Sur la théorie des milieux viscoélastiques standards

Maarouf Bassout-Lellich

▶ **To cite this version:**

Maarouf Bassout-Lellich. Sur la théorie des milieux viscoélastiques standards. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ002S . tel-01775565

HAL Id: tel-01775565
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775565

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

T H E S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE

L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MECANIQUE

Mention : Mécanique des Milieux continus

par

Maarouf BASSOUT-LELLICH

SUR LA THEORIE DES MILIEUX VISCOELASTIQUES STANDARDS

Soutenue le 6 février 1986 devant le jury :

M.	A. MOLINARI,	Professeur à l'Université de METZ	Président
MM.	J.D. WEBER ,	Professeur à l'Université de METZ	Examinateur
	M. BERVEILLER,	Professeur à l'Université de METZ	Examinateur
	M. POTIER-FERRY,	Professeur à l'Université de METZ	Rapporteur
	NGUYEN QUOC SON,	Professeur à l'Ecole Polytechnique de PALAISEAU	Rapporteur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv 19860045
Cote S/M3 86/2
Loc Magasin

AVANT - PROPOS

Le travail exposé dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de physique et mécanique des matériaux.

J'exprime ma respectueuse gratitude envers Monsieur le professeur M. Berveiller de la faculté des sciences de Metz, Directeur du Laboratoire de physique et mécanique des matériaux qui a bien voulu accepter de participer au jury, je lui suis particulièrement gré de m'avoir accueilli dans son Laboratoire.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur le professeur A. MOLINARI de la faculté des sciences de Metz, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président de jury et pour ses remarques précieuses.

Je tiens à remercier Monsieur le professeur M. Potier-Ferry de la faculté des sciences de Metz, pour ses précieux conseils et d'avoir accepté d'être rapporteur et membre de jury.

Monsieur, NGUYEN QOC SON professeur à l'école polytechnique à PALAISEAU a bien voulu s'interesser à mon travail en acceptant d'être rapporteur et membre de jury, qu'il veuille bien trouver dans ce mémoire, l'expression de mes profonds remerciements.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur le professeur J.D. WEBER de la faculté des sciences de Metz, responsable scientifique et directeur de cette thèse ; qu'il trouve ici le témoignage de ma gratitude pour ses conseils et l'aide constante qu'il m'apporte tout au long de mon séjour.

J'adresse mes remerciements à messieurs S. Dominiak et P. MOLL pour leurs aides dans la réalisation de la partie expérimantale effectuée sur la machine de traction.

Je remercie également Monsieur A. BILOCQ pour la mise en forme technique de ce mémoire.

Je remercie tous les membres du Laboratoire de physique et mécanique des matériaux qui m'ont témoigné leur amitié.

Je remercie Madame CAULIER-HATTABI Patricia F. qui s'est acquittée avec soin de la frappe de cette thèse.

A LA MEMOIRE DE MON PERE
A MA MERE ET A MA FEMME
A MES ENFANTS ET A MA FAMILLE

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de présenter une théorie des milieux viscoélastiques et d'en donner certaines applications nouvelles. La thèse est composée de trois parties :

la première partie contiendra un rappel sur les notions fondamentales de mécanique des milieux continus ; nous présentons la théorie des milieux viscoélastiques standards dûe à NGUYEN et HALPHEN (1975) qui exige l'introduction de deux fonctions pour décrire un comportement rhéologique:

La première fonction est le potentiel thermodynamique $\phi(\varepsilon,\xi,T)$ qui dépend de la déformation ε, et d'un nombre fini de variables internes $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ et de la température T ;

La deuxième fonction est le potentiel de dissipation $\Omega(X,\xi,T)$ qui dépend des forces thermodynamiques $X_i = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ associées à chaque variable interne $\xi_i (i=1,\ldots,n)$, de ξ, et de T.

Ce point de vue est confirmé par l'étude des modèles rhéologiques présentant de l'élasticité instantanée ; nous avons admis que Ω ne dépend pas explicitement de ε. L'évolution de variables internes, et des contraintes, pour des déformations finies est déterminé par :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial\Omega}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_i} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

$$\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}$$

σ est le tenseur des contraintes conjugué de ε

Bien entendu, ce formalisme est compatible avec les principes de thermodynamique et le principe d'objectivité. Cette théorie sera illustrée par des exemples pour les deux classes des milieux viscoélastiques standards, avec et sans élasticité instantanée. Nous ferons une étude de l'existence et l'unicité de la déformation d'un milieu élastique et ensuite d'un milieu viscoélastique standard à élasticité instantanée stable (critère

énergétique, ellipticité forte) en évolution isotherme et quasi-statique.

Nous allons exploiter l'acquis de la première partie pour fournir une étude nouvelle pour décrire le corps de Maxwell en montrant la souplesse du formalisme adopté. L'étude du corps de Maxwell a été déjà traitée par WEBER.J.D (1974), et nous apporterons quelques éléments nouveaux pour la description de ce corps, en particulier, la prise en compte de température, l'étude se placera dans le cas de grandes déformations, pour des comportements non linéaires.

Dans la troisième partie nous apporterons quelques compléments à la théorie de stabilité élastique, dans le cadre des travaux de WEBER.J.D (1972). Hadamard a énoncé deux conditions de stabilité l'une nécéssaire, l'autre suffisante, pour un élément matériel homogène à frontière fixe. Nous allons vérifier que l'équivalence de ces deux conditions est réalisée dans le cas d'un milieu élastique bidimensionnel arbitrairement déformé à partir d'un état naturel isotrope. Nous terminerons cette partie par une évaluation de la charge critique d'une colonne en compression à partir du critère énergétique de stabilité.

Oh, certes, la Nature est complexe et, quoiqu'il ne s'agisse que de physique, le comportement des corps du point de vue de leurs déformations n'est pas beaucoup plus simple que le comportement psychologique des individus. Les cadres que notre esprit élabore s'adaptant plus ou moins bien à ce comportement.

J. MANDEL

NOTATIONS UTILISEES

CI	Configuration initiale
CA	Configuration actuelle (déformée)
CN	Configuration naturelle (sans contraintes)
a_i	Coordonnées d'un élément matériel dans CI
x_i	Coordonnées d'un élément matériel dans CA
$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$	Gradient de la transformation de CI → CA
v, v_0	Volume d'un élément de matière à l'instant actuel et initial
ρ, ρ_0	Masse volumique d'un élément de matière à l'instant actuel et initial
t	Le temps
E	Module d'young
λ , μ	Coefficients de Lamé
u	Vecteur déplacement
f(t)	Fonction fluage
r(t)	Fonction relaxation
D	Domaine ouvert borné dans R^3
C.E	Critère d'énergie
E.F	Ellepticité forte
Φ	Potentiel élastique
ϕ	Energie libre d'un élément matériel dans CA
Ω	Potentiel de dissipation d'un élément matériel dans CA
ξ	Variable interne
T	Température absolue
$X = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$	Force thermodynamique associée à ξ
$\dot{\xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial X}$	Vitesse de la variable interne ξ
X	Puissance dissipée
L	L' enthalpie
e	Energie interne par unité de volume
q	Vecteur flux de chaleur
α	Dilatation volumique
S	L'entropie
MVS	Milieux viscoélastiques standards
$I(T_0)$	Configuration initiale à la température T_0
$R(T_0)$	Configuration relâchée à la température T_0
R(T)	Configuration relâchée à la température T

$A(T)$	Configuration actuelle à la température T
τ	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$	Tenseur des contraintes conjugué au tenseur des déformations ϵ
$\Pi = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta}$	Tenseur des contraintes de Kirchoff
$\theta = \frac{\partial \phi}{\partial F}$	Tenseur des contraintes de Boussinesq ou 1er tenseur de piola - Kirchoff
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ϵ	Tenseur de déformation élastique
ϵ^p	Tenseur de déformation plastique
S	Déviateur du tenseur des contraintes
R	Tenseur de rotation
U	Tenseur de déformation pure droit
V	Tenseur de déformation pure gauche
F	Tenseur de transformation de CI → CA
$C = F^T F$	Tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy - Green droit
$B = FF^T$	Tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy - Green gauche
$\Delta = \frac{1}{2}(F^T F - \Pi)$	Tenseur de déformation de Green - Lagrange dans CI
D	Tenseur taux de déformation
W	Tenseur taux de rotation

P A R T I E I

Les milieux viscoélastiques standards

I.1. Rappels de mécanique des milieux continus

Nous allons présenter quelques notions fondamentales de mécanique des milieux continus.

I.1.1. Gradient de la transformation

Pour décrire les événements d'un système de milieu continu, on considère un élément de volume de ce système et l'on étudie sa transformation au cours du temps.

Soit a_i les coordonnées initiales des points matériels à l'instant initial dans l'espace R^3 , x_i les coordonnées des mêmes points à l'instant actuel t, la connaissance de x_i en fonction de a_j et du temps écoulé t :

$$x_i = x_i\,(a_j,t) \qquad (i,j = 1,2,3)$$

décrit l'évolution du système.

Supposons que l'hypothèse de la continuité de matière soit vérifiée, alors les fonctions x (a,t) sont dérivables et la matrice des dérivées :

$$F_{ij}\ (a,t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\ (a,t)$$

appelée gradient de la transformation entre l'instant initial et actuel.

Le déterminant de la matrice F_{ij} vérifie les relations suivantes :

$$dv = (\text{dét } F)\ dv_0$$
$$\rho_0 = \rho \det F$$
$$\det |F| > 0 \qquad \text{nécéssairement}$$

où :

v, v_0 le volume d'un élément de matière à l'instant actuel et initial.

ρ, ρ_0 la masse volumique du même élément à l'instant actuel et initial.

I.1.2. Déformations et contraintes

. Grandes déformations

Soit $ox_1\ x_2\ x_3$ un réferentiel galileen, c'est-à-dire un repère d'espace supposé fixe au cours du temps, le mouvement d'un système du milieu continu est décrit par :

$$x_i = x_i\ (a_j\ ,t) \qquad\qquad (i,j = 1,2,3)$$

où :

a_i $i = 1,2,3$ sont les variables Lagrangiennes ou matérielles

x_i $i = 1,2,3$ sont les variables Eulériennes ou spatiales

En petites déformations, on identifie les variables Lagrangiennes et Eulériennes. Ce qui n'est pas le cas en grandes déformations [39].
La déformation locale est définie par le tenseur F :

$$\vec{dx} = F\ \vec{da} \quad ; \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$$

F s'appelle tenseur gradient de la déformation, ce tenseur permet de passer d'une configuration à une autre.
Pour caractériser la déformation du tenseur F, il faudra qu'on élimine la rotation et ceci est faisable de deux façons :

1 - Le théorème de décomposition polaire permet d'écrire :

$$F = R.U = V.R$$
$$C = U^2 = F^T F$$
$$B = V^2 = FF^T$$

Où R est le tenseur de rotation, C et B sont les tenseurs des dilatations ou le tenseur de Cauchy - Green droit et gauche. U,V sont les tenseurs de déformation pure droit et gauche [40] , on caractérise la déformation par C ou U dans la configuration initiale et par B ou V dans la configuration actuelle.

2 - on exprime les variations de longueur d'un segment matériel $\vec{da}$ par :

$$dl^2 - dl_0^2 = 2\, \vec{da}\, \Delta\, \vec{da}$$

où $\Delta = (F^T F - \mathbb{1})$ est le tenseur des déformations de Green - Lagrange dans la configuration initiale.

- on définit le tenseur eulérien gradient des vitesses par :

$$\text{grad } V = \dot{F}F^{-1} \quad ; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\ \partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

et on peut écrire ce gradient comme la somme d'une partie symétrique D et une autre antisymétrique W :

$$\dot{F}F^{-1} = D + W$$

où :

$D = \frac{1}{2}[\dot{F}F^{-1} + (\dot{F}F^{-1})^T]$ est le tenseur taux de déformation. [2]

Elle décrit la vitesse de déformation ; $D = F^{-1^T}\ \dot{\Delta}\ F^T$

W est le tenseur taux de rotation qui définit la vitesse de rotation locale d'un système du milieu continu [40]

contraintes

- on définit le tenseur des contraintes de cauchy τ par :

$$\vec{df} = \tau\ \vec{n}\ ds$$

où :

$\vec{df}$ est la force élémentaire exercée sur un élément de surface ds de normale unitaire $\vec{n}$, dans la configuration actuelle, ce tenseur est symétrique :

- si on considère ds dans la configuration initiale, alors :

$$\vec{df} = \theta \, \vec{n}_\theta \, ds_\theta$$

θ est le premier tenseur de piola - Kirchoff ou tenseur de Boussinesq. Ce tenseur n'est ni lagrangien, ni eulerien, θ est un tenseur non symétrique.

- on note par $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}$ (ϕ est l'énergie libre) le tenseur des contraintes conjugué au tenseur des déformations ε, lorsque $\varepsilon = \frac{1}{2}(F^T F -) = \Delta$ on obtient le tenseur des contraintes de Kirchoff :

$$\Pi = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta}$$

Lorsque, $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}$, c'est-à-dire, dans le cas où l'état actuel considéré comme état de référence, donc :

$$\sigma = \Pi = \theta = \tau$$

Loi de comportement

La relation entre l'évolution du tenseur des déformations et celle du tenseur des contraintes s'appelle loi de comportement ; elle doit obéir à certains principes [14] ,[21] ,[43] , [44].

I.1.3. Equations d'équilibre

Soit f_i les forces massiques, alors les équations d'équilibre sont :

. En écriture Lagrangienne :

$$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial a_j} + \rho_0 f_i = 0$$

. En écriture Eulérienne :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$$

Ces deux écritures sont équivalentes.

I.1.4. La classe des matériaux hyperélastiques [40]

Elasticité isotrope

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, la loi de comportement a la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad ; \quad \theta = \varepsilon_{kk}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Hyperélasticité isotrope

On suppose que l'énergie de déformation par unité de masse ψ dépende de F, alors ψ est une fonction isotrope en vertue du principe d'objectivité et l'isotropie :

$$\psi(B) = \psi(Q\,B\,Q^T) \quad ; \quad B = FF^T$$

Donc, à partir de l'expression de la puissance de dissipation et en écrivant que la dissipation est nulle, on obtient :

$$\sigma = \frac{\rho_0}{\rho} B \frac{\partial\psi}{\partial B}$$

Ce qui est la loi de comportement d'un matériau hyperélastique isotrope.

I.1.5. Variables internes en mécanique des milieux continus

Lorsqu'on étudie un problème physique, on rencontre plusieurs variables physiques significatives, on s'interesse à certaines d'elles et on les appelle variables internes ou cachées.

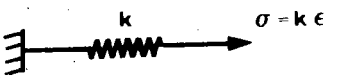
En effet, lorsqu'on définit un système par les valeurs actuelles de ses variables d'état qui sont, en général, la déformation , les variables internes notées collectivement ξ et la température T. Alors, il est commode de répartir les variables d'état d'un système en variabless externes susceptibles d'être commandées comme la déformation et la température et en variables internes,

l'appellation "variables internes" doit être préférée à l'appellation variables cachées, en fait dans les exemples qu'on va donner, les variables internes sont susceptibles d'être mesurées. L'évolution des variables internes peut alors être déterminée pour n'importe quelle évolution donnée des variables externes, les variables internes varient au cours d'une transformation irréversible [26] , leurs évolutions sont déterminés par :

$$\dot{\xi}_i = f_i (\epsilon, \xi, T) \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Elasticité

Le système est un élément de volume d'un solide élastique représenté par le modèle rhéologique élémentaire qui est constitué par un ressort



variables externes : ϵ, T pas de variables internes

Viscoélasticité

. Modèle de Maxwell

Ce modèle est constitué d'un ressort et d'un amortisseur monté en série.

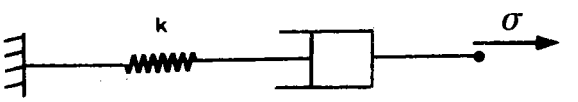


Fig (I.1.5)

variables externes ϵ,et T, variable interne ξ est la distance entre le piston et le fond du récipiant contenant le fluide visqueux.

La théorie des milieux viscoélastiques standards généralise. Ce modèle élémentaire en introduisant des variables internes scalaires ou tensorielles [7] [36] [57] .

Plasticité

En plasticité, deux types des variables internes sont considérés : les variables d'écrouissage (scalaires ou tensorielles) et la déformation plastique [17][26] [40] [45] .

I.2. Description des milieux viscoélastiques standards MVS

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la théorie des milieux viscoélastiques standards qui seront notés par MVS (lorsqu'il s'agit d'un milieu viscoélastique standard, on notera un MVS) avec et sans élasticité instantanée en inspirant de la théorie des milieux standards généralisés dû à HALPHEN.B et NGUYEN.Q.S (1975) et le point de vue de MANDEL . J (1980). RICE J.R (1971) et WEBER J.D (1972).

I.2.1. Les MVS avec élasticité instantanée

Dans la théorie des milieux viscoélastiques standards notés par MVS, nous avons besoin de deux fonctions pour décrire un comportement rhéologique, l'énergie libre $\phi(\underline{\varepsilon}, \underline{\xi})$ qui dépend de la déformation $\underline{\varepsilon}$ et d'un nombre fini de variables internes, notées collectivement $\underline{\xi}$ qui peut être scalaire ou tensorielle, et le potentiel de dissipation $\Omega(\underline{\xi}, X)$ où :

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\xi}}$$

est la force thermodynamique associée à chaque variable interne (nous supposons pour simplifier que ϕ et Ω sont relatifs à un élément matériel de volume unité dans la configuration initiale). L'évolution de variable interne $\underline{\xi}$ est dite normale, c'est-à-dire que l'hypothèse de dissipativité normale est vérifiée [17] [37] lorsque :

$$\dot{\underline{\xi}} = \frac{d\underline{\xi}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} \quad ; \quad X = -\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\xi}} \qquad (I.2.1.1)$$

Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ conjugué au tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ est :

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\varepsilon}} \qquad (I.2.1.2)$$

(I.2.1.1) constitue une généralisation des relations d'ONSAGER pour des comportements non linéaire, (I.2.1.2) est l'équation de Coleman valable si le milieu présente de l'élasticité instantanée, c'est-à-dire si le milieu a un comportement de

solide élastique dans les déformations très rapides [52] (qui ont lieu en une durée inférieure au temps de réponse de l'apparelliage utilisé).

$\underline{\phi}$ et $\underline{\Omega}$ dépendent aussi de la température T. Les déformations peuvent être infiniment petites ou finies. Notons qu'un saut brusque de $\underline{\varepsilon}$ et T change la valeur de $\underline{\xi}$ mais n'entraine pas de discontinuité de $\underline{\xi}$. C'est là une propriété caractéristique des variables internes. Le comportement n'est pas modifié lorsqu'on ajoute à $\underline{\Omega}$ une fonction quelconque des $\underline{\xi}$. En la choisissant convenablement, on peut toujours supposer que $\underline{\Omega} = o$ pour $\underline{X} = o$ quels que soient les $\underline{\xi}$.

Suivant une hypothèse faite par Rice [35] et suggérée également par Mandel [22] nous avons admis que $\frac{\partial}{\underline{\xi}}$ est une fonction des variables internes $\underline{\xi}$ et des forces thermodynamiques $\underline{X}$, cette fonction ne dépendant pas explicitement de $\underline{\varepsilon}$. Cela revient à choisir $\underline{\Omega}$ fonction des $\underline{\xi}$ et $\underline{X}$ [57] . Ce point de vue est d'ailleurs confirmé par l'étude des assemblages de ressorts et d'amortisseurs linéaires ou non linaires (modèles rhéologiques, voir (I.4.3) Ci-après). Chaque variable interne décrit alors la configuration d'un amortisseur dans l'assemblage.

Dissipativité

Cette condition signifie que $\underline{\Omega}$ doit nécéssairement vérifier la condition suivante :

$$\underline{X}\dot{\underline{\xi}} = \underline{X}\,\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial \underline{X}} \geqq \underline{0} \qquad \forall\, \underline{\xi},\ \underline{X},\ \text{et}\ T \qquad \text{(I.2.1.3)}$$

qui résulte du second principe de la thermodynamique ($\frac{1}{T}\, X\, \frac{\partial \Omega}{\partial X}$ est le taux de production intrinsèque d'entropie) (voir Fig (I.3)).

Convexité

Cette condition signifie que :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \geqq 0 \qquad \text{(I.2.1.4)}$$

avec en outre :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{X}} = o \qquad \text{pour } X = o \qquad (I.2.1.5)$$

Nous appelons condition de convexité l'ensemble des conditions (I.2.1.4) et (I.2.1.5) (voir Fig (1.3)).

Lorsqu'il y a plusieurs variables internes, (I.2.1.3) s'écrit aussi $X_i \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \underset{=}{>} 0$ et (I.2.1.4) exprime que la matrice $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \, \partial X_j}$ est définie positive

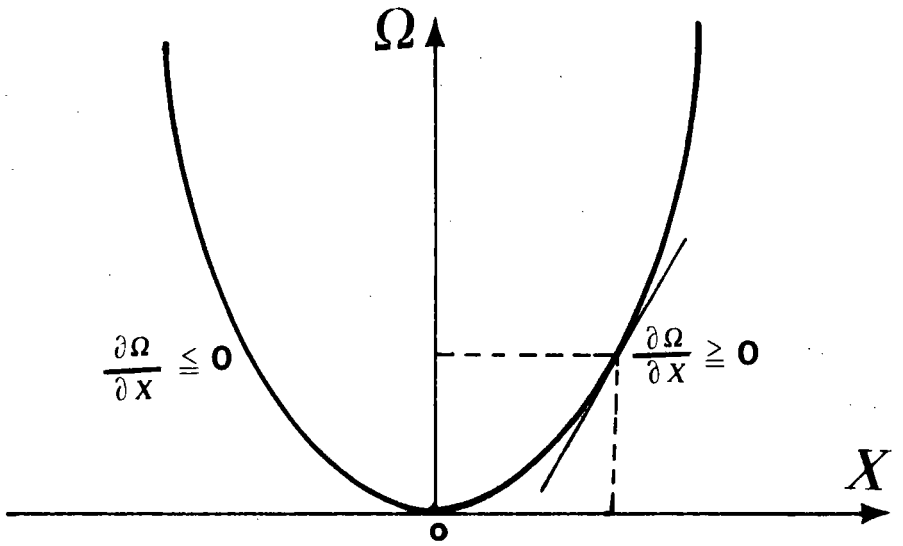


Fig (I.3)

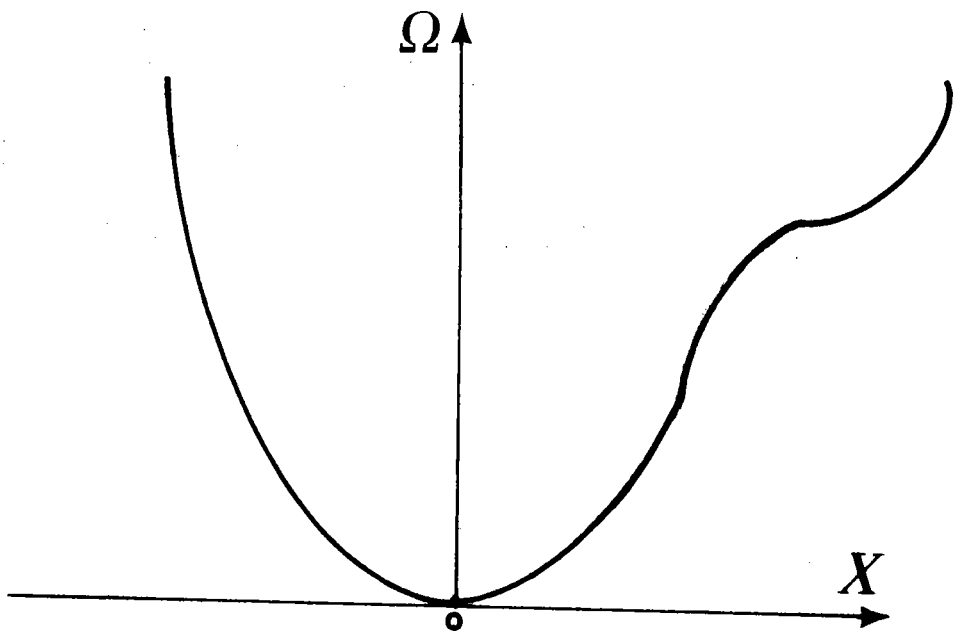


Fig (I.4)

Dans le cas de la Fig (I.4) la condition de convexité n'est pas vérifiée c'est-à-dire $\underline{\Omega}$ n'est pas convexe par rapport à X. Tandis que la condition de dissipativité est vérifiée.
On signale que la condition de dissipativité est toujours vérifiée à l'équilibre, et hors d'équilibre, par contre, la condition de convexité est vérifiée à l'équilibre, sans être nécessairement vérifiée hors d'équilibre (Fig (I.4) par exemple)

Donc :

A l'équilibre : convexité $\Leftrightarrow$ dissipativité

Hors d'équilibre : convexité $\not\Leftrightarrow$ dissipativité

I.2.2. Les MVS sans élasticité instantanée

Nous adoptons le point de vue de Mandel [22] en ce qui concerne la validité des équations suivantes :

$$\Pi_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_{ij}} \qquad (I.2.2.1)$$

Π_{ij} est le tenseur des contraintes de Kirchoff

$$\chi = - \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_i} \dot{\xi}_i \qquad (I.2.2.2)$$

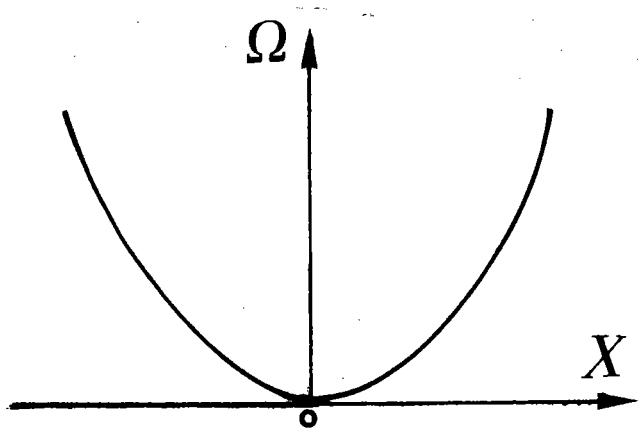
χ est la puissance dissipée.

Ces deux équations sont valables dans la suite pour les milieux présentant de l'élasticité instantanée, c'est-à-dire pour les milieux où la vitesse de déformation n'intervenait pas dans la définition de l'état. D'autre part, (I.2.2.1), (I.2.2.2) sont valables aussi pour des matériaux viscoélastiques, viscoplastiques, et élastiques parfaitement plastique présentant de l'élasticité instantanée [27] . Ce formalisme a été généralisé par Mandel [22]pour des milieux sans élasticité instantanée tels que le solide de Kelvin-VOIGT (voir (I.3.2.2)), et un fluide visqueux, et dans ce cas l'expression de puissance dissipée est :

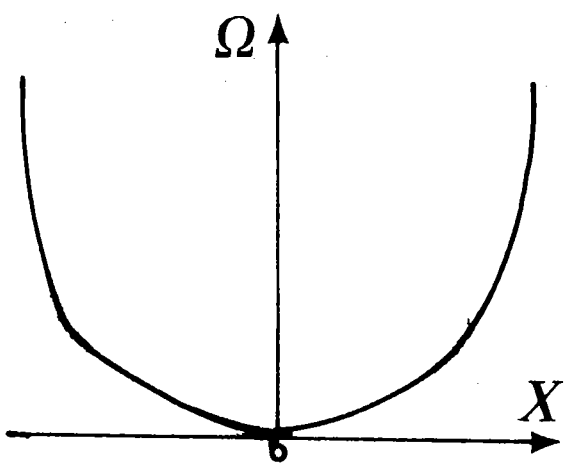
$$\chi = (\Pi - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\Delta}})\,\dot{\Delta} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\xi}}\,\dot{\xi} \geq 0 \qquad (I.2.2.3)$$

I.2.3. Le potentiel de dissipation et les différentes types de comportement

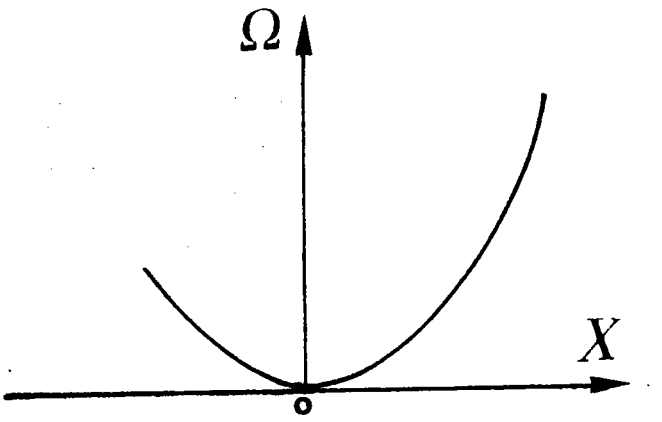
Nous proposons de dire que lorsque Ω est une fonction régulière de X, on a un comportement viscoélastique.
C'est le cas des assemblages de ressorts et d'amortisseurs.
Lorsque Ω est une fonction singulière de X, on dira que le comportement est viscoplastique ou plastique. C'est le cas des assemblages de ressorts, d'amortisseur et de patins pour les différentes types de comportements voir les figures ci-dessous :



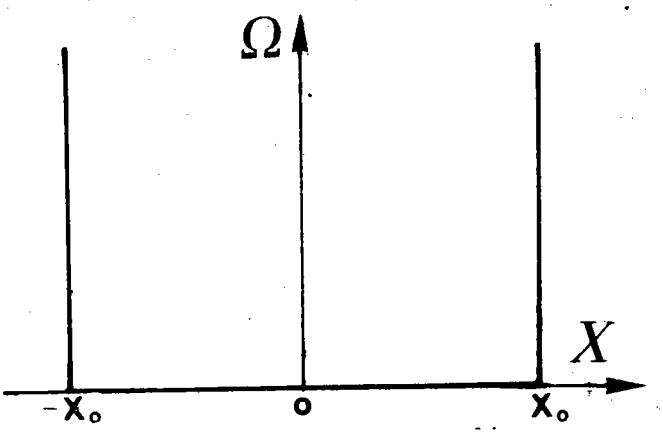
cas d'un amortisseur linéaire $\Omega = KX^2$
Ω est régulier



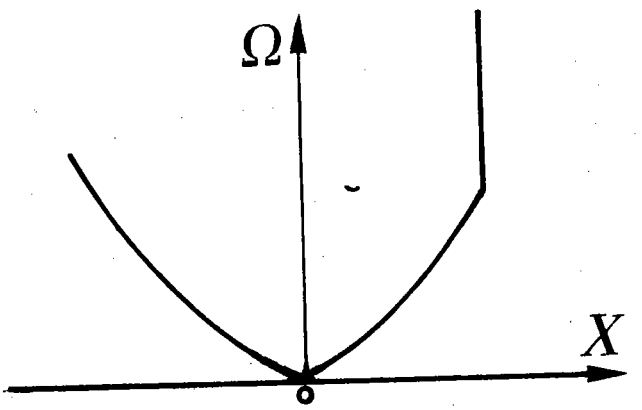
cas d'un amortisseur non linéaire
Ω est régulier



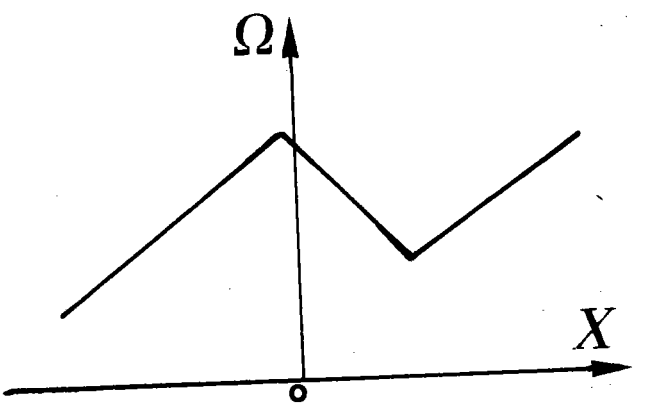
cas d'un milieu viscoélastique standard
ω est régulier



cas d'un patin
ω est singulier



cas d'un milieu viscoplastique standard
ω est singulier



absorde

I.2.4. L'hypothèse de dissipativité normale [22]

On rapelle ici l'expression donnant la condition de dissipativité pour tous matériaux standards généralisées [17] [22] sans élasticité instantanée

$$\chi = \left(\Pi - \frac{\partial \phi}{\partial \Delta} \right) \dot{\Delta} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0 \qquad \text{(I.2.4.1)}$$

On peut rendre cette expression plus simple en définissant l'état par Π, θ, g_j et ξ_k tel que $g_j = \frac{\partial T}{\partial a_j}$ le gradient de la température et en introduisant au lieu de l'énergie libère $\underline{\underline{\phi}}$, l'enthalpie libre changée de signe :

$$L = \Pi_{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta} - \phi \qquad \text{(I.2.4.2)}$$

Alors :

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial \Pi_{\alpha\beta}} \qquad S = \frac{\partial L}{\partial T} \qquad \text{(I.2.4.3)}$$

puis :

$$\chi = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i \qquad \text{(I.2.4.4)}$$

Dans le cas où nous avons une seule variable interne, L dans (I.2.4.2) est la transformée de Légendre de ϕ

En fait, à l'aide de l'hypothèse de dissipativité normale, nous pouvons préciser la forme des relations de comportement et d'évolutions de variables internes.

