



HAL
open science

Contrôlabilité sur le groupe symplectique et couples de champs de vecteurs hamiltoniens contrôlables sur espaces euclidien \mathbb{R}^{2n}

Bernard Bonnard

► **To cite this version:**

Bernard Bonnard. Contrôlabilité sur le groupe symplectique et couples de champs de vecteurs hamiltoniens contrôlables sur espaces euclidien \mathbb{R}^{2n} . Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1978. Français. NNT : 1978METZ006S . tel-01775593

HAL Id: tel-01775593

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775593>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE METZ
FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE
DE
SPÉCIALITÉ
DE
TROISIÈME CYCLE

MENTION MATHÉMATIQUES

**CONTROLABILITÉ SUR LE GROUPE SYMPLECTIQUE
ET COUPLES DE CHAMPS DE VECTEURS HAMILTONIENS
CONTROLABLES SUR L'ESPACE EUCLIDIEN R^{2n}**

par

Bernard BONNARD

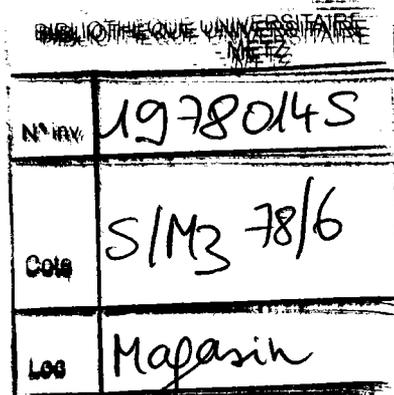
Président : M^{me} A. SEC

Membres : M. I. KUPKA

M. C. LOBRY

M. B. SCHMITT

Invité : M. G. SALLET



ANNÉE UNIVERSITAIRE 1977-78

TABLE DES MATIERES

	<u>Page</u>
<u>Introduction</u>	1
<u>0. Préliminaires</u>	3
<u>Chapitre I</u> Classification des couples de champs invariants à droite contrôlables sur le groupe symplectique d'ordre un	9
I.1 Préliminaires	10
I.2 Classification des couples de champs linéaires hamiltoniens contrôlables sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$	11
I.3 Conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité sur $Sp(1, \mathbb{R})$	14
I.4 La contrôlabilité n'est pas générique	23
<u>Chapitre II</u> Résultats algébriques	24
II.1 Construction de couples engendrant une algèbre de Lie semi-simple	25
II.2 Quelques résultats sur l'algèbre de Lie du groupe spécial unitaire	27
II.3 Quelques résultats sur l'algèbre de Lie du groupe symplectique	34
II.4 Quelques résultats sur certaines sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie du groupe symplectique affine Applications aux systèmes asservis réguliers hamiltoniens	42
<u>Chapitre III</u> Couples de champs de vecteurs invariants à droite contrôlables sur le groupe symplectique et couples de champs affines hamiltoniens contrôlables sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ et sur \mathbb{R}^{2n}	49
III.1 Réduction d'un champ hamiltonien linéaire	50
III.2 Trois critères de contrôlabilité	53
III.3 Résultats de contrôlabilité sur le groupe symplectique et sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$	59
III.4 Couples de champs affines hamiltoniens contrôlables sur \mathbb{R}^{2n}	69
<u>Conclusion</u>	82
<u>Bibliographie</u>	83

INTRODUCTION

Un système asservi est, d'un point de vue géométrique, la donnée d'une famille D de champs de vecteurs sur une variété M , l'espace des états.

Parmi les questions que l'on peut se poser dans l'étude d'un tel système l'une d'elle est la suivante : à partir d'un état initial, quels sont les états accessibles en empruntant les trajectoires du système, c'est à dire en parcourant alternativement, dans le sens des temps positifs, les trajectoires des champs de vecteurs de D ? En particulier un système sera dit contrôlable si tous les états sont ainsi accessibles à partir de n'importe quel état du système.

L'étude de la contrôlabilité des systèmes, c'est à dire la description de l'ensemble des états accessibles à partir d'un état donné, a justifié de nombreuses publications récentes, citons en particulier, Brockett ([2]), Lobry ([20], [12]), Sussmann ([15] à [18]).

Cependant les résultats obtenus sont soit locaux soit concernent les systèmes asservis du type $\{X + u Y ; u \in \mathbb{R}\}$; en particulier les problèmes relatifs à des familles de deux champs de vecteurs ont été peu abordés.

On appellera problème de mariage (algébrique) un problème de contrôlabilité ainsi posé : étant donné une classe \mathcal{C} de champs de vecteurs sur une variété M , et un champ X_1 appartenant à \mathcal{C} , peut on lui associer un partenaire X_2 , appartenant à \mathcal{C} , tel que le système $\{X_1, X_2\}$ ($\{X_1, X_2, -X_1, -X_2\}$) soit contrôlable ?

Un tel problème a été posé et résolu pour la première fois par Sallet dans [13] avec la classe des champs de Killing sur \mathbb{R}^n , S^n ou $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.

L'objet de ce travail est de résoudre le problème de mariage avec la classe de champ affine hamiltonien de \mathbb{R}^{2n} possédant au moins une singularité.

La difficulté du problème réside dans le nombre de comportements physiques couverts par cette classe.

Le partenaire sera construit explicitement ; il sera à trajectoires bornées.

Par ailleurs, ce travail contient des résultats de contrôlabilité avec la classe des champs invariants à droite sur le groupe symplectique.

En effet, la résolution du problème de mariage nécessite l'introduction de l'algèbre de Lie des champs invariants à droite sur le groupe symplectique.

D'autre part, il est important, d'un point de vue heuristique, d'obtenir des résultats de contrôlabilité dans le domaine des familles de champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de Lie.

Signalons donc trois résultats annexes obtenus dans cette direction :

- la classification des couples de champs invariants à droite contrôlables sur $Sp(1, \mathbb{R})$
- une réponse complète au problème de mariage algébrique avec la classe des champs invariants à droite sur le groupe symplectique et sur le groupe symplectique affine ; le partenaire étant toujours à trajectoire bornée.
- une réponse partielle au problème de mariage avec la classe des champs invariants à droite sur le groupe symplectique.

Ce travail est structuré en trois chapitres.

Le chapitre I classe les couples de champs invariants à droite contrôlables sur $Sp(1, \mathbb{R})$.

Le chapitre II est purement algébrique ; y sont résolus certains problèmes de générateurs sur des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie des champs invariants à droite sur le groupe symplectique affine.

Le chapitre III contient tous les résultats de contrôlabilité sur le groupe symplectique et finalement le théorème de mariage.

0 - PRELIMINAIRES

Après avoir fourni dans 0,1 quelques définitions et dans le but de donner au lecteur une certaine liberté vis à vis de la bibliographie je vais énoncer, dans 0,2 les résultats généraux de contrôlabilité, et dans 0,3 quelques résultats particuliers utiles pour la suite. Enfin j'introduis dans 0,4 le groupe symplectique.

On désigne par M une variété (analytique, séparée, séparable et connexe) et par $D = \{X\}$ une famille de champs de vecteurs (analytiques). Si X appartient à D , on note X_t le groupe à un paramètre qu'il engendre ; rappelons que si x_0 est un état de M , $X_t \cdot x_0$ est par définition la valeur à l'instant t de l'unique solution au problème de Cauchy : $\frac{d(x(t))}{dt} = X(x(t))$, $x(0) = x_0$; on supposera les champs X complets, i.e., X_t défini sur M pour tout réel t .

0.1 Définitions

0.1.1 Soit $x, y \in M$. On dira que y est accessible à partir de x s'il existe $X^1, \dots, X^k \in D$ et $t_1, \dots, t_k \geq 0$ de sorte que $X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k \cdot x = y$.

Si de plus $t_1, \dots, t_k > 0$ et le rang en (t_1, \dots, t_k) de l'application $(s_1, \dots, s_k) \mapsto X_{s_1}^1 \circ \dots \circ X_{s_k}^k \cdot x$ est égal à la dimension de M on dira que y est normalement accessible à partir de x .

Enfin on dira y est (normalement) recalable en x si x est (normalement) accessible à partir de y .

Soit $x \in M$, notons :

$A^+(x, t)$ l'ensemble des états accessibles à partir de x en un temps t , $A^+(x, t) = \{X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k \cdot x ; k \in \mathbb{N}, X^i \in D, t_1, \dots, t_k \geq 0, t_1 + \dots + t_k = t\}$,

$A^+(x)$ l'ensemble des états accessibles à partir de x ,

$A^-(x)$ l'ensemble des états recalables en x .

On appelle orbite de x , notée $A(x)$, l'ensemble des états accessibles à partir de x du système symétrisé de D : $\{X, -X\}$, $X \in D$.

Soit P une partie de M . On dira que le système est (normalement) contrôlable sur P si tout état x de P est (normalement) recalable sur tout état y de P . On dira que le système est (normalement) contrôlable si le

Le système est (normalement) contrôlable sur M .

0.1.2 Notons $[X, Y]$ le crochet de Lie $YX - XY$ de deux champs de vecteurs analytiques X, Y .

On désigne par $\mathfrak{L}(D)$ l'algèbre de Lie engendrée par D , i.e., la plus petite sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques de M contenant D , $[\mathfrak{L}(D), \mathfrak{L}(D)]$ l'algèbre de Lie dérivée de D , i.e., l'espace vectoriel engendré par $\{[X, Y] ; X, Y \in \mathfrak{L}(D)\}$ et par $\mathfrak{L}_0(D)$ l'algèbre de Lie $\left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i X^i + Y ; p \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 0, X^i \in D, Y \in [\mathfrak{L}(D), \mathfrak{L}(D)] \right\}$.

On dira que le système a la propriété d'accessibilité (accessibilité Forte) si la dimension de $\mathfrak{L}(D)$ en x ($\mathfrak{L}_0(D)$ en x) est égale à la dimension de M , pour tout x de M .

0.2 Résultats Généraux

0.2.1 On peut munir l'orbite $A(x)$ d'une structure de variété telle que les applications $(t_1, \dots, t_k) \mapsto X_{t_1}^1 0 \dots 0 X_{t_k}^k .x$ soient analytiques.

La dimension de cette variété est égale à la dimension de $\mathfrak{L}(D)$ en x ([11] II-3-2).

0.2.2 Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le système a la propriété d'accessibilité.
 - (ii) pour tout x de M , $A^+(x)$ est contenu dans l'adhérence de son intérieur.
 - (iii) pour tout x de M , $A^-(x)$ est contenu dans l'adhérence de son intérieur.
 - (iv) pour tout x de M , $A^+(x)$ est d'intérieur non vide.
 - (v) le système symétrisé de $D \{X, -X\}$ est contrôlable.
- (c.F. [16] 3-1).

0.2.3 Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le système a la propriété d'accessibilité Forte.
 - (ii) pour tout x de M et tout $t > 0$, $A^+(x, t)$ est contenu dans l'adhérence de son intérieur.
- (c.F. [16] 3-2).

0.2.4 On déduit immédiatement de 0.2.2 (iii) qu'un système ayant la propriété d'accessibilité est contrôlable si et seulement si pour tout x de M $A^+(x)$ est dense dans M .

On peut donc par des méthodes calculatrices obtenir des renseignements locaux sur les ensembles d'états accessibles. Dans le cas général l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(D)$ est de dimension infinie et il n'est pas aisé de déterminer si un système à la propriété d'accessibilité ce qui nous conduit à aborder certains aspects particuliers.

0.3 Quelques résultats particuliers

Soit G un groupe de Lie d'élément neutre I . L'algèbre de Lie des champs invariants à droite sur G s'identifie à l'algèbre de Lie \underline{G} des vecteurs tangents en I à G .

Si $D = \{X\}$ est un système de champs invariants à droite de G , $\mathfrak{L}(D)$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de dimension finie des champs invariants à droite.

Notons \exp l'application exponentielle de \underline{G} dans G ; Soit X un champ invariant à droite ; le groupe à un paramètre qu'il engendre est le groupe des translations à gauche $L_{\exp t X}$, i.e., si $g \in G$, $X_t.g = (\exp t X)g$.

0.3.1 $A(I) = \{(\exp t_1 X_1) (\exp t_2 X_2) \dots (\exp t_k X_k) ; k \in \mathbb{N}, X_i \in D, t_i \in \mathbb{R}\}.$

L'orbite $A(I)$ est le sous-groupe intégral de G associé à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{L}(D)$, i.e., l'unique sous-groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{L}(D)$ ([2] Théorème 1).

$$A^+(I) = \{(\exp t_1 X_1) (\exp t_2 X_2) \dots (\exp t_k X_k) ; k \in \mathbb{N}, X_i \in D, t_i \geq 0\}.$$

$A^+(I)$ est un semi-groupe, i.e., le produit de deux éléments de $A^+(I)$ est un élément de $A^+(I)$ ([9] 4-5).

0.3.2 Le système est contrôlable si et seulement si $A^+(I)$ contient un voisinage de l'identité ([9] 6-3).

0.3.3 Soit M une variété. On dira que G opère sur M s'il existe une application analytique de $G \times M$ dans M ($(g, m) \mapsto g.m$) vérifiant les conditions suivantes :

$$(i) \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m$$

$$(ii) \quad I \cdot m = m \quad ; \quad g_1, g_2 \in G, m \in M.$$

On dira que G opère transitivement si pour tout m_1, m_2 de M il existe un élément g de G tel que $g \cdot m_1 = m_2$.

0.3.4 Si G opère sur M , tout champ de vecteurs X invariant à droite de G détermine un groupe à un paramètre sur M défini en m de M par $(\text{expt}X) \cdot m$.

Notons X^+ le champ de vecteurs de M associé, i.e., $X^+(m)$ est le vecteur tangent en m à la courbe $t \mapsto (\text{expt}X) \cdot m$.

On sait donc associer à tout champ X invariant à droite de G un champ de vecteur X^+ de M .

Soit $D = \{X\}$ une famille de champs de vecteurs invariants à droite de G et $D^+ = \{X^+\}$ la famille de champs de vecteurs de M associée, alors :

$$(i) \quad A_{D^+}(x) = A_D(I) \cdot x \quad ; \quad A_{D^+}^+(x) = A_D^+(I) \cdot x.$$

(ii) le système D^+ a la propriété d'accessibilité si et seulement si $A_D(I)$ est un sous-groupe de G opérant transitivement sur M .

0.3.5 Notons $GL(n, \mathbb{C})$ le groupe de Lie réel des matrices complexes inversibles d'ordre n ; l'algèbre de Lie $\underline{GL}(n, \mathbb{C})$ de $GL(n, \mathbb{C})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices complexes d'ordre n avec la loi de crochet de Lie $[A, B] = AB - BA$.

Si A appartient à $\underline{GL}(n, \mathbb{C})$, $\text{exp}A$ coïncide avec l'exponentielle de matrice ordinaire $e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

Désignons par $GL(n, \mathbb{R})$ le sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ des matrices réelles inversibles, d'ordre n ; l'algèbre de Lie $\underline{GL}(n, \mathbb{R})$ de $GL(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles d'ordre n .

Notons \mathbb{R}^n le produit cartésien réel. $GL(n, \mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ avec son action linéaire classique. Si $X \in \underline{GL}(n, \mathbb{R})$ alors $X^+ = X \cdot x$, i.e., un champ linéaire.

Soit G un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$. On appelle G -groupe affine le sous-groupe fermé de $GL(n+1, \mathbb{R})$ ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & S \end{pmatrix}$ où $v \in \mathbb{R}^n$ et $S \in G$; l'algèbre de Lie notée $(\underline{G}, \mathbb{R}^n)$ de ce groupe s'identifie à l'ensemble des matrices d'ordre $(n+1)$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & A \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \underline{G}$ algèbre de Lie de G .

Identifions \mathbb{R}^n avec l'ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Alors le G-groupe affine opère transitivement sur \mathbb{R}^n avec la loi induite par l'action linéaire de $GL(n+1, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^{n+1} .

On sait donc associer à tout champ $X = (A, a)$ de $(\underline{G}, \mathbb{R}^n)$ un champ X^+ de \mathbb{R}^n ; on vérifie que $X^+(x)$ est le champ $A \cdot x + a$.

On appelle champ affine de \mathbb{R}^n un champ $A \cdot x + a$ où $A \in \underline{GL}(n, \mathbb{R})$ et système asservi régulier de \mathbb{R}^n un système de champs affine de \mathbb{R}^n .

0.4 Groupe symplectique

Notons $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ la base canonique du produit cartésien réel \mathbb{R}^{2n} et munissons \mathbb{R}^{2n} de sa structure euclidienne canonique.

On note J l'élément $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ de $GL(2n, \mathbb{R})$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .

On définit :

le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R}) = \{S \in GL(2n, \mathbb{R}), {}^t S J S = J\}$,

le groupe unitaire $U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}), {}^t \bar{U} U = I_n\}$,

le groupe spécial unitaire $SU(n) = \{SU \in U(n), \det. SU = 1\}$.

$Sp(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $GL(2n, \mathbb{R})$, $U(n)$ et $SU(n)$ sont des sous-groupes compacts de $GL(n, \mathbb{C})$.

On peut identifier $SU(n)$ et $U(n)$ à des sous-groupes de $Sp(n, \mathbb{R})$ que l'on notera de la même façon, l'isomorphisme de groupe étant défini par $\theta: (A + iB) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$.

Les algèbres de Lie respectives se calculent aisément :

$$\underline{Sp}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1 \end{bmatrix}; X_1, X_2, X_3 \in \underline{GL}(n, \mathbb{R}), X_2 \text{ et } X_3 \text{ symétriques.} \right\}.$$

$$\underline{U}(n) = \{H \in \underline{GL}(n, \mathbb{C}), {}^t \bar{H} + H = 0\}, \text{ i.e., l'ensemble des matrices antihermitiennes d'ordre } n.$$

$$\underline{SU}(n) = \{H \in \underline{U}(n), \text{trace } H = 0\}.$$

On trouvera ces résultats élémentaires dans Chevalley [3] chap. I.

$U(n)$ et $SU(n)$ opèrent transitivement sur la sphère S^{2n-1} de l'espace euclidien \mathbb{R}^{2n} et $Sp(n, \mathbb{R})$ opère transitivement sur l'espace pointé $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ ([1] § 3).

On appelle champ linéaire hamiltonien de \mathbb{R}^{2n} un champ linéaire de \mathbb{R}^{2n} , $A.x$, où A appartient à $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$, champ affine hamiltonien de \mathbb{R}^{2n} un champ affine de \mathbb{R}^{2n} , $A.x + a$, où A appartient à $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ et système asservi régulier hamiltonien de \mathbb{R}^{2n} un système de champs affines hamiltoniens de \mathbb{R}^{2n} .

CLASSIFICATION DES COUPLES DE CHAMPS INVARIANTS A DROITE CONTRÔLABLES
SUR LE GROUPE SYMPLECTIQUE D'ORDRE UN

Introduction

Le groupe symplectique d'ordre un $Sp(1, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie de dimension 3 et une variété plongée dans \mathbb{R}^4 ; de fait les problèmes de contrôlabilité même avec des champs invariants y présentent une certaine difficulté.

Ces problèmes de contrôlabilité ont été abordés dans [13] II-3. On y trouve le résultats suivant : "Tout champ X_1 non nul invariant de $Sp(1, \mathbb{R})$ admet un partenaire X_2 tel que le système $\{X_1, X_2\}$ soit contrôlable sur $Sp(1, \mathbb{R})$ ". J'ai emprunté à ce travail l'intermédiaire technique qu'est le demi-plan de Poincaré.

Le principal résultat que j'obtiens est que poser un problème de contrôlabilité en termes de couple de champs invariants sur $Sp(1, \mathbb{R})$ est équivalent à poser un problème de contrôlabilité en termes de couple de champs linéaires sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$; c'est le théorème I.3.2.

Il est évident que ce résultat n'est pas significatif pour aborder les problèmes à l'ordre n ; par contre on retiendra pour la suite la possibilité d'engendrer une algèbre de Lie simple non compacte avec des champs choisis dans des algèbres de Lie de sous-groupes compacts de $Sp(1, \mathbb{R})$.

On trouvera dans I.1 les préliminaires.

I.2 classifie les couples de champs linéaires hamiltoniens contrôlables sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Dans I.3 j'obtiens des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité sur $Sp(1, \mathbb{R})$ pour les couples de champs invariants, ce qui, joint à I.2 réalise la classification annoncée.

Enfin I.4 précise sur $Sp(1, \mathbb{R})$ les résultats de Sussmann ([18]) quant à la stabilité de la contrôlabilité ; on y verra que l'accessibilité mais non la contrôlabilité est une propriété générique.

I.1 Préliminaires

I.1.1 Le groupe symplectique d'ordre un $Sp(1,R)$ s'identifie au groupe spécial linéaire $SL(2,R)$ groupe des matrices carrées d'ordre deux de déterminant un. L'algèbre de Lie $\underline{Sp}(1,R)$ des champs invariants à droite est l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux de trace nulle.

Il opère transitivement sur deux variétés :

sur $R^2 - \{0\}$ avec l'opération linéaire $(S, x) \mapsto S.x$;

$S \in Sp(1,R)$ et $x \in R^2 - \{0\}$,

sur le demi-plan de Poincaré P défini par :

$P = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}.z > 0\}$ avec la loi $(S, z) \mapsto S.z$,
 $S.z = (az + b)(cz + d)^{-1}$; $S \in Sp(1,R)$ $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$.

Soit A un champ invariant sur $Sp(1,R)$, on notera respectivement A_R et A_P les champs associés sur $R^2 - \{0\}$ et sur P de la façon définie en 0.3.4.

Comme les deux opérations sont transitives si un système D de champs invariants est contrôlable sur $Sp(1,R)$ alors les systèmes associés D_R et D_P le sont également sur leurs variétés respectives (0.3.4 (i)).

I.1.2 Définition

Soit A un champ invariant à droite sur $Sp(1,R)$ non nul.

On dira que :

A est elliptique si les valeurs propres de A sont imaginaires pures,

A est parabolique si 0 est valeur propre,

A est hyperbolique si les valeurs propres de A sont réelles non nulles.

I.1.3 Définition

On dira que deux champs invariants A et A' sont équivalents, $A \sim A'$, s'il existe $S \in Sp(1,R)$ tel que $S^{-1}AS = A'$.

I.1.4 Proposition

D'après [4] théorème 5-1 (iv).

A est elliptique si et seulement si $A \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A est parabolique si et seulement si $A \sim \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$.

A est hyperbolique si et seulement si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$.

On notera que sauf dans le cas hyperbolique les valeurs propres ne déterminent pas la classe d'équivalence.

I.1.5 Définition

Soit $D = \{A, B\}$, $D' = \{A', B'\}$ deux couples de champs invariants de $\text{Sp}(1, \mathbb{R})$. On dira que les deux systèmes sont équivalents s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $ab > 0$ et $S \in \text{Sp}(1, \mathbb{R})$ tels que $aA = S^{-1} A' S$ et $bB = S^{-1} B' S$.

