



**HAL**  
open science

# Analyse de la stabilité des milieux élastiques et méthodes numériques

Claude Fressengeas

► **To cite this version:**

Claude Fressengeas. Analyse de la stabilité des milieux élastiques et méthodes numériques. Physique [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1974. Français. NNT : 1974METZ005S . tel-01775579

**HAL Id: tel-01775579**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775579>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

S/M2 = 74/5

211

# THESE

présentée

A L'U. E. R. " SCIENCES EXACTES ET NATURELLES "  
DE L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR - INGENIEUR

par

Claude FRESSENGEAS

---

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	13740175
Cote	S/M3 74/5
Loc	Magasin

## ANALYSE DE LA STABILITE DES MILIEUX CONTINUS ELASTIQUES ET METHODES NUMERIQUES

---

Soutenu le 20 septembre 1974 devant la commission d'examen

Monsieur G. REEB Président

• Madame A. SEC

Monsieur J.D. WEBER

Monsieur M. LUCIUS



UNIVERSITE DE METZ

Président : M. LONCHAMP Jean Pierre

U.E.R. "Sciences Exactes et Naturelles"

Directeur : M. RHIN Georges

PROFESSEURS :

M. LONCHAMP Jean-Pierre	T.T.P. Physique
M. BARO Raymond	T. Physique
Mme CAGNIANT Denise	P.S.C. Chimie
M. LERAY Joseph	P.S.C. Physique
M. BLOCH Jean-Michel	T. Chimie
M. KLEIM Roland	P.S.C. Physique
M. CHARLIER Alphonse	P.S.C. Physique
M. TAVARD Claude	P.S.C. Physique
M. PELT Jean-Marie	T. Biologie végétale

MAITRES DE CONFERENCES :

M. CERTIER Michel	Physique
M. WEBER Jean-Daniel	Mécanique
M. WENDLING Edgar	Chimie
M. BAUDELET Bernard	Physique
M. CARABATOS Constantin	Physique
M. FALLER Pierre	Chimie
M. JOUANY Jean-Michel	Toxicologie
M. RHIN Georges	Mathématiques
Mme SEC Antoinette	Mathématiques
M. MORIN Bernard	Mathématiques
M. DAX Jean-Pierre	Mathématiques

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE :

M. YUEN Ping Cheng	Mathématiques
--------------------	---------------

CHARGE D'ENSEIGNEMENT :

Mme SCHWARTZBROD Janine	Microbiologie
-------------------------	---------------

# S O M M A I R E

	P A G E S
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I</u> : INTRODUCTION A LA STABILITE DES MILIEUX CONTINUS ELASTIQUES.	3
1-1 . Introduction.	3
1-2 . Stabilité des systèmes conservatifs discrets.	3
1-3 . Stabilité des milieux continus élastiques.	10
1-4 . Instabilité.	17
1-5 . Bifurcation vers un équilibre adjacent.	20
1-6 . Structures imparfaites.	27
1-7 . Transition brutale vers un équilibre éloigné.	29
1-8 . Mise en mouvement.	38
<u>Annexe 1</u> : RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.	44
<u>CHAPITRE II</u> : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET L'ANALYSE DE LA STABILITE ELASTIQUE.	50
2-1 . Introduction.	50
2-2 . Théorie générale des éléments finis appliqués à l'étude de la stabilité linéaire.	51
2-3 . Propriétés ; caractéristiques du problème.	55
2-4 . Méthode des éléments finis et stabilité non linéaire.	59
<u>Annexe 2</u> : METHODE DES ELEMENTS FINIS.	67
<u>CHAPITRE III</u> : METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE	75
3-1 . Introduction.	75
3-2 . Réduction du problème.	76
3-3 . Méthode de Jacobi, Givens-Householder	78
3-4 . Méthode de la puissance ; Méthode de Jennings.	79
3-5 . Méthode de Gupta.	88
3-6 . Comparaisons - Conclusions.	94

<u>CHAPITRE IV : APPLICATIONS.</u>	100
4-1 . Introduction	100
4-2 . Elements	100
4-3 . Notations - Listing.	104
4-4 . Exemple d'application.	123
<u>CONCLUSION</u>	129
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	130

## I N T R O D U C T I O N

L'analyse de la stabilité des milieux continus élastiques est fondée dans une large mesure sur le critère de stabilité de J. HADAMARD [18]. Redécouvert assez récemment par C.E. PEARSON [32] et R. HILL [19], ce critère a fait l'objet de nombreux travaux théoriques [36]; tel quel il est cependant difficilement utilisable, en raison surtout des difficultés mathématiques considérables auxquelles il conduit.

L'apparition des méthodes numériques modernes, et en particulier de la méthode des éléments finis, permet au contraire d'en donner une forme simple, susceptible de se prêter à de nombreuses applications.

La méthode des éléments finis joue ici un rôle important : par son aptitude à prendre en charge les irrégularités géométriques, elle autorise le traitement de problèmes qui mettaient les méthodes usuelles en échec. Longtemps limitée à l'étude des systèmes idéaux présentant à l'état critique une bifurcation vers un état d'équilibre stable adjacent, l'analyse de la stabilité des structures peut ainsi être étendue aux systèmes réels imparfaits, dont l'instabilité se manifeste en général par une transition brutale vers un état d'équilibre distant.

C'est dans cette perspective générale que nous voulons placer notre travail.

Notre chapitre I contient une présentation du critère fondamental de stabilité, et une classification des différents phénomènes recouverts par le concept d'instabilité.

Dans le chapitre II, on trouvera une revue générale des applications de la méthode des éléments finis à l'analyse de la stabilité.

Le chapitre III est une étude comparée des méthodes numériques susceptibles d'être utilisées pour la résolution d'un problème de stabilité.

Enfin, le chapitre IV présente les résultats obtenus.

Nous pensons qu'il peut être utile de préciser nos objectifs principaux dans ce travail : dans la perspective mentionnée ci-dessus, nous avons cherché à construire des outils de travail généraux. On s'aperçoit en effet à la première tentative d'application, qu'une méthode d'éléments finis est relativement longue à programmer de manière satisfaisante, et qu'une petite partie du travail seulement peut être récupérée pour d'autres tâches.

Il nous a donc semblé indispensable de diriger nos efforts vers les programmes généraux, négligeant ainsi les exemples d'application industriels. Le présent travail doit ainsi être considéré comme une première étape d'une étude plus importante.

## CHAPITRE I

### I N T R O D U C T I O N   A   L A   S T A B I L I T E   E L A S T I Q U E

#### 1 - INTRODUCTION

Nous préciserons la notion de stabilité à partir de l'étude de la stabilité de l'équilibre des systèmes conservatifs discrets ; puis nous étendrons ces notions aux milieux continus élastiques.

La notion intuitive de la stabilité d'une position d'équilibre d'un système matériel peut être précisée de la façon suivante : une position d'équilibre est dite stable lorsque des perturbations de cet équilibre, obtenues en modifiant légèrement la position du système, ou en lui communiquant des vitesses suffisamment petites, introduisent des mouvements pendant lesquels les paramètres définissant la position du système restent voisins de leurs valeurs d'équilibre, les écarts restant infiniment petits avec les perturbations.

#### 2 - STABILITE DES SYSTEMES CONSERVATIFS DISCRETS

Soit un système conservatif à  $n$  paramètres indépendants  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ; il existe un potentiel  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$  dont nous supposons qu'il est de classe  $C_2$  au voisinage de la position d'équilibre.

##### a) Position d'équilibre

Une configuration du système est une position d'équilibre si, abandonné dans cette position avec des vitesses nulles, le système y reste indéfiniment. Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre s'écrivent, en supposant l'équilibre atteint pour  $q_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$  :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} (0, \dots, 0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Le potentiel est stationnaire dans une position d'équilibre.

b) Stabilité d'une position d'équilibre

Il est en général impossible de placer un système de façon exacte à sa position d'équilibre, et sans lui communiquer des vitesses ; il est donc nécessaire de préciser si le système, placé suffisamment près de la position d'équilibre, avec des vitesses suffisamment faibles, restera indéfiniment dans son voisinage. Ceci est l'objet de l'étude de la stabilité de l'équilibre.

Définition :

Une position d'équilibre d'un système matériel est stable si  $\varepsilon > 0$  étant arbitrairement choisi, on peut trouver deux nombres  $\eta > 0$  et  $\eta' > 0$  tels que

$$\sup_i |q_i(0)| < \eta \quad \text{et} \quad \sup_i |q'_i(0)| < \eta'$$

entraînent à tout instant  $\sup_i |q_i| < \varepsilon$

c) Théorème de Lejeune - Dirichlet

Le théorème de Lejeune-Dirichlet fournit une condition suffisante de stabilité pour les systèmes conservatifs discrets :

Théorème : Si la fonction potentiel  $V(q_i)$  d'un système conservatif discret présente un minimum strict à l'équilibre, cet équilibre est stable.

Nous ajouterons les remarques suivantes :

Le théorème de Lejeune-Dirichlet peut être étendu à une classe de systèmes dissipatifs discrets ; lorsque certaines forces dérivent d'un

potentiel, les autres étant constituées par des frottements ou des résistances passives, l'énergie mécanique est en effet non croissante, et l'on peut encore établir le théorème.

Par contre le théorème ne peut être étendu aux milieux continus ; examinons ce point : la définition de la stabilité des systèmes discrets utilise la norme  $\text{Sup}_i |q_i(t)|$  dans l'espace d'état approprié. La notion d'écart, ou toute autre norme peut également convenir ; en effet, les normes sont équivalentes dans un espace de dimension finie. Il n'en va plus de même dans un espace d'état de dimension infinie, relatif à un système continu ; Pour celui-ci, la stabilité au sens d'une norme n'implique pas la stabilité au sens de toute norme.

En outre le théorème de Lejeune-Dirichlet repose sur le fait que le potentiel  $V$  atteint sa valeur extrême sur un compact ; cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée dans un espace de dimension infinie.

Compte tenu de ces remarques, nous définirons en fait la stabilité des systèmes continus par une condition de potentiel minimum que nous préciserons.

d) Condition de stabilité d'un corps rigide soumis à un système de charges mortes.

A titre d'illustration de la notion de stabilité des systèmes conservatifs discrets, nous traitons ici le cas du corps rigide soumis à des charges mortes, pour lequel on peut donner une forme élégante de la condition suffisante de stabilité.

Soit donc un corps rigide  $(\mathcal{D})$  soumis en des points  $M_k$  à l'action de charges mortes  $\vec{F}_k$ . Nous désignons par  $x_{ik}$  les coordonnées du point d'application  $M_k$ , et par  $f_{ik}$  les composantes des charges  $\vec{F}_k$ .

Charges mortes : Les forces  $\vec{F}_k$  sont appelées charges mortes lorsqu'elles sont indépendantes des déplacements virtuels du corps  $(\mathcal{D})$  auquel elles sont appliquées.

De telles forces admettent donc un potentiel ; celui-ci n'est autre qu'une fonction linéaire des déplacements virtuels des points d'application :  $V = - f_{ik} x_{ik}$ .

Elles peuvent être matérialisées idéalement par des fils élastiques tendus à grande distance.

Nous supposons le système des forces  $\vec{F}_k$  en équilibre :

$$f_{ik} = 0 \quad (1-1)$$

et

$$f_{ik} x_{jk} = f_{jk} x_{ik} \quad (1-1')$$

(Nous adoptons la convention de sommation d'Einstein).

Désignons par  $t_{ij}$  les quantités  $f_{ik} x_{jk}$  ; les  $t_{ij}$  sont les coordonnées d'un tenseur du second ordre. On a en effet dans un changement de base :

$$t_{ij} = f_{ik} x_{jk} = \omega_{il} \omega_{jm} f'_{lk} x'_{mk} = \omega_{il} \omega_{jm} t'_{lm}$$

ce qui montre la propriété.

La condition d'équilibre (1-1') montre en outre que ce tenseur est symétrique :  $t_{ij} = t_{ji}$ .

### Translation du corps (1)

Soit une translation virtuelle du corps (1) :

$$\delta x_{ik} = \delta h_i \quad (1-2)$$

La première variation du potentiel est

$$\delta V = - (f_{ik} \delta x_{ik} + \delta f_{ik} x_{ik})$$

Pour des charges mortes :  $\delta f_{ik} = 0$  (1-3)

Compte tenu de 1-1, 1-2, 1-3, on a donc

$$\delta V = 0 \quad (1-4)$$

En outre, la seconde variation du potentiel est nulle.

En effet  $\delta^2 V = - f_{ik} \delta^2 h_i = 0$  d'après (1-1).

Le théorème de Lejeune-Dirichlet ne s'applique donc pas.

### Rotation virtuelle

Pour une rotation virtuelle infinitésimale :

$$\delta x_{ik} = \omega_{ij} x_{jk} \quad (1-5)$$

où les  $\omega_{ij}$  sont les coordonnées d'un tenseur anti-symétrique.

La première variation du potentiel est nulle à l'équilibre :

$$\delta V = - f_{ik} \delta x_{ik} = - f_{ik} \omega_{ij} x_{jk} = 0$$

d'où :  $t_{ij} \omega_{ij} = 0$

Compte tenu de :  $\delta^2 x_{ik} = \delta \omega_{ij} x_{jk} + \omega_{ij} \delta x_{jk}$  et de (1-5)

la seconde variation :  $\delta^2 V = - f_{ik} \delta^2 x_{ik}$  s'exprime par :

$$\delta^2 V = - (f_{ik} \delta \omega_{ij} x_{jk} + f_{ik} \omega_{ij} \omega_{jl} x_{lk})$$

Le produit contracté  $f_{ik} \delta \omega_{ij} x_{jk}$  est nul d'après les propriétés d'antisymétrie de  $\omega_{ij}$  et de symétrie de  $t_{ij} = f_{ik} x_{jk}$

Finalement :

$$\delta^2 v = - t_{ij} \omega_{ij} \omega_{j1} \quad (1-6)$$

Si l'on fait coïncider les axes de référence avec les directions principales du tenseur  $t_{ij}$  (1-6) s'écrit :

$$\delta^2 v = (n_1 + n_2) \omega_{12}^2 + (n_1 + n_3) \omega_{13}^2 + (n_2 + n_3) \omega_{23}^2$$

où  $n_1$   $n_2$   $n_3$  sont les valeurs propres du tenseur  $t_{ij}$ .

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème : Une condition nécessaire pour que le potentiel du système soit minimum à l'équilibre est que les valeurs propres  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  du tenseur  $t_{ij}$  vérifient les inégalités :

$$n_1 + n_2 \geq 0$$

$$n_1 + n_3 \geq 0$$

$$n_2 + n_3 \geq 0$$

La condition suffisante de Lejeune-Dirichlet n'est pas satisfaite en général, et ne peut l'être que si les translations pures sont exclues. Dans ce cas, on peut énoncer :

Théorème : Une condition nécessaire <sup>et suffisante</sup> pour que le potentiel du système soit strictement minimum à l'équilibre est que les inégalités :

$$n_1 + n_2 > 0$$

$$n_1 + n_3 > 0$$

$$n_2 + n_3 > 0$$

soient vérifiées.

Cette condition est à rapprocher de conditions nécessaires formellement voisines, obtenues par divers auteurs en mécanique des milieux continus [25, 36, 37].

e) Condition dynamique de stabilité

Le théorème de Lejeune-Dirichlet ne fournit qu'une réponse partielle aux problèmes de stabilité ; il ne donne en particulier aucun renseignement sur les petits mouvements autour de la position d'équilibre et leur isochronisme. Il ne s'agit en effet que d'une condition statique de stabilité ; nous rappellerons sommairement une condition dynamique nécessaire et suffisante de stabilité du problème linéarisé.

Pour celui-ci, l'énergie cinétique est de la forme :

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} q'_i q'_j$$

et le potentiel

$$V = \frac{1}{2} b_{ij} q_i q_j$$

Les termes du premier degré disparaissent à l'équilibre ; les équations de Lagrange s'écrivent :

$$a_{ij} q''_j + b_{ij} q_j = 0 \quad i = 1, 2 \dots n$$

Si les forces en jeu ne sont pas toutes conservatives, il peut s'introduire des termes dépendant des  $q'_j$ .

Cela amène à considérer le système :

$$a_{ij} q''_j + C_{ij} q'_j + b_{ij} q_j = 0 \quad i = 1, 2 \dots n$$

dont les solutions s'expriment comme combinaison linéaire des solutions particulières  $q_j = q_j^0 e^{rt}$ .

Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité du problème linéarisé est la suivante : l'équation caractéristique des petits mouvements autour de la position d'équilibre n'admet pas de racine réelle positive, ou de racine complexe à partie réelle positive. Dans le cas contraire, on aurait en effet un mouvement d'amplitude croissante, non bornée.

### 3 - STABILITE DES MILIEUX CONTINUS ELASTIQUES

#### a) Définition

Ainsi que nous l'avons vu, la condition suffisante de stabilité de Lejeune-Dirichlet ne peut être transposée aux milieux continus ; Nous nous proposons de donner la définition de la stabilité de tels milieux au moyen d'une condition de potentiel minimum ; rappelons dans ce but les définitions suivantes : (nous supposons que le potentiel atteint un minimum égal à 0 pour les valeurs  $q_i = 0$   $i = 1, 2 \dots n$  des paramètres ; ceci ne restreint pas la généralité).

Définition 1 : Le potentiel  $V(q_i)$  présente un minimum strict si et seulement si il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :  $\forall q_i \in \mathcal{V}, V(q_i) > 0$

Définition 2 : Le potentiel  $V(q_i)$  présente un minimum faible si et seulement si la <sup>matrice</sup> jacobienne  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$  est ~~positif ou nul~~ semi-définie positive

Il ne s'agit pas nécessairement d'un minimum strict.

Définition 3 : Le potentiel  $V(q_i)$  présente un minimum fort si et seulement si la <sup>matrice</sup> jacobienne  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$  est ~~strictement positif~~ définie positive

C'est naturellement un minimum strict ; contrairement à un minimum faible, un minimum fort est stable vis à vis des variations infiniment petites des paramètres définissant le potentiel ; ceci lui confère une existence physique plus convaincante.

Nous préciserons maintenant, au moyen de quelques exemples simples notre définition de la stabilité des milieux continus.

Exemple 1 : Stabilité d'un point matériel sur une courbe  $(\mathcal{C})$  :  $z = \frac{x^2}{2}$

Soit un point matériel M de masse unité, dont on suppose qu'il se déplace sur la courbe  $\mathcal{C}$ .

Son énergie totale est

$$T + V = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + g \frac{x^2}{2}$$

$$\text{soit } T + V = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{x}^2) + g \frac{x^2}{2}$$

La position d'équilibre est obtenue pour  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ , soit  $x = 0$ .

La dérivée seconde du potentiel est  $\frac{d^2 V}{dx^2} = g$ .

Elle est positive ; la position d'équilibre est donc stable au sens de la définition 3.

En outre, l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre est  $x'' + gx = 0$  ; il y a donc isochronisme des petites oscillations.

Exemple 2 : Stabilité d'un point pesant sur une courbe  $z = \frac{x^4}{2}$ .

La position d'équilibre est de nouveau atteinte pour  $x = 0$  ; à l'équilibre, la dérivée seconde du potentiel est nulle. Le potentiel est cependant minimal aux sens 1 et 2.

L'énergie totale est :

$$T + V = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + 4 x^6 \dot{x}^2) + g \frac{x^4}{2} = g \frac{a^4}{2} \quad (a \text{ constante})$$

soit, pour les petites oscillations :

$$\dot{x}^2 + g x^4 = g a^4$$

Posant  $x = a \cos \psi$ , on obtient :

$$\dot{\psi}^2 = 2 g a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi\right)$$

L'intégration fait apparaître une intégrale elliptique :

$$t = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int_0^\psi \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \xi}}$$

On montre dans ces conditions que la période est de la forme  $T = \frac{4K}{a\sqrt{2g}}$   
 où  $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \xi}}$

elle est inversement proportionnelle à l'amplitude  $a$  des oscillations.

Ainsi pour cet exemple, la stabilité est-elle assurée par le théorème de Lejeune-Dirichlet ; néanmoins les mouvements de faible amplitude admettent un temps de retour important. Les définitions de minimum I et II n'assurent donc qu'un équilibre "faiblement stable" ; nous considérerons par la suite qu'un état d'équilibre est stable s'il est "fortement stable", c'est-à-dire si le potentiel est minimum au sens III :

Définition :

Un corps élastique (E) est dans un état d'équilibre stable si et seulement si la seconde variation  $\delta^2 V$  du potentiel thermodynamique est strictement positive pour la configuration réelle, quelle que soit la

famille admissible de configurations virtuelles adoptée.

Naturellement l'équilibre est obtenu lorsque  $\delta V$ , première variation du potentiel thermodynamique est nulle.

b) Critère de stabilité des milieux continus élastiques soumis à des charges mortes

Nous donnerons essentiellement l'exemple des milieux continus élastiques soumis à un système de charges mortes ; le critère de stabilité prend dans ce cas une forme simple due à Pearson [32] et Hill [19].

Soit donc un corps élastique  $(\mathcal{C})$  occupant un domaine  $\mathcal{V}$  de frontière  $S$  dans la configuration de référence (\* voir annexe I), et un domaine  $\mathcal{V}'$ , de frontière  $S'$  dans la configuration actuelle.

Sur une partie  $S'_\theta$  de la frontière, sont administrées des contraintes de Boussinesq  $\theta_i$  constantes (charges mortes) ; la partie complémentaire  $S'_u$  est en outre maintenue fixe par rapport au repère de référence  $O a_1 a_2 a_3$ .

Soit maintenant une famille de configurations virtuelles satisfaisant aux conditions suivantes :

- les déplacements virtuels du corps  $(\mathcal{C})$  sont nuls sur  $s'_u$
- les déplacements sont continus non constants dans  $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup S$
- la configuration réelle fait partie de cette famille.

Le potentiel thermodynamique  $V$  est ici la somme du potentiel élastique  $\phi$  et du potentiel  $\phi_0$  des forces extérieures s'exerçant sur  $S'$

$$V = \phi + \phi_0$$

avec 
$$\phi = \int_{v'} \psi \, dv$$
 si  $\psi$  est le potentiel par unité

de volume, et

$$\phi_\theta = - \int_{S'_\theta} x_i \theta_{ij} n_j^\circ \, ds$$

La première variation  $\delta V$  a pour expression :

$$\delta V = \int_{v'} \delta \psi \, dv - \int_{S'_\theta} \delta x_i \theta_{ij} n_j^\circ \, ds$$

Comme 
$$\int_{S'_u} \delta x_i \theta_{ij} n_j^\circ \, ds = 0$$
, on peut aussi écrire :

$$\delta V = \int_{v'} \delta \psi \, dv - \int_{S'} \delta x_i \theta_{ij} n_j^\circ \, ds$$

Par ailleurs : 
$$\delta \psi = \theta_{ij} \frac{\delta \partial x_i}{\partial a_j}$$

d'où

$$\delta V = \int_{v'} \theta_{ij} \frac{\delta \partial x_i}{\partial a_j} \, dv - \int_{S'} \delta x_i \theta_{ij} n_j^\circ \, ds$$

à l'équilibre,  $\delta V = 0$

D'autre part :

$$\delta^2 V = \int_{v'} \delta^2 \psi \, dv - \int_{S'} \delta^2 x_i \theta_{ij} n_j^\circ \, ds$$

Or

$$\delta^2 \psi = \delta \theta_{ij} \frac{\partial \delta x_i}{\partial a_j} + \theta_{ij} \frac{\partial \delta^2 x_i}{\partial a_j}$$

soit

$$\delta^2 \varphi = \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_{kl}} \cdot \frac{\partial \delta x_i}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial \delta x_k}{\partial a_l} + \theta_{ij} \frac{\partial \delta^2 x_i}{\partial a_j}$$

En introduisant  $\varphi_{ij kl} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{ij} \partial x_{kl}} = \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_{kl}}$ ,

on obtient

$$\delta^2 \varphi = \varphi_{ij kl} \frac{\partial \delta x_i}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial \delta x_k}{\partial a_l} + \theta_{ij} \frac{\partial \delta^2 x_i}{\partial a_j}$$

d'où

$$\delta^2 V = \int_{V'} \varphi_{ij kl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv + \int_{V'} \theta_{ij} \frac{\partial \delta^2 x_i}{\partial a_j} dv - \int_{S'} \theta_{ij} n_j^o \delta^2 x_i ds$$

Les deux dernières intégrales s'annulent.

En effet, le théorème de Stokes fournit :

$$\int_{S'} \theta_{ij} n_j^o \delta^2 x_i ds = \int_{V'} \frac{\partial}{\partial a_j} (\delta^2 x_i \theta_{ij}) dv$$

soit

$$\int_{S'} \theta_{ij} n_j^o \delta^2 x_i ds = \int_{V'} \frac{\partial \delta^2 x_i}{\partial a_j} \theta_{ij} dv$$

On obtient enfin

$$\delta^2 V = \int_{V'} \varphi_{ij kl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv$$

On peut donc énoncer le

### Critère de stabilité

Un corps élastique soumis à des charges mortes est stable dans sa configuration actuelle si, quelque soit le champ de vecteurs  $u_i$  continu, non constant dans  $\overline{V}$ , et s'annulant sur  $S_u$  l'intégrale

$$\int_{v'} \varphi_{ij kl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv \quad (1-7)$$

est strictement positive.

La condition critique est :

$$\int_{v'} \varphi_{ij kl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv = 0 \quad (1-8)$$

Soit en particulier un corps élastique isotrope pour lequel le tenseur des contraintes s'exprime en fonction d'un paramètre  $\lambda$  positif :

$$\theta_{lj} = -\lambda \theta_{lj}^* \quad (1-9)$$

La valeur critique  $\lambda_{cr}$  du paramètre  $\lambda$  est fournie par la relation :

$$\int_{v'} \chi_{ij kl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv = \lambda_{cr} \int_{v'} \theta_{lj}^* \delta_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv \quad (1-10)$$

(Voir Annexe 1)

### c) Utilisation du critère de stabilité

On connaît peu d'exemples d'utilisation du critère de stabilité sous sa forme (1-7) ; citons essentiellement l'article de LEVINSON [27], relatif à la colonne d'Euler. Les difficultés mathématiques soulevées par l'utilisation pratique de ce critère sont en effet considérables ; en particulier, les résultats importants obtenus en Résistance des Matériaux [35] ne sont jamais déduits de ce critère. Nous citons en 1-7 b un cas où ces théories sont en défaut et où une application correcte du critère (1-7) serait susceptible de fournir des résultats plus proches des données expérimentales.

L'utilisation des méthodes numériques modernes, et en particulier de la méthode des éléments finis, permet au contraire d'envisager une exploitation très large de ce critère.

Néanmoins, ainsi que nous le verrons ci-dessous, l'utilisation du seul critère de stabilité ne peut fournir toutes les informations nécessaires à l'étude complète de l'instabilité des structures.

#### 4 - INSTABILITE DES MILIEUX CONTINUS ELASTIQUES

L'instabilité d'un système élastique peut se manifester de différentes façons suivant le système considéré ; nous tenterons de dégager ici les principaux modes d'instabilité en les illustrant d'exemples simples.

##### a) Equilibre adjacent

Nous reprenons l'exemple classique de la colonne d'Euler. (Fig. 1-4-1)

Pour une charge  $P_a$  inférieure à la charge critique  $P_{cr}$  l'état originel (a) est stable ; pour  $P_b > P_{cr}$  la colonne prend une nouvelle forme d'équilibre (b) voisine de la première. L'équilibre (b) est stable, alors que l'équilibre (a) est instable pour la charge  $P_b$ .

L'instabilité se manifeste ici par une bifurcation d'une forme d'équilibre instable à une forme d'équilibre stable adjacent.

Il est habituel de représenter l'angle  $\theta$  de la tangente au sommet et de la verticale en fonction de la force  $P$  : nous avons dans ce cas la figure (1-4-2).

Pour  $P < P_{cr}$  la compression est stable ; en A il y a bifurcation, et les états fléchis de la barre sont stables jusqu'en B(B') où la limite élastique est atteinte. L'angle  $\theta$  devient alors très important si l'on fait croître la charge. Les états indiqués par des X sont instables.