Au voisinage de l'équilibre ξ_i sont fonctions linéaires des X_i

$$\dot{\xi}_i = b_{ij} X_j$$

avec les relations de réciprocité d'ONSAGER.

$$b_{ij} = b_{ji} \qquad \text{(I.2.4.5)}$$

Hors d'équilibre, on généralise les relations d'ONSAGER (I.2.4.5).

En admettant l'existence d'un potentiel de dissipation

$\Omega = \Omega (X_i, \xi_i, T)$

(éventuellement Ω peut dépendre d'autre variables)

tel que : $\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i}$ (I.2.4.6)

1 - Ceci est vrai lorsque χ est donnée par (I.2.4.4) telle que

$$X_i = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$$

La condition de <u>dissipativité</u> est :

$$\chi = X_i \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} = X_i \dot{\xi}_i = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i \geq 0$$

convexité

La matrice $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \partial X_j}$ est définie positive, avec $\frac{\partial \Omega}{\partial X_i} = 0$ pour $X_i = 0$, alors peut être fonction de X, ξ, Π et éventuellement T.

2 - Si χ est donnée par (I.2.4.1), les variables internes sont Δ, ξ la force X associée alors à $n + 1$ composantes :

$$X^{\Delta} = \Pi_1 = \Pi - \frac{\partial \phi}{\partial \Delta}$$

$$X_j^{\xi} = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

L'évolution des variables internes est :

$$\dot{\Delta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi_1} \quad , \quad \dot{\xi}_j = \frac{\partial \Omega}{\partial X_j} \qquad (j = 1,\ldots,n) \qquad (I.2.4.7)$$

et la condition de dissipativité est : $\chi \geq 0$

convexité

La matrice $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \partial X_j}$ est définie positive $i,j = 1,\ldots, n + 1$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i^{\xi} \partial X_j^{\xi}} X_i^{\xi} X_j^{\xi} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \partial \Pi_1} X_i \Pi_1 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \Pi_1^2} \Pi_1^2 \geq 0$$

avec

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Omega}{\partial X_i^{\xi}} \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial \Pi_1} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{pour} \quad \underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_1^{\xi} \\ \vdots \\ X_n^{\xi} \\ X^{\Delta} \end{bmatrix} = 0$$

Alors, Ω peut être fonction de X, ξ, Δ, Π_1 et éventuellement T HALPHEN et NGUYEN [17] ont utilisé la règle de normalité (I.2.4.7) pour définir l'évolution de variables d'écrouissage des métaux [22].

I.2.5. Formulisme dual pour les MVS

En fait, comme nous avons vu au paragraphe (I.2) que la connaissance de deux fonctions, l'énergie libre, et le potentiel de dissipation détermine complétement les équations d'évolution du milieu, dans ce paragraphe, nous allons voir que le même milieu peut être décrit par un autre formalisme qu'on va appeller "formalisme dual" et le passage du formalisme connu au formalisme dual se fait par l'intermédiaire des transformations de Legendre. Ceci est bien valable pour des milieux viscoélastiques, comme pour des milieux élastiques parfaitement plastique ou encore viscoplastique à déformation plastique instantanée.

Commençons par le cas où Ω est fonction de force X

- $\Omega \quad (X)$

En appliquant, la transformation de Legendre, on peut passer de (I.2.1.1) au formalim suivant :

$$X_i = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} \qquad (I.2.5.1)$$

tel que $\Omega^*(\dot{\xi}_i)$ est le potentiel de dissipation dual de $\Omega(X_i)$, $\Omega^*(\dot{\xi}_i)$ est la transformée de Legendre de Ω

dissipativité

$$\chi^* = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} \dot{\xi}_i \geq 0 \qquad \text{(I.2.5.2)}$$

convexité

avec $\frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} = 0$ la matrice $\frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_j}$ est définie positive pour $\dot{\xi}_i = 0$

La relation entre Ω^* et la puissance dissipée dual χ^* est donnée par l'intégrale suivante [14]

$$\Omega^* (\dot{\xi}) = \int_0^1 \chi^* (P \dot{\xi}) \frac{dP}{P}$$

remarquons, alors, que si Ω est fonction de X, son dual Ω^* est fonction de $\dot{\xi}$. En effet, (I.2.5.1) et (I.2.4.3) déterminent complètement le comportement et l'évolution des variables internes par les deux fonctions $L (\Pi, \xi)$ et $\Omega^* (\dot{\xi}_i)$ (voir (I.3.1.1))

- $\Omega = \Omega (X, \xi)$

(I.2.5.1) et (I.2.5.2) sont encore valables

- $\Omega = \Omega (X_i, \xi_i, \Pi, T)$

En considérant la transformation de Legendre partielle de Ω par rapport aux forces X_i , on obtient le potentiel de dissipation dual

$$\Omega^* = \Omega^* (\xi_i, \dot{\xi}_i, \Pi, T) \qquad \text{en plus si } \chi = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i$$

Alors (I.2.5.1) donne l'expression de forces :

$$X_i = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \qquad \text{(I.2.5.3)}$$

(I.2.5.3) avec (I.2.4.3) déterminent complètement le comportement

et l'évolution des variables internes par les deux fonctions

$L\ (\Pi, T, \xi)$ et $\Omega^*\ (\xi_k, \dot{\xi}_k, \Pi, T)$

dissipativité

$$X^* = \dot{\xi}_i \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \geq 0$$

convexité

La matrice $\dfrac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_j}$ est définie positive

avec $\dfrac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} = 0$ pour $\dot{\xi}_i = 0$

- $\Omega = \Omega\ (X_i, \xi_i, \Delta, \dot{\Delta}, T)$

De même on obtient $\Omega^* = \Omega^*(\xi_i, \dot{\xi}_i, \Delta, \dot{\Delta}, T)$ avec χ est donnée par (I.2.4.1), on obtient :

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\Delta}} = \Pi - \frac{\partial \phi}{\partial \Delta}$$ équation de comportement

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}} = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$$ équation d'évolution des variables internes

Ceci, avec les deux fonctions $\phi\ (\Delta, \xi, T)$ et $\Omega^*\ (\xi, \dot{\xi}, \Delta, \dot{\Delta}, T)$. La condition de dissipativité exprime que $\chi \geq 0$ et la condition de convexité exprime que

la matrice $\dfrac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j} + \dfrac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \dot{\Delta}^2}$ est définie positive

avec

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}} + \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\Delta}} = 0 \quad \text{pour} \quad \dot{\xi} + \dot{\Delta} = 0$$

Remarques

On peut montrer [22] que, lorsque les liaisons entre les éléments d'un système ne sont pas dissipatives :

1 - Si la dissipativité est normale pour les éléments, elle l'est

aussi pour le système, en plus si Ω^* et Ω_i^* est le potentiel de système et de ses éléments respectivement.

Alors :

$$\Omega^* = \sum_i \Omega_i^*$$

2 - Si les éléments sont standards généralisés et s'il y a linéarité géométrique (petites déformations), le système lui-même est standard généralisé.

I.3. Exemples de milieux viscoélastiques standards

Ce paragraphe sera consacré à quelques exemples à la théorie des MVS pour les deux classes, avec et sans élasticité instantanée. Dans (I.3.1), nous allons traiter deux exemples pour les MVS avec élasticité instantanée ; le fluide de Maxwell linéaire en formalisme des MVS et son dual sera étudié au (I.3.1.1).

Dans (I.3.1.2) nous vérifions une propriété d'un MVS avec élasticité instantanée susceptible d'être vérifiée expérimentalement, par des essais de traction simple effectués sur le Zinc, avec saut de vitesse. Trois exemples seront étudiés au (I.3.2) pour les MVS sans élasticité instantanée, le premier sera étudié au (I.3.2.1) en représentant un modèle rhéologique constitué d'un assemblage, de modèle de Maxwell, et un amortisseur montés, en parallèle, ensuite, au (I.3.2.2), nous présentons le corps de Kelvin -Voigt, en vérifiant que la formule (I.2.2.2) n'est pas valable et qu'il faut la remplacer par (I.2.4.1), nous traitons au (I.3.2.3) l'acier à haute température qui sera assimilé à un MVS sans élasticité instantanée, avec la loi de comportement de NORTON-HOFF.

I.3.1. Cas des MVS avec élasticité instantanée

I.3.1.1. Fluide de MAXWELL linéaire

Rappelons que la théorie de la viscoélasticité linéaire est obtenue lorsque ϕ est fonction quadratique de ε et ξ et lorsque Ω est indépendant des ξ et fonction quadratique des X. Dissipativité et convexité sont alors deux conditions équivalentes.
Bien entendu, le modèle de Maxwell présente de l'élasticité instantanée, on va essayer de voir si on peut le décrire avec le formalisme (I.2.1.1), (I.2.1.2), (I.2.1.3), (I.2.1.4), et (I. 2.1.5)

L'expression de l'énergie ϕ et le potentiel de dissipation Ω est :

$$\phi = \frac{1}{2} E (\epsilon - \xi)^2$$

$$\Omega = \frac{1}{2\eta} X^2$$

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = E (\epsilon - \xi)$$

$$X = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = E (\epsilon - \xi)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{\eta} X \qquad (I.3.1.1.1)$$

dissipativité

$$X \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{\eta} X^2 \geq 0$$

convexité

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} = \frac{1}{\eta} > 0$$

on remarque que dans le cas d'un milieu viscoélastique linéaire on a :

$$\text{dissipativité} \iff \text{convexité}$$

Nous allons étudier ce modèle au partie II dans le cas non linéaire unidimensionnel et tridimensionnel dans le cadre du foralisme précédent.
Passons maintenant au formalisme dual :

Le milieu peut être décrit par les deux potentiel ϕ, Ω^* où Ω^* est la transformée de Legendre totale :

$$\Omega^* = \text{Sup} \left[X X^* - \frac{1}{2\eta} X^2 \right]$$

pour que la quantité entre parenthèse atteint le maximum, il faut et il suffit :

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(XX^* - \frac{1}{2\eta} X^2\right) = 0 \qquad \text{pour } X^* \text{ fixé}$$

c'est-à-dire $X = \eta X^*$, remplaçons la valeur de X obtenue dans l'expression de Ω, on obtient :

$$\Omega^*(X^*) = \frac{1}{2}\eta X^{*2}$$

D'autre part on a :

$$X = \eta X^* = \eta\dot{\xi} \quad \Longrightarrow \quad X^* = \dot{\xi}$$

Alors, le potentiel de dissipation dual est :

$$\Omega^*(\dot{\xi}) = \frac{1}{2}\eta\dot{\xi}^2$$

$$X = \frac{\partial\Omega^*}{\partial\dot{\xi}} = \eta\dot{\xi}$$

qui est la même force qu (I.3.1.1.1).

dissipativité

$$\dot{\xi}\frac{\partial\Omega^*}{\partial\dot{\xi}} = \eta\dot{\xi}^2 \geq 0$$

convexité

$$\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial\dot{\xi}^2} = \eta > 0$$

I.3.1.2. Le comportement du zinc dans les essais de traction simple avec saut de vitesse [8]

Dans le cas d'une seule variable interne, nous avons

$$\sigma = \frac{\partial \phi \quad (\epsilon, \xi)}{\partial \epsilon}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \xi} \dot{\xi}$$

En éliminant ξ , on obtient, l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\sigma} = a\ (\epsilon, \sigma)\quad \dot{\epsilon} + b\ (\epsilon, \sigma) \qquad (I.3.1.2.1)$$

où $a = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2}$ $\qquad b = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \xi} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X}$

Lorsque a est une constante et b une fonction linéaire et homogène de ϵ et σ , c'est le cas du modèle de ZENER linéaire fig (I.3.1.2.1).

a et b dépendent de l'histoire des déformations mais elles ne changent pas pour une discontuité de $\dot{\epsilon}$

Si, on considère une fonction $b(\epsilon, \sigma)$ non linéaire, telle que fig (I.3.1.2.2) :

$b(\epsilon, \sigma) = 0$ dans la région Ro

$b(\epsilon, \sigma) \ll 0$ dans la région R_1

$b(\epsilon, \sigma) \gg 0$ dans la région R_2

La courbe OABCDEF représente la relation entre la contrainte et la déformation, (I.3.1.2.1) est semblable à celle de plusieurs matériaux, ce qui montre l'importance du cas d'une seule variable interne en rhéologie non linéaire.

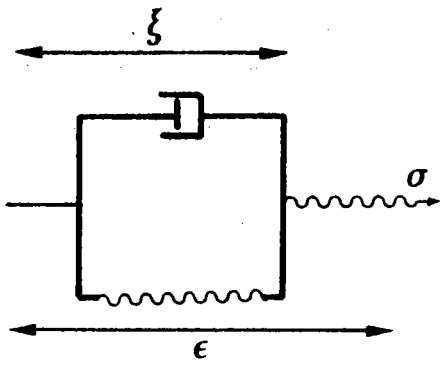


fig (I.3.1.2.1)
modèle de ZENER

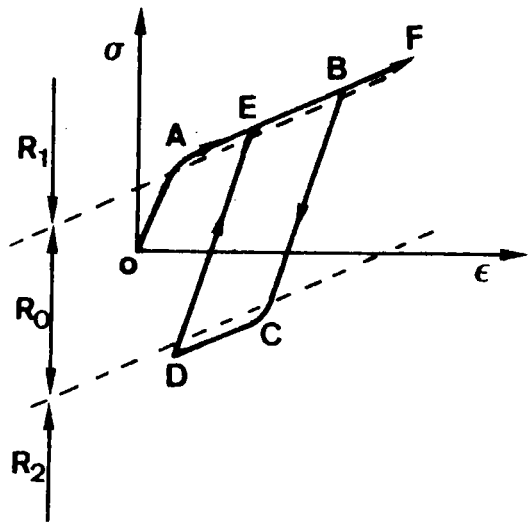


fig (I.3.1.2.2)
courbe contrainte - déformation

En effet, a et b dépendent de l'histoire de la déformation avant le saut, sans dépendre du saut de vitesse lui-même, pour pouvoir calculer la pente $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ avant et après le saut, (I.3.1.2.1) peut être écrite :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a + \frac{b}{\dot{\varepsilon}} \qquad (I.3.1.2.2)$$

(I.3.1.2.1) correspond à la description pour les MVS pour lesquels il y a une seule variable interne [54] , cependant (I.3.1.2.2) est valable pour les MVS ayant plusieurs variables internes.

La condition d'élasticité instantanée est assurée par le changement brusque de vitesse de déformation.

- L'équation rhéologique (I.3.1.2.1) a été utilisée pour décrire le comportement d'un milieu viscoélastique non linéire [54]

- Nous allons présenter dans ce paragraphe les résultats obtenus pour décrire le comportement de zinc en grandes déformations.

Description des essais

Le matériau utilisé était le zinc, et les essais de traction s'effectuaient sur la machine de traction ZWICK à la température ambiante.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une éprouvette de la forme :

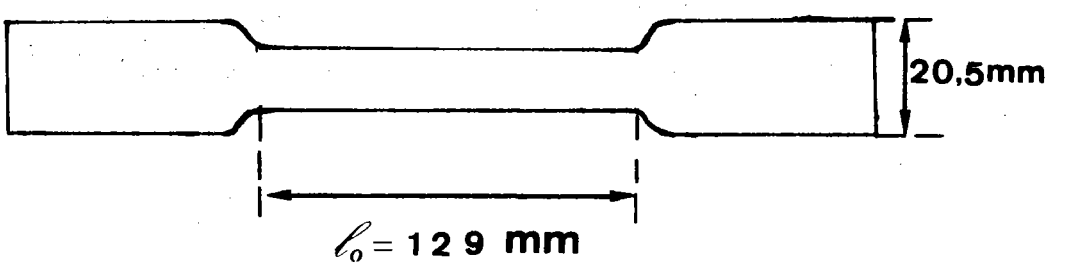


fig (I.3.1.2.3)
éprouvette du Zinc

Epaisseur = 2 mm

V_1 = 5 mm / min la vitesse de déformation avant le saut

V_2 = 15 mm / min la vitesse de déformation après le saut

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{5}{\ell_0} \text{ / min} = \frac{1}{60}\,\frac{5}{\ell_0} \text{ / sec} = \frac{1}{60}\,\frac{5}{129} \text{ / sec} = 6{,}459\ 10^{-4} \text{sec}^{-1}$$

De même $\dot{\varepsilon}_2 = 19{,}377\ 10^{-4}\ \text{sec}^{-1}$

La valeur de la pente avant le saut à l'origine égale à a.

On calcule $(\frac{d\sigma}{d\varepsilon})_1$ avant le saut, on remplace les valeurs obtenues dans l'équation suivante :

$$(\frac{d\sigma}{d\varepsilon})_1 = a + \frac{b}{\dot{\varepsilon}_1} \qquad \text{"avant le saut"}$$

portons la valeur obtenue de b dans l'équation suivante :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_2 = a + \frac{b}{\dot{\varepsilon}_2}$$ "après le saut"

on obtient $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\text{calculé}}$ c'est à dire la pente après le saut, en effet, la valeur obtenue pour $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\text{calculé}}$ est incluse entre deux valeurs ,

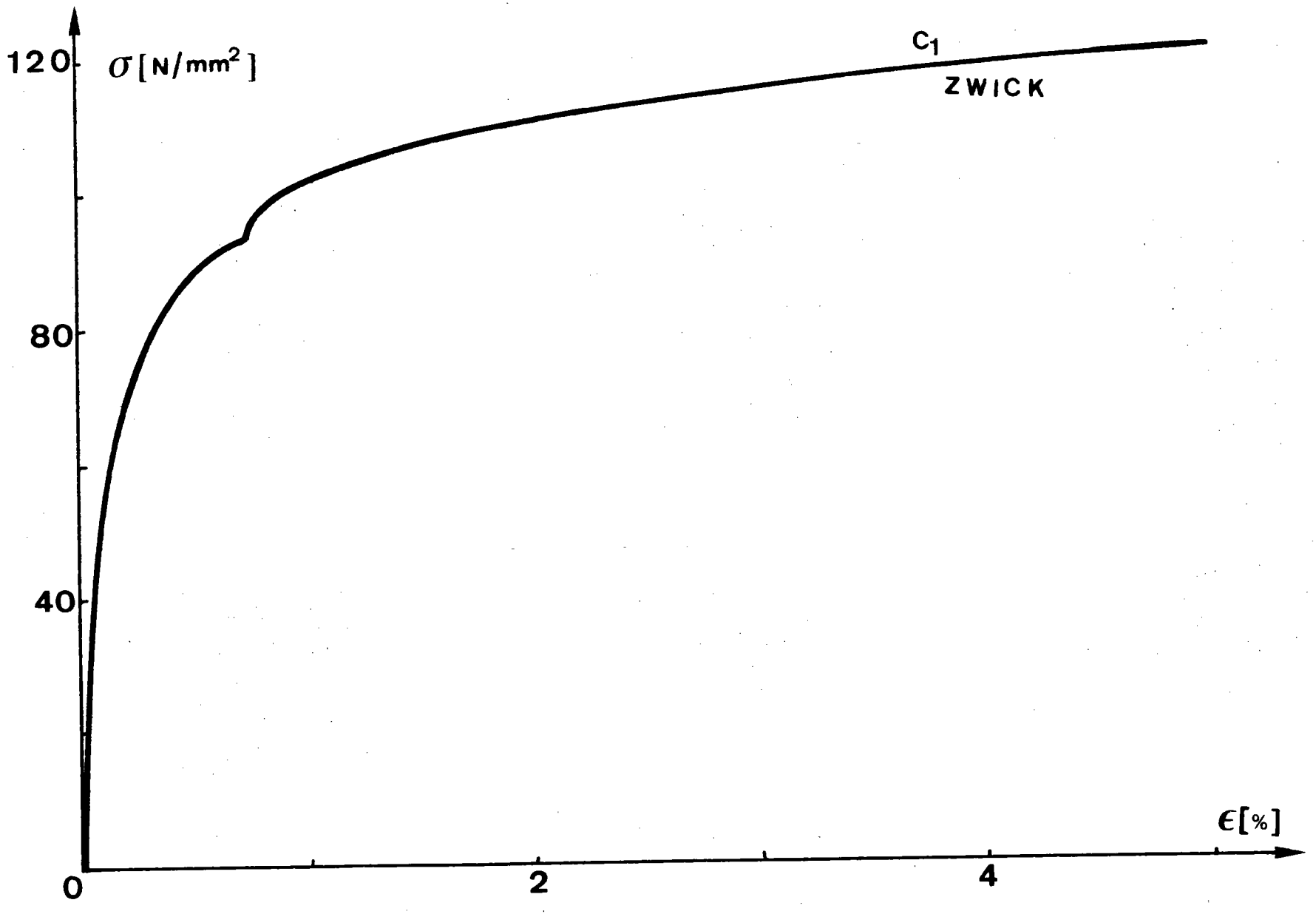
$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\min} < \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\text{calculé}} < \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\max}$$

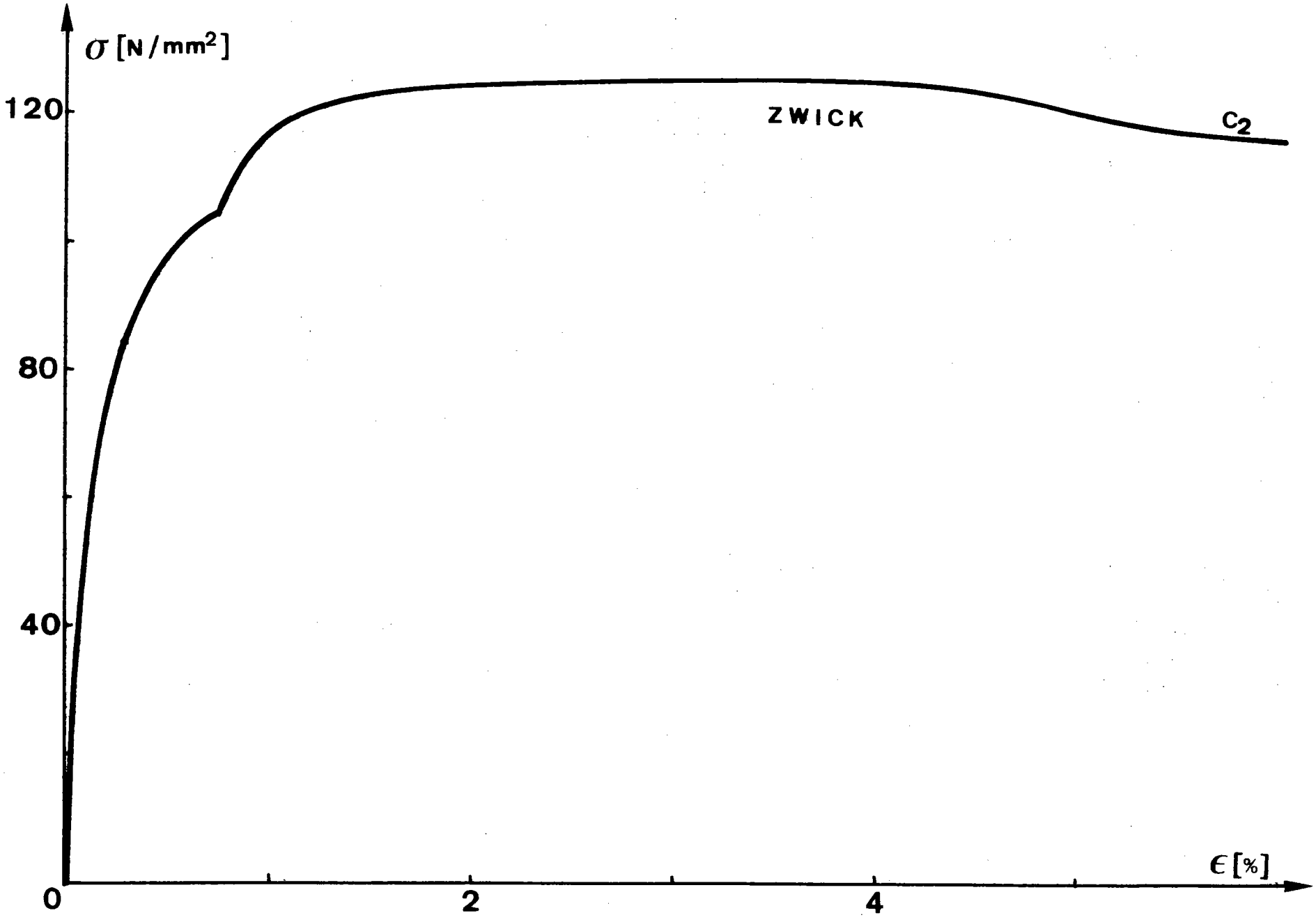
$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\min}$ $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\max}$, désignent les deux valeurs minimum et maximum, obtenues en jouant avec la règle et $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\text{calculé}}$ désigne la valeur de la pente $(\frac{d\sigma}{d\varepsilon})$ calculée à partir de $a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

. Dans le deuxieme essai, nous avons utilisé une autre éprouvette identique à la première.
Mais on a changé v_2 , en considérant $v_2 = 20$ mm/m, la courbe C_1 correspond au premier essai et la courbe C_2 au deuxieme essai.

Remarque :

La mesure de la pente $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)$ après le saut de vitesse était extrememement imprécise de ce fait, la relation (I.3.1.2.2) n'a pu être vérifiée que qualitativement.


120
σ [N/mm²]
C1
ZWICK
80
40
ε[%]
0
2
4


σ [N/mm²]
120
80
40
0
2
4
ε [%]
ZWICK
C2

	1er essai	2ème essai
V_1	5 mm/m	5 mm/m
V_2	15 mm/m	20 mm/m
$\dot{\epsilon}_1$	$6,459.10^{-4}sec^{-1}$	$6,459.10^{-4}sec^{-1}$
$\dot{\epsilon}_2$	$19,377.10^{-4}sec^{-1}$	$25,836.10^{-4}sec^{-1}$
a	68571 N/mm^2	46150 N/mm^2
b	-43,088	- 28,16
$(\frac{d\sigma}{d\epsilon})_1$	1860 N/mm^2	2551 N/mm^2
$(\frac{d\sigma}{d\epsilon})_{min}$	6363 N/mm^2	8200 N/mm^2
$(\frac{d\sigma}{d\epsilon})_{cal}$	46334 N/mm^2	35250 N/mm^2
$(\frac{d\sigma}{d\epsilon})_{max}$	52500 N/mm^2	67100 N/mm^2
ϵ	0,8 %	0,8 %

Tableau (I.3.1.2.2.1)

I.3.2. Cas des MVS sans élasticité instantanée

I.3.2.1. Cas d'un modèle rhéologique constitué du modèle de Maxwell et un amortisseur montés en parallèle

Considérons le modèle rhéologique suivant présentant un milieu viscoélastique sans élasticité instantanée.

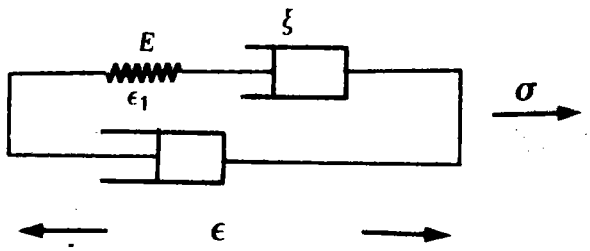


fig (I.3.2.1.1)

En effet, ce modèle est un assemblage d'un modèle présentant de l'élasticité instantanée (1ère branche) et un modèle sans élasticité instantanée (2ème branche).

La loi de comportement est :

$$\Sigma = \sigma + f(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad ; \quad \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$$

C'est-à-dire, le tenseur des contraintes totales sans élasticité instantanée est la somme du tenseur des contraintes avec élasticité instantanée et une fonction dépend de ϵ, $\dot{\epsilon}$

I.3.2.2. Corps de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt est constitué d'un ressort dont σ_1 est la tension et d'un amortisseur dont η est la viscosité montés en parallèle fig (I.3.2.2.1) ci-dessous :

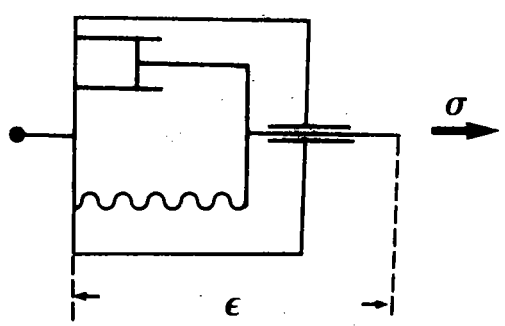


Fig (I.3.2.2.1) Modèle de Kelvin

En effet, si l'on utilise ϵ comme variable commandée, il n'y a pas de variables internes, si

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}$$

Alors l'état hors d'équilibre est défini par les valeurs actuelles de ϵ, et $\dot{\epsilon}$.

Par contre, en utilisant la contrainte σ commme variable commandée, il y a une seule variable interne (σ_1 , par exemple), et l'état est défini par σ et σ_1 , dans ce cas pour simplifier les équations, on remplace σ_i par la variable extensive correspondante $\xi = \epsilon$ qui joue le rôle d'une variable interne, commençons par le cas simple :

L'énergie libre, et le potentiel de dissipation sont :

$$\phi = \frac{1}{2} E \epsilon^2$$

$$\Omega = \frac{1}{2\eta} X^2$$

La contrainte $\sigma = E \quad \epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad \neq \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial\epsilon}$

La force thermodynamique $X = \sigma - E\epsilon \neq -\dfrac{\partial\phi}{\partial\epsilon}$

La vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = \dfrac{1}{\eta} X \quad = \dfrac{1}{\eta}(\sigma - E\epsilon) = \dfrac{\partial\Omega}{\partial X}$

C'est-à-dire, (I.2.1.1) et (I.2.1.2) ne sont pas valable, car le modèle ne présente pas de l'élasticité instantanée.

Introduisons donc, l'enthalpie L changé de signe :

$$L = \sigma\epsilon - \phi = \sigma\epsilon - \frac{1}{2} E\epsilon^2$$

Alors, la force associée à la variable interne est :

$$X = \frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \sigma - E\epsilon$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\xi} = \frac{1}{\eta} X = \frac{\partial\Omega}{\partial X}$$

dissipativité

$$X \frac{\partial\Omega}{\partial X} = \frac{1}{\eta} X^2 \geq 0$$

convexité

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} = \frac{1}{\eta} > 0$$

En plus, on remarque que :

dissipativité $\Leftrightarrow$ convexité

Cas général

Considérons comme au cas simple la définition de l'état par σ , σ_1 qui est la tension du ressort est la variable interne [22] .
On va décrire le comportement rhéologique dans les deux formalisme en montrant que le formalisme de colman et curtin ne sont pas valable dans ce cas aussi :

Tout d'abord, on se place dans le cas $\Omega = \Omega (X)$

$\xi = \epsilon = \sigma_1$ est la variable interne

$$\phi = \frac{1}{2} E\epsilon^2 = \frac{1}{2} E\xi^2$$

$$\Omega = \frac{m\eta}{1+m} \left(\frac{X_0}{\eta} \right)^{1+\frac{1}{m}}$$

où $X_0 = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = - E\xi$ est la force thermodynamique

Examinons maintenant la condition de dissipativité :

$$X_0 \dot{\xi} = X_0 \frac{\partial \Omega}{\partial X_0} = X_0 \left(\frac{X_0}{\eta} \right)^{1/m} \leq 0$$

Donc la dissipativité n'est pas normale, en plus

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = E\epsilon \neq \sigma$$

par conséquent, (I.2.1.1) et (I.2.1.2) ne sont pas valable.

Introduisons, donc, l'enthalpie changée de signe :

$$L = \sigma\xi - \frac{1}{2} E \xi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \xi = \epsilon$$

$$X = \frac{\partial L}{\partial \xi} - \sigma - E \xi$$

X est la force thermodynamique qui est la force transmise à la tige de l'amortisseur, l'évolution de variable interne est déterminée par :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \left(\frac{X}{\eta}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$X \frac{\partial \Omega}{\partial X} = X \left(\frac{X}{\eta}\right)^{\frac{1}{m}} \geq 0 \qquad \text{(dissipativité)}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} = \frac{\eta (X/\eta)^{\frac{1}{m}}}{mX} \geq 0 \qquad \text{(convexité)}$$

En plus, si :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \geq 0 \iff \frac{m}{\eta} X^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \geq 0$$

C'est-à-dire : $\frac{m}{\eta} X^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} = X \left(\frac{X}{\eta}\right)^{1/m} \geq 0$

Alors, on remarque que la convexité entrainte la dissipativité et réciproquement. Ceci est vrai à l'équilibre comme hors d'équilibre.