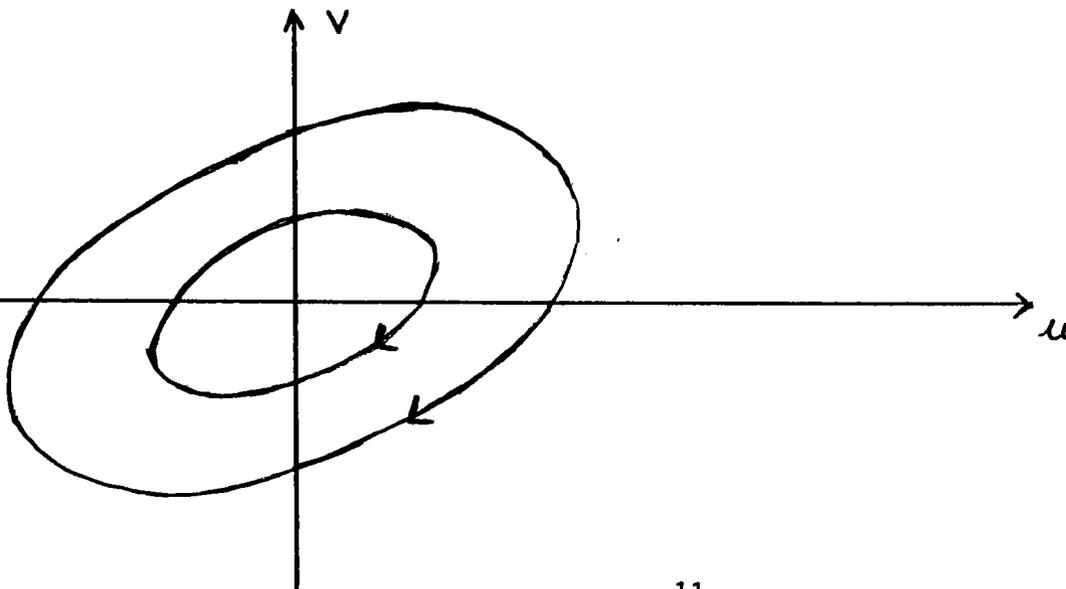
I.1.6 Proposition

Il est évident que cette relation d'équivalence conserve la contrôlabilité respective des systèmes D , D_R et D_P puisque les deux systèmes sont difféomorphes sur leurs variétés respectives à un changement de paramétrage des courbes intégrales des deux champs respectant la contrôlabilité près.

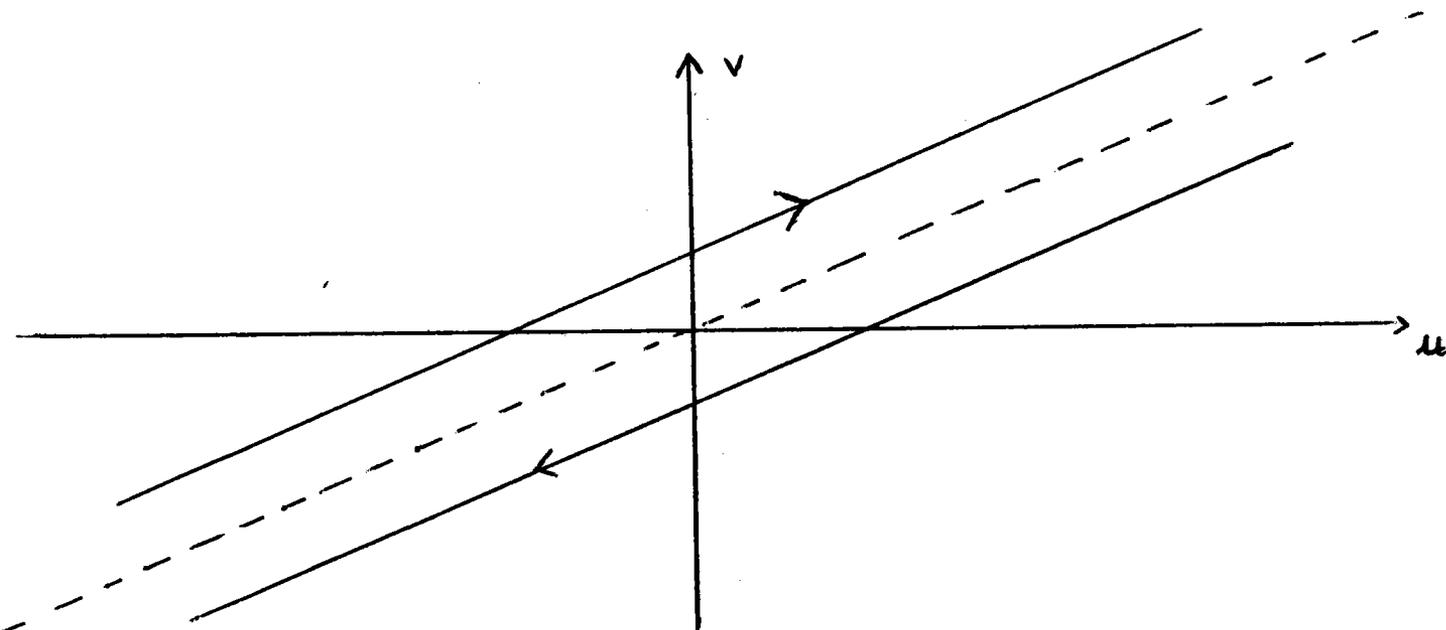
I.2 Classification des couples de champs linéaires hamiltoniens contrôlables sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

I.2.1 Représentation des courbes intégrales du champ linéaire hamiltonien $A.x$ de \mathbb{R}^2 .

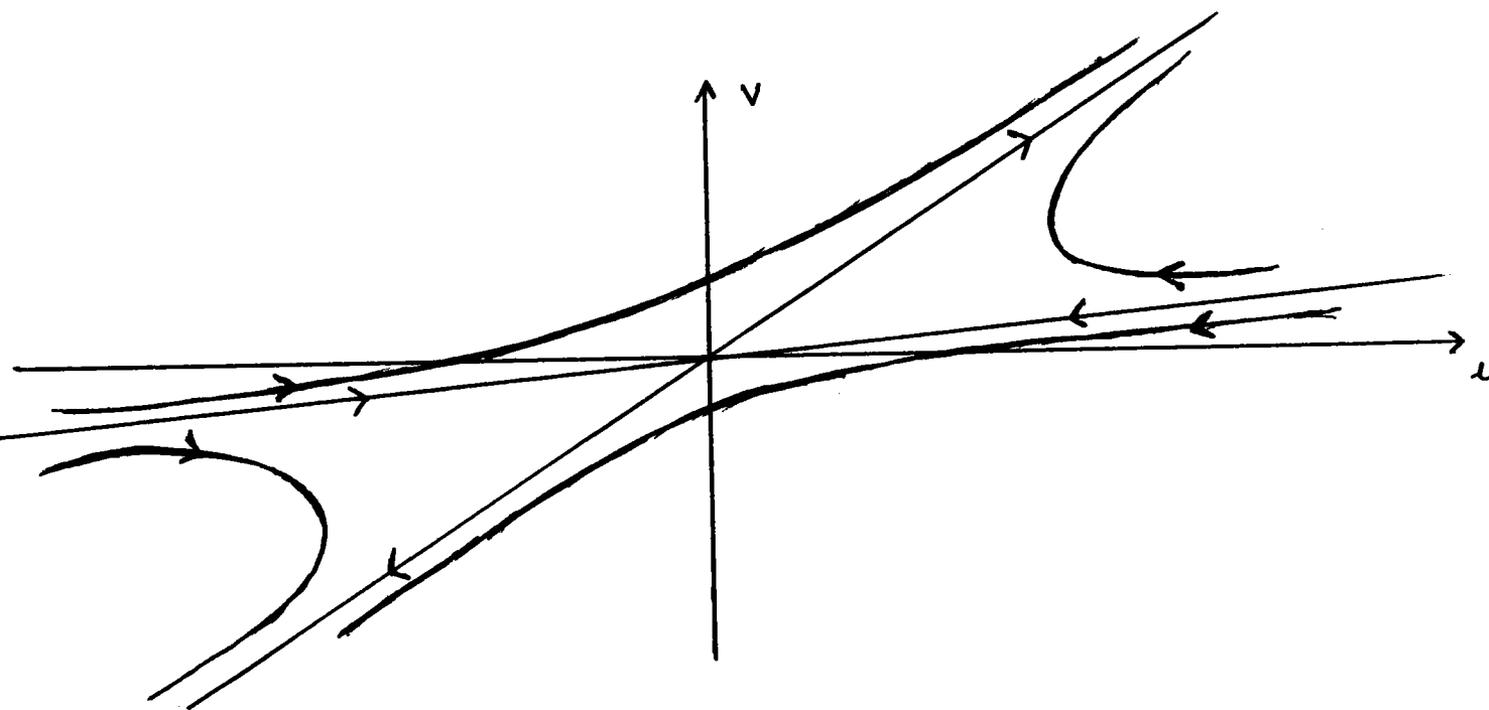
Si A est elliptique c'est une famille d'ellipses :



Si A est parabolique c'est une famille de droites parallèles à la direction propre de A qui est un ensemble de singularités :



Si A est hyperbolique c'est une famille d'hyperboles admettant les directions propres de A comme asymptotes :



Soit $D = \{A, B\}$ un système de champs invariants sur $Sp(1, R)$. On vérifie à l'aide des courbes intégrales des deux champs du système $D_R = \{A.x, B.x\}$ les résultats suivants :

I.2.2 Proposition

Le système D_R a la propriété d'accessibilité sur $R^2 - \{0\}$ si et seulement si les champs A et B sont non proportionnels et les directions propres de A sont toutes distinctes des directions propres de B.

(On utilisera 0.2.2 (v)).

I.2.3 Proposition

On suppose que A est elliptique. Alors D_R est contrôlable si et seulement si A et B sont non proportionnels.

I.2.4 Proposition

On suppose que A et B sont paraboliques non proportionnels. Alors un et un seul des deux systèmes $\{A.x, B.x\}$, $\{A.x, -B.x\}$ est contrôlable.

D_R est contrôlable si et seulement si $D_{\sim} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

I.2.5 Proposition

On suppose que A est parabolique et B hyperbolique.

Si D_R a la propriété d'accessibilité alors un et un seul des deux systèmes $\{A.x, B.x\}$, $\{A.x, -B.x\}$ est contrôlable.

D_R est contrôlable si et seulement si $D_{\sim} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

I.2.6 Proposition

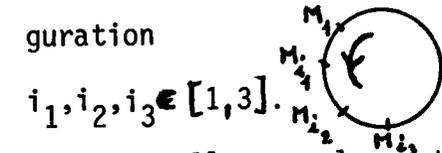
On suppose que A et B sont hyperboliques.

Notons $a > 0$ et $-a$ les valeurs propres de A,

$b > 0$ et $-b$ les valeurs propres de B.

Désignons par M_1 une intersection avec le cercle unité de R^2 de la direction propre associée à a , puis par M_2, M_3 et M_4 les premières intersections respectives avec le cercle unité des directions propres associées à $-a, b$ et $-b$, le cercle unité étant parcouru dans son sens trigonométrique positif ordinaire à partir du point M_1 .

Associons au système ayant la propriété d'accessibilité de configuration le quaterne $(M_1, M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3})$;



$i_1, i_2, i_3 \in [1, 3]$.

Alors seuls sont contrôlables les systèmes de quaternes

(M_1, M_2, M_3, M_4) ou (M_1, M_4, M_3, M_2) .

On note que, si dans la suite les points M_i des deux champs alternent alors ni le système $\{A.x, B.x\}$ ni le système $\{A.x, -B.x\}$ est contrôlable, sinon un et un seul des deux systèmes l'est.

I.3 Conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité sur $Sp(1,R)$.

L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'un système $D = \{A, B\}$ de champs invariants à droite de $Sp(1,R)$ est contrôlable si et seulement si le système D_R associé sur $R^2 - \{0\}$ est contrôlable. La classification réalisée en I.2 sur $R^2 - \{0\}$ grâce aux propositions I.2.3-4-5-6 sera alors la classification recherchée sur $Sp(1,R)$.

I.3.1 Proposition

Soit D un système d'un nombre quelconque de champs invariants à droite sur $Sp(1,R)$.

Alors D a la propriété d'accessibilité si et seulement si D_R a la propriété d'accessibilité sur $R^2 - \{0\}$.

Démonstration

Appliquons 0.3.4 (ii) : D_R a la propriété d'accessibilité sur $R^2 - \{0\}$ si et seulement si l'algèbre de Lie engendrée par D est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de $Sp(1,R)$ opérant transitivement sur $R^2 - \{0\}$.

Or il suffit de consulter dans [1] la liste des groupes opérant transitivement sur $R^n - \{0\}$ pour s'assurer que $Sp(1,R)$ est le seul sous-groupe de $Sp(1,R)$ ayant cette propriété.

I.3.2 Théorème

Soit $D = \{A, B\}$ un couple de champs de vecteurs invariants à droite de $Sp(1,R)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) D est contrôlable sur $Sp(1,R)$.
- (ii) D_P est contrôlable sur P .
- (iii) D_R est contrôlable sur $R^2 - \{0\}$.

Démonstration

La démonstration n'utilise pas des techniques très sophistiquées ; elle est cependant loin d'être évidente.

On sait d'après 0.3.4 (i) que la condition (i) implique (ii) et (iii). On va montrer en étudiant tous les cas de figure (à une équivalence près) que (ii) implique (i), le lecteur vérifiera en chemin grâce à I.2 que (ii) et (iii) sont équivalentes.

On va d'abord établir dans le lemme 1 une propriété fondamentale de P : il y a identité entre l'ensemble des éléments de $Sp(1,R)$ laissant fixes un point de P et sous-groupe compact maximal. Ensuite on démontrera dans le lemme 2 une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité sur $Sp(1,R)$ lorsque l'un des champs est elliptique. Enfin on établira le lemme 3 qui joint au lemme 1 est à interpréter comme le bon lemme pour résoudre les cas de figure restants.

Lemme 1

K est un sous-groupe compact maximal de $Sp(1,R)$ si et seulement si il existe $z_0 \in P$ tel que $K = \{S \in Sp(1,R), S.z_0 = z_0\}$.

Preuve

Notons $SO(2)$ le groupe des rotations de déterminant 1 :

$$SO(2) = \left\{ \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

On vérifie que $SO(2) = \{S \in Sp(1,R), S.i = i\}$.

Soit K un sous-groupe compact maximal de $Sp(1,R)$ alors K est conjugué à $SO(2)$, i.e., il existe $S \in Sp(1,R)$ tel que $K = S SO(2) S^{-1}$. K est donc l'ensemble des éléments de $Sp(1,R)$ laissant fixe le point $S.i$ de P .

Lemme 2

On suppose que A est elliptique.

Alors le système D est contrôlable sur $Sp(1,R)$ si et seulement si A et B sont non proportionnels (comparer avec [9] 6-7).

Preuve

Si B est elliptique on utilise I.3.1, I.2.2 et [11] II.4.4 :

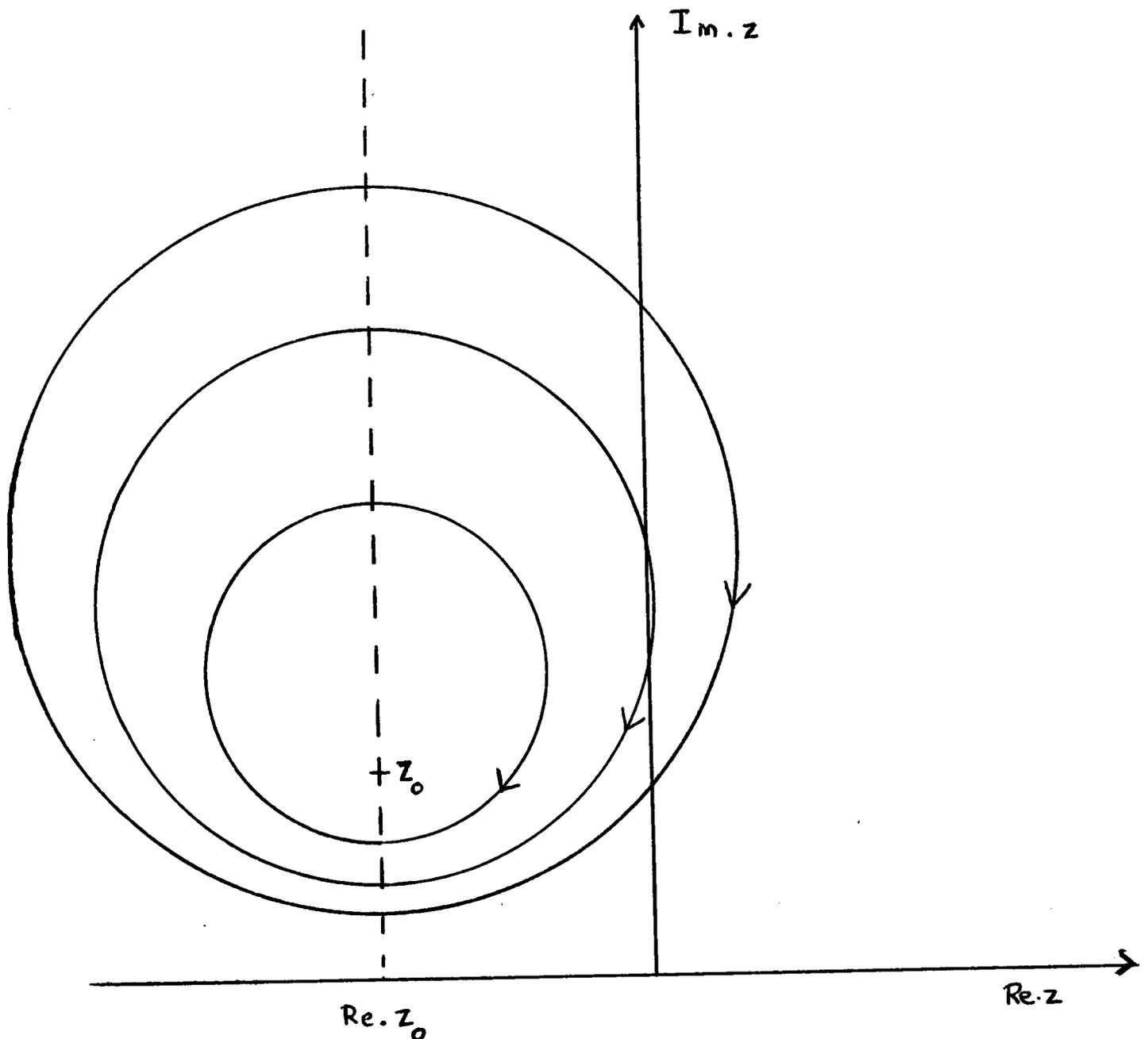
D est un système de champs Poisson-stables qui a la propriété d'accessibilité,

il est donc contrôlable.

Si B est parabolique ou hyperbolique le système est équivalent à un système $D' = \{A', B'\}$ où A' est elliptique et : $B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ si B est parabolique, $B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ si B est hyperbolique.

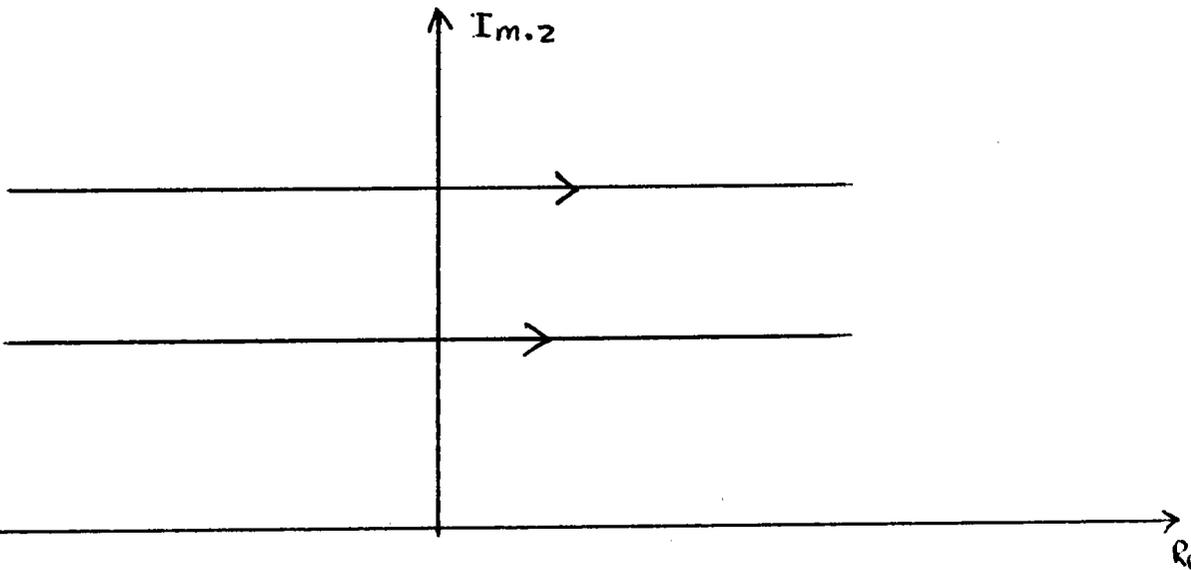
On peut tracer les courbes intégrales des champs de vecteurs de D'_p en utilisant 0.3.4.

Le champ A'_p admet une singularité notée z_0 . Les courbes intégrales de A'_p sont périodiques et symétriques par rapport à : $\{z \in P, \text{Re}.z = \text{Re}.z_0\}$:

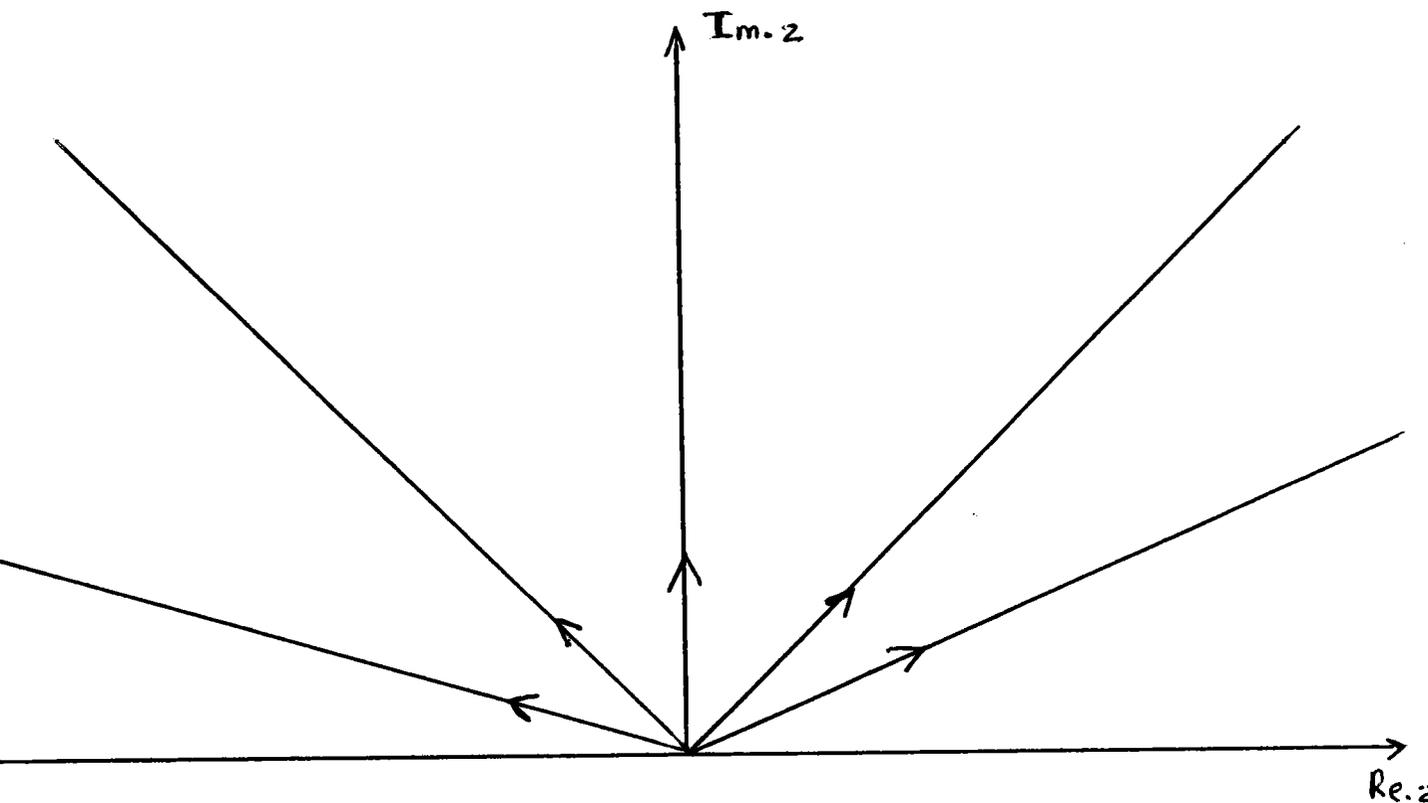


Les courbes intégrales de B'_p ont l'aspect suivant :

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} :$$



$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} :$$



On vérifie que l'ensemble $A^+(z_0)$ des points accessibles à partir de z_0 et que l'ensemble des points recalables en z_0 est P . Le système D'_p est donc contrôlable.

