



**HAL**  
open science

# Indices mesurant l'irrégularité aux points singuliers des équations différentielles linéaires

Alain Dabeche

► **To cite this version:**

Alain Dabeche. Indices mesurant l'irrégularité aux points singuliers des équations différentielles linéaires. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1974. Français. NNT : 1974METZ006S . tel-01775580

**HAL Id: tel-01775580**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775580v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

T H E S E

présentée

à l'U.E.R. "Sciences Exactes et Naturelles

de l'UNiversité de METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE SPECIALITE (III<sup>e</sup> cycle)

Mention Mathématique pure

par

Alain D A B E C H E

Assistant à la Faculté des Sciences de METZ

INDICES MESURANT L'IRREGULARITE AUX POINTS SINGULIERS  
DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES.

-----

Soutenue le 25 avril 1974 devant la commission d'examen

Président : Madame A. SEC, Maître de Conférences  
Examineurs : Monsieur R. GERARD, Professeur  
Monsieur A.H.M. LEVELT, Professeur associé  
Monsieur B. MORIN, Maître de Conférences

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 244778 0

T H E S E

présentée

à l'U.E.R. "Sciences Exactes et Naturelles

de l'Université de METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE SPECIALITE (III<sup>e</sup> cycle)

Mention Mathématique pure

par

Alain D A B E C H E

Assistant à la Faculté des Sciences de METZ

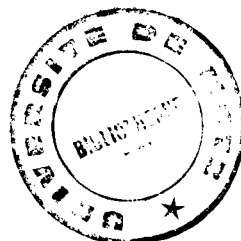
BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv.	19740185
Cote	S/M <sub>3</sub> 74/6
Loc	Magasin

INDICES MESURANT L'IRREGULARITE AUX POINTS SINGULIERS  
DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES.

-----

Soutenue le 25 avril 1974 devant la commission d'examen

Président : Madame A. SEC, Maître de Conférences  
Examineurs : Monsieur R. GERARD, Professeur  
Monsieur A.H.M. LEVELT, Professeur associé  
Monsieur B. MORIN, Maître de Conférences



UNIVERSITE DE METZ

Président : M. LONCHAMP Jean Pierre

U.E.R. "Sciences Exactes et Naturelles"

Directeur : M. RHIN Georges

PROFESSEURS :

M. LONCHAMP Jean-Pierre	T.T.P. Physique
M. BARO Raymond	T. Physique
Mme CAGNIANT Denise	P.S.C. Chimie
M. LERAY Joseph	P.S.C. Physique
M. BLOCH Jean-Michel	T. Chimie
M. KLEIM Roland	P.S.C. Physique
M. CHARLIER Alphonse	P.S.C. Physique
M. TAVARD Claude	P.S.C. Physique
M. PELT Jean-Marie	T. Biologie végétale

MAITRES DE CONFERENCES :

M. CERTIER Michel	Physique
M. WEBER Jean-Daniel	Mécanique
M. WENDLING Edgar	Chimie
M. BAUDELET Bernard	Physique
M. CARABATOS Constantin	Physique
M. FALLER Pierre	Chimie
M. JOUANY Jean-Michel	Toxicologie
M. RHIN Georges	Mathématiques
Mme SEC Antoinette	Mathématiques
M. MORIN Bernard	Mathématiques
M. DAX Jean-Pierre	Mathématiques

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE :

M. YUEN Ping Cheng	Mathématiques
--------------------	---------------

CHARGE D'ENSEIGNEMENT :

Mme SCHWARTZBROD Janine	Microbiologie
-------------------------	---------------

INTRODUCTION

Etant donné l'équation différentielle :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = 0$$

où les  $a_i(x)$  sont des fonctions méromorphes au voisinage de  $x = 0$ , on sait que :  $x = 0$  est un point singulier régulier si et seulement si, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_i(x)$  possède un pôle d'ordre inférieur ou égal à  $i$ . Un point singulier qui n'est pas régulier est dit irrégulier.

Plusieurs indices permettent de mesurer le degré de complication d'une singularité.

1. INDICE D'IRREGULARITE DE B. MALGRANGE [6].

Si  $D$  est l'opérateur  $\sum_{p=0}^n a_p \frac{d^p}{dx^p}$ ,  $a_n \neq 0$ , l'irrégularité de  $D$  est par

définition l'entier :

$$i(D) = \sup_{0 \leq p \leq n} [\nu(a_n) - n + p - \nu(a_p)]$$

où  $\nu : \mathbb{C}(x) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

définie par :

$\nu(a_p) = \infty$  si  $a_p(x) \equiv 0$ . Et si  $a_p(x) \neq 0$ , on pose  $a_p(x) = x^{\nu(a_p)} a_p^*(x)$  avec  $a_p^*(x)$  holomorphe en zéro et  $a_p^*(0) \neq 0$ .

On a le résultat suivant :

$x = 0$  est un point singulier régulier si et seulement si  $i(D) = 0$

2. INVARIANTS DE R. GERARD et A.H.M. LEVELT [3]

Si (E) est l'équation différentielle :

$$(T_r)^n y + \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) (T_r)^i y = 0, \quad b_i(x) \in \mathbb{C}(x)$$

où  $T_r$  est l'opérateur  $x^r \frac{d}{dx}$ ,  $r$  entier strictement positif, les invariants au point singulier  $x = 0$ , sont les entiers  $\rho_r$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , définis par :

$$\rho_r = \sup_{0 \leq i \leq n-1} [0, -\nu(b_i)]$$

où  $\nu$  est l'application précédemment définie.

Les invariants  $\rho_r$  jouissent des propriétés suivantes :

- i) il existe un entier  $l \geq 1$ , tel que  $\rho_r = 0$  pour tout  $r \geq l$
- ii)  $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{l-1} > \rho_l$
- iii) la singularité est régulière si et seulement si  $l = 1$
- iv)  $\rho_1 = i(D)$  (indice d'irrégularité de Malgrange)

L'entier  $l$  est l'ordre de la singularité

### 3. INVARIANT DE KATZ [2]

L'invariant de Katz est le rationnel :

$$k = \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, \frac{-\nu(b_1)}{n-i} \right]$$

où les  $b_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , sont les coefficients de l'équation (E) précédente lorsque  $r = 1$ . On a le résultat suivant :

Le point singulier  $x = 0$  est régulier si et seulement si le rationnel  $k = 0$ .

L'objet de cette étude est de montrer que la connaissance des invariants  $\rho_r$  (de Gérard-Levelt) et  $k$  (de Katz) permettent d'expliquer et de retrouver certains résultats classiques des équations différentielles linéaires. D'autre part ils permettent une nouvelle classification de ces équations.

Le chapitre premier est consacré à l'étude des propriétés des invariants  $\rho_r$  et  $k$ . On montrera notamment que les invariants  $\rho_r$  satisfont à l'inégalité :

$$1 - r \leq \rho_r \leq n(1 - r), \quad r = 1, \dots, l$$

où  $n$  est l'ordre de l'équation différentielle. On donnera également une nouvelle démonstration d'un résultat obtenu par A.H.M. Levelt dans [5] à savoir que le polygone formé des segments de droites joignant les points  $(r, \rho_r)$

aux points  $(r+1, \rho_{r+1})$  pour  $r = 1, 2, \dots, l-1$ , est convexe. Puis on montrera que l'invariant de Katz est lié à l'ordre  $l$  du point singulier par la relation :  $l-2 < k \leq l-1$ . Enfin on donnera l'allure générale des équations différentielles linéaires d'ordre  $n$  ayant un point singulier d'ordre  $l$ . Ce chapitre s'achèvera par l'étude du cas particulier des équations différentielles de la physique mathématique.

Au chapitre II on s'intéresse à la classification des équations différentielles linéaires. On établira que pour les équations différentielles du deuxième ordre la donnée, en chaque point singulier, de l'ordre  $l$  et de l'invariant  $\rho_1$ , suffit à déterminer les autres invariants  $\rho_r$ . Ce résultat permet une classification complète des équations différentielles du 2<sup>me</sup> ordre. A titre d'exemples on retrouvera, en appliquant le résultat précédent, les équations différentielles de la physique mathématique.

Au chapitre III, on s'intéressera aux développements asymptotiques, au voisinage d'un point singulier irrégulier, des solutions des équations différentielles de la physique mathématique. Pour ce faire, on utilisera un théorème classique (voir [7], théorème 12.3) qui donne pour une équation différentielle :

$$x^{-q} Y' = A(x)Y, \quad q \in \mathbb{N} \quad (1)$$

l'allure générale des développements asymptotiques au voisinage de l'infini, lorsque  $A(x)$  est holomorphe au point  $x = \infty$  et que les valeurs propres de  $A(\infty)$  sont distinctes. Si  $A(x)$  n'est pas holomorphe à l'infini, on montrera qu'il existe une transformation :

$$Y = P(x)Z$$

qui change l'équation (1), en l'équation différentielle :

$$x^{-h} Z' = B(x)Z$$

où  $B(x)$  est holomorphe au point  $x = \infty$ . On donnera des conditions suffisantes pour que  $B(\infty)$  admette  $n$  valeurs propres non nulles et distinctes. On montrera que dans ces conditions il existe une relation simple entre les invariants au point singulier irrégulier et les développements asymptotiques des solutions au voisinage de ce point singulier. Enfin, on montrera que toute équation différentielle de la physique mathématique peut être résolue asymptotiquement de cette façon.-



CHAPITRE I - INVARIANTS DES EQUATIONS  
DIFFERENTIELLES LINEAIRES  
HOMOGENES D'ORDRE n.

L'objet de ce chapitre est d'établir, pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$ , les propriétés des invariants de Gérard-Levelt et celles de l'invariant de Katz. Ceci en vue d'étudier les invariants des équations de la physique mathématique.

1. Formules donnant les invariants en un point singulier

Proposition 1

1) Si  $x = 0$  est un point singulier de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0, \quad a_i(x) \in \mathbb{C}(x)$$

alors, les invariants de Gérard-Levelt à l'origine sont donnés par :

$$\rho_r = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, -(\nu(a_p) + pr)], \quad r \geq 1$$

où  $\nu$  est l'ordre en 0 de  $a_p(x)$

2) Si  $x = \infty$  est un point singulier de l'équation différentielle (E), alors, les invariants de Gérard-Levelt à l'infini, sont donnés par :

$$\rho_r = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, \mu(a_p) + p(2-r)]$$

où  $\mu$  est l'ordre à l'infini de  $a_p(x)$ .

Remarque

Lorsque  $x_0$  est un point singulier différent de zéro et de l'infini, on peut se ramener à l'origine en posant :

$$x = x_0 + \xi$$

$$\text{et } a_j(x) = b_j(\xi)$$

L'équation (E) se met alors sous la forme :

$$\frac{d^n y}{d\xi^n} + \sum_{j=1}^n b_j(\xi) \frac{d^{n-j} y}{d\xi^{n-j}} = 0$$

et les invariants  $\rho_r$  au point singulier  $\xi = 0$  sont les invariants  $\rho_r$  au point singulier  $x_0$ .

Lemme :

Notons par  $T_r$  l'opérateur  $x^r \frac{d}{dx}$ . Alors pour tout  $k \geq 1$  et pour tout  $r \geq 1$ , on a :

$$(1) : x^{kr} \frac{d^k}{dx^k} = (T_r)^k + \sum_{i=1}^{k-1} N_i^k x^{i(r-1)} (T_r)^{k-i}, N_i^k \in \mathbb{Z}$$

Démontrons (1) par récurrence sur  $k$

- la formule est vérifiée pour  $k = 1$  puisque :

$$x^r \frac{d}{dx} = T_r = (T_r)^1$$

- supposons la formule vraie jusqu'à  $k-1$  et démontrons la pour  $k$ . Pour cela appliquons l'opérateur  $x^r \frac{d}{dx}$  aux deux membres de l'égalité :

$$(2) : x^{(k-1)r} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} = (T_r)^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} N_i^{k-1} x^{i(r-1)} (T_r)^{k-1-i}, N_i^{k-1} \in \mathbb{Z}$$

On obtient alors :

$$x^{kr} \frac{d^k}{dx^k} + (k-1)_r x^{r-1} x^{(k-1)r} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} = (T_r)^k + \sum_{i=1}^{k-2} N_i^{k-1} x^{i(r-1)} (T_r)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-2} N_i^{k-1} (r-1)_i x^{(i+1)(r-1)} (T_r)^{k-1-i}$$

Remplaçant dans cette égalité  $x^{(k-1)r} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}$  pour son expression tirée de (2), il vient alors :

$$x^{kr} \frac{d^k}{dx^k} = (T_r)^k + \sum_{i=1}^{k-2} N_i^{k-1} x^{i(r-1)} (T_r)^{k-i} - (k-1)_r x^{r-1} (T_r)^{k-1} + \sum_{i=2}^{k-1} (r-1)(i-1) N_{i-1}^{k-1} x^{i(r-1)} (T_r)^{k-i} - (k-1)_r \sum_{i=2}^{k-1} N_{i-1}^{k-1} x^{i(r-1)} (T_r)^{k-i}$$

d'où :

$$x^{kr} \frac{d^k}{dx^k} = (T_r)^k + \sum_{i=1}^{k-1} N_i^k x^{i(r-1)} (T_r)^{k-i}, N_i^k \in \mathbb{Z}$$

\* démonstration de la proposition

Après multiplication par  $x^{nr}$  l'équation (E) devient :

$$x^{nr} \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=1}^n (a_i(x) x^{ir}) x^{(n-i)r} \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0$$

Remplaçant  $x^{kr} \frac{d^k}{dx^k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  par son expression tirée de (1), on obtient :

$$[(T_r)^n y + \sum_{i=1}^{n-1} N_1^n x^{i(r-1)} (T_r)^{n-i} y] + a_1(x) x^r [(T_r)^{n-1} y + \sum_{i=1}^{n-2} N_1^{n-1} x^{i(r-1)}$$

$$(T_r)^{n-1-i} y] + \dots + a_{n-1}(x) x^{(n-1)r} T_r y + a_n(x) x^{nr} y = 0$$

ce qui s'écrit :

$$(T_r)^n y + \sum_{p=1}^n b_p(x) (T_r)^{n-p} y = 0 \quad (E')$$

$$\text{avec } b_p(x) = a_p(x) x^{pr} + N_1^{n-p+1} a_{p-1} x^{pr-1} \dots + N_{p-1}^{n-1} x^{pr-(p-1)} a_1 + N_p^n x^{p(r-1)}$$

pour  $1 \leq p \leq n-1$

$$\text{et } b_n(x) = a_n(x) x^{nr}$$

$$\text{d'où : } -\nu(b_p) \leq \sup [-\nu(a_p) - pr, -\nu(N_1^{n-p+1}) - \nu(a_{p-1}) - (pr-1),$$

$$\dots, -\nu(N_p^n) - p(r-1)]$$

$$1 \leq p \leq n-1 \quad \text{et } -\nu(b_n) = -(\nu(a_n) + nr)$$

ce qui donne :  $1 \leq p \leq n-1$

$$-\nu(b_p) \leq \sup [-(\nu(a_p) + pr), -(\nu(a_{p-1}) + pr - 1), \dots, -(\nu(a_1 + pr - (p-1))), 0]$$

$$\leq \sup [-(\nu(a_p) + pr), -\nu(a_{p-1} + (p-1)r), \dots, -(\nu(a_1) + r), 0]$$

$$\text{car } -(\nu(a_j) + pr - j) \leq -(p-j)r \quad j = 1, \dots, p \quad \text{et } r \geq 1$$

$$\text{d'où : } \sup_{1 \leq p \leq n} (-\nu(b_p)) \leq \sup_{1 \leq p \leq n} (0, -\nu(a_p) - pr)$$

$$\text{et } \sup_{1 \leq p \leq n} (0, -\nu(b_p)) \leq \sup_{1 \leq p \leq n} (0, -(\nu(a_p) + pr))$$

Inversement :

$$x^{pr} a_p(x) = b_p(x) + \lambda_1^p b_{p-1} + \dots + \lambda_{p-1}^p b_1 + \lambda_p^p, \lambda_i^p \in \mathbb{Z}$$

ce qui donne :

$$\sup_{1 \leq p \leq n} (0, -(\nu(a_p) + pr)) \leq \sup_{1 \leq p \leq n} (0, -\nu(b_p))$$

$$\text{d'où } \rho_r = \sup_{1 \leq p \leq n} (0, -\nu(b_p)) = \sup_{1 \leq p \leq n} (0, -\nu(a_p) - pr)$$

ce qui achève la démonstration de 1°/.