La transformée de Legendre de Ω est :

$$\Omega^* = \frac{\eta}{1+m} \left(\dot{\xi}\right)^{1+m}$$

qui est le potentiel de dissipation dual de

$$\chi^* = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}} = \eta \dot{\xi}^m$$ est la force thermodynamique duale

dissipativité

$$\chi^* = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi} = \eta (\dot{\xi})^{1+m} \geq 0$$

Alors, la disssipativité est normal et en particulier lorsque m= 1 (viscosité neurtonienne) et m = o (frottement de Tresca de seuil η)

convexité

$$\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \dot{\xi}^2} = \eta m \dot{\xi}^{m-1} = \eta \dot{\xi}^{1+m} \frac{m}{\dot{\xi}^2} = \chi \frac{m}{\dot{\xi}^2} \geq 0$$

Alors :

convexité $\Leftrightarrow$ dissipativité

remarquons que si m = 1, on obtient le cas simple.

I.3.2.3. L'acier à haute température

cas où $\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}^m$

Tout d'abord, considérons la loi de comportement de l'acier suivante :

$$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}^m$$ où m est une constante

En fait, le comportement de l'acier à haute température est un comportement visqueuse non linéaire qui ne présente pas de l'élasticité instantanée.

Alors, nous pouvons le décrire par les deux potentiels suivants :

$$L = \sigma\varepsilon - \phi \quad ; \qquad \phi = cte \frac{|\sigma|^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1}$$

$$\Omega = \frac{1}{(\lambda)^{1/m}}$$

où la variable interne est la déformation ε .

La force thermodynamique X associée à ϵ est :

$$X = \frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \sigma$$

La vitesse de déformation (ou de variable interne) est :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \left(\frac{|\sigma|}{X} \right)^{1/m}$$

<u>cas où $\sigma = \lambda \epsilon^n \dot{\epsilon}^m$</u>

Si on considère la loi de comportement de Norton-Hoff

$$\sigma = \lambda \epsilon^n \dot{\epsilon}^m$$

où n et m sont des constantes

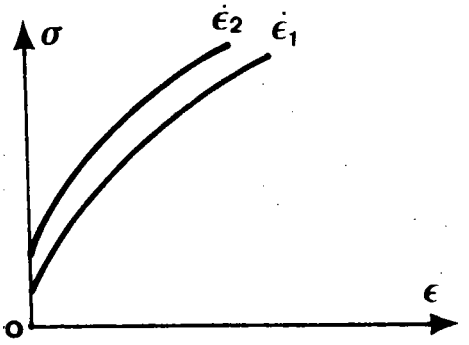


fig (I.3.2.3.1)

Dans ce cas, nous pouvons décrire le milieu, en considérant :

$$L = \sigma\epsilon - \Phi \quad ; \quad \Phi = \text{cte}$$

$$\Omega = \frac{1}{(\lambda)^{1/m}} \frac{|\sigma|^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} \cdot \frac{1}{\epsilon^{\frac{n}{m}}}$$

c'est-à-dire

$$X = \frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \sigma$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\epsilon^{n/m}}$$

Le potentiel de dissipation peut prendre la forme suivante :

$$\Omega = \frac{m \lambda}{m+1} \epsilon^n \dot{\epsilon}^{m+1}$$

<u>cas général</u>

Considérons maintenant la loi de comportement suivante :

$$\dot{\epsilon} = \text{sgn}(a\sigma - b\epsilon) \, |a\sigma - b\epsilon|^n$$

où a,b sont des constants

$\dot{\epsilon}$ peut s'écrire :

$$\dot{\epsilon} = a^{n+1} (\text{sgn } X) |X|^n ; X = \sigma - \frac{b}{a}\epsilon = \sigma - E\epsilon$$

avec E = b/a est le module d'Young

Les deux potentiels de MVS sans élasticité instantanée sont :

$$L = \sigma\epsilon - \phi = \sigma\epsilon - \frac{1}{2} E\epsilon^2$$

$$\Omega = \frac{a^{n+1}}{n+1} |X|^{n+1} \quad ; \quad X = \frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \sigma - E\epsilon$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = a^{n+1} (\text{sgn } X) |X|^n$$

ou encore : $$\Omega = \frac{|a\sigma - b\epsilon|^{n+1}}{n+1}$$

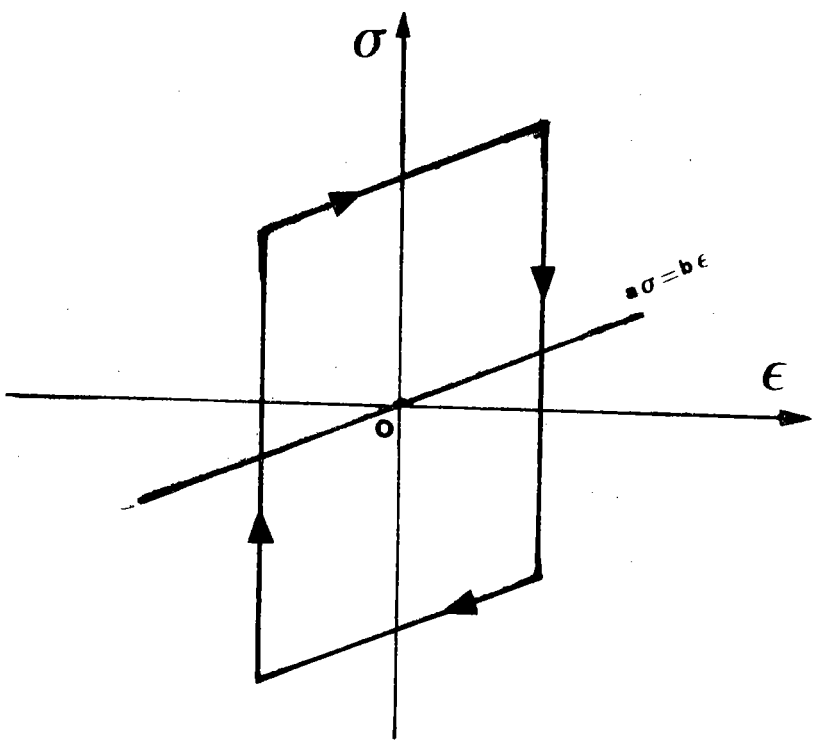


fig (I.3.2.3.2)

I.4. Propriétés des milieux viscoélastiques standards avec élasticité instantanée

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser la théorie présentée au (I.2) pour la classe des MVS avec élasticité instantanée, nous vérifions si ces milieux obéissent à certains principes des milieux continus, et le second principe de la thermodynamique. Ensuite, nous allons discuter la validité du formalisme des MVS toujours en élasticité instantanée avec des modèles rhéologiques représentants des milieux viscoélastiques linéaires ou non linéaires. Nous terminons ce paragraphe par une étude de l'existence et de l'unicité des vitesses d'un MVS avec élasticité instantanée, en déformations quasi-statiques, pour d'évolutions isothermes.

I.4.1. Les MVS et quelques principes

I.4.1.1. Principe d'objectivité ou principe d'indifférence matérielle

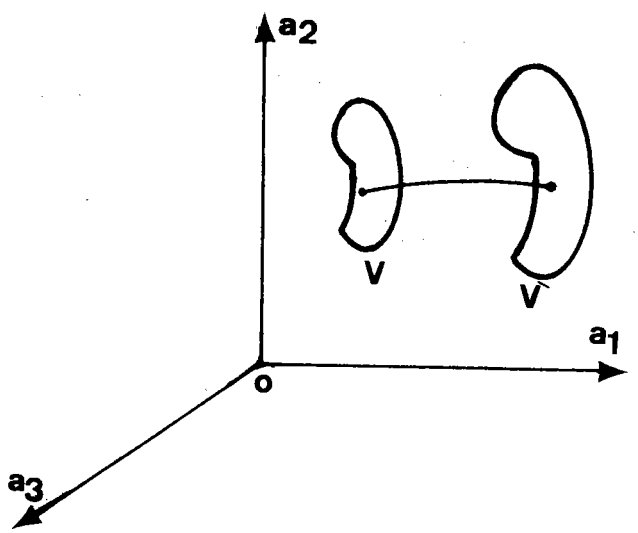


fig (I.4.1.1.1)

L'espace Euclidien à trois dimensions est rapporté à un repère orthonormé o $\underline{a}_1$ $\underline{a}_2$ $\underline{a}_3$ fig (I.4.1.1.1). Soit V un domaine borné de l'espace V et x (a) une bijection dans $\overline{V} = V \cup \partial V$ où ∂V est la frontière de V qui transforme V en un domaine V'.

Soient a (a_1 , a_2 , a_3) où a_i (i = 1,2,3) sont les variables de Lagrange définissent la position des molécules ou points

matériels du corps dans une configuration de référence dans laquelle il occupe le domaine V et $x(x_1, x_2, x_3)$ où x_i (i = 1, 2, 3) sont les variables d'Euler déterminent la position des molécules de ce corpa dans sa configuration actuelle dans laquelle il occupe le domaine V'.

Soit Q l'espace des tenseur F d'ordre 2, de composantes F_{ij}, à déterminant positif.

Considérons l'application $\phi : \overline{V} \times Q \longrightarrow R$, vérifiant la condition d'invariance suivante :

La valeur $\phi(a,F)$ ne change pas lorsque F est multiplié à gauche par un tenseur orthgonale arbitraire γ à déterminant positif :

$$\phi(a,F) = \phi(a,F') \qquad (I.4.1.1.1)$$

où

$$F' = \gamma F, \text{ soit } F_{ij} = \gamma_{ik} F_{kj} \text{ avec } \gamma_{ki} \gamma_{kj} = \delta_{ij} \text{ et dét } \gamma > o$$

ou pose :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}} \qquad \text{où} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$$

qui sont les composantes d'un tenseur θ d'ordre 2 défini dans $\overline{V}$.

I.4.1.2. Les MVS obéissent au principe d'objectivité

Les déformations sont supposées isothermes, soit

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ où ξ_i (i = 1, ..., n) sont n variables internes

soit $\phi : R^n \times Q \longrightarrow R$ vérifie une condition d'invariance analogue à (I.4.1.1.1)

$$\phi(\xi, F) = \phi(\xi, F') \text{ lorsque } F' = \gamma F \qquad (I.4.1.2.1)$$

avec $\gamma_{ki}\ \gamma_{kj} = \delta_{ij}$ et $\det \gamma > 0$

D'autre part, les composantes du tenseur des contraintes de Boussinesq sont :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}} \qquad \forall\, t \text{ (t est le temps)}$$

proposition (I.4.1.2.1)

Si, on remplace F (t) par F' (t) = γ (t) F(t), sans changer les valeurs initiales de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tel que γ (t) est un tenseur orthogonal à déterminant positif, alors le tenseur des contraintes de Boussinesq θ d'un MVS est remplacé par $\theta(t) = \gamma(t)\ \theta(t)$.

démonstration

De (I.4.1.2.1), on déduit que la force thermodynamique X égale à

$$X_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}(\xi, \varepsilon(t)) = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}(\xi, \varepsilon(t)) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

si les valeurs initiales de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont identiques, donc les deux équations differentielles :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}(\xi, \varepsilon(t)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}(\xi, \varepsilon(t)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ont la même solution.

En fait, en fixant $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et , l'énergie libre ϕ peut être regardé comme fonction de ε ou de $\varepsilon' = \gamma\varepsilon$

Nous avons :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$$

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{k\ell}} = \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial F_{ij}}$$

or la relation $F_{ij} = \gamma_{ik} F_{kj}$ s'écrit $F_{k\ell} = \gamma_{mk} F'_{m\ell}$ alors

$$\frac{\partial F_{k\ell}}{\partial F_{ij}} = \gamma_{mk} \delta_{mi} \delta_{\ell j} = \gamma_{ik} \delta_{\ell j}$$

ou encore :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{k\ell}} \gamma_{ik} \delta_{\ell j} = \gamma_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial F_{kj}} = \gamma_{ik} \theta_{kj}$$

I.4.1.3. Les MVS obéissent au second principe de la thermodynamique

Lorsque un élément d'un MVS décrit entre deux instants t_1 , et $t_2 > t_1$ un cycle isotherme fermé, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\underline{\epsilon}$ prennent les mêmes valeurs aux instants $\underline{t_1}$, $\underline{t_2}$ alors nous avons la proposition suivante :

proposition (I.4.1.3.1)

Si, $\xi = (\xi_1 , \ldots , \xi_n)$ et ϵ prennent les mêmes valeurs aux instants t_1 , $t_2 > t_1$, alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sigma \, d\epsilon > 0$$

démomstration

Nous avons :

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$$

L'énergie libre ϕ est fonction de ϵ et ξ, alors à tout instant nous avons :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi$$

et

$$\int_{t_1}^{t_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$$

d'où

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sigma \, d\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) \frac{d\xi}{dt} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi} \, X \, dt$$

En tenant compte de la condition de dissipativité, alors $W \geq 0$. En fait, W représente le travail fourni entre les deux instants t_1 et t_2 à un élément matériel ayant un volume unité dans la configuration de référence ($t = 0$).

Notons que, la proposition précédente est valable pour le tenseur

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$$

I.4.2. Equations de conservation et équations de comportement pour les MVS

L'évolution dynamique d'un MVS, compte tenu des échanges de chaleur, est régie par les équations suivantes :

$$\rho \, J = \rho_0 \quad ; \quad J = \det F_{ij}$$

$$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial a_j} + \rho_0 \, (f_i - \ddot{x}_i) = 0$$

$$\frac{de}{dt} = \theta_{ij} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_j} - J \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

$$\phi = e + T \frac{\partial \phi}{\partial T}$$

$$\dot{\xi}_u = \frac{\partial \Omega}{\partial X_u} \quad ; \quad X_u = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_u}$$

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$$

$$q_i = - K \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\phi = f^0 (a_k \, , F_{ij} \, , \xi_u \, , T) \qquad (i,j,k = 1,2,3, \; u = 1,2,\ldots,n)$$

$$\Omega = g^0 \, (a_k, \xi_u, X_u, T)$$

où :

$$x_i = x_i \quad (a_j, t) \qquad (i,j = 1,2,3)$$

$\dot{x}_i$, $\ddot{x}_i$ dérivées partielles premières et seconde de x_i par rapport à t

e : est l'énergie interne, rapporté à l'unité de volume dans la configuration initiale (densité d'énergie interne)

q_i est un vecteur flux de chaleur.

f° et g° sont des fonctions données.

Si on fait le compte des inconnues on obtient :

les 9 $\bullet_{ij}$, les 3 x_i , ρ , T , e , ϕ , Ω , les 3 q_i , les n ξ_u , les n X_u .

sont au total 20 + 2 n fonctions de a_1 , a_2 , a_3 , t inconnues on vérifie que le nombre des inconnues est égale au nombre des équations.

Remarque

On doit supposer que pour tout tenseur orthogonale γ à déterminant positif on a :

$$f^\circ (a, F, \xi, T) = f^\circ (a, \gamma F, \xi, T)$$

Le moment résultant des forces de contact, des forces de masses et des forces d'inertie est alors nul dans tout domaine intérieur au milieu continu considéré.

En fait, on peut donner aux trois premières équations le nom de lois de conservation et aux trois équations suivantes le nom d'équations de comportement.

I.4.3. Les MVS et l'assemblage de n modèles de Maxwell

proposition (I.4.3.1)

Pour tout assemblage en série ou en parallèle de n modèles de Maxwell, nous avons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad (I.4.3.1)$$

Et

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \quad (i = 1,\ldots,n) \quad (I.4.3.2)$$

démonstration

en parallèle

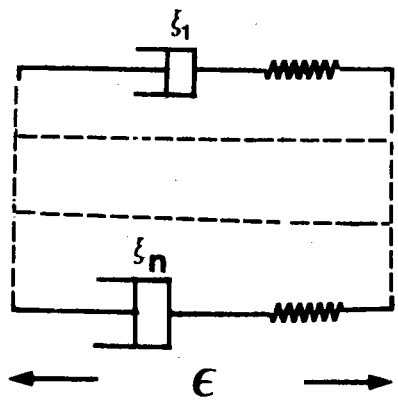


fig (I.4.3.1)

considerons un modèle constitué par un assemblage en parallèle de n modèles de Maxwell, alors nous avons n variables internes indépendantes $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. L'énergie libre totale du modèle est :

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \phi(\xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon) = \phi_1(\xi_1, \varepsilon) + \ldots + \phi_n(\xi_n, \varepsilon)$$

$$d\phi = \sum_{i+1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \qquad (I.4.3.3)$$

D'autre part :

$$d\phi = d\phi_1 + \ldots + d\phi_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i} d\xi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \qquad (I.4.3.4)$$

de (I.4.3.3) et (I.4.3.4), on déduit (I.4.3.1) en plus on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \varepsilon} + \ldots + \frac{\partial \phi_n}{\partial \varepsilon}$$

ou encore :

$$X = X_1 + \ldots + X_n \qquad \text{"les contraintes s'additionnent"}$$

Le potentiel de dissipation totale est :

$$\Omega(\xi, X) = \Omega(\xi_1, \ldots, \xi_n, X_1, \ldots, X_n) = \Omega_1(\xi_1, X_1) + \ldots + \Omega_n(\xi_n, X_n)$$

L'évolution des variables internes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ est :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_i} \quad , \quad X_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

En tenant compte de 1, on obtient que :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad , \quad X_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

<u>en série</u>

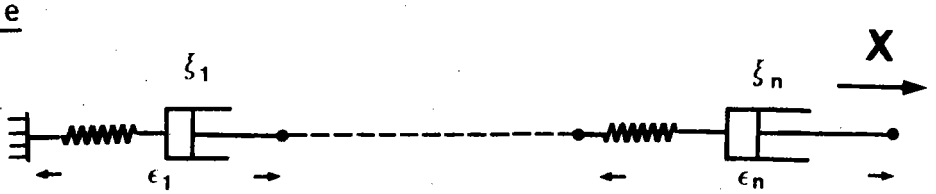


fig (I.4.3.2)

considérons un modèle constitué de n modèles de Maxwell monté en série, nous avons n variables internes indépendantes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ l'énergie libre totale est :

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \phi(\xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \phi_1(\xi_1, \varepsilon_1) + \ldots + \phi_n(\xi_n, \varepsilon_n)$$

où $\epsilon = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n$ est la longueur totale du modèle et

$$- \frac{\partial \phi_1}{\partial \epsilon_1} = \ldots = - \frac{\partial \phi_n}{\partial \epsilon_n}$$

parcequ'on à la même force de traction

Alors :

$$d\phi = d\phi_1 + \ldots + d\phi_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i} d\xi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i \qquad (I.4.3.5)$$

D'autre part :

$$d\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} d\xi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_i} d\epsilon_i \qquad (I.4.3.6)$$

Comparons (I.4.3.5) et (I.4.3.6), on déduit (I.4.3.1).
En plus, de fait que le modèle est soumis à la même force de traction, (I.4.3.5) s'écrit :

$$d\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \left(\sum_{i=1}^{n} d\epsilon_i \right)$$

ou encore :

$$d\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} d\epsilon \; ; \; d\epsilon = \sum_{i=1}^{n} d\epsilon_i$$

c'est-à-dire que : $\epsilon = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n$ "les déformations s'additionnent"
On sépare le ieme amortisseur et on exerce une force de traction X_i sur celui-ci, alors le potentiel de dissipation totale est :

$$\Omega(\xi, X) = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i (\xi_i, X_i)$$

et

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = - \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ou encore :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

généralisation

On peut formuler la généralisation sous la forme suivante :
Tout modèle rhéologique à élasticité instantanée, constitué par un assemblage quelconque de ressorts, amortisseurs est de type MVS.

I.4.4. Les MVS et une transformation quelconque par rapport aux variables internes

Soit un MVS pour lequel, nous avons :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad ; \quad X_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

proposition (I.4.4.1)

Si $\zeta = \zeta(\xi)$ une bijection qui substitue aux variables internes ξ les nouvelles variables internes ζ donc :

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \Omega}{\partial Y_i} \quad ; \quad Y_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i}$$

tel que $\varphi = \varphi(\zeta, \varepsilon)$ $\qquad (i = 1,\ldots,n)$

démonstration

En fait, l'énergie libre d'un MVS peut être exprimée par $\phi(\xi, \varepsilon)$ ou par $\varphi(\zeta(\xi), \varepsilon)$ au cours d'une déformation quelconque ε (t).
L'évolution de variables internes ζ_i est régie par :

$$\dot{\zeta}_i = \frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_i} \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_i} \quad \dot{\xi}_i \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

ou encore :

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_i} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \quad ; X_i = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1,\ldots,n) \quad (I.4.4.1)$$

mais :

$$X_i = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_i}$$

ou

$$X_i = Y_i \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_i} \quad ; \quad Y_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} \qquad (I.4.4.2)$$

En dérivant (I.4.4.2) par rapport à X_i , on obtient :

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_i} = \frac{\partial X_i}{\partial Y_i}$$

Finalement, (I.4.4.1) devient :

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \Omega}{\partial Y_i} \qquad ; \quad Y_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i}$$

Donc, quelque soit le choix des variables internes, ses évolutions sont toujours déterminées par un système d'équations différentielles de type MVS.

I.4.5. Etude du comportement au voisinage d'un état d'équilibre interne, relaxation des contraintes d'un MVS

Nous rappelons que le comportement d'un corps viscoélastique non linéaire au voisinage d'un état d'équilibre interne s'identifie avec le comportement d'un corps viscoélastique linéaire, dans le cas unidimensionnel ces corps ont

la propriété suivante :
Les dérivées successives par rapport au temps de la fonction de relaxation r (t), et de la fonction du fluage f(t) ont des signes alternés :

$$\dot{r}(t) < o \qquad \ddot{r}(t) > o \qquad \dddot{r}(t) < o \quad ---$$
$$\dot{f}(t) > o \qquad \ddot{f}(t) < o \qquad \dddot{f}(t) > o \quad ---$$

nous allons vérifier que la fonction relaxation r (t) pour un MVS satisfait la propriété précédente :
En fait, à l'équilibre, nous avons :

$\dot{\xi}_i = o$ absence d'évolution de variables internes

ou

$\frac{\partial \Omega}{\partial X_i} = o$ pour $X_i = o$

d'autre part, comme Ω vérifie la condition de convexité alors, la matrice $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_{ij} \partial X_{hk}}$ est définie positive.

Un accroissement brusque $\Delta\epsilon$ du tenseur ϵ , à l'instant t, entraine un accroissement brusque du tenseur σ ; on observe ensuite une relaxation de contrainte dont les dérivées successives à l'instant t + o sont désignées par $\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$, $\dddot{\sigma}$,... alors que ϵ est maintenu constant.

proposition (I.4.5.1)

Soit $\Delta\epsilon = \beta L$, où L est un tenseur arbitraire, de composantes ℓ_{ij}, et β un nombre positif.
Alors, nous avons, pour β suffisamment petit :

$$\dot{\sigma}_{ij}\,\ell_{ij} < o \qquad \ddot{\sigma}_{ij}\,\ell_{ij} > o \qquad \dddot{\sigma}_{ij}\,\ell_{ij} < o$$

Jusqu'à n'importe quel ordre de dérivation.

démonstration

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} (\xi , \varepsilon + \Delta\varepsilon)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial^2 \phi (\xi, \varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \xi_u} \dot{\xi}_u = \frac{\partial^2 \phi(\xi, \varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\partial \varepsilon ij \partial \xi u} \frac{\partial \Omega}{\partial X_u} ;$$

$$X_u = - \frac{\partial \phi(\xi, \varepsilon +\Delta \varepsilon)}{\partial \xi_u}$$

Mais à l'équilibre Ω est une fonction quadratique par rapport aux forces X, alors :

$\Omega = C_{uv} X_u X_v$; C_{uv} est une matrice définie positive, donc :

$$\dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial^2 \phi(\xi, \varepsilon+ \Delta\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \xi_u} C_{uv} \frac{\partial \phi (\xi, \varepsilon + \Delta\varepsilon)}{\partial \xi_v}$$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_v} (\xi, \varepsilon+ \Delta\varepsilon) = \frac{\partial^2 \phi (\xi, \varepsilon+ \alpha \Delta \varepsilon)}{\partial \xi_v \partial \varepsilon_{hk}} \Delta\varepsilon_{hk}$$

$$= \frac{\partial^2 \phi (\xi , \varepsilon + \alpha \Delta \varepsilon)}{\partial \xi_v \partial \varepsilon_{hk}} \beta \ell_{hk}$$

Alors :

$$\dot{\sigma}_{ij} \ell_{ij} = - \beta \frac{\partial^2 \phi(\xi, \varepsilon + \Delta\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \xi_u} \ell_{ij} C_{uv} \frac{\partial^2 \phi(\xi, \varepsilon + \alpha \Delta\varepsilon)}{\partial \xi_v \partial \varepsilon_{hk}} \ell_{hk}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} \ell_{ij} = - \beta \frac{\partial^2 \phi (\xi , \varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \xi_u} ij C_{uv} \frac{\partial^2 \phi(\xi , \varepsilon)}{\partial \varepsilon_{hk} \partial \xi_v} \ell_{hk} + \beta \eta (\beta)$$

La fonction $\eta (\beta) \to 0$ lorsque $\beta \to 0$

Si le vecteur $Y_u = \frac{\partial^2 \phi (\xi, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \xi_u} \ell_{ij}$ n'est pas nul, on a $Y_u C_{uv} Y_v > 0$

D'où : $\dot{\sigma}_{ij} \ell_{ij} < 0$ pour β suffisamment petit.

Le raisonnement peut être répétés jusqu'à n'importe quel ordre de dérivation.

Remarquons qu'on peut obtenir le même résultat précédent, en donnant un accroissement Δ aux forces X.

I.4.6. Théorèmes d'existence et d'unicité des vitesses d'un MVS avec élasticité instantanée[8]

Dans ce paragraphe, on va donner un théorème d'existence et d'unicité pour un problème aux limites en vitesse à partir d'un état d'équilibre stable (critère d'énergie) d'un milieu élastique, et un MVS à élasticité instantanée, en déformation quasi-statique.

I.4.6.1. Position du problème

Soit D un domaine ouvert borné de l'espace R^3, représentant un matériau élastique, ou viscoélastique. On décompose la frontière ∂D de D en deux parties $\Gamma = \partial_1 D$ (non vide) est la partie fixée, et $\partial_2 D = \partial D - \partial_1 D$ le restant.
Les forces d'inertie étant négligeables (déformations quasi-statiques).

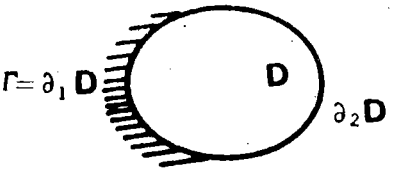


fig. (I.4.6.1)

On suppose que D est stable; c'est-à-dire l'équation d'équilibre vérifie les deux conditions (E.F et C.E) suivantes :

Ellipticité forte (E.F)

Il existe $C_1 > o$ te que

$$\Phi_{ijkh}\,\alpha_i\,\beta_j\,\alpha_k\,\beta_h \geq C_1\,\alpha_i\,\alpha_i\,\beta_j\,\beta_j \qquad \forall\, \alpha_i\,\beta_j \in R^3$$

critère d'énergie (C.E)

$$a(\vec{v},\vec{v}) = \int_D \Phi_{ijkh}\,\frac{\partial v_i}{\partial a_j}\,\frac{\partial v_k}{\partial a_h}\,da > o \qquad \forall\, \vec{v} \in B - \{o\}$$

Où B est l'espace de BANACH suivant :

$$B = \{ \vec{v} = (v_1 , v_2 , v_3) \mid v_i \in W^{1,p} (D) ;$$
$$v_i = o \text{ sur } \Gamma \text{ et } p > 3) \}$$

I.4.6.2. Cas d'un milieu élastique dont l'équilibre est stable

Considérons tout d'abord, le cas où $\Gamma = \partial_1 D \neq \partial D$, supposons que D est un milieu élastique, Φ est l'énergie libre.

$$\Phi_{ijkh} = \Phi_{khij}$$

En plus, les deux conditions E.F. et C.E. sont vérifiées.

Nous allons considérer l'espace de HILBERT $V = [H^1_\Gamma (D)]^3$ tel que :

$$H^1_\Gamma (D) = \{ \vec{v} \in H^1 (D) ; \quad v_i = o \text{ sur } \Gamma \}$$

$H^1_\Gamma (D)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(D)$, donc, il est un espace de HILBERT, la semi-norme :

$$|| \vec{v} ||_{H^1_\Gamma (D)} = || \vec{v} ||_{H^1 (D)} = \left(\sum_{i=1}^{n} || \frac{\partial \vec{v}}{\partial a_i} ||^2_{L^2(D)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^1_0 (D)$ équivalente à la norme induite par $||\vec{v}||_{H^1(D)}$

Théorème (I.4.6.2.1)

Pour un corps élastique D stable, le problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_j} \left(\Phi_{ijkh} \dfrac{\partial v_k}{\partial a_h} \right) = o & \text{dans } D \qquad (I.4.6.2.1) \\ v_i \mid_\Gamma = o \text{ et } \Phi_{ijkh} \dfrac{\partial v_k}{\partial a_h} n_j \mid_{\partial_2 D} = f_i & (I.4.6.2.2) \\ \vec{v} (x,t) = o \quad \text{pour } t = o \end{cases}$$

admet une solution unique dans l'espace $V = [H^1_\Gamma (D)]^3$

démonstration

En multipliant (I.6.2.1) par une fonction test $\hat{\vec{v}} \in V$, on obtient :

$$\int_D \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} \right) \hat{v}_i \, da = 0 \quad \forall \hat{\vec{v}} \in V \qquad (I.4.6.2.3)$$

En appliquant la formule de Green ; (I.4.6.2.3) devient :

$$\int_D \phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_j} da - \int_{\partial D} \left(\phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_\ell} n_j \right) \hat{v}_i \, ds = 0 \quad \forall \hat{\vec{v}} \in V$$

Mais :

$$\int_{\partial D} \left(\phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} n_j \right) \hat{v}_i ds = \int_{\partial_1 D} \left(\phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} n_j \right) \hat{v}_i \, ds + \int_{\partial_2 D} \phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} n_j \hat{v}_i$$

De (I.4.6.2.2) l'integrale sur $\partial_1 D$ est nulle et sur $\partial_2 D$ est égale à $\vec{f}$

Alors :

$$\int_D \phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_j} da = \int_D f_i \hat{v}_i \, da \qquad \forall \hat{\vec{v}} \in V$$

on pose maintenant :

$$a(\vec{v}, \hat{\vec{v}}) = \int_D \phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_j} da$$

Alors, nous sommes ramenés à démontrer le théorème suivant :

Théorème (I.4.6.2.2)

Sous les hypothèses de C.E. et E.F., le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{v} \in V \text{ tel que :} \\ a(\vec{v}, \hat{\vec{v}}) = \int_D \vec{f} \, \hat{\vec{v}} \, da \qquad \forall \hat{\vec{v}} \in V \end{cases} \qquad (I.4.6.2.4)$$

où $a(\vec{v},\vec{\hat{v}}) = \int_D \Phi_{ijkh} \frac{\partial v_i}{\partial a_j} \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial a_h} da$

admet une seule solution dans l'espace V .

En fait, la démonstration de théorème s'effectue en trois étapes :

I .Continuité

Proposition (I.4.6.2.1)

La forme $a(\vec{v},\vec{\hat{v}})$ est continue sur V , c'est-à-dire qu'il existe une constante positive M telle que :

$$| a (\vec{v},\vec{\hat{v}}) | \leq M || \vec{v} ||_V . || \vec{\hat{v}} ||_V \quad \forall \vec{v},\vec{\hat{v}} \in V \quad \text{et} \quad M > 0$$

démonstration

En appliquant l'inégalité de schwartz, on obtient :

$$| a (\vec{v},\vec{\hat{v}}) | \leq \Sigma_{ijkh} | \alpha_{ijkh} | || \frac{\partial v_k}{\partial a_\ell} ||_{L^2(D)} || \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_j} ||_{L^2(D)} \quad \forall \vec{v},\vec{\hat{v}} \in V$$

telles que α_{ijkh} soient les bornes de ϕ_{ijkh} qui sont constantes pour un corps homogène.

Soit $\alpha = \underset{ijkh}{\text{Sup}} |\alpha_{ijkh}|$

Alors :

$$| a (\vec{v},\vec{\hat{v}}) | \leq \alpha C_1 || \vec{v} ||_{H^1_\Gamma(D)} || \vec{\hat{v}} ||_{H^1_\Gamma(D)} \; ; \quad C_1 > o \text{ et } C_2 > o \quad \forall \vec{v}, \vec{\hat{v}} \in V$$

$$| a (\vec{v},\vec{\hat{v}}) | \leq \alpha C_1 C_2 C_3 C_4 || \vec{v} ||_V || \vec{\hat{v}} ||_V \; ; \quad C_3 > o \text{ et } C_4 > o \quad \forall \vec{v}, \vec{\hat{v}} \in V$$

Finalement, on obtient :

$$| \alpha (\vec{v},\vec{\hat{v}}) | \leq M || \vec{v} ||_V || \vec{\hat{v}} ||_V \; ; \; M = \alpha C_1 C_2 C_3 C_4 > o \quad \forall \vec{v}, \vec{\hat{v}} \in V$$

D'où la proposition.

