^2 = 0}, \quad \partial^2 = 0, \quad d'\partial + \partial d' = 0, \quad d''d' + d'd'' = 0 \quad \text{et} \quad d'^2 + d''\partial + \partial d'' = 0 \quad \blacksquare$$

On a donc un complexe pour tout  $p$  appartenant à  $\{0, 1, \dots, n\}$

$$(1) \quad \Lambda^{p,0} \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,1} \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,2} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,n+m-p}$$

#### II.1.5.- DEFINITION

Une forme  $\omega$  de type  $(p, q)$  est dite  $d''$ -fermée si  $d''\omega = 0$ . Elle est  $d''$ -exacte s'il existe une forme  $\alpha$  de type  $(p, q-1)$  telle que  $d''\alpha = \omega$ .

#### II.1.6.- DEFINITION

La cohomologie bigraduée de la variété feuilletée  $(V, \mathcal{F})$  est la cohomologie en degré  $q$  du complexe (1) ci-dessus et est notée  $H^{p,q}(V, \mathbb{R})$ .

Les germes des formes différentielles  $\omega$  de type  $(p, 0)$  vérifiant  $d''\omega = 0$  constituent un faisceau noté  $\Omega^p$ . C'est le faisceau des germes de  $p$ -formes feuilletées.

$$\Omega^p = \{\omega \in \Lambda^{p,0}, d''\omega = 0\}$$

En particulier,  $\Omega^0$  est le faisceau des germes des fonctions feuilletées c'est-à-dire des fonctions localement constantes sur les feuilles.

### II.1.7.- THEOREME DE VAISMAN

La suite de faisceaux

$$0 \rightarrow \Omega^p \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,0} \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,n+m-p}$$

est une résolution fine du faisceau  $\Omega^p$ .

Un théorème bien connu dans la théorie des faisceaux nous assure alors que :

$$H^{p,q}(V, \mathbb{R}) = H^q(V, \Omega^p) = \frac{\ker(\Lambda^{p,q} \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,q+1})}{\text{Im}(\Lambda^{p,q-1} \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,q})}$$

où  $H^q(V, \Omega^p)$  désigne le  $q^{\text{ième}}$  module de cohomologie de la variété  $V$  à coefficients dans le faisceau  $\Omega^p$ . Pour plus de détails on peut se référer aux livres de Godement [ 7 ] page 202 ou de Vaisman [19] page 60.

### II.2.- SUITE SPECTRALE

Le complexe des germes des formes feuilletées sur  $(V, \mathcal{F})$

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d'} \Omega^1 \xrightarrow{d'} \dots \xrightarrow{d'} \Omega^n \rightarrow 0$$

est une résolution du faisceau constant  $\mathbb{R}$ .

Il lui correspond une suite spectrale  $(E_r)$  qui converge vers la cohomologie de De Rham de  $V$ . On a le

#### II.2.1.- THEOREME (Sarkaria)

Le terme  $E_1^{p,q}$  de cette suite spectrale s'identifie à  $H^{p,q}(V, \mathbb{R})$ .

### III - PROPRIÉTÉS DE LA COHOMOLOGIE BIGRADUÉE

#### III.1.- INVARIANCE PAR HOMOTOPIE INTEGRABLE

La cohomologie bigraduée des variétés feuilletées n'est pas invariante par homotopie. Cependant El Kacimi [ 3 ] a montré qu'elle est invariante par une homotopie dite intégrable, notion introduite par Haefliger [10]. Voici un exemple simple illustrant cela :

Soit  $V = S^1 \times [0,1]$  feuilleté par des cercles  $S^1 \times \{t\}$  et  $S^1$  feuilleté par  $S^1$ . On a bien une rétraction par déformation de  $S^1 \times [0,1]$  sur  $S^1$  qui préserve les feuilletages, mais on montre facilement que :

$$H^{0,1}(V) = C^\infty([0,1]) \quad \text{et} \quad H^{0,1}(S^1) = \mathbb{R}.$$

#### III.1.2.- DEFINITION

Soient  $(V, \mathcal{F})$  et  $(V', \mathcal{F}')$  deux variétés feuilletées et soit  $f : V \rightarrow V'$ . On dit que l'application  $f$  préserve (ou conjugue) les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  si elle envoie une feuille de  $\mathcal{F}$  sur une feuille de  $\mathcal{F}'$ .

#### III.1.3.- DEFINITION

Soient  $f$  et  $g$  deux applications différentiables de  $(V, \mathcal{F})$  dans  $(V', \mathcal{F}')$ . Une homotopie intégrable de  $f$  à  $g$  est une application  $H$  différentiable de  $(V \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$  dans  $(V', \mathcal{F}')$  conjuguant les feuilletages  $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$  et  $\mathcal{F}'$  et telle que :

$$\begin{aligned} H(\cdot, t) &= f \quad \text{pour} \quad t \leq 0 \\ \text{et} \quad H(\cdot, t) &= g \quad \text{pour} \quad t \geq 1 \end{aligned}$$



III.1.4.- DEFINITION

Deux variétés feuilletées  $(V, \mathcal{F})$  et  $(V', \mathcal{F}')$  ont même type d'homotopie intégrable s'il existe une application  $f$  de  $V$  dans  $V'$ , une application  $g$  de  $V'$  dans  $V$  et des homotopies intégrables respectivement de  $f \circ g$  à  $Id_V$ , et de  $g \circ f$  à  $Id_{V'}$ .

On munit  $V \times \mathbb{R}$  du feuilletage  $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note :

$$J_t : V \rightarrow V \times \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x, t)$$

une injection de la variété feuilletée  $V$  dans la variété feuilletée  $V \times \mathbb{R}$ .

On montre ([ 3 ]) l'existence d'un opérateur d'homotopie

$$K : \Lambda^{p,*}(V \times \mathbb{R}) \rightarrow \Lambda^{p,*}(V)$$

vérifiant

$$1) K(\Lambda^{p,q}(V \times \mathbb{R})) \subset \Lambda^{p,q-1}(V)$$

$$2) d'' \circ K + K \circ d'' = J_1^* - J_0^*.$$

La construction de  $K$  se fait comme dans le cas usuel. Dans le modèle local  $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  feuilletée par les plans  $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ . On pose

$$Kf = 0 \text{ si } f \text{ est une fonction différentiable de } V \times \mathbb{R}$$

$$K\alpha = 0 \text{ si } \alpha = a \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}$$

$$K\beta = \left( \int_0^1 b \, dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_{q-1}}$$

$$\text{si } \beta = b \, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_{q-1}}$$

III.1.5.- PROPOSITION

Soient  $f$  et  $g$  deux applications différentiables de  $(V, \mathcal{F})$  dans

$(V', \mathcal{F}')$  préservant les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . S'il existe une homotopie intégrable de  $f$  à  $g$  alors  $f$  et  $g$  induisent le même homomorphisme en cohomologie bigraduée.

Démonstration

Si  $H : V \times \mathbb{R} \rightarrow V'$  est une homotopie intégrable de  $f$  à  $g$  on a  $H \circ J_0 = f$  et  $H \circ J_1 = g$ . Si  $\alpha$  est une forme de type  $(p, q)$  et  $d''$ -fermée sur  $V'$  alors on a :

$$\begin{aligned} g^* \alpha - f^* \alpha &= J_1^* H^* \alpha - J_0^* H^* \alpha \\ &= d''K(H^* \alpha) + Kd''(H^* \alpha) \\ &= d''K(H^* \alpha) + KH^*(d''\alpha) \\ &= d''K(H^* \alpha) \end{aligned}$$

$g^* \alpha$  et  $f^* \alpha$  sont donc  $d''$ -cohomologues. ■

III.1.6.- COROLLAIRE

Si  $(V, \mathcal{F})$  et  $(V', \mathcal{F}')$  ont même type d'homotopie intégrable alors elles ont des groupes de cohomologie bigraduée isomorphes.

III.1.7.- DEFINITION

Soit  $W \hookrightarrow V$  une sous variété de  $V$  transverse à  $\mathcal{F}$  munie du feuilletage  $\mathcal{F}|_W$ . On dit qu'une application

$$r : V \rightarrow W$$

est une rétraction par déformation intégrable si :

- (i)  $r$  est une rétraction par déformation.
- (ii) la restriction de  $r$  à chaque feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$  est une rétraction par déformation de  $F$  sur  $F \cap W$ .