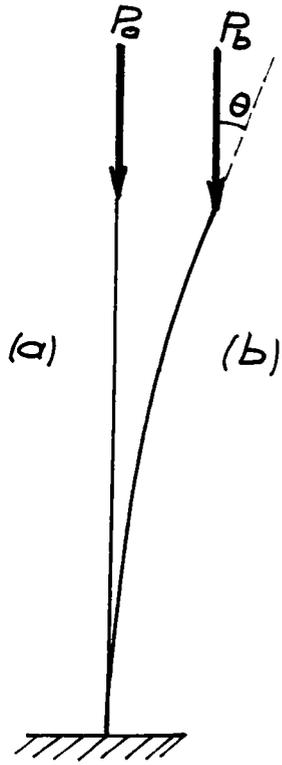


Fig 1-4-1

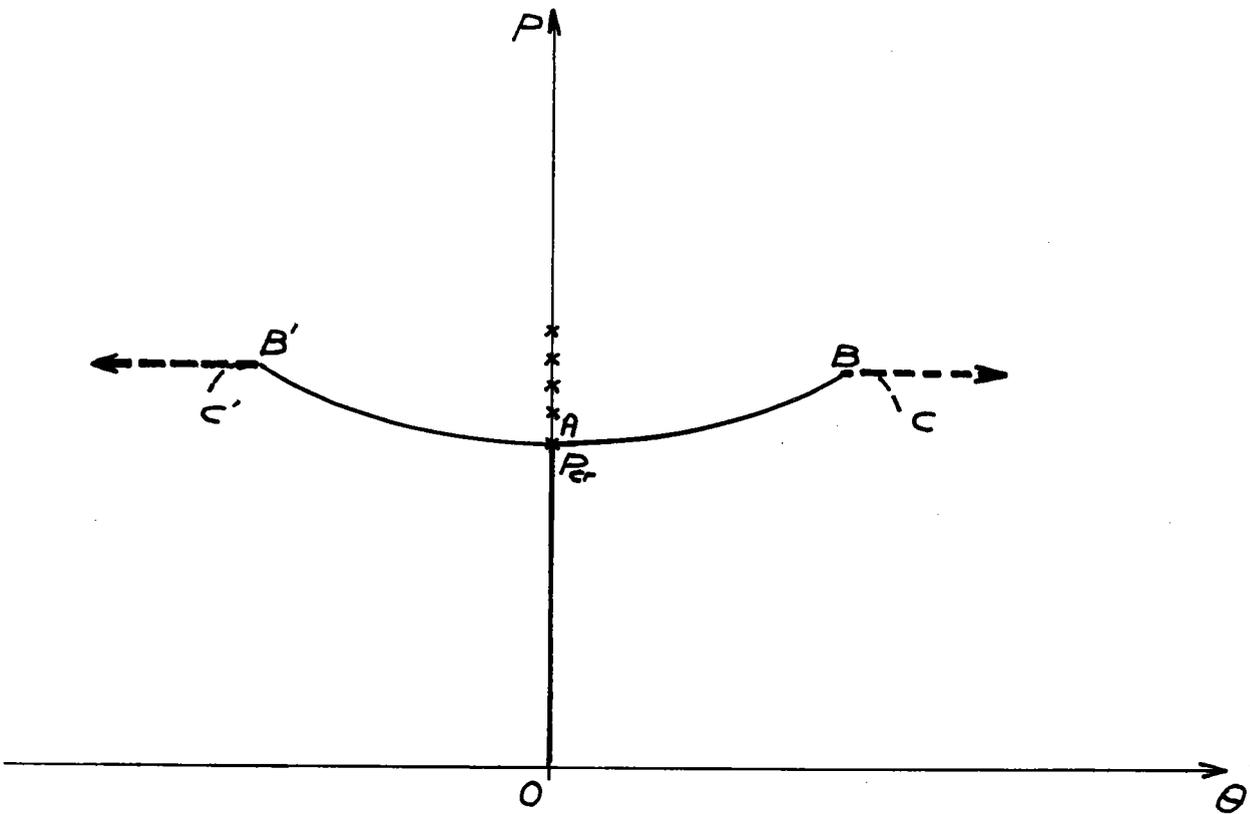


Fig 1-4-2

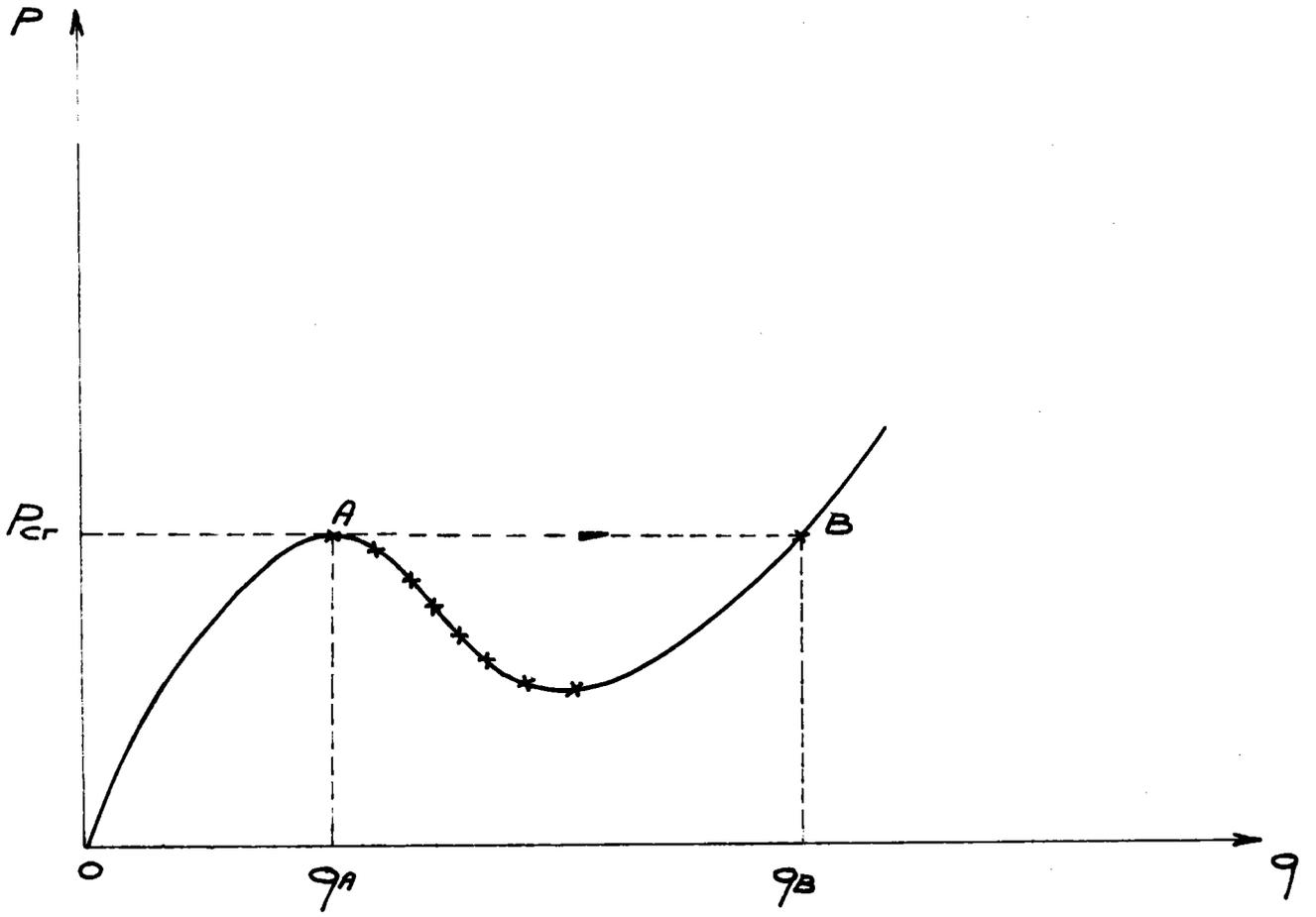


Fig 1-4-3

b) Equilibre éloigné

Pour de nombreux systèmes élastiques, l'instabilité se manifeste par un saut brutal du système vers un autre état d'équilibre éloigné du premier état.

De tels systèmes sont illustrés par la figure 1-4-3

Où nous supposons le système déterminé par la seule variable  $q$ .

Lorsque la charge  $P$  croît et atteint la valeur critique  $P_{cr}$ , la déformation passe brutalement de  $q_A$  à  $q_B$  ; en B l'équilibre est de nouveau stable. A est appelé point limite.

c) Mise en mouvement

Il existe enfin des systèmes pour lesquels il n'y a pas de formes d'équilibres pour  $P > P_{cr}$  ; le système se met donc en mouvement à partir de la charge critique.

La stabilité d'un tel système ne peut être étudiée que par des méthodes dynamiques.

Nous reprenons maintenant l'étude détaillée des phénomènes décrits ci-dessus.

## 5 - BIFURCATION VERS UN EQUILIBRE ADJACENT

a) Problème d'Euler (Fig. 1-5-1)

Soit une barre, de longueur  $l$ , encastree en O, soumise à son extrémité à une force de compression  $P$  ; on suppose qu'il existe un état d'équilibre adjacent où la barre conserve une forme fléchie.

Dans une section de cote  $z$ , le moment fléchissant est :

$$M = - P (f - y)$$

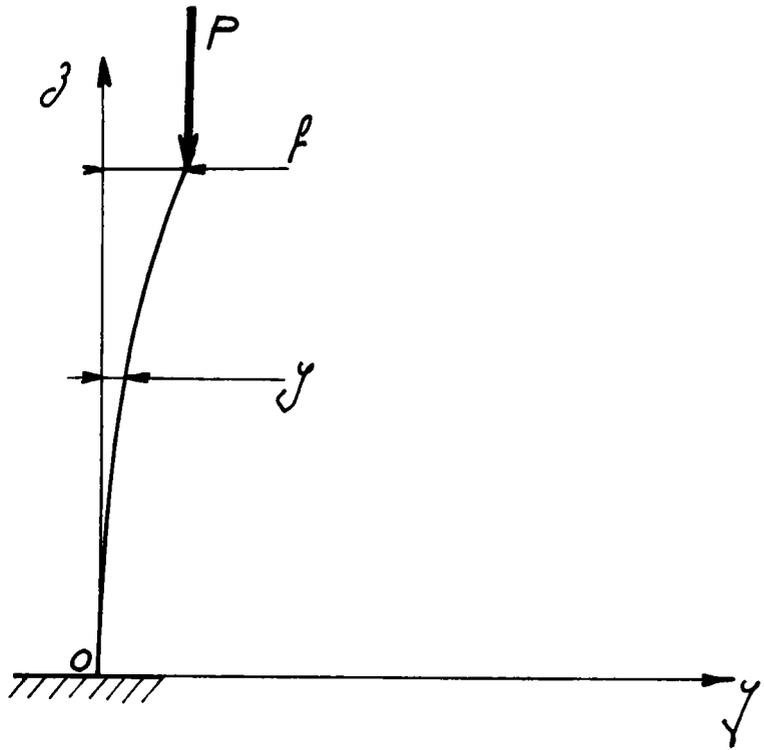


Fig 1-5-1

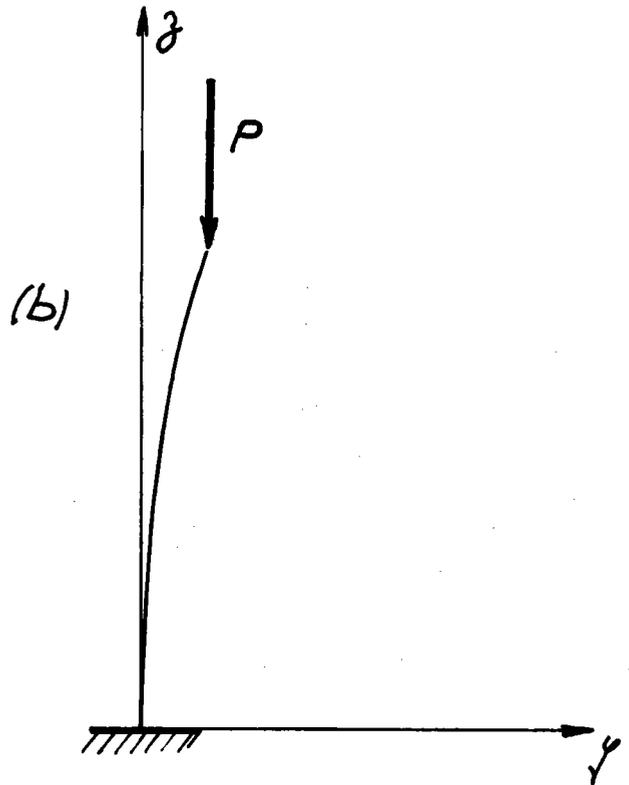
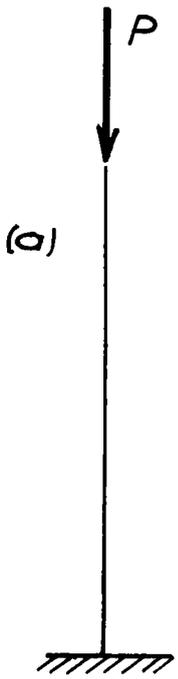


Fig 1-5-2

L'équation différentielle donnant la courbe élastique est donc :

$$E I \frac{d^2 y}{dz^2} = P (f - y) \quad (1-11)$$

soit 
$$E I \frac{d^2 y}{dz^2} + p y = P f$$

La solution doit satisfaire aux conditions aux limites

$$\begin{cases} y(0) = 0 & y(1) = f \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $\omega^2 = \frac{P}{EI}$  ; la solution générale est

$$y = A \cos \omega z + B \sin \omega z + f$$

Les conditions aux limites sont satisfaites si :

$$A = -f ; \quad B = 0 \quad ; \quad f \cos \omega l = 0$$

Ce qui exige  $\omega l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$  si  $f \neq 0$  ( $n$  entier)

Cette équation fournit la valeur de  $\omega$  pour laquelle il y a instabilité ; cette valeur correspond à la plus petite valeur positive de  $n$  annulant  $\cos (2n - 1) \frac{\pi}{2}$  soit  $n = 1$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \omega l &= \frac{\pi}{2} \\ \text{et } P &= \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \end{aligned}$$

Notons que l'équation différentielle (1-11) repose sur l'hypothèse des petites déformations à partir de l'état non fléchi.

b) Méthode Energétique

Dans l'état (b) de la figure (1-5-2), l'énergie de déformation s'est accrue de  $\Delta V$ , en effet, à l'énergie de compression (a) s'est ajoutée l'énergie de flexion de la poutre. Simultanément l'énergie potentielle a diminué du travail  $\Delta T$  de la force P dans son déplacement vertical.

L'état fléchi (b) sera stable si

$$\Delta V - \Delta T > 0$$

et instable si

$$\Delta V - \Delta T < 0$$

l'état critique étant obtenu pour  $\Delta V = \Delta T$

Supposons la courbe élastique donnée par

$$y = f \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right)$$

Cette équation satisfait à toutes les conditions aux limites du problème :  $y(0) = y'(0) = 0$  ;  $y(l) = f$  ,  $y''(l) = 0$

Le déplacement vertical de l'extrémité de la poutre est

$$z = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{dz} dz = \frac{\pi^2}{16} \frac{f^2}{l}$$

Le travail effectué par la force P est donc

$$\Delta T = \frac{\pi^2}{16} \frac{f^2 P}{l}$$

Par ailleurs, le moment fléchissant est

$$M = - E I \frac{d^2 y}{dz^2} = E I \frac{\pi^2}{4} \frac{f}{l^2} \frac{\cos \pi z}{2}$$

En négligeant l'énergie de compression, l'énergie de déformation est donc

$$\Delta V = \int_0^1 \frac{M^2}{2 E I} dz = \frac{\pi^4 E I}{64 l^3} f^2$$

En égalant  $\Delta V$  et  $\Delta T$ , on obtient bien  $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$

c) Méthode de Ritz - Principe de Rayleigh

Supposons la courbe élastique convenablement représentée par une fonction  $y(z)$  :

$$y(z) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(z)$$

où les  $f_i$  sont des fonctions satisfaisant individuellement aux conditions aux limites du problème, et les  $a_i$  des constantes en nombre fini.

Dans l'hypothèse où la structure considérée emmagasine seulement, de l'énergie de déformation de flexion, la variation d'énergie due à l'instabilité est

$$\Delta V = \frac{EI}{2} \int_0^1 y''^2 dz$$

Le travail des forces extérieures est d'autre part

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^1 \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 dz$$

La valeur critique de la charge est obtenue pour

$$\Delta V = \Delta T, \text{ soit}$$

$$P = EI \frac{\int_0^1 \left( \frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^1 \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 dz}$$

Pour obtenir  $P_{cr}$ , il convient de déterminer les coefficients  $a_i$  qui rendent minimale l'expression obtenue ci-dessus : écrivons que les dérivées  $\frac{\partial P}{\partial a_i}$  sont nulles.

$$\int_0^1 \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 dz \cdot \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^1 \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 dz - \int_0^1 \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 dz \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^1 \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 dz = 0$$

soit 
$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^1 \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 dz - \frac{P}{EI} \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^1 \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 dz = 0$$

Comme d'autre part  $\frac{\partial y'}{\partial a_i} = f'_i$  et  $\frac{\partial^2 y''}{\partial a_i^2} = f''_i$ ,

il vient :

$$2 \int_0^1 \frac{d^2y}{dz^2} \cdot f''_i dz - \frac{P}{EI} \int_0^1 \frac{dy}{dz} \cdot f'_i dz = 0$$

En remplaçant  $\frac{dy}{dz}$  et  $\frac{d^2y}{dz^2}$  par :

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{df_i}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2f_i}{dz^2}$$

et en effectuant les intégrations, il vient une équation linéaire en  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

On obtient donc finalement un système linéaire homogène d'ordre  $n$  qui admet des solutions non nulles lorsque son déterminant  $\Delta$  est nul ; cette condition permet le calcul effectif de  $P_{cr}$  qui n'est autre que la plus petite racine de  $\Delta$ .

Le choix des fonctions  $f_i$  a naturellement une grande influence sur l'approximation obtenue pour  $P_{cr}$  ; la méthode illustrée ici dans le cas d'une poutre simple est applicable à de nombreux problèmes ; néanmoins le système linéaire obtenu est un système "plein", présentant peu de coefficients nuls. L'inversion ne peut donc être pratiquée avec les moyens de calcul actuels si les dimensions de la matrice sont trop importantes ; pour cette raison, la méthode de Ritz est limitée à des corps de forme simple nécessitant peu de fonctions  $f_i$ .

La solution  $y(z)$  obtenue constitue le premier mode d'instabilité.

Les modes supérieurs peuvent être obtenus en substituant à  $P_{cr}$  les racines d'ordre supérieur de l'équation caractéristique (charges critiques d'ordre supérieur).

La méthode de Ritz ne fournit naturellement que  $n$  modes d'instabilité de la structure, bien qu'il en existe une infinité ; les résultats seront donc d'autant plus satisfaisants que la valeur de  $n$  sera élevée.

Le principe de Rayleigh fournit le sens de l'erreur résiduelle : soit en effet  $y$  la solution calculée grâce à la méthode de Ritz et  $y_1$  le mode d'instabilité réel.

Nous supposons  $y \neq y_1$

$$\text{Pour } y_1 : \Delta V(y_1) - P_{cr} \Delta T^*(y_1) = 0$$

Par contre, pour  $y$  :

$$\Delta V(y) - P_{cr} \Delta T^*(y) > 0 \quad \text{car les états adjacents sont stables.}$$

Si en d'autres termes on calcule  $\frac{\Delta V}{\Delta T^*}$  en introduisant dans les fonctionnelles  $\Delta V$  et  $\Delta T^*$  un champ de déplacements différent du champ réel, la charge critique obtenue est supérieure à la charge réelle. Ce résultat constitue le principe de Rayleigh.

## 6 - STRUCTURES IMPARFAITES

La majeure partie des structures réelles présente des phénomènes d'instabilité différents de ceux que nous venons d'aborder ; tout d'abord les charges critiques observées sont le plus souvent inférieures aux charges critiques calculées. (Fig. 1-6-1).

Les structures réelles diffèrent en effet des structures idéales étudiées par des imperfections de forme ou de chargement [26] qui affectent les paramètres dont dépend le potentiel : la structure idéale associée à une structure réelle présente une bifurcation dans le domaine linéaire, la structure réelle une transition brutale dans le domaine non linéaire. On peut dire en un sens que le degré de non-linéarité est proportionnel à l'importance des imperfections.

L'instabilité peut également se manifester sans charge critique ; c'est l'instabilité par divergence pour laquelle la structure se déforme de manière importante dès l'apparition des forces extérieures. La figure (1-6-2) illustre une telle situation dans le cas de la colonne d'Euler soumise à une force latérale supplémentaire.

Le phénomène s'explique de la manière suivante : la rigidité de la poutre est diminuée sous l'effet de la force axiale, de sorte que la déformation produite par une force latérale parasite est considérablement amplifiée.

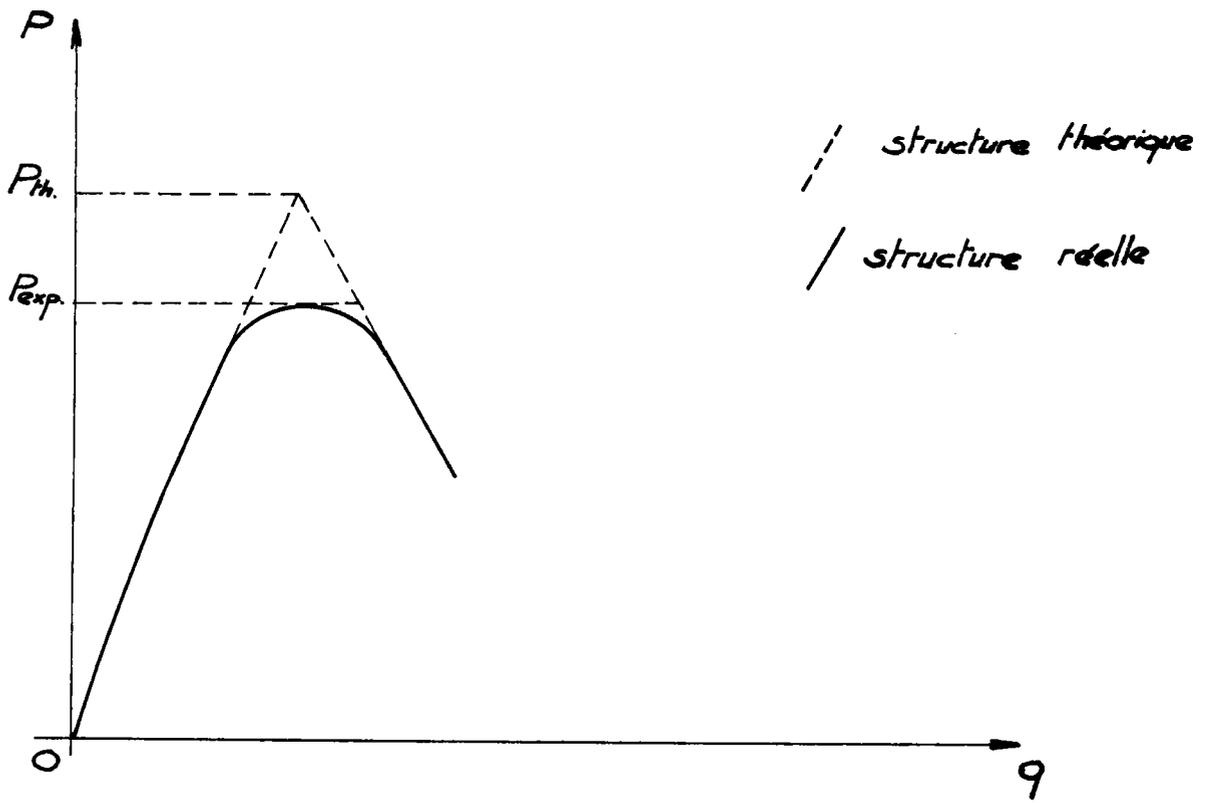


Fig 1-6-1

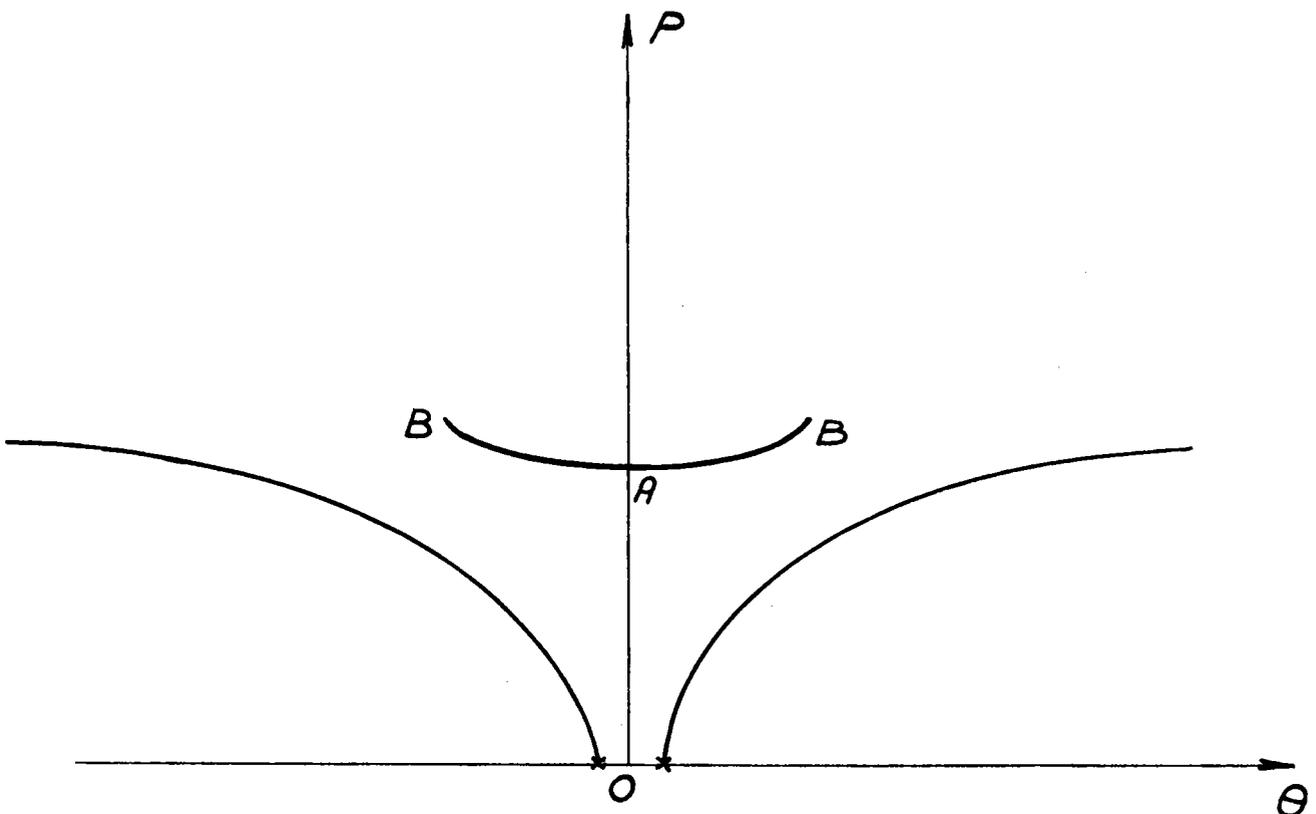


Fig 1-6-2

L'instabilité par divergence a été mise en évidence expérimentalement dès le début du chargement dans le cas d'un réservoir cylindrique en compression axiale en utilisant les méthodes de l'interférométrie holographique [1].

## 7 - TRANSITION BRUTALE VERS UN EQUILIBRE ELOIGNE

Pour la majorité des systèmes réels l'instabilité se manifeste par une transition brutale vers un état d'équilibre situé à distance finie de l'état d'équilibre instable ; nous nous proposons de mettre en relief les propriétés essentielles de ce phénomène au moyen de quelques exemples simples.

### a) Charpente de Von Mises [31]

Les deux poutres élastiques constituant la charpente sont articulées en A, B et C ; en C elles supportent une charge P verticale (Fig. 1-7-1).

Nous supposons que le déplacement du point C s'effectue suivant une verticale ; les déformations du système peuvent être finies. Dans l'état déformé, l'équation de l'équilibre est :

$$N = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

où N est la force de compression subie par chacune des poutres, et  $\alpha$  l'angle actuel avec la verticale.