Remarquons que, dans le cas où le corps est non homogène, le potentiel élastique ϕ_{ijkh} dépend de a, alors, on suppose que :

$$\alpha = || \phi_{ijkh}(a) ||_{L^\infty(D)} = \sup_{a \in D} | \phi_{ijkh}(a) |$$

II. Coercivité

La démonstration de la proposition suivante est dûe à POTIER-FERRY. M [34]

proposition (I.4.6.2.2)

Sous les hypothèses de (E.F) et (C.E), la forme quadratique a $(\vec{v}, \vec{\hat{v}})$ est coercive sur l'espace V

En effet, la démonstration est composée de la démonstration de deux lemmes suivants :

Lemme (I.4.6.2.1)

Soit $a_1 (\vec{v})$ une forme quadratique continue sur un espace de Hibert V de façon que :

$$a_1 (\vec{v}) = a_2 (\vec{v}) + a_3 (\vec{v})$$

où :

$\left\{ \begin{array}{l} a_2 (\vec{v}) \text{ est une forme quadradique coercive} \\ a_3 (\vec{v}) \text{ est une forme quadratique faiblement continue} \end{array} \right.$

Alors, si $a_1 (\vec{v})$ est positive o $\neq \forall \vec{v} \in V$, donc $a_1 (\vec{v})$ est coercive.

démonstration

Si $a_1 (\vec{v})$ n'est pas coercive, donc il existe une suite borné $\vec{v}_n$ dans V telle que

$$|| \vec{v}_n ||_V = 1 \quad ; \quad a_1 (\vec{v}_n) \to o \qquad (I.4.6.2.5)$$

De cette suite borné, on peut extraire une sous-suite notée encore $\vec{v}_n$ telle que :

$$\vec{v}_n \rightharpoonup \vec{v} \; ; \; \vec{v} \in V \qquad \text{faiblement}$$

puisque $a_3 (\vec{v})$ est faiblement continue. Alors ;

$$a_3 (\vec{v}_n) \rightharpoonup a_3 (\vec{v})$$

Si $\vec{v}$ est zéro, alors :

$$a_2 (\vec{v}_n) = a_1 (\vec{v}_n) - a_3 (\vec{v}_n) \rightharpoonup 0$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de coercivité de la forme $a_2 (\vec{v})$, c'est pourquoi $\vec{v}$ n'est pas zéro.
Mais la forme quadratique continue positive $a_1 (\vec{v})$ est semi-continue inférieurement, ainsi :

$$\liminf a_1 (\vec{v}_n) \geq a (\vec{v}) > 0$$

qui est encore en contradiction avec (I.4.6.2.5), alors $a_1 (\vec{v})$ est coercive.

Lemme (I.4.6.2.2)

$$\text{C.E} \iff a(\vec{v},\vec{v}) > 0 \quad \forall \vec{v} \in V - \{0\} \qquad \text{(I.4.6.2.6)}$$

Démonstration

La condition E.F conduit à l'inégalité de Garding, c'est-à-dire qu'il existe deux constants $C_3 > 0$, $C_4 \geq 0$ telle que :

$$a(\vec{v}, \vec{v}) \geq C_3 \int_D \{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_k v_k \} dx - C_4 (\vec{v},\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in [H^1(D)]^3$$

Ou encore :

$$a(\vec{v},\vec{v}) \geq C_3 \| \vec{v} \|^2_{H^1_\Gamma} - C_4 \| \vec{v} \|^2_{L^2} \quad \forall \vec{v} \in [H^1_\Gamma (D)]^3$$

Ainsi, la forme quadratique $a(\vec{v}, \vec{v})$ est coercive par la lemme (I.4.6.2.1) et par C.E.

Reste à montrer que C.E $\Leftrightarrow$ $a(\vec{v},\vec{v}) > 0 \quad \forall \vec{v} \in V - \{0\}$

Si l'équivalence précédente n'est pas vrai, et C.E est vrai, alors :

$$\underset{\substack{\vec{v} \in V \\ \vec{v} \neq 0}}{\text{Min}} \left\{ a(\vec{v},\vec{v}) \quad || \vec{v} ||^2_{L^2} \right\} = 0$$

parce que B est un sous-espace dense dans V donc, il existe une solution faible $\vec{v}$ non-zéro du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ijkh} \dfrac{\partial v_k}{\partial x_h} \right) = 0 & \text{dans } D \\ \\ v_i = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

Mais par des théorèmes de régularité classiques, cette solution est dans l'espace B et $a(\vec{v}, \vec{v})$ est zéro ce qui est en contradiction avec C.E, par conséquent (I.4.6.2.6) se déduit de C.E.

III. Le deuxième membre de (I.4.6.2.4)

Ce membre est une forme linéaire bornée sur l'espace V :

$$\left| \int_D f_i \hat{v}_i \, da \right| \leq || \vec{f} ||_{L^2(D)} \; || \vec{v} ||_{L^2(D)} \qquad \forall \vec{v} \in V$$

pour $\vec{f} \in L^{\infty}(D)$, c'est-à-dire que la force $\vec{f}$ est bornée, donc

$$\left| \int_D f_i \hat{v}_i \, da \right| \leq C_1 || \vec{v} ||_{L^2(D)} \leq C_1 C_2 || \vec{v} ||_{H^1(D)} \qquad \forall \vec{v} \in V$$

ou $$\left| \int_D f_i \hat{v}_i \, da \right| \leq C \; || \vec{v} ||_V \; ; \quad C = C_1 C_2 > 0 \qquad \forall \vec{v} \in V$$

De I, II, et III on peut donc appliquer le lemme de LAX-MILGRAM, par conséquent, il existe une solution v et une seule appartient à l'espace V.

remarques

1. L'interprétation physique du résultat précédent est que la stabilité entraine l'existence et l'unicité des vitesses dans le corps lorsqu'on impose des vitesses sur la frontière ∂D.

2. Si au lieu de fixer une partie $\partial_1 D$ de la frontière, on fixe toute la frontière, c'est-à-dire, $\Gamma = \partial_1 D = \partial D$. Dans ce cas le théorème (I.4.6.2.1) est encore valable, pour $V = [H_0^1(D)]^3$. Remarquons que la démonstration de la coercivité est encore valable dans $V = [H_0^1(D)]^3$.

I.4.6.3 Cas d'un MVS à élasticité instantanée stable à l'équilibre

On sait qu'un MVS à élasticité instantanée est décrit par $\Phi(\varepsilon, \xi)$ et $\Omega(X, \xi)$.
L'équation d'équilibre du milieu est :

$$\frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial a_j} = 0 \qquad \text{(I.4.6.3.1)}$$

doit être vérifiée avec :

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij}\, \partial F_{kh}} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} + \frac{\partial^2 \Phi(F, \xi)}{\partial F_{ij}\, \partial \xi_{kh}} \dot{\xi}_{kh}(X, \xi) \qquad \text{(I.4.6.3.2)}$$

où $v_k = \dot{x}_k$

(I.4.6.3.2) peut encore s'écrire :

$$\dot{\theta}_{ij} = \Phi_{ijkh} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} + b_{ijkh} \dot{\xi}_{kh} \qquad \text{(I.4.6.3.3)}$$

tels que :

$$\Phi_{ijkh} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij}\, \partial F_{kh}} \quad \text{et} \quad b_{ijkh} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij}\, \partial \xi_{kh}}$$

Remarquons que (I.4.6.3.3) est semblable à (I.3.1.2.1).
A partir d'un MVS à élasticité instantanée décrit par (I.4.6.3.3)
L'équation (I.4.6.3.1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\Phi_{ijkh}\frac{\partial v_k}{\partial a_h}\right) + \frac{\partial}{\partial a_j}\left(b_{ijkh}\,\dot{\xi}_{kh}\right) = o \qquad (I.4.6.3.4)$$

où le deuxième terme est une quantité connue, alors (I.4.6.3.4) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\Phi_{ijkh}\frac{\partial v_k}{\partial a_h}\right) = g_i \text{ où } g_i = -\frac{\partial}{\partial a_j}\left(b_{ijkh}\,\dot{\xi}_{kh}\right)$$

qui est l'équation d'équilibre, et le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_j}\left(\Phi_{ijkh}\dfrac{\partial v_k}{\partial a_h}\right) = g_i \\ v_i \Big|_{\Gamma} = o \qquad \Phi_{ijkh}\dfrac{\partial v_k}{\partial a_h} n_j \Big|_{\partial_2 D} = q_i \\ v_i\,(X,t) = o \text{ pour } t = o \end{cases}$$

admet une solution unique dans l'espace $V = [H^1_{\Gamma}(D)]^3$
En effet, une démonstration analogue à celle du théorème (I.4.6.2.1) nous ramène au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \vec{v} \in V \text{ tel que :} \\ a(\vec{v},\vec{\hat{v}}) = \int_D f_i\,\hat{v}_i\,da \quad ; \quad (f_i = g_i - q_i) \quad \forall\, \vec{v}, \vec{\hat{v}} \in V \end{cases}$$

Alors, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème (I.4.6.3.1)

Tout milieu viscoélastique standard à élasticité instantanée stable, en déformation quasi-statique, admet une solution unique pour le problème en vitesse.

P A R T I E II

Milieux viscoélastiques standards et corps de Maxwell, en grandes déformations, pour des comportements non linéaires

L'étude du corps de Maxwell dans le formalisme des variables internes a déjà été abordée dans [55] , nous appuyons sur un article [37] de SIPOROFF.
Nous apportons ici des éléments nouveaux :

- L'effet d'une variation de température est pris en compte.
- Le comportement du corps peut être non linéaire.
- La description du corps de Maxwell sera traitée dans le formalisme des MVS avec élasticité instantanée.
- L'étude se placera dans le cas de grandes déformations.

II.1. Description géométrique du corps de Maxwell

On adoptera les notations suivantes décrivant un élément matériel dans différents états, les déformations sont supposées homogènes.

I (To)	configuration initiale à la température T_o, I(To) a un volume unité.
R (To)	configuration relâchée à la température To, R(To) a un volume unité
R (T)	configuration relâchée à la température T, R(T) est obtenue en supprimant brusquement la contrainte exercée sur l'élément matériel dans A(T).
A (T)	configuration actuelle à la température T.

Alors, on peut illustrer les différents états d'un élément matériel par la figure ci-dessous :

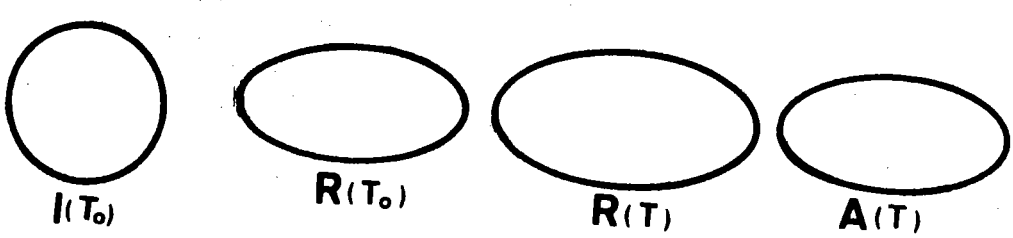


Fig (II.1.1)

II.2. L'expression de l'énergie libre et le potentiel de dissipation pour le corps de Maxwell

Nous décrivons ici un corps de Maxwell, pour des températures variables et des déformations finies au moyen de l'expression suivante de l'énergie libre ϕ et du potentiel de dissipation Ω :

$$\phi = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3\alpha + \beta)^2 + \mu (\varepsilon^e_{ij} - \alpha \delta_{ij}) (\varepsilon^e_{ij} - \alpha \delta_{ij}) - \int S(T)\, dT$$

$$\Omega = f(J_2, T)$$

ϕ : énergie libre d'un élément matériel dans l'état actuel, c'est-à-dire déformé et porté à la température T ; cet élément a un volume unité dans la configuration initiale, qui est une configuration sans contraintes à la température To :

λ, μ : coefficients de Lamé de l'élasticité instantanée supposée toujours isotrope ; ce sont des fonctions de la température T

ℓ_r : longueur d'un segment matériel dan R (T)

ℓ_{r_0} : longueur de ce segment dans R (To)

v_r : volume de R (T)

v_{r_0} : volume de R (To)

α : dilatation thermique linéaire $\log \frac{\ell_r}{\ell_{r_0}}$ de la transformation R (To) → R (T)

3α : dilatation thermique volumique $\log \frac{v_r}{v_{r_0}}$ de la transformation R (To) → R (T)

S (T) : entropie de la configuration relâchée

$F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$: tenseur gradient de la transformation I (To) → A (T). a_i sont les coordonnées initiales, x_i les coordonnées finales relativement à un même repère orthonormé. On désigne aussi le tenseur F_{ij} par F, et on pose $G = F^{-1}$

Soit F^{r_0} : I (To) → R (To) ,

et F^e : R (To) → A (T)

Alors F se décompose comme suit :

$$F = F^e \cdot F^{r_0}$$

θ : dilatation volumique $\log \frac{V_r}{V_{r_0}}$ de la transformation R (To) → A (T)

On a $\theta = \log$ dét F

ξ_{ij} : variable interne tensorielle. C'est un tenseur symétrique égal au tenseur droit de la transformation : I (To) → R (To). ξ ne subit pas de discontinuité lors d'un saut brusque de la déformation et de la température. Alors la variable interne considérée est

$$\xi = F^{r_0 T} \cdot F^{r_0}$$

$\eta = \xi^{-1}$: inverse de ξ

ε^e_{ij} : tenseur de déformation élastique ; c'est le tenseur de déformation logarithmique de la transformation : R (T_o) → A (T). ε^e a les expressions équivalentes suivantes :

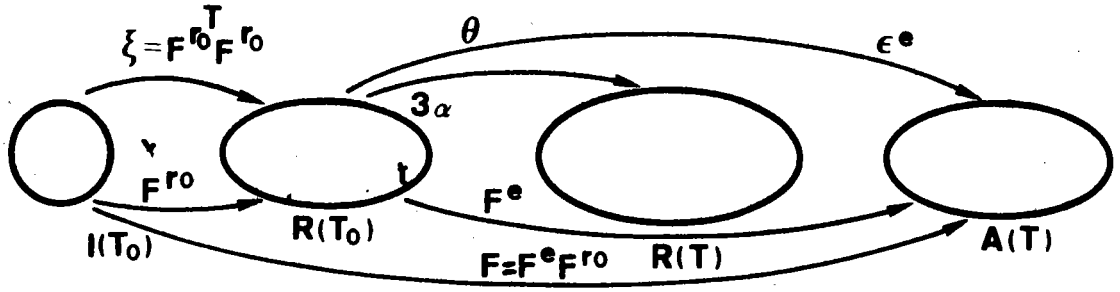


fig (II.2.1)

$$\varepsilon^e = \frac{1}{2} \log (F^e F^{eT}) = -\frac{1}{2} \log (G^T \xi G) = \frac{1}{2} \log (F n F^T)$$

$$A^e = G^T \xi G$$

$$Be = F n F^T = (Ae)^{-1} = A^{e-1}$$

$\beta = \frac{\mu}{3\lambda} \log (\det \xi)$: on verra que ce terme est nul en raison de l'invariance du volume de la configuration relâchée ramenée à la température T_0. Sa présence dans ϕ modifie l'expression des X_{ij} et simplifie l'expression de Ω

J_2 : on verra que c'est le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes $\hat{\tau}$, l'état de référence étant l'état relâché à la température T (le tenseur $\hat{\tau}$ est le produit du tenseur de Cauchy τ par le quotient $\frac{v}{v_r}$ de deux éléments de volume homologues dans la configuration actuelle (v) et dans la configuration de référence (v_r)).

$\Omega = f(J_2, T)$: potentiel de dissipation

f', f'' : dérivée première et seconde de f par rapport à J_2.
Le comportement est dissipatif pour $f' \geq 0$.
Il est convexe pour $f' \geq 0$ et $f'' \geq 0$.

$\xi_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial X_{ij}}$: équation d'évolution de la variable interne ξ_{ij}

On rappelle que, le comportement du corps de MAXWELL pour des déformations infiniment petites est donné par les équations :

$$\tau_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^p{}_{ij})$$

$$\dot{\varepsilon}^p{}_{ij} = g(J_2) S_{ij}$$

où g est une fonction positive et croissante du second invariant J_2 du déviateur des contraintes S_{ij} et $\varepsilon^p{}_{ij}$ est le tenseur

des déformations plastiques.
On va traiter des cas de plus en plus complexes en commençant par :

II.3. Cas où les tenseurs des contraintes et des déformations sont diagonaux

* Transformations isothermes

Dans ce cas, on a :

$$\phi = \frac{\lambda}{2} (\phi + \beta)^2 + \mu (\varepsilon_1^{e^2} + \varepsilon_2^{e^2} + \varepsilon_3^{e^2})$$

$$\Omega = f (J_2 , To)$$

où :

$$\theta = \log \det F = \log F_1 F_2 F_3$$

ξ: variable interne tensorielle diagonale

Nous avons :

$$F_1 = F_1^e F_1^r \quad , \quad F_2 = F_2^e F_2^r \quad , \quad F_3 = F_3^e F_3^r$$

Alors, les composantes diagonales de ξ sont :

$$\xi_1 = F_1^{r_\theta^2} \quad , \quad \xi_2 = F_2^{r_\theta^2} \quad , \quad \xi_3 = F_3^{r_\theta^2}$$

d'autre part :

$$\eta_1 = \xi_1^{-1} \quad , \quad \eta_2 = \xi_2^{-1} \quad , \quad \eta_3 = \xi_3^{-1}$$

$$\beta = \frac{\mu}{3\lambda} \quad \log \det \xi = \frac{\mu}{3\lambda} \log \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

Les composantes du tenseur des déformations logarithémiques sont :

$$\varepsilon_1^e = -\frac{1}{2}\log A_1^e = -\frac{1}{2}\log G_1^2 \xi_1 \quad ; \quad A_1^e = G_1^2 \xi_1$$
$$= \frac{1}{2}\log B_1^e = \frac{1}{2}\log F_1^2 \eta_1 \quad ; \quad B_1^e = F_1^2 \eta_1 = A_1^{e-1}$$

$$\varepsilon_2^e = -\frac{1}{2}\log A_2^e = -\frac{1}{2}\log G_2^2 \xi_2 \quad ; \quad A_2^e = G_2^2 \xi_2$$
$$= \frac{1}{2}\log B_2^e = \frac{1}{2}\log F_2^2 \eta_2 \quad ; \quad B_2^e = F_2^2 \eta_2 = A_2^{e-1}$$

$$\varepsilon_3^e = -\frac{1}{2}\log A_3^e = -\frac{1}{2}\log G_3^2 \xi_3 \quad ; \quad A_3^e = G_3^2 \xi_3$$
$$= \frac{1}{2}\log B_3^e = \frac{1}{2}\log F_3^2 \eta_3 \quad ; \quad B_3^e = F_3^2 \eta_3 = A_3^{e-1}$$

Expression des Xij

$$X_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} = -\frac{\mu}{3}(\phi + \beta)\,\eta_1 + \eta\,\varepsilon_1^e\,\eta_1$$

$$X_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = -\frac{\mu}{3}(\phi + \beta)\,\eta_2 + \mu\,\varepsilon_2^e\,\eta_2 \qquad \text{(II.3.1)}$$

$$X_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} = -\frac{\mu}{3}(\phi + \beta)\,\eta_3 + \mu\,\varepsilon^e\,\eta_3$$

Expression de J_2

Une condition nécéssaire et suffisante pour que

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)$$

Où s_1, s_2, et s_3 sont les composantes de déviateur du tenseur des contraintes τ est que :

$$J_2 = 2\left(\xi_1^2 X_1^2 + \xi_2^2 X_2^2 + \xi_3^2 X_3^2\right)$$

Démonstration

Le cube d'arêtes unités se transforme en un parallélipipède rectangle d'arêtes F_1 , F_2 , et F_3 , fig (II.3.1) ci-dessous :

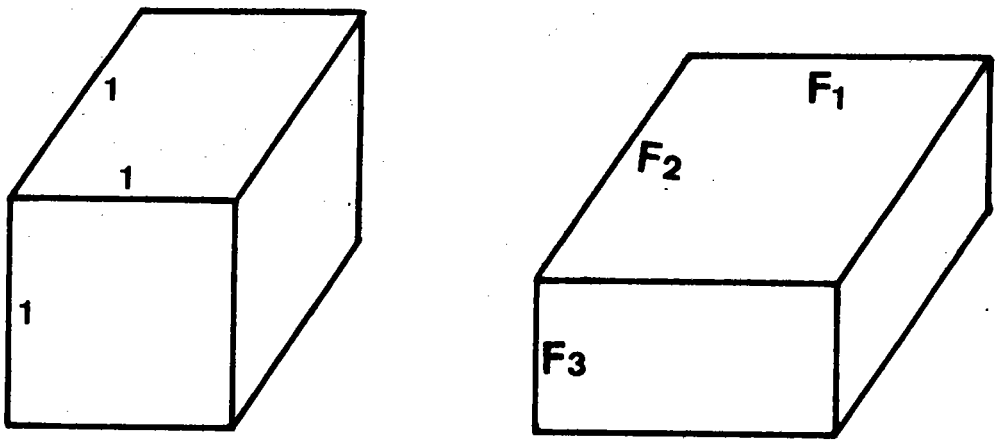


Fig (II.3.1)

Nous allons considérer le tenseur des contraintes $\hat{\tau}$ suivant :

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{v}{v_{r_0}} \tau_{ij}$$

v est le volume de l'élément matériel dans la configuration actuelle, v_{r_0} celui du même élément dans la configuration relâchée, avec $v_{r_0} = 1$.
Alors, les composantes de $\hat{\tau}_{ij}$ sont :

$$\hat{\tau}_1 = (F_1\ F_2\ F_3\ )\ \tau_1$$
$$\hat{\tau}_2 = (F_1\ F_2\ F_3\ )\ \tau_2$$
$$\hat{\tau}_3 = (F_1\ F_2\ F_3\ )\ \tau_3$$

Supposons pour simplifier que F soit un tenseur diagonal dans un repère fixe et que le corps élastique soit sans contraintes pour F = 1. Faisons-lui subir de façon isotherme des dilatations logarithmiques ε_1 , ε_2 , ε_3 .

Admettons que son énergie libre ait pour expression

$$\phi = \frac{\lambda}{2} \theta^2 + \mu (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

On en déduit

$$d\phi = \lambda\theta \left(\frac{dF_1}{F_1} + \frac{dF_2}{F_2} + \frac{dF_3}{F_3} \right) + 2\mu \left(\varepsilon_1 \frac{dF_1}{F_1} + \varepsilon_2 \frac{dF_2}{F_2} + \varepsilon_3 \frac{dF_3}{F_3} \right)$$

Désignons par τ_1 , τ_2 , τ_3 les contraintes principales de Cauchy :

$$d\phi = \tau_1 F_2 F_3 dF_1 + \tau_2 F_3 F_1 dF_2 + \tau_3 F_1 F_2 dF_3$$

Cette expression représente le travail fourni au cube pour qu'il se transforme en parallélépipède d'où :

$$\begin{aligned} F_1 F_2 F_3 \tau_1 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 \\ F_1 F_2 F_3 \tau_2 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 \\ F_1 F_2 F_3 \tau_3 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3 \end{aligned}$$

Au premier membre se trouve le tenseur des contraintes $\hat{\tau}$ produit du tenseur des contraintes de Cauchy par dét F. Le résultat est valable pour la déformation élastique $\varepsilon^e_{ij} - \alpha\delta_{ij}$ à partir de R (T) (Ce résultat sera utilisé pour calculer J_2 dans le cas tridimensionnel).

On déduit :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon^e_1 \\ \hat{\tau}_2 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon^e_2 \\ \hat{\tau}_3 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon^e_3 \end{aligned}$$

Les composantes du déviateur du tenseur des contraintes sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \left(-\frac{1}{3}\mu\theta + \mu\varepsilon^e_1 \right) \\ s_2 &= 2 \left(-\frac{1}{3}\mu\theta + \mu\varepsilon^e_2 \right) \\ s_3 &= 2 \left(-\frac{1}{3}\mu\theta + \mu\varepsilon^e_3 \right) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.2)}$$

Alors :

$$J_2 = 2\,\xi_1^2 X_1^2 + 2\,\xi_2^2 X_2^2 + 2\,\xi_3^2 X_3^2$$

$$J_2 = 2 \left[\xi_1^2 \left(-\frac{\mu}{3}\theta\eta_1 + \mu\varepsilon^e_1 \eta_1 \right)^2 + \xi_2^2 \left(-\frac{\mu}{3}\theta\eta_2 + \mu\varepsilon^e_2 \eta_2 \right)^2 + \xi_3^2 \left(-\frac{\mu}{3}\theta\eta_3 + \mu\varepsilon^e_3 \eta_3 \right)^2 \right]$$

$$J_2 = 2\left[\left(-\frac{\mu}{3}\theta + \mu\varepsilon^e_1\right)^2 + \left(-\frac{\mu}{3}\theta + \mu\varepsilon^e_2\right)^2 + \left(-\frac{\mu}{3}\theta + \mu\varepsilon^e_3\right)^2\right]$$

$$J_2 = -\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right).$$

Evolution de la variable interne tensorielle

Le potentiel de dissipation est :

$$\Omega = f(J_2, T_0)$$

En dérivant par rapport à X_1 , X_2 , et X_3 respectivement, on obtient :

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial\Omega}{\partial X_1} = = f'(4\ \xi_1^2 X_1)$$
$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial\Omega}{\partial X_2} = f'(4\ \xi_2^2 X_2)$$
$$\dot{\xi}_3 = \frac{\partial\Omega}{\partial X_3} = f'(4\ \xi_3^2 X_3)$$

Alors l'évolution de ξ_1 ξ_2 et ξ_3 est régie par :

$$\dot{\xi}_1 = 4\ f'\ \xi_1^2\left[-\frac{\mu}{3}(\theta+\beta)\ \eta_1 + \mu\ \varepsilon^e_1\ \eta_1\right]$$
$$\dot{\xi}_2 = 4\ f'\ \xi_2^2\left[-\frac{\mu}{3}(\theta+\beta)\ \eta_2 + \mu\ \varepsilon^e_2\ \eta_2\right]$$
$$\dot{\xi}_3 = 4\ f'\ \xi_3\left[-\frac{\mu}{3}(\theta+\beta)\ \eta_3 + \mu\ \varepsilon^e_3\ \eta_3\right]$$

De fait que : $\xi_1\ \eta_1 = 1$, $\xi_2\ \eta_2 = 1$, $\xi_3\ \eta_3 = 1$

$\dot{\xi}_1$ $\dot{\xi}_2$ et $\dot{\xi}_3$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\xi}_1 = 4\ \mu f'\ \xi_1\left(-\frac{\theta+\beta}{3} + \varepsilon^e_1\right)$$
$$\dot{\xi}_2 = 4\ \mu f'\ \xi_2\left(-\frac{\theta+\beta}{3} + \varepsilon^e_2\right) \qquad \text{(II.3.3)}$$
$$\dot{\xi}_3 = 4\ \mu f'\ \xi_3\left(-\frac{\theta+\beta}{3} + \varepsilon^e_3\right)$$

ou encore :

$$\xi_1^{-1}\ \dot{\xi}_1 = 4\ \mu f'\left(-\frac{\theta+\beta}{3} + \varepsilon^e_1\right)$$
$$\xi_2^{-1}\ \dot{\xi}_2 = 4\ \mu f'\left(-\frac{\theta+\beta}{3} + \varepsilon^e_2\right) \qquad \text{(II.3.4)}$$
$$\xi_3^{-1}\ \dot{\xi}_3 = 4\ \mu f'\left(-\frac{\theta+\beta}{3} + \varepsilon^e_3\right)$$

Invariance du volume de R (To)

Lemme (II.3.1)

Le volume de R (To) est invariable, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \log \det \xi = 0$$

Démonstration

Le volume de R (To) est :

$$V_{r_o} = \det \xi = \det (F^{r_o\,T} F^{r_o}) = \det F^{r_o\,T} \det F^{r_o}$$

pour des transformations diagonales, alors :

$$V_{r_o} = \det \xi = (\det F^{r_o})^2$$

nous avons considéré $V_{r_o} = 1$ pour R (To), donc :

$$\frac{d}{dt} \log \det \xi = 0$$

ou

$$\xi_1^{-1} \dot{\xi}_1 + \xi_2^{-1} \dot{\xi}_2 + \xi_3^{-1} \dot{\xi}_3 = 0 \qquad (II.3.5)$$

En tenant compte de (II.3.4), (II.3.5), s'écrit :

$$4 \mu f' (-\theta + \beta + \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) = 0$$

De fait que $\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e = \theta$, on obtient que

$$\beta = 0$$

Par conséquent, pour qu'on ait l'invariance du volume de R (To), il faut que $\beta = 0$

Cas du comportement lorsque le tenseur gradient des vitesses est constant, symétrique, et de trace nulle :

Dans ce cas, on :

$$A_1^e = cte \quad ou \quad G_1^2 \xi_1 = cte \quad ou \quad \xi_1 F_1^{-2} = cte$$
$$A_2^e = cte \quad ou \quad G_2^2 \xi_2 = cte \quad ou \quad \xi_2 F_2^{-2} = cte$$
$$A_3^e = cte \quad ou \quad G_3^2 \xi_3 = cte \quad ou \quad \xi_3 F_3^{-2} = cte$$

par dérivation par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\dot{\xi}_1}{F_1^2} + \xi_1 \frac{-2 F_1 \dot{F}_1}{F_1^4} = 0$$

Finalement, De (II.3.2), et (II.3.4), on obtient :

$$\xi_1^{-1} \dot{\xi}_1 = 2 \dot{F}_1 F_1^{-1} = 4 f' \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \mu \varepsilon_1^e\right) = 2 f' s_1$$
$$\xi_2^{-1} \dot{\xi}_2 = 2 \dot{F}_2 F_2^{-1} = 4 f' \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \mu \varepsilon_2^e\right) = 2 f' s_2$$
$$\xi_3^{-1} \dot{\xi}_3 = 2 \dot{F}_3 F_3^{-1} = 4 f' \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \mu \varepsilon_3^e\right) = 2 f' s_3$$

Donc, pour $D_1 = \dot{F}_1 F_1^{-1}$, $D_2 = \dot{F}_2 F_2^{-1}$, $D_3 = \dot{F}_3 F_3^{-1}$, on a :

$$D_1 = f' s_1 \quad , \quad D_2 = f' s_2 \quad , \quad D_3 = f' s_3$$

Dissipativité et convexité :

Lemme (II.3.2)

La condition nécéssaire et suffisante pour que le corps de Maxwell soit dissipatif est $f' \geq 0$

Démonstration

Nous avons :

$$X_1 \frac{\partial \Omega}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial \Omega}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial \Omega}{\partial X_3} = 4 f' \left(\xi_1^2 X_1^2 + \xi_2^2 X_2^2 + \xi_3^2 X_3^2\right)$$
$$= 2 f' J_2$$

Alors, le lemme est vrai, si $f' \geq 0$, d'autre part, la fonction de dissipation est égale à $2 f' J_2$.

Lemme (II.3.3)

La condition nécessaire et suffisante de convexité est :

$$f' \geq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geq 0$$

Démonstration

En fait, on a :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \, \partial X_j} = 4 f' \xi_i \xi_i + 16 f'' \xi_i^2 \xi_i^2 X_i X_i + 32 f'' (\xi_1^2 \xi_2^2 X_1 X_2 + \xi_1^2 \xi_3^2 X_1 X_3 + \xi_2^2 \xi_3^2 X_2 X_3)$$

et pour que la condition de convexité soit vérifiée, il faut et il suffit que :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \, \partial X_j} Y_i Y_j \geq 0 \qquad \forall X_i, Y_i$$

D'où, la condition de convexité :

$$f' \geq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geq 0$$

* Transformations non isothermes

L'expression de ϕ et Ω est :

$$\Omega = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3 \alpha + \beta)^2 + \mu [(\varepsilon_1^e - \alpha)^2 + (\varepsilon_2^e - \alpha)^2 + (\varepsilon_3^e - \alpha)^2] - \int S(T) \, dT$$

$$\Omega = f (J_2 , T)$$

Expression des X_{ij}

$$X_1 = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} = - \frac{\mu}{3} (\theta - 3\alpha + \beta) \eta_1 + \mu (\varepsilon_1^e - \alpha) \eta_1$$

ou encore :

$$X_1 = - \frac{\mu}{3} (\theta + \beta) \eta_1 + \mu \varepsilon_1^e \eta_1$$

$$X_2 = - \frac{\mu}{3} (\theta + \beta) \eta_2 + \mu \varepsilon_2^e \eta_2$$

$$X_3 = - \frac{\mu}{3} (\theta + \beta) \eta_3 + \mu \varepsilon_3^e \eta_3$$

On remarque que l'expression des forces thermodynamiques est inchangée.
Ce qui implique que l'expression de J_2 est inchangée aussi.

D'autre part, les équations d'évolution des ξ_1 , ξ_2 , et ξ_3 sont les mêmes et les lemmes (II.3.1), (II.3.2), (II.3.3) sont toujours valables.

