



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité le long des trajectoires d'une famille de champs de vecteurs quadratiques : application à la théorie de la commande

Souleymane Samba

► **To cite this version:**

Souleymane Samba. Contrôlabilité le long des trajectoires d'une famille de champs de vecteurs quadratiques : application à la théorie de la commande. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1978. Français. NNT : 1978METZ001S . tel-01775589

**HAL Id: tel-01775589**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775589>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE METZ  
FACULTÉ DES SCIENCES

---

**THÈSE  
DE  
SPÉCIALITÉ  
DE  
TROISIÈME CYCLE**

**MENTION MATHÉMATIQUES**

---

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19780025
Cote	S/M3 78/1
Loc	Magasin

**CONTROLABILITÉ LE LONG DES TRAJECTOIRES  
D'UNE FAMILLE  
DE CHAMPS DE VECTEURS QUADRATIQUES  
APPLICATION A LA THÉORIE DE LA COMMANDE**

par

**Souleymane SAMBA**

---

Président : M<sup>me</sup> A. SEC

Membres : M. G. REEB

M. B. SCHMITT



*Je remercie vivement Madame A. SEC qui a bien voulu diriger mon travail et me faire bénéficier de ses conseils précieux. Ma reconnaissance envers elle est profonde.*

*Monsieur B. SCHMITT m'a permis, par de nombreuses discussions, d'améliorer le manuscrit de cette thèse. Je lui en suis très reconnaissant.*

*Je remercie également Monsieur G. REEB qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et d'accepter de le juger.*

*C'est avec plaisir que je remercie le Département de Mathématiques de METZ et tous ses membres, qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.*

*Madame DAUTRICHE a dactylographié ce texte avec compétence. Je la remercie très sincèrement.*

TABLE DES MATIERES

-----

	<u>Page</u>
INTRODUCTION	1
O. PRELIMINAIRES	
0.1. Familles de champs de vecteurs quadratiques sur $\mathbb{R}^n$	8
0.2. Définition et propriété des moments de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$	10
I. CONTROLABILITE LE LONG DES TRAJECTOIRES DU SYSTEME LIBRE D'UNE FAMILLE $\mathcal{S}$ DE CHAMPS DE VECTEURS QUADRATIQUES	
1.1. Etude lorsque $\mathcal{S}$ est une famille sur $\mathbb{R}^2$	14
1.2. Etude lorsque $\mathcal{S}$ est une famille sur $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 3$	28
II. CONTROLABILITE LE LONG DES TRAJECTOIRES D'UNE FAMILLE $\mathcal{S}$ DE CHAMPS DE VECTEURS QUADRATIQUES	
2.1. Etude lorsque $\mathcal{S}$ est une famille sur $\mathbb{R}^2$	48
2.2. Etude lorsque $\mathcal{S}$ est une famille sur $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 3$	51
III. APPLICATIONS A LA THEORIE DE LA COMMANDE	
3.1. Critères bang-bang	63
3.2. Couples $(X, b)$ , $X$ champ de vecteurs quadra- tique sur $\mathbb{R}^2$ et $b$ champ de vecteurs cons- tant sur $\mathbb{R}^2$ , tels que $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, \text{ où le}$ vecteur $[X, b](x)$ est parallèle à $b\}$ soit vide	67
3.3. Représentation canonique des asservissements quadratiques à ensemble $\Lambda$ vide	74
3.4. Applications des critères bang-bang	79
CONCLUSION	84
BIBLIOGRAPHIE	85

-----

## INTRODUCTION

-----

Un "asservissement quadratique" est un système différentiel de la forme

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} = [-1, +1]^{n-1}$$

où  $X$  est un champ de vecteurs polynomial sur  $\mathbb{R}^n$  de degré 2 et les  $b_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , sont des champs de vecteurs constants sur  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle commande (ou contrôle) admissible toute fonction  $u$  constante par morceaux, définie sur un intervalle  $[0, T]$  et à valeurs dans  $[-1, +1]^{n-1}$ .

On dira qu'une commande admissible est "bang-bang" (respectivement "presque bang-bang") si elle prend ses valeurs aux sommets (respectivement à la frontière) du cube unité  $[-1, +1]^{n-1}$ .

A toute commande admissible  $u$  et à toute condition initiale  $x^0$ , on associe une réponse  $x(x^0, t_1, u)$  qui est par définition la valeur à l'instant  $t_1$  de l'unique solution du problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt}(x^0, t, u(t)) = X(x(x^0, t, u(t))) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i(t)$$

$$x(x^0, 0, u(0)) = x^0.$$

La recherche de la meilleure commande admissible selon tel ou tel critère s'appelle l'étude du problème de contrôle optimal tandis que l'étude de l'ensemble des points  $x^0$ -accessibles, c'est à dire l'ensemble des points  $x^1$  tels qu'il existe une commande admissible assurant le transfert du système de l'état initial  $x^0$  à la réponse  $x^1$ , s'appelle l'étude de la contrôlabilité.

L'objet de ce travail est de répondre à la question suivante : étant donné un asservissement quadratique et le critère  $J(x) = x_i, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , sous quelles conditions toute commande optimale est-elle bang-bang ou presque bang-bang ?

L'étude des asservissements quadratiques n'est pas sans intérêt en regard des applications éventuelles. L'exemple que nous allons étudier dans cette introduction est destiné à montrer qu'il existe dans la nature des processus qui sont régis par des asservissements quadratiques et à préciser l'importance du problème posé dans ce travail.

Considérons le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A - Bx_1 + Cx_1^2 + Du \\ \frac{dx_2}{dt} = E - Fx_1 + Gu + Hx_1u \end{cases}$$

où  $A = 0.05; B = 1.065; C = 0.065; D = 0.95; E = 0.306;$   
 $F = 0.06; G = 0.714; H = 0.014.$

Ce système décrit le processus d'évolution de la pollution et de la qualité de la vie [1] où :

- .  $x_1 = x_1(t)$  est le coefficient de pollution
- .  $x_2 = x_2(t)$  est la qualité de la vie
- .  $u = u(t)$  est le capital d'investissement par unité d'habitant.

En négligeant le coefficient H qui est très petit (par rapport aux autres coefficients), on se pose la question de savoir comment choisir le capital d'investissement u pour que la qualité de la vie, supposée nulle à l'instant initial, soit maximale dans un avenir préalablement fixé  $T > 0$ . Si d'une part pendant la période  $[0, T]$  les possibilités d'investissements par unité d'habitant sont limitées à  $u_M = (C^2 - 4AD)/(4BD)$  et que d'autre part, pendant cette même période, l'on désire que le taux de pollution ne dépasse pas 8.15 alors, en effectuant le changement de variable

$$u = (u_M/2)(v + 1)$$

on obtient le problème de contrôle optimal suivant : étant donné l'asservissement quadratique

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + b v, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad v \in [-1, +1]$$

$$\text{où } X(x) = \begin{pmatrix} A + (Du_M/2) - Bx_1 + Cx_1^2 \\ E + (Gu_M/2) - Fx_1 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = (u_M/2) \begin{pmatrix} D \\ G \end{pmatrix},$$

maximiser  $x_2(T)$  sous les contraintes

$$\forall t \in [0, T] : 0 \leq x_1(t) \leq 8.15$$

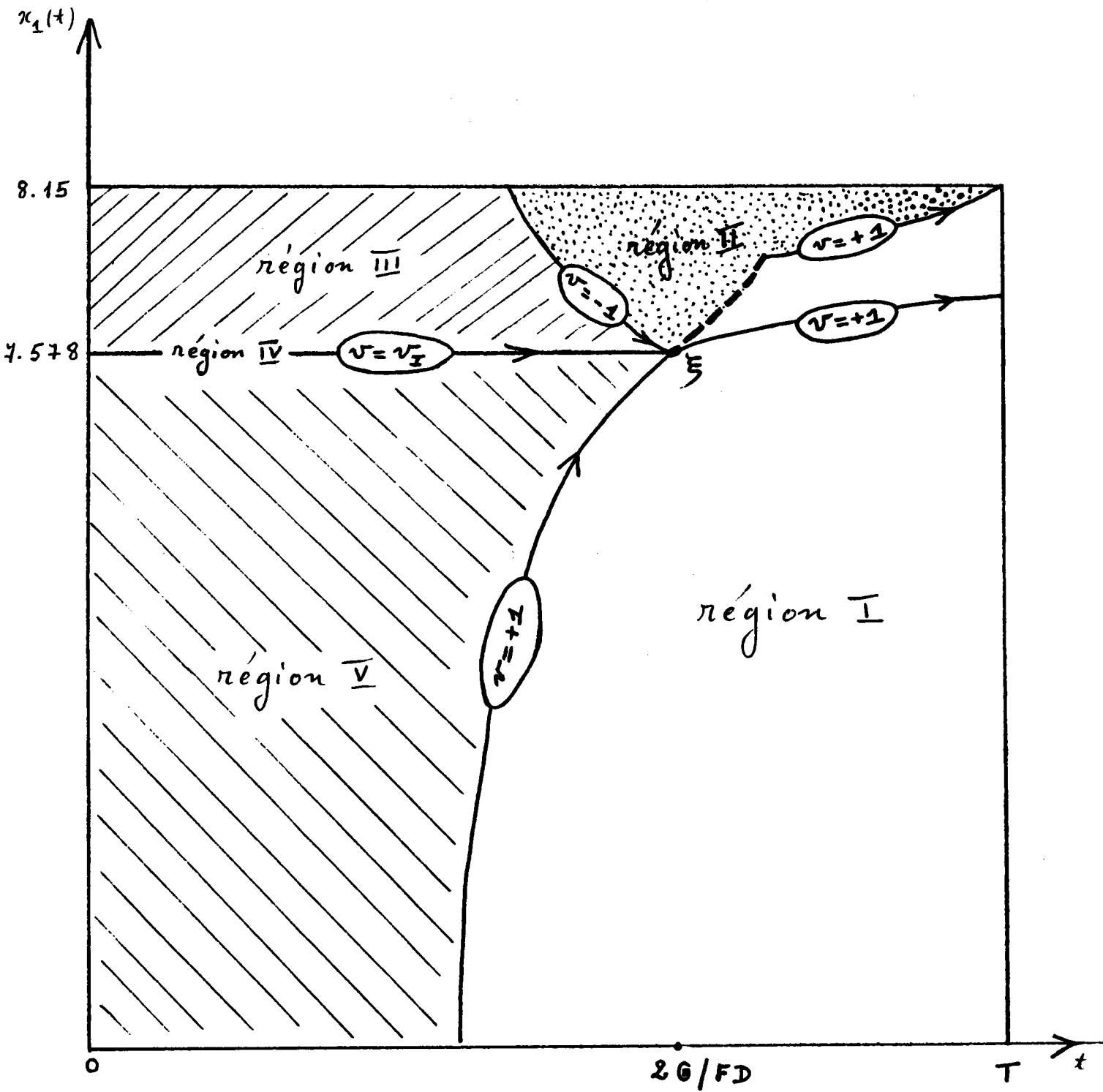
et, avec comme conditions initiales

$$x_1(0) = x_1^0 \in [0, 8.15], \quad x_2(0) = 0.$$

En posant  $\alpha = (GB - FD)/(2GC)$ , la solution de ce problème est donnée par la figure ci-dessous où :

- $v_I = Du_M/2) [B\alpha - C\alpha^2 - A - (Du_M/2)]$
- $\xi$  est un point de commutation de  $v = -1$  à  $v = +1$  et de  $v = v_I$  à  $v = +1$ .
- — — est la courbe de commutation de  $v = -1$  à  $v = +1$ .





La politique optimale à adopter dépend donc du taux de pollution à l'instant initial :

- si  $x_1^0$  est dans la région I on fait un investissement maximum  $u_M$
- si  $x_1^0$  est dans la région II on fait un investissement nul suivi d'un investissement maximum  $u_M$
- si  $x_1^0$  est dans la région III on fait d'abord un investissement nul, puis un investissement intermédiaire  $u_I = (u_M/2)(v_I+1)$  et on termine par un investissement maximum  $u_M$
- si  $x_1^0$  est dans la région IV on fait un investissement intermédiaire  $u_I = (u_M/2)(v_I+1)$  suivi d'un investissement maximum  $u_M$
- si  $x_1^0$  est dans la région V on fait d'abord un investissement maximum  $u_M$ , puis un investissement intermédiaire  $u_I = (u_M/2)(v_I+1)$  et on termine par un investissement maximum  $u_M$ .

Cet exemple prouve qu'il existe dans la nature des processus qui sont régis par des asservissements quadratiques. D'autre part, il montre aussi l'existence de politiques optimales qui ne sont pas bang-bang. Or, il est clair que de telles politiques ne sont pas commodes.

Ce travail repose essentiellement sur l'idée directrice suivante :

Si  $x_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $x$  et si une commande est optimale pour le critère  $J(x) = x_i$ , la réponse à cette commande appartient à la frontière de l'ensemble des états accessibles. D'où, si on sait dans quelle mesure toute réponse à une commande non presque bang-bang est intérieure à l'ensemble des états accessibles, on aura des informations sur les conditions qui doivent

être satisfaites pour que toute commande optimale soit bang-bang ou presque bang-bang.

J'ai donc organisé les différentes parties du travail de la manière suivante :

Dans le chapitre 0, j'expose brièvement les notations et les résultats essentiels sur les familles de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$  et les moments des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  que j'utiliserai par la suite.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du problème de la contrôlabilité le long des trajectoires du système libre ( $x' = X(x)$ ) d'une famille

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\}$$

de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ . Il s'agit là de savoir dans quelle mesure la réponse à la commande nulle appartient à l'intérieur ou à la frontière de l'ensemble des états accessibles au moyen des champs de vecteurs de la famille  $\mathcal{D}$ . J'obtiens deux résultats différents selon que  $\mathcal{D}$  est une famille de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  (théorème 1.1.1.) ou une famille de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  (théorème 1.2.1.).

Le deuxième chapitre exploite les résultats du premier pour étudier la contrôlabilité le long des trajectoires d'une famille de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ . J'y établis ainsi des conditions (corollaires 2.1.3., 2.2.5. et 2.2.8.) pour que, si

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\}$$

est une famille de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ , toute réponse à une commande non bang-bang et non presque bang-bang appartient à l'intérieur de l'ensemble des états accessibles au moyen des champs de vecteurs de la famille  $\mathcal{D}$ .

Le chapitre III présente les diverses conséquences des chapitres I et II en théorie de la commande optimale. Plus précisément, je

montre comment ces résultats s'interprètent pour les asservissements quadratiques. J'énonce d'abord des critères qui répondent au problème posé dans l'introduction. De ces critères, il apparaît que si pour un asservissement quadratique

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i, \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1}$$

l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  où les familles de vecteurs  $\{[X, b_i](x), b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}; i \in \{1, \dots, n-1\}$ , sont de rang  $n-1$  est vide, alors, si  $x_j$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée de  $x$ , toute commande optimale pour le critère  $J(x) = x_j$  est soit bang-bang, soit presque bang-bang. De ce fait, je cherche, dans le second paragraphe de ce chapitre, à construire un algorithme permettant, pour un champ de vecteurs quadratique  $X$  sur  $\mathbb{R}^n$  donné, de déterminer les champs de vecteurs constants  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  tels que  $\Lambda$  soit vide. Je donne ensuite une représentation canonique des asservissements quadratiques à ensemble  $\Lambda$  vide. Quelques exemples d'application clôturent ce chapitre.

Dans la conclusion enfin, j'indique dans quelles directions il serait souhaitable d'étendre les résultats obtenus.

-----

## O. PRELIMINAIRES

=====

Cette partie est consacrée à la présentation de l'outil mathématique qui sera utilisé tout au long de ce travail.

### O.1. Familles de champs de vecteurs quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

=====

Tout au long de ce travail je désignerai par famille de champs de vecteurs (en abrégé F.C.V.) quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$  la famille suivante :

$$\left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\}$$

- où :
- X est un champ de vecteurs quadratique (c'est à dire polynomial de degré 2) sur  $\mathbb{R}^n$ .
  - $b_1, \dots, b_{n-1}$  sont des champs de vecteurs constants sur  $\mathbb{R}^n$ .
  - $U_{n-1}$  est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux définies sur un intervalle de temps compact et à valeurs dans le cube unité  $[-1, +1]^{n-1}$ .
  - les fonctions  $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1}$  sont appelées commandes (ou contrôles) admissibles.