III.1.8.- COROLLAIRE

Si  $W$  est un rétracte par déformation intégrable de  $V$  alors  $V$  et  $W$  ont mêmes groupes de cohomologie bigraduée.

El Kacimi [3] a montré un

III.2.- THEOREME DE MAVER-VIETORIS

Soient  $(V, \mathcal{F})$  une variété feuilletée et  $M$  et  $N$  deux sous-variétés fermées de  $V$  et telles que :

1)  $M \cup N = V$

2)  $\partial M = \partial N$  est transverse à  $\mathcal{F}$ .

On a  $K = M \cap N = \partial M = \partial N$  qui sont munis respectivement des feuilletages induits  $\mathcal{F}_K, \mathcal{F}_M$  et  $\mathcal{F}_N$ , et un diagramme de variétés feuilletées et d'applications préservant les feuilletages qui est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 M \cap N & \xleftarrow{\ell} & N \\
 \downarrow k & & \downarrow j \\
 M & \xleftarrow{i} & V
 \end{array}$$

$i, j, k$  et  $\ell$  désignant des inclusions.

Soient aussi les applications

$$\lambda : \Lambda^{p,*}(V) \rightarrow \Lambda^{p,*}(M) \oplus \Lambda^{p,*}(N)$$

$$\omega \rightarrow (i^*\omega, -j^*\omega)$$

$$\mu : \Lambda^{p,*}(M) \oplus \Lambda^{p,*}(N) \rightarrow \Lambda^{p,*}(K)$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow k^*\alpha + \ell^*\beta.$$

III.2.1.- LEMME

*La suite*

$$0 \rightarrow \Lambda^{p,*}(V) \xrightarrow{\lambda} \Lambda^{p,*}(M) \oplus \Lambda^{p,*}(N) \xrightarrow{\mu} \Lambda^{p,*}(K) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

La démonstration se fait comme dans le cas usuel.

III.2.2.- THEOREME

*A la suite exacte précédente correspond une suite exacte longue en cohomologie bigraduée.*

$$0 \rightarrow H^0(V, \Omega^p) \rightarrow H^0(M, \Omega^p) \oplus H^0(N, \Omega^p) \rightarrow H^0(K, \Omega^p) \xrightarrow{\partial} H^1(V, \Omega^p) \rightarrow \dots$$

Ce théorème va nous permettre de calculer la suite spectrale de certains feuilletages linéaires du tore. En fait, nous allons généraliser ce théorème en introduisant un complexe de ČECH-DERHAM analogue à celui de [ 1 ] dans le cas classique. Nous en déduisons un principe généralisé pour la cohomologie bigraduée.

IV - PRINCIPE GENERALISÉ DU THÉORÈME  
DE MAYER VIETORIS

Soit  $V$  une variété munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $n$  et d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour tout  $(k+1)$ -uple  $(i_0, i_1, \dots, i_k)$  de  $\mathbb{N}^{k+1}$  on pose :

$$U_{i_0 i_1 \dots i_k} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$$

On a une suite d'inclusion d'ouverts :

$$V \longleftarrow \begin{array}{c} \text{|||} \\ i_0 \end{array} U_{i_0} \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \end{array} \begin{array}{c} \text{|||} \\ i_0 < i_1 \end{array} U_{i_0 i_1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \\ \xleftarrow{\partial_2} \end{array} \begin{array}{c} \text{|||} \\ i_0 < i_1 < i_2 \end{array} U_{i_0 i_1 i_2} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \dots$$

où  $\partial_i$  est l'inclusion qui "ignore" le  $i^{\text{ème}}$  ouvert.

On fixe un entier  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Cette suite d'inclusions induit alors une suite de restrictions :

$$\Lambda^{p,*}(V) \xrightarrow{r} \prod_{i_0} \Lambda^{p,*}(U_{i_0}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} \prod_{i_0 < i_1} \Lambda^{p,*}(U_{i_0 i_1}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \end{array} \dots$$

où  $\delta_0$ , par exemple, est induit par l'inclusion

$$\partial_0 : \begin{array}{c} \text{|||} \\ i_0 \end{array} U_{i_0 i_1 \dots i_k} \longrightarrow U_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

et donc est la restriction

$$\delta_0 : \Lambda^{p,*}(U_{i_1 i_2 \dots i_k}) \longrightarrow \prod_{i_0} \Lambda^{p,*}(U_{i_0 i_1 \dots i_k}).$$

IV.1.- DEFINITION

Si  $\omega \in \prod_{i_0 < \dots < i_k} \Lambda^{p,q}(U_{i_0 i_1 \dots i_k})$  alors  $\omega$  a des composantes

$\omega_{i_0 i_1 \dots i_k} \in \Lambda^{p,q}(U_{i_0 i_1 \dots i_k})$  et on obtient alors un opérateur Cobord

$$\delta : \prod_{i_0 < \dots < i_k} \Lambda^{p,*}(U_{i_0 \dots i_k}) \longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_{k+1}} \Lambda^{p,*}(U_{i_0 i_1 \dots i_{k+1}})$$

défini par :

$$\begin{aligned} (\delta\omega)_{i_0 i_1 \dots i_{k+1}} &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \delta_j \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{k+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{k+1}} \end{aligned}$$

#### IV.2.- PROPOSITION

$$\delta^2 = 0$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} (\delta^2\omega)_{i_0 i_1 \dots i_{k+2}} &= \sum (-1)^j (\delta\omega)_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{k+2}} \\ &= \sum_{\ell < j} (-1)^{j+\ell} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_\ell \dots \hat{i}_j \dots i_{k+2}} \\ &= \sum_{\ell > j} (-1)^{j+\ell} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_{k+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\omega \dots \alpha \dots \beta \dots = -\omega \dots \beta \dots \alpha \dots$

#### IV.3.- PROPOSITION

La suite

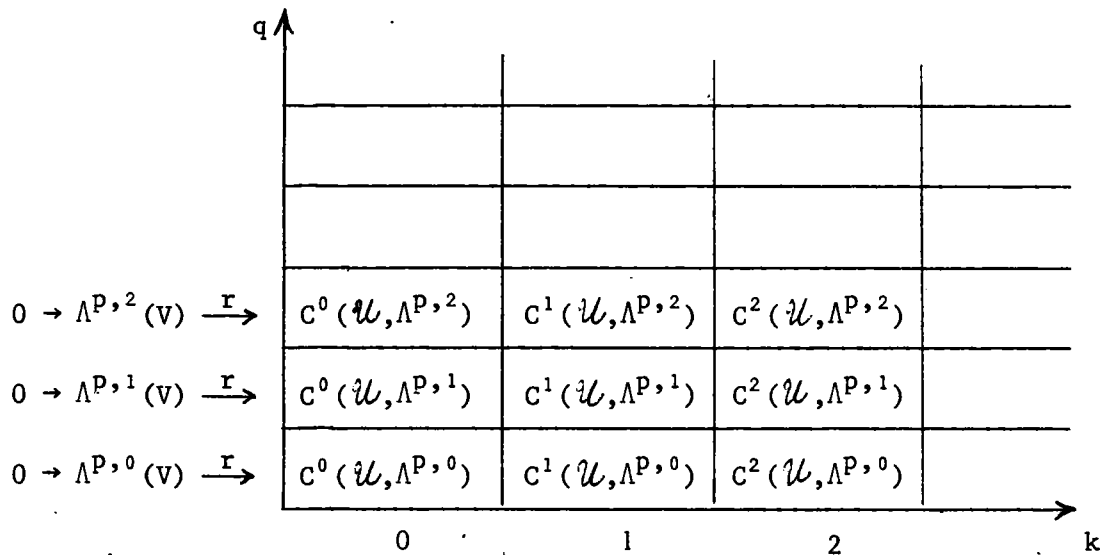
$$0 \rightarrow \Lambda^{p,*}(V) \rightarrow \prod_{i_0} \Lambda^{p,*}(U_{i_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{i_0 < i_1} \Lambda^{p,*}(U_{i_0 i_1}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

est exacte.