\* démonstration du 2°/

Posons  $x = \frac{1}{t}$ , on a alors :

$$T_r = x^r \frac{d}{dx} = x^{r-1} x \frac{d}{dx} = -t^{-(r-1)} t \frac{d}{dt} = -t^{2(1-r)} t^r \frac{d}{dt}$$

d'où, en posant  $\theta_r = t^r \frac{d}{dt}$ ,  $r \geq 1$

$$T_r = -t^{2(1-r)} \theta_r$$

et l'équation (E') s'écrit :

$$(\theta_r)^n y = \sum_{p=1}^n c_p(t) \theta_r^{n-p} y = 0$$

avec :

$$c_p(t) = t^{-p(2-r)} [(t^1)^p a_p(t^{-1}) + N_1^{n-p+1} t a_{p-1}(t^{-1}) + \dots +$$

$$N_{p-1}^{n-1} t^{p-1} a_1(t^{-1}) + N_p^n t^p].$$

$$p = 1, \dots, n \text{ et } N_j^i \in \mathbb{Z}$$

d'où :

$$\rho_r = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, -\nu(c_p)] = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, -\nu(a_p(t^{-1}) + p(2-r))]$$

$$= \sup_{1 \leq p \leq n} [0, \mu(a_p) + p(2-r)]$$

où  $\mu(a_p)$  est l'ordre à l'infini de  $a_p(x)$  défini par :

$$\mu [a_p(x)] = -\nu [a_p(t^{-1})]$$

Remarque

Lorsque  $x = 0$  est singulier le premier invariant est donné par :

$$\rho_1 = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, -(\nu(a_p) + p)]$$

Ce point est régulier si et seulement si, pour tout  $p = 1, \dots, n$

on a :

$$\nu(a_p) + p \geq 0$$

Cette condition équivaut à :

$$\nu(x^p a_p) \geq 0 \text{ pour tout } p = 1, \dots, n$$

Autrement dit, le point singulier  $x = 0$ , de l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + \sum_{p=1}^n a_p(x) y^{(n-p)} = 0 \quad (E_1)$$

est régulier si et seulement si, les coefficients de l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + \sum_{p=1}^n x^p a_p y^{(n-p)} = 0 \quad (E_2)$$

sont holomorphes en zéro. Mais si  $x = 0$  est singulier irrégulier, alors  $x = 0$  est un point singulier de  $(E_2)$ , et on a :

$$\rho_1(E_2) = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, -(\nu(a_p) + 2p)] = \rho_2(E_1)$$

D'une manière générale, si  $x = 0$  est un point singulier d'ordre  $l \geq 1$  de l'équation différentielle  $(E_1)$ , alors  $x = 0$  est aussi un point singulier de l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + \sum_{p=1}^n x^{p(r-1)} y^{(n-p)} = 0 \quad (E_r)$$

pour tout  $r = 1, 2, \dots, l$  et on a :

$$\rho_1(E_r) = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, -(\nu(a_p) + pr)] = \rho_r(E_1)$$

Proposition 2

1°) Si  $x = 0$  est un point singulier de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} = 0, \quad a_i(x) \in \mathbb{C}(x)$$

alors l'invariant de Katz à l'origine est donné par :

$$g = \sup_{1 \leq p \leq n} \left[ 0, -\left(1 + \frac{\nu(a_p)}{p}\right) \right]$$

où  $\nu(a_p)$  est l'ordre en zéro de  $a_p(x)$

2°) Si  $x = \infty$  est un point singulier de l'équation différentielle (E), alors l'invariant de Katz à l'infini est donné par :

$$g = \sup_{1 \leq p \leq n} \left[ 0, 1 + \frac{\mu(a_p)}{p} \right]$$

où  $\mu(a_p)$  est l'ordre à l'infini de  $a_p(x)$

Posons  $T_1 = x \frac{d}{dx}$ , l'équation (E) s'écrit alors :

$$(T_1)_y^n + \sum_{p=0}^{n-1} b_p(x) (T_1)_y^p = 0 \quad (1)$$

$$\text{où } b_p(x) = a_{n-p}(x) x^{n-p} + N_1^{n-p+1} a_{n-p-1}(x) x^{n-p-1} + \dots + N_{n-p-1}^{n-1} a(x) x + N_{n-p}^n$$

$$\text{où } N_j^i \in \mathbb{Z} \quad \text{et } p = 0, \dots, n-1$$

ce qui donne :

$$-\nu(b_p) \leq \sup [ -(\nu(a_{n-p}) + n-p), \dots, -(\nu(a_1) + 1), 0 ]$$

et :

$$-\frac{\nu(b_p)}{n-p} \leq \sup \left[ -\frac{\nu(a_{n-p}) + n-p}{n-p}, \dots, -\frac{\nu(a_1) + 1}{n-p}, 0 \right]$$

or  $n-p \geq n-p-j \quad j = 1, 2, \dots$  D'où :

$$-\frac{\nu(b_p)}{n-p} \leq \sup \left[ -\frac{\nu(a_{n-p})+n-p}{n-p}, -\frac{\nu(a_{n-p-1})+n-p-1}{n-p-1}, \dots, -\frac{\nu(a_1)+1}{1}, 0 \right]$$

car tous les termes tels que  $-(\nu(a_j+j) \leq 0$  n'interviennent pas dans la majoration. On en déduit que :

$$\sup_{1 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\frac{\nu(b_p)}{n-p} \right] \leq \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\left(\frac{\nu(a_{n-p})}{n-p} + 1\right) \right]$$

Inversement on a aussi :

$$\sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\left(\frac{\nu(a_{n-p})}{n-p} + 1\right) \right] \leq \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\frac{\nu(b_p)}{n-p} \right]$$

d'où l'on tire :

$$g = \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\left(\frac{\nu(a_{n-p})}{n-p} + 1\right) \right] = \sup_{1 \leq j \leq n} \left[ 0, -\left(\frac{\nu(a_j)}{j} + 1\right) \right].$$

Si  $\theta_1 = t \frac{d}{dt}$  avec  $t = \frac{1}{x}$  alors  $\theta_1 = -x \frac{d}{dx}$  et (E) se met sous la forme :

$$(\theta_1)^n + \sum_{p=0}^{n-1} c_p(t) (\theta_1)^p = 0 \quad \text{avec} \quad c_p(t) = (-1)^{n-p} b_p(t^{-1})$$

où  $b_p(x)$  est donné par (1)

d'où :

$$\begin{aligned} g &= \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\frac{\nu(c_p)}{n-p} \right] = \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, -\frac{\nu(b(t^{-1}))}{n-p} \right] \\ &= \sup_{0 \leq p \leq n-1} \left[ 0, \frac{\mu(a_{n-p})+n-p}{n-p} \right] = \sup_{1 \leq p \leq n} \left[ 0, 1 + \frac{\mu(a_p)}{p} \right] \end{aligned}$$

### Remarques

1°) Pour calculer l'invariant de Katz en un point singulier  $x_0$  différent de zéro et de l'infini, on pose  $x = x_0 + \xi$  et l'invariant de Katz au point singulier  $x_0$  est égal à l'invariant de Katz au point singulier  $\xi = 0$ .

2°) Lorsque  $x = \infty$  est singulier d'ordre  $l \geq 2$ , l'invariant de Katz est égal à :

$$g = \sup_{1 \leq p \leq n} \left( 1 + \frac{\mu(a_p)}{p} \right) = 1 + \sup_{1 \leq p \leq n} \left( \frac{\mu(a_p)}{p} \right)$$

On retrouve ainsi un invariant classique appelé grade du point singulier  $x = \infty$  (voir [4] page 199).

Définition

L'invariant de Katz sera appelé le grade du point singulier.

2. Propriétés des invariants  $\rho_r$ .

Soit (E) l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0, \quad a_i(x) \in \mathbb{C}(x)$$

et soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

définie par : pour tout  $r = 1, 2, \dots, l-1$

$$f(x) = (x-r) (\rho_{r+1}) + \rho_r, \quad x \in [r; r+1]$$

Le graphe de  $f$  est le polygone formé des segments de droite joignant  $(r, \rho_r)$  à  $(r+1, \rho_{r+1})$ ,  $1 \leq r \leq l-1$

Pour  $r = 1, 2, \dots, l-1$ ,  $\rho_r > 0$ , il existe donc  $p_0, 1 \leq p_0 \leq n$  tel que :

$$\rho_r = -(\nu(a_{p_0}) + p_0 r)$$

mais alors :

$$\rho_{r-1} \geq -(\nu(a_{p_0}) + p_0 (r-1)), \text{ lorsque } \rho_{r-1} \text{ existe,}$$

$$\text{et } \rho_{r+1} \geq -(\nu(a_{p_0}) + p_0 (r+1))$$

d'où :

$$\rho_{r-1} - 2\rho_r + 2\rho_{r+1} \geq 0$$

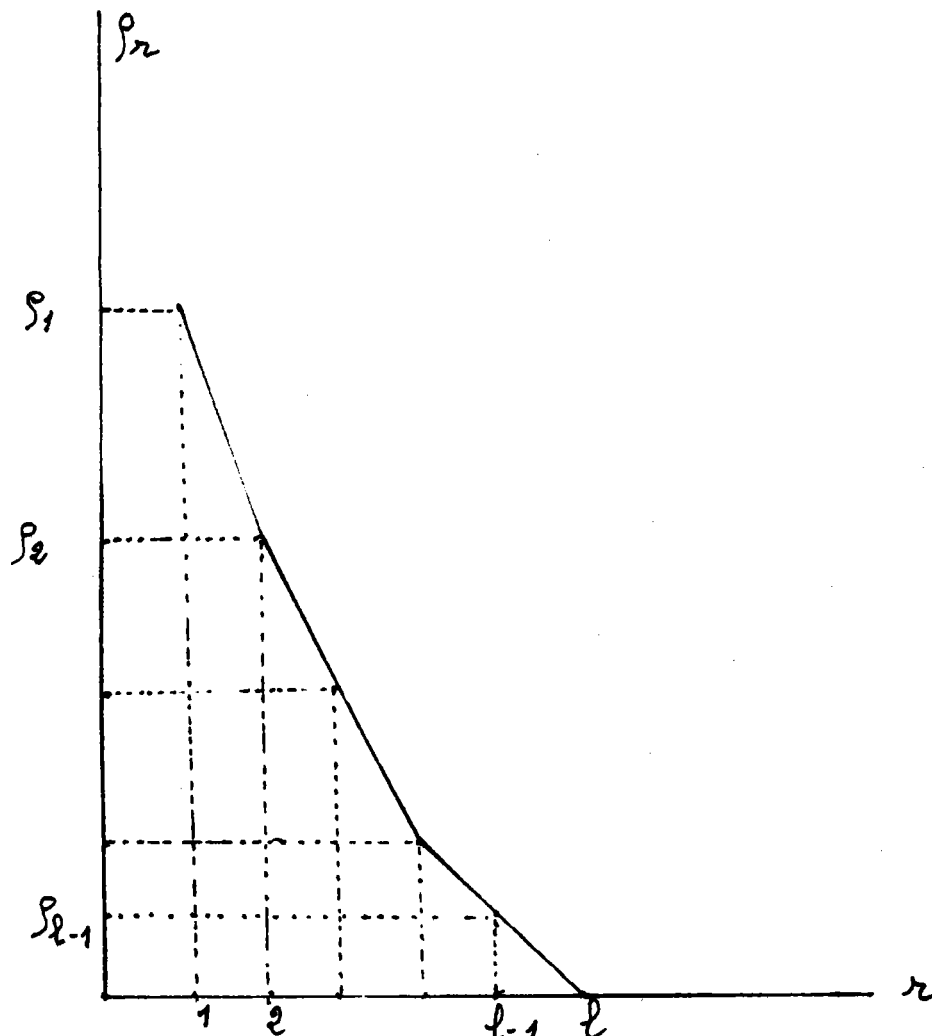
$$\Leftrightarrow \frac{\rho_{r-1} - \rho_r}{(r-1) - r} \leq \frac{\rho_r - \rho_{r+1}}{r - (r+1)}$$

d'où le résultat :



Théorème 1

f est une fonction convexe



Remarque : une autre démonstration de ce résultat a été donnée par A.H.M.LEVELT dans [5].

Théorème 2

Si l'ordre de la singularité est  $l \geq 2$ , alors pour tout entier  $r, 1 \leq r \leq l-1$ , on a :

$$l - r \leq \rho_r \leq n (l-r)$$

• En effet, l'ordre de la singularité étant égal  $l (\geq 2)$ , on a  $\rho_1 = 0$  et  $\rho_{l-1} \neq 0$

ce qui équivaut ) :

i)  $-\nu(a_p) \leq pl$  pour tout  $p = 1, \dots, n$

ii) il existe  $p_0, 1 \leq p_0 \leq n$  tel que  $-\nu(a_{p_0}) > p_0 (l-1)$

Pour tout  $r = 1, \dots, l-1$ , il existe  $p_1$  tel que :  $1 \leq p_1 \leq n$  et  $\rho_r =$

$$-(\nu(a_{p_1}) + p_1 r)$$

tenant compte de la condition i) on a :

$$\rho_r \leq p_1 l - p_1 r = p_1 (l-r) \leq n (l-r)$$

D'autre part :

la condition ii) implique : il existe  $p_0$  tel que :

$$-(\nu(a_{p_0}) + p_0 r) > p_0 (l-1-r) \text{ pour tout } r = 1, \dots, l-1$$

$$\text{car } -(\nu(a_{p_0}) + p_0 r) > p_0 (l-1) - p_0 r = p_0 (l-1-r).$$

D'où : pour tout  $r = 1, \dots, l-1$

$$\rho_r \leq -(\nu(a_{p_0}) + p_0 r) \geq p_0 (l-1-r) + 1 \geq l-1-r+1 = l-r$$

### Théorème 3

$L$ 'infini est un point singulier irrégulier d'ordre  $l$  et  $x_1, \dots, x_m$  sont des points singuliers réguliers de l'équation (E) si et seulement si, (E) s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{j=1}^n \frac{P_j(x)}{\prod_{i=1}^m (x-x_i)^j} \cdot \frac{d^{n-j} y}{dx^{n-j}} = 0 \quad (E')$$

où les  $P_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq n$  sont des polynômes dont les degrés satisfont aux conditions

i)  $d^\circ P_j \leq j (m+1-2)$  pour tout  $j = 1, \dots, n$

ii) il existe  $j_0 \in [1, 2, \dots, n]$  tel que  $d^\circ P_{j_0} > j_0 (m+1-3)$

Il est bien connu que l'équation différentielle :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = 0, \quad a_i(x) \in \mathbb{C}(x)$$

admet  $m$  points singuliers réguliers  $x_1, \dots, x_m$  si et seulement si :

$$a_j(x) = \frac{P_j(x)}{\prod_{i=1}^m (x-x_i)^j}$$

où  $P_j(x)$  sont des polynômes dont les degrés dépendent de la nature du point  $x = \infty$  (voir [4] page 246).