#### O.1.1. Notation

Etant donnée une F.C.V. quadratique  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on notera par  $A_{\mathcal{D}}(x, t)$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  accessibles à partir du point  $x$  à l'instant  $t$  au moyen des champs de vecteurs de la famille  $\mathcal{D}$ .

#### O.1.2. Définition

On dira qu'une commande  $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1}$  est bang-bang si elle prend ses valeurs aux sommets du cube unité  $[-1, +1]^{n-1}$ .

### 0.1.3. Définition

On dira qu'une commande  $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1}$  est presque bang-bang si elle prend ses valeurs sur la frontière du cube unité  $[-1, +1]^{n-1}$ .

### 0.1.4. Définition

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire d'une F.C.V. quadratique  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On dira que cette trajectoire est localement contrôlable si, pour tout  $t$  de  $]0, T[$ , il existe  $\epsilon$  dans  $]0, t[$  tel que le point  $\varphi(\epsilon)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), \epsilon)$ .

### 0.1.5. Définition

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire d'une F.C.V. quadratique  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On dira que cette trajectoire est extrémale (sur  $[0, t_0]$ ) s'il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t)$ .

### 0.1.6. Propriété

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire d'une F.C.V. quadratique  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{R}^n$ . S'il existe  $t_0$  dans  $]0, T[$  tel que le point  $\varphi(t_0)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t_0)$  alors, pour tout  $t$  de  $]t_0, T]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t)$ .

### 0.1.7. Propriété

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire d'une F.C.V. quadratique  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{R}^n$ . S'il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que le point  $\varphi(t_0)$  appartient à la frontière de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t_0)$  alors, pour tout  $t$  de  $[0, t_0[$  le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t)$ .

La propriété 0.1.7. s'obtient à partir de la propriété 0.1.6. par contraposition. La propriété 0.1.6. résulte du théorème de la dépendance continue des solutions d'une équation différentielle par rapport aux conditions initiales.

0.1.8. Définition

Une commande constante sur  $[0, T]$   $u^* = (u_1^*, \dots, u_{n-1}^*) \in U_{n-1}$  sera dite extrémale sur  $[0, T]$  s'il existe une trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  du champ de vecteurs  $X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i^*$  qui soit extrémale sur  $[0, T]$ .

0.1.9. Définition

Une trajectoire  $(\varphi^*, [0, T])$  d'une F.C.V. quadratique  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{R}^n$  sera dite optimale sur  $[0, T]$  pour le critère  $J(x)$  si, pour toute trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  de  $\mathcal{D}$ , on a :

$$\forall t \in [0, T] : J(\varphi^*(t)) \geq J(\varphi(t))$$

0.1.10. Définition

Une commande constante sur  $[0, T]$   $u^* = (u_1^*, \dots, u_{n-1}^*) \in U_{n-1}$  sera dite optimale sur  $[0, T]$  pour le critère  $J(x)$  s'il existe une trajectoire  $(\varphi^*, [0, T])$  du champ de vecteurs  $X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i^*$  qui soit optimale sur  $[0, T]$  pour  $J(x)$ .

0.1.11. Propriété

Soit  $x_i$  la  $i$ ème coordonnée de  $x$  et soit le critère  $J(x) = x_i$ . Si une commande  $u^* = (u_1^*, \dots, u_{n-1}^*) \in U_{n-1}$  est optimale sur  $[0, T]$  pour  $J$ , alors elle est extrémale sur  $[0, T]$ .

0.1.12. Remarque

Soit le critère  $J(x) = x_i$ . Une commande  $u^* = (u_1^*, \dots, u_{n-1}^*) \in U_{n-1}$  qui est extrémale sur  $[0, T]$  n'est pas nécessairement optimale sur  $[0, T]$  pour  $J$ .

0.2. Définition et propriétés des moments des champs de vecteurs  
===== sur  $\mathbb{R}^n$  [2] [20]. =====

Soit  $\mathbb{R}^n(x) \times (\mathbb{R}^n)^*(n)$  le fibré tangent de  $\mathbb{R}^n(x)$  et  $S^n$  la section nulle de  $\mathbb{R}^n(x) \times (\mathbb{R}^n)^*(n)$ .

### 0.2.1. Définition

Si  $V$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n(x)$ , on appelle moment de  $V$  la fonction sur  $\mathbb{R}^n(x) \times (\mathbb{R}^n)^*(\eta)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui est définie par la formule

$$\mathcal{M}_V(x, \eta) = \eta V(x).$$

### 0.2.2. Définition

Si  $V = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n(x)$ , on appelle relevé hamiltonien de  $V$  le champ de vecteurs  $\hat{V}$  sur  $\mathbb{R}^n(x) \times (\mathbb{R}^n)^*(\eta)$  qui est défini par la formule

$$\hat{V} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial \eta_i}$$

### 0.2.3. Propriété

Pour tout champ de vecteurs  $V$  sur  $\mathbb{R}^n(x)$  on a

$$\hat{V} \cdot \mathcal{M}_V = 0$$

$\hat{V} \cdot \mathcal{M}_V$  étant la dérivée de Lie de  $\mathcal{M}_V$  par rapport à  $\hat{V}$ .

### 0.2.4. Propriété

Si  $V$  et  $W$  sont deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n(x)$ , on a

$$\hat{V} \cdot \mathcal{M}_W = - \hat{W} \cdot \mathcal{M}_V = \mathcal{M}_{[V, W]}$$

où  $[V, W]$  est le crochet de Lie de  $V$  et  $W$

### 0.2.5. Propriété

Si  $(\hat{\phi}, [0, T])$  est une trajectoire de  $\hat{V}$ , la fonction  $\mathcal{M}_V \circ \hat{\phi}$  est constante sur  $[0, T]$ .

### 0.2.6. Propriété

Si  $(\hat{\phi}, [0, T])$  est une trajectoire de  $\hat{V}$  et si  $\pi$  est la projection  $(x, \eta) \rightarrow x$  alors,  $(\pi \circ \hat{\phi}, [0, T])$  est une trajectoire de  $V$ .

### 0.2.7. Définition

Soit  $(\phi, [0, T])$  une trajectoire du champ de vecteurs  $V$  sur  $\mathbb{R}^n(x)$ .



On dira que  $(\hat{\varphi}, [0, T])$  est un relèvement hamiltonien de  $(\varphi, [0, T])$

si :  $\hat{\varphi}([0, T]) \subset \mathbb{R}^2(x) \times (\mathbb{R}^2)^*(\eta) - S^2$  et

$$\pi \circ \hat{\varphi} = \varphi.$$

#### 0.2.8. Propriété

Soient  $V$  et  $W$  deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2(x)$ . S'il existe

un point  $\hat{x} = (x, \eta)$  de  $\mathbb{R}^2(x) \times (\mathbb{R}^2)^*(\eta) - S^2$  tel que

$\mathcal{M}_V(\hat{x}) = \mathcal{M}_W(\hat{x}) = 0$  alors, les vecteurs  $V(x)$  et  $W(x)$  sont parallèles.

#### 0.2.9. Propriété

Soient  $V$  et  $W$  deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2(x)$ . S'il existe un

point  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que les vecteurs  $V(x)$  et  $W(x)$  soient parallèles

alors, il existe un point  $\hat{x} = (x, \eta)$  dans  $\mathbb{R}^2(x) \times (\mathbb{R}^2)^*(\eta)$  tel que

$$\mathcal{M}_V(\hat{x}) = \mathcal{M}_W(\hat{x}) = 0.$$

#### 0.2.10. Propriété

Soient  $V_1, \dots, V_n$   $n$  champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n(x)$ ,  $n > 2$ . S'il

existe un point  $\hat{x} = (x, \eta)$  de  $\mathbb{R}^n(x) \times (\mathbb{R}^n)^*(\eta) - S^n$  tel que

$$\mathcal{M}_{V_1}(\hat{x}) = \dots = \mathcal{M}_{V_n}(\hat{x}) = 0$$

alors, les vecteurs  $V_1(x), \dots, V_n(x)$  sont dans un même hyperplan de  $\mathbb{R}^n(x)$ .

#### 0.2.11. Propriété

Soient  $V_1, \dots, V_n$   $n$  champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n(x)$ ,  $n > 2$ . S'il

existe un point  $x$  de  $\mathbb{R}^n(x)$  tel que les vecteurs  $V_1(x), \dots, V_n(x)$

sont dans un même hyperplan de  $\mathbb{R}^n(x)$  alors, il existe  $\hat{x} = (x, \eta)$

dans  $\mathbb{R}^n(x) \times (\mathbb{R}^n)^*(\eta) - S^n$  tel que

$$\mathcal{M}_{V_1}(\hat{x}) = \dots = \mathcal{M}_{V_n}(\hat{x}) = 0.$$

0.2.12. Définition

Soit  $\mathcal{F} = \{V_i\}_{i \in I}$  une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n(x)$ .

On dira que la trajectoire  $(\varphi_{i^*}, [0, T])$  de  $V_{i^*}$ ,  $i^* \in I$ , est de moment maximal par rapport à  $\mathcal{F}$  s'il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}_{i^*}, [0, T])$  tel que

$$\forall t \in [0, T], \forall V_i \in \mathcal{F} : \mathcal{M}_{V_{i^*}}(\hat{\varphi}_{i^*}(t)) \geq \mathcal{M}_{V_i}(\hat{\varphi}_{i^*}(t))$$

0.2.13. Propriété

Soit le critère  $J(x) = x_i$ . L'ensemble des trajectoires optimales pour  $J$  est inclus dans celui des trajectoires extrémales qui est inclus dans celui des trajectoires de moment maximal.

0.2.14. Définition-rappel

Soit  $V$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . On dira qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est un invariant de  $V$  si toute trajectoire de  $V$  issue de  $A$  est contenue dans  $A$ .

I. Contrôlabilité le long des trajectoires  
 =====  
 du système libre d'une famille de champs  
 =====  
 de vecteurs quadratiques  
 =====

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\} \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de la contrôlabilité le long des trajectoires de X (système libre) d'une famille de champs de vecteurs (F.C.V.) quadratiques

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\} \text{ sur } \mathbb{R}^n. \text{ Il est}$$

divisé en deux parties :

Le premier paragraphe traite du cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$ .

Le cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , est étudié dans le second paragraphe.

Dans chaque paragraphe enfin, on donnera des exemples d'applications des principaux résultats qui y seront établis.

1.1. Etude du cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 =====

Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème suivant :

1.1.1. Théorème

Soient  $\mathcal{D} = \{X + bu; u \in U_1\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$ .

Alors, toutes les trajectoires de X sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.

1.1.2. Principe de la démonstration du théorème 1.1.1.

La démonstration du théorème 1.1.1. se fait en trois étapes.

### Première étape

On montre que toute trajectoire de  $X$  issue de  $\mathbb{R}^2 - \Lambda$  (non vide) est localement contrôlable.

### Deuxième étape

On montre que si  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $X$ , toute trajectoire de  $X$  issue de  $\Lambda$  est localement contrôlable.

A l'issue de la seconde étape on sait donc que toute trajectoire de  $X$  qui n'est pas contenue dans  $\Lambda$  est localement contrôlable.

### Troisième étape

On montre que toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  est extrême.

#### 1.1.3. Démonstration du théorème 1.1.1.

##### Première étape

##### Lemme 1.1.1.1.

Toute trajectoire de  $X$  issue de  $\mathbb{R}^2 - \Lambda$  non vide est localement contrôlable.

##### Démonstration du lemme 1.1.1.1.

En effet, soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  issue de  $\mathbb{R}^2 - \Lambda$  et supposons qu'il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que le point  $\varphi(t_0)$  appartient à la frontière de  $A_{\emptyset}(\varphi(0), t_0)$ . Alors, d'après la propriété 0.1.7., pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\emptyset}(\varphi(0), t)$  et par conséquent, en vertu du principe de Pontryagin [21] la trajectoire  $(\varphi, [0, t_0])$  est de moment maximal par rapport à  $\emptyset$ . Il en résulte qu'il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}, [0, t_0])$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, t_0])$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$  l'on ait

$$(\mathcal{M}_b \circ \hat{\varphi})(t) = 0.$$

Ce qui, compte tenu de la formule

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{M}_b \circ \hat{\varphi})(t) = \hat{X} \cdot \mathcal{M}_b(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{[X, b]}(\hat{\varphi}(t)),$$

entraîne que pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$ , on a

$$\mathcal{M}_b(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{[X, b]}(\hat{\varphi}(t)) = 0.$$

En particulier, en  $t=0$ , on a

$$\mathcal{M}_b(\hat{\varphi}(0)) = \mathcal{M}_{[X, b]}(\hat{\varphi}(0)) = 0.$$

Autrement dit le vecteur  $[X, b](\varphi(0))$  est parallèle à  $b$  d'après la propriété 0.2.8.; ou encore le point  $\varphi(0)$  appartient à  $\Lambda$ . Cette contradiction montre que la trajectoire  $\varphi, [0, T]$  est localement contrôlable, termine la démonstration du lemme 1.1.1.1. et clôt la première étape.

### Deuxième étape

#### Lemme 1.1.1.2.

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$ . Pour tout couple de réels  $(t_1, t_2)$  tel que  $0 < t_1 < t_2 \leq T$ , si le point  $\varphi(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  appartient à l'intérieur de  $A_\delta(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  alors le point  $\varphi(\varphi(0), t_2)$  appartient à l'intérieur de  $A_\delta(\varphi(0), t_2)$ .

( $\varphi(x, t)$  est la solution de  $x' = X$  telle que  $\varphi(0, t) = x$ ).

#### Démonstration du lemme 1.1.1.2.

En effet, si  $x^1$  est un point de  $A_\delta(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  et si  $u^1$  est la commande correspondante qui assure le transfert du point  $\varphi(t_1)$  au point  $x^1$ , le point  $x^1$  est aussi dans  $A_\delta(\varphi(0), t_2)$  puisqu'il est accessible à partir du point  $\varphi(0)$  à l'instant  $t_2$  au moyen de la commande  $u$  définie de la manière suivante :

$$u = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0, t_1] \\ u^1 & \text{sur } [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Il en résulte que  $A_\delta(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  est inclus dans  $A_\delta(\varphi(0), t_2)$  et par conséquent, l'intérieur de  $A_\delta(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  est inclus dans l'intérieur de  $A_\delta(\varphi(0), t_2)$ . Ce qui termine la démonstration du lemme 1.1.1.2. car

$$\varphi(\varphi(t_1), t_2 - t_1) = \varphi(\varphi(0), t_2).$$

### Lemme 1.1.1.3.

Si  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $X$ , toute trajectoire de  $X$  issue de  $\Lambda$  est localement contrôlable.

### Démonstration du lemme 1.1.1.3.

En effet, soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  issue de  $\Lambda$  et supposons qu'il existe  $t_2$  dans  $]0, T]$  tel que le point  $\varphi(\varphi(0), t_2)$  appartient à la frontière de  $A_\emptyset(\varphi(0), t_2)$ .

Comme  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $X$ , on sait que c'est une droite car  $X$  est de degré 2 en  $x$ . Donc, toujours parce que  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $X$ , il existe  $t_1$  dans  $]0, t_2[$  tel que le point  $\varphi(t_1)$  soit dans  $\mathbb{R}^2 - \Lambda$ ; et par conséquent, en vertu du lemme 1.1.1.1., pour tout  $t > 0$  le point  $\varphi(\varphi(t_1), t)$  appartient à l'intérieur de  $A_\emptyset(\varphi(t_1), t)$ . En particulier, le point  $\varphi(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  appartient à l'intérieur de  $A_\emptyset(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$ . Moyennant l'assertion du lemme 1.1.1.2., il s'ensuit que le point  $\varphi(\varphi(0), t_2)$  appartient à l'intérieur de  $A_\emptyset(\varphi(0), t_2)$ . Cette contradiction montre que la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est localement contrôlable, termine la démonstration du lemme 1.1.1.3. et clôt la deuxième étape.

### Troisième étape

Le but de la troisième étape est comme on l'a déjà annoncé, de montrer que toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  est extrême. Pour ce faire, commençons par démontrer le

### Lemme 1.1.1.4.

Toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  est de moment maximal par rapport à  $\emptyset$ .

### Démonstration du lemme 1.1.1.4.

En effet, soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$ . Commençons par montrer que le long de  $(\varphi, [0, T])$  la famille de vecteurs  $\{(\text{ad}^k X, b)(x); k \in \mathbb{N}\}$  est de rang 1. Pour cela, nous allons montrer par récurrence sur  $k$  que le vecteur  $(\text{ad}^k X, b)(x)$  est parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$ . En effet, le

vecteur  $(\text{ad}X, b)(x)$  est parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  puisqu'il lui est parallèle en tout point de  $\Lambda$ .

