



HAL
open science

Contrôlabilités des systèmes discrets

Raymond Peiffer

► **To cite this version:**

Raymond Peiffer. Contrôlabilités des systèmes discrets. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1978. Français. NNT : 1978METZ002S . tel-01775590

HAL Id: tel-01775590

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775590v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE METZ
FACULTÉ DES SCIENCES

**THÈSE
DE
SPÉCIALITÉ
DE
TROISIÈME CYCLE**

MENTION MATHÉMATIQUES

**CONTROLABILITÉ
DES SYSTÈMES DISCRETS**

par

Raymond PEIFFER

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19780045
Cote	SI/M3 78/2
Loc	Magasin

Président : M^{me} A. SEC

Membres : M. J.-P. DAX

M. A. ROUX

M. B. SCHMITT



ANNÉE UNIVERSITAIRE 1977-78

Madame SEC a bien voulu diriger ce travail. Je l'ai souvent consultée et ses critiques me furent très utiles. Elle a également accepté de présider le Jury. Je l'en remercie très sincèrement.

Par ses conseils, Monsieur SCHMITT m'a permis d'avancer dans mes recherches. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Messieurs DAX et ROUX de bien vouloir juger ce travail.

Que soit remercié Monsieur MUTEL pour les conseils qu'il m'a donnés, concernant les applications possibles.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

SOMMAIRE

<u>CHAPITRE 0</u>	: Préliminaires - Notations	1
<u>CHAPITRE 1</u>	: Processus de discrétisation	7
1-A	Processus de discrétisation	8
1-B	Processus inverse	15
<u>CHAPITRE 2</u>	: Géométrie du domaine de contrôlabilité	29
2-A	Propriétés topologiques et algébriques	30
2-B	Décomposition géométrique	36
2-C	Géométrie comparée	51
<u>CHAPITRE 3</u>	: Critères de contrôlabilité	60
3-A	Cas des systèmes à contrôles multidirectionnels	64
3-B	Cas des systèmes à contrôles unidirectionnels	68
3-C	Contrôlabilité comparée	99

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION :

On appelle système asservi à temps discret, une équation itérative de la forme $x_t = f_t(x_{t-1}, u_{t-1})$, où t représente le temps ($t \in \mathbb{N}^*$), x_{t-1} l'état du processus ($x_{t-1} \in \mathbb{R}^n$) et u_{t-1} la commande qui lui est appliquée ($u_{t-1} \in \Omega$, sous-ensemble de \mathbb{R}^p : $1 \leq p \leq n$), à l'instant $t-1$; l'indice t de $f_t(x., u.)$ signifiant que l'on considère des fonctions différentes (ou non) d'un instant à l'autre [2].

Le mouvement ultérieur du système se définit univoquement, si l'état initial x_0 est donné et si l'on a choisi un contrôle admissible, c'est à dire, une suite finie de commandes u_0, u_1, \dots, u_{t-1} d'éléments de Ω .

L'étude du domaine de contrôlabilité au point x , c'est à dire de l'ensemble des points x_0 , tels qu'il existe une commande admissible assurant le transfert du processus de la position initiale x_0 à l'état x , s'appelle l'étude de la contrôlabilité.

Cette définition est également valable pour les systèmes guidables à temps continu, l'objet considéré cette fois-ci, étant décrit par une équation différentielle de la forme $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$, où t représente le temps ($t > 0$), $x(.)$ son état et $u(.)$ la commande qui lui est appliquée.

L'étude théorique des systèmes récurrents (processus libres associés aux systèmes asservis itératifs) a précédé de longtemps celle de la contrôlabilité. Ce sont de Moivre (vers 1730) et Laplace (vers 1810) qui amorcèrent l'emploi de celles-ci, en utilisant les premiers le concept de fonctions génératrices, appelées Z-transformées [18], qu'ils ont appliqués à l'étude des variables aléatoires discrètes. L'étude systématique débuta plus tard, deux éléments essentiels dans le développement de cette théorie étant fournis par les traités de Boole (1860, [3]) et de Milne-Thomson [30].

L'intérêt de ces systèmes, aussi bien en Mathématique qu'en Automatique provient de leur utilisation dans diverses applications. Les informaticiens s'en servent en développant des algorithmes donnant la solution numérique d'équations différentielles ou aux dérivées partielles [16], tandis que des phénomènes physiques, décrits tout à fait naturellement en termes de temps discret [34], se présentent aux ingénieurs. De plus, certains processus physiques, dont la structure interne est inconnue, peuvent être approchés par des modèles d'équations récurrentes, l'évolution entrée-sortie étant partiellement déterminée par des mesures expérimentales. C'est pourquoi, les processus aux différences finies trouvent leur utilisation dans des domaines aussi divers que l'Automatique, l'Economie, la Statistique, l'Electricité, ... (pour des exemples, voir Goldberg [13]). Enfin, l'Informatique a permis l'étude de nombreux modèles et une littérature abondante en a résulté [19].

La formulation et la caractérisation de la propriété de contrôlabilité a été introduite, beaucoup plus récemment, par Kalman (1959, [20]-[21]) et ceci, pour une famille particulière de systèmes guidables à temps discret, de la forme (I) $x_t = Cx_{t-1} + Du_{t-1}$, où C et D sont deux matrices réelles, constantes, $n \times n$ et $n \times p$, quelconques.

Elle se formulait ainsi : sous quelles conditions peut-on transférer tout état initial en l'état désiré, en un temps fini, sous l'action de commandes non bornées ?

De nombreux ouvrages et articles ont suivi : Kalman [23], Gabasov [9]-[10], Weiss [43] et Boltianski [2]. Mais les recherches se sont rapidement orientées vers les processus différentiels asservis de la forme (D) $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, où A et B sont deux matrices réelles, constantes, $n \times n$ et $n \times p$, quelconques : Kalman [22]-[23], Weiss [40]-[41], Lee et Markus [27], Kalman [24]-[25], Weiss [42], Popov [33], Wahnham [44] (cette liste n'est évidemment pas exhaustive).

Comme en pratique les commandes appliquées sont soumises à des contraintes (elles sont toujours bornées), la propriété de contrôlabilité s'est modifiée ainsi : sous quelles conditions peut-on transférer tout état initial en l'état désiré, en un temps fini, sous l'action de commandes bornées ?

Comme précédemment et plus encore, les articles n'ont traité pratiquement que le cas des processus différentiels : Lee et Markus [27], Saperstone et Yorke [36], Brammer [5], Saperstone [37], Korobosov et Marinich [26], Brammer [6]; les systèmes discrets, à ma connaissance, ne faisant l'objet que du travail récent d'Evans et Murphy [8].

L'objet de ce travail est triple :

1- d'abord et essentiellement, de démontrer des critères de contrôlabilité des systèmes guidables de la forme (I) $x_t = Cx_{t-1} + Du_{t-1}$, dans le cas où le domaine des commandes est borné, aucun résultat n'étant, à ma connaissance, connu, la publication d'Evans et Murphy [8] ne considérant que des contrôles scalaires semi-bornés; en particulier le théorème suivant (3-16, p.68) :

" le processus (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si :

(i) l'opérateur linéaire $C_n [C, D]$ est de rang n et

(ii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre tV , associée à un élément $\lambda > 0$ du spectre de tC , s'il en existe, coupe le domaine $D\Omega$. "

La démonstration de ce résultat présente certaines difficultés provenant du fait que l'on travaille avec des contrôles, dits unidirectionnels, c'est à dire prenant leurs valeurs dans un domaine des commandes Ω , qui ne contient pas 0 en son intérieur, dans \mathbb{R}^p .

2- Ensuite, d'étudier la forme géométrique du domaine de contrôlabilité de ces mêmes processus. Le résultat suivant, dit théorème de décomposition géométrique (2-14, p.37), est démontré :

" si le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine, alors son domaine de contrôlabilité à l'origine s'écrit :

$$E13 : R_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus R_{\infty}^+$$

où R_{∞}^+ est un ouvert, borné, convexe de $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$, avec :

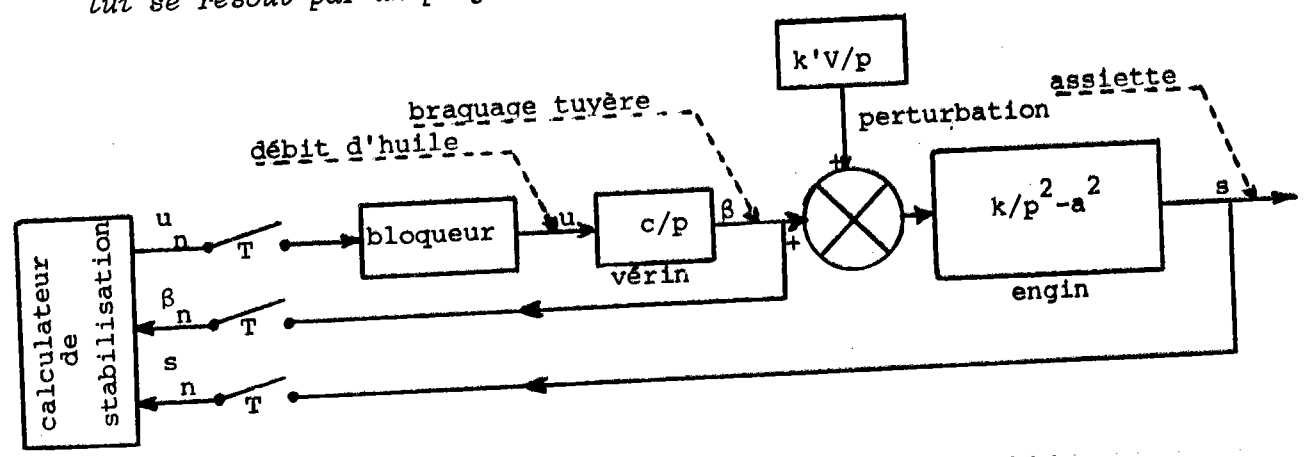
$$M^- = \{ j \in M, \text{ tel que } 0 < |\lambda_j| < 1 \} \text{ et } M^+ = \{ j \in M, \text{ tel que } |\lambda_j| > 1 \} . "$$

Les deux théorèmes, cités ci-dessus, et leurs corollaires permettent de déduire, aisément, des critères de globale (tout point initial peut être transféré à l'origine) et de complète contrôlabilité (tout point initial peut être transféré en tout point).

3- Et enfin, savoir sous quelles conditions le passage en temps discret conserve les propriétés de stabilité et de contrôlabilité.

En effet, les problèmes mathématiques, dans lesquels apparaissent des processus itératifs, sont souvent des variantes discrètes, donc en général simplifiées, de problèmes décrits par des systèmes différentiels.

Par exemple, le problème simplifié du mouvement en assiette d'un engin durant sa phase propulsive, représenté ci-dessous. On désire déterminer un système de stabilisation discret, délivrant les ordres u_n (vitesse de braquage de la tuyère) à partir de la mesure échantillonnée, à la période T , de l'assiette s de l'engin et de la position β de la tuyère. Ce problème est décrit dans ([4], tome 1, IV-5-2) et est résolu dans ([4], tome 2, pp.290-297). Posé en temps continu, il est remplacé par un problème à temps discret, qui lui se résout par un programme linéaire.



v

Pour ce faire, il faut mettre en relation processus différentiels et itératifs par une méthode de discrétisation. Ce sera celle de Neustadt [31], discrétisation de la commande et de l'état.

Il est naturel, alors, de savoir quels sont les systèmes récurrents qui proviennent, par cette discrétisation, de processus différentiels, de nombreux phénomènes physiques se posant directement en termes de temps discret; c'est le problème de la recherche, de façon générale, du logarithme réel d'une matrice réelle, carrée et constante (1-10, p.16) :

" soit X un opérateur linéaire défini sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors, il existe un opérateur linéaire Y défini sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n , tel que $e^Y = X$ si et seulement si :

(i) l'opérateur linéaire X est bijectif et

(ii) les diviseurs élémentaires de X , associés à un élément $\lambda < 0$ du spectre de X , s'il en existe, apparaissent un nombre pair de fois. "

Ce résultat ne me semble pas connu dans la littérature, sous cette forme. Pour toute matrice réelle, carrée et constante, sera calculé explicitement un logarithme réel.

La liaison discret-continu étant bien établie, il est alors possible de comparer les domaines de contrôlabilité des processus mis en relation par cette discrétisation, grâce à une étude réalisée par F.H. Hsu [17]. Et aussi de comparer les critères de contrôlabilité des deux familles de systèmes considérées, grâce en particulier à une publication de Brammer [5].

Les résultats de la théorie de la contrôlabilité des objets, décrits par des équations différentielles, permettent d'énoncer, parfois par analogie, des théorèmes "ressemblants", pour les objets décrits par des systèmes récurrents (Kalman [23], Troch [39]). Ce ne sera pas le cas ici, bien qu'une fois démontrés, on puisse trouver des analogies, la discrétisation aidant.

SOMMAIRE :

Chapître 0 : ne fait que définir avec précision les deux familles de systèmes guidables utilisés et introduire des notations qui réapparaîtront tout au long de ce travail.

Chapître 1 : dans le premier paragraphe, est développée la méthode de discrétisation, utilisée pour le passage d'un processus différentiel à un système itératif. Dans le second, est précisé l'ensemble des processus récurrents provenant, par cette discrétisation, d'un système différentiel, en démontrant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un logarithme réel (calculé explicitement) d'une matrice carrée, réelle, constante.

Chapître 2 : dans la première partie, sont données des propriétés topologiques et algébriques des ensembles de points recalables et du domaine de contrôlabilité, d'un système aux différences finies. Dans la deuxième partie, est démontré un théorème de décomposition géométrique du domaine de contrôlabilité, dont des corollaires nous seront très utiles pour le chapitre suivant. Enfin, dans la dernière partie, sont comparés, d'un point de vue géométrique, les domaines de contrôlabilité des processus mis en relation par la discrétisation.

Chapître 3 : le domaine des commandes étant borné, sont démontrés deux critères de locale contrôlabilité; l'un assez simple, dans la première partie, le domaine des contrôles contenant 0 en son intérieur (commandes multidirectionnelles), l'autre beaucoup plus complexe, dans la deuxième partie, le domaine des contrôles ne contenant plus 0 en son intérieur (commandes unidirectionnelles). Ces deux résultats et la décomposition géométrique permettent de déduire des critères de globale et complète contrôlabilité, dans chacun des deux paragraphes. Enfin, l'étude comparative des systèmes mis en relation par la discrétisation est complétée, dans la dernière partie, par la comparaison directe des critères de contrôlabilité des deux familles de processus guidables considérés.

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRES - NOTATIONS

0 - 1 DEFINITIONS :

Nous considérons deux familles de systèmes guidables, notées $(D(n), U)$ et $(I(n), U_T)$ respectivement, dont les éléments sont des processus réels, linéaires, autonomes, d'ordre n, respectivement :

- différentiels (ou à temps continu), de la forme :

$$(D) : \frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t) \quad , t > 0$$

- itératifs (ou à temps discret), de la forme :

$$(I) : x_t = C x_{t-1} + D u_{t-1} \quad , t \in \mathbb{N}^*$$

- où A et C (respectivement B et D) sont deux matrices réelles, constantes, quelconques, $n \times n$ (respectivement $n \times p : 1 \leq p \leq n$),

- $u(\cdot)$ est un élément de U , ensemble des fonctions mesurables, définies sur un intervalle de temps réel, compact et à valeurs dans un sous-ensemble, noté Ω , de \mathbb{R}^p ,

- u est un élément de U_T , ensemble des fonctions en escalier de pas T, fixé et > 0 , définies sur un intervalle de temps discret, réel, fini et à valeurs dans le même sous-ensemble Ω .

$(D(n), U)$, de même pour $(I(n), U_T)$, est partitionnée par une famille de classes d'équivalence de systèmes semblables, autrement dit si le processus : $\frac{dx}{dt} = A x + B u$, est un représentant d'une des classes d'équivalence, alors pour tout élément : $\frac{dx}{dt} = \bar{A} x + \bar{B} u$, de cette même classe, il existe un changement de base, noté P, telle que :

$$\bar{A} = P A P^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{B} = P B .$$

correspondant à un élément non réel $\lambda_j = \rho_j + i\theta_j$, $\theta_j \neq 0$, et à son complexe conjugué, noté $\bar{\lambda}_j$, du spectre de J , où E_2 est la matrice identité d'ordre 2 et S_j est la matrice associée à la similitude plane, centrée en 0, de rapport $|\lambda_j|^{-1}$ et d'angle β_j , avec $|\lambda_j|$ le module de λ_j , $|\lambda_j| = (\rho_j^2 + \theta_j^2)^{1/2}$ et β_j l'argument de λ_j , c'est à dire le seul nombre $0 < \beta_j < \pi$, tel que $\lambda_j = |\lambda_j| \exp(i\beta_j)$:

$$S_j = \begin{bmatrix} \rho_j & \theta_j \\ -\theta_j & \rho_j \end{bmatrix}$$

.Et λ_j n'est pas forcément différent de λ_k pour $j \neq k$.

(iii) une matrice normale de Jordan ([1], vol.I p.201) est une matrice quasi-diagonale, à blocs matriciels de la forme $J_{n_j}(\lambda_j)$, de dimension $n_j \times n_j$, correspondant à un élément λ_j du spectre de J . Et si λ_j n'est pas réel, au bloc matriciel $J_{n_j}(\lambda_j)$ est associé le bloc, noté $J_{n_j}(\bar{\lambda}_j)$, conjugué du précédent, correspondant à $\bar{\lambda}_j$ et repéré par le même indice. Et λ_j n'est pas forcément différent de λ_k pour $j \neq k$.

(iv) nous noterons les matrices carrées réelles, de dimension m , $m \in \mathbb{N}^*$ respectivement :

- nulles par 0_m ,
- identités par E_m ,
- ne possédant que des 1 sur la super-diagonale, par H_m (nilpotente)

(v) si X est une matrice quasi-diagonale, à blocs matriciels X_j , de dimension $n_j \times n_j$, alors l'exponentielle de X , notée $\exp(X)$ ou e^X , est également une matrice quasi-diagonale, à blocs matriciels $\exp(X_j)$, de dimension $n_j \times n_j$ ([1], vol.I p.154).

0 - 3 DEFINITIONS :

Pour tout représentant (D) de $(D(n), U)$ (respectivement (I) de $(I(n), U_T)$), l'ensemble des points d'équilibre, noté $EQ(D)$ (respectivement $EQ(I)$), défini par :

$$EQ(D) = \text{Ker}(A) \quad \text{et} \quad EQ(I) = \text{Ker}(C - E_n)$$

respectivement, où $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(C - E_n)$ sont les noyaux des opérateurs A et $(C - E_n)$.

C'est en fait l'ensemble des points d'équilibre des systèmes libres associés à (D) et à (I) , c'est à dire de :

$$\frac{dx}{dt} = A x(t) \quad \text{et} \quad x_t = C x_{t-1}$$

0 - 4 NOTATIONS :

Les deux familles de systèmes guidables vérifiant la propriété géométrique suivante :

le point O de \mathbb{R}^n est la seule position d'équilibre, sont notées $(D_O(n), U)$ et $(I_O(n), U_T)$.

En conséquence, ces deux familles sont incluses respectivement dans $(D(n), U)$ et $(I(n), U_T)$ et les opérateurs A et $(C - E_n)$ sont réguliers.

0 - 5 NOTATIONS :

(i) si V est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et X un opérateur linéaire de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors :

$$XV = \{ x \in \mathbb{R}^n, \text{ tel qu'il existe } y \in V \text{ pour lequel } x = Xy \} .$$

(ii) si V_1, V_2, \dots, V_q est une suite finie de sous-ensemble de \mathbb{R}^n , alors :

$V = \{ x \in \mathbb{R}^n, \text{ tel qu'il existe } y_j \in V_j, 1 \leq j \leq q, \text{ pour lesquels } x = \sum_{j=1}^q y_j \}$
est noté : $\sum_{j=1}^q V_j$.

(iii) soit V_j un sous-ensemble, contenant 0 de L_j , sous-espace de \mathbb{R}^n , $1 \leq j \leq q$. Et si $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^q L_j$, alors :

$V = \{ x \in \mathbb{R}^n, \text{ tel qu'il existe un unique } x_j \in V_j, 1 \leq j \leq q, \text{ pour lesquels } x = \sum_{j=1}^q x_j \}$ est noté $\bigoplus_{j=1}^q V_j$.

0 - 6 DEFINITIONS :

Soit X un opérateur linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Si tous les éléments du spectre de X vérifient :

- (i) $|\lambda| \leq 1$, alors X est une contraction au sens large.
- (ii) $|\lambda| > 1$, alors X est une dilatation au sens stricte.

0 - 7 NOTATIONS GENERALES :

Soient A un opérateur linéaire, λ un élément de \mathbb{C} , v un vecteur de \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}^*$

Alors ${}^t A$ et ${}^t v$ sont les transposés de A et v ; $\bar{\lambda}$ et \bar{v} sont les complexes conjugués de λ et v ; $Re v$ et $Im v$ représentent les parties réelles et imaginaires de v ; enfin $\overset{\circ}{V}$ est l'intérieur de V , sous-ensemble de \mathbb{R}^m .

Tous les résultats démontrés dans ce travail sont intrinsèques, c'est à dire ne dépendent pas de la base dans laquelle sont exprimés les systèmes.

C'est pourquoi, par abus de langage, nous parlerons toujours d'opérateurs linéaires et non pas de matrices.

CHAPITRE 1

PROCESSUS DE DISCRETISATION

1 - A PROCESSUS DE DISCRETISATION :

PROBLEME :

Définir une application, notée d_T , de la famille $(D(n), U)$ dans la famille $(I(n), U_T)$, telle que :

l'image par l'application d_T de tout représentant (D) de $(D(n), U)$ est un représentant (I) de $(I(n), U_T)$, exprimé dans la même base que (D) et satisfaisant aux deux conditions suivantes -

(i) si (D) est un élément de $(D(n), U_T)$ et $(t, x(t))$ sa courbe intégrale issue de $(0, x_0)$, alors la trajectoire (lT, x_1) de l'image de (D) par d_T , issue de $(0, x_0)$, vérifie : $x_1 = x(lT)$, pour tout $l \in \mathbb{N}$;

(ii) si (D) est un élément de $(D(n), U)$ et $(t, x(t))$ sa courbe intégrale issue de $(0, x_0)$, alors la trajectoire (lT, x_1) de l'image de (D) par d_T , issue de $(0, x_0)$, est obtenue par application d'un contrôle $u.$ de U_T , tel que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $u_1 = u(lT)$, où $u(.)$ est la commande appliquée à (D) .

De plus cette application d_T doit être construite de telle façon qu'elle associe à toute classe d'équivalence de $(D(n), U)$ une et une seule classe d'équivalence de $(I(n), U_T)$.

Ainsi nous procédons à une discrétisation " intrinsèque de l'état de l'objet et du contrôle qui lui est appliqué ".

1 - 1 DEFINITION :

T est appelé le pas de la discrétisation ($T > 0$) et est fixé.

1 - 2 CONSTRUCTION DE LA DISCRETISATION :

Soit (D) un représentant de $(D(n), U)$: $\frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t)$.

Toute solution vectorielle de (D), issue de $(0, x_0)$, s'écrit à l'instant

t :

$$x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_0^T e^{-As} B u(s) ds \right)$$

Opérons la discrétisation de la commande et de l'état, en restreignant

U à U_T et en posant $x_1 = x(1T)$. Ainsi $u(s) = u_{1-1}$ pour $(1-1)T \leq s < 1T$, $1 \in \mathbb{N}^*$ et

$$x_1 = e^{A1T} \left(x_0 + \sum_{j=1}^1 \int_{(j-1)T}^{jT} e^{-As} B u_{j-1} ds \right)$$

Comme $\int_{(j-1)T}^{jT} e^{(1T-s)A} ds = \int_0^T e^{As} ds$, nous obtenons :

$$x_1 = e^{AT} x_{1-1} + \left(\int_0^T e^{As} ds \right) B u_{1-1}$$

1 - 3 DEFINITION :

Le processus de $(I(n), U_T)$, donné par :

$$E1 : x_1 = e^{AT} x_{1-1} + \left(\int_0^T e^{As} ds \right) B u_{1-1}$$

est appelé le T-discrétisé de (D).

1 - 4 PROPOSITION :

L'application d_T définie de $(D(n), U)$ dans $(I(n), U_T)$, qui a tout représentant (D) de $(D(n), U)$ associe pour image le représentant (I) de $(I(n), U_T)$ donné par E1, répond au problème posé.

DEMONSTRATION :

Par construction de E1, elle vérifie les conditions (i) et (ii) du problème posé. D'autre part (I) défini par E1 est exprimé dans la même base que (D) .

Et si (\bar{D}) est un autre élément de la même classe que (D) , son image par d_T est un élément (\bar{I}) , appartenant à la même classe que (I) : en effet pour tout changement de base P , $\exp(P A P^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$.

1 - 5 INVARIANCE DE L'ENSEMBLE DES POINTS D'EQUILIBRE :

Le passage au discret ne présente un intérêt, que s'il laisse invariant l'ensemble des points d'équilibre du processus initial (0-3), élément essentiel de la structure géométrique des systèmes.

PROPRIETES :

Soient (D) un processus de $(D(n), U)$ et (I) son T-discrétisé :

- (i) $EQ(D) \subseteq EQ(I)$
 (ii) $E2 : EQ(D) = EQ(I)$ si et seulement si pour tout élément μ du spectre de A dans \mathbb{C} :

$$\mu \neq \frac{2k\pi i}{T}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^*$$

NOTATIONS :

$(D_T(n), U)$ est la sous-famille de $(D(n), U)$ ne possédant que des représentants vérifiant E2.

REMARQUE :

Pour tout élément (D) de $(D(n), U)$, le pas T de la discrétisation peut être choisi, tel que (D) vérifie la relation E2.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 1-5 :

D'après la relation E1 et par définition (0-3), nous avons :
 $EQ(D) = \text{Ker}(A)$ et $EQ(I) = \text{Ker}(e^{AT} - E_n)$.

(i) si $x \in \text{Ker}(A)$, alors $Ax=0$ et $A^m x=0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire $(e^{AT} - E_n) x = 0$ ou $x \in \text{Ker}(e^{AT} - E_n)$.

(ii) si $x \in \text{Ker}(e^{AT} - E_n)$, alors $(e^{AT} - E_n)x=0$ et deux cas se présentent :
 - soit $(e^{AT} - E_n)$ est bijectif, alors $x=0$ et $Ax=0$, c'est à dire $x \in \text{Ker}(A)$;
 - soit $(e^{AT} - E_n)$ ne l'est pas, alors $e^{AT}x=x$ et x est vecteur propre associé à la valeur propre 1 de e^{AT} . D'où il existe μ valeur propre de A , telle que $e^{\mu T}=1$. Comme par hypothèse $\mu \neq \frac{2k\pi i}{T}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $\mu=0$ est la seule valeur propre de A , telle que : $e^{\mu T}=1$. Et x est vecteur propre associé à la valeur propre $\mu=0$ de A , c'est à dire $Ax=0x=0$ ou $\text{Ker}(A)$ contient x .

Inversement supposons que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(e^{AT} - E_n)$ et qu'il existe $\mu = \frac{2k\pi i}{T}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$, valeur propre de A . Alors e^{AT} a pour valeur propre $e^{\mu T}=1$ et le vecteur propre associé à 1 de e^{AT} n'appartient pas à $\text{Ker}(A)$, ce qui contredit l'hypothèse.

1 - 6 CAS PARTICULIER :

Nous restreignons les familles $(D(n), U)$ et $(I(n), U_T)$ à $(D_0(n), U)$ et $(I_0(n), U_T)$, correspondant au cas où 0 est seul point d'équilibre (0-4).

PROPOSITION :

Soit (D) un élément de $(D_0(n), U)$: $\frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t)$; alors son T-discrétisé s'écrit :

$$E3 : x_1 = e^{AT} x_{1-1} + A^{-1} (e^{AT} - E_n) B u_{1-1}$$

Le T-discrétisé, défini par E3, est un élément de $(I_0(n), U_T)$ si et seulement si tout élément μ du spectre de A dans \mathbb{C} vérifie :

$$\underline{\mu \neq \frac{2k\pi i}{T}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.}$$

DEMONSTRATION :

L'opérateur A étant bijectif $(\int_0^T e^{As} ds) = A^{-1} (e^{AT} - E_n)$, nous avons E3 qui se déduit de E1.

La condition sur μ exprime que 0 est le seul point d'équilibre pour le T discrétisé (0-4), c'est à dire que : $(e^{AT} - E_n)$ est bijectif.

1 - 7 EXEMPLES :

Les deux exemples qui vont suivre mettent en évidence l'importance de la condition E2.

Exemple 1 : mouvement du pendule simple

L'équation du mouvement du pendule simple est équivalente, au voisinage de la position d'équilibre, à :

$$(D) : \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = u \quad (k>0), \text{ où } \theta \text{ détermine le déplacement}$$

angulaire du pendule par rapport à la verticale et dans un voisinage de cette dernière. Sous forme matricielle :

$$(D) : \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad u(t) \in [-1, 1]$$

Son T-discrétisé ($T>0$) est donné par E3, le système (D) appartenant à $(D_0(n), U)$

$$(I) : \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos\omega T & \frac{1}{\omega} \sin\omega T \\ -\omega \sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_{1-1} + \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 1 - \cos\omega T \\ \sin\omega T \end{bmatrix} u_{1-1}$$

avec $\omega^2 = k$, $u_{1-1} \in [-1, +1]$, $1 \in \mathbb{N}^*$.