$x = \infty$  est singulier d'ordre  $l \geq 2$  si et seulement si :

\* a)  $\rho_{l-1} = 0 \Leftrightarrow \mu(a_j) + j(2-l) \leq 0$  pour tout  $j = 1, \dots, n$

d'où i) puisque  $\mu(a_j) = d^\circ P_j - mj$

\* b)  $\rho_{l-1} \neq 0 \Leftrightarrow$  il existe  $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\} : \mu(a_{j_0}) + j_0(2-l) > 0$

$\Leftrightarrow$  il existe  $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\} : d^\circ P_{j_0} - mj_0 + j_0(3-l) > 0$  d'où ii)

### Cas particulier $n = 2$

Lorsque  $n = 2$ , les degrés des polynômes  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  satisfont aux deux conditions :

i)  $d^\circ P_1 \leq m+1-2$  et  $d^\circ P_2 \leq 2m+21-4$

ii)  $d^\circ P_1 \geq m+1-2$  ou  $d^\circ P_2 \geq 2m+21-5$

donc  $d^\circ P_1$  et  $d^\circ P_2$  satisfont à l'une des deux conditions

a)  $d^\circ P_1 = m+1-2$  et  $0 \leq d^\circ P_2 \leq 2m+21-4$

b)  $d^\circ P_1 < m+1-2$  et  $2m+21-5 \leq d^\circ P_2 \leq 2m+21-4$

### Interprétation graphique

Considérons l'application :

$$f : \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(P_1(x), P_2(x)) \longmapsto (d^\circ P_1, d^\circ P_2)$$

Si  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  vérifient la condition a), alors :

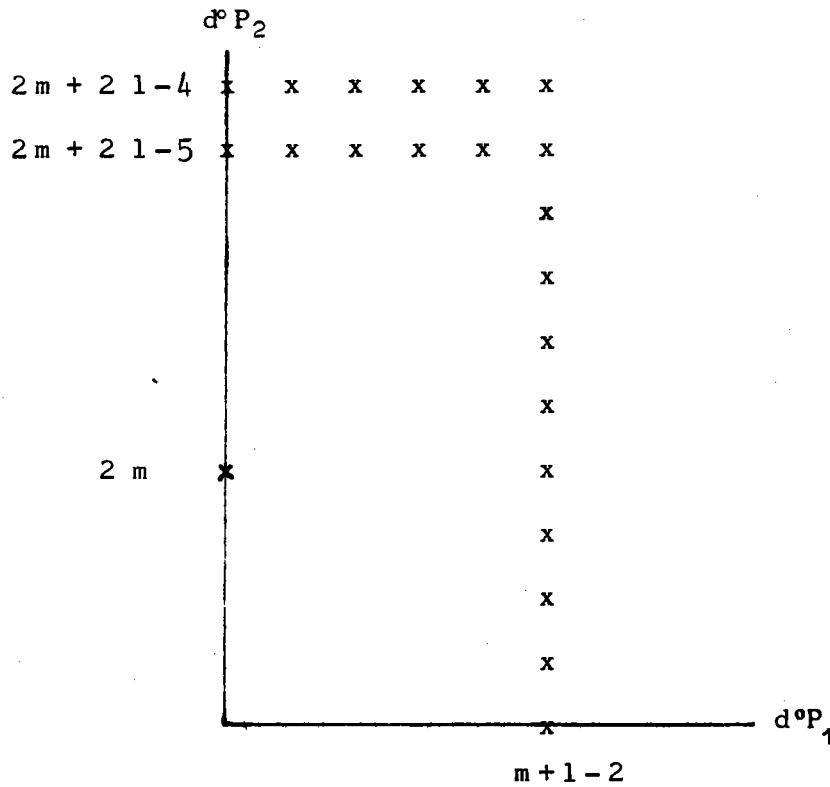
$$f [P_1(x), P_2(x)] = (m+1-2, 0 \leq d^\circ P_2 \leq 2m+21-4)$$

Si  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  vérifient la condition b), alors :

$$f [P_1(x), P_2(x)] = (p, q) \text{ avec } p \text{ et } q \text{ entiers tels que}$$

$$0 \leq p \leq m+1-3 \text{ et } 2m+21-5 \leq q \leq 2m+21-4.$$

Soit  $\xi$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x]$  formé des polynômes  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  qui satisfont à a) ou à b). Alors  $f(\xi)$  est donné par le graphique suivant :



Théorème 4

En chaque point singulier, d'ordre  $l \geq 2$ , de l'équation différentielle (E), l'invariant de Katz  $g$  satisfait à la relation :

$$l - 2 < g \leq l - 1$$

On peut supposer que ce point singulier est  $x = 0$  (quitte à effectuer un changement de variable) la proposition 1 donne :

i)  $-\nu(a_p) + pl \leq 0$  pour tout  $p = 1, \dots, n$

$$-\nu(a_p) + p + p(l-1) \leq 0$$

ce qui donne

$$-\left[\frac{\nu(a_p)}{p} + 1\right] \leq l-1 \text{ pour tout } p = 1, \dots, n$$

d'où

$$g = \sup_{1 \leq p \leq n} \left[0, -\left(\frac{\nu(a_p)}{p} + 1\right)\right] \leq l-1$$

ii) puisque  $\rho_{l-1} \neq 0 \Leftrightarrow$  il existe  $p_0, 1 \leq p \leq n$  tel que :

$$-\nu(a_{p_0}) + p_0(l-1) > 0$$

$$-\nu(a_{p_0}) + p_0 + p_0(l-2) > 0$$

ce qui donne

$$-\left[\frac{\nu(a_{p_0})}{p_0} + 1\right] > 1-2$$

$$\text{et } g = \sup_{1 \leq p \leq n} \left[0, -\left(\frac{\nu(a_p)}{p} + 1\right)\right] \geq -\left(\frac{\nu(a_{p_0})}{p_0} + 1\right) > 1-2$$

Polygone de Newton

La construction suivante est inspirée de cette faite par A.H.M.Levelt dans [5].  
Considérons l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i(x) y^{(n-i)} = 0 \quad (E)$$

Supposons que  $x = \infty$  soit un point singulier d'ordre  $l \geq 2$  de l'équation (E).  
D'après la proposition 1 il existe  $p_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\mu(a_{p_0}) + p_0 > 0$   
(puisque  $\rho_1 > 0$ ) et on a :

$$\rho_1 = \sup_{1 \leq p \leq n} (\mu(a_p) + p) \text{ et } g = \sup_{1 \leq p \leq n} \left( \frac{(\mu(a_p) + p)}{p} \right)$$

Il est commode de déterminer graphiquement la relation liant  $\rho_1$  à  $g$  en considérant dans le plan  $\mathbb{R}^2$  les points  $(p, \mu(a_p) + p)$  tels que  $\mu(a_p) + p > 0$ .

Considérons les droites passant par  $(0,0)$  et les points  $(p, \mu(a_p) + p)$  et soit  $D_1$  celle qui réalise la plus grande pente possible.

Soit  $\mu_1$  cette pente et  $m_1$  le plus grand entier tel que  $(m_1, \mu(a_{m_1}) + m_1) \in D_1$ .

On a alors :

$$g = \sup_p \left( \frac{\mu(a_p) + p}{p} \right) = \frac{\mu(a_{m_1}) + m_1}{m_1} = \mu_1$$

Si tous les points  $(p, \mu(a_p) + p)$ ,  $p > m_1$  sont tels que :

$$\mu(a_p) + p \leq \mu(a_{m_1}) + m_1 \text{ alors :}$$

$$\rho_1 = \mu(a_{m_1}) + m_1 = m_1 \mu_1 = m_1 g$$

S'il existe  $p > m_1$  :  $\mu(a_p) + p > \mu(a_{m_1}) + m_1$ , on considère les droites joignant le point  $(m_1, \mu(a_{m_1}) + m_1)$  et les points  $(p, \mu(a_p) + p)$ ,  $p > m_1$  et on examine les quotients

$$\frac{\mu(a_p) + p - (\mu(a_{m_1}) + m_1)}{p - m_1}$$

Soit  $\mu_2$  le plus grand d'entre eux et  $D_2$  la droite correspondante. Soit  $m_1 + m_2$  le plus grand entier tel que :

$$(m_1 + m_2, \mu(a_{m_1 + m_2}) + m_1 + m_2) \in D_2$$

On poursuit de cette façon et l'opération s'arrête lorsqu'on est arrivé à un point  $(m_1 + m_2 + \dots + m_s, \mu(a_{m_1 + \dots + m_s}))$  tel que

- ou bien  $m_1 + \dots + m_s = n$

- ou bien pour tout  $p > m_1 + \dots + m_s$ , on a :

$$\mu(a_p) + p \leq \mu(a_{m_1 + \dots + m_s}) + m_1 + \dots + m_s$$

On obtient ainsi une ligne polygonale concave qui sera appelée polygone de Newton.

Cette construction permet d'associer à chaque point singulier irrégulier,  $s$  nombres entiers  $m_1, \dots, m_s$  et  $s$  nombres rationnels  $\mu_1, \dots, \mu_s$  vérifiant les relations :

- i)  $m_1 \mu_1 + \dots + m_s \mu_s = \rho_1$
- ii)  $\mu_1 = g$  (l'invariant de Katz)
- iii)  $m_1 + \dots + m_s \leq n$

Définitions

- a) Les nombres  $m_1, \dots, m_s, \mu_1, \dots, \mu_s$  sont appelés système fondamental d'invariants de Levelt.
- b) L'entier  $m_1$  sera appelé le degré du point singulier et sera noté  $d$ .

Remarques

I°) La connaissance du système fondamental d'invariants  $m_1, \dots, m_s, \mu_1, \dots, \mu_s$  permet de calculer les invariants  $\rho_r, 1 \leq r \leq l$  par la relation :

$$\rho_r = (\mu_1 - r + 1) * m_1 + (\mu_2 - r + 1) * m_2 + \dots + (\mu_s - r + 1) * m_s$$

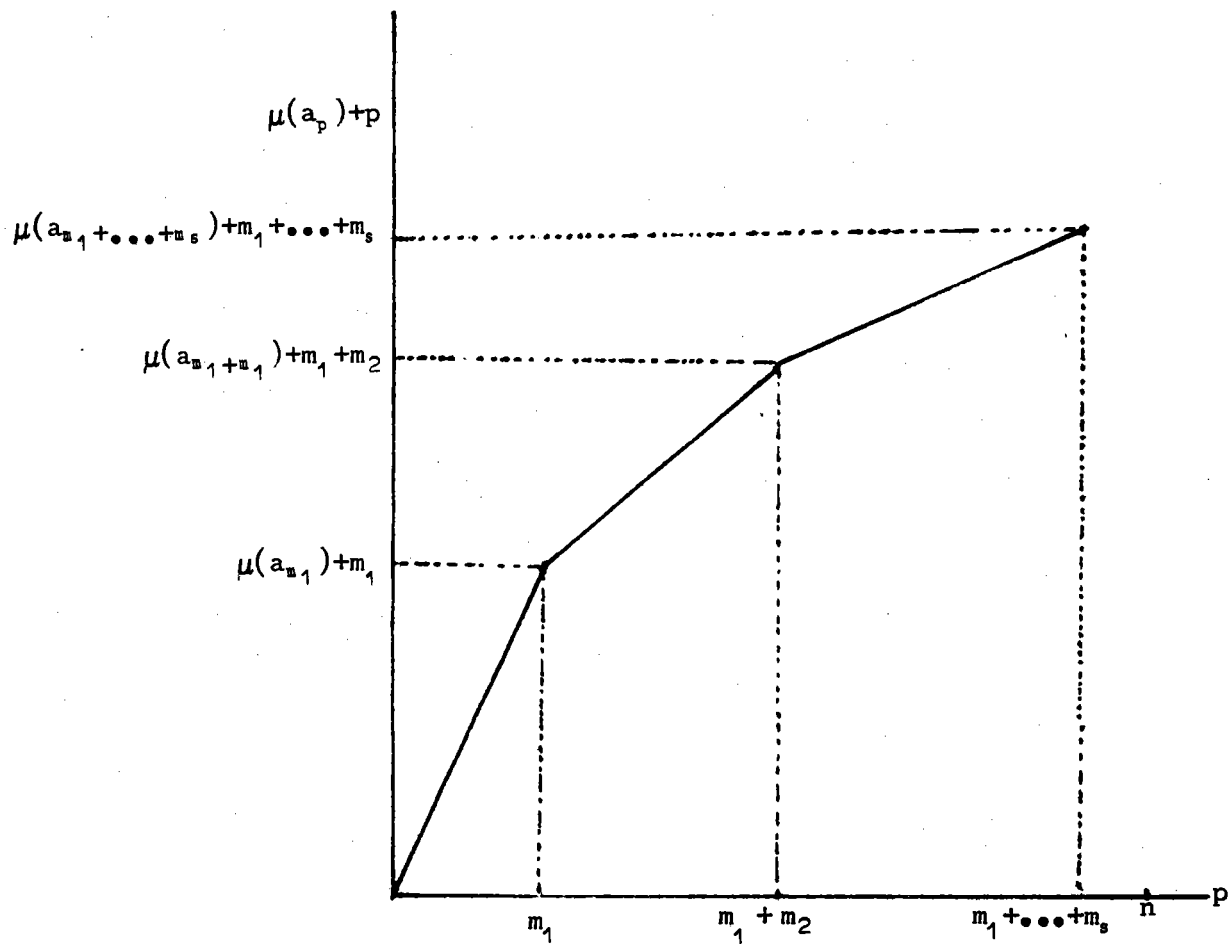
où

$$(\mu_i - r + 1) * = \max(0, \mu_i - r + 1) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, s \\ r = 1, \dots, l-1 \end{matrix}$$

(voir dans [5] la démonstration de cette relation ainsi que d'autres propriétés du système fondamental d'invariants).

2°) Si  $x_0$  est un point singulier de l'équation (E), différent de l'infini, on pourra se ramener au cas où le point singulier est  $t = \infty$  en posant :

$$x = x_0 + \frac{1}{t}$$



3. Calcul des invariants aux points singuliers des équations de la physique mathématique

1. Equation d'Euler

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

\*  $x = 0$  est un point singulier :

$$\rho_1 = \sup (0, -(\nu(ax^{-1}) + 1), -(\nu(bx^{-2}) + 2)) = 0$$

$c$  est donc une singularité régulière.