On pose  $C^k(\mathcal{U}, \Lambda^{p,q}) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} \Lambda^{p,q}(U_{i_0 i_1 \dots i_k})$

et  $D_p = \delta + (-1)^k d''$  ( $d''$  étant la différentielle le long des feuilles).

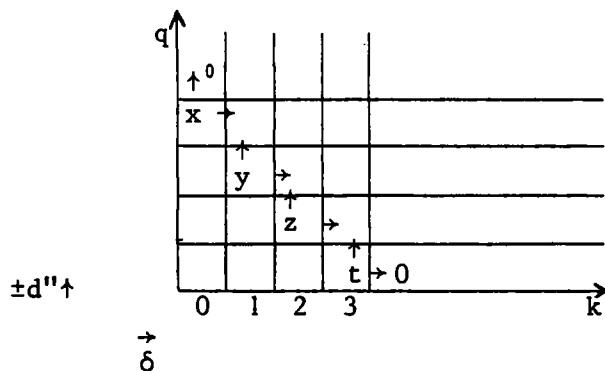
La suite exacte précédente donne lieu à un complexe double augmenté.



où les applications horizontales sont les opérateurs différence  $\delta$  et les applications verticales les opérateurs de différentiation le long des feuilles  $d''$ .

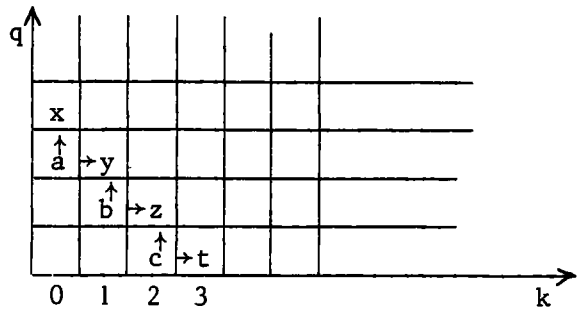
Précisons un peu ce complexe double  $(C^k(\mathcal{U}, \Lambda^{p,q}), D_p)$  : un  $D_p$ -cocycle  $\omega$  de degré 3 (par exemple) est donné par  $\omega = x+y+z+t$  avec

$$\begin{cases} d''x = 0 \\ \delta x = -d''y \\ \delta y = +d''z \\ \delta z = -d''t \\ \delta t = 0 \end{cases}$$



$\omega = x+y+z+t$  est un  $D_p$ -cobord s'il existe  $\alpha = a+b+c$  tel que

$$\begin{cases} x = d''a \\ y = \delta a - d''b \\ z = \delta b + d''c \\ t = \delta c \end{cases}$$



IV.4.- PROPOSITION

La restriction

$$\kappa : \Lambda^{p,*}(V) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Lambda^{p,*})$$

induit un isomorphisme en cohomologie :

$$\kappa^* : H^{p,*}(V) \rightarrow H_{D_p}^p(C^*(\mathcal{U}, \Lambda^{p,*}))$$

Démonstration :

$r$  est application entre complexes de cochaines puisque

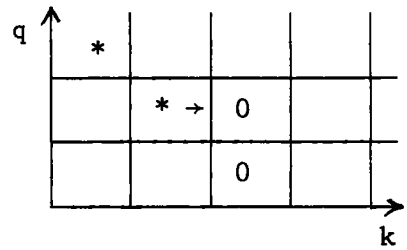
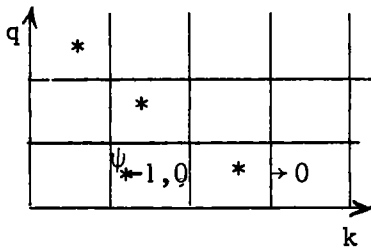
$$D_p r = (\delta \pm d'')r = \delta r \pm d''r = d''r = r d''.$$

$r$  induit donc une application  $r^*$  en cohomologie.

a)  $r^*$  est surjective

Soit  $\phi$  un  $D_p$ -cocycle. La composante  $\phi_{*,0}$  de  $\phi$  est donc  $\delta(\psi_{*-1,0})$ . Maintenant,  $\theta = \phi - D_p(\psi_{*-1,0})$  est dans la même classe de cohomologie que  $\phi$  et est telle que  $\theta_{*,0} = 0$ .





En itérant ce procédé suffisamment de fois, on "déplace"  $\phi$  dans sa classe de cohomologie à un cocycle  $\phi' = \phi_{0,*}$   
 $\phi'$  est une forme globale puisque  $d''\phi' = 0$  et  $\delta\phi' = 0$ .

b)  $r^*$  est injective :

Si  $r^*(\omega) = D_p(\phi)$ , alors on "déplace"  $\phi$  dans sa classe de cohomologie jusqu'à une cochaîne  $\phi'$  avec seulement une composante  $(0,*)$ .

Comme  $\delta\phi = 0$ ,  $\omega$  est une forme globale  $M$  et donc  $\omega = \pm d''\phi$  est exacte. ■

IV.5.- SUITE SPECTRALE

IV.5.1.- PROPOSITION

Le double complexe  $(C^*(\mathcal{U}, \Lambda^{p,*}), D_p)$  définit une suite spectrale  $E_n(p)$  dont les termes  $E_1^{k,q}(p)$  et  $E_2^{k,q}(p)$  sont respectivement  $C^k(\mathcal{U}, H^{p,q})$  et  $H^k(\mathcal{U}, H^{p,q})$  et qui converge vers la cohomologie bigraduée de  $(M, \mathcal{F})$ .

$H^{p,q}$  désigne le préfaisceau localement constant sur  $M$  qui à tout ouvert  $V$  associe  $H^{p,q}(V, \mathcal{F})$ .

En particulier, lorsque le recouvrement  $\mathcal{U}$  est formé de deux ouverts  $U_0$  et  $U_1$  on a :

$$E_2^{k,q}(p) = 0 \text{ pour } k \geq 2 \text{ et } q \geq 0$$

et 
$$E_2^{k,q}(p) = E_\infty^{k,q}(p)$$

et donc  $H^{p,q}(M, \mathcal{F}) = E_{\infty}^{0q}(p) \oplus E_{\infty}^{1,q-1}(p) = E_2^{0q}(p) \oplus E_2^{1,q-1}(p)$ .

On généralise le théorème de Mayer-Vietoris pour la cohomologie bigraduée décrit dans [3].

Comme

$$E_2^{k,q}(p) = H_{\delta} H_d(C^*(U, \Lambda^p, *))$$

on a 
$$E_2^{0q}(p) = \left\{ \eta = (\eta_0, \eta_1) \in H^{pq}(U_0, \mathcal{F}) \times H^{pq}(U_1, \mathcal{F}) / \right.$$
  

$$\left. (\delta\eta)_{01} = \eta_1|_{U_0 \cap U_1} - \eta_0|_{U_0 \cap U_1} = 0 \right\}$$

autrement dit

$$E_2^{0q}(p) = \left\{ \eta = (\eta_0, \eta_1) \in H^{pq}(U_0, \mathcal{F}) \times H^{pq}(U_1, \mathcal{F}) / \right.$$
  

$$\left. \eta_0|_{U_0 \cap U_1} = \eta_1|_{U_0 \cap U_1} \right\}$$

On montre aussi que

$$E_2^{1,q-1}(p) = H^{p,q-1}(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}) / \langle \alpha_0 - \alpha_1 \rangle \text{ où } \alpha_0 \text{ et } \alpha_1 \text{ sont}$$

induites par des classes de cohomologie respectivement dans  $H^{p,q-1}(U_0, \mathcal{F})$  et  $H^{p,q-1}(U_1, \mathcal{F})$ .

Nous appliquerons ces résultats pour calculer la cohomologie bigraduée de certains feuilletages.