Donnons à T trois valeurs particulières :

$$T_1 = \frac{1\pi}{2\omega}, \quad T_2 = \frac{\pi}{\omega} \text{ et } T_3 = \frac{2\pi}{\omega}$$

- pour $T = T_1$, (I) s'écrit :

$$(I_1) : \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\omega} \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_{1-1} + \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \end{bmatrix} u_{1-1}$$

- pour $T = T_2$, (I) s'écrit :

$$(I_2) : \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_{1-1} + \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_{1-1}$$

- pour $T = T_3$, (I) s'écrit :

$$(I_3) : \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}_{1-1} + \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{1-1}$$

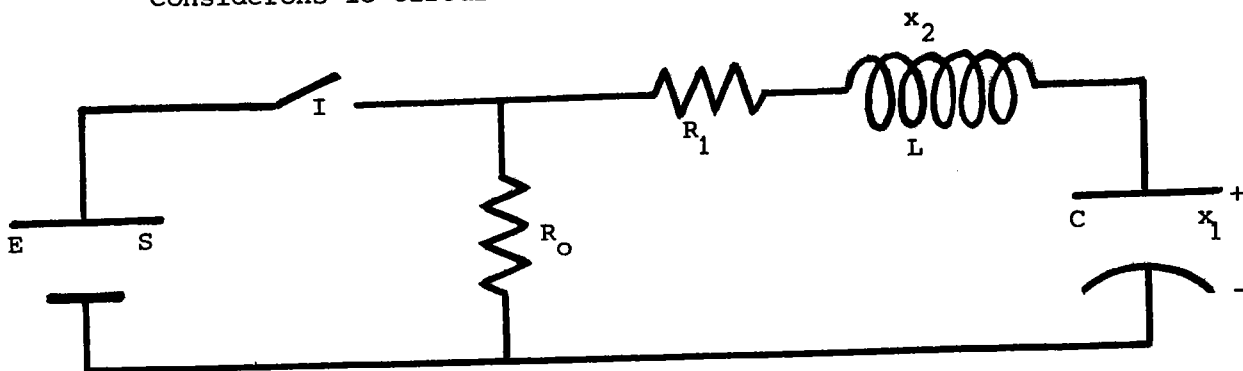
On constate que (D) et (I_1) sont de type oscillatoire, alors que (I_2) et (I_3) ne le sont pas.

(I_2) et (I_3) peuvent être considérés comme de mauvaises approximations de (D) .

Mais seul (I_3) ne possède pas les mêmes positions d'équilibre que (D) et ne vérifie pas E2.

Exemple 2 : réseau électrique R.L.C.

Considérons le circuit suivant :



, où les composants passifs seront les résistances ($R_0 \ll R_1$), les capacités et les inductances, les composants actifs la source S de tension E ($E > 0$) et l'interrupteur I, supposé idéal.

Alors l'état du réseau pourra être représenté par un vecteur $x(t)$ de qui donnera la valeur à l'instant t de la différence de potentiel x_1 aux bornes de la capacité C et de l'intensité x_2 du courant parcourant l'inductance L.

Ce vecteur $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ est donné par l'équation différentielle :

$$(D) : \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

où u représente la position de l'interrupteur I en fonction du temps (ici u prend ses valeurs dans $[0, E]$).

Supposons que le réseau vérifie $R_1 < 2(LC^{-1})^{1/2}$, alors le T-discrétisé s'écrit, avec $\omega = (4(LC)^{-1} - (R_1 L^{-1})^2)^{1/2}$ et $F = CL\omega \exp(-\frac{R_1 T}{2L}) \cdot (4L - R_1^2 C)^{-1}$:

$$(I) : x_1 = \begin{bmatrix} F(L\omega \cos \frac{\omega T}{2} + R_1 \sin \frac{\omega T}{2}) & 2FLC^{-1} \sin \frac{\omega T}{2} \\ -2F \sin \frac{\omega T}{2} & F(L\omega \cos \frac{\omega T}{2} - R_1 \sin \frac{\omega T}{2}) \end{bmatrix} x_{1-1} + \begin{bmatrix} -F(L\omega \cos \frac{\omega T}{2} - R_1 \sin \frac{\omega T}{2}) + 1 \\ 2F \sin \frac{\omega T}{2} \end{bmatrix} u_{1-1}$$

Comme l'exemple 1, pour certaines valeurs de T , le T-discrétisé est une mauvaise approximation de (D).

Pour $T = \frac{2(\pi + 2k\pi)}{\omega}$, (I) et (D) ont le même ensemble de points d'équilibre, bien que dans ce cas (I) soit une mauvaise approximation de (D).

Pour $T = \frac{4k\pi}{\omega}$, (I) ne possède pas le même ensemble de points d'équilibre et est une mauvaise approximation de (D).

1 - B PROCESSUS INVERSE :

Comme le montre l'exemple qui suit, tous les systèmes de $(I(n), U_T)$ ne sont pas les T-discrétisés de processus de la famille $(D(n), U)$.

1 - 8 EXEMPLE :

Soit le système itératif (1) : $x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_{1-1}$

Il existe une incompatibilité de structure entre ce processus et tout système différentiel (2) : $\frac{dx}{dt} = A x$, où A est une matrice inversible.

En effet :

- pour un processus du type (2), la position d'équilibre 0 possède une structure bien définie; toutes les trajectoires ont une même propriété de stabilité ou d'instabilité, donc indépendante du choix de la condition initiale.

- au contraire, pour le système (1), la propriété de stabilité ou d'instabilité des trajectoires dépend de la condition initiale :

si $x_0 = (a, 0)$, la solution de (1), issue de x_0 au temps 0, oscille autour de l'origine : au temps $2lT$, $x_{2l} = x_0$ et à l'instant $(2l+1)T$, $x_{2l+1} = -x_0$, pour $l \in \mathbb{N}$; et la trajectoire est stable ($a \neq 0$);

si $x_0 = (a, a)$, la solution de (1), issue de x_0 au temps 0, s'éloigne de l'origine : au temps $2lT$, $x_{2l} = ((1-2l)a, a)$ et à l'instant $(2l+1)T$, $x_{2l+1} = (2la, -a)$, pour $l \in \mathbb{N}$; et la trajectoire est instable ($a \neq 0$).

Quels sont justement les systèmes itératifs provenant, par la T-discrétisation, de processus différentiels ?

1 - 9 PROBLEME INVERSE :

Pour quels processus (I) de $(I(n), U_T)$, existe-t-il un système (D) de $(D_T(n), U)$, tel que le T-discrétisé de ce dernier soit confondu avec (I) ?

DEFINITION :

Un tel représentant de $(D(n), U)$ s'appelle un T-réciproque.

CONSEQUENCE :

(I) et tous ses T-réciproques, s'il en existe, ont le même ensemble de points d'équilibre (voir E2).

1 -10 THEOREME (C.N.S.) :

Pour tout élément (I) de $(I(n), U_T)$: $x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$, il existe au moins un T-réciproque (D) de $(D(n), U)$ si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire C est bijectif et
- (ii) les diviseurs élémentaires de C, associés à un élément <0 du spectre de C dans \mathbb{C} , s'il en existe, apparaissent un nombre pair de fois.

Le théorème 1-10 est un corollaire des deux lemmes 1 et 2, qui ne me semblent pas connus dans la littérature sous cette forme et sont donc démontrés dans ce travail.

LEMME 1 (C.N.S.) :

Soit X un opérateur linéaire défini sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors il existe au moins un opérateur linéaire Y défini sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n , tel que : $e^Y = X$, si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire X est bijectif et
- (ii) les diviseurs élémentaires de X, associés à un élément <0 du spectre de X dans \mathbb{C} , s'il en existe, apparaissent un nombre pair de fois.

LEMME 2 (C.N.S.) :

Soit Y un opérateur linéaire défini sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors l'opérateur linéaire défini par : $\int_0^T e^{Ys} ds$ est bijectif si et seulement si :

tout élément μ du spectre de Y vérifie : $E2 : \mu \neq \frac{2k\pi i}{T}$, pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

REMARQUES :

(i) soit X un opérateur linéaire, défini sur \mathbb{C}^n et à valeurs dans \mathbb{C}^n ; alors il existe un opérateur linéaire Y, défini sur \mathbb{C}^n et à valeurs dans \mathbb{C}^n , tel que $e^Y = X$, si et seulement si : X est bijectif ([11], vol.I p.240);

(ii) un T-réciproque, s'il en existe, est de la forme suivante :

$$E5 : \frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{T} \text{Log}C \right) x + \left(\int_0^T C^{s/T} ds \right)^{-1} D u$$

où $\text{Log}C$ est en fait une solution réelle Y de l'équation $e^Y=C$ et l'opérateur $C^{s/T}=\exp\left(\frac{s}{T}\text{Log}C\right)$.

(iii) le lemme 1 nous donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un logarithme réel d'une matrice et le lemme 2, une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'inverse d'une intégrale finie de l'exponentielle d'une matrice carrée réelle, dépendant linéairement du temps.

DEMONSTRATION DU LEMME 1 :Plan de la démonstration :

C.N. : supposons qu'il existe Y réel, tel que $e^Y = X$ et soit J sa forme réelle de Jordan; alors e^J vérifie les conditions (i) et (ii) du lemme.

C.S. : supposons que X satisfait aux conditions (i) et (ii) et soit J sa forme réelle de Jordan; J se transforme en sa forme normale de Jordan \tilde{J} , par un changement de base complexe P , que l'on explicite. Dans cette nouvelle base est déterminé un logarithme complexe, noté $\text{Log } \tilde{J}$, de \tilde{J} . Enfin par application du changement de base inverse P^{-1} , $\text{Log } J$, défini par $\text{Log } J = P (\text{Log } \tilde{J}) P^{-1}$, est un logarithme réel de J , donné explicitement.

Condition nécessaire :

Supposons qu'il existe Y réel, tel que $e^Y = X$.

1 ère étape :

Alors X est bijectif ([11], vol.I p.239-241).

Lemme 1-1 : les éléments <0 du spectre de Y , s'il en existe, sont de multiplicité paire et proviennent des éléments de la forme $\rho \pm i (\pi + 2k\pi)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, du spectre de Y .

démonstration : comme Y est supposé réel, son spectre ne contient que des éléments μ , qui sont : soit réels, soit complexes et complexes conjugués de même multiplicité. Alors les éléments λ du spectre de e^Y sont de la forme e^μ ([11], vol.I p.154), c'est à dire :

si $\mu = \rho + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda = e^\mu$ est réel;

si $\mu = \rho + i\theta$, $\theta \neq k\pi$, et $\bar{\mu}$ de même multiplicité, $\lambda = e^\mu$ et $\bar{\lambda} = e^{\bar{\mu}}$ sont complexes, conjugués et de même multiplicité;

si $\mu = \rho + i (\pi + 2k\pi)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, et $\bar{\mu}$ de même multiplicité, alors $\lambda = e^\mu = e^{\bar{\mu}}$ est réel, <0 et de multiplicité paire .

2 ème étape :

Soit J (0-2) la forme réelle de Jordan de Y . Ne considérons que les blocs matriciels $K_{n_j} (\rho_j, \pi + 2k\pi)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, de J , conséquence du lemme 1-1.

Lemme 1-2 : la forme réelle de Jordan des matrices données par :
 $\exp(K_{n_j}(\rho_j, \pi+2k\pi))$, de dimension $2n_j$, est formée de 2 blocs matriciels

identiques, égaux à :
$$\boxed{-e^{\rho_j} E_{n_j} + H_{n_j}}$$

démonstration : comme le nombre de blocs de toute forme de Jordan est un invariant, calculons le nombre N_j de blocs de dimension n_j , de la forme réelle de Jordan de la matrice :

$$\exp(K_{n_j}(\rho_j, \pi+2k\pi)) = -e^{\rho_j} \sum_{l=0}^{n_j-1} \frac{H_{2n_j}^l}{l!} \quad ([11], \text{vol.I p.154})$$

$$N_j = 2M_j^{n_j} - M_j^{n_j+1} - M_j^{n_j-1} \quad ([11], \text{vol.I p.155, relation 50}), \text{ avec}$$

$$M_j = \dim \text{Ker}(\exp(K_{n_j} + e^{\rho_j} E_{2n_j})). \text{ Or nous avons } M_j^{n_j} = M_j^{n_j+1} = 2n_j$$

et $M_j^{n_j-1} = 2(n_j-1)$. Ainsi $N_j=2$, c'est à dire que la forme réelle de Jordan des blocs $\exp(K_{n_j}(\rho_j, \pi+2k\pi))$ est formée de 2 blocs matriciels

identiques et égaux à : $(-e^{\rho_j} E_{n_j} + H_{n_j})$, de dimension n_j .

3 ème étape :

Comme e^J est une matrice quasi-diagonale, à blocs de la forme $\exp(J_{n_j}(\lambda_j))$ et $\exp(K_{n_j}(\rho_j, \theta_j))$ (0-2) et par application des 1 ère et 2 ème étapes, e^J vérifie les deux conditions intrinsèques (i) et (ii) du lemme technique 1, ainsi $x=e^Y$ également.

Condition suffisante :

Supposons que X satisfait aux 2 conditions (i) et (ii).

4 ème étape :

Soit J la forme réelle de Jordan de X (0-2); c'est une matrice quasi-diagonale, formée de blocs matriciels de 3 types, vue les hypothèses (i) et (ii) :

$$(1) \begin{cases} \text{si } \lambda_j > 0 : J_{n_j}(\lambda_j) \\ \text{si } \lambda_j < 0 : \text{diag}(J_{n_j}(\lambda_j), J_{n_j}(\lambda_j)) \\ \text{si } \lambda_j = \rho_j + i\theta_j, \theta_j \neq 0 : K_{n_j}(\rho_j, \theta_j) \end{cases}$$

d'après la condition (ii).

5^{ème} étape :

Soit le changement de base complexe P, transformant J en sa forme normale de Jordan, notée \tilde{J} (0-2) : $\tilde{J} = P^{-1} J P$; P est une matrice quasi-diagonale, formée de blocs de 2 types :

-si $\lambda_j \in \mathbb{R}$, E_{n_j}

-si $\lambda_j \notin \mathbb{R}$, $Q_{2n_j} = (R_{n_j}, \bar{R}_{n_j})$ de dimension $2n_j \times 2n_j$, avec :

$$R_{n_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & i & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 & & 0 \\ & & & i & & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & i \end{bmatrix}$$

de dimension $2n_j \times n_j$ et \bar{R}_{n_j} sa

complexe conjuguée (Q_{2n_j} est déterminée par récurrence sur n_j).

Et \tilde{J} est une matrice quasi-diagonale, formée de blocs de 3 types :

$$(2) \begin{cases} \text{si } \lambda_j > 0 : J_{n_j}(\lambda_j) \\ \text{si } \lambda_j < 0 : \text{diag}(J_{n_j}(\lambda_j), J_{n_j}(\lambda_j)) \\ \text{si } \lambda_j \notin \mathbb{R} : \text{diag}(J_{n_j}(\lambda_j), J_{n_j}(\bar{\lambda}_j)) \end{cases}$$

, d'après la condition (ii).

6 ème étape :

Déterminons un logarithme complexe de \tilde{J} , que l'on notera $\text{Log } \tilde{J}$.

Lemme 1-3 : si $\lambda_j > 0$ alors :

$$(3) : \text{Log } J_{n_j}(\lambda_j) = E_{n_j} \text{Log}(\lambda_j) + \sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l}$$

est un logarithme réel de $J_{n_j}(\lambda_j) = \lambda_j E_{n_j} + H_{n_j}$.

démonstration : les deux matrices suivantes commutent :

$E_{n_j} \text{Log}(\lambda_j)$ et $\sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l}$. D'autre part nous avons :

$$\exp(\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j)) = \exp(E_{n_j} \text{Log}(\lambda_j)) \exp\left(\sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l}\right)$$

$$\text{Or } \exp\left(\sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l}\right) = E_{n_j} + \lambda_j^{-1} H_{n_j}, \text{ d'après ([32], p.77);}$$

ce dernier résultat est vrai pour toute matrice nilpotente H_{n_j} .

Et $\exp(E_{n_j} \text{Log}(\lambda_j)) = \lambda_j E_{n_j}$. Ainsi le résultat recherché est obtenu :

$$\exp(\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j)) = \lambda_j E_{n_j} + H_{n_j} = J_{n_j}(\lambda_j).$$

Lemme 1-4 : si $\lambda_j < 0$, la matrice suivante est un logarithme réel

de la matrice $\text{diag}(J_{n_j}(\lambda_j), J_{n_j}(\lambda_j))$:

$$(4) : \begin{bmatrix} Z_{n_j}^1(\lambda_j) & Z_{n_j}^2 \\ -Z_{n_j}^2 & Z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} Z_{n_j}^1(\lambda_j) = E_{n_j} \text{Log}(-\lambda_j) + \sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l} \\ Z_{n_j}^2 = (\pi + 2k\pi) E_{n_j}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{où } J_{n_j}(\lambda_j) = \lambda_j E_{n_j} + H_{n_j}.$$

démonstration : $\begin{bmatrix} z_{n_j}^1(\lambda_j) & 0 \\ 0 & z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & 0 \end{bmatrix}$ commutent, d'où :

$$\exp \begin{bmatrix} z_{n_j}^1(\lambda_j) & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(z_{n_j}^1(\lambda_j)) & 0 \\ 0 & \exp(z_{n_j}^1(\lambda_j)) \end{bmatrix} \times \exp \begin{bmatrix} 0 & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Or } \exp(z_{n_j}^1(\lambda_j)) = -\lambda_j E_{n_j} (E_{n_j} + \lambda_j^{-1} H_{n_j}) = -(\lambda_j E_{n_j} + H_{n_j})$$

(même raisonnement que dans le lemme 1-3, d'après [32], p.77).

$$\text{D'autre part } \exp \begin{bmatrix} 0 & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ -\sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix} = -E_{2n_j}$$

(ce résultat est obtenu par le calcul explicite de l'exponentielle, en remarquant que : $(z_{n_j}^2)^m = \pi^m E_{n_j}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$).

Ainsi le résultat recherché est obtenu :

$$\exp \begin{bmatrix} z_{n_j}^1(\lambda_j) & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix} = \text{diag}(J_{n_j}(\lambda_j), J_{n_j}(\lambda_j)).$$

Lemme 1-5 : si $\lambda_j = \rho_j + i\theta_j$, $\theta_j \neq 0$, la matrice :

$$(5) : \text{Log } J_{n_j}(\lambda_j) = (\text{Log}|\lambda_j| + i \text{Arg}(\lambda_j)) E_{n_j} + \sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l\lambda_j^l}$$

est un logarithme complexe de $J_{n_j}(\lambda_j) = \lambda_j E_{n_j} + H_{n_j}$, où $|\lambda_j|$ est le

module de λ_j et $\text{Arg}(\lambda_j)$ l'unique nombre α_j , tel que $0 < \alpha_j < \pi$ et $\lambda_j = |\lambda_j| \exp(i\alpha_j)$.

démonstration : $(\text{Log}|\lambda_j| + i \text{Arg}(\lambda_j)) E_{n_j}$ et $\sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l\lambda_j^l}$

commutent. D'où :

$$\exp(\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j)) = |\lambda_j| \exp(i\alpha_j) E_{n_j} \times \exp\left(\sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l\lambda_j^l}\right) \text{ ou}$$

$$\exp(\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j)) = |\lambda_j| \exp(i\alpha_j) E_{n_j} \times (E_{n_j} + \lambda_j^{-1} H_{n_j})$$

(même raisonnement que dans le lemme 1-3, d'après [32], p.77).

Ainsi le résultat recherché est obtenu : $\exp(\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j)) = J_{n_j}(\lambda_j)$.

On remarque que la matrice complexe conjuguée de $\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j)$ est un logarithme complexe de $J_{n_j}(\bar{\lambda}_j)$. Elle est notée par : $\text{Log } J_{n_j}(\bar{\lambda}_j)$. D'autre part le fait de remplacer $\text{Arg}(\lambda_j)$ par $\text{Arg}(\lambda_j) + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, ne change rien au résultat du lemme 1-5.

Conclusion :

La matrice quasi-diagonale, notée $\text{Log } \tilde{J}$, et définie par des blocs matriciels de 3 types repris ci-après, est un logarithme complexe de \tilde{J} :

$$\begin{array}{l}
 \text{si } \lambda_j > 0 : \text{Log } J_{n_j}(\lambda_j) \text{ réel, donné par (3)} \\
 \\
 (6) \quad \text{si } \lambda_j < 0 : \begin{bmatrix} z_{n_j}^1(\lambda_j) & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix} \text{ réel, donné par (4)} \\
 \\
 \text{si } \lambda_j \notin \mathbb{R} : \text{Log } J_{n_j}(\lambda_j) \text{ complexe, donné par (5)}
 \end{array}$$

démonstration : l'application successive de la 5ème étape (construction de \tilde{J}), des lemmes 1-3, 1-4, 1-5 montre que $\exp(\text{Log } \tilde{J}) = \tilde{J}$, d'après la propriété (0-2-v).

7 ème étape :

Effectuons le changement de base inverse P^{-1} . La matrice, notée $\text{Log } J$ et définie par $\text{Log } J = P \text{Log}(\tilde{J}) P^{-1}$ est un logarithme réel de J .

démonstration : d'après la 5ème étape, la matrice P^{-1} est une matrice quasi-diagonale, à blocs E_{n_j} et $Q_{2n_j}^{-1}$. Vue la construction de \tilde{J} (2) et de $\text{Log } \tilde{J}$ (6), $\text{Log } J = P \text{Log}(\tilde{J}) P^{-1}$ est une matrice quasi-diagonale, formée de blocs réels de 3 types :

$$\begin{array}{l}
 \text{si } \lambda_j > 0 : \text{Log } J_{n_j}(\lambda_j) \text{ réel, donné par (3)} \\
 \\
 \text{si } \lambda_j < 0 : \begin{bmatrix} z_{n_j}^1(\lambda_j) & z_{n_j}^2 \\ -z_{n_j}^2 & z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix} \text{ réel, donné par (4)} \\
 \\
 \text{si } \lambda_j = \rho_j + i\theta_j, \theta_j \neq 0, \text{ et } \bar{\lambda}_j, \text{Log } K_{n_j}(\rho_j, \theta_j) \text{ donné par :} \\
 \\
 \underline{Q_{2n_j} \text{diag}(\text{Log } J_{n_j}(\lambda_j), \text{Log } J_{n_j}(\bar{\lambda}_j)) Q_{2n_j}^{-1}} \\
 \\
 \text{où } \text{Log } J_{n_j}(\lambda_j) \text{ est défini par (5).}
 \end{array}$$

Il reste à calculer $\text{Log } K_{n_j}(\rho_j, \theta_j)$. Par récurrence sur n_j ,

$$\text{Log } K_{n_j}(\rho_j, \theta_j) = \begin{bmatrix} T_j^0 & T_j^1 & T_j^2 & \dots & T_j^{n_j-1} \\ 0 & T_j^0 & T_j^1 & \dots & T_j^{n_j-2} \\ 0 & 0 & T_j^0 & \dots & T_j^{n_j-3} \\ & & & \dots & \\ & & & & T_j^1 \\ & & & & T_j^0 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } T_j^0 = \begin{bmatrix} \text{Log}|\lambda_j| & \alpha_j \\ -\alpha_j & \text{Log}|\lambda_j| \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_j^1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1|\lambda_j|^1} \begin{bmatrix} \cos(l\alpha_j) & -\sin(l\alpha_j) \\ \sin(l\alpha_j) & \cos(l\alpha_j) \end{bmatrix}$$

pour $1 \leq l \leq n_j$ et $\alpha_j = \text{Arg}(\lambda_j)$

De plus cette matrice $\text{Log } J$ est un logarithme de J , puisque :
 $\exp(\text{Log } J) = \exp(P \text{Log}(\tilde{J}) P^{-1}) = P \exp(\text{Log } \tilde{J}) P^{-1} = P \tilde{J} P^{-1} = J$,
 d'après la 6ème étape.

En conclusion, le tableau qui suit donne UN LOGARITHME REEL D'UNE MATRICE REELLE DE JORDAN (0-2-ii), vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 1, conditions d'EXISTENCE D'UN LOGARITHME REEL.

SPECTRE DE J	J	LOGARITHME REEL DE J
$\lambda_j > 0$	$J_{n_j}(\lambda_j) = \lambda_j E_{n_j} + H_{n_j}$	$\text{Log} J_{n_j}(\lambda_j) = E_{n_j} \text{Log} \lambda_j + \sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l}$
$\lambda_j < 0$	$\begin{bmatrix} J_{n_j}(\lambda_j) & 0 \\ 0 & J_{n_j}(\lambda_j) \end{bmatrix}$ <p>avec</p> $J_{n_j}(\lambda_j) = \lambda_j E_{n_j} + H_{n_j}$	$\text{Log} \begin{bmatrix} J_{n_j}(\lambda_j) & 0 \\ 0 & J_{n_j}(\lambda_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{n_j}^1(\lambda_j) & Z_{n_j}^2 \\ -Z_{n_j}^2 & Z_{n_j}^1(\lambda_j) \end{bmatrix}$ <p>avec</p> $Z_{n_j}^1(\lambda_j) = E_{n_j} \text{Log}(-\lambda_j) + \sum_{l=1}^{n_j-1} (-1)^{l-1} \frac{H_{n_j}^l}{l \lambda_j^l}$ $Z_{n_j}^2 = (\pi + 2k\pi) E_{n_j}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$
$\lambda_j = \rho_j + i\theta_j$ et $\bar{\lambda}_j = \rho_j - i\theta_j$ de même multiplicité avec $\theta_j \neq 0$ $ \lambda_j = (\rho_j^2 + \theta_j^2)^{1/2}$ $\alpha_j = \text{Arg}(\lambda_j)$	$K_{n_j}(\rho_j, \theta_j) =$ $\begin{bmatrix} S_j & E_2 & & & 0 \\ & S_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E_2 & \\ 0 & & & & S_j \end{bmatrix}$ <p>avec</p> $S_j = \begin{bmatrix} \rho_j & \theta_j \\ -\theta_j & \rho_j \end{bmatrix}$	$\text{Log} K_{n_j}(\rho_j, \theta_j) =$ $\begin{bmatrix} T_j^0 & T_j^1 & T_j^2 & \dots & T_j^{n_j-1} \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & T_j^1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & T_j^0 \end{bmatrix}$ <p>avec</p> $T_j^0 = \begin{bmatrix} \text{Log} \lambda_j & +\alpha_j + 2k\pi \\ -\alpha_j - 2k\pi & \text{Log} \lambda_j \end{bmatrix}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$ $T_j^l = \frac{(-1)^{l-1}}{l \lambda_j ^l} \begin{bmatrix} \cos(l\alpha_j) & -\sin(l\alpha_j) \\ \sin(l\alpha_j) & \cos(l\alpha_j) \end{bmatrix}, 1 \leq l \leq n_j - 1$

DEMONSTRATION DU LEMME 2 :

Si l'opérateur Y est bijectif, toute valeur propre μ de Y est $\neq 0$ et

$$\int_0^T e^{Ys} ds = Y^{-1} (e^{YT} - E_n)$$
 a pour valeur propre $\mu^{-1} (e^{\mu T} - 1)$.

Ainsi l'opérateur $\int_0^T e^{Ys} ds$ est bijectif si et seulement si $\mu \neq \frac{2k\pi i}{T}$, pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

Si l'opérateur Y n'est pas bijectif, à la valeur propre $\mu=0$ de Y correspond la valeur propre T ($T>0$) de l'opérateur $\int_0^T e^{Ys} ds$.

Ainsi l'opérateur $\int_0^T e^{Ys} ds$ est bijectif si et seulement si pour tout élément μ du spectre de Y , la relation suivante est vérifiée : $\mu \neq \frac{2k\pi i}{T}$, pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

Nous allons à présent démontrer le théorème 1-10, corollaire des lemmes techniques 1 et 2.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1-10 :

Soit (I) un processus de $(I(n), U_T)$: $x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$.

Condition nécessaire :

Supposons qu'il existe un T -réciproque, que l'on note :

$$(D) : \frac{dx}{dt} = A x + B u.$$

Alors son T -discrétisé, donné par $E1$, est confondu avec (I) :

$$(I) : x_1 = e^{AT} x_{1-1} + \left(\int_0^T e^{As} ds \right) B u_{1-1}$$

Par application du lemme 1, $C = e^{AT}$ vérifie la condition $E4$ du théorème.

Condition suffisante :

Supposons que C vérifie $E4$. Alors il existe A opérateur linéaire, non forcément unique, tel que $e^{AT} = C$, par application du lemme 1.

D'autre part A peut être choisi, tel que tout élément μ de son spectre vérifie : $\mu \neq \frac{2k\pi i}{T}$, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, condition $E2$;

en effet si $\lambda = e^{\mu T} = 1$ est élément du spectre de C , A peut être toujours construit, tel que $\mu = 0$, ce qui correspond dans le tableau donnant un logarithme réel d'un opérateur réel au cas $\lambda = 1$ (1ère ligne du tableau), élément du spectre de C et $\mu = \text{Log } \lambda = 0$ élément du spectre de $A = \frac{1}{T} \text{Log}(C)$.

Ainsi par application du lemme 2, $\int_0^T e^{As} ds$ est bijectif et il existe un T -réciproque à (I) donné par :

$$(D) : \frac{dx}{dt} = A x + \left(\int_0^T e^{As} ds \right)^{-1} D u$$

car (D) est un élément de $(D_T(n), U)$, puisqu'il vérifie E2.