Supposons maintenant que le vecteur  $(\text{ad}^k X, b)(x)$  soit parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$ . Soit alors  $v$  un vecteur orthogonal à  $b$ ; pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on a l'égalité

$${}^t v \cdot (\text{ad}^k X, b)(\varphi(t)) = 0$$

où  ${}^t v$  est le transposé de  $v$ .

Il en résulte par dérivation (par rapport à  $t$ ) que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on a l'égalité

$${}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\text{ad}^k X, b)(\varphi(t)) \cdot X(\varphi(t)) = 0.$$

Autrement dit le vecteur  $\frac{\partial}{\partial x} (\text{ad}^k X, b)(x) \cdot X(x)$  est parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$ . Par ailleurs, comme le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  le vecteur  $(\text{ad}X, b)(x) = \frac{\partial X}{\partial x}(x)b$  est parallèle à  $b$ , on sait d'après l'hypothèse de récurrence que le vecteur  $\frac{\partial X}{\partial x}(x)(\text{ad}^k X, b)(x)$  est parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$ . Moyennant le fait que

$$(\text{ad}^{k+1} X, b)(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\text{ad}^k X, b)(x) \cdot X(x) - \frac{\partial X}{\partial x}(x) (\text{ad}^k X, b)(x),$$

il s'ensuit que le vecteur  $(\text{ad}^{k+1} X, b)(x)$  est parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$ . Ce qui termine la récurrence.

On sait donc à présent que le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  la famille de vecteurs  $\{(\text{ad}^k X, b)(x); k \in \mathbb{N}\}$  est de rang 1. En particulier la famille de vecteurs  $\{(\text{ad}^k X, b)(\varphi(0)); k \in \mathbb{N}\}$  est de rang 1. En conséquence, il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}, [0, T])$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  tel que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  l'on ait

$$(\text{ad}^k X, b)(\hat{\varphi}(0)) = 0.$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.1.1.4. car la formule

$$\forall k \in \mathbb{N} : \frac{d^k}{dt^k} (\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}})(t) = \hat{X}^k \cdot \mathcal{M}_b(\hat{\varphi}(0)) = \mathcal{M}_{(\text{ad}^k X, b)}(\hat{\varphi}(0))$$

et l'analyticité de la fonction  $\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}}$  entraînent que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on a l'égalité

$$(\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}})(t) = 0;$$

autrement dit, que la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est de moment maximal par rapport à  $\mathfrak{D}$ .

Lemme 1.1.1.5.

Si  $\Lambda$  n'est pas parallèle à  $b$ , toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  est extrémale.

Démonstration du lemme 1.1.1.5.

La démonstration n'est pas la même suivant que  $\Lambda$  est une droite ou le plan  $\mathbb{R}^2$ .

Premier cas :  $\Lambda$  est une droite

Dans ce cas, la démonstration s'appuie sur un résultat de [21].

En effet, soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$ . En vertu du lemme 1.1.1.4. la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est de moment maximal par rapport à  $\mathfrak{D}$  et par conséquent, il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}, [0, T])$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  l'on ait l'égalité

$$(\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}})(t) = 0.$$

Ce qui, par dérivation de la fonction  $\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}}$ , entraîne que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on a

$$(\hat{b} \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\varphi})(t) = (\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}})(t) = 0.$$

Considérons maintenant la fonction  $\hat{b}^2 \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\varphi}$  et supposons la nulle sur l'intervalle  $[0, T]$ . Alors, pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on aurait :

$$k \in \mathbb{N}^* : (\hat{b}^k \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\varphi})(t) = (\mathcal{M}_{b \circ \hat{\varphi}})(t) = 0$$

car  $\mathcal{M}_X$  est de degré 2 en  $x$ .



En particulier, en  $t=0$  on aurait

$$k \in \mathbb{N}^* : \hat{b}^k \cdot \mathcal{M}_X(\varphi(0)) = \mathcal{M}_b(\hat{\varphi}(0)) = 0.$$

Autrement dit, la fonction  $\mathcal{M}_X \circ \hat{\Psi}$  où  $(\hat{\Psi}, [0, T])$  est le relèvement hamiltonien de la trajectoire  $(\Psi, [0, T])$  de  $b$  tel que  $\hat{\Psi}(0) = \hat{\varphi}(0)$  aurait toutes ses dérivées nulles en  $0$ . Mais alors, comme c'est une fonction analytique, elle serait constante sur  $[0, T]$ ; et par suite, sa dérivée serait nulle sur  $[0, T]$  et l'on aurait

$$\hat{b} \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\Psi}(t)) = \mathcal{M}_{[b, X]}(\hat{\Psi}(t)) = 0$$

pour tout  $t$  de  $[0, T]$ .

Moyennant le fait que  $\mathcal{M}_b \circ \hat{\Psi}$  est nulle sur  $[0, T]$  puisque c'est une fonction constante et nulle en  $0$ , il s'ensuivrait que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on aurait

$$\mathcal{M}_{[X, b]}(\hat{\Psi}(t)) = \mathcal{M}_b(\hat{\Psi}(t)) = 0.$$

Ce qui, d'après la propriété 0.2.8., signifierait que le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$  le long de la trajectoire  $(\Psi, [0, T])$ ; ou encore que  $\Lambda$  serait une droite parallèle à  $b$ . Cette contradiction montre que  $\hat{b}^2 \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\varphi}$  n'est pas nulle sur  $[0, T]$ . En conséquence,  $p=2$  est le plus petit entier tel que la suite

$$\{f_p = \hat{b}^p \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\varphi}\}_{p \in \mathbb{N}^*}$$

soit d'ordre fini et par suite, en vertu de [21], la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est extrémale. Ce qui termine la démonstration du lemme 1.1.1.5. dans le cas où  $\Lambda$  est une droite non parallèle à  $b$ .

Deuxième cas :  $\Lambda$  est le plan  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $W$  la famille de champs de vecteurs

$$\{(\text{ad}^k X, b); k \in \mathbb{N}\}.$$

$\Lambda$  étant le plan  $\mathbb{R}^2$ , toutes les trajectoires de  $X$  sont contenues dans  $\Lambda$  et par conséquent, d'après le lemme 1.1.1.4., la famille de vecteurs  $W_x = \{(\text{ad}^k X, b)(x); k \in \mathbb{N}\}$  est de rang 1 le long de

toutes les trajectoires de X; c'est à dire en tout point du plan  $\mathbb{R}^2$ . Il s'ensuit que pour tout point x du plan  $\mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $A_W(x)$  des points accessibles à partir de x au moyen des champs de vecteurs de la famille W est une droite parallèle à b. D'où, d'après [22], l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}(W)$  engendrée par W est de dimension 1 en tout point x de  $\mathbb{R}^2$ . Mais, d'après [5] on sait que

$$\mathcal{L}(W) = \mathcal{L}_O(\mathcal{D}),$$

$\mathcal{L}_O(\mathcal{D})$  étant la famille de champs de vecteurs

$$\left\{ \sum_i \lambda_i Y_i + Z; \quad \sum_i \lambda_i = 0, Y_i \in \mathcal{D}, Z \in \mathcal{L}'(\mathcal{D}) \right\}$$

où  $\mathcal{L}'(\mathcal{D})$  est l'algèbre de lie dérivée de l'algèbre de lie engendrée par  $\mathcal{D}$ .

Il en résulte que  $\mathcal{L}_O(\mathcal{D})(x)$  est de dimension 1 en tout point x de  $\mathbb{R}^2$ . Ce qui termine la démonstration du lemme 1.1.1.5. car d'après [22], pour tout point x de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $t > 0$ , l'ensemble  $A_{\mathcal{D}}(x, t)$  est d'intérieur vide si  $\mathcal{L}_O(\mathcal{D})(x)$  est de dimension inférieure à 2 strictement.

#### Lemme 1.1.1.6.

Si  $\Lambda$  est parallèle à b, toute trajectoire de X contenue dans  $\Lambda$  est extrême.

#### Démonstration du lemme 1.1.1.6.

En effet X étant de degré 2 en x, on sait que si  $\Lambda$  est parallèle à b, c'est une droite; plus précisément  $\Lambda$  est une droite parallèle à b. Donc si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire de X contenue dans  $\Lambda$ , toutes les trajectoires de  $\mathcal{D}$  issues du point  $\varphi(0)$  sont aussi contenues dans  $\Lambda$  puisque pour toute commande  $u \in U_1$  le vecteur  $X(x) + bu$  est parallèle à b sur  $\Lambda$ . Il en résulte que pour tout t de  $[0, T]$  l'ensemble  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t)$  est une droite et par conséquent, est d'intérieur vide. Ce qui prouve que la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est extrême, termine la démonstration du lemme 1.1.1.6., clôt la troisième étape et achève la démonstration du théorème 1.1.1.

#### 1.1.4. Applications

Nous allons, dans ce paragraphe, donner des exemples d'illustration du théorème 1.1.1.

##### Exemple 1

Prenons la F.C.V. quadratiques  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  où :

$$X = \begin{pmatrix} & x_2 \\ x_1 & x_2+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a  $[X, b](x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ; d'où  $\Lambda$  est vide. Par conséquent, toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables d'après le théorème 1.1.1.

##### Exemple 2

Prenons la F.C.V. quadratiques  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  où :

$$X = \begin{pmatrix} & x_2 \\ x_1 & x_2+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $[X, b](x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ; d'où  $\Lambda$  est la droite  $x_2 = 0$ . Comme cette droite n'est pas un invariant de  $X$ , toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables d'après le théorème 1.1.1.

##### Exemple 3

Prenons la F.C.V. quadratiques  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  où :

$$X = \begin{pmatrix} & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a  $[X, b](x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ; d'où  $\Lambda$  est la droite  $x_2=0$  qui est un invariant de  $X$ .

En conséquence, d'après le théorème 1.1.1., toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans la droite  $x_2 = 0$  qui, elles, sont extrémales.

##### Exemple 4

Prenons la F.C.V. quadratiques  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  où :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a  $[X, b](x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; d'où  $\Lambda$  est le plan  $\mathbb{R}^2$ . En conséquence, toutes les trajectoires de  $X$  sont extrémales d'après le théorème 1.1.1.

### 1.1.5. Remarques

Il est maintenant intéressant de se poser la question de savoir si le théorème 1.1.1. s'applique aussi à des familles de champs de vecteurs  $\{X + bu; u \in U_1\}$  où  $X$  est un champ de vecteurs polynomial sur  $\mathbb{R}^2$  de degré strictement supérieur à 2 et,  $b$  est un champ de vecteurs constant sur  $\mathbb{R}^2$ . Les deux exemples ci-dessous montrent clairement que non.

#### 1.1.5.1. Exemple où $\Lambda$ contient une trajectoire de $X$ qui est localement contrôlable.

Prenons la famille de champs de vecteurs

$$\mathfrak{D} = \{ X + bu; u \in U_1 \}$$

où  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+x_1^3 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  issue de l'origine des coordonnées et, pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}^*$ , désignons par  $W_x^m$  la famille de vecteurs

$$\{ b, (\text{ad}^m b, X)(x), (\text{ad} X, (\text{ad}^m b, X))(x), (\text{ad}^2 X, (\text{ad}^m b, X))(x), \dots \}.$$

Avec ces notations, on vérifie facilement que  $m=3$  est le plus petit entier tel que la famille de vecteurs  $W_{\varphi(0)}^m$  soit de rang 2. En conséquence, la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est localement contrôlable d'après [4].

D'autre part, comme  $(\text{ad} X, b)(x)$  est égal à  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1^2 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda$  est la droite  $x_1=0$  qui est un invariant de  $X$  et contient la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$ .

1.1.5.2. Exemple où toutes les trajectoires de X  
contenues dans  $\Lambda$  sont extrémales.

Prenons la famille de champs de vecteurs

$$\mathfrak{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$$

où  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+x_1x_2 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On a

$$(\text{ad}X, b)(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

D'où  $\Lambda$  est l'hyperbole dégénérée en les deux axes de coordonnées dont l'un seul, l'axe des ordonnées, est un invariant de X.

D'autre part, on peut facilement se convaincre (puisque en tout point  $x$  de  $\Lambda$  les vecteurs  $X(x) + b u$ ,  $u \in U_1$ , sont parallèles à l'axe des ordonnées) que pour tout point  $x$  de l'axe des ordonnées et pour tout  $t > 0$ , l'ensemble  $A_{\mathfrak{D}}(x, t)$  est inclus dans l'axe des ordonnées et par conséquent, est d'intérieur vide.

Moyennant le fait que les trajectoires de X contenues dans  $\Lambda$  sont celles qui sont contenues dans l'axe des ordonnées (puisque seul l'axe des ordonnées est un invariant de X), il s'ensuit que toutes les trajectoires de X contenues dans  $\Lambda$  sont extrémales.

Ces deux exemples montrent que le théorème 1.1.1. cesse d'être vrai lorsque X est un champ de vecteurs polynomial de degré strictement supérieur à 2. Cependant, dans certains cas particuliers, par exemple lorsque  $\Lambda$  est un invariant de X parallèle à b ou lorsque  $\Lambda$  est le plan  $\mathbb{R}^2$  tout entier, le théorème 1.1.1. s'applique.

1.1.6. Conclusion

Je vais à présent clôturer ce paragraphe en montrant qu'il existe de très nombreuses familles de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  pour lesquelles toutes les trajectoires du système libre sont localement contrôlables.

A cet effet, désignons par :

- $\mathcal{E}$  l'ensemble de toutes les F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  :  

$$\{X + b u; u \in U_1\}$$

avec

$$X(x) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i C_i^{i-j} \begin{pmatrix} p_{i-j,j} \\ q_{i-j,j} \end{pmatrix} x_1^{i-j} x_2^j$$

où les  $p_{i-j,j}$ ,  $q_{i-j,j}$  sont des constantes et

$$C_i^{i-j} = \frac{i!}{(i-j)!j!} .$$

- $\mathcal{E}_1$  le sous ensemble de  $\mathcal{E}$  formé par les F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  ayant la propriété suivante : l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$  n'est pas un invariant de  $X$ .
- $\mathcal{E}_2$  le sous ensemble de  $\mathcal{E}$  formé par les F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  qui sont telles que toutes les trajectoires de  $X$  soient localement contrôlables.

Avec ces notations, on a le théorème suivant :

#### Théorème

$\mathcal{E}_2$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance

$$d = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i C_i^{i-j} \left| \begin{matrix} p_{i-j,j}^1 - p_{i-j,j}^2 \\ q_{i-j,j}^1 - q_{i-j,j}^2 \end{matrix} \right| + |b^1 - b^2|$$

#### Démonstration

En vertu du théorème 1.1.1., on a

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 .$$

Il suffit donc de montrer que  $\mathcal{E}_1$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance  $d$ . Montrons cela.

Soit en effet  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  avec  $X$  et  $b$  s'écrivant :

$$X = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i C_i^{i-j} \begin{pmatrix} p_{i-j,j} \\ q_{i-j,j} \end{pmatrix} x_1^{i-j} x_2^j \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$  est donné par l'équation :

$$2\lambda_{10} x_1 + 2\lambda_{01} x_2 + \lambda_{00} = 0.$$

où

$$\lambda_{10} = q_{20} b_1^2 + (q_{11} - p_{20}) b_1 b_2 - p_{11} b_2^2$$

$$\lambda_{01} = q_{11} b_1^2 + (q_{02} - p_{11}) b_1 b_2 - p_{02} b_2^2$$

$$\lambda_{00} = q_{10} b_1^2 + (q_{01} - p_{10}) b_1 b_2 - p_{01} b_2^2.$$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  posons

$$\delta(x_1, x_2) = \det(X(x), \begin{pmatrix} -\lambda_{01} \\ \lambda_{10} \end{pmatrix})$$

où  $x = (x_1, x_2)$  et où  $\det$  désigne le déterminant de deux vecteurs du plan.

$\delta(x_1, x_2)$  s'écrit explicitement :

$$\delta(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i C_i^{i-j} (\lambda_{10} p_{i-j,j} + \lambda_{01} q_{i-j,j}) x_1^{i-j} x_2^j$$

a) Commençons par montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}_1^1$  des F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  pour lesquelles  $\Lambda$  vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\lambda_{10} \neq 0$
- $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $X$ ,

est un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance  $d$ .