\*  $x = \infty$  est aussi un point singulier régulier car

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup (0, \mu(ax^{-1}) + 1, \mu(bx^{-2}) + 2) \\ &= \sup (0, -1 + 1, -2 + 2) = 0 \end{aligned}$$

2. Equation de Gauss

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

Cette équation possède trois points singuliers :

\*  $x = 0$

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, -\left(\nu\left(\frac{c - (a+b+1)x}{x(1-x)}\right) + 1\right), -\left(\nu\left(\frac{ab}{x(1-x)}\right) + 2\right) \right] = 0$$

\*  $x = 1$ , posant  $1-x = z$ , l'équation devient :

$$z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} - [c - (a+b+1)(1-z)] \frac{dy}{dz} - aby = 0$$

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, -\left(\nu\left(\frac{c - (a+b+1)(1-z)}{z(1-z)}\right) + 1\right), -\left(\nu\left(\frac{ab}{z(1-z)}\right) + 2\right) \right] = 0$$

\*  $x = \infty$

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, \mu\left(\frac{c - (a+b+1)x}{x(1-x)}\right) + 1, \mu\left(\frac{ab}{x(1-x)}\right) + 2 \right] = 0$$

Donc les trois points singuliers de l'équation de Gauss sont réguliers.



3. Equation de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

si l'on pose  $z = \frac{1}{2}(1-x)$  et  $\alpha = a-1$ , on obtient l'équation :

$$\frac{d}{dz} \left[ z(1-z) \frac{dy}{dz} \right] + a(a-1)y = 0$$

qui n'est autre que l'équation de Gauss avec  $b = -a+1$  et  $c = 1$

Donc l'équation de Legendre possède trois points singuliers réguliers  
1, -1 et  $\infty$ .

4. Equation de Lamé

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \sum_{r=1}^3 \frac{\frac{1}{2}}{x - a_r} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{n(n+1)x + h}{4 \prod_{r=1}^3 (x - a_r)} y = 0$$

posant  $x - a_1 = z$ , on obtient l'équation :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \sum_{r=1}^3 \frac{\frac{1}{2}}{z + a_1 - a_r} \cdot \frac{dy}{dz} - \frac{n(n+1)(z+a_1) + h}{4 \prod_{r=1}^3 (z+a_1-a_r)} y = 0$$

$z = 0$  est un point singulier avec :

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, - \left( \nu \left( \sum_{r=1}^3 \frac{\frac{1}{2}}{z+a_1-a_r} \right) + 1 \right), - \left( \nu \left( \frac{n(n+1)(z+a_1) + h}{4 \prod_{r=1}^3 (z+a_1-a_r)} \right) + 2 \right) \right] = 0$$

d'où  $x=a_1$  est un point singulier régulier de l'équation de Lamé. Il en est de même pour  $a_2$  et  $a_3$  puisque l'équation est symétrique en  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .

Le point  $x = \infty$  est aussi un point singulier de l'équation de Lamé avec

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup \left[ 0, \mu \left( \sum_{r=1}^3 \frac{\frac{1}{2}}{x - a_r} \right) + 1, \mu \left( \frac{n(n+1)x + h}{4 \prod_{r=1}^3 (x - a_r)} \right) + 2 \right] \\ &= \sup [0, -1+1, -2+2] = 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation de Lamé possède quatre points singuliers réguliers.

5. Equation de Kummer

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (c-x) \frac{dy}{dx} - ay = 0$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (-1 + \frac{c}{x}) \frac{dy}{dx} - \frac{a}{x} y = 0$$

\*  $x = 0$  est un point singulier régulier car

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup [0, -(\nu(-1 + \frac{c}{x}) + 1), -(\nu(\frac{a}{x}) + 2)] \\ &= \sup [0, -(-1+1), -(-1+2)] = \sup [0, -1] = 0 \end{aligned}$$

\*  $x = \infty$  est un point singulier :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup [0, \mu(-1 + \frac{c}{x}) + 1, \mu(\frac{a}{x}) + 2] \\ &= \sup [0, 0+1, -1+2] = 1 \end{aligned}$$

et puisque  $\rho_1 > \rho_2 \geq 0$  et que les  $\rho_r$  sont entiers, on a  $\rho_2 = 0$ .

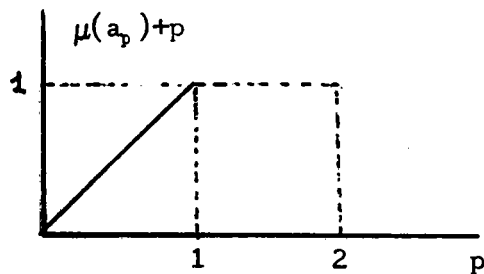
Donc le point  $x = \infty$  est singulier irrégulier d'ordre 2

Interprétation graphique

On a :

$$\mu(a_1) + 1 = \mu(-1 + \frac{c}{x}) + 1 = 1$$

$$\mu(a_2) + 2 = \mu(\frac{a}{x}) + 2 = 1$$



d'où en portant  $p$  en abscisse

et  $\mu(a_p) + p$  en ordonné le graphique ci-dessus on en déduit l'invariant de Katz :

$$g = \sup (0, 1 + \frac{\mu(a_1)}{1}, 1 + \frac{\mu(a_2)}{2}) = 1$$

et le degré de cette équation est :  $d = 1$ .

6. Equation de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2) y = 0$$

\*  $x = 0$  est un point singulier régulier puisque :

$$\rho_1 = \sup [0, -(\nu(x^{-1})+1), -(\nu(1-a^2 x^{-2})+2)] = 0$$

\*  $x = \infty$  est un point singulier avec :

$$\rho_1 = \sup [0, \mu(x^{-1})+1, \mu(1-a^2 x^{-2})+2]$$

$$= \sup [0, -1+1, 0+2] = 2$$

$$\rho_2 = \sup [0, \mu(x^{-1}), \mu(1-a^2 x^{-2})]$$

$$= \sup [0, -1, 0] = 0$$

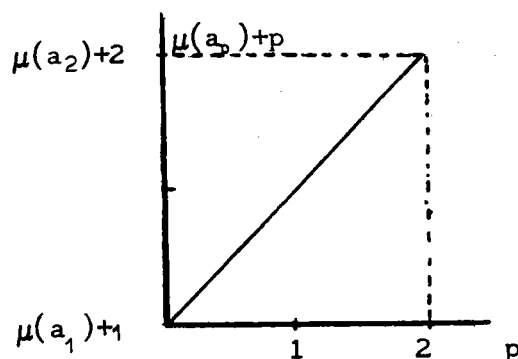
Donc : le point  $x = \infty$  est singulier d'ordre 2 pour l'équation de Bessel.

Calculons son grade :

$$g = \sup [0, \mu(x^{-1})+1, \frac{\mu(1-a^2 x^{-2})+2}{2}] =$$

$$= \sup [0, 0, 1] = 1.$$

Pour trouver son degré, on trace son polygone de Newton :



où  $a_1 = x^{-1}$  et  $a_2 = 1 - a^2 x^{-2}$

Le degré de l'équation de Bessel est  $d = 2$

7. Equation de Whittaker

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x^2} \right) y = 0$$

\*  $x = 0$  est un point singulier avec :

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, -\left( \nu \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x^2} \right) + 2 \right) \right] = 0$$

\*  $x = \infty$  est un point singulier avec :

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, \mu \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x^2} \right) + 2 \right] = \sup [0, \sigma + 2]$$

$$= 2$$

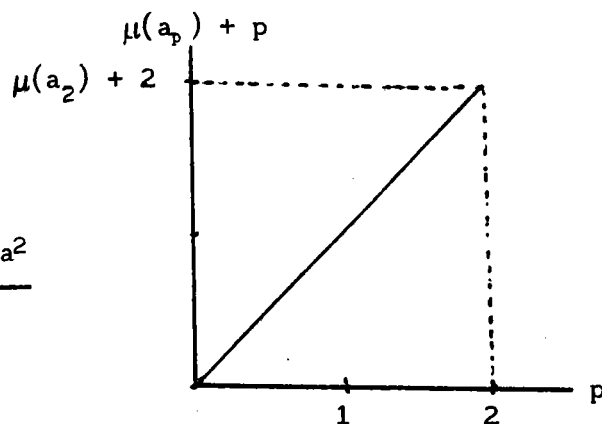
$$\rho_2 = \sup \left[ 0, \mu \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x^2} \right) \right] = 0$$

Le point  $x = \infty$  est donc un point singulier d'ordre 2 pour l'équation de Whittaker.

Polygone de Newton

$$a_1(x) \equiv 0$$

$$a_2(x) = -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x^2}$$



Le graphique donne :

l'invariant de Katz :  $g = 1$

et le degré  $d = 2$ .

8. Equation d'Hermite

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad \lambda \neq 0$$

Cette équation possède un seul point singulier  $x = \infty$ .

a) Calcul des invariants

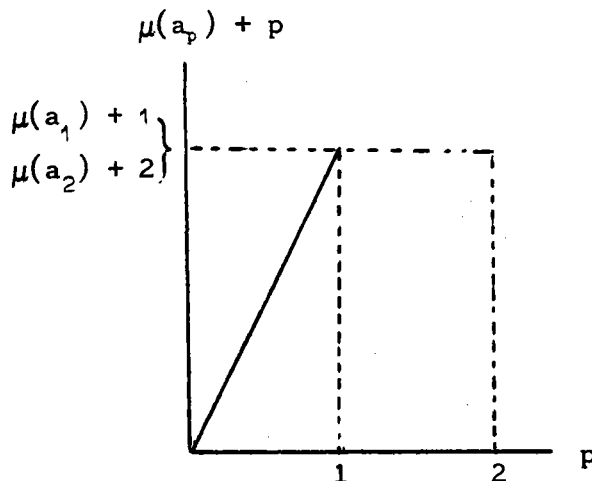
$$\rho_1 = \sup [0, \mu(2x) + 1, \mu(\lambda) + 2] = 2$$

$$\rho_2 = \sup [0, \mu(2x), \mu(\lambda)] = 1$$

or  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \geq 0$  d'où  $\rho_3 = 0$ .

L'équation d'Hermite est d'ordre 3 au point  $x = \infty$ .

b) Polygone de Newton



$$a_1(x) = -2x, a_2(x) = \lambda$$

le grade est  $g = 2$  et le degré  $d = 1$

### 9. Equation d'Airy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x y = 0$$

$x = \infty$  est le seul point singulier de cette équation.

a) Calcul des invariants

$$\rho_1 = \sup (0, \mu(-x) + 2) = 3$$

$$\rho_2 = \sup (0, \mu(-x)) = 1$$

et  $\rho_3 = 0$  puisque  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \geq 0$

Donc le point  $x = \infty$  est singulier d'ordre 3 pour l'équation d'Airy.

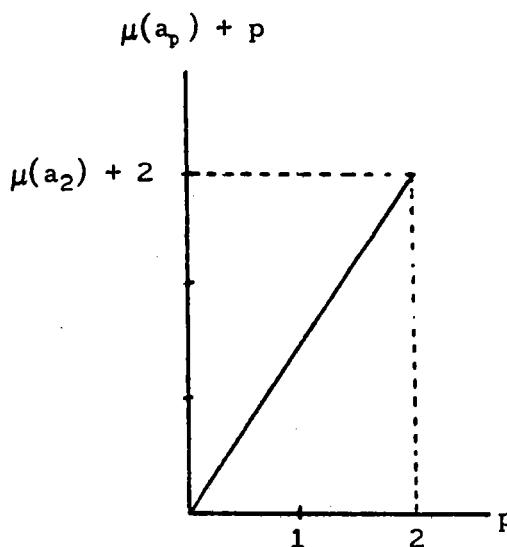
b) Polygone de Newton

$$a_1(x) \equiv 0$$

$$a_2(x) = -x$$

Le grade est ici  $g = \frac{3}{2}$

et le degré  $d = 2$ .



10. Equation de Weber

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\gamma - x^2) y = 0$$

Cette équation possède un seul point singulier,  $x = \infty$ .

a) Calcul des invariants

$$\rho_1 = \sup [0, \mu(\gamma - x^2) + 2] = 4$$

$$\rho_2 = \sup [0, \mu(\gamma - x^2)] = 2$$

$$\rho_3 = \sup [0, \mu(\gamma - x^2) - 2] = 0$$

L'équation de Weber est donc d'ordre 3 à l'infini.

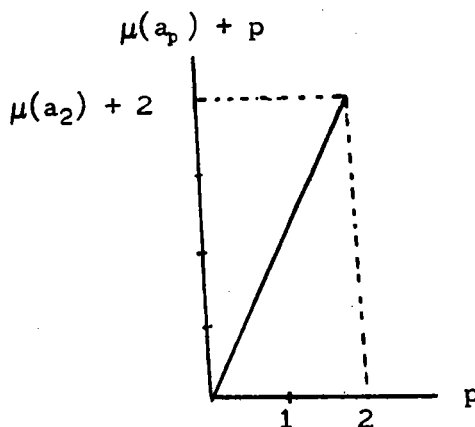
b) Polygone de Newton

$$a_1(x) \equiv 0$$

$$a_2(x) = \gamma - x^2$$

Le grade est  $g = \frac{4}{2} = 2$

et le degré  $d = 2$



11. Equation de Watson [1] (page 37)

$$y^{(4)} + \frac{1}{x} y''' + \left(1 + \frac{1-a^2}{x^2}\right) y'' + \left(\frac{1}{x} - 2 \frac{1-a^2}{x^3}\right) y' + 2 \left(\frac{2b^2}{x^2} + \frac{1-a^2}{x^4}\right) y = 0$$

\*  $x = 0$  est un point singulier régulier puisque

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, -(\nu(x^{-1})+1), -\left(\nu\left(1+\frac{1-a^2}{x^2}\right)+2\right), -\left(\nu\left(\frac{1}{x} - 2\frac{1-a^2}{x^3}\right)+3\right), \right. \\ \left. -\left(\nu\left(\frac{2b^2}{x^2} - \frac{1-a^2}{x^4}\right)+4\right) \right] = 0$$

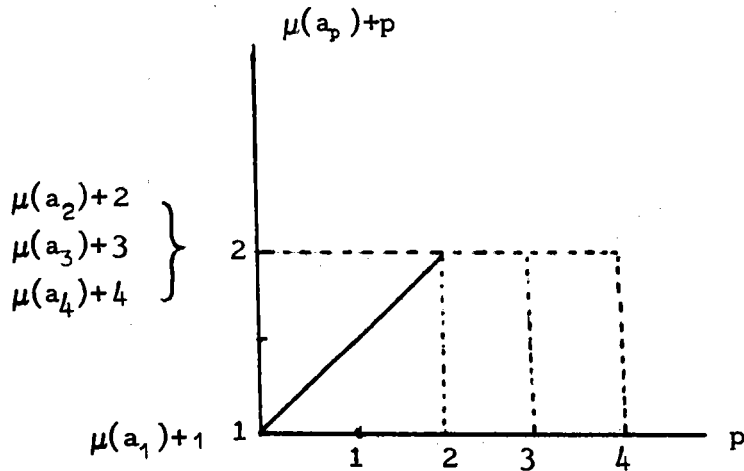
\*  $x = \infty$  est un point singulier avec :

$$\rho_1 = \sup \left[ 0, \mu\left(\frac{1}{x}\right)+1, \mu\left(1+\frac{1-a^2}{x^2}\right)+2, \mu\left(\frac{1}{x} - 2\frac{1-a^2}{x^3}\right)+3, \mu\left(\frac{b^2}{x^2} + \frac{1-a^2}{x^4}\right)+4 \right] \\ = \sup [0, -1+1, 0+2, -1+3, -2+4] = 2$$

$$\rho_2 = \sup \left[ 0, \mu\left(\frac{1}{x}\right), \mu\left(1+\frac{1-a^2}{x^2}\right), \mu\left(\frac{1}{x} - 2\frac{1-a^2}{x^3}\right), \mu\left(\frac{b^2}{x^2} + \frac{1-a^2}{x^4}\right) \right] = 0$$

donc l'équation de Watson est d'ordre 2 à l'infini.