II.4. Déformations quelconques, transformations non isothermes

Dans ce cas l'expression de ϕ et Ω est :

$$\phi = \frac{\lambda}{2} \left(\theta - 3\alpha + \beta \right)^2 + \mu \left(\varepsilon^e_{ij} - \alpha \delta_{ij} \right) \left(\varepsilon^e_{ij} - \alpha \delta_{ij} \right) - \int S(T)\, dT$$

$$\Omega = f(J_2, T)$$

Expression des X_{ij}

Démontrons que :

$$X_{ij} = - \frac{\mu}{3} \left(\theta + \beta \right) \eta_{ij} + \mu \varepsilon^e_{ru} B^e_{us} G_{ir} G_{js}$$

En effet :

$$X_{ij} = - \lambda \left(\theta - 3\alpha + \beta \right) \frac{\mu}{3\lambda} \eta_{ij} - \mu \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}}$$

avec :

$$\gamma = \left(\varepsilon^e_{pq} - \alpha \delta_{pq} \right) \left(\varepsilon^e_{pq} - \alpha \delta_{pq} \right)$$

$$-2\varepsilon^e = \log A^e$$

$$-2\varepsilon^e_{pq} = A^e_{pq} - \delta_{pq} - \frac{1}{2} \left(A^e_{pr} - \delta_{pr} \right) \left(A^e_{rq} - \delta_{rq} \right) + \frac{1}{3} \left(A^e_{pr} - \delta_{pr} \right) \left(A^e_{rs} - \delta_{rs} \right) \left(A^e_{sq} - \delta_{sq} \right) - \ldots$$

$$\frac{\partial \left(-2\varepsilon^e_{pq} \right)}{\partial A^e_{rs}} = \delta_{pr} \delta_{qs} - \frac{1}{2} \left[\delta_{pr} \delta_{us} \left(A^e_{uq} - \delta_{uq} \right) + \left(A^e_{pu} - \delta_{pu} \right) \delta_{ur} \delta_{qs} \right] + \ldots \qquad \text{(II.4.1)}$$

$$\varepsilon^e_{pq} \frac{\partial(-2\varepsilon^e_{pq})}{\partial A^e_{rs}} = \varepsilon^e_{rs} - \frac{1}{2}\left[\varepsilon^e_{rq}(A^e_{sq} - \delta_{sq}) + (A^e_{pr} - \delta_{pr})\varepsilon^e_{ps}\right] + \ldots$$

$$= \varepsilon^e \left(\mathbb{1} - (A^e - \mathbb{1}) + (A^e - \mathbb{1})^2 - \ldots\right)$$

$$= \varepsilon^e B^e$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}} = 2\left(\varepsilon^e_{pq} - \alpha\delta_{pq}\right)\frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial \xi_{ij}}$$

$$= 2\varepsilon^e_{pq}\frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial \xi_{ij}} - 2\alpha\frac{\partial \varepsilon^e_{pp}}{\partial \xi_{ij}}$$

Nous calculons $\frac{\partial(-2\varepsilon^e_{pp})}{\partial A^e_{rs}}$ à partir de (II.4.1) :

$$\frac{\partial(-2\varepsilon^e_{pp})}{\partial A^e_{rs}} = \delta_{rs} - \frac{1}{2}\left[\delta_{pr}\delta_{us}(A^e_{up} - \delta_{up}) + (A_{pu} - \delta_{pu})\delta_{ur}\delta_{ps}\right] + \ldots$$

$$= \delta_{rs} - (A^e_{rs} - \delta_{rs}) + \ldots$$

$$= \mathbb{1} - (A^e - \mathbb{1}) + (A^e - \mathbb{1})^2 - \ldots$$

$$= B^e$$

On en déduit

$$\frac{\partial(-2\varepsilon^e_{pp})}{\partial \xi_{ij}} = \frac{\partial(-2\varepsilon^e_{pp})}{\partial A^e_{rs}}\frac{\partial A^e_{rs}}{\partial \xi_{ij}} = B^e_{rs} G_{ir} G_{js}$$

$$= GB^e G^T$$

$$= GF\,\eta\,F^T G^T$$

$$= \eta_{ij} \qquad \text{(II.4.2)}$$

Calculons ensuite :

$$2\varepsilon^e_{pq}\frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial \xi_{ij}} = 2\varepsilon^e_{pq}\frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial A^e_{rs}}\frac{\partial A^e_{rs}}{\partial \xi_{ij}}$$

$$= -\varepsilon^e_{ru} B^e_{us} G_{ir} G_{js} \qquad \text{(II.4.3)}$$

Finalement

$$X_{ij} = -\frac{\mu}{3}(\theta - 3\alpha + \beta)\,\eta_{ij} + \mu\,\varepsilon^{e}_{ru}\,B^{e}_{us}\,G_{ir}\,G_{js} - \alpha\mu\eta_{ij}$$

$$= -\frac{\mu}{3}(\theta + \beta)\,\eta_{ij} + \mu\varepsilon^{e}_{ru}\,B^{e}_{us}\,G_{ir}\,G_{js}$$

Expression de $\dot{\xi}_{ij}$

Nous pouvons alors transformer l'expression de $\dot{\xi}_{ij}$

$$\dot{\xi}_{ij} = f'\frac{\partial J_2}{\partial X_{ij}} = 4\,f'\,\xi_{ih}\,\xi_{jk}\,X_{hk}$$

$$= 4\,f'\,\xi_{ih}\,\xi_{jk}\left(-\frac{\mu}{3}(\theta+\beta)\,\eta_{hk} + \mu\varepsilon^{e}_{ru}\,B^{e}_{us}\,G_{hr}\,G_{ks}\right)$$

soit

$$\dot{\xi}_{ij} = 4\,f'\,\mu\left(-\frac{1}{3}(\theta+\beta)\,\xi_{ij} + \xi_{ih}\,G_{hk}\,\varepsilon^{e}_{kr}\,F_{rj}\right) \qquad (II.4.8)$$

INVARIANCE DU VOLUME DE R (To)

Démontrons l'invariance du volume de R (To) soit :

$$\frac{d}{dt}\log\det\xi = 0$$

on a

$$\frac{d}{dt}\log\det\xi = \dot{\xi}_{ij}\,\eta_{ij}$$

$$\dot{\xi}_{ij}\,\eta_{ij} = 4\,f'\,\mu\left(-\frac{1}{3}(\theta+\beta)\,\xi_{ij}\,\eta_{ij} + \xi_{ih}\,\eta_{ij}\,G_{hk}\,\varepsilon^{e}_{kr}\,F_{rj}\right)$$

$$\xi_{ij}\,\eta_{ij} = 3 \qquad \xi_{ih}\,\eta_{ij} = \delta_{hj}$$

$$\dot{\xi}_{ij}\,\eta_{ij} = 4f'\,\mu\left(-\theta - \beta + \delta_{jh}\,G_{hk}\,\varepsilon^{e}_{kr}\,F_{rj}\right)$$

$$= 4f'\,\mu\left(-\theta - \beta + G_{jk}\,\varepsilon^{e}_{kr}\,F_{rj}\right)$$

$$= 4f'\,\mu\left(-\theta - \beta + \varepsilon^{e}_{rr}\right)$$

$$= -4\,f'\,\mu\,\beta$$

Si $\beta = o$ à l'instant initial, β reste nul à tout instant ultérieur

Expression de J_2

Montrons que $\xi_{ih}\ \xi_{jk}\ X_{ij}\ X_{hk} = \mu^2\ \left(-\frac{\theta^2}{3} + \varepsilon^e_{ij}\ \varepsilon^e_{ij} \right)$

$$\xi_{ih}\ \xi_{jk}\ X_{ij}\ X_{hk} = \mu^2\ \xi_{ih}\ \xi_{jk}\ \left(\frac{\theta}{3}\eta_{ij} - \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{js} \right) \times \left(\frac{\theta}{3}\eta_{hk} - \varepsilon^e_{r'u'}\ B^e_{u's'}\ G_{hr'}\ G_{ks'} \right)$$

$$\frac{\theta^2}{9}\ \xi_{ih}\ \xi_{jk}\ \eta_{ij}\ \eta_{hk} = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\frac{\theta}{3}\ \xi_{ih}\ \xi_{jk}\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{js}\ \eta_{hk}$$

$$= \frac{\theta}{3}\ \xi_{ih}\ \delta_{jh}\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{js}$$

$$= \frac{\theta}{3}\ \xi_{ih}\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{hs}$$

$$= \frac{\theta}{3}\ A^e_{rs}\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}$$

Ces trois tenseurs ont mêmes directions propres ; ils commutent

Il reste $\frac{\theta}{3}\ \varepsilon^e_{ss} = \frac{\theta^2}{3}$

De même

$$\frac{\theta}{3}\ \xi_{ih}\ \xi_{jk}\ \varepsilon^e_{r'u'}\ B^e_{u's'}\ G_{hr'}\ G_{ks'}\ \eta_{ij} = \frac{\theta^2}{3}$$

Calculons enfin

$$\xi_{ih}\ \xi_{jk}\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{js}\ \varepsilon^e_{r'u'}\ B^e_{u's'}\ G_{hr'}\ G_{ks'}$$

on a :

$$G_{ir}\ \xi_{ih}\ G_{hr'} = A^e_{rr'}$$

$$G_{js}\ \xi_{jk}\ G_{ks'} = A^e_{ss'}$$

il vient :

$$\varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ \varepsilon^e_{r'u'}\ B^e_{u's'}\ A^e_{rr'}\ A^e_{ss'}$$

or $B^e_{u's'}\ A^e_{ss'} = \delta_{u's}$

Il reste

$$\varepsilon^{e}_{ru} \quad B^{e}_{uu'} \quad \varepsilon^{e}_{r'u'} \quad A^{e}_{rr'}$$

ε^{e} , A^{e} , B^{e} ont mêmes directions propres et commutent

On obtient

$$\varepsilon^{e}_{ru} \qquad \varepsilon^{e}_{ru}$$

d'où la formule annoncée.

Démontrons enfin que $2\ \xi_{ih}\ \xi_{jk}\ X_{ij}\ X_{hk} = J_2$ est le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes $\hat{\tau}$ lorsqu'on prend pour état de référence R (T).

$$\hat{\tau}_{ij} = \lambda\ (\theta - 3\alpha)\ \delta_{ij} + 2\mu\ (\varepsilon^{e}_{ij} - \alpha\delta_{ij})$$

Le déviateur de $\hat{\tau}_{ij}$ est :

$$s_{ij} = -\frac{2\mu}{3}\ \theta\delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon^{e}_{ij}$$

d'où

$$s_{ij}\ s_{ij} = \left(-\frac{2\mu}{3}\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon^{e}_{ij}\right)\ \left(-\frac{2\mu}{3}\theta\delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon^{e}_{ij}\right) \quad \text{(II.4.9)}$$

$$= 4\mu^{2}\left(-\frac{\theta^{2}}{3} + \varepsilon^{e}_{ij}\ \varepsilon^{e}_{ij}\right)$$

et finalement

$$J_2 = \frac{1}{2}\ s_{ij}\ s_{ij} = 2\mu^{2}\left(-\frac{\theta^{2}}{3} + \varepsilon^{e}_{ij}\ \varepsilon^{e}_{ij}\right) = 2\ \xi_{ih}\ \xi_{jk}\ X_{ij}\ X_{hk}$$

Comportement lorsque le tenseur gradient des vitesses est constant, symétrique et de trace nulle.

On étudie le cas où $\varepsilon^{e} = \frac{1}{2}\ \log G^{T}\ \xi\ G = cte$
en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{G}^{T}\ \xi\ G + G^{T}\ \dot{\xi}\ G = + G^{T}\ \xi\ \dot{G} = 0$$

avec $\dot{F}F^{-1} = D$ (tenseur gradient de vitesse, supposé symétrique ;

le tenseur taux de rotation W est nul).

soit $\dot{F}G = D \quad \dot{G}F = -D \quad \dot{G} = -DG \quad \dot{G}^T = -G^T D$,

En appliquant la formule (II.4.8), on obtient :

$$\dot{\xi} = 4 f' \mu \left(-\frac{\theta}{3} \xi + \xi G \dot{\varepsilon}^e F \right)$$

puisque F, G, ξ , ε^e ont mêmes directions principales

$D = f's$

s est le déviateur du tenseur des contraintes $\hat{\tau}_{ij}$

en prenant pour état de référence R (T)

Pour $f = \frac{1}{2\zeta} J_2$ $\qquad D = \frac{1}{2\zeta} S$

Pour $f = K J_2^a$ (K, a fonctions de T)

$$D = K a J_2^{a-1} S$$

Dissipativité, convexité

Proposition (II.4.1)

1 - la condition nécéssaire et suffisante de dissipativité est :

$$f' \geqq 0$$

2 - la condition nécéssaire et suffisante de convexité est :

$$f' \geqq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geqq 0$$

Démonstration

1 - On a $\dfrac{\partial \Omega}{\partial X_{ij}} = 4 f' \xi_{ih} \xi_{jk} X_{hk}$

$$X_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial X_{ij}} = 4 f' \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk}$$

La condition nécessaire et suffisante de dissipativité est donc $f' \geqq 0$. La dissipation est égale à $2f' J_2$.

$$2 - \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_{ij}\ \partial X_{hk}} = 4\, f'\, \xi_{ih}\ \xi_{jk} + 16\, f''\, \xi_{in}\ \xi_{jm}\ X_{mn}\ \xi_{hr}\ \xi_{ks}\ X_{rs}$$

Pour q'on ait la convexité, il faut et il suffit que quel que soit Y_{ij}

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_{ij}\ \partial X_{hk}}\quad Y_{ij}\ Y_{hk} \geqq 0$$

Ceci doit avoir lieu pour toute valeur de X_{ij} , d'où l'on déduit

$$f' \geqq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geqq 0$$

Ainsi pour $f = KJ_2^a$ le comportement est dissipatif pour $a \geqq 0$ et convexe pour $a \geqq 1$. Par exemple, le fait qu'un alliage superplastique ait en traction simple un comportement $\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}^m$ avec $m \leqq 1$ prouve que son comportement est convexe.

Calcul des contraintes lorsqu'on donne F(t), T(t)

On suppose connue la valeur initiale ξ_o de ξ avec bien entendu $\det \xi_o = 1$. On a donc ξ par (II.4.8) d'où ξ (t) par intégration, puisque F et G sont connus à tout instant et que θ , ε^e s'expriment en fonction de F, G, ξ .
Le tenseur des contraintes $\hat{\tau}$ est alors (en prenant pour état de référence, R (T)

$$\hat{\tau}_{ij} = \lambda(\theta - 3\alpha)\ \delta_{ij} + 2\mu\ (\varepsilon^e_{ij} - \alpha\delta_{ij})$$

On pourrait aussi calculer le tenseur des contraintes de Boussinesq $\dfrac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$

- **une variante dans l'expression de l'énergie libre et le potentiel de dissipation pour le corps de Maxwell**

En fait, la présence de β dans ϕ modifie l'expression des X_{ij} et simplifie l'expression de ϕ , alors la suppres-

sion de β dans ϕ rend l'expression de Ω plus complexe, comme, on va voir dans la suite.

II.5. Cas où les tenseurs des contraintes et des déformations sont diagonaux

* Transformations isothermes

L'expression de ϕ et Ω est :

$$\phi = \frac{\lambda}{2}\,\theta^2 + \mu\,(\,\varepsilon_1^{e\,2} + \varepsilon_2^{e\,2} + \varepsilon_3^{e\,2}\,)$$

$$\Omega = f\,(J_2\ ,\ To)$$

Expression des X_{jj}

$$X_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} = \mu\varepsilon_1^e\,\eta_1$$

$$X_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} = \mu\varepsilon_2^e\,\eta_2 \qquad \text{(II.5.1)}$$

$$X_3 = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} = \mu\varepsilon_3^e\,\eta_3$$

En plus, $\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e = \frac{1}{\mu}\,(\,\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3\,) = \theta$

Expression de J_2

Dans ce cas, on va voir que l'expression de J_2 est plus complexe que celle (II.3).

Montrons que :

$$J_2 = \frac{1}{2}\,(\,s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\,) \qquad \text{(II.5.2)}$$

$$= 2\,(\xi_1^2 X_1^{\,2} + \xi_2^2 X_2^{\,2} + \xi_3^2 X_3^{\,2}\,) - \frac{2}{3}\,(\,\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3\,)^2$$

Démonstration :

En remplaçant s_1, s_2, et s_3 de (II.3.2) dans (II.5.2) on obtient :

$$J_2 = 2\left[\left(-\frac{\mu\theta}{3} + \mu\varepsilon_1^e\right)^2 + \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \mu\varepsilon_2^e\right)^2 + \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \mu\varepsilon_3^e\right)^2\right]$$

$$J_2 = 2\left[\xi_1^2\left(-\frac{\mu\theta}{3}\eta_1 + \mu\,\varepsilon_1^e\eta_1\right)^2 + \xi_2^2\left(-\frac{\mu\theta}{3}\eta_2 + \mu\,\varepsilon_2^e\eta_2\right)^2 + \xi_3^2\left(-\frac{\mu\theta}{3}\eta_3 + \mu\,\varepsilon_3^e\eta_3\right)^2\right]$$

$$J_2 = 2\left[\xi_1^2\left(-\frac{\mu\theta}{3}\eta_1 + X_1\right)^2 + \xi_2^2\left(-\frac{\mu\theta}{3}\eta_2 + X_2\right)^2 + \xi_3^2\left(-\frac{\mu\theta}{3}\eta_3 + X_3\right)^2\right]$$

$$J_2 = 2\left[\left(-\frac{\mu\theta}{3} + \xi_1 X_1\right)^2 + \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \xi_2 X_2\right)^2 + \left(-\frac{\mu\theta}{3} + \xi_3 X_3\right)^2\right]$$

$$J_2 = 2\left(3 \times \frac{1}{9}\mu^2\theta^2 - \frac{2}{3}\mu^2\theta^2 + \xi_1^2X_1^2 + \xi_2^2X_2^2 + \xi_3^2X_3^2\right)$$

$$J_2 = 2\left(\xi_1^2X_1^2 + \xi_2^2X_2^2 + \xi_3^2X_3^2\right) - \frac{2}{3}\left(\xi_1X_1 + \xi_2X_2 + \xi_3X_3\right)^2$$

On peut aussi démontrer ceci en remplaçant X_1 , X_2 ,et X_3 par ses valeurs de (II.5.1).

Evolution de la variable interne tensorielle

On a $\Omega = f(J_2 , To)$

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial\Omega}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial X_1} = f'\left[4\,\xi_1^2X_1 - \frac{4}{3}\xi_1\left(\xi_1X_1 + \xi_2X_2 + \xi_3X_3\right)\right]$$

$$\dot{\xi}_1 = 4\,\mu\,f'\,\xi_1\left(\varepsilon_1^e - \frac{\theta}{3}\right)$$

De même, on obtient :

$$\dot{\xi}_2 = 4\,\mu\,f'\,\xi_2\left(\varepsilon_2^e - \frac{\theta}{3}\right) \qquad \text{(II.5.3)}$$

$$\dot{\xi}_3 = 4\,\mu\,f'\,\xi_3\left(\varepsilon_3^e - \frac{\theta}{3}\right)$$

En comparant ceci avec (II.3.3) où $\beta = o$, on remarque que les variables internes ont les mêmes vitesses, le lemme (II.3.1) est encore valable [invariance de volume de R(To)] .

Dissipativité et convexité

Lemme (II.5.2)

La condition nécéssaire et suffisante pour que le corps de Maxwell soit dissipatif est : $f' \geq o$

Démonstration :

$$X_1 \frac{\partial \Omega}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial \Omega}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial \Omega}{\partial X_3}$$

$$= 4 f' \{ [\xi_1^2 X_1^2 - \frac{1}{3} \xi_1 X_1 (\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)] +$$

$$[\xi_2^2 X_2^2 - \frac{1}{3} \xi_2 X_2 (\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)] +$$

$$[\xi_3^2 X_3^2 - \frac{1}{3} \xi_3 X_3 (\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)] \}$$

$$= 2 f' [2 (\xi_1^2 X_1^2 + \xi_2^2 X_2^2 + \xi_3^2 X_3^2) - \frac{2}{3} (\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)^2$$

$$= 2 f' J_2$$

Reste à démontrer que $J_2 \geq 0$

C'est-à-dire :

$$\xi_1^2 X_1^2 + \xi_2^2 X_2^2 + \xi_3^2 X_3^2 - \frac{1}{3} (\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)^2 \geq 0$$

Supposons $Q = \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3$

Alors, l'inégalité précédente s'écrit :

$$(\xi_1 X_1 - \frac{Q}{3})^2 + (\xi_2 X_2 - \frac{Q}{3})^2 + (\xi_3 X_3 - \frac{Q}{3})^2 \text{ qui est bien } \geq 0$$

Donc, si $f' \geq 0$, alors le lemme est démontré.

* convexité sera démontré dans le cas général au (II.6) proposition (II.6.2)

* **Transformations non isothermes**

L'expression de ϕ et Ω est :

$$\phi = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3\alpha)^2 + \mu [(\varepsilon_1^e - \alpha)^2 + (\varepsilon_2^e - \alpha)^2 + (\varepsilon_3^e - \alpha)^2] - \int S(T)\, dT$$

$$\Omega = f (J_2 , T)$$

Expression des X_{ij}

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu\,(\varepsilon_1^e - \alpha)\,\eta_1 \\ X_2 &= \mu\,(\varepsilon_2^e - \alpha)\,\eta_2 \\ X_3 &= \mu\,(\varepsilon_3^e - \alpha)\,\eta_3 \end{aligned} \qquad \text{(II.5.4)}$$

Expression de J_2

L'expression de J_2 est la même que celle dans (II.5.2) mais la démonstration est un peu plus complexe que celle du (II.5.2) alors, démontrons que :

$$J_2 = \frac{1}{2}\,(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \qquad \text{(II.5.5)}$$

$$= 2\,(\xi_1^2 X_1^2 + \xi_2^2 X_2^2 + \xi_3^2 X_3^2) - \frac{2}{3}\,(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)^2$$

Démonstration :

En remplaçant l'expression des forces du (II.5.4) dans (II.5.5), on obtient :

$$J_2 = 2\,\mu^2[(\varepsilon_1^e - \alpha)^2 + (\varepsilon_2^e - \alpha)^2 + (\varepsilon_3^e - \alpha)^2] - \frac{2\mu^2}{3}\,(\varepsilon_1^e - \alpha + \varepsilon_2^e - \alpha + \varepsilon_3^e - \alpha)^2$$

$$= 2\,\mu^2[\varepsilon_1^{e\,2} + \varepsilon_2^{e\,2} + \varepsilon_3^{e\,2} - 2\,\alpha\,(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) + 3\alpha^2] - \frac{2\mu^2}{3}\,(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e - 3\alpha)^2$$

$$= 2\,\mu^2[\varepsilon_1^{e\,2} + \varepsilon_2^{e\,2} + \varepsilon_3^{e\,2} - 2\theta\,\alpha + 3\alpha^2 - \frac{1}{3}\,(\theta - 3\alpha)^2]$$

$$= 2\,\mu^2\left(\varepsilon_1^{e\,2} + \varepsilon_2^{e\,2} + \varepsilon_3^{e\,2} - \frac{\theta^2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)\ \text{[voir (II.4.9) et (II.3.2)]}$$

L'évolution de la variable interne tensorielle est donnée au (II.5.3) car, on a la même expression de J_2 , mais, les forces ont des valeurs différentes et les lemmes (II.3.1) (invariance du volume de R (To) et (II.5.2) (dissipativité) sont valables, pour la convexité sera démontrée dans la proposition (II.6.2).

II.6. Déformations quelconques, transformations isothermes

L'expression de ϕ et Ω est :

$$\phi = \frac{\lambda}{2}\theta^2 + \mu\varepsilon^e_{ij}\ \varepsilon^e_{ij}$$

$$\Omega = f(J_2, T_0) \quad ; \quad J_2 = 2\,\xi_{ih}\,\xi_{jk}\,X_{ij}\,X_{hk} - \frac{1}{3}(\xi_{ij}\,X_{ij})^2$$

* Expression des X_{ij}

$$X_{ij} = -\mu\ \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}}$$

$$\gamma = \varepsilon^e_{pq}\ \varepsilon^e_{pq}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}} = 2\,\varepsilon^e_{pq}\ \frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial \xi_{ij}} = 2\,\varepsilon^e_{pq}\ \frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial A^e_{rs}}\ \frac{\partial A^e_{rs}}{\partial \xi_{ij}} = -\varepsilon^e_{ru}\,B^e_{us}\,G_{ir}\,G_{js}$$

De (II.4.3), on obtient :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}} = -\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{js}$$

par conséquent, l'expression des X_{ij} est :

$$X_{ij} = \mu\ \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ G_{js} \qquad \text{(II.6.1)}$$

Evolution de variable interne ξ_{ij}

$$\dot{\xi}_{ij} = f'\ \frac{\partial J_2}{\partial X_{ij}}$$

$$= 4f'\left(\xi_{ih}\ \xi_{jk}\ X_{hk} - \frac{1}{3}\xi_{ij}\ \xi_{hk}\ X_{hk}\right)$$

$$= 4\,\mu\,f'\left(\xi_{ih}\ \xi_{jk}\,\varepsilon^e_{ru}\,B^e_{us}\,G_{hr}\,G_{ks} - \frac{1}{3}\xi_{ij}\,\varepsilon^e_{ru}\,B^e_{us}\,G_{hr}\,\xi_{hk}\,G_{ks}\right)$$

$$= 4\,\mu\,f'\left(\xi_{ih}\,G_{hk}\,\varepsilon^e_{kr}\,F_{rj} - \frac{\theta}{3}\xi_{ij}\right)$$

En fait, on a :

$$\varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ G_{ir}\ \xi_{ij}\ G_{js} = \varepsilon^e_{ru}\ B^e_{us}\ A^e_{rs} =$$

$$\varepsilon^e_{ru}\ \delta_{ur} = \varepsilon^e_{rr} = \theta \qquad \text{(II.6.2)}$$

Invariance du volume de R (To)

Même démonstration de l'invariance du volume de R (To) dans le paragraphe 4.

Expression de J_2

Montrons que

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = 2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2$$

En fait :

$$2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} = 2 \mu^2 \xi_{ih} \xi_{jk} \epsilon^e_{ru} B^e_{us} G_{ir} G_{js} \epsilon^e_{r'u'} B^e_{u's'} G_{hr'} G_{ks'} \qquad \text{(II.6.3)}$$

pour $G_{ir} \xi_{ih} G_{hr'} = A^e_{rr'}$

$G_{js} \xi_{jk} G_{ks'} = A^e_{ss'}$

Alors (II.6.3) devient :

$$2 \mu^2 \epsilon^e_{ru} B^e_{us} \epsilon^e_{r'u'} B^e_{u's'} A^e_{rr'} A^e_{ss'}$$

Mais $B^e_{u's'} A^e_{ss'} = \delta_{u's}$

(II.6.3) devient : $2 \mu^2 \epsilon^e_{ru} B^e_{uu'} \epsilon^e_{r'u'} A^e_{rr'}$

Comme ϵ^e, A^e, et B^e ont mêmes directions principales, ils commutent; on obtient pour (II.6.3) $2 \mu^2 \epsilon^e_{ru} \epsilon^e_{ru}$

D'autre part, on a :

$$-\frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2 = -\frac{2}{3} \mu^2 (\xi_{ij} \epsilon^e_{ru} B^e_{us} G_{ir} G_{js})^2$$

$$= -\frac{2}{3} \mu^2 (\epsilon^e_{ru} B^e_{us} G_{ir} \xi_{ij} G_{js})^2 = -\frac{2}{3} \mu^2 \theta^2$$

La quantité entre parenthèses est égale à θ [voir (II.6.2)]

Finalement, on obtient :- 98 -

Finalement on obtient :

$$2\,\xi_{ih}\,\xi_{jk}\,X_{ij}\,X_{hk} - \frac{2}{3}\,(\xi_{ij}\,X_{ij})^2 = 2\,\mu^2\left(-\frac{\theta^2}{3} + \varepsilon^e_{ij}\,\varepsilon^e_{ij}\right)$$

$$s_{ij}\,s_{ij} = \left(-\frac{2\mu}{3}\,\theta\delta_{ij} + 2\,\mu\varepsilon^e_{ij}\right)\left(\frac{-2\mu}{3}\,\theta\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon^e_{ij}\right)$$

$$= 4\,\mu^2\left(-\frac{\theta^2}{3} + \varepsilon^e_{ij}\,\varepsilon^e_{ij}\right)$$

c'est-à-dire :

$$J_2 = \frac{1}{2}\,s_{ij}\,s_{ij} = 2\,\xi_{ih}\,\xi_{jk}\,X_{ij}\,X_{hk} - \frac{2}{3}\,(\xi_{ij}\,X_{ij})^2$$

dissipativité, convexité

proposition (II.6.2)

1 - la condition nécessaire et suffisante de dissipativité est :

$$f' \geqq 0$$

2 - la condition nécessaire et suffisante de convexité est :

$$f' \geqq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geqq 0$$

Démonstration

$$1 - \frac{\partial\Omega}{\partial X_{ij}} = 4f'\left(\xi_{ih}\,\xi_{jk}\,X_{hk} - \frac{1}{3}\,\xi_{ij}\,\xi_{hk}\,X_{hk}\right)$$

$$X_{ij}\,\frac{\partial\Omega}{\partial X_{ij}} = 4f'\left[\xi_{ih}\,\xi_{jk}\,X_{ij}\,X_{hk} - \frac{1}{3}\,(\xi_{ij}\,X_{ij})^2\right]$$

Alors, si $f' \geqq 0$, on obtient 1, la fonction de dissipation est $2f'J_2$.

$$2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial X_{ij}\,\partial X_{hk}} \quad 4f'\left(\xi_{ih}\,\xi_{jk} - \frac{1}{3}\,\xi_{ij}\,\xi_{hk}\right)$$

$$+ 16f''\left(\xi_{ih'}\,\xi_{jk'}\,X_{h'k'} - \frac{1}{3}\,\xi_{ij}\,\xi_{h'k'}\,X_{h'k'}\right)$$

$$\times\left(\xi_{rh}\,\xi_{sk}\,X_{rs} - \frac{1}{3}\,\xi_{hk}\,\xi_{r's'}\,X_{r's'}\right)$$

Alors, la condition nécessaire et suffisante de convexité est :

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial X_{ij}\,\partial X_{hk}}\,Y_{ij}\,Y_{hk} \geqq 0 \quad \forall \quad X_{ij}\,, \quad Y_{ij}$$

c'est-à-dire :

$$f' \geq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geq 0$$

II.7. Déformations quelconques, transformations non isothermes

Dans ce cas la température va varier, alors l'expression de ϕ et Ω est :

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3\alpha)^2 + \mu (\varepsilon^e_{ij} - \alpha\delta_{ij})(\varepsilon^e_{ij} - \alpha\delta_{ij}) - \int S(T)\, dT$$

$$\Omega = f(J_2, T) \quad ; \quad J_2 = 2\, \xi_{ih}\, \xi_{jk}\, X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2$$

Expression des X_{ij}

$$X_{ij} = -\mu \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}}$$

$$\gamma = (\varepsilon^e_{pq} - \alpha\delta_{pq})(\varepsilon^e_{pq} - \alpha\delta_{pq})$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_{ij}} = 2(\varepsilon^e_{pq} - \alpha\delta_{pq}) \frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial \xi_{ij}} = 2\varepsilon^e_{pq} \frac{\partial \varepsilon^e_{pq}}{\partial \xi_{ij}} - 2\alpha \frac{\partial \varepsilon^e_{pp}}{\partial \xi_{ij}}$$

De (II.4.2) et (II.4.3), on obtient alors l'expression des X_{ij} :

$$X_{ij} = \mu \varepsilon^e_{ru} B^e_{us} G_{ir} G_{js} + \alpha\mu\, \eta_{ij} \qquad \text{(II.7.1)}$$

Evolution de variable interne ξ_{ij} :

$$\dot{\xi}_{ij} = f' \frac{\partial J_2}{\partial X_{ij}}$$

$$= 4f' \left(\xi_{ih}\, \xi_{jk}\, X_{hk} - \frac{1}{3}\, \xi_{ij}\, \xi_{hk}\, X_{hk} \right)$$

$$= 4\mu f' \left(\xi_{ih}\, \xi_{jk}\, \varepsilon^e_{ru}\, B^e_{us}\, G_{hr}\, G_{ks} - \frac{1}{3}\, \xi_{ij}\, \varepsilon^e_{ru}\, B^e_{us}\, G_{hr}\, \xi_{hk}\, G_{ks} \right)$$

$$+ 4\mu\alpha f' \left(\frac{1}{3} \xi_{ij}\, \xi_{hk}\, \eta_{hk} - \xi_{ih}\, \xi_{jk}\, \eta_{hk} \right)$$

Mais :

$$\xi_{ij}\, \eta_{ij} = 3 \,, \quad \xi_{ih}\, \eta_{hk}\, \xi_{jk} = \delta_{ik}\, \xi_{jk} = \xi_{ij} \quad \frac{1}{3}\, \xi_{ij}\, \xi_{hk}\, \eta_{hk} = \xi_{ij}$$

avec, (II.6.2), on obtient, alors :

$$\dot{\xi}_{ij} = 4\,\mu f' \left(\xi_{ih}\, G_{hk}\, \varepsilon^{e}_{kr}\, F_{rj} - \frac{\theta}{3}\, \xi_{ij} \right) \qquad \text{(II.7.2)}$$

On remarque qu'on obtient la même expression pour $\dot{\xi}_{ij}$

Invariance du volume de R (To)