V - COHOMOLOGIE BIGRADUÉE  
DE FEUILLETAGES LINÉAIRES SUR LE TORE  $\mathbb{T}^N$   
DÉFINIS PAR DES CHAMPS DE VECTEURS CONSTANTS

V.1.- CONSTRUCTION DES FEUILLETAGES

Soient  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$   $m$  vecteurs linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Ils engendrent donc un sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  de dimension  $m$ . On considère le feuilletage  $\mathcal{F}_m$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  dont les feuilles sont les  $m$ -plans parallèles à  $V$ . Ce feuilletage est invariant par les translations entières et définit donc un feuilletage sur le tore

$$\mathbb{T}^{n+m} = \frac{\mathbb{R}^{n+m}}{\mathbb{Z}^{n+m}}. \text{ Les feuilles sont des } m\text{-plans ou des cylindres.}$$

On peut remarquer aussi que ce feuilletage est transversalement de Lie pour le groupe abélien  $\mathbb{R}^n$  car on peut le définir à l'aide de  $n$  formes fermées linéairement indépendantes.

V.2.- DESCRIPTION DES FORMES DE TYPE  $(p, q)$

Le fibré tangent à  $\mathbb{T}^{n+m}$  est trivial. Il s'écrit comme somme de Whitney de deux fibrés triviaux  $T\mathcal{F}_m$  et  $\nu\mathcal{F}_m$ .

On en déduit la décomposition :

$$\Lambda^* T^*(\mathbb{T}^{n+m}) = \Lambda^* \nu^*(\mathcal{F}_m) \otimes \Lambda^* T^*(\mathcal{F}_m)$$

soit 
$$\Lambda^* T^*(\mathbb{T}^{n+m}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n+m}) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^n \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^m$$

Cette dernière égalité signifie qu'une forme  $\omega$  de type  $(p, q)$  sur  $(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  s'écrit sous la forme :

$$\omega = \sum_{I_p, J_q} f_{I_p J_q} \theta_{I_p} \wedge \theta_{J_q}$$

où 
$$I_p = \{(i_1, \dots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \text{ tels que } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

$J_q = \{(j_1, \dots, j_q) \in (\mathbb{N}^*)^q \text{ tels que } 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m\}$ ,

$\theta_{I_p}^-$  est une  $p$ -forme extérieure sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$\theta_{J_q}$  est une  $q$ -forme extérieure sur  $\mathbb{R}^m$

et  $f_{I_p J_q}$  est une fonction sur  $\mathbb{T}^{n+m}$ .

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum_{I_p, J_q} f_{I_p J_q} \theta_{I_p}^- \wedge \theta_{J_q}\right) \\ &= \sum_{I_p, J_q} (df_{I_p J_q} \wedge \theta_{I_p}^- \wedge \theta_{J_q} + f_{I_p J_q} d\theta_{I_p}^- \wedge \theta_{J_q} + (-1)^p f_{I_p J_q} \theta_{I_p}^- \wedge d\theta_{J_q}) \end{aligned}$$

Or  $d\theta_{I_p}^- = d\theta_{J_q} = 0$  car  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  sont des algèbres de Lie abéliennes.

Donc

$$d\omega = \sum_{I_p, J_q} df_{I_p J_q} \wedge \theta_{I_p}^- \wedge \theta_{J_q} \text{ et par suite}$$

$$d''\omega = \sum_{I_p, J_q} d''f_{I_p J_q} \wedge \theta_{I_p}^- \wedge \theta_{J_q},$$

$$d'\omega = \sum_{I_p, J_q} d'f_{I_p J_q} \wedge \theta_{I_p}^- \wedge \theta_{J_q},$$

et  $\partial\omega = 0$  par intégrabilité de  $\nu \mathcal{F}_m$ .

D'après le théorème de WAISMAN on a :

$$H^{p,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) =$$

$$\frac{\text{Ker}[C^\infty(\mathbb{T}^{n+m}) \otimes \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^q(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{d''} C^\infty(\mathbb{T}^{n+m}) \otimes \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^{q+1}(\mathbb{R}^m)]}{\text{Im}[C^\infty(\mathbb{T}^{n+m}) \otimes \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^{q-1}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{d''} C^\infty(\mathbb{T}^{n+m}) \otimes \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^q(\mathbb{R}^m)]}$$

c'est-à-dire que

$$H^{p,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) = H^q(\mathbb{T}^{n+m}, \Omega^0) \otimes \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$$

Le calcul de  $H^{p,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  revient donc à celui de  $H^{0q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$ .

### V.3.- CALCUL DE $H^{0q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$

Nous procéderons par étapes :

#### V.3.1.- Cas d'un flot $\mathcal{F}_1$ sur $\mathbb{T}^{n+1}$

Ce calcul a déjà été fait pour un flot sur  $\mathbb{T}^2$  (voir [15]). Le calcul se fait de manière analogue sur  $\mathbb{T}^{n+1}$ .

Soit  $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \dots + \alpha_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$  un champ linéaire

sur  $\mathbb{T}^n$  où  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  sont les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Si  $\mathcal{F}_1$  est à orbites denses, c'est le

#### V.3.1.1.- Cas où $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$

Toute fonction constante sur les feuilles est constante partout.

Donc  $H^{00}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}_1) \cong \mathbb{R}$

Notons  $\eta$  la 1-forme duale du champ  $X$  (i.e.  $\eta(X) = 1$ ).  
Toute forme  $\omega$  de type  $(0,1)$  sur  $(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}_1)$  s'écrit :

$$\omega = f(x_1, \dots, x_{n+1})$$

où  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{T}^{n+1}$ .

$\omega$  est  $d''$ -fermée car de degré maximum sur les feuilles.

$\omega$  est  $d''$ -exacte s'il existe une fonction  $h$  sur  $\mathbb{T}^{n+1}$  telle que  $d''h = \omega$ .

En développant  $f$  et  $h$  en série de Fourier, cette équation se ramène au système :

$$(1) \quad 2i\pi(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_{n+1}\alpha_{n+1})h_{m_1 \dots m_{n+1}} = f_{m_1 \dots m_{n+1}}$$

où  $h_{m_1 \dots m_{n+1}}$  et  $f_{m_1 \dots m_{n+1}}$  désignent les coefficients de Fourier de  $h$  et  $f$  respectivement et  $(m_1, \dots, m_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ .

$(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  étant  $\mathbb{Q}$ -indépendants le système (1) est équivalent à :

$$(S) \quad h_{m_1 \dots m_{n+1}} = \frac{f_{m_1 \dots m_{n+1}}}{2i\pi(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_{n+1}\alpha_{n+1})}$$

pour  $(m_1, \dots, m_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$

et  $h_{0 \dots 0}$  est arbitraire car on suppose  $f_{0 \dots 0} = 0$ .

La convergence de la série de Fourier de  $h$  dépendra de la nature arithmétique de  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ .

#### V.3.1.1.1. DEFINITION

Un vecteur  $X = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont les composantes sont indépendantes sur  $\mathbb{Q}$  est dit :

1) de "Liouville" si :

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^*, \exists (m_1, \dots, m_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} /$$

$$|m_1 + m_2 \alpha_2 + \dots + m_{n+1} \alpha_{n+1}| < \frac{1}{(|m_1| + \dots + |m_{n+1}|)^\delta}$$

2) diophantien si :

$$\exists \delta \in \mathbb{N}^*, \exists A > 0 /$$

$$|m_1 + m_2 \alpha_2 + \dots + m_{n+1} \alpha_{n+1}| > \frac{A}{(|m_1| + \dots + |m_{n+1}|)^\delta}$$

pour  $m_1, \dots, m_{n+1}$  assez grands.

Revenons au système S :

a) Si  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  vérifie une condition diophantienne alors

$$|h_{m_1 \dots m_{n+1}}| < \frac{|f_{m_1 \dots m_{n+1}}| (|m_1| + \dots + |m_{n+1}|)^\delta}{2\pi A}$$

pour  $(m_1, \dots, m_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$

Comme les  $f_{m_1 \dots m_{n+1}}$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $C^\infty$  on a :

$$\forall t \in \mathbb{N}^* \quad f_{m_1 \dots m_{n+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(|m_1| + \dots + |m_{n+1}|)^t}\right)$$

donc la série de Fourier de h converge.

b) Si  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  est "de Liouville" alors :

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall A > 0, \exists (m_1^k, \dots, m_{n+1}^k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{n-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$$

tel que :

$$|m_1^k + m_2^k \alpha_2 + \dots + m_{n+1}^k \alpha_{n+1}| < \frac{A}{(|m_1^k| + \dots + |m_{n+1}^k|)^k}$$

Soit alors la fonction  $f$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f_{m_1^k \dots m_{n+1}^k} = m_1^k + m_2^k \alpha_2 + \dots + m_{n+1}^k \alpha_{n+1} \\ \bullet \text{les autres coefficients de Fourier sont choisis parmi la} \\ \quad \text{suite à décroissance rapide.} \end{array} \right.$$

On montre :

- i)  $f$  est bien  $C^\infty$ , (c'est fastidieux)  
 c'est-à-dire que pour chaque  $t$  fixé :

$$|f_{m_1^k \dots m_{n+1}^k}| (|m_1^k| + \dots + |m_{n+1}^k|)^t \rightarrow 0 \quad \text{quand } m_1^k, \dots, m_{n+1}^k \rightarrow \infty.$$

- ii) les  $h_{m_1^k \dots m_n^k}$  fournis par le système (S) ne peuvent plus être des coefficients de Fourier d'une fonction  $C^\infty$ .