Par ailleurs, la variation de longueur des poutres est :

$$\Delta l = \frac{a}{\sin \alpha_0} - \frac{a}{\sin \alpha}$$

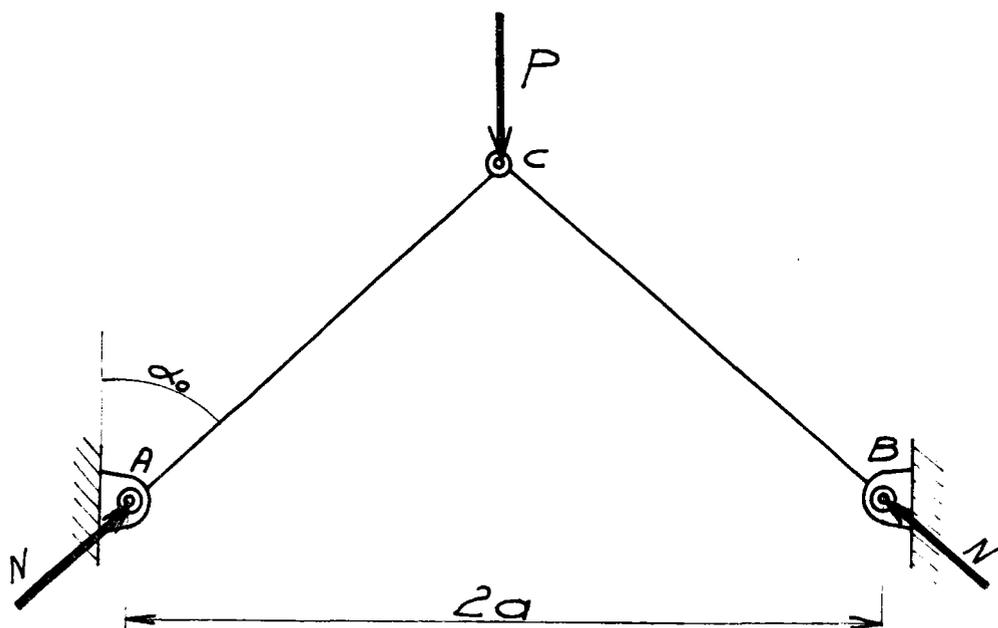


Fig 1-7-1

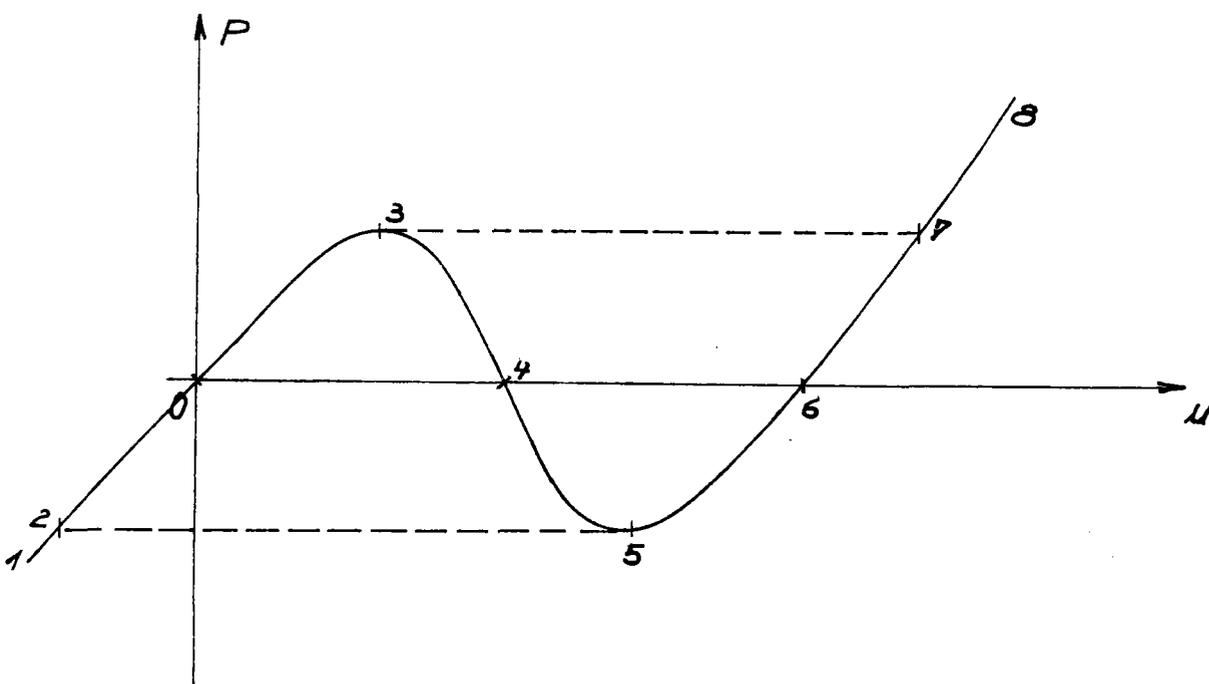


Fig 1-7-2

De sorte que si  $l_0$  est la longueur initiale des poutres, on trouve :

$$N = \frac{E S \Delta l}{l_0} = E S \left( 1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right)$$

En égalant les deux valeurs de N ainsi obtenues, on a :

$$P = 2 E S \left( 1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right) \cos \alpha$$

Le déplacement vertical u du point C vaut :

$$u = a \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_0}$$

Il vient alors après calculs :

$$P = 2 E S \left( 1 - \frac{u}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \left[ (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left( 1 - \frac{u}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2)^{-\frac{1}{2}} - \cos \alpha_0 \right]$$

Cette relation donnant P (u) est représentée Fig. 1-7-2 ;

Chaque point du graphe représente un état d'équilibre du système.

Nous faisons maintenant croître la charge depuis 0 : lorsque le point 3 est atteint, le système est en équilibre instable, et il passe brutalement à l'équilibre 7 (Fig. 1-7-3). Si la force P s'accroît encore, l'équilibre atteint les points 8.

Nous déchargeons maintenant le système, à partir de l'état final atteint ci-dessus : le point représentatif est situé successivement en 8, 7, 6 où la charge est nulle (Fig. 1-7-4) ; si l'on introduit une charge négative, le point 5 est atteint.

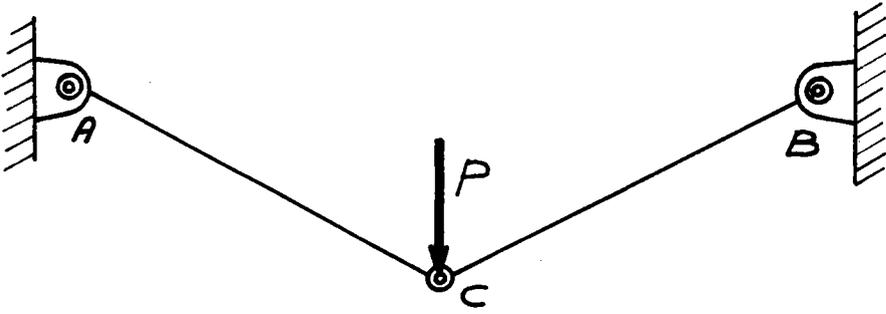


Fig 1-7-3

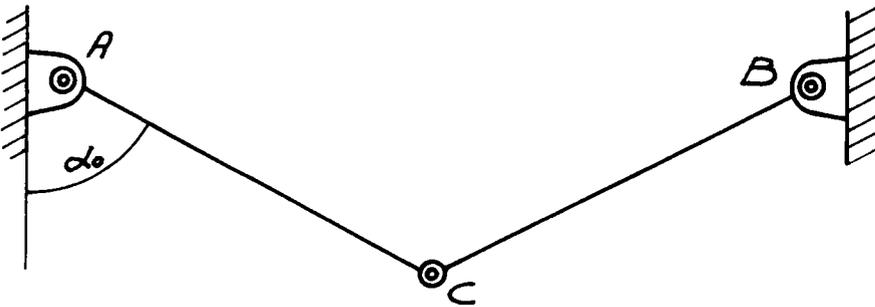


Fig 1-7-4

Il est à noter que

- il n'y a pas de saut 7-3

- l'état de retour à la charge nulle est complètement différent de l'état initial (Fig. 1-7-4). Si la charge est encore diminuée, on obtient un saut en retour 5-2, et les états ultérieurs sont sur la branche 2-1.

Les états d'équilibre situés de 3 à 4 sont instables ; calculons en effet l'énergie potentielle  $\phi$  du système pour une charge  $P_0$  fixée.

L'énergie potentielle de déformation est

$$V = 2 \cdot \frac{N^2 l_0}{2 ES}$$

soit :

$$V = ES l_0 (1 - \cos \alpha_0 \left[ \operatorname{tg}^2 \alpha_0 - \left(1 - \frac{u}{a} \operatorname{tg} \alpha_0\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}})$$

et l'énergie potentielle extérieure :

$$T = - P_0 u$$

$$\text{D'où } \phi = ES l_0 (1 - \cos \alpha_0 \left[ \operatorname{tg}^2 \alpha_0 - \left(1 - \frac{u}{a} \operatorname{tg} \alpha_0\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}) - P_0 u,$$

relation représentée Fig. 1-7-5 b.

Le résultat énoncé est en évidence : il y a un maximum isolé du potentiel en B ; les états A et C sont par contre stable ; l'énergie potentielle libérée lors du saut est transformée en énergie cinétique, de sorte que le système oscille autour de sa nouvelle position d'équilibre stable.

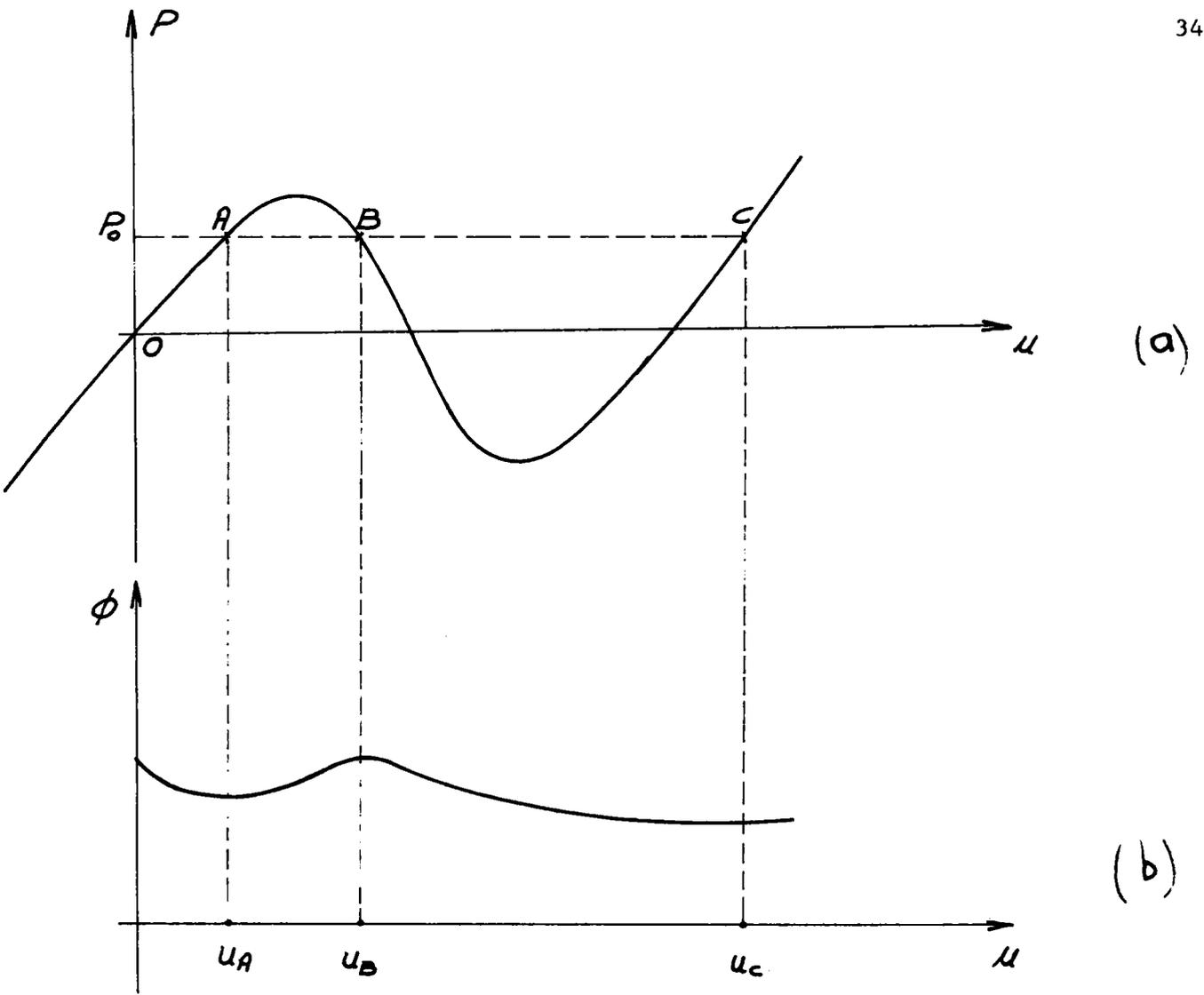


Fig 1-7-5

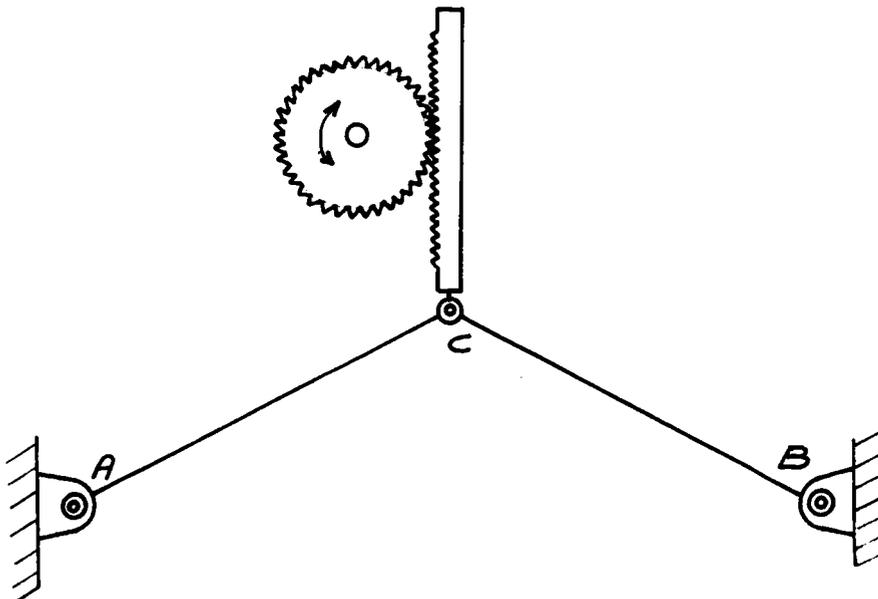


Fig 1-7-6

Notons enfin que les états représentés de 3 à 4 (Fig. 1-7-2) peuvent être atteints pour un autre mode de chargement, si en effet on substitue à la charge morte P précédente une charge modulée par un dispositif convenable (Fig. 1-7-6), réalisant une adaptation cinématique du chargement, il est possible de décrire la courbe (1-7-2) par une succession d'états stables.

b) Stabilité d'un réservoir cylindrique en compression

La compression axiale d'un réservoir cylindrique permet de mettre en évidence un nouvel exemple de saut vers un équilibre éloigné. L'étude par les méthodes d'équilibre adjacent [35] ne permet pas de comprendre le phénomène d'instabilité.

En postulant un déplacement radial de la forme

$$w = -A \sin \frac{n \pi x}{l}$$

durant le flambement (Fig. 1-7-7), et en exploitant la méthode énergétique on obtient en effet la valeur critique :

$$\sigma_{cr} = \frac{E h}{a \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}$$

Cette valeur ne rend pas compte des résultats expérimentaux ; on observe en effet une valeur critique beaucoup plus faible. Certaines expériences fournissent la moitié de la charge critique ainsi obtenue. De plus la déformée du réservoir est différente de celle que postule Timoshenko (flambement en facettes).

Les calculs de Karman et Tsien [24] conduisent à une courbe  $p(\xi)$  ( $\xi$  déformation axiale) représentée Fig. 1-7-8.

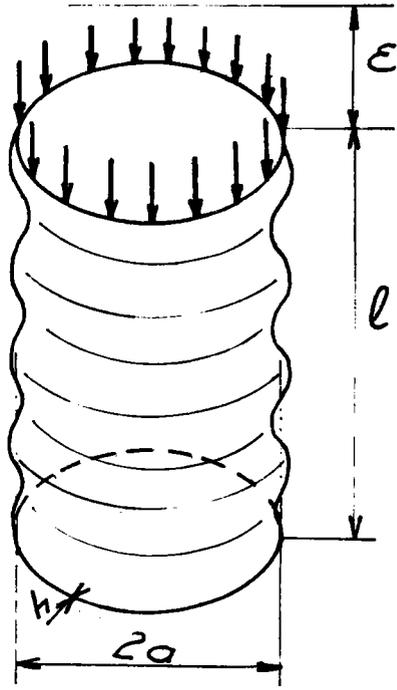


Fig 1-7-7

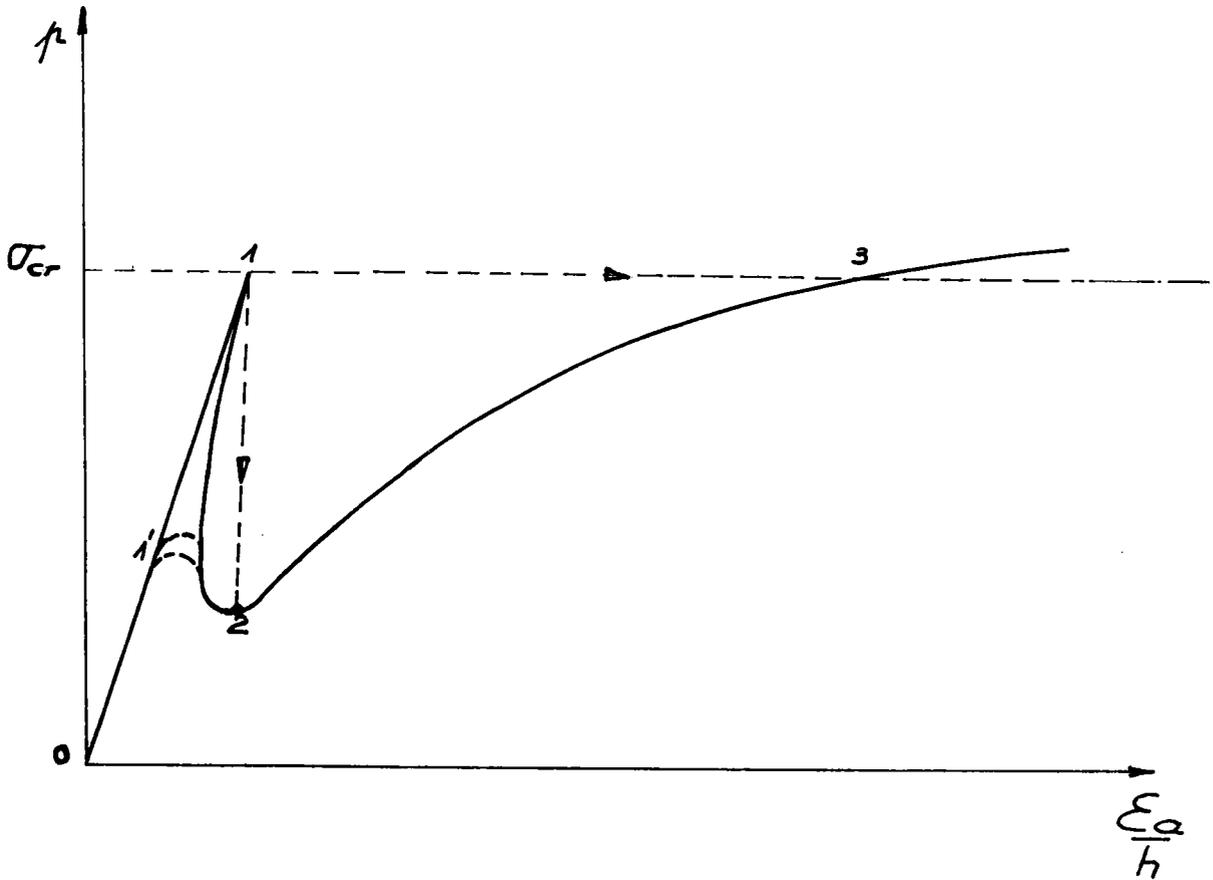


Fig 1-7-8

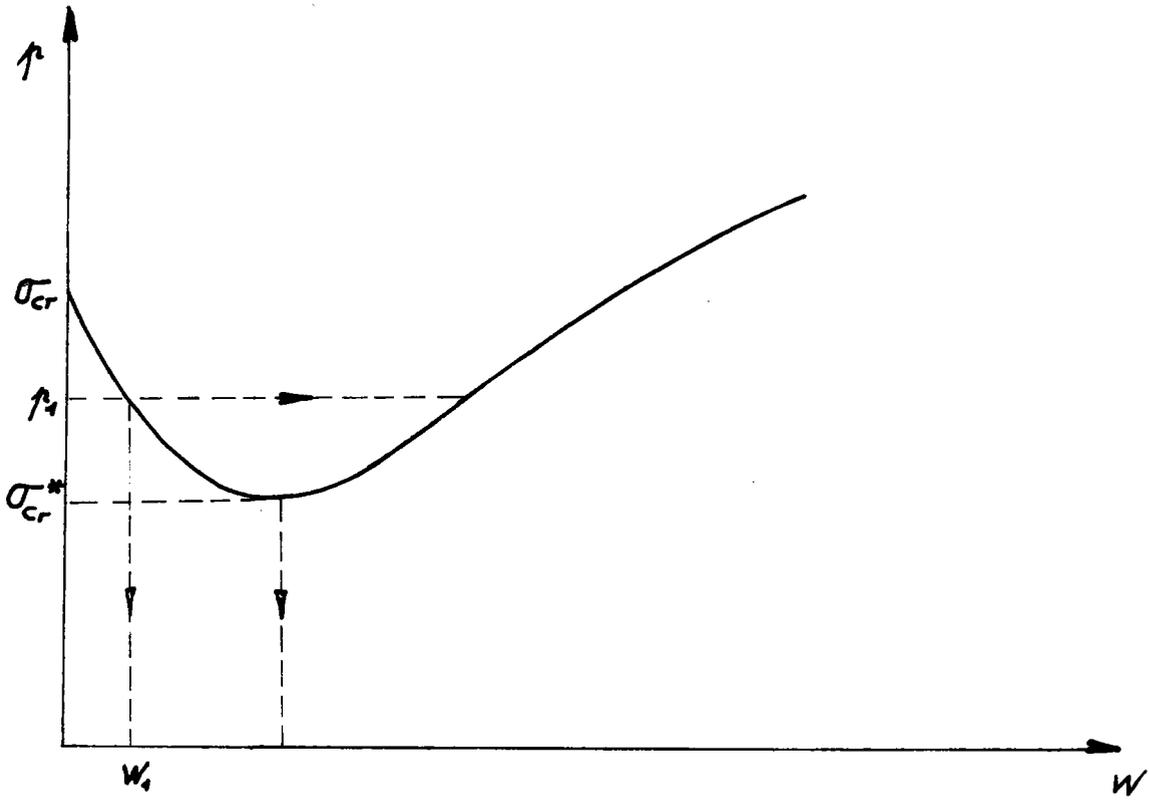


Fig 1-7-9

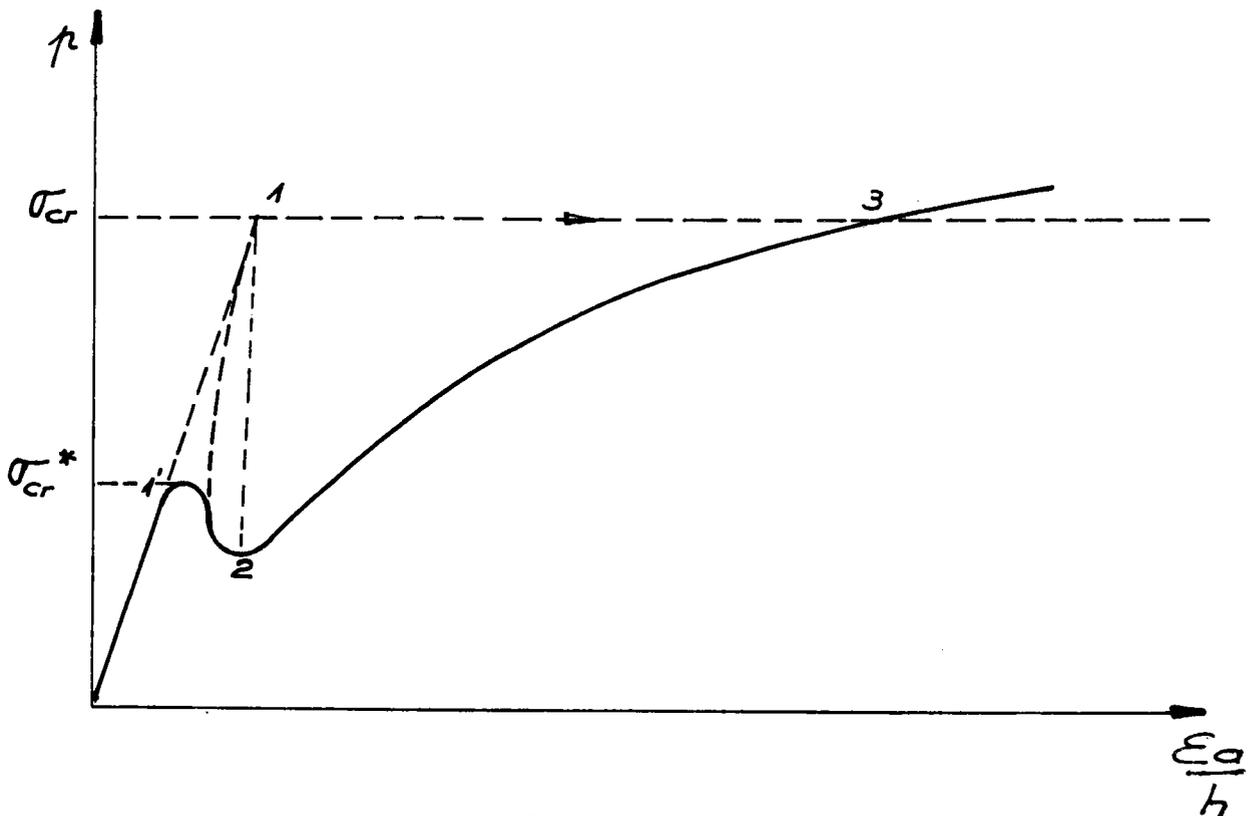


Fig 1-7-10

Si on fait croître la charge  $p$ , le réservoir fait preuve d'une bonne rigidité sur la branche 0-1 ; les contraintes augmentent rapidement en suivant une loi linéaire jusqu'à l'état 1. On observe alors un saut à l'état 3 si la charge reste constante, à l'état 2 si la déformation axiale reste constante. Dans ce deuxième cas, une augmentation de la charge place le réservoir dans un état situé sur la branche 2-3 de la courbe.

Sur la figure 1-7-9 est représentée la charge  $p$  en fonction du déplacement radial  $w_j$  à partir de la valeur  $\sigma_{cr}^*$  un saut est possible sur la branche droite de la courbe : si en effet il existe, pour la valeur  $p_1$  par exemple, une déflexion latérale accidentelle au moins égale à  $w_1$ , le saut est inévitable. A l'évidence, plus les défauts de structure sont importants et plus la charge critique observée est faible ; une expérience parfaite, c'est-à-dire conduite sur un cylindre parfait, avec une compression rigoureusement axiale, doit fournir la charge critique supérieure  $\sigma_{cr}$  déterminée par les méthodes de l'équilibre adjacent. Les calculs de l'ingénieur doivent au contraire tenir compte de la charge critique inférieure  $\sigma_{cr}^*$ . Les défauts des structures réelles amènent à modifier la courbe 1-7-8 [10] (Fig. 1-7-10).

Un cylindre réel, avec des défauts, fournit un pic beaucoup moins élevé.

## 8 - MISE EN MOUVEMENT

Nous envisageons ici le cas où il existe une charge à partir de laquelle le système considéré ne possède plus d'état d'équilibre, et se met en mouvement.

Nous examinerons cette éventualité sur l'exemple unique d'une colonne élastique soumise à une charge tangente au sommet (Fig. 1-8-1) [31].

Ce n'est pas un système conservatif.

Ce mode de chargement peut être réalisé en fixant une fusée au sommet de la colonne.

Le moment fléchissant dans une section quelconque de la colonne fléchie est, en adoptant une méthode d'équilibre adjacent :

$$M = - P (f - y) \cos \theta + P \sin \theta (1 - z)$$

soit, pour une déflexion suffisamment faible :

$$M = - P (f - y) + P \theta (1 - z)$$

Par conséquent :

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = P (f - y) - P \theta (1 - z)$$

On élimine  $f$  en dérivant :

$$EI y''' = - P y' + P \theta$$

soit en posant

$$\alpha = \sqrt{P/EI} :$$

$$y''' + \alpha^2 y' = \alpha^2 \theta , \text{ équation dont la solution}$$

est de la forme :

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + C + \theta z$$

Elle doit vérifier les conditions aux limites :

$$y(0) = 0 ; y'(0) = 0$$

$$y'(1) = \theta ; y''(1) = 0$$

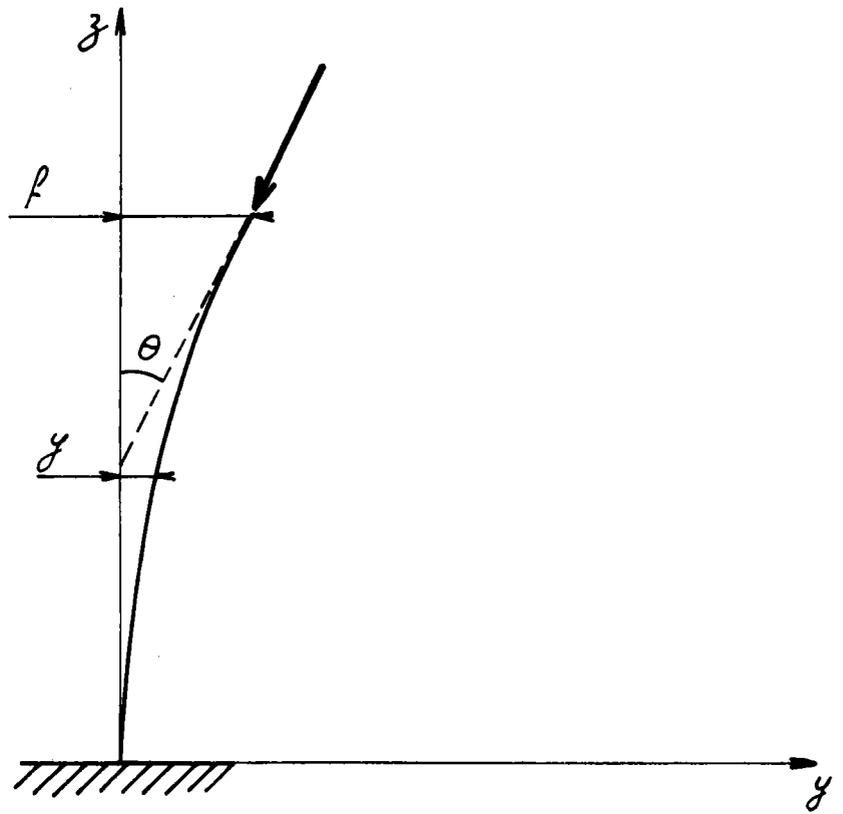


Fig 1-8-1

On obtient un système de quatre équations :

$$A \cos \alpha l - B \sin \alpha l = 0$$

$$A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0$$

$$\alpha A + \theta = 0$$

$$B + C = 0$$

On vérifie aisément que ce système n'admet d'autre solution que la solution triviale  $A = B = C = \theta = 0$

Ceci implique qu'il n'existe pas d'état d'équilibre de la poutre autre que la position verticale ; on ne peut cependant pas en conclure que la position verticale est stable. Une perturbation peut en effet induire des oscillations de la poutre autour de sa position d'équilibre ; une étude dynamique est donc indispensable pour décider de la stabilité du système.