Même démonstration que dans le cas précédent

Expression de J_2

Nous allons démontrer la formule fondamentale suivante :

$$J_2 = \frac{1}{2}\, s_{ij}\, s_{ij} = 2\, \xi_{ih}\, \xi_{jk}\, X_{ij}\, X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij}\, X_{ij})^2 \qquad \text{(II.7.3)}$$

Démonstration :

Il suffit de démontrer que :

$$2\, \xi_{ih}\, \xi_{jk}\, X_{ij}\, X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij}\, X_{ij})^2 = 2\,\mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \varepsilon^{e}_{ij}\, \varepsilon^{e}_{ij} \right) \qquad \text{(II.7.4)}$$

nous avons pour le troisième membre de (II.7.3) :

$$2\, \xi_{ih} \xi_{jk}\, X_{ij}\, X_{hk} =$$

$$2\,\mu^2 \xi_{ih}\, \xi_{jk} \left(\varepsilon^{e}_{ru}\, B^{e}_{us}\, G_{ir}\, G_{js} - \alpha \eta_{ij} \right) \left(\varepsilon^{e}_{r'u'}\, B^{e}_{u's'}\, G_{hr'}\, G_{ks'} - \alpha \eta_{hk} \right) \qquad \text{(II.7.5)}$$

pour 1er terme de (II.7.5), on a :

$$\xi_{ih}\, \xi_{jk}\, \varepsilon^{e}_{ru}\, B^{e}_{us}\, G_{ir}\, G_{js}\, \varepsilon^{e}_{r'u'}\, B^{e}_{u's'}\, G_{hr'}\, G_{ks'} \qquad \text{(II.7.6)}$$

$$G_{ir}\, \xi_{ih}\, G_{hr'} = A^{e}_{rr'} \quad , \quad G_{js}\, \xi_{jk}\, G_{ks'} = A^{e}_{ss'}$$

Alors (II.7.6) devient :

$$\varepsilon^{e}_{ru}\, B^{e}_{us}\, \varepsilon^{e}_{r'u'}\, B^{e}_{u's'}\, A^{e}_{rr'}\, A^{e}_{ss'}$$

mais $B^e_{u's'} \quad A^e_{ss'} = \delta_{u's}$

Donc (II.7.6) devient : $\varepsilon^e_{ru} \quad B^e_{uu'} \; \varepsilon^e_{r'u'} \quad A^e_{rr'}$

ε^e , A^e , B^e ont mêmes directions propres et commutent.
On obtient

$$(II.7.6) = \varepsilon^e_{ru} \quad \varepsilon^e_{ru}$$

Pour 2ème terme de (II.7.5), on a :

$$- \alpha\varepsilon^e_{ru} \; B^e_{us} \; G_{ir} \; \xi_{ih} \; \xi_{jk} \; \eta_{hk} \; G_{js} = - \alpha\varepsilon^e_{ru} \; B^e_{us} \; G_{ir} \; \xi_{ij} \; G_{js} = -\alpha\theta \qquad (II.7.7)$$

(voir (II.6.2))

Même chose pour 3ème terme de (II.7.5)

$$- \alpha\varepsilon^e_{r'u'} \; B^e_{u's'} \; G_{hr'} \; \xi_{ih} \; \xi_{jk} \; \eta_{ij} \; G_{ks'} = - \alpha\theta \qquad (II.7.8)$$

Et pour 4ème terme de (II.7.5), on a :

$$\alpha^2 \xi_{ih} \quad \xi_{jk} \quad \eta_{ij} \quad \eta_{hk} \quad = \alpha^2 \quad \xi_{ih} \quad \delta_{ki} \quad \eta_{hk} = 3\alpha^2 \qquad (II.7.9)$$

Donc de (II.7.6), (II.7.7), (II.7.8), (II.7.9) on obtient pour (II.7.5) :

$$2 \; \xi_{ih} \; \xi_{jk} \; X_{ij} \; X_{hk} = 2 \mu^2 \; (\; \varepsilon^e_{ij} \quad \varepsilon^e_{ij} - 2 \; \alpha\theta + 3\alpha^2 \;) \qquad (II.7.10)$$

Ensuite, pour le 2ème terme de 1er membre de (II.7.4), on a :

$$- \frac{2}{3} \; (\xi_{ij} \; X_{ij})^2 = - \frac{2}{3} \; \mu^2 \; (\; \varepsilon^e_{ru} \; B^e_{us} \; G_{ir} \; \xi_{ij} G_{js} - \alpha \; \xi_{ij} \; \eta_{ij})^2$$

$$= - \frac{2}{3} \mu^2 (\theta - 3\alpha)^2 \qquad (II.7.11)$$

De (II.7.10), (II.7.11) on obtient :

$$2 \; \xi_{ih} \quad \xi_{jk} \; X_{ij} \; X_{hk} - \frac{2}{3} \; (\xi_{ij} \; X_{ij})^2 = 2 \mu^2 (\varepsilon^e_{ij} \quad \varepsilon^e_{ij} - 2 \; \alpha\theta + 3\alpha^2 - \frac{\theta^2}{3}$$

$$+ 2 \; \alpha\theta \; - 3 \; \alpha^2)$$

$$= 2 \; \mu^2 (\; - \frac{\theta^2}{3} + \varepsilon^e_{ij} \; \varepsilon^e_{ij}) \qquad (II.7.12)$$

$$s_{ij}\ s_{ij} = \left(\frac{-2\mu}{3}\theta\delta_{ij} + 2\ \mu\varepsilon^{e}_{ij}\right)\quad\left(\frac{-2\mu}{3}\ \theta\delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon^{e}_{ij}\right)$$

$$= 4\ \mu^2\ \left(-\frac{\theta^2}{3} + \varepsilon^{e}_{ij}\ \varepsilon^{e}_{ij}\right) \qquad \text{(II.7.13)}$$

Finalement, en comparant (II.7.12), (II.7.13) on obtient (II.7.4).

Dissipativité et convexité

La proposition (II.6.2) est encore valable, la démonstration est inchangée.

V.8. CONCLUSION

Cette description d'un modèle rhéologique en viscoélasticité non linéaire illustre l'intérêt de la théorie des milieux viscoélastiques standards dans le cas d'une variable interne tensorielle. Nous avons ainsi présenté une étude nouvelle du corps de Maxwell en grandes déformations et des températures variables dans un cadre thermodynamique rationnel.

PARTIE III

Equivalence de deux conditions de stabilité élastique de Hadamard

La stabilité d'un corps élastique est assurée lorsque la seconde variation de l'énergie élastique est positive dans tout déplacement virtuel licite.

Hadamard a énoncé à partir de ce critère une condition nécéssaire et une condition suffisante de stabilité d'un corps élastique homogène à frontière fixe en faisant intervenir des dérivées secondes de l'énergie élastique par rapport aux composantes $\frac{\partial x_j}{\partial a_j}$ et $\frac{\partial x_k}{\partial a_\ell}$ du tenseur de transformation.

Dans cette partie, nous vérifions que l'équivalence des deux conditions de stabilité est réalisé dans le cas d'un corps élastique homogène bidimensionnel ayant subi une grande déformation à partir d'un état naturel isotrope.

III. 1. Position du problème

* Soit Φ le potentiel élastique d'un élément homogène d'un corps élastique ayant un volume unité dans la configuration initiale dans laquelle peut exister des contraintes uniformes, c'est-à-dire que la configuration initiale est la configuration qui se trouve dans un état homogène dans lequel les contraintes ne sont pas nulles en général.

Bien entendu, Φ est l'énergie libre ou l'énergie interne suivant que les transformations sont isothermes ou adiabatiques. Si F est une déformation homogène où $F_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial a_j}$, alors le tenseur des contraintes θ_{ij} est :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_{ij}}$$

qui est le tenseur des contraintes de Boussinesq, d'où :

$$d\theta_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij}\, \partial F_{k\ell}}\, dF_{k\ell}$$

on suppose, pour simplifier, que l'on évalue $\Phi_{ijk\ell}$ pour $F_{ij} = \delta_{ij}$, c'est-à-dire lorsque la configuration actuelle s'identifie avec la configuration initiale, alors, on peut écrire

$$d\theta_{ij} = \Phi_{ijk\ell}\, dF_{k\ell} \qquad \text{où} \quad \Phi_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij}\, \partial F_{k\ell}}$$

. critère énergétique de stabilité (C.E)

On sait que le critère de stabilité d'un corps élastique dont la frontière est fixe exprime que l'inégalité

$$\int_D \Phi_{ijk\ell} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_\ell} \, d\omega > 0 \quad \forall \ \vec{u} \in V - \{ 0 \}$$

où $V = [H_0^1 (D)]^2$ est un espace de Hilbert.

Ceci veut dire que si l'inégalité précédente est satisfaite, alors C.E est vérifiée aussi quel que soit le champ u_i continu dans D, non identiquement nul dans D, s'annulant sur ∂D [Hadamard, Hill] , on doit admettre en outre que u_i a des dérivées partielles premières continues par morceaux dans D.

$\Phi_{ijk\ell}$ est la dérivée seconde de la densité d'énergie élastique Φ par rapport à $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ et à $\frac{\partial x_k}{\partial a_\ell}$.
Remarquons que la seule condition de symétrie pour le potentiel $\Phi_{ijk\ell}$ est :

$$\Phi_{ijk\ell} = \Phi_{k\ell ij}$$

* Hadamard a donné deux conditions de stabilité d'un corps élastique homogène à frontière fixe.
La première condition exprime que pour tout système de vecteurs α_i et β_i non nuls.

$$\Phi_{ijk\ell} \alpha_i \beta_j \alpha_k \beta_\ell > 0 \qquad \text{condition nécéssaire (III.1.1)}$$

La seconde exprime l'existence d'au moins un système de constantes K_{ij} telles que, pour toute matrice X_{ij} non nulle, de cofacteurs Y_{ij}, on ait :

$$\Phi_{ijk\ell} X_{ij} X_{k\ell} + K_{ij} Y_{ij} > 0 \qquad \text{- condition suffisante (III.1.2)}$$

où $Y_{ij} = X_{i+1,\, j+1} X_{i+2,\, j+2} - X_{i+1,\, j+2} X_{i+2,\, j+1}$

Il est clair que (III.1.2) entraine (III.1.1). Le problème

réciproque, posé par Hadamard et signalé par VAN HOVE [49] reçoit ici une solution pour un corps élastique bidimensionnel soumis à des déformations finies à partir d'un état naturel isotrope.

III.2. Conditions de stabilité de Hadamard

* condition nécéssaire de stabilité de Hadamard

(III.1.1) est la condition d'ellipticité du système d'équations :

$$\Phi_{ijk\ell} \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j \partial a_\ell} = 0$$

qui permet de déterminer les déplacements infiniment petits u_i dans D, lorsqu'on donne u_i sur ∂D.
Truesdell [47] indique que la démonstration schématique donnée de (III.1.1) par Hadamard [18] , critiquée par Duhem [12] a été complétée par Cattaneo [11] , Van Hove [49] a démontré que la condition (III.1.1) est aussi suffisante pour la stabilité [52] , nous continuerons cependant à appeler (III.1.1) la condition nécéssaire de stabilité de Hadamard, pour la distinguer de la condition suffisante suivante :

* Condition suffisante de stabilité de Hadamard

Elle est donnée dans [18] (page 254, noté en bas de page) ; nous l'avons écrite sous la forme (III.1.2).
Soient U_{ij} les cofacteurs de $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ ($U_{11} = \frac{\partial u_2}{\partial a_2}\frac{\partial u_3}{\partial a_3} - \frac{\partial u_2}{\partial a_3}\frac{\partial u_3}{\partial a_2}$, etc...)
Nous avons :

$$\int_D U_{ij}\, d\omega = 0$$

Cela résulte de l'identité :

$$\int_{\partial D} u_{i+1}\, du_{i+2} \wedge da_j = 0$$

qui donne par application de la formule de Stokes

$$\int_D du_{i+1} \wedge du_{i+2} \wedge da_j = 0$$

(III.1.2) entraine donc, en faisant $X_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j}$

$$\int_D \Phi_{ijk\ell} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_\ell} d\omega > 0 \qquad \forall \vec{u} \in V - \{0\}$$

Dans le cas d'un milieu élastique bidimensionnel, la condition suffisante de Hadamard exprime l'existence d'au moins une constante K telle que :

$$\Phi_{ijk\ell} X_{ij} X_{k\ell} + KY > o \qquad (III.2.1)$$

pour toute matrice non nulle X_{ij}, avec $Y = X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21}$

Nous avons ici la relation :

$$\int_D \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} - \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) d\omega = 0$$

qui est elle-même une conséquence de :

$$\int_{\partial D} \dot{u}_1 \, du_2 = 0$$

Il en résulte que (III.2.1) est bien une condition suffisante de stabilité.

On peut d'ailleurs donner de (III.2.1) une autre justification très simple :

Soit l'équation :

$$\Phi_{ijk\ell} \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j \partial a_\ell} = 0 \qquad (i,j,k,\ell = 1,2) \qquad (III.2.2)$$

qui régit les déplacements infiniment petits dans D, lorsqu'on les donne sur ∂D.

Elle admet une solution unique si

$$\int_D \Phi_{ijk\ell} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_\ell} d\omega > 0 \quad \forall \hat{u} \in V - \{ 0 \}$$

De même, considérons l'équation :

$$(\Phi_{ijk\ell} + \Phi'_{ijk\ell}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j \partial a_\ell} = 0 \qquad \text{(III.2.3)}$$

avec

$$\Phi'_{1122} = \Phi'_{2211} = \frac{K}{2}$$

$$\Phi'_{1221} = \Phi'_{2112} = -\frac{K}{2}$$

tous les autres coefficients $\Phi'_{ijk\ell}$ étant nuls, l'équation (III.2.3) est alors identique à l'équation (III.2.2) car

$$\Phi'_{ijk\ell} \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j \partial a_\ell} = 0$$

Mais l'équation (III.2.3) admet une solution unique si :

$$\int_D (\Phi_{ijk\ell} + \Phi'_{ijk\ell}) \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_\ell} d\omega > 0 \quad \forall \hat{u} \in V - \{ 0 \}$$

En particulier la condition :

$$(\Phi_{ijk\ell} + \Phi'_{ijk\ell}) X_{ij} X_{k\ell} > 0 \qquad \text{(III.2.4)}$$

si elle est vérifiée pour toute matrice X_{ij} non nulle est une condition suffisante d'unicité de la solution de (III.2.3) et donc de (III.2.2) lorsqu'on donne u_i sur ∂D, mais la condition (III.2.4) ne se distingue pas de la condition (III.2.1).
Il reste à examiner dans quelles conditions (III.1.1) et (III.2.1) sont équivalentes.

III.3. Description géométrique du problème

Soient a_i les coordonnées de la configuration initiale CI dont on étudie la stabilité, b_i les coordonnées de la

configuration naturelle CN (sans contraintes), et x_i celles de la configuration actuelle (déformé) CA.

Alors :

Soit G le tenseur de la transformation CN ⟶ CI

avec, $G_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial b_j}$

En plus, on suppose que G soit un tenseur symétrique.

F est le tenseur défini tel que : $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ dans la transformation de CI ⟶ CA

Alors Γ = F.G décrit la transformation de CN ⟶ CA

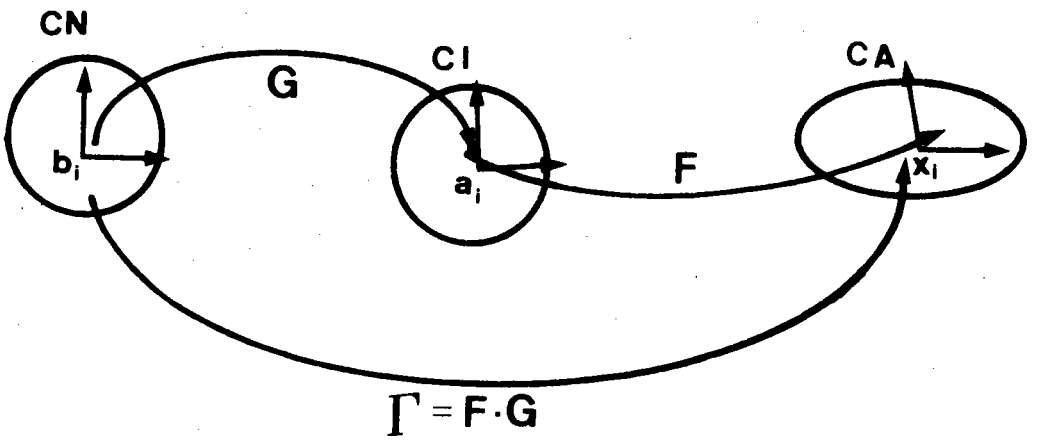


Fig (III.3.1)

III.4. Cas d'un milieu élastique bidimensionnel déformé à partir d'un état naturel isotrope

III.4.1 propriétés du potentiel élastique

On appelle Φ la densité du potentiel élastique, c'est-à-dire, le potentiel élastique d'un élément de surface unité dans CI.

Ce potentiel verifie par hypothèse la condition $\Phi(F) = \Phi(F')$ telle que :

$F' = \gamma F$, soit $F'_{ij} = \gamma_{ik} F_{kj}$ avec $\gamma_{ki}\,\gamma_{kj} = \delta_{ij}$ et dét $\gamma > 0$ c'est-à-dire Φ vérifie le principe d'objectivité, ce qui signifie ici l'invariance du Φ dans les rotations de l'élément matériel considéré. On appelle Φ^0 le potentiel élastique d'un élément de surface unité (densité de potentiel), dans CN ; Φ^0 vérifie :

$\Phi^0(\Gamma) = \Phi^0(\Gamma')$; $\Gamma' = \gamma\Gamma$ avec $\gamma_{ki}\,\gamma_{kj} = \delta_{ij}$ et dét $\gamma > 0$

Soit $\hat{\Phi}$ la densité de potentiel totale, alors :

$\Phi = \frac{\Phi}{S_i}$ c'est-à-dire le quotient entre Φ et la surface d'un élément S_i de CI

$\Phi^0 = \frac{\hat{\Phi}}{S_n}$ c'est-à-dire le quotient entre Φ et la surface d'un élément S_n de CN. Donc :

$$\frac{\Phi^0}{\Phi} = \frac{S_i}{S_n} = \text{dét } \frac{\partial a}{\partial b} = \text{dét } G = h$$

ou encore : $\Phi = \frac{1}{h}\ \Phi^0$

proposition (III.4.1.1)

- Lorsque $F_{ij} = \delta_{ij}$, c'est-à-dire, lorsque CA ≡ CI
les coefficients $\Phi_{ijk\ell}$ ont pour expression

$$\Phi_{ijk\ell} = \Psi_{ijk\ell} + \sigma_{\ell j}\ \delta_{ki} \qquad \text{(III.4.1.1)}$$

avec $\Delta = \frac{1}{2}\ (F^T F - 1)$ (tenseur de déformation) (III.4.1.2)

Et $\Psi_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{ij}\ \partial \Delta_{k\ell}}$ pour $\Delta = o$

en plus, $\Psi_{ijk\ell} = \Psi_{ij\ell k} = \Psi_{jik\ell} = \Psi_{ji\ell k}$ (III.4.1.3)

Démonstration

En effet : $\frac{\partial \Phi}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{pq}}\ \frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}}$; $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$

et

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij} \partial F_{k\ell}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{pq} \partial \Delta_{rs}}\ \frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}}\ \frac{\partial \Delta_{rs}}{\partial F_{k\ell}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{pq}}\ \frac{\partial}{\partial F_{k\ell}}\ \left(\frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}} \right) \qquad \text{(III.4.1.4)}$$

(III.4.1.2) s'écrit :

$$F_{up}\ F_{uq} = \delta_{pq} + 2\ \Delta_{pq} \qquad \text{(III.4.1.5)}$$

En dérivant (III.4.1.5) par rapport à F_{ij} , on obtient :

$$\delta_{ui}\,\delta_{pj}\,F_{uq} + F_{up}\,\delta_{ui}\,\delta_{qj} = 2\,\frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}} \qquad \text{(III.4.1.6)}$$

Lorsque $F_{uq} = \delta_{uq}$, c'est-à-dire, lorsque CA ≡ CI
On a :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{pq}\,\partial \Delta_{rs}} = \Psi_{pqrs} \;,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{pq}} = \Pi_{pq} \qquad \text{(III.4.1.7)}$$

Et les composantes du tenseur des contraintes de Kirchoff s'identifie avec les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{pq}} = \sigma_{pq} \qquad \text{(III.4.1.8)}$$

qui est un tenseur symétrique.

Alors (III.4.1.6) devient :

$$\delta_{ui}\,\delta_{pj}\,\delta_{uq} + \delta_{up}\,\delta_{ui}\,\delta_{qj} = 2\,\frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}} \qquad \text{(III.4.1.9)}$$

mais $\qquad \delta_{ui}\,\delta_{uq} = \delta_{iq} \;,\quad \delta_{up}\,\delta_{ui} = \delta_{pi}$

par conséquent, on a :

$$\delta_{iq}\,\delta_{pj} + \delta_{pi}\,\delta_{qj} = 2\,\frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}} \qquad \text{(III.4.1.10)}$$

portons (III.4.1.10) dans (III.4.1.4) on obtient pour le premier terme de (III.4.1.4) en tenant compte de (III.4.1.7) :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{pq}\,\partial \Delta_{rs}}\;\frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}}\;\frac{\partial \Delta_{rs}}{\partial F_{k\ell}} =$$

$$\Psi_{pqrs}\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{iq}\,\delta_{pj} + \delta_{pi}\,\delta_{qj}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{ks}\,\delta_{r\ell} + \delta_{rk}\,\delta_{s\ell}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\,\Psi_{pqrs}\left(\delta_{iq}\,\delta_{pj}\,\delta_{ks}\delta_{r\ell} + \delta_{iq}\,\delta_{pj}\,\delta_{rk}\,\delta_{s\ell} + \delta_{pi}\,\delta_{qj}\,\delta_{ks}\,\delta_{r\ell} + \delta_{pi}\,\delta_{qj}\,\delta_{rk}\,\delta_{s\ell}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\Psi_{ji\ell k} + \Psi_{jik\ell} + \Psi_{ij\ell k} + \Psi_{ijk\ell}\right) \qquad \text{(III.4.1.11)}$$

puisque le tenseur de Green Δ est symétrique, alors la condition de symétrie (III.4.1.3) est évidente, par conséquent, le premier terme de (III.4.1.4) est égale à $\Psi_{ijk\ell}$

Dérivons (III.4.1.9) par rapport à $F_{k\ell} = \delta_{k\ell}$, on obtient pour le deuxième terme de (III.4.1.4), en tenant compte de (III.4.1.8)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{pq}} \quad \frac{\partial}{\partial F_{k\ell}} \left(\frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial F_{ij}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_{pq} \left(\delta_{ui} \delta_{pj} \delta_{uk} \delta_{q\ell} + \delta_{uk} \delta_{p\ell} \delta_{ui} \delta_{qj} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_{pq} \left(\delta_{ik} \delta_{pj} \delta_{q\ell} + \delta_{ki} \delta_{p\ell} \delta_{qj} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta_{ki} \sigma_{j\ell} + \delta_{ki} \sigma_{\ell j} \right) = \sigma_{\ell j} \delta_{ki}$$

Remarque

On a pour $\Psi_{ijk\ell}$ qui sont les modules d'élasticité 21 coefficients pour un corps tridimensionnel et 6 pour un corps bidimensionnel, nous allons construire le tenseur $\Phi_{ijk\ell}$ comme fonction du tenseur ε.

En général, le tenseur $\Phi_{ijk\ell}$ dans le cas de l'élasticité avec un état naturel anisotrope est de la forme suivante :

$$\Phi_{ijk\ell} = \begin{bmatrix} \Phi_{1111} & \Phi_{1112} & \Phi_{1121} & \Phi_{1122} \\ \Phi_{1211} & \Phi_{1212} & \Phi_{1221} & \Phi_{1222} \\ \Phi_{2111} & \Phi_{2112} & \Phi_{2121} & \Phi_{2122} \\ \Phi_{2211} & \Phi_{2212} & \Phi_{2221} & \Phi_{2222} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.4.1.12)}$$

III.4.2. Tenseur d'élasticité d'ordre quatre [9]

Du fait que CN est isotrope, alors, le potentiel $\Phi^0(\Gamma)$ est une fonction des invariants de P où :

$$P = \Gamma^T \Gamma = G^T (1 + 2\Delta) G \quad ; \quad \Gamma = \frac{\partial x}{\partial b}$$

proposition (III.4.2.1)

Supposons que G soit symétrique et choisissons des axes qui coïncident avec ses directions propres, alors :

$$\Psi_{1112} = \Psi_{1121} = 0 \quad , \quad \Psi_{2212} = \Psi_{2221} = 0$$

Démonstration

Le premier et deuxième invariant sont :

$$I_1 = P_{11} + P_{22} \qquad \text{ou} \qquad I_1 = P_{ii}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} P_{ij} P_{ij}$$

D'autre part, nous avons :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)}$$

En dérivant θ_{ij} par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right) \partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_\ell} \right)} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial a_\ell}$$

ou encore :

$$\dot{\theta}_{ij} = \Psi_{ijk\ell} \dot{F}_{k\ell}$$

Et pour trouver la matrice de passage Φ entre $\dot{\theta}$ et $\dot{F}$, nous identifions CA avec CI, ensuite, nous calculons la valeur de deuxième dérivées de Φ par rapport à Δ pour $\Delta = 0$
C'est-à-dire :

$$\Psi_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{ij} \partial \Delta_{k\ell}} \Big|_{\Delta_{ij} = 0}$$

En fait :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{ij}} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi^0}{\partial P_{hk}} \frac{\partial P_{hk}}{\partial \Delta_{ij}} \quad ; \; h = \text{dét} \frac{\partial a}{\partial b} \qquad \text{(III.4.2.1)}$$

Nous avons :

$$P_{ij} = G_{ip} \left(\delta_{pq} + 2 \Delta_{pq} \right) G_{qj}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \Delta_{hk}} = G_{ip} \; 2 \; \delta_{ph} \; \delta_{qk} \; G_{qj}$$

Alors :

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \Delta_{hk}} = 2\, G_{ih}\, G_{kj} \qquad \text{(III.4.2.2)}$$

En tenant compte de (III.4.2.2), (III.4.2.1) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{ij}} = \frac{2}{h}\, \frac{\partial \Phi^0}{\partial P_{hk}}\, G_{ih}\, G_{kj} \qquad \text{(III.4.2.3)}$$

où :

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial P_{hk}} = \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial I_1}\, \frac{\partial P_{ii}}{\partial P_{hk}} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial J_2}\, \frac{\partial J_2}{\partial P_{hk}} \right) \qquad \text{(III.4.2.4)}$$

avec

$$\frac{\partial P_{ii}}{\partial P_{hk}} = \delta_{ih}\, \delta_{ik} = \delta_{hk}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial P_{hk}} = 2\, \frac{1}{2}\, \frac{\partial P_{ij}}{\partial P_{hk}}\, P_{ij} = \delta_{ih}\, \delta_{jk}\, P_{ij} = P_{hk}$$

Alors, (III.4.2.4) devient :

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial P_{hk}} = \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial I_1}\, \delta_{hk} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial J_2}\, P_{hk} \right) \qquad \text{(III.4.2.5)}$$

(III.4.2.3) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{ij}} = \frac{2}{h}\, G_{ih}\, G_{kj} \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial I_1}\, \delta_{hk} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial J_2}\, P_{hk} \right)$$

Ceci conduit à :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{ij}\, \partial \Delta_{rs}} = \frac{\partial}{\partial \Delta_{rs}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{ij}} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_{ij}} \right)}{\partial P_{\ell m}}\, \frac{\partial P_{\ell m}}{\partial \Delta_{rs}}$$

$$= \frac{2}{h}\, G_{ih}\, G_{kj} \left[\frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial I_1^2}\, \frac{\partial P_{ii}}{\partial P_{\ell m}}\, \delta_{hk} + \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial I_1\, \partial J_2}\, \frac{\partial J_2}{\partial P_{\ell m}}\, \delta_{hk} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial J_2^2}\, \frac{\partial J_2}{\partial P_{\ell m}}\, P_{hk} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial J_2}\, \frac{\partial P_{hk}}{\partial P_{\ell m}} + \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial J_2\, \partial I_1}\, \frac{\partial P_{ii}}{\partial P_{\ell m}}\, P_{hk} \right] \frac{P_{\ell m}}{\partial \Delta_{rs}}$$

En tenant compte de (III.4.2.2), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Delta_{ij}\, \partial \Delta_{rs}} = \frac{4}{h}\, G_{ih}\, G_{kj}\, G_{\ell r}\, G_{sm} \left[\frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial I_1^2}\, \delta_{\ell m}\, \delta_{hk} + \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial I_1\, \partial J_2}\, P_{\ell m}\, \delta_{hk} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial J_2^2}\, P_{\ell m}\, P_{hk} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial J_2}\, \delta_{h\ell}\, \delta_{km} + \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial J_2\, \partial I_1}\, \delta_{\ell m}\, P_{hk} \right] \qquad \text{(III.4.2.6)}$$

-vérification pour :

$$\Psi_{1112} = o \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$i = 1\ ,\ j = 1\ ,\ r = 1\ ,\ s = 2$$

Et pour que $G_{ih}\ G_{kj}\ G_{\ell r}\ G_{sm} \neq o$ il faut que

$$h = 1\ ,\ k = 1\ ,\ \ell = 1\ ,\ m = 2$$

Alors que :

$\delta_{\ell m}\ \delta_{hk} = \delta_{12}\ \delta_{11} = o$ Pour 1er terme du paranthèse de (III.4.2.6)

$P_{\ell m}\ \delta_{hk} = P_{12}\ \delta_{11} = o$ " 2ème " "

$P_{\ell m}\ P_{hk} = P_{12}\ P_{11} = o$ " 3ème " "

$\delta_{h\ell}\ \delta_{km} = \delta_{11}\ \delta_{12} = o$ " 4ème " "

$\delta_{\ell m}\ P_{hk} = \delta_{12}\ P_{11} = o$ " 5ème " "

Donc, on a :

$g^{3}_{11}\ g_{22} = o$, et la quantité entre parenthèse dans (III.4.2.6) est nulle, par conséquent :

$$\Psi_{1112} = \Psi_{1211} = o\ ,\ \Psi_{1121} = \Psi_{2111} = o$$

Un raisonnement analogue conduit à :

$$\Psi_{1222} = \Psi_{2212} = o\ ,\ \Psi_{2122} = \Psi_{2221} = o$$

D'autre part, le tenseur σ est diagonal comme le tenseur G en raison de l'isotropie de CN.

Alors, on peut présenter la matrice $\Phi_{ijk\ell}$ par ses 6 éléments comme suit :

$$\Phi_{ijk\ell} = \begin{bmatrix} \Psi_1 + \sigma_1 & o & o & \Psi_4 \\ o & \Psi_3 + \sigma_2 & \Psi_3 & o \\ o & \Psi_3 & \Psi_3 + \sigma_1 & o \\ \Psi_4 & o & o & \Psi_2 + \sigma_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.4. 2.7)}$$

avec $\Psi_1 = \Psi_{1111}$ $\Psi_2 = \Psi_{2222}$ $\Psi_3 = \Psi_{1212}$ $\Psi_4 = \Psi_{1122}$

III.4.3. Equivalence des conditions de stabilité de Hadamard

Théorème (III.4.3.1) [9]

La condition nécéssaire (III.1.1) et la condition suffisante (III.2.1) sont équivalentes à l'ensemble des inégalités suivantes :

$$(\Psi_3+\Psi_4)^2 < (\Psi_1+\sigma_1)(\Psi_2+\sigma_2) + (\Psi_3+\sigma_1)(\Psi_3+\sigma_2) + 2\left[(\Psi_1+\sigma_1)(\Psi_2+\sigma_2)(\Psi_3+\sigma_1)(\Psi_3+\sigma_2)\right]^{1/2} \quad \text{(III.4.3.1)}$$

Et $\Psi_1+\sigma_1 > 0,\ \Psi_2+\sigma_2 > 0,\ \Psi_3+\sigma_1 > 0,\ \Psi_3+\sigma_2 > 0$ (III.4.3.2)

Démonstration

1 - Etude de la condition nécéssaire :

En tenant compte de (III.4.2.7), (III.1.1) s'exprime :

$$\left[(\Psi_1+\sigma_1)\beta_1^2 + (\Psi_3+\sigma_2)\beta_2^2\right]\alpha_1^2 + 2(\Psi_3+\Psi_4)\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \left[(\Psi_3+\sigma_1)\beta_1^2 + (\Psi_2+\sigma_2)\beta_2^2\right]\alpha_2^2 > 0 \quad \text{(III.4.3.3)}$$

Alors : une condition nécéssaire pour que (III.4.3.3) soit vérifiée quelque soient les vecteurs α_i , et β_i non nuls est que le discriminant de (III.4.3.3) soit négatif, en plus on a nécéssairement :

$$\Psi_1+\sigma_1 > 0\ ,\ \Psi_2+\sigma_2 > 0\ ,\ \Psi_3+\sigma_1 > 0\ ,\ \Psi_3+\sigma_2 > 0$$

Alors, (III.4.3.3) équivalente à l'inégalité suivante :

$$(\Psi_3+\Psi_4)^2\beta_1^2\beta_2^2 - \left[(\Psi_1+\sigma_1)\beta_1^2 + (\Psi_3+\sigma_2)\beta_2^2\right] \times \left[(\Psi_3+\sigma_1)\beta_1^2 + (\Psi_2+\sigma_2)\beta_2^2\right] < 0$$

ou encore :

$$(\Psi_1+\sigma_1)(\Psi_3+\sigma_1)\beta_1^4 + \left[-(\Psi_3+\Psi_4)^2 + (\Psi_1+\sigma_1)(\Psi_2+\sigma_2) + (\Psi_3+\sigma_1)(\Psi_3+\sigma_2)\right]\beta_1^2\beta_2^2 + (\Psi_3+\sigma_2)(\Psi_2+\sigma_2)\beta_2^4 > 0$$

En écrivant, $\beta_1^2 = Z_1$, $\beta_2^2 = Z_2$, l'inégalité précédente s'écrit :

$$T_r = A Z_1^2 - B Z_1 Z_2 + C Z_2^2 > 0 \quad \forall Z_1 , Z_2 > 0 \qquad \text{(III.4.3.4)}$$

où :

$$A = (\Psi_1 + \sigma_1)(\Psi_3 + \sigma_1) > 0$$

$$B = [(\Psi_3 + \Psi_4)^2 - (\Psi_1 + \sigma_1)(\Psi_2 + \sigma_2) - (\Psi_3 + \sigma_1)(\Psi_3 + \sigma_2)]$$

$$C = (\Psi_3 + \sigma_2)(\Psi_2 + \sigma_2) > 0$$

pour que (III.4.3.4) soit vérifiée et comme $A > 0$ et $C > 0$, alors, il faut que :

$$B^2 - 4AC < 0$$

En fait, on distingue deux cas $B > 0$ et $B \leq 0$

<u>1e cas</u> : $B > 0$, $A > 0$, $C > 0$
$B^2 - 4AC < 0$. Ce qui implique que $B < 2(AC)^{\frac{1}{2}}$ qui est la condition (III.4.3.1).