En effet si  $\lambda_{10} \neq 0$ , de l'équation de  $\Lambda$  on tire

$$x_1 = (-\lambda_{01}/2\lambda_{10}) x_2 + (-\lambda_{00}/2\lambda_{10}).$$

En conséquence, dans ce cas, dire que  $\Lambda$  est un invariant de  $X$  équivaut à dire que pour tout  $x_2$  dans  $\mathbb{R}$ , le déterminant

$$\delta((- \lambda_{01}/2\lambda_{10}) x_2 + (- \lambda_{00}/2\lambda_{10}), x_2)$$

est nul. Mais

$$\delta((- \lambda_{01}/2\lambda_{10}) x_2 + (- \lambda_{00}/2\lambda_{10}), x_2)$$

est un polynôme du second degré en  $x_2$  qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=0}^2 A_k x_2^k$$

où les  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont des polynômes en les variables

$p_{i-j,j}$ ,  $q_{i-j,j}$ ,  $b_1$  et  $b_2$ .

Les polynômes  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  étant non identiquement nuls, puisque leurs coefficients sont des entiers non nuls, l'ensemble de leurs zéros communs est nulle part dense. Ce qui prouve que  $\mathcal{E}_1^1$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance  $d$ .

b) En procédant de la même manière que dans a), on peut montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}_1^2$  des F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  pour lesquelles  $\Lambda$  vérifie les deux propriétés suivantes :

$$- \lambda_{01} \neq 0$$

$$- \Lambda \text{ n'est pas un invariant de } X,$$

est un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance  $d$ .



c) Remarquons pour terminer que  $\lambda_{10}$ ,  $\lambda_{01}$  et  $\lambda_{00}$  sont des polynômes en les variables  $p_{i-j, j'}$ ,  $q_{i-j, j'}$ ,  $b_1$  et  $b_2$ . Comme ils sont non identiquement nuls, puisque leurs coefficients sont des entiers non nuls, l'ensemble de leurs zéros communs est nulle part dense. En conséquence, l'ensemble des F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  pour lesquelles les égalités

$$\lambda_{10} = \lambda_{01} = \lambda_{00} = 0$$

sont vérifiées, est un fermé nulle part dense. Son complémentaire  $\mathcal{E}_1^3$  est donc un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance  $d$ .

Ceci achève la démonstration du théorème puisque  $\mathcal{E}_1$ , étant la réunion des ouverts denses  $\mathcal{E}_1^1$ ,  $\mathcal{E}_1^2$  et  $\mathcal{E}_1^3$ , est un ouvert dense dans  $\mathcal{E}$  pour la topologie associée à la distance  $d$ .

## 1.2. Etude du cas où $\mathcal{D}$ est une F.C.V. quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 3$

Dans ce paragraphe, afin de faciliter la présentation des résultats qui y seront démontrés, on se limitera au cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ ; la généralisation à  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ , étant aisée. On a alors le théorème suivant :

### 1.2.1. Théorème

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\pi^0$  le plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ ,  $\Lambda$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^0$ . Soit de plus  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

Dans ces conditions

(i) si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(x)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

alors, toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables.

(ii) si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

alors, toutes les trajectoires de X sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.

(iii) si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

et si  $\Lambda$  est un invariant de  $b_1$  et  $b_2$  alors, toutes les trajectoires de X sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.

(iv) si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

et si  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $b_1$  et  $b_2$  on a les deux propriétés suivantes :

(iv<sub>1</sub>) : toutes les trajectoires de X qui ne sont pas contenues dans  $\Lambda$  sont localement contrôlables.

(iv<sub>2</sub>) : toutes les trajectoires de X qui sont contenues dans  $\Lambda$  et qui ne sont pas parallèles à  $\pi^0$  sont extrémales.

La démonstration de ce théorème nécessite quelques propositions et lemmes intermédiaires que nous allons commencer par exposer.

### 1.2.2. Lemme

Toute trajectoire de X issue de  $\mathbb{R}^3 - \Lambda$  (non vide) est localement contrôlable.

#### Démonstration

La démonstration est de principe identique à celle du lemme 1.1.1.1. On montre à l'aide du principe du maximum de Pontryagin [21] que si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire de X issue de  $\mathbb{R}^3 - \Lambda$  (non vide),

elle est localement contrôlable sinon il existerait  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que la trajectoire  $(\varphi, [0, t_0])$  soit de moment maximal par rapport à  $\mathcal{S}$  et le point  $\varphi(0)$  serait alors dans  $\Lambda$ .

### 1.2.3. Lemme

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$ . Pour tout couple de réels  $(t_1, t_2)$  tel que  $0 < t_1 < t_2 \leq T$ , si le point  $\varphi(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathcal{S}}(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$  alors le point  $\varphi(\varphi(0), t_2)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathcal{S}}(\varphi(0), t_2)$ .

#### Démonstration

On reprend presque mot pour mot la démonstration du lemme 1.1.1.2. à ceci près que l'on mettra,  $(u_1^1, u_2^1)$  à la place de  $u^1$ .

### 1.2.4. Lemme

Soit  $\Lambda^{\circ}$  la réunion des trajectoires de  $X$  contenues dans  $\Lambda$ . Alors, toute trajectoire de  $X$  issue de  $\Lambda - \Lambda^{\circ}$  (non vide) est localement contrôlable.

#### Démonstration

On remarque d'abord que  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $X$  et que par conséquent, il est soit une droite, soit un plan. On reprend ensuite mot pour mot la démonstration du lemme 1.1.1.3.

### 1.2.5. Proposition

Toute trajectoire de  $X$  non contenue dans  $\Lambda$  est localement contrôlable.

#### Démonstration

La proposition est une conséquence triviale des lemmes 1.2.2. et 1.2.4.

### 1.2.6. Lemme

Toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  est de moment maximal par rapport à  $\mathcal{S}$ .

#### Démonstration

Par une méthode identique à celle utilisée dans la démonstration du lemme 1.1.1.4., on montre d'abord que le long de toute trajec-

toire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  la famille de vecteurs

$$\{(\text{ad}^k_X, b_1)(x), (\text{ad}^k_X, b_2)(x); k \in \mathbb{N}\}$$

est de rang 2.

En utilisant ensuite des arguments analogues à ceux développés dans la démonstration du lemme 1.1.1.4., on montre que cette propriété entraîne que toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  est de moment maximal par rapport à  $\mathcal{O}$ .

### 1.2.7. Proposition

Soit  $\hat{x}$  dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$m_{b_1}(\hat{x}) = m_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$ .

On suppose les deux propriétés suivantes vérifiées :

- (i) le vecteur  $X(\varphi(0))$  n'est pas parallèle à  $\pi^{\circ}$
- (ii) :  $\hat{b}_1^2 \cdot m_X(\hat{x}), \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}), \hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x})$  sont non tous nuls.

Dans ces conditions, la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est localement contrôlable si, et seulement si, l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot m_X(x)) (\hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x}))$$

est vérifiée.

La démonstration de cette proposition s'appuie sur le théorème suivant

### 1.2.8. Théorème (Hermès [5])

Soit la famille de champs de vecteurs

$$\mathcal{F} = \left\{ X + \sum_{i=2}^n Y_i u_i; -1 \leq u_i \leq +1 \right\}$$

où  $X, Y_2, \dots, Y_n$  sont des champs de vecteurs analytiques sur une variété analytique  $M$  de dimension  $n$ .

On suppose  $Y_2, \dots, Y_n$  involutifs et en tout point  $x$  de  $M$  où les vecteurs  $X(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$  sont linéairement indépendants, on

considère la m-forme  $\Phi_{mj}(s)$ ,  $s = (s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , définie de la manière suivante :

$$\Phi_{mj}(s) = \sum_{|v|=m} (1/v!) (-s_2)^{v_2} \dots (-s_n)^{v_n} \cdot a(v, j)$$

où :

•  $v = (v_2, \dots, v_n)$  les  $v_i$  étant des entiers non négatifs

•  $|v| = \sum_{i=2}^n v_i$

•  $v! = v_2! \dots v_n!$

•  $a(v, j) = \hat{X}^j \cdot \hat{Y}_2^{v_2} \dots \hat{Y}_n^{v_n} \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})$

•  $\hat{x}$  est un point de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  tel que

$$\mathcal{M}_X(\hat{x}) = 1 \text{ et } \mathcal{M}_{Y_2}(\hat{x}) = \dots = \mathcal{M}_{Y_n}(\hat{x}) = 0$$

Si  $x^0$  est un point de  $M$  où les vecteurs  $X(x^0), Y_2(x^0), \dots, Y_n(x^0)$  sont linéairement indépendants alors :

- (i) une condition nécessaire et suffisante pour que pour tout  $t \geq 0$  l'ensemble  $A_{\mathcal{F}}(x^0, t)$  soit d'intérieur non vide est qu'il existe au moins une m-forme  $\Phi_{mj}(s)$  non nulle
- (ii) si  $m^*$  est le plus petit  $m$  tel que  $\Phi_{mj}(s)$  soit non nulle et si  $j^*$  est le plus petit  $j$  correspondant :
  - (ii<sub>1</sub>) une condition suffisante pour que tout point  $\varphi(t)$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  de  $X$  issue du point  $x^0$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathcal{F}}(\varphi(0), t)$  est que  $\Phi_{m^* j^*}(s)$  prend des valeurs positives et négatives dans tout voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .
  - (ii<sub>2</sub>) une condition suffisante pour qu'il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que le point  $\varphi(t_0)$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  de  $X$  issue du point  $x^0$  appartient à la frontière de  $A_{\mathcal{F}}(\varphi(0), t_0)$  est que  $\Phi_{m^* j^*}(s)$  soit positive ou négative.

1.2.9. Démonstration de la proposition 1.2.7.

En vertu du lemme 1.2.6. la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est de moment maximal par rapport à  $\mathfrak{D}$ . En conséquence, puisque le vecteur  $X(\varphi(0))$  n'est pas parallèle à  $\pi^0$ , il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}, [0, T])$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  l'on ait les égalités

$$\mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(t)) = 1$$

et

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = 0.$$

Par ailleurs, sur  $\mathbb{R}^3$  les champs de vecteurs quadratiques étant analytiques, le théorème 1.2.8. s'applique à la famille de champs de vecteurs quadratiques  $\mathfrak{D}$ ; et l'on a pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$a(v, j) = \hat{X}^j \cdot \hat{b}_1^v \cdot \hat{b}_2^v \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(0)).$$

Mais, du fait que les fonctions  $\mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t))$  et  $\mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t))$  sont nulles sur  $[0, T]$ , pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on a les égalités

$$j \in \mathbb{N} : \frac{d^j}{dt^j} (\mathcal{M}_{b_1} \circ \hat{\varphi})(t) = \hat{X}^j \cdot \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{(\text{ad}^j X, b_1)}(\hat{\varphi}(t)) = 0$$

et

$$j \in \mathbb{N} : \frac{d^j}{dt^j} (\mathcal{M}_{b_2} \circ \hat{\varphi})(t) = \hat{X}^j \cdot \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{(\text{ad}^j X, b_2)}(\hat{\varphi}(t)) = 0$$

En particulier, pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$  on a :

$$\hat{X}^j \cdot \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(0)) = \hat{X}^j \cdot \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(0)) = 0.$$

Ce qui entraîne que, pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$ , la 1-forme du théorème 1.2.8.

$$\phi_{1j}(s) = -(\hat{X}^j \cdot b_1 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(0)))s_2 - (\hat{X}^j \cdot b_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(0)))s_2$$

est nulle.

Considérons maintenant la 2-forme  $\phi_{20}(s)$ . C'est une forme quadratique en  $s_2$  et  $s_3$  qui s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_{20}(s) &= (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o))/2) s_2^2 + (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o))/2) s_3^2 \\ &+ (\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o))) s_2 s_3; \end{aligned}$$

et, qui est donc non nulle d'après l'hypothèse (ii) de la proposition 1.2.7. En conséquence, moyennant les assertions (ii<sub>1</sub>) et (ii<sub>2</sub>) du théorème 1.2.8., la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est localement contrôlable si, et seulement si,

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o)))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o))) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o)));$$

ou encore, si, et seulement si,

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

puisque en tout point  $\hat{x} = (x, \eta)$  de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0, \text{ on a l'égalité}$$

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) =$$

$$(|\eta|/|\eta_o|)^2 [(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o)))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o))) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(o)))]$$

avec  $\eta_o$  tel que  $\hat{\varphi}(o) = (\varphi(o), \eta_o), \eta_o \neq 0$

#### 1.2.10. Lemme

Soit  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

Soit de plus  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$

On suppose

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 \neq (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})).$$

Dans ces conditions le vecteur  $X(\varphi(o))$  n'est pas parallèle à  $\pi^o$ .

### Démonstration

En effet, supposons que le vecteur  $X(\varphi(o))$  soit parallèle à un vecteur  $c$  de  $\pi^o$ . Soit alors  $v$  un vecteur orthogonal à  $\pi^o$ ; et désignons par  ${}^t v$  le transposé de  $v$ . La trajectoire  $(\varphi, [o, T])$  étant contenue dans  $\Lambda$ , pour tout  $t$  de  $[o, T]$  on a les égalités

$${}^t v \cdot [X, b_1](\varphi(t)) = {}^t v \cdot [X, b_2](\varphi(t)) = 0$$

puisque les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^o$  en tout point de  $\Lambda$ .

Il en résulte par dérivation que pour tout  $t$  de  $[o, T]$  on a les égalités

$${}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X, b_1](\varphi(t)) \cdot X(\varphi(t)) = {}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X, b_2](\varphi(t)) \cdot X(\varphi(t)) = 0$$

En particulier, en  $t = o$  on a :

$${}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X, b_1](\varphi(o)) \cdot X(\varphi(o)) = {}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X, b_2](\varphi(o)) \cdot X(\varphi(o)) = 0$$

Ce qui, compte tenu de ce que  $X(\varphi(o))$  est parallèle à  $c$ , entraîne que

$${}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X, b_1](\varphi(o)) \cdot c = {}^t v \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X, b_2](\varphi(o)) \cdot c = 0$$

Autrement dit, les vecteurs  $[[X, b_1], c](\varphi(o))$  et  $[[X, b_2], c](\varphi(o))$  sont parallèles à  $\pi^o$ . Moyennant le fait que  $X$  est de degré 2 en  $x$ , il en résulte que  $[[X, b_1], c]$  et  $[[X, b_2], c]$  sont des champs de vecteurs constants et parallèles à  $\pi^o$ . En conséquence, d'après la propriété 0.2.11., on a les égalités

$$\mathcal{M}_{[[X, b_1], c]}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{[[X, b_2], c]}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

Ce qui, compte tenu de la propriété 0.2.4. entraîne que

$$\hat{c} \cdot \hat{b}_1 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{c} \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = 0$$

Exprimons à présent  $c$  comme combinaison linéaire de  $b_1$  et  $b_2$  :

$$c = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2; \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$



Des égalités

$$\hat{c} \cdot \hat{b}_1 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{c} \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = 0$$

on tire facilement les deux égalités

$$\lambda_1 (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) = -\lambda_2 (\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

et

$$\lambda_2 (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) = -\lambda_1 (\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

qui permettent de vérifier que

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})).$$

Ce qui contredit l'hypothèse du lemme 1.2.10. et prouve donc que le vecteur  $X(\varphi(o))$  n'est pas parallèle à  $\pi^0$ .

### 1.2.11. Proposition

Soit  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

Dans ces conditions :

(i) si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

alors toutes les trajectoires de  $X$  contenues dans  $\Lambda$  sont localement contrôlables.

(ii) si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

alors toutes les trajectoires de  $X$  contenues dans  $\Lambda$  sont extrémales.

### Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.2.7. et du lemme 1.2.10.

### 1.2.12. Lemme

Si  $\Lambda$  est non vide, il existe  $\hat{x}$  dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

et

$$\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = 0$$

si, et seulement si,  $\Lambda$  est un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ .

Démonstration

En effet,  $\mathcal{M}_X$  étant de degré 2 en  $x$ , pour tout couple  $(i, j)$  de  $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ ,  $\hat{b}_i \cdot \hat{b}_j \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})$  est indépendant de  $x$ . En conséquence, moyennant le fait que  $\Lambda$  est non vide, il existe  $\hat{x}$  dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

et

$$\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = 0$$

si, et seulement si, il existe  $\hat{x}^0$  dans  $\Lambda \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}^0) = 0$$

et

$$\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0) = \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0) = \hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0) = 0;$$

ou encore, en désignant par  $\hat{\Psi}_1$  et  $\hat{\Psi}_2$  les trajectoires respectives de  $\hat{b}_1$  et  $\hat{b}_2$  issues du point  $\hat{x}^0$  et compte tenu de ce que  $\mathcal{M}_X$  est de degré 2 en  $x$ , si, et seulement si, pour tout  $i$  de  $\{1, 2\}$  on a les égalités

$$\hat{b}_i^k \cdot \hat{b}_1 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\Psi}_i(0)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\Psi}_i(0)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\Psi}_i(0)) = 0$$

et

$$\hat{b}_i^k \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\Psi}_i(0)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\Psi}_i(0)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\Psi}_i(0)) = 0$$

pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ; ou encore, du fait de l'analyticité des fonctions  $\hat{b}_1 \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\Psi}_i$  et  $\hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\Psi}_i$ , si, et seulement si, pour tout  $i$  de  $\{1, 2\}$  il existe un intervalle  $I$  sur lequel on a les égalités

$$\hat{b}_1 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\Psi}_i(t)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\Psi}_i(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\Psi}_i(t)) = 0$$

et

$$\hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{\Psi}_i(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\Psi}_i(t)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\Psi}_i(t)) = 0$$

puisque les fonctions  $\hat{b}_1 \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\Psi}_i$ ,  $\hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X \circ \hat{\Psi}_i$ ,

$\mathcal{M}_{b_1} \circ \hat{\Psi}_i$  et  $\mathcal{M}_{b_2} \circ \hat{\Psi}_i$  sont constantes et nulles en 0. Autrement

dit, d'après la propriété 0.2.10., si, et seulement si, il existe un intervalle I tel que pour tout t de I les vecteurs  $[X, b_1](\Psi_1(t))$ ,  $[X, b_2](\Psi_1(t))$ ,  $[X, b_1](\Psi_2(t))$  et  $[X, b_2](\Psi_2(t))$

soient parallèles à  $\pi^0$ ; ou encore si, et seulement si, pour tout t de I les points  $\Psi_1(t)$  et  $\Psi_2(t)$  appartiennent à  $\Lambda$ . C'est-à-dire si, et seulement si,  $\Lambda$  est un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ . Ce qui est l'assertion du lemme 1.2.12.

### 1.2.13. Proposition

Soit  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0.$$

On suppose que

$$\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = \hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) = 0.$$

Dans ces conditions, toutes les trajectoires de X contenues dans  $\Lambda$  sont extrémales.

### Démonstration

En vertu du lemme 1.2.12.,  $\Lambda$  est un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ ; et par conséquent, est soit l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier, soit un plan parallèle à  $\pi^0$ . On a donc deux cas à envisager :

Premier cas :  $\Lambda$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier

La démonstration est de principe identique à celle effectuée dans le lemme 1.1.1.5. Nous allons seulement en indiquer les grandes

lignes : on introduit d'abord la famille de champs de vecteurs

$$\mathcal{Y} = \{(\text{ad}^k X, b_1), (\text{ad}^k X, b_2); k \in \mathbb{N}\}.$$

D'après le lemme 1.2.6., la famille de vecteurs

$$\mathcal{Y}_x = \{(\text{ad}^k X, b_1)(x), (\text{ad}^k X, b_2)(x); k \in \mathbb{N}\}$$

est de rang 2 le long de toute trajectoire de  $X$  et par conséquent, en tout point de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . A partir de là, on reprend presque mot pour mot (à ceci près, que l'on remplacera la famille de champs de vecteurs  $W$  du lemme 1.1.1.5. par la famille de champs de vecteurs  $\mathcal{Y}$ ) pour montrer que l'ensemble  $A_\emptyset(x, t)$  est d'intérieur vide pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  et pour tout  $t > 0$ . Ce qui terminera la démonstration de la proposition 1.2.13. dans le cas où  $\Lambda$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier.

Deuxième cas :  $\Lambda$  est un plan parallèle à  $\pi^0$

Soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$ . Toutes les trajectoires de  $\emptyset$  issues du point  $\varphi(0)$  sont aussi contenues dans  $\Lambda$  puisque pour toute commande  $u = (u_1, u_2) \in U_2$ , le vecteur  $X(x) + b_1 u_1 + b_2 u_2$  est parallèle à  $\pi^0$  sur  $\Lambda$ . Il en résulte que l'ensemble  $A_\emptyset(\varphi(0), t)$  est inclus dans  $\Lambda$  et par conséquent, est d'intérieur vide. Ce qui prouve que la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est extrémale, termine la démonstration dans le cas où  $\Lambda$  est un plan parallèle à  $\pi^0$  et achève celle de la proposition 1.2.13.

#### 1.2.14. Proposition

Soit  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0.$$

On suppose les deux propriétés suivantes vérifiées :

(i)  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $b_1$  et  $b_2$

(ii)  $(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$

Dans ces conditions, toute trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  et qui n'est pas parallèle à  $\pi^0$  est extrémale.

Démonstration

En effet, soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$  et qui n'est pas parallèle à  $\pi^0$ . Puisque  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ , on sait d'après le lemme 1.2.12. que

$\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})$ ,  $\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})$  et  $\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})$  sont non tous nuls. Par ailleurs, on sait aussi (voir remarque 1.2.15.) que le vecteur  $X(\varphi(0))$  n'est pas parallèle à  $\pi^0$ . En conséquence, la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est extrémale d'après la proposition 1.2.7. et l'hypothèse (ii) de la proposition 1.2.14. Ce qui termine la démonstration de la proposition 1.2.14.

1.2.15. Remarque

J'ai dit que le vecteur  $X(\varphi(0))$  n'était pas parallèle à  $\pi^0$ . On va préciser cela en montrant que si tel n'était pas le cas, la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  serait parallèle à  $\pi^0$ . En effet, supposons que le vecteur  $X(\varphi(0))$  soit parallèle à  $\pi^0$ . La trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  étant contenue dans  $\Lambda$ , on sait d'après le lemme 1.2.6. qu'elle est de moment maximal par rapport à  $\mathfrak{D}$ . D'où il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}, [0, T])$  de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  l'on ait

$$\mathcal{M}_X(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = 0$$

puisque la fonction  $\mathcal{M}_X \circ \hat{\varphi}$  est constante et nulle en 0. Il en résulte que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  le vecteur  $X(\varphi(t))$  est parallèle à  $\pi^0$  et, par conséquent, la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est parallèle à  $\pi^0$ .

1.2.16. Démonstration du théorème 1.2.1.

Le théorème 1.2.1. est une conséquence immédiate des propositions 1.2.5., 1.2.11., 1.2.13. et 1.2.14.

Nous allons à présent donner des exemples d'illustration du théorème 1.2.1.

### 1.2.17. Applications

#### Exemple 1

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \quad \text{où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En posant  $\hat{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ , on vérifie facilement que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0)) = 1.$$

En conséquence, toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables d'après l'assertion (i) du théorème 1.2.1.

#### Exemple 2

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \quad \text{où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que  $\Lambda$  est la droite  $x_1 = x_2 = 0$  qui n'est pas un invariant de  $X$ . Par ailleurs, si on pose  $\hat{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ , un calcul simple montre que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) = -4.$$

D'où, toutes les trajectoires de X sont localement contrôlables d'après l'assertion (ii) du théorème 1.2.1.

### Exemple 3

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \text{ où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que  $\Lambda$  est la droite  $x_1 = x_2 = 0$  qui est un invariant de X. Par ailleurs, si l'on pose  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ , un calcul simple montre que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) = -4.$$

D'où, en vertu de l'assertion (ii) du théorème 1.2.1., toutes les trajectoires de X sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans la droite  $x_1 = x_2 = 0$  qui, elles, sont extrémales.

### Exemple 4

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \text{ où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre que  $\Lambda$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier et que si  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$  alors

$$\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) = 0$$

D'où, toutes les trajectoires de  $X$  sont extrémales d'après l'assertion (iii) du théorème 1.2.1.

#### Exemple 5

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \quad \text{où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire montre que  $\Lambda$  est le plan  $x_3=0$  et que si  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$  alors

$$\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) = 0$$

En conséquence, d'après l'assertion (iii) du théorème 1.2.1. toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans le plan  $x_3=0$  qui, elles, sont extrémales.



### Exemple 6

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \quad \text{où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + x_2 x_3 + 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que  $\Lambda$  est la droite  $x_1 = x_3 = 0$  qui n'est ni un invariant de  $X$ , ni un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ .

Par ailleurs, un calcul simple montre que si

$\hat{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$  alors, on a

$$m_{b_1}(\hat{x}^0) = m_{b_2}(\hat{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot m_X(\hat{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x}^0)) = 0$$

En conséquence, toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables d'après l'assertion (iv) du théorème 1.2.1.

### Exemple 7

Prenons la F.C.V.

$$\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\} \quad \text{où}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que  $\Lambda$  est le plan  $x_1 = 0$  qui ne contient aucune trajectoire de  $X$  parallèle au plan  $x_3 = 0$  engendré par  $b_1$  et  $b_2$ . Par ailleurs, un calcul simple montre que si

$\hat{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$  alors, on a

$$m_{b_1}(\hat{x}^0) = m_{b_2}(\hat{x}^0) = 0$$

et

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}^0)) = 0$$

En conséquence, d'après l'assertion (iv) du théorème 1.2.1., toutes les trajectoires de X sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  plan  $x_1=0$  qui, elles, sont extrémales.

Cette dernière famille de champs de vecteurs termine la série d'exemples consacrée à l'illustration du théorème 1.2.1. On va maintenant clôturer ce paragraphe par quelques remarques.

### 1.2.18. Remarques

#### Remarque 1

Cette première remarque concerne l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles au plan  $\pi^0$  engendré par  $b_1$  et  $b_2$ . Plus précisément, on va montrer que  $\Lambda$  contient la réunion des trajectoires de X de moment maximal par rapport à  $\mathfrak{S}$ .

En effet, si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire de X de moment maximal par rapport à  $\mathfrak{S}$ , il existe un relèvement hamiltonien  $(\hat{\varphi}, [0, T])$  de  $(\varphi, [0, T])$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  l'on ait

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = 0.$$

Ce qui, par dérivation, entraîne que pour tout  $t$  de  $[0, T]$  on a

$$\hat{x} \cdot \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{[X, b_1]}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = 0$$

et

$$\hat{x} \cdot \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{[X, b_2]}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_1}(\hat{\varphi}(t)) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{\varphi}(t)) = 0$$

Autrement dit, le long de la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles au plan  $\pi^0$  d'après la propriété 0.2.10. Ce qui prouve que la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est contenue dans  $\Lambda$ .

On sait donc à présent que toute trajectoire de X de moment maximal par rapport à  $\emptyset$  est contenue dans  $\Lambda$ . Moyennant le fait qu'en vertu du lemme 1.2.6. toute trajectoire de X contenue dans  $\Lambda$  est de moment maximal par rapport à  $\emptyset$ , il s'ensuit que  $\Lambda$  contient la réunion des trajectoires de X de moment maximal par rapport à  $\emptyset$ .

Remarque 2

Lorsque  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ , le théorème 1.2.1. ne dit rien sur la contrôlabilité le long des trajectoires de X contenues dans  $\Lambda$  et parallèles au plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ . La présence de ce cas douteux n'est pas très surprenant du fait que  $\Lambda$  contient la réunion des trajectoires de X de moment maximal par rapport à  $\emptyset$  et que l'on sait [20] qu'il existe des trajectoires de moment maximal qui ne sont pas extrémales.

Remarque 3

Soit E l'ensemble des F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$

$$\{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\}$$

$$\text{avec } X = \sum_{i=0}^2 \sum_{j+k=0}^i C_i^{j+k} \begin{pmatrix} p_{i-j-k, j, k} \\ q_{i-j-k, j, k} \\ r_{i-j-k, j, k} \end{pmatrix} x_1^{i-j-k} x_2^j x_3^k;$$

et soit E' le sous-ensemble de E formé par les F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  qui sont telles que toutes les trajectoires de X soient localement contrôlables. Comme dans 1.1.5., on pourrait espérer que E' soit un ouvert dense dans E pour la topologie associée à la distance

$$d = \sum_{i=0}^2 \sum_{j+k=0}^i C_i^{j+k} \begin{vmatrix} p_{i-j-k, j, k}^1 & -p_{i-j-k, j, k}^2 \\ q_{i-j-k, j, k}^1 & -q_{i-j-k, j, k}^2 \\ r_{i-j-k, j, k}^1 & -r_{i-j-k, j, k}^2 \end{vmatrix} + \left| b_1^1 - b_1^2 \right| + \left| b_2^1 - b_2^2 \right|$$

Cependant, désignons par  $E_1'$  le sous ensemble de  $E$  formé par les F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  qui sont telles que si  $\bar{x}^0$  est un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  vérifiant  $\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}^0) = 0$  l'on ait

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) > 0;$$

et par  $E_2'$  le sous ensemble de  $E$  formé par les F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  qui possèdent les deux propriétés suivantes :

- si  $\bar{x}^0$  est point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}^0) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}^0) = 0$$

alors

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}^0)) \leq 0$$

- toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables.

Les sous ensembles  $E_1'$  et  $E_2'$  étant non vides, ils forment une partition de  $E'$  d'après le théorème 1.2.1. et, les relations les caractérisant amènent à penser que leur réunion  $E'$  n'est pas un ouvert dense dans  $E$  pour la topologie associée à la distance  $d$ .

Avec cette dernière remarque s'achève la première partie de ce travail consacrée à l'étude du problème de la contrôlabilité le long des trajectoires du système libre d'une famille de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

## II. Contrôlabilité le long des trajectoires

=====

d'une famille de champs de vecteurs quadratiques

=====

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\} \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

=====

Cette partie du travail exploite les résultats du chapitre I pour étudier le problème de la contrôlabilité le long des trajectoires d'une famille

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\}$$

de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

Pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment, on se limitera au cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. sur  $\mathbb{R}^2$  et à celui où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. sur  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.1. Etude du cas où $\mathcal{D}$ est une F.C.V. quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ .

=====

Commençons par démontrer le lemme suivant :

#### 2.1.1. Lemme

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b u; -\alpha \leq u \leq +\beta, \alpha > 0, \beta > 0\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$ .

Alors, toutes les trajectoires de  $X$  sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.

#### Démonstration

La démonstration se fait en deux étapes.

Première étape : toutes les trajectoires de  $X$  qui ne sont pas contenues dans  $\Lambda$  sont extrémales.



En effet, soit  $(\varphi, [0, T])$  une trajectoire de  $X$  qui n'est pas contenue dans  $\Lambda$ ; et considérons la famille de champs de vecteurs

$$\mathfrak{D}_1 = \{ X + k_1 b \bar{u}; \bar{u} \in U_1 \}$$

où  $k_1$  désigne le plus petit des deux réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Comme  $\Lambda$  est aussi l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, k_1 b](x)$  est parallèle à  $k_1 b$ , on sait d'après le théorème 1.1.1. que pour tout  $t$  de  $[0, t]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathfrak{D}_1}(\varphi(0), t)$ .

Compte tenu de l'inclusion

$$A_{\mathfrak{D}_1}(x, t) \subset A_{\mathfrak{D}}(x, t)$$

pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $t > 0$ , il en résulte que pour tout  $t$  de  $[0, t]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\mathfrak{D}}(\varphi(0), t)$ . Ce qui prouve que la trajectoire  $(\varphi, [0, t])$  est localement contrôlable et termine donc la démonstration de la première étape.

Deuxième étape : toutes les trajectoires de  $X$  qui sont contenues dans  $\Lambda$  sont extrémales.

La démonstration est de principe analogue à celle de la première étape.

Si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire de  $X$  contenue dans  $\Lambda$ , on considère la famille de champs de vecteurs

$$\mathfrak{D}_2 = \{ X + k_2 b \bar{u}; \bar{u} \in U_1 \}$$

où  $k_2$  désigne le plus grand des deux réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Comme  $\Lambda$  est aussi l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, k_2 b](x)$  est parallèle à  $k_2 b$ , on sait d'après le théorème 1.1.1. qu'il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\mathfrak{D}_2}(\varphi(0), t)$ .

Compte tenu de l'inclusion

$$A_{\mathcal{D}}(x, t) \subset A_{\mathcal{D}_2}(x, t)$$

pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $t > 0$ , il en résulte que pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\mathcal{D}}(\varphi(0), t)$ . Ce qui prouve que la trajectoire  $(\varphi, [0, T])$  est extrémale, termine la démonstration de la seconde étape et achève celle du lemme.

Ce lemme permet de démontrer le théorème suivant :

### 2.1.2. Théorème

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$ . Soit de plus  $u^*$  une commande non bang-bang de  $U_1$ .