Nous supposons pour ceci que la masse de la poutre est concentrée au sommet et que (hypothèse des petits mouvements) cette charge se déplace seulement suivant l'axe des  $y$ . L'état du système est alors déterminé par la fonction  $f(t)$ .

Le moment fléchissant vaut, en introduisant les forces d'inertie :

$$M = -P(f - y) + (P\theta + m f'') (1 - z)$$

On obtient donc l'équation :

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 f - (\alpha^2 \theta + \frac{m}{EI} f'') (1 - z)$$

L'intégration en  $z$  fournit, pour une valeur fixée de  $t$  :

$$y = \frac{1}{\alpha} \left( \theta + \frac{m}{\alpha^2 EI} f'' \right) (\alpha l \cos \alpha z - \sin \alpha z - \alpha l + z) + f(1 - \cos \alpha z)$$

solution vérifiant les conditions aux limites :

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Pour  $z = 1$ , on doit vérifier que :

$$y(1) = f \quad ; \quad y'(1) = \theta$$

c'est-à-dire

$$\left(\theta + \frac{m f''}{\alpha^2 EI}\right) (\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l) - \alpha f \cos \alpha l = 0$$

et

$$\left(\theta + \frac{m f''}{\alpha^2 EI}\right) (1 - \alpha l \sin \alpha l - \cos \alpha l) + \alpha f \sin \alpha l = \theta$$

En éliminant  $\theta$  entre ces deux équations, il vient

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

où l'on pose

$$\omega^2 = \frac{\alpha^3 EI}{m (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l)}$$

Si  $\omega^2$  est positif, on obtient un mouvement périodique d'amplitude constante ; si au contraire  $\omega^2$  est négatif la solution est apériodique, d'amplitude croissante et non majorée. Dans ce dernier cas il y a donc instabilité.

La valeur critique  $P_{cr}$  est obtenue pour

$$\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l = 0$$

ceci conduit à

$$P_{cr} = 20,19 \frac{EI}{l^2}$$

Notons enfin un paradoxe de la solution : si la condition critique  $\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l = 0$  est vérifiée on tire de l'équation  $y(l) = f$

(c'est-à-dire :

$$\left( \theta + \frac{m f''}{\alpha^2 EI} \right) (\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l) = \cos \alpha l \cdot f$$

que  $f = 0$ . Il semble donc que la colonne doive rester immobile pour la valeur critique, en contradiction avec le fait que la solution apériodique s'installe.

En fait, pour la condition critique, la pulsation  $\omega$  est infinie : la rigidité de la barre est donc très grande, et l'on voit donc pourquoi elle ne peut être déformée. La solution apériodique a lieu dès que  $\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l < 0$ .

## 9 - CONCLUSION

L'étude de la stabilité des structures ne peut se limiter à la détermination des charges critiques fournies par les théories linéarisées ; il apparait en effet que la rupture peut se produire pour des valeurs de la charge très inférieures à la charge critique de la structure idéale associée. Il convient donc de s'assurer de la rigidité des structures imparfaites dans le domaine pré-critique, d'évaluer les charges critiques dans un domaine non-linéaire ; enfin il serait souhaitable de tester la rigidité post-critique, ou les déformées obtenues dans une transition brutale vers un autre équilibre.

## Annexe 1

RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS1°) Potentiel élastique

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $Oa_1a_2a_3$  ; soit  $V$  un domaine borné, de frontière  $S$ , occupé par un corps élastique ( $\mathcal{B}$ ). Les variables de Lagrange  $a_i$  définissent la position des "molécules" du corps élastique dans cette configuration, appelée configuration de référence. A un instant ultérieur  $t$ , le solide ( $\mathcal{B}$ ) occupe un domaine  $V'$  de l'espace, de frontière  $S'$  ; les variables d'Euler  $x_i$  déterminent la position des "molécules" dans cette dernière configuration, appelée configuration actuelle. La transformation est une bijection de classe  $C_2$  sur  $\bar{V} = V \cup S$ , qui transforme  $V$  en  $V'$ .

Elle est définie par les trois fonctions :

$$x_1(a_1, a_2, a_3), \quad x_2(a_1, a_2, a_3), \quad x_3(a_1, a_2, a_3)$$

Il est nécessaire dans ces conditions que le déterminant jacobien  $J = \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)$  ne soit jamais nul ; il en résulte que  $\left( \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)$ , étant égal à 1 pour  $t = 0$ , reste positif quel que soit  $t$ . On posera  $\gamma_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ .

Le corps ( $\mathcal{B}$ ) est élastique ; il existe donc un potentiel élastique  $\phi$  :

$$\phi = \int_V \psi \, dv.$$

La quantité  $\psi_{dv}$  est le potentiel d'un élément matériel de volume  $dv$  ; pour une transformation adiabatique, le potentiel élastique s'identifie avec l'énergie interne. Pour une transformation isotherme, il s'identifie avec l'énergie libre.

Pour un corps élastique,  $\psi$  ne dépend que de l'état initial ( $a_i$ ) et de la transformation  $\gamma_{ij}$  ; il vérifie en outre le Principe d'objectivité :

Le potentiel élastique ne change pas dans une rotation du corps  $\mathcal{B}$ .

En d'autres termes

$$\psi(a_i, \gamma'_{ij}) = \psi(a_i, \gamma_{ij}) \quad \text{avec} \quad \gamma'_{ij} = r_{ik} \gamma_{kj}$$

où  $r_{ik}$  est un tenseur orthogonal arbitraire, à déterminant positif.

## 2°) Tenseur des contraintes de Boussinesq

L'état de contrainte dans  $\bar{V}$  peut être représenté par le vecteur  $\vec{\theta}$  :  $\theta_i = \theta_{ij} n_j^0$

La force actuelle  $dF$  est rapportée à un élément de surface dans l'état initial :  $dS_0$  de normale  $n_j^0$

$$\vec{\theta} = \frac{dF}{dS_0} = \vec{T} \frac{dS}{dS_0}$$

$\vec{T}$  désignant la contrainte d'Euler usuelle.

$\vec{\theta}$  est la contrainte de Boussinesq,  $\theta_{ij}$  est le tenseur des contraintes de Boussinesq ; ce dernier est lié au tenseur d'Euler  $\sigma_{ij}$  par :

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dS = \theta_{ik} n_k^0 dS_0$$

Comme  $n_k^0 dS_0 = \frac{1}{J} \gamma_{jk} n_j dS$ , on a la relation  $\sigma_{ij} = \frac{1}{J} \theta_{ik} \gamma_{jk}$

## Equation d'équilibre

Soient  $f_i$  les forces de volume et  $\gamma_i$  les accélérations ;

on a à l'équilibre du corps ( $\mathcal{B}$ )

$$\int_{V'} (f_i - \rho \gamma_i) dv + \int_{S'} \theta_{ij} n_j^0 dS = 0$$

Soit d'après le théorème de la divergence :

$$\int_{V'} (f_i - \rho \gamma_i) dv + \int_{V'} \frac{\partial}{\partial a_j} (\theta_{ij}) dv = 0$$

Ceci étant vrai pour tout volume  $V'$  :

$$f_i - \rho \gamma_i + \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial a_j} = 0$$

## Formule de Kirschhoff

On suppose  $f_i = \gamma_i = 0$

Ecrivons que pour tout déplacement virtuel  $\delta x_i$ , le travail des forces extérieures est égal à la variation du potentiel élastique :

Dans le déplacement  $\delta x_i$ , le travail des forces extérieures est :

$$\delta W = \int_S \delta x_i \theta_{ij} n_j^0 dS$$

Soit d'après le théorème de la divergence

$$\delta W = \int_V \frac{\partial}{\partial a_j} (\delta x_i \theta_{ij}) dv$$

Compte tenu de l'équation d'équilibre  $\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial a_j} = 0$ , il vient :

$$\delta W = \int_V \frac{\partial \delta x_i}{\partial a_j} \theta_{ij} dv = \int_V \delta \gamma_{ij} \theta_{ij} dv$$

Par ailleurs, la variation du potentiel est

$$\delta \phi = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{ij}} \delta \gamma_{ij} dv$$

Pour tout volume  $V$  on a  $\delta W = \delta \phi$ , d'où

$$\delta \gamma_{ij} \left( \theta_{ij} - \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{ij}} \right) = 0$$

relation vérifiée pour tout déplacement virtuel ; on a donc enfin la formule de Kirschhoff :

$$\underline{\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{ij}}}$$

La formule de Kirschhoff permet de montrer que le tenseur  $\theta_{ij}$  n'est pas symétrique ; on déduit en effet du principe d'objectivité dérivé par rapport à  $R$  que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_{\alpha\beta}} dr_{\alpha\beta} = 0$$

soit  $\frac{\partial \phi}{\partial \gamma'_{ik}} \cdot \frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial r_{\alpha\beta}} dr_{\alpha\beta} = 0$

Comme  $\frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial r_{\alpha\beta}} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \gamma_{jk}$ , on obtient  $\frac{\partial \phi}{\partial \gamma'_{ik}} \gamma_{jk} \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} dr_{\alpha\beta} = 0$

et enfin

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{ik}} \gamma_{jk} dr_{ij} = 0$$

Lorsque  $R = I$ , ( $r_{ij} = \delta_{ij}$ ) il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma'_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{ij}}$$

En outre  $dR$  est antisymétrique ( $dr_{ij} = -dr_{ji}$ )

De sorte que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{ik}} \gamma_{jk} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{jk}} \gamma_{ik}$$

soit  $\epsilon_{ik} \gamma_{jk} = \epsilon_{jk} \gamma_{ik}$  ce qui montre le résultat annoncé. Celui-ci peut d'ailleurs être déduit simplement de la symétrie du tenseur des contraintes d'Euler.

### 3°) Coefficients d'élasticité

Désignons par  $\varphi_{ijkl}$  les valeurs de  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \gamma_{kl}}$

Ce sont les coordonnées d'un tenseur d'ordre 4 pour lequel on vérifie naturellement que :

$$\varphi_{ijkl} = \varphi_{klij}$$

Nous allons montrer que pour  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ , ce tenseur est relié au tenseur d'élasticité  $\chi_{ijkl}$  par les relations  $\varphi_{ijkl} = \chi_{ijkl} + \epsilon_{lj} \delta_{ki}$

Rappelons que les coefficients d'élasticité  $\chi_{ijkl}$  sont les valeurs de

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Delta_{ij} \partial \Delta_{kl}}$  lorsque le tenseur de déformation de Green - Lagrange

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ki} \gamma_{kj} - \delta_{ij}) \text{ est nul.}$$

Nous avons

$$e_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta_{pq}} \cdot \frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial \gamma_{ij}}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \Delta_{pq}}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{1}{2} (\delta_{pj} \gamma_{iq} + \delta_{qj} \gamma_{ip})$$

$$\text{d'où } \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta_{pj}} \gamma_{ip}$$

Dérivant une nouvelle fois, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Delta_{pj} \partial \Delta_{mn}} \frac{\partial \Delta_{mn}}{\partial \gamma_{kl}} \gamma_{ip} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta_{pj}} \delta_{ki} \delta_{pl}$$

soit

$$\varphi_{ijkl} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Delta_{pj} \partial \Delta_{nl}} \gamma_{kn} \gamma_{ip} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta_{lj}} \delta_{ki}$$

Pour  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ , on a bien :

$$\varphi_{ijkl} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Delta_{ij} \partial \Delta_{kl}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{lj}} \delta_{ki}, \text{ c'est à dire :}$$

$$\varphi_{ijkl} = \chi_{ijkl} + e_{lj} \delta_{ki}$$

Une conséquence de l'invariance du potentiel dans les rotations est que les coefficients  $\chi_{ijkl}$  vérifient les relations de symétrie :

$$\chi_{ijkl} = \chi_{klij} = \chi_{jikl} = \chi_{ijlk} \quad [36]$$

Le nombre de coefficients distincts est ainsi réduit à 21 au plus ; les corps élastiques isotropes pour lesquels on peut négliger les constantes du second ordre de Murnaghan, ont des coefficients d'élasticité de la forme :

CHAPITRE IIA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET L'ANALYSE DE  
LA STABILITE ELASTIQUE2-1 - INTRODUCTION

Nous nous préoccupons tout d'abord dans ce chapitre de la stabilité linéaire ; il s'agit de calculer dans quelles conditions une bifurcation de l'équilibre peut se produire, au sens du critère fondamental de stabilité. C'est donc une méthode d'équilibre adjacent qui est ainsi visée, méthode pour laquelle l'approximation des petites déformations est justifiée. Notons cependant que le formalisme développé au chapitre I est tout à fait compatible avec les déformations finies.

Même si la détermination précise du comportement des structures doit faire appel aux théories non linéaires physiques ou géométriques, il est certain que l'analyse linéaire de la stabilité permet de représenter correctement le flambement de certains types de structures (poutres, plaques ...). Pour les coques, en revanche, il apparaît indispensable de travailler dans le domaine non-linéaire ; nous traiterons alors le problème de la rigidité pré-critique et post-critique des structures, ainsi que la recherche non-linéaire des charges critiques.

La méthode des éléments finis (Annexe 2) joue un rôle important dans le traitement des problèmes de stabilité ; en effet, elle autorise l'étude de structures chargées imparfaitement (rupture de symétrie) ou pour lesquelles il existe des imperfections géométriques, ce qui est le cas de toutes les structures réelles.

En outre la méthode des éléments finis est particulièrement bien adaptée au cas des structures composées de matériaux anisotropes.

Comme pour chaque domaine d'utilisation de la méthode des éléments finis, le traitement du problème se divise en deux parties : d'une part la formulation des relations "élémentaires", d'autre part la résolution du système complet. Le présent chapitre est consacré à la première partie de ce travail.

## 2-2 - THEORIE GENERALE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUES A L'ETUDE DE LA STABILITE LINEAIRE

Le problème continu est discrétisé de la façon suivante : les déplacements  $u_i$  des points de la structure sont exprimés en fonction des déplacements des noeuds du maillage  $u_i^n$ , en nombre fini, au moyen des fonctions de déplacement  $N_{ij}$ .

De manière usuelle, nous posons :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ matrice des déplacements d'un point quelconque de la structure.}$$

$$U_n^e = \begin{pmatrix} u_1^\alpha \\ u_2^\alpha \\ \vdots \\ u_1^\omega \\ u_2^\omega \\ \vdots \\ u_3^\omega \end{pmatrix} \text{ matrice des déplacements des noeuds } (\alpha, \beta, \dots, \omega) \text{ d'un élément (e) donné.}$$

On pose donc :

$$U = N \cdot U_n^e \quad (2-1) \text{ avec } N = (N_{ij})$$

Naturellement, les fonctions  $N_{ij}$  doivent être choisies de sorte que les différents critères de convergence soient satisfaits (Annexe 2).

$$\text{On pose en outre : } \delta U = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial a_1}, \frac{\partial u_1}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial u_3}{\partial a_1}, \frac{\partial u_3}{\partial a_2}, \frac{\partial u_3}{\partial a_3} \right\}$$

La dérivation de la relation (2-1) fournit :

$$\delta U = B \cdot U_n^e \quad (2-2)$$

Posons enfin  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} = \psi_{\alpha\beta}$ , en remplaçant le groupe d'indices  $ij$  par l'indice  $\alpha$ , et le groupe d'indices  $kl$  par l'indice  $\beta$ ; les indices  $\alpha$  et  $\beta$  varient de 1 à 4 pour les problèmes plans, de 1 à 9 pour les problèmes tridimensionnels. Le tenseur de coordonnées  $\psi_{ijkl}$  est alors représenté par la matrice  $(\psi) = (\psi_{\alpha\beta})$ . Par exemple, pour les problèmes plans

$$(\psi) = \begin{pmatrix} \psi_{11\ 11} & \psi_{11\ 12} & \psi_{11\ 21} & \psi_{11\ 22} \\ \psi_{12\ 11} & \psi_{12\ 12} & \psi_{12\ 21} & \psi_{12\ 22} \\ \psi_{21\ 11} & \psi_{21\ 12} & \psi_{21\ 21} & \psi_{21\ 22} \\ \psi_{22\ 11} & \psi_{22\ 12} & \psi_{22\ 21} & \psi_{22\ 22} \end{pmatrix}$$

On introduit de la même manière la matrice  $(\chi)$  des coefficients d'élasticité  $\chi_{ijkl}$ , et la matrice  $(t)$  des  $t_{lj} \delta_{ki}$

Compte tenu des notations ainsi introduites, le critère de stabilité sous sa forme (2-7) s'écrit, pour un élément :

$$\int_{V_e}^t U_n^e \cdot {}^t B \cdot (\psi) \cdot B \cdot U_n^e \, dv > 0 \quad \forall U_n^e$$

soit 
$${}^t U_n^e \left( \int_{V_e} {}^t B(\psi) B \, dv \right) \cdot U_n^e > 0$$

Posant 
$$\phi_e = \int_{V_e} {}^t B(\psi) B \, dv$$
, on obtient finalement

$${}^t U_n^e (\phi_e) U_n^e > 0$$

La condition de stabilité "élémentaire" ainsi obtenue n'est pas nécessaire pour assurer la stabilité globale de la structure. Si en effet on ajoute les contributions élémentaires

$$\int_{V_e} {}^2 v_e = {}^t U_n^e (\phi_e) U_n^e$$

à la variation seconde du potentiel de la structure, on obtient

$\int_{\Omega} {}^2 v = \sum_e {}^t U_n^e (\phi_e) U_n^e$ , soit, en introduisant le vecteur  $U_n$  des déplacements de tous les noeuds de la structure :

$$\int_{\Omega} {}^2 v = {}^t U_n (\phi) U_n$$

La matrice  $(\phi)$  est une matrice globale, assemblée à partir des matrices élémentaires  $(\phi_e)$  au niveau de la programmation FORTRAN (Annexe 2).

La stabilité est alors assurée si, et seulement si :

$${}^t U_n (\phi) U_n > 0 \quad \forall U_n$$

Nous introduisons les matrices globales A et B obtenues à partir des matrices élémentaires

$$A_e = {}^t U_n^e \left( \int_{V_e} {}^t B(\psi) B \, dv \right) U_n^e$$

et

$$B_e = {}^t U_n^e \left( \int_{V_e} {}^t B(\psi^*) B \, dv \right) U_n^e$$

A est appelée matrice de rigidité de la structure ;

B est appelée matrice de rigidité incrémentale.

Ce sont des matrices symétriques.

$$\text{Compte tenu de (1-2-10) : } \phi = A - \lambda B$$

Nous sommes donc amenés à formuler le critère de stabilité discrétisé :

Critère de stabilité discrétisé :

Le corps élastique ( $\mathcal{J}$ ) est stable dans sa configuration actuelle si la forme quadratique associée à  $(A - \lambda B)$  est définie positive.

L'instabilité apparaît lorsque la forme quadratique associée à  $A - \lambda B$  cesse d'être définie positive, c'est-à-dire pour :

$$\det (A - \lambda B) = 0 \quad (2-2-3)$$

La charge critique  $\lambda_{cr}$  apparaît ainsi comme la racine de plus petit module de l'équation caractéristique (2-2-3) ; en d'autres termes,  $\lambda_{cr}$  est la plus petite valeur du spectre des valeurs propres du problème aux éléments propres :

$$AX = \lambda BX \quad (2-2-4)$$

Le vecteur propre associé fournit le mode d'instabilité correspondant.

La résolution effective du problème (2-2-4) fournit également les charges critiques d'ordre supérieur, avec les modes d'instabilité associés.

2-3 - PROPRIETES 4 CARACTERISTIQUES DU PROBLEME

a) Symétrie

Les propriétés de symétrie des coefficients d'élasticité  $\chi_{ijkl}$  et du tenseur  $t_{lj} \delta_{ki}$  d'une part, la méthode des éléments finis d'autre part conduisent à des matrices de rigidité A et B symétriques.

Montrons en outre que la matrice de rigidité A est définie positive :

Pour cela, envisageons le corps élastique , homogène et isotrope ; sa surface est rendue libre de contraintes

Alors :

$$\delta^2 V = \int_V \chi_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv$$

Donnons-nous des déplacements  $u_i$  infinitésimaux :

$$u_i = \lambda_{ij} a_j = (\omega_{ij} + \varepsilon_{ij}) a_j$$

où  $\lambda_{ij}$  est séparé en partie symétrique  $\varepsilon_{ij}$ , et antisymétrique  $\omega_{ij}$ .

Compte tenu des propriétés de symétrie des  $\chi_{ijkl}$ , on obtient :

$$\delta^2 V = \int_V \chi_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dv$$

Lorsque le déplacement  $u_i$  se réduit à une rotation infinitésimale :

$$u_i = \omega_{ij} a_j, \text{ on a donc } \delta^2 V = 0.$$

Inversement  $\delta^2 V = 0$  implique  $\varepsilon_{ij} = 0$  et  $u_i = \omega_{ij} a_j$

Il y a donc instabilité pour des rotations pures, et dans ce cas seulement ; il en résulte que  $\delta^2 V$  est positif lorsque les liaisons du corps lui interdisent les rotations (appuis, encastremets ... ) ; ceci implique que la matrice A soit définie positive.

Dans des configurations telles que l'instabilité puisse apparaitre, il est donc nécessaire que le terme  $\int_V t_{lj}^* \delta_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv$  soit positif, et par conséquent que la matrice B soit définie positive.

b) Propriétés des éléments propres

Dans les conditions énoncées ci-dessus, les éléments propres possèdent des propriétés intéressantes que nous rappellerons.

Théorème II-1 : Lorsque les matrices A et B sont symétriques, définies positives, les racines de l'équation caractéristique (2-2-3) sont réelles et positives ; les vecteurs propres sont B-orthogonaux.

En introduisant  $D = B^{-1} A$ , le problème est ramené à :

$$DX = \lambda X$$

Dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , définissons une métrique au sens de B :

le produit scalaire sera :

$$\langle X, Y \rangle = b_{ij} x_i y_j = {}^t_X B Y$$

On vérifie qu'il s'agit d'une métrique euclidienne pour laquelle la base canonique n'est pas orthonormée.

Montrons que l'opérateur D est symétrique :

Nous avons :

$$\langle DX, Y \rangle = {}^t_X {}^t_D B Y = {}^t_X {}^t_A {}^t_B^{-1} B Y = {}^t_X A Y$$

D'autre part :

$$\langle X, DY \rangle = {}^t_X B D Y = {}^t_X B B^{-1} A Y = {}^t_X A Y$$

d'où  $\langle X, DY \rangle = \langle DX, Y \rangle$  et la propriété ; il en résulte que les valeurs

propres sont réelles, et les vecteurs propres orthogonaux au sens du produit scalaire défini ci-dessus.

Enfin multiplions l'égalité (2-2-4) à gauche par  ${}^tX$  ; il vient

$${}^tXAX = \lambda {}^tXBX$$

Comme  ${}^tXAX > 0$  et  ${}^tXBX > 0$ ,  $\lambda$  est positif.

Ce qui achève la démonstration du théorème II-1.

### c) Dimensions ; structure de bande

Les problèmes réels de génie mécanique ou de génie civil doivent être traités en utilisant un nombre important de degrés de liberté (souvent de l'ordre du millier) ; ceci conduit à des matrices A et B d'ordre (1000, 1000) dans l'exemple indiqué. Il ne peut actuellement être question d'introduire de telles matrices en mémoire centrale des ordinateurs, et le changement sur bande ou tambour magnétique augmente considérablement la durée d'exploitation des programmes, par l'importance relative du temps d'accès (20 ms pour l'accès au tambour FASTRAND de l'UNIVAC 1108, pour 40  $\mu$ s de temps d'exécution d'une multiplication).

On peut fort heureusement profiter de la structure du problème pour réduire considérablement les données nécessaires au calcul.

La symétrie des matrices A et B divise approximativement par 2 le nombre des données.

De plus, la discrétisation par la méthode des éléments finis conduit à des matrices de rigidité qui ont, ou auxquelles on peut donner [17] une structure de bande.

Ainsi pour  $|j - i| > m$ , a-t-on  $a_{ij} = b_{ij} = 0$

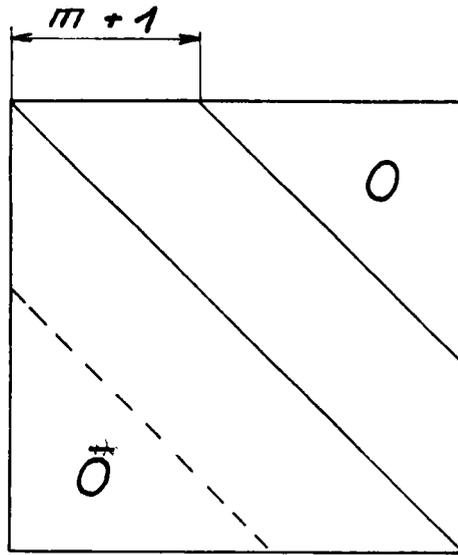


Fig 2-3-1

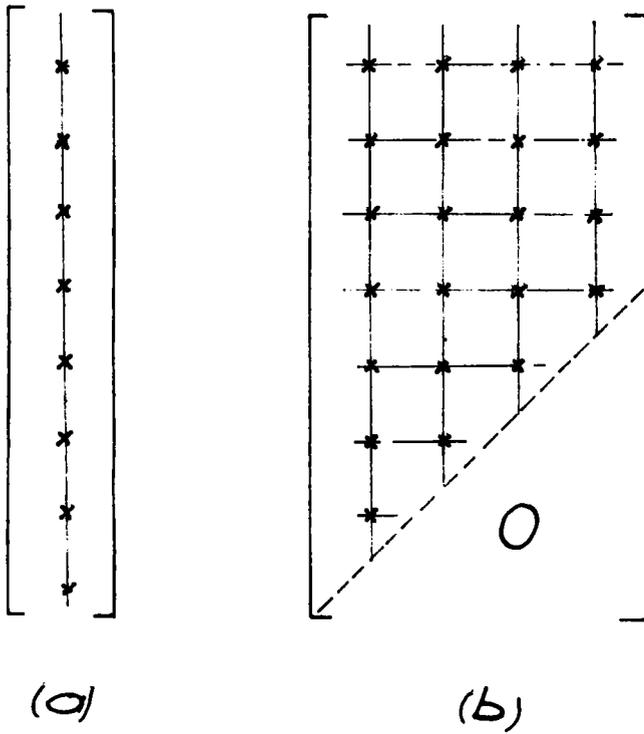


Fig 2-3-2

Aussi ne conserve-t-on, dans la plupart des modes de stockage des matrices de rigidité que la demi-bande supérieure, sous forme unicolonne (Fig. 2-3-2a) ou rectangulaire (Fig. 2-3-2b).

Pour des largeurs de bande variables, on peut éventuellement conserver les seuls éléments non nuls, accompagnés d'indices compteurs permettant leur repérage dans la matrice de rigidité [22].

Ces diverses techniques permettent une réduction spectaculaire des zones de mémoire occupées, et autorisent souvent le traitement des problèmes par l'unité centrale des ordinateurs actuels (voir [6] pour le traitement par blocs des matrices "out of core", c'est-à-dire non logeables dans la mémoire centrale).

Les caractéristiques ainsi dégagées définissent un problème numérique précis qui doit être traité par des méthodes appropriées ; il convient en particulier de tirer avantage de la structure-bande et du caractère défini positif des matrices A et B pour réduire le temps de calcul et les zones de mémoire occupées. Nous discuterons les différentes méthodes envisageables dans le chapitre suivant, pour nous consacrer maintenant aux problèmes non linéaires.

#### 2-4 - METHODE DES ELEMENTS FINIS ET STABILITE NON LINEAIRE

Les concepts de la stabilité linéaire sont limités à l'étude de l'instabilité du type Euler, c'est-à-dire à l'étude de l'évolution des structures vers une configuration stable infiniment proche ; dans tous les cas où la structure évolue vers une configuration stable à distance finie de l'état de référence, il est nécessaire de faire appel aux méthodes non-linéaires. Naturellement, les tests de rigidité post-critique doivent

également avoir recours à celles-ci.

Soulignons à cet égard l'intérêt de la formulation que nous avons adoptée ; utilisée dans le domaine linéaire, elle garde, sans modifications, son efficacité dans le domaine non linéaire ; pour un état de contraintes déterminé, on a en effet :

$$\delta^2 V = \int_V x_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv - \lambda \int_V \theta_{lj}^x \delta_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} dv$$

et

$$\delta^2 V = U_n^t (A - \lambda B) U_n$$

à la matrice de rigidité A, est retranchée la matrice B obtenue dans un état de déformation quelconque ; il en résulte une matrice de rigidité différentielle  $\phi = A - \lambda B$ , traduisant par exemple la perte de rigidité de la structure au voisinage de la charge critique ; B est ainsi une matrice qu'il convient naturellement de déterminer dans une configuration quelconque.

L'analyse non linéaire peut ainsi procéder de l'une des manières suivantes :

#### a) Méthode incrémentale I

Une première prédiction linéaire du comportement est réalisée en négligeant la matrice de rigidité incrémentale B ; Si F représente le vecteur force appliqué à tous les noeuds de la structure, on résout :

$$F = A \cdot U_n^0$$

Cette estimation de  $U_n^0$  permet, compte tenu de la loi de comportement élastique du matériau, de déterminer le tenseur de Boussinesq, et donc une première valeur de la matrice incrémentale B.