Son polygone de Newton est donné par la figure suivante :



son grade est  $g = \frac{2}{2} = 1$

et son degré  $d = 2$ .

CHAPITRE II - CLASSIFICATION DES EQUATIONS  
DIFFERENTIELLES DE LA PHYSIQUE  
MATHEMATIQUE

Ce chapitre est consacré au cas particulier des équations différentielles de la physique mathématique, le but étant, de montrer que, la donnée des invariants en chaque point singulier permet de retrouver toutes ces équations et en donne une nouvelle classification.

1. Définition

Deux équations différentielles linéaires homogènes du n<sup>o</sup> ordre sont dites équivalentes si elles ont les mêmes points singuliers et qu'en chaque point singulier leurs invariants sont égaux.

2. Théorème

Deux équations différentielles du 2<sup>me</sup> ordre ayant m points singuliers  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , même ordre et même  $\rho_1$  en ces points sont équivalentes.

Supposons que  $z_1, \dots, z_m$  soient des points singuliers de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1(z) \frac{dw}{dz} + a_2(z) w = 0, \quad a_1(z) \in (z)$$

En posant  $z - z_1 = \frac{1}{t}$ , l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + b_1(t) \frac{dw}{dt} + b_2(t) w = 0$$

et  $t = \infty$  est un point singulier de cette équation. Cette transformation peut être recommencée avec les points  $z_2, \dots, z_m$  et nous voyons ainsi que pour démontrer le théorème il suffit de l'établir pour le point à l'infini.

La démonstration du théorème utilisera les deux propositions suivantes :

Proposition 1

Si l'infini est un point singulier d'ordre 1 de l'équation différentielle (E), alors les trois conditions sont équivalentes





- i)  $\rho_1 = l-1+k, 0 < k \leq l-1$
- ii)  $\mu(a_2) = l-3+k$  où  $\mu$  est l'ordre à l'infini
- iii)  $\rho_r = \rho_1 + 2(1-r) = l-1+k+2(1-r)$  si  $1 \leq r \leq k+1$   
 $\rho_r = l-r$  si  $k+1 \leq r \leq l$

En effet, on sait que  $l-r \leq \rho_r \leq n(l-r)$  pour  $r = 1, 2, \dots, l-1$ . Ce qui donne pour  $n = 2$  et  $r = 1$   $l-1 \leq \rho_1 \leq 2(l-1)$ . D'où :

$$\rho_1 = l-1+k \text{ avec } 0 \leq k \leq l-1$$

Si  $k > 0$  alors i)  $\Rightarrow$  ii),

car  $\rho_1 = \sup(0, \mu(a_1)+1, \mu(a_2)+2)$   
 avec  $\mu(a_1) \leq l-2$

d'où  $\rho_1 = l-1+k > l-1 \geq \mu(a_1)+1$

ce qui donne  $\rho_1 = l-1+k = \mu(a_2)+2$   
 et  $\mu(a_2) = l-3+k$

ii)  $\Rightarrow$  iii)

Le polygone formé des segments de droite joignant  $(r, \rho_r)$  à  $(r+1, \rho_{r+1})$  est convexe donc leurs pentes sont croissantes. De plus, elles sont strictement négatives (car  $\rho_r > \rho_{r+1}$ ) et ne prennent que des valeurs entières puisque

$$\frac{\rho_{r+1} - \rho_r}{r+1 - r} \in \mathbb{Z}$$

Si  $\mu(a_2) = l-3+k$  alors  $\rho_1 = \sup(0, \mu(a_1)+1, l-1+k) = l-1+k$

et  $\rho_2 = \sup(0, \mu(a_1), l-3+k) = l-3+k$

car  $\mu(a_1) \leq l-2 \leq l-3+k$  puisque  $k > 0$

d'où

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{2 - 1} = -2$$

donc les pentes ne peuvent prendre que les valeurs  $-2$  ou  $-1$ .

a) Si pour tout  $r \leq l$  on a  $\rho_{r+1} - \rho_r = -2$  alors les égalités  $\rho_1 = l-1+k,$

$\rho_2 - \rho_1 = -2, \dots, \rho_l - \rho_{l-1} = -2$  donnent

$\rho_l = 2(l-1)$  d'où  $k = l-1$  et  $\rho_r = \rho_1 + 2(1-r)$

b) S'il existe  $r_0$  tel que  $\rho_{r+1} - \rho_2 = -1$ , pour tout  $r$ ,  $r_0 \leq r \leq l-1$  alors on a :

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho_2 - \rho_3 = \dots = \rho_{r-1} - \rho_r = +2$$

$$\rho_{r_0} - \rho_{r_0+1} = \dots = \rho_{l-1} - \rho_l = +1$$

d'où

$$\rho_1 = l-1+k = 1+r_0-2 \text{ ce qui donne } r_0 = k+1$$

donc pour  $r \leq k+1$ ,  $\rho_r = \rho_1 + 2(1-r)$

et pour  $k+1 \leq r \leq l$ ,  $\rho_r = l-r$

iii)  $\Rightarrow$  i)

Pour  $r = 1$ , on a  $r < k+1$  pour  $k > 0$  d'où

$$\rho_1 = l-1+k$$

Proposition 2

Si  $l$ 'infini est un point singulier d'ordre  $l > 2$  de l'équation différentielle (E), alors les trois conditions sont équivalentes :

- i)  $\rho_1 = l-1$
- ii)  $\mu(a_1) = l-2$  et  $\mu(a_2) \leq l-3$
- iii)  $\rho_r = l-r$   $r = 1, \dots, l$

i)  $\Rightarrow$  ii)

$$\rho_1 = \sup [0, \mu(a_1) + 1, \mu(a_2) + 2] = l-1 \text{ implique}$$

$$\mu(a_2) + 2 \leq l-1 \Rightarrow \mu(a_2) \leq l-3$$

$$\text{or } \rho_{l-1} = \sup [0, \mu(a_1) + 3 - 1, \mu(a_2) + 2(3 - 1)] > 0$$

$$\text{mais } \mu(a_2) + 2(3 - 1) \leq 3 - 1 \leq 0$$

$$\text{donc } \mu(a_1) + 3 - 1 > 0 \text{ d'où : } \mu(a_1) \geq l-2 \text{ et } \mu(a_1) + 1 \geq l-1 \geq \mu(a_2) + 2$$

$$\Rightarrow \mu(a_1) + 1 = \rho_1 = l-1$$

ii)  $\Rightarrow$  iii)

$$\text{on a } \rho_r = \sup [0, \mu(a_1) + 2 - r, \mu(a_2) + 2(2 - r)]$$

$$= \sup [0, l-1-r, \mu(a_2) + 2(2-r)] = l-r$$

car  $\mu(a_2) + 2(2-r) \leq 1-3+4-2r \leq 1-r$  pour  $r = 1, 2, \dots, l$

ii)  $\Rightarrow$  i) Evident.

Démonstration du théorème

Les propositions 1 et 2 montrent que la connaissance de l'ordre  $l$  et de l'invariant  $\rho_1$  au point singulier à l'infini, suffit à déterminer les autres invariants. On en déduit que la donnée en chaque point singulier  $z_1, \dots, z_n$  de l'ordre  $l$  et de l'invariant  $\rho_1$  détermine les autres invariants. Ce qui démontre le théorème.

Remarques

1°) Dans la démonstration de la proposition 2 on a supposé  $l > 2$  mais le théorème est encore vrai pour  $l = 2$  car dans ce cas il n'y a qu'un seul invariant non nul à savoir  $\rho_1$ .

2°) Lorsque l'équation différentielle est d'ordre supérieur ou égal à trois la donnée de l'ordre  $l$  en un point singulier et de l'invariant  $\rho_1$ , ne suffit pas à déterminer les autres invariants. Exemples :

$$y''' + zy = 0$$

$$y''' + z^2 y' + y = 0$$

$z = \infty$  est un point singulier de ces deux équations. Leurs invariants sont donnés par :

$$\rho_r = \sup_{1 \leq p \leq 3} [0, \mu(a_p) + p(2-r)]$$

ce qui donne pour la première équation :

$$\rho_1 = \sup [0, 1 + 3(2-1)] = 4$$

$$\rho_2 = \sup [0, 1 + 3(2-2)] = 1$$

$$\rho_3 = 0$$

et pour la deuxième :

$$\rho_1 = \sup [0, 2+2(2-1), 0+3(2-1)] = 4$$

$$\rho_2 = \sup [0, 2+2(2-2), 0+3(2-2)] = 2$$

$$\rho_3 = 0$$

Ces deux équations ont bien le même ordre ( $l=3$ ) et le même invariant  $\rho_1=4$ , mais tous leurs invariants ne sont pas égaux.

Détermination graphique des invariants

Les propositions 1 et 2 montrent que la donnée de l'ordre 1 en un point singulier et de l'invariant  $\rho_1$ ; détermine les autres invariants. Ces propositions peuvent s'interpréter graphiquement de la manière suivante :

\* lorsque  $\rho_1 = 1-1$ , on a  $\rho_r = 1-r$  (proposition 2).

Donc si AB est le segment de droite joignant (1,0) à (0,1) les  $\rho_r$  seront les ordonnées des points de AB d'abscisses  $r, r = 1, 2, \dots, 1$ .

\* lorsque  $\rho_1 = 2(1-1)$ , on a  $\rho_r = 2(1-r)$  (proposition 1).

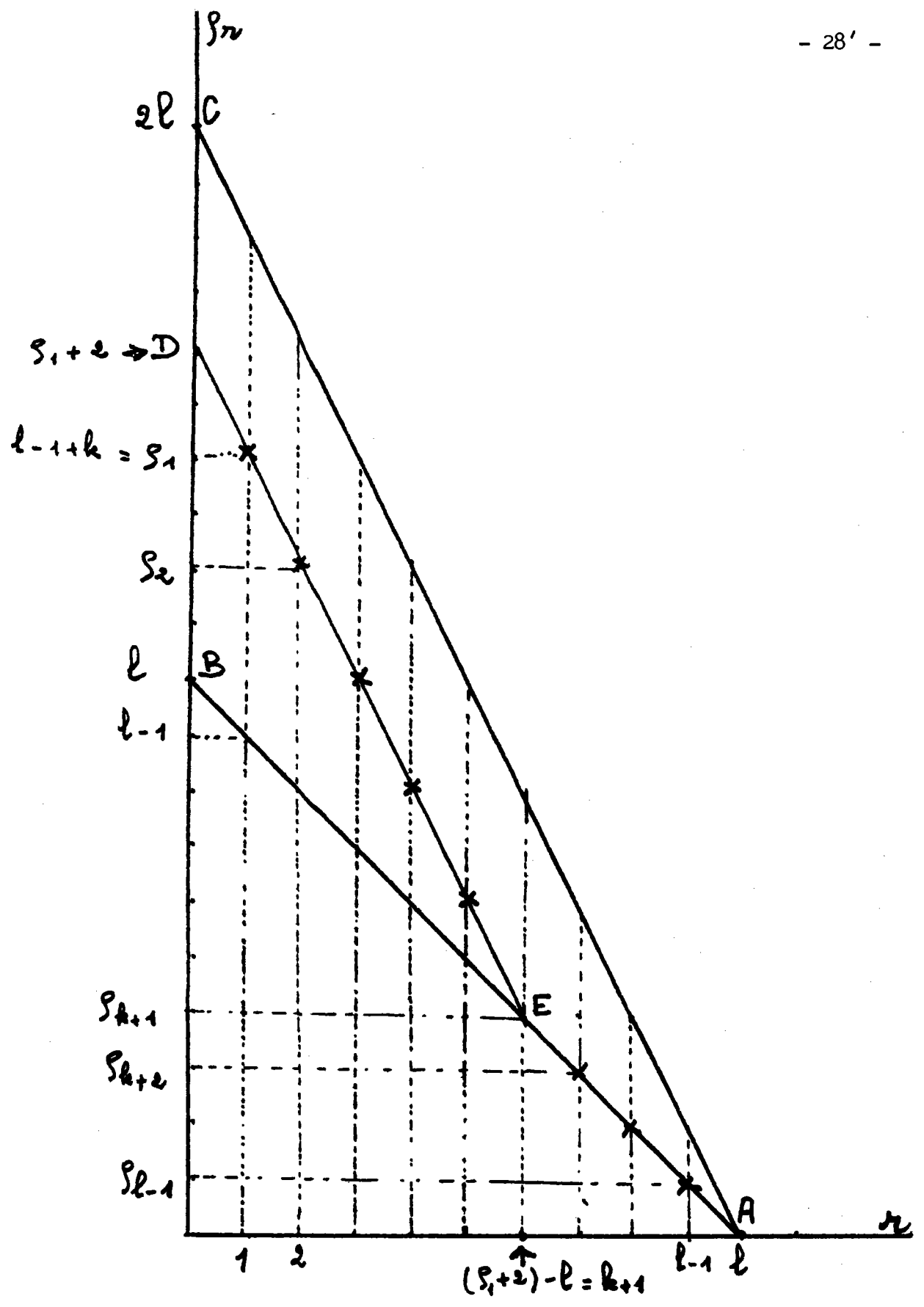
Soit AC le segment de droite joignant les points (1,0) et (0,2) Les invariants  $\rho_r$  sont les ordonnées des points de AC d'abscisses  $r = 1, 2, \dots, 1$ .

\* lorsque  $1-1 < \rho_1 < 2(1-1)$ , on a d'après la proposition 1 :

$$\rho_r = \rho_1 + 2(1-r), \quad 1 \leq r \leq (\rho_1 + 2) - 1$$

$$\rho_r = 1-r, \quad (\rho_1 + 2) - 1 \leq r \leq 1$$

Soit D le point de coordonnées (0,  $\rho_1 + 2$ ) et E le point de AB d'abscisse  $(\rho_1 + 2) - 1$ . L'équation de la droite (DE) est  $y = -2x + \rho_1 + 2(1-x)$ . Par conséquent les invariants  $\rho_r$ , pour  $r \leq (\rho_1 + 2) - 1$ , sont les ordonnées des points de DE d'abscisses  $r$  et lorsque  $r \leq (\rho_1 + 2) - 1$  ce sont les ordonnées des points de EA d'abscisses  $r = (\rho_1 + 2) - 1, \dots, 1-1, 1$ .



### 3. Changements de fonction compatibles avec la relation d'équivalence

Etant donné l'équation différentielle :

$$w'' + a_1 w' + a_2 w = 0 \quad (1), \quad a_i \in \mathbb{C}(z)$$

on cherche les transformations qui permettent de réduire les coefficients de cette équation sans changer la position ni la nature de ses points singuliers. Effectuons la substitution  $w = u\varphi$ , où  $\varphi$  est une fonction particulière. La fonction  $u$  satisfait à l'équation différentielle :

$$u'' + \left(a_1 + 2 \frac{\varphi'}{\varphi}\right) u' + \left(a_2 + a_1 \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi''}{\varphi}\right) u = 0 \quad (2)$$

Si  $z_1, \dots, z_m$  sont des points singuliers réguliers et si l'infini est un point singulier d'ordre 1, on sait que :

$$a_1(z) = \frac{P(z)}{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}$$

et

$$a_2(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^m (z-z_i)^2}$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes dont les degrés dépendent de l'ordre et de l'invariant  $\rho_1$  du point singulier  $z = \infty$ .