<u>2e cas</u> : $B \leq 0$, $A > 0$, $C > 0$
Dans ce cas, on voit tout de suite sur (III.4.3.4) que $Tr > 0$.
On aboutit donc dans tous les cas à (III.4.3.1).

2 - <u>Etude de la condition suffisante de stabilité de Hadamard</u>

En tenant compte de (III.4.2.7), la condition (III.2.1) s'exprime

$$H = [(\Psi_1 + \sigma_1) X_{11}^2 + (2\Psi_4 + K) X_{11} X_{22} + (\Psi_2 + \sigma_2) X_{22}^2] +$$

$$[(\Psi_3 + \sigma_2) X_{12}^2 + (2\Psi_3 - K) X_{12} X_{21} + (\Psi_3 + \sigma_1) X_{21}^2] > 0$$

Alors, H est la somme de deux formes quadratiques, pour que H soit positive, il faut que chaque forme soit définie positive, autrement dit, $H > 0$ équivalent aux inégalités suivantes :

$$(2\Psi_4 + K)^2 - 4(\Psi_1 + \sigma_1)(\Psi_2 + \sigma_2) < 0 \text{ et } (\Psi_1 + \sigma_1) > 0, (\Psi_2 + \sigma_2) > 0$$

et

$$(2\Psi_3 - K)^2 - 4(\Psi_3 + \sigma_2)(\Psi_3 + \sigma_1) < 0 \text{ et } (\Psi_3 + \sigma_2) > 0, (\Psi_3 + \sigma_1) > 0$$

ou encore :

$$\left(\Psi_4 + \frac{K}{2}\right)^2 < (\Psi_1 + \sigma_1)(\Psi_2 + \sigma_2)$$

$$\left(\Psi_3 - \frac{K}{2}\right)^2 < (\Psi_3 + \sigma_1)(\Psi_3 + \sigma_2)$$

ou encore :

$$-a < \Psi_4 + \frac{K}{2} < +a \quad \text{où} \quad a = [(\Psi_1 + \sigma_1)(\Psi_2 + \sigma_2)]^{\frac{1}{2}} > 0 \qquad \text{(III.4.3.5)}$$

$$-b < \Psi_3 - \frac{K}{2} < +b \quad \text{où} \quad b = [(\Psi_3 + \sigma_1)(\Psi_3 + \sigma_2)]^{\frac{1}{2}} > 0 \qquad \text{(III.4.3.6)}$$

(III.4.3.5) et (III.4.3.6) peuvent s'écrire :

$$-a - \Psi_4 < \frac{K}{2} < a - \Psi_4 \qquad \text{(III.4.3.7)}$$

$$-b + \Psi_3 < \frac{K}{2} < b + \Psi_3 \qquad \text{(III.4.3.8)}$$

Pour que les inégalités (III.4.3.7) et (III.4.3.8) puissent être vérifiées simultanément pour au moins une valeur de K, il faut et il suffit que l'on ait :

$$-a - \Psi_4 < b + \Psi_3 \quad , \quad a - \Psi_4 > -b + \Psi_3$$

soit $\quad -(a + b) < \Psi_3 + \Psi_4 < (a + b)$

soit $\quad (\Psi_3 + \Psi_4)^2 < (a + b)^2$

c'est-à-dire

$$(\Psi_3 + \Psi_4)^2 < a^2 + b^2 + 2(ab)^{\frac{1}{2}}$$

on retrouve bien la condition (III.4.3.1), d'où l'équivalence des conditions de stabilité (III.1.1), (III.2.1).

Remarque

Pour des solides élastiques tridimensionnel homogénes et isotropiques à partir d'un état initial sans contraintes avec $K_{ij} = K\delta_{ij}$, les conditions (III.1.1) et (III.2.1) peuvent être réduites à :

$$\lambda + 2\mu > 0 \quad , \quad \mu > 0$$

C'est pourquoi, ces conditions sont équivalentes [52] .

III.5. Etude des conditions de stabilité de Hadamard dans le cas où la configuration naturelle s'identifie avec la configuration initiale

Nous savons que le potentiel élastique $\Phi = \Phi\ (I, J)$ où I et J sont le premier et deuxième invariants [9]

$$I = F_{uv}\ F_{uv}$$
$$J = F_{pr}\ F_{qr}\ F_{ps}\ F_{qs}$$

$$\frac{\partial I}{\partial F_{ij}} = \delta_{ui}\ \delta_{vj}\ F_{uv} + F_{uv}\ \delta_{ui}\ \delta_{vj} = F_{ij} + F_{ij}$$

Alors $$\frac{\partial I}{\partial F_{ij}} = 2\,F_{ij} \qquad \text{(III.5.1)}$$

Calculons, maintenant $\dfrac{\partial J}{\partial F_{ij}}$

$$\frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = \delta_{pi}\ \delta_{rj}\ F_{qr}\ F_{ps}\ F_{qs} + F_{pr}\ \delta_{qi}\ \delta_{rj}\ F_{ps}\ F_{qs}$$
$$+ F_{pr}\ F_{qr}\ \delta_{pi}\ \delta_{sj}\ F_{qs} + F_{pr}\ F_{qr}\ F_{ps}\ \delta_{qi}\ \delta_{sj}$$
$$= F_{qj}\ F_{is}\ F_{qs} + F_{pj}\ F_{ps}\ F_{is} + F_{ir}\ F_{qr}\ F_{qj} + F_{pr}\ F_{ir}\ F_{pj}$$
$$= 2\,(\,F_{qj}\ F_{is}\ F_{qs} + F_{pj}\ F_{ps}\ F_{is}\,)$$
$$= 2\,F_{is}\,(\,F_{qj}\ F_{qs} + F_{pj}\ F_{ps}\,)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = 4\,F_{in}\ F_{mj}\ F_{mn} \qquad \text{(III.5.2)}$$

En effet :

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial \Phi\ (I,J)}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial I}\ \frac{\partial I}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial \Phi}{\partial J}\ \frac{\partial J}{\partial F_{ij}}$$

En tenant compte de (III.5.1) et (III.5.2), on obtient :

$$\Phi_{ij} = 2\ \frac{\partial \Phi}{\partial I}\ F_{ij} + 4\ \frac{\partial \Phi}{\partial J}\ F_{in}\ F_{mj}\ F_{mn} \qquad \text{(III.5.3)}$$

pour trouver $\Phi_{ijk\ell}$, on dérive (III.5.3) par rapport à $F_{k\ell}$ et en tenant compte de (III.5.1) et (III.5.2) on obtient :

$$\Phi_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ij}\ \partial F_{k\ell}}$$

$$= 4\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I^2}\ F_{k\ell}\ F_{ij} + 8\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I\ \partial J}\ F_{kn}\ F_{m\ell}\ F_{mn}\ F_{ij} + 2\ \frac{\partial \Phi}{\partial I}\ \delta_{ik}\ \delta_{j\ell}$$

$$+ 8\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J\ \partial I}\ F_{k\ell}\ F_{in}\ F_{mj}\ F_{mn} + 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}\ F_{kq}\ F_{p\ell}\ F_{pq}\ F_{in}\ F_{mj}\ F_{mn}$$

$$+ 4\ \frac{\partial \Phi}{\partial J}\ (\delta_{ik}\ \delta_{n\ell}\ F_{mj}\ F_{mn} + F_{in}\ \delta_{mk}\ \delta_{j\ell} F_{mn} + F_{in}\ F_{mj}\ \delta_{mk}\ \delta_{n\ell})$$

Finalement, on obtient :

$$\Phi_{ijk\ell} = 2\ \frac{\partial \Phi}{\partial I}\ \delta_{ik}\ \delta_{j\ell} + 4\ \frac{\partial \Phi}{\partial J}\ (F_{mj}\ F_{m\ell}\ \delta_{ik} + F_{in}\ F_{kn}\ \delta_{j\ell} + F_{i\ell}\ F_{kj})$$
$$+ 4\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I^2}\ F_{k\ell}\ F_{ij} + 8\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I\ \partial J}\ (F_{kn}\ F_{m\ell}\ F_{mn} F_{ij} + F_{k\ell}\ F_{in} F_{mj} F_{mn})$$
$$+ 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}\ F_{kq}\ F_{p\ell}\ F_{pq}\ F_{in}\ F_{mj}\ F_{mn} \qquad \text{(III.5.4)}$$

par un changement de configuration de référence suivi d'un changement de repère, on peut se ramener au cas où F_{ij} est diagonal, en donnant aux i,j,k, ℓ les valeurs 1 et 2, on déduit les composantes du tenseur $\Phi_{ijk\ell}$:

$$\Psi_1 = \Phi_{1111} = 2\ \frac{\partial \Phi}{\partial I} + (12\ \frac{\partial \Phi}{\partial J} + 4\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I^2})\ F_{11}^2 + 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I\ \partial J}\ F_{11}^4 + 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}\ F_{11}^6$$

$$\Psi_2 = \Phi_{2222} = 2\ \frac{\partial \Phi}{\partial I} + (12\ \frac{\partial \Phi}{\partial J} + 4\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I^2})\ F_{22}^2 + 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I \partial J}\ F_{22}^4 + 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}\ F_{22}^6$$

$$\Psi_3 = \Phi_{1122} = \Phi_{2211} = 4\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I^2}\ F_{22}\ F_{11} + 8\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I\ \partial J}\ (F_{22}^3\ F_{11} + F_{22}\ F_{11}^3)$$
$$+ 16\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}\ F_{22}^3\ F_{11}^3$$

$$\Psi_4 = \Phi_{1212} = 2\frac{\partial\Phi}{\partial I} + 4\frac{\partial\Phi}{\partial J}\left(F_{22}^2 + F_{11}^2\right)$$

$$\Psi_5 = \Phi_{2121} = 2\frac{\partial\Phi}{\partial I} + 4\frac{\partial\Phi}{\partial I}\left(F_{11}^2 + F_{22}^2\right)$$

$$\Psi_6 = \Phi_{1221} = \Phi_{2112} = F_{11}\ F_{22}$$

pour les autres termes ils sont nuls, c'est-à-dire que :

$$\Phi_{1112} = \Phi_{1211} = 0\ ,\ \Phi_{1121} = \Phi_{2111} = 0$$

$$\Phi_{1222} = \Phi_{2212} = 0\ ,\ \Phi_{2122} = \Phi_{2221} = 0$$

Finalement, le tenseur $\Phi_{ijk\ell}$ d'ordre quatre prend la forme suivante :

$$\Phi_{ijk\ell} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 \\ 0 & \Psi_4 & \Psi_6 & 0 \\ 0 & \Psi_6 & \Psi_5 & 0 \\ \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.5.5)}$$

Donc, le tenseur $\Phi_{ijk\ell}$ a la même forme du tenseur $\Phi_{ijk\ell}$ considéré au (III.4.2.7), par conséquent, une démonstration analogue à celle de la proposition (III.4.3.1) nous amène à l'équivalence de (III.1.1) et (III.2.1).

III.6. Cas d'un milieu hyperélastique bidimensionnel particulier

III.6.1. Tenseur d'élasticité d'ordre quatre

On va considérer le tenseur des déformations gauche :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\Gamma\Gamma^T - 1\right) \qquad \text{(III.6.1.1)}$$

La relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy τ et le tenseur des déformations ε est supposé :

$$\tau = \lambda\ (Tr\ \varepsilon)\ \mathbb{1} + 2\ \lambda\ \varepsilon \qquad \text{(III.6.1.2)}$$

La condition $\lambda = \mu$ assure l'hyperélasticité.
Dans le cas où le tenseur G est diagonal avec e_1 , e_2 les termes principaux.

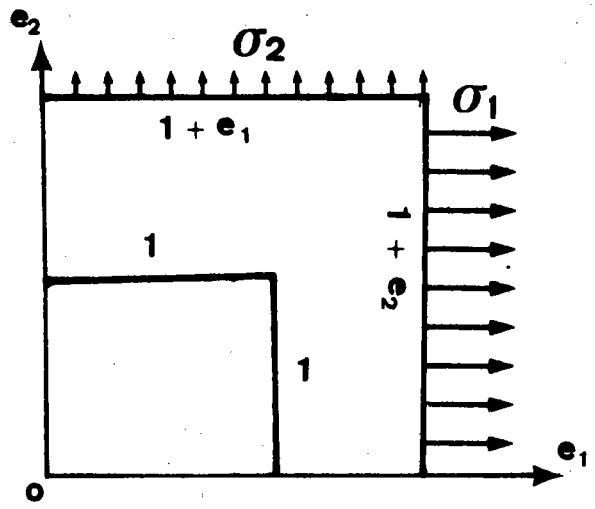


fig (III.6.1.1)

Le travail exercé sur un élément ayant la surface unité dans CI est :

$$dw = \sigma_1 (1 + e_2)\, de_1 + \sigma_2 (1 + e_1)\, de_2$$

Mais $\sigma_1 = \lambda (3\epsilon_1 + \epsilon_2)$, $\sigma_2 = \lambda (\epsilon_1 + 3\epsilon_2)$

Donc $dw = \lambda (3\epsilon_1 + \epsilon_2)(1 + e_2)\, de_1 + \lambda (\epsilon_1 + 3\epsilon_2)(1 + e_1)\, de_2$

dw est une différentielle exacte car :

$$dw = w_1\, de_1 + w_2\, de_2$$

où

$$w_1 = \lambda (3\epsilon_1 + \epsilon_2)(1 + e_2),\ w_2 = \lambda (\epsilon_1 + 3\epsilon_2)(1 + e_2)$$

$$\frac{dw_1}{de_1} = \frac{dw_2}{de_2} = 0$$

Alors :

$$\epsilon_1 = e_1 + \frac{e_1^2}{2}$$

$$\epsilon_2 = e_2 + \frac{e_2^2}{2}$$

Les déformations peuvent être finies, les déformations principales e_1 , e_2 doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$1 + e_1 > 0 \quad , \quad 1 + e_2 > 0$$

par conséquent :

les valeurs principales ϵ_1 et ϵ_2 de ϵ doivent aussi vérifié :

$$1 + 2\epsilon_1 > 0 \quad , \quad 1 + 2\epsilon_2 > 0$$

remarquons que :

$$1 + 2\epsilon_1 = 1 + 2e_1 + e_1^2 = (1 + e_1)^2 > 0$$

calcul de $\dot{\epsilon}$

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\Gamma\Gamma^T - 1)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} (\dot{\Gamma}\Gamma^T + \Gamma\dot{\Gamma}^T) \qquad \text{(III.6.1.3)}$$

$$\dot{\Gamma} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial b} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial b} = \dot{F}G$$

ou encore à partir de $\Gamma = F.G$, on obtient :

$$\dot{\Gamma} = \dot{F}G + \dot{G}F$$

En identifiant CA avec CI alors :

$$F = \mathbb{1} \implies F^T = \mathbb{1} \qquad \text{(III.6.1.4)}$$

puisque, le tenseur G est constant (C N est isotrope) ; $\dot{G} = 0$ par conséquent :

$$\dot{\Gamma} = \dot{F}G \implies \dot{\Gamma}^T = G^T \dot{F}^T \qquad \text{(III.6.1.5)}$$

En plus, le tenseur ϵ devient dans ce cas :

$$\epsilon = \frac{1}{2} (FG\,G^T F^T - 1) = \frac{1}{2} (G\,G^T - 1) \qquad \text{(III.6.1.6)}$$

En portant (III.6.1.5) dans (III.6.1.3), et tenant compte de (III.6.1.4) on obtient :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} (\dot{F}\,G\,G^T + G\,G^T \dot{F}^T)$$

De (III.6.1.6), $\dot{\varepsilon}$ devient :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\dot{F} + \dot{F}^T) + \dot{F}\varepsilon + \varepsilon \dot{F}^T \qquad \text{(III.6.1.7)}$$

Calcul de $\dot{\theta}$

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)} \qquad \text{(III.6.1.4)}$$

Alors, le travail fourni à un élément de volume unité dans CI est :

$$\theta_{ij} \dot{F}_{ij} = \text{dét} \frac{\partial x}{\partial a} \sigma_{k\ell} \dot{\varepsilon}_{k\ell}$$

où

$\sigma \dot{\varepsilon}$ est le travail recu par un élément de volume unité dans CA, autrement dit ;

$$\theta_{ij} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial a_j} = \text{dét } F \; \sigma_{k\ell} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \dot{x}_\ell}{\partial x_k} \right)$$

ou encore :

$$\theta_{ij} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} = (\text{dét } F) \; \sigma_{k\ell} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \dot{x}_\ell}{\partial x_k} \right)$$

$$= (\text{dét } F) \; \sigma_{k\ell} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_m} \delta_{ik} \delta_{\ell m} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_m} \delta_{i\ell} \delta_{km} \right)$$

$$\upsilon_{ij} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} = (\text{dét } F) \; \sigma_{k\ell} \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell} \delta_{km} \right)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\theta}_{ij} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} + \theta_{ij} \frac{\partial \dot{x}_m}{\partial a_j} = \overline{(\text{dét } F)} \; \sigma_{k\ell} \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell} \delta_{km})$$

$$+ (\text{dét } F) \; \dot{\sigma}_{k\ell} \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell} \delta_{km})$$

Si $F_{ij} = \delta_{ij} \Longrightarrow \theta_{ij} = \sigma_{ij}$ et dét F = 1

Alors, on obtient :

$$\dot{\theta}_{ij}\ \delta_{mj} + \sigma_{ij}\ \dot{F}_{mj} = (\mathrm{tr}\ \dot{F})\ \sigma_{k\ell}\ \frac{1}{2}\ (\delta_{ik}\ \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell}\ \delta_{km}) + \dot{\sigma}_{k\ell}\ \frac{1}{2}\ (\delta_{ik}\ \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell}\ \delta_{km})$$

$$\dot{\theta}_{im} + \sigma_{ij}\ \dot{F}^{T}_{jm} = (\mathrm{tr}\ \dot{F})\ \sigma_{im} + \dot{\sigma}_{im}$$

Finalement, on obtient :

$$\dot{\theta}_{im} = \dot{\sigma}_{im} - \sigma_{ij}\ \dot{F}^{T}_{jm} + (\mathrm{tr}\ \dot{F})\ \sigma_{im}$$

ou encore :

$$\dot{\theta} = \dot{\sigma} - \sigma\ \dot{F}^{T} + (\mathrm{tr}\ \dot{F})\ \sigma \qquad \text{(III.6.1.8)}$$

D'autre part, en dérivant (III.6.1.4) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\theta}_{ij}\ \Phi_{ijk\ell}\ \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial a_\ell} \quad ; \quad \Phi_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)\ \partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_\ell}\right)}$$

ou :

$$\dot{\theta}_{ij} = \Phi_{ijk\ell}\ \dot{F}_{k\ell} \quad ; \quad \dot{F}_{k\ell} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial a_\ell} \qquad \text{(III.6.1.9)}$$

En choisissant les directions principales du tenseur ε comme, les axes de coordonnées, on obtient finalement le tenseur d'élasticité.

Dérivons (III.6.1.2) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\sigma} = \lambda\ \mathrm{tr}\ \dot{\varepsilon}\ \mathbb{1} + 2\lambda\ \dot{\varepsilon} \qquad \text{(III.6.1.10)}$$

(III.6.1.8) s'écrit :

$$\dot{\theta}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\ \dot{F}_{jk} + \dot{F}_{kk}\ \sigma_{ij} \qquad \text{(III. 6.1.11)}$$

En tenant compte de (III.6.1.2) et (III.6.1.10), (III.6.11) s'écrit :

$$\dot{\theta}_{ij} = \lambda\ \dot{\varepsilon}_{kk}\ \delta_{ij} + 2\lambda\ \dot{\varepsilon}_{ij} - (\lambda\ \varepsilon_{rr}\ \delta_{ik} + 2\lambda\ \varepsilon_{ik})\ \dot{F}_{jk} + \dot{F}_{kk}\ (\lambda\ \varepsilon_{rr}\ \delta_{ij} + 2\lambda\ \varepsilon_{ij})$$

ou encore :

$$\dot{\theta}_{ij} = \lambda \left(\dot{F}_{kk} + \dot{F}_{kp}\ \varepsilon_{pk} + \varepsilon_{kq}\ \dot{F}_{kq} \right) \delta_{ij}$$

$$+ 2\lambda \left[\frac{1}{2} \left(\dot{F}_{ij} + \dot{F}_{ji} \right) + \dot{F}_{ip}\ \varepsilon_{pj} + \varepsilon_{iq}\ \dot{F}_{jq} \right]$$

$$- \left(\lambda\ \varepsilon_{rr}\ \delta_{ik} + 2\lambda\ \varepsilon_{ik} \right) \dot{F}_{jk} + \dot{F}_{kk} \left(\lambda\ \varepsilon_{rr}\ \delta_{ij} + 2\lambda \varepsilon_{ij} \right)$$

En tenant compte de (III.6.1.9), on obtient :

$$\dot{\theta}_{ij} = \lambda \Big\{ \left(\delta_{k\ell}\ \dot{F}_{k\ell} + \dot{F}_{k\ell}\ \varepsilon_{\ell k} + \varepsilon_{k\ell} \dot{F}_{k\ell} \right) \delta_{ij} + 2 \Big[\frac{1}{2} \left(\delta_{ik}\ \delta_{j\ell}\ \dot{F}_{k\ell} + \delta_{jk}\ \delta_{i\ell} \dot{F}_{k\ell} \right)$$

$$+ \dot{F}_{k\ell}\ \delta_{ki}\ \varepsilon_{\ell j} + \varepsilon_{i\ell}\ \delta_{jk}\ \dot{F}_{k\ell} \Big] - \left(\varepsilon_{rr}\ \delta_{i\ell}\ \delta_{jk} + 2\varepsilon_{i\ell}\ \delta_{jk} \right) \dot{F}_{k\ell}$$

$$+ \delta_{k\ell} \dot{F}_{k\ell} \left(\varepsilon_{rr}\ \delta_{ij} + 2\ \varepsilon_{ij} \right) \Big\} = \Phi_{ijk\ell}\ \dot{F}_{k\ell}$$

Finalement, on obtient :

$$\Phi_{ijk\ell} = \lambda \Big\{ \left(\delta_{k\ell} + \varepsilon_{\ell k} + \varepsilon_{k\ell} \right) \delta_{ij} + 2 \Big[\frac{1}{2} \left(\delta_{ik}\ \delta_{j\ell} + \delta_{jk}\ \delta_{i\ell} \right)$$

$$+ \delta_{ki}\ \varepsilon_{\ell j} + \varepsilon_{i\ell}\ \delta_{jk} \Big] - \left(\varepsilon_{rr}\ \delta_{i\ell}\ \delta_{jk} + 2\ \varepsilon_{i\ell}\ \delta_{jk} \right) + \delta_{k\ell} \left(\varepsilon_{rr}\ \delta_{ij} + 2\ \varepsilon_{ij} \right) \Big\}$$

Ceci nous permet de calculer toutes les composantes, et l'on obtient :

$$\Phi_{ijk\ell} = \lambda \begin{bmatrix} 3\ (1 + 2\ \varepsilon_1) & 0 & 0 & 1 + 3\ \varepsilon_1 + 3\ \varepsilon_2 \\ 0 & 1 + 2\ \varepsilon_2 & 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 1 + 2\ \varepsilon_1 & 0 \\ 1 + 3\ \varepsilon_1 + 3\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 3\ (1 + 2\ \varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

(III.6.1.12)

Comparons (III.6.1.12) avec (III.4.2.7), on obtient que :

$$\begin{cases} \Psi_1 + \sigma_1 = 3\,(1 + 2\,\varepsilon_1) > 0 \\ \Psi_2 + \sigma_2 = 3\,(1 + 2\,\varepsilon_2) > 0 \\ \Psi_3 + \sigma_1 = 1 + 2\,\varepsilon_1 > 0 \\ \Psi_3 + \sigma_2 = 1 + 2\,\varepsilon_2 > 0 \\ \psi_3 = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \psi_4 = 1 + 3\,\varepsilon_1 + 3\,\varepsilon_2 \end{cases} \qquad \text{(III.6.1.13)}$$

Remplaçons (III.6.1.13) dans (III.4.3.1), nous obtenons la condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$\left[(2 + 2\,\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2)^2 - 9\,(1 + 2\,\varepsilon_1)\,(1 + 2\,\varepsilon_2) - (1 + 2\,\varepsilon_1)\,(1 + 2\,\varepsilon_2) \right]^2$$

$$< 36\,(1 + 2\,\varepsilon_1)^2\,(1 + 2\,\varepsilon_2)^2 \qquad \text{(III.6.1.14)}$$

En plus de (III.6.1.13), on remarque que (III.4.3.2) est vérifiée.

Posons :

$$L_1 = 1 + 2\,\varepsilon_1 > 0$$
$$L_2 = 1 + 2\,\varepsilon_2 > 0$$

(III.6.1.14) s'écrit :

$$\left[(L_1 + L_2)^2 - 10\,L_1\,L_2 \right]^2 < 36\,L_1^2\,L_2^2$$

ou encore :

$$-6\,L_1\,L_2 < (L_1 + L_2)^2 - 10\,L_1\,L_2 < 6\,L_1\,L_2$$

Si $(L_1 + L_2)^2 - 10\,L_1 L_2 < 6\,L_1 L_2$ Ce qui implique que :

$$L_1^2 - 14\,L_1\,L_2 + L_2^2 < 0$$

qui détermine la région de stabilité (voir Fig (III.6.4.3) ci-après).

Si $-6L_1 L_2 < (L_1 + L_2)^2 - 10 L_1 L_2 \Longrightarrow (L_1 - L_2)^2 > 0$

Cette inégalité est alors toujours vérifiée quelque soient L_1 et L_2 c'est-à-dire quelque soient ϵ_1 , ϵ_2

III.6.2. La condition nécéssaire de stabilité de Hadamard

En tenant compte de la matrice (III.6.1.12), la condition (III.1.1) s'exprime :

$$[3(1+2\epsilon_1)\beta_1^2 + (1+2\epsilon_2)\beta_2^2]\alpha_1^2 + 4(1+\epsilon_1+\epsilon_2)\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2$$

$$+ [(1+2\epsilon_1)\beta_1^2 + 3(1+2\epsilon_2)\beta_2^2]\alpha_2^2 > 0$$

puisque $1 + 2\epsilon_1 > 0$ et $1 + 2\epsilon_2 > 0$, l'inégalité précédente équivalente à

$$3(1+2\epsilon_1)^2\beta_1^4 + 2[5(1+2\epsilon_1)(1+2\epsilon_2) - 2(1+\epsilon_1+\epsilon_2)^2]\beta_1^2\beta_2^2$$
$$+ 3(1+2\epsilon_2)^2\beta_2^4 > 0 \quad \text{(le discriminant est négatif)}$$

En écrivant $\beta_1^2 = Z_1$, $\beta_2^2 = Z_2$, l'inégalité devient :

$$AZ_1^2 + 2BZ_1Z_2 + CZ_2^2 > 0 \qquad \text{(III.6.2.1)}$$

où: $A = 3(1+2\epsilon_1)^2 > 0$

$B = 5(1+2\epsilon_1)(1+2\epsilon_2) - 2(1+\epsilon_1+\epsilon_2)^2$

$C = 3(1+2\epsilon_2)^2 > 0$

L'inégalité (III.6.2.1) sera vérifiée :

1 - Lorsque $D = AC - B^2 > 0$

2 - Lorsque $D \leq 0$ et $B > 0$

Si l'on pose que :

$$1 + 2\ \varepsilon_1 = L_1 \quad , \quad 1 + 2\ \varepsilon_2 = L_2$$

Alors, on obtient :

$$B = -\frac{1}{2}\left(L_1^2 - 8 L_1 L_2 + L_2^2 \right)$$

$$D = -\frac{1}{16}\left(L_1 - L_2 \right)^2 \left(L_1^2 - 14 L_1 L_2 + L_2^2 \right)$$

Finalement, la condition nécéssaire de stabilité se réduit à l'inégalité suivante :

$$L_1^2 - 14 L_1 L_2 + L_2^2 < 0 \qquad \text{(III.6.2.2)}$$

Dans la figure ci-dessous, on peut voir la région de stabilité

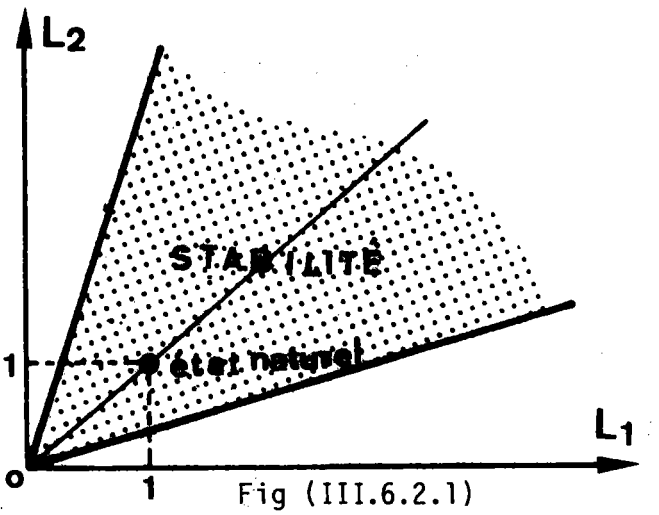


Fig (III.6.2.1)

III.6.3 La condition suffisante de stabilité de Hadamard

Revenons à la condition (III.2.1), en tenant compte de la matrice (III.6.1.12), on a :

$$H = 3\ (1 + 2\varepsilon_1)\ X_{11}^2 + 2\ (1 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + \frac{K}{2})\ X_{11}\ X_{22} + 3\ (1 + 2\varepsilon_2)\ X_{22}^2$$

$$+ \ (1 + 2\varepsilon_1)\ X_{12}^2 + 2\ (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{K}{2})\ X_{12}\ X_{21} + (1 + 2\varepsilon_1)\ X_{21}^2$$

H est la somme de deux fonctions quadratiques, la première dépend de X_{11} et X_{22}, la deuxième dépend de X_{12} et X_{21}, on doit obtenir :

$$9\,(1 + 2\,\varepsilon_1)\,(1 + 2\,\varepsilon_2) - \left(1 + 3\,\varepsilon_1 + 3\,\varepsilon_2 + \frac{K}{2}\right)^2 > 0 \qquad \text{(III.6.3.1)}$$

et

$$(1 + 2\,\varepsilon_1)\,(1 + 2\,\varepsilon_2) - \left(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{K}{2}\right)^2 > 0 \qquad \text{(III.6.3.2)}$$

Ceci pour une valeur de K au moins. (III.6.3.1) peut s'écrire :

$\gamma_1 < K < \gamma_1'$ où :

$$\gamma_1 = -1 - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 3\,[(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_1' = -1 - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 3\,[(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}}$$

(III.6.3.2) peut aussi s'écrire $\gamma_2 < K < \gamma_2'$ où :

$$\gamma_2 = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - [(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_2' = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + [(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}}$$

Il sera possible de calculer K en considérant $\gamma_2 < \gamma_1'$ et $\gamma_1 < \gamma_2'$

L'ensemble des valeurs de K est l'intervalle :

$$\left[1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - [(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left. -1 - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 3\,[(1 + 2\varepsilon_1)\,(1 + 2\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}}\right]$$

L'inégalité $\gamma_2 < \gamma_1'$ est équivalente à

$$L_1^2 - 14 L_1 L_2 + L_2^2 < 0 \qquad \text{même inégalité (III.6.2.2)}$$

et l'inégalité $\gamma_1 < \gamma_2'$ est toujours vérifiée.
Par conséquent, les deux conditions (III.1.1) et (III.2.1) sont identiques.