En effet :

$$|h_{m_1^k \dots m_{n+1}^k}| = \frac{|m_1^k + m_2^k \alpha_2 + \dots + m_{n+1}^k \alpha_{n+1}|}{2\pi |m_1^k + m_2^k \alpha_2 + \dots + m_{n+1}^k \alpha_{n+1}|} = B$$

et pour  $t = 1$  par exemple

$$|h_{m_1^k \dots m_{n+1}^k}| (|m_1^k| + \dots + |m_{n+1}^k|) = B (|m_1^k| + \dots + |m_{n+1}^k|)$$

qui tend vers l'infini quand  $m_1^k, \dots, \text{et } m_{n+1}^k$  tendent vers l'infini.



On a donc construit une infinité de formes de type (0,1) non cohomologues deux à deux et qui n'admettent pas de primitive au sens de d".

En résumé, on a montré le :

V.3.1.1.2.- THEOREME

Si le vecteur  $X = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  est

i) de Liouville, alors

$H^{0,1}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbb{F}_1)$  est un espace vectoriel topologique de dimension infinie et non séparé dont le séparé associé est isomorphe à  $\mathbb{R}$ .

ii) Diophantien, alors

$H^{0,1}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbb{F}_1)$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$  et donc

$$H^{p,1}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbb{F}_1) = \mathbb{R} C_n^p \otimes H^{0,1}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbb{F}_1) \cong \mathbb{R} C_n^p.$$

Examinons maintenant le

V.3.1.2.- Cas où  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  sont dépendants sur  $\mathbb{Q}$

Si  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1})$  constitue une base du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{n+1})$  alors le champ :

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \alpha_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

s'écrit

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + \alpha_{r+1} \frac{\partial}{\partial y_{r+1}} \quad \text{dans } \mathbb{T}^{n+1} \text{ muni des}$$

coordonnées  $(y_1, \dots, y_{n+1})$ .

Cette dernière expression s'obtient en remplaçant dans X, les réels  $\alpha_{r+2}, \alpha_{r+3}, \dots, \alpha_{n+1}$  par des combinaisons linéaires sur  $\mathbb{Q}$  de  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1})$

et en mettant ces derniers en facteurs communs.

On a alors que toute orbite du champ  $X$  passant dans un  $\mathbb{T}^{r+1} \times \{y_{r+2}\} \times \dots \times \{y_{n+1}\}$   $y$  est contenue et  $y$  est dense.

De plus,  $X$  définit un flot transversalement parallélisable sur  $\mathbb{T}^{n+1}$ . Nous sommes dans la situation du

V.3.1.2.1.- THEOREME ([15])

Si  $\phi$  est un flot transversalement parallélisable sur une variété  $M$  compacte alors

- 1) Les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale  $\bar{L} = F \leftrightarrow M$   
 $\downarrow$   
 $W$

- 2) Le feuilletage induit sur la fibre  $F$  est transversalement de Lie à feuilles denses.

On en déduit que pour tout  $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$H^{p,1}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}_1) = E_1^{p,1}(\mathbb{T}^{n+1}) = E_1^{p,1}(\mathbb{T}^{r+1}) \otimes C^\infty(\mathbb{T}^{n-r})$$

et donc d'après le théorème IV.3.1.1.2 ii) et la remarque à la fin de IV.2,

$$E_1^{p,0}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}_1) = E_1^{p,1}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}_1) = \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes C^\infty(\mathbb{T}^{n-r}),$$

lorsque  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1})$  vérifie une condition diophantienne.

Après le cas du flot on considère le

V.3.2.- Cas d'un feuilletage diophantien  $\mathcal{F}_m$

Un tel feuilletage est défini par  $m$  champs de vecteurs  $X_1, X_2, \dots, X_m$  linéaires sur  $\mathbb{T}^{n+m}$  tous diophantiens.

V.3.2.1.- THEOREME

On a  $H^{0q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \simeq \Lambda^q(\mathbb{R}^m)$  pour tout  $q = 1, 2, \dots, m$  et par conséquent :

$$H^{pq}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \cong \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^q(\mathbb{R}^m).$$

Démonstration

Supposons le théorème vrai pour  $\dim \mathcal{F} \leq a$  et dimension du tore  $\leq b$  ( $a \leq b$ ).

Soit  $\mathcal{F}_{a+1}$  un feuilletage diophantien sur  $\mathbb{T}^{b+1}$ .

Considérons la fibration triviale  $\mathbb{T}^b \hookrightarrow (\mathbb{T}^{b+1}, \mathcal{F}_{a+1})$   
 $\downarrow$   
 $\mathbb{S}^1$

En coupant  $\mathbb{T}^{b+1}$  suivant deux fibres on obtient deux ouverts  $U_0$  et  $U_1$  difféomorphes à  $\mathbb{T}^b \times ]0, 1[$  et tels que

$$U_0 \cap U_1 \simeq \mathbb{T}^b \times ]0, 1[ \perp\!\!\!\perp \mathbb{T}^b \times ]0, 1[.$$

$(U_0, \mathcal{F}_{a+1})$  et  $(U_1, \mathcal{F}_{a+1})$  se rétractent par déformation intégrable sur  $(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a)$ .

$(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}_{a+1})$  se rétracte sur  $(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \perp\!\!\!\perp (\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a)$ .

On en déduit (cf V.3.1.1.2) que

$$H^{0q}(U_0, \mathcal{F}_{a+1}) \simeq H^{0q}(U_1, \mathcal{F}_{a+1}) \simeq \Lambda^q(\mathbb{R}^a) = \mathbb{R} \binom{q}{a}$$

et  $H^{0q}(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}_{a+1}) \simeq \Lambda^q(\mathbb{R}^a) \otimes \Lambda^q(\mathbb{R}^a)$ .

On écrit alors la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour la coho-

mologie bigraduée ([3]) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^{0,0}(\mathbb{T}^{b+1}, \mathcal{F}_{a+1}) & \rightarrow & H^{0,0}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,0}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) & \rightarrow & H^{0,0}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,0}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \\
 & & & & (\alpha, \beta) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\alpha-\beta, \alpha-\beta) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 H^{0,q-1}(\mathbb{T}^{b+1}, \mathcal{F}_{a+1}) & \rightarrow & H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) & \rightarrow & H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \\
 & & & & (\alpha, \beta) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\alpha-\beta, \alpha-\beta) \\
 H^{0,q}(\mathbb{T}^{b+1}, \mathcal{F}_{a+1}) & \rightarrow & H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) & \rightarrow & H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \\
 & & & & (\alpha, \beta) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\alpha-\beta, \alpha-\beta) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 H^{0,a+1}(\mathbb{T}^{b+1}, \mathcal{F}_{a+1}) & \rightarrow & 0 & & & & 
 \end{array}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 H^{0,q}(\mathbb{T}^{b+1}, \mathcal{F}_{a+1}) &= \ker[H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \rightarrow H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a)] \\
 &\quad \oplus \text{Im}[H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \oplus H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a) \rightarrow H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a)] \\
 &\quad \oplus H^{0,q-1}(\mathbb{T}^b, \mathcal{F}_a)] \\
 &= \Lambda^{q-1}(\mathbb{R}^a) \oplus \Lambda^q(\mathbb{R}^a) \\
 &= \Lambda^q(\mathbb{R}^{a+1})
 \end{aligned}$$

car  $\binom{q-1}{a} + \binom{q}{a} = \binom{q}{a+1}$

Le résultat est vrai pour un flot linéaire diophantien sur un tore quelconque ; il l'est donc pour un feuilletage diophantien  $\mathcal{F}_m$  sur  $\mathbb{T}^{n+m}$ . ■

Remarque : Le tore  $\mathbb{T}^n$  muni d'un flot linéaire dense est un "modèle" dans le sens du

V.3.2.1.1.- THEOREME ([2])

Soit  $\phi$  un  $G$ -flot de Lie à feuilles denses sur une variété différentielle  $M$ , de dimension  $n$ , compacte et connexe. On suppose de plus que  $\pi_1(G) = 0$ . On a alors

- 1)  $G = \mathbb{R}^{n-1}$
- 2)  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{T}^n$
- 3)  $\phi$  est différemment conjugué à un flot dense sur  $\mathbb{T}^n$ .