Alors, toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b u^*$  sont localement contrôlable à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.

#### Démonstration

En effet, par le changement de variable  $u = \bar{u} + u^*$  la famille  $\mathcal{D}$  devient :

$$\bar{\mathcal{D}} = \{X + b u^* + b \bar{u}; -(1+u^*) \leq \bar{u} \leq 1 - u^*\}$$

Comme d'une part  $1+u^*$  et  $1-u^*$  sont strictement positifs (puisque  $u^*$  est non bang-bang et par conséquent, est dans  $] -1, +1[$ ) et que d'autre part  $\Lambda$  est aussi l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X + b u^*, b](x)$  est parallèle à  $b$ , l'application du lemme 2.1.1. à la famille de champs de vecteurs  $\bar{\mathcal{D}}$  donne le résultat annoncé dans le théorème 2.1.2.

De ce théorème on déduit le résultat suivant :

### 2.1.3. Corollaire

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b u; u \in U_1\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$ .

Alors, toute commande extrême est bang-bang si, et seulement si, il n'existe dans  $U_1$  aucune commande  $u$  non bang-bang telle que  $\Lambda$  soit un invariant du champ de vecteurs  $X + b u^*$ .

2.2. Etude du cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ .  
 =====

Comme on l'avait déjà annoncé, on se limitera au cas où  $\mathcal{D}$  est une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ ; la généralisation à  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$  étant aisée.

Commençons par énoncer quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite :

2.2.1. Lemme

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $(b_1, b_2)$  un couple de champs de vecteurs constants sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\pi^\circ$  le plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ . Soient de plus  $M$  une matrice constante régulière d'ordre 2 et  $x$  un point de  $\mathbb{R}^3$ .

On pose

$$(c_1, c_2) = (b_1, b_2)M.$$

Dans ces conditions les vecteurs  $[X, c_1](x)$  et  $[X, c_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$  si, et seulement si, les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$ .

Démonstration

Si on désigne par  $\det$  le déterminant de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , on vérifie facilement l'égalité

$$\begin{pmatrix} \det([X, c_1](x), b_1, b_2) \\ \det([X, c_2](x), b_1, b_2) \end{pmatrix} = {}^t M. \begin{pmatrix} \det([X, b_1](x), b_1, b_2) \\ \det([X, b_2](x), b_1, b_2) \end{pmatrix}$$

Il en résulte que les vecteurs  $[X, c_1](x)$  et  $[X, c_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$  si, et seulement si,



$${}^t_M \begin{pmatrix} \det([X, b_1](x), b_1, b_2) \\ \det([X, b_2](x), b_1, b_2) \end{pmatrix} = 0;$$

ou encore, puisque M est une matrice régulière, si, et seulement si,  $\det([X, b_1](x), b_1, b_2)$  et  $\det([X, b_2](x), b_1, b_2)$  sont nuls. Autrement dit, si, et seulement si, les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^0$ . Ce qui est l'assertion du lemme.

### 2.2.2. Lemme

Soient X un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $(b_1, b_2)$  un couple de champs de vecteurs constants sur  $\mathbb{R}^3$ .

Soit de plus M une matrice constante régulière d'ordre 2.

On pose

$$(c_1, c_2) = (b_1, b_2) M.$$

Dans ces conditions si  $\hat{x}$  est un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

alors, on a les deux propriétés suivantes :

$$(i) : \mathcal{M}_{c_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{c_2}(\hat{x}) = 0$$

$$(ii) : (\hat{c}_1 \cdot \hat{c}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{c}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{c}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) =$$

$$(\det M)^2 ((\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})))$$

#### Démonstration

Propriété (i) : elle vient de ce que  $\mathcal{M}_{c_1}(\hat{x})$  et  $\mathcal{M}_{c_2}(\hat{x})$  sont des combinaisons linéaires de  $\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x})$  et  $\mathcal{M}_{b_2}(\hat{x})$  puisque  $c_1$  et  $c_2$  sont des combinaisons linéaires de  $b_1$  et  $b_2$ .

Propriété (ii) : si on pose

$$B = \begin{pmatrix} \hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) & \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) \\ \hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) & \hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \hat{c}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) & \hat{c}_1 \cdot \hat{c}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) \\ \hat{c}_1 \cdot \hat{c}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) & \hat{c}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

on vérifie facilement que

$$C = {}^t M.B.M$$

et par conséquent,

$$\det C = (\det M)^2 \cdot \det B$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} & (\hat{c}_1 \cdot \hat{c}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{c}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{c}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) = \\ & (\det M)^2 ((\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))) \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété (ii) et termine la démonstration du lemme.

### 2.2.3. Lemme

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; -\alpha \leq u_i \leq +\alpha, \alpha > 0\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\pi^\circ$  le plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ ,  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$ .

Soit de plus  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0.$$

Dans ces conditions, les trajectoires de  $X$  possèdent des propriétés mot à mot identiques à celles énoncées dans le théorème 1.2.1.

### Démonstration

En effet, soit  $\Omega$  le sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$\{-\alpha \leq u_i \leq +\alpha ; i = 1, 2\}$$

et désignons par M la matrice de l'application linéaire inversible

$$[-1, +1]^2 \longrightarrow \Omega$$

Par le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

la famille  $\mathfrak{D}$  se transforme en la F.C.V. quadratiques

$$\bar{\mathfrak{D}} = \{x + c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 ; \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in U_2\}$$

où les champs de vecteurs  $c_1$  et  $c_2$  sont donnés par

$$(c_1, c_2) = (b_1, b_2) M.$$

En vertu du lemme 2.2.1 on sait que  $\Lambda$  est l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, c_1](x)$  et  $[X, c_2](x)$  sont parallèles au plan  $\pi^\circ$ , qui est aussi le plan engendré par  $c_1$  et  $c_2$ . Par ailleurs, d'après le lemme 2.2.2., on a aussi

$$\mathcal{M}_{c_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{c_2}(\hat{x}) = 0$$

et

$$\begin{aligned} & (\hat{c}_1 \cdot \hat{c}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{c}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{c}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) = \\ & = (\det M)^2 (\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) . \end{aligned}$$

En conséquence, l'application du théorème 1.2.1. à la famille de champs de vecteurs  $\bar{\mathfrak{D}}$  démontre l'affirmation du lemme 2.2.3.

Nous en venons maintenant aux principaux résultats de ce paragraphe.

#### 2.2.4. Théorème

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\}$  une famille de champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$m_{b_1}(\hat{x}) = m_{b_2}(\hat{x}) = 0.$$

Soit de plus  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  une commande de  $U_2$  qui n'est ni bang-bang, ni presque bang-bang.

On suppose l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot m_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x}))$$

vérifiée.

Dans ces conditions, toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  sont localement contrôlables.

#### Démonstration

En effet, par le changement de variables

$$\begin{cases} u_1 = \bar{u}_1 + u_1^* \\ u_2 = \bar{u}_2 + u_2^* \end{cases}$$

la famille  $\mathcal{D}$  se transforme en la famille de champs de vecteurs

$$\bar{\mathcal{D}} = \left\{ X + \sum_{i=1}^2 b_i u_i^* + \sum_{i=1}^2 b_i \bar{u}_i; -(1+u_1^*) \leq \bar{u}_i \leq 1-\bar{u}_i^* \right\}$$

Posons

$$\alpha = \min(1+u_1^*, 1+u_2^*, 1-u_1^*, 1-u_2^*)$$

et considérons la famille de champs de vecteurs

$$\bar{\mathcal{D}} = \{ Y + b_1 \bar{u}_1 + b_2 \bar{u}_2; -\alpha \leq \bar{u}_i \leq +\alpha \}$$

où  $Y$  est le champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$ .

Comme d'une part  $\alpha$  est strictement positif (puisque  $u = (u_1^*, u_2^*)$  est une commande de  $U_2$  qui n'est ni bang-bang, ni presque bang-

bang) et que d'autre part on a l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))$$

puisque

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x})) =$$

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) ,$$

il résulte du lemme 2.2.3. que si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  alors, pour tout  $t$  de  $[0, T]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\hat{\delta}}(\varphi(0), t)$ . Moyennant les relations

$$A_{\hat{\delta}}(x, t) \subset A_{\delta}(x, t) = A_{\delta}(x, t)$$

pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  et pour tout  $t > 0$ , il s'ensuit que si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  alors, pour tout  $t$  de  $[0, T]$ , le point  $\varphi(t)$  appartient à l'intérieur de  $A_{\delta}(\varphi(0), t)$ . Ce qui est la conclusion du théorème.

De ce théorème on déduit le résultat suivant :

### 2.2.5. Corollaire

Soient  $\delta = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0.$$

On suppose l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

vérifiée.

Dans ces conditions toute commande extrême de  $U_2$  est soit bang-bang, soit presque bang-bang.

### 2.2.6. Théorème

Soient  $\mathfrak{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\pi^\circ$  le plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ ,  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$ . Soient de plus  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\hat{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

et  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  une commande de  $U_2$  qui n'est ni bang-bang, ni presque bang-bang.

On suppose l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

vérifiée.

Dans ces conditions, toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.

#### Démonstration

La démonstration se fait en deux étapes.

Première étape : toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  qui ne sont pas contenues dans  $\Lambda$  sont localement contrôlables.

On reprend mot pour mot la démonstration du théorème 2.2.4. à ceci près, que l'on remplacera l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

par l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})).$$

Deuxième étape : toute trajectoire de champ de vecteurs  
 $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  contenue dans  $\Lambda$  est  
extrême.

En effet, par le changement de variables

$$\begin{cases} u_1 = \bar{u}_1 + u_1^* \\ u_2 = \bar{u}_2 + u_2^* \end{cases}$$

la famille  $\mathcal{D}$  se transforme en la famille de champs de vecteurs

$$\bar{\mathcal{D}} = \left\{ X + \sum_{i=1}^2 b_i u_i^* + \sum_{i=1}^2 b_i \bar{u}_i; -(1+u_i^*) \leq \bar{u}_i \leq 1 - u_i^* \right\}$$

Posons

$$\beta = \max (1+u_1^*, 1+u_2^*, 1-u_1^*, 1-u_2^*)$$

et considérons la famille de champs de vecteurs

$$\bar{\mathcal{D}} = \left\{ Y + b_1 \bar{u}_1 + b_2 \bar{u}_2; -\beta \leq u_i \leq +\beta \right\}$$

où  $Y$  est le champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$ .

Comme d'une part  $\beta$  est strictement positif (puisque  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  est une commande de  $U_2$  qui n'est ni bang-bang, ni presque bang-bang) et que d'autre part on a l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))$$

(puisque

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\hat{x}))$$

=

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 - (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})),$$

il résulte du lemme 2.2.3. que si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire du champ de vecteurs  $Y = X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  qui est contenue dans  $\Lambda$  alors, il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que, pour tout  $t$  de  $]0, t_0]$ ,

le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\emptyset} = (\varphi(o), t)$ . Moyennant les relations

$$A_{\emptyset}(x, t) = A_{\emptyset}(x, t) \subset A_{\emptyset}(x, t)$$

pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  et pour tout  $t > 0$ , il s'ensuit que si  $(\varphi, [0, T])$  est une trajectoire du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  qui est contenue dans  $\Lambda$ , alors il existe  $t_0$  dans  $]0, T]$  tel que pour tout  $t$  de  $[0, t_0]$  le point  $\varphi(t)$  appartient à la frontière de  $A_{\emptyset}(\varphi(o), t)$ . Ce qui prouve que toute trajectoire du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  contenue dans  $\Lambda$  est extrême, termine la démonstration de la seconde étape et achève celle du théorème.

### 2.2.7. Théorème

Avec les mêmes notations que celles du théorème 2.2.6., on suppose que l'égalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\hat{x}))$$

est vérifiée.

Dans ces conditions, on a les propriétés suivantes :

- (i) : si  $\Lambda$  est un invariant de  $b_1$  et  $b_2$  alors, toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  sont localement contrôlables à l'exception de celles contenues dans  $\Lambda$  qui, elles, sont extrémales.
- (ii) : si  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $b_1$  et  $b_2$  alors,
  - (ii<sub>1</sub>) : toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  qui ne sont pas contenues dans  $\Lambda$  sont localement contrôlables.
  - (ii<sub>2</sub>) : toutes les trajectoires du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$  qui sont contenues dans  $\Lambda$  et qui ne sont pas parallèles à  $\pi^0$  sont extrémales.



### Démonstration

On reprend mot pour mot la démonstration du théorème 2.2.6. à ceci près, que l'on mettra l'égalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_Y(\bar{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\bar{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\bar{x}))$$

à la place de l'inégalité

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_Y(\bar{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\bar{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_Y(\bar{x})).$$

Une conséquence directe des théorèmes 2.2.6. et 2.2.7. est le résultat suivant qui termine cette troisième partie du travail.

### 2.2.8. Corollaire

Soient  $\mathcal{D} = \{X + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2\}$  une F.C.V. quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\pi^\circ$  le plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ ,  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$ .

Soit de plus  $\bar{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$\mathcal{M}_{b_1}(\bar{x}) = \mathcal{M}_{b_2}(\bar{x}) = 0.$$

Dans ces conditions, on a les propriétés suivantes

(i) : si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}))^2 < (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}))$$

alors, une condition nécessaire et suffisante pour que toute commande extrême de  $U_2$  soit bang-bang ou presque bang-bang est que  $\Lambda$  ne contient aucune trajectoire du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1 + b_2 u_2$  où  $u = (u_1, u_2)$  possède la propriété de n'être ni bang-bang, ni presque bang-bang.

(ii) : si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot \mathcal{M}_X(\bar{x}))$$

et si  $\Lambda$  est un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ , on a la même conclusion que dans (i).

(iii) : si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}))^2 = (\hat{b}_1^2 \cdot m_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x}))$$

et si  $\Lambda$  n'est pas un invariant de  $b_1$  et  $b_2$ , la condition exprimée dans (i) est suffisante pour que toute commande extrême de  $U_2$  soit bang-bang ou presque bang-bang.

III. Applications à la théorie  
 =====  
 de la commande  
 =====

Dans cette dernière partie du travail, je vais énoncer quelques conséquences des résultats précédents dans le cadre de la théorie des systèmes asservis de la forme

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1}$$

où : . X est un champ de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$   
 .  $b_1, \dots, b_{n-1}$  sont des champs de vecteurs constants sur  $\mathbb{R}^n$ .

Définition

Dans la suite nous appellerons "asservissements quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ ", les systèmes asservis définis ci-dessus.

Si pour un asservissement quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ , on se donne un critère  $J(x) = x_i$ , l'étude de la contrôlabilité le long des trajectoires de la famille de champs de vecteurs

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\}$$

sur  $\mathbb{R}^n$  permet d'énoncer des critères pour que toute commande optimale de  $U_{n-1}$  soit bang-bang ou presque bang-bang.

Le premier paragraphe de ce chapitre sera consacré à l'énoncé de tels critères.

Le second paragraphe donne une réponse au problème suivant : étant donné un champ de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  et le critère  $J(x) = x_i, i \in \{1, 2\}$ , existe-t-il un champ de vecteurs constant  $b$  (sur  $\mathbb{R}^2$ ) tel que toute commande optimale de l'asservissement quadratique

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + b u; u \in U_1$$

soit bang-bang.

Le troisième paragraphe cherche une représentation canonique des asservissements quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  ayant la propriété suivante : l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X,b](x)$  est parallèle à  $b$  est vide.

Dans le quatrième paragraphe enfin, nous donnons des applications des critères établis dans le premier paragraphe.

### 3.1. Critères bang-bang

=====

Comme précédemment, afin de faciliter la présentation des critères, on se limitera au cas où  $X$  est un champ de vecteurs quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  et à celui où il est un champ de vecteurs quadratique sur  $\mathbb{R}^3$ ; la généralisation au cas où  $X$  est quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ , étant aisée.

#### 3.1.1. Critère 1

Soient l'asservissement quadratique sur  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + b u; u \in U_1$$

et le critère  $J(x) = x_i, i \in \{1,2\}$ .

On désigne par  $\Lambda$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X,b](x)$  est parallèle à  $b$ .

Dans ces conditions, une condition suffisante pour que toute commande optimale soit bang-bang est qu'il n'existe dans  $U_1$  aucune commande  $u^*$  non bang-bang telle que  $\Lambda$  soit un invariant du champ de vecteurs  $X + b u^*$ .