Choisissons  $\varphi$  telle que :

$$2 \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{R(z)}{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}$$

où  $R(z)$  est un polynôme dont on déterminera le degré.

Avec ce choix les points  $z_1, \dots, z_m$  sont des points singuliers réguliers de l'équation (2). En effet les coefficients de  $u'$  et  $u$  sont des fractions rationnelles dont les dénominateurs sont respectivement

$$\prod_{i=1}^m (z-z_i) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^m (z-z_i)^2$$

Examinons le cas du point  $z = \infty$ . Pour cela posons :

$$a_1 + 2 \frac{\phi'}{\phi} = \frac{p(z)}{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}$$

et

$$a_2 + a_1 \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\phi''}{\phi} = \frac{q(z)}{\prod_{i=1}^m (z-z_i)^2}$$

on a alors :

$$p(z) = P(z) + R(z)$$

$$q(z) = Q(z) + \frac{1}{2} P(z) R(z) + \frac{1}{4} R^2(z) + S(z)$$

où  $S(z)$  est un polynôme de degré  $\leq m-1 + d^\circ R$ .

Soient  $l, l', \rho_1, \rho_1'$  l'ordre et le premier invariant de (1) et (2) respectivement. On a alors :

Lemme :

i) Si  $d^\circ P < m + 1 - 2$  et si  $R(z) = -P(z)$  alors :

$$(l, \rho_1) = (l', \rho_1')$$

ii) Si  $d^\circ P = m + 1 - 2$  et  $\rho_1 > l - 1$ , il existe  $R(z)$  tel que :

$$\rho_1 > \rho_1'$$

En effet

- Si  $d^\circ P < m + 1 - 2$ , on sait que :

$$2m + 2l - 5 \leq d^\circ Q \leq 2m + 2l - 4 \text{ et que les invariants } \rho_r \text{ ne dépendent que du } d^\circ Q.$$

Choisissant  $R(z) = -P(z)$  on a :  $p(z) \equiv 0$

$$\text{et } d^\circ q(z) = d^\circ Q(z)$$

$$\text{car } d^\circ (PR) = d^\circ R^2 \leq 2(m + l - 3) < d^\circ Q$$

$$\text{et } d^\circ S \leq m - 1 + d^\circ R < 2m + l - 3 \leq d^\circ Q$$

L'équation différentielle (2) a donc les mêmes invariants que l'équation différentielle (1). Ce qui démontre i).

- Si  $d^\circ P = m + 1 - 2$  et que  $\rho_1 > l - 1$ , on sait que  $d^\circ Q = 2m + \rho_1 - 2$  (proposition 2).

Choisissons

$$R(z) = \alpha z^{m + \rho_1 - 1}$$

On a alors :

$$d^{\circ} p(z) \leq \sup (d^{\circ} P, d^{\circ} R) \leq m+1-2$$

et on peut choisir  $\alpha$  tel que  $d^{\circ} q(z) < d^{\circ} Q$  car :

$$d^{\circ} (PR) = d^{\circ} P + d^{\circ} R = d^{\circ} Q,$$

$$d^{\circ} R^2 \leq d^{\circ} (PR), \text{ et } d^{\circ} S < d^{\circ} Q$$

$\alpha$  va donc figurer dans l'expression du coefficient de  $z^{2m+\rho_1-2}$ . Il suffit de choisir  $\alpha$  tel que ce coefficient soit nul. Ce qui démontre le ii).

Remarque

Lorsque  $\rho_1 = 1-1$  et  $d^{\circ} P = m+1-2$ , en prenant  $R(z) = \alpha$ , l'équation (2) sera équivalente à l'équation (1), pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$  et pour tout  $m \geq 1$ .

A l'aide de ces transformations et des propositions 1 et 2, nous allons construire toutes les équations différentielles linéaires du 2me ordre ayant un point singulier d'ordre 1 à l'infini. On se limitera aux cas où  $l \leq 3$  et où le nombre de points singuliers à distance finie est au plus égal à un. De plus les points singuliers autres que l'infini seront supposés réguliers.

4. Equations du 2me ordre ayant un point singulier régulier à l'infini

a) Equations n'ayant aucun point singulier à distance finie

la forme générale de ces équations est :

$$w'' + P(z) w' + Q(z)w = 0$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes.

$$z = \infty \text{ est régulier} \Leftrightarrow \rho_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu(1) + 1 \leq 0 \text{ et } \mu(Q) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow P(z) = Q(z) \equiv 0$$

d'où l'équation

$$\boxed{w'' = 0}$$

b) Equations ayant un point singulier régulier à distance finie

On supposera que ce point est  $z = 0$ . La forme générale de ces équations est :

$$z^2 w'' + z P(z) w' + Q(z) w = 0$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes

$z = \infty$  est singulier régulier si et seulement si :

\*  $\infty$  est singulier

\*  $\rho_1 = 0$



ce qui équivaut à :

$$\mu[z^{-1}P(z)] + 1 \leq 0, \quad \mu[z^{-2}Q(z)] + 2 \leq 0 \text{ et } z = \infty \text{ singulier}$$

$$\Leftrightarrow d^{\circ}P \leq 0, \quad d^{\circ}Q \leq 0 \text{ et } z = \infty \text{ singulier}$$

d'où l'équation :

$$z^2 w'' + az w' + bw = 0 \quad \text{avec } a \neq 2 \text{ ou } b \neq 0$$

c'est l'équation d'Euler.

5. Equations du 2me ordre ayant un point singulier à l'infini d'ordre 1 = 2

a)  $\rho_1 = 1-1 = 1$

\* Si l'équation n'a pas de points singuliers à distance finie, sa forme générale est :

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$$

où P(z) et Q(z) sont des polynômes dont les degrés sont tels que

$$d^{\circ}P \leq 1-2 = 0 \text{ et } d^{\circ}Q \leq 2(1-2) = 0$$

Dire que  $\rho_1 = 1 \Leftrightarrow$

$$1 = \sup [d^{\circ}P + 1, d^{\circ}Q + 2] \Rightarrow Q \equiv 0 \text{ et } P =$$

d'où l'équation différentielle

$$w'' + aw' = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

Posant  $az = x$  cette équation devient :

$$w'' + w' = 0 \quad 5.1$$

\* Si  $z = 0$  est un point singulier régulier, l'équation différentielle s'écrit :

$$z^2 w'' + z P(z)w' + Q(z)w = 0$$

où P(z) et Q(z) sont des polynômes dont les degrés satisfont aux conditions :

$$d^{\circ}P \leq m+1-2 = 1+2-2 = 1$$

$$d^{\circ}Q \leq 2(m+1-2) = 2$$

Pour que  $\rho_1 = 1 \Leftrightarrow$

$$\sup [\mu(z^{-1}P(z)) + 1, \mu(z^{-2}Q(z)) + 2] = 1$$

$$= \sup [d^{\circ}P, d^{\circ}Q] = 1$$

d'où l'équation :

$$z^2 w'' + (a_0 + a_1 z) z w' + (b_0 + b_1 z) w = 0$$

avec  $a_1 \neq 0$  ou  $b_1 \neq 0$

- Si  $a_1 \neq 0$  et  $b_1$  quelconque, posons  $w = u\varphi$  où  $\varphi = \exp\left(\int_{z_0}^z \alpha \frac{dt}{t}\right)$

où  $\alpha$  est un exposant au point singulier  $z = 0$ . On obtient alors l'équation différentielle :

$$z^2 u'' + (a_0 + 2\alpha + a_1 z) z u' + (\alpha a_1 + b_1) z u = 0$$

Posant  $-a_1 z = x$ ,  $a_0 + 2\alpha = -c$ ,  $\alpha + \frac{b_1}{a_1} = a$ , on obtient :

$$x u'' + (c-x) u' - a u = 0$$

5.2

c'est l'équation hypergéométrique confluyente de Kummer

- Si  $a_1 = 0$ , alors  $b_1 \neq 0$

un changement de fonction analogue au précédent et en choisissant  $\alpha$  tel que  $a_0 + 2\alpha = 1$ , donne l'équation :

$$z^2 u'' + z u' + (\mu + b_1 z) u = 0$$

et si l'on pose  $x = b_1 z$ , on arrive à l'équation :

$$x^2 u'' + x u' + (\lambda + x) u = 0$$

5.3

b)  $\rho_1 = 2$

- Si l'équation n'a aucun point singulier à distance finie on peut l'écrire :

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes tels que  $d^\circ P \leq 1-2 = 0$  et  $d^\circ Q \leq 2(1-2) = 0$ . D'autre part  $\rho_1 = 2$  implique :

$$\sup (d^\circ P + 1, d^\circ Q + 2) = 2$$

donc  $Q(z) =$  constante non nulle. On a ainsi l'équation différentielle :

$$w'' + a w' + b w = 0 \quad \text{avec } b \neq 0$$

\* Si  $a = 0$ , posant  $x = kz$  avec  $k^2 = b$ , on obtient l'équation :

$$w'' + w = 0 \quad 5.4$$

\* Si  $a \neq 0$ , en posant

$$w = u \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \alpha dt\right) \text{ avec } \alpha \text{ tel que}$$

$$\frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha a + b = 0, \text{ on obtient l'équation :}$$

$$u'' + (a + \alpha) u' = 0$$

dont l'invariant  $\rho_1 < 2$  et l'ordre  $1 \leq 2$ .

- Si  $z = 0$  est un point singulier régulier de l'équation différentielle, elle s'écrit alors :

$$z^2 w'' + P(z) z w' + Q(z) w = 0$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1 et 2 respectivement. De plus  $\rho_1 = 2$ , ce qui implique que  $d^0 Q = 2$ . D'où l'équation :

$$z^2 w'' + (a_0 + a_1 z) z w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2) w = 0 \text{ avec } b_2 \neq 0$$

\* Si  $a_1 = 0$ , posons

$$w = u \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{\alpha dt}{t}\right)$$

et l'équation devient :

$$z^2 u'' + (a_0 - \alpha) z u' + \left(b_0 - \frac{1}{2} \alpha (a_0 - 1) + \frac{1}{4} \alpha^2 + b_1 z + b_2 z^2\right) u = 0$$

choisissant  $\alpha$  tel que  $a_0 - \alpha = 1$ , on obtient l'équation :

$$z^2 u'' + z u' + (-a^2 + b_1 z + b_2 z^2) u = 0$$

- Si  $b_1 = 0$ , posant  $x = b_2 z$  cette équation devient :

$$\boxed{x^2 u'' + x u' + (-a^2 + x^2) u = 0}$$

5.5

c'est l'équation de Bessel.

- Si  $b_1 \neq 0$ , posant  $u = z^{-\frac{1}{2}} w$ , on obtient l'équation :

$$z^2 w'' + (-a^2 + \frac{1}{4} + b_1 z + b_2 z^2) w = 0$$

et si l'on pose  $x = 2i b_2^{\frac{1}{2}} z$  et  $k = b_1 / 2i b_2^{\frac{1}{2}}$ ,

l'équation précédente s'écrit :

$$w'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x^2} \right) w = 0 \quad 5.6$$

c'est l'équation de Whittaker.

- Si  $a_1 \neq 0$ , en posant  $w = u e^{\frac{1}{2} \alpha z}$  et en choisissant  $\alpha$  tel que  $b_2 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \alpha^2 = 0$ , on obtient une équation différentielle dont l'invariant  $\rho_1 < 2$

6. Equations différentielles du 2me ordre ayant un point singulier d'ordre 3 à l'infini.

a)  $\rho_1 = 2$

1°) Si l'équation différentielle n'a pas de points singuliers autre que l'infini elle s'écrit :

$$w'' + P(z) w' + Q(z) w = 0$$

dire que  $\rho_1 = 2$  implique (d'après la proposition 2) que  $d^0 P = 1$  et  $d^0 Q = 0$ .  
D'où l'équation différentielle :

$$w'' + (a_0 + a_1 z) w' + b w = 0 \quad \text{avec } a_1 \neq 0$$

posant  $x = kz$  avec  $k^2 = a_1$ , cette équation devient :

$$w'' + (a+x) w' + c w = 0$$

et si l'on pose  $a + x = -2t$ , on obtient l'équation différentielle

$$w'' - 2t w' + \lambda w = 0 \quad 6.1$$

c'est l'équation différentielle d'Hermite.

- Si  $z = 0$  est un point singulier régulier, on a alors l'équation différentielle :

$$z^2 w'' + P(z) z w' + Q(z) w = 0$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2 et 4 respectivement.

Si  $\rho_1 = 2$ , alors la proposition 2 donne  $d^\circ P = 2$  et  $d^\circ Q \leq 2$ .

D'où l'équation différentielle :

$$z^2 w'' + (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) z w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2) w = 0$$

avec  $a_2 \neq 0$ .

Posant  $w = u \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{\alpha dt}{t}\right)$  et choisissant  $\alpha$  tel que

$$\frac{1}{4} \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha (a_0 - 1) + b_0 = 0$$

on arrive à l'équation différentielle

$$z w'' + (\beta + a_1 z + a_2 z^2) w' + (\gamma + \delta z) w = 0$$

posant  $x = kz$  avec  $k^2 = a_2$  on obtient l'équation différentielle

$$x w'' + (a + bx + x^2) w' + (c + dx) w = 0$$

6.2

b)  $\rho_1 = 3$

- Si l'infini est le seul point singulier on a l'équation :

$$w'' + (a_0 + a_1 z) w' + (b_0 + b_1 z) w = 0 \quad \text{avec } b_1 \neq 0$$

(d'après la proposition 1).

\* Si  $a_1 = 0$ , posant

$$w = u \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z a_0 dt\right), \text{ l'équation devient :}$$

$$u'' + \left(b_0 - \frac{1}{4} a_0^2 + b_1 z\right) u = 0$$

Si l'on pose  $x = kz$  avec  $k^3 + b_1$ , on obtient l'équation différentielle :

$$u'' + (\gamma + x) u = 0$$

Enfin, posons  $t = -(\gamma + x)$  on aura l'équation :

$$\boxed{u'' - tu = 0} \quad 6.3$$

C'est l'équation différentielle d'Airy.

\* Si  $a_1 \neq 0$ , on pose

$$w = u \exp \int_{z_0}^z -\frac{1}{2} \alpha dt \quad \text{et l'équation devient :}$$

$$u'' + (a_0 - \alpha + a_1 z)u' + \left[ \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha a_0}{2} + b_0 + \left( b_1 - \frac{\alpha a_1}{2} \right) z \right] u = 0$$

choisissant  $\alpha$  tel que  $b_1 - \frac{\alpha a_1}{2} = 0$ , on est ramené au cas  $\rho_1 = 2$ .