## VI - AUTRES FEUILLETAGES LINÉAIRES

Nous considérons maintenant les feuilletages linéaires du tore  $\mathbb{T}^n$  définis par une 1-forme différentielle à coefficients constants.

Nous en calculons la cohomologie bigraduée.

Soit  $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$  une 1-forme sur  $\mathbb{T}^n$  avec  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  des réels. Examinons le

### VI.1.- CAS OU $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ SONT INDEPENDANTS SUR $\mathbb{Q}$

Les feuilles sont des  $(n-1)$ -plans denses.

#### VI.1.1.- PROPOSITION

1) Si l'un des rapports  $\frac{a_i}{a_j}$  ( $i \neq j$ ) vérifie une condition diophantienne alors

$$H^{0,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}) = H^{1,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}) = \mathbb{R} \mathbb{C}_{n-1}^q$$

2) Lorsque tous les rapports  $\frac{a_i}{a_j}$  ( $i \neq j$ ) sont de "Liouville" on a :

$$H^{0,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}) \text{ et } H^{1,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F})$$

sont des espaces vectoriels de dimension infinie et dont les séparés associés sont isomorphes à  $\mathbb{R} \mathbb{C}_{n-1}^q$ .

#### Démonstration

1) Elle se fait par récurrence sur la dimension du tore et se traite grâce à la suite exacte longue de Mayer-Vietoris de [3].

La proposition 1) est vrai pour un feuilletage linéaire sur  $\mathbb{T}^2$  défini par la 1-forme  $\omega = a dx + b dy$ . (Voir [16]).

Supposons la proposition vraie pour tous les tores  $\mathbb{T}^l$  munis de feuilletages  $\mathcal{F}^l$  définis par  $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_l dx_l = 0$  et pour  $l \leq n$ .

Soit  $\mathcal{F}^{n+1}$  un feuilletage sur  $\mathbb{T}^{n+1}$  défini par

$$\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_{n+1} dx_{n+1} = 0.$$

On suppose que  $\frac{a_i}{a_j}$ , par exemple, n'intervient pas dans un rapport diophantien.

On a la fibration :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n_{(x_1, \dots, x_n)} & \hookrightarrow & \mathbb{T}^{n+1}_{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{S}^1_{(x_{n+1})} \end{array}$$

Comme dans IV.3.2.1, on coupe suivant deux fibres  $\mathbb{T}^n$ . On obtient ainsi deux ouverts  $U_0$  et  $U_1$  diffeomorphes à  $\mathbb{T}^n \times ]0, 1[$ .  $U_0 \cap U_1$  est diffeomorphe à deux exemplaires disjoints de  $\mathbb{T}^n \times ]0, 1[$ .

$(U_0, \mathcal{F}^{n+1})$  et  $(U_1, \mathcal{F}^{n+1})$  se rétractent par déformation intégrable sur  $(\mathbb{T}^n, \mathcal{F}^n)$  où  $\mathcal{F}^n$  est défini par  $\omega|_{\mathbb{T}^n} = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = 0$ .

Il s'ensuit que

$$H^{0,q}(U_0, \mathcal{F}^{n+1}) = H^{0,q}(U_1, \mathcal{F}^{n+1}) \simeq \mathbb{R} \mathbb{C}^q_{n-1}.$$

De la même façon

$$H^{0,q}(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}^{n+1}) = \mathbb{R} \mathbb{C}^q_{n-1} \oplus \mathbb{R} \mathbb{C}^q_{n-1}$$

car  $(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}^{n+1})$  se rétracte par déformation intégrable sur  $(\mathbb{T}^n \amalg \mathbb{T}^n, \mathcal{F}^n)$ .

Finalement, de la suite exacte longue en cohomologie bigraduée de Mayer-Vietoris on tire :

$$\begin{aligned} H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}^{n+1}) &= \mathbb{R} \mathbb{C}^q_{n-1} \oplus \left[ \mathbb{R} \mathbb{C}^{q-1}_{n-1} \oplus \mathbb{R} \mathbb{C}^{q-1}_{n-1} \right] / \mathbb{R} \mathbb{C}^{q-1}_{n-1} \\ H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathcal{F}^{n+1}) &= \mathbb{R} \mathbb{C}^q_n. \end{aligned}$$

D'après la remarque fin IV.2 on a

$$H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbb{F}^{n+1}) = H^{1,q}(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbb{F}^{n+1}) = \mathbb{R} \overset{q}{C}^n.$$

2) La proposition est vraie pour  $\mathbb{T}^2$  muni du feuilletage  $\omega = adx + bdy = 0$ .

La démonstration de 2) est alors une réplique de 1). ■

Maintenant voyons le

VI.2.- CAS OU  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  SONT DEPENDANTS SUR  $\mathbb{Q}$

Si  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  est une base du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par  $(a_1, \dots, a_r, \dots, a_n)$  alors d'après le théorème de Molino ([14]) on a la

VI.2.1.- PROPOSITION

1) Si l'un des rapports  $\frac{a_i}{a_j}$ , pour  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, \dots, r\}$  et  $i \neq j$ , est diophantien alors

$$H^{0,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}^n) = H^{1,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}^n) = \mathbb{R} \overset{q}{C}^{r-1} \otimes C^\infty(\mathbb{T}^{n-r})$$

2) Si tous les rapports  $\frac{a_i}{a_j}$ , pour  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, \dots, r\}$ , sont de Liouville alors

$H^{0,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}^n)$  et  $H^{1,q}(\mathbb{T}^n, \mathbb{F}^n)$  sont des espaces vectoriels de dimension infinie et dont les séparés associés sont isomorphes à  $\mathbb{R} \overset{q}{C}^{r-1} \otimes C^\infty(\mathbb{T}^{n-r})$ .

Démonstration

Elle découle de la proposition précédente et du théorème V.3.1.2.1.



VII - AUTRES EXEMPLES DE FEUILLETAGES

Nous allons appliquer les résultats des précédents chapitres au calcul de la cohomologie bigraduée d'autres feuilletages.

En particulier on obtiendra la cohomologie bigraduée des feuilletages suspendus.

VII.1.- CONSTRUCTION DE CES FEUILLETAGES

Soit  $(M, \mathcal{F})$  une variété munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $n$ .  
On se donne

- 1) une variété  $W$
- 2) une représentation  $\varphi : \pi_1(W) \rightarrow G$   
où  $G$  désigne le groupe des difféomorphismes de  $M$  préservant le feuilletage  $\mathcal{F}$ .

Soit  $\tilde{W}$  le revêtement universel de  $W$ . On note  $\gamma.\tilde{\omega}$  l'action de  $\gamma \in \pi_1(W)$  sur  $\tilde{W}$ . Par produit, on obtient un feuilletage de codimension  $n$  sur  $\tilde{W} \times M$  invariant par les transformations

$$\begin{aligned} \tilde{W} \times M &\rightarrow \tilde{W} \times M \\ (\tilde{\omega}, x) &\rightarrow (\gamma.\tilde{\omega}, \varphi(\gamma).x) \end{aligned}$$

et qui définit donc un feuilletage  $\mathcal{F}_\varphi$  de codimension  $n$  sur la variété

$$\text{quotient } M_\varphi = \frac{\tilde{W} \times M}{(\tilde{\omega}, x) \sim (\gamma.\tilde{\omega}, \varphi(\gamma).x)}$$

On obtient donc une fibration localement triviale

$$\begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & M_\varphi \\ & & \downarrow \pi \\ & & W \end{array}$$

qui nous permet de construire une suite spectrale  $E_r(p)$  qui relie la cohomologie de la base  $W$  et la cohomologie bigraduée de la fibre  $(M, \mathcal{F})$  et qui aboutit à la cohomologie bigraduée de  $(M_\varphi, \mathcal{F}_\varphi)$ .