La matrice différentielle  $\phi = A - \lambda B$  est alors construite, et le procédé de prédiction révisé sous la forme

$$A U_n^p = F + \lambda B U_n^{p-1} - 1 \quad (\text{ordre } p)$$

La matrice B est affinée dans le processus itératif jusqu'à ce que la convergence soit obtenue ; le procédé fournit donc les déplacements et les contraintes dans le domaine non linéaire. La matrice incrémentale B étant aussi obtenue, on reconduit ici l'analyse de la stabilité faite dans le domaine linéaire ; il suffit à cela de résoudre le problème aux valeurs propres

$$AX = \lambda_{cr} BX$$

pour la valeur de B obtenue.

Si la valeur critique  $\lambda_{cr}$  ainsi obtenue est supérieure à la charge imposée à la structure, l'équilibre est stable, instable dans le cas contraire, critique lorsque  $\lambda = \lambda_{cr}$

Formulons cette analyse en d'autres termes :

Cherchons à résoudre le problème :

$$AX = \mu (\lambda B) X$$

où  $(\lambda B)$  est la matrice de rigidité incrémentale obtenue pour la charge  $\lambda$  imposée.

Lorsque la plus petite valeur propre  $\mu$  est supérieure à 1, la stabilité de la configuration est assurée ; la charge critique est obtenue pour  $\mu = 1$ , l'instabilité pour  $\mu < 1$ .

La courbe  $\mu(\lambda)$  peut par exemple être tracée en interpolant à partir de quelques valeurs ; ce procédé permet de réduire le nombre de

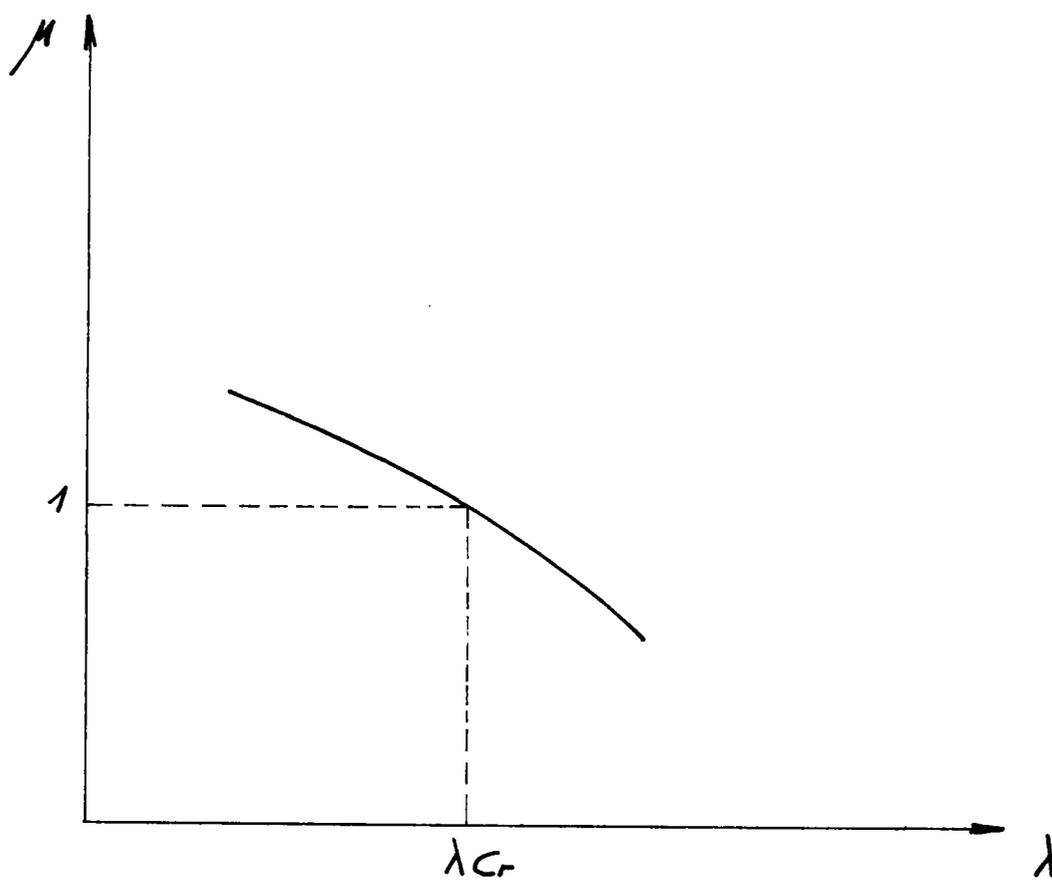


Fig 2-4-1

niveaux de chargement de la structure à envisager, et par conséquent le temps d'exploitation des programmes [11]. Fig. 2 - 4 - 1

Le calcul non linéaire des déplacements pour des valeurs de  $\lambda$  inférieures à la charge critique permet d'obtenir le comportement pré-critique dont on connaît l'importance ; les ruptures par flambement peuvent en effet se produire pour des valeurs très inférieures à la charge critique calculée dans l'approximation linéaire des structures idéales.

Résumons le schéma de calcul :

- 1 Formation de la matrice de rigidité A ; lecture de  $\lambda$
- 2 Résolution du système ; Prédiction linéaire

$$F = A \cdot U_n^0$$

- 3 Calcul de B à partir de  $U_n^0$

- 4 Calcul de  $F + \lambda B U_n^0$

- 5 Résolution du système

$$A U_n^1 = F + \lambda B U_n^0$$

- 6 Test de convergence

$$\left| U_n^1 - U_n^0 \right| < \varepsilon$$

Si oui phase suivante 7

Si non phase 3 en remplaçant  $U_n^0$  par  $U_n^1$

- 7 Analyse de la stabilité

$$AX = \mu(\lambda B) X$$

- 8 Retour éventuel à 1 pour  $\lambda$  différent.

b) Méthode incrémentale II. (Méthode pas à pas)

Les problèmes non-linéaires peuvent donner lieu à des solutions multiples (Fig. 1-3-5) ; dans ce cas la méthode exposée ci-dessus converge vers l'une ou l'autre des solutions, et éventuellement vers une solution inintéressante. Il est alors préférable d'incrémenter sur la charge de la structure, selon le schéma suivant :

- 1 . Choix d'un pas  $\Delta F = \lambda \Delta F^*$  de la charge
- 2 . Calcul de l'incrément  $\Delta U_0$  de déplacement par résolution de  $A \cdot \Delta U_0 = \Delta F$
- 3 . Calcul des contraintes et de la matrice B à partir de la solution  $\Delta U_0$
- 4 . Formation de la matrice de rigidité différentielle  $A - \lambda B$
- 5 . Résolution du système rectifié :

$$(A - \lambda B) \Delta U_1 = \Delta F$$

Calcul des déplacements et de la charge totale

- 6 . Phase (3) en remplaçant  $\Delta U_0$  par  $\Delta U_1$

On voit que par cette méthode, les solutions sont obtenues dans l'ordre croissant ;

On peut contrôler le processus en vérifiant périodiquement que l'équation d'équilibre est satisfaite ; par ailleurs, les effets de la non-linéarité sont réduits en considérant à chaque pas des incréments de module suffisamment petits [39]. Enfin l'analyse de la stabilité de l'équilibre telle qu'elle a été conduite au paragraphe précédent peut être reprise périodiquement dans le calcul.

## 2-5 - CONCLUSION

Il nous paraît indispensable d'évoquer ici les problèmes soulevés par l'analyse non-linéaire de la stabilité élastique, et de souligner leurs interactions avec les problèmes numériques.

Lorsque la stabilité d'une configuration d'équilibre a pu être établie, on sait [19] que le champ des déplacements infiniment~~s~~ petits à partir de cet état est solution unique de l'équation d'équilibre. Il n'en va pas de même dès l'instant où l'on admet la possibilité de déformations finies à partir de l'état d'équilibre ; nous avons d'ailleurs donné des exemples simples d'une telle situation (cf. ch. 1-7). Il conviendrait donc de s'assurer que le nombre de solutions possibles est fini ; à notre connaissance, ceci est un problème ouvert.

Du point de vue du calcul numérique des structures, ce fait milite en faveur des méthodes pas à pas qui, dans le domaine pré-critique, doivent conduire à la solution intéressante.

Un autre aspect de cette question est le suivant : lorsque la charge critique est atteinte, dans le processus de chargement progressif de la structure, il n'y a pas unicité des déplacements infiniment~~s~~ petits à partir de la configuration critique. On conçoit donc que, selon l'amplitude du pas de chargement adopté, la bifurcation, si l'on parle de structures à forte symétrie, ou le saut brusque vers une autre forme d'équilibre, si l'on parle de structures imparfaites, puissent en être altérés ; en d'autres termes, la solution trouvée peut dépendre du mode de calcul, ce qui ne manque pas d'être gênant.

Le mode de flambage ainsi déterminé est à coup sûr un mode susceptible de se produire, et dont il faut par conséquent tenir compte ; mais il ne saurait donner une information complète sur la bifurcation.

Du point de vue du mécanicien, on peut poser à propos de la bifurcation les problèmes suivants :

- les équations d'équilibre admettent-elles à l'état critique un nombre fini ou infini de solutions ?
- quelles sont parmi ces solutions celles que la structure va "choisir" en priorité ?

Nous pensons pour notre part, et pour répondre à la première de ces questions, que les systèmes réels admettent un nombre fini de points de branchement et que les systèmes possédant une forte symétrie en admettent un nombre supérieur, d'autant plus important que le degré de symétrie est élevé [7].

Annexe 2METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pour fixer les idées, donnons dès maintenant un schéma global de la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis dans un problème de mécanique des milieux continus.

1°) Discrétisation du domaine.

- a) Définition des noeuds de discrétisation du domaine.
- b) Définition des éléments assurant la discrétisation.

2°) Discrétisation des déplacements.

- a) Choix des fonctions de déplacements à partir d'inconnues discrètes.
- b) Etude des propriétés de continuité aux frontières.

3°) Mise en oeuvre.

- a) Aspect élémentaire : Le problème est posé au niveau de chaque élément.
- b) Aspect global : réassemblage des équations du problème.

4°) Traitement des équations.

- a) Adaptation à la résolution numérique
- b) Résolution numérique

Pour cette présentation, nous suivrons le plan ainsi établi, encore que les quatre points évoqués ne soient pas indépendants.

1°) Discrétisation<sup>selon</sup> du domaine

Soit à discrétiser dans l'espace  $R^3$  un domaine  $V$  de frontière  $S$  ; il est souvent indispensable de simplifier la géométrie du domaine  $V$  pour obtenir un domaine  $V'$  de frontière  $S'$  plus accessible à la discrétisation.

a) Définition des noeuds de discrétisation

On choisit dans le domaine  $V'$  un certain nombre  $n$  de points appelés noeuds ; il s'agit donc d'une restriction de  $V'$  dans  $\{R^3\}^n$

b) Définition des éléments

Il convient d'abord de choisir la géométrie des éléments ; elle dépend naturellement du problème posé (plan, de révolution, tridimensionnel...) et des résultats que l'on veut obtenir. Il faut en outre préciser l'appartenance des noeuds de discrétisation à ces éléments ; dans cette opération de maillage, les noeuds sont en général sur les frontières des éléments. Soient  $V_j$  les domaines élémentaires ;  $n_e$  le nombre d'éléments ; le maillage doit satisfaire aux conditions de régularité suivantes :

-  $V' = \bigcup_{j=1}^{n_e} V_j$  c'est à dire recouvrement de  $V'$  par les éléments.

-  $V_i \cap V_j$  de mesure nulle pour  $i \neq j$ , c'est à dire non recouvrement des éléments entre eux.

Naturellement, la discrétisation est d'autant plus raffinée que  $n_e$  ou  $n$  sont plus grands.

2°) Discrétisation des déplacements.

La discrétisation du domaine fournit pour l'instant un ensemble d'éléments à caractère géométrique ; le problème de mécanique des milieux continus met en jeu un champ de déplacements inconnu sur  $V$  :

la technique consiste, en ne considérant qu'un nombre fini d'inconnues, à construire un champ qui puisse approcher les déplacements réels dans l'élément.

On définit en général sur l'élément une classe de fonctions simples ("fonctions de déplacement"), par exemple des polynômes ; les paramètres sont les valeurs des déplacements aux noeuds du maillage, ou des fonctions simples de ces déplacements ; ainsi :

$$u_i(x_k) = \sum_j N_{ij}(x_k) u_j^n \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

où :  $u_j^n$  sont les déplacements aux noeuds, inconnues du problème

$N_{ij}$  sont les fonctions de déplacement

La forme donnée à priori au champ de déplacements doit posséder certaines propriétés de régularité.

Il faut à l'évidence que le champ interpolé puisse, par raffinement de la discrétisation, approcher d'aussi près que l'on veut le champ de déplacements continu.

#### Continuité aux frontières.

Il faut également que les champs interpolés dans des éléments adjacents se raccordent de manière continue aux frontières de éléments ; en outre les dérivées premières doivent être continues aux frontières pour assurer la continuité des contraintes.

Les éléments assurant la continuité des déplacements sont appelés : éléments cinématiquement admissibles.

Les éléments assurant la continuité des contraintes sont appelés éléments statiquement admissibles.

### 3°) Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis

Les deux paragraphes précédents ont muni les éléments d'une existence géométrique et cinématique propres ; le problème continu posé au domaine  $V'$  est maintenant posé de manière plus ou moins simplifiée à chaque élément  $V_j$ . La mise en équation partielle que l'on peut obtenir au niveau élémentaire ne conduit naturellement pas à la solution du problème global, mais en constitue un préalable.

#### a) Aspect élémentaire

Soit  $U$  la matrice  $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$  des déplacements d'un point quelconque de l'élément ;  $N$  la matrice  $(N_{ij})$  des fonctions de déplacements et  $U_n^e$  la matrice des déplacements des noeuds de l'élément :

$${}^t U_n^e = \{ u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^k, u_2^k, u_3^k \}$$

$$U = N \cdot U_n^e \quad (a - 1)$$

Soit encore  $* \mathcal{E}$  la matrice des taux de déformation (déformation infiniment petite)

$${}^t \mathcal{E} = \{ \mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{22}, \mathcal{E}_{33}, \mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{13}, \mathcal{E}_{23} \}$$

$* \mathcal{S}$  la matrice des contraintes d'Euler

$${}^t \mathcal{S} = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \}$$

$* \mathcal{X}$  la matrice des coefficients d'élasticité  
(cf. ch 2 . 2)

$$\text{On a} \quad : \quad \mathcal{S} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{E} \quad (a - 2)$$

La dérivation du champ des déplacements fournit  $\mathcal{E}$  sous la forme :

$$\mathcal{E} = B \cdot U_n^e \quad (a - 3)$$

$$\text{et } \sigma : \sigma = \chi B U_n^e \quad (a - 4)$$

Précisons la schématisation élémentaire des forces extérieures à l'élément ; en mécanique des milieux continus elle est définie par la donnée d'une densité surfacique de contrainte aux frontières de l'élément. Cette densité continue est remplacée par des forces  $F_e$  appliquées aux noeuds de l'élément ; de même, la densité volumique de forces extérieures est remplacée par des forces volumiques généralisées appliquées aux noeuds. Traitant de problèmes statiques, nous les négligerons dans cette présentation.

#### Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

La puissance virtuelle des efforts de cohésion s'exprime par :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{V_e} {}^t \mathcal{E} \sigma \, dv$$

c'est à dire, compte tenu de (a - 3) et (a - 4)

$$\mathcal{P}_i = - \int_{V_e} {}^t U_n^e \cdot {}^t B \cdot \chi \cdot B \cdot U_n^e \, dv$$

Posons  $K_e = \int_{V_e} {}^t B \chi B \, dv$  ;  $K_e$  est symétrique : elle est

appelée matrice de raideur élémentaire

$$\mathcal{P}_i = - {}^t U_n^e K_e U_n^e$$

Puissance virtuelle des efforts extérieurs :

Elle a pour expression :

$$\mathcal{P}_e = {}^t U_n^e \cdot F_e$$

Le principe des puissances virtuelles :  $\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e = 0$  permet

donc d'écrire :

$${}^t U_n^e K_e U_n^e = {}^t U_n^e F_e$$

Cette égalité devant avoir lieu pour tous les déplacements virtuels admissibles, on en déduit :

$$K_e U_n^e = F_e \quad (a - 5)$$

La mise en équation élémentaire est obtenue avec (a - 5) ; elle n'est pas individuellement satisfaisante car le système de forces  $F_e$  peut ne pas être en équilibre ; l'équilibre des forces est rétabli par l'opération d'assemblage du problème global.

b) Aspect global

L'opération d'assemblage de la structure, décomposée en  $n_e$  éléments justaposés, est fondée sur la réidentification des noeuds de discrétisation.

En effet les noeuds possèdent dans le problème élémentaire un indiçage relatif à l'élément ; c'est une numérotation interne. L'assemblage du problème global consiste à retrouver l'indice externe, relatif à l'ensemble de la structure, à partir de l'indice interne. En d'autres termes, les matrices élémentaires  $K_e$  sont réparties dans une matrice de raideur  $K$  globale ; les matrices des déplacements des noeuds élémentaires et des forces élémentaires sont réparties respectivement dans des matrices de déplacement globale  $U_n$ , et des forces globales  $F$ , pour constituer la mise

en équation globale

$$F = K \cdot U_n \quad (a - 6)$$

La résolution se résume donc essentiellement à l'inversion de la matrice K.

Certains déplacements de la structure peuvent être connus grâce aux conditions aux limites ; ceci permet de réduire d'autant la dimension du problème en supprimant les lignes et les colonnes correspondantes de la matrice K. Cette opération peut dans certains cas être pratiquée au niveau de l'opération d'assemblage.

#### 4°) Traitement des équations.

Nous fournissons dans l'annexe 3 des méthodes de résolution effective de l'équation globale (a - 6) ; nous formulerons ici quelques remarques générales sur la méthode en la comparant aux autres méthodes numériques existantes :

- \* La méthode des différences finies discrétise l'opérateur et pas le champ des déplacements. Au contraire, la méthode des éléments finis discrétise le champ ; il en résulte en particulier que l'insertion des conditions aux limites, souvent problématique par différences finies, est triviale dans la méthode des éléments finis.
- \* On peut voir la méthode des éléments finis comme une généralisation de la méthode de Ritz. Le problème peut en effet être posé sous une forme variationnelle ; il s'agit alors de minimiser l'énergie potentielle totale (systèmes conservatifs) pour une classe de déplacements virtuels admissibles.

C'est précisément l'objet de la méthode de Ritz ; la différence réside dans la manière dont les déplacements sont décrits :

Pour Ritz, la discrétisation du champ a la même forme sur tout son domaine de définition. Pour la méthode des éléments finis, au contraire, la discrétisation du champ a lieu à l'échelle élémentaire. Pratiquement, il en résulte une supériorité de la méthode des éléments finis : la méthode de Ritz conduit à des matrices "pleines" ; la méthode des éléments finis conduit à des matrices "creuses", comportant beaucoup de 0, plus précisément à des matrices-bande. La méthode des éléments finis permet donc d'étudier des structures beaucoup plus importantes.

\* La méthode des éléments finis peut également être considérée comme une extension de la méthode de Gallerkin [39]. La différence avec la méthode de Gallerkin classique provient de nouveau du fait que le traitement numérique ne s'effectue pas sur tout le domaine de définition du champ des déplacements, mais seulement sur un élément ; c'est encore le rôle de l'assemblage que de combiner ces équations partielles pour en déduire les équations globales.

Cette présentation fait surgir un inconvénient parfois insurmontable : le champ discrétisé doit avoir un ordre de continuité plus élevé aux frontières des éléments. En effet la méthode de Gallerkin travaille directement sur les équations différentielles du second ordre donnant le champ des déplacements.

CHAPITRE III

## M E T H O D E S     D E     R E S O L U T I O N     N U M E R I Q U E

3-1 - INTRODUCTION

Ce chapitre constitue une revue et une discussion de quelques méthodes d'analyse numérique matricielle ; on trouvera en annexe un rappel des méthodes de résolution des systèmes linéaires rencontrés dans l'analyse des structures. L'étude portera essentiellement sur les méthodes susceptibles de résoudre le problème aux valeurs propres  $AX = \lambda BX$ , dont nous avons vu l'importance dans l'analyse de la stabilité des structures.

Rappelons les caractères spécifiques du problème que nous nous posons :

- la dimension des matrices A et B peut être très importante pour beaucoup de problèmes pratiques. Leur ordre peut être tel qu'il soit impossible de les stocker en mémoire centrale d'un ordinateur ;
- les matrices A et B sont réelles, symétriques ; l'une au moins est définie positive (A matrice de rigidité) ;
- elles présentent une structure-bande ;
- nous cherchons uniquement à obtenir la plus petite valeur propre et le vecteur associé.

Compte tenu de ces caractéristiques, un certain nombre de méthodes sont envisageables.

Nous les examinerons en discutant de leurs possibilités relativement à notre problème ; nous commencerons tout d'abord par réduire le problème posé.

### 3-2 - REDUCTION DU PROBLEME

On cherche à se ramener à un problème de recherche des valeurs propres d'une seule matrice.

$$\text{On pourrait mettre } AX = \lambda BX \quad (3-1)$$

$$\text{sous la forme } DX = \lambda X \quad (3-2)$$

$$\text{avec } D = B^{-1} \cdot A$$

Cette procédure présente des inconvénients importants ; tout d'abord, dans le cas général, la matrice D n'est pas symétrique. En outre la structure de bande est perdue dans l'inversion de la matrice B ; il résulte de ces deux points que la matrice  $B^{-1}$  et la matrice D doivent être stockées entièrement en mémoire. Enfin, les algorithmes élaborés pour les matrices symétriques définies-positives sont numériquement plus stables (propagation des erreurs d'arrondi limitée) que les autres.

Le schéma suivant doit être adopté ; il conserve en effet tout ou partie des particularités du problème en utilisant la décomposition de Cholesky de la matrice B. (Annexe 3). B est donc supposée définie-positve ; soit L la matrice triangulaire inférieure obtenue :

$$B = L^t L$$

$$\text{soit encore } Y = L^t X$$

L'équation (3-1) devient :

$$A \cdot (L^t)^{-1} Y = \lambda LY$$

et l'équation (3-2) doit être transformée en :

$$DY = \lambda Y$$

avec 
$$D = L^{-1} A {}^tL^{-1} \quad (3-3)$$

La matrice D ainsi définie est naturellement symétrique ; mais la structure de bande paraît être perdue de nouveau.

Notons cependant que si la partie principale d'un algorithme consiste à multiplier D par un vecteur U quelconque, la construction complète de D n'est pas nécessaire et la structure de bande est conservée ; en effet, considérons le produit

$$V = D \cdot U$$

Compte tenu de (3-3), il vient :

$$V = L^{-1} A {}^tL^{-1} U$$

soit 
$$L V = A {}^tL^{-1} U$$

Pour résoudre cette équation en V, nous effectuons les opérations suivantes :

- Résolution du système  ${}^tL W = U$  (d'où W)
- Multiplication  $A W = Z$
- Résolution du système  $L V = Z$  (d'où V)

Résumons : seule la décomposition de Cholesky de B est nécessaire ; en outre la matrice L est également une matrice bande. Enfin elle peut être stockée dans la zone de mémoire réservée à B désormais inutile.

Cette procédure est donc particulièrement intéressante ; elle conserve la stabilité numérique, et tire avantage des propriétés de symétrie et de bande pour réduire la mémoire utilisée.

Remarquons que si B n'est pas définie positive, A l'est, et la méthode indiquée ci-dessus permet encore de réduire le problème. Il consiste alors à chercher  $\lambda$  et Y tels que :

$$CY = \frac{1}{\lambda} Y$$

avec  $C = L^{-1} B {}^t L^{-1}$

et  $A = L {}^t L$  ;  $Y = {}^t L X$

### 3-3 METHODE DE JACOBI ; GIVENS - HOUSEHOLDER

Ces méthodes sont très employées pour le calcul des éléments propres de matrices de petite dimension ; elles sont en défaut dans les problèmes qui nous concernent pour plusieurs types de raisons :

- les zones de mémoire à réserver sont de l'ordre de  $n^2$  ; la mémoire centrale d'un ordinateur, même important, est donc rapidement saturée. (saturation largement atteinte par une matrice 200 x 200 pour l'ordinateur 60 K UNIVAC 1108 (EXEC 8).)
- le nombre de multiplications est de l'ordre de  $n^3$  : le temps de calcul et le coût d'exploitation des programmes s'élève rapidement.
- les erreurs de chute s'accumulent et interdisent toute précision.
- les méthodes discutées calculent toutes les valeurs propres, ce qui est inutile pour notre problème.

On voit donc que ces méthodes sont inadéquates ; les méthodes itératives permettent au contraire d'exploiter pleinement les particularités du problème que nous avons posé.

3-4 METHODE DE LA PUISSANCE ; METHODE DE JENNINGS

Le problème est réduit à la détermination de  $\lambda$  et  $Y$

$$\text{tels que } CY = \frac{1}{\lambda} Y \quad (3-4)$$

$$\text{où } C = L^{-1} B^t L^{-1}$$

L'analyse étant formulée de cette façon, on voit que la valeur critique  $\lambda$  cherchée est obtenue en inversant la plus grande valeur propre de la matrice  $C$ .

Soient alors  $V_1, V_2, \dots, V_n$  les  $n$  vecteurs propres de  $C$  ;  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sont linéairement indépendants ; soient  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  les valeurs propres correspondantes, classées par module décroissant. Nous supposons que  $\mu_i$  est une valeur propre simple.

Un vecteur arbitraire  $U_0$  peut être exprimé sur la base des vecteurs propres de  $C$  :

$$U_0 = \alpha_i V_i$$

$$\text{Nous formons la suite : } U_1 = C U_0$$

$$U_{p+1} = C U_p$$

$$\text{On vérifie que } U_1 = \alpha_i \mu_i V_i$$

$$\text{et } U_p = \alpha_i (\mu_i)^p V_i$$

Si l'on met  $\mu_1^p$  en évidence :

$$U_p = (\mu_1)^p \left[ \alpha_1 V_1 + \sum_{j \neq 1} \alpha_j \left(\frac{\mu_j}{\mu_1}\right)^p V_j \right]$$

Le rapport des composantes  $U_s^{(p+1)}$  et  $U_s^{(p)}$  des vecteurs  $U_{p+1}$  et  $U_p$  est, avec des notations évidentes :

$$\frac{U_s^{(p+1)}}{U_s^{(p)}} = \mu_1 \cdot \frac{\alpha_1 v_s^1 + \sum_{j \neq 1} \alpha_j \left(\frac{\mu_j}{\mu_1}\right)^{p+1} v_s^j}{\alpha_1 v_s^1 + \sum_{j \neq 1} \alpha_j \left(\frac{\mu_j}{\mu_1}\right)^p v_s^j}$$

Lorsque  $p$  tend vers l'infini, le rapport

$$\frac{U_s^{(p+1)}}{U_s^{(p)}}$$

tend vers  $\mu_1$ , si toutefois  $\alpha_1 \neq 0$ . Si  $\alpha_1 = 0$  il suffit de modifier le vecteur de départ  $U_0$ .

La méthode fournit donc  $\mu_1$ , plus grande valeur propre de  $C$ , et le vecteur propre correspondant.

Résumons le processus (Méthode de la puissance)

- 1 . Décomposition de Cholesky de  $A$  ( $A = L^t L$ )
- 2 . Résolution du système  ${}^t L W_0 = U$ .
- 3 . Multiplication  $BW_0 = Z_0$
- 4 . Résolution du système  $L U_1 = Z_0$
- 5 . Formation du rapport  $\frac{U_s^{(1)}}{U_s^{(0)}}$
- 6 . Test de convergence (branchement en 2 si le test est négatif, en remplaçant  $U_0$  par  $U_1$ ).

Cette méthode appelle les remarques suivantes :

- la symétrie et la structure de bande sont pleinement utilisées pour réduire les zones de mémoire nécessaires.
- elle est bien adaptée au cas où une seule valeur propre est demandée, et au cas où une valeur approchée du vecteur propre dominant peut être connue à priori ; la convergence en est notablement améliorée.
- la méthode converge comme une suite géométrique de raison  $\frac{\mu_2}{\mu_1}$  ; il peut donc y avoir des difficultés de convergence si la valeur propre  $\mu_2$  est

voisine de  $\mu_1$ . Dans de tels cas la méthode d'Aitken d'accélération de la convergence peut être très utile ; cette méthode est cependant difficilement programmable de manière satisfaisante, et l'intervention de l'opérateur peut être nécessaire à l'obtention de bons résultats.

La méthode des itérations simultanées de Jennings se présente comme une extension de la méthode de la puissance ; elle permet d'en améliorer la convergence de manière significative. [8, 21, 22]

L'idée principale de la méthode est la suivante : si l'on sait, à chaque itération, épurer le vecteur itéré (cf : méthode de la puissance) de ses composantes sur les vecteurs propres autres que le vecteur propre dominant, la convergence sera très améliorée.

Dans ce but, les itérations sont conduites non plus avec un seul vecteur d'essai, mais simultanément avec plusieurs vecteurs orthogonaux  $X_1, \dots, X_m$  ; à chaque itération une opération de ré-orthogonalisation permet de faire tendre chacun de ces  $m$  vecteurs respectivement vers les  $m$  vecteurs propres dominants.

Nous rangeons en colonne les  $m$  vecteurs d'essai  $X_1, \dots, X_m$  dans la matrice  $X$  de dimensions :  $(n, m)$ .

L'orthogonalité se traduit par  ${}^tXX = I(m)$ .

La multiplication par  $C$  fournit de la même manière  $Y$ , matrice  $(n, m)$  des vecteurs itérés.

$$Y = C X \quad (3-5)$$

Dans l'hypothèse où les vecteurs  $X_1 \dots X_m$  sont des vecteurs propres de  $C$ , la matrice  $(m, m)$   $B_1$  définie par

$$B_1 = {}^tXY \quad (3-6)$$

est diagonale ; ses éléments diagonaux sont les  $m$  plus grandes valeurs propres de  $C$ .