- Si  $x = 0$  est un point singulier régulier, on a l'équation différentielle (d'après la proposition 1) :

$$z^2 w'' + (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) z w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3) w = 0 \quad \text{avec } b_3 \neq 0$$

\* Si  $a_2 = 0$ , on pose

$$w = u \exp \int_{z_0}^z -\frac{1}{2} \frac{a_0 + a_1 t}{t} dt \quad \text{et}$$

l'équation différentielle devient :

$$z^2 u'' + \left[ b_0 + \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{4} a_0^2 + \left( b_1 - \frac{1}{2} a_0 a_1 \right) z + \left( b_2 - \frac{a_1^2}{4} \right) z^2 + b_3 z^3 \right] u = 0$$

posant  $x = kz$  avec  $k^3 = b_3$  on obtient l'équation différentielle :

$$\boxed{x^2 u'' + (a + bx + cx^2 + x^3) u = 0} \quad 6.4$$

\* Si  $a_2 \neq 0$ , posant

$$w = u \exp \int_{z_0}^z -\frac{\alpha}{2} dt$$

et choisissant  $\alpha$  tel que  $b_3 - \frac{1}{2} \alpha a_2 = 0$ , on est ramené à une équation du type  $\rho_1 = 2$ .

c)  $\rho_1 = 4$

- Si l'équation n'a pas de point singulier autre que  $z = \infty$ , elle s'écrit, d'après la proposition 1,

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$$

avec  $d^0 P \leq 1$  et  $d^0 Q = 2$

\* Si  $d^0 P < 1$ , on a l'équation différentielle :

$$w'' + a w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2) w = 0$$

qui donne en posant  $w = u \exp(-\frac{a}{2} z)$  :

$$u'' + (\alpha + b_1 z + b_2 z^2) u = 0$$

Posant  $x = kz$  avec  $k^4 = -b_2$ , on obtient :

$$u'' + (\beta + x - x^2) u = 0$$

cette équation peut encore s'écrire :

$$u'' + [\beta + \frac{S^2}{4} - (x - \frac{S}{2})^2] u = 0$$

Posant  $x - \frac{S}{2} = t$ , on obtient l'équation différentielle :

$$u'' + (\gamma - t^2) u = 0$$

6.5

c'est l'équation différentielle de Weber.

\* Si  $d^0 P = 1$ , on a l'équation différentielle :

$$w'' + (a_0 + a_1 z)w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2) w = 0$$

et si l'on pose  $w = u \exp(+\frac{1}{2} \alpha z^2)$  avec  $\alpha$  tel que  $\alpha^2 + \alpha a_1 + b_2 = 0$  on est ramené à une équation différentielle pour laquelle  $\rho_1 < 4$ .

- Si  $z = 0$  est un point singulier régulier, on a d'après la proposition 1, l'équation différentielle

$$z^2 w'' + P(z) z w' + Q(z) w = 0$$

avec  $d^0 P \leq 2$  et  $d^0 Q = 4$ .

\* Si  $d^0P < 2$ , on a alors l'équation différentielle

$$z^2 w'' + (a_0 + a_1 z) z w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4) w = 0$$

qu'on peut transformer en posant :

$$w = u \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{a_0 + a_1 t}{t} dt \right)$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$z^2 u'' + (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4) u = 0$$

et si l'on pose  $x = kz$  avec  $k^4 = b_4$  on obtient l'équation différentielle :

$x^2 u'' + (a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4) u = 0$	6.6
--	-----

\* Si  $d^0P = 2$ , on a alors l'équation différentielle

$$z^2 w'' + (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) z w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4) w = 0$$

et si l'on pose  $w = u \exp \left( \frac{1}{2} \alpha z^2 \right)$  avec  $\alpha$  tel que  $\alpha^2 + \alpha a_2 + b_2 = 0$ , on obtient une équation différentielle telle que  $\rho_1 < 4$ .

### Conclusions

=====

Les classes d'équivalence des équations différentielles linéaires du 2me ordre ayant un point singulier à l'infini d'ordre  $1 \leq 3$ , de premier invariant  $\rho_1$  et admettant au plus une singularité régulière (en  $x = 0$ ), sont représentées par les équations du tableau ci-après. Ces classes d'équivalences sont caractérisées par le triplet  $(l, \rho_1, m)$  où  $m$  vaut 1 ou 0 suivant que le point  $x = 0$  est singulier ou non. Sur ces triplets, on définit la relation d'ordre suivante (appelée ordre lexicographique) :

$$(l, \rho_1, m) < (l', \rho_1', m') \Leftrightarrow$$

l'une des trois conditions est réalisé :

- i)  $l < l'$
- ii)  $l = l'$  et  $\rho_1 < \rho_1'$
- iii)  $l = l'$ ,  $\rho_1 = \rho_1'$  et  $m < m'$

d'où la classification de ces équations différentielles.



E q u a t i o n s

Ordre du point singulier $x = \infty$	Invariant $\rho_1$ au point $x = \infty$	Nombre de points singuliers réguliers à distance finie	
1 = 1	$\rho_1 = 0$	0	$w'' = 0$
	$\rho_1 = 0$	1	$x^2 w'' + a x w' + b w = 0$ (Euler)
1 = 2	$\rho_1 = 0$	0	$w'' + w' = 0$
	$\rho_1 = 1$	1	$x w'' + (c-x) w' - a w = 0$ (Kummer)
	$\rho_1 = 2$	0	$w'' + w = 0$
	$\rho_1 = 2$	1	$w'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - a^2}{x}\right] w = 0$ (Whittaker)
1 = 3	$\rho_1 = 2$	0	$w'' - 2x w' + \lambda w = 0$ (Hermite)
	$\rho_1 = 2$	1	$x w'' + (a + bx + x^2) w' + (c + dx) w = 0$
	$\rho_1 = 3$	0	$w'' - x w = 0$ (Airy)
	$\rho_1 = 3$	1	$x^2 w'' + (a + bx + cx^2) w = 0$
	$\rho_1 = 4$	0	$w'' + (\gamma - x^2) w = 0$ (Weber)
	$\rho_1 = 4$	1	$x^2 w'' + (a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4) w = 0$

CHAPITRE III - DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES  
AU VOISINAGE D'UN POINT  
SINGULIER IRREGULIER

Dans ce chapitre, on se propose d'établir une relation étroite entre les invariants  $\rho_r$  en un point singulier irrégulier d'une équation différentielle et les développements asymptotiques des solutions de cette équation au voisinage de ce point.

Dans toute la suite le point  $x = \infty$  sera supposé singulier d'ordre  $1 \geq 2$  de l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0, \quad a_i(x) \in \mathbb{C}(x) \quad (E)$$

Définitions

1°) Le polynôme :

$$\chi(x) (X) = X^n + x^{2-1} a_1(x) X^{n-1} + x^{2(2-1)} a_2(x) X^{n-2} + \dots + x^{n(2-1)} a_n(x)$$

sera appelé polynôme caractéristique de (E)

2°) L'équation différentielle (E) est dite simple à l'infini si l'invariant de Katz  $g$  est entier et si le degré  $d = n$ .

Remarque

Lorsque le point à l'infini est singulier, les invariants  $\rho_r$  sont donnés par :

$$\rho_r = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, \mu(a_p) + p(2-r)]$$

d'où :

$$0 = \rho_1 = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, \mu(a_p) + p(2-1)]$$

ce qui implique que pour tout  $p, 1 \leq p \leq n$  :  $x^{p(2-1)} a_p(x)$  est holomorphe à l'infini et par conséquent les coefficients du polynôme caractéristique sont holomorphes à l'infini.

Théorème

Si l'équation différentielle (E) est simple et si toutes les racines de  $\chi(\infty)(X)$  sont distinctes alors (E) admet une matrice fondamentale de la forme :

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^D \exp Q(x)$$

où :

i)  $\hat{Y}(x) = P(x) \hat{Z}(x)$  avec :

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & x^{g-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x^{(n-1)(g-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{transformation de Turritin})$$

$\hat{Z}(x)$  possède un développement asymptotique de la forme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{Z}_j x^{-j} \text{ pour } x \rightarrow \infty, x \in S$$

(S étant un secteur angulaire centré à l'origine et inférieur à  $\pi/l-1$ )  
et  $\det \hat{Z}_0 \neq 0$

ii) D est une matrice diagonale constante

$$\text{iii) } Q(x) = \sum_{i=1}^{l-1} B_{i-1} \frac{\rho_i}{x} = \sum_{i=1}^g B_{i-1} x^{g-i+1}$$

où g est l'invariant de Katz, les  $B_i$  des matrices diagonales constantes et

$$B_0 = \frac{n}{\rho_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

les  $\lambda_i$  étant les racines de  $\chi(\infty)(X)$ .

La démonstration de ce théorème utilise les résultats des deux propositions suivantes :

Proposition 1

Si l'invariant de Katz, g est entier alors  $\chi(\infty)(X) = 0$  possède n-d racines nulles, où d est le degré de la singularité.

Posons  $b_j(x) = x^{j(2-1)} a_j(x) = x^{\mu(a_j) + j(2-1)} a_j^*(x)$

où  $a_j^*(x)$  est holomorphe à l'infini et  $a_j^*(\infty) \neq 0$ . On a alors :

$$\chi(x)(X) = X^n + b_1(x) X^{n-1} + \dots + b_n(x)$$

Dire que  $g$  est entier entraîne que  $g = l-1$  et il existe  $d, 1 \leq d \leq n$  tel que :

$$g = l-1 = \frac{\mu(a_d) + d}{d}$$

- Si  $p < d$  alors

$$\frac{\mu(a_p) + p}{p} \leq l-1$$

ce qui donne  $\mu(a_p) + p(2-1) \leq 0 \Leftrightarrow \mu(b_p) \leq 0$

- Si  $p = d$  alors  $\mu(a_d) + d(2-1) = 0 = \mu(b_d)$

- Si  $p > d$  alors  $\frac{\mu(a_d) + p}{p} < l-1$  ce qui donne :

$$\mu(a_p) + p(2-1) < 0 \text{ ou encore } \mu(b_p) < 0, p > d$$

d'où :  $\chi(\infty)(X) = X^n + b_1(\infty)X^{n-1} + \dots + b_d(\infty)X^{n-d} + \dots + b_n(\infty)$

or pour  $p > d, \mu(b_p) < 0 \Rightarrow b_p(\infty) = 0$  si  $p > d$

et pour  $p = d, \mu(b_p) = 0 \Rightarrow b_d(\infty) \neq 0$ . D'où :

$$\chi(\infty)(X) = X^n + b_1(\infty)X^{n-1} + \dots + b_d(\infty)X^{n-d} = X^{n-d}(X^d + b_1(\infty)X^{d-1} + \dots + b_d(\infty))$$

avec  $b_d(\infty) \neq 0$ . Ce qui démontre la proposition 1.

### Proposition 2

Si l'équation différentielle (E) est simple alors :

$$\rho_r = n(g+1-r), 1 \leq r \leq l-1$$

$g$  étant l'invariant de Katz.

Par hypothèse  $g$  est entier et  $d = n \Rightarrow$

$$g = \frac{\mu(a_n) + n}{n} \geq \frac{\mu(a_p) + p}{p} \text{ pour tout } p \leq n$$

d'où :  $\mu(a_p) + p \leq pg \Leftrightarrow$

$\mu(a_p) + p + p(1-r) \leq pg + p(1-r) \Leftrightarrow$

$\mu(a_p) + p(2-r) \leq p(g+1-r)$

or  $g$  est entier, donc  $g = l-1$  et  $g+1-r = l-r > 0$  pour tout  $r \leq l-1$

d'où :  $\mu(a_p) + p(2-r) \leq p(g+1-r) \leq n(g+1-r)$  et :

$$\rho_r = \sup_{1 \leq p \leq n} [0, \mu(a_p) + p(2-r)] = n(g+1-r), r=1, \dots, l-1$$

Remarque

A.H.M. Levitt a démontré des résultats analogues à ceux des propositions 1 et 2 (voir [5]).

Démonstration du théorème

L'équation différentielle (E) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & & -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Posant  $Y = P(x)Z$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & x^q & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & x^{(n-1)q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

L'équation précédente peut alors s'écrire :

$x^{-q} Z' = B(x)Z$  avec :

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -q\bar{x}^{(q+1)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & -(n-2)q\bar{x}^{(q+1)} & 1 \\ -a_n \bar{x}^{-nq} & -a_{n-1} \bar{x}^{-(n-1)q} & \dots & & -a_2 \bar{x}^{-2q} & -a_1 \bar{x}^{-q} - (n-1)q\bar{x}^{(q+1)} \end{pmatrix}$$

B(x) sera holomorphe à l'infini si et seulement si :

$$q + 1 \geq 0 \text{ et } \mu(a_j) - jq \leq 0$$

la deuxième condition est équivalente à :

$$\mu(a_j) + j \leq j(q+1) \Leftrightarrow \frac{\mu(a_j) + j}{j} \leq q+1$$

Donc si l'on prend  $q+1 = g$  (invariant de Katz), B(x) sera holomorphe à l'infini.

Les valeurs propres de B(∞) sont les racines de l'équation :

$$\chi(\infty)(X) = X^n + b_1(\infty) X^{n-1} + \dots + b_n(\infty) = 0$$

où  $b_j(x) = x^{j(1-g)} a_j(x)$

Puisque l'équation différentielle est supposée simple, la proposition 1 implique qu'aucune valeur propre de B(∞) n'est nulle. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ces valeurs propres qu'on suppose distinctes. Dans ces conditions on peut affirmer que :

(voir [7])

$$\hat{Z}(x) x^D \exp Q(x)$$

est solution de l'équation différentielle :

$$x^{-(g-1)} Z' = B(x) Z$$

avec :

\*  $\hat{Z}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{\Sigma}_j}{x^j}$  dans tout secteur ouvert d'angle au centre plus petit que :  $\pi/g$  et  $\det \hat{Z}_0 \neq 0$

\*  $x^D$  matrice diagonale constante

\*  $Q(x) = B_0 x^g + B_1 x^{g-1} + \dots + B_{g-1} x$

$$= B_0 x^{\rho_1/n} + B_1 x^{\rho_2/n} + \dots + B_{g-1} x^{\rho_{g-1}/n}$$

où les  $B_j$  sont des matrices diagonales constantes et

$$B_0 = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Y(x) &= P(x) \hat{Z}(x) x^D \exp Q(x) \\ &= \hat{Y}(x) x^D \exp Q(x). \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

Proposition 3

Si les coefficients de l'équation différentielle (E) satisfont aux conditions :

- i)  $\frac{\mu(a_p)}{p} < \frac{\mu(a_n)}{n}$  pour tout  $p < n$
- ii)  $\frac{\mu(a_n)}{n}$  entier

alors :

- a) l'équation différentielle (E) est simple à l'infini
- b) les racines de  $\chi(\infty)(X) = 0$  sont distinctes.

En effet on a : pour tout  $p < n$  :

$$\frac{\mu(a_p)}{p} + 1 = \frac{\mu(a_p) + p}{p} < \frac{\mu(a_n) + n}{n} = g \Rightarrow d = n$$

et de plus  $g$  est entier. Ce qui donne le a).

D'autre part, puisque  $g$  est entier, il est égal à  $l-1$ . D'où :

$$\mu(a_p) + p(2-1) < 0 \text{ et } \mu(a_n) + n(2-1) = 0$$

Si  $b_p(x) = x^{p(2-1)} a_p(x)$ , on a :

$$b_p(\infty) = 0 \text{ pour tout } p = 1, \dots, n-1$$

et  $b_n(\infty) \neq 0$

ce qui donne  $\chi(\infty)(X) = X^n + b_n(\infty)$ . Ce qui démontre le b).