### VII.2.- SUITE SPECTRALE

Soit  $V = (V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un bon (\*) recouvrement ouvert de la base  $W$ .

$\mathcal{U} = (\pi^{-1}(V_i) \times M)_{i \in \mathbb{N}}$  est alors un recouvrement de  $M_\varphi$ .

D'après (IV.5) on a une suite spectrale qui converge vers la cohomologie bigraduée de  $(M_\varphi, \mathcal{F}_\varphi)$  et dont le premier terme est

$$E_1^{k,q}(p) = C^k(\mathcal{U}, H^{p,q})$$

où  $H^{p,q}$  désigne le préfaisceau localement constant sur  $W$  qui à tout ouvert  $V$  de  $W$  associe le groupe  $H^{p,q}(\pi^{-1}(V), \mathcal{F}_\varphi)$ .

D'autre part  $(\pi^{-1}(V), \mathcal{F}_\varphi)$  se rétracte par déformation intégrable sur  $(M, \mathcal{F})$  et donc le faisceau associé à  $H^{p,q}(\pi^{-1}(V), \mathcal{F}_\varphi)$  a pour fibre  $H^{p,q}(M, \mathcal{F})$ .

On obtient finalement le

#### VII.2.1.- THEOREME

Il existe une suite spectrale  $E_n(p)$  de termes

$$E_2^{k,q}(p) = H^k(W, H^{p,q}(M, \mathcal{F})) \cong H^k(\mathcal{U}, H^{p,q})$$

et qui converge vers la cohomologie bigraduée de  $(M_\varphi, \mathcal{F}_\varphi)$ .

En particulier, ce théorème permet le calcul de la

(\*) bon signifie que toute intersection d'ouverts est contractile.

VII.3.- COHOMOLOGIE BIGRADUEE DES SUSPENSIONS

Si  $\mathcal{F}$  est le feuilletage par points,  $\mathcal{F}_\varphi$  est le feuilletage obtenu en suspendant un groupe de difféomorphismes de  $M$ .

On a :

$$H^{pq}(M, \mathcal{F}) = 0 \text{ pour } q > 0$$

et  $H^{p0}(M, \mathcal{F}) = \Lambda^p(M)$

où  $\Lambda^p(M)$  est l'espace des formes différentielles sur  $M$  de degré  $p$ .

Comme  $E_\infty^{k,q}(p) = E_2^{k,q}(p)$  (principe généralisé de Mayer-Vietoris) on a :

$$\underline{H^{p,k}(M_\varphi, \mathcal{F}_\varphi) = E_2^{k,o}(p) = E_\infty^{k,o}(p) = H^k(W, H^{p,o}(M))}$$

$H^{p,o}$  s'identifie au faisceau  $\Omega^p$  des germes de  $p$ -formes feuilletées sur  $M$ .

Le feuilletage de  $M$  étant de feuille un point, on a

$$H^{p,o}(M) = \Omega^p(M) = \Lambda^p(M)$$

D'après VAISMAN [19] on obtient

$$H^{p,k}(M_\varphi, \mathcal{F}_\varphi) = H^k(W, \Lambda^p)$$

avec  $\Lambda^p$  désignant le fibré plat localement trivial au dessus de la base  $W$  et dont la fibre est isomorphe à  $\Lambda^p(M)$ .

L'action de  $\pi_1(W)$  sur  $\Lambda^p(M)$  est donnée par :

$$\pi_1(W) \times \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$$

$$(\gamma, \omega) \rightarrow [\varphi(\gamma)]^* \omega.$$



VII.4.- UN CALCUL EXPLICITE

Nous allons appliquer les résultats du chapitre VI précédent à un feuilletage de codimension du tore  $\mathbb{T}^{n+m+1}$  inspiré d'une construction de GHYS ([5]).

Cet auteur a défini un feuilletage de codimension un sur  $B \times \mathbb{T}^n$  à l'aide d'une matrice  $A$  de  $SL(n, \mathbb{Z})$  et d'une variété  $B$ . Ce feuilletage généralise celui de  $\mathbb{T}_A^3$  que l'on trouve dans [6].

VII.4.1.- Construction du feuilletage

Soit  $A$  une matrice de  $SL(n+m, \mathbb{Z})$  diagonalisable et ayant toutes ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$  irrationnelles. On considère le feuilletage  $(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  défini par les directions propres associées à  $\mu_1, \mu_2, \dots$  et  $\mu_m$ .

Comme dans VI.1 on prend

- 1)  $W = \mathbb{S}^1$
- 2)  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$   
 $1 \rightarrow A.$

On obtient un feuilletage  $\mathcal{F}_\varphi$  de codimension  $n$  sur la variété quotient

$$\mathbb{T}_A^{n+m+1} = \frac{\mathbb{T}^{n+m} \times \mathbb{R}}{(x, t) \sim (A(x), t+1)}$$

Les feuilles sont des  $(m+1)$ -plans et des cylindres et sont toutes denses.

Ce feuilletage est diophantien car on a le

VII.4.1.1. LEMME

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\mu_1, \mu_2, \dots$  et  $\mu_m$  sont diophantiens.

Démonstration :

Nous noterons  $\mu$  l'une des valeurs propres  $\mu_1, \mu_2, \dots$  ou  $\mu_m$  et  $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+m})$  un vecteur propre associé à  $\mu$  pour lequel nous supposerons que  $v_1$  par exemple est égal à 1.

Si on écrit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \dots & r_1^{n+m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n+m}^1 & r_{n+m}^2 & \dots & r_{n+m}^{n+m} \end{pmatrix} \quad \text{où } r_i^j \in \mathbb{Z} \quad \text{pour } (i,j) \in \{1,2,\dots,n+m\}^2$$

alors

$$(1) \quad Av = \mu v \Rightarrow r_1^1 v_1 + r_1^2 v_2 + \dots + r_1^{n+m} v_{n+m} = \mu v_1$$

mais  $\mu$  étant algébrique (racine du polynôme caractéristique de  $A$ ) est diophantien [12]. Autrement dit

$$\exists s \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } B > 0 / |q + p\mu| > \frac{B}{(|q| + |p|)^s}$$

pour  $p$  et  $q$  suffisamment grands dans  $\mathbb{Z}$ .

Soit encore en considérant (1)

$$|q + pr_1^1 + pr_1^2 v_2 + \dots + pr_1^{n+m} v_{n+m}| = |q + p\mu|.$$

Et finalement

$$|q + pr_1^1 + pr_1^2 v_2 + \dots + pr_1^{n+m} v_{n+m}| > \frac{B}{(|q| + |p|)^s} > \frac{B}{(|q| + |pr_1^1| + |pr_1^2| + \dots + |pr_1^{n+m}|)^s}$$

pour  $q = \alpha_0, pr_1^1 = \alpha_1, pr_1^2 = \alpha_2, \dots, pr_1^{n+m} = \alpha_{n+m}$  suffisamment grands dans  $\mathbb{Z}$ .

On a montré :

$$\exists s \in \mathbb{N}^* \text{ et } B > 0 /$$

$$|\alpha_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n+m} v_{n+m}| > \frac{B}{(|\alpha_0| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_{n+m}|)^s}$$

pour  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+m}$  suffisamment grands dans  $\mathbb{Z}$ . ■

#### VII.4.2.- Cohomologie bigraduée

D'après le théorème VI.2.1,

$$E_2^{k,q}(p) = H^k(\mathbb{S}^1, H^{p,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m))$$

Calculons le  $E_2(p)$  de cette suite spectrale pour les différentes valeurs de  $p$ .

1)  $p = 0$

$H^{0,0}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  est le faisceau constant  $\mathbb{R}$  au dessus de  $\mathbb{S}^1$ .