III.6.4. Stabilité d'un corps élastique homogène soumis à des vecteurs contraintes Lagrangiens constants

Nous allons comparer les conditions (III.1.1) et (III.2.1) avec la condition de stabilité suivante :

$\Phi_{ijk\ell} X_{ij} X_{k\ell} > 0$ qui exprime la stabilité d'un corps homogène dont la frontière est soumise à des vecteurs contraintes Lagrangiens constants. En tenant compte de (III.6.1.12), la condition précédente s'écrit :

$$3 (1 + 2\varepsilon_1) X_{11}^2 + 2 (1 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2) X_{11} X_{22} + 3 (1 + 2\varepsilon_2) X_{22}^2$$

$$+ (1 + 2\varepsilon_2) X_{12}^2 + 2 (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) X_{12} X_{21} + (1 + 2\varepsilon_1) X_{21}^2 > 0$$

Pour que ceci soit vrai, il faut que :

$$9 (1 + 2\varepsilon_1) (1 + 2\varepsilon_2) - (1 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)^2 > 0 \qquad \text{(III.6.4.1)}$$

$$(1 + 2\varepsilon_1) (1 + 2\varepsilon_2) - (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 > 0 \qquad \text{(III.6.4.2)}$$

(III.6.4.1) peut s'écrire :

$$f_1 = - 9 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 12 \varepsilon_1 + 12 \varepsilon_2 + 8 > 0$$

Cette inégalité est vérifiée lorsque $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ est à l'intérieur d'un parabole, ayant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ comme axes :

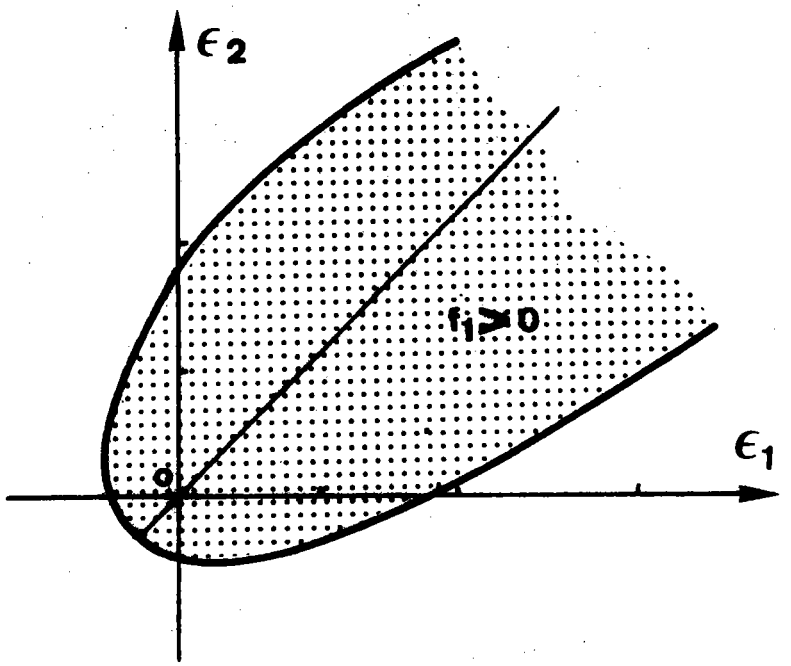


fig (III.6.4.1)

(III.6.4.2) peut s'écrire :

$$f_2 = -(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4\,\epsilon_1 + 4\,\epsilon_2 > 0$$

$f_2 > 0$, lorsque ϵ_1 , ϵ_2 est à l'intérieur d'un parabole ayant $\epsilon_1 = \epsilon_2$ comme axes et passant par l'origine

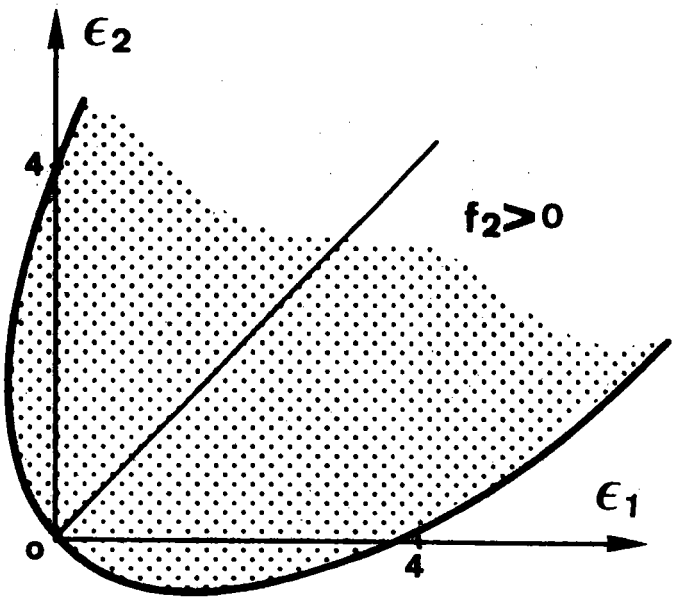


fig (III.6.4.2)

on peut montrer que les deux points d'intersection des paraboles vérifient la condition :

$$L_1^2 - 14\, L_1\, L_2 + L_2^2 = 0$$

La région intérieur de deux paraboles est une région vérifiant l'inégalité suivante :

$$L_1^2 - 14\, L_1\, L_2 + L_2^2 < 0$$

En fait, la région de stabilité est la région où $f_1 > o$ et $f_2 > o$ qui se trouve dans la partie hachurée de fig (III.6.4.3) ci-dessous :

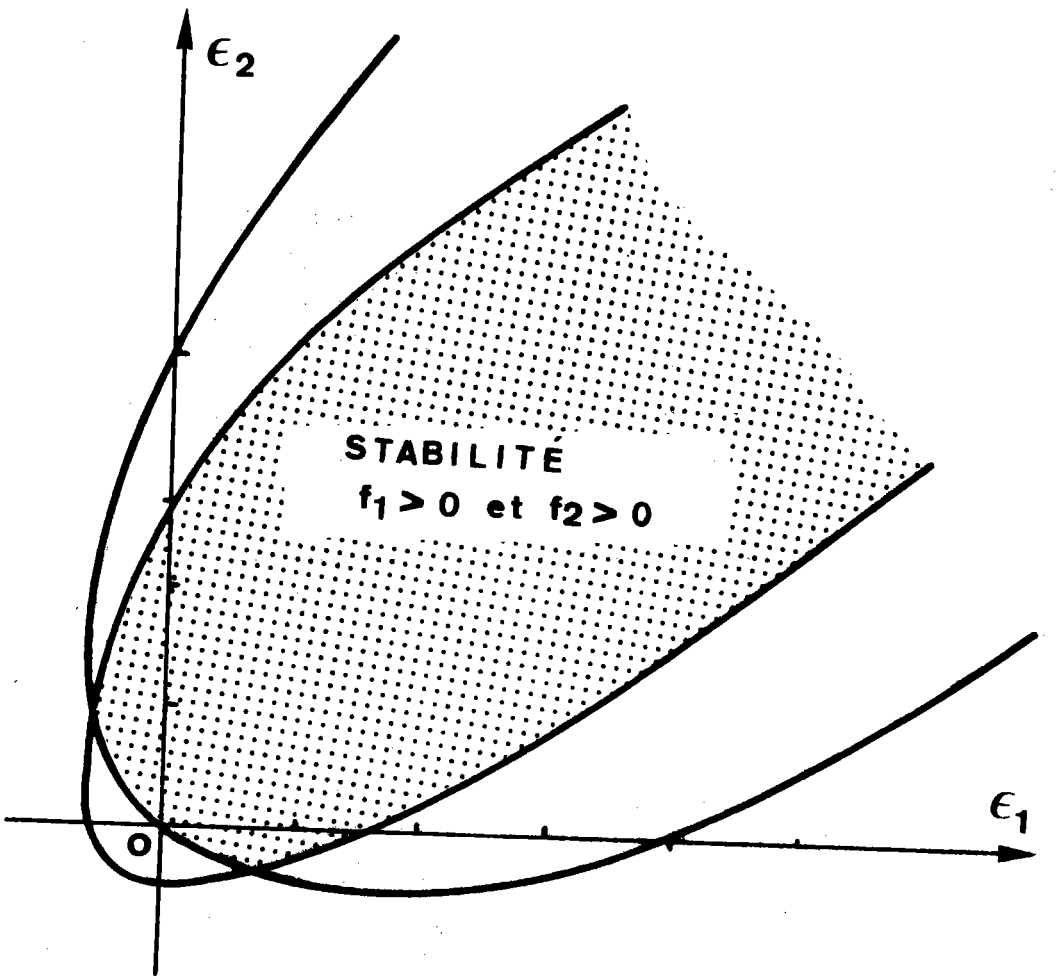


fig (III.6.4.3)

III.7. Stabilité d'un corps élastique non-homogène

Pour un corps élastique homogène bidimensionnel soumis à des déformations arbitraires à partir d'un état initial (déchargé) isotrope, on peut associer un ensemble $]\ K_1\ ,\ K_2\ [$ des valeurs de K telles que la condition (III.2.1) soit vérifiée. Si le corps est non-homogène, et si les coefficients $\Phi_{ijk\ell}$ sont connus à chaque point, un ensemble des valeurs de K peut être associé à chaque point, si ces ensembles des valeurs de K a un point commun Ko, on a :

$$\int_D \left[\Phi_{ijk\ell} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_\ell} + K_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} - \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right)\right] d\omega > 0$$

par conséquent, C.E est vérifié si la frontière est fixe.

III.8. Conclusion

Pour un solid élastique bidimensionnel à frontière fixe soumis à partir d'un état initial isotrope à des déformations homogènes, les conditions de stabilité (III.1.1) et (III.2.1) sont équivalentes.

En plus, lorsqu'une valeur commune de K peut être trouvée, la condition (III.2.1) prévoit une condition suffisante de stabilité pour des corps élastiques non-homogènes à frontière fixe.

III.9. Critère énergétique de stabilité et charge critique d'Euler

On rappelle d'abord le phénomène suivant :

Flembage d'une tige encastrée par ses deux extrémités

Considérons une tige élastique élancée encastrée en deux extrémités

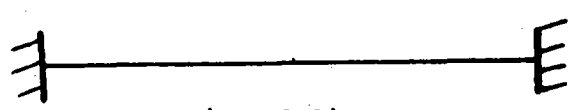


fig (III.9.1)

soumise à une force de compression F. Pour une valeur faible de F, l'équilibre est stable, par contre, pour une valeur plus grandes de F, l'équilibre devient instable, et la tige prend l'aspect représenté dans la fig (III.9.2) ci-dessous :

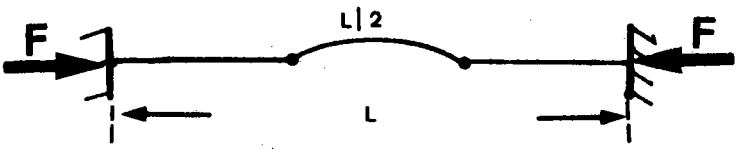


fig (III.9.2)

Ce phénomène a été étudié par Euler, la charge critique de flembage est :

$$F_c = \frac{4\ \Pi^2\ E\ I}{\ell^2}$$

où :

E est le module d' Young

I est le moment d'inertie

Nous allons montrer à partir du critère énergétique de stabilité, comment, on peut retrouver et préciser ce résultat.

<u>calcul de charge critique par la condition de stabilité (III.4.1.1)</u>

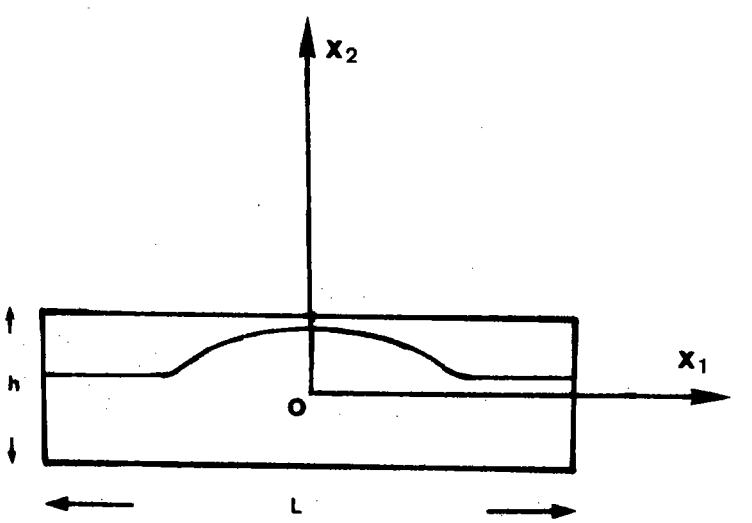


fig (III.9.3)

Supposons que la tige soumise au déplacement $\vec{u}\ (u_1\ ,\ u_2\ )$ où :

$$u_1\ (x_1\ ,\ x_2\ ) = x_2\ \frac{2\pi}{\ell}\ \sin\frac{2\pi}{\ell}\ x_1$$

$$u_2\ (x_1\ ,\ x_2\ ) = \cos 2\pi\ \frac{x_1}{\ell} + 1 \qquad \text{(III.9.1)}$$

avec les conditions aux limites :

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ pour } x_1 = \pm\frac{\ell}{2}\ , \qquad \sigma = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rappelons de la condition de stabilité (III.4.1.1)

$$\Phi_{ijk\ell} = \Psi_{ijk\ell} + \sigma_{\ell j}\ \delta_{ki}$$

Alors :

$$\int_S \Phi_{ijk\ell}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\ dx = \int_S \Psi_{ijk\ell}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\ dx + \int_S \sigma_{\ell j}\ \delta_{ki}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\ dx \qquad \text{(III.9.2)}$$

En tenant compte de (III.9.1), calculons les deux termes dans le deuxième membre de (III.9.2).

En effet, on a :

$$\sigma_{\ell j}\ \delta_{ki}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} = \sigma_{\ell j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\ ;\ k = 1,2$$

$$= -\sigma\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} = -\sigma\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

En intégrant sur un quart de la tige, on obtient :

$$\int_{S/4} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\ dx_2 = \int_0^{h/2}\int_0^{\ell/2} \left(x_2\ \frac{4\pi^2}{\ell^2}\ \cos\frac{2\pi}{\ell}\ x_1\right)^2 dx_1\ dx_2 = \frac{\pi^4}{5}\ \frac{h^3}{\ell^3}$$

De même, on a :

$$\int_{S/4} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\ dx_2 = \int_0^{h/2}\int_0^{\ell/2} \left(\frac{2\pi}{\ell}\ \sin\frac{2\pi}{\ell}\ x_1\right)^2 dx_1\ dx_2 = \frac{\pi^2}{2}\ \frac{h}{\ell}$$

Alors :

$$\int_{S/4} \sigma_{\ell j}\, \delta_{ki}\, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\, dx = -\sigma \left(\frac{\Pi^2}{2}\, \frac{h}{\ell} + \frac{\Pi^4}{6}\, \frac{h^3}{\ell^3}\right) \quad \text{(III.9.3}$$

D'autre part, on a :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = \lambda\, \theta\, \delta_{ij} + 2\mu\, \epsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \epsilon_{uu}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \epsilon_{ij} \quad ; \quad \theta = \epsilon_{uu}$$

$$\Psi_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_{ij}\, \partial \epsilon_{k\ell}} = \lambda\, \delta_{uk}\, \delta_{u\ell}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \delta_{ik}\, \delta_{j\ell}$$

ou encore :

$$\Psi_{ijk\ell} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{k\ell} + 2\mu\, \delta_{ik}\, \delta_{j\ell}$$

$$\Psi_{ijk\ell}\, \epsilon_{ij}\, \epsilon_{k\ell} = \lambda\, \theta^2 + 2\mu\, \epsilon_{kj}\, \epsilon_{kj}$$

$\Psi_{ijk\ell}$ ayant des valeurs proches de leurs valeurs dans l'état naturel, alors, il existe deux valeurs λ et μ tel que :

$$\Psi_{ijk\ell}\, \epsilon_{ij}\, \epsilon_{k\ell} \leq \lambda\, \theta^2 + 2\mu\, \epsilon_{ij}\, \epsilon_{ij} \qquad \forall\ \epsilon_{ij}$$

Alors, calculons les composantes des déformations ϵ_{ij}, on obtient :

$$\epsilon_{11} = x_2\, \frac{4\Pi^2}{\ell^2} \cos \frac{2\Pi}{\ell}\, x_1$$

$$\epsilon_{22} = 0$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{2\Pi}{\ell} \sin \frac{2\Pi}{\ell}\, x_1 - \frac{2\Pi}{\ell} \sin \frac{2\Pi}{\ell}\, x_1 = 0$$

par conséquent, on obtient :

$$\Psi_{ijk\ell}\, \epsilon_{ij}\, \epsilon_{k\ell} = (\lambda + 2\mu) \left(x_2\, \frac{4\Pi^2}{\ell^2} \cos \frac{2\Pi}{\ell}\, x_1\right)^2$$

En intégrant sur le même quart de la tige, on obtient :

$$\int_{S/4} \Psi_{ijk\ell}\, \epsilon_{ij}\, \epsilon_{k\ell} = \int_{S/4} \Psi_{ijk\ell}\, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\, dx$$

$$= (\lambda + 2\mu)\, \frac{\Pi^4}{6}\, \frac{h^3}{\ell^3} \qquad \text{(III.9.4)}$$

portons(III.9.3) et (III.9.4) dans (III.9.2), on obtient :

$$\int_S \Phi_{ijk\ell} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} dx = -\sigma\left(\frac{\pi^2}{2}\frac{h}{\ell} + \frac{\pi^4}{6}\frac{h^3}{\ell^3}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\pi^4}{6}\frac{h^3}{\ell^3}$$

pour pouvoir calculer la borne supérieure de σ , et de fait que la tige devient instable pour ce borne, on a :

$$\int_{S/4} \Phi_{ijk\ell} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} dx = 0$$

Finalement, on obtient :

$$\sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{h^2 \pi^2}{3\ell^2 + h^2 \pi^2} \qquad \text{(III.9.5)}$$

Comparons (III.9.5) et l'expression de F_c , on obtient que :

$$E = \lambda + 2\mu \qquad \text{(III.9.6)}$$

D'autre part, les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_1 = \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2) + 2\mu\epsilon_1$$

$$0 = \lambda\epsilon_1 + (\lambda + 2\mu)\epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_2 = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}\epsilon_1$$

Alors :

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\epsilon_1 - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\epsilon_1$$

Si $\lambda = \mu$, on a :

$$\sigma = \left(3\mu - \frac{\mu^2}{3\mu}\right)\epsilon_1$$

$$\sigma = \frac{8\mu}{3}\epsilon_1$$

donc, le module d'Young est $\frac{8}{3}\mu$, et pour $\lambda = \mu$ (III.9.6) donne $E = 3\mu$

Ceci est une borne supérieure rigoureusement vraie, la charge critique réelle est nécéssairement au-dessous.

En tenant compte de la valeur de $I = \frac{h^3}{12}$ pour la tige, alors à partir de la formule d'Euler, on déduit :

$$\sigma = \frac{\pi^2 E h^2}{3\ell^2}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ADDA. Y, DUPOUT. J.M, PHILIBERT. J, QUER E. Y
Eléments de métallurgie physique, tome V, déformation plastique

[2] BRUN. L et POTIER - FERRY.M
constitutive inequalities and dynamic stability in the linear theories of elasticity, thermoelasticity and viscoelasticity
Ball.J.M (ed), systems of nonlinear partial differential equations, p.p 299 - 304, D. Reidel publishing company (1983)

[3] Brun. L et POTIER - FERRY.M
Mécanique des solides élastiques - thermodynamique et stabilité du solide élastique
C.R.Acad. Sc.t 296, PARIS (1983)

[4] Brun. L and POTIER - FERRY. M
constitutive inequalities and dynamic stability in the linear theories of elasticity and thermoelasticity
journal of thermal stresses p.p 35 - 49 (1984)

[5] BASSOUT -LELLICH. M
opérateurs non bornés dans les espaces de Hilberts
rapport de D.E.A. université de Besançon (1980)

[6] BASSOUT - LELLICH. M
Homogénéisation des milieux viscoélastiques non homogènes
Thèse de doctorat 3ème cycle Université de Besançon (1983)

[7] BASSOUT - LELLICH. M
Théorie des milieux standards généralisés et corps de Maxwell
communication au GFR, PARIS, le 4 octobre (1984)
cahiers du GFR, à paraître

[8] BASSOUT - LELLICH. M
Théorème d'existence et d'unicité des vitessses en déformations quasi-statiques des milieux viscoélastiques standards, 20ème colloque annuel de Rhéologie PARIS, les 27, 28, et 29 novembre (1985)
20 ans de Groupe Français de Rhéologie, progrés Récents. N° spécial, à paraitre.

[9] BASSOUT - LELLICH. M et WEBER. J.D
Sur la stabilité d'un corps élastique homogène à frontière fixe
C.R. Acad. Sc, série II, tome 302, N°14, pp. 839-842, Paris, 14 avril (1986)

[10] COLEMAN. B.D and CURTIN. M.F
Thermodynamics with internal state variables
The journal of chemical physics, vol 47, n°2, (1967)

[11] CATTANEO. C
Su un te ema fondamentale nella teoria delle onde di discon. inu.Atti.Accad.Sci.Lincei Rend Fis. Mat. Nat (8), 1 ,66-72 . 728 - 734 (1946)

[12] DUHEM. P
Recherches sur l'élasticité ch III
Gauthier - Villars, Paris (1906)

[13] DARVE. F
L'écriture incrémentale des lois rhéologiques et les grandes classes de lois de comportement
C.R Ecole d'hiver de rhéologie des géomatériaux Aussois (1984)

[14] GERMAIN. P
Cours de mécanique des milieux continus, MASSON et Cie (1973)

[15] GERMAIN. P, NGUYEN. Q.S, et SUQUET. P
continum thermodynamics
Journal of Applied Mechanics, p.p 1010 - 1020,
Vol 50, Décembre (1983)

[16] HALPHEN. B
Sur le champ des vitesses en thermoplasticité finie
Int. J. solids structures, vol 11, p.p 947-960 (1975)

[17] HALPHEN. B et NGUYEN. Q. S
Sur les matériaux standards généralisés
Journal de mécanique, vol 14, n° 1, (1975)

[18] HADAMARD. J.
Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Chap VI, applications à la théorie de l'élasticité. Hermann, Paris (1903)

[19] HILL. R
On uniqueness and stability in the theory of finite élastic strain. Journal of the Mechanics and physics of solids, vol 5 p.p 229 - 241, (1957)

[20] KATCHANOV. L
Eléments de la théorie de la plasticité
Editions MIR, MOSCOU (1975)

[21] MANDEL. J
cours de mécanique des milieux continus, tome I, II
PARIS, Gauthier - Villars (1966)

[22] MANDEL. J
Variables cachées, puissance dissipée, dissipativité normale. Colloque annuel du GFR "thermodynamique des comportements rhéologiques" 7 et 8 décembre (1977). N° spécial (1980)

[23] MANDEL. J
plasticité classique et viscoplasticité
CISM springer - verlac wien -New York udine (1971)

[24] MANDEL. J
Equations constitutuves et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques.
Int. J. solids structures, vol g, p.p 725-740 (1973)

[25] MANDEL. J
Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte.
Int. J. solids structures vol 17, p.p 873-878 (1981)

[26] NGUYEN. Q.S
problèmes de plasticité et de rupture
Cours d'option D.E.A d'analyse numérique et applications (1980 - 1981), publications mathématiques d'Orsay n° 82.08

[27] NGUYEN. Q.S et HALPHEN. B
Sur les lois de comportement élasto - visco - plastique à potentiel généralisé.
C.R. Acad. sc. t 277, p .p 319 - 322, PARIS (1973)

[28] NGUYEN. Q.S
Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale
Journal de mécanique théorique et appliquée
vol 3, N° 1, p.p 41 - 61, (1984)

[29] NOWIC. A.S and BERRY. B.S
Anelastic relaxation in crystalline solids
Academic press, New-York and London (1972)

[30] OUZIAUX. H et PERRIER. J
Mécanique des fluides appliquée tome 1. Fluides incompressibles. Dunod, 2ème édition. PARIS (1966)

[31] PARRY. G.P
Changes of invariance in internal variable theories
Int. J. solids structures, vol 20, N° 4, p.p 327 - 331, (1984)

[32] POTIER - FERRY. M
Fondements mathématiques de la théorie de la stabilité élastique. Thèse d'état, PARIS (1978)

[33] POTIER - FERRY. M
An existence and stability theorem in non linear viscoelasticity
variational methods in the mechanics of solids
pergamon press, oxford and New-York (1980)

[34] POTIER - FERRY. M
On the mathematical foundations of élastic stability théory
Arch, Rat, Mech, Anal, vol78, p.p 55 - 72 (1982)

[35] RICE. J.R
Inelastic constitutive relations for solids an internal-variable théory and its application to métal plasticity J. Mech. phys. solids. Vo 19, p.p 433 - 455 (1971)

[36] SIDOROFF. F
Variables internes en viscoélasticité
I. Variables internes scalaires et tensorielles
Journal de mécanique, vol 14, N° 3 (1975)
II. Milieux avec configuration intermédiaire
Journal de mécanique, vol 14, N° 4 (1975)
III. Milieux avec plusieurs configurations intermédiaire
Journal de mécanique, vol 15, p.p 95 - 118 (1976)

[37] SIDOROFF. F
Un modèle viscoélastique non linéaire, avec configuration intermédiaire.
Journal de mécanique, vol 13, p.p 679 - 713 (1974)

[38] SIDOROFF. F
Description des comportements rhéologiques par variables internes
Colloque annuel du GFR, 7 et 8 décembre (1977), N° spécial (1980)

[39] SIDOROFF. F
cours de mécanique des solides, mécanique des milieux continus

[40] SIDOROFF. F
Formulation élasto-plastiques en grandes déformations
Rapport GRECO, N° 29 (1981)

[41] SIDOROFF.F
Incremental constitutive équation for large strain elasto plasticity
Int. J. Engng, Sci, vol 20, N° 1, p.p 19 - 26 (1982)

[42] SMARZYNSKI. Z. WEBER. J.D
Gonflement des brames dans la coulee continue de l'acier
16ème colloque du GFR, PARIS (1981)

[43] STOLZ. C
Contribution à l'étude des grandes transformations en élastoplasticité
Thése de Docteur - ingénieur, PARIS (1982)

[44] STUTZ. P
Formulation des lois de comportement, les principes généraux
C.R. Ecole d'hiver de rhéologie des géomatériaus, Aussois (1984)

[45] SUQUET. P
Plasticité et Homogénéisation
Thèse d'état, PARIS (1982)

[46] SEDOV. L
Mécanique des milieux continus, tome I, II.
Traduction française, Edition MIR, MOSCOU (1975)

[47] TRUESDELL. C and NOLL.W
The non-linear field theories of mechanics
Handhuch der physik, Band III, 3.Springer-verlag (1965)

[48] TANNER. R.I
Recent progress in rheology, Journal of Applied Mechanics, vol 50, p.p 1181-1190, (1983)

[49] VAN HOVE. L
Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues
Akad, VAN WETENSCH, Amsterdam 50, (1947)

[50] VLADIMIROV. V
Distributions en physique mathématique
Traduction française, Editions MIR (1979)

[51] WEBER. J.D
Sur les propriétés d'une classe de corps viscoélastiques non linéaires à paramètres cachés.
C.R. Acad. Sc. t 267, série A, p.p 565 - 568, PARIS (1968)

[52] WEBER. J.D
Mécanique des milieux déformables non linéaires
Eyrolles, PARIS (1972)

[53] WEBER. J.D
Conditions suffisantes de stabilité des milieux continus élastiques. Journal de mécanique, vol 11, N° 1, p.p 119 - 133, (1972)

[54] WEBER. J.D
comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse.
Cahiers du GFR, N° spécial Rhéologie, 15 novembre (1973)

[55] WEBER. J.D
Hypothèse des variables internes et représentation de certains fluides viscoélastiques.
conférence au GFR, le 20 juin (1974)

[56] WEBER. J.D. and EBERHARDT. A
Internal state variables and nomality in viscoplastic flow
Rheol. Acta 21, p.p 403 - 405, (1982)

[57] WEBER.J.D et BASSOUT - LELLICH. M
Deux applications de la théorie des milieux standards généralisés.
communication au GFR, PARIS, le 24 mai (1984)
cahiers du GFR, à paraître

TABLE DES MATIERES

Avant-propos 2

Introduction 4

Notations utilisées 7

PARTIE I

Les milieux viscoélastiques standards

I.1. Rappels de mécaniques des milieux continus 10

I.1.1. Gradient de la transformation 11

I.1.2. Déformations et contraintes 12

I.1.3. Equations d'équilibre 14

I.1.4. La classe des matériaux hyperélastiques 15

I.1.5. Variables internes en mécanique des milieux continus 15

I.2. Description des milieux viscoélastiques standards MVS 18

I.2.1. Les MVS avec élasticité instantanée 19

I.2.2. Les MVS sans élasticité instantanée 22

I.2.3. Le potentiel de dissipation, et les différentes types de comportement 23

I.2.4. L'hypothèse de dissipativité normale 25

I.2.5. Formalisme dual pour les MVS 27

I.3. Exemples de milieux viscoélastiques standards 31

I.3.1. Cas des MVS avec élasticité instantannée 32

I.3.1.1. Fluide de Maxwell linéaire 32

I.3.1.2. Le comportement du Zinc dans les essais de traction simple avec saut de vitesse 35

I.3.2. Cas des MVS sans élasticité instantanée 41

I.3.2.1. Cas d'un modèle rhéologique constitué du modèle de Maxwell et un amortisseur montés en parallèle 41

I.3.2.2. Corps de Kelvin-Voigt 42

I.3.2.3. L'acier à haute température 46

I.4. Propriétés des milieux viscoélastiques standards avec élasticité instantanée 49

I.4.1 Les MVS et quelques principes 50

I.4.1.1. Principe d'objectivité ou principe d'indifférence matérielle 50

I.4.1.2. Les MVS obéissent au principe d'objectivité 51

I.4.1.3. Les MVS obéissent au second principe de la thermodynamique 53

I.4.2. Equations de conservation et équations de comportement pour les MVS 54

I.4.3. Les MVS et l'assemblage de n modèles de Maxwell 56

I.4.4. Les MVS et une transformation quelconque par rapport aux variables internes 59

I.4.5. Etude du comportement au voisinage d'un état d'équilibre interne, relaxation des contraintes d'un MVS 60

I.4.6. Théorème d'existence et d'unicité des vitesses d'un MVS avec élasticité instantanée 63

I.4.6.1. Position du problème 63

I.4.6.2. Cas d'un milieu élastique dont l'équilibre est stable 64

I.4.6.3. Cas d'un MVS à élasticité instantanée stable à l'équilibre 70

PARTIE II

Milieux viscoélastiques standards et corps de Maxwell, en grandes déformations, pour des comportements non linéaires

II.1. Description géométrique du corps de Maxwell 73

II.2. L'expression de l'énergie libre et le potentiel de dissipation pour le corps de Maxwell 74

II.3. Cas où les tenseurs des contraintes et des déformations sont diagonaux 77

* Transformations isothermes

* Transformations non isothermes

II.4. Déformations quelconques, transformations non isothermes 85

- Une variante dans l'expression de l'énergie libre et le potentiel de dissipation pour le corps de Maxwell 91

II.5. Cas où les tenseurs des contraintes et des déformations sont diagonaux. 92

* Transformations isothermes

* Transformations non isothermes

II.6. Déformations quelconques, transformations isothermes 96

II.7. Déformations quelconques, transformations non isothermes 99

II.8. Conclusion 102

P A R T I E III

Equivalence de deux conditions de stabilité élastique de HADAMARD

III.1. Position du problème 104

III.2. Conditions de stabilité de Hadamard 106

III.3. Description géométrique du problème 108

III.4. Cas d'un milieu élastique bidimensionnel déformé à partir d'un état naturel isotrope 109

III.4.1. Propriétés du potentiel élastique 109

III.4.2. Tenseur d'élasticité d'ordre quatre 112

III.4.3. Equivalence des conditions de stabilité de Hadamard 116

III.5. Etude des conditions de stabilité de Hadamard dans le cas où la configuration naturelle s'identifie avec la configuration initiale 119

III.6. Cas d'un milieu hyperélastique bidimensionnel particulier 121

III.6.1. Tenseur d'élasticité d'ordre quatre 121

III.6.2. La condition nécéssaire de stabilité de Hadamard 128

III.6.3. La condition suffisante de stabilité de Hadamard 129

III.6.4. Stabilité d'un corps élastique homogène mis à des vecteurs contraintes Lagrangiens constants 131

III.7. Stabilité d'un corps élastique non homogène 134

III.8. Conclusion 134

III.9 Critère énergétique de stabilité et charge critique d'Euler 134

BIBLIOGRAPHIE 139