1 -11 CAS PARTICULIER :

COROLLAIRE (C.N.S.) :

Pour tout système (I) de $(I_0(n) |_{E_4, U_T})$, il existe au moins un T -réciproque de $(D_0(n), U)$.

REMARQUES :

(i) la condition E2 est toujours vérifiée, puisque 0 est le seul point d'équilibre.

(ii) l'application $d_T: (D_T(n), U) \longrightarrow (I(n) |_{E_4, U_T})$ est surjective, mais non injective.

CHAPITRE 2

GEOMETRIE DU DOMAINE DE CONTROLABILITE

L'objet essentiel du deuxième chapitre concerne la géométrie du domaine de contrôlabilité (§B). Mais la connaissance de cette décomposition géométrique nécessite l'introduction d'un certain nombre de définitions et la démonstration de propriétés algébriques et topologiques du domaine de contrôlabilité (§A), propriétés intéressantes en elles-mêmes.

L'intérêt de cette décomposition est double :

-d'une part elle nous permettra de comparer directement le domaine de contrôlabilité d'un système différentiel et de son T-discretisé et celui d'un processus itératif et de ses T-réciproques (§C), grâce à une étude similaire réalisée par F.H. Hsu ([17], 1974);

-d'autre part elle nous permettra de déduire très simplement des critères de globale et complète contrôlabilité, à partir de celui de locale contrôlabilité (chapitre 3).

2 - A PROPRIETES TOPOLOGIQUES ET ALGEBRIQUES :

Considérons le système (I) de $(I(n), U_T)$ suivant :

$$(I) : x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$$

2 - 1 PROPRIETE - DEFINITION :

La solution du processus (I), issue à l'instant 0 du point x_0 , s'écrit au temps lT , T pas de la discrétisation :

$$E6 : x_1 = C^1 x_0 + \sum_{j=1}^1 C^{1-j} D u_{j-1}$$

NOTATION :

$C_1[C, D] = [D \quad CD \quad \dots \quad C^{1-1}D]$ est une matrice $n \times lp$ et $\tilde{u}_1 = {}^t [u_{1-1} \quad \dots \quad u_0]$ un vecteur colonne de Ω^1 , pour $1 \in \mathbb{N}^*$.

DEFINITION :

\tilde{u}_1 est dit contrôle admissible pour le système (I).

CONSEQUENCE :

La solution du processus (I), issue au temps 0 de x_0 , s'écrit à l'instant tT :

$$E7 : x_1 = C^1 x_0 + C_1 [C,D] \tilde{u}_1$$

2 - 2 DEFINITION :

S'il existe $1 \in \mathbb{N}^*$, \tilde{u}_1 un contrôle admissible, tel que le vecteur x de \mathbb{R}^n s'écrive : $x = C^1 x_0 + C_1 [C,D] \tilde{u}_1$, alors le point x_0 de \mathbb{R}^n est dit recalable au point x à l'instant tT .

NOTATION :

L'ensemble des points recalables au point x à l'instant tT est noté

$R_1(x)$.

DEFINITION :

Le système (I) sera dit localement Ω -contrôlable au temps tT en x , si $R_1(x)$ contient un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^n .

REMARQUE :

Le chapitre 3 développera des critères permettant de reconnaître les processus contrôlables.

2 - 3 HYPOTHESE :

Nous allons supposer que l'opérateur linéaire C est bijectif pour le reste du §A.

REMARQUES :

- (i) cette hypothèse n'est pas absurde, puisque tout discrétisé d'un représentant de $(D(n), U)$ possède cette propriété (voir E1);
- (ii) les processus non inversibles feront l'objet du §B-2.

DEFINITION :

Tout processus (I) de $(I(n), U_T)$: $x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$ est dit inversible, si l'opérateur linéaire C est bijectif.

2 - 4 PROPRIETES :

Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^p$:

- (i) si Ω est compact, alors $R_1(x)$ est compact;
- (ii) si Ω est convexe, alors $R_1(x)$ est convexe;
- (iii) $D\Omega$ est convexe si et seulement si $R_1(x)$ est convexe.

(ces 3 propriétés découlent de la linéarité des contrôles dans E_6 et du fait que C est bijectif pour (i)).

2 - 5 PROPRIETES :

Supposons que $\text{Ker} D\Omega \neq \emptyset$ et ne considérons que les ensembles de points recalables aux points d'équilibre x de (I) (0-3) :

- (i) pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $x \in R_1(x)$;
- (ii) si $k < l$ (k et $l \in \mathbb{N}^*$), alors $R_k(x)$ est inclus dans $R_l(x)$;
- (iii) si $D\Omega$ n'est pas réduit à $\{0\}$, si Ω est compact et si $k < l$ (k et $l \in \mathbb{N}^*$), alors $R_k(x)$ est strictement inclus dans $R_l(x)$.

DEMONSTRATION :

(i) x est point d'équilibre et il existe $u \in \Omega$, tel que $Du=0$; ainsi par application de E_1 , $x \in R_1(x)$.

(ii) x étant point d'équilibre et C bijectif, par application de E_1 , tout point x_0 appartenant à $R_k(x)$ s'écrit $x_0 = x - \sum_{j=1}^k C^{-j} D u_{j-1}$. Appliquons un contrôle u , tel que $Du=0$ de l'instant kT au temps lT , ainsi $x_0 = x - \sum_{j=1}^l C^{-j} D u_{j-1}$, c'est à dire x_0 appartenant à $R_l(x)$.

(iii) Ω étant compact et $D\Omega$ non réduit au seul élément $\{0\}$, $R_k(x)$ et $C^{-(k+1)} D\Omega$ sont deux compacts, non réduits au seul élément $\{0\}$. Ainsi $R_{k+1}(x) = R_k(x) - C^{-(k+1)} D\Omega$ étant le translaté de $R_k(x)$ par $C^{-(k+1)} D\Omega$, qui contient $\{0\}$, contient strictement $R_k(x)$.

2 - 6 PROPRIETES :

Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

(i) tout vecteur x_0 de $R_1(x)$ est de la forme :

$$\text{E8} : x_0 = C^{-1} x - \sum_{j=1}^l C^{-j} D u_{j-1}$$

$$\text{(ii)} \quad R_{l+1}(x) = \sum_{j=0}^l C^{-j} R_1 - \sum_{j=1}^l C^{-j} x$$

$$R_1(x) = C^{-1} (x - D\Omega)$$

(iii) pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $l \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\text{E9} : R_{ql}(x) = \sum_{k=0}^{q-1} C^{-kl} R_1(x) - \sum_{k=1}^{q-1} C^{-kl} x$$

(iv)

$$\text{E10} : R_1(x) = C^{-1} x + R_1(0)$$

DEMONSTRATION :

a) E8 se déduit de E6, sachant que C est bijectif;

b) (ii) se déduit de E8;

c) E10 est issue de E8, en remarquant que x est point d'équilibre;

d) E9 se démontre en 2 étapes :

- soit x_0 un vecteur de : $\sum_{k=0}^{q-1} C^{-kl} R_1(x) - \sum_{k=1}^{q-1} C^{-kl} x$, alors il existe $\tilde{u}_1 \in \Omega^1$, tel que (voir E8) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{k=0}^{q-1} C^{-kl} \left(C^{-1} x - \sum_{j=1}^l C^{-j} D u_{j-1} \right) - \sum_{k=1}^{q-1} C^{-kl} x \\ &= C^{-ql} x - \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=1}^l C^{-(kl+j)} D u_{j-1} \text{ et } kl < kl+j \leq (k+1)l, 1 \leq j \leq l. \end{aligned}$$

Ainsi $x_0 = C^{-ql} x - \sum_{j=1}^{ql} C^{-j} D u_{j-1}$, avec $u_t = u_{t+kl}$ pour $0 \leq t \leq l-1$ et $0 \leq k \leq q-1$

c'est à dire x_0 appartient à $R_{ql}(x)$.

- inversement, soit x_0 appartenant à $R_{ql}(x)$; en inversant les calculs précédent on obtient :

$$\text{d'après E8} : x_0 \text{ appartient à } \sum_{k=0}^{q-1} C^{-kl} R_1(x) - \sum_{k=1}^{q-1} C^{-kl} x$$

2 - 7 DEFINITION :

L'ensemble noté $R_\infty(x)$ et défini par : $R_\infty(x) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} R_l(x)$ est dit domaine de contrôlabilité en x de \mathbb{R}^n .

PROPRIETES :

Supposons que $\text{Ker} D\Omega \neq \emptyset$ et ne considérons que les domaines de contrôlabilité aux points d'équilibre x de (I) (0-3) :

(i) si Ω est convexe, alors $R_\infty(x)$ est convexe;

(ii) x appartient à $R_\infty(x)$;

(iii) $E11 : R_\infty(x) = x + R_\infty(0)$

(iv) si Ω est compact, si $D\Omega$ est non réduit à $\{0\}$, alors : (I) est localement Ω -contrôlable si et seulement si $R_\infty(x)$ est un ouvert dans \mathbb{R}^n .

DEMONSTRATION :

(i) $R_\infty(x)$ s'écrit comme une réunion de convexes emboîtés, d'après (2-4-ii) et (2-5-iii), est donc convexe;

(ii) x appartient à $R_1(x)$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, d'après (2-5-i), donc $R_\infty(x)$ contient x par définition;

(iii) et E11 se déduit de E10, sachant que x est point d'équilibre;

(iv) soit x_0 un point de $R_\infty(x)$, alors il existe $l_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que x_0 soit contenu dans $R_{l_0}(x)$, par définition de $R_\infty(x)$.

C.N. : par hypothèse il existe l_1 , tel que $R_{l_1}(x)$ contienne un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^n (2-2).

Alors, la suite des $R_l(x)$ étant strictement croissante, avec l croissant (2-5-iii), pour tout $l \geq \sup(l_0, l_1)$, x_0 appartient à $R_l(x)$, qui contient un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^n , que l'on note $V(x)$.

L'opérateur C étant bijectif, $C^{-1}V(x)$ est encore un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^n , x étant position d'équilibre et $x_0 - x + C^{-1}V(x)$ est un voisinage ouvert de x_0 inclus dans $R_\infty(x)$: en effet $R_{2l}(x) = R_l(x) + C^{-1}R_l(x) - x$, par application de E9 et en remarquant que x est une position d'équilibre; ainsi $x_0 - x + C^{-1}V(x)$ est inclus dans $R_{2l}(x)$, puisque x_0 est un point de $R_l(x)$ et $V(x)$ est inclus dans $R_l(x)$.

C.S. : $R_\infty(x)$ est ouvert dans \mathbb{R}^n et s'écrit comme une réunion dénombrable de fermés : $R_1(x)$. \mathbb{R}^n étant un espace de Baire, il existe l , tel que $R_1(x)$ contienne x en son intérieur; ce qui veut dire que le système (I) est localement Ω -contrôlable en x au temps lT .

2 - 8 REMARQUES :

(i) l'ensemble noté $A_1(x_0)$ et défini par :
 $A_1(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n, \text{ tel qu'il existe } \tilde{u}_1 \in \Omega^1, \text{ pour lequel } x = C^1 x_0 + C_1 [C; D] u_1 \}$,
 est dit ensemble des états accessibles en x_0 , au temps lT ;

(ii) le processus (I^{-1}) de $(I(n), U_T)$ défini par :
 $(I^{-1}) : x_1 = C^{-1} (x_{1-1} - D u_{1-1})$
 est dit système inverse de (I);

(iii) $R_1(x_0) = A_1^{-1}(x_0)$ et $A_1(x_0) = R_1^{-1}(x_0)$ pour tout x_0 de \mathbb{R}^n , où $R_1^{-1}(x_0)$ (respectivement $A_1^{-1}(x_0)$) est l'ensemble des points recalables (respectivement états accessibles), en (respectivement à partir de) x_0 , au temps lT pour le processus inverse (I^{-1}) .

(iv) $R_1(x_0)$ et $A_1^{-1}(x_0)$ ont donc les mêmes propriétés algébriques, topologiques et géométriques.

2 - 9 REMARQUES COMPARATIVES ENTRE $(D(n), U)$ ET $(I(n), U_T)$:

(i) contrairement aux représentants de $(D(n), U)$, pour les systèmes de $(I(n), U_T)$, nous allons devoir travailler avec un domaine des commandes convexe. Ce n'est pas le cas pour les processus différentiels ([27], p.84).

(ii) si nous voulons définir l'équivalent de la notion de système inverse pour les processus de $(D(n), U)$, nous définissons le système opposé ([27], p.84) : en effet si x_0 est recalable en x au temps $t > 0$ pour (D) : $\frac{dx}{dt} = A x + B u$, alors x_0 est accessible à partir de x au temps t pour le système opposé $(-D)$: $\frac{dx}{dt} = -A x - B u$.

2 - B DECOMPOSITION GEOMETRIQUE :

Ce paragraphe est structuré en deux parties :

- la première (2-B-1) concerne la décomposition géométrique du domaine de contrôlabilité à l'origine des processus inversibles de $(I(n), U_T)$;
- la seconde (2-B-2), de tout système de $(I(n), U_T)$.

2 -10 REMARQUES :

(i) la décomposition géométrique est réalisée à l'origine, car en tout point d'équilibre x de \mathbb{R}^n , d'après E11, $R_\infty(x) = x + R_\infty(0)$.

(ii) $R_\infty(0)$ et $R_1(0)$ sont notés R_∞ et R_1 .

2 - B - 1 DE SYSTEMES INVERSIBLES :

2 -11 HYPOTHESES :

(i) soit un processus inversible (I) de $(I(n), U_T)$:

$$(I) : x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$$

c'est à dire ayant l'opérateur C bijectif (2-3);

(ii) le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé : compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$.

2 -12 PROPOSITION :

Si le domaine de contrôlabilité à l'origine du système (I) est un ouvert, convexe de \mathbb{R}^n et s'il existe un sous-espace vectoriel L^- de \mathbb{R}^n , inclus dans R_∞ , alors il existe un sous-ensemble noté R_∞^+ , inclus dans L^+ , sous-espace vectoriel supplémentaire de L^- dans \mathbb{R}^n , tel que :

$$R_\infty = L^- \oplus R_\infty^+$$

DEMONSTRATION :

Cette proposition a été démontrée par F.H. Hsu ([17], p.202).

2 -13 NOTATIONS - PROPRIETES :

(i) soit $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$ un diviseur élémentaire de C dans \mathbb{C} et soit S_j le sous-espace cyclique de polynôme minimal $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$; λ_j est un élément du spectre de C dans \mathbb{C} .

(ii) l'opérateur linéaire C étant réel, à tout $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$, $\lambda_j \notin \mathbb{R}$, correspond $(\lambda - \bar{\lambda}_j)^{n_j}$, où $\bar{\lambda}_j$ est le conjugué de λ_j ; ces deux polynômes minimaux, ainsi que leurs sous-espaces cycliques S_j et \bar{S}_j respectivement, sont repérés par le même indice j . Notons $M = \{j, \text{ tel que } (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \text{ est diviseur élémentaire de } C\}$.

(iii) si $\lambda_j \in \mathbb{R}$, alors on pose $L_j = S_j$, qui est réel et

si $\lambda_j \notin \mathbb{R}$, alors on pose L_j comme étant le réelifié de $S_j \oplus \bar{S}_j$.

(iv) avec ces notations, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j \in M} L_j$ et L_j est invariant par C .

(v) soit P_j la projection canonique de \mathbb{R}^n sur L_j , $j \in M$, alors pour tout $j \neq k$, j et k appartenant à M , $P_j \cdot P_k = 0$ et $\sum_{j \in M} P_j$ est confondu avec l'application identité de \mathbb{R}^n .

(vi) soit $R_{\infty j}$ le domaine de contrôlabilité à l'origine du système (I_j) de $(I(n), U_T)$ défini par : pour $j \in M$,

$$(I_j) : \underline{x_1} = C x_{1-1} + P_j D u_{1-1}$$

2 -14 THEOREME DE DECOMPOSITION :

Si le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine, alors son domaine de contrôlabilité à l'origine s'écrit :

$$E13 : R_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus R_{\infty}^+$$

où R_{∞}^+ est un ouvert, borné, convexe de $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$, avec :

$$M^- = \{ j \in M, \text{ tel que } 0 < |\lambda_j| \leq 1 \} \text{ et } M^+ = \{ j \in M, \text{ tel que } |\lambda_j| > 1 \}.$$

COROLLAIRE 1 :

$R_\infty = \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire C est une contraction au sens large (0-6) et
- (ii) le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine.

COROLLAIRE 2 :

R_∞ est un ouvert, borné, convexe de \mathbb{R}^n si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire C est une dilatation au sens stricte (0-6) et
- (ii) le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine.

COROLLAIRE 3 :

si $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, alors le domaine de contrôlabilité à l'origine s'écrit :

$$E14 : R_\infty = \left(\bigoplus_{j \in M^-} S_j \right) \oplus R_\infty^+$$

où R_∞^+ est un ouvert, borné, convexe de $\bigoplus_{j \in M^+} S_j$, S est l'espace vectoriel engendré par $[D \ CD \ \dots \ C^{n-1}D]$ et $S_j = P_j(S)$, pour $j \in M$.

COROLLAIRE 4 :

si $D\Omega = \bigoplus_{j \in M} P_j(D\Omega)$ et si le système (I) est localement Ω -contrôlable

à l'origine, alors le domaine de contrôlabilité à l'origine s'écrit :

$$E15 : R_\infty = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in M^+} R_{\infty j} \right)$$

où $R_{\infty j}$ est un ouvert, borné, convexe de L_j , pour $j \in M^+$.

REMARQUES :

- (i) si $M^+ = \emptyset$, E13 donne le corollaire 1;
- (ii) si $M^- = \emptyset$, E13 donne le corollaire 2;
- (iii) dans le chapitre 3-A-1 il sera démontré que si $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, alors le système (I) est localement Ω -contrôlable en 0 si et seulement si l'espace vectoriel S engendré par $[D \ CD \ \dots \ C^{n-1}D]$ est confondu avec \mathbb{R}^n . Par application de E13 nous obtenons E14 en posant $S_j = P_j(S) = L_j \cap S_j$ et en remarquant que $\bigoplus_{j \in M} P_j(S) = S$.

(iv) si $D\Omega = \bigoplus_{j \in M} P_j(D\Omega)$, alors $R_\infty = \bigoplus_{j \in M} P_j(R_\infty)$. D'après le lemme 1

de la démonstration du théorème 2-14, $P_j(R_\infty) = R_{\infty j}$ pour $j \in M$. Ainsi

$R_\infty = \bigoplus_{j \in M} R_{\infty j}$ et par application des propositions 2 et 3 de la démonstration

du théorème 2-14, nous obtenons le corollaire 4 et E15.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2-14 :Plan de la démonstration :

La démonstration du théorème est articulée sur un lemme et trois propositions :

- (i) $R_{\infty j} = P_j(R_{\infty})$ pour tout $j \in M$ (lemme 1);
- (ii) si le processus (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine et si $|\lambda_j| > 1$, $R_{\infty j}$ est un ouvert, borné, convexe dans L_j (proposition 2);
- (iii) si le processus (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine et si $|\lambda_j| \leq 1$, L_j est inclus dans R_{∞} (proposition 3);
- (iv) et la proposition 2-12.

Par hypothèse le système (I) est localement Ω -contrôlable en 0 et Ω est compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$.

Ainsi R_{∞} est un ouvert de \mathbb{R}^n , qui contient l'espace vectoriel $\bigoplus_{j \in M^-} L_j$, d'après (iii). Alors par application de 2-12, il existe un sous-ensemble R_{∞}^+ de $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$, tel que : $R_{\infty} = (\bigoplus_{j \in M^-} L_j) \oplus R_{\infty}^+$. Ce sous-ensemble R_{∞}^+ est confondu avec $(\sum_{j \in M^+} P_j)(R_{\infty})$, qui vérifie les propriétés demandées, d'après (ii).

Le seul point délicat est la démonstration de (iii) :

comme le système (I) est supposé localement Ω -contrôlable en 0, en un temps $1 \circ T$, on peut choisir une base E_j de l'espace L_j , telle que tout vecteur x de E_j vérifie $\pm x \in R_1$. Alors il existe $1 > 1_0$, $1 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\pm \frac{t}{3} x$ appartienne à R_1 . Ainsi pour tout vecteur x de la base E_j , la droite vectorielle engendrée par x est incluse dans R_{∞} , R_{∞} étant convexe et contenant R_1 . Et l'espace vectoriel L_j de base E_j est inclus dans R_{∞} , toujours par convexité de R_{∞} .

Démonstration :

Supposons (I) localement Ω -contrôlable en 0 à l'instant $1 \circ T$, Ω compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$, ainsi que C bijectif (2-11).

Ainsi 0 appartient à l'intérieur de R_1 , R_1 est une suite de compacts, convexes emboîtés (2-4-i-ii) et R_{∞} est un convexe ouvert dans \mathbb{R}^n , d'après (2-7-i-iv).

Lemme 1 :

Pour tout $j \in M$, $R_{\infty j} = P_j(R_{\infty})$.

Démonstration :

Soit $y \in P_j(x)$, alors il existe $x \in R_{\infty}$, tel que $y = P_j(x)$. Comme $x \in R_{\infty}$, il existe $l \in \mathbb{N}^*$ et u_0, u_1, \dots, u_{l-1} appartenant à Ω , tels que $x = -\sum_{k=1}^l C^{-k} D u_{k-1}$ d'après E8. Par linéarité de P_j , $y = -\sum_{k=1}^l P_j(C^{-k} D u_{k-1})$. Puisque L_j est invariant par C , P_j et C commutent et $P_j(x) = -\sum_{k=1}^l C^{-k} P_j(D u_{k-1})$, qui est un vecteur de $R_{\infty j}$. Donc $P_j(R_{\infty})$ est inclus dans $R_{\infty j}$, pour $j \in M$.

Inversement soit y un vecteur de $R_{\infty j}$, alors il existe $l \in \mathbb{N}^*$ et u_0, u_1, \dots, u_{l-1} appartenant à Ω , tels que $y = -\sum_{k=1}^l C^{-k} P_j(D u_{k-1})$. En inversant les calculs précédents, on montre qu'il existe x point de R_{∞} , tel que $y = P_j(x)$ et $R_{\infty j}$ est inclus dans $P_j(R_{\infty})$ pour $j \in M$.

Notations - Propriétés :

Soit $(v_j^k)_{1 \leq k \leq n_j}$ une chaîne de Jordan, associée au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$ de C dans \mathbb{C} ([11], vol.I p.165), pour $j \in M$. v_j^k est un vecteur colonne de \mathbb{C}^n , défini pour $1 \leq k \leq n_j$, par :

$$\frac{(C - \lambda_j E_n) v_j^k}{v_j^k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=1 \\ v_j^{k-1} & \text{si } 1 < k \leq n_j \end{cases}$$

Tout vecteur $v_j^k = \operatorname{Re} v_j^k + i \operatorname{Im} v_j^k$, pour $1 \leq k \leq n_j$ et $j \in M$. Alors l'ensemble $\{ \operatorname{Re} v_j^k, \operatorname{Im} v_j^k : 1 \leq k \leq n_j \}$ est une base de L_j pour $j \in M$ et :

$$(a) : C^{-1} v_j^k = \lambda_j^{-1} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{1+r-1}{r} \lambda_j^{-r} v_j^{k-r}$$

(par récurrence sur 1 : $C^{-1-1} v_j^2 = \lambda_j^{-1-1} v_j^2 - (1+1) \lambda_j^{-1-2} v_j^1$ et par récurrence

$$C^{-1}V_j^k = \lambda_j^{-1} \left(\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \lambda_j^{-r} V_j^{k-r} \right).$$

Proposition 2 :

Si $|\lambda_j| > 1$, alors $R_{\infty j}$ est un ouvert, convexe et borné de L_j .

Démonstration :

Par hypothèse R_{∞} est un ouvert de \mathbb{R}^n . Comme $R_{\infty j} = P_j(R_{\infty})$ (lemme 1), $R_{\infty j}$ est un ouvert de L_j , l'application P_j étant ouverte.

Par hypothèse R_{∞} est convexe, comme l'application P_j est linéaire, $R_{\infty j}$ est convexe.

Il reste à montrer que si $|\lambda_j| > 1$, alors $R_{\infty j}$ est borné. Par hypothèse Ω est compact et $|\lambda_j| > 1$. Montrons qu'il existe $\mu_j > 0$, tel que $\|x\| < \mu_j$. Soit x un vecteur de $R_{\infty j}$, alors il existe $l \in \mathbb{N}^*$ et u_0, u_1, \dots, u_{l-1} appartenant à Ω , tels que : $x = - \sum_{m=1}^l C^{-m} P_j D u_{m-1}$, d'après E8. Considérons une chaîne de Jordan $(V_j^k)_{1 \leq k \leq n_j}$ associée au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$ de C dans \mathbb{C} . On suppose $\|V_j^k\| < 1$, pour $1 \leq k \leq n_j$ (on réduit la longueur si nécessaire). Alors il existe $(a_{mk}^j)_{1 \leq k \leq n_j}$ une suite finie d'éléments de Ω , tels que $P_j(Du_{m-1}) = \sum_{k=1}^{n_j} (a_{mk}^j V_j^k + \bar{a}_{mk}^j \bar{V}_j^k)$, puisque $\{ (V_j^k + \bar{V}_j^k), i(V_j^k - \bar{V}_j^k) \}$ pour $1 \leq k \leq n_j$ } est une base de L_j . Et en utilisant la relation (a), x appartenant à $R_{\infty j}$ s'écrit :

$$x = - \sum_{m=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \{ a_{mk}^j \lambda_j^{-m} \left(\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} \lambda_j^{-r} V_j^{k-r} \right) + \bar{a}_{mk}^j \bar{\lambda}_j^{-m} \left(\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} \bar{\lambda}_j^{-r} \bar{V}_j^{k-r} \right) \}$$

Comme Ω est compact, les a_{mk}^j sont bornés en module par un certain $\delta > 0$, fini.

Ainsi $\|x\| < 2\delta \sum_{m=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{m+r-1}{r} |\lambda_0|^{-m-r}$, où $|\lambda_0| = \min\{|\lambda_j| / |\lambda_j| > 1\}$ et $\|x\| < 2n_j^2 \delta \sum_{m=1}^l \binom{m+n_j-1}{n_j} |\lambda_0|^{-m}$, avec $|\lambda_0|^{-1} < 1$. La série strictement positive

de terme général $v_m = \binom{m+n_j-1}{n_j} |\lambda_0|^{-m}$ est convergente, puisqu'il existe m_0 et $N < 1$, tels que pour tout $m \geq m_0$, $\frac{v_{m+1}}{v_m} = |\lambda_0|^{-1} \frac{m+n_j}{m} < N < 1$, $|\lambda_0|^{-1}$ étant < 1 et la suite $\frac{m+n_j}{m}$ strictement décroissante. Soit $\frac{\mu_j}{2n_j}$ la somme de cette série. Alors $\|x\| < \mu_j$, qui est fini et ceci pour tout x de $R_{\infty j}$. Donc $R_{\infty j}$ est borné pour tout $j \in M$, tel que $|\lambda_j| > 1$.

Proposition 3 :

Si $|\lambda_j| \leq 1$, alors R_{∞} contient L_j

Démonstration :

1ère étape :

Par hypothèse le processus (I) est localement Ω -contrôlable en 0 à 1_0^T et donc toute chaîne de Jordan $(V_j^k)_{1 \leq k \leq n_j}$, associée au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$, vérifie : pour tout $l \geq 1_0$, pour $1 \leq k \leq n_j$, $\pm \text{Re}V_j^k$ et $\pm \text{Im}V_j^k$ appartiennent à $R_{\infty j}$ (on réduit la longueur si nécessaire).

Lemme 1-1 : si les espaces vectoriels $L(\text{Re}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ et $L(\text{Im}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ sont inclus dans R_{∞} , alors L_j est inclus dans R_{∞} .

démonstration : comme L_j a pour base $\{\text{Re}V_j^k, \text{Im}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j\}$, pour tout x de L_j , il existe y appartenant à $L(\text{Re}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ et z appartenant à $L(\text{Im}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$, tels que $x = y + z$. Mais alors pour $\delta \in]0, 1[$, $x = \delta \left(\frac{1}{\delta} y\right) + (1-\delta) \left(\frac{1}{1-\delta} z\right)$ appartient à R_{∞} , puisqu'il s'écrit comme une combinaison convexe linéaire de deux vecteurs de $L(\text{Re}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ et de $L(\text{Im}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$, qui sont par hypothèse inclus dans R_{∞} , qui est convexe. Ainsi L_j est inclus dans R_{∞} .

Il reste à montrer que $L(\text{Re}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ et $L(\text{Im}V_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ sont inclus dans R_{∞} . Raisonnons par récurrence sur $k : 1 \leq k \leq n_j$.