#### 3.1.2. Critère 2

Soient l'asservissement quadratique sur  $\mathbb{R}^3$

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + b_1 u_1 + b_2 u_2; u = (u_1, u_2) \in U_2$$

et le critère  $J(x) = x_i, i \in \{1,2,3\}$ .

Soit de plus  $\hat{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - S^3$  tel que

$$m_{b_1}(\hat{x}) = m_{b_2}(\hat{x}) = 0$$

On désigne par  $\pi^\circ$  le plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ ; et par  $\Lambda$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles à  $\pi^\circ$ .

Dans ces conditions,

(i) : si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}))^2 > (\hat{b}_1^2 \cdot m_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x})),$$

toute commande optimale est bang-bang ou presque bang-bang.

(ii) : si

$$(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 \cdot m_X(\hat{x}))^2 \leq (\hat{b}_1^2 \cdot m_X(\hat{x})) (\hat{b}_2^2 \cdot m_X(\hat{x})),$$

une condition suffisante pour que toute commande optimale soit bang-bang ou presque bang-bang est qu'il n'existe dans  $U_2$  aucune commande  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  non bang-bang et non presque bang-bang telle que  $\Lambda$  soit un invariant du champ de vecteurs  $X + b_1 u_1^* + b_2 u_2^*$ .

En vertu de la propriété 0.1.11., ces deux critères sont des conséquences directes des corollaires 2.1.3., 2.2.5. et 2.2.8.

Nous allons à présent montrer sur un exemple que les conditions exprimées dans les critères 1 et 2 ne sont pas nécessaires pour que toute commande optimale soit bang-bang ou presque bang-bang.

Cela n'est d'ailleurs pas surprenant puisque d'une part, on sait (voir corollaires 2.1.3., 2.2.5 et 2.2.8.) qu'elles expriment que toute commande extrême est bang-bang ou presque bang-bang; et que d'autre part, l'ensemble des commandes optimales est inclus dans l'ensemble des commandes extrêmes d'après la propriété 0.1.11.

### Exemple

Prenons l'asservissement quadratique

$$(\mathcal{A}) : \frac{dx}{dt} = X(x) + b u; u \in U_1$$

où :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 + x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On demande de maximiser  $x_2(T)$ ,  $T > 0$ ; les conditions initiales étant

$$x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

L'hamiltonien de  $(\mathcal{A})$  s'écrit

$$H(x, u, \eta) = \eta(x_1 + u) + x_1^2 + x_1 + 1 + u$$

où  $\eta$  vérifie l'équation adjointe

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta - 2x_1 - 1.$$

Posons  $\Psi(t) = \eta(t) + 1$ . Du principe du maximum de Pontryagin, il résulte que si  $u$  est une commande optimale, l'équation adjointe admet une solution  $\eta(t)$  non triviale telle que :

$$-\forall t \in [0, T] \text{ tel que } \Psi(t) > 0 : u^*(t) = +1$$

$$-\forall t \in [0, T] \text{ tel que } \Psi(t) < 0 : u(t) = -1.$$

Sur les intervalles de temps  $\Delta$  où la fonction  $\Psi(t)$  s'annule le principe du maximum ne permet pas de déterminer la commande optimale  $u^*(t)$ . Cependant, sur de tels intervalles, on a :

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0$$

c'est à dire :  $\forall t \in \Delta : \frac{d\eta}{dt} = 0$

Ce qui, compte tenu de l'équation adjointe, entraîne que pour tout  $t$  de  $\Delta$  on a

$$x_1(t) = 0.$$

Moyennant la continuité de  $x_1(t)$ , il s'ensuit que pour tout  $t$  de  $\Delta$ , on a

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.$$

En reportant ces valeurs de  $x_1(t)$  et  $\frac{dx_1}{dt}(t)$  dans la première équation de l'asservissement ( $\mathcal{A}$ ), on obtient

$$\forall t \in \Delta : u(t) = 0.$$

En conséquence, sur les intervalles de temps  $\Delta$  où la fonction  $\Psi(t)$  s'annule on a  $u(t) = 0$  et  $x_1(t) = 0$ . La question qui se pose à présent est de savoir si la solution  $(x_1=0, u=0)$  est optimale. Pour répondre à cette question on va faire appel au théorème de Green-Rieman.

En effet, tirons de la première équation de ( $\mathcal{A}$ )

$$u \, dt = dx_1 - x_1 \, dt.$$

En reportant cette quantité dans la seconde équation différentielle de ( $\mathcal{A}$ ), on obtient le long de toute courbe fermée  $\gamma$  du plan  $(x_1, t)$  :

$$J_\gamma = \int_\gamma ((x_1^2 + 1) \, dt + dx_1)$$

ce qui, en utilisant la formule de Green-Rieman, donne

$$J_\gamma = 2 \iint_{S_\gamma} x_1 \, dx_1 \, dt$$

où  $S_\gamma$  est la surface délimitée par  $\gamma$ .

Grâce à cette expression, on vérifie facilement que sur les intervalles de temps  $\Delta$  où la fonction  $\Psi(t)$  s'annule, les trajectoires optimales sont celles qui correspondent à  $u(t) = +1$  et  $u(t) = -1$ . En conséquence, toute commande optimale maximisant  $x_2(T)$  est bang-bang. Cependant, un calcul simple

montre que l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b(x)]$  est parallèle à  $b$ , est la droite  $x_1=0$  qui est un invariant de  $X$ .

Avec cet exemple d'asservissement quadratique où l'ensemble  $\Lambda$  est un invariant de  $X$  et où toute commande optimale est bang-bang, s'achève le premier paragraphe de cette quatrième partie du travail.

### 3.2. Couples $(X, b)$ , $X$ champ de vecteurs quadratique sur $\mathbb{R}^2$

=====

et  $b$  champ de vecteurs constant sur  $\mathbb{R}^2$ , tels que

=====

$\Lambda = \{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ où le vecteur } [X, b](x) \text{ est parallèle à } b \}$   
soit vide.

=====

Dans ce paragraphe, nous nous posons le problème suivant : étant donné un champ de vecteurs quadratique sur  $\mathbb{R}^2$ , existe-t-il un champ de vecteurs constant  $b$  sur  $\mathbb{R}^2$  tel que l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$  soit vide. L'étude de ce problème n'est pas sans intérêt car, si  $b$  est un tel champ de vecteurs, le couple de champs de vecteurs  $(X, b)$  vérifie le critère bang-bang 3.1.1.

Le plan de ce paragraphe sera le suivant : après avoir établi un algorithme de détermination des champs de vecteurs constants  $b$ , nous nous poserons la question de savoir si les résultats obtenus se généralisent aux champs de vecteurs polynomiaux sur  $\mathbb{R}^2$  de degré strictement supérieur à 2. Enfin, nous donnerons des exemples d'illustration de l'algorithme.

#### Algorithme de détermination des champs de vecteurs constants $b$ .

Ecrivons les champs de vecteurs quadratiques  $X$  sur  $\mathbb{R}^2$  sous la forme

$$X = \begin{pmatrix} t_x A_1 x \\ t_x A_2 x \end{pmatrix} + Bx + c$$



où : .  $A_1$  et  $A_2$  sont deux matrices symétriques d'ordre 2  
 .  $B$  est une matrice d'ordre 2  
 .  $c$  est un vecteur du plan.

Désignons à présent par  $\det$ , le déterminant de deux vecteurs du plan. Avec ces notations, pour tout champ de vecteurs constant

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\det(v, [X, v])(x)$  est une fonction linéaire de  $x$

qui s'écrit

$${}^t_x \cdot (v_1 A_2 - v_2 A_1) v + \det(v, B v).$$

Il est donc non nul en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  si, et seulement si,  $v$  n'est pas vecteur propre de la matrice  $B$  et, est sur l'intersection des coniques dégénérées définies par les équations

$$(e) : (x_1 A_2 - x_2 A_1) x = 0.$$

Il en résulte que pour tout champ de vecteurs quadratique  $X$  sur  $\mathbb{R}^2$ , il existe trois possibilités :

- ou bien il n'existe aucun champ de vecteurs constant  $b$  tel que  $\Lambda$  soit vide
- ou bien tous les champs de vecteurs constants  $b$  tels que  $\Lambda$  soit vide ont même support
- ou bien il existe deux droites concourantes qui sont les supports de tous les champs de vecteurs constants  $b$  tels que  $\Lambda$  soit vide.

Ces champs de vecteurs constants  $b$  peuvent être déterminés explicitement à l'aide du tableau ci-après où  $I$  désigne l'intersection des coniques dégénérées, définies par les équations (e).

I	matrice B	Conclusions
I est l'origine des coordonnées	la matrice B est quelconque	Il n'existe pas de champ de vecteurs constant $b$ tel que $\Lambda$ soit vide
I est une droite $d$	d est droite propre de la matrice B	Il n'existe pas de champ de vecteurs constant $b$ tel que $\Lambda$ soit vide
	d n'est pas droite propre de la matrice B	d est le support des champs de vecteurs constants $b$ tels que $\Lambda$ soit vide
I est formée de deux droites concourantes $d_1$ et $d_2$	$d_1$ et $d_2$ sont droites propres de la matrice B	Il n'existe pas de champ de vecteurs constant $b$ tel que $\Lambda$ soit vide
	une seule des droites $d_1$ et $d_2$ est droite propre de la matrice B	$d_1$ (resp. $d_2$ ) est le support des champs de vecteurs constants $b$ tels que $\Lambda$ soit vide si $d_2$ (resp. $d_1$ ) est droite propre de la matrice B
	aucune des droites $d_1$ et $d_2$ n'est droite propre de la matrice B	$d_1$ et $d_2$ sont les supports des champs de vecteurs constants $b$ tels que $\Lambda$ soit vide

Nous allons à présent donner quelques exemples d'illustration, avec des choix particuliers du champ de vecteurs quadratique X.

Exemple 1 :

$$\text{Prenons } X = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_2^2 + x_1 \end{pmatrix}$$

Les équations (e) définissent dans le plan deux hyperboles dégénérées en les deux axes de coordonnées. Comme ces axes ne sont pas des droites propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ils sont les supports des champs de vecteurs constants b tels que  $\Lambda$  soit vide.

Exemple 2 :

$$\text{Prenons } X = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

L'axe des ordonnées est l'intersection de la parabole et de l'hyperbole dégénérées définies par les équations (e). Comme cet axe n'est pas droite propre de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , il est le support des champs de vecteurs constants b tels que  $\Lambda$  soit vide

Exemple 3 :

$$\text{Prenons } X = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_1 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

L'axe des ordonnées est l'intersection des deux hyperboles dégénérées définies par les équations (e). Comme cet axe est droite propre de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , il n'existe pas de champ de vecteurs constant b tel que  $\Lambda$  soit vide

Exemple 4 :

$$\text{Prenons } X = \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 + x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

L'origine des coordonnées étant l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole dégénérées définies par les équations (e). En conséquence, il n'existe pas de champ de vecteurs constant  $b$  tel que  $\Lambda$  soit vide.

On voit donc que pour un champ de vecteurs quadratique sur  $\mathbb{R}^2$ , il existe au plus deux droites concourantes qui sont les supports des champs de vecteurs constants  $b$  tels que  $\Lambda$  soit vide. On peut alors se demander si les champs de vecteurs polynomiaux de degré strictement supérieur à 2 sur  $\mathbb{R}^2$  possèdent cette même propriété. L'exemple ci-dessous montre clairement que non.

Exemple

$$\text{Prenons } X = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2n+1 \\ -x_1 \quad -x_1 \end{pmatrix}$$

Pour tout champ de vecteurs constant  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $\det(b, [X, b](x))$  a

pour expression

$$- ((2n+1)x_1^{2n} + 1) b_1^2 - b_2^2.$$

Il est donc négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ . En conséquence, pour tout champ de vecteurs constant  $b$  sur  $\mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  où le vecteur  $[X, b](x)$  est parallèle à  $b$  est vide.

Cet exemple montre plus précisément que, contrairement aux champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$ , on peut trouver des champs de vecteurs polynomiaux sur  $\mathbb{R}^2$  de degré strictement supérieur à 2 pour lesquels il existe une infinité de droites concourantes qui sont les supports des champs de vecteurs constants  $b$  tels que  $\Lambda$  soit vide.

Pour les champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  on peut avoir des situations à peu près analogues. Prenons par exemple le champ de vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Pour tout couple de champs de vecteurs constants  $(b_1, b_2)$  tel que

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{on a}$$

$$\det ([X, b_i](x), b_1, b_2) = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(2b_{i1}x_1 + b_{i2})$$

pour tout  $i$  de  $\{1, 2\}$ .

Il en résulte que pour tout couple de champs de vecteurs constants  $(b_1, b_2)$  tel que les vecteurs  $b_1$  et  $b_2$  ne soient pas dans un même même plan orthogonal au plan  $x_3=0$ , l'ensemble  $\Lambda$  des points  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[X, b_1](x)$  et  $[X, b_2](x)$  sont parallèles au plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ , est vide. D'où il existe une infinité de plans sécants tels que si l'on choisit  $b_1$  et  $b_2$  engendrant un plan parallèle à l'un d'eux, l'ensemble  $\Lambda$  est vide. Ceci fait apparaître une différence entre les champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  et ceux quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$  où l'on avait vu qu'il existait au plus deux droites concourantes, supports des champs de vecteurs constants  $b$  tels que  $\Lambda$  soit vide. Remarquons enfin, pour terminer, qu'en ce qui concerne les champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$ , l'élaboration d'un algorithme de détermination des couples de champs de vecteurs constants  $(b_1, b_2)$  tels que  $\Lambda$  soit vide n'est pas aisée. En effet, si on écrit les champs de vecteurs quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$  sous la forme

$$X = \begin{pmatrix} t_x A_1 x \\ t_x A_2 x \\ t_x A_3 x \end{pmatrix} + Bx + c$$

où :

- $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont des matrices symétriques d'ordre 3
- $B$  est une matrice d'ordre 3
- $c$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ ;

alors, pour tout couple de champs de vecteurs  $(b_1, b_2)$  tel que

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$$

on a :

$$\det ([X, b_i](x), b_1, b_2) = 2^t x [(b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}) A_1 + (b_{12} b_{21} - b_{11} b_{23}) A_2 + (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) A_3] b_i + \det (Bb_i, b_1, b_2)$$

quel que soit  $i$  dans  $\{1, 2\}$ .

Il en résulte, en posant

$$M = (b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}) A_1 + (b_{13} b_{21} - b_{11} b_{23}) A_2 + (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) A_3,$$

que  $\Lambda$  est vide si, et seulement si,

$$Mb_1 \wedge Mb_2 = 0$$

et les vecteurs  $Bb_1, Bb_2$  ne sont pas tous deux parallèles au plan engendré par  $b_1$  et  $b_2$ .

Ceci fait apparaître la difficulté à dresser un algorithme pour déterminer explicitement les couples de champs de vecteurs constants tels que  $\Lambda$  soit vide car, pour cela, on devrait chercher des couples  $(b_1, b_2)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui sont tels que le vecteur  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^6$  soit parallèle à l'intersection de trois hypersurfaces de  $\mathbb{R}^6$  de degré 6.

Nous allons à présent, dans le paragraphe qui suit, chercher une représentation canonique des asservissements quadratiques à ensemble  $\Lambda$  vide.

### 3.3. Représentation canonique des asservissements quadratiques à ensemble $\Lambda$ vide

Il est bien connu [17] que tout asservissement linéaire sur  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in U_1$$

à ensemble  $\Lambda$  vide peut, à l'aide d'un changement de coordonnées  $x = Py$ , s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = (-\det A \quad \text{tr } A) y + u \end{cases}$$

où  $\det A$  et  $\text{tr } A$  désignent respectivement le déterminant et la trace de la matrice  $A$ .

On peut donc espérer avoir une représentation canonique du même type pour les asservissements quadratiques sur  $\mathbb{R}^2$ . En fait, on a le théorème suivant

#### Théorème 1

Si

$$(\mathcal{A}) : \frac{dx}{dt} = X(x) + bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in U_1$$

est un asservissement quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  à ensemble  $\Lambda$  vide, il existe un changement de coordonnées  $x = Py$  qui transforme  $(\mathcal{A})$  en l'asservissement quadratique

$$(\mathcal{A}'): \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha y_1^2 + y_2 + \beta \\ \frac{dy_2}{dt} = f(y) + u \end{cases}$$

où :

- $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels
- $f(y)$  est un polynôme du second degré en  $y$ .