Cette situation se présente au terme du processus ; initialement, les termes extra-diagonaux sont en général non nuls. Le terme d'indices  $(i, j)$  traduit le "degré d'interaction" des vecteurs  $X_i, Y_j$  ;  $B_1$  est appelée matrice d'interaction.

Les vecteurs d'essai peuvent être exprimés sur la base des vecteurs propres sous la forme :

$$X = V \cdot Q \quad (3-7)$$

avec  $Q$  matrice  $(n, m)$  de coefficients

$V$  matrice  $(n, n)$  de vecteurs propres.

La condition d'orthogonalité prend alors la forme  ${}^t Q Q = I (m)$  (3-8)

Substituant (3-7) dans (3-6), on obtient :

$$B_1 = {}^t Q {}^t V C V Q = {}^t Q M Q \quad (3-9)$$

où  $M$  est une matrice diagonale  $(n, n)$  dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de  $C$ .

Nous distinguons maintenant dans les coefficients  $Q$  : les coefficients rangés dans la matrice  $(m, m)$  :  $Q_m$ , exprimant les composantes de  $m$  vecteurs d'essai sur les  $m$  vecteurs propres dominants, et les coefficients résiduels exprimant les composantes sur  $(n - m)$  autres vecteurs propres, rangés dans la matrice  $Q_r (n - m, m)$

$$X = V_m \cdot Q_m + V_r \cdot Q_r \quad (3-10)$$

$V_m$  matrice  $(n, m)$  des  $m$  vecteurs propres dominants

$V_r$  matrice  $(n, n - m)$  des autres vecteurs propres.

Cette notation permet d'exprimer commodément le fait suivant :  
 au cours du processus les vecteurs d'essai tendent vers les vecteurs  
 dominants. Ceci se traduit par l'approximation suivante :

$$X = V_m Q_m$$

Les coefficients  $Q_r$  sont négligés devant les  $Q_m$ .

(3-9) prend alors la forme :

$$B1 = {}^t Q_m M_m Q_m \quad (3-11)$$

où  $M_m$  est une sous matrice (m, m) de M.

De même (3-8) prend la forme

$${}^t Q_m Q_m = I \quad (3-12)$$

Il est clair, d'après (3-11) et (3-12) que les valeurs propres  
 de B1 sont des approximations de m plus grandes valeurs propres de C,  
 lorsqu'il est légitime de négliger  $Q_r$ .

Considérons maintenant l'itération elle-même.

Compte tenu de (3-5), et (3-7), les vecteurs itérés s'expriment  
 par :

$$Y = C V Q$$

Soit d'après (3-8) et (3-9) par :

$$Y = V M Q$$

Enfin, exprimant ces vecteurs sur les m vecteurs propres dominants :

$$Y = V_m M_m Q_m$$

Multipliant par  ${}^t Q_m$  à droite, on obtient :

$$Y {}^t Q_m = V_m M_m$$

compte tenu de l'orthogonalité (3-12).

On voit que la matrice  $(n, m) Y {}^t Q_m$  représente une approximation des  $m$  vecteurs propres dominants.

Or d'après (3-11),  ${}^t Q_m$  est une matrice contenant les vecteurs propres de  $B_1$ .

Il apparait donc que le processus de formation des  $m$  vecteurs propres cherchés est le suivant.

- 1 Multiplication  $Y = CX$
- 2 Formation de la matrice d'interaction  $B_1 = {}^t XY$
- 3 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de  $B_1$
- 4 Formation de  $Z = Y {}^t Q_m$

Naturellement les vecteurs obtenus (rangés dans la matrice  $(n, m) Z$ ) ne sont pas orthonormés ; tels qu'ils ne peuvent être utilisés pour l'itération suivante. Le procédé classique de Gram-Schmidt permet de former aisément un lot de vecteurs orthonormés à partir de  $Z$ , et donc de poursuivre les itérations.

Résumons finalement le schéma de calcul :

- 1 Multiplication  $Y = CX$
- 2 Formation de la matrice d'interaction  $B_1 = {}^t XY$
- 3 Calcul des valeurs et vecteurs propres de  $B_1$
- 4 Formation de  $Z = Y {}^t Q_m$
- 5 Orthogonalisation de  $Z$  (Gram-Schmidt)
- 6 Test de convergence. Retour à la phase 1 si nécessaire.

L'exposé de la méthode de Jennings appelle les remarques suivantes :

- La convergence est accélérée par rapport à la méthode de la puissance ; en effet l'orthogonalisation pratiquée à chaque itération épure le  $i^{\text{ème}}$  vecteur itéré de ses composantes sur les  $m - 1$  vecteurs propres autres que le  $i^{\text{ème}}$  ; ceci implique une convergence identique à celle d'une suite géométrique de raison  $\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}$ , très supérieure donc à celle que l'on peut attendre de la méthode de la puissance.

Il est en outre indiqué d'itérer sur  $m + 3$  vecteurs (par exemple) si l'on veut obtenir une précision correcte sur  $m$  valeurs propres ; la convergence est la plus rapide sur la première valeur propre.

Enfin la rapidité de la convergence ne dépend pas des dimensions de la matrice  $C$ , mais de la séparation des racines de son polynôme caractéristique.

- Seule la phase (1) de l'algorithme met en jeu la matrice  $C$  ; les autres opérations sont pratiquées sur des matrices  $(m, m)$ . La stabilité numérique est donc satisfaisante ; elle peut d'ailleurs être améliorée éventuellement en utilisant une accumulation en double précision sur les produits de matrices, soit par exemple pour le produit  $Y_i = CX_i$

```

DO 1 I = 1,N
  ACCU = 0.DO
  DO 1 J = 1,N
    ACCU = ACCU + DBLE (C(I,J)) * DBLE (X(J))
  Y(I) = ACCU
1 CONTINUE

```

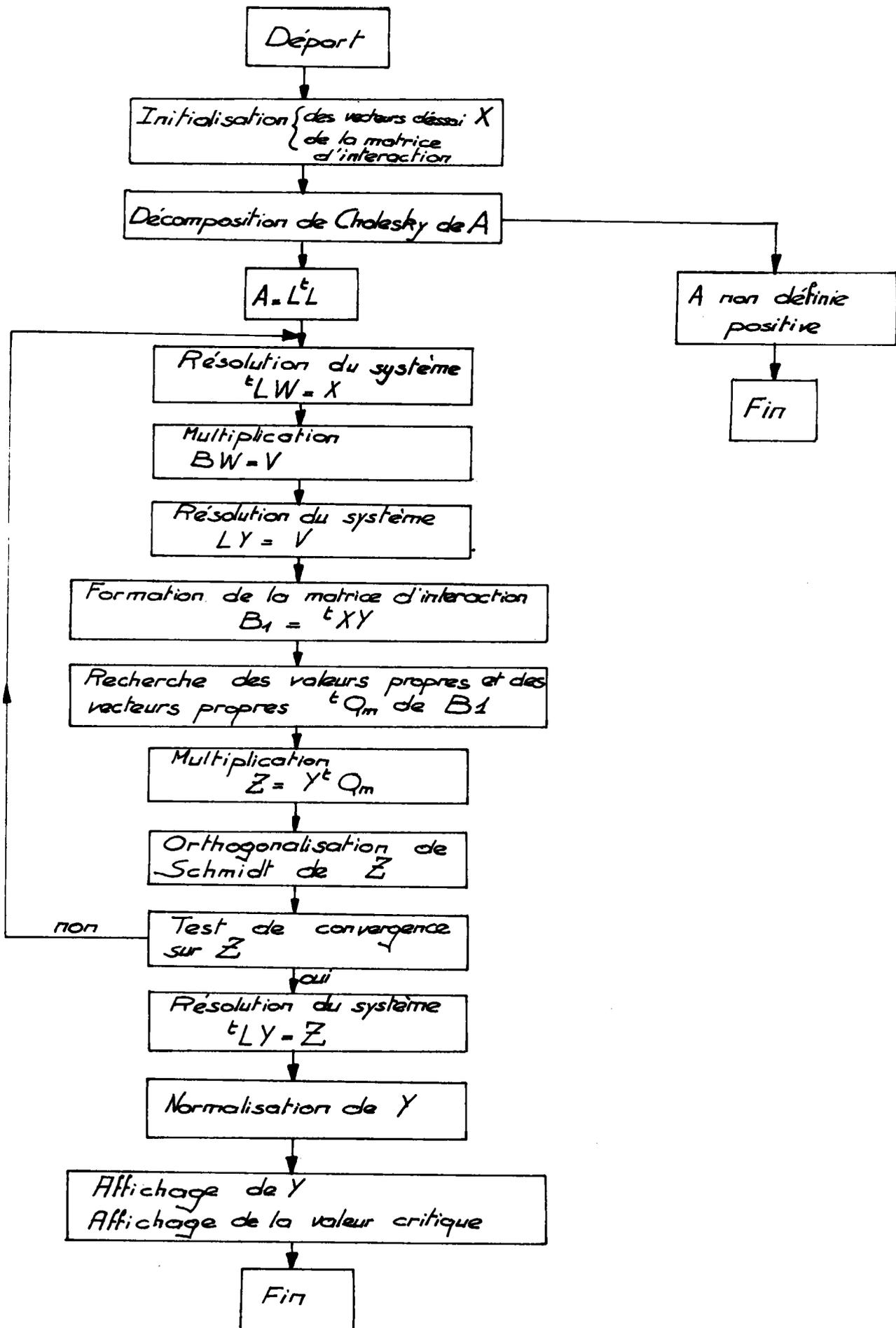


Fig 3-3-1

Méthode de Jennings

Tableau n° 1

n	b	i	t
90	7	6	4
180	15	6	12
240	17	6	13
340	21	6	22
406	27	7	22

- La convergence est naturellement améliorée lorsque l'on connaît une approximation à priori des vecteurs propres de  $C$ , utilisables comme vecteurs d'essai. Dans le cas contraire on peut utiliser soit des vecteurs orthogonaux canoniques, soit des vecteurs générés au hasard et orthonormés. Ce dernier procédé a l'avantage suivant : il est très improbable que de tels vecteurs soient orthogonaux au sous-espace engendré par ~~les~~  $p$  vecteurs propres dominants.

Nous donnons (Tableau 1) quelques indications sur le nombre d'itérations et le temps de calcul sur ordinateur UNIVAC 1108.

$n$  : dimension de  $A$  et  $B$

$2b+1$  : largeur de bande

$i$  : nombre d'itérations

$t$  : temps de calcul en secondes par excès

nombre de vecteurs d'essai : 4

précision demandée :  $10^{-4}$

En conclusion, on peut affirmer que la méthode de Jennings est bien adaptée aux problèmes posés par l'analyse de la stabilité des structures. Nous nous proposons maintenant d'analyser sommairement la méthode de Gupta et d'effectuer quelques comparaisons.

### 3-5 - METHODE DE GUPTA. [13, 14, 15]

#### a) Suites de Sturm

Nous rappelons la propriété suivante : si  $C$  est une matrice symétrique réelle, les mineurs principaux  $p_k(\mu)$  de  $(C - \mu I)$  forment une suite de Sturm.

En d'autres termes :

$$p_k(\mu) = 0 \Rightarrow p_{k-1}(\mu) \cdot p_{k+1}(\mu) < 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1$$

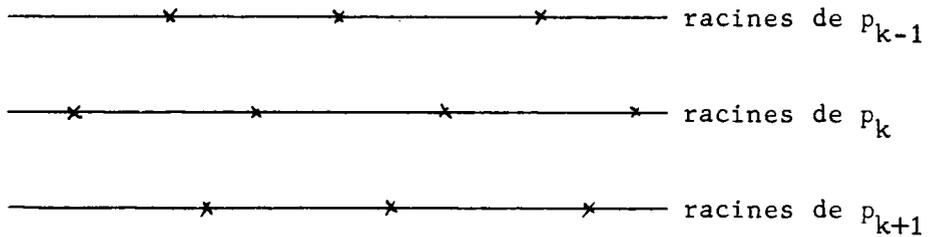
et

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} p_k(\mu) = +\infty$$

-

(Nous posons  $p_0(\mu) = 1$ )

Les racines des polynômes  $p_k(\mu)$  sont ainsi disposées de la manière suivante :



Pour  $\mu$  donné, nous posons :

$$\text{sg } p_k(\mu) = \begin{cases} \text{signe de } p_k(\mu) & \text{si } p_k(\mu) \neq 0 \\ \text{signe de } p_{k+1}(\mu) & \text{si } p_k(\mu) = 0 \end{cases}$$

Cette définition a un sens, car si  $p_k(\mu) = 0$ ,  $p_{k+1}(\mu) \neq 0$ .

On déduit de cette propriété le théorème suivant :

Théorème : le nombre de valeurs propres de  $C$  strictement supérieures à  $\mu$  est égal au nombre  $a(\mu)$  de concordances de deux signes consécutifs de la suite  $\{+, \text{sg } p_1(\mu), \text{sg } p_2(\mu) \dots \text{sg } p_n(\mu)\}$

Démonstration :

Raisonnons par récurrence : à l'ordre  $k$ , on suppose que le nombre de racines strictement supérieures à  $\mu$  est égal au nombre  $a_k$  ( $\mu$ ) de concordances de deux signes consécutifs de la suite  $\{ +, \text{sg } p_1(\mu), \text{sg } p_2(\mu) \dots \text{sg } p_k(\mu) \}$

Soient  $\mu_i^k$  les racines de  $p_k$  ; on a :

$$\mu_1^k > \dots > \mu_{a_k}^k > \mu > \mu_{a_k+1}^k > \dots > \mu_{n_k}^k$$

Par ailleurs, les racines  $\mu_i^{k+1}$  de  $p_{k+1}$  séparent strictement les racines de  $p_k$  ; d'où

$$\mu_1^{k+1} > \mu_1^k > \mu_2^{k+1} \dots > \mu_{a_k}^{k+1} > \mu_{a_k}^k > \mu_{a_k+1}^{k+1} > \mu_{a_k+1}^k \dots \quad (3-10)$$

si  $\mu > \mu_{a_k+1}^{k+1}$ ,  $p_{k+1}$  possède  $a_k$  racines supérieures à  $\mu$  ; si au contraire  $\mu_{a_k+1}^{k+1} > \mu$ ,  $p_{k+1}$  possède  $a_k + 1$  racines supérieures à  $\mu$ .

Par ailleurs :  $p_k(\mu) = \prod_{i=1}^{a_k} (\mu_i^k - \mu)$  (3-11)

et  $p_{k+1}(\mu) = \prod_{i=1}^{a_k+1} (\mu_i^{k+1} - \mu)$

$\mu$  appartenant à l'intervalle  $[\mu_{a_k+1}^k, \mu_{a_k}^k]$ , on peut avoir plusieurs dispositions possibles (Fig. 3-1)

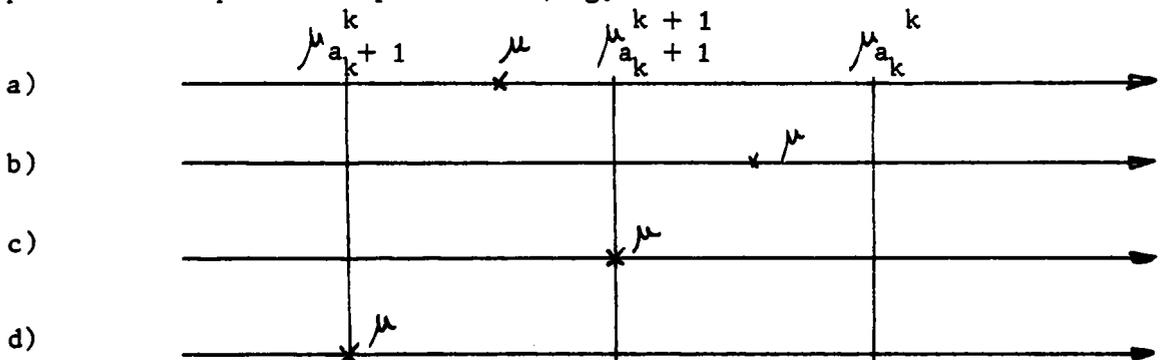


Fig. 3-1

- a) Dans ce cas  $\mu_{a_k+1}^{k+1} - \mu > 0$ , et donc, d'après (3-10) et (3-11)  
 $\text{sg } p_{k+1}(\mu) = \text{sg } p_k(\mu)$ ; il y a donc une concordance de signe supplémentaire et  $a_{k+1} = a_k + 1$
- b) dans ce cas  $\mu_{a_k+1}^{k+1} - \mu < 0$ ; donc  $p_k(\mu)$  et  $p_{k+1}(\mu)$  ont des signes différents, et  $a_{k+1} = k$
- c) dans ce cas  $\mu_{a_k+1}^{k+1} - \mu = 0$ ; donc  $\text{sg } p_{k+1}(\mu) = \text{sg } p_{k+2}(\mu)$  puisque  $p_{k+1}(\mu) = 0$  (voir définition de  $\text{sg } p_k(\mu)$ ), soit encore :  $\text{sg } p_{k+1}(\mu) = -\text{sg } p_k(\mu)$ ; il n'y a donc pas de concordance de signe supplémentaire, et  $a_{k+1} = a_k$
- d) Enfin  $\mu_{a_k+1}^k - \mu = 0$ ; donc  $p_k(\mu) = 0$  et  $\text{sg } p_k(\mu) = \text{sg } p_{k+1}(\mu)$ .  
 Il y a une concordance supplémentaire et  $a_{k+1} = a_k + 1$ .

Dans chacun de ces quatre cas, le nombre des racines de  $p_{k+1}$  strictement supérieures à  $\mu$  est égal à  $a_{k+1}$ .

La propriété supposée vraie à l'ordre  $k$  est vraie pour  $k = 1$ ; si en effet  $\mu > \mu_1^1$  il n'y a pas de concordance de signe. Il y en a une dans le cas contraire, ce qui montre le théorème.

Cette propriété permet de localiser les valeurs propres de  $C$ ; soit en effet un intervalle  $[x_1, x_2]$ ; le nombre de valeurs propres comprises dans l'intervalle est  $a_n(x_1) - a_n(x_2)$ .

On peut naturellement énoncer une propriété symétrique :

**Théorème** : Le nombre de valeurs propres de  $C$  strictement inférieures à  $\mu$  est égal au nombre de changements de signes consécutifs de la suite

$$\{ +, \text{sg } p_1(\mu), \dots, \text{sg } p_n(\mu) \}$$

Le nombre de valeurs propres comprises dans un intervalle  $[x_1, x_2]$  sera alors  $b_n(x_2) - b_n(x_1)$ , si  $b_n(x)$  est le nombre de valeurs propres inférieures strictement à  $x$ .

#### b) Méthode de Gupta

La méthode de Gupta combine une méthode de bisection basée sur le théorème précédent, et une méthode dite d'itérations inverses, pour localiser, puis calculer rapidement les valeurs propres cherchées.

#### Méthode de bisection

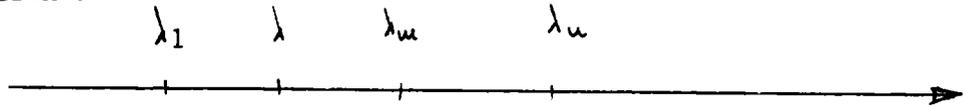
On montre [33] que les mineurs principaux  $p_k(\lambda)$  de  $(A - \lambda B)$  forment également une suite de Sturm ; dès lors les  $N$  racines désirées (par exemple dans l'intervalle  $[\lambda_u, \lambda_1]$ ) sont isolées en utilisant les propriétés de ces suites : on calcule  $a(\lambda_u)$  et  $a(\lambda_1)$ , ce qui permet de repérer le nombre et l'ordre des racines comprises dans l'intervalle  $[\lambda_u, \lambda_1]$ , puis on répète l'opération pour  $\lambda_m = \frac{\lambda_u + \lambda_1}{2}$  etc... ; on voit que ce procédé de bisection localise la  $k^{\text{ème}}$  valeur propre. La partie centrale est le calcul des mineurs principaux de  $(A - \lambda B)$  ; celui-ci est basé sur une variante de l'élimination de Gauss établie par Wilkinson [38] permettant d'assurer la stabilité numérique.

#### Itérations inverses

La méthode de bisection n'est pas conduite jusqu'à son terme, c'est-à-dire jusqu'à ce que  $|\lambda_u - \lambda_1| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant la précision voulue. Le temps de calcul deviendrait en effet trop important ; la méthode des itérations inverses affine le résultat obtenu, pour un temps de calcul bien moindre.

~~Nous représentons ci-dessous la disposition obtenue au terme de~~

Nous représentons ci-dessous la disposition obtenue au terme de la bisection :



Soit alors un vecteur d'essai arbitraire  $U_0$  ; les opérations suivantes sont pratiquées :

1°) Multiplication  $B U_0$  ; Normalisation de  $B U_0$ , d'où  $\bar{U}_0$

2°) Résolution du système linéaire

$$(A - \lambda_m B) U_1 = \bar{U}_0$$

3°) Estimation de  $\lambda$  par un quotient de Rayleigh

$$\lambda_i = \frac{{}^t U_1 A U_1}{{}^t U_1 B U_1}$$

4°) Test de convergence

Si  $|\lambda_m - \lambda_i| < \varepsilon$  le procédé est arrêté ; sinon

5°) Normalisation de  $U_1$  ; retour en 1 en remplaçant  $U_0$  par  $U_1$ ,  $\lambda_m$  par  $\lambda_i$

Ce procédé itératif converge vers la racine la plus proche de la valeur initiale  $\lambda_m$  adoptée ; en isolant les racines au moyen de la méthode de bisection la convergence vers la racine choisie est donc assurée.

Inversement, il peut être difficile de contrôler la convergence si une connaissance préalable de la disposition des racines n'est pas acquise.

La méthode de Gupta exploite pleinement les caractéristiques du problème aux valeurs propres posées (symétrie, structure de bande, nombre de racines demandé ...) ; elle permet en outre de calculer le nombre de valeurs propres voulu, ou encore les valeurs propres situées dans un intervalle donné.

### 3-6 - COMPARAISON - CONCLUSION.

Nous donnons ici quelques indications sur les caractéristiques comparées de deux principales méthodes exposées : méthode des itérations simultanées de Jennings, méthode de Gupta, tout en faisant référence à la méthode de Householder-Givens.

La comparaison est faite sur la recherche de la plus basse valeur propre du problème  $AX = \lambda BX$  où A et B sont de dimension n, de largeur de bande  $(2b + 1)$ , avec 4 vecteurs d'essai et 6 itérations pour la méthode d'itérations simultanées

Le tableau n° 2 indique le nombre d'allocations en mémoire nécessaires, lorsque le stockage utilise la structure de bande ; ces chiffres peuvent être réduits dans les cas où il existe un nombre important d'éléments nuls dans la bande ; le stockage des seuls éléments non nuls permet la réduction indiquée.

Ce tableau indique à l'évidence l'inadaptation de la méthode de Householder ; les méthodes de Gupta et de Jennings nécessitent les mêmes zones mémoires pour des dimensions modestes ; pour les très grosses matrices, la méthode de Jennings est plus avantageuse. On note également la sensibilité plus grande de la méthode de Gupta à la largeur de bande des matrices introduites.

Le tableau n° 3 conduit à des remarques analogues ; Rappelons que pour des matrices logées en mémoire centrale, le nombre de multiplications est un indicateur valable du temps de calcul. La méthode de Gupta se révèle être plus rapide pour les "petites" matrices ; la méthode de Jennings semble plus adaptée aux problèmes mettant en jeu des matrices de très grandes dimensions ;

Tableau n°2 : allocations mémoire

$K = 10^3 \text{ mots}$

$n$	$b$	HOUSEHOLDER	GUPTA	JENNINGS
50	5	18 K	1,6 K	2 K
50	10	2,3 K	3 K	2,6 K
200	10	24 K	12 K	10 K
200	20	28 K	24 K	14 K
1000	20	540 K	120 K	70 K
1000	40	580 K	240 K	110 K

Tableau n°3 : Nombres de multiplications

$M = 10^6$

$n$	$b$	HOUSEHOLDER	GUPTA	JENNINGS
50	5	0,12 M	0,005 M	0,02 M
50	10	0,14 M	0,02 M	0,04 M
200	10	6,2 M	0,08 M	0,15 M
200	20	6,8 M	0,32 M	0,35 M
1000	20	704 M	1,6 M	1,7 M
1000	40	740 M	5,6 M	3,7 M

En conclusion, il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode l'emportant définitivement pour tous les types de problèmes que l'on peut être amené à poser dans ce domaine ; selon l'ordre des systèmes étudiés, selon la largeur de bande qu'ils comportent il convient d'opérer une sélection. Cependant pour les très grands systèmes, la méthode des itérations simultanées fournit la solution la plus efficace.

Annexe 3

1°) Décomposition de Cholesky

Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique, définie positive ;  
la décomposition de Cholesky est basée sur le théorème suivant :

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit symétrique et définie positive est qu'il existe une matrice L (n, n) à éléments réels, triangulaire inférieure et telle que  $A = L^t L$

Le schéma de calcul de la décomposition est le suivant :

de  $A = L^t L$ , on déduit :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk} \quad \text{pour } i \geq j$$

D'abord pour  $j = 1$ , on trouve :

$$a_{11} = l_{11}^2, \quad a_{i1} = l_{i1} l_{11}$$

$$\text{d'où } l_{i1} = \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{11}}} \quad i = 1, n$$

La première colonne de L est ainsi déterminée ; plus généralement la  $j^{\text{ème}}$  colonne est calculée à partir des  $(j - 1)$  premières avec :

$$l_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) \cdot l_{jj}^{-1} \quad i = j + 1, \dots, n$$

La matrice L est ainsi déterminée.

Pour chaque valeur de j, on peut choisir  $l_{jj}$  :

$$l_{jj} = \pm \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \quad . \text{ Il en résulte que la décomposition}$$

n'est pas unique, mais que les matrices triangulaires M, L obtenues se déduisent les unes des autres par une multiplication  $M = D \cdot L$  où D est une matrice diagonale, avec  $d_{ii} = \pm 1$ .

Une analyse de la propagation des erreurs d'arrondi montre que cette méthode est très stable ; en outre les matrices triangulaires obtenues possèdent la structure de bande lorsque A la possède. Enfin remarquons que la méthode permet de calculer aisément le déterminant de A ; en effet :

$$\det A = \prod_{j=1}^n a_{jj}^2$$

## 2°) Résolution des systèmes linéaires

Parmi les méthodes de résolution des systèmes linéaires, nous rappellerons ici deux méthodes présentant de l'intérêt en analyse des structures : la méthode de Cholesky et la méthode de surrelaxation.

### a) Méthode de Cholesky

Soit à résoudre le système linéaire  $A X = B$ , où A est une matrice bande  $(n, n)$  symétrique et définie positive ; l'emploi de la décomposition de Cholesky  $A = L {}^t L$  permet de décomposer le problème.

Soit en effet l'inconnue auxiliaire  $Y = {}^t L X$ .

On résout successivement

$$L Y = B$$

$${}^t L X = Y$$

dont la résolution est simple ( $L$  et  ${}^t L$  systèmes sont triangulaires)

Cette méthode permet de résoudre des systèmes linéaires relativement importantes avec une bonne stabilité.

### b) Méthode de surrelaxation.

Pour des systèmes linéaires très importants, les méthodes directes (Gauss, Cholesky) doivent être remplacées par des méthodes itératives ;

on utilise fréquemment en analyse des structures la méthode de Gauss Seidel avec surrelaxation que nous exposons brièvement ici :

Soit à résoudre le système  $A X = B$

Posons  $A = D - L - U$

avec  $D = (a_{ii})$

$L = (-a_{ij}) \quad i < j$

$U = (-a_{ij}) \quad i > j$

Ceci réalise la décomposition de Gauss Seidel de la matrice  $A$  ;  
on associe à cette décomposition la méthode itérative de  
Gauss - Seidel :

$$(D - L) X_{k+1} = U X_k + B$$

On est amené à résoudre, à chaque itération, des systèmes de la forme

$$(D - L) X_{k+1} = Y_k = U X_k + B$$

On montre que la convergence du procédé est assurée si  $A$  est symétrique, définie positive ; elle est améliorée par le procédé de surrelaxation défini par :

$$(D - L) \bar{X}_{k+1} = U X_k + B$$

$$X_{k+1} = X_k + \omega(\bar{X}_{k+1} - X_k)$$

où  $\omega$  est le facteur de surrelaxation.

La méthode converge alors si l'on choisit  $\omega$  entre 0 et 2 ;  
en pratique, on prend  $\omega = 1,8$ .

## CHAPITRE IV

### A P P L I C A T I O N S

#### 4-1 - INTRODUCTION

Nous présentons brièvement dans ce chapitre les programmes que nous avons été amenés à construire et à utiliser.

La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis exige naturellement que l'on mette au point des éléments appropriés à chaque problème traité ; nous n'avons pas fait porter notre effort sur ce point. Nous pensons en effet que le travail ainsi effectué pour un problème donné ne peut être récupéré pour d'autres cas ; n'étant pas motivé par une demande précise, nous avons préféré nous consacrer aux problèmes généraux posés par l'analyse de la stabilité des structures. L'abondance d'articles présentant des éléments toujours plus sophistiqués nous renforce d'ailleurs dans cette opinion.

Nous avons cependant vérifié le bon fonctionnement de nos programmes sur le cas bien connu de la colonne d'Euler, cherchant en outre à poursuivre l'analyse pour les faibles élancements.

#### 4-2 - ELEMENTS

Le problème d'Euler constitue un excellent test de l'efficacité d'une méthode numérique relative à la stabilité.