$\pi_1(\mathbb{S}^1)$  agit trivialement sur ce faisceau. On a donc :

$$E_2^{0,0}(0) = H^0(\mathbb{S}^1, H^{0,0}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)) = H^{0,0}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \cong \mathbb{R}$$

$$\text{et } E_2^{1,0}(0) = H^1(\mathbb{S}^1, H^{0,0}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)) = H^{0,0}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \cong \mathbb{R}$$

Pour  $q > 0$ , on a

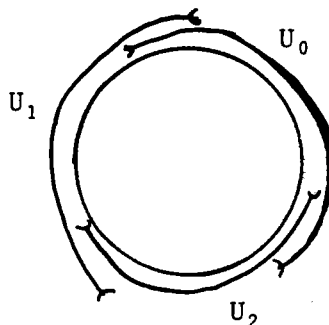
$$H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) = \Lambda^q(\mathbb{R}^m).$$

$A^*$  n'a pas de point fixe parce que  $A$  n'admet pas 1 comme valeur propre. Ainsi l'action de  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$  sur  $H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  (i.e. l'action de  $A^*$ ) n'est pas triviale.

$$E_2^{0,q}(0) = \{\omega \in \Lambda^q(\mathbb{R}^m) / A^*\omega = \omega\} = \{0\}$$

Pour calculer  $E_2^{1,q}(0)$  avec  $q > 0$ , on se donne un bon recouvrement de  $S^1$  par trois intervalles ouverts  $U_0, U_1$  et  $U_2$ .

On pose  $\mathcal{U} = U_0 \cup U_1 \cup U_2$



Comme  $U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , le complexe de ČECH se réduit à

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, H^{0,q}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, H^{0,q}) \rightarrow 0$$

Pour toute cochaîne  $c$  de  $C^1(\mathcal{U}, H^{0,q})$  on a  $\delta c = 0$ .

$c$  est donné par un triplet  $(f_{01}, f_{12}, f_{02})$  de classes de cohomologie dans  $H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$ .

$c$  est  $\delta$ -exacte s'il existe un triplet  $(f_0, f_1, f_2)$  de classes de cohomologie dans  $H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  et vérifiant

$$\begin{cases} f_1 - f_0 = f_{01} \\ f_2 - f_1 = f_{12} \\ A^*f_2 - f_0 = f_{02} \end{cases}$$

où  $A = \varphi(1)$  est le difféomorphisme de  $\mathbb{T}^{n+m}$  du paragraphe précédent.

Le système précédent se ramène à l'équation :

$$A^*f_2 - f_2 = f_{02} - f_{01} - f_{12}$$

et l'existence de  $f_2$  entraînera celle de  $f_1$  et donc celle de  $f_0$ .

Tout revient à calculer le conoyau de l'opérateur

$$A^* - \text{Id}^* : H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \rightarrow H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$$

$$\omega \rightarrow A^* \omega - \omega$$

Si  $\omega$  s'écrit :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} \omega_{i_1 \dots i_q} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_q}$$

où  $\theta^i$  représente une 1-forme associée à la direction propre  $\mu_i$  alors

$$A^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_q}$$

#### VII.4.2.1.- LEMME

$$A^* - \text{Id}^* : H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m) \rightarrow H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$$

est un isomorphisme.

#### Démonstration

•  $(A^* - \text{Id}^*)$  est injectif

$$(A^* - \text{Id}^*) \omega = 0 \Rightarrow \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} (\mu_{i_1} \dots \mu_{i_q} - 1) \omega_{i_1 \dots i_q} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_q} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_q} = 0 \text{ pour } 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m$$

car les  $\mu_i$  sont dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

$$\Rightarrow \omega = 0$$



•  $(A^* - \text{Id}^*)$  est surjectif :

Soit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} a_{i_1 \dots i_q} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_q}$$

La forme  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} \frac{a_{i_1 \dots i_q}}{(\mu_{i_1} \dots \mu_{i_q} - 1)} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_q}$  est telle que

$$A^* \omega - \omega = \alpha. \quad \blacksquare$$

Le lemme VII.2.1 entraîne finalement

$$H^1(\mathcal{S}^1, H^{0,q}(\mathbb{T}^{n+m}, \widehat{\mathcal{F}}_m)) = 0$$

et

$E_2^{k,q}(0) =$

	0	1	2	...
q				
m	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	
1	0	0	0	...
0	IR	IR	0	...
	0	1	2	k

Remarque :

Cette suite spectrale est celle de  $\mathcal{S}^1$ . Ceci est dû au fait que  $A^*$  n'a pas de point fixe et donc l'action de  $\varphi$  ne conserve aucun des générateurs de  $H^{0,*}(\mathbb{T}^{n+m}, \widehat{\mathcal{F}}_m)$ .

Les mêmes raisonnements que précédemment nous donnent pour  $0 < p < n$  :

$E_2^{k,q}(p) =$

	q				
	↑				
m		0	0	0	. . .
⋮		⋮			
⋮		⋮			
2		0	0	0	
1		0	0	0	. . .
0		IR	IR	0	. . .
		0	1	2	. . .
					k

On obtient aussi

$E_2^{k,q}(n) =$

	q				
	↑				
m		IR	IR	0	
⋮		⋮	⋮	⋮	
⋮		⋮	⋮	⋮	
0		0	0	0	
1		0	0	0	. . .
0		IR	IR	0	. . .
		0	1	2	. . .
					k

$E_2^{0,m}(n) = E_2^{1,m}(n) \cong \mathbb{R}$  car intervient la cohomologie de  $\mathbb{S}^1$  à valeurs dans le faisceau  $H^{n,m}(\mathbb{T}^{n+m}, \mathcal{F}_m)$  qui est le faisceau constant  $\mathbb{R}$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOTT R., TU L.W. : Differential forms in algebraic topology.  
Springer-Verlag, New-York. 1982.
- [2] CARON P., CARRIERE Y. : Flots transversalement de Lie  $\mathbb{R}^n$ . Flot trans-  
versalement de Lie minimaux - C.R.A.S. 280 (1980) 477-478.
- [3] EL KACIMI-ALAOUI A. : Sur la cohomologie feuilletée.  
Compositio Mathematica 49 (1983), 195-215.
- [4] EL KACIMI-ALAOUI A., SERGIESCU V., HECTOR G. : La cohomologie basique  
d'un feuilletage riemannien est de dimension finie. Preprint  
Lille (1983).
- [5] GHYS E. : Classification des feuilletages totalement géodésiques  
de codimension un. Comment. Math. Helvet. 58 (1983) 543-572.
- [6] GHYS E., SERGIESCU V. : Stabilité et conjugaison différentiable pour  
certains feuilletages. Topology, 19 (1980) 179-197.
- [7] GODEMENT R. : Topologie algébrique et théorie des faisceaux.  
Hermann
- [8] HAEFLIGER : Variétés feuilletées. Annali Della Scuola Norm.Sup.  
Pisa 16 (1982), 367-397.
- [9] HAEFLIGER : Some remarks on foliations with minimal leaves.  
Journal of Differential Geometry 15 (1980), 269-284.
- [10] HAEFLIGER : Homotopy. Integrability. Amsterdam, Springer Lectures  
notes n° 197.
- [11] HECTOR G., HIRSCH U. : Introduction to the geometry of foliations  
part A. Friedr. Vieweg-Sohn, Brawnschweig, 1981.

- [12] HERMANN : Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. Thèse. ORSAY. 1975.
  
- [13] LAWSON H.B. : Foliations. Bulletin of Amer. Math. Soc. Volume 80 Number 3, mai 1974.
  
- [14] MACIAS E. : Las cohomologías diferenciabile, continua y discreta de una variedad foliada. Publicaciones n° 60 Del Departamento de Geometria y topologia. Univ. de Santiago de Compostela.
  
- [15] MOLINO : Géométrie globale des feuilletages riemanniens. Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser. A, 1, 85 (1982), 45-76.
  
- [16] ROGER C. : Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages. Thèse. ORSAY. 1976.
  
- [17] RUMMLER : Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts. Comment. Math. Helvet. 54 (1979) 224-239.
  
- [18] SPANIER : Algebraic Topology.
  
- [19] VAISMAN I. : Cohomology and differential forms. Dekker (1973).