### Démonstration du théorème 1

Ecrivons  $X(x)$  sous la forme

$$X(x) = \begin{pmatrix} t_x A_1 x \\ t_x A_2 x \end{pmatrix} + Bx + c$$

où :

- $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices symétriques d'ordre 2.
- $B$  est une matrice d'ordre 2
- $c$  est un vecteur du plan.

Avec ces notations, on sait (voir 3.2.1.) que puisque  $\Lambda$  est vide,  $b$  n'est pas vecteur propre de la matrice  $B$  et vérifie l'égalité

$$(b_1 A_2 - b_2 A_1)b = 0$$

$b_1$  et  $b_2$  étant les composantes de  $b$ .

Considérons alors la matrice régulière

$$P_1 = (Bb, b)$$

On a

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

et par conséquent,

$$P_1^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que  $B$  est solution de son équation caractéristique, on vérifie aisément que

$$BP_1 = P_1 \cdot \begin{pmatrix} \text{tr } B & 1 \\ -\det B & 0 \end{pmatrix}$$



et par suite

$$P_1^{-1} \cdot B P_1 = \begin{pmatrix} \text{tr } B & 1 \\ -\det B & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que par le changement de coordonnées  $x = P_1 \bar{x}$ ,

( $\mathcal{A}$ ) se transforme en l'asservissement quadratique

$$(\bar{\mathcal{A}}) : \frac{d\bar{x}}{dt} = P_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} {}^t(P_1 \bar{x}) & A_1 & (P_1 \bar{x}) \\ {}^t(P_1 \bar{x}) & A_2 & (P_1 \bar{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{tr } B & 1 \\ -\det B & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + P_1^{-1} c.$$

Mais, du fait que

$$(b_1 A_2 - b_2 A_1) b = 0,$$

on obtient par un calcul simple

$$P_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} {}^t(P_1 \bar{x}) & A_1 & (P_1 \bar{x}) \\ {}^t(P_1 \bar{x}) & A_2 & (P_1 \bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \bar{x}_1^2 \\ {}^t \bar{x} Q \bar{x} \end{pmatrix}$$

où :

$$\alpha = 1 / \{ \det P_1 [ {}^t(Bb) (b_1 A_2 - b_2 A_1) (Bb) ] \}$$

et  $Q$  est une matrice symétrique.

En conséquence, par le changement de coordonnées  $x = P_1 \bar{x}$ , l'asservissement ( $\mathcal{A}$ ) se transforme en l'asservissement quadratique

$$(\bar{\mathcal{A}}) : \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha \bar{x}_1^2 \\ {}^t \bar{x} Q \bar{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{tr } B & 1 \\ -\det B & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + P_1^{-1} c + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Choisissons maintenant pour matrice  $P_2$ , la matrice régulière

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\text{tr } B & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple permet de vérifier que pour le changement de coordonnées  $\bar{x} = P_2 y$ , l'asservissement ( $\bar{\mathcal{A}}$ ) se transforme en l'asservissement quadratique

$$(\mathcal{A}) : \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha y_1^2 + y_2 + \beta \\ \frac{dy_2}{dt} = t_Y K_Y - (\det B)y_1 + (\text{tr } B)y_2 + \gamma + u \end{cases}$$

où :

- K est une matrice symétrique d'ordre 2
- $\alpha$  et  $\gamma$  sont deux réels tels que

$$(P_1 \ P_2)^{-1} c = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

En conclusion, par le changement de coordonnées  $x = P_1 \ P_2 \ y$ , l'asservissement  $(\mathcal{A})$  se transforme en l'asservissement quadratique

$$(\mathcal{A}') : \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha y_1^2 + y_2 + \beta \\ \frac{dy_2}{dt} = t_Y K_Y + (-\det B \ \text{tr } B) y + \gamma + u \end{cases}$$

ce qui est la conclusion du théorème.

Pour les asservissements quadratiques sur  $\mathbb{R}^3$

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + b_1 u_1 + b_2 u_2, \quad u = (u_1, u_2) \quad U_2$$

à ensemble  $\Lambda$  vide, la présence des champs de vecteurs constants  $b_1$  et  $b_2$  empêche d'avoir une représentation canonique simple. Cependant on peut énoncer le résultat suivant :

### Théorème 2

Si

$$(\mathcal{A}) : \frac{dx}{dt} = X(x) + b_1 u_1 + b_2 u_2, \quad u = (u_1, u_2) \quad U_2$$

est un asservissement quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  à ensemble  $\Lambda$  vide alors, il existe un changement de coordonnées  $x = Py$  qui transforme  $(\mathcal{A})$  en l'asservissement quadratique

$$(A') : \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha y_1^2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \beta \\ \frac{dy_2}{dt} = f(y) + u_1 \\ \frac{dy_3}{dt} = g(y) + u_2 \end{cases}$$

où :

- $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont des réels non tous nuls
- $\alpha$ ,  $\lambda_1$  et  $\beta$  sont des réels
- $f(y)$  et  $g(y)$  sont des polynômes du second degré en  $y$ .

### Démonstration du théorème 2

Ecrivons  $X(x)$  sous la forme

$$X(x) = \begin{pmatrix} t_x & A_1 x \\ t_x & A_2 x \\ t_x & A_3 x \end{pmatrix} + Bx + c$$

où :

- $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont des matrices symétriques d'ordre 3
- $B$  est une matrice d'ordre 3
- $c$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$

(A) étant un asservissement quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  à ensemble  $\Lambda$  vide, on sait (voir 3.2.) qu'il existe deux réels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que la matrice  $(B(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2), b_1, b_2)$  soit régulière et

$$\begin{aligned} & [(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}) A_1 + (b_{13}b_{21} - b_{23}b_{11}) A_2 \\ & + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) A_3] (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) = 0, \end{aligned}$$

les  $b_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ , étant les composantes des champs de vecteurs constants  $b_1$  et  $b_2$ .

Posons alors

$$P = (B(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2), b_1, b_2).$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, on vérifie aisément que par le changement de coordonnées  $x = Py$ , l'asservissement ( $\mathcal{A}$ ) se transforme en l'asservissement quadratique

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha y_1^2 \\ t_y Q_1 y \\ t_y Q_2 y \end{pmatrix} + P^{-1} B P y + P^{-1} c + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2$$

où :

- $Q_1$  et  $Q_2$  sont des matrices d'ordre 3
- $\alpha = (1/\det P) \{ {}^t (\alpha_1 B b_1 + \alpha_2 B b_2) [(b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}) A_1 + (b_{13} b_{21} - b_{23} b_{11}) A_2 + (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) A_3] (\alpha_1 B b_1 + \alpha_2 B b_2) \}$ .

Ce qui termine la démonstration du théorème car

$P^{-1} B P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1} B P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ne sont pas tous les deux parallèles au plan engendré par les vecteurs  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 3.4. Applications des critères bang-bang

=====

Dans ce paragraphe nous allons, pour clôturer cette dernière partie du travail, donner des exemples d'applications des critères 3.1.1. et 3.1.2.

#### Exemple 1

Prenons le système bilinéaire

$$\frac{dx}{dt} = (A + A_1 u_1 + A_2 u_2) x + b_1 u_1 + b_2 u_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

où :

- $A, A_1$  et  $A_2$  sont des matrices constantes d'ordre 2
- $b_1$  et  $b_2$  sont des vecteurs du plan
- les commandes  $u_1$  et  $u_2$  sont telles que

$$u_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad -1 \leq u_2 \leq +1.$$

On demande de choisir les vecteurs  $b_1, b_2$  et un réel  $k$  tel que sous l'effet du feedback

$$u_1 = kx_2,$$

tout retour à zéro en temps minimal soit bang-bang.

Pour certaines valeurs de  $A, A_1$  et  $A_2$ , le critère 3.1.1. permet de répondre à cette question. Par exemple, si  $A$  n'admet pas le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour vecteur propre et si  $A_2$  est nulle, on a la solution suivante :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $A_1$	On choisit : - $b_2$ parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - $b_1$ et $k$ quelconques
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre de $A_1$	On choisit : - $b_2$ parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - $b_1$ et $k$ tels que le vecteur $(k \alpha A_1 + A) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + kb_1$ ne soit pas parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha$ vérifiant l'égalité $(0 \ 1) (k \alpha A_1 + A) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

En effet, sous l'effet du feedback  $u_1 = kx_2$  on obtient l'asservissement quadratique

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + b_2 u_2, \quad u_2 \in U_1$$

avec  $X(x) = kx_2 A_1 x + Ax + kx_2 b_1$ .

On peut alors facilement se convaincre que pour le premier choix  $\Lambda$  est vide; tandis que pour le second choix  $\Lambda$  est une droite

parallèle à la droite  $x_2=0$  et qu'il n'existe pas de commande  $u_2$ ,  $u_2 \in U_1$ , telle que  $\Lambda$  soit un invariant de  $X$ .

### Exemple 2

Revenons à l'exemple de Forester qui a été présenté dans l'introduction. En y effectuant le changement de variable

$$u = (v+1) (C^2-4AD)/(8BD)$$

on obtient l'asservissement quadratique

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + bv, \quad v \in U_1$$

$$\text{où } X(x) = \begin{pmatrix} A + [(C^2-4AD)/(8D)] - Cx_1 + Dx_1^2 \\ E + K [(C^2-4AD)/(8D)] - Fx_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b = [(C^2-4AD)/(8BD)] \begin{pmatrix} B \\ K \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire montre alors que  $\Lambda$  est la droite  $x_1 = (KC-FB)/(2KD)$ . Par ailleurs, si l'on pose  $\alpha = (KC-FB)/(2KD)$ , on vérifie facilement que

$$\beta = [C\alpha - D\alpha^2 - A - (C^2-4AD)/(8D)] [(8D)/(C^2-4AD)]$$

est dans  $[-1,+1]$  et que  $\Lambda$  est un invariant du champ de vecteurs  $X + \beta b$ .

Il n'est donc pas surprenant que la commande

$$u = (\beta + 1) [(C^2-4AD)/(8BD)]$$

soit optimale dans l'exemple de Forester car on sait maintenant qu'elle est extrême puisque la commande  $v = \beta$  est extrême d'après le corollaire 2.1.3.

### Exemple 3

Prenons le système linéaire d'ordre 2

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq u_i \leq +1$$

et considérons le critère quadratique : maximiser

$$\int_0^T ({}^t x Qx) dt, \quad Q \text{ étant une matrice régulière.}$$

En posant  $B = (b_1, b_2)$ ,  $x_3(t) = \int_0^t ({}^t x Qx) dt$  et  $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  on

obtient l'asservissement quadratique

$$\frac{dy}{dt} = Y(y) + c_1 u_1 + c_2 u_2, \quad u = (u_1, u_2) \in U_2$$

$$Y(y) = \begin{pmatrix} Ax \\ {}^t x Qx \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_2 = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'ensemble  $\Lambda$  des points  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  où les vecteurs  $[Y, c_1](y)$  et  $[Y, c_2](y)$  sont parallèles au plan engendré par les vecteurs  $c_1$  et  $c_2$  est la droite

$x_1 = x_2 = 0$  qui est l'ensemble des points singuliers du champ de vecteurs  $Y$ . En conséquence, toute commande optimale maximisant

$x_3(T) = \int_0^T ({}^t x Qx) dt$  est soit bang-bang, soit presque bang-bang

d'après le critère 3.1.2.

#### Exemple 4

Faisons dans [17] (exercice 1, page 418)  $u_3(t) \equiv 0$ . Nous obtenons l'asservissement quadratique

$$\frac{d\omega}{dt} = X(\omega) + b_1 u_1 + b_2 u_2, \quad u = (u_1, u_2) \in U_2$$

$$\text{où } X(\omega) = \begin{pmatrix} [(I_2 - I_3)/I_1] \omega_2 \omega_3 \\ [(I_3 - I_1)/I_2] \omega_3 \omega_1 \\ [(I_1 - I_2)/I_3] \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = (1/I_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b_2 = (1/I_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cet asservissement décrit le mouvement (contrôlé) d'un solide en rotation autour d'un axe.  $I_1, I_2, I_3$  sont les moments d'inertie du solide et  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est sa vitesse angulaire.

Un calcul élémentaire montre que  $\Lambda$  est la droite  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  qui est un ensemble de points singuliers du champ de vecteurs  $X$ . Comme cette droite est orthogonale au plan engendré par les vecteurs  $b_1$  et  $b_2$ , toute commande optimale maximisant (ou minimisant) une des composantes de la vitesse angulaire est soit bang-bang, soit presque bang-bang d'après le critère 3.1.2.

Ces exemples d'applications des critères 3.1.1. et 3.1.2. achèvent cette dernière partie du travail.-

-----



## CONCLUSION

---

Ce travail, loin d'être exhaustif, ne constitue qu'un petit pas dans l'étude des systèmes asservis non linéaires

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \sum_{i=1}^m Y_i(x) u_i(t)$$

(appelés encore systèmes bilinéaires) dont on sait peu de choses.

L'importance de ces systèmes est pourtant considérable car ils décrivent de nombreux processus naturels. A partir de ce travail, on peut se poser plusieurs questions dont les réponses permettent un progrès dans l'étude de la théorie des systèmes bilinéaires. La première question qui, à mon avis, se pose de manière naturelle est la suivante : si une famille

$$\mathcal{D} = \left\{ X + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i; u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U_{n-1} \right\}$$

de champs de vecteurs quadratiques a toutes ses trajectoires correspondantes à des commandes non presque bang-bang localement contrôlables, existe-t-il un vecteur  $c$  appartenant à l'espace vectoriel engendré par  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  tel que toute trajectoire de la famille de champs de vecteurs  $\{X + c u; u \in U_1\}$ , correspondante à une commande non bang-bang, soit localement contrôlable.

Enfin l'étude plus générale des champs de vecteurs  $b_i$  non constants reste encore ouverte et présente certainement plus de difficultés.-

-----

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] J.W. Forester. An optimization study of the pollution subsystem of the world dynamics model.  
Lecture notes in economics and mathematical systems. Vol. 111
- [2] C. Godbillon. Géométrie différentielle et mécanique analytique.  
Hermann (1969)
- [3] H. Hermes. On local and global controllability.  
SIAM Journal Control, Vol. 12 (1974)
- [4] H. Hermes. On necessary and sufficient conditions for local controllability among a reference trajectory.  
Geometric methods in system theory.  
D. Reidel Publishing Company. Dordrech Holand  
Boston U.S.A. (1973)
- [5] H. Hermes. Local controllability and sufficient conditions in singular problems.  
Journal of differential equations, n° 20 (1976)
- [6] H. Hermes, G.W. Haynes. On the nonlinear control problem with control appearing linearly.  
SIAM Journal Control, Vol. 1 (1963)
- [7] H. Hermes. Local controllability and sufficient conditions in singular problems, II.  
SIAM Journal Control, Vol. 14 (1976)
- [8] R. Hirshon. Controllability in nonlinear systems.  
(loc. cit. voir [4])
- [9] R. Hirshon. Controllability of nonlinear systems.  
SIAM Journal Control, Vol. 14 (1976)
- [10] V. Jurdjevic. Certain controllability property of analytic control systems.  
SIAM Journal Control, Vol. 10 (1972)
- [11] H.J. Kelly, R.E. Kopp, H.G. Moyer. Singular extremals.  
Topics in Optimization.  
Academic Press (1967)

- [12] A. Krener. The high order maximum principle.  
Geometric methods in system theory.  
(loc. cit. voir [4])
- [13] A. Krener. The high order maximal principle and its application to singular extremals.
- [14] J.P. La Salle, H. Hermes. Functional analysis and time optimal control.  
Academic Press, New.York (1969)
- [15] C. Lobry. Cours de contrôle de l'Université de Bordeaux (1975)
- [16] L. Markus. Controllability of nonlinear processes.  
SIAM Journal Control, Vol. 3 (1965)
- [17] L. Markus, E.S. Lee. Foundations of optimal control Theory.  
John Wiley (1967)
- [18] L. Markus, G. Sell. Capture and control in conservative dynamical systems.  
Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 31 (1968)
- [19] H.G. Moyer. Sufficient conditions for a strong minimum in singular control problems.  
SIAM Journal Control, Vol. 11 (1973)
- [20] A. SEC. La forme de Liouville et le principe du maximum de Pontryagin.  
Colloque de Contrôle de Metz (1976)
- [21] A. SEC. Forme de Liouville et trajectoires extrêmes.  
C.R. Académie des Sciences, Paris - t. 286 (1978) A - pages 413-415
- [22] H. Sussman, V. Jurdjevic. Controllability of nonlinear systems.  
Journal of differential equations, Vol. 12 (1972)