Ce problème conduit à formuler l'hypothèse suivante : la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  (Fig. 1-5-1) se présente sous la forme :

$$\sigma_{zz} = k (f - y) y_1$$

( $y_1$  : distance à la fibre neutre)

Les déplacements, et les fonctions de déplacement, sont donc du troisième ordre en  $y$  et  $z$  ; cette remarque amène à considérer des éléments présentant un nombre important de degrés de liberté. Citons quelques éléments classiques [39] réalisant une interpolation au moins cubique.

\* élément cubique triangulaire de Lagrange.

Cet élément possède 20 degrés de liberté ; il présente l'avantage d'assurer l'unicité d'un développement cubique complet (Fig. 4-2-1) (ensemble unisolvant).

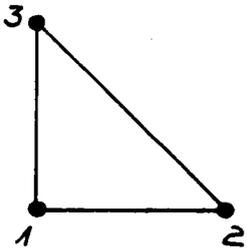
Les autres éléments de cette famille présentent d'ailleurs la même propriété : le  $n^{\text{ème}}$  élément assure l'unicité du développement complet à l'ordre  $n$  ; ce qui en fait une famille privilégiée.

\* élément cubique rectangulaire ("Serendipity Family").

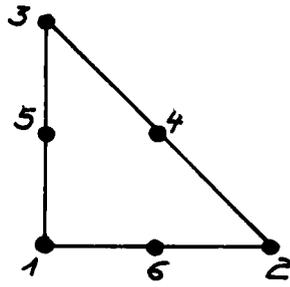
Cet élément (Fig. 4-2-2) possède 24 degrés de liberté ; contrairement à l'élément cubique de Lagrange, il n'assure pas l'unicité du polynôme d'interpolation. Il permet néanmoins d'obtenir de bons résultats.

Nous avons adopté pour leur simplicité des éléments rectangulaires quasi-linéaires (Fig. 4-2-2 a) à huit degrés de liberté, pour lesquels la variation des contraintes est linéaire dans certaines directions, en comptant sur le raffinement de la discrétisation pour assurer la convergence ; l'élévation de la rigidité élémentaire qui en résulte implique une accumulation d'énergie interne plus importante, et une augmentation de la charge critique.

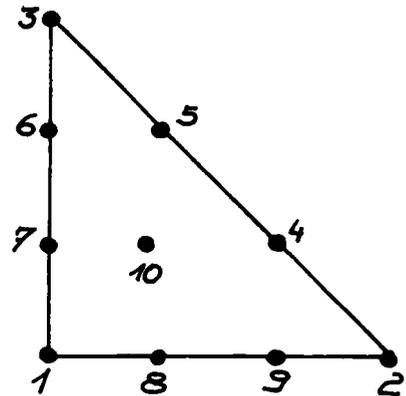
Il faudrait par contre s'attendre à une valeur par défaut de la charge critique si la classe des déplacements virtuels admissibles était élargie par une relaxation des conditions aux limites, ou des exigences de continuité aux frontières [23].



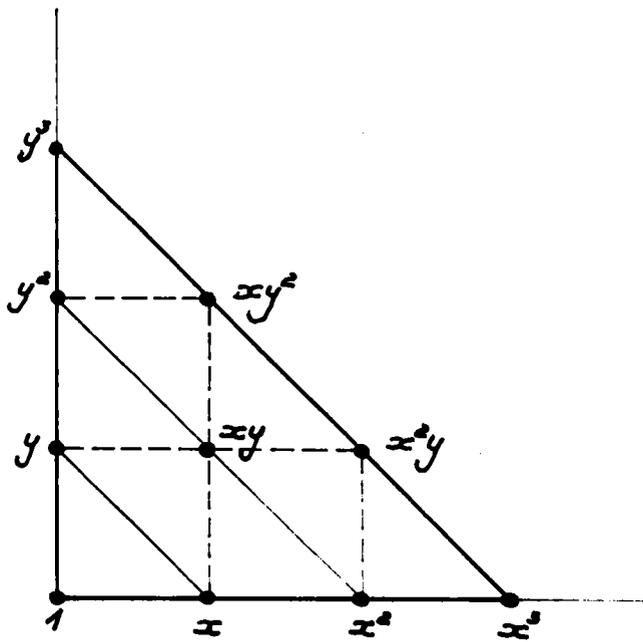
(a)



(b)



(c)



### Elements triangulaires de LAGRANGE

(a) linéaire

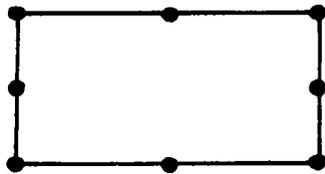
(b) quadratique

(c) cubique

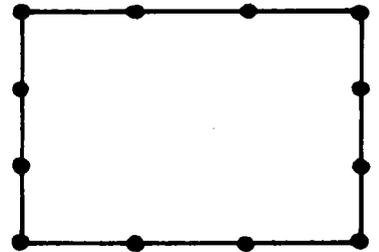
Fig 4-2-1



(a)



(b)



(c)

*Elements rectangulaires à noeuds aux frontières*

- (a) *quasi-linéaire*
- (b) " *quadratique*
- (c) " *cubique*

Fig 4-2-2

#### 4-3 - NOTATIONS - LISTING

Nous reproduisons ici l'un des programmes mis au point au cours de ce travail ; les notations principales sont les suivantes :

NNO : nombre de noeuds

NEL : nombre d'éléments

NCL : nombre de noeuds soumis à des conditions aux limites

NBAND : largeur de bande

NDEP : nombre total de déplacements

NDEPF : nombre d'équations

COOR (NNO,2) : matrice des coordonnées des noeuds

NOP (NEL,4) : matrice de connection

STAB 1 (NDEPF, NBAND) : matrice de rigidité

STAB 2 (NDEPF, NBAND) : matrice de rigidité incrémentale

PSI (8,8) : matrice de rigidité élémentaire

PHI (8,8) : matrice de rigidité incrémentale élémentaire

Le programme présenté réalise les opérations suivantes :

- 1) Calcul de la charge critique d'Euler et du mode de flambement associé.
- 2) Calcul de la déformée de la colonne soumise à un effort transversal en son extrémité.
- 3) Calcul de la déformée de la colonne soumise à une charge de compression axiale inférieure à la charge critique, et au même effort transversal.

Il met en évidence un facteur d'amplification des déplacements sous l'effet de la précontrainte axiale dans le domaine linéaire.

On trouvera également l'organigramme général du programme (Fig. 4-3-1).





```

57*      DO 1 I=1,NNX
58*      IJ=NNY*(I-1)+K
59*      COOR(IJ,2)=HA
60*      1 CONTINUE
61*      DO 2 K=1,NNX
62*      LA=LON*(K-1)
63*      DO 2 I=1,NNY
64*      IJ=NNY*(K-1)+I
65*      COOR(IJ,1)=LA
66*      2 CONTINUE
67*      DO 3 K=1,NNY
68*      KJ=K+1
69*      KK=K+NNY
70*      KL=KK+1
71*      DO 3 I=1,NNX
72*      II=(NNX-1)*(K-1)+I
73*      IJ=NNY*(I-1)
74*      NOP(II,1)=K+IJ
75*      NOP(II,2)=KJ+IJ
76*      NOP(II,3)=KK+IJ
77*      NOP(II,4)=KL+IJ
78*      3 CONTINUE
79*      WRITE(NIMP,IGD1)
80*      WRITE(NIMP,IGD2)(I,(COOR(I,J),J=1,2),I=1,NNN)
81*      IGG2 FORMAT(/,' NOEUD=NUMERO',I4,5X,'X=',E10.3,5X,'Y=',E10.3)
82*      WRITE(NIMP,IGD3)
83*      WRITE(NIMP,IGD4)((NOP(I,J),J=1,4),I=1,NEL)
84*      C          INITIALISATION DES MATRICES GLOBALES
85*      C          .....
86*      DO 4 II=1,INDEPF
87*      DO 4 JI=1,INBAND
88*      STAB1(II,JI)=0.
89*      STAB2(II,JI)=0.
90*      4 CONTINUE
91*      C
92*      C          FORMATION DES MATRICES ELEMENTAIRES
93*      C          .....
94*      DO4CDE=1,NEL
95*      I=NOP(NE,1)
96*      J=NOP(NE,2)
97*      K=NOP(NE,3)
98*      L=NOP(NE,4)
99*      DO 4C B=1,8
00*      4C QUI(1,B)=0.
01*      QUI(2,1)=0.
02*      QUI(2,2)=(LANI+2.*MU)*LON*HAU
03*      QUI(2,3)=0.
04*      QUI(2,5)=L.
05*      QUI(2,6)=0.
06*      QUI(2,7)=LANI*LON*HAU
07*      QUI(3,1)=0.
08*      QUI(3,2)=0.
09*      QUI(3,3)=NU*LON*HAU
10*      QUI(3,5)=0.
11*      QUI(3,6)=NU*LON*HAU
12*      QUI(3,7)=0.
13*      QUI(4,1)=0.

```

```

QUI(4,2)=(LAND+2.*MU)*LON*(COOR(J,2)**2-COOR(II,2)**2)/2.
QUI(4,3)=MU*HAU*(COOR(K,1)**2-COOR(II,1)**2)/2.
QUI(4,4)=MU*HAU*((COOR(K,1)**3-COOR(II,1)**3)/3.)+(LAND+2.*MU)*LON
1*(COOR(J,2)**3-COOR(II,2)**3)/3.
QUI(4,5)=0.
DO 41 N=1,8
41 QUI(5,N)=0.
QUI(6,1)=0.
QUI(6,2)=0.
QUI(6,3)=MU*LON*HAU
QUI(6,4)=MU*HAU*(COOR(K,1)**2-COOR(II,1)**2)/2.
QUI(6,5)=0.
QUI(6,6)=MU*LON*HAU
QUI(6,7)=0.
QUI(7,1)=0.
QUI(7,2)=LAND*LON*HAU
QUI(7,3)=0.
QUI(7,4)=LAND*LON*(COOR(J,2)**2-COOR(II,2)**2)/2.
QUI(7,5)=0.
QUI(7,6)=0.
QUI(7,7)=(LAND+2.*MU)*LON*HAU
QUI(8,1)=0.
QUI(8,2)=LAND*HAU*(COOR(K,1)**2-COOR(II,1)**2)/2.
QUI(8,3)=MU*LON*(COOR(J,2)**2-COOR(II,2)**2)/2.
QUI(8,4)=(LAND+MU)*HAU*(COOR(K,1)**2-COOR(II,1)**2)*(COOR(J,2)**2-COOR
1(II,2)**2)/4.
QUI(8,5)=0.
QUI(8,6)=MU*LON*(COOR(J,2)**2-COOR(II,2)**2)/2.
QUI(8,7)=(LAND+2.*MU)*HAU*(COOR(K,1)**2-COOR(II,1)**2)/2.
QUI(8,8)=(LAND+2.*MU)*HAU*((COOR(K,1)**3-COOR(II,1)**3)/3.)+MU*LON
1*(COOR(J,2)**3-COOR(II,2)**3)/3.
QUI(2,4)=QUI(4,2)
QUI(2,8)=QUI(8,2)
QUI(3,4)=QUI(4,3)
QUI(3,8)=QUI(8,3)
QUI(4,6)=QUI(6,4)
QUI(4,7)=QUI(7,4)
QUI(4,8)=QUI(8,4)
QUI(6,8)=QUI(8,6)
QUI(7,8)=QUI(8,7)
DO 50 N=1,8
50 TETA(1,N)=0.
TETA(2,1)=0.
TETA(2,2)=HAU*LON
TETA(2,3)=0.
TETA(2,4)=LON*(COOR(J,2)**2-COOR(II,2)**2)/2.
DO 51 N=5,8
51 TETA(2,N)=0.
DO 52 N=1,8
52 TETA(3,N)=0.
TETA(4,1)=0.
TETA(4,2)=TETA(2,4)
TETA(4,3)=0.
TETA(4,4)=LON*(COOR(J,2)**3-COOR(II,2)**3)/3.
DO 53 N=5,8
53 TETA(4,N)=0.
DO 54 N=1,8

```

```

171*      54 TETA(5,N)=0.
172*        DO 55 N=1,5
173*      55 TETA(6,N)=0.
174*        TETA(6,6)=NAU*LON
175*        TETA(6,7)=0.
176*        TETA(6,8)=TETA(4,2)
177*        DO 56 N=1,8
178*      56 TETA(7,N)=0.
179*        DO 57 N=1,5
180*      57 TETA(8,N)=0.
181*        TETA(8,6)=TETA(6,6)
182*        TETA(8,7)=0.
183*        TETA(8,8)=TETA(4,4)
184*        HN(1,1)=1.
185*        HN(1,2)=COOR(11,1)
186*        HN(1,3)=COOR(11,2)
187*        HN(1,4)=COOR(11,1)*COOR(11,2)
188*        DO 63 N=5,8
189*      63 HN(1,N)=0.
190*        HN(2,1)=0.
191*        HN(2,2)=0.
192*        HN(2,3)=0.
193*        HN(2,4)=0.
194*        HN(2,5)=1.
195*        HN(2,6)=COOR(11,1)
196*        HN(2,7)=COOR(11,2)
197*        HN(2,8)=COOR(11,1)*COOR(11,2)
198*        HN(3,1)=1.
199*        HN(3,2)=COOR(J,1)
200*        HN(3,3)=COOR(J,2)
201*        HN(3,4)=COOR(J,1)*COOR(J,2)
202*        DO 64 N=5,8
203*      64 HN(3,N)=0.
204*        DO 65 N=1,4
205*      65 HN(4,N)=0.
206*        HN(4,5)=1.
207*        HN(4,6)=COOR(J,1)
208*        HN(4,7)=COOR(J,2)
209*        HN(4,8)=COOR(J,1)*COOR(J,2)
210*        HN(5,1)=1.
211*        HN(5,2)=COOR(K,1)
212*        HN(5,3)=COOR(K,2)
213*        HN(5,4)=COOR(K,1)*COOR(K,2)
214*        DO 66 J=5,8
215*      66 HN(5,J)=0.
216*        DO 67 J=1,4
217*      67 HN(6,J)=0.
218*        HN(6,5)=1.
219*        HN(6,6)=COOR(K,1)
220*        HN(6,7)=COOR(K,2)
221*        HN(6,8)=COOR(K,1)*COOR(K,2)
222*        HN(7,1)=1.
223*        HN(7,2)=COOR(L,1)
224*        HN(7,3)=COOR(L,2)
225*        HN(7,4)=COOR(L,1)*COOR(L,2)
226*        DO 68 J=5,8
227*      68 HN(7,J)=0.

```

```

228*      DO 69 J=1,4
229*      69 MN(8,J)=0.
230*      MN(8,5)=1.
231*      MN(8,6)=COORD(L,1)
232*      MN(8,7)=COORD(L,2)
233*      MN(8,8)=COORD(L,1)*COORD(L,2)
234*      CALL HINV(MN,8,DETER,TRAV1,TRAV2)
235*      IF(DETER) 71,70,71
236*      70 WRITE(NIMP,200) NE
237*      200 FORMAT('HC', ' ELEMENT NUMERO', I3, 3X, ' DETERMINANT MN NUL')
238*      GO TO 401
239*      71 CONTINUE
240*      CALL GMPRD(QUI,MN,AUX1,8,8,8)
241*      CALL GMPRD(TETA,MN,AUX2,8,8,8)
242*      CALL GTPRD(MN,AUX1,PSI,8,8,8)
243*      CALL GTPRD(MN,AUX2,PHI,8,8,8)
244*
245*      C
246*      C          FORMATION DES MATRICES DE STABILITE GLOBALES
247*      C          .....
248*      DO 7N=1,4
249*      KK=I-2.*N
250*      IF(KK) 8,9,7
251*      7 CONTINUE
252*      8 NLI=2*NOP(NE,N)-1
253*      GO TO 10
254*      9 NLI=2*NOP(NE,N)
255*      10 CONTINUE
256*      DO 6J=1,8
257*      DO 11 M=1,4
258*      KL=J-2.*M
259*      IF(KL) 12,13,11
260*      11 CONTINUE
261*      12 NCOL=2*NOP(NE,N)-1
262*      GO TO 14
263*      13 NCOL=2*NOP(NE,N)
264*      14 CONTINUE
265*
266*      C
267*      C          INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES
268*      C          .....
269*      NLI=NLI-2*NCL
270*      IF(NLI) 6,6,26
271*      26 NCO=NCOL-2*NCL
272*      IF(NCO) 6,6,27
273*
274*      C
275*      C          REDUCTION SOUS FORME COMPACTE
276*      C          .....
277*      27 IDF=NCO-NLI
278*      IF(IDF) 6,28,29
279*      28 IF(NCAND-IDF) 6,6,29
280*      29 NCOL=IDF+1
281*      STAB1(NLI,NCOL)=STAB1(NLI,NCOL)+PSI(I,J)
282*      STAB2(NLI,NCOL)=STAB2(NLI,NCOL)+PHI(I,J)
283*      6 CONTINUE
284*      400 CONTINUE
285*      DO 500 I=1,NDEPF
286*      DO 500 J=1,NBAND

```

```

500 STAB3(I,J)=STAB1(I,J)
   CALL LOAD(BS,BSA,NDEPF,NNO,NCL,NLEC)
   WRITE(NIMP,6500)
6500 FORMAT(/,' ETAT INITIAL NON CONTRAINT',/)
   CALL INVER(STAB3,NDEPF,NBAND,BS,C,NIMP)
   DO 510 I=1,NDEPF
   DO 510 J=1,NBAND
510 STAB3(I,J)=STAB1(I,J)
   CCC=BS(NDEPF)
   IID=1
   IIF=1
   CALL TDELTA(IID)
   CALL REVIS(INVES,ERR,STAB1,STAB2,NDEPF,NBAND,IMAY,BIN,BIS,BESTB,
IBIC,VALE,C,BS,NBAND,NIMP)
   CALL TDELTA(IIF)
   DUREE=IIF-IID
   WRITE(NIMP,4000) DUREE
4000 FORMAT(/,' TEMPS DE CALCUL DE REVIS',E10.3,' SECONDES',/)
   RED=0.5
   DO 520 I=1,NDEPF
   DO 520 J=1,NBAND
520 STAB3(I,J)=STAB3(I,J)-(VALE(I)*RED)*STAB2(I,J)
   CALL LOAD(BS,BSA,NDEPF,NNO,NCL,NLEC)
   IID=1
   IIF=1
   CALL TDELTA(IID)
   CALL INVER(STAB3,NDEPF,NBAND,BS,C,NIMP)
   CALL TDELTA(IIF)
   DUREE=IIF-IID
   WRITE(NIMP,5000) DUREE
5000 FORMAT(/,' TEMPS DE CALCUL D INVER=',E10.3,' SECONDES',/)
   RAP=BS(NDEPF)/CCC
   WRITE(NIMP,7000) RAP
7000 FORMAT(/,' RAPPORT DES FLECHES NATURELLE ET PRE-CONTRAINTE=',E10.
1,/)
   PI=3.141592
   RAP=LAND/HU
   NUM=PI*PI*MU*(2+3.*RAP)*(((NNY-1)*HAU)**2.)
   DEN=48*(((NNX-1)*LON)**2.)*(1+RAP)
   CCC=NUM/DEN
   WRITE(NIMP,5010) CCC
5010 FORMAT(/,' EULER=',E14.7,/)
401 CONTINUE
   CALL EXIT
   END

```

COMPILATION: NO DIAGNOSTICS.

\*FOR: IS INVER, INVER  
 FOR S11A-02/21/74-12:22:00 (,0)  
 FORTRAN 11A INTER-PROJETS 1100 (ORSAY)

SUBROUTINE INVER ENTRY POINT 000075

STORAGE USED: CODE(1) 000132; DATA(0) 000035; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 CH0BA  
 0004 SOLBA  
 0005 HWDUS  
 0006 NI02S  
 0007 NI01S  
 0010 HERR3S

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001 000021 10L 0000 000002 1000F 0001 000057 125G 0000 000012 2000F 0000 000016 2001F  
 0000 000024 INJPS 0000 000001 J 0000 000000 HERR

```

00101 1*      SUBROUTINE INVER(A,NEQ,NBAND,BS,C,NIMP)
00102 2*      C      RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE A*C=BS
00103 3*      C      A MATRICE SYMETRIQUE DEFINIE POSITIVE A STRUCTURE BANDE
00104 4*      C      STOCKAGE RECTANGULAIRE
00105 5*      C      BS VECTEUR CHARGEMENT DETRUIT DANS LE CALCUL
00106 6*      C      EN SORTIE BS CONTIENT LES DEPLACEMENTS
00107 7*      C      C VECTEUR AUXILIAIRE
00108 8*      C      LES DIMENSIONS SONT A(NEQ,NBAND),C(NEQ),BS(NEQ)
00109 9*      DIMENSION C(1),BS(1)
00110 10*     DIMENSION A(NEQ,NBAND)
00111 11*     CALL CH0BA(A,NEQ,NBAND,HERR)
00112 12*     IF(HERR.EQ.0) GO TO 10
00113 13*     WRITE(NIMP,1000) HERR
00114 14*     1000 FORMAT(/,' MATRICE NON DEFINIE POSITIVE,HERR=',I4,/)
00115 15*     RETURN
00116 16*     10 CONTINUE
00117 17*     CALL SOLBA(1,A,NEQ,NBAND,BS,C)
00118 18*     CALL SOLBA(0,A,NEQ,NBAND,C,BS)
00119 19*     WRITE(NIMP,2000)
00120 20*     2000 FORMAT(/,' DEPLACEMENTS',/)
00121 21*     WRITE(NIMP,2001)(BS(J),J=1,NEQ)
00122 22*     2001 FORMAT(2(1X,E15.8))
00123 23*     RETURN
00124 24*     END
  
```

RFOR:JS LOAD/LOAD  
 FOR SIIA#02/21/74-12122103 (L0)  
 FORTRAN IJA INTER-PROJETS 1100 (GRSAY)

SUBROUTINE LOAD ENTRY POINT 000074

STORAGE USED: CODE(1) 000115; DATA(0) 000027; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 NRDUS  
 0004 N1015  
 0005 N1025  
 0006 NERR35

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0000	000003	100F	0001	000011	105G	0001	000030	115G	0001	000040	122G	0001	000013	20L
0000	000000	1J	0000	000006	INJPS	0000	000002	K	0000	000001	NQ			

```

00101 1*      SUBROUTINE LOAD(BS,BSA,NEQ,HNO,NCL,NLEC)
00101 2*      C      LE DERNIER NOEUD DOIT AVOIR UNE CARTE DE DONNEES
00103 3*      DIMENSION BS(1),BSA(1)
00104 4*      DO 10 IJ=1,NEQ
00107 5*      10 BS(IJ)=0.
00111 6*      20 CONTINUE
00112 7*      READ(NLEC,100) NQ,(BSA(K),K=1,2)
00121 8*      DO 30 K=1,2
00124 9*      IJ=(NQ-1-NCL)+2+K
00125 10*     30 BS(IJ)=BS(IJ)+BSA(K)
00127 11*     IF(NQ-LT,HNO) GO TO 20
00131 12*     100 FORMAT(14,2E10,3)
00132 13*     RETURN
00133 14*     END
  
```

END OF COMPILATION; NO DIAGNOSTICS.

~~FORTRAN 11A REDUC REDUC~~  
~~FOR SIA 12/20/73-15:53:50 (10)~~  
 FORTRAN 11A INTER-PROJETS 1100 (ORSAY)

~~SUBROUTINE REDUC~~ ENTRY POINT 000254

STORAGE USED: CODE(1) 000302; DATA(0) 000042; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 SORT  
 0004 NERR35

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	000153	10L	0001	000014	106G	0001	000030	115G	0001	000016	131L	0001	000234	132L
0001	000101	134G	0001	000120	143G	0001	000065	150L	0001	000162	160L	0001	000170	161G
0001	000213	3L	0001	000216	6L	0000	I 000001	I	0000	I 000003	II	0000	I 000010	IJ
0000	I 000011	IK	0000	000015	INJP5	0000	I 000007	J	0000	I 000004	K	0000	I 000012	KJ
0000	I 000005	KK	0000	I 000000	NCOU	0000	R 000006	SAVE	0000	R 000002	XMAX			

```

00101 1* SUBROUTINE REDUC(IMAX,BIS,NVES)
00103 2* DIMENSION IMAX(1),BIS(1)
00104 3* NCOU=0
00105 4* DO 148 I=1,NVES
00110 5* 148 IMAX(I)=0
00112 6* 131 XMAX=0.0
00113 7* NCOU=NCOU+1
00114 8* DO 150 I=1,NVES
00117 9* IF(IMAX(I).EQ.1) GO TO 150
00121 10* II=I+(I-1)*NVES
00122 11* IF(XMAX-ABS(BIS(II))) 151,150,150
00125 12* 151 XMAX=ABS(BIS(II))
00126 13* K=I
00127 14* KK=K+(K-1)*NVES
00130 15* SAVE=1./BIS(KK)
00131 16* 150 CONTINUE
00133 17* DO 160 J=1,NVES
00136 18* IF(IMAX(J).EQ.1) GO TO 160
00140 19* IF(J.EQ.K) GO TO 160
00142 20* DO 10 I=1,NVES
00145 21* IJ=I+(J-1)*NVES
00146 22* IK=I+(K-1)*NVES
00147 23* KJ=K+(J-1)*NVES
00150 24* IF(I.EQ.K) GO TO 10
00152 25* BIS(IJ)=BIS(IJ)-BIS(IK)*BIS(KJ)*SAVE
00153 26* 10 CONTINUE
00155 27* BIS(KJ)=-BIS(KJ)*SAVE
00156 28* 160 CONTINUE
00160 29* DO 6 I=1,NVES
  
```

```

30*         IF(I.EQ.K) GO TO 6
31*         IK=I+(K-1)*NVES
32*         IF(IMAX(I))3,3,0
33*         4  BIS(IK)=BIS(IK)*SQRT(SAVE)
34*         GO TO 6
35*         3  BIS(IK)=0.0
36*         6  CONTINUE
37*         BIS(KK)=SQRT(SAVE)
38*         IMAX(K)=1
39*         IF(NCOU.EQ.NVES) GO TO 132
40*         GO TO 131
41*         132 RETURN
42*         END

```

END DE COMPILATION:            NO DIAGNOSTICS.

\*FORTRAN SOLBA,SOLBA  
 FOR SIA-02/21/74-12:22:20 (,0)  
 FORTRAN IIA INTER-PROJETS 1100 (ORSAY)

SUBROUTINE SOLBA ENTRY POINT 000225

STORAGE USED: CODE(1) 000262; DATA(0) 000036; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 HERR35

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	000104	100L	0001	000075	11L	0001	000024	110G	0001	000175	12L	0001	000055	122G
0001	000110	134G	0001	000155	150G	0001	000206	200L	0000	000000	1	0000	000005	1M
0000	000011	INJPS	0000	000003	11	0000	000001	J	0000	000006	JDIF	0000	000004	K
0000	000007	K1	0000	R	000002	SOM								

```

00101 1* SUBROUTINE SOLBA(NTRA,A,NEQ,MBAND,BG,X)
00103 2* DIMENSION BG(1),X(1)
00104 3* DIMENSION AT(NEQ,MBAND)
00104 4* C
00104 5* C *****
00104 6* C CE PROGRAMME RESOUT LE SYSTEME LINEAIRE A,X=BG SI NTRA DIFFERENT
00104 7* C DE 0 ET AT,X=BG SI NTRA=0
00104 8* C A EST UNE MATRICE BANDE INFERIEURE
00104 9* C *****
00105 9* IF(NTRA.EQ.0) GO TO 100
00107 10* DO 10 I=1,NEQ
00112 11* J=1+MBAND*I
00113 12* IF(J.LE.0) J=1
00115 13* SOM=BG(I)
00116 14* I1=I-1
00117 15* IF(I1.EQ.0) GO TO 11
00121 16* DO 20 K=J,I1
00124 17* IH=I-K+1
00125 18* 20 SOM=SOM-A(K,IH)*X(K)
00127 19* 11 X(I)=SOM+A(I,I)
00130 20* 10 CONTINUE
00132 21* GO TO 20C
00133 22* 100 DO 30 I=1,NEQ
00136 23* IH=NEQ+1-I
00137 24* J=IH+MBAND-1
00140 25* JDIF=J-NEQ
00141 26* IF(JDIF.GT.0) J=NEQ
00143 27* SOM=BG(IH)
00144 28* I1=IH+1
00146 29* IF(I1.GT.NEQ)GO TO 12
00147 30* DO 40 K=I1,J
00152 31* K1=K-IH+1
  
```

```
32*      40 SOM=SOM-A(IM,KI)*X(K)
33*      12 X(IM)=SOM*A(IM,1)
34*      30 CONTINUE
35*      200 RETURN
36*      END
```

END OF COMPILATION: NO DIAGNOSTICS.