Nous allons montrer que pour les équations différentielles de la physique mathématique, on peut toujours se ramener à une équation satisfaisant aux conditions i) et ii).

Proposition 4

Toute équation différentielle linéaire du 2<sup>me</sup> ordre peut être transformée en une équation différentielle :

$$u'' + b_1 u' + b_2 u = 0$$

telle que :

i)  $\mu(b_1) < \frac{\mu(b_2)}{2}$

ii)  $\mu(b_2)$  est pair.

En effet, soit (E) l'équation différentielle :

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

- Si  $\mu(a_1) \geq \frac{\mu(a_2)}{2}$  on pose  $y = z\varphi$  et l'équation différentielle (E) devient :

$$\varphi z'' + (2\varphi' + a_1\varphi) z' + (\varphi'' + a_1\varphi' + a_2\varphi) z = 0$$

Choisissons  $\varphi$  de sorte que  $2\varphi' + a_1\varphi = 0$ , c'est-à-dire :

$$\varphi(x) = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right)$$



et  $z$  satisfait alors à l'équation différentielle

$$z'' + b_2 z = 0$$

dans laquelle on a :  $\mu(b_1) = -\infty < \frac{1}{2} \mu(b_2)$

- Si  $\mu(a_1) < \frac{1}{2} \mu(a_2)$  et que  $\mu(a_2)$  est impair, on pose  $x = t^2$ , on obtient alors la nouvelle équation différentielle :

$$y'' + [2t a_1(t^2) - t^{-1}] y' + 4t^2 a_2(t^2) y = 0$$

Soit,  $b_1(t) = 2t a_1(t^2) - t^{-1}$  et  $b_2(t) = 4t^2 a_2(t^2)$

\* Il est clair que  $\mu(b_2)$  est pair

\* D'autre part,  $\mu(b_1) < \frac{1}{2} \mu(b_2)$ , en effet :  $\frac{1}{2} \mu(b_2) = \mu(a_2) + 1 = g$ , qui est  $> 0$  puisque  $1 \geq 2$  et  $\mu(b_1) \leq \sup(-1, 2\mu(a_1) + 1)$ , d'où :

$$\mu(b_1) \leq -1 < g$$

$$\text{et } \mu(b_1) \leq 2\mu(a_1) + 1 < \mu(a_2) + 1$$

puisque par hypothèse  $2\mu(a_1) < \mu(a_2)$ .

Donc la nouvelle équation satisfait aux conditions i) et ii) de la proposition et par conséquent on peut lui appliquer le théorème.

### Exemples

#### 1. Equation hypergéométrique confluyente de Kummer

$$x y'' + (c-x) y' - a y = 0 \quad (1)$$

On a pour cette équation différentielle :

$$\mu[(c-x)x^{-1}] = 0 \quad \text{et} \quad \mu(ax^{-1}) = -1$$

Pour se ramener au cas de la proposition 4 il suffit de poser :

$$y = x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}} w$$

et on obtient l'équation différentielle (de Whittaker) :

$$w'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) w = 0$$

avec  $k = \frac{c}{2} - a$  et  $\mu = \frac{1}{2}(c+1)$ . On peut lui appliquer le théorème.

Les invariants au point  $x = \infty$  sont  $\rho_1 = 2$  et  $\rho_2 = 0$  donc les solutions de cette équation admettent pour  $x$  tendant vers l'infini un développement asymptotique de la forme :

$$\hat{W}(x) x^D \exp Q(x)$$

avec,

$$Q(x) = \sum_{r=1}^{l-1} B_{r-1} x^{\rho_r/2} = B_0 x^{\rho_1/2} \quad \text{et } B_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les racines de l'équation :

$$\chi(\infty)(X) = X^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ce qui donne :

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

\* Pour déterminer D, on pose :

$$\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot Y$$

ce qui donne l'équation différentielle :

$$Y' = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & k \\ -k & -k \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \mu^2 & \frac{1}{4} - \mu^2 \\ -\frac{1}{4} + \mu^2 & -\frac{1}{4} + \mu^2 \end{pmatrix} \frac{1}{x^2} \right\} Y$$

$$= (A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{x} + A_2 \frac{1}{x^2}) Y = A Y$$

Les valeurs propres de  $A_0$  étant distinctes, on sait que (voir [7], théorème 12.2 page ) il existe une transformation

$$Y = P(x)Z = \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^r} \right) Z$$

telle que l'équation différentielle  $Y' = AY$  devienne :

$$Z' = B(x) Z$$

où  $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \frac{1}{x^r}$  avec  $B_r$  : matrice diagonale constante

et on a la relation :  $P'(x) = A(x) P(x) - P(x) B(x)$  qui permet de calculer les  $B_r$ .

Si l'on choisit  $P_0 = I$  et  $B_0 = A_0$ , on obtient

$$B_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle  $Y' = AY$  admettent pour  $x$  tendant vers l'infini le développement asymptotique :

$$\hat{Y}(x) x^{B_1} \exp(B_0 x)$$

avec  $\hat{Y}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r \frac{1}{x^r}$ ,  $Y_0 = P_0 = I$ ,  $x \in S$

où  $S$  est un secteur centré à l'origine et d'angle au centre plus petit que  $\pi$ .  
D'où :

$$D = B_1 \quad \text{et} \quad \hat{W}(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc les solutions de l'équation différentielle de Whittaker admettent pour  $x \in S$ ,  $x \rightarrow \infty$ , le développement asymptotique :

$$\hat{W}(x) x \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} x \end{pmatrix} \quad (2)$$

où  $\hat{W}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^r} \hat{W}_r$  et  $W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Posant

$$\hat{W}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_3(x) & u_4(x) \end{pmatrix}$$

la première ligne de la matrice (2) donne :

$$w_1(x) \sim u_1(x) x^k e^{-\frac{x}{2}}, \quad u_1(\infty) = 1$$

$$w_2(x) \sim u_2(x) x^{-k} e^{\frac{x}{2}}, \quad u_2(\infty) = 1$$

Revenant à l'équation (1), on a :

$$y_1(x) \sim u_1(x) x^{-a}$$

$$y_2(x) \sim u_2(x) x^{-c+a} e^x$$

pour  $x \in S, x \rightarrow +\infty$

On retrouve ainsi des résultats bien connus.

Remarque

Lorsque  $c = 2a$ , l'équation différentielle de Kummer donne, en posant

$$x = 2iz \quad \text{et} \quad y = x^{\frac{1}{2}-a} e^{\frac{x}{2}} w, \quad \text{l'équation :}$$

$$z^2 w'' + z w' + (-\gamma^2 + z^2) w = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma = a - \frac{1}{2}$$

c'est l'équation différentielle de Bessel. On en déduit que cette équation différentielle admet pour  $z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi$  le développement asymptotique :

$$w_1(z) \sim v_1(z) z^{-\frac{1}{2}} e^{-iz}$$

$$w_2(z) \sim v_2(z) z^{-\frac{1}{2}} e^{iz}$$

où  $v_1(z)$  et  $v_2(z)$  sont des séries en  $\frac{1}{z}$ . D'ailleurs, ce résultat aurait pu être établi directement (voir [7] page 63).

2. Equation d'Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Cette équation ne satisfait pas aux conditions i) et ii) de la proposition 4 puisque  $\mu(2x) > \mu(\lambda)$ . On la transforme en posant :

$$y = u e^{\frac{x^2}{2}}$$

et on obtient l'équation différentielle (de Weber) :

$$u'' + (\gamma - x^2) u = 0 \quad \text{avec } \gamma = \lambda + 1$$

Son polynôme caractéristique est :

$$\chi(x)(X) = X^2 + x^2(2-1) (\gamma - x^2)$$

or on sait que l'ordre de cette équation est  $l = 3$ . D'où les racines de l'équation :

$$\chi(\infty)(X) = 0$$

sont  $-1$  et  $+1$ .

D'autre part les invariants au point  $x = \infty$  sont  $\rho_1 = 4$ ,  $\rho_2 = 2$  et  $\rho_3 = 0$ . On en déduit que l'équation de Weber admet un système fondamental de solution de la forme :

$$\hat{Y}(x) x^D \exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 + B_1 \cdot x \right\}$$

où  $\hat{Y}(x)$  est développable en série en  $\frac{1}{x}$  pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $|\arg x| < \pi/2$ .

Pour déterminer  $B_1$  et  $D$  il faut faire subir à l'équation de Weber une suite de transformations de telle sorte que l'équation différentielle finale soit la forme :

$$x^{-q} Z' = B(x) Z, \quad q \in \mathbb{N}$$

où  $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^r} B_r$  et où les  $B_r$  sont des matrices diagonales constantes

(voir [7] page 52).

Posons : 
$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot Y_1$$

et l'équation différentielle de Weber devient :

$$x^{-1} Y_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{\gamma}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \cdot Y_1$$

puis, on pose  $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y_2$ ,

ce qui permet de diagonaliser la matrice constante de l'équation différentielle précédente. On obtient :

$$x^{-1} Y_2' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} & \frac{\gamma+1}{2} \\ \frac{1-\gamma}{2} & -\frac{\gamma+1}{2} \end{pmatrix} \right\} Y_2$$

$$= \left\{ A_0 + \frac{A_2}{x^2} \right\} Y_2$$

Enfin, on transforme cette dernière équation différentielle en posant :

$$Y_2 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^r} P_r \quad Z = P(x) Z$$

et l'on obtient la nouvelle équation différentielle :

$$x^{-1} Z' = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^r} B_r Z$$

en choisissant  $P_0 = I$  et  $B_0 = A_0$ , on obtient :

$$B_1 = 0 \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma+1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$Z(x) \sim \hat{Z}(x) x^{B_2} \exp \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$Y \sim \hat{Y}(x) \begin{pmatrix} x^{\frac{\gamma-1}{2}} & 0 \\ 0 & x^{-\frac{\gamma+1}{2}} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{x^2}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \hat{Y}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P(x) \hat{Z}(x)$$

$$\text{Si l'on pose } \hat{Y}(x) = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 & \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 & \hat{y}_4 \end{pmatrix}$$

on obtient, pour l'équation différentielle de Weber, le système fondamental :

$$u_1(x) = \hat{y}_1(x) x^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \hat{y}_1(\infty) = 1$$

$$u_2(x) = \hat{y}_2(x) x^{-\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \hat{y}_2(\infty) = 1$$

où  $\hat{y}_1(x)$  possède un développement asymptotique en série entière en  $x^{-1}$  dans tout secteur d'angle au centre  $< \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle d'Hermite admettent pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$  le développement asymptotique :

$$y_1(x) \sim \hat{y}_1(x) x^{\gamma/2}, \quad \hat{y}_1(\infty) = 1$$

$$y_2(x) \sim \hat{y}_2(x) x^{-(1+\frac{\gamma}{2})} e^{x^2}, \quad \hat{y}_2(\infty) = 1$$

### 3. Equation différentielle d'Airy

$$y'' - xy' = 0 \quad (1)$$

son grade  $g = \frac{3}{2}$ , pour le rendre entier on pose

$$t^2 = 2^{2/3} x$$

ce qui donne la nouvelle équation différentielle :

$$y'' - \frac{1}{t} y' - t^4 y = 0 \quad (2)$$

qui satisfait aux conditions de la proposition 4. Ses invariants au point  $t = \infty$  sont :

$$\rho_1 = 6, \rho_2 = 4, \rho_3 = 2 \text{ et } \rho_4 = 0$$

et son polynôme caractéristique est :

$$\chi(t)(X) = X^2 - t^{-3}X - 1$$

d'où les racines de  $\chi(\infty)(X) = 0$  sont  $-1$  et  $+1$ .

Le théorème donne alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \hat{Y}(t) = t^D \exp \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} t^3 + B_1 t^2 + B_2 t \right\}$$

comme système fondamental de (2), où  $\hat{Y}(t)$  possède un développement asymptotique de la forme

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{t^r} \hat{Y}_r \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty, |\arg t| < \frac{\pi}{3}$$

Pour calculer  $B_1, B_2, D$  et  $\hat{Y}_r$ , on pose :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y_1$$

et l'équation (2) devient :

$$t^{-2} Y_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t^{-3} \right\} Y_1 = A Y_1 \quad (3)$$



On cherche à transformer (3) pour n'obtenir que des matrices diagonales au second membre de l'équation différentielle. Pour cela, on sait que, lorsque les valeurs propres de  $A(\infty)$  sont distinctes il existe une série formelle

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r t^{-r} \text{ avec } \det P_0 \neq 0,$$

telle que la substitution formelle :

$$Y_1 = \sum_{r=0}^{\infty} P_r t^{-r} Z$$

change l'équation (3) en l'équation :

$$t^{-2} Z' = \sum_{r=0}^{\infty} B_r t^{-r} Z$$

où tous les  $B_r$  sont des matrices diagonales constantes.

Cette substitution donne :

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = B_2 = 0 \text{ et } B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_0 = I, P_1 = P_2 = 0 \text{ et } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où, pour  $t \rightarrow \infty$

$$Y_1 \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r t^{-r} \hat{Z}(t) t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

avec  $\hat{Z}(\infty) = I, \hat{Z}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Z}_r \frac{1}{t^r}$

Posons  $\hat{Y}_1(t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r t^{-r} \hat{Z}(t)$

on a alors  $\hat{Y}_1(\infty) = P_0 \times I = I$

et si l'on pose :

$$Y = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} Y_1,$$

on aura :

$$Y \sim \hat{Y}(t) \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{t^3}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix}$$

avec  $\hat{Y}(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où l'équation différentielle (2) admet pour  $t \rightarrow \infty \mid \arg t \mid < \frac{\pi}{3}$

le développement asymptotique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \hat{Y}(t) \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{t^3}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

La première ligne de cette matrice donne :

$$u_1(t) \sim \hat{u}_1(t) t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^3}{3}}, \quad \hat{u}_1(\infty) = 1$$

$$u_2(t) \sim \hat{u}_2(t) t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^3}{3}}, \quad \hat{u}_2(\infty) = 1$$

.../...

ce qui donne pour l'équation différentielle d'Airy pour  $x \rightarrow \infty$ ,

$$y_1(x) \sim \hat{y}_1(x) x^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3} x^{3/2}}$$

$$y_2(x) \sim \hat{y}_2(x) x^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} x^{3/2}},$$

$\hat{y}_1(r)$  étant des séries en  $x^{-1/2}$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BUCHHOLZ H. : The confluent hypergeometric function.  
Springer-Verlag.
  
- [2] DELIGNE P. : Equations différentielles à points singuliers réguliers.  
Lectures Notes in Mathematics n° 163. Springer-Verlag.
  
- [3] GERARD R. et LEVELT A.H.M. : Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires.  
Annales de l'Institut Fourier, Tome XXIII - Fascicule I (1973).
  
- [4] HILLE E. : Lectures on ordinary differential equations.  
Addison-Wesley Publishing Compagny.
  
- [5] LEVELT A.H.M. : Formal theory of irregular singular points  
(papiers miméographiés).
  
- [6] MALGRANGE B. : Remarques sur les points singuliers des équations différentielles.  
C.R. Acad. Sciences Paris T 273 (1971), série A, p. 1136.
  
- [7] WASOW W. : Asymptotic expansions for ordinary differential equations.  
Interscience Publishers.