2 ème étape :

Lemme 1-2 : $L(Rev_j^1)$ et $L(Imv_j^1)$ sont inclus dans R_∞ .

démonstration : (1) par application de la relation (a) t fois et par sommation des t égalités, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$:

$$(b) : \left(\sum_{s=0}^{t-1} C^{-1s} \right) v_j^1 = \left(\sum_{s=0}^{t-1} \lambda_j^{-1s} \right) v_j^1, \text{ pour tout } l \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $F_t(1) = \sum_{s=0}^{t-1} C^{-1s}$; $F_t(1)$ appartient à l'ensemble des matrices carrées

réelles pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$. De plus pour tout $l > 1_0$, $\pm F_t(1) Rev_j^1$ et

$\pm F_t(1) Imv_j^1$ appartiennent à R_{1t} , puisque par hypothèse $\pm Rev_j^1$ et $\pm Imv_j^1$ sont

deux éléments de R_1 et par application de E9.

$$(2) \text{ Soit } f_{tj}(1) = \sum_{s=0}^{t-1} \lambda_j^{-1s} = \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda_j|^{-1s} e^{i1\beta_j s}, \text{ où}$$

$$|\lambda_j| = (\rho_j^2 + \theta_j^2)^{1/2} \text{ et } -\beta_j = \text{Arg}(\lambda_j).$$

$$\text{Ainsi } \text{Ref}_{tj}(1) = \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda_j|^{-1s} \cos(1\beta_j s) \text{ et } \text{Imf}_{tj}(1) = \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda_j|^{-1s} \sin(1\beta_j s)$$

Comme pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$, $l > 1_0$, tels que :

$$2k\pi \leq 1\beta_j < 2k\pi + \frac{\pi}{8t} \text{ ("densité sur le cercle")}, \text{ pour tout } s=0 \text{ à } t, \text{ nous avons :}$$

$$2k\pi s \leq 1s\beta_j < 2k\pi s + \frac{\pi s}{8t} < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ et } \cos(1\beta_j s), \text{ ainsi que } \sin(1\beta_j s) \text{ sont positifs et}$$

non nuls tous les deux. Donc $\text{Ref}_{tj}(1)$ et $\text{Imf}_{tj}(1)$ sont de même signe positif

non nuls tous les deux. De plus, puisque $|\lambda_j| < 1$, l'inégalité suivante est

$$\text{vérifiée : } \frac{(\text{Ref}_{tj}(1))^2 + (\text{Imf}_{tj}(1))^2}{\text{Ref}_{tj}(1) + \text{Imf}_{tj}(1)} > \frac{t}{3}. \text{ De même pour tout } t \in \mathbb{N}^*, \text{ il}$$

existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$, $l > 1_0$, tels que $2k\pi - \frac{\pi}{8t} < 1\beta_j < 2k\pi$. Ainsi $\text{Ref}_{tj}(1) > 0$ et

$\text{Imf}_{tj}(1) \leq 0$ et ne sont pas nuls en même temps. Et puisque $|\lambda_j| < 1$, l'inégalité

$$\text{suivante est vérifiée : } \frac{(\text{Ref}_{tj}(1))^2 + (\text{Imf}_{tj}(1))^2}{\text{Ref}_{tj}(1) - \text{Imf}_{tj}(1)} > \frac{t}{3}.$$

(3) Comme $\pm F_t(1) \operatorname{Re} V_j^1$ et $\pm F_t(1) \operatorname{Im} V_j^1$ appartiennent à R_{1t} , pour tout $l \geq 1_0$, $\pm \operatorname{Re}(f_{tj}(l) V_j^1)$ et $\pm \operatorname{Im}(f_{tj}(l) V_j^1)$ également, d'après l'égalité (b). Et R_{1t} étant convexe, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ et tout $l \in \mathbb{N}^*$, $l \geq 1_0$, ainsi que pour tout $\eta \in [0, 1]$, $\eta \operatorname{Re}(f_{tj}(l) V_j^1) + (1-\eta) \operatorname{Im}(f_{tj}(l) V_j^1)$ est un élément de R_{1t} ; ce qui s'écrit en développant : $h_{tj}^1(l, \eta) \operatorname{Re} V_j^1 + h_{tj}^2(l, \eta) \operatorname{Im} V_j^1$ vecteur de R_{1t} , pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ et $l \geq 1_0$, avec :

$$h_{tj}^1(l, \eta) = \eta (\operatorname{Re} f_{tj}(l) - \operatorname{Im} f_{tj}(l)) + \operatorname{Im} f_{tj}(l) \text{ et}$$

$$h_{tj}^2(l, \eta) = -\eta (\operatorname{Im} f_{tj}(l) + \operatorname{Re} f_{tj}(l)) + \operatorname{Re} f_{tj}(l) .$$

D'après (2), pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, $l_1 \geq 1_0$, tel que :

$$\eta_1 = \frac{-\operatorname{Im} f_{tj}(l_1)}{\operatorname{Re} f_{tj}(l_1) - \operatorname{Im} f_{tj}(l_1)} \text{ appartienne à } [0, 1] \text{ et } h_{tj}^1(l_1, \eta_1) = 0, \text{ ainsi que}$$

$h_{tj}^2(l_1, \eta_1) > \frac{t}{3}$. Et de même pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, il existe $l_2 \in \mathbb{N}^*$, $l_2 \geq 1_0$, tel que :

$$\eta_2 = \frac{\operatorname{Re} f_{tj}(l_2)}{\operatorname{Re} f_{tj}(l_2) + \operatorname{Im} f_{tj}(l_2)} \text{ appartienne à } [0, 1] \text{ et } h_{tj}^2(l_2, \eta_2) = 0, \text{ ainsi que}$$

$$h_{tj}^1(l_2, \eta_2) > \frac{t}{3} .$$

(4) Ainsi pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, il existe $l_1(t)$ et $l_2(t)$

entiers naturels $\geq 1_0$, tels que :

$$h_{tj}^1(l_2, \eta_2) \operatorname{Re} V_j^1 \text{ appartienne à } R_{l_2 t}, \text{ avec } h_{tj}^1(l_2, \eta_2) > \frac{t}{3} \text{ et}$$

$$h_{tj}^2(l_1, \eta_1) \operatorname{Im} V_j^1 \text{ appartienne à } R_{l_1 t}, \text{ avec } h_{tj}^2(l_1, \eta_1) > \frac{t}{3} .$$

Comme R_∞ est convexe et que pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, R_{lt} est inclus dans R_∞ , $L(\operatorname{Re} V_j^1)$ et $L(\operatorname{Im} V_j^1)$ sont inclus dans R_∞ .

Nous allons raisonner par récurrence dans l'étape suivante.

3 ème étape :

Lemme 1-3 : $L(Rev_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ et $L(Imv_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ sont inclus dans R_∞ .

démonstration : raisonnons par récurrence et supposons que les espaces vectoriels $L(Rev_j^k : 1 \leq k \leq m-1)$ et $L(Imv_j^k : 1 \leq k \leq m-1)$ sont inclus dans R_∞ , avec $1 \leq m \leq n_j$.

(1) Par application de (a) t fois et par sommation des t égalités, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$:

$$(c) : \left(\sum_{s=0}^{t-1} c^{-1s} \right) v_j^m = \sum_{s=0}^{t-1} \lambda_j^{-1s} \sum_{r=0}^{m-1} \{ (-1)^r \binom{1+r-1}{r} \lambda_j^{-r} v_j^{m-r} \} \text{ pour } 1 \in \mathbb{N}^*$$

Posons $F_t(1) = \sum_{s=0}^{t-1} c^{-1s}$; $F_t(1)$ appartient à l'ensemble des matrices carrées réelles, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout $1 \in \mathbb{N}^*$. De plus pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, pour tout $1 \geq 1_0$,

$\pm F_t(1) Rev_j^m$ et $\pm F_t(1) Imv_j^m$ appartiennent à R_{1t} , puisque par hypothèse $\pm Rev_j^m$ et $\pm Imv_j^m$ sont deux vecteurs de R_1 et par application de E9.

(2) Soit $f_{tj}^r(1) = \sum_{s=0}^{t-1} (-1)^r \binom{1+r-1}{r} \lambda_j^{-(1s+r)}$ pour $1 \leq r \leq m-1$ et soit $f_{tj}^0(1) = \sum_{s=0}^{t-1} \lambda_j^{-1s} = \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda_j|^{-1s} e^{i1\beta_j s}$, où $|\lambda_j| = (\rho_j^2 + \theta_j^2)^{1/2}$ et $-\beta_j = \text{Arg}(\lambda_j)$.

Ainsi $Re f_{tj}^0(1) = \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda_j|^{-1s} \cos(1\beta_j s)$ et $Im f_{tj}^0(1) = \sum_{s=0}^{t-1} |\lambda_j|^{-1s} \sin(1\beta_j s)$

(3) Comme $\pm F_t(1) Rev_j^m$ et $\pm F_t(1) Imv_j^m$ appartiennent à R_{1t} pour tout $1 \geq 1_0$, $\pm Re \left(\sum_{r=0}^{m-1} f_{tj}^r(1) v_j^{m-r} \right)$ et $\pm Im \left(\sum_{r=0}^{m-1} f_{tj}^r(1) v_j^{m-r} \right)$ sont deux vecteurs de R_{1t} , d'après (c). Comme R_{1t} est convexe, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, tout

$1 \in \mathbb{N}^*$, $1 \geq 1_0$ et pour tout $n \in [0, 1]$:

$n \sum_{r=0}^{m-1} Re \left(f_{tj}^r(1) v_j^{m-r} \right) + (1-n) \sum_{r=0}^{m-1} Im \left(f_{tj}^r(1) v_j^{m-r} \right)$ appartient à R_{1t} , ce qui

s'écrit en développant : $h_{tj}^1(1, n) Rev_j^m + h_{tj}^2(1, n) Imv_j^m + x_{tj}(1, n)$ élément de

R_{1t} , pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \geq 1_0$, avec :

$$h_{tj}^1(1, \eta) = \eta (\operatorname{Re} f_{tj}^0(1) - \operatorname{Im} f_{tj}^0(1)) + \operatorname{Im} f_{tj}^0(1) ,$$

$$h_{tj}^2(1, \eta) = -\eta (\operatorname{Im} f_{tj}^0(1) + \operatorname{Re} f_{tj}^0(1)) + \operatorname{Re} f_{tj}^0(1) \text{ et}$$

$$x_{tj}(1, \eta) = \eta \sum_{r=1}^{t-1} \operatorname{Re} (f_{tj}^r v_j^{m-r}) + (1-\eta) \sum_{r=1}^{m-1} \operatorname{Im} (f_{tj}^r v_j^{m-r}) .$$

En appliquant la même méthode de raisonnement que dans (3) du lemme 1-2,

on peut montrer que :

(4) Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, il existe $l_1(t)$ et $l_2(t)$ deux

entiers naturels ≥ 1 , tels que :

$$h_{tj}^1(l_2, \eta_2) \operatorname{Rev}_j^m + x_{tj}(l_2, \eta_2) \text{ appartient à } R_{l_2 t}, \text{ avec } h_{tj}^1(l_2, \eta_2) > \frac{t}{3} \text{ et}$$

$$h_{tj}^2(l_1, \eta_1) \operatorname{Imv}_j^m + x_{tj}(l_1, \eta_1) \text{ appartient à } R_{l_1 t}, \text{ avec } h_{tj}^2(l_1, \eta_1) > \frac{t}{3} . \text{ De plus}$$

η_1 et η_2 sont contenus dans $[0, 1]$.

Par hypothèse de récurrence, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, tout $l \geq 1$, tout $\eta \in [0, 1]$:

$\pm x_{tj}(1, \eta)$ est un vecteur de R_∞ , R_∞ étant convexe.

Ainsi pour tout $\delta \in [0, 1[$ $\pm \delta h_{tj}^2(l_1, \eta_1) \operatorname{Imv}_j^m$ et $\pm \delta h_{tj}^1(l_2, \eta_2) \operatorname{Rev}_j^m$ appartiennent

à R_∞ ; en effet $\delta h_{tj}^2(l_1, \eta_1) = \delta \{ h_{tj}^2(l_1, \eta_1) \operatorname{Imv}_j^m + x_{tj}(l_1, \eta_1) \} + (1-\delta) \frac{-\delta}{1-\delta} x_{tj}(l_1, \eta_1)$

est une combinaison linéaire convexe de deux vecteurs de R_∞ , puisque pour

tout $t \in \mathbb{N}^*$ et tout $l \in \mathbb{N}^*$, R_{lt} est inclus dans R_∞ ; (de même pour $\delta h_{tj}^1(l_2, \eta_2)$).

Comme R_∞ est convexe, $L(\operatorname{Rev}_j^k : 1 \leq k \leq m)$ et $L(\operatorname{Imv}_j^k : 1 \leq k \leq m)$ sont inclus

dans R_∞ . Et par application du lemme 1-2, $L(\operatorname{Rev}_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ et aussi

$L(\operatorname{Imv}_j^k : 1 \leq k \leq n_j)$ sont contenus dans le domaine de contrôlabilité R_∞ .

Conclusion :

L'application successive du lemme 1-3 et du lemme 1-1 démontre la proposition 3.

Conclusion de la démonstration du théorème 2-14 :

Ainsi pour tout $j \in M^-$, L_j est inclus dans R_∞ (proposition 3). Le domaine de contrôlabilité R_∞ étant convexe (2-7-i), $\bigoplus_{j \in M^-} L_j$ est inclus dans R_∞ . D'autre part le système (I) étant localement Ω -contrôlable à l'origine, R_∞ est un ouvert de \mathbb{R}^n .

D'où par application de la proposition 2-12, il existe un sous-ensemble noté R_∞^+ de l'espace vectoriel $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$, supplémentaire de $\bigoplus_{j \in M^-} L_j$ dans \mathbb{R}^n , tel que : $R_\infty = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus R_\infty^+$.

Comme la projection de \mathbb{R}^n sur R_∞^+ est égale à $\left(\sum_{j \in M^+} P_j \right)$, l'ensemble $R_\infty^+ = \left(\sum_{j \in M^+} P_j \right) (R_\infty)$ est ouvert, convexe dans $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$, l'application projection $\left(\sum_{j \in M^+} P_j \right)$ étant ouverte et linéaire.

Enfin $\left(\sum_{j \in M^+} P_j \right) (R_\infty)$ est inclus dans $\bigoplus_{j \in M^+} P_j (R_\infty)$, qui est borné d'après la proposition 2.

2 - B - 2 DE SYSTEMES QUELCONQUES :2 -14 HYPOTHESES :(i) soit (I) un processus de $(I(n), U_T)$:

$$(I) : x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$$

(ii) le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^n , est supposé : compact, convexe et $D\Omega$ est non réduit à $\{0\}$.2 -15 THEOREME (C.N.S.) :

Si le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine, alors son domaine de contrôlabilité à l'origine s'écrit :

$$E16 : R_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus R_{\infty}^+ \oplus \left(\bigoplus_{j \in M^0} L_j \right)$$

où R_{∞}^+ est un ouvert, convexe, borné de $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$, avec :

$M^- = \{ j \in M, \text{ tel que } 0 < |\lambda_j| \leq 1 \}$, $M^+ = \{ j \in M, \text{ tel que } |\lambda_j| > 1 \}$ et

$M^0 = \{ j \in M, \text{ tel que } \lambda_j = 0 \}$.

COROLLAIRE :

Si $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, alors le domaine de contrôlabilité à l'origine s'écrit :

$$E17 : R_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} S_j \right) \oplus R_{\infty}^+ \oplus \left(\bigoplus_{j \in M^0} L_j \right)$$

où R_{∞}^+ est un ouvert, convexe, borné de $\bigoplus_{j \in M^+} S_j$, S est l'espace vectoriel engendré par $[D \ CD \ \dots \ C^{n-1} \ D]$ et $S_j = P_j(S)$, pour $j \in M$.

REMARQUES :

- (i) toutes les notations 2-13 sont réutilisées;
- (ii) les corollaires 1, 2 restent inchangés.

CONSEQUENCES :

(i) nous ne donnerons que des critères de contrôlabilité de systèmes inversibles.

(ii) le processus (I) est localement Ω -contrôlable si et seulement si est un ouvert de \mathbb{R}^n .

DEMONSTRATION DU THEOREME 2-15 :

(a) Montrons qu'il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $j \in M^0$, L_j est inclus dans R_{l_1} . Soit x un vecteur de L_j et considérons $C^1 x$ pour $l \in \mathbb{N}^*$. Comme L_j est invariant par C et que $P_j(x) = x$ pour x de L_j , $C^1 P_j x = P_j C^1 x$. Et puisque $P_j(C)$ est nilpotente pour $j \in M^0$, de coefficient de nilpotence n_j . Ainsi $P_j(C^{n_j}) = 0$. Soit $l_1 = \sup \{ n_j \text{ pour } j \in M^0 \}$. Alors pour tout $j \in M^0$, on a $P_j(C^{l_1}) = 0$. Pour que x de L_j soit recalable à l'origine au temps $l_1 T$, il

suffit qu'il existe $u_0, u_1, \dots, u_{l_1-1}$ appartenant à Ω , tel que (d'après E6)

$$0 = C^{l_1} x + \sum_{k=1}^{l_1} C^{l_1-k} D u_{k-1} = \sum_{k=1}^{l_1} C^{l_1-k} D u_{k-1}, \text{ puisque } C^{l_1} x = P_j(C^{l_1}) x = 0$$

En prenant pour contrôles la suite finie : $u_0, u_1, \dots, u_{l_1-1}$ telle que :

$Du_0 = Du_1 = \dots = Du_{l_1-1} = 0$, l'égalité se vérifie. Donc L_j est inclus

dans R_{l_1} pour tout $j \in M^0$. Et pour que ce résultat soit vérifié, il nous

a suffi de supposer que $D\Omega$ contienne $\{0\}$.

(b) Ainsi L_j est inclus dans R_{l_1} pour tout $j \in M^0$ et par convexité de R_{l_1} , $\bigoplus_{j \in M^0} L_j$ est inclus dans R_{l_1} . Et par application du théorème 2-14 et de la proposition 2-12, qui est indépendante du fait que le système (I) soit inversible ou non, on obtient le théorème 2-15 par le même raisonnement que dans la conclusion de la démonstration du théorème 2-14.

(c) Le corollaire se déduit du corollaire 3 de 2-14, en remarquant que L_j est inclus dans R_{l_1} pour tout $j \in M^0$, puisqu'il suffit que $D\Omega$ contienne 0.

2 - C DECOMPOSITION GEOMETRIQUE COMPAREE :

Cette comparaison des domaines de contrôlabilité des systèmes itératifs et différentiels est possible grâce à une étude réalisée par F.H. Hsu [17] concernant justement la décomposition géométrique du domaine de contrôlabilité des processus à temps continu du type de ceux de $(D(n), U)$.

2 -16 HYPOTHESES :

(i) soit (D) un système de $(D(n), U)$:

$$(D) : \frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t)$$

(ii) soit (I) un processus de $(I(n), U_T)$:

$$(I) : x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$$

(iii) le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé : compact, convexe, $B\Omega$ et $D\Omega$ non réduits à $\{0\}$.

2 -17 THEOREME :

(i) si le processus (D) de $(D(n), U)$ et son T-discrétisé sont localement Ω -contrôlable à l'origine et si tout élément μ du spectre de A vérifie :

$$\text{E18} : \text{Im}\mu \neq \frac{k\pi}{T}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^*$$

Alors les domaines de contrôlabilité de (D) , noté C_∞ , et de son T-discrétisé noté R_∞ , sont donnés par E20;

(ii) si le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine et si tout élément λ du spectre de C vérifie :

$$\text{E19} : \lambda \text{ n'appartient pas à } \mathbb{R}^-$$

Alors il existe au moins un T-réciproque de (I) , tel que les domaines de contrôlabilité de (I) , noté R_∞ , et de ce (ou ces) T-réciproque(s), noté C_∞ sont donnés par E20.

$$\begin{array}{l}
 \text{E20} : C_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus C_{\infty}^+ \\
 R_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus R_{\infty}^+
 \end{array}$$

où R_{∞}^+ et C_{∞}^+ sont deux ouverts, bornés, convexes de $\bigoplus_{j \in M^+} L_j$ et R_{∞}^+ est inclus dans C_{∞}^+ .

COROLLAIRE :

si $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$. Alors :

(i) si A vérifie E18, les domaines de contrôlabilité de (D), noté C_{∞} , et de son T-discrétisé, noté R_{∞} , sont donnés par E21;

(ii) si C vérifie E19, il existe au moins un T-réciproque de (I), tel que les domaines de contrôlabilité de (I), noté R_{∞} , et de ce(s) T-réciproque(s), noté(s) C_{∞} , sont donnés par E21.

$$\begin{array}{l}
 \text{E21} : C_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} S_j \right) \oplus C_{\infty}^+ \\
 R_{\infty} = \left(\bigoplus_{j \in M^-} S_j \right) \oplus R_{\infty}^+
 \end{array}$$

où R_{∞}^+ et C_{∞}^+ sont deux ouverts, bornés, convexes de $\bigoplus_{j \in M^+} S_j$, avec $P_j(S) = S_j$ pour $j \in M$ et S l'espace vectoriel engendré :

- pour (i) par $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$;
- pour (ii) par $[D \ CD \ \dots \ C^{n-1}D]$.

REMARQUES :

(i) nous conservons les notations 2-13;

(ii) si le système (I) est localement Ω -contrôlable en 0, alors tous ses T-réciproques sont également localement Ω -contrôlables en 0, puisque R_{∞} est inclus dans C_{∞} , par construction (processus de T-discrétisation);

(iii) E18 et E19 sont respectivement plus fortes que les conditions E2 (propriété 1-5) et E4 (théorème 1-10). Ainsi les résultats du chapitre 1 sont encore vérifiés.

La démonstration du corollaire nécessite la connaissance de deux lemmes techniques.

LEMME 1 :

Soient X et Y deux opérateurs linéaires réels $n \times n$ et $n \times p$ ($1 \leq p \leq n$). Alors l'opérateur linéaire $C_n[X, Y]$ est surjectif si et seulement s'il n'existe pas de directions propres tV , vecteur colonne de \mathbb{R}^n , $\neq 0$, de tX , tel que $VY = 0$.

DEMONSTRATION : [33] p.320.

LEMME 2 :

Soient X et Y deux opérateurs linéaires réels $n \times n$ et $n \times p$ ($1 \leq p \leq n$). Alors l'opérateur linéaire $C_n[X, Y]$ est de rang k , $1 \leq k \leq n$, si et seulement s'il existe un changement de base réelle R , telle que :

(i) $X = R X R^{-1}$ et $Y = R Y$ sont dans la forme :

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \underline{X_{11} \text{ de dimension } k \times k \text{ et } Y_1 \text{ } k \times p}$$

(ii) l'opérateur linéaire $C_k[X_{11}, Y_1]$ est de rang k .

DEMONSTRATION : se déduit de [33] p.320, en raisonnant par l'absurde.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2-17 :

(i) soit un diviseur élémentaire de A dans $\mathbb{C} : (\mu - \mu_j)^{n_j}$. On définit N comme M dans 2-13. Soient $N^- = \{j \in N, \text{ tel que } \operatorname{Re} \mu_j \leq 0\}$ et $N^+ = \{j \in N, \text{ tel que } \operatorname{Re} \mu_j > 0\}$. Considérons K_j le réélifié du sous-espace cyclique de polynôme minimal $(\mu - \mu_j)^{n_j}$, pour $j \in N$ (idem à L_j dans 2-13). Alors le domaine de contrôlabilité C_∞ de (D) s'écrit, d'après F.H. Hsu [17] :

$$C_\infty = \left(\bigoplus_{j \in N^-} K_j \right) \oplus C_\infty^+, \text{ où } C_\infty^+ \text{ est un ouvert, borné, convexe de } \bigoplus_{j \in N^+} K_j.$$

D'après le théorème 2-14, le domaine de contrôlabilité du T-discrétisé (E1) de (I) , en utilisant les notations 2-13,

$$R_\infty = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus R_\infty^+, \text{ où } R_\infty^+ \text{ est un ouvert, borné, convexe de } \bigoplus_{j \in M^+} L_j.$$

Comme A vérifie E18, si $(\mu - \mu_j)^{n_j}$ est un diviseur élémentaire pour A, $(\lambda - e^{\mu_j T})^{n_j}$ est un diviseur élémentaire pour e^{AT} . Ainsi ${}^t A$ et ${}^t e^{AT}$ ont le même ensemble de sous-espaces cycliques. D'autre part si μ_j est une valeur propre de multiplicité k, alors $e^{\mu_j T}$ est une valeur propre de même multiplicité k, moyennant la condition E18.

Ainsi $M=N$, $M^- = N^-$ et $M^+ = N^+$. Et par construction $L_j = K_j$ pour tout $j \in M$. De plus R_∞^+ est inclus dans C_∞^+ , par construction du T-discrétisé.

(ii) Le T-discrétisé du T-réciproque de (I) est justement (I). Ainsi nous obtenons le résultat inverse, car moyennant la condition E19, il existe au moins un T-réciproque, donné par E5, vérifiant E18. En effet on peut toujours choisir $\frac{1}{T} \text{Log} C$, tel que si $\lambda > 0$ est un élément du spectre de C, $\mu = \frac{1}{T} \text{Log} \lambda$ est un élément du spectre de $\frac{1}{T} \text{Log} C$ (1ère ligne du tableau donnant un logarithme réel d'une matrice réelle).

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE :

Vu le corollaire 3 du théorème 2-14 et de l'homologue pour les systèmes de $(D(n), U)$ [17], il nous suffit, connaissant le théorème 2-17, de comparer l'espace vectoriel engendré par $C_n[A, B]$ et celui engendré par :

$C_n[e^{AT}, \left\{ \int_0^T e^{As} ds \right\} B]$, vu la forme du T-discrétisé (D), donné par E1.

Supposons que le rang de $C_n[A, B] = k$, alors d'après le lemme 2, il existe un changement de base réelle R, telle que $A = R^{-1} A R$ et $B = R^{-1} B$ sont de

la forme : $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, où A_{11} est de dimension $k \times k$ et B_1 $k \times p$. De plus nous avons le rang de $C_k[A_{11}, B_1] = k$. Mais alors, d'après

le lemme 1, il n'existe pas de directions propres ${}^t v$ de ${}^t A_{11}$, telle que $v B_1 = 0$.

D'autre part $e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{A_{11}T} & X \\ 0 & e^{A_{22}T} \end{bmatrix}$, où $e^{A_{11}T}$ est de dimension $k \times k$ et X une matrice réelle, que l'on ne précisera pas, de dimension $k \times (n-k)$.

Comme A vérifie E18, tA et ${}^t e^{AT}$ ont le même ensemble de directions propres, car, dans l'hypothèse où $(\mu - \mu_j)^{n_j}$ est diviseur élémentaire de A , $(\lambda - e^{\mu_j T})^{n_j}$ l'est aussi pour ${}^t e^{A_{11}T}$ et inversement. Ainsi, il en est de même pour ${}^t A_{11}$ et ${}^t e^{A_{11}T}$. Et donc, il n'existe pas de direction propre ${}^t v$ de ${}^t e^{A_{11}T}$, telle que $vB_1 = 0$. Alors par application du lemme 1, le rang de $C_k[e^{A_{11}T}, B_1] = k$ et par application du lemme 2, le rang de $C_n[e^{AT}, B] = k$.

Donc moyennant la condition E17, les espaces vectoriels engendrés par

$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ et par $\left[\int_0^T e^{As} B ds \quad e^{AT} \int_0^T e^{As} B ds \quad \dots \quad e^{AT(n-1)} \int_0^T e^{As} B ds \right]$ sont confondus.

2 -18 EXEMPLES :

Les exemples qui suivent illustrent le théorème 2-17.

Exemple 1 :

Considérons l'équation différentielle : $\frac{d^2x}{dt^2} - 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = u$, avec

$|u(t)| \leq 1$, $b > 0$, $k^2 > 0$. Cette équation est équivalente au système :

$$(D) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -k^2x + 2by + u \end{cases}$$

Le système libre associé à (D) n'est pas stable à l'origine, mais est localement $[-1, +1]$ -contrôlable en 0 et normal. Soient (D-) et (D+), les processus extrémaux associés à (D), c'est à dire obtenus par application respectivement des commandes $u=-1$ et $u=+1$.

a) Supposons que $b^2 - k^2 < 0$.

Chaque solution de $(D-)$ spirale vers l'extérieur à partir de $O- : (-\frac{1}{2}, 0)$ et chaque solution de $(D+)$ spirale vers l'extérieur à partir de $O+ : (\frac{1}{2}, 0)$, pour t croissant. Le domaine de contrôlabilité C_∞ est une région ouverte, convexe, bornée par la solution de $(D-)$ qui passe de $(x-, 0)$ à $(x+, 0)$ dans le 1/2 espace fermé $y \geq 0$ et par la solution de $(D+)$, qui passe de $(x+, 0)$ à $(x-, 0)$ dans le 1/2 espace fermé $y \leq 0$. De plus C_∞ est symétrique par rapport à l'origine. Les abscisses $x+$ et $x-$ sont connues exactement :

$$x+ = \frac{1 + \exp(-b\pi/\omega)}{1 - \exp(-b\pi/\omega)} \times k^{-2} \text{ et } x- = -x+, \text{ avec } \omega = (k^2 - b^2)^{1/2}$$

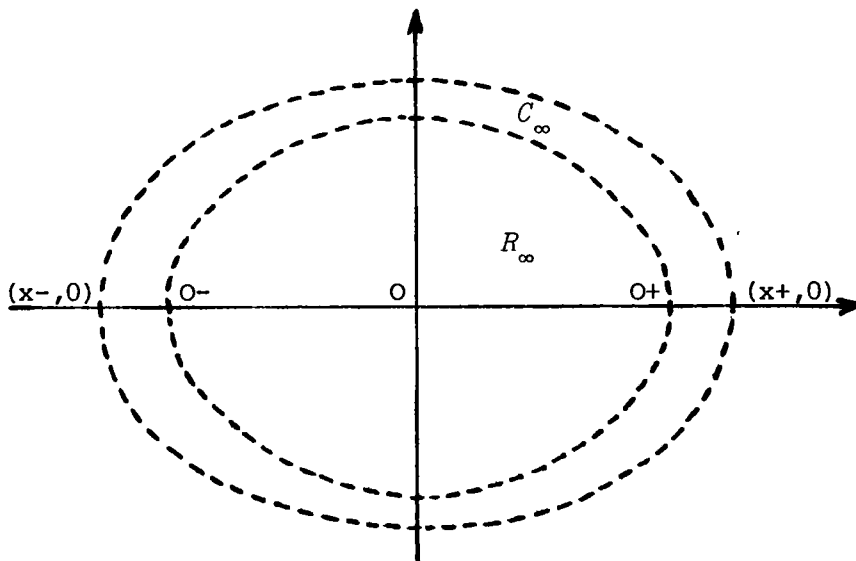
Nous allons à présent regarder la forme du domaine de contrôlabilité du T -discrétisé de (D) . Il est donné par le système suivant : (I)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = e^{bT} \begin{bmatrix} \frac{b}{\omega} \sin \omega T + \cos \omega T & \frac{1}{\omega} \sin \omega T \\ \frac{k^2}{\omega} \sin \omega T & \frac{b}{\omega} \sin \omega T + \cos \omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{1-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2} + e^{bT} \left(-\frac{b}{k^2} \sin \omega T - \frac{1}{k^2} \cos \omega T \right) \\ \frac{1}{\omega} e^{bT} \sin \omega T \end{bmatrix} u_{1-1}$$

Suivant les valeurs de T , le système (I) est localement contrôlable en O ou non (condition E18).

Pour $T = (\pi + q\pi)\omega^{-1}$, $q \in \mathbb{Z}$, le processus (I) n'est pas localement $[-1, +1]$ -contrôlable en O et le domaine de contrôlabilité R_∞ est un intervalle ouvert, symétrique par rapport à O : $R_\infty = [0-, 0+]$. On remarquera que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, R_∞ est invariant.

Pour $T = (\frac{\pi}{2} + q\pi)\omega^{-1}$, $q \in \mathbb{Z}$, le système est localement $[-1, +1]$ -contrôlable en O et le domaine de contrôlabilité R_∞ est une région ouverte du plan, symétrique par rapport à O , de points d'intersection sur l'axe des abscisses $O-$ et $O+$. On remarquera à nouveau que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, R_∞ a pour intersection sur l'axe des abscisses $O-$ et $O+$.



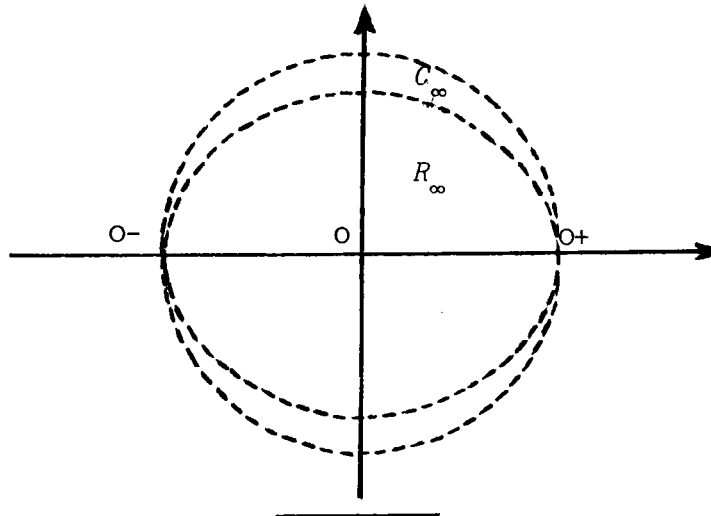
b) Supposons que $b^2 - k^2 > 0$.

Le domaine de contrôlabilité C_∞ de (D) est une région ouverte du plan, bornée par la solution de (D+), issue de $O+$ et passant par $O-$ dans $y < 0$ et par la solution de (D-), issue de $O-$ et passant par $O+$ dans $y > 0$.

Le T-discrétisé de (D) a pour système (I) :

$$(I) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = e^{bT} \begin{bmatrix} -b\omega^{-1}sh\omega T + ch\omega T & \omega^{-1}sh\omega T \\ -k^2\omega^{-1}sh\omega T & b\omega^{-1}sh\omega T + ch\omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{1-1} + \begin{bmatrix} k^{-2} + k^{-2}e^{bT}(b\omega^{-1}sh\omega T - ch\omega T) \\ e^{bT}\omega^{-1}sh\omega T \end{bmatrix} u_{1-1}$$

Son domaine de contrôlabilité R_∞ est une région ouverte, convexe, symétrique par rapport à O du plan et d'intersection avec l'axe des abscisses $O+$ et $O-$.



Exemple 2 :

Considérons l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + 2bx - k^2x = u$, avec $|u(t)| \leq 1$, $b > 0$ et $k^2 > 0$.

Cette équation est équivalente au système :

$$(D) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = k^2x - 2by + u \end{cases}$$

Le système libre associé n'est pas stable à l'origine, mais est localement $[-1, +1]$ -contrôlable en O . Le domaine de contrôlabilité C_∞ de (D) est l'ouvert, convexe, symétrique par rapport à O , compris entre les droites d'équation $y = (-b-\omega)(x-k^{-2})$ et $y = (-b-\omega)(x+k^{-2})$, qui sont les droites asymptotes respectivement à la solution de (D+), passant par O et se trouvant dans le 4ème quadrant et à la solution de (D-) passant par O et se trouvant dans le 2ème quadrant, où (D+) et (D-) sont les systèmes extrêmes

de (D), ayant pour points critiques O^- et O^+ avec $\omega = (k^2 + b^2)^{1/2}$.

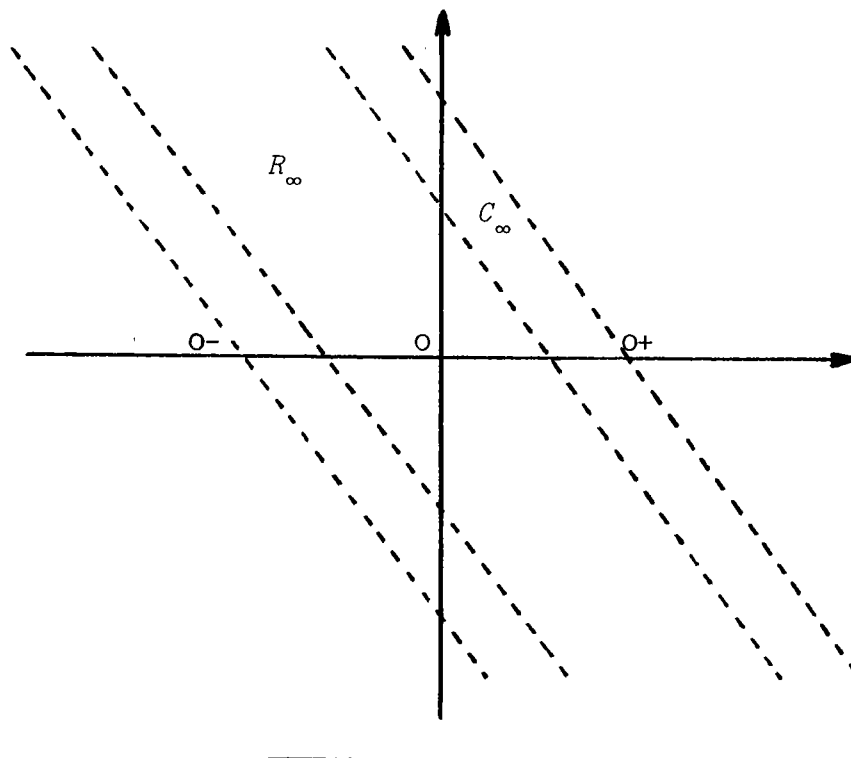
Le T-discrétisé s'écrit :

$$(I) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = e^{-bT} \begin{bmatrix} \text{ch}\omega T + b\omega^{-1} \text{sh}\omega T & \omega^{-1} \text{sh}\omega T \\ k^2 \omega^{-1} \text{sh}\omega T & \text{ch}\omega T - b\omega^{-1} \text{sh}\omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{1-1} + \begin{bmatrix} k^{-2} e^{-bT} (\text{ch}\omega T + b\omega^{-1} \text{sh}\omega T) - k^{-2} \\ \omega^{-1} e^{-bT} \text{sh}\omega T \end{bmatrix} u_{1-1}$$

Son domaine de contrôlabilité est une région ouverte, convexe et symétrique par rapport à O , du plan, limitée par les deux droites d'équation :

$$y = (-b-\omega)(x-a) \text{ et } y = (-b-\omega)(x+a), \text{ avec } a < \frac{1}{k^2}.$$

Il serait évidemment très intéressant de donner une idée plus précise de a , en fonction du pas T de la discrétisation.



2 -19 REMARQUES :

Comme nous l'avons remarqué sur ces exemples, il est très difficile de cerner avec précision le domaine de contrôlabilité du discrétisé; en effet, sa forme nous est connue (théorème 2-14) alors que sa frontière n'est pas déterminée avec précision par ce même théorème.

Ainsi l'influence du pas de discrétisation sur les limites du domaine de contrôlabilité est mal définie.

Intuitivement, on peut penser que la frontière du domaine de contrôlabilité du T-discrétisé se rapproche de celle du système différentiel dont

il est issu, plus le pas T de la discrétisation est petit. Encore que ceci ne soit pas évident, comme nous l'avons fait remarquer dans l'exemple 1-a.

Ainsi connaissant les critères de contrôlabilité des systèmes différentiels, processus de $(D(n), U)$, il est possible de reconnaître des éléments de $(I(n), U_T)$ qui sont contrôlables, mais pas tous; seulement ceux qui sont de la forme :

$$(I) \quad : \quad x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$$

où C est un opérateur linéaire dont le spectre ne contient aucun élément de \mathbb{R}^- (conséquence de E1 et de E18).

C'est pourquoi, il est nécessaire d'établir des critères de contrôlabilité pour les systèmes de la famille $(I(n), U_T)$. C'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

CRITERES DE CONTROLABILITE

L'étude de la contrôlabilité, dans le cas où le domaine des commandes est un espace vectoriel ($\Omega = \mathbb{R}^P$), a été très étudié aussi bien pour les systèmes différentiels qu'itératifs. ([9], [10], [22]-[24], [41], [43]-[44])

L'ouvrage fondamental de Wohnam [44], qui se place dans cette hypothèse, pour les processus à temps continu, est en grande partie directement transposable aux systèmes à temps discret, le domaine de contrôlabilité R_∞ étant un espace affine confondu avec R_n , comme dans le cas continu. C'est d'ailleurs de cette dernière propriété de R_∞ que l'on tire le critère de Kalman [23].

Le chapitre 3 se place dans le prolongement du précédent et ne considère donc que des processus auxquels sont appliquées des commandes à valeurs dans un domaine des contrôles Ω compact. L'objet de ce chapitre est d'établir des critères de locale Ω -contrôlabilité, hypothèse pratiquement toujours vérifiée dans le chapitre 2, et d'en déduire des critères de globale et complète Ω -contrôlabilité, en utilisant les théorèmes de décomposition géométrique du domaine de contrôlabilité, théorèmes démontrés précédemment (2-14, 2-17).

Ce chapitre comprend 3 parties, à savoir :

- la contrôlabilité des processus itératifs, auxquels sont appliquées des commandes "multidirectionnelles", c'est à dire à valeurs dans un sous-ensemble Ω , inclus dans \mathbb{R}^P , vérifiant la propriété 0 est à l'intérieur de Ω dans \mathbb{R}^P ;
- la contrôlabilité des systèmes récurrents, auxquels sont appliqués des contrôles "unidirectionnels", c'est à dire à valeurs dans un sous-ensemble Ω , inclus dans \mathbb{R}^P , mais ne vérifiant plus la propriété 0 est à l'intérieur de Ω dans \mathbb{R}^P ;
- la contrôlabilité comparée des processus à temps discret et à temps continu, qui complète les résultats de 2-C.

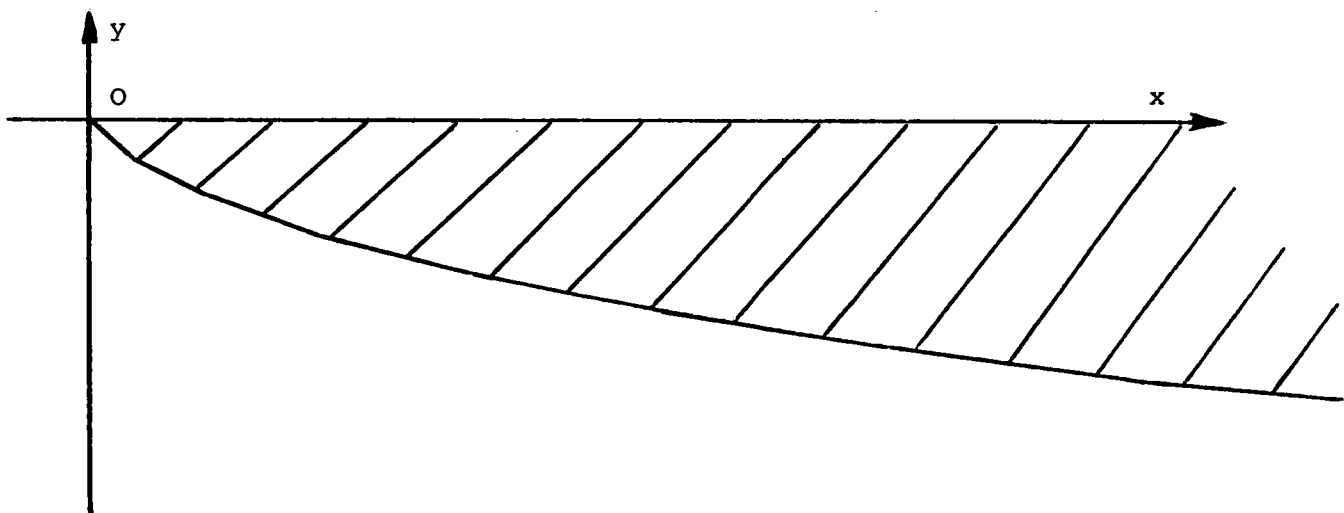
Pourquoi distinguer le cas des commandes "multidirectionnelles" et celui des contrôles "unidirectionnels"? Comme le montre l'exemple qui suit, les critères ne seront pas les mêmes.

3 - 1 EXEMPLE :

Considérons le processus abstrait suivant :

$$(I) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{1-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{1-1}, \text{ pour } 1 \in \mathbb{N}^*$$

- si u_{1-1} appartient à $[-1,+1]$, alors $R_\infty = \mathbb{R}^n$;
- si u_{1-1} appartient à $[0,+1]$, alors (I) n'est pas localement $[0,+1]$ contrôlable à l'origine et R_∞ est représenté par la partie hachurée.

3 - 2 HYPOTHESES GENERALES :

(i) considérons un représentant inversible de $(I(n), U_{\mathbb{T}})$:

$$(I) : x_1 = C x_{1-1} + D u_{1-1}$$

c'est à dire avec C bijectif;

(ii) le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé : compact, $\text{Ker} D \cap \Omega \neq \emptyset$ et qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq q \leq p \leq n$, tel que Ω soit d'intérieur non vide dans \mathbb{R}^q .

REMARQUES :

(i) il n'est pas nécessaire de donner des critères de contrôlabilité des systèmes non inversibles, d'après le théorème 2-15.

(ii) R_1 (respectivement A_1) représente l'ensemble des points recalables à l'origine (respectivement des états accessibles à partir de l'origine) au temps t . R_∞ est le domaine de contrôlabilité à l'origine.

(iii) Tous les critères démontrés dans ce chapitre sont valables en toute position d'équilibre x de (I) , d'après E11.

(iv) Nous comparerons les processus de $(I(n), U_T)$ et ceux de $(D(n), U)$, dans 3-C, grâce à un article de Brammer [5] et à un autre de Saperstone [37] dans le cas des commandes "unidirectionnelles".

3 - A CAS DES SYSTEMES A CONTROLES MULTIDIRECTIONNELS :

Nous considérerons successivement la locale Ω -contrôlabilité à l'origine, puis la globale et complète Ω -contrôlabilité, qui sont déduites du cas local par le théorème 2-14.

3 - A - 1 LOCALE Ω -CONTROLABILITE :

3 - 3 HYPOTHESES :

Le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé : compact et 0 appartient à l'intérieur de Ω dans \mathbb{R}^p .

3 - 4 DEFINITION :

Le processus (I) est dit localement Ω -contrôlable à l'origine au temps tT , si l'ensemble des points recalables à l'origine au temps tT , c'est à dire R_1 , contient un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^p .

3 - 5 THEOREME (C.N.S.) :

Le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine au temps tT si et seulement si l'opérateur linéaire $C_1[C,D]$ est de rang n.

REMARQUES :

- (i) $l \in L = \{l \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } l \cdot p > n \text{ et } l \leq n\}$;
- (ii) la matrice $C_1[C,D]$ est dite l-matrice de contrôlabilité;
- (iii) si le processus (I) n'est pas localement Ω -contrôlable au temps nT , il ne le sera jamais.

DEMONSTRATION :

Condition nécessaire : raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $\text{rg} C_1[C,D] < n$, alors il existe v vecteur ligne de \mathbb{R}^n , $\neq 0$, tel que $v C_1[C,D] = 0$. D'autre part supposons qu'il existe $l_0 \in L$, tel que R_{1_0}

contienne un voisinage dans \mathbb{R}^n de l'origine; alors pour tout x appartenant à R_1 et η vecteur ligne de \mathbb{R}^n , tel que si $\eta x = 0$ alors $\eta = 0$. Soit 0x un élément de R_{1_0} , alors $0 = C^{1_0} x + C_{1_0} [C,D] u_{1_0}$, d'après E7; et il existe v vecteur de \mathbb{R}^n , $\neq 0$, tel que $vC^{1_0}x = 0$, ce qui est impossible, puisque $v \neq 0$ et C bijectif.

Condition suffisante : il existe Ω' inclus dans Ω , tel que Ω' soit convexe, symétrique par rapport à 0 , dans \mathbb{R}^p , puisque 0 est à l'intérieur de Ω dans \mathbb{R}^p .

Supposons qu'il existe $l \in L$, tel que $\text{rg} C_1 [C,D] = n$ et soit R'_1 l'ensemble des points recalables en 0 au temps lT , à l'aide de commandes à valeurs dans Ω' . Alors $\dim R'_1 = n$: en effet, supposons que $\dim R'_1 < n$, alors il existe $v \neq 0$, vecteur ligne de \mathbb{R}^n , tel que $vC^{1_0}x = 0$, C étant bijectif, pour tout $x \in R'_1$ et ainsi $vC_1 [C,D] = 0$, d'après E7, ce qui est impossible.

Comme $\dim R'_1 = n$, il existe y appartenant à R'_1 , tel que R'_1 contienne un voisinage de y . Le domaine Ω' étant symétrique par rapport à 0 de \mathbb{R}^p et convexe, R'_1 est symétrique par rapport à 0 de \mathbb{R}^n et convexe. Donc, il existe un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n contenu dans R'_1 , lui-même inclus dans R_1 .

3 - A - 2 GLOBALE Ω -CONTROLABILITE :3 - 6 HYPOTHESES :

Le domaine des contrôles Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé :
compact, convexe et 0 appartient à l'intérieur de Ω dans \mathbb{R}^p .

3 - 7 DEFINITION :

Le système (I) est dit globalement Ω -contrôlable à l'origine, si son domaine de contrôlabilité à l'origine, c'est à dire R_∞ , est confondu avec tout l'espace vectoriel \mathbb{R}^n .

3 - 8 THEOREME (C.N.S.) :

Le processus (I) est globalement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire $C_n[C,D]$ est de rang n et
- (ii) l'opérateur linéaire C est une contraction au sens large.

REMARQUES :

(i) contrairement au cas de la locale Ω -contrôlabilité, il est ici nécessaire de supposer Ω convexe, d'après le théorème 2-14;

(ii) ce n'est pas une restriction, vu que dans \mathbb{R}^p , Ω est d'intérieur non vide, et donc qu'il existe toujours Ω' , inclus dans Ω , Ω' convexe;

(iii) tout point x de \mathbb{R}^n est recalable en 0 en un temps fini.

DEMONSTRATION :

Le théorème 3-8 est une conséquence directe du théorème 3-5 et du corollaire 1 du théorème 2-14.

3 - A - 3 COMPLETE Ω -CONTROLABILITE :3 - 9 HYPOTHESES :

Le domaine des contrôles Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé :
compact, convexe et 0 appartient à l'intérieur de Ω dans \mathbb{R}^p .

3 - 10 DEFINITION :

Le système (I) est dit complètement Ω -contrôlable, si pour toute
paire de points (x_0, x_1) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, x_0 est recalable en x_1 en un temps fini.

3 - 11 THEOREME (C.N.S.) :

Le processus (I) est complètement Ω -contrôlable si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire $C_n[C, D]$ est de rang n et
- (ii) tout élément λ du spectre de C dans \mathbb{C} vérifie : $|\lambda| = 1$.

DEMONSTRATION :

Aller de x_0 à x_1 en un temps fini est équivalent d'aller de x_0 à 0 en un temps fini et de 0 à x_1 en un temps fini.

Vu les conditions (i) et (ii), et par application du théorème 3-8, $R_\infty = \mathbb{R}^n$, c'est à dire que tout point x de \mathbb{R}^n est recalable en 0 en un temps fini.

Mais d'après les remarques 2-8, $A_\infty = R_\infty^{-1}$, domaine de contrôlabilité en 0 pour le processus inverse de (I) : $(I^{-1}) \quad x_1 = C^{-1}(x_{1-1} - Du_{1-1})$.
 Vu les conditions (i) et (ii), et par application du théorème 3-8, $R_\infty^{-1} = \mathbb{R}^n$, et donc $A_\infty = \mathbb{R}^n$; c'est à dire que tout point x de \mathbb{R}^n est accessible à partir de l'origine en un temps fini, car les éléments du spectre de C^{-1} sont définis par λ^{-1} et vérifient $|\lambda^{-1}| = 1$, avec λ éléments du spectre de C, et car $\text{rg } C_n[C, D] = \text{rg } C_n[C^{-1}, -C^{-1}D] = n$.

3 - B CAS DES SYSTEMES A CONTROLES UNIDIRECTIONNELS :

Nous considérerons successivement la locale Ω -contrôlabilité à l'origine, puis la globale et complète Ω -contrôlabilité, qui sont déduites du cas local par le théorème 2-14.

3 - B - 1 LOCALE Ω -CONTROLABILITE :

3 -15 HYPOTHESES :

Le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé : compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$ dans \mathbb{R}^n .

3 -16 THEOREME (C.N.S.) :

Le processus (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si :

(i) l'opérateur linéaire $C_n [C,D]$ est de rang n et

(ii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre réelle tV , associée à un élément $\lambda > 0$ du spectre de tC , s'il en existe, coupe le domaine $D\Omega$.

REMARQUES :

(i) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre réelle tV est égal à $\{ x \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ tel que } V \cdot x = 0 \}$;

(ii) la condition (ii) du théorème est équivalente à :
il n'existe pas de valeur propre $\lambda > 0$ de C et de vecteur propre réel tV , vecteur colonne de \mathbb{R}^n , associé à $\lambda > 0$ de tC , tel que pour tout u appartenant Ω , $V \cdot Du \leq 0$;

(iii) la condition (ii) du théorème est intrinsèque : en effet, par tout changement de base P , le système (I) s'écrit : $x_1 = PCP^{-1}x_{1-1} + PDu_{1-1}$ et si tV est vecteur propre réel de tC , ${}^t(VP^{-1})$ est vecteur propre réel de ${}^t(PCP^{-1})$. Ainsi $V Du = (VP^{-1})(PD)u$ garde son signe pour tout changement de base réelle.

COROLLAIRE (C.N.S.) :

Le système (I) est localement $[0,1]$ -contrôlable à l'origine si et seulement si :

(i) le déterminant de $C_n [C,D]$ est $\neq 0$ et

(ii) le spectre de C ne contient pas d'éléments λ de \mathbb{R}^+ .

REMARQUES :

(i) le temps minimum mis pour contrôler le processus (I) n'est pas précisé. Le théorème 3-24 en donnera une idée;

(ii) le seul résultat connu actuellement de la contrôlabilité des systèmes de $(I(n), U_T)$ est celui d'Evans et Murphy [8], qui nous dit que : le système (I) est complètement $[0, +\infty[$ -contrôlable si et seulement si : les conditions (i) et (ii) du corollaire précédent sont vérifiées pour le système considéré. Aucun résultat n'est connu dans le cas où le domaine des contrôles est borné et ne contient pas 0 en son intérieur.

REMARQUES :

(i) considérons le processus à temps continu $(D) : \frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t)$
Brammer [5] démontre le théorème suivant :

(D) est localement Ω -contrôlable en 0 si et seulement si :

-l'opérateur linéaire $C_n [A,B]$ est de rang n et

-il n'existe pas de vecteurs propres réels ${}^t V$ de ${}^t A$ vérifiant $V \cdot B u \leq 0$,
pour tout u de Ω

En remarquant que (D) est localement Ω -contrôlable en 0 si et seulement s'il n'existe pas de vecteur W de \mathbb{R}^n , $\neq 0$, tel que pour tout u de Ω et tout $t > 0$, $W \cdot e^{At} B u \leq 0$. Ainsi Brammer est amené à étudier le signe de $W e^{At} B u$, dans la démonstration de la condition suffisante, qui présente des difficultés. Il résout cette difficulté en donnant une évaluation asymptotique de ce produit intérieur, ce qui lui permet de faire apparaître des termes dominants, de même signe que $W e^{At} B u$ pour t tendant vers $+\infty$. Alors il démontre qu'il n'existe pas de vecteur W de \mathbb{R}^n , $\neq 0$, tel que ces termes dominants gardent un signe constant, pour tout u de Ω et tout $t > 0$, moyennant les conditions de son théorème.

(ii) Considérons le processus (I) de $(I(2), U_T)$ suivant :

$$(I) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{1-1} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_{1-1}$$

où $\theta \neq 0$, ρ réel et $0 \leq u_{1-1} \leq 1$.

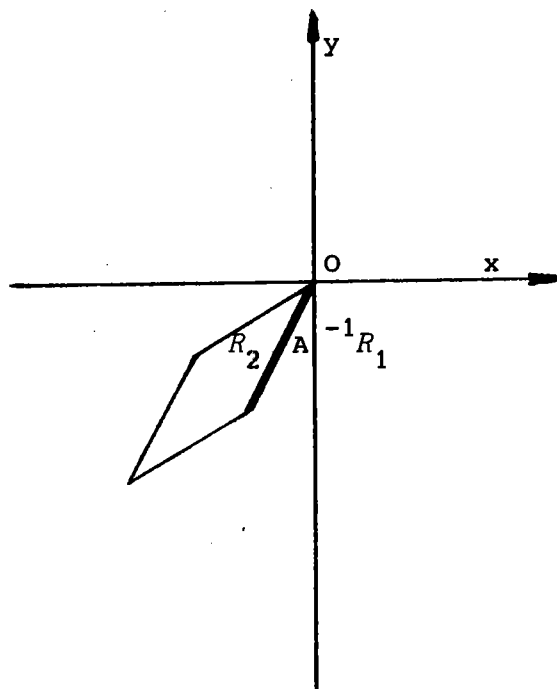
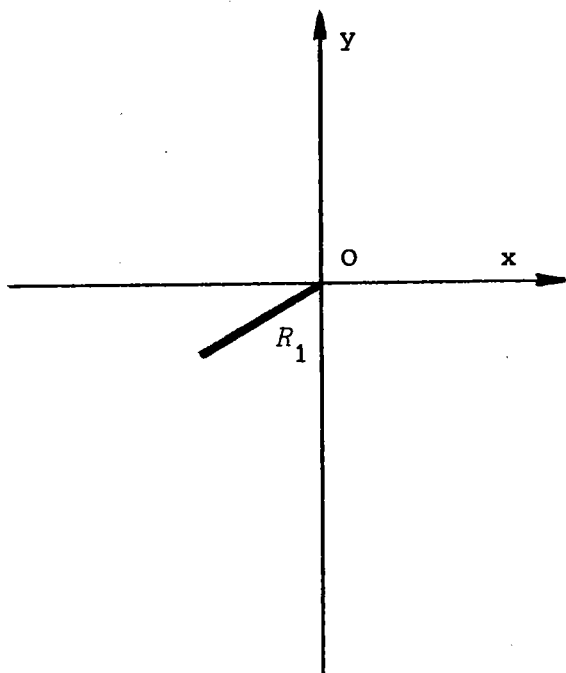
Le système libre associé à (I) est oscillatoire, de valeurs propres complexes conjuguées : $\lambda = \rho + i\theta = \alpha e^{i\beta}$ et $\bar{\lambda}$, où α est le module de λ et β est l'argument de λ , c'est à dire le seul nombre $0 < \beta < \pi$, tel que $\lambda = \alpha e^{i\beta}$.

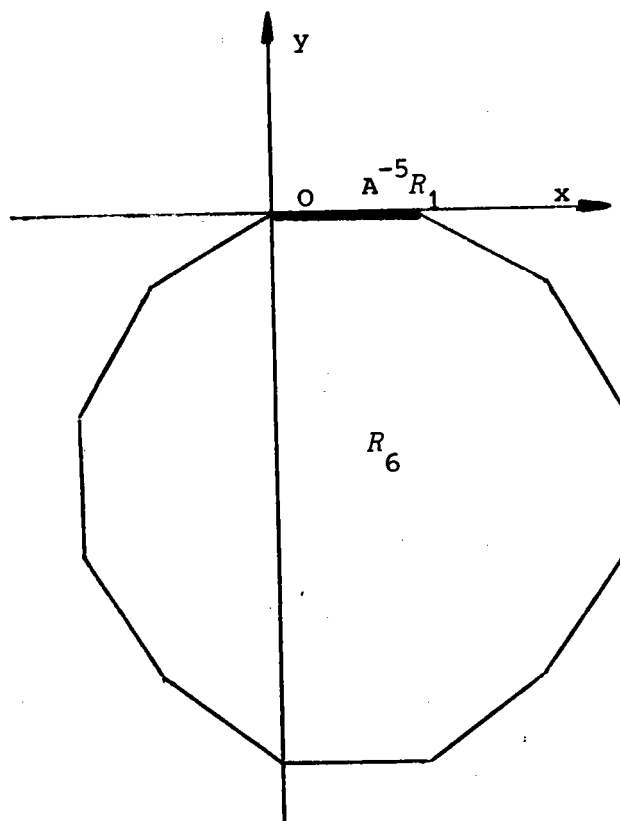
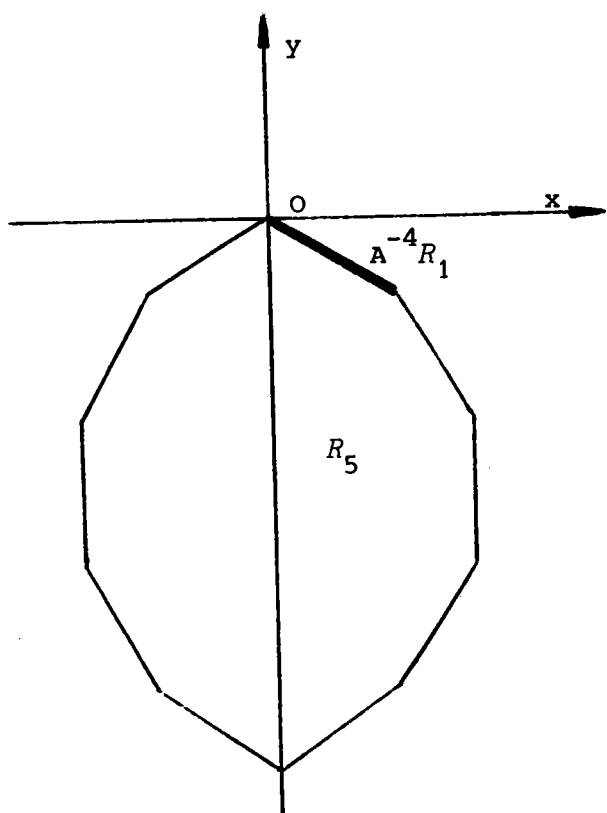
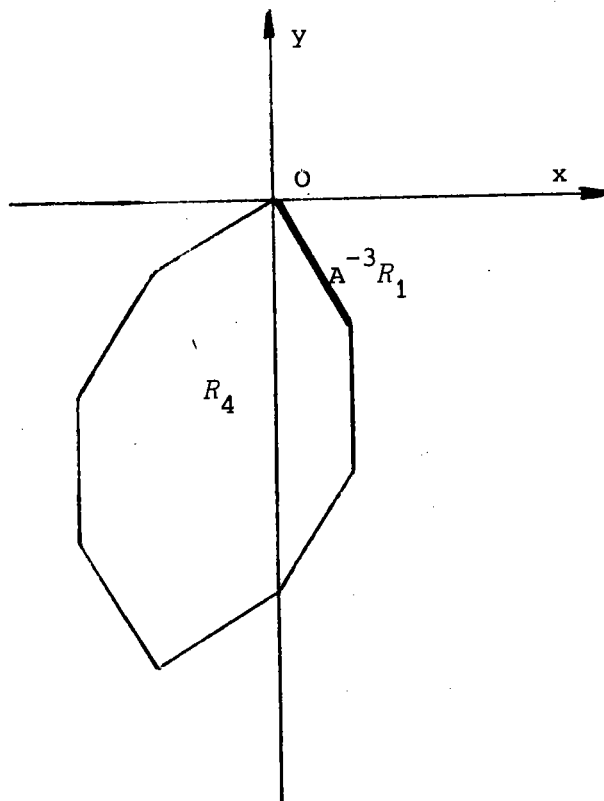
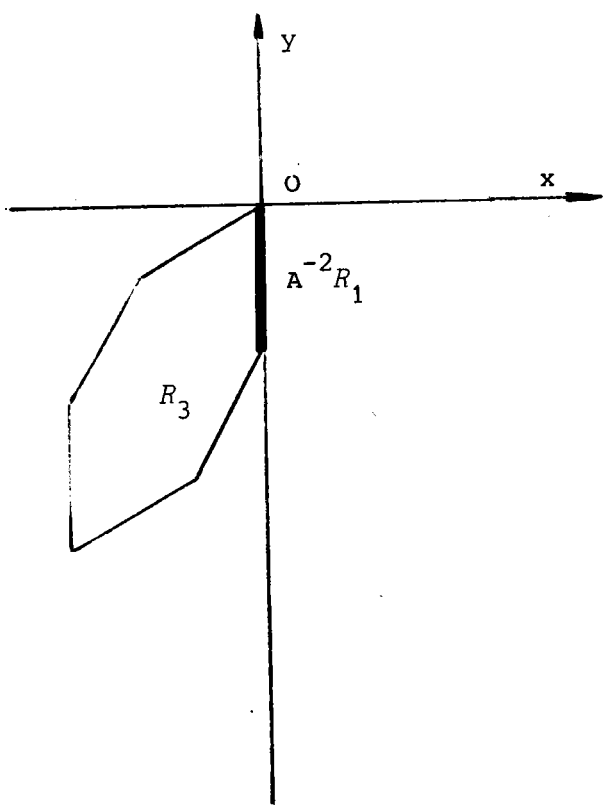
Ce processus est localement $[0,1]$ -contrôlable à l'origine, vérifiant les 2 conditions du corollaire du théorème 3-16.

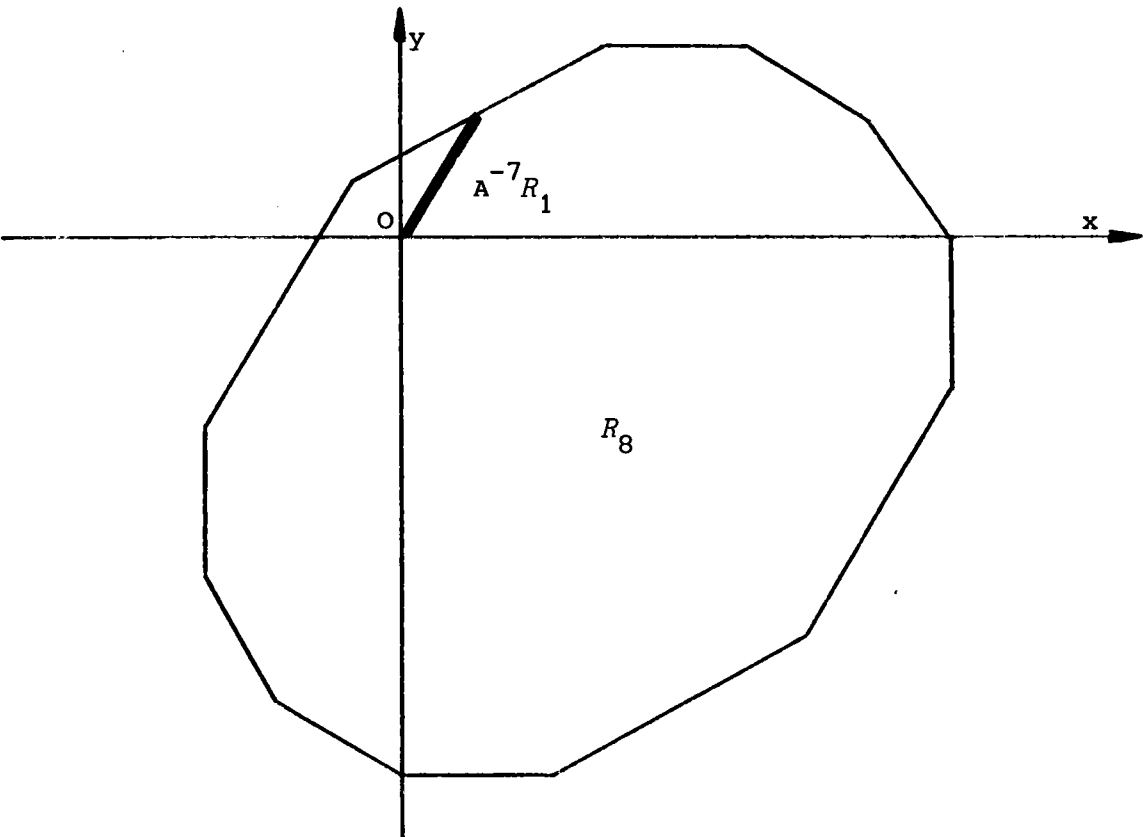
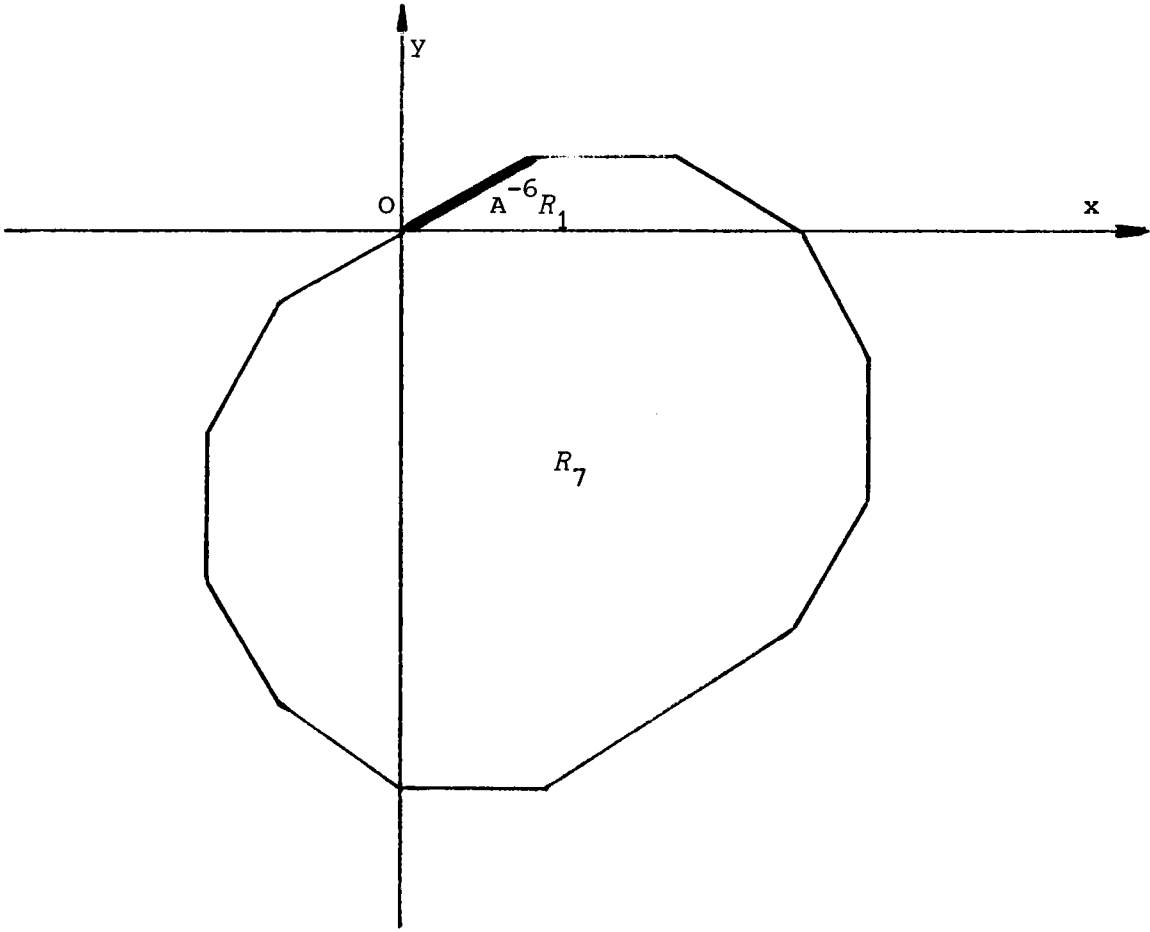
Avec les notations précédentes (I) s'écrit aussi :

$$(I) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \alpha \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{1-1} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_{1-1}$$

Construisons géométriquement le domaine de contrôlabilité, dans le cas particulier, par exemple, où $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$. Nous allons successivement représenté R_1, R_2, \dots, R_8 et constater que R_8 contient 0 en son intérieur. En effet, le vecteur $A^{-1}R_1$ est un vecteur tournant dans le champ complexe, pour l augmentant, puisque le passage de $A^{-1}R_1$ à $A^{-(l+1)}R_1$ le fait tourner de l'angle $-\beta$, avec $0 < \beta < \pi$. Comme $R_1 = R_{1-1} + A^{-1}R_1$ (2-6-ii), il existe $l \in \mathbb{N}^*$, tel que R_1 contienne un voisinage de l'origine. On peut remarquer que dans l'exemple particulier $R_1 = \{ (-3^{1/2}u, -u), 0 \leq u \leq 1 \}$.





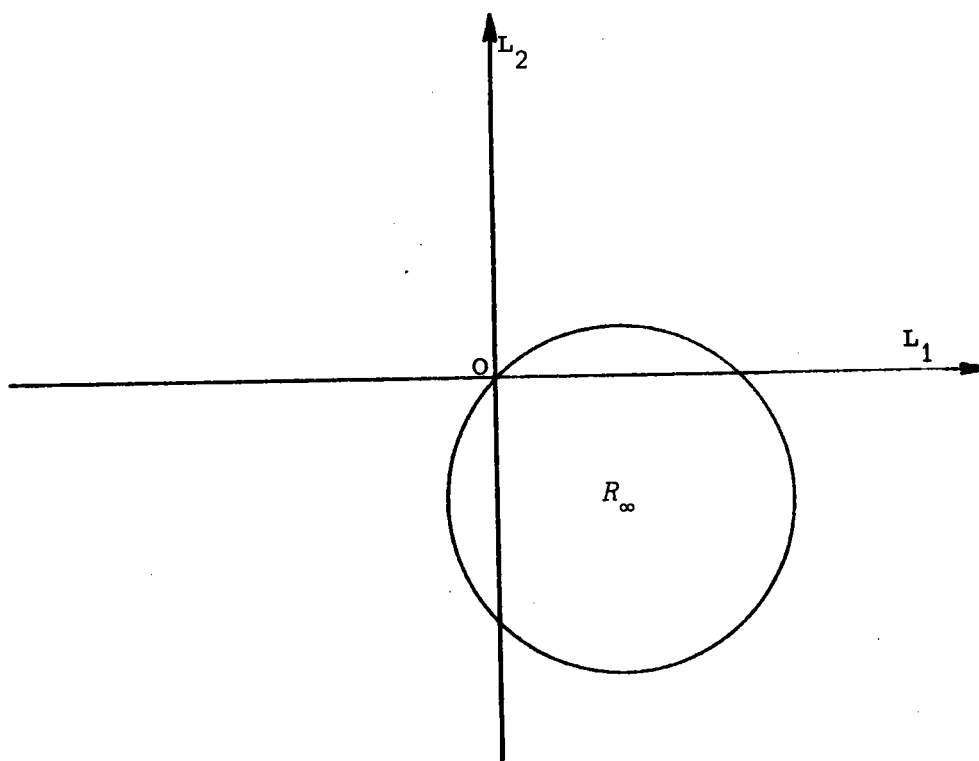


(iii) Si $D\Omega = \bigoplus_{j \in M} P_j(D\Omega)$ (notations 2-13), le domaine de contrôlabilité est donné par E15 (corollaire 4 du théorème 2-14) :

$$R_\infty = \left(\bigoplus_{j \in M^-} L_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in M^+} R_{\infty j} \right)$$

La démonstration du théorème 3-16, dans ce cas, se trouve très sensiblement simplifiée, puisqu'il suffit de regarder ce qui se passe dans chacun des sous espaces vectoriels L_j de \mathbb{R}^n .

Et, par exemple, ce cas de figure ne peut se produire, où $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_2$. Bien que 0 soit contenu à l'intérieur des projections de R_∞ sur les droites L_1 et L_2 , 0 n'appartient pas à l'intérieur de R_∞ .



DEMONSTRATION DU THEOREME 3-16 :

Plan de la démonstration :

C.N. : (raisonnement par l'absurde) le processus (I) est supposé localement Ω -contrôlable à l'origine et l'une, puis l'autre, des deux conditions (i) et (ii) du théorème non vérifiées. Ce qui permet d'aboutir tout naturellement à une contradiction, dans les deux cas.

C.S. : comme pour les systèmes différentiels [5], la condition suffisante présente certaines difficultés. Les conditions (i) et (ii) du théorème sont supposées vérifiées. Il est démontré alors, que le processus (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine. Le déroulement est le suivant:

le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si : pour tout vecteur W , non nul, de \mathbb{R}^n , il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, $l_2 \in \mathbb{N}^*$, u et v appartenant à Ω , tels que : $WC^{-1} Du > 0$ et $WC^{-1} Dv < 0$ (lemme 2).

Ainsi l'étude du signe du produit scalaire $WC^{-1} Du$ s'impose, pour $l \in \mathbb{N}^*$, u parcourant Ω et W l'ensemble des vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n . Cette étude de signe est assez complexe et nécessite un long développement algébrique.

Pour tout W vecteur non nul de \mathbb{R}^n et tout u appartenant à Ω , le calcul algébrique du scalaire $WC^{-1} Du$ permet de faire apparaître, moyennant la condition (i) du théorème (lemme 1), un terme dominant, lorsque $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini (corollaire 7).

Moyennant la condition (ii) du théorème, pour tout W vecteur non nul de \mathbb{R}^n , pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, le réel $WC^{-1} Du$ ne conserve pas le même signe, pour $l \in \mathbb{N}^*$, $l \geq l_0$, u parcourant Ω ; en effet, dans le développement algébrique de $WC^{-1} Du$, pour tout W non nul de \mathbb{R}^n , pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, le terme dominant, qui apparaît quand l tend vers l'infini, ne garde le même signe, quand u parcourt Ω et $l \in \mathbb{N}^*$, $l \geq l_0$ (lemme 8). Cette dernière étape présente également certaines difficultés, provenant du fait que l'on travaille en temps discret.

Nous retrouvons une certaine similitude avec le cas des processus différentiels, mais les raisonnements sont totalement différents [5].

Condition nécessaire :

Supposons que le système (I) soit localement Ω -contrôlable en 0.

Alors R_∞ est un ouvert, contenant 0 (2-7-iv).

- Si (i) n'est pas vérifiée, la démonstration est identique au théorème 3-5.

- Si (ii) n'est pas vérifiée, c'est à dire s'il existe $\lambda > 0$ et tV vecteur propre associé à $\lambda > 0$ de tC , tel que pour tout u de Ω , $V Du \leq 0$; V vecteur ligne de \mathbb{R}^n , $\neq 0$ et $VC = V\lambda$. Alors, d'après E6, pour tout $l \geq n$, pour tout x de R_1 , il existe u_0, u_1, \dots, u_{l-1} appartenant à Ω , tels que :

$$0 = V0 = \lambda^l Vx + \sum_{m=1}^l \lambda^{l-m} V Du_{m-1}, \text{ puisque } VC^q = \lambda^q V, \text{ pour tout } q \in \mathbb{N}. \text{ Comme}$$

$\lambda > 0$ et que $V Du \leq 0$, pour tout u de Ω , $Vx = - \sum_{m=1}^l \lambda^{-m} V Du_{m-1} \geq 0$. Ainsi, pour

tout $l \geq n$, pour tout x de R_1 , $Vx \geq 0$, ce qui contredit l'hypothèse que le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine.

Condition suffisante :

Supposons que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées.

1 ère étape :

Soit J la forme réelle de Jordan de C (0-2). Il existe un changement de base réelle, telle que (I) s'écrive : (I) $x_1 = J x_{1-1} + \tilde{D} u_{1-1}$.

Notations : la matrice J est quasi-diagonale, à blocs matriciels de 2 types :

- $J_{n_j}(\lambda_j)$ correspondant à une valeur propre réelle λ_j et

- $K_{n_j}(\rho_j, \theta_j)$ correspondant aux valeurs propres complexes $\lambda_j = \rho_j + i\theta_j$

et $\bar{\lambda}_j$.

On peut toujours supposer que $J = \text{diag}(J_-, J_+, J_0)$, où J_- , J_+ et J_0 sont de dimension $n_- \times n_-$, $n_+ \times n_+$ et $n_0 \times n_0$, respectivement et :

(i) les spectres de J_- , J_+ et J_0 sont inclus dans \mathbb{R}^{*-} , \mathbb{R}^{*+} et $\mathbb{C}-\mathbb{R}$, respectivement;

(ii) les valeurs propres λ_j de J_- sont groupées par paquets, telles que :
 $\lambda_{q_0+1} = \lambda_{q_0+2} = \dots = \lambda_{q_1}$, $\lambda_{q_1+1} = \lambda_{q_1+2} = \dots = \lambda_{q_2}$, ..., $\lambda_{q_{m-1}+1} = \dots = \lambda_{q_m}$
 et $|\lambda_{q_1}| > |\lambda_{q_2}| > \dots > |\lambda_{q_m}|$. De même pour J_+ et J_0 , en remarquant toute-
 fois que pour J_0 , $\lambda_j = |\lambda_j| \exp(i\beta_j)$, où β_j est l'argument de λ_j et est choisi
 tel que $0 < \beta_j < \pi$ et $\bar{\lambda}_j$ sa complexe conjuguée, repérée par le même indice j et
 que les inégalités sur les modules des valeurs propres ne sont plus strictes.

Aux matrices J_- , J_+ , J_0 correspondent, pour \tilde{D} , D_- , D_+ et D_0 , matrices de
 dimension $n_- \times p$, $n_+ \times p$ et $n_0 \times p$, respectivement. Et au bloc matriciel $J_{n_j}(\lambda_j)$
 de dimension $n_j \times n_j$, correspond le bloc matriciel $[D_{jk}]_{1 \leq k \leq n_j}$, matrice $n_j \times p$,
 dont la kème ligne est un vecteur de \mathbb{R}^p . De même, à $K_{n_j}(\rho_j, \theta_j)$ de dimension
 $2n_j \times 2n_j$, correspond le bloc matriciel $[D_{jk}]_{1 \leq k \leq 2n_j}$, matrice $2n_j \times p$, dont la
 kème ligne est un vecteur de \mathbb{R}^p .

Lemme 1 : (avec les notations précédentes)

(i) si le rang de $C_n[J, \tilde{D}]$ est n , alors le rang de $C_{n_-}[J_-, D_-]$, de
 $C_{n_+}[J_+, D_+]$ et $C_{n_0}[J_0, D_0]$ est respectivement n_- , n_+ et n_0 ;

(ii) le rang de $C_n[J, \tilde{D}]$ est n si et seulement si : pour chaque paquet
 (éventuellement réduit à un seul élément) de valeurs propres égales

$$\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2} = \dots = \lambda_{j_q} :$$

- réelles : la matrice définie par $[{}^t_{D_{j_1 n_{j_1}}}, {}^t_{D_{j_2 n_{j_2}}}, \dots, {}^t_{D_{j_q n_{j_q}}}]$
 est de rang maximum;

- complexes : la matrice $[{}^t_{D_{j_1 2n_{j_1}}}, {}^t_{D_{j_2 2n_{j_2}}}, \dots, {}^t_{D_{j_q 2n_{j_q}}}]$ ou
 $[{}^t_{D_{j_1 2n_{j_1}-1}}, {}^t_{D_{j_2 2n_{j_2}-1}}, \dots, {}^t_{D_{j_q 2n_{j_q}-1}}]$ est de rang maximum.

démonstration : ce lemme se déduit d'un théorème de Popov ([33], p.321), qui exprime le même résultat, mais dans le champ complexe. Il est obtenu en effectuant le changement de base complexe, définie dans la 5ème étape de la démonstration du lemme technique 1 du théorème 1-10, au résultat de Popov.

Lemme 2 :

Le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si : pour tout vecteur ligne, non nul, W de \mathbb{R}^n , il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, $l_2 \in \mathbb{N}^*$, u et v deux contrôles appartenant à Ω , tels que les produits scalaires $W J^{-l_1} D u$ et $W J^{-l_2} D v$ soient de signes opposés.

démonstration : supposons que le système (I) ne soit pas localement Ω -contrôlable à l'origine, alors 0 n'appartient pas à l'intérieur du convexe R_∞ (2-7-iv) et il existe un hyperplan d'appui H en 0 à R_∞ , ainsi qu'une normale extérieure η , vecteur ligne, non nul de \mathbb{R}^n , tel que $\eta x \leq 0$, pour tout x appartenant à R_∞ . Alors, d'après E8, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, tout u de Ω , le produit scalaire $W J^{-l} D u$ garde le même signe.

Inversement, si le processus (I) est localement Ω -contrôlable en 0, 0 appartient à l'intérieur de R_∞ . Ainsi, tout hyperplan vectoriel H coupe R_∞ en deux convexes d'intérieur non vide dans \mathbb{R}^n , V_1 et V_2 . Donc, pour tout vecteur ligne, non nul, W de \mathbb{R}^n , (W appartient à H), il existe x de V_1 et y de V_2 , tels que $Wx < 0$ et $Wy > 0$. Et d'après E8, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, $l_2 \in \mathbb{N}^*$, u et v appartenant à Ω , tels que:

$$W J^{-l_1} D u < 0 \quad \text{et} \quad W J^{-l_2} D v > 0.$$

Remarque :

Ce lemme est évidemment vérifié, que le domaine des commandes Ω soit borné ou non, les seules conditions sur Ω étant convexe et $\text{Ker} D \Omega \neq \emptyset$.

En particulier, dans le cas de contrôles scalaires ($p=1$), le système (I) est localement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si : pour tout W , vecteur ligne, non nul, de \mathbb{R}^n , il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$ et $l_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que :

$$W J^{-l_1} D < 0 \quad \text{et} \quad W J^{-l_2} D > 0$$

2 ème étape :

Supposons que J ne possède que des valeurs propres réelles, non nulles et de même signe (J est soit confondu avec J₋, soit avec J₊).

Soit W un vecteur ligne, non nul, de \mathbb{R}^n , de composantes w_{jk} , pour $1 \leq k \leq n_j$ et $q_0+1 \leq j \leq q_m$ (notation de la 1ère étape) et considérons un contrôle admissible u de Ω , tel que $D_{j n_j} u \neq 0$, pour tout $q_0+1 \leq j \leq q_m$ (il en existe, car il existe un sous-espace de \mathbb{R}^n , dans lequel $D\Omega$ est d'intérieur non vide).

Proposition 3 :

Si le rang de $C_n [J, \tilde{D}]$ est n, alors il existe une valeur propre λ de J,

${}^t V$ un vecteur propre non nul de ${}^t J$, associé à λ , et une contante entière

$s \in \mathbb{N}^*$, tels que :

$$W J^{-1} \tilde{D} u = (-1)^s \lambda^{-(1+s)} f_{s,1} (V \tilde{D} u + h(1,u)) , \text{ où } h(1,u) \text{ est}$$

une fonction tendant vers 0 en module, quand l tend vers l'infini et

pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $f_{s,1} = f_{s-1,1} + f_{s,l-1}$, avec $f_{0,1} = f_{s,1} = 1$

Corollaire 4 :

Si le rang de $C_n [J_-, D_-]$ est n_- , alors il existe $l_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que :

pour tout $l \geq l_0$, $W J_-^{-1} \tilde{D} u$ et $W J_-^{-(l+1)} \tilde{D} u$ sont de signes opposés.

Corollaire 5 :

Si le rang de $C_n [J_+, D_+]$ est n_+ et si l'orthogonal dans \mathbb{R}^{n_+} de toute direction propre de ${}^t J_+$ coupe $D_+ \Omega$, alors il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, u et v deux contrôles de Ω , tels que $W J_+^{-1} D_+ u > 0$ et $W J_-^{-1} D_- v < 0$, pour tout $l \geq l_1$.

Remarques :

(i) le corollaire 4 se déduit de la proposition 3, en remarquant que $\lambda < 0$;

(ii) le corollaire 5 se déduit de la proposition 3, en remarquant qu'il n'existe pas de vecteur propre ${}^t V$ de ${}^t J_+$, tel que $V D_+ u < 0$, pour tout $u \in \Omega$.

démonstration de la proposition 3 : soit W un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et

u un contrôle de Ω , tel que $D_{jn_j} u \neq 0$, pour $q_0+1 \leq j \leq q_m$.

(1) Algébriquement, le réel $W J^{-1} \tilde{D} u$ est donné par :

$$W J^{-1} \tilde{D} u = \sum_{j=q_0+1}^{q_m} \lambda_j^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} W_{jk} \left(\sum_{s=0}^{n_j-k} (-\lambda_j)^{-s} f_{s,1} D_{jk+s} u \right) \right\}, \text{ où}$$

$f_{s,1} = f_{s-1,1} + f_{s,1-1}$ et $f_{0,1} = f_{s,1}$, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}$ (ce résultat est obtenu par récurrence sur l et n_j).

(2) Soit $E_{jt}(1) = \sum_{k,s}^{k+s=t} (-\lambda_j)^{-s} f_{s,1} W_{jk}$, pour $1 \leq t \leq n_j$, $1 \leq k \leq n_j$ et $0 \leq s \leq n_j - k$;

$E_{jt}(1)$ est un réel.

Alors $W J^{-1} \tilde{D} u = \sum_{j=q_0+1}^{q_m} \lambda_j^{-1} \left(\sum_{t=1}^{n_j} E_{jt}(1) D_{jt} u \right)$, et par sommation par

paquets de valeurs propres égales :

$$W J^{-1} \tilde{D} u = \sum_{g=1}^m \lambda_{q_g}^{-1} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \left(\sum_{t=1}^{n_j} E_{jt}(1) D_{jt} u \right), \text{ avec } \lambda_{q_g} \neq \lambda_{q_h}$$

pour $g \neq h$, $1 \leq g \leq m$ et $1 \leq h \leq m$.

(3) Par hypothèse, la matrice $C_n [J, \tilde{D}]$ est de rang maximum n . Ainsi, par

application du lemme 1 de la 1ère étape, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que :

$m_0 = \sup \{ g, \text{ tel que } 1 \leq g \leq m \text{ et } \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} E_{jn_j}(1) D_{jn_j} u \text{ ne soit pas identi-}$

quement nul, sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $l \in \mathbb{N}^* \}$, le vecteur

W n'étant pas nul. Alors :

$$W J^{-1} \tilde{D} u = \sum_{g=1}^{m_0} \lambda_{q_g}^{-1} \left\{ \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \left(\sum_{t=1}^{n_j} E_{jt}(1) D_{jt} u \right) \right\}, \text{ et les valeurs}$$

propres vérifient $|\lambda_{q_1}| > |\lambda_{q_2}| > |\lambda_{q_3}| > \dots > |\lambda_{q_{m_0}}|$.

(4) Alors le scalaire $w J^{-1} \tilde{D} u$ se décompose comme suit :

$$w J^{-1} \tilde{D} u = \lambda_{q_{m_0}}^{-1} \left[\left\{ \sum_{j=q_{m_0-1}+1}^{q_{m_0}} \left(\sum_{t=1}^{n_j} E_{jt}(1) D_{jt} u \right) \right\} + h_1(1,u) \right], \text{ où}$$

$h_1(1,u)$ tend vers 0 en module quand l tend vers l'infini, $l \in \mathbb{N}^*$, et est donné

$$\text{par : } h_1(1,u) = \sum_{g=1}^{m_0-1} \varepsilon_{q_g}^1 \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \left(\sum_{t=1}^{n_j} E_{jt}(1) D_{jt} u \right) \text{ et avec,}$$

$$0 < \varepsilon_{q_g} = \lambda_{q_{m_0}} \cdot \lambda_{q_g}^{-1} < 1, \text{ pour } 1 \leq g \leq m_0 - 1.$$

En effet, il suffit de vérifier que pour tout $\delta > 0$, il existe $l_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $l \geq l_0$, $|h_1(1,u)| < \delta$. Ce résultat se démontre en 3 étapes :

- il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que, pour tout $l \geq l_1$, la suite $\varepsilon_j^1 f_{n_j, l}$ est strictement décroissante pour $q_{g-1} + 1 \leq j \leq q_g$ et $1 \leq g \leq m_0 - 1$; en effet, par construction des $f_{n_j, l}$, nous avons les propriétés suivantes : $f_{n_j, l} = f_{l-1, n_j+1}$, et pour $l > n_j$, $f_{n_j, l} > f_{l, n_j}$, enfin, pour $l < n_j$, $f_{n_j, l} < f_{l, n_j}$; et donc la suite entière $(f_{n_j, l} - f_{l, n_j})$ est strictement croissante avec l , pour $l > n_j$; ainsi il existe l_1 , tel que pour tout $l \geq l_1$, $f_{n_j, l} > \varepsilon_j (1 - \varepsilon_j)^{-1} f_{l, n_j}$ et donc, la quantité $\varepsilon_j^{l+1} f_{n_j, l+1} - \varepsilon_j^l f_{n_j, l}$, qui est égale à $\varepsilon_j^l ((\varepsilon_j - 1) f_{n_j, l} + \varepsilon_j f_{l, n_j})$, est strictement négative, pour $l \geq l_1$;

- par construction des $E_{jt}(1)$, combinaison linéaire de $f_{s, l}$, pour tout $\delta > 0$, il existe $l_2 \geq l_1$, tel que pour tout $l \geq l_2$, $\varepsilon_j^l E_{jt}(1)$ est en module plus petit que δ , pour $1 \leq t \leq n_j$.

- enfin, par construction de $h_1(1,u)$, combinaison linéaire de $E_{jt}(1)$, pour tout $\delta > 0$, il existe $l_0 \geq l_2$, tel que $|h_1(1,u)| < \delta$, pour tout $l \geq l_0$.

(5) D'autre part, par construction de m_0 , il existe au moins un k_j , défini
par $k_j = \inf \{ 1 \leq k \leq n_j, \text{ tel que } W_{jk} \neq 0 \}$, pour $q_{m_0-1}+1 \leq j \leq q_{m_0}$. Notons les,
 $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_z}$, pour $q_{m_0-1}+1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_z \leq q_{m_0}$. Alors :

$$W_J^{-1} \tilde{D} u = \lambda_{q_{m_0}}^{-1} \sum_{\alpha=1}^z \left(\sum_{t=1}^{n_{j_\alpha}} E_{j_\alpha t}^{(1)} D_{j_\alpha t} u \right) + h_1(l, u)$$

(6) Nous pouvons toujours supposer que: $k_{j_1} = k_{j_2} = \dots = k_{j_y}$ et $k_{j_1} < k_{j_\alpha}$
pour $y+1 \leq \alpha \leq z$ (si y est plus petit que z). Alors :

$$W_J^{-1} \tilde{D} u = \lambda_{q_{m_0}}^{-1} \left\{ (-\lambda_{q_{m_0}})^{-s_{j_1}} f_{s_{j_1}, 1} \right\} \left\{ \sum_{\alpha=1}^y (W_{j_\alpha k_{j_\alpha}} D_{j_\alpha n_{j_\alpha}} u) + h_2(l, u) \right\}$$

où $s_{j_\alpha} = n_{j_\alpha} - k_{j_\alpha}$ et $h_2(l, u)$ tend vers 0 en module, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers
l'infini.

En effet, par construction des $E_{j_\alpha t}^{(1)}$, dans $h_2(l, u)$ n'apparaissent que des
termes en $f_{s, 1}$, pour $0 \leq s \leq s_{j_1} - 1$, en dehors des termes de $h_1(l, u)$. Comme le
rapport de $f_{s, 1}$ par $f_{s_{j_1}, 1}$ est strictement décroissant, pour l croissant,
par construction des $f_{s, 1}$ ($0 \leq s \leq s_{j_1}$), nous avons $h_2(l, u)$, somme de $h_1(l, u)$
et d'une combinaison linéaire de termes en $f_{s, 1} \cdot f_{s_{j_1}, 1}^{-1}$, qui est décroissant
strictement en module pour l suffisamment grand.

(7) Comme J est la forme réelle de Jordan de C , définie dans la 1ère étape,
on vérifie aisément qu'il existe ${}^t V$ vecteur propre de ${}^t J$, associé à la valeur
propre λ de J , égale à $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2} = \dots = \lambda_{j_y} = \lambda_{q_{m_0}}$, tel que :

$$V \tilde{D} u = \sum_{\alpha=1}^y W_{j_\alpha k_{j_\alpha}} D_{j_\alpha n_{j_\alpha}} u$$

En effet, il existe ${}^t v_j$ vecteur propre de ${}^t J$, associé à la valeur propre λ_{j_α} (qui est égale à λ), vérifiant l'égalité $v_{j_\alpha} \tilde{D} u = D_{j_\alpha} n_{j_\alpha} u$ et donc ${}^t v = \sum_{\alpha=1}^y w_{j_\alpha} k_{j_\alpha} {}^t v_{j_\alpha}$, vecteur propre de ${}^t J$, associé à la valeur propre λ , vérifiant l'égalité demandée.

(8) Soient u un contrôle appartenant à Ω , vérifiant $D_{j_\alpha} n_{j_\alpha} u \neq 0$, pour $q_0+1 \leq j \leq q_m$ et W un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Si le rang de $C_n[J, \tilde{D}]$ est n , alors il existe $1 \leq m \leq m$ et ${}^t v$ un vecteur propre de ${}^t J$, associé à la valeur propre λ , $\lambda = \lambda_{q_{m_0}-1+1} = \dots = \lambda_{q_{m_0}}$, tels que :

$$W J^{-1} \tilde{D} u = \lambda^{-1} (-\lambda)^{-s_{j_1}} f_{s_{j_1}, 1} \{ v \tilde{D} u + h_2(1, u) \}, \text{ où } h_2(1, u) \text{ tend}$$

vers 0 en module, pour $l \in \mathbb{N}^*$ tendant vers l'infini.

3 ème étape :

Supposons que J ne possède que des valeurs propres complexes, non réelles
(J est confondu avec J_0).

Soit W un vecteur ligne, non nul, de \mathbb{R}^n , de composantes w_{jk} , pour $1 \leq k \leq 2n_j$ et $q_0+1 \leq j \leq q_m$ (notation de la 1ère étape) et considérons un contrôle admissible u de Ω , tel que $D_{j_2 n_j} u \neq 0$ et $D_{j_2 n_j - 1} u \neq 0$, pour tout $q_0+1 \leq j \leq q_m$ (il en existe, car il existe un sous-espace de \mathbb{R}^n , dans lequel $\tilde{D}\Omega$ est d'intérieur non vide).

Proposition 6 :

Si le rang de $C_n[J, \tilde{D}]$ est n , alors il existe une suite finie de valeurs propres de J , $(\lambda_{j_k})_{1 \leq k \leq q}$, de même module $|\lambda|$ et d'arguments vérifiant $0 < \beta_{j_1} < \beta_{j_2} < \dots < \beta_{j_q} < \pi$, une suite finie de couples non nuls de vecteurs de \mathbb{R}^n , notés par: $(v_{j_k}^1, v_{j_k}^2)_{1 \leq k \leq q}$, et une constante entière s , $s \in \mathbb{N}^*$

tels que :

$$WJ^{-1}\tilde{D}u = (-1)^s |\lambda|^{-(1+s)} f_{s,1} \left\{ \sum_{k=1}^q (v_{j_k}^1 \cos l\beta_{j_k} + v_{j_k}^2 \sin l\beta_{j_k}) \tilde{D}u + h(1,u) \right\}$$

où $h(1,u)$ est une fonction tendant vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini,

et pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $f_{s,1} = f_{s-1,1} + f_{s,1-1}$, avec $f_{0,1} = f_{s,1} = 1$.

démonstration de la proposition 6: les étapes de cette démonstration sont

identiques à celle du cas réel et les raisonnements étant les mêmes que ceux utilisés dans la proposition 3, ne seront pas réexposés ici.

Soit W un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et u un contrôle de Ω , tel que $D_{j2n_j-1} u \neq 0$

et $D_{j2n_j} \neq 0$, pour $q_0+1 \leq j \leq q_m$.

(1) Algébriquement, le réel $WJ^{-1}\tilde{D}u$ est donné par :

$$WJ^{-1}\tilde{D}u = \sum_{j=q_0+1}^{q_m} |\lambda_j|^{-1} \{ \psi_j^1 \cos(l\beta_j) + \psi_j^2 \sin(l\beta_j) \}, \text{ où}$$

$$\psi_j^1 = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{s=0}^{n_j-k} (-1)^s f_{s,1} |\lambda_j|^{-s} (W_{j2k-1} \psi_j^3 + W_{j2k} \psi_j^4) u$$

$$\psi_j^2 = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{s=0}^{n_j-k} (-1)^s f_{s,1} |\lambda_j|^{-s} (W_{j2k-1} \psi_j^4 - W_{j2k} \psi_j^3) u$$

$$\psi_j^3 = W_{j2(k+s)-1} \cos(s\beta_j) + W_{j2(k+s)} \cos(s\beta_j)$$

$$\psi_j^4 = -W_{j2(k+s)-1} \sin(s\beta_j) + W_{j2(k+s)} \cos(s\beta_j)$$

(ce résultat est obtenu par récurrence sur l et n_j).

(2) Moyennant les notations suivantes :

$$E_{jt}^1 = \sum_{\substack{k,s \\ k+s=t}} (-1)^s f_{s,1} |\lambda_j|^{-s} (W_{j2k-1} \cos(s\beta_j) - W_{j2k} \sin(s\beta_j))$$

$$E_{jt}^2(1) = \sum_{\substack{k,s \\ k+s=t}} (-1)^s f_{s,1} |\lambda_j|^{-s} (W_{j2k-1} \sin(s\beta_j) + W_{j2k} \cos(s\beta_j)),$$

pour $1 \leq t \leq n_j$, $1 \leq k \leq n_j$, et $0 \leq s \leq n_j - k$; $E_{jt}^1(1)$ et $E_{jt}^2(1)$ sont deux réels.

Ainsi, par sommation par paquets de valeurs propres égales :

$$WJ^{-1} \tilde{D}u = \sum_{g=1}^m |\lambda_{q_g}|^{-1} \{ \cos l\beta_{q_g} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \psi_j^5 + \sin l\beta_{q_g} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \psi_j^6 \}, \text{ où}$$

$$\psi_j^5 = \sum_{t=1}^{n_j} (E_{jt}^1(1) D_{j2t-1} + E_{jt}^2(1) D_{j2t}) u \quad \text{et}$$

$$\psi_j^6 = \sum_{t=1}^{n_j} (-E_{jt}^2(1) D_{j2t-1} + E_{jt}^1(1) D_{j2t}) u \quad \text{et } \lambda_{q_g} \neq \lambda_{q_h}, \text{ pour } g \neq h,$$

$1 \leq g \leq m$ et $1 \leq h \leq m$.

(3) Par hypothèse, la matrice $C_n [J, \tilde{D}]$ est de rang maximum n . Ainsi, par application du lemme 1 de la 1ère étape, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que :

$m_0 = \sup \{ g, \text{ tel que } 1 \leq g \leq m \text{ et au moins l'un des deux réels définis ci-dessous ne soit pas identiquement nul, sauf peut-être pour un nombre fini d'indices } l \in \mathbb{N}^* \}$:

$$\sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} (E_{jn_j}^1(1) D_{j2n_j-1} + E_{jn_j}^2(1) D_{j2n_j}) u \neq 0 \text{ ou}$$

$$\sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} (-E_{jn_j}^2(1) D_{j2n_j-1} + E_{jn_j}^1(1) D_{j2n_j}) u \neq 0.$$

m_0 existe, car le vecteur W est différent du vecteur nul, comme dans la proposition 3.

Alors, moyennant les notations ψ_j^5 et ψ_j^6 , définies ci-dessus, le vecteur

$WJ^{-1} \tilde{D}u$ s'écrit :

$$WJ^{-1} \tilde{D}u = \sum_{g=1}^{m_0} |\lambda_{q_g}|^{-1} \left\{ \cos l \beta_{q_g} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \psi_j^5 + \sin l \beta_{q_g} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \psi_j^6 \right\}, \text{ et}$$

$$|\lambda_{q_1}| \geq |\lambda_{q_2}| \geq \dots \geq |\lambda_{q_{m_0}}|.$$

(4) Soit $m_1 = \inf \{ g, \text{ tel que } 1 \leq g \leq m_0 \text{ et } |\lambda_g| = |\lambda_{q_{m_0}}| \}$, alors le scalaire

$WJ^{-1} \tilde{D}u$ se décompose comme suit :

$$WJ^{-1} \tilde{D}u = |\lambda_{q_{m_0}}|^{-1} \left\{ \sum_{g=m_1}^{m_0} (\cos l \beta_{q_g} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \psi_j^5 + \sin l \beta_{q_g} \sum_{j=q_{g-1}+1}^{q_g} \psi_j^6) + h_4(1, u) \right\}$$

où $h_4(1, u)$ tend vers 0 en module, quand 1 tend vers l'infini, $1 \in \mathbb{N}^*$

(ce résultat se démontre de la même façon que (4) de la proposition 3).

(5) D'autre part, soit $k_{gj} = \inf \{ k, \text{ tel que } 1 \leq k \leq n_j \text{ et tel qu'au moins l'un des deux scalaires suivants ne soit pas nul} \}$;

$$(W_{j2k-1} \cos \beta_j - W_{j2k} \sin \beta_j) \neq 0 \text{ ou } (W_{j2k-1} \sin \beta_j + W_{j2k} \cos \beta_j) \neq 0,$$

pour $s = n_j - k$, $q_{g-1} + 1 \leq j \leq q_g$, $m_1 \leq g \leq m_0$ (par construction de m_0 , $k_{m_0 j}$ existe, pour au moins un j , tel que $q_{m_0-1} + 1 \leq j \leq q_{m_0}$).

Soit $m_2 = \inf \{ g, \text{ tel que } m_1 \leq g \leq m_0 \text{ et tel qu'il existe au moins un } k_{gj}, \text{ pour } q_{g-1} + 1 \leq j \leq q_g \}$. Notons les $k_{gj_1}, k_{gj_2}, \dots, k_{gj_z}$, pour $m_2 \leq g \leq m_0$ et pour $q_{g-1} + 1 \leq j_1(g) < j_2(g) < \dots < j_z(g) \leq q_g$. Alors :

$$WJ^{-1} \tilde{D}u = |\lambda_{q_{m_0}}|^{-1} \left\{ \sum_{g=m_2}^{m_0} (\cos l \beta_{q_g} \sum_{\alpha=1}^{z(g)} \psi_{j_\alpha(g)}^5 + \sin l \beta_{q_g} \sum_{\alpha=1}^{z(g)} \psi_{j_\alpha(g)}^6) + h_4(1, u) \right\}$$

(6) Nous pouvons toujours supposer que $k_{gj_1} = k_{gj_2} = \dots = k_{gj_y}$ et $k_{gj_1} < k_{gj_\alpha}$ pour $y(g) + 1 \leq \alpha \leq z(g)$ (si $y(g)$ est plus petit que $z(g)$), pour $m_2 \leq g \leq m_0$. Alors :

$$WJ^{-1} \tilde{D}u = \left| \lambda_{q_{m_0}} \right|^{-1} \left\{ \sum_{g=m_2}^{m_0} (-\left| \lambda_{q_{m_0}} \right|)^{-s_{j_1}(g)} f_{s_{j_1}(g)} \{ \psi_g(1,u) + h_5^g(1,u) \} + h_4(1,u) \right\}$$

où $h_5^g(1,u)$ tend vers 0 en module quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, avec :

$$\psi_g(1,u) = \psi_g^7(u) \cos l \beta_{q_g} + \psi_g^8(u) \sin l \beta_{q_g}, \quad s_{j_\alpha} = n_{j_\alpha} - k_{j_\alpha},$$

$$\psi_g^7(u) = \sum_{\alpha=1}^{z(g)} \{ \psi_\alpha^9(g) D_{j_\alpha}^{2n_{j_\alpha}-1} + \psi_\alpha^{10}(g) D_{j_\alpha}^{2n_{j_\alpha}} \} u$$

$$\psi_g^8(u) = \sum_{\alpha=1}^{z(g)} \{ -\psi_\alpha^{10}(g) D_{j_\alpha}^{2n_{j_\alpha}-1} + \psi_\alpha^9(g) D_{j_\alpha}^{2n_{j_\alpha}} \} u$$

$$\psi_\alpha^9(g) = w_{j_\alpha}^{2k_{j_\alpha}-1} \cos(s_{j_\alpha} \beta_{q_g}) - w_{j_\alpha}^{2k_{j_\alpha}} \sin(s_{j_\alpha} \beta_{q_g}) \text{ et}$$

$$\psi_\alpha^{10}(g) = w_{j_\alpha}^{2k_{j_\alpha}-1} \sin(s_{j_\alpha} \beta_{q_g}) - w_{j_\alpha}^{2k_{j_\alpha}} \cos(s_{j_\alpha} \beta_{q_g});$$

(ce résultat se démontre de la même façon que (6) de la proposition 3).

(7) Comme il existe deux vecteurs lignes de \mathbb{R}^n , tels que $V_g^1 \tilde{D}u = \psi_g^7(u)$ et

$$V_g^2 \tilde{D}u = \psi_g^8(u) \quad \text{(au moins l'un des deux vecteurs } V_g^1(u) \text{ et } V_g^2(u) \text{ n'est pas nul}$$

par construction des k_{j_j}). D'autre part, nous pouvons toujours supposer que

$$s_{j_1}(m_2) \leq s_{j_1}(m_2+1) \leq \dots \leq s_{j_1}(m_0). \text{ Et soit } m_3 = \inf \{ g, \text{ tel que } m_2 \leq g \leq m_0$$

et tel que $s_{j_1}(g) = s_{j_1}(m_0) \}$. Alors ; en posant $s_1 = s_{j_1}(m_0)$:

$$WJ^{-1} \tilde{D}u = (-1)^{s_1} \left| \lambda_{q_{m_0}} \right|^{-(1+s_1)} \left\{ \sum_{g=m_3}^{m_0} (V_g^1 \tilde{D}u \cos l \beta_{q_g} + V_g^2 \tilde{D}u \sin l \beta_{q_g}) + h_6(1,u) \right\}$$

où $h_6(1,u)$ tend vers 0 en module, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, (même

raisonnement que dans (7) de la proposition 3).

4 ème étape :

Plaçons-nous dans le cas général, $J = \text{diag}(J_-, J_+, J_0)$, c'est à dire que J possède des valeurs propres complexes et réelles non nulles.

Soit W un vecteur ligne, non nul, de \mathbb{R}^n et considérons une commande admissible u de Ω vérifiant :

-pour les valeurs propres réelles : $D_{j n_j} u \neq 0$ et

-pour les valeurs propres complexes : $D_{j 2n_j - 1} u \neq 0$ et $D_{j 2n_j} u \neq 0$,

(un tel contrôle existe, puisque $D\Omega$ est d'intérieur non vide dans un certain sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n).

La juxtaposition des propositions 3 et 6 nous donne le corollaire suivant:

Corollaire 7 :

Si le rang de $C_n [J, \tilde{D}]$ est n, alors au moins l'une des 3 propriétés

suyvantes est vérifiée :

(i) il existe une valeur propre $\lambda_{j_1} < 0$ de J_- , un vecteur propre, non nul, ${}^t v_{j_1}$ de ${}^t J_-$, associé à λ_{j_1} , et une constante entière $s_1 \in \mathbb{N}^*$;

(ii) il existe une valeur propre $\lambda_{j_2} > 0$ de J_+ , un vecteur propre, non nul, ${}^t v_{j_2}$ de ${}^t J_+$, associé à λ_{j_2} , et une constante entière $s_2 \in \mathbb{N}^*$;

(iii) il existe une suite finie de valeurs propres $\lambda_{j_3}, \lambda_{j_4}, \dots, \lambda_{j_q}$ complexes, de même module $|\lambda_{j_3}|$, d'arguments $0 < \beta_{j_3} < \dots < \beta_{j_q} < \pi$, une suite finie de couples, non nuls, de vecteurs de \mathbb{R}^{n_0} : $(v_{j_k}^1, v_{j_k}^2)_{1 \leq k \leq q}$

et une constante entière s_3 ;

tels que :

$$(a) : W J^{-1} \tilde{D} u = W_{-} J_{-}^{-1} D_{-} u + W_{+} J_{+}^{-1} D_{+} u + W_{0} J_{0}^{-1} D_{0} u, \text{ où}$$

1- si (i) est vérifié :

$$(b) : W_{J_{-}^{-1}D_{-}u} = (-1)^{s_1} \lambda_{j_1}^{-(1+s_1)} f_{s_1,1} \{ v_{j_1} D_{-}u + h_1(1,u) \} , \text{ avec}$$

$h_1(1,u)$ tendant vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, ou

- si (i) n'est pas vérifié :

$W_{J_{-}^{-1}D_{-}u}$ est identiquement nul, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

2- si (ii) est vérifié :

$$(c) : W_{J_{+}^{-1}D_{+}u} = (-1)^{s_2} \lambda_{j_2}^{-(1+s_2)} f_{s_2,1} \{ v_{j_2} D_{+}u + h_2(1,u) \} , \text{ avec}$$

$h_2(1,u)$ tendant vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, ou

- si (ii) n'est pas vérifié :

$W_{J_{+}^{-1}D_{+}u}$ est identiquement nul, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

3- si (iii) est vérifié :

$$(d) : W_{J_{0}^{-1}D_{0}u} = (-1)^{s_3} |\lambda_{j_3}|^{-(1+s_3)} f_{s_3,1} \left\{ \sum_{k=3}^q (v_{j_k}^1 \cos(l\beta_{j_k}) + v_{j_k}^2 \sin(l\beta_{j_k})) D_{0}u + h_3(1,u) \right\}$$

avec $h_3(1,u)$ tendant vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, ou

- si (iii) n'est pas vérifié :

$W_{J_{0}^{-1}D_{0}u}$ est identiquement nul, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

Remarque :

$$\underline{f_{s,1} = f_{s-1,1} + f_{s,1-1}}, \text{ pour } s \in \mathbb{N}^* \text{ et } l \in \mathbb{N}^* - \{0,1\}$$

$$\underline{f_{0,1} = f_{s,1} = 1}, \text{ pour } s \in \mathbb{N} \text{ et } l \in \mathbb{N}^*$$

5 ème étape :

Il nous reste à montrer, d'après le lemme 2 de la 1ère étape, que : pour tout vecteur ligne, non nul w de \mathbb{R}^n , le scalaire réel $WJ^{-1} \tilde{D}$ ne garde pas le même signe, pour tout u de Ω et tout $l \in \mathbb{N}^*$; $WJ^{-1} \tilde{D}$ est donné par le corollaire 7.

Lemme 8 :

Pour tout $l_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout $q_0 \in \mathbb{N}^*$, pour toute suite finie de couples non nuls de réels : $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q_0}$ et pour toute suite finie de réels $(\delta_j)_{1 \leq j \leq q_0}$, tels que $0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_{q_0} \leq \pi$, la quantité

$$\sum_{j=1}^{q_0} \{ a_j \cos(l\delta_j) + b_j \sin(l\delta_j) \}$$

ne garde pas le même signe, pour

tout $l \geq l_0, l \in \mathbb{N}^*$.

démonstration : supposons que $\Omega = [0, +\infty[$ (cas scalaire).

(a) Alors les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) le système (I) est complètement $[0, +\infty[$ -contrôlable;
- (2) pour tout vecteur w de \mathbb{R}^n , non nul, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$ et $l_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $w J^{-1} \tilde{D}^{l_1} > 0$ et $w J^{-1} \tilde{D}^{l_2} < 0$;
- (3) pour tout $l_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout vecteur w de \mathbb{R}^n , non nul, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$, $l_1 \geq l_0$ et $l_2 \in \mathbb{N}^*$, $l_2 \geq l_0$, tels que : $w J^{-1} \tilde{D}^{l_1} > 0$ et $w J^{-1} \tilde{D}^{l_2} < 0$;
- (4) $\det C_n[C, D] \neq 0$ et le spectre de C ne contient pas d'éléments de \mathbb{R}^+ .

En effet, le théorème d'Evans et Murphy [8] nous dit que (a-1) et (a-4) sont équivalentes. D'autre part, d'après le lemme 2 de la 1ère étape, appliqué au cas où $\Omega = [0, +\infty[$, (a-1) et (a-2) sont équivalentes. Enfin, puisque pour tout $l_0 \in \mathbb{N}^*$ et tout vecteur non nul de \mathbb{R}^n , il existe w' , non nul, de \mathbb{R}^n

tel que $w = w'J^{-1}$, J étant régulière, (a-2) et (a-3) sont équivalentes.

Ainsi (a-3) et (a-4) le sont également.

(b) Moyennant la condition (a-4) et par application du corollaire 7,

pour tout $l_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout vecteur w , non nul, de \mathbb{R}^n , il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$,

$l_1 \geq l_0$, $l_2 \in \mathbb{N}^*$, $l_2 \geq l_0$, une suite finie de couples $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q_0}$, non nuls,

de réels, une suite finie de scalaires $(\delta_j)_{1 \leq j \leq q_0}$, tels que : $0 < \delta_1 < \dots < \delta_{q_0} < \pi$

et une fonction $h(l)$ tendant vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, tels que :

$$(1) w J^{-1} \tilde{D} > 0 \text{ et } w J^{-2} \tilde{D} < 0;$$

$$(2) \text{ pour tout } l \in \mathbb{N}^*, w J^{-1} \tilde{D} \text{ et } \sum_{j=1}^{q_0} (a_j \cos l \delta_j + b_j \sin l \delta_j) + h(l)$$

ont le même signe;

(3) lorsque w décrit $\mathbb{R}^n - \{0\}$, chaque couple (a_j, b_j) décrit $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, pour $1 \leq j \leq q_0$.

En effet, (b-1) est en fait (a-3) et (b-2) se déduit du corollaire 7. Les

couples (a_j, b_j) sont donnés par :

$$\text{-si } 0 < \delta_j < \pi : \begin{cases} a_j = F_j w_{j2k_j-1} + G_j w_{j2k_j} \\ b_j = G_j w_{j2k_j-1} - F_j w_{j2k_j} \end{cases}, \text{ avec } (F_j, G_j) \text{ un couple de}$$

réels, non nuls tous les deux, car $\det C_n[C, D] \neq 0$ (lemme 1, 1ère étape)

et donnés par : $F_j = \cos(s_j \delta_j) D_{j2n_j-1} + \sin(s_j \delta_j) D_{j2n_j}$ et

$$G_j = -\sin(s_j \delta_j) D_{j2n_j-1} + \cos(s_j \delta_j) D_{j2n_j}$$

et $(w_{j2k_j-1}, w_{j2k_j}) \neq (0, 0)$, par construction de $k_j = n_j - s_j$, avec $0 \leq s_j \leq n_j - 1$

(d'après (6) de la démonstration de la proposition 6);

$$\text{-si } \delta_j = \pi : \begin{cases} a_j = (-1)^{s_j} D_{jn_j} W_{jk_j} \neq 0 \\ b_j \text{ quelconque} \end{cases}, \text{ car } \det C_n[C,D] \neq 0 \text{ (lemme 1,}$$

1ère étape) et par construction de $k_j, W_{jk_j} \neq 0$.

Ainsi, lorsque W parcourt $\mathbb{R}^n - \{0\}$, (W_{j2k_j-1}, W_{j2k_j}) décrit $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et W_{jk_j}, \mathbb{R}^* ; donc (a_j, b_j) parcourt $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(c) Donc, pour une suite finie et donnée de scalaires $(\delta_j)_{1 \leq j \leq q_0}$:

$0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_{q_0} \leq \pi$, nous avons :

pour tout $l_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout couple non nul de réels $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q_0}$, il existe

$l_1 \geq l_0$ et $l_2 \geq l_0$, tels que :

$$\sum_{j=1}^{q_0} (a_j \cos l_1 \delta_j + b_j \sin l_1 \delta_j) > 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{q_0} (a_j \cos l_2 \delta_j + b_j \sin l_2 \delta_j) < 0.$$

(d) En considérant tous les systèmes inversibles possibles, de tout ordre,

vérifiant la condition (a-4), nous parcourons toutes les suites finies

$(\delta_j)_{1 \leq j \leq q_0}$ et ainsi obtenons le lemme 8.

Conclusion de la démonstration du théorème 3-16 :

Nous supposons que les conditions (i) et (ii) du théorème 3-16 sont vérifiées :

(i) le rang de $C_n[J,D]$ est n et

(ii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre ${}^t V$, associée à un élément $\lambda > 0$ du spectre de ${}^t C$, s'il en existe, coupe le domaine $D\Omega$.

3 cas sont à considérer :

(a) $(|\lambda_{j_4}| > |\lambda_{j_3}|)$ ou $(|\lambda_{j_4}| = |\lambda_{j_3}| \text{ et } s_{j_4} > s_{j_3})$

(b) $(|\lambda_{j_4}| < |\lambda_{j_3}|)$ ou $(|\lambda_{j_4}| = |\lambda_{j_3}| \text{ et } s_{j_4} < s_{j_3})$

(c) $(|\lambda_{j_4}| = |\lambda_{j_3}| \text{ et } s_{j_4} = s_{j_3})$

avec $|\lambda_{j_4}| = \sup(|\lambda_{j_1}|, |\lambda_{j_2}|)$

(a) Pour $l \in \mathbb{N}^*$, en divisant par $|\lambda_{j_4}|^{-(1+s_4)} f_{s_4, l}^{-1}$, qui est strictement positif, l'égalité (a) du corollaire 7, nous obtenons :

$$|\lambda_{j_4}|^{+(1+s_4)} f_{s_4, l}^{-1} WJ^{-1} \tilde{D}u = |\lambda_{j_4}|^{(1+s_4)} f_{s_4, l}^{-1} \{ (-1)^{s_1+1} |\lambda_{j_1}|^{-(1+s_1)} f_{s_1, l} V_{j_1} D_- u + (-1)^{s_2} |\lambda_{j_2}|^{-(1+s_2)} f_{s_2, l} V_{j_2} D_+ u + h_4(l, u) \},$$

où $h_4(l, u)$ tend vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini.

Comme il existe un sous-espace de \mathbb{R}^n , dans lequel $D\Omega$ est d'intérieur non vide et d'après l'hypothèse (ii) du théorème, il existe u et v appartenant à Ω , tels que : $V_{j_2} D_+ u > 0$ et $V_{j_2} D_+ v < 0$, (corollaire 5).

Et donc, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$ et $l_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que : $WJ^{-1} \tilde{D}u > 0$ et $WJ^{-1} \tilde{D}v < 0$.

(b) Pour $l \in \mathbb{N}^*$, en divisant par $|\lambda_{j_3}|^{-(1+s_3)} f_{s_3, l}^{-1}$, qui est strictement positif,

l'égalité (a) du corollaire 7, nous obtenons :

$$|\lambda_{j_3}|^{(1+s_3)} f_{s_3, l}^{-1} WJ^{-1} \tilde{D}u = |\lambda_{j_3}|^{(1+s_3)} f_{s_3, l}^{-1} \{ (-1)^{s_3} \sum_{k=3}^q (V_{j_k}^1 D_0 u \sin l \beta_{j_k} + V_{j_k}^2 D_0 u \cos l \beta_{j_k}) + h_5(l, u) \},$$

où $h_5(l, u)$ tend vers 0, quand $l \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini.

Comme il existe un sous-espace de \mathbb{R}^n , dans lequel $D\Omega$ est d'intérieur non vide, il existe u appartenant à Ω , tel que : $(V_{j_k}^1, V_{j_k}^2) \neq (0, 0)$, pour $3 \leq k \leq q$.

Alors, par application du lemme 8, pour tout $l_0 \in \mathbb{N}^*$,

$\sum_{k=3}^q (V_{j_k}^1 D_0 u \cos l \beta_{j_k} + V_{j_k}^2 D_0 u \sin l \beta_{j_k})$ ne garde pas le même signe, pour tout

$l \geq l_0$, $l \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$ et $l_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que : $WJ^{-1} \tilde{D}u > 0$ et $WJ^{-1} \tilde{D}u < 0$.

(c) Pour $l \in \mathbb{N}^*$, en divisant l'égalité (a) du corollaire 7, par :

$$|\lambda_{j_3}|^{-(1+s_3)} f_{s_3,1}^{-1} = |\lambda_{j_4}|^{-(1+s_4)} f_{s_4,1}^{-1}, \text{ qui est strictement positif, nous}$$

obtenons :

$$\begin{aligned} |\lambda_{j_3}|^{+(1+s_3)} f_{s_3,1}^{-1} WJ^{-1} \tilde{D}u &= |\lambda_{j_3}|^{+(1+s_3)} f_{s_3,1}^{-1} \{ (-1)^{s_1+1} |\lambda_{j_1}|^{-(1+s_1)} f_{s_1,1} V_{j_1} D_- u + \\ &(-1)^{s_2} |\lambda_{j_2}|^{-(1+s_2)} f_{s_2,1} V_{j_2} D_+ u + (-1)^{s_3} |\lambda_{j_3}|^{-(1+s_3)} \times \\ &f_{s_3,1} \times \sum_{k=3}^q (V_{j_k}^1 D_0 u \cos l \beta_{j_k} + V_{j_k}^2 D_0 u \sin l \beta_{j_k}) + h_6(l, u) \} \end{aligned}$$

Comme il existe un sous-espace de \mathbb{R}^n , dans lequel $D\Omega$ est d'intérieur non

vide, il existe u et v appartenant à Ω , tels que : $V_{j_2} D_+ u > 0$ et $V_{j_2} D_+ v < 0$,

d'après le corollaire 5.

Alors, par application du lemme 8, il existe $l_1 \in \mathbb{N}^*$ et $l_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que :

$$\underline{WJ^{-1} \tilde{D}u > 0 \text{ et } WJ^{-1} \tilde{D}v < 0.}$$

3 - B - 2 GLOBALE Ω -CONTROLABILITE :3 -17 HYPOTHESES :

Le domaine des contrôles Ω , inclus dans \mathbb{R}^D , est supposé :
compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$ dans \mathbb{R}^n .

3 -18 THEOREME (C.N.S.) :

Le processus (I) est globalement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire $C_n [C,D]$ est de rang n et
- (ii) l'opérateur linéaire C est une contraction au sens large et
- (iii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre réelle ${}^t V$, associée à un élément $\lambda > 0$ du spectre de ${}^t C$, s'il en existe, coupe le domaine $D\Omega$.

COROLLAIRE (C.N.S.) :

Le système (I) est globalement $[0,1]$ -contrôlable à l'origine si et seulement si :

- (i) le déterminant de $C_n [C,D]$ est $\neq 0$ et
- (ii) l'opérateur linéaire C est une contraction au sens large et
- (iii) le spectre de C ne contient pas d'éléments λ de \mathbb{R}^+ .

DEMONSTRATION :

Le théorème 3-18 est une conséquence directe du théorème 3-16 et du corollaire 1 du théorème 2-14.

REMARQUE :

Saperstone [37] a démontré un résultat similaire pour les systèmes différentiels de la famille $(D(n), U)$.

3 - B - 3 COMPLETE Ω -CONTROLABILITE :3 -19 HYPOTHESES :

Le domaine des contrôles Ω , inclus dans \mathbb{R}^n , est supposé :
compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$ dans \mathbb{R}^n .

3 -20 THEOREME (C.N.S.) :

Le processus (I) est complètement Ω -contrôlable si et seulement si :

- (i) l'opérateur linéaire $C_n[C,D]$ est de rang n et
- (ii) tout élément du spectre de C dans \mathbb{C} vérifie $|\lambda| = 1$ et
- (iii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre réelle tV , associée à l'élément $\lambda = 1$ du spectre de tC , s'il existe, coupe le domaine $D\Omega$.

COROLLAIRE (C.N.S.) :

Le système (I) est complètement $[0,1]$ -contrôlable si et seulement si :

- (i) le déterminant de $C_n[C,D]$ est $\neq 0$ et
- (ii) le spectre de C ne possède que des éléments λ vérifiant : $|\lambda| = 1$ et λ n'appartient pas à \mathbb{R}^+ .

DEMONSTRATION :

Elle est identique à celle du théorème 3-11, en utilisant le théorème 3-18 et en remarquant que si tV est direction propre réelle de tC , associée à $\lambda = 1$, alors ${}^tV u \leq 0$, pour tout u de Ω , équivaut à ${}^tV C^{-1} Du = \lambda^{-1} \times {}^tV u \leq 0$, pour tout u de Ω .

Nous allons tirer quelques conséquences du théorème 3-16 et en particulier un résultat concernant la complète-contrôlabilité du système (I), le domaine Ω n'étant plus borné, mais ne possédant pas 0 en son intérieur.

3 -21 HYPOTHESE :

Le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^P , est supposé à présent de forme : $\Omega = \underline{[0, +\infty]^P}$.

3 -22 THEOREME (C.N.S.) :

Le système (I) est complètement $[0, +\infty]^P$ -contrôlable si et seulement si :

(i) l'opérateur linéaire $C_n [C, D]$ est de rang n et

(ii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre réelle ${}^t V$, associée à un élément $\lambda > 0$ du spectre de ${}^t C$, s'il en existe, coupe le domaine $D [0, +\infty]^P$.

REMARQUES :

(i) le cas particulier du contrôle scalaire $\Omega = [0, +\infty[$ a été récemment résolu par Evans et Murphy [8], par une méthode directe;

(ii) la démonstration du théorème 3-22 nécessite la connaissance du lemme suivant :

LEMME (C.N.S.) :

Il existe $l_0 \in \mathbb{N}^*$, $l_0 \geq n$, tel que $R_{l_0} = \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

(i) l'opérateur linéaire $C_n [C, D]$ est de rang n et

(ii) l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de toute direction propre ${}^t V$, réelle, associée à un élément $\lambda > 0$ du spectre de ${}^t C$, s'il en existe, coupe le domaine $D [0, +\infty]^P$.

DEMONSTRATION DU LEMME :

Condition nécessaire : elle est identique au théorème 3-16;

Condition suffisante : l'ensemble des points recalables au temps lT , par application de commandes à valeurs dans $[0, +\infty]^P$, est noté $R_l ([0, +\infty]^P)$. D'après 3-16, (i) et (ii) étant supposées vérifiées, il existe $l_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $R_{l_0} ([0, +\infty]^P)$ contienne un voisinage de l'origine. Or, d'après la linéarité des contrôles dans E_6 , $R_{l_0} ([0, k]^P) = k R_{l_0} ([0, 1]^P)$. Alors nous avons $R_{l_0} ([0, +\infty]^P) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} k R_{l_0} ([0, 1]^P) = \mathbb{R}^n$, puisque $R_{l_0} ([0, 1]^P)$ contient un voisinage de l'origine.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3-22 :

Elle se déduit du lemme précédent, par application de la même démonstration que celle du théorème 3-11.

Dans le cas des contrôles multidirectionnels, le théorème 3-5 donne explicitement le temps mis pour contrôler le processus. Ce n'est pas le cas pour les commandes unidirectionnelles. Mais nous pouvons déduire assez facilement un résultat dans le cas d'un contrôle scalaire.

3 -23 HYPOTHESE :

Le domaine des commandes $\Omega = [0,1]$.

3 -24 THEOREME (C.N.S.) :

Le système (I) est localement $[0,1]$ -contrôlable à l'origine au temps $(n+1)T$ si et seulement si :

le polynôme caractéristique de C ne possède que des coefficients >0 .

REMARQUES :

(i) ce résultat reste vrai pour tout système de $(I(n), U_T)$, d'après le théorème 2-15;

(ii) il est une conséquence du théorème 3-16 et de deux autres résultats, le 1er est le critère d'Evans et Murphy [8], qui dit que :

le processus (I) est complètement $[0,+\infty[$ -contrôlable au temps $(n+1)T$ si et seulement si le polynôme caractéristique de C ne possède que des coefficients >0 ;

le 2ème est la proposition qui suit.

PROPOSITION :

Soient $l_1 = \inf \{ l \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } 0 \text{ appartienne à l'intérieur de } R_1([0,1]^P) \}$
 et $l_\infty = \inf \{ l \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } R_1([0,+\infty[^P) \text{ soit confondu avec } \mathbb{R}^n \}$.

Alors $l_\infty = l_1$.

DEMONSTRATION :

Vu que $R_1([0, +\infty[^P) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} kR_1([0, 1]^P)$, $l_\infty \leq l_1$. Supposons que $l_1 > l_\infty$, alors 0 est un élément de la frontière du compact, convexe $R_{l_\infty}([0, 1]^P)$. Ainsi il existe un hyperplan d'appui H à $R_{l_\infty}([0, 1]^P)$ en 0 et une normale extérieure η à $R_{l_\infty}([0, 1]^P)$, vecteur ligne de \mathbb{R}^n , $\neq 0$, telle que $x\eta \leq 0$, pour tout x de $R_{l_\infty}([0, 1]^P)$. Soit x_0 un point de $R_{l_\infty}([0, k]^P)$, $k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe x , point de $R_{l_\infty}([0, 1]^P)$, tel que $x_0 = kx$. Mais alors, comme $R_{l_\infty}([0, +\infty[^P)$ est égal à $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} kR_{l_\infty}([0, 1]^P)$, pour tout x_0 appartenant à $R_{l_\infty}([0, +\infty[^P)$, on a $\eta x \leq 0$, ce qui contredit le fait que $R_{l_\infty}([0, +\infty[^P)$ est confondu avec \mathbb{R}^n .

REMARQUE :

Soit $l_q = \inf\{ l \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 0 \text{ appartienne à l'intérieur de } R_l([0, q]^P) \}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$, alors $l_\infty = l_q$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3-24 :

Le système (I) est localement $[0, 1]$ -contrôlable si et seulement si (I) est complètement $[0, +\infty[$ -contrôlable, d'après les théorèmes 3-16 et 3-22. D'autre part les temps mis pour contrôler $[0, 1]$ -localement à l'origine et $[0, +\infty[$ -complètement, le système (I) , sont identiques (proposition précédente). Ainsi, par application du théorème démontré par Evans et Murphy [8], rappelé ci-dessus, nous obtenons le résultat 3-24.

Nous allons à présent comparer les critères de contrôlabilité des processus mis en relation dans le chapitre 1, grâce aux études réalisées par Brammer [5] et par Saperstone [37], pour les systèmes de $(D(n), U)$ et compléter la géométrie comparée des domaines de contrôlabilité (2-C).

3 - C CONTROLABILITE COMPAREE :

Maintenant que sont démontrés les critères de contrôlabilité des systèmes de la famille $(I(n), U_T)$, nous pouvons compléter les résultats concernant la décomposition géométrique comparée des domaines de contrôlabilité des systèmes mis en relation dans le chapitre 1 (2-C).

3 -25 HYPOTHESES :

(i) soit (D) un processus de $(D(n), U)$: $\frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t)$

(ii) le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , est supposé : compact, convexe et $D\Omega$ non réduit à $\{0\}$.

3 -26 THEOREME :

Supposons que tout élément μ du spectre de A vérifie :

$$\text{E18} : \text{Im}\mu \neq \frac{k\pi}{T} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^*$$

Si le système (D) est localement, globalement, respectivement complètement Ω -contrôlable, son T-discrétisé est localement, globalement, respectivement complètement Ω -contrôlable.

Et si le domaine de contrôlabilité de (D) s'écrit :

$$C_{\infty} = L^{-} \oplus C_{\infty}^{+}$$

où C_{∞}^{+} est un ouvert, borné, convexe de L^{+} , sous-espace supplémentaire de L^{-} dans \mathbb{R}^n ,

alors le domaine de contrôlabilité de son T-discrétisé s'écrit :

$$R_{\infty} = L^{-} \oplus R_{\infty}^{+}$$

où R_{∞}^{+} est un ouvert, borné, convexe de L^{+} et R_{∞}^{+} est inclus dans C_{∞}^{+} .

REMARQUES :

(i) il est possible de comparer du point de vue de la contrôlabilité, les processus de $(D(n), U)$ et de $(I(n), U_T)$, grâce à une étude de Brammer [5], qui démontre que : le système (D) est localement Ω -contrôlable à l'origine si et seulement si : l'opérateur $C_n[A, B]$ est de rang n et il n'existe pas de vecteur propre réel tV de tA , tel que pour tout u de Ω , $VBu \leq 0$;

(ii) contrairement aux processus de $(D(n), U)$ [6], il n'existe pas de systèmes de $(I(n), U_T)$ localement Ω -contrôlable à l'origine en un temps égal à T , si le domaine des contrôles Ω ne contient pas 0 en son intérieur dans \mathbb{R}^n .

DEMONSTRATION DU THEOREME 3-26 :

D'après le théorème 2-17 et son corollaire, il suffit de remarquer que s'il n'existe pas de direction propre réelle tV de tA , telle que pour tout u de Ω , $VBu \leq 0$, alors il n'existe pas de valeur propre $\lambda > 0$ et de direction propre tV , associée à $\lambda > 0$ de ${}^te^{AT}$, telle que $V(\int_0^T e^{As} ds)Bu \leq 0$, pour tout u de Ω :

en effet $V(\int_0^T e^{As} ds) Bu = \lambda^{-1}(e^{\lambda T} - 1)VBu$ et $\lambda^{-1}(e^{\lambda T} - 1) > 0$, puisque tA et ${}^te^{AT}$ ont le même ensemble de directions propres, moyennant la condition E18.

Et d'autre part, si μ est un élément du spectre de A , $\lambda = e^{\mu T}$ est élément du spectre de e^{AT} .

REMARQUES :

Nous avons établi un certain nombre de critères de contrôlabilité des processus de la famille $(I(n), U_T)$.

Le domaine des commandes Ω , inclus dans \mathbb{R}^p , a toujours vérifié les 3 hypothèses :

(i) Ω est convexe et $\text{Ker} D\Omega \neq \emptyset$

(ii) il existe $q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq q \leq p \leq n$, tel que l'intérieur de Ω est différent du vide dans \mathbb{R}^q .

Il n'est pas possible de trouver un critère de locale Ω -contrôlabilité dans le cas où Ω ne vérifie que $\text{Ker} D\Omega \neq \emptyset$.

Cela est par contre possible pour les systèmes de $(D(n), U)$, comme l'ont montré Korobov et Marinich [26].

CONCLUSION :

Le passage, par la discrétisation, des processus de la forme $\frac{dx}{dt}=Ax+Bu$, aux systèmes de la forme $x_t=Cx_{t-1}+Du_{t-1}$, conserve la propriété de contrôlabilité. Un choix adéquat du pas de la discrétisation est toujours possible.

Mais, il existe des équations récurrentes qui ne peuvent pas être des discrétisées (quelque soit la méthode d'échantillonnage utilisée).

Quels sont les avantages et inconvénients que présente le passage en temps discret ?

- avantages : l'état est décrit par une suite récurrente, facilement programmable et les commandes prennent des valeurs constantes sur un intervalle de temps égal à la période d'échantillonnage;

- inconvénient : il n'est pas à priori possible de vérifier la propriété de contrôlabilité, lorsque les commandes ne prennent que des valeurs entières.

C'est pourquoi, la note d'Anzai [1] est intéressante. Il introduit la notion de presque complète \mathbf{Z} -contrôlabilité (le domaine de contrôlabilité est dense dans \mathbb{R}^n), qui est à rapprocher avec la propriété de contrôlabilité structurelle ([12], [28], [29], [38]). Ainsi, se pose le problème suivant, de contrôlabilité à commandes entières :

pour tout système itératif (I_0) , existe-t-il un processus récurrent (I) tel qu'il soit presque complètement \mathbf{Z} -contrôlable, aussi proche que l'on veuille et de même structure que (I_0) ?

Cela permettrait, sans doute, de résoudre certaines questions de presque-optimalité bang-bang [2].

Cette étude est également prolongeable aux systèmes à variables multiples $\{ x_t = Cx_{t-1} + Du_{t-1} \text{ et } y_t = Ax_t + Bu_t \}$.

Un autre problème, qui reste pour l'instant ouvert, est celui de la contrôlabilité des processus perturbés $x_t = Cx_{t-1} + Du_{t-1} + v_{t-1}$. Il se place dans le prolongement du problème de la contrôlabilité des systèmes soumis à des commandes unidirectionnelles.

Il serait aussi souhaitable de cerner avec plus de précision la frontière du domaine de contrôlabilité des systèmes aux différences finies, en fonction du pas de la discrétisation. C'est un problème de convergence.

Enfin, étendre l'ensemble des résultats démontrés dans ce travail aux systèmes de la forme $x_t = C_t x_{t-1} + D_t u_{t-1}$ me semble présenter d'énormes difficultés. Le seul résultat démontré, à ma connaissance, est celui de Weiss [43], qui donne un critère de complète contrôlabilité, le domaine des commandes étant confondu avec un espace vectoriel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. ANZAI :
A Note on Reachability of Discrete-Time Quantized Control Systems
IEEE Trans. Aut. Control, 1974, 19, 5, pp.575-577.
- [2] V. BOLTIANSKI :
Commande Optimale des Objets Discrets.
MIR Moscou, 1976.
- [3] G. BOOLE :
Calculus of Finite Differences.
CHELSEA New-york, 1958.
- [4] R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET :
Commande Optimale des Processus.
DUNOD Paris, 1968, 1, 2, 3 & 4.
- [5] R.F. BRAMMER :
Controllability in Linear Autonomous Systems with Positive Controllers.
SIAM J. CONTROL, 1972, 10, 2, pp.339-353.
- [6] R.F. BRAMMER :
Differential Controllability and the Solution of Linear Inequalities -Part I.
IEEE Trans. Aut. Control, 1975, 20, 1, pp.128-131.
- [7] J.P. DAUER :
Perturbations of Linear Control Systems.
SIAM J. Control, 1971, 9, 3, pp.393-400 & 1973, 11, 2, Errata.
- [8] M.E. EVANS, D.N.P. MURTHY :
Controllability of Discrete-Time Systems with Positive Controls.
IEEE Trans. Aut. Control, 1977, 22, 6, pp.942-945.
- [9] R. GABASOV, F.M. KIRILLOVA, V.V. KRAKHOTKO, S.A. MINYUK :
Controllability of Discrete Linear Systems. I-The Determining Equation.
Differential Equation, 1972, 8, 5, pp.581-586.

- [10] R. GABASOV, F.M. KIRILLOVA, V.V. KRAKHOTKO, S.A. MINYUK :
Controllability of Discrete Linear Systems. II-Ordinary Systems.
Differential Equation, 1972, 8, 6, pp.824-832.
- [11] F.R. GANTMACHER :
The Theory of Matrices.
Chelsea New-York, 1960, 1 & 2.
- [12] K. GLOVER, L.M. SILVERMAN :
Characterization of Structural Controllability.
IEEE Trans. Aut. Control, 1976, 21, 4, pp.534-537.
- [13] S. GOLBERG :
Introduction to Difference Equations.
J. WILEY New-York, 1958.
- [14] M.L.J. HAUTUS, G.J. OLSDER :
A Uniqueness Theorem for Linear Control Systems with Coinciding Reachable Sets.
SIAM J. Control, 1973, 11, 3, pp.412-416.
- [15] O. HAJEK :
Identification of Control Systems by Performance.
Math. Systems Theory, 1971, 5, 4, pp.349-352.
- [16] P. HENRICI :
Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations.
J. WILEY New-York, 1962.
- [17] F.H. HSU :
On Reachable Sets.
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1974, 106, pp.197-218.
- [18] E.I. JURY :
Theory and Application of the Z-Transform Method.
J. WILEY New-York, 1964.
- [19] E.I. JURY, YA.Z. TSYKIN :
Theory of Discrete Automatic Systems.
Automat. Telem., 1970, pp.57-81.

- [20] R.E. KALMAN :
Contributions to the Theory of Optimal Control.
Bol. Soc. Math. Mex., 1960, p.102.
- [21] R.E. KALMAN :
On the General Theory of Control Systems.
Butterworths Scientific Publications London, 1961, 1, p.481.
- [22] R.E. Kalman :
Mathematical Description of Linear Dynamical Systems.
SIAM J. Control, 1963, 1, 2, pp.152-192.
- [23] R.E. KALMAN, Y.C. HO, K.S. NARENDRA :
Controllability of Linear Dynamical Systems.
Contributions to Differential Equations, 1963, 1, 2, pp.189-213.
- [24] R.E. KALMAN :
Lectures on Controllability & Observability.
C.I.M.E. CREMONESE Rome, 1969, pp.1-150.
- [25] R.E. KALMAN, P.L. FALB, M.A. ARBIB :
Topics in Mathematical System Theory.
Mc. GRAW-HILL New-York, 1969.
- [26] V.I. KOROBV, A.P. MARINICH, E.N. PODOL'SKII :
Controllability of Linear Autonomous Systems with Restrictions on the Control.
Differential Equation, 1975, 11, 11, pp.1465-1474.
- [27] E.B. LEE, L. MARKUS :
Foundations of Optimal Control Theory.
J. WILEY New-York, 1967.
- [28] C.T. LIN :
Structural Controllability.
IEEE Trans. Aut. Control, 1974, 19, 3, pp.201-208.
- [29] C.T. LIN :
System Structure and Minimal Structure Controllability.
IEEE Trans. Aut. Control, 1977, 22, 5, pp.855-862.

- [30] L.M. MILNE-THOMSON :
The Calculus of Finite Differences.
MACMILLAN London, 1933.
- [31] L.W. NEUSTADT :
Discrete time Optimal Control Systems.
Int. Symposium on Non Linear Differential Equations and Non Linear Mechanics.
ACADEMIC PRESS New-York, 1963, pp.267-283.
- [32] D. PHAM :
Techniques du Calcul Matriciel.
DUNOD Paris, 1962.
- [33] V.M. POPOV :
Hyperstability of Control Systems.
SPRINGER VERLAG New-York, 1973.
- [34] J.R. RAGAZZINI, G. FRANKLIN :
Sampled-Data Control Systems.
Mc. GRAW-Hill New-York, 1958.
- [35] ROUCHE, MAWHIN :
Equations Différentielles Ordinaires.
MASSON Paris 1, 2, 1973.
- [36] S.H. SAPERSTONE, J.A. YORKE :
Controllability of Linear Oscillatory Systems Using Positive Controls.
SIAM J. Control, 1971, 9, 2, pp.253-262.
- [37] S.H. SAPERSTONE :
Global Controllability of Linear Systems with Positive Controls.
SIAM J. Control, 1973, 11, 3, pp.417-423..
- [38] R.W. SHIELDS, J.B. PEARSON :
Structural Controllability of Multiinput Linear Systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1976, 21, 2, pp.203-212.
- [39] I. TROCH :
A note on Complete Controllability.
SIAM J. Control, 1971, 9, 4, pp.543-546.

- [40] L. WEISS :
The Concepts of Differential Controllability and Differential Observability.
J. of Mathematical Analysis and Applications, 1965, 10, pp.442-449.
- [41] L. WEISS, R.E. KALMAN :
Contributions to Linear System Theory.
Internat. J. Engrg. Sci., 1965, 3, 2, pp.141-171.
- [42] L. WEISS :
Controllability for Various Linear and Non Linear System Models.
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1970, 144, pp.250-261.
- [43] L. WEISS :
Controllability, Realization and Stability of Discrete-Time Systems.
SIAM J. Control, 1972, 10, 2, pp.230-251.
- [44] W.M. WOHNAM :
Linear Multivariable Control: a Geometric Approach.
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1974, 101.
-