Montrons la contrôlabilité de D' . Notons $A^+(\mathbb{I})$ l'ensemble des états accessibles du système D' à partir de l'identité de $Sp(1, \mathbb{R})$ et K le sous-groupe compact maximal laissant z_0 fixe (c.f. lemme 1). Alors $K = \{\text{expt } A' ; t \geq 0\}$ et donc $K \subset A^+(\mathbb{I})$.

Soit $S \in Sp(1, \mathbb{R})$, alors $S.z_0$ appartient à P et donc à $A^+(z_0) = A^+(\mathbb{I}).z_0$ (0.3.4 (i)) puisque D'_p est contrôlable ; il existe donc $T \in A^+(\mathbb{I})$ tel que $S.z_0 = T.z_0$; $T^{-1}S$ laisse fixe z_0 c'est donc un élément de K d'après le lemme 1 et donc de $A^+(\mathbb{I})$. Puisque $A^+(\mathbb{I})$ est un semi-groupe (c.f. 0.3.1), S appartient donc à $A^+(\mathbb{I})$.

On en déduit que $A^+(\mathbb{I}) = Sp(1, \mathbb{R})$ et le système D' est contrôlable d'après 0.3.2.

Lemme 3

Soit K un sous-groupe compact maximal de $Sp(1, \mathbb{R})$ et U un ouvert de K .

Soit le système $D = \{A, B\}$ où A et B sont de type parabolique ou hyperbolique.

Alors si tous les éléments de U sont accessibles à partir de l'identité pour le système D il est contrôlable sur $Sp(1, \mathbb{R})$.

Preuve

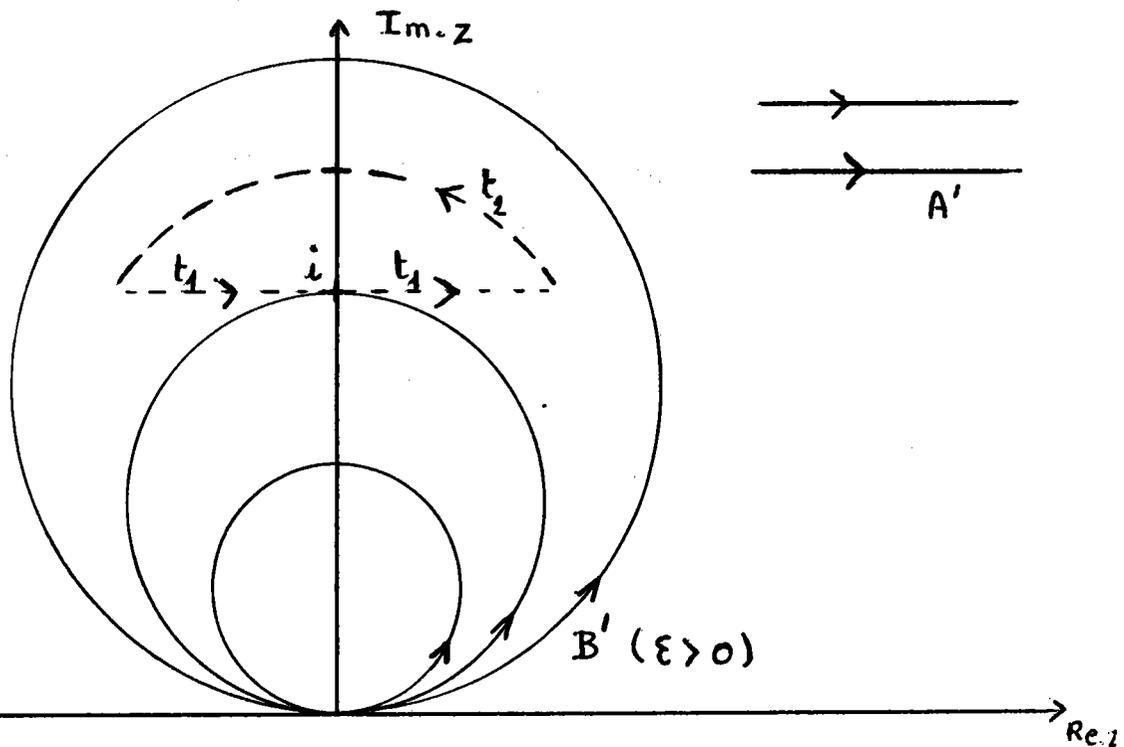
Si l'ensemble des états accessibles à partir de l'identité du système D contient U , puisque c'est un semi-groupe (0.3.1) il contient K qui coïncide avec U^n pour un entier n ; il contient donc l'ensemble des états accessibles à partir de l'identité du système $\{A', A, B\}$, où A' est elliptique et tel que $K = \{\text{expt } A' ; t \geq 0\}$, qui est $Sp(1, \mathbb{R})$ d'après le lemme 2 le système D est donc contrôlable d'après 0.3.2.

Examinons maintenant les cas restants.

Si A et B sont paraboliques non proportionnels. Alors le système D est équivalent au système $D' = \{A', B'\}$ avec $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 \end{bmatrix}$ $\epsilon = \pm 1$.

Les courbes intégrales de B'_p sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire pur.

Le système D'_p a l'allure suivante :



Le système D'_p est contrôlable sur P si et seulement si $\epsilon > 0$.
 Montrons que dans ce cas le système D' est contrôlable sur $Sp(1,R)$.

Soit $t_1 \geq 0$ alors d'après la figure il existe $t_2 \geq 0$ unique de sorte que l'élément $A(t_1)$, de l'ensemble des états accessibles à partir de l'identité du système D' , défini par $A(t_1) = (\text{expt}_1 A')(\text{expt}_2 B')(\text{expt}_1 A')$ laisse fixe le point i . $A(t_1)$ est donc un élément de $SO(2)$ (c.f. lemme 1).

L'application $t_1 \mapsto A(t_1)$ est une fonction continue en t_1 , d'après le théorème de continuité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux conditions initiales, et $A(0) = I$ identité de $Sp(1,R)$; d'autre part pour des raisons de symétrie il existe $\alpha > 0$ tel que $A(\alpha) \neq I$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble $\{A(t_1), t_1 \in [0, \alpha]\}$ contient un voisinage de $SO(2)$.

Le système D' est donc contrôlable sur $Sp(1,R)$ d'après le lemme 3.

Notons que l'on peut déterminer aisément $A(t_1)$:

$$t_2 = 2t_1 (1 + t_1^2)^{-1} ;$$

$$A(t_1) = \begin{bmatrix} (1 - t_1^2) (1 + t_1^2)^{-1} & 2t_1 (1 + t_1^2)^{-1} \\ -2t_1 (1 + t_1^2)^{-1} & (1 - t_1^2) (1 + t_1^2)^{-1} \end{bmatrix}$$

Soit en posant $t_1 = \operatorname{tg} a$, $a \in [0, \pi/2[$:

$$A(t_1) = \begin{bmatrix} \cos 2a & \sin 2a \\ -\sin 2a & \cos 2a \end{bmatrix}$$

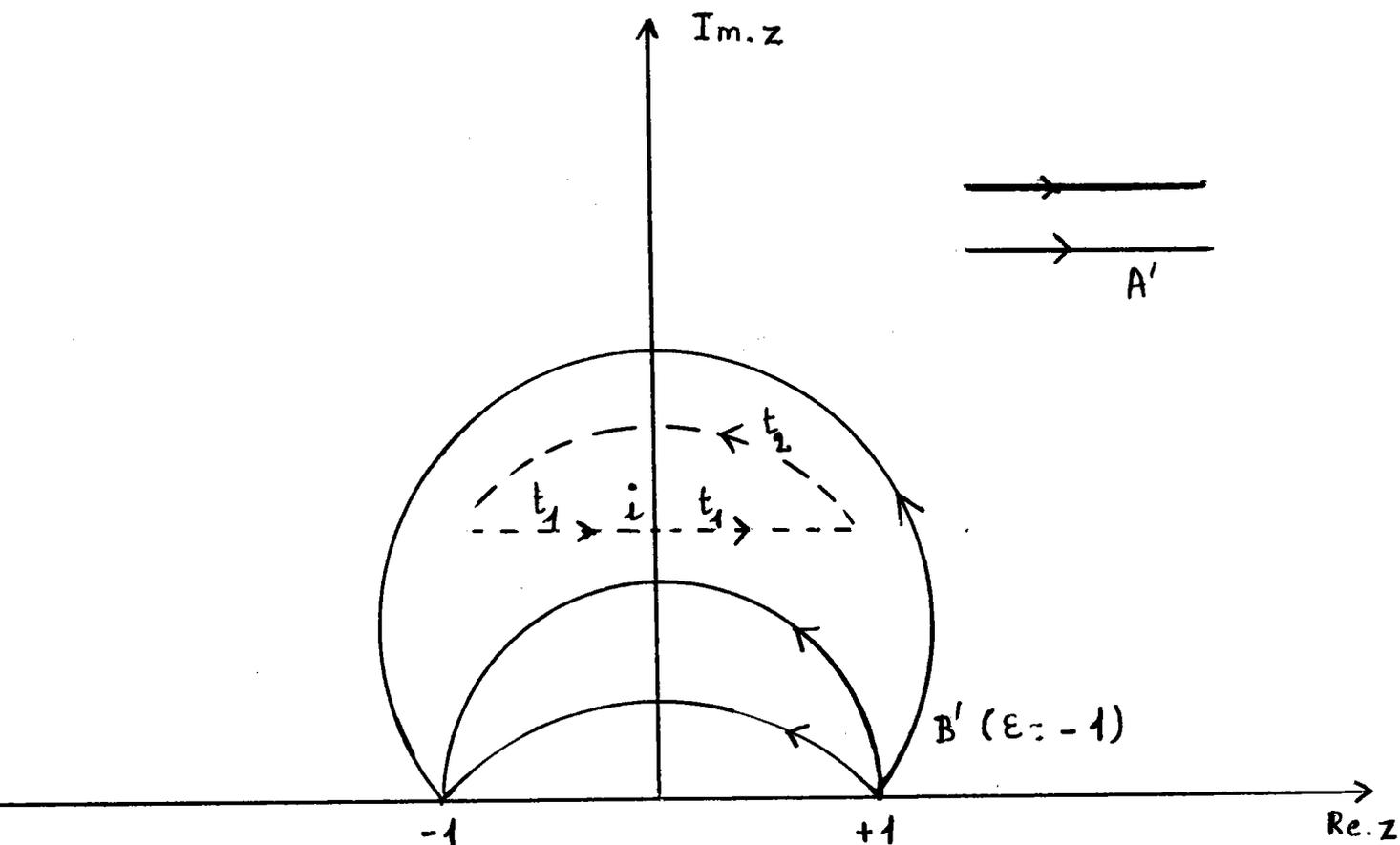
Examinons le cas où A est parabolique et B hyperbolique. Si D n'a pas la propriété d'accessibilité il est équivalent au système

$D' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} \right\}$ $\varepsilon = \pm 1$; D'_p a la propriété d'accessibilité mais n'est pas contrôlable.

Si D a la propriété d'accessibilité il est équivalent au système

$D' = \{A', B'\}$ avec $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ $\varepsilon = \pm 1$.

Le système D'_p a l'allure suivante :



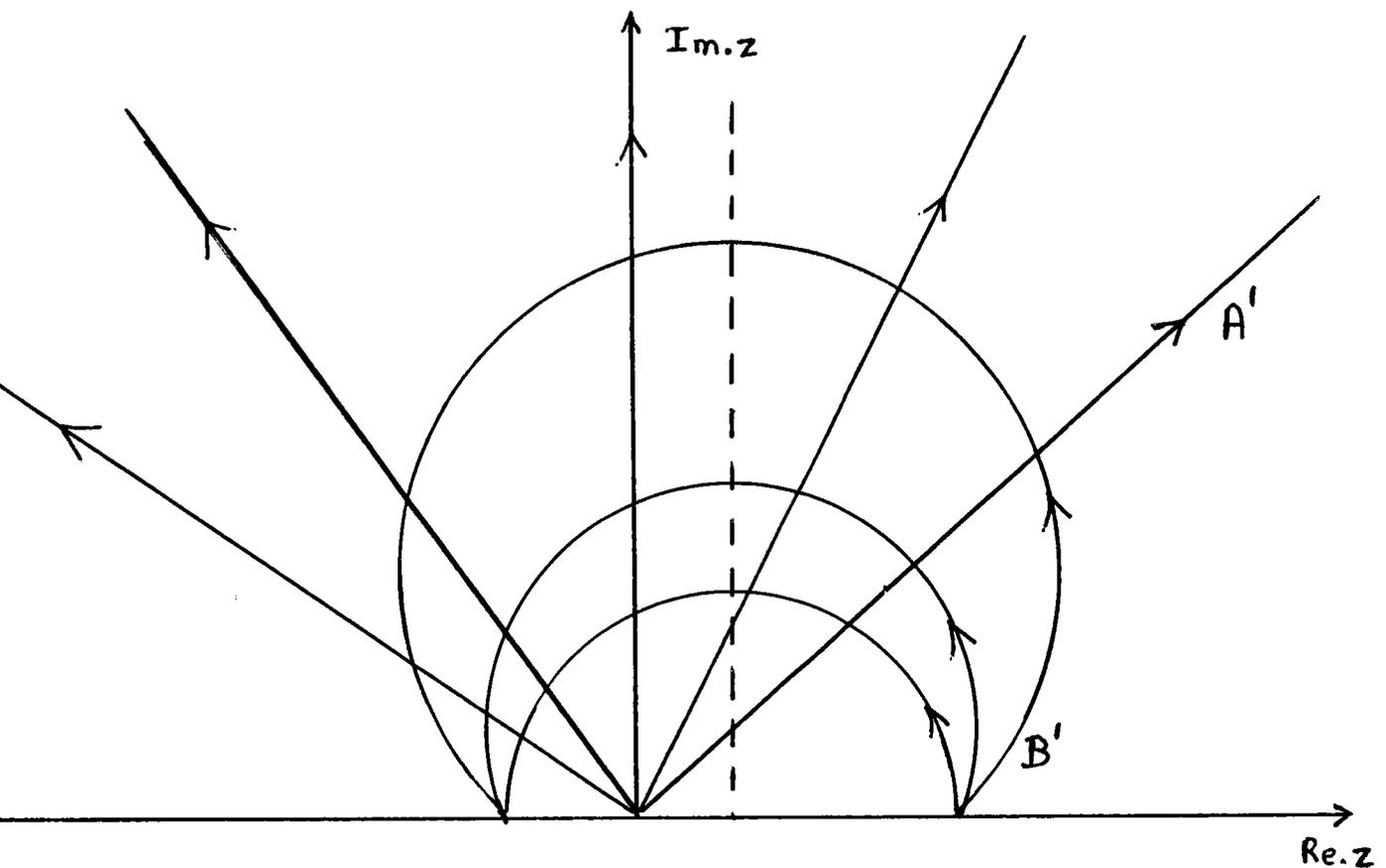
Il est contrôlable sur P si et seulement si $\xi = -1$. Dans ce cas on montre que D' est contrôlable sur $Sp(1, \mathbb{R})$ d'une façon identique au cas précédent.

Enfin examinons le cas où A et B sont hyperboliques ; le système D est alors équivalent à un système $D' = \{A', B'\}$ avec $A' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B' hyperbolique.

Il convient de distinguer deux possibilités :

1°) D' n'a pas la propriété d'accessibilité ou les points M_i des champs A' , B' alternent (c.f. I.2.6).

Le système D'_p a alors l'allure suivante :

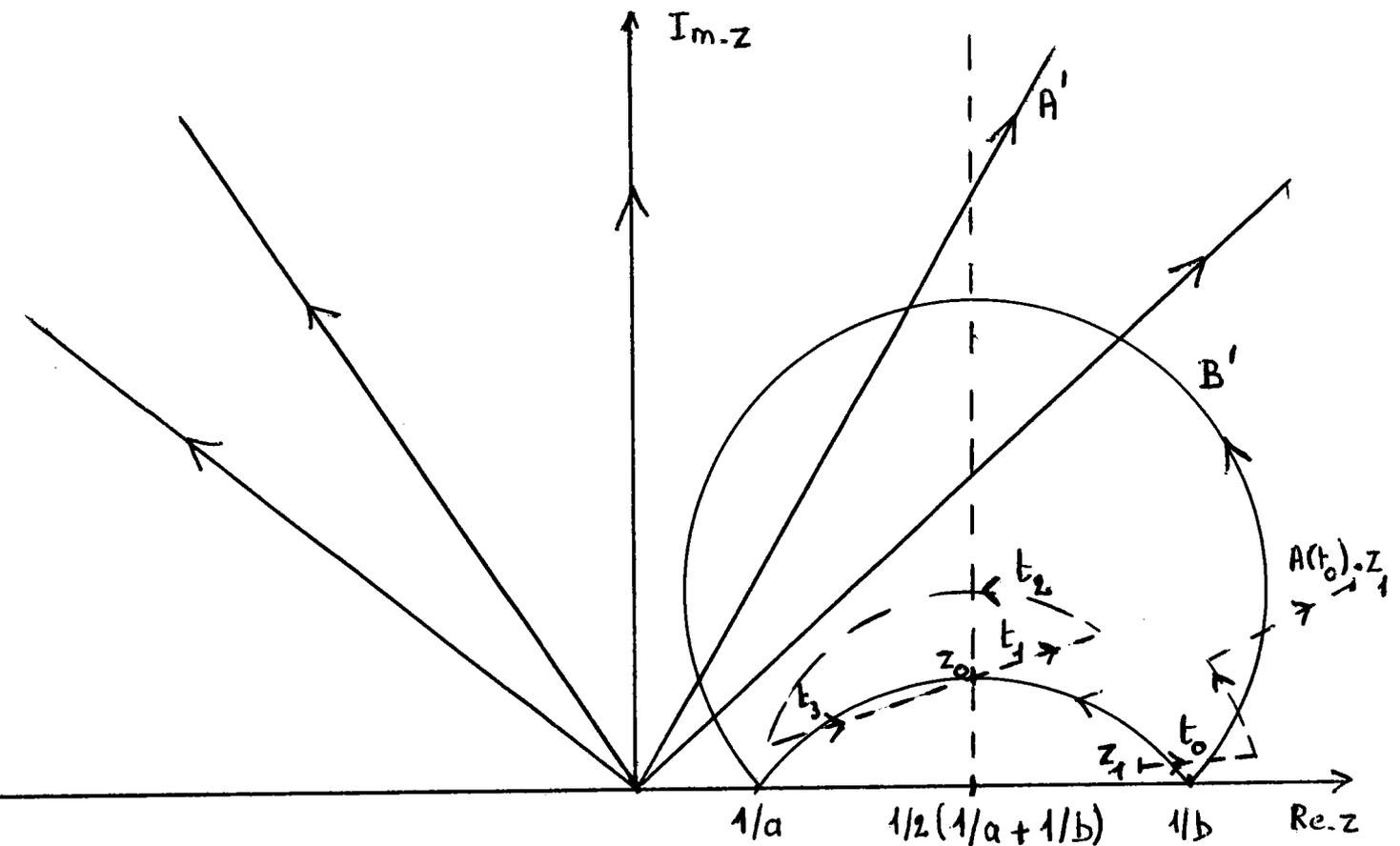


Ni le système D'_p ni le système $\{A'_p, -B'_p\}$ est contrôlable.

2°) Les points M_i des champs A' et B' n'alternent pas.

Notons dans le plan $\mathbb{R}^2 = \{(u, v)\}$ par $v = au$ et $v = bu$ les directions propres associées respectivement à la valeur propre positive et négative de B' ; on peut supposer que $+\infty > a, b > 0$.

Le système D'_p a l'allure suivante :



D'_p est contrôlable si et seulement si $a > b$. Montrons alors que D' est contrôlable sur $Sp(1, \mathbb{R})$.

Notons z_0 un point de l'axe de symétrie $\{z \in P, \text{Re}z = 1/2(a^{-1} + b^{-1})\}$ des courbes intégrales de B'_p .

Soit $t_1 > 0$, alors d'après la figure il existe $t_2, t_3 \geq 0$ uniques de sorte que $A(t_1) = (\text{expt}_3 A')(\text{expt}_2 B')(\text{expt}_1 A')$ laisse fixe le point z_0 .

L'application $t_1 \mapsto A(t_1)$ est une fonction continue en t_1 et il suffit, comme dans le cas de mariage de champs paraboliques, de montrer qu'elle est non constante pour démontrer la contrôlabilité de D' sur $Sp(1, \mathbb{R})$

Choisissons un $t_0 > 0$; il est évident (c.f. figure) que, puisque t_2 dépend continûment de t_1 et que t_3 augmente lorsque t_1 croît, que pour z_1 assez voisin de $1/b, A(t'_0).z_1 \neq A(t_0).z_1$ pour tout t'_0 voisin de t_0 .

L'application $t_1 \mapsto A(t_1)$ est donc non constante et D' est contrôlable sur $Sp(1, \mathbb{R})$.

I.3.3 Remarque

On a montré l'équivalence de la contrôlabilité de D sur $Sp(1, \mathbb{R})$ et de la contrôlabilité des systèmes associés D_P sur P et D_R sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ pour un système D de deux champs de vecteurs. Ce résultat est faux pour un système d'un nombre quelconque de champs.

Considérons en effet le système $D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$. D_R et D n'ont pas la propriété d'accessibilité par contre D_P a cette propriété.

Le système $D' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ symétrisé de D est donc non contrôlable sur $Sp(1, \mathbb{R})$, par contre le système D'_P est contrôlable sur P (0.2.2 (v)) !

I.4 La contrôlabilité n'est pas générique.

I.4.1 Définition

Sur un espace topologique une propriété sera dite générique si l'ensemble des éléments qui la vérifient est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Sur un espace de Baire, qui est précisément défini par le fait qu'une telle intersection est dense, c'est un ensemble dense.

I.4.2 Proposition

L'ensemble des systèmes $D = \{A, B\}$ de champs invariants à droite contrôlables sur $Sp(1, \mathbb{R})$ est un ouvert non dense lorsque l'on munit l'algèbre de Lie de $Sp(1, \mathbb{R}) \times Sp(1, \mathbb{R})$ de sa topologie canonique d'espace vectoriel.

Preuve

Sur un groupe de Lie pour qu'un système de champs invariants soit contrôlable il est nécessaire et suffisant qu'il le soit dans un voisinage de l'élément neutre (0.3.2). On déduit alors de [18] 4.3 et 3.2 l'ouverture. Ce résultat peut d'ailleurs être obtenu directement : d'après I.3.2 il suffit de le montrer sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ce qui est immédiat à l'aide de I.2.

La non densité se démontre en remarquant que dans un voisinage suffisamment petit d'un système de champs hyperboliques non contrôlable tous les systèmes sont non contrôlables.

La contrôlabilité est donc non générique bien que la propriété d'accessibilité le soit puisque manifestement l'ensemble des systèmes ayant cette propriété est un ouvert dense (appliquer I.3.1 puis I.2.2).

Introduction

On a vu en 0.3.5 que les systèmes asservis réguliers de R^n se définissent à partir de l'action sur R^n d'un groupe affine. En particulier le problème de trouver des systèmes de champs de vecteurs invariants engendrant certaines sous-algèbres de l'algèbre de Lie du groupe symplectique affine est associé à tout problème de contrôlabilité avec des systèmes asservis réguliers hamiltoniens.

Le résultat le plus important de ce chapitre est le théorème II.3.9 ; son contenu est le suivant : tout champ de vecteurs, non nul, de l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n,R)$ admet un partenaire compact, i.e., un champ de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact de $Sp(n,R)$, de sorte que l'algèbre de Lie engendrée par le couple de champs de vecteurs soit l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n,R)$.

Dans II.1, après avoir rappelé quelques généralités sur les algèbres de Lie, nous explicitons [1] p. 306 : nous définissons, sur une algèbre de Lie semi-simple, la notion d'élément fortement régulier et d'élément en position génitrice ; les couples de champs de vecteurs dont l'un des éléments est fortement régulier et l'autre en position génitrice engendrent l'algèbre de Lie.

Dans II.2 nous précisons sur l'algèbre de Lie $\underline{SU}(n)$ les caractéristiques des éléments fortement réguliers et celles des éléments en position génitrice. Cela nous permet d'exhiber des couples de champs de vecteurs engendrant $\underline{SU}(n)$. Nous terminons ce paragraphe en résolvant le problème de mariage algébrique, et donc de mariage, avec la classe des champs de vecteurs, invariants à droite, non nuls, du groupe spécial unitaire $SU(n)$.

Dans II.3 nous caractérisons les éléments fortement réguliers de $\underline{Sp}(n,R)$, de type compact, et les champs de vecteurs invariants en position génitrice. Le fait de distinguer "une" position génitrice particulière permet alors, via les résultats de II.2, de démontrer le théorème II.3.9.

Enfin dans II.4 nous étudions le problème de trouver des couples de champs de vecteurs invariants engendrant l'algèbre de Lie du groupe affine produit direct de groupes symplectiques affines. Un tel groupe est en effet physiquement adapté au problème de mariage avec la classe des champs affines hamiltoniens.

II.1 Construction de couples engendrant une algèbre de Lie semi-simple.

Soit g une algèbre de Lie réelle de dimension finie. On note $[X, Y]$ le crochet de Lie de deux éléments X, Y de g .

II.1.1 Définitions

Soit X un élément de g ; on définit l'endomorphisme $\text{ad}X$ de g par $\text{ad}X.Y = [X, Y]$.

$B(X, Y) = \text{Trace}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)$ définit une forme bilinéaire symétrique sur g $X \in g$ appelée forme de Killing. On dira que g est semi-simple si la forme de Killing est non dégénérée ; si de plus g est non réduite à 0 et si les seuls idéaux de g sont g et $\{0\}$ on dira que g est simple.

Si l'algèbre de Lie $[g, g]$ dérivée de g , i.e., l'espace vectoriel engendré par $\{[X, Y] ; X, Y \in g\}$, est semi-simple et si g s'écrit $\mathfrak{c} \oplus g, g$, \mathfrak{c} étant le centre de g , i.e., $\mathfrak{c} = \{X \in g ; [X, Y] = 0, \forall Y \in g\}$, on dira que g est réductive.

II.1.2 Exemples

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact est réductive ; Ainsi l'algèbre de Lie $U(n)$ du groupe unitaire est réductive ; son centre est de dimension un ; son algèbre de Lie dérivée est l'algèbre $SU(n)$, elle est simple.

L'algèbre de Lie $GL(n, R)$ du groupe linéaire réel est réductive, son centre est de dimension un, son algèbre dérivée est simple : c'est l'algèbre de Lie $SL(n, R)$ des matrices réelles de trace nulle. $Sp(n, R)$ est une algèbre de Lie simple.

De façon générale les algèbre de Lie des groupes classiques sont réductives ce qui explique pourquoi l'étude de la structure des algèbres de Lie semi-simples a été poussée très loin et a même conduit à une classification complète.

II.1.3 Proposition ([7], chap. II.6.3)

Si g est semi-simple alors g est isomorphe au produit direct de tous ses idéaux simples.

II.1.4 Définition

Une sous-algèbre de Cartan de g est une sous-algèbre a de g vérifiant les conditions suivantes :

- (i) a est une algèbre abélienne maximale de g .
- (ii) Pour tout élément A de a , $\text{ad}A$ est un endomorphisme semi-simple, i.e., diagonalisable sur le complexifié de g .

II.1.5 Définition

Soit g une algèbre de Lie semi-simple.

On appelle décomposition canonique de g une somme directe,

$g = a \oplus b$ où :

- (i) a est une sous-algèbre de Cartan de g .
- (ii) b est un sous espace vectoriel de g stable relativement à tout endomorphisme $\text{ad}A$, A appartenant à a , et tel que l'algèbre de Lie engendrée par b , i.e., la plus petite sous-algèbre de Lie contenant g , soit g .

II.1.6 Définition

Soit a une sous-algèbre de Cartan de g et $g = a \oplus b$ une décomposition canonique de g .

On dira qu'un élément A de a est fortement régulier si :

- (i) La restriction de $\text{ad}A$ à b est un isomorphisme.
- (ii) La restriction de $\text{ad}A$ à b est cyclique sur b , i.e., le polynôme minimal de $\text{ad}A$ sur b coïncide avec son polynôme caractéristique.

II.1.7 Définition

Soit A un élément de a , fortement régulier.

On dira que l'élément B de g est en position génitrice (en abrégé p.g.) relativement à A si l'algèbre de Lie engendrée par le sous-espace vectoriel cyclique de b de base $\{\text{ad}A.B, \text{ad}^2A.B, \dots\}$ est g .

II.1.8 Proposition (c.f. [1] § 5, théorème Kuranishi).

Soit A un élément fortement régulier et B un élément en position

Preuve

Il est clair que \underline{a} et \underline{a}' sont respectivement des algèbres abéliennes maximales de $\underline{U}(n)$ et de $\underline{SU}(n)$.

L'algèbre de Lie engendrée par l'espace vectoriel \underline{b} est $\underline{SU}(n)$ car $[E_{in}, F_{in}] = 2(A_i - A_n)$, $i \in [1, n-1]$.

Un calcul élémentaire de crochets de Lie montre que $\text{ad}A$ laisse stable \underline{b} et la restriction de $\text{ad}A$ à \underline{b} est un endomorphisme semi-simple dont les valeurs propres sont imaginaires pures ; plus précisément tous les espaces $\mathbb{R}E_{ij} \oplus \mathbb{R}F_{ij}$ sont laissés invariants par $\text{ad}A$ et restriction de $\text{ad}A$ à chacun de ces espaces est dans la base $\{E_{ij}, F_{ij}\}$ la matrice d'ordre deux
$$\begin{bmatrix} 0 & -(\alpha_i - \alpha_j) \\ \alpha_i - \alpha_j & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est alors immédiat que $\text{ad}A$ restreint à \underline{b} est un isomorphisme cyclique, i.e., A fortement régulier, si et seulement si les valeurs propres de $\text{ad}A$ sur \underline{b} sont toutes distinctes deux à deux ; comme ces valeurs propres sont les nombres complexes $i(\alpha_k - \alpha_l)$, $-i(\alpha_k - \alpha_l)$, $1 \leq k < l \leq n$ on a bien la condition de (iv). L'ensemble des éléments fortement réguliers est l'espace vectoriel \underline{a}' auquel on a retiré un nombre fini d'hyperplans.

Montrons le point (v). Soit A un élément fortement régulier. Alors B' est un vecteur cyclique du sous-espace de \underline{b} , $(\bigoplus_{(i,j) \in \Delta} \mathbb{R}E_{ij} \oplus \mathbb{R}F_{ij})$, relativement à l'endomorphisme $\text{ad}A$ ([13] I.2.3).

B est en position génitrice relativement à A , par définition, si l'algèbre de Lie engendrée par cet espace vectoriel est $\underline{SU}(n)$, d'où (v).

II.2.2 Proposition

Soit A , un élément fortement régulier de \underline{a}' .

Considérons un élément B de $\underline{SU}(n)$; de composante A' sur \underline{a}' et B' sur \underline{b} , B' s'écrivant $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_{ij} E_{ij} \oplus f_{ij} F_{ij})$.

Si l'ensemble des couples (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, tel que $(e_{ij}, f_{ij}) \neq (0, 0)$ contient l'un des sous-ensembles de l'ensemble $\{(i, j) ; 1 \leq i < j \leq n\}$ suivant :

a) $\{(i, i + 1)\}$

b) $\{(2i + 1, 2i + 2), (i, i + 2)\}$

c) $\{(i, j) ; i + j = n + 1 \text{ ou } i + j = n + 2\}$

d) $\{(i, j) ; i + j = n \text{ ou } i + j = n + 1\}$.

Alors B est en position génitrice relativement à A.

L'algèbre de Lie engendrée par $\{A, B\}$ est $\underline{SU}(n)$.

Preuve

Pour montrer que B est en p.g. on applique II.2.1 (v) et le résultat suivant : $[E_{ij}, E_{kl}] = \pm E_{uv}$, $[E_{ij}, F_{kl}] = \pm F_{uv}$ si un seul élément p du couple (i, j) coïncide avec un seul élément q du couple (k, l) ; (u, v) étant alors défini comme l'unique couple de l'ensemble $\{i, j, k, l\}$ auquel on a retiré $\{p, q\}$ et tel que $1 \leq u < v \leq n$.

Puisque B est en p.g. relativement à A, l'algèbre de Lie engendrée par $\{A, B\}$ est $\underline{SU}(n)$ d'après II.1.8.

II.2.3 Lemme

Soit X_1 un élément de $\underline{U}(n)$ n'appartenant pas au centre \underline{c} de $\underline{U}(n)$.

Alors il existe un automorphisme intérieur θ de $\underline{U}(n)$ tel que :

$$\theta(X_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_{ij} E_{ij} + f_{ij} F_{ij})$$

où les couples (e_{ij}, f_{ij}) , $1 \leq i < j \leq n$, sont tous non nuls.

Preuve

On rappelle que $\underline{U}(n)$ est l'ensemble des matrices anti-antihermitiennes, i.e., $\left\{ \begin{bmatrix} i\alpha_1 & & \\ & \beta_{ij} & \\ -\bar{\beta}_{ij} & & i\alpha_n \end{bmatrix} ; \alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$.

\underline{a} est le sous-ensemble des matrices diagonales et le centre \underline{c} est l'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} i\alpha & & 0 \\ & & \\ 0 & & i\alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Le problème est donc de montrer que tout $X_1 \in \underline{U}(n)$, $X_1 \notin \underline{c}$, il existe une matrice U de $\underline{U}(n)$ tel que

$$U X_1 {}^t U = \begin{bmatrix} * & & \\ & \gamma_{ij} & \\ & & * \\ & -\bar{\gamma}_{ij} & * \end{bmatrix}, \gamma_{ij} \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

On peut supposer que X_1 appartient à \underline{a} puisque, pour tout élément X de $\underline{U}(n)$, il existe un automorphisme intérieur Ω de $\underline{U}(n)$ tel que $\Omega(X)$ soit un élément de \underline{a} ([5] p. 277 théorème 4').

La démonstration se fait par récurrence sur n .

Pour $n = 2$ le résultat est évident ; supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$.

X_1 appartient à \underline{a} et n'appartient pas au centre \underline{c} de $\underline{U}(n)$; X_1 s'écrit, à un automorphisme intérieur de $\underline{U}(n)$ près,

$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in i\mathbb{R}$, \tilde{X}_1 est une matrice diagonale de $\underline{U}(n-1)$ n'appartenant pas au centre de $\underline{U}(n-1)$.

Appliquons l'hypothèse de récurrence : il existe $\tilde{P} \in U(n-1)$ tel

que (1) $\tilde{P} X_1 t_{\tilde{P}} = \begin{bmatrix} * & \beta_{ij} \\ -\bar{\beta}_{ij} & * \end{bmatrix}$, $\beta_{ij} \neq 0$, $1 \leq i < j \leq n-1$.

Notons P l'élément $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix}$ de $U(n)$.

J'affirme que pour tout vecteur x de \mathbb{C}^{n-1} , $\sqrt{t_{x\bar{x}}} < 1$, on peut construire une matrice $P(x)$, appartenant à $U(n)$, s'écrivant

$\begin{bmatrix} \lambda(x) & y(x) \\ x & \tilde{P}(x) \end{bmatrix}$, $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, $t_{y(x)} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\tilde{P}(x) \in GL(n-1, \mathbb{C})$, et tel que :

- l'application $x \mapsto P(x)$ est continue en $x = 0$.
- $P(0) = P$.

En effet, notons (x, y) le produit hermitien complexe $t_x \bar{y}$ de deux vecteurs x, y de \mathbb{C}^k .

Désignons par r_1, \dots, r_n , $r_i \in \mathbb{C}^n$, les colonnes de P . Soit S_1 un vecteur de \mathbb{C}^n appartenant à la sphère S^{2n-1} .

On définit S_i , $i \in [2, n]$ de la façon suivante :

- $S_i \in K$, K intersection de l'orthogonal au \mathbb{C} espace vectoriel engendré par $\{S_1, \dots, S_{i-1}\}$ avec la sphère S^{2n-1} .
- La distance de S_i à r_i est la distance de r_i au compact K .

Notons P_{S_i} la matrice unitaire (S_1, \dots, S_n) .

Soit $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\sqrt{(x, x)} < 1$; posons $\lambda(x) = \sqrt{1 - t_{x\bar{x}}}$;

La matrice $P(x)$ définie par $P(x) = P \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ x \end{pmatrix}$ vérifie les conditions annoncées.

Considérons maintenant la matrice antihermitienne

$\Omega(x) = P(x) X_1 \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}$; $\Omega(0) = P X_1 \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}$; elle est continue en $x = 0$.

Elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} * & -\lambda(x)\alpha \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} + y(x) \begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix} \\ * & x \alpha \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} + \tilde{P}(x) \begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Par continuité, il existe ϵ_1 , $0 < \epsilon_1 < 1$, tel que si $\sqrt{(x, x)} < \epsilon_1$, la matrice $\begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}$ est inversible et la matrice antihermitienne $x \alpha \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} + \tilde{P}(x) \begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}$ d'ordre $(n-1)$ a tous ses coefficients, sauf peut être ceux de la diagonale, non nuls.

Montrons maintenant qu'il existe x , $\sqrt{(x, x)} < \epsilon_1$, de sorte la ligne $\lambda(x)\alpha \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} + y(x) \begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}$ soit sans zéro, ce qui achèvera la démonstration du lemme.

Puisque $P(x)$ est unitaire, pour $\sqrt{(x, x)} < \epsilon_1$

$$y(x) = -\lambda(x) \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}}^{-1} \\ \end{matrix}(x)$$

La ligne $\lambda(x)\alpha \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} + y(x) \begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}$ s'écrit alors aussi,

$$\lambda(x) \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} (\alpha I_{n-1} - \begin{matrix} t_{\bar{P}}^{-1} \\ \end{matrix}(x) \begin{matrix} \tilde{X}_1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} t_{\bar{P}} \\ \end{matrix}(x)) = \lambda(x) \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} T(x),$$

I_{n-1} désignant la matrice identité d'ordre $n-1$.

Notons $t_1(x), \dots, t_{n-1}(x)$ les colonnes de $T(x)$.

On remarque que $\lambda(x) \begin{matrix} t_{\bar{x}} \\ \end{matrix} T(x) = \lambda(x) ((x, t_1(x)), \dots, (x, t_{n-1}(x)))$.

Les colonnes de $T(0)$ sont non nulles; en effet d'après

$$(1), T(0) = \begin{bmatrix} * & & & -\beta_{ij} \\ & \ddots & & \\ & & \beta_{ij} & \\ & & & * \end{bmatrix}, \beta_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n.$$

Choisissons un vecteur v de \mathbb{C}^{n-1} n'appartenant pas, pour $i \in [1, n-1]$, à l'hyperplan orthogonal de $\mathbb{C}t_i(0)$.

Alors $(v, t_i(0)) \neq 0$ pour $i \in [1, n-1]$.

Par continuité, il existe ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ tel que si $\sqrt{(x, x)} < \varepsilon$ alors $(v, t_i(x)) \neq 0$ pour tout $i \in [1, n-1]$.

Par linéarité, si $\sqrt{(x, x)} < \varepsilon$ alors $(\delta v, t_i(x)) \neq 0$ pour tout réel $\delta \neq 0$ et tout $i \in [1, n-1]$.

Soit $\delta_0 \neq 0$ de sorte que $\sqrt{(\delta_0 v, \delta_0 v)} < \varepsilon$

Notons $x_0 = \delta_0 v$

Alors $(x_0, t_i(x_0)) \neq 0$ pour $i \in [1, n-1]$ et $\lambda(x_0) {}^t \bar{x}_0 T(x_0)$ est une ligne sans zéro.

Posons $U = P(x_0)$.

Alors $U X_1 {}^t \bar{U} = \begin{bmatrix} * & & & \\ & \delta_{ij} & & \\ & & & * \\ & -\bar{\delta}_{ij} & & \end{bmatrix}$, $\delta_{ij} \neq 0$, $1 \leq i < j \leq n$.

C'est bien ce qu'il fallait montrer.

On est en mesure de donner maintenant une réponse au problème de mariage algébrique avec la classe des champs invariants à droite, non nuls, sur le groupe spécial unitaire.

II.2.4 Proposition

Pour tout champ de vecteurs X_1 , non nul, appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{SU}(n)$, il existe un champ de vecteurs X_2 élément de $\underline{SU}(n)$ tel que le couple $\{X_1, X_2\}$ engendre $\underline{SU}(n)$.

Preuve

Tout automorphisme intérieur de $\underline{U}(n)$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\underline{SU}(n)$.

Appliquons donc II.2.3 et II.2.2 : il existe un automorphisme θ de l'algèbre $\underline{SU}(n)$ tel que $\theta(X_1)$ soit en p.g. relativement à tout élément fortement régulier A de $\underline{SU}(n)$ le couple $\{A, \theta(X_1)\}$ engendre $\underline{SU}(n)$, mais, puisque θ est un automorphisme d'algèbre de Lie, cela équivaut à dire que $\{\theta^{-1}(A), X_1\}$ engendre $\underline{SU}(n)$; ce qui achève la démonstration.

II.2.5 Corollaire

Soit X_1 un élément de $\underline{U}(n)$, X_1 n'appartenant pas au centre \underline{c} de $\underline{U}(n)$.

Alors il existe un champ de vecteurs X_2 élément de $\underline{U}(n)$ tel que le couple $\{X_1, X_2\}$ engendre $\underline{U}(n)$.

Preuve

On applique II.1.9 puis II.2.4.

II.3 Quelques résultats sur l'algèbre de Lie du groupe symplectique

II.3.0 Préliminaires

La restriction de l'application σ de $\underline{GL}(n, \mathbb{C})$ dans $\underline{GL}(2n, \mathbb{R})$ définie par $\sigma : (A + iB) \mapsto \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$, est un isomorphisme de groupe de Lie de $\underline{GL}(n, \mathbb{C})$ sur son image.

L'isomorphisme d'algèbre de Lie dérivé coïncide avec σ .

On peut donc à l'aide de σ identifier $\underline{U}(n)$ à un sous-groupe compact, qui est maximal, de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ et $\underline{U}(n)$ à une sous-algèbre de Lie de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

On conserve les notations introduites en II.2.0 pour désigner les éléments et parties de $\underline{U}(n)$ ainsi identifiés à des éléments et parties de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Désignons par \underline{h} l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$,

$$\underline{h} = \left\{ \begin{bmatrix} M & N \\ N & -M \end{bmatrix} ; M, N \in \underline{GL}(n, \mathbb{R}), M \text{ et } N \text{ symétriques} \right\}.$$

Définissons les éléments de \underline{h} suivants :

$$H_i = i \begin{bmatrix} \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) & \\ & \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \end{bmatrix} \quad G_i = i \begin{bmatrix} \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) & \\ & \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \end{bmatrix} \quad ; i \in [1, n].$$

$$H_{ij} = j \begin{bmatrix} \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) & \\ & \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \end{bmatrix} \quad G_{ij} = j \begin{bmatrix} \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) & \\ & \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \end{bmatrix} \quad ; 1 \leq i < j \leq n.$$

H_i, G_i, H_{ij}, G_{ij} sont les éléments de la base canonique de \underline{h} .

On rappelle que $\underline{U}(n) = \underline{a} \oplus \underline{b}$ (c.f. II.2.0), et notons enfin \underline{d} la somme directe $\underline{h} \oplus \underline{b}$.

$Sp(n, R)$ est un groupe de Lie non compact. L'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$ est une algèbre de Lie simple ; elle a la particularité de posséder une sous-algèbre de Cartan \underline{a} qui est aussi une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\underline{U}(n)$ du sous-groupe compact maximal $U(n)$.

D'autre part il est nécessaire de savoir engendrer l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$ à l'aide de couples de champs de vecteurs dont l'un des champs appartient à l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact de $\underline{Sp}(n, R)$.

On va donc préciser sur $\underline{Sp}(n, R)$ les notions introduites en II.1.4-5-6-7, avec une décomposition canonique adaptée.

II.3.1 Proposition

- (i) $\underline{Sp}(n, R) = \underline{h} \oplus \underline{U}(n)$ (décomposition de Cartan).
- (ii) \underline{a} est une sous-algèbre de Cartan de $\underline{Sp}(n, R)$.
 $\underline{Sp}(n, R) = \underline{a} \oplus \underline{d}$ est une décomposition canonique de $\underline{Sp}(n, R)$.
- (iii) Soit A un élément de \underline{a} s'écrivant $\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k$.

A est un élément fortement régulier si et seulement si les nombres de l'ensemble $\{2\alpha_i, -2\alpha_i; i \in [1, n]\} \cup \{(\alpha_i - \alpha_j), -(\alpha_i - \alpha_j), (\alpha_i + \alpha_j), -(\alpha_i + \alpha_j); 1 \leq i < j \leq n\}$ sont deux à deux distincts.

L'ensemble des éléments fortement réguliers de \underline{a} est un ouvert dense de l'espace vectoriel \underline{a} .

- (iv) Soit B un élément de $\underline{Sp}(n, R)$ s'écrivant $A' + \sum_{1 \leq i \leq n} (h_i H_i + g_i G_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (h_{ij} H_{ij} + g_{ij} G_{ij}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_{ij} E_{ij} + f_{ij} F_{ij})$,

A' appartenant à \underline{a} .

Notons : Δ_1 l'ensemble des indices i tel que $(h_i, g_i) \neq (0, 0)$,

Δ_2, Δ_3 respectivement l'ensemble des couples (i, j)

tel que $(h_{ij}, g_{ij}) \neq (0, 0)$, $(e_{ij}, f_{ij}) \neq (0, 0)$.

Alors si B est en position génératrice relativement à un élément fortement régulier de \underline{a} , il l'est relativement à tout élément

fortement régulier de \underline{a} .

B est en position génitrice si et seulement si l'algèbre de Lie engendrée par l'espace vectoriel

$$\left(\bigoplus_{i \in \Delta_1} \mathbb{R} H_i \oplus \mathbb{R} G_i \right) + \left(\bigoplus_{(i,j) \in \Delta_2} \mathbb{R} H_{ij} \oplus \mathbb{R} G_{ij} \right) + \left(\bigoplus_{(i,j) \in \Delta_3} \mathbb{R} E_{ij} \oplus \mathbb{R} F_{ij} \right) \text{ est } \underline{Sp}(n, \mathbb{R}).$$

Preuve

Un calcul de crochets de Lie montre que la base de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ canoniquement associée à la décomposition de Cartan de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ est la base où les éléments $\text{ad}A$, $A = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k$, sont représentés sous forme de matrice diagonale par blocs d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\alpha_i \\ -2\alpha_i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dans la base } \{H_i, G_i\},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (\alpha_i + \alpha_j) \\ -(\alpha_i + \alpha_j) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dans la base } \{H_{ij}, G_{ij}\},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -(\alpha_i - \alpha_j) \\ (\alpha_i - \alpha_j) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dans la base } \{E_{ij}, F_{ij}\}.$$

La situation est donc formellement analogue à celle rencontrée en II.2.1, d'où l'identité des différents points de II.2.1 et ceux de II.3.1.

II.3.2 Lemme

Soit B un champs de vecteurs de l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\underline{U}(n)$.

Alors l'algèbre de Lie engendrée par la famille de champs de vecteurs $\{B, \underline{U}(n)\}$ est l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

La preuve s'appuie sur des considérations géométriques et sur la classification réalisée par Boothby dans [1] des sous-groupes de Lie du groupe linéaire opérant linéairement et transitivement sur l'espace pointé $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

On peut concevoir au moins deux autres méthodes, l'une fondée sur des calculs de crochets de Lie, l'autre sur la décomposition polaire de

$Sp(n, R)$ qui permet une démonstration constructive de la contrôlabilité du système de champs invariants à droite de $Sp(n, R) \{ H, \underline{U}(n) \}$, H symétrique non nul.

Preuve

Notons G le sous-espace intégral de $Sp(n, R)$ dont l'algèbre de Lie \underline{G} est l'algèbre de Lie engendrée par $\{ B, \underline{U}(n) \}$.

G est l'orbite de l'identité du système de champs invariants à droite $\{ B, \underline{U}(n) \}$ de $Sp(n, R)$ (0.3.1).

Le système associé sur $R^{2n} - \{0\}$ a la propriété d'accessibilité.

En effet, d'après 0.2.2 (iv), il suffit de montrer que l'orbite $A(x)$ d'un état x de $R^{2n} - \{0\}$ quelconque est d'intérieur non vide.

Cette condition est satisfaite car $A(x) = G.x$, G contient $U(n)$ par construction et $U(n)$ opère transitivement sur la sphère S^{2n-1} ; $A(x)$ contient donc la sphère passant par x ; d'autre part G contient $\{ \text{expt} B ; t \in R \}$, or B n'appartient à $\underline{U}(n)$, il existe donc y appartenant à la sphère de sorte que $(\text{expt} B).y$, t appartenant à un intervalle non vide $[0, \epsilon]$, soit une variété transverse à la sphère.

$A(x)$ est donc d'intérieur non vide.

G est bien un sous-groupe de Lie de $Sp(n, R)$ opérant transitivement sur $R^{2n} - \{0\}$.

$U(n)$ est un sous-groupe compact maximal de G .

En effet $U(n)$ est un sous-groupe intégral de G , il est compact d'après [7] p. 120 5.4; il est maximal car G est immergé dans $Sp(n, R)$, or $U(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $Sp(n, R)$.

Montrons que l'algèbre de Lie \underline{G} est simple.

G opère transitivement sur $R^{2n} - \{0\}$, G est donc réductive ([1] 3.1); \tilde{Z} le centre de \underline{G} est inclus dans le centralisateur de $\underline{U}(n)$ dans $\underline{Sp}(n, R)$ qui n'est autre que le centre \underline{c} de $\underline{U}(n)$ (car l'algèbre abélienne maximale de $\underline{U}(n)$ est abélienne maximale dans $\underline{Sp}(n, R)$); le centre de $\underline{U}(n)$ est $\mathbb{R}J$; un calcul immédiat de crochet montre qu'un élément de $\underline{Sp}(n, R)$ commutant avec J est dans $\underline{U}(n)$; comme $B \in \underline{G}$, $B \notin \underline{U}(n)$, $\tilde{c} = \{0\}$.

Comme de plus \underline{G} contient $\underline{U}(n)$, \underline{G} est simple.

G est donc un sous-groupe de Lie du groupe linéaire, opérant tran-

sitivement sur $R^{2n} - \{0\}$, G admet $U(n)$ comme sous-groupe compact maximal et \underline{G} est simple.

G est donc isomorphe à $Sp(n, R)$ ([1] 3.8).

Comme G est contenu dans $Sp(n, R)$, $G = Sp(n, R)$.

II.3.3 Lemme

Soit H un élément de \underline{h} .

Alors il existe P appartenant à $U(n)$ tel que

$$P^{-1} H P = \sum_{i=1}^n \lambda_i H_i ; \lambda_i \geq 0, i \in [1, n].$$

La démonstration se fait par récurrence sur n et est de principe identique à celle de [3] p. 12 proposition 2.

II.3.4 Proposition

Soit B un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$, $n > 2$, n 'appartenant pas à $\underline{U}(n)$.

Alors l'algèbre de Lie engendrée par la famille de champs de vecteurs $\{B, \underline{SU}(n)\}$ est l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$.

Preuve

On montre à l'aide de II.3.3 qu'elle est isomorphe à une algèbre de Lie contenant $\underline{U}(n)$ et on conclut en appliquant II.3.2.

Notons $D_{A.L.}$ l'algèbre de Lie engendrée par un système D de champs de vecteurs invariants à droite.

B s'écrit $H + C + SU$, $H \in \underline{h}$, H non nul, $C \in \underline{c}$, $SU \in \underline{SU}(n)$.

L'algèbre de Lie $\{B, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$ est donc égale à $\{H + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$.

Appliquons alors II.3.3 : il existe $P \in U(n)$ tel que

$$P^{-1} H P = H', H' = \sum_{i=1}^n \lambda_i H_i, \lambda_1 > 0.$$

Puisque $P \in U(n)$, l'algèbre de Lie $\{H + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$. $\{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$ contient $\{H', U(n)\}$.

En effet, $[A_1 - A_3, [A_1 - A_2, H' + C]] = -4\lambda_1 H_1 \in \{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$.

donc $G_1 = -1/2 [A_1 - A_2, H_1] \in \{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$,

et donc $[H_1, G_1] = 2 A_1 \in \{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$.

Comme $\underline{U}(n) = \underline{SU}(n) \oplus \mathbb{R}A_1$, on en déduit l'assertion.

Appliquons alors II.3.2 : $\{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$ contient $\{H', \underline{U}(n)\}$, $H' \notin \underline{U}(n)$, donc $\{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.} = \underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Or $\{H + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$ est isomorphe à $\{H' + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$,

donc $\{H + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.} = \underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Comme $\{H + C, \underline{SU}(n)\}_{A.L.} = \{B, \underline{SU}(n)\}_{A.L.}$, alors $\{B, \underline{SU}(n)\}_{A.L.} = \underline{Sp}(n, \mathbb{R})$, ce qui achève la démonstration.

II.3.5 Remarque

La proposition II.3.4 est inexacte pour $n = 1$ et $n = 2$.

Pour $n = 1$ car $\underline{SU}(2) = \emptyset$.

Pour $n = 2$, on remarque que l'algèbre de Lie engendrée par $\{H, \underline{SU}(2)\}$, $H = H_1 + H_2$, est isomorphe à $\underline{SL}(2, \mathbb{C})$ algèbre de Lie du groupe des matrices complexes d'ordre 2 et de déterminant 1.

On a maintenant mis en place le matériel technique nécessaire à distinguer une position génitrice particulière. Elle est fondamentale.

II.3.6 Corollaire

Soit A un élément de \underline{a} fortement régulier et B un élément de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ s'écrivant $H + A' + B'$, H , A' et B' appartenant respectivement à \underline{h} , \underline{a} et $\underline{SU}(n)$.

On suppose que :

a) H est non nul.

b) B' est position génitrice sur $\underline{SU}(n)$ (relativement à la décomposition canonique $\underline{a}' \oplus \underline{b}$).

Alors B est en position génitrice relativement à A . L'algèbre de Lie engendrée par $\{A, B\}$ est l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Preuve

Notons \underline{d}' l'espace vectoriel cyclique engendré par $\{\text{ad}A.B, \text{ad}^2A.B, \dots\}$. B est en position génitrice si l'algèbre de Lie $\underline{d}'_{A.L.}$ engendrée par \underline{d}' est $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Cette algèbre de Lie contient $\{H, \underline{SU}(n)\}$ d'après II.3.1 (iv) et b).

Pour $n > 2$, on applique II.3.4 : $\{H, \underline{SU}(n)\}_{A.L.} = \underline{Sp}(n, R)$ et donc $\underline{d}'_{A.L.} = \underline{Sp}(n, R)$.

Pour traiter les deux cas restants il est nécessaire de raffiner.

Pour $n = 1$, $\underline{d}'_{A.L.}$ contient, d'après a) et II.3.1 (iv), $\mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}G_1$, or $[H_1, G_1] = 2A_1$, donc $\underline{d}'_{A.L.}$ contient $\{H_1, \underline{U}(1)\}$ et on conclut en appliquant II.3.2.

Pour $n = 2$, $\underline{d}'_{A.L.}$ contient, d'après II.3.1 (iv) et a), l'un au moins des trois espaces vectoriels $\mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}G_1, \mathbb{R}H_2 \oplus \mathbb{R}G_2, \mathbb{R}H_{12} \oplus \mathbb{R}G_{12}$; or $[H_1, G_1] = 2A_1, [H_2, G_2] = 2A_2, [H_{12}, G_{12}] = 2(A_1 + A_2)$.

L'algèbre de Lie engendrée par \underline{d}' contient donc $\{H, \underline{U}(2)\}$, c'est donc $\underline{Sp}(2, R)$, d'après II.3.2.

B est bien en position génitrice. L'algèbre de Lie engendrée par $\{A, B\}$ est $\underline{Sp}(n, R)$ d'après II.1.8.

II.3.7 Lemme

Soit X_1 un champ de vecteurs, non nul, appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$.

Alors il existe un automorphisme intérieur \mathcal{O} de $\underline{Sp}(n, R)$ tel que $\mathcal{O}(X_1)$ soit en position génitrice sur $\underline{Sp}(n, R)$ (relativement à la décomposition canonique $\underline{a} \oplus \underline{d}$).

On a montré en II.3.6 que si $X_1 \notin \underline{U}(n)$ et si la projection canonique de X_1 sur $\underline{SU}(n)$ est en p.g. sur $\underline{SU}(n)$ alors X_1 est en p.g. sur $\underline{Sp}(n, R)$.

D'autre part, on sait, depuis II.2.3, que tout élément, non nul, de $\underline{SU}(n)$ peut être mis, à l'aide d'un automorphisme, en p.g. sur $\underline{SU}(n)$.

D'où la simplicité de la démonstration qui va suivre.

Preuve

X_1 s'écrit $H + U, H \in \underline{h}, U \in \underline{U}(n)$.

On distingue 4 cas, les trois derniers se ramenant au cas 1 par automorphisme intérieur.

Cas 1 : $H \neq 0, U \notin \underline{c}, \underline{c}$ centre de $\underline{U}(n)$.

Appliquons le lemme II.2.3 : il existe $P \in \underline{U}(n)$ tel que

$$P^{-1} U P = A' + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_{ij} E_{ij} + f_{ij} F_{ij}), A' \in \underline{a}, (e_{ij}, f_{ij}) \neq (0, 0).$$

$P \in U(n)$, donc $P^{-1} H P \in \underline{h}$, $P^{-1} H P$ est donc un élément non nul de \underline{h} .

$P^{-1} X_1 P$ est en p.g. sur $\underline{Sp}(n, R)$ d'après II.3.6.

Cas 2 : $H \neq 0$, $U \in \underline{c}$, $U \neq 0$.

Appliquons le lemme II.3.3 : il existe $P_1 \in U(n)$ tel que

$$P_1^{-1} H P_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i H_i, \lambda_1 > 0.$$

Posons $P_2 = (\exp H_1) (\exp \pi/2 A_1) (\exp -H_1)$ et $P = (P_2 P_1)$.

Alors $P^{-1} X_1 P$ est dans le cas 1.

Cas 3 : $H \neq 0$, $U = 0$.

Appliquons comme précédemment le lemme II.3.3 : il existe $P_1 \in U(n)$ tel que

$$P_1^{-1} H P_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i H_i, \lambda_1 > 0.$$

Posons $P_2 = \exp (G_1 + A_1)$ et $P = P_1 P_2$.

Alors $P^{-1} X_1 P$ est dans le cas 1.

Cas 4 : $X_1 \in U(n)$.

Alors, d'après [5] p. 277-4', il existe $R \in U(n)$ tel que

$$R^{-1} X_1 R = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k, \alpha_1 \neq 0.$$

Posons $S_t = \exp t H_1$ et $P_t = R S_t$.

Alors, pour $t \neq 0$, t assez petit, $P_t^{-1} X_1 P_t$ est dans le cas 1.

II.3.8 Définition

Soit G un sous-groupe fermé de $GL(n, R)$.

On dira qu'un champ de vecteurs A appartenant à l'algèbre de Lie \underline{G} de G est compact si l'ensemble $\{ \exp t A ; t \in R \}$ est une partie bornée de $GL(n, R)$.

D'un point de vue algébrique cela signifie que l'endomorphisme A est semi-simple et que ses valeurs propres sont toutes imaginaires pures.

II.3.9 Théorème

Pour tout champ de vecteurs X_1 , non nul, appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$, il existe un champ de vecteurs X_2 de $\underline{Sp}(n, R)$, compact, tel que l'algèbre de Lie engendrée par $\{ X_1, X_2 \}$, i.e., la plus petite sous-algèbre de Lie de $\underline{Sp}(n, R)$ contenant $\{ X_1, X_2 \}$, soit $\underline{Sp}(n, R)$.

Preuve

Appliquons le lemme II.3.7 : il existe un automorphisme intérieur Θ de $\underline{Sp}(n,R)$ de sorte que $\Theta(X_1)$ soit en p.g. sur $\underline{Sp}(n,R)$.

Soit A un élément de \underline{a} fortement régulier.

Le couple $\{A, \Theta(X_1)\}$ engendre l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n,R)$ d'après II.1.8.

Puis Θ est un automorphisme cela équivaut à dire que $\{\Theta^{-1}(A), X_1\}$ engendre $\underline{Sp}(n,R)$.

L'élément $X_2 = \Theta^{-1}(A)$ est bien compact, d'où le résultat.

II.4 Quelques résultats sur certaines sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie du groupe symplectique affine.

Applications aux systèmes asservis réguliers hamiltoniens.

Si l'on veut résoudre, en construisant effectivement le partenaire, le problème de mariage avec la classe des champs affines hamiltoniens, on est confronté au problème algébrique préliminaire de savoir déterminer quand certains systèmes asservis réguliers hamiltoniens ont la propriété d'accessibilité.

C'est l'objet de ce paragraphe.

II.4.0 Préliminaires

On rappelle que l'on note $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ la base canonique de R^{2n} .

Soit k_1, \dots, k_r des entiers, positifs non nuls, tel que $k_1 + \dots + k_r = n$.

Désignons par $R^{2k_i}, i \in [1, r]$, le sous-espace vectoriel de R^{2n} de base :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{k_1 + \dots + k_{i-1} + 1}, \dots, u_{k_1 + \dots + k_i}, v_{k_1 + \dots + k_{i-1} + 1}, \dots, \\ v_{k_1 + \dots + k_i} \end{array} \right\}.$$

Considérons le sous-groupe G de $Sp(n, R)$, ensemble des éléments de $Sp(n, R)$ laissant stable les r espaces vectoriels $R^{2k_1}, \dots, R^{2k_r}$.

G est isomorphe au groupe de Lie $Sp(k_1, R) \times \dots \times Sp(k_r, R)$ l'isomorphisme étant défini comme étant l'application qui fait correspondre à l'élément S de $Sp(n, R)$ l'élément (S^1, \dots, S^r) , où S^i désigne la matrice représentant la restriction de S à R^{2k_i} dans la base ci-dessus mentionnée.

L'algèbre de Lie \underline{G} s'identifie à l'aide de l'isomorphisme d'algèbre de Lie dérivé, noté Ω , à l'algèbre de Lie semi-simple $\underline{Sp}(k_1, R) \times \dots \times \underline{Sp}(k_r, R)$.

Avec les notations de II.3.0 et la proposition II.3.1 on a donc le résultat suivant :

II.4.1 Proposition

- (i) \underline{a} est une sous-algèbre de Cartan de \underline{G}
- (ii) $\underline{G} = \underline{a} \oplus (\underline{G} \cap \underline{d})$ est une décomposition canonique de \underline{G} .
- (iii) Soit A un élément de \underline{a} s'écrivant

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k.$$

A est un élément fortement régulier si et seulement si les nombres de l'ensemble

$$\begin{aligned} & \{ 2\alpha_i, -2\alpha_i; i \in [1, n] \} \cup \{ (\alpha_i + \alpha_j), \\ & -(\alpha_i + \alpha_j), (\alpha_i - \alpha_j), -(\alpha_i - \alpha_j); i < j; \\ & i, j \in [1, k_1] \cup [k_1 + 1, k_1 + k_2] \cup \dots \\ & \cup [k_1 + \dots + k_{r-1} + 1, n] \}. \end{aligned}$$

sont deux à deux distincts.

- (iv) Soit B un élément de \underline{G} .

Alors si B est en position génitrice relative à un élément fortement régulier de \underline{a} il l'est relativement à tout élément fortement régulier de \underline{a} .

B est en position génitrice si et seulement si, pour tout $i \in [1, r]$, la restriction de B à R^{2k_i} (c.f. II.4.0) est en position génitrice sur $\underline{Sp}(k_i, R)$.



On a défini les groupes affines en 0.3.5. Ils sont associés, de façon naturelle, à tout problème d'accessibilité relatif aux systèmes asservis réguliers.

En particulier :

II.4.2 Proposition

Soit A un élément de \underline{G} , B un champ de vecteurs appartenant à \underline{G} et b un vecteur de \mathbb{R}^{2n} .

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) A est un élément fortement régulier de \underline{a} sur \underline{G} .
- (ii) L'intersection du spectre de la restriction de $\text{ad}_{\underline{G}}A$ à $\underline{G} \cap \underline{d}$ avec le spectre de l'endomorphisme A de \mathbb{R}^{2n} est vide.
- (iii) B est en position génératrice sur \underline{G} relativement à A .
- (iv) La projection canonique de b sur \mathbb{R}^{2k_i} est non nulle, pour tout $i \in [1, r]$.

Alors l'algèbre de Lie engendrée par le couple de champs de vecteurs $\{(A, 0), (B, b)\}$ de l'algèbre de Lie du groupe symplectique affine est l'algèbre de Lie affine $(\underline{G}, \mathbb{R}^{2n})$.

Le système asservi régulier hamiltonien $\{A.x, B.x + b\}$ de \mathbb{R}^{2n} a la propriété d'accessibilité.

Preuve

Il convient de commencer par alléger les notations sur \underline{G} par rapport à celles induites par II.3.0.

Soit A un élément de \underline{a} s'écrivant
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k.$$

D'après II.3.1 et II.4.1, la restriction de $\text{ad}_{\underline{G}}A$ à $\underline{G} \cap \underline{d}$ est un endomorphisme semi-simple dont les valeurs propres sont imaginaires pures; notons les $i\alpha(A)$, $-i\alpha(A)$, α décrivant un ensemble Δ .

Les nombres $\alpha(A)$, α décrivant Δ , forment, d'après II.4.1, l'ensemble des :

$$2\alpha_i ; i \in [1, n].$$

$$(\alpha_i + \alpha_j), (\alpha_i - \alpha_j); i < j; i, j \in [1, k_1] \cup \dots$$

$$\cup [k_1 + \dots + k_{r-1} + 1, n].$$

Désignons par $M_\alpha, N_\alpha, \alpha \in \Delta$, la base de $\underline{G} \cap \underline{d}$ ainsi définie :

$$\text{Si } \alpha(A) = 2\alpha_i, \text{ alors } M_\alpha = H_i, N_\alpha = G_i.$$

$$\text{Si } \alpha(A) = \alpha_i - \alpha_j, \text{ alors } M_\alpha = F_{ij}, N_\alpha = E_{ij}.$$

$$\text{Si } \alpha(A) = \alpha_i + \alpha_j, \text{ alors } M_\alpha = H_{ij}, N_\alpha = G_{ij}.$$

$\text{ad}_{\underline{G}} A$ laisse stable tous les espaces $\text{IRM} + \text{IRN}$ et dans la base $\{M_\alpha, N_\alpha\}$

la restriction de $\text{ad}_{\underline{G}} A$ est représentée par la matrice d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha(A) \\ -\alpha(A) & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad (\text{c.f. II.3.1}).$$

Les notations étant ainsi simplifiées, montrons que l'algèbre de Lie $\{(A,0), (B,b)\}_{A.L.}$ engendrée par $\{(A,0), (B,b)\}$ contient $(\underline{G}, 0)$.

L'endomorphisme A de \mathbb{R}^{2n} est un opérateur semi-simple; ses valeurs propres sont les nombres complexes $i\alpha_k, -i\alpha_k, k \in [1, n]$.

Un calcul facile de déterminant montre alors que le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda^2 + \alpha_k^2) \quad (2).$$

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de l'algèbre de Lie affine $(\underline{G}, \mathbb{R}^{2n})$ est le crochet induit par $\underline{GL}(2n+1, \mathbb{R})$:

$$[(X,v), (Y,w)] = ([X,Y], Xw - Yv).$$

On en déduit donc que :

$$P_A(\text{ad}_{(\underline{G}, \mathbb{R}^{2n})} (A,0)) \cdot (B,b) = (P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A) \cdot B, P_A(A) \cdot b)$$

Or d'après Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$; il s'ensuit donc que :

$$P_A(\text{ad}_{(\underline{G}, R^{2n})} (A, 0)) \cdot (B, b) = (P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A) \cdot B, 0).$$

$P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A) \cdot B$ est en position génitrice relativement à A . En effet,

d'après (1) $\text{ad}_{\underline{G}} A$ restreint à $\text{IRM}_{\alpha} \oplus \text{IRN}_{\alpha}$ est dans la base $\{M_{\alpha}, N_{\alpha}\}$

la matrice d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha(A) \\ -\alpha(A) & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui, joint à (2), montre que $P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A)$ restreint à

$\text{IRM}_{\alpha} \oplus \text{IRN}_{\alpha}$ est dans la base $\{M_{\alpha}, N_{\alpha}\}$ représentée par la matrice d'ordre deux :

$$\left(\prod_{k=1}^n (\alpha_k^2 - \alpha^2(A)) \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3).$$

B s'écrit $A' + \sum_{\alpha \in \Delta} (m_{\alpha} M_{\alpha} + n_{\alpha} N_{\alpha})$, $A' \in \underline{a}$;

notons Δ' l'ensemble des α tel que $(m_{\alpha}, n_{\alpha}) \neq (0, 0)$.

Il résulte donc de (3) que $P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A) \cdot B$ s'écrit :

$$A'' + \sum_{\alpha \in \Delta} \left(\prod_{k=1}^n (\alpha_k^2 - \alpha^2(A)) \right) (m_{\alpha} M_{\alpha} + n_{\alpha} N_{\alpha}), \quad A'' \in \underline{a}.$$

Puisque, d'après (ii), les nombres $(\alpha_k^2 - \alpha^2(A))$ sont tous non nuls,

$(\alpha_k^2 - \alpha^2(A)) (m_{\alpha}, n_{\alpha}) \neq (0, 0)$ si et seulement si $\alpha \in \Delta'$.

On en déduit donc, en utilisant la caractérisation de la p.g. de II.4.1 et de II.3.1, que

$P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A) \cdot B$ est en p.g. sur G si et seulement si B est en p.g. sur \underline{G} .

Cette condition est la condition (iii) et donc

$P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A) \cdot B$ est bien en position génitrice.

L'algèbre de Lie engendrée par $\{(A,0), (P_A(\text{ad}_{\underline{G}} A), B,0)\}$ est donc, d'après II.1.8, l'algèbre de Lie semi-simple $(\underline{G},0)$.

En faisant agir $(\underline{G},0)$, à l'aide du crochet, sur l'élément $(0,b)$, b vérifiant (iv), on obtient que l'algèbre de Lie $\{(A,0), (B,b)\}_{A.L.}$ contient aussi $(0, R^{2n})$.

En conclusion, l'algèbre de Lie engendrée par $\{(A,0), (B,b)\}$ est l'algèbre de Lie (\underline{G}, R^{2n}) .

(\underline{G}, R^{2n}) est l'algèbre de Lie du G -groupe affine.

Le G -groupe affine opère transitivement sur R^{2n} , le système $\{A.x, B.x + b\}$ a la propriété d'accessibilité sur R^{2n} d'après 0.3.4 (ii).

II.4.3 Corollaire

Soit $X_1 = (X,v)$ un champ de vecteurs, non nul, de l'algèbre de Lie $(\underline{Sp}(n,R), R^{2n})$ du groupe symplectique affine.

Alors il existe un champ de vecteurs $X_2 = (Y,w)$, compact (c'est-à-dire que $\{\text{expt } X_2 ; t \in R\}$ est une partie bornée de $GL(2n+1,R)$) tel que :

- a) si X est non nul, alors l'algèbre de Lie engendrée par $\{X_1, X_2\}$ soit $(\underline{Sp}(n,R), R^{2n})$
- b) Le système asservi régulier hamiltonien de R^{2n} $\{X.x + v, Y.x + w\}$ a la propriété d'accessibilité.

Preuve

Démontrons le point a).

On montre que si $X_1 = (X,v)$ est tel que X est non nul alors il existe un automorphisme \mathcal{O} de l'algèbre de Lie $(\underline{Sp}(n,R), R^{2n})$ tel que $\mathcal{O}(X_1)$ vérifie (iii) et (iv) de II.4.2.

Distinguons deux types d'automorphismes de $(\underline{Sp}(n,R), R^{2n})$:

- soit $h \in \mathbb{R}^{2n}$, notons T_h l'automorphisme :

$$(C, c) \mapsto (C, c + C.h).$$

- soit $P \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$, définissons l'automorphisme S_P :

$$(C, c) \mapsto (P^{-1} C P, P^{-1}.c).$$

Il existe $h \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $T_h(X, v)$ s'écrive (X', v') , X' non nul et v' non nul;

en effet, si $v \neq 0$ on prend $h = 0$;

si $v = 0$ on choisit $h \notin \text{Ker } X$.

Il existe $P \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ tel que $S_P(X', v')$ s'écrive (X'', v'') , X'' en p.g. sur $\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R})$ relativement à $\underline{a} \oplus \underline{d}$, v'' non nul.

En effet il suffit d'appliquer le lemme II.3.7.

Posons $\theta = S_P \circ T_h$.

Alors $\theta(X, v) = (X'', v'')$ est tel que :

X'' est en p.g. sur $\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R})$ relativement à $\underline{a} \oplus \underline{d}$,

v'' est non nul.

Soit A un champ de vecteurs de $\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R})$ appartenant à \underline{a} et vérifiant (i) et (ii) de II.4.2 sur $\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R})$ alors, d'après II.4.2 l'algèbre de Lie engendrée par $\{(A, 0), \theta(X, v)\}$ est $(\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{2n})$.

Comme θ est un automorphisme d'algèbre de Lie, cela équivaut à dire que l'algèbre de Lie engendrée par

$$\{\theta^{-1}(A, 0), (X, v)\} \text{ est } (\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{2n})$$

$\theta^{-1}(A, 0)$ est bien un champ compact et on a donc montré le point a).

Si X est non nul, le point b) est une conséquence immédiate de a) et de 0.3.4 (ii).

Si X est nul, alors $X_1 = (0, v)$. On choisit un champ de vecteurs Y de $\underline{\text{Sp}}(n, \mathbb{R})$, compact tel que Y soit un endomorphisme cyclique de \mathbb{R}^{2n} et v un vecteur cyclique de Y . Alors le couple $\{Y.x, b\}$ a la propriété d'accessibilité sur \mathbb{R}^{2n} .

Chapitre III

Couples de champs de vecteurs invariants
à droite contrôlables sur le groupe sym-
plectique et couples de champs affines
hamiltoniens contrôlables sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$
et sur \mathbb{R}^{2n} .

Introduction

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème de mariage avec la classe des champs affines hamiltoniens sur \mathbb{R}^{2n} avec singularité.

Dans III.1 sont définis les champs simples et leurs formes normales. Puis nous énonçons le théorème de réduction de Ciampi ([4]), qui n'est rien d'autre qu'une "jordanisation" adaptée à la géométrie symplectique de \mathbb{R}^{2n} .

III.2 ne contient que des critères de contrôlabilité élémentaires.

Les problèmes de contrôlabilité, sur un groupe de Lie simple non compact, avec une famille de champs de vecteurs invariants à droite, sont des problèmes heuristiquement intéressants et donc très étudiés. Nous obtenons à cet égard dans III.3 une série de propositions originales.

Mais ce paragraphe est, dans le cadre strict du problème de mariage, avant tout un louvoiment. En effet, de façon générale, il nous semble difficile d'aborder de front un problème de contrôlabilité avec une classe de champs affines, que ce soit d'ailleurs d'un point de vue local, c'est bien le sens que l'on peut donner à II.4, que d'un point de vue global. D'où l'idée de résoudre dans une première étape le problème avec la classe des champs linéaires, le système affine pouvant en effet s'interpréter grossièrement comme un système linéaire perturbé.

Toutes les conditions objectives pour la démonstration du théorème de mariage sont alors réunies. Cela sera réalisé explicitement dans III.4.

III.1. Réduction d'un champ hamiltonien linéaire

On commence par définir intrinsèquement les champs simples; ces champs simples sont précisément tous les champs irréductibles de type non compact. Puis on donne leur forme normale. Enfin on énonce le théorème de réduction en III.1.6.

III.1.1. Définitions

Soit X un champ de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

On dira que X est un champ hyperbolique réel non dégénéré si les diviseurs élémentaires de X forment un couple du type $\{(\lambda - \alpha)^n, (\lambda + \alpha)^n\}, \alpha > 0$.

On dira que X est un champ hyperbolique complexe si, $n=2p$, et si les diviseurs élémentaires de X forment un couple du type

$$\{((\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha}))^p, ((\lambda + \alpha)(\lambda + \bar{\alpha}))^p\}, \alpha = \rho + i\theta, \rho, \theta > 0.$$

On dira que X est un champ hyperbolique réel dégénéré d'ordre impair si, $n=2p+1$, $p > 1$, et si λ^{2p+1} est diviseur élémentaire de X avec une multiplicité double.

On dira que X est un champ parabolique si λ^{2n} est le diviseur élémentaire de X .

On dira que X est un champ elliptique si, $n > 1$, et si le seul diviseur élémentaire de X est de type $(\lambda^2 + \alpha^2)^n, \alpha > 0$.

Si X est un champ d'un des types précédemment décrits on dira que X est un champ simple.

On rappelle d'autre part qu'un champ compact X de $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ est un opérateur semi-simple dont toutes les valeurs propres sont imaginaires pures; cela signifie donc que tous les diviseurs élémentaires de X sont du type λ ou $\lambda^2 + \alpha^2, \alpha > 0$.

III.1.2. Définition

On dira que deux champs de vecteurs X et X' de l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ sont équivalents, $X \sim X'$, s'il existe P appartenant à $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$ tel que $P^{-1} X P = X'$.

III.1.3. Formes normales

Soit X un champ de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

a) X est un champ hyperbolique réel non dégénéré de diviseurs élémentaires $\{(\lambda - \alpha)^n, (\lambda + \alpha)^n\}$, $\alpha > 0$, si et seulement si

$$X \sim \left[\begin{array}{c|c} B_0 & 0 \\ \hline 0 & -t_{B_0} \end{array} \right], \quad B_0 = \left[\begin{array}{cc} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{array} \right]$$

b) X est un champ hyperbolique complexe de diviseurs élémentaires $\{((\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha}))^p, ((\lambda + \alpha)(\lambda + \bar{\alpha}))^p\}$, $\alpha = \rho + i\theta$, $\rho, \theta > 0$ si et seulement si

$$X \sim \left[\begin{array}{c|c} B_0 & 0 \\ \hline 0 & -t_{B_0} \end{array} \right], \quad B_0 = \left[\begin{array}{cc} D_2 & I_2 \\ & D_2 \end{array} \right], \quad D_2 = \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ \theta & \rho \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) X est un champ hyperbolique réel dégénéré d'ordre impair si et seulement si

$$X \sim \left[\begin{array}{c|c} B_0 & 0 \\ \hline 0 & -t_{B_0} \end{array} \right], \quad B_0 \text{ d'ordre impair}, \quad B_0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ & 0 \end{array} \right]$$

d) X est un champ parabolique si et seulement si X est équivalent à l'un des deux champs

$$\pm \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

Les deux champs X et -X ne sont pas équivalents.

e) X est un champ elliptique de diviseur élémentaire $(\lambda^2 + \alpha^2)^n$, $\alpha > 0$, si et seulement si X est équivalent à l'un des deux champs.

$$\pm \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -\alpha & \alpha \end{array} \right]$$

Les deux champs X et -X ne sont pas équivalents.

Tout opérateur linéaire L s'écrit d'une façon unique S+N où S désigne un opérateur semi-simple, N un opérateur nilpotent, et tel que SN = NS. Si L appartient à $\underline{Sp}(n,R)$, la composante semi-simple et la composante nilpotente appartiennent aussi à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n,R)$, c'est d'ailleurs une propriété des sous-algèbres de Lie semi-simples de $\underline{GL}(n,R)$. Le lecteur vérifiera que la forme normale des éléments font apparaître clairement la partie semi-simple et la partie nilpotente.

III.1.5. Définition

Pour des raisons de commodité, on dira qu'un champ de vecteur X appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n,R)$ est un champ hyperbolique réel dégénéré d'ordre pair si, $n = 2p$, $p \geq 1$ et si X est équivalent au champ B (que l'on appellera forme normale),

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -t_{B_0} \end{bmatrix}, \quad B_0 \text{ d'ordre } 2p, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant énoncer le théorème de réduction, qui, sous cette forme, est dû à Ciampi ([4] 5.1).

III.1.6. Proposition

Soit X un champ de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n,R)$. Alors il existe des entiers k_1, \dots, k_r , positifs non nuls, tels que, $k_1 + \dots + k_r = n$, et un élément P de $\underline{Sp}(n,R)$ de sorte que $P^{-1} X P$, identifié à l'aide de l'automorphisme d'algèbre de Lie Ω défini en II.4.0. à un élément de l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(k_1,R) \times \dots \times \underline{Sp}(k_r,R)$ s'écrit (B^1, \dots, B^r) , B^i désignant un champ sous forme normale, simple pour $i \in [1, r-1]$ et compact sinon.

Preuve

On applique [4] théorème 5.1.(ii) puis III.1.3.

III.2. Trois critères de contrôlabilité

III.2.1. Définition

Soit A un élément de \underline{a} (cf. II.3.0.) s'écrivant

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k.$$

On dira que A est un partenaire privilégié si les nombres réels α_k sont rationnellement indépendants, i.e., si n_k sont des entiers relatifs tels que,

$$\sum_{k=1}^n n_k \alpha_k = 0, \text{ alors } n_k = 0 \text{ pour } k \in [1, n].$$

III.2.2. Remarques

Notons T^n le tore de dimension n défini par

$$T^n = \left\{ \prod_{k=1}^n \exp t_k A_k; t_k \in [0, 2\pi] \right\}.$$

* Le système de champs invariants à droite

$$\{ A_k; k \in [1, n] \} \text{ de } T^n \text{ est contrôlable sur } T^n.$$

* On rappelle d'autre part que A est un partenaire privilégié si et seulement si l'ensemble $\{ \exp tA; t \geq 0 \}$ est dense dans T^n .

III.2.3. Remarque

Si A est un partenaire privilégié alors A est un élément fortement régulier de $\text{Sp}(n, R)$ relativement à la décomposition canonique $\underline{a} \oplus \underline{d}$.

En effet, A s'écrivant $\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k$ et les nombres α_k étant rationnellement indépendants, la condition (iii) de II.3.1. est bien vérifiée.

III.2.4. Critère 1

Soit A un partenaire privilégié et B un champ de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie $\text{Sp}(n, R)$. Notons respectivement D_1, D_2 les systèmes de champs invariants à droite $\{ A, B \}$ et $\{ \{ A_k; k \in [1, n] \}, B \}$ sur $\text{Sp}(n, R)$ et

$A_{D_1}^+(I), A_{D_2}^+(I)$ les ensembles d'états accessibles à partir de l'identité des systèmes respectifs.

Alors :

$$(i) A_{D_1}^+(I) \text{ est dense dans } A_{D_2}^+(I).$$

- (ii) Si le système D_1 a la propriété d'accessibilité et si le système D_2 est contrôlable alors le système D_1 est contrôlable.

Preuve

Montrons le point (i).

Appliquons 0.3.1. :

$$A_{D_1}^+(I) = \left\{ \prod_{i=1}^p (\exp t_i A) (\exp s_i B); p \in \mathbb{N}, t_i, s_i \geq 0 \right\}$$

$$A_{D_2}^+(I) = \left\{ \prod_{i=1}^p P_i (\exp s_i B); p \in \mathbb{N}, P_i \in T^n, s_i \geq 0 \right\}$$

Puisque l'ensemble $\{ \exp tA; t \geq 0 \}$ est dense dans T^n et puisque le produit d'un nombre fini d'éléments est une opération continue sur un groupe de Lie, on vérifie alors de façon immédiate que pour tout élément P de $A_{D_2}^+(I)$ il existe une suite d'éléments de $A_{D_1}^+(I)$ convergeant vers P . Le point (i) est donc vérifié.

L'assertion (ii) découle alors de (i) et de 0.2.4.

Le problème de déterminer si un système est contrôlable est un problème difficile; en effet, excepté le résultat de Lobry sur les systèmes de champs Poisson-stables (cf. [11] II.4.4.), on ne dispose pas de conditions suffisantes de contrôlabilité efficaces; on retiendra donc le critère pratique qui va suivre; on verra en effet qu'il est à la clef de tous les résultats de contrôlabilité du paragraphe III.3.

III.2.5. Critère 2

Soit $D = \{ X^i; i \in [1, p] \}$ une famille de champs de vecteurs sur une variété M .

On rappelle que X_t^i désigne le groupe à un paramètre engendré par X^i , et $A^+(x)$ l'ensemble des états accessibles à partir de x .

Alors le système D est contrôlable si et seulement si :

- (i) le système D a la propriété d'accessibilité.
- (ii) Pour tout x de M , tout i et tout $t > 0$, $X_{-t}^i(x)$ appartient à l'adhérence de l'ensemble $A^+(x)$.

Preuve

La condition (i) est nécessaire d'après 0.2.2.; la condition (ii) est nécessaire par définition même d'un système contrôlable.

Ces deux conditions sont suffisantes : il suffit presque de recopier la démonstration de [11] II.4.4.

Sur un groupe de Lie avec un système de champs invariants à droite, d'après 0.3., le critère devient :

III.2.6. Critère 2'

Soit $D = \{X_i; i \in [1, p]\}$ une famille de champs invariants à droite sur un groupe de Lie G .

Alors le système D est contrôlable si et seulement si :

- (i) l'algèbre de Lie engendrée par la famille de champs de vecteurs D est l'algèbre de Lie des champs invariants à droite de G .
- (ii) Pour tout i et tout $t > 0$, $\exp-tX_i$ appartient à l'adhérence de l'ensemble $A^+(I)$ (I désignant l'élément neutre de G).

Sur une variété produit, une famille de champs de vecteurs, dont tous les éléments définissent sur chaque variété composante un champ de vecteurs, détermine sur chaque variété composante un système asservi; le critère 3 va montrer que, dans ce cas et sous certaines conditions, si chacun des systèmes projetés est contrôlable, alors le système est contrôlable.

III.2.7. Critère 3

Notons par $M = (M^1, \dots, M^r)$ une variété produit de variétés M^i .

Désignons par \mathcal{R} la classe des champs de vecteurs de M ayant la propriété suivante : si Z appartient à \mathcal{R} , alors Z engendre sur chaque M^i un groupe à un paramètre Z_t^i tel que le groupe à un paramètre Z_t de Z soit défini par $Z_t \cdot (m^1, \dots, m^r) = (Z_t^1 \cdot m^1, \dots, Z_t^r \cdot m^r)$.

Soit X un champ de vecteurs appartenant à \mathcal{R} , X s'écrit donc (X^1, \dots, X^r) , X^i désignant un champ de vecteurs sur M^i ; notons Y une famille de champs de vecteurs appartenant à \mathcal{R} , $Y = \{Y_j^i; j \in [1, k_i], i \in [1, r]\}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) il existe $0^1, \dots, 0^{r-1}, 0^i$ appartenant à M^i ,
tels que $X^i(0^i) = 0$ pour $i \in [1, r-1]$.
- (ii) le champ de vecteurs Y_j^i s'écrit $(0, \dots, 0, \bar{Y}_j^i$ (ième position), $0, \dots, 0)$,
 \bar{Y}_j^i désignant un champ de vecteurs sur M^i .

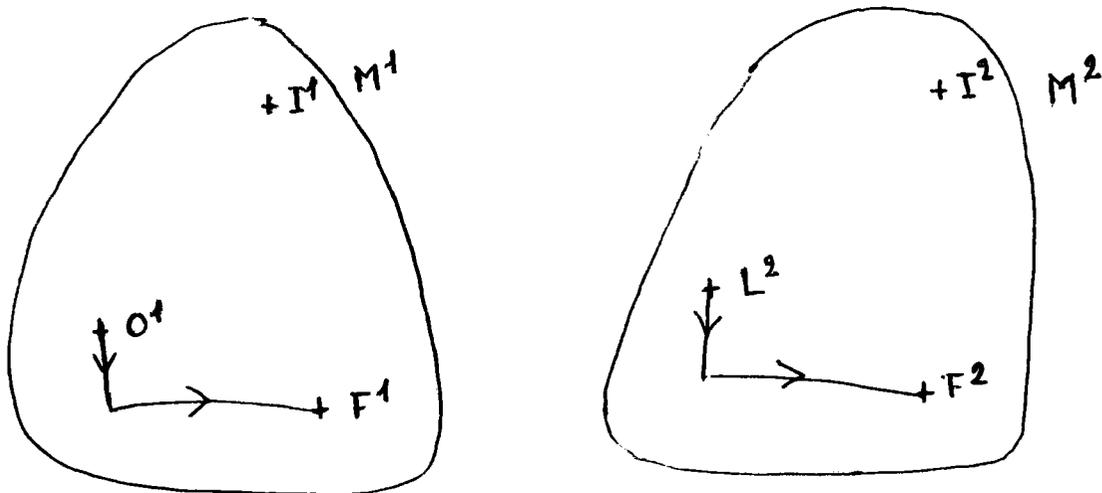
Alors la famille de champs de vecteurs $\{X, Y\}$ est contrôlable si et seulement si chaque système $\{X^i, \bar{Y}_j^i, j \in [1, k_i]\}$ est contrôlable sur M^i .

Preuve

La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante; il n'est pas restrictif de supposer $r=2$, le cas général se faisant par récurrence sur r de façon analogue.

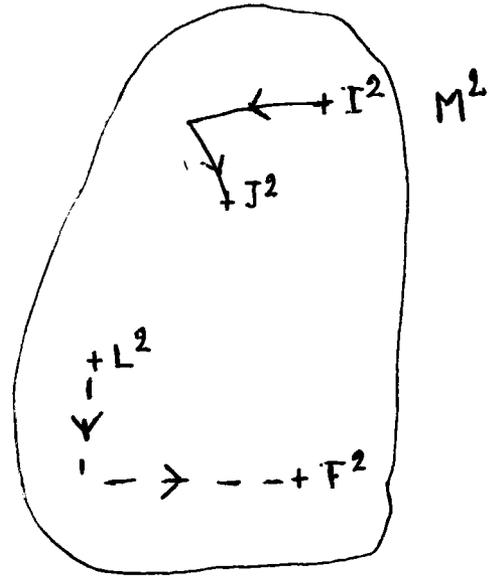
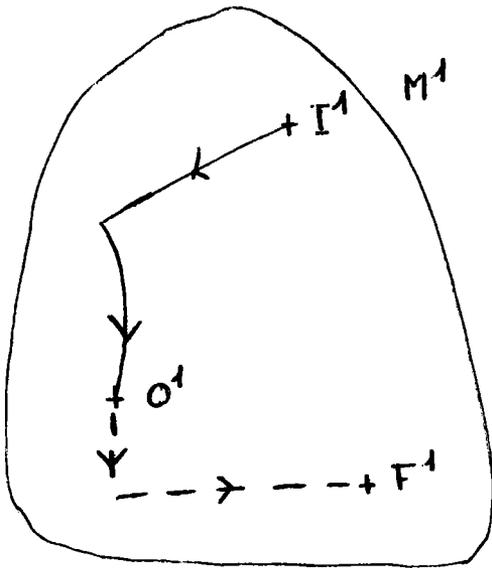
Soit $F = (F^1, F^2)$ un état de M ; montrons que pour tout point $I = (I^1, I^2)$ de M , il existe une trajectoire du système asservi telle que l'on puisse recaler I en F . Distinguons 3 étapes :

Etape 1



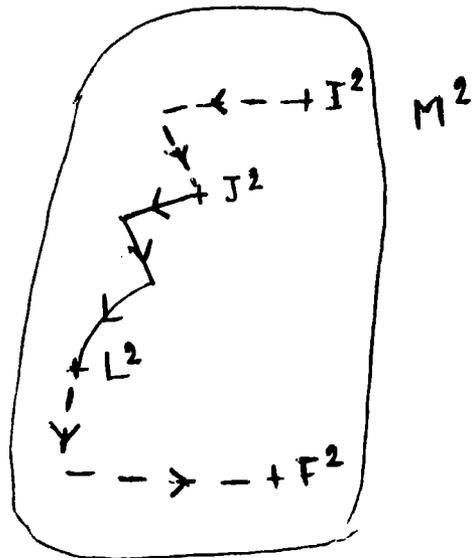
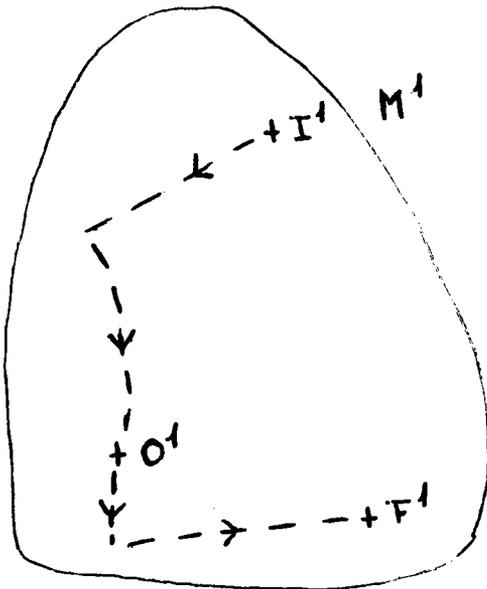
Le système $\{X^1, \bar{Y}_j^1\}$ est contrôlable sur M^1 ; il existe donc un point L^2 de M^2 et une trajectoire du sous-système $\{X, Y_j^1\}$ de $\{X, Y\}$ telle que l'on puisse recaler (O^1, L^2) en (F^1, F^2) .

Etape 2



Le système $\{X^1, \bar{Y}_j^1\}$ est contrôlable sur M^1 ; il existe donc un point J^2 de M^2 et une trajectoire du sous-système $\{X, Y_j^1\}$ de $\{X, Y\}$ telle que l'on puisse recaler (I^1, I^2) en (O^1, J^2) .

Etape 3



Le système $\{X^2, \bar{Y}_j^2\}$ est contrôlable sur M^2 ; d'autre part O^1 est position d'équilibre de tous les champs de la famille $\{X, Y_j^2\}_{M^1}$; il existe donc une trajectoire du sous-système $\{X, Y_j^2\}$ de $\{X, Y\}$ telle que l'on puisse recaler (O^1, J^2) en (O^1, L^2) .

Conclusion

A l'issue des 3 étapes on a bien montré que l'on pouvait recaler I en F.

III.3. Résultats de contrôlabilité sur le groupe symplectique et sur $R^{2n} - \{0\}$.

Ce paragraphe a deux justifications distinctes.

Son premier objectif est d'apporter, au problème de mariage, une réponse partielle avec la classe des champs invariants à droite sur $Sp(n, R)$ et une réponse totale avec la sous-classe des champs compacts; un tel problème a un intérêt en soi.

Sa seconde justification est d'ordre technique; en effet, pour démontrer de façon constructive le théorème de mariage avec la classe des champs affines hamiltoniens de R^{2n} , on est confronté au problème de déterminer si certains couples de champs affines hamiltoniens $\{A.x, B.x + b\}$ sont contrôlables; or on ne dispose pas de critère efficace pour s'assurer directement d'un tel résultat; par contre on dispose d'un tel critère pour montrer la contrôlabilité du système $\{A.x, B.x\}$ sur $R^{2n} - \{0\}$; d'où l'idée de démontrer, dans un premier temps, ce résultat ce qui nous permettra en III.4. de passer au cas affine; en effet, d'un point de vue de contrôlabilité locale, pour b assez petit, on verra que le système $\{A.x, B.x + b\}$ a un comportement analogue au système $\{A.x, B.x\}$.

III.3.1. Définition

Soit $D = \{X, Y\}$, $D' = \{X', Y'\}$ deux systèmes de champs invariants à droite sur $Sp(n, R)$. On dira que les systèmes sont équivalents s'il existe P appartenant à $Sp(n, R)$ tel que $P^{-1} X P = X'$ et $P^{-1} Y P = Y'$.

III.3.2. Remarque

Cette relation d'équivalence conserve la contrôlabilité des systèmes sur $Sp(n, \mathbb{R})$ et des systèmes associés sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$. En particulier, pour un problème de mariage, il suffit de résoudre le problème pour un représentant de la classe d'équivalence du champ donné.

III.3.3. Proposition

Soit X_1 un champ de vecteurs invariant à droite sur $Sp(n, \mathbb{R})$, hyperbolique réel dégénéré ou non. Alors il existe un champ de vecteurs X_2 , invariant à droite sur $Sp(n, \mathbb{R})$, compact, tel que la famille de champs de vecteurs $\{X_1, X_2\}$ soit contrôlable sur $Sp(n, \mathbb{R})$.

Preuve

D'après I.3.2. le système $\left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \lambda > 0, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ est contrôlable

sur $Sp(1, \mathbb{R})$; on peut donc supposer $n > 1$.

Notons B le champ hyperbolique réel non dégénéré sous forme normale,

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & | & 0 \\ \hline & t & \\ 0 & | & -B_0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0,$$

N le champ hyperbolique réel dégénéré sous forme normale

$$N = \begin{bmatrix} N_0 & | & 0 \\ \hline & t & \\ 0 & | & -N_0 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

N est la composante nilpotente de B ; désignons par S la composante semi-simple de B ,

$$S = \begin{bmatrix} S_0 & | & 0 \\ \hline & t & \\ 0 & | & -S_0 \end{bmatrix}, \quad S_0 = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

B s'écrit donc $S + N$ et $SN = NS$.

Soit A un partenaire privilégié; on va montrer que les systèmes de champs invariants à droite $\{A, N\}$ et $\{A, B\}$ sont contrôlables sur $Sp(n, R)$.

Vérifions que ces deux systèmes ont la propriété d'accessibilité :

A est élément fortement régulier d'après III.2.3.;

N s'écrit $\sum_{i=1}^{n-1} 1/2 H_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} 1/2 E_{i,i+1}$ et B

s'écrit $N + \sum_{i=1}^n \lambda H_i$; appliquons II.2.2. a) :

$\sum_{i=1}^{n-1} 1/2 E_{i,i+1}$ est en position génitrice sur $SU(n)$;

N et B sont donc en position génitrice sur $Sp(n, R)$ et les systèmes $\{A, N\}$, $\{A, B\}$ ont la propriété d'accessibilité sur $Sp(n, R)$, d'après II.3.6.

Pour prouver la contrôlabilité de systèmes $\{A, N\}$, $\{A, B\}$ il suffit, d'après III.2.4. de montrer, respectivement, que les systèmes $D_1 = \{\{A_k; k \in [1, n]\}, N\}$ et $D_2 = \{\{A_k; k \in [1, n]\}, B\}$ sont contrôlables.

Les ensembles d'états accessibles à partir de l'identité sont, d'après 0.3.1., les semi-groupes :

$$A_{D_1}^+(I) = \left\{ \prod_{i=1}^p P_i(\exp s_i N); p \in \mathbb{N}, P_i \in T^n, s_i \geq 0 \right\},$$

$$A_{D_2}^+(I) = \left\{ \prod_{i=1}^p P_i(\exp s_i B); p \in \mathbb{N}, P_i \in T^n, s_i \geq 0 \right\}.$$

Appliquons III.2.6. : D_i a la propriété d'accessibilité il est contrôlable si et seulement si pour tout champ X de D_i et tout $t \geq 0$, $\exp-tX$ appartient à $A_{D_i}^+(I)$; or le système $\{A_k; k \in [1, n]\}$ est contrôlable sur T^n ; le critère 2' appliqué à D_i devient donc :

- D_1 contrôlable si et seulement si $\exp-tN \in A_{D_1}^+(I)$ pour tout $t \geq 0$.
- D_2 contrôlable si et seulement si $\exp-tB \in A_{D_2}^+(I)$ pour tout $t \geq 0$.

Montrons ces deux points; considérons l'élément P défini sur la base canonique de \mathbb{R}^{2n}

$\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ par :

$Pu_i = -u_i$ si i est pair, $Pu_i = u_i$ si i est impair,

$Pv_i = -v_i$ si i est pair, $Pv_i = v_i$ si i est impair.

On vérifie alors que $P^{-1}NP = -N$; $\exp-tN$ s'écrit donc $P^{-1}(\exp tN)P$, pour tout $t \geq 0$; or $P^{-1}(\exp tN)P$ appartient à $A_{D_1}^+(I)$ et on a donc montré le point a).

Soit $t \geq 0$, montrons que $\exp-tB \in A_{D_2}(I)$:

* on observe que $P^{-1}BP = S-N$; $\exp t(S-N)$ appartient donc à $A_{D_2}^+(I)$;

* puisque $SN=NS$, $\exp t(S+N) = (\exp tS)(\exp tN)$; l'élément $\exp tS = (\exp t/2(S+N))(\exp t/2(S-N))$ appartient donc au semi-groupe $A_{D_2}^+(I)$;

* $J = \begin{bmatrix} 0 & & & I_n \\ & & & \\ & & & \\ -I_n & & & 0 \end{bmatrix}$ appartient au tore T^n ; on en déduit que $\exp-tS = J^{-1}(\exp tS)J$ appartient à $A_{D_2}^+(I)$;

* $\exp-tN = (\exp-tS)(\exp t(S-N))$ appartient à $A_{D_2}^+(I)$

En conclusion, $\exp-tB = (\exp-tN)(\exp-tS)$ appartient à $A_{D_2}^+(I)$.

Le point b) est donc montré et la démonstration achevée.

III.3.4. Proposition

Soit X_1 un champ de vecteurs invariant à droite sur $Sp(n, \mathbb{R})$, hyperbolique complexe. Alors il existe un champ de vecteurs X_2 , invariant à droite sur $Sp(n, \mathbb{R})$, compact, tel que la famille de champs de vecteurs $\{X_1, X_2\}$ soit contrôlable sur $Sp(n, \mathbb{R})$.

Preuve

Notons B le champ hyperbolique complexe sous forme normale,

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -B_0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} D_2 & I_2 & 0 \\ & & I_2 \\ 0 & & D_2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{bmatrix}, \quad \rho, \theta > 0, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

K le champ $\begin{bmatrix} K_0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -K_0 \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} D'_2 & I_2 & 0 \\ & & I_2 \\ 0 & & D'_2 \end{bmatrix}, \quad D'_2 = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix},$

S le champ $\begin{bmatrix} S_0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -S_0 \end{bmatrix}, \quad S_0 = \begin{bmatrix} \rho & & 0 \\ & & \rho \\ 0 & & \rho \end{bmatrix}.$

B s'écrit donc S+K et $[S, K] = 0$.

Soit A un partenaire privilégié; montrons que le système de champs invariants à droite $\{A, B\}$ est contrôlable sur $Sp(n, R)$; la démonstration se construit sur un schéma analogue à celle III.3.3. et sera donc écourtée, le champ K jouant le rôle du champ N; le lecteur pourra d'ailleurs vérifier en chemin que le système $\{A, K\}$ est contrôlable sur $Sp(n, R)$ pour $n > 2$.

Le système $\{A, B\}$ a la propriété d'accessibilité; en effet,

$$B \text{ s'écrit } \sum_{i=1}^n \rho H_i + \sum_{i=1}^{n-2} 1/2 H_{i, i+2} + \sum_{i=1}^{n-2} 1/2 E_{i, i+2} + \sum_{i=0}^{(n/2)-1} \theta E_{2i+1, 2i+2};$$

la composante antisymétrique de B est, d'après II.2.2. b), un champ de vecteurs de $SU(n)$ en position génératrice sur $SU(n)$, la composante symétrique de B est non nulle; appliquons II.3.6. : le couple $\{A, B\}$ a la propriété d'accessibilité sur $Sp(n, R)$.

Pour prouver la contrôlabilité du système $\{A, B\}$ il suffit d'après III.2.4. de montrer la contrôlabilité du système

$$D = \{ \{ A_k; k \in [1, n] \}, B \}$$

Notons $A_D^+(I)$ l'ensemble des états accessibles à partir de l'identité du système D.

Par application de III.2.6., D est contrôlable si et seulement si $\exp-tB$ appartient à $A_D^+(I)$ pour tout $t \geq 0$.

Ce résultat se démontre comme suit :

considérons les deux éléments P_1, P_2 de T^n définis par :

$$* P_1 = I_2 \text{ sur } \{u_{2i+1}, v_{2i+1}\} ; P_1 = -I_2 \text{ sur } \{u_{2i}, v_{2i}\} ;$$

$$* P_2 = -I_2 \text{ sur } \{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}, \{u_5, u_6\}, \{v_5, v_6\}, \dots ;$$

$$P_2 = I_2 \text{ sur } \{u_3, u_4\}, \{v_3, v_4\}, \{u_7, u_8\}, \{v_7, v_8\}, \dots ;$$

notons P l'élément $(P_1 P_2)$ de T^n ; on vérifie que $P^{-1}BP = S-K$.

La démonstration s'achève alors par la même séquence qu'en III.3.3.

III.3.5. Proposition

Soit X_1 un champ de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(n, R)$, parabolique. Alors il existe un champ de vecteurs X_2 de $\underline{Sp}(n, R)$, compact, tel que le système de champs linéaires hamiltoniens $\{X_1.x, X_2.x\}$ soit contrôlable sur $R^{2n} - \{0\}$.

Preuve

Soit A un partenaire privilégié, B le champ de vecteurs

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{matrix} \end{array} \right]$$

Comme le champ linéaire A.x est Poisson-stable le système $\{A.x, B.x\}$ est contrôlable si et seulement si le système $\{A.x, -B.x\}$ est contrôlable, puisque X_1 est équivalent à B l'assertion III.3.5. est prouvée si l'on montre que $\{A.x, B.x\}$ est contrôlable sur $R^{2n} - \{0\}$. Notons respectivement D_1, D_2 les systèmes de champs invariants à droite $\{A, B\}$, $\{A_k; k \in [1, n]\}$, B et D_1', D_2' les systèmes linéaires respectivement associés dans $R^{2n} - \{0\}$; on va montrer que D_1' est contrôlable si et seulement si D_2' est contrôlable puis que D_2' est contrôlable.

Vérifions que D_1^1 a la propriété d'accessibilité sur $R^{2n}-\{0\}$;

$$B \text{ s'écrit } \sum_{i+j=n+1} 1/2 G_{ij} + \sum_{i+j=n+2} 1/2 G_{ij} \\ + \sum_{i+j=n+1} -1/2 F_{ij} + \sum_{i+j=n+2} 1/2 F_{ij};$$

le système de champs invariants à droite D_1 a donc la propriété d'accessibilité sur $Sp(n,R)$ par application successive de II.2.2. c) et de II.3.6.

Comme $Sp(n,R)$ opère transitivement sur $R^{2n}-\{0\}$ le système D_1^1 a donc la propriété d'accessibilité sur cette variété.

Comme d'après III.2.4. (ii) $A_{D_1}^+(I)$ est dense dans $A_{D_2}^+(I)$ et puisque $Sp(n,R)$ opère continûment sur $R^{2n}-\{0\}$, l'ensemble $A_{D_1}^+(y) = A_{D_1}^+(I).y$ est dense dans l'ensemble $A_{D_2}^+(y) = A_{D_2}^+(I).y$, pour tout état y de $R^{2n}-\{0\}$; D_1^1 ayant d'autre part la propriété d'accessibilité sur $R^{2n}-\{0\}$, on déduit donc de 0.2.4. que D_1^1 est contrôlable si et seulement si D_2^1 est contrôlable; montrons que D_2^1 est contrôlable.

Faisons la remarque suivante : soit $y^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0, q_1^0, \dots, q_n^0)$ un état de $R^{2n}-\{0\}$;

la trajectoire $y(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t), q_1(t), \dots, q_n(t))$ issue en $t=0$ de y^0 , i.e., (expt B). y^0 se calcule aisément par intégration en cascade; $p_i(t)$, $q_i(t)$ sont des polynômes; plus précisément on observe que pour $p_i(t)$ les monômes de degré pair ont des coefficients de type p_k^0 et les monômes de degré impair du type q_k^0 et inversement pour $q_i(t)$.

Soit $t \geq 0$; montrons alors que pour tout y^0 de $R^{2n}-\{0\}$, $(\exp-tB).y^0$ appartient à $A_{D_2}^+(y^0)$; soit (p,q) un vecteur de $R^{2n} = R^n \times R^n$;

$(p,-q)$ appartient à l'orbite $T^n(p,q)$ de (p,q) ; le système $\{A_k; k \in [1,n]\}$ est contrôlable sur T^n ; il existe donc un élément de T^n noté $T(p,q)$ (il dépend de (p,q)) recalant (p,q) en $(p,-q)$; alors :

$$B \text{ s'écrit } H+U + \sum_{i+j=n} 1/2 F_{ij} + \sum_{i+j=n+1} \alpha F_{ij} + \sum_{i+j=n+2} 1/2 F_{ij},$$

H non nul appartenant à \underline{h} , U appartenant à \underline{a} ;

le couple $\{A,B\}$ a donc la propriété d'accessibilité sur $Sp(n,R)$ d'après II.2.2. c) et II.3.6.

Notons D_1 le système de champs invariants à droite $\{\{A_k; k \in [1,n]\}, B\}$ et D_1' le système de champs linéaires hamiltoniens associé dans $R^{2n}-\{0\}$.

Pour prouver les deux assertions de III.2.6., il suffit donc de montrer que D_1' est contrôlable si n est pair et que D_1 est contrôlable si n est impair.

Montrons que le système D_1' est contrôlable sur $R^{2n}-\{0\}$ si $n = 2p$.

Notons D_2 le système $\{\{A_k; k \in [1,n]\}, N\}$ et D_2' le système associé sur $R^{2n}-\{0\}$.

La démonstration se décompose en deux étapes; dans une première étape on montre que $A_{D_1}^+(I)$ contient $A_{D_2}^+(I)$; puis dans une seconde étape on vérifie que D_2' est contrôlable sur un sous-ensemble dense de $R^{2n}-\{0\}$; enfin on conclut en utilisant la propriété d'accessibilité.

- Désignons par P l'élément de T^n ainsi défini :

$$Pu_i = u_i, Pv_i = v_i \text{ si } i \text{ est impair;}$$

$$Pu_i = -u_i, Pv_i = -v_i \text{ si } i \text{ est pair.}$$

On vérifie alors que $P^{-1}BP = -S+N$; $\text{expt}N = (\text{expt}/2(S+N))(\text{expt}/2(-S+N))$ appartient donc à $A_{D_1}^+(I)$ pour tout réel $t \geq 0$. Il résulte alors de 0.3.1. que

$A_{D_1}^+(I)$ contient $A_{D_2}^+(I)$.

- Notons E et F les sous-espaces vectoriels de dimension n de R^{2n} de bases respectives $\{u_1, u_3, \dots, u_{2p-1}, v_1, v_3, \dots, v_{2p-1}\}$

et $\{u_2, u_4, \dots, u_{2p}, v_2, v_4, \dots, v_{2p}\}$.

N laisse invariant ces deux espaces; notons respectivement N_1 et N_2 la restriction de N à E et à F; on vérifie que :

En conclusion, $\exp-tB = (\exp-tN)(\exp-tS)$ appartient bien à

$$A_{D_2}^+(I)$$

D_1 est contrôlable par application de III.2.6.

III.3.7. Proposition

Pour tout champ de vecteurs X_1 , non nul, invariant à droite sur $\text{Sp}(n, R)$, compact, il existe un champ de vecteurs X_2 , invariant à droite sur $\text{Sp}(n, R)$, compact, tel que la famille de champs de vecteurs $\{X_1, X_2\}$ soit contrôlable sur $\text{Sp}(n, R)$.

Preuve

On utilise II.3.9.; on sait associer à X_1 un champ de vecteurs X_2 de $\text{Sp}(n, R)$, compact, de sorte que l'algèbre de Lie engendrée par $\{X_1, X_2\}$ soit $\text{Sp}(n, R)$.

Le système $\{X_1, X_2\}$ est alors un système de champs Poisson-stables qui a la propriété d'accessibilité; il est donc contrôlable d'après [11] II.4.4.

III.3.8. Synthèse partielle

Soit A un partenaire privilégié et B un champ simple de $\text{Sp}(n, R)$ sous forme normale.

Alors :

- (i) B est en position génératrice sur $\text{Sp}(n, R)$ relativement à la décomposition canonique $\underline{a} \oplus \underline{d}$.
- (ii) Le couple $\{A.x, B.x\}$ est contrôlable sur $R^{2n} - \{0\}$.

III.4. Couples de champs affines hamiltoniens contrôlables sur R^{2n}

III.4.0. Rappels (cf. II.4.0.)

Soit k_1, \dots, k_r des entiers, positifs non nuls, tels que $k_1 + \dots + k_r = n$. $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ désignant la base canonique de R^{2n} , notons respectivement $R^{2k_1}, \dots, R^{2k_r}$ les r sous-espaces vectoriels de R^{2n} de base $\{u_1, \dots, u_{k_1}, v_1, \dots, v_{k_1}\}, \dots, \{u_{k_1 + \dots + k_{r-1} + 1}, \dots, u_n, v_{k_1 + \dots + k_{r-1} + 1}, \dots, v_n\}$. Le sous-groupe G de $\text{Sp}(n, R)$, ensemble des éléments

de $Sp(n, R)$ laissant invariants les r espaces vectoriels $R^{2k_1}, \dots, R^{2k_r}$, s'identifie de façon naturelle à $Sp(k_1, R) \times \dots \times Sp(k_r, R)$; l'algèbre de Lie \underline{G} de G est donc identifiée à l'aide d'un isomorphisme, noté Ω , à l'algèbre de Lie $\underline{Sp}(k_1, R) \times \dots \times \underline{Sp}(k_r, R)$.

Un partenaire privilégié appartient à \underline{G} .

III.4.1. Critère de contrôlabilité

Soit A un partenaire privilégié, B un champ de vecteurs de \underline{G} , $\Omega(B)$ s'écrit donc (B^1, \dots, B^r) , B^i désignant un champ de vecteurs de $\underline{Sp}(k_i, R)$, et b un vecteur de R^{2n} dont on note b^i la projection canonique sur R^{2k_i} .

On suppose que :

- (i) B^i est un champ de $\underline{Sp}(k_i, R)$, simple, sous forme normale, pour $i \in [1, r-1]$;
 B^r est un champ compact de $\underline{Sp}(k_r, R)$ en position génitrice.
- (ii) b^i est un vecteur non nul de R^{2k_i} pour $i \in [1, r]$.
 b appartient à l'image de la matrice B .

Alors le système de champs affines hamiltoniens $\{A.x, B.x+b\}$ est contrôlable sur R^{2n} .

Preuve

A - Réduction du problème

Notons respectivement D_1, D_2 les systèmes de champs invariants à droite $\{(A, 0), (B, b)\}$, $\{(A_k, 0); k \in [1, n]\}$, (B, b) sur le groupe symplectique affine et D_1^i, D_2^i les systèmes de champs affines respectivement associés à D_1, D_2 sur R^{2n} , i.e., $D_1^i = \{A.x, Bx+b\}$, $D_2^i = \{(A_k.x; k \in [1, n]), Bx+b\}$.

- * Vérifions que le système D_1^i a la propriété d'accessibilité sur R^{2n} .
 On montre que les hypothèses de II.4.2. sont satisfaites; le champ A est un partenaire privilégié; il est fortement régulier sur $\underline{Sp}(n, R)$ et à fortiori sur la sous-algèbre de Lie \underline{G} ; A vérifie d'autre part la condition (ii) de II.4.2.; B^i est en position génitrice sur $\underline{Sp}(k_i, R)$ pour $i \in [1, r-1]$ d'après III.3.8. (i), B^r est en position génitrice sur $\underline{Sp}(k_r, R)$ par hypothèse, B est donc en position génitrice

sur \underline{G} d'après II.4.1. (iv); enfin b satisfait la condition (iv) de II.4.2. par hypothèse. Le système D_1 a donc la propriété d'accessibilité sur \underline{G} et le système associé D_1' a la propriété d'accessibilité sur R^{2n} , d'après II.4.2.

* Prouvons que le système D_1' est contrôlable si et seulement si le système D_2' est contrôlable.

L'ensemble $\{\text{expt}A; t \geq 0\}$ est dense dans T^n ; par un raisonnement analogue à celui utilisé en III.2.4. on vérifie alors que $A_{D_1}^+(I)$ est dense dans $A_{D_2}^+(I)$; le G -groupe affine opère continûment sur R^{2n} ; on en déduit donc que pour tout état y de R^{2n} , $A_{D_1}^+(y)$ est dense dans $A_{D_2}^+(y)$; le système D_1' ayant d'autre part la propriété d'accessibilité sur R^{2n} , il résulte de 0.2.4. que le système D_1' est contrôlable si et seulement si le système D_2' est contrôlable.

* R^{2n} est la variété produit $R^{2k_1} \times \dots \times R^{2k_r}$ et le système D_2' se projette en un système asservi sur chacun des R^{2k_i} . Vérifions que D_2' satisfait les conditions de III.2.7.

Puisque b appartient à l'image de la matrice B , chacun des champs $B^i \cdot x^i + b^i$ admet au moins une singularité sur R^{2k_i} ; d'autre part le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}$ vérifie la condition (ii) de III.2.7. D'après

III.2.7., D_2' est donc contrôlable si et seulement si pour tout

$i \in [1, r]$ le système projeté $\{\{A_k^i \cdot x^i; k \in [k_1 + \dots + k_{i-1} + 1, k_1 + \dots + k_i]\},$

$B^i \cdot x^i + b^i\}$, A_k^i désignant la restriction de A_k à R^{2k_i} , est contrôlable sur R^{2k_i} .

Conclusion

Pour que l'assertion de III.4.1. soit exacte il suffit donc de montrer que le système $\{\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B \cdot x + b\}$ est contrôlable sur R^{2n} lorsque B est un champ appartenant à $\text{Sp}(n, R)$, simple sous forme normale ou compact en position génitrice, et b un vecteur non nul de R^{2n} appartenant à l'image de l'endomorphisme B .

B - Etude cas par cas

On va résoudre par une série de lemmes le problème ainsi réduit. Le cas compact qui est évident sera résolu en premier; ensuite on établira deux lemmes, notamment un lemme de contrôlabilité locale, qui faciliteront beaucoup la résolution des cas restants.

Lemme 1

Soit B un champ compact de $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, en position génitrice. Alors le système de champs invariants à droite $\{(A_k, 0); k \in [1, n]\}, (B, b)\}$ sur le groupe symplectique affine est contrôlable pour tout vecteur b non nul appartenant à l'image de B . Le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B \cdot x + b\}$ est contrôlable sur \mathbb{R}^{2n} .

Preuve

Le système $\{(A_k, 0); k \in [1, n]\}, (B, b)\}$ a la propriété d'accessibilité sur le groupe symplectique affine; puisque b appartient à l'image de B c'est un système de champs Poisson-stables; il est donc contrôlable d'après [11] II.4.4.; le système associé sur \mathbb{R}^{2n} est à fortiori contrôlable.

Lemme 2

Le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B \cdot x + b\}$ est contrôlable si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B \cdot x + \lambda b\}$ soit contrôlable.

Preuve

On vérifie que ces deux systèmes sont difféomorphes; le difféomorphisme étant le difféomorphisme dérivé d'une homothétie de \mathbb{R}^{2n} .

Lemme 3

Soit A un partenaire privilégié et B un champ appartenant à $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, simple, sous forme normale. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que le système $\{A \cdot x, B \cdot x + b\}$ soit contrôlable sur la boule unité fermée de \mathbb{R}^{2n} , pour tout vecteur b de \mathbb{R}^{2n} , $0 < \|b\| < \epsilon$.

Preuve

Faisons la remarque suivante : soit K un compact de \mathbb{R}^{2n} ; on rappelle que $V_1(K)$ est la topologie définie sur l'espace des applications f , de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^{2n} , C^1 , par la "norme" $\|f\| = \text{Sup}_{x \in K} (\|f(x)\| + \|f'(x)\|)$; alors pour tout

compact K de \mathbb{R}^{2n} et tout voisinage V du champ $B.x$, $B.x+b$ appartient à V , pourvu que b soit assez petit.

D'après III.3.8. le système $\{A.x, B.x\}$ est contrôlable sur \mathbb{R}^{2n} ; il est donc normalement contrôlable sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ d'après [18] 4.3.; puisque $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ est une sous-variété ouverte de \mathbb{R}^{2n} , il est en particulier normalement contrôlable sur la sphère S^{2n-1} de \mathbb{R}^{2n} ; appliquons [18] 3.7. puis 3.2. et la remarque préliminaire : il existe $\epsilon > 0$ tel que le système $\{A.x, B.x+b\}$ soit normalement contrôlable sur S^{2n-1} , dès que $\|b\| < \epsilon$.

Notons F l'ensemble des points de la boule unité fermée de \mathbb{R}^{2n} tels que la demi-trajectoire positive et négative du champ $B.x+b$ issues d'un point de F soient toutes deux non bornées; pour $\|b\| < \epsilon$, il est évident que l'on peut recaler tout point de F sur tout autre point de F .

Puisque B est non compact, F est dense dans la boule unité fermée; d'autre part pour b non nul le système $\{A.x, B.x+b\}$ a la propriété d'accessibilité; on déduit donc de 0.2.2. qu'il est contrôlable sur la boule unité fermée de \mathbb{R}^{2n} dès que $0 < \|b\| < \epsilon$.

Lemme 4

Soit B un champ de vecteurs appartenant à $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, hyperbolique réel non dégénéré ou hyperbolique complexe, sous forme normale. Alors le système $\{A_k.x; k \in [1, n], B.x+b\}$ est contrôlable sur \mathbb{R}^{2n} pour tout vecteur b non nul.

Preuve

B est donc de l'un des deux types :
$$\begin{bmatrix} B_0 & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & -{}^t B_0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}, \lambda > 0 \quad \text{ou} \quad B_0 = \begin{bmatrix} D_2 & I_2 & 0 \\ & D_2 & I_2 \\ 0 & & D_2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{bmatrix}, \rho, \theta > 0.$$

Notons respectivement E^+ et E^- les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^{2n} de base $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$; \mathbb{R}^{2n} s'écrit donc $E^+ \times E^-$. Désignons par (r, s) le point singulier de $B.x+b$. Notons respectivement I et S les sous-espaces

affines de \mathbb{R}^{2n} , (E^+, s) et (r, E^-) ; I et S sont des invariants pour les trajectoires du champ $B.x+b$; d'autre part toute demi-trajectoire positive issue d'un point de S converge vers (r, s) et toute demi-trajectoire négative issue d'un point de I converge vers (r, s) . Soit $\eta > 0$, tel que (r, s) appartienne à la boule unité ouverte de \mathbb{R}^{2n} , pour tout b , $\|b\| < \eta$.

Montrons que pour tout système, tel que $\|b\| < \eta$, tout point (p^0, q^0) de \mathbb{R}^{2n} est recalable en un point de la boule unité ouverte de \mathbb{R}^{2n} .

* Soit $R > 0$; l'ensemble des points (p, q) de \mathbb{R}^{2n} tels que la trajectoire $(p(t), q(t))$ issue de (p, q) est telle qu'il existe $T > 0$ de sorte que $|p_i(T)| > R$, pour tout $i \in [1, n]$ est dense dans \mathbb{R}^{2n} ; le système ayant d'autre part la propriété d'accessibilité, (p^0, q^0) est donc recalable en un point (p^1, q^1) vérifiant $|p_i^1| > \text{Max.}(|r_1|, \dots, |r_n|)$ ($r = (r_1, \dots, r_n)$), pour tout $i \in [1, n]$.

* L'orbite $T^n(p^1, q^1)$ rencontre donc S ; le système $\{A_k; k \in [1, n]\}$ est contrôlable sur T^n ; on peut donc recalculer (p^1, q^1) en un point de S noté (r, q^2) .

* La demi-trajectoire positive du champ $B.x+b$ issue de (r, q^2) converge vers (r, s) ; comme (r, s) appartient à la boule unité ouverte, (r, q^2) est donc recalable en un point (r, q^3) de cette boule.

A l'issue des trois étapes on a bien montré l'assertion.

Le même raisonnement appliqué au système $\{\{A_k.x; k \in [1, n]\}, -(B.x+b)\}$ montre que tout point est accessible à l'aide d'une trajectoire du système $\{\{A_k.x; k \in [1, n]\}, B.x+b\}$ à partir d'un point de la boule unité ouverte dès que $\|b\| < \eta$.

Appliquons alors le lemme 3; il existe $\varepsilon > 0$ de sorte que le système $\{\{A_k.x; k \in [1, n]\}, B.x+b\}$ soit contrôlable sur la boule unité dès que

$0 < \|b\| < \varepsilon$; pour $0 < \|b\| < \text{Min.}(\eta, \varepsilon)$ le système est donc contrôlable. Le résultat est d'autre part vrai pour tout b non nul d'après le lemme 2.

Lemme 5

Soit B un champ parabolique sous forme normale. Alors le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B \cdot x + b\}$ est contrôlable sur R^{2n} , pour tout vecteur b non nul appartenant à l'image de la matrice B.

Preuve

On peut supposer que :

$$B = \begin{bmatrix} \circ & & & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & & \circ & \circ & \circ \\ & & & & \circ & \circ \\ & & & & & \circ \end{bmatrix} ; \text{ posons } B' = \begin{bmatrix} \circ & & & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & & \circ & \circ & \circ \\ & & & & \circ & \circ \\ & & & & & \circ \end{bmatrix}$$

Notons D le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B \cdot x + b\}$,

D' le système $\{A_k \cdot x; k \in [1, n]\}, B' \cdot x + b'\}$.

Le champ B' est un champ parabolique et il suffit de recopier la démonstration de III.3.5. pour s'assurer que D' est contrôlable sur $R^{2n} - \{0\}$ si b' est nul; de même le lemme 3 se transpose immédiatement et le système D' est donc contrôlable sur la boule unité fermée dès que b' est assez petit non nul.

Montrons par récurrence sur n que le système D (resp. D') est contrôlable sur R^{2n} pour tout vecteur b (resp. b'), non nul, appartenant à l'image de B (resp. B').

Pour n=1, la vérification est immédiate; supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n-1 et montrons qu'il est vrai à l'ordre n.

Montrons le d'abord pour le système D; b appartient à l'image de B et s'écrit donc $(0, b_2, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n)$. Faisons la remarque suivante; on rappelle que l'on note $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ la base canonique de R^{2n} ; désignons par I le sous-ensemble des vecteurs de $R^{2n} = \mathbb{R}u_1 \times R^{2n-1}$ qui s'écrivent $(-c_n, x)$; notons respectivement E et F les espaces vectoriels engendrés par $\{u_1, v_1\}$ et $\{u_2, u_3, \dots, u_n, v_2, v_3, \dots, v_n\}$; on observe alors que I est un invariant pour les trajectoires des champs $B \cdot x + b$ et $A_k \cdot x, k \geq 2$; d'autre part la trajectoire du

champ $B.x+b$ issue d'un point de I est telle que sa projection canonique $x^2(t)$ sur F vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{x}^2(t) = \tilde{B}' . x^2(t) + \tilde{b}' ,$$

\tilde{B}' désignant le champ de $\underline{Sp}(n-1, R)$ précédemment décrit, i.e., B' à l'ordre $n-1$ et $\tilde{b}' = (b_2, \dots, b_n, c_2, \dots, c_{n-1}, 0)$ appartenant à l'image de \tilde{B}' .

Cette remarque étant faite il est alors élémentaire de montrer que, si $\|b\| < 1/2 n$, alors tout point (p^0, q^0) de R^{2n} est recalable dans la boule unité ouverte de R^{2n} :

* On peut supposer que $p_1^0{}^2 + q_1^0{}^2 > c_n^2$; le système

$\{A_k; k \in [1, n]\}$ est contrôlable sur T^n ; on peut donc recalculer (p^0, q^0) en un point (p^1, q^1) de I .

* Le système $\{A_k|_F . x^2; k \geq 2\}$, $\tilde{B}' . x^2 + \tilde{b}'$ est contrôlable sur $F - \{0\}$; on peut donc recalculer (p^1, q^1) en un point (p^2, q^2) , dont la projection canonique sur F est indépendante de (p^0, q^0) et s'écrit $(-c_{n-1}, \dots, -c_2, d, -b_n, \dots, -b_2)$ vérifiant, $0 < |d| < 1/2 n$, $d + c_1 \neq 0$, et la projection canonique sur E s'écrit $(-c_n, q_1^2)$.

* Le système $\{A_k; k \in [1, n]\}$ est contrôlable sur T^n on peut donc supposer que $q_1^2(d + c_1) < 0$; la trajectoire $(p(t))$ du champ $B.x+b$ issue de (p^2, q^2) est telle que, $p_i(t)$, $i \in [1, n]$, $q_i(t)$, $i \in [2, n]$ sont constantes et $q_1(t) = (d + c_1) t + q_1^2$; il existe alors $T > 0$ tel que $q_1(T) = 0$.

Le point $(p(T), q(T))$ appartient bien à la boule unité ouverte de R^{2n} .

Le raisonnement précédent n'est pas altéré si l'on change $B.x+b$ en $-(B.x+b)$. Pour $\|b\| < 1/2 n$ tout point est donc recalable en un point de la boule unité et accessible à partir d'un point de la boule unité. Le système D est donc contrôlable, pour tout vecteur b non nul de l'image de B , par application

Puisque $\exp(2\pi/\alpha)B = \exp(2\pi/\alpha)N$, on vérifie que, si X_t, Y_t désignent respectivement les groupes à un paramètre engendrés par les champs $B.x+b, N.x+b'$, alors $X_{2\pi/\alpha} = Y_{2\pi/\alpha}$.

Notons D le système $\{A_k.x; k \in [1, n]\}, B.x+b$; on dira qu'un point x est d -recalable en un point y si x est recalable en y avec un chemin du système D dans lequel le groupe à un paramètre X_t ne figure que sous la forme discrète $X_{2k\pi/\alpha}$, k entier positif; on définit d'une façon analogue la d -accessibilité et la d -contrôlabilité.

Remarque 2

Notons I le sous-ensemble des vecteurs de R^{2n} dont les projections canoniques sur IRu_n et IRv_1 sont respectivement c_1/α et $-b_n/\alpha$. Désignons respectivement par E et F les sous-espaces vectoriels de R^{2n} engendrés par $\{u_1, u_n, v_1, v_n\}$ et $\{u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$; $R^{2n} = E \times F$.

I est un invariant pour les trajectoires des champs $B.x+b$ et $A_k.x, k \in [2, n-1]$; d'autre part la trajectoire du champ $B.x+b$ issue d'un point de I est telle que sa projection canonique $x^2(t)$ sur F vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{x}^2(t) = \tilde{B}.x^2(t) + \tilde{b},$$

\tilde{B} désignant le champ elliptique de $Sp(n-2, R)$ précédemment décrit, i.e., B à l'ordre $n-2$, et \tilde{b} un vecteur de F .

Remarque 3

Notons K l'espace vectoriel engendré par $\{u_3, u_4, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$ et désignons par J l'ensemble des vecteurs de R^{2n} dont la projection canonique sur K s'écrit $(c'_{n-1}, c'_{n-2}, \dots, c_1/\alpha, -b_n/\alpha, -b'_{n-2}, \dots, -b'_2)$.

J est un invariant pour les trajectoires du champ $N.x+b'$; plus précisément on vérifie que, si $(p(t), q(t))$ désigne une trajectoire du champ $N.x+b'$ issue d'un point de J , alors $p_i(t), i \in [2, n], q_i(t), i \in [1, n-1]$ sont des constantes et

$p_1(t), q_n(t)$ vérifient les équations différentielles :

$$\dot{p}_1(t) = q_{n-1}(t) + b'_1, \quad \dot{q}_n(t) = -p_2(t) + c'_n.$$

Montrons alors par récurrence sur n sur le système D est contrôlable si b est non nul.

Pour $n=2,3$ on vérifie que, pour b assez petit, tout point de R^{2n} est d -recalable (cf. remarque 1) en un point de la boule unité ouverte de R^{2n} et est d -accessible à partir d'un point de la boule unité ouverte. Le système D est donc contrôlable, pour tout vecteur b non nul, par application successive du lemme 3 et du lemme 2.

Supposons alors le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il est vrai à l'ordre n .

Posons $\eta = \text{Min.}(1/2n, \alpha/8\pi n)$; montrons que pour $\|b\| < \eta/3$ tout point (p^0, q^0) de R^{2n} est recalable dans la boule unité ouverte de R^{2n} .

* On peut supposer $p_1^{0^2} + q_1^{0^2} > (-b_n/\alpha)^2$ et

$$p_n^{0^2} + q_n^{0^2} > (c_1/\alpha)^2.$$

Le système $\{A_k; k \in [1, n]\}$ est contrôlable sur T^n ; on peut donc recalculer (p^0, q^0) en un point (p^1, q^1) de I .

* Le système $\{A_k|_F \cdot x^2; k \in [2, n]\}, \tilde{B} \cdot x^2 + \tilde{b}$ (cf. remarque 2) est contrôlable sur $F - \{0\}$; on peut donc recalculer (p^1, q^1) en un point (p^2, q^2) , appartenant à J , dont la projection canonique sur F est indépendante de (p^0, q^0) et s'écrit $(d, c'_{n-1}, \dots, c'_3, -b'_{n-2}, \dots, -b'_2, e)$, d, e étant tels que $0 < |e| < \eta/3$, $e + b'_1 = m > 0$, $-d + c'_n = m$, et dont la projection canonique sur E s'écrit $(p_1^2, c_1/\alpha, -b_n/\alpha, q_n^2)$.

* D'après la remarque 3, la trajectoire $(p(t), q(t))$ du champ $N \cdot x + b^1$ issue de (p^2, q^2) est telle que, $p_i(t)$, $i \in [2, n]$, $q_i(t)$, $i \in [1, n-1]$, sont constantes et $p_1(t) = mt + p_1^2$, $q_n(t) = mt + q_n^2$. Le lecteur pourra alors vérifier, avec moins de peine qu'il en faut pour l'expliquer, que (p^2, q^2) est d -recalable en un point (p^3, q^3) dont toutes les composantes

coïncident avec celles de (p^2, q^2) , excepté p_1^3 et q_n^3 qui sont telles que $|p_1^3|, |q_n^3| < 4\pi m/\alpha$.

Le point (p^3, q^3) appartient bien à la boule unité ouverte de \mathbb{R}^{2n} .

Le raisonnement précédent est encore valable si l'on change $B.x+b$ en $-(B.x+b)$.

Il découle alors du lemme 3 puis du lemme 2 que le système D est contrôlable sur \mathbb{R}^{2n} pour tout vecteur b non nul.

III.4.2. Définition

Définissons la classe \mathcal{C} de champs de vecteurs de \mathbb{R}^{2n} de la façon suivante :

si X_1 appartient à \mathcal{C} , X_1 s'écrit $X.x+v$ où :

X est un champ de vecteurs appartenant à $\underline{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Si λ est diviseur élémentaire de X alors X admet aussi un diviseur élémentaire du type $(\lambda^2 + a^2)$, a réel non nul.

v est un vecteur de \mathbb{R}^{2n} appartenant à l'image de X .

III.4.3. Théorème

Pour tout champ de vecteurs X_1 de \mathcal{C} , il existe un champ de vecteurs X_2 de \mathcal{C} , dont toutes les trajectoires sont bornées dans \mathbb{R}^{2n} , tel que le couple $\{X_1, X_2\}$ soit contrôlable sur \mathbb{R}^{2n} .

Preuve

On montre que, pour tout $X_1 = X.x+v$, il existe, des entiers positifs non nuls $k_1, \dots, k_r, k_1 + \dots + k_r = n$, et un difféomorphisme θ de \mathcal{C} , tel que, $\theta(X_1)$ vérifie (i) et (ii) de III.4.1.

En effet, définissons deux types de difféomorphisme de \mathcal{C} :

- soit $h \in R^{2n}$; notons T_h le difféomorphisme :

$$C.x + c \rightarrow C.x + (c + C.h)$$

- soit $Q \in Sp(n,R)$; notons S_Q le difféomorphisme :

$$C.x + c \rightarrow (Q^{-1} C Q).x + Q^{-1}.c .$$

L'assertion découle alors immédiatement de III.1.6. et de II.3.7.

Soit A un partenaire privilégié; alors le système $\{\theta(X_1), A.x\}$ est contrôlable sur R^{2n} d'après III.4.1.

Le couple $\{X_1, \theta^{-1}(A.x)\}$ est donc contrôlable sur R^{2n} .

CONCLUSION

Il serait intéressant, même en petite dimension, d'apporter une réponse au problème de mariage avec la classe des champs de vecteurs invariants à droite sur le groupe symplectique ; le partenaire serait choisi compact.

Une approche préliminaire au problème pourrait bien être la démonstration de la conjecture suivante : "Pour tout champ de vecteurs B de $Sp(n, \mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\underline{U}(n)$, la famille de champs de vecteurs invariants à droite $\{B, \underline{U}(n)\}$ est contrôlable sur $Sp(n, \mathbb{R})$ ".

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. Boothby - A transitivity problem from control theory
J. Differential Equations 17, 296-307 (1975)
- [2] R.W. Brockett - System theory on group manifolds and coset spaces
Siam J. Control (10) 2 - 1972
- [3] Chevalley - Theory of Lie groups
Princeton University Press (1946)
- [4] Ciampi - Classical hamiltonian linear systems
Queen's papers in pure and applied mathematics n° 31
- [5] Gantmacher - Théorie des matrices
Tome 1 Dunod
- [6] C. Godbillon - Géométrie différentielle et mécanique analytique
Hermann, Paris 1969
- [7] Helgason Differential geometry and symmetric spaces
Academic Press 1962
- [8] N. Jacobson - Lie algebras
Interscience
- [9] V. Jurdjevic) Control systems on Lie groups
H.J. Sussmann(
J. Differential Equations 12, 313-329 (1972)
- [10] E.B. Lee) Foundations of optimal control theory
L. Markus (John Wiley and Sons (1967)
- [11] C. Lobry - Bases mathématiques de la théorie de systèmes asservis
non linéaires
Publications Bordeaux 1 (1976)
- [12] C. Lobry - Controllability of non linear systems on compact
manifolds
Siam J. Control (12) 1 (1974)

- [13] G. Sallet - Couples de champs de vecteurs de Killing complètement contrôlables sur les sphères et espaces euclidiens
Thèse 3ème cycle, Metz (1976)
- [14] J.M. Souriau - Structure des systèmes dynamiques
Dunod (1970)
- [15] H.J. Sussmann - On the number of vector fields needed to achieve controllability
Siam J. Control (13) 2 1975
- [16] H.J. Sussmann) Controllability of non linear Systems
V. Jurdjevic (J. Differential Equations 12, 95-116 (1972)
- [17] N. Levitt) On controllability by means of two vector fields
H.J. Sussmann (Siam J. Control (13) 6 1975
- [18] H.J. Sussmann - Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations
J. Differential Equations 20, 292-315 (1976)
- [19] H.J. Sussmann - Existence and uniqueness of minimal realizations of non linear systems
Mathematical Systems Theory 10, 263-284 (1977)
- [20] C. Lobry - Contrôlabilité des systèmes non linéaires
Siam J. Control (8) 4 1970
- [21] I. Kupka) Condition suffisante d'accessibilité sur les
V. Jurdjevic (groupes de Lie semi-simples
- à paraître -