#FOR115 CHOBA:CHOBA  
 FOR S11A-02/21/74-12:22:24 (,0)  
 FORTRAN 11A INTER-PROJETS 1100 (ORSAY)

SUBROUTINE CHOBA ENTRY POINT 000167

STORAGE USED: CODE(1) 000206; DATA(0) 000040; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 SQRT  
 0004 HERR3S

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	000010	145G	0001	000042	114G	0001	000060	120G	0001	000141	20L	0001	000117	25L	
0001	000136	26L	0001	000147	31L	0001	000151	60L	0000	000000	I	0000	000015	INJPS	
0000	I	000003	J	0000	I	000007	K	0000	I	000011	KI	0000	I	000012	KJ
0000	I	000005	MDIF	0000	I	000002	MR	0000	I	000001	NP	0000	I	000004	NQ
0000	R	000013	TEMP									0000	R	000006	SOM

```

00101 1* SUBROUTINE CHOBA(A,NEQ,MBAND,MERR)
00103 2* DIMENSION A(NEQ,MBAND)
00104 3* DO 20 I=1,NEQ
00107 4* NP=NEQ-I+1
00110 5* MR=MBAND-NP
00111 6* IF(MR.LE.0)NP=MBAND
00113 7* DO 20 J=1,NP
00116 8* NQ=MBAND-J
00117 9* MDIF=I-1-NQ
00120 10* IF(MDIF.LT.0) NQ=I-1
00122 11* SOM=A(I,J)
00123 12* IF(NQ.EQ.0)GO TO 25
00125 13* DO 30 K=1,NQ
00130 14* KI=I+K
00131 15* KJ=I+K
00132 16* KJ=K+J
00133 17* 30 SOM=SOM+A(KI,KI)*A(KI,KJ)
00135 18* 25 IF(J-1)26,27,26
00140 19* 27 IF(SOM.LE.0,160 TO 31
00142 20* TEMP=1.0/(SQRT(SOM))
00143 21* A(I,J)=TEMP
00144 22* GO TO 20
00145 23* 26 A(I,J)=SOM*TEMP
00146 24* 20 CONTINUE
00151 25* GO TO 60
00152 26* 31 HERR=1
00153 27* 60 RETURN
00154 28* END

```

@FOR:IS PROBA,PROBA  
 FOR SIAA-112/21/74-12:22:28 (,0)  
 FORTRAN 11A INTER-PROJETS 1100 (ORSAY)

SUBROUTINE PROBA ENTRY POINT 000107

STORAGE USED: CODE(1) 000207; DATA(0) 000037; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 HERR3s

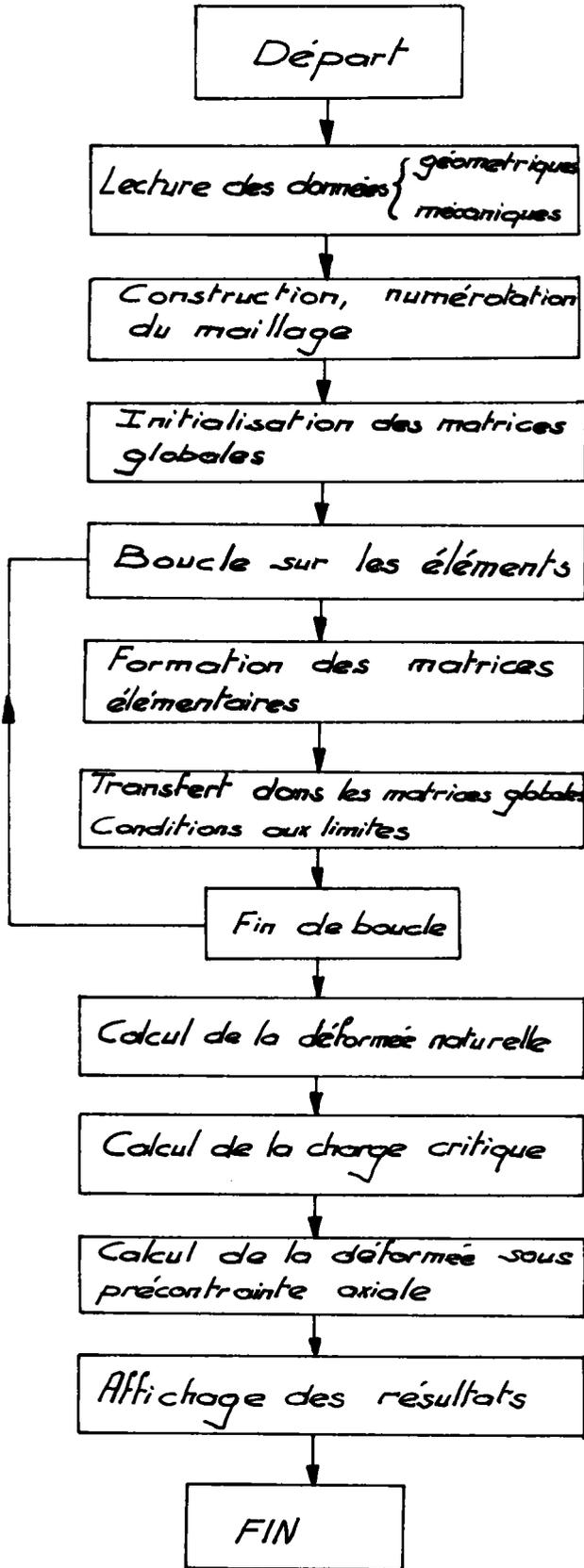
STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	000144	16L	0001	000115	106G	0001	000053	116G	0001	000125	14CG	0001	000110	41L
0001	000115	42L	0000	000000	I	0000	000005	IJ	0000	000011	INJPS	0000	000003	J
0000	000004	J1	0000	000000	JJ	0000	000007	K	0000	000002	MR	0000	000001	NP

```

00101 1* SUBROUTINE PROBA(A,X,XY,NEQ,MBAND)
00103 2* DIMENSION X(1),XY(1)
00104 3* DIMENSION A(NEQ,MBAND)
00105 4* DO 10 I=1,NEQ
00110 5* XY(I)=0.0
00111 6* NP=NEQ-I+1
00112 7* NR=MBAND-NP
00113 8* IF(NR.LE.0)NP=MBAND
00115 9* DO 20 J=1,NP
00120 10* JJ=I-1+J
00121 11* 20 XY(I)=XY(I)+A(I,J)*X(J)
00123 12* IF(I.EQ.1)GO TO 10
00125 13* J=I+1-MBAND
00126 14* IF(J)40,40,41
00131 15* 40 J=1
00132 16* IJ=I-1
00133 17* JJ=1
00134 18* GO TO 42
00135 19* 41 IJ=I-1
00136 20* JJ=MBAND
00137 21* 42 DO 30 K=J,IJ
00142 22* XY(I)=XY(I)+A(K,JJ)*X(K)
00143 23* JJ=JJ-1
00144 24* 30 CONTINUE
00146 25* 10 CONTINUE
00150 26* RETURN
00151 27* END
  
```

END OF COMPILATION: NO DIAGNOSTICS.



Programme principal

Fig 4-3-1

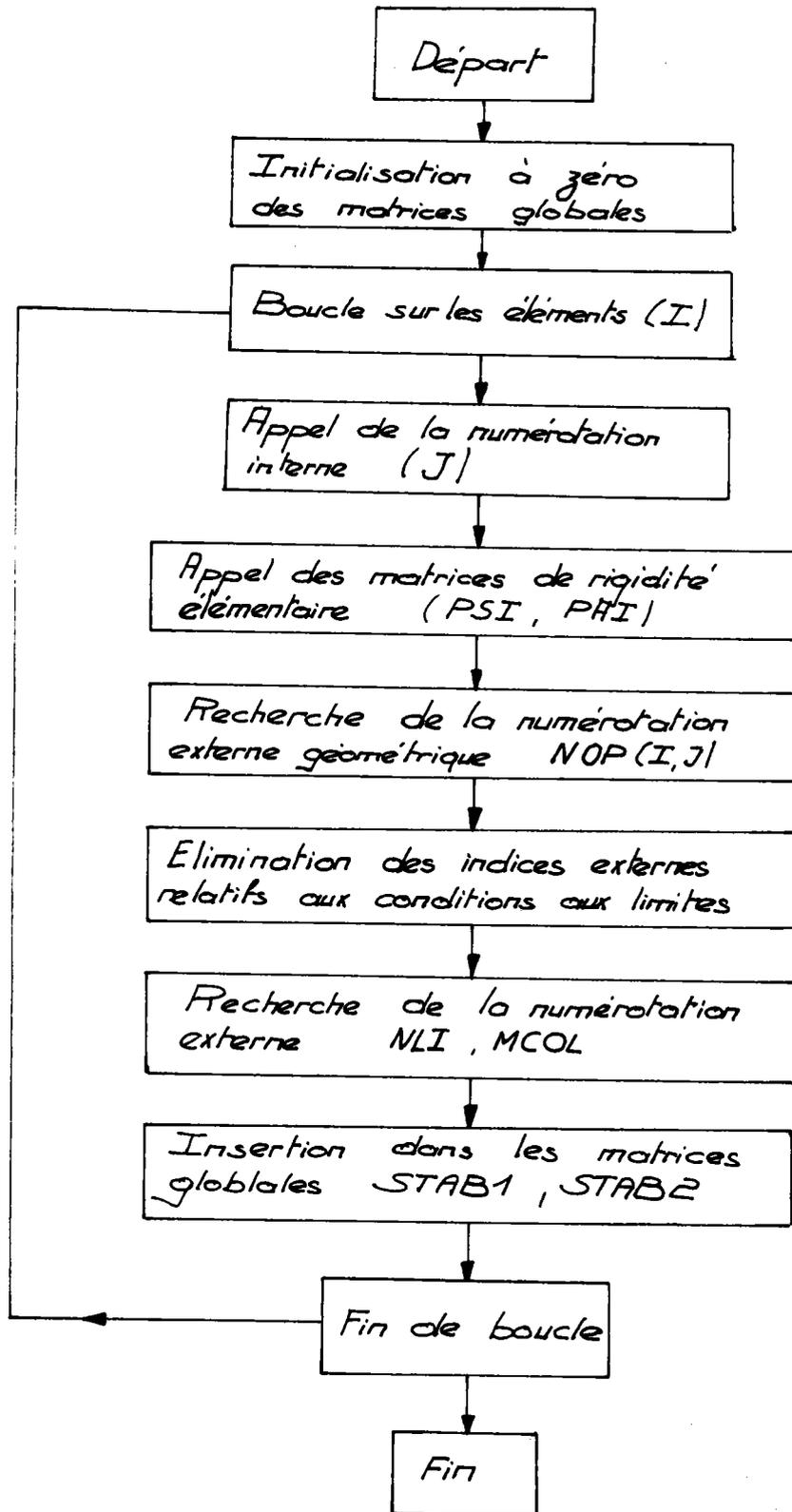


Fig 4-3-2

On trouvera en outre un organigramme détaillé de l'opération d'assemblage des éléments (Fig 4-3-2) ; les informations nécessaires à la connection des éléments sont consignées dans la matrice de connection NOP (I, J). L'indice J décrit la numérotation interne de l'élément I ; l'indice NOP (I, J) est l'indice externe du J<sup>ème</sup> noeud (numérotation interne) de l'élément I. On construit ainsi un indiçage "géométrique", qui ne tient pas compte des conditions aux limites. Celles-ci sont introduites en supprimant, au niveau de l'assemblage, les lignes et les colonnes concernées dans les matrices globales ; il en résulte une translation des indices de ligne et de colonne supérieurs aux indices des déplacements imposés.

Le procédé que nous avons décrit présente l'avantage de réduire les dimensions des matrices globales, mais il peut être d'un emploi plus délicat pour des conditions aux limites complexes. Nous avons adopté le mode de stockage simple suggéré par la structure de bande : les matrices globales sont rectangulaires, de dimensions (NDEPF, NBAND).

Seules des matrices logeables en mémoire centrale ont été utilisées ; nous n'avons pas voulu en effet nous consacrer à la gestion de fichiers qu'aurait nécessité l'optimisation des programmes construits dans le cas contraire.

#### 4-4 - EXEMPLE D'APPLICATION

Nous avons traité le cas d'une poutre encastree à une extrémité, et soumise à une charge axiale (Fig. 1-4-1) ; nous supposons que les déplacements ont lieu dans le plan Oyz. Les éléments choisis sont des rectangles à huit degrés de liberté.

Compte tenu des caractéristiques numériques suivantes :

Constantes de Lamé  $\lambda = \mu$  ; élancement  $\xi = 10$  , la contrainte critique d'Euler est donnée par :

$$\frac{\sigma_{cr}}{\mu} = 5,48 \cdot 10^{-3}$$

Nous obtenons par le calcul la valeur :

$$\frac{\sigma}{\mu} = 6,04 \cdot 10^{-3}$$

Le mode d'instabilité associé, ainsi que les deux modes supérieurs, sont représentés (Fig. 4-4-1).

Ces résultats appellent les remarques suivantes :

- les modes propres sont en bon accord avec les résultats classiques [35] ; notons que la précision fournie par la méthode de Jemings décroît du premier au troisième mode.
- la schématisation de la poutre en éléments finis conduit, comme nous l'avons déjà signalé, à une estimation par excès de la charge critique. Cet état s'accroît pour des poutres très élancées, dont la rigidité est plus faible ; au contraire, les résultats sont plus affirmés pour les poutres peu élancées. (Tableau n° 4)

Nous avons pour celles-ci consigné nos résultats sur la figure 4-4-2, en faisant référence à la courbe d'Euler ; l'examen de ces courbes nous suggère les conclusions suivantes :

Tout d'abord, la formule d'Euler semble avoir un domaine de validité plus étendu que celui qui lui est reconnu de manière usuelle ; les divergences significatives n'apparaissent pas en effet avant des valeurs de l'élancement inférieures à  $\xi = \frac{L}{h} = 3$  ; ce résultat est en bon accord avec les valeurs

publiées par Levinson [27] qui fournit  $\xi = 2$  par une méthode analytique.

Nous avons supposé les constantes de Lamé invariables au cours du changement ; ceci limite la portée de nos calculs pour les très faibles valeurs de l'élanement. La contrainte critique est en effet pour  $\xi < 2$  une fraction non négligeable du module  $\mu_0$  à l'état normal, de sorte que cette hypothèse ne peut être maintenue.

Une hypothèse plus raffinée pourrait être la suivante : le matériau reste isotrope, mais le module actuel  $\mu$  est donné par :

$$\mu = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{L^2}{L_0^2} + \frac{L_0}{L} \right)$$

avec : L longueur actuelle

$L_0$  longueur initiale

selon l'interprétation donnée par Biot. [41]

Signalons en outre qu'on observe un tassement des valeurs critiques d'ordre supérieur vers la charge critique ; les conséquences sont les suivantes : le temps de calcul de la méthode des itérations simultanées devient important. La convergence dépend en effet de la séparation des valeurs critiques, de sorte qu'une précision inchangée exige un nombre supérieur d'itérations.

Enfin, la coïncidence même approchée des charges critiques est génératrice de bifurcation vers un grand nombre de modes d'instabilité différents [7]. Les modes fournis par le calcul nous semblent être d'un intérêt réduit, dans la mesure où les imperfections, que l'on peut supposer distribuées de manière aléatoire, ont une influence décisive sur le comportement de la poutre ; des études statistiques ou expérimentales semblent indiquées pour ce genre de problème.

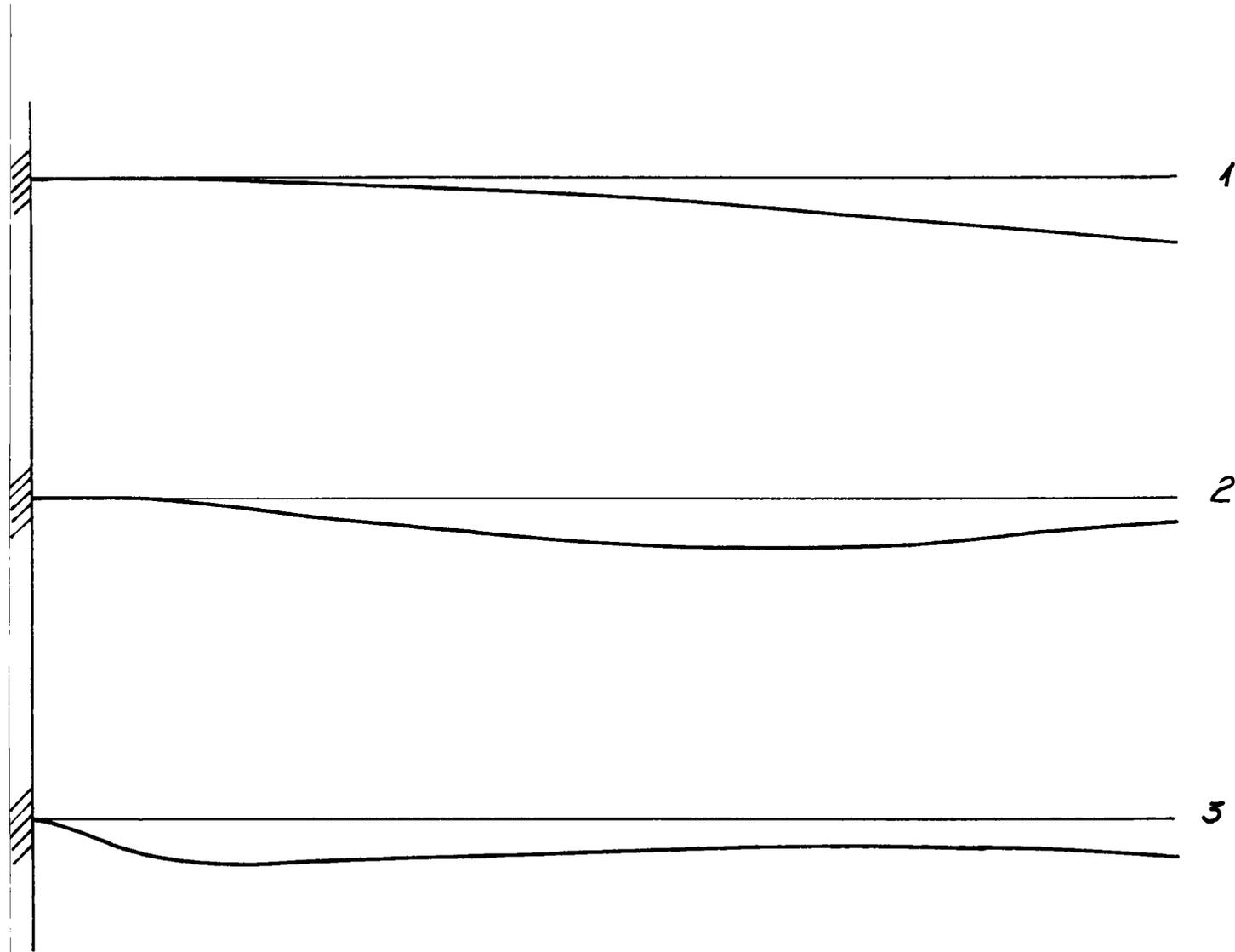


Fig 4-4-1

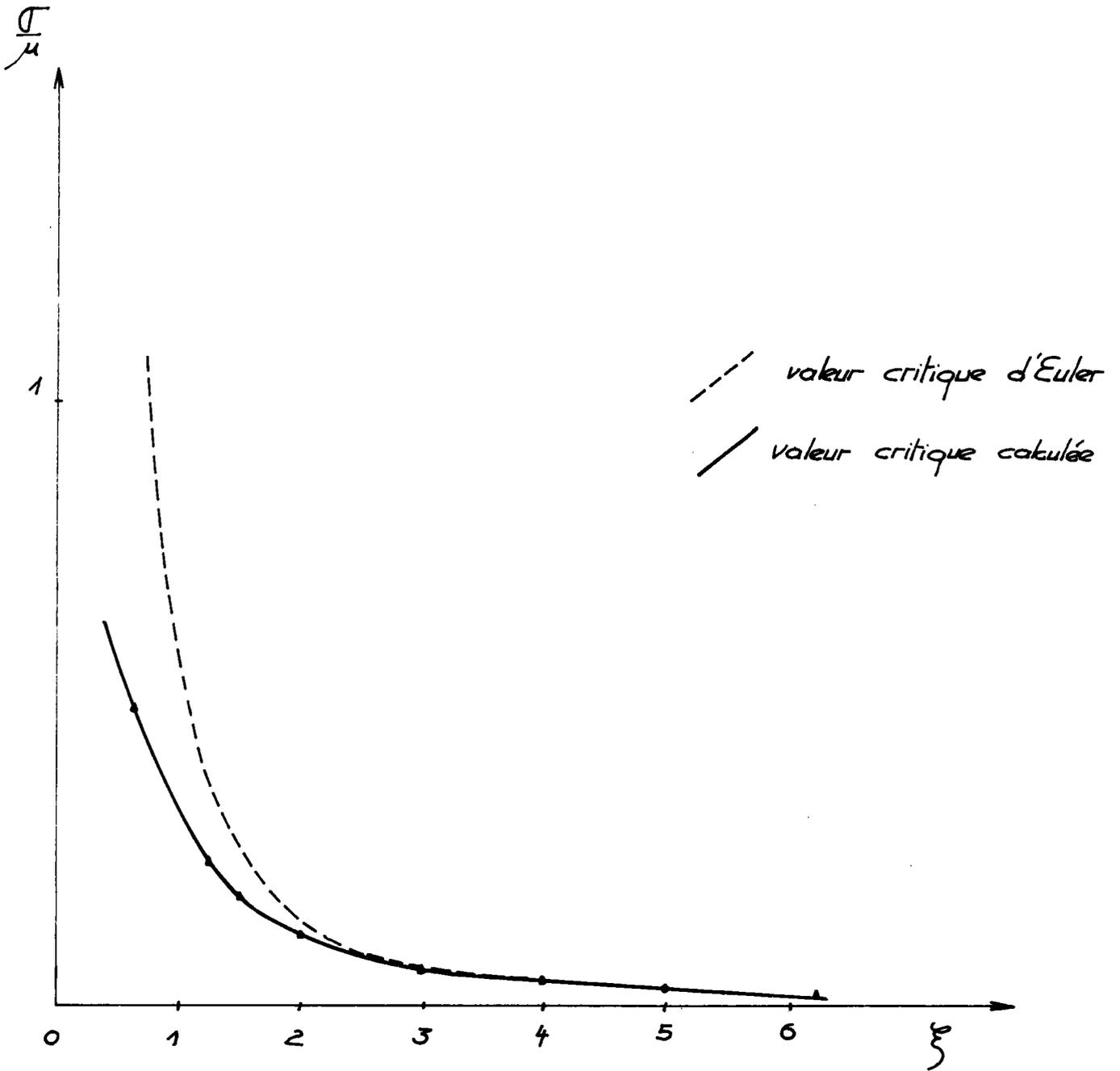


Fig 4.4.2

$\xi$	6,25	5	4	3	2	1,5	1,25	0,625
$\frac{\sigma_e}{\mu}$	0,014	0,022	0,034	0,061	0,137	0,244	0,351	1,403
$\frac{\sigma_n}{\mu}$	0,015	0,023	0,034	0,0575	0,1165	0,183	0,238	0,491

Maillage : 180 degrés de liberté

$\sigma_e$  : contrainte critique d'EULER

$\sigma_n$  : contrainte critique calculée

$\xi = \frac{L}{h}$  élancement

Tableau n°4

## C O N C L U S I O N

Il s'agissait pour nous d'élaborer des outils et une méthode de travail ; cette première étape étant franchie, il devient possible de reporter notre effort sur des problèmes plus particuliers et plus attrayants (mise au point d'éléments, étude de cas.....)

Nous avons en outre été amenés à nous poser un certain nombre de problèmes fondamentaux de la théorie de la stabilité élastique (multiplicité des solutions, problèmes de bifurcation ....) ; notre travail nous a ainsi permis de clarifier nos conceptions dans un domaine difficile, et de discerner des directions de recherche ultérieures.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) ALLAN T. ; LEAD BETTER J. K. : "Examination by laser Holography of the Pre - Buckling behaviour of thin Spherical Domes Subject to uniform External pressure", Proc Symp. of App. Mech. Waterloo - Ontario - Canada 1969
- (2) BATHE K. J., WILSON E. L. : "Large eigenvalue problems in dynamic analysis" J. Eng. Mec. Div. Proc ASCE, Vol 98, EM6, p 1471 - 85, 1972
- (3) BATHE K. J., WILSON E. L. : "Solution Methods for eigenvalue problems in structural mechanics", Int. J. Num. Math. Eng, Vol 6, p 213-226, 1973.
- (4) BATHE K. J., RAMM E., WILSON E.L. : "Finite Element formulations for large displacement and large strain analysis ", SESM REPORT 73-14, Dept of Civ. Eng, Univ. of California, Berkeley, 1971.
- (5) BREBBIA C., CONNOR J. : "Geometrically non linear finite element analysis" Proc. ASCE, 95, EM 2, 463-83, 1969
- (6) BRÖNLUND O.E. : "Eigenvalues of large Matrices", Proc. Symposium on finite Element Techniques Stuttgart, 1969.
- (7) CHILVER A.H., JOHNS K.C. : "Coincident branching points as generators of buckling paths". Proc. Symp. Appl. Mech Waterloo Ontario 1969.
- (8) CLINT M., JENNINGS A. : "The Evaluation of Eigenvalues and eigenvectors of real symmetric matrices by simultaneous iteration", Comput. J, Vol 13, Nb 1, 1970.
- (9) DONG S.B., WOLF J.A.Jr, PETERSON F.E. : "On a direct iterative eigen-solution technique", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 4, p 155-161, 1972
- (10) DONNELL L.H., WAN C.C. : "Effect of Imperfections on Buckling of thin cylinders and columns under axial compression", J. App. Mech, Vol 17, trans ASME, Vol 72, p 73-83, 1950

- (11) GALLAGHER R.H., PADLOG J. : "Discrete Element approach to structural Instability Analysis, J.A.I.A.A., Vol 1, p 1537-9, 1963.
- (12) GALLAGHER R.H. : "The finite element method in elastic instability analysis", Proc. Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart 1969.
- (13) GIRIJA VALLABHAN C.V. : "Numerical Method for elastic stability problems" J. Struct. Div. Proc ASCE, ST 11, p 2691-706, 1971.
- (14) GUPTA K.K. : "Vibration of frames and other Structures with banded stiffness matrix", Int. J. Num. Meth. Eng, Vol 2, p 221-228, 1970
- (15) GUPTA K.K. : "Solution of Eigenvalue Problems by Sturm Sequence Method", Int. J. Num. Meth Eng, Vol 4, p 379-404, 1972.
- (16) GUPTA K.K. : "Eigen problem Solution by a combined Sturm sequence and inverse iterative technique ", Int. J. Num. Meth. Eng, Vol 7, p 17-42 1973.
- (17) GROOMS H.R. : "Algorithm for matrix bandwidth reduction", J. Struct. Div. Proc ASCE, ST1, p 203-214, 1972.
- (18) HADAMARD "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique" Hermann PARIS, 1903
- (19) HILL R. "On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain", J. Mech. Phys. Solids, Vol 5, p 229-241, 1957
- (20) HILL R. : "Eigen Modal deformations in elastic/plastic continua", J. Mech. Phys. Solids, Vol 15, p 371-386, 1967
- (21) JENNINGS A. : "A direct method of obtaining latent roots and vectors of a symmetric matrix", Proc Camb. Phil. Soc, 63, p 755-65, 1967
- (22) JENNINGS A. ; ORR. D.R.L. : "Application of the Simultaneous iteration method to undamped vibration problems", Int. J. Num. Meth. Eng, Vol 3, p 13-24, 1971.

- (23) KAPUR K.K. ; HARTZ B.J. : "Stability of thin plates using the finite element method", Proc ASCE, EM 2, p 177-95, 1966.
- (24) KARMAN Th. V. ; TSIEN : "Buckling of thin cylindrical shells under axial compression", J. Aero. Sci, Vol 8, p 303-312, 1941.
- (25) KNOPS R.J. ; WILKES E.W. : "Theory of Elastic Stability" Handbuch der Physik, Springer - Verlag, Vol 6, Berlin 1973.
- (26) KOITER W.T. : "on the stability of Elastic equilibrium " Ph. D. Thesis, Delft (1945), NASA (Translation) TTF.10, 833 (1967).
- (27) LEVINSON : "Stability of a compressed neo - Hookean rectangular parallelepiped", J. Mech. Phy. Solids, Vol 16, p 403-415, 1968.
- (28) LIONS J.L. : "Cours d'analyse Numérique" Hermann Paris 1973.
- (29) MARTIN H.C. : "Finite elements and the analysis of geometrically non-linear problems", US-Japan Seminar on Matrix methods in Structural Mechanics, Tokyo 1970.
- (30) MURRAY D.W. ; WILSON E.L. "Finite Element large deflection analysis of plates", Proc ASCE, Vol 94, ST 9, p 2081- 2105, 1968.
- (31) PANOVKO Y.G. ; GUBANOVA I.I. : "Stability an oscillations of elastic systems". Consultants bureau, New-York, 1965.
- (32) PEARSON C.E. : "General Theory of elastic stability", Quart. Appl. Math, Vol 14, p 133-144, 1956.
- (33) PETERS, WILKINSON J.H. : "Eigen values of  $AX = \lambda BX$  with band symmetric A and B", Comput J., Vol 12, p 398-404, 1969.
- (34) RIVAUD : "Cours de Mécanique" Hermann, Paris 1973.
- (35) TIMOSHENKO : "Theorie de la Stabilité élastique", Dunod, Paris 1966.
- (36) TRUESDELL C., NOLL W. : "The non-linear field theories of Mechanics" Handbuch der Physik, Band III-3, Springer - Verlag 1965

- (37) WEBER J.D. : "Stabilité et Unicité des déformations finies des milieux continus élastiques et viscoélastiques non linéaires", Thèse, Faculté des Sciences de Strasbourg, 1970.
- (38) WILKINSON J.H. : "The Algebraic eigenvalue problem" Clarendon Press, Oxford, 1965.
- (39) ZIENCKIEWICZ O.C. : "The Finite Element Method in Engineering Science" Mac Graw - Hill - Londres, 1971.
- (40) THOMPSON J.M.T., HUNT G.W. : "A general theory of elastic stability, Wiley and Sons, 1973.
- (41) BIOT M. A. : "Mechanics of incremental deformations" Wiley and Sons, New-